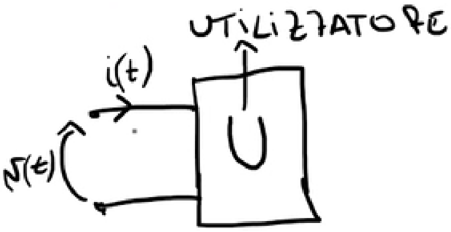
Potenza in regime sinusoidale



Sappiamo che la potenza si scrive tensione per corrente. Nel regime sinusoidale la tensione e la corrente dipendono dal tempo, quindi anche la potenza.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

POT. ISTANT. ASSORBITA DA U

$$v(t) = \hat{V} \cos(\omega t) \qquad \alpha_v = 0$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \alpha_I) = \hat{I} \cos(\omega t - \varphi)$$

Scomponiamo la corrente in 2 componenti.

Scomponiamo la corrente $i(t)$ in due componenti
Una in fase con $v(t)$ ed una in quadratura:

$$i(t) = i_a(t) + i_r(t)$$

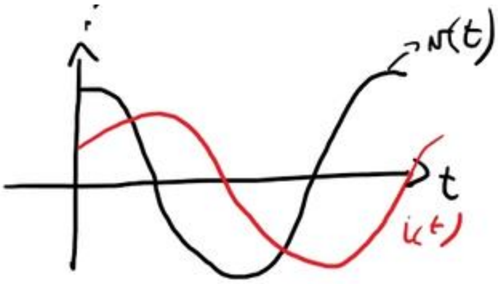
a sta per attiva, r sta per reattiva. A breve vediamo i motivi.

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t - \varphi) = \hat{I} \left[\cos\varphi \cos(\omega t) + \sin(\varphi) \sin(\omega t) \right]$$

$$\left[\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \right]$$

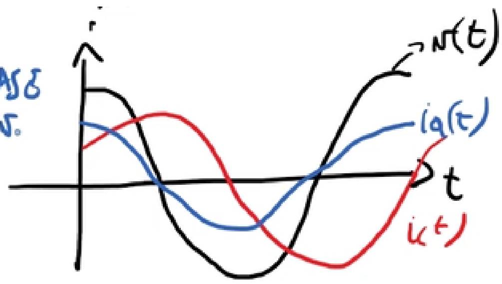
Abbiamo usato una proprietà matematica per ricavare 2 componenti.

$$\begin{cases} i_a(t) = \hat{I}\cos\varphi\cos(\omega t) \\ i_r(t) = \hat{I}\sin\varphi\sin(\omega t) \end{cases}$$



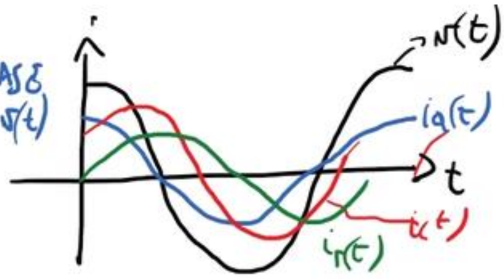
La componente ia di t è in fase con la tensione.

$$\begin{cases} i_a(t) = \hat{I}\cos\varphi\cos(\omega t) & \text{IN FASE CON V.} \\ i_r(t) = \hat{I}\sin\varphi\sin(\omega t) \end{cases}$$



L’altra componente è seno, quindi è in quadratura rispetto alla tensione.

$$\begin{cases} i_a(t) = \hat{I}\cos\varphi\cos(\omega t) & \text{IN FASE CON } v(t) \\ i_r(t) = \hat{I}\sin\varphi\sin(\omega t) \end{cases}$$



Scriviamo la formula della potenza.

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = v(t)\big(i_a(t) + i_r(t)\big) = v(t)\,i_a(t) + v(t)\cdot i_r(t)$$

$$\ldots\big)\big) = \underbrace{v(t)\,i_a(t)}_{\substack{P_a(t) \\ \text{POT. ATTIVA} \\ \text{ISTANTANEA}}} + \underbrace{v(t)\cdot i_r(t)}_{\substack{P_r(t) \\ \text{POT. REATTIVA} \\ \text{ISTANTANEA}}}$$

Riscriviamo le 2 potenze.

$$P_a(t) = \hat{V}\cos(\omega t)\cdot \hat{I}\cos\varphi\ \cos(\omega t) = \hat{V}\hat{I}\cos\varphi\ \cos^2(\omega t)$$

$$P_r(t) = \hat{V}\cos(\omega t)\cdot \hat{I}\sin\varphi\ \sin(\omega t) = \hat{V}\hat{I}\sin\varphi\ \cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

Applichiamo questa uguaglianza trigonometrica.

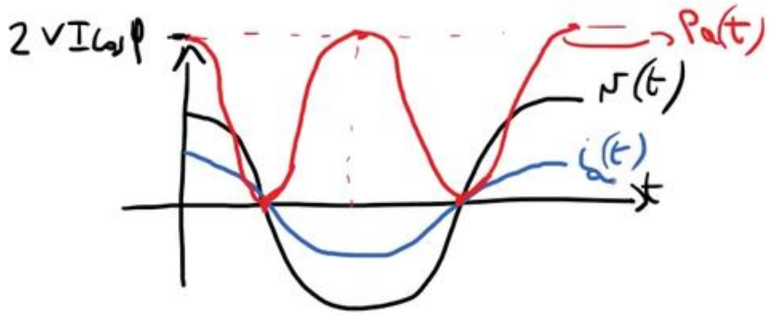
$$\left[\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\ \cos\alpha\right]$$

$$P_r(t) = \frac{\hat{V}\hat{I}}{2}\sin\varphi\ \sin(2\omega t)$$

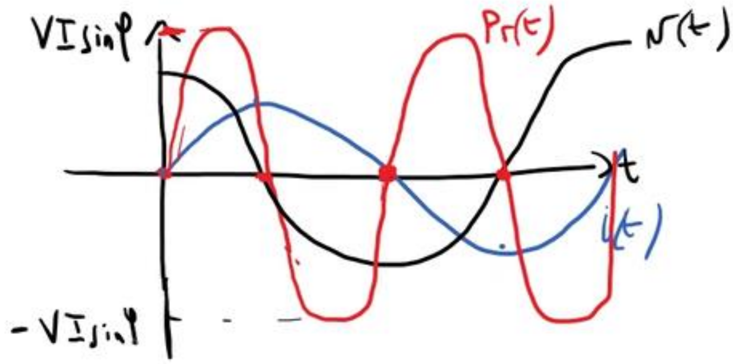
Riscriviamo le potenze.

$$\begin{cases} P_a(t) = 2\,V I \cos\varphi\ \cos^2(\omega t) \\ P_r(t) = V I \sin\varphi\ \sin(2\omega t) \end{cases}$$

Grafichiamo queste 2 potenze nel grafico del tempo. La potenza attiva dipende da coseno quadro di omega t, che è sempre positiva. Seno di 2 omega t invece no.



$$P_r(t) = VI \sin\varphi \sin(2\omega t)$$



Ha pulsazione doppia della tensione.

$$\begin{cases} P_a(t) \geq 0 & \text{sempre} \\ P_r(t) & \text{sia positiva che negativa} \end{cases}$$

$P_a(t) \geq 0$ sempre $\Rightarrow$ é una potenza che va sempre dal generat. verso il carico

$P_r(t)$ sia positiva che negativa $\Rightarrow$ é associata ad una potenza che può andare dal g. al carico o viceversa

Quindi qual è il componente che assorbe potenza? Il resistore.

Qual è il componente che assorbe potenza e la può ridare? Condensatore e induttore.

Quindi capiamo che un elemento è associato al resistore e un elemento è associato al condensatore e all'induttore.

$P_a(t) \Rightarrow$ associata al resistore

$P_r(t) \Rightarrow$ condensatore e induttore

La potenza attiva è associata all'energia utile, cioè l'energia che utilizzo davvero. Questo non vuol dire che serva solamente la potenza attiva, abbiamo 2 componenti, una di esse fa scambio di potenza.

Vediamo la potenza come viene usata, tramite l'integrale della potenza nel periodo T.

$$= \int_0^T 2VI\cos\varphi\cos^2(\omega t)\,dt + \int_0^T VI\sin\varphi\sin(2\omega t)\,dt$$

$$\int_0^T VI\sin\varphi\sin(2\omega t)\,dt \;\downarrow\; VI\sin\varphi\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt = 0$$

Tanto assorbo, tanto ridò.

$$= \int_0^T 2VI\cos\varphi\cos^2(\omega t)\,dt + \int_0^T VI\sin\varphi\sin(2\omega t)\,dt$$

$$\int_0^T VI\sin\varphi\sin(2\omega t)\,dt \;\downarrow\; VI\sin\varphi\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt = 0$$

il bilancio energetico è nullo

Vediamo l'altro integrale.

$$2VI\cos\varphi\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt =$$

$$\left[\cos^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right]$$

$$= 2VI\cos\varphi\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt$$

$$= VI\cos\varphi\cdot T$$

LAVORO UTILE

$$VI\sin\varphi\int_0 \sin(2\omega t)\,dt = 0$$

il bilancio energetico è nullo

Vediamo la potenza media.

$$P_a = \frac{1}{T}\int_0^T p_a(t)\,dt$$

Abbiamo già calcolato questo integrale.

$$P_a = \frac{1}{T}\int_0^T p_a(t)\,dt = \frac{1}{\cancel{T}}\, VI\cos\varphi\, \cancel{T}$$

$$\boxed{P_a = VI\cos\varphi}$$

POT. MEDIA
ASSORBITA
DAL CARICO

È quella che da il lavoro utile. Questa potenza dipende da coseno di phi. È fondamentale, perché se tensione e corrente sono in fase, avrei la potenza massima, se sono in quadratura, non ho una potenza media assorbita. Ha senso, perché se ho tensione e corrente in quadratura vuol dire che ho un carico puramente induttivo o capacitivo.

$$\boxed{P_a = VI\underbrace{\cos\varphi}_{\text{FATTORE DI POTENZA}}}$$

POT. MEDIA
ASSORBITA
DAL CARICO

POT. MEDIA ASSORBITA DAL CARICO => LAVORO UTILE

Il fattore di potenza dice quanta potenza media stiamo dando al carico.

Potenza complessa

È un numero complesso definito come:

$$\underline{N} = \underline{V}\,\underline{I}^*$$

$$\underline{X} = X_r + jX_I = X e^{j\alpha}$$

$$\underline{X}^* = X_r - jX_I = X e^{-j\alpha}$$

Scriviamo la V e la I.

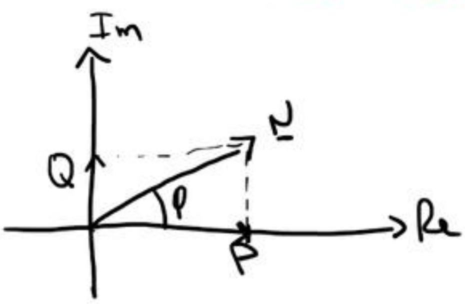
$$= V e^{j\alpha_V} \cdot \underline{I}\, e^{-j\alpha_I} = VI\, e^{j(\alpha_V - \alpha_I)} = VI\, e^{j\varphi}$$

Questo è uguale:

$$= VI\cos\varphi + j\,VI\sin\varphi$$

$$= \underbrace{VI\cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{VI\sin\varphi}_{Q\ \text{POT. REATTIVA}} = P + jQ$$

Grafichiamo la potenza trovata nel piano complesso.



P: POT. ATTIVA [W]

Q: POT. REATTIVA [VAR]

Volt Ampere Reattiv

$$\underline{N} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}\, \overset{I e^{j\alpha}}{\underline{I}} \cdot \overset{I e^{-j\alpha}}{\underline{I}^*} = \underline{Z}\, I^2 = (R + jX)\, I^2$$

$$= \underbrace{R I^2}_{P} + j \underbrace{X I^2}_{Q}$$

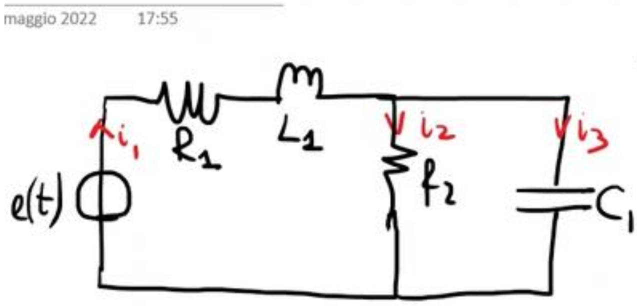
$P > 0 \rightarrow$ associata ad R

$Q \rightarrow$ associata a L e C $\begin{cases} \rightarrow Q_L = \omega L I^2 > 0 \\ \rightarrow Q_C = -\frac{1}{\omega C} I^2 < 0 \end{cases}$

In sintesi:

$\lvert \underline{N} \rvert$	Pot. apparente	[VA]
$P = VI \cos\varphi$	Pot. attiva	[W]
$Q = VI \sin\varphi$	Pot. reattiva	[VAR]
$\underline{N} = \underline{V}\, \underline{I}^*$	Pot. complessa	[VA]

Esercizio



$$e(t) = \sqrt{2}\, 10 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

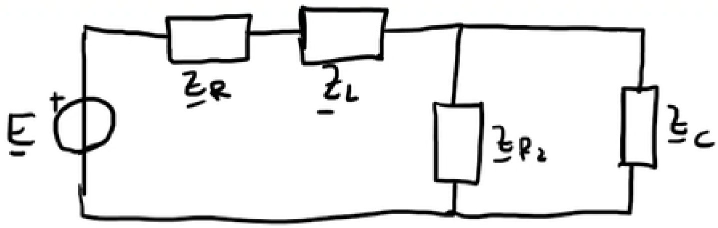
$R_1 = 2\Omega$ $\quad R_2 = 1\Omega$

$L_1 = 1\, mH$ $\quad C_1 = 500\mu F$

$\omega = 10^3\, rad/s$

$i_1 = ?$ $\quad i_2 = ?$ $\quad i_3 = ?$

Andiamo dal dominio del tempo al dominio dei fasori.



$$\underline{E} = 10\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_R = R_1 = 2\Omega$$

$$\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L = j\, 10^3 \cdot 10^{-3} = j$$

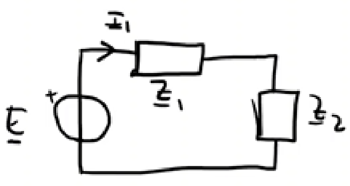
$$\underline{Z}_{R_2} = R_2 = 1\Omega$$

$$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j \cdot \frac{1}{10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = -j\,2$$

Abbiamo una serie di 2 impedenze e un parallelo di 2 impedenze.

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = 2 + j$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{R_2} // \underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_{R_2} \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} = 0{,}8 - 0{,}4j$$



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}}{2{,}8 + 0{,}6j} = \frac{10j}{2{,}8 + 0{,}6j}$$

$$= 0{,}73 + 3{,}41j$$

Scriviamolo anche in forma polare, è molto più semplice quando si riconverte nel dominio del tempo.

$$= 0,73 + 3,41j = 3,49 \angle 77,9^\circ$$

Abbiamo I1, possiamo calcolare I2 e I3. Partitore di corrente.

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} = 1,95 + j\,2,44 = 3,12 \angle 51,34^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{R_2}}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} = -1,22 + j\,0,92 = 1,56 \angle 141^\circ$$

Verificiamo che I1 sia la somma tra I2 e I3. Riporta.
Dobbiamo trasformare i fasori nel dominio del tempo.

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 3,49 \cos(\omega t + 77,9^\circ)$$

$$i_2(t) = \sqrt{2}\ 3,12 \cos(\omega t + 51,34^\circ)$$

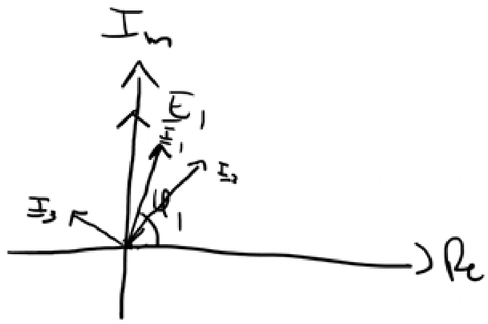
$$i_3(t) = \sqrt{2}\ 1,56 \cos(\omega t + 141^\circ)$$

Non è richiesto dall'esercizio, ma rappresentiamo i fasori.

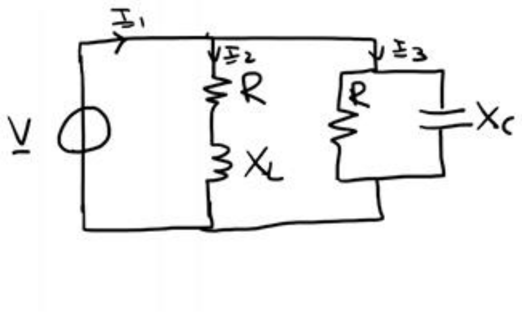
$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 3,49 \cos(\omega t + 77,9^\circ)$$

$$i_2(t) = \sqrt{2}\ 3,12 \cos(\omega t + 51,34^\circ)$$

$$i_3(t) = \sqrt{2}\ 1,56 \cos(\omega t + 141^\circ)$$



Esercizi



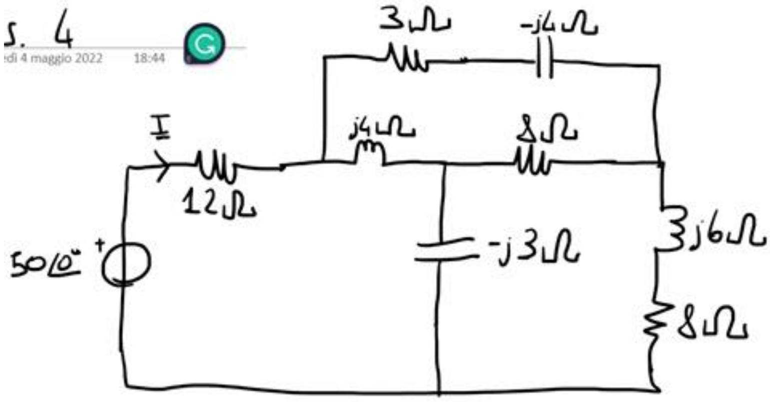
$V = 100\ V$

$R = 10\ \Omega$

$X_L = 10\ \Omega$

$X_C = -10\ \Omega$

È tutto nel dominio fasoriale, può essere chiesto di calcolare i fasori di I1 e I2.
Oppure un altro esercizio.



$I = ?$

sol.: $I = 3{,}66\, e^{-j4{,}2^\circ}\ A$