▼ **4.0 - Punti critici e forme quadratiche**

▼ **4.1 - Tipologie di punti critici**

## Punti di massimo e minimo locale

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$, $\overline{x} \in A$ si dice di **massimo (minimo) locale** per $f$ se:

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tale che } f(x) \leq (\geq) f(\overline{x}) \quad \forall\ x \in A \cap B(\overline{x}, \delta)$$

## Teorema di fermat

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$, $f$ differenziabile. Se $\overline{x} \in A$ è di massimo/minimo locale, allora:

$$\nabla f(\overline{x}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$$

**Dimostrazione in $n = 2$**

Definiamo la funzione $h(t) = f(\overline{x} + t, \overline{y})$, definita per $t \in$ intorno dell'origine. Siccome $f$ ha un minimo in $(\overline{x}, \overline{y})$, allora $f(\overline{x} + t, \overline{y}) \geq f(\overline{x}, \overline{y}) \quad \forall t \in$ intorno dell'origine, dunque $h(t) \geq h(0)$, quindi $h(t)$ ha un minimo in $0$.

Inoltre, per definizione di derivata parziale, abbiamo che $\exists\ h'(t) = \partial_x f(\overline{x} + t, \overline{y})$. Per il teorema di fermat in $n = 1$ sappiamo infine che $f'(0) = 0$, e possiamo quindi concludere che $\partial_x f(\overline{x} + t, \overline{y}) = 0$.

È possibile fare lo stesso ragionamento con $h(t) = f(\overline{x}, \overline{y} + t)$ e arrivare alla conclusione che $\partial_y f(\overline{x} + t, \overline{y}) = 0$, dunque abbiamo dimostrato che $\nabla f(\overline{x}) = (0, 0)$.

## Punto critico o stazionario

Un punto in cui $\nabla f(x) = \underline{0}$ si dice **punto critico o stazionario**.

**Caso $n = 1$**

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, può avere in $x$:

- Punto di **massimo**
- Punto di **minimo**
- Punto di **flesso**

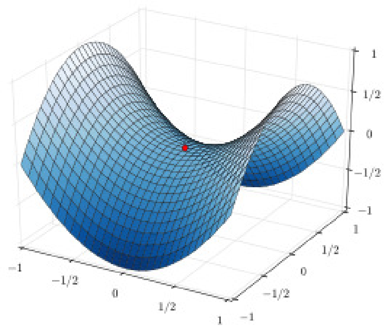
**Caso $n = 2$**

Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\overline{x}) = 0$, con $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, può avere in $\overline{x}$:

- Punto di **massimo**
- Punto di **minimo**
- Punto di **sella**

Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha un punto di sella in $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \text{ intorno } B(\overline{x}, \delta), \exists\, x_- \text{ e } x_+ \in B(\overline{x}, \delta) \text{ tale che}$$
$$f(x_-) < f(\overline{x}) \text{ e } f(x_+) > f(\overline{x})$$



Esempio grafico di punto di sella.

▼ **4.2 - Derivate parziali seconde e forme quadratiche**

## Derivate parziali seconde

### Caso $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile con $\begin{cases} \partial_x f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \partial_y f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$, allora definiamo **derivate parziali seconde** le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{cases} \to \text{miste} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases} \to \text{pure}$$

### Caso $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile, allora definiamo **derivate parziali seconde** le seguenti:

$$\forall\, j, k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Nel caso in cui $j = k$ scriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j}$ e tali derivate vengono dette **pure**.

Nel caso in cui $j \neq k$ tali derivate vengono dette **miste**.

## Teorema di Schwarz

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ e siano tutte le sue derivate seconde continue allora:

$$\forall\, j,k \in \{1,\dots,n\} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j} \qquad \text{(in ogni punto di } A)$$

## Matrice Hessiana

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ e siano tutte le sue derivate seconde continue allora possiamo definire la **matrice Hessiana** $Hf(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nel seguente modo:

$$(Hf(x))_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \qquad Hf = \begin{pmatrix} \partial_{11} f & \partial_{12} f & \dots & \partial_{1n} f \\ \partial_{21} f & \partial_{22} f & \dots & \partial_{2n} f \\ \dots \\ \partial_{n1} f & \partial_{n2} f & \dots & \partial_{nn} f \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è l'**equivalente del gradiente** per le derivate seconde.

#### Proposizioni

- Per il teorema del gradiente la matrice Hessiana $Hf(x)$ è simmetrica $\forall\, x \in A$.

## Forma quadratica

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T$, la **forma quadratica** associata ad $A$ è la funzione:

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad q(h) = \langle Ah, h \rangle \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$$

Caso $\mathbb{R}^2$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la forma quadratica associata ad $A$ è:

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) &= \langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle \\ &= ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \end{aligned}$$

## Segno di forme quadratiche

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- $\langle Ah, h\rangle > 0, \forall\, h \neq 0 \in \mathbb{R}^n \iff A > 0$
- $\langle Ah, h\rangle < 0, \forall\, h \neq 0 \in \mathbb{R}^n \iff A < 0$
- $\exists\, h^+, h^- \in \mathbb{R}^n, \langle Ah^-, h^-\rangle < 0 < \langle Ah^+, h^+\rangle \iff A$ è indefinita.

#### Osservazioni

- Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
  - $\begin{cases} a > 0 \\ det(A) > 0 \end{cases} \iff A > 0.$
  - $\begin{cases} a < 0 \\ det(A) > 0 \end{cases} \iff A < 0.$
  - $det(A) < 0 \iff A$ è indefinita.
  - $det(A) = 0 \iff A$ è semidefinita ($A \geq 0$ oppure $A \leq 0$ in base al valore di $a$).

  **Dimostrazione**

  Dimostriamo solo il caso in cui $A > 0$:

  - $\implies$

    Dalle ipotesi abbiamo che $a > 0 \wedge det(A) = ac - b^2 > 0$. Siccome $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ si possono presentare i seguenti due casi:

    - $h_2 = 0$

      In questo caso deve essere sicuramente $h_1 \neq 0$. e calcolando la forma quadratica otteniamo $q(h) = ah_1^2$, la quale è sicuramente $> 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ perchè dalle ipotesi abbiamo che $a > 0$.

    - $h_2 \neq 0$

      Calcolando la forma quadratica otteniamo $q(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = h_2^2(a(\frac{h_1}{h_2})^2 + 2b\frac{h_1}{h_2} + c)$. Calcoliamo il $\Delta = 4b^2 - 4ac = -4(ac - b^2)$. Dalle ipotesi abbiamo che $ac - b^2 > 0$, quindi $\Delta < 0 \implies q(h) > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

  - $\impliedby$

    Dalle ipotesi abbiamo che $A > 0 \implies \langle A(h_1, h_2), A \rangle > 0 \implies ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

    Scegliamo ad esempio $h = (1, 0)$, in tal caso la disequazione diventa $a > 0$, avendo dimostrato la prima condizione.

    Scegliendo invece $h = (x, 1)$ la disequazione diventa $ax^2 + 2bx + c > 0$. Poniamo il $\Delta = b^2 - ac < 0 \implies -det(A) < 0 \implies det(A) > 0$.

  **qed**

- Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora $A$ ammette $n$ **autovalori** reali e vale:
  - $A > 0 \iff$ tutti gli autovalori sono $> 0$
  - $A < 0 \iff$ tutti gli autovalori sono $< 0$
  - $A$ indefinita $\iff \exists\ \lambda_1, \lambda_2$ autovalori tali che $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$

**Esercizi**

▼ Classificare il segno della forma quadratica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$ al variare di $e$ nei reali.

  Calcoliamo innanzitutto il valore di $det(A) = 2e - 1$.

Notando che $a = 2$ otteniamo 3 casistiche:

- $e > \frac{1}{2} \iff det(A) > 0 \iff A > 0$.
- $e < \frac{1}{2} \iff det(A) < 0 \iff A < 0$.
- $e = \frac{1}{2} \iff det(A) = 0 \iff A$ è semidefinita positiva.

  Calcoliamo inoltre la forma quadratica associata ad $A$:

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 = \frac{1}{2}(4h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(2h_1 + h_2)^2 \geq 0 \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

  Possiamo infatti notare che $q(h_1, h_2)$ si annulla $\forall h = \lambda(1,2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$, dunque $A$ non può essere definita positiva.

## Segno del determinante delle sottomatrici

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, considero $A_k$ (es. $A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ecc.), allora:

- $det(A_k) > 0 \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\} \implies A > 0$
- $(-1)^k det(A_k) > 0 \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\} \implies A < 0$

  Ovvero il determinante assume segni alternati per ogni $k$ ($k$ pari $\implies det(A_k)$ positivo, $k$ dispari $\implies det(A_k)$ negativo).

▼ **4.3 - Teorema di Taylor**

## Teorema di Taylor di grado 2

**Caso $\mathbb{R}^2$**

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f'$ e $f''$ continue, allora $\forall\, \overline{x}, h \in \mathbb{R}, \exists\, \sigma \in \,]0,1[$ tale che:

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + f''(\overline{x} + \sigma h)\frac{h^2}{2} \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}$$

**Osservazioni**

- Dalla formula trovata segue quella con gli $o$ piccoli:

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + h) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + f''(\overline{x} + \sigma h)\frac{h^2}{2} \\ &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + f''(\overline{x})\frac{h^2}{2} + \underbrace{(f''(\overline{x} + \sigma h) - f''(\overline{x}))\frac{h^2}{2}}_{o(h^2)} \end{aligned}$$

**Dimostrazione**

Usando $x = \overline{x} + h$ dimostriamo che $\forall\ \overline{x}, x \in \mathbb{R}, \exists\ \sigma \in\ ]0,1[$ tale che:

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x}))\frac{(x-\overline{x})^2}{2}$$

Modifichiamo la formula da dimostrare nella seguente: $f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x-\overline{x}) - k(x-\overline{x})^2 = 0$ e mostriamo che esiste $\sigma \in\ ]0,1[$ tale che $k = \frac{f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x}))}{2}$.

Costruiamo la seguente funzione:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - k(x-t)^2$$

Se utilizziamo $x$ e $\overline{x}$ come $t$ otteniamo:

$$\begin{gathered} g(x) = f(x) - f(x) - f'(x)(x-x) - k(x-x)^2 = 0 \\ g(\overline{x}) = f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x-\overline{x}) - k(x-\overline{x})^2 = 0 \end{gathered}$$

Siccome $g(x) = g(\overline{x})$ possiamo utilizzare il teorema di Rolle nell'intervallo $[x, \overline{x}]$ e ottenere:

$$\exists\ \sigma \in\ ]0,1[ \quad g'(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) = 0$$

Calcoliamo $g'(t)$:

$$\begin{gathered} g'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) - f'(t)(-1) - 2k(x-t)^1(-1) \\ = (-f''(t) + 2k)(x-t) \end{gathered}$$

Sappiamo dunque che:

$$\exists\ \sigma \in\ ]0,1[ \quad (-f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) + 2k)(x - \overline{x} + \sigma(x-\overline{x})) = 0$$

Siccome per $\sigma \in\ ]0,1[\ \implies\ (x - \overline{x} + \sigma(x-\overline{x})) \neq 0$, allora $(-f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) + 2k) = 0$, ovvero $k = \frac{f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x}))}{2}$, come volevasi dimostrare.

**Caso $\mathbb{R}^n$**

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ con derivate parziali prime e seconde continue, allora $\forall\ \overline{x} \in A, h \in \mathbb{R}^n, \exists\ \sigma \in\ ]0,1[$ ($\{\overline{x}+\sigma h\} \subseteq A$) tale che:

$$\begin{gathered} f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h, h\rangle \\ = f(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\overline{x}) h_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{jk} f(\overline{x}+\sigma h) h_j h_k \end{gathered}$$

**Osservazioni**

- Dalla formula trovata segue quella con gli $o$ piccoli:

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(h^2)$$

**Dimostrazione**

Basta mostrare che:

$$\frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h,h\rangle - \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h,h\rangle = o(|h|^2)$$
$$\iff \frac{1}{2}\langle\underbrace{(Hf(\overline{x}+\sigma h) - Hf(\overline{x}))}_{0 \quad h\to 0}h,h\rangle = o(|h|^2)$$

**Dimostrazione**

Siano $f, \overline{x}, h$ come da ipotesi, costruiamo la funzione:

$$g(t) = f(\overline{x}+th) \quad t \in [0,1]$$

Abbiamo dunque che $g(0) = f(\overline{x}), g(1) = f(\overline{x}+h)$.

Utilizziamo Taylor grado 2 per $g(1)$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\sigma)$$

Calcoliamo ora $g'(t)$ utilizzando il teorema per il calcolo della derivata di una funzione su una curva:

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}f(\overline{x}+th) = \langle\nabla f(\overline{x}+th),h\rangle = \sum_{j=1}^{n}\partial_j f(\overline{x}+th)h_j$$

Dunque, $g'(0) = \langle\nabla f(\overline{x}),h\rangle$.

Passiamo a calcolare $g''(t)$:

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\partial_k\partial_j f(\overline{x}+th)h_k)h_j = \sum_{k,j=1}^{n}\partial_{kj}f(\overline{x}+th)h_k h_j$$
$$= \langle Hf(\overline{x}+th)h,h\rangle$$

Dunque, $g''(\sigma) = \langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h,h\rangle$.

Possiamo infine concludere che:

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle\nabla f(\overline{x}),h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h,h\rangle$$

▼ **4.4 - Teorema di classificazione dei punti critici**

## Teorema di classificazione dei punti critici

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ con derivate parziali prime e seconde continue e sia $\overline{x} \in A$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ allora:

- se $Hf(\overline{x}) > 0 \implies \overline{x}$ è un punto di **minimo locale**.
- se $Hf(\overline{x}) < 0 \implies \overline{x}$ è un punto di **massimo locale**.
- se $Hf(\overline{x})$ è indefinita $\implies$ è un punto di **sella**.
- se $Hf(\overline{x})$ è semidefinita $\implies$ nessuna conclusione, occorre verificare in altro modo, magari analizzando gli intorni di $\overline{x}$.

**Lemma**

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $A > 0$, allora:

$$\exists\, m > 0 \quad \langle Ah, h\rangle \geq m \underbrace{|h|^2}_{\langle Ih,h\rangle = \sum_{j=0}^{n} h_j^2} \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

**Dimostrazione lemma in $\mathbb{R}^2$**

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$.

Sia $h = (r\cos\theta, r\sin\theta) \neq 0$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, e sia $r = |h|$.

Calcoliamo $\langle Ah, h\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Ah, h\rangle &= ar^2\cos^2\theta + 2br^2\sin\theta\cos\theta + cr^2\sin^2\theta \\ &= r^2(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta) = r^2 g(\theta) = |h|^2 g(\theta) \end{aligned}$$

Siccome $A > 0$, allora $g(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$.

Inoltre, siccome $g(\theta)$ è continua su $[0, 2\pi]$, allora per il teorema di Weierstrass esiste un valore $\overline{\theta} \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\theta) \geq \underbrace{g(\overline{\theta})}_{m>0} \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$.

Siccome $\langle Ah, h\rangle = |h|^2 g(\theta) \geq |h|^2 m$, possiamo dunque concludere che:

$$\langle Ah, h\rangle \geq |h|^2 m$$

**Dimostrazione (primo caso)**

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in A$, supponiamo che $\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) > 0 \end{cases}$, dobbiamo dimostrare che $\overline{x}$ è un punto di minimo, ovvero che.

$$\begin{gathered} \exists\,\delta > 0 \quad f(\overline{x} + h) \geq f(\overline{x}) \quad \forall\, h \in B(0, \delta) \\ \text{ovvero} \\ f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) \geq 0 \quad \forall\, h \in B(0, \delta) \end{gathered}$$

Approssimiamo $f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})$ tramite la formula di Taylor:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}) &= \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \end{aligned}$$

Siccome da ipotesi sappiamo che $Hf(\overline{x}) > 0$, per il lemma abbiamo che $\exists\ m > 0 \quad \langle Hf(\overline{x})h, h\rangle \geq m|h|^2 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n$.

Per l'equivalenza mostrata sopra abbiamo dunque che:

$$f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}) \geq \frac{m}{2}|h|^2 + o(|h^2|)$$

Usando la definizione di $o$ piccolo con $\epsilon = \frac{m}{4}$ sappiamo che $\exists\ \delta > 0$ tale che $-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall\ h \in B(0,\delta)$, dunque, per $|h| < \delta$, abbiamo che $o(|h|^2) \leq \frac{m}{4}|h|^2$ e $o(|h|^2) \geq -\frac{m}{4}|h|^2$.

Possiamo dunque procedere affermando che:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}) &\geq \frac{m}{2}|h|^2 + (-\frac{m}{4}|h|^2) \quad \forall\ h \in B(0,\delta) \\ \implies f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}) &\geq \frac{m}{4}|h|^2 \geq 0 \quad \forall\ h \in B(0,\delta) \\ \implies f(\overline{x}+h) &\geq f(\overline{x}) \quad \forall\ h \in B(0,\delta) \\ \implies \overline{x} &\text{ è di minimo locale.} \end{aligned}$$