Guía Álgebra - Práctica 1

Lorenzo Durante

1. Introducción

Esta es la resolución de la primera guía de ejercicios de Álgebra 1 para Ciencias de la Computación en la UBA.

2. Conjuntos

2.1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

i) $1 \in A$

ii) $\{1\} \subseteq A$

iii) $\{2, 1\} \subseteq A$

iv) $\{1, 3\} \in A$

v) $\{2\} \in A$

Resolución

i) $1 \in A$: el número 1 pertenece al conjunto A. **(Verdadero)**

ii) $\{1\} \subseteq A$: todos los elementos de $\{1\}$ pertenecen a A. **(Verdadero)**

iii) $\{2, 1\} \subseteq A$: 1 y 2 pertenecen a A. **(Verdadero)**

iv) $\{1, 3\} \notin A$: A no contiene al conjunto $\{1, 3\}$ como *elemento*. **(Verdadero)**

v) $\{2\} \notin A$: el elemento $\{2\}$ no pertenece a A. **(Verdadero)**

2.2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

i) $3 \in A$

ii) $\{3\} \subseteq A$

iii) $\{3\} \in A$

iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$

v) $\{1, 2\} \in A$

vi) $\{1, 2\} \subseteq A$

vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$

viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$

ix) $\emptyset \in A$

x) $\emptyset \subseteq A$

xi) $A \in A$

xii) $A \subseteq A$

Resolución

i) $3 \notin A$. **Falso** que $3 \in A$.

ii) $\{3\} \not\subseteq A$. **Falso** que $\{3\} \subseteq A$.

iii) $\{3\} \in A$. **Verdadero**.

iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$. **Verdadero**.

v) $\{1, 2\} \in A$. **Verdadero**.

vi) $\{1, 2\} \subseteq A$. **Verdadero**.

vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$. **Verdadero**.

viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \not\subseteq A$ porque $3 \notin A$. **Falso** que sea subconjunto.

ix) $\emptyset \in A$. **Falso**.

x) $\emptyset \subseteq A$. **Verdadero**.

xi) $A \in A$. **Falso**.

xii) $A \subseteq A$. **Verdadero**.

2.3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos.

i) $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

ii) $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x| < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$

iv) $A = \{\emptyset\}, \quad B = \emptyset$

Resolución

i) $A \subseteq B$.

ii) $A \not\subseteq B$ (porque $3 \notin B$).

iii) $A \not\subseteq B$. En efecto,

$$A = (-3, -2) \cup (2, 3), \qquad B = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

y, por ejemplo, $-2{,}5 \in A$ pero $-2{,}5 \notin B$.

iv) $A \not\subseteq B$ (porque $\emptyset \notin \emptyset$).

2.4. Dados los subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, -2, 7, 3\}, \\ B &= \{1, \{3\}, 10\}, \\ C &= \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\} \end{aligned}$$

del conjunto referencial

$$V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\},$$

hallar

I) $A \cap (B \triangle C)$

II) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

III) $A^c \cap B^c \cap C^c$

Resolución

I) $A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$.

II) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$.

$$A \cap B = \{1\}, \qquad A \cap C = \{-2, 3\}.$$

III) $A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$. Con V como referencial:

$$A^c = \{\{3\}, 10, \{1, 2, 3\}\},\ B^c = \{-2, 7, \{1, 2, 3\}, 3\},\ C^c = \{1, \{3\}, 7, 10\}.$$

La intersección es vacía.

2.5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

Resolución. (Leyes de De Morgan)

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c, \qquad (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c.$$

2.6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

I) $(A \cup B^c) \cap C$ II) $A \triangle (B \cup C)$ III) $A \cup (B \triangle C)$

Completado en hoja.

2.7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

Resolución

I) $(B^c \cap A) \cup (A^c \cap C \cap B)$

II) *(Revisar con el diagrama)* $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

III) $(C^c \cap B \cap A) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (B^c \cap A \cap C)$

2.8. Hallar el conjunto $P(A)$ de partes de A en los casos

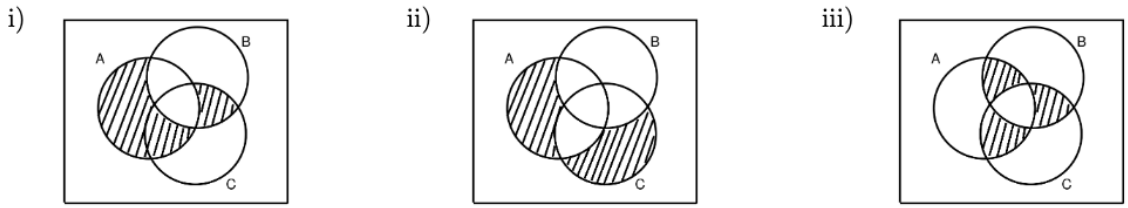


Figura 1: Diagramas de Venn

I) $A = \{1\}$ II) $A = \{a, b\}$ III) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

Resolución

I) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

II) $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

III) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 3\}, \{\{1, 2\}, 3\}, \{1, \{1, 2\}, 3\}\}$

2.9. Sean A y B conjuntos. Probar que $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Demostración. *(⇒)* Si $P(A) \subseteq P(B)$ entonces, como $A \in P(A)$, se tiene $A \in P(B)$, luego $A \subseteq B$. *(⇐)* Si $A \subseteq B$ y $X \in P(A)$, entonces $X \subseteq A \subseteq B$, por lo tanto $X \in P(B)$. Concluye $P(A) \subseteq P(B)$.

2.10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes.

I) $p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg p \vee q$ y $\neg(p \wedge \neg q)$.

Esto permite demostrar $p \Rightarrow q$ probando en su lugar $\neg q \Rightarrow \neg p$ (contrarrecíproco), o probando $\neg(p \wedge \neg q)$ (reducción al absurdo).

II) $\neg(p \Rightarrow q)$ y $p \wedge \neg q$.

Resolución

I)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Todas coinciden, por lo tanto son equivalentes.

II)

p	q	$\neg(p \to q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \wedge \neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Es equivalente.

2.11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas.

I) $\forall a \in \mathbb{N},\ \dfrac{a-1}{a}$ no es un número entero.

II) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0,\ \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

III) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

Resolución

I) Tomando $a = 1$: $\dfrac{1-1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$. (Contraejemplo)

II) Tomando $x = y = 1$: $\sqrt{2} \neq 1 + 1$. (Contraejemplo)

III) Tomando $x = -3$: $x^2 = 9 > 4$ pero $-3 \not> 2$. (Contraejemplo)

2.12.

I) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente.

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5\ \vee\ n \leq 8$.

(b) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq 5\ \wedge\ n \leq 8$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n$.

(d) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3\ \Rightarrow\ x^2 > 4$.

(f) Si n es un número natural terminado en 4, entonces n es par.

II) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

III) Reescribir las proposiciones **e)** y **f)** del ítem i) utilizando las equivalencias del ejercicio 10i).

I) *a*) Esta proposición es **verdadera**, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ siempre se cumple al menos una de las condiciones. Si $n < 5$, entonces $n \leq 8$ es cierto; y si $n \geq 5$, se cumple la primera condición. No existe valor de n que invalide ambas.

b) La proposición es **verdadera** porque todos los números naturales cumplen simultáneamente $n \geq 5$ y $n \leq 8$. Por ejemplo, $n = 6$ satisface ambas condiciones, por lo que la proposición es cierta.

c) La proposición es **falsa** porque siempre se puede elegir $m = n$ lo que contradice la proposición.

d) La proposición es **falsa** por el mismo motivo del item anterior. Siempre se puede elegir $m = n$.

e) La proposición es **falsa** porque si $x = 1$, $1 > 3$ es falsO y $1^2 > 4$ es nuevamente falso por lo que la proposición es falsa.

f) La proposición es **falsa**.

a) 1)

$$\begin{aligned} &\neg(\forall n \in \mathbb{N} \ \mid \ n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8) \\ \equiv \ &\exists n \in \mathbb{N} \ \mid \ \neg(n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8) \\ \equiv \ &\exists n \in \mathbb{N} \ \mid \ (n < 5) \ \wedge \ (n > 8) \end{aligned}$$

La negación es imposible, no existe un posible valor de n que sea a la misma vez menos que 5 y mayor que 8. Que sea imposible, confirma que la proposición original es **verdadera**.

b)

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \ \mid \ \neg(n \geq 5 \vee n \leq 8) \\ \equiv &\forall n \in \mathbb{N} \ \mid \ (n < 5 \wedge n > 8) \end{aligned}$$

La negación es imposible por lo que se confirma que la proposición original es **verdadera**.

c)

$$\begin{aligned} &\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \mid \neg(m > n) \\ \equiv &\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \mid m \leq n \end{aligned}$$

Esto es verdadero ya que 1 cumple la condición. Esto hace que la negación sea verdadera y confirma que la proposición original es **falsa**.

d)

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, \neg(m > n) \\ &\forall n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n \end{aligned}$$

Esta negación es falsa ya que se puede elegir los valores para $n = 1$ y $m = 1$ para que no se cumpla la negación. Esto hace que la proposición original se confirme como **verdadera**.

e)

$$\begin{aligned} &\exists x \in \mathbb{R}, \neg(x > 3 \to x^2 > 4) \\ &\exists x \in \mathbb{R}, (x > 3) \wedge (x^2 \leq 4) \end{aligned}$$

Esta negación es imposible lo que hace la preposición original **verdadera**.

f) Existe un número natural que termina en 4 y no es par.
Esta negación es falsa por lo que la proposición original es **verdadera**.

2.13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

I) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$.

II) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$.

III) $C \subseteq A \;\Rightarrow\; B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$.

IV) $A \triangle B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = B$.

I) Demostrar que

$$(A \triangle B) - C \;=\; (A - C) \triangle (B - C).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (A \triangle B) - C &= (A - C) \triangle (B - C) \\ [(A - B) \cup (B - A)] - C &= [(A - C) - (B - C)] \cup [(B - C) - (A - C)] \\ [(A - B) - C \cup (B - A) - C] &= [A - (B \cup C)] \cup [B - (C \cup A)] \\ A - (B \cup C) \cup B - (A \cup C) &= A - (B \cup C) \cup B - (A \cup C) \end{aligned}$$

Las dos expresiones son iguales.

$$A = \{1\}, \quad B = \{2\}, \quad C = \{1, 3\}.$$

II) **(i) Lado izquierdo**

$$\begin{aligned} (A \cap B) \triangle C &= \{1\} \cap \{2\} \;\triangle\; \{1, 3\} \\ &= \varnothing \;\triangle\; \{1, 3\} \\ &= \{1, 3\}. \end{aligned}$$

(ii) Lado derecho

$$\begin{aligned} (A \triangle C) \cap (B \triangle C) &= \big(\{1\} \triangle \{1, 3\}\big) \;\cap\; \big(\{2\} \triangle \{1, 3\}\big) \\ &= \{3\} \cap \{1, 2, 3\} \\ &= \{3\}. \end{aligned}$$

Conclusión.
El lado izquierdo resulta en $\{1, 3\}$, mientras que el lado derecho resulta en $\{3\}$. Por lo tanto, la igualdad no se cumple en este caso, lo que confirma que la proposición no es verdadera en general.

III) Demostrar que

$$C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^C$$

TODO – FINALIZAR ESTE PUNTO

2.14.

Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

1. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
2. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.
4. $(A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c = (A \cap C)^c \cup (B \cap D)^c$.
5. $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \triangle B = B \cap A^c$.
6. $A \cap C = \varnothing \ \Rightarrow \ A \cap (B \triangle C) = A \cap B$.

1.

$$A \cup (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

2.15.

2.16.

Relaciones

2.17. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$.

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$.

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$.

iv) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$.

Resolución

i) Verdadero.

ii) Falso.

iii) Verdadero.

iv) Verdadero

2.18. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B.

i) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

IV) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

Resolución

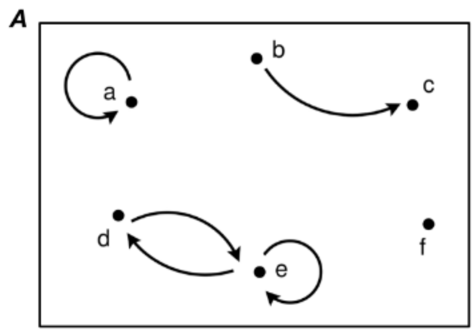
I) $R_1 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7), (3,3), (3,5), (3,7)\}$

II) $R_2 = \{(2,1), (3,1)\}$

III) $R_3 = \{(2,1), (2,3)(2,5), (2,7)\}$

IV) $R_4 = \{(1,7), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}$

2.19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico:



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

I) reflexiva,

II) simétrica,

III) transitiva,

IV) reflexiva y simétrica,

V) simétrica y transitiva,

VI) de equivalencia.

Resolución

I) 4

II) 1

III) 2

IV) 5

V) 4

VI) 5

2.20. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ \mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$.

ii) $A = \mathbb{N},\ \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b \text{ es par}\}$.

iii) $A = \mathbb{Z},\ \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| \leq |b|\}$.

iv) $A = \mathbb{Z},\ \mathcal{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a.

v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$.

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 30\}),\ \mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow 2 \notin X \cap Y^c$.

vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
$\mathcal{R}$ definida por $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \Leftrightarrow bc$ es múltiplo de ad.

Resolución

i) Es reflexiva, porque (x, x) para todo $x \in A$, y transitiva porque, por ejemplo, si $(1, 2)$ y $(2, 5)$ pertenecen a R, entonces también $(1, 5) \in R$. El "camino" de transitividad se cumple.

ii) La relación se define como:

$$(a, b) \in R \iff a + b \text{ es par}.$$

Para la reflexividad, reemplazamos b por a:

$$a + b \longrightarrow a + a = 2a,$$

y como $2a$ siempre es par, $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

Para la simetría:

$$a + b = b + a,$$

entonces si $(a, b) \in R$, también $(b, a) \in R$.

También es transitiva (se cumple la condición explicada antes).

Por lo tanto, al ser reflexiva, simétrica y transitiva, se concluye que R es una relación de equivalencia.

iii) Es reflexiva, no es simetrica ni antisimetrica y es transitiva.

iv) Es reflexiva, no es simetrica y transitiva

2.21. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas.

ii) de equivalencia y de orden.

i) Necesita ser: conjunto vacio, relacion con un solo par por ej. $\{(1, 1)\}$ o relacion identidad por ej: {(1,1), (2,2)}

ii) $R = \{(a, a) : a \in A\}$

2.22. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a R.

1. $\overline{a} = \{a, b, f\}$
2. $\overline{b} = \{a, b, f, \}$
3. $\overline{c} = \{c, e\}$
4. $\overline{d} = \{d\}$
5. Partición de A: $\{\{a, b, f\},\ \{c, e\},\ \{d\}\}$

2.23. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición

$$\{\{1, 3\},\ \{2, 6, 7\},\ \{4, 8, 9, 10\},\ \{5\}\}.$$

¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

Resolución

La partición dada es:

$$\{\{1, 3\},\ \{2, 6, 7\},\ \{4, 8, 9, 10\},\ \{5\}\}.$$

Por lo tanto, las clases de equivalencia son:

$$\overline{1} = \{1, 3\}, \quad \overline{2} = \{2, 6, 7\}, \quad \overline{4} = \{4, 8, 9, 10\}, \quad \overline{5} = \{5\}.$$

Número de clases distintas: 4.

Un representante de cada clase puede ser, por ejemplo:

$$1 \in \{1, 3\}, \quad 2 \in \{2, 6, 7\}, \quad 4 \in \{4, 8, 9, 10\}, \quad 5 \in \{5\}.$$

2.24. Sean $P = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ el conjunto de partes de $\{1, \ldots, 10\}$ y R la relación en P definida por

$$A\,R\,B \iff (A \triangle B) \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing.$$

i) Probar que R es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica. *(Sugerencia: usar adecuadamente el ejercicio 14(iii)).*

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$.

Resolución

I) Vamos a escribirlo en palabras.
A es relacion con B si y solo si no existe interseccion entre $\{1, 2, 3\}$ y $A \triangle B$
Evaluemos la reflexividad

$$\begin{aligned} ARA \Leftrightarrow (A \triangle A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \\ ARA \Leftrightarrow (\emptyset) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \\ \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Esta relación es reflexiva.
La relación es simetrica porque $A \triangle B$ siempre va a ser lo mismo que $B \triangle A$
Tambien es transitiva por lo que ahce esta relación **una relacion de equivalencia**.

II) Clase de equivalencia = 2^8 combinaciones de $\{1, 2, 3\}$