Guía Álgebra - Práctica 1

Lorenzo Durante

1. Introducción

Esta es la resolución de la primera guía de ejercicios de Álgebra 1 para Ciencias de la Computación en la UBA.

2. Conjuntos

2.1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

I) $1 \in A$

II) $\{1\} \subseteq A$

III) $\{2, 1\} \subseteq A$

IV) $\{1, 3\} \in A$

V) $\{2\} \in A$

Resolución

I) $1 \in A$: el número 1 pertenece al conjunto A. **(Verdadero)**

II) $\{1\} \subseteq A$: todos los elementos de $\{1\}$ pertenecen a A. **(Verdadero)**

III) $\{2, 1\} \subseteq A$: 1 y 2 pertenecen a A. **(Verdadero)**

IV) $\{1, 3\} \notin A$: A no contiene al conjunto $\{1, 3\}$ como *elemento*. **(Verdadero)**

V) $\{2\} \notin A$: el elemento $\{2\}$ no pertenece a A. **(Verdadero)**

2.2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

I) $3 \in A$

II) $\{3\} \subseteq A$

III) $\{3\} \in A$

IV) $\{\{3\}\} \subseteq A$

V) $\{1, 2\} \in A$

VI) $\{1, 2\} \subseteq A$

VII) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$

VIII) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$

IX) $\emptyset \in A$

X) $\emptyset \subseteq A$

XI) $A \in A$

XII) $A \subseteq A$

Resolución

i) $3 \notin A$. **Falso** que $3 \in A$.

ii) $\{3\} \not\subseteq A$. **Falso** que $\{3\} \subseteq A$.

iii) $\{3\} \in A$. **Verdadero**.

iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$. **Verdadero**.

v) $\{1,2\} \in A$. **Verdadero**.

vi) $\{1,2\} \subseteq A$. **Verdadero**.

vii) $\{\{1,2\}\} \subseteq A$. **Verdadero**.

viii) $\{\{1,2\},3\} \not\subseteq A$ porque $3 \notin A$. **Falso** que sea subconjunto.

ix) $\emptyset \in A$. **Falso**.

x) $\emptyset \subseteq A$. **Verdadero**.

xi) $A \in A$. **Falso**.

xii) $A \subseteq A$. **Verdadero**.

2.3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos.

i) $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{5,4,3,2,1\}$

ii) $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{1,2,\{3\},-3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x| < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$

iv) $A = \{\emptyset\}, \quad B = \emptyset$

Resolución

i) $A \subseteq B$.

ii) $A \not\subseteq B$ (porque $3 \notin B$).

iii) $A \not\subseteq B$. En efecto,

$$A = (-3,-2) \cup (2,3), \qquad B = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

y, por ejemplo, $-2{,}5 \in A$ pero $-2{,}5 \notin B$.

iv) $A \not\subseteq B$ (porque $\emptyset \notin \emptyset$).

2.4. Dados los subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\}, \\ B &= \{1, \{3\}, 10\}, \\ C &= \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\} \end{aligned}$$

del conjunto referencial

$$V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\},$$

hallar

I) $A \cap (B \triangle C)$

II) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

III) $A^c \cap B^c \cap C^c$

Resolución

I) $A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$.

II) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$.

$$A \cap B = \{1\}, \qquad A \cap C = \{-2, 3\}.$$

III) $A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$. Con V como referencial:

$$A^c = \{\{3\}, 10, \{1, 2, 3\}\},\ B^c = \{-2, 7, \{1, 2, 3\}, 3\},\ C^c = \{1, \{3\}, 7, 10\}.$$

La intersección es vacía.

2.5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

Resolución. (Leyes de De Morgan)

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c, \qquad (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c.$$

2.6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

I) $(A \cup B^c) \cap C$ II) $A \triangle (B \cup C)$ III) $A \cup (B \triangle C)$

Completado en hoja.

2.7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

Resolución

I) $(B^c \cap A) \cup (A^c \cap C \cap B)$

II) *(Revisar con el diagrama)* $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

III) $(C^c \cap B \cap A) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (B^c \cap A \cap C)$

2.8. Hallar el conjunto $P(A)$ de partes de A en los casos

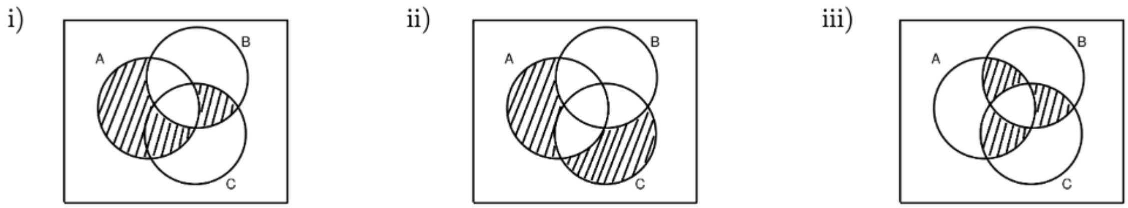


Figura 1: Diagramas de Venn

I) $A = \{1\}$ II) $A = \{a, b\}$ III) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

Resolución

I) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

II) $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

III) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 3\}, \{\{1, 2\}, 3\}, \{1, \{1, 2\}, 3\}\}$

2.9. Sean A y B conjuntos. Probar que $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Demostración. *(⇒)* Si $P(A) \subseteq P(B)$ entonces, como $A \in P(A)$, se tiene $A \in P(B)$, luego $A \subseteq B$. *(⇐)* Si $A \subseteq B$ y $X \in P(A)$, entonces $X \subseteq A \subseteq B$, por lo tanto $X \in P(B)$. Concluye $P(A) \subseteq P(B)$.

2.10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes.

I) $p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg p \vee q$ y $\neg(p \wedge \neg q)$.

Esto permite demostrar $p \Rightarrow q$ probando en su lugar $\neg q \Rightarrow \neg p$ (contrarrecíproco), o probando $\neg(p \wedge \neg q)$ (reducción al absurdo).

II) $\neg(p \Rightarrow q)$ y $p \wedge \neg q$.

Resolución

I)

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg q \to \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Todas coinciden, por lo tanto son equivalentes.

II)

p	q	$\neg(p \to q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \wedge \neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Es equivalente.

2.11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas.

I) $\forall a \in \mathbb{N},\ \dfrac{a-1}{a}$ no es un número entero.

II) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0,\ \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

III) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

Resolución

I) Tomando $a = 1$: $\dfrac{1-1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$. (Contraejemplo)

II) Tomando $x = y = 1$: $\sqrt{2} \neq 1 + 1$. (Contraejemplo)

III) Tomando $x = -3$: $x^2 = 9 > 4$ pero $-3 \not> 2$. (Contraejemplo)

2.12.

I) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente.

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee\ n \leq 8$.
(b) $\exists n \in \mathbb{N} \ /\ n \geq 5 \ \wedge\ n \leq 8$.
(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} \ /\ m > n$.
(d) $\exists n \in \mathbb{N} \ /\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$.
(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \ \Rightarrow\ x^2 > 4$.
(f) Si n es un número natural terminado en 4, entonces n es par.

II) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

III) Reescribir las proposiciones **e)** y **f)** del ítem i) utilizando las equivalencias del ejercicio 10i).

I) *a)* Esta proposición es **verdadera**, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ siempre se cumple al menos una de las condiciones. Si $n < 5$, entonces $n \leq 8$ es cierto; y si $n \geq 5$, se cumple la primera condición. No existe valor de n que invalide ambas.

b) La proposición es **verdadera** porque todos los números naturales cumplen simultáneamente $n \geq 5$ y $n \leq 8$. Por ejemplo, $n = 6$ satisface ambas condiciones, por lo que la proposición es cierta.

c) La proposición es **falsa** porque siempre se puede elegir $m = n$ lo que contradice la proposición.

d) La proposición es **falsa** por el mismo motivo del item anterior. Siempre se puede elegir $m = n$.

e) La proposición es **falsa** porque si $x = 1$, $1 > 3$ es falsO y $1^2 > 4$ es nuevamente falso por lo que la proposición es falsa.

f) La proposición es **falsa**.

a) 1)

$$\begin{aligned} &\neg(\forall n \in \mathbb{N} \ | \ n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8) \\ \equiv \ &\exists n \in \mathbb{N} \ | \ \neg(n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8) \\ \equiv \ &\exists n \in \mathbb{N} \ | \ (n < 5) \ \wedge \ (n > 8) \end{aligned}$$

La negación es imposible, no existe un posible valor de n que sea a la misma vez menos que 5 y mayor que 8. Que sea imposible, confirma que la proposición original es **verdadera**.

b)

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \ | \ \neg(n \geq 5 \vee n \leq 8) \\ \equiv &\forall n \in \mathbb{N} \ | \ (n < 5 \wedge n > 8) \end{aligned}$$

La negación es imposible por lo que se confirma que la proposición original es **verdadera**.

c)

$$\begin{aligned} &\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \mid \neg(m > n) \\ \equiv &\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \mid m \leq n \end{aligned}$$

Esto es verdadero ya que 1 cumple la condición. Esto hace que la negación sea verdadera y confirma que la proposición original es **falsa**.

d)

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, \neg(m > n) \\ &\forall n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n \end{aligned}$$

Esta negación es falsa ya que se puede elegir los valores para $n = 1$ y $m = 1$ para que no se cumpla la negación. Esto hace que la proposición original se confirme como **verdadera**.

e)

$$\begin{aligned} &\exists x \in \mathbb{R}, \neg(x > 3 \rightarrow x^2 > 4) \\ &\exists x \in \mathbb{R}, (x > 3) \wedge (x^2 \leq 4) \end{aligned}$$

Esta negación es imposible lo que hace la preposición original **verdadera**.

f) Existe un número natural que termina en 4 y no es par.
Esta negación es falsa por lo que la proposición original es **verdadera**.

2.13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$.

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$.

iii) $C \subseteq A \;\Rightarrow\; B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$.

iv) $A \triangle B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = B$.

i) Demostrar que

$$(A \triangle B) - C \;=\; (A - C) \triangle (B - C).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) - C &= (A - C) \triangle (B - C) \\
[(A - B) \cup (B - A)] - C &= [(A - C) - (B - C)] \cup [(B - C) - (A - C)] \\
[(A - B) - C \cup (B - A) - C] &= [A - (B \cup C)] \cup [B - (C \cup A)] \\
A - (B \cup C) \cup B - (A \cup C) &= A - (B \cup C) \cup B - (A \cup C)
\end{aligned}$$

Las dos expresiones son iguales.

$$A = \{1\}, \quad B = \{2\}, \quad C = \{1, 3\}.$$

ii) **(i) Lado izquierdo**

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \triangle C &= \{1\} \cap \{2\} \triangle \{1, 3\} \\
&= \varnothing \triangle \{1, 3\} \\
&= \{1, 3\}.
\end{aligned}$$

(ii) Lado derecho

$$\begin{aligned}
(A \triangle C) \cap (B \triangle C) &= \big(\{1\} \triangle \{1, 3\}\big) \;\cap\; \big(\{2\} \triangle \{1, 3\}\big) \\
&= \{3\} \cap \{1, 2, 3\} \\
&= \{3\}.
\end{aligned}$$

Conclusión.
El lado izquierdo resulta en $\{1, 3\}$, mientras que el lado derecho resulta en $\{3\}$. Por lo tanto, la igualdad no se cumple en este caso, lo que confirma que la proposición no es verdadera en general.

iii) Demostrar que

$$C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^C$$

TODO – FINALIZAR ESTE PUNTO

2.14.

Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

1. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
2. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.
4. $(A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c = (A \cap C)^c \cup (B \cap D)^c$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A^c$.
6. $A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$.

1.

$$A \cup (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

2.15.

2.16.

Relaciones

2.17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

I) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$.

II) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$.

III) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$.

IV) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$.

Resolución

I) Verdadero.

II) Falso.

III) Verdadero.

IV) Verdadero

2.18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B.

I) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

II) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

III) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

IV) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

Resolución

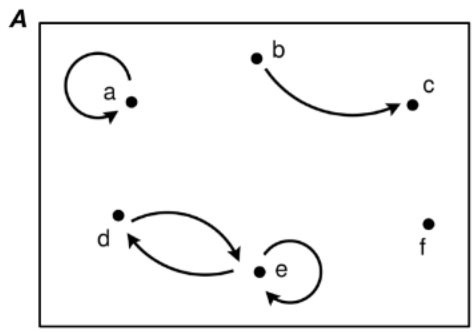
I) $R_1 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

II) $R_2 = \{(2,1),(3,1)\}$

III) $R_3 = \{(2,1),(2,3)(2,5),(2,7)\}$

IV) $R_4 = \{(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$

2.19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico:



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

I) reflexiva,

II) simétrica,

III) transitiva,

IV) reflexiva y simétrica,

V) simétrica y transitiva,

VI) de equivalencia.

Resolución

I) 4

II) 1

III) 2

IV) 5

V) 4

VI) 5

2.20. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ \mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$.

ii) $A = \mathbb{N},\ \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b \text{ es par}\}$.

iii) $A = \mathbb{Z},\ \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| \leq |b|\}$.

iv) $A = \mathbb{Z},\ \mathcal{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b \ \Leftrightarrow\ b$ es múltiplo de a.

v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \ \Leftrightarrow\ X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$.

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 30\}),\ \mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \ \Leftrightarrow\ 2 \notin X \cap Y^c$.

vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
$\mathcal{R}$ definida por $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \ \Leftrightarrow\ bc$ es múltiplo de ad.

Resolución

i) Es reflexiva, porque (x, x) para todo $x \in A$, y transitiva porque, por ejemplo, si $(1, 2)$ y $(2, 5)$ pertenecen a R, entonces también $(1, 5) \in R$. El "camino" de transitividad se cumple.

ii) La relación se define como:

$$(a, b) \in R \iff a + b \text{ es par}.$$

Para la reflexividad, reemplazamos b por a:

$$a + b \longrightarrow a + a = 2a,$$

y como $2a$ siempre es par, $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

Para la simetría:

$$a + b = b + a,$$

entonces si $(a, b) \in R$, también $(b, a) \in R$.

También es transitiva (se cumple la condición explicada antes).

Por lo tanto, al ser reflexiva, simétrica y transitiva, se concluye que R es una relación de equivalencia.

iii) Es reflexiva, no es simetrica ni antisimetrica y es transitiva.

iv) Es reflexiva, no es simetrica y transitiva

2.21. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas.

ii) de equivalencia y de orden.

i) Necesita ser: conjunto vacio, relacion con un solo par por ej. $\{(1, 1)\}$ o relacion identidad por ej: {(1,1), (2,2)}

ii) $R = \{(a, a) : a \in A\}$

2.22. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a R.

1. $\overline{a} = \{a, b, f\}$
2. $\overline{b} = \{a, b, f, \}$
3. $\overline{c} = \{c, e\}$
4. $\overline{d} = \{d\}$
5. Partición de A: $\{\{a, b, f\},\ \{c, e\},\ \{d\}\}$

2.23. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición

$$\{\{1, 3\},\ \{2, 6, 7\},\ \{4, 8, 9, 10\},\ \{5\}\}.$$

¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

Resolución

La partición dada es:

$$\{\{1, 3\},\ \{2, 6, 7\},\ \{4, 8, 9, 10\},\ \{5\}\}.$$

Por lo tanto, las clases de equivalencia son:

$$\overline{1} = \{1, 3\}, \quad \overline{2} = \{2, 6, 7\}, \quad \overline{4} = \{4, 8, 9, 10\}, \quad \overline{5} = \{5\}.$$

Número de clases distintas: 4.

Un representante de cada clase puede ser, por ejemplo:

$$1 \in \{1, 3\}, \quad 2 \in \{2, 6, 7\}, \quad 4 \in \{4, 8, 9, 10\}, \quad 5 \in \{5\}.$$

2.24. Sean $P = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ el conjunto de partes de $\{1, \ldots, 10\}$ y R la relación en P definida por

$$A\,R\,B \iff (A \triangle B) \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing.$$

i) Probar que R es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica. *(Sugerencia: usar adecuadamente el ejercicio 14(iii)).*

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$.

Resolución

I) Vamos a escribirlo en palabras.
A es relacion con B si y solo si no existe interseccion entre {1, 2, 3} y $A\triangle B$
Evaluemos la reflexividad

$$\begin{aligned} ARA \Leftrightarrow (A\triangle A) \cap \{1,2,3\} &= \emptyset \\ ARA \Leftrightarrow (\emptyset) \cap \{1,2,3\} &= \emptyset \\ \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$$

Esta relación es reflexiva.
La relación es simetrica porque $A\triangle B$ siempre va a ser lo mismo que $B\triangle A$
Tambien es transitiva por lo que ahce esta relación **una relacion de equivalencia**.

II) Clase de equivalencia = 2^8 combinaciones de $\{1,2,3\}$

2.25. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y.$$

I) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

II) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

Resolución

I)

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 93y - 93x &= 0 \\ (x-y)(x+y) - 93(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y-93) &= 0 \end{aligned}$$

La unica manera para la que la ecuación de arriba se cumpla es si $x - y = 0$.
Esto significa que x = y para que se cumpla. Esto comprueba que es reflexiva.

Funciones

2.26. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

I) $A = \{1,2,3,4,5\},\ B = \{a,b,c,d\},\ \mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$

II) $A = \{1,2,3,4,5\},\ B = \{a,b,c,d\},\ \mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b)\}$

III) $A = \{1,2,3,4,5\},\ B = \{a,b,c,d\},\ \mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b),(5,c)\}$

IV) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{R},\ \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \ / \ a = 2b - 3\}$

V) $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{N},\ \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \ / \ a = 2b - 3\}$

VI) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ a + b \text{ es divisible por } 5\}$

I) No es una función

II) Es una función

III) Es una función

IV)

$$\begin{aligned} a &= 2b - 3 \\ 1 &= 2b - 3 \\ 4 &= 2b \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Para todos los valores de a existe una y solo una imagen, por ende es una función.

V) Esto significa que para que esto sea una función, la imagen (b) tiene que ser si o si valores $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a &= 2b - 3 \\ -100 &= 2b - 3 \\ -97 &= 2b \\ -\frac{97}{2} &= b \end{aligned}$$

Con este contraejemplo, pudimos demostrar que para $a = -100$, no existe un valor para la función.

2.27. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y, para las que no sean sobreyectivas, hallar la imagen.

I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5.$

II) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y.$

III) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y,\, 2z).$

IV) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ n + 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

V) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b.$

VI) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a, & \text{si } a > 0, \\ 1 - 2a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$

Resolución

I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

Es una función cuadrática, por esto la función no es inyectiva ya que para dos valores distintos de x, se obtiene el mismo valor de y (imagen). Tampoco es sobreyectiva porque al ser cuadrática, no todos los valores de y están incluidos. La imagen es $[-5, \infty)$.

II) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

Para que una función sea inyectiva, debe cumplirse que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
Sin embargo, $f(1, 0) = 1$ y $f(0, 1) = 1$, lo que demuestra que para valores distintos de (x, y) se logra la misma imagen. Por esto, no es inyectiva. La función es sobreyectiva porque cualquier combinación posible de (x, y) hacen toda la imagen de y.

III) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y,\, 2z)$

Como ejemplo, $f(1, 0, 1) = (1, 2)$ y $f(0, 1, 1) = (1, 2)$. Por lo tanto, no es inyectiva. Es sobreyectiva.

IV) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ n + 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

$f(4) = 2yf(1) = 2$, por ende NO es inyectiva y NO es sobreyectiva porque $n = 1$ no pertenece a la imagen. La imagen es $[1, +\infty]$

Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando sea posible) en los casos:

I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 18 \quad \text{y} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 3.$

II) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 2, & \text{si } n \text{ es divisible por 4,} \\ n + 1, & \text{si } n \text{ no es divisible por 4,} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(n) = 4n.$

III) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 5, 3x) \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad g(n) = \sqrt{n}.$

Resolución

I)

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(g) &= 2(x + 3)^2 \\ &\equiv 2((x + 3)(x + 3)) \\ &\equiv 2(x^2 + 3x + 3x + 9) \\ &\equiv 2x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$