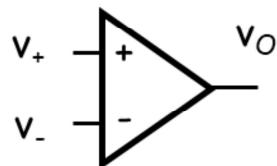




Amplificatori operazionali



$$v_O = A(v_+ - v_-) \quad (*)$$

$A \gg 1$

(*) nella zona ad alto guadagno

Per amplificatori operazionali (OP-AMP) si intende quella categoria di amplificatori differenziali integrati che presentano due morsetti di ingresso (invertente e non invertente) ed un morsetto di uscita.

La relazione di ingresso-uscita è:

$$U = A \cdot (I_+ - I_-)$$

Generalmente le grandezze in ingresso ed in uscita sono tensioni e quindi:

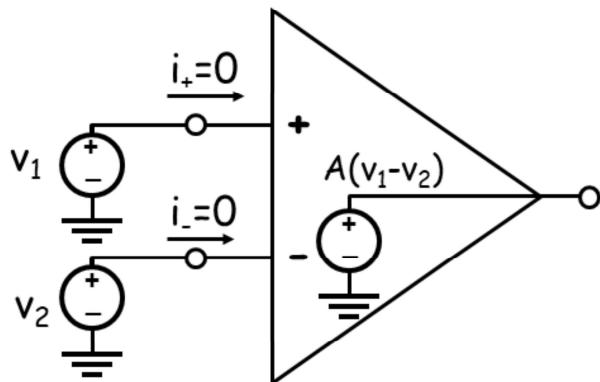
$$v_O = A \cdot (v_+ - v_-) = A \cdot v_D$$

Si tratta quindi di amplificatori differenziali lineari

La principale caratteristica che distingue gli amplificatori operazionali dagli amplificatori differenziali è il guadagno: Il guadagno di un amplificatore operazionale (opamp) nel tratto di caratteristica ad alto guadagno è **molto elevato**: 100 – 120 dB



Amplificatore operazionale ideale



- $i_+ = i_- = 0$
- $R_O = 0$
- $B_W = \infty$
- $A = \infty$

Definiamo amplificatore operazionale ideale, l' op-amp che ha le seguenti caratteristiche:

- Impedenza di ingresso ai morsetti invertente e non invertente **infinita**
- Impedenza di uscita **nulla**
- Larghezza di banda **infinita**

ma soprattutto:

Guadagno infinito nel tratto ad alto guadagno



Amplificatore operazionale ideale

Amplificatori

Amplificatori con ingresso in tensione e uscita in tensione

Amplificatori **lineari** con ingresso in tensione
e uscita in tensione

Amplificatori **differenziali** Lineari
con ingresso in tensione e uscita in tensione

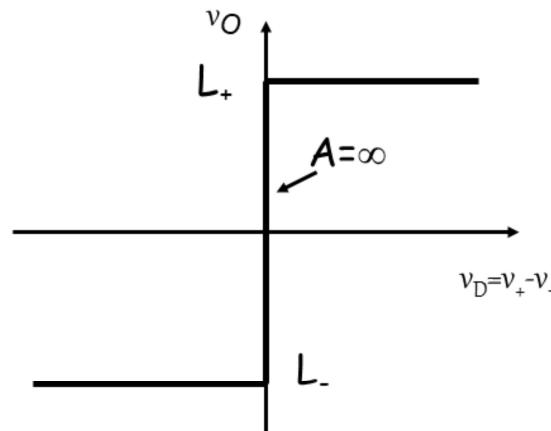
OPAMP

•← OPAMP ideale



Amplificatore operazionale ideale

Qual' è l' utilità di un simile dispositivo ?



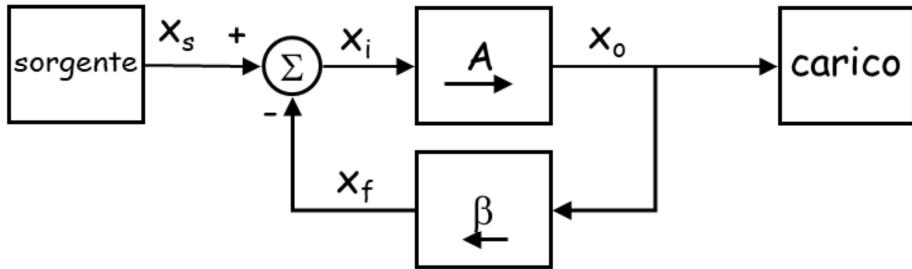
E' lecito, anzi auspicabile, domandarsi qual' è l' utilità di ipotizzare un simile elemento circuitale. La sua tensione di uscita infatti non è apparentemente controllabile se non ad uno o l' altro dei livelli di saturazione. Per qualsiasi tensione differenziale all' ingresso diversa da zero l' uscita risulta infatti satura.

La risposta è che l' amplificatore operazionale non è mai (tranne in un caso) impiegato controllando direttamente entrambi gli ingressi, ma bensì in circuiti in **retroazione**.

Vedremo nel seguito che in schemi a retroazione, le caratteristiche dell' opamp risultano ideali e permettono di realizzare facilmente, accuratamente e stabilmente funzioni circuitali altrimenti difficili da realizzare con circuiti di altro tipo.



Retroazione negativa



$$x_o = A x_i = A(x_s - x_f) = A(x_s - \beta x_o)$$

➡ $x_o = \frac{A}{1+A\beta} x_s$ ➡ $A_f = \frac{A}{1+A\beta}$ ➡ $\boxed{A_f = \frac{1}{\beta}}$

Richiamiamo brevemente alcuni concetti di base della connessione in retroazione ed analizziamone le caratteristiche.

Lo schema illustra una tipica connessione in retroazione. Il segnale in uscita x_o può essere calcolato come somma di due componenti: una dovuta al segnale in ingresso x_s ed una a quello di retroazione, che è una frazione del segnale di uscita.

Esplicitando x_o si ottiene la relazione ingresso uscita :

$$x_o = \frac{A}{1+A\beta} x_s$$

Il guadagno dello stadio retroazionato risulta quindi:

$$A_f = \frac{A}{1+A\beta}$$

dove **f** sta per feedback.

Si è in condizioni di retroazione negativa se

$$|1 + A\beta| > 1$$



Proprietà dei circuiti in retroazione negativa

- Desensibilizzazione

$$\frac{dA_f}{dA} = \frac{1}{(1+A\beta)^2}$$

E quindi:

$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{1}{(1+A\beta)} \frac{dA}{A}$$

La variazione relativa del guadagno A_f del circuito retroazionato è inferiore alla variazione relativa di A . Questo effetto benefico si chiama **desensibilizzazione**.

Il guadagno ad anello chiuso risulta molto meno sensibile ad una variazione del guadagno A .

Con un elevato grado di retroazione quindi si desensibilizza il guadagno A_f da variazioni di A .

Il fattore di desensibilizzazione è pari ad $1/(1+A\beta)$.

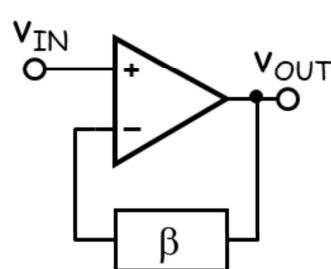
Se $A \rightarrow \infty$ il guadagno ad anello chiuso dipende solo dalla rete di retroazione. In questo caso si dice che siamo in condizione di desensibilizzazione totale.

Risulta in particolare che

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A_f = \frac{1}{\beta}$$



OPAMP retroazionati



$$v_{\text{OUT}} = \frac{A}{1 + A\beta} v_{\text{IN}}$$

A_f

Sostituiamo nello schema di principio un amplificatore operazionale che realizza il blocco di guadagno ed il sommatore.

Il segnale in ingresso sarà una tensione (v_i) come pure il segnale di uscita (v_o).

La relazione ingresso uscita della rete così costruita (lineare finchè l'operazionale lavora in alto guadagno) risulta quindi :

$$v_{\text{OUT}} = \frac{A}{1 + A\beta} v_{\text{IN}}$$

Risulta ora chiara l'utilità di ipotizzare come ideale un amplificatore operazionale con guadagno infinito. Un blocco di questo tipo infatti permette di ottenere la condizione di **desensibilizzazione totale** ovvero :

$$\frac{dA_f}{dA} = 0$$

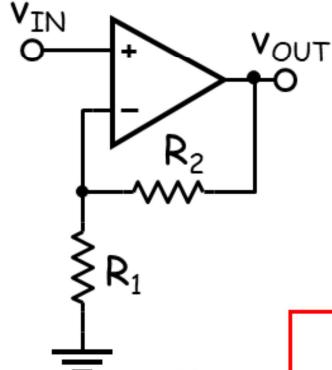
Quindi, fino a quando l'uscita dell'operazionale non satura, il guadagno del circuito risulta **indipendente da A** e vale:

$$v_{\text{OUT}} = \frac{1}{\beta} v_{\text{IN}}$$

L'indipendenza da A, permette di progettare circuiti (per esempio amplificatori) con guadagno dipendente solo dalla rete di retroazione, realizzabile con elementi passivi, caratterizzati da elevata accuratezza di valori e costanza a breve e lungo termine.



OPAMP: un esempio



$$v_{\text{OUT}} = A(v_+ - v_-)$$

$$v_+ = v_{\text{IN}}$$

$$v_- = v_{\text{OUT}} \quad \boxed{R_1/(R_1 + R_2)}$$

β

$$v_{\text{OUT}} = A(v_{\text{IN}} - v_{\text{OUT}} R_1 / (R_1 + R_2))$$

$$v_{\text{OUT}} = \boxed{\frac{A}{1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}} v_{\text{IN}}$$

A_f

$\Rightarrow A \rightarrow \infty$

$$\boxed{v_{\text{OUT}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_{\text{IN}}}$$

Amplificatore non invertente

Esaminando il circuito si nota che per **A** molto elevato il guadagno del circuito è sempre maggiore di 1 e tende (nel caso ideale) a dipendere solo dal rapporto di resistenze.

Il circuito illustrato è un amplificatore non invertente di tensione.

La costanza del guadagno (>1) dipende quindi essenzialmente dalla costanza ed accuratezza (elevate entrambe) delle resistenze del partitore $R_1 - R_2$.

Con un semplice dimensionamento è possibile quindi realizzare un amplificatore non invertente di guadagno fissato con precisione e costante nel tempo.



Circuiti retroazionati: analisi della stabilità

- In generale sia A che β sono funzione della frequenza.
- Risulta quindi:

$$A_f(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta(s)}$$

Per l' analisi della stabilità del circuito retroazionato si analizza la posizione degli zeri dell' **equazione caratteristica**:

$$1 + A(s)\beta(s) = 0$$

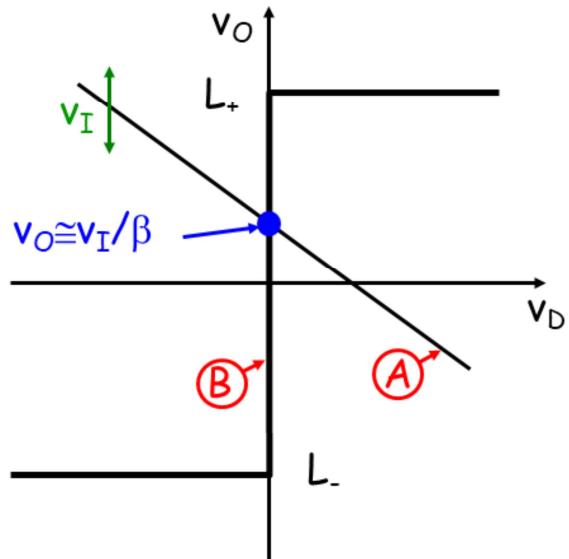
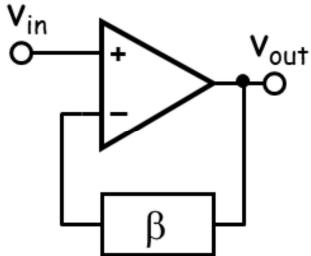
Come noto, l' analisi della stabilità del circuito si esegue analizzando la posizione degli zeri dell' equazione caratteristica.

Nel caso del circuito retroazionato l' analisi si dovrà fare sul denominatore del guadagno retroazionato e quindi l' equazione caratteristica risulta:

$$1 + A(s)\beta(s) = 0$$

Anche in questo caso un solo zero dell' equazione caratteristica con parte reale positiva determina instabilità.

Circuiti retroazionati: analisi della stabilità



Supponiamo che l' amplificatore operazionale impiegato nello schema in retroazione non sia ideale, ma caratterizzato da un guadagno **A(s)** funzione a singolo polo.

Sia quindi :

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_H} \quad (1)$$

con **A₀** molto elevato.

Se l' opamp è saturo il problema della stabilità non si pone, di fatto non essendo più il circuito in retroazione.

Verifichiamo dunque la posizione dei poli dell' equazione caratteristica quando l' opamp è in regione di alto guadagno. In queste condizioni possiamo scrivere che:

$$\begin{cases} v_D = v_I - v_O \cdot \beta & (A) \\ v_O = A(s) \cdot v_D \Rightarrow v_D = v_O / A(s) & (B) \end{cases}$$

Quindi:

$$v_O / A(s) = v_I - v_O \cdot \beta \Rightarrow v_O = v_I \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta}$$

Sostituisco ora la (1) nell' equazione caratteristica ed ottengo:

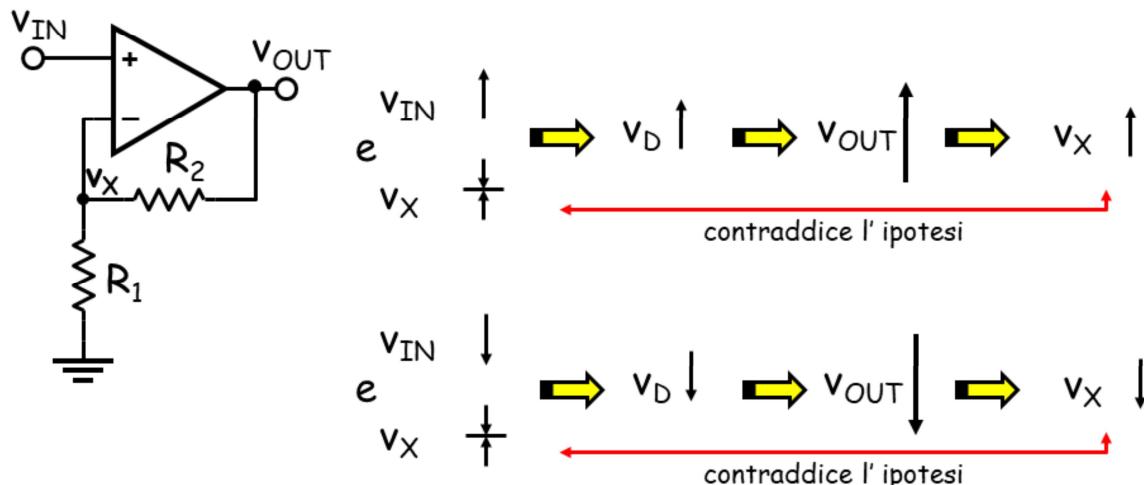
$$1 + \frac{A_0}{1 + s/\omega_H} \beta = 0 \Rightarrow s = -\omega_H (1 + A_0 \beta)$$

La soluzione è unica, reale e sempre negativa. Il circuito è quindi stabile, anzi incondizionatamente stabile.



Analisi qualitativa

$v_x = v_{IN}$ infatti:



Il funzionamento dell' amplificatore non invertente si può anche dimostrare per via intuitiva.

Facciamo l' ipotesi che inizialmente sia $v_x = v_{IN}$ e cerchiamo di ipotizzare cosa succede se v_{IN} cambia ma non v_x .

Ipotizziamo quindi che v_{IN} aumenti e che v_x non cambi.

In questa ipotesi risulterebbe $v_D > 0$. Quindi l' uscita tenderebbe ad aumentare e con essa anche V_x , in contraddizione con l' ipotesi.

V_x quindi aumenta con V_{IN} , ma di quanto aumenta?

Se rimane $v_x < v_{IN}$, dato che il guadagno dell' amplificatore tende ad infinito, l' uscita tende a L_+ , ancora in contraddizione con l' ipotesi.

Analogo contrario se v_x tendesse a superare v_{IN} : in questo caso v_{OUT} tenderebbe a L_- e quindi v_x tenderebbe a diminuire, in contraddizione con l' ipotesi.

Quindi v_x segue sempre v_{IN} (almeno fintanto che l' uscita non satura).

Il ragionamento appena fatto dimostra anche che $V_x = V_{IN}$ è uno stato stabile del sistema. Infatti ogni perturbazione da questa condizione tende ad essere annullata dalla retroazione negativa.



Altre proprietà dei circuiti in retroazione negativa

- Estensione della banda

Se:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s / \omega_H}$$

Per l' amplificatore retroazionato risulta:

$$A_f(s) = \frac{A_0 / (1 + A_0 \beta)}{1 + s / \omega_H (1 + A_0 \beta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{Hf} = \omega_H (1 + A_0 \beta)}$$

Un'altra effetto benefico della retroazione negativa è l' estensione della banda.

Ipotizzando che il guadagno del blocco sul ramo diretto abbia una funzione di trasferimento a singolo polo.

Sostituendo l' espressione di $A(s)$ in quella del guadagno A_f si trova con facili passaggi che la banda del circuito in retroazione viene estesa di un fattore pari al grado di retroazione.

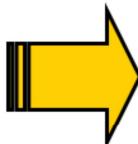


Proprietà dei circuiti in retroazione negativa

- Costanza del prodotto Guadagno·Banda

$$A_f = \frac{A_0}{1 + A_0 \beta}$$

$$\omega_{Hf} = \omega_H (1 + A_0 \beta)$$



$$A_f \cdot \omega_{Hf} = A_0 \cdot \omega_H$$

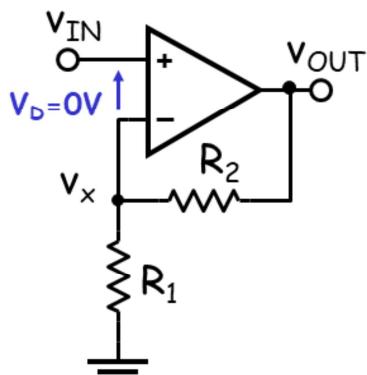
Notiamo a questo punto che siccome il guadagno del circuito in retroazione è in modulo inferiore dello stesso fattore $1+A_0\beta$, moltiplicando il guadagno e la banda del circuito retroazionato i fattori si elidono.

Il prodotto guadagno-banda è quindi un parametro che risulta indipendente dal grado di retroazione e dipende solo dalle proprietà dell'amplificatore sul ramo diretto.

Il prodotto guadagno–banda è quindi costante.



OPAMP: CC virtuale



$$A \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V_D = 0V \quad \Rightarrow \quad V_x = V_{IN}$$

$$v_{IN} = v_x = v_{OUT} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_{OUT} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_{IN}$$

Normalmente per analizzare (o progettare) un circuito ad operazionali non si parte, in prima battuta, dall' analisi della retroazione, ma si applicano alcuni semplici concetti che permettono di studiare o dimensionare il circuito in modo molto sbrigativo.

Uno in particolare è di fondamentale importanza ed è quello del **cortocircuito virtuale**.

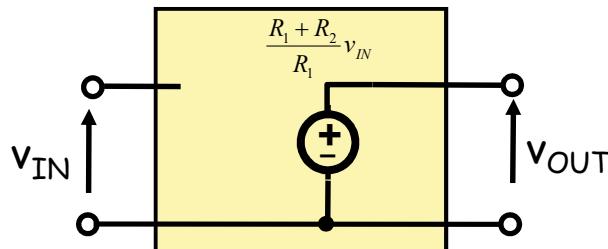
Questo concetto deriva direttamente dal ragionamento appena fatto ovvero:
se il circuito con l' opamp ideale retroazionato negativamente è stabile, e l' uscita non è saturata, allora sicuramente le tensioni di ingresso all' operazionale devono essere uguali,

Ovvero se l' opamp lavora nel tratto ad alto guadagno della sua caratteristica, la tensione differenziale in ingresso è nulla.

Il che significa che gli ingressi sono "virtualmente" cortocircuitati nel senso che risulta $V_+ = V_-$, anche se questo non significa che ci sia continuità fra i due nodi.

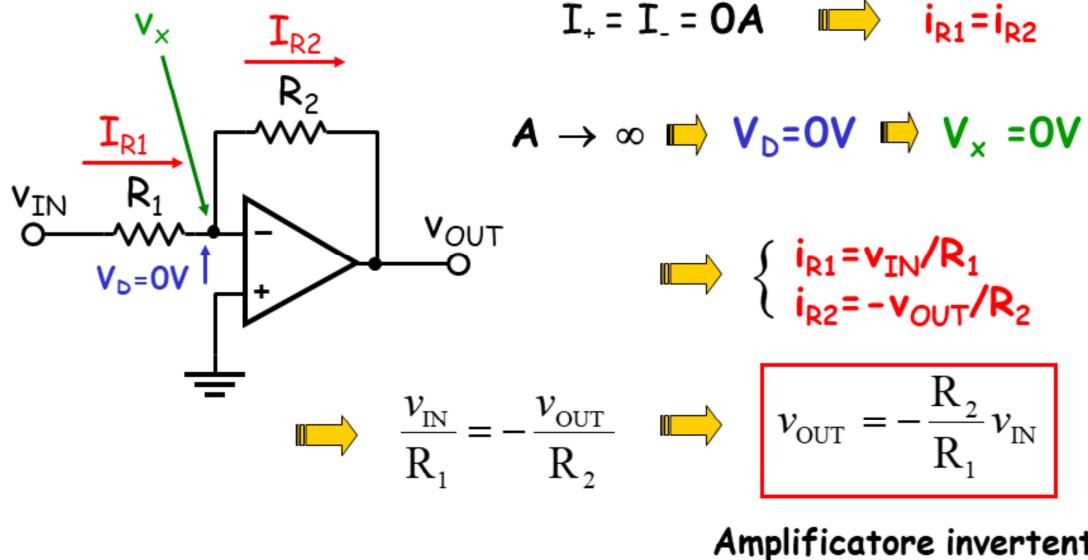
Questo concetto semplifica enormemente l' analisi dei circuiti introducendo un vincolo in più nella rete.

Il modello equivalente del circuito appena descritto quando l' OPAMP non è saturo è il seguente:





OPAMP: analisi semplificata



Un secondo concetto deriva dall' ipotesi che l' impedenza degli ingressi sia infinita. Questo significa che la corrente in ingresso ai morsetti invertente e non invertente è nulla.

Anche in questo caso abbiamo un vincolo in più nella rete che ci aiuta a semplificare i conti.

Nel caso di figura (amplificatore invertente), KCL applicata al nodo dell' ingresso invertente può essere scritta assieme al vincolo $I=0$ risultando direttamente in

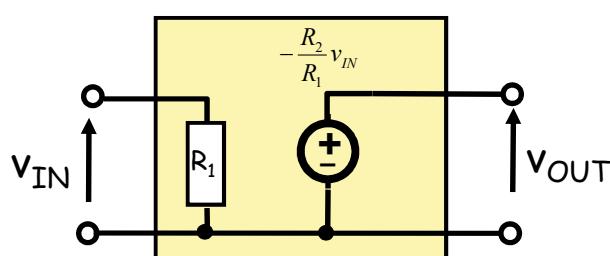
$$i_{R1} = i_{R2}$$

Anche in questo caso, il guadagno dello stadio amplificatore dipende solo dal rapporto fra due resistori.

Si noti che nell' ipotesi di CC virtuale, il morsetto invertente si trova in questo caso al potenziale di massa.

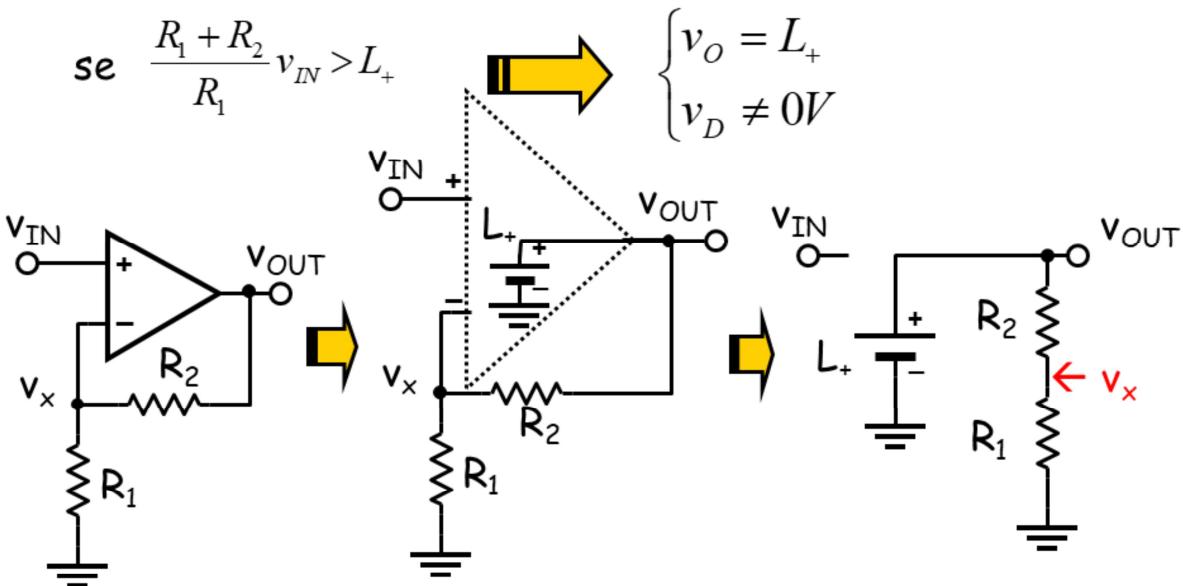
Si dice quindi che il nodo cui è collegato il morsetto invertente dell' operazionale è una **massa virtuale**.

Il modello equivalente del circuito appena descritto quando l' OPAMP non è saturo è il seguente:





Limiti del modello



Quanto detto finora vale finchè la tensione di uscita rientra nei limiti di funzionamento in alto guadagno dell' opamp ovvero finchè risulta

$$L_- \leq v_{OUT} \leq L_+$$

Ovvero per

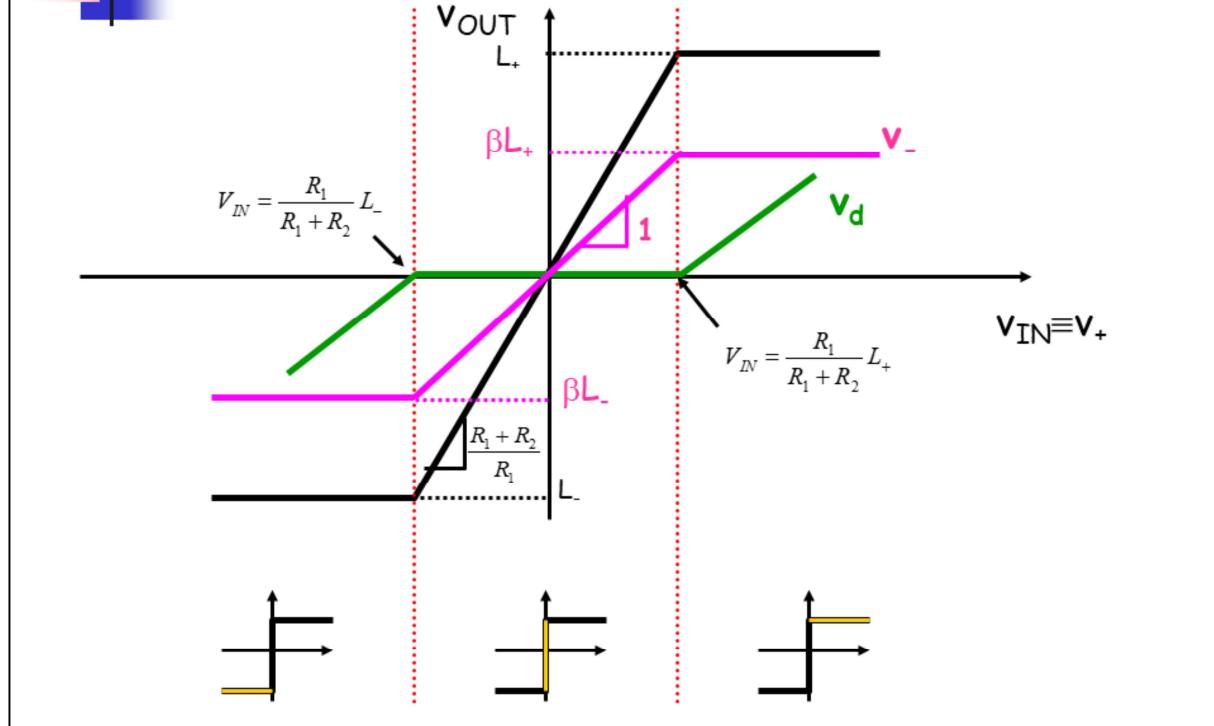
$$L_- \frac{R_1}{R_1 + R_2} \leq v_{IN} \leq L_+ \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Al di fuori di questi limiti, ovvero per tensioni di ingresso troppo alte o troppo basse, l' uscita dell' operazionale entra in saturazione.

In questa situazione l'operazionale non lavora più nella regione ad alto guadagno ($v_D=0, A \rightarrow \infty$) ma, viceversa si trova a lavorare in uno dei tratti a guadagno nullo della sua caratteristica e va quindi modellato come un generatore di tensione non comandato.

Notiamo che in queste condizioni v_d non è più nulla e quindi non si può più parlare di massa virtuale o CC virtuale.

Caratteristica I/O dello stadio



La caratteristica statica completa dell' amplificatore non invertente ad operazionale è quella riportata in figura.

Notiamo che:

$$1) \text{ Per } L_- \frac{R_1}{R_1 + R_2} \leq v_{IN} \leq L_+ \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La caratteristica di I/O presenta una pendenza positiva pari a $(R_1 + R_2)/R_1$

In questo range la tensione al morsetto v_- è uguale a quella al morsetto v_+ in quanto l' operazionale non essendo saturo lavora nel tratto ad alto guadagno della sua caratteristica. Pertanto $v_d=0$.

$$2) \text{ Per } v_{IN} < L_- \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Per mantenere $v_- = v_+$ l' uscita dell' operazionale dovrebbe essere inferiore al valore L_- . L' operazionale entra quindi in saturazione negativa e si trova a lavorare nel tratto a guadagno nullo con $V_O=L_-$ e $v_d<0$. v_- risulta fissata quindi a

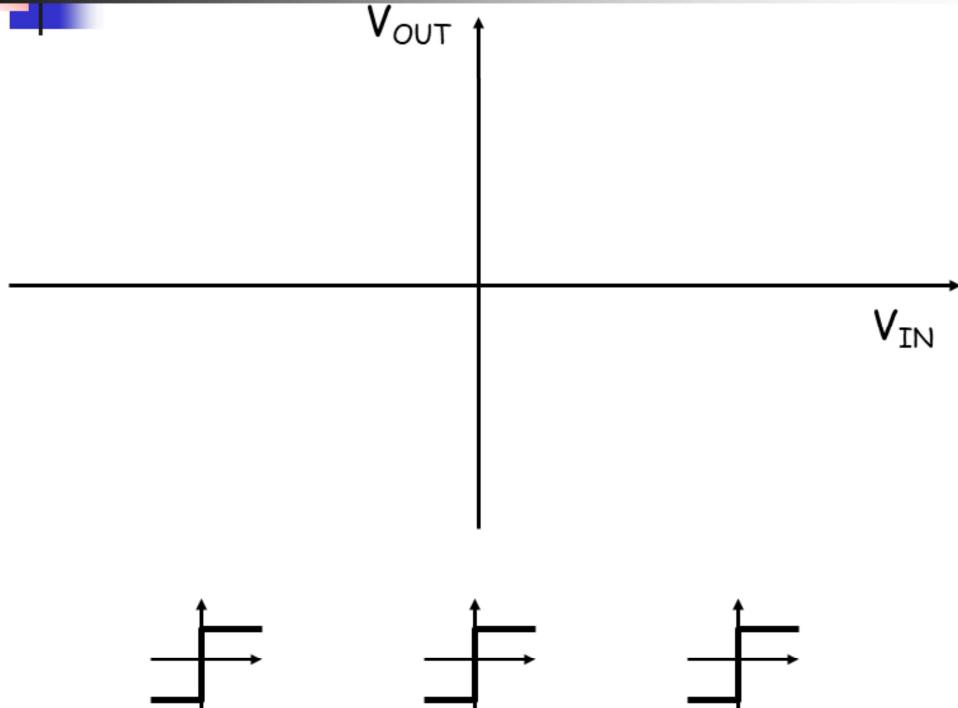
$$v_- = L_- \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

è negativa ma $v_- > v_{IN}=v_+ \Rightarrow v_d<0$ in accordo con il funzionamento dell' OPAMP

$$3) \text{ Per } v_{IN} > L_+ \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{vale un ragionamento analogo al punto 2.}$$

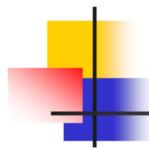


Esercizio

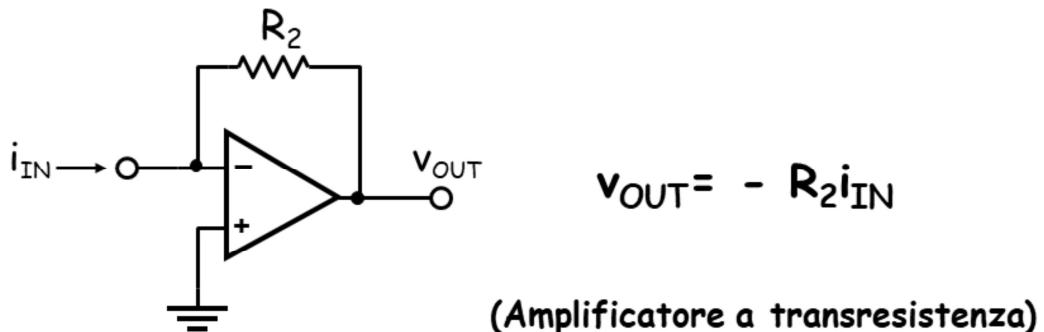


Si ripeta il ragionamento appena fatto nel caso dell' amplificatore invertente ad opamp e si traccino:

- La caratteristica statica
- L' andamento di v_- in funzione di v_{IN}
- L' andamento di v_d in funzione di v_{IN}



Un caso particolare: convertitore I-V



Un caso particolare ed importante del circuito amplificatore invertente ad OPAMP è rappresentato dal caso in cui il segnale in ingresso sia rappresentato da i_{R1} . In questo caso siamo di fronte ad un amplificatore in transresistenza.

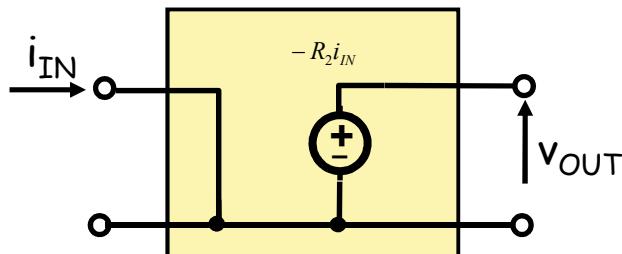
Dato che i_{R1} è il segnale (i_{IN}) da amplificare, la relazione ingresso uscita si ottiene semplicemente uguagliando i_{IN} ad i_{R2} .

Otteniamo quindi

$$i_{IN} = -\frac{v_{OUT}}{R_2} \Rightarrow v_{OUT} = -R_2 \cdot i_{IN}$$

Naturalmente questa relazione è vera quando l' OPAMP lavora nel tratto ad alto guadagno della caratteristica.

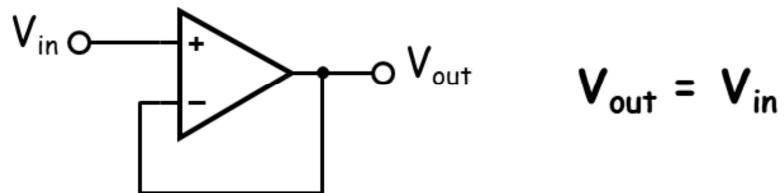
Il modello equivalente del circuito appena descritto quando l' OPAMP non è saturo è il seguente:



Esercizio: determinare l' intervallo di variabilità della corrente di ingresso che garantisce il funzionamento in alto guadagno dell' operazionale.



L' inseguitore di tensione (voltage follower)



Un caso limite dell' amplificatore non invertente è quello in cui $R_1 \rightarrow \infty$ (ovvero è un aperto).

In questo caso, per qualsiasi valore di R_2 (in particolare per $R_2=0$ come in figura) il guadagno dell' amplificatore è unitario.

Si ha quindi $v_{out}=v_{in}$.

Questo circuito è utilissimo per rigenerare una tensione senza caricare il nodo dalla quale viene prelevata. L' op-amp ha infatti impedenza di ingresso infinita e quindi non assorbe corrente.

Il modello equivalente del circuito appena descritto quando l' OPAMP è in alto guadagno è il seguente:

