Analisi matematica

Analisi - Prova unica

▼ 0.0 - Informazioni generali

Ore di studio

Totale: **150**

Lezione: **66**

Casa: **84** (**2** al giorno - 3,5 giorni a settimana)

Esame

- Scritto
  - Primo parziale: Esercizi + semplice domanda di teoria. Non è possibile utilizzare la calcolatrice.
  - Secondo parziale: Esercizi sui seguenti argomenti:
    - Integrale su una variabile
    - R^n spazio euclideo
    - Calcolo differenziale su più variabili / derivate / ottimizzazione (massimi e minimi)
    - Integrale su più variabili
- Orale
  - Struttura: Discussione sui principali teoremi e delle loro dimostrazioni.
  - Accesso: Solo se si è superato lo scritto durante la stessa sessione.

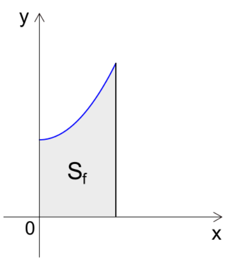
Ricevimento

- Marco Mughetti
  - Su appuntamento scrivendo una mail all'indirizzo marco.mughetti@unibo.it.
- Daniele Morbidelli
  - Venerdi' ore 9/11. Si consiglia di contattare il docente per conferma via e-mail.

▼ 1.0 - Integrali

Gli **integrali** sono utili per calcolare l'**area delle figure curvilinee**.

Con essi è infatti possibile determinare l'area del **sottografico** di una certa funzione curvilinea. Data una funzione $f[a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in [a,b].f(x) \geq 0$, il suo sottografico corrisponde a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$:

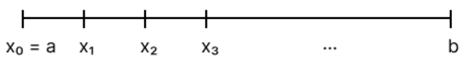


Sottografico di una funzione.

▼ **1.1 - Somma di Riemann e integrale**

Scomposizione di un intervallo

Dato un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e un numero $n \in \mathbb{N}$, divido $[a, b]$ in n parti uguali:



Ogni k-esima x dell'intervallo è ricavabile tramite: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Per ogni parte dell'intervallo scelgo un suo punto interno $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Somma di Riemann

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, definiamo la **somma di Riemann** come segue:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)h = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n}$$

Come possiamo notare dalla formula appena descritta S_n **dipende** dalla scelta dei vari c_k, la quale è arbitraria.

▼ **1.2 - Integrale**

Teorema: sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora esiste finito il $\lim_{n\to\infty} S_n$. Tale limite **non dipende** dunque dalla scelta dei punti c_k.

Si è soliti scrivere tale limite $\lim_{n\to\infty} f(x)$ come $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$ e si dice che f è **integrabile**.

Osservazione: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Sappiamo inoltre che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero e indica l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Proprietà dell'integrale

1. **Linearità**

   f, g continue su $[a, b]$. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale:

   $$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività**

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile.

   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:

   $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

   I reali a, b e c possono trovarsi in qualunque posizione, non devono per forza essere nell'ordine $a < b < c$.

3. **Monotonia**

f, g continue su $[a, b]$.

$$\forall x \in [a, b]. f(x) \leq g(c) \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. **Convenzione**

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Teorema della media integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora $\exists c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

Dimostrazione a pagina 2 del pdf “lezioni-1-2”.

Primitiva di una funzione

$f :]a, b[\to \mathbb{R}$. $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ si dice **primitiva** di f su $]a, b[$ se vale:

$$\forall x \in]a, b[.\ F'(x) = f(x)$$

Osservazione: Se F è la primitiva di f su $]a, b[$, allora anche $H :]a, b[\to \mathbb{R}, H(x) = F(x) + c$ è primitiva di f $\forall c \in \mathbb{R}$.

Le primitive di una funzione f sono infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a $F(x) + c$, dove c è uno scalare.

Proposizione: Siano F e G primitive di f su $]a, b[$. Allora:

$$\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k.\ \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione a pagina 3 del pdf “lezioni-1-2”.

▼ 1.3 - Funzioni integrali e primitive elementari

Data $f :]a_0, b_0[\to \mathbb{R}$ continua e $c \in \mathbb{R}$ definiamo $I_c :]a_0, b_0[\to \mathbb{R}, I_c(x) = \int_c^x f(t)\, dt$ come **funzione integrale di punto base c**. La funzione integrale rappresenta l’area sottesa al grafico di f da un certo punto base c fino a x.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f$continua su $]a_0, b_0[$ e sia $c \in]a_0, b_0[$. Allora:

$$\forall x \in]a_0, b_0[.\ F'(x) = f(x).$$

Dimostrazione a pagina 3 del pdf “lezioni-1-2”.

Teorema fondamentale del calcolo integrale 2 - Formula di Torricelli

Sia f continua su $]a_0, b_0[$ e sia F la primitiva di f su $]a_0, b_0[$, allora:

$$\forall x \in]a_0, b_0[.\ \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione a pagina 4 del pdf “lezioni-1-2”.

Primitive elementari

$$\int k \to kx$$
$$\int x^\alpha, \alpha \neq -1 \to \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$
$$\int x^{-1} \to \ln|x|$$
$$\int a^x \to \frac{a^x}{\ln x} \; [\int e^x \to e^x]$$
$$\int \sin x \to -\cos x$$
$$\int \cos x \to \sin x$$
$$\int f(g(x))g'(x) \to F(g(x))$$

▼ **1.4 - Integrazione per parti, cambio variabile e integrali generalizzati**

Integrazione per parti

Per integrare un prodotto può essere talvolta utilizzata la formula:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Nota: per integrare $\int \sin x \; e^x$ occorre utilizzare due volte la formula di integrazione per parti.

Formula per il cambio variabile

Siano I, J intervalli aperti, sia $h : I \to J$ una funzione con derivata h' continua su I e $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)\,dt$$

Dimostrazione pagina 1 del pdf “lezioni-3-4”.

Osservazione per esercizi: integrali del tipo $\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx$ possono essere risolti sostituendo a $f(x)$ una variabile come z, e visto che $dz = f'(x)\,dx$ possiamo arrivare all’integrale $\int_a^b g'(x)\,dx$. Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo dunque concludere che $\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = [g(x)]_a^b$.
Caso particolare: $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$.

Integrali generalizzati

> Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato su** $[a, +\infty[$ se:
>
> $$\exists \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)\,dx := \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

La definizione per $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ è omessa perchè analoga.

Osservazione: se $f(x) \geq 0$ su $[a, +\infty[$ e $\int_a^{+\infty} f(x)$ converge, allora tale integrale esprime l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, +\infty[$.

Esercizio:

- Studiare l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \forall p > 0$

  Per studiare tale integrale occorre dunque studiare il seguente limite: $\lim_{z\to+\infty} \int_1^z \frac{dx}{x^p}$.

  A questo punto il valore dell'integrale dipende dal valore del parametro p in quanto questo determina il valore dell'esponente di z:

  - Esponente $p \neq 1$: il limite da valutare è $\lim_{z\to+\infty} [\frac{x^{1-p}}{1-p}]_1^z = \lim_{x\to+\infty} \frac{z^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$, il quale dipende a sua volta dal valore dell'esponente di z:
    - Esponente $1 - p > 0 \implies p < 1$: la prima frazione del limite tende a 0 e l'integrale è dunque uguale a $\frac{1}{p-1}$.
    - Esponente $1 - p < 0 \implies p > 1$: la prima frazione del limite tende a $+\infty$ e l'integrale diverge, dunque vale $+\infty$.
  - Esponente $1 - p = 0 \implies p = 1$: il limite da valutare è $\lim_{z\to+\infty} [\ln(x)]_1^z = \lim_{z\to+\infty} \ln(z) - \ln(1)$, dunque l'integrale diverge, ovvero vale $+\infty$.

> Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se:
>
> $$\exists \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)\,dx := \int_a^b f(x)\,dx$$

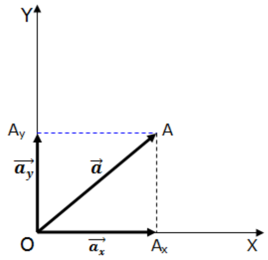
2.0 - Spazio euclideo

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ o **spazio euclideo** è definito nel seguente modo:

> $$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

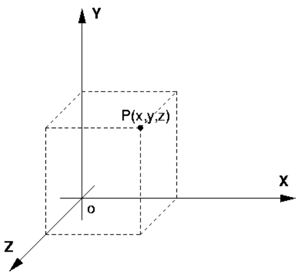
Esempi di spazi euclidei:

- $\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^2$.

- $\mathbb{R}^3$ = spazio ordinario. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.



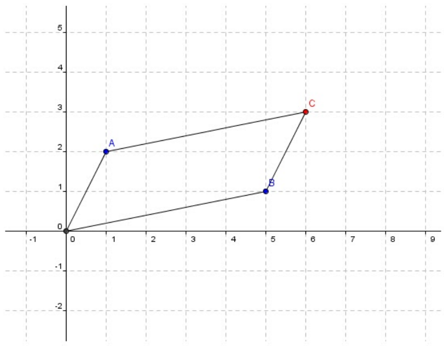
Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^3$.

▼ **2.1 - Operazioni nello spazio euclideo**

Somma tra vettori

> Dati due vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, definiamo la **somma** tra di essi come:
>
> $$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

La somma tra vettori nello spazio $\mathbb{R}^2$ può essere visualizzata in maniera grafica tramite la regola del parallelogramma:



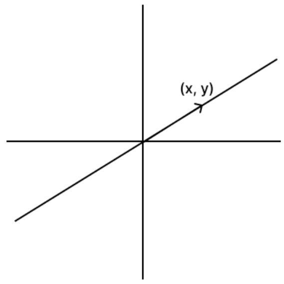
Regola del parallelogramma.

Prodotto con scalare

> Dato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto con scalare come:
>
> $$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

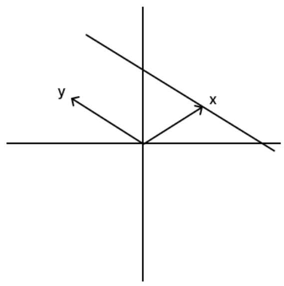
Il prodotto con scalare nello spazio $\mathbb{R}^2$ può essere visualizzato in maniera grafica tramite un cambiamento della lunghezza e/o direzione del vettore di partenza.

Inoltre, se il vettore di partenza è un vettore non nullo, ovvero $x \neq (0, \dots, 0)$, allora l'insieme $\{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta generata dal vettore x.



Retta generata da un vettore tramite prodotto con scalare.

Se partiamo da due vettori non nulli invece l'insieme $\{x + ty | t \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta passante per x avente direzione e verso del vettore y.

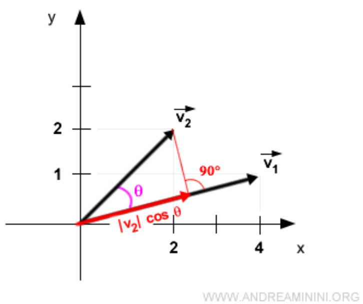


Retta generata dalla somma di un vettore e un prodotto con scalare.

Prodotto scalare euclideo

> Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo il prodotto scalare euclideo come:
>
> $$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Possiamo visualizzare in maniera grafica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ come il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori per la lunghezza della componente x dell'altro vettore rispetto al vettore iniziale:



Visualizzazione grafica del prodotto scalare nel piano cartesiano.

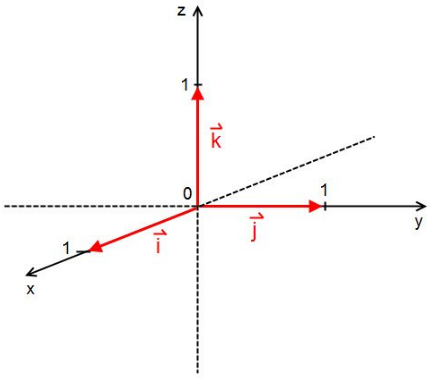
Proprietà

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle + \mu\langle z, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
   - $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

▼ **2.2 - Vettori**

Vettori standard

> In uno spazio vettoriale di dimensione n, ci sono n vettori standard i quali hanno tutte le componenti uguali a zero tranne una, che è uguale a 1:
>
> $$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

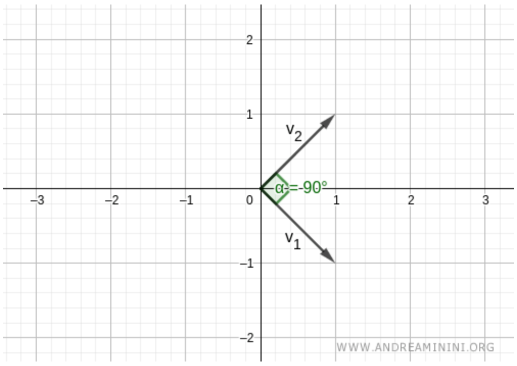


Visualizzazione grafica dei vettori standard dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Ortogonalità/Perpendicolarità tra vettori

> Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali/perpendicolari** se $\langle x, y\rangle = 0$.

L'ortogonalità/perpendicolarità può anche essere visualizzata per due vettori $\in \mathbb{R}^2$. Prendiamo infatti ad esempio due vettori $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $y = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Possiamo verificare che tali vettori sono ortogonali calcolando il loro prodotto euclideo $\langle x, y\rangle = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$. Concludiamo dunque che tutti i vettori che differiscono di un angolo $\frac{\pi}{2}$ sono perpendicolari tra loro.



Visualizzazione grafica di 2 vettori ortoonali tra loro nel piano cartesiano.

Proposizioni

- Il **vettore nullo** è perpendicolare a tutti i vettori, infatti $\sum_{k=1}^{n} 0y_k = 0$.
- In $\mathbb{R}^n$ i vettori standard $e_1, \ldots, e_n$ sono ortogonali tra loro.

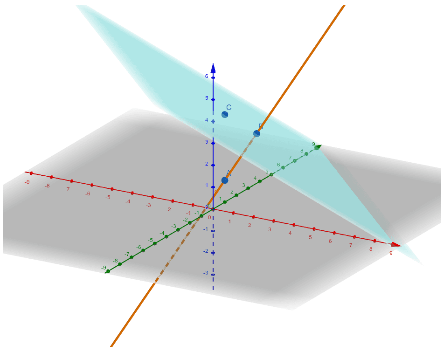
Esercizi:

▼ Dato il vettore $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, trovare un vettore $x = (x,y,z) \perp v$ diverso dal vettore nullo.

Occorre impostare l'equazione $\langle x, v\rangle = 0$, ovvero $x + 2y + 3z = 0 \implies x = -2y - 3z$.

Abbiamo dunque trovato che l'insieme $\{(-2y - 2z, y, z) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ è un insieme di vettori perpendicolari al vettore v.

Osserviamo che l'insieme trovato rappresenta un piano, infatti ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tranne il vettore nullo identifica un piano di vettori perpendicolari ad esso.



Visualizzazione grafica di un piano perpendicolare ad un vettore.

▼ Trovare il rapporto dei parametri m e p affinchè le due rette $y = mx$ e $y = px$ siano ortogonali.

Costruiamo i vettori corrispondenti alle due rette: $(1,m)$ e $(1,p)$.

Impostiamo l'equazione $\langle (1,m),(1,p)\rangle = 1 + mp = 0$, ovvero $p = -\frac{1}{m}$.

Norma euclidea

> Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo la **norma euclidea** nel seguente modo:
>
> $$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \in [0, +\infty[$$

Nota: le notazioni $||x||$ e $|x|$ sono equivalenti.

Proposizioni

- **Teorema di pitagona generalizzato in** $\mathbb{R}^n$: se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, che è equivalente alla lunghezza della diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori x e y.

  Dimostrazione:

  Per ipotesi abbiamo che $\langle x, y\rangle = 0$.

  Dimostriamo la formula del quadrato di un binomio generalizzata sui vettori ($|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle$). Sappiamo che $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$, utilizziamo la proprietà della linearità del primo argomento per ricavarci $\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$ e la linearità del secondo argomento per ottenere $\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$, dalla quale, visto che $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, otteniamo infine che $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle$.

  Utilizziamo dunque la formula del quadrato di un binomio generalizzata appena dimostrata e per ottenere che $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y\rangle| = |x|^2 + |y|^2 + 0$.

Esempio:

- In $\mathbb{R}^2$, $||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$.

  In $\mathbb{R}^3$, $||(a,b,c)|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

  Notiamo che la norma di un vettore indica la “lunghezza” di tale vettore.

Proprietà

1. $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
   a. $|x| = 0 \iff x = \langle 0, \dots, 0\rangle$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

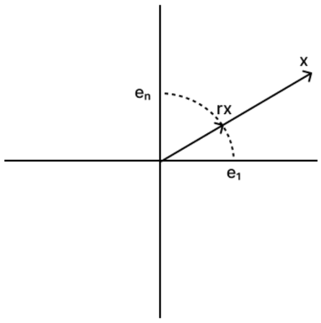
   La possiamo anche leggere come $len(x+y) \geq len(x) + len(y)$, ovvero la **disuguaglianza triangolare**.

Normalizzato di un vettore

Il normalizzato di un vettore consiste in quell’unico vettore positivo multiplo del vettore di partenza che ha come norma 1.

Dobbiamo dunque trovare uno scalare $r > 0$ tale che $|rx| = 1$. Scomponiamo la norma in questo modo $|r||x| = r|x| = 1$ e otteniamo che $r = \frac{1}{|x|}$. Il vettore normalizzato $|rx|$ vale dunque $\frac{x}{|x|}$.

> Dato il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, il **normalizzato** di x è l’unico vettore positivo multiplo di x che ha norma 1, e vale:
>
> $$\frac{x}{|x|}$$



Visualizzazione grafica del normalizzato di un vettore.

Esercizi:

- Trovare il normalizzato di $x = (2, 3)$

  Per trovare il normalizzato di x occorre calcolare il prodotto scalare $\frac{x}{|x|}$.

  Calcoliamo dunque $|x|$, il quale è uguale a $|(2, 3)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

  Infine calcoliamo il normalizzato come $\frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.

- Trovare il normalizzato di $x = (14, 21, -28)$

  Per semplificarci i calcoli osserviamo che $\frac{x}{|x|} = \frac{\lambda x}{|\lambda x|}$, dunque possiamo calcolare il normalizzato nel seguente modo: 7 $\frac{(14,21,-28)}{|(14,21,-28)|} = \frac{(2,3,-4)}{|(2,3,-4)|} = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}})$.

Coordinate polari di un vettore

Osserviamo che dato un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, $x = |x| \frac{x}{|x|}$.

Visto che $\frac{x}{|x|}$ è il generalizzato del vettore e ha lunghezza 1, esso, se il vettore x appartiene a $\mathbb{R}^2$, può anche essere scritto in questo modo: $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Utilizziamo inoltre la notazione $r \coloneqq |x|$ e scriviamo il vettore x come $r(\cos\theta, \sin\theta)$.

> Concludiamo dunque che è possibile descrivere un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^2$ tramite l'utilizzo di due parametri, detti **coordinate polari**: (r, θ).

Esercizi:

- Trovare le coordinate polari del vettore $(0, 3)$

  Per trovare le coordinate polari dobbiamo calcolare il valore dei due parametri r e θ.

  Sappiamo che $r = |(0,3)| = 3$, dunque $x = 3y$, dove y è un vettore che moltiplicato a 3 restituisce x. Troviamo dunque facilmente che $y = (0, 1)$ e, avendo che $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = 1$, otteniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

  Concludiamo dunque che il vettore $(0, 3)$ può essere scrtto in coordinate polari come $(3, \frac{\pi}{2})$.

Prodotto scalare in coordinate polari

> Presi due vettori $x = r(\cos\theta, \sin\theta)$ e $y = p(\cos\phi, \sin\phi)$, risulta:
>
> $$\langle x, y\rangle = rp\cos(\theta - \phi) = |x||y|\cos(\theta - \phi)$$

> Dove $\theta - \phi$ è l'angolo compreso tra i due vettori.

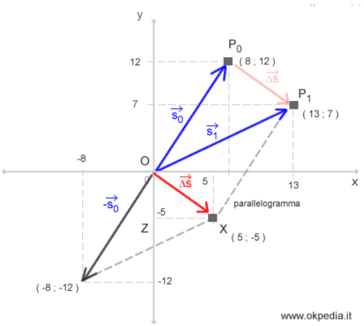
Disuguaglianza Cauchy-Schwarz

> Per ogni vettore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente **disuguaglianza**:
>
> $$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Notiamo che l'uguaglianza vale solo nel caso in cui i due vettori sono dipendenti tra loro, dunque giacciono sulla stessa retta.

Distanza tra due vettori in $\mathbb{R}^n$

> La **distanza tra due vettori/punti** in $\mathbb{R}^n$ può essere calcolata tramite la formula:
>
> $$|x - y|$$



Esempio grafico di distanza tra due vettori.

Intorni sferici/palle

> Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $r > 0$, possiamo costruire l'insieme intorno sferico/palla con centro x e raggio r in questo modo:
>
> $$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$$

▼ **2.3 - Successioni e funzioni nello spazio euclideo**

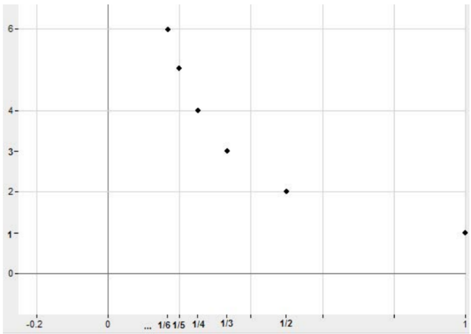
Successioni in $\mathbb{R}^n$

> Una **successione** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ è una collezione di n successioni in $\mathbb{R}$:
>
> $$x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$$

Esempio:

- $(\frac{1}{k}, k) \in \mathbb{N}$ è una successione $\mathbb{R}^2$.

È possibile visualizzare alcuni dei punti che fanno parte di questa successione nella seguente figura:



Rappresentazione grafica della successione di esempio .

Successione convergente

> Data una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ e un vettore $a = (a_1, \dots, a_n)$ si dice:

$$x_k \to a \text{ per } k \to \infty \iff \begin{cases} \lim_{k\to\infty} x_k^1 = a_1 \\ \dots \\ \lim_{k\to\infty} x_k^n = a_n \end{cases}$$

Esempi:

- $(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k+1}) \to (0,1)$, dunque la successione è convergente.
- $((-1)^k, \frac{1}{k})$ non è una successione convergente in quanto $\lim_{k\to\infty}(-1)^k$ è indefinito.

Funzioni di più variabili

> Dati 2 insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$ e data una funzione $f : A \to B$, il **grafico** di f può essere definito come l'insieme:
>
> $$Graf(f) = \{(x, f(x)) | x \in A\} \subseteq A \times B$$

Funzioni radiali

Le funzioni radiali sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x,y) = g(|(x,y)|) \quad g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Esempi:

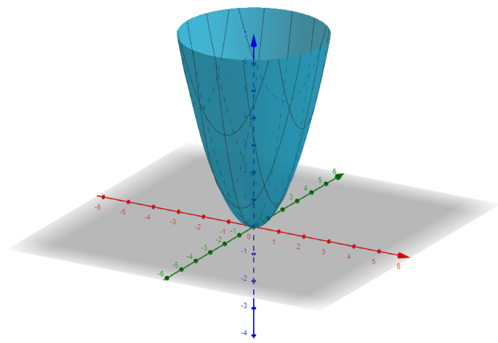
- $f(x,y) = x^2 + y^2 = |(x,y)|^2$

  Innanzitutto creiamo l'insieme grafico di tale funzione: $Graf(f) = \{(x, y, x^2+y^2) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

  Per disegnare tale grafico è utile scrivere (x,y) come $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. In questo modo abbiamo che $x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$.

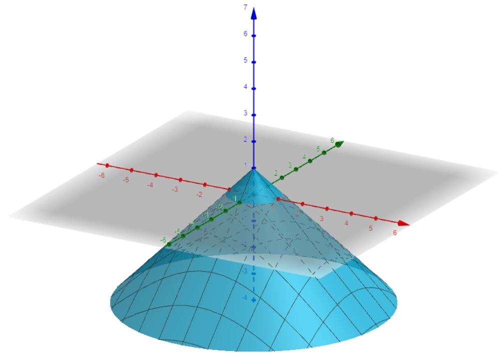
Riscriviamo dunque l'insieme grafico utilizzando le coordinate polari: $Graf(f) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2) | r \geq 0\}$.

Notiamo dunque che l'insieme appena ottenuto descrive il grafico di una parabola nello spazio $\mathbb{R}^3$:



- $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - |(x, y)|$

  Il grafico di tale funzione è il seguente:



Funzioni affini

Le funzioni affini sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x, y) = ax + by + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

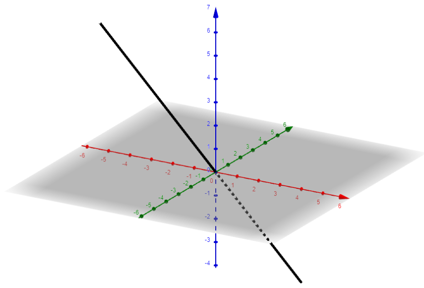
Notiamo che tali funzioni individuano insieme grafici del tipo $Graf(f) = \{(x, y, ax + by + c) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, i quali descrivono dei piani in $\mathbb{R}^3$.

Esempi:

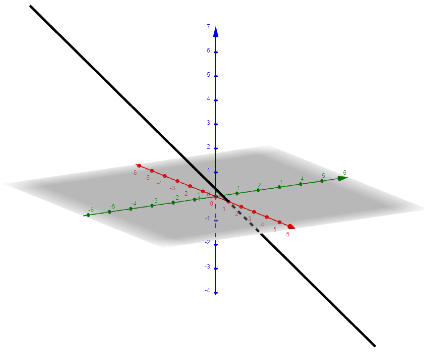
- $f(x, y) = -y$

  Per disegnare il grafico di questa funzione è possibile effettuarne l'intersezione con due piani.

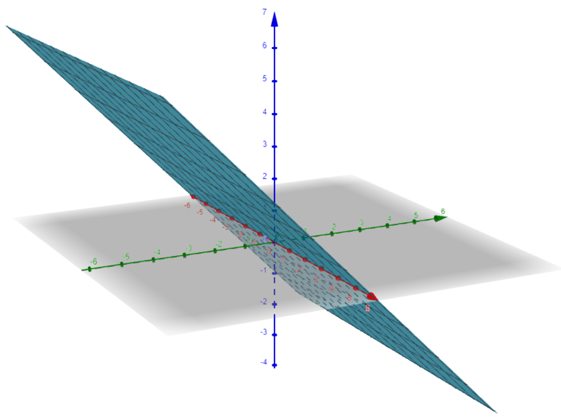
  Intersechiamo con il piano $x = 0$ e otteniamo $Graf(f) \cap x = 0 : \{(0, y, -y) | y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Intersechiamo ora con un altro piano, ad esempio $x = 1$, e otteniamo $Graf(f) \cap x = 1 :$ $\{(1, y, -y) | y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Tramite tali intersezioni possiamo dunque prevedere il grafico della funzione data, il quale è il seguente piano:



Funzioni continue

> Sia $f : A \to B(A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q)$, f si dice **continua** in $\overline{x}$ se:
>
> $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_k)$ succession in A, $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(\overline{x})$

È possibile dimostrare che tale definizione di funzione continua è equivalente alla seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ t.c. } |f(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap B(x, \delta)$$

Proposizioni

- Tutte le **funzioni elementari** sono continue nei loro domini.

▼ **3.0 - Derivate parziali e differenziabilità**

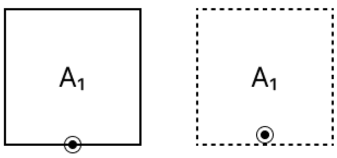
▼ **3.1 - Derivate parziali**

Insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$

> Dato un insieme $A \subseteq R^n$, si dice che A è **aperto** se $\forall \overline{x} \in A, \exists \epsilon > 0 | B(\overline{x}, \epsilon) \subseteq A$, dove $B(\overline{x}, \epsilon)$ è l'intorno sferico di centro $\overline{x}$ e raggio ϵ.

Esempio:

- Nella seguente figura osserviamo due insiemi, uno chiuso e uno aperto:



Notiamo che A_1 è un insieme chiuso in quanto esiste un $\overline{x} \in A_1$ che viola la definizione di insieme aperto, mentre in A_2, preso un qualunque $\overline{x} \in A_2$, questo rispetta la definizione di insieme aperto.