Controlli Automatici T
Introduzione al Control System Toolbox in Matlab

Dr. Andrea Testa

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
a.testa@unibo.it

Definire un sistema LTI tempo continuo

Consideriamo un generico sistema LTI tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Esempio singolo integratore con $x, u, y \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Definiamo le matrici A, B, C, D e poi creiamo l'oggetto "sistema" con la funzione `ss` (state space)

```
A = 0;
B = 1;
C = 1;
D = 0;
modello = ss(A, B, C, D);
```

Simulazione di un sistema

```
help lsim
```

Evoluzione libera: ingresso nullo, condizione iniziale non nulla

```
tt = 0:0.1:10; % intervallo temporale
uu_free = zeros(length(tt), 1); % ingresso identicamente nullo
x0_free = 5;   % condizione iniziale
[Y_free, T_free, X_free] = lsim(modello, uu_free, tt, x0_free);
plot(T_free, X_free);
```

Simulazione di un sistema

```
help lsim
```

Evoluzione libera: ingresso nullo, condizione iniziale non nulla

```
tt = 0:0.1:10; % intervallo temporale
uu_free = zeros(length(tt), 1); % ingresso identicamente nullo
x0_free = 5;   % condizione iniziale
[Y_free, T_free, X_free] = lsim(modello, uu_free, tt, x0_free);
plot(T_free, X_free);
```

Evoluzione forzata: ingresso non nullo, condizione iniziale nulla

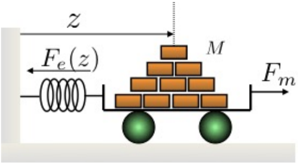
```
tt = 0:0.1:10; % intervallo temporale
uu_forced = ones(length(tt), 1); % ingresso a 'gradino'
x0_forced = 0; % condizione iniziale
[Y_forced, T_forced, X_forced] = lsim(modello, uu_forced, tt,
    x0_forced);
plot(T_forced, X_forced);
```

Esempio carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M} x_1(t) + \frac{1}{M} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



x_1 posizione centro di massa
x_2 velocità centro di massa

$k = 1\,\mathrm{N/m}$ costante elastica (tempo invariante)
$M = 0.5\,\mathrm{kg}$ massa

Esercizio: grafico dello stato del sistema per $0 \leq t \leq 10$ con condizione iniziale $x = [0, 1]^\top$ e input sinusoidale avente periodo 5 secondi

Calcolo forma di Jordan

Equazioni carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Matrici del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

```
[T_inv, A_hat] = jordan(A);
```

A è diagonalizzabile con autovalori complessi coniugati $\pm\sqrt{2}i$, infatti matlab restituisce:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

Calcolo forma di Jordan

Equazioni carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Matrici del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

```
[T_inv, A_hat] = jordan(A);
```

A è diagonalizzabile con autovalori complessi coniugati $\pm\sqrt{2}i$, infatti matlab restituisce:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

Usando la matrice di cambio di coordinate T si può riesprimere il sistema con le matrici

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \ \hat{B} = TB, \ \hat{C} = CT^{-1}, \ \hat{D} = D$$

Esercizio: verificare che il grafico dell'evoluzione libera dell'uscita non varia se fatto nelle coordinate originali o nelle nuove coordinate.