Traccia n.8
Fondamenti di Automatica

Corso di laurea in Ingegneria Informatica

Roberto

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e Sistemistica

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

2023/2024

Traccia n.8

a. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -120 & 70 & -103 & 36 \\ -120 & 70 & -104 & 35 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -120 & 71 & -105 & 35 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1) I modi naturali del sistema
2) La risposta libera nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) Studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4) La funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri;
5) La risposta al gradino unitario ed il suo grafico (mettere in evidenza la risposta transitoria e la risposta a regime);
6) La risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A\sin(\omega t + \psi)1(t)$ (lo studente scelga una terna appropriata di valori A, ω, ψ e discuta le caratteristiche di tale risposta forzata in maniera simile al punto precedente);

7) Un suo modello ARMA equivalente, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Una volta individuata tale rappresentazione e le condizioni iniziali sull'uscita valutare la risposta alla rampa unitaria (no grafico) mettendo in evidenza la risposta transitoria (risposta libera inclusa) e la componente legata algebricamente all'ingresso;

8) Determinare lo stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria)

9) Valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$.

b. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TD:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} \frac{341}{125} & \frac{201}{125} & \frac{68}{25} \\ -\frac{216}{125} & -\frac{201}{125} & -\frac{43}{25} \\ -\frac{216}{125} & -\frac{76}{125} & -\frac{43}{25} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1) I modi naturali del sistema
2) La risposta libera nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4) La funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri;
5) La risposta al gradino unitario ed il suo grafico (mettere in evidenza la risposta transitoria e la risposta a regime);
6) I suoi modelli ARMA equivalenti, individuando (ove necessario) le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Valutare la risposta all'ingresso

$$u(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

7) Determinare, sul modello ARMA apposito, le condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria).

c. Si consideri la catena di Markov Tempo Discreto avente numero di stati finiti:

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (1)$$

la cui matrice di transizione è:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} & \frac{9}{28} & \frac{8}{11} \\ 0 & \frac{9}{28} & \frac{2}{11} \\ \frac{9}{17} & \frac{5}{14} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Determinare:

1) Il grafo di transizione della catena;
2) Lo stato stazionario della catena a partire da
   i. Ricorsione numerica a partire da uno stato iniziale stocastico scelto in maniera pseudo-casuale (si lascia allo studente la scelta dello stato iniziale e l'individuazione di un numero sufficiente di passi per garantire la convergenza della catena);
   ii. Calcolo in forma chiusa dell'equilibrio stocastico della catena;
3) Evidenziare nel grafo individuato al punto 1. un possibile *spanning tree*.

Indice

Introduzione

Nel seguente progetto ci occuperemo dell'analisi di sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), analizzando sia casi tempo-continuo(TC) che casi tempo-discreto(TD). Questi sistemi sono modellati da equazioni differenziali ordinarie (EDO) per sistemi TC ed equazioni alle differenze per sistemi TD.

1.1 Sistemi Dinamici

Un sistema dinamico è un insieme di elementi ed oggetti matematici che interagiscono tra loro evolvendo nel tempo. Essi offrono un potente modo per modellare e comprendere una vasta gamma di fenomeni complessi.

Definizione 1.1.1. Un sistema dinamico Σ è così composto:

$$\Sigma = (T, X, U, Y, u(\cdot), y(\cdot), \phi, \eta)$$

- **Insiemi(o spazi):**
  T insieme dei tempi.
  X spazio di stato.
  U immagine della funzione di ingresso.
  Y immagine della funzione di uscita.
  $u(\cdot)$ insieme delle funzioni(sequenze) di ingresso, $u(\cdot) : T \to U$.
  $y(\cdot)$ insieme delle funzioni(sequenze) di uscita, $y(\cdot) : T \to Y$.
- **Funzioni(o mappe):**
  $\phi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ funzione di transizione di stato, $\Phi : T \times T \times X \times u \to X$
  $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ funzione di uscita, $\eta : T \times X \times U \to Y$

1.1.1 Proprietà dei Sistemi Dinamici

Linearità(principio di sovrapposizione degli effetti)

Consideriamo un sistema dinamico TC prendendo due istanti di tempo, un istante iniziale t_0 ed un istante finale $t \in T$ con $t \geq t_0$. Scegliamo due ingressi ammissibili $u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot)$ e due stati legati a t_0, $x_{t_0}^{(1)}, x_{t_0}^{(2)}$ che definiscono due stati al tempo (t):

- $x^{(1)}(t) = \phi(t, t_0, x_{t_0}^{(1)}, u_{[t_0,t)}^{(1)}(\cdot))$
- $x^{(2)}(t) = \phi(t, t_0, x_{t_0}^{(2)}, u_{[t_0,t)}^{(2)}(\cdot))$

e le relative uscite:

- $y^{(1)}(t) = \eta(t, x^{(1)}(t), u^{(1)}(t))$
- $y^{(2)}(t) = \eta(t, x^{(2)}(t), u^{(2)}(t))$

consideriamo inoltre le seguenti configurazioni di combinazioni lineari:

$$u^{(3)}(\cdot) = \alpha_1 u^{(1)}(\cdot) + \beta_1 u^{(2)}(\cdot), \;\; x_{t_0}^{(3)} = \alpha_1 x_{t_0}^{(1)} + \beta_1 x_{t_0}^{(2)} \tag{1.1}$$

con α_1, β_1 due scalari due scalari arbitrari. Diremo, allora, che il sistema è lineare se indicando lo stato e l'uscita relativo alla (1.1), a partire da t_0 vale :

$$x^{(3)}(\cdot) = \alpha_1 x^{(1)}(\cdot) + \beta_1 x^{(2)}(\cdot), \;\; y_{t_0}^{(3)} = \alpha_1 y_{t_0}^{(1)} + \beta_1 y_{t_0}^{(2)} \tag{1.2}$$

In altre parole possiamo affermare che se il sistema rispetta il principio di sovrapposizione degli effetti allora esso è lineare.Una conseguenza pratica che facilita l'analisi di questi sistemi è quella di poter suddividere la risposta totale:

$$risposta = risposta_{forzata} + risposta_{libera}$$

Stazionarietà(o tempo-invarianza)

Per poter comprendere la proprietà di stazionarietà è utile introdurre la seguente definizione.

Definizione 1.1.2. Lo shifting-temporale è un'operazione effettuata su un segnale(o funzione) che permette di anticiparlo o ritardarlo lungo l'asse dei tempi. Nello specifico,prendendo in considerazione uno shifting di $\tau \in T$ ed una funzione $f(t)$ applicando lo shifting si genera una nuova funzione $f_\tau(t) = f(t - \tau)$:

$\rightarrow$ $\tau > 0$: **Ritardo**, shifting-destro

$\leftarrow$ $\tau < 0$: **Anticipo**, shifting-sinistro

Prendiamo ora in considerazione la seguente funzione di transizione di stato:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot)) \tag{1.3}$$

scegliendo un $\tau \in T$ arbitrario ed effettuando uno shifting temporale, avremo la seguente espressione:

$$x(t) = \phi(t - \tau, t_0 - \tau, x_0, u^\tau_{[t_0,t)}(\cdot)) \tag{1.4}$$

dove l'ingresso $u^\tau(t) = u(t - \tau)$ è traslato istante per istante di τ.

Definizione 1.1.3. Un sistema dinamico è stazionario se:

$$\phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot)) = \phi(t - \tau, t_0 - \tau, x_0, u^\tau_{[t_0,t)}(\cdot)) \tag{1.5}$$

Applicando quest'ultima definizione per $\tau = t_0$:

$$\phi(t - t_0, 0, x_0, u_{[0,t-t_0)}(\cdot)) \tag{1.6}$$

da cui, tre importanti conseguenze:

1. Il calcolo dello stato $x(t)$ dipende dalla durata $t-t_0$ dell'espreimento ed inoltre l'istante iniziale t_0 può essere posto a 0 senza perdere di generalità.
2. La funzione di transizione di stato può essere così definita:

$$x(t) = \phi(t, x_0, u_{[0,t)}(\cdot))$$

(nota: t è il tempo ma è anche la durata $(t - t_0)$).
3. L'uscita non dipende esplicitamente dal tempo:

$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

questo implica che le matrici che descrivono il sistema nella rappresentazione I/S/U (1.1.2), A, B, C, D sono costanti

Principio di causalità

Un sistema dinamico è detto strettamente causale(o proprio) se l'uscita non può anticipare gli effetti dell'ingresso.Piu formalmente, dato un sistema dinamico e due ingressi $u^{(1)}(\cdot)$, $u^{(2)}(\cdot)$ su un orizzonte temporale $[t_0, +\infty)$ per i quali vale:

$$u^{(1)}(\cdot) = u^{(2)}(\cdot), \ \ t \in [t_0, t_1]$$

con t_1 un generico istante(i due ingressi sono uguali per un certo periodo di tempo definito da t_0 e t_1 , dopo di che differiscono) e

$$\phi(t, t_0, x_0, u^{(1)}_{[t_0,t_1)}(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, u^{(2)}_{[t_0,t_1)}(\cdot)) \tag{1.7}$$

$$\eta(t, x^{(1)}(t), u^{(1)}_{[t_0,t_1)}(\cdot)) = \eta(t, x^{(2)}(t), u^{(2)}_{[t_0,t_1)}(\cdot)) \tag{1.8}$$

allora tale sistema è strettamente causale(o proprio). I sistemi LTI sono strettamente causali o strettamente propri se, nel caso della I/S/U ((1.9) o (1.10)) , la matrice ingresso-uscita D (scalare nel caso di un sistema SISO) è nulla oppure se, nel caso del modello I/U ((1.11) o (1.12)) al secondo membro è assente il termine che dipende da $u^{(n)}(t)$, $(\beta = 0)$.

1.1.2 Modelli I-S-U e I-U(o ARMA)

Uno stesso sistema dinamico può essere rappresentato da diversi modelli, per i nostri scopi utilizzeremo:

- Modelli I/S/U(ingresso-stato-uscita):
  - a tempo continuo(TC):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

  - a tempo discreto(TD):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{1.10}$$

  dove:

n	Numero di stati
m	Numero degli ingressi
p	Numero di uscite
$u(\cdot)$	Ingressi $\in \mathbb{R}^m$
$x(\cdot)$	Stati $\in \mathbb{R}^n$
$y(\cdot)$	Uscite $\in \mathbb{R}^p$
A	Matrice dinamica ($\in \mathbb{R}^{n\times n}$)
B	Matrice degli ingressi ($\in \mathbb{R}^{n\times m}$)
C	Matrice d'uscita ($\in \mathbb{R}^{p\times n}$)
D	Matrice ingresso-uscita ($\in \mathbb{R}^{p\times m}$)

- Modelli I/U(ingresso-uscita):
  - a tempo continuo(TC):

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_{n-1}\dot{y}(t) + \alpha_n y(t) = \beta_0 u^{(n)}(t) + \beta_1 u^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_n u(t) \tag{1.11}$$

  - a tempo discreto(TD):

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + ... + \alpha_n y(k-n) = \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + ... + \alpha_n u(k-n) \tag{1.12}$$

1.1.3 Sistemi SISO(Single-Input-Single-Output)

I sistemi dinamici che trattermo saranno sistemi SISO(Single-Input-Single-Output) dunque:

$$m = 1, p = 1 \implies u(\cdot), y(\cdot) \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \wedge C \in \mathbb{R}^{1\times n} \wedge D \in \mathbb{R}$$

Sistema LTI-TC (a)

Dopo aver descritto brevemente i sistemi dinamici LTI, le principali proprietà e ciò che esse scaturiscono nel sistema proseguiremo in questa sezione analizzando un caso di sistema dinamico LTI-TC.

2.1 Calcolo dei modi naturali del sistema

I modi naturali di un sistema LTI-TC sono delle funzioni direttamente collegate alla matrice dinamica del sistema **A**. In particolare i modi naturali dipendono direttamente dalla configurazione degli autovalori della matrice dinamica:

- $\mathbf{e^{\lambda t}}$ nel caso in cui gli autovalori di **A** siano reali e distinti.
- $\mathbf{e^{\sigma t}cos(\omega t), e^{\sigma t}sin(\omega t)}$ nel caso in cui gli autovalori di **A** siano complessi e coniugati.
- $\mathbf{e^{\lambda t}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}}$ nel caso in cui gli autovalori di **A** siano reali e coincidenti.

Il primo passo è quello di calcolare gli autovalori della matrice **A**, il calcolo può essere effettuato direttamente con la funzione built-in di Mathematica opppure per definizione (A.4.2):

```
λ = Eigenvalues[A]

{-5, -4, -3, -2}
```

Figure 2.1: metodo built-in

```
pA := Factor[CharacteristicPolynomial[ A, λ]]

pA

(2 + λ) (3 + λ) (4 + λ) (5 + λ)

Solve[pA == 0]

{{λ → -5}, {λ → -4}, {λ → -3}, {λ → -2}}
```

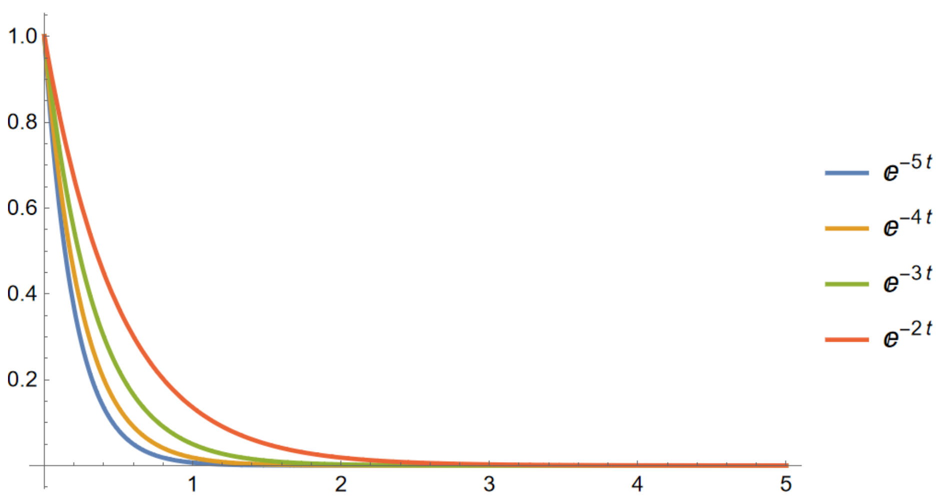
Figure 2.2: calcolo con la definizione

Analizzando gli autovalori possiamo arrivare a tre premesse iniziali:

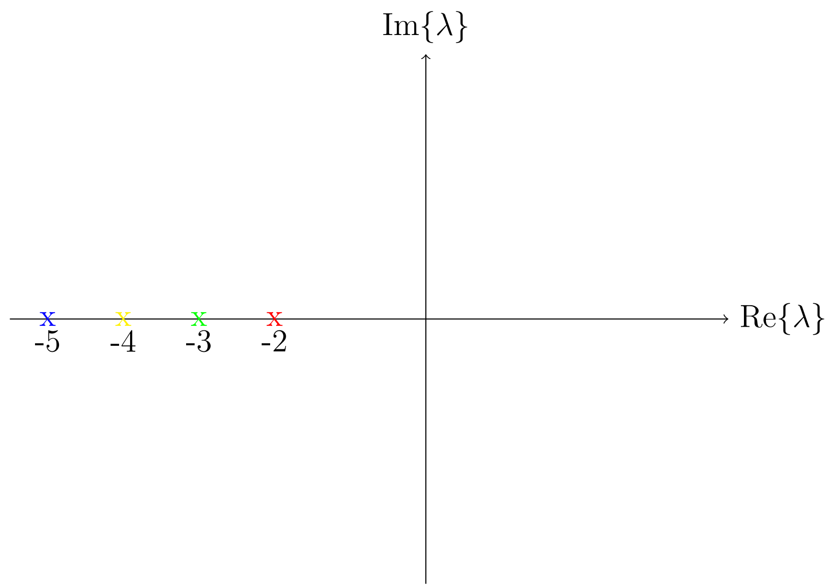
1. Gli autovalori sono $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ con k pari al ordine della matrice A.
2. Gli autovalori sono tutti reali e distinti.
3. Gli autovalori sono tutti strettamente negativi, dunque i modi naturali convergeranno a 0.

L'analisi prelimineare sugli autovalori ci assicura la diagonalizzabilità di $\mathbf{A}$(A.5.2).

I modi naturali risultanti sono : $\mathbf{e^{-5t}}, \mathbf{e^{-4t}}, \mathbf{e^{-3t}}, \mathbf{e^{-2t}}$:



Dalle funzioni ottenute notiamo che, all'aumentare del valore dell'autovalore $|\lambda_i|$ "decadrà più velocemente" il modo naturale. In modo analogo per esprimere questo concetto possiamo usare il piano di Gauss su cui rappresentiamo gli autovalori:



Dove l'ordinata $Im\{\lambda\}$ è una frontiera aperta(esclusa) e tutto ciò che sta a nel secondo e terzo quadrante converge 0, per il criterio di asintotica stabilità. Detto ciò possiamo definire come **modo dominante** quel modo associato all'autovalore più vicino all'asse immaginario, nel nostro caso il modo dominante sarà $\mathbf{e^{-2t}}$.

2.2 Calcolo della risposta libera

Sappiamo che la risposta di un sistema LTI-TC è sempre esprimibile (per il principio di sovrapposizione degli effetti) come:

$$risposta = risposta_{libera} + risposta_{forzata}$$

Discuteremo in questa sezione l'analisi della risposta libera del nostro sistema a partire dallo stato iniziale:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

per definizione la risposta libera è soluzione :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

l'ingresso $u(t)$ è identicamente nullo e alla quale è posto come vincolo lo stato iniziale $x_l(0) = x_0$. Pertanto per trovare l'evoluzione libera $x_l(t)$ si utilizza l'esponenziale di matrice(Formula di Lagrange):

$$x_l(t) = e^{At}x_0 \tag{2.2}$$

dove e^{At} è l'esponenziale della matrice $\mathbf{A}$ è (A.3)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{2.3}$$

inoltre sostituendo la (A.10){ $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$} nella (2.2) otteniamo:

$$\implies x_l(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1}x_0 = Te^{\Lambda t}z_0 \tag{2.4}$$

dove :

- T è una particolare matrice di cambiamento di base, che ha come colonne gli autovettori della matrice A.
- $z_0 = T^{-1}x_0$ è lo stato iniziale cambiato di base.
- v_i è l'autovettore i-esimo posto come colonna di T.

da cui si ottiene la decomposizione modale della risposta libera nello stato:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{\lambda_i t} z_{0i} \tag{2.5}$$

Prima di riportare tutti i risultati "teorici" ottenuti in Mathematica,vediamo come mai si effettua il cambiamento di base al sistema. La risposta è data da un fattore di "comodità" e agevolazione per lo studio della risposta libera , infatti, portando il sistema nelle nuove coordinate otteniamo una matrice $e^{\Lambda t}$ che contiene sulla sua diagnole tutti i modi naturali del sistema e ciò semplifica di molto la scrittura della risposta libera (2.5).
Iniziamo calcolando la matrice T ed il nuovo stato iniziale z_0 cambiato di base:

```
T = Transpose[Eigenvectors[A]]
{{129, 67, 29, 9}, {155, 84, 39, 14}, {5, 4, 3, 2}, {125, 64, 27, 8}}
```

Figure 2.3: matrice di cambiamento di base

```
z0 = Inverse[T].x0
```

$$\left\{\left\{\frac{89}{6}\right\}, \left\{-\frac{109}{2}\right\}, \left\{\frac{141}{2}\right\}, \left\{-\frac{203}{6}\right\}\right\}$$

Figure 2.4: stato iniziale cambiato di base

Salviamo in oltre in una variabile $\{n, n\} = Dimension[A]$, che sarà utile per definire in Mathematica la seguente formula, nonchè la (2.5):

$$x_1[t\_] := \text{FullSimplify}\left[\sum_{i=1}^{n} T[\![\text{All}, i]\!]\; e^{\lambda[\![i]\!]\, t}\; z0[\![i, 1]\!]\right]$$

```
MatrixForm[x1[t]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-5t} \left(3827 - e^{t} \left(7303 + 87 e^{t} \left(-47 + 7 e^{t}\right)\right)\right) \\ \frac{1}{6} e^{-5t} \left(13\,795 - e^{t} \left(27\,468 + e^{t} \left(-16\,497 + 2842 e^{t}\right)\right)\right) \\ -\frac{1}{6} e^{-5t} \left(-1 + e^{t}\right) \left(445 + e^{t} \left(-863 + 406 e^{t}\right)\right) \\ \frac{1}{6} e^{-5t} \left(11\,125 - e^{t} \left(20\,928 + e^{t} \left(-11\,421 + 1624 e^{t}\right)\right)\right) \end{pmatrix}$$

applicando un expand:

```
MatrixForm[Expand[x1[t]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{3827 \boxed{e^{-5t}}}{2} - \frac{7303 \boxed{e^{-4t}}}{2} + \frac{4089 \boxed{e^{-3t}}}{2} - \frac{609 \boxed{e^{-2t}}}{2} \\ \frac{13\,795 \boxed{e^{-5t}}}{6} - 4578 \boxed{e^{-4t}} + \frac{5499 \boxed{e^{-3t}}}{2} - \frac{1421 \boxed{e^{-2t}}}{3} \\ \frac{445 \boxed{e^{-5t}}}{6} - 218 \boxed{e^{-4t}} + \frac{423 \boxed{e^{-3t}}}{2} - \frac{203 \boxed{e^{-2t}}}{3} \\ \frac{11\,125 \boxed{e^{-5t}}}{6} - 3488 \boxed{e^{-4t}} + \frac{3807 \boxed{e^{-3t}}}{2} - \frac{812 \boxed{e^{-2t}}}{3} \end{pmatrix}$$

Figure 2.5: risposta libera nello stato

Da questi risultati, possiamo trarre conclusioni molto importanti per il prosiègu o dell'analisi, infatti osservando la forma espansa della risposta libera salta all'occhio come all'interno di ogni riga siano presenti tutti i modi naturali del sistema. La presenza dei modi naturali nella risposta libera è la diretta conseguenza della dipendenza lineare dello stato iniziale x_0 con le colonne della matrice di cambiamento di base T. Ciò è garantito dal fatto che se una matrice è digonalizzabile gli autovettori "coprono" tutto lo spazio della matrice che li ha generati. Nella sezione successiva vedremo come determinati stati iniziali "accendono" solo alcuni modi naturali, ma prima occupiamoci della risposta libera del sistema nell'uscita:

$$y_l(t) = Cx_l(t) = CTe^{\Lambda t} z_0 \tag{2.6}$$

Dove CT è un prodotto di un vettore riga(poiche sistema SISO) per una matrice che darà come risultato un altro vettore riga. Nel caso in cui C sia ortogonale a qualche colonna di T allora avremo delle componenti nulle nel vettore risultante, in tale caso diremo che il modo naturale annullato non è "**osservabile**".

```
y₁[t_] := Simplify[C1.x₁[t]]
y₁[t]
```

$$\left\{\frac{1}{6} e^{-5t}\left(-89+327 e^{t}-423 e^{2t}+203 e^{3t}\right)\right\}$$

```
Expand[y₁[t]]
```

$$\left\{-\frac{89}{6}\boxed{e^{-5t}}+\frac{109\boxed{e^{-4t}}}{2}-\frac{141\boxed{e^{-3t}}}{2}+\frac{203\boxed{e^{-2t}}}{6}\right\}$$

Figure 2.6: risposta libera nell'uscita

Nel nostro caso vediamo come tutti i modi naturali sono osservabili.

```
Plot[y₁[t], {t, 0, 6}, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]
```

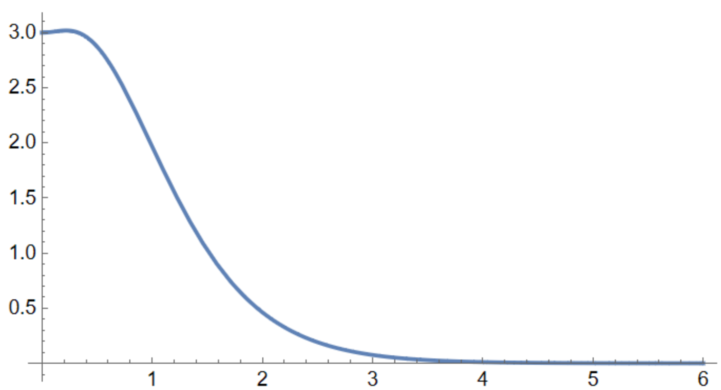


Figure 2.7: plot risposta libera nell'uscita

2.3 Configurazione stati iniziali in realzione alla risposta libera

Vediamo ora come gestire lo stato inziale in modo tale da attivare nella risposta libera solo determinati modi naturali. La presenza o meno di determinati modi naturali nell'uscita libera varia in base alla dipendenza lineare tra lo stato iniziale x0 e le colonne della matrice di cambiamento di base T poiche $z_0 = T^{-1}x_0$.
Sappiamo inoltre che le colonne di T sono autovettori di A e ad ogni autovettore corrisponde un autovalore. Detto ciò vediamo come esprimere lo stato x_0 come combinanzione lineare delle colonne di T e verifichiamone divesi casi :

1. Caso $x1$ linearmente dipendente dalla prima e terza colonna di T:

```
x1 = 2 {{T[[1, 1]]}, {T[[2, 1]]}, {T[[3, 1]]}, {T[[4, 1]]}} + 2 {{T[[1, 3]]}, {T[[2, 3]]}, {T[[3, 3]]}, {T[[4, 3]]}}
{{316}, {388}, {16}, {304}}

z1 = Inverse[T].x1
{{2}, {0}, {2}, {0}}
```

$$x_{11}[t\_] := \text{FullSimplify}\left[\sum_{i=1}^{n} T[[\text{All}, i]]\, e^{\lambda[[i]]\, t}\, z1[[i, 1]]\right]$$

```
MatrixForm[x11[t]]
```

$$\begin{pmatrix} e^{-5t}\left(258 + 58 e^{2t}\right) \\ e^{-5t}\left(310 + 78 e^{2t}\right) \\ 2 e^{-5t}\left(5 + 3 e^{2t}\right) \\ e^{-5t}\left(250 + 54 e^{2t}\right) \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[Expand[x11[t]]]
```

$$\begin{pmatrix} 258 e^{-5t} + 58 e^{-3t} \\ 310 e^{-5t} + 78 e^{-3t} \\ 10 e^{-5t} + 6 e^{-3t} \\ 250 e^{-5t} + 54 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Gli unici due modi "attivi" sono quelli relativi alla prima e terza colonna.

```
y11[t_] := Simplify[C1.x11[t]]
Expand[y11[t]]
```

$\{-2\,e^{-5t} - 2\,e^{-3t}\}$

2. Caso $x2$ linearmente dipendente dalla seconda colonna di T:

```
α2 = -3;

x2 = α2 {{T[[1, 2]]}, {T[[2, 2]]}, {T[[3, 2]]}, {T[[4, 2]]}}
```

{{-201}, {-252}, {-12}, {-192}}

```
z2 = Inverse[T].x2
```

{{0}, {-3}, {0}, {0}}

$x_{12}[t\_] := \text{FullSimplify}\left[\sum_{i=1}^{n} T[[\text{All}, i]]\, e^{\lambda[[i]]\, t}\, z2[[i, 1]]\right]$

```
MatrixForm[x12[t]]
```

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -201\,e^{-4t} \\ -252\,e^{-4t} \\ -12\,e^{-4t} \\ -192\,e^{-4t} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

```
y12[t_] := Simplify[C1.x12[t]]
Expand[y12[t]]
```

$\{3\,e^{-4t}\}$

L'unico vettore linearmente indipendente che messo come stato iniziale ”azzera” la risposta libera è il vettore banale poiche unico vettore linearmente indipendente da tutti gli autovettori di A, questo perche se A è diagonalizzabile l'autospazio copre tutto lo spazio vettoriale della matrice che ha generato gli autovettori(Condizione di invarianza).

2.4 FDT,poli e zeri

Andiamo ora ad occuparci di una funzione molto particolare ed utile allo studio della risposta forzata del sistema. La **funzione di trasferimento** di un sistema dinamico LTI è una funzione di variabile complessa s, questa funzione può essere ottenuta a partire dal modello I/U(naturalmente anche dal sistema I/S/U) del sistema che abbiamo introdotto brevemente e di cui ci occuperemo nuovamente in seguito.

Definizione 2.4.1. Si definisce **funzione di trasferimento** di un sistema LTI-TC(o TD)quella funzione di variabile complessa G(s)(o G(z)) tale che moltiplicata algebricamente per la trasformata di Laplace(o Z-Trasformata) dell'ingresso, restituisce la L-Trasformata(Z-Trasformata) della risposta forzata.

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \quad TC \\ Y(z) &= G(z)U(z) \quad TD \end{aligned} \tag{2.7}$$

Date le proprietà SISO del nostro sistema LTI-TC la funzione di trasferimento : $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$

(quantità scalare legata alle matrici del sistema ed è in funzione di s). Il nostro sistema è un sistema proprio e dunque D è nulla.

Mi calcolo la FdT a partire dalla definizione $G(s) = C\,(s\,I_n - A)^{-1}\,B$
L'inversa della matrice puo anche essere calcolata con adjugate...

```
G[s_] := Simplify[C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].B][[1]]
G[s]
```

$$\left\{\frac{1}{120 + 154\,s + 71\,s^2 + 14\,s^3 + s^4}\right\}$$

A partire dalla FDT posisamo ricavare:

- I poli, numeri complessi $p : lim_{s\to p}G(s) = 0$

```
Solve[Denominator[G[s]] == 0]
{{s → -5}, {s → -4}, {s → -3}, {s → -2}}
```

- Gli zeri, numeri complessi $\zeta : G(\zeta) = 0$

```
Solve[Numerator[G[s]] == 0]
{}
```

Osserviamo due fenomeni "strani",i poli della Fdt sono un sottoinsieme degli autovalori di A, la funzione di trasferimento non ha zeri. Facciamo la prova del nove per vedere che non abbiamo commesso errori:

```
Σ = StateSpaceModel[{A, B, C1}]
```

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -120 & 70 & -103 & 36 & 1 \\ -120 & 70 & -104 & 35 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -120 & 71 & -105 & 35 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

```
TransferFunctionModel[Σ]
```

$$\left(\frac{1}{120 + 154\,s + 71\,s^2 + 14\,s^3 + s^4}\right)^{\mathcal{T}}$$

```
TransferFunctionPoles[Σ][[1]][[1]]
{-5, -4, -3, -2}
TransferFunctionZeros[Σ]
{{{}}}
```

2.5 La risposta al gradino unitario

Dopo aver calcolato la Fdt, possiamo procedere allo studio della risposta forzata del sistema al "segnale" del gradino unitario. Il gradino unitario è una funzione definita a tratti :

$$UnitStep(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Sappiamo che la formula inversa della FDT è $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Possiamo sfruttare questa relazione per trovare l'uscita forzata nel dominio della variabile complessa s sapendo che la L-trasformata del gradino unitario vale $L[UnitStep(t)] = \frac{1}{s}$. Ricaviamo la Y(s):

```
Y[s_] := Factor[G[s] × LaplaceTransform[UnitStep[t], t, s]]
Y[s]
```

$$\left\{\frac{1}{s\ (2+s)\ (3+s)\ (4+s)\ (5+s)}\right\}$$

A questo punto arrivati vogliamo tornare nel dominio del tempo. Sorge un problema ossia dobbiamo utilizzare l'anti trasformata di Laplace, un modo è quello di scomporre l'uscita in fratti semplici e poi sapendo che $L[e^{at}1(t)] = \frac{1}{s-a}$ applichiamo l'anti trasformata alle singole componenti.

Scomponiamo la $Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+3} + \frac{C_4}{s+4} + \frac{C_5}{s+5}$ e troviamo le costanti con la formula semplificata di Heavyside $C_i = lim_{s \to p_i}(s - p_i)Y[s]$.

$C_1 = \lim_{s \to 0} s\, Y[s]⟦1⟧$

$\frac{1}{120}$

$C_2 = \lim_{s \to -2} (s+2)\, Y[s]⟦1⟧$

$-\frac{1}{12}$

$C_3 = \lim_{s \to -3} (s+3)\, Y[s]⟦1⟧$

$\frac{1}{6}$

$C_4 = \lim_{s \to -4} (s+4)\, Y[s]⟦1⟧$

$-\frac{1}{8}$

$C_5 = \lim_{s \to -5} (s+5)\, Y[s]⟦1⟧$

$\frac{1}{30}$

Ricomponendo la $Y(s)$ otteniamo:

$$Y[s\_] := \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+3} + \frac{C_4}{s+4} + \frac{C_5}{s+5}$$

Y[s]

$$\frac{1}{120\, s} - \frac{1}{12\,(2+s)} + \frac{1}{6\,(3+s)} - \frac{1}{8\,(4+s)} + \frac{1}{30\,(5+s)}$$

Sfruttiamo il principio di linearità della trasformata di Laplace per $L^{-1}[\frac{1}{s-a}] = e^{at}1(t)$ e torniamo nel dominio del tempo:

```
yf[t_] := C1 1 + C2 Exp[-2 t] + C3 Exp[-3 t] + C4 Exp[-4 t] + C5 Exp[-5 t]
yf[t]
```

$$\left\{\frac{1}{120} + \frac{e^{-5t}}{30} - \frac{e^{-4t}}{8} + \frac{e^{-3t}}{6} - \frac{e^{-2t}}{12}\right\}$$

Facciamo la “prova del 9” con la funzione built-in:

```
yf[t_] := Expand[InverseLaplaceTransform[G[s]/s, s, t]]
yf[t]
```

$$\left\{\frac{1}{120} + \frac{e^{-5t}}{30} - \frac{e^{-4t}}{8} + \frac{e^{-3t}}{6} - \frac{e^{-2t}}{12}\right\}$$

Anche se non scritto esplicitamente tutti i componenti sono moltiplicati per 1(t) (right-sided).Possiamo dare ora due definizioni a partire dalla risposta forzata, si ha che da quest’ultima si possono ricavare y_{ss} ossia l’uscita che dipende solo dall’ingresso e $y_{transitoria}$ le componenti dell’uscita forzata che dipendono anche dai modi naturali.

```
ytransitoria[t_] := C2 Exp[-2 t] + C3 Exp[-3 t] + C4 Exp[-4 t] + C5 Exp[-5 t]; ytransitoria[t]
```

$$\frac{e^{-5t}}{30} - \frac{e^{-4t}}{8} + \frac{e^{-3t}}{6} - \frac{e^{-2t}}{12}$$

```
yss[t_] := C1 1; yss[t]
```

$$\frac{1}{120}$$

Oltre ad essere la risposta a regime(staedy-state) è anche vista come guadagno statico(o guadagno in continua). Osservando la risposta forzata viene intuitivo notare come dopo un certo t la risposta transitoria si esaurisca e permanga solo la risposta a regime che non dipende dal tempo.

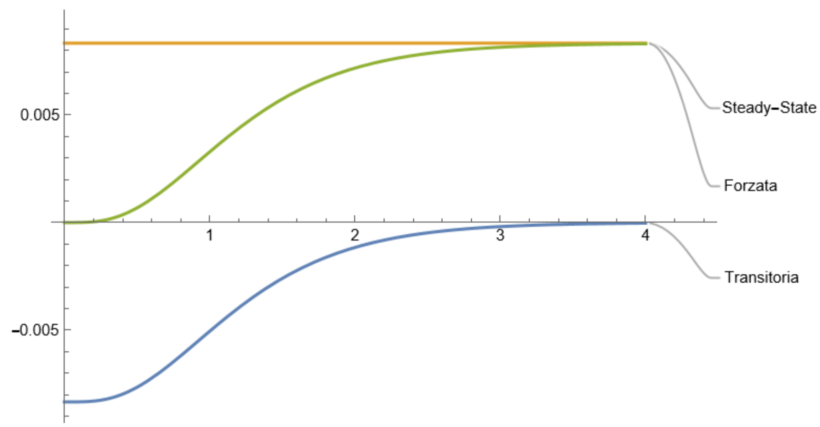


Figure 2.8: Orange:Steady-State, Green:Forzata, Blue:Transitoria

2.6 La risposta al segnale periodico elementare

Occupiamoci di una nuova risposta forzata ad un segnale periodico right-sided $u(t) = ASin(\Omega t + \Psi)1(t)$, con A = ampiezza,Ω = pulsazione e Ψ = sfasamento iniziale, di cui conosciamo la sua trasformata di Laplace:

$$L[ASin(\omega t + \psi)] = \frac{U}{s - j\omega} \tag{2.9}$$

- $U = Ae^{j\Theta}$ ampiezza complessa;

Scegliamo una terna di valori appropriata e calcoliamo $U_{sin}(s)$ ossia l'ingesso nella variabile complessa s e l'uscita sempre in s $Y_{sin}(s)$.

```
Amp = 1; ω = 1; ψ = 0;

Usin[s_] := LaplaceTransform[Amp * Sin[ω t + ψ] UnitStep[t], t, s];

Usin[s]
```

$$\frac{1}{1+s^2}$$

```
Ysin[s_] := G[s] * Usin[s]

Apart[Ysin[s]]
```

$$\left\{\frac{1}{30\,(2+s)}-\frac{1}{20\,(3+s)}+\frac{1}{34\,(4+s)}-\frac{1}{156\,(5+s)}+\frac{5-14\,s}{2210\,(1+s^2)}\right\}$$

```
Factor[Ysin[s]]
```

$$\left\{\frac{1}{(2+s)\,(3+s)\,(4+s)\,(5+s)\,(1+s^2)}\right\}$$

Come possiamo vedere $Y_{sin}(s)$ è una funzione "real-razionale" e al suo denominatore appaiono i primi 4 fattori legati ai modi naturali del sistema e l'ultimo legato all'ingresso. Proprio di quest'ultimo sappiamo che possiamo scomporlo come $s^2 + 1 = (s + j)(s - j)$, utilizziamo Heaviside per trovare le costanti della $Y_{sin}(s) = \frac{D_1}{s+j} + \frac{\overline{D_1}}{s-j} + \frac{D_2}{s+2} + \frac{D_3}{s+3} + \frac{D_4}{s+4} + \frac{D_5}{s+5}$

$$D_1 = \lim_{s\to -I} (s+I)\, Y_{sin}[s];\ \overline{D}_1 = \lim_{s\to I} (s-I)\, Y_{sin}[s][[1]];\ D_2 = \lim_{s\to -2} (s+2)\, Y_{sin}[s][[1]];\ D_3 = \lim_{s\to -3} (s+3)\, Y_{sin}[s][[1]];\ D_4 = \lim_{s\to -4} (s+4)\, Y_{sin}[s][[1]];\ D_5 = \lim_{s\to -5} (s+5)\, Y_{sin}[s][[1]];$$

$$y_{fsin}[t\_] := \frac{D_1}{(s+I)}+\frac{\overline{D}_1}{(s-I)}+\frac{D_2}{(s+2)}+\frac{D_3}{(s+3)}+\frac{D_4}{(s+4)}+\frac{D_5}{(s+5)}$$

```
yfsin[t]
```

$$\left\{-\frac{\frac{7}{2210}+\frac{i}{884}}{-i+s}-\frac{\frac{7}{2210}-\frac{i}{884}}{i+s}+\frac{1}{30\,(2+s)}-\frac{1}{20\,(3+s)}+\frac{1}{34\,(4+s)}-\frac{1}{156\,(5+s)}\right\}$$

Delle ultime quattro componenti (legate ai modi naturali)conosco già l'antitrasformata di Laplace, dei primi due(legati all'ingresso) invece so che sono complessi e coniugati dunque $\frac{D_1}{s+j} + \frac{\overline{D_1}}{s-j} = D_1e^{jt} + \overline{D_1}^{-jt} = 2ReD_1e^{jt}$ e seprando la steady-state dalla transitoria le posso ricavare singolarmente e a steady-state e la trasnsitoria posso ottenere la risposta forzata:

```
ysssin[t_] := ComplexExpand[2 Re[D̄1 Exp[I t]]]; ysssin[t]
```

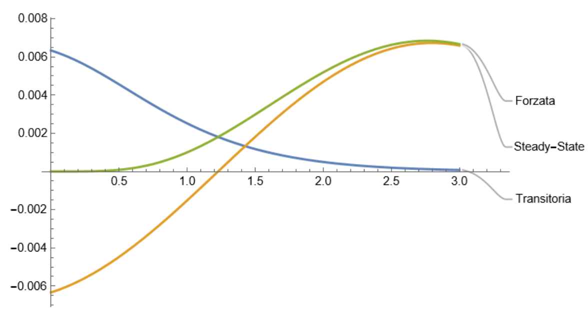
$$-\frac{7\,\mathrm{Cos}[t]}{1105}+\frac{\mathrm{Sin}[t]}{442}$$

```
ytsin[t_] := D2 Exp[-2 t] + D3 Exp[-3 t] + D4 Exp[-4 t] + D5 Exp[-5 t]; ytsin[t]
```

$$-\frac{1}{156}e^{-5t}+\frac{e^{-4t}}{34}-\frac{e^{-3t}}{20}+\frac{e^{-2t}}{30}$$

```
yfsin[t_] := (ytsin[t] + ysssin[t]); yfsin[t]
```

$$-\frac{1}{156}e^{-5t}+\frac{e^{-4t}}{34}-\frac{e^{-3t}}{20}+\frac{e^{-2t}}{30}-\frac{7\,\mathrm{Cos}[t]}{1105}+\frac{\mathrm{Sin}[t]}{442}$$



Verifichiamo ora la corretterzza dei calcoli sfuttando il teorema della risposta armonica

```
yfsin[t_] := Expand[InverseLaplaceTransform[Ysin[s], s, t]]
yfsin [t]
```

$$\left\{-\frac{1}{156}e^{-5t}+\frac{e^{-4t}}{34}-\frac{e^{-3t}}{20}+\frac{e^{-2t}}{30}-\frac{7\,\mathrm{Cos}[t]}{1105}+\frac{\mathrm{Sin}[t]}{442}\right\}$$

Uso il teorema della risposta armonica per verificare

```
ysssin[t_] := Abs[G[I ω]] Amp Sin[ω t + ψ + Arg[G[I ω]]]
ysssin[t]
```

$$\left\{\frac{\mathrm{Sin}\left[t-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{14}{5}\right]\right]}{10\sqrt{221}}\right\}$$

Adesso posso trovare y_tsin = y_fsin - y_sssin

```
ytsin[t_] := (yfsin[t] - ysssin[t])
ytsin[t]
```

$$\left\{-\frac{1}{156}e^{-5t}+\frac{e^{-4t}}{34}-\frac{e^{-3t}}{20}+\frac{e^{-2t}}{30}-\frac{7\,\mathrm{Cos}[t]}{1105}+\frac{\mathrm{Sin}[t]}{442}-\frac{\mathrm{Sin}\left[t-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{14}{5}\right]\right]}{10\sqrt{221}}\right\}$$

Posso sfruttare il teorema poiche nei punti precedenti si evince la BIBO stabilità del sistema. L'utilizzo di questo teromea è molto utile poiche a partire dalla FDT ci permette di trovare la risposta a regime tramite la **risposta in frequnza(risposta armominca) G(j**ω). Possiamo anche definire $|G(j\omega)|$ fattore di distorsione(se >1 aplifica, <1 attenua) e $arg\{G(j\omega)\}$ fattore di sfasamento(se >0 anticipa, <0 ritarda).

2.7 Modello ARMA(I/U) equivalente

In questa sezione ci occuperemo di trovare un modello ARMA equivalente, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale:

$$x_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una volta individuata tale rappresentazione e le condizioni iniziali sull'uscita valutare la risposta alla rampa unitaria (no grafico) mettendo in evidenza la risposta transitoria (risposta libera inclusa) e la componente legata algebricamente all'ingresso.

Per prima cosa troviamo il modello ARMA equivalente, per fare ciò si sfrutta la FDT che rimane invariata dalla rappresentazione I/S/U ed il teorema della derivata per il caso tempo continuo. Per definiziona la FDT è una frazione scomponibile in numeratore e denominatore e allora $Y(s) = G(s)U(s) \implies d_G Y(s) = n_G U(s)$:

```
Eqiu[s] := Expand[Denominator[G[s][[1]]] Yiu[s] == Expand[Numerator[G[s][[1]]] Uiu[s]]]
Eqiu[s]
120 Yiu[s] + 154 s Yiu[s] + 71 s^2 Yiu[s] + 14 s^3 Yiu[s] + s^4 Yiu[s] == Uiu[s]
```

Applicchiamo ora il teorema della derivata ($\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = sF(s) - f(0^+)$) insieme all'antitrasformata di Laplace, ponendo le condizioni iniziali $y_{iu}[0]$ nulle essendo la risposta forzata.

```
eq = InverseLaplaceTransform[Eqiu[s], s, t] /. {Yiu[s] → LaplaceTransform[yiu[t], t, s], Uiu[s] → LaplaceTransform[uiu[t], t, s]} /.
  {yiu[0] → 0, yiu'[0] → 0, yiu''[0] → 0, yiu'''[0] → 0, yiu''''[0] → 0, uiu[0] → 0}
120 yiu[t] + 154 yiu′[t] + 71 yiu″[t] + 14 yiu^(3)[t] + yiu^(4)[t] == uiu[t]
```

A questo punto arrivati abbiamo ottenuto un equazione che rappresenta il modello I/U del sistema. Individuiamo adesso le condizioni iniziali lato uscita del sistema$(y(0), \dot{y}(0), ..., y^{(n)}(0))$

compatibili con il nostro stato iniziale x_i, ricordandoci che le condizioni iniziali sono nulle in caso di risposta libera ottengo un equazione del tipo $y(t) = Cx(t)$ da cui procedo con il calcolo iterando con le derivate

$$y_0 = Cx_i$$

$$y_0' = CAx_i$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$y_0^{(n-1)} = CA^{n-1}x_i$$

```
y0[0] = (C1.xi) [[1, 1]]
-1

y0'[0] = (C1.A.xi) [[1, 1]]
-2

y0''[0] = (C1.A.A.xi) [[1, 1]]
3

y0'''[0] = (C1.A.A.A.xi ) [[1, 1]]
3

y0''''[0] = (C1.A.A.A.A.xi) [[1, 1]]
173
```

Dopo aver trovato lo stato lato uscita possiamo ritornare nel dominio della variabile complessa s per studiare la riposta del sistema ad un segnale right-sided detto rampa. La rampa è un segnale del tipo :

$$ramp(t) = \begin{cases} t1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

La sua L-trasofrmata è $L[ramp(t)] = \frac{1}{s^2}$ ottenuta tramite il teorema di moltiplicazione per

t. Ricaviamoci per prima cosa la Y_{IU}:

```
eqD = LaplaceTransform[120 y[t] + 154 y'[t] + 71 y''[t] + 14 y^(3)[t] + y^(4)[t] == u[t] , t, s] /. {LaplaceTransform[y[t], t, s] → Y_IU[s], LaplaceTransform[u[t], t, s] → U_IU[s]}
```

$$-s^3 y[0] + 120 Y_{IU}[s] + s^4 Y_{IU}[s] + 154 (-y[0] + s Y_{IU}[s]) + 71 \left(-s y[0] + s^2 Y_{IU}[s] - y'[0]\right) - s^2 y'[0] + 14 \left(-s^2 y[0] + s^3 Y_{IU}[s] - s y'[0] - y''[0]\right) - s y''[0] - y^{(3)}[0] == U_{IU}[s]$$

```
Solve[eqD, Y_IU[s]] [[1, 1]] [[2]]
```

$$\frac{154 y[0] + 71 s y[0] + 14 s^2 y[0] + s^3 y[0] + U_{IU}[s] + 71 y'[0] + 14 s y'[0] + s^2 y'[0] + 14 y''[0] + s y''[0] + y^{(3)}[0]}{120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4}$$

Separiamo le componenti della risposta libera e forzata, raccogliendo l'ingresso U(s)

```
Collect[Solve[eqD, Y_IU[s]] [[1, 1]] [[2]], U_IU[s]]
```

$$\boxed{\frac{U_{IU}[s]}{120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4}} + \boxed{\frac{154 y[0] + 71 s y[0] + 14 s^2 y[0] + s^3 y[0] + 71 y'[0] + 14 s y'[0] + s^2 y'[0] + 14 y''[0] + s y''[0] + y^{(3)}[0]}{120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4}}$$

Notiamo come la prima parte(arancione) rappresenti la risposta frozata che dipende dall'ingresso e senza condizioni iniziali, la seconda parte(verde) è la risposta libera che non dipende dall'ingresso.Separiamo libera e frozata:

```
Y_FIU[s_] := Collect[Solve[eqD, Y_IU[s]] [[1, 1]] [[2]], U_IU[s]] [[1]]; Y_FIU[s]
```

$$\boxed{\frac{U_{IU}[s]}{120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4}}$$

```
Y_LIU[s_] := Collect[Solve[eqD, Y_IU[s]] [[1, 1]] [[2]], U_IU[s]] [[2]]; Y_LIU[s]
```

$$\boxed{\frac{154 y[0] + 71 s y[0] + 14 s^2 y[0] + s^3 y[0] + 71 y'[0] + 14 s y'[0] + s^2 y'[0] + 14 y''[0] + s y''[0] + y^{(3)}[0]}{120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4}}$$

A quest'ultima andranno sostituiti i valori delle condizioni iniziali nell'uscita precedentemente calcolati partendo dallo stato iniziale

```
Y_LIU[s] /. {y[0] → y0[0], y'[0] → y0'[0], y''[0] → y0''[0], y'''[0] → y0'''[0], y''''[0] → y0''''[0]}
```

$$\frac{-251 - 96 s - 16 s^2 - s^3}{120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4}$$

Che portata nel dominio del tempo sarà:

```
y_LIU[t_] := InverseLaplaceTransform[(-251 - 96 s - 16 s^2 - s^3)/(120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4), s, t]; y_LIU[t]
```

$$\frac{1}{6} e^{-5 t} \left(46 - 177 e^{t} + 240 e^{2 t} - 115 e^{3 t}\right)$$

Si noti che la risposta libera calcolata a partire dalla rappresentazione IU rimane invariata se calcolata a partire dalla rappresentazione I/S/U. Calcoliamo la risposta frozata partendo dal modello I/U e vediamo come la risposta forzata alla rampa sia una "risposta esplosiva", infatti se per $t \to \infty$ il transitorio si esaurisce(parte marrone), la steady-state(parte blu) dipendente dalla rampa non converge.

```
YFIU[s_] := Apart[(-251 - 96 s - 16 s^2 - s^3)/(120 + 154 s + 71 s^2 + 14 s^3 + s^4) LaplaceTransform[t UnitStep[t], t, s]]; YFIU[s]
```

$$-\frac{251}{120\, s^2}+\frac{13\,567}{7200\, s}-\frac{115}{24\,(2+s)}+\frac{40}{9\,(3+s)}-\frac{59}{32\,(4+s)}+\frac{23}{75\,(5+s)}$$

Per non tediare troppo con i calcoli in questo passaggio sfruttiamo la funzione Apart che ci permette di scomporre la risposta in fratti semplici.
A questo punto arrivati e grazie ad apart conosciamo i coefficienti e sappiamo chi sono le anti trasformate:

$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t\,1(t); L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1(t); L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=e^{-2t}\,1(t); L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=e^{-3t}\,1(t); L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]=e^{-4t}\,1(t); L^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right]=e^{-5t}\,1(t)$

Implicitamente moltiplicate per 1(t):

```
yRFIU[t_] := -251/120 t 1 + 13567/7200 1 - 115/24 Exp[-2 t] 1 + 40/9 Exp[-3 t] 1 - 59/32 Exp[-4 t] 1 + 23/75 Exp[-5 t] 1; yRFIU[t]
```

$$\boxed{\frac{13\,567}{7200}-\frac{251\,t}{120}}+\boxed{\frac{23\,e^{-5\,t}}{75}-\frac{59\,e^{-4\,t}}{32}+\frac{40\,e^{-3\,t}}{9}-\frac{115\,e^{-2\,t}}{24}}$$

2.8 Determinare lo stato iniziale x_{i0} tale che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime(assenza di componente transitoria).

Per riuscire a determinare lo stato iniziale x_{i0} tale che soddisfi le caratteristiche richieste sull'uscita possiamo procedere in due modi. Il primo modo è tramite la funzione di trasferimento trovare l'uscita e calcolare i fratti semplici, oppure il secondo modo sfuttando il teorema del valore finale. La nostra soluzione sfrutterà quest'ultimo metodo che ci assicura l'esistenza di un valore $f_\infty = lim_{t\to+\infty} f(t) \implies f_\infty = lim_{s\to+\infty} sF(s)$ nel caso in cui il sistema sia BIBO stabile e la funzione su cui vogliamo appicare il teroema sia continua e di classe L. Come visto nei casi precedenti il nostro sistema è BIBO stabile ed essendo LTI la nostra risposta forzata sarà composta da risposta ss + transitoria, è dunque continua.
Nel nostro caso specifico abbiamo che $y_\infty = lim_{s\to+\infty} sY(s)$ dove $Y(s) = G(s)\frac{U}{s}$; dove U è l'ampiezza del gradino. Applicando il teorema del valore finale otteniamo:
$y_\infty = lim_{t\to+\infty} y(t) = Y_{\infty 0} = lim_{s\to 0} sY(s) = lim_{s\to 0} sG(s)\frac{U}{s} = lim_{s\to 0} G(s)U = G(0)U$

$$\implies Y_{\infty 0} = G(0)U$$

G(0) è anche detto guadagno statico o in continua.

Rappresento la risposta forzata, considero il gradino unitario U=1:

```
U = 1;
```

$$Y_{FU}[s\_] := \text{Factor}\left[G[s]\ \frac{U}{s}\right];\ Y_{FU}[s]$$

$$\left\{\frac{1}{s\ (2+s)\ (3+s)\ (4+s)\ (5+s)}\right\}$$

$$Y_{ssU}[s\_] := G[0]\ \frac{U}{s};$$

$$Y_{trU}[s\_] := \text{Factor}[Y_{FU}[s] - Y_{ssU}[s]];\ Y_{trU}[s]$$

$$\left\{-\frac{(7+s)\ (22+7\ s+s^2)}{120\ (2+s)\ (3+s)\ (4+s)\ (5+s)}\right\}$$

Poichè il sistema è LTI posso decomporre l'uscita totale :

$$Y_0 = Y_L + Y_{FU} = Y_L + Y_{ssU} + Y_{trU}$$

Tratto il mio stato come incognita e lo utilizzo per generare la Y_L:

$$x_{i0} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$$

$$\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$$

$$Y_L[s\_] := \text{FullSimplify}[\text{C1.Inverse}[s\ \text{IdentityMatrix}[4] - A].x_{i0}][[1, 1]];\ Y_L[s]$$

$$-\frac{-((7+s)\ (22+s\ (7+s))\ x_1) + (14+s)\ x_2 + (69+s\ (56+s\ (13+s)))\ x_3 + (139+s\ (70+s\ (14+s)))\ x_4}{(2+s)\ (3+s)\ (4+s)\ (5+s)}$$

Dobbiamo ora ricercarcare quei valori di x_{i0} che annullano la risposta libera, per far ciò mi basta controllare il numeratore di Y_L

$$\text{coefList} = \text{CoefficientList}[\text{Numerator}[\text{Simplify}[\text{Expand}[Y_L[s] + Y_{trU}[s]]]], s][[1]]$$

$$\{-154 + 18480\ x_1 - 1680\ x_2 - 8280\ x_3 - 16680\ x_4,\ -71 + 8520\ x_1 - 120\ x_2 - 6720\ x_3 - 8400\ x_4,\ -14 + 1680\ x_1 - 1560\ x_3 - 1680\ x_4,\ -1 + 120\ x_1 - 120\ x_3 - 120\ x_4\}$$

Determino ora le incognite x_i che annullano il set dei coefficienti del polinomio al numeratore di libera+forzata

$$\text{Solve}[\text{coefList} == \{0, 0, 0, 0\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}]$$

$$\left\{\left\{x_1 \to \frac{1}{120},\ x_2 \to 0,\ x_3 \to 0,\ x_4 \to 0\right\}\right\}$$

Effettuo la verifica, prima con la funzione built-in e poi “a mano”.

```
Y_ssU[s]
```

$$\left\{\frac{1}{120\ s}\right\}$$

```
OutputResponse[{Σ, {1/120, 0, 0, 0}}, 1, t]
```

$$\left\{\frac{1}{120}\right\}$$

Faccio ora anche la verifica “manuale”

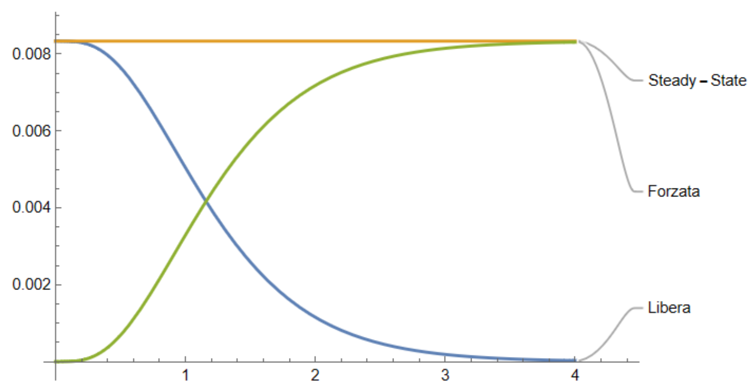
```
x_i0 = {{1/120}, {0}, {0}, {0}};
```

```
Y_L0[s_] := FullSimplify[C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x_i0][[1, 1]]; Y_L0[s]
```

$$\frac{(7+s)\ (22+s\ (7+s))}{120\ (2+s)\ (3+s)\ (4+s)\ (5+s)}$$

```
Simplify[Y_L0[s] + Y_trU[s]]
```

$\{0\}$



2.9 Valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$

Il calcolo della risposta all'ingresso 1(-t) presuppone la BIBO stabilita' (Asintotica Stabilita'). Si seguono due step: valutazione della risposta per t<0 (finito), valutazione della risposta per t>0 (finito). Prima di procedere vediamo come la funzione 1(-t) per t>0 vale 0 e dunque $Y_f(s) = G(s)U(s) = 0$, poiche U(s)=0.Lavoreremo dunque sulla risposta libera andando a determinare le condizioni iniziali.

1. Valuto la risposta a regime(valutazione della risposta per t<0 finito):

```
G[s_] := Simplify[(C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].B)[[1]][[1]]]; G[s]
```

$$\frac{1}{120+154\,s+71\,s^2+14\,s^3+s^4}$$

```
y_negativa = G[0]
```

$$\frac{1}{120}$$

2. Valutazione della risposta per t>0. E' la risposta del sistema in assenza di ingresso ma a partire dalle condizioni iniziali legate alla commutazione da 1 a 0. Per continuita' valgono queste relazioni y(0-) = y(0+), y'(0-) = y'(0+).... Mi ricavo lo stato iniziale risolvendo il sistema θ x0 = cond.iniziali. Dove θ è detta **matrice di osservabilità**

```
Obs = {C1[[1]], (C1.A)[[1]], (C1.A.A)[[1]], (C1.A.A.A)[[1]]}
{{1, 0, -1, -1}, {0, 0, 1, 0}, {0, -1, 1, 1}, {0, 0, 0, 1}}

Obs // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Controllo sia invertibile:

```
Det[Obs]
1
```

Mi ricavo le condizioni iniziali a partire dal sistema x_0 = 0 Obs^-1

```
x_0 = Inverse[Obs].{{G[0]}, {0}, {0}, {0}}
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{120}\right\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\right\}$$

Avendo ora a disposizione le condizioni iniziali posso proseguire calcolando la risposta libera

```
Ylib = Simplify[(C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x0)[[1]][[1]]]
```

$$\frac{154+71\,s+14\,s^2+s^3}{120\,\left(120+154\,s+71\,s^2+14\,s^3+s^4\right)}$$

```
Apart[Ylib]
```

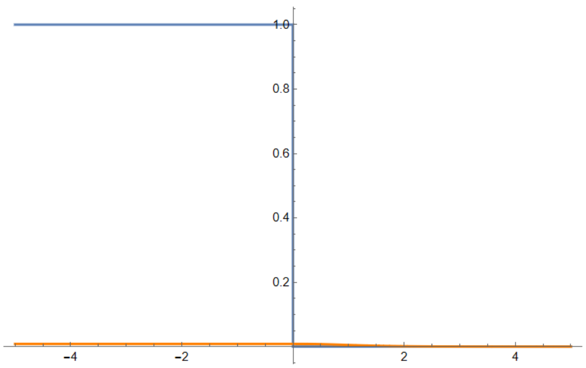
$$\frac{1}{12\,(2+s)}-\frac{1}{6\,(3+s)}+\frac{1}{8\,(4+s)}-\frac{1}{30\,(5+s)}$$

$$\text{ylibt} = \frac{1}{12}\,\text{Exp}[-2\,t]-\frac{1}{6}\,\text{Exp}[-3\,t]+\frac{1}{8}\,\text{Exp}[-4\,t]-\frac{1}{30}\,\text{Exp}[-5\,t]$$

$$-\frac{1}{30}\,e^{-5\,t}+\frac{e^{-4\,t}}{8}-\frac{e^{-3\,t}}{6}+\frac{e^{-2\,t}}{12}$$

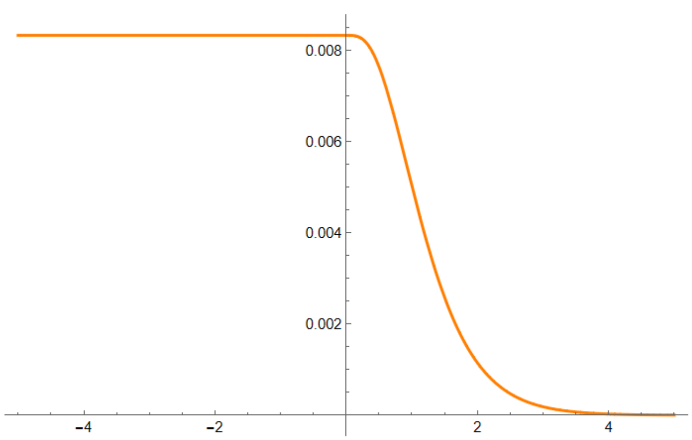
$$y_{nUnitStep}[t\_] := \begin{cases} y_{negativa} & t<0 \\ \text{ylibt} & t\geq 0 \end{cases}$$

```
Plot[{UnitStep[-t], ynUnitStep[t]}, {t, -5, 5}, PlotRange → All, Exclusions → None, PlotStyle → {, Orange}]
```



Vediamo la nostra risposta da piu vicino:

```
Plot[{ynUnitStep[t]}, {t, -5, 5}, PlotRange → All, Exclusions → None, PlotStyle → Orange]
```



Sistema LTI-TD (b)

In questo nuovo capitolo ci occuperemo dell'analisi della traccia (b) la quale propone lo studio di un sistema dinamico LTI-TD.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{3.1}$$

Inoltre dal sistema della traccia si evince sia un sistema proprio poichè la matrice D è nulla. Molte premesse già fatte per i sistemi a tempo continuo sono valide anche in questo caso, quando affronteremo il problema utlizzando nuove tecniche lo espliciteremo.

3.1 Calcolo dei modi naturali del sistema

Anche in questo caso ci troviamo ad affrontare lo studio dei modi naturali del sistema che a differenza del TC saranno delle successioni e non delle funzioni. Partiamo dal trovare gli autovalori della matrice dinamica A.

```
λ = Eigenvalues[A]
```

$$\left\{-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$$

```
NullSpace[λ IdentityMatrix[3] - A]
```

$$\left\{\left\{-\frac{19}{24}, -\frac{1}{4}, 1\right\}\right\}$$

Ci spuntano fuori ”tre autovalori” che in realtà è uno solo con molteplicità algebrica pari a 3.

Nel caso del sistema LTI-TD i modi naturali sono rappresentati da successsioni del tipo :

1. λ_i^k se A presenta autovalori reali e distinti;
2. $p^k sin(\theta k)$, $p^k cos(\theta k)$ se A presenta autovalori complessi e coinugati;
3. $\binom{k}{n}\lambda^{k-n}$ se A presenta autovalori reali e multipli tali che violino il principio di diagonalizzazione $(m.g \neq m.a)$;

Nel nostro caso specifico la matrice A non è diagonalizzabile poiche $m.g \neq m.a$, possiamo considerare fallito il test di diagonalizzabilità. Per procedere dobbiamo ricorre per la prima volta alla forma canonica di Jordan (vedi.A.6.2), con la funzione JordanDecomposition che ci restituisce due matrici, la prima è la matrice di cambiamento di base che ha per colonne gli autovettori legati ai blocchi di Jordan e per seconda la matrice in forma canonica di Jordan.

```
{T, Λ} = JordanDecomposition[A]
```

$$\left\{\left\{\left\{-\frac{19}{24}, -\frac{325}{288}, \frac{2375}{3456}\right\}, \left\{-\frac{1}{4}, \frac{25}{16}, -\frac{125}{64}\right\}, \{1, 0, 0\}\right\}, \left\{\left\{-\frac{1}{5}, 1, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{5}, 1\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{5}\right\}\right\}\right\}$$

```
Λ // MatrixForm
```

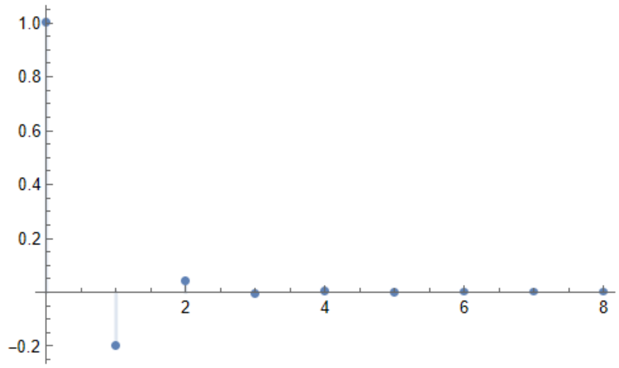
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

```
MatrixPower[Λ, k] // MatrixForm
```

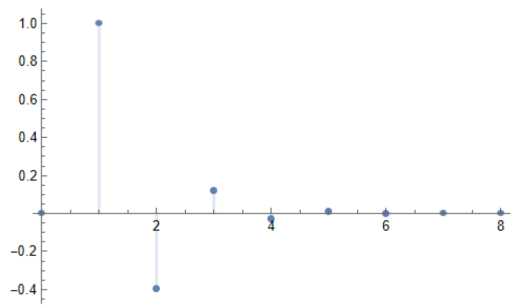
$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^k & -(-1)^k 5^{1-k} k & \frac{1}{2} (-1)^k 5^{2-k} (-1+k) k \\ 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^k & -(-1)^k 5^{1-k} k \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

Avendo un solo autovalore vediamo che tutti e tre i modi generati sono associati ad esso. Applicando Jordan abbiamo trovato una matrice 3x3 con un unico blocco poichè vi è un unico autovalore con m.a pari a 3. I modi naturali del sitema sono : $(-\frac{1}{5})^k$, $\binom{k}{1}(-\frac{1}{5})^{k-1}$, $\binom{k}{2}(-\frac{1}{5})^{k-2}$ (a meno di qualche semplificazione di Mathematica).

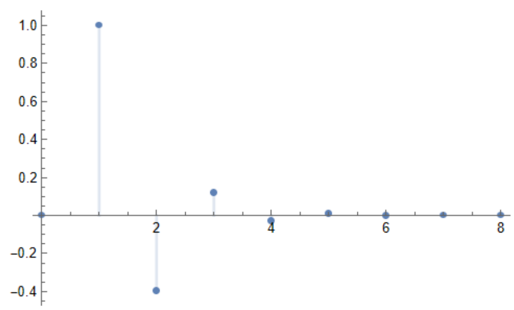
```
DiscretePlot[(-1/5)^k, {k, 0, 8}, PlotRange → All]
```




```
DiscretePlot[Binomial[k, 1] (-1/5)^(k-1), {k, 0, 8}, PlotRange → All]
```




```
DiscretePlot[Binomial[k, 1] (-1/5)^(k-1), {k, 0, 8}, PlotRange → All]
```



Come possiamo vedere tutti i modi naturali generati convergono a zero. Come nel caso tempo contiunuo i modi naturali convergno e questo è dato da:

- se $|\lambda| < 1 \implies lim_{k \to \infty} \binom{k}{n} \lambda^{k-n} = 0$
- se $|\lambda| \geq 1 \implies lim_{k \to \infty} \binom{k}{n} \lambda^{k-n} = \infty$

Dal calcolo dei modi naturali del sistema, analizziamo adesso la stabilità del sistema. Poiché tutti i modi stanno sulla circonferenza unitaria il sistema è asintoticamente stabile , ciò implica la BIBO stabilità .

3.2 Calcolo della risposta libera

Il sistema pur essendo TD resta comunque LTI è dunque possibile scomporre la rispsota del sistema in risposta libera e risposta forzata. Occupiamoci ora della risposta libera del sistema a partire dallo stato iniziale:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A TD la risposta libera è esprimibile come :

$$\begin{aligned} x_l(k) &= TA^k z_0 \\ y_l(k) &= CTA^k z_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

relativamente allo stato e all'uscita. Poiche, come già detto nella sezione (3.1), la matrice A è non diagonalizzabile, la matrice T di cambiamento di base è stata ricavata come nel caso (2.1).

```
x0 = {{-2}, {-3}, {0}}
{{-2}, {-3}, {0}}

T // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{19}{24} & -\frac{325}{288} & \frac{2375}{3456} \\ -\frac{1}{4} & \frac{25}{16} & -\frac{125}{64} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
z0 = Inverse[T].x0
```

$$\left\{\{0\}, \left\{\frac{132}{25}\right\}, \left\{\frac{144}{25}\right\}\right\}$$

Calcolo la risposta libera nello stato : $x_l(k) = T\,\Lambda\, z_0$

```
x1[k_] := Simplify[T.MatrixPower[Λ, k].z0]
x1[k]
```

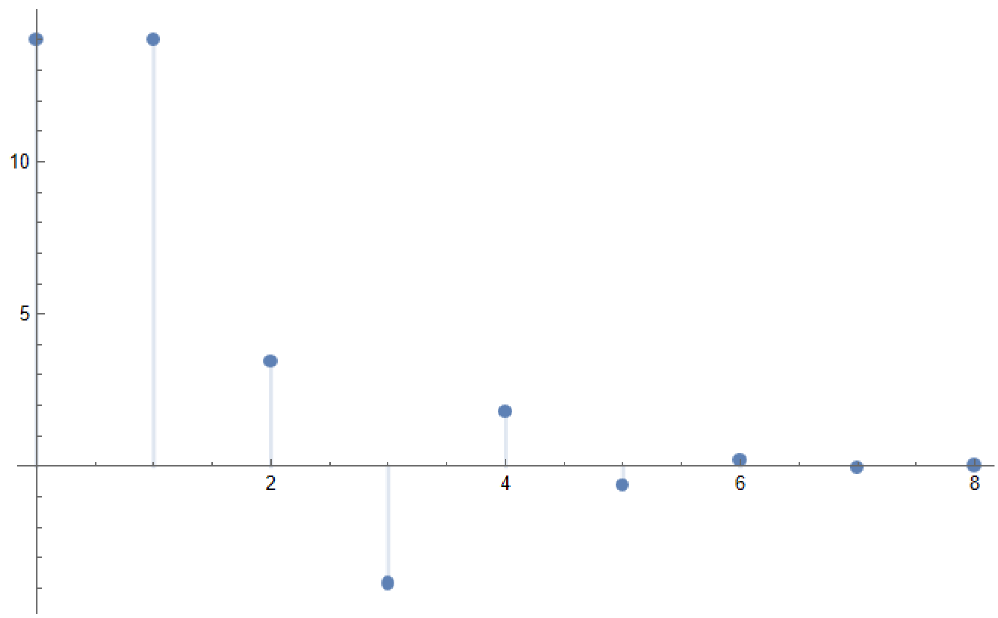
$$\left\{\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{1+k}\left(10-552\,k+285\,k^2\right)\right\}, \left\{-3\,(-1)^k\,5^{-1-k}\left(5+34\,k+30\,k^2\right)\right\}, \left\{12\,(-1)^k\,5^{-1-k}\,k\,(-41+30\,k)\right\}\right\}$$

Osserviamo la matrice di cambiamento di base relativa ai blocchi di Jordan. Essa è divisa per colonne che dipendono dal singolo blocco, nel nostro caso avendo un unico blocco di Jordan diremo che la matrice T sarà divisa in un'unica catena di lunghezza 3. Proseguiamo calcolando anche la risposta libera nell'uscita

```
y1[k_] := Simplify[C1.x1[k]]
y1[k]
```

$$\left\{\left\{2\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}\left(7-102\,k+60\,k^{2}\right)\right\}\right\}$$

```
DiscretePlot[{y1[k][[1]]}, {k, 0, 8}, PlotRange → All]
```



3.3 Configurazione stati iniziali in realzione alla risposta libera

Come visto in precedenza (2.3) possiamo decidere di attivare o meno deteminati modi sulla rispsota libera, teniamo presente che in questo caso abbiamo un solo autovalore che genera i modi naturali.Svolgiamo due casi, naturalmente continuano a valere le relazioni di indipendenza lineare che abbiamo visto per il caso tempo continuo per le colonne di T.

1. Troviamo delle condizioni iniziali linearmente dipendenti dalla prima colonna e che dunque annulla le due restanti:

$$x_1 = 2\{\{T[[1,1]]\},\{T[[2,1]]\},\{T[[3,1]]\}\}$$

$$\left\{\left\{-\frac{19}{12}\right\},\left\{-\frac{1}{2}\right\},\{2\}\right\}$$

$$z_1 = \text{Inverse}[T].x_1$$

$$\{\{2\},\{0\},\{0\}\}$$

$$x_{11}[k\_] := \text{Simplify}[T.\text{MatrixPower}[\Lambda, k].z_1]$$

$$x_{11}[k]$$

$$\left\{\left\{-\frac{19}{12}\left(-\frac{1}{5}\right)^k\right\},\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^k\right\},\left\{2\left(-\frac{1}{5}\right)^k\right\}\right\}$$

$$y_{11}[k\_] := \text{Simplify}[C1.x_{11}[k]];\ y_{11}[k]$$

$$\left\{\left\{\frac{2}{3}(-1)^k\,5^{1-k}\right\}\right\}$$

2. Troviamo delle condizioni iniziali linearmente dipendenti dalla prima colonna e dalla terza colonna che dunque annulla quella centrale:

$$x_2 = 3\{\{T[[1,1]]\},\{T[[2,1]]\},\{T[[3,1]]\}\} + 3\{\{T[[1,3]]\},\{T[[2,3]]\},\{T[[3,3]]\}\}$$

$$\left\{\left\{-\frac{361}{1152}\right\},\left\{-\frac{423}{64}\right\},\{3\}\right\}$$

$$z_2 = \text{Inverse}[T].x_2$$

$$\{\{3\},\{0\},\{3\}\}$$

$$x_{12}[k\_] := \text{Simplify}[T.\text{MatrixPower}[\Lambda, k].z_2];\ x_{12}[k]$$

$$\left\{\left\{-\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^k\left(361-53700\,k+34200\,k^2\right)}{1152}\right\},\left\{-\frac{3}{64}\left(-\frac{1}{5}\right)^k\left(141+300\,k+200\,k^2\right)\right\},\left\{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^k\left(2-25\,k+25\,k^2\right)\right\}\right\}$$

$$y_{12}[k\_] := \text{Simplify}[C1.x_{12}[k]];\ y_{12}[k]$$

$$\left\{\left\{\frac{1}{36}(-1)^k\,5^{1-k}\left(61-600\,k+450\,k^2\right)\right\}\right\}$$

3.4 FDT,poli e zeri

Nell' analizzare la funzione di trasferimento per un sistema LTI-TD riscontriamo alcune differenze rispetto al caso TC. Come già detto, il calcolo della risposta forzata (condizioni inziali nulle ed ingresso $\neq 0$) presuppone la risoluzione di equazioni ricorsive e quindi il calcolo delle progressioni, che complicherebbero notevolmente la nostra analisi, perciò facciamo ricorso alla TRASFORMATA ZETA. Grazie a questa tecnica, è possibile "trasformare" il sistema dinamico dal dominio del tempo ad un dominio complesso z, lavorando con equazioni algebriche che poi riporterò con un'operazione di anti-trasformata nel dominio del tempo.

```
G[z_] := Simplify[C1.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].B]; G[z]
```

$$\left\{\left\{-\frac{250\,(1+z)}{(1+5\,z)^3}\right\}\right\}$$

Trovo i poli

```
Solve[Denominator[G[z]] == 0]
```

$$\left\{\left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}\right\}$$

Trovo gli zeri

```
Solve[Numerator[G[z]] == 0]
```

$$\{\{z \to -1\}\}$$

Per quanto riguarda la stabilità del sistema viene confermata la discussione effettuata nel punto (3.1). Possiamo aggiungere in oltre che avendo un sistema in cui D=0 ci garantisce, per via dell'assenza di cancellazioni tra numeratore e denominatore della FDT, di avere al denominatore il polinomio caratteristico nonché come poli l'insieme degli autovalori perciò in questo caso vale la seguente implicazione logica Asintotica stabilità $\Longrightarrow$ BIBO stabilità.

3.5 La risposta al gradino unitario

Il gradino unitario come visto nel caso TC è un segnale right sided, la sua trasformata $Z[UnitStep[k]] = \frac{z}{z-1}$. Sfruttando la relazione della FDT vale che $Y(z) = U(z)G(z) \implies Y(z) = \frac{z}{z-1}G(z)$

$$Y_{unitStep}[z\_] := \text{Simplify}\left[G[z]\,\frac{z}{z-1}\right][[1,1]];\; Y_{unitStep}[z]$$

$$-\frac{250\,z\,(1+z)}{(-1+z)\,(1+5\,z)^3}$$

A differenza del tempo continuo per "spacchettare" la risposta è necessario un passaggio aggiuntivo, quello di dividere per z la risposta e successivamente trovare i fratti semplici, nel nostro caso saranno quattro, il primo generato dall'ingresso e gli altri tre generati dai modi naturali. Utilizzando la formula di Heaviside e ponendo particolare attenzione all'espressione al cubo otteniamo:

$$\frac{Y_{unitStep}[z]}{z}$$

$$-\frac{250\,(1+z)}{(-1+z)\,(1+5\,z)^3}$$

$$C_1 = \lim_{z\to 1}\,(z-1)\left(\frac{Y_{unitStep}[z]}{z}\right)$$

$$-\frac{125}{54}$$

$$C_{23} = \lim_{z\to\frac{-1}{5}}\left(z+\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{Y_{unitStep}[z]}{z}\right);\; C_{22} = \lim_{z\to\frac{-1}{5}} D\left[\left(z+\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{Y_{unitStep}[z]}{z}\right), z\right];\; C_{21} = \left(\frac{1}{2}\right)\lim_{z\to\frac{-1}{5}} D\left[D\left[\left(z+\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{Y_{unitStep}[z]}{z}\right), z\right], z\right];$$

$$C_{23}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$C_{22}$$

$$\frac{25}{9}$$

$$C_{21}$$

$$\frac{125}{54}$$

Dopo aver ottenuto i coefficienti possiamo applicare il procedimento inverso(moltiplicare per z) e ricomporre la risposta.

$$Y_{\text{unitStep}}[z\_] := C_1 \frac{z}{z-1} + C_{21} \frac{z}{z+\frac{1}{5}} + C_{22} \frac{z}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^2} + C_{23} \frac{z}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^3};\ Y_{\text{unitStep}}[z]$$

$$-\frac{125\,z}{54\,(-1+z)} + \frac{4\,z}{3\left(\frac{1}{5}+z\right)^3} + \frac{25\,z}{9\left(\frac{1}{5}+z\right)^2} + \frac{125\,z}{54\left(\frac{1}{5}+z\right)}$$

Portiamo ora la risposta forzata nel dominio del tempo:

$$y_{\text{unitStep}}[k\_] := C_1\,\text{UnitStep}[k] + C_{21}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}\text{UnitStep}[k] + C_{22}\,\text{Binomial}[k,1]\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\text{UnitStep}[k] + C_{23}\,\text{Binomial}[k,2]\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-2}\text{UnitStep}[k]$$

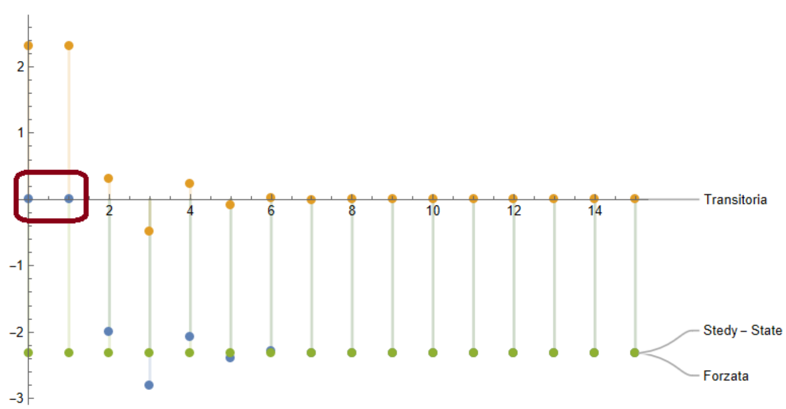
$\text{Expand}[y_{\text{unitStep}}[k]]$

$$\boxed{-\frac{125\,\text{UnitStep}[k]}{54}} + \boxed{\frac{1}{54}(-1)^{k}\,5^{3-k}\,\text{UnitStep}[k] - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2+k} k\,\text{UnitStep}[k] + \frac{1}{9}(-1)^{-1+k}\,5^{3-k}\,k\,\text{UnitStep}[k] + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2+k} k^2\,\text{UnitStep}[k]}$$

$$y_{\text{TRunitStep}}[k\_] := \frac{1}{54}(-1)^{k}\,5^{3-k}\,\text{UnitStep}[k] + \frac{1}{9}(-1)^{-1+k}\,5^{3-k}\,k\,\text{UnitStep}[k] + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2+k}(-1+k)\,k\,\text{UnitStep}[k];$$

$$y_{\text{SSunitStep}}[k\_] := -\frac{125\,\text{UnitStep}[k]}{54};$$

```
DiscretePlot[{yunitStep[k], yTRunitStep[k], ySSunitStep[k]}, {k, 0, 15}, PlotRange → All, PlotLabels → {Forzata, Transitoria, Stedy - State}]
```



Osservando la risposta si puo notare un ritardo, questo è dovuto alla differenza tra i poli e gli zeri della funzione. Nel nostro caso abbiamo visto nel punto (3.4) la differenza tra poli e zeri è due come sono due le unità di ritardo.

3.6 Modelli ARMA(I/U) equivalenti

In questa sezione troveremo i modelli ARMA equivalenti, individuando (ove necessario) le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale:

$$x_{0ARMA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Partiamo lavorando sul signifcato intrinseco della FDT, ossia un rapporto di polinomi, in particolare $G(z) = \frac{n_{G(z)}}{d_{G(z)}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$. Per ricavarci i modelli arma equivalenti operando a TD non abbiamo le derivate e dobbiamo utilizzare il teorema dell'anticipo elementare $f(k+1) = zF(z) - zF(0)$. A partire dalla FDT otteniamo un modello I/U:

```
Eq_iu[z_] := Expand[Denominator[G[z][[1]]] Y_iu[z]] == Expand[Numerator[G[z][[1]]] U_iu[z]]; Eq_iu[z]
{Y_iu[z] + 15 z Y_iu[z] + 75 z^2 Y_iu[z] + 125 z^3 Y_iu[z]} == {-250 U_iu[z] - 250 z U_iu[z]}
```

Pongo il "trenino" delle condizioni iniziali nullo applicando il teorema dell'anticipo elementare, con questo raggionamento dovremmo ottenere:

$$y(k) + 15y(k+1) + 75y(k+2) + 125y(k+3) = -250u(k) - 250u(k+1)$$

Da qui per ricavare il modello ARMA(Auto-Regressive-Moving-Avarage), che appunto metta in evidenza sia la parte di media mobile che di auto regressione, va effettuata una sostituzione $k_a = k + 3$:

$$y(k_a - 3) + 15y(k_a - 2) + 75y(k_a - 1) + 125y(k_a) = -250u(k_a - 3) - 250u(k_a - 2)$$

Al fine di individuare le condizioni iniziali sull'uscita (y(0), y(1),.. y(n)) compatibili con lo stato iniziale x_{0ARMA} parto con il considerare la definizione iniziale di uscita y(k)=Cx(k)+Du(k) ma essendo D=0 avrò espressioni del tipo $y(k) = Cx(k) \implies y(0) = Cx(0)$:

```
y0 = (C1.x0Arma) [[1, 1]]
```

-18

```
y1 = (C1.A.x0Arma) [[1, 1]]
```

-22

```
y2 = (C1.A.A.x0Arma) [[1, 1]]
```

$-\frac{442}{125}$

Utilizzando il modello ARMA ad anticipo corrispondente e dopo aver calolato le condizioni iniziali sull'uscita portiamo il nostro modello nella variabile complessa z per poi studiare la risposta libera.

$Y_{iu}[z] + 15\,(-z\,y[0] + z\,Y_{iu}[z]) + 75\,(-z^2\,y[0] - z\,y[1] + z^2\,Y_{iu}[z]) + 125\,(-z^3\,y[0] - z^2\,y[1] - z\,y[2] + z^3\,Y_{iu}[z]) == -250\,U_{iu}[z] - 250\,z\,U_{iu}[z]$

Risolvo rispetto Y_{iu}

```
Solve[EqRz, Yiu[z]][[1, 1]][[2]]
```

$$\frac{5\,(3\,z\,y[0] + 15\,z^2\,y[0] + 25\,z^3\,y[0] + 15\,z\,y[1] + 25\,z^2\,y[1] + 25\,z\,y[2] - 50\,U_{iu}[z] - 50\,z\,U_{iu}[z])}{(1+5\,z)^3}$$

Separo i termini riferiti all'ingresso $U_{iu}[z]$ da quelli riferiti ad $Y_{iu}[z]$ in modo tale da poter studiare la risposta libera annullando la parte relativa all'ingresso

```
Collect[Solve[EqRz, Yiu[z]][[1, 1]][[2]], Uiu[z]]
```

$$\frac{5\,(3\,z\,y[0] + 15\,z^2\,y[0] + 25\,z^3\,y[0] + 15\,z\,y[1] + 25\,z^2\,y[1] + 25\,z\,y[2])}{(1+5\,z)^3} + \frac{5\,(-50 - 50\,z)\,U_{iu}[z]}{(1+5\,z)^3}$$

Assegno il primo membro ad una nuova variabile risposta libera assegnando le condizioni iniziali sull'uscita

```
ylibe[z_] := (Collect[Solve[EqRz, Yiu[z]][[1, 1]][[2]], Uiu[z]][[1]]) /. {y[0] → y0 , y[1] → y1 , y[2] → y2 }; ylibe[z]
```

$$\frac{5\,\left(-\frac{2362\,z}{5} - 820\,z^2 - 450\,z^3\right)}{(1+5\,z)^3}$$

```
yliber[k_] := Expand[Simplify[InverseZTransform[ylibe[z], z, k]]]; yliber[k]
```

$$-18\left(-\frac{1}{5}\right)^k + 1456\,(-1)^k\,5^{-1-k}\,k - 816\,(-1)^k\,5^{-1-k}\,k^2$$

Verifichiamo la correttezza dei risultati, confrontandoli con i risultati ottenuti dal modello I/S/U:

```
yconf[z_] := FullSimplify[z C1.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].x0Arma]; yconf[z]
```

$$\left\{\left\{-\frac{2\,z\,(1181+25\,z\,(82+45\,z))}{(1+5\,z)^3}\right\}\right\}$$

```
prov = Simplify[InverseZTransform[-2 z (1181 + 25 z (82 + 45 z))/(1 + 5 z)^3, z, k]]
```

$$-2\,(-1)^k\,5^{-1-k}\,\left(45-728\,k+408\,k^2\right)$$

```
FullSimplify[yliber[k] - prov]
```

0

A questo punto arrivati procediamo calcolando la risposta ad un ingresso "particolare":

```
squareIN[k_] := Piecewise[{{1, 0 ≤ k ≤ 10}, {0, k > 10}, {0, k < 0}}]; squareIN[k]
```

$$\begin{cases} 1 & 0 \le k \le 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

A partire dall'equazione alle differenze da cui abbiamo estratto la risposta libera possiamo estrarre anche la risposta forzata

```
Yfor[z_] := Collect[Solve[EqRz, Yiu[z]][[1, 1]][[2]], Uiu[z]][[2]]; Yfor[z]
```

$$\frac{5\,(-50-50\,z)\,U_{iu}[z]}{(1+5\,z)^3}$$

Adesso che abbiamo la risposta forzata la nostra incognita diventa $U_{iu}[z]$ ossia l'ingresso nella trasformata Zeta. $Z[a(k)] = \sum_{n=0}^{\infty} a(k)\,z^{-n}$ applichiamo la definizione e trasformiamo la nostra squareIN[k]

```
squareZ[z_] := Simplify[Sum[z^-i, {i, 0, 10}]]; squareZ[z]
```

$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^9+z^{10}}{z^{10}}$$

sostituiamola nell'uscita forzata ottenendo cosi:

```
Yfor[z_] := Collect[Solve[EqRz, Yiu[z]][[1, 1]][[2]], Uiu[z]][[2]] /. {Uiu[z] → squareZ[z]}; Yfor[z]
```

$$\frac{5\,(-50-50\,z)\,\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^9+z^{10}\right)}{z^{10}\,(1+5\,z)^3}$$

```
prov = (G[z] × squareZ[z])[[1, 1]]
```

$$-\frac{250\,(1+z)\,\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^9+z^{10}\right)}{z^{10}\,(1+5\,z)^3}$$

Facciamo la prova:

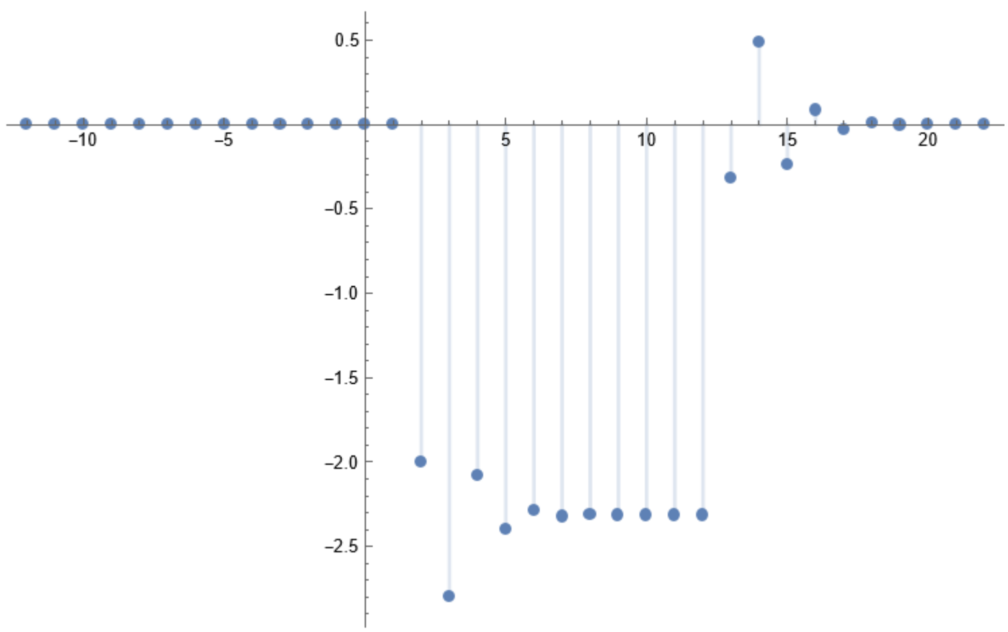
```
Simplify[Yfor[z] - (G[z] × squareZ[z])[[1, 1]]]
```

0

Dopo esserci assicurati della correttezza del risultatato possiamo procedere ritornando nel dominio del tempo e plottare la risposta.

```
y_for[k_] := Simplify[InverseZTransform[Y_for[z], z, k]]; y_for[k]
```

$$
\begin{cases}
-\frac{14}{5} & k == 3 \\
-\frac{12}{5} & k == 5 \\
-\frac{7258}{3125} & k == 7 \\
-\frac{180\,888}{78\,125} & k == 9 \\
-\frac{180\,834}{78\,125} & k == 10 \\
-\frac{36\,136}{15\,625} & k == 8 \\
-\frac{286}{125} & k == 6 \\
-\frac{52}{25} & k == 4 \\
-2 & k == 2 \\
2\,(-1)^k\,5^{2-k}\,(2\,299\,895\,110 - 387\,912\,327\,k + 16\,276\,042\,k^2) & k > 10 \\
0 & \text{True}
\end{cases}
$$



3.7 Condizioni iniziali ,sul modello ARMA, tali che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime

Partendo dal modello ARMA precedentemente trovato, analizziamo ora la risposta la gradino imponendo come condizione la coincidenza tra risposta forzata al gradino e il valore a regime. Sappiamo inoltre che :

$$Y(z) = Y_l(z) + Y_f(z) = Y_l(z) + Y_{ss}(z) + Y_{tr}(z) \tag{3.3}$$

Per far ciò dobbiamo individuare delle condizioni iniziali che rispettino la condizione imposta, inizialmente definiremo lo stato e le sue componenti come incognite:

$x_{0\,INC} = \{\{x_{1\,in}\}, \{x_{2\,in}\}, \{x_{3\,in}\}\}$

$\{\{x_{in}\}, \{x_{2\,in}\}, \{x_{3\,in}\}\}$

Troviamo ora i corrispondenti stati nell'uscita

$y_{0\,INC} = (C1.x_{0\,INC})[[1, 1]]$

$-4\,x_{in} - 2\,x_{2\,in} - 2\,x_{3\,in}$

$y_{1\,INC} = (C1.A.x_{0\,INC})[[1, 1]]$

$-4\,x_{in} - 2\,x_{2\,in} - 4\,x_{3\,in}$

$y_{2\,INC} = (C1.A.A.x_{0\,INC})[[1, 1]]$

$-\frac{68\,x_{in}}{125} - \frac{98\,x_{2\,in}}{125} - \frac{14\,x_{3\,in}}{25}$

Consideriamo inoltre come ingresso un gradino generico $u(k) = U1(k) \implies Z[u(k)] = \frac{z}{z-1}$ e troviamo la relativa risposta nel dominio z.

```
(Collect[Solve[EqRz, Yiu[z]][[1, 1]][[2]], Uiu[z]]) /. {y[0] → y0INC, y[1] → y1INC, y[2] → y2INC, Uiu[z] → (z/(z - 1))}
```

$$\frac{5\,(-50-50\,z)\,z}{(-1+z)\,(1+5\,z)^3}+$$
$$\frac{5\left(15\,z\,(-4\,x_{in}-2\,x_{2\,in}-4\,x_{3\,in})+25\,z^2\,(-4\,x_{in}-2\,x_{2\,in}-4\,x_{3\,in})+3\,z\,(-4\,x_{in}-2\,x_{2\,in}-2\,x_{3\,in})+15\,z^2\,(-4\,x_{in}-2\,x_{2\,in}-2\,x_{3\,in})+25\,z^3\,(-4\,x_{in}-2\,x_{2\,in}-2\,x_{3\,in})+25\,z\left(-\frac{68\,x_{in}}{125}-\frac{98\,x_{2\,in}}{125}-\frac{14\,x_{3\,in}}{25}\right)\right)}{(1+5\,z)^3}$$

```
YLIU[z_] :=
Simplify[5 (15 z (-4 xin - 2 x2in - 4 x3in) + 25 z^2 (-4 xin - 2 x2in - 4 x3in) + 3 z (-4 xin - 2 x2in - 2 x3in) + 15 z^2 (-4 xin - 2 x2in - 2 x3in) + 25 z^3 (-4 xin - 2 x2in - 2 x3in) + 25 z (-68 xin/125 - 98 x2in/125 - 14 x3in/25)) / (1 + 5 z)^3];
YLIU[z]
```

$$-\frac{2\,z\left((214+400\,z+250\,z^2)\,x_{in}+(139+200\,z+125\,z^2)\,x_{2\,in}+25\,(8+13\,z+5\,z^2)\,x_{3\,in}\right)}{(1+5\,z)^3}$$

Notiamo che $(\frac{5(-50-50z)z}{(-1+z)(1+5z)^3})$ è la componente indipendente dall'ingresso che utlizzeremo per trovare la transitoria .Troviamo ora la componente transitoria a partire dalla 3.3

Rappresentazione della risposta libera + forzata modello ARMA, voglio ora trovarmi la componente transitoria

```
YssIU[z_] := G[1] (z/(z - 1));
YtrIU[z_] := Simplify[5 (-50 - 50 z) z / ((-1 + z) (1 + 5 z)^3) - YssIU[z]][[1, 1]]; YtrIU[z]
```

$$\frac{125\,z\,(107+200\,z+125\,z^2)}{54\,(1+5\,z)^3}$$

```
YL-tr[z_] := FullSimplify[Expand[YtrIU[z] + YLIU[z]]]; YL-tr[z]
```

$$\frac{z\,(-216\,(107+25\,z\,(8+5\,z))\,x_{in}-108\,(139+25\,z\,(8+5\,z))\,x_{2\,in}+25\,(535+125\,z\,(8+5\,z)-108\,(1+z)\,(8+5\,z)\,x_{3\,in}))}{54\,(1+5\,z)^3}$$

```
coefList = CoefficientList[Numerator[YL-tr[z]], z]
```

$\{0,\ 13375-23112\,x_{in}-15012\,x_{2\,in}-21600\,x_{3\,in},\ 25000-43200\,x_{in}-21600\,x_{2\,in}-35100\,x_{3\,in},\ 15625-27000\,x_{in}-13500\,x_{2\,in}-13500\,x_{3\,in}\}$

```
Solve[coefList == {0, 0, 0, 0}, {xin, x2in, x3in}]
```

$$\left\{\left\{x_{in}\to\frac{125}{216},\ x_{2\,in}\to 0,\ x_{3\,in}\to 0\right\}\right\}$$

```
xnew = {{125/216}, {0}, {0}}
```

$$\left\{\left\{\frac{125}{216}\right\},\ \{0\},\ \{0\}\right\}$$

Abbiamo trovato lo stato iniziale che verifica le condizioni richieste. Ricalcoliamo la nuova risposta libera con lo stato iniziale x_{NEW}:

Verifichiamo sia corretto

```
YL0[z_] := Simplify[C1.(z Inverse[z IdentityMatrix[3] - A]).xnew]; YL0[z]
```

$$\left\{\left\{-\frac{125\,z\,(107+200\,z+125\,z^2)}{54\,(1+5\,z)^3}\right\}\right\}$$

```
Together[YtrIU[z]]
```

$$\frac{125\,z\,(107+200\,z+125\,z^2)}{54\,(1+5\,z)^3}$$

Verifichiamo che la transitoria + la risposta libera si annullano in modo tale da lasciare che $Y(z) = Y_{ssIU}(z)$

```
Simplify[YL0[z] + YtrIU[z]]
```

{{0}}

```
YL0[z] + YtrIU[z] + YssIU[z]
```

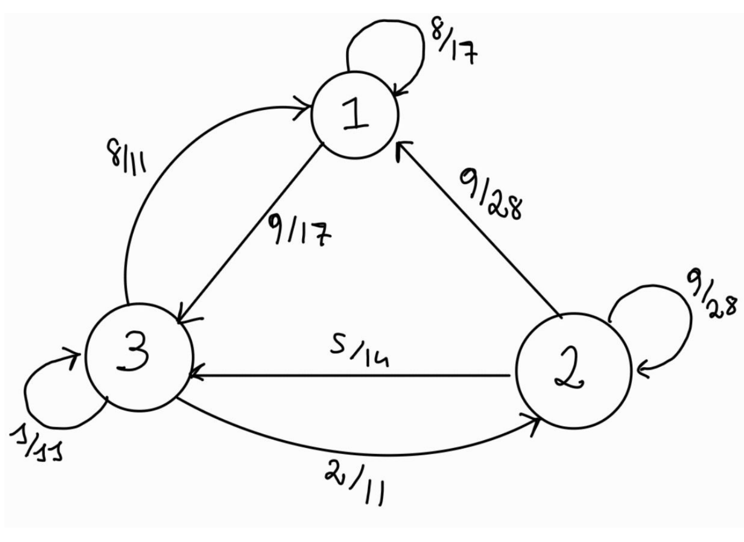
$$\left\{\left\{-\frac{125\,z}{54\,(-1+z)}\right\}\right\}$$

Catena di Markov Tempo Discreto (c)

I modelli di transizione sono particolari modellazioni dei fenomeni in cui viene introdotto il concetto di ”attributo”, i quali rappresentano l’andamento temporale di una data grandezza lagata ad uno dei suoi attributi. Essi, in generale, si focalizzano sul comportamento di *alcune proprietà* del fenomeno. Gli stati sono detti *stati stocastici*,poiche probabilità, la loro somma per colonne deve valere 1. Un modello di transizione è detto Markoviano se vale:

Ipotesi di Markov *”La probabilità all’istante di tempo k dipende dallo stato all’istante di tempo k-1”*.

4.1 Grafo di transizione della catena



In termini del tutto generali un modello di transizione che verifica l'ipostesi di Markov può essere rappresentato attraverso un grafo di transizione ricavato a partire dalla matrice di transizione A che nel caso dell'ipotesi di Markov è stocastica per colonne, verifichiamo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} & \frac{9}{28} & \frac{8}{11} \\ 0 & \frac{9}{28} & \frac{2}{11} \\ \frac{9}{17} & \frac{5}{14} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Effettuando la somma per colonne possiamo vedere come il risultato per ogni colonna è 1.

4.2 Stato stazionario della catena

Analizzando la nostra catena di Markov possiamo notare come essa sia lineare, TD con un numero di stati finiti(poichè $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$), inoltre il grafo ha una **connettività forte**(esiste almeno un albero ricoprente a partire da un nodo padre). Questa analisi preliminare ci assicura l'esistenza di una distribuzione di probabilità stazionaria $\pi = A\pi$,poiche abbiamo soddisfatto le condizioni del **Graph Tree Markov Chain Theorem**. In modo analogo avremmo potuto raggiungere lo stesso risultato sfruttando la seguente condizione sufficiente:

$$rk(I - A) = n - 1 \implies \exists \pi = A\pi$$

inoltre :

$$lim_{k\to\infty} x(k) = \pi$$

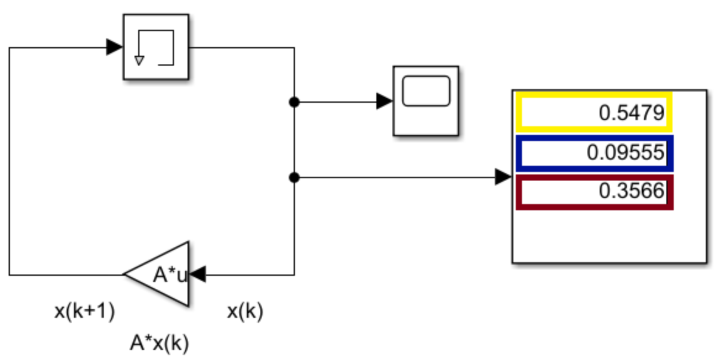
4.2.1 Ricorsione numerica a partire da uno stato iniziale stocastico(pseudo-casuale)

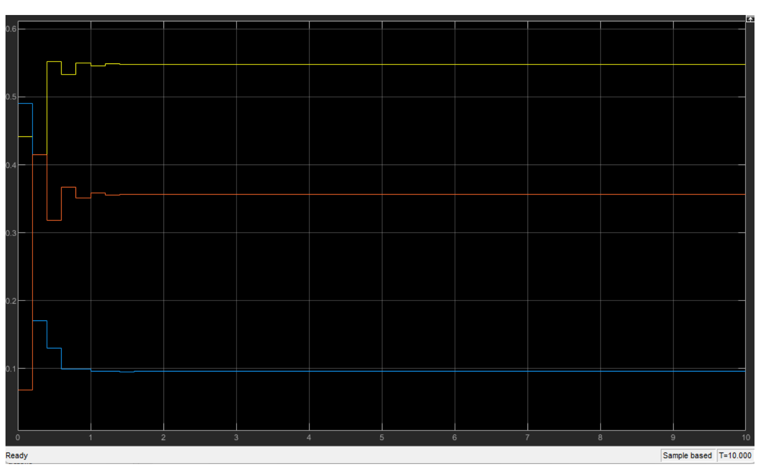
A partire da uno stato stocastico è possibile grazie all'ipotesi di Markov sviluppare una Markov chain il cui risultato dipende esclusivamente dal suo "passato prossimo". Con l'ausilio di Matlab/Simulink vedremo come, dopo aver definito uno stato iniziale ”pseudocasuale” ed averlo normalizzato così da renderlo stocastico, sia possibile con un numero di passi finiti costruire la catena e trovare la distribuzione stazionaria. I coponenti utilizzati in Simulink per creare lo schema sono: un registro (ogni passo memorizza lo stato corrente), un gain (permette di passare allo stato successivo, x(k + 1) = A x(k)) e due strumenti di misura per controllare lo stato:

```
%Inizializzo la matrice di transizione A
A=[8/17, 9/28, 8/11;
   0, 9/28, 2/11;
   9/17, 5/14, 1/11];

%Inizialializzo lo stato iniziale con valori "pseudocausali"
x0=rand(3,1);

%Normalizzo lo stato iniziale per rendelo stocastico
x0=x0/sum(x0);
```





4.2.2 Calcolo in forma chiusa dell'equilibrio stocastico della catena

Ricaviamoci ora la forma chiusa dell'equibrio stocastico senza l'ausilio di ricrosione ma sfruttando le prorpietà algebriche e la condizione sufficiente precedentemente espressa:

$$\pi = A\pi \implies \pi - A\pi = 0_{3\times 1} \implies \pi(1_{3\times 1} - A) = 0_{3\times 1}$$

```
A = {{8/17, 9/28, 8/11}, {0, 9/28, 2/11}, {9/17, 5/14, 1/11}}
```

$$\left\{\left\{\frac{8}{17}, \frac{9}{28}, \frac{8}{11}\right\}, \left\{0, \frac{9}{28}, \frac{2}{11}\right\}, \left\{\frac{9}{17}, \frac{5}{14}, \frac{1}{11}\right\}\right\}$$

Verifichiamo che la matrice (I-A) sia singolare

```
Det[IdentityMatrix[3] - A]
```

0

Se I-A è singolare sappiamo che esiste $\pi \neq 0_{3\times 1}$

```
IdentityMatrix[3] - A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{17} & -\frac{9}{28} & -\frac{8}{11} \\ 0 & \frac{19}{28} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{9}{17} & -\frac{5}{14} & \frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

Poichè I-A è singolare il suo rango non è massimo e dunque ci sarà almeno un vettore riga linearmente dipendente

```
MatrixRank[IdentityMatrix[3] - A ]
```

2

Come avevamo previsto rk(I-A)=n-1. A questo punto arrivati possiamo procedere con la costruzione del sistema associato alla matrice I-A in cui l'ultima riga è incognita ma con il vincolo dello stato stocastico:

```
N[Solve [{9/17 x1 - 9/28 x2 - 8/11 x3 == 0,
      0 + 19/28 x2 - 2/11 x3 == 0,
      x1 + x2 + x3 == 1}]]
```

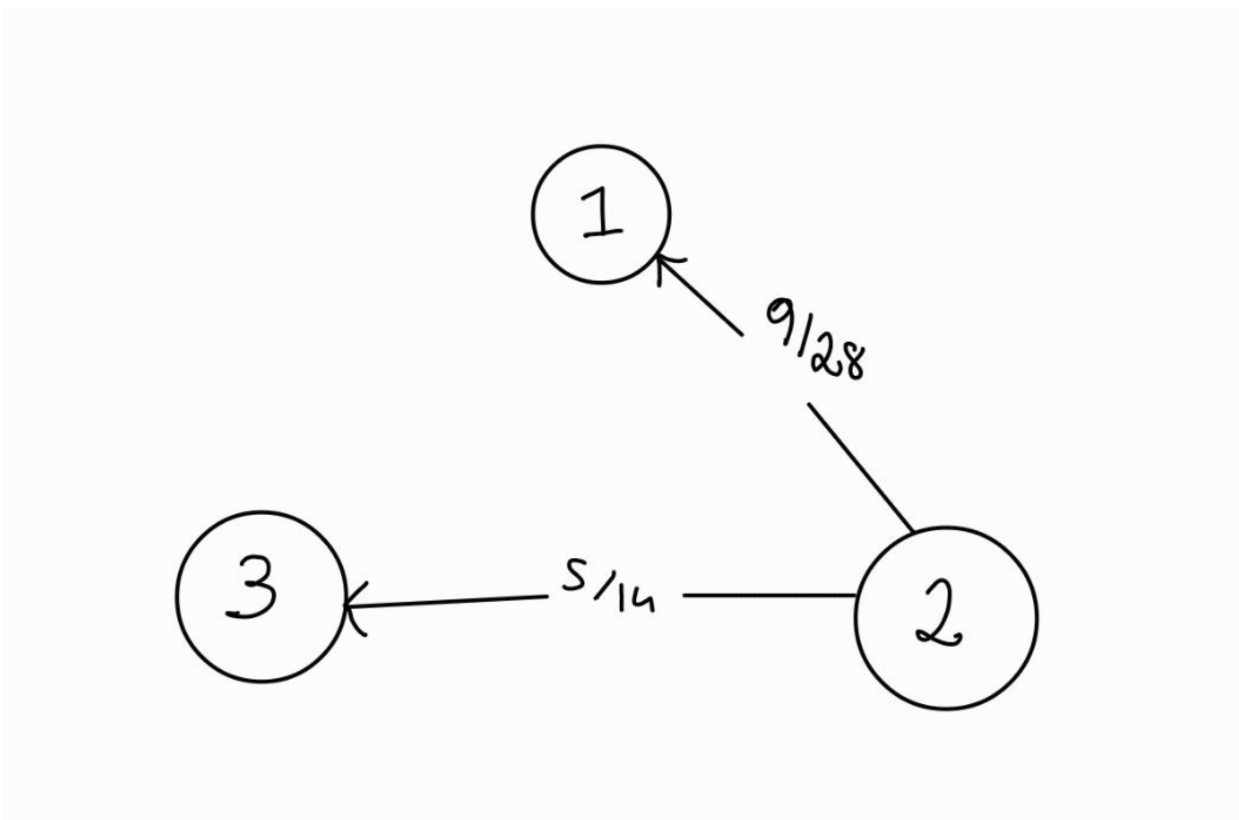
$\{\{x_1 \to 0.547867, x_2 \to 0.095545, x_3 \to 0.356588\}\}$

4.3 Evidenziare nel grafo individuato al punto *3.1* un possibile *spanning tree*

Uno *spanning tree* è un sotto albero ricavato a partire dal grafo iniziale che esprime le seguenti caratteristiche:

1. **Acilicità**: Non deve contenere cicli. Se si verifica un ciclo, non è un albero.
2. **Inclusività**: Deve contenere tutti i vertici del grafo di partenza.
3. **Connettività**:Non ci devono essere vertici isolati.

Da notare che un grafo può avere più *spanning tree*.



Elementi di Algebra lineare

In questa sezione verrano esposti brevementi alcune importanti nozioni di algebra utili all'analisi dei sistemi dinamici.

A.1 Matrici

Definizione A.1.1. Una matrice è una tabella con dimensione $m \times n$ di elementi disposti su le m righe e n colonne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si usa come notazione **A**$= \{a_{i,j}\}$ per indicare l'elemento di riga i-esime colonna j-esima.

Definizione A.1.2. Uno scalare è una matrice con dimensione 1×1. Un vettore è una matrice con una delle due dimensioni unitaria.Distinguiamo due casi:

- vettore colonna: è una matrice $m \times 1$.
- vettore riga: è una matrice $1 \times n$.

Definizione A.1.3. Una matrice è detta quadrata se di dimensione $n \times n$. Questo tipo di matrici hanno alcune denominazioni note:

- diagonale: se tutti gli elementi non appartenti alla diagonale principale sono nulli.
- diagonale a blocchi: se è possibile individuare blocchi quadrati lungo la diagonale

principale e tutti gli elementi non appartenti a tali blocchi sono nulli.

- identità: se tutti gli elementi sulla diagonale principale valgono **1** e gli altri elementi sono tutti nulli. Queste matrici sono identificate con **I**, oppure per indicare anche la dimensione I_n.

A.2 Operatori matriciali

A.2.1 Potenza di matrice

Definizione A.2.1. Data una matrice quadrata **A** di ordine n definiamo potenza di grado k di **A** la matrice:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}}_{\text{k volte}}, \tag{A.1}$$

anch'essa di ordine n.

Si noti che:

- per k=1 vale $A^1 = A$
- per k=0 vale $A^0 = I$

A.2.2 Esponenziali di matrice

Dato uno scalare x,il suo esponenziale vale(Sviluppo di Taylor):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{A.2}$$

Si dimostra che tale serie è sempre convergente. Possiamo ora fare un ragionamento analogo per estendere il concetto alle matrici quadrate.

Definizione A.2.2. Data una matrice **A** n × n il suo esponenziale è una matrice n × n definita come:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \tag{A.3}$$

Anche in questo caso viene dimostrato che questa serie è sempre convergente.

- Per una matrice generica diagonale a blocchi vale:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_q \end{bmatrix} \implies e^A = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\mathbf{A}_q} \end{bmatrix}$$

- Per una matrice generica diagonale n × n vale:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

A.2.3 Trasposizione

Definizione A.2.3. Data una matrice **A** con elementi $\{a_{i,j}\}$ di dimensione m × n definiamo la sua trasposta A^T= $\{\acute{a}_{i,j} = a_{j,i}\}$ di dimensioni n × m che ha lungo la j-esima riga gli elementi della j-esima colonna di **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in W^{m\times n} \implies A^T = \begin{bmatrix} \acute{a}_{11} & \acute{a}_{12} & \cdots & \acute{a}_{1m} \\ \acute{a}_{21} & \acute{a}_{22} & \cdots & \acute{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \acute{a}_{n2} & \acute{a}_{n2} & \cdots & \acute{a}_{nm} \end{bmatrix} \in W^{n\times m}$$

A.3 Inversa

Definizione A.3.1. Data una matrice **A** quadrata di ordine n, definiamo la sua inversa A^{-1} anch'essa di ordine n che gode della prorpietà:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \tag{A.4}$$

La matrice inversa di **A** esiste se e solo se **A** è non singolare($det(\mathbf{A}) \neq 0$); inoltre quando esiste essa è unica.

Vale la seguente relazione:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

A.4 Autovalori e autovettori

Un altro concetto ricorrente nell'analisi dei sistemi dinamici sono gli autovalori e gli autovettori. Essi sono definiti solo per matrici quadrate.

Definizione A.4.1. Data una matrice **A** di ordine n, sia $\lambda \in \mathbb{R}$ uno scalare e sia $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ un vettore colonna n $\times$ 1. Se vale

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{A.5}$$

allora λ è detto autovalore di **A** a cui è associato l'autovettore di **v**.

Una matrice **A** di ordine n i cui elementi sono tutti numeri reali ha n autovalori $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ che possono essere numeri reali oppure presentarsi a coppie di numeri complessi e coniugati. E' noto inoltre che se la matrice si presenta in forma diagonale, allora i suoi autovalori sono gli elementi presenti sulla diagonale principale.

Definizione A.4.2. Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata **A** di ordine n, è il polinomio di grado n nella varibaile s definito come:

$$P(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \tag{A.6}$$

A partire da quest'ultima definizione, si può dimostrare che le radici del polinomio caratteristico,ovvero le soluzioni di

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{A.7}$$

sono gli autovalori della matrice **A**.Inoltre se λ è un autovalore di **A** ogni autovettore **v** corrispondente all'autovalore si può determinare dalla soluzione non nulla del sistema lineare:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0_n \tag{A.8}$$

A.5 Matrici simili e diagonalizzabilità

Definizione A.5.1. Due matrici **A,B** di ordine n si dicono simili se esiste una matrice invertibile P tale che :

$$B = P^{-1}AP \quad (A \overset{P}{\sim} B) \tag{A.9}$$

se A e B sono simili:

1. $det(A) = det(B)$
2. $p_A(x) = p_B(x)$
3. hanno gli stessi autovalori

Inoltre sappiamo valere :

$$A \overset{T}{\sim} \Lambda \implies e^{At} \overset{T}{\sim} e^{\Lambda t} \equiv (e^{At}T = Te^{\Lambda t}) \tag{A.10}$$

Definizione A.5.2. Una matrice **A** di ordine n è *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale **D** :

$$D = P^{-1}AP \qquad (A \overset{P}{\sim} D) \tag{A.11}$$

A.5.1 Teorema di diagonalizzabilità

Il teorema di diagonalizzabilità fornisce delle condizioni *nescessarie e sufficienti* affinche una matrice quadrata sia diagonalizzabile. Le condizioni affinche una matrice **A** di ordine n sia diagonalizzabile sono le seguenti:

1. Il numero di autovalori di **A**(contati con la loro molteplicità algebrica) è pari all'ordine della matrice.
2. La molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincide con la relativa molteplicità algebrica.

A.6 Forma di Jordan

Si consideri una matrice **A** di dimensione $n \times n$ i cui autovalori hanno molteplicità non unitaria. In tal caso non vi è garanzia che esistano n autovettori linearmente indipendenti con cui costruire una matrice di cambiamento di base T: dunque non sempre esiste una trasformazione di similitudine che porti ad una forma diagonale. Si dimostra, tuttavia, che estendendo il concetto di autovettore si possono determinare n *autovalori generalizzati* linearmente indipendenti che consentono di costruire una matrice **V** tale che valga $\mathbf{J} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$ in forma di Jordan, una forma canonica diagonale a blocchi che generalizza la forma diagonale.

Definizione A.6.1. Dato un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ e un numero e un numero intero

$p \geq 1$ definiamo blocco di jordan di ordine p associato a λ la matrice quadrata $p \times p$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ogni elemento lungo la diagonale di tale matrice vale λ, mentre ogni elemento lungo la sopradiagonale vale 1; ogni altro elemento vale 0. Dunque λ è un autovalore di moltplicità p di tale blocco di jordan.

Definizione A.6.2. Una matrice **J** è detta in forma di Jordan se essa è una matrice diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J_q} \end{bmatrix}$$

dove ogni blocco $\mathbf{J_i}$ lungo la diagonale è un blocco di Jordan. Da notare che il numero di blocchi di Jordan associati al singolo autovalore è pari alla molteplicità geometrica dell' autovalore stesso.

Trasformata di Laplace

Data una funzione nel tempo $f(t)$ la sua trasformata di Laplace $F(s)$ è definita:

$$\mathcal{L}[f(t)] := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{B.1}$$

dove s è una variabile complessa. La trasformata di Laplace è un operatore lineare che associa in modo univoco a una funzione del tempo $f(t)$ una funzione $F(s)$ di variabile complessa. L'operazione inversa è detta antitrasformata di Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ e permette di passare dal dominio della variabile complessa al dominio del tempo.

	$f(t)$	$F(s)$
costante	1	$\frac{1}{s}$
esponenziale	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-a}$
seno	$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
coseno	$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
	$e^{\alpha t}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
	$e^{\alpha t}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Trasformata Zeta

Data una successione(o sequenza) $f(k)$ con $k = 0, 1...$, la sua trasformata zeta $F(z)$ è definita:

$$\mathcal{Z}[f(k)] := f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k} \tag{C.1}$$

dove z è una variabile complessa.La trasformata $\mathcal{Z}$ è dunque la versione analoga della trasformata di Laplace,che però opera a tempo discreto e dunque assoccia in modo univoco a una sequenza $f(k)$, una funzione $F(z)$ di variabile complessa.Il passaggio da $F(z)$ a $f(k)$ prende il nome di antistrasformata zeta ($\mathcal{Z}^{-1}$).

	$f(k)$	$F(z)$
impulso	$\begin{cases} 1 \text{ per } k = 0 \\ 0 \text{ per } k > 0 \end{cases}$	1
costante	1	$\frac{z}{z-1}$
rampa	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
parabola	$\frac{k(k-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$