

Struttura della prova scritta al concorso di ammissione al dottorato - 2023

La prova scritta è divisa in due parti.

PARTE A

La prima parte contiene 10 domande di argomenti di base a cui un qualunque studente che intende iniziare un percorso di dottorato in matematica dovrebbe saper rispondere. La risposta a ciascuna domanda è sintetica (un numero, una parola, sulla tipologia delle domande del GRE). Le domande in questa parte vertono su argomenti di base dei seguenti corsi del corso di laurea triennale in matematica (2-3 domande per ognuno di questi argomenti):

Elementi di Analisi, Algebra lineare, Geometria euclidea, Elementi di Logica

Su questa parte vengono valutati TUTTI gli esercizi risolti, assegnando **3 punti** per ogni esercizio, per un totale **massimo di 30 punti**.

PARTE B

La seconda parte contiene 20 problemi, suddivisi nei seguenti “settori”:

- algebra e geometria
- analisi
- geometria euclidea
- fisica matematica e probabilità
- analisi numerica

Di questa parte il candidato sceglie **fino a 6 problemi** da risolvere (e che gli vengono corretti). Vengono assegnati **5 punti** per ogni problema, per un totale **massimo di 30 punti**.

PUNTEGGIO PROVA

Il punteggio complessivo della prova scritta è ottenuto sommando i voti nelle parti A e B, per un totale **massimo di 60 punti**.

Il **punteggio minimo** richiesto per accedere alla graduatoria ed essere ammesso alla prova orale è di **20 punti** su 60.

SYLLABUS DEGLI ARGOMENTI

Si assumono le seguenti conoscenze da parte dei candidati (questa lista è solo a carattere indicativo):

- *Algebra*: Congruenze e fattorizzazione di interi, numeri primi. Struttura dei gruppi abeliani finiti. Anelli, ideali e campi. Omomorfismi tra anelli, quozienti di anelli. Domini, domini a ideali principali. Estensioni finite del campo dei numeri razionali. Campi finiti. Campi di spezzamento di polinomi. Gruppi di automorfismi di campi. Corrispondenza di Galois.
- *Algebra lineare*: Spazi vettoriali e applicazioni lineari. Sottospazi affini e affinità. Calcolo matriciale. Determinanti. Polinomio minimo e caratteristico. Autospazi e autospazi generalizzati. Forma canonica (di Jordan) di un endomorfismo. Applicazioni bilineari e forme quadratiche. Prodotti scalari euclidei ed Hermitiani. Isometrie lineari.
- *Analisi*: Insiemi numerici, successioni e serie numeriche, funzioni di una e più variabili, limiti, continuità, derivabilità e differenziabilità, teoria dell'integrazione, successioni e serie di funzioni, equazioni differenziali ordinarie. Formule di Gauss-Green e Stokes. Spazi normati e metrici. Elementi di analisi funzionale. Funzioni olomorfe.

- *Analisi numerica*: Il sistema floating point dei numeri di macchina. Risoluzione di sistemi lineari algebrici con metodi diretti (metodo di Gauss). Risoluzione di sistemi lineari algebrici con metodi iterativi elementari (Metodo di Jacobi). Approssimazione di funzioni tramite interpolazione polinomiale e polinomiale a tratti. Soluzione di equazioni non lineari (Metodo di bisezione, metodo di Newton, metodi di punto fisso). Regole di quadratura interpolatorie. Soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie: metodi Runge-Kutta e metodi multistep lineari.
- *Calcolo delle probabilità*: σ -algebre, tipi di convergenza, eventi liminf e limsup, lemma di Borel–Cantelli, legge dei grandi numeri, teorema di Kolmogorov, aspettazione e aspettazione condizionata a una σ -algebra, teorema del limite centrale, martingale discrete, teorema Optional Stopping, disuguaglianza di Doob, definizione del moto Browniano, principio di riflessione del moto Browniano. Catene di Markov: definizione, classi di equivalenza, misure invarianti, stati ricorrenti e transienti, convergenza all'equilibrio.
- *Fisica matematica*: Moti unidimensionali e loro proprietà qualitative: ritratto delle fasi, orbite periodiche, discussione della stabilità dei punti di equilibrio. Elementi di meccanica Lagrangiana: equazioni di Eulero–Lagrange, riduzione a forma normale, integrali primi, equilibri, condizione di stabilità e instabilità. Equazioni alle derivate parziali della fisica matematica: equazione delle onde, equazione di Laplace e di Poisson, equazione del calore (di diffusione). Proprietà qualitative delle loro soluzioni. Risoluzione di problemi di Cauchy per queste equazioni su domini semplici (ad esempio con il metodo di Fourier).
- *Geometria euclidea sintetica* I contenuti matematici dei libri I, II, III, IV, V, VI, XI, XII, XIII degli Elementi di Euclide: rette, angoli, triangoli, poligoni, cerchi e circonferenze, corde e tangenti, costruzioni con riga e compasso, rapporti e proporzioni, similitudine, piani e rette nello spazio, poliedri, coni, cilindri e sfere.
- *Logica elementare* I quesiti mirano ad evidenziare la capacità di fare semplici deduzioni logiche. Saper stabilire se un certo enunciato, o la sua negazione, è conseguenza logica di altri enunciati, nei quali sono usati i termini: se, allora, tutti, nessuno, qualche, almeno uno esiste, per ogni, condizione necessaria, condizione sufficiente.
- *Topologia generale e geometria elementare delle curve e superfici nel piano e nello spazio*: Spazi metrici. Spazi topologici e applicazioni continue. Compattezza, connessione, semplice connessione. Equazioni parametriche e cartesiane per curve e superfici nel piano e nello spazio. Rette e piani tangenti. Curvatura di una curva in \mathbb{R}^2 . Curvatura e torsione di una curva in \mathbb{R}^3 . Versori tangente, normale e binormale. Prima e seconda forma fondamentale di una superficie in \mathbb{R}^3 . Curvature principali, curvatura media e curvatura Gaussiana di una superficie in \mathbb{R}^3 .