20/09

INTRODUZIONE

22/09 (OPERAZIONI VETTORIALI)

VETTORE

$\vec{v}$: 

modulo, verso, direzione

modulo → $|\vec{v}|$ oppure v

VERSORE

$\hat{u}$: $|\hat{u}| = 1$

ALGEBRA VETTORI

1) SOMMA VETTORI : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
2) MOLT. VETTORE e SCALARE : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{a} = \vec{c}$
3) PRODOTTO SCALARE $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda \in \mathbb{R} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$
4) PRODOTTO VETTORIALE $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$

PROPRIETÀ	1	2	3	4
COMMUTATIVA	X	X	X	
ANTICOMMUTATIVA				X
ASSOCIATIVA	X	X		
DISTRIBUTIVA		X	X	X

(3, 4 distributive: SULLA SOMMA)

LA COMPONENTE

La componente v_u è la proiezione di $\vec{v}$ sulla direzione di $\hat{u}$, ovvero:

$v_u = \vec{v} \cdot \hat{u} = |\vec{v}| \cdot |\hat{u}| \cdot \cos\theta = |\vec{v}| \cos\theta$ → SCALARE

IL COMPONENTE

Il componente $\vec{v_u}$ è il vettore orientato lungo la direzione di $\hat{u}$ e con modulo la componente v_u, ovvero:

$\vec{v_u} = v_u \hat{u} = |\vec{v}| \cos\theta \, \hat{u}$ → VETTORE

MODULO DI SOMMA/DIFFERENZA

$$|\vec{a} \pm \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} \pm \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a} \pm \vec{b})(\vec{a} \pm \vec{b})} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \pm \vec{a}\cdot\vec{b} \pm \vec{b}\cdot\vec{a}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\theta}$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO

Usato per descrivere bene i vettori, é composto da un'ORIGINE e da dei VETTORI DI BASE

SPAZIO UNIDIMENSIONALE

Scelgo 1 asse $\hat{u}$

Ogni vettore puó essere scritto $\vec{a} = \lambda \hat{u}$ con $\lambda = \vec{a} \cdot \hat{u}$

Ogni vettore puó essere scritto come uno scalare moltiplicato per $\hat{u}$

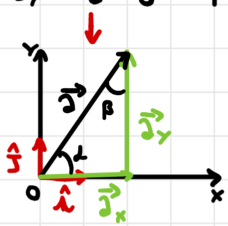
$\vec{a} + \vec{b} = \lambda_a \hat{u} + \lambda_b \hat{u} = (\lambda_a + \lambda_b)\hat{u}$

SPAZIO BIDIMENSIONALE

Scelgo 2 assi $\hat{i}, \hat{j}$: $\hat{i} \wedge \hat{j} = 0$

$a_x = \vec{a} \cdot \hat{i}$ | $\vec{a} = (a_x, a_y)$ | $\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y}$

$a_y = \vec{a} \cdot \hat{j}$



$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha$

$a_y = |\vec{a}| \sin \alpha$

SPAZIO TRIDIMENSIONALE

Scelgo 3 assi $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: $\hat{i} \wedge \hat{j} \wedge \hat{k} = 0$, $\hat{i} \wedge \hat{j} = 0$, $\hat{i} \wedge \hat{k} = 0$, $\hat{j} \wedge \hat{k} = 0$ ORTONORMALI

$a_x = \vec{a} \cdot \hat{i}$

$a_y = \vec{a} \cdot \hat{j}$ | $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ | $\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z}$

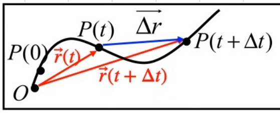
$a_z = \vec{a} \cdot \hat{k}$

Per eseguire le operazioni basta scomporre, calcolare e ricomporre

Il prod. vett si puó anche scrivere $\vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$

24/09

VELOCITÀ VETTORIALE MEDIA e ISTANTANEA



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Velocità vettoriale media $\vec{v}_m(t, t+\Delta t) = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$

Velocità vettoriale Istantanea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

REGOLE DERIVAZIONE

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\pm g(t)\big) = \frac{df}{dt}\pm\frac{dg}{dt} \qquad \frac{d}{dt}\big(f(t)g(t)\big) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt}\pm\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{a}) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{a} + \lambda\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt}\bullet\vec{b} + \vec{a}\bullet\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Dimostrabili tramite la rappresentazione cartesiana dei vettori

ACCELERAZIONE VETTORIALE (MEDIA e ISTANTANEA)

Descrive la variazione di velocità, derivata 1ª della velocità o 2ª della posizione.

Accelerazione vettoriale media $\vec{a}_m(t) = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$

Accelerazione vettoriale Istantanea $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec{a}_m = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$

27/09

PROBLEMA INVERSO

Sia $v_x(t) = at$, trovare $x(t)$ con $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a\, s\, ds = x_0 + a\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = x_0 + a\frac{t^2}{2}$$

RAPPRESENTAZIONE INTRINSECA

Composta da una TRAIETTORIA con una GEOMETRIA, ORIGINE, VERSO e una COORDINATA CURVILINEA.

VERSORI : tangente $\hat{u}_t$
normale $\hat{u}_n$
binormale $\hat{u}_b = \hat{u}_t \wedge \hat{u}_n$

variano direzione durante il moto

VELOCITÀ SCALARE (MEDIA e ISTANTANEA)

Velocità scalare media $$v_m(t, t+\Delta t) = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Velocità scalare istantanea $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

TANGENTE ALLO SPOSTAMENTO

ACCELERAZIONE SCALARE (MEDIA e ISTANTANEA)

Accelerazione scalare media $$a_m(t, t+\Delta t) = \frac{\Delta v(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Accelerazione scalare istantanea $$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

HA UNA COMPONENTE TANGENTE e UNA NORMALE ALLO SPOSTAMENTO

23/09

CLASSIFICAZIONE DEI MOTI

Dati $s = s(t)$ ① $\quad \vec{v} = |\dot{s}|\,\hat{u}_t$ ② $\quad \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{u}_n$ ③

1) MOTI RETTILINEI 1-DIM
   1) uniforme ①, ②
   2) unif. accelerato, oscillatore armonico ①, ②, $\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t$
2) MOTI 2-DIM
   1) rettilinei ①, ②, $\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t$
   2) parabolici, circolari, curvi, 3-DIM ①, ②, ③

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$\dot{s} = \text{cost.}$

$a_t = \text{cost.}$

$\rho \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l} s(t) = s(t_0) + v(t - t_0) \\ \vec{v} = v\,\hat{u}_t \end{array}\right\}$$

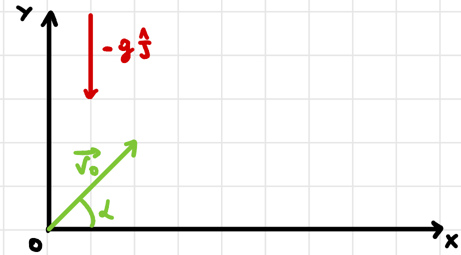
MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t \quad \text{cost.} \\ v(t) = v_0 + a(t - t_0) \\ s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{array}\right\}$$

$$s_B - s_A = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2a}$$

1/10

MOTO DEL PROIETTILE



$$\vec{a} = -g\hat{j}$$
$$\vec{r_0} = (x_0, y_0) = (0,0)$$
$$\vec{v_0} = (v_{0x}, v_{0y})$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t \cancel{a_x}^{\,0}\, ds = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y\, ds = v_{0y} - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} & \text{MRU} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt & \text{MUA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(s)\, ds = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(s)\, ds = y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} *$$

GENERICA COMPONENTE

$$* \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y(x) = \underbrace{\frac{v_{0y}}{v_{0x}}}_{\text{ANGOLO GITTATA} = \tan(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2} \end{cases}$$

PARABOLA

$$\begin{cases} y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2}\frac{x}{v_{0x}^2}\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \underbrace{\frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}_{\text{GITTATA}}$$

Calcoliamo l'angolo della massima gittata

$$\frac{dx_G}{d\alpha} = 2\frac{v_0^2}{g}\cos(2\alpha) = 0 \qquad \cos(2\alpha) = 0 \qquad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

ANGOLO GITTATA MASSIMA

Calcoliamo l'altezza massima

$$P_M = (x_G/2, y(x_G/2)) = \left(\frac{v_{0x} v_{0y}}{g}, \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{\cancel{g}}{2 v_{0x}^2} \cdot \frac{v_{0x}^2 v_{0y}^2}{g^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{v_{0x} v_{0y}}{g}, \underbrace{\frac{v_{0y}^2}{2g}}_{\text{ALTEZZA MASSIMA}}\right)$$

Calcoliamo il tempo di volo

$$x(t) = v_{0x} \cdot t \rightarrow t_v = \frac{x_G}{v_{0x}} = \frac{2 v_{0y}}{g}$$

Calcoliamo la rappresentazione intrinseca in P_M

$\hat{u}_t = ?$ $\hat{u}_n = ?$

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}_M}{|\vec{v}_M|} = \frac{\cancel{v_{0x}} \hat{i}}{\cancel{v_{0x}}} = \hat{i}$$

$$\vec{a}_n = (\vec{a} - \vec{a}_t) = \vec{a} - \vec{a} \cdot \hat{u}_t = \vec{a} + g \hat{j} \cdot \hat{i} = \vec{a}$$

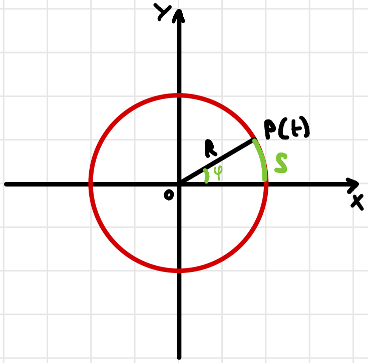
$$\hat{u}_n = \frac{-\cancel{g} \hat{j}}{\cancel{g}} = -\hat{j}$$

$$\rho = \frac{\dot{s}^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{v_M^2}{g} = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

6/10

MOTI CIRCOLARI

Usano coordinate polari e cilindriche



$$\vec{r}(t) = \hat{i} R \cos(\varphi(t)) + \hat{j} R \sin(\varphi(t))$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\hat{i}\dot{\varphi} R \sin(\varphi(t)) + \hat{j}\dot{\varphi} R \cos(\varphi(t))$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{i} R\left[\ddot{\varphi}\sin(\varphi(t)) + \dot{\varphi}^2\cos(\varphi(t))\right] + \hat{j} R\left[\ddot{\varphi}\cos(\varphi(t)) - \dot{\varphi}^2\sin(\varphi(t))\right]$$

RAPPRESENTAZIONE INTRINSECA MOTO CIRCOLARE

$$\begin{cases} s(t) = ? \\ \vec{v} = \dot{s}\,\hat{u}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n \end{cases}$$

$$\dot{s} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2(\varphi(t)) + \dot{\varphi}^2 R^2 \cos^2(\varphi(t))} = \dot{\varphi} R$$

$$s = \int_0^t \dot{\varphi} R \, dt = R \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} dt = R\varphi(t)$$

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{\dot{s}} = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi = \hat{u}_\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{s}\,\hat{u}_t = R\dot{\varphi}\,\hat{u}_\varphi$$

$$\rho = R, \quad s = R\varphi, \quad \dot{s} = R\dot{\varphi}, \quad \dot{s}^2 = R^2\dot{\varphi}^2, \quad \ddot{s} = R\ddot{\varphi}, \quad \hat{u}_t \cdot \hat{u}_\varphi = \hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\sin\varphi$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n = R\ddot{\varphi}\,\hat{u}_t + \frac{R^{\cancel{2}}\dot{\varphi}^2}{\cancel{R}}\hat{u}_n = R\ddot{\varphi}\,\hat{u}_t + R\dot{\varphi}^2\hat{u}_n$$

VARIABILI ANGOLARI

- VELOCITÁ ANGOLARE $[\omega] = \left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R}$$

- ACCELERAZIONE ANGOLARE $[\alpha] = \left[\frac{rad}{s^2}\right]$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\dot{s}$ cost $\rightarrow$ $\vec{\omega}$ cost

$$s(t) = R\varphi$$

8/10

MOTI PERIODICI

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t + nT)$ T periodo, $n \in \mathbb{Z}$

$\vec{r} \cdot \hat{\imath} = R\cos(\omega t)$ con $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequenza $\rightarrow \nu = 1/T = \omega/2\pi$

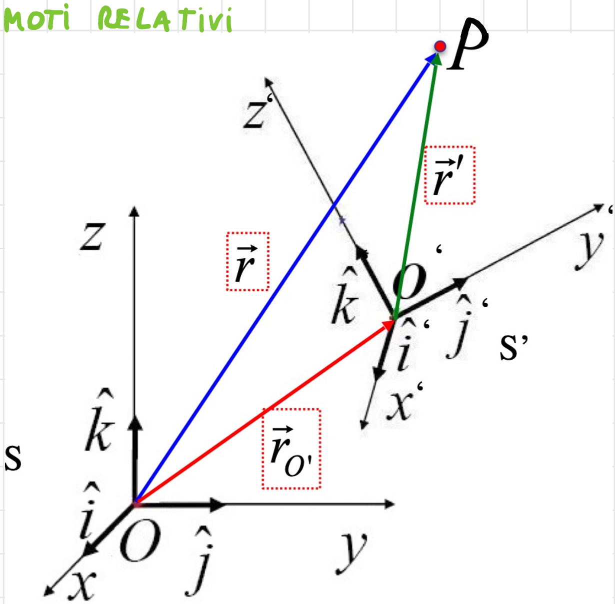
Pulsazione $\rightarrow \omega$

MOTI ARMONICI

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ oppure $x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$

ϕ_0: FASE INIZIALE → ANG DI PARTENZA

MOTI RELATIVI



S : fermo

S' : movimento

$\vec{r}$: movimento risp. ad S

$\vec{r'}$: movimento risp. ad S'

$\vec{r}_{O'}$: movimento risp. ad O'

$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}_{O'}}_{\text{FANNO RIF A } S} + \vec{r'}$

$\vec{r'}$ → FA RIFERIMENTO A S'

TRASFORMAZIONE VELOCITÀ NO RICORDARE

S fermo, S' movimento

S → $\vec{v}$, S' → $\vec{v'}$

cost

variabile

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e $\vec{r'} = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$ e $\vec{r}_{O'} = x_{O'}\hat{i} + y_{O'}\hat{j} + z_{O'}\hat{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \dot{x}_{O'}\hat{i} + \dot{y}_{O'}\hat{j} + \dot{z}_{O'}\hat{k}$$

$$\vec{v'} = \frac{d\vec{r'}}{dt} = \dot{x}'\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dot{y}'\hat{j}' + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \dot{z}'\hat{k}' + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

non sono banali in quanto •

FORMULE DI POISSON NO RICORDARE

Sia SdR. in rotazione con $\vec{\omega}$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i} \;,\quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j} \;,\quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}$$

Torniamo a trasformare le velocità NO RICORDARE

$$\vec{v}' = \dot{x}'\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dot{y}'\hat{j}' + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \dot{z}'\hat{k}' + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} =$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + x'(\vec{\omega} \wedge \hat{i}') + \dot{y}'\hat{j}' + y'(\vec{\omega} \wedge \hat{j}') + \dot{z}'\hat{k}' + z'(\vec{\omega} \wedge \hat{k}) =$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + (\vec{\omega} \wedge x'\hat{i}') + \dot{y}'\hat{j}' + (\vec{\omega} \wedge y'\hat{j}') + \dot{z}'\hat{k}' + (\vec{\omega} \wedge z' \wedge \hat{k}) =$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + \vec{\omega} \wedge (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \rightarrow \vec{v} = \underbrace{\vec{v}_{O'}} + \vec{v}' + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{r}'}$$

VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO $\vec{v}_T = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

Quindi $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$ → VELOCITÀ DI S'

VELOCITÀ CHE OSSERVA CHI È IN S'

VELOCITÀ CHE OSSERVA CHI È IN S

RIASSUNTO TRASFORMAZIONI RICORDARE!

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}\,' + \vec{v}_T \\ \vec{v}_T &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}\,' + \vec{a}_{CO} + \vec{a}_T \\ \vec{a}_{CO} &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \\ \vec{a}_T &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \vec{a}_{O'} \end{aligned}}$$

11/10

STATICA

Studio delle forze nei sistemi in stato di equilibrio. Le forze deformano oggetti e producono moto.

FORZE VERE E FITTIZIE

VERE → create da corpo

FITTIZIE → create da SdR non idoneo

FORZE =

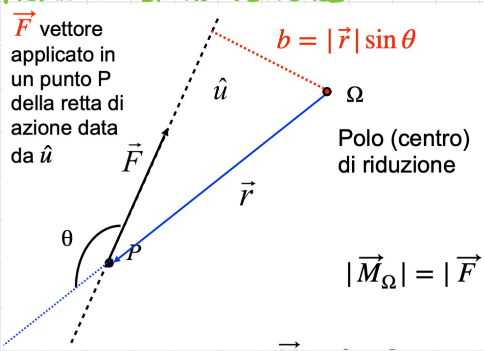
Due forze sono uguali quando sono in grado di produrre le stesse deformazioni in un corpo particolare preso come strumento di confronto.

Si possono misurare con DINAMOMETRO

FORZE COME VETTORI

Col dinamometro possiamo verificare che le forze sono vettori applicati

MOMENTO DI UN VETTORE



Momento del vettore F (rispetto al polo Ω)

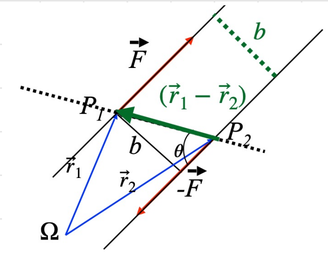
$$\boxed{\vec{M}_\Omega = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

$$|\vec{M}_\Omega| = |\vec{F}||\vec{r}|\sin\theta$$

Braccio della forza

COPPIA VETTORI APPLICATI

Stesso modulo, stessa direzione, verso opposto

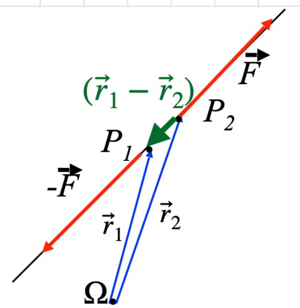


$$\vec{M}_\Omega = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} - \vec{r}_2 \wedge \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}$$

$$|\vec{M}_\Omega| = |\vec{F}|\,|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sin\theta = F b$$

COPPIA A BRACCIO NULLO

Vettori opposti, stessa retta



× PARALLELISMO

$$\vec{M}_\Omega = \vec{F} \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{0}$$

Il momento é sempre nullo in questo caso

QUIETE ed EQUILIBRIO

Quiete: un punto (o un corpo) è in quiete in un dato SdR, se il punto (o ogni punto del corpo) ha una velocità nulla in ogni istante di tempo (è e rimane fermo). Assenza di velocità!

Equilibrio: se un sistema (insieme di punti o di corpi) inizialmente quiete in un dato SdR, pur soggetto a forze rimane in quiete, allora esso si trova in uno stato di equilibrio.

Equilibrio stabile: piccole variazioni nel sistema portano a piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio

Equilibrio instabile: piccole variazioni nel sistema portano a grandi spostamenti (il corpo non torna in posizione iniziale)

STATICA PUNTO MATERIALE

- QUIETE $\Leftrightarrow$ risultante di tutte le forze é nulla
- EQUILIBRIO $\Leftrightarrow$ quiete e risultante di tutti i momenti é nulla

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = 0 \\ \vec{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i} = 0 \end{cases}$$

REAZIONE VINCOLARE $(\vec{R_v})$

Forza uguale e opposta esercitata dal piano sul peso, viene fornita in base al peso.

VINCOLO

É un sistema fisico che fornisce limitazioni al moto

VOLUME $\rightarrow$ sopra tavolo (non sotto)

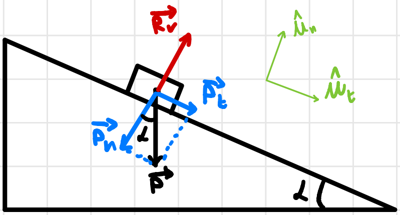
SUPERFICIE $\rightarrow$ sul piano tavolo (non in alto o in basso)

LINEARE $\rightarrow$ su una retta

LISCIO $\rightarrow$ no resistenza

PIANO INCLINATO $\rightarrow$ riduce effetto forza peso

PIANO INCLINATO



$|\vec{P_t}| = P\sin\alpha$, $|\vec{P_n}| = P\cos\alpha$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$P_{//}$ $\qquad\qquad$ $P_{\perp}$

13/10

1° PRINCIPIO DINAMICA

Esiste almeno un SRI rispetto al quale un qualunque pto. materiale non soggetto a forze è fermo o si muove di MRU

SRI

Non ce n'è uno privilegiato

2° PRINCIPIO DINAMICA

Un qualunque pto materiale che sia sottoposto ad una o più forze ha un'accelerazione vettorialmente proporzionale alla risultante di tali forze.

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ → $[F] = [kg \cdot \frac{m}{s^2}] = [N]$

→ non è definizione di F, vale solo in SRI

RAPPRESENTAZIONE INTRINSECA

$\vec{a} = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$

$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = f_t \hat{u}_t + f_n \hat{u}_n$

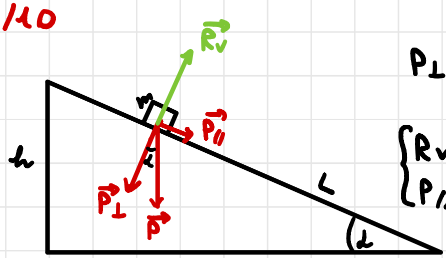
$\vec{F} = m \vec{a} = m(a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n)$ → $f_t = m a_t$ $\quad f_n = m a_n = m \frac{v^2}{R}$

FORZA TANGENZIALE $\quad$ FORZA CENTRIPETA

CLASSIFICAZIONE MOTI

- MOTO RETTILINEO
  $f_t \neq 0$, $f_n = 0$, $R \to +\infty$
- MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO
  $f_t = 0$, $f_n \neq 0$, $R = \frac{mv^2}{f_n}$

15/10



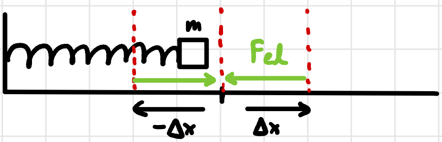
$P_\perp = P\cos\alpha \qquad P_{/\!/} = P\sin\alpha \qquad h = L\sin\alpha$

$$\begin{cases} R_v - P_\perp = 0 \\ P_{/\!/} = ma \end{cases} \qquad \begin{cases} R_v = mg\cos\alpha \\ \cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a \end{cases} \qquad a_{/\!/} = g\sin\alpha$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_0 + at \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cancel{x_0}^{\,0} + \cancel{v_0}^{\,0} t + \frac{g\sin\alpha}{2} t^2 \\ v = \cancel{v_0}^{\,0} + g\sin\alpha\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{g\sin\alpha}{2} t_f^2 \\ v_f = g\sin\alpha\, t_f \end{cases} \qquad t_f = \oplus\sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\alpha} \qquad v_f = \sqrt{2gh}$$

FORZA ELASTICA



moto oscillatorio

F_{el} è forza di richiamo → diretta verso pos di equilibrio

F_{el} deve essere proporzionata a Δx e opposta in verso

$F_{el} = -K\Delta x$ con $[K] = \left[\frac{N}{m}\right] = \left[\frac{Kg}{s^2}\right]$ LEGGE DI HOOKE

↓ COSTANTE ELASTICA

$F_{el} = ma = -Kx$ con $a = \ddot{x}$ → $\ddot{x} = -\frac{K}{m}x$ EQ. DIFF. OMO. 2°

SOL : $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t + \Phi_0)$

PRIMA FORMA:

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ $\qquad -\frac{K}{m}x$

$x'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$ $\qquad \parallel$

$x''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = -\omega^2 x(t)$

$+\omega^2\cancel{x} = +\frac{K}{m}\cancel{x}$ $\qquad \omega = \sqrt{K/m}$ $\qquad [\omega] = [1/s]$

↳ PULSAZIONE

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ PERIODO OSCILLAZIONE $\qquad [A] = [B] = [m]$

es. $\begin{cases} x(0) = \Delta x \\ v(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad x(t)?\quad v(t)?\quad a(t)?$

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$x(0) = \Delta x = A$

$x'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

$x'(0) = v(0) = 0 = B\omega \rightarrow B = 0$ perché $\sqrt{K/m} \neq 0$

$x(t) = \Delta x\cos(\omega t)$

$v(t) = -\Delta x\,\omega\sin(\omega t)$

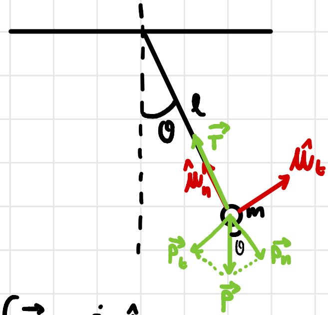
$a(t) = -\Delta x\,\omega^2\cos(\omega t)$

SECONDA FORMA:

× CASA

18/10

PENDOLO SEMPLICE



$$s(t) = \ell\,\theta(t)$$
$$v(t) = \dot{s}(t) = \ell\,\dot{\theta}(t)$$
$$a(t) = \ddot{s}(t) = \ell\,\ddot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\,\hat{u}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\ell}\,\hat{u}_n \\ \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \end{cases} \rightarrow P_n\hat{u}_n + P_t\hat{u}_t + T\hat{u}_n = m\vec{a}$$

$$\downarrow$$

$$(-mg\sin\theta)\,\hat{u}_n + (-mg\cos\theta)\,\hat{u}_t + T\hat{u}_n = m\ddot{s}\,\hat{u}_t + m\frac{\dot{s}^2}{\ell}\,\hat{u}_n$$

$$\Rightarrow \quad -g\sin\theta = \ddot{s} = \ell\,\ddot{\theta}(t) \qquad \ddot{\theta}(t) = -\frac{g\sin\theta}{\ell} \overset{*}{=} -\frac{g}{\ell}\theta(t)$$

* PER TAYLOR, θ deve essere piccolo

SOL: $\theta(t) = A\cos(\omega t + \Phi_0)$

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \Phi_0)$$
$$\ddot{\theta}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \Phi_0)$$

$$\rightarrow -\omega^2\cancel{A\cos(\omega t + \Phi_0)} = -\frac{g}{\ell}\cancel{A\cos(\omega t + \Phi_0)}$$
$$\downarrow$$
$$\omega = \sqrt{g/\ell}$$

ovvero $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}}$

RIVEDERE

$$\Rightarrow\ ?\ -mg\cos\theta + T = \frac{m\dot{s}^2}{\ell} \rightarrow T = mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{m}{\ell}g\ell\,\theta_0^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) =$$

$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ × TAYLOR

$$= mg - \frac{1}{2}mg\,\theta_0^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + mg\,\theta_0^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

* $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$

ATTRITO STATICO

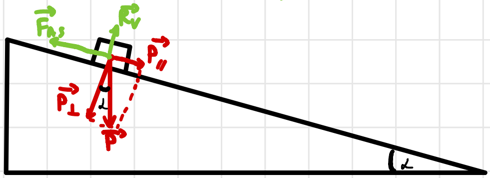
Forza che si oppone a movimento e che è dovuto da ruvidità superficie

$F_{AS} = \mu_s N$ → FORZA CARICO ($\perp$ superficie)

μ_s → COEFFICIENTE ATTRITO STATICO

$\mu_s \in [0,1]$ → estremi solo su superfici ideali

PIANO INCLINATO RUVIDO



ANGOLO CRITICO: α_c ? → angolo dopo cui oggetto scivola

x STATICA:

$$\begin{cases} P_{\parallel} = F_{AS} \\ P_{\perp} = R_v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{mg} \sin\alpha = \mu_s N = \mu_s |\vec{R_v}| = \mu_s \cancel{mg} \cos\alpha \\ mg \cos\alpha = R_v \end{cases} \rightarrow \mu_s = tg(\alpha)$$

se la F_{AS} agisce

ATTRITO DINAMICO

$\vec{F}_{AD} = \mu_D N \hat{u}_t$ con $\mu_D < \mu_s$

20/10

FORZA CENTRIFUGA

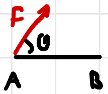
Forza fittizia con modulo e direzione ≡ forza centripeta ma verso opposto

LAVORO

Viene fatto solo da forze non ⊥ allo spostamento $[L] = [J] = [N \cdot m]$

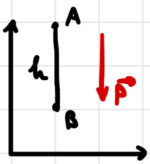
$$L_{A,B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{\ell}$$

$$L = F\ell$$



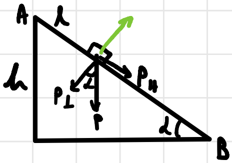
$$L = F\ell \cos\theta$$

LAVORO FORZA PESO



$$L_{AB} = Ph = mgh$$

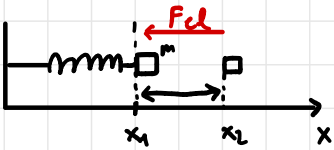
LAVORO PIANO INCLINATO



$$L_{AB} = P_{\parallel}\,\ell = P \sin\alpha\, \ell = mg \sin\alpha\, \ell = mgh$$

$$h = \ell \sin\alpha$$

LAVORO FORZA ELASTICA



$$F_{el} = -Kx$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F_{el}\, dx = -K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{K}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

22/10

POTENZA

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad \Rightarrow \quad L = \int P\, dt$$

$$[P] = [J/s]$$

LAVORO - VELOCITÀ

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l} \qquad \text{ma } d\vec{l} = \vec{v}\,dt \quad \text{e} \quad \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

quindi $L_{AB} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt}\,dt = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_A^B = \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2$

$$\Rightarrow L_{AB} = \frac{m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

ENERGIA CINETICA

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$L_{AB} = K_B - K_A = \Delta K$$

25/10

OPERATORE NABLA

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

GRADIENTE DI f $\quad \vec{\nabla} f = \hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

DIVERGENZA DI CAMPO VETT $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

ROTORE CAMPO VETT. $\quad \vec{\nabla} \times \vec{v}$

CAMPI DI FORZE CONSERVATIVI

Campo in cui la Forza f se viene spostata da A a B compie sempre lo stesso Lavoro L_{AB} indipendentemente dalla traiettoria

PROPRIETÀ FORZE CONSERVATIVE

1) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ LAVORO SU CURVA CHIUSA È NULLO
2) $L_{AB} = U_A - U_B$
3) $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ CAMPO = GRAD. DI FUNZ
4) $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = 0$ CAMPO È IRROTAZIONALE → non forma vortici in ogni pto. spazio

DIFFERENZIALE ESATTO

$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, se F cons. $\rightarrow \delta L = -dU = -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{l}$

TEOREMA DI STOKES

$$\int (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

OSSERVAZIONE

Se f cons $\rightarrow L_{AB} = U(A) - U(B)$

e $\forall \vec{F}$ $\exists$ teorema forze vive $L_{AB} = T(B) - T(A)$

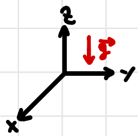
quindi $T(B) - T(A) = U(A) - U(B) \rightarrow \underbrace{U(A) + T(A)}_{E(A)} = \underbrace{U(B) + T(B)}_{E(B)}$

L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA $E(A) = E(B)$

27/10

FORZA PESO

$\vec{P} = -mg\hat{k}$

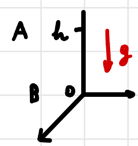


è conservativa?

$\vec{\nabla} \wedge \vec{P} = \ldots = 0$ si $\rightarrow \exists\, U(x,y,z)$

$$U(x,y,z) - U(0,0,0) = -\int_{0,0,0}^{x,y,z} \vec{P} \cdot d\vec{l} = -\int_0^z (-mg\hat{k}) \cdot \hat{k}\, dz = mg \int_0^z dz = mg\, z$$

$U(x,y,z) = mg\, z + U(0,0,0)$ $\rightarrow$ DI SOLITO $= 0$

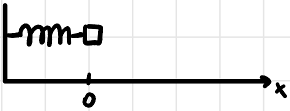


si conserva energia meccanica $\rightarrow E = T + U$

$E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 + \cancel{m} g h_A = \frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2 + \cancel{m} g h_B$ (con $v_A \rightarrow 0$, $h_B \rightarrow 0$)

$$g h = \frac{v_B^2}{2} \rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

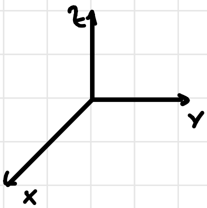
FORZA ELASTICA



$$F_{el} = -Kx \cdot \hat{i}$$

è conservativa

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_{el} = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -Kx & 0 & 0 & -Kx & 0 \end{array}\right] = \dots = 0$$ si



$$\vec{F}_{el} = -K\vec{r} = -K(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_{el} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -Kx & -Ky & -Kz \end{bmatrix} = \dots = 0$$ è nullo anche in generale

$\downarrow$

$\exists\, U(x,y,z)$

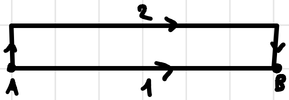
per semplicità 1-DIM

$$U_{el}(x) - U_{el}(0) = \int_0^x -Kx\,dx = K\frac{x^2}{2} \rightarrow U_{el}(x) = \frac{K}{2}x^2 + U(0)$$

In 3-DIM $\quad U_{el}(x,y,z) = \frac{K}{2}r^2 + U(0,0,0)$

$x \rightarrow \vec{r}$

FORZA ATTRITO DINAMICO



$$\vec{F}_{Att} = -\mu_D R_v \hat{u}_t$$

$$L_1 = \int_A^B \vec{F}_{Att} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\mu_D R_v \overbrace{\hat{u}_t \cdot d\vec{l}}^{dl} = -\mu_D R_v \int_A^B dl = -\mu_D R_v \overset{\overline{AB_1}}{l_1}$$

$$L_2 = \int_A^B \vec{F}_{Att} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\mu_D R_v \hat{u}_t \cdot d\vec{l} = -\mu_D R_v \int_A^B dl = -\mu_D R_v \overset{\overline{AB_2}}{l_2}$$

$L_1 \neq L_2 \rightarrow$ non é conservativa

FORZE CONS. E NON CONS.

$$\vec{F}_T = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

$$\underset{T_B - T_A}{L_{AB}} = \int_A^B \vec{F}_T \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{l} = \underset{U_B - U_A}{L_c} + \overset{0}{L_{nc}}$$

$$T_B - T_A = U_B - U_A + L_{nc} \rightarrow L_{nc} = \overset{E_B}{(T_B - T_A)} - \overset{E_A}{(U_B - U_A)} = E_B - E_A \quad \underset{\text{DISSIPAZIONE}}{(E_B < E_A)}$$

$$L_{nc} = \Delta E$$

3/11

QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{q} = m\vec{v}$ $\qquad [q] = [kg \cdot \frac{m}{s}]$

$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ se massa è costante

MOMENTO ANGOLARE

$\vec{P_O} = \vec{r} \wedge \vec{q} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$ rispetto a punto O

$\vec{P_\Omega} = (\vec{r} - \vec{r_\Omega}) \wedge \vec{q}$ rispetto a punto Ω

e $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

quindi $\vec{P_O} = m(\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) = m(\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\cancel{\vec{r} \cdot \vec{\omega}})) = m\vec{\omega} r^2 = m\omega r^2 \hat{k}$

perpendicolari $\to 0$

$\vec{P_O}$ è:
1) $\perp$ al piano di $\vec{r}$ e $\vec{v}$
2) $\neq 0 \iff$ c'è rotazione
3) $\propto$ da ω
4) costante in MCU

$\frac{d\vec{P_O}}{dt} = \cancel{\vec{v} \wedge \vec{q}} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M_O} \rightarrow \frac{d\vec{P_O}}{dt} = \vec{M_O}$

COLLINEARI $\to 0$

FORZE INTERNE ED ESTERNE

$$\vec{F} = \vec{F}_{INT} + \vec{F}_{EST} \quad \Big| \quad \vec{M} = \vec{M}_{INT} + \vec{M}_{EST}$$

Un sistema si dice isolato se $\vec{F}_{EST} = 0$ e $\vec{M}_{EST} = 0$

$\rightarrow \dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{INT}$ e $\dfrac{d\vec{P_0}}{dt} = \vec{M}_{INT}$

$Q \rightarrow$ somma di tutte le q

$P_0 \rightarrow$ somma di tutti i mom. angolari

3° PRINCIPIO TERMODINAMICA

In un SRI, $\vec{Q}$ e $\vec{P_0}$ si conservano in sistemi isolati

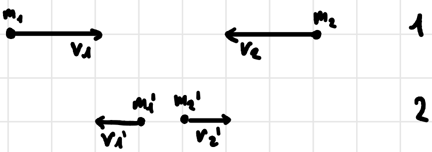
IMPULSO

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{q} = \vec{q}(t_2) - \vec{q}(t_1) = \Delta\vec{q}$$

URTO

Interazione tra due corpi con velocità $\neq$

URTI COLLINEARI



$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1'\vec{v_1}' + m_2'\vec{v_2}'$$

URTI ELASTICI

$$\begin{cases} Q_i = Q_f \\ T_i = T_f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1'\vec{v_1}' + m_2'\vec{v_2}' \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2'^2}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_2' &= \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{SOLUZIONE SISTEMA}$$

CASI PARTICOLARI

- $m_1 = m_2 \rightarrow v_{1f} = v_{2i} \,,\; v_{2f} = v_{1i}$

- $m_1 >> m_2 \rightarrow v_{1f} = v_{1i} \,,\; v_{2f} = 2v_{1i} - v_{2i}$

8/11

SISTEMA DI N PTI MATERIALI

m → massa del pto. i-esimo

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{EST} \quad ; \quad \frac{d\vec{P}_O}{dt} = \vec{M}_O^{EST}$$ EQUAZIONI CARDINALI

↓

$$\frac{d\vec{Q}_x}{dt} = \vec{F}_x^{EST} \; ; \; \frac{d\vec{Q}_y}{dt} = \vec{F}_y^{EST} \; ; \; \frac{d\vec{Q}_z}{dt} = \vec{F}_z^{EST}$$

$$\frac{d\vec{P}_{Ox}}{dt} = \vec{M}_{Ox}^{EST} \quad \frac{d\vec{P}_{Oy}}{dt} = \vec{M}_{Oy}^{EST} \quad \frac{d\vec{P}_{Oz}}{dt} = \vec{M}_{Oz}^{EST}$$

EQUAZIONI SCALARI CORRISPONDENTI

Voglio determinare $\vec{r}_i(t)$ ∀ punto i-esimo

N=1

3 incognite → 3 eq. → $\vec{F} = m\vec{a}$ basta

N=2

6 incognite → 6 eq → bastano eq. cardinali

N≥3

incognite ≥ 3N → servono dei vincoli rigidi per semplificare il sistema

∀ vincolo si introduce una nuova equazione : 3N incognite − N vincoli = 6 incognite

CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$ con $x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$, $y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$, $z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$

VELOCITÀ DEL CM

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$$

ACCELERAZIONE DEL CM

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{\vec{F}^{EST}}{M}$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DI CM

centro in CM : $O' = CM$, $\vec{\omega} = 0$

allora $\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{r}_{CM}$, $\vec{v}_i = \vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM}$

MOMENTO ANGOLARE CM

DIM a p.10

$$\vec{P}_o = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{P}_{CM}\,' + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

↳ momento angolare del CM rispetto al suo SR

TEOREMA MOMENTO ANGOLARE (polo → CM)

$$\vec{P}_o = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

DIM a p.12

$$\frac{d\vec{P}_o}{dt} = -\vec{v}_{o'} \wedge \vec{Q} + \vec{M}_{o'}$$

10/11

SISTEMI CONTINUI

DENSITÀ VOLUM. MEDIA DI MASSA : $\rho = \frac{M}{V}$

DENSITÀ VOLUM. PUNTUALE : $\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{d\tau}$

$$\left.\begin{matrix} \rho = \frac{M}{V} \\ \rho(\vec{r}) = \frac{dm}{d\tau} \end{matrix}\right\} M = \int dm = \int_V \rho(\vec{r})\, d\tau$$

CUBO NON OMOGENEO CON $\rho(x,y,z)$

$\rho(x,y,z) = A x y^2$

$$x_{cm} = \frac{\int x \rho \, dx}{\int \rho \, d\rho = M}$$

$$M = \int \rho \, d\rho = \int_0^L \int_0^L \int_0^L A x y^2 \, dx\, dy\, dz = A \int_0^L \int_0^L y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = A \frac{L^2}{2} \int_0^L \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L =$$

$$= \frac{A}{6} L^5 \int_0^L dz = A \frac{L^6}{6}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \int_0^L \int_0^L x\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \frac{6}{\cancel{A}L^6} \cdot \cancel{A} \int_0^L \int_0^L \int_0^L x^2 y^2 =$$

$$= \frac{6}{L^6} \cdot L \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L = \frac{\cancel{6}^{2}}{L^5} \cdot \frac{L^3}{\cancel{3}} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3} L$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \int_0^L \int_0^L y\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \frac{6}{\cancel{A}L^6} \cdot \cancel{A} \cdot \int_0^L \int_0^L \int_0^L x y^3 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{6}{L^6} \cdot L \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L \cdot \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^L = \frac{\cancel{6}^{3}}{L^5} \cdot \frac{L^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{L^4}{4} = \frac{3}{4} L$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \int_0^L \int_0^L z\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \frac{6}{\cancel{A}L^6} \cdot \cancel{A} \cdot \int_0^L \int_0^L \int_0^L z x y^2 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{6}{L^6} \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^L \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L = \frac{\cancel{6}}{L^6} \cdot \frac{L^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \frac{L^3}{\cancel{3}} = \frac{L}{2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \left(\tfrac{2}{3}L,\ \tfrac{3}{4}L,\ \tfrac{L}{2}\right)$$

SISTEMI LINEARI

DENSITÀ LINEARE MEDIA: $\bar{\lambda} = M/L$

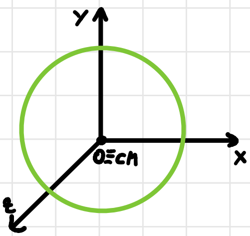
DENSITÀ LINEARE PUNTUALE: $\lambda(x) = \dfrac{dm}{dL} = \dfrac{dm}{dx}$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{EST} = M\vec{a}_{cm} \rightarrow \text{MOTO TRASLATORIO}$$

$$\frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = \vec{M}_{cm}^{EST} = x\ \vec{y} \rightarrow \text{MOTO ROTATORIO} \quad \begin{pmatrix} x = ? \\ \vec{y} = ? \end{pmatrix}$$

Consideriamo corpo rigido con CM fermo in un S.D.R.I.



$$\vec{v}_{CM} = 0 \rightarrow \vec{Q} = 0$$
$$\vec{r}_{CM} = 0$$
$$\vec{F}^{EST} = M\vec{a}_{CM} = 0$$

Rotazioni:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} \quad e \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$$

$$\vec{P}_{CM} = \sum \vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i = \int \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm$$

$$\parallel$$

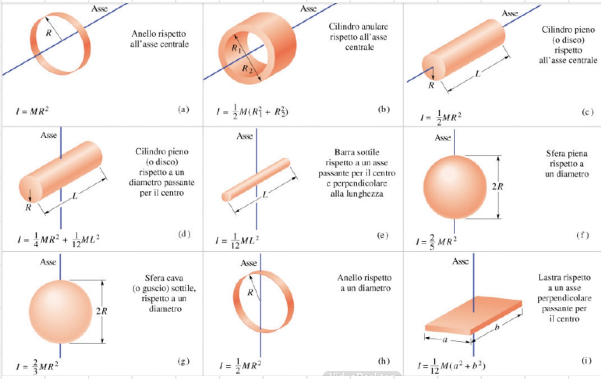
$$\sum m_i(\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) = \sum m_i(\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum m_i r_i^2$$

12/11

MOMENTO D'INERZIA

$$I = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 & \text{discreti} \\ \int \rho^2 \, dm & \text{continui} \end{cases}$$

In generale $\vec{P} = I\vec{\omega}$



ENERGIA IN UN SISTEMA DI PUNTI

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad\qquad U = \sum_{i=1}^{N} U_n$$

$$E = T + U$$

Consideriamo il CM: $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') = \sum \frac{1}{2} m_i (v_{cm}^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') =$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + m_i \vec{v}_{cm} \vec{v}_i' = \underbrace{\frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i}_{\downarrow} + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm}$$

↳ $a' = 0$

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + T'$$

$$\Rightarrow \quad T = T' + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

ma $\vec{v}_i' = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \quad \rightarrow \quad T' = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I$

$$= \quad T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

15/11

LEGGI KEPLERO

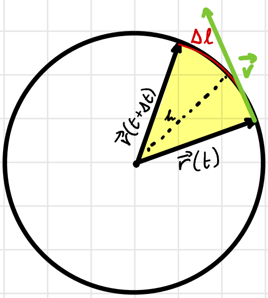
1) Pianeti descrivono orbite ellittiche e il sole è uno dei fuochi

moto accelerato

2) Velocità areolare è costante → il sistema planetario è isolato ($\vec{Q}$, $\vec{P}$ si cons.)

3) $cost = \frac{a^3}{T^3}$ → a^3 cubo del semiasse maggiore, T^3 → periodo dell'orbita dei pianeti

VELOCITÀ AREOLARE



$\vec{r}(t)$: posizione del pianeta (iniziale)

$\vec{v}$: velocità rotazione

$\vec{r}(t+\Delta t)$: posizione del pianeta (dopo Δt)

$S(t)$: area spaziata dal raggio

$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ velocità areolare

Per intervalli molto piccoli di Δt posso approssimare l'arco alla corda

$S = \frac{h \Delta l}{2}$ e $h \to r$ quindi $A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{rv}{2}$

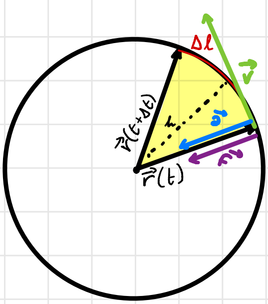
$\vec{A} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v}}{2}$ è $\perp$ a $\vec{r}$ e $\vec{v}$

x 2° Keplero : $\vec{A}$ costante → $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ ma $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{a}}{2}$ → $\vec{r} \wedge \vec{a} = 0$

↓

$\vec{a} // \vec{r}$ ← $\vec{r} \neq 0$, $\vec{a} \neq 0$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = 0 + \vec{a}_n = \vec{a}_n$



x 3° KEPLERO : $\frac{a^3}{T^2} = \text{cost} \rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \text{cost} \rightarrow T^2 = \frac{r^3}{\text{cost}} = K r^3$

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{r}\hat{\mu}_n = -\frac{v^2}{r}\hat{\mu}_r \rightarrow \vec{F} = -\frac{m v^2}{r}\mu_r$$

$$\text{ma} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \vec{F} = -\frac{m}{r}\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\hat{\mu}_r = -\frac{m}{\cancel{r}}\frac{4\pi^2 \cancel{r^2}}{K r^{\cancel{3}\,2}}\hat{\mu}_r = \overbrace{-\frac{4\pi^2}{K}}^{G_N \cdot M} \cdot \frac{m}{r^2}\hat{\mu}_r$$

$G_N = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{Kg^2}$ cost. di gravitazione universale

M : massa della stella
m : massa pianeta
r : dist M – m

$$\boxed{\vec{F}_G = -G_N \frac{mM}{r^2}\hat{\mu}_r}$$ LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

LA FORZA E' SEMPRE ATTRATTIVA

x 3° KEPLERO: $\vec{F}_G$ e' interna al sistema $\rightarrow \sum \vec{F}^{INT} = 0 \rightarrow \vec{F}_G^m + \vec{F}_G^M = 0$

F_{mM} : m attrae M
F_{Mm} : M attrae m

CAMPO GRAVITAZIONALE

Una massa M genera un campo gravitazionale $\vec{G}_M = -\frac{G_N M}{r^2}\hat{\mu}_r$

A cui viene associata per ogni m una forza $\vec{F}_M = m\vec{G}_M = -G_N\frac{mM}{r^2}\hat{\mu}_r$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

LA FORZA GRAVITAZIONALE É CONSERVATIVA?

$\oint_\Gamma \vec{F}_G \cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma -G_N\frac{M_m}{r^2}\underbrace{\hat{\mu}_r \cdot \hat{\mu}_t}_{0}\,dl = 0$ → sí, anche il campo

PROPRIETÁ:

1) $\oint \vec{F}_G \cdot d\vec{l} = 0$

2) $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_G = 0$

3) $\exists\, U_G : \vec{F}_G = -\vec{\nabla}U_G$, $L_{AB} = U_G(A) - U_G(B)$

$$U_G(\vec{r}) = -\int_r^{r_0}\vec{F}_G \cdot d\vec{l} = -\int_r^{r_0} -G_N\frac{Mm\cancel{\hat{\mu}_r\cdot\hat{\mu}_r}^{1}}{r^2}\,dr = G_N Mm\left[\frac{1}{r}\right]_r^{r_0} =$$

COST ADDITIVA

$$= \frac{G_N Mm}{r_0} - \frac{G_N Mm}{r} \rightarrow U_G(r) = -\frac{G_N Mm}{r}$$

Se calcoliamo l'energia potenziale a un'altezza $h \ll R_T$ allora $U = mgh$ é un'ottima approssimazione

17/11

$q_p = -q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$

LEGGE DI COULOMB

$$\vec{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{\mu}_r$$

$\varepsilon_0 \rightarrow 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow 8{,}99 \cdot 10^9$

CAMPO ELETTROSTATICA

$$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

DENSITÁ VOLUMETRICA: $\rho = \frac{dq}{dV}$

DENSITÁ SUPERFICIALE: $\sigma = \frac{dq}{ds}$

DENSITÁ LINEARE: $\lambda = \frac{dq}{dx}$

CAMPO ELETTRICO VS ELETTROSTATICO

ELETTROSTATICO → carica ferma → CONSERVATIVO

ELETTRICO → carica movimento → NON CONSERVATIVO

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \rightarrow V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

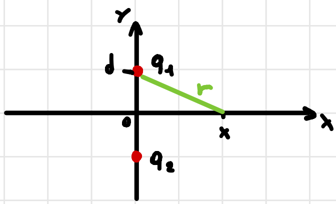
$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V(0,0,0)$$

19/11

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEL POTENZIALE

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum \int -\vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum V_i(\vec{r})$$

ES. p. 43



$\vec{E}(x) = \vec{E}(x,0,0)$

$\vec{E}(x) = \vec{E}_1(x) + \vec{E}_2(x)$

$\cos\alpha = d/r$

$\sin\alpha = x/r$

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r \quad \text{con} \quad r = \sqrt{d^2+x^2} \quad e \quad \vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = \vec{x} + \vec{d}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + d\hat{j}}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

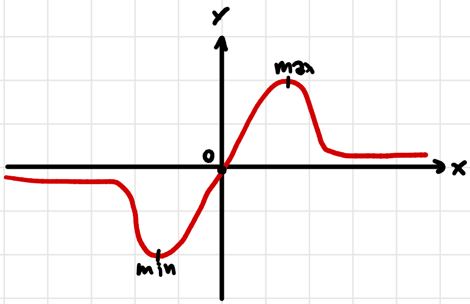
?

$$\vec{E}_1(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2+x^2} \cdot \frac{x\hat{i} + d\hat{j}}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\vec{E}_2(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2+x^2} \cdot \frac{x\hat{i} - d\hat{j}}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

?

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_1(x) + \vec{E}_2(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(d^2+x^2)^{3/2}} \cdot (\vec{x}\hat{i} + \vec{x}\hat{i} + \cancel{d\hat{j}} - \cancel{d\hat{j}}) = \frac{\cancel{2}qx}{\cancel{4}_{2}\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{i}}{(d^2+x^2)^{3/2}}$$



$E(x \to +\infty) = 0^+$

$E(x \to -\infty) = 0^-$

$E(0) = 0$

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

$$V_1(x) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 (d^2+x^2)} = V_2(x) \Rightarrow V(x) = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 (d^2+x^2)}$$

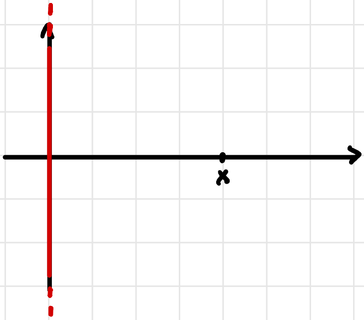
$$d\vec{l} = \hat{i}\, dx$$

$$V(x) = -\int \vec{E} \cdot \hat{i}\, dx = -\int \frac{q x}{2\pi \varepsilon_0 (d^2+x^2)^{3/2}} dx \quad \ldots$$

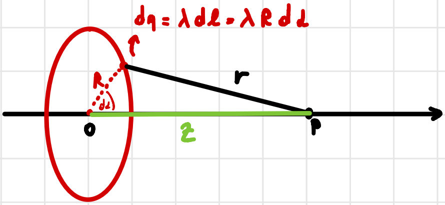
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}} = \frac{-\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{2\pi \varepsilon_0 (x^2+d^2)^{3/2}}\right) \ldots$$

22/11

Es. p. 44



es. p. 45



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi \varepsilon\, r^2}\,\hat{u}_r$$

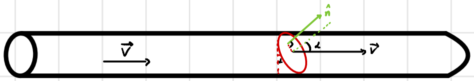
$E_x = 0$, $E_y = 0$

LAVORO FORZA ELETTROSTATICA

$$L_{el} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot dl = q\,(V_A - V_B) = q\,\Delta V_{AB}$$

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Sia $\vec{v}$ campo vettoriale

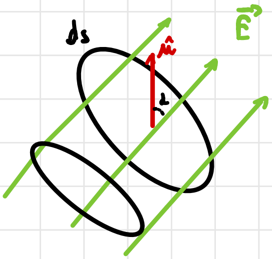


$$d\vec{s} = \hat{n}\, ds$$

$$d\Phi = \vec{v} \cdot \hat{n} \cdot ds = \vec{v} \cdot d\vec{s} = v\, ds \cos\alpha$$

24/11

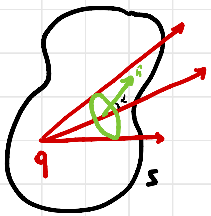
FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO



CAMPO CARICA PUNTIFORME

S → superficie chiusa

1) CARICA DENTRO S

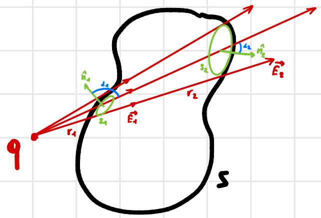


$$d\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot ds = E\,ds\cos\alpha = E\,d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot d\Omega$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \iint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iint_{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cdot\cancel{4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Phi_s(\vec{E}) = \oiint_{S\text{ chiusa}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2) CARICA FUORI DA S



CAMPO ENTRANTE

$$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \, dS_1 = E_1 \, dS_1 \cos(\alpha_1) = -E_1 \, d\Sigma_1$$

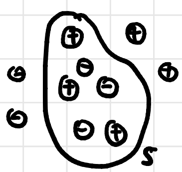
$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \, dS_2 = E_2 \, dS_2 \cos(\alpha_2) = +E_2 \, d\Sigma_2$$

CAMPO USCENTE

$$\frac{d\Sigma_1}{dr_1^2} = \frac{d\Sigma_2}{dr_2^2} = d\Omega \rightarrow d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \; ; \; d\Phi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \iint d\Phi = 0$$

SISTEMA DI N CARICHE



x PRINC. SOVRAPPOSIZIONE:
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dS = \oiint_S \left(\sum \vec{E}_i\right) \cdot \hat{n} \cdot dS = \sum_i \oiint \vec{E}_i \, \hat{n} \, dS = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{Q_S}{\varepsilon_0} = \Phi_S(\vec{E})$$ TEOREMA DI GAUSS

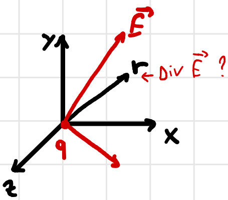
TEOREMA DIVERGENZA

$$\underset{S_{chiusa}}{\oiint} \vec{F} \cdot \hat{n} \cdot ds = \iiint_{r_s} \operatorname{div} \vec{F} \, dr \quad \text{con} \quad \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

COLLEGAMENTO GAUSS - DIVERGENZA

$$\iiint_{r_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dr = \oiint_{S} \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_{r_s} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dr \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

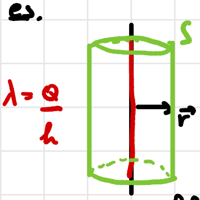
es.



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mu}_r = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = E(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

es.



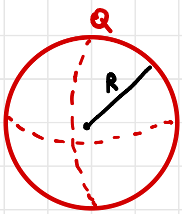
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \, \hat{\mu}_r$$

x GAUSS:
$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} = \iint_{\substack{SUP\\LAT}} \vec{E} \, \hat{n} \, ds + \underbrace{\iint_{\substack{BASE\\BASSA}} \vec{E} \, \hat{n} \, ds}_{0} + \underbrace{\iint_{\substack{BASE\\ALTA}} \vec{E} \, \hat{n} \, ds}_{0} = \iint_{SUP} E \, \hat{\mu}_r \cdot \hat{\mu}_r \, ds =$$

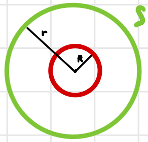
$$= E(r) \iint_{SUP} ds = E(r) \, 2\pi r h = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda \cancel{h}}{2\pi r \cancel{h} \varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

es.



$\vec{E}(r<R)$? interno
$\vec{E}(r>R)$? esterno

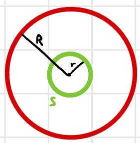


1) $r>R$

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{u}_r$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} = \oint\!\!\oint_S E(r)\, ds = E(r) \oint\!\!\oint_S ds = E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{u}_r$$



2) $r<R$

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{u}_r$$

la carica è solo all'esterno!

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{Q_s}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = 0$$

POTENZIALE ?

1) $r>R$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{u}_r$$

$$V(r) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

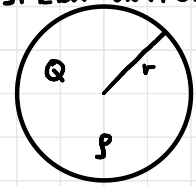
2) $r<R$

$$V(r) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_\infty^r \vec{E}\, d\vec{r} = -\left[\int_\infty^R E(r>R)\, d\vec{r} + \int_R^r \cancel{E(r<R)\, d\vec{r}}^{\,0}\right] =$$

$$= -\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{è costante}$$

26/11

ES. SFERA UNIFORMEMENTE CARICA



$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

A) ESTERNO: $r > R$

$$\vec{E} = E(r)\cdot \hat{\mu}_r$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\hat{\mu}_r$$

INTERNO: $r < R$

$$\vec{E} = E(r)\cdot\hat{\mu}_r$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\overset{\to 0}{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\hat{\mu}_r = 0$$

$$E(r)\,\cancel{4\pi r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\iiint_{V_s}\rho\, ds = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\, r^{\cancel{3}} \rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{\cancel{3}Q}{4\pi R^3}\cdot\frac{r}{\cancel{3}\varepsilon_0}$$

B) ESTERNO: $r > R$

$$V(r) - V(\infty) = \int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \dots = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

C) INTERNO: $r < R$

$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left(\int_{-\infty}^R E(r>R)\, dr + \int_R^r E(r<R)\, dr\right) =$$

$$= -\left[\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr + \int_R^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\, r\, dr\right] =$$

$$= -\left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r r\, dr\right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-1 + \frac{1}{2R^2}(r^2 - R^2)\right) =$$

$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

23/11