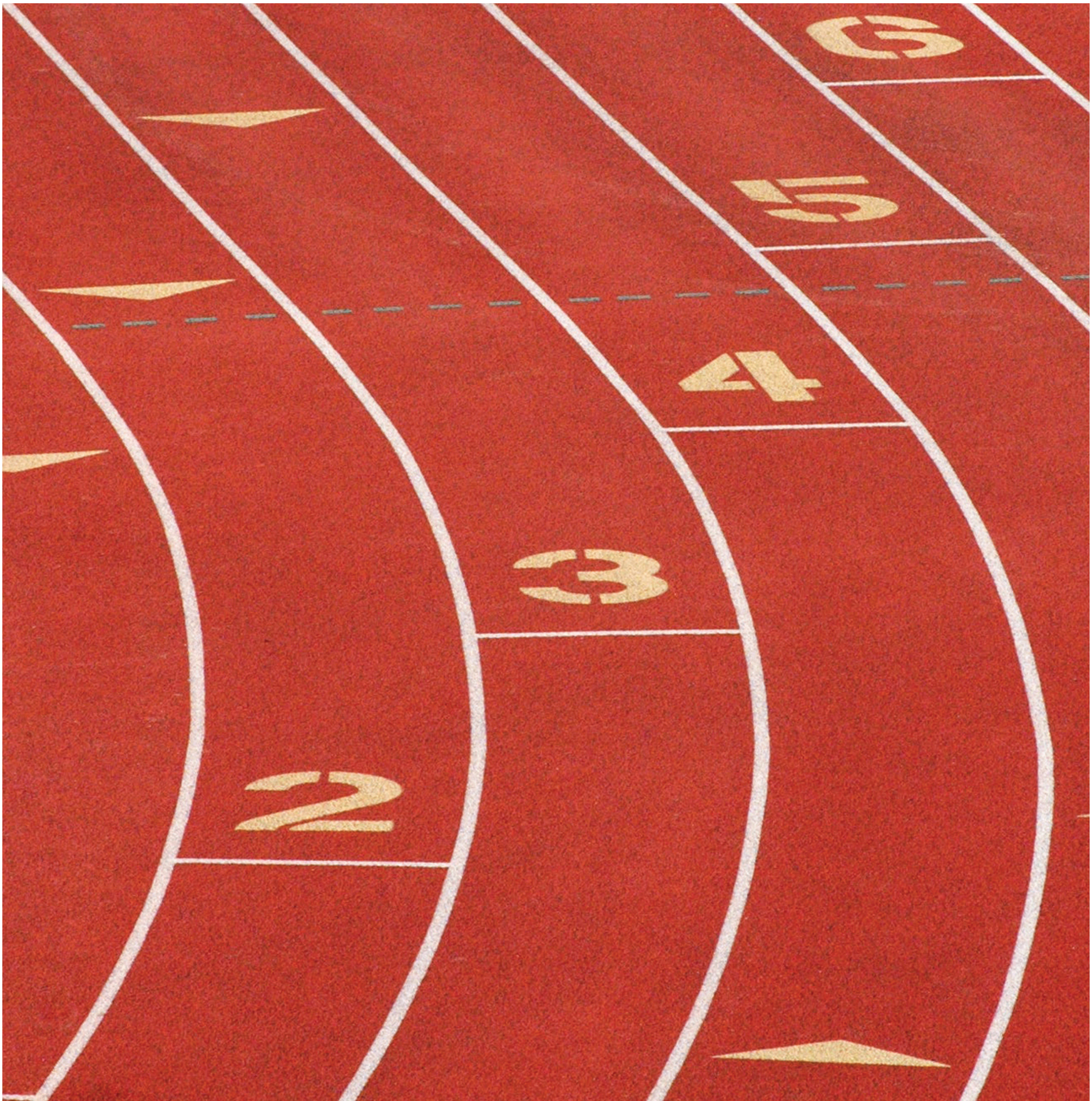


Marco Bramanti Carlo D. Pagani Sandro Salsa

Analisi matematica 1

ZANICHELLI

Marco Bramanti   Carlo D. Pagani   Sandro Salsa

Analisi matematica 1

ZANICHELLI

Indice

Prefazione **vii**

1 Numeri **1**

1 Insiemi e logica 1
1.1 Concetti di base sugli insiemi 1
1.2 Un po' di logica elementare 9
2 Sommatorie e coefficienti binomiali 13
2.1 Il simbolo di sommatoria 13
2.2 Fattoriale di n 15
2.3 Coefficienti binomiali e formula di Newton 16
3 Campi ordinati 18
4 Numeri reali. Estremo superiore e assioma di continuità 20
4.1 Inadeguatezza dell'insieme dei razionali per misurare le lunghezze 20
4.2 Estremo superiore e assioma di continuità 21
4.3 Valore assoluto. Disuguaglianza triangolare 23
4.4 Intervalli 24
5 Radicali, potenze, logaritmi 25
5.1 Radici n-esime aritmetiche 25
5.2 Potenze a esponente reale 26
5.3 Logaritmi 27
5.4 Approssimazioni 28
6 Insiemi infiniti 28
7 Il principio di induzione 32
8 Numeri complessi 35
8.1 Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo 35
8.2 Coniugato e modulo 37
8.3 Forma trigonometrica 40
8.4 Radici n-esime 43

2 Funzioni di una variabile **49**

1 Il concetto di funzione 49
2 Funzioni reali di variabile reale 52
2.1 Generalità 52
2.2 Funzioni limitate 53
2.3 Funzioni simmetriche 54
2.4 Funzioni monotone 55

	2.5	Funzioni periodiche	55
3		Funzioni elementari	56
	3.1	Funzioni potenza	56
	3.2	Funzioni esponenziali e logaritmiche	61
	3.3	Funzioni trigonometriche	63
	3.4	Fenomeni vibratori	64
	3.5	Funzioni parte intera e mantissa	68
	3.6	Funzioni iperboliche	69
	3.7	Operazioni sui grafici	70
	3.8	Funzioni definite a tratti	74
4		Funzioni composte e inverse	75
	4.1	Funzioni composte	75
	4.2	Funzioni invertibili; funzioni inverse	77
	4.3	Le funzioni trigonometriche inverse	80
	4.4	Le funzioni iperboliche inverse	82
3		**Limiti e continuità**	**87**
1		Successioni	87
	1.1	Definizione di successione. Definizione di limite	87
	1.2	Successioni monotone	93
	1.3	Il calcolo dei limiti	96
	1.4	Il numero e	101
	1.5	Confronti e stime asintotiche	103
2		Limiti di funzioni, continuità, asintoti	110
3		Il calcolo dei limiti	121
	3.1	Proprietà fondamentali di limiti e continuità	121
	3.2	Limiti notevoli	128
	3.3	Confronti e stime asintotiche	130
	3.4	Stime asintotiche e grafici	132
4		Proprietà globali delle funzioni continue o monotone su un intervallo	136
	4.1	Funzioni continue su un intervallo	136
	4.2	Funzioni monotone su un intervallo	141
	4.3	Continuità e invertibilità	143
4		**Calcolo differenziale per funzioni di una variabile**	**147**
1		Introduzione al calcolo differenziale	147
2		Derivata di una funzione	150
	2.1	Derivata e retta tangente	150
	2.2	Altre interpretazioni della derivata	153
	2.3	Derivate di funzioni elementari	154
	2.4	Punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale	157
3		Regole di calcolo delle derivate	160
	3.1	Algebra delle derivate	161
	3.2	Derivata di una funzione composta	162
	3.3	Derivata di funzione inversa	167
4		Il teorema del valor medio e le sue conseguenze	171
	4.1	Punti stazionari. Massimi e minimi locali	171

	4.2	Teorema del valor medio. Test di monotonia	174
	4.3	Soluzione di alcuni problemi di massimo e minimo	181
	4.4	Il teorema di de l'Hospital	187
	4.5	Limite della derivata e derivabilità	190
5	Derivata seconda		195
	5.1	Significato geometrico della derivata seconda	195
	5.2	Derivata seconda, concavità e convessità	196
6	Studio del grafico di una funzione		202
7	Calcolo differenziale e approssimazioni		208
	7.1	Differenziale e approssimazione lineare. Il simbolo di “o piccolo”	208
	7.2	Limiti notevoli e sviluppi	212
	7.3	Formula di Taylor-MacLaurin con resto secondo Peano	213
	7.4	Formula di Taylor-MacLaurin con resto secondo Lagrange	218
	7.5	Risoluzione approssimata di equazioni: il metodo di Newton	221

5 Serie **229**

1	Serie numeriche		229
	1.1	Definizione e primi esempi	229
	1.2	Serie a termini non negativi	233
	1.3	Serie a termini di segno variabile	239
2	Serie di Taylor. Esponenziale complesso		245
	2.1	Serie di Taylor delle trascendenti elementari	245
	2.2	Serie nel campo complesso. Esponenziale complesso	249

6 Calcolo integrale per funzioni di una variabile **257**

1	Introduzione al calcolo integrale		257
2	L'integrale come limite di somme		258
	2.1	La definizione di integrale	258
	2.2	Classi di funzioni integrabili	262
3	Proprietà dell'integrale		263
4	Il teorema fondamentale del calcolo integrale		266
5	Calcolo di integrali indefiniti e definiti		268
	5.1	Integrali immediati, per scomposizione, per sostituzione	268
	5.2	Integrazione delle funzioni razionali	273
	5.3	Integrazione per parti	277
	5.4	Integrazione delle funzioni trigonometriche	281
	5.5	Integrazione delle funzioni irrazionali	285
	5.6	Integrazione di funzioni discontinue	287
6	Alcune applicazioni fisiche e geometriche		289
7	Calcolo numerico approssimato di un integrale		294
8	Integrali generalizzati		296
	8.1	Integrazione di funzioni non limitate	296
	8.2	Criteri di integrabilità al finito	297
	8.3	Integrazione su intervalli illimitati	300
	8.4	Criteri di integrabilità all'infinito	303
9	Funzioni integrali		305
10	Convoluzione e sistemi fisici lineari		310

11 Teorema di Bolzano-Weierstrass, continuità uniforme e integrabilità delle funzioni continue 314
11.1 Alcuni risultati fondamentali per le successioni di numeri reali 314
11.2 Continuità uniforme 316
11.3 Integrabilità delle funzioni continue 318

7 Modelli dinamici discreti 323
1 Introduzione alla modellistica 323
1.1 Modello di Malthus 324
1.2 Modello logistico 326
1.3 Modello dell'acceleratore 327
2 Generalità sulle equazioni alle differenze 328
3 Equazioni lineari del prim'ordine a coefficienti costanti 329
4 Equazioni autonome non lineari 333
4.1 Orbite, diagrammi a gradino e punti fissi o d'equilibrio 333
4.2 Punti fissi e stabilità 335
4.3 Stabilità per linearizzazione 337
4.4 Orbite periodiche e stabilità 340
4.5 Esistenza di orbite periodiche 342
4.6 Comportamento caotico 343
4.7 Equazione logistica discreta 344
5 Equazioni lineari a coefficienti costanti del second'ordine 351
5.1 Equazioni omogenee 351
5.2 I numeri di Fibonacci 354
5.3 Equazioni non omogenee 356
5.4 Stabilità 358

A Formule utili 361
1 Costanti matematiche 361
2 Funzioni trigonometriche 361
3 Funzioni iperboliche 364
4 Derivate elementari 365
5 Regole di derivazione 365
6 Sviluppi di Mac Laurin delle principali funzioni 366
7 Tabella di primitive 367

B Grafici 369

Indice analitico 377

Prefazione

Negli ultimi otto anni i corsi universitari di matematica hanno subìto notevoli cambiamenti: il "nuovo ordinamento" degli studi universitari, basato sul modello di una laurea triennale seguita da un biennio specialistico, ha profondamente mutato le esigenze e le caratteristiche dell'insegnamento della matematica "di base". Ad una prima fase caratterizzata da una drastica riduzione nei contenuti, e contemporaneo mutamento nel taglio di questi insegnamenti, improntati ad uno stile più pragmatico e meno astratto, si sono succeduti via via vari aggiustamenti, che hanno cercato di tener conto sia dell'esperienza didattica che delle esigenze proprie dell'insegnamento di una disciplina con caratteristiche sue proprie, com'è la matematica. Ora siamo ad un nuovo punto di mutamento: l'università torna a sottolineare maggiormente la formazione di base, che era stata in parte sacrificata nella frammentazione di mille corsi brevi o compositi. L'esperienza del nostro testo "Matematica", scritto otto anni fa per venire incontro alle mutate esigenze didattiche, e rivisto dopo quattro anni, ci spinge quindi oggi ad un nuovo impegno, nella speranza di offrire dei testi universitari di matematica che possano essere pienamente utili a studenti e docenti.

La prima scelta, naturale per quanto detto sopra, è stata: a ciascun corso il suo libro di testo. Ecco quindi questa "Analisi 1", che sarà seguita a breve da una "Analisi 2", e affiancata da una "Geometria e Algebra", che sarà scritta da altri ma coordinata con questi nostri testi: questo allo scopo di poter dare ad ogni corso il giusto spazio di approfondimento, senza cadere nelle eccessive sintesi, ma nemmeno nella tentazione del "trattato" che rimane poi chiuso su uno scaffale. Il nostro volume unico "Matematica" continuerà ad esistere, almeno per il momento, e potrà essere utile nelle situazioni in cui rimangano corsi piuttosto compressi.

I contenuti di questo testo di Analisi 1 sono quelli fondamentali di un corso di Analisi Matematica per funzioni di una variabile, ed un'occhiata all'indice sarà sufficiente ad illustrarli. Merita un discorso a parte solo l'ultimo capitolo, "Modelli dinamici discreti", che presenta un argomento meno tradizionale con il quale si intende aprire per lo studente una finestra verso la modellistica, con la speranza di stimolarne la curiosità verso gli sviluppi successivi dell'Analisi e delle sue applicazioni. La controparte continua dei modelli dinamici, ossia le equazioni differenziali, sono state invece collocate nel secondo volume.

Pur nel maggiore approfondimento, i criteri didattici generali che ci ispirano in questo testo sono gli stessi che ci hanno guidato fin qui:

1. Anzitutto, introdurre il minimo di astrazione necessaria per raggiungere l'obiettivo di conoscere, comprendere e saper utilizzare i contenuti di base dell'Analisi Matematica, con particolare riguardo agli aspetti effettivamente utilizzati negli altri corsi della laurea triennale.

2. Mantenere un equilibrio tra sinteticità e chiarezza: "Things should be made as simple as possible, but not any simpler"[1] (Einstein). L'eccessiva brevità oscura le idee. La giustificazione del risultato, la dimostrazione, quando non richieda un apparato formale troppo pesante, e quindi non sia incompatibile con la sinteticità, rende più consapevoli dei nessi e perciò aiuta a comprendere.

3. Motivazione. In uno studio impegnativo come quello della matematica, la motivazione gioca un ruolo fondamentale. D'altro canto, lo studente che affronta un corso di matematica di base, di solito sta iniziando lo studio di una disciplina tecnico-scientifica, che costituisce il suo interesse principale. Perciò si è cercato di presentare ogni nuovo concetto attraverso esempi tratti dalle applicazioni più comuni e di sviluppare la teoria accompagnandola costantemente con riferimenti a problemi tratti dalle varie scienze, evidenziando ove possibile il ruolo dello strumento matematico nella modellizzazione scientifica.

4. Nessuna separazione tra "teoria" e "pratica". Non esiste sapere senza saper fare, e viceversa. Esempi, esercizi e applicazioni sono costantemente alternati alla presentazione teorica.

5. Modularità. I corsi di matematica di base sono variamente organizzati nei vari corsi di studio e nelle varie sedi. Inevitabilmente ogni docente dovrà scegliere quali parti del testo svolgere e quali no, nei propri corsi. Si è cercato di mantenere la massima modularità e indipendenza possibile, compatibilmente con la struttura logica del discorso matematico. In ogni capitolo la materia è stata organizzata raggruppando i concetti irrinunciabili in alcuni paragrafi. Tutto questo dovrebbe rendere agevole per il docente, e quindi per lo studente, un utilizzo parziale del libro.

In particolare, di quasi tutti i teoremi del calcolo differenziale e integrale in una variabile qui presentati è stata fornita una dimostrazione, ottenuta con un percorso logico che renda il più contenuto possibile l'investimento iniziale di tipo fondazionale, ridotto sostanzialmente al solo teorema di esistenza del limite per successioni monotone. Alla fine del capitolo sul calcolo integrale è stata inserita una sezione che, avendo come punto d'arrivo la dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue, presenta sinteticamente i principali temi e risultati fondazionali tradizionali: teorema di Bolzano-Weierstrass, completezza di $\mathbb{R}$, teorema di Heine-Cantor. Svolgendo anche questa sezione si ha un quadro ragionevolmente completo dei fondamenti dell'Analisi Matematica di base, mentre omettendolo non è compromessa in alcun modo la comprensione delle restanti parti del testo.

Desideriamo anche in questa occasione ringraziare tutti i nostri colleghi e studenti che nell'arco di questi anni, con i loro suggerimenti, osservazioni e critiche, ci hanno stimolato a cercare di migliorare continuamente i nostri testi.

Giugno 2008 *Gli Autori*

[1] Le cose andrebbero rese il più semplice possibile, ma non troppo semplici.

3 Limiti e continuità

In questo corso ci occuperemo prevalentemente del *calcolo infinitesimale*, disciplina matematica che affonda le sue radici nella Grecia del III secolo a.C. (Euclide, Archimede), ha un grande sviluppo a partire dal Seicento, parallelamente al nascere della scienza moderna, in particolare ad opera di Newton e Leibniz, tra il 1670 e il 1710 circa; viene quindi sottoposta a revisione critica e fondata rigorosamente nell'Ottocento, prima da Cauchy, nel 1821[1], poi da Weierstrass e da vari altri matematici (Heine, Cantor, Méray,...) intorno al 1870. Le idee e le tecniche di calcolo proprie di questa disciplina fanno oggi parte del bagaglio essenziale con cui scienza e tecnologia si esprimono e procedono.

Il fondamento concettuale del calcolo infinitesimale sta nella nozione di *limite* (D'Alembert 1765, Cauchy 1821), che quindi può a buon diritto considerarsi una pietra miliare nella storia del pensiero scientifico. Noi introdurremo questo concetto gradualmente, prima nel caso discreto (par. 1) e poi in quello continuo, in cui storicamente è nato (par. 2).

Nel contesto discreto, il limite si può vedere come un'*operazione* che, a differenza delle operazioni algebriche elementari (somma, prodotto), viene eseguita non su una *coppia* di numeri ma su una *successione* di infiniti numeri. Per prima cosa introdurremo quindi il concetto di successione. Questo argomento, oltre a servirci immediatamente per introdurre il concetto di limite di funzione, sarà ripreso nel capitolo 5 parlando di *serie numeriche*, e nel capitolo 7 discutendo i *modelli dinamici discreti.*

1 SUCCESSIONI

1.1 Definizione di successione. Definizione di limite

Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ degli interi non negativi ordinato secondo l'ordine naturale

$$\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

[1] Corso di Analisi per l'Ecole Polytechnique di Parigi.

Questo è l'esempio canonico di successione. Stabiliamo ora una legge che associa, a ogni elemento di $\mathbb{N}$ (o da un certo intero in poi) un numero (reale):

$$n \longmapsto a_n$$

Chiameremo *successione* una tale corrispondenza.

Una successione può dunque vedersi come una funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f : n \mapsto a_n$$

(o eventualmente, $f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$, per un certo n_0 fissato). Il fatto che il dominio della funzione f sia l'insieme dei naturali, rende possibile visualizzare la successione enumerando i suoi valori, nell'ordine in cui essi si succedono al crescere di n:[2]

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Esempio

1.1

$n \geq 0$	$n \longmapsto n^2$	$0, 1, 4, 9, 16, \ldots$
$n \geq 0$	$n \longmapsto (-1)^n$	$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
$n \geq 1$	$n \longmapsto 2^{1/n}$	$2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots$
$n \geq 1$	$n \longmapsto \dfrac{1}{n}$	$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$
$n \geq 2$	$n \longmapsto \dfrac{n+1}{n-1}$	$3, 2, \dfrac{5}{3}, \dfrac{6}{4}, \dfrac{7}{5}, \ldots$
$n \geq 0$	$n \longmapsto 4$	$4, 4, 4 \ldots$ (successione costante)

Possiamo rappresentare graficamente questa corrispondenza con i punti del piano cartesiano di coordinate (n, a_n) (fig.3.1).

Sottolineiamo che la successione è nota quando è nota la legge che, dato l'intero n, determina il numero a_n associato a quell'intero. Per indicare una successione useremo i simboli

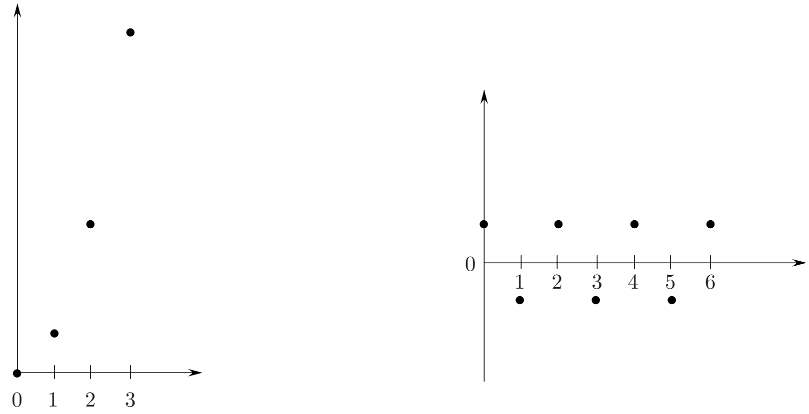
$$n \longmapsto a_n \quad \text{oppure} \quad \{a_n\}$$

precisando l'insieme in cui varia l'indice n (tutto $\mathbb{N}$ o da un certo intero in poi).

Una successione $\{a_n\}$ si dirà

limitata inferiormente	se esiste un numero m tale che	$a_n \geq m \; \forall n$
limitata superiormente	se esiste un numero M tale che	$a_n \leq M \; \forall n$
limitata	se esistono due numeri m e M tali che	$m \leq a_n \leq M \; \forall n$

[2] I puntini di sospensione... scritti nella formula seguente dopo a_n sono fondamentali: significano che non stiamo considerando soltanto i primi n termini della successione (cioè un insieme finito di numeri), ma l'intera successione di infiniti termini (in cui n gioca il ruolo di indice muto).



a) : $n \longmapsto n^2$ b) : $n \longmapsto (-1)^n$

Figura 3.1.

Per esempio, la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata; $\{n^2\}$ è limitata solo inferiormente; la successione $\{(-2)^n\}$ non è limitata (né inferiormente, né superiormente).

L'operazione che vogliamo definire (il *limite*) consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda: *come si comportano i numeri* $\{a_n\}$ *quando n diventa sempre più grande?*

Cominciamo con l'introdurre un modo di dire molto utile.

Definizione 3.1 Diciamo che una successione $\{a_n\}$ possiede (o acquista) *definitivamente* una certa proprietà se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà per ogni intero $n \geq N$.

Esempio

1.2 La successione $\{n - 10\sqrt{n}\}$ è definitivamente positiva; la successione $\{\frac{1}{n}\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) è definitivamente minore di $10^{-10^{10}}$.

Successioni convergenti

Definizione 3.2 Una successione $\{a_n\}$ si dice *convergente* se esiste un numero $l \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: qualunque sia $\varepsilon > 0$ risulta definitivamente

$$|a_n - l| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

In altre parole: per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un intero N (che naturalmente dipenderà in generale da questo ε) tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \geq N$$

Se la successione $\{a_n\}$ è convergente, ad essa è associato perciò il numero l. Si osservi che tale numero è unico, poiché, se ve ne fossero due, l_1 e l_2, associati alla medesima successione, risulterebbe definitivamente (applicando la disuguaglianza triangolare (4.4), cap. 1)

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

ma tale disuguaglianza, potendo noi scegliere ε come vogliamo, può sussistere solo se $l_1 = l_2$.

DEFINIZIONE 3.3 Il numero l che compare nella (1.1) si chiama *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \text{oppure} \quad a_n \to l \text{ per } n \to +\infty$$

(si legge, rispettivamente: il limite, per n tendente all'infinito, di a_n è l, oppure: a_n tende a l per n tendente a infinito).

Si noti che la disuguaglianza (1.1) corrisponde, più esplicitamente, alle seguenti due:

(1.2) $$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

Rappresentando graficamente i punti della successione

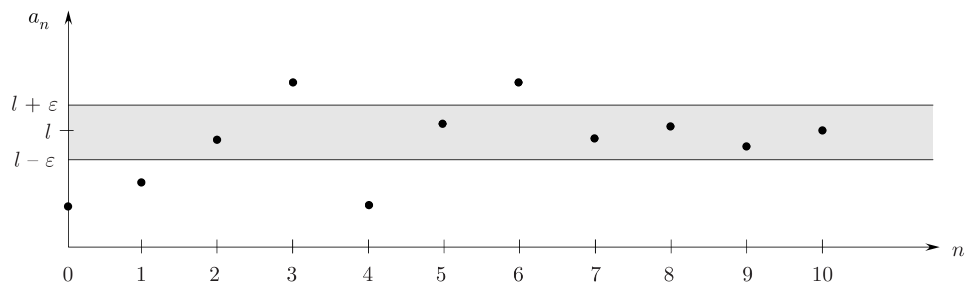


Figura 3.2.

la condizione di convergenza significa che, fissata una striscia orizzontale $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ "comunque stretta", da un certo indice in poi i punti della successione non escono più da questa striscia (v. fig. 3.2). Da questa osservazione risulta chiaramente che: *ogni successione convergente è limitata.*

Esempi

1.3 Mostriamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = 1$ (cosa che si può facilmente sospettare osservando l'andamento della successione). Delle due disuguaglianze

$$1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon$$

quella di sinistra è sempre soddisfatta, mentre quella di destra è soddisfatta per

$$n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere $N = (2 + \varepsilon)/\varepsilon$ (o uguale al primo intero $> (2 + \varepsilon)/\varepsilon$) per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

1.4 Per mostrare che $2^{1/n} \to 1$ per $n \to \infty$, si studiano le disuguaglianze

$$1 - \varepsilon < 2^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

Quella di sinistra è sempre soddisfatta; quella di destra, prendendo il logaritmo (in base 2) di ambo i membri, si scrive

$$\frac{1}{n} < \log_2(1 + \varepsilon)$$

ed è soddisfatta se $n > 1/\log_2(1 + \varepsilon)$. Si sceglie perciò $N = \ldots$

Non risultano convergenti invece le prime due successioni dell'esempio 1.1. Esse sono però molto diverse tra loro e conviene introdurre definizioni che ne mettano in risalto la differenza.

Successioni divergenti. Successioni irregolari

Definizione 3.4 Quando, al crescere di n, una successione supera definitivamente qualunque numero $M > 0$ fissato, diremo che *diverge a* $+\infty$; se invece scende al di sotto di $-M$,diremo che *diverge a* $-\infty$. (Il simbolo ∞ si legge "infinito").

Diremo nei due casi, rispettivamente, che $+\infty$ e $-\infty$ sono i limiti della successione e scriveremo, rispettivamente,:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{\to+\infty} a_n = -\infty\,. \qquad \blacksquare$$

Questi simboli, $+\infty$ e $-\infty$, non sono numeri. Se rappresentiamo i numeri reali sulla retta euclidea, ogni numero corrisponde a un punto e ogni punto a un numero. Con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ conveniamo di indicare due "punti", uno ($+\infty$) sta alla destra di ogni punto di $\mathbb{R}$ e l'altro ($-\infty$) alla sinistra; a questi due punti non corrisponde però alcun numero (in altre parole, non possiamo definire sui simboli $+\infty$ e $-\infty$ le operazioni di somma e prodotto con le proprietà indicate in R_1 e R_2, anche se, come vedremo, potremo fare "parzialmente" queste operazioni).

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con l'aggiunta dei due elementi $\{+\infty\}$ e $\{-\infty\}$ sarà indicato con $\mathbb{R}^*$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Possiamo rappresentare "visivamente" l'insieme $\mathbb{R}^*$ mettendo in corrispondenza biunivoca (fig. 3.3) i punti della retta con quelli di una semicirconferenza, proiettando questi ultimi dal centro C sulla retta $\mathbb{R}$:
Ai punti A e B non corrisponde su $\mathbb{R}$ alcun punto; diremo che $\{-\infty\}$ è il corrispondente del punto A e $\{+\infty\}$ il corrispondente di B.

L'operazione di limite risulta completamente significativa se ambientata in $\mathbb{R}^*$ invece che in $\mathbb{R}$; cioè il limite di una successione può essere un numero reale l oppure $+\infty$ oppure $-\infty$; le successioni il cui limite è un numero reale si dicono *convergenti*, quelle il cui limite è $+\infty$ oppure $-\infty$ si dicono *divergenti*. La successione canonica $\{n\}$ degli interi naturali evidentemente diverge a $+\infty$; così pure la successione $\{2^n\}$.

Infine osserviamo che ci sono successioni che non ricadono in nessuna delle categorie precedenti, cioè non sono convergenti né divergenti; per esempio la successione $\{(-1)^n\}$ oppure $\{(-2)^n\}$ (si noti che la prima è limitata e la seconda no). Tali successioni si diranno *irregolari* o *indeterminate*. Per esse l'operazione di limite non è definita, ovvero *il loro limite non esiste*.

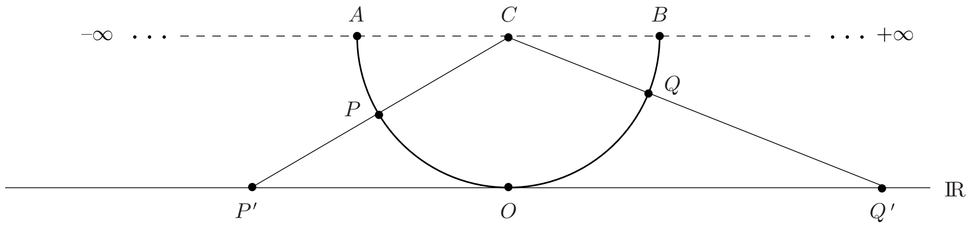


Figura 3.3.

Insiemi non limitati
È comodo adottare la convenzione introdotta per i limiti anche per il sup e per l'inf, estendendo la definizione di queste quantità nel modo seguente:

DEFINIZIONE 3.5 Se l'insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente (inferiormente) diremo che

$$\sup E = +\infty \quad (\inf E = -\infty).$$

In questo modo la proprietà R_4 dei numeri reali può essere enunciata così:

ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è dotato di estremo superiore e inferiore; $\sup E$ ($\inf E$) è un numero se E è limitato superiormente (inferiormente), altrimenti è $+\infty$ ($-\infty$).

Infinitesimi e infiniti
Una successione a_n tendente a zero si dice *infinitesima*. Ad esempio, sono infinitesime le successioni $\{\frac{1}{n}\}$, $\{\frac{1}{n^2}\}, \ldots$

Il concetto di infinitesimo gioca un ruolo centrale ed è fondamentale anche per avere un'*immagine intuitiva* corretta ed efficace dei concetti del calcolo infinitesimale. Vedremo nel par. 2 che il concetto di infinitesimo nel continuo (cioè parlando di funzioni) sarà perfettamente analogo. L'idea chiave a cui prestare attenzione è la seguente:

"infinitesimo" non è un "numero infinitamente piccolo" (concetto privo di senso, se non si vuole che denoti semplicemente il numero 0) ma una *quantità variabile* (successione o, come vedremo, funzione), che *diviene indefinitamente piccola.*

Analogamente, una successione a_n tendente a $\pm\infty$ si dice *infinita*. Ad esempio, $\{n^2\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Talvolta è possibile precisare se una successione convergente si avvicina al suo limite *per eccesso* o *per difetto*. Questo concetto è precisato dalla prossima

Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente, ossia per ogni $n \geq n_0$ (con n_0 opportuno) si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$. Scegliamo ε abbastanza piccolo perché si abbia $l + \varepsilon < 1$. Possiamo scrivere la catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} &a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0}; \\ &a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)^2\, a_{n_0} \\ &\qquad \dots \\ &a_{n_0+k} < (l+\varepsilon)^k\, a_{n_0}. \end{aligned}$$

Poiché $(l+\varepsilon) < 1$, si ha $(l+\varepsilon)^k \to 0$ per $k \to \infty$. D'altro canto a_{n_0} è fissato; dunque per k abbastanza grande il secondo membro (e quindi il primo) è piccolo quanto si vuole, il che dimostra che $a_n \to 0$.

Supponiamo ora che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$. Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon$. Scegliamo ε abbastanza piccolo perché si abbia $l - \varepsilon > 1$. Analogamente a prima, possiamo ottenere la disuguaglianza:

$$a_{n_0+k} > (l-\varepsilon)^k\, a_{n_0}$$

per un certo n_0 fissato e qualsiasi k. Poiché $(l-\varepsilon) > 1$ e quindi $(l-\varepsilon)^k \to +\infty$, si conclude che $a_n \to +\infty$. ■

Esempi

1.15 Dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \text{ per ogni } b > 0.$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla successione $a_n = \frac{b^n}{n!}$. Si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \to 0.$$

Per il crietrio del rapporto allora, $\frac{b^n}{n!} \to 0$. Abbiamo quindi ottenuto un nuovo caso nella gerarchia degli infiniti.

1.16 Si provi a calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$$

col criterio del rapporto, osservando che il metodo fallisce.

Ecco alcuni esempi di come si applicano tutte le osservazioni precedenti per risolvere alcune forme di indeterminazione. Quando avremo studiato un certo numero di *limiti notevoli* (par. 3.3) potremo risolvere mediante stime asintotiche situazioni più complesse di queste.

Esempi

1.17

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Considerando solo le potenze di grado massimo a numeratore e denominatore, possiamo scrivere:

$$\frac{2n^3+4n+1}{5\,(n+1)^3} \sim \frac{2n^3}{5n^3} = \frac{2}{5}$$

e pertanto la successione tende a 2/5.

1.18
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n}{2^{n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

2^n è un infinito di ordine superiore rispetto ad n; possiamo scrivere quindi:

$$2^n+n=2^n\left(1+\frac{n}{2^n}\right)\sim 2^n$$

perché $\frac{n}{2^n}\to 0$, e quindi $\left(1+\frac{n}{2^n}\right)\to 1$. Pertanto

$$\frac{2^n+n}{2^{n+1}}\sim\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

e il limite è $\frac{1}{2}$.

1.19
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\left[\infty^0\right]$$

Scriviamo
$$\sqrt[n]{n}=n^{1/n}=e^{\log n^{1/n}}=e^{\frac{\log n}{n}}.$$

Usando il confronto di infiniti, $\frac{\log n}{n}\to 0$, e quindi si deduce

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=e^0=1.$$

1.20
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Applicando il criterio del rapporto, consideriamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}<1,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la definizione di e; perciò $a_n\to 0$. Abbiamo quindi provato che $n!$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a n^n.

Esercizi

1. Dare esempi di "infiniti" di ordine inferiore a $\{\log n\}$ e di ordine superiore a $\{2^n\}$.

2. Provare che
$$\log(n+1)\sim\log n$$

3. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
per le seguenti successioni:
$$a_n=n^n\qquad a_n=n!\qquad a_n=2^n\qquad a_n=n^2$$

4. Dare una stima asintotica delle seguenti successioni, mediante una successione "più semplice", e calcolare quindi il limite:

$$\frac{n^3+2n^2+\sin n}{n+\log n}\qquad\frac{n^2\log n+n}{\log 3n}\qquad\frac{n!-(n-1)!}{n+(n-2)!}$$

5 Lo studente, utilizzando una normale calcolatrice tascabile o un PC, calcoli $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Troverà, per esempio

n	$(1+1/n)^n$
10^3	2.7169239
10^4	2.7181459
$\vdots$	$\vdots$
10^{11}	1
10^{12}	1

Cerchi di spiegarne la ragione.

6 Un altro esempio: il limite

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)n$$

si presenta sotto la forma di indecisione $\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo l'espressione per $\sqrt{n^2+1}+n$ tale limite prende la forma

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

Se si usa una calcolatrice per il calcolo del limite si ottiene (per esempio)

n	$(\sqrt{n^2+1}-n)n$	$n/(\sqrt{n^2+1}+n)$
10^2	0.4999875	0.4999875
10^3	0.5	0.499999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^7	0	0.5
10^8	0	0.5

Spiegare la ragione del diverso risultato.

7 Calcolare i limiti, per $n\to+\infty$, delle successioni seguenti:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad \sqrt{n^2+n}-n \qquad (\sqrt{n^4+1}-n^2)n$$

$$\log(n+1)-\log n \qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^9}$$

COMPLEMENTI

1 Dimostrare il teorema sul limite del quoziente: se $a_n\to a, b_n\to b$, allora $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$ purché $b_n, b\neq 0$.

(*Suggerimento: per maggiorare* $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|$ *fare denominatore comune; ora il numeratore si maggiora in modo simile a quello visto nella dimostrazione del teorema sul limite del prodotto; per il denominatore occorre invece dimostrare che, ad esempio,* $|b_n|\geq|b|/2$ *definitivamente, e poi...*)

2 Dimostrare le relazioni che abbiamo chiamato "aritmetizzazione parziale di infinito", nei casi che non sono stati dimostrati.

3 Dimostrare che i valori assunti dalla successione $\sin n$ sono tutti diversi tra loro, ossia che $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ implica $\sin n \neq \sin m$.

4 Provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$$

(*Suggerimento*: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\ldots$; ricondursi al limite che definisce e).

5 Provare il Teorema 3.9 enunciato nel par. 1.4, ad esempio nel caso $a_n \to +\infty$.
Suggerimento: detta $[a_n]$ la parte intera di a_n, provare anzitutto le disuguaglianze:

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

Quindi sfruttando opportunamente il fatto che $[a_n]$ è intero, ricondursi al limite già noto di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

6 Dimostrare la proprietà 3 del simbolo di $\sim$ enunciata nel paragrafo 1.5 (Proposizione 3.1), usando la definizione di "asintotico" e di limite.

7 Si faccia un esempio di due successioni a_n, b_n tendenti a $+\infty$, per cui si ha:

$$a_n \sim b_n \text{ ma } e^{a_n} \textit{ non asintotico } \text{a } e^{b_n}.$$

Dunque il simbolo di asintotico non si può usare con gli esponenziali come si userebbe nei prodotti o quozienti.
(*Suggerimento*: scegliere come a_n la somma di due infiniti di tipo diverso).

2 LIMITI DI FUNZIONI, CONTINUITÀ, ASINTOTI

L'operazione di limite si può estendere dalle successioni alle funzioni. Potremo così precisare il comportamento di una funzione quando la variabile indipendente si muove vicino a un determinato punto oppure diventa molto grande (in valore assoluto).

In questo paragrafo introdurremo i concetti fondamentali riguardanti i limiti e la continuità di funzioni; nel prossimo paragrafo 3 svilupperemo i teoremi e gli strumenti che permetteranno il calcolo effettivo dei limiti; infine, nel paragrafo 4 approfondiremo lo studio delle proprietà delle funzioni continue, incontrando alcuni dei più significativi teoremi dell'analisi delle funzioni di una variabile. Nei capitoli successivi, mediante l'operazione di limite introdurremo i concetti di derivata, di differenziale e di integrale per una funzione reale di variabile reale.

Consideriamo come caso tipico un intervallo I, un punto $c \in I$ e una funzione f a valori reali, definita in I, salvo al più nel punto c. L'intervallo I può essere limitato o illimitato, chiuso o aperto; il punto c può essere interno all'intervallo oppure uno dei suoi estremi (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$).
Prendiamo ora una qualunque successione di punti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, nell'intervallo I e diversi da c, che tenda a c, per $n \to +\infty$.

A Formule utili

1 COSTANTI MATEMATICHE

e	$2.7182818285\ldots$
π	$3.1415926536\ldots$
$\log_{10} 2$	$0.3010299957\ldots$
$\log_{10} e$	$0.4342944819\ldots$
$\log_{10} \pi$	$0.4971498727\ldots$
$\log_e 2$	$0.6931471806\ldots$
$\log_e \pi$	$1.1447298858\ldots$
$\log_e 10$	$2.3025850930\ldots$
$\sqrt{2}$	$1.4142135624\ldots$
$\sqrt{e}$	$1.6487212707\ldots$
$\sqrt{3}$	$1.7320508076\ldots$
$\sqrt{\pi}$	$1.7724538509\ldots$
$\sqrt{5}$	$2.2360679775\ldots$
$\sqrt{10}$	$3.1622776602\ldots$
$1°$	$0.0174532925\ldots$ radianti
1 radiante	$57°17'44''.806\ldots$

2 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$$\sin x \qquad \cos x \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

 © 978-88-08-06485-1

Angoli notevoli

x	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0	1	0	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{10} = 18°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5} = 36°$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3\pi}{10} = 54°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{5} = 72°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	0	1	$\pm\infty$	0

Simmetrie, archi complementari e supplementari

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{cotg} x$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x \qquad \cos(\pi \pm x) = -\cos x \qquad \operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x$$

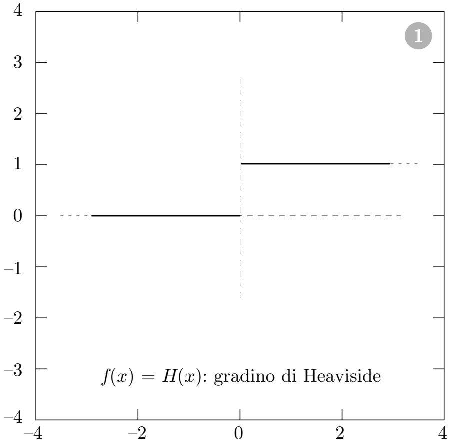
Formule di addizione

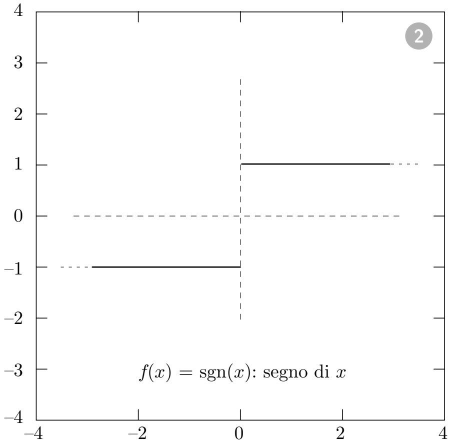
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

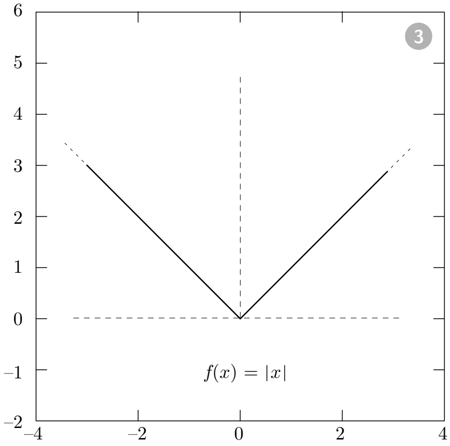
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

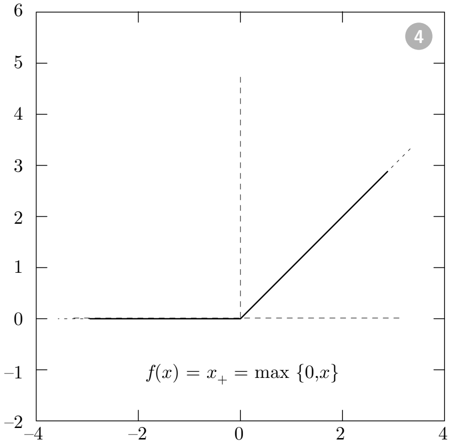
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

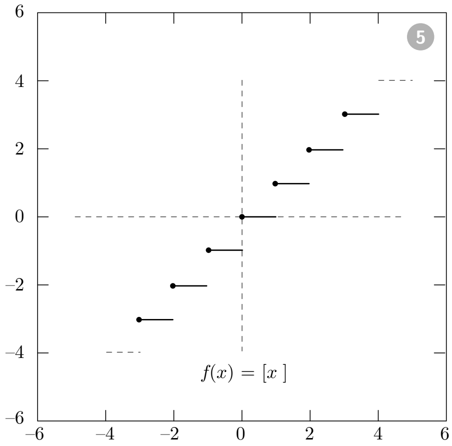
B Grafici

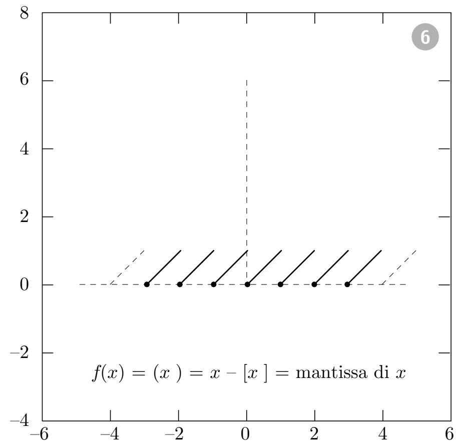

1
$f(x) = H(x)$: gradino di Heaviside

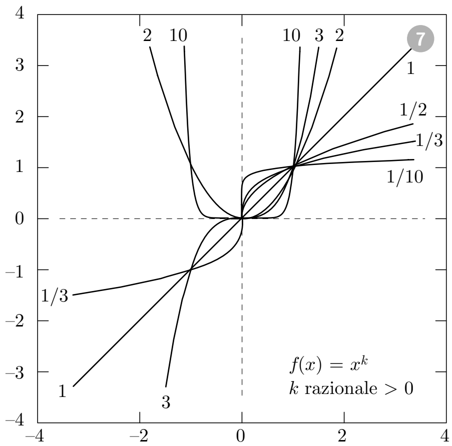

2
$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$: segno di x

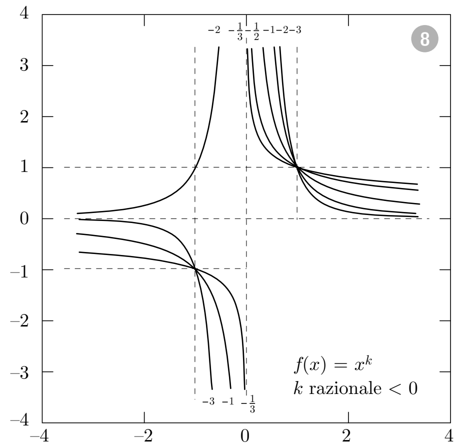

3
$f(x) = |x|$

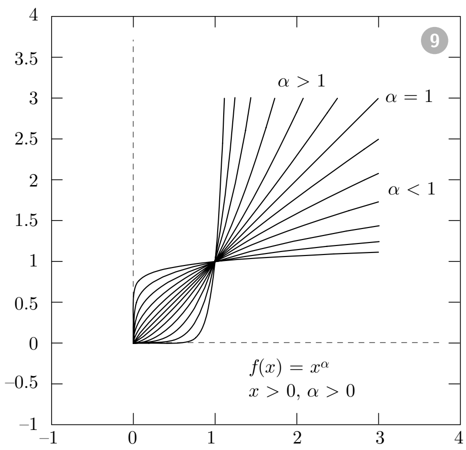

4
$f(x) = x_+ = \max\{0,x\}$

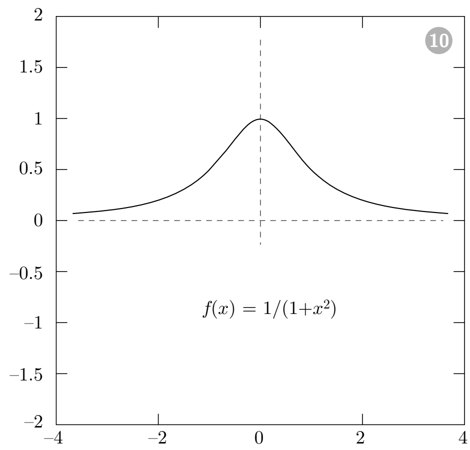

5
f(x) = [x]


6
f(x) = (x) = x − [x] = mantissa di x


7
2 10 10 3 2
1
1/2
1/3
1/10
1/3
1
3
f(x) = x^k
k razionale > 0


8
f(x) = x^k
k razionale < 0


9
α > 1
α = 1
α < 1
f(x) = x^α
x > 0, α > 0


10
f(x) = 1/(1+x²)

Marco Bramanti   Carlo D. Pagani   Sandro Salsa

Analisi matematica 1

Gli autori

Marco Bramanti è professore associato di Analisi matematica presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. I suoi interessi di ricerca vertono sulle equazioni alle derivate parziali e sull'analisi reale, in particolare sulla teoria degli integrali singolari.
Carlo Domenico Pagani è professore ordinario di Analisi matematica presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. Ha svolto attività didattica e di ricerca presso l'Università della California (Berkeley), l'Accademia delle Scienze (Russia), l'Accademia Sinica (Cina), il Tata Institute for Fundamental Research (India). Si interessa principalmente di equazioni alle derivate parziali e di problemi inversi.
Sandro Salsa è professore ordinario di Analisi matematica presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. Ha svolto attività di ricerca presso l'Università del Minnesota (Minneapolis), il Courant Institute (New York), l'Institute for Advanced Study (Princeton) e l'Università del Texas (Austin). Si occupa principalmente di equazioni a derivate parziali e problemi di frontiera libera.
Insieme sono autori anche di *Matematica – calcolo infinitesimale e algebra lineare* (Zanichelli, 2004).

L'opera

Analisi matematica di Bramanti, Pagani e Salsa è un corso per la formazione di base che riesce a conferire anche il giusto spazio all'approfondimento grazie ai rigorosi criteri didattici adottati:

- **Il minimo di astrazione necessaria** viene inserita per raggiungere l'obiettivo di conoscere, comprendere e saper utilizzare i contenuti fondamentali dell'analisi matematica.
- **Equilibrio tra sinteticità e chiarezza:** la giustificazione del risultato, quando non richieda un apparato formale troppo pesante, rende più consapevoli dei nessi logici.
- **Motivazione:** ogni nuovo concetto è introdotto attraverso esempi tratti dalle applicazioni più comuni e la teoria è accompagnata costantemente con riferimenti a problemi tratti da altre scienze, evidenziando il ruolo dello strumento matematico nella modellizzazione.
- **Nessuna separazione tra "teoria" e "pratica":** esempi, esercizi e applicazioni sono costantemente alternati alla presentazione teorica.
- **Modularità:** si è mantenuta la massima indipendenza possibile tra gli argomenti trattati, compatibilmente con la struttura logica del discorso matematico.

BRAMANTI"PAGANI"SALSA*ANALISI MAT
ISBN 978-88-08-06485-1
9 788808 064851
6 7 (60B)

Al pubblico € 35,20 •••
In caso di variazione Iva o cambiamento prezzo consultare il sito o il catalogo dell'editore
www.zanichelli.it