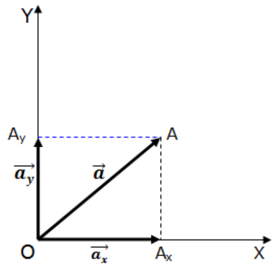
▼ 2.0 - Spazio euclideo

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ o **spazio euclideo** è definito nel seguente modo:

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

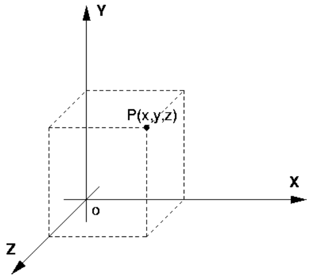
Esempi di spazi euclidei:

- $\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^2$.

- $\mathbb{R}^3$ = spazio ordinario. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^3$.

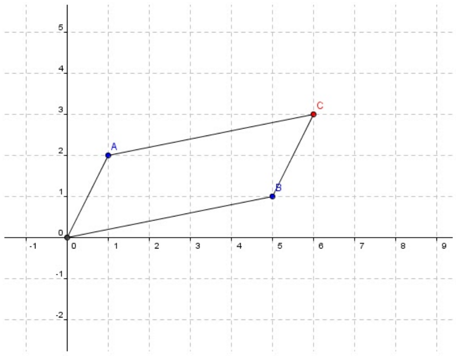
▼ 2.1 - Operazioni nello spazio euclideo

Somma tra vettori

Dati due vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, definiamo la **somma** tra di essi come:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

La somma tra vettori nello spazio $\mathbb{R}^2$ può essere visualizzata in maniera grafica tramite la regola del parallelogramma:



Regola del parallelogramma.

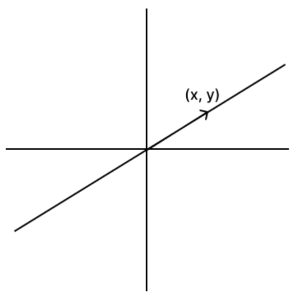
Prodotto con scalare

Dato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto con scalare come:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

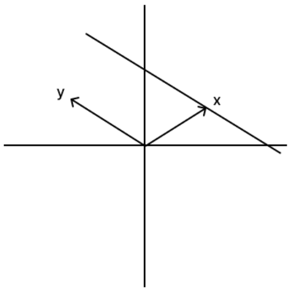
Il prodotto con scalare nello spazio $\mathbb{R}^2$ può essere visualizzato in maniera grafica tramite un cambiamento della lunghezza e/o direzione del vettore di partenza.

Inoltre, se il vettore di partenza è un vettore non nullo, ovvero $x \neq (0, \dots, 0)$, allora l'insieme $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta generata dal vettore x.



Retta generata da un vettore tramite prodotto con scalare.

Se partiamo da due vettori non nulli invece l'insieme $\{x + ty \mid t \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta passante per x avente direzione e verso del vettore y.



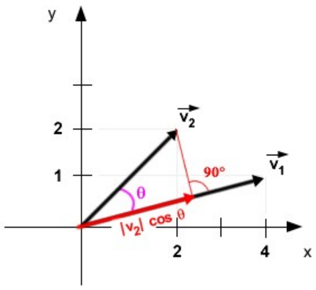
Retta generata dalla somma di un vettore e un prodotto con scalare.

Prodotto scalare euclideo

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo il prodotto scalare euclideo come:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Possiamo visualizzare in maniera grafica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ come il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori per la lunghezza della componente x dell'altro vettore rispetto al vettore iniziale:



Visualizzazione grafica del prodotto scalare nel piano cartesiano.

Proprietà

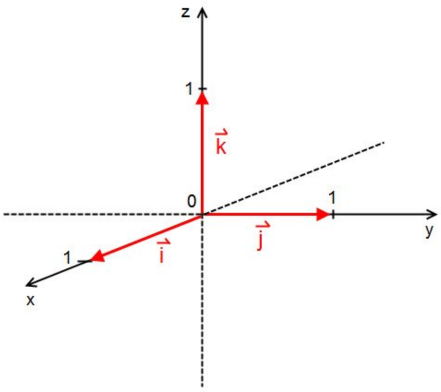
1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
    - $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

▼ **2.2 - Vettori**

Vettori standard

In uno spazio vettoriale di dimensione n, ci sono n vettori standard i quali hanno tutte le componenti uguali a zero tranne una, che è uguale a 1:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

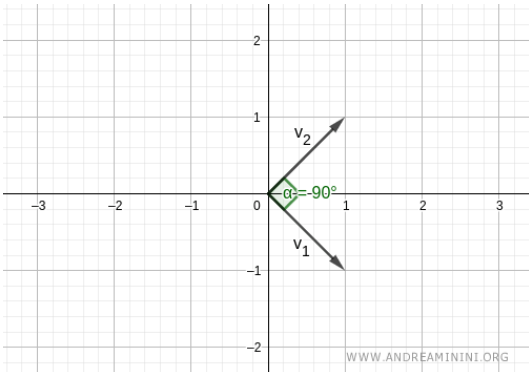


Visualizzazione grafica dei vettori standard dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Ortogonalità/Perpendicolarità tra vettori

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali/perpendicolari** se $\langle x, y \rangle = 0$.

L'ortogonalità/perpendicolarità può anche essere visualizzata per due vettori $\in \mathbb{R}^2$. Prendiamo infatti ad esempio due vettori $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $y = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Possiamo verificare che tali vettori sono ortogonali calcolando il loro prodotto euclideo $\langle x, y \rangle = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$. Concludiamo dunque che tutti i vettori che differiscono di un angolo $\frac{\pi}{2}$ sono perpendicolari tra loro.



Visualizzazione grafica di 2 vettori ortoonali tra loro nel piano cartesiano.

Proposizioni

- Il **vettore nullo** è perpendicolare a tutti i vettori, infatti $\sum_{k=1}^{n} 0 y_k = 0$.
- In $\mathbb{R}^n$ i vettori standard $e_1, \dots, e_n$ sono ortogonali tra loro.

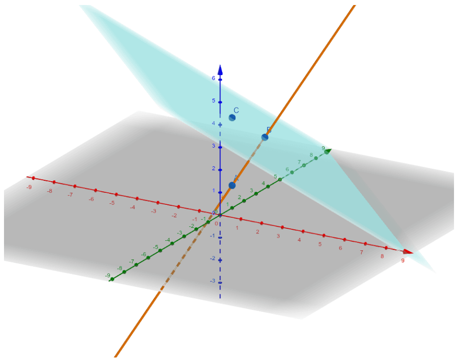
Esercizi:

▼ Dato il vettore $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$, trovare un vettore $x = (x, y, z) \perp v$ diverso dal vettore nullo.

Occorre impostare l'equazione $\langle x, v \rangle = 0$, ovvero $x + 2y + 3z = 0 \implies x = -2y - 3z$.

Abbiamo dunque trovato che l'insieme $\{(-2y - 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ è un insieme di vettori perpendicolari al vettore v.

Osserviamo che l'insieme trovato rappresenta un piano, infatti ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tranne il vettore nullo identifica un piano di vettori perpendicolari ad esso.



Visualizzazione grafica di un piano perpendicolare ad un vettore.

▼ Trovare il rapporto dei parametri m e p affinchè le due rette $y = mx$ e $y = px$ siano ortogonali.

Costruiamo i vettori corrispondenti alle due rette: $(1, m)$ e $(1, p)$.

Impostiamo l'equazione $\langle (1, m), (1, p) \rangle = 1 + mp = 0$, ovvero $p = -\frac{1}{m}$.

Norma euclidea

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo la **norma euclidea** nel seguente modo:

$$||x|| \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$$

Nota: le notazioni $||x||$ e $|x|$ sono equivalenti.

Proposizioni

- **Teorema di pitagora generalizzato in** $\mathbb{R}^n$: se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, che è equivalente, in $\mathbb{R}^2$, al quadrato della lunghezza della diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori x e y.

  Dimostrazione

  Per ipotesi abbiamo che $\langle x, y \rangle = 0$.

  Dimostriamo la formula del quadrato di un binomio generalizzata sui vettori ($|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$). Sappiamo che $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$, utilizziamo la proprietà della linearità del primo argomento per ricavarci $\langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$ e la linearità del secondo argomento per ottenere $\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$, dalla quale, visto che $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, otteniamo infine che $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Utilizziamo dunque la formula del quadrato di un binomio generalizzata appena dimostrata e per ottenere che $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y\rangle| = |x|^2 + |y|^2 + 0$, qed.

Esempio:

- In $\mathbb{R}^2$, $||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$.

  In $\mathbb{R}^3$, $||(a,b,c)|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

  Notiamo che la norma di un vettore indica la "lunghezza" di tale vettore.

Proprietà

1. $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$
   a. $|x| = 0 \iff x = \langle 0, \ldots, 0\rangle$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

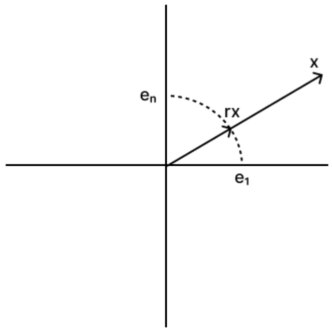
   La possiamo anche leggere come $len(x+y) \geq len(x) + len(y)$, ovvero la **disuguaglianza triangolare**.

Normalizzato di un vettore

Il normalizzato di un vettore consiste in quell'unico vettore positivo multiplo del vettore di partenza che ha come norma 1.

Dobbiamo dunque trovare uno scalare $r > 0$ tale che $|rx| = 1$. Scomponiamo la norma in questo modo $|r||x| = r|x| = 1$ e otteniamo che $r = \frac{1}{|x|}$. Il vettore normalizzato $|rx|$ vale dunque $\frac{x}{|x|}$.

> Dato il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, il **normalizzato** di x è l'unico vettore positivo multiplo di x che ha norma 1, e vale:
>
> $$\frac{x}{|x|}$$



Visualizzazione grafica del normalizzato di un vettore.

Esercizi:

▼ Trovare il normalizzato di $x = (2,3)$

Per trovare il normalizzato di x occorre calcolare il prodotto scalare $\frac{x}{|x|}$.

Calcoliamo dunque $|x|$, il quale è uguale a $|(2,3)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Infine calcoliamo il normalizzato come $\frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.

- Trovare il normalizzato di $x = (14, 21, -28)$

  Per semplificarci i calcoli osserviamo che $\frac{x}{|x|} = \frac{\lambda x}{|\lambda x|}$, dunque possiamo calcolare il normalizzato nel seguente modo: $\frac{(14,21,-28)}{|(14,21,-28)|} = \frac{(2,3,-4)}{|(2,3,-4)|} = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}})$.

Coordinate polari di un vettore

Osserviamo che dato un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, $x = |x|\frac{x}{|x|}$.

Visto che $\frac{x}{|x|}$ è il normalizzato del vettore e ha lunghezza 1, esso, se il vettore x appartiene a $\mathbb{R}^2$, può anche essere scritto in questo modo: $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Utilizziamo inoltre la notazione $r \coloneqq |x|$ e scriviamo il vettore x come $r(\cos\theta, \sin\theta)$.

> Concludiamo dunque che è possibile descrivere un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^2$ tramite l'utilizzo di due parametri, detti **coordinate polari**: (r, θ).

Esercizi:

- Trovare le coordinate polari del vettore $(0, 3)$

  Per trovare le coordinate polari dobbiamo calcolare il valore dei due parametri r e θ.

  Sappiamo che $r = |(0,3)| = 3$, dunque $x = 3y$, dove y è un vettore che moltiplicato a 3 restituisce x. Troviamo dunque facilmente che $y = (0, 1)$ e, avendo che $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = 1$, otteniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

  Concludiamo dunque che il vettore $(0, 3)$ può essere scritto in coordinate polari come $(3, \frac{\pi}{2})$.

Prodotto scalare in coordinate polari

> Presi due vettori $x = r(\cos\theta, \sin\theta)$ e $y = p(\cos\phi, \sin\phi)$, risulta:
>
> $$\langle x, y\rangle = rp\cos(\theta - \phi) = |x||y|\cos(\theta - \phi)$$
>
> Dove $\theta - \phi$ è l'angolo compreso tra i due vettori.

Disuguaglianza Cauchy-Schwarz

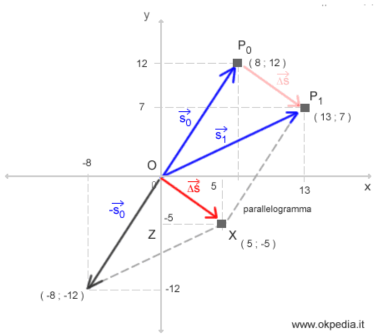
> Per ogni vettore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente **disuguaglianza**:
>
> $$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Notiamo che l'uguaglianza vale solo nel caso in cui i due vettori sono dipendenti tra loro, dunque in $\mathbb{R}$ giacciono sulla stessa retta.

Distanza tra due vettori in $\mathbb{R}^n$

La **distanza tra due vettori/punti** in $\mathbb{R}^n$ può essere calcolata tramite la formula:

$$|x - y|$$



Esempio grafico di distanza tra due vettori.

Intorni sferici/palle

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $r > 0$, possiamo costruire l'insieme intorno sferico/palla con centro x e raggio r in questo modo:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$$

▼ 2.3 - Successioni e funzioni nello spazio euclideo

Successioni in $\mathbb{R}^n$

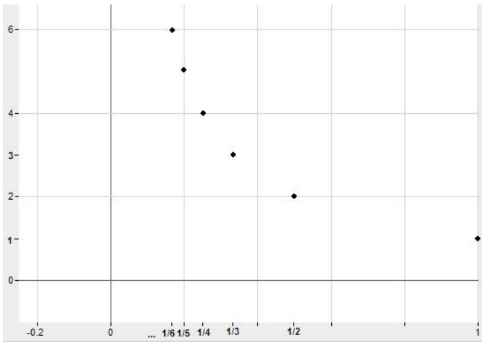
Una **successione** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ è una collezione di n successioni in $\mathbb{R}$:

$$x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$$

Esempio:

- $(\frac{1}{k}, k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{R}^2$.

  È possibile visualizzare alcuni dei punti che fanno parte di questa successione nella seguente figura:



Successione $(\frac{1}{k}, k)$.

Successione convergente

Data una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ e un vettore $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si dice che:

$$x_k \underbrace{\to}_{\text{converge}} a \text{ per } k \to \infty \iff \begin{cases} \lim_{k\to\infty} x_k^1 = a_1 \\ \ldots \\ \lim_{k\to\infty} x_k^n = a_n \end{cases}$$

Esempi:

- $(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k+1}) \to (0, 1)$, dunque la successione è convergente.
- $((-1)^k, \frac{1}{k})$ non è una successione convergente in quanto $\lim_{k\to\infty}(-1)^k$ è indefinito.

Funzioni

Dati 2 insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$ e data una funzione $f : A \to B$, il **grafico** di f può essere definito come l'insieme:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

Funzioni radiali

Le **funzioni radiali** sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x, y) = g(|(x, y)|) \quad g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Esempi:

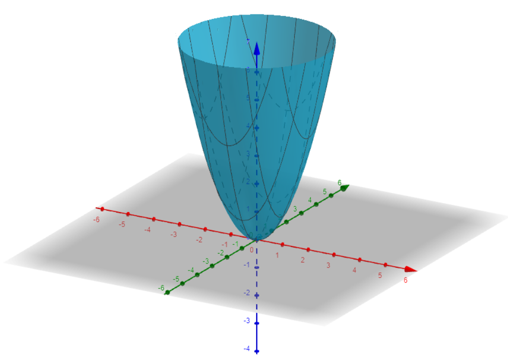
- $f(x, y) = x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$

  Innanzitutto creiamo l'insieme grafico di tale funzione: $Graf(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

  Per disegnare tale grafico è utile scrivere (x, y) come $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. In questo modo abbiamo che $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$.

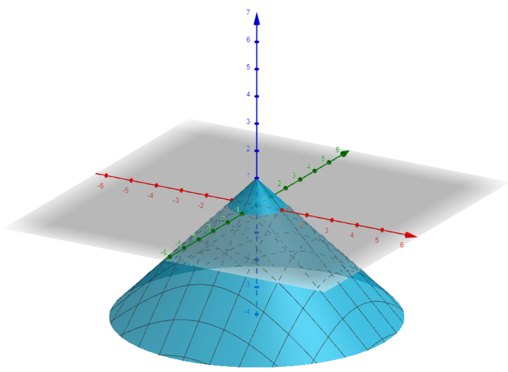
Riscriviamo dunque l'insieme grafico utilizzando le coordinate polari: $Graf(f) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2) \mid r \geq 0\}$.

Notiamo dunque che l'insieme appena ottenuto descrive il grafico di una parabola nello spazio $\mathbb{R}^3$:



- $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} = 1 - |(x,y)|$

  Il grafico di tale funzione è il seguente:



Funzioni affini

Le funzioni affini sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x,y) = ax + by + c \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

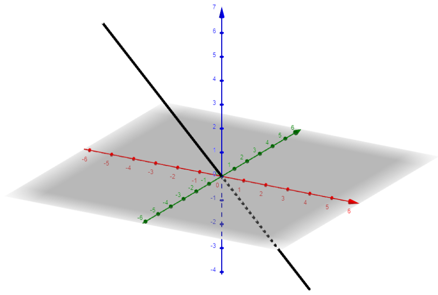
Notiamo che tali funzioni individuano insiemi grafici del tipo $Graf(f) = \{(x, y, ax + by + c) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, i quali descrivono dei piani in $\mathbb{R}^3$.

Esempi:

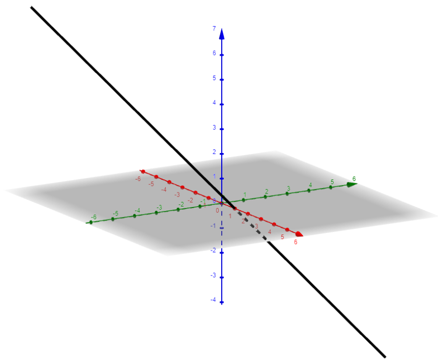
- $f(x,y) = -y$

  Per disegnare il grafico di questa funzione è possibile effettuarne l'intersezione con due piani.

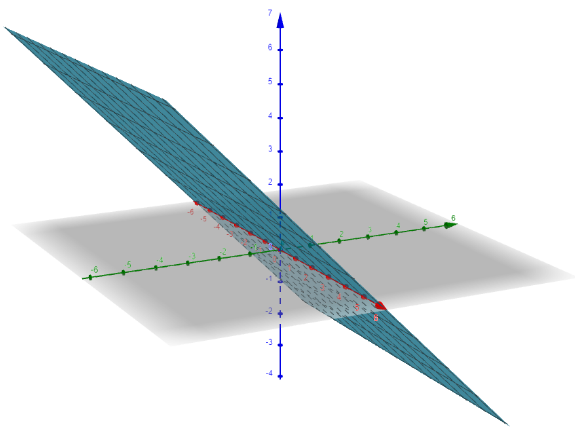
  Intersechiamo con il piano $x = 0$ e otteniamo $Graf(f) \cap x = 0 : \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Intersechiamo ora con un altro piano, ad esempio $x = 1$, e otteniamo $Graf(f) \cap x = 1$: $\{(1, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Tramite tali intersezioni possiamo dunque prevedere il grafico della funzione data, il quale è il seguente piano:



Funzioni continue

Sia $f : A \to B \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q)$, f si dice **continua** in $\overline{x}$ se:

$$\forall\ (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (x_k) \text{ successione in } A, x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\overline{x})$$

È possibile dimostrare che tale definizione di funzione continua è equivalente alla seguente:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta\ \text{ t.c. } |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon \quad \forall\ x \in A \cup B(\overline{x}, \delta)$$

Proposizioni

- Tutte le **funzioni elementari** sono continue nei loro domini.