Esercizi

es 3 FOGLIO $\underline{VII}$

Supponiamo che il numero di raffreddori contratti in un anno da un individuo sia una poissoniana di media 3. Un farmaco efficace al 75% della popolazione abbassa la media a 2 all'anno. Se Gigi prova il farmaco per un anno e in quell'arco di tempo non si ammala mai, qual è la probabilità che il farmaco abbia fatto effetto.

H_1 = 'il farmaco funziona' $\qquad P(H_1) = 75\%$

$H_2 = H_1^c \qquad P(H_2) = 25\%$

X = 'n° raffreddori senza farmaco' $\quad X \sim Po(3)$

Y = 'n° " con farmaco funzionante' $\quad Y \sim Po(2)$

N = 'nessun raffreddore in un anno'

$P(H_1 | N)$?

$$P(H_1 | N) = \frac{P(N|H_1)\,P(H_1)}{P(N)}$$

$$P(N) = P(N|H_1)\,P(H_1) + P(N|H_2)\,P(H_2)$$

$$P(N|H_1) = P(Y=0) = p_Y(0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2}$$

$$P(N|H_2) = P(X=0) = p_X(0) = \frac{3^0}{0!}e^{-3} = e^{-3}$$

Quindi:

$$P(N) = P(N|H_1)\,P(H_1) + P(N|H_2)\,P(H_2) = e^{-2}\frac{3}{4} + e^{-3}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \quad \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Torniamo alla formula che da la soluzione.

$$P(H_1|N) = \frac{P(N|H_1)\,P(H_1)}{P(N)} = \frac{e^{-2}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}e^{-2}+\frac{1}{\cancel{4}}e^{-3}} = \frac{3}{3+e^{-1}}$$

Ci sono più modi di risolvere questo problema.

es. 7 FOGLIO VII

Esercizio 7 Domitilla vuole completare l'album di N figurine di una nota trasmissione televisiva. Ormai le manca solo la figurina di "Lallo il cavallo". Per ora sia $N = 90$.
1) Se le figurine vengono vendute in bustine da 5 con la garanzia che non si possono trovare figurine identiche all'interno della stessa bustina, quale è la probabilità che Domitilla riesca a completare l'album acquistando una bustina? Quante bustine deve mediamente acquistare per completare l'album? Se la nonna decide di regalare a Domitilla 100 bustine di figurine, quante bustine contenenti "Lallo il cavallo" troverà mediamente Domitilla?
2)Nell'ipotesi in cui nelle bustine da 5 figurine possano comparire anche più figurine uguali, rispondere alle tre domande formulate al punto 1).
Infine per N generico, confrontare la probabilità di completare l'album acquistando una sola bustina nel caso in cui le bustine possano contenere solo 5 figurine tra loro diverse oppure nel caso in cui le 5 figurine all'interno della confezione possono essere anche uguali tra loro. Cosa accade al crescere di N? [1) $P_1 = 1/18$, $E[X_1] = 18$, $E[Y_1] = 50/9$; 2) $P_2 = 1 - (89/90)^5$, $E[X_2] \simeq 18.4$, $E[Y_2] \simeq 5.43$; in generale $P_1 = 5/N$, $P_2 = 1 - (1 - 1/N)^5$.]

$$P(\bar{L}_1) = \frac{C_{1,1}\,C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{1\;\frac{89!}{\cancel{85!}\,4!}}{\frac{90!}{\cancel{85!}\,5!}} =$$

$$= \frac{89!}{90!}\;\frac{5!}{4!} = \frac{5}{90}$$

oppure

$$P(L_1) = \frac{1}{90}\cdot\frac{89}{89}\cdot\frac{88}{88}\cdot\frac{87}{87}\cdot\frac{86}{86} + \frac{89}{90}\cdot\frac{1}{89}\cdot\frac{88}{88}\cdot\frac{87}{87}\cdot\frac{86}{86} +$$

$$+\frac{89}{90}\cdot\frac{88}{89}\cdot\frac{1}{88}\cdot\frac{87}{87}\cdot\frac{86}{86}\ldots +$$

$$+\frac{89}{90}\cdot\frac{88}{89}\cdot\frac{87}{88}\cdot\frac{86}{87}\cdot\frac{1}{86} = \frac{5}{90}$$

oppure $P(L_1) = \dfrac{n^\circ \text{ figurine bustina}}{n^\circ \text{ figurine tot}} = \dfrac{5}{90}$

X_1 = 'n° bustine acquistate per ottenere la figurina mancante'

$X_1 \sim G(P(L_1)) = G\left(\frac{1}{18}\right) \qquad E[X_1] = \frac{1}{p} = 18$

In media, occorre acquistare 18 bustine per ottenere la figurina mancante.

Y_1 = 'n° bustine contenenti la figurina mancante su 100 bustine'

$Y_1 \sim B(100, P(L_1))$

$$E[Y_1] = 100\cdot\frac{1}{18} = \frac{50}{9}$$

Nella seconda parte, ci possono essere anche figurine uguali.

L_2 = 'trovare la figurina mancante se nella bustina di 5 figurine ci possono essere fig. uguali'

Ci viene in aiuto una binomiale, perché è un'estrazione con reimmissione quando si crea la bustina.

S = 'n° figurine di Lallo in una bustina'

$S \sim B\left(5, \frac{1}{90}\right)$

$$P(S \geq 1) = P(L_2)$$

$$P(L_2) = 1 - P(S=0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{90}\right)^0\left(\frac{89}{90}\right)^5 =$$
$$= 1 - \left(\frac{89}{90}\right)^5 = p_2$$

X_2 = 'n° bustine da acquistare per trovare la fig. mancante'

$X_2 \sim G(p_2) \qquad E[X_2] = \frac{1}{p_2}$

Y_2 = 'n° bustine contenenti la fig. mancante su 100 bustine'

$Y_2 \sim B(100, p_2) \qquad E[Y_2] = 100 \cdot p_2$

Per generalizzarlo, il procedimento è lo stesso.

Variabile casuale esponenziale

Una variabile continua, che dipende da un parametro.

VARIABILE CASUALE ESPONENZIALE

$X \sim E(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$

↓ si comporta come un esponenziale di parametro λ

La funzione di densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Affinché sia convergente, lambda deve essere positivo (perché ho e alla -lambdax).

La funzione di ripartizione è:

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{a} 0\,dx = 0 & \text{se } a < 0 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{a} = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-\lambda a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X>a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ 1-e^{-\lambda a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } a<0 \\ e^{-\lambda a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo valor medio e varianza tramite la funzione generatrice dei momenti.

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx =$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{0} e^{tx}\, 0 \,dx} + \int_{0}^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

È molto facile determinare la primitiva di questo integrale.

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda - t)x}\,dx = \begin{cases} \text{diverse se } \lambda - t \leq 0 \\ \lambda \left[-\dfrac{e^{-(\lambda-t)x}}{\lambda - t}\right]_0^{+\infty} \text{se } \lambda - t > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{se } \lambda - t > 0 \text{ ovvero } t < \lambda$$

È ragionevole perché la funzione generatrice comprende un intorno nell'origine.

$$E[X] = \frac{d\phi(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \lambda(\lambda-t)^{-2}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \frac{d^2\phi(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\lambda(\lambda-t)^{-2}\right)\Big|_{t=0} = 2\lambda(\lambda-t)^{-3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

A cosa serve una esponenziale? Per rappresentare dei tempi, di durata di funzionamento oppure gli intertempi che intercorrono in una serie di eventi casuali (per esempio il tempo che intercorre tra due accessi a un sito internet, o tra due persone che si mettono in fila al supermercato…).

PROPRIETÀ

1) $X \sim E(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$

$c \in \mathbb{R}^+ \qquad Y = cX \sim E(\lambda/c)$

Per dimostrarla, usiamo la funzione generatrice dei momenti.

$\boxed{\text{DIM}}$ $$\phi_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{(tc)X}] = \phi_X(tc) =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - tc} \qquad \text{se } tc < \lambda$$

$$= \frac{\lambda/c}{\lambda/c - t} \Rightarrow \text{funzione generatrice dei momenti di } E\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

N.B. $\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi

Lo zero è escluso.

2) Sistema formato da n dispositivi in serie, ciascun dispositivo ha una durata di funzionamento esponenziale indipendente dagli altri dispositivi

$D_1, D_2 \dots D_n$ dispositivi

$\underbrace{X_1, X_2 \dots X_n}_{\text{INDIPENDENTI}}$ v.c. che rappresentano la durata di ciascun dispositivo

$X_k \sim E(\lambda_k)$ $\quad k=1, \dots n$

Sotto queste condizioni ci si domanda come sia fatta la variabile casuale del sistema e la funzione di ripartizione.

Y = 'durata di funzionamento del sistema'

Come è distribuita? $F_Y(a)$?

$$Y = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$$

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = P(\min(X_1, X_2, \dots X_n) \leq a)$$

Detta così la richiesta è chiara ma è complicato dire qualcosa in più sulle singoli variabili. Se il più piccolo tra X1, X2, Xn è più piccolo di a non sappiamo niente di quello che succede agli altri. Proviamo a considerare il complementare.

$$= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots X_n) > a) =$$

$$= 1 - P(X_1 > a \cap X_2 > a \cap \dots \cap X_n > a) =$$

$$\underset{\text{INDIP.}}{=} 1 - P(X_1 > a) P(X_2 > a) \dots P(X_n > a)$$

$$= 1 - \begin{cases} 1 & \text{se } a < 0 \\ e^{-\lambda_1 a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 1 & \text{se } a < 0 \\ e^{-\lambda_2 a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases} \cdots \begin{cases} 1 & \text{se } a < 0 \\ e^{-\lambda_n a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases} =$$

$$= 1 - \begin{cases} 1 & \text{se } a < 0 \\ e^{-\lambda_1 a} e^{-\lambda_2 a} \cdots e^{-\lambda_n a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_n) a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y \sim E(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

Questa è una caratteristica delle variabili casuali esponenziali.

Consideriamo anche il sistema in parallelo.

3) Sistema in parallelo formato da n dispositivi $D_1, D_2 \ldots D_n$ con durate di funzionamento $X_1, X_2 \ldots X_n$ $(X_k \sim E(\lambda_k))$ INDIPENDENTI

Z = 'durata di funzionamento del sistema'

$$F_Z(a) = P(Z \le a) = P(\max(X_1, X_2 \dots X_n) \le a) =$$

$$= P(X_1 \le a, X_2 \le a \dots X_n \le a) =$$

$$\underset{\text{INDIPENDENZA}}{=} P(X_1 \le a) P(X_2 \le a) \dots P(X_n \le a) =$$

$$= F_{X_1}(a) F_{X_2}(a) \dots F_{X_n}(a)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-\lambda_1 a} & \text{se } a \ge 0 \end{cases} \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-\lambda_2 a} & \text{se } a \ge 0 \end{cases} \dots \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-\lambda_n a} & \text{se } a \ge 0 \end{cases} =$$

Questa volta prendiamo il massimo perché il sistema in parallelo si guasta quando l'ultimo dei dispositivi si guasta.

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_k a}) & \text{se } a \ge 0 \end{cases}$$

Questa funzione di distribuzione non è un'esponenziale, quindi rimane scritta così.

L'ultima proprietà è la più strana e difficile da raccontare.

4) ASSENZA DI MEMORIA

Cosa vuol dire? Immaginiamo che una certa variabile casuale rappresenti la durata di funzionamento di un dispositivo. In molti casi il modello di variabile casuale esponenziale funziona, ma bisogna tener conto dell'assenza di memoria. Per esempio immaginiamo di prendere una lampadina nuova. Sono stati fatti degli studi e la sua durata è di tipo esponenziale con un certo parametro. Immaginiamo di averla usata 3 anni e ci domandiamo qual è la probabilità che duri altri 3 anni. L'assenza di memori di questa variabile casuale ci dice che la probabilità che duri altri 3 anni, se è durata 3 anni, è la stessa di quando era nuova. Nel mondo reale questa proprietà è un po' irrealistica. La distribuzione esponenziale vale per oggetti nuovi, non funziona se dopo un tempo lunghissimo io mi domando la probabilità che duri altrettanto.

Immaginiamo di avere due tempi s e t e un'esponenziale di parametro lambda.

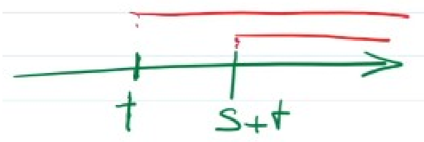
$$s, t > 0 \qquad X \sim E(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$$

In questo senso c'è assenza di memoria, la variabile si dimentica di tutto il tempo trascorso.

$$\boxed{\text{DIM}} \quad P(X > s+t \mid X > t) = \frac{P(X > s+t \cap X > t)}{P(X > t)}$$

Dobbiamo capire l'evento al numeratore. Usiamo un asse reale.



L'intersezione viene quando X > s + t.

$$= \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} =$$

$$= e^{-\lambda s}$$

D'altra parte, sempre dalle formule:

$$= e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

$$P(X > s) = e^{-\lambda s} \quad \text{se } s > 0$$

Se t è molto grande, nel mondo reale questo incide sulla probabilità di funzionamento del dispositivo.

Variabile casuale gaussiana

È la più famosa, utilizzata, importante. Perché? Grazie a un risultato, il teorema del limite centrale (tante variabili casuali indipendenti identicamente distribuite sommate insieme danno sempre una gaussiana).

È nata come curiosità matematica. La gaussiana è stata introdotta per approssimare la binomiale quando N era molto grande, perché calcolare a mano i fattoriali e le potenze di p, diventava praticamente impossibile. Si è scoperto che pensando alla binomiale come somma di bernoulliane, si arrivava ad approssimarle con una variabile casuale continua, la gaussiana. Poi si è scoperto che questa proprietà non era solo delle bernoulliane, ma di tutte le variabili casuali che vengono sommate.

C'è un risvolto pratico: quando faccio un esperimento di solito ho a che fare con tante imprecisioni (piccole variabili casuali) che si sommano, per questo motivo nella stragrande maggioranza il comportamento complessivo di un errore in un esperimento è una gaussiana. Allo stesso modo, se vado a guardare la distribuzione delle altezze degli individui adulti trovo una gaussiana (ambiente, stile di vita…).

Anche sommando insieme tante variabili casuali uniformi si ottiene una variabile casuale che si comporta come una gaussiana.

È importante perché in moltissimi problemi reali, la variabile casuale che rappresenta l'errore o il comportamento degli individui all'interno della popolazione si comporta come una gaussiana.

Ha una funzione di densità definita da -infinito a +infinito, ma non ha una primitiva analitica.

V.C GAUSSIANA O NORMALE

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

↓

si comporta come una normale di parametri μ e σ^2

Mu e sigma quadro sono valor medio e varianza della variabile.

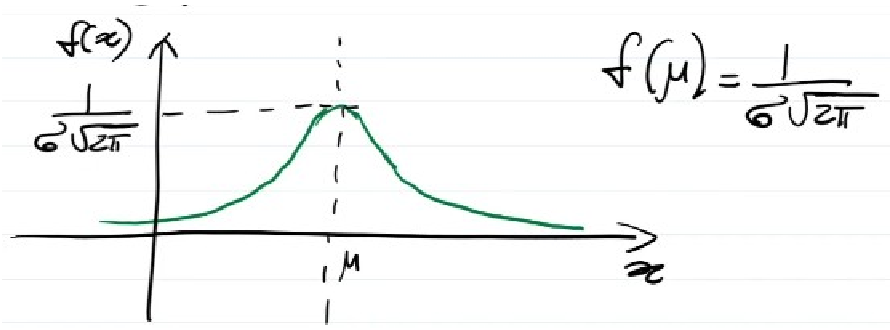
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Grazie al fatto che x – mu è al quadrato, l'esponenziale è sempre negativo. Per x tendente a infinito la funzione tende a 0, l'integrale converge.

$$\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

Avere varianza 0, vuol dire che la variabile casuale non è più casuale, ma un numero.

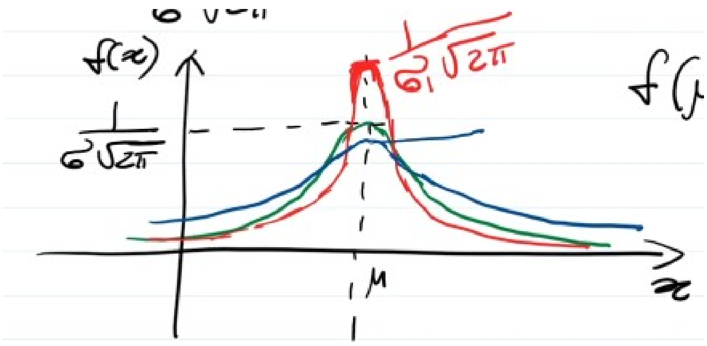
La delta di Dirac è una distribuzione che vale 0 dappertutto, tranne in un punto in cui vale infinito. Se sigma quadro va a 0, la gaussiana ha una funzione di distribuzione che diventa una delta di Dirac.



La funzione è simmetrica rispetto a x = mu, dove ha il suo picco.

- al variare di μ la curva trasla solo se σ^2 è uguale
- se μ è fisso e varia σ^2, cambia $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

  ma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow$ cambia l'altezza del massimo e la curva si allarga o si stringe attorno a $x = \mu$ in modo da lasciare l'area uguale a 1



Se $\sigma_1 < \sigma$ $\quad \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Rightarrow$ la curva ha massimo più in alto e si stringe attorno a $x=\mu$

se $\sigma_2 > \sigma$ $\quad \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} < \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ la curva ha un massimo più in basso e si allarga per mantenere l'area unitaria

L'integrale notevole:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Per curiosità questa cosa si dimostra moltiplicando l'integrale con uno uguale fatto in y. Diventa un integrale doppio e in coordinate polari e viene fuori 2pi.

N.B. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ (SI DIMOSTRA USANDO CAMBIO DI VARIABILI + INTEGRALE DOPPIO)

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ per simmetria

MA $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ NON HA UNA PRIMITIVA ANALITICA

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad ?$$

COME CALCOLO F IN QUESTO CASO?

Cambiando i parametri, cambieranno gli integrali, quindi non è banale determinare in un qualche modo, anche numerico, la funzione di ripartizione. Per fare dei calcoli approssimati è sicuramente complicato lavorare con la funzione di ripartizione. Attraverso delle proprietà possiamo ricondurci a una sola gaussiana, di nome normale standard, con valor medio nullo e varianza unitaria.

Per arrivarci, serve qualche altro passaggio.

$$\phi(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

Usiamo i cambi di variabili

$$\Rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = y$$
$$dx = \sigma\,dy$$
$$x = \sigma y + \mu$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{N.B } \sigma > 0 \\ \sqrt{\sigma^2} = \sigma\end{array}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\sigma y + t\mu}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \cancel{\sigma}\,dy$$

C’è un termine che non dipende da y.

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y^2}{2} - t\sigma y\right)} dy$$

Mi immagino di cercare di costruire un quadrato.

$$\frac{(y-\sigma t)^2}{2} = \frac{y^2 - 2\sigma t y + \sigma^2 t^2}{2}$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y^2}{2} - t\sigma y + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)} dy$$

Aggiungo e tolgo sigma quadro t quadro diviso 2, per ottenere un quadrato perfetto.

$$= \frac{e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}} dy$$

Faccio un nuovo cambio di variabile.

$$y - \sigma t = z$$
$$dy = dz$$

$$= \frac{e^{t\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} e^{t\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

$$\phi(t) = e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\sigma^2}$$

Almeno una volta nella vita questi passaggi bisogna vederli.

Altro integrale.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$J_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z^2+x^2)}{2}} dz\, dx$$

Cambiamo in coordinate polari.

$$\begin{cases} r = \sqrt{z^2+x^2} \\ r^2 = z^2 + x^2 \\ x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, +\infty] \\ dz\,dx = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} \, dr = 2\pi \left[- e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= 2\pi \cdot 1$$

$$\Rightarrow J_1^2 = 2\pi \Rightarrow J_1 = \sqrt{2\pi}$$

Torniamo alla funzione generatrice dei momenti.

$$\boxed{\phi(t) = e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\sigma^2}}$$

Questa è la sua forma.

Vediamo il valor medio.

$$E[X] = \left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\sigma^2} (\mu + t\sigma^2) \right)\right|_{t=0} = \mu$$

$$E[X^2] = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{t\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2}(\mu+t\sigma^2)\right)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \left[\underbrace{e^{t\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2}(\mu+t\sigma^2)}_{\frac{de^{t\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2}}{dt}} \cdot (\mu+t\sigma^2) + e^{t\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2}\underbrace{\sigma^2}_{\frac{d}{dt}(\mu+t\sigma^2)}\right]\bigg|_{t=0} =$$

$$= \mu^2+\sigma^2$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \mu^2+\sigma^2-(\mu)^2 = \sigma^2$$

Tanti calcoli per verificare in maniera rigorosa ciò che sapevamo già.