Esempi di calcolo combinatorio

esempio $\boxed{\begin{matrix} 6R \\ 5V \end{matrix}}$ scatola con 6 palline rosse e 5 palline verdi

I CASO: estrazione con reimmissione di 3 palline

$$P(\text{I rossa e II verde e III verde}) = P(A)$$

n° esiti totali $= 11 \times 11 \times 11 = 11^3$

n° esiti fav. $= 6 \times 5 \times 5 = 6 \times 5^2$

$$P(A) = \frac{6 \times 5^2}{11^3}$$

II CASO: estrazione senza reimmissione

B = 'estrazione I rossa II verde III verde'

n° esiti totali $= 11 \times 10 \times 9$

n° esiti fav. $= 6 \times 5 \times 4 = 120$

$$P(B) = \frac{120}{990} = \frac{4}{33}$$

Disposizioni semplici

Vuol dire creare degli allineamenti, bado all'ordine in cui ho disposto gli oggetti. Semplici vuol dire senza ripetizione. Nell'esempio precedente, le palline sono chiaramente distinte, dello stesso colore ma distinte. Ho una scatola di N oggetti, ne pesco K e li metto in fila. Faccio un'estrazione senza reimmissione.

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Def. Dati n oggetti distinti, si dicono disposizioni semplici di n elementi di classe k ($k \in \mathbb{N}$ $1 \le k < n$) gli allineamenti di k elementi diversi presi tra gli n oggetti dati

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

es. Allineamenti di 3 vocali tra le 5 senza ripetizioni

$$D_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Disposizioni con ripetizione

Rispetto al caso precedente, si possono riusare nell'allineamento oggetti che sono già stati inseriti. L'unica condizione è avere K maggiore o uguale di 1. Immaginiamo di riempire K caselle avendo sempre a disposizione N oggetti.

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Def. Dati n oggetti distinti, si dicono disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k ($k \in \mathbb{N}$ $k \ge 1$) gli allineamenti di k elementi non necessariamente diversi che si possono formare a partire dagli n oggetti

$$D^{R}_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\text{-volte}} = n^k$$

es. Allineamenti di 3 vocali anche con ripetizioni

$$D^R_{5,3} = 5^3$$

Permutazioni semplici

Sono le disposizioni semplici quando K = N. Si introducono perché in molte situazioni si può pensare di ordinare N oggetti distinti. Gli allineamenti sono sempre di N oggetti, ma saranno diversi per via dell'ordine. Sono utilizzate di nuovo quando bisogna estrarre senza reimmissione.

PERMUTAZIONI SEMPLICI

Def. Dati n oggetti distinti, si dicono permutazioni semplici di n elementi tutti gli allineamenti che si possono formare con gli n oggetti (senza ripetizioni)

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1 = n!$$

esempio allineamenti delle 5 vocali

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Permutazioni con ripetizione

Servono per calcolare gli anagrammi (non si usano molto). In questo caso c'è una differenza iniziale: gli oggetti non sono necessariamente distinti. Questa ipotesi (quasi banale) rende più complicata la rappresentazione dell'estrazione (e.g. nell'anagramma di casa una A è come l'altra, se invece estraiamo le lettere da una scatola le due A sono comunque due oggetti distinti). Tutte le volte che si rappresentano problemi con probabilità discreta queste permutazioni non funzionano.

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Def. Dati n oggetti non necessariamente distinti, si dicono permutazioni con ripetizione tutti gli allineamenti formati dagli n oggetti dati.

Per la formula bisogna premettere di raggruppare tutti gli oggetti indistinguibili.

Immaginiamo di dividere gli oggetti in gruppi di tipo diverso. Sia p il n° di tipi diversi e sia k_i = n° oggetti di tipo i

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$$

$$P^R_{n=k_1+k_2+\dots+k_p} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_p!}$$

esempio ANAGRAMMI DI "CASA" ANCHE SENZA SENSO COMPIUTO

$$P^R_{4=1+1+2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Di tutte le permutazioni consideriamo identiche quelle in cui le A sono allo stesso posto seppur diverse, quindi si dimezzano le permutazioni.

Combinazioni semplici

Nelle combinazioni non si bada all'ordine in cui sono allineate. Estrazioni in cui non si bada all'ordine: possiamo immaginare di fare queste estrazioni tutte insieme.

COMBINAZIONI SEMPLICI

Def. Dati n oggetti distinti, si dicono combinazioni semplici di n elementi di classe k ($k \in \mathbb{N}$ $1 \le k \le n$) gli insiemi di k elementi presi tra gli n oggetti dati (senza badare all'ordine)

Immaginiamo di formare gli allineamenti. Consideriamo le disposizioni: all'interno dell'allineamento degli stessi oggetti non mi interessa l'ordine, divido per le permutazioni.

$$C_{n,k} = \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{D_{n,k}} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

esempio GRUPPI DI 3 VOCALI (SENZA BADARE ALL'ORDINE E SENZA RIPETIZIONI)

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = 10$$

Combinazioni con ripetizione

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Def Dati n oggetti distinti, si dicono combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) tutti gli insiemi di K elementi anche ripetuti che si possono formare a partire dagli n oggetti dati.

$$C^R_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Si usa poco perché se le combinazioni estraggono in una sola volta, non si può estrarre contemporaneamente lo stesso oggetto. Esso in genere si può estrarre tante volte, ma in estrazioni diverse, quindi l'ordine conterebbe in tal caso.

es. GRUPPI DI 3 VOCALI (ANCHE RIPETUTE)

$$C^R_{5,3} = \frac{(5+3-1)!}{(5-1)!\,3!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,\cancel{6}} = 35$$

Paradosso dei compleanni

PROBLEMA (PARADOSSO) DEI COMPLEANNI

In una stanza sono presenti n persone tutte nate in un anno NON bisestile.
Quale è la probabilità che abbiano date di compleanno tutte diverse se $n \leq 365$?

È noto come paradosso perché questa probabilità decresce molto velocemente con n, quindi la probabilità che ci siano due persone con un compleanno uguale cresce molto velocemente.

Usiamo il calcolo combinatorio: abbiamo queste persone e immaginiamo che si estragga un numero tra 1 e 365. Immaginiamo quindi che tutte le date siano equiprobabili, che la data di nascita di qualcuno sia casuale. Possiamo usare la definizione classica di probabilità.

Non consideriamo l'anno? Esatto, si potrebbe anche considerare che tutte siano nate in anni bisestili. Invece fare un caso di anni non bisestili e bisestili insieme, diventa più complicato.

IPOTESI AGGIUNTIVE: TUTTI I GIORNI DELL'ANNO HANNO LA STESSA PROB. DI ESSERE IL COMPLEANNO DI UN INDIVIDUO.

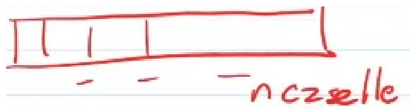
A = 'tutti hanno date di compleanno diverse'

$$P(A) = \frac{n^\circ \text{ casi fav.}}{n^\circ \text{ casi totali}}$$

Quasi sempre è più facile calcolare i casi totali. I casi totali sono un'estrazione con reimmissione, disposizioni con ripetizione.

$$n^\circ \text{ casi totali} = D^R_{365,n} = 365^n = \left(\underbrace{365 \times 365 \cdots \times 365}_{n \text{ volte}}\right)$$

Si può anche ragionare con le caselle.

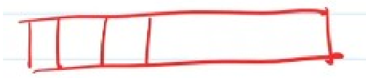


Perché usare il fattoriale non è corretto? Perché non c'è la reimmissione e si considerano sempre 365 persone. Sicuramente il fatto che i compleanni siano tutti diversi va considerato nel numero di casi favorevoli.

Quindi si considera un'estrazione senza reimmissione per i casi favorevoli, disposizioni semplici.

$$n° \text{ casi favorevoli} = D_{365,n} = \frac{365!}{(365-n)!} = 365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)$$

Anche qui si poteva ragionare con le caselle (365, poi 364, 363… fino a 365 – n + 1).



$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots (365-n+1)}{365^n}$$

Ci si accorge che per un N nell'ordine di 30 o 40, la probabilità è molto bassa. Da qui il paradosso.

Una richiesta più complicata è la probabilità che più di una persona sia nata nello stesso giorno dell'anno.

Quale è la prob. che non tutti gli n individui abbiano compleanni diversi?

$B =$ 'non tutti hanno date di compleanno diverse'

$$P(B) = 1 - P(A)$$

È una proprietà banale che si può ricavare assieme ad altre, con la definizione assiomatica.

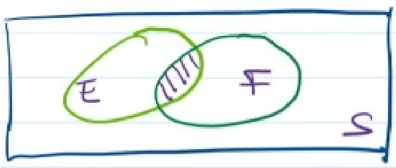
Definizioni

Dati due eventi dello stesso spazio campione.

UNIONE DI EVENTI: Dati $E, F \subset S$, si dice unione di E e di F l'evento che contiene gli esiti di S appartenenti ad E e/o ad F

$E \cup F$

INTERSEZIONE DI EVENTI: Dati $E, F \subset S$, si dice intersezione di E e di F l'insieme degli esiti comuni ad E e ad F



$E \cap F$

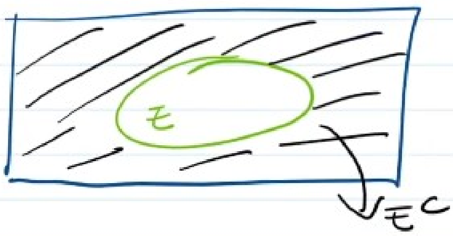
Si può fare anche tra più di due eventi.

NOTAZIONE $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n$

$E_1, E_2, \ldots E_n \subset S$

$\bigcap_{k=1}^{n} E_k = E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n$

EVENTO COMPLEMENTARE: Dato $E \subset S$, si dice evento complementare E^C l'insieme di tutti gli esiti di S che NON appartengono ad E



NOTAZIONE: ϕ insieme vuoto (non contiene esiti)

PROPRIETÁ: $E \cap E^c = \phi$

Non c'è nessun esito che stia sia in E che E complementare.

$$S^c = \phi$$

Se lo spazio campione contiene tutti gli esiti, il complementare è l'insieme vuoto.

$$E, F \subset S \qquad (E \cup F)^c = E^c \cap F^c$$
$$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$$

Sono le leggi di De Morgan.

Definizione assiomatica di probabilità

Kolmogorov è stato il fondatore dell'espressione rigorosa di probabilità, geniale nella semplicità, chiunque l'avrebbe potuta scrivere, ma da questi assiomi si può ricavare tutto il resto.

Immaginiamo un esperimento che dia esiti diversi, a cui è associato uno spazio campione.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITÁ (ASSIOMI DI KOLMOGOROV)

Dato un esperimento che prevede più esiti a cui è associato lo spazio campione S

e dato un evento $E \subset S$ si definisce prob. di E $P(E)$ un numero tale che

1) $0 \leq P(E) \leq 1$

2) $P(S) = 1$

Se faccio l'intersezione di due eventi che non hanno nulla in comune, da l'insieme vuoto, si dicono disgiunti o mutuamente esclusivi.

3) dati $E_1, E_2, \dots E_n \subset S$ mutuamente esclusivi (disgiunti) ovvero tali che $E_i \cap E_k = \phi$ se $i \neq k$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$$

Per il terzo assioma, la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità degli eventi.

Da qui è possibile costruire tutta la teoria della probabilità.

Gli assiomi si chiamano A1, A2, A3. Non si dimostrano perché sono assiomi, dati per certi.

CONSEGUENZE DEGLI ASSIOMI (PROPRIETÀ)

P1) Dato $E \subset S$

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

DIM

$E \cup E^c = S$

$E \cap E^c = \phi \Rightarrow E$ ed E^c sono disgiunti

$$1 \underset{A2}{=} P(S) = P(E \cup E^c) \underset{A3}{=} P(E) + P(E^c)$$

$$\Downarrow$$

$$P(E^c) + P(E) = 1 \Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$$

Senza fare alcuna ipotesi, si può ragionare in maniera astratta.

P1bis) $P(\phi) = 0$

Zero ha un duplice significato: o è vuoto, o è impossibile. Zero si può verificare anche quando si deve scegliere su un numero di casi infinito, numerabile o non numerabile.

DIM

$$A2 \Rightarrow P(S) = 1$$

$$S^c = \emptyset \Rightarrow P(S^c) = P(\emptyset)$$

$$\Downarrow$$

$$P(\emptyset) \underset{P1}{=} 1 - P(S) \underset{A2}{=} 1 - 1 = 0$$

P2) Dati $E, F \subset S$ se $E \subset F$

$$P(E) \leq P(F)$$

E è strettamente contenuto in F, quindi non possono coincidere, ma mi ritrovo un minore o uguale. Può succedere quando gli esiti sono infiniti e E ed F differiscono di un esito, quindi di probabilità 0.

DIM

$$F = \{\text{esiti di } F \in E\} \cup \{\text{esiti di } F \notin E\}$$

$$F = E \cup (F \cap E^c)$$

N.B. $E \cap (F \cap E^c) = \emptyset$ quindi E ed $(F \cap E^c)$ sono disgiunti

F contiene tutti gli esiti di E, più degli esiti che sono in E complementare. Eventi mutuamente esclusivi vuol dire che non possono avvenire in contemporanea.

$$P(F) = P(E \cup (F \cap E^c)) \underset{A3}{=} P(E) + P(F \cap E^c)$$

Adesso utilizziamo il primo assioma, abbiamo bisogno di una disuguaglianza.

$$\underbrace{P(F \cap E^c)}_{\geq 0}$$

Se la trascuro, verrà un numero più piccolo (o uguale).

$$P(E) + \underbrace{P(F \cap E^c)}_{\geq 0} \geq P(E)$$

trascuro il II termine

$$P(F) \geq P(E)$$

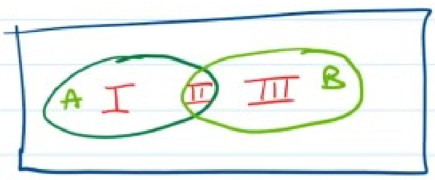
$$\Rightarrow P(E) \leq P(F)$$

P3) Dati $A, B \subset S$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

N.B. A e B possono non essere disgiunti

DIM



$II = A \cap B$

$I = A \setminus (A \cap B) =$
$= A \cap B^c$

$III = B \setminus (A \cap B) =$
$= B \cap A^c$

$$\left.\begin{array}{l} I \cap II = \phi \\ II \cap III = \phi \\ I \cap III = \phi \end{array}\right\} \text{disgiu}$$

$$A = I \cup II$$

$$B = II \cup III$$

$$A \cup B = I \cup II \cup III$$

$$P(A) \underset{A3}{=} P(I) + P(II)$$

$$P(B) = P(II) + P(III)$$

$$P(A \cup B) = P(I) + P(II) + P(III)$$

$$P(A \cup B) = P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III}) \underset{A3}{=}$$
$$= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})$$

$$P(\mathrm{I}) = P(A) - P(\mathrm{II})$$
$$P(\mathrm{III}) = P(B) - P(\mathrm{II})$$
$$P(\mathrm{II}) = P(A \cap B)$$

$$> P(A \cup B) = P(A) \cancel{- P(A \cap B)} +$$
$$\cancel{+ P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P4) Dati: $A, B, C \subset S$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Con 4 eventi, continua così, con intersezioni a 4, a 3, a 2.

esempio: Un individuo di una certa popolazione ha prob. 28% di giocare a basket e 8% di giocare a pallamano. Il 5% della popolazione è formato da individui che giocano sia a basket sia a pallamano. Quale è la prob. che un individuo scelto a caso non pratichi nessuno dei due sport?

B = 'giocare a basket' $\quad P(B) = 28\%$

A = 'giocare a pallamano' $\quad P(A) = 8\%$

Ci viene detta anche la probabilità che si giochi a tutti e due.

$$P(A \cap B) = 5\%$$

$$P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^c\right) \underset{P1}{=} 1 - P(A \cup B)$$

Usiamo le proprietà introdotte.

$$P(A \cup B) \underset{P3}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 0.08 + 0.28 - 0.05 = 0.31$$

$$1 - \underline{P(A \cup B)} = 1 - 0.31 = 0.69$$

Probabilità condizionata

È una definizione sensata, non serve la dimostrazione. Partiamo da due eventi nello spazio campione.

PROBABILITÁ CONDIZIONATA

Def. Dati $A, B \subset S$ con $P(B) \neq 0$

si dice probabilità di A condizionato da B

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si trova anche una barretta storta come simbolo.

La probabilità di A condizionato da B vuol dire: abbiamo un esperimento, so che si è verificato B, come cambia la probabilità dell'evento A? (e.g. lancio un dado ed esce un numero dispari, quanto è la probabilità che sia uscito 2? Zero, ma prima dell'esperimento era 1/6) Il fatto che si sia verificato un evento condiziona le probabilità degli altri eventi. È come se si riscalasse la misura dell'incertezza.

esempio 1 LANCIO DADO CUBICO

$B =$ 'uscita n° dispari' $= \{e_1, e_3, e_5\}$

$A =$ 'uscita di 2' $= \{e_2\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{\frac{1}{2}} = 0$$

$C =$ 'uscita di multiplo di 3' $= \{e_3, e_6\}$

Si riscala la probabilità di C.

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(e_3)}{\frac{1}{2}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Ci sono degli eventi particolari che però non si condizionano, si chiamano eventi indipendenti.

EVENTI INDIPENDENTI

Def. Due eventi $A, B \subset S$ si dicono indipendenti se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ovvero} \quad P(B|A) = P(B)$$

Che uno si verifichi o non si verifichi, non cambia la probabilità dell'altro.