

# **Appunti del corso di Fondamenti di Telecomunicazioni**

## **Prima parte (60 ore): Teoria del Segnale e Comunicazioni Elettriche**

Questa bozza verrà periodicamente aggiornata non appena saranno disponibili integrazioni e correzioni. Gli studenti sono pregati di segnalare errori o parti poco chiare via mail per contribuire al progressivo miglioramento delle stesse. Si ringraziano vivamente coloro che l'hanno già fatto.

Per la seconda parte del corso, gli studenti sono invitati a scaricare da Virtuale copia delle presentazioni mostrate a lezione. Per integrare le presentazioni, il libro di riferimento per la seconda parte è il seguente: Tanenbaum, D. Wetherall, "Computer Networks" 5<sup>th</sup> Edition, Pearson; disponibile anche in italiano Tanenbaum, D. Wetherall, "Reti di calcolatori" 5a Edizione, Pearson Italia. Esiste anche in versione ridotta (Fundamentals of Computer Networks).

Principali differenze rispetto alla versione 2.0.0

- 1) Correzioni di errori di battitura nei cap. 1.
- 2) Corretta (2.70)
- 3) Aggiunta Fig.36
- 4) Corrette formule finali sviluppo serie dei lobi positivi di un coseno (per  $n=1$ )
- 5) Aggiunte figure spettri ampiezza e fase esercizi Fourier
- 6) Aggiunte figure caratteristiche ampiezza e fase delle reti lineari.
- 7) Aggiunta figura quantizzazione 8 livelli unidimensionale.
- 8) Modificata figura quantizzazione bidimensionale.
- 9) Aggiornate figure modulazione.
- 10) Corretta la (9.5)
- 11) Correzioni minori al testo.

Principali differenze rispetto alla versione 2.2.3

- 12) Inserita una breve sezione sulla radiodiffusione FM e cenni sul DAB.
- 13) Cenni sulla codifica AMI.
- 14) Correzioni minori, fra cui beta al posto di phi nelle caratteristiche di fase delle reti lineari.

Principali differenze rispetto alla versione 2.2.4

- 15) Correzioni di alcuni errori di battitura nelle formule della rappresentazione ortonormale dei segnali
- 16) Aggiunta figura 6 sulla relazione fra i coefficienti di Fourier
- 17) Correzioni vari errori di battitura
- 18) Aggiunte figure varie filtri trasversali
- 19) Aggiunta figura A/D
- 20) Aggiunta codifica AMI e PAM AMI-RZ (facoltativa)
- 21) Aggiunti cenni OFDM (facoltativi)

Principali differenze rispetto alla versione 2.2.5

- 22) Eliminati molti errori di battitura (grazie a segnalazioni di alcuni studenti)
- 23) Aggiunte figure segnali PAM  $L=2$  e  $L=8$

## Sommario

|  |   |    |
|--|---|----|
| Capitolo 1 <a href="#">Equation Chapter 1 Section 1</a>                          | Introduzione.....   | 6  |
| Segnali analogici e segnali numerici.....  |   | 6  |
| Richiami sui numeri complessi.....   |   | 7  |
| Definizione più rigorosa.....  |   | 7  |
| Rappresentazione con coordinate cartesiane e coordinate polari.....              |   | 8  |
| Sinusoidi e fasori.....  |   | 9  |
| Introduzione all'analisi di Fourier.....   |   | 10 |
| Capitolo 2 <a href="#">Equation Section (Next)</a>                               | Analisi di Fourier di segnali tempo-continui .....                  | 12 |
| Sviluppo in serie di Fourier (funzioni periodiche tempo continue) .....          |   | 12 |
| Forma esponenziale (segnali complessi).....                                      |   | 12 |
| Tipi e criteri di convergenza .....  |   | 12 |
| Alcune proprietà dello sviluppo in serie di Fourier .....                        |   | 13 |
| Spettri di ampiezza e fase bilateri .....  |   | 13 |
| Rappresentazioni monolateri (segnali reali).....                                 |   | 14 |
| Relazione con la musica.....   |   | 17 |
| Rappresentazione ortonormale dei segnali (argomento avanzato, facoltativo) ..... |   | 19 |
| Basi ortonormali e sviluppo in serie di Fourier.....                             |   | 20 |
| Trasformata ed integrale di Fourier (funzioni aperiodiche tempo-continue).....   |   | 21 |
| Rappresentazioni monolateri (segnali reali); integrale di Fourier.....           |   | 22 |
| Bande.....   |   | 24 |
| Alcune proprietà della trasformata di Fourier.....                               |   | 24 |
| Esercizi.....  |   | 25 |
| Sviluppo in serie di una successione di impulsi rettangolari .....               |   | 25 |
| Trasformata di un impulso rettangolare .....                                     |   | 28 |
| Trasformata di un'esponenziale bilatera .....                                    |   | 30 |
| Trasformata di un'esponenziale monolatera .....                                  |   | 32 |
| Antitrasformata di un impulso nelle frequenze.....                               |   | 33 |
| Trasformata del prodotto del segnale con una sinusoide .....                     |   | 35 |
| Sviluppo in serie di un'onda a dente di sega bilanciata .....                    |   | 37 |
| Sviluppo in serie di un'onda triangolare non bilanciata .....                    |   | 40 |
| Sviluppo in serie del modulo di un coseno .....                                  |   | 42 |
| Sviluppo in serie dei lobi positivi di un coseno .....                           |   | 44 |
| Capitolo 3   | Trasformate al limite <a href="#">Equation Section (Next)</a> ..... | 48 |
| La funzione generalizzata delta di Dirac.....                                    |   | 48 |
| Funzioni, funzionali e distribuzioni .....                                       |   | 48 |
| Definizione.....   |   | 48 |
| Rappresentazione simbolica e valutazione come limite in senso integrale .....    |   | 48 |
| Alcune proprietà.....  |   | 49 |
| Parità .....   |   | 49 |
| Convoluzione .....   |   | 49 |
| “Cambio di argomento” .....  |   | 50 |
| Trasformata di Fourier .....   |   | 50 |
| Gradino unitario .....   |   | 50 |
| Altre relazioni con le funzioni a gradino .....                                  |   | 51 |
| Trasformata di Fourier di funzioni periodiche.....                               |   | 51 |
| Trasformate nelle frequenze anziché nelle pulsazioni .....                       |   | 52 |
| Trasformate elementari .....   |   | 52 |
| Trasformata di un segnale sviluppabile in serie di Fourier .....                 |   | 52 |
| Trasformata del coseno .....   |   | 53 |

|   |     |
|---|-----|
| Trasformata del seno .....  | 53  |
| Trasformata di Fourier delle funzioni gradino .....   | 53  |
| Trasformata di Fourier di un integrale .....  | 54  |
| Capitolo 4 Analisi di Fourier di segnali tempo-discreti <a href="#">Equation Section (Next)</a> ..... | 55  |
| Trasformata di Fourier di serie temporali .....   | 55  |
| Serie temporali .....   | 55  |
| Trasformata di Fourier di una serie .....   | 55  |
| Serie temporali ottenute per campionamento .....  | 56  |
| Teorema del campionamento nel dominio dei tempi (Shannon et alii) .....                               | 57  |
| Sviluppo in serie di Shannon .....  | 59  |
| Alcune proprietà della trasformata di una serie temporale .....                                       | 59  |
| Trasformata di un segnale PAM ottenuto da una serie di campioni .....                                 | 60  |
| La trasformata di Fourier discreta (DFT) .....  | 62  |
| Legame fra trasformata di Fourier discreta e continua .....   | 63  |
| DFT (Discrete Fourier Transform) e FFT (Fast Fourier Transform) .....                                 | 66  |
| Capitolo 5 Sistemi lineari <a href="#">Equation Section (Next)</a> .....                              | 68  |
| Sistemi lineari: definizioni .....  | 68  |
| Risposta impulsiva di un sistema lineare .....  | 68  |
| Funzione di trasferimento di una rete lineare .....   | 69  |
| Caratteristiche di ampiezza e fase .....  | 70  |
| Proprietà .....   | 70  |
| Sistemi in cascata .....  | 72  |
| Esercizi .....  | 72  |
| Risposta impulsiva e funzione di trasferimento di una rete RC .....                                   | 72  |
| Funzioni di trasferimento di sistemi elementari .....   | 74  |
| Calcolo delle funzioni di trasferimento di partitori non resistivi .....                              | 75  |
| Funzione di trasferimento rete RC .....   | 75  |
| Funzione di trasferimento rete CR .....   | 77  |
| Funzione di trasferimento rete LCR (serie) .....  | 78  |
| Funzione di trasferimento rete RCL (serie) .....  | 80  |
| Funzione di trasferimento rete RLC (parallelo) .....  | 82  |
| Condizioni di non distorsione .....   | 84  |
| Filtri ideali .....   | 85  |
| Filtri ricorrenti .....   | 88  |
| Criteri di progetto di filtri trasversali a coefficienti simmetrici .....                             | 90  |
| Esercizi .....  | 92  |
| Risposta impulsiva di un filtro passa-basso ideale .....  | 92  |
| Risposta impulsiva di un filtro trasversale .....   | 93  |
| Sistemi lineari tempo-discreti .....  | 93  |
| Filtri trasversali tempo discreti .....   | 95  |
| Esercizio sui filtri trasversali tempo discreti .....   | 95  |
| Capitolo 6 Rappresentazione digitale dei segnali: PCM <a href="#">Equation Section (Next)</a> .....   | 98  |
| Conversione analogico digitale tecnica PCM .....  | 98  |
| Campionamento .....   | 98  |
| Quantizzazione .....  | 98  |
| Codifica .....  | 100 |
| Perché PCM (Pulse Code Modulation) .....  | 101 |
| Conversione digitale analogica tecnica PCM .....  | 102 |
| Decodifica .....  | 102 |
| Ricostruzione del segnale .....   | 102 |
| Capitolo 7 Introduzione alla teoria della modulazione <a href="#">Equation Section (Next)</a> .....   | 104 |

|   |     |
|---|-----|
| Introduzione .....  | 104 |
| Definizioni .....   | 104 |
| Principali modulazioni analogiche.....  | 105 |
| Indici di modulazione.....  | 108 |
| Involuppo complesso rappresentativo (o equivalente passa-basso) di oscillazioni modulate .....  | 110 |
| Caratteristiche spettrali di una oscillazione AM. Oscillazioni DSB, SSB, DSB-SC, SSB-SC. ..     | 111 |
| SSB.....  | 113 |
| DSB-SC.....   | 114 |
| SSB-SC (conversione di frequenza) .....   | 114 |
| Modulazioni a prodotto e QAM.....   | 115 |
| Modulazioni a prodotto.....   | 115 |
| Modulazioni QAM (Quadrature Amplitude Modulation) .....   | 117 |
| Spettro segnali modulati in angolo: formula di Carson. ....                                     | 120 |
| Radiodiffusione.....  | 120 |
| Capitolo 8 Segnali ad energia ed a potenza finita <a href="#">Equation Section (Next)</a> ..... | 122 |
| Energia e potenza di un segnale .....   | 122 |
| Definizioni di energia e potenza .....  | 122 |
| Valore efficace .....   | 122 |
| Analisi generalizzata .....   | 123 |
| Segnali ad energia finita.....  | 123 |
| Funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione .....   | 123 |
| Proprietà delle funzioni di cross ed autocorrelazione .....                                     | 123 |
| Teorema di Parseval generalizzato e condizioni di ortogonalità .....                            | 124 |
| Teorema di Parseval e densità spettrale di energia .....  | 125 |
| Densità riferite alle frequenze .....   | 125 |
| Segnali a Potenza Finita.....   | 126 |
| Funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione .....   | 126 |
| Proprietà della funzioni di cross ed autocorrelazione .....                                     | 126 |
| Densità spettrale di potenza .....  | 126 |
| Segnali a potenza finita periodici.....   | 127 |
| Trasformazioni lineari tempo invarianti di spettri di energia e di potenza .....                | 128 |
| Segnali ad energia finita.....  | 128 |
| Segnali a potenza finita .....  | 129 |
| Esercizi.....   | 129 |
| Funzione di autocorrelazione di un impulso rettangolare .....                                   | 129 |
| Energia e spettro di energia dell'esponenziale unilatera .....                                  | 130 |
| Calcolo spettro di potenza a partire dalla funzione di autocorrelazione. ....                   | 131 |
| Calcolo della funzione di autocorrelazione a partire dallo spettro di potenza. ....             | 132 |
| Calcolo dello spettro di potenza in uscita ad una rete lineare. ....                            | 133 |
| Energia e potenza di un segnale tempo discreto .....  | 134 |
| Definizioni di energia e potenza .....  | 134 |
| Capitolo 9 Cenni sui segnali digitali <a href="#">Equation Section (Next)</a> .....             | 135 |
| Spettri di segnali PAM.....   | 135 |
| Spettri di segnali PAM deterministici .....   | 135 |
| Spettri di segnali PAM aleatori .....   | 136 |
| Cenni sui segnali digitali aleatori in banda base .....   | 137 |
| Codifica binaria.....   | 137 |
| Codifica multilivello .....   | 138 |
| Codifica AMI (Alternate Marked Inversion) (avanzato, facoltativo) .....                         | 139 |
| Spettri dei segnali PAM aleatori con codifica multilivello e impulso rettangolare NRZ. ....     | 140 |

|  |     |
|--|-----|
| Spettri dei segnali PAM aleatori con codifica multilivello e impulso rettangolare NRZ (facoltativo)..... | 141 |
| Cenni sulle modulazioni digitali (segnali digitali aleatori passa banda).....                            | 143 |
| Modulazioni digitali utilizzate nell'802.11n (WiFi).....   | 144 |
| Nuovi standard (facoltativo) .....   | 145 |
| Basi della modulazione OFDM (facoltativo).....   | 145 |
| Tempo utile e tempo di simbolo .....   | 145 |
| Esempio 802.11 "a", "g", "n", "ac" .....   | 146 |
| Capitolo 10     Appendici <a href="#">Equation Section (Next)</a> .....                                  | 149 |
| Misure in decibel.....   | 149 |
| Rapporti di potenze .....  | 149 |
| Rapporti di grandezze legate alla radice quadrata di potenze .....                                       | 149 |
| Potenze e tensioni in dB .....   | 150 |
| Bibliografia .....   | 151 |

## Capitolo 1 **Equation Chapter 1 Section 1** Introduzione

### Segnali analogici e segnali numerici

Le telecomunicazioni (comunicazioni a distanza) si basano sull'invio e la ricezione di segnali contenenti l'informazione desiderata. Nell'ambito delle comunicazioni elettriche questi segnali corrispondono a tensioni e correnti variabili nel tempo, spesso ottenute convertendo in segnali elettrici segnali di altra natura, ad esempio sonori o visivi, tramite degli appositi trasduttori (microfoni, telecamere). Una volta inviati e ricevuti, questi segnali vengono di nuovo convertiti nella forma originaria da altri trasduttori (altoparlanti, schermi televisivi). Un generico segnale elettrico viene descritto matematicamente mediante funzioni reali o complesse del tempo  $x(t)$ . Le funzioni sono complesse nel caso di oscillazioni modulate, come si vedrà in seguito.

Nel caso dei segnali analogici, che variano cioè in maniera “analogica” alla sorgente che li ha generati,  $x(t)$  è una funzione definita su tutto l'asse dei tempi (in altre parole il tempo varia con continuità, per cui  $x(t)$  è detta “tempo continua”) e  $x$  può assumere, al variare di  $t$ , tutti i valori appartenenti ad un certo intervallo;  $x(t)$  è cioè anche “continua nei valori”, oltretutto nel tempo. A titolo di esempio sono di tipo analogico i segnali che si presentano all'uscita di un microfono, di un giradischi, di un telefono fisso tradizionale.

Nei segnali numerici, o digitali, ad ogni istante di tempo la funzione  $x(t)$  può assumere soltanto un numero finito di valori (per i cosiddetti segnali binari solo zeri ed uni) ed è perciò detta “discreta nei valori”. Inoltre in questi segnali l'informazione non varia con continuità nel tempo, ma a precisi istanti posti ad un intervallo fisso  $T$ , perciò nel caso in cui si voglia rappresentare solamente l'informazione (cioè il messaggio numerico), conviene adottare un modello “tempo discreto” in cui la funzione  $x(t)$  risulta definita soltanto per una successione numerabile di istanti. In altre parole la funzione  $x(t)$  oltre ad essere discreta nei valori risulta in questo caso anche “tempo discreta”. Si noti tuttavia che poiché nei dispositivi fisici un segnale elettrico non può che essere definito su tutto l'asse dei tempi, sarà necessario associare al messaggio numerico tempo discreto un segnale numerico tempo continuo, così come sarà mostrato in seguito. Un esempio tipico di segnale numerico è quello prodotto da un lettore di compact disk (uscita digitale del lettore).

Più in generale i segnali si possono classificare secondo molti criteri diversi. Generalizzando quanto visto finora, e considerando anche altri criteri, abbiamo in particolare le seguenti possibili classificazioni:

- Segnali tempo continui o tempo discreti. I primi sono definiti su tutto l'asse dei tempi, come nel caso dei segnali analogici, i secondi solo per un'infinità numerabile di istanti  $t_n$  con  $n$  intero, posti ad un intervallo  $T$ . Il segnale in questo caso non è altro che una successione di valori  $x_n = x(t_n)$ , come nel caso dei messaggi digitali.
- Segnali continui o discreti nei valori. Nei primi, fissato un generico istante  $t_1$ , la funzione  $x = x(t_1)$  può assumere con continuità tutti i valori di un determinato intervallo,  $[-M, M]$ , come nei segnali analogici, nei secondi solo una quantità numerabile, di norma finita, come nei segnali digitali (due soli, nel caso binario).
- Segnali deterministici e segnali aleatori. Nel primo caso è noto l'andamento prima della trasmissione, cioè a priori; ad esempio perché esso segue una funzione nota analiticamente come una sinusoidale, un'onda quadra, ecc. Appartengono di norma a questa categoria i segnali di prova generati in laboratorio. Nel secondo caso l'andamento è noto solo dopo la trasmissione, cioè a posteriori. Appartengono a questa categoria sia il rumore elettrico (ad esempio il fruscio che si può facilmente percepire in assenza di segnale utile, nei dispositivi analogici, come la radio), sia, necessariamente, tutti i segnali non noti al ricevitore. Si noti che se il ricevitore conoscesse a priori il segnale che sta per ricevere non ci sarebbe trasmissione di informazione dalla sorgente per definizione (“se so già che cosa stai per dirmi, non mi darai nessuna informazione”). Nonostante in questo corso ci occuperemo prevalentemente dei segnali deterministici, il legame fra informazione ed aleatorietà è fondamentale nell'ambito

delle Telecomunicazioni ed è oggetto della Teoria dell'Informazione, ovvero nella descrizione matematica dell'informazione, una disciplina fondata da Claude Shannon con una serie di articoli pubblicati nel 1948. Per i suoi contributi Shannon può essere definito come uno dei padri dell'Informatica e il padre delle telecomunicazioni moderne (si veda alla voce Claude Shannon su Wikipedia).

- Segnali ad energia finita o a potenza finita. I segnali possono anche essere classificati secondo un criterio “energetico”. Nel caso dei segnali ad energia finita converge (ad un valore diverso da zero, altrimenti il segnale è evidentemente nullo) l'integrale che definisce l'energia di un segnale, nel secondo l'energia è infinita ma converge invece quello che ne definisce la potenza media. Si noti che esistono anche segnali che non appartengono a nessuna delle due categorie.

## Richiami sui numeri complessi

Nel seguito si danno alcuni richiami di base sui numeri complessi, la cui conoscenza è indispensabile per la comprensione della trattazione matematica di tutta la prima parte del corso. I numeri complessi sono già stati introdotti in modo rigoroso nei corsi di analisi. Per questo motivo qui ci limiteremo all'essenziale, senza nessuna pretesa di particolare rigore matematico (la trattazione segue quella di Wikipedia).

I numeri complessi sono un'estensione dei numeri reali, nata per trovare tutte le soluzioni delle equazioni polinomiali. In particolare la seguente equazione

$$x^2 = -1 \quad (1.1)$$

non ha soluzioni reali, perché i quadrati dei numeri reali non possono essere negativi. Si definisce perciò l'unità immaginaria “i” che gode della proprietà

$$i^2 = -1 \quad (1.2)$$

Un generico numero complesso “z” viene quindi visto come somma di una parte reale “a” e di una parte immaginaria “b”, dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria.

$$z = a + ib \quad z \in C \quad a, b \in R \quad (1.3)$$

Le leggi della somma algebrica e del prodotto nei numeri complessi si applicano facendo i conti nel modo usuale, sapendo però che  $i^2 = -1$ .

Si noti che l'unità immaginaria nell'ambito dell'ingegneria Elettrica viene di norma indicata con “j” per evitare confusione con le correnti elettriche. Come i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, quelli complessi sono in corrispondenza con i punti di un piano, detto piano complesso (o di Argand-Gauss): al numero complesso  $z = a + jb$  si associa il punto di coordinate cartesiane  $(a, b)$ .

### Definizione più rigorosa

A rigore un numero complesso è definito come una coppia ordinata di numeri reali  $(a, b)$ . Sull'insieme di queste coppie vengono quindi definite le operazioni di somma e prodotto come

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Con queste due operazioni, l'insieme dei numeri complessi C risulta essere un campo.

Il numero complesso  $(a, 0)$  viene identificato con il numero reale a, mentre  $(0, 1)$  è l'unità immaginaria prima indicata con la lettera i (o con la j). L'elemento 1 è l'elemento neutro per la moltiplicazione, mentre si verifica, dalla definizione data sopra di prodotto fra numeri complessi, che:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1 \quad (1.5)$$

Ogni numero complesso  $z = (a, b)$  può dunque essere scritto come:

$$\begin{aligned} z = (a, b) &= (a, 0) + (0, b) = a + (b, 0)(0, 1) = \\ &= a + b(0, 1) = a + ib \end{aligned} \quad (1.6)$$

### **Rappresentazione con coordinate cartesiane e coordinate polari**

Così come un punto in un piano può essere definito in termini di coordinate cartesiane o di coordinate polari, così è possibile anche per i numeri complessi, che possono essere definiti anche in termini di modulo  $r$  (distanza del punto dall'origine degli assi) ed argomento  $\varphi$  (angolo di rotazione rispetto all'asse reale). Notazione cartesiana e notazione polare sono equivalenti in quanto è possibile passare facilmente dall'una all'altra.

In particolare si ha che

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi \\ b &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

e, inversamente

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arctg \frac{b}{a} & a > 0 \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi & a < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Lo sdoppiamento della formula dell'argomento è dovuto al fatto che la tangente è invertibile solo fra  $-\pi/2$ , quindi l'arcotangente darebbe sempre e solo soluzioni in questo intervallo, corrette solo se il numero complesso  $z$  si trova nel I o nel IV quadrante (cioè se  $a > 0$ ). Nel caso in cui il numero complesso si trovi nel II o nel III quadrante (cioè  $a < 0$ ) occorre aggiungere  $\pi$ .

Ricordando infine la fondamentale formula di Eulero (si veda la figura sotto)

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (1.9)$$

(dove “e” è il numero di Nepero), possiamo quindi mettere in evidenza l'equivalenza fra rappresentazione cartesiana e polare di un numero complesso.

$$z = a + jb = re^{j\varphi} \quad (1.10)$$

Si noti in particolare che  $e^{j\varphi}$  è un vettore di modulo unitario ed inoltre che  $e^{j0} = 1$  e  $e^{j\pi/2} = j$ . Entrambe le notazioni, cartesiana e polare, saranno usatissime in seguito. Si preferirà l'una o l'altra a seconda dei casi e sarà quindi necessario avere familiarità con entrambe e con le relative formule di trasformazione.



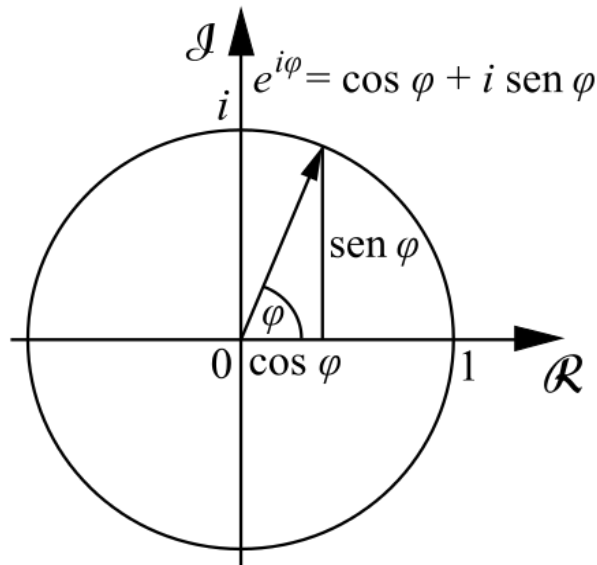


Fig.1 Piano complesso e formula di Eulero.

Per agganciare la trattazione svolta a qualcosa familiare a tutti gli studenti, si consideri il gioco della battaglia navale, in cui vengono utilizzate coordinate simili a quelle cartesiane dai giocatori. È immediato immaginare che per un ipotetico direttore di tiro di una nave al centro del sistema di riferimento, la posizione del bersaglio in coordinate cartesiane dovrebbe essere convertita in coordinate polari per decidere alzo e rotazione dei cannoni. Analogamente, lo schermo di un radar fornisce la posizione di un aereo in termini di coordinate polari.

La formula di Eulero consente anche di esprimere le funzioni coseno e seno in termini di somma e differenza di funzioni esponenziali,

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \\ \text{sen } \varphi &= \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}\end{aligned}\quad (1.11)$$

o come parte reale ed immaginaria di un unico esponenziale

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \text{Re}\{e^{j\varphi}\} \\ \text{sen } \varphi &= \text{Im}\{e^{j\varphi}\}\end{aligned}\quad (1.12)$$

## Sinusoidi e fasori.

In tutta la prima parte del corso avremo a che fare con segnali sinusoidali (o scomponibili in somma di segnali sinusoidali), per cui è conveniente richiamare subito il legame che essi hanno con i fasori e con i numeri complessi.

Si consideri una funzione sinusoidale, assumendo il tempo come variabile indipendente

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta) \quad (1.13)$$

La sinusoide è definita da una terna di numeri reali, l'ampiezza  $A$  ( $A > 0$ ), la fase  $\vartheta$ , la frequenza angolare  $\omega$  (in rad/s). Si noti che la fase può essere definita anche come l'opposto di  $\vartheta$  (è questione di convenzione), mentre spesso, ed in particolare nel campo delle Comunicazioni Elettriche, si preferisce mettere in evidenza la frequenza  $f$  (in Hz, cioè 1/s), semplicemente ponendo  $\omega = 2\pi f$ .

Nel corso utilizzeremo prevalentemente le frequenze angolari per maggior uniformità con i precedenti corsi di Fisica e con il parallelo corso di Elettrotecnica. Indipendentemente dalla scelta,  $\omega$  o  $f$ , è tuttavia importante conoscere fin da subito la notazione alternativa, ed acquisire anche un minimo di familiarità con essa. In altre parole è bene sapere comprendere i concetti, indipendentemente dalla notazione preferita da un autore.

La formula di Eulero e le sue derivate permettono di esprimere la nostra funzione sinusoidale sia come somma di due funzioni esponenziali complesse,

$$A \cos(\omega t + \vartheta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \vartheta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \vartheta)} \quad (1.14)$$

sia come parte reale di una qualsiasi delle due precedenti, moltiplicata per due (ad esempio la prima),

$$A \cos(\omega t + \vartheta) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j(\omega t + \vartheta)} \right\} \quad (1.15)$$

Il termine fasore indica una funzione del tipo  $A e^{j(\omega t + \vartheta)}$  (cioè un vettore sul piano complesso ruotante con velocità angolare  $\omega$ ). Esso tuttavia viene spesso utilizzato per indicare la sola costante complessa  $A e^{j\vartheta}$  (cioè un vettore fisso nel piano complesso, ovvero la posizione del fasore al tempo zero). Ad evitare confusione, nel seguito useremo il termine fasore solo ad indicare la funzione del tempo, cioè il vettore rotante (è bene però sapere che è una nostra scelta). La costante complessa la chiameremo “numero complesso rappresentativo” del fasore.

Si noti che il numero complesso rappresentativo del fasore contiene due dei tre parametri della sinusoide (ampiezza e fase). Se il terzo (frequenza) è noto, la conoscenza del numero complesso rappresentativo del fasore diventa del tutto equivalente a quella della sinusoide. Ciò è alla base del metodo simbolico, anche detto metodo di Steinmetz o metodo di Steinmetz-Kennelly, ampiamente usato in Elettrotecnica per studiare correnti e tensioni in regime isofrequenziale tramite l'algebra complessa. Per curiosità, è proprio a Steinmetz che è dovuta l'introduzione della “j” al posto della “i”. Si noti che in elettrotecnica il modulo del numero complesso rappresentativo è normalmente dato dal valore efficace della sinusoide ( $A_{\text{eff}} = A/\sqrt{2}$ ) anziché dall'ampiezza ( $A$ ). Il mondo è bello perché è vario, e bisogna imparare a convivere, se non ad apprezzare, la diversità di convenzioni (ed i diversi vantaggi delle medesime). Un mondo in cui tutti parlassero e conoscessero solo la stessa lingua sarebbe forse più comodo ma anche un po' monotono. Vedi la voce Metodo simbolico su Wikipedia.

## Introduzione all'analisi di Fourier.

L'analisi di Fourier prende il nome dal matematico e fisico francese Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 –1830), che nell'ambito degli studi sulla trasmissione del calore ebbe l'idea di scomporre un segnale generico in una somma (in generale infinita) di sinusoidi, allo scopo di estendere a segnali generici la soluzione dell'equazione della trasmissione del calore applicabile a segnali sinusoidali, già nota. In termini generali, essa consiste in una fase di analisi, in cui si cerca di scomporre un segnale generico in termini sinusoidali, ed in una fase di sintesi, in cui il segnale viene rappresentato come somma di termini sinusoidali. L'analisi di Fourier è stata ed è tuttora oggetto di studi successivi, che ne hanno ampliato l'ambito di applicazione. In generale essa si applica a funzioni di qualsiasi natura fisica, tuttavia nell'ambito di questo corso la vedremo applicata a segnali  $x(t)$  definiti nel “dominio del tempo” (la variabile indipendente  $t$  rappresenta il tempo). In questo caso essa fornisce una rappresentazione alternativa, detta nel “dominio delle frequenze”, dei medesimi segnali; per questo motivo viene anche detta “analisi in frequenza”. In altre parole, per ampie categorie di segnali sarà possibile dare due rappresentazioni equivalenti, una nel tempo ed una in frequenza, esattamente come per i numeri complessi è possibile affiancare la rappresentazione polare a quella cartesiana. Il passaggio dalla rappresentazione nel tempo a quella in frequenza viene anche detto trasformazione di Fourier (in senso lato), il passaggio inverso antitrasformazione di Fourier (sempre in senso lato). La

rappresentazione nelle frequenze può comportare diversi vantaggi fra i quali, come vedremo, la possibilità di ricavare facilmente la risposta di reti lineari, grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, una volta nota la risposta ad una sinusoidale (o ad un fasore).

La trasformazione di Fourier in senso lato assume nomi diversi, ed impiega formule leggermente diverse, a seconda dei segnali a cui si applica. La tabella sotto vuole costituire un'anticipazione di quanto verrà trattato in seguito a questo proposito, per sottolinearne il legame unitario: anche se le formule sono diverse, la logica è la medesima. I vari tipi di analisi di Fourier vanno quindi studiati in modo differenziale, basandosi sulle considerazioni ed i risultati già noti. Allo studente che non ne coglie il legame, esse possono facilmente sembrare una babele di formule diverse, difficili da ricordare. La difficoltà in realtà è nella comprensione del significato dei due domini, tempo e frequenza, che richiede tempo per maturare, non nella memorizzazione delle formule.

*Tabella 1: Strumenti dell'Analisi di Fourier*

| Nome   | Segnale nel tempo                                  | Rappresentazione nelle frequenze                      |
|--|--|---|
| Sviluppo in serie di Fourier (tre forme)         | Segnali periodici; $x(t)=x(t+T)$ .                 | $\{c_n\}; \{A_n\}, \{\varphi_n\}; \{a_n\}, \{b_n\}$ . |
| Trasformata di Fourier (ed integrale di Fourier) | Segnali aperiodici; $x(t)$ .                       | $X(\omega); V(\omega), \varphi(\omega)$ .             |
| Trasformata di F. di una serie temporale         | Serie temporali; $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ . | $X_s(\omega)$ .                                       |
| Trasformata discreta di Fourier, o DFT (FFT)     | Ennupla di valori; $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ .         | $\{X_p\}_{p=0}^{N-1}$ .                               |

Prima di procedere è necessario ribadire che lo scopo dell'analisi di Fourier è la rappresentazione mediante funzioni sinusoidali (o ad essa riconducibili, come i fasori) di segnali che sinusoidali non sono. Se il segnale di partenza è già sinusoidale, o è un fasore, o è già espresso come somma di sinusoidi e di fasori, è evidentemente un grave errore applicare ad esso l'analisi di Fourier, perché significa che pur conoscendone le formule si è perso lo scopo delle medesime. A nessuno verrebbe in mente di usare uno schiaccianoci per aprire una noce già aperta.

## Capitolo 2 **Equation Section (Next)** Analisi di Fourier di segnali tempo-continui

### Sviluppo in serie di Fourier (funzioni periodiche tempo continue)

Esso si applica alle funzioni tempo continue  $x(t)$ , continue o discrete nei valori, periodiche con periodo  $T$ .

#### **Forma esponenziale (segnali complessi)**

Vi sono tre forme, ed inizieremo da quella “esponenziale”, che anche se non è stata storicamente la prima ad essere introdotta, è la più generale, essendo applicabili sia alla funzioni reali che a quelle complesse. Sia dunque  $x(t) = x(t + T)$  con  $x \in \mathbb{C}$ .

Sotto alcune condizioni, che vedremo fra poco, la funzione  $x(t)$  può essere rappresentata come somma di infiniti fasori, aventi pulsazioni multiple della pulsazione fondamentale  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$  (in rad/s), secondo la formula (di sintesi) seguente, detta serie di Fourier (in forma esponenziale):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad (2.1)$$

I numeri complessi rappresentativi dei fasori, cioè i “coefficienti” della serie di Fourier in forma esponenziale, sono dati dalla formula (di analisi)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_o t} dt \quad (2.2)$$

Le formule sopra possono anche essere date in alternativa utilizzando le frequenze, anziché le pulsazioni, semplicemente definendo la frequenza fondamentale (in Hz) come l'inverso del periodo,  $f_o = \frac{1}{T}$ , e sostituendo  $\omega_o = 2\pi f_o$ . Il significato è ovviamente il medesimo.

#### **Tipi e criteri di convergenza**

Lo studio delle condizioni di convergenza della serie di Fourier, ovvero delle condizioni sotto le quali è valida la formula di sintesi (e nel caso sia valida quale è il significato da dare all'uguale che in essa compare) è un problema matematico molto complesso, la cui trattazione esula dallo scopo di questo corso. Qui ci limiteremo a ricordare che si possono avere più forme di convergenza, fra le quali quella puntuale.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ x(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_o t} \right\} = 0 \quad (2.3)$$

e quella in media quadratica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \left| x(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_o t} \right|^2 dt = 0 \quad (2.4)$$

In relazione alla prima esistono le condizioni di Dirichelet, che, riportiamo da [1] e [2].

#### Condizioni di convergenza di Dirichelet.

Se per il segnale periodico  $x(t)$  sono soddisfatte le seguenti condizioni (solo sufficienti)

- 1)  $x(t)$  è assolutamente integrabile, cioè  $\int_0^T |x(t)| dt < \infty$ ;
- 2) il numero di massimi e di minimi di  $x(t)$  (o meglio della parte reale e della parte immaginaria se  $x(t)$  è complesso) in un periodo è finito;
- 3) Il segnale  $x(t)$  è continuo o al più presenta un numero finito di discontinuità di prima specie (cioè il limite sinistro e quello destro sono ovviamente diversi nel punto di discontinuità, ma entrambi finiti)

Allora la serie di Fourier converge in modo puntuale a  $x(t)$  dove  $x(t)$  è continuo, a  $\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$  nei punti di discontinuità di prima specie.

### Segnali aventi energia finita nell'intervallo $T$ .

Nel caso in cui l'energia di un segnale su un intervallo di periodicità sia finita, cioè  $\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$ , è assicurata (condizione sufficiente) la convergenza in media quadratica.

### **Alcune proprietà dello sviluppo in serie di Fourier**

- L'integrale su un periodo che compare in tutte le formule precedenti può essere calcolato a partire da un istante qualsiasi (andrà anzi scelto opportunamente per facilitare i calcoli), cioè 
$$\int_0^T dt = \int_{0+a}^{T+a} dt$$
- La rappresentazione in serie di Fourier è unica (unicità della serie di Fourier); essa stabilisce una corrispondenza biunivoca fra segnale nel tempo (cioè  $x(t)$ ) e la sua rappresentazione nelle frequenze (i coefficienti  $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ ). La conoscenza della funzione e quella dei coefficienti sono equivalenti, perché da una si può ricavare l'altra. La formula di analisi permette il passaggio dalla rappresentazione nel tempo (cioè  $x(t)$ ) a quella nelle frequenze (i coefficienti); quella di sintesi il viceversa. Si vedrà che in molti casi è molto più semplice il calcolo della risposta di un circuito a partire dalla rappresentazione nelle frequenze che da quella nel tempo, ad esempio per tutti i filtri elettrici.
- I coefficienti  $c_n$  sono in generale complessi anche quando, come caso particolare, il segnale  $x(t)$  è reale. Sono invece reali se il segnale è reale e pari, puramente immaginari se reale e dispari (si veda a questo proposito la terza forma, in seguito).
- Il coefficiente  $c_0$  rappresenta il valore medio della funzione (in molti esercizi può essere valutato ad occhio, in generale conviene sempre valutarlo a parte).
- Il limite della somma di infinite funzioni continue può convergere ad una funzione discontinua (ad esempio un'onda quadra); se però la somma si arresta ad un valore finito, per quanto elevato esso sia, la somma sarà ancora una funzione continua. Ne segue che per sviluppare in serie di Fourier una funzione dotata di discontinuità, occorrono sempre infiniti termini, a meno di non accettare un errore d'approssimazione, tanto più elevato quanto minore il numero di termini considerato. Se la funzione è continua, il numero di termini non è necessariamente infinito.

### **Spettri di ampiezza e fase bilateri**

Poiché i coefficienti del segnale sono in generale complessi, non è possibile in generale rappresentarli su un grafico in funzione della pulsazione (o frequenza) associata. Per questo motivo se ne grafica di solito il modulo, detto spettro di ampiezza, e l'argomento, detto spettro di fase. Questi sono detti spettri "a righe" in quanto per convenzione si usa congiungere il punto rappresentante il valore con l'asse delle frequenze, ottenendo un "pettine" di righe equispaziate poste a multipli della pulsazione

fondamentale. Dato che le pulsazioni possono essere sia positive (per  $n$  positivi) che negative (per  $n$  negativi) lo spettro si dice di tipo “bilatero”. Si noti che ad una pulsazione positiva corrisponde una rotazione antioraria del fasore, ad una negativa una oraria. Ovviamente gli spettri possono essere definiti anche in relazione alle frequenze (in Hz). Risulta in questo caso un po’ meno intuitivo il significato di frequenza negativa (che senso potrebbe avere dire che un autobus passa -3 volte all’ora?). In realtà per estenderne il significato occorre che questo sia associato ad una velocità angolare, cioè ad una pulsazione.

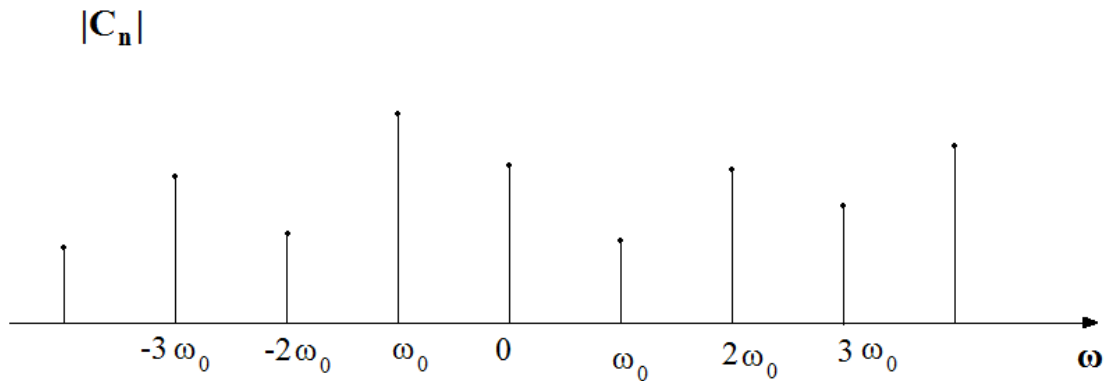


Fig.2 Spettro di ampiezza bilatero (a righe).

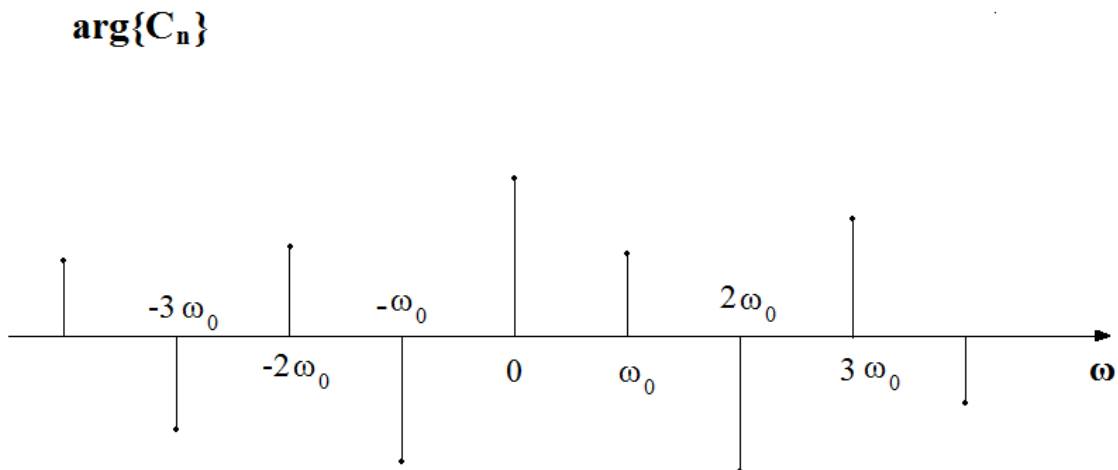


Fig.3 Spettro di fase bilatero (a righe).

### **Rappresentazioni monolatero (segnali reali)**

Quando  $x(t)$  è reale, il coefficiente  $c_0$  è reale in quanto rappresenta il valore medio della funzione; coefficienti positivi e negativi sono invece legati da simmetria hermitiana:

$$c_{-n} = c_n^* \quad (2.5)$$

Essa è facilmente deducibile dalla formula di analisi (è sufficiente mettere  $-n$  al posto di  $n$ , coniugare l'integrale, ricordarsi che il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e che il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati), per cui lasciamo la dimostrazione per esercizio.

In particolare per un segnale reale lo spettro di ampiezza risulta simmetrico rispetto all'origine e quello di fase antisimmetrico, cioè

$$\begin{aligned} |c_n| &= |c_{-n}| \\ \arg\{c_n\} &= -\arg\{c_{-n}\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sfruttando la simmetria hermitiana è possibile manipolare la funzione di sintesi in modo da utilizzare solo le frequenze positive. Spezzando quindi la sommatoria in tre termini, cambiando  $-n$  con  $n$  nella prima in modo che gli estremi coincidano con la seconda, quindi raccogliendo e ricordando che la somma di due numeri complessi coniugati è pari a due volte la loro parte reale si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega_o t} + c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_o t} + c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} = \\ &= c_o + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{c_n e^{jn\omega_o t}\} = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{2c_n e^{jn\omega_o t}\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definendo gli spettri di ampiezza e fase monolateri (in quanto associati alle sole pulsazioni o frequenze positive), come

$$\begin{cases} A_o = c_o \\ A_n = 2|c_n| \quad n > 0 \\ \varphi_n = -\arg\{c_n\} \quad n > 0, A_n \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ed operando le seguenti due sostituzioni

$$\begin{aligned} c_o &= A_o \\ 2c_n &= A_n e^{-j\varphi_n} \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si ottiene infine la forma in soli coseni dello sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t - \varphi_n) \quad (2.10)$$

Si noti che in questo caso tutti i coefficienti sono reali, ed inoltre  $A_n > 0$  per  $n > 0$ , mentre  $A_o$  essendo il valore medio della funzione può essere anche negativo.

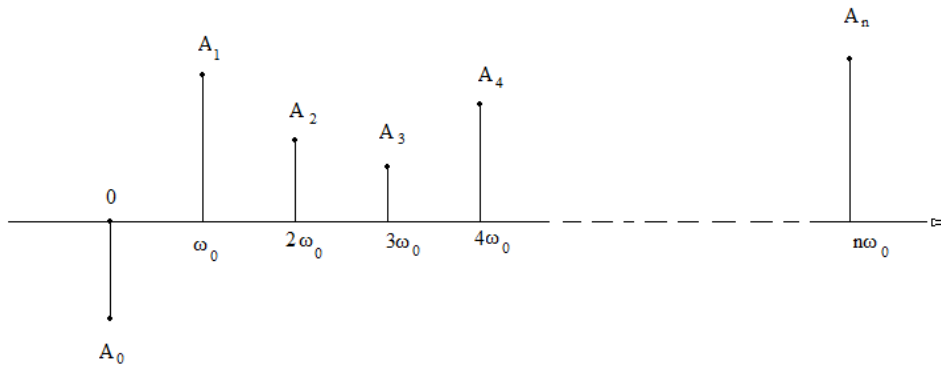


Fig.4 Spettro di ampiezza monolatero di un segnale periodico.

$$\varphi = -\arg\{C_n\}$$

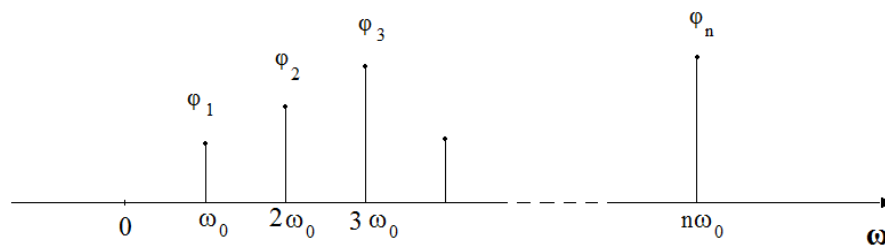


Fig.5 Spettro di fase monolatero di un segnale periodico.

Analogamente, si può pervenire alla terza forma, in seni e coseni (ma senza fasi) definendo i coefficienti monolateri,  $a_n$ ,  $b_n$ , anch'essi reali (positivi e negativi)

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} 2c_o & n = 0 \\ \operatorname{Re}\{2c_n\} & n > 0 \end{cases} \\ b_n &= -\operatorname{Im}\{2c_n\} \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ed operando le sostituzioni

$$\begin{aligned} c_o &= \frac{a_o}{2} \\ 2c_n &= a_n - jb_n \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si ha

$$x(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_o t) \quad (2.13)$$

I coefficienti  $a_n$ ,  $b_n$ , possono anche essere ricavati direttamente (senza passare dalla conoscenza dei  $c_n$ ) dalle formule seguenti, ottenibili immediatamente dalla formula di analisi e dalle definizioni dei coefficienti stessi:



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n > 0$$
(2.14)

Si noti che se il segnale è pari, la funzione integranda nell'integrale che definisce  $b_n$  è dispari (prodotto di una pari e di una dispari), per cui l'integrale si annulla ( $b_n=0$ ) e i coefficienti  $c_n$  sono reali; inoltre, nel primo integrale la funzione integranda è pari (prodotto di pari) per cui l'integrale può essere limitato ad un semiperiodo, cosa che a volte può tornare utile negli esercizi:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{+T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$
(2.15)

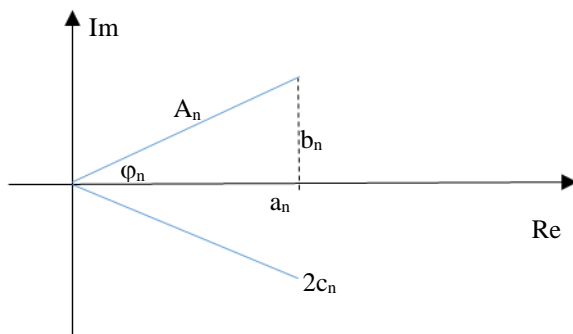
Analogamente, se  $x(t)$  è dispari,  $a_n=0$ , quindi i  $c_n$  sono puramente immaginari, ed infine

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{+T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$
(2.16)

Nel caso di  $x(t)$  reale, pari o dispari, le relazioni sopra possono essere utilissime per verifica dei risultati ottenuti negli esercizi (una specie di prova del nove) o anche per ottenere i coefficienti  $c_n$  dai soli  $a_n$  o dai soli  $b_n$ , anziché dalle formula di analisi (si può lavorare su un semiperiodo).

Si noti che una funzione  $x(t)$ , definita nell'intervallo  $-T/2, T/2$ , può essere estesa al di fuori di tale intervallo con legge di periodicità e con periodo eguale a  $T$ , e quindi rappresentata, nell'intervallo  $-T/2, T/2$ , da uno sviluppo in serie di Fourier.

Nella figura sotto è rappresentata graficamente la relazione esistente fra i coefficienti delle tre forme, per  $n>0$ .



*Fig.6 Relazione fra i coefficienti delle tre forme dello sviluppo in serie di Fourier.*

### **Relazione con la musica**

L'analisi di Fourier è indipendente dalla natura dei segnali a cui è applicata. Tuttavia, per la sua comprensione è molto utile considerare il legame con i segnali sonori, ovvero quelli ottenuti tramite un trasduttore acustico/elettrico, cioè tramite un apposito circuito ed un microfono. In particolare, lo sviluppo in serie di Fourier permette di descrivere in termini scientifici i fenomeni fisici connessi alla musica. Infatti, a ben rifletterci, il nostro senso dell'udito rappresenta i suoni nel dominio delle frequenze, non nel tempo. Sentendo un fischio una persona ha un'idea naturale dell'altezza del suono (acuto o grave), che è legata alla frequenza del suono, mentre certamente non ne ha nessuna della sua rappresentazione nel dominio dei tempi. Il funzionamento dei nostri organi dell'udito è di per sé estremamente complicato e non è possibile qui darne una descrizione completa. Ci limitiamo pertanto a ricordare che il nostro orecchio funziona come un trasduttore acustico/elettrico, in cui gioca un ruolo fondamentale la "coclea", che di fatto restituisce un diverso stimolo elettrico al variare della frequenza

del suono stesso, stimolo che poi viene trasmesso dai nervi e quindi elaborato dal cervello. E' quindi abbastanza naturale che ci sia un legame fra Analisi di Fourier e musica. La comprensione anche solo approssimativa di questo legame può essere molto utile per una migliore comprensione dell'Analisi di Fourier. Per i musicisti, professionisti e dilettanti, è inoltre vero anche l'inverso, cioè la conoscenza dell'Analisi di Fourier permette di avere una maggiore consapevolezza dei fenomeni fisici connessi alla emissione ed all'ascolto delle note emesse dai vari strumenti.

Occorre innanzitutto premettere che non tutti gli strumenti musicali emettono dei suoni quasi-periodici (si intendono quasi-periodici i suoni che sono approssimativamente periodici ovviamente a meno del transitorio iniziale e finale, non potendo certo durare un suono all'infinito), ad esempio le maracas e le nacchere non li emettono. Sono tuttavia generalmente quasi-periodici i suoni emessi dagli strumenti a corda, dai legni e dagli ottoni.

Consideriamo le note emesse da un pianoforte. Alla pressione di un tasto un martelletto percuote un gruppo di corde metalliche tese, facendole vibrare più o meno intensamente a seconda dell'intensità con la quale il pianista ha pigiato il tasto. La vibrazione è libera (e quindi quasi-periodica) finché il tasto rimane pigiato, quindi viene smorzata al rialzarsi del tasto (a meno che non si voglia che gli smorzatori rimangano alzati, nel qual caso si preme l'apposito pedale). Da Wikipedia: "lo strumento dispone generalmente di 88 tasti (sette ottave e una terza minore), 52 bianchi e 36 neri, disposti nella classica successione che intervalla gruppi di due e tre tasti neri. Il punto di riferimento centrale della tastiera è il tasto do, chiamato per questo "do centrale". Grazie ai suoi 88 tasti, il piano raggiunge un'estensione di sette ottave". Che relazione c'è fra tutto questo e l'analisi di Fourier? I legami sono molti.

Iniziamo dal considerare l'emissione di una nota. Il "volume" con la quale una nota è emessa non è altro che la sensazione umana (soggettiva) legata all'intensità (oggettiva) del suono. Il pianoforte si chiama così proprio perché in grado di emettere una nota con intensità diverse (piano o forte), al contrario di altri strumenti a corda come i clavicembali, dove la corda è pizzicata. L'intensità di un suono, trasformato in segnale elettrico, è legata all'ampiezza della variazione del segnale. Di fatto è un fattore moltiplicativo della forma d'onda. Nel dominio delle frequenze esso si traduce in una moltiplicazione di ugual valore di tutti i coefficienti  $A_n$  dello sviluppo in serie di Fourier (per comodità di esposizione, conviene qui considerare la II forma).

L' "altezza" della nota è legata alla frequenza del segnale emesso, ovvero alla frequenza della prima armonica, o armonica fondamentale. Ad ogni nota corrisponde quindi (almeno in un certo tipo di accordatura) una ben specifica frequenza della fondamentale. Dato che la nota emessa non è sinusoidale, ma periodica, avrò non una riga, ma un pettine di righe, poste a frequenza multipla della fondamentale. Ad esempio il "la" del diapason, corrispondente al la della quarta ottava del pianoforte, è associato alla frequenza di 440 Hz. Note superiori avranno fondamentali più alte e quindi pettini più diradati, e viceversa. Il nostro orecchio è in grado di percepire la "distanza" in frequenza fra le righe del pettine, e quindi di rilevare con buona precisione la frequenza del suono emesso. Che differenza c'è quindi fra il la della quarta ottava e quello della quinta? Ad ogni ottava (intervallo di 8 note, da cui il nome) la frequenza di emissione raddoppia (andando verso l'alto), o si dimezza (verso il basso). Il la della quinta ottava avrà quindi frequenza 880 Hz e quello della terza 220 Hz. Il nostro orecchio le riconosce come "la" in entrambi i casi, perché una parte delle righe si trovano nello stesso posto. In particolare andando verso l'alto avrò una riga no ed una riga sì rispetto all'ottava precedente. Capito che passando da un' ottava alla successiva (cioè dal tasto del nostro la a quello del la successivo, posto 8 tasti bianchi dopo, in quanto le 7 note sono associate ai tasti bianchi) la frequenza associata raddoppia, ci si può chiedere che relazione c'è fra la frequenza fra un tasto e quello successivo. Qui la risposta richiederebbe una conferenza (infatti se ne è tenuta una recentemente nella nostra Scuola su questo argomento). Diciamo solo che se lo strumento è accordato secondo il temperamento "equabile", come quasi sempre accade negli strumenti moderni, il rapporto fra le frequenze associate a due tasti successivi (bianchi o neri) è costante. Dato che fra due note uguali di due ottave successive ci sono 12 tasti (7 bianchi e 5 neri), ne deriva che il rapporto deve essere

$\sqrt[12]{2} \cong 1.06$ . Ovviamente rapporti uguali significano distanze uguali su una scala logaritmica, in quanto ad un rapporto corrisponde una differenza (ed in effetti il nostro udito, o meglio la coclea, opera su basi logaritmiche). Chi vuole approfondire, veda la voce “Temperamento equabile” su Wikipedia. Si noti che esistono altri temperamenti, e che quello equabile non fu il primo. Per curiosità si ricorda che quello equabile fu caldeggiato dal padre di Galileo Galilei.

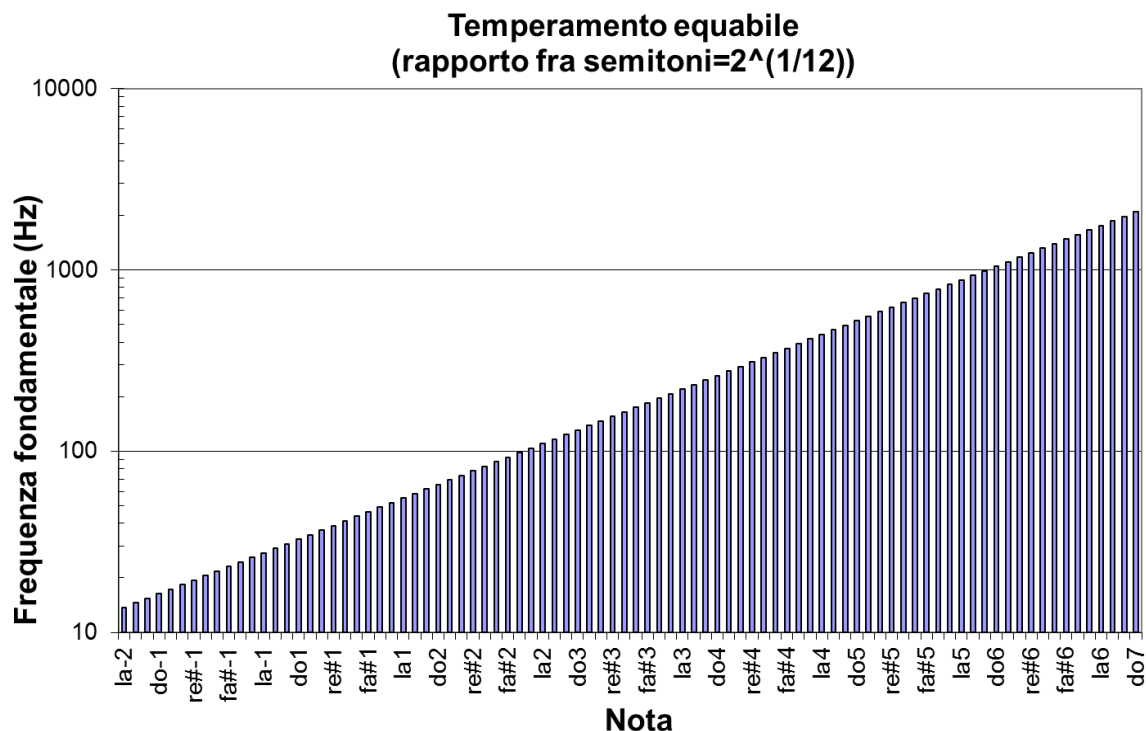


Fig.7 Corrispondenza fra note e frequenze fondamentali nel caso di temperamento equabile.

A questo punto sorge forse spontanea una domanda: ma che differenza c'è fra il la del Diapason e il la del pianoforte? O più in generale fra la stessa nota emessa da uno strumento o da un altro? Il la a 440Hz emesso dal pianoforte suona certamente diverso dal medesimo la suonato dal diapason o da un violino, ed infatti diciamo che ha un altro “timbro”. Quale è dunque il legame con l'analisi di Fourier? Prima di tutto occorre premettere che se due strumenti suonano la stessa nota, emettono due suoni periodici alla stessa frequenza, perciò sono caratterizzati da due spettri a righe dove le righe sono esattamente nelle stesse posizioni, dovendo essere a multipli della stessa fondamentale. Tuttavia i due suoni devono avere rappresentazioni spettrali diverse (ampiezza e fase), altrimenti se avessero lo stesso spettro di ampiezza e di fase avremmo lo stesso suono. Anche se altri elementi concorrono nella definizione del timbro (molto più vaga delle definizioni di intensità ed altezza), quello che sicuramente è diverso è il rapporto fra l'ampiezza delle armoniche superiori e quello della fondamentale.

Gli studenti amanti della musica possono trovare un eccellente approfondimento in [3]. Si noti che l'autore, John Pierce (laurea honoris causa in Ingegneria della nostra Università nel 1974), è stato un pioniere sia della Teoria dell'Informazione che delle Comunicazioni via Satellite. Non è evidentemente vietato, anche ai giorni nostri, coltivare interessi diversi. In effetti, oltre alle discipline precedenti, Pierce si occupò anche di microonde, computer music, psicoacustica, e... fantascienza. Ai tempi di Leon Battista Alberti (1404-1472), architetto, scrittore, matematico, umanista, crittografo, linguista, filosofo, musicista e archeologo era solo più frequente.

### **Rappresentazione ortonormale dei segnali (argomento avanzato, facoltativo)**

Esiste un'importante analogia fra segnali e vettori, ampiamente utilizzata nello studio delle modulazioni digitali. Qui ne daremo solo un accenno, vedendo come i risultati ottenuti si possono

applicare allo sviluppo in Serie di Fourier. Come un vettore rappresentato in uno spazio a  $n$  dimensioni può essere scomposto su una base ortonormale  $n$ -dimensionale, cioè espresso come combinazione lineare dei suoi versori, così è possibile scomporre un segnale su una base ortonormale, in cui gli elementi della base non sono più versori, ma funzioni ortonormali. Sia il vettore che il segnale, può quindi essere definito dalla  $n$ -pla dei coefficienti della combinazione lineare. Per comprendere quanto appena affermato, occorre come prima cosa definire il prodotto interno fra due segnali. Si definisce quindi prodotto interno fra due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ , (generalmente complessi), definiti sull'intervallo  $T$ , il seguente:

$$\langle x, y \rangle_T = \int_T x(t) y(t)^* dt \quad (2.17)$$

Data questa definizione, l'analogia ne deriva in modo naturale. In particolare, così come due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto interno è nullo, così lo sono due segnali:

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle_T = 0 \quad (2.18)$$

Così come la norma di un vettore è data dalla radice quadrata del prodotto interno di un vettore per se stesso, così è per la norma di un segnale

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_T} \quad (2.19)$$

Si noti che il prodotto interno di un segnale per se stesso è detto anche energia del segnale, quindi la norma risulta essere la radice quadrata dell'energia.

Così come due vettori sono ortonormali quando oltre ad essere ortogonali hanno norma unitaria, così è per i segnali

$$x, y \text{ ortonormali se } \begin{cases} \langle x, y \rangle_T = 0 \\ \|x\| = \|y\| = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Così come per i vettori esistono basi ortonormali, composte da versori, analogamente è possibile definire una base ortonormale per i segnali, composta da funzioni ortonormali, ad esempio  $\{\psi_m(t)\}$ , definite sull'intervallo  $T$ . Così come per i vettori un vettore è rappresentabile su una base ortonormale se è possibile scriverlo come combinazione lineare degli  $n$ -elementi della base (i versori), così è per un segnale (gli  $n$ -elementi però possono essere anche infiniti)

$$x(t) = x_1 \psi_1(t) + x_2 \psi_2(t) + \dots + x_n \psi_n(t) \quad (2.21)$$

Data una base ortonormale in grado di rappresentarlo, esiste una corrispondenza biunivoca fra vettore ed  $n$ -pla dei coefficienti (le sue componenti nelle direzioni individuate dai versori); le componenti sono date dal prodotto interno del vettore con i versori. Analogamente per i segnali.

$$\begin{aligned} x(t) &\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_k &= \langle x, \psi_k \rangle_T \end{aligned} \quad (2.22)$$

Una base si dice completa per un dato insieme di segnali se è in grado di rappresentarli tutti.

### ***Basi ortonormali e sviluppo in serie di Fourier.***

#### **Argomento avanzato, facoltativo.**

Per l'applicazione all'Analisi di Fourier, si consideri la serie (infiniti termini) delle funzioni esponenziali che compaiono nello sviluppo in serie di Fourier, limitate su un intervallo  $T$

$$\{\varphi_m(t)\} \quad \varphi_m(t) = e^{jm\omega_0 t} \quad (2.23)$$

Esse sono ortogonali, ma non ortonormali. Si consideri infatti il loro prodotto interno:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_T &= \int_T e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_T e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T & m = n \end{cases}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Dividendo le funzioni esponenziali per la loro norma è immediato ottenere la seguente serie di funzioni ortonormali:

$$\psi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_m(t) \quad (2.25)$$

Per esse infatti:

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle_T(t) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (2.26)$$

Possiamo quindi scrivere, per un segnale sviluppabile in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sqrt{T} \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \psi_n(t) \quad (2.27)$$

Dove l'apice indica i coefficienti della scomposizione su base ortonormale,  $c'_n = c_n \sqrt{T}$

In quanto tali essi sono ottenibili come prodotto interno

$$c'_n = \langle x, \psi_n \rangle_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.28)$$

In conclusione, lo sviluppo in serie di Fourier rappresenta la scomposizione di un segnale su una base ortogonale dove le funzioni hanno energia T. E' sufficiente normalizzare le funzioni per ottenere una scomposizione su base ortonormale, i cui coefficienti  $c'_n$  differiscono da quelli dello sviluppo solo per essere moltiplicati dal fattore di normalizzazione. I coefficienti  $c'_n$  sono per definizione ottenibili come prodotto interno della funzione periodica con gli elementi della base ortonormale. Ne consegue che le formule dello sviluppo in serie, a meno del fattore di normalizzazione, non sono altro che un caso particolare di scomposizione su base ortonormale. La base ortonormale individuata è completa per tutti i segnali periodici che soddisfano alle condizioni di esistenza dello sviluppo in serie.

## Trasformata ed integrale di Fourier (funzioni aperiodiche tempo-continue).

La trattazione vista in precedenza per i segnali periodici può essere estesa, con le opportune variazioni, ai segnali aperiodici. Consideriamo una funzione  $x(t)$ , in generale complessa, aperiodica, definita su tutto l'asse t. Sotto condizioni analoghe a quelle viste in precedenza per le serie di Fourier, esiste la trasformata di Fourier (formula di analisi, dal dominio dei tempi a quello delle frequenze):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.29)$$

La cui formula di antitrasformazione è data dalla seguente (formula di sintesi, cioè dalle frequenze ai tempi, qui non dimostrata) è:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.30)$$

Analogamente a quanto visto per le serie, la formula di sintesi esprime il segnale  $x(t)$  come una somma di infiniti fasori, del tipo  $X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ , con pulsazioni (o frequenze) estese ad entrambi i semiasse. In questo caso però, si tratta di un'infinità non numerabile, e tutte le pulsazioni sono coinvolte, non solo quelle multiple di un determinato valore. Inoltre l'ampiezza di un fasore ad una determinata pulsazione è infinitesima. Di conseguenza lo spettro di ampiezza bilatero, o meglio la densità spettrale di ampiezza,  $|X(\omega)|$  non è più a righe ma continuo. Analogamente è continuo per lo spettro di fase bilatero, definito come  $\arg\{X(\omega)\}$ .

Il passaggio da spettri a righe a spettri continui può essere giustificato intuitivamente osservando che un segnale aperiodico potrebbe essere visto come limite di un segnale periodico in cui  $T \rightarrow \infty$ . All'aumentare di  $T$  le righe dello spettro diventerebbero sempre più vicine, fino ad occupare tutto l'asse delle pulsazioni.

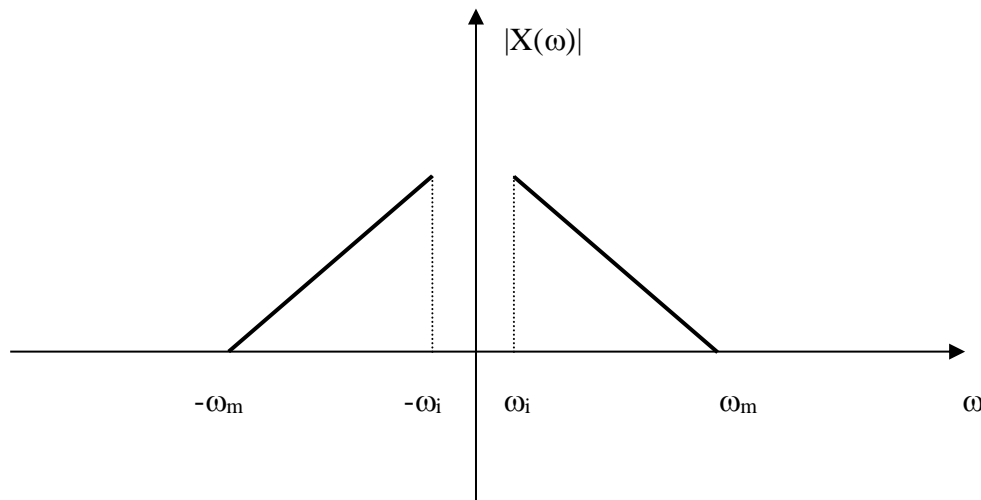


Fig.8 Spettro di ampiezza bilatero (modulo trasformato).

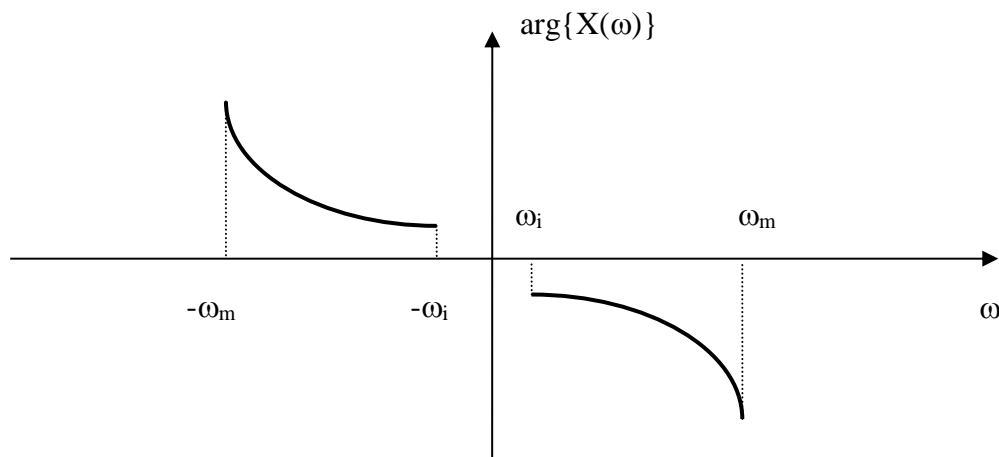


Fig.9 Spettro di fase bilatero (argomento trasformato).

### **Rappresentazioni monolatere (segnali reali); integrale di Fourier.**

Analogamente a quanto fatto in precedenza, nel caso di  $x(t)$  reale si possono dare delle espressioni alternative, monolatere, alla formula di sintesi.

Quando  $x(t)$  reale, vale la relazione (simmetria hermitiana):

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (2.31)$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto in precedenza per le serie è possibile arrivare alla seguente

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ |X(\omega)| e^{j \arg\{X(\omega)\}} e^{j\omega t} \right\} d\omega = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{|X(\omega)|}{\pi} \cos(\arg\{X(\omega)\} + \omega t) d\omega \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da cui definito lo spettro (densità spettrale) di ampiezza monolatero come

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} \quad \omega \geq 0 \quad (2.33)$$

E quello monolatero di fase come

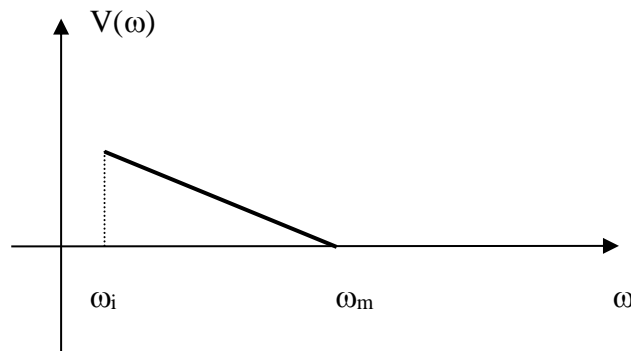
$$\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} \quad \omega \geq 0, V(\omega) \neq 0 \quad (2.34)$$

Otteniamo infine l'espressione sotto, detta "integrale di Fourier":

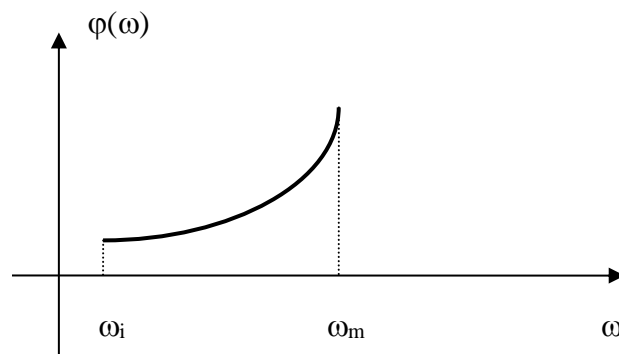
$$x(t) = \int_0^{+\infty} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \quad (2.35)$$

L' integrale di Fourier è l'analogo dello sviluppo in serie in soli coseni; esso rappresenta  $x(t)$  come "somma" di infiniti termini sinusoidali, il generico dei quali ha pulsazione  $\omega$ , ampiezza (infinitesima)  $V(\omega)d\omega$  e fase  $\varphi(\omega)$ .

Esiste la possibilità di esprimere un segnale aperiodico anche come somma di due integrali, uno di coseni ed uno di seni, senza fasi, in analogia con lo sviluppo in serie di coseni e seni, ma non sarà esaminato qui.



*Fig.10 Spettro di ampiezza monolatero.*



*Fig.11 Spettro di fase monolatero.*

**Bande.**

Lo spettro di ampiezza consente di introdurre il concetto di banda di pulsazioni di una funzione. Essa è l'intervallo di pulsazioni (o frequenze) per le quali è diverso da zero lo spettro di ampiezza, eventualmente entro un determinato livello di approssimazione. Per comodità, nel caso di segnali reali si considera sempre solo il semiasse positivo anche quando si utilizza uno spettro bilatero. In casi particolari la banda può essere formata da più intervalli disgiunti, ma di norma lo spettro è su di un unico intervallo (almeno approssimativamente). Quando invece la banda comprende lo 0 oppure è significativamente prossima ad esso, come nel caso di Fig.11 si parla di funzione passa-basso.

Quando invece la banda  $B_\omega = \omega_m - \omega_i$  è "piccola" rispetto alla pulsazione centrale,  $\omega_c = \frac{\omega_m + \omega_i}{2}$ , cioè tale che risulti

$$\frac{B_\omega}{\omega_c} \ll 1 \quad (2.36)$$

si parla di funzione passa-banda. I concetti di banda appena visti si applicano anche ai segnali periodici.

Alcuni esempi di bande di segnali analogici:

- Telefonica netta (standard europeo): 300-3400 Hz.
- Audio AM (segnale modulante): 50-4500.
- Modulazione FM (segnale modulante): 30-15000 Hz.
- CD: circa 20-20000 Hz.

**Alcune proprietà della trasformata di Fourier.**

Sia  $x(t)$  un segnale complesso con trasformata  $F[x(t)] = X(\omega)$ .

Coniugazione

$$F[x^*(t)] = X^*(-\omega) \quad (2.37)$$

Dimostrazione per esercizio.

Traslazione temporale

$$F[x(t - t_o)] = X(\omega)e^{-j\omega t_o} \quad (2.38)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} F[x(t - t_o)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_o)e^{-j\omega t} dt \stackrel{(sost. \xi = t - t_o)}{=} \int_{-\infty - t_o}^{+\infty - t_o} x(\xi)e^{-j\omega(\xi + t_o)} d\xi = \\ &= e^{-j\omega t_o} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi = X(\omega)e^{-j\omega t_o} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Derivata

$$F[\dot{x}(t)] = j\omega X(\omega) \quad (2.40)$$

Dimostrazione

Scrivendo  $x(t)$  come antitrasformata della sua trasformata e derivando si ha



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[j\omega X(\omega)]\end{aligned}\quad (2.41)$$

Dall'espressione sopra è immediato ricavare il risultato per l'unicità della trasformata di Fourier.

### Integrale

$$F\left[\int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad \text{se } X(0) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt\right] = 0 \quad (2.42)$$

Dimostrazione (in seguito).

Commento

Le due proprietà precedenti permettono di trasformare un'equazione integro-differenziale (ad esempio quella di un circuito RLC serie) in una equazione algebrica, molto più facile da risolvere.

### Convolvere

Date due funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  aventi come trasformate di Fourier  $X(\omega)$  e  $Y(\omega)$ , il prodotto di convoluzione fra  $x(t)$  e  $y(t)$  (o prodotto integrale), definito come

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (2.43)$$

Ha come trasformata il prodotto (semplice) delle trasformate  $X(\omega)Y(\omega)$ . In formula:

$$F[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega) \quad (2.44)$$

Commento

La proprietà permette di trasformare un prodotto di convoluzione, generalmente molto difficile da calcolare per via dell'integrale, in un prodotto semplice. E' fondamentale nello studio delle reti lineari.

Dimostrazione

Si parte dalla definizione, si esprime quindi  $y(t)$  come antitrasformata della sua trasformata, si cambia l'ordine degli integrali ritrovando  $X(\omega)$ , quindi si nota che il risultato finale è la formula di antitrasformazione di  $X(\omega)Y(\omega)$ ; l'enunciato risulta quindi dimostrato per l'unicità della trasformata (corrispondenza biunivoca).

$$\begin{aligned}x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \stackrel{(y(t)=F^{-1}[Y(\omega)])}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega d\tau \\ &\stackrel{(camb.ord.int.)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[Y(\omega)X(\omega)]\end{aligned}\quad (2.45)$$

## Esercizi

### **Sviluppo in serie di una successione di impulsi rettangolari**

Calcolare gli spettri di ampiezza e fase monolateri di una successione periodica di impulsi, aventi ampiezza  $A$ , durata  $\tau$  e periodo  $T$ .

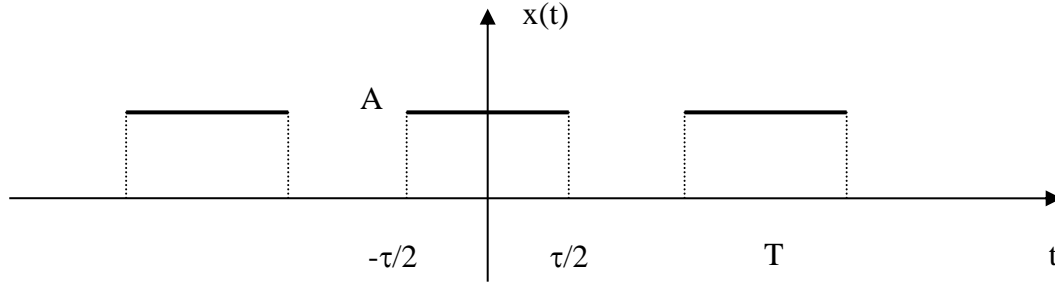


Fig.12 Successione periodica di impulsi rettangolari.

Si osservi che si tratta di una funzione reale discreta nei valori e tempo-continua. Per determinare gli spettri monolateri, cioè i coefficienti  $A_n$  e  $\varphi_n$ , conviene prima calcolare i coefficienti  $c_n$  della forma esponenziale. Essi sono dati da:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_o t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-jn\omega_o t} dt = \frac{A}{T} \left[ \frac{e^{-jn\omega_o t}}{-jn\omega_o} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \\
 &= \frac{A}{T} \frac{e^{-jn\omega_o \tau/2} - e^{jn\omega_o \tau/2}}{-jn\omega_o} = \frac{A}{T} \frac{-2j \operatorname{sen}(n\omega_o \tau / 2)}{-jn\omega_o} = \frac{A\tau}{T} \frac{\operatorname{sen}(n\omega_o \tau / 2)}{n\omega_o \tau / 2} = \\
 &= \frac{I}{T} \operatorname{sinc}(n\tau / T)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Dove si è fatto ricorso alla funzione integrale seno

$$\operatorname{sinc} z = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} \tag{2.47}$$

per rendere la notazione più compatta. Si noti che i coefficienti  $c_n$  sono in questo caso reali anziché complessi. Questo in effetti è un risultato prevedibile perché la funzione  $x(t)$  è non solo reale ma anche pari.

Ricordando le relazioni che legano fra loro i coefficienti, gli spettri di ampiezza sono espressi da:

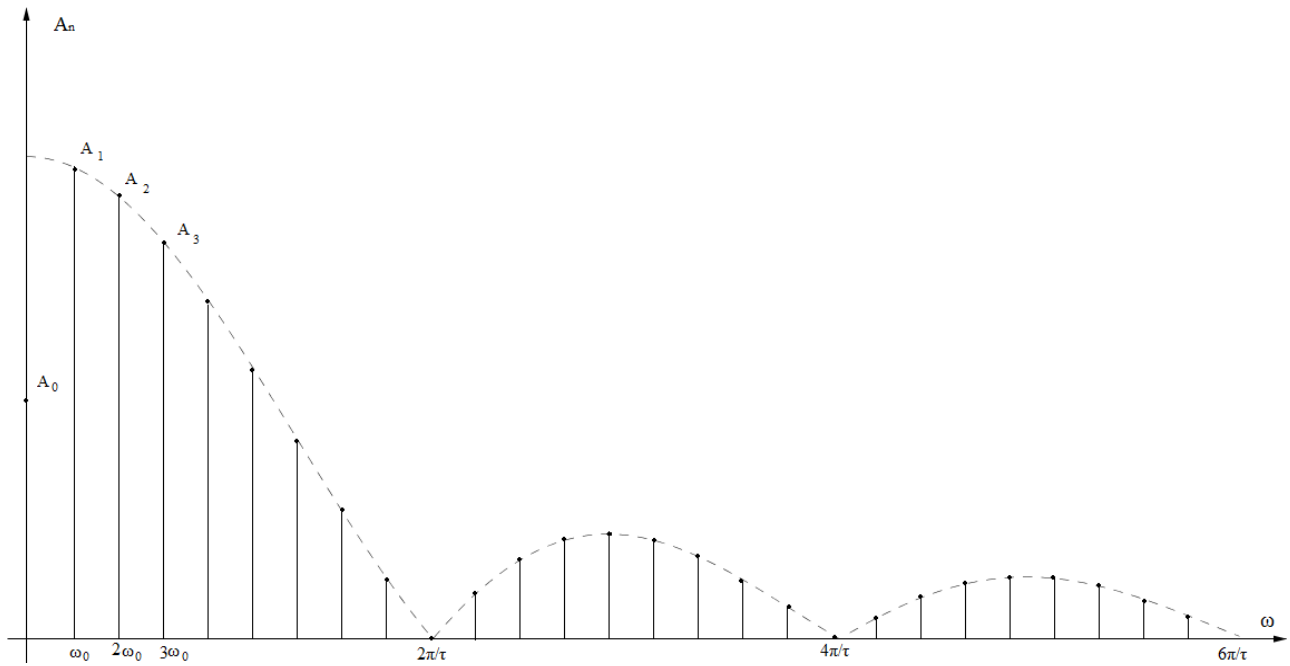
$$\begin{aligned}
 A_o &= c_o = \frac{I}{T} \\
 A_n &= |2c_n| = \frac{2I}{T} \left| \frac{\operatorname{sen}(n\omega_o \tau / 2)}{n\omega_o \tau / 2} \right| = \frac{2I}{T} |\operatorname{sinc}(n\tau / T)|
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

e quelli di fase da

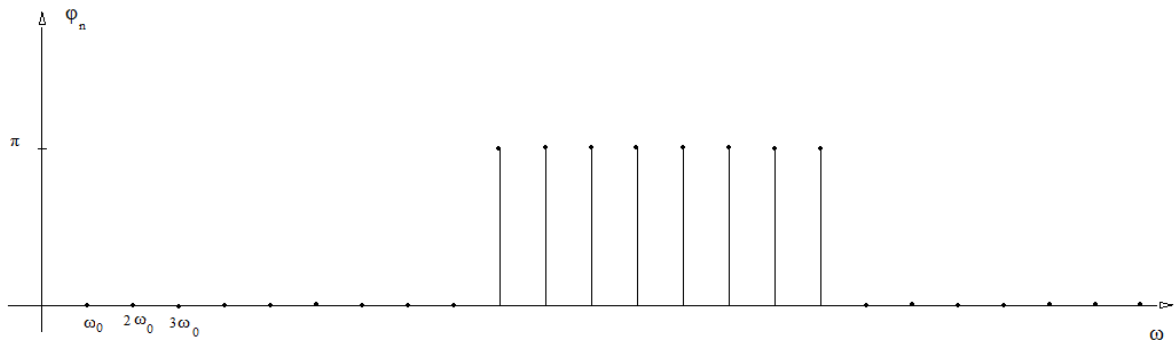
$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = \begin{cases} 0 & c_n > 0 \\ \pi & c_n < 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

Si noti che qui è possibile scrivere  $c_n > 0$  e  $c_n < 0$  solo perché in questo caso particolare i coefficienti sono reali. Quando sono complessi occorre ricorrere alle formule generali per il calcolo dell'argomento di un numero complesso.

Gli spettri sono rappresentati nelle figure sotto



*Fig.13 Spettro di ampiezza a righe di una successione periodica di impulsi.*



*Fig.14 Spettro di fase a righe di una successione periodica di impulsi.*

Si osservi che la posizione delle righe è sempre a multipli della pulsazione fondamentale, quindi lo spazio fra di esse è inversamente proporzionale al periodo  $T$ . Al contrario il loro valore dipende dall'andamento del segnale. Nel caso particolare (ovviamente non in generale), le righe dello spettro di ampiezza possono essere ottenute “campionando” a multipli di  $\omega_0$  la seguente funzione ausiliaria,

$$Aux(\omega) = \frac{2I}{T} \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right| \quad (2.50)$$

Si ha infatti

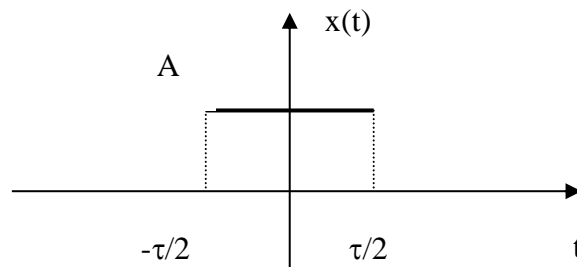
$$\begin{aligned} A_o &= Aux(0) / 2 \\ A_n &= Aux(n\omega_o) \end{aligned} \quad (2.51)$$

La funzione ausiliaria ci permette di capire meglio la relazione dello spettro con i parametri del segnale nel caso considerato in questo esercizio. In particolare aumentando l'ampiezza  $A$  degli impulsi si ottiene un aumento proporzionale di tutte le righe, in quanto si incrementa  $I$ . Aumentando il periodo la distanza fra le righe si riduce, e viceversa. Variando la durata degli impulsi si “muove” invece la posizione dei punti di nullo della funzione ausiliaria che ne delimitano i lobi. In particolare

diminuendo la durata il primo lobo aumenta, per cui definita come banda convenzionale quella del primo lobo (quella teorica è evidentemente infinita), si può dire che al diminuire della durata degli impulsi, aumenta il numero delle armoniche significative, e viceversa. Come caso particolare si noti che se la durata è pari a un semiperiodo (onda quadra non bilanciata) i punti di nullo della funzione ausiliaria coincidono con i multipli pari della pulsazione fondamentale, causando la scomparsa di tutte le righe di indice pari. Si noti infine che un'onda quadra bilanciata  $x'(t)$  (cioè con  $\max=A/2$  e  $\min=-A/2$ ) ha esattamente lo stesso spettro, tranne il coefficiente  $A_0$ , che si annulla; si ha infatti  $x'(t)=x(t)-A/2$ . Si noti, come verifica, che il coefficiente  $A_0$ , rappresentando il valor medio di  $x(t)$ , doveva essere per forza nullo nel caso di un'onda quadra bilanciata.

### **Trasformata di un impulso rettangolare**

Calcolare gli spettri di ampiezza e di fase di un impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $\tau$ .

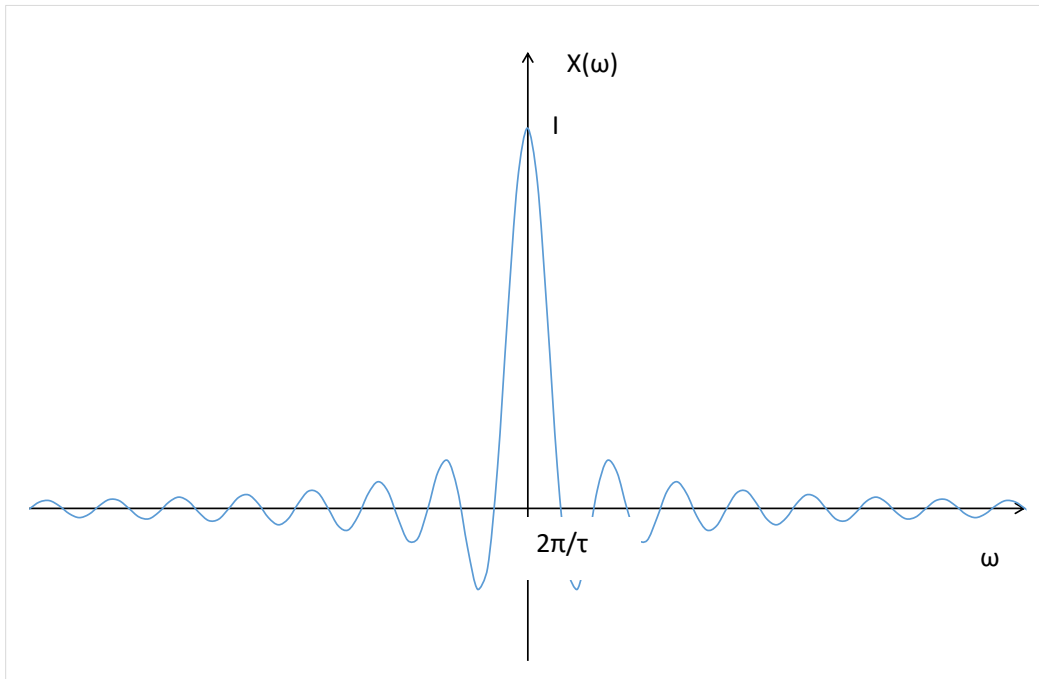


*Fig.15 Impulso rettangolare.*

Si osservi che si tratta ancora di una funzione reale pari, discreta nei valori e tempo-continua, ma di tipo aperiodico.

La sua trasformata secondo Fourier è espressa da:

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = A \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \\
 &= A \frac{e^{-j\omega \tau/2} - e^{j\omega \tau/2}}{-j\omega} = A \frac{-2j \operatorname{sen}(\omega \tau / 2)}{-j\omega} = \\
 &= A \tau \frac{\operatorname{sen}(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2} = I \frac{\operatorname{sen}(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2} = I \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2\pi}\right)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$



*Fig.16 Trasformata di un impulso rettangolare*

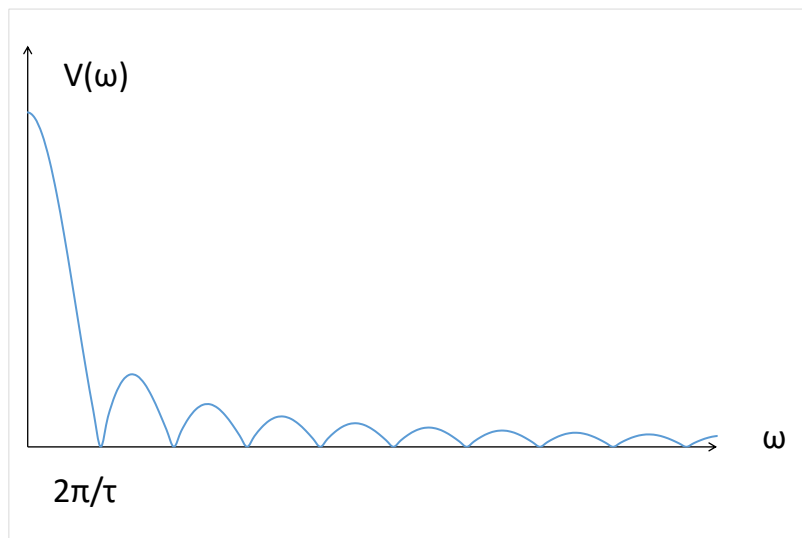
Si noti che il risultato ottenuto è reale, come ci si doveva aspettare, visto che la funzione  $x(t)$  oltre ad essere reale è pari. Conviene ricordare il risultato appena ottenuto, in quanto verrà utilizzato in varie parti del corso.

Ricordando le relazioni che definiscono gli spettri di ampiezza e di fase abbiamo:

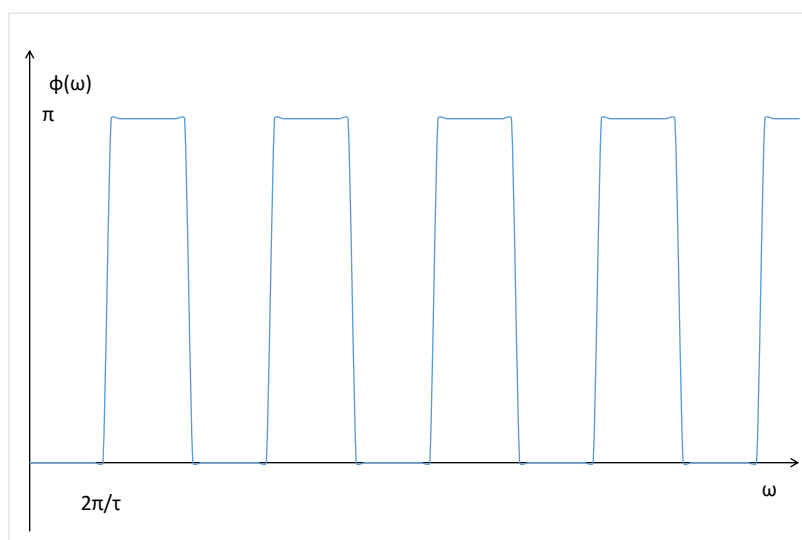
$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{I}{\pi} \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right| = \\ &= \frac{I}{\pi} \left| \text{sinc}(\omega\tau/2\pi) \right| \quad \omega \geq 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Si noti che è possibile scrivere  $X(\omega) < 0$  solo quando la trasformata è reale, come in questo caso. Quando è complessa occorre ricorrere alle formule generali per il calcolo dell'argomento di un numero complesso.



*Fig.17 Spettro (densità spettrale) di ampiezza di un impulso rettangolare*



*Fig.18 Spettro di fase di un impulso rettangolare.*

Si osservi che la banda di pulsazioni dell'impulso considerato è teoricamente infinita. In un certo ordine di approssimazione, è però sufficiente considerare un intervallo finito che, partendo da 0, comprenda un numero limitato di "lobi". In ogni caso, questa banda, convenzionalmente definita, aumenta al diminuire della durata dell'impulso.

Confrontando questo esercizio con quello precedente, si nota che l'esercizio precedente considera come segnale  $x(t)$  la ripetizione periodica, con periodo  $T$ , dell'impulso singolo considerato ora. Confrontando i risultati, cioè i coefficienti  $c_n$  trovati prima, e la  $X(\omega)$  trovata ora, abbiamo la seguente relazione:

$$c_n = \frac{1}{T} X(n\omega_o) \quad (2.55)$$

E' possibile dimostrare che questo risultato è di carattere generale, cioè non dipende dal fatto di aver considerato un impulso rettangolare come forma del segnale.

### **Trasformata di un'esponenziale bilatera**

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione reale

$$x(t) = A e^{-\frac{|t|}{t_o}} \quad t_o > 0 \quad (2.56)$$

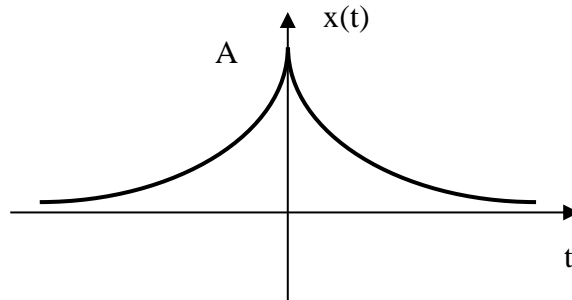


Fig.19 Esponenziale bilatera.

Si tratta di una funzione reale pari, questa volta continua nei valori, tempo-continua di tipo aperiodico. Dato che nell'espressione di  $x(t)$  compare un modulo, per eliminarlo conviene spezzare l'intervallo di integrazione in due parti, semiasse negativo e semiasse positivo,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{t/t_o} e^{-j\omega t} dt + A \int_0^{+\infty} e^{-t/t_o} e^{-j\omega t} dt = \quad (2.57)$$

Quindi si procede con semplici passaggi fino a determinare il risultato dei due integrali, che conviene tenere distinti in vista dell'esercizio successivo

$$\begin{aligned} &= A \int_{-\infty}^0 e^{t(1/t_o - j\omega)} dt + A \int_0^{+\infty} e^{t(-1/t_o - j\omega)} dt = \\ &= A \left[ \frac{e^{t(1/t_o - j\omega)}}{1/t_o - j\omega} \right]_{-\infty}^0 + A \left[ \frac{e^{t(-1/t_o - j\omega)}}{-1/t_o - j\omega} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{At_o}{1 - j\omega t_o} + \frac{At_o}{1 + j\omega t_o} = \end{aligned} \quad (2.58)$$

Per arrivare al risultato finale, anche questa volta reale essendo la funzione  $x(t)$  reale e pari.

$$= \frac{2At_o}{1 + \omega^2 t_o^2} \quad (2.59)$$

Poiché la trasformata trovata è sempre positiva, essa coincide con il suo modulo, cioè con lo spettro di ampiezza bilatero. La caratteristica di fase è, per gli stessi motivi, nulla.

La banda risulta teoricamente infinita; tuttavia, nell'ambito di un prefissato grado di approssimazione, può essere considerata finita. In qualunque modo venga scelta, essa cresce al diminuire di  $t_o$ , cioè della "durata" di  $x(t)$  (opportunamente definita in quanto trattasi di funzione di durata teoricamente infinita).

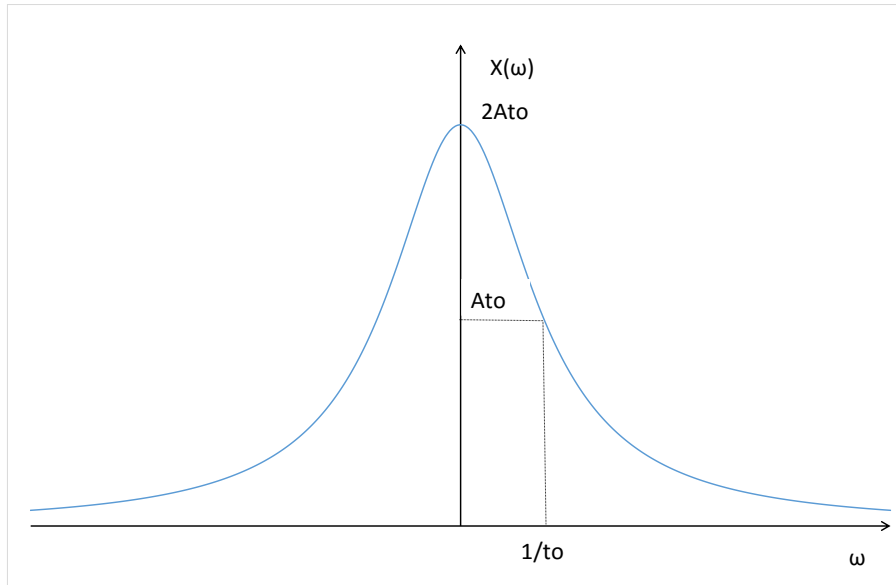


Fig.20 Trasformata di Fourier dell'esponenziale bilatera

### Trasformata di un'esponenziale monolatera

Calcolare la trasformata e gli spettri di ampiezza e fase monolateri della funzione reale:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{t_o}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

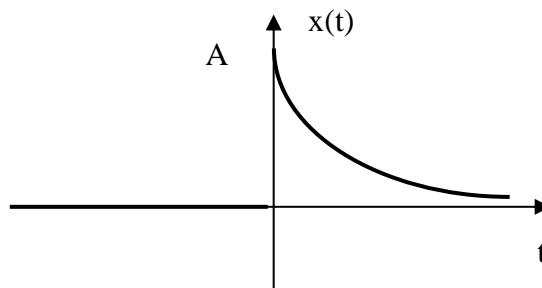


Fig.21 Esponenziale monolatera.

In questo caso la funzione è reale ma né pari né dispari. Ci si deve quindi aspettare una trasformata complessa, dotata di parte reale e di parte immaginaria. Il calcolo della trasformata è immediato in quanto l'espressione della trasformata coincide con il primo dei due integrali dell'esercizio precedente, quindi basta richiamare il risultato ottenuto.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{+\infty} e^{-t/t_o} e^{-j\omega t} dt = \frac{At_o}{1 + j\omega t_o} \quad (2.61)$$

Il risultato sopra (trasformata di un'esponenziale monolatera) sarà richiamato in seguito per il calcolo della risposta impulsiva di una rete RC.

Si procede quindi con il calcolo dello spettro (densità) di ampiezza monolatero

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{At_o}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t_o^2}} \quad \omega \geq 0 \quad (2.62)$$



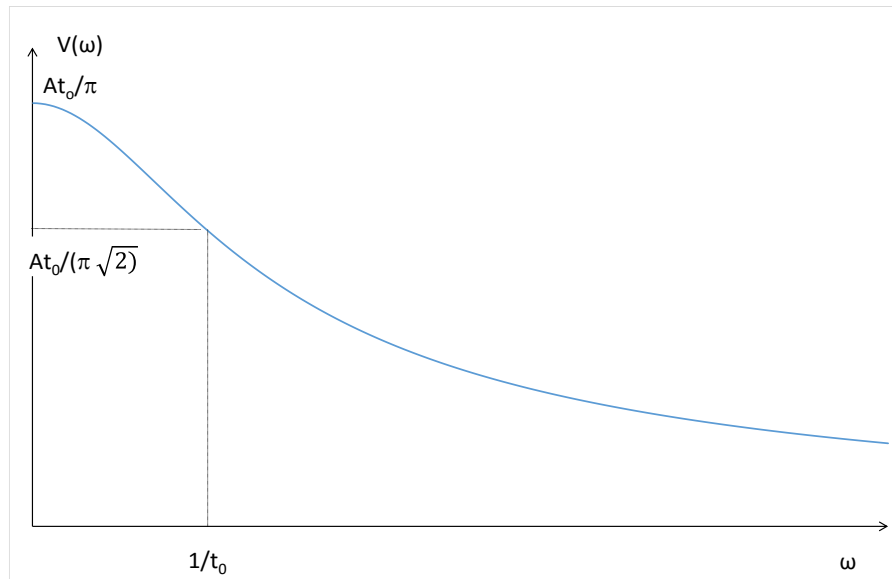


Fig.22 Spettro (densità spettrale) di ampiezza dell'esponenziale monolatero.

E quello di fase, sempre monolatero (si ricordi che l'argomento di un rapporto di numeri complessi è la differenza degli argomenti).

$$\varphi(\omega) = -\arg \{X(\omega)\} = -(0 - \arctg \omega t_o) = \arctg \omega t_o \quad (2.63)$$

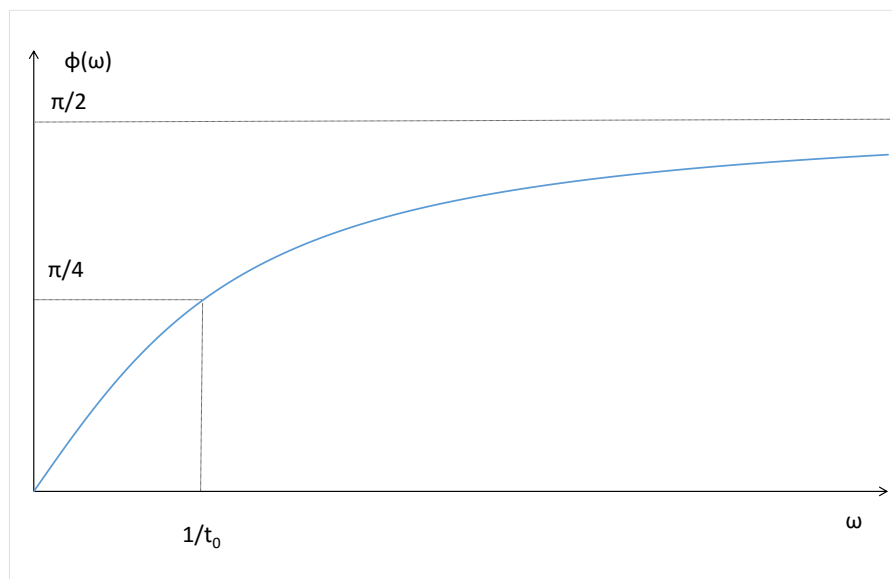


Fig.23 Spettro di fase dell'esponenziale monolatero.

### **Antitrasformata di un impulso nelle frequenze**

Calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$X(\omega) = \begin{cases} X_o & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad X_o > 0 \quad (2.64)$$

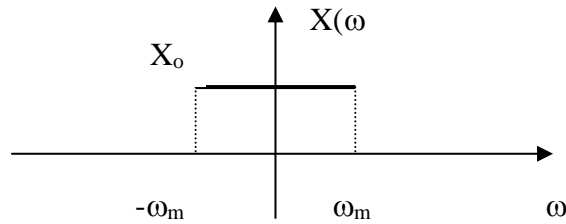


Fig.24 Impulso nelle frequenze.

Questa volta si procede dalle frequenze ai tempi,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{X_o}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{X_o}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\omega_m}^{+\omega_m} = \frac{X_o \omega_m}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_m t)}{\omega_m t} = x_o \frac{\text{sen}(\omega_m t)}{\omega_m t} = \\
 &= x_o \text{sinc}(\omega_m t / \pi)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Dove  $x_o = \frac{X_o \omega_m}{\pi}$ . Questo esercizio è il duale dell'impulso nei tempi e come tale è anche esso particolarmente importante. Data la dualità delle formule di trasformazione e di antitrasformazione (perfetta nelle f, a meno della costante  $\frac{1}{2\pi}$  nelle  $\omega$ ) il risultato poteva essere ottenuto per dualità (si noti che la “lunghezza” dell'impulso è qui  $2\omega_m$ ). In conclusione, ad un impulso rettangolare nei tempi corrisponde un sinc nelle frequenze; ad un impulso nelle frequenze corrisponde un sinc nei tempi.

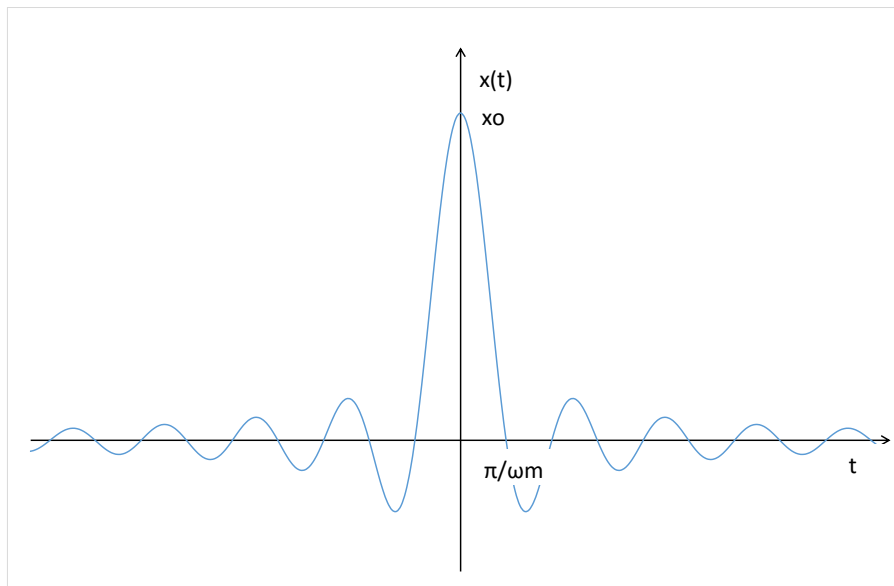


Fig.25 Antitrasformata di un impulso nelle frequenze.

Una semplice variante dell'esercizio si ha aggiungendo una caratteristica di fase proporzionale ad  $\omega$  alla trasformata dell'esercizio sopra.

$$X(\omega) = \begin{cases} X_o e^{-j\omega t_o} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad X_o > 0 \tag{2.66}$$

Il risultato è immediato, ricordando la trasformata di un segnale ritardato.

$$x(t) = x_o \frac{\text{sen}[\omega_m(t-t_o)]}{\omega_m(t-t_o)} = x_o \text{sinc}[\omega_m(t-t_o) / \pi] \quad (2.67)$$

Si osservi che la durata di  $x(t)$  è teoricamente infinita. In un certo ordine di approssimazione, è però sufficiente considerare un intervallo temporale finito che comprenda un numero limitato di "lobi". In ogni caso questa durata convenzionalmente definita aumenta al diminuire della banda  $\omega_m$ .

### **Trasformata del prodotto del segnale con una sinusoidale**

Dato un segnale  $x(t)$  dotato di trasformata  $X(\omega)$ , calcolare la trasformata  $S(\omega)$  della funzione:

$$s(t) = x(t) \cos \omega_o t \quad (2.68)$$

Si arriva facilmente al risultato esprimendo il coseno come somma di due esponenziali,

$\cos \omega_o t = \frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{2}$ , ed utilizzando questa formula per scrivere il segnale  $s(t)$  come somma di due termini

$$s(t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_o t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_o t} \quad (2.69)$$

Da qui applicando l'operatore di trasformazione ad entrambi i termini (la trasformata di Fourier è lineare, quindi la trasformata di una somma è la somma delle trasformate)

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega_o t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega_o t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_o)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega + \omega_o)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_o) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Il risultato finale è fondamentale nella teoria della modulazione ed in particolare nella modulazione lineare (a prodotto e AM). Prende anche il nome in quel contesto di teorema fondamentale della modulazione.

Si noti che la trasformazione di  $x(t)$  in  $s(t)$  rappresentata dalla moltiplicazione per  $\cos \omega_o t$ , nel caso in cui  $x(t)$  sia un segnale passa-basso con banda molto minore delle frequenza angolare del coseno (cioè  $\omega_o \gg \omega_m$ ), come avviene nella modulazione a prodotto (nel qual caso  $x(t)$  prende il nome di segnale modulante,  $\cos \omega_o t$  quello di oscillazione portante e  $s(t)$  di oscillazione modulata), determina una sostanziale modificazione delle caratteristiche spettrali dei segnali in gioco. Infatti  $s(t)$  risulterà una funzione passa-banda, con banda  $2\omega_m$  doppia rispetto al segnale passa-basso di partenza, con spettro centrato sulla frequenza  $\omega_o$ .

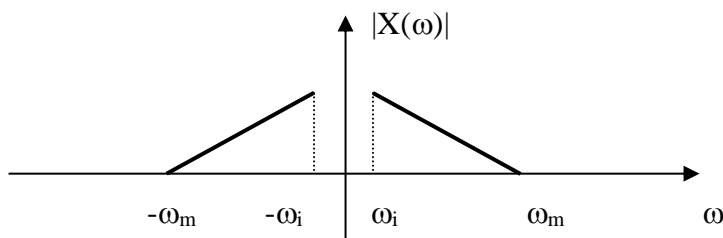


Fig.26 Spettro di ampiezza bilatero di  $x(t)$ .

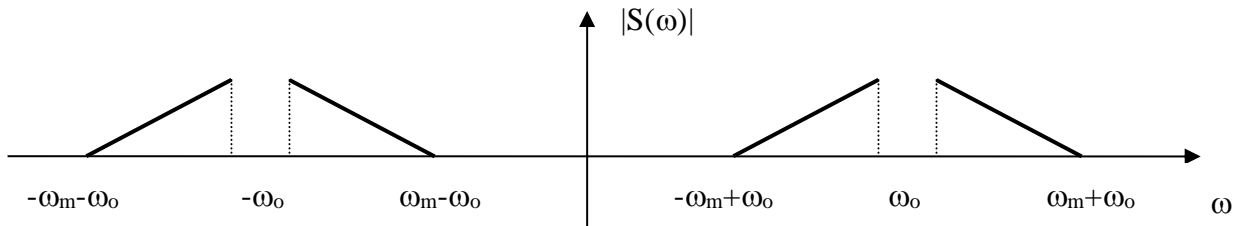


Fig.27 Spettro di ampiezza bilatero di  $s(t)$ .

Vedremo in seguito come per riottenere  $x(t)$  da  $s(t)$ , cioè per “demodulare”  $s(t)$ , si ricorrerà ad una seconda moltiplicazione per  $\cos \omega_o t$  (più un’operazione di “filtro” per rimuovere le componenti al di sopra della banda del segnale modulante  $x(t)$ ).

Un’altra importante applicazione del risultato trovato si ha nell’ambito dell’elaborazione del segnale. Infatti, quando si vuole calcolare sperimentalmente lo spettro di un segnale teoricamente di durata infinita, occorre necessariamente limitarlo nel tempo tramite il prodotto con un segnale “finestra”. In particolare se la finestra  $x(t)$  è l’impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $\tau$  visto negli esercizi precedenti,  $s(t)$  prende la forma di un tronco di senoide (una senoide “finestrata” temporalmente da una finestra rettangolare).

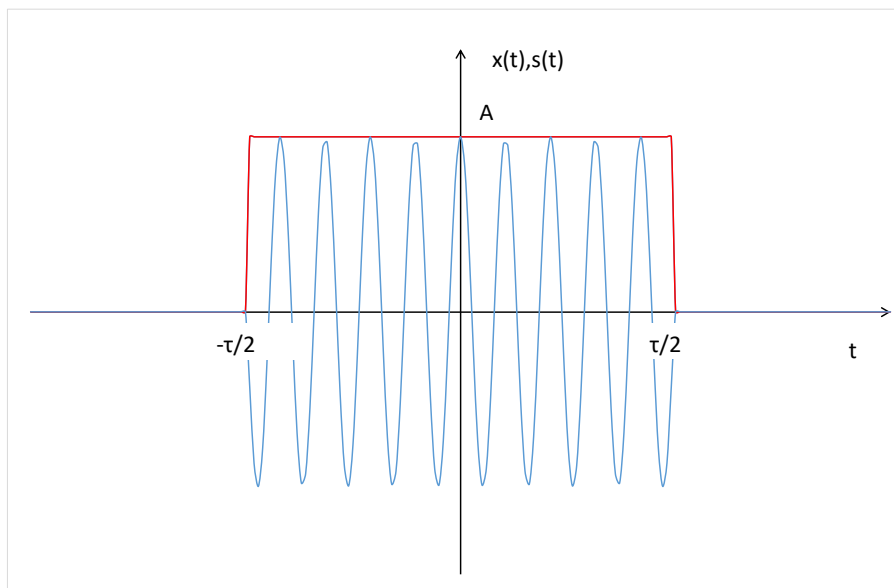
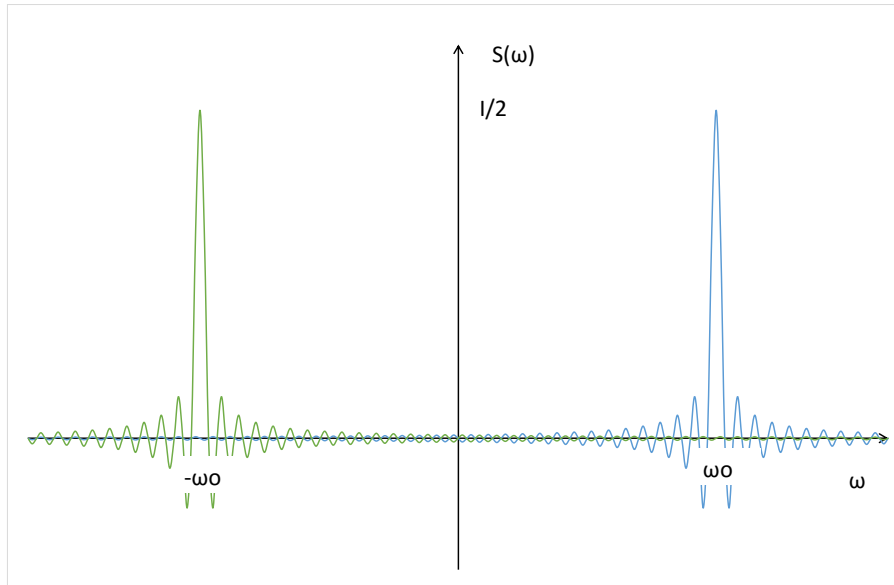


Fig.28 Tronco di senoide (senoide finestrata da una finestra rettangolare  $x(t)$ ).

La funzione  $S(\omega)$ , ricordando la trasformata di un impulso nei tempi vista in precedenza assume in questo caso l’espressione.

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_o) = \frac{I}{2} \text{sinc} \frac{(\omega - \omega_o)\tau}{2\pi} + \frac{I}{2} \text{sinc} \frac{(\omega + \omega_o)\tau}{2\pi} \quad (2.71)$$

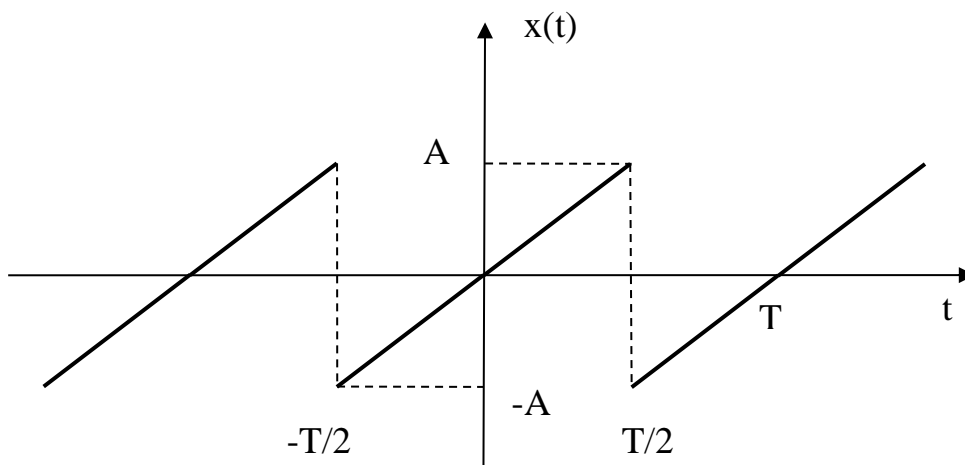


*Fig.29 Trasformata di un tronco di senoide*

Si noti che mentre lo spettro di ampiezza monolatero di una senoide è una riga, quello di un tronco di senoide risulta essere il modulo di un sinc! Tuttavia, la funzione sinc appena trovata, e quindi anche il suo modulo, assomiglierà sempre di più ad una riga all'aumento della durata della finestra, dato che l'ampiezza dei lobi è  $2\pi/\tau$ . Usando finestre di altro tipo (ad esempio triangolari, di Hamming, ecc..) varia naturalmente la rappresentazione nel dominio delle frequenze della senoide finestrata, in quanto variando la finestra  $x(t)$  varia il segnale  $s(t)$ . La scelta della finestra "migliore" dipende dalle circostanze. Questi argomenti, qui appena accennati, sono oggetto di una parte importante dell'elaborazione digitale del segnale, non trattata in questo corso. Tuttavia valeva la pena accennare alla cosa da un lato perché sapere di non sapere è già una forma di conoscenza, dall'altro perché conoscendo l'esistenza di argomento si può cercare una fonte per approfondirlo.

### ***Sviluppo in serie di un'onda a dente di sega bilanciata***

Calcolare gli spettri di ampiezza e di fase monolateri dell'onda a dente di sega bilanciata, fra  $-A$  ed  $A$ , riportata in figura.



*Fig.30 Onda a dente di sega bilanciata*

Si osservi che si tratta di una funzione reale continua nei valori, tempo-continua, dispari. Il segnale  $x(t)$  all'interno di un periodo è dato da un tronco di retta passante per l'origine:

$$x(t) = \frac{2A}{T}t \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (2.72)$$

Per determinare gli spettri monolateri, cioè i coefficienti  $A_n$  e  $\varphi_n$  si può procedere in due modi: nel primo passando dal calcolo dei coefficienti  $c_n$  della forma esponenziale, nel secondo, dal calcolo dei coefficienti  $b_n$  della serie dei seni della terza forma (essendo  $x(t)$  dispari, i coefficienti  $a_n$  della serie dei coseni sono nulli).

#### Soluzione tramite calcolo $c_n$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} t e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{2A}{T^2} \left[ \frac{t e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right]_{-T/2}^{+T/2} - \frac{2A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{e^{-jn\omega_0 T/2} + e^{jn\omega_0 T/2}}{-jn\omega_0} + \frac{2A}{jn\omega_0 T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T} \frac{2 \cos n\omega_0 T/2}{-jn\omega_0} = \frac{A}{T} \frac{2 \cos n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}}{-jn \frac{2\pi}{T}} = \\ &= j \frac{A}{n\pi} \cos n\pi = j \frac{A}{n\pi} (-1)^n \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Si noti che i coefficienti  $c_n$  sono in questo caso puramente immaginari anziché complessi. Questo è un risultato prevedibile perché la funzione  $x(t)$  è reale dispari.

Ricordando le relazioni che legano fra loro i coefficienti, gli spettri di ampiezza sono espressi da:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_n &= |2c_n| = \frac{2A}{n\pi} \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.74)$$

e quelli di fase da

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \text{ dispari} \\ -\frac{\pi}{2} & n \text{ pari} \end{cases} \quad (2.75)$$

#### Soluzione tramite calcolo $b_n$

Poiché la funzione  $x(t)$  è reale dispari, sono diversi da zero solo i coefficienti  $b_n$ .

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin n\omega_o t dt = \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} t \sin n\omega_o t dt = \\
 &= \frac{4A}{T^2} \left[ \frac{-t \cos n\omega_o t}{n\omega_o} \right]_{-T/2}^{+T/2} - \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{-\cos n\omega_o t}{n\omega_o} dt \\
 &= \frac{4A}{T^2} \left[ -\frac{T}{2} \frac{2 \cos n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}}{n \frac{2\pi}{T}} \right] = \\
 &= -\frac{2A}{n\pi} \cos n\pi \quad n \neq 0
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Ricordando le relazioni che legano fra loro i coefficienti, gli spettri di ampiezza sono espressi da:

$$\begin{aligned}
 A_o &= \frac{a_o}{2} = 0 \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{2A}{n\pi} \quad n \geq 1
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

e quelli di fase da

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & b_n > 0, n \text{ dispari} \\ -\frac{\pi}{2} & b_n < 0, n \text{ pari} \end{cases} \tag{2.78}$$

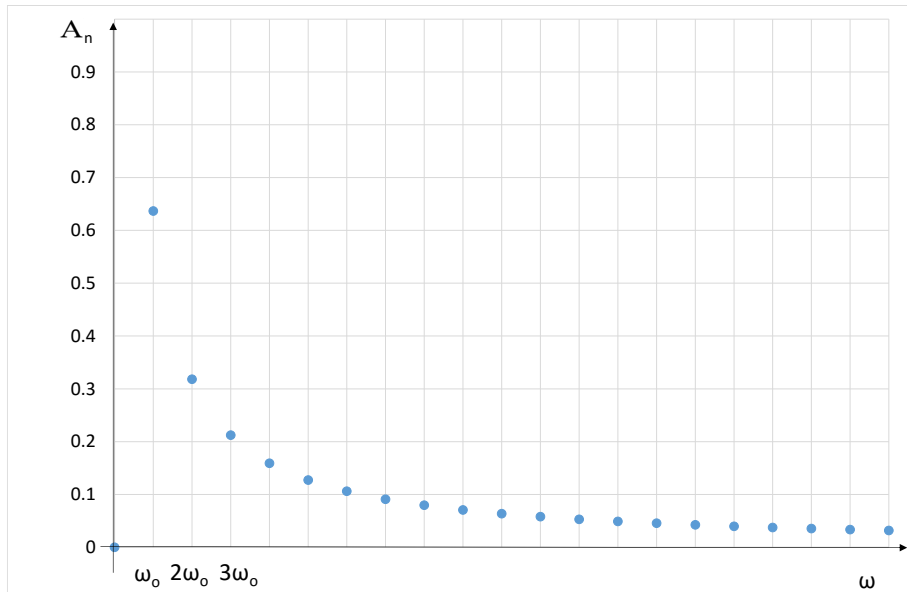


Fig.31 Spettro di ampiezza monolatero di un'onda a dente di sega (assunto A=1)



Fig.32 Spettro di fase monolatero di un'onda a dente di sega

### Sviluppo in serie di un'onda triangolare non bilanciata

Calcolare gli spettri di ampiezza e di fase monolateri dell'onda triangolare non bilanciata, riportata in figura.

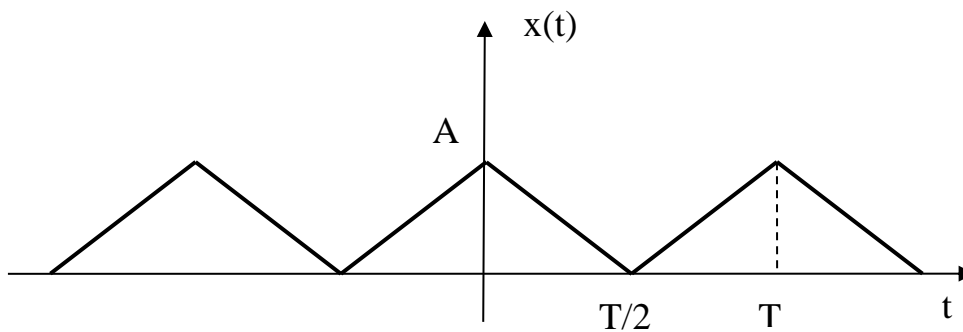


Fig.33 Onda triangolare non bilanciata

Si osservi che si tratta di una funzione reale continua nei valori, tempo-continua, pari. Il segnale  $x(t)$  all'interno di un periodo è dato da due tronchi di retta non passanti per l'origine. L'espressione sul semiperiodo positivo è data da

$$x(t) = A \left( 1 - \frac{2}{T} t \right) \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (2.79)$$

Quella sul semiperiodo negativo può essere determinata per parità.

Per determinare gli spettri monolateri, cioè i coefficienti  $A_n$  e  $\varphi_n$  si può procedere in due modi: nel primo passando dal calcolo dei coefficienti  $c_n$  della forma esponenziale, nel secondo, dal calcolo dei coefficienti  $a_n$  della serie dei coseni della terza forma (essendo  $x(t)$  pari, i coefficienti  $b_n$  della serie dei seni sono nulli). Qui conviene sicuramente il secondo metodo, perché il segnale  $x(t)$  ha due espressioni analitiche diverse nel semiperiodo negativo ed in quello positivo. Se usassimo il primo metodo dovremmo quindi spezzare in due l'integrale che esprime i coefficienti  $c_n$ , con un inutile raddoppio dei calcoli. Esaminiamo quindi direttamente il secondo metodo.



Soluzione tramite calcolo  $a_n$ 

Poiché la funzione  $x(t)$  è reale pari, sono diversi da zero solo i coefficienti  $a_n$ . Risulta inoltre evidente che il valor medio della funzione è  $A/2$ , quindi  $a_0=A$ . Per gli altri  $a_n$  si ha:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos n\omega_o t dt = \frac{4A}{T} \int_0^{+T/2} \left(1 - \frac{2}{T}t\right) \cos n\omega_o t dt = \\
 &= \frac{4A}{T} \int_0^{+T/2} \cos n\omega_o t dt - \frac{8A}{T^2} \int_0^{+T/2} t \cos n\omega_o t dt = \\
 &= 0 - \frac{8A}{T^2} \left[ \frac{t \sin n\omega_o t}{n\omega_o} \right]_0^{+T/2} + \frac{8A}{T^2} \int_0^{+T/2} \frac{\sin n\omega_o t}{n\omega_o} dt = \\
 &= -\frac{8A}{T^2} \left[ \frac{T}{2} \frac{\sin n \frac{2\pi T}{2}}{n \frac{2\pi}{T}} - 0 \right] - \frac{8A}{T^2} \left[ \frac{\cos n\omega_o t}{(n\omega_o)^2} \right]_0^{+T/2} = \\
 &= 0 - \frac{8A}{T^2} \frac{\cos n \frac{2\pi T}{2} - 1}{\left(n \frac{2\pi}{T}\right)^2} = \\
 &= -\frac{8A}{T^2} \frac{\cos n\pi - 1}{\left(n \frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{2A}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) = \\
 &= \frac{2A}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4A}{n^2 \pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Ricordando le relazioni che legano fra loro i coefficienti, gli spettri di ampiezza sono espressi da:

$$\begin{aligned}
 A_o &= \frac{a_o}{2} = \frac{A}{2} \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \begin{cases} \frac{4A}{n^2 \pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \quad n \geq 1
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

e quelli di fase da

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \text{non definita} & n \text{ pari} \end{cases} \quad n \geq 1 \tag{2.82}$$

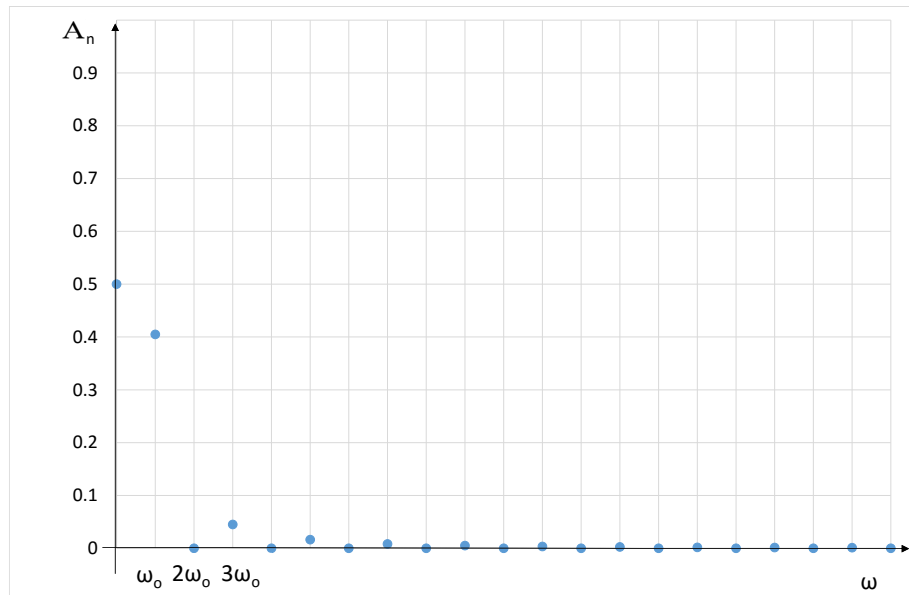


Fig.34 Spettro di ampiezza monolatero di un'onda triangolare (assunto  $A=1$ )

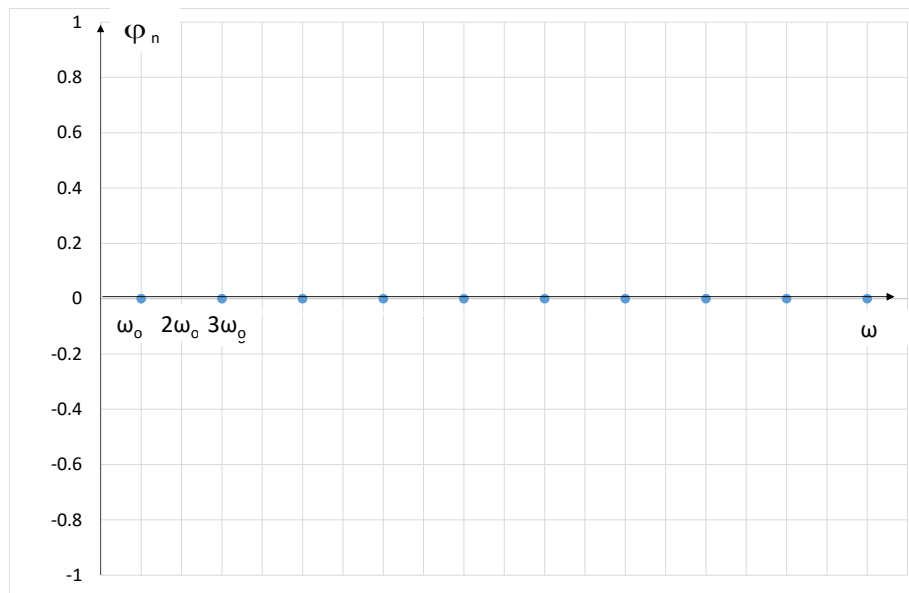


Fig.35 Spettro di fase monolatero di un'onda triangolare

### Sviluppo in serie del modulo di un coseno

Calcolare gli spettri di ampiezza e di fase monolateri del modulo di un coseno, riportato in figura.

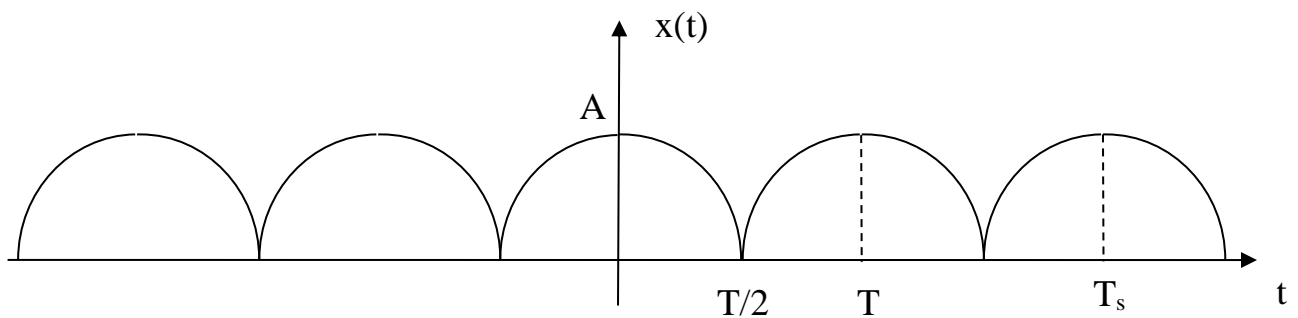


Fig.36 Modulo di un coseno

Si osservi che si tratta di una funzione tempo-continua e continua nei valori, reale e pari. Il segnale  $x(t)$  è dato da

$$x(t) = |A \cos \omega_s t| \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad (2.83)$$

Si noti che il periodo  $T$  di  $x(t)$  è la metà del periodo  $T_s$  della funzione coseno di partenza, cioè  $T = \frac{T_s}{2}$ , in quanto l'operazione di modulo rende indistinguibili i lobi positivi e quelli negativi del coseno. Per determinare gli spettri monolateri, cioè i coefficienti  $A_n$  e  $\varphi_n$  si può procedere in due modi: nel primo passando dal calcolo dei coefficienti  $c_n$  della forma esponenziale, nel secondo, dal calcolo dei coefficienti  $a_n$  della serie dei coseni della terza forma (essendo  $x(t)$  pari, i coefficienti  $b_n$  della serie dei seni sono nulli). Esaminiamo solo il secondo metodo.

### Soluzione tramite calcolo $a_n$

Poiché la funzione  $x(t)$  è reale pari, sono diversi da zero solo i coefficienti  $a_n$ . Si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos \omega_s t \cos n\omega_o t dt = \frac{4A}{T} \int_0^{+T/2} \cos \omega_s t \cos n\omega_o t dt = \\ &= \frac{2A}{T} \int_0^{+T/2} \cos(n\omega_o + \omega_s) t dt + \frac{2A}{T} \int_0^{+T/2} \cos(n\omega_o - \omega_s) t dt = \\ &= \frac{2A}{T} \int_0^{+T/2} \cos(2n+1)\omega_s t dt + \frac{2A}{T} \int_0^{+T/2} \cos(2n-1)\omega_s t dt = \\ &= \frac{2A}{T} \left[ \frac{\sin(2n+1)\omega_s t}{(2n+1)\omega_s} \right]_0^{T/2} + \frac{2A}{T} \left[ \frac{\sin(2n-1)\omega_s t}{(2n-1)\omega_s} \right]_0^{T/2} = \\ &= \frac{2A}{T} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi T}{2}}{(2n+1)\frac{\pi T}{2}} + \frac{2A}{T} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi T}{2}}{(2n-1)\frac{\pi T}{2}} = \\ &= \frac{2A}{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)} + \frac{2A}{\pi} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)} = \\ &= \frac{2A}{\pi} \frac{\cos n\pi}{(2n+1)} - \frac{2A}{\pi} \frac{\cos n\pi}{(2n-1)} = \\ &= \frac{2A}{\pi} \cos n\pi \left[ \frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n-1)} \right] \quad (2.84) \\ &= -\frac{4A}{\pi} \frac{\cos n\pi}{4n^2-1} = \frac{4A}{\pi(4n^2-1)} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Ricordando le relazioni che legano fra loro i coefficienti, gli spettri di ampiezza sono espressi da:

$$\begin{aligned} A_o &= \frac{a_o}{2} = \frac{2A}{\pi} \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{4A}{\pi(4n^2-1)} \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.85)$$

e quelli di fase da

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = -\arg\{a_n\} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \pi & n \text{ pari} \end{cases} \quad n \geq 1 \quad (2.86)$$

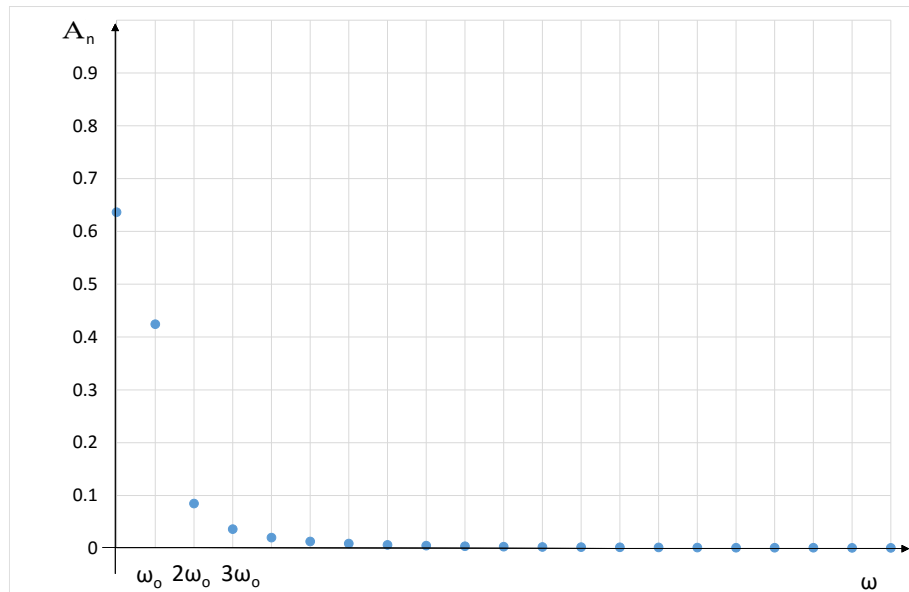


Fig.37 Spettro di ampiezza monolatero del modulo di una sinusoide (assunto  $A=1$ )

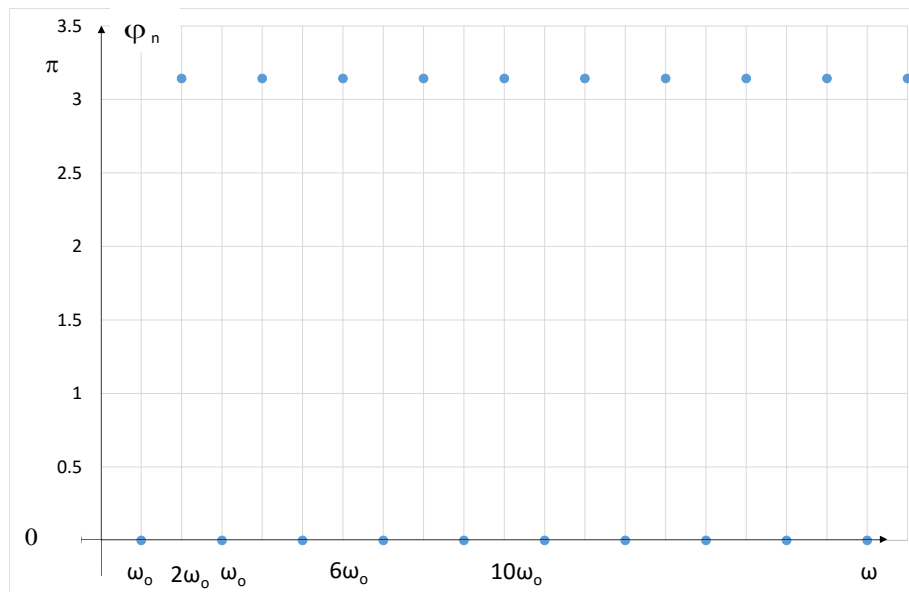


Fig.38 Spettro di fase monolatero del modulo di una sinusoide

### **Sviluppo in serie dei lobi positivi di un coseno**

Calcolare gli spettri di ampiezza e di fase monolateri del segnale che si ottiene prendendo i soli lobi positivi del coseno, riportato in figura.

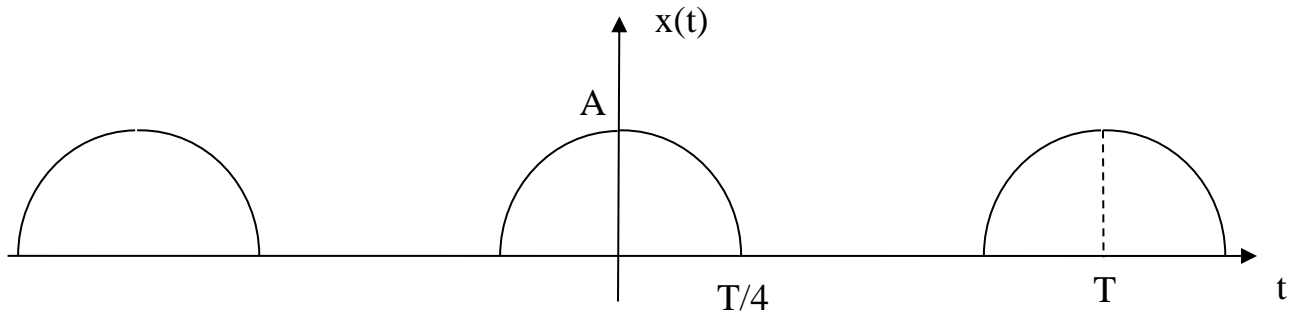


Fig.39 Lobi positivi di un coseno

Si osservi che si tratta di una funzione tempo-continua e continua nei valori, reale e pari. Il segnale  $x(t)$  su un periodo è dato da

$$x(t) = \begin{cases} A \cos \omega_o t & |t| \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} \leq |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \quad (2.87)$$

Si noti che diversamente dal caso precedente il periodo  $T$  di  $x(t)$  coincide con il periodo della funzione coseno di partenza. Per determinare gli spettri monolateri, cioè i coefficienti  $A_n$  e  $\varphi_n$  si può procedere in due modi: nel primo passando dal calcolo dei coefficienti  $c_n$  della forma esponenziale, nel secondo, dal calcolo dei coefficienti  $a_n$  della serie dei coseni della terza forma (essendo  $x(t)$  pari, i coefficienti  $b_n$  della serie dei seni sono nulli). Esaminiamo solo il secondo metodo.

#### Soluzione tramite calcolo $a_n$

Poiché la funzione  $x(t)$  è reale pari, sono diversi da zero solo i coefficienti  $a_n$ . Si ha:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2A}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} \cos \omega_o t \cos n \omega_o t dt = \frac{4A}{T} \int_0^{+T/4} \cos \omega_o t \cos n \omega_o t dt = \\
(*) &= \frac{2A}{T} \int_0^{+T/4} \cos(n+1) \omega_o t dt + \frac{2A}{T} \int_0^{+T/4} \cos(n-1) \omega_o t dt = \\
&= \frac{2A}{T} \left[ \frac{\sin(n+1) \omega_o t}{(n+1) \omega_o} \right]_0^{T/4} + \frac{2A}{T} \left[ \frac{\sin(n-1) \omega_o t}{(n-1) \omega_o} \right]_0^{T/4} = \\
&= \frac{2A}{T} \frac{\sin(n+1) \frac{2\pi T}{4}}{(n+1) \frac{2\pi}{T}} + \frac{2A}{T} \frac{\sin(n-1) \frac{2\pi T}{4}}{(n-1) \frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{\pi} \frac{\sin(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1)} + \frac{A}{\pi} \frac{\sin(n-1) \frac{\pi}{2}}{(n-1)} = \\
&= \frac{A}{\pi} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{(n+1)} - \frac{A}{\pi} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{(n-1)} = \\
&= -\frac{A \cos n \frac{\pi}{2}}{\pi} \left( \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n-1)} \right) \\
&= -\frac{2A}{\pi} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^2 - 1}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Si noti che per  $n=1$  si ha un'espressione  $0/0$ , per cui è necessario ricavarne il limite; più semplicemente basta notare che nel passaggio (\*), per  $n=1$  il primo integrale vale 0 ed il secondo  $A/2$ . Ricordando le relazioni che legano fra loro i coefficienti, gli spettri di ampiezza sono espressi da:

$$\begin{aligned}
A_o &= \frac{a_o}{2} = \frac{A}{\pi} \\
A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \begin{cases} A/2 & n=1 \\ \frac{2A}{\pi(n^2-1)} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \quad n > 1
\end{aligned} \tag{2.89}$$

e quelli di fase da

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = -\arg\{c_n\} = \begin{cases} 0 & n=1 \\ \text{non definita} & n \text{ dispari} \\ \pi & n=4i = 4, 8, 12, \dots \\ 0 & n=2(2i-1) = 2, 6, 10, \dots \end{cases} \quad i > 1, n \geq 1 \tag{2.90}$$

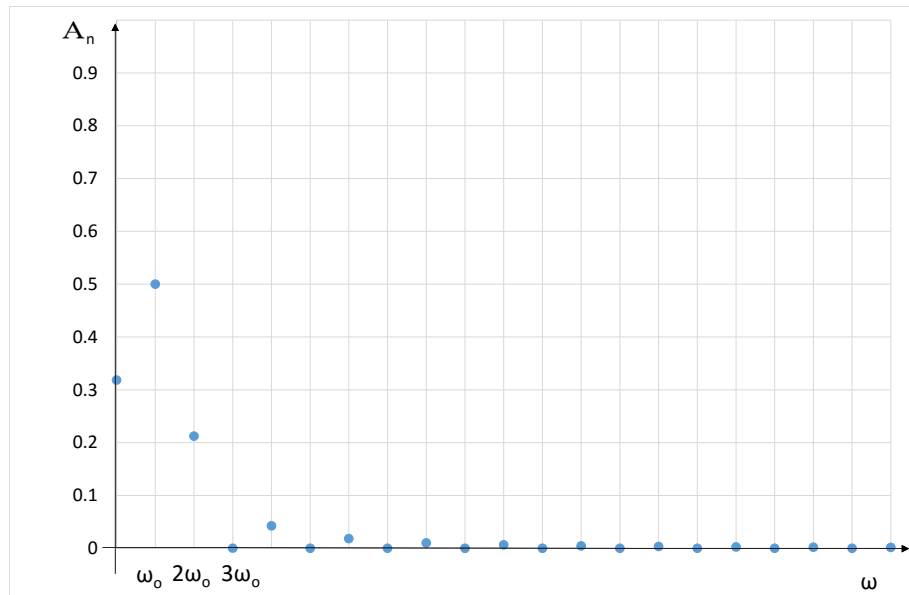


Fig.40 Spettro di ampiezza monolatero dei lobi positivi di una sinusoide (assunto  $A=1$ )

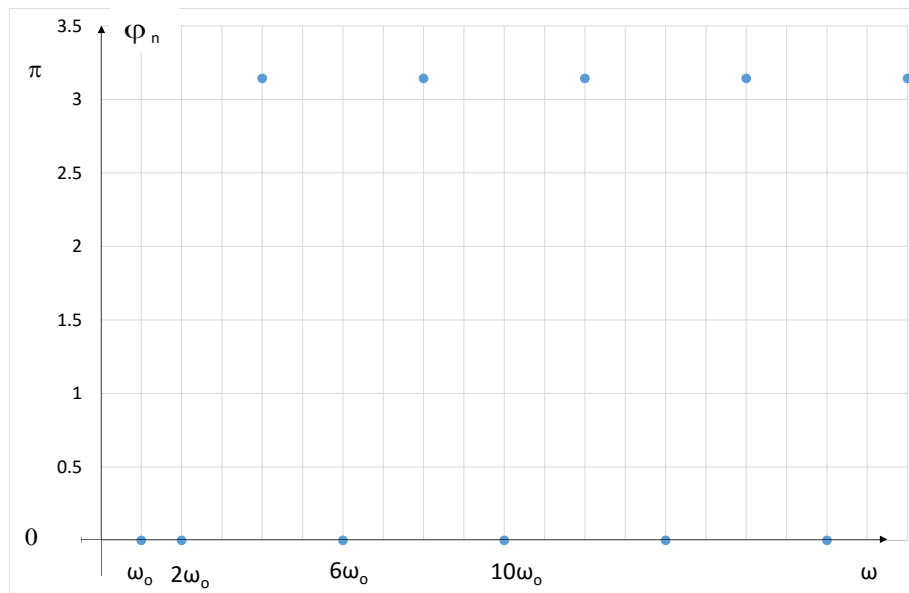


Fig.41 Spettro di fase monolatero dei lobi positivi di una sinusoide

## Capitolo 3 Trasformate al limite **Equation Section (Next)**

### La funzione generalizzata delta di Dirac

#### **Funzioni, funzionali e distribuzioni**

Prima di definire la delta di Dirac conviene ricordare le seguenti definizioni:

- funzione ordinaria: associa ad un numero un altro numero ed uno soltanto (ad esempio la funzione coseno);
- funzionale: associa ad una funzione un numero (ad esempio il valore medio);
- operatore associa ad una funzione un'altra funzione (ad esempio l'operatore derivata).

Ciò premesso le distribuzioni, o funzioni generalizzate, sono dei funzionali dotati delle proprietà di essere lineari e continui, operanti su delle funzioni dotate di particolari proprietà di regolarità dette funzioni di prova [5], [6]. Il numero che una distribuzione  $T$  associa alla funzione di prova  $\phi$  è indicato con  $\langle \phi, T \rangle$ . Si noti che  $\langle \cdot \rangle$  è lo stesso simbolo utilizzato normalmente per il prodotto scalare, o prodotto interno, di due funzioni ordinarie.

#### **Definizione**

La distribuzione delta di Dirac non è funzione ordinaria ma appartiene alla categoria delle distribuzioni, ovvero alle funzioni generalizzate. In particolare, data una funzione  $x(t)$  continua in  $t=0$  (funzione di prova), la distribuzione  $\delta$  associa ad essa il valore  $x(0)$ , ovvero campiona la funzione  $x(t)$  nell'origine

$$\langle x, \delta \rangle = x(0) \quad (3.1)$$

Analogamente si può definire la distribuzione  $\delta_{t_0}$  come la distribuzione che associa a  $x(t)$ , continua in  $t_0$ , il valore  $x(t_0)$ , ovvero che campiona la funzione in  $t_0$

$$\langle x, \delta_{t_0} \rangle = x(t_0) \quad (3.2)$$

Le definizioni ora date risultano utilissime per ricavare in modo rigoroso alcune fondamentali proprietà. Tuttavia, prima di procedere è necessario introdurre una diversa rappresentazione simbolica, utilitatissima in letteratura per la sua comodità, anche se intrinsecamente ambigua.

#### **Rappresentazione simbolica e valutazione come limite in senso integrale**

Il valore  $x(0)$  di una funzione  $x(t)$  continua nell'origine può essere ricavato anche facendo ricorso a famiglie di funzioni ausiliarie  $f_\Delta(t)$  per le quali vale la seguente espressione

$$x(0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f_\Delta(t) dt \quad (3.3)$$

Fra le famiglie di funzioni ausiliarie  $f_\Delta(t)$  la più semplice è l'impulso rettangolare di durata  $\Delta$  ed ampiezza  $1/\Delta$  (intensità unitaria), nel seguito indicato con  $D(t, \Delta)$ .

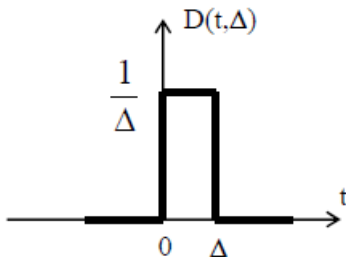


Fig.42 Funzione ausiliaria  $D(t, \Delta)$ .

Se vale la (3.3), si suole indicare



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_{\Delta}(t) \quad (3.4)$$

da interpretare non in senso ordinario, ma in senso integrale, ovvero sulla base della seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f_{\Delta}(t) dt \quad (3.5)$$

Al contrario, se il limite nella (3.4) fosse interpretato in senso ordinario, il primo membro della (3.5) si annullerebbe, mentre si deve avere

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt \quad (3.6)$$

Confrontando infine l'espressione sopra con la definizione di distribuzione delta si ha

$$\langle x, \delta \rangle = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt \quad (3.7)$$

La prima uguaglianza rappresenta la definizione della distribuzione  $\delta$ , la seconda un modo alternativo di ottenere il medesimo risultato, utile perché permette di operare con il simbolo  $\delta(t)$  in modo analogo ad una funzione ordinaria. Si noti inoltre la corrispondenza formale fra il simbolo  $\langle \rangle$  e l'integrale a destra, identico al prodotto interno di due funzioni. Nel seguito utilizzeremo entrambe le uguaglianze a seconda della convenienza.

Quanto detto si estende ovviamente anche alle distribuzioni delta ritardate, per le quali

$$\langle x, \delta_{t_o} \rangle = x(t_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_o) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f_{\Delta}(t - t_o) dt \quad (3.8)$$

## Alcune proprietà

### Parità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_o) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t_o - t) dt \quad (3.9)$$

### Dimostrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t_o - t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) D(t_o - t, \Delta) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{t_o - \Delta}^{t_o} x(t) dt = x(t_o) \quad (3.10)$$

### Convolutione

La funzione generalizzata delta rappresenta l'elemento neutro dell'integrale di convoluzione

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t) \quad (3.11)$$

### Dimostrazione

E' sufficiente sostituire  $t$  con  $\tau$  e quindi  $t_o$  con  $t$  nella (3.10)

Vale anche la seguente

$$x(t - t_o) = x(t) * \delta(t - t_o) \quad (3.12)$$

### **“Cambio di argomento”**

$$\delta(\alpha t) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|} \quad \alpha \neq 0 \quad (3.13)$$

#### Dimostrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\xi)}{|\alpha|} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t)}{|\alpha|} dt \quad (3.14)$$

La presente proprietà è utile nel passaggio dalle descrizioni nelle pulsazioni a quelle in frequenza, o viceversa, per le quali vale la seguente

$$\delta(\omega) = \delta(2\pi f) = \frac{\delta(f)}{2\pi} \quad (3.15)$$

### **Trasformata di Fourier**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.16)$$

Dall'espressione sopra deriva che la trasformata di una delta nell'origine dei tempi corrisponde ad una costante nel dominio delle frequenze.

#### Dimostrazione

Immediata dalla definizione di distribuzione, in quanto la funzione esponenziale campionata nell'origine vale 1.

Verifica

Si noti, come verifica, che lo stesso risultato poteva essere ottenuto utilizzando la funzione ausiliaria  $D(t, \Delta)$ . Ricordando che

$$F[D(t, \Delta)] = \frac{\sin \frac{\omega \Delta}{2}}{\frac{\omega \Delta}{2}} e^{-j \frac{\omega \Delta}{2}} \quad (3.17)$$

si ha

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} D(t, \Delta) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} F[D(t, \Delta)] = 1 \quad (3.18)$$

### **Gradino unitario**

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

#### Dimostrazione

La funzione  $U(t)$ , o gradino unitario è definita dalla seguente

$$U(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Poiché l'integrale di una funzione  $x(t)$  è dato dalla convoluzione della funzione stessa con la funzione gradino,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) U(t - \tau) d\tau = x(t) * U(t) \quad (3.21)$$

Sostituendo  $x(t)$  con  $\delta(t)$ , e ricordando che la Delta di Dirac è l'elemento neutro del prodotto di convoluzione, si ottiene immediatamente il risultato.

Una possibile dimostrazione alternativa si basa sull'introduzione della seguente funzione ausiliaria

$$aux(\tau, t) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases} \quad (3.22)$$

che permette di riscrivere la (3.19) in modo da avere di nuovo il limite superiore ad infinito, permettendo di dimostrare il risultato

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} aux(\tau, t) \delta(\tau) d\tau = aux(0, t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

### **Altre relazioni con le funzioni a gradino**

Operando formalmente sulla (3.19), come se rappresentasse un integrale ordinario si ottiene,

$$\frac{dU(t)}{dt} = \delta(t) \quad (3.24)$$

Si noti tuttavia che entrambi i membri sono da intendersi nel senso delle distribuzioni, ovvero che

$$\langle x(t), \frac{dU(t)}{dt} \rangle = \langle x(t), \delta(t) \rangle = x(0) \quad (3.25)$$

Per il gradino ritardato si ha:

$$U(t - t_o) = \int_{-\infty}^{t - t_o} \delta(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

$$\frac{dU(t - t_o)}{dt} = \delta(t - t_o) \quad (3.27)$$

Proprietà analoghe valgono anche per altri tipi di gradino, fra cui il gradino  $1(t)$

$$1(t) = \begin{cases} +\frac{1}{2} & 0 < t \\ -\frac{1}{2} & 0 > t \end{cases} = U(t) - \frac{1}{2} \quad (3.28)$$

e la funzione segno

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t \\ -1 & 0 > t \end{cases} = 2 U(t) - 1 = 2 \cdot 1(t) \quad (3.29)$$

### **Trasformata di Fourier di funzioni periodiche**

La trasformata di Fourier di funzioni periodiche non esiste nell'ambito delle funzioni ordinarie, mentre esiste lo sviluppo in serie di Fourier. Sarebbe tuttavia utile, per non dovere duplicare ogni dimostrazione, poter definire una trasformata di Fourier anche per le funzioni periodiche. Ciò è possibile utilizzando le distribuzioni, o funzioni generalizzate, ed in particolare la distribuzione  $\delta$ . La trattazione può essere fatta utilizzando sia le pulsazioni che le frequenze, tuttavia quest'ultima è spesso preferita nella redazione di tabelle riassuntive di trasformate notevoli perché consente una maggiore simmetria dei risultati.

**Trasformate nelle frequenze anziché nelle pulsazioni**

Dato che in letteratura vengono utilizzate sia le rappresentazioni nelle pulsazioni che nelle frequenze, conviene avere un minimo di familiarità con entrambe. A questo scopo si ricordano le definizioni di trasformata nelle frequenze (indicata qui con un pedice  $f$ ) ed antitrasformata

$$\begin{aligned} X_f(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_f(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (3.30)$$

Vale la seguente relazione fra trasformate nelle frequenze e trasformate nelle pulsazioni

$$X_f(f) = X(2\pi f) = X(\omega) \quad (3.31)$$

Le formule nelle frequenze sono usatissime, in particolare nei testi di Comunicazioni Elettriche, per cui è necessario conoscere anche esse (basta ricordarsi la mancanza della costante). La preferenza è dovuta anche alla perfetta simmetria delle due formule che permette di dimostrare appunto per simmetria diverse proprietà. In ogni caso la differenza non è sostanziale.

**Trasformate elementari**

La trasformata di una costante nei tempi è una delta nell'origine delle frequenze. La trasformata di un esponenziale nei tempi è una delta ritardata. Utilizzando le frequenze si ha:

$$\begin{aligned} F_f[1] &= \delta(f) \\ F_f[e^{j2\pi f_o t}] &= \delta(f - f_o) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Queste proprietà non sono ottenute in modo diretto, applicando la trasformata al primo membro, ma in maniera inversa, cioè inserendo i secondi membri nelle formule di antitrasformazione:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_o) e^{j2\pi ft} df &= e^{j2\pi f_o t} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Allo stesso modo utilizzando le pulsazioni si ha

$$\begin{aligned} F[1] &= 2\pi\delta(\omega) \\ F[e^{j\omega_o t}] &= 2\pi\delta(\omega - \omega_o) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega &= 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o) e^{j\omega t} d\omega &= e^{j\omega_o t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si noti che le (3.34) potevano essere dedotte immediatamente dalle (3.32) utilizzando la (3.15), e viceversa. Dalla conoscenza delle trasformate elementari si possono ricavare immediatamente le trasformate dei segnali periodici, per cui ci limitiamo a riportare i risultati.

**Trasformata di un segnale sviluppabile in serie di Fourier**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad (3.36)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_o) \quad (3.37)$$

$$X_f(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_o) \quad (3.38)$$

### **Trasformata del coseno**

$$\cos \omega_o t = \frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{2} \quad (3.39)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega_o) 2\pi + \frac{1}{2} \delta(\omega + \omega_o) 2\pi \quad (3.40)$$

$$X_f(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_o) + \frac{1}{2} \delta(f + f_o) \quad (3.41)$$

### **Trasformata del seno**

$$\sin \omega_o t = \frac{e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t}}{2j} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2j} \delta(\omega - \omega_o) 2\pi - \frac{1}{2j} \delta(\omega + \omega_o) 2\pi = \\ &= -j \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega_o) 2\pi + j \frac{1}{2} \delta(\omega + \omega_o) 2\pi \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$X_f(f) = -j \frac{1}{2} \delta(f - f_o) + j \frac{1}{2} \delta(f + f_o) \quad (3.44)$$

### **Trasformata di Fourier delle funzioni gradino**

A partire dalla trasformata del gradino  $1(t)$  (formula non dimostrata)

$$F[1(t)] = \frac{1}{j\omega} \quad (3.45)$$

Dalle definizioni di  $U(t)$  e  $\text{sign}(t)$  segue

$$F[U(t)] = \frac{1}{j\omega} + \frac{2\pi \delta(\omega)}{2} \quad (3.46)$$

$$F[\text{sign}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad (3.47)$$

Analogamente per le trasformate nelle frequenze si ha (basta sostituire come al solito

$$\delta(\omega) = \frac{\delta(f)}{2\pi}).$$

$$F_f[1(t)] = \frac{1}{j2\pi f} \quad (3.48)$$

$$F_f[U(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \quad (3.49)$$

$$F_f[\text{sign}(t)] = \frac{1}{j\pi f} \quad (3.50)$$

### **Trasformata di Fourier di un integrale**

Poiché

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) U(t-\tau) d\tau = x(t) * U(t) \quad (3.51)$$

Trasformando il prodotto di convoluzione e facendo uso della (3.46) si ottiene dalla l'espressione generale della trasformata di un integrale,

$$Y(\omega) = X(\omega) F[U(t)] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \frac{2\pi\delta(\omega)X(0)}{2} = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \frac{2\pi\delta(\omega)X(0)}{2} \quad (3.52)$$

Si noti che l'espressione sopra si riduce alla nota  $Y(\omega) = X(\omega) / j\omega$  per  $X(0)=0$ . Analogamente per le trasformate in frequenza si ha:

$$Y_f(f) = \frac{X_f(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)X_f(0)}{2} \quad (3.53)$$

## Capitolo 4 **Analisi di Fourier di segnali tempo-discreti** Equation Section (Next)

### Trasformata di Fourier di serie temporali

#### **Serie temporali**

Le funzioni tempo discrete sono anche chiamate serie temporali (se formate da un numero infinito di termini) od anche successioni o sequenze temporali. Esse possono rappresentare segnali che hanno già origine in tale forma oppure essere ottenute da una funzione tempo continua mediante lettura dei valori da essa assunti in istanti che si succedono con un intervallo  $T$  (vedi Fig.43). Questa operazione è detta campionamento e la corrispondente funzione tempo discreta è anche chiamata funzione campionata.

Consideriamo ora la serie temporale

$$\{x_n\} = \{\dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} \quad (4.1)$$

i cui elementi si succedono con intervallo  $T$  sull'asse dei tempi e possono essere sia continui che discreti nei valori.

#### **Trasformata di Fourier di una serie**

In modo analogo a quanto fatto per le funzioni tempo continue, sotto opportune condizioni, si può definire la trasformata di Fourier della serie temporale mediante la seguente relazione:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T} \quad (4.2)$$

Si noti il pedice  $s$ , che serve ad indicare che la trasformata in questione è trasformata di una serie e non di una funzione tempo continua. La formula di antitrasformazione, che dalla trasformata  $X_s(\omega)$  permette di ritornare agli elementi  $x_n$  della serie è la seguente:

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X_s(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Per la dimostrazione si noti come prima cosa che la trasformata  $X_s(\omega)$  è funzione periodica con periodo  $\omega_p = 2\pi/T$  (si noti che questa volta la funzione periodica non è nei tempi, come di solito in questo corso, ma nelle pulsazioni!).

$$X_s(\omega) = X_s(\omega + \omega_p) \quad (4.4)$$

Essa può essere espressa mediante uno sviluppo in serie di Fourier di tipo esponenziale. A tale scopo occorre prestare la massima attenzione al significato dei simboli, in quanto la funzione periodica è in  $\omega$  e non in  $t$ .

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\frac{2\pi}{\omega_p}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\frac{2\pi}{T}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\omega T} \quad (4.5)$$

$$c_n = \frac{1}{\omega_p} \int_{-\frac{\omega_p}{2}}^{+\frac{\omega_p}{2}} X_s(\omega) e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_p}\omega} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X_s(\omega) e^{-jn\omega T} d\omega \quad (4.6)$$

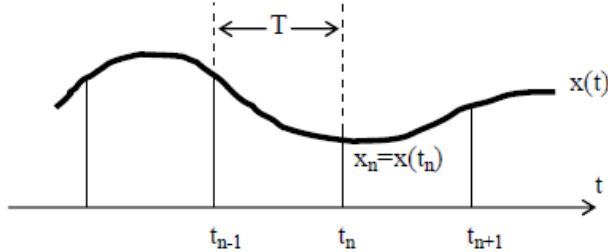
Confrontando l'espressione sopra dello sviluppo in serie con la definizione di trasformata segue che:

$$x_n = c_{-n} \quad (4.7)$$

Da cui si ottiene immediatamente l'espressione dell'antitrasformata.

### **Serie temporali ottenute per campionamento**

L'operazione di campionamento consiste nel leggere i valori di una funzione tempo continua ad intervalli regolari.



*Fig.43 Campionamento di una funzione tempo continua*

I valori  $x_n = x(t_n)$  sono detti valori campionati, gli istanti di lettura  $t_n$  istanti di campionamento, l'intervallo costante  $T$  che li separa è detto intervallo di campionamento e il suo inverso,  $1/T = f_o$ , frequenza di campionamento.

Senza ledere la generalità possiamo porre  $t_n = nT$  (a tal fine basta assumere l'origine dei tempi in uno degli istanti di campionamento) ottenendo la seguente serie temporale:

$$x_n = x(nT) \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Fra la trasformata  $X_s(\omega)$  della serie e la trasformata  $X(\omega)$  della funzione campionata vale la seguente importantissima relazione, che lega la trasformata della serie alla ripetizione periodica della trasformata del segnale

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_o) \quad (4.9)$$

La dimostrazione si basa sulla “doppia natura” dei campioni ed in particolare sul confronto fra le due seguenti formule di antitrasformazione. In quanto elementi di una serie gli  $x_n$  possono essere espressi come antitrasformata della trasformata della serie:

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X_s(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad (4.10)$$

In quanto valori di una funzione tempo continua, come antitrasformata della trasformata della funzione tempo continua, calcolata al tempo  $nT$ :

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad (4.11)$$

La dimostrazione procede manipolando la formula sopra allo scopo di rendere il più possibile simile l'integrale che in essa compare a quello presente nella formula precedente.

Spezziamo l'intervallo di integrazione su tutto l'asse delle pulsazioni in infiniti intervalli, ognuno dei quali di ampiezza pari all'intervallo di integrazione della prima formula, cioè  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ :

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T} + k\omega_o}^{+\frac{\pi}{T} + k\omega_o} X(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad (4.12)$$



Si effettua quindi per ognuno degli infiniti integrali il cambiamento di variabile  $\xi = \omega - k\omega_0$ , ottenendo una somma di integrali tutti definiti sullo stesso intervallo di integrazione:

$$\begin{aligned} x(nT) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X(\xi + k\omega_0) e^{j\xi nT} e^{jk\omega_0 nT} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X(\xi + k\omega_0) e^{j\xi nT} d\xi \end{aligned} \quad (4.13)$$

Infine, chiamando nuovamente  $\omega$  la variabile di integrazione, e portando la sommatoria all'interno dell'integrale scriviamo:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0) e^{j\omega nT} d\omega \quad (4.14)$$

Dal confronto dell'espressione ottenuta con la formula di antitrasformazione di una serie, che valgono qualunque sia l'intero  $n$ , discende l'uguaglianza che si voleva appunto dimostrare.

### **Teorema del campionamento nel dominio dei tempi (Shannon et alii)**

Il campionamento trasforma un segnale tempo continuo in un segnale tempo discreto, cioè una serie temporale. Poniamoci ora il problema se e quando la conoscenza dei soli valori campionati è equivalente a quella dell'intero segnale tempo continuo, cioè se e quando il campionamento è reversibile. Se non formuliamo alcuna condizione, la risposta è evidentemente negativa in quanto esistono infinite funzioni che negli istanti  $nT$  possono assumere i valori campionati  $x_n$ . Se ne deve quindi dedurre che in generale l'operazione di campionamento è irreversibile, in quanto, sempre in generale, non è possibile ricostruire la funzione campionata dalla conoscenza dei suoi campioni. Questo tuttavia non vale sempre, come si può vedere passando al dominio delle frequenze. Con riferimento alla Fig.44, si noti che dai valori campionati si può passare alla conoscenza della loro trasformata  $X_s(\omega)$ , che equivale alla conoscenza della ripetizione periodica di  $X(\omega)$  con periodo di ripetizione  $\omega_0$  (pulsazione corrispondente alla frequenza di campionamento).

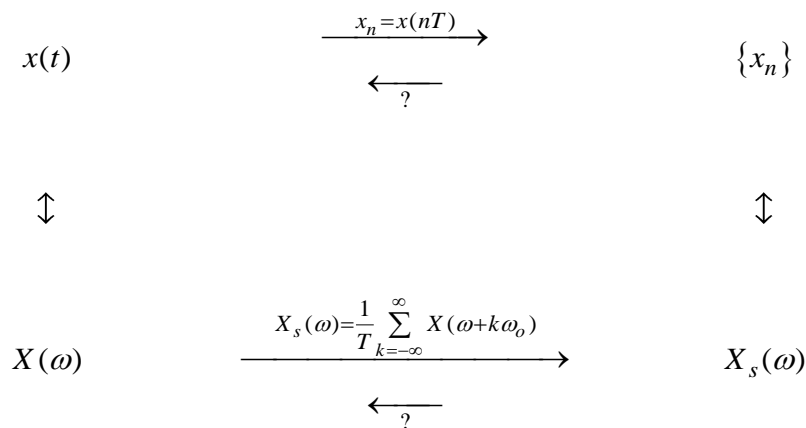


Fig.44 Possibile reversibilità dell'operazione di campionamento.

Come si vede dalla figura, se fosse possibile passare dalla ripetizione periodica a  $X(\omega)$ , da questa si potrebbe risalire a  $x(t)$  antitrasformando. La domanda quindi diventa: è possibile risalire dalla ripetizione ad  $X(\omega)$ ? In generale no, ma, se i termini sono non sovrapposti certamente sì.

Per procedere consideriamo il caso di una funzione passa-basso, con la massima pulsazione a cui è apprezzabile lo spettro di  $x(t)$  pari a  $\omega_m$ . Un generico andamento di  $X(\omega)$ , in modulo, è dato nella figura sotto (l'andamento scelto, di tipo triangolare, è del tutto arbitrario).



### **Sviluppo in serie di Shannon**

Sotto la condizione sufficiente del teorema di Shannon,  $\omega_o > 2\omega_m$ , vogliamo ora esprimere  $x(t)$  in funzione dei suoi valori campionati  $x(nT)$ .

A tal fine, ricordando che la trasformata della serie equivale alla ripetizione periodica della trasformata del segnale, a meno di una costante moltiplicativa, e scegliendo la frequenza di Nyquist, cioè  $\omega_o / 2$ , per isolare il termine centrale della ripetizione, abbiamo

$$X(\omega) = \begin{cases} TX_s(\omega) & |\omega| < \omega_o / 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.15)$$

L'espressione sopra deve essere inserita nella formula di antitrasformazione del segnale  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.16)$$

Quindi, ricordando la definizione di trasformata di Fourier di una serie, sostituendo, e scambiando l'ordine di serie ed integrale, si ottiene

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} e^{j\omega t} e^{-jn\omega T} d\omega \quad (4.17)$$

Da cui con semplici passaggi (si veda l'esercizio sull'antitrasformata dell'impulso nelle frequenze) si arriva allo sviluppo in serie di Shannon.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (4.18)$$

La formula sopra prende il nome di sviluppo in serie di Shannon o Whittaker-Shannon. Esso permette di risalire analiticamente dalla conoscenza dei campioni alla conoscenza di  $x(t)$ , per qualsiasi  $t$ , cioè su tutto l'asse dei tempi. Ovviamente la formula sopra vale solo se è rispettata la condizione  $\omega_o > 2\omega_m$ .

Ricordando l'esercizio sull'antitrasformata dell'impulso nelle frequenze si può ricavare che le funzioni  $\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$  hanno banda  $\left[0, \frac{\omega_o}{2}\right]$ . Inoltre è possibile dimostrare che esse sono ortogonali.

Quindi lo sviluppo in serie di Shannon rappresenta uno sviluppo di  $x(t)$  in serie di funzioni ortogonali i cui coefficienti sono gli stessi valori campionati  $x(nT)$ . Tale interpretazione è resa possibile dalla scelta della metà della pulsazione di campionamento per isolare il termine centrale.

È importante sottolineare che il teorema del campionamento nel dominio dei tempi consente di sostituire ad una funzione tempo-continua una serie temporale conservando tutto il contenuto informativo originario. L'operazione di campionamento, eseguita nel rispetto delle ipotesi di tale teorema, costituisce, come vedremo, il primo passo per la conversione di un segnale analogico in forma numerica (conversione analogico/digitale o conversione A/D).

### **Alcune proprietà della trasformata di una serie temporale**

#### Serie ritardata

Se  $F[\{x_n\}] = X_s(\omega)$ , allora

$$F[\{x_{n-m}\}] = X_s(\omega) e^{-jomT} \quad (4.19)$$

Si noti che la formula è la stessa delle funzioni tempo continue dato che a  $m$  posizioni corrisponde il ritardo  $mT$ .

### Convoluzione fra serie temporali

Date due serie temporali  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  la loro convoluzione definisce una nuova serie temporale  $\{z_n\}$  i cui termini sono espressi da:

$$z_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_{n-i} \quad (4.20)$$

Anche in questo caso l'analogia con il caso tempo continuo è ampia (basta sostituire una sommatoria in  $i$  all'integrale in  $\tau$ ).

La trasformata del prodotto di convoluzione è come nel caso continuo data dal prodotto delle trasformate:

$$Z_s(\omega) = X_s(\omega)Y_s(\omega) \quad (4.21)$$

La dimostrazione è la stessa del caso tempo continuo, cambia solo la notazione:

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_{n-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} Y_s(\omega) e^{j(n-i)\omega T} d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} Y_s(\omega) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i e^{-ji\omega T} e^{jn\omega T} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} Y_s(\omega) X_s(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \end{aligned} \quad (4.22)$$

### Convoluzione fra una serie temporale ed una funzione tempo-continua

Data la serie temporale  $\{x_n\}$  e la funzione tempo-continua  $g(t)$ , la loro convoluzione definisce una funzione tempo continua espressa da:

$$y(t) = \{x_n\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT) \quad (4.23)$$

La trasformata del prodotto di convoluzione è al solito il prodotto delle trasformate:

$$Y(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) \quad (4.24)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - nT) e^{-j\omega t} dt = \\ &= G(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega nT} = G(\omega) X_s(\omega) \end{aligned} \quad (4.25)$$

### **Trasformata di un segnale PAM ottenuto da una serie di campioni**

Si consideri la successione di impulsi rettangolari ottenuta campionando una funzione tempo-continua  $x(t)$  con intervallo  $T$  e mantenendo i valori campionati per un intervallo  $\tau$  con  $\tau < T$ .

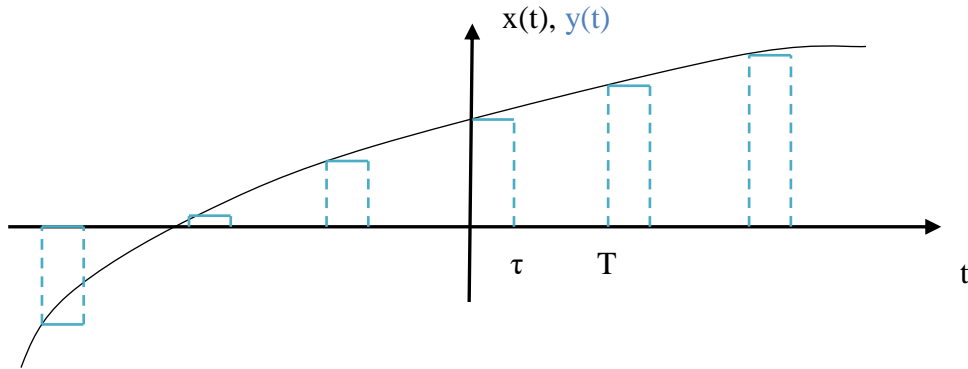


Fig.48 Segnale PAM derivato da una funzione campionata.

La successione di impulsi in esame, aventi intervallo di ripetizione e durata costanti, ma ampiezze variabili, costituisce una successione di impulsi modulata in ampiezza e viene denominata segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation). Non si confonda questo tipo di segnale con le modulazioni di ampiezza di portante sinusoidale che verranno esaminate in altra parte del corso.

Il segnale PAM in questione può essere visto come convoluzione fra la serie temporale  $\{x_n\}$  e l'impulso rettangolare  $g(t)$ , di ampiezza unitaria e durata  $\tau$ .

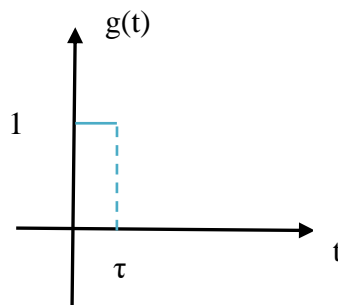


Fig.49 Impulso  $g(t)$

Si ha infatti:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT) = \{x_n\} * g(t) \quad (4.26)$$

Poiché l'operatore trasformata di Fourier trasforma i prodotti di convoluzione in prodotti semplici e ricordando il legame fra trasformata di una serie ottenuta per campionamento e trasformata della funzione campionata si ottiene

$$Y(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0)G(\omega) \quad (4.27)$$

Si noti infine che per esprimere la trasformata  $G(\omega)$  basta ricordare l'esercizio sulla trasformata di un impulso rettangolare ed osservare che ora l'impulso  $g(t)$  è centrato sull'istante  $\tau/2$  anziché sull'origine, cioè è ritardato di  $\tau/2$  (dal ritardo deriva il termine esponenziale):

$$G(\omega) = \tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \quad (4.28)$$

## La trasformata di Fourier discreta (DFT)

Finora abbiamo visto trasformate di Fourier di segnali tempo-continui, quindi di segnali tempo-discreti, ovvero di serie temporali. In entrambi i casi il segnale è generalmente definito su tutto l'asse dei tempi. Consideriamo ora un nuovo tipo di trasformata, detta trasformata di Fourier discreta (DFT=Discrete Fourier Transform), che si applica non più a una serie di infiniti termini ma ad una n-pla, cioè ad un vettore, costituito in generale da componenti complesse. Più precisamente la DFT stabilisce una corrispondenza biunivoca fra n-pole di numeri, in generale complessi:

$$(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \xrightarrow{DFT} (X_0, X_1, \dots, X_{N-1}) \quad (4.29)$$

Si noti che i termini sono numerati a partire da 0. L'elemento q-esimo dell'n-pla di arrivo è definito come (formula di trasformazione):

$$X_q = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} nq} \quad (4.30)$$

Si noti come questa formula assomigli alla trasformata di una serie temporale, a patto di considerare un numero finito di termini, di sostituire q ad  $\omega$ , e  $\frac{2\pi}{N}$  a T. Si noti inoltre che questo singolo termine dipende da tutti i termini della n-pla di partenza così come il valore della trasformata di un segnale tempo continuo ad una data pulsazione dipende da tutto il segnale di partenza. La formula di antitrasformazione (IDFT=Inverse Discrete Fourier Transform), che ci restituisce un termine della n-pla di partenza a partire da quella di arrivo è la seguente:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j \frac{2\pi}{N} nq} \quad (4.31)$$

Anche qui l'analogia è abbastanza stretta. Si tratta come per tutte le antitrasformate di cambiare segno all'argomento dell'esponenziale, quindi di inserire un termine moltiplicativo. Questo era  $T/2\pi$  nell'antitrasformata delle serie temporali, qui è  $1/N$ . Si noti che per passare dal primo al secondo è sufficiente sostituire  $\frac{2\pi}{N}$  a T.

Vediamo ora la dimostrazione della formula inversa. Dal secondo membro della formula di antitrasformazione, sostituendo  $X_q$  con la sua definizione (si noti il pedice k anziché n nella sommatoria, per non confonderlo con il pedice di arrivo), cambiando l'ordine delle sommatorie, si ha

$$\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j \frac{2\pi}{N} nq} = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} kq} e^{j \frac{2\pi}{N} nq} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{q=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} q(n-k)} \quad (4.32)$$

A questo punto, prima di procedere, conviene esaminare separatamente la seconda sommatoria:

$$\sum_{q=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} q(n-k)} = \sum_{q=0}^{N-1} \left( e^{j \frac{2\pi}{N} (n-k)} \right)^q \quad (4.33)$$

Essa può essere vista come la somma parziale di una serie geometrica, di ragione  $e^{j \frac{2\pi}{N} (n-k)}$ . Ricordando dall'analisi che

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \begin{cases} \frac{1-x^N}{1-x} & x \neq 1 \\ N & x = 1 \end{cases} \quad (4.34)$$

Si ha

$$\sum_{q=0}^{N-1} \left( e^{j \frac{2\pi}{N}(n-k)} \right)^q = \begin{cases} \frac{1 - e^{j 2\pi(n-k)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N}(n-k)}} = 0 & n \neq k \\ N & n = k \end{cases} \quad (4.35)$$

Il termine per  $n \neq k$  è zero in quanto il numeratore è 0, essendo dato da 1-1 (l'esponenziale equivale ad un numero intero di rotazioni di  $2\pi$ , perciò è 1), mentre il denominatore è sempre diverso da zero, poiché l'esponenziale è sempre equivalente ad una rotazione inferiore a  $2\pi$ .

Sostituendo il risultato trovato si ottiene quanto si voleva dimostrare:

$$\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j \frac{2\pi}{N} n q} = \frac{1}{N} N x_n = x_n \quad (4.36)$$

Le formule di trasformazione ed antitrasformazione stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra due n-pie ordinate mediante prodotti e addizioni in numero finito. Esse sono perciò direttamente implementabili su un elaboratore elettronico, diversamente dalle altre trasformate viste in precedenza che comportano il calcolo di integrali o di somme di serie.

### **Legame fra trasformata di Fourier discreta e continua**

La trasformata di Fourier discreta costituisce un elemento fondamentale dell'elaborazione digitale dei segnali (Digital Signal Processing). Essa può in particolare essere utilizzata per calcolare, in modo approssimato, la trasformata di Fourier di segnali tempo continui. Sia dunque  $x(t)$  una funzione con trasformata  $X(\omega)$ .

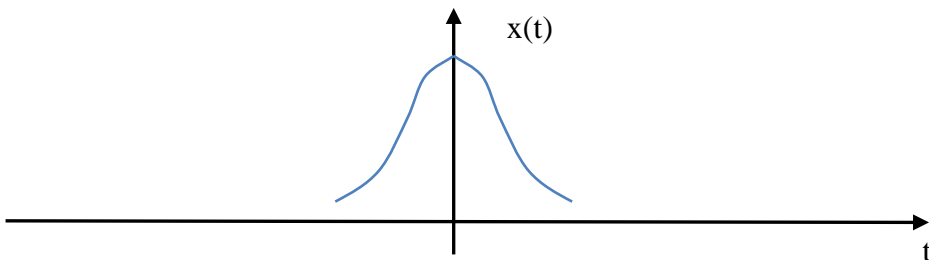


Fig.50 Funzione del tempo (arbitraria)

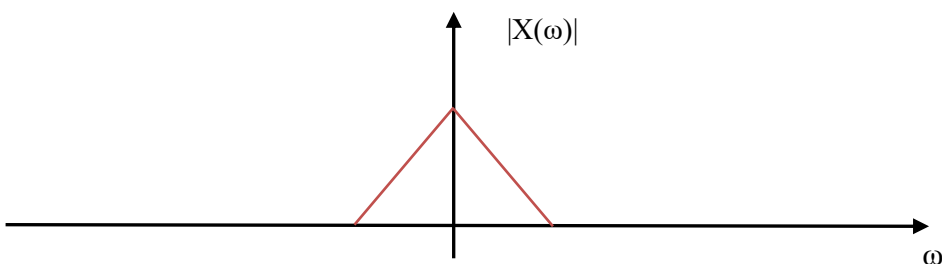


Fig.51 Sua trasformata (modulo)

Risulterebbe comodo che prendendo  $N$  campioni di  $x(t)$  ed eseguendo la DFT si ottenessero  $N$  campioni della trasformata  $X(\omega)$ . Il legame è tuttavia più complesso, e riguarda le ripetizioni periodiche di  $x(t)$  e di  $X(\omega)$ .

Costruiamo pertanto le due ripetizioni periodiche:

$$x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(t - iT_p) \quad (4.37)$$

$$X_p(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X(\omega - i\omega_p) \quad (4.38)$$

Con periodi rispettivamente  $T_p$  e  $\omega_p$  legati fra loro dalla relazione:

$$T_p \omega_p = 2\pi N \quad (4.39)$$

Definiamo quindi gli intervalli nei tempi e nelle frequenze, dividendo i periodi per il numero di punti  $N$

$$\Delta t = \frac{T_p}{N} = \frac{2\pi}{\omega_p} \quad (4.40)$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega_p}{N} = \frac{2\pi}{T_p} \quad (4.41)$$

Si noti che gli intervalli soddisfano la relazione:

$$\Delta t \Delta \omega = \frac{2\pi}{N} \quad (4.42)$$

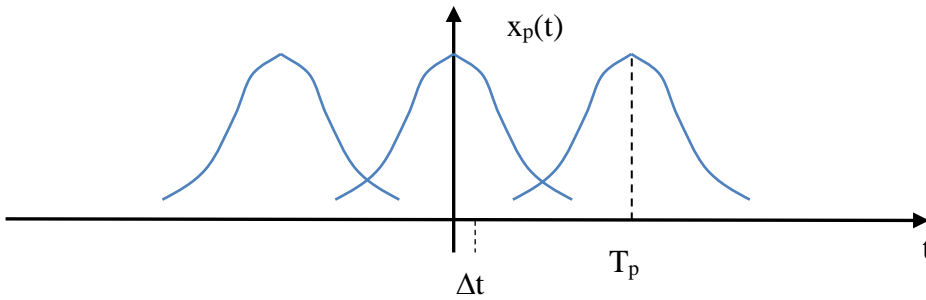


Fig.52 Ripetizione periodica della funzione del tempo (evidenziati i singoli termini).

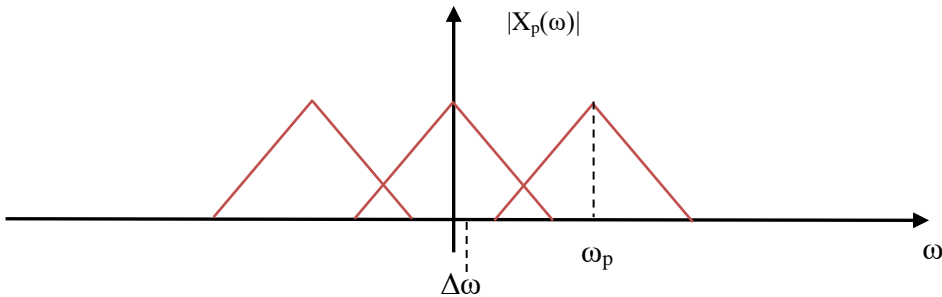


Fig.53 Ripetizione periodica della sua trasformata (evidenziato il modulo dei singoli termini)

Prendiamo quindi  $N$  campioni della ripetizione nei tempi a partire dall'origine con intervallo  $\Delta t$ . Si noti che l'ultimo punto di campionamento,  $(N-1)\Delta t$ , sarà appena prima del periodo, essendo  $T_p = N\Delta t$ . Prendendo quindi  $N$  campioni della ripetizione nelle frequenze in modo analogo, si ottengono le seguenti due n-plesse ordinate di numeri:

$$x_n = x_p(n\Delta t) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.43)$$



$$X_n = X_p(n\Delta\omega) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.44)$$

Moltiplichiamo quindi per  $\Delta t$  la n-pla nei tempi; si può dimostrare che essa è legata alla n-pla nelle frequenze dalla trasformazione discreta di Fourier:

$$(x_0\Delta t, x_1\Delta t, \dots, x_{N-1}\Delta t) \xLeftrightarrow{DFT} (X_0, X_1, \dots, X_{N-1}) \quad (4.45)$$

Il legame è quindi (a meno della costante  $\Delta t$ ) fra N campioni nei tempi ed N campioni nelle frequenze, non di  $x(t)$  e  $X(\omega)$ , ma delle loro ripetizioni periodiche, costruite come sopra indicato (in particolare con i periodi di ripetizione legati fra loro dal numero di punti N. La dimostrazione è posticipata, per mettere da subito in evidenza come la trasformata discreta possa essere utilizzata per calcolare la trasformata continua.

Quando i termini delle due ripetizioni non si sovrappongono in modo significativo, ovvero è trascurabile l'aliasing sia nel dominio dei tempi che in quello delle frequenze, le N-plesse nei tempi e nelle frequenze, in generale rappresentative delle ripetizioni periodiche, diventano rappresentative delle sole  $x(t)$  e  $X(\omega)$ . Se ciò si verifica la DFT può essere utilizzata per calcolare la trasformata continua.

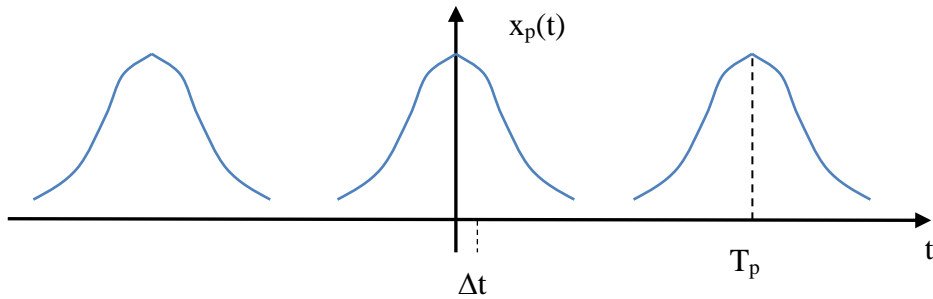


Fig.54 Ripetizione periodica della funzione del tempo (aliasing nel tempo trascurabile).

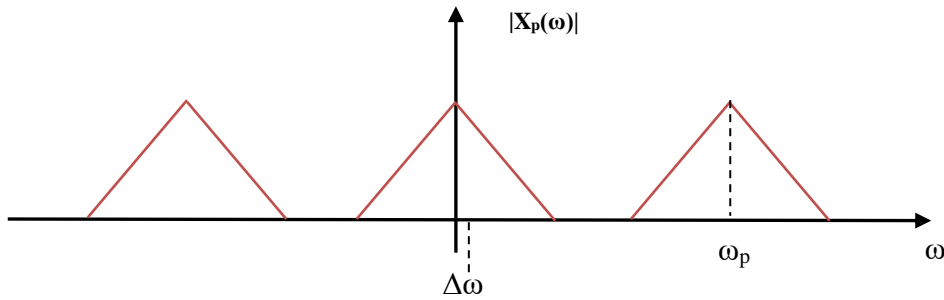


Fig.55 Ripetizione periodica della trasformata (aliasing nelle frequenze trascurabile).

Per evitare l'aliasing occorre assumere sia  $T_p$  che  $\omega_p$  sufficientemente grandi, il che comporta la scelta un numero di punti N sufficientemente elevato. D'altra parte, ciò riduce i valori di  $\Delta t$  e  $\Delta\omega$  e favorisce quindi una conveniente risoluzione degli assi dei tempi e delle pulsazioni.

#### Dimostrazione (particolarmente complessa, facoltativa).

Scriviamo la ripetizione periodica nei tempi come sviluppo in serie di Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T_p}t} \quad (4.46)$$

I cui coefficienti possono essere espressi come:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X\left(k \frac{2\pi}{T_p}\right) = \frac{1}{T_p} X(k\Delta\omega) \quad (4.47)$$

Sostituendo, considerando l'istante  $t=n\Delta t$ , in modo da avere al primo membro l'n-esimo termine della N-pla nei tempi, si ottiene

$$\begin{aligned} x_n = x_p(n\Delta t) &= \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk \frac{2\pi}{T_p} n\Delta t} = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk \frac{2\pi}{T_p} n \frac{T_p}{N}} = \\ &= \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Moltiplicando quindi per  $\Delta t$  e ricordando che  $T_p = N\Delta t$ ,

$$x_n \Delta t = \Delta t \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (4.49)$$

Osserviamo la formula ottenuta vediamo che essa assomiglia alla formula di antitrasformazione discreta di Fourier se non fosse che anziché N termini la sommatoria ne comprende infiniti. Per procedere è necessario suddividere l'insieme degli interi in infiniti intervalli comprendenti n numeri interi consecutivi:

$$hN, hN+1, \dots, hN+N-1 \quad h = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty \quad (4.50)$$

Quindi è possibile coprire tutti gli interi k introducendo una doppia sommatoria

$$x_n \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=hN}^{hN+N-1} X(k\Delta\omega) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (4.51)$$

Sostituendo quindi l'indice k della seconda sommatoria con q, definito come  $q = k - hN$ , si ottiene finalmente una sommatoria con gli estremi coincidenti con quella della DFT inversa:

$$\begin{aligned} x_n \Delta t &= \frac{1}{N} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N-1} X(q\Delta\omega + hN\Delta\omega) e^{jq \frac{2\pi}{N} n} e^{jhN \frac{2\pi}{N} n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N-1} X(q\Delta\omega + hN\Delta\omega) e^{jq \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie, ricordando che  $\omega_p = N\Delta\omega$ , ed infine ricordando la definizione di  $X_p$ , si arriva a dimostrare la relazione.

$$x_n \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} X(q\Delta\omega + h\omega_p) e^{jq \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_p(q\Delta\omega) e^{jq \frac{2\pi}{N} n} \quad (4.53)$$

### **DFT (Discrete Fourier Transform) e FFT (Fast Fourier Transform)**

Le formule DFT e IDFT richiedono un numero di moltiplicazioni pari ad  $N^2$ . Infatti sono necessarie N moltiplicazioni per ognuno degli N elementi della n-pla di arrivo. Poiché il tempo di calcolo è praticamente determinato da tali moltiplicazioni, possiamo dire che esso cresce proporzionalmente ad  $N^2$ . Tuttavia, nel caso di N potenza di 2, è possibile sfruttare alcune simmetrie nel calcolo ed

ottenere lo stesso risultato della DFT con un tempo di calcolo proporzionale a  $N$ , conseguendo una fondamentale riduzione.

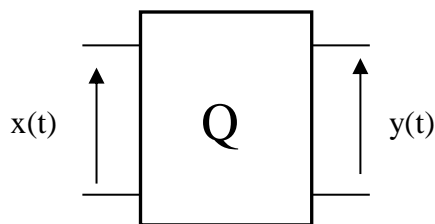
Gli algoritmi che permettono di conseguire tale risultato sono molteplici: ad essi viene attribuita la denominazione di trasformata di Fourier veloce (FFT = Fast Fourier Transform). Il campo di applicazione della FFT è vastissimo. Si faccia attenzione, nel caso si voglia utilizzare una libreria che implementa uno degli algoritmi della FFT, alle convenzioni utilizzate nella specifica implementazione. Ad esempio l'ordine degli elementi della n-pla, oppure la presenza del coefficiente  $1/\sqrt{N}$  sia sulla formula di trasformazione che in quella di antitrasformazione (per maggiore simmetria), anziché  $1/N$  sulla sola formula di antitrasformazione, ecc.

## Capitolo 5 Sistemi lineari **Equation Section (Next)**

La teoria qui richiamata ha carattere del tutto generale, cioè si applica a tutti i sistemi lineari, di qualunque natura (meccanici, elettrici, ecc.). Anche se le applicazioni in questo corso si riferiscono alle Comunicazioni Elettriche, i risultati sono di carattere generale e verranno senz'altro rivisti ed approfonditi in altri corsi.

### Sistemi lineari: definizioni

Consideriamo il sistema ingresso-uscita rappresentato nella figura sotto, in cui  $x(t)$  indica un segnale d'ingresso tempo-continuo e  $y(t) = Q[x(t)]$  la corrispondente risposta, essa pure tempo-continua.



*Fig.56 Schema a blocchi di un sistema tempo continuo*

La risposta  $y(t)$  è una trasformazione dell'ingresso  $x(t)$ , cioè in generale dipende dall'intero andamento di  $x(t)$ . Condizione necessaria per la fisica realizzabilità è che il sistema sia causale, cioè che ad un determinato istante l'uscita dipenda dai valori passati e da quello attuale dell'ingresso, ma non dai valori futuri. Il sistema si dice poi algebrico se l'uscita dipende solo dal valore attuale dell'ingresso (il sistema non ha memoria), quindi si ha  $y = f(x)$ , cioè l'uscita è funzione dell'ingresso.

Il sistema si dice lineare se

$$Q[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = c_1 Q[x_1(t)] + c_2 Q[x_2(t)] \quad (5.1)$$

Qualunque siano i coefficienti e i segnali in ingresso.

Il sistema è detto tempo-invariante se la risposta al segnale ritardato è la risposta ritardata, qualunque sia il ritardo  $t_0$ :

$$y(t - t_0) = Q[x(t - t_0)] \quad (5.2)$$

Facciamo ora riferimento a sistemi lineari tempo-invarianti per dare le definizioni di risposta impulsiva e di funzione di trasferimento. Il caso di sistemi lineari tempo-varianti può essere trattato in modo analogo, introducendo però una ulteriore dipendenza dal tempo, quindi con formule più complesse che qui non considereremo.

### Risposta impulsiva di un sistema lineare

Un sistema lineare tempo invariante può essere completamente caratterizzato nel dominio dei tempi dalla sua risposta impulsiva  $h(t)$ . Essa è definita come la risposta della rete all'impulso di Dirac  $\delta(t)$  (distribuzione  $\delta$ ).

La risposta impulsiva  $h(t)$  può essere reale o complessa. Qui ci limiteremo al caso reale, essendo quello complesso legato al modello matematico adottato per caratterizzare il comportamento di reti reali in presenza di oscillazioni modulate di portante sinusoidale (il cosiddetto "equivalente passa-basso" di reti "passa-banda"), che qui non considereremo.

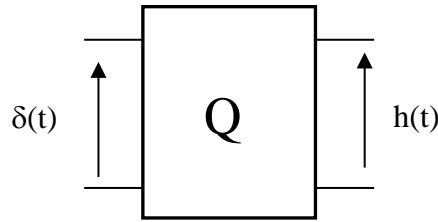


Fig.57 Risposta impulsiva di un sistema lineare tempo-invariante.

Dato che la Delta di Dirac è una distribuzione e non una funzione ordinaria, può essere comodo dare una definizione alternativa della risposta impulsiva, di carattere più operativo. Si consideri a questo scopo in ingresso la funzione ausiliaria  $D(t, \Delta)$ , rappresentata in Fig.42.

La risposta  $y_{\Delta}(t)$  alla funzione ausiliaria dipende dal tempo ma anche da  $\Delta$ . Il suo limite coincide con la risposta impulsiva  $h(t)$

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y_{\Delta}(t) \quad (5.3)$$

Per un sistema causale, condizione necessaria per la fisica realizzabilità, è la seguente:

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \quad (5.4)$$

Se così non fosse, il sistema sarebbe anticipativo, ovvero inizierebbe a rispondere ancora prima di essere sollecitato.

La risposta impulsiva consente sempre di esprimere l'uscita della rete quando al suo ingresso è presente un generico segnale  $x(t)$ , rimanendo nel dominio dei tempi, tramite la relazione:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.5)$$

### Dimostrazione

La dimostrazione di questo fondamentale risultato si basa sul fatto che la Delta di Dirac è l'elemento neutro del prodotto di convoluzione e sul principio di sovrapposizione degli effetti valido per le reti lineari. Per prima cosa si esprime l'ingresso come prodotto di convoluzione di se stesso con la Delta:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (5.6)$$

L'integrale sopra può quindi essere visto come una "somma" di funzioni impulsive, ognuna delle quali ha risposta immediatamente derivabile dalla risposta impulsiva  $h(t)$ : la risposta  $y(t)$  sarà quindi ottenibile come somma delle risposte. In particolare si hanno le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \delta(t - \tau) &\rightarrow h(t - \tau) && \text{per tempo invarianza} \\ x(\tau) \delta(t - \tau) &\rightarrow x(\tau) h(t - \tau) && \text{per linearità (prodotto per una costante)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau && \text{per linearità (somma)} \\ x(t) &\rightarrow x(t) * h(t) && \text{def. convoluzione} \end{aligned} \quad (5.7)$$

La risposta impulsiva caratterizza completamente un quadripolo nel dominio dei tempi.

## Funzione di trasferimento di una rete lineare

La caratterizzazione nel dominio delle frequenze di una rete lineare è data dalla funzione di trasferimento  $H(\omega)$  (la rete è assunta tempo-invariante). Essa può essere definita in vari modi, ed a seconda della definizione scelta si possono ricavare da essa diverse proprietà, in altri casi assunte come definizioni. Avendo già introdotto la risposta impulsiva, la definizione più immediata di funzione di trasferimento è come trasformata di Fourier della risposta impulsiva:

$$H(\omega) = F[h(t)] \quad (5.8)$$

Data questa definizione, dalla relazione  $y(t) = x(t) * h(t)$  è immediato, ricordando il teorema della convoluzione, ricavare la seguente

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (5.9)$$

Essa permette di ricavare la risposta noto l'ingresso nel dominio delle frequenze. Si noti tuttavia che è di carattere meno generale di quella nel dominio dei tempi, perché richiede l'esistenza della trasformata di  $x(t)$  ed  $y(t)$ . Tuttavia essa è utilizzatissima, perché il prodotto delle trasformate può essere molto più semplice da calcolare del prodotto di convoluzione (ad esempio, come vedremo, nei filtri). A volte essa è assunta come definizione di  $H(\omega)$ . Si noti che per trovare la trasformata della risposta è sufficiente la conoscenza della funzione di trasferimento per le sole pulsazioni alle quali è diversa da zero la trasformata dell'ingresso, essendo i valori da essa assunti al di fuori di questo intervallo del tutto ininfluenti.

Nel caso in cui  $h(t) \in R$ , cioè la rete è reale, vale la simmetria hermitiana

$$H(\omega) = H^*(-\omega) \quad (5.10)$$

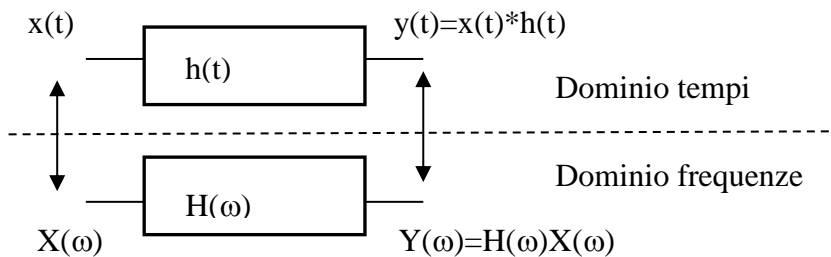


Fig.58 Schema a blocchi della risposta di un sistema lineare nei tempi e nelle frequenze.

### Caratteristiche di ampiezza e fase

La funzione di trasferimento è in generale complessa; il medesimo contenuto informativo può essere dato da due funzioni reali, le caratteristiche di ampiezza e fase, prese insieme:

$$\begin{cases} T(\omega) = |H(\omega)| \\ \beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} \end{cases} \quad (5.11)$$

Esse sono definite su tutto l'asse delle pulsazioni (a differenza degli spettri monolateri dei segnali). Il segno meno davanti all'argomento dipende dalla convenzione adottata per le fasi.

La simmetria hermitiana della funzione di trasferimento (nel caso  $h(t) \in R$ ) equivale ad avere caratteristica di ampiezza pari e fase dispari:

$$\begin{cases} T(\omega) = T(-\omega) \\ \beta(\omega) = -\beta(-\omega) \end{cases} \quad (5.12)$$

### Proprietà

#### Risposta ad un fasore

Ad un fasore in ingresso una rete lineare tempo-invariante risponde con un fasore in uscita, avente medesima frequenza angolare e diverso numero complesso rappresentativo. Se il segnale in ingresso è  $x(t) = c_x e^{j\omega_1 t}$ , la rete risponde con

$$y(t) = c_y e^{j\omega_1 t}, \quad c_y = c_x H(\omega_1) \quad (5.13)$$

Infatti, ricordando che  $F(e^{j\omega_0 t}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$  si ha:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = c_x 2\pi\delta(\omega - \omega_1)H(\omega) = c_x H(\omega_1) 2\pi\delta(\omega - \omega_1) = c_y 2\pi\delta(\omega - \omega_1) \quad (5.14)$$

Da cui antitrasformando ho  $y(t) = c_y e^{j\omega_1 t}$ .

A volte viene data come definizione di funzione di trasferimento la proprietà qui dimostrata. Si noti però che il valore assunto dipende dalla specifica pulsazione considerata (per evitare ambiguità si è inserito il pedice “1”).

$$H(\omega_1) = \frac{c_y}{c_x} \quad (5.15)$$

### Risposta ad una sinusoidale

Ad una sinusoidale in ingresso una rete lineare tempo-invariante reale ( $h(t) \in R$ ) risponde con una sinusoidale in uscita, avente medesima frequenza angolare e diversa ampiezza e fase, cioè diverso numero complesso rappresentativo. Se  $x(t) = A_x \cos(\omega_1 t - \varphi_x)$ , la rete risponde con

$$y(t) = A_x T(\omega_1) \cos[\omega_1 t - \varphi_x - \beta(\omega_1)] = A_y \cos(\omega_1 t - \varphi_y) \quad (5.16)$$

dove

$$A_y = A_x T(\omega_1) \quad \varphi_y = \varphi_x + \beta(\omega_1) \quad (5.17)$$

Infatti  $x(t) = A_x \cos(\omega_1 t - \varphi_x) = \text{Re}\{\dot{A}_x e^{j\omega_1 t}\}$  con  $\dot{A}_x = A_x e^{-j\varphi_x}$ ; da cui, tenendo conto che la risposta deve essere reale (convoluzione di  $x(t)$  e  $h(t)$  entrambi reali), si ha

$$y(t) = \text{Re}\{\dot{A}_y e^{j\omega_1 t}\} = \text{Re}\{\dot{A}_x H(\omega_1) e^{j\omega_1 t}\} = A_y \cos(\omega_1 t - \varphi_y) \quad (5.18)$$

A volte il rapporto fra numeri complessi rappresentativi delle due sinusoidi viene dato come definizione di funzione di trasferimento. Si noti però che il valore assunto dipende dalla specifica pulsazione considerata (per evitare ambiguità si è inserito il pedice “1”) e che nel caso della sinusoidale la pulsazione deve essere positiva.

$$H(\omega_1) = \frac{\dot{A}_y}{\dot{A}_x} \quad (5.19)$$

Infine si noti che la relazione complessa sopra equivale alla coppia di relazioni reali:

$$\begin{cases} T(\omega_1) = \frac{A_y}{A_x} \\ \beta(\omega_1) = \varphi_y - \varphi_x \end{cases} \quad (5.20)$$

### Risposta a segnali sviluppabili in serie di Fourier o trasformabili secondo Fourier

Riassumendo, la conoscenza della funzione di trasferimento permette di ricavare la risposta nel dominio delle frequenze indipendentemente dal tipo di rappresentazione del segnale in ingresso. Si ricordano le seguenti formule specifiche, di immediata derivazione, utili per gli esercizi.

$$\begin{aligned}
 X(\omega) & & Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\
 x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} & y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_o) e^{jn\omega_o t} \\
 x(t) &= A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t - \varphi_n) & y(t) &= A_o H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n T(n\omega_o) \cos[n\omega_o t - \varphi_n - \beta(n\omega_o)] \quad (5.21) \\
 x(t) &= \int_0^{+\infty} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega & y(t) &= \int_0^{+\infty} V(\omega) T(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega) - \beta(\omega)] d\omega
 \end{aligned}$$

### Sistemi in cascata

Consideriamo più sistemi lineari in cascata: la funzione di trasferimento della cascata è eguale al prodotto delle funzioni di trasferimento.

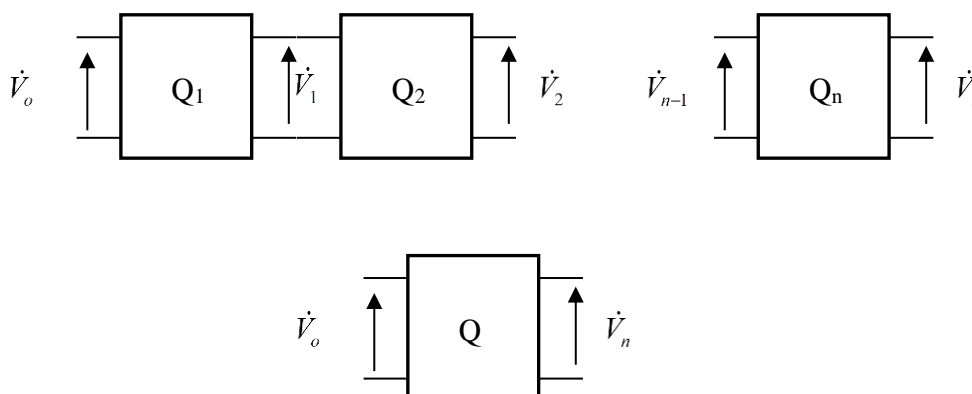


Fig.59 Schema a blocchi di una cascata di sistemi lineari.

Conviene considerare un regime sinusoidale; con riferimento ai numeri complessi rappresentativi delle funzioni in gioco, per la funzione di trasferimento complessiva risulta:

$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_n}{\dot{V}_0} \quad (5.22)$$

E per le funzioni dei vari blocchi:

$$H_1(\omega) = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_0} \quad H_2(\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} \quad H_N(\omega) = \frac{\dot{V}_N}{\dot{V}_{N-1}} \quad (5.23)$$

Da cui è immediato:

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)...H_N(\omega) \quad (5.24)$$

Si faccia tuttavia attenzione, nel caso i sistemi lineari siano reti elettriche (quadripoli), che la funzione di trasferimento di ognuno di essi deve essere calcolata tenendo conto del carico effettivamente presente ai morsetti di uscita.

### Esercizi

#### Risposta impulsiva e funzione di trasferimento di una rete RC

Calcolare la risposta impulsiva della rete RC.



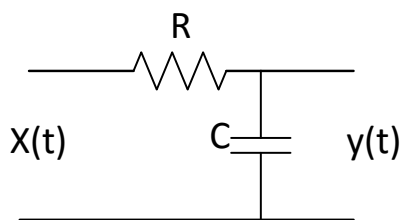
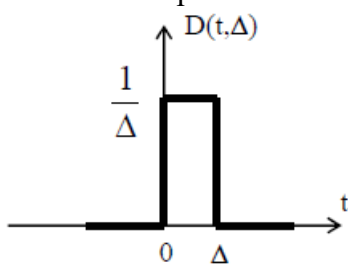


Fig.60 Rete RC.

Si può ricavare la risposta impulsiva come  $h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y_{\Delta}(t)$ . Come primo passo occorre quindi calcolare la risposta alla funzione ausiliaria  $D(t, \Delta)$ ,

Fig.61 Funzione ausiliaria  $D(t, \Delta)$ .

Ricordando le formule dei transitori di carica e scarica si ha:

$$y_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & 0 \leq t \leq \Delta \\ \frac{1}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) e^{-\frac{t-\Delta}{RC}} & t \geq \Delta \end{cases} \quad (5.25)$$

Trovata la risposta alla funzione ausiliaria, come secondo passo occorre calcolarne il limite.

Ricordando che  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + x$  si ha:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left( 1 - 1 + \frac{\Delta}{RC} + \dots \right) = \frac{1}{RC} \quad (5.26)$$

Da cui

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

Nota la  $h(t)$ , si ottiene la funzione di trasferimento facendone la trasformata. Senza fare nessun calcolo, ricordando l'esercizio della trasformata di un'esponenziale monolaterale

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{t_o}} & t \geq 0 \end{cases} \quad X(\omega) = \frac{At_o}{1 + j\omega t_o} \quad (5.28)$$

Dal confronto fra  $x(t)$  ed  $h(t)$ , si osserva che esse coincidono se  $t_o=RC$  e  $A=1/RC$ . Ponendo quindi questi valori nell'espressione di  $X(\omega)$ , si ottiene:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (5.29)$$

Più avanti verrà mostrato un metodo alternativo per il calcolo della funzione di trasferimento di una rete RC, senza passare dal calcolo della risposta impulsiva.

### ***Funzioni di trasferimento di sistemi elementari.***

#### **Linea di ritardo**

$$y(t) = x(t - t_o) \quad (5.30)$$

Trasformando secondo Fourier entrambi i membri

$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega t_o} \quad (5.31)$$

Da cui

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = e^{-j\omega t_o} \quad (5.32)$$

#### **Derivatore**

$$y(t) = \dot{x}(t) \quad (5.33)$$

Trasformando secondo Fourier entrambi i membri

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega) \quad (5.34)$$

Da cui

$$H(\omega) = j\omega \quad (5.35)$$

#### **Integratore**

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (5.36)$$

Trasformando secondo Fourier entrambi i membri (assunto  $X(0)=0$ )

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad (5.37)$$

Da cui

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (5.38)$$

### Calcolo delle funzioni di trasferimento di partitori non resistivi

Calcolare la funzione di trasferimento e le caratteristiche di ampiezza del partitore in figura. La funzione di trasferimento dipende in generale dal carico ai morsetti di uscita. Se non specificato altrimenti si intende calcolata a circuito aperto.

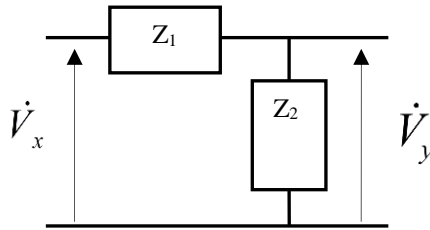


Fig.62. Schema a blocchi di un partitore.

Conviene assumere un ingresso sinusoidale, con pulsazione  $\omega$  e numero complesso rappresentativo  $\dot{V}_x$ ; ad esso la rete risponderà con una sinusoide di uguale pulsazione ma con diverso numero complesso rappresentativo (cioè diversa ampiezza e diversa fase)  $\dot{V}_y$ . Dalla legge di Ohm generalizzata,  $V=ZI$ , vista in Elettrotecnica, tenendo conto che la corrente nei due rami è necessariamente la stessa

$$\dot{V}_x = I(Z_1 + Z_2) \quad \dot{V}_y = IZ_2 \quad (5.39)$$

Da cui

$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5.40)$$

Le caratteristiche di ampiezza e fase si ottengono velocemente ricordando che il modulo di un rapporto è il rapporto dei moduli e che l'argomento di un rapporto è la differenza fra l'argomento del numeratore e quello del denominatore:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \arg \left\{ \frac{a}{b} \right\} = \arg \{a\} - \arg \{b\} \quad (5.41)$$

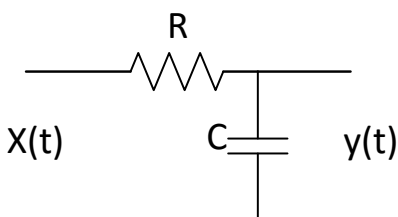
Le espressioni delle caratteristiche ed i grafici verranno date per semplicità sul solo semiasse positivo. Esse si estendono con legge di parità (ampiezza) o disparità (fase) sul semiasse negativo.

Punti notevoli, da calcolare, sono l'origine, infinito, i punti di massimo e minimo della caratteristica di ampiezza ed eventualmente la pulsazione di taglio a 3dB,  $\omega_t$ , data dalla pulsazione alla quale

$$\frac{T(\omega_t)}{\max[T(\omega)]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 \quad (5.42)$$

### Funzione di trasferimento rete RC

Calcolare la funzione di trasferimento e le caratteristiche di ampiezza e di fase della rete RC di figura, utilizzando le formule per il partitore non resistivo.



*Fig.63 Circuito RC.*

Risulta:

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (5.43)$$

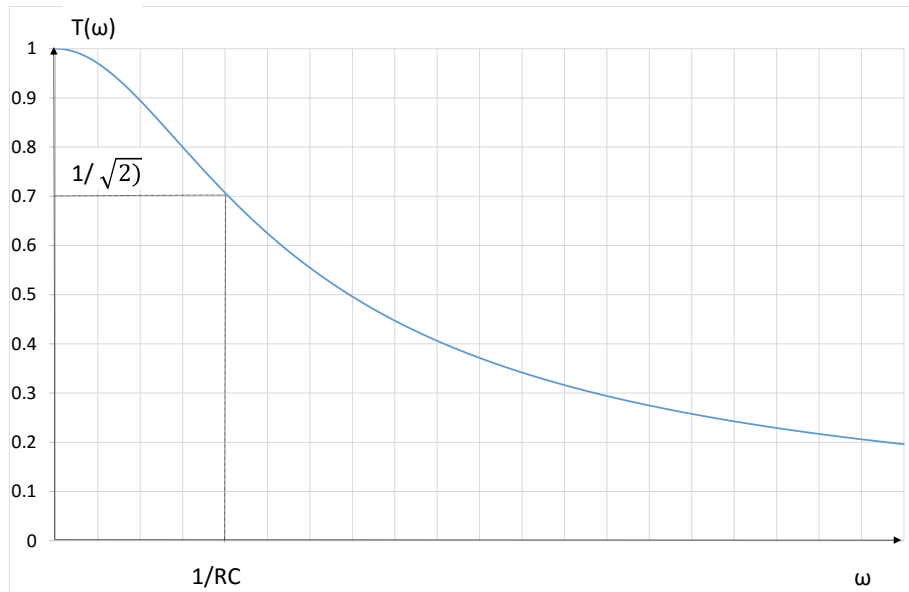
Le caratteristiche di ampiezza e fase sono date da

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega CR|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (5.44)$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 + j\omega CR\} - \arg\{1\} = \arctg(\omega CR) \quad (5.45)$$

La rete si comporta come un filtro passa-basso non ideale. La pulsazione di taglio è

$$\omega_t = \frac{1}{RC} \quad (5.46)$$



*Fig.64 Caratteristica di ampiezza del circuito RC*

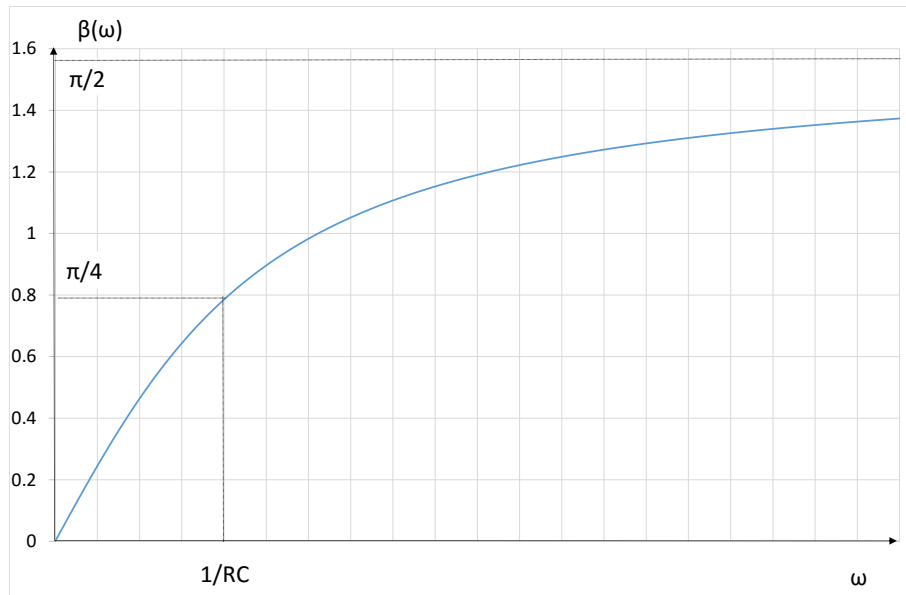


Fig.65 Caratteristica di fase del circuito RC

### Funzione di trasferimento rete CR

Calcolare la funzione di trasferimento e le caratteristiche di ampiezza e di fase della rete CR di figura.

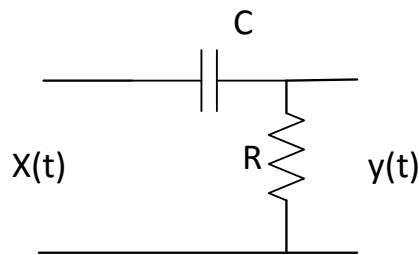


Fig.66 Circuito CR.

Risulta:

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \quad (5.47)$$

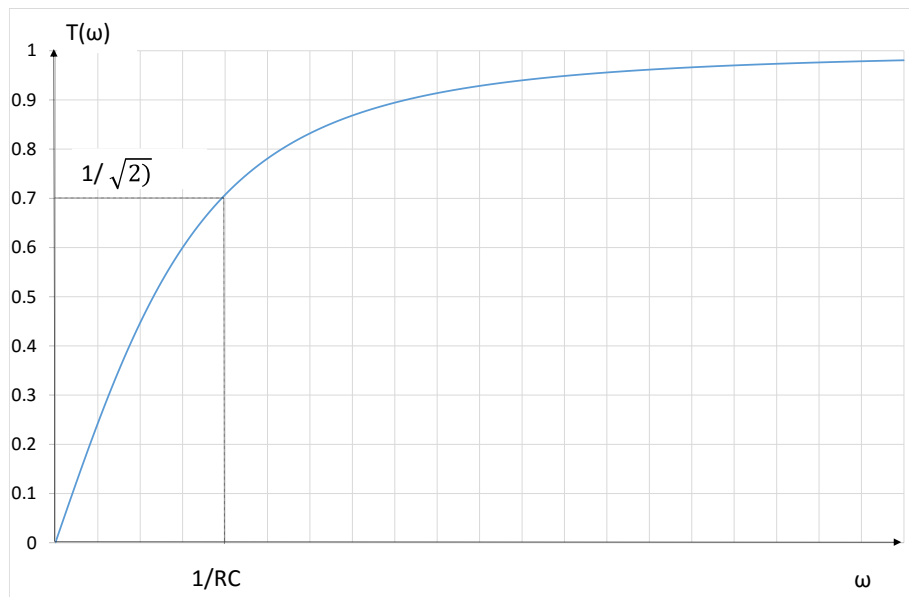
Le caratteristiche di ampiezza e fase sono date da

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|j\omega CR|}{|1 + j\omega CR|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (5.48)$$

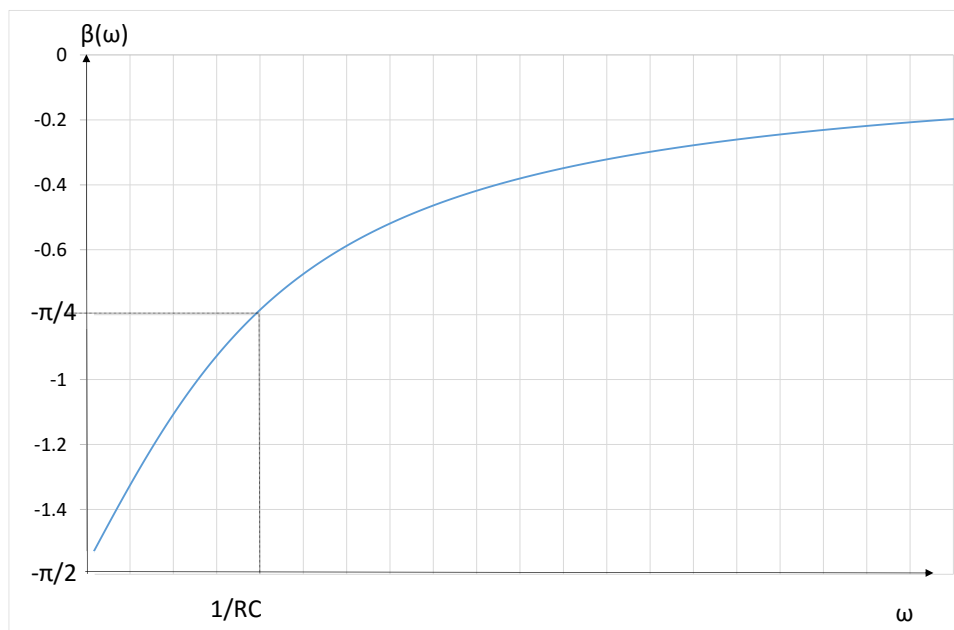
$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} = \arctg(\omega CR) - \frac{\pi}{2} \quad (5.49)$$

La rete si comporta come un filtro passa-alto non ideale. La pulsazione di taglio è

$$\omega_t = \frac{1}{RC} \quad (5.50)$$

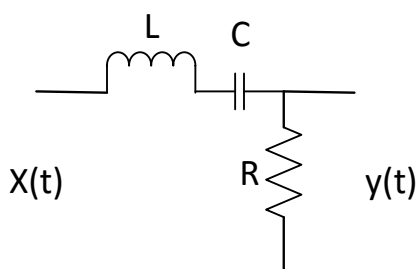


*Fig.67 Caratteristica di ampiezza del circuito CR*



*Fig.68 Caratteristica di fase del circuito CR*

**Funzione di trasferimento rete LCR (serie)**



*Fig.69 Circuito LCR (serie).*

La impedenza sul primo ramo è data da  $Z_1 = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

Risulta perciò

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \quad (5.51)$$

Le caratteristiche di ampiezza e fase sono date da

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|j\omega CR|}{|1 - \omega^2 LC + j\omega CR|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} = \\ &= \arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

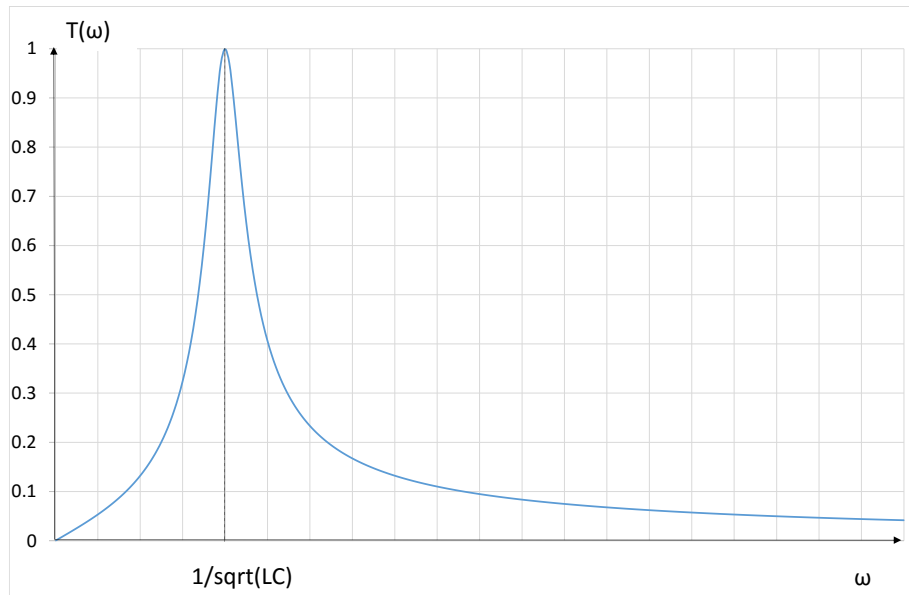
Prima di procedere conviene porre  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (pulsazione di risonanza) e notare che il denominatore della funzione di trasferimento ha parte reale positiva per  $\omega \leq \omega_o$  negativa altrimenti. Il suo argomento assume quindi due espressioni:

$$\arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_o \end{cases} \quad (5.54)$$

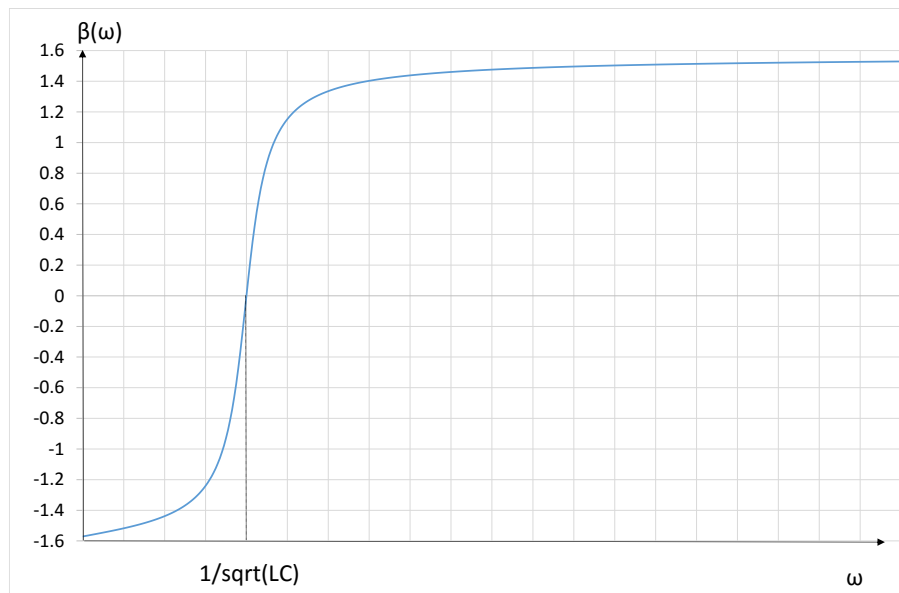
L'espressione finale della caratteristica di fase è quindi

$$\beta(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) - \frac{\pi}{2} & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) + \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_o \end{cases} \quad (5.55)$$

La rete si comporta come un filtro passa-banda reale.

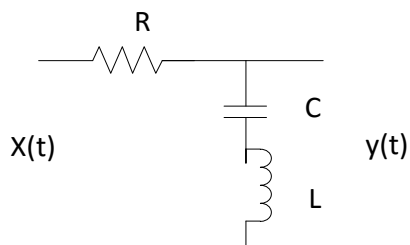


*Fig.70 Caratteristica di ampiezza del circuito LCR (serie)*



*Fig.71 Caratteristica di fase del circuito LCR (serie)*

### **Funzione di trasferimento rete RCL (serie)**



*Fig.72 Circuito RLC (serie).*

Procedendo come di consueto si ottiene:



$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \quad (5.56)$$

Le caratteristiche di ampiezza e fase sono date da

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{|1 - \omega^2 LC + j\omega CR|} = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad (5.57)$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} - \arg\{1 - \omega^2 LC\} \quad (5.58)$$

Prima di procedere conviene porre  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (pulsazione di risonanza) e notare che sia il numeratore che il denominatore della funzione di trasferimento hanno parte reale positiva per  $\omega \leq \omega_o$  negativa altrimenti. Gli argomenti assumo quindi due espressioni. Per il numeratore si ha:

$$\arg\{1 - \omega^2 LC\} = \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_o \\ +\pi & \omega > \omega_o \end{cases} \quad (5.59)$$

Per il denominatore:

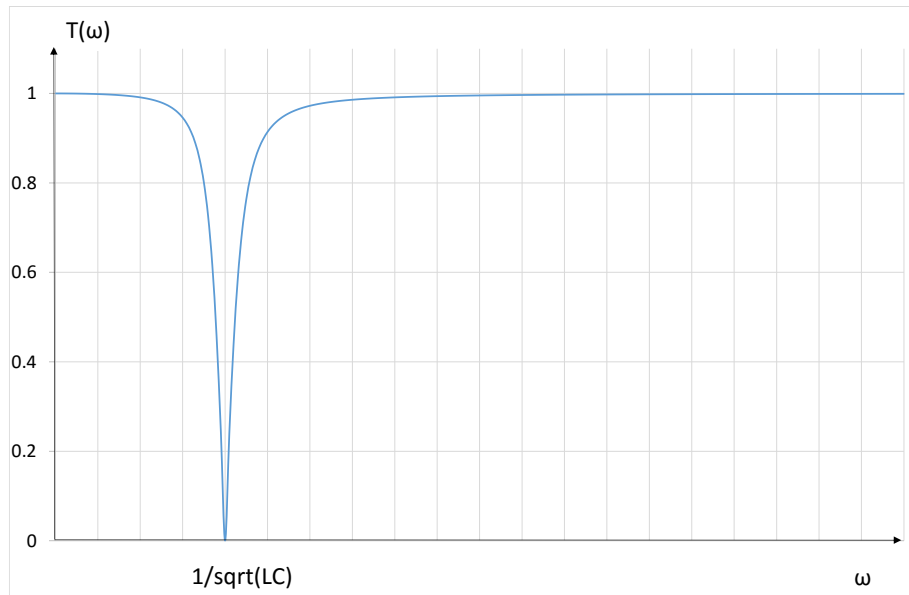
$$\arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_o \end{cases} \quad (5.60)$$

L'espressione finale della caratteristica di fase è quindi

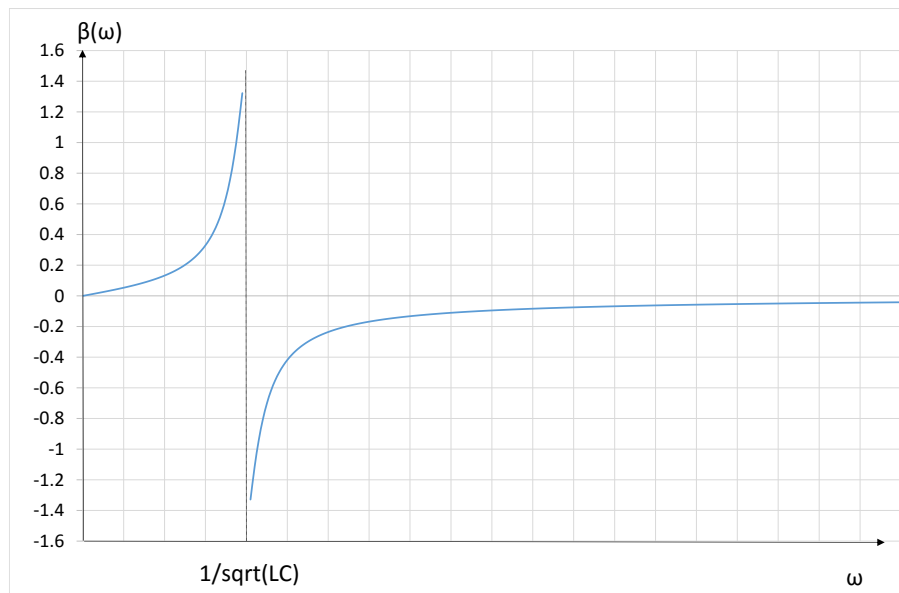
$$\beta(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (5.61)$$

Si noti che la discontinuità della fase avviene alla pulsazione di risonanza, ovvero nel punto di nullo della caratteristica di ampiezza, nel quale la fase è ovviamente non definita.

La rete si comporta come un filtro elimina-banda reale.

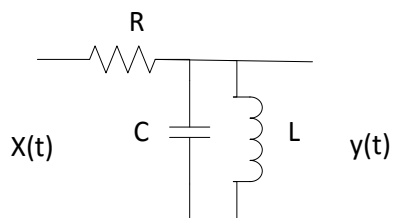


*Fig.73 Caratteristica di ampiezza del circuito RLC (serie)*



*Fig.74 Caratteristica di fase del circuito RLC (serie)*

**Funzione di trasferimento rete RLC (parallelo)**



*Fig.75 Circuito RLC (parallelo).*

La impedenza sul secondo ramo è data da

$$Z_2 = \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{Y_L + Y_C} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (5.62)$$

Risulta perciò

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \quad (5.63)$$

Le caratteristiche di ampiezza e fase sono date da

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|j\omega L|}{|R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L|} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}} \quad (5.64)$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L\} - \frac{\pi}{2} \quad (5.65)$$

Prima di procedere conviene porre  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (pulsazione di antirisonanza) e notare che il denominatore della funzione di trasferimento ha parte reale positiva per  $\omega \leq \omega_o$  negativa altrimenti. Procedendo come negli esercizi precedenti si arriva all'espressione finale della caratteristica di fase:

$$\beta(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}\right) - \frac{\pi}{2} & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}\right) + \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_o \end{cases} \quad (5.66)$$

La rete si comporta come un filtro passa-banda reale.

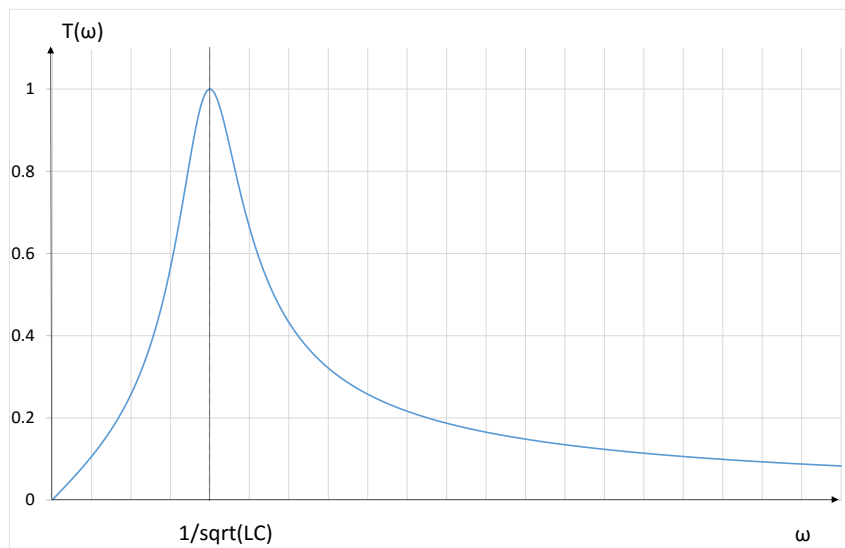


Fig.76 Caratteristica di ampiezza del circuito RLC (parallelo)

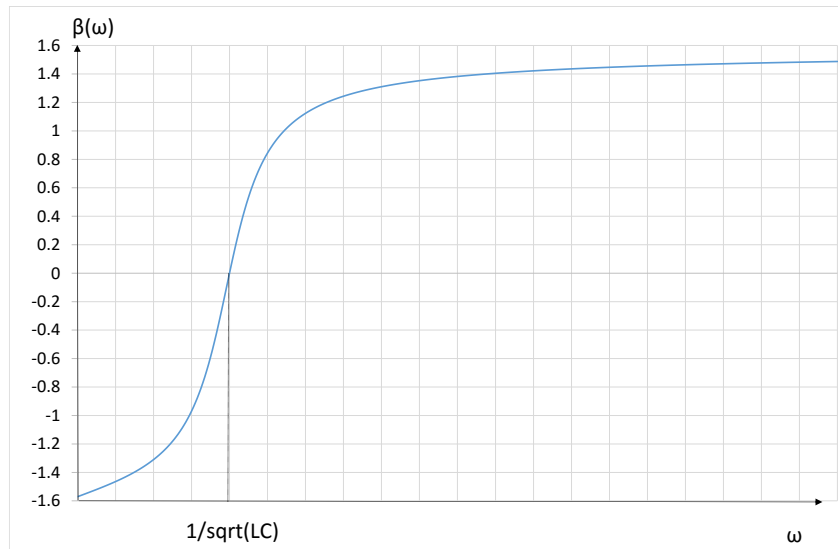


Fig.77 Caratteristica di fase del circuito RLC (parallelo)

## Condizioni di non distorsione

Si dice che il segnale  $y(t)$  riproduce indistorto  $x(t)$  quando differisce da esso solo per una costante moltiplicativa ed un ritardo:

$$y(t) = Ax(t - t_o) \quad (5.67)$$

Dove in generale tutte le grandezze sono complesse.

Quando  $x(t)$  e  $y(t)$  sono l'ingresso e l'uscita di una rete lineare, tale rete è detta non distorcente (rispetto a  $x(t)$ ) nel caso in cui valga la condizione sopra. Trasformando questa secondo Fourier si ha:

$$Y(\omega) = AX(\omega)e^{-j\omega t_o} \quad (5.68)$$

Da cui

$$H(\omega) = Ae^{-j\omega t_o} \quad \forall \omega: X(\omega) \neq 0 \quad (5.69)$$

Come appena dimostrato, la condizione sopra è necessaria perché la rete non distorca l'ingresso (cioè se  $y(t)$  riproduce indistorto  $x(t)$  essa deve valere sempre). Essa è anche condizione sufficiente (se vale allora  $y(t)$  riproduce indistorto  $x(t)$ ) come si può dimostrare immediatamente procedendo a ritroso. Si noti che la rete non può essere definita distorcente o meno, se non in relazione ad uno specifico segnale di ingresso, o meglio, in relazione alle pulsazioni per le quali la sua trasformata non è nulla. In altre parole, è del tutto indifferente come si comporta la rete alle pulsazioni dove l'ingresso non ha componenti.

Restringendosi al caso di ingresso e rete reali, anche l'uscita sarà reale. In questo caso la costante moltiplicativa  $A$  sarà anch'essa reale. Assumendola positiva e chiamandola  $T_o$ , dalla condizione di non distorsione enunciata per  $H(\omega)$  si ricavano le equivalenti condizioni di non distorsione per le caratteristiche di ampiezza e fase, avendo indicato con  $B_x$  la banda di  $x(t)$ :

$$\begin{cases} T(\omega) = T_o \\ \beta(\omega) = \omega t_o \end{cases} \quad |\omega| \in B_x \quad (5.70)$$

Esse richiedono la costanza rispetto alla pulsazione della caratteristica di ampiezza e la proporzionalità fra la caratteristica di fase e  $\omega$  nella banda del segnale di ingresso. Sono necessarie e sufficienti perché una rete lineare non distorca.

Volendone dare un'interpretazione facile da ricordare, possiamo dire che le condizioni di non distorsione sono condizioni di equità nel dominio delle frequenze rispetto alle componenti

dell'ingresso. Si supponga quest'ultimo formato da  $n$  sinusoidi. La prima condizione richiede che ognuna di esse sia amplificata/attenuata esattamente dello stesso valore, cioè nessuna di esse deve essere enfatizzata rispetto alle altre. La seconda che tutte siano ritardate dello stesso ritardo (non che escano prima gli alti, poi i bassi, poi i medi...). A questo punto qualcuno si chiederà se spostando dalla posizione zero il potenziometro degli alti o dei bassi dell'amplificatore dell'impianto stereo di casa o dell'autoradio si introduce una distorsione del segnale in ingresso. La risposta è sì. Tuttavia occorre anche considerare che le casse e l'ambiente di ascolto possono a loro volta avere una diversa risposta alle varie frequenze (ad esempio gli alti possono essere attenuati più facilmente da materiali quali tappezzerie, ecc...); in questo caso enfatizzare gli alti o i bassi potrebbe essere necessario per pre-distorcere il segnale mandato alle casse, in modo da avere una non distorsione in fase di ascolto. A parte queste considerazioni, nessuno può vietare di enfatizzare l'una o l'altra delle componenti, se il risultato risulta più gradevole alla sensibilità dell'ascoltatore. Avete presente i discotecari quando passano in auto con l'autoradio a tutto volume? Bum, bum, bum... L'importante sono solo i bassi e... svegliare i vicini!

Da ultimo si noti che l'eliminazione di una parte delle componenti in frequenza risulta sempre in una distorsione del segnale, in quanto non viene rispettata la costanza della caratteristica di ampiezza su tutta la banda del segnale in ingresso. Un caso tipico si ha ascoltando una persona al telefono, infatti la voce umana ha componenti importanti al di fuori della banda 300-3400 Hz riprodotta normalmente dalla telefonia.

### ***Filtri ideali***

Strettamente legato alle condizioni di non distorsione è il concetto di filtri ideali, la cui descrizione naturale è nel dominio delle frequenze, cioè in termini di caratteristiche di ampiezza e fase. Un filtro ideale è un sistema lineare avente la proprietà di fare passare alcune componenti in frequenza, senza distorcerle, eliminando le altre. Essi sono caratterizzati da una o più bande passanti, dove valgono le condizioni di non distorsione, e da una o più bande attenuate, dove la caratteristica di ampiezza è nulla. Il passaggio dalle une alle altre avviene alle cosiddette frequenze di taglio. L'idealità nel dominio della frequenza consiste nelle discontinuità della caratteristica di ampiezza nelle transizioni fra bande passanti e bande attenuate (il taglio è verticale, cioè ideale). Essa si riflette nel dominio dei tempi, come vedremo più avanti, in una risposta impulsiva di tipo anticipativo.

Consideriamo qui reti reali, per le quali la descrizione delle caratteristiche di ampiezza e fase può essere data limitandosi al solo semiasse positivo delle frequenze. Questo non significa che le caratteristiche non siano definite sul semiasse negativo, ma semplicemente che essendo la caratteristica di ampiezza pari e quella di fase dispari, si può limitarne la rappresentazione.

### **Passa-basso**

Il filtro in questione lascia passare indistorte tutte le componenti a frequenza inferiore alla frequenza di taglio, eliminando tutte le altre. E' caratterizzato da un'unica frequenza di taglio (sul semiasse

positivo). Si noti il simbolo, autoesplicativo.



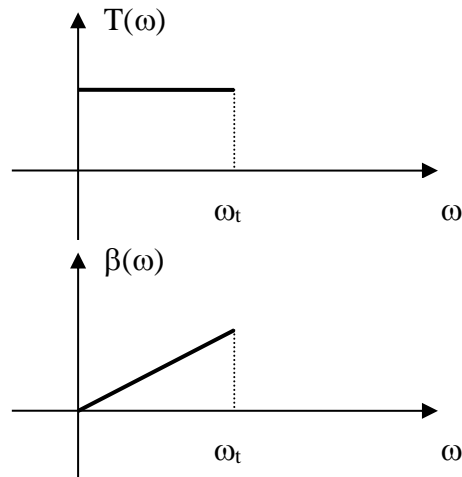


Fig.78 Caratteristica di ampiezza e fase di un filtro ideale passa-basso.

### Passa-alto

E' il duale del passa-basso.

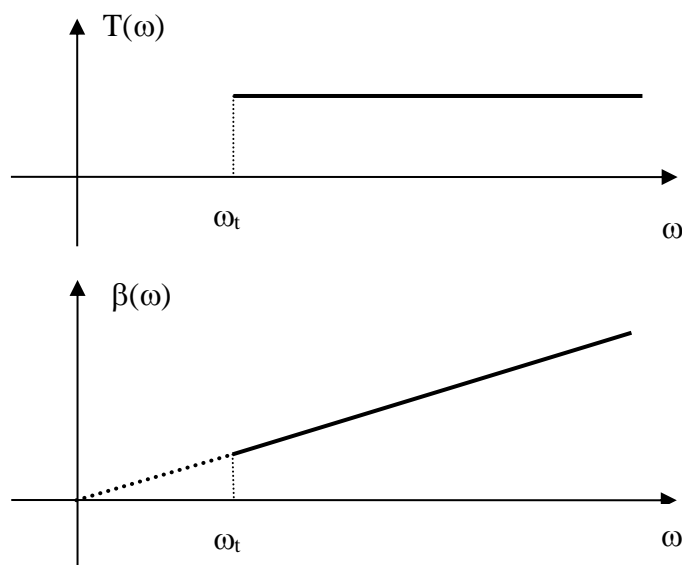
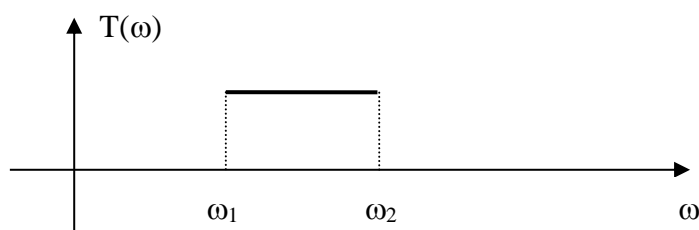


Fig.79 Caratteristica di ampiezza e fase di un filtro ideale passa-alto.

### Passa-banda

E' equivalente all'applicazione in cascata di un passa-basso e di un passa-alto; è caratterizzato sul semiasse positivo da due frequenze di taglio che delimitano la banda passante.



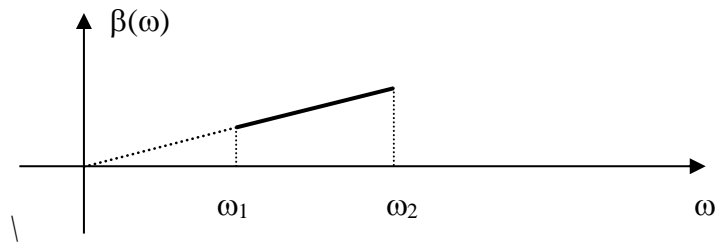


Fig.80 Caratteristiche di ampiezza e fase di un filtro ideale passa-banda.

### Elimina-banda

E' il duale del passa-banda.

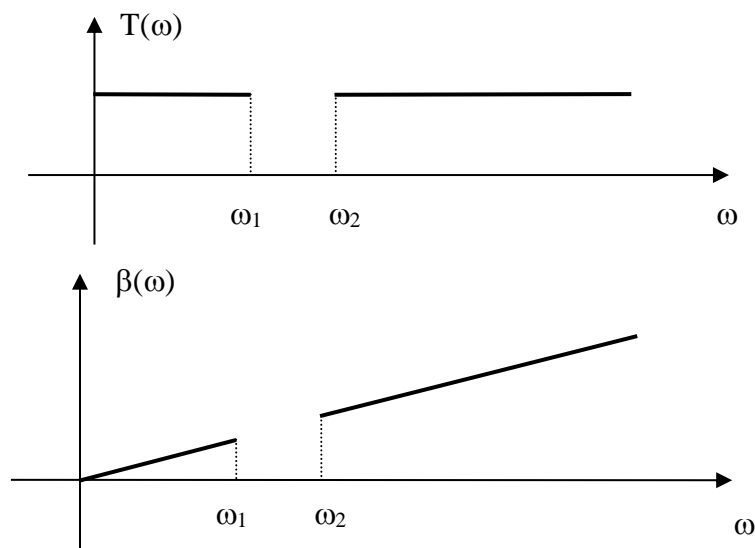


Fig.81 Caratteristiche di ampiezza e fase di un filtro ideale elimina-banda.

I filtri ideali permettono di isolare il segnale utile dai disturbi, quando questi ultimi occupano bande diverse. Questa operazione è evidentemente facile da descrivere e da compiere nel dominio delle frequenze, difficile in quello dei tempi.

Questa però non è l'unica applicazione dei filtri. Infatti essi si applicano anche per ridurre la banda del segnale utile, in modo da farla rientrare nella banda disponibile per un dato servizio. Ad esempio, nel caso della telefonia il segnale vocale originale viene di norma filtrato da un passa-banda (fra 300-3400 Hz, banda telefonica netta, nello standard europeo); analogamente il segnale audio (modulante) nella radiodiffusione FM viene limitato fra 30-15000 Hz; oppure ancora un segnale passa-basso viene a meno della metà della frequenza di campionamento (assunta fissa) nella conversione A/D (analogico digitale) per evitare l'aliasing nel dominio delle frequenze. In tutti questi casi, se l'operazione di filtraggio porta effettivamente all'eliminazione di una componente del segnale originale, si ha una distorsione, in quanto la caratteristica di ampiezza risulta non costante (di fatto è a due valori nei filtri ideali) nella banda del segnale in ingresso al filtro. D'altra parte, se si considera ad esempio il segnale telefonico, occorre ricordare che esso è stato progettato per garantire l'intelligibilità del parlato, non la non distorsione. Questo spiega perché due persone della stessa famiglia a volte presentano voci semi-indistinguibili al telefono, mentre le stesse voci ci appaiono diverse dal vivo. Evidentemente in questi casi molte delle differenze vengono perse a causa della riduzione di banda operata dal filtro telefonico. Considerando invece i segnali musicali, gli audiofili "esoterici" (portatori di conoscenze riservate ad una stretta cerchia di iniziati), di solito non

apprezzano il taglio a circa 20 kHz dei segnali registrati sui CD, ed ancora meno quello a 15 kHz operato dall'FM. Piaccia o meno, l'uso dei filtri è evidentemente di fondamentale importanza.

I filtri ideali ora presentati non sono fisicamente realizzabili. Infatti la caratteristica di ampiezza non può mai presentare discontinuità come quelle prima evidenziate in corrispondenza alle pulsazioni di taglio. Ciò nonostante, quanto precedentemente detto conserva tutto il suo interesse pratico: infatti con reti fisicamente realizzabili è possibile approssimare le caratteristiche ideali tanto quanto interessa le applicazioni. In senso lato, gli "ideali" servono proprio a questo, ovvero a cercare di avvicinare il nostro comportamento ad essi, senza la pretesa di raggiungere la perfezione.

Ad esempio, la caratteristica di ampiezza di un possibile filtro reale passa-basso è riportata nella figura sotto, dove sono evidenziati i margini di tolleranza in banda passante ed in banda attenuata, e l'intervallo  $\omega_\Delta$  finito fra la due bande per permettere il passaggio graduale, senza la discontinuità propria del filtro ideale, fra le due. I parametri possono essere resi piccoli quanto interessa a spese della complessità del filtro.

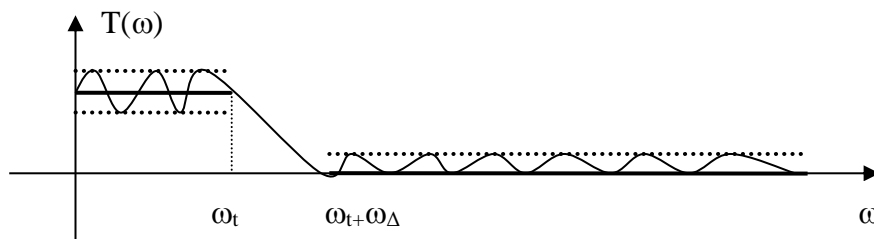


Fig.82 Caratteristica di ampiezza di un filtro passa-basso reale (con evidenziate le tolleranze ammesse rispetto al filtro ideale).

Concludiamo osservando che, in certe applicazioni, anche una semplice rete RC può essere utilizzata come filtro passa-basso. Ciò avviene quando la massima pulsazione contenuta nello spettro del segnale utile è molto minore della frequenza di taglio, mentre è molto maggiore la minima pulsazione contenuta negli spettri dei termini che si vogliono eliminare. Un filtro semplice come l'RC, molto lontano dal comportamento ideale, è tuttavia poco indicato quando si voglia ridurre la banda del segnale, dove è richiesto un taglio più ripido. A questo scopo si prestano in particolare i filtri ricorrenti.

## Filtri ricorrenti

Consideriamo lo schema a blocchi del sistema rappresentato nella figura sotto: esso è costituito da due catene di blocchi di ritardo (pari a  $T$ ), una diretta ed una in retroazione. La prima è formata da  $N-1$  blocchi e da  $N$  prese che prelevano versioni diversamente ritardate del segnali d'ingresso; esse moltiplicate per i coefficienti  $h_k$  entrano nel sommatore in basso. Da esso viene prelevata l'uscita  $y(t)$  che viene posta in ingresso alla catena di retroazione, simile alla prima ma con  $M$  elementi di ritardo ed  $M$  prese, da cui vengono prelevate le versioni diversamente ritardate dell'uscita. Una volta moltiplicate per i coefficienti  $h'_k$  vengono anche esse inserite nel sommatore.

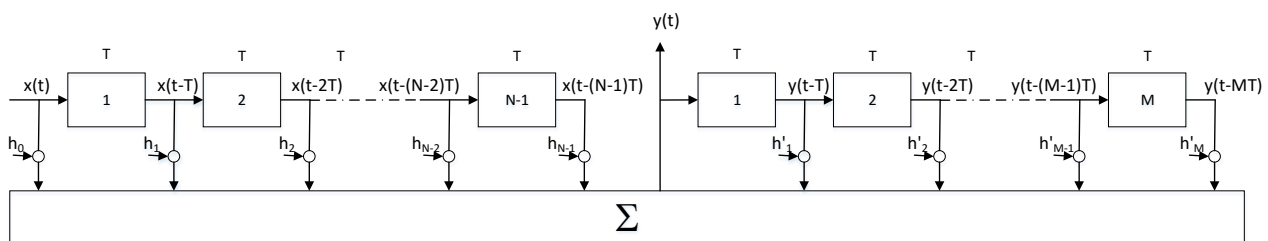


Fig.83 Schema a blocchi di un filtro ricorrente.

La relazione che descrive analiticamente quanto detto, è la seguente:



$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(t-kT) + \sum_{k=1}^M h'_k y(t-kT) \quad (5.71)$$

Da essa, applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri e ricordando la trasformata di un segnale ritardato si ha

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k X(\omega) e^{-j\omega kT} + \sum_{k=1}^M h'_k Y(\omega) e^{-j\omega kT} = \\ &= X(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\omega kT} + Y(\omega) \sum_{k=1}^M h'_k e^{-j\omega kT} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Riordinando è immediato ricavare la funzione di trasferimento come rapporto delle trasformate:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\omega kT}}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-j\omega kT}} \quad (5.73)$$

La funzione di trasferimento dipende dal ritardo  $T$ , dalle lunghezze delle linee dirette e di retroazione,  $N-1$ ,  $M$ , e dai valori dei coefficienti. Al variare di tutti questi parametri è possibile fare assumere alla funzione di trasferimento andamenti diversi, mantenendo inalterato lo schema; la complessità del filtro dipende invece dal numero di prese, cioè dalla lunghezza delle linee di ritardo. Osserviamo che in ogni caso la funzione di trasferimento è periodica nelle pulsazioni con periodo  $\omega_o = 2\pi / T$ . Da quanto sopra si ricavano immediatamente due casi particolari, quello dei filtri trasversali e quello dei filtri puramente ricorrenti. Prima di procedere anticipiamo che schemi dello stesso tipo possono essere considerati nel caso tempo discreto. In effetti la trattazione qui riportata è propedeutica ai filtri di tipo discreto, molto utilizzati attualmente.

### Filtri trasversali

Nei filtri trasversali manca il ramo di retroazione, ovvero i coefficienti  $h'_k$  sono tutti nulli (Fig.84).

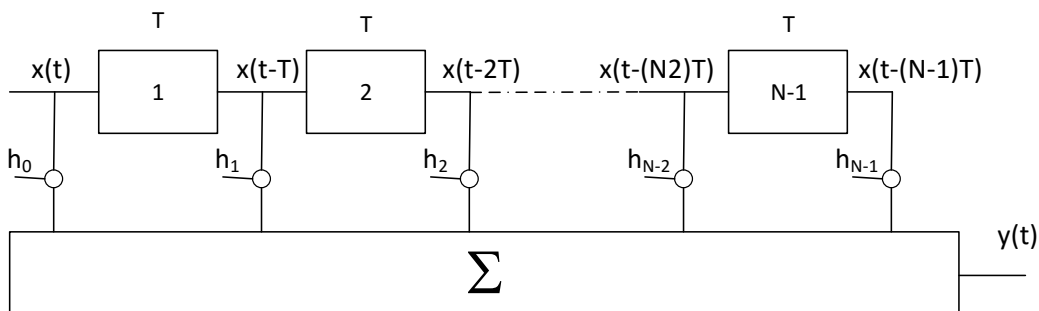


Fig.84 Schema a blocchi di un filtro trasversale.

La relativa funzione di trasferimento è:

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\omega kT} \quad (5.74)$$

La funzione di trasferimento sopra, considerata sull'intero piano complesso ( $s = \sigma + j\omega$ ), presenta solo zeri, quindi non si pongono problemi di stabilità (la stabilità verrà studiata nell'ambito del corso di Controlli Automatici).

**Filtri puramente ricorrenti**

In essi manca la catena diretta e l'ingresso vien portato direttamente al sommatore, cioè  $h_0=1$  mentre sono tutti nulli gli altri coefficienti  $h_k$

La relativa funzione di trasferimento è:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-j\omega kT}} \quad (5.75)$$

La funzione di trasferimento sopra, considerata sull'intero piano complesso ( $s = \sigma + j\omega$ ), presenta dei poli, quindi si pongono problemi di stabilità. Una volta progettato il filtro, in modo che sia stabile, occorre attenzione nelle realizzazioni a non troncarsi troppo presto le cifre decimali dei coefficienti.

**Criteri di progetto di filtri trasversali a coefficienti simmetrici**

Il progetto dei filtri ricorrenti non verrà qui esaminato in dettaglio. Tuttavia, per dare almeno un'indicazione di massima considereremo qui un caso particolare, quello di filtri trasversali a coefficienti simmetrici, impiegati per la realizzazione di un filtro passa-basso.

Per i motivi che vedremo fra poco imponiamo la simmetria dei coefficienti del filtro trasversale, cioè:

$$h_k = h_{N-1-k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.76)$$

Consideriamo il caso di  $N$  dispari.

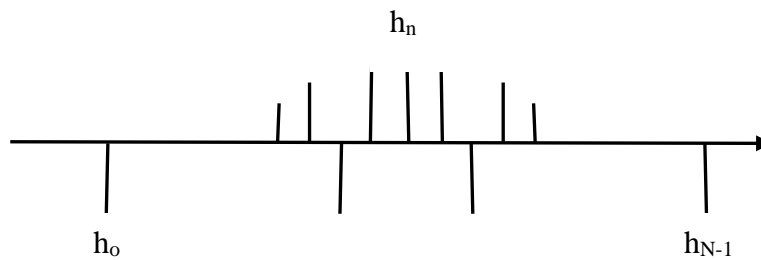


Fig.85 Coefficienti simmetrici,  $N$  dispari.

In questo caso il coefficiente centrale non ha un corrispondente e la condizione di simmetria sopra può essere riscritta in riferimento ad esso. Quindi indicato con  $n=(N-1)/2$  il pedice del coefficiente centrale si ha

$$h_{n-r} = h_{n+r} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.77)$$

Conviene quindi estrarre dalla funzione di trasferimento l'esponenziale  $e^{-j\omega nT}$  e scrivere  $N-1$  come  $2n$  per i motivi che vedremo in seguito

$$H(\omega) = e^{-j\omega nT} \sum_{k=0}^{2n} h_k e^{-j\omega(k-n)T} \quad (5.78)$$

Si cambia indice della sommatoria, ponendo  $n = k - r$  per renderla simmetrica; quindi si procede in modo simile a quanto fatto per introdurre la II forma dello sviluppo in serie di Fourier,

$$H(\omega) = e^{-j\omega nT} \sum_{r=-n}^n h_{n+r} e^{-j\omega rT} = e^{-j\omega nT} \left( h_n + \sum_{r=1}^n 2h_{n+r} \cos \omega rT \right) \quad (5.79)$$

Ponendo

$$G(\omega) = h_n + \sum_{r=1}^n 2h_{n+r} \cos \omega r T \quad (5.80)$$

Si ha infine

$$H(\omega) = G(\omega)e^{-jn\omega T} \quad (5.81)$$

La funzione  $G(\omega)$  è funzione reale, pari e periodica con periodo  $2\pi/T$ . Il suo modulo rappresenta la caratteristica di ampiezza, mentre la loro caratteristica di fase, quando  $G(\omega) > 0$ , è proporzionale a  $\omega$ . Si noti che questa proporzionalità soddisfa automaticamente la seconda delle condizioni di non distorsione. Il progetto del filtro dovrà fare in modo che  $G(\omega)$  sia circa costante nelle bande passanti e circa zero in quelle attenuate.

In realtà, a causa della periodicità di  $G(\omega)$ , le bande passanti desiderate si ripetono con periodo  $2\pi/T$ , dando origine a bande passanti spurie (si veda a questo proposito l'esempio nella figura sotto, riferito ad un passa-basso).

Se l'ingresso del filtro non comprende componenti spettrali nelle bande passanti spurie esse sono influenti; altrimenti occorre porre in cascata al filtro trasversale un filtro supplementare che provveda ad eliminare tali bande. Nel caso di un filtro passa-basso una semplice rete RC può servire allo scopo.

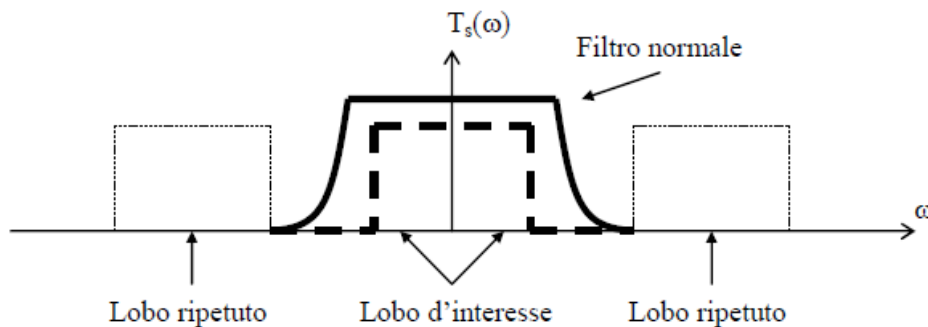


Fig.86 Eliminazione delle bande passanti spurie di un filtro passa-basso tramite l'inserzione in cascata di un filtro supplementare (rete RC).

#### Procedimento sub-ottimo per la realizzazione di un passa-basso

Il progetto di un filtro trasversale richiede il calcolo dei valori di  $N$  e dei coefficienti  $h_k$  che rendono soddisfatte, nelle bande di competenza e secondo specifiche assegnate, le approssimazioni  $G(\omega)=1$  nella bande passanti e  $G(\omega)=0$  nelle bande attenuate.

Esistono algoritmi ottimali che, date le specifiche di tolleranza, realizzano l'andamento voluto della  $G(\omega)$  con andamenti di tipo oscillatorio attorno ai valori desiderati 1 e 0.

Vale però la pena parlare di un procedimento sub-ottimo, che viene suggerito immediatamente dall'espressione della  $G(\omega)$ . Osserviamo infatti che se fosse  $n=\infty$  questa relazione altro non sarebbe che lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica e pari (sviluppo in soli coseni, seconda forma). Lo sviluppo in questione ci darebbe quindi i coefficienti cercati dati da:

$$\begin{aligned} h_n &= a_o / 2 \\ h_{n+r} &= h_{n-r} = a_r / 2 \end{aligned} \quad (5.82)$$

Con infiniti termini sarebbe possibile realizzare qualunque caratteristica di ampiezza, anche ideale, con discontinuità in corrispondenza alle pulsazioni di taglio. Ciò richiederebbe però un filtro di lunghezza infinita, non fisicamente realizzabile, che peraltro introdurrebbe anche un ritardo infinito. Ovviamente occorre quindi limitare il numero dei termini. Un procedimento sub-ottimo per realizzare, nell'ambito di una prefissata approssimazione, una qualunque caratteristica di ampiezza

(ovviamente periodicizzata) potrebbe allora essere il seguente: dapprima si sviluppa in serie di Fourier la caratteristica assegnata, quindi si provvede poi a troncare tale sviluppo in modo da mantenere un numero di termini sufficiente ad approssimare tale caratteristica secondo le specifiche stabilite.

Il semplice procedimento ora presentato non è ottimo nel senso che il numero di termini da considerare, e quindi la lunghezza del filtro, risulta superiore a quello a cui condurrebbero procedimenti ottimali (e che produrrebbero, ovviamente, diversi coefficienti, ed un numero di prese inferiore).

## Esercizi

### ***Risposta impulsiva di un filtro passa-basso ideale***

Calcolare la risposta impulsiva del filtro passa-basso ideale le cui caratteristiche di ampiezza e di fase sono rappresentate in Fig.78, limitatamente al solo semiasse positivo (si ricorda che esse sono definite su tutto l'asse; viene rappresentato solo il semiasse positivo per convenienza grafica, essendo nelle reti reali pari la caratteristica di ampiezza e dispari quella di fase). La funzione di trasferimento è data da:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq \omega_t \\ 0 & |\omega| > \omega_t \end{cases} \quad (5.83)$$

Ricordando l'esercizio sulla antitrasformata di un impulso nelle frequenze, e la proprietà delle funzioni ritardate si ha:

$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = \frac{\omega_t}{\pi} \frac{\text{sen} \omega_t(t - t_0)}{\omega_t(t - t_0)} \quad (5.84)$$

La condizione di fisica realizzabilità  $h(t)=0$  per  $t<0$  non è verificata. Ciò mette in evidenza che nessuna rete di tipo causale può comportarsi come un filtro ideale passa-basso. Si noti tuttavia che aumentando il ritardo della risposta,  $t_0$ , la parte anticipativa della risposta impulsiva diventa sempre più piccola. Si noti inoltre che aumentando il valore della frequenza di taglio il sinc si alza e si concentra sul valore  $t_0$ .

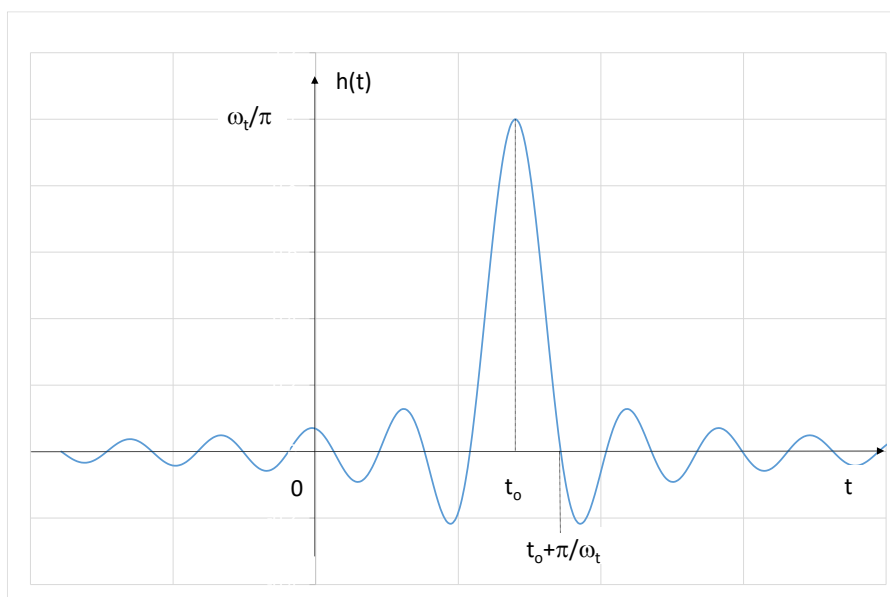


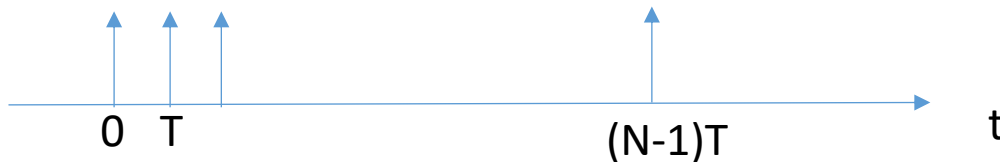
Fig.87 Risposta impulsiva di un filtro ideale passa basso.

**Risposta impulsiva di un filtro trasversale.**

La risposta impulsiva di un filtro trasversale non esiste nell'ambito delle funzioni ordinarie. Infatti, ponendo in ingresso al filtro  $\delta(t)$  anziché un generico  $x(t)$  si ottiene immediatamente la risposta impulsiva

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \delta(t - kT) \quad (5.85)$$

Essa risulta quindi formata da un pettine di N delta di Dirac.



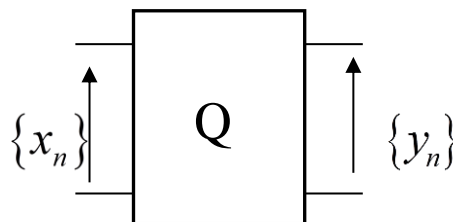
*Fig.88 Risposta impulsiva di un filtro ideale passa basso.*

Si noti che detta risposta impulsiva, essendo costituita da un numero finito di funzioni impulsive, ha durata finita. Per questo motivo si usa anche la denominazione di filtri FIR (Finite Impulse Response) per indicare i filtri trasversali.

I filtri ricorrenti presentano invece come risposta impulsiva una successione di infinite funzioni impulsive, e quindi con durata infinita: da qui la denominazione di filtri IIR (Infinite Impulse Response).

**Sistemi lineari tempo-discreti**

La definizione dei sistemi lineari tempo discreti ricalca quella dei sistemi lineari tempo continui, a meno della simbologia. Si procederà quindi velocemente ad una sintesi dei concetti già visti. Consideriamo il sistema in figura, che alla serie temporale in ingresso  $\{x_n\}$  fa corrispondere, in uscita, la serie temporale  $\{y_n\}$ .



*Fig.89 Schema a blocchi di un sistema tempo discreto.*

$$y_n = Q[\{x_n\}] \quad n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty \quad (5.86)$$

Il generico termine  $y_n$  dipende in generale dall'intera serie d'ingresso. Nel caso in cui dipenda solo dai valori passati e presente, cioè se  $y_n$  è indipendente da  $x_m$   $m > n$  il sistema si dice causale, in quanto esiste una relazione causa effetto fra ingresso ed uscita, come sempre accade nei sistemi fisicamente realizzabili. Altrimenti il sistema è anticipativo (possono essere anticipativi alcuni sistemi ideali). Se la dipendenza si riduce al solo valore  $x_n$  presente in ingresso, il sistema si dice privo di memoria.

Il sistema è detto lineare se:

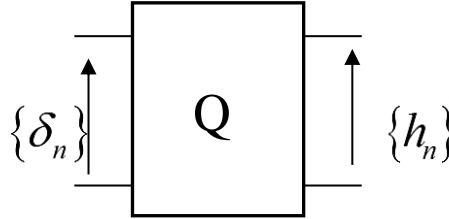
$$Q\left[\left\{c_1 x_n^1 + c_2 x_n^2\right\}\right] = c_1 Q\left[\left\{x_n^1\right\}\right] + c_2 Q\left[\left\{x_n^2\right\}\right] \quad (5.87)$$

Qualunque siano i coefficienti e le serie in ingresso.

Il sistema è detto tempo-invariante se la risposta alla serie ritardata è la risposta ritardata, qualunque sia il ritardo (iT):

$$y_{n-i} = Q[\{x_{n-i}\}] \quad (5.88)$$

### Risposta impulsiva



*Fig.90 Risposta impulsiva di sistema lineare tempo discreto e tempo-invariante.*

La risposta impulsiva discreta  $\{h_n\}$  di un sistema discreto lineare tempo-invariante è la risposta alla serie temporale  $\{\delta_n\}$ , formata da tutti “0” tranne un “1” nell’origine (corrispondente tempo discreto del Delta di Dirac); analiticamente:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.89)$$

Si noti che  $F[\{\delta_n\}] = 1$ .

La risposta impulsiva  $\{h_n\}$  descrive completamente il comportamento della rete lineare. In particolare consente di esprimere la risposta ad una qualsiasi serie temporale d'ingresso rimanendo nel dominio dei tempi. Infatti, osservando che

$$x_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \delta_{n-i} = \{x_n\} * \{\delta_n\} \quad (5.90)$$

Dalle condizioni di linearità e tempo-invarianza, in modo analogo a quanto visto per i sistemi tempo continui, discende la relazione:

$$y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i h_{n-i} = \{x_n\} * \{h_n\} \quad (5.91)$$

In altre parole, l’uscita di una rete lineare è sempre data dalla convoluzione fra ingresso e risposta impulsiva, sia per i sistemi tempo continui che tempo discreti.

### Funzione di trasferimento

Si definisce funzione di trasferimento  $H_s(\omega)$  di un sistema discreto lineare tempo-invariante la trasformata secondo Fourier della risposta impulsiva discreta:

$$H_s(\omega) = F[\{h_n\}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jn\omega T} \quad (5.92)$$

Se le serie temporali di ingresso e di uscita sono dotate di trasformata secondo Fourier, per il teorema della convoluzione vale la relazione:

$$Y_s(\omega) = X_s(\omega) H_s(\omega) \quad (5.93)$$

### Filtri trasversali tempo discreti

Un filtro trasversale tempo-discreto è costituito da un registro a scorrimento (shift-register) e da un sommatore. Di fatto lo schema è lo stesso del caso tempo continuo, tuttavia in ingresso ed in uscita si hanno in questo caso delle serie temporali (Fig.91). Si noti che alle prese dei coefficienti è stato aggiunto un apice per evitare confusione con i termini della risposta impulsiva.

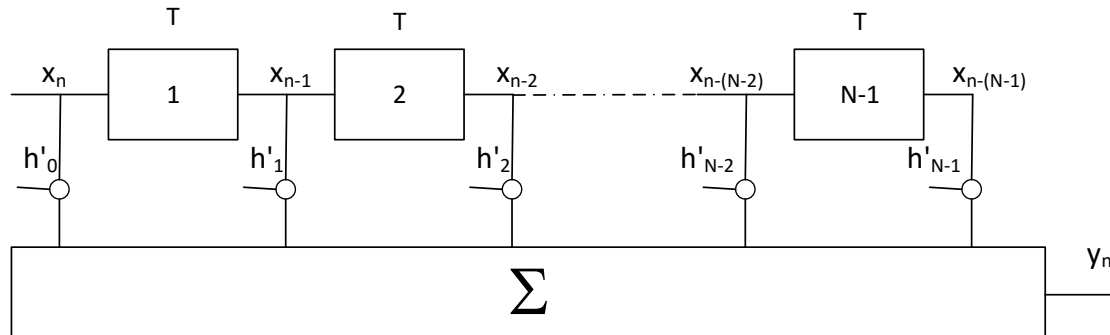


Fig.91 Schema di un filtro trasversale (o FIR) tempo discreto.

Il filtro trasversale è un sistema discreto causale con memoria finita, in quanto non essendoci rami in retroazione, il termine  $n$ -esimo della serie temporale d'uscita dipende solamente dal valore in ingresso e dagli  $N - 1$  termini precedenti.

La relazione ingresso-uscita è data da:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h'_k x_{n-k} \quad (5.94)$$

La risposta impulsiva si ottiene considerando in ingresso la serie  $\{\delta_n\}$ , di fatto un solo “1” preceduto e seguito da “0”. E' immediato verificare che si ottiene una serie data da infiniti “0”, seguiti dagli  $N$  coefficienti delle prese a partire dall'origine dei tempi, e quindi ancora da infiniti “0”:

$$\{h_n\} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ h'_n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n > N-1 \end{cases} \quad (5.95)$$

Si tratta ancora di una risposta impulsiva finita, cioè costituita da un numero finito  $N$  di termini in generale non nulli, contrariamente a quanto accade per i filtri discreti di tipo ricorrente. Come nel caso tempo continuo, anche in quello tempo discreto valgono sempre le denominazioni FIR e IIR attribuite, rispettivamente, alle strutture non ricorrenti e ricorrenti.

La funzione di trasferimento è data da

$$H_s(\omega) = F[\{h_n\}] = \sum_{k=0}^{N-1} h'_k e^{-jk\omega T} \quad (5.96)$$

### Esercizio sui filtri trasversali tempo discreti

Dato un sistema lineare tempo invariante, la cui relazione ingresso-uscita è data da

$$y_n = x_n + 5x_{n-1} + 3x_{n-2} \quad (5.97)$$

Calcolare la risposta impulsiva discreta, la funzione di trasferimento e la sequenza di uscita quando in ingresso è presente la sequenza:

$$x_n = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.98)$$

Per prima cosa occorre riconoscere dalla relazione ingresso uscita che la rete è un filtro trasversale tempo-discreto (Fig.92).

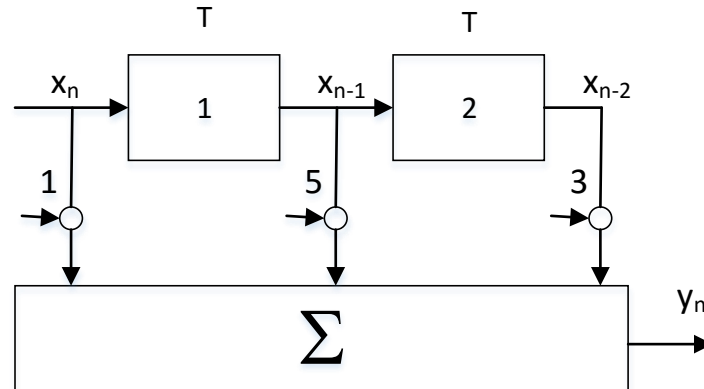


Fig.92 Schema del filtro trasversale tempo discreto corrispondente alla relazione ingresso-uscita data nell'esercizio.

Si possono quindi richiamare i risultati già noti dalla teoria per le prime due domande. In particolare si ha:

$$\{h_n\} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 5 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases} \quad (5.99)$$

$$H_s(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h'_k e^{-jk\omega T} = 1 + 5e^{-j\omega T} + 3e^{-j2\omega T} \quad (5.100)$$

Le terza domanda si risolve utilizzando la relazione ingresso uscita data nel testo. Conviene scrivere una tabella con tante colonne quante prese ed una riga per ogni stato del registro a scorrimento in successione temporale.

Tabella 2 Coefficienti del filtro e stati del registro a scorrimento in successione temporale

| <b>1</b> | <b>5</b> | <b>3</b> |
|----------|----------|----------|
| 1        | 0        | 0        |
| 1        | 1        | 0        |
| 1        | 1        | 1        |
| 1        | 1        | 1        |
| 1        | 1        | 1        |
| 1        | 1        | 1        |
| 0        | 1        | 1        |
| 0        | 0        | 1        |

Moltiplicando i termini di ciascuna riga per i coefficienti e sommando si ottiene:



$$\{y_n\} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 6 & n = 1 \\ 9 & n = 2 \\ 9 & n = 3 \\ 9 & n = 4 \\ 9 & n = 5 \\ 8 & n = 6 \\ 3 & n = 7 \\ 0 & n > 7 \end{cases} \quad (5.101)$$

Si noti che la lunghezza è di 8 elementi, pari alla lunghezza della sequenza di ingresso più N-1.

## Capitolo 6 Rappresentazione digitale dei segnali: PCM **Equation Section (Next)**

### Conversione analogico digitale tecnica PCM

La conversione di un segnale analogico in un segnale digitale (A/D), ed in particolare in una serie di bit, è di importanza fondamentale non solo nei sistemi di telecomunicazione moderni, ma anche nell'industria discografica, in quella fotografica, nella realizzazione di strumenti di misura e in moltissimi altri campi. I vantaggi dei segnali digitali sono molteplici, ma forse il più importante è la molto maggiore facilità di elaborazione e di memorizzazione, attuabile con tecniche di tipo informatico, cioè con algoritmi operanti su hardware generico o su appositi processori (DSP, Digital Signal Processor) e su supporti dello stesso tipo (CD, DVD, HD, SSD...). Le tecniche di conversione analogico digitale sono diverse; qui esamineremo quella di base, detta anche PCM (Pulse Code Modulation) per motivi storici.

Da un punto di vista logico la conversione analogico-digitale PCM prevede tre passaggi: campionamento, quantizzazione e codifica, riassunti nello schema a blocchi della figura sotto.

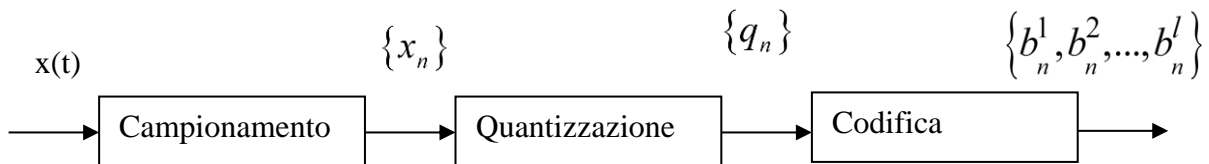


Fig.93 Schema a blocchi della conversione A/D (tecnica PCM).

#### Campionamento

Per prima cosa è necessario passare da un segnale tempo continuo ad un segnale tempo discreto. Questo è il compito del campionatore, che campionerà quindi il segnale  $x(t)$  ad una frequenza di campionamento  $f_o$  prefissata, ottenendo la serie temporale  $\{x_n\}$   $x_n = x(nT)$ . Il teorema di Shannon ci assicura che non si ha perdita di informazione, cioè l'operazione è reversibile, se la frequenza di campionamento è superiore al doppio della massima frequenza  $f_m$  a cui è apprezzabile lo spettro del segnale stesso:

$$f_o > 2f_m \quad (6.1)$$

La condizione sopra è condizione sufficiente per evitare l'aliasing nel dominio delle frequenze e per poter quindi ricostruire il segnale originario. Il rispetto della condizione può avvenire in due modi: o aumentando la frequenza di campionamento fino a soddisfare la condizione (con un certo margine, necessario per l'operazione inversa), oppure, nel caso in cui la frequenza di campionamento sia fissa, antepoendo al campionatore un filtro passa-basso in grado di ridurre la frequenza massima del segnale.

#### Quantizzazione

La serie temporale  $\{x_n\}$  è un segnale tempo-discreto, ma non discreto nei valori. Assumendo  $x(t)$  bilanciato, con valori compresi nell'intervallo  $[-M, M]$ , i campioni risulteranno anch'essi compresi in detto intervallo, potendo assumere qualsiasi valore all'interno di esso. Per poter procedere, è necessario ridurre il numero dei valori da infinito a finito, passando da una serie temporale continua nei valori ad una discreta nei valori. L'operazione viene detta quantizzazione, e consiste in una approssimazione dei valori ottenuti. L'intervallo di variabilità  $[-M, M]$  dei valori campionati viene suddiviso in un numero finito di intervalli (intervalli di quantizzazione) e tutti i valori interni a ciascuno di questi vengono identificati con uno di essi, che indichiamo con  $q_n$ . L'operazione di quantizzazione non è evidentemente reversibile, in quanto non è possibile risalire da un valore quantizzato al campione che l'ha generato. L'intervallo su cui opera il quantizzatore,  $[-M_q, M_q]$  viene

detto dinamica del quantizzatore, ed è opportuno che coincida con quella del segnale, come verrà mostrato in seguito. Spesso, ma non necessariamente, la dinamica del quantizzatore è suddivisa in intervalli uguali, nel qual caso si dice “uniforme”. In caso contrario, si dice “non-uniforme”. Il valore rappresentativo di ogni intervallo è arbitrario, ma spesso viene scelto per simmetria il valore centrale. La differenza fra campione e valore quantizzato corrispondente si dice “errore” di quantizzazione.

$$e_n = x_n - q_n \quad (6.2)$$

Scegliendo come rappresentativo il valore centrale dell’intervallo il suo valore massimo è pari alla metà dell’intervallo stesso. Ogni altra scelta porta ad un errore massimo maggiore.

L’operazione di quantizzazione può essere rappresentata sia ad una (Fig.94) che a due dimensioni (Fig.95).

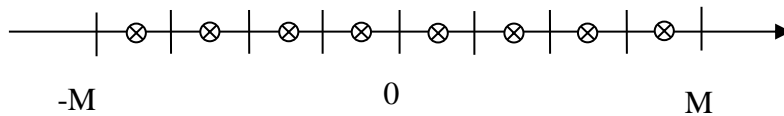


Fig.94 Esempio di legge di quantizzazione uniforme a 8 livelli “midrise” con valori rappresentativi centrali (crocette).

Two types of quantization: (a) midtread and (b) midrise.

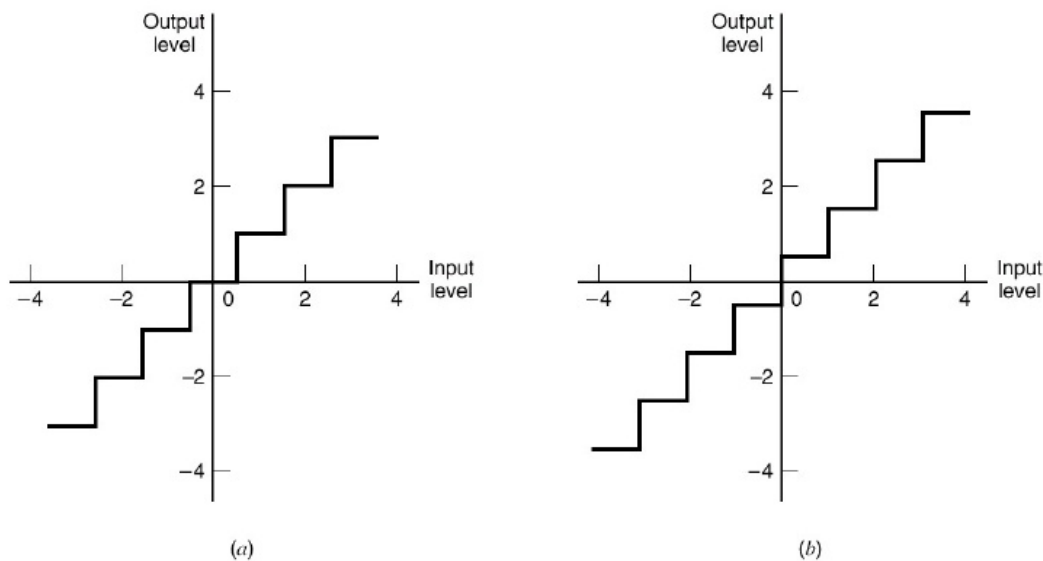


Fig.95 Esempi di legge di quantizzazione uniforme “midtread” e “midrise” con valori rappresentativi centrali.

La rappresentazione in due dimensioni mette in evidenza il legame funzionale fra campioni e valori quantizzati, detto “legge di quantizzazione”

$$q_n = f(x_n) \quad (6.3)$$

I valori assumibili dalla variabile  $q_n$  vengono anche detti “livelli” di quantizzazione, per motivi ovvi guardando l’andamento a scala della funzione di quantizzazione. La scelta del quantizzatore ottimo, cioè della miglior legge di quantizzazione, intendendo per migliore quella che minimizza gli effetti

del errore di quantizzazione, dipende dalla statistica dei campioni (argomento trattato dalla Teoria dell'Informazione, non esaminato qui). Per la sua semplicità, viene spesso usato il quantizzatore uniforme, anche quando non ottimo. Risulta evidente che maggiore è il numero di livelli,  $L$ , minore sarà in generale l'errore di quantizzazione. L'aumento di  $L$ , tuttavia, comporta come vedremo fra un attimo un aumento dei bit necessari a rappresentare il segnale, per cui si impone un compromesso fra qualità e numero di bit.

### Codifica

I primi due passi della conversione A/D ci permettono di ottenere una serie tempo discreta e discreta nei valori, a partire da un segnale analogico, quindi tempo continuo e continuo nei valori. Il passo successivo è trasformare la serie dei valori quantizzati in una serie di bit.

La codifica associa ad ognuno degli  $L$  livelli che possono essere assunti dai valori quantizzati una parola formata da un certo numero di bit, in modo da avere una corrispondenza biunivoca fra valori ed "etichette" binarie. Non considerando qui volutamente le codifiche entropiche per semplicità, si assume che tutte le etichette siano formate dallo stesso numero di bit, che dovrà essere quindi messo in relazione al numero di livelli  $L$

$$l \geq \log_2 L \quad (6.4)$$

Di norma conviene prendere  $L$  potenza di due o potenza di due meno uno, in modo da avere rispettivamente  $L = 2^l$  o  $L = 2^l - 1$ . La prima scelta è preferita quando si vuole che l'origine si trovi al confine fra due intervalli diversi ("quantizzatore "midrise"), la seconda quando si vuole inserire un intervallo a cavallo dell'origine (quantizzatori "midtread"). La seconda scelta ha il vantaggio di rendere nullo il segnale ricostruito quando i campioni sono molto piccoli e cioè vicinissimi all'origine (ad esempio per eliminare il fruscio in assenza di segnale utile).

Ciò premesso, il codificatore assocerà ad ogni elemento della serie  $\{q_n\}$  una parola di  $l$  bit, ottenendo una serie di parole binarie  $\{b_n^1 b_n^2 \dots b_n^l\}$ . Ovviamente gli elementi di tale serie, anziché a blocchi di  $l$  possono essere pensati come singoli bit, cioè come elementi di una serie binaria con intervallo fra bit, detto tempo di bit, ridotto di un fattore  $l$ ,

$$T_b = T / l \quad (6.5)$$

La frequenza di bit,  $f_b = 1 / T_b$ , risulta invece

$$f_b = f_o l \quad (6.6)$$

Essa rappresenta il numero di bit necessari a rappresentare (quindi sia a trasmettere che memorizzare) un secondo del segnale, ed è evidentemente un fattore fondamentale nella valutazione di un sistema di conversione A/D. Si noti che aumentando il numero  $L$  di livelli, cioè diminuendo l'errore di quantizzazione, aumenta tuttavia con legge logaritmica la frequenza di bit. Il progetto di un sistema A/D consiste nel bilanciare quindi qualità (in termini di rapporto segnale rumore di quantizzazione, introdotto in seguito), frequenza di bit e, terzo ma non ultimo, complessità dei circuiti e/o degli algoritmi.

### Esempi

Nel caso di segnale telefonico la banda netta è di 300-3400 Hz (standard europeo). Gli standard richiedono  $f_o = 8000$  Hz e prevedono 255 livelli ( $= 2^8 - 1$ ) di quantizzazione (quantizzatore non uniforme "midstep") cioè 8 bit per campione. La frequenza di bit risulta  $f_b = 64000$  bit/s.

Nel caso di segnale CD (mono) lo standard richiede  $f_o = 44100$  Hz e 65536 livelli di quantizzazione (quantizzatore uniforme "midriser") cioè 16 bit per campione. La frequenza di bit risulta  $f_b = 705600$  bit/s, cioè più di un ordine di grandezza superiore rispetto al caso telefonico. Ovviamente la qualità,

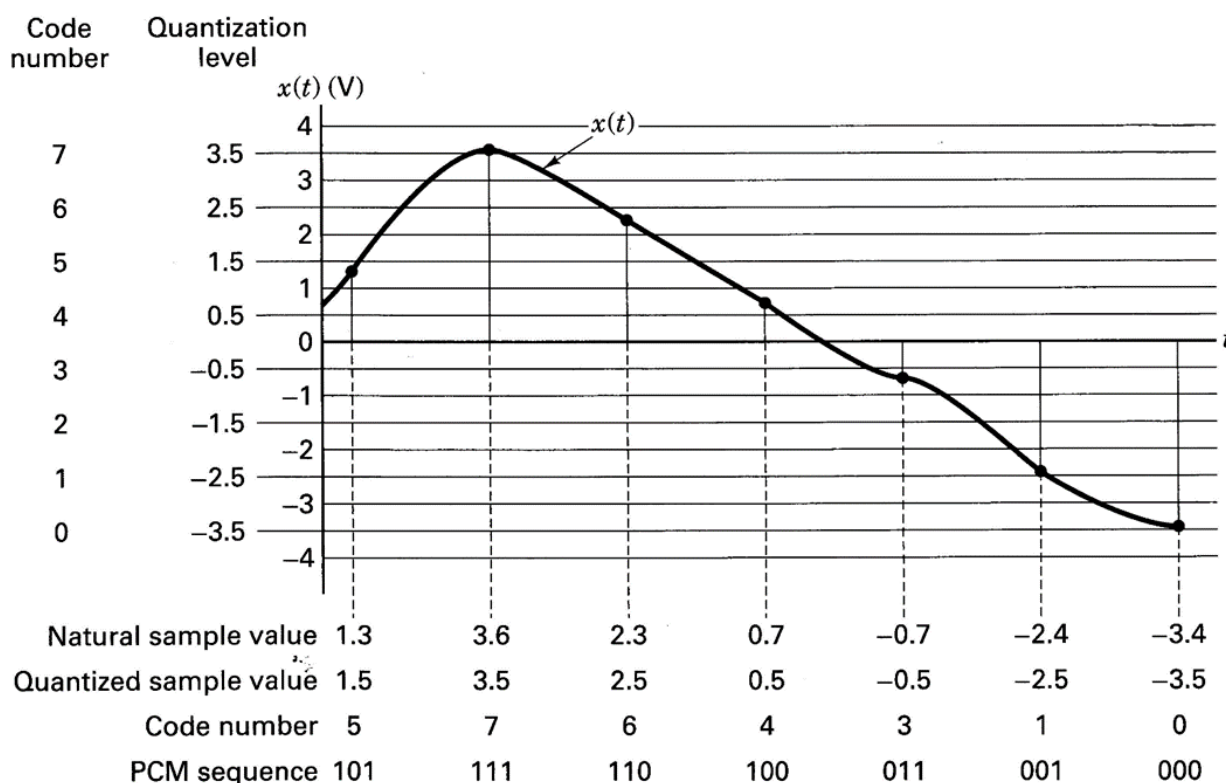
sia in termini di banda riproducibile, sia in termini di rapporto segnale rumore di quantizzazione è molto più elevata.

### **Perché PCM (Pulse Code Modulation)**

La conversione A/D appena vista prende il nome di PCM, Pulse Code Modulation perché in origine era associata alla creazione di un segnale PAM binario (con impulso rettangolare RZ o NRZ, vedi in seguito) a partire dalla serie di bit ottenuta nella conversione A/D. Questo segnale binario rappresentava l'alternativa, "in codice", al segnale PAM che si sarebbe potuto ottenere dalla convoluzione dei valori quantizzati con un impulso dello stesso tipo. Questo in particolare nell'ambito dei segnali telefonici.

In realtà, la serie di bit ottenuta dal processo di conversione A/D non viene necessariamente trasmessa, e se trasmessa non necessariamente tramite un segnale PCM. Le applicazioni in cui i bit vengono memorizzati anziché trasmessi sono certamente altrettanto importanti. Inoltre, negli strumenti di misura, viene spesso dato in tempo reale un valore specifico del segnale  $x(t)$ , ad esempio il valore attuale, oppure quello massimo o minimo. Anche in questo caso non vi è a valle della conversione A/D la trasmissione di nessun segnale.

La figura sotto, di cui si raccomanda uno studio attento, riassume i 3 passi della conversione A/D in modo estremamente efficace.



**Figure 2.16** Natural samples, quantized samples, and pulse code modulation. (Reprinted with permission from Taub and Schilling, *Principles of Communications Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971, Fig. 6.5-1, p. 205.)

*Fig.96 Campioni, campioni quantizzati, codifica dei medesimi con un intero (code number) e in binario (PCM). Dall'opera citata.*

## Conversione digitale analogica tecnica PCM

La conversione digitale analogica (D/A) consiste nella ricostruzione del segnale originario  $x(t)$  a partire dal corrispondente messaggio numerico, cioè dai bit che lo rappresentano. Essa prevede due soli passi: decodifica e ricostruzione del segnale. Si noti che la quantizzazione non ha inverso, essendo irreversibile.

### Decodifica

E' ovviamente il processo inverso della codifica, mediante il quale si ricostruiscono i valori quantizzati  $\{q_n\}$ , a partire dalle parole di codice  $\{b_n^1 b_n^2 \dots b_n^l\}$ . Essendo la quantizzazione una operazione non reversibile, la serie  $\{q_n\}$  deve necessariamente essere trattata come se fosse la serie  $\{x_n\}$  dei valori campionati. L'errore di quantizzazione farà però sì che il segnale ricostruito differisca da quello originale: la differenza prenderà il nome di rumore di quantizzazione:

$$e(t) = x_r(t) - x(t) \quad (6.7)$$

### Ricostruzione del segnale

#### Generazione del segnale PAM

Dal punto di vista teorico il segnale potrebbe essere ricostruito a partire dalla conoscenza dei suoi campioni utilizzando la serie di Shannon. In pratica questo procedimento non viene seguito per una serie di motivi, fra cui la necessità (teorica) di poter disporre di tutti i campioni per calcolare la formula. Risulta molto più conveniente ricostruire il segnale a partire dal segnale PAM ottenuto come prodotto di convoluzione della serie dei valori quantizzati, equivalenti ai campioni, a meno dell'errore dovuto alla quantizzazione (qui momentaneamente trascurato per poter procedere con la dimostrazione), con un impulso rettangolare  $g(t)$ , di ampiezza unitaria, con origine a  $t=0$ . Si ottiene quindi il segnale PAM già considerato nel capitolo 4 (vedi Fig.48):

$$s(t) = \{x_n\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT) \quad (6.8)$$

#### Filtratura passa-basso

Mostriamo ora come sia possibile ricostruire il segnale  $x(t)$  a partire da quello PAM. Richiamando i risultati ottenuti per la trasformata di un segnale PAM si ha:

$$S(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0)G(\omega) \quad (6.9)$$

Se il campionamento di  $x(t)$  è stato effettuato in accordo con la condizione del teorema di campionamento, i termini della ripetizione periodica della trasformata del segnale non si sovrappongono (assenza di aliasing nelle frequenze) e di conseguenza l'impiego di un filtro passa-basso consente di isolare il termine centrale. La frequenza di campionamento è bene sia un po' superiore al doppio della frequenza del segnale per consentire un raccordo continuo da banda passante ( $[0, f_m]$ ) a banda attenuata  $[f_0 - f_m, \infty]$  (si ricorda che un filtro reale non può avere caratteristica di ampiezza discontinua).

Si ha quindi in uscita al filtro (trascurando il ritardo da esso introdotto):

$$S_f(\omega) = X(\omega) \frac{G(\omega)}{T} \quad (6.10)$$

Eventuale equalizzazione

Per ottenere il segnale originario occorre porre in cascata al filtro passa-basso una rete equalizzatrice la cui funzione di trasferimento è data da:

$$H_e(\omega) = \begin{cases} \frac{T}{G(\omega)} & |\omega| \leq \omega_m \\ \text{qualsiasi} & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (6.11)$$

Tuttavia, se la durata  $\tau$  dell'impulso  $g(t)$  è molto minore di  $T$ , la sua trasformata  $G(\omega)$  è praticamente costante ed eguale a  $\tau$  nella banda del segnale, in quanto ha un andamento a lobi e il primo punto di nullo è a  $2\pi/\tau \gg 2\pi/T = \omega_0 > 2\omega_m$ . La rete equalizzatrice può quindi essere omessa, dato che si ottiene comunque  $x(t)$  in uscita al filtro passa-basso a meno di una costante moltiplicativa.

In altri termini, un filtro passa-basso è sufficiente per ricostruire dal segnale PAM il segnale originario a meno di una costante moltiplicativa e del ritardo introdotto dal circuito. Nel caso telefonico (standard europeo) questo filtro ha banda passante fino a 3400 Hz e banda attenuata da 4600 Hz

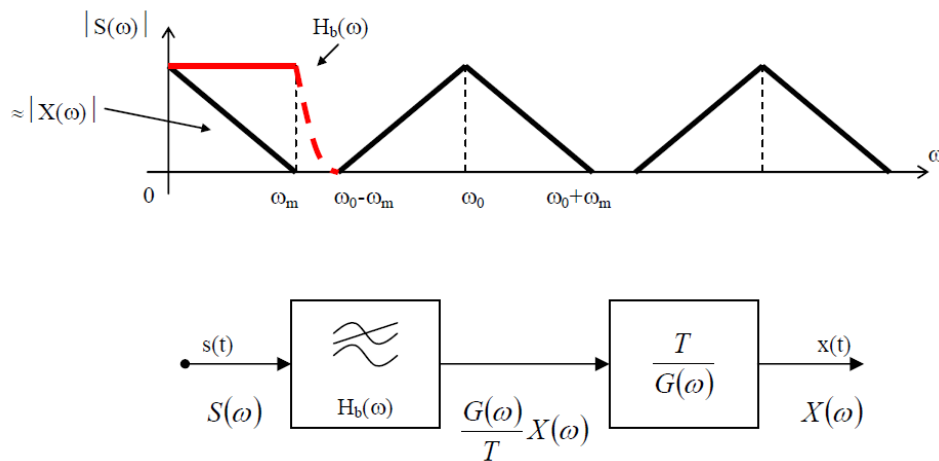


Fig.97 Funzione del filtro passa-basso e della rete equalizzatrice nella conversione D/A PCM.

## Capitolo 7 Introduzione alla teoria della modulazione **Equation Section (Next)**

### Introduzione

In alcuni casi, ed in particolare in quello radio, può capitare che si debba trasmettere un segnale su un canale di tipo passa-banda, mentre il segnale è di tipo passa-basso. Senza entrare nei dettagli, esistono almeno tre motivazioni per dover trasformare un passa-basso in un passa-banda:

- La dimensione delle antenne deve essere confrontabile con la lunghezza d'onda. Questo implicherebbe antenne gigantesche per le basse frequenze.
- In un segnale passa-basso, il rapporto fra la frequenza massima e quella minima dello spettro è molto alto (circa 10 nel caso telefonico, circa 1000 in un segnale audio qualità CD), quando addirittura non infinito. Un'antenna progettata per lavorare su una frequenza estrema lavorerebbe malissimo sull'altra.
- Anche se fosse fisicamente possibile trasmettere il segnale passa-basso nella sua banda naturale, questo interferirebbe facilmente con altri segnali della stessa natura trasmessi contemporaneamente nelle vicinanze (ad esempio la voce del professore al microfono radio in un'aula con quella di un collega nell'aula accanto).

In generale, tutte le volte che il segnale  $x(t)$  da trasmettere è passa-basso mentre il canale di trasmissione è passa-banda, occorre associare al segnale  $x(t)$  un segnale passa-banda, trasmissibile sul canale. Tale associazione deve naturalmente essere invertibile, per restituire all'utilizzatore finale un segnale passa-basso. Questa associazione si ottiene ricorrendo alla modulazione di una oscillazione sinusoidale, a frequenza sufficientemente elevata, detta "portante". Il segnale  $x(t)$  si dice allora segnale "modulante", in quanto modula, cioè modifica, le caratteristiche della portante (ampiezza e/o argomento), mentre il segnale  $s(t)$  così ottenuto è detto oscillazione "modulata". Il segnale modulante è assunto reale e a valor medio nullo, nonché passa-basso.

Una modulazione si dice analogica o digitale a seconda che sia analogico o digitale (tipo PAM) il segnale modulante. Nel seguito la trattazione si limiterà alle sole modulazioni analogiche per motivi di tempo. Quelle digitali possono essere tuttavia ottenute in linea di principio sostituendo al segnale  $x(t)$  analogico un segnale digitale, per cui in ogni caso la trattazione delle modulazioni analogiche, qui svolta, è da considerarsi propedeutica. Un accenno alle modulazioni digitali verrà fatto nell'ultimo capitolo della dispensa.

### Definizioni

Diamo ora una serie di definizioni relative alla modulazione di oscillazioni sinusoidali. Esse serviranno per poter introdurre velocemente ed in modo molto schematico le principali modulazioni analogiche.

La portante, come ogni senoide, è caratterizzata dai parametri ampiezza, pulsazione e fase. Dato che nel processo di modulazione uno o più di questi parametri vengono modificati dal segnale modulante, essi vengono detti "iniziali" e contraddistinti dal pedice "o", che contraddistingue la portante stessa. L'espressione della portante è quindi:

$$s_o(t) = V_o \cos(\omega_o t - \varphi_o) \quad (7.1)$$

Per trasmettere informazione bisogna variare (modulare) uno o più dei parametri sopra menzionati. Tali variazioni debbono inoltre essere "lente" rispetto alla rapidità di variazione della portante; a tal fine basta scegliere la pulsazione della portante stessa sufficientemente elevata rispetto alla massima pulsazione contenuta nello spettro del segnale modulante. Si ottiene in tal modo un'oscillazione sinusoidale modulata  $s(t)$  la cui espressione più generale può essere posta nella forma:

$$s(t) = V(t) \cos \varphi(t) \quad V(t) \geq 0 \quad (7.2)$$



In relazione all'espressione sopra, si danno le seguenti definizioni:

- $V(t)$  ampiezza istantanea;
- $\varphi(t)$  fase istantanea (=intero argomento del coseno);
- $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$  pulsazione istantanea

Queste definizioni sono coerenti con quelle già note di ampiezza, fase istantanea e pulsazione di una sinusoide non modulata. Infatti, riferendole alla oscillazione portante si ha:

- $V(t) = V_o$  ampiezza (costante);
- $\varphi(t) = \omega_o t - \varphi_o$  argomento del coseno (lineare in  $t$ )
- $\omega(t) = \omega_o$  pulsazione (costante)

Diamo quindi le seguenti altre definizioni. Esse sono chiamate “deviazioni” in quanto sono definite come differenza fra i parametri dell'oscillazione modulata ed i corrispondenti della portante; Sono cioè le differenze introdotte dalla modulazione. Si chiamano istantanee, perché dipendono da  $t$ .

- $V(t) - V_o$  deviazione istantanea di ampiezza;
- $m(t) = \frac{V(t) - V_o}{V_o}$  deviazione (istantanea) relativa di ampiezza; poiché  $V(t) \geq 0$ , segue  $m(t) \geq -1$ ;
- $\alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_o t - \varphi_o)$  deviazione istantanea di fase;
- $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_o$  deviazione istantanea di pulsazione;

Le deviazioni di fase e di pulsazione risultano legate:

$$\Delta\omega(t) = \dot{\alpha}(t) \quad (7.3)$$

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^t \Delta\omega(\tau) d\tau \quad (7.4)$$

Introducendo nella espressione di un'oscillazione modulata la deviazione relativa di ampiezza e la deviazione istantanea di fase otteniamo una nuova espressione generale di un'oscillazione sinusoidale modulata (la seconda):

$$s(t) = V_o [1 + m(t)] \cos[\omega_o t + \alpha(t) - \varphi_o] \quad (7.5)$$

In assenza di modulazione le deviazioni sono nulle e la formula sopra si riconduce a quella della portante.

### **Principali modulazioni analogiche**

Le principali modulazioni analogiche sono la modulazione di ampiezza (AM), quella di fase (PM) e quella di frequenza (FM). In tutti e tre i casi vedremo che una delle deviazioni viste in precedenza è proporzionale al segnale modulante, supposto analogico. L'AM è un caso particolare di modulazione in ampiezza, in cui è la deviazione relativa di ampiezza ad essere direttamente proporzionale a  $x(t)$ . Modulazione PM e modulazione FM sono invece due casi particolari di modulazione angolare, cioè di una modulazione che modifica l'argomento della sinusoide portante; nella prima è la deviazione di fase ad essere direttamente proporzionale a  $x(t)$ , nella seconda quella di frequenza. Possono anche esistere modulazioni ibride, in cui vengono modificate contemporaneamente ampiezza ed argomento della portante.

#### **Modulazione di ampiezza (AM, Amplitude Modulation)**

$$AM \begin{cases} m(t) = kx(t) \\ \alpha(t) = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

La deviazione relativa di ampiezza è proporzionale al segnale modulante; la deviazione di fase è nulla. Viene modificata quindi solo l'ampiezza dell'oscillazione portante (solo la modulazione in ampiezza è presente). Inoltre in AM  $kx(t) \geq -1$  a causa dell'analogo vincolo su  $m(t)$ , da cui la condizione a destra nella formula sotto.

$$s(t) = V_o [1 + kx(t)] \cos[\omega_o t - \varphi_o] \quad \text{con } V_o [1 + kx(t)] \geq 0 \quad (7.7)$$

Si noti che la condizione equivale a  $V(t) = V_o [1 + kx(t)]$ ; cioè in AM deve sempre esserci un legame lineare fra ampiezza istantanea e segnale modulante. In Fig.98 è presentato l'andamento di un possibile segnale modulante, in Fig.99 l'andamento dell'oscillazione portante, e in Fig.100 la corrispondente oscillazione AM.

### Modulazione di fase (PM, Phase Modulation)

$$PM \begin{cases} m(t) = 0 \\ \alpha(t) = kx(t) \end{cases} \quad (7.8)$$

La deviazione relativa di ampiezza è nulla, la deviazione di fase è proporzionale al segnale modulante. Dato il legame fra deviazione di fase e deviazione di frequenza in PM si ha  $\Delta\omega(t) = \dot{\alpha}(t) = k\dot{x}(t)$

$$s(t) = V_o \cos[\omega_o t + kx(t) - \varphi_o] \quad (7.9)$$

In Fig.101 è riportata l'oscillazione PM (con  $k>0$ ) corrispondente al segnale modulante ed alla portante appena considerati (Fig.98 e Fig.99).

### Modulazione di frequenza (FM, Frequency Modulation)

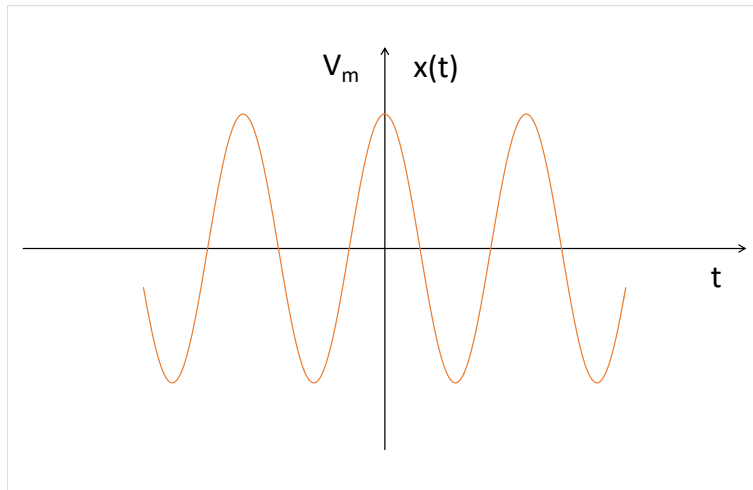
$$FM \begin{cases} m(t) = 0 \\ \Delta\omega(t) = kx(t) \end{cases} \quad (7.10)$$

E' simile alla PM, ma in questo caso è la deviazione istantanea di pulsazione ad essere direttamente proporzionale al segnale modulante e non quella di fase. Dato il legame fra deviazione di fase e deviazione di frequenza in FM si ha  $\alpha(t) = k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

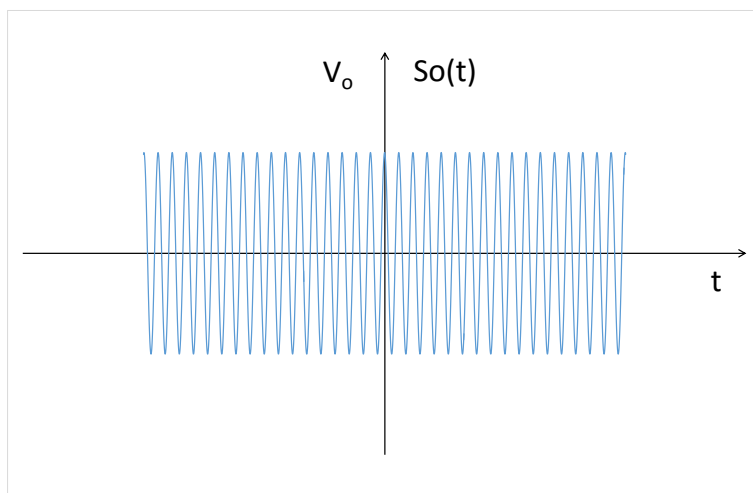
$$s(t) = V_o \cos \left[ \omega_o t + k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau - \varphi_o \right] \quad (7.11)$$

In Fig.102 è riportata l'oscillazione FM ( $k>0$ ) corrispondente al segnale modulante ed alla portante appena considerati (Fig.98 e Fig.99). Se  $k>0$ , come nel caso considerato, la frequenza istantanea (cioè l'infittimento dell'oscillazione modulata) segue in FM l'andamento del segnale modulante (riportato con linea tratteggiata), quindi è massima in corrispondenza dei massimi del segnale modulante, minima in corrispondenza dei minimi e uguale a quella della portante in corrispondenza degli zeri. In PM (Fig.101) segue invece l'andamento della derivata del segnale.

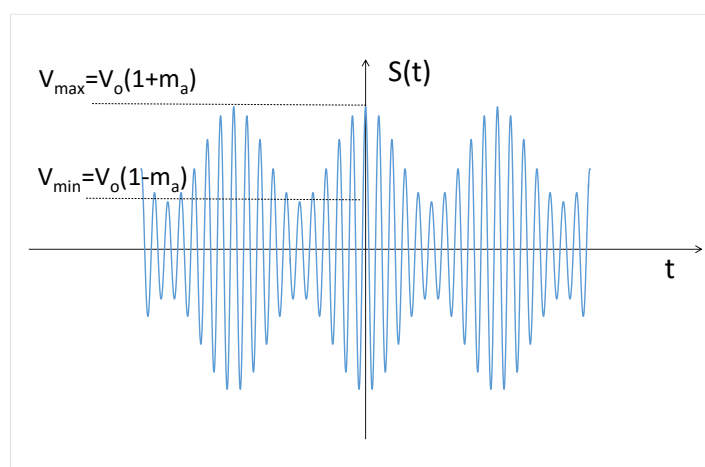
Confrontando l'AM con le due oscillazioni modulate in angolo, è fondamentale notare che il segnale modulato in AM presenta ampiezza istantanea variabile e zeri equidistanti sull'asse dei tempi, mentre in PM e FM ampiezza costante e zeri non più uniformemente distribuiti sull'asse dei tempi.



*Fig.98 Oscillazione modulante.*



*Fig.99 Oscillazione portante (si noti che  $f_o \gg f_m$ ).*



*Fig.100 Oscillazione modulata AM ( $m_a=0.5$ ).*

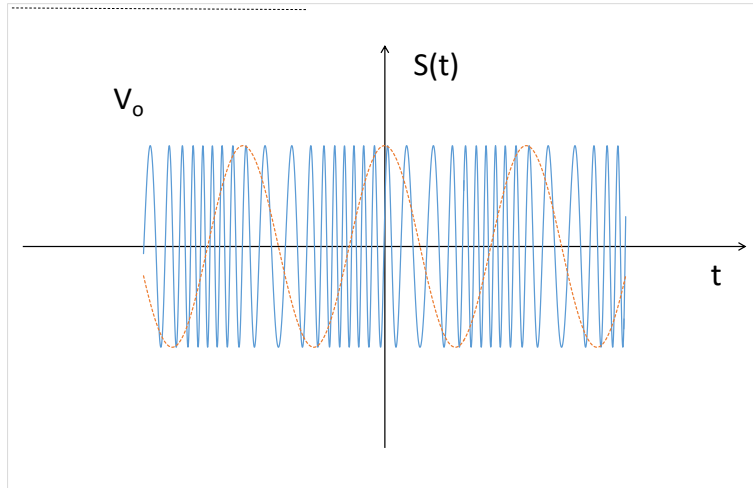


Fig.101 Oscillazione modulata PM con  $k>0$  (linea continua); oscillazione modulante (tratteggiata).

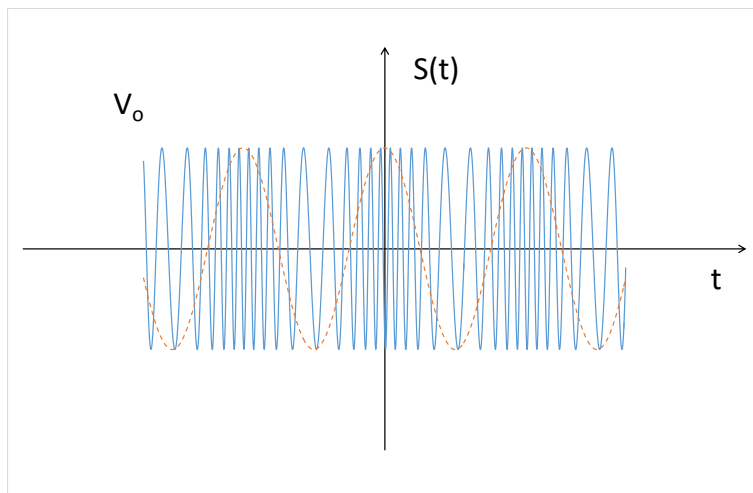


Fig.102 Oscillazione modulata FM con  $k>0$  (linea continua); oscillazione modulante (tratteggiata).

## Indici di modulazione

### Indice di modulazione AM (e sovramodulazione)

In AM l'indice di modulazione è definito come

$$m_a = \max(|m(t)|) \quad m_a \in [0,1] \quad (7.12)$$

Il nome deriva dal fatto che l'indice di modulazione indica il livello di modulazione (cioè l'entità della trasformazione) che viene impressa alla portante dal segnale modulante. L'indice assume il valore 0 in assenza totale di modulazione, ed il valore 1 quando si ha il massimo della modulazione. La limitazione a 1 dipende dal fatto che  $m(t) \geq -1$  per definizione, essendo  $V(t) \geq 0$ . Se il segnale modulante, come di norma, oltre ad essere a valor medio nullo è bilanciato, cioè ha una dinamica compresa nell'intervallo  $[-M, M]$ , simmetrica rispetto allo 0, allora  $m(t)$  non potendo essere inferiore a -1 non potrà neppure essere superiore a 1, da cui il limite su  $m_a$ .

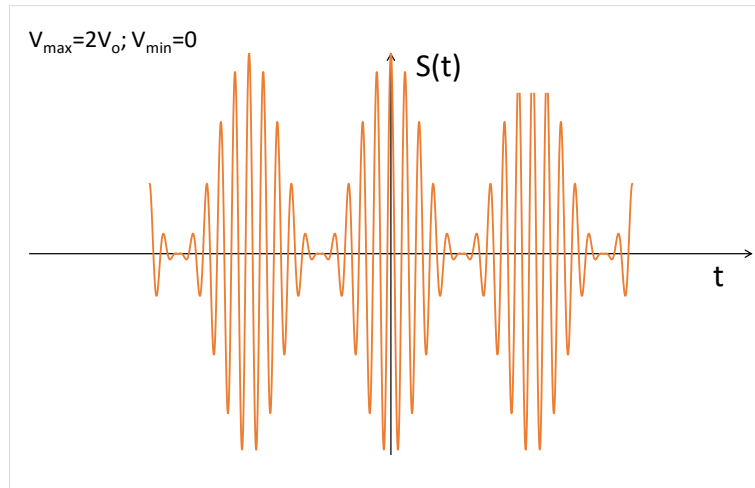


Fig.103 Oscillazione modulata AM al massimo dell'indice di modulazione ( $m_a=1$ ).

Nella pratica, a partire dal segnale modulante in ingresso  $x(t)$  il modulatore AM genera un segnale del tipo

$$s(t) = V_o [1 + kx(t)] \cos[\omega_o t - \varphi_o] \quad (7.13)$$

Occorre quindi prestare attenzione a non portare il modulatore in “sovramodulazione”, cioè a non avere  $kM > 1$  (o impropriamente  $m_a > 1$ ). In altre parole, si deve avere in ingresso  $M \leq \frac{1}{k}$ . Nel caso in cui si superi tale valore il segnale va in “sovramodulazione” e la modulazione diventa ibrida. Infatti in questo caso si ha

$$\text{sovramodulazione AM} \begin{cases} V(t) = V_o |1 + kx(t)| \\ \alpha(t) = \begin{cases} 0 & 1 + kx(t) > 0 \\ \pi & 1 + kx(t) < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7.14)$$

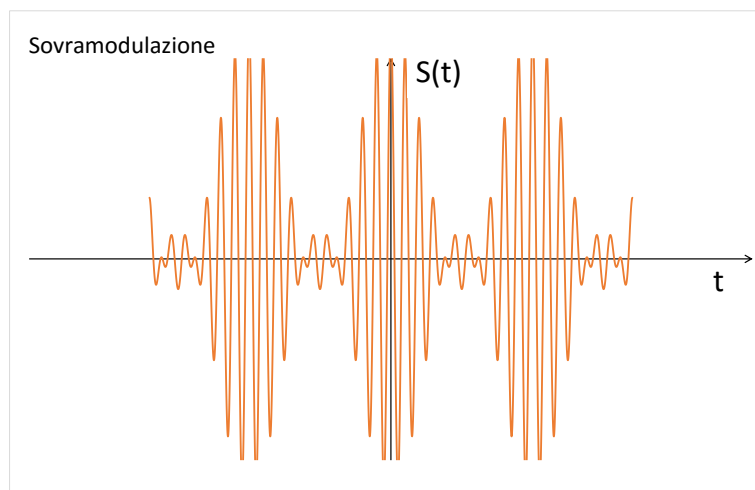


Fig.104 Oscillazione ibrida ottenuta da un'AM forzando  $m_a > 1$ . Si noti che: 1) non è più un'AM; 2) i massimi di  $s(t)$  possono essere “potati” in uscita al modulatore (come in figura) a causa di comportamenti non lineari dovuti all'ampiezza troppo elevata di  $x(t)$ .

### Indice di modulazione d'angolo

Nelle modulazioni d'angolo l'indice di modulazione è definito come

$$m = \max(|\alpha(t)|) \quad (7.15)$$

Quando  $m=0$  l'oscillazione modulata coincide con la portante. Per  $m>0$  la modulazione aumenta all'aumentare dell'indice. Si noti che non esiste alcuna limitazione superiore a differenza dell'AM. Osserviamo infine che un'oscillazione sinusoidale può essere modulata sia in ampiezza che in angolo (modulazione ibrida). Ciò può essere ottenuto, ad esempio, considerando due segnali modulanti distinti, uno dei quali agisce sull'ampiezza istantanea e l'altro sulla deviazione angolare. Vedremo anche casi in cui un unico segnale modulante dà origine a deviazioni sia d'ampiezza che d'angolo.

### Involuppo complesso rappresentativo (o equivalente passa-basso) di oscillazioni modulate

Per le oscillazioni modulate è possibile introdurre un'estensione del metodo simbolico di Steinmetz. Nell'estensione un'oscillazione sinusoidale, anche se modulata, è ancora vista come parte reale di un fasore, però al posto del numero complesso rappresentativo si ha una funzione complessa del tempo, detta involuppo complesso rappresentativo. Per introdurre questa funzione, consideriamo una nuova espressione generale di un'oscillazione sinusoidale modulata (la terza, ibrida della prima e della seconda):

$$s(t) = V(t) \cos[\omega_o t + \alpha(t) - \varphi_o] \quad (7.16)$$

Essa, in analogia con quanto fatto nel metodo simbolico di Steinmetz, può essere scritta nella forma:

$$s(t) = \operatorname{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \quad i(t) = V(t)e^{j[\alpha(t) - \varphi_o]} \quad (7.17)$$

Nota la frequenza della portante, l'oscillazione è completamente individuata dal suo involuppo complesso rappresentativo  $i(t)$ . Si dice complesso perché anche se l'oscillazione modulata è reale, esso può essere funzione complessa del tempo. Inoltre  $i(t)$  è passa-basso anziché passa-banda. Per questo motivo viene anche chiamato “equivalente passa-basso” di  $s(t)$ . Si noti infine che se non si ha nessuna modulazione, allora l'involuppo complesso da funzione diventa una costante, ricadendo nel caso del metodo simbolico classico.

Consideriamo ora due oscillazioni modulate diverse, ma aventi la stessa pulsazione della portante

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \operatorname{Re}\{i_1(t)e^{j\omega_o t}\} & i_1(t) &= V_1(t)e^{j[\alpha_1(t) - \varphi_{o1}]} \\ s_2(t) &= \operatorname{Re}\{i_2(t)e^{j\omega_o t}\} & i_2(t) &= V_2(t)e^{j[\alpha_2(t) - \varphi_{o2}]} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Per la somma risulta

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) = \operatorname{Re}\{i_1(t)e^{j\omega_o t}\} + \operatorname{Re}\{i_2(t)e^{j\omega_o t}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{[i_1(t) + i_2(t)]e^{j\omega_o t}\} = \operatorname{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Dove l'involuppo complesso della somma è dato dalla somma dei due involuppi,

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (7.20)$$

Dalle due formule precedenti si vede che il segnale  $s(t)$  è anch'esso una oscillazione modulata e che il suo involuppo complesso è uguale alla somma degli involuppi complessi delle oscillazioni modulate componenti. Da  $i(t)$  è facile ricavare l'ampiezza istantanea e la fase istantanea della modulazione  $s(t)$ , cioè le “leggi” della modulazione. Si ha infatti:

$$\begin{cases} V(t) = |i(t)| \\ \alpha(t) = \arg\{i(t)\} \end{cases} \quad (7.21)$$

Si noti che la seconda delle espressioni sopra implica che si consideri nulla per convenzione la fase della portante della modulazione “somma”. La formula può naturalmente essere estesa a più segnali, eventualmente moltiplicati per delle costanti. Può anche essere utilizzata in senso inverso, per scomporre un’oscillazione modulata in più oscillazioni modulate componenti.

L’equivalente passa-basso è praticamente sempre utilizzato al posto di  $s(t)$  nello studio delle oscillazioni modulate, sia analogiche che numeriche.

### Caratteristiche spettrali di una oscillazione AM. Oscillazioni DSB, SSB, DSB-SC, SSB-SC.

Allo scopo di determinare lo spettro di una modulazione AM consideriamo di nuovo la sua espressione, assunta per semplicità nulla la fase della portante:

$$s(t) = V_o [1 + kx(t)] \cos \omega_o t \quad \text{con } V_o [1 + kx(t)] \geq 0 \quad (7.22)$$

Il suo inviluppo complesso è dato da:

$$i(t) = V_o [1 + kx(t)] \quad \text{con } V_o [1 + kx(t)] \geq 0 \quad (7.23)$$

Esso, assunta nulla la fase della portante, è reale positivo o nullo.

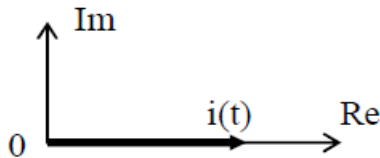


Fig.105 Involuppo complesso dell'AM.

Separando i termini di  $s(t)$  possiamo vedere immediatamente che è dato dalla somma della portante e di un termine che, a meno di una costante, è il prodotto fra il segnale modulante e la portante.

$$s(t) = V_o \cos \omega_o t + V_o kx(t) \cos \omega_o t \quad (7.24)$$

La trasformata di  $s(t)$  può essere calcolata direttamente ricordando la trasformata di una sinusoide e il teorema fondamentale della modulazione. Da essa è possibile ottenere immediatamente gli spettri di ampiezza e fase bilateri.

In alternativa, è possibile seguire un procedimento basato fin dall’inizio sulla rappresentazione monolaterale dei segnali. Il vantaggio di questo secondo metodo è che permette, una volta ottenuto il risultato voluto per l’AM, di introdurre più facilmente alcune modulazioni derivate dall’AM, prendendone di volta in volta solo alcuni componenti.

A questo scopo supponiamo che il segnale modulante  $x(t)$ , di tipo passa-basso, sia rappresentabile mediante l’integrale di Fourier:

$$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \quad (7.25)$$

Sostituendo la formula sopra nell’espressione generale dell’AM, è possibile scomporre l’AM nella somma di tre termini: portante, banda laterale superiore, banda laterale inferiore,

$$\begin{aligned} s(t) = & V_o \cos \omega_o t + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \\ & + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (7.26)$$

La presenza di due bande laterali (dette rispettivamente “Upper Side Band” e “Lower Side Band”) giustifica la denominazione “a doppia banda laterale” o DSB (Double Side Band), con cui può anche essere chiamata l’AM.

A titolo di esempio è riportato nella figura sotto un possibile andamento degli spettri di ampiezza e di fase di una generica modulazione AM. Si noti che lo spettro di ampiezza nella figura è ibrido (una riga per la portante, una densità di ampiezza per le bande laterali).

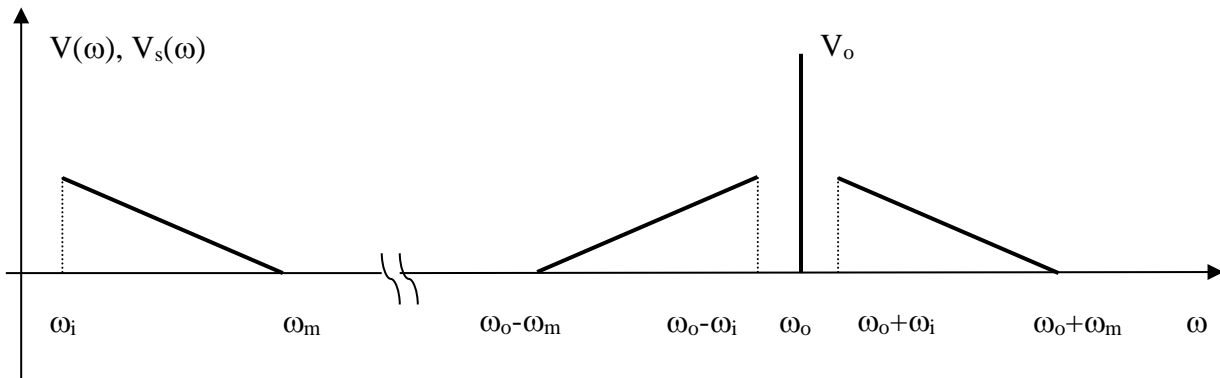


Fig.106 Spettro di ampiezza AM.

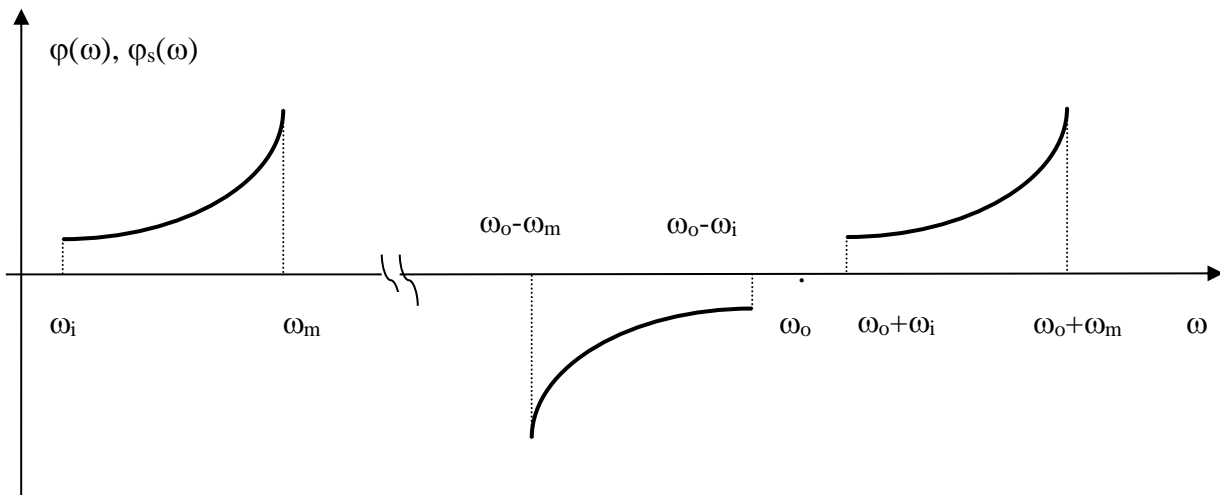


Fig.107 Spettro di fase AM

L'oscillazione modulata occupa una banda di pulsazioni centrata sulla pulsazione della portante, di larghezza  $B_\omega = 2\omega_m$  cioè pari al doppio della pulsazione massima del segnale modulante. Lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto alla pulsazione della portante, mentre quello di fase è antisimmetrico. Nell'ipotesi, normalmente verificata, che sia  $\omega_m \ll \omega_o$  risulta  $B_\omega \ll \omega_o$ , cioè l'oscillazione AM è un segnale passa-banda.

Dall'espressione precedente è possibile ricavare l'involuppo complesso dell'AM come somma degli involuppi complessi delle tre componenti:

$$i(t) = V_o + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{-j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega \quad (7.27)$$

Si noti che il secondo ed il terzo termine ( $i_{usb}(t)$ , e  $i_{lsb}(t)$ ) sono complessi coniugati, per cui la loro risultante giace sull'asse reale; essa può essere positiva o negativa e si somma a  $V_o$ . La risultante totale non può mai essere negativa, altrimenti avremmo una modulazione ibrida.



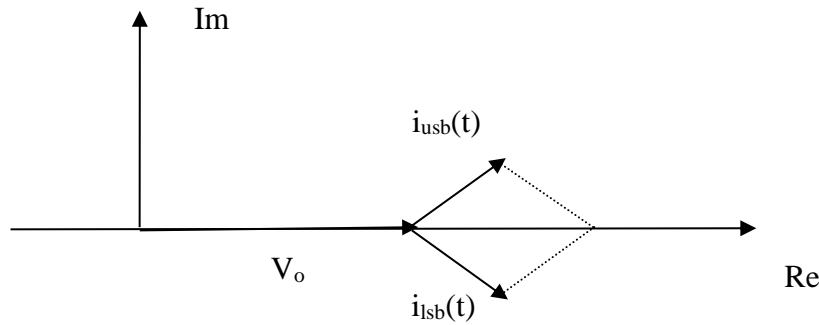


Fig.108 Involuppo complesso dell'AM (come somma di 3 componenti).

### SSB

Poiché ciascuno dei due segnali corrispondenti alla banda laterale superiore od inferiore contiene la stessa informazione (nota una delle due bande laterali, è immediato ricavare l'altra), è possibile eliminare una delle due bande laterali con l'evidente vantaggio di dimezzare la banda impegnata dal relativo segnale modulato, il cui spettro rimane costituito dalla riga corrispondente alla portante e dalla banda laterale non eliminata.

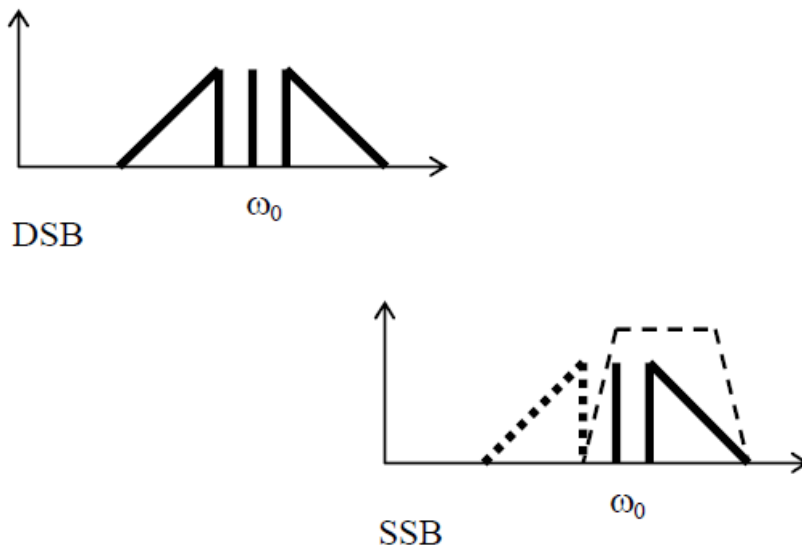


Fig.109 Spettro di ampiezza di una modulazione SSB a confronto con la DSB.

Il segnale modulato che così si ottiene viene chiamato a banda laterale singola ed indicato con la sigla SSB (Single Side Band). Esso può essere generato a partire da una oscillazione AM, che viene filtrata con un filtro passa-banda che provveda ad eliminare la banda indesiderata.

Ciò è possibile in pratica se la pulsazione minima della banda del segnale modulante non è troppo piccola. In caso contrario (si pensi ad esempio al segnale video per cui risulta addirittura = 0) non è possibile tale operazione di filtraggio senza distorcere il contenuto informativo della banda laterale che si vuole conservare.

Le espressioni della SSB sono:

$$s(t) = V_o \cos \omega_o t + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega \quad (7.28)$$

$$i(t) = V_o + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega \quad (7.29)$$

Si noti dall'espressione dell'involuppo complesso che l'eliminazione di una delle due bande laterali rende la modulazione SSB ibrida, in quanto varia sia il modulo che l'argomento di  $i(t)$ .

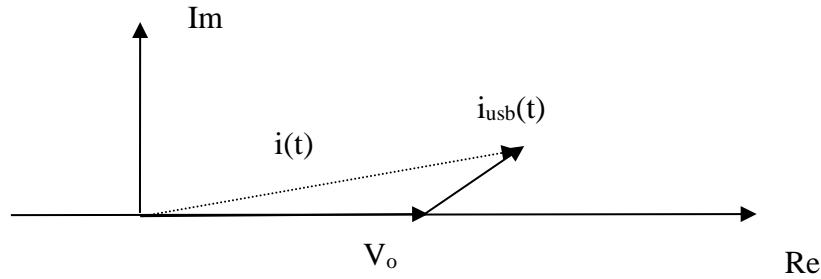


Fig.110 Involuppo complesso dell'SSB.

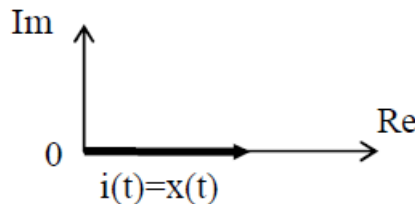
### DSB-SC

Una seconda modulazione derivata dall'AM è la DSB-SC (DSB Suppressed Carrier). In essa vengono mantenute entrambe le bande laterali, ma viene eliminata la portante, per risparmiare potenza, senza perdere il contenuto informativo relativo al segnale modulante. Di fatto si ottiene una modulazione a prodotto (esaminata in maggior dettaglio poco più avanti). Le espressioni della DSB-SC sono:

$$s(t) = \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (7.30)$$

$$i(t) = \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega + \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{-j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega = kV_o x(t) \quad (7.31)$$

L'eliminazione della portante rende la DSB-SC ibrida. Infatti, pur rimanendo  $i(t)$  reale (sotto l'ipotesi di fase della portante nulla), esso può essere positivo o negativo, rendendo non identicamente nulla la deviazione istantanea di fase.

Fig.111 Involuppo complesso della DSB-SC (prodotto) assunto  $kV_o=1$ . Si noti che  $x(t)$  e quindi  $i(t)$  possono essere negativi.

### SSB-SC (conversione di frequenza)

Se a partire da una DSB-SC si elimina anche una delle due bande laterali mediante un filtro, si ottiene una modulazione SSB-SC (SSB - Suppressed Carrier). In questo caso il vantaggio è il dimezzamento della banda occupata, da sommare al risparmio in potenza già ottenuto nella DSB eliminando la portante. Le espressioni della SSB-SC sono:

$$s(t) = \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega \quad (7.32)$$

$$i(t) = \frac{kV_o}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega \quad (7.33)$$

La SSB-SC equivale ad una conversione di frequenza in salita, in quanto gli spettri di ampiezza e fase dell'oscillazione modulata coincidono con quelli del segnale modulante, traslati di  $\omega_o$ . Spesso si considera una variante in cui la portante non viene eliminata del tutto, ma solo attenuata, per preservare un riferimento in frequenza utile alla demodulazione (nel caso detta anche conversione in discesa). In questo caso si parla di SSB a portante parzialmente soppressa.

La SSB-SC e la sua variante con soppressione parziale sono modulazioni ibride (vedasi Fig.112 e Fig.113).

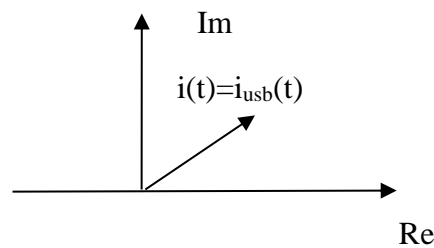


Fig.112 Involuppo complesso dell'SSB-SC.

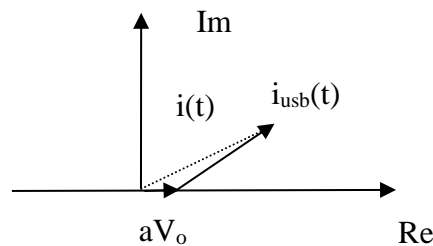


Fig.113 Involuppo complesso dell'SSB con portante parzialmente soppressa ( $a < 1$ ).

## Modulazioni a prodotto e QAM

### Modulazioni a prodotto

Riprendiamo ed approfondiamo la modulazione a prodotto, già vista in occasione del teorema fondamentale della modulazione, e come DSB-SC, derivata dall'AM.

#### Modulatore

La modulazione a prodotto può essere ottenuta direttamente, senza passare dall'AM, facendo il prodotto del segnale modulante  $x(t)$  per una sinusoide tramite un circuito detto modulatore a prodotto o "mixer", ottenendo:

$$s(t) = x(t) \cos \omega_0 t \quad (7.34)$$

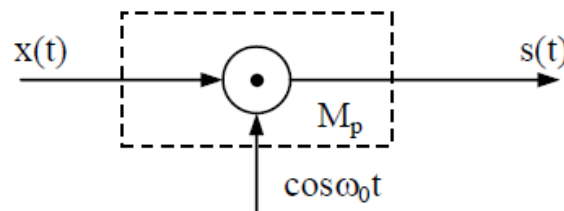


Fig.114 Schema di un modulatore a prodotto

Un possibile andamento dell'oscillazione a prodotto è riportato in Fig.115, insieme al corrispondente segnale modulante.

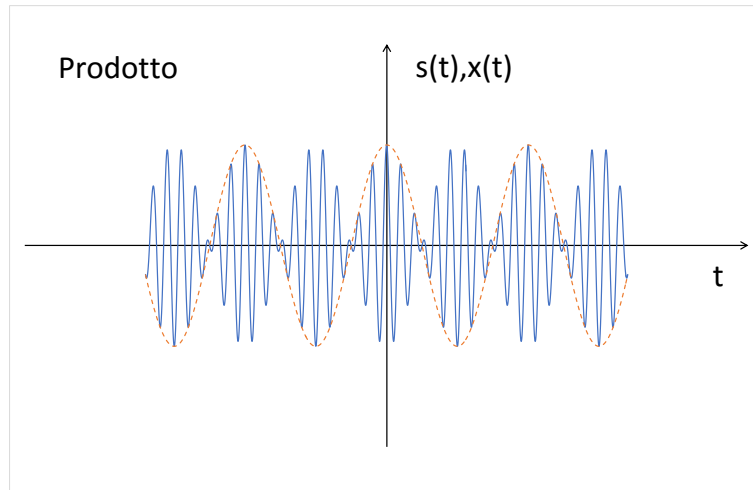


Fig.115 Oscillazione modulata a prodotto (continua); oscillazione modulante (tratteggiata).

L'involuppo complesso è estremamente semplice in quanto coincide con il segnale modulante:

$$i(t) = x(t) \quad (7.35)$$

La modulazione è ibrida. Infatti sia l'ampiezza istantanea che la deviazione istantanea di fase variano nel tempo:

$$V(t) = |x(t)|$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ \pi & x(t) < 0 \end{cases} \quad (7.36)$$

Gli spettri si ottengono immediatamente dall'espressione della trasformata (teorema fondamentale della modulazione), ricordando che essendo in questo caso  $\omega_m \ll \omega_o$  i due termini non sono sovrapposti ed il segnale è passa-banda.

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_o) \quad (7.37)$$

La banda di  $s(t)$  è doppia rispetto a quella di  $x(t)$ . Definita come "efficienza" in frequenza della modulazione il rapporto fra banda del segnale modulante e banda dell'oscillazione modulata, essa vale 1/2 per la modulazione a prodotto.

$$\eta_f = \frac{B_x}{B_s} = \frac{\omega_m}{2\omega_o} = \frac{1}{2} \quad (7.38)$$

### Demodulatore

La demodulazione si ottiene rimoltiplicando l'oscillazione modulata per la portante (moltiplicata per due per convenienza formale)

$$u(t) = 2s(t) \cos \omega_o t = 2x(t) \cos^2 \omega_o t = x(t) + x(t) \cos 2\omega_o t \quad (7.39)$$

e filtrando passa-basso nella banda di  $x(t)$  il segnale ottenuto per eliminare il secondo termine (una modulazione a prodotto a frequenza portante doppia):

$$x_d(t) = x(t) \quad (7.40)$$

Il demodulatore è quindi costituito da un modulatore a prodotto seguito da un filtro passa-basso.

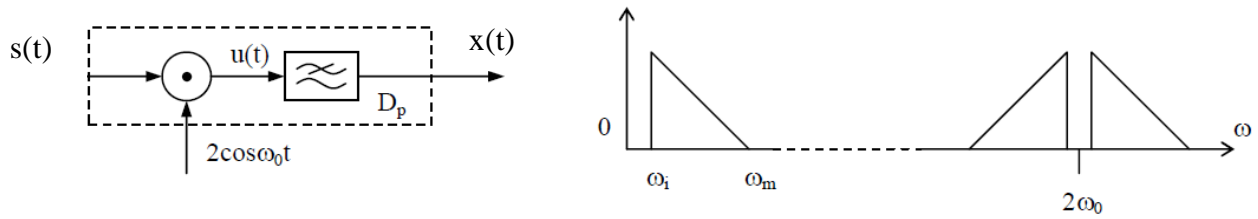


Fig.116 a) Schema di un demodulatore a prodotto; b) componenti spettrali di  $u(t)$  (in rappresentazione monolaterale).

Dato che esso richiede la “ricostruzione” della portante (frequenza e fase comprese) è detto coerente. Il problema in effetti è proprio dato dalla ricostruzione della portante, ovvero come è possibile estrarre la portante dal segnale  $s(t)$ . Senza addentrarci troppo nel problema e nella sua soluzione, risulta evidente che la portante deve essere ricostruita a partire dal segnale  $s(t)$  per recuperare il sincronismo di fase e frequenza, e che questa ricostruzione implica un blocco non lineare in quanto il segnale  $s(t)$  non ha nessuna componente alla pulsazione della portante (una rete lineare tempo invariante non può dare in uscita componenti in frequenza che non siano già presenti in ingresso).

La portante deve essere ricostruita non solo in frequenza ma anche in fase. L'errore di fase provoca un'attenuazione del segnale demodulato, che sarà:

$$x_d(t) = x(t) \cos \Delta \quad (7.41)$$

Se infatti la portante ricostruita è sfasata in ritardo si ha

$$\begin{aligned} u(t) &= 2s(t) \cos(\omega_0 t - \Delta) = 2x(t) \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t - \Delta) = \\ &= x(t) \cos \Delta + x(t) \cos(2\omega_0 t - \Delta) \end{aligned} \quad (7.42)$$

Da cui il risultato mostrato in uscita al filtro passa-basso.

La modulazione a prodotto è importantissima nella sua versione digitale (ASK, L-ASK).

### **Modulazioni QAM (Quadrature Amplitude Modulation)**

La modulazione QAM è un'estensione della modulazione a prodotto. Essa infatti consiste di due modulazioni a prodotto con portanti in quadratura, cioè con la seconda portante sfasata in anticipo di  $\pi/2$ . Il segnale in uscita al primo modulatore si chiama via in fase, l'altro via in quadratura.

#### Modulatore

Vi sono due segnali modulanti  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , aventi le stesse caratteristiche spettrali; devono inoltre essere “indipendenti”, cioè non legati fra di loro da nessuna relazione.

Si ha:

$$s(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t \quad (7.43)$$

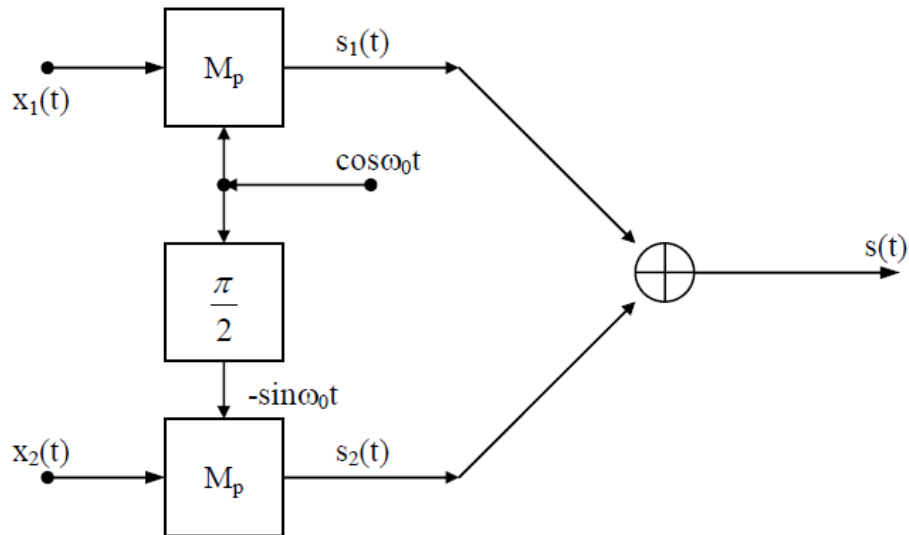


Fig.117 Schema di un modulatore a prodotto.

L'involuppo complesso è dato da:

$$i(t) = x_1(t) + jx_2(t) \quad (7.44)$$

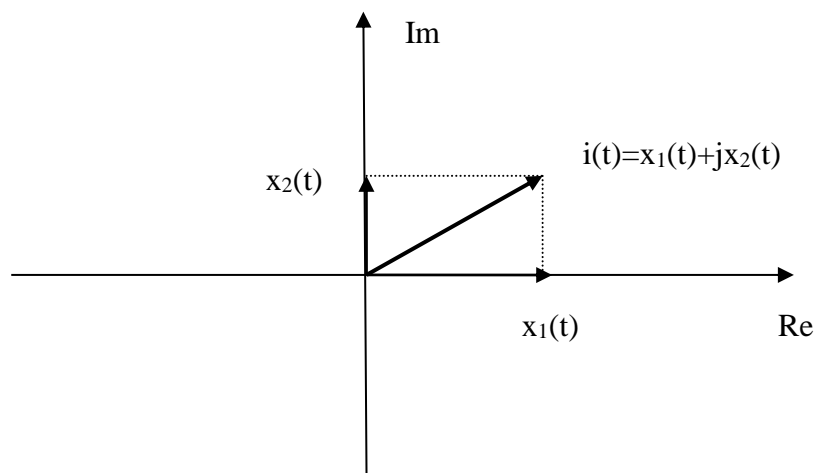


Fig.118 Involuppo complesso di una modulazione QAM ( $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  devono essere indipendenti).

La modulazione è ibrida, infatti  $i(t)$  varia sia in modulo che in argomento. Si noti che a differenza della modulazione a prodotto, la deviazione di fase non ha limitazioni.

Gli spettri della via in fase e della via in quadratura si sovrappongono. E' quindi possibile trasmettere il doppio di informazione nella stessa banda di una modulazione a prodotto. L' "efficienza" in frequenza della modulazione per il QAM è quindi doppia:

$$\eta_f = \frac{2B_x}{B_s} = \frac{2\omega_m}{2\omega_m} = 1 \quad (7.45)$$

### Demodulatore

Il demodulatore è la somma di due demodulatori a prodotto.

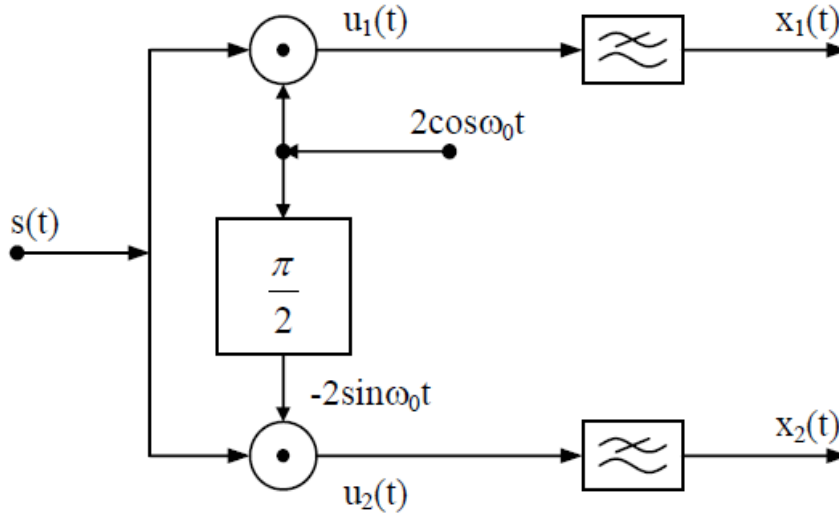


Fig.119 Schema di un demodulatore a prodotto.

Per il segnale in uscita al primo (componente in fase) si ha:

$$\begin{aligned} u_p(t) &= 2s(t) \cos \omega_0 t = 2x_1(t) \cos^2 \omega_0 t - 2x_2(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= x_1(t) + x_1(t) \cos 2\omega_0 t - x_2(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (7.46)$$

La prima delle tre componenti è l'unica voluta e viene isolata dal filtro passa-basso.

$$x_{pd}(t) = x_1(t) \quad (7.47)$$

Analogamente per la via in quadratura si ha:

$$\begin{aligned} u_q(t) &= -2s(t) \sin \omega_0 t = 2x_2(t) \sin^2 \omega_0 t - 2x_1(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= x_2(t) - x_2(t) \cos 2\omega_0 t - x_1(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$x_{qd}(t) = x_2(t) \quad (7.49)$$

Nel caso del QAM un errore di fase provoca non solo un'attenuazione del segnale utile, ma anche un'interferenza dalla via in quadratura. Infatti nel caso di una sfasatura in ritardo si ha:

$$\begin{aligned} x_{pd}(t) &= x_1(t) \cos \Delta - x_2(t) \sin \Delta \\ x_{qd}(t) &= x_2(t) \cos \Delta + x_1(t) \sin \Delta \end{aligned} \quad (7.50)$$

Si noti che se  $\Delta = \pi / 2$  le due vie si incrociano. Le relazioni sopra possono essere trovate per via analitica, o, molto più semplicemente, per via grafica, facendo ruotare in senso antiorario il sistema di coordinate (Re, Im) del modulatore e sovrapponendolo a quello, non ruotato, del demodulatore. Le componenti in uscita al demodulatore sono le proiezioni sugli assi di quest'ultimo del vettore  $i(t)$  disegnato sul primo.

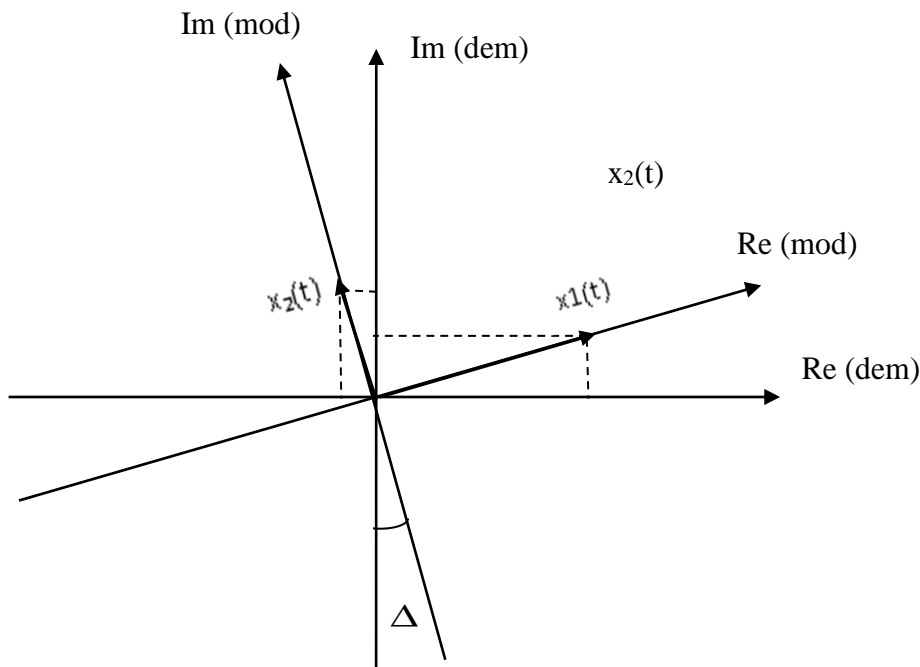


Fig.120 Effetti di un errore di fase nella ricostruzione della portante nella modulazione QAM.

### Spettro segnali modulati in angolo: formula di Carson.

Il calcolo dello spettro delle oscillazioni modulate in angolo (PM, FM) è possibile solo con segnale modulante sinusoidale. Esso richiede la conoscenza delle funzioni di Bessel, non viste in altri corsi. Qui ci limitiamo alla semplice enunciazione della formula di Carson che fornisce la banda occupata da un'oscillazione analogica modulata in angolo. Sia dunque  $\omega_m$  la massima pulsazione del segnale modulante, e  $\Delta\omega_{\max} = \max(\Delta\omega(t))$  la massima deviazione di frequenza, la banda risulta approssimativamente data da

$$B_\omega = 2(\omega_m + \Delta\omega_{\max}) \quad (7.51)$$

Si noti che in assenza di modulazione  $\Delta\omega_{\max} = 0$ , per cui la formula coincide con quella per l'AM, la modulazione a prodotto, la QAM. In presenza di modulazione la banda risulta invece sempre maggiore.

Nei casi pratici la formula di Carson vien data nelle frequenze, con ovvio significato dei simboli.

$$B = 2(f_m + \Delta f_{\max}) \quad (7.52)$$

### Radiodiffusione.

#### Radiodiffusione FM

Un caso di importanza pratica è quello della radiodiffusione FM per cui  $f_m = 15\text{kHz}$ ,  $\Delta f_{\max} = 75\text{kHz}$  da cui,  $B = 2(15 + 75) = 180\text{kHz}$

Si può notare come la banda sia sei volte più ampia di un'oscillazione AM con uguale segnale modulante, a causa del valore molto alto della deviazione massima di frequenza imposta dallo standard della radiodiffusione FM. Questo è dovuto al fatto che, a parità di altre condizioni, maggiore la deviazione massima di frequenza, migliore il rapporto segnale rumore in banda base, ovvero la



qualità del segnale riprodotto. Ciò consente di compensare una qualità modesta del ricevitore, ovvero di tenere basso il costo di una radiolina a transistor.

Le portanti utilizzabili sono nell'intervallo 87.5-108 MHz.

La radiodiffusione FM, nata monofonica, si è evoluta nel tempo, trasformando il segnale modulante in un segnale "composito", formato cioè da segnali diversi, in questo caso distinti in frequenza. L'unica componente obbligatoria è il segnale mono, da 30 a 15 kHz, dato dalla somma dei canali sinistro e destro (se il segnale originale è stereo); ad esso segue un tono pilota a 19 kHz e quindi la modulazione a prodotto che si ottiene modulando una portante a 38 kHz (due volte il tono pilota), con il segnale differenza dei due canali sinistro destro (Fig.121). A queste componenti si è aggiunto più recentemente il segnale RDS (Radio Data System), ovvero una modulazione a prodotto digitale con portante a 57 kHz (3 volte il tono pilota).

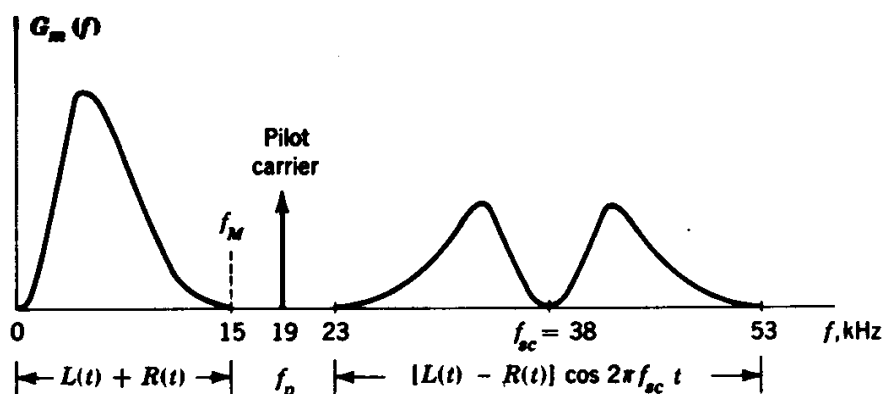


Fig.121 Segnale modulante composito utilizzato nella modulazione FM stereo.

La radiodiffusione FM rimane uno dei pochi servizi analogici attivi in Italia, ma esso è già affiancato dalla radiodiffusione digitale DAB (Digital Audio Broadcasting). Solo in Alto Adige, tuttavia, il servizio FM analogico è stato spento, nelle altre regioni si prevede rimarranno attivi entrambi.

### DAB+

E' la versione digitale della radiodiffusione FM analogica. Ogni radio ha un suo flusso dati (codifica percettiva MPEG AAC+v2), con bit/rate di solito fra 32 e 96 kbit/s.

Il DAB originale usava la MPEG-1, layer2, che aveva una qualità di riproduzione molto inferiore della MPEG-1 Layer3 (.mp3), da cui il clamoroso insuccesso commerciale del DAB. La versione DAB+ ha posto rimedio al problema utilizzando la molto più recente ed avanzata MPEG AAC+v2. Questo però ha comportato l'incompatibilità dei vecchi ricevitori DAB, diventati inutilizzabili.

Contrariamente all'FM analogica, dove il segnale modulante contiene una sola stazione radio, nel DAB i segnali MPEG di molte stazioni vengono multiplati in un unico segnale modulante (consorzio/multiplex); un unico "canale" quindi contiene più stazioni radio (ad esempio Radio1, Radio2, ecc.)

Viene usata la modulazione OFDM (si veda in seguito). Chi è interessato può approfondire in:

[https://it.wikipedia.org/wiki/Digital\\_Audio\\_Broadcasting](https://it.wikipedia.org/wiki/Digital_Audio_Broadcasting)

## Capitolo 8 Segnali ad energia ed a potenza finita **Equation Section (Next)**

### Energia e potenza di un segnale

#### Definizioni di energia e potenza

Dato un segnale  $x(t)$ , in generale complesso, si definisce “potenza istantanea”

$$p(t) = x^*(t)x(t) = |x(t)|^2 \quad (8.1)$$

da cui derivano le seguenti definizioni di “energia” e “potenza” (media)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (8.2)$$

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (8.3)$$

Si noti che i termini “energia” e “potenza” sono utilizzati in senso lato. Ad esempio, supponendo che  $x(t)$  rappresenti una tensione, la “potenza istantanea” e la “potenza media” andrebbero misurate in  $V^2$  e non in W. Analogamente l’ “energia” andrebbe misurata in  $V^2s$  e non in J. La denominazione deriva per analogia dalla osservazione che se la tensione fosse applicata ai capi di un resistore R, la potenza istantanea (in W) erogata al carico sarebbe data da

$$p_W(t) = \frac{|x(t)|^2}{R} \quad (W) \quad (8.4)$$

Supponendo quindi  $R=1$  Ohm, si otterrebbe la coincidenza numerica fra  $p(t)$  e  $p_W(t)$ . Allo stesso risultato si perviene supponendo che  $x(t)$  rappresenti una corrente anziché una tensione. Il contesto permette di risolvere ogni potenziale ambiguità.

Un segnale si dice ad energia finita se l’integrale che ne rappresenta l’energia converge (condizione fra l’altro sufficiente all’esistenza della sua trasformata di Fourier), mentre è a potenza finita nel caso in cui converga, ad un valore diverso da zero, l’integrale che ne rappresenta la potenza. Si noti che per un segnale ad energia finita la potenza tende a zero, per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie. Inoltre esistono segnali che non sono né ad energia né a potenza finita, come ad esempio  $x(t)=e^{at}$ , per cui la situazione può essere riassunta dalla figura seguente, in cui l’insieme dei segnali è suddiviso in tre sottoinsiemi disgiunti.

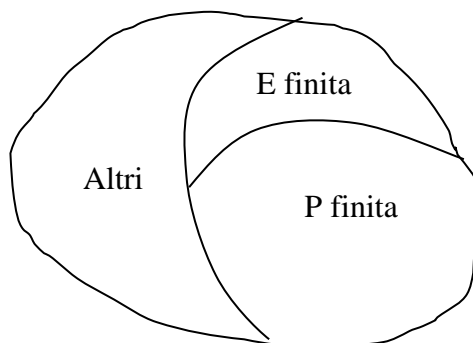


Fig.122 Insieme dei segnali.

#### Valore efficace

Per un segnale a potenza finita si definisce valore efficace la costante che ha la stessa potenza del segnale, ovvero

$$x_{eff} = \sqrt{P} \quad (8.5)$$

Si noti che il valore efficace di una costante coincide con la costante stessa, mentre quello di una sinusoide  $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  è dato da  $\sqrt{A^2 / 2}$ , cioè da  $A / \sqrt{2}$ .

### **Analisi generalizzata**

I segnali ad energia finita ammettono trasformata di Fourier, mentre quelli a potenza finita in generale no, ad eccezione dei segnali periodici. Nei prossimi paragrafi verrà introdotta tramite gli spettri di energia e di potenza una rappresentazione “energetica” dei segnali nel dominio delle frequenze. Questa rappresentazione si aggiunge per i segnali ad energia finita alla rappresentazione usuale mediante trasformata di Fourier, mentre spesso è l’unica possibile per i secondi, ad esclusione dei segnali periodici. Si parla quindi di analisi di Fourier generalizzata, per indicare che la possibilità di una rappresentazione nel dominio delle frequenze viene estesa anche a molti segnali che non ammettono trasformata di Fourier.

## **Segnali ad energia finita**

### **Funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione**

Dati due segnali in generale complessi,  $x(t)$  ed  $y(t)$ , si definisce funzione di crosscorrelazione il coniugato del prodotto interno di uno di essi per la versione anticipata dell’altro:

$$\dot{\phi}_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (8.6)$$

Nel caso particolare in cui  $y(t) = x(t)$ , la funzione di crosscorrelazione prende il nome di funzione di autocorrelazione, che risulta quindi così definita:

$$\dot{\phi}_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (8.7)$$

Si noti che l’ autocorrelazione calcolata nell’origine rappresenta l’energia di un segnale

$$\dot{\phi}_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \quad (8.8)$$

### **Proprietà delle funzioni di cross ed autocorrelazione**

Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente proprietà:

$$\dot{\phi}_{xy}(\tau) = \dot{\phi}_{yx}^*(-\tau) \quad (8.9)$$

*Dimostrazione*

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{yx}^*(-\tau) &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t) x(t - \tau) dt \right]^* = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t - \tau) dt = \text{(cambiando } t' = t - \tau \text{ e quindi di nuovo } t = t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (8.10)$$

Analogamente per la funzione di autocorrelazione si ha (simmetria hermitiana),

$$\dot{\phi}_x(\tau) = \dot{\phi}_x^*(-\tau) \quad (8.11)$$

che, nel caso particolare di segnali reali, diventa (proprietà di parità)

$$\dot{\phi}_x(\tau) = \dot{\phi}_x(-\tau) \quad (8.12)$$

Applicando la disuguaglianza di Schwarz alla definizione di crosscorrelazione (8.6) si ha

$$|\dot{\phi}_{xy}(\tau)|^2 \leq \dot{\phi}_x(0)\dot{\phi}_y(0) = E_x E_y \quad (8.13)$$

da cui deriva

$$|\dot{\phi}_x(\tau)| \leq \dot{\phi}_x(0) = E_x \quad (8.14)$$

La relazione appena trovata stabilisce che il massimo (in modulo) della funzione di autocorrelazione è nell'origine, e che esso coincide con l'energia.

Un'altra importante relazione è la seguente

$$\dot{\phi}_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad (8.15)$$

*Dimostrazione*

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt = \text{(cambiando variabile } t' = -t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t') y(\tau - t') dt' = \\ &= x^*(-\tau) * y(\tau) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Analogamente per la funzione di autocorrelazione

$$\dot{\phi}_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (8.17)$$

### **Teorema di Parseval generalizzato e condizioni di ortogonalità**

Per le funzioni ad energia finita è garantita l'esistenza della trasformata di Fourier. Applicando l'operatore trasformata di Fourier alla funzione di crosscorrelazione si ottiene

$$\dot{\Phi}_{xy}(\omega) = F[\dot{\phi}_{xy}(\tau)] = F[x^*(-\tau)] F[y(\tau)] = X^*(\omega) Y(\omega) \quad (8.18)$$

da cui si deduce che è garantita anche l'esistenza della trasformata della funzione di crosscorrelazione. Ora è possibile scrivere la funzione di crosscorrelazione come antitrasformata della sua trasformata

$$\dot{\phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\Phi}_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (8.19)$$

e valutare il valore assunto nell'origine nel modo seguente

$$\dot{\phi}_{xy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\Phi}_{xy}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) Y(\omega) d\omega \quad (8.20)$$

Si ottiene quindi l'enunciato del teorema di Parseval generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) Y(\omega) d\omega \quad (8.21)$$

Prima di procedere, conviene commentare questo importante risultato. Si noti che il primo termine rappresenta il prodotto interno coniugato di  $x(t)$  e  $y(t)$ . In analogia con il prodotto interno di due vettori, se esso si annulla i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  si dicono ortogonali. Dal teorema di Parseval generalizzato si deduce che se due segnali sono ortogonali, lo devono per forza essere anche le relative trasformate, e viceversa. Inoltre si possono fare le seguenti osservazioni:

- condizione sufficiente affinché due segnali siano ortogonali è che essi non si sovrappongano nel tempo (dal primo integrale)
- condizione sufficiente affinché due segnali siano ortogonali è che essi non si sovrappongano in frequenza (dal secondo integrale)
- due segnali che si sovrappongono sia nel tempo che in frequenza possono ancora essere ortogonali

Le osservazioni sopra riportate sono alla base delle tecniche di moltiplicazione a divisione di tempo (TDM), di frequenza (FDM) e di codice (CDM).

### **Teorema di Parseval e densità spettrale di energia**

Se  $y(t)$  e  $x(t)$  coincidono, si ottiene l'enunciato del teorema di Parseval

$$E_x = \phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega \quad (8.22)$$

Poiché inoltre

$$F[\phi_x(\tau)] = |X(\omega)|^2 \quad (8.23)$$

si ha anche

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F[\phi_x(\tau)]}{2\pi} d\omega \quad (8.24)$$

L'espressione sopra poteva essere anche ricavata considerando l'antitrasformata, calcolata nell'origine, della trasformata della funzione di autocorrelazione. La funzione integranda al secondo membro prende il nome di densità spettrale di energia. Per evitare ambiguità con altre definizioni che verranno introdotte subito dopo, occorre precisare che essa è bilatera e riferita alle pulsazioni. Si noti che essa lega, mediante trasformata di Fourier, la funzione di autocorrelazione allo spettro di energia.

$$E_{bil}(\omega) = \frac{F[\phi_x(\tau)]}{2\pi} = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi} \quad (8.25)$$

Se  $x(t)$  è reale si può definire una densità spettrale di energia monolatera come

$$E(\omega) = \begin{cases} 2E_{bil}(\omega) & \omega > 0 \\ E_{bil}(\omega) & \omega = 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

L'energia in questo caso si ottiene limitando l'integrazione al solo semiasse positivo

$$E = \int_0^{+\infty} E(\omega) d\omega \quad (8.27)$$

La denominazione densità spettrale di energia è giustificata, oltre che dalla (8.23), anche dall'esistenza della proprietà locale, per cui le componenti spettrali di  $x(t)$  all'interno di un certo intervallo hanno energia data dall'integrale della densità spettrale sul medesimo intervallo, per cui, considerando per semplicità di notazione densità monolatera, si ha:

$$E_{\omega_1, \omega_2} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega) d\omega \quad (8.28)$$

### **Densità riferite alle frequenze**

Infine se si preferisce riferirsi alle frequenze anziché alle pulsazioni si ha

$$E_{f, bil}(f) = 2\pi E_{bil}(2\pi f) \quad (8.29)$$

per la quale

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{f,bil}(f) df \quad (8.30)$$

Analogamente per la versione monolaterale, possibile solo per segnali reali.

## Segnali a Potenza Finita

### **Funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione**

Le definizioni delle funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione per le funzioni a potenza finita si possono ottenere con la seguente sostituzione formale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \quad (8.31)$$

Si ha quindi per la funzione di crosscorrelazione

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (8.32)$$

e quella di autocorrelazione

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (8.33)$$

### **Proprietà delle funzioni di cross ed autocorrelazione**

Per le funzioni appena definite valgono le seguenti proprietà, analoghe a quelle viste per i segnali ad energia finita

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}^*(-\tau) \quad (8.34)$$

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_x^*(-\tau) \quad (8.35)$$

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau) \text{ (se } x(t) \text{ reale)} \quad (8.36)$$

$$|\varphi_{xy}(\tau)|^2 \leq \varphi_x(0) \varphi_y(0) = P_x P_y \quad (8.37)$$

$$|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0) = P_x \quad (8.38)$$

L'ultima relazione in particolare afferma che il massimo (in modulo) della funzione di autocorrelazione è nell'origine, e che esso coincide con la potenza

### **Densità spettrale di potenza**

Mentre per le funzioni ad energia finita è garantita l'esistenza della trasformata della funzione di autocorrelazione, ciò non accade per le funzioni a potenza finita. Supponendo tuttavia che esista tale trasformata, operando in modo analogo a quanto visto in precedenza per le funzioni ad energia finita si ottiene

$$\varphi_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi_x(\tau)] d\omega \quad (8.39)$$

Da cui

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F[\varphi_x(\tau)]}{2\pi} d\omega \quad (8.40)$$

La funzione integranda prende il nome di densità spettrale di potenza (bilatera, riferita alle pulsazioni),

$$G_{bil}(\omega) = \frac{F[\varphi_x(\tau)]}{2\pi} \quad (8.41)$$

In modo del tutto analogo a quanto visto in precedenza, si può ottenere la densità spettrale riferita alle frequenze

$$G_{f,bil}(f) = 2\pi G_{bil}(2\pi f) \quad (8.42)$$

e le versioni monolatero (indicate senza pedice “bil”), valide nel solo caso di segnali reali.

Anche nel caso di funzioni a potenza finita, la denominazione di spettro di potenza è giustificata dalla proprietà locale per cui:

$$P_{\omega_1, \omega_2} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega \quad (8.43)$$

Si noti che per i segnali a potenza finita, non periodici, lo spettro di potenza costituisce l'unica rappresentazione spettrale possibile. Esso permette quindi di estendere ad essi il concetto di banda di un segnale, considerando come tale l'intervallo di frequenze sul semiasse positivo, per le quali lo spettro di potenza risulta diverso da zero, fissato un certo ambito di approssimazione.

### **Segnali a potenza finita periodici**

I segnali periodici rappresentano un caso particolare di segnali a potenza finita, in quanto per essi è possibile avere altre rappresentazioni nel dominio delle frequenze (sviluppi in serie di Fourier, trasformata generalizzata). Risulta interessante individuare comunque anche il loro spettro di potenza, per collegarlo alle altre rappresentazioni.

Si noti innanzitutto che le funzioni di cross ed autocorrelazione di segnali periodici di ugual periodo T, possono essere calcolate su un periodo. Applicando quindi la seguente sostituzione formale

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \rightarrow \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \quad (8.44)$$

si ottengono le definizioni di funzione di crosscorrelazione

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (8.45)$$

e di autocorrelazione

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (8.46)$$

Per individuare lo spettro di potenza, conviene dimostrare che la funzione di autocorrelazione è anch'essa una funzione periodica dello stesso periodo T. A questo scopo conviene esprimere x(t) ed il suo coniugato come sviluppi in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t} \\ x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad (8.47)$$

che sostituiti nell'espressione della funzione di autocorrelazione danno

$$\begin{aligned}\varphi_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0(t+\tau)} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n^* c_k e^{jk\omega_0 \tau} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j(n-k)\omega_0 t} dt\end{aligned}\quad (8.48)$$

Quindi, poiché

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ T & n = k \end{cases} \quad (8.49)$$

si ha la seguente rappresentazione della funzione di autocorrelazione come sviluppo in serie di Fourier, che dimostra l'assunto

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_n e^{jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau} \quad (8.50)$$

Dall'espressione sopra si ricava immediatamente la densità spettrale di potenza,

$$G_{bil}(\omega) = \frac{F[\varphi_x(\tau)]}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \quad (8.51)$$

Nel caso di segnali reali essa può anche essere scritta in forma monolatera utilizzando le relazioni che legano i coefficienti  $A_n$  e  $c_n$  ( $A_0 = c_0$ ,  $A_n = 2|c_n|$   $n > 0$ )

$$G(\omega) = A_0^2 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (8.52)$$

Si noti che l'espressione sopra non rappresenta altro che uno spettro di potenza a righe, i cui termini corrispondono alla potenza delle varie componenti sinusoidali, prese singolarmente. Questo risultato poteva anche essere ottenuto direttamente ricordando l'ortogonalità delle funzioni che compaiono nello sviluppo in serie di Fourier.

## Trasformazioni lineari tempo invarianti di spettri di energia e di potenza

Si supponga che i segnali  $y(t)$  ed  $x(t)$  si trovino rispettivamente in ingresso ed in uscita ad una rete lineare tempo invariante, avente risposta impulsiva  $h(t)$  e funzione di trasferimento  $H(\omega)$ . Gli spettri di energia o di potenza dei due segnali sono legati dal modulo della  $H(\omega)$  al quadrato, ma per dimostrarlo conviene separare i casi.

### Segnali ad energia finita

$$E_{y,bil}(\omega) = |H(\omega)|^2 E_{x,bil}(\omega) \quad (8.53)$$

*Dimostrazione*

Ricordando che

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (8.54)$$

Si ha

$$\frac{|Y(\omega)|^2}{2\pi} = |H(\omega)|^2 \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi} \quad (8.55)$$



La relazione (8.53), evidentemente valida anche per tutte le altre forme di densità spettrale di energia (monolaterale, riferite alle frequenze) permette di dimostrare facilmente la proprietà locale della densità spettrale di energia, espressa dalla (8.28). A questo scopo si consideri un filtro ideale con caratteristica di ampiezza unitaria in banda passante, avente frequenze di taglio  $\omega_1$  ed  $\omega_2$ . Il segnale in uscita,  $x_f(t)$  avrà densità spettrale coincidente con quella del segnale in ingresso in banda passante, nulla in banda attenuata. La sua energia, coincidente con l'energia delle componenti in banda passante, sarà data da

$$E_{\omega_1, \omega_2} = \int_0^\infty |H(\omega)|^2 E_x(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} E_x(\omega) d\omega \quad (8.56)$$

### **Segnali a potenza finita**

$$G_{y, bil}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{x, bil}(\omega) \quad (8.57)$$

La dimostrazione si basa sulla seguente relazione fra le funzioni di autocorrelazione

$$\varphi_y(\tau) = h^*(-\tau) * h(\tau) * \varphi_x(\tau) \quad (8.58)$$

#### *Dimostrazione*

Ricordando che

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) x(t - \eta) d\eta \quad (8.59)$$

dalla definizione di autocorrelazione si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_y(\tau) &= \langle y^*(t) y(t + \tau) \rangle = \\ &= \langle \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\eta) x^*(t - \eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) x(t + \tau - \xi) d\xi \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\eta) h(\xi) \langle x^*(t - \eta) x(t + \tau - \xi) \rangle d\eta d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\eta) h(\xi) \varphi_x(\tau - \xi + \eta) d\eta d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(-\eta) h(\xi) \varphi_x(\tau - \xi - \eta) d\eta d\xi = \\ &= h^*(-\tau) * h(\tau) * \varphi_x(\tau) \end{aligned} \quad (8.60)$$

Dalla (8.58), applicando la trasformata di Fourier, si ottiene

$$F[\varphi_y(\tau)] = H^*(\omega) H(\omega) F[\varphi_x(\tau)] \quad (8.61)$$

da cui, dividendo entrambi i membri per  $2\pi$ , la relazione fra gli spettri (8.57), evidentemente valida anche per le altre forme di densità spettrale di potenza (monolaterale, riferite alle frequenze). Da essa si può ricavare la proprietà locale della densità spettrale di potenza, espressa dalla (8.43), in modo del tutto analogo a quanto visto per gli spettri di energia.

## **Esercizi**

### **Funzione di autocorrelazione di un impulso rettangolare**

Calcolare la funzione di autocorrelazione di un impulso rettangolare, avente ampiezza A e durata T.

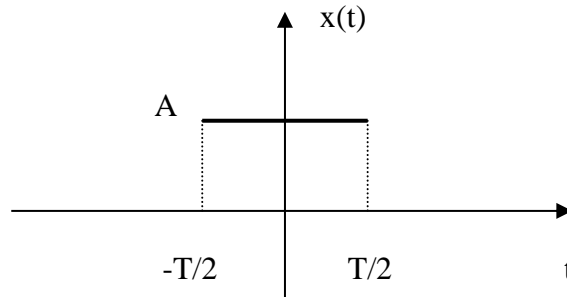


Fig.123 Impulso rettangolare.

Per prima cosa conviene calcolare l'energia, che è evidentemente uguale a  $A^2T$ . Quindi notare che  $x(t)$  e  $x(t+\tau)$  si sovrappongono solo se  $|\tau| < T$ , quindi al di fuori di questo intervallo la funzione di autocorrelazione è nulla perché è nulla la funzione integranda. Per  $|\tau| < T$  la funzione integranda, dove diversa da zero, vale  $A^2$  e l'intervallo di integrazione cresce linearmente da  $-T$  a 0 e quindi decresce sempre linearmente da 0 a  $T$ . Il massimo si ha nell'origine e vale l'energia.

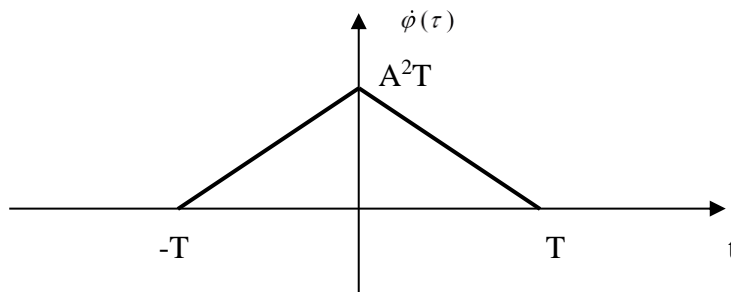


Fig.124 Funzione di autocorrelazione di un impulso rettangolare.

### **Energia e spettro di energia dell'esponenziale unilatera.**

Calcolare l'energia e la densità spettrale di energia bilatera del segnale “esponenziale monolatero”.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-t/t_o} & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.62)$$

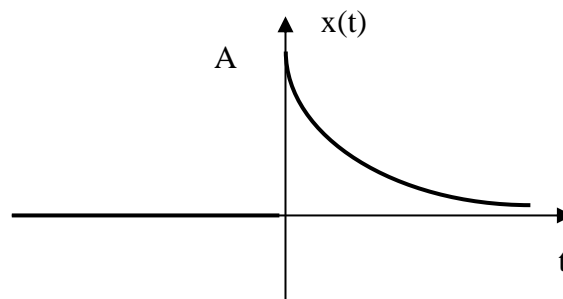


Fig.125 Esponenziale monolatero.

L'energia la si può ottenere dalla definizione:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t/t_o} dt = A^2 \left[ \frac{e^{-2t/t_o}}{-2/t_o} \right]_0^{+\infty} = \frac{A^2 t_o}{2} \quad (8.63)$$

Ricordando la trasformata di  $x(t)$ :

$$X(\omega) = \frac{At_o}{1 + j\omega t_o} \quad (8.64)$$

Si ottiene la densità spettrale di energia:

$$E_{bil}(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi} = \frac{A^2 t_o^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \omega^2 t_o^2} \quad (8.65)$$

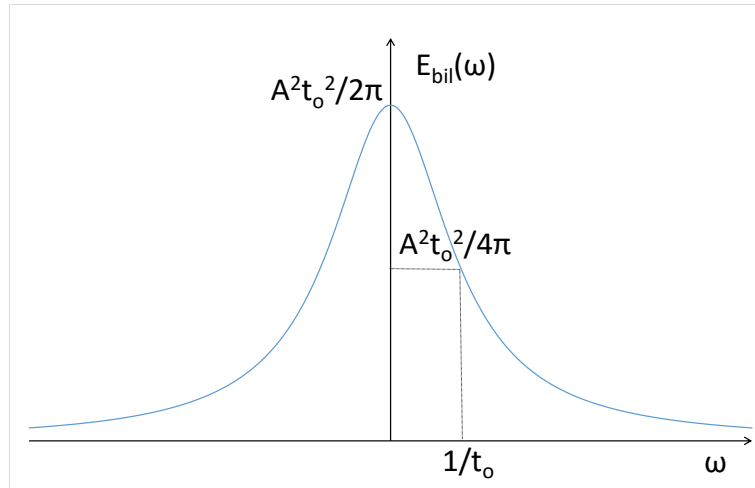


Fig.126 Densità spettrale di energia di un segnale “esponenziale monolatero”.

### **Calcolo spettro di potenza a partire dalla funzione di autocorrelazione.**

Si faccia attenzione che in questo esercizio non viene data l'espressione di una funzione  $x(t)$ , che resta incognita, ma quella di una funzione di autocorrelazione. Si noti che più funzioni  $x(t)$  possono avere la medesima funzione di autocorrelazione e quindi lo stesso spettro di potenza. La funzione di autocorrelazione ha l'andamento dell'esponenziale bilatero già studiato (solo i simboli sono diversi, si noti in particolare che il valore nell'origine è indicato con  $P$  perché deve essere uguale alla potenza):

$$\varphi(\tau) = P e^{-\frac{|\tau|}{\Delta}} \quad \Delta > 0 \quad (8.66)$$

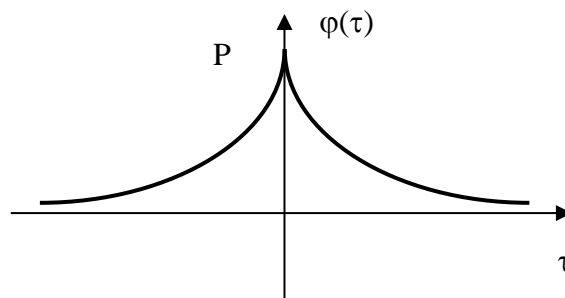


Fig.127 Funzione di autocorrelazione con andamento esponenziale bilatero.

Lo spettro di potenza lo si ottiene dalla definizione:

$$G_{bil}(\omega) = \frac{F[\varphi_x(\tau)]}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{2P\Delta}{1 + \omega^2 \Delta^2} = \frac{P\Delta / \pi}{1 + \omega^2 \Delta^2} \quad (8.67)$$

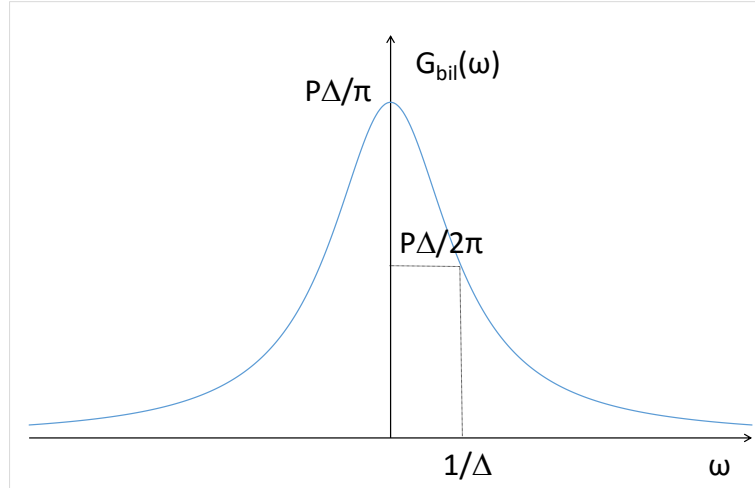


Fig.128 Densità spettrale di potenza di un segnale avente funzione di autocorrelazione esponenziale bilaterale.

**Calcolo della funzione di autocorrelazione a partire dallo spettro di potenza.**

In questo caso si deve procedere all'inverso, ovvero noto lo spettro di potenza occorre ricavare la funzione di autocorrelazione, utilizzando l'antitrasformata di Fourier. Per rendere più insidioso un procedimento altrimenti banale, lo spettro di potenza viene dato in forma monolaterale. Si ha infatti:

$$G(\omega) = \begin{cases} G_o & 0 \leq \omega \leq \omega_m \\ 0 & \omega > \omega_m \end{cases} \quad (8.68)$$

Convien assolutamente riportarsi ad uno spettro bilatero

$$G_{bil}(\omega) = \begin{cases} G_o / 2 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (8.69)$$

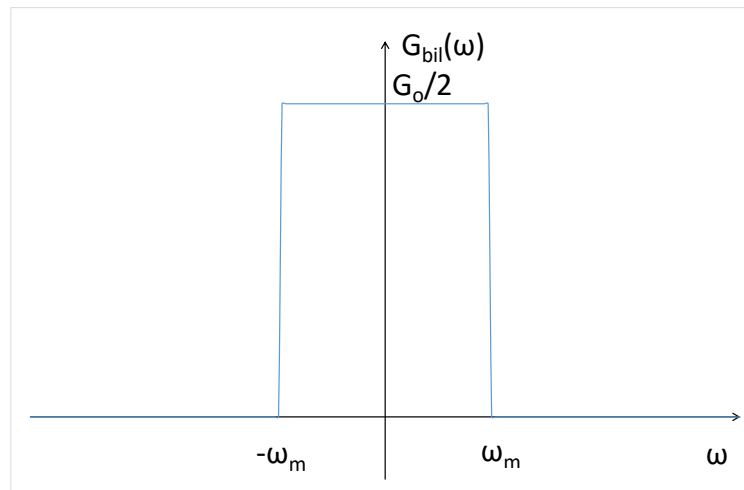


Fig.129 Spettro di potenza costante fino a  $\omega_m$  (rumore bianco con banda limitata).

Prima di procedere con l'antitrasformata (si ricordi l'antitrasformata di un impulso nelle frequenze):

$$\varphi_x(\tau) = F^{-1}[2\pi G_{bil}(\omega)] = 2\pi \frac{G_o \omega_m}{2\pi} \frac{\text{sen } \omega_m \tau}{\omega_m \tau} = P \frac{\text{sen } \omega_m \tau}{\omega_m \tau} \quad (8.70)$$

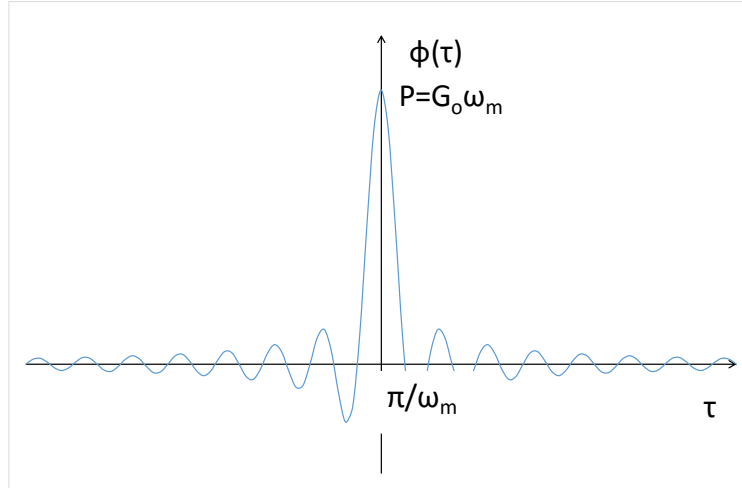


Fig.130 Funzione di autocorrelazione di una funzione con spettro di potenza costante fino a  $\omega_m$  (rumore bianco con banda limitata).

### Calcolo dello spettro di potenza in uscita ad una rete lineare.

All'ingresso di una rete derivatrice si suppone presente un segnale  $x(t)$  con spettro di potenza analogo a quello dell'esercizio precedente. Viene chiesto di determinare lo spettro di potenza del segnale in uscita e quindi il suo valore efficace.

Lo spettro bilatero in ingresso è

$$G_{bil}(\omega) = \begin{cases} G_o / 2 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (8.71)$$

Quello in uscita si ottiene moltiplicandolo per il modulo al quadrato della funzione di trasferimento:

$$G_{\dot{x},bil}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{bil}(\omega) = |j\omega|^2 G_{bil}(\omega) = \begin{cases} \omega^2 G_o / 2 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (8.72)$$

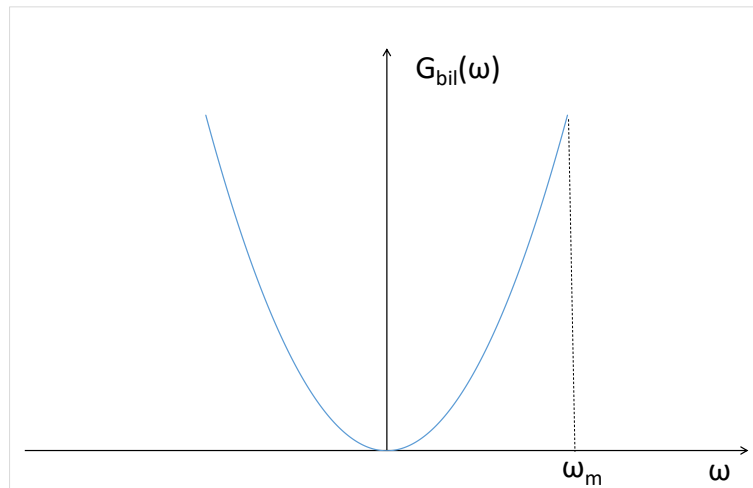


Fig.131 Densità spettrale di potenza in uscita al derivatore.

Il valore efficace richiede il calcolo della potenza, ottenibile integrando lo spettro di potenza:

$$\dot{x}_{eff}^2 = \int_0^{\omega_m} G_{\dot{x}}(\omega) d\omega = G_o \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega = G_o \frac{\omega_m^3}{3} = P \frac{\omega_m^2}{3} = x_{eff}^2 \frac{\omega_m^2}{3} \quad (8.73)$$

Da essa si può ricavare il valore efficace dell'uscita noto quello dell'ingresso.

$$\dot{x}_{eff} = x_{eff} \frac{\omega_m}{\sqrt{3}} \quad (8.74)$$

## Energia e potenza di un segnale tempo discreto

Per i segnali tempo discreti si può procedere come nel caso dei segnali tempo continui, con i necessari cambi formali. Sotto ci si limiterà ad alcune considerazioni essenziali, utili in seguito.

### **Definizioni di energia e potenza**

Definita la potenza istantanea come  $|x_n|^2$ , modulo al quadrato dell'n-esimo termine della serie temporale, derivano le seguenti definizioni di “energia” e “potenza media” (media temporale della potenza istantanea), o semplicemente potenza:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \quad (8.75)$$

$$P = \langle |x_n|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2 \quad (8.76)$$

Per le serie ad energia finita esiste la trasformata di Fourier. La funzione di autocorrelazione ha l'espressione:

$$\dot{c}_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^* x_{n+k} \quad (8.77)$$

Per le serie a potenza finita non esiste di norma la trasformata di Fourier. La funzione di autocorrelazione è data dalla seguente media temporale:

$$c_k = \langle x_n^* x_{n+k} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* x_{n+k} \quad (8.78)$$

## Capitolo 9 Cenni sui segnali digitali **Equation Section (Next)**

### Spettri di segnali PAM

#### *Spettri di segnali PAM deterministici*

I segnali PAM (Pulse Amplitude Modulation) sono esprimibili come convoluzione fra una serie temporale  $\{a_n\}$  ed un impulso ad energia finita  $g(t)$  (si veda la (4.23) che qui riscriviamo)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) = \{a_n\} * g(t) = \quad (9.1)$$

Il segnale PAM può essere analogico, se la serie è analogica, ovvero se ogni termine della serie può assumere con continuità infiniti valori all'interno di un prefissato intervallo, digitale se invece può assumere solo un numero finito di valori.

Se la serie temporale è ad energia finita, allora anche il segnale PAM è ad energia finita, e la sua trasformata è data dal prodotto delle trasformate (si veda la (4.24)):

$$S(\omega) = A_s(\omega)G(\omega) \quad (9.2)$$

Se invece la serie temporale è a potenza finita, il segnale PAM è anch'esso a potenza finita e non è trasformabile secondo Fourier, per cui occorre passare ad un'analisi generalizzata, ovvero calcolare il suo spettro di potenza. Se ne daranno qui i soli passi essenziali.

Per prima cosa assumiamo la serie a valore medio nullo (si può dimostrare che così si evita di avere nello spettro di potenza delle componenti a righe); si può dimostrare che la sua funzione di autocorrelazione è data dal prodotto di convoluzione delle funzioni di autocorrelazione della serie e dell'impulso, a meno di una costante  $1/T$  (dimostrazione omessa):

$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{T} \{c_k\} * \dot{\varphi}_g(\tau) \quad (9.3)$$

Come per tutti i segnali a potenza finita, lo spettro di potenza del segnale PAM è dato dalla trasformata della funzione di autocorrelazione (nell'ipotesi che esista):

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{F[\varphi_s(\tau)]}{2\pi} = \frac{1}{2\pi T} F[\dot{\varphi}_g(\tau)] F[\{c_k\}] = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega T} \quad (9.4)$$

Si noti che lo spettro è dato dal prodotto di due termini: il primo dipende dalla forma dell'impulso, il secondo dalla autocorrelazione della serie.

Se la serie temporale  $\{a_n\}$  è reale, la sua autocorrelazione  $\{c_n\}$  è reale e pari, per cui la sua trasformata può essere scritta con solo riferimento agli indici positivi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega T} = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\omega T \quad (9.5)$$

ottenendo l'espressione

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T} \left[ c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\omega T \right] \quad (9.6)$$

Infine se la autocorrelazione è nulla per  $k$  diverso da zero, si ottiene:

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{c_o |G(\omega)|^2}{2\pi T} \quad (9.7)$$

Si noti che in questo caso lo spettro di potenza del segnale PAM coincide con lo spettro di energia dell'impulso, a meno di una costante moltiplicativa.

### **Spettri di segnali PAM aleatori**

Un segnale è aleatorio quando il suo andamento nel tempo è aleatorio, ovvero è una funzione aleatoria (detta anche processo stocastico). Un segnale PAM è aleatorio se lo è la serie temporale  $\{a_n\}$ . Per una serie aleatoria non è nota a priori la successione dei valori; tuttavia ciò non significa che la conoscenza della serie sia nulla, infatti la serie può sempre essere descritta in termini statistici, come successione di infinite variabili aleatorie; in particolare se la serie è stazionaria tutte le valutazioni statistiche sono indipendenti dall'indice  $n$  che denota la posizione della variabile all'interno della sequenza. Ad esempio, se la serie temporale fosse data dai lanci successivi di un dado, il risultato dell' $n$ -esimo lancio sarebbe dato dalla variabile aleatoria  $a_n$ , la cui ben nota descrizione statistica non dipenderebbe dalla posizione per il semplice motivo che il dado non cambia fra un lancio e l'altro. A titolo di esempio, si riporta la formula del valore medio statistico di una serie stazionaria

$$E[a_n] = \sum_{i=1}^L a^i P(a^i) \quad (9.8)$$

dove gli  $a^i$  rappresentano i valori che possono essere assunti e le  $P(a^i)$  le rispettive probabilità. Poiché queste ultime non dipendono da  $n$ , per la stazionarietà, anche il valor medio è indipendente da  $n$ .

Per le serie aleatorie è possibile definire una autocorrelazione statistica (a priori) come media statistica del prodotto delle coppie di valori posti a distanza  $k$ , ovvero come  $E[a_n^* a_{n+k}]$ ; se la serie è stazionaria, come supporremo d'ora in avanti, la probabilità della coppia (congiunta del secondo ordine)  $P(a^i, a^l, k)$  non dipende dalla posizione delle due variabili aleatorie all'interno della sequenza, cioè dal pedice " $n$ " che rappresenta la posizione del primo elemento, ma solo dalla distanza fra gli elementi, cioè da " $k$ ":

$$c_{stat,k} = E[a_n^* a_{n+k}] = \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^L (a^i)^* a^l P(a^i, a^l, k) \quad (9.9)$$

In particolare il valore per  $k=0$  è la potenza statistica (valore medio del secondo ordine).

Le variabili aleatorie a distanza  $k$  sono incorrelate se (si noti che  $E[a_{n+k}] = E[a_n]$  per la stazionarietà della serie)

$$c_{stat,k} = E[a_n^* a_{n+k}] = \begin{cases} E[|a_n|^2] & k = 0 \\ E[a_n^*] E[a_{n+k}] = E[a_n^*] E[a_n] & k \neq 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Condizione sufficiente per l'incorrelazione è che le variabili aleatorie  $a_n$  e  $a_{n+k}$  siano indipendenti. Se inoltre il valor medio è nullo, cioè  $E[a_n] = 0$ , le variabili sono incorrelate se e solo se l'autocorrelazione è nulla per  $k$  diverso da zero.

Infine se la serie è "ergodica" (è sufficiente che oltre che stazionaria sia a memoria finita, cioè la variabili  $a_n$  e  $a_{n+k}$  siano indipendenti per valori di  $k$  sufficientemente grandi) i valori medi statistici



coincidono con gli analoghi temporali che possono essere calcolati a posteriori sulle realizzazioni del processo stocastico, cioè sulle serie temporali che si ottengono a posteriori, come risultato dell'esperimento (ad esempio nel caso del dado, una realizzazione è l'effettiva sequenza dei valori ottenuta lanciando il dado consecutivamente). Si ha quindi in particolare che la autocorrelazione statistica e quella temporale vengono a coincidere per i processi ergodici:

$$c_{stat,k} = c_k \quad (9.11)$$

Si hanno una serie di conseguenze a catena:

- tutte le realizzazioni di un processo ergodico, anche se ovviamente diverse fra loro, hanno la stessa autocorrelazione temporale, dovendo questa coincidere con quella statistica, che è unica;
- quanto sopra implica che tutte le realizzazioni dei segnali PAM, pur diverse fra loro in quanto è diversa la successione dei simboli della serie, hanno lo stesso spettro di potenza; esso si ottiene dalla formula per i segnali deterministici semplicemente sostituendo alla autocorrelazione temporale quella statistica, data dalla (9.9);

In particolare, se la serie è a valor medio nullo e gli elementi della serie aleatoria sono incorrelati (come detto condizione sufficiente è che siano indipendenti) si ottiene infine:

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{E[|a_n|^2] |G(\omega)|^2}{2\pi T} \quad (9.12)$$

## Cenni sui segnali digitali aleatori in banda base

Un sistema di trasmissione digitale in banda base è normalmente modellato come una sorgente binaria, i cui simboli, o bit, sono equiprobabili e indipendenti, seguita da un codificatore di linea che trasforma la serie di bit  $\{b_n\}$  in una serie di simboli digitali,  $\{a_n\}$ .

Il segnale numerico che viene trasmesso è il segnale PAM che si ottiene convolvendo questa serie temporale con l'impulso  $g(t)$ . Vedremo qui due esempi molto semplici di codifica.

### Codifica binaria

Questa codifica si limita a trasformare i bit a "0" in "-1", allo scopo di rendere a valor medio nullo la serie temporale degli  $\{a_n\}$ , che ovviamente risulta reale.

$$E[a_n] = 0 \quad (9.13)$$

Dato che ho un simbolo per ogni bit, allora il tempo di simbolo, cioè l'intervallo fra simboli  $T$  coincide con il tempo di bit  $T_b$ , ed analogamente per i loro inversi, cioè le frequenze di simbolo  $f_s$  e di bit,  $f_b$ . Dato che i bit sono indipendenti, lo sono per forza anche i simboli  $a_n$ , da cui deriva che

$$c_{stat,k} = \begin{cases} E[a_n^2] = 1 & k = 0 \\ E[a_n] E[a_n] = 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (9.14)$$

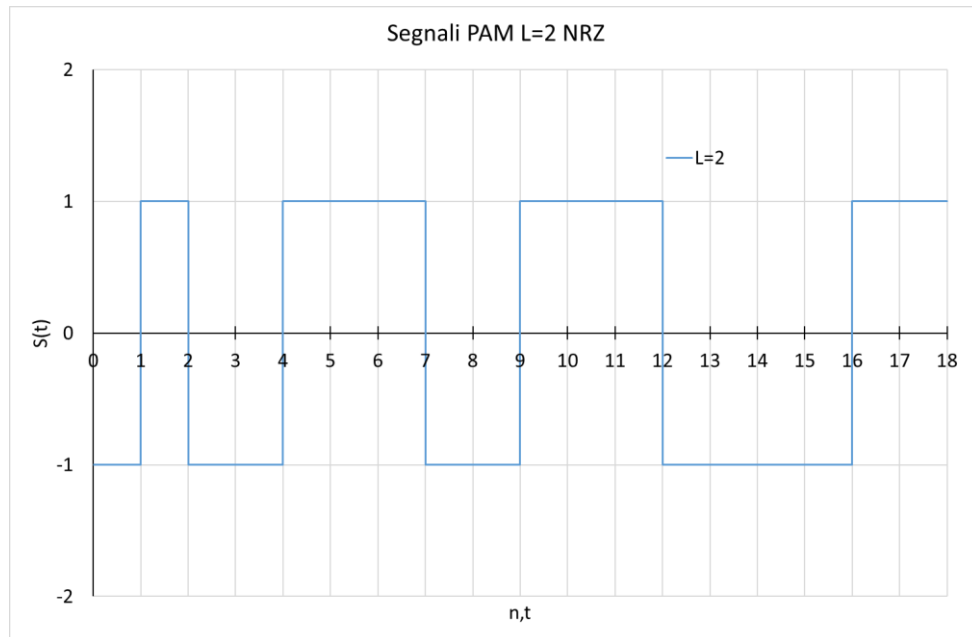


Fig.132 Segnale PAM a 2 livelli, impulso NRZ (bit=010011100111000011).

### Codifica multilivello

La codifica multilivello è un'estensione della codifica bipolare, nella quale viene emesso un simbolo ogni  $l$  bit, per cui si ha

$$\begin{aligned} T &= lT_b \\ f_s &= \frac{f_b}{l} \end{aligned} \quad (9.15)$$

I simboli possono assumere i seguenti  $L = 2^l$  valori:

$$a^i = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(L-1) \quad (9.16)$$

Il caso bipolare può essere visto come un caso particolare di codifica multilivello quando  $L=2$ . La scelta dei numeri dispari è data dal fatto che si vuole che ogni valore abbia la stessa distanza, cioè due, dal valore successivo. Anche se non è obbligatorio, conviene mappare gruppi di  $l$  bit in un simbolo adottando una codifica di Gray, nella quale ai simboli contigui corrispondono  $l$ -ple che differiscono di un solo bit. Una possibile codifica di Gray ("possibile" perché la codifica di Gray non è univoca, richiedendo soltanto che configurazioni adiacenti differiscano per un solo bit), nel caso di  $L=8$  è la seguente

Tabella 3 Codifica multilivello secondo Gray (non univoca)

| $l$ -pla | Simbolo |
|----------|---------|
| 000      | +7      |
| 001      | +5      |
| 011      | +3      |
| 010      | +1      |
| 110      | -1      |
| 111      | -3      |
| 101      | -5      |
| 100      | -7      |

I simboli  $a_n$  sono indipendenti ed equiprobabili, in quanto ottenuti da gruppi di  $l$  bit distinti (senza bit in comune). Il valor medio è quindi nullo mentre la funzione di autocorrelazione statistica è data da:

$$c_{stat,k} = \begin{cases} E[a_n^2] = \frac{L^2 - 1}{3} & k = 0 \\ E[a_n]E[a_n] = 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (9.17)$$

L'espressione della potenza statistica  $E[a_n^2] = \frac{L^2 - 1}{3}$  non è stata dimostrata. Si verifichi la sua validità nel caso di  $L=2,4,8$ .

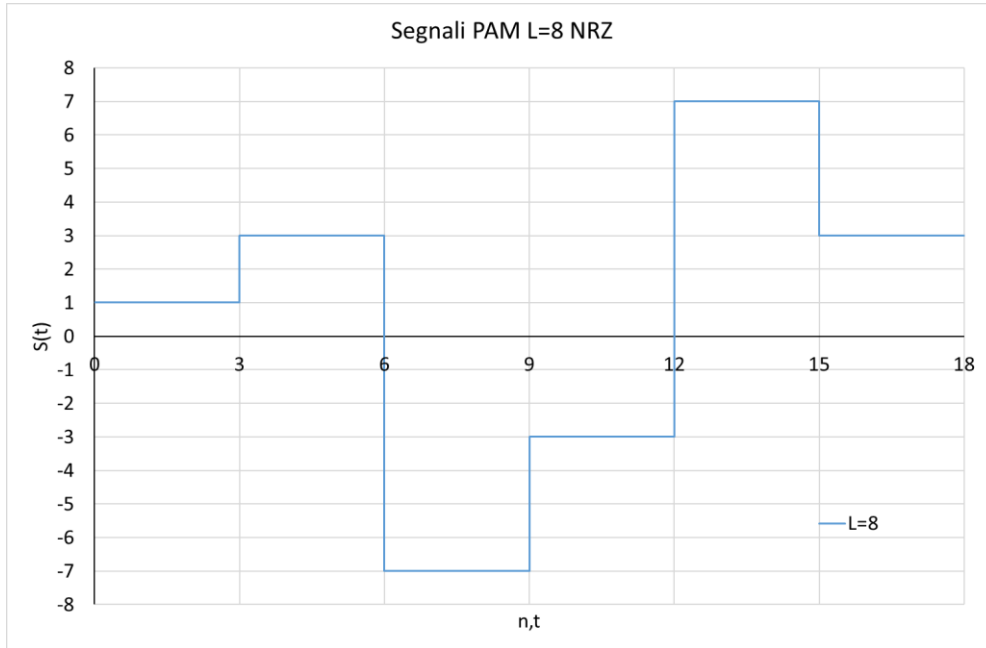


Fig.133 Segnale PAM a 8 livelli, impulso NRZ (bit=010011100111000011).

### Codifica AMI (Alternate Marked Inversion) (avanzato, facoltativo)

La codifica AMI è una codifica usata in ambito telefonico: lascia invariati i bit a zero; alterna il segno dei bit a 1. Lo scopo dell'alternanza è quello di rilevare il tasso di errore (violazione dell'alternanza dei segni). Frequenza di simbolo e di bit sono coincidenti, dato che ho un simbolo per ogni bit, come nel caso della codifica bipolare. Il valore medio è nullo, la funzione di autocorrelazione statistica ha la particolarità di non essere nulla per  $k=1$  (la dimostrazione, un po' complessa, è omessa). Ciò è dovuto al fatto che la legge dell'alternanza rende dipendenti due simboli consecutivi.

$$a^i = 0, \pm 1 \quad P(0) = 1/2, \quad P(1) = 1/4, \quad P(-1) = 1/4 \quad (9.18)$$

$$E[a_n] = \sum_{i=1}^L a^i P(a^i) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 \quad (9.19)$$

$$c_{stat,k} = \begin{cases} E[a_n^2] = \frac{1}{2} & k = 0 \\ E[a_n a_{n+1}] = -1/4 & k = 1 \\ E[a_n a_{n+k}] = 0 & k > 1 \end{cases} \quad (9.20)$$

**Spettri dei segnali PAM aleatori con codifica multilivello e impulso rettangolare NRZ.**

Nel caso di codifica multilivello (comprendente anche il caso bipolare), la autocorrelazione è nulla tranne che nell'origine. Lo spettro del segnale PAM diventa quindi

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{E[a_n^2] |G(\omega)|^2}{2\pi T} \quad (9.21)$$

Dove  $E[a_n^2] = \frac{L^2 - 1}{3}$ .

Come impulso  $g(t)$  si può prendere l'impulso rettangolare di durata  $T$  (detto anche NRZ, No Return to Zero), riportato in figura:

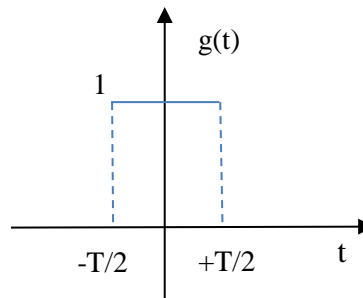


Fig.134 Impulso NRZ.

La sua trasformata è data da:

$$G(\omega) = T \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \quad (9.22)$$

Da cui

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{E[a_n^2] T}{2\pi} \left| \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \right|^2 \quad (9.23)$$

Conviene passare alle frequenze

$$G_{s,f,bil}(f) = E[a_n^2] T \left| \frac{\sin 2\pi f T / 2}{2\pi f T / 2} \right|^2 = E[a_n^2] T |\text{sinc } fT|^2 = \frac{E[a_n^2]}{f_s} \left| \text{sinc } \frac{f}{f_s} \right|^2 \quad (9.24)$$

Si noti che la frequenza di simbolo coincide con la frequenza di bit nel caso bipolare, cioè quando  $l=1$ , altrimenti è ridotta di un fattore  $l$ . Il vantaggio della codifica multilivello risiede nel fatto che la banda del primo lobo (coincidente con il primo punto di nullo) è pari alla frequenza di simbolo, per cui, a parità di frequenza di bit, essa risulta ridotta del medesimo fattore  $l$ . Ciò risulta evidente osservando la figura sotto, dove le frequenze sono normalizzate alla frequenza di bit e la densità spettrale rispetto al suo valore massimo, nell'origine, per agevolare il confronto.

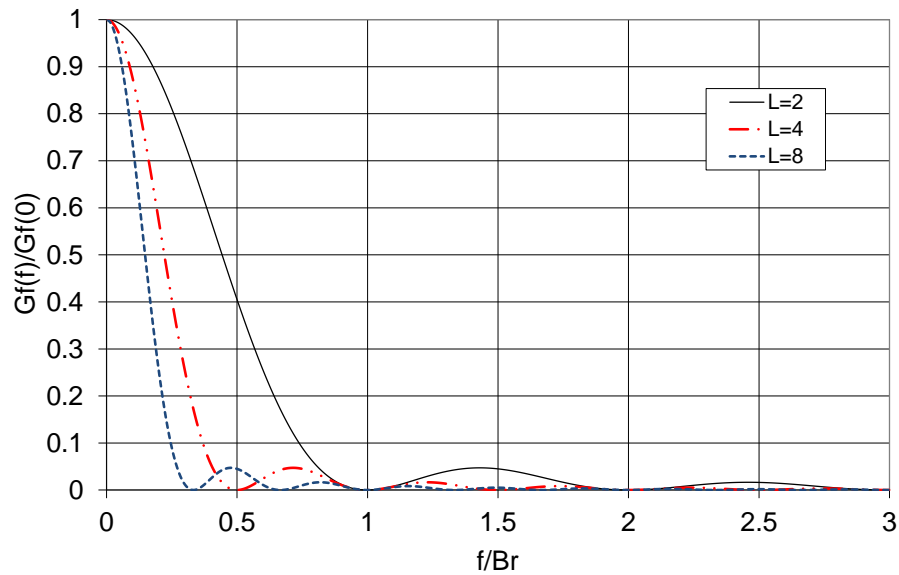


Fig.135 Spettri di potenza di segnali numerici aleatori con codifica multilivello ed impulso NRZ, al variare del numero di livelli. Si noti che la frequenza è normalizzata alla frequenza di bit per evidenziare il risparmio di banda (il primo punto di nullo si trova a  $1/l$ ). Per agevolare il confronto, lo spettro di è normalizzato al valore massimo, posto nell'origine.

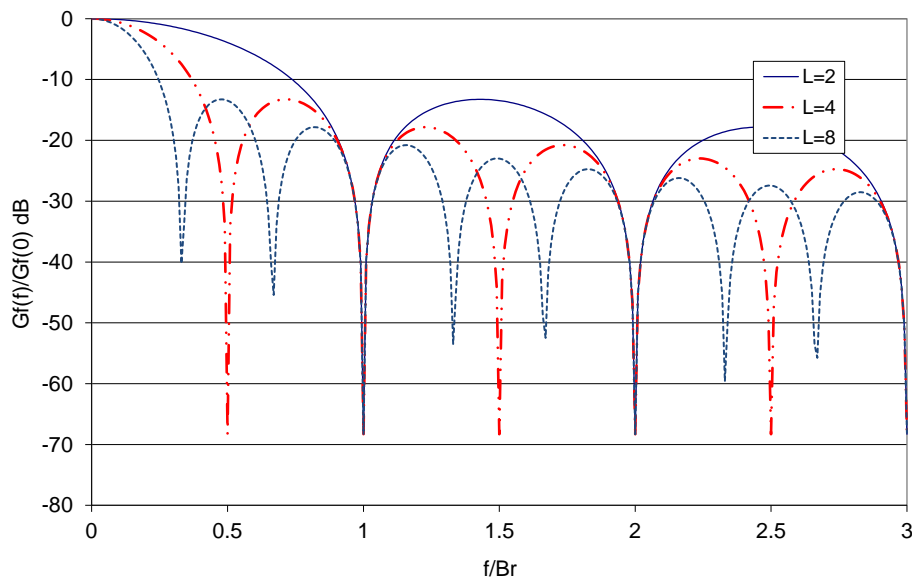


Fig.136 Analoga alla figura precedente, ma con la scala in dB (i punti di nullo vanno a  $-\infty$ ), come sullo schermo di un analizzatore di spettro.

Si può dimostrare che il prezzo da pagare per la riduzione di banda è dato da un aumento della probabilità di errore per bit, che aumenta all'aumentare di  $L$ . Le codifiche multilivello, con  $L$  sempre più elevato quindi si impiegano quando è necessario risparmiare banda e le caratteristiche di ricezione (rapporto segnale rumore) sono buone.

### **Spettri dei segnali PAM aleatori con codifica multilivello e impulso rettangolare NRZ (facoltativo).**

Nel caso di codifica AMI, la autocorrelazione è diversa da zero non solo nell'origine, ma anche per  $k=1$  o  $-1$ . Occorre quindi partire dalla formula generale per ottenere lo spettro:

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T} \left[ c_{stat,o} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{stat,k} \cos k\omega T \right] \quad (9.25)$$

Il termine dentro parentesi quadre, dipendente solo dalla autocorrelazione della serie, può essere riscritto nel caso dell'AMI come

$$\begin{aligned} E[a_n^2] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E[a_n a_{n+k}] \cos k\omega T &= \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{4}\right) \cos \omega T = \frac{1 - \cos \omega T}{2} \stackrel{\text{sen}^2(\vartheta) = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}}{=} \\ &= \text{sen}^2(\omega T / 2) \end{aligned} \quad (9.26)$$

Come impulso  $g(t)$  questa volta viene preso l'impulso rettangolare di durata  $T/2$  (detto anche RZ, Return to Zero), riportato in figura:

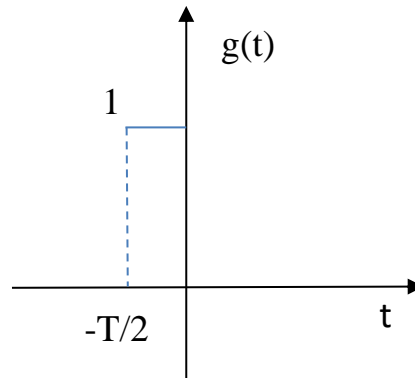


Fig.137 Impulso RZ.

Per esso si ha:

$$G(\omega) = \frac{T}{2} \frac{\text{sen } \omega T / 4}{\omega T / 4} e^{j\omega T / 4} \rightarrow |G(\omega)|^2 = \frac{T^2}{4} \left| \frac{\text{sen } \omega T / 4}{\omega T / 4} \right|^2 \quad (9.27)$$

Da cui

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{T^2 / 4}{2\pi T} \left| \frac{\text{sen } \omega T / 4}{\omega T / 4} \right|^2 \text{sen}^2(\omega T / 2) = \frac{T / 4}{2\pi} \left| \frac{\text{sen } \omega T / 4}{\omega T / 4} \right|^2 \text{sen}^2(\omega T / 2) \quad (9.28)$$

Passando infine alle frequenze

$$\begin{aligned} G_{s,f,bil}(f) &= 2\pi G_{s,bil}(2\pi f) = \frac{T}{4} \left| \frac{\text{sen } 2\pi f T / 4}{2\pi f T / 4} \right|^2 \text{sen}^2\left(\frac{2\pi f T}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4f_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2f_s}\right) \text{sen}^2\left(\pi \frac{f}{f_s}\right) \end{aligned} \quad (9.29)$$

Si noti che il sinc ha punti di nullo a multipli di due volte la frequenza di simbolo, mentre il seno a multipli di una volta sola. In altre parole, anche se un impulso RZ ha il primo lobo al doppio della frequenza di simbolo, questo non comporta un allargamento della banda del primo lobo del segnale PAM grazie alla funzione di autocorrelazione della codifica AMI. Lo spettro risultante è rappresentato nella figura sotto:

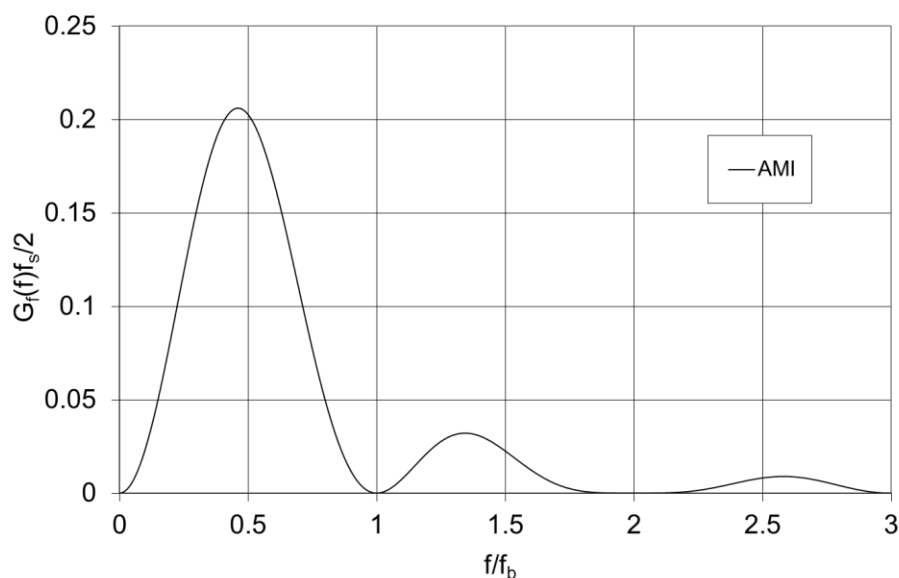


Fig.138 Spettro di potenza (monolatero) di un segnale numerico aleatorio, con codifica AMI ed impulso RZ.

### Cenni sulle modulazioni digitali (segnali digitali aleatori passa banda).

In linea di principio le modulazioni digitali si ottengono dalle modulazioni analogiche sostituendo al segnale modulante analogico un segnale modulante digitale, cioè di solito un segnale PAM a L livelli con codifica NRZ.

Esistono però modulazioni analogiche che non hanno un corrispondente digitale (l'AM), e viceversa, come l'FSK.

Nella tabella sotto vengono mostrate alcune corrispondenze, dove L indica il numero dei livelli ( $L=2^1$  cioè 2,4,8,16,32...); nella modulazione QAM si hanno due segnali modulanti, ognuno a L livelli ed  $M=L^2$  (4, 16, 64, 256, 1048, ...)

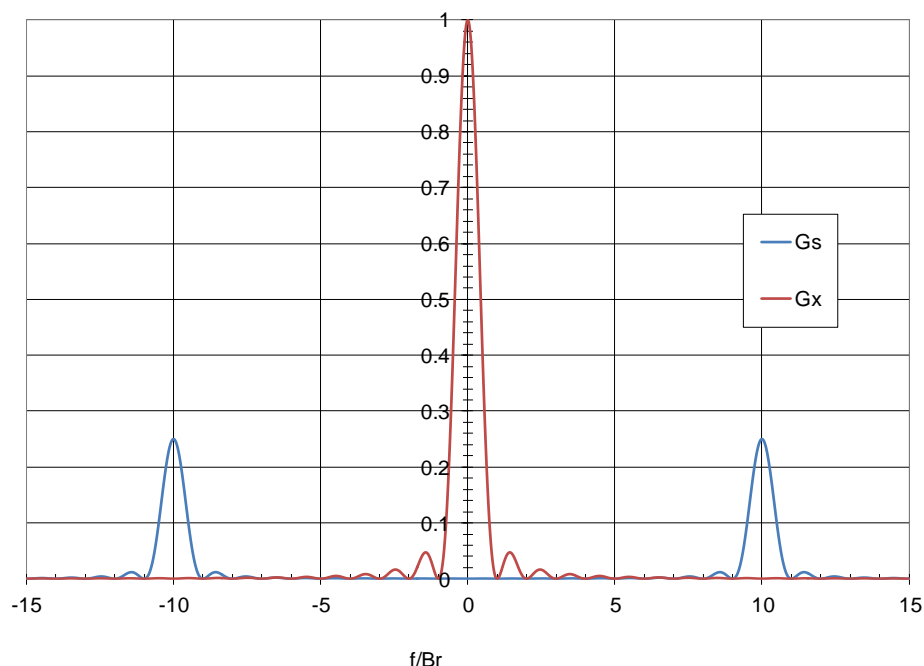
Tabella 4 Corrispondenze fra modulazioni analogiche e digitali

| Analogica         | Digitale                |
|-------------------|-------------------------|
| AM, o DSB         |                         |
| Prodotto o DSB-SC | ASK, L-ASK              |
| QAM               | M-QAM, QPSK             |
| PM                | PSK, BPSK, 2-PSK, L-PSK |
| FM                | L-CP-FSK, (MSK)         |
|                   | FSK, L-FSK              |

Per alcune modulazioni esistono più nomi (ASK=2-ASK), (PSK=2-PSK=BPSK), (QPSK=4PSK). Si hanno inoltre alcune equivalenze (2-ASK=2-PSK), (4-PSK=4-QAM).

Il segnale modulato  $s(t)$  è a potenza finita e per le modulazioni ASK, PSK, M-QAM il suo spettro di potenza  $G_{s,bil}(\omega)$  si ottiene dallo spettro di potenza  $G_{x,bil}(\omega)$  del segnale modulante (un PAM multilivello) in modo analogo a quanto visto per la trasformata di Fourier di una modulazione a prodotto, con l'unica differenza della costante  $1/4$  anziché  $1/2$ .

$$G_{s,bil}(\omega) = \frac{1}{4} G_{x,bil}(\omega - \omega_o) + \frac{1}{4} G_{x,bil}(\omega + \omega_o) \quad (9.30)$$



*Fig.139 Spettro di potenza bilatero del segnale modulante (2 livelli) e dell'oscillazione modulata delle modulazioni L-ASK, L-PSK, M-QAM ( $L=2$ ;  $M=4$ ;  $f_0=10B_r$ ; non filtrate).*

Si ha anche in questo caso, come nella modulazione a prodotto, un raddoppio della banda rispetto a quella del segnale modulante (facendo riferimento al solo primo lobo, si passa da  $f_s$  a  $2f_s$ ). In realtà, per occupare meno banda a radiofrequenza, il segnale modulante viene opportunamente filtrato passa-basso, in modo che la sua frequenza massima sia compresa fra la metà della frequenza di simbolo  $f_s/2$  (banda di Nyquist) e la frequenza di simbolo stessa  $f_s$ . Di conseguenza l'oscillazione modulata corrispondente ha una banda compresa fra la frequenza di simbolo  $f_s$  e  $2f_s$ .

## Modulazioni digitali utilizzate nell'802.11n (WiFi).

La tabella Tabella 5 mostra, a titolo di curiosità, le 32 combinazioni flusso-modulazione-codifica (a correzione d'errore) possibili nello standard 802.11 n, il "routerino" WiFi di casa (se non più recente). Questo standard utilizza una tecnica multi portante detta OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiplexing). Senza entrare nel merito dell'OFDM, quello che interessa rilevare qui è che per ogni valore dei flussi spaziali (da 1 a 4) si hanno 8 combinazioni modulazione-codifica. Le modulazioni utilizzate sono la L-ASK e la M-QAM, anche se vengono utilizzati in alcuni casi denominazioni equivalenti. Le modulazioni sono protette da codici a correzione di errore che introducono ridondanza. Ad esempio, un codice con "coding rate"  $\frac{3}{4}$  inserisce un bit di ridondanza ogni 3 di informazione (si hanno quindi 3 bit di informazione ogni 4 di codice). Modulazioni a più alto livello vengono usate per trasmettere a parità di banda più bit.

La frequenza di bit che si ottiene dipende dall'indice MCS (numero dei flussi spaziali, numero dei livelli della codifica multilivello, tasso di codifica) che identifica una riga, e per ogni MCS dall'ampiezza di banda a disposizione (20 MHz o 40 MHz) e dal valore scelto per il tempo di guardia (un margine specifico della modulazione OFDM). Si va da 6.5 a 600 Mbit/s, cioè due ordini di grandezza! Il router seleziona automaticamente la combinazione migliore in base al numero delle antenne (da cui dipende il numero di flussi) ed al rapporto segnale/rumore del canale. Naturalmente la frequenza di bit sarà più alta se il canale è migliore. In ogni caso è altamente probabile nei casi domestici che il fattore limitante per l'accesso a Internet sia la banda della connessione ADSL.

Lo standard "n" può operare nella banda non licenziata a 2.4 GHz, oppure, facoltativamente, su quella a 5 GHz (un router può anche operare simultaneamente su entrambe, creando due distinte reti locali).



## Nuovi standard (facoltativo)

Lo standard “ac”, successivo all’ “n”, ne rappresenta sostanzialmente un’estensione, aggiungendo ulteriori combinazioni (possibili solo nella banda a 5 GHz) a quelle mostrate in tabella (fino a 8 flussi spaziali, 256 QAM, banda a 80 MHz; doppia banda 80+80 MHz). Introduce anche per la prima volta (come opzione e sulla cui utilità non c’è accordo unanime) la tecnica MU-MIMO (Multi User MIMO), che permette in downlink (dal routerino ai PC) di inviare più pacchetti contemporaneamente ad utenti diversi, su flussi spaziali diversi. In “ac” le prime 10 modalità sono numerate da 0 a 9 (VHT, Very High Throughput index), quelle analoghe ma su più flussi spaziali mantengono la stessa numerazione, anziché proseguire, come nell’ “n”.

Lo standard “ax”, recentissimo, è invece molto più innovativo, moltiplicando per quattro la durata di un simbolo (da 3.2 a 12.8  $\mu$ s), introducendo due modalità 1024 QAM (VT index 10 e 11), estendendo la tecnica MU-MIMO all’uplink. Esso introduce anche la tecnica di accesso multiplo OFDMA (Orthogonal Frequency-Division Multiple Access), che permette l’accesso multiplo sia in downlink che in uplink, utilizzando sottoportanti diverse per ogni flusso, anziché flussi spaziali diversi come nel MU-MIMO.

## Basi della modulazione OFDM (facoltativo).

L’OFDM è una tecnica di multiplazione di frequenza per segnali digitali, basata sull’utilizzo combinato di un insieme di sottoportanti fra loro ortogonali. E’ al momento utilizzatissima in tutti gli ambiti delle telecomunicazioni (WiFi, ADSL, DVB, 4G...).

In sintesi, nell’OFDM anziché inviare un unico flusso dati, con un tempo di simbolo brevissimo, si preferisce avere N flussi dati in parallelo, con un tempo di simbolo aumentato di un fattore N. Ognuno di questi flussi modulerà una diversa sottoportante.

Il vantaggio principale consiste nella maggiore robustezza contro l’interferenza intersimbolo, causata nelle applicazioni radio dalla presenza di cammini multipli («echi»).

Se il tempo di simbolo è lungo, è possibile inserire un intervallo di guardia di durata maggiore della risposta impulsiva del canale, in modo da esaurire gli echi di un simbolo prima della trasmissione del simbolo successivo.

Ogni sottoportante è modulata con una modulazione numerica (di solito M-QAM) il cui numero di livelli può cambiare per adattarsi al canale (migliore il rapporto segnale rumore, più alto il numero di bit per simbolo che si possono inviare). In alcuni casi il numero di livelli, in un dato momento, è lo stesso per tutte le sottoportanti (es Wi-Fi). In altri può variare da sottoportante a sottoportante (ADSL, ecc.). In questo caso l’OFDM viene anche chiamata DMT (Discrete Multi Tone).

La modulazione OFDM viene realizzata mediante una FFT inversa, per cui N è potenza di 2.

Si veda: [https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal\\_frequency-division\\_multiplexing](https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_frequency-division_multiplexing)

### **Tempo utile e tempo di simbolo**

L’OFDM divide una banda B in N sottoportanti equidistanziate di  $\Delta f = B/N$ . N e’ la dimensione della FFT, ad esempio 64.

Le portanti sono ortogonali su  $T = 1/\Delta f$  perché su T ognuna di esse ha un numero intero di periodi (vedi dimostrazione su Calandrino Chiani, Comunicazioni Elettriche, Pitagora).

Si usa quindi T come tempo utile (o di integrazione) di simbolo, o  $T_u$ .

Al tempo utile viene aggiunto un tempo di guardia  $T_g$  per permettere ai cammini multipli di esaurirsi evitando così l’interferenza intersimbolo, ottenendo così il tempo di simbolo OFDM,  $T_{OFDM}$ .

Ogni portante sarà modulata a L livelli (su due vie nel caso dell’ M-QAM) quindi porterà m bit per ogni tempo di simbolo OFDM. Nel WiFi m è lo stesso per tutte le portanti, mentre nell’ADSL e in altri casi no. L’inverso del tempo di simbolo OFDM fornisce la frequenza dei simboli OFDM.

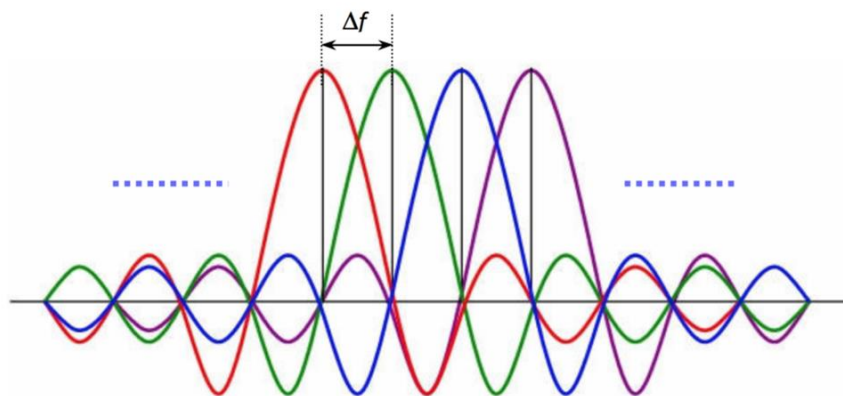


Fig.140 Spaziatura delle sottoportanti di un segnale OFDM.

### Esempio 802.11 “a”, “g”, “n”, “ac”

Considerando il caso del canale a 20 MHz, si ha  $B=20$  MHz e  $N=64$  (dimensione FFT), da cui:

$\Delta f=B/N=312.5$  kHz e  $T_u=1/\Delta f=3.2$   $\mu$ s

Non tutte le 64 sottoportanti sono utilizzate per i dati, infatti nel WiFi a/g se ne usano solo 48 per i dati e 4 come pilota (12 inutilizzate), mentre nel WiFi n/ac, più efficiente, se ne usano 52 per i dati, e 4 come pilota (8 nulle), come mostrato nella figura sotto.

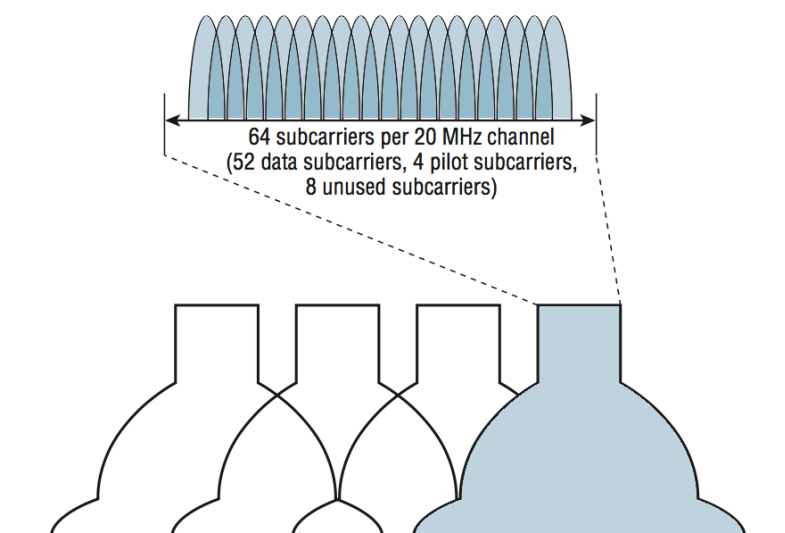


Fig.141 Canali a 20 MHz (parzialmente sovrapposti) e sottoportanti di un segnale OFDM (WiFi “n” o “ac”).

Per permettere agli echi di esaurirsi, si aggiunge al tempo utile  $T_u$  un tempo di guardia  $T_g$  (circa 4 volte la dispersione temporale (o «delay spread») prevista (in interni <100ns, in esterni maggiore), ottenendo  $T_{OFDM}$

Il suo inverso è la frequenza di simbolo OFDM. Moltiplicando per le sottoportanti utilizzate dai dati si ottiene la frequenza di simbolo dati.

Per canale a 20 MHz (48 o 52 sottoportanti dati),  $T_u=3.2$   $\mu$ s. Posso avere due tempi di guardia:

$T_g$  (long)=0.8  $\mu$ s, e  $T_g$  (short)=0.4  $\mu$ s.

### $T_g$ (long)

$$T_{OFDM}=T_u+T_g=4 \mu s$$

$$f_{sOFDM}=1/T_{OFDM}=250 \text{ kSymbols/s}$$

$$f_{sdata}=f_{sOFDM}*48=12 \text{ Msymbols/s (in “a”, “g”)}$$

$$f_{\text{sdata}} = f_{\text{sOFDM}} * 52 = 13 \text{ Msymbols/s (in "n", "ac")}$$

$$\underline{T_g \text{ (short)} = 0.4 \mu\text{s}}$$

$$T_{\text{OFDM}} = T_u + T_g = 3.6 \mu\text{s}$$

$$f_{\text{sOFDM}} = 1/T_{\text{OFDM}} = 277.778 \text{ kSymbols/s}$$

Da cui nelle versioni WiFi a e g

$$f_{\text{sdata}} = f_{\text{sOFDM}} * 48 = 13.334 \text{ Msymbols/s (in "a", "g")}$$

e nelle piu' efficienti n e ac

$$f_{\text{sdata}} = f_{\text{sOFDM}} * 52 = 14.444 \text{ Msymbols/s (in "n", "ac")}$$

Nel WiFi tutte le sottoportanti hanno la stessa modulazione e la stessa code rate (indice MCS), per cui indicando con  $m$  i bit per simbolo della modulazione si ottiene la frequenza di bit:

$$f_b = R_c * f_{\text{sdata}} * m$$

Se si considera ad esempio l'indice MCS 3, si ha  $R_c = 1/2$ ,  $m = 4$ , da cui la  $f_b$  28.9 riportata in tabella nella colonna B=20MHz, GI (Guard Interval, cioè  $T_g$ ) 400ns.

*Tabella 5 Caratteristiche delle 32 possibili combinazioni flussi spaziali, modulazione, codifica banda, tempo di guardia, previste dal IEEE802.11n (WiFi n).*

| MCS index | Spatial streams | Modulation type | <u>Coding rate</u> | Data rate (Mbit/s) |                  |                  |                  |
|-----------|-----------------|-----------------|--------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|
|           |                 |                 |                    | 20 MHz channel     |                  | 40 MHz channel   |                  |
|           |                 |                 |                    | 800 ns <u>GI</u>   | 400 ns <u>GI</u> | 800 ns <u>GI</u> | 400 ns <u>GI</u> |
| 0         | 1               | <u>BPSK</u>     | 1/2                | 6.5                | 7.2              | 13.5             | 15               |
| 1         | 1               | <u>QPSK</u>     | 1/2                | 13                 | 14.4             | 27               | 30               |
| 2         | 1               | <u>QPSK</u>     | 3/4                | 19.5               | 21.7             | 40.5             | 45               |
| 3         | 1               | 16- <u>QAM</u>  | 1/2                | 26                 | 28.9             | 54               | 60               |
| 4         | 1               | 16- <u>QAM</u>  | 3/4                | 39                 | 43.3             | 81               | 90               |
| 5         | 1               | 64- <u>QAM</u>  | 2/3                | 52                 | 57.8             | 108              | 120              |
| 6         | 1               | 64- <u>QAM</u>  | 3/4                | 58.5               | 65               | 121.5            | 135              |
| 7         | 1               | 64- <u>QAM</u>  | 5/6                | 65                 | 72.2             | 135              | 150              |
| 8         | 2               | <u>BPSK</u>     | 1/2                | 13                 | 14.4             | 27               | 30               |
| 9         | 2               | <u>QPSK</u>     | 1/2                | 26                 | 28.9             | 54               | 60               |
| 10        | 2               | <u>QPSK</u>     | 3/4                | 39                 | 43.3             | 81               | 90               |
| 11        | 2               | 16- <u>QAM</u>  | 1/2                | 52                 | 57.8             | 108              | 120              |
| 12        | 2               | 16- <u>QAM</u>  | 3/4                | 78                 | 86.7             | 162              | 180              |
| 13        | 2               | 64- <u>QAM</u>  | 2/3                | 104                | 115.6            | 216              | 240              |
| 14        | 2               | 64- <u>QAM</u>  | 3/4                | 117                | 130              | 243              | 270              |
| 15        | 2               | 64- <u>QAM</u>  | 5/6                | 130                | 144.4            | 270              | 300              |
| 16        | 3               | <u>BPSK</u>     | 1/2                | 19.5               | 21.7             | 40.5             | 45               |
| 17        | 3               | <u>QPSK</u>     | 1/2                | 39                 | 43.3             | 81               | 90               |
| 18        | 3               | <u>QPSK</u>     | 3/4                | 58.5               | 65               | 121.5            | 135              |
| 19        | 3               | 16- <u>QAM</u>  | 1/2                | 78                 | 86.7             | 162              | 180              |
| 20        | 3               | 16- <u>QAM</u>  | 3/4                | 117                | 130              | 243              | 270              |
| 21        | 3               | 64- <u>QAM</u>  | 2/3                | 156                | 173.3            | 324              | 360              |
| 22        | 3               | 64- <u>QAM</u>  | 3/4                | 175.5              | 195              | 364.5            | 405              |
| 23        | 3               | 64- <u>QAM</u>  | 5/6                | 195                | 216.7            | 405              | 450              |
| 24        | 4               | <u>BPSK</u>     | 1/2                | 26                 | 28.8             | 54               | 60               |
| 25        | 4               | <u>QPSK</u>     | 1/2                | 52                 | 57.6             | 108              | 120              |
| 26        | 4               | <u>QPSK</u>     | 3/4                | 78                 | 86.8             | 162              | 180              |
| 27        | 4               | 16- <u>QAM</u>  | 1/2                | 104                | 115.6            | 216              | 240              |
| 28        | 4               | 16- <u>QAM</u>  | 3/4                | 156                | 173.2            | 324              | 360              |
| 29        | 4               | 64- <u>QAM</u>  | 2/3                | 208                | 231.2            | 432              | 480              |
| 30        | 4               | 64- <u>QAM</u>  | 3/4                | 234                | 260              | 486              | 540              |
| 31        | 4               | 64- <u>QAM</u>  | 5/6                | 260                | 288.8            | 540              | 600              |

## Capitolo 10 **Appendici**Equation Section (Next)

### Misure in decibel

#### **Rapporti di potenze**

Le misure in decibel si riferiscono a rapporti di grandezze omogenee, ed in quanto tali sono adimensionali. Sono misure logaritmiche, particolarmente adatte a rappresentare grandezze molto diverse fra loro, come spesso accade nei circuiti elettrici. Ad esempio il guadagno di potenza di un doppio bipolo può essere espresso in decibel (dB) in questo modo:

$$G_{p,dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_y}{P_x} \right) \quad (10.1)$$

Viceversa, noto il guadagno in decibel si ha (formula inversa):

$$\frac{P_y}{P_x} = 10^{G_{p,dB}/10} \quad (10.2)$$

Dalle proprietà dei logaritmi discende che il prodotto di due guadagni diventa la somma dei medesimi una volta espressi in decibel.

$$G = G_1 G_2 \quad G_{dB} = G_{1,dB} + G_{2,dB} \quad (10.3)$$

E che la divisione per un guadagno diventa una sottrazione:

$$G = \frac{G_1}{G_2} \quad G_{dB} = G_{1,dB} - G_{2,dB} \quad (10.4)$$

Inoltre, poiché

$$n10 = 10 \log_{10} (10^n) \quad (10.5)$$

Ad ogni ordine di grandezza in più corrisponde un incremento di 10 dB, e viceversa, come evidenziato nella tabella sotto.

| <b>G<sub>dB</sub></b> | <b>G<sub>P</sub></b> |
|-----------------------|----------------------|
| 30                    | 1000                 |
| 20                    | 100                  |
| 10                    | 10                   |
| 0                     | 1                    |
| -10                   | 0.1                  |
| -20                   | 0.01                 |
| -30                   | 0.001                |

Un valore di particolare interesse è quello corrispondente a 2:

$$10 \log_{10} (2) = 3.0103 \approx 3 \quad (10.6)$$

Il valore esatto viene in pratica sempre approssimato a 3, e così per le potenze di due avremo 4=6dB, 8=9dB, e per le potenze negative 1/2=-3dB, 1/4=-6dB ecc.

#### **Rapporti di grandezze legate alla radice quadrata di potenze**

La definizione e le formule riportate sopra si possono applicare in generale a qualsiasi rapporto di grandezze. Tuttavia, in ambito ingegneristico, per la misura di rapporti di grandezze legate alla radice quadrata di potenze, cioè in pratica a rapporti di tensioni, correnti, intensità di campo, viene usata una

definizione leggermente diversa. Considerando quindi ad esempio il guadagno di tensione del doppio bipolo precedente si ha

$$G_{V,dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_y}{V_x} \right) \quad (10.7)$$

Viceversa, noto il guadagno in decibel si ha (formula inversa):

$$\frac{V_y}{V_x} = 10^{G_{V,dB}/20} \quad (10.8)$$

La presenza di due formule crea spesso confusione e può essere all'origine di errori molto rilevanti dal punto di vista numerico. La ragione è legata al desiderio ingegneristico di non dover specificare se il guadagno è in tensione (o corrente) o in potenza. Infatti, ripartendo dal guadagno di potenza, supponendo resistive le impedenze di ingresso e di carico di un doppio bipolo si ha:

$$G_{P,dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_y}{P_x} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{V_y^2 / R_c}{V_x^2 / R_i} \right) \quad (10.9)$$

Nel caso, frequente in pratica, in cui la resistenza di ingresso e quella di uscita coincidano, dalla formula sopra deriva la coincidenza del guadagno di potenza in dB con quello di tensione in dB:

$$G_{P,dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_y}{V_x} \right) \equiv G_{V,dB} \quad (10.10)$$

Ad esempio, sotto l'ipotesi  $R_i=R_c$  si può parlare di un amplificatore con guadagno di 20 dB senza dover specificare se in potenza o in tensione. Ovviamente, non espressi in dB i due guadagni sono diversi (100 in potenza e 10 in tensione). Il prezzo da pagare per questa semplificazione è la presenza di due formule distinte.

| <b>G<sub>dB</sub></b> | <b>G<sub>P</sub></b> | <b>G<sub>V</sub></b> |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| 30                    | 1000                 | 31.62                |
| 20                    | 100                  | 10                   |
| 10                    | 10                   | 3.162                |
| 0                     | 1                    | 1                    |
| -10                   | 0.1                  | 0.3162               |
| -20                   | 0.01                 | 0.1                  |
| -30                   | 0.001                | 0.03162              |

Si noti che per un rapporto di tensioni,

$$20 \log_{10}(2) \approx 6 \quad (10.11)$$

e multipli per le potenze di due. In particolare 3 dB corrispondono a  $\sqrt{2} = 1.414$  e -3dB a  $1/\sqrt{2} \approx 0.707$

### **Potenze e tensioni in dB**

Come detto le misure in decibel sono adimensionali, riferendosi a rapporti di grandezze omogenee. A volte tuttavia è comodo utilizzare i decibel per rappresentare potenze e tensioni, anziché rapporti delle medesime. In questo caso si procede considerando il rapporto fra la grandezza, potenza o tensione, e la sua unità di misura, che ora viene indicata nel pedice. Ad esempio, per una potenza:

$$P_{dBW} = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{1W} \right) \quad (10.12)$$

O anche spesso

$$P_{dBmW} = P_{dBm} = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{1mW} \right) \quad (10.13)$$

Per le misure in dBmW si omette il "W" nel pedice. Si noti che  $P_{dBmW} = 30 + P_{dBW}$ .

Analogamente per una tensione X (per evitare confusione con V, simbolo di un Volt):

$$X_{dBV} = 20 \log_{10} \left( \frac{X}{1V} \right) \quad (10.14)$$

da cui  $X_{dBmV} = 60 + X_{dBV}$ .

## Bibliografia

- [1] M. Luise, G.V. Vitetta, "Teoria dei Segnali", McGraw Hill, 2003.
- [2] L. Calandrino, M.Chiani, "Lezioni di Comunicazioni Elettriche", Patron.
- [3] J.Pierce, "La scienza del suono", Zanichelli, 2000.
- [4] E.Belardinelli, C. Bonivento, "Teoria delle distribuzioni" Patron, 1968
- [5] Gian Carlo Corazza, "Campi Elettromagnetici", Zanichelli, 1994.