

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Учебно-исследовательская работа №2 (УИР 2)

**“ Исследование систем марковского обслуживания на марковских
моделях”**

По дисциплине “Моделирование”

Выполнили:

Студенты группы Р3332:

Терновский И.Е.

Геля М.Р.

Вариант: 3/5/32

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Постановка задачи и исходные данные	3
Выполнение.....	3
Описание исследуемых систем	3
Система 1.	3
Матрица интенсивностей переходов:	5
Значения стационарных вероятностей в точке.....	5
Система 2.	5
Элементы.....	7
Матрица интенсивностей переходов	8
Значения стационарных вероятностей в точке.....	8
Характеристики систем.	8
Сравнение полученных характеристик.....	10
Вывод	11

Постановка задачи и исходные данные

Разработать марковские модели одно- и многоканальных СМО с однородным потоком заявок, рассчитать характеристики. Проанализировать и выбрать наилучший вариант построения СМО в соответствии с заданным критерием эффективности.

В процессе исследований для расчета характеристик функционирования СМО используется программа MARK.

Вариант 3/5/32

Вариант	Система 1		Система 2	
	П	ЕН	П	ЕН
35	2	3/0	$1(H_{1.4})$	4

- П – число обслуживающих приборов
- $P(H_{1.4})$ – в приборе системы 2 длительность обслуживания распределена по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации 1.4.
- ЕН – Емкости накопителей.
 - Представлена одним числом – общий накопитель для всех приборов
 - Емкости стоят перед каждым прибором соответственно.
- Критерий эффективности - минимальная суммарная длина очередей заявок.

Вариант	Интенсивность	Ср.Длит.обсл.	Вероятности занятия прибора		
	$\lambda, 1/с$	b, с	П1	П2	П3
32	0.7	8	0.85	0.1	0.05

В случае системы 1, вероятность занятия $P1 = P1=0.85$, $P2 = P2+P3 = 0.15$.

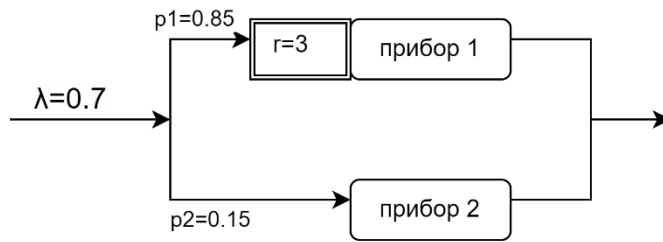
Выполнение

Интенсивность обслуживания 0.7 1/с, время обслуживания 8с.

Описание исследуемых систем

Система 1. В системе число обслуживающих приборов равно 2, оба имеют время обслуживания равное экспоненциальному распределению. Система имеет отдельную очередь, а точнее очередь имеет только 1 прибор, длина очереди 3.

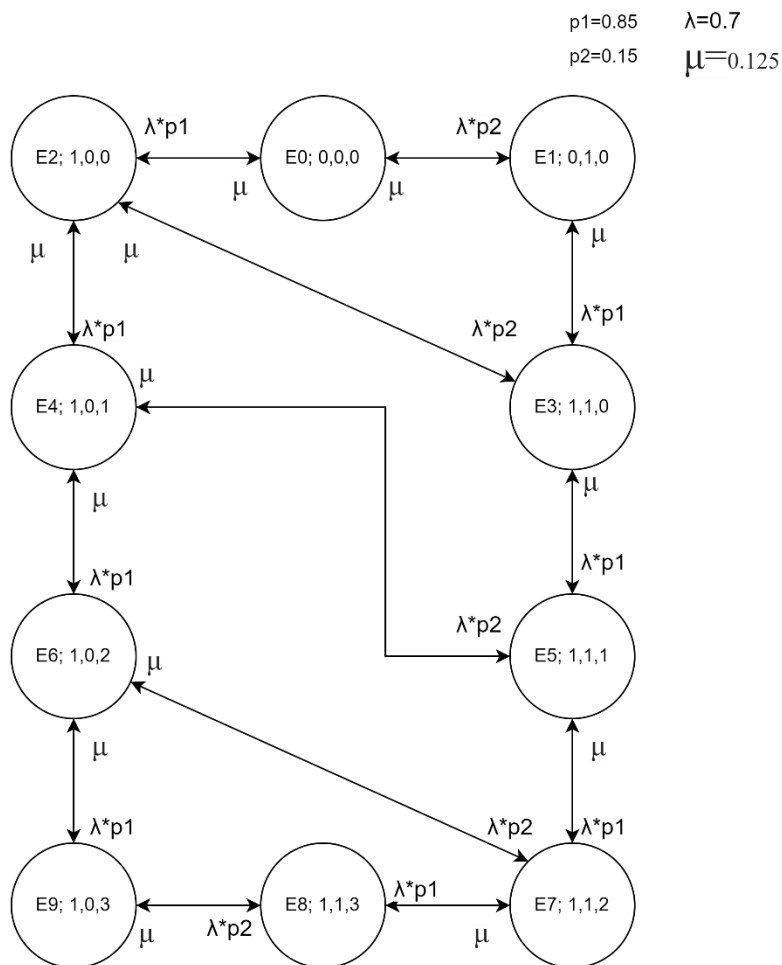
- Интенсивность входного потока $\lambda = 0.7$ 1/с
- Средняя длительность обслуживания $b = 8$ с
- Интенсивность обслуживания прибора $\mu = \frac{1}{b} = \frac{1}{8} = 0.125$
- Входной поток однородный: поступает последовательно один класс заявок.
- Дисциплина буферизации: без вытеснения заявок, т.е. при заполненном накопителе новая заявка отбрасывается.
- Многоканальная система.
- Приборы идентичные, т.е. время обслуживания заявок одинаково.



Изображение 1 Графическое представление СИСТЕМЫ 1

Таблица 1 Состояния Марковского процесса СИСТЕМА 1

Номер состояния	Обозначение (П1/П2/О1)
E0	0,0,0
E1	0,1,0
E2	1,0,0
E3	1,1,0
E4	1,0,1
E5	1,1,1
E6	1,0,2
E7	1,1,2
E8	1,1,3
E9	1,0,3



Изображение 2 Граф переходов марковского процесса СИСТЕМА 1

Принятые обозначения:

$$lp1 = \lambda * p1 = 0.595000$$

$$lp2 = \lambda * p2 = 0.105000$$

$$n = \mu = 0.125000$$

Матрица интенсивностей переходов:

	E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
E0	-0,700	lp2	lp1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
E1	n	-0,720	0,000	lp1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
E2	n	0,000	-0,825	lp2	lp1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
E3	0,000	n	n	-0,845	0,000	lp1	0,000	0,000	0,000	0,000
E4	0,000	0,000	n	0,000	-0,825	lp2	lp1	0,000	0,000	0,000
E5	0,000	0,000	0,000	n	n	-0,845	0,000	lp1	0,000	0,000
E6	0,000	0,000	0,000	0,000	n	0,000	-0,825	lp2	0,000	lp1
E7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	n	n	-0,845	lp1	0,000
E8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	n	-0,250	n
E9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	n	0,000	lp2	-0,230

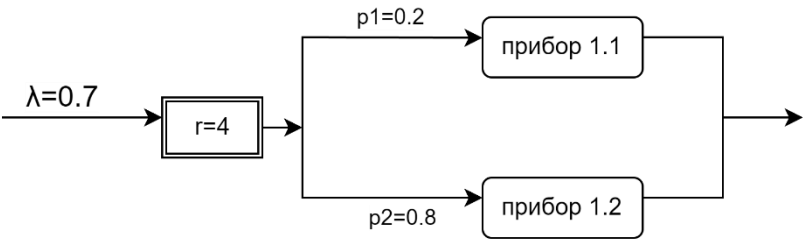
Значения стационарных вероятностей в точке

p0	0.000837
p1	0.000703
p2	0.003982
p3	0.003345
p4	0.018955
p5	0.015922
p6	0.090226
p7	0.075790
p8	0.360761
p9	0.429478

Система 2. В системе число обслуживающих приборов равно 1, при этом время обслуживания этого прибора равно гиперэкспоненциальному распределению с коэффициентом вариации 1.4, система имеет очередь равную 4.

- Интенсивность входного потока $\lambda = 0.7$ 1/с
- Средняя длительность обслуживания $b = 8$ с
- Интенсивность обслуживания прибора $\mu = \frac{1}{b} = \frac{1}{8} = 0.125$
- $q \leq \frac{2}{1+v^2} = \frac{2}{1+2^2} = 0.4$, для большего интереса выберем $q=0.2$
- $b_1 = [1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}(v^2 - 1)}]b = 28$, тогда $\mu'_1 = \frac{1}{8} = 0.125$
- $b_2 = [1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(v^2 - 1)}]b = 3$, тогда $\mu'_2 = \frac{1}{3} = 0.333$
- Входной поток однородный: поступает последовательно один класс заявок.
- Дисциплина буферизации: без вытеснения заявок, т.е. при заполненном накопителе новая заявка отбрасывается.
- Одноканальная система.
- Критерий эффективности - минимальная суммарная длина очередей заявок, но в данный случае не ясно что в системе можно изменить, поэтому видимо его можно опустить.

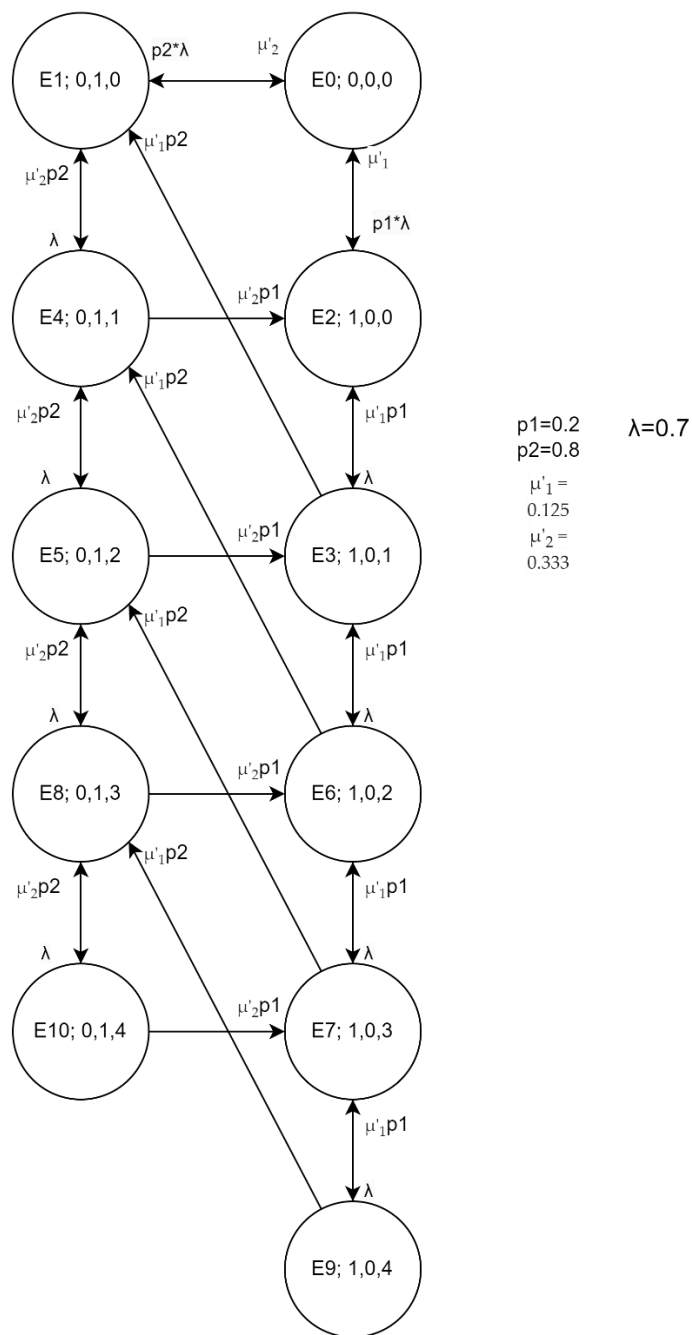
Так как система имеет прибор с гиперэкспоненциальным распределением, то для перехода к марковским процессам данный прибор разбивается на 2, таким образом что вероятность поступления на 1 равна q , на 2 равна $(1-q)$, время обработки равняется b_1 и b_2 соответственно.



Изображение 3 Графическое представление Системы 2

Таблица 2 Состояния Марковского процесса СИСТЕМА 2

Номер состояния	Обозначение (П1.1/П1.2/О)
E0	0,0,0
E1	0,1,0
E2	1,0,0
E3	0,1,1
E4	1,0,1
E5	0,1,2
E6	1,0,2
E7	1,0,3
E8	0,1,3
E9	1,0,4
E10	0,1,4



Изображение 4 Граф переходов марковского процесса СИСТЕМА 2

Элементы

$$\begin{aligned}
 lp1 &= \lambda * p1 = 0.1400 \\
 lp2 &= \lambda * p2 = 0.5600 \\
 n1 &= \mu'_1 = 0.125000 \\
 n2 &= \mu'_2 = 0.333000 \\
 l &= \lambda = 0.700000 \\
 n1p1 &= \mu'_1 * p1 = 0.025000 \\
 n1p2 &= \mu'_1 * p2 = 0.100000 \\
 n2p1 &= \mu'_2 * p1 = 0.066600 \\
 n2p2 &= \mu'_2 * p2 = 0.266400
 \end{aligned}$$

Матрица интенсивностей переходов

	E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
E0	-0,7	lp2	lp1	0	0	0	0	0	0	0	0
E1	n2	$\bar{1,033}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
E2	n1	0	$\bar{0,825}$	1	0	0	0	0	0	0	0
E3	0	n1p2	n1p1	$\bar{0,825}$	0	0	1	0	0	0	0
E4	0	n2p2	n2p1	0	$\bar{1,033}$	1	0	0	0	0	0
E5	0	0	n2p1	0	n2p2	$\bar{1,033}$	0	0	1	0	0
E6	0	0	0	n1p1	n1p2	0	$\bar{0,825}$	1	0	0	0
E7	0	0	0	0	0	n1p2	n1p1	$\bar{0,825}$	0	1	0
E8	0	0	0	0	0	n2p2	n2p1	0	$\bar{1,033}$	0	1
E9	0	0	0	0	0	0	0	n1p1	n1p2	$\bar{0,125}$	0
E10	0	0	0	0	0	0	0	n2p1	n2p2	0	$\bar{0,333}$

Значения стационарных вероятностей в точке

p0	0.006945
p1	0.011323
p2	0.008725
p3	0.008050
p4	0.026288
p5	0.064170
p6	0.021341
p7	0.054374
p8	0.159341
p9	0.304495
p10	0.334950

Характеристики систем.

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	Сис.1	Сис.2
Нагрузка	П1 (C1)	$y_{11} = \frac{\lambda}{\mu} * p_1$	4,76	-
	П2 (C1)	$y_{12} = \frac{\lambda}{\mu} * p_2$	0,84	-
	Сумм(C1)	$y_1 = \frac{\lambda}{\mu}$	5,6	-

	П1 (C2)	$y_{21} = b * \lambda * p_1$	-	3,92
	П2 (C2)	$y_{21} = b * \lambda * p_2$	-	1,68
	Сумм(C2)	$y_2 = b * \lambda$	-	5,6
Загрузка	П1 (C1)	$p_{11} = 1 - (p_0 + p_1)$	0,99846	-
	П2 (C1)	$p_{12} = 1 - (p_0 + p_2 + p_4 + p_6 + p_9)$	0,456522	-
	Сумм(C1)	$p_1 = (p_{11} + p_{12})/2$	0,727491	-
	П1 (C2)	$p_{21} = 1 - (p_0 + p_1 + p_3 + p_5 + p_8 + p_{10})$	-	0,415221
	П2 (C2)	$p_{22} = 1 - (p_0 + p_2 + p_4 + p_6 + p_7 + p_9)$	-	0,577832
	Сумм(C2)	$p_2 = (p_{21} + p_{22})/2$	-	0,4965265
Длина очереди	П1 (C1)	$l_{11} = p_4 + p_5 + 2p_6 + 2p_7 + 3p_8 + 3p_9$	2,737626	-
	П2 (C1)	l_{12}	0	-
	Сумм(C1)	$l_1 = l_{11} + l_{12}$	2,737626	-
	П1 (C2)	-	-	-
	П2 (C2)	-	-	-
	Сумм(C2)	$l_2 = p_3 + p_4 + 2p_5 + 2p_6 + 3p_7 + 3p_8 + 4p_9 + 4p_{10}$	-	3,404285
Число заявок	П1 (C1)	$m_{11} = l_{11} + \rho_{11}$	3,736086	-
	П2 (C1)	$m_{12} = l_{12} + \rho_{12}$	0,456522	-
	Сумм(C1)	$m_1 = m_{11} + m_{12}$	4,192608	-
	П1 (C2)	$m_{21} = l_{21} + \rho_{21}$	-	0,415221
	П2 (C2)	$m_{22} = l_{22} + \rho_{22}$	-	0,577832
	Сумм(C2)	$m_2 = l_2 + m_{22} + m_{11}$	-	4,397338
Время ожидания	П1 (C1)	$w_{11} = l_{11}/\lambda'_{11}$	124,2968	-
	П2 (C1)	$w_{12} = l_{12}/\lambda'_{12}$	0	-
	Сумм(C1)	$w_1 = l_1/\lambda'_1$	6,11804	-
	П1 (C2)	-	-	-
	П2 (C2)	-	-	-
	Сумм(C2)	$w_2 = l_2/\lambda'_2$	-	13,48827
Время пребывания	П1 (C1)	$u_{11} = m_{11}/\lambda'_{11}$	169,6300	-
	П2 (C1)	$u_{12} = m_{12}/\lambda'_{12}$	1,4121	-
	Сумм(C1)	$u_1 = m_1/\lambda'_1$	9,36964	-

	П1 (C2)	-	-	-
	П2 (C2)	-	-	-
	Сумм(C2)	$u_2 = m_2 / \lambda'_2$	-	17,4228
Вероятность потери	П1 (C1)	$\pi_{11} = p_8 + p_9$	0,790239	-
	П2 (C1)	$\pi_{12} = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + p_8$	0,456655	-
	Сумм(C1)	$\pi_1 = p_8$	0.360761	-
	П1 (C2)	-	-	-
	П2 (C2)	-	-	-
	Сумм(C2)	$\pi_2 = p_9 + p_{10}$	-	0,639445
Производит.	П1 (C1)	$\lambda'_{11} = P_1 * \lambda * (1 - \pi_{11})$	0,022024905	-
	П2 (C1)	$\lambda'_{12} = P_2 * \lambda * (1 - \pi_{12})$	0,323290275	-
	Сумм(C1)	$\lambda'_1 = \lambda * (1 - \pi_1)$	0,4474673	-
	П1 (C2)	-	-	-
	П2 (C2)	-	-	-
	Сумм(C2)	$\lambda'_2 = \lambda * (1 - \pi_2)$	-	0,2523885

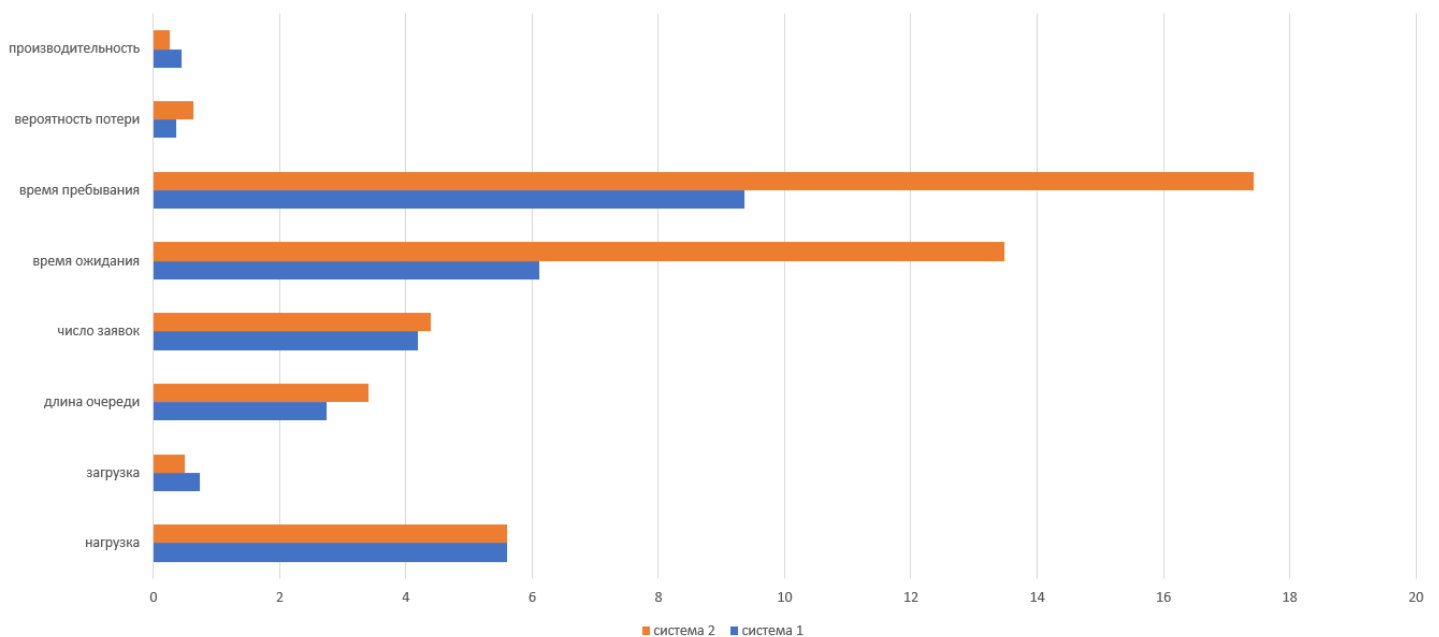


График 1 Полученные характеристики систем

Сравнение полученных характеристик.

- Системы имеют одинаковую нагрузку, так как поток заявок один и тот же.
- Система 1 имеет большую загрузку, так как для расчетов было принято, что она имеет 2 прибора, которые не могут работать вместе.
- Длина очереди в Системе 2 больше, потому что в системе 2 очередь общая и на 1 больше.
- Время ожидания в системе 2 в 2 раза больше, в следствии того, что средняя интенсивность прибора больше, чем в системе 1.

- Время прибытия так же больше почти в 2 раза, по той же причине.
- Вероятность потери у системы 2 больше, так как несмотря на чуть большую очередь, общая производительность системы почти в 2 раза меньше, и при одном потоке заявок потерь, очевидно, будет больше.

Таблица 3 Сравнение полученных характеристик систем

	нагрузк а	загрузк а	длина очеред и	число заявок	время ожидан ия	время пребыв ания	вероят ность потери	произв одител ьность
систем а 1	5,6	0,727	2,737	4,19	6,118	9,3696	0,36076	0,4474
систем а 2	5,6	0,496	3,404	4,39	13,48	17,422	0,6394	0,252

Так как по варианту нам следует выбрать систему с наименьшей общей очередью, то такой системой будет система 1, по мимо минимальной очереди, система 1 лучше почти по всем характеристикам.

Вывод

В ходе работы были исследованы две системы массового обслуживания на основе марковских моделей: многоканальная (Система 1) и одноканальная с гиперэкспоненциальным распределением времени обслуживания (Система 2). Был проведен анализ характеристик каждой системы, включая загрузку, длину очереди, вероятность потери и производительность.

Сравнительный анализ показал, что, несмотря на одинаковую нагрузку, Система 1 демонстрирует более высокую производительность и меньшую длину очереди по сравнению с Системой 2. Время ожидания и пребывания в Системе 2 оказалось почти вдвое больше, что связано с высокой средней интенсивностью обслуживания прибора. Вероятность потери также выше в Системе 2, что указывает на менее эффективное управление потоком заявок.

По критерию наименьшей суммарной длины очередей, Система 1 была признана оптимальной для выполнения задания.