

Traccia n.2

Laboratorio di Automatica

Corso di laurea in Ingegneria Informatica

Roberto

*Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica,
Elettronica e Sistemistica*



2024/2025

Traccia n.2

1. Dato il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+10)}$$

progettare un regolatore standard digitale in grado di garantire:

- 1) Errore nullo rispetto ad un riferimento a gradino.
- 2) Sovraelongazione percentuale massima pari al 10% e tempo di assestamento minore di 2 s.

Passi da svolgere:

- (a) Implementare in Simulink il sistema.
 - (b) Tarare i parametri per regolatori standard del tipo PD, PI o PID, ipotizzando di **non** conoscere il modello dell'impianto.
 - (c) Discretizzare i regolatori ottenuti dopo opportuna scelta del passo di campionamento.
2. Dato il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3.5)^3}$$

progettare un controllore digitale in grado di garantire:

- (a) Errore massimo del 4% rispetto ad un disturbo $d(t)$ di carico modellato come un gradino unitario.
- (b) Sovraelongazione percentuale massima pari al 15% e tempo di salita minore di 2 s.

Indice

Indice	iii
1 Introduzione	1
1.1 Sistemi Dinamici	1
1.1.1 Proprietà dei Sistemi Dinamici	1
1.1.2 Modelli I-S-U e I-U(o ARMA)	4
1.1.3 Sistemi SISO(Single-Input-Single-Output)	4
1.2 Analisi in frequenza di sistemi LTI	5
1.3 Analisi della stabilità per sistemi in retroazione	5
1.3.1 Criterio di Nyquist	5
1.3.2 Margini di stabilità	6
1.3.3 Criterio di Bode	7
1.3.4 Luogo delle Radici	8
1.3.5 Stabilità Interna e Sensitività	8
1.4 Specifiche dei Sistemi di Controllo	9
1.4.1 Precisione Statica	9
1.4.2 Precisione Dinamica	9
1.5 Sintesi dei Sistemi di Controllo	10
1.5.1 Sintesi di Controllori	10
1.5.2 Sintesi nel Luogo delle Radici	11
1.5.3 Regolatori Standard	12
1.5.4 Sintesi per Discretizzazione	12
2 Progetto regolatore standard digitale	13
2.0.1 Discussione sulle specifiche	13
2.0.2 Risposta iniziale del sistema	15
2.0.3 Utilizzo del PID	16
2.0.4 Confronto nella risposta tra PID digitale e PID analogico	18
3 Progetto controllore digitale	19
3.0.1 Osservazioni preliminari	19
3.0.2 Specifica statica richiesta	20
3.0.3 Specifiche dinamiche richieste	21
3.0.4 Discretizzazione dell'impianto	27
A Diagrammi di bode	31

B	Diagramma di Nyquist	32
C	Trasformata di Laplace	33
D	Trasformata Zeta	34

Introduzione

Nella seguente relazione ci occuperemo della progettazione, date le specifiche ed i relativi modelli di riferimento di un regolatore standard digitale e di un controllore digitale. I sistemi a cui faremo riferimento sono descritti mediante la loro funzione di trasferimento (Fdt), la quale, come vedremo, permette di analizzarli e studiarne il comportamento. Prima di proseguire con

1.1 Sistemi Dinamici

Un sistema dinamico è un insieme di elementi ed oggetti matematici che interagiscono tra loro evolvendo nel tempo. Essi offrono un potente modo per modellare e comprendere una vasta gamma di fenomeni complessi.

Definizione 1.1.1. Un sistema dinamico Σ è così composto:

$$\Sigma = (T, X, U, Y, u(\cdot), y(\cdot), \phi, \eta)$$

- **Insiemi(o spazi):**

T insieme dei tempi.

X spazio di stato.

U immagine della funzione di ingresso.

Y immagine della funzione di uscita.

$u(\cdot)$ insieme delle funzioni(sequenze) di ingresso, $u(\cdot) : T \rightarrow U$.

$y(\cdot)$ insieme delle funzioni(sequenze) di uscita, $y(\cdot) : T \rightarrow Y$.

- **Funzioni(o mappe):**

$\phi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ funzione di transizione di stato, $\Phi : T \times T \times X \times U \rightarrow X$

$\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ funzione di uscita, $\eta : T \times X \times U \rightarrow Y$

1.1.1 Proprietà dei Sistemi Dinamici

Linearità(principio di sovrapposizione degli effetti)

Consideriamo un sistema dinamico TC prendendo due istanti di tempo, un istante iniziale t_0 ed un istante finale $t \in T$ con $t \geq t_0$. Scegliamo due ingressi ammissibili $u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot)$ e due stati legati a t_0 , $x_{t_0}^{(1)}, x_{t_0}^{(2)}$ che definiscono due stati al tempo (t):

- $x^{(1)}(t) = \phi(t, t_0, x_{t_0}^{(1)}, u_{[t_0, t]}^{(1)}(\cdot))$
- $x^{(2)}(t) = \phi(t, t_0, x_{t_0}^{(2)}, u_{[t_0, t]}^{(2)}(\cdot))$

e le relative uscite:

- $y^{(1)}(t) = \eta(t, x^{(1)}(t), u^{(1)}(t))$
- $y^{(2)}(t) = \eta(t, x^{(2)}(t), u^{(2)}(t))$

consideriamo inoltre le seguenti configurazioni di combinazioni lineari:

$$u^{(3)}(\cdot) = \alpha_1 u^{(1)}(\cdot) + \beta_1 u^{(2)}(\cdot), \quad x_{t_0}^{(3)} = \alpha_1 x_{t_0}^{(1)} + \beta_1 x_{t_0}^{(2)} \quad (1.1)$$

con α_1, β_1 due scalari arbitrari. Diremo, allora, che il sistema è lineare se indicando lo stato e l'uscita relativo alla (1.1), a partire da t_0 vale :

$$x^{(3)}(\cdot) = \alpha_1 x^{(1)}(\cdot) + \beta_1 x^{(2)}(\cdot), \quad y_{t_0}^{(3)} = \alpha_1 y_{t_0}^{(1)} + \beta_1 y_{t_0}^{(2)} \quad (1.2)$$

In altre parole possiamo affermare che se il sistema rispetta il principio di sovrapposizione degli effetti allora esso è lineare. Una conseguenza pratica che facilita l'analisi di questi sistemi è quella di poter suddividere la risposta totale:

$$risposta = risposta_{forzata} + risposta_{libera}$$

Stazionarietà(o tempo-invarianza)

Per poter comprendere la proprietà di stazionarietà è utile introdurre la seguente definizione.

Definizione 1.1.2. Lo shifting-temporale è un'operazione effettuata su un segnale(o funzione) che permette di anticiparlo o ritardarlo lungo l'asse dei tempi. Nello specifico, prendendo in considerazione uno shifting di $\tau \in T$ ed una funzione $f(t)$ applicando lo shifting si genera una nuova funzione $f_\tau(t) = f(t - \tau)$:

→ $\tau > 0$: **Ritardo**, shifting-destro

← $\tau < 0$: **Anticipo**, shifting-sinistro

Prendiamo ora in considerazione la seguente funzione di transizione di stato:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}(\cdot)) \quad (1.3)$$

scegliendo un $\tau \in T$ arbitrario ed effettuando uno shifting temporale, avremo la seguente espressione:

$$x(t) = \phi(t - \tau, t_0 - \tau, x_0, u_{[t_0, t)}^\tau(\cdot)) \quad (1.4)$$

dove l'ingresso $u^\tau(t) = u(t - \tau)$ è traslato istante per istante di τ .

Definizione 1.1.3. Un sistema dinamico è stazionario se:

$$\phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}(\cdot)) = \phi(t - \tau, t_0 - \tau, x_0, u_{[t_0, t)}^\tau(\cdot)) \quad (1.5)$$

Applicando quest'ultima definizione per $\tau = t_0$:

$$\phi(t - t_0, 0, x_0, u_{[0, t-t_0)}(\cdot)) \quad (1.6)$$

da cui, tre importanti conseguenze:

1. Il calcolo dello stato $x(t)$ dipende dalla durata $t - t_0$ dell'espreimento ed inoltre l'istante

iniziale t_0 può essere posto a 0 senza perdere di generalità.

2. La funzione di transizione di stato può essere così definita:

$$x(t) = \phi(t, x_0, u_{[0,t]}(\cdot))$$

(nota: t è il tempo ma è anche la durata $(t - t_0)$).

3. L'uscita non dipende esplicitamente dal tempo:

$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

questo implica che le matrici che descrivono il sistema nella rappresentazione I/S/U (1.1.2), A, B, C, D sono costanti

Principio di causalità

Un sistema dinamico è detto strettamente causale (o proprio) se l'uscita non può anticipare gli effetti dell'ingresso. Più formalmente, dato un sistema dinamico e due ingressi $u^{(1)}(\cdot)$, $u^{(2)}(\cdot)$ su un orizzonte temporale $[t_0, +\infty)$ per i quali vale:

$$u^{(1)}(\cdot) = u^{(2)}(\cdot), \quad t \in [t_0, t_1]$$

con t_1 un generico istante (i due ingressi sono uguali per un certo periodo di tempo definito da t_0 e t_1 , dopo di che differiscono) e

$$\phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t_1]}^{(1)}(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t_1]}^{(2)}(\cdot)) \quad (1.7)$$

$$\eta(t, x^{(1)}(t), u_{[t_0, t_1]}^{(1)}(\cdot)) = \eta(t, x^{(2)}(t), u_{[t_0, t_1]}^{(2)}(\cdot)) \quad (1.8)$$

allora tale sistema è strettamente causale (o proprio). I sistemi LTI sono strettamente causali o strettamente propri se, nel caso della I/S/U ((1.9) o (1.10)), la matrice ingresso-uscita D (scalare nel caso di un sistema SISO) è nulla oppure se, nel caso del modello I/U ((1.11) o (1.12)) al secondo membro è assente il termine che dipende da $u^{(n)}(t)$, ($\beta = 0$).

1.1.2 Modelli I-S-U e I-U(o ARMA)

Uno stesso sistema dinamico può essere rappresentato da diversi modelli, per i nostri scopi utilizzeremo:

- Modelli I/S/U(ingresso-stato-uscita):

- a tempo continuo(TC):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

- a tempo discreto(TD):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1.10)$$

dove:

n	Numero di stati
m	Numero degli ingressi
p	Numero di uscite
$u(\cdot)$	Ingressi $\in \mathbb{R}^m$
$x(\cdot)$	Stati $\in \mathbb{R}^n$
$y(\cdot)$	Uscite $\in \mathbb{R}^p$
A	Matrice dinamica ($\in \mathbb{R}^{n \times n}$)
B	Matrice degli ingressi ($\in \mathbb{R}^{n \times m}$)
C	Matrice d'uscita ($\in \mathbb{R}^{p \times n}$)
D	Matrice ingresso-uscita ($\in \mathbb{R}^{p \times m}$)

- Modelli I/U(ingresso-uscita):

- a tempo continuo(TC):

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1} \dot{y}(t) + \alpha_n y(t) = \beta_0 u^{(n)}(t) + \beta_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n u(t) \quad (1.11)$$

- a tempo discreto(TD):

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) = \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \alpha_n u(k-n) \quad (1.12)$$

1.1.3 Sistemi SISO(Single-Input-Single-Output)

I sistemi dinamici che tratteremo saranno sistemi SISO(Single-Input-Single-Output) dunque:

$$m = 1, p = 1 \implies u(\cdot), y(\cdot) \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \wedge C \in \mathbb{R}^{1 \times n} \wedge D \in \mathbb{R}$$

1.2 Analisi in frequenza di sistemi LTI

L'analisi nel dominio della frequenza dei sistemi dinamici LTI costituisce uno strumento particolarmente utile, essa si basa in prima istanza sullo studio del suo comportamento rispetto un ingresso di tipo sinusoidale, che grazie al principio di sovrapposizione degli effetti permette l'estensione dello studio rispetto a quei segnali per cui è possibile effettuare una scomposizione armonica. Ricadono in questa famiglia le funzioni periodiche sviluppabili in serie di Fourier e le funzioni dotate di trasformata di Fourier. L'analisi armonica ha messo in evidenza l'importanza della funzione $G(j\omega)$ che caratterizza completamente il comportamento in frequenza del sistema. Per questo motivo tale funzione, complessa di variabile reale ω , prende il nome di *risposta in frequenza* del sistema. Si indichi con $U(\omega)$ il fasore della componente armonica di pulsazione ω in ingresso e con $Y(\omega)$ il fasore della corrispondente componente armonica (in condizioni di regime) in uscita. A partire dalla rappresentazione I-U del sistema nel dominio di Laplace (o zeta) sostituendo la variabile vale la relazione:

$$Y(s) = G(s)U(s) \implies Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) \quad (1.13)$$

che esprime il fatto che per ogni pulsazione ω il fasore dell'uscita $Y(\omega)$ è uguale al prodotto del fasore di ingresso $U(\omega)$ per la risposta in frequenza $G(j\omega)$; quest'ultima rappresenta pertanto il *guadagno fasoriale* del sistema. Da (1.13) si deducono le relazioni

$$A_Y(\omega) = |G(j\omega)|A_U(\omega) \quad (1.14)$$

$$\varphi_Y(\omega) = \varphi_U(\omega) + \arg G(j\omega) \quad (1.15)$$

che legano ampiezza $A_U(\omega)$ e fase $\varphi_U(\omega)$ della componente armonica di pulsazione ω in ingresso ad ampiezza $A_Y(\omega)$ e fase $\varphi_Y(\omega)$ della corrispondente componente a regime in uscita. Si noti da (1.14) che il modulo $|G(j\omega)|$ della risposta in frequenza rappresenta il guadagno – amplificazione se $|G(j\omega)| > 1$ oppure attenuazione se $|G(j\omega)| < 1$ – del sistema alla pulsazione ω . Viceversa da (1.15) si evince che l'argomento $\arg G(j\omega)$ della risposta in frequenza rappresenta lo sfasamento – in anticipo se $\arg G(j\omega) > 0$ oppure in ritardo se $\arg G(j\omega) < 0$ – del sistema alla pulsazione ω .

1.3 Analisi della stabilità per sistemi in retroazione

In questa sezione vedremo brevemente i metodi ed i risultati teorici utilizzati per lo studio della stabilità nei sistemi retroazionati.

1.3.1 Criterio di Nyquist

Teorema 1 (Criterio di Nyquist). Supponiamo che la funzione di anello $L(s)$ non abbia poli sull'asse immaginario e sia P il numero di poli a parte reale strettamente positiva di $L(s)$. Allora, il numero di zeri di $1 + L(s)$ nel semipiano destro, Z , è pari a

$$Z = N + P$$

dove N rappresenta la somma algebrica delle rotazioni al finito (multipli interi di un angolo giro) che il diagramma di Nyquist di $L(s)$ presenta intorno al punto critico $-1+j0$. Ciascuna rotazione in senso orario si valuta con un $+1$, ciascuna rotazione in senso antiorario con un -1 .

Si noti che gli zeri della *return difference* $1 + L(s)$ sono i poli della funzione di trasferimento del sistema retroazionato e quindi la 1 ci dice quanti poli instabili presenta la funzione di trasferimento del sistema retroazionato. Affinché la retroazione sia stabile, deve necessariamente verificarsi che $Z = 0$ o, che è lo stesso, il sistema è stabile a ciclo chiuso se il diagramma di Nyquist di $L(s)$ presenta un numero di rotazioni in senso antiorario pari al numero di poli nel semipiano destro della funzione di anello.

1.3.2 Margini di stabilità

Nel sotto capitolo precedente è stato enunciato il Criterio di Nyquist, esso ci ha fornito un semplice strumento "binario" il quale ci dice se il sistema è stabile o meno ma non ci da ulteriori informazioni. Lo studio sui margini di stabilità, nel caso in cui il sistema sia stabile a ciclo chiuso (è verificato Nyquist), può essere effettuato sia sul diagramma di Nyquist che sui diagrammi di Bode. Vediamo le definizioni di margine di fase e margine di ampiezza che sono i nostri parametri indicatori per valutare la robustezza del sistema. Margini grandi indicano un sistema robusto rispetto a variazioni nei parametri e margini troppo piccoli portano a instabilità o risposte oscillanti.

1. Margine di Guadagno (G_m)

Il margine di guadagno rappresenta di quanto si può aumentare il guadagno prima che il sistema diventi instabile. Si misura come:

$$G_m = \frac{1}{|L(j\omega_{-180})|}$$

oppure in decibel:

$$G_m(\text{dB}) = -20 \log_{10} |L(j\omega_{-180})|$$

dove ω_{-180} è la frequenza alla quale la fase è -180° .

2. Margine di Fase (ϕ_m)

Il margine di fase è la distanza angolare tra la fase del sistema e -180° quando $|L(j\omega)| = 1$ (0 dB). Si calcola come:

$$\phi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_{0\text{dB}})$$

1.3.3 Criterio di Bode

È possibile semplificare, e di parecchio, il criterio di Nyquist per una categoria di funzioni di anello il cui diagramma polare è definito *regolare*. Una funzione di anello $L(s)$ a diagramma regolare soddisfa le seguenti condizioni:

1. Ha i poli a parte reale non-positiva (si includono poli a parte reale strettamente negativa e poli nell'origine);
2. Il diagramma dei moduli di $L(s)$ è monotono decrescente;
3. $K_b = \lim_{s \rightarrow 0} s^r L(s) > 0$, dove si ipotizza che siano presenti r poli nell'origine;
4. La pulsazione di attraversamento ω_c è unica.

Si noti che la condizione 2 esclude poli immaginari diversi dai poli nell'origine. La presenza di poli immaginari non è permessa perché ciò comporterebbe:

- Una pura risonanza;
- Un asintoto verticale sui moduli;
- La violazione della decrescenza monotona del modulo di $L(j\omega)$.

Abbiamo quindi il seguente importantissimo risultato.

Teorema 2 (Criterio di Bode). Per un sistema retroazionato unitario, in cui la funzione di anello $L(s)$ ha un diagramma di Nyquist regolare, una condizione necessaria e sufficiente per la *BIBO stabilità* del sistema retroazionato è che, individuato il margine di fase ϕ_m , si abbia:

$$\phi_m > 0.$$

Il criterio di Bode consente di valutare il margine di fase direttamente dal diagramma di Bode, senza dover disegnare il diagramma polare. La verifica si basa sul segno del margine di fase:

- Se la fase di $L(j\omega)$ in corrispondenza di ω_c è al di sopra di -180° , si ha $\phi_m > 0$;
- Al contrario, se la fase di $L(j\omega)$ in corrispondenza di ω_c è al di sotto di -180° , si ha $\phi_m < 0$.

La prova del criterio è relativamente semplice. Per una funzione di anello regolare, il criterio di Nyquist si riduce nel richiedere che:

$$Z = N,$$

ossia il diagramma polare (considerando solo pulsazioni positive) non deve circondare il punto critico.

Se il diagramma è monotono decrescente, ha guadagno positivo e la pulsazione di attraversamento ω_c è unica, allora il fasore $L(j\omega)$ si accorcia al crescere di ω . L'unico modo per non circondare il punto critico è:

- Intersecare la circonferenza critica dal lato inferiore del punto critico;
- Partire da un quadrante ben definito (con guadagno positivo);
- Garantire un margine di fase positivo $\phi_m > 0$.

1.3.4 Luogo delle Radici

Il **luogo delle radici** è una tecnica grafica utilizzata per studiare la posizione dei poli ad anello chiuso di un sistema in retroazione, al variare di un parametro del controllore, tipicamente il guadagno K . Dato un sistema con funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$L(s) = K \frac{N(s)}{D(s)},$$

le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso sono date da:

$$1 + L(s) = 0 \quad \implies \quad D(s) + KN(s) = 0.$$

Il luogo delle radici rappresenta graficamente come le radici dell'equazione si spostano nel piano complesso man mano che il parametro K varia da 0 a $+\infty$. Questo metodo consente di:

- Determinare la **stabilità** del sistema osservando se tutti i poli rimangono nel semipiano sinistro (o all'interno del cerchio unitario per sistemi discreti).
- Identificare le **prestazioni dinamiche**, come tempo di assestamento, sovraelongazione e tempo di salita.

Alcune regole fondamentali includono:

1. Il luogo delle radici inizia dai poli di $L(s)$ (quando $K = 0$) e termina negli zeri di $L(s)$ (quando $K \rightarrow \infty$).
2. Il numero di rami del luogo delle radici è uguale al numero di poli di $L(s)$.
3. Gli asintoti del luogo delle radici si trovano agli angoli:

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, \dots, n-m-1,$$

dove n e m sono i gradi del denominatore e del numeratore di $L(s)$.

1.3.5 Stabilità Interna e Sensitività

La **stabilità interna** di un sistema in retroazione si riferisce alla condizione in cui tutte le variabili interne del sistema rimangono limitate per ingressi limitati. Un sistema è internamente stabile se tutte le funzioni di trasferimento interne sono stabili, ovvero se tutti i poli di tali funzioni si trovano nel semipiano sinistro (o all'interno del cerchio unitario per sistemi discreti).

Le **funzioni di sensitività** sono utilizzate per analizzare la capacità di un sistema di seguire un riferimento, rigettare i disturbi e resistere a variazioni parametriche. Le principali funzioni di sensitività sono:

- **Funzione di Sensitività:** $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$, che misura la reiezione dei disturbi sull'ingresso.
- **Funzione di Sensitività Complementare:** $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$, che misura la capacità del sistema di seguire un riferimento.

La relazione fondamentale tra queste due funzioni è:

$$S(s) + T(s) = 1.$$

1.4 Specifiche dei Sistemi di Controllo

Le specifiche di un sistema di controllo definiscono le prestazioni desiderate e sono tipicamente suddivise in:

- **Specifiche statiche**, legate alla precisione del sistema a regime.
- **Specifiche dinamiche**, legate al comportamento transitorio del sistema.

1.4.1 Precisione Statica

La **precisione statica** misura la capacità del sistema di eliminare gli errori a regime per diversi tipi di ingressi, come gradini, rampe o parabole. È legata ai tipi di errore statico:

- **Errore a gradino**: per un ingresso costante, dipende dal guadagno statico del sistema.
- **Errore a rampa**: dipende dalla presenza di integratori nel sistema.
- **Errore a parabola**: dipende dal numero di poli integratori.

L'errore statico è calcolato come:

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)].$$

1.4.2 Precisione Dinamica

La **precisione dinamica** descrive la capacità del sistema di seguire un ingresso variabile nel tempo durante il transitorio. È influenzata da:

- Il **tempo di salita** (T_r): il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale.
- La **sovraelongazione** ($S\%$): il valore massimo superato rispetto al valore finale.
- Il **tempo di assestamento** (T_s): il tempo necessario affinché la risposta rimanga entro una certa tolleranza (2% o 5%) del valore finale.

1.5 Sintesi dei Sistemi di Controllo

La **sintesi dei sistemi di controllo** è il processo di progettazione di controllori che garantiscano il soddisfacimento di specifiche tecniche come la stabilità, la precisione e la velocità di risposta del sistema. Lo scopo della sintesi è trasformare un sistema iniziale, spesso non ottimale, in uno che rispetti i requisiti imposti dal progettista, mantenendo robustezza anche in presenza di incertezze o disturbi.

Le tecniche di sintesi includono:

- **Sintesi nei controllori:** questa metodologia si concentra sulla progettazione di controllori specifici come reti anticipatrici, reti ritardatrici e configurazioni più complesse come lead-lag. La sintesi nei controllori è spesso utilizzata per soddisfare requisiti di precisione e prestazioni dinamiche.
- **Sintesi nel luogo delle radici:** un approccio grafico basato sullo studio delle traiettorie dei poli ad anello chiuso al variare di un parametro (tipicamente il guadagno). Questo metodo è particolarmente utile per garantire la stabilità e soddisfare specifiche dinamiche.
- **Sintesi per discretizzazione:** consiste nella trasformazione di un controllore continuo in un controllore digitale, adatto per sistemi a tempo discreto. Questo approccio è essenziale per l'implementazione pratica in sistemi digitali.
- **Sintesi con i regolatori standard:** questa metodologia sfrutta regolatori predefiniti, come il PID, ottimizzati secondo criteri empirici (es. Ziegler-Nichols) o attraverso simulazioni, per ottenere prestazioni accettabili con un minimo sforzo progettuale.

1.5.1 Sintesi di Controllori

Lo scopo è progettare una legge di controllo $C(s)$ che, insieme alla funzione di trasferimento dell'impianto $G(s)$, garantisca il soddisfacimento delle specifiche desiderate. Le reti ritardatrici e anticipatrici sono particolarmente utili per modificare la risposta del sistema in base alle esigenze progettuali.

Rete Attenuatrice

La **rete attenuatrice** (o *Lag Network*) è progettata per migliorare la precisione statica del sistema, riducendo l'errore a regime. La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice è definita come:

$$C_{\text{lag}}(s) = K \frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1}, \quad \text{con } \alpha > 1.$$

La rete attenuatrice amplifica il guadagno a bassa frequenza, consentendo di ridurre significativamente l'errore statico rispetto a ingressi come gradini o rampe. Tuttavia, l'introduzione di un polo e di uno zero ravvicinati provoca un ritardo di fase che potrebbe influire leggermente sulla stabilità del sistema. Nonostante ciò, il ritardo introdotto è generalmente accettabile rispetto ai benefici ottenuti in termini di precisione.

Rete Anticipatrice

La **rete anticipatrice** (o *Lead Network*) è utilizzata per migliorare la stabilità e la velocità di risposta di un sistema. La sua funzione di trasferimento è espressa come:

$$C_{\text{lead}}(s) = K \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

Questo tipo di rete introduce un anticipo di fase, incrementando il margine di fase del sistema. Ciò si traduce in una maggiore stabilità e in una riduzione del tempo di assestamento. A differenza della rete ritardatrice, la rete anticipatrice agisce aumentando il guadagno alle alte frequenze, accelerando così la dinamica del sistema.

Le reti anticipatrici sono particolarmente efficaci in sistemi con margini di fase ridotti o in cui sono presenti oscillazioni indesiderate. Un esempio pratico è il controllo di sistemi robotici, dove la rete anticipatrice viene impiegata per garantire movimenti rapidi e precisi, minimizzando al contempo le oscillazioni.

1.5.2 Sintesi nel Luogo delle Radici

La **sintesi nel luogo delle radici** è una tecnica grafica utilizzata per progettare controllori basati sul posizionamento dei poli ad anello chiuso di un sistema. Partendo dalla funzione di trasferimento ad anello aperto $L(s)$, il luogo delle radici mostra come le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso si muovano nel piano complesso al variare di un parametro, tipicamente il guadagno K .

La progettazione consiste nel determinare il valore di K e, se necessario, aggiungere poli e zeri al sistema per garantire che i poli ad anello chiuso soddisfino specifiche di prestazione dinamica, come:

- Stabilità (tutti i poli nel semipiano sinistro per sistemi continui o nel cerchio unitario per sistemi discreti).
- Tempo di assestamento e di salita, legati alla parte reale dei poli.
- Sovraelongazione, dipendente dal rapporto tra la parte reale e immaginaria dei poli dominanti.

Dal punto di vista teorico, il luogo delle radici è costruito sulla base delle seguenti proprietà:

1. Le radici iniziano dai poli di $L(s)$ (quando $K = 0$) e terminano sugli zeri di $L(s)$ (quando $K \rightarrow \infty$).
2. Gli asintoti del luogo delle radici descrivono il comportamento delle radici a frequenze molto alte e dipendono dalla differenza tra il numero di poli e zeri.
3. La stabilità è garantita se tutte le radici si trovano nel semipiano sinistro (per s continuo).

La sintesi nel luogo delle radici è particolarmente utile per sistemi con parametri facilmente regolabili, come un guadagno K , e fornisce una visione intuitiva delle dinamiche del sistema.

1.5.3 Regolatori Standard

I **regolatori standard** sono una famiglia di controllori ampiamente utilizzati per la loro semplicità di implementazione e versatilità. Tra questi, il più comune è il **controllore PID** (Proporzionale-Integrale-Derivativo), che può essere utilizzato per soddisfare una vasta gamma di specifiche statiche e dinamiche.

Un regolatore PID è descritto dalla seguente legge di controllo:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt},$$

dove:

- K_p : il guadagno proporzionale, che influenza la velocità di risposta del sistema.
- K_i : il guadagno integrale, che elimina l'errore a regime.
- K_d : il guadagno derivativo, che migliora lo smorzamento e riduce le oscillazioni.

Dal punto di vista teorico, i regolatori standard si basano su una modellazione semplice e un approccio empirico alla regolazione dei parametri. Per esempio, tecniche come il metodo di Ziegler-Nichols forniscono linee guida per determinare K_p , K_i e K_d . In alternativa, i parametri possono essere ottimizzati per garantire che il sistema soddisfi specifiche di tempo di salita, sovraelongazione e tempo di assestamento.

I regolatori standard sono preferiti per la loro capacità di controllare una vasta gamma di sistemi, pur richiedendo un modello semplice del processo controllato. Tuttavia, possono presentarsi diversi problemi da gestire, il più importante è quello introdotto dal termine derivativo, ossia il **calcio derivativo** il quale si presenta nel segnale di controllo e potrebbe danneggiare l'impianto. Per risolvere il problema si possono adottare diverse tecniche come il prefiltraggio, il bypass dell'errore sulla componente derivativa, saturatore a valle del PID. Quest'ultimo potrebbe degradare le performance.

1.5.4 Sintesi per Discretizzazione

La **sintesi per discretizzazione** è una metodologia che consente di progettare un controllore digitale a partire da un controllore continuo progettato nel dominio s . Dal punto di vista teorico, la discretizzazione si basa sulla trasformazione delle equazioni differenziali del controllore continuo in equazioni alle differenze, che sono implementabili numericamente. I metodi principali di discretizzazione includono:

- **Invarianza degli impulsi**: conserva esattamente la risposta al gradino del sistema continuo, garantendo una corrispondenza precisa tra i due domini.
- **Approssimazione di Tustin**: utilizza la trasformazione bilineare per mappare il semipiano sinistro di s all'interno del cerchio unitario di z , garantendo stabilità.
- **Campionamento diretto**: trasforma direttamente il controllore continuo in uno digitale mantenendo la struttura generale della funzione di trasferimento.

La scelta del metodo di discretizzazione dipende dal tipo di applicazione e dalla frequenza di campionamento T_s .

Progetto regolatore standard digitale

2.0.1 Discussione sulle specifiche

La richiesta di progetto prevede l'utilizzo di un regolatore digitale del tipo PID, PI o PD in modo tale da ottenere come specifiche statiche un errore nullo rispetto ad un riferimento a gradino ed inoltre mantenere come specifiche dinamiche una sovraelongazione di al più 10% ed un tempo di assestamento inferiore ai 2sec.

Che tipo di regolatore standard usare?Perchè?

Usi comuni dei regolatori :

- P per semplicità, se l'errore a regime non è critico.
- PI se l'errore statico deve essere eliminato, ma la risposta rapida non è fondamentale.
- PD se si vuole migliorare la risposta dinamica senza preoccuparsi dell'errore a regime.
- PID per il massimo controllo dell'impianto, bilanciando velocità, precisione e stabilità

Seguendo dunque le caratteristiche di ogni regolatore si è scelto, date le specifiche da soddisfare, di utilizzare il PID.

Metodo utilizzato per ricavare i parametri

Il metodo utilizzato per ricavare i parametri del PID è quello del metodo di Ziegler-Nichols ad anello chiuso.

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_C$		
PI	$0.45K_C$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6K_C$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

Table 2.1: Tabella Ziegler-Nichols ad anello chiuso

L'utilizzo di questo metodo richiede un iniziale taratura del parametro K_C ricavato effettuando ripetute prove sul sistema retroazionato "semplice" ovvero alla quale viene applicato un guadagno proporzionale. Ciascuna prova consiste nell'applicare al sistema un gradino e valutare la risposta innalzando il K_P fino a raggiungere il valore K_C (ossia il K critico) che porta il sistema al limite.

Limiti del metodo utilizzato

Uno dei principali vantaggi di questo metodo è la sua semplicità di implementazione, in quanto non richiede un modello matematico del sistema. Inoltre, è un approccio sistematico che fornisce una prima configurazione del PID tramite tabella e senza dover procedere per tentativi. Tuttavia, presenta anche delle criticità. La principale è il rischio di instabilità, poiché il sistema può oscillare con ampiezze elevate, mettendo a rischio l'integrità dell'impianto. Per risolvere questi problemi, si può introdurre un saturatore sul segnale di controllo. Questo permette di limitare l'ampiezza delle oscillazioni durante il test, evitando che il segnale di controllo raggiunga livelli pericolosi per l'impianto. In alternativa, invece di portare il sistema fino all'instabilità, si può procedere con un incremento più graduale del guadagno, monitorando la risposta per evitare oscillazioni eccessive.

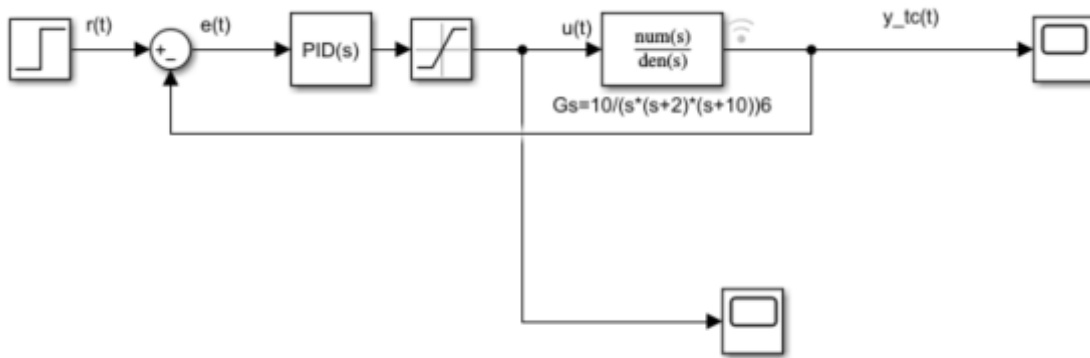


Figure 2.1: Esempio simulink con saturatore

Altre migliorie

Si assume che il processo possa essere approssimato da un modello del primo ordine con ritardo:

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-Rs} \quad (2.1)$$

Dove:

- μ è il guadagno statico del sistema.
- T è la costante di tempo del processo.
- R è il tempo di ritardo (dead time).

per determinare i tre parametri posso affidarmi a diverse tecniche:

- **Metodo tabellare;**
- **Metodo del punto di flesso;**
- **Metodo delle aree;**

2.0.2 Risposta iniziale del sistema

Analizziamo la risposta al gradino del nostro sistema con il seguente schema retroazionato iniziale:

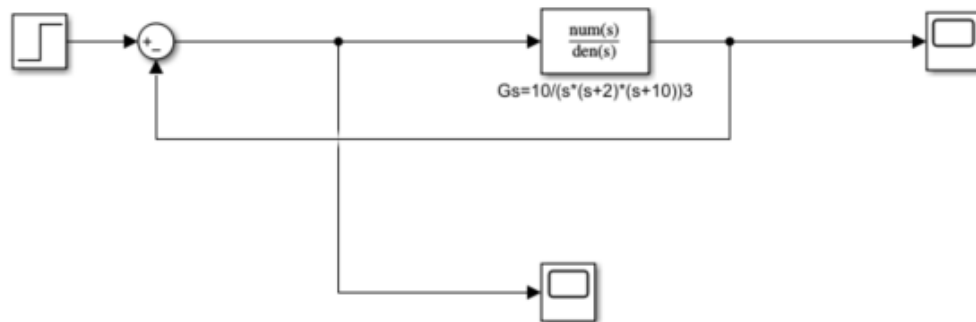


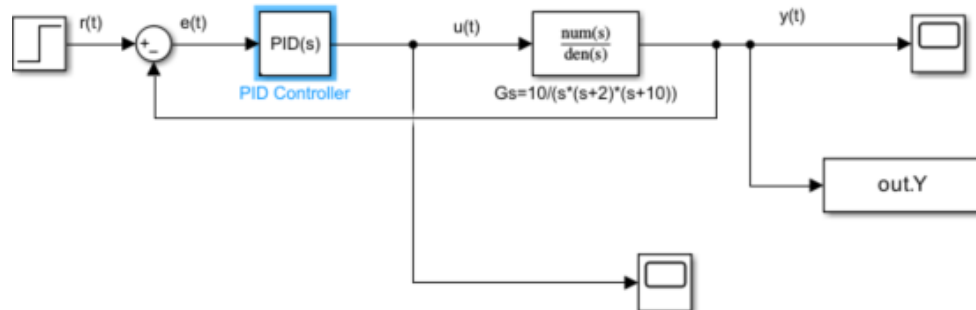
Figure 2.2: Schema senza PID



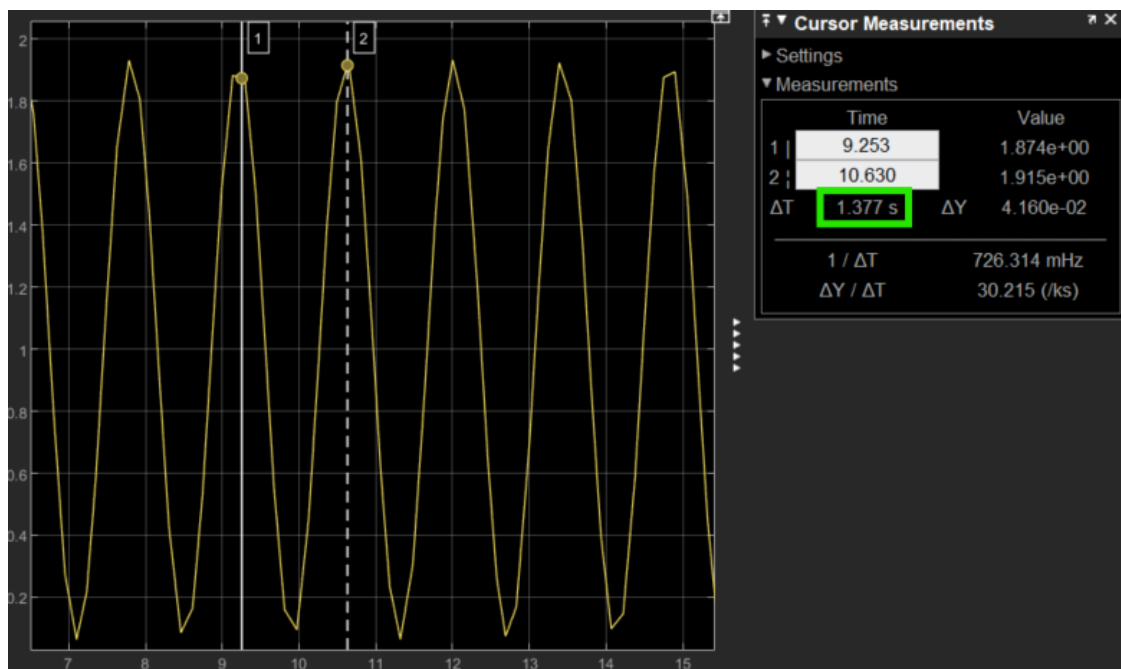
Come notiamo dai grafici, il tempo di assestamento è di $t_s = 4.5$ s il che non rispecchia le caratteristiche richieste. Per quanto riguarda l'overshoot in questo caso non è presente ma si ha un sistema molto lento anche nel tempo di salita. Vedremo nei seguenti paragrafi l'utilizzo di un regolatore digitale di tipo PID per risolvere i problemi sulle specifiche statiche e dinamiche.

2.0.3 Utilizzo del PID

Per applicare il metodo di Ziegler-Nichols ad anello chiuso per la taratura del PID partendo dal seguente schema:



Dove il PID in realta ha attivo solo la componente **Proporzionale(P)** che verrà aumentata fino a portare il sistema al limite e trovare il K_c , nel nostro caso il $K_c = 24$. Tramite lo scope di Simulink e gli strumenti di misura abbiamo determinato il $\Delta t = T_c = 1.377s$ che è anche il periodo.



Dopo aver trovato K_c, T_c tramite la tabella sopra riportata possiamo calcolare tutte le componenti del PID, a cui verranno fatte ulteriori modifiche per affinare le caratteristiche della risposta. Riportiamo tutti i valori all'interno del PID, cercando di ottenere le migliori performance dal nostro sistema. Tramite lo scope vediamo la risposta nella sua interezza, e successivamente le misurazioni effettuate per la verifica dei requisiti di progetto.

```

%metodo ad anello chiuso
%metodo ziegler-nichols ad anello chiuso:
Kc=24; %Kc CRITICO è circa 24,con componenti integrative e derivative nulle
Tc=1.377; %con Kc il TEMPO TRA LE OSCILLAZIONI è circa 1.3 s
KP=0.6*Kc;
TI=0.5*Tc;
TD=0.125*Tc;

```

Figure 2.3: Parametri su matlab

▼ Compensator formula

$$P \left(1 + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \right)$$

Main Initialization Saturation Data Types State Attributes

Controller parameters

Source: internal

Proportional (P): **KP*0.5** 7.2

Integral (I): **TI*0.1** 0.06885 ☐ Use I*Ts (optimal for codegen)

Derivative (D): **TD*3.3** 0.56801 ☐ Use externally sourced derivative

Filter coefficient (N): 20 ☒ Use filtered derivative

Figure 2.4: Taratura PID a tempo continuo



Figure 2.5: Risposta al gradino del sistema con PID in continuo

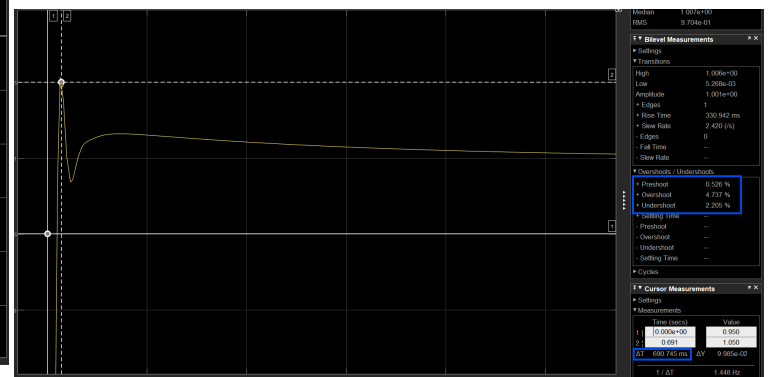


Figure 2.6: Misurazione risposta migliorata

Scelta del tempo di campionamento

L'ultima fase di progettazione è quella della scelta del passo di campionamento in modo tale da utilizzare un PID digitale. La scelta di T_s può avvenire secondo diversi criteri ma siccome da progetto si suppone di non conoscere il modello dell'impianto ci si può basare su una specifica dinamica, in particolare :

$$T_c \leq \frac{t_s}{40}$$
$$\frac{t_r}{20} \leq T_c \leq \frac{t_r}{10}$$

Avendo come specifica di riferimento il tempo di assestamento utilizzeremo la prima disequazione ottenendo così un valore pari a:

$$T_c \leq \frac{2}{40} \implies T_c \leq 0.05$$

Scegliamo dunque come tempo di campionamento $T_s = 0.04$ e mettiamo il PID a tempo discreto.

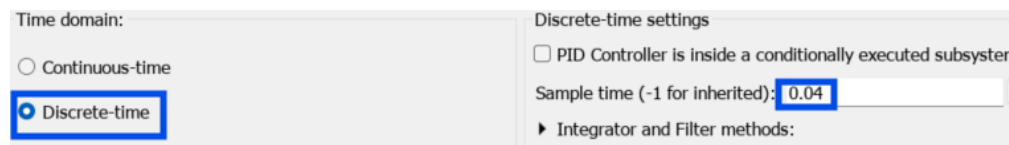
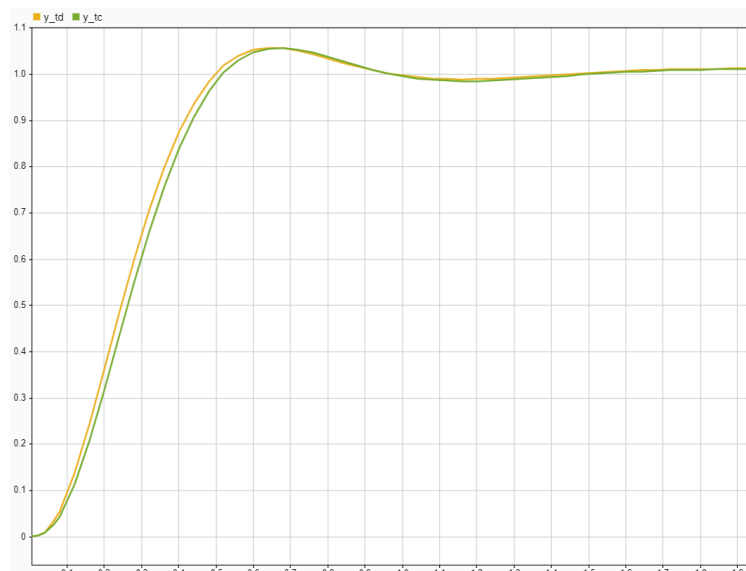


Figure 2.7: Pid tempo-discreto

2.0.4 Confronto nella risposta tra PID digitale e PID analogico



Progetto controllore digitale

In questo esercizio viene richiesto l'utilizzo di un controllore digitale per far rispettare al modello dell'impianto :

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 3.5)^3}$$

le seguenti specifiche

- Errore massimo del 4% rispetto ad un disturbo $d(t)$ di carico modellato come un gradino unitario
- Sovra-elongazione percentuale massima pari al 15% e tempo di salita minore di 2 sec

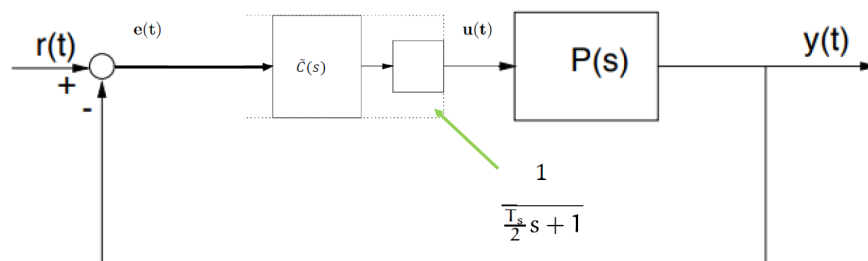
3.0.1 Osservazioni preliminari

L'impianto da controllare ha le seguenti caratteristiche.

Notiamo come l'impianto presenti un polo nell'origine e tre poli negativi reali e coincidenti, e non presenta zeri. Questa prima analisi ci suggerisce come il sistema sia un sistema di tipo 1, per via del suo polo nell'origine. Ed inoltre sappiamo che gli altri poli si trovano nella regione di convergenza dunque non creano particolari problemi, ma come ben sappiamo potrebbero essercene nel sistema retroazionato.

Scelta del tempo di campionamento

Prima di iniziare bisogna considerare la presenza del ricostruttore nel modello dell'impianto.



Quindi la funzione di trasferimento su cui lavoreremo sarà

$$P(s) = \frac{1}{T_s} H(s) G(s)$$

dove $H(s) = \frac{T_s}{1 + \frac{T_s}{2}s}$. Scegliendo un T_s secondo le specifiche del tempo di salita $t_r = 2$. Applicando la funzione $pole(Ps)$ vediamo che viene aggiunto un polo ma sempre nella regione


```
Ts = 0.12  ;%tr/20<=Ts=tr/10
Ps = 1/(1+s*Ts/2)*Gs;
```

Figure 3.1: Scelta tempo di campionamento

di convergenza, mentre non vengono apposte modifiche su poli nell'origine e dunque il sistema resta un sistema di tipo 1.

```
pole(Ps)

ans = 5x1 complex
    0.0000 + 0.0000i
   -16.6667 + 0.0000i
    -3.5000 + 0.0000i
    -3.5000 - 0.0000i
    -3.5000 + 0.0000i
```

Figure 3.2: Poli della Ps

3.0.2 Specifica statica richiesta

La prima specifica che ci viene richiesta dal nostro problema è quella di gestire un errore massimo(dunque a regime) inferiore al 4%, avendo un disturbo di carico:

$$d(t) = 1(t) \rightarrow D(s) = \frac{1}{s}$$

ma siccome vale il principio del modello interno l'errore a regime è nullo. Per esercizio invece consideriamo come disturbo di carico la rampa unitaria cercando di rispettare le stesse specifiche:

$$d(t) = \delta^{(-k)}(t) \rightarrow D(s) = \frac{1}{s^2}$$

Ricordiamo che le ipotesi di LTI ci permettono di esprimere l'uscita del sistema come :

$$y(t) = y_r(t) + y_{do}(t) + y_{di}(t) + y_n(t)$$

- $y_r(t)$ rappresenta l'uscita ideale dello schema di controllo nell'ipotesi che disturbi e rumori di misura siano assenti. Nella sezione precedente ne abbiamo studiato le caratteristiche rapportandoci all'errore di inseguimento;
- $y_{do}(t)$ rappresenta l'effetto che il disturbo posizionato sull'uscita dell'impianto da regolare ha sull'uscita dell'impianto regolato. Questa uscita si ricava ponendo a zero il riferimento, il disturbo di carico ed il rumore di misura;
- $y_{di}(t)$ rappresenta l'effetto che il disturbo posizionato sul canale di comando dell'impianto da regolare ha sull'uscita dell'impianto regolato. Questa uscita si ricava ponendo a zero il riferimento, il disturbo in uscita all'impianto da regolare ed il rumore di misura;

- $y_n(t)$ rappresenta l'effetto che il rumore di misura ha sull'uscita dell'impianto regolato. Questa uscita si ricava ponendo a zero il riferimento, il disturbo di carico ed il disturbo in uscita all'impianto da regolare;

Dalla teoria sappiamo che la L-trasformata della rampa è $D(s) = \frac{D_o}{s^2}$, ma come analizzato prima il nostro sistema è di tipo 1 e dunque ho bisogno di un controllore del tipo $C(s) = K$:

- se la funzione di anello è di tipo 1 allora tale errore potrà essere reso arbitrariamente piccolo ma mai nullo scegliendo un valore elevato della costante di posizione K

Ottimo per i nostri scopi di un errore inferiore al 4%.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_D(t) < 0.04 \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \frac{D_o}{s^2} \Rightarrow y_{D,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{\tilde{G}(s)}{s}}{1 + K \frac{\tilde{G}(s)}{s}} \frac{1}{s^2} \leq 0.04$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{G}(0)}{K \tilde{G}(0)} \leq 1/25$$

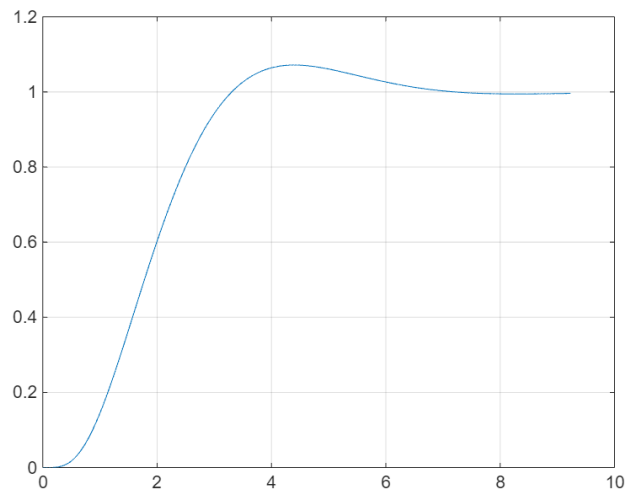
Ottenendo così $K \geq 25$. Aumentando il K ottengo margine di fase a ciclo aperto minore e sulle specifiche a ciclo chiuso ottengo un overshoot maggiore e diminuisce il t_s .

$$K = 25.7eC(s) = K$$

$$L(s) = C(s) * P(s) = \frac{51.4}{0.12s^5 + 3.26s^4 + 25.41s^3 + 78.64s^2 + 85.75s}$$

3.0.3 Specifiche dinamiche richieste

Un'analisi preliminare della funzione $L(s)$ retroazionata ci permette di notare come in realtà le specifiche richieste siano già soddisfatte, inoltre viene rispettato il criterio di Bode ed il sistema è BIBO stabile. Dallo stepinfo possiamo vedere un RiseTime < 2sec ed un Overshoot < 15%:



```

RiseTime: 1.9536
TransientTime: 6.2105
SettlingTime: 6.2105
SettlingMin: 0.9032
SettlingMax: 1.0716
Overshoot: 7.1568
Undershoot: 0
Peak: 1.0716
PeakTime: 4.4046

```

Figure 3.4: Step info

Figure 3.3: Risposta al gradino del sistema
 $L(s) = K * P(s)$

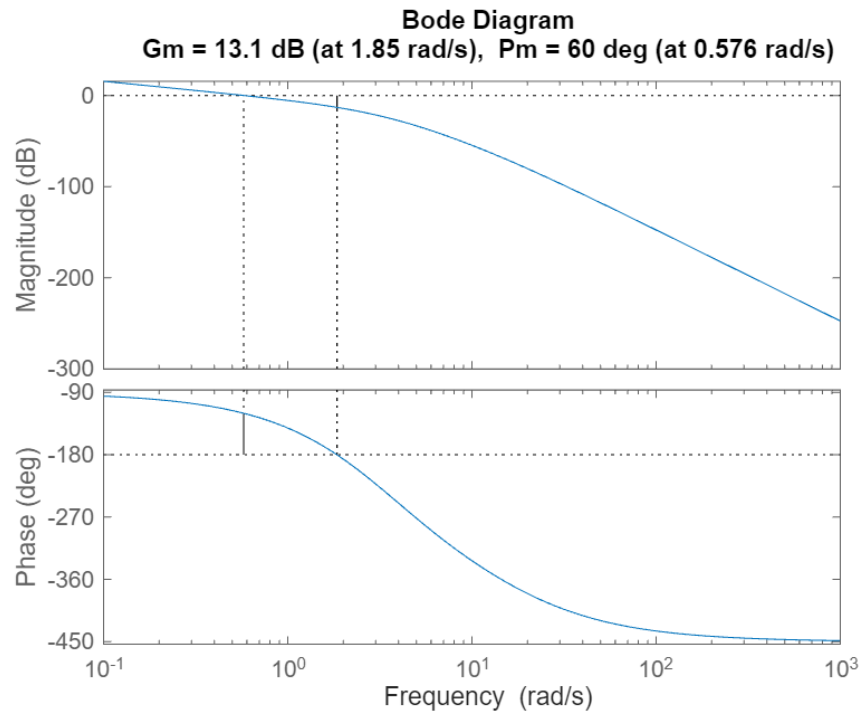


Figure 3.5: Diagrammi di bode della $L(s)$

Nonostante ciò per proseguire l'esercizio applicheremo comunque una rete corretttrice per migliorare ancora il sistema utilizzando dei vincoli sulle specifiche più restrittivi. Esplicitiamo uno dei primi legami globali utilizzati per passare tra grandezze nel dominio del tempo e quello delle frequenze. Le ipotesi alla base dei legami globali e della precisione statica è quella di poter approssimare il sistema a ciclo chiuso ad un sistema del secondo ordine:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E l'altra ipotesi è quella che la $L(s)$ sia compatibile con il criterio di Bode. Nel nostro caso entrambi le ipotesi sono verificate. Andiamo a definire il legame per il calcolo di δ , per il calcolo di ω_b ossia la pulsazione di banda passante e per ϕ_M ossia il margine di fase desiderato :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\log(S)}\right)^2}}, \quad \omega_b = \frac{0.8\pi}{t_r}, \quad \phi_M = 100 * \delta$$

Definiamo le variabili $S = 0.08$ ossia la specifica sulla sovraelongazione (posta all' 8% ma inizialmente era al 15%) e $t_r = 2\text{sec}$ ossia il tempo di salita richiesto da specifica. A questo punto arrivati possiamo calcolare le seguenti:

- **Fattore di smorzamento desiderato:**

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\log(S)}\right)^2}} = 0.6266$$


- **Margine di fase desiderato:**

$$\phi_M = 100 * \delta = 62.6577\text{grad}$$

- **Pulsazione di banda passante:**

$$\omega_b = \frac{0.8\pi}{t_r} = 1.2566 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

La pulsazione di banda passante sarà un lower bound per la scelta della nuova pulsazione di taglio ω_c .

```
omega_c= 1.26  ;%(siccome phi_m<90 -> (omega_c >=omega_b)
[M,phi] =bode(Ls,omega_c)

M = 0.3951
phi = -153.7200

phi_corrente = 180-abs(phi)

phi_corrente = 26.2800
```

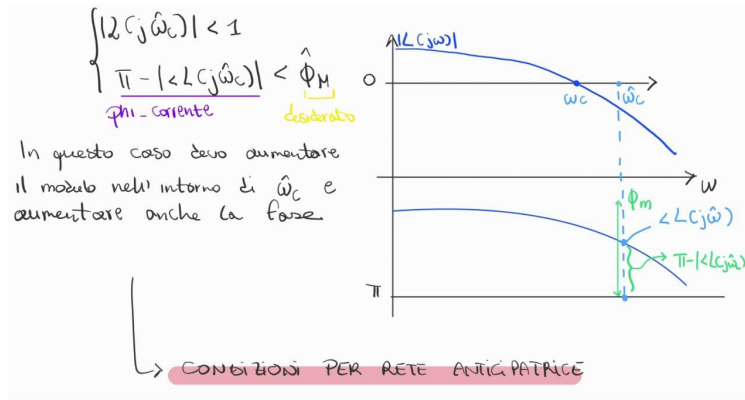


Figure 3.6: Caso rete anticipatrice

Impostiamo dunque l'algoritmo per la **rete anticipatrice**:

1. Incremento di guadagno:

$$m = \frac{1}{M} = 2.5308$$

2. Incremento di fase ammissibile:

$$\theta = \phi_M - \phi_{corrente} = 36.3777 \text{ grad}$$

- 3.

$$\alpha = \frac{m * \cos(\deg2rad(\theta)) - 1}{m * (m - \cos(\deg2rad(\theta)))} = 0.2376$$

- 4.

$$\frac{1}{\omega_c} \sqrt{\frac{1 - m^2}{\alpha^2 m^2 - 1}} = 2.3092$$

- 5.

$$C_{lead} = \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T} = \frac{2.309s + 1}{0.5486s + 1} \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 1$$

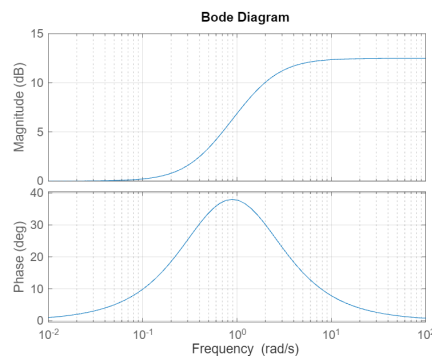


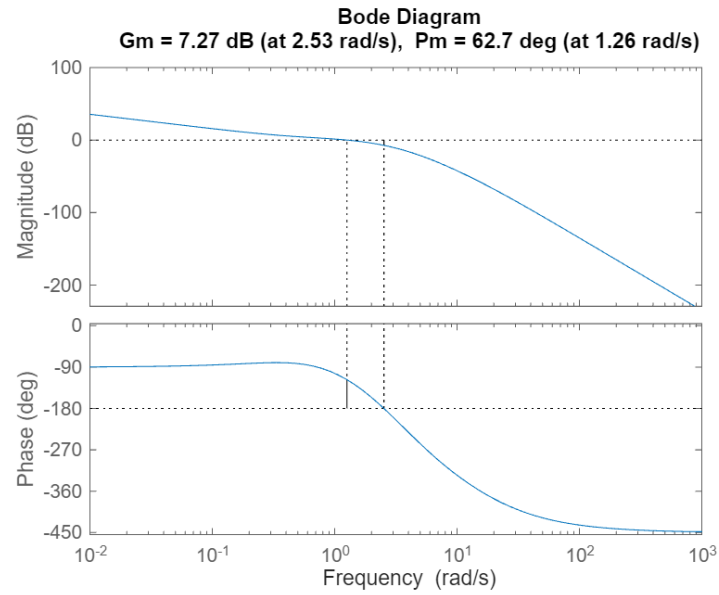
Figure 3.7: Diagramma di bode della C_{lead}

Definiamo la nuova $L(s)$ come:

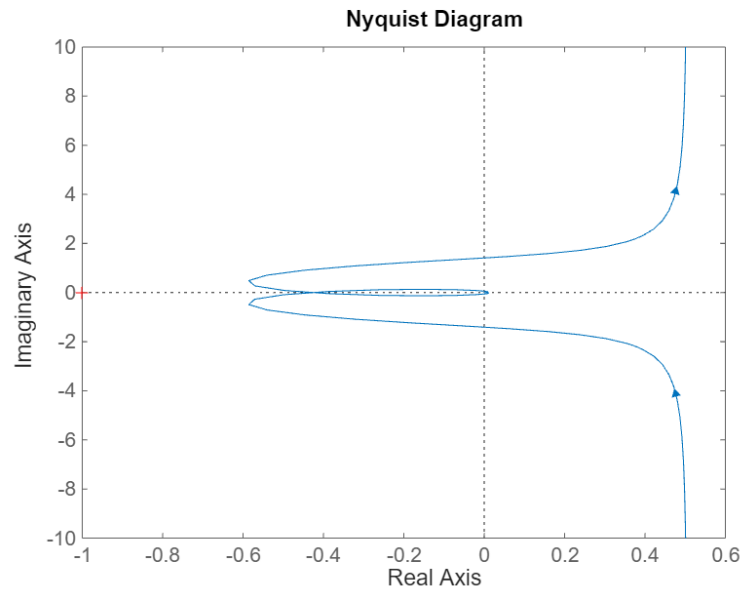
$$L(s) = C_{lead}L_{old}(s)$$

Come sperato abbiamo aumentato sia il margine di fase che il margine di guadagno dopo

```
margin(Ls)
```

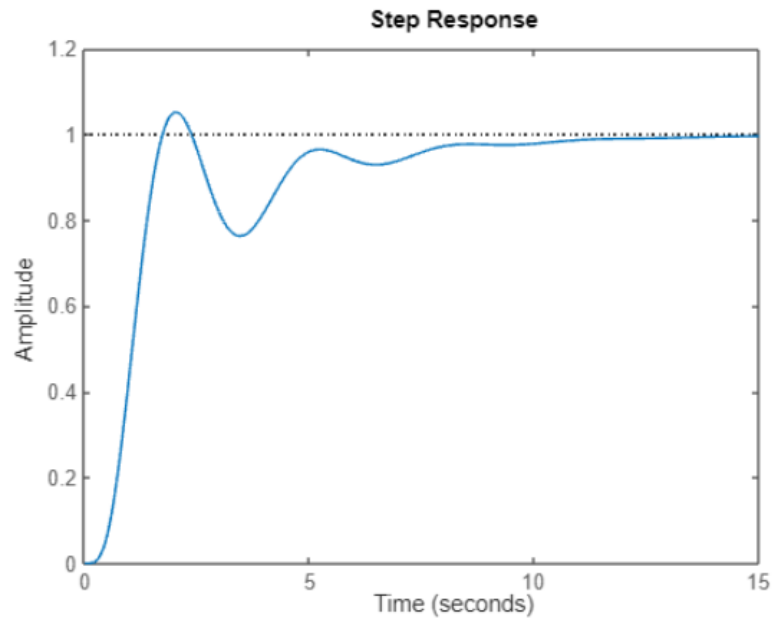


aver applicato la rete all'impianto. Tracciamo anche il diagramma di Nyquist per osservarne la robustezza.



Applichiamo ora gli strumenti in matlab per la visualizzazione della risposta al gradino dell'impianto e dei parametri ottenuti.

```
step(Fs)
```



```
stepinfo(Fs)
```

```
ans = struct with fields:
    RiseTime: 0.9592
    TransientTime: 10.1997
    SettlingTime: 10.1997
    SettlingMin: 0.7633
    SettlingMax: 1.0519
    Overshoot: 5.1863
    Undershoot: 0
    Peak: 1.0519
    PeakTime: 2.0366
```

Abbiamo migliorato l'impianto rendendolo più veloce per quanto riguarda il t_r e abbiamo diminuito l'overshoot. A fronte di ciò sono anche aumentate le oscillazioni nella risposta.

3.0.4 Discretizzazione dell'impianto

Per quando riguarda quest'ultimo passaggio finale si andrà a confrontare diversi metodi di discretizzazione e compararli tra loro. Su matlab definiamo le variabili necessarie per l'implementazione successiva degli schemi su Simulink. Per portare il controllore a tempo

```
[nump,denp]=tfdata(Gs,'v')
```

```
nump = 1x5
      0      0      0      0      1

denp = 1x5
      1.0000    10.5000    36.7500    42.8750      0
```

```
Cs=Cs*Clead
```

```
Cs =

      59.35 s + 25.7
      -----
      0.5486 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
[numc,denc]=tfdata(Cs,'v')
```

```
numc = 1x2
      59.3474    25.7000

denc = 1x2
      0.5486    1.0000
```

```
z=tf('z');
s=(z-1)/(Ts);
Cs_eul_avanti = minreal((59.35*s + 25.7)/(0.546*s + 1));
[num1,den1]=tfdata(Cs_eul_avanti,'v');
s=(z-1)/(z*Ts);
Cs_eul_indietro = minreal((59.35*s + 25.7)/(0.546*s + 1));
[num2,den2]=tfdata(Cs_eul_indietro,'v');

Cs_tustin = c2d(Cs,Ts,'tustin');
[num3,den3]=tfdata(Cs_tustin,'v');
```

discreto vanno fatte alcune doverose premesse, infatti non sempre il dominio di partenza è completamente mappato sul dominio di arrivo e ciò potrebbe portare inconsistenze. Per discretizzare il controllore partiamo dalla definizione della variabile:

$$z = e^{sT_s}$$

Da questa approssimazione vengono ricavati tutti i metodi che utilizzeremo successivamente.

Eulero all'avanti

$$z = e^{sT_s} \approx 1 + sT_s \implies s = \frac{z - 1}{T_s}$$

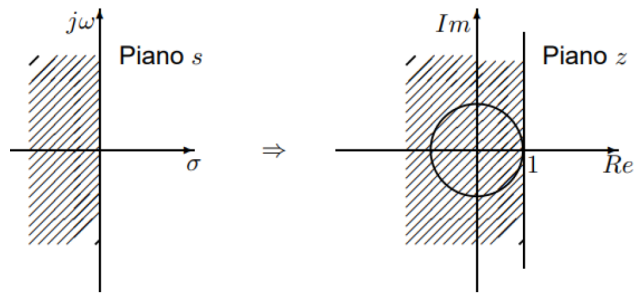
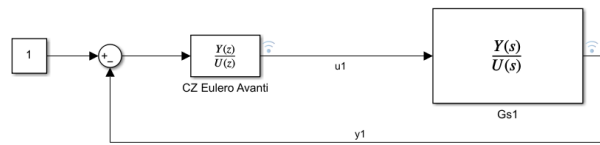


Figure 3.8: Map domini eulero all'avanti



Eulero all'indietro

$$z = e^{sT_s} = \frac{1}{e^{-sT_s}} \approx \frac{1}{1 - sT_s} \Rightarrow s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

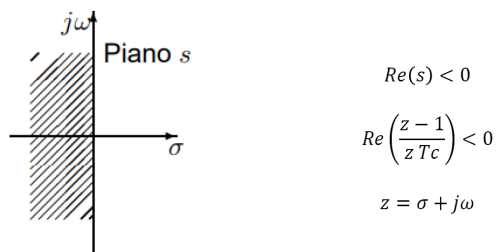
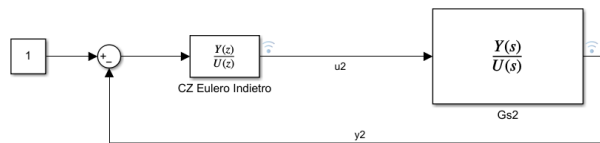
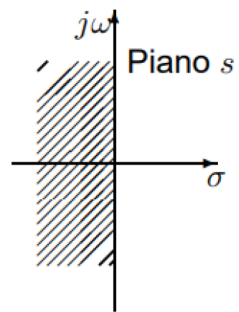
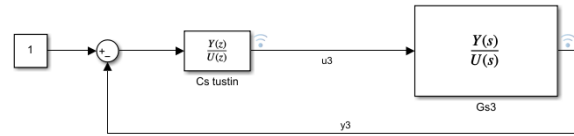


Figure 3.9: Map domini eurlero all'indietro



Tustin

$$z = e^{sT_s} = \frac{e^{s\frac{T_s}{2}}}{e^{-s\frac{T_s}{2}}} \approx \frac{1 + s\frac{T_s}{2}}{1 - s\frac{T_s}{2}} \Rightarrow s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(s) &< 0 \\ \operatorname{Re}\left(\frac{2}{T_c} \frac{z - 1}{z + 1}\right) &< 0 \\ z &= \sigma + j\omega \end{aligned}$$

Figure 3.10: Map domini Tustin

Confronto metodi

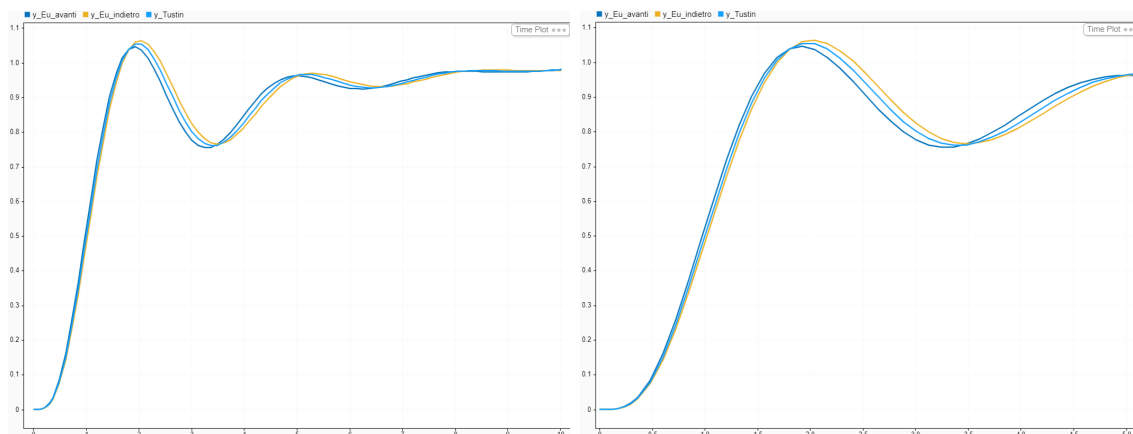


Figure 3.11: Confronto uscita

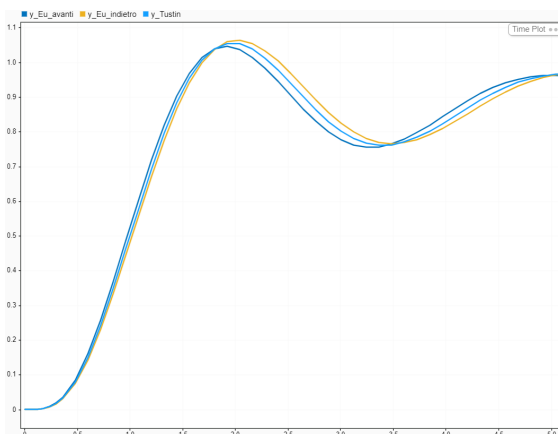


Figure 3.12: Zoom sull'uscita

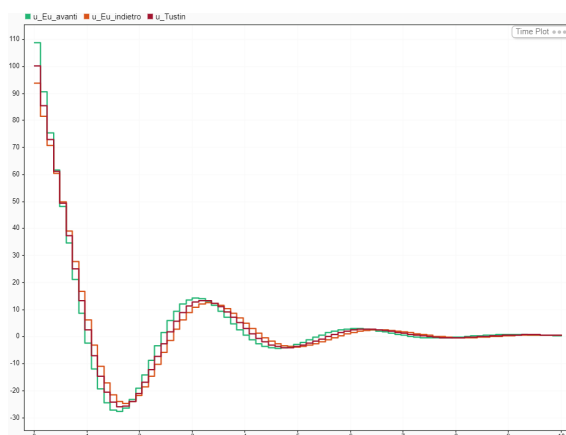


Figure 3.13: Confronto segnali di controllo

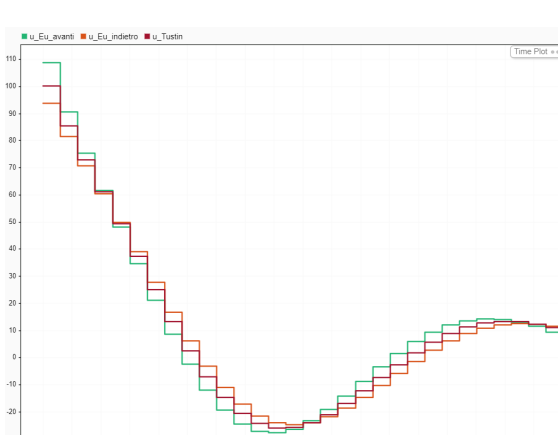


Figure 3.14: Zoom segnali di controllo

Sono state illustrate diverse tecniche di discretizzazione, ciascuna delle quali genera una versione a tempo discreto di un sistema inizialmente continuo.

Queste metodologie, applicate a una funzione di trasferimento $G(s)$, ne producono una rappresentazione discreta, sebbene tutte introducano distorsioni significative nel dominio delle frequenze. Per questo motivo, la scelta della frequenza di campionamento deve essere adeguata, non limitandosi al rispetto del teorema di Shannon.

È fondamentale valutare le prestazioni del sistema con il regolatore discreto attraverso un'analisi a posteriori. Spesso, la strategia più efficace consiste nel confrontare diverse tecniche di discretizzazione e adottare quella che garantisce i risultati migliori.

Diagrammi di bode

I diagrammi di Bode sono una coppia di grafici che permettono di visualizzare ed analizzare rispetto alle frequenze l'andamento di modulo e fase della risposta in frequenza. Si compongono di due grafici separati:

- **Diagramma del modulo:** mostra l'andamento del modulo della funzione di trasferimento $|G(j\omega)|$ in decibel (dB) rispetto alla frequenza ω , in scala logaritmica.
- **Diagramma della fase:** mostra l'andamento della fase della funzione di trasferimento $\arg(G(j\omega))$ (in gradi) rispetto alla frequenza ω , in scala logaritmica.

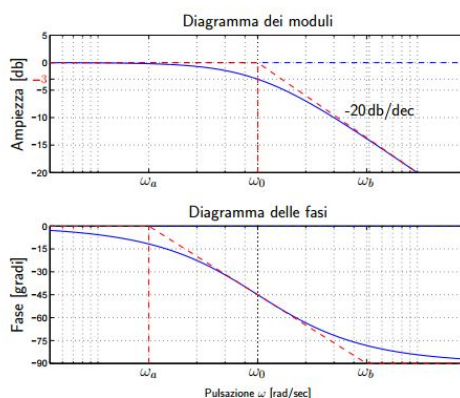


Figure A.1: Esempio bode

Scala Logaritmica

I diagrammi di Bode utilizzano una **scala logaritmica** per rappresentare la frequenza (ω) sull'asse orizzontale. Questo approccio offre diversi vantaggi come l'ampio intervallo di frequenze infatti la scala logaritmica permette di rappresentare in modo compatto e leggibile un intervallo molto ampio di frequenze, da valori molto bassi a valori molto elevati.

La scala logaritmica viene applicata anche al **modulo della funzione di trasferimento**, espresso in decibel (dB). Il modulo in dB è calcolato come:

$$\text{Modulo in dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|.$$

Questo consente di rappresentare il guadagno in modo pratico, poiché variazioni di guadagno moltiplicative si traducono in somma algebrica sul grafico:

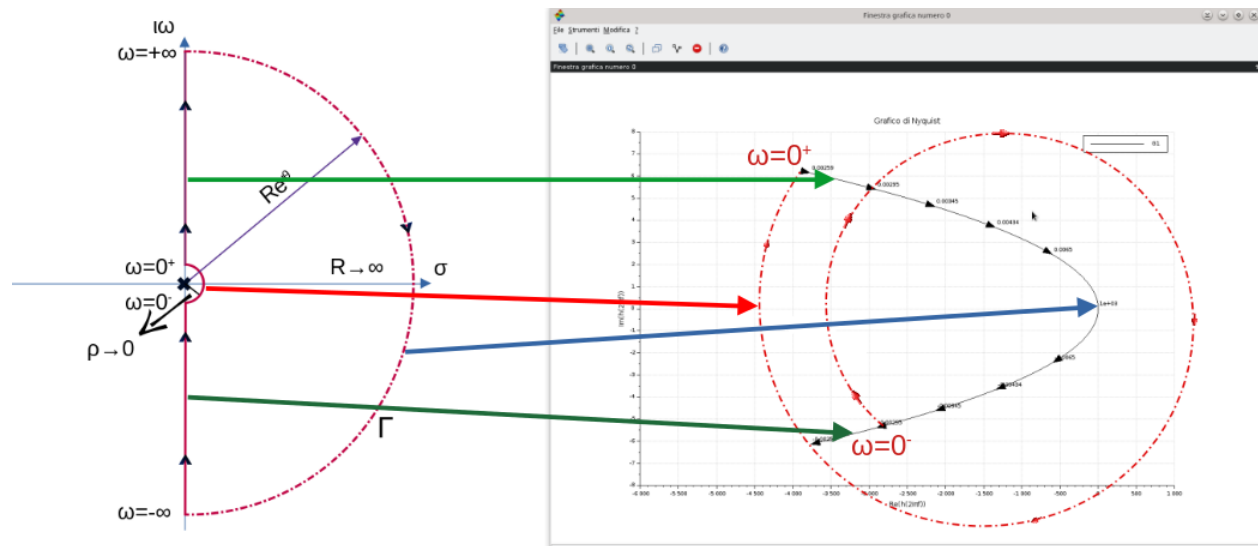
$$|G(j\omega)|_1 \cdot |G(j\omega)|_2 \quad \text{diventa} \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)|_1 + 20 \log_{10} |G(j\omega)|_2.$$

Grazie a questa proprietà, la combinazione di più contributi (ad esempio poli e zeri) può essere analizzata facilmente sommando i loro effetti individuali.

Diagramma di Nyquist

Il **diagramma di Nyquist** è una rappresentazione grafica della risposta in frequenza di un sistema lineare e tempo-invariante (LTI). Esso traccia il valore della funzione di trasferimento ad anello aperto $L(j\omega)$ nel piano complesso al variare della frequenza ω da 0 a $+\infty$ (e, nei casi di sistemi instabili, anche da $+\infty$ a $-\infty$). Questo diagramma fornisce informazioni cruciali sulla stabilità del sistema quando è chiuso in retroazione e permette di applicare il **criterio di Nyquist**.

Il criterio di Nyquist consente di determinare la stabilità del sistema a ciclo chiuso osservando il numero di rotazioni attorno al punto critico -1 nel piano complesso. Questo numero di rotazioni è legato al numero di poli instabili della funzione di trasferimento ad anello aperto. In particolare, il criterio stabilisce che, per garantire la stabilità a ciclo chiuso, il numero delle rotazioni attorno al punto -1 deve compensare esattamente il numero di poli instabili ad anello aperto. Il diagramma di Nyquist è particolarmente utile per analizzare sistemi con poli instabili, fornendo una chiara visualizzazione della relazione tra guadagno, fase e stabilità. Tuttavia, la sua costruzione richiede di considerare anche le frequenze negative per ottenere una curva completa. In generale, il diagramma di Nyquist rappresenta un potente strumento grafico per valutare la stabilità e progettare controllori in sistemi di controllo retroazionati.



Trasformata di Laplace

Data una funzione nel tempo $f(t)$ la sua trasformata di Laplace $F(s)$ è definita:

$$\mathcal{L}[f(t)] := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{C.1})$$

dove s è una variabile complessa. La trasformata di Laplace è un operatore lineare che associa in modo univoco a una funzione del tempo $f(t)$ una funzione $F(s)$ di variabile complessa. L'operazione inversa è detta antitrasformata di Laplace \mathcal{L}^{-1} e permette di passare dal dominio della variabile complessa al dominio del tempo.

	$f(t)$	$F(s)$
costante	1	$\frac{1}{s}$
esponenziale	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-a}$
seno	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
coseno	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
	$e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
	$e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

Trasformata Zeta

Data una successione(o sequenza) $f(k)$ con $k = 0, 1, \dots$, la sua trasformata zeta $F(z)$ è definita:

$$\mathcal{Z}[f(k)] := f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k} \quad (\text{D.1})$$

dove z è una variabile complessa. La trasformata \mathcal{Z} è dunque la versione analoga della trasformata di Laplace, che però opera a tempo discreto e dunque associa in modo univoco a una sequenza $f(k)$, una funzione $F(z)$ di variabile complessa. Il passaggio da $F(z)$ a $f(k)$ prende il nome di antistrasformata zeta (\mathcal{Z}^{-1}).

	$f(k)$	$F(z)$
impulso	$\begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k > 0 \end{cases}$	1
costante	1	$\frac{z}{z-1}$
rampa	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
parabola	$\frac{k(k-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$