Equazioni costitutive in forma simbolica

Il resistore.

R)

$$v(t) = R\,i(t) \xrightarrow{S[\;]} \underline{V} = R\,\underline{I} \rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R$$

$$\begin{cases} Z_R = R \\ Z_I = 0 \end{cases}$$

L’impedenza di un resistore è solamente reale, non c’è la parte immaginaria. Se si scrivesse quest’impedenza nella forma polare:

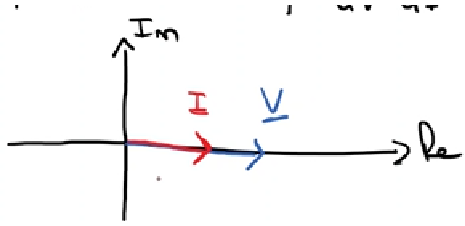
$$\begin{cases} |Z| = R \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Supponiamo $\alpha_V = 0$

Supponiamo che la fase della tensione sia pari a 0.

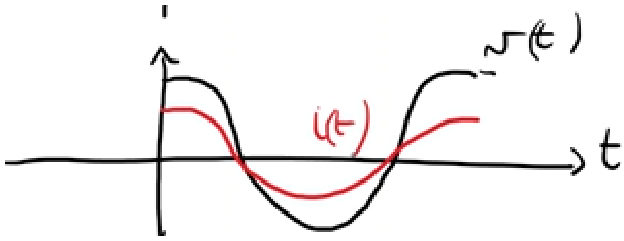
$$\varphi = \alpha_V - \alpha_I \Rightarrow \alpha_I = -\varphi = 0$$

Se andassi a disegnare nel piano complesso le grandezze:



Ovviamente le grandezze dipendono dalla resistenza.

Disegniamo le grandezze nel tempo.



Ovviamente sono in fase.

Vediamo l’induttore e come prima applichiamo la trasformata di Steinmetz.

L)

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{S[\;]} \underline{V} = j\omega L\,\underline{I} \rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = j\omega L$$

Attenzione, mettiamo il trattino sotto l’impedenza perché è un numero complesso, ma non è un fasore.

$$\begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = \omega L \end{cases} \qquad \text{SOLO IMMAGINARIA}$$

Vediamo modulo e sfasamento.

$$\begin{cases} |Z| = \omega L \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Perché:

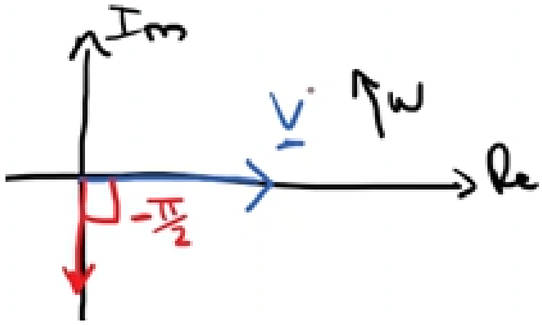
$$j\omega L = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

È come se ci ponessimo a 90° nel piano complesso, c’è solo la parte immaginaria.

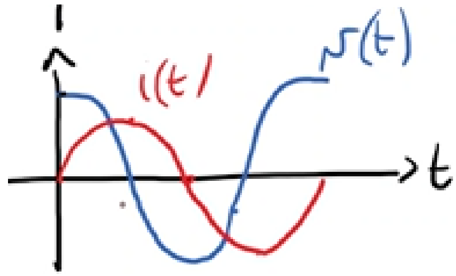
Supponiamo $\alpha_V = 0$

$$\varphi = \alpha_V - \alpha_I \rightarrow \alpha_I = -\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Nel piano complesso avremo uno sfasamento della corrente di 90°.



Vediamo nel tempo. La corrente è sfasata in ritardo di 90° rispetto alla tensione.



L'ultimo elemento che ci manca è la capacità.

C)

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \xrightarrow{SC} \underline{I} = j\omega C\,\underline{V} \rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C}$$

Possiamo facilmente individuare la parte reale e la parte immaginaria. La parte reale è 0. Abbiamo solo la parte immaginaria, ma negativa.

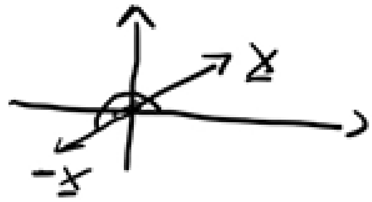
$$\begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = -\frac{1}{\omega C} \end{cases}$$

SOLO PARTE IMMAGINARIA NEGATIVA

Andiamo a scrivere il modulo e la fase. Ricordando che:

$$-\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-j\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Perché se ho un fasore:



Questo si ritraduce:

$$-\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Quindi abbiamo la rappresentazione polare.

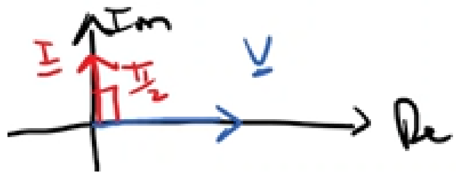
$$\begin{cases} |Z| = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Anche in questo caso, supponiamo lo sfasamento della tensione uguale a 0.

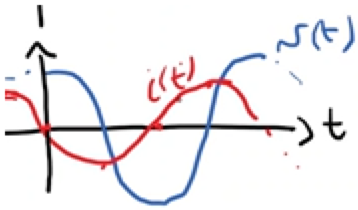
Supponiamo $\alpha_V = 0$

$$\varphi = \alpha_V - \alpha_I \rightarrow \alpha_I = -\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Nel piano complesso:



Nel tempo:



La corrente è in anticipo di 90° rispetto alla tensione.

L'impedenza è data dalla resistenza e dalla reattanza.

$$\underline{Z} = Z_R + j Z_I$$

$$\downarrow$$

$$R + jX$$

$\hookrightarrow$ REATTANZA

Abbiamo visto che il resistore non ha parte immaginaria, ma induttore e condensatore sì, Quindi possiamo avere 2 tipi di reattanze.

$$\underline{Z} = Z_R + j Z_I$$

$$\downarrow$$

$$R + jX$$

$\hookrightarrow$ REATTANZA

- $\to X_L = \omega L$ REATTANZA INDUTTIVA
- $\hookrightarrow X_C = -\frac{1}{\omega C}$ REATTANZA CAPACITIVA

Quando la reattanza è positiva si dice induttiva, quando è negativa si dice capacitiva.

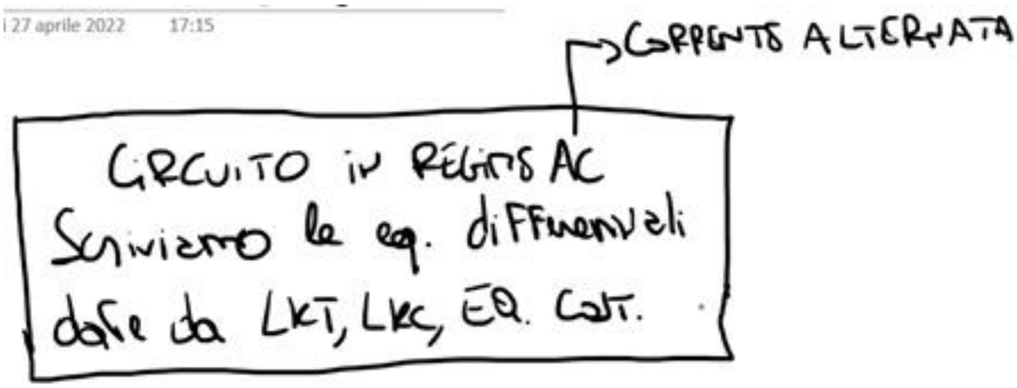
$$X = f(\omega) \longrightarrow \text{RISPOSTA IN FREQ.}$$

Al variare del circuito, si comporterà in maniera diversa.

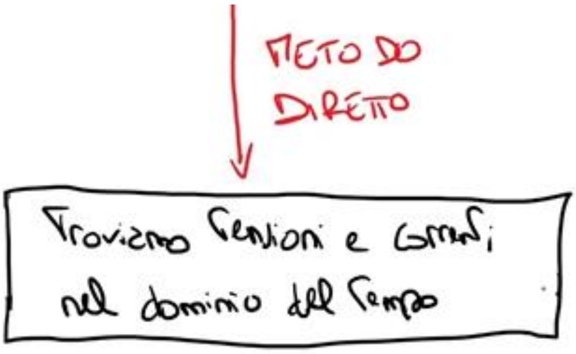
Dobbiamo sottolineare il fatto che in un circuito a regime sinusoidale abbiamo una risposta in frequenza, cioè il circuito si comporta in maniera diversa.

Metodo simbolico

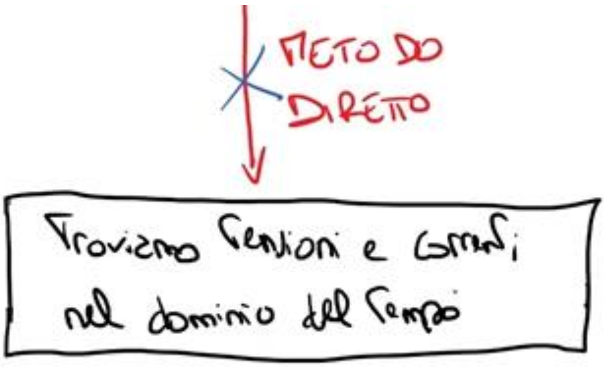
Abbiamo visto le equazioni costitutive in forma simbolica, le LKC e le LKT in forma simbolica. Introduciamo un metodo di risoluzione.



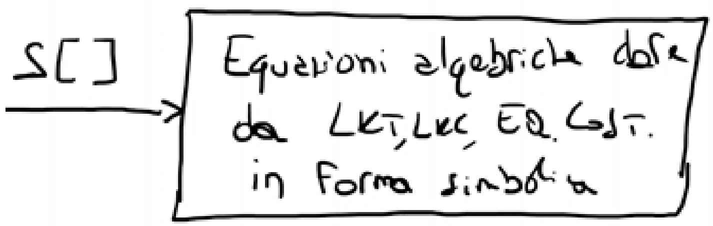
Uno dei metodi per risolvere questo circuito è il metodo diretto, cioè risolvere le equazioni differenziali.



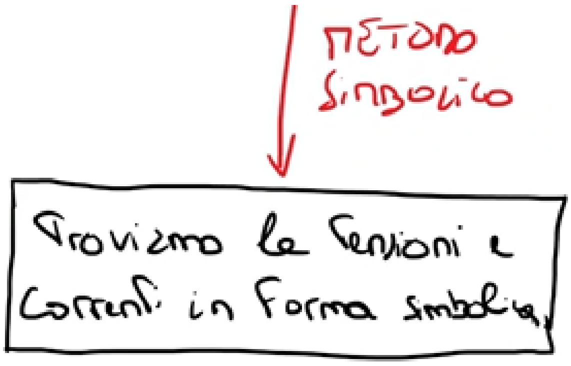
Il problema di questo approccio è che è molto complicato.



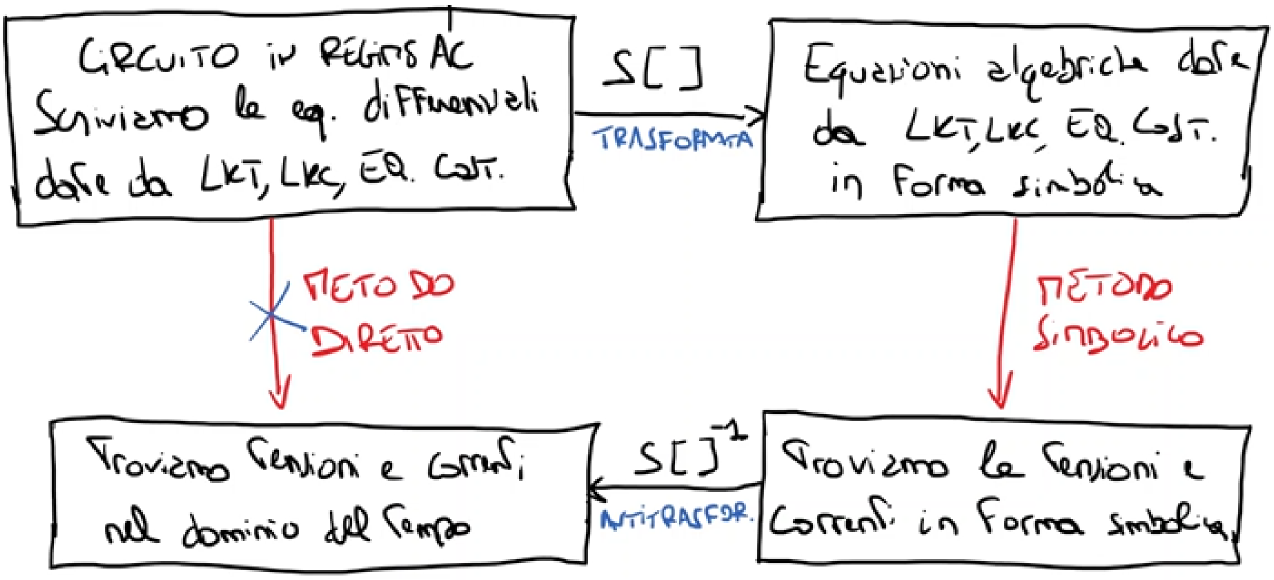
Possiamo fare un'altra cosa, trasformiamo queste equazioni differenziali con la trasformazione di Steinmetz.



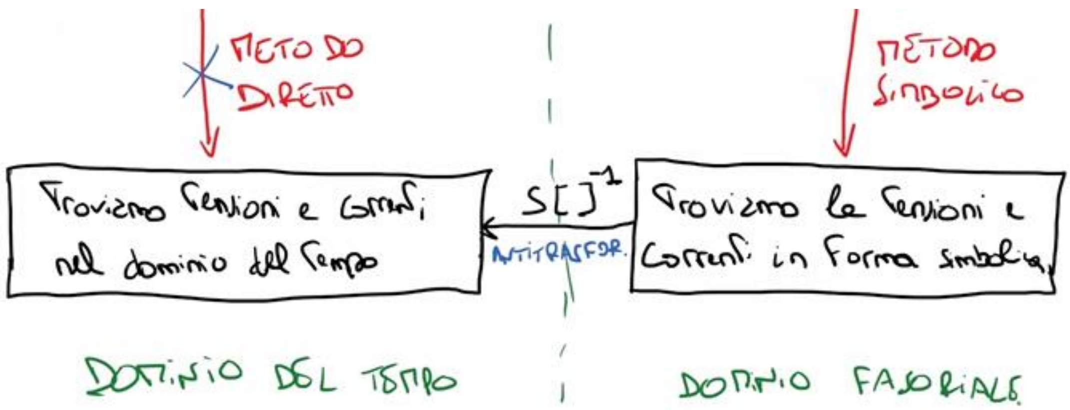
Risolviamo il sistema algebrico tramite il metodo simbolico.



Quello che ci interessa a noi sono le equazioni nel dominio del tempo, quindi dobbiamo fare un'anti trasformata.

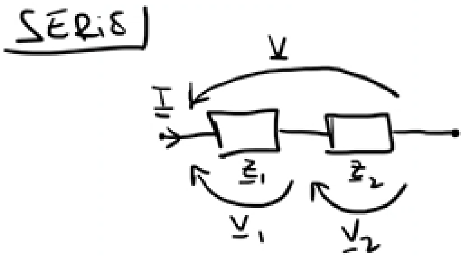


Abbiamo dei passaggi in più, ma il procedimento è molto più semplice.



In pratica, quello che si fa è partire dal circuito in regime sinusoidale, si trasforma il circuito nel dominio fasoriale, lo si risolve e si ritorna nel dominio del tempo.

Vale tutto quello che è stato detto (convenzioni).



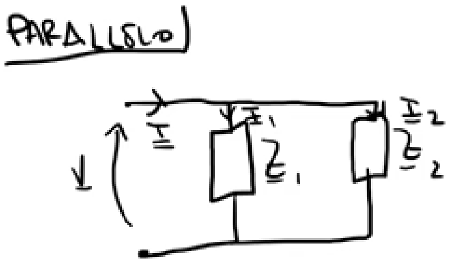
$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} = \underbrace{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}_{\underline{Z}_{eq}} \underline{I}$$

Una serie di impedenze è data dalla somma delle impedenze.

Questo vuol dire:

$$\underline{Z}_1 = Z_{R_1} + j Z_{I_1}$$
$$\underline{Z}_2 = Z_{R_2} + j Z_{I_2}$$
$$\Rightarrow Z_{eq} = (Z_{R_1} + Z_{R_2}) + j(Z_{I_1} + Z_{I_2})$$

Se avessimo un parallelo:



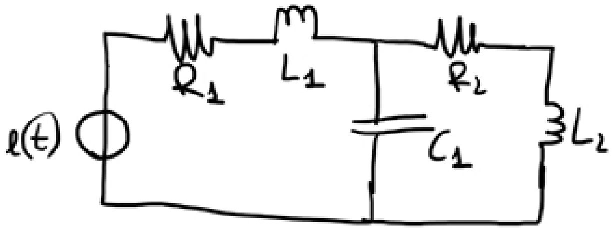
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right)}_{\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{Y}_{eq}} \underline{V}$$

Ovviamente Z è complesso, quindi le divisioni sono meno immediate. Y vuol dire ammettenza, è solo un modo per scriverlo.

Vedremo che questi calcoli si possono fare con la calcolatrice.

Esercizio

7 aprile 2022 17:50



$e(t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot \sin(\omega t+30°)\ V$

$f=50\ Hz$

$R_1=0{,}1\ \Omega \qquad R_2=5{,}2\ \Omega$

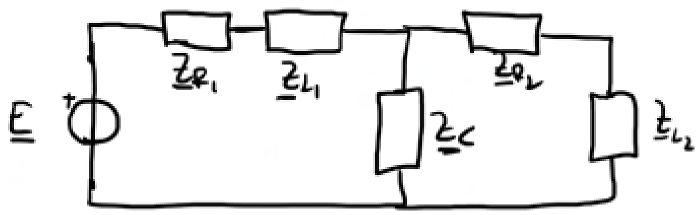
$L_1=0{,}64\ mH \qquad L_2=12\ mH$

$C_1=180\ \mu F$

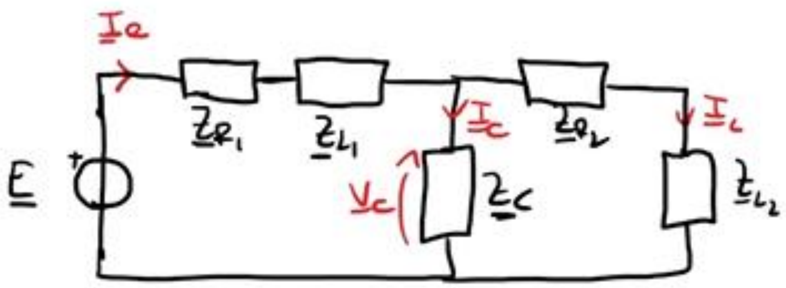
Calcolare tutte le correnti e la tensione nel condensatore.

Ridisegniamo il circuito nel dominio fasoriale.

① TEMPO → FASORI



Riscriviamo le incognite.



Portiamo e di t nel dominio fasoriale.

$$e(t)=\sqrt{2}\cdot 230 \sin(\omega t+30°)\ V$$

$$\downarrow$$

$$\underline{E}=230\, e^{j30°}$$

Chiaramente si può passare il seno in coseno e viceversa, non cambia nulla.

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \sin(\omega t + 30°) \ V$$

$$\underline{E} = 230\, e^{j30°}$$

Questo è il generatore di tensione. Vediamo le impedenze.

IMPEDENZE:

$$\underline{Z}_{R_1} = R_1 = 0{,}1 \ \Omega$$

$$\omega = 2\pi f = 314{,}16 \ rad/s$$

Abbiamo calcolato l'omega, partendo dalla frequenza.

IMPEDENZE:

$$\omega = 2\pi f = 314{,}16 \ rad/s$$

$$\underline{Z}_{R_1} = R_1 = 0{,}1 \ \Omega$$

$$\underline{Z}_{L_1} = jX_{L_1} = j\omega L_1 = j\ 314{,}16 \cdot 0{,}64 \cdot 10^{-3} = j0{,}2 \ \Omega$$

Vediamo ZC.

$$\underline{Z}_C = jX_C = -\frac{j}{\omega C} = -17{,}66j \ \Omega$$

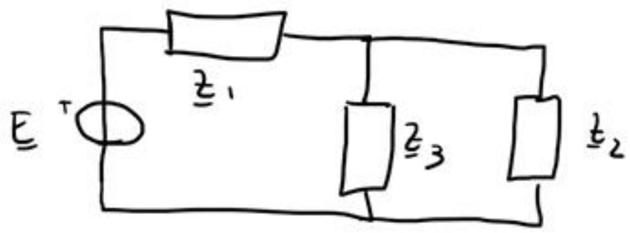
Vediamo ZR2, l'altro resistore.

$$\underline{Z}_{R_2} = R_2 = 5{,}2 \ \Omega$$

Poi ZL2.

$$\underline{Z}_{L_2} = jX_{L_2} = j\omega L_2 = j \cdot 314{,}16 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 3{,}77j \ \Omega$$

Abbiamo trasformato tutto nel dominio fasoriale. Vediamo di semplificare qualcosa. Ci sono 2 serie.

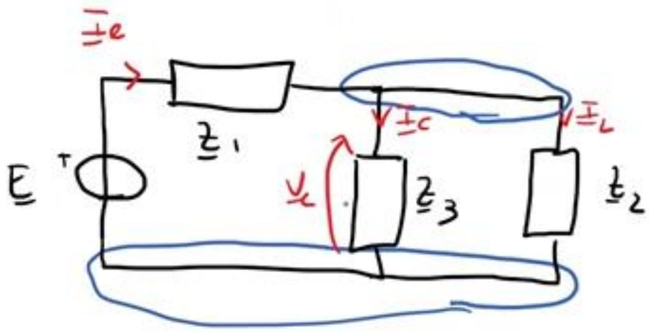


$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{L_1} = 0{,}1 + j0{,}2$$
$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_{L_2} = 5{,}2 + j\,3{,}77$$
$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_C = -17{,}66j$$

Il secondo punto è risolvere il circuito.

(2) Risolviamo il circuito nel dominio fasoriale

Abbiamo 2 nodi (funzionali).



Ci viene in aiuto il teorema di Millman.

Applichiamo Millman: $$\underline{V}_C = \frac{\underline{E}/\underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3}$$

Nella calcolatrice:

$$\underline{X} = Xe^{j\alpha} =$$
$$= X\angle\alpha$$

$$\underline{V}_c = \frac{\underline{E}/\underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3} = 197{,}68 + 108{,}58j$$

$$= 225{,}53 \angle 28{,}78°$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{V}_c}{\underline{Z}_3} = 12{,}76 \angle 118{,}78°$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V}_c}{\underline{Z}_2} = 35{,}11 \angle -7{,}16°$$

$$LKC: \quad \underline{I}_e = \underline{I}_c + \underline{I}_L = 29{,}49 \angle 13{,}34°$$

Manca il terzo passo, dal dominio fasoriale al dominio del tempo. Per questo si è lasciata la rappresentazione polare, per lasciarlo più semplice.

③ FASORI → TEMPO

$$\underline{V}_c = 225{,}53 \angle 28{,}78°$$

$S[\,]^{-1}$

$$v_c(t) = 225{,}53 \cdot \sqrt{2}\, \sin(\omega t + 28{,}78°)$$

$$i_c(t) = 12{,}76 \cdot \sqrt{2}\, \sin(\omega t + 118{,}78°)$$

Lo sfasamento tra tensione e corrente sul condensatore è 90°, riporta.

$$i_L(t) = 35{,}11 \sqrt{2}\, \sin(\omega t - 7{,}16°)$$

$$i_e(t) = 29{,}49 \sqrt{2}\, \sin(\omega t + 13{,}34°)$$

Lo sfasamento ai capi di Z2 non è 90°, perché abbiamo induttore e resistore in serie.

Esercizio

ì 27 aprile 2022 18:42

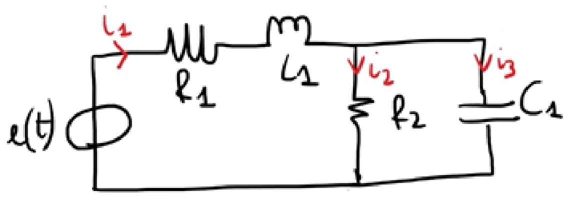
$$e(t) = 10\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ V$$

$R_1 = 2\,\Omega$ $\quad R_2 = 1\,\Omega$

$L_1 = 1\,mH$ $\quad C_1 = 500\,\mu F$

$\omega = 10^3\ rad/s$

Viene chiesto di calcolare i1, i2 e i3.



$$i_1(t) = ? \qquad i_2(t) = ? \qquad i_3(t) = ?$$

Quali sono i passaggi per risolvere questo circuito?

1) TEMPO → FASORI

2) RISOLVERE IL CIRCUITO NEL DOMINIO FASOR.

3) FASORI → TEMPO