Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής

Τεχνικές Βελτιστοποίησης - Εργασία 1

Λώλος Ιωάννης

4 Νοεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Περιγραφή του Προβλήματος

Ζητούμενο της παρούσας εργασίας ήταν η υλοποίηση μεθόδων στο περιβάλλον Matlab, για την εύρεση ελαχίστου τριών συναρτήσεων σε δεδομένο διάστημα και η μελέτη του πλήθους υπολογισμών που απαιτεί η κάθε μία σε μεταβαλλόμενες συνθήκες.

1.1 Οι Μέθοδοι

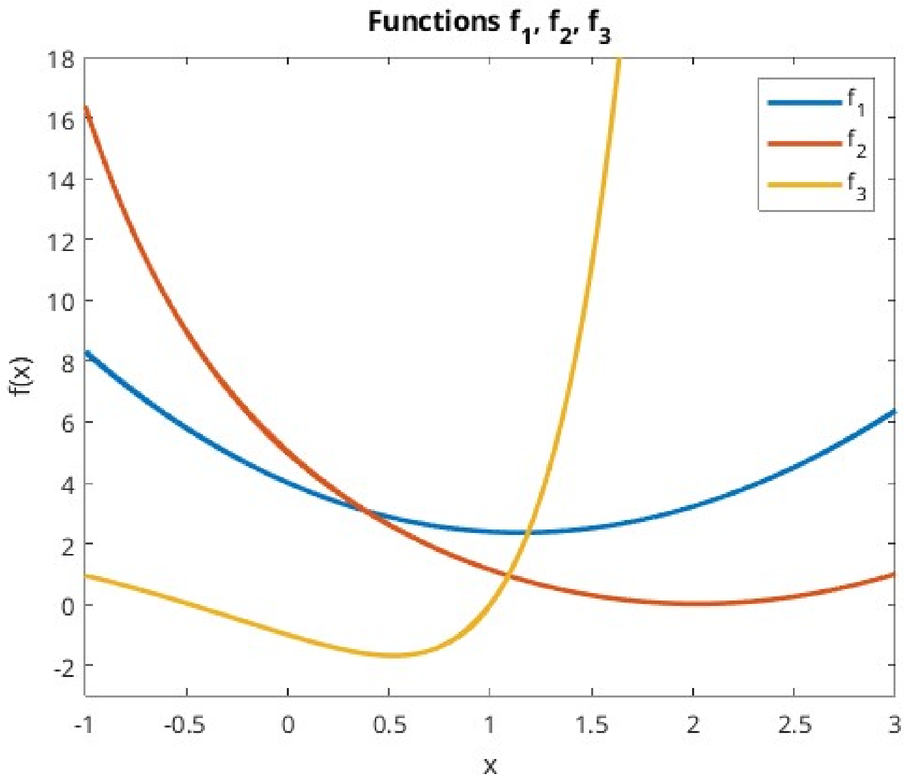
Οι μέθοδοι προς υλοποίηση είναι οι εξής:

- Μέθοδος Διχοτόμου
- Μέθοδος Χρυσού Τομέα
- Μέθοδος *Fibonacci*
- Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων

1.2 Η Μελέτη

Οι συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση είναι οι παρακάτω :

- $f1 = (x-2)^2 + x\log(x+3)$
- $f2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
- $f3 = e^x(x^3-1) + (x-1)\sin(x)$



Σχήμα 1.1: Οι συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση

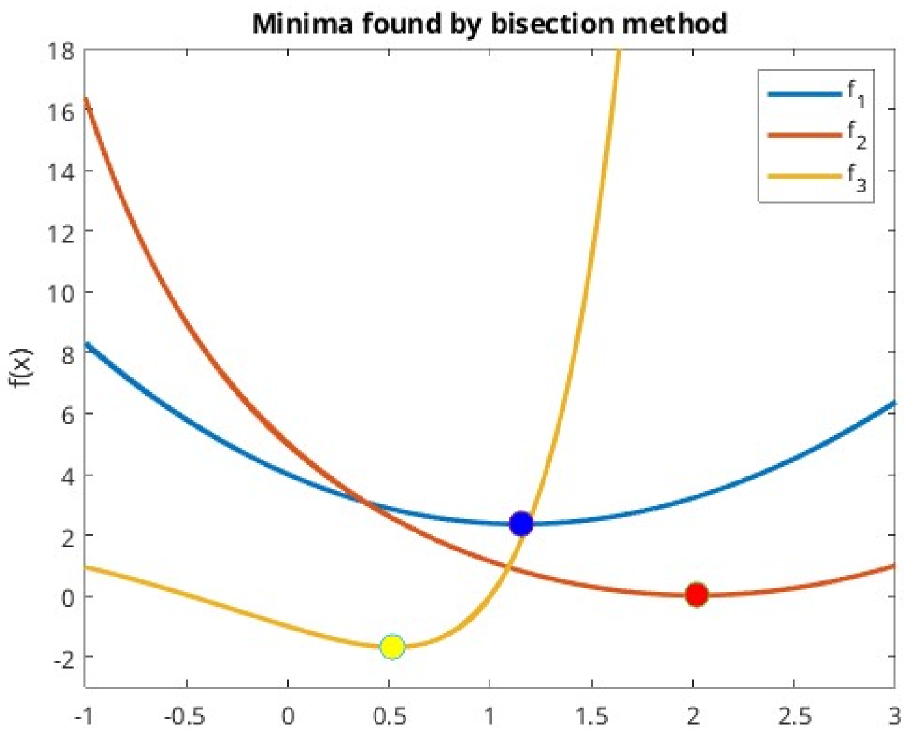
Για κάθε μία εκ των παραπάνω συναρτήσεων, καλούμαστε στο διάστημα $[a_0, b_0] = [-1, 3]$ να αναζητήσουμε το ελάχιστο τους, χρησιμοποιώντας της παραπάνω μεθόδους. Τη συγκεκριμένη διαδικασία την επαναλαμβάνουμε για διαφορετικές τιμές του l, ενώ στην περίπτωση της Μεθόδου Διχοτόμου χωρίς παραγώγους μεταβάλλουμε και το e. Κάθε φορά που καλείται κάποια συνάρτηση θα καταγράφονται οι υπολογισμοί που χρειάστηκε να εκτελέσει η $f_i(x)$ για σκοπούς ανάλυσης.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητική Μελέτη των Μεθόδων

2.1 Μέθοδος Διχοτόμου

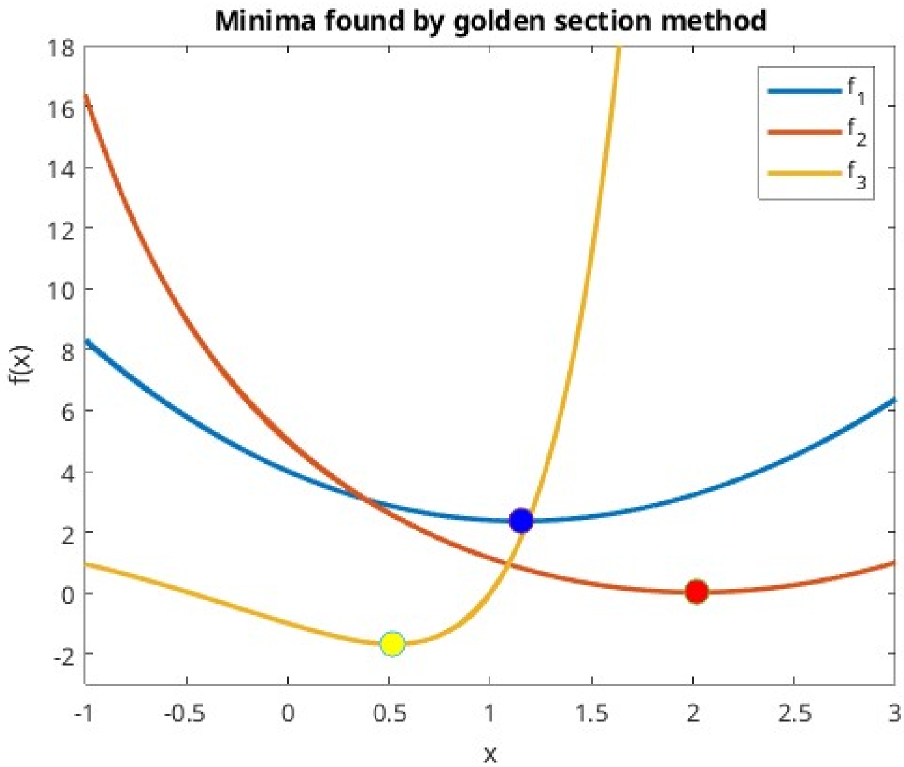
Η μέθοδος Διχοτόμου ανήκει στις ακολουθιακές μεθόδους αναζήτησης. Το βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι σε κάθε βήμα, το διάστημα αναζήτησης $[\alpha, \beta]$ διαιρείται σε τρία υπό-διαστήματα, χωρισμένα από σημεία x_1, x_2 τοποθετημένα συμμετρικά σε απόσταση ϵ από την διχοτόμο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Απορρίπτουμε το ένα από τα δύο μισά του διαστήματος και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια l. Η απλή υλοποίηση της μεθόδου αποτελεί ίσως το μεγαλύτερο της πλεονέκτημα, όμως υστερεί όσον αφορά την ακρίβεια συγκριτικά με τις άλλες μεθόδους για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, ενώ απαιτεί να εκτιμηθεί η τάξη μεγέθους της συνάρτησης για την επιλογή της παραμέτρου ϵ



Σχήμα 2.1: Τα ελάχιστα των συναρτήσεων με τη χρήση της Μεθόδου Διχοτόμησης

2.2 Μέθοδος Χρυσής Τομής

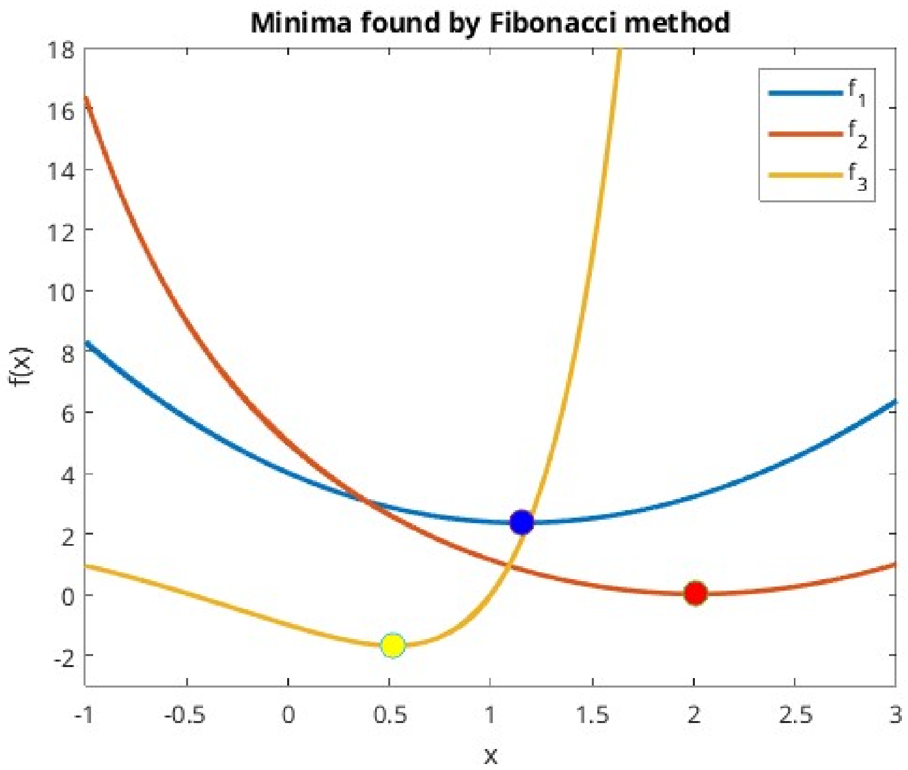
Η μέθοδος της Χρυσής Τομής βασίζεται στη χρήση του αριθμού της Χρυσής Τομής $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$. Σε κάθε βήμα της μεθόδου, δύο νέα σημεία x_1, x_2 δημιουργούνται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με βάση τη Χρυσή Τομή. Αν $f(x_1) < f(x_2)$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο $[\alpha, x_2]$, αλλιώς στο $[x_1, \beta]$. Με αυτή την επαναληπτική διαδικασία, το διάστημα μειώνεται κατά την αναλογία της Χρυσής Τομής σε κάθε βήμα. Το πλεονέκτημα της μεθόδου Χρυσής Τομής συγκριτικά με την Μέθοδο Διχοτόμου είναι ότι σε κάθε επανάληψη απαιτείται μονάχα ένας υπολογισμός της $f(x)$, καθώς οι υπολογισμοί της f επαναχρησιμοποιούνται. Επίσης δεν χρειάζεται επιλογή της παραμέτρου ϵ.



Σχήμα 2.2: Τα ελάχιστα των συναρτήσεων με τη χρήση της Μεθόδου Χρυσής Τομής

2.3 Μέθοδος Fibonacci

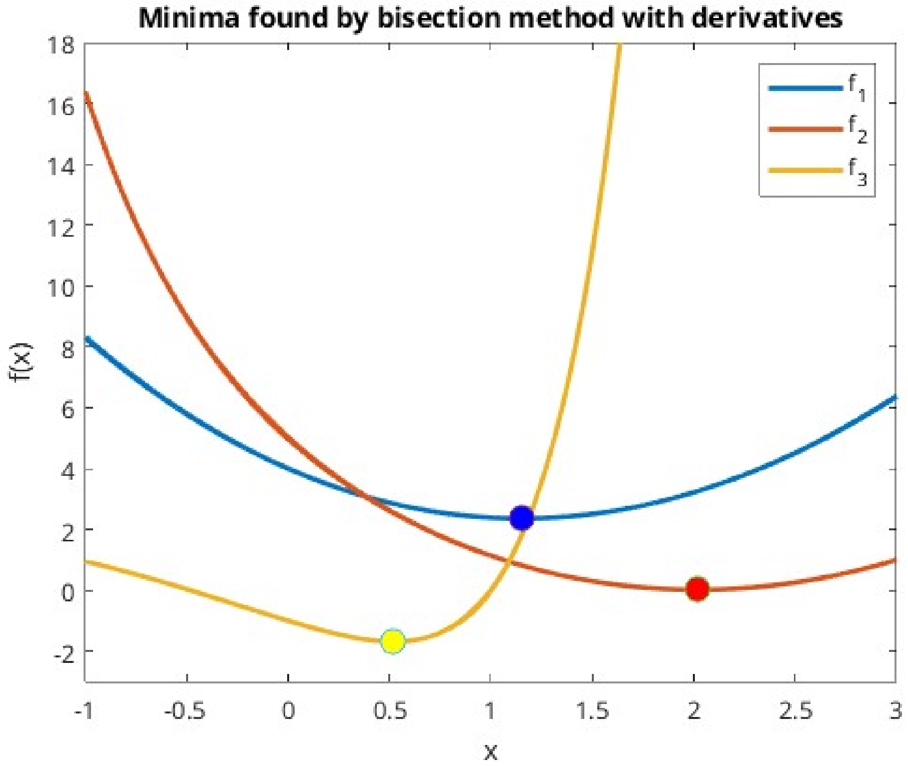
Η βασική λογική της μεθόδου Fibonacci είναι παρόμοια με της Χρυσής Τομής, αλλά η σύγκλιση του διαστήματος γίνεται σε προκαθορισμένα βήματα βάσει της ακολουθίας Fibonacci, η οποία επιτρέπει την βελτιστοποίηση του αριθμού των υπολογισμών της συνάρτησης. Η Μέθοδος Fibonacci προτιμάται σε περιπτώσεις που υπάρχει περιορισμένος αριθμός αξιολογίσεων της f, όμως η υλοποίηση της είναι πιο πολύπλοκη λόγω της απαίτησης επιλογής του αριθμού επαναλήψεων εκ των προτέρων.



Σχήμα 2.3: Τα ελάχιστα των συναρτήσεων με τη χρήση της Μεθόδου Fibonacci

2.4 Μέθοδος Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγων

Η μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων είναι μια παραλλαγή της απλής Διχοτόμου που αξιοποιεί την πληροφορία της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης. Ως αποτέλεσμα, λόγω της εκμετάλλευσης των πληροφοριών της παραγώγου, η μέθοδος μπορεί να είναι ταχύτερη από τη βασική Διχοτόμο χωρίς παράγωγο, ειδικά για προβλήματα όπου η παράγωγος είναι εύκολα υπολογίσιμη.



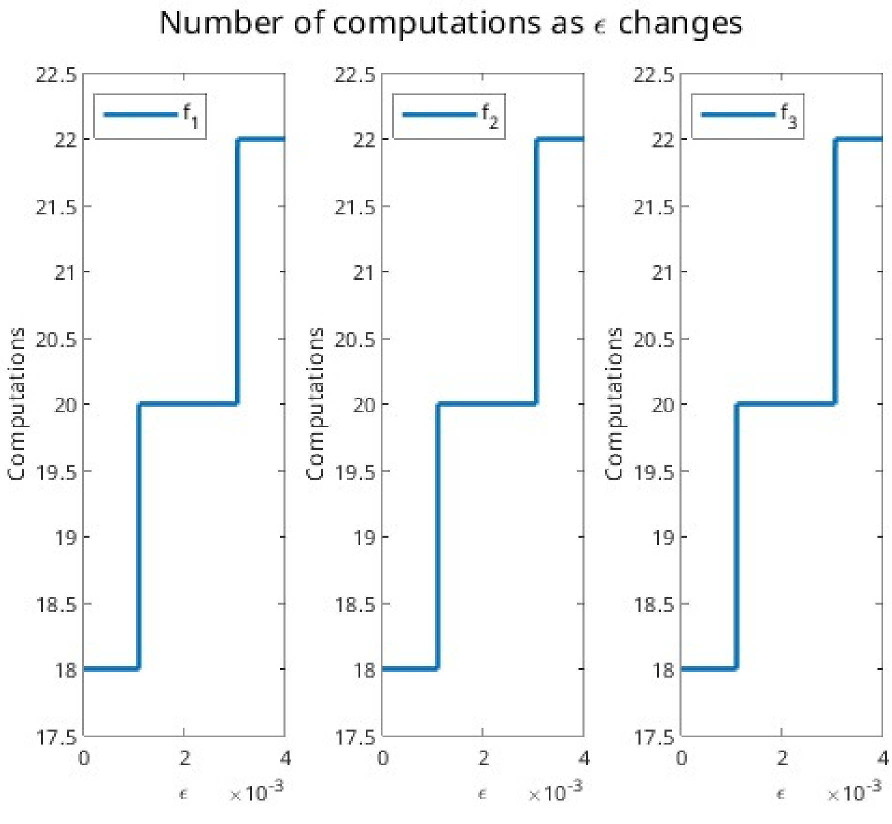
Σχήμα 2.4: Τα ελάχιστα των συναρτήσεων με τη χρήση της Μεθόδου Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγων

Κεφάλαιο 3

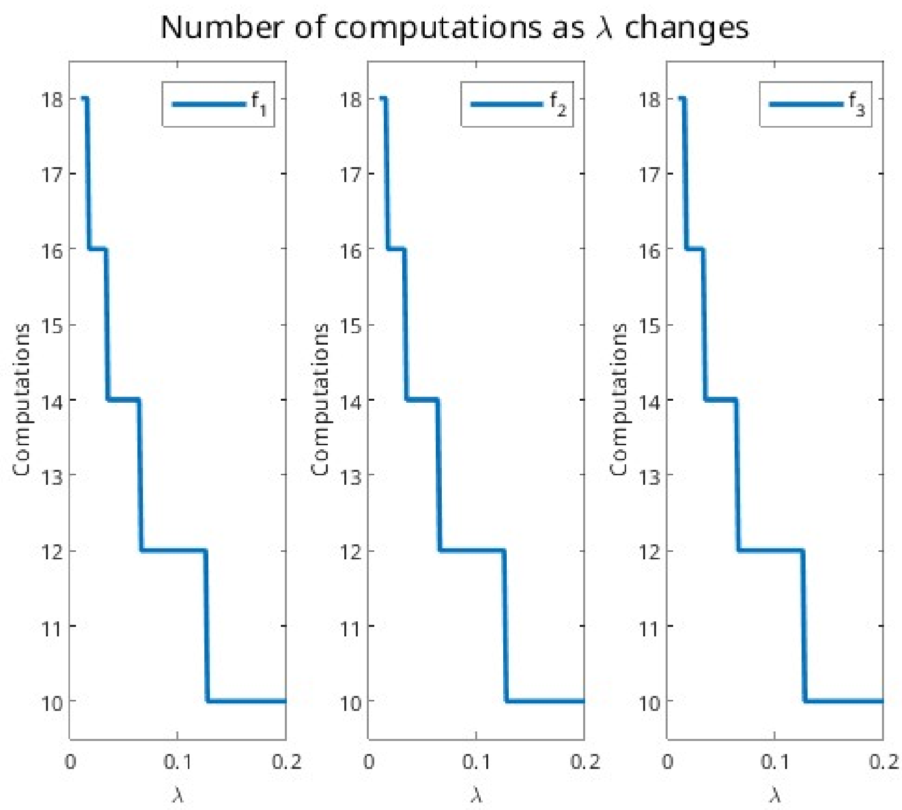
Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

3.1 Ερώτημα 1

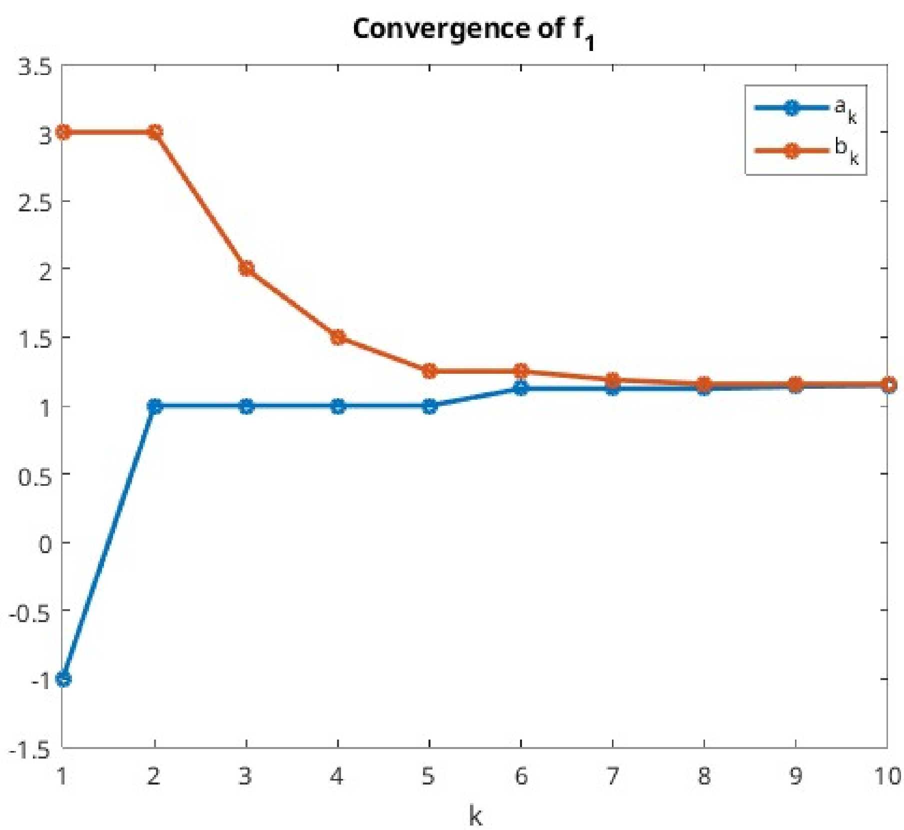
Όλα τα παρακάτω γραφήματα αφορούν τη μέθοδο διχοτόμου.



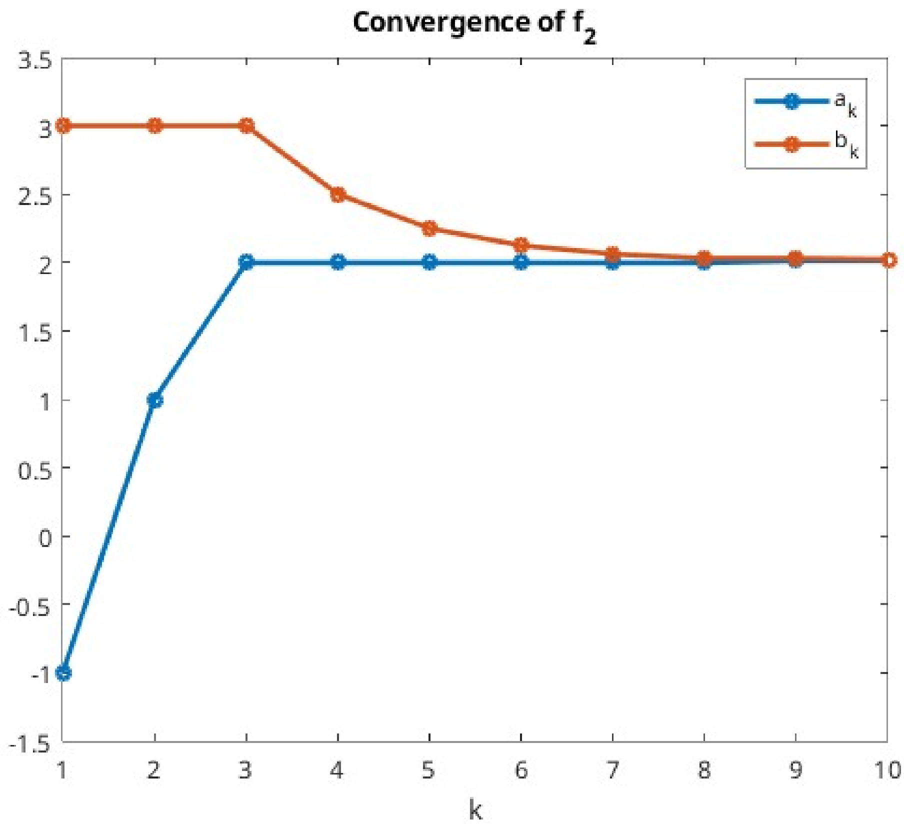
Σχήμα 3.1: Ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών ως συνάρτηση του ϵ



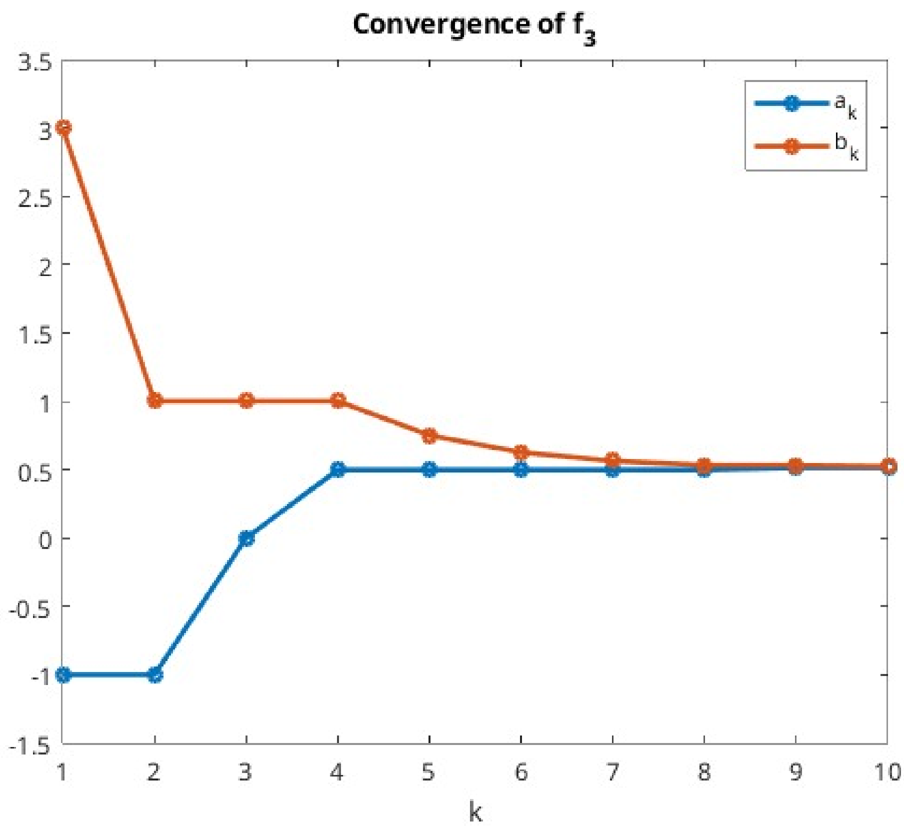
Σχήμα 3.2: Ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών ως συνάρτηση του l



Σχήμα 3.3: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_1



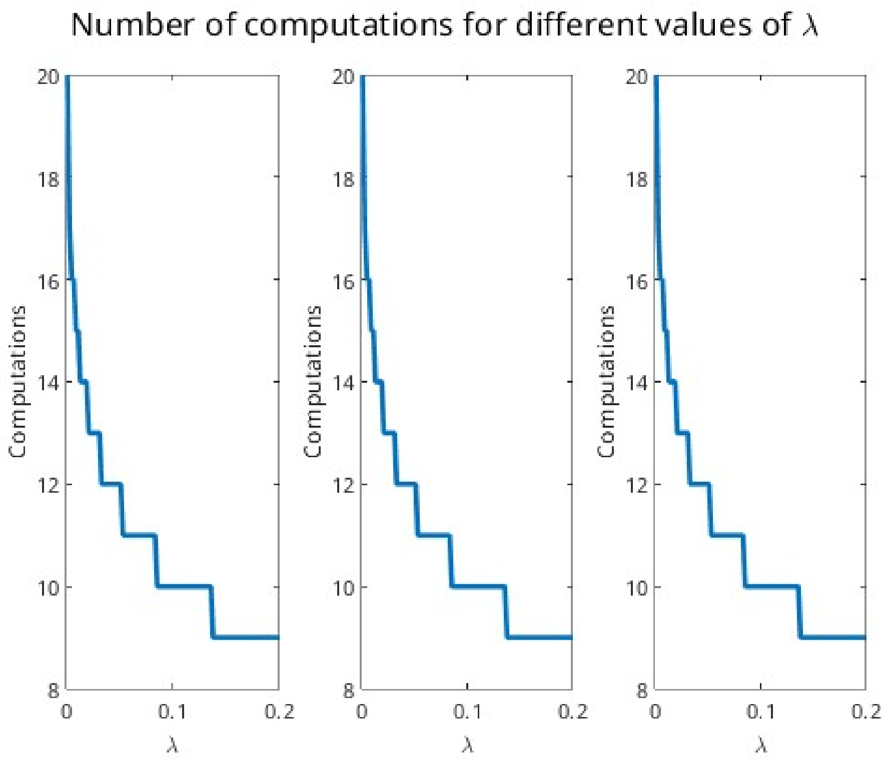
Σχήμα 3.4: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_2



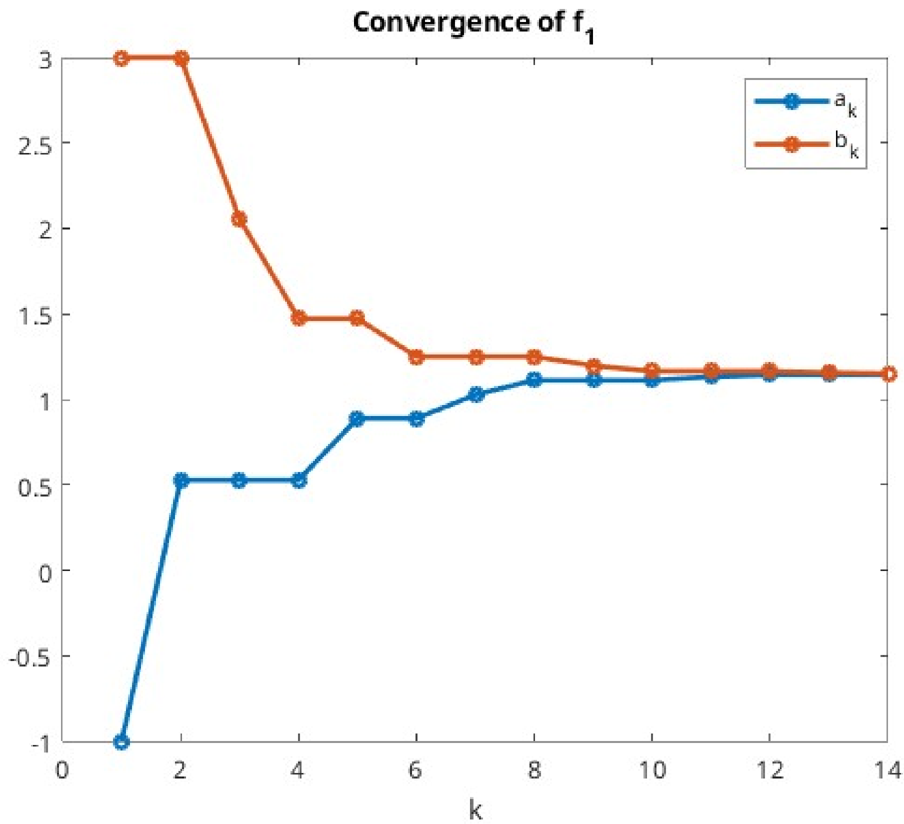
Σχήμα 3.5: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_3

3.2 Ερώτημα 2

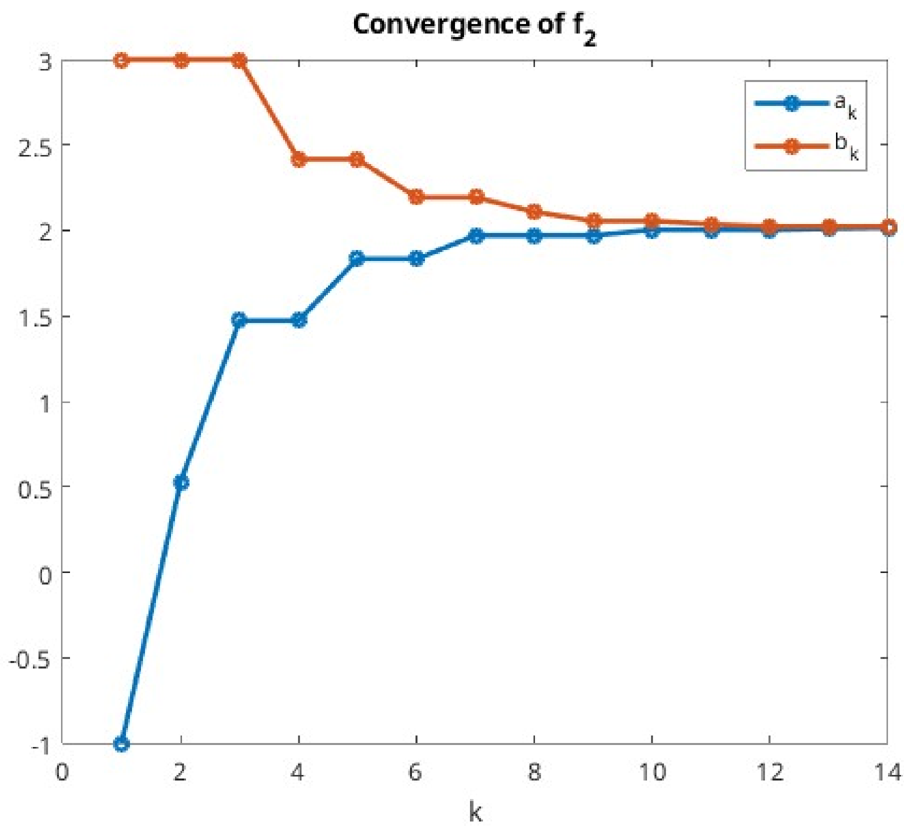
Όλα τα παρακάτω γραφήματα αφορούν τη μέθοδο χρυσής τομής.



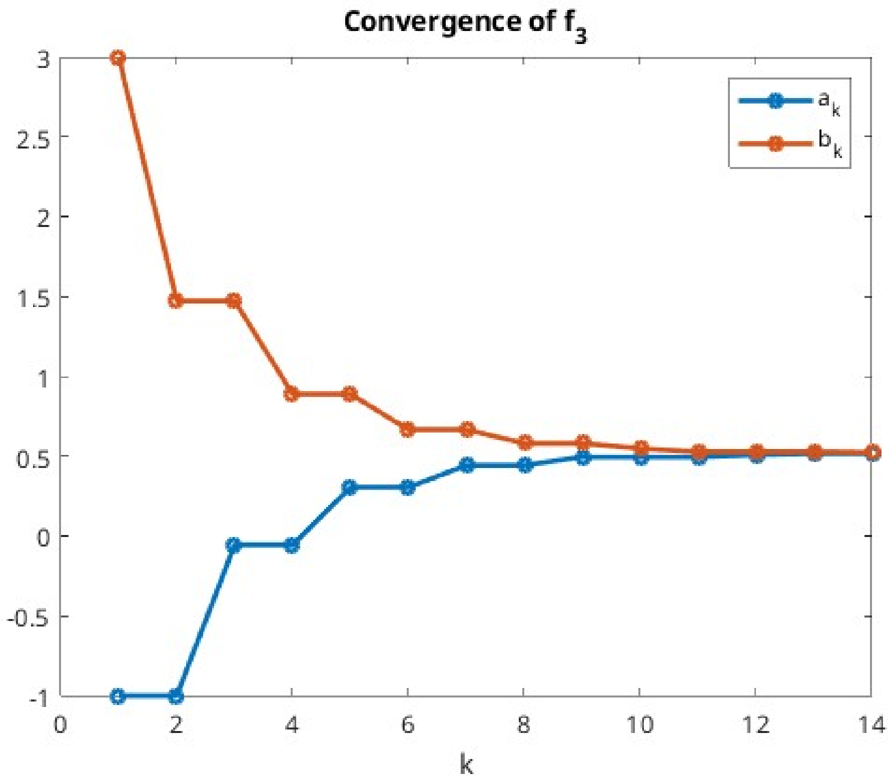
Σχήμα 3.6: Ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών ως συνάρτηση του λ



Σχήμα 3.7: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_2



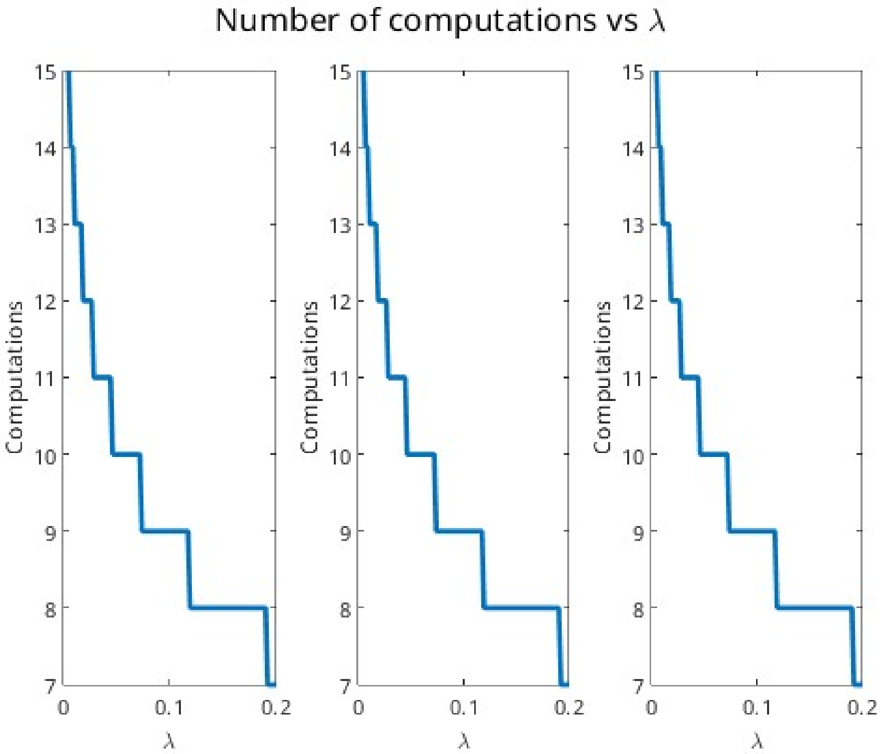
Σχήμα 3.8: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_2



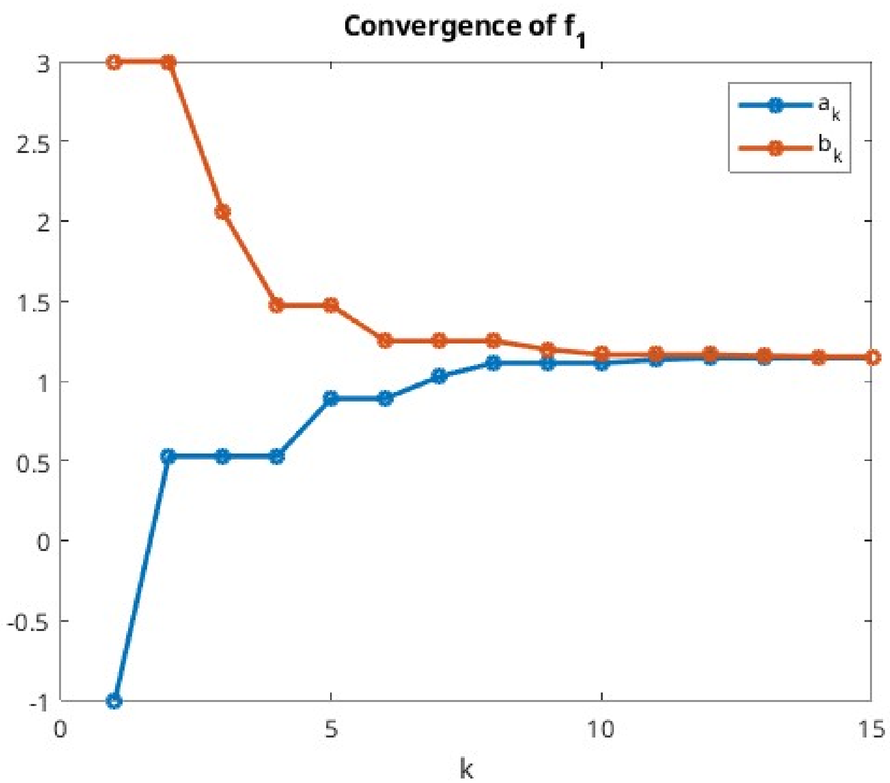
Σχήμα 3.9: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_3

3.3 Ερώτημα 3

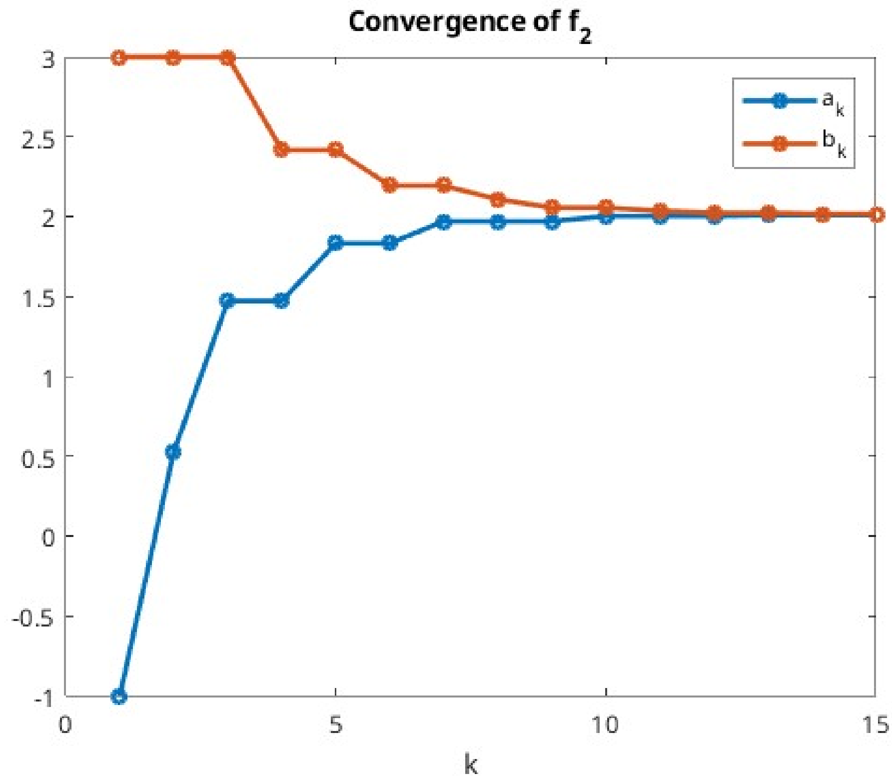
Όλα τα παρακάτω γραφήματα αφορούν τη μέθοδο Fibonacci.



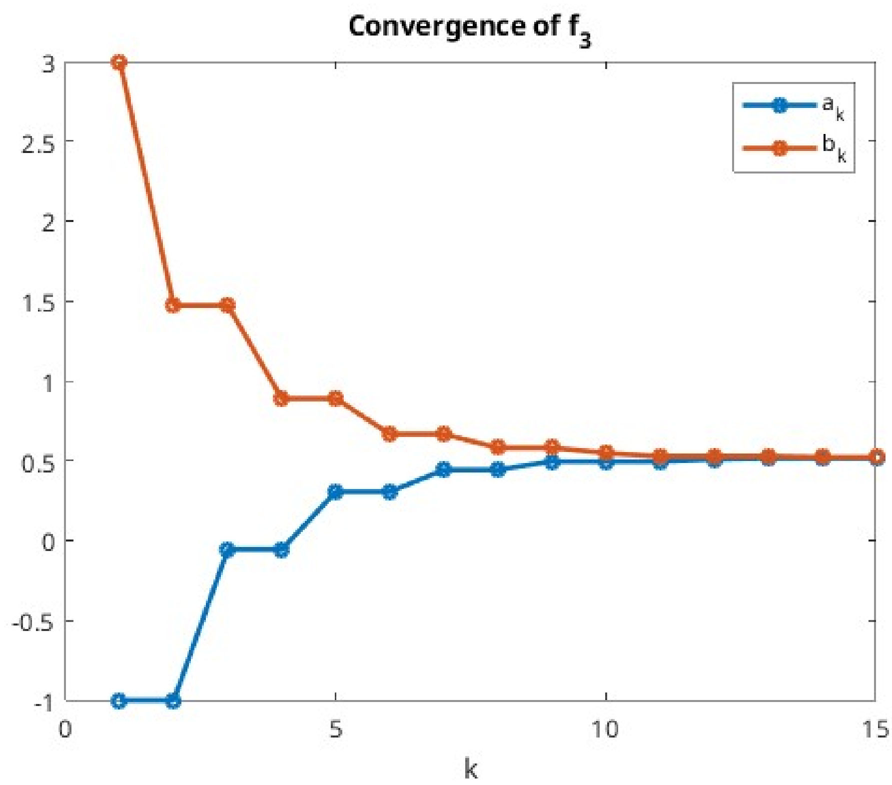
Σχήμα 3.10: Ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών ως συνάρτηση του λ



Σχήμα 3.11: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_1



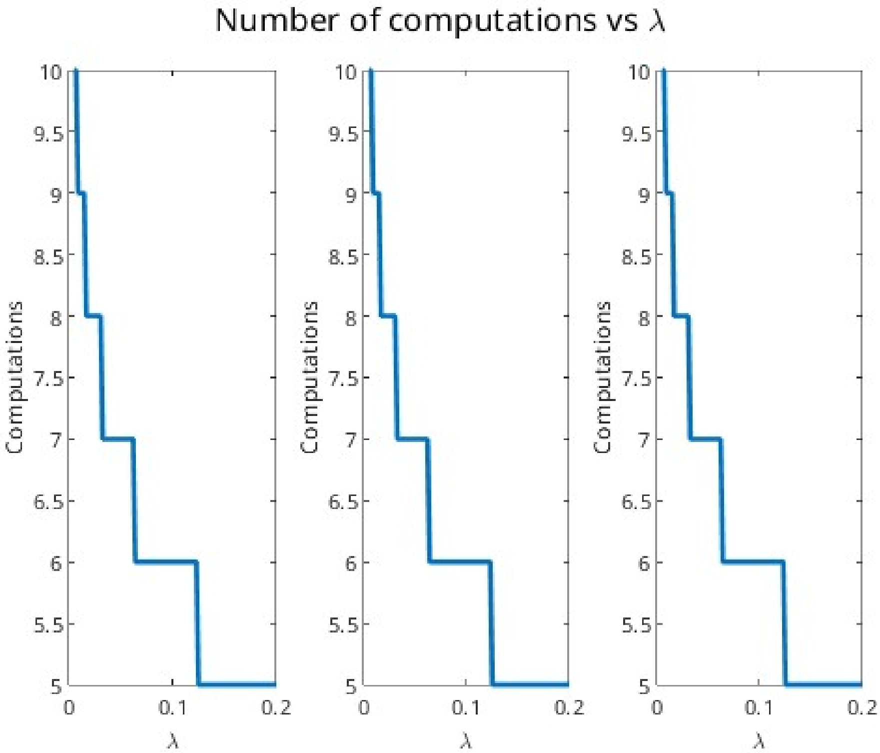
Σχήμα 3.12: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_2



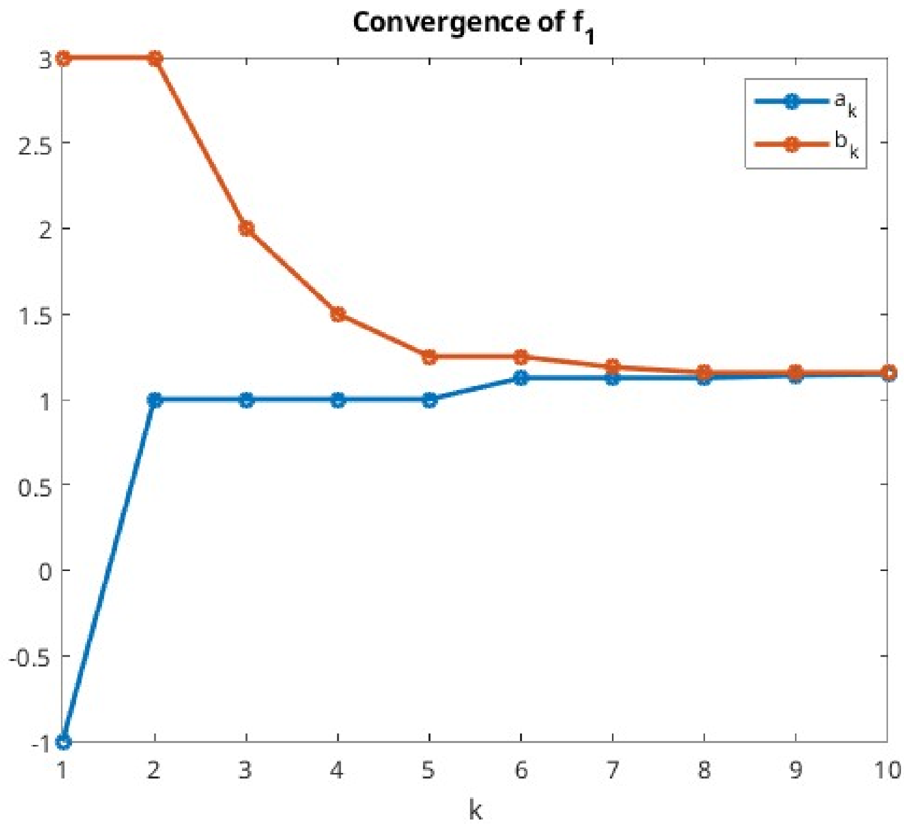
Σχήμα 3.13: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_3

3.4 Ερώτημα 4

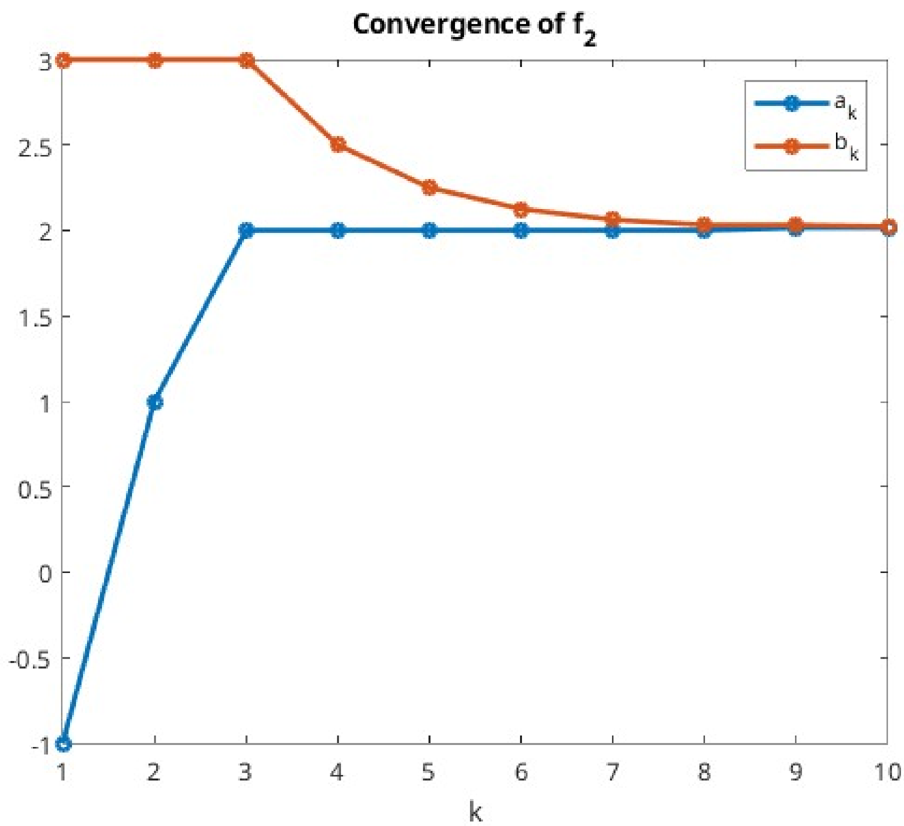
Όλα τα παρακάτω γραφήματα αφορούν τη μέθοδο διχοτόμου με χρήση παραγώγων.



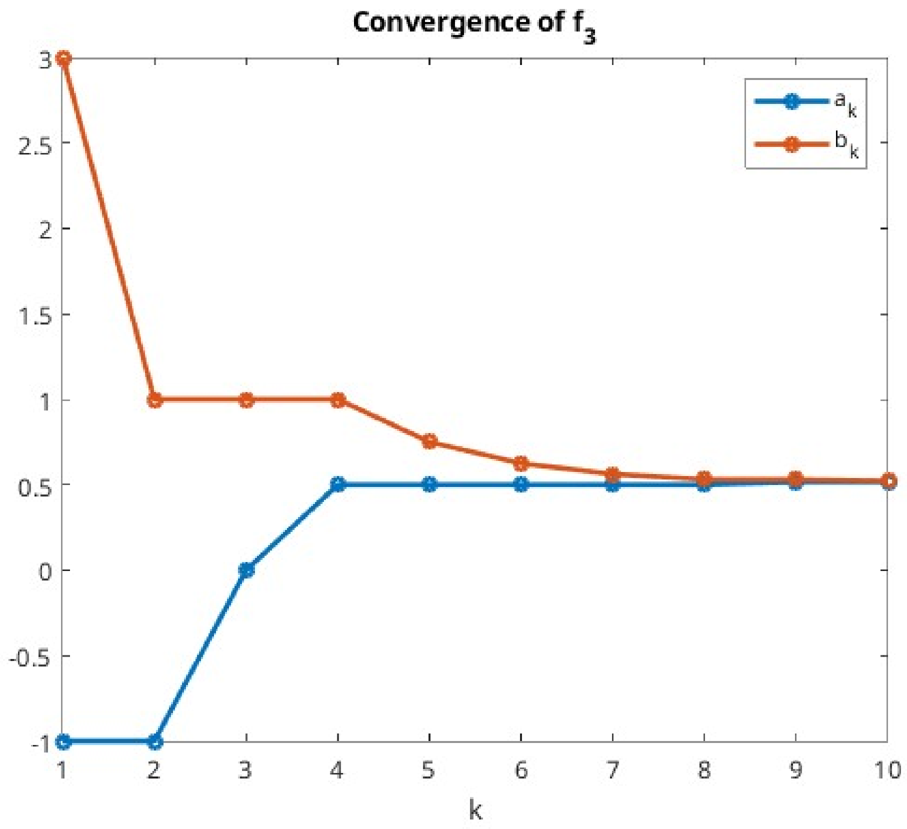
Σχήμα 3.14: Ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών ως συνάρτηση του λ



Σχήμα 3.15: Τα άκρα του διαστήματος $[a, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_1



Σχήμα 3.16: Τα άκρα του διαστήματος $[a, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_2



Σχήμα 3.17: Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ως συνάρτηση του k - f_3

Κεφάλαιο 4

Σύγκριση των Μεθόδων - Συμπεράσματα

- Είναι εμφανές πως όσο μειώνεται το l οι αλγόριθμοι απαιτούν περισσότερες επαναλήψεις μέχρι τον τερματισμό τους, ωστόσο επιτυγχάνεται σαφώς μεγαλύτερη ακρίβεια προσέγγισης του ελαχίστου της συνάρτησης.
- Αντίστροφα, στην μέθοδο της Διχοτόμου χωρίς χρήση παραγώγων, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνουμε το e ο αλγόριθμος απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις για να υπολογίσει το ελάχιστο, καθώς το διάστημα $[a_k, \beta_k]$ πλησιάζει πιο αργά στην ακρίβεια l.
- Σύμφωνα με τα γραφήματα η μέθοδος διχοτόμου (με και χωρίς χρήση παραγώγων) απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις από τις άλλες μεθόδους, ωστόσο η μέθοδος χωρίς παραγώγους το επιτυγχάνει χρησιμοποιώντας περισσότερους υπολογισμούς της f.
- Όσον αφορά τις συναρτήσεις δεν παρατηρήθηκε κάποια σημαντική διαφορά ανάμεσα τους στις υπολογιστικές απαιτήσεις μέχρι την εύρεση του ελαχίστου τους.