Esercizi

es. 3 FOGLIO V

(X, Y) v.c. continue con $f(x,y) = \begin{cases} K & \text{se } x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Quasi tutte le volte che abbiamo a che fare con un dominio circolare (e integrare), conviene passare alle coordinate polari. In questo caso invece l'esercizio non richiede integrazioni particolari, quindi l'esercizio sarà ancora più semplice.

$$1 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} K \, dx\, dy = K \underbrace{\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 1 \, dx\, dy}_{\text{area del cerchio}} = K \pi R^2$$

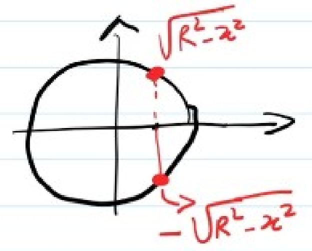
$$\Rightarrow 1 = K \pi R^2 \Rightarrow K = \frac{1}{\pi R^2}$$

Calcoliamo la funzione di densità marginale della X.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x > R \text{ o } x < -R \\ \displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = & \text{se } -R \leq x \leq R \end{cases}$$

$$= \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$$

Perché questi estremi di integrazione?



Per simmetria $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y > R \text{ o } y < -R \\ \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} & \text{se } -R \leq y \leq R \end{cases}$

X e Y SONO INDIPENDENTI?

$$f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [-R,R] \text{ e/o } y \notin [-R,R] \\ \frac{4\sqrt{(R^2-x^2)(R^2-y^2)}}{\pi^2 R^4} & \text{se } x \in [-R,R],\ y \in [-R,R] \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2+y^2 > R^2 \\ \frac{1}{\pi R^2} & \text{se } x^2+y^2 \leq R^2 \end{cases}$$

Sia perché sono diverse da 0 in un dominio diverso, sia perché hanno valori diversi da 0 diversi tra di loro, il prodotto delle marginali e la funzione di densità congiunta sono diversi e quindi X e Y sono indipendenti.

$$f_X(x)\, f_Y(y) \neq f(x,y)$$

$\Downarrow$

X e Y sono dipendenti

Calcoliamo la covarianza.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-R}^{R} x \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}\, dx$$

funzione dispari

$\int_{-\alpha}^{\alpha}$ funzione dispari $= 0$

STESSO RISULTATO PER $E[Y]=0$

$$E[XY]=E[h(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leq R^2} x\,y\,\frac{1}{\pi R^2}\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} x\,y\,\frac{1}{\pi R^2}\,dx\right)dy=$$

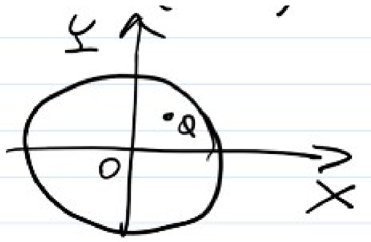
$$=\int_{-R}^{R} y\,\frac{1}{\pi R^2}\left(\underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x\,dx}_{\int_{-\alpha}^{\alpha}\text{funzione dispari}}\right)dy=0$$

I calcoli sembravano spaventosi e invece no.

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0$$

Le variabili casuali sono dipendenti ma scorrelate. La dipendenza è artificiosa, legata alla forma del dominio d'esistenza della coppia di variabili casuali, non all'espressione della funzione di densità.

Per verificare l'indipendenza, la covarianza non dice niente, se non che se è diversa da 0, allora sono dipendenti.



$$OQ=(X,Y)$$

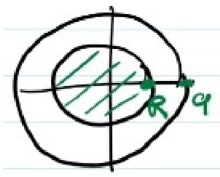
$$P(|OQ|\leq a)=$$

$$=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\leq a\right)$$

$$P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le a\right) = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ci sono due situazioni.

$$= \begin{cases} \displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \frac{1}{\pi R^2}\,dx\,dy & 0\le a<R \\[2ex] \displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{1}{\pi R^2}\,dx\,dy + \underbrace{\cancel{\iint 0\,dx\,dy}}_{\substack{\text{corona circolare} \\ \text{tra raggio } a \text{ e raggio } R}} & a>R \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \dfrac{\cancel{\pi}\, a^2}{\cancel{\pi}\, R^2} & 0\le a\le R \\[2ex] \dfrac{\pi R^2}{\pi R^2} = 1 & \text{se } a>R \end{cases}$$

$$P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le a\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ \dfrac{a^2}{R^2} & \text{se } 0\le a\le R \\ 1 & \text{se } a>R \end{cases}$$

N.B. $$E[X] = E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy \right)}_{= f_X(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

Oss. Se si considera un vettore di N variabili $(X_1, X_2, \dots X_N)$, si introduce la matrice delle covarianze

$$\begin{pmatrix} \underbrace{Cov(X_1, X_1)}_{Var(X_1)} & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_N) \\ Cov(X_2, X_1) & \underbrace{Cov(X_2, X_2)}_{Var(X_2)} & \dots & Cov(X_2, X_N) \\ \vdots & & & \\ Cov(X_N, X_1) & \dots & \dots & \underbrace{Cov(X_N, X_N)}_{Var(X_N)} \end{pmatrix}$$

Corollario di Bernoulli

Abbiamo considerato un'ipotesi molto forte con la legge dei grandi numeri (variabili casuali tutte indipendenti identicamente distribuite), quindi la formulazione è debole, cioè poco generale. Come corollario, c'è il corollario di Bernoulli.

Nella legge dei grandi numeri è già presente il risultato che si sta per ottenere, ma va messo in evidenza perché è importante.

COROLLARIO DI BERNOULLI
(come corollario legge dei grandi numeri)

Al crescere indefinito del numero di esperimenti la frequenza relativa dell'evento A converge in probabilità alla probabilità teorica di A ($P(A)$).

Faccio molti esperimenti per osservare un evento A. Conto le volte che ho osservato A e divido per il numero di esperimenti fatti (frequenza di A). Se il numero di esperimenti fatti è molto alta, la frequenza relativa converge in probabilità alla probabilità teorica (la definizione frequentista di probabilità converge in probabilità alla probabilità teorica).

$$f_A = \frac{n^\circ \text{ esperimenti in cui } A \text{ si presenta}}{n^\circ \text{ esperimenti svolti} = N}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|f_A - P(A)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

(piccolo a piacere)

La struttura della formula è la stessa di quella della legge dei grandi numeri. Vediamo perché il corollario di Bernoulli è un corollario della legge dei grandi numeri. La dimostrazione passa attraverso le varabili casuali di Bernoulli.

$\boxed{\text{DIM}}$ $X_1, X_2, \dots X_N$ v.c. di Bernoulli i.i.d.

$$X_k \sim Be(p(A)) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ si verifica nel } k\text{-esimo esperimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mi concentro sulla singola prova con le variabili casuali di Bernoulli. Può capitare che A capiti e la variabile me lo dice. Ci sono tante variabili casuali quante prove ho fatto.

Cosa cerco di simulare? La frequenza relativa.

Dagli esercizi sappiamo che:

$$E[X_k] = P(A)$$
$$Var(X_k) = P(A)\,(1 - P(A))$$

$$\bar{X} = f_A = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \text{media aritmetica degli } X_k$$

$$E[\bar{X}] = P(A) \quad \text{perché} \quad E[\bar{X}] = E[X_k]$$

Legge dei grandi numeri $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\bar{X} - E[\bar{X}]| \geq \varepsilon) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Nel nostro caso:

$$P(|f_A - P(A)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

È un'applicazione della legge dei grandi numeri alle variabili casuali di Bernoulli.

Oss. 1) Giustificazione teorica della definizione frequentista è data proprio dal corollario di Bernoulli

2) $P(|f_A - P(A)| < \varepsilon) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1 \quad \forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere

C'è probabilità 100% che frequenza è media teorica siano molto vicine.

Funzione generatrice dei momenti

Ha un doppio uso: semplifica i calcoli in alcune situazioni e viene vista come un'impronta digitale della variabile casuale (due variabili casuali con la stessa funzione generatrice o la stessa struttura sono praticamente la stessa, sono identicamente distribuite). Sarà la base della dimostrazione del teorema del limite centrale.

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Data una v.c. X, si definisce funzione generatrice dei momenti (se esiste)

$$\phi(t) = E\left[e^{tX}\right] \qquad t\in\mathbb{R}$$

ovvero

$$\phi(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} e^{t x_k}\, p(x_k) & \text{se } X\in\{x_1,\dots x_m\} \text{ v.c. discreta} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx & \text{se } X \text{ v.c. continua} \end{cases}$$

Perché si chiama funzione generatrice dei momenti e che proprietà ha?

PROPRIETÀ

0) $\phi(0) = E\left[e^{0X}\right] = E[1] = 1$

1) $$\left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}E\left[e^{tX}\right]\right|_{t=0} = \left.E\left[\frac{d}{dt}e^{tX}\right]\right|_{t=0} = \left.E\left[e^{tX}X\right]\right|_{t=0} = E\left[e^{0X}X\right] = E[X]$$

Questa proprietà si può generalizzare.

2) $$\left.\frac{d^n\phi(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E[X^n] \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Ecco perché si chiama funzione generatrice dei momenti. Posso calcolare tutti i momenti che mi pare facendo delle derivate mandando l'argomento a 0 dopo aver fatto le derivate.

3) Se X e Y sono v.c. INDIPENDENTI

$$Z = X + Y$$

$$\phi_Z(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t)$$

Perché è possibile portare la $\frac{d}{dt}$ dentro $E[\ ]$?

CASO CONTINUO

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{tx}}{dt} f(x)\,dx$$

se l'integrale converge

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,x\,f(x)\,dx$$

CASO DISCRETO

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{t x_k} p(x_k)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} e^{t x_k} p(x_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d e^{t x_k}}{dt} p(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} e^{t x_k} x_k \, p(x_k)$$

Posso far entrare la derivata nel valor medio perché, se la sommatoria o l'integrale converge, portare dentro una derivata rispetto a quella che non viene integrata è sempre possibile.

A che cosa serve questa funzione? La risposta sta nelle proprietà 1 e 2: posso calcolare valor medio e varianza facendo delle derivate e per esempio non può integrali se le variabili casuali sono continue. La proprietà 3 è anch'essa importante: se hai una somma di variabili casuali, la funzione generatrice dei momenti della somma è il prodotto delle funzioni generatrici dei momenti delle variabili, a patto che siano indipendenti. Ma quella che serve è la proprietà 4.

4) Due v.c. X e Y aventi la stessa funzione generatrice dei momenti sono identicamente distribuite, quindi hanno stessa funzione di ripartizione, stessa funzione di massa di prob. se sono discrete o stessa funzione di densità di prob. se sono continue.

Serve per riconoscere che la somma di tante variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite è una gaussiana. Per dimostrarlo, si dimostra attraverso la funzione generatrice dei momenti.

esercizio 1

$X \sim Be(p) \qquad \phi(t)? \qquad q = 1-p$

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{t x_k} p(x_k) = e^{t0} p(0) + e^{t\cdot 1} p(1) =$$

$$= q + e^{t} p$$

$$E[X] = \frac{d}{dt}\phi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{t}p + q\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{t}p\Big|_{t=0} = p$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{t}p\right)\Big|_{t=0} = e^{t}p\Big|_{t=0} = p$$

$= \frac{d}{dt}\phi(t)$

$$\Downarrow$$

$$E[X^n] = \frac{d^n \phi(t)}{dt^n}\Big|_{t=0} = e^{t}p\Big|_{t=0} = p$$

esercizio 2 (vedi es. 1 FOGLIO V)

X v.c. continua con $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} e^{tx} e^{-x}\, dx =$$

$$\int^{+\infty} -(1-t)x \quad 0$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(1-t)x}\, dx \underset{\uparrow}{=} \left[-\frac{e^{-(1-t)x}}{(1-t)} \right]_{0}^{+\infty}$$

l'integrale converge solo se $-(1-t) < 0$

$$= \frac{1}{1-t} \quad \text{se } 1-t > 0 \text{ ovvero } t < 1$$

$$E[X] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{t=0} = -\frac{1\cdot(-1)}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} = 1$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= -\frac{2(-1)}{(1-t)^3}\Big|_{t=0} = 2$$

es. 4 FOGLIO V

X con $E[X]=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$

$Y=aX+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

$Cov(X,Y)$? $Corr(X,Y)$

$$E[Y]=E[aX+b]=aE[X]+b=a\mu+b$$

$$Var(Y)=Var(aX+b)=a^2Var(X)=a^2\sigma^2$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

$$E[XY]=E[X(aX+b)]=E[aX^2+bX]=$$
$$=aE[X^2]+bE[X]$$

$$E[X^2]=Var(X)+(E[X])^2$$

$$=a(\sigma^2+\mu^2)+b\mu$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=$$
$$=a(\sigma^2+\mu^2)+b\mu-\mu(a\mu+b)=$$
$$=a\sigma^2+\cancel{a\mu^2}+\cancel{b\mu}-\cancel{a\mu^2}-\cancel{\mu b}=a\sigma^2$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{a\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 \cdot a^2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{a\,\cancel{\sigma^2}}{|a|\,\cancel{\sigma^2}} = \frac{a}{|a|} = sgn(a)$$

La correlazione viene 1 se a è positivo, viene -1 se a è negativo (funzione crescente, 1, decrescente, -1).

Modelli di variabili casuali discrete

Sono dei prototipi introdotti per aiutare a modellare dei problemi.

Il primo modello lo conosciamo.

1) V.C. DI BERNOULLI

$X \sim Be(p)$ $\qquad X \in \{0,1\}$

$p(1) = p$

$p(0) = 1-p = q$

$E[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$ $\qquad \phi(t) = pe^t + q$

$E[X^2] = 1 \cdot p = p$

$Var(X) = p - p^2 = pq$

Si usa per contare, per dimostrare la legge dei grandi numeri nel caso delle frequenze relative (corollario di Bernoulli). È la variabile casuale più semplice da introdurre ma che definisce già un modello standard.

2) V.C. BINOMIALI

$X \sim B(n,p)$

→ v.c. binomiale di parametri n e p

Si ripete n volte un esperimento in maniera identica e indipendente, $X =$ 'n° di volte in cui l'evento A si verifica' ('n° di successi'), p è la probabilità di verificarsi di A nella singola prova $(p = P(A))$

$$X \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Ripeto un numero n di volte un esperimento, il numero di volte in cui osservo A non può essere maggiore di n. Bisogna lasciare uno spazio.

$k = 0, 1, \dots n$

$$p(k) = P(X=k) = \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{k \text{ volte}} \underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-k \text{ volte}}$$

Adesso il problema è contare i casi, perché può capitare che le prove possano verificarsi e qualche volta sì. Quali sono tutti i casi? Il coefficiente binomiale.

$k = 0, 1, \dots n$

$$p(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{k \text{ volte}} \underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-k \text{ volte}}$$

$$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$q = 1-p$

OSS. $\binom{n}{k} = C_{n,k}$ sono il numero diverso di modi in cui posso estrarre (senza reimmissione) k palline da una scatola di n palline (numerate da 1 ad n).
Immagino che le k palline estratte mi diano gli indici degli esperimenti in cui A si è verificato

Il coefficiente binomiale conta in quanti modi diversi posso verificare k volte A e n – k volte non A.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots$$

oppure

$$Y_k \sim Be(p) \qquad Y_k = \begin{cases} 1 & \text{se A si verifica nel k-esimo esperimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Y_k i.i.d. (perché gli esperimenti si ripetono in modo indipendente e identico)

$$X = Y_1 + Y_2 \dots + Y_n$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y_1 + Y_2 \dots + Y_n] = \\ &= E[Y_1] + E[Y_2] + \dots + E[Y_n] = \\ &= \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ volte}} = np \end{aligned}$$

Il valor medio di una variabile casuale binomiale è il prodotto dei suoi parametri n per p. Si può vedere come una somma di variabili casuali di Bernoulli indipendenti identicamente distribuite con parametro p.

La stessa cosa vale per la varianza.

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \underset{\text{INDIP.}}{=} \sum_{k=1}^{n} Var(Y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} pq = npq \end{aligned}$$

$$\phi_X(t) = \phi_{Y_1+Y_2+\dots Y_n}(t) \underset{\substack{\exists \text{ di } \phi(t) \\ +\text{INDIP.}}}{=} \phi_{Y_1}(t)\, \phi_{Y_2}(t) \dots \phi_{Y_n}(t) =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ Y_K \text{ i.d.}}}{=} \left(\phi_{Y_1}(t)\right)^n = \left(e^t p + q\right)^n$$

Questa proprietà permette di verificare una proprietà speciale delle variabili casuali binomiali, osservabile in pochissimi altri modelli di variabili casuali: la riproducibilità.

PROPRIETÀ DI RIPRODUCIBILITÀ

Se $X \sim B(n_1, p)$ e $Z \sim B(n_2, p)$

e se X e Z sono indipendenti

$$S = X + Z \sim B(n_1 + n_2, p)$$

ovvero la somma di due v.c. binomiali indipendenti è una binomiale se X e Z hanno lo stesso parametro p.

Lo dimostriamo con la funzione generatrice dei momenti, l'impronta digitale delle variabili casuali.

$$\phi_X(t) = \left(pe^t + q\right)^{n_1}$$

$$\phi_Z(t) = \left(pe^t + q\right)^{n_2}$$

$$\phi_S(t) = \phi_{X+Z}(t) \underset{\text{INDIP.}}{=} \phi_X(t)\, \phi_Z(t) =$$

$$= \left(pe^t+q\right)^{n_1} \left(pe^t+q\right)^{n_2} =$$

$$= \left(pe^t+q\right)^{n_1+n_2} \Longrightarrow$$ la struttura di $\phi_S(t)$ è quella tipica di una v.c. binomiale di parametri (n_1+n_2) e p

es. 1 $\boxed{\begin{matrix} 6\ V \\ 3\ R \end{matrix}}$

Si estrae una pallina dalla scatola e la si inserisce di nuovo nella scatola

L'esperimento viene ripetuto 6 volte

$X =$ 'n° palline rosse estratte'

$p_X(a)$? $E[X]$? $Var(X)$?

$$X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$$

Con questo si sa tutto.

$X \in \{0, 1, \dots 6\}$

$$p_X(k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots 6$$

$$E[X] = np = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$Var(X) = npq = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Lo so perché questo questo è il modello che si addice al problema, questo è il vantaggio dei prototipi.

es. 2 Stessa scatola di prima,
si fanno 6 estrazione di una pallina senza reimmissione

Y = 'n° palline rosse estratte'

$P_Y(k)$? $E[Y]$? $Var(Y)$?

Y non è una binomiale, perché con le binomiali si fanno degli esperimenti in maniera identica e indipendente.

Y NON è una binomiale perché gli esperimenti NON sono ripetuti in maniera identica e indipendente

Siccome sono estrazioni senza reimmissioni:

$$Y \in \{0,1,2,3\}$$

Non c'è un prototipo per questo tipo.

$$p(0) = P(Y=0) = \frac{C_{6,6}}{C_{9,6}} = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{9}{6}} = \frac{1}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{3!}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6}{9 \cdot 8 \cdot 7}$$

$$p(1) = P(Y=1) = \frac{C_{3,1}\ C_{6,5}}{C_{9,6}} = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{5}}{\binom{9}{6}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 6}{\frac{9!}{3!\ 6!}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

$$p(2) = \frac{C_{3,2}\ C_{6,4}}{C_{9,6}} = \ldots$$

$$p(3) = \frac{C_{3,3}\ C_{6,3}}{C_{9,6}} = \ldots$$