

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia C Traccia 2 Nome

del Progetto Controllo di un rotore con deformazione Gruppo Y

Autori: Mosconi Mattia, Paladino Luca, Pellegrino Lorenzo, Zenere Andrea

Il progetto riguarda il controllo di un rotore con deformazione, la cui dinamica viene descritta dalla seguente equazione differenziale

$$(m_i e_i^2 + I_e) \dot{\omega} = -\beta \omega - g m_i e_i \sin(\theta) + \tau \quad (1)$$

in cui la variabile d'ingresso $\tau(t)$ indica la coppia angolare applicata al rotore, il termine $-\beta \omega$ modella l'attrito dell'aria, con $\beta \in \mathbb{R}$. Il termine $-g m_i e_i \sin(\theta)$, dove $g \in \mathbb{R}$ rappresenta l'accelerazione gravitazionale, modella l'effetto di una deformazione di massa $m_i \in \mathbb{R}$ posta ad una distanza $e_i \in \mathbb{R}$ dall'asse di rotazione. Infine, il parametro $I_e \in \mathbb{R}$ rappresenta momento di inerzia del rotore senza deformazione. Infine, si suppone di poter misurare la posizione angolare $\theta(t)$.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Partendo dall'uguaglianza:

$$\theta = \omega$$

L'equazione della dinamica è stata riscritta esplicitando il termine θ :

$$(m_i e_i^2 + I_e) \ddot{\theta} = -\beta \dot{\theta} - g m_i e_i \sin(\theta) + \tau$$

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u) \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo ad individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue:

$$x := \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \quad u := \tau; \quad y := \theta$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h :

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) = y$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i \sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_1 \quad (3b)$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2e} \\ \frac{-\beta x_{2e} - gm_i e_i \sin(x_{1e}) + u_e}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dal quale otteniamo:

$$x_e = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad u_e = \frac{1}{2} gm_i e_i \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni $\delta x, \delta u$ e δy come:

$$\delta x = x - x_e; \quad \delta u = u - u_e; \quad \delta y = y - y_e$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare:

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \quad (6b)$$

Dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate come:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{gm_i e_i}{m_i e_i^2 + I_e} & \frac{-\beta}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$C = [1 \quad 0] \quad (7c)$$

$$D = 0 \quad (7d)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula:

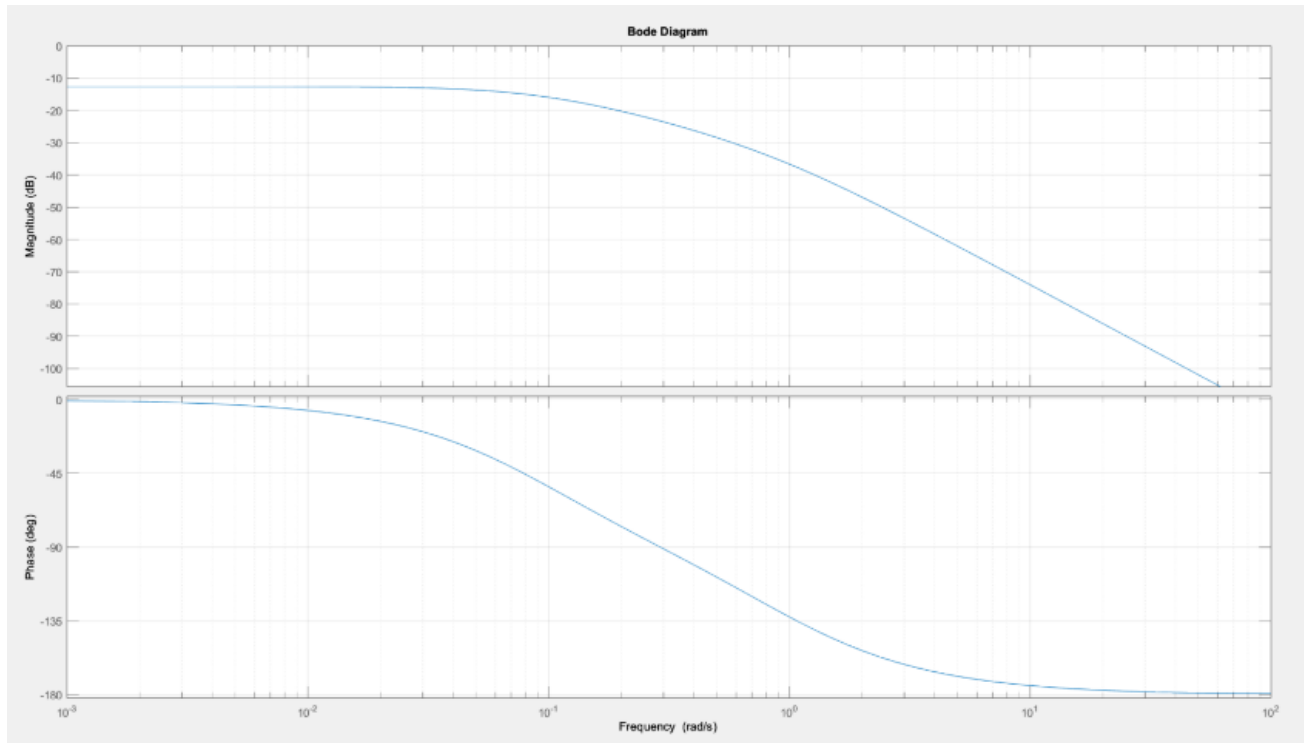
$$G(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{0,01998}{(s + 0,9054)(s + 0,09365)} \quad (8)$$

Dunque, il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con 2 poli:

-) $p_1 = -0,9054$

-) $p_2 = -0,09365$

In figura (9) mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.



3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono:

- 1) Errore a regime $|e_{\infty}| \leq e^* = 0,01$ in risposta ad un gradino $w(t) = \frac{\pi}{6} \cdot 1(t)$ e $d(t) = \frac{\pi}{6} \cdot 1(t)$;
- 2) Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere margine di fase $M_f \geq 45^\circ$;
- 3) Il sistema può accettare una sovralongazione percentuale al massimo del 5%: $S\% \leq 5\%$;
- 4) Il tempo di assestamento al $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato $T_{a,\epsilon}^* = 0,075s$;
- 5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0; 0,1]$, deve essere abbattuto di almeno 50 dB;
- 6) Il disturbo di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[10^3; 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 35 dB.

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto per le specifiche richieste:

Partendo dalle specifiche possiamo ricavare che:

-) $|L(j\omega)|_{dB} \geq 50 \text{ dB}$ per $0 < \omega < 0,1$
-) $|L(j\omega)|_{dB} \leq 35 \text{ dB}$ per $10^3 < \omega < 10^6$
-) Partendo dalle uguaglianze:

$$S\%^* = e^{-\frac{\pi \xi^*}{\sqrt{1-\xi^{*2}}}} \quad e \quad \xi^* = \frac{M_f^*}{100}$$

Otteniamo che $|M_f| \geq 69,01^\circ$.

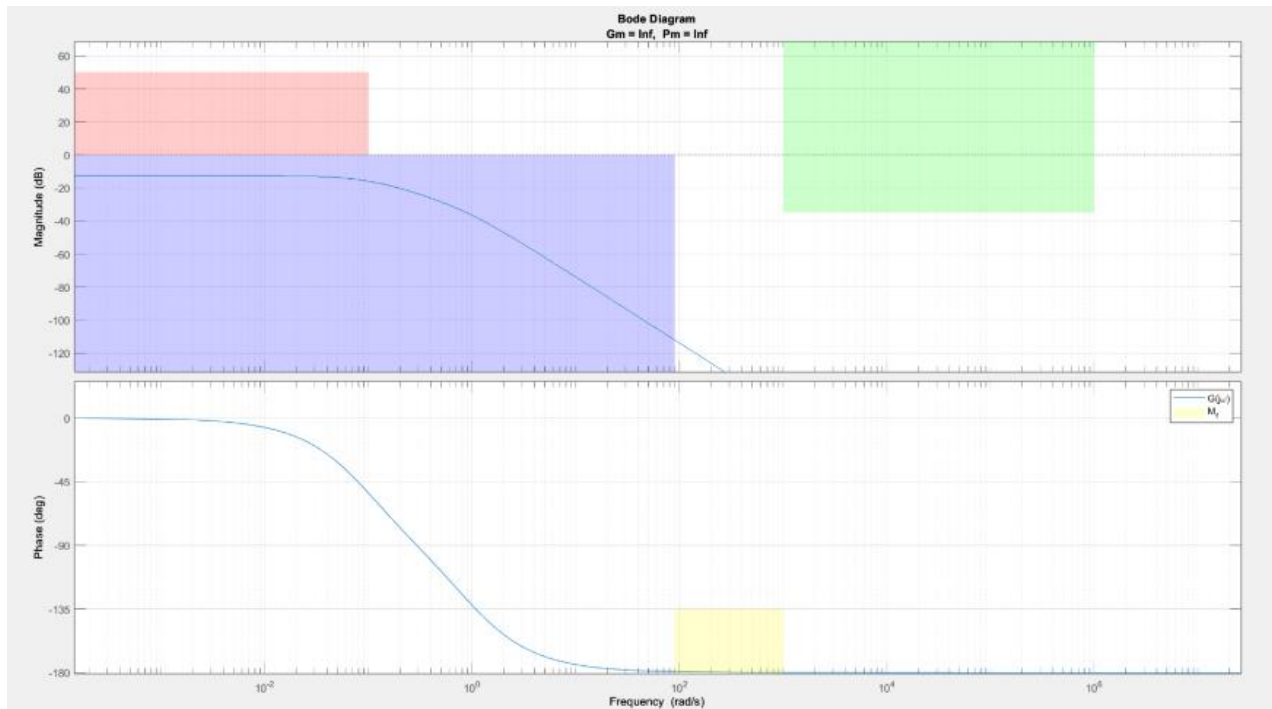
Ma avendo che, secondo le specifiche, $M_f \geq 45^\circ$ otteniamo che $M_f \geq 69,01^\circ$.

-) Partendo dalle uguaglianze:

$$T_{a,5\%}^* \approx \frac{3}{\xi^* \cdot \omega_c} \quad e \quad \xi^* = \frac{M_f^*}{100}$$

Otteniamo che $\omega_c \geq 57,96 \text{ rad/s}$.

Pertanto, in figura (10), mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.



(10)

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

Definiamo:

Il valore della funzione di trasferimento valutata per $\omega = 0$: $G(0) = 0,2357$.

Progettiamo il regolatore statico a partire da $G(0)$, DD , WW , e^* , con DD e WW le ampiezze relative ai gradini dei rispettivi ingressi ed e^* il valore massimo che l'errore a regime può assumere secondo le specifiche:

$$\mu_s \geq \frac{DD + WW}{e^*} = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{0.01} = 104,720$$

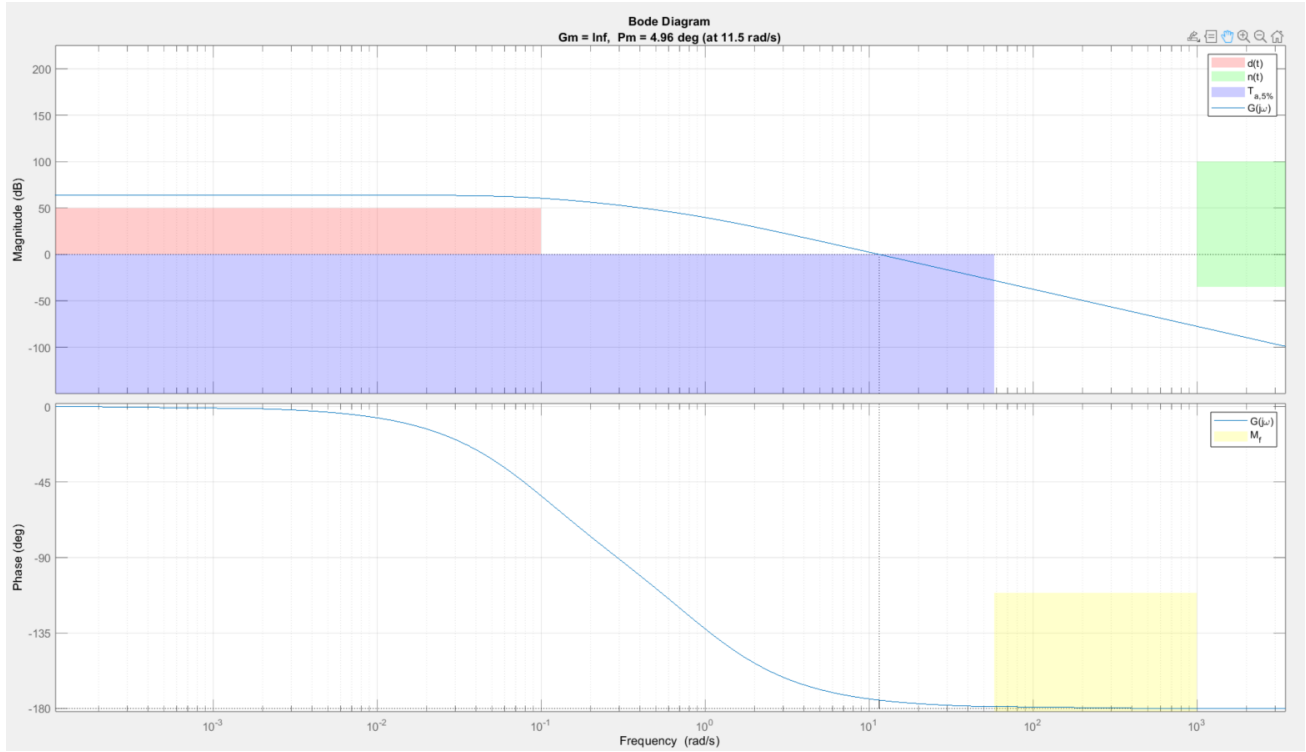
$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{G(0)} = 444,381$$

Nonostante il regolatore statico appena progettato soddisfi il vincolo sull'errore a regime, il vincolo sull'abbattimento del disturbo in uscita non risulta soddisfatto. Sarà, quindi, necessario moltiplicare il regolatore per un ulteriore fattore affinché anche il vincolo sull'abbattimento del disturbo in uscita venga soddisfatto. Per raggiungere tale obiettivo il regolatore statico è stato moltiplicato per un fattore 15:

$$R_s(s) = 15 \cdot 444,381 = 6665,715$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura (11), mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

$$G_e(s) = R_s(s)G(s) = \frac{1331,810}{(s + 0,905)(s + 0,094)}$$



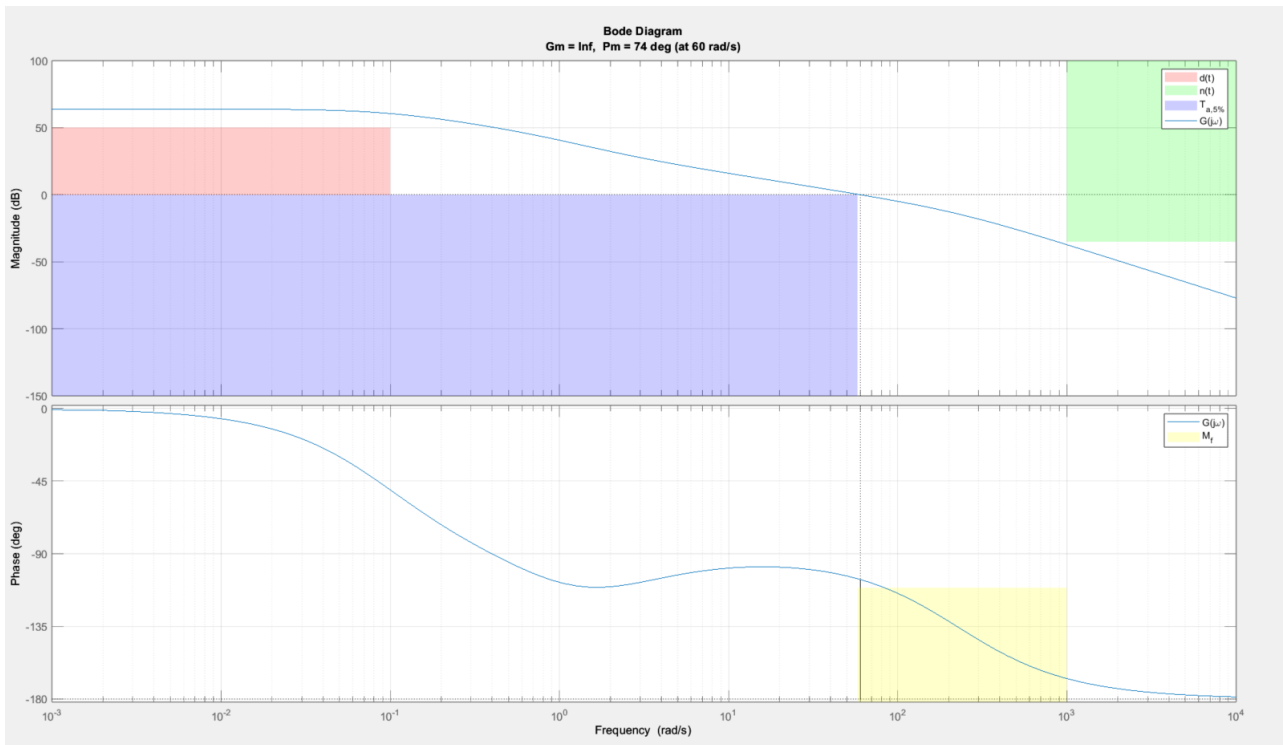
(11)

Da Figura (11), emerge che il regolatore statico progettato non è sufficiente per soddisfare la specifica relativa al tempo di assestamento (patch blu). Anche i vincoli legati alla fase (patch gialla) non risultano soddisfatti.

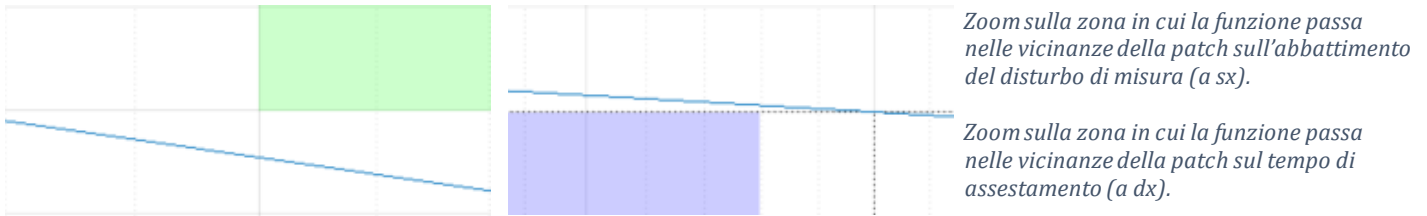
5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo ad una rete anticipatrice per risolvere tale scenario.

In Figura (12), mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$.



(12)



6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con

$$w(t) = 20 \cdot 1(t), d(t) = \sum_{k=1}^4 0,1 \cdot \sin(0,025 \cdot kt), n(t) = \sum_{k=1}^4 0,6 \cdot \sin(10^3 kt).$$

Il primo passo da svolgere è quello di ricavare, attraverso la funzione d'anello, le funzioni di sensitività:

- Funzione di sensitività $F(s)$

$$F(s) = \frac{L}{1 + L}$$

- Funzione di sensitività $S(s)$

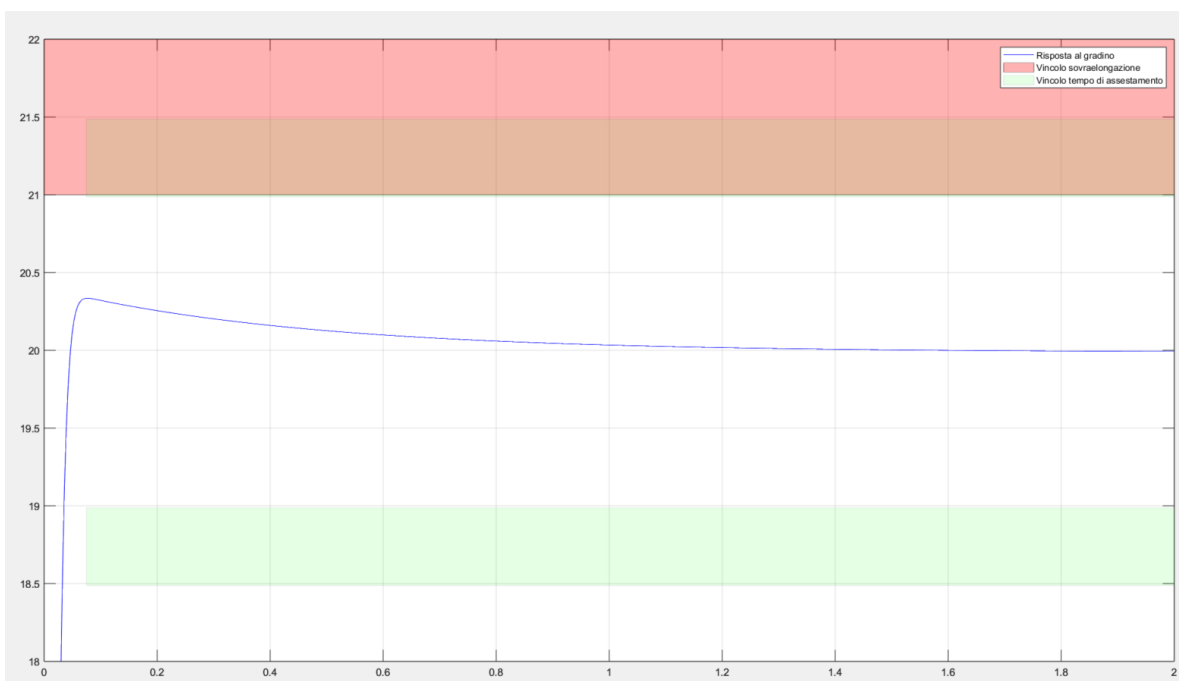
$$S(s) = \frac{1}{1 + L}$$

Andiamo poi a testare il comportamento di tali funzioni prese singolarmente con i rispettivi ingressi. Questo significa che andremo a verificare, tramite gli andamenti delle uscite

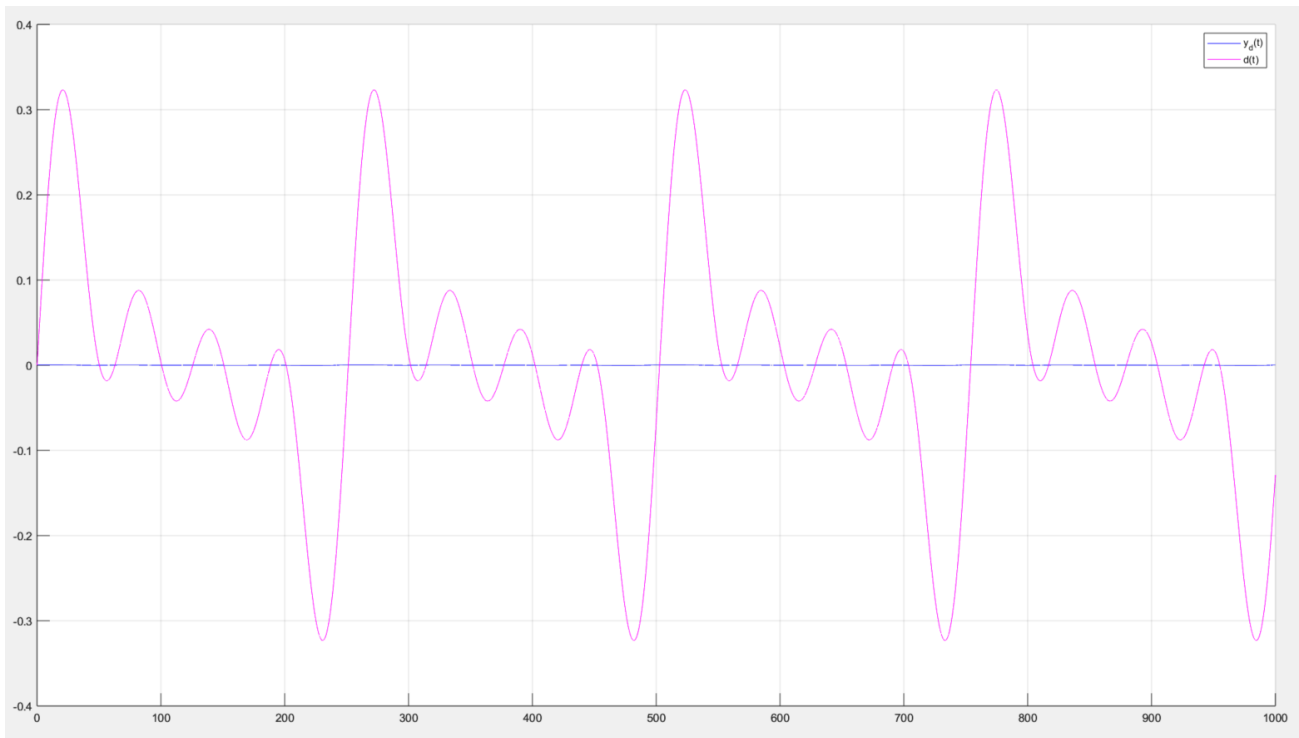
- $Y_W(s) = F(s) \cdot W(s)$
- $Y_D(s) = S(s) \cdot D(s)$
- $Y_N(s) = -F(s) \cdot N(s)$

se tali funzioni di sensitività svolgono in maniera corretta il loro compito. In particolare, vorremmo, sfruttando la separazione frequenziale fra i vari ingressi, che la funzione $F(s)$ attenui ingressi ad alta frequenza ($n(t)$) lasciando inalterati gli ingressi a basse frequenze ($w(t)$) e che la funzione $S(s)$ attenui ingressi a basse frequenze ($d(t)$). Inoltre, l'uscita relativa all'ingresso $w(t)$ dovrà rispettare i vincoli imposti dalle specifiche di sovraelongazione e tempo di assestamento.

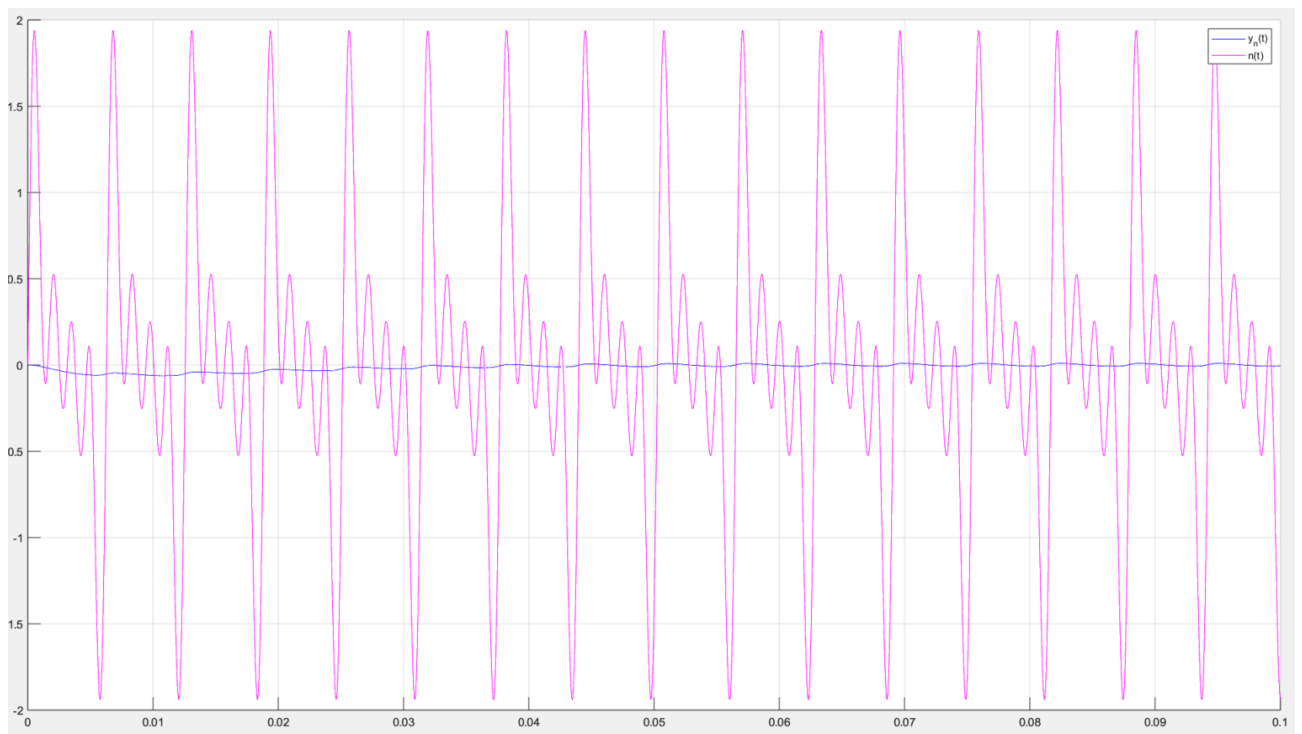
$$Y_W(s)$$



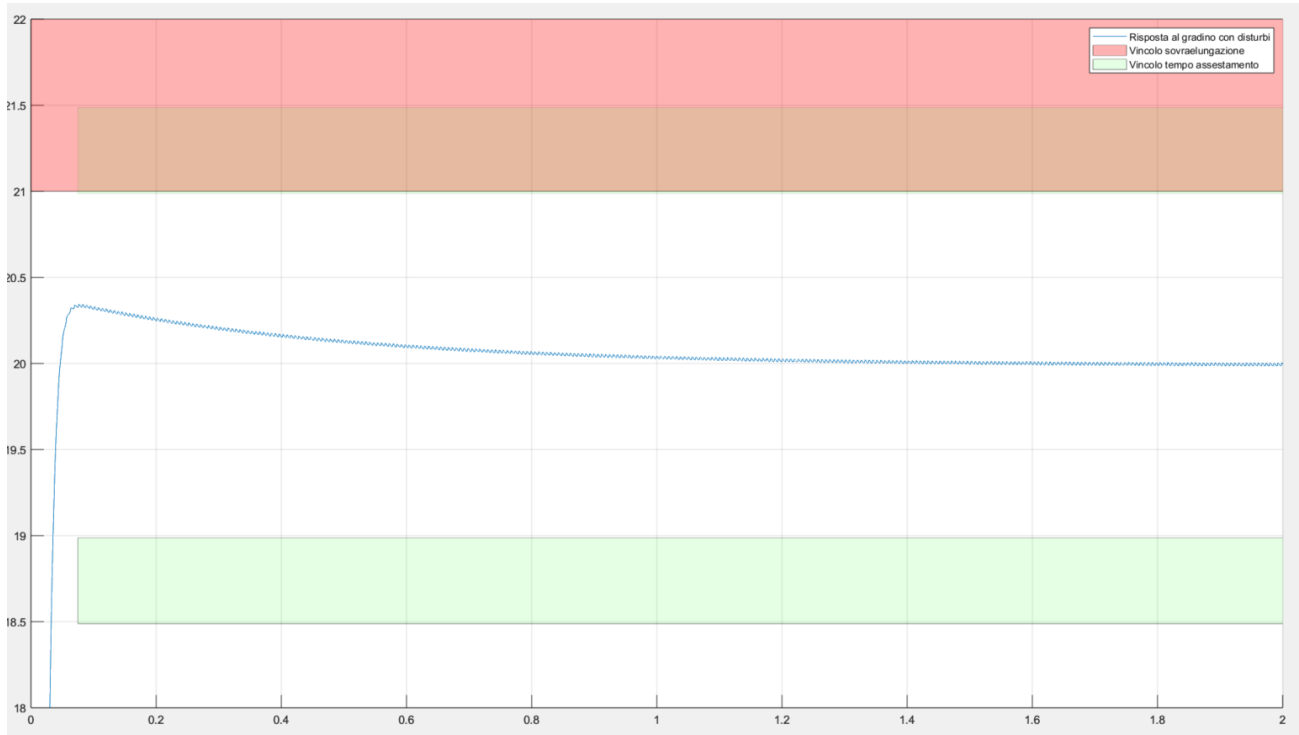
$Y_D(s)$



$Y_N(s)$



$$Y(s) = Y_W(s) + Y_D(s) + Y_N(s)$$



7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con

$$w(t) = 20 \cdot 1(t), d(t) = \sum_{k=1}^4 0,1 \cdot \sin(0,025 \cdot kt), n(t) = \sum_{k=1}^4 0,6 \cdot \sin(10^3 kt).$$

Per lo svolgimento di questo punto è stato utilizzato un tool di Matlab chiamato Simulink.

Questo tool permette la progettazione e la simulazione di sistemi e, in particolare, è risultato utile per simulare il comportamento del sistema non lineare tenendo conto della retroazione di tale sistema.

In figura è mostrato l'andamento dell'uscita $y(t)$ del sistema non lineare avente in ingresso i segnali sopra elencati.



8 Punti opzionali

8.1 Primo punto

Sviluppare (in Matlab) un'interfaccia grafica di animazione in cui si mostri la dinamica del rotore.

L'animazione del sistema è creata prendendo spunto dall'animazione di un sistema visto durante la lezione di laboratorio del 20/10/2022. Questa animazione mostrava l'andamento di un pendolo in evoluzione libera. Moltiplicando per otto il modello fisico del pendolo e spaziando tra loro le varie copie di 45° si riesce ad ottenere uno schema in cui ogni pendolo modella una pala del nostro sistema. Ovviamente la funzione che regolerà l'andamento della nostra animazione non sarà più dettata dalla dinamica del pendolo ma bensì dall'uscita del nostro sistema, calcolata in precedenza, relativa al contributo dei vari ingressi $w(t)$, $d(t)$ e $n(t)$.

8.2 Secondo punto

Supponendo un riferimento $\theta(t) \equiv \theta_e$, esplorare il range di condizioni iniziali dello stato del sistema non lineare (nell'intorno del punto di equilibrio) tali per cui l'uscita del sistema in anello chiuso converga a $h(x_e, u_e)$.

8.3 Terzo punto

Esplorare il range di ampiezza di riferimenti a gradino tali per cui il controllore rimane efficace sul sistema non lineare.

Grazie ad un componente offerto dal tool Simulink che modella uno slider da poter connettere ad una variabile del sistema è stato possibile studiare più facilmente il comportamento del nostro sistema al variare dell'ampiezza del riferimento a gradino in ingresso, connettendo ad esso uno di questi componenti. La strategia adottata è stata quella di mantenere le due condizioni iniziali al loro rispettivo valore di equilibrio facendo variare, mediante l'utilizzo di uno slider, l'ampiezza del riferimento a gradino in ingresso. In particolare, da questo studio è emerso che il controllore rimane efficace sul sistema non lineare per ampiezze del riferimento a gradino in ingresso minori di -11,500 o maggiori di 17,453.

9 Conclusioni

La progettazione del sistema richiesto non è stata semplice ma, tuttavia, ci ha permesso di capire come i concetti di teoria, appresi durante tutto l'arco delle lezioni di Controlli Automatici T, vengono applicati nella progettazione di sistemi reali. Per ottenere i risultati di questo progetto si sono rivelate molto utili anche le nozioni apprese durante le lezioni di laboratorio da cui abbiamo attinto per la risoluzione di alcuni punti focali, come la realizzazione del sistema a partire dalle matrici ottenute mediante linearizzazione intorno alla coppia di equilibrio (x_e, u_e) , ma anche di punti meno complessi, come la realizzazione dell'animazione del rotore che, come detto precedentemente, è stata implementata riutilizzando e riadattando del codice Matlab già scritto per la modellazione di un pendolo.

Una menzione onorevole per il tool Simulink che, nonostante ci abbia portato via un po' di tempo per l'apprendimento del suo utilizzo, si è rivelato un asso nella manica durante la fase di test sul sistema non lineare ed alcuni punti opzionali.