CAPITOLO 2

• TRAIETTORIA

È la funzione del tempo $(x(t), u(t))$ con $t \geq t_0$ e $x(t_0) = x_0$ che soddisfa $\dot{x}(t) = f(\underbrace{x(t)}_{\text{traiettoria dello stato}}, \mu(t), t)$

• TIPI DI SISTEMA

Dato $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t), t) \\ y(t) = h(x(t), \mu(t), t) \end{cases}$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

FORZATO $\longrightarrow$ $\dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t), t)$

NON FORZATO $\longrightarrow$ $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$

NON-FORZATI $\subset$ FORZATI

SISO $\longrightarrow$ $m = p = 1$

MIMO $\longrightarrow$ non SISO

SISO $\subset$ MIMO

STRETTAMENTE PROPRI $\longrightarrow$ $y(t) = h(x(t), t)$

PROPRI $\longrightarrow$ $y(t) = h(x(t), \mu(t), t)$

STRETTAMENTE-PROPRI $\subset$ PROPRI

TEMPO INVARIANTI $\longrightarrow$ dato $\begin{bmatrix} (x(t), \mu(t)), t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{bmatrix}$ traiettoria allora $\begin{bmatrix} (x(t-\Delta), \mu(t-\Delta)), \forall\Delta \\ x(t_0+\Delta) = x_0 \end{bmatrix}$ è traiettoria $\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t)) \\ y(t) = h(x(t), \mu(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

TEMPO VARIANTI $\longrightarrow$ NON TEMPO INVARIANTI

T. INV $\subset$ T. VAR

LINEARI $\longrightarrow$

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{} = \overset{n\times 1}{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}} = \overset{n\times n}{\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}} \cdot \overset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}} + \overset{n\times m}{\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}} \cdot \overset{m\times 1}{\begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_m(t) \end{bmatrix}}$$

$$y(t) = \overset{p\times 1}{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}} = \overset{p\times n}{\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix}} \cdot \overset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}} + \overset{p\times m}{\begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}} \cdot \overset{m\times 1}{\begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_m(t) \end{bmatrix}}$$

LINEARI $\subset$ NON-LINEARI

NON LINEARI $\longrightarrow$ ...

LTI SISO $\longrightarrow$ LINEARI + TEMPO INVARIANTI + SISO $\longrightarrow$ QUELLI CHE CONSIDEREREMO

• EQUILIBRIO

IN S. NON FORZATO $\longrightarrow$ dato $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ allora $x_e \iff x(t) = x_e \ \forall t \geq t_0$

$\longrightarrow f(x_e) = \dot{x}(t) = d(x_e)/dt = \emptyset$

IN S. FORZATO $\longrightarrow$ dato $\dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t), t)$ allora $(x_e, \mu_e) \iff (x(t), \mu(t)) = (x_e, \mu_e) \ \forall t \geq t_0$

$\longrightarrow f(x_e, \mu_e) = \dot{x}(t) = d(x_e)/dt = \emptyset$

• SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

HP: sia $(x_a(t), \mu_a(t))$ traiettoria con $x_a(0) = x_{0a}$
sia $(x_b(t), \mu_b(t))$ traiettoria con $x_b(0) = x_{0b}$

TH: Allora dato $x_{ab}(t_0) = a x_{0a} + b x_{0b}$ si ha che $(x_{ab}(t), \mu_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t) ; \alpha \mu_a(t) + \beta \mu_b(t))$ è traiettoria

DIM: $(x_{ab}(t), \mu_{ab}(t))$ è traiettoria se $\dot{x}_{ab}(t) = A(t)\, x_{ab}(t) + B(t)\, \mu_{ab}(t)$

$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_a(t) = A(t) x_a(t) + B(t) \mu_a(t) \\ \dot{x}_b(t) = A(t) x_b(t) + B(t) \mu_b(t) \end{array}\right\} \times$ DEF $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, \mu(t)$

$x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

$\dot{x}_{ab}(t) = \alpha \dot{x}_a(t) + \beta \dot{x}_b(t) = A(t)[\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)] + B(t)[\alpha \mu_a(t) + \beta \mu_b(t)] = A(t)\, x_{ab}(t) + B(t)\, \mu_{ab}(t)$

- **EVOLUZIONE LIBERA E FORZATA**

LIBERA $\longrightarrow$ x_ℓ tale che $(x_\ell(t_0);\, u_\ell(t)) = (x_0;\, \emptyset)$ per $t \geq t_0$

$\hookrightarrow$ $y_\ell(t) = C(t)\, x_\ell(t)$

FORZATA $\longrightarrow$ x_f tale che $(x_f(t_0);\, u_f(t)) = (\emptyset;\, u(t))$ per $t \geq t_0$

$\hookrightarrow$ $y_f(t) = C(t)\, x_f(t) + D(t)\, u(t)$

$\Big] \rightarrow x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$

- **MODI DI UN SISTEMA**

Prendiamo LTI : $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \\ x(\emptyset) = x_0 \end{cases}$

e siano $(\lambda_1, \dots, \underset{\uparrow}{\lambda_r})$ risultato di $\det(A - \lambda I) = \emptyset$ — $r \leq n$ autovalori

e siano $(n_1, \dots, \underset{\uparrow}{n_r})$: $\sum_1^r h_i = n$ — molteplicità geometriche

Allora $x_\ell(t) = \begin{bmatrix} x_{\ell_1}(t) \\ \vdots \\ x_{\ell_n}(t) \end{bmatrix}$ e $x_{\ell_j}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} \cdot \underbrace{t^{q-1} \cdot e^{\lambda_i t}}_{\text{MODI NATURALI}}$ con $j = [1, \dots, n]$

CASO PARTICOLARE : $h_i = 1 \;\; \forall i$ $\longrightarrow$ molteplicità algebrica = molteplicità geometrica

1) Se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ allora $x_{\ell_j}(t) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ji} \cdot e^{\lambda_i t}$

$e^{(\sigma_i + \boxed{j}\omega_i)t} = e^{\sigma_i t}\,(\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) = e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \Phi_i)$

2) Se $\lambda_i \in \mathbb{C}$ allora $x_{\ell_{\boxed{j}}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ji} \cdot e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ji} \cdot e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \Phi_i)$

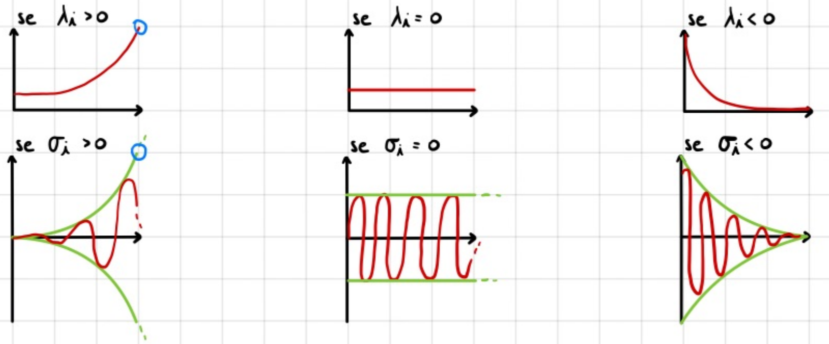
ANDAMENTO IN GENERALE

ESPRESSIONE DEI MODI se molt. a = molt. g $\begin{cases} e^{\lambda_i t} & \times \text{ AUTOVALORI REALI} \\ e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) & \times \text{ AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI} \end{cases}$

SE C'È DIVERGENZA, SISTEMA SI ROMPERÀ

$e^{\lambda_i t}$:

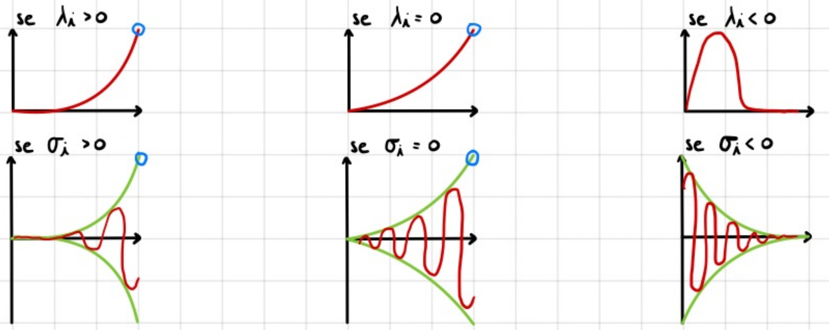
$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$:



ESPRESSIONE DEI MODI se molt. a > molt. g $\begin{cases} t^q e^{\lambda_i t} & \times \text{ AUTOVALORI REALI} \\ t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) & \times \text{ AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI} \end{cases}$

$t^q e^{\lambda_i t}$:

$t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$:



• STABILITÀ INTERNA

Consideriamo sistemi non forzati (ingressi fissi e noti) $\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u})$, cosa succede se non partiamo da x_e

1) EQUILIBRIO STABILE $\longrightarrow$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

↳ se sono in un punto di equilibrio e mi discosto un po' allora sono ancora nell'equilibrio

2) EQUILIBRIO ATTRATTIVO $\longrightarrow$ se $\exists \delta > 0 : \forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

↳ anche se mi discosto dall'equilibrio, ci tornerò sempre

3) EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE STABILE $\longrightarrow$ ATTRATTIVO + STABILE

4) EQUILIBRIO INSTABILE $\longrightarrow$ NON STABILE

5) STABILITÀ LOCALE $\longrightarrow$ se le condizioni valgono in un'intorno di x_e

6) STABILITÀ GLOBALE $\longrightarrow$ se le condizioni valgono $\forall x \in \mathbb{R}^n$

7) TEOREMA 1

In LTI $\lambda_i < 0 \longleftrightarrow$ Allora LTI é asintoticamente stabile

8) TEOREMA 2

In LTI $(\sigma_i \leq 0$; se $\sigma_i = 0$ allora $m_a = m_g) \longleftrightarrow$ Allora LTI é stabile

9) TEOREMA 3

se $\exists \lambda_i : \sigma_i > 0$ oppure $(\sigma_i = 0, m_a > m_g) \longrightarrow$ LTI instabile

• LINEARIZZAZIONE

1) Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$ con $(x_e, u_e) \qquad X(0) = x_e + \Delta x_0$

2) Partendo da $x(0) = x_e + \Delta x_0$, consideriamo una traiettoria $(x(t), u(t))$ e $y(t)$. $\begin{cases} x(t) = x_e + \Delta x(t) \\ u(t) = u_e + \Delta u(t) \\ y(t) = y_e + \Delta y(t) \end{cases}$

3) Essendo anch'essa una traiettoria, vale $\begin{cases} \frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = f(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)) \\ y_e + \Delta y(t) = h(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)) \end{cases}$

4) Prendiamo la parte a dx della relazione e riscriviamola con Taylor

$$\frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = f(x_e, u_e) + \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial x}(x(t) - x_e) + \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial u}(u(t) - u_e) + \text{ord. sup.}$$

$$y_e + \Delta y(t) = h(x_e, u_e) + \frac{\partial h(x_e, u_e)}{\partial x}(x(t) - x_e) + \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial u}(u(t) - u_e) + \text{ord. sup.}$$

5) Sviluppiamo la parte a sx e scriviamo la parte a dx

$$\Delta \dot{x}(t) = \underbrace{\cancel{f(x_e, u_e)}}_{0} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial x}}}_{A} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\boxed{\frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial u}}}_{B} \cdot \Delta u(t) + \text{ord. sup.}$$

$$\cancel{y_e} + \Delta y(t) = \cancel{y_e} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial h(x_e, u_e)}{\partial x}}}_{C} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\boxed{\frac{\partial h(x_e, u_e)}{\partial u}}}_{D} \cdot \Delta u(t) + \text{ord. sup.}$$

6) Riscriviamo, eliminando i termini di ordine superiore, ricavando la seguente approssimazione

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) \approx A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) \\ \Delta y(t) \approx C \cdot \Delta x(t) + D \cdot \Delta u(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\, \delta x(t) + B\, \delta u(t) \\ \delta y(t) = C\, \delta x(t) + D\, \delta u(t) \end{cases}$$

↳ PER VARIAZIONI SUFFICIENTEMENTE PICCOLE

• TEOREMI SU LINEARIZZAZIONE E STABILITÀ

1) Dato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ con (x_e, u_e)

Allora se il sistema verrà linearizzato intorno a (x_e, u_e) e sarà asintoticamente stabile, lo sarà anche x_e

↳ se il sistema, linearizzato in (x_e, u_e), é asintoticamente stabile allora anche il non-lineare é asintoticamente stabile in (x_e, u_e)

2) Dato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ con (x_e, u_e)

Allora se il sist. linearizzato in (x_e, u_e) ha almeno un $\sigma_i > 0$ allora x_e é instabile

↳ se il sistema, linearizzato in (x_e, u_e), ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora anche il sistema non-linearizzato in quell'intorno sarà instabile

- **RETROAZIONE DELLO STATO**

Dato $\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$ e supponendo di misurare lo stato $\rightarrow y(t) = x(t)$

ULTERIORE INGRESSO PER IL SISTEMA RETROAZIONATO

Allora progettiamo l'ingresso $u(t) = Kx(t) + v(t) \longrightarrow \dot{x}(t) = (A + KB)\,x(t) + B\,v(t)$
dove $(A + BK)$ deve avere $\sigma_i > 0 \;\; \forall i$ per l'asintotica stabilità

- **CONTROLLO NONLINEARE MEDIANTE LINEARIZZAZIONE**

1) Partiamo dal sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
2) Lo linearizziamo intorno a (x_e, u_e) e otteniamo $\delta\dot{x}(t) = A_e\,\delta x(t) + B_e\,\delta u(t)$

Ora vogliamo che $\delta x(t) = x(t) - x_e = \emptyset$

3) Usiamo $\delta u(t) = K\,\delta x(t) + \delta v(t)$ e otteniamo $\delta\dot{x}(t) = (A_e + KB_e)\,\delta x(t) + B\,v(t)$

Progettiamo K : $(A_e + KB_e)$ sia asintoticamente stabile
Dai teoremi sulla linearizzazione, avremo $\delta x(t) = \emptyset$ se $\delta x(\emptyset)$ é in un'intorno di x_e

4) Sappiamo che $u(t) = u_e + \delta u(t)$ e $\delta u(t) = K\,\delta x(t) + \delta v(t)$ e $\delta x(t) = x(t) - x_e$

5) Allora $u(t) = u_e + K\,(x(t) - x_e) + \delta v(t)$

CAPITOLO 3

- **TRASFORMATA DI LAPLACE**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $s = \sigma + j\omega$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

0^- → IMPULSI IN Ø SONO CONSIDERATI

SOLO I VALORI ≥Ø DI $f(t)$ DETERMINANO $F(s)$ → $f(t)$ si assume sempre Ø per $t<Ø$

- **ANTITRASFORMATA DI LAPLACE**

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

- **PROPRIETÀ $\mathcal{L}[f(t)]$**

1) LINEARITÀ ⟶ $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$
2) TRASLAZIONE TEMPORALE ⟶ $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s)$
3) TRASLAZIONE COMPLESSA ⟶ $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha)$
4) DERIVAZIONE TEMPORALE ⟶ $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(Ø)$
5) INTEGRAZIONE TEMPORALE ⟶ $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\, d\tau] = F(s)/s$
6) CONVOLUZIONE TEMPORALE ⟶ $\mathcal{L}[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau] = F_1(s) F_2(s)$

- **TEOREMA VALORE INIZIALE / FINALE**

1) INIZIALE

Se $f(t) \in \mathbb{R}$, grado $\{D(s)\}$ > grado $\{N(s)\}$

Allora $f(Ø) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

2) FINALE

Se $f(t) \in \mathbb{R}$, grado $\{D(s)\}$ > grado $\{N(s)\}$, poli : $p_i = Ø \;||\; \sigma_i < Ø$

Allora $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to Ø} sF(s)$

- **TRASFORMATE ELEMENTARI**

1) $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
2) $\mathcal{L}[1(t)] = 1/s$
3) $\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = 1/s^2$
4) $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$
5) $\mathcal{L}[\sin(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ↑ $\varphi = Ø$ $\qquad$ $\mathcal{L}[\cos(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ ↑ $\varphi = Ø$
6) $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi) \cdot 1(t)] = \frac{\omega \cos\varphi \pm s \cdot \sin\varphi}{s^2+\omega^2}$ $\qquad$ $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi) \cdot 1(t)] = \frac{s \cdot \cos\varphi \mp \omega \cdot \sin\varphi}{s^2+\omega^2}$

• FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \\ x(\emptyset) = x_0 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$

Allora $G(s) = C\cdot(sI - A)^{-1}\cdot B + D$

Dim: $\begin{cases} \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[A\,x(t) + B\,u(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[C\,x(t) + D\,u(t)] \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s\,X(s) - x(\emptyset) = A\,X(s) + B\,U(s) \\ Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \end{cases}$

$$\begin{cases} (sI - A)\,X(s) = X(\emptyset) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cancelto{1}{(sI-A)^{-1}(sI-A)}\,X(s) = (sI-A)^{-1}\,(X_0 + BU(s)) \\ Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}\cdot X_0 + (sI-A)^{-1}\cdot B\,U(s) = X_\ell(s) + X_f(s) \\ Y(s) = C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot X_0 + C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot BU(s) + DU(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s) \end{cases}$$

Considero solo $Y_f(s) = [C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B + D]\,U(s) \longrightarrow G(s) = \dfrac{Y_f(s)}{U(s)} = C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B + D$

Studiandola notiamo che

$$G(s) = \frac{\rho}{s^g}\cdot\frac{\prod_i^A(s+z_i)\cdot\prod_i^B(s^2+2\xi\alpha s+\alpha^2)}{\prod_i^C(s+p_i)\cdot\prod_i^D(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)} = \overbrace{\frac{\rho\,\prod_i^A z_i\cdot\prod_i^B \alpha_i^2}{\prod_i^C p_i\cdot\prod_i^D\omega_i^2}}^{\mu}\cdot\frac{1}{s^g}\cdot\frac{\prod_i^A(1+s/z_i)\cdot\prod_i^B\left(1+\frac{2\xi}{\alpha}s+\frac{s^2}{\alpha^2}\right)}{\prod_i^C(1+s/p_i)\cdot\prod_i^D\left(1+\frac{2\xi}{\omega}s+\frac{s^2}{\omega^2}\right)} =$$

$$= \frac{\mu}{s^g}\cdot\frac{\prod_i^A(1+s/z_i)\cdot\prod_i^B\left(1+\frac{2\xi}{\alpha}s+\frac{s^2}{\alpha^2}\right)}{\prod_i^C(1+s/p_i)\cdot\prod_i^D\left(1+\frac{2\xi}{\omega}s+\frac{s^2}{\omega^2}\right)} \xrightarrow[T_i = 1/p_i]{\tau_i = 1/z_i} \frac{\mu}{s^g}\cdot\frac{\prod_i^A(1+\tau_i s)\cdot\prod_i^B\left(1+\frac{2\xi}{\alpha}s+\frac{s^2}{\alpha^2}\right)}{\prod_i^C(1+T_i s)\cdot\prod_i^D\left(1+\frac{2\xi}{\omega}s+\frac{s^2}{\omega^2}\right)}$$

• SVILUPPO DI HEAVISIDE

1) POLI REALI O C.C. (m.a = 1)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_1^n(s+p_i)} = \sum_1^n \frac{K_i}{s+p_i} \quad \text{con} \quad K_i = \left[(s+p_i)\cdot Y(s)\right]_{s=-p_i}$$

$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \sum_1^n K_i\cdot\mathcal{L}\left[\frac{1}{s+p_i}\right] = \sum_1^n K_i\cdot e^{-p_i t}\cdot 1(t)$$

SEMPLIFICAZIONE (C.C.)

Consideriamo $(p_{i,1}\,;\,p_{i,2}) = (\sigma + j\omega,\ \sigma - j\omega)$ e $(K_{i,1}\,;\,K_{i,2}) = (Me^{-j\varphi};\ Me^{j\varphi})$

Allora $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{K_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \dfrac{K_{i,2}}{s+p_{i,2}}\right] = Me^{-j\varphi}\cdot e^{-p_{i,1}\cdot t}\cdot 1(t) + Me^{j\varphi}\cdot e^{-p_{i,2}\cdot t}\cdot 1(t) = 2Me^{\sigma t}\cos(\omega t+\varphi)\,1(t)$

2) POLI REALI O C.C. (m.a. > 1)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_1^q(s+p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q\sum_{h=1}^{n_i}\frac{K_{i,h}}{(s+p_i)^h} \quad \text{con} \quad K_{i,h} = \left[\frac{1}{(n_i-h)!}\cdot\frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}}\left((s+p_i)^{n_i}\,Y(s)\right)\right]_{s=-p_i}$$

• STABILITÀ BIBO

Sistema è BIBOSTABILE se l'uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato

→ poli di $G(s)$ sono $\sigma_i < \emptyset$

CAPITOLO 4

- **TEMPO DI ASSESTAMENTO $T_{a,\varepsilon}$**

Tempo t tale che $(1-\varepsilon/100)\cdot y_\infty \leq y(t) \leq (1+\varepsilon/100)$

- **SOVRAELONGAZIONE PERCENTUALE $S\%$**

$$S\% = 100\cdot \frac{y_{max}-y_\infty}{y_\infty}$$

- **SISTEMI PRIMO ORDINE**

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{\mu}{1+Ts}\cdot\frac{K}{s}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \mu K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)1(t) \longrightarrow \begin{cases} y(0) = \emptyset \\ \dot{y}(0) = \mu K/T \\ y(\infty) = \mu K \end{cases}$$

$$T_{a,\varepsilon} = T\cdot \ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right)$$

- **SISTEMI SECONDO ORDINE**

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{\mu\cdot\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{K}{s}$$

$$y(t) = \mu K\left(1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cdot t + \arccos(\xi)\right)\right)\cdot 1(t) \longrightarrow \begin{cases} y(\emptyset) = \emptyset \\ \dot{y}(\emptyset) = \emptyset \\ \ddot{y}(\emptyset) = \mu\omega_n^2 \\ y(\infty) = \mu K \end{cases}$$

$T_{a,\varepsilon}$: $\quad T_{a,5} \approx \dfrac{3}{\xi\omega_n} \qquad T_{a,1} \approx \dfrac{4.6}{\xi\omega_n}$

$$S\% = 100\cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

OSS: sistemi con poli c.c. con la stessa parte reale $(\xi\omega_n)$ hanno lo stesso $T_{a,\varepsilon}$

OSS: sistemi con lo stesso smorzamento (ξ) hanno la stessa $S\%$

OSS: se vogliamo $S\% \leq S^*$ e $T_{a,5} \leq T^*$, allora dovremo avere $\xi \geq \xi^* \longrightarrow \xi\cdot\omega_n \geq \xi^*\cdot\omega_n = \frac{3}{T^*}$

- **SISTEMA SECONDO ORDINE CON POLI REALI**

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}\cdot\frac{K}{s}$$

1) $T_1 > T_2$

$$y(t) = \mu K\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\cdot 1(t) \qquad y(\emptyset) = \dot{y}(\emptyset) = \emptyset \,,\quad \ddot{y}(\emptyset) = \frac{\mu K}{T_1 T_2} \,,\quad y(\infty) = \mu K$$

2) $T_1 \gg T_2$

$$y(t) \approx \mu K\left(1-e^{-\frac{t}{T_1}}\right)1(t)$$

3) $T_1 = T_2$

$$y(t) = \mu K\left(1-e^{-\frac{t}{T_1}}-\frac{t}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)1(t)$$

- **SISTEMA PRIMO ORDINE CON ZERO**

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{1+\alpha T s}{1+Ts} \cdot \frac{K}{s} \quad \text{con } \alpha > 1$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \mu K\left(1 + (\alpha - 1) e^{-\frac{t}{T_1}}\right) 1(t) \qquad y(0) = \mu \alpha K \;, \quad y(\infty) = \mu K$$

- **SISTEMI SECONDO ORDINE CON POLI REALI E ZERO**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \cdot \frac{K}{s}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \mu K\left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1(t) \qquad y(0) = 0 \;, \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} \;, \quad y(\infty) = \mu K$$

1) $T_1 > T_2 \;, \; \tau < 0 \longrightarrow \dot{y}(0) < 0$ SOTTOELONGAZIONE

2) $T_1 > T_2 \;, \; \tau > T_1 \longrightarrow \dot{y}(0) > 0$ SOVRAELONGAZIONE + accentuata + zero vicino a origine

3) $T_1 \gg T_2 \;, \; \tau \approx T_1 \longrightarrow \dot{y}(0) > 0$ CODA DI ASSESTAMENTO × quasi cancellazione ZERO/POLO

CAPITOLO 5

- **RISPOSTA A INGRESSO SINUSOIDALE**

Consideriamo l'ingresso $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = U \cdot \frac{s\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

L'uscita sarà quindi $Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \cdot \frac{s\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

Per trovare la sua antitrasformata, consideriamo $G(s)$ BIBO-STABILE (poli $\neq$ e parte reale $< \emptyset$)

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s + p_i} + \frac{K_U}{s - j\omega} + \frac{\bar{K}_U}{s + j\omega} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot e^{-p_i t} 1(t) + 2|K_U|\cos(\omega t + \arg\{K_U\}) 1(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$\lim_{t \to \infty} y_1(t) = \emptyset$, quindi studiamo $y_2(t)$.

Il residuo $K_U = (s - j\omega)Y(s)\Big|_{s = j\omega} = U\,G(j\omega)\,\frac{\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)}{2} = \frac{U\,G(j\omega)}{2} e^{j\varphi} = \frac{U|G(j\omega)|}{2} e^{j\arg\{G(j\omega)\}} \cdot e^{j\varphi} =$

$$= \frac{U|G(j\omega)|}{2} e^{j\arg\{G(j\omega)\}} \cdot e^{j\varphi} = \frac{U}{2} \cdot |G(j\omega)|\, e^{j(\arg\{G(j\omega)\} + \varphi)}$$

Quindi $y_2(t) = \cancel{2} \cdot \frac{U}{\cancel{2}} |G(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \arg\{G(j\omega)\} + \varphi)$

Possiamo quindi dire che $y(t) \approx y_2(t) = U|G(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \arg\{G(j\omega)\})$

- **PROPRIETÀ BLOCCANTE DEGLI ZERI**

Gli zeri, se coincidenti con alcuni poli, possono eliminarli algebricamente con la conseguenza che i loro modi non saranno presenti nell'antitrasformata

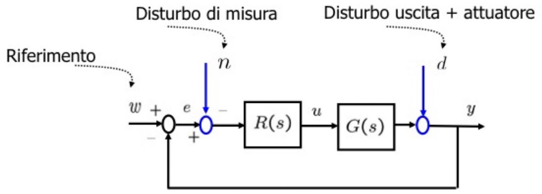
- **RISONANZA**

Si presenta quando $\xi = \emptyset$, a cui ci potremmo avvicinare nella realtà.
Abbiamo un picco di risonanza ∞ alla pulsazione ω_n
Se calcoliamo l'antitrasformata di $Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot U \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$

Otteniamo che $y(t) = A_1 t\cos(\omega_n t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_n t + \varphi_2)$ che diverge per $t \to \infty$

CAPITOLO 6

• SISTEMA DI CONTROLLO IN RETROAZIONE



$w(t), d(t)$ hanno bande a basse frequenze
$n(t)$ ha banda ad alta frequenza

• REQUISITI

1) STABILITÀ NOMINALE ⟶ ASINTOTICA o BIBO
2) STABILITÀ ROBUSTA ⟶ stabile anche ai disturbi
3) PRESTAZIONI STATICHE $(t \to \infty)$: $e(t)$ limitato o nullo
4) PRESTAZIONI DINAMICHE $(0<t<\infty)$. risp a $w(t)$ con $T_{a,\varepsilon}$ e $S\%$; risp a $d(t)$ e $n(t)$

• MARGINE FASE / AMPIEZZA

FASE ⟶ $M_\varphi = 180° + \arg\{L(j\omega_c)\}$ con $|L(j\omega_c)|_{dB} = \emptyset$ DISTANZA TRA ARGOMENTO E $-180°$ IN ω_c

AMPIEZZA ⟶ $M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$ con $\arg\{L(j\omega_\pi)\} = -180°$ DISTANZA TRA $\emptyset_{dB}$ E MODULO IN ω_π

• CRITERIO DI BODE ⟶ × REQUISITI DI STABILITÀ

Sia ⟶ $L(s)$ no poli $\sigma_i > \emptyset$
↘ $|L(j\omega_c)|_{dB} = \emptyset$ una sola volta

Allora se $\mu > 0$ e $M_\varphi > 0$ ⟶ sistema retroazionato è asintoticamente stabile

• ROBUSTEZZA

1) INCERTEZZA SUL GUADAGNO

Incertezza μ va ad intaccare solo $|L(j\omega)|_{dB}$

M_a è la massima incertezza tollerabile sul guadagno statico μ

2) INCERTEZZA SUL RITARDO TEMPORALE

Ritardo $e^{-s\tau}$ va ad intaccare solo $\arg\{L(j\omega)\}$ ⟶ $\arg\{L(j\omega_c)\} = \arg\{\tilde{L}(j\omega_c)\} - \tau\omega_c$

$\tilde{L}(j\omega)$ NON RITARDATO

Se consideriamo il ritardo massimo $-\cancel{180°} = M_\varphi - 180° - \tau_{MAX}\,\omega_c$ da cui $\tau_{MAX} < \dfrac{M_\varphi}{\omega_c}$

Dove τ_{MAX} è il massimo ritardo tollerabile

• FUNZIONI DI SENSITIVITÀ

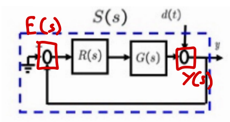
Possiamo scrivere le trasformate di $y(t)$, $u(t)$, $e(t) = w(t) - y(t)$, usando la sovrapposizione degli effetti, come:

$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)$

$U(s) = U_w(s) + U_d(s) + U_n(s) = Q(s)W(s) + Q(s)D(s) - Q(s)N(s)$

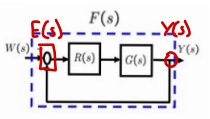
$E(s) = E_w(s) + E_d(s) + E_n(s) = S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s)$

S(s)



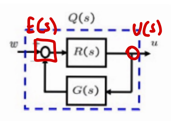
: $Y_d(s) = D(s) + L(s)E_d(s) = D(s) + L(s)\cdot(0 - Y_d(s))$ ⟶ $Y_d(s) = \underbrace{\boxed{\dfrac{1}{1+L(s)}}}_{}\cdot D(s)$ S(s)

F(s)



: $Y_w(s) = L(s)\cdot E_w(s) = L(s)(W(s) - Y_w(s))$ ⟶ $Y_w(s) = \boxed{\dfrac{L(s)}{1+L(s)}}\cdot W(s)$ F(s)

Q(s)



: $U_w(s) = R(s)\cdot E_w(s) = R(s)(W(s) - G(s)U_w(s))$ ⟶ $U_w(s) = \boxed{\dfrac{R(s)}{1+G(s)}}\cdot W(s)$ Q(s)

• CONSIDERAZIONI FUNZIONI DI SENSITIVITÀ

1) $F(s) + S(s) = 1$

Non possiamo abbattere $N(s)$ e $D(s)$ contemporaneamente e inoltre potremmo distorcere $W(s)$

Dobbiamo ricorrere a soluzioni frequenziali, sapendo che $N(j\omega)$ e $F(j\omega)$ si presentano a freq distanti

2) $F(j\omega) = \dfrac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$ dovrà essere $\begin{cases} \approx 1 & \text{basse freq} \rightarrow \text{conservare } W(s) \longrightarrow |L(j\omega)| \gg 1 \text{ basse freq} \\ \approx 0 & \text{alte freq} \rightarrow \text{abbattere } N(s) \longrightarrow |L(j\omega)| \ll 1 \text{ alte freq} \end{cases}$

3) $$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases} \longrightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$

4) $$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \approx \begin{cases} |L(j\omega)|^{-1} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ 1 & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases} \longrightarrow |S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$

5) $$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \approx \begin{cases} |G(j\omega)|^{-1} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases} \longrightarrow |Q(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{dB} & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$

• POLI C.C. IN $F(s)$ E M_φ

Sappiamo che

$M_\varphi^{RAD} = \pi + \varphi_c$ $\qquad$ $\dfrac{1-\cos(\alpha)}{2} = \sin^2(\alpha/2)$

1) $$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1+L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1+e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\sqrt{(1+\cos\varphi_c)^2+\sin^2\varphi_c}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos(M_\varphi^{RAD}))}} = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2(M_\varphi^{RAD}/2)}} = \frac{1}{2\sin(M_\varphi^{RAD}/2)}$$

2) Se $F(j\omega) = \dfrac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$ allora $F(j\omega_n) = \dfrac{1}{2j\xi}$ e $|F(j\omega_n)| = \dfrac{1}{2\xi}$

Allora se $\omega_c \approx \omega_n$, uguagliamo ① e ②.

$$\frac{1}{\cancel{2}\sin(M_\varphi^{RAD}/2)} \approx \frac{1}{\cancel{2}\xi} \longrightarrow \sin(M_\varphi^{RAD}/2) \approx \xi \longrightarrow M_\varphi^{RAD}/2 \approx \sin(M_\varphi^{RAD}/2) \approx \xi \longrightarrow M_\varphi^{RAD} \approx 2\xi \longrightarrow M_\varphi^{RAD}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 2\xi\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\downarrow$$

$$M_\varphi \approx \xi/100$$

• ERRORE A UN GRADINO → GUADAGNO D'ANELLO DI $L(s)$

Consideriamo $w(t) = W\cdot 1(t)$ ed $e(\infty)$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot(W(s)\cdot S(s)) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{W}{s}\cdot S(s) = W\lim_{s\to 0} S(s) = W\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)} = W\lim_{s\to 0}\frac{D_L(s)}{N_L(s)+D_L(s)} =$$

$D'_L(s) = 1$, $N_L(s) = \mu$

$$= W\lim_{s\to 0}\frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s)+s^g D'_L(s)} = W\lim_{s\to 0}\frac{s^g}{\mu+s^g} = \begin{cases} \dfrac{W}{1+\mu} & \text{se } g = 0 \\ 0 & \text{se } g > 0 \end{cases}$$

• ERRORE A INGRESSO W/s^k → GUADAGNO D'ANELLO DI $L(s)$

Consideriamo $W(s) = W/s^k$ ed $e(\infty)$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot(W(s)\cdot S(s)) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{W}{s^k}\cdot S(s) = W\lim_{s\to 0} s^{1-k}\cdot S(s) = W\lim_{s\to 0} s^{1-k}\cdot\frac{s^g\cdot D'_L(s)}{N_L(s)+s^g D'_L(s)} =$$

$$= W\lim_{s\to 0}\frac{s^{g-(k-1)}}{\mu+s^g} = \left[\begin{array}{ll} \infty & \text{se } g > k-1 \\ W/\mu & \text{se } g = k-1 \\ 0 & \text{se } g < k-1 \end{array}\right.$$

almeno k poli in $L(s)$ per stabilità

• PRINCIPIO MODELLO INTERNO

Per avere riferimento/disturbo che venga conservato/attenuato perfettamente

$\updownarrow$

1) Retroazione asintoticamente stabile ⟶ poli > zeri, $L(s)$ no $\sigma_i > 0$, $\mu > 0$, $M_\varphi > 0$

2) $L(s)$ deve poter riprodurre $W(s)$, quindi deve avere al suo interno la coppia di poli c.c. $\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}$ che le permetteranno di riprodurre una qualsiasi sinusoide in ingresso $\xrightarrow[\text{FOURIER}]{x}$ qualsiasi segnale