Esercizi

es. 3 II FOGLIO DI ESERCIZI

Moneta lanciata 3 volte (equilibrata)

A = 'uscita di T al I lancio'

B = 'uscita di T al II lancio'

C = 'uscita di TT consecutive'

Ci sono molti modi diversi per rispondere alla seguente domanda.

Verificare che A e B sono indip., A e C indip., B e C non indip.

Bisogna calcolare la probabilità di A, B, C e delle loro intersezioni. Siccome sono 3 lanci, si possono scrivere tutte le sequenze dello spazio campione.

TTT	CTT
TTC	CCT
TCT	CTC
TCC	CCC

TTT	CTT
TTC	CCT
TCT	CTC
TCC	CCC

$$P(A) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

oppure

$$P(A) = P(T) = \frac{1}{2}$$

Un approccio diverso tra le teorie, ma con lo stesso risultato.

Analogamente per B: $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ oppure $P(B) = P(T) = \frac{1}{2}$

TTT	CTT
TTC	CCT
TCT	CTC
TCC	CCC

$$P(C) = \frac{\text{n° esiti fav.}}{\text{n° esiti tot}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

TTT	CTT
TTC	CCT
TCT	CTC
TCC	CCC

Ora consideriamo le intersezioni.

$$P(A \cap B) = P(\text{I estratto T, II estratto T}) =$$

$$= \frac{\text{n° esiti fav.}}{\text{n° esiti tot}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

TTT	CTT
TTC	CTC
TCT	CCT
TCC	CCC

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{A e B sono indip.}$$

$$P(A \cap C) = P(\text{I estratto T e solo due T consecutive}) =$$

$$= P(TTC) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{A e C sono indip.}$$

$$P(B \cap C) = P(\text{II lancio T e 2 T consecutive}) =$$

$$= P(TTC \cup CTT) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{B e C NON sono indip.}$$

es. In una popolazione ci sono $K\%$ persone immuni ad una malattia e $(100-k)\%$ non immuni.
Chi è immune ha prob. p_1 di ammalarsi
Chi non è immune ha prob p_2 di ammalarsi

Quale è la prob. che un individuo della popolazione si ammali? ovvero in che percentuale si ammalerà la popolazione?

Rispondiamo riconoscendo che c'è una partizione (immuni e non immuni) e impostando la formula delle probabilità totali.

$$H_1 = \text{'essere immune'} \qquad P(H_1) = K\%$$
$$H_2 = H_1^c \qquad P(H_2) = (100-k)\%$$

$$M = \text{'individuo si ammala'}$$
$$P(M|H_1) = p_1 \ ; \ P(M|H_2) = p_2$$

$$P(M) = P(M|H_1)\,P(H_1) + P(M|H_2)\,P(H_2) = p_1 \frac{K}{100} + p_2 \frac{(100-k)}{100}$$

Visto che quell'evento si è verificato, qual è la probabilità che quell'evento sia associato alla partizione 1 o 2? Sono probabilità a posteriori, quindi si usa il teorema di Bayes.

$$P(H_2|M) = \frac{P(M|H_2)\,P(H_2)}{P(M)} = \frac{p_2 \frac{100-k}{100}}{p_1 \frac{K}{100} + p_2 \frac{100-k}{100}}$$

Dispositivi in serie

Il sistema funziona solo se tutti gli N dispositivi funzionano.

DISPOSITIVI IN SERIE

$D_1, D_2 \dots D_n$ n dispositivi che formano un sistema in serie. Il dispositivo k-esimo $(k=1,\dots n)$ funziona con probabilità p_k indipendentemente dagli altri. Qual è la prob. che il sistema funzioni?

$D_k =$ 'il dispositivo k-esimo funziona' $\quad P(D_k) = p_k$

$T =$ 'il sistema funziona'

C'è indipendenza e intersezione, quindi si arriverà al prodotto.

$$T = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \dots \cap D_n$$

$$P(T) = P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \dots \cap D_n) \underset{\text{INDIP.}}{=} P(D_1)\, P(D_2) \dots P(D_n) =$$

$$= p_1\, p_2\, p_3\, p_4 \dots p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

È chiaramente un argomento di probabilità discreta, ma si rincontrerà anche con le variabili casuali, con una tecnica più raffinata, dettagliata.

Qual è la differenza tra probabilità condizionata di H1 condizionato da E e viceversa?

$P(E|H_1) = P($verificarsi di E se H_1 si verifica$)$

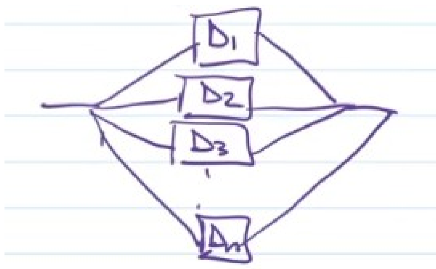
$P(H_1|E) = P($verificarsi di H_1 se E si verifica$)$

Dispositivi in parallelo

Il sistema funziona se almeno uno dei dispositivi funziona.

DISPOSITIVI IN PARALLELO

$D_1, D_2 \dots D_n$ dispositivi in parallelo formano un sistema
D_k funziona con prob. p_k indipendentemente
dagli altri $(k=1,2,\dots n)$
Quale è la prob. che il sistema funzioni?



Stessa notazione di prima.

$D_k =$ 'il k-esimo dispositivo funziona' $\quad P(D_k)=p_k \quad k=1,2,\dots,n$
$V =$ 'il sistema in parallelo funziona'

Abbiamo l'unione.

$$V = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \dots \cup D_n$$

La probabilità diventa un po' complicata da calcolare, specie se N è grande.

$$\begin{aligned} P(V) &= P(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \dots \cup D_n) = P(D_1)+P(D_2)+P(D_3)+\dots P(D_n) - \\ &- P(D_1 \cap D_2) - P(D_1 \cap D_3) - \dots - P(D_{n-1} \cap D_n) + \\ &+ P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) + P(D_1 \cap D_2 \cap D_4) \dots - P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4) - \dots \\ &+ P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5) \dots - (-1)^n P(D_1 \cap D_2 \dots \cap D_n) \end{aligned}$$

C'è una strada alternativa? Proviamo col complementare, non è detto che i calcoli si semplifichino, ma questo è il caso.

$$P(V) = 1 - P(V^c) = 1 - P((D_1 \cup D_2 \cup D_3 \ldots \cup D_n)^c) =$$
$$= 1 - P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c \ldots \cap D_n^c)$$

È una buona notizia, perché gli eventi sono indipendenti e per il teorema enunciato, anche i loro complementari sono indipendenti.

$$P(V) = 1 - P(V^c) = 1 - P((D_1 \cup D_2 \cup D_3 \ldots \cup D_n)^c) =$$
$$= 1 - P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c \ldots \cap D_n^c) \underset{\text{INDIPENDENZA}}{=}$$
$$= 1 - P(D_1^c) P(D_2^c) P(D_3^c) \ldots P(D_n^c)$$
$$= 1 - (1-p_1)(1-p_2) \ldots (1-p_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1-p_k)$$

Nel primo approccio, la probabilità che il sistema funzioni è che almeno uno dei sistemi funzioni (unione). Nel secondo approccio, la probabilità che il sistema funzioni è 1 meno il caso in cui nessun sistema funzioni. Ha senso che il secondo caso sia più semplice, perché c'è solo una situazione in cui il sistema non funziona, mentre nel primo caso ci sono più situazioni in cui il sistema funzioni. Con l'esperienza, si impara a trovare il metodo più semplice. Se ci sono solo due eventi, le situazioni sono simili.

Variabili casuali

Sono variabili che assumono valori diversi a seconda dell'esito dell'esperimento.

L'esempio più semplice è che nel lancio del dado, scrivo una variabile casuale che possa assumere valori da 1 a 6, a seconda della faccia che è uscita.

VARIABILI CASUALI (o ALEATORIE)

Dato un esperimento che presenta esiti diversi in maniera casuale è possibile associare all'esperimento una variabile casuale i cui valori corrispondono ai diversi esiti dell'esperimento

NOTAZIONE: lettera maiuscola per la variabile casuale

X, Y o Z ad esempio

N.B. La v.c. ha valori reali $X \in \mathbb{R}$

La cosa importante è che siano valori diversi per esiti diversi, anche scelti in maniera arbitraria (e.g. in base alla faccia del dado, si potrebbe associare un totale di punti).

Una variabile casuale discreta presenta un numero finito e numerabile di valori.

VARIABILI CASUALI DISCRETE

Una v.c. discreta è associata ad un esperimento che presenta un numero finito o numerabile di esiti.

Per esempio, il valore di diverse altezze è continuo (si può differire anche di un miliardesimo di millimetro), mentre le facce di un dado sono contabili, quindi discrete.

es. 1 lancio di un dado cubico (esperimento con 6 esiti)

$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ v.c. discreta

Potevano anche essere 10, 20, 30, 40, 50, 60, o numeri irrazionali, l'importante è che la quantità di valori coincida col numero di esiti.

es. 2 lancio di una moneta (esperimento con 2 esiti)

$X \in \{0, 1\}$ v.c. discreta

oppure $X \in \{-23, \pi\}$

es. 3 altezza degli individui di una popolazione (esperimento con esiti NON numerabili se le altezze variano con continuità)

$X \in [0, 3]$ in metri: v.c. <u>NON DISCRETA</u>

Non tutte le variabili sono discrete.

Possiamo associare a queste variabili le probabilità del verificarsi degli esiti.

Alla v.c. discreta associamo le prob. di verificarsi degli esiti.

esiti dell'esperimento

$e_1 \quad e_2 \quad e_n$

$X \in \{x_1, x_2 \, ... \, x_n\}$

valori v.c

$P(X = x_k) = P(e_k)$

es. lancio moneta equilibrata

$X \in \{\overset{T}{0}, \overset{C}{1}\}$

$P(X=0) = P(T) = \frac{1}{2}$

$P(X=1) = P(C) = \frac{1}{2}$

La funzione che associa i valori della variabile alla probabilità si chiama funzione di massa di probabilità.

Funzione di massa di probabilità

FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \qquad p(a) = P(X = a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

es. lancio di moneta

$$p(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } a = 0 \text{ o } a = 1 \\ 0 & \text{se } a \neq 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

È una funzione praticamente a 0 dappertutto, tranne in due punti, quelli dei valori associati agli esiti dell’esperimento.