▼ **7.0 - Logica proposizionale classica**

▼ **7.1 - Sintassi della logica proposizionale**

Sintassi

Sintassi: descrizione dell'insieme di tutte le connotazioni alle quali associamo una denotazione.

Formule

$F ::= \bot | \top | A | B | ... | \neg F | F \land F | F \lor F | F \Rightarrow F$

Semantica intuitiva:

- $\bot$: denota la falsità.
- $\top$: denota la verità.
- $A, B, ...$: denotano un valore di verità sconosciuto/non determinato (dipende dal mondo).
- $\neg F$: negazione di F.
- $F_1 \land F_2$: congiunzione di due formule.
- $F_1 \lor F_2$: disgiunzione inclusiva di due formule.
- $F_1 \Rightarrow F_2$: implicazione materiale di due formule.

Precedenza e associatività

- **Precedenze**: $\neg > \land > \lor > \Rightarrow$

  Esempio: $\neg A \land B \lor \top \Rightarrow C$ si legge $(((\neg A) \land B) \lor \top) \Rightarrow C$

- **Associatività**: a destra per tutti gli operatori

  Esempio: $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ si legge $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

Formalizzazione

Con **formalizzazione** di una frase in linguaggio naturale si intende trovare una formula logica che meglio approssima la frase.

Esempio:

- "Oggi piove ma non ho preso l'ombrello".

  Formalizzazione in logica proposizionale: $A \land B$, dove A sta per "oggi piove" e B per "non ho preso l'ombrello". È una buona rappresentazione della frase ma approssimativa, in quanto "ma" ed "e" non hanno lo stesso identico significato nel linguaggio naturale.

Difficoltà nella formalizzazione

- Possono esistere diverse connotazioni per gli stessi connettivi.

  Esempio:

  - "Se A allora B", "A implica B", "A è condizione sufficiente per B" ecc. vengono tutte formalizzate in $A \Rightarrow B$.

    In questo caso tutte le connotazioni hanno lo stesso significato.

  - "A e B", "A ma B", "A nonostante B" vengono formalizzate in $A \land B$.

    In questo caso però queste connotazioni non hanno lo stesso identico significato nel linguaggio naturale.

- Nel linguaggio naturale esistono sinonimi e contrari che devono essere identificati al fine di formalizzare in maniera corretta.

  Esempio:

  - "Se Mario è **acculturato** allora oggi c'è **bel tempo**", "oggi **splende il sole** e Mario è **ignorante**" devono essere formalizzate in questo modo: $M \Rightarrow B$, $B \wedge \neg M$.

▼ **7.2 - Semantica classica della logica proposizionale**

Semantica: descrive ciò che viene associato alle connotazioni descritte dalla sintassi. Quello che viene associato sono le denotazioni, le quali vengono prese all'interno di un **dominio di interpretazione** scelto (insiemi, numeri, figure geometriche ecc.).

La semantica dunque descrive l'insieme di tutti i significati che diamo alle connotazioni descritte tramite la sintassi. Queste ovviamente variano a seconda del dominio di interpretazione che prendiamo in considerazione (1 > 0 è una proposizione che possiamo valutare prendendo in considerazione il dominio dei numeri, valutando 1 e 0 come numeri, o anche delle figure geometriche, valutando 1 e 0 come due figure geometriche).

Funzione semantica: funzione che associa ad una connotazione una denotazione derivante dal dominio di interpretazione fissato.

É possibile dare semantiche totalmente diverse allo stesso linguaggio. In genere esiste una **semantica intesa**, la quale corrisponde a quella semantica che viene attribuita ad un linguaggio nel caso in cui la semantica non viene definita in modo rigoroso.

Logica classica

La **logica classica** prevede una visione platonica, la quale vede il mondo come qualcosa di immutabile e non creato dall'uomo, ma preesistente prima dell'esistenza dell'uomo, il quale può solo osservare le sue leggi senza poterle modificare.

Secondo logica classica, in ogni mondo:

- Ogni enunciato è vero o falso, e non può essere vero o falso allo stesso tempo.
- **Staticità**: il valore di verità non muta (se qualcosa è vero/falso lo sarà per sempre).
- **Determinatezza**: il valore di verità di un enunciato è sempre determinato.

Utilizzeremo i naturali **0** e **1** per indicare le denotazioni di verità e falsità.

Funzione di interpretazione o **mondo**: funzione matematica che associa alle variabili proposizionali i valori di verità. {A, B, …} → {0, 1} (Dominio → Immagine).

Da qui in avanti indicheremo le funzioni di interpretazione con V, V', V_1, V_2 ecc.

Semantica classica

Nella **semantica classica** la semantica di $\bot$, $\top$ e dei connettivi è già fissata, mentre varia in base al mondo quella delle variabili proposizionali A, B, ecc.

Data una funzione di interpretazione, definiamo la semantica classica $[\![.]\!]^V : F \to \{0, 1\}$ tramite induzione strutturale nel seguente modo:

- $[\![\bot]\!]^V = 0$
- $[\![\top]\!]^V = 1$
- $[\![A]\!]^V = V(A)$

- $[\neg F]^V = 1 - [F]^V$
- $[F_1 \wedge F_2]^V = min\{[F_1]^V . [F_2]^V\}$
- $[F_1 \vee F_2]^V = max\{[F_1]^V . [F_2]^V\}$
- $[F_1 \Rightarrow F_2]^V = max\{1 - [F_1]^V . [F_2]^V\}$

Tabelle di verità

$[\![\bot]\!]^V$
0

$[\![\top]\!]^V$
1

Top & Bottom.

$[\![F]\!]^V$	$[\![\neg F]\!]^V$
0	1
1	0

Not.

$[\![F_1]\!]^V$	$[\![F_2]\!]^V$	$[\![F_1 \wedge F_2]\!]^V$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

And.

$[\![F_1]\!]^V$	$[\![F_2]\!]^V$	$[\![F_1 \vee F_2]\!]^V$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bottom.

$[\![F_1]\!]^V$	$[\![F_2]\!]^V$	$[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^V$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se, allora.

Il **se, allora** ha un significato differente rispetto al pensiero comune in quanto quest'ultimo non comprende il caso 0 0 → 1, il quale sta a significare che il falso implica qualunque cosa (es. $[\![$se 2 + 2 = 5, allora gli asini volano$]\!]^V$ = 1).

▼ **7.3 - Conseguenza ed equivalenza logica in logica proposizionale classica**

Conseguenza logica

> F è **conseguenza logica** di Γ ($\Gamma \Vdash F$) quando per ogni mondo V si ha che, se $[\![G]\!]^V = 1$ per ogni $G \in \Gamma$, allora $[\![F]\!]^V = 1$.

Equivalenza logica

> F è **logicamente equivalente** a G ($F \equiv G$) quando per ogni mondo V, $[\![F]\!]^V = [\![G]\!]^V$.

A livello di tabella di verità, due formule sono logicamente equivalenti se le loro tabelle di verità coincidono.

Tautologie

> F è una **tautologia** quando $\Vdash F$, ovvero F è conseguenza logica dell'insieme vuoto di formule.

Ciò sta a significare che F è una verità assoluta, ovvero per ogni mondo si ha $[\![F]\!]^V = 1$.

Esempio:

- $\top = 1$ è una tautologia, e di conseguenza anche $[\![\top]\!]^V \wedge [\![\top]\!]^V = 1$ è una tautologia, in quanto vera in tutti i mondi.
- $[\![A]\!]^V \Rightarrow [\![A]\!]^V = 1$ è una tautologia, in quanto la sua tabella di verità è la seguente.

$v(A)$	$[\![A \Rightarrow A]\!]^v$
0	1
1	1

Soddisfacibilità e insoddisfacibilità

> F è **soddisfatta** in un mondo V ($V \Vdash F$) se $V(F) = 1$.

> F è **soddisfacibile** se esiste un mondo V in cui $V \Vdash F$.

La tabella di verità corrispondente ha almeno un 1.

> F è **tautologica** quando per ogni mondo Vsi ha $V \Vdash F$.

La tabella di verità corrispondente ha tutti 1.

> F è **insoddisfacibile** quando non esiste un mondo Vper cui $V \Vdash F$

La tabella di verità corrispondente ha tutti 0, infatti insoddisfacibile è il contrario di tautologica.

Una formula F può dunque essere di 3 tipologie:

- **Tautologica** (tutti **1**).
- **Soddisfacibile** ma non tautologica (sia **0** che **1**).
- **Insoddisfacibile** (tutti **0**).

7.4 - Teorema di invarianza per sostituzione nella logica proposizionale classica

Prima di definire in maniera rigorosa il **teorema di invarianza per sostituzione** nella logica proposizionale occorre definire il concetto di **contesto**, che nella logica proposizionale viene definito come una formula che contiene uno o più **buchi**. A sua volta un buco in logica proposizionale corrisponde a una variabile proposizionale, e riempire il buco corrisponde a rimpiazzare la variabile con una formula.

Esempi di sostituzione di una formula G al posto della variabile A nella formula/contesto F (scritto $F[G/A]$) sono i seguenti (avvengono per ricorsione strutturale su F):

- $\bot[G/A] = \bot$
- $A[G/A] = G$
- $B[G/A] = B$
- $(\neg F)[G/A] = \neg F[G/A]$
- $(F_1 \wedge F_2)[G/A] = F_1[G/A] \wedge F_2[G/A]$ (analogo ai casi $\vee$ e $\Rightarrow$)

Dopo aver definito il concetto di contesto in logica proposizionale è possibile definire il teorema di invarianza per sostituzione:

> Si ha **invarianza sostitutiva** se per tutte le formule F, G_1, G_2 e per A, se $G_1 \equiv G_2$, allora $F[G_1/A] = F[G_2/A]$.

Esempi di dimostrazione dell'induzione strutturale:

- Caso $\bot$: $\bot[G_1/A] = \bot \equiv \bot = \bot[G_2/A]$.
- Caso A: $A[G_1/A] = G_1 \equiv G_2 = A[G_2/A]$.
- Caso B: $B[G_1/A] = B \equiv B = B[G_2/A]$.
- Caso $F_1 \wedge F_2$ (analogo ai casi $\vee$ e $\Rightarrow$):
  - Dobbiamo dimostrare: $(F_1 \wedge F_2)[G_1/A] \equiv (F_1 \wedge F_2)[G_2/A]$
  - Per ipotesi induttiva sappiamo: $[\![F_1[G_1/A]]\!]^V \equiv [\![F_1[G_2/A]]\!]^V$ e $[\![F_1[G_1/A]]\!]^V \equiv [\![F_1[G_2/A]]\!]^V$.
  - Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
&[\![(F_1 \wedge F_2)[G_1/A]]\!]^V \\
&= [\![F_1[G_1/A] \wedge F_2[G_1/A]]\!]^V \\
&= min\{[\![F_1[G_1/A]]\!]^V . [\![F_2[G_1/A]]\!]^V\} \\
&= min\{[\![F_1[G_2/A]]\!]^V . [\![F_2[G_2/A]]\!]^V\} \\
&= [\![F_1[G_1/A] \wedge F_2[G_1/A]]\!]^V \\
&= [\![(F_1 \wedge F_2)[G_2/A]]\!]^V
\end{aligned}
$$

7.5 - Connettivi e tabelle di verità

Ogni **connettivo n-ario** è una funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e viene definito da una tabella di verità con 2^n **righe**.

Inoltre n valori in input sono in grado di descrivere 2^{2^n} **connettivi differenti**. Solo per alcuni di questi è stata però data una connotazione.

Connettivi 0-ari

$[\![\bot]\!]^v$	$[\![\top]\!]^v$
0	1

Connettivi 0-ari.

Tutti i $2^{2^0} = 2^1 = 2$ connettivi 0-ari hanno una connotazione ($\bot$ e $\top$).

Connettivi 1-ari

$v(F)$			$[\![\neg F]\!]^v$	
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Connettivi 1-ari.

Dei $2^{2^1} = 2^2 = 4$ connettivi 1-ari solo il $\neg$ ha una connotazione, in quanto gli altri non sono particolarmente utili.

Connettivi 2-ari

F_1	F_2		$\wedge$					$\oplus$	$\vee$	$\tilde{\vee}$	$\iff$				$\Rightarrow$	$\tilde{\wedge}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Connettivi 2-ari.

Dei $2^{2^2} = 2^4 = 16$ connettivi 2-ari solo alcuni hanno una connotazione.

Riduzione fra connettivi

Spesso è possibile esprimere un connettivo utilizzandone altri e l'equivalenza logica, in questi casi si dice che il connettivo è **riducibile** ad altri.

Esempi:

- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$

Ridondante

> Un insieme di connettivi è **ridondante** se contiene almeno un connettivo riducibile ai restanti.

Funzionalmente completo

> Un insieme di connettivi è **funzionalmente completo** se ogni altro connettivo è riducibile a questi.

Notazione: Siano S e T due insiemi di connettivi, si scrive $S \triangleright T$ se ogni connettivo di S è riducibile ai connettivi di T.

Teorema:

> Se S è funzionalmente completo e $S \triangleright T$, allora anche T è funzionalmente completo.

Perchè i connettivi della logica proposizionale classica?

$\{\vee, \wedge, \perp, \top, \neg\}$ è l'insieme dei connettivi scelto dalla logica proposizionale classica. Questo insieme è funzionalmente completo ma anche ridondante, ed è stato scelto per via di un compromesso fra l'esigenza di considerare un insieme **piccolo** e **funzionalmente completo**, e un insieme che permetta di esprimere in modo semplice ragionamenti effettuati tramite il **linguaggio naturale**.

Inoltre la riduzione fra i vari connettivi dipende dalla semantica utilizzata, e l'insieme dei connettivi scelto è funzionalmente completo in quasi **tutte le semantiche** utilizzate.

Infine sono stati scelti questi connettivi per via delle loro rilevanza sia in ambito **matematico** che **informatico**.

Equivalenze logiche notevoli

Nota: le equivalenze in rosso valgono solo in logica proposizionale classica)

Commutatività

$A \vee B \equiv B \vee A$, $A \wedge B \equiv B \wedge A$

Associatività

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

Idempotenza

$A \vee A \equiv A$, $A \wedge A \equiv A$

Distributività

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Assorbimento

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$, $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

Elemento neutro

$A \vee \perp \equiv A$, $A \wedge \top \equiv A$

Annichilamento

$A \vee \top \equiv \top$, $A \wedge \perp \equiv \perp$

Doppia negazione

$\neg\neg A \equiv A$

De morgan

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Implicazione

$A \Rightarrow \equiv \neg A \vee B$

Equivalenze logiche aggiuntive

Modus barbara: $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Regola di deduzione:

- $\neg A \vee B, A \Vdash B$
- $\neg A \vee B, A \vee B \Vdash B \vee C$

Teorema di completezza

> Siano P e Q due formule della logica proposizionale, $P \equiv Q$ se e se solo se posso dimostrarlo tramite le equivalenze logiche notevoli appena presentate.

▼ **7.6 - Deduzione sintattica**

Vediamo ora una serie di teoremi che permettono di chiarire i rapporti che esistono tra alcuni connettivi ($\Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, \bot, \top$) e le nozioni di conseguenza ed equivalenza logica.

Nota: le dimostrazioni dei seguenti teoremi si trovano nelle slide, sono da imparare a memoria.

Teorema di deduzione semantica

Lemma

> Per ogni formula F e G si ha $\Gamma \Vdash F \Rightarrow G$ se e solo se $\Gamma, F \Vdash G$.

Teorema

> Per tutte le formula $F_1, ..., F_n, G$ si ha $F_1, ..., F_n \Vdash G$ se e solo se $\Vdash F_1 \Rightarrow ... \Rightarrow F_n \Rightarrow G$.

Il teorema di deduzione semantica è molto importante in quanto ci dice che il concetto di **conseguenza logica** è riducibile al concetto di **tautologia** e viceversa.

Altri teoremi

Teorema

> $\Vdash F$ se e solo se $F \Rightarrow \top$.

Teorema

> $\Vdash F$ se e solo se $\neg F$ è insoddisfacibile.

Teorema

> $\Gamma \Vdash F$ se e solo se l'insieme $\Gamma, \neg F$ è insoddisfacibile.

Teorema

> Γ è **insoddisfacibile** se e solo se $\Gamma \Vdash \perp$.

Teorema

> Γ è **soddisfacibile** se e solo se $\Gamma \nVdash \perp$.