

Controlli Automatici T - All In One

Il file contiene gli appunti del corso di Controlli Automatici T (AA 2021-2022) con alcuni commenti e approfondimenti.

Appunti di Luca Corsetti e Leonardo Straccali

Indice

Indice

Sistemi dinamici in forma di stato

Sistemi continui

Equazione di stato

Equazione di uscita

Sistemi discreti

Esempi

Traiettoria

Equilibrio per sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ (sistema non forzato)

Coppia di equilibrio

Proprietà per sistemi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, tempo invarianti continui (definiti in ogni istante)

Richiamo calcolo matriciale

Classificazione di sistemi in forma di stato

Esempio del carrello

Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

Sistemi Lineari Tempo Invarianti SISO (LTI SISO)

Princípio di sovrapposizione degli effetti

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Esempio

Esponenziale di una matrice

Proprietà

Rappresentazioni equivalenti di una matrice T

Modi di un sistema LTI

Caso particolare

Modi naturali grafici ($m_a = m_g$) - autovalori reali semplici

Modi naturali grafici ($m_a = m_g$) - autovalori complessi coniugati semplici

Riassumendo $m_a = m_g$ (molt. algebrica = molt. geometrica)

Modi naturali grafici ($m_a > m_g$) - autovalori reali coniugati semplici

Modi naturali grafici ($m_a > m_g$) - autovalori complessi coniugati semplici

Riassumendo $m_a > m_g$ (molt. algebrica = molt. geometrica)

Forma di Jordan di una matrice

Esponenziale di un miniblocco

Esempio (I)

Esempio (II)

Esempio carrello (III)

Stabilità interna

Teoremi

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

Teoremi relativi (Criteri di Ljapunov)

Retroazione dallo stato (I)

Trasformata di Laplace

Notazione

Osservazioni

Formula di antitrasformazione

Perchè la trasformata di Laplace

Proprietà

Teorema del valore iniziale

Teorema del valore finale

Trasformata di segnali elementari

Funzione di trasferimento

Come si calcola

Rappresentazioni e parametri

Forme fattorizzate

Esempi di cancellazioni

Antitrasformazione di Laplace

Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici

Caso 1 - poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)

Caso 2 - poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

Risposte di sistemi elementari

Risposta sistemi del primo ordine con unico polo reale

BIBO stabile (o stabilità esterna)

Tempo di assestamento

Esempio

Sovraelongazione (overshoot)

Dalla FDT allo spazio degli stati

Sistemi del primo ordine

Sistemi del secondo ordine

Luogo di punti a tempo di assestamento costante

Luogo di punti a sovraelongazione costante

Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso

Risposte al gradino

Sistemi del secondo ordine con poli reali

Considerazioni (sistemi secondo ordine con poli reali)

Sistemi del primo ordine con uno zero e polo reale

Sistemi del secondo ordine con zero e poli reali

Sovraelongazione percentuale in funzione dello smorzamento

Interconnessione schemi a blocchi

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Teorema del regime permanente

Esempio - risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier

Richiami - spettro di un segnale

Risposta in frequenza

Diagrammi di Bode

Diagrammi di Bode - guadagno statico

Diagrammi di Bode - zeri nell'origine

Diagrammi di Bode - poli nell'origine

Diagrammi di Bode - zero reale (ampiezza)

Diagrammi di Bode - zero reale negativo (fase)

Diagrammi di Bode - zero reale positivo (fase)

Diagrammi di Bode - polo reale

Diagrammi di Bode - polo reale negativo

Diagrammi di Bode - zeri complessi coniugati (ampiezza)

Diagrammi di Bode - zeri complessi coniugati parte reale negativa (fase)

Diagrammi di Bode - zeri complessi coniugati parte reale positiva (fase)

Diagrammi di Bode - poli complessi coniugati (parte reale negativa)

Diagrammi di Bode - poli complessi coniugati (parte reale positiva)

Ritardo temporale

Azione filtrante dei sistemi dinamici

Esempio

Schema di controllo in retroazione

Funzione di trasferimento in anello aperto $L(s)$

Stabilità nominale

Stabilità robusta

Prestazioni statiche

Prestazioni dinamiche

Margine di fase e ampiezza (M_f e M_a)

Criterio di Bode

Funzioni di sensitività

Come si ricavano

Considerazioni

Errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$

Esempio - analisi statica di un errore a gradino

Principio del modello interno

Polo dominante

Progetto del regolatore

Stabilità robusta rispetto a incertezze

Precisione statica

Precisione dinamica

Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$

Attenuazione disturbo di misura $n(t)$

Attenuazione variabile di controllo $u(t)$

Fisica realizzabilità del regolatore R(s)

Riepilogo specifiche su diagrammi di Bode

Sintesi del regolatore (loop shaping o sintesi per tentativi)

Regolatore statico

Regolatore dinamico

Sintesi del regolatore statico

Sintesi del regolatore dinamico

Obiettivi

Sintesi per tentativi

Scenario A

Obiettivo

Azioni possibili

μ_d vincolato ($\mu_s \geq \mu^*$)

Formule di inversione

Procedura

Scenario B

Obiettivo

Azioni possibili

Rete anticipatrice

Caso B2

Formule di inversione

Procedura

Controllori PID

Regolatore Proporzionale

Regolatore Integrale

Regolatore Derivativo

Regolatore Proporzionale Integrale

Regolatore PID (Proporzionale(μ) Integrale($\frac{1}{s}$) Derivativo(s))

PID "ideale"

Casi speciali

Luogo delle radici

Esempio sistema primo ordine

Definizione

Equazione caratteristica

Osservazioni

Regole di tracciamento

Sistemi dinamici in forma di stato

Sistemi continui

Il tempo t è una variabile reale, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

dove:

- $\dot{x}(t)$ è l'**equazione di stato**
- $y(t)$ è l'**equazione (trasformazione) di uscita**

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ **stato del sistema** all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ **ingresso del sistema** all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ **uscita del sistema** all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Equazione di stato

Equazione differenziale ordinaria (**ODE**) vettoriale del primo ordine

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x(t), u(t), t) = f_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x(t), u(t), t) = f_n\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

- \mathbb{R}^n spazio di stato, n ordine del sistema
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione di stato

Equazione di uscita

Equazione algebrica del tipo

$$\dot{y}_1(t) = h_1(x(t), u(t), t) = h_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\dot{y}_p(t) = h_p(x(t), u(t), t) = h_p\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

- Se la soluzione $y(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**. È un sistema dove $y(t)$ dipende solamente dall'input passato o corrente mai dal futuro.
- Sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione f si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione (differenziale) di stato (Teorema di Cauchy-Lipschitz)

Sistemi discreti

Il tempo t è una variabile intera, $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\y(t) &= h(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Equazione di stato: equazione alle differenze finite (FDE)

dove:

- $\dot{x}(t)$ è l'**equazione di stato**
- $y(t)$ è l'**equazione (trasformazione) di uscita**

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ **stato del sistema** all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ **ingresso del sistema** all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ **uscita del sistema** all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

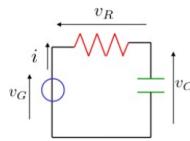
Esempi

Legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

Leggi del condensatore e del resistore

$$\begin{aligned}C\dot{v}_C(t) &= i(t) \\v_R(t) &= R i(t)\end{aligned}$$



Definiamo $x := v_C$ (stato) e $u := v_G$ (ingresso).

Supponiamo di misurare (sensore) $v_R(t)$, allora $y := v_R$

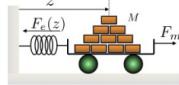
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{RC}(u(t) - x(t)) \\y(t) &= u(t) - x(t)\end{aligned}$$

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$



Equazione della dinamica

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

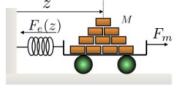
Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 \ x_2]^T$) e $u := F_m$ (ingresso).

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$



Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 \ x_2]^T$) e $u := F_m$ (ingresso).

Sia $k(t) = k$ e consideriamo come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(k z^2(t) + M \dot{z}^2(t))$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)\end{aligned}$$

Il tempo può essere omesso (notazione più compatta)

$$y(t) = \frac{1}{2}(k(t)x_1^2(t) + Mx_2^2(t))$$

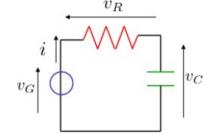
$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

Legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

Leggi del condensatore e del resistore

$$\begin{aligned}C\dot{v}_C(t) &= i(t) \\v_R(t) &= R i(t)\end{aligned}$$



Scrivendo in termini di $v_C(t)$ ("stato interno") e $v_G(t)$ ("ingresso di controllo")

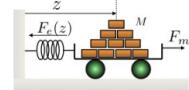
$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$



Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 \ x_2]^T$) e $u := F_m$ (ingresso).

Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Traiettoria

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0} , la funzione del tempo $(x(t), u(t)), t \geq t_0$ che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice **traiettoria (movimento) del sistema**.

In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

per sistemi senza ingresso (non forzati) la traiettoria dello stato $x(t), t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0}

Esempio:

Sistema **LTI** (Lineare Tempo Invariante): circuito RC con $u(t) = U \sin(\omega t)$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{RC}} x(0) + \frac{U \omega R C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \gamma)$$

con $\gamma = \arctan(\omega R C)$

Equilibrio per sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ (sistema non forzato)

Dato un sistema **non forzato** $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice **equilibrio** se $x(t) = x_e \forall t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema

Un equilibrio è un punto che soddisfa la forma di stato non forzata per ogni istante di tempo successivo a quello iniziale

Coppia di equilibrio

Dato un sistema **forzato** $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice **coppia di equilibrio** del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e) \forall t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema

Una coppia di equilibrio è una coppia di punti che soddisfa la forma di stato forzata per ogni istante di tempo successivo a quello iniziale

Proprietà per sistemi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, tempo invarianti continui (definiti in ogni istante)

Data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$.

Per **sistemi non forzati**, dato un equilibrio x_e vale $f(x_e) = 0$.

Zero è sempre uno punto di equilibrio per i sistemi forzati e non forzati

La relazione $f(x_e, u_e) = 0$ ci permette quindi di trovare la coppia di equilibrio

Richiamo calcolo matriciale

- **Complemento algebrico dell'elemento** $a_{ij} = \hat{A}_{ij}|$

\hat{A}_{ij} è il determinante della matrice ottenuta da A la riga i e la colonna j e moltiplicando per $(-1)^{i+j}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

↓

$$A_{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sottomatrice di } a_{11}$$

- **Determinante di una matrice**

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij}$$

| Note: determinante di una matrice 2×2 dato da $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

- **Matrice aggiunta**

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{n1} & \cdots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{1n} & \cdots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

| È la trasposta della matrice dei componenti algebrici ovvero la trasposta della matrice dei cofattori

- **Matrice inversa (di una matrice quadrata)**

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

- **Autovalori e autovettori di una matrice**

Si ricavano dal polinomio caratteristico

$$\psi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

| Le n radici λ_i dell'equazione caratteristica $\psi(\lambda) = 0$ si dicono autovalori di A

| Se A reale, allora $\psi(\lambda)$ **polinomio a coefficienti reali, allora radici reali o complesse coniugate**

| Ad ogni autovalore λ_i di A si può associare un vettore v_i (non nullo) detto autovettore che soddisfa
 $Av_i = \lambda_i v_i$

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

- **Monovariabili (SISO)** sotto classe di **Multivariabili (MIMO)**

SISO (Single Input Single Output) se $m = p = 1$ altrimenti **MIMO**.

| I sistemi **SISO** sono quelli che hanno un solo ingresso e una sola uscita il cui stato può essere di grado n

- **Non forzati** sotto classe di **forzati**

Sistemi non forzati

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), t) \end{aligned}$$

| Non dipendono dall'ingresso $u(t)$

- **Strettamente propri** sotto classe di **propri**

Strettamente propri se $y = h(x(t), t)$

| Ovvero l'uscita dipende esclusivamente dagli stati del sistema, matrice $D(t)$ nulla.

| È possibile dimostrare che un sistema strettamente proprio ha funzione di trasferimento con grado del numeratore minore a quello del denominatore.

- **Tempo invarianti** sotto classe di **tempo varianti**

Tempo invarianti se data una traiettoria $(x(t), u(t)), t \geq t_0$, con $x(t_0) = x_0$, per ogni $\Delta \in \mathbb{R}$, vale che per $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria

Non significa altro che, se prendo un sistema questo è **LTI** se a prescindere da quando lo faccio partire, questo si comporta sempre allo stesso modo.

Se lo faccio partire oggi, fra un mese, un anno il suo comportamento è sempre il medesimo

Si può dimostrare che sistemi tempo invarianti sono del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Questo implica che $t_0 = 0$ è uno istante iniziale ammesso

- **Linear**i sotto classe di **non linear**i

Sistemi lineari se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x e u

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \dots + b_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) \\ &\quad + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) \\ &\quad + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) \\ &\quad + d_{p1}(t)u_1(t) + d_{p2}(t)u_2(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)\end{aligned}$$

Le funzioni di stato possono essere espresse sotto forma di combinazioni lineari.

In forma matriciale possiamo riscrivere in questo modo

$$\begin{aligned}A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \text{matrice di stato} & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} & B(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} & \text{matrice degli ingressi} \\ C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ c_{p1}(t) & \dots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ d_{p1}(t) & \dots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}, D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

E da questa notazione possiamo ricavare le seguenti:

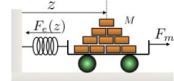
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Nel corso abbiamo usato sistemi **SISO**, **lineari**, **tempo invarianti**

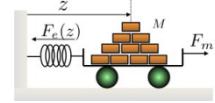
Esempio del carrello

Si può riscrivere così

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f_1(x, u, t) &= x_2 \\ f_2(x, u, t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1 + \frac{1}{M}u\end{aligned}$$

- f_2 dipende esplicitamente da t attraverso $k(t)$ quindi sistema tempo variante. Se $k(t) = \bar{k}$ per ogni t allora tempo invariante.
- f_1 e f_2 dipendono linearmente da x e u allora sistema lineare.
(Se $k(t) = \bar{k}$ lineare tempo invariante.)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)\end{aligned}$$

Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

Un sistema è detto **LTI** se le funzioni di stato e uscita sono lineari in x e u (lineare) e non dipendono **esplicitamente** da t (tempo invariante)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Sistemi Lineari Tempo Invarianti SISO (LTI SISO)

Quando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times n}, D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

B è un vettore colonna

C è un vettore riga

D è uno scalare

Principio di sovrapposizione degli effetti

Vale anche per i tempo varianti ma solo per i lineari

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$

Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

E' traiettoria del sistema.

Ovvero applicando come ingresso $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

NON VALE PER I SISTEMI NON LINEARI

In altre parole: se sommo due traiettorie del sistema la risultante è ancora una traiettoria del sistema

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Evoluzione libera: Sia $x_l(t), t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_l(t_0) = x_0$ e $u_l(t) = 0, t \geq t_0$.

Uscita $y_l(t) = C(t)x_l(t)$

Evoluzione forzata: Sia $x_f(t), t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t), t \geq t_0$.

Uscita $y_f(t) = D(t)u(t)$

Applicando il **principio di sovrapposizione degli effetti** si ha che lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

| Lo stato del sistema non è altro che la somma **dell'evoluzione libera** e **dell'evoluzione forzata**

| **NON VALE PER SISTEMI NON LINEARI**

Esempio

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a(t)x(t) + b(t)u(t) \\ y(t) &= c(t)x(t) + d(t)u(t)\end{aligned}$$

Evoluzione libera + evoluzione forzata

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)\end{aligned}$$

Funzione esponenziale sappiamo essere circa uguale a (per Taylor)

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

Possiamo riscriverla come:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

con $x(0) = x_0$, perciò diventa:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= ce^{At}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\end{aligned}$$

Esponenziale di matrice? Usando Taylor $\Rightarrow e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

Esponenziale di una matrice

Data e^{At} , $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ allora possiamo approssimarla come $e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

Proprietà

- **Esponenziale e cambio di base**

$$e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$$

- **Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi**

L'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi è una matrice diagonale a blocchi in cui ogni blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza.

| esponenziale di una matrice diagonale $\Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $e^{\Lambda t} = diag\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

Rappresentazioni equivalenti di una matrice T

Effettuiamo un cambio di base mediante una matrice T

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

Essendo T invertibile possiamo scrivere

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

Che possiamo sostituire nell'equazione della dinamica ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \hat{C}(t)\hat{x}(t) + \hat{D}(t)u(t) \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0\end{aligned}$$

con $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili MA tutte le matrici possono essere trasformate mediante cambio di base in una matrice in forma di **Jordan** $A = JT^{-1}$
 J diagonale a blocchi con autovalori sui blocchi

Modi di un sistema LTI

Prendiamo un sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice A , con molteplicità algebrica $n_1, \dots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ si possono scrivere come

$$x_{lj}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti γ_{jiq} dipendono dallo stato iniziale $x(0)$

IMPORTANTE

I termini $t^{q-1} e^{\lambda_i t}$ sono detti **modi naturali** del sistema.

L'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare dei modi.

Se la matrice A è reale e $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è anche autovalore di A .

Si dimostra che i coefficienti γ_{jiq} corrispondenti a λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono anch'essi complessi coniugati

Si verifica quindi per calcolo diretto che le soluzioni $x_{l,j}(t)$ sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo

$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con opportuni valori della fase ϕ_i

Caso particolare

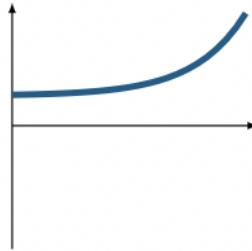
Supponiamo che le molteplicità algebriche n_1, \dots, n_r degli autovalori di A coincidano con le molteplicità geometriche (ad esempio quando gli autovalori sono distinti).

Allora i coefficienti h_i sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

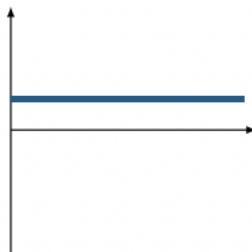
- $e^{\lambda_i t}$ per autovalori reali
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ per autovalori complessi coniugati

Modi naturali grafici ($m_a = m_g$) - autovalori reali semplici

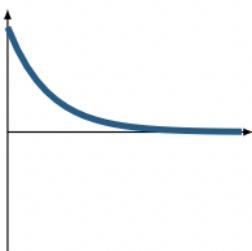
- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i > 0$



- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i = 0$

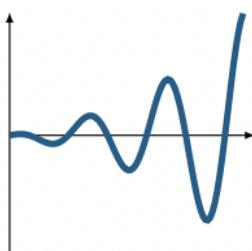


- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i < 0$

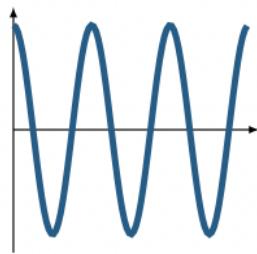


Modi naturali grafici ($m_a = m_g$) - autovalori complessi coniugati semplici

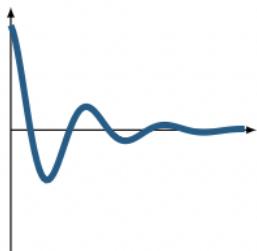
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i > 0$



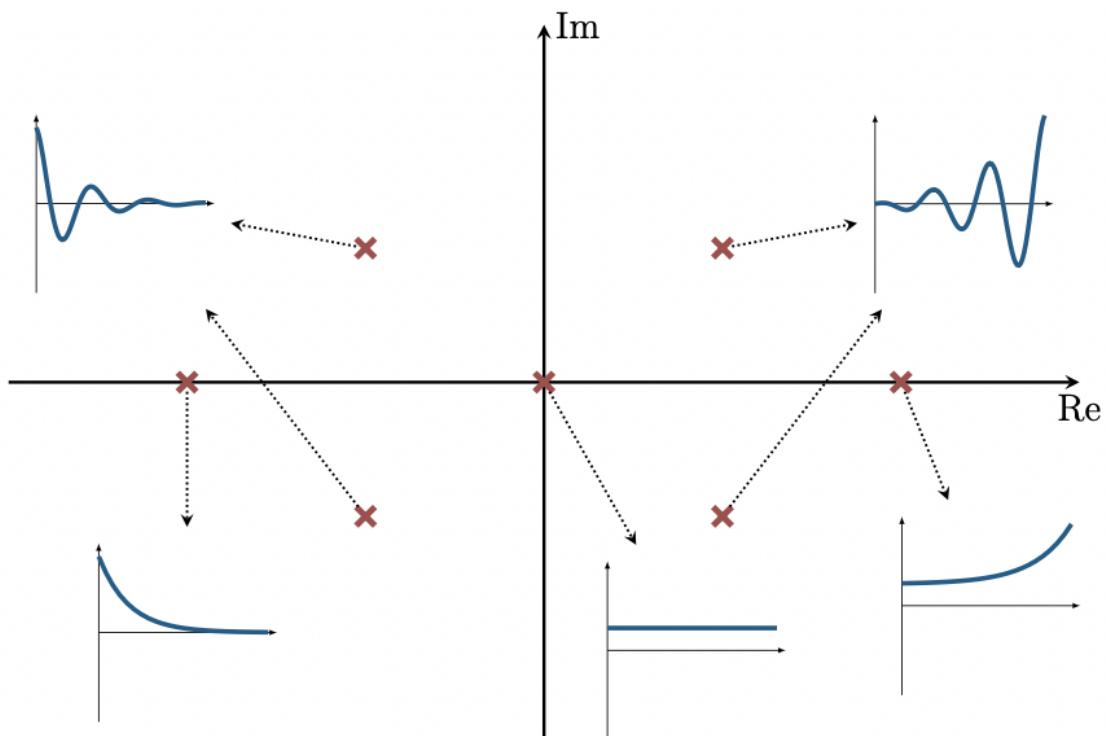
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i = 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i < 0$

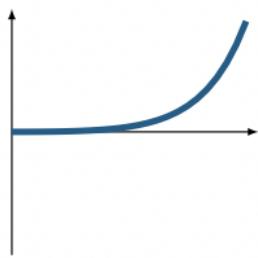


Riassumendo $m_a = m_g$ (molt. algebrica = molt. geometrica)

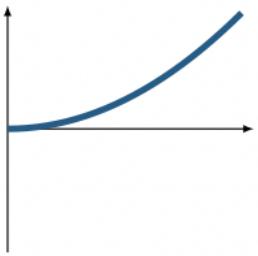


Modi naturali grafici ($m_a > m_g$) - autovalori reali coniugati semplici

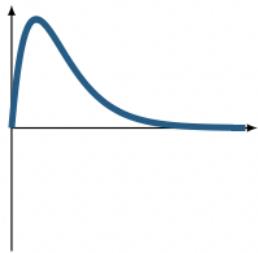
- $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i > 0$



- $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i = 0$

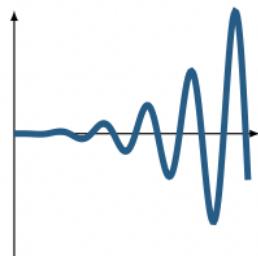


- $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i < 0$

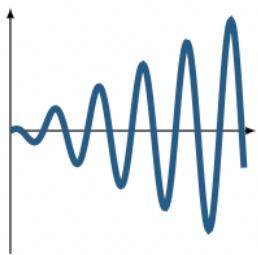


Modi naturali grafici ($m_a > m_g$) - autovalori complessi coniugati semplici

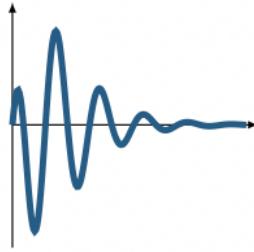
- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i > 0$



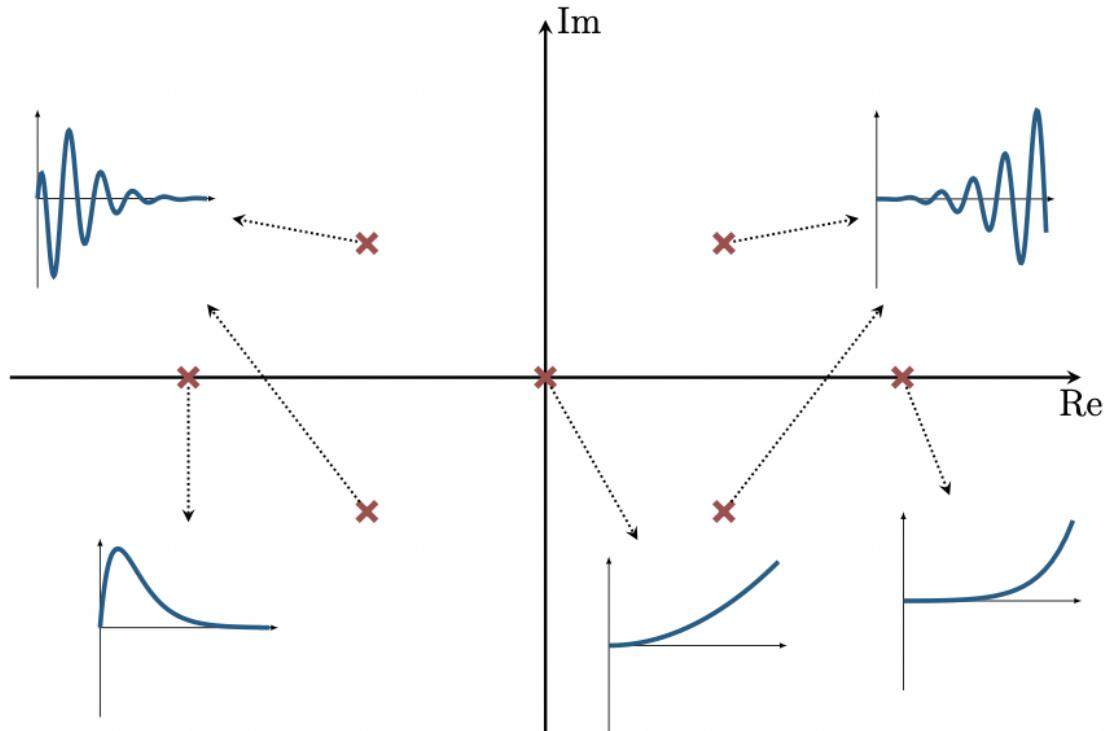
- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i = 0$



- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i < 0$



Riassumendo $m_a > m_g$ (molt. algebrica = molt. geometrica)



Forma di Jordan di una matrice

Per una generica A si può dimostrare che esiste sempre T tale che

$$J = TAT^{-1}$$

con μ autovalori distinti, $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ e n_i molteplicità (algebrica) di λ_i .

$$J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_\mu\}$$

con J_i blocco di Jordan associato all'autovalore λ_i dato da

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, \dots, J_{iv_i}\}$$

con $J_{ih} \in \mathbb{R}^{\eta h \times \eta h}$ miniblocchi di Jordan dell'autovalore λ_i dati da

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove $\sum_{h=1}^{v_i} \eta_{ih} = n_i$

Esponenziale di un miniblocco

Dato

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Il suo esponenziale $e^{J_{ih}t}$ è dato da

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \\ \vdots & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

λ_i reale o complesso.

Perchè usiamo Jordan? Perchè risulta più semplice fare l'esponenziale della matrice di Jordan rispetto alla matrice originaria.

Ovvero l'esponenziale della matrice non è altro che l'esponenziale degli autovalori sulla diagonale - prendi con le pinze quest'ultima cosa

Esempio (I)

Consideriamo il seguente sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Mediane un cambio di coordinate usando la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e ponendo $\hat{x}(t) = Tx(t)$, il sistema si può riformulare come

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Autovalori di \hat{A} : $-1, -2$ con molteplicità algebrica 2, 1

Consideriamo il seguente sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Mediane un cambio di coordinate usando la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e ponendo $\hat{x}(t) = Tx(t)$, il sistema si può riformulare come

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Esempio (II)

Per calcolare l'evoluzione libera consideriamo la formula vista in precedenza

$$\hat{x}_t(t) = e^{\hat{A}t} \hat{x}_0$$

Calcoliamo l'esponenziale di matrice $e^{\hat{A}t}$ per $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_t(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio 1: condizione iniziale è $\hat{x}_0 = [1 \ 0 \ 0]^\top$. Allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio 2: condizione iniziale è $\hat{x}_0 = [0 \ 1 \ 0]^\top$. Allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio 3: condizione iniziale è $\hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 1]^\top$. Allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

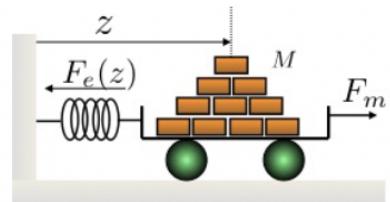
Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Esempio carrello (III)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



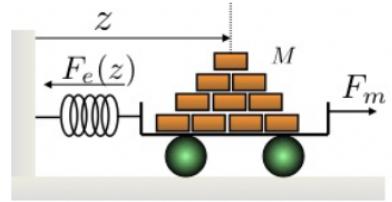
Nota: consideriamo k costante, quindi sistema LTI.

Autovalori

$$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}, \lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}} \text{ immaginari puri}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



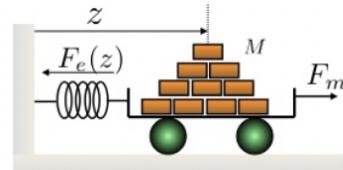
Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}, \quad \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se $h^2 > 4Mk$ autovalori reali. Se $h^2 < 4Mk$ complessi coniugati.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

Se $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$, (molteplicità algebrica = 2). Si può mostrare che molteplicità geometrica = 1, quindi blocco di Jordan 2×2 .

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

Stabilità interna

Conseguenze sulla traiettoria legate a incertezza sullo stato iniziale con **ingressi fissi e noti**

Sia $\dot{x}(t) = f(x(t))$, con x_e equilibrio ad esempio $f(x_e) = 0$,

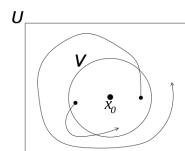
allora:

- **Equilibrio stabile**

Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale

che $\|x_0 - x_e\| < \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$ per tutti i $t \geq 0$.

Non significa altro che: se sono in un punto di equilibrio e mi discosto di un po'
allora il nuovo punto in cui mi trovo fa ancora parte dell'equilibrio



- **Equilibrio attrattivo**

Uno stato di equilibrio x_e si dice attrattivo se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che

$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$.

È lo stesso principio dell'equilibrio stabile MA ad ogni perturbazione che mi discosta torno sempre al punto di equilibrio iniziale. Vedi immagine

- **Equilibrio asintoticamente stabile**

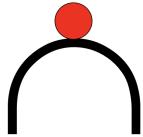
Un equilibrio si dice **asintoticamente stabile** se è stabile ed attrattivo.



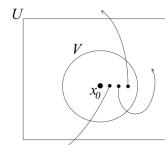
Stabile

- **Equilibrio instabile**

Uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se non è stabile.



Instabile



- **Stabilità locale**

Le proprietà valgono in un intorno dello stato di equilibrio x_e

- **Stabilità globale**

Le proprietà di stabilità e asintotica stabilità sono globali se valgono per $\forall x \in \mathbb{R}^n$

- **Stabilità di una traiettoria**

Le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria $\bar{x}(t), t \geq 0$

Nei sistemi lineari $x = 0$ è sempre un equilibrio (con $u = 0$, sistema non forzato)

Per i sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità (stesse di $x = 0$). Per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

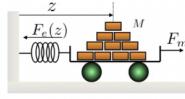
Teoremi

- Un sistema LTI è asintoticamente stabile **se e solo se** tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa (< 0)
- Un sistema LTI è stabile **se e solo se** tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i miniblocchi di Jordan associati hanno dimensione uno)

Si ha instabilità se almeno un autovalore ha parte reale positiva o se almeno un autovalore con parte reale nulla ha $m_a > m_g$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



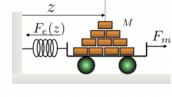
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

Nota: consideriamo k costante, quindi sistema LTI.

Autovalori

$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$, $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$ immaginari puri, quindi sistema semplicemente stabile.



Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}, \quad \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se $h^2 > 4Mk$ autovalori reali. Se $h^2 < 4Mk$ complessi coniugati. Parte reale nulla in entrambi i casi, quindi sistema asintoticamente stabile.

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

Nell'intorno di un equilibrio

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), t) \end{aligned}$$

Sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio, $f(x_e, u_e) = 0$, consideriamo una traiettoria a partire da stato iniziale $x(0) = x_e + \Delta x_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \Delta u(t) \end{aligned}$$

con $y(t) = h(x_e, u_e) + \Delta y(t) = y_e + \Delta y(t)$

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) &= f(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)) \\ y_e + \Delta y(t) &= h(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)) \end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor (f e h suff. regolari) in (x_e, u_e)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial u}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_e + \Delta y(t) &= h(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial u}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.} \end{aligned}$$

$$\dot{\Delta x}(t) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\Delta y(t) = \frac{\partial}{\partial x}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}x(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) + \text{term. ord. sup.} \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t) + \text{term. ord. sup.} \\ \Delta x(0) &= \Delta x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}x(t) &\approx A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &\approx C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato si può scrivere in questo modo

$$\begin{aligned}\dot{\delta}x(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t)\end{aligned}$$

Le cui traiettorie del sistema non lineare soddisfano

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \Delta x(t) \approx x_e + \delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \Delta u(t) = u_e + \delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \delta y(t)\end{aligned}$$

per variazioni "sufficientemente piccole"

| $(\delta x(t), \delta u(t)), t \geq 0$, traiettoria del sistema linearizzato

Teoremi relativi (Criteri di Ljapunov)

- Dato un sistema lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio.
Se il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e è localmente asintoticamente stabile.

| Praticamente significa che, se il sistema linearizzato intorno all'equilibrio è asintoticamente stabile allora anche il sistema non linearizzato in quell'intorno sarà asintoticamente stabile (ma localmente all'equilibrio)

- Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio.
Se il sistema linearizzato intorno (x_e, u_e) ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e , è instabile

| Praticamente significa che, se il sistema linearizzato intorno all'equilibrio ha almeno un autovalore a parte reale positiva allora anche il sistema non linearizzato in quell'intorno sarà instabile

| Non possiamo dire nulla in caso abbiamo almeno autovalore a parte reale nulla e i rimanenti con parte reale minore o uguale a zero

Retroazione dallo stato (I)

Prendiamo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Se supponiamo di misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) = x(t)$, allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice di guadagni e $v(t)$ un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)(Kx(t) + v(t)) = \\ x(t) &= A(t)x(t) + B(t)Kx(t) + B(t)v(t) = \\ \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Bv(t)\end{aligned}$$

Dai teoremi precedenti, **se vogliamo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile**, dovremo progettare K tale che $(A + BK)$ abbia autovalori tutti a parte reale negativa
A volte non esiste K che rende $(A + BK)$ con autovalori tutti a parte reale negativa. Questo dipende dalla coppia (A, B) ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) \neq x(t)$, esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure.

In questi casi si considerano sistemi ausiliari chiamati **osservatori** che stimano lo stato del sistema. Se sia possibile o meno ricostruire lo stato dipende dalla proprietà di **osservabilità**

Trasformata di Laplace

Data una funzione complessa f di variabile reale $t, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Noi tipicamente usiamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa (σ parte reale, ω parte immaginaria) allora chiameremo **Trasformata di Laplace di $f(t)$** la seguente

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Potrebbe non esistere! L'integrale potrebbe non convergere!

Notazione

Trasformazione di Laplace \mathcal{L}

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Osservazioni

- **Ascissa di convergenza**

Sia $\bar{\sigma} > -\infty$ estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$ per cui l'integrale converge. Allora trasformata esiste nel semipiano $Re(s) > \bar{\sigma}$.
 $\bar{\sigma}$ è chiamata **ascissa di convergenza**.

È quel punto da cui l'integrale converge

Si può estendere anche a $Re(s) \leq \bar{\sigma}$

Solo i valori di $f(t)$ per $t \geq 0$ determinano la trasformata

$\int_{0^-}^{+\infty}$ impulsi in 0 considerati nell'integrazione

- **Trasformate razionali**

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s), D(s)$ polinomi primi tra loro

Se f reale allora $N(s), D(s)$ a coefficienti reali.

◦ **Zeri** radici $N(s) = 0$

◦ **Poli** radici $D(s) = 0$

Formula di antitrasformazione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

con $\sigma > \bar{\sigma}$

Notazione

Antitrasformazione di Laplace \mathcal{L}

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

$f(t)$ fornita solo per $t \geq 0$. Si assume $f(t) = 0$ per $t < 0$

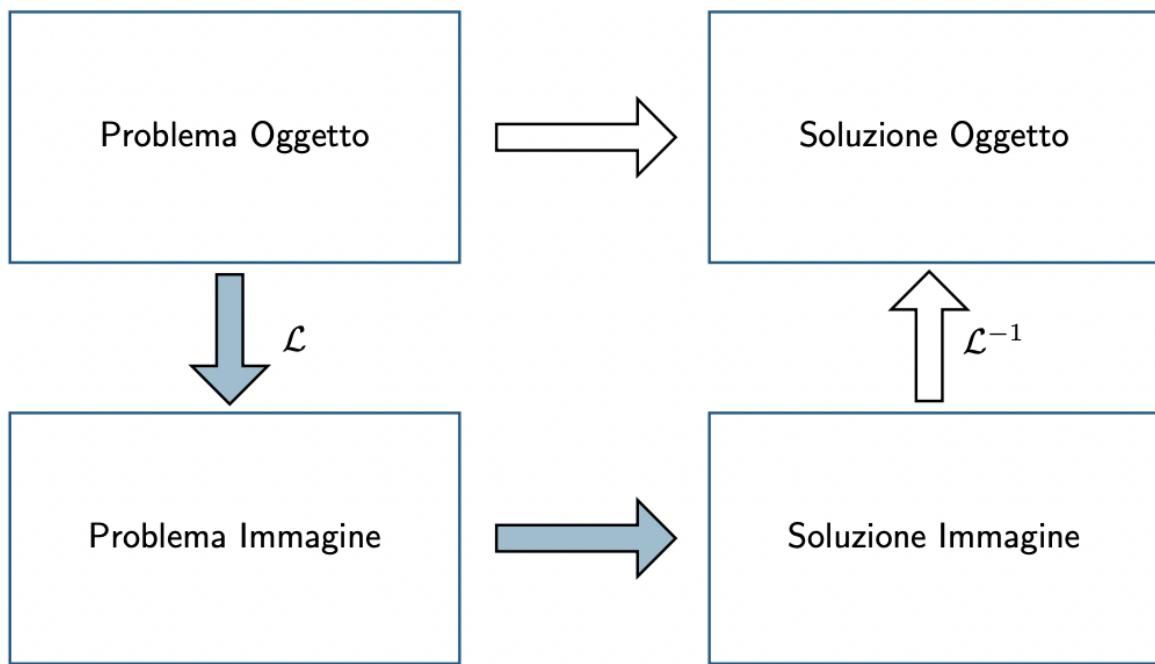
Considerando solo $f(t)$ t.c. $f(t) = 0$ per $t < 0$ allora corrispondenza biunivoca tra $f(t)$ e $F(s)$.

Hanno lo stesso contenuto informativo

Definizione poco usata per l'antitrasformazione. Useremo lo sviluppo di Heaviside per antitrasformare!

Perchè la trasformata di Laplace

Studiare il sistema nel dominio delle trasformate è molto più semplice!



Proprietà

- Linearità
- Traslazione temporale
- Traslazione nel dominio della variabile complessa
- Derivazione (nel tempo)

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Generalizzando

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t) \Big|_{t=0}$$

- **Integrazione (nel tempo) supponendo f integrabile tra 0 e $+\infty$**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

- **Convoluzione (nel tempo) assumendo funzioni nulle per $t < 0$**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$$

Teorema del valore iniziale

Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore del grado numeratore allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

| Praticamente ci permette di conoscere il **valore iniziale** della funzione conoscendo la sua trasformata

Teorema del valore finale

Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore del grado numeratore e poli nulli o parte reale negativa allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

| Praticamente ci permette di conoscere il **valore finale** della funzione conoscendo la sua trasformata

Trasformata di segnali elementari

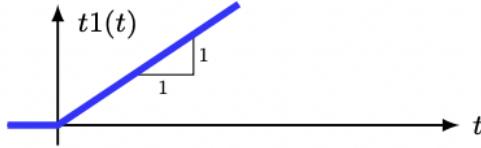
- $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$



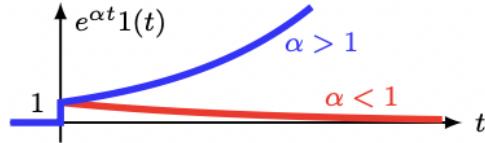
- $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$



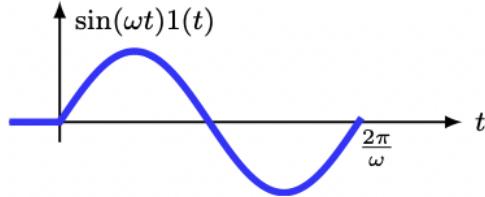
- $\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$



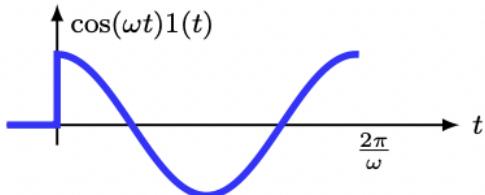
- $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$



- $\mathcal{L}[\sin(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$



- $\mathcal{L}[\cos(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$



- $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \psi)] = \frac{\omega \cdot \cos(\psi) \pm s \cdot \sin(\psi)}{s^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \psi)] = \frac{s \cdot \cos(\psi) \mp \omega \cdot \sin(\psi)}{s^2 + \omega^2}$

Funzione di trasferimento

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI), $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Siano $X(s) := \mathcal{L}[x(t)], U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$. Trasformiamo entrambi i membri.

Ricordando che $\mathcal{L}[\frac{d}{dt}x(t)] = sX(s) - x(0)$

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(sI - A)X(s) &= x_0 + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)\end{aligned}$$

Da quest'ultima si possono individuare le trasformate di evoluzione libera

$$\begin{aligned} X_l(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 \\ Y_l(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 \end{aligned}$$

ed evoluzione forzata

$$\begin{aligned} X_f(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y_f(s) &= (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \end{aligned}$$

Prendendo in considerazione solo la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

la matrice

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta **funzione di trasferimento**.

| Se sistema SISO, $G(s)$ è una funzione scalare

L'uscita forzata diventa

$$Y_f(s) = G(s)U(s)$$

| Abbiamo quindi una **rappresentazione ingresso-uscita** (rappres. esterna)

Se assumiamo che $x(0) = 0$ allora

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

| La funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso $x(0) = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Come si calcola

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Nel caso **SISO** funzione razionale fratta (rapporto di polinomi):

- denominatore di grado n e numeratore di grado $\leq n$ ($= n$ se $D \neq 0$)
- numeratore e denominatore possono avere radici comuni, quindi possono esserci cancellazioni (contenuto informativo minore della forma di stato)
- la differenza tra grado del numeratore e denominatore è detta **grado relativo**

Rappresentazioni e parametri

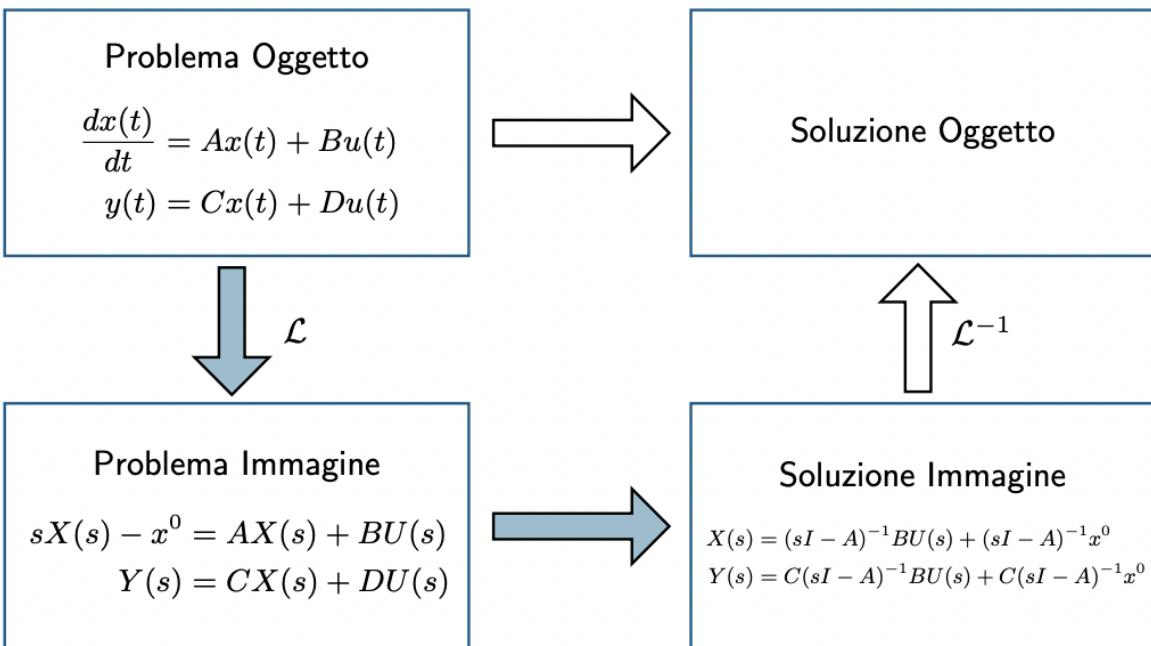
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_v s^v + \beta_{v-1} s^{v-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^v + \alpha_{v-1} s^{v-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- Le radici di $N(s)$ si dicono **zeri**
- Le radici di $D(s)$ si dicono **poli**

IMPORTANTE: I poli sono radici di $\det(sI - A)$ quindi sono autovalori di A

Poli e zeri sono reali o complessi coniugati (poiché radici di polinomi a coefficienti reali)



Forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

e

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

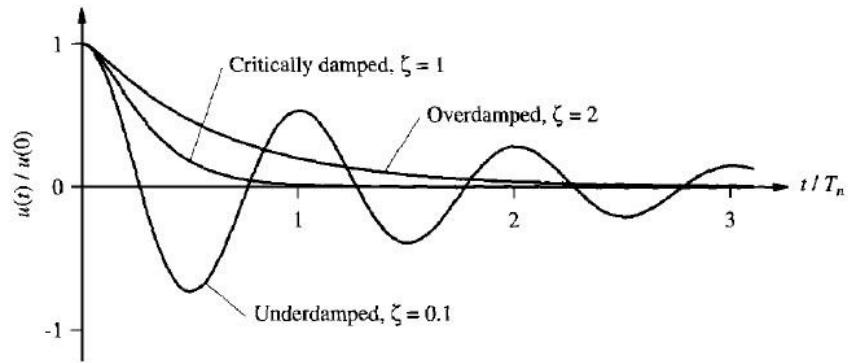
Notazione:

- ρ costante di trasferimento, μ guadagno
 - g tipo
 - $-z_i$ zeri reali, $-p_i$ poli reali, τ_i e T_i costanti di tempo ($\tau_i = -\frac{1}{z_i}$, $T_i = -\frac{1}{p_i}$)
 - $\alpha_{ni} > 0$, $\omega_{ni} > 0$ pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati
 - ζ_{ni}, ξ_{ni} ($|\zeta_{ni}| < 1$, $|\xi_{ni}| < 1$), smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati
- Lo smorzamento è un fattore che si applica a sistemi oscillanti il cui obiettivo è di attenuarne (o proprio eliminarne) l'oscillazione.

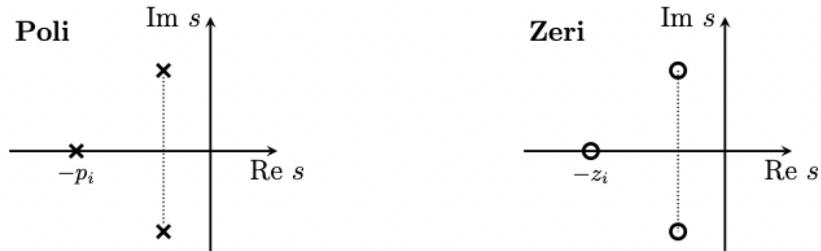
Se considero ζ uno smorzamento:

- $\zeta = 0$ smorzamento nullo.
Il sistema oscilla indefinitivamente
- $\zeta < 1$ sottosmorzato
Il sistema oscilla negli istanti iniziali ma poi tende a zero
- $\zeta > 1$ sovrasmorzato
Il sistema non oscilla mai e tende a zero
- $\zeta = 1$ smorzamento critico
Una via di mezzo tra il sovrasmorzato e il sottosmorzato, il sistema non oscilla mai e ritorna in un tempo più breve in una

situazione di equilibrio



Rappresentazione di poli e zeri nel piano complesso



Esempi di cancellazioni

Esempio 1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u\end{aligned}$$

$$y = x_2$$

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Esempio 2

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 4x_2$$

$$y = x_1$$

Trasformando entrambi i membri

$$sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) - 2X_2(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = 4X_2(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

In alternativa calcolandola come $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ si ha $G(s) = \frac{s-4}{(s-4)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

Antitrasformazione di Laplace

Ricordando che la trasformata della risposta di un sistema LTI è

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

con $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Si può fare vedere che gli elementi di $C(sI - A)^{-1}$ sono rapporti di polinomi.

Supponiamo che gli ingressi $U(s)$ siano rapporti di polinomi (gradino, rampa, funzioni sinusoidali)

Possiamo quindi scrivere

$$Y(s) = \frac{\hat{N}(s)}{\hat{D}(s)}$$

con $\hat{N}(s)$ e $\hat{D}(s)$ opportuni polinomi.

Ricordiamo che per $x(0) = 0$ (solo componente forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

E che quindi applicando in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ (con trasformata $U(s) = 1$) si ha

$$Y(s) = G(s)$$

Quindi per la risposta all'impulso le radici di $\hat{D}(s)$ sono i poli di $G(s)$

Ovvero la risposta ad un impulso è una combinazione lineare dei modi naturali del sistema lineare tempo invariante (SISO) descritto da $G(s)$

Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici

Caso 1 - poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)

Possiamo scrivere $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}$$

con k detti residui. Consideriamo

$$(s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} = 0 \implies$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{k_j(s + p_i)}{s + p_i} \Big|_{s=-p_i} + k_i = 0$$

Quindi ciascun residuo k_i può essere calcolato come

k_i reali se associati a poli reali, complessi coniugati se associati a una coppia di poli complessi coniugati

RIASSUMENDO:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}$$

con k_i

$$k_i = (s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

perciò

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} \cdot 1(t)$$

Esempio

Consideriamo la coppia di poli complessi coniugati

$$p_{i,1} = \sigma + j\omega \quad \text{e} \quad p_{i,2} = \sigma - j\omega$$

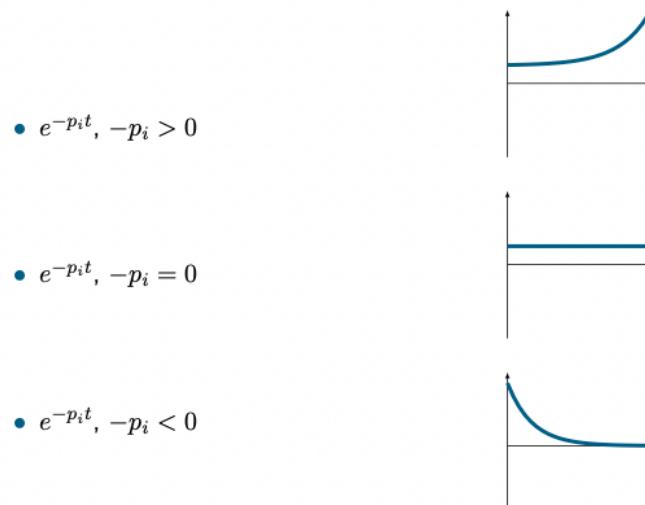
con residui associati (complessi coniugati)

$$k_{i,1} = M e^{-j\varphi} \quad \text{e} \quad k_{i,2} = M e^{j\varphi}.$$

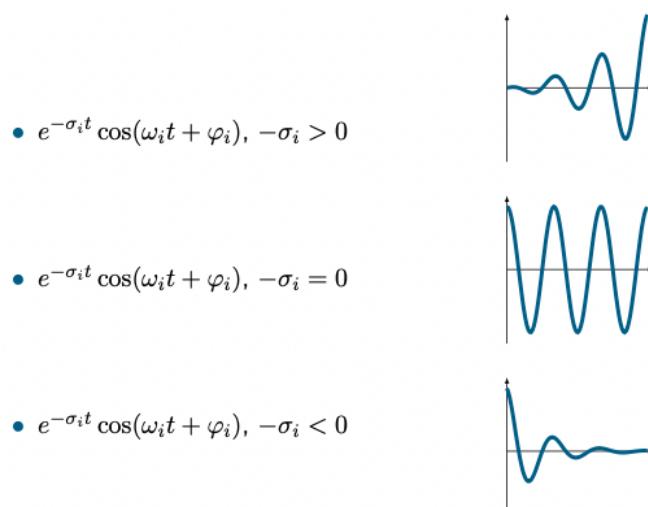
L'antitrasformata dei due termini associati è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_{i,1}}{s + p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s + p_{i,2}}\right] &= M e^{-j\varphi} e^{-p_{i,1} t} 1(t) + M e^{j\varphi} e^{-p_{i,2} t} 1(t) \\ &= M e^{-j\varphi} e^{-(\sigma+j\omega)t} 1(t) + M e^{j\varphi} e^{-(\sigma-j\omega)t} 1(t) \\ &= M e^{-\sigma t} (e^{-j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t + \varphi)}) 1(t) \\ &= 2 M e^{-\sigma t} \frac{(e^{-j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t + \varphi)})}{2} 1(t) \\ &= 2 M e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) 1(t). \end{aligned}$$

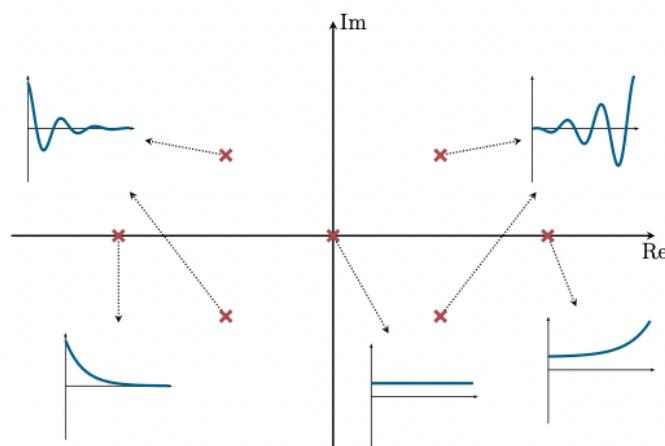
- Poli reali distinti



- Poli complessi coniugati distinti



Riassumendo



Caso 2 - poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{k_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con $k_{i,h}, h = 1, \dots, n_i$, residui del polo $-p_i$. Consideriamo

$$\begin{aligned} & (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} = \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1, j \neq i}^q \sum_{h=1}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i - h} k_{i,h} \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1, j \neq i}^q \sum_{h=1}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i - h} k_{i,h} + k_{i,n_i} \end{aligned}$$

Quindi ciascun residuo k_i può essere calcolato come

$$k_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Da cui derivando $(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$ si calcolano gli altri residui come

$$k_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i - h}}{ds^{n_i - h}} [(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}] \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando in fratti semplici

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \mathcal{L}\left[\frac{1}{(s + p_i)^h}\right] \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} \cdot 1(t) \end{aligned}$$

Esempio

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati,

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \text{e} \quad \sigma_i - j\omega_i,$$

con molteplicità n_i , il contributo elementare associato è dato da

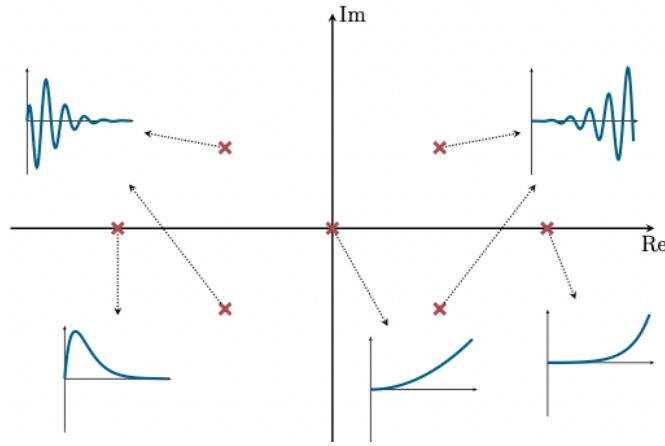
$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t).$$

Polo reale (multiplo) $-p_i$

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

Coppia di poli complessi coniugati (multipli) $-(\sigma_i + j\omega_i)$ e $-(\sigma_i - j\omega_i)$

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$



Risposte di sistemi elementari

Ricordiamo che

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

Se consideriamo il caso di poli distinti, risulta che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \sum_i \frac{k_i}{s + p_i} + \sum_i \frac{a_i s + b_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2}$$

Perciò è importante studiare le risposte di sistemi elementari

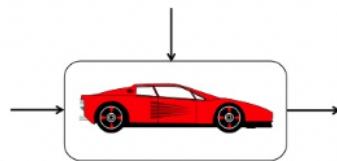
In altre parole: l'uscita di un sistema può essere visto come la somma delle uscite delle componenti che formano il sistema

Risposta sistemi del primo ordine con unico polo reale

"Cruise control" (controllo velocità di crociera)

Equazione della dinamica

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_m(t)$$



Scriviamo equazioni del sistema. Nella dinamica non compare $z(t)$, quindi definiamo $x := \dot{z}$, $u := F_m$ e consideriamo come uscita la velocità $y := x$.

$$\dot{x} = -\frac{b}{M}x + \frac{1}{M}u$$

$$y = x$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{Ms + b}$$

funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

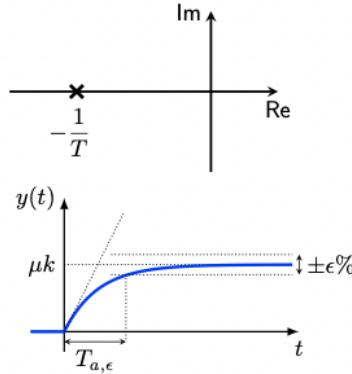
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+Ts)}$$

$\mu > 0, k > 0, T > 0$

Nota: se $T < 0$ sistema instabile

$$y(t) = \mu k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu k}{T}, y_\infty = \mu k$$



Tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$: tempo tale che $(1 - 0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon)y_\infty \forall t \geq T_{a,\epsilon}$

$$T_{a,\epsilon} = T \ln\left(\frac{1}{0.01\epsilon}\right) \Rightarrow T_{a,5} \approx 3T, \quad T_{a,1} \approx 4.6T$$

| Notare come il sistema si assesti a μk con una certa incertezza $\epsilon\%$

BIBO stabile (o stabilità esterna)

| Bounded Input Bounded Output

| Un sistema è BIBO stabile **se e solo se** tutti i poli di $G(s)$ sono a parte reale **strettamente minore** di zero

Un sistema si dice BIBO stabile se per qualsiasi ingresso limitato l'uscita è sempre limitata.

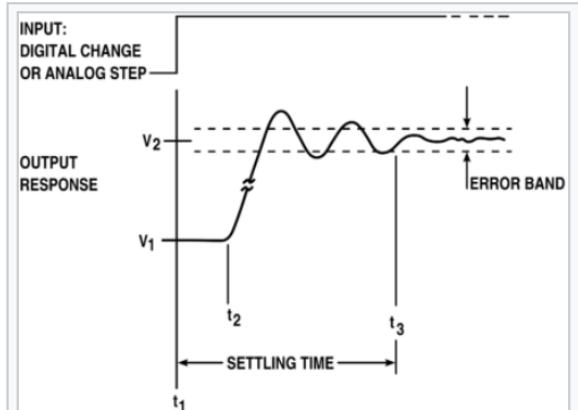
Tempo di assestamento

È il tempo che impiega il sistema di controllo, in seguito ad un ingresso istantaneo (gradino), ad assestarsi intorno ad una certa banda d'errore.

Dipende dalla risposta del sistema e dalla sua pulsazione naturale.

| La frequenza naturale è quella frequenza per cui il sistema oscilla (è stabile) in assenza di forze (input) esterne che ne alterano l'andamento

$T_{a,\epsilon} = \frac{-\ln(\epsilon)}{\zeta\omega_n}$ dove ϵ è la 'banda d'errore' voluta.



Settling time is the time required for an output to reach and remain within a given error band following some input stimulus.

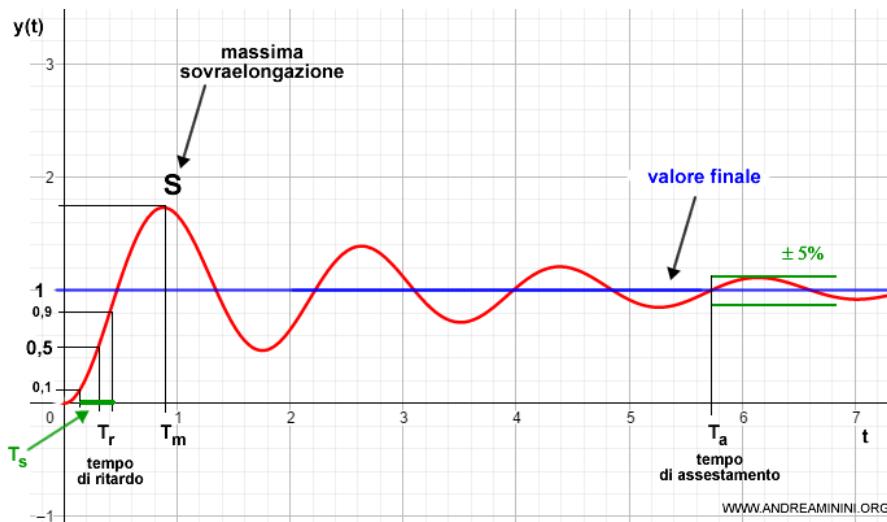
Esempio

Banda d'errore al 2% $\rightarrow \epsilon = 0.02$

$$T_{s,2} = \frac{-\ln(0.02)}{\zeta\omega_n} \approx \frac{3.9}{\zeta\omega_n}$$

Sovraelongazione (overshoot)

La sovraelongazione è il massimo valore (picco) da cui si discosta un sistema rispetto al target desiderato.



La sovraelongazione riveste un ruolo decisamente importante nella progettazione dei sistemi automatici una volta che una sovraelongazione elevata può danneggiare "fisicamente" gli adduttori o le parti del sistema stesso

Esiste anche il fenomeno di sottoelongazione che è l'esatto opposto (non studiata nel corso)

Un modo per calcolarla è:

$$\sigma = \frac{y_{max} - \bar{y}}{\bar{y}}$$

Dove:

- y_{max} è il massimo valore assunto dall'uscita del sistema
- \bar{y} è l'uscita all'equilibrio.

Vedremo dopo un altro modo per calcolare la sovraelongazione in funzione dello smorzamento (sovraelongazione percentuale)

Dalla FDT allo spazio degli stati

Sistemi del primo ordine

Considerazioni

- Per calcolare la risposta riscrivere $G(s) = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$ e sviluppare $Y(s) = G(s)U(s)$ in fratti semplici
- Risposta monotona, modi presenti: $1(t)$ dell'ingresso e $e^{-\frac{t}{T}}$ del sistema
- Valore asintotico è μk , quindi se l'ingresso fosse un riferimento k da seguire, avremmo un errore a regime $e_\infty = |1 - \mu|k$
- $T_{a,\epsilon}$ legato alla costante di tempo T

Un sistema del primo ordine può essere rappresentato nello spazio degli stati (rappresentazione NON unica) come

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{\mu}{T}u \\ y &= x \\ (*) \end{aligned}$$

Infatti, la funzione di trasferimento associata a (*) è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Perciò

- il parametro T in (*) è la costante di tempo associata al polo
- il parametro μ in (*) è il guadagno

Sistemi del secondo ordine

In generale, un sistema del secondo ordine può essere rappresentato nello spazio degli stati (rappresentazione NON unica) come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + \mu\omega_n^2 u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{*}$$

Infatti, la funzione di trasferimento associata a (*) è

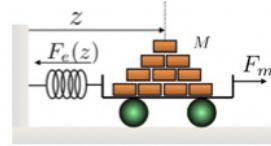
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Perciò:

- il parametro ξ in (*) è il coefficiente di smorzamento
- il parametro ω_n in (*) è la pulsazione naturale
- il parametro μ in (*) è il guadagno

Equazioni del sistema nello spazio degli stati

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1/M}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}} \\ &= \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\end{aligned}$$

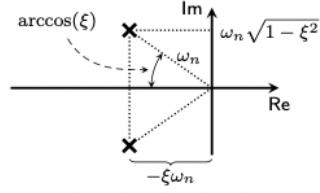
funzione di trasferimento

con $\mu = \frac{1}{k}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $\xi = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$.

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

ξ coefficiente di smorzamento ($|\xi| < 1$)
 ω_n pulsazione naturale ($\omega_n > 0$)



$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}, \omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \varphi = \arccos(\xi)$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2, y_\infty = \mu k$$

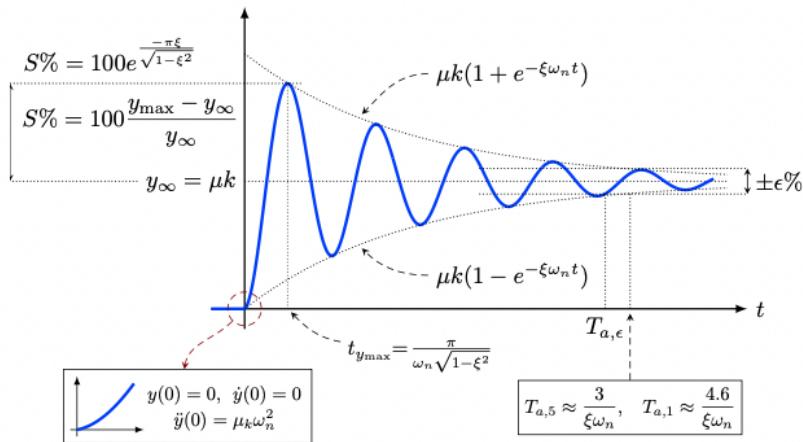
Approssimazioni di $T_{a,\epsilon}$: $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$

Sovraelongazione percentuale: $S\% = 100 \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$
 con y_{\max} valore massimo e y_∞ valore asintotico della risposta.

Per sistemi del secondo ordine si trova:

$$S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))1(t)$$



$S\%$ È la differenza tra il massimo valore in uscita e il valore finale

Luogo di punti a tempo di assestamento costante

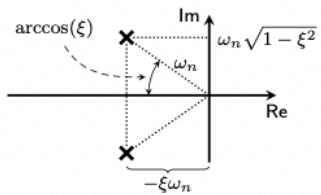
Obiettivo: caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha lo stesso tempo di assestamento

Ricordiamo che

- $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ e $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$

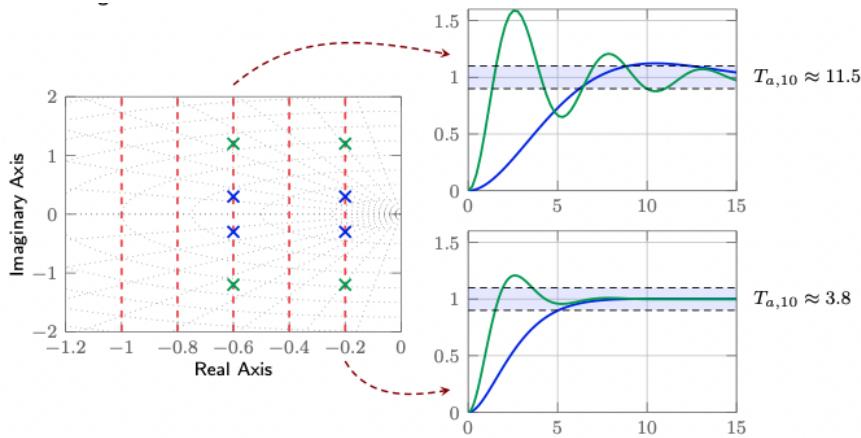
Tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$: tempo tale che $(1 - 0.01\epsilon) y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon) y_\infty$
 o in una forma più compatta $T_{a,\epsilon} = T \ln(\frac{1}{0.01\epsilon})$

- abbiamo visto che $-\xi\omega_n$ è la parte reale dei poli complessi coniugati



I sistemi con poli complessi coniugati che hanno la stessa parte reale $-\xi\omega_n$ avranno una risposta al gradino con stesso tempo di assestamento

Sul piano complesso i luoghi di punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario



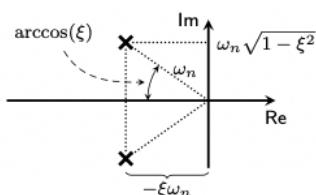
$T_{a,10} \approx 2.30T = \frac{-2.30}{\xi\omega_n}$ quindi se $\xi\omega_n$ è -0.2 otteniamo $T_{a,10} \approx 11.5$ se $\xi\omega_n$ è -0.6 otteniamo $T_{a,10} \approx 3.8$ le frecce sono invertite questo è consistente con la nozione che i poli dominanti sono quelli più vicini all'asse degli immaginari perché hanno un tempo di assestamento maggiore

Luogo di punti a sovraelongazione costante

Obiettivo: caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha la stessa sovraelongazione

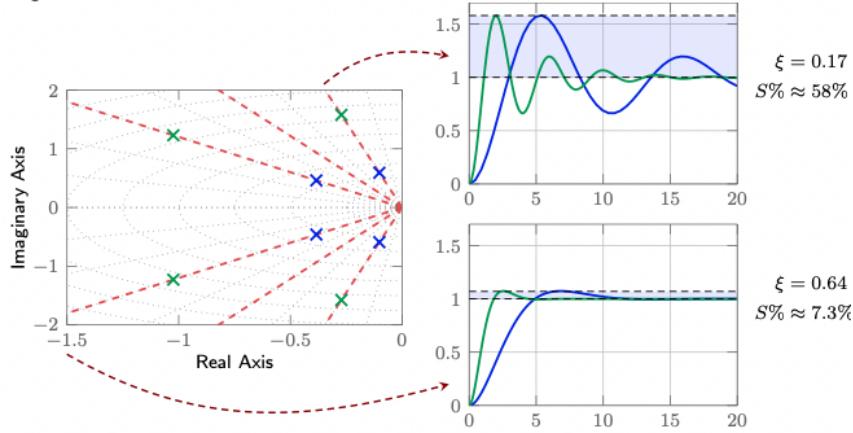
Ricordiamo che

- $S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- $\arccos(\xi)$ è l'angolo formato con l'asse reale



Quindi sistemi con stesso coefficiente di smorzamento ξ avranno una risposta al gradino con stessa sovraelongazione, ciò è consistente con la nozione fisica di ξ ovvero un attenuatore di oscillazioni

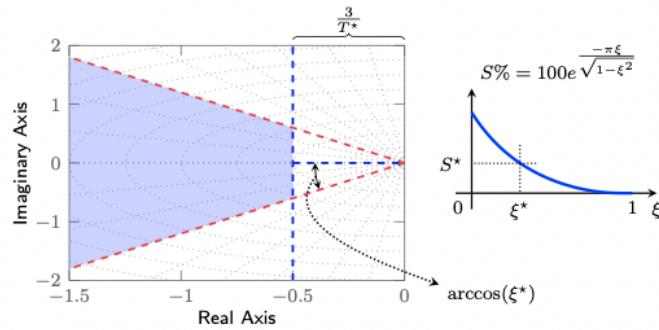
Sul piano complesso i luoghi di punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine



Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso

Obiettivo: caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) con $S\% \leq S^*$ e $T_{a,5} \leq T^*$

Le specifiche sono soddisfatte per $\xi \geq \xi^*$ (con $\xi \leq 1$) e $\xi \omega_n \geq \frac{3}{T^*}$



I poli complessi coniugati devono trovarsi nella zona colorata

Risposte al gradino

Sistemi del secondo ordine con poli reali

- Caso $T_1 \neq T_2, T_1 > T_2$ (poli distinti)

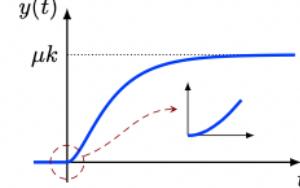
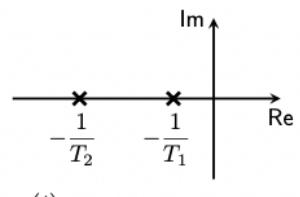
$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

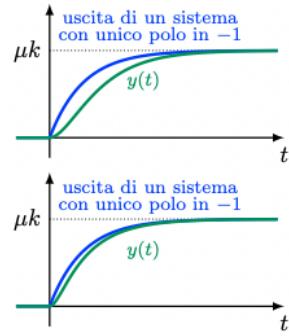
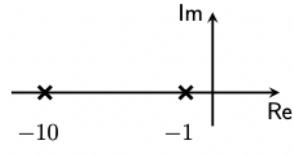
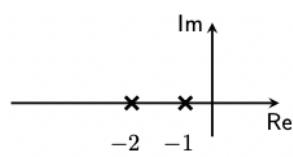
$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) = \frac{\mu K}{T_1 T_2}, y_\infty = \mu k$



Nota: I modi presenti sono $1(t)$ (ingresso), $e^{-\frac{t}{T_1}}$ e $e^{-\frac{t}{T_2}}$ (sistema).

- Consideriamo $T_1 \gg T_2$ (sistemi a polo dominante)

Nella risposta $e^{\frac{-t}{T_2}} \rightarrow 0$ velocemente e $\frac{T_2}{T_1 - T_2} \ll \frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$, quindi $y(t) \approx \mu k \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \cdot 1(t)$



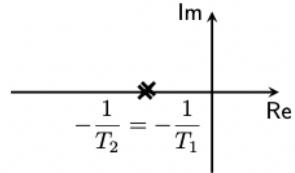
il polo dominante è quello più vicino all'origine, ovvero **quello con la risposta più lenta**

- Caso $T_1 = T_2$ (poli coincidenti)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)^2} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+T_1 s)^2}$$

$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) 1(t)$$

Nota: I modi presenti sono $1(t)$ (ingresso), $e^{-\frac{t}{T_1}}$ e $t e^{-\frac{t}{T_1}}$ (sistema).

Considerazioni (sistemi secondo ordine con poli reali)

- risposta monotona
- se $T_1 \gg T_2$ polo dominante allora comportamento simile a sistema del primo ordine
- $\dot{y}(0) = 0$ quindi continuità in zero anche della derivata prima
- $T_{a,\epsilon}$ funzione non semplice di T_1 e T_2

Sistemi del primo ordine con uno zero e polo reale

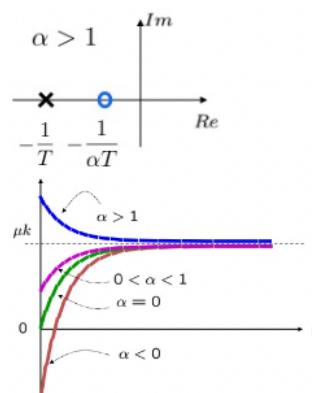
$$G(s) = \mu \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\alpha Ts}{s(1+Ts)}$$

$$\mu > 0, k > 0, T > 0$$

$$y(t) = \mu k \left(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = \mu \alpha k, y_\infty = \mu k$$



Nota: grado relativo zero (grado numeratore = grado denominatore) allora collegamento algebrico ingresso-uscita ($y(0) = \mu \alpha k \neq 0$).

Sistemi del secondo ordine con zero e poli reali

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2}, y_\infty = \mu k$$

Nota: il segno della derivata $\dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2}$ dipende da τ .

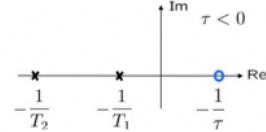
- **Caso $T_1 > T_2, \tau < 0$, sistemi a fase non minima (zero negativo, poli distinti)**

Chiamato a fase non minima perché per poco va nella direzione opposta a dove finirà con il passare del transitorio

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

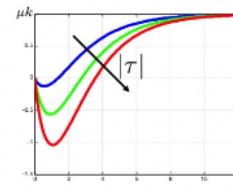
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2}, y_\infty = \mu k$$



Nota: sottoelongazione ($\dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} < 0$), il sistema inizialmente risponde "in senso contrario" (< 0) rispetto all'ingresso (> 0).

- **Caso $\tau > T_1 > T_2$, sistemi a fase minima (sovraelongazione) (zero maggiore dei due poli distinti)**

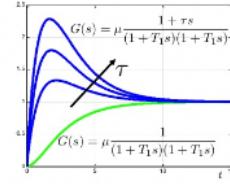
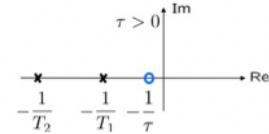
$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2}, y_\infty = \mu k$$



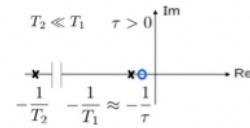
Nota: è presente una sovraelongazione tanto più accentuata quanto più lo zero è vicino all'origine (ovvero al crescere di τ).

- **Caso $\tau \approx T_1 \gg T_2$, sistemi a fase minima (code di assestamento) (zero circa uguale ad uno dei due poli, con un polo dominante)**

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

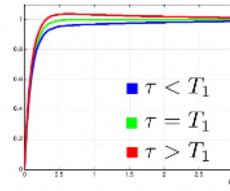
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

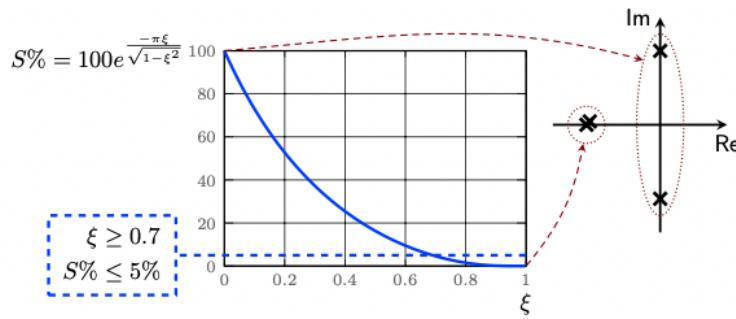
$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2}, y_\infty = \mu k$$



Nota: a causa della non perfetta cancellazione polo/zero ($\tau \approx T_1$) il modo "lento" $e^{-\frac{t}{T_1}}$ è presente e il suo transitorio si esaurisce lentamente.

Sovraelongazione percentuale in funzione dello smorzamento

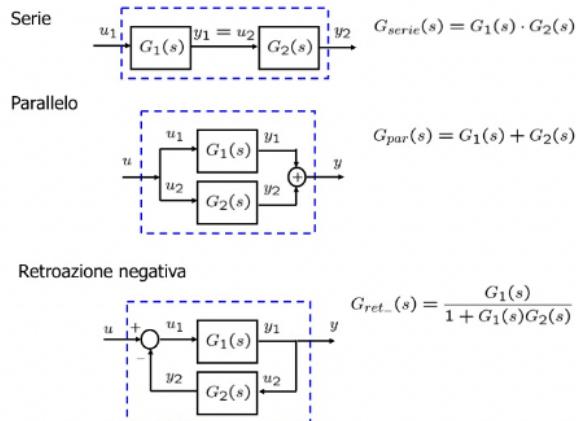
La sovraelongazione $S\%$ dipende solo da ξ ed è una funzione monotona decrescente



Dato un valore massimo di sovraelongazione, S^* , possiamo ricavare dal grafico il valore ξ^* corrispondente

Data la monotonicità, si ha che $S\% \leq S^*$ per ogni $\xi \geq \xi^*$

Interconnessione schemi a blocchi



Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Dato un sistema lineare tempo invariante **SISO** con funzione di trasferimento $G(s)$ vogliamo calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \psi)$$

La cui trasformata è

$$U(s) = U \frac{s \cdot \cos(\psi) - \omega \cdot \sin(\psi)}{s^2 + \omega^2}$$

Quindi

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cdot \cos(\psi) - \omega \cdot \sin(\psi)}{s^2 + \omega^2}$$

Considerando $G(s)$ con poli distinti a parte reale negativa (**quindi BIBO stabile**) e sviluppando in fratti semplici si ha

$$\begin{aligned} Y(s) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{k_i}{s + p_i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{k_u}{s - j\omega}}_{Y_2(s)} + \underbrace{\frac{\bar{k}_u}{s + j\omega}} \\ &= Y_1(s) + Y_2(s) \end{aligned}$$

Antitrasformando $Y(s)$ si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{k_i e^{-p_i t} 1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2|k_u| \cos(\omega t + \arg(k_u)) 1(t)}_{y_2(t)} \end{aligned}$$

Poiché i poli di $G(s)$ sono a parte reale negativa, i contributi $e^{-p_i t} 1(t)$ sono tutti convergenti a zero. Pertanto $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$

Il residuo k_u è dato da

$$\begin{aligned} k_u &= (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} = UG(j\omega) \frac{j\omega \cos(\psi) - \omega \sin(\psi)}{j\omega + j\omega} \\ &= UG(j\omega) \frac{j \cos(\psi) - \sin(\psi)}{2j} \\ &= UG(j\omega) \frac{\cos(\psi) + j \sin(\psi)}{2} \end{aligned}$$

Ricordando che $e^{j\psi} = \cos(\psi) + j \sin(\psi)$, si ha

$$k_u = UG(j\omega) \frac{e^{j\psi}}{2} = \frac{U|G(j\omega)|}{2} e^{j(\arg(G(j\omega)) + \psi)}$$

dove $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))}$.

Si ricava quindi che $Y(s)$

$$y(t) = y_1(t) + U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \psi + \arg(G(j\omega)))$$

ricordando che $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, l'uscita $y(t)$ converge a y_2 perciò avremo

$$y(t) \approx U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \psi + \arg(G(j\omega)))$$

Si può generalizzare in un teorema, vedi dopo.

Teorema del regime permanente

Se a un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ avente poli a parte reale negativa (**Sistema LTI BIBO stabile**) si applica un ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \psi)$$

l'uscita a transitorio esaurito è data da

$$y_2(t) = U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \psi + \arg(G(j\omega)))$$

Importante perché mi dice che se passo a un sistema BIBO stabile un segnale sinusoidale in ingresso

otterrò come uscita sempre un segnare sinusoidale con stessa pulsazione ω **ma ampiezza e fase**

mutate come segue

$$\text{Ampiezza : } u \rightarrow U|G(j\omega)|$$

$$\text{Fase : } \psi \rightarrow \psi + \arg(G(j\omega))$$

Esempio - risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Consideriamo un segnale d'ingresso $u(t)$ periodico ($\exists T > 0 : \forall t \geq 0 u(t+T) = u(t)$) che può essere sviluppato in serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n))$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e

$$U_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, 1, \dots$$

In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per t elevati

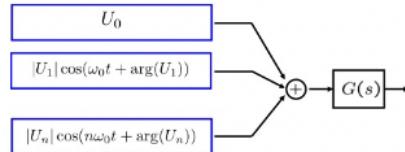
$$y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n))$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e

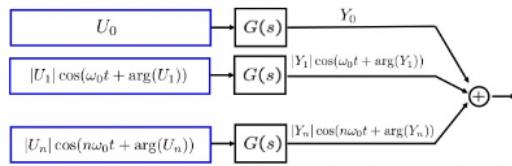
$$Y_n = G(jn\omega_0)U_n \quad n = 0, 1, \dots$$

Il risultato ottenuto si può schematizzare come segue:

Dato in ingresso un segnale periodico, esso può essere rappresentato come la somma delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier



che è equivalente a considerare lo schema seguente per t elevati



Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier

Dato un segnale non periodico dotato di **trasformata di Fourier**, possiamo scriverlo come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega$$

con

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ovvero l'ingresso è scomponibile come una infinità non numerabile di armoniche con valori di ω reali o maggiori di zero

Se il sistema è BIBO stabile, per t elevati avremo

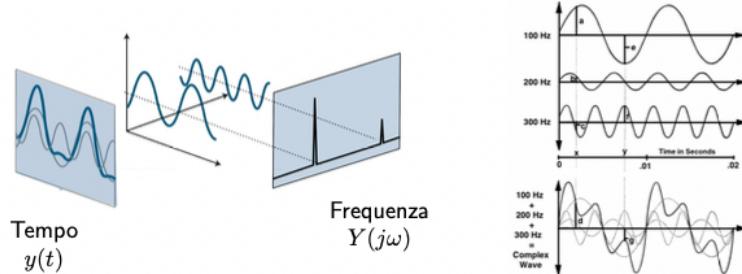
$$y(t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(Y(j\omega))) d\omega$$

con

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

Richiami - spettro di un segnale

Ogni segnale reale si può ottenere sommando opportune onde sinusoidali



Uno stesso segnale può essere quindi visto equivalentemente nel dominio del tempo ($y(t)$) o della frequenza ($Y(j\omega)$). Le funzioni $y(t)$ e $Y(j\omega)$ sono **ugualmente informative** e offrono due prospettive complementari per osservare lo stesso fenomeno.

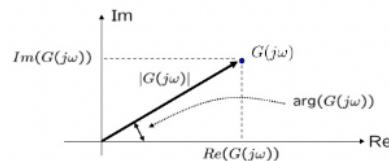
Pulsazione ω e frequenza f legate dalla relazione $\omega = 2\pi f$

Risposta in frequenza

La funzione complessa $G(j\omega)$ ottenuta valutando $G(s)$ per $s = j\omega$ è detta **risposta in frequenza**.

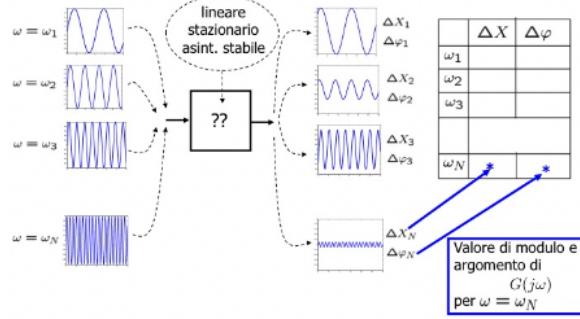
La risposta in frequenza viene estesa anche a sistemi non asintoticamente stabili.

Per un certo valore di ω , $G(j\omega)$ è un numero complesso.



Ci sono diversi modi di rappresentare la risposta in frequenza, uno dei più usati sono i **diagrammi di Bode** in cui si rappresentano separatamente $|G(j\omega)|$ e $\arg(G(j\omega))$ in funzione di ω

Nel caso in cui la risposta in frequenza non sia nota possiamo sfruttare i risultati precedenti per ricavarla sperimentalmente



Dalla rappresentazione grafica di $G(j\omega)$ sarà possibile ricavare guadagno statico, poli e zeri della funzione di trasferimento $G(s)$

Diagrammi di Bode

Funzione di tritardarasferimento in forma fattorizzata

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

la cui risposta in frequenza associata è

$$G(j\omega) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2})}$$

Scala logaritmica in base 10 per le ascisse

Diagramma delle ampiezze espresso in **decibel**: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$ (log in base 10)

Diagramma delle fasi espresso in **gradi**: $\arg(G(j\omega))$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log |G(j\omega)| \\ &= 20 \log |\mu| - 20 g \log |j\omega| \\ &\quad + \sum_i 20 \log |1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20 \log |1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}| \\ &\quad - \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| - \sum_i 20 \log |1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}| \end{aligned} \quad \begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \\ &= \arg \mu - g \arg(j\omega) \\ &\quad + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right) \\ &\quad - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg \left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right) \end{aligned}$$

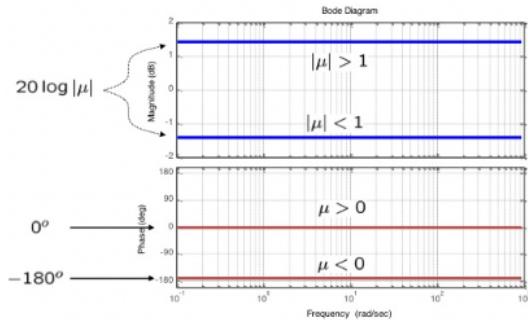
Possiamo quindi studiare l'andamento dei seguenti contributi elementari

$$\begin{aligned} G_a(j\omega) &= \mu \\ G_b(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^g} \\ G_c(j\omega) &= (1 + j\omega\tau_i) \quad e \quad G_c(j\omega) = (1 + j\omega T_i) \\ G_d(j\omega) &= \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right) \quad e \quad G_d(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \end{aligned}$$

per poi 'sommare' i diagrammi di tali contributi e ottenere $G(j\omega)$

Diagrammi di Bode - guadagno statico

$$G_a(j\omega) = \mu \quad |G_a(j\omega)|_{dB} = 20 \log |\mu| \quad \arg(G_a(j\omega)) = \arg(\mu)$$



Aampiezza:

- se $|\mu| \geq 1$ allora $20\log|\mu| \geq 0$
- se $|\mu| < 1$ allora $20\log|\mu| < 0$

Fase:

- se $\mu > 0$ allora $\arg(\mu) = 0$

| nel piano complesso siamo sull'asse reale a destra quindi 0 gradi

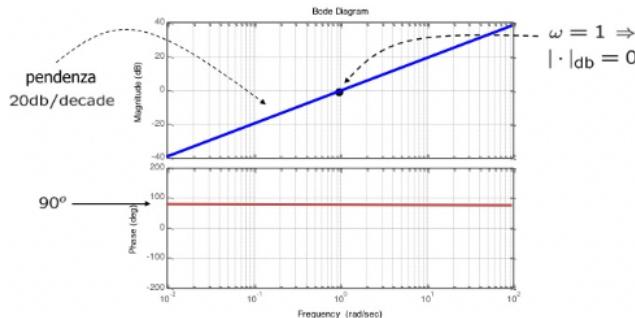
- se $\mu < 0$ allora $\arg(\mu) = -180^\circ$

| nel piano complesso siamo sull'asse reale a sinistra (numeri negativi) quindi abbiamo girato di -180°

Diagrammi di Bode - zeri nell'origine

Consideriamo uno zero nell'origine (ovvero $g = -1$)

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega) \quad \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$



Aampiezza

- scala logaritmica quindi $\log(\omega) \mapsto 20\log(\omega)$ è una retta con pendenza $20dB/dec$
- se ho g zeri nell'origine allora pendenza $(20 \cdot g)dB/dec$

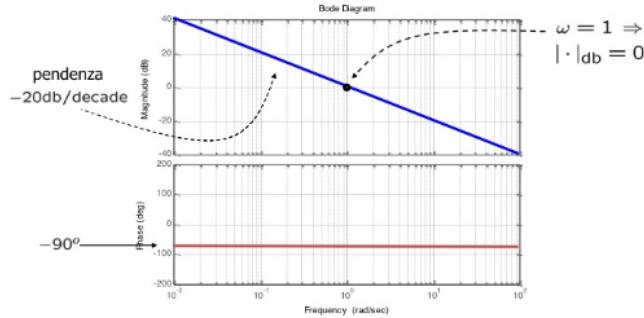
Fase

- $j\omega$ punto sul semiasse immaginario positivo $\forall \omega > 0$, quindi fase $90^\circ \forall \omega > 0$

Diagrammi di Bode - poli nell'origine

Consideriamo un polo nell'origine (ovvero $g = 1$)

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{dB} = -20\log(\omega) \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$



Aampiezza:

- scala logaritmica quindi $\log(\omega) \mapsto 20\log(\omega)$ è una retta con pendenza $-20dB/dec$
- se ho g zero nell'origine allora pendenza $-20 \cdot g dB/dec$

Fase:

- $-j\omega$ punto sul semiasse immaginario positivo $\forall \omega > 0$, quindi fase $-90^\circ \forall \omega > 0$

Diagrammi di Bode - zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\approx \begin{cases} 20\log(1) = 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 20\log(\omega|\tau|) = -20\log(\frac{1}{|\tau|}) + 20\log(\omega) & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

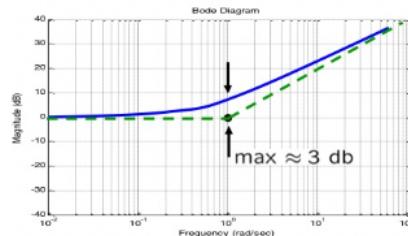


Diagramma asintotico

- fino a $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.
- A partire da $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ retta $\log(\omega) \mapsto -20\log(\frac{1}{|\tau|}) + 20\log(\omega)$ con pendenza $20dB/dec$

Diagramma reale

- Diagramma reale: scostamento massimo per $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ dove $|G_c(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{1+1} = 20\log\sqrt{2} \approx 3$

Diagrammi di Bode - zero reale negativo (fase)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau, \tau > 0$ (zero reale negativo)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

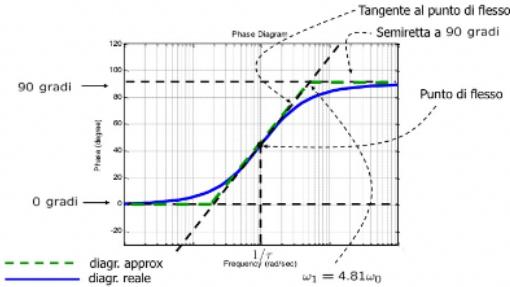


Diagramma reale

- il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{\tau}$

Diagrammi di Bode - zero reale positivo (fase)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau, \tau < 0$ (zero reale positivo)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

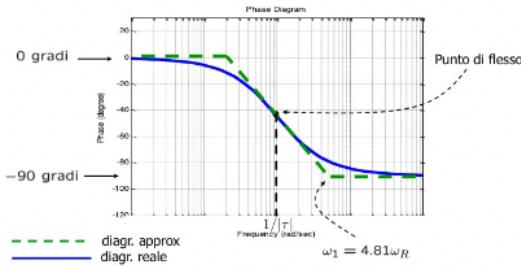


Diagramma reale

- il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{\tau}$

Diagrammi di Bode - polo reale

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ (polo reale)

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

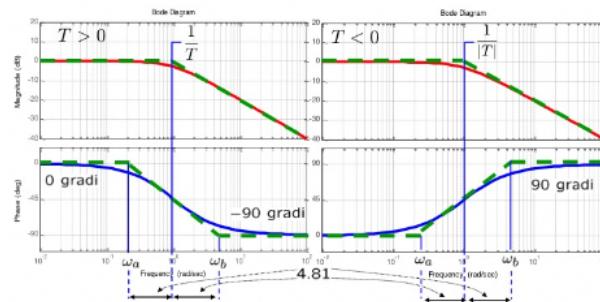


Diagramma ottenuto da quello dello zero ribaltando rispetto all'asse reale (consistentemente con il segno di T)

Diagrammi di Bode - polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}, T > 0$ (polo reale)

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

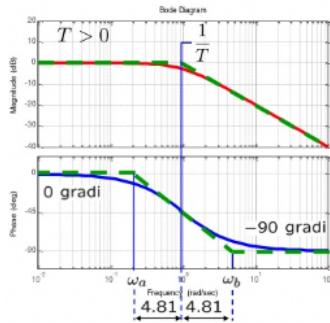


Diagramma asintotico

- fino a $\omega = \frac{1}{T}$, pulsazione di taglio, andamento a 0dB
- a partire da $\omega = \frac{1}{T}$, retta $\log(\omega) \mapsto 20\log\frac{1}{|T|} - 20\log(\omega)$ con pendenza $-20\text{dB}/\text{dec}$

Diagramma reale

- scostamento massimo per $\omega = \frac{1}{T}$ dove $|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log\sqrt{1+1} = 20\log\sqrt{2} \approx 3$
- il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{T}$

Diagrammi di Bode - zeri complessi coniugati (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri complessi coniugati)

$$|G_d(j\omega)| = 20\log\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2})^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$$

$$\approx \begin{cases} 20\log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20\log(\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}) = -40\log(\alpha_n) + 40\log(\omega) & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

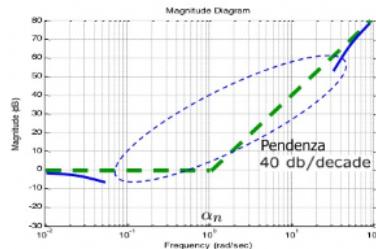
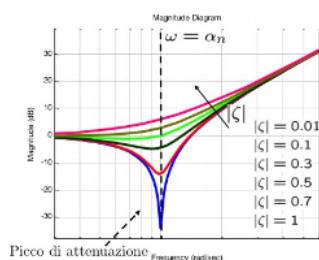


Diagramma asintotico

- fino a $\omega = \alpha_n$, pulsazione di taglio, andamento costante a 0dB
- a partire da $\omega = \alpha_n$, retta $\log(\omega) \mapsto -40\log(\alpha_n) + 40\log(\omega)$ con pendenza $-40\text{dB}/\text{dec}$

Diagramma reale:

- scostamento significativo nella zona tratteggiata dipendente dal valore di ζ



Minimo a pulsazione $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = 2|\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}|$

Diagrammi di Bode - zeri complessi coniugati parte reale negativa (fase)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta > 0$ (coppia di zeri complessi coniugati)

$$\arg(G_e(j\omega)) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

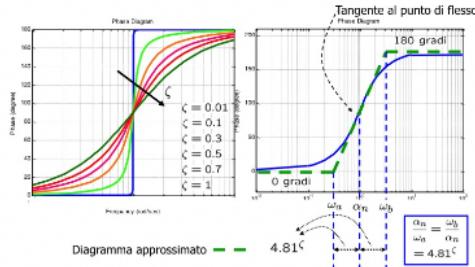


Diagramma reale

- il cambio di fase dipende in modo significativo dal valore di ζ

Diagrammi di Bode - zeri complessi coniugati parte reale positiva (fase)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta < 0$ (coppia di zeri complessi coniugati)

$$\arg(G_e(j\omega)) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ -180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

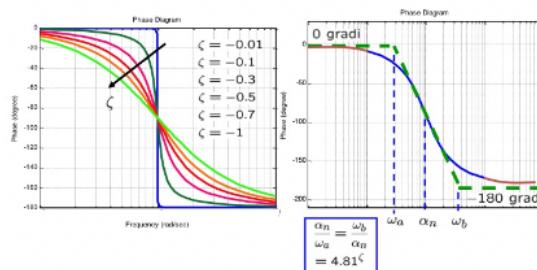


Diagramma reale

- il cambio di fase dipende in modo significativo dal valore di ζ

Diagrammi di Bode - poli complessi coniugati (parte reale negativa)

Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli complessi coniugati)

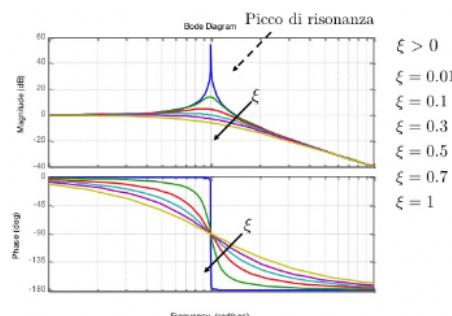


Diagramma ottenuto da quello degli zeri ribaltando rispetto all'asse reale (caso $\xi > 0$) corrispondente a $\zeta > 0$

Picco di risonanza alla pulsazione di risonanza $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi| \sqrt{1 - \xi^2}}$

Alla frequenza ω_n si ha $|G_d(j\omega)| = \frac{1}{2|\xi|}$

Diagrammi di Bode - poli complessi coniugati (parte reale positiva)

Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi < 0$ (coppia di poli complessi coniugati)

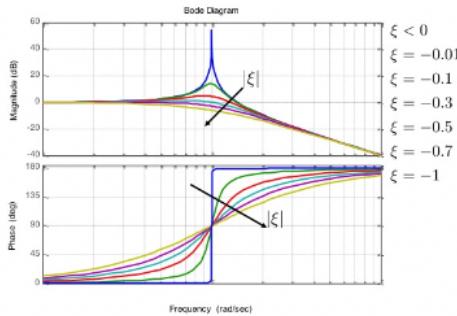


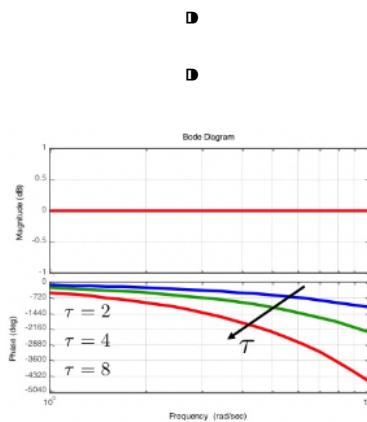
Diagramma ottenuto da quello degli zeri ribaltando rispetto all'asse reale (caso $\xi < 0$) corrispondente a $\zeta < 0$

Picco di risonanza alla pulsazione di risonanza $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$

Alla frequenza ω_n si ha $|G_d(j\omega)| = \frac{1}{2|\xi|}$

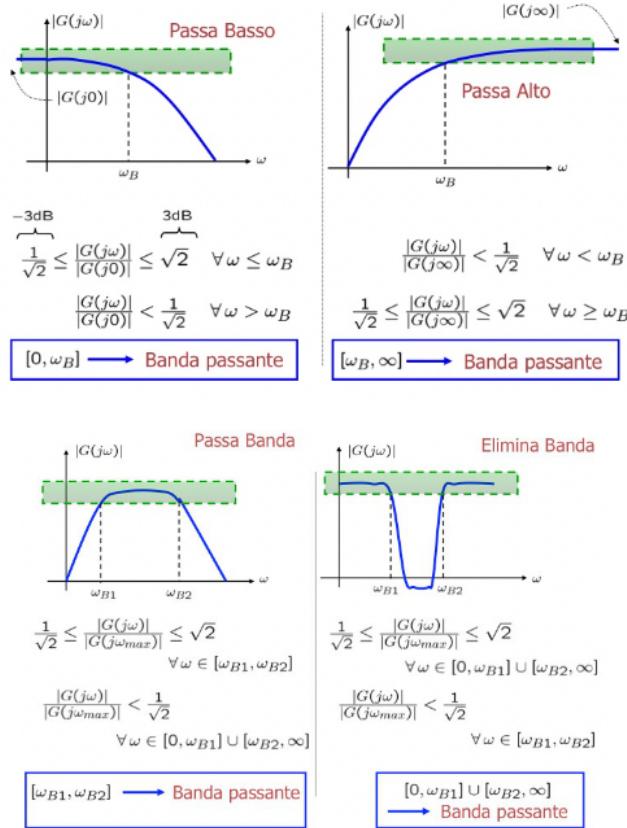
Ritardo temporale

Consideriamo $G(s) = e^{-\tau s}$ con $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$



Azione filtrante dei sistemi dinamici

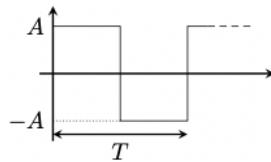
Quanto visto mostra che un sistema dinamico si comporta come un **filtro** per l'ingresso 'modellandolo' per produrre l'uscita



Esempio

Consideriamo un segnale $s(t)$ ad onda quadra con periodo T e ampiezza A

$$s(t) = A \text{sign}(\sin(\frac{2\pi t}{T})) = \begin{cases} A & \text{se } \sin(\frac{2\pi t}{T}) \geq 0 \\ -A & \text{se } \sin(\frac{2\pi t}{T}) < 0 \end{cases}$$



Supponiamo che l'ingresso consista nell'onda quadra più un disturbo sinusoidale ad alta frequenza $\omega_N \gg \frac{2\pi}{T}$ con ampiezza A_N :

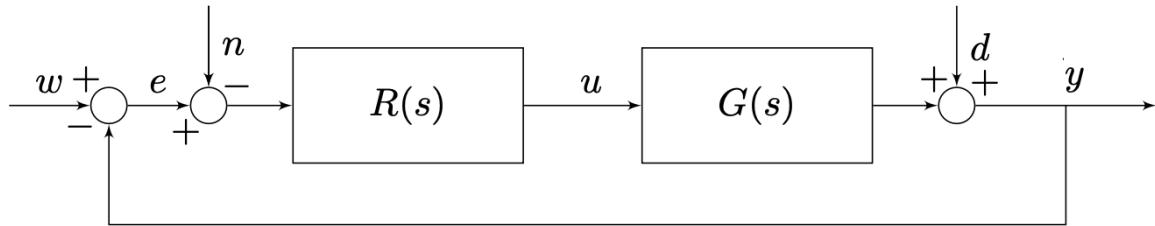
$$u(t) = s(t) + A_N \sin(\omega_N t)$$

Per filtrare il disturbo in alta frequenza possiamo usare un filtro **passabasso**, cioè un sistema dinamico del primo ordine con un polo reale in $-1\frac{1}{T_p}$: $G(s)\frac{1}{1+sT_p}$.

Scegliendo opportunamente la costante di tempo T_p il segnale in uscita sarà una versione filtrata dell'onda quadra con disturbo in alta frequenza quasi completamente attenuato.

Schema di controllo in retroazione

Un immagine vale più di mille parole



dove:

- w (v-doppia non omega!) è l'uscita di riferimento che vogliamo far assumere al nostro sistema chiamata anche $y_{rif}(t)$
- $n(t)$ detto errore di misura.

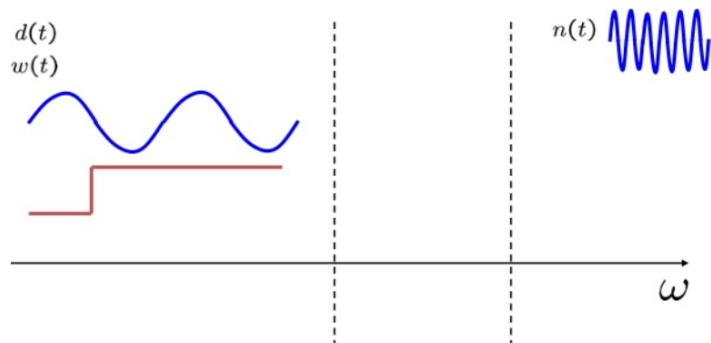
Tipicamente vive ad 'alte frequenze', infatti a frequenze basse lo assumeremo a 0.

| disturbi termici in componenti elettronici, accoppiamenti con campi e.m., etc.

- $d(t)$ detto errore di uscita + attuatore

Tipicamente vive a 'basse frequenze', infatti a frequenze alte lo assumeremo a 0.

| posizioni, velocità, rotazioni, etc.



Funzione di trasferimento in anello aperto $L(s)$

$$L(s) = R(s)G(s)$$

dove

- $R(s)$ è il regolatore tipicamente progettato
- $G(s)$ funzione di trasferimento del sistema

Stabilità nominale

| È un requisito fondamentale nella progettazione dei sistemi di controllo

Si tratta banalmente della asintotica stabilità o stabilità BIBO (esterna) se solo rappresentazione ingresso-uscita

Stabilità robusta

La stabilità deve essere garantita anche in condizioni perturbate

| Errori di modello, incertezze nei parametri, etc.

Prestazioni statiche

Sono le prestazioni che si vogliono **rispettare a transitorio finito** $t \rightarrow +\infty$

Tipicamente:

- $e(t)$ (errore a regime) limitato o nullo a fronte di ingressi w, d, n con determinate caratteristiche

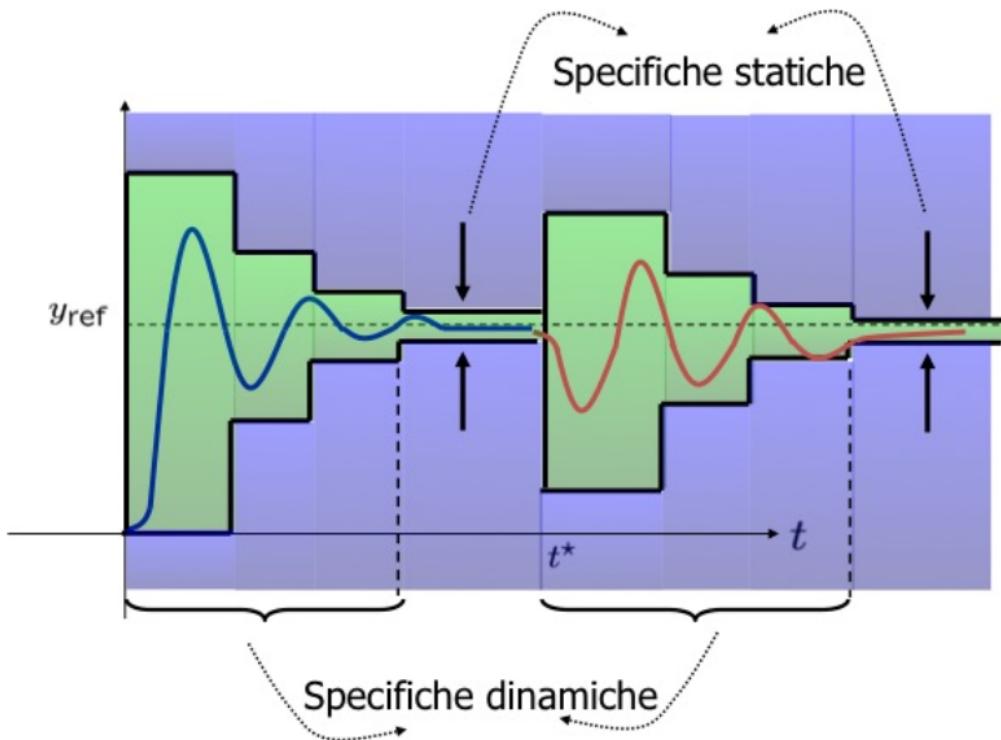
| Errore in risposta ad un ingresso a gradino o rampa

| Risposta a un ingresso sinusoidale a date frequenze (disturbi con certe componenti frequentiali)

Prestazioni dinamiche

Sono le prestazioni che si vogliono rispettare **durante il transitorio**

- risposta a un riferimento w , date in termini di assestamento $T_{a,\epsilon}$ e sovraelongazione $S\%$ massimi
- risposta a disturbi d e n , date in termini di attenuazione in certi range di frequenze (bande di frequenza dei disturbi)
- moderazione della variabile di controllo w , date in termini di contenimento dell'ampiezza (per evitare saturazione attuatori, uscita da range in cui linearizzazione è valida, costi eccessivi)



Margine di fase e ampiezza (M_f e M_a)

$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$ dove ω_c tale che $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0$

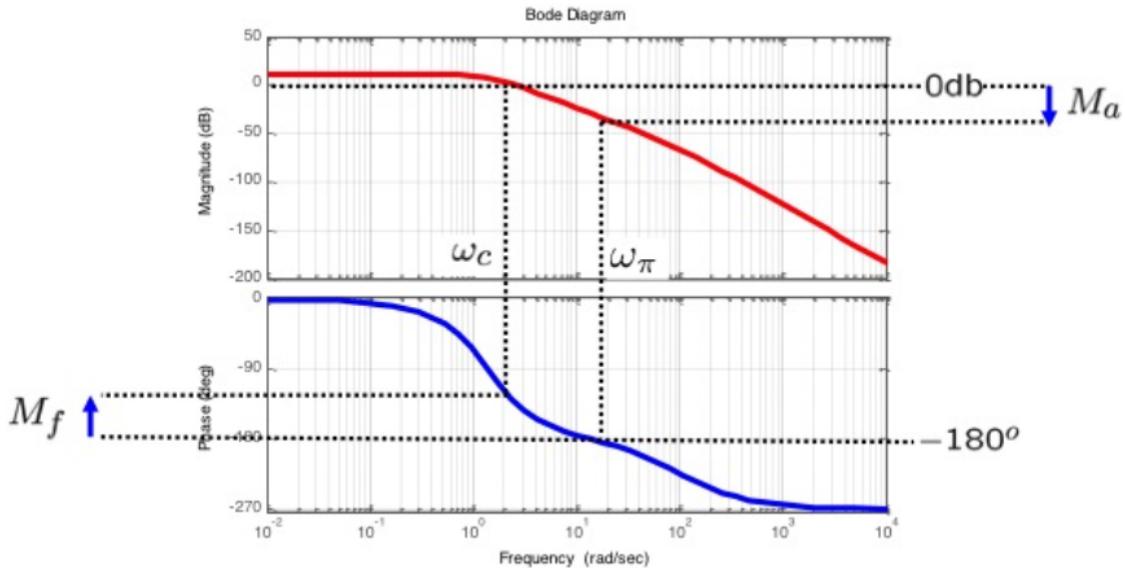
$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$ con ω_π t.c $\arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$

| ω_c è detta **pulsazione critica**. In altre parole è la pulsazione corrispondente all'attraversamento degli 0db da parte del modulo di $L(j\omega)$

| $M_f = \arg(L(j\omega_c) - (-180^\circ)) = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$

Durante la progettazione è importantissimo avere un $M_f > 0$ (più è alto più la stabilità sarà robusta)

Se la fase del sistema andasse sotto i 180° alla pulsazione critica il sistema sarebbe instabile. Il margine di fase è proprio quanto margine c'è tra la fase e i -180°



Ci sono casi in cui M_f e M_a non sono definiti o non sono informativi:

- intersezioni multiple: il diagramma delle ampiezze $|L(j\omega)|_{db}$ attraversa l'asse a 0db più di una volta
- assenza di intersezioni: il diagramma delle ampiezze $|L(j\omega)|_{db}$ NON attraversa l'asse a 0db
- segni discordi: margini di fase e ampiezza M_f e M_a hanno segno discordi (da qui si evince che devono avere lo stesso segno per essere informativi)

Il M_a rappresenta la massima incertezza tollerabile sul guadagno statico μ . Variazioni di μ determinano traslazioni del diagramma delle ampiezze e non alternano il diagramma delle fasi

Un ritardo della forma $e^{-s\tau}$ riduce il margine di fase. Il massimo ritardo tollerabile τ_{max} deve soddisfare $\tau_{max} < \frac{M_f}{\omega_c}$

Criterio di Bode

Dimostrabile

Lega la stabilità del sistema retroazionato a quella del sistema in anello aperto $L(s)$

Ipotesi, SE:

- $L(s)$ non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva
- il diagramma di Bode del modulo $|L(j\omega)|_{db}$ attraversi una sola volta l'asse a 0db

ALLORA, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti $\mu > 0$ (con guadagno statico di $L(j\omega)$) e $M_f > 0$.

La stabilità del sistema in retroazione è determinata dalla lettura di un solo punto sul diagramma di Bode di $L(j\omega)$

In altre parole guardando il diagramma di Bode in ω_c possiamo capire se la funzione in anello chiuso diverge o no

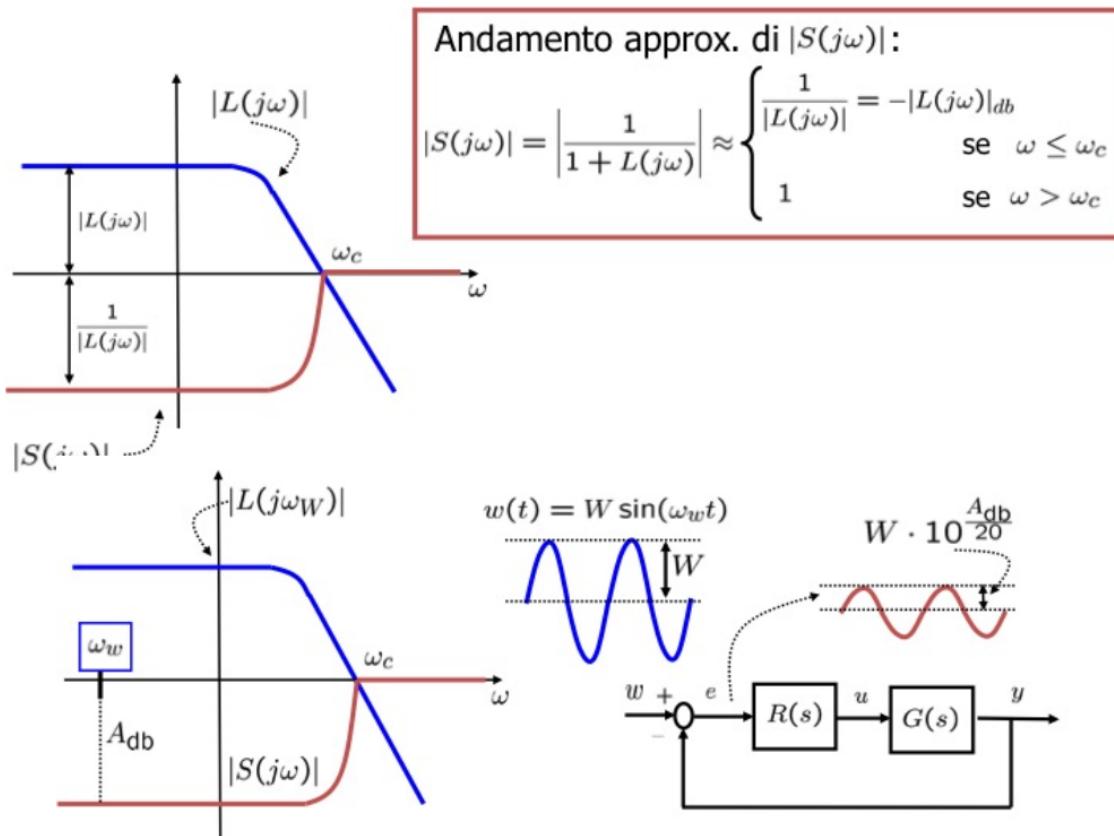
M_f e M_a in genere vanno considerati simultaneamente e forniscono una misura della robustezza rispetto a incertezze su $L(s)$

Maggiore è M_f , maggiore la nostra stabilità sarà robusta

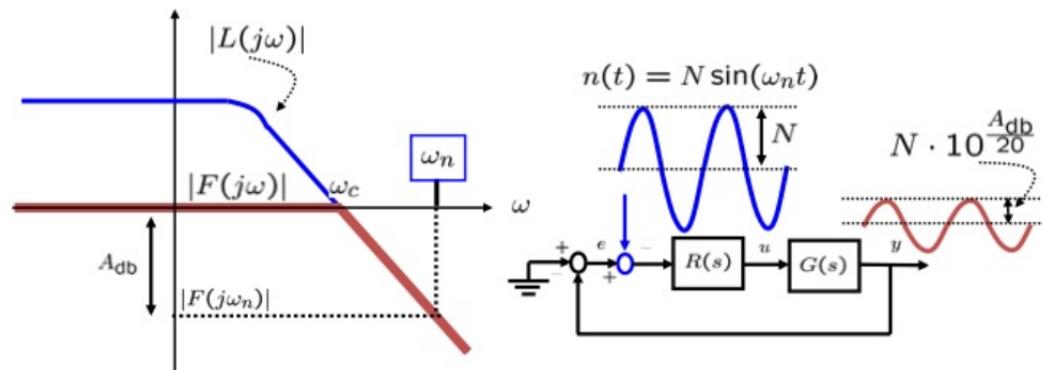
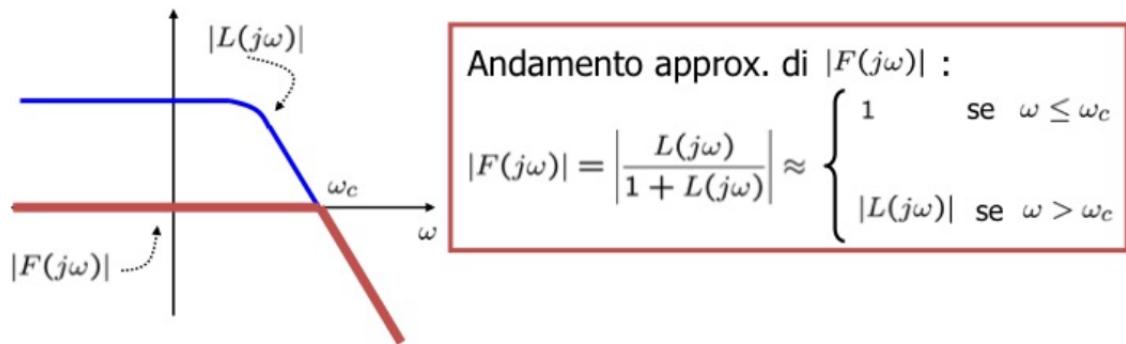
Funzioni di sensitività

Sono funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse.

- $S(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)}$ detta **funzione di sensitività**



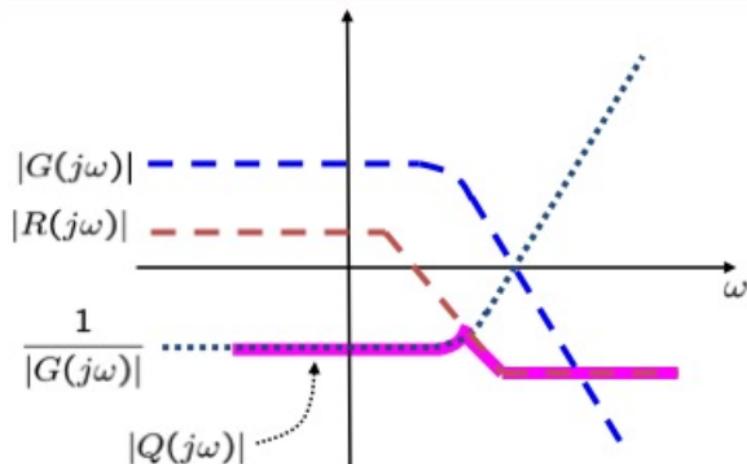
- $F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}$ detta **funzione di sensitività complementare**



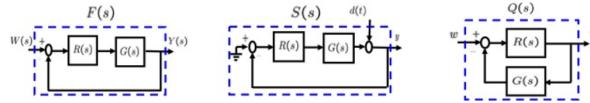
- $Q(s) = \frac{R(s)}{1+R(s)G(s)}$ detta **funzione di sensitività del controllo**

Andamento approx. di $|Q(j\omega)|$:

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(j\omega)}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$



Da cui si può ricavare che:

- $Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$

dove

- $Y_w(s)$ uscita con ingresso $W(s)$ e ponendo $D(s) = N(s) = 0$
- $Y_d(s)$ uscita con ingresso $D(s)$ e ponendo $W(s) = N(s) = 0$
- $Y_n(s)$ uscita con ingresso $N(s)$ e ponendo $D(s) = W(s) = 0$

- $U(s) = U_w(s) + U_d(s) + U_n(s)$

dove

- ...

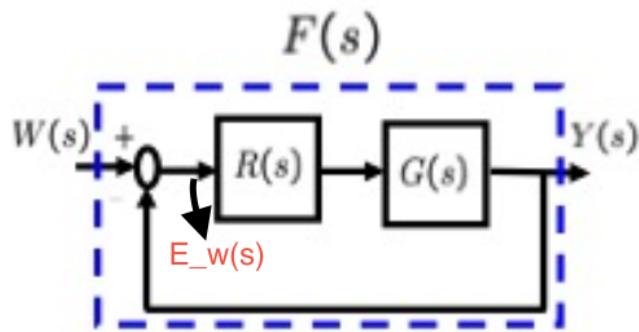
- $E(s) = E_w(s) + E_d(s) + E_n(s)$

dove

- ...

Come si ricavano

- Funzione di sensitività complementare $F(s)$



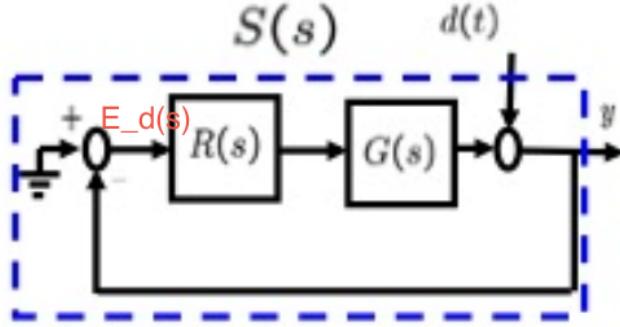
$Y_w(s)$ uscita con ingresso $W(s)$ e ponendo $D(s) = N(s) = 0$

$$\begin{aligned} Y_w &= R(s)G(s)E_w(s) = R(s)G(s)(W(s) - Y_w(s)) \\ &= R(s)G(s)W(s) - Y_w(s)R(s)G(s) \end{aligned}$$

Quindi si ricava che

$$\begin{aligned} Y_w + Y_w R(s)G(s) &= R(s)G(s)W(s) \\ \rightarrow Y_w(1 + R(s)G(s)) &= R(s)G(s)W(s) \\ \rightarrow Y_w(s) &= \underbrace{\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}}_{F(s)} W(s) \\ \rightarrow Y_w(s) &= F(s)W(s) \end{aligned}$$

- Funzione di sensitività $S(s)$



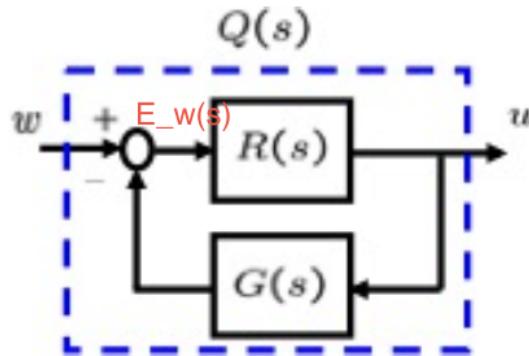
$Y_d(s)$ uscita con ingresso $D(s)$ e ponendo $W(s) = N(s) = 0$

$$Y_d(s) = D(s) + R(s)G(s)E_d(s) = D(s) + R(s)G(s)(-Y_d(s))$$

Quindi si ricava che

$$\begin{aligned} Y_d(s) + Y_d(s)R(s)G(s) &= D(s) \\ \rightarrow Y_d(s)(1 + R(s)G(s)) &= D(s) \\ \rightarrow Y_d(s) &= \underbrace{\frac{1}{R(s)G(s)}}_{S(s)} D(s) \\ \rightarrow Y_d(s) &= S(s)D(s) \end{aligned}$$

- **Funzione di sensitività del controllo $Q(s)$**



$$\begin{aligned} U(s) &= R(s)E_w(s) = R(s)(W(s) - U(s)G(s)) \\ &= R(s)W(s) - R(s)U(s)G(s) \end{aligned}$$

Quindi si ricava che

$$\begin{aligned} U(s) + U(s)R(s)G(s) &= R(s)W(s) \\ \rightarrow U(s)(1 + R(s)G(s)) &= R(s)W(s) \\ \rightarrow U(s) &= \underbrace{\frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}}_{Q(s)} W(s) \\ \rightarrow U(s) &= Q(s)W(s) \end{aligned}$$

Riassumendo

- Ingresso $w \neq 0, d = n = 0$
 - $Y_w(s) = F(s)W(s)$

- $U_w(s) = Q(s)W(s)$
- $E_w(s) = S(s)W(s)$
- Ingresso $w = 0, d \neq 0, n = 0$
 - $Y_d(s) = S(s)D(s)$
 - $U_d(s) = -Q(s)D(s)$
 - $E_d(s) = -S(s)D(s)$
- Ingresso $w = 0, d = 0, n \neq 0$
 - $Y_n(s) = -F(s)N(s)$
 - $U_n(s) = -Q(s)N(s)$
 - $E_n(s) = F(s)N(s)$

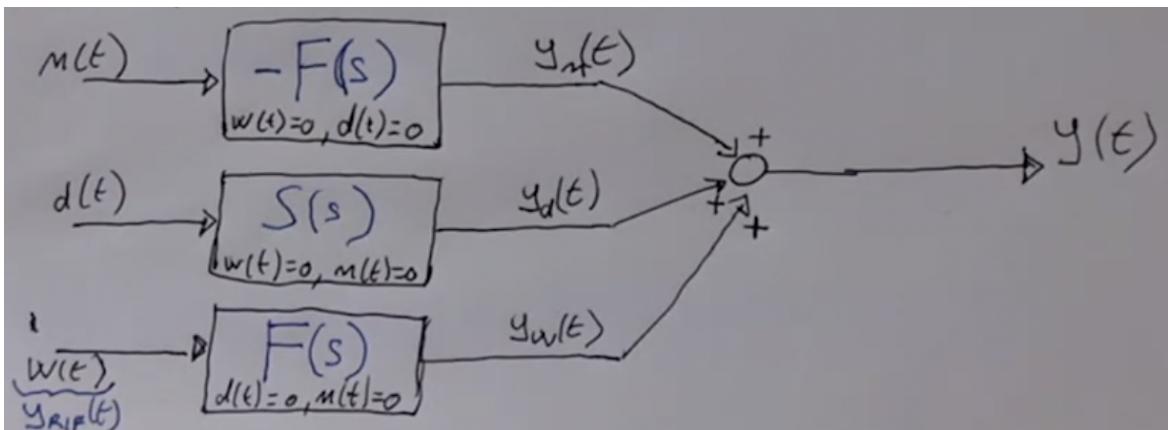
| Si trovano tutte come mostrato sopra, spegnendo i vari ingressi giocando un po' con l'equazione

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)$$

Considerazioni

- Stabilità: notare che il denominatore di tutte le funzioni di sensitività è lo stesso perciò è consistente col fatto che la stabilità del sistema (retroazionato) non dipende dal particolare ingresso considerato
- $S(s)$ e $F(s)$ dipendono dal prodotto $L(s) = R(s)G(s)$, mentre $Q(s)$ dipende esplicitamente da $R(s)$
Le funzioni $S(s)$ e $F(s)$ sono legate fra loro (vedi anche il nome), in particolare $S(s) + F(s) = 1$
Per seguire fedelmente il riferimento $w(t)$ vorremmo $F(s) = 1$ e per annullare l'effetto del disturbo $d(t)$ vorremmo $S(s) = 0$

| Tuttavia se $F(s) = 1$ il disturbo $n(t)$ non sarebbe per niente attenuato



- Per $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$ cercheremo di avere
 - $|F(j\omega)| \approx 1$ a basse frequenze (inseguimento di $w(t)$)
 - $|F(j\omega)| \approx 0$ ad alte frequenze (abbattimento di $n(t)$), azzeriamo il disturbo

Il regolatore $R(j\omega)$ sarà progettato in modo che

- $|L(j\omega)| \gg 1$ a basse frequenze
- $|L(j\omega)| \ll 1$ ad alte frequenze

OBIECTIVO $|F(j\omega)| \approx 1$ $\omega \text{ "BASSA"}$

$\hat{\Rightarrow} \left(\begin{array}{l} \text{NOTA: } |F(j\omega)|_{dB} \approx 0 \\ \arg(F(j\omega)) \approx 0 \end{array} \right)$

$\hat{\Rightarrow} |S(j\omega)| \approx 0$ $\omega \text{ "BASSA"}$

$\left(\begin{array}{l} \text{NOTA: } |S(j\omega)|_{dB} \ll 0 \\ \rightarrow -\infty \end{array} \right)$

$\hat{\Rightarrow} |F(j\omega)| \approx 0$ $\omega \text{ "ALTA"}$

$\left(\begin{array}{l} \text{NOTA: } |F(j\omega)|_{dB} \ll 0 \end{array} \right)$

Errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$

Sia $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ con $e(t) = w(t) - y(t)$ errore in risposta a un ingresso con trasformata $W(s) = \frac{W}{s^k}$ allora

$$e_\infty = \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} sS(s)}_{\text{teorema del valore finale}} \cdot \frac{W}{s^k} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k-1 \\ \frac{W}{\mu} & g = k-1 \\ 0 & g > k-1 \end{cases}$$

Se

- $g < k-1$ l'errore diverge
- $g = k-1$ l'errore a regime è finito e diminuisce all'aumentare di μ
- $g > k-1$ l'errore a regime è nullo

Il sistema in anello chiuso deve essere asintoticamente stabile

Affinchè l'errore a regime $W(s) = \frac{W}{s^k}$ sia nullo occorre che $L(s)$ abbia un numero di poli almeno pari a k (principio del modello interno, vedi definizione dopo)

Esempio - analisi statica di un errore a gradino

Errore statico in seguito a un ingresso $U(S) = \frac{W}{s}$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s} = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + R(0)G(0)}$$

Sapendo che $R(0)G(0) = \mu_r \mu_g = L(0) = \mu$

$$e_\infty = W \frac{1}{1 + \mu}$$

Principio del modello interno

Affinchè un segnale di riferimento con una componente spettrale alla frequenza ω_0 sia **inseguito (neutralizzato) a regime perfettamente in uscita** è necessario e sufficiente che:

1. il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile
2. il guadagno d'anello $L(s)$ abbia una coppia di poli c.c. sull'asse immaginario con pulsazione naturale pari a ω_0

In spiccioli

se vogliamo avere un sistema retroazionato che porta in uscita esattamente l'ingresso che gli abbiamo proposto avviene questo $w(t) = y(t) \implies e(t) = w(t) - y(t) = 0$
ovvero in termini grafici



ovvero sto chiedendo alla $L(s)$ di generare autonomamente i modi dell'ingresso, questo richiede che la $L(s)$ in se stessa abbia quei modi.

Se voglio in uscita un gradino $W(S) = \frac{W}{s} \implies L(s)$ deve avere un polo nell'origine per avere $e(t) = 0$. Se generalizziamo questa nozione se voglio in uscita un segnale sinusoidale del tipo $W(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \implies L(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$

Polo dominante

Il **polo/i poli dominanti** sono quelli maggiormente vicini all'asse immaginario.

Sono quelli che influiscono maggiormente sulla risposta del sistema ad un ingresso generico

Progetto del regolatore

Dovremo rispettare queste specifiche (non sempre tutte)

- Stabilità robusta rispetto a incertezze
- Precisione statica
- Precisione dinamica
- Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$
- Attenuazione disturbo di misura $n(t)$
- Moderazione variabile di controllo $u(t)$
- Fisica realizzabilità del regolatore $R(s)$

Stabilità robusta rispetto a incertezze

Ricordiamo: è la stabilità in presenza di errori di modello o incertezze di parametri

Specifica su $|L(j\omega)| : M_f \geq M_f^*$

Esempio: massimo ritardo temporale τ_{max} o massima incertezza sul guadagno statico $\Delta\mu_{max}$

Precisione statica

Per soddisfare le specifiche va considerata l'analisi statica effettuata sulla funzione di sensitività $S(s)$

con $w = W \cdot 1(t)$, $d = D \cdot 1(t)$ e $|W| \leq W^*$, $|D| \leq D^*$

$$e_\infty = \frac{D + W}{1 + \mu} \approx \frac{D + W}{\mu} \implies \mu = L(0) \geq \frac{D^* + W^*}{e^*}$$

L'errore a transitorio esaurito, per il principio di sovrapposizione degli effetti, è

dato dalla somma dei contributi dovuti agli ingressi

$$e_\infty = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

Di norma, per avere un po' di margine, ci si mette nel caso pessimo, per cui vale

sempre la seguente diseguaglianza

$$|e_\infty| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Ci si riconduce quindi a calcolare i valori del modulo dell'errore a transitorio esaurito dovuti a ciascun ingresso

	$A \text{ sca}(t)$
Valore di regime $ e(\infty) $	$g = 0$
in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$	$g = 1$
	$g = 2$
	$g = 3$

Quindi per $g = 0$ (niente poli nell'origine del regolatore statico) abbiamo

$$e_w(\infty) = \frac{A_w}{1+\mu}, \quad e_d(\infty) = \frac{A_d}{1+\mu} \text{ ne segue che}$$

$$e_\infty \leq \frac{A_w + A_d}{1+\mu} = \frac{D+W}{1+\mu}$$

Esempio specifica: $e_\infty = 0$ in risposta a $W(s) = \frac{W}{s^k}$ e/o $D(s) = \frac{D}{s^k}$
 $\Rightarrow L(s)$ deve avere k poli nell'origine

Nota: se $e_\infty = 0$ in risposta a un disturbo sull'attuatore , allora $D(s) = D_a(s)G(s)$ e $E(s) = S(s)G(s)D_a(s)$ quindi k poli nell'origine in $R(s)$

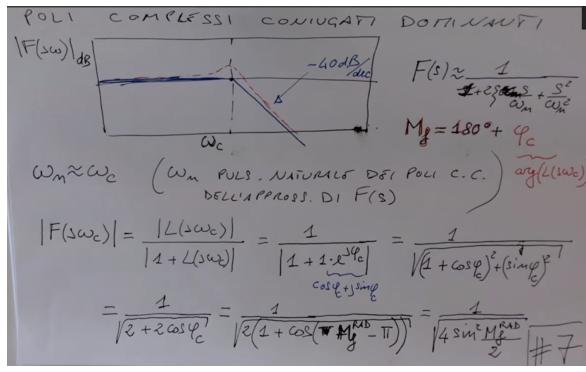
Esempio specifica: se $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a $W(s) = \frac{W}{s^k}$ e $D(s) = \frac{D}{s^k}$ allora
 $k - 1$ poli in $L(s)$ e $\mu > \frac{D^* + W^*}{e^*}$

Precisione dinamica

Specifiche: $S\% \leq S^*$ e $T_{a,\epsilon} \leq T^*$

Se progettiamo $L(j\omega)$ in modo che $F(j\omega)$ abbia una coppia di poli c.c. dominanti in $\omega_n \approx \omega_c$ con coeff. smorzamento ξ allora

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}$$



$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2 + \sin M_f^{RAD}}} = \xi$$

APPROX. A POLI C.C. DOMINANTI

$|F(j\omega_m)| \approx |F(j\omega_c)| \approx \frac{1}{\sqrt{2\xi}}$

PULS. PICCO RISONANZA

$$\xi = \sin \frac{M_f^{RAD}}{2} \approx \frac{M_f^{RAD}}{2} = \frac{M_f \cdot \frac{\pi}{180}}{2} \approx \frac{1}{100}$$

$\Rightarrow \xi \approx \frac{M_f}{100}$

- Per rispettare $S\% \leq S^*$:

$\xi \geq \xi^*$ dove $S^* = e^{\frac{-\pi\xi^*}{2}}$ (si ricava guardando il grafico).

Si ricava che

$$M_f \geq 100\xi^*$$

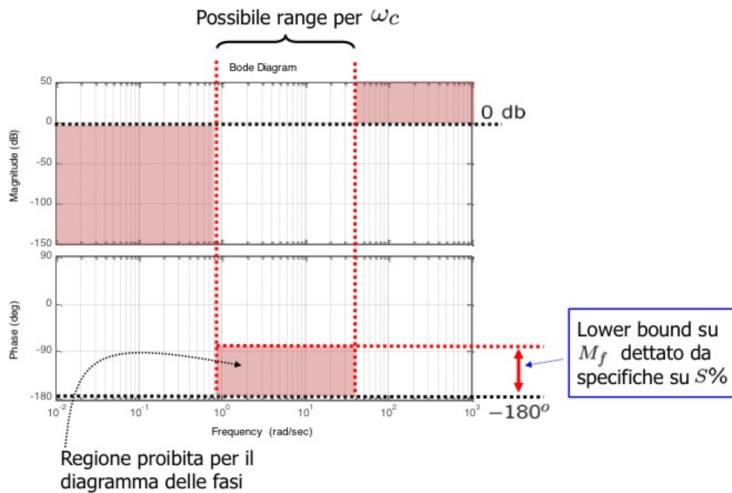
- Per rispettare $T_{a,\epsilon} \leq T^*$:

Ricordiamo che $T_{a,\epsilon} = T \ln(\epsilon) = -\frac{\ln(\epsilon)}{\xi \omega_n}$

Allora $\xi \omega_n \geq \frac{xx}{T^*}$ da cui si ricava che $\frac{M_f}{100} \omega_c \geq \frac{xx}{T^*}$ e quindi $\omega_c \geq \frac{xx \cdot 100}{T^* M_f}$

Dove $xx = -\ln(S\%)$, esempio: $S\% \leq 5\% \rightarrow xx = -\ln(0.05) \approx 3$

Dal vincolo sulla precisione dinamica troviamo delle zone proibite sui diagrammi di Bode per il guadagno e per la fase



Nota

La zona proibita per il diagramma di fase va evitata solo a ω_c .

Nel grafico delle ampiezza:

- La prima patch che troviamo (in basso a sx) è dovuta alla specifica sul $T_{a,\epsilon}$ in quanto questo si traduce in $\omega_c \geq \frac{xx \cdot 100}{T^* M_f}$ se prediamo M_f^* (il valore più piccolo) otteniamo $\omega_{c,min}$ che è la retta tratteggiata parallela all'asse Y.
- La seconda che troviamo è dovuta allo sforzo di controllo, nozione connessa a $|Q(j\omega)|$

Nel grafico della fase:

- la patch non identifica una zona proibita per tutto il range ma solo in ω_c , è dovuto alla specifica sulla $S\%$ che si traduce in un vincolo su $M_f \geq 100\xi^*$

Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$

Specifiche: il disturbo di uscita $d(t)$, con una banda limitata in un range di pulsazioni $[\omega_{d,min}, \omega_{d,max}]$, deve essere attenuato di A_d db ($A_d > 0$)

Ricordiamo che se $d(t) = D \cos(\omega t + \psi)$ allora per il **teorema del regime permanente**

$$y(t) = |S(j\omega)| D \cos(\omega t + \psi + \arg(S(j\omega)))$$

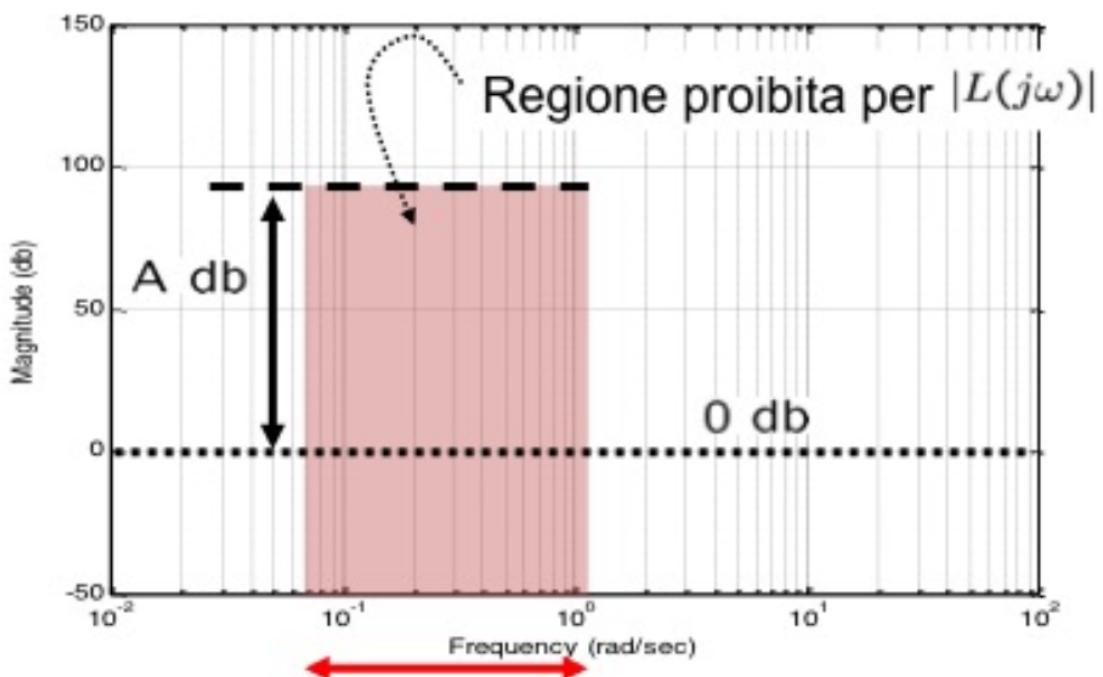
e che

$$|S(j\omega)|_{db} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{db} & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo $|S(j\omega)|_{db} \leq -A_d dB$, allora poiché $\omega_{d,max} \ll \omega_c$ ($d(t)$ vive a basse frequenze)

$$|L(j\omega)|_{db} \geq A_d dB$$

Esempio: se $d(t)$ deve essere attenuato di 20dB allora $|L(j\omega)|_{db} \geq 20dB$



Attenuazione disturbo di misura $n(t)$

Specifiche: il disturbo di misura $n(t)$, con una banda limitata in un range di pulsazioni $[\omega_{n,min}, \omega_{n,max}]$, deve essere attenuato di A_n dB ($A_n > 0$)

Ricordiamo che se $n(t) = N \cos(\omega t + \psi)$ allora per il **teorema del regime permanente**

notare il - nella fase $-\arg(F(j\omega))$

$$y(t) = |F(j\omega)| N \cos(\omega t + \psi - \arg(F(j\omega)))$$

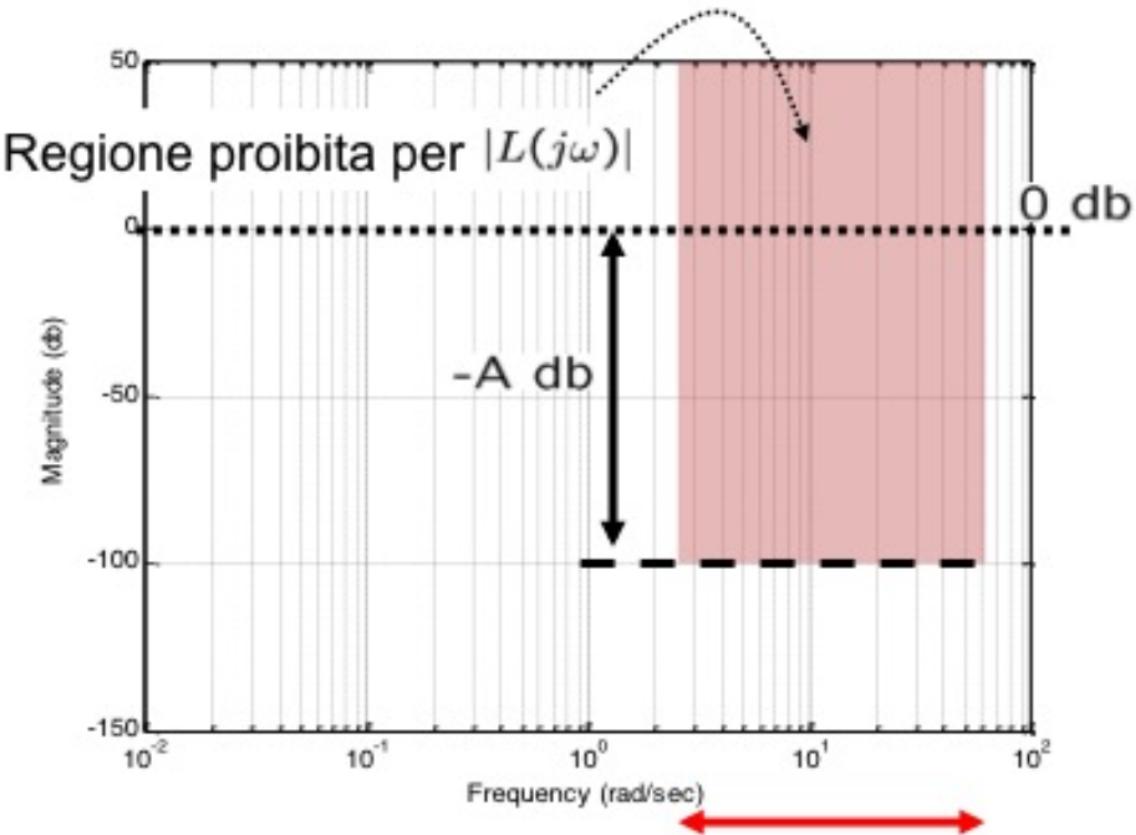
e che

$$|F(j\omega)|_{db} \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{db} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo $|F(j\omega)|_{db} \leq -A_n dB$, allora poiché $\omega_{n,max} \gg \omega_c$, $n(t)$ vive ad alte frequenze

$$|L(j\omega)|_{db} \leq -A_n dB$$

Esempio: se $n(t)$ deve essere attenuato di 20dB allora $|L(j\omega)|_{db} \leq -20dB$



Attenuazione variabile di controllo $u(t)$

Specifiche: contenimento dell'ampiezza della variabile di controllo u in ingresso al sistema fisico (impianto)

Ricordiamo che se $w(t) = W \cos(\omega t + \psi)$ allora

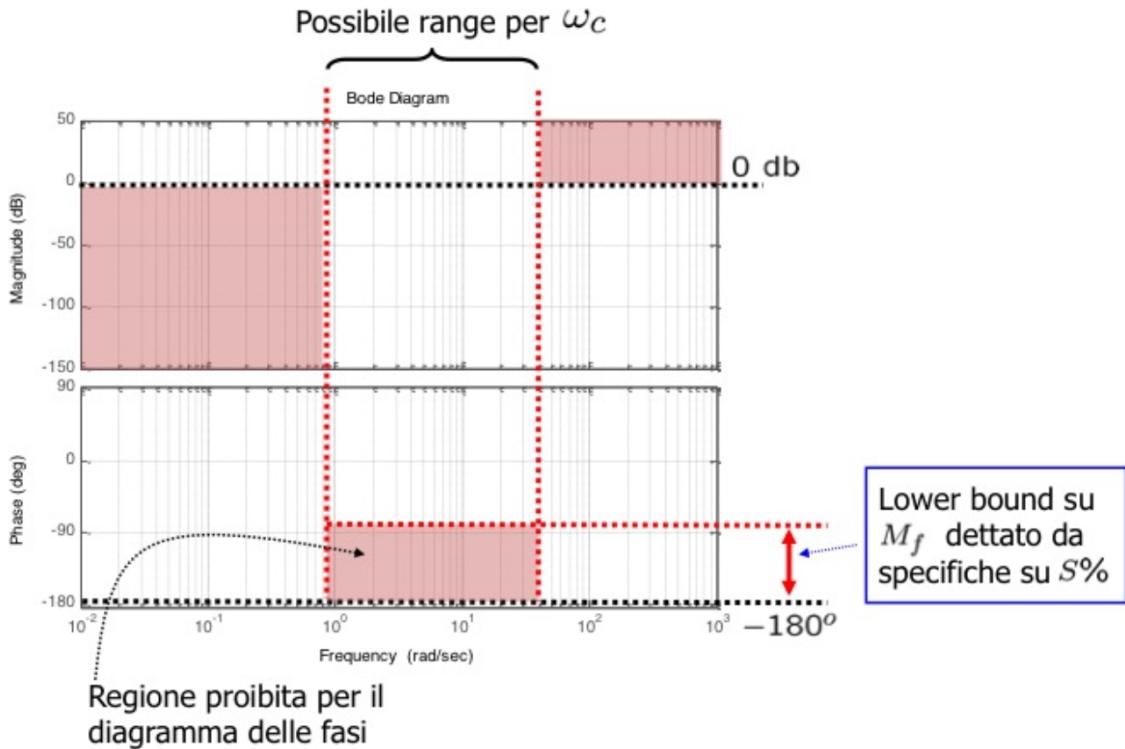
$$u(t) = |Q(j\omega)|W \cos(\omega t + \psi + \arg(Q(j\omega)))$$

e che

$$|Q(j\omega)|_{db} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{db} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{db} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo contenere $|Q(j\omega)|_{db}$ e non abbiamo controllo su $G(j\omega)$, quindi dobbiamo:

- limitare ω_c
- realizzare $R(j\omega)$ passa-basso



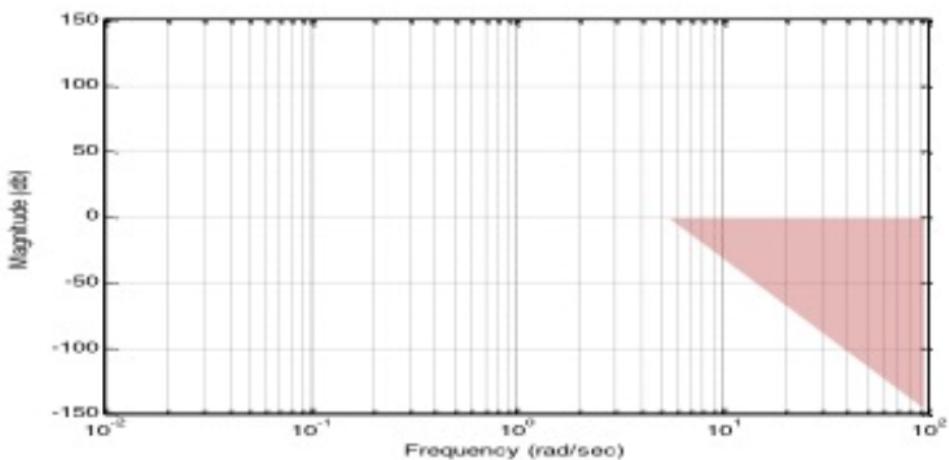
Il limite superiore su ω_c può essere determinato dalle specifiche sulla variabile di controllo $u(t)$

Fisica realizzabilità del regolatore R(s)

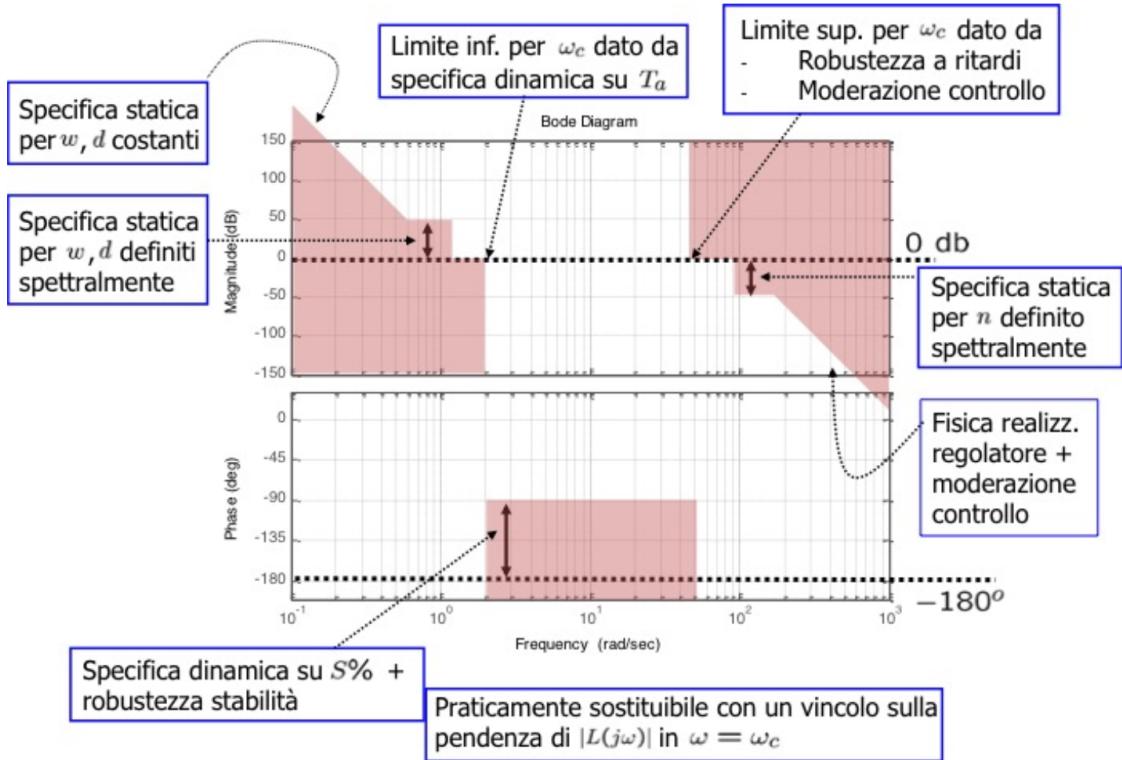
Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza poli-zero) deve essere maggiore o uguale a zero.

A pulsazioni elevate la pendenza $-k_L dB/dec$ di $|L(j\omega)|_{db}$ è determinata dalla differenza tra poli (ciascuno contribuisce con pendenza $-20db/dec$) e zeri (ciascuno contribuisce con pendenza $20db/dec$)

Se a pulsazioni elevate $|G(j\omega)|_{db}$ ha pendenza $-k_G db/dec$ allora $-k_L \leq -k_G$, non significa altro che 'pendenza di L più negativa della pendenza di G'



Riepilogo specifiche su diagrammi di Bode



Sintesi del regolatore (loop shaping o sintesi per tentativi)

Per progettare il regolatore useremo la tecnica per tentativi.

Consiste nel dare forma alla $L(j\omega)$, procedendo per tentativi in modo che:

- il diagramma delle ampiezze non attraversi le regioni 'proibite' in bassa e alta frequenza
- per $\omega = \omega_c$ rispetti il vincolo sul margine di fase

È conveniente dividere il progetto in due fasi fattorizzando $R(s)$ come

$$R(s) = R_s(s)R_d(s)$$

Regolatore statico

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$$

progettato per soddisfare precisione statica ovvero errore a regime e_∞ .

| k è il numero di poli nell'origine

Regolatore dinamico

$$R_d(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2})}{\prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

progettato per soddisfare **stabilità robusta, precisione dinamica, attenuazione disturbi, moderazione controllo e fisica realizzabilità**.

| μ_d può essere scelto solo se μ_s non è stato imposto

Sintesi del regolatore statico

Il guadagno μ_s e il numero di poli nell'origine in $R(s)$ dipende dalla specifica sull'errore a regime e_∞ in risposta a segnali canonici

| $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a ingressi w e d in gradino, con $G(s)$ senza poli nell'origine

Nel progetto possiamo scegliere

$$R(s) = \mu_s \geq \mu^*$$

| ATTENZIONE: pone un vincolo sul guadagno di $R(s) \Rightarrow$ non potrà scegliere liberamente μ_d

oppure

$$R(s) = \frac{\mu_s}{s}$$

| In questo caso possiamo scegliere μ_d 'liberamente' a patto che rispetti i vincoli sull'attenuazione di d , in quanto abbiamo scelto di aggiungere uno o più poli nell'origine (s) e quindi e_∞ sarà sempre uguale a 0

Sintesi del regolatore dinamico

Obiettivi

1. imporre ω_c in un certo intervallo (per evitare le zone rosse nei diagrammi di Bode), specifiche su $T_{a,\epsilon}$, per robustezza a ritardi e moderazione controllo
2. garantire un dato margine di fase M_f
ovvero garantire che $\arg(L(j\omega_c)) \geq -180^\circ + M_f$
specifico sulla $S\%$
3. garantire una certa attenuazione e pendenza di $L(j\omega)$ (e $R(j\omega)$) a pulsazioni elevate. Per la fisica realizzabilità

Nota: per questa specifica è sufficiente introdurre poli del regolatore a pulsazioni elevate.

Sintesi per tentativi

Si vanno ad identificare possibili scenari in base al diagramma di

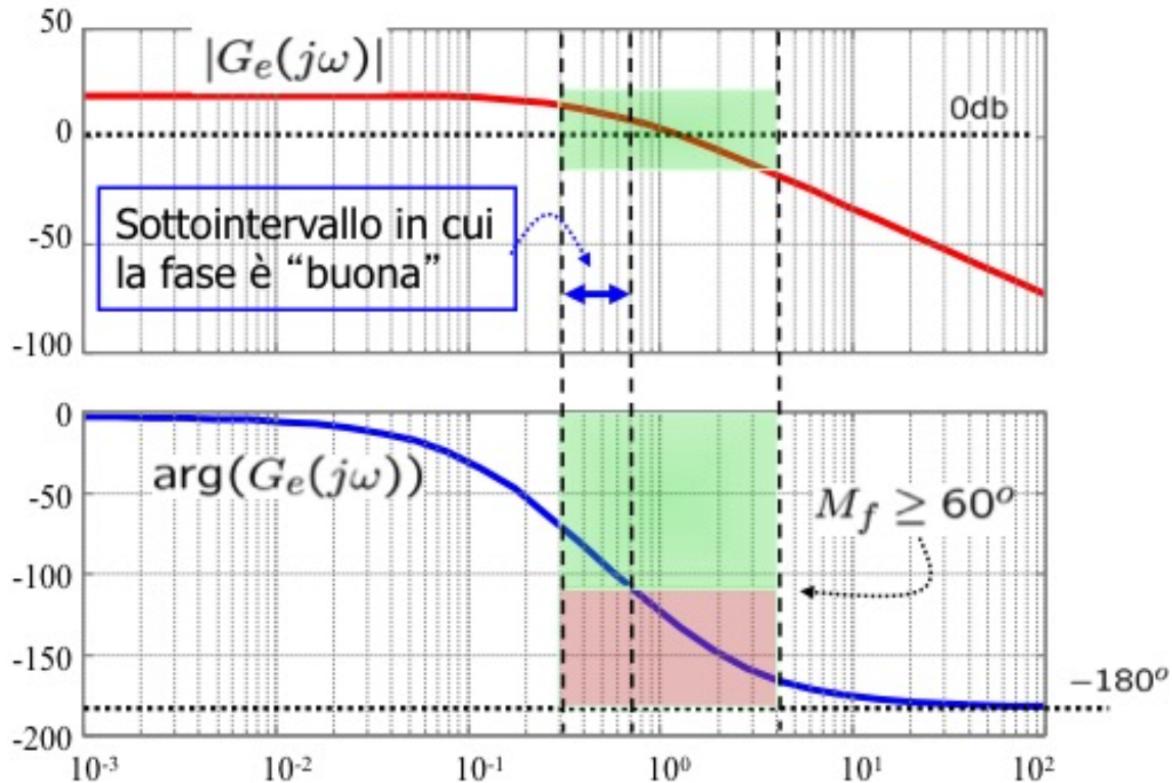
$$G_e(s) = R_s(s)G(s)$$

chiamato **sistema esteso**.

| Se abbiamo scelto di non avere poli nell'origine di $R_s(s) \implies G_e(s) = \mu_s G(s)$

Scenario A

Nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c (quando il grafico del guadagno attraversa gli 0db [$\omega_{c,min}, \omega_{c,max}$]) esiste un sotto-intervallo in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.



Obiettivo

- attenuare (in modo selettivo) il diagramma delle ampiezze (**traslarlo in basso**) in modo che ω_c ricada nel sotto-intervallo in cui il vincolo sul margine di fase è rispettato

| Abbassando l'ampiezza 'tocco' prima gli 0db in modo che M_f possa essere rispettato

- alterare il meno possibile la fase

Azioni possibili

- se μ_d libero, allora scegliere $R_d(s) = \mu_d$ con $\mu_d < 1$

| < 1 perchè se > 1 staremmo **amplificando**, noi vogliamo **attenuare**

- se μ_d bloccato (vincolato dalla scelta di $\mu_s \Rightarrow$ non ho inserito poli nell'origine della $R_s(s)$), allora attenuare mediante inserimento di poli e zeri in $R_d(s)$

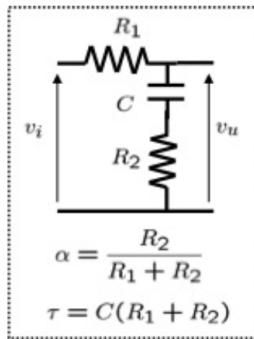
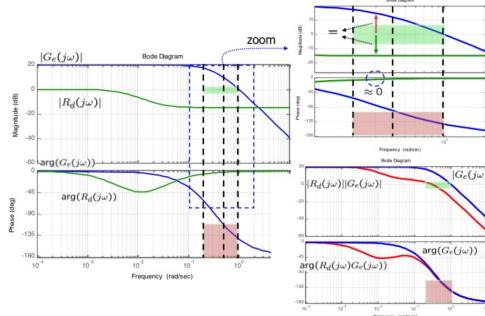
μ_d vincolato ($\mu_s \geq \mu^*$)

Per attenuare solo nel range di pulsazioni selezionato progettiamo

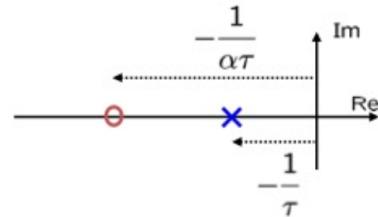
$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

detta **rete ritardatrice**

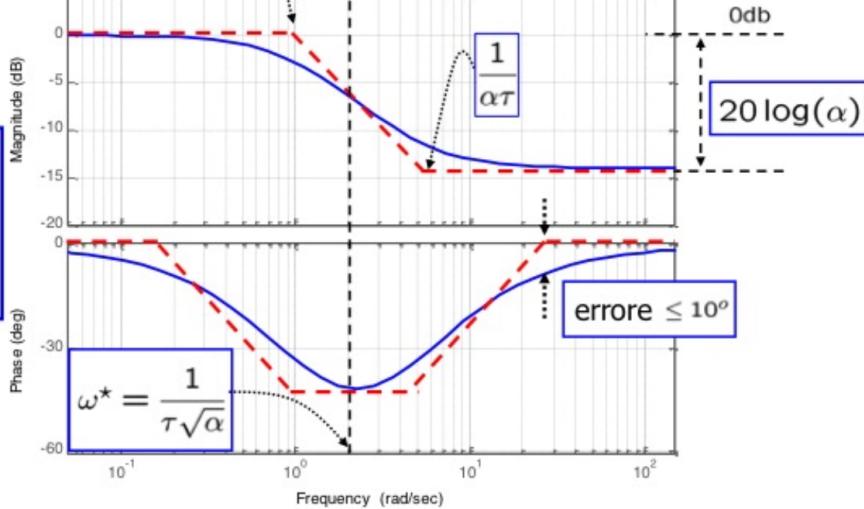
| Prima polo poi zero



$$R(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$



Effetto utile:
attenuazione ad
alta frequenza con
sfasamento
trascurabile



Dobbiamo calcolare α e τ in modo che la $L(j\omega)$ abbia una pulsazione di attraversamento ω_c^* e valga $\arg(L(j\omega_c^*)) \approx \arg(G_e(j\omega_c^*))$, si procede in questo modo:

1. scegliere α tale che $20 \log \alpha \approx -|G_e(j\omega_c^*)|_{db}$

ovvero il ritardo dello zero in db deve essere circa uguale al valore in db negato del modulo della G considerata alla pulsazione critica star

1. scegliere τ tale che $\frac{1}{\alpha\tau} \leq \frac{\omega_c^*}{10}$

Usiamo le **formule di inversione**

Formule di inversione

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* (pulsazione a cui vorremmo $|L(j\omega^*)|_{db} = 0$) la rete ritardatrice abbia una attenuazione $0 < M^* < 1$ e uno sfasamento $\frac{-\pi}{2} < \psi^* < 0$, ovvero

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\psi^*}$$

Allora definiamo le seguenti **formule d'inversione**:

$$\tau = \frac{\cos(\psi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin(\psi^*)}$$

$$\alpha\tau = \frac{M^* - \cos(\psi^*)}{\omega_c^* \sin(\psi^*)}$$

$$\alpha = \frac{\alpha\tau}{\tau}$$

| Perchè si abbia $\alpha > 0$ occorre che $M^* < \cos(\psi^*)$

Poniamo

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_c^*}{1 + j\tau\omega_c^*} = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)$$

$$1 + j\alpha\tau\omega_c^* = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)(1 + j\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$\begin{aligned} 1 &= M^* \cos \varphi^* - M^* \tau \omega_c^* \sin \varphi^* \\ \alpha \tau \omega_c^* &= M^* \tau \omega_c^* \cos \varphi^* + M^* \sin \varphi^* \end{aligned}$$

come si ricavano

Procedura

Obiettivo: imporre $|L(j\omega)|_{db} = 0$ per $\omega = \omega_c^*$

- Scegliere ω_c^* e ricavare M_f^* dalle specifiche
- Calcolare M^* e ψ^* imponendo

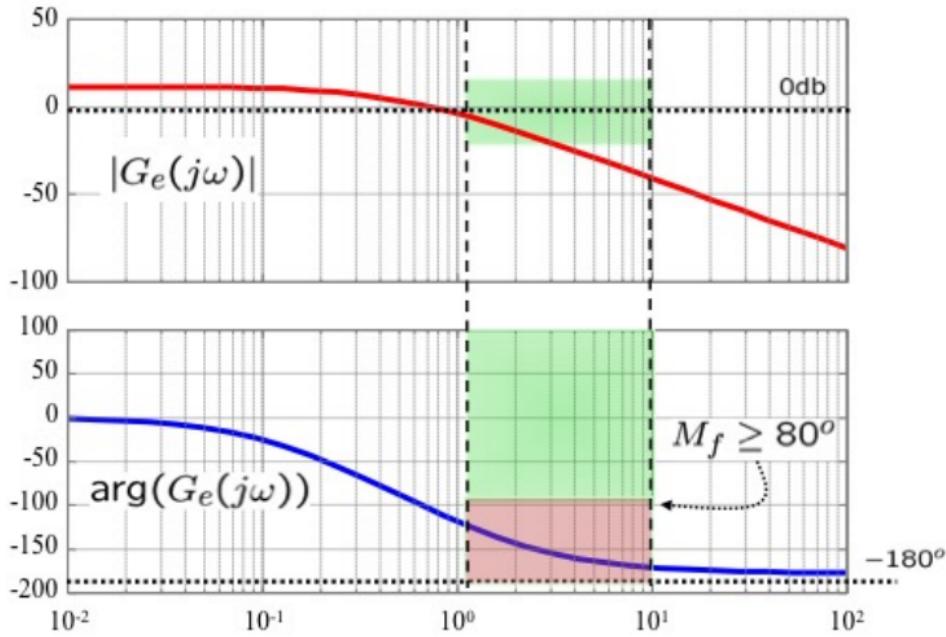
$$|G_e(j\omega_c^*)|_{db} + 20 \log M^* = 0$$

$$M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \psi^*$$

- Verificare che $0 < M^* < 1, -\frac{\pi}{2} < \psi^* < 0, M^* < \cos(\psi^*)$
- Calcolare α e τ mediante formule di inversione

Scenario B

Nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c (quando il grafico del guadagno attraversa gli 0db) NON esistono pulsazioni in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.



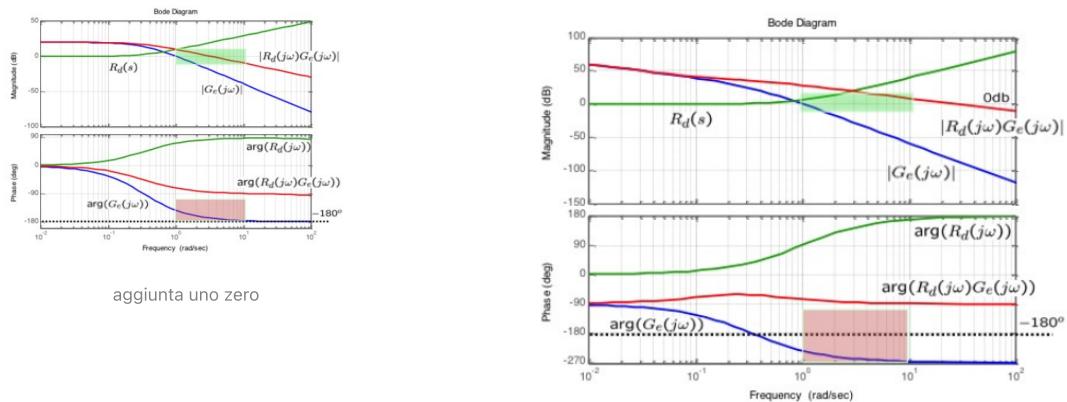
Obiettivo

- modificare il diagramma della fase (aumentare la fase) nell'intervallo in modo che il vincolo sul margine di fase sia rispettato
- amplificare il meno possibile l'ampiezza

Procedure inverse rispetto a scenario A

Azioni possibili

1. aggiungere uno o più zeri (a pulsazioni precedenti quella di attraversamento desiderata) per aumentare la fase
2. aggiungere uno o più poli a pulsazioni più alte per la fisica realizzabilità e per evitare una eccessiva amplificazione



aggiunta due o più zeri

Rete anticipatrice

Se vogliamo aggiungere uno o due poli, si può progettare $R_d(s)$ in questo modo

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

detta **rete anticipatrice**.

È l'inverso dello scenario A incontro frequenzialmente prima lo zero e poi il polo

Nel caso sia necessario un anticipo di fase maggiore (esempio: due zeri)

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \alpha_1 \tau_1 s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s} \quad 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$$

Una volta realizzata una rete anticipatrice (singola o multipla) si possono verificare 2 casi:

B1. ω_c è nell'intervallo di specifica e il vincolo sul margine di fase è rispettato. In questo caso il progetto è terminato.

B2. ω_c è fuori dall'intervallo di specifica o in un intervallo in cui il vincolo sul margine di fase non è rispettato.

Ci siamo comunque ricondotti ad uno scenario A (esiste un sotto-intervallo in cui il vincolo sul margine di fase è rispettato)

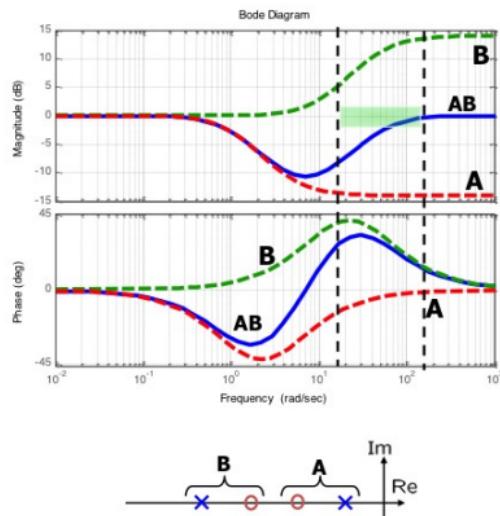
Caso B2

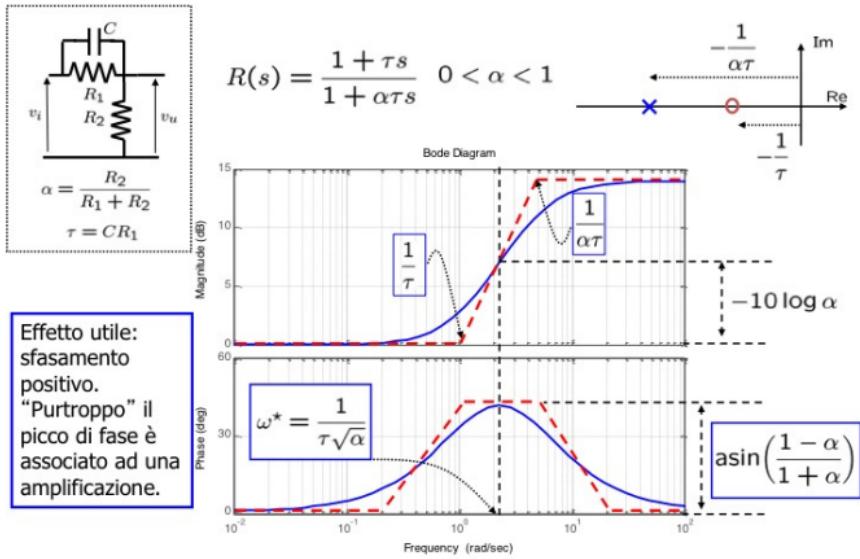
- se μ_d libero allora scegliamo $\mu_d < 1$ per attenuare

$$R_d(s) = \mu_d \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$

- se μ_d bloccato

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha_a \tau_a s}{1 + \tau_a s} \frac{1 + 1\tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$





Formule di inversione

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* (pulsazione a cui vorremmo $|L(j\omega)|_{db} = 0$) la rete anticipatrice abbia una attenuazione $M^* > 1$ e uno sfasamento $0 < \psi^* < \frac{\pi}{2}$, ovvero

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\psi^*}$$

Allora definiamo le seguenti **formule d'inversione**:

$$\tau = \frac{M^* - \cos(\psi^*)}{\omega_c^* \sin(\psi^*)}$$

$$\alpha\tau = \frac{\cos(\psi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin(\psi^*)}$$

$$\alpha = \frac{\alpha\tau}{\tau}$$

Perchè si abbia $\alpha > 0$ occorre che $\cos(\psi^*) > \frac{1}{M^*}$
 stesse formule del caso A ma invertite Formula(τ_A) = Formula($\alpha\tau_B$) e viceversa

Poniamo

$$\frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)$$

$$1 + j\tau\omega_c^* = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)(1 + j\alpha\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$\begin{aligned} 1 &= M^* \cos \varphi^* - M^* \alpha \tau \omega_c^* \sin \varphi^* \\ \tau \omega_c^* &= M^* \alpha \tau \omega_c^* \cos \varphi^* + M^* \sin \varphi^* \end{aligned}$$

come si ricavano

Procedura

Obiettivo: impostare $|L(j\omega)|_{db} = 0$ per $\omega = \omega_c^*$

- Scegliere ω_c^* e ricavare M_f^* dalle specifiche

- Calcolare M^* e ψ^* imponendo

$$|G_e(j\omega_c^*)|_{db} + 20 \log M^* = 0$$

$$M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \psi^*$$

- Verificare che $M^* > 1, 0 < \psi^* < \frac{\pi}{2}, \cos(\psi^*) > \frac{1}{M^*}$
- Calcolare α e τ mediante formule di inversione

Controllori PID

È un sistema in retroazione negativa ampiamente utilizzato nell'industria nel campo dei sistemi di controllo.

Grazie a un input che determina il valore attuale, è in grado di reagire a un eventuale errore positivo o negativo tendendo verso il valore 0. La reazione all'errore può essere regolata e ciò rende questo sistema molto versatile.

Regolatore Proporzionale

$$R(s) = \mu$$

È il regolatore più semplice possibile in quanto è uguale al guadagno, abbiamo

$$u(t) = \mu \cdot e(t) = \mu \cdot (y_{rif}(t) - y(t))$$

In alcuni casi è possibile regolare un processo con il solo regolatore proporzionale, in alcuni casi è anche in grado di stabilizzare processi instabili.

Tuttavia il proporzionale non è in grado di garantire che l'errore 'e' converga a zero, questo lo si evince anche dal fatto che se $e = 0$ allora $u(t) = \mu \cdot e(t) = \mu \cdot 0$

Regolatore Integrale

Regolatore con $R(s) = \frac{\mu}{s}$ è un regolatore integrale ovvero l'ingresso è l'integrale dell'errore

$$R(s) = \frac{\mu}{s}$$

$$u(t) = \mu \int_o^t e(\tau) d\tau$$

Il regolatore integrale fa sì che il controllore abbia 'memoria' dei valori passati dell'errore; in particolare, il valore dell'azione integrale non è necessariamente nullo se è nullo il segnale d'errore. Al contrario del regolatore proporzionale quindi, il regolatore integrale è in grado di stabilizzare il processo anche quando l'errore risulta essere 0

Regolatore Derivativo

Regolatore con $R(s) = \mu s$ è un regolatore derivativo ovvero l'ingresso è la derivata dell'errore

$$\begin{aligned} R(s) &= \mu s \\ u(t) &= \mu \frac{d}{dt} e(t) \end{aligned}$$

Il regolatore derivativo è in grado di rispondere rapidamente ai cambiamenti del sistema senza aspettare che l'errore diventi significativo (azione proporzionale) o che persista per un certo tempo (azione integrale).

Proprio per questo motivo (troppo sensibile) l'azione derivativa è spesso tralasciata nelle implementazioni.

Un PID con azione derivativa, per esempio, subirebbe una brusca variazione nel momento in cui il riferimento venisse cambiato quasi istantaneamente da un valore a un altro, risultando in una derivata di "e" tendente a infinito, o comunque molto elevata. Ciò sconsiglia l'applicazione dell'azione derivativa in tutti i casi in cui l'attuatore fisico non deve essere sottoposto a sforzi eccessivi

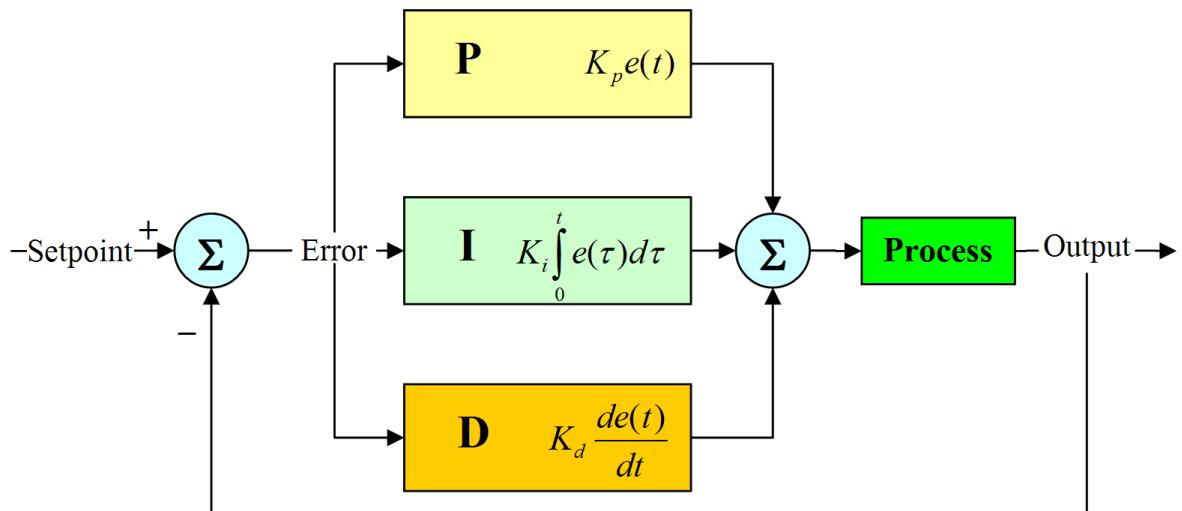
Regolatore Proporzionale Integrale

$$R(s) = \mu\tau + \frac{\mu}{s}$$

$$u(t) = \mu\tau e(t) + \mu \int_0^t e(\sigma) d\sigma$$

Regolatore PID (Proporzionale(μ) Integrale($\frac{1}{s}$) Derivativo(s))

$$R(s) = \mu(\tau_1 + \tau_2) + \frac{\mu}{s} + \mu\tau_1\tau_2 s$$

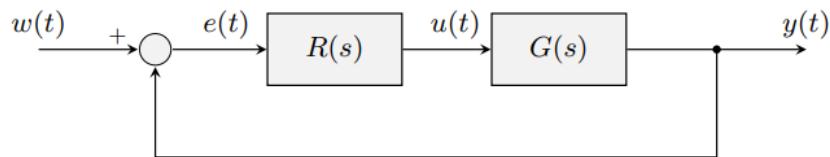


la nomenclatura qui sopra è quella del prof di seguito invece troviamo la nomenclatura standard

PID "ideale"

$$R(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$$

- T_i tempo integrale
- T_d tempo derivativo



Notare l'assenza dei disturbi $n(t)$ e $d(t)$, sono trascurati ai fini della spiegazione

L'ingresso di controllo è fatto così:

$$U(s) = R(s)E(s) = K_p E(s) + \frac{K_p}{T_i} \frac{E(s)}{s} + K_p T_d s E(s)$$

Dove abbiamo

$E(s)$ trasformata dell'errore

$\frac{E(s)}{s}$ trasformata dell'integrale dell'errore

$sE(t)$ trasformata della derivata dell'errore

e nel dominio del tempo:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \boxed{K_p e(t)} + \boxed{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau} + \boxed{K_p T_d \frac{de(t)}{dt}}$$

termine Proporzionale termine Integrale termine Derivativo

Il **PID ideale** non è fisicamente realizzabile! Sviluppando i calcoli si può notare che il **grado del numeratore > grado denominatore**

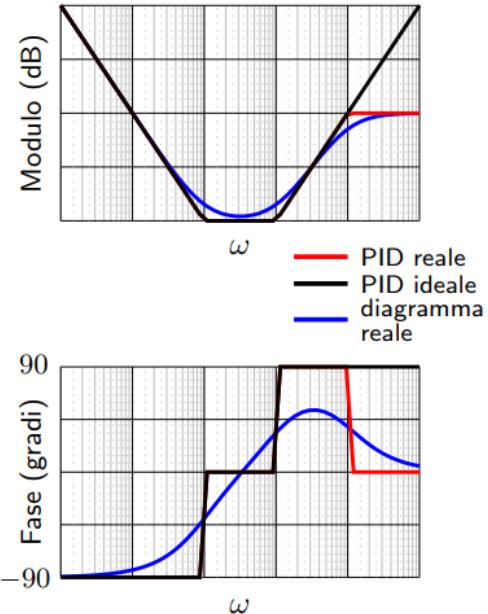
$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = \frac{K_p T_i s + K_p + K_p T_i T_d s^2}{T_i s}$$

Il **PID reale** (fisicamente realizzabile) richiede di aggiungere un polo in alta frequenza

$$R^{fr}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{1}{1 + T_p s}$$

Notare come il **PID reale** non è altro che una combinazione di una rete anticipatrice e di una rete ritardatrice

$$\begin{aligned} R^{fr}(s) &= \underbrace{\frac{K_p}{T_i}}_{:=\mu} \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{s} \frac{1}{1 + T_p s} \\ &= \mu \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s} \frac{1}{1 + T_p s} \end{aligned}$$

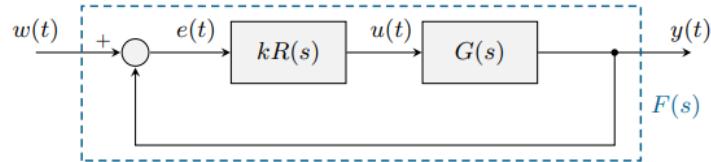


Casi speciali

- Regolatori P:** se $T_i \rightarrow \infty$ e $T_d = 0$ (no termine integrale e derivativo), si ottiene un regolatore proporzionale $R(s) = K_p$
- Regolatori I:** in assenza di termine proporzionale e derivativo, si ottiene un regolatore puramente integrale $R(s) = \frac{K_i}{s}$. Si può interpretare come una rete ritardatrice con il polo posto nell'origine e con lo zero all'infinito
- Regolatori PI:** se $T_d = 0$ (no termine derivativo), si ottiene un regolatore proporzionale integrale $R(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$. Possono essere visti come reti ritardatrici con polo nell'origine e zero in $-\frac{1}{T_i}$
- Regolatori PD:** se $T_i \rightarrow \infty$ (no termine integrale), si ottiene un regolatore proporzionale derivativo $R(s) = K_p(1 + T_d s)$. Possono essere visti come reti anticipatrici con zero in $-\frac{1}{T_d}$ e polo posto all'infinito (nel caso ideale)

Luogo delle radici

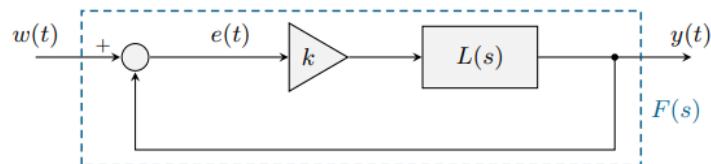
Obiettivo: studiare come variano nel piano complesso i poli di $F(s)$ al variare del guadagno della funzione di trasferimento in anello chiuso (k)



$$F(s) = \frac{kR(s)G(s)}{1 + kR(s)G(s)} = \frac{kL(s)}{1 + kL(s)} = \frac{kN(s)}{D(s) + kN(s)} \quad \text{con } L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Gli zeri di $F(s)$ sono le radici di $kN(s)$ e quindi sono gli zeri di $L(s)$
- I poli di $F(s)$ sono le radici di $D(s) + kN(s)$ e quindi dipendono da poli e zeri di $L(s)$

Esempio sistema primo ordine

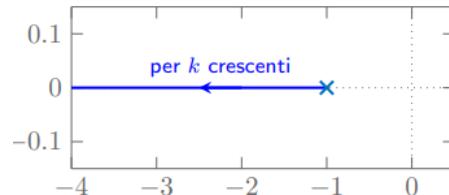


$$L(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{polo in } -1)$$

Funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$F(s) = \frac{kL(s)}{1 + kL(s)} = \frac{k \frac{1}{s+1}}{1 + k \frac{1}{s+1}} = \frac{k}{s+1+k}$$

Luogo delle radici: posizione nel piano complesso del polo di $F(s)$ al variare di $k \geq 0$



Definizione

Sia

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

allora

$$F(s) = \frac{kL(s)}{1 + kL(s)} = \frac{kN(s)}{D(s) + kN(s)}$$

- gli zeri di $F(s)$ sono le radici di $kN(s)$ e quindi sono gli zeri di $L(s)$
- i poli di $F(s)$ sono le radici di $D(s) + kN(s)$ e quindi dipendono da poli e zeri di $L(s)$

| **La retroazione non sposta gli zeri del sistema, ma solo i poli**

Luogo diretto: posizione dei poli di $F(s)$ al variare di $k \geq 0$ (ci concentreremo su questo)

Luogo inverso: posizione dei poli di $F(s)$ al variare di $k \leq 0$

Equazione caratteristica

I poli del sistema retroazionato sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$D(s) + kN(s) = 0$$

- $k = 0 \rightarrow D(s) + 0 \cdot N(s) = 0$ i poli di $F(s)$ coincidono con i poli di $L(s)$
- $k \rightarrow \infty \rightarrow D(s) + kN(s) = 0$ i poli di $F(s)$ coincidono con gli zeri di $L(s)$
($D(s)$ è trascurabile rispetto a $N(s)$)

Ricordiamo che $L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Per sistemi propri il polinomio $D(s)$ ha grado maggiore o uguale a quello di $N(s)$, l'ordine del polinomio $D(s) + kN(s) = 0$ è lo stesso di quello di $D(s)$
⇒ il numero di poli del sistema retroazionato è uguale a quello del sistema ad anello aperto

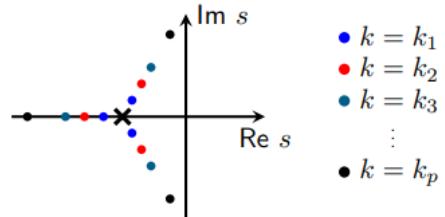
Osservazioni

Fissato un valore di k le soluzioni dell'equazione caratteristica determinano n punti nel piano complesso, con n ordine di $L(s)$

$$D(s) + kN(s) = 0$$

Esempio:

Sistema del terzo ordine $L(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ (tre poli in -1)



Il luogo delle radici è costituito da n 'rami' parametrizzati nel valore di k . Una volta fissato es. $k = k_1$, gli n punti sugli n rami identificano i poli del sistema retroazionato per quel k .

I coefficienti dell'equazione caratteristica sono reali ⇒ luogo simmetrico rispetto all'asse reale.

Regole di tracciamento

Da 1 a 5 sono da sapere, in realtà tutte, ma le prime 5 sono 'must'

Sia n il numero di poli e m il numero di zeri di $L(s)$ (con $n \geq m$)

Regola 1. il luogo ha tanti rami quanti sono i poli del sistema in anello aperto

Regola 2. ogni ramo parte da un polo di $L(s)$ e termina in uno zero di $L(s)$ o all'infinito. In particolare, m rami terminano negli zeri di $L(s)$ e $n - m$ rami terminano all'infinito

Regola 3. il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale

Regola 4. i punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelli che lasciano alla propria destra un numero dispari di singolarità (cioè poli o zeri) di $L(s)$

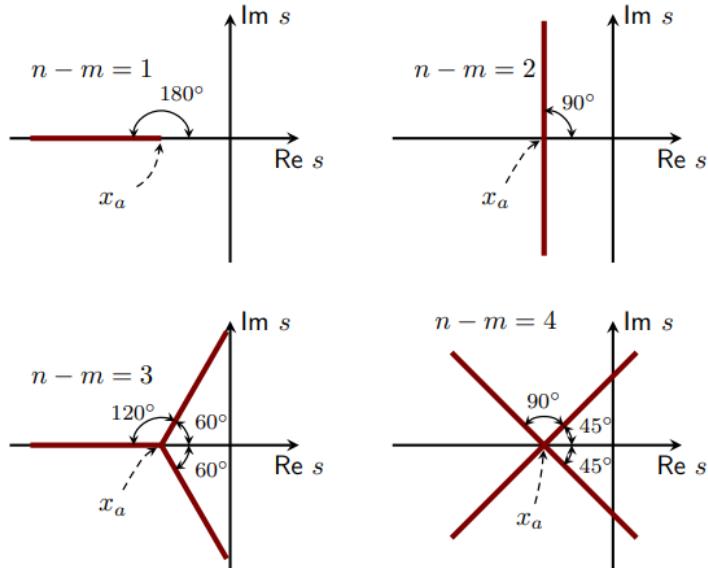
Siano $-p_1, \dots, -p_n$ i poli e $-z_1, \dots, -z_n$ gli zeri di $L(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$

Regola 5. i rami che tendono all'infinito lo fanno lungo asintoti che si intersecano sull'asse reale nel punto con ascissa pari a

$$x_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{i=1}^n p_i \right)$$

Regola 6. gli asintoti dividono il piano complesso in parti uguali. In particolare l'angolo che il j -esimo asintoto forma con l'asse reale è

$$\theta_{a,j} = \frac{(2j+1)\pi}{n-m}, \quad j = 0, \dots, n-m-1$$



Regola 7. quando il grado relativo del sistema è maggiore di 1 (cioè $n - m \geq 2$), la somma dei poli è costante al variare di k , quindi il baricentro del luogo è il punto dell'asse reale con ascissa

$$x_b = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m p_i$$

Le regole di seguito enunciate si applicano ai poli semplici di $L(s)$ (per i poli multipli le regole sono più complesse)

Regola 8. la tangente al ramo uscente da un polo semplice $-p_j$ forma con l'asse reale l'angolo

■

dove θ_i (risp. ψ_i) è l'angolo formato con il semiasse reale positivo dal vettore che congiunge il polo in considerazione con lo zero $-z_i$ (risp. con il polo $-p_i$).

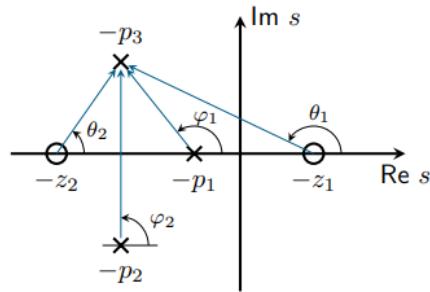
Regola 9. la tangente al ramo entrante in uno zero semplice $-z_j$ forma con l'asse reale l'angolo

$$\beta_j = 180^\circ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \psi_i$$

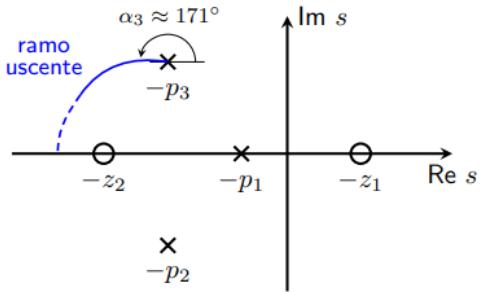
dove gli angoli θ_i e ψ_i sono definiti in modo analogo alla precedente regola

Esempio: determinare l'angolo di uscita α_3 del ramo che parte dal polo in $-p_3$

Calcolo degli angoli θ_i e φ_i

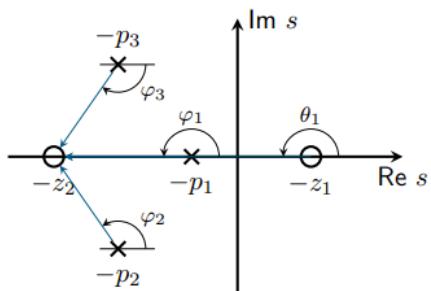


Angolo di uscita: $\alpha_3 = 180^\circ + \theta_1 + \theta_2 - \varphi_1 - \varphi_2$

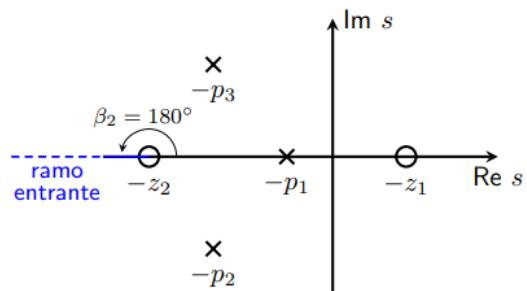


Esempio: determinare l'angolo di ingresso β_2 del ramo che entra nello zero in $-z_2$

Calcolo degli angoli θ_i e φ_i



Angolo di ingresso: $\beta_2 = 180^\circ - \theta_1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$

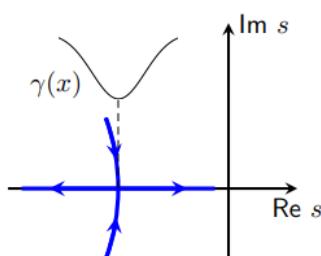


Regola 10. eventuali punti di incrocio di rami sull'asse reale si possono determinare trovando i massimi e i minimi relativi della funzione

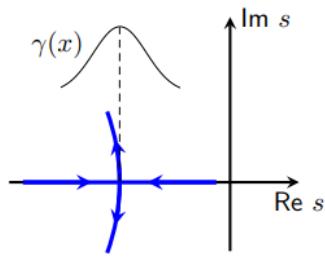
$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N(x)}$$

Nello specifico,

- se \bar{x} è un punto di minimo e $s = \bar{x}$ appartiene al luogo, esistono due rami complessi che confluiscono sull'asse reale in \bar{x}



- se \bar{x} è un punto di massimo e $s = \bar{x}$ appartiene al luogo, esistono due rami reali che si incontrano in \bar{x} e poi si separano diventando complessi

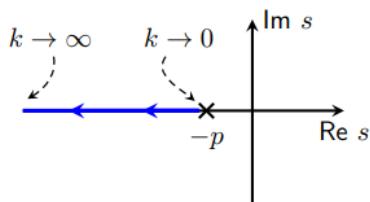


Esempi

Sistemi primo ordine

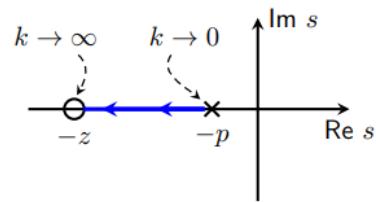
Senza zero

$$L(s) = \frac{1}{s + p}$$



Con zero

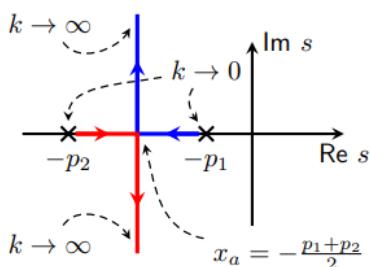
$$L(s) = \frac{s + z}{s + p}$$



Sistemi secondo ordine

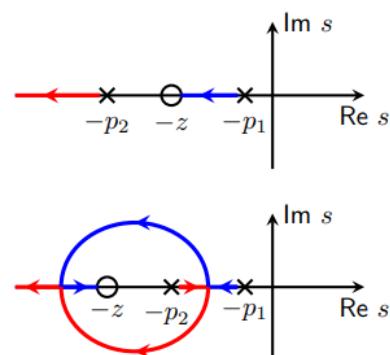
Senza zero

$$L(s) = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)}$$



Con zero

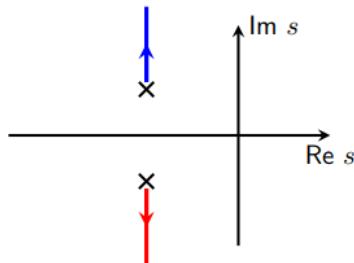
$$L(s) = \frac{s + z}{(s + p_1)(s + p_2)}$$



Sistemi del secondo ordine con poli reali

Senza zero

$$L(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$



Con zero

$$L(s) = \frac{s + z}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

