Guía Álgebra - Práctica 1

Lorenzo Durante

1. Introducción

Esta es la resolución de la primera guía de ejercicios de Álgebra 1 para Ciencias de la Computación en la UBA.

2. Conjuntos

2.1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

i) $1 \in A$

ii) $\{1\} \subseteq A$

iii) $\{2, 1\} \subseteq A$

iv) $\{1, 3\} \in A$

v) $\{2\} \in A$

Resolución

i) $1 \in A$: el número 1 es un elemento que pertenece al conjunto A.

ii) $\{1\} \subseteq A$: el conjunto $\{1\}$ está contenido en A, ya que todos sus elementos pertenecen a A.

iii) $\{2, 1\} \subseteq A$: el conjunto $\{2, 1\}$ es un subconjunto de A, pues tanto 1 como 2 pertenecen a A.

iv) $\{1, 3\} \notin A$: el conjunto $\{1, 3\}$ no es un elemento de A, es decir, A no contiene a $\{1, 3\}$ como uno de sus elementos.

v) $\{2\} \notin A$: el elemento $\{2\}$ no pertenece al conjunto A.

2.2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

i) $3 \in A$

ii) $\{3\} \subseteq A$

iii) $\{3\} \in A$

iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$

v) $\{1, 2\} \in A$

vi) $\{1, 2\} \subseteq A$

vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$

viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$

IX) $\emptyset \in A$

X) $\emptyset \subseteq A$

XI) $A \in A$

XII) $A \subseteq A$

Resolución

I) $3 \notin A$: es falso ya que el número 3 no es un elemento del conjunto A.

II) $\{3\} \not\subseteq A$: es falso ya que el elemento 3 no está en A.

III) $\{3\} \in A$: es verdadero porque el elemento $\{3\}$ pertenece al conjunto A.

IV) $\{\{3\}\} \subseteq A$: es verdadero ya que el único elemento de este conjunto es $\{3\}$ y este pertenece a A.

V) $\{1,2\} \in A$: verdadero, ya que $\{1,2\}$ pertenece a A.

VI) $\{1,2\} \subseteq A$: verdadero porque 1 y 2 pertenecen a A.

VII) $\{\{1,2\}\} \subseteq A$: verdadero porque $\{1,2\}$ pertenece a A.

VIII) $\{\{1,2\},3\} \not\subseteq A$: falso, ya que 3 no pertenece a A.

IX) $\emptyset \in A$: falso, ya que $\emptyset$ no está como elemento dentro de A.

X) $\emptyset \subseteq A$: verdadero, ya que el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos.

XI) $A \in A$: falso, ya que A no es un elemento de sí mismo.

XII) $A \subseteq A$: verdadero, ya que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

2.3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos.

I) $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{5,4,3,2,1\}$

II) $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{1,2,\{3\},-3\}$

III) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x| < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$

IV) $A = \{\emptyset\}, \quad B = \emptyset$

Resolución

I) $A \subseteq B$

II) $A \not\subseteq B$

III) $A \not\subseteq B$

$$A = [-3,-2] \cup (2,3)$$
$$B = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

Entonces, $A \not\subseteq B$

Por ejemplo, $-2.5 \in A$ pero $-2.5 \notin B$.

IV) $A \not\subseteq B$

2.4. Dados los subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\}, \\ B &= \{1, \{3\}, 10\}, \\ C &= \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\} \end{aligned}$$

del conjunto referencial
$$V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\},$$

hallar

I) $A \cap (B \triangle C)$

II) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

III) $A^c \cap B^c \cap C^c$

Resolución

I) $A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$

Pienso el ejercicio por partes: primero analizo $B \triangle C$. La diferencia simétrica contiene lo que está en uno u otro, pero no en ambos.

$$\begin{aligned} B &= \{1, \{3\}, 10\} \\ C &= \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\} \\ B \triangle C &= \{1, \{3\}, 10, -2, \{1, 2, 3\}, 3\} \end{aligned}$$

Sea $D = B \triangle C$, evaluemos ahora la intersección entre A y D.

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\}, \\ D &= \{1, \{3\}, 10, -2, \{1, 2, 3\}, 3\} \\ A \cap D &= \{1, -2, 3\} \end{aligned}$$

Entonces, el resultado de la intersección es $\{1, -2, 3\}$.

II) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$

Primero analizo la primera intersección:

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\} \\ B &= \{1, \{3\}, 10\} \\ A \cap B &= \{1\} \end{aligned}$$

Ahora analizo la segunda intersección:

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\} \\ C &= \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\} \\ A \cap C &= \{-2, 3\} \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la diferencia simétrica:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1\} \\ A \cap C &= \{-2, 3\} \\ (A \cap B) \triangle (A \cap C) &= \{1, -2, 3\} \end{aligned}$$

III) $A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$

El complemento se toma respecto al conjunto referencial V.

Primer complemento:

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\} \\ V &= \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1,2,3\}, 3\} \\ A^c &= \{\{3\}, 10, \{1,2,3\}\} \end{aligned}$$

Segundo complemento:

$$\begin{aligned} B &= \{1, \{3\}, 10\} \\ V &= \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1,2,3\}, 3\} \\ B^c &= \{-2, 7, \{1,2,3\}, 3\} \end{aligned}$$

Tercer complemento:

$$\begin{aligned} C &= \{-2, \{1,2,3\}, 3\} \\ V &= \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1,2,3\}, 3\} \\ C^c &= \{1, \{3\}, 7, 10\} \end{aligned}$$

Intersección final:

$$\begin{aligned} A^c &= \{\{3\}, 10, \{1,2,3\}\} \\ B^c &= \{-2, 7, \{1,2,3\}, 3\} \\ C^c &= \{1, \{3\}, 7, 10\} \\ A^c \cap B^c \cap C^c &= \emptyset \end{aligned}$$

2.5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

Resolución

Resolvemos con leyes de Morgan:

$$\begin{aligned} (A \cup B \cup C)^c &= A^c \cap B^c \cap C^c \\ (A \cap B \cap C)^c &= A^c \cup B^c \cup C^c \end{aligned}$$

2.6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

I) $(A \cup B^c) \cap C$ II) $A \triangle (B \cup C)$ III) $A \cup (B \triangle C)$

Completado en hoja

2.7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

Resolución

I) $(B^c \cap A) \cup (A^c \cap C \cap B)$

II) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (C \cap B^c \cap C^c)$

III) $(C^c \cap B \cap A) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (B^c \cap A \cap C)$

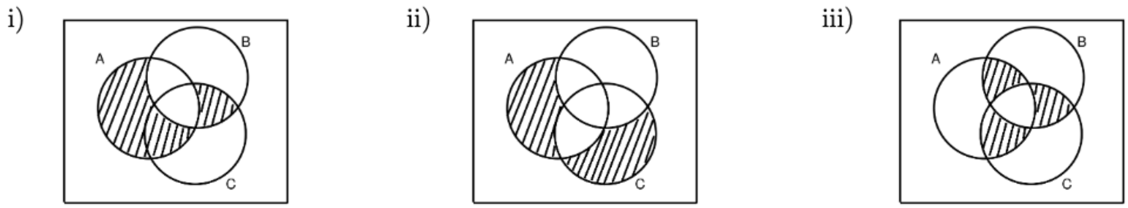

Figura 1: Diagramas de Venn

2.8. Hallar el conjunto $P(A)$ de partes de A en los casos

I) $A = \{1\}$ II) $A = \{a, b\}$ III) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

Resolución

I) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

II) $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

III) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 3\}, \{\{1, 2\}, 3\}, \{1, \{1, 2\}, 3\}\}$

2.9. Sean A y B conjuntos. Probar que $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

2.10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes.

I) $p \Rightarrow q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$, $\sim p \vee q$ y $\sim (p \wedge \sim q)$.

Esto nos dice que podemos demostrar una afirmación de la forma $p \Rightarrow q$ probando en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ (es decir *demostrando el contrarrecíproco*), o probando $\sim (p \wedge \sim q)$ (esto es una *demostración por reducción al absurdo*).

II) $\sim (p \Rightarrow q)$ y $p \wedge \sim q$.

Resolución

I)

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg q \to \neg p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg pq$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Todas las tablas tienen la misma tabla de verdad por ende, son equivalentes.

II)

p	q	$\neg(p \to q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \wedge \neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Es equivalente.

2.11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas.

I) $\forall a \in \mathbb{N},\ \frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

II) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

III) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

Resolución

I