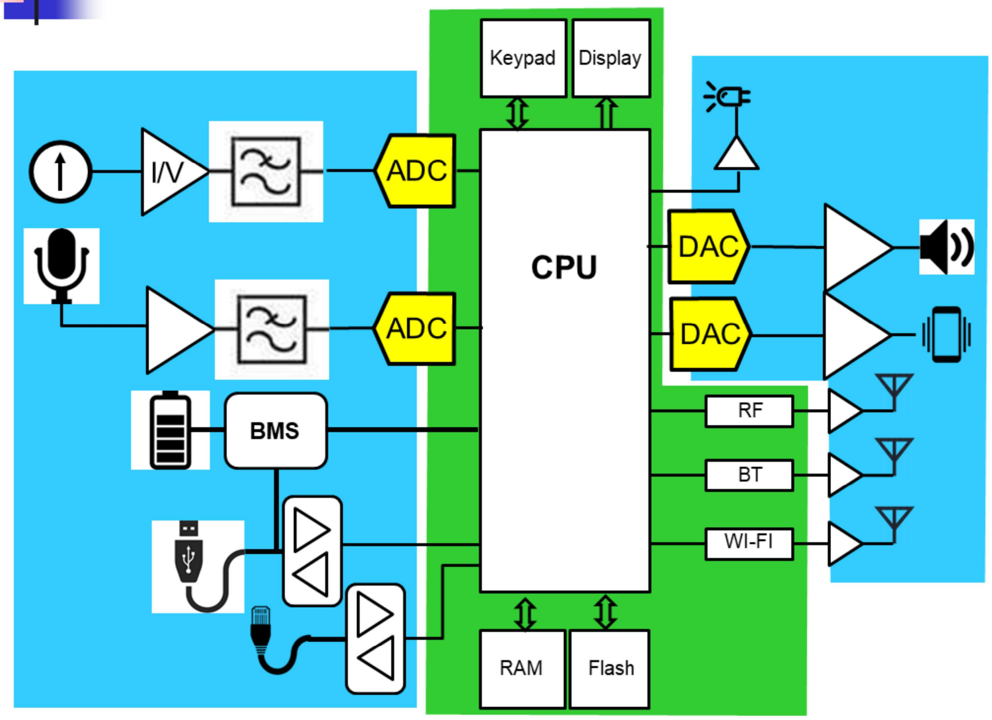
# Elaborazione dei segnali




I moderni sistemi elettronici per l' elaborazione dei segnali consistono in una piattaforma hardware e da una serie di programmi (applicativi, driver, firmware) che ne gestiscono le funzionalità.

L' hardware degli apparati elettronici moderni è formato da una serie di circuiti che possono essere sommariamente raggruppati in tre categorie:

- Blocchi analogici
- Converitori A/D e D/A
- Blocchi digitali

Questo corso si propone di fornire alcuni elementi base per la comprensione del funzionamento di tutti questi circuiti.

# Classificazione dei segnali

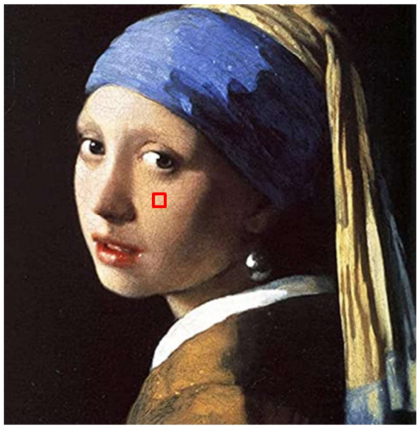
| Tipo | Contenuto informativo | Codifica | Proprietà |
|---|---|---|---|
| Analogico | Infiniti valori all' interno di un intervallo | Variazione continua di una grandezza fisica | Tempo continuo<br>Valori continui |
| Digitale | Valori numerici | Valori discreti di una grandezza fisica | Tempo discreto<br>Valori discreti |

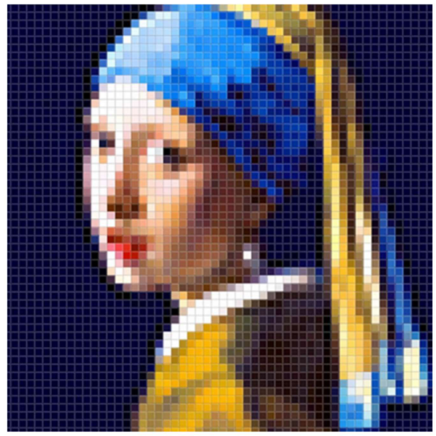
A/D* D/A

**(*) perdita di informazione**

# Classificazione dei segnali

A/D*



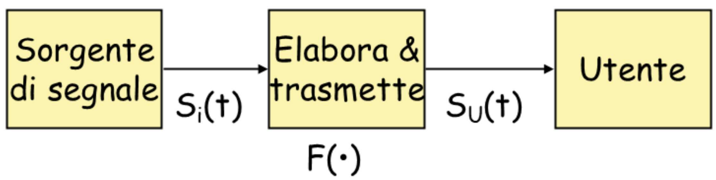


D/A

(*) perdita di informazione

# Elaborazione dei segnali analogici

- Segnali
  - S(t) grandezze fisiche in funzione del tempo
  - Segnali analogici: tutti i valori sono significativi
- Sistemi di elaborazione dei segnali $S_u(t)=F(S_i(t))$




•Per **segnale** intendiamo la variazione nel tempo di una grandezza fisica (es. la tensione ad un morsetto) cui si associa una informazione.

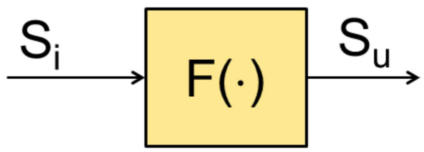
• Un segnale viene detto **analogico** se è significativo qualsiasi valore che la grandezza fisica cui è associato può assumere all’ interno di un intervallo $[\mathbf{S_{min}}\text{-}\mathbf{S_{max}}]$.

•Schematizziamo un circuito che elabora un segnale $S_i(t)$ fornito da una sorgente di segnale e fornisce all’ utente (o circuito successivo) un segnale elaborato $S_u(t)$ come un **blocco** modellabile con una generica funzione matematica **F( • )** . Il segnale in uscita sarà quindi esprimibile come $\mathbf{S_U(t) = F( S_i(t) )}$ .

# Blocchi di elaborazione lineari

- **Proprietà dei blocchi lineari**

$$\begin{cases} F(KS_i) = KF(S_i) \\ F(S_{i1}+ S_{i2}) = F(S_{i1}) + F(S_{i2}) \quad \text{(sovrapposizione degli effetti)} \end{cases}$$



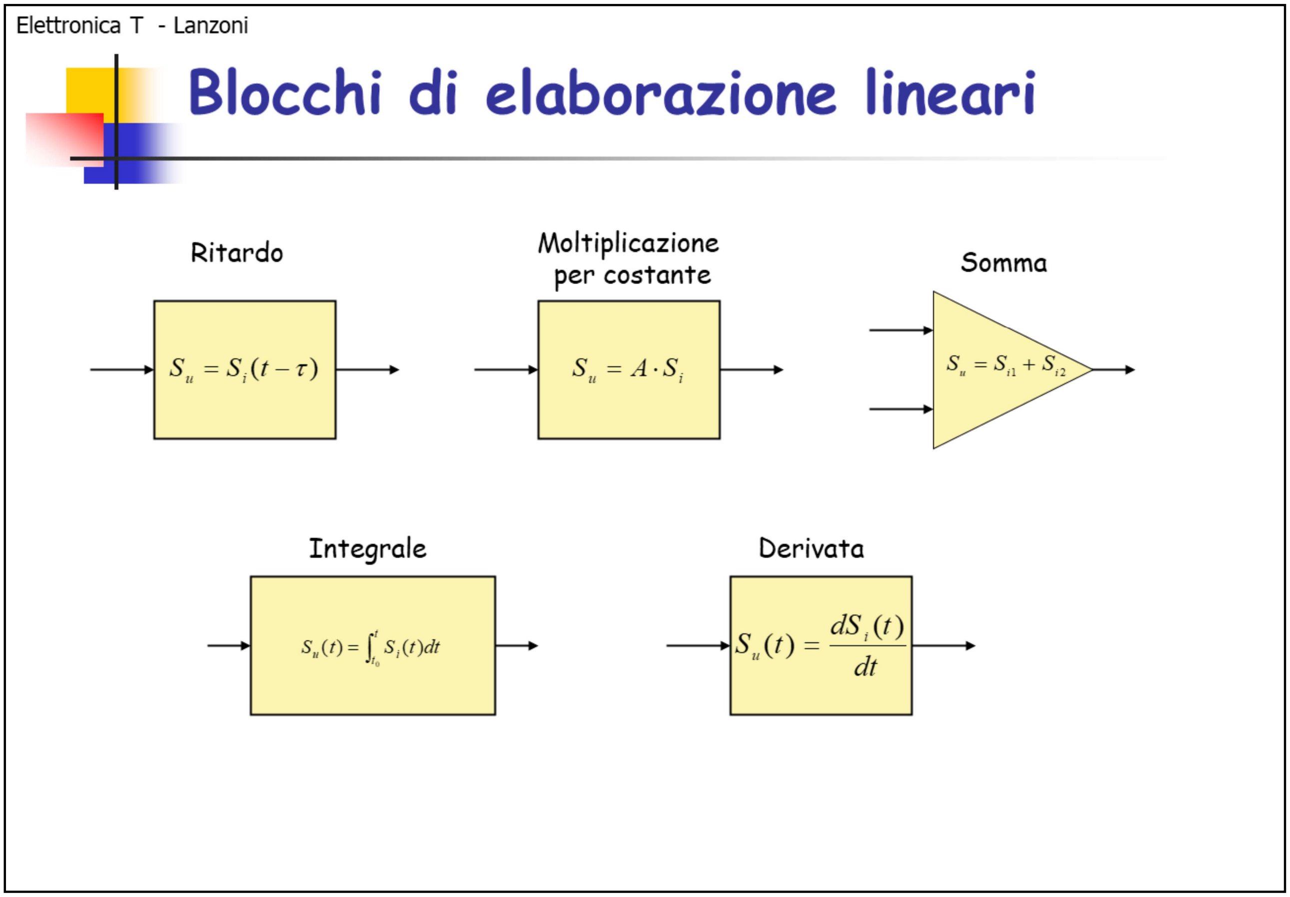

Alcuni blocchi di elaborazione analogica <u>possono</u> godere di alcune notevoli proprietà. In particolare della proprietà di **linearità**.

Per <u>definizione</u> un blocco si dice **lineare** <u>se e solo</u> la funzione F( • ) che lo descrive soddisfa <u>contemporaneamente</u> le seguenti condizioni:

1) se $S_u=F(S_i)$ $\Rightarrow$ $S_u' = F(KS_i)=KF(S_i)=KS_u$

2) se $S_{u1}=F(S_{i1})$ e $S_{u2}=F(S_{i2})$ $\Rightarrow$ $S_u = F(S_{i1} + S_{i2}) = F(S_{i1}) +F(S_{i2})=S_{u1}+S_{u2}$

Questa seconda proprietà si indica usualmente come <u>sovrapposizione degli effetti</u>.
In generale F( • ) è una funzione lineare se e solo se essa è **additiva ed omogenea**.




Alcuni esempi di blocchi di elaborazione lineare sono i seguenti:

- Ritardo costante
- Moltiplicazione per costante
- Derivata
- Integrale
- Somma

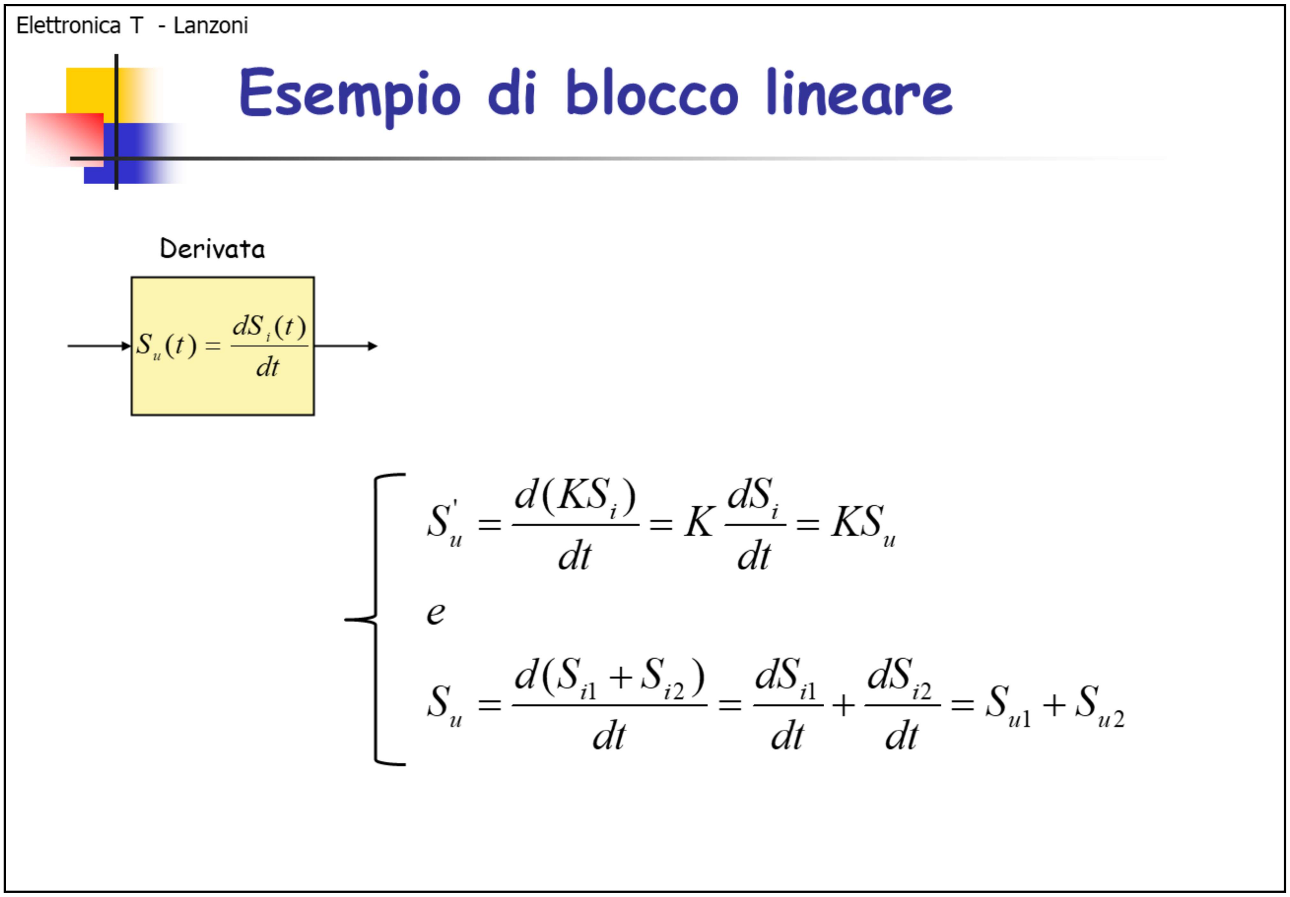
E' facile verificare che le funzioni associate a questi blocchi soddisfano le condizioni di linearità.

**Per esempio**: $F(\bullet) = \frac{d}{dt}$ è un blocco lineare, infatti:

$$S_u' = \frac{d(KS_i)}{dt} = K\frac{dS_i}{dt} = KS_u$$

$e$

$$S_u = \frac{d(S_{i1} + S_{i2})}{dt} = \frac{dS_{i1}}{dt} + \frac{dS_{i2}}{dt} = S_{u1} + S_{u2}$$




Alcuni esempi di blocchi di elaborazione lineare sono i seguenti:

- Ritardo costante
- Moltiplicazione per costante
- Derivata
- Integrale
- Somma

E' facile verificare che le funzioni associate a questi blocchi soddisfano le condizioni di linearità.

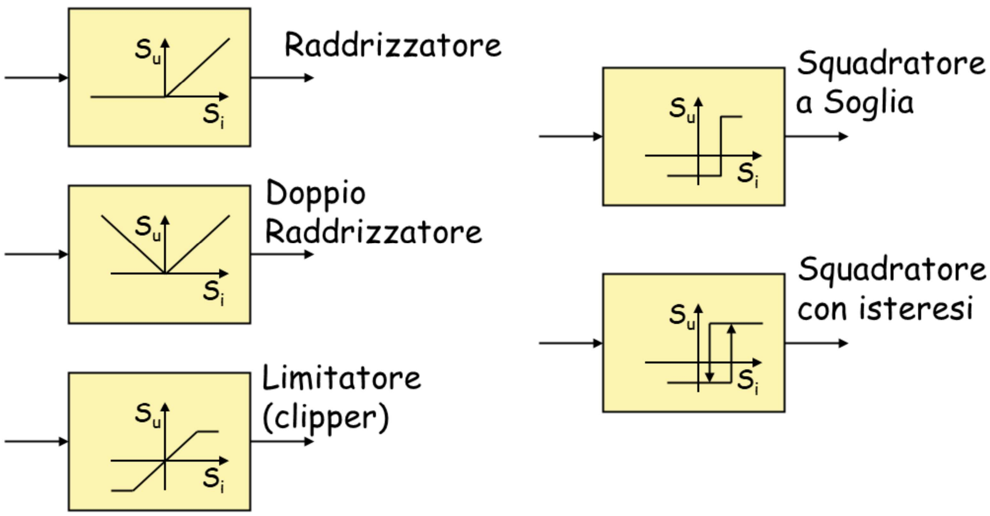
**Per esempio**: $F(\bullet) = \frac{d}{dt}$ è un blocco lineare, infatti:

$$S_u^{'} = \frac{d(KS_i)}{dt} = K\frac{dS_i}{dt} = KS_u$$

$$e$$

$$S_u = \frac{d(S_{i1}+S_{i2})}{dt} = \frac{dS_{i1}}{dt} + \frac{dS_{i2}}{dt} = S_{u1} + S_{u2}$$

## Blocchi non-lineari




Esempi di blocchi non lineari sono :

- raddrizzatore
- doppio raddrizzatore
- limitatore
- squadratore a soglia
- squadratore con isteresi

Per questi circuiti è facile verificare che non soddisfano contemporaneamente alle due condizioni di linearità per qualsiasi valore dell' ingresso.

**Per esempio:** il raddrizzatore doppio, ipotizzando un segnale di ingresso bipolare, non soddisfa la prima condizione infatti per K= -1

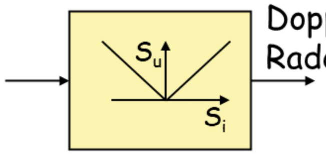
si dovrebbe avere : $S_u=F(-S_i) = -F(S_i)$ per ogni $S_i$

quando invece risulta : $S_u=F(-S_i) = F(S_i)$ per ogni $S_i$

### Blocchi lineari a tratti

Alcuni blocchi, sebbene non lineari, si possono considerare **lineari a tratti.** Questo semplifica molto l' analisi di una rete perchè permette di suddividere lo studio in varie fasi, ognuna delle quali si occupa di cosa succede quando i segnali sono all' interno di un sottoinsieme di valori possibili tale da garantire che tutti i blocchi non lineari lavorino in una tratto lineare della loro caratteristica.

## Esempio di blocco non-lineare




Doppio Raddrizzatore

Applicando le condizioni di linearità

$$\begin{cases} S_u' = \dfrac{d(KS_i)}{dt} = K\dfrac{dS_i}{dt} = KS_u \\ e \\ S_u = \dfrac{d(S_{i1}+S_{i2})}{dt} = \dfrac{dS_{i1}}{dt} + \dfrac{dS_{i2}}{dt} = S_{u1} + S_{u2} \end{cases}$$

con K = -1 si dovrebbe avere : $S_u$=F(-$S_i$) = -F($S_i$) per ogni $S_i$

quando invece risulta : $S_u$=F(-$S_i$) = F($S_i$) per ogni $S_i$

Esempi di blocchi non lineari sono :

- raddrizzatore
- doppio raddrizzatore
- limitatore
- squadratore a soglia
- squadratore con isteresi

Per questi circuiti è facile verificare che non soddisfano contemporaneamente alle due condizioni di linearità per qualsiasi valore dell' ingresso.

**Per esempio:** il raddrizzatore doppio, ipotizzando un segnale di ingresso bipolare, non soddisfa la prima condizione infatti per K= -1

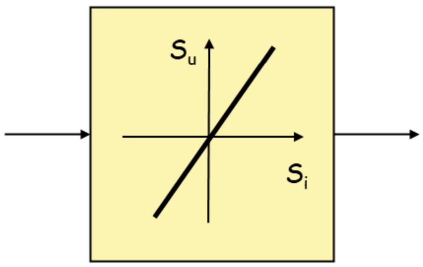
si dovrebbe avere : $S_u$=F(-$S_i$) = -F($S_i$) per ogni $S_i$

quando invece risulta : $S_u$=F(-$S_i$) = F($S_i$) per ogni $S_i$

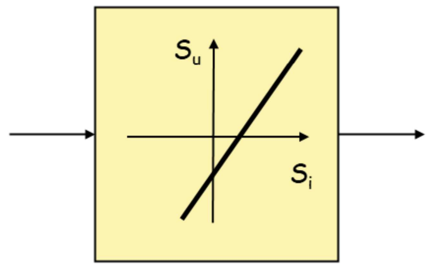
### Blocchi lineari a tratti

Alcuni blocchi, sebbene non lineari, si possono considerare **lineari a tratti.** Questo semplifica molto l' analisi di una rete perchè permette di suddividere lo studio in varie fasi, ognuna delle quali si occupa di cosa succede quando i segnali sono all' interno di un sottoinsieme di valori possibili tale da garantire che tutti i blocchi non lineari lavorino in una tratto lineare della loro caratteristica.

# Un esempio importante




$S_u = A \cdot S_i$




$S_u = A \cdot S_i + C$

Lineare infatti

$\mathbf{A \cdot (K \cdot S_i) = K \cdot (A \cdot S_i)}$

**e**

$\mathbf{A \cdot (S_{i1} + S_{i2}) = A \cdot S_{i1} + A \cdot S_{i2}}$

NON Lineare, infatti:

$\mathbf{A \cdot (K \cdot S_i) + C \neq K \cdot (A \cdot S_i + C)}$

Un importante esempio di **blocco NON lineare** è costituito da un blocco che moltiplica un ingresso per un fattore K **e** somma una costante C.

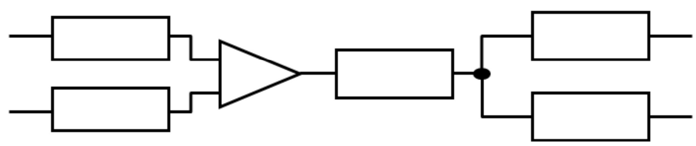
**E' facile verificare che un blocco di questo tipo NON soddisfa alle condizioni di linearità.**

**Si noti in particolare che la funzione che rappresenta il blocco non è omogenea.**

# Reti di blocchi lineari

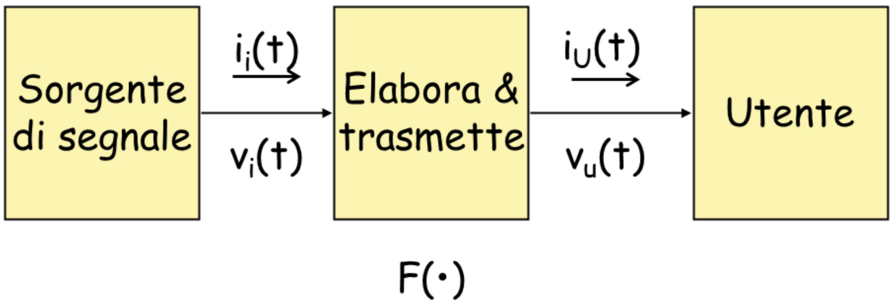
Teorema:

Una combinazione arbitraria di blocchi lineari risulta in una rete pure lineare



Un insieme di blocchi lineari connessi fra loro in modo che i segnali transitino soltanto attraverso blocchi lineari ed eventualmente nodi sommatori e diramazioni risulta in una rete che gode pure della proprietà di linearità.

# Segnali elettrici



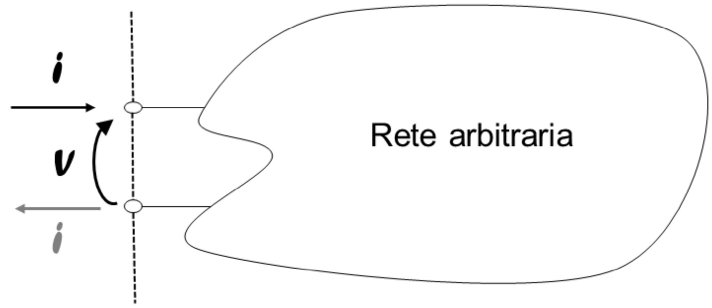

Pensiamo ora di occuparci di segnali rappresentati da tensioni o correnti.

All' interno dei blocchi di figura sono presenti elementi circuitali collegati a formare una ***rete***.

Le tensioni ai nodi e le correnti che possono variare in funzione del tempo in relazione alla variazione dei segnali elettrici applicati all' ingresso si dicono ***funzioni di rete***.

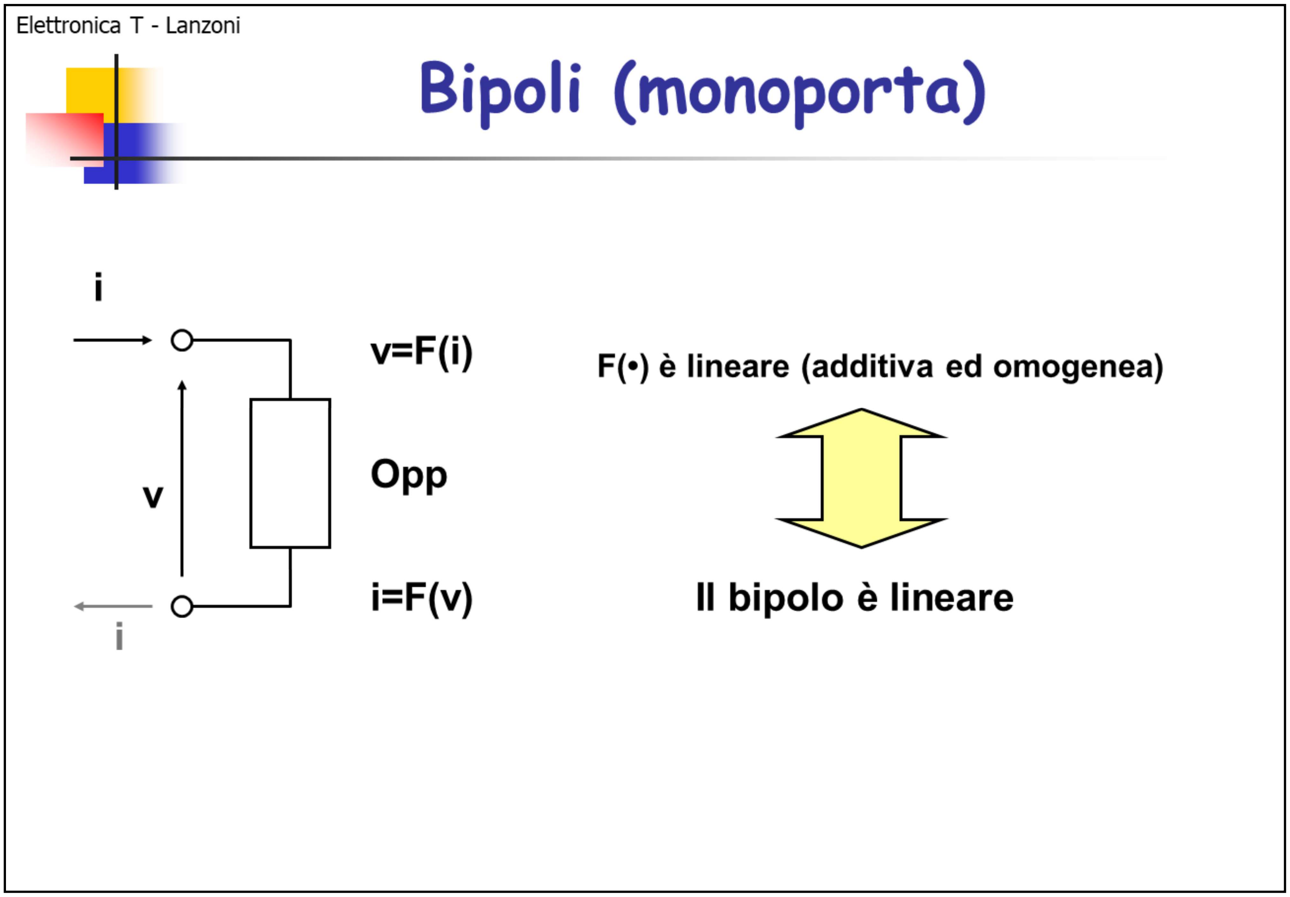
**Convenzione:** nell' indicare una tensione o una corrente useremo il maiuscolo ( **V** e **I** ) se si tratta di grandezze indipendenti dal tempo e il minuscolo ( **v** e **i** ) se invece sono dipendenti dal tempo.

# Definizione di Porta




Si definisce **porta** di una rete qualsiasi una coppia di nodi (morsetti) che possono essere caratterizzati da una tensione ai capi (v) ed una corrente (i) entrante in un morsetto.

Proprietà della porta è dunque il fatto che la corrente ***i*** che <u>entra</u> in un morsetto è identica a quella che <u>esce</u> dall' altro morsetto.




L' elemento più semplice di una rete per l' elaborazione di segnali in tensione o corrente è il bipolo.

Si definiscono **bipoli** quei componenti che hanno solo due punti di contatto elettrico con l' esterno.

Indicheremo con **v** la tensione fra questi due punti e con **i** la corrente che fluisce attraverso uno dei due collegamenti e che rifluisce attraverso il secondo.

Se si definisce **porta** una coppia di punti a potenziali diversi attraverso i quali fluiscono due <u>correnti uguali in modulo ma di verso opposto</u>, il bipolo può essere definito anche mono-porta.

Nel seguito ci occuperemo implicitamente (salvo avviso contrario) di

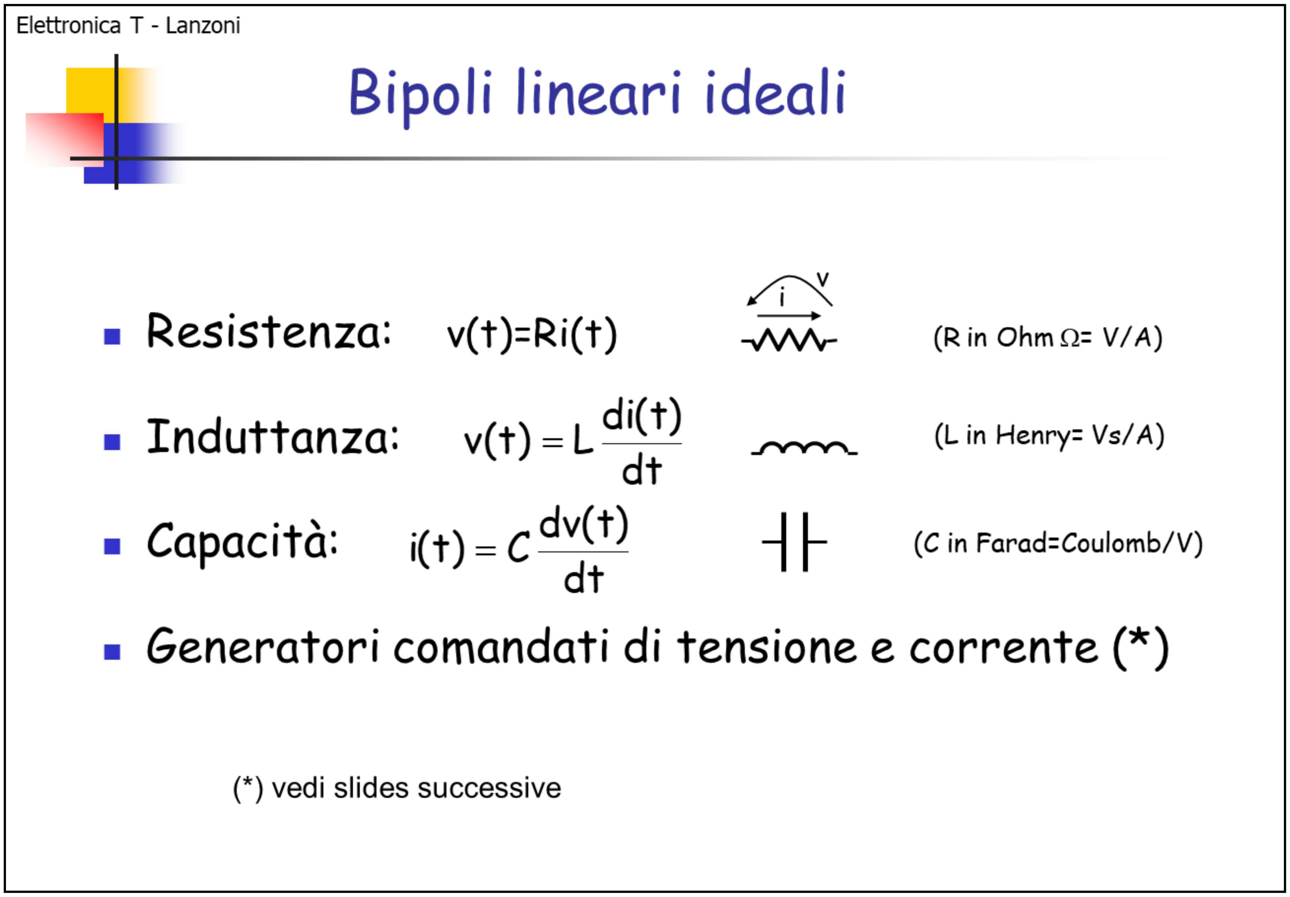
bipoli **tempo invarianti**, le cui caratteristiche cioè non cambiano nel tempo.

Inoltre supporremmo che la rete sia a **parametri concentrati**, cioè

penseremo che alle linee che collegano fra loro i componenti non sia

associato nessun parametro resistivo o induttivo e che non esistano

accoppiamenti capacitivi fra le linee (cioè siano trascurabili).



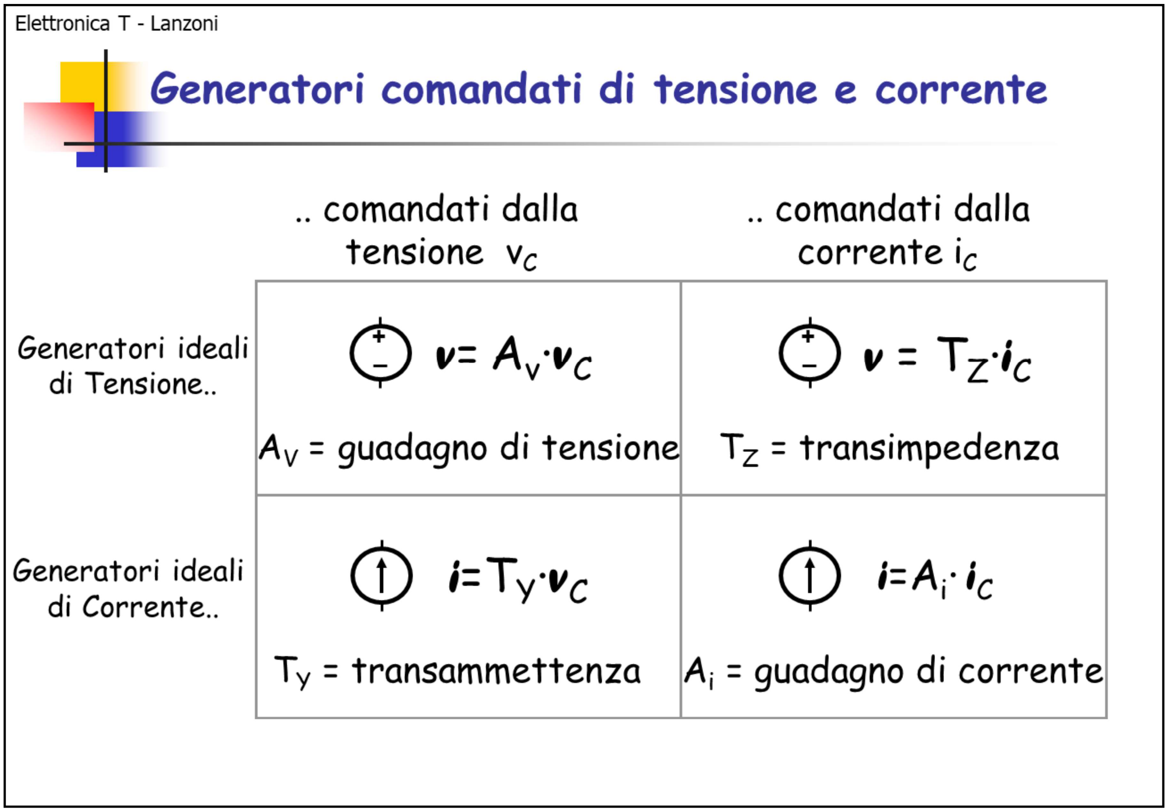

Esempi comuni di **bipoli lineari ideali** sono:

- Resistenze
- Capacità
- Induttori
- Generatori controllati di tensione e corrente (vedi dopo)

È facile notare che le relazioni fra correnti e/o tensioni associate a questi componenti (ovvero i loro modelli) sono additive ed omogenee e quindi questi componenti si possono a ragione definire lineari.

Il termine ideale non corrisponde a nessuna proprietà matematica, ma sta ad indicare che il modello del bipolo rappresenta una astrazione (e semplificazione) delle reali caratteristiche di un componente.

Per esempio, una resistenza ideale viene usata per rappresentare matematicamente un componente reale il cui comportamento elettrico è prevalentemente resistivo nelle condizioni in cui lo si intende impiegare. Si ipotizza in questo caso che il componente sia rappresentato da un solo parametro costante, indipendente in particolare dall' entità della corrente **i** o dalla tensione **v**. Questa ipotesi è evidentemente una idealizzazione che permette di semplificare i calcoli ma che vale entro certi limiti che devono essere noti e rispettati.




Questi blocchi impongono una relazione fra due funzioni di rete (tensione o corrente), una delle quali rappresenta la tensione  a due nodi diversi da quelli cui è collegato il generatore o una corrente su un ramo diverso da quello in cui è inserito.

Se la grandezza comandata e quella comandante sono dello stesso tipo,

(tensione o corrente), il coefficiente che le lega si dice **guadagno** (di tensione o corrente) e risulta adimensionale.

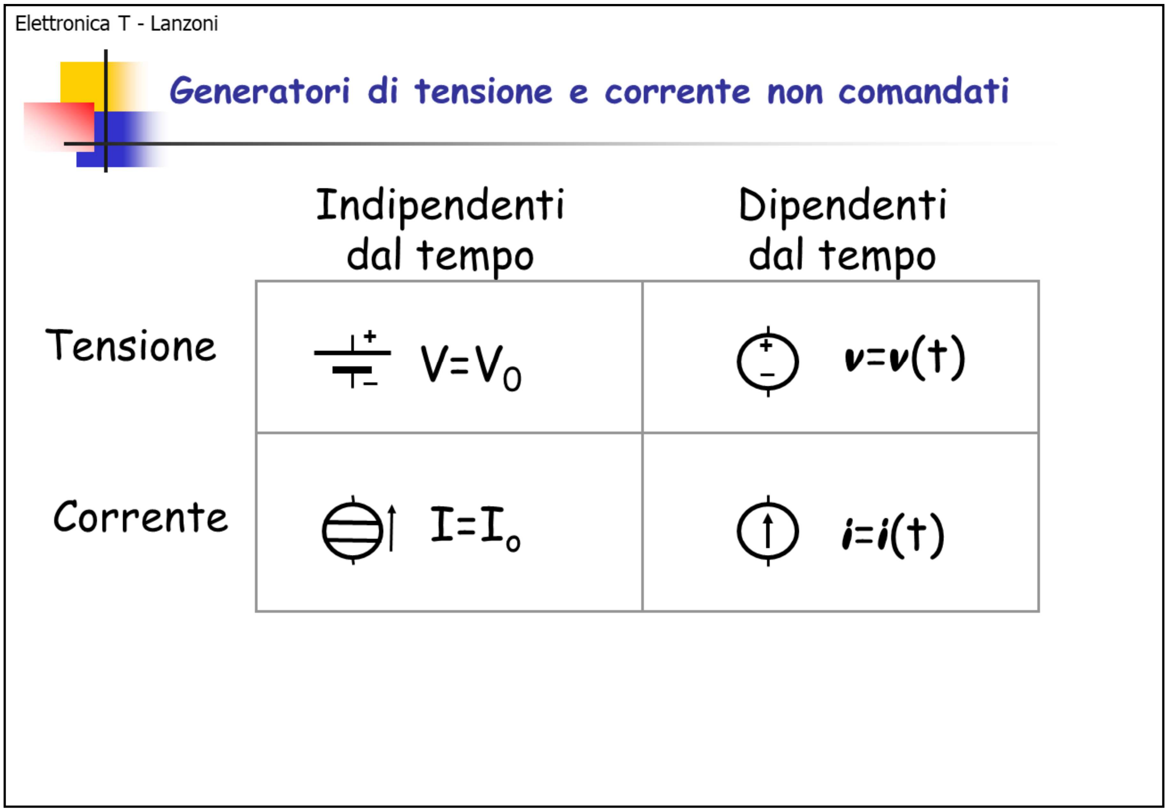
Nei generatori di tensione comandati da corrente, il coefficiente ha la

dimensione di una impedenza e viene indicato come **transimpedenza**.

Infine nei generatori di corrente comandati da tensione, il coefficiente si

chiama **transammettenza** e ha le dimensioni di una ammettenza.

E' facile verificare che questi componenti sono dei bipoli lineari. La relazione che essi impongono fra le funzioni di rete è infatti additiva ed omogenea.




Alla famiglia dei Bipoli appartengono anche i generatori non comandati di tensione o corrente.

Si distinguono in:

**Generatori di tensione ideali**

Sono bipoli che impongono una tensione (costante o variabile nel tempo) fra due nodi di una rete, indipendentemente dalla corrente che erogano.

Attraverso il ramo dove è inserito un generatore di questo tipo scorre una corrente incognita (anche nel segno), nel senso che il generatore impone un vincolo sulla tensione ai capi ma non sulla corrente che sostiene che puo' assumere (idealmente) qualsiasi valore. La corrente sostenuta dal generatore si calcola risolvendo la rete ad esso collegata.

**Generatori di corrente ideali**

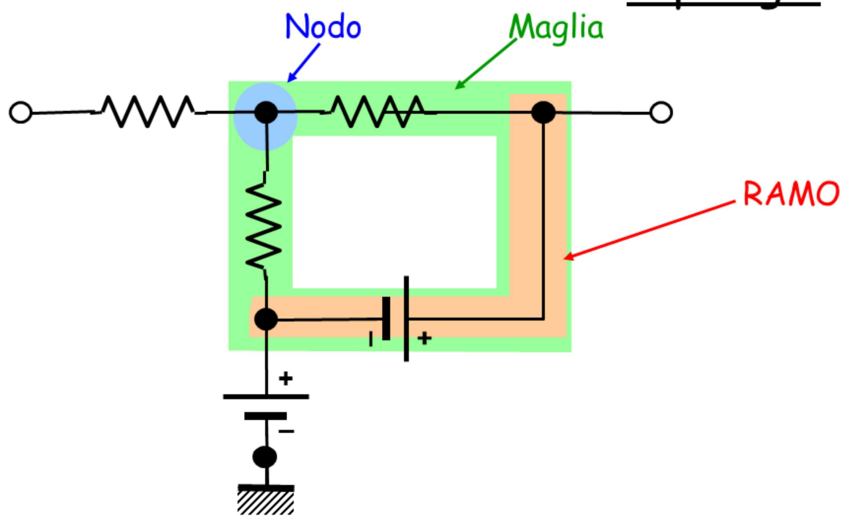
Sono, dualmente,  bipoli che impongono una corrente (costante o veriabile nel tempo) sul ramo dove sono inseriti. La tensione ai capi di un generatore di corrente non è nota se non risolvendo la rete ad esso collegata.

<u>I generatori non comandati non sono bipoli lineari. La funzione che li descrive non è infatti omogenea.</u>

Gli unici casi (particolari) in cui i generatori non comandati sono bipoli lineari sono i casi di generatore di tensione nulla (cortocircuito) e di generatore di corrente nulla (circuito aperto). Peraltro questi due casi sono indistinguibili da una resistenza di valore nullo ed infinito rispettivamente.

# Reti elettriche - topologia

- Un insieme di bipoli o n-poli connessi fra loro formano una <u>rete</u>.
- La rete è caratterizzata dalla sua <u>topologia</u>




Un insieme di bipoli ed n-poli connessi fra loro forma una rete (o circuito) che è caratterizzata da una topologia, ovvero dall' insieme di collegamenti, che può essere descritta come un insieme di nodi, rami e maglie.

Un **nodo** è il punto di contatto tra due o più bipoli.

Ogni nodo è caratterizzato da una tensione riferita al morsetto comune di massa. In questo senso è lecito quindi parlare di ***tensione al nodo***.

Un **ramo** è un segmento che unisce due nodi. In generale su un ramo possono trovarsi più bipoli collegati in serie.

Ogni ramo è caratterizzato da una corrente che lo attraversa (***corrente sul ramo***).

Una **maglia** è un insieme di rami connessi a formare un <u>percorso chiuso</u>.

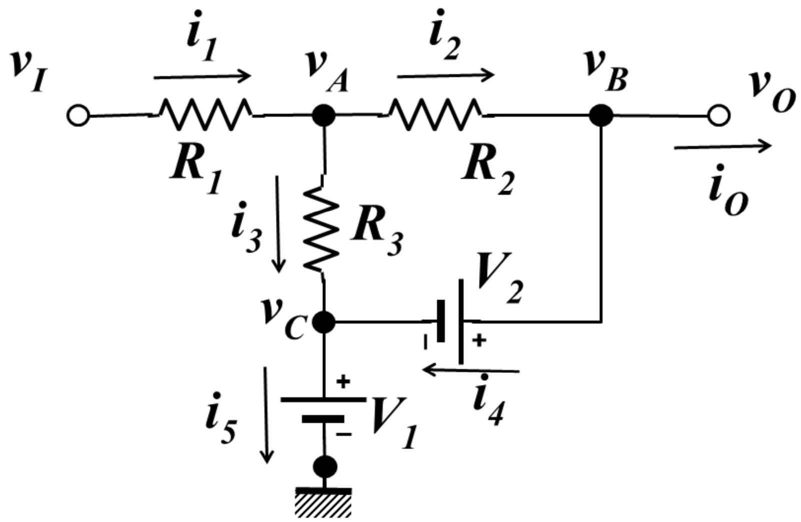
<u>Per le proprietà già enunciate, se tutti gli elementi che formano la rete sono lineari, la rete risulterà pure lineare, comunque complessa essa sia.</u>

Si noti che la rete rappresentata in figura non è lineare in quanto comprende un generatore di tensione non comandato.

## Reti elettriche - soluzione

- Ad ogni nodo della rete è associata una tensione (nelle figura riferita ad un nodo di riferimento detto massa che per definizione ha tensione pari a 0V) ed a ogni ramo una corrente.

  Queste sono denominate **funzioni di rete**.




Associato ad ogni nodo della rete vi è una tensione riferita ad un altro nodo (eventualmente quello di massa come nella figura) e ad ogni ramo è associata una corrente.

L' insieme di tutte le tensioni e correnti indipendenti viene definito insieme delle funzioni di rete.

Risolvere la rete consiste nel trovare il valore di tutte le tensioni e di tutte le correnti mediante la soluzione di un sistema di equazioni indipendenti pari al numero di funzioni di rete.

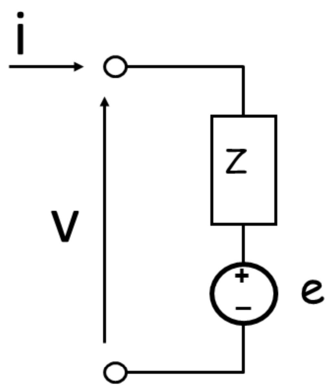
Queste equazioni possono essere scritte sfruttando la legge di Ohm, le due leggi di Kirchhoff ed i modelli degli elementi della rete.

Come già anticipato, se tutti gli elementi che formano la rete sono lineari, la rete risulterà pure lineare, comunque complessa essa sia.

Inoltre, in questo caso, il sistema di equazioni sarà omogeneo nelle funzioni di rete.

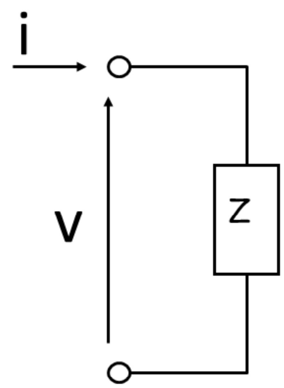
# Legge di Ohm

**Caso Generale**




$$v = Z \cdot i + e$$

**Caso Particolare**




$$v = Z \cdot i$$

**Legge di Ohm** :

Dato un ramo sul quale sia posto un bipolo passivo di impedenza **Z** ed un generatore di forza elettromotrice impressa (fem) **e**, la relazione fra la tensione **v** ai suoi capi e la corrente **i** che lo attraversa è data da :

$$\mathbf{v = Z \cdot i + e}$$

Un caso particolare ma notevole è quello in cui sul ramo non ci siano fem.

In questo caso la legge di ohm si riduce a

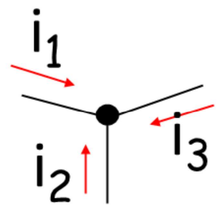
$$\mathbf{v = Z \cdot i}$$

Queste relazioni valgono <u>sempre</u>, sia in regime stazionario che dinamico.

## Leggi di Kirchhoff

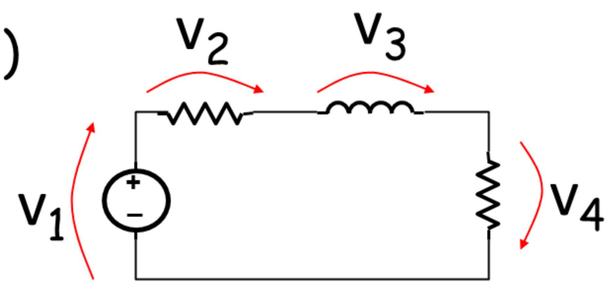
- Correnti ( KCL )

$$\sum i_i = 0$$




- Tensioni ( KVL )

$$\sum v_i = 0$$



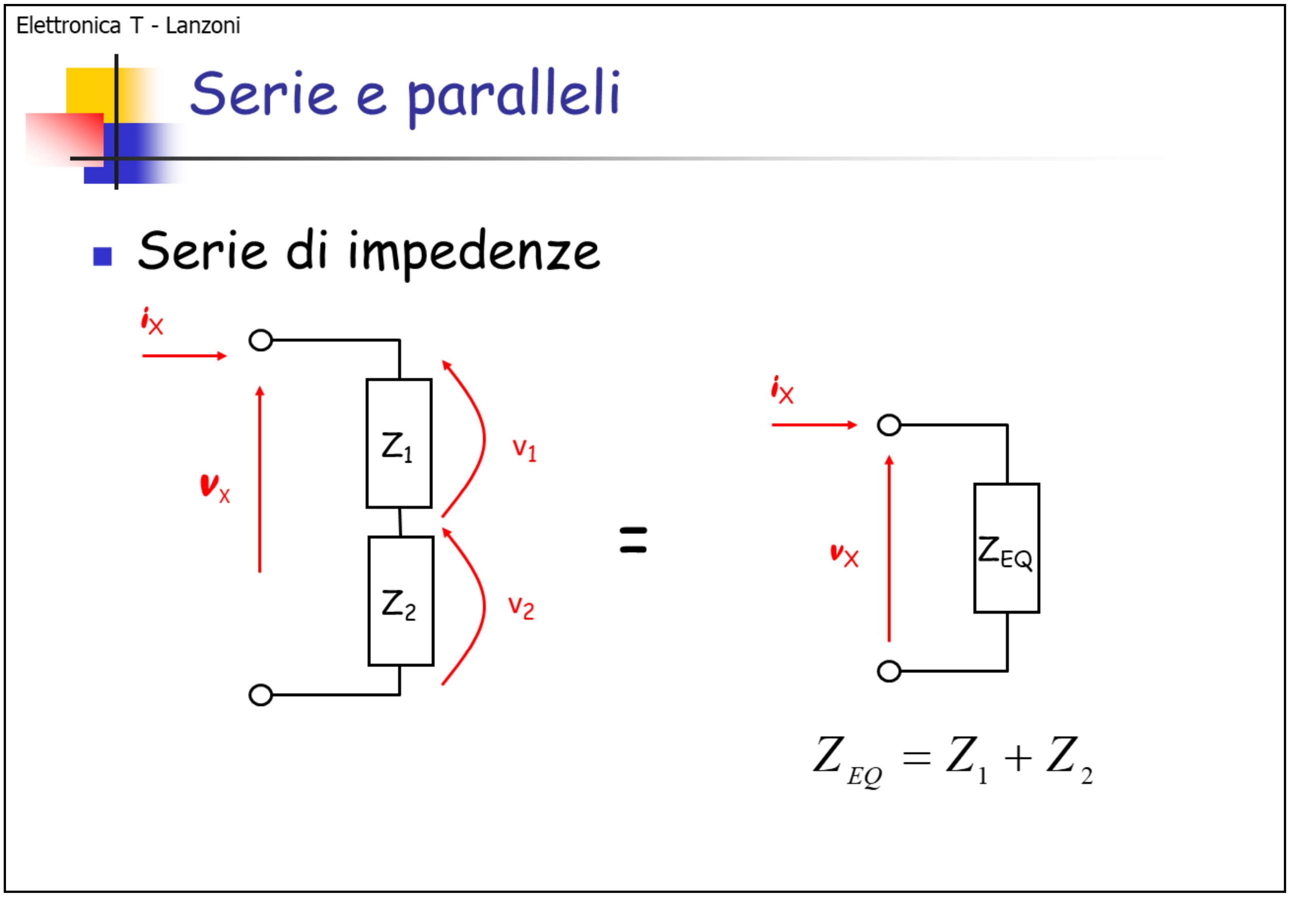

Le leggi di Kirchhoff sono due e si applicano rispettivamente ai nodi e alle maglie.

**Legge di Kirchhoff ai nodi (per le correnti):** sia dato un nodo con n rami collegati e sia $I_i$ la i-esima corrente entrante (uscente) nel nodo.
Vale allora la relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i_i = 0$$

**Legge di Kirchhoff per le maglie (per le tensioni):** Sia data una maglia composta da n rami e sia $V_i$ la differenza di tensione (con segno) sul ramo i-esimo presa percorrendo in senso orario (antiorario) la maglia.
Vale allora la relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$




Grazie alle leggi appena enunciate è possibile ridurre una rete qualsiasi di impedenze ad un' unica impedenza equivalente.

Casi notevoli sono quelli di più impedenze poste in **parallelo** (ovvero connesse fra due stessi nodi e quindi sottoposte alla stessa differenza di potenziale) e **serie** (quando sono attraversate dalla stessa corrente).

L' impedenza equivalente in questi casi è facilmente calcolabile.

**Impedenze in serie**

Per calcolare l' impedenza equivalente si applica una corrente $\mathbf{i_X}$ e si ricava la tensione $\mathbf{v_X}$ applicando Ohm e Kirchhoff sulla maglia :

$$v_X \overset{\text{KVL}}{=} v_1 + v_2 \overset{\text{Ohm}}{=} Z_1 i_X + Z_2 i_X = (Z_1 + Z_2) i_X$$

L' impedenza equivalente risulta quindi:

$$Z_{EQserie} = Z_1 + Z_2$$

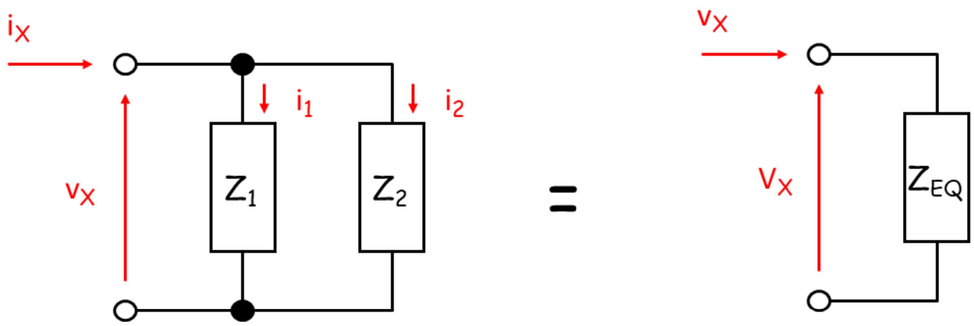
In generale per n impedenze in serie vale:

$$\boxed{Z_{EQserie} = \sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

**N.B. fra due impedenze molto diverse in serie domina la più grande**

# Serie e paralleli

- Parallelo di impedenze




$$\frac{1}{Z_{EQ}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

**Impedenze in parallelo**

Con ragionamento duale si applica una tensione $\mathbf{v_X}$ e si sfruttano Ohm e Kirchhoff al nodo per calcolare la corrente $\mathbf{i_X}$ risultante.

$$i_X \overset{\text{KCL}}{=} i_1 + i_2 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v_X}{Z_1} + \frac{v_X}{Z_2} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) v_X$$

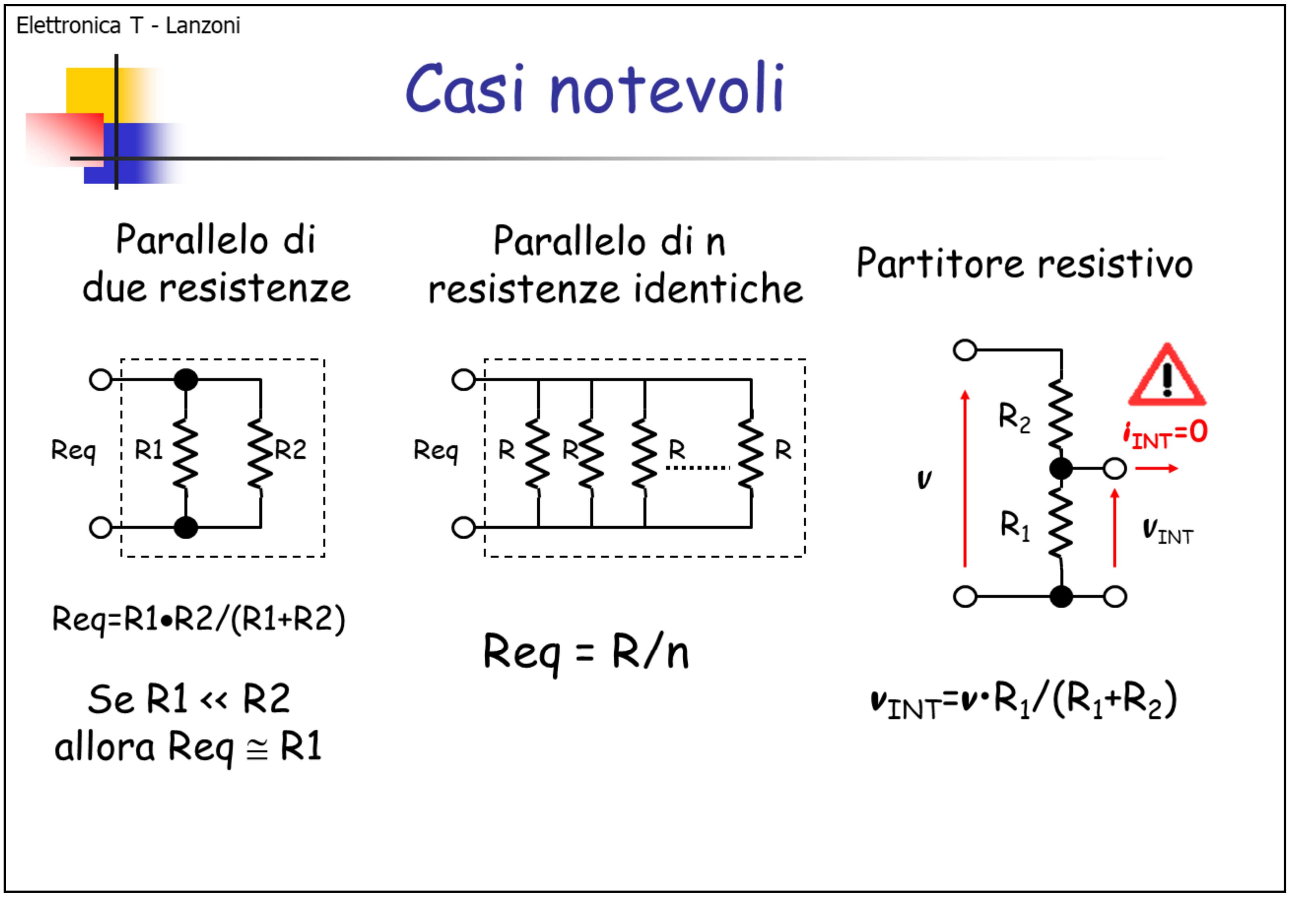
Vale quindi la seguente relazione:

$$\frac{1}{Z_{EQpar}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \Rightarrow \quad Z_{EQpar} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Nel caso di n impedenze in parallelo:

$$\boxed{\frac{1}{Z_{EQpar}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}}$$

**N.B. Fra due impedenze molto diverse in parallelo, domina la più piccola**




Alcuni casi notevoli, che occorre tenere sempre presente per velocizzare l' analisi, sono i seguenti:

**Due resistenze in parallelo** R1 ed R2 si possono sostituire con una resistenza equivalente di valore:

$$R_{EQ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

è chiaro che se $R_1 << R_2$, si può con buona approssimazione sostituire il parallelo con $R_1$, cioè la corrente che scorre attraverso $R_2$ risulta trascurabile rispetto a quella che fluisce su $R_1$. La seguente tabella riporta l' errore che si commette in funzione del rapporto $R_1/R_2$.

| R1 | R2 | R1/R2 | Req parallelo | Err. Approx Req=R1 (%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0,500 | 50,0 |
| 1 | 2 | 0,5 | 0,667 | 33,3 |
| 1 | 5 | 0,2 | 0,833 | 16,7 |
| 1 | 10 | 0,1 | 0,909 | 9,1 |
| 1 | 100 | 0,01 | 0,990 | 1,0 |

**n resistenze R identiche in parallelo**, equivalgono ad una unica resistenza di valore R/n.

E' intuitivo se si considera che su ogni resistenza passa la stessa corrente I=V/R e quindi:

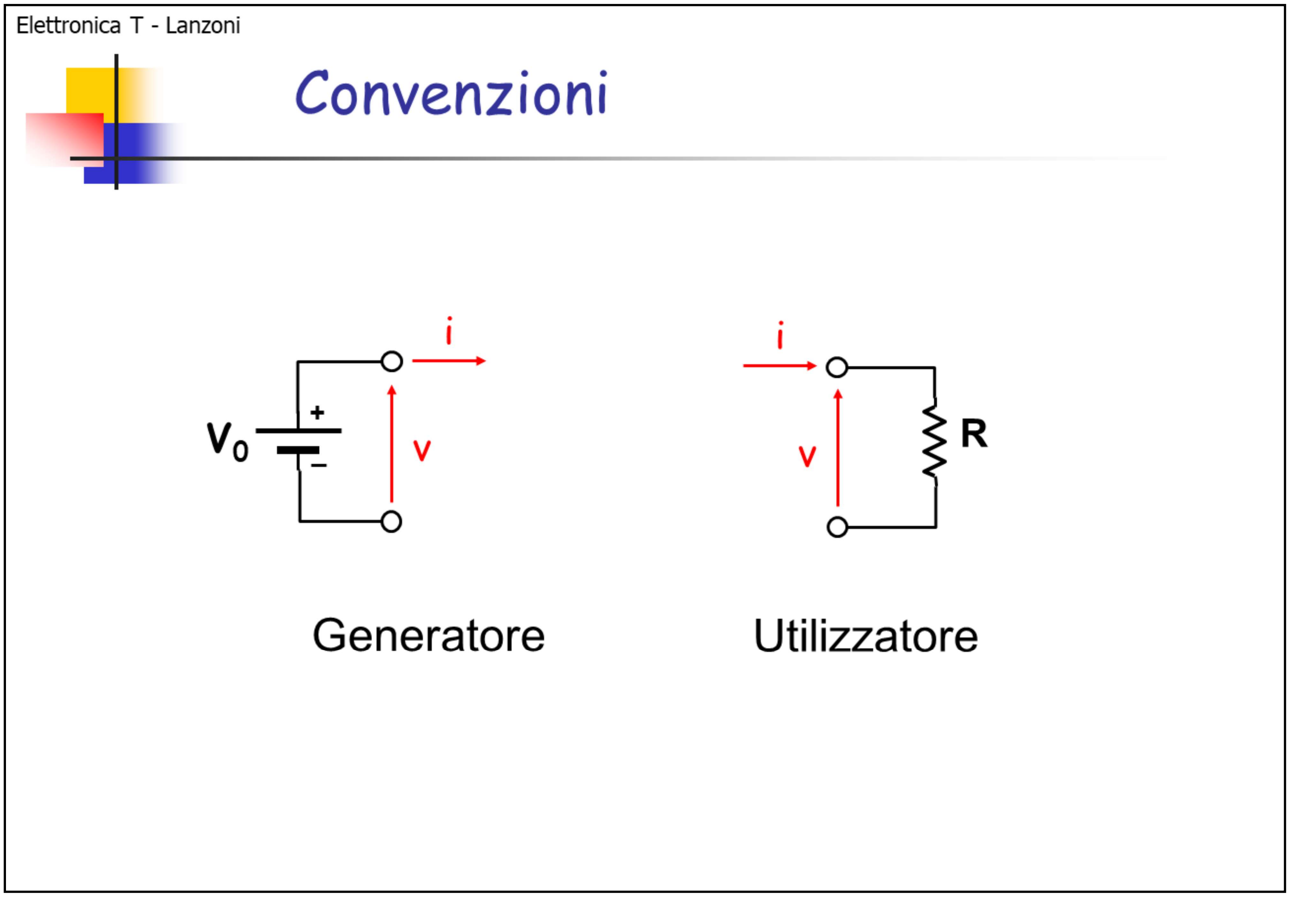
$$I_{par} = nI = n\frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{par} = \frac{R}{n}$$

In una serie di due resistenze, la caduta su $R_1$ vale :

$$V_{int} = V\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (a)$$

Questa semplice rete si chiama **partitore resistivo** e serve ad ottenere una tensione che è una frazione di quella in ingresso. In particolare se le due resistenze sono uguali, il partitore dimezza la tensione in ingresso.

<u>**N:B. La relazione (a) vale SOLO SE il nodo intermedio non è caricato ($I_{int}$=0).**</u>




Esistono due possibili combinazioni nella scelta del verso della corrente in un bipolo.

**Convenzione del Generatore**

In questo caso il verso della corrente è uscente dal morsetto positivo del bipolo.

Questa convenzione è di solito usata per i generatori che, nella maggior parte dei casi, erogano una potenza che viene dissipata sul carico. Con questa convenzione, se sia la corrente che la tensione sono positive, la potenza risulta positiva indicando che il generatore sta **erogando** energia ad un carico. Se viceversa corrente e tensione hanno segni discordi la potenza risulta negativa indicando che il generatore sta **assorbendo** potenza.

**Convenzione dell’ Utilizzatore**

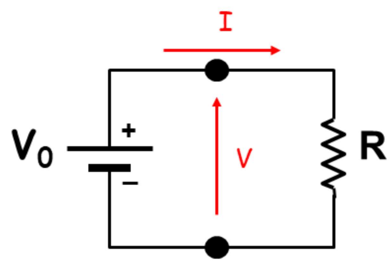
In questo caso il verso della corrente è entrante nel morsetto positivo del bipolo. Questa convenzione è adatta ai bipoli passivi, quelli cioè che, assunta appunto questa convenzione, sono sempre  attraversati da una corrente dello stesso segno della tensione applicata. Questi bipoli sono caratterizzati dal fatto che **assorbono sempre** potenza. Una caso tipico sono i resistori che **dissipano** la potenza generando calore.

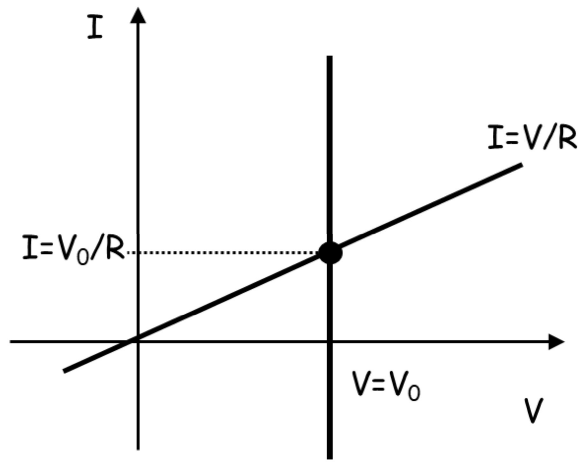
Secondo questa convenzione la potenza entrante risulta quindi **sempre positiva** e indica che il bipolo assorbe sempre energia.

**La scelta fra una o l’ altra convenzione è del tutto arbitraria e va fatta seguendo criteri di comodità e chiarezza.**

Elettronica T - Lanzoni

## Un semplice esempio



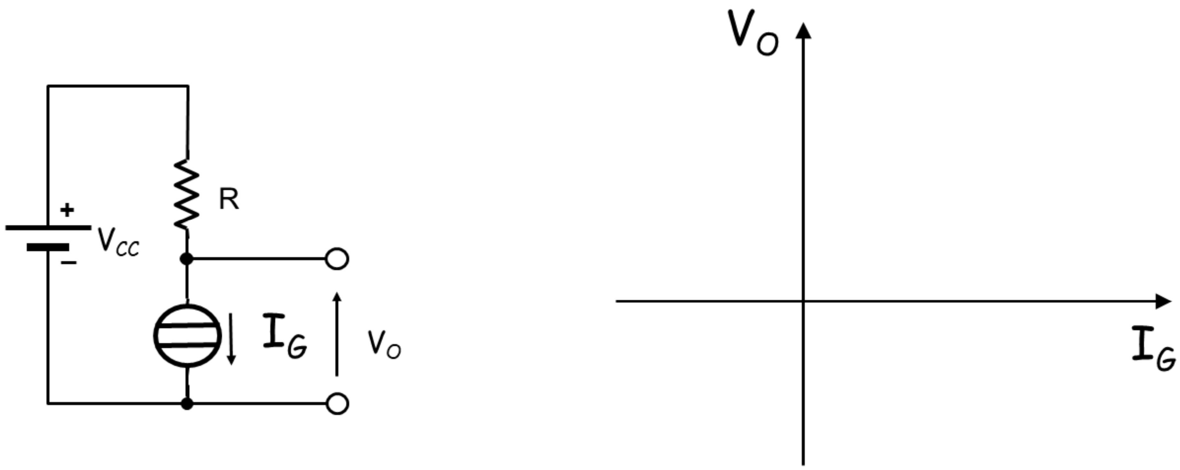




2 incognite: (V,I)

2 equazioni: $\begin{cases} V = V_0 \\ V = R \cdot I \end{cases}$

**La corrente in uscita da un generatore di tensione è incognita.**
E' possibile calcolare la corrente erogata dal generatore, imponendo un vincolo (dato dalla rete di carico).
L' analisi di questo circuito può essere eseguita graficamente cercando l' intersezione fra le rette rappresentate sul piano I-V dai due elementi del circuito.

# Esercizio



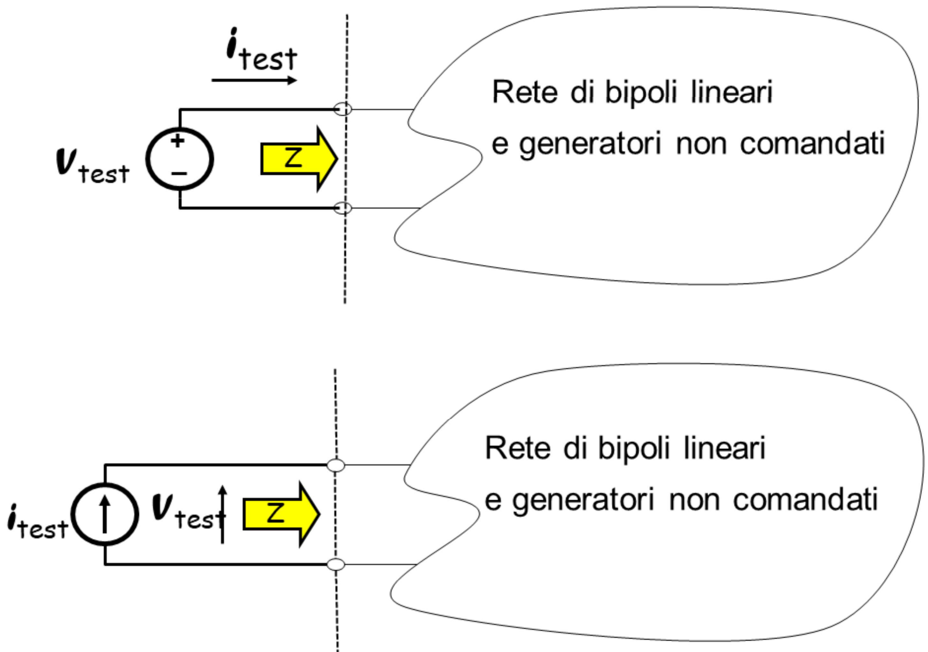

**Sia $V_{CC}$=5V e R=1KΩ .**

Riempire la seguente tabella:

| $I_G$ (mA) | $V_O$ (V) |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 5 | |
| 10 | |
| -2 | |

Riportate ora i risultati nel grafico $V_O$-$I_G$

# Impedenza ad una porta




Si definisce impedenza ad una porta di una rete composta da bipoli lineari e generatori non comandati, l' impedenza che si ottiene

1 : <u>spegnendo tutti i generatori non comandati all' interno della rete</u> (cioè sostituendo dei cortocircuiti ai generatori di tensione e dei circuiti aperti a quelli di corrente)

**e**

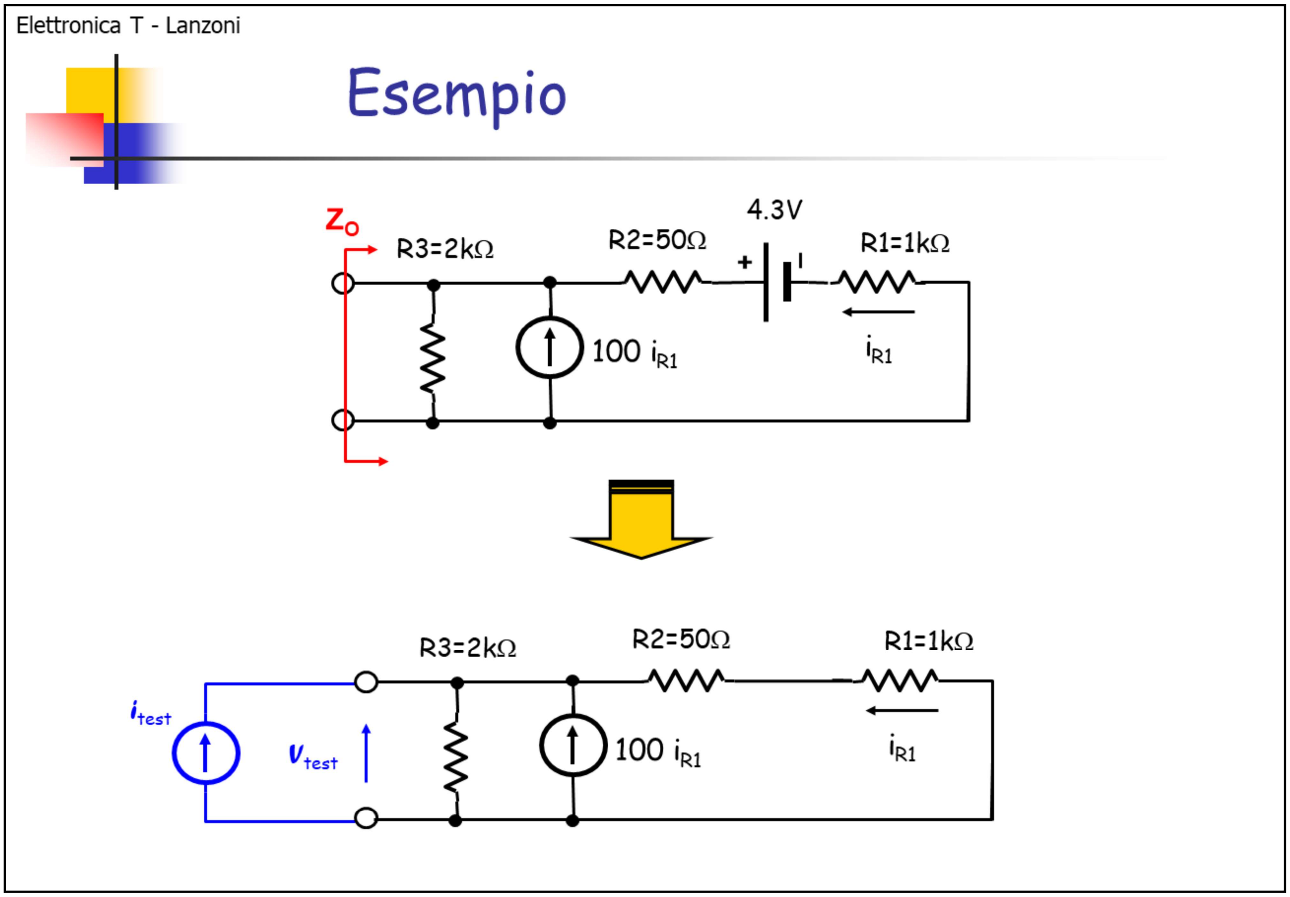
2a : applicando alla porta una sorgente di tensione di test $\mathbf{v}_{test}$ e calcolando la corrispondente corrente $\mathbf{i}_{test}$

*<u>oppure</u>*

2b : applicando una sorgente di corrente di test $\mathbf{i}_{test}$ e calcolando la corrispondente tensione $\mathbf{v}_{test}$.

L' impedenza (ammettenza) "vista" alla porta è data da

$$Z = \frac{v_{test}}{i_{test}} \qquad Y = \frac{i_{test}}{v_{test}}$$




**Passo 1**

Il generatore di tensione non comandato 4.3V è sostituito da un cortocircuito (V=0V). Rimane il generatore di corrente comandato da $I_{R1}$ (attenzione al verso!).

**Passo 2**

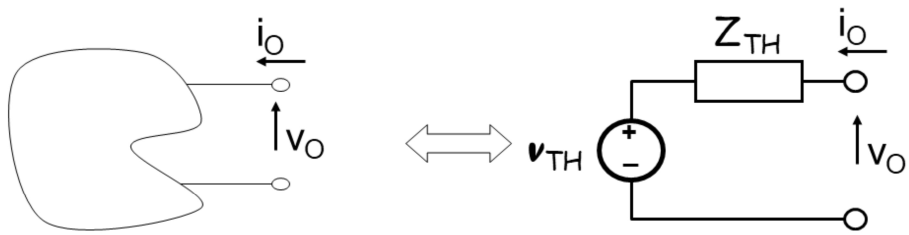
In questo caso è più immediato applicare una corrente di test ( $i_{test}$ ) e utilizzare KCL:

$$i_{test} = \frac{v_{test}}{R_3} + \frac{v_{test}}{R_1 + R_2} + 100\left(\frac{v_{test}}{R_1 + R_2}\right)$$

Sostituendo i valori si ottiene $Z_O$= 10.34 Ω.

# Teorema di Thevenin

- Qualsiasi circuito composto da bipoli lineari e generatori, osservato da una porta, può essere trasformato in un <u>circuito equivalente</u> costituito da un <u>generatore di tensione non comandato e da una impedenza in serie</u>.




Rete con bipoli lineari e generatori

Thevenin-equivalente

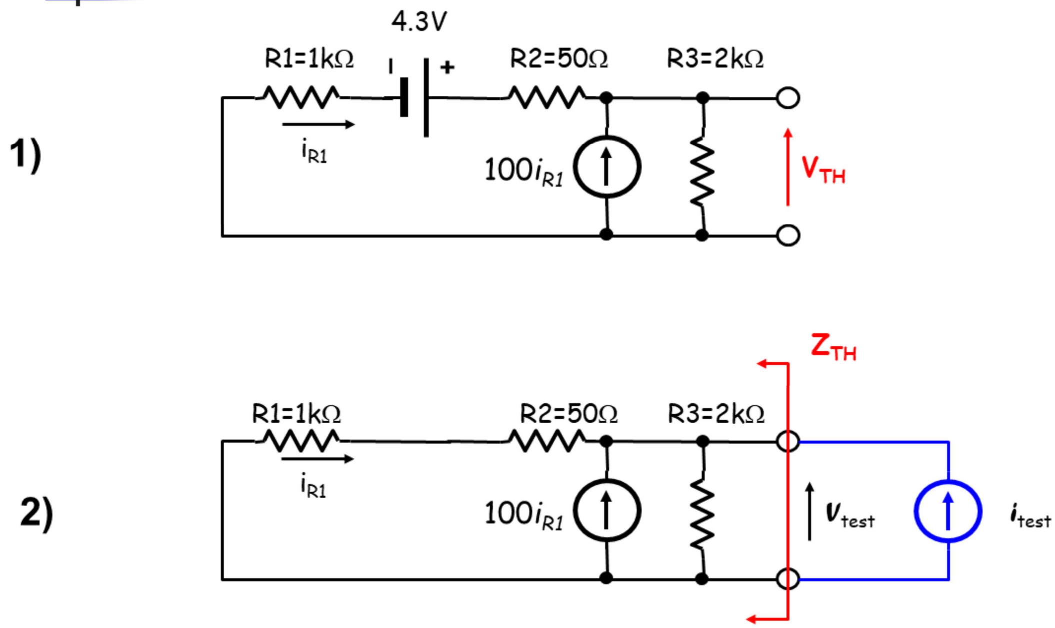
Questo importante teorema permette di ridurre la complessità di un circuito.
Può essere applicato a parti di circuito individuate da una porta qualsiasi di una qualsiasi rete composta da <u>bipoli lineari e generatori</u>.

Per ottenere i parametri del circuito equivalente si deve procedere come segue:

1) la tensione $\mathbf{v_{TH}}$ del generatore equivalente si ottiene valutando la tensione ai morsetti di uscita in condizioni di assenza di carico ($\mathbf{i}_O$=0A)

2) l’ impedenza $\mathbf{Z_{TH}}$ si ottiene “spegnendo” tutti i generatori <u>non comandati</u> e calcolando l’ <u>impedenza vista alla porta</u>.

## Esempio




Per determinare **$V_{TH}$**, si calcola la tensione in uscita in assenza di carico.

Si applica KCL al nodo di uscita:

$$\frac{V_{TH}}{R_3} + 101\left(\frac{V_{TH} - 4.3V}{R_1 + R_2}\right) = 0$$

Che fornisce **$V_{TH}$=4.27V**

Per determinare l' **impedenza equivalente** (resistenza in questo caso) si procede come segue:

**Passo 1**

Il generatore di tensione non comandato 4.3V è sostituito da un cortocircuito (V=0V). Rimane il generatore di corrente comandato da $I_{R1}$ (attenzione al verso!).

**Passo 2**

In questo caso è più immediato applicare una corrente di test ( $i_{test}$ ) e utilizzare KCL:

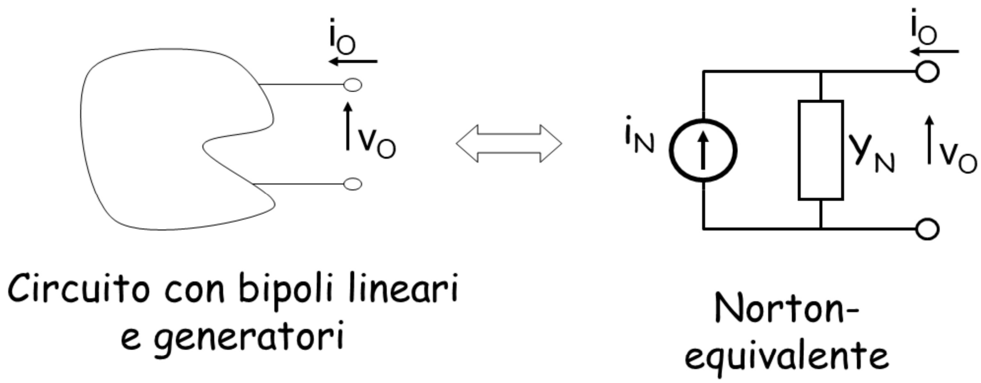
$$i_{test} = \frac{v_{test}}{R_3} + \frac{v_{test}}{R_1 + R_2} + 100\left(\frac{v_{test}}{R_1 + R_2}\right)$$

Sostituendo i valori si ottiene **:**

$$Z_{TH} = \frac{v_{test}}{i_{test}} = 10.34\ \Omega$$

# Teorema di Norton

- Qualsiasi circuito composto da bipoli lineari e generatori, osservato da una porta, può essere trasformato in un circuito equivalente costituito da un generatore di corrente non comandato e da una ammettenza in parallelo.

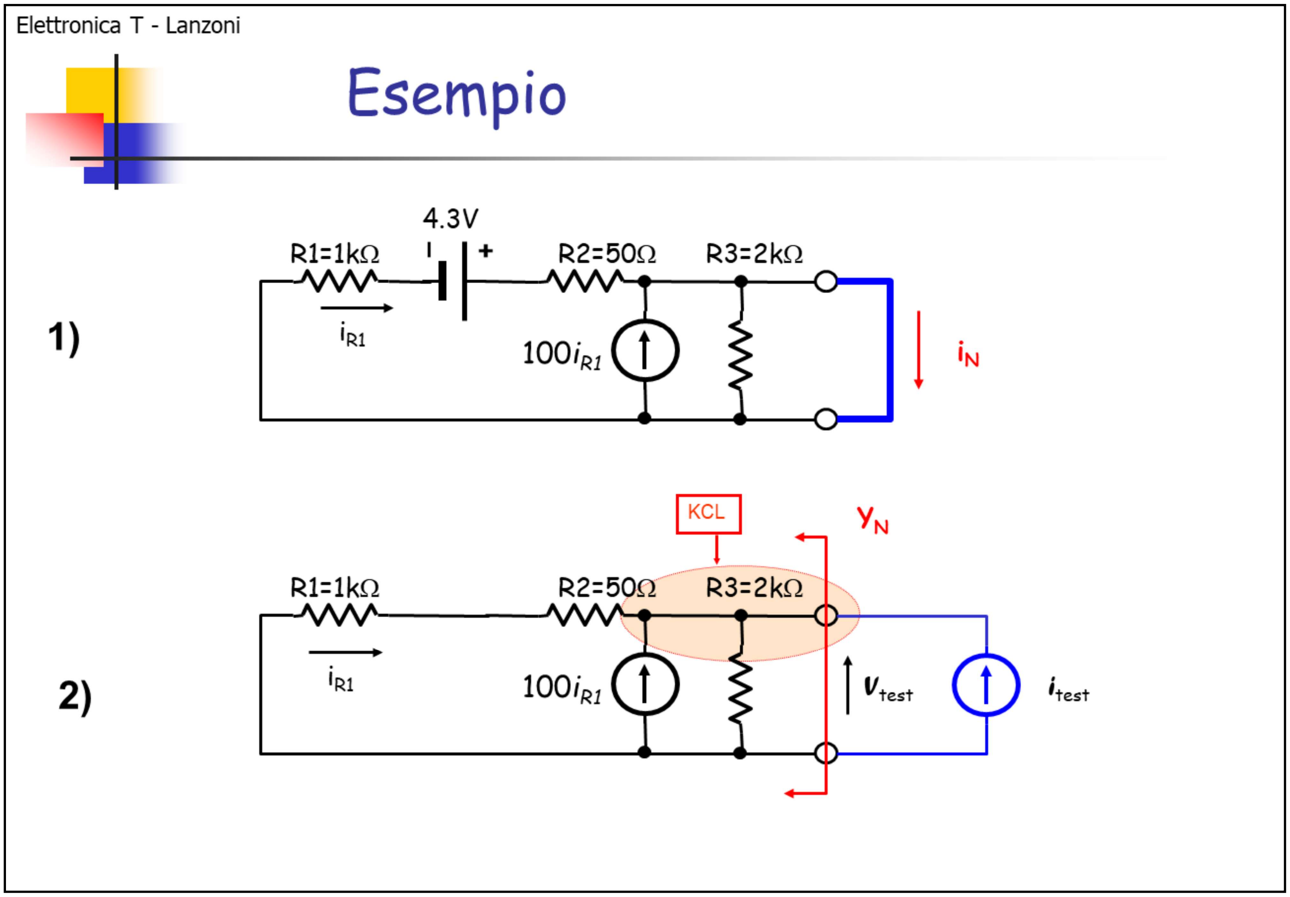



Il teorema di Norton risulta duale rispetto a quello di Thevenin. Il teorema di Norton permette di sostituire a una porzione di circuito un circuito equivalente composto da un generatore di corrente $\mathbf{i_N}$ non comandato con in parallelo una ammettenza $\mathbf{Y_N}$.

Per ottenere i parametri del circuito equivalente si deve procedere come segue:

1) la corrente $\mathbf{i_N}$ del generatore equivalente si ottiene calcolando la corrente al morsetto di uscita in condizioni di cortocircuito ($\mathbf{v}_O$=0V)

2) l' ammettenza equivalente $\mathbf{Y_N}$ la si ottiene "spegnendo" tutti i generatori non comandati e calcolando l' ammettenza vista alla porta.




Per determinare $\mathbf{i_N}$, si calcola la corrente  in uscita in condizioni di cortocircuito.

Si applica KCL al nodo di uscita:

$$i_N = 101\left(\frac{4.3V}{R_1 + R_2}\right)$$

Che fornisce $\mathbf{i_N}$**=413 mA**

Per determinare l' **ammettenza equivalente** (conduttanza nel caso specifico) si procede come segue:

**Passo 1**

Il generatore di tensione non comandato 4.3V è sostituito da un cortocircuito (V=0V). Rimane il generatore di corrente comandato da $I_{R1}$ (attenzione al verso).

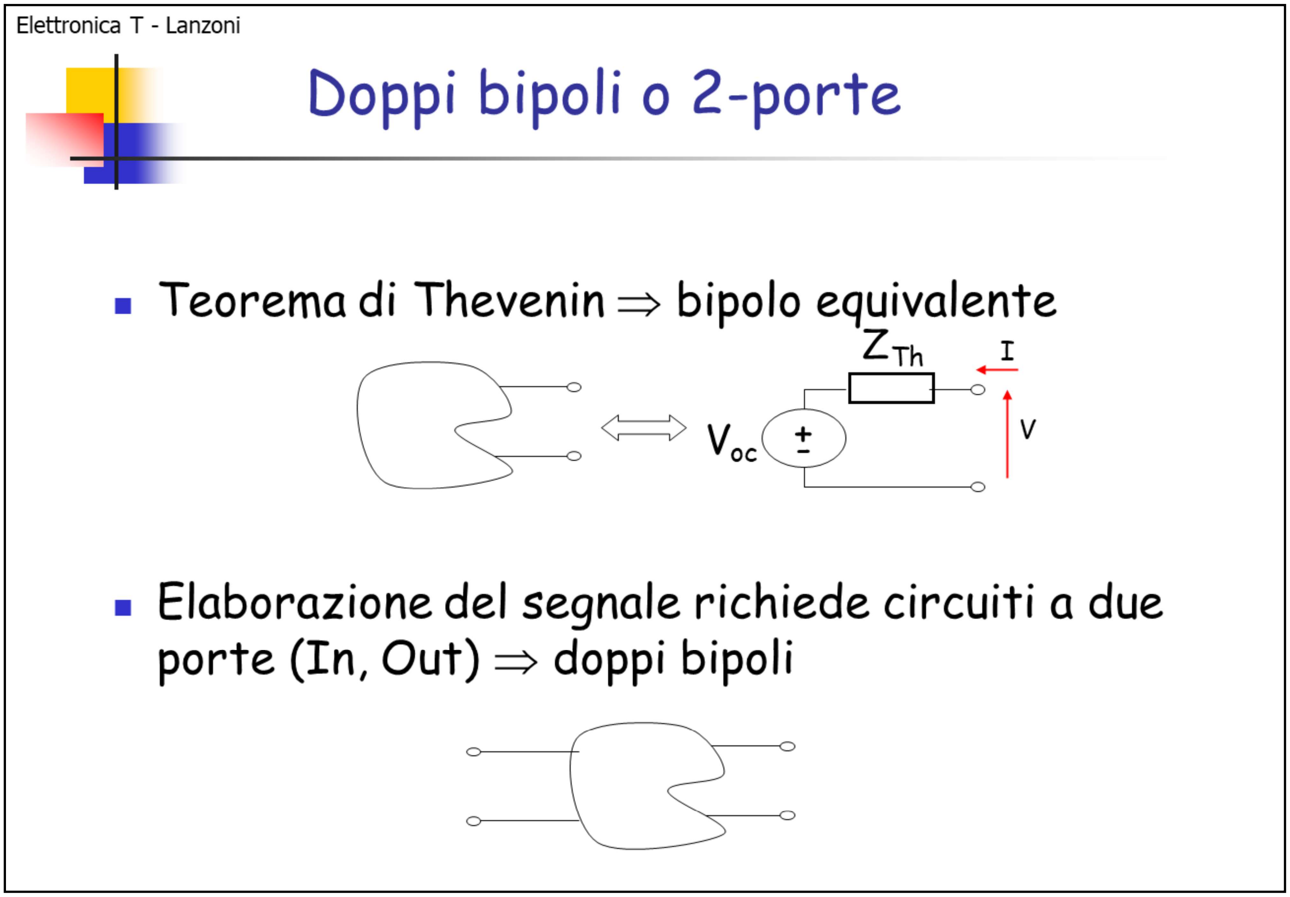
**Passo 2**

In questo caso è più immediato applicare una corrente di test $i_{test}$ e utilizzare KCL :

$$i_{test} = \frac{v_{test}}{R_3} + \frac{v_{test}}{R_1 + R_2} + 100\left(\frac{v_{test}}{R_1 + R_2}\right)$$

Sostituendo i valori si ottiene :

$$Y_N = \frac{i_{test}}{v_{test}} = 96.7\ mS$$




I teoremi precedenti permettono di ridurre una rete ad una porta (bipolo) ad un suo equivalente minimo.

Questo procedimento è particolarmente utile nel caso si voglia modellare un generatore o un carico.

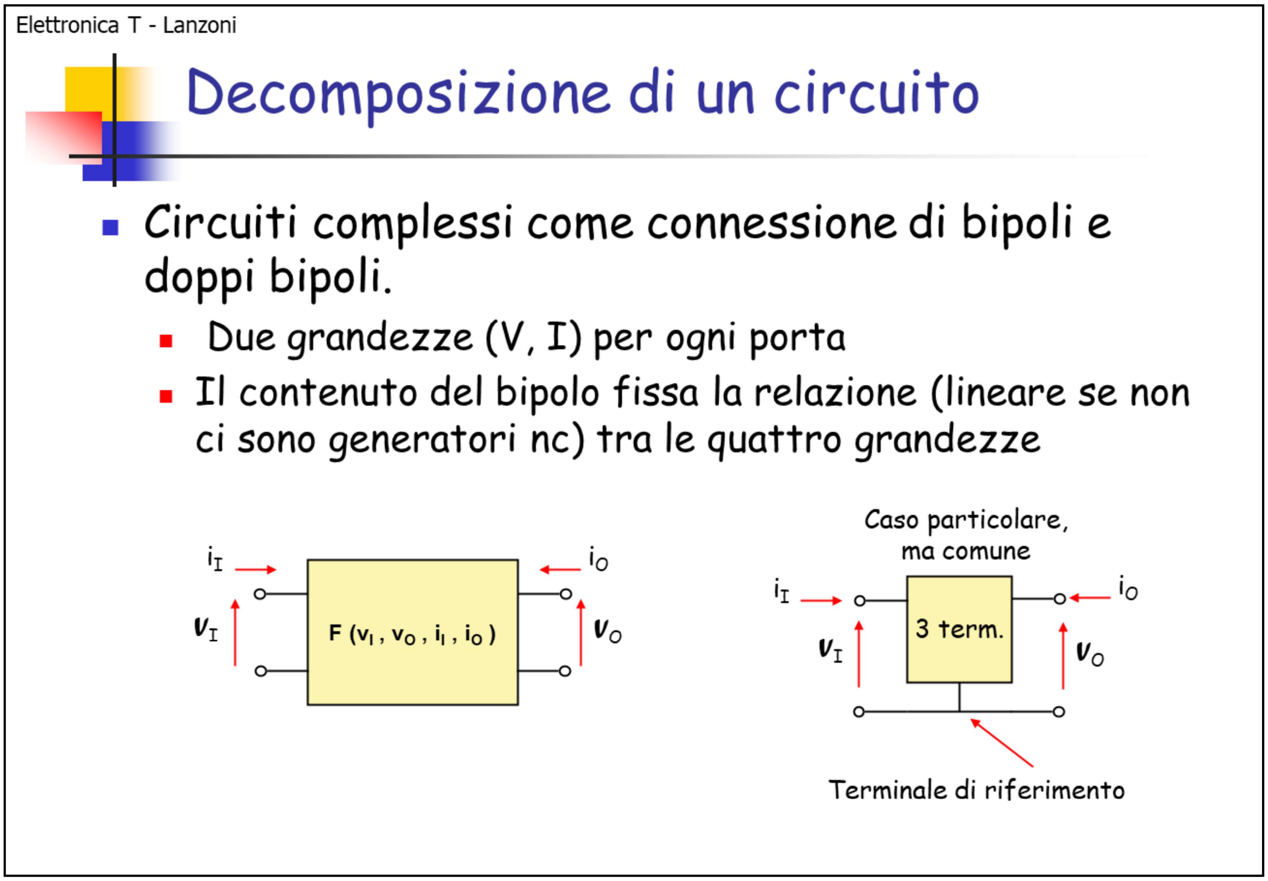
Nel percorso di elaborazione di un segnale, si incontrano viceversa, diversi blocchi con una porta di ingresso ed una di uscita collegati in cascata.

Per studiare un sistema di questo genere introduciamo quindi il

**Doppio Bipolo** o **Due-Porte.**

Questo modello ben si presta ad esprimere le caratteristiche di un blocco di elaborazione del segnale.

Vedremo nel seguito che risulta talvolta opportuno modellare un blocco di elaborazione suddividendolo in diversi blocchi di tipo due-porte collegati in cascata o in parallelo. In questo caso parleremo di **circuiti multistadio**.




Un circuito di elaborazione complesso può normalmente essere decomposto in un insieme di blocchi 2-porte fra loro collegati.

Ogni 2-porte presenta:

• una **porta di ingresso** cui sono associate le grandezze **( $v_I$ ,$i_I$ )**

• una **porta di uscita** cui sono associate le grandezze **( $v_O$ , $i_O$ )**

Il due porte impone due relazioni fra queste 4 variabili.

Se all' interno del 2-porte sono presenti solo elementi lineari e non ci sono generatori non controllati , allora **Il 2-porte risulterà lineare**.

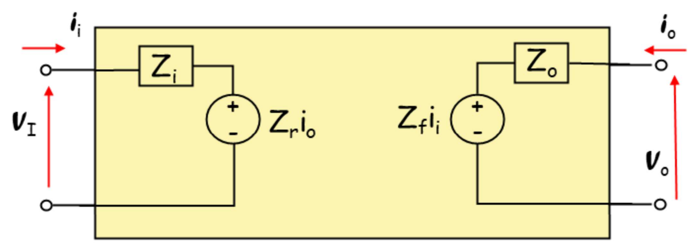
Le relazioni risultano additive ed omogenee e vale quindi il principio di sovrapposizione degli effetti. Un modo di indicare tali relazioni è attraverso i parametri impedenza

$$\begin{cases} v_I = Z_i i_I + Z_r i_O \\ v_O = Z_f i_I + Z_O i_O \end{cases} \quad ovvero \quad \begin{bmatrix} v_I \\ v_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_i & Z_r \\ Z_f & Z_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_I \\ i_O \end{bmatrix}$$

Talvolta un 2-porte viene indicato in forma sintetica come un blocco a tre terminali. Con questo si sottintende che uno dei morsetti di ogni porta viene connesso allo stesso potenziale comune detta massa.

# Doppio bipolo lineare: circuto equivalente

- Un possibile modello del bipolo lineare è quello illustrato in figura




$$\begin{cases} v_I = z_i i_I + z_r i_O \\ v_O = z_f i_I + z_O i_O \end{cases}$$

Un modello minimo del due porte lineare consta di due relazioni nelle funzioni di rete **$v_I$ ,$i_I$ , $v_O$ , $i_O$**.
Per esempio di può scegliere un sistema di due equazioni che esprimano le tensioni in funzione delle correnti per mezzo di parametri impedenza :

$$\begin{cases} v_I = Z_i i_I + Z_r i_O \\ v_O = Z_f i_I + Z_O i_O \end{cases} \quad ovvero \quad \begin{bmatrix} v_I \\ v_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_i & Z_r \\ Z_f & Z_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_I \\ i_O \end{bmatrix}$$

In questo caso il circuito equivalente sarà composto da due impedenze e due generatori comandati di tensione.

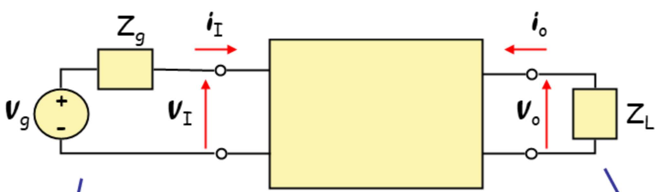
Significato dei pedici dei parametri:

**i** ingresso, **o** uscita, **r** reverse, **f** forward.

Se **r=0** il doppio bipolo si dice **unilatero** nel senso che le grandezze di uscita dipendono da quelle di ingresso, ma non viceversa.

# Doppio bipolo lineare caricato

- I bipoli all'ingresso e all'uscita possono essere Thevenin-equivalenti




$$v_I = v_g - Z_g i_I$$

$$\begin{cases} v_I = z_i i_I + z_r i_O \\ v_O = z_f i_I + z_O i_O \end{cases}$$

$$v_O = -Z_L i_O$$

Una volta elaborato un modello del 2-porte, il sistema pilotato e caricato si risolve introducendo i vincoli imposti dal bipolo collegato in ingresso (stimolo) e da quello collegato in uscita (carico). Entrambi possone essere pensati come i circuiti Thevenin equivalenti delle reti collegate a monte e a valle del 2-porte.

Considerando la tensione $\mathbf{v}_G$ come variabile indipendente (stimolo all' ingresso), è possibile esprimere qualsiasi variabile di interfaccia come funzione di $\mathbf{v}_G$.

# Altri parametri e matrici

- Comunemente usate altre 5 forme
  - $i_I$ e $i_O$ al LHS: parametri **Y** matrice Ammettenza
  - $v_I$ e $i_O$ al LHS: parametri **H** matrice Ibrida
  - $i_I$ e $v_O$ al LHS: parametri ***M*** matrice Mista
  - $v_I$ e $i_I$ al LHS: parametri ***A*** matrice Catena
  - $v_O$ e $i_O$ al LHS: parametri **B** matrice Trasmissione
- Conversioni: esercizio di calcolo

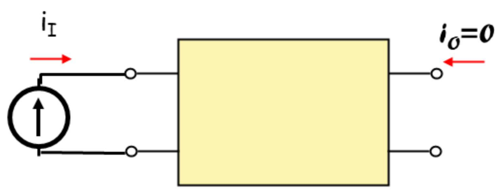
Oltre che per mezzo della matrice impedenza, la relazioni imposte dal 2-porte si possono esprimere, **in modo del tutto equivalente**, mediante altre matrici, a seconda della scelta della coppia di variabili a primo membro.

La scelta di quali parametri utilizzare viene fatta esclusivamente con una ottica di comodità che mira a semplificare i calcoli.

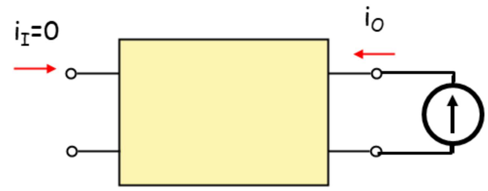
E' bene notare però che in alcuni casi può non essere possibile usare una delle matrici elencate perché in esse uno o più elementi non risultano calcolabili.

# Calcolo degli elementi Z

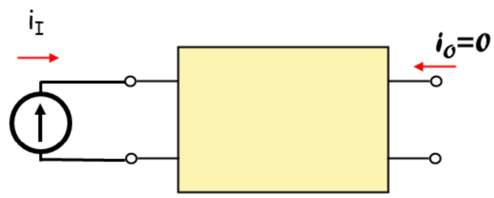
**Esempio: matrice impedenza**
$$\begin{cases} v_I = Z_i i_I + Z_r i_O \\ v_O = Z_f i_I + Z_o i_O \end{cases}$$



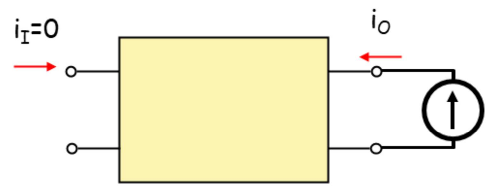

$$Z_i = \frac{v_I}{i_I}$$




$$Z_r = \frac{v_I}{i_O}$$




$$Z_f = \frac{v_O}{i_I}$$




$$Z_o = \frac{v_O}{i_O}$$

Uno qualsiasi dei parametri di una qualsiasi matrice puo' essere calcolato in due passi:

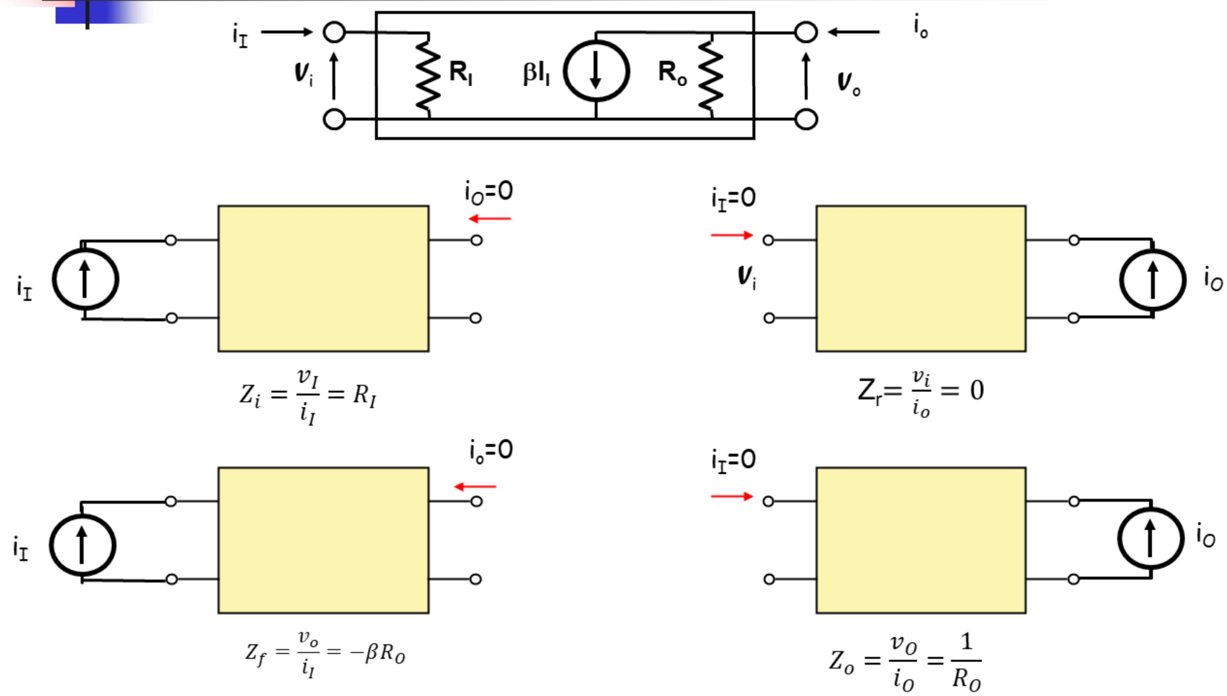
1) si considera l' equazione ove compare il parametro da calcolare e si impone alla porta di ingresso o di uscita una condizione di pilotaggio o carico tale da annullare il termine contenente l' altro parametro.

2) si impone una tensione o una corrente di test sull' altra porta e si calcola la grandezza moltiplicata dal parametro da calcolare.

Il parametro risulta dal rapporto di queste due ultime grandezze.

**Esempio** : Nel caso della matrice impedenza si procede come illustrato in figura

# Calcolo degli elementi Z: esempio




1) Il parametro $\mathbf{H_I}$ risulta uguale ad $\mathbf{R_I}$. In questo caso non c'è nessuna influenza da parte dell' uscita. Il bipolo è unilatero.

2) il parametro $\mathbf{H_r}$ è nullo. L' ingresso del bipolo unilatero non risente infatti di ciò che viene imposto sull' uscita.

3) Il parametro $\mathbf{H_f}$ è pari a $\beta$. In condizioni di CC sull' uscita infatti la corrente che circola su $R_O$ è nulla e quindi tutta la corrente prodotta dal generatore comandato fluisce sull' uscita.

4) Il parametro $\mathbf{H_o}$ è $\mathbf{1/R_O}$. Ad ingresso aperto infatti $\mathbf{i_I=0}$ e quindi il generatore comandato impone una corrente nulla.

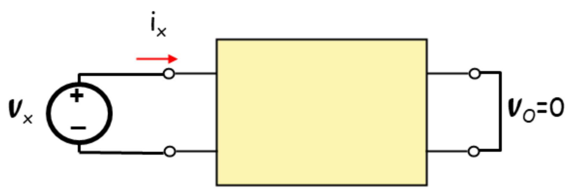
La matrice ibrida di questo due-porte risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} R_I & 0 \\ \beta & 1/R_O \end{bmatrix}$$

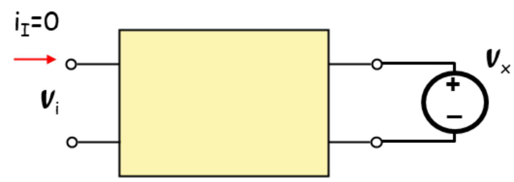
# Calcolo degli elementi H

**Esempio: matrice ibrida**

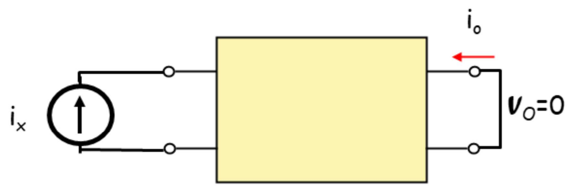
$$\begin{cases} v_I = H_i i_I + H_r v_O \\ i_O = H_f i_I + H_o v_O \end{cases}$$



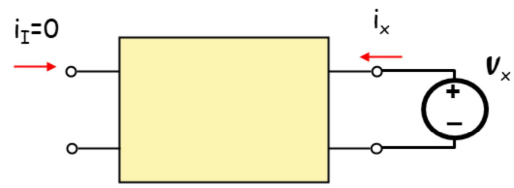

$$H_i = \frac{v_x}{i_x}$$




$$H_r = \frac{v_i}{v_x}$$




$$H_f = \frac{i_o}{i_x}$$

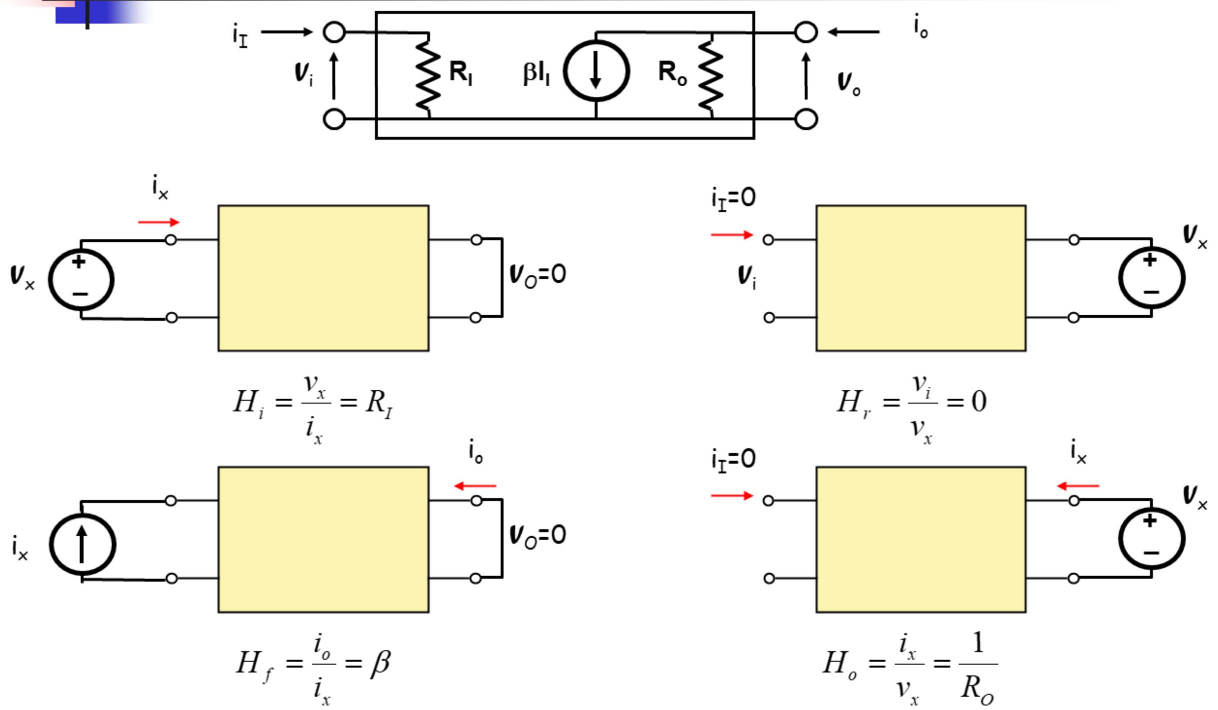



$$H_o = \frac{i_x}{v_x}$$

Nel caso della matrice ibrida di deve procedere con una diversa scelta dei generatori di test.

Elettronica T - Lanzoni

# Calcolo degli elementi H: esempio




1) Il parametro $\mathbf{H_I}$ risulta uguale ad $\mathbf{R_I}$. In questo caso non c'è nessuna influenza da parte dell' uscita. Il bipolo è <u>unilatero.</u>

2) il parametro $\mathbf{H_r}$ è nullo. L' ingresso del bipolo unilatero non risente infatti di ciò che viene imposto sull' uscita.

3) Il parametro $\mathbf{H_f}$ è pari a $\beta$**.** In condizioni di CC sull' uscita infatti la corrente che circola su $R_O$ è nulla e quindi tutta la corrente prodotta dal generatore comandato fluisce sull' uscita.

4) Il parametro $\mathbf{H_o}$ è $\mathbf{1/R_O}$. Ad ingresso aperto infatti $\mathbf{i_I=0}$ e quindi il generatore comandato impone una corrente nulla.

La matrice ibrida di questo due-porte risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} R_I & 0 \\ \beta & 1/R_O \end{bmatrix}$$

# Funzione di trasferimento

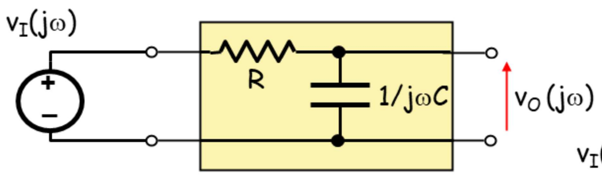

$$H(j\omega) = \frac{s_u(j\omega)}{s_i(j\omega)}$$

Si definisce funzione di trasferimento (FDT) $H(j\omega)$ di un 2-porte lineare come il rapporto fra la trasformata del segnale in uscita (tensione o corrente) e la trasformata del segnale in ingresso (tensione o corrente) quando l' uscita non è caricata.

<u>Non è necessario specificare quale sia lo stimolo in ingresso in quanto la rete è lineare.</u>

## Funzione di trasferimento

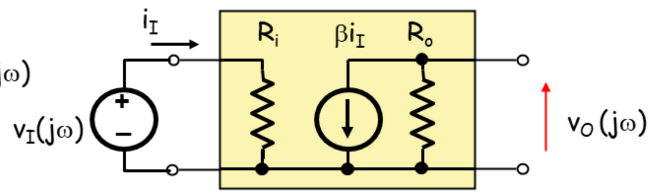
Esempio 1:




$$v_O(j\omega) = v_I(j\omega)\frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

Esempio 2:




$$v_O = -\beta R_O i_I$$
$$v_I = R_i i_I$$

$$H(j\omega) = H_0 = -\frac{\beta R_O}{R_i}$$

**Esempio 1**

In questo caso è immediato valutare la tensione in uscita: si tratta di un partitore di impedenze e si applica la ben nota espressione.

**Esempio 2**

In questo caso è più immediato calcolare la funzione di trasferimento come rapporto delle espressioni di $\mathbf{v_o}$ e $\mathbf{v_i}$ in funzione dell' $\mathbf{i_i}$.

Notare che in questo casi la FDT non dipende dalla pulsazione ed è pari ad una costante negativa e quindi :

$$|H| = \frac{\beta R_O}{R_i}$$
$$\arg(H) = -\pi$$