Progetto CAT

Punto 1

- [x] ~~Sistema in forma di stato:~~

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \omega \end{bmatrix} \qquad u = C_m$$
$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\tau(x_1)}{J}u - \frac{\beta}{J}x_2 - \frac{k}{J}x_1 \end{bmatrix}$$
$$y = h(x,u) = x_1 = \theta$$

- [x] ~~Coppia di equilibrio:~~

$$(x_e, u_e) = (\begin{bmatrix} x_{1e} = \theta_e \\ x_{2e} = \omega_e \end{bmatrix}, u_e = C_{me})$$
$$= (\begin{bmatrix} \theta_e \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{k\theta_e}{\tau(\theta_e)}) \approx (\begin{bmatrix} 2.44346 \\ 0 \end{bmatrix}, 2413.49)$$

▼ Spiegazione

Per definizione di equilibrio sappiamo che $\dot{x}_e = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_{1e} \\ \dot{x}_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_e \\ \dot{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Possiamo quindi calcolare la coppia di equilibrio (x_e, u_e).

x_e è banale:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e = 140^\circ \\ \omega_e = \dot{\theta}_e = 0 \end{bmatrix} \text{(parametro di sistema)}$$

u_e lo ricaviamo sapendo che $\omega_e = 0$:

$$\omega_e = 0 \rightarrow \frac{\tau(x_{1e})}{J}u_e - \underbrace{\cancel{\frac{\beta}{J}x_{2e}}}_{=0} - \frac{k}{J}x_{1e} = 0$$
$$\rightarrow u_e = \frac{kx_{1e}}{\tau(x_{1e})} = \frac{k\theta_e}{\tau(\theta_e)} \approx 2413.39$$

- [x] ~~Sistema linearizzato nell'equilibrio:~~

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_1}\tau(x_1) - k) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9470 & -0.0014 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau(x_{1e})}{J} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

▼ Spiegazione

- A:

$$A = \frac{\partial}{\partial x} f(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_1}\tau(x_1) - k) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{J}(-u_e \frac{\cos\alpha \sin^2\alpha \sin(2x_{1e})}{[1-(\sin^2\alpha\cos^2(x_{1e}))]^2} - k) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}$$
$$\approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9470 & -0.0014 \end{bmatrix}$$

- B:

$$B = \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial u} f_2 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau(x_{1e})}{J} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.00184 \end{bmatrix}$$

- C:

$$C = \frac{\partial}{\partial x} h(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} h & \frac{\partial}{\partial x_2} h \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- D:

$$D = \frac{\partial}{\partial u} h(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = 0$$

Punto 2

- [x] ~~Funzione di trasferimento $G(s)$:~~

$$
\begin{aligned}
\delta Y(s) &= G(s)\delta U(s) \\
G(s) &= \frac{\frac{\tau(x_{1e})}{J}}{s^2 + \frac{\beta}{J}s - \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k)} \\
&\approx \frac{0.00184}{s^2 + 0.0014s + 0.9470}
\end{aligned}
$$

▼ Spiegazione

Dalla teoria sappiamo che $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Calcoliamo $(sI - A)^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= (s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix})^{-1} \\
&= (\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix})^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} s & -1 \\ -\frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k) & s + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix}^{-1}
\end{aligned}
$$

Sappiamo che l'inverso di una matrice 2×2 si calcola come:

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}
$$

Concludiamo quindi con il calcolo di $(sI - A)^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{s(s + \frac{\beta}{J}) - \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k)} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{J} & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k) & s \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2 + \frac{\beta}{J}s - \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k)} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{J} & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k) & s \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo ora $G(s)$, avendo tutte le matrici che compongono la sua formula:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + \underbrace{\cancel{D}}_{=0} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{\beta}{J}s - \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k)} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{J} & 1 \\ \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k) & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau(x_{1e})}{J} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{\beta}{J}s - \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k)} \begin{bmatrix} \frac{\tau(x_{1e})}{J} \\ \frac{\tau(x_{1e})}{J}s \end{bmatrix} \\
&= \frac{\frac{\tau(x_{1e})}{J}}{s^2 + \frac{\beta}{J}s - \frac{1}{J}(u_e \frac{\partial}{\partial x_{1e}}\tau(x_{1e}) - k)} \\
&\approx \frac{0.00184}{s^2 + 0.0014s + 0.9470}
\end{aligned}
$$

Punto 3

- [x] ~~Regolatore $R(s)$:~~

$$R(s) = \mu_s \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

▼ Spiegazione

Dividiamo il progetto in due fasi fattorizzando $R(s)$ come:

$$R(s) = R_s(s) \cdot R_d(s)$$

Regolatore statico

Per quanto riguarda il regolatore statico $R_s(s)$ questo ci può servire a soddisfare la specifica sull'errore a regime e quella sul disturbo sull'uscita, visto che quest'ultimo si riferisce a pulsazioni nel range $[0, 0.7]$, quindi molto vicine all'origine:

> Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.05$ in risposta a un gradino $\omega(t) = 2(t)$ e $d(t) = 1.2(t)$.

> Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.7]$, deve essere abbattuto di almeno $35\ dB$.

L'idea è quella di utilizzare un regolatore statico del tipo $R_s(s) = \mu_s$, in cui μ_s deve essere maggiore a un certo valore riferito all'errore a regime $\mu^*_{s,e}$ e ad un certo valore riferito al disturbo sull'uscita $\mu^*_{s,d}$. In sintesi $R_s(s) = \mu_s = max(\mu^*_{s,e}, \mu^*_{s,d})$.

Per quanto riguarda l'errore a regime abbiamo che $L(0) = \mu_s \cdot G(0) \geq \frac{D^*+W^*}{e^*}$, dunque $\mu_s \geq \mu^*_{s,e} = \frac{D^*+W^*}{e^* \cdot G(0)} \approx 106223$.

Per il disturbo sull'uscita invece sappiamo che (slide 8) $|L(j\omega)|_{dB} \geq 35\ dB$ all'interno del range di pulsazioni $[0, 0.7]$. Risolviamo dunque la disequazione:

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq 35\ dB \rightarrow 20 \cdot \log(L(j\omega)) \geq 35\ dB \\ \rightarrow L(j\omega) \geq 10^{35/20} \rightarrow \mu_s G(j\omega) \geq 10^{35/20} \\ \rightarrow \mu_s \geq \frac{10^{35/20}}{G(j\omega)}$$

Prendendo $\omega = 0.7$ otteniamo $\mu_s \geq \mu^*_{s,d} = \frac{10^{35/20}}{G(j \cdot 0.7)} \approx 78392$.

Otteniamo dunque che il valore del regolatore statico $R_s(s) = \mu_s \approx 106223$.

Regolatore dinamico

Per quanto riguarda il regolatore dinamico, la progettazione di questo mira a rispettare le specifiche 2, 3, 4 e 6 riguardanti il margine di fase, la sovraelongazione, il tempo di assestamento e il rumore di misura.

Partiamo dal vincolo sulla sovraelongazione:

> Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo del 20% : $S\% \leq 20\%$.

Dobbiamo dunque fare in modo che $S\% \geq S\%^* = 20\%$. Sapendo che la sovraelongazione percentuale ha la formula $S\% = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, ci ricaviamo il coefficiente di smorzamento limite ξ^*:

$$S\%^* = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}} \rightarrow \xi^* = \frac{|\ln(S\%^*/100)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(S\%^*/100)^2}} \approx 0.456$$

Questo significa che per rispettare la specifica $\xi \geq \xi^* \approx 0.456$.

Inoltre, siccome la nostra $G(s)$ ha una coppia di poli complessi coniugati dominanti, vale $\xi \approx \frac{M_f}{100}$, dove M_f è il margine di fase. Da questa relazione capiamo quindi che $M^*_f \approx \xi^* \cdot 100 = 45.6$ e che quindi $M_f \geq M^*_f \approx 45.6$.

Comprendiamo dunque che nel rispettare la specifica della sovraelongazione rispettiamo anche quella sul margine di fase:

> Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 35^\circ$.

La condizione sul tempo di assestamento stabilisce invece che:

> Il tempo di assestamento alla $\epsilon = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 0.0006s$.

Per quanto riguarda questa specifica, sapendo che il nostro sistema ha due poli complessi coniugati dominanti, vale la formula $\xi^*\omega_n \geq \frac{3}{T^*_{a,5}}$, dunque:

$$\omega_n \geq \frac{3}{T^*_{a,5} \cdot \xi^*} \rightarrow \omega_c \geq \frac{300}{T^*_{a,5} \cdot M^*_f} \approx 1097\ rad/s$$

Abbiamo dunque ottenuto una specifica per la frequenza di taglio $\omega_c \geq 1097\ rad/s$. Prendiamo invece come limite superiore a ω_c la frequenza $2 \cdot 10^5$, nella quale inizia il rumore di misura.

La frequenza di taglio deve quindi appartenere all'intervallo $[1097, 2 \cdot 10^5]$, e scegliamo un valore basso ($\omega^*_c = 2000\ rad/s$) al fine di rispettare l'ultima specifica sul rumore di misura:

> Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[2 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 69 dB.

Questa specifica viene infatti rispettata (slide 10) con $|L(j\omega)|_{dB} \leq -69\ dB$ all'interno del range di pulsazioni $[2 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^6]$.

Una volta ottenuti M^*_f e ω^*_c è possibile rispettare le specifiche progettando un regolatore dinamico che utilizza una rete ritardatrice:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s}$$

in cui:

$$
\begin{gathered}
M^* = \frac{1}{|G(j\omega_c^*)|} \\
\varphi^* = M_f^* - 180^\circ + 5^\circ - \arg\{G(j\omega_c^*)\} \\
\tau = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c^* \sin\varphi^*} \\
\alpha\tau = \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin\varphi^*}
\end{gathered}
$$

Nota: a φ^* vengono aggiunti 5° per il margine di sicurezza.