

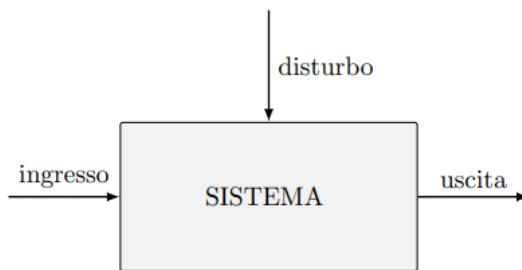
Controlli automatici

▼ 1.0 - Introduzione

Introduzione ai controlli automatici

L'idea alla base dei controlli automatici è quella di sostituire l'intelligenza umana con un sistema automatico (intelligenza artificiale) basata su leggi matematiche e/o algoritmi.

Un "sistema" è un oggetto per il quale si vuole ottenere un comportamento desiderato.



Notazione

- Controllore: unità che determina l'andamento della variabile di controllo (ingresso).
- Sistema di controllo: sistema + controllore.

I sistemi di controllo si possono suddividere in 3 tipologie:

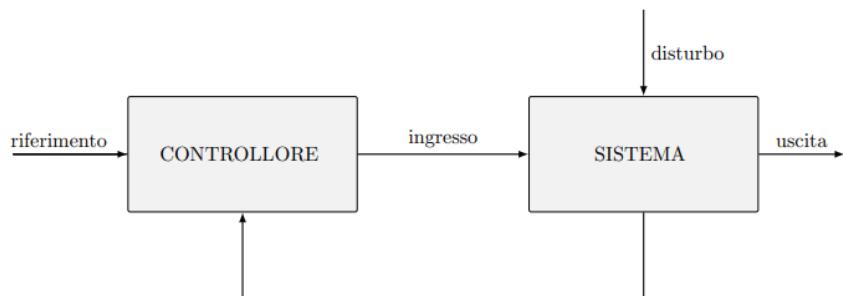
- Sistemi di controllo naturali: meccanismi presenti in natura (es. quelli propri del corpo umano, come temperatura corporea costante, ritmo cardiaco ecc.)
- Sistemi di controllo manuali: è presente l'azione dell'uomo.
- Sistemi di controllo automatici: uomo sostituito da un dispositivo.

È possibile anche distinguere tra controllo in anello aperto e anello chiuso:

- Controllo in anello aperto: il controllore utilizza solo il segnale di riferimento.



- Controllo in anello chiuso: il controllore utilizza sia il segnale di riferimento che la variabile controllata ad ogni istante di tempo.



Progetto di un sistema di controllo

Il progetto di un sistema di controllo consiste nelle seguenti fasi:

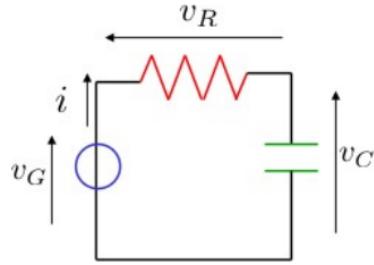
1. Definizione delle specifiche
2. Modellazione del sistema (controllo e test)
3. Analisi del sistema
4. Sintesi della legge di controllo
5. Simulazione del sistema controllato
6. Scelta degli elementi tecnologici
7. Sperimentazione

▼ 2.0 - Sistemi dinamici in forma di stato

I sistemi dinamici sono modelli dei sistemi della realtà. Un esempio è il seguente.

▼ Esempio: circuito RC

Consideriamo il seguente circuito RC:



Sappiamo, dalla legge delle tensioni, che:

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

Inoltre, per le leggi del condensatore e del resistore:

$$\begin{cases} v_R(t) = Ri(t) \\ C\dot{v}_C(t) = i(t) \end{cases} \implies Ri(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

$$\implies RC\dot{v}_C(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

Scrivendo in termini di $v_C(t)$ (stato interno) e $v_G(t)$ (ingresso di controllo, che posso cambiare come voglio):

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

o, in termini più generali:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC} \underbrace{(u(t) - x(t))}_{f(x(t), u(t))}$$

Si scrive dunque che $(x, u) \mapsto f(x, u)$ $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ $f : \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo ora che $R(t)$, ovvero che la resistenza cambia nel tempo, otteniamo dunque l'equazione:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{R(t)C} \underbrace{(u(t) - x(t))}_{f(x(t), u(t), R(t))}$$

dove $R(t)$ non è né uno stato né un ingresso, e generalizzando si può scrivere:

$$\begin{aligned} f(x(t), u(t), t) \\ (x, u, t) \mapsto f(x, u, t) \end{aligned}$$

Sistemi continui

Nei sistemi continui il tempo $t \in \mathbb{R}$ $t \mapsto \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ viene chiamata equazione di stato, la quale descrive la variazione dello stato, in cui:

- $x(t)$ è un vettore $\in \mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \rightarrow$ stato del sistema (le variabili che caratterizzano il sistema).
- $u(t)$ è un vettore $\in \mathbb{R}^m$: $\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \rightarrow$ ingresso del sistema (segnali esterni che influenzano lo stato del sistema).

$y(t) = h(x(t), u(t), t)$ è invece l'equazione di uscita, e $y(t) \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x(t), u(t), t) \\ \dots \\ h_p(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} \quad (p \text{ rappresenta il numero di uscite, ovvero il numero di variabili misurate}).$$

▼ Esempio: circuito RC

Supponiamo, nell'esempio precedente del circuito RC, di voler misurare la corrente $i(t)$. Abbiamo dunque che:

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_R(t) = \frac{1}{R} (v_G(t) - v_C(t))$$

Ovvero:

$$y(t) = \frac{1}{R} (u(t) - x(t))$$

Nel caso in cui avessimo deciso di misurare $v_C(t)$ avremmo avuto che $y(t) = x(t)$.

Equazione di stato

L'equazione di stato di un sistema è definita nel seguente modo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \dots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}$$

Sistemi causali

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto causale. In questi tipi di sistemi vi è dunque un rapporto diretto causa (ingresso) effetto (stato).

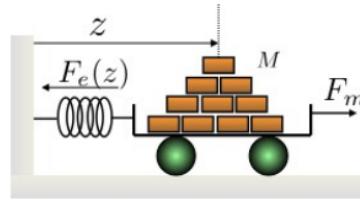
Sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione f si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione di stato.

Sistemi discreti

Nei sistemi discreti il tempo t è una variabile intera, ovvero $t \in \mathbb{Z}$. Per questo motivo in questi tipi di sistemi non vi è la derivata.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

▼ Esempio: carrello



Dalla legge di Newton sappiamo che:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con F_e data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

Otteniamo dunque l'equazione della dinamica:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Definiamo lo stato del sistema come $x := [x_1, x_2]$ con $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$. Supponiamo di misurare $z(t)$, dunque $y := z$. Abbiamo dunque il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Traiettoria (movimento) di un sistema

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0} , la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice traiettoria (movimento) del sistema. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

Nota: per sistemi senza ingresso (non forzati) la traiettoria dello stato $x(t)$, $t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0} .

▼ Esempio: traiettoria in circuito RC

Dato un circuito RC con ingresso $u(t) = U \sin(\omega t)$ è possibile ricavare che la traiettoria dello stato del sistema è la seguente:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{RC}}x(0) + \frac{U\omega RC}{+\omega^2 R^2 C^2}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \gamma)$$

$$\text{con } \gamma = \arctan(\omega RC).$$

Equilibrio di un sistema

Coppia di equilibrio

Dato un sistema forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice coppia di equilibrio del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e)$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Equilibrio per sistema sistema non forzato

Dato un sistema non forzato $\dot{x} = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice equilibrio del sistema se $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Proprietà per sistemi tempo invarianti continui

In un sistema tempo invariante per una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$.

Per sistemi non forzati, dato un equilibrio x_e vale $f(x_e) = 0$.

Richiami di calcolo matriciale

Autovalori e autovettori

Dato uno spazio vettoriale e una matrice quadrata A , un numero scalare λ è un autovalore di A se esiste un vettore non nullo v , chiamato autovettore, tale che:

$$Av = \lambda v$$

È possibile trovare autovalori di una matrice calcolando le radici del polinomio caratteristico $\det(\lambda I - A)$.

Classificazione di sistemi in forma di stato

Un sistema in forma di stato si presenta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita}\end{aligned}$$

Questi sistemi si possono classificare in:

Monovariabile (SISO)

Sistema SISO (Single Input Single Output) ha un singolo input e un singolo output:

$$m = p = 1$$

Strettamente proprio

In un sistema strettamente proprio l'uscita $y(t)$ dipende solo dallo stato $x(t)$ e non direttamente dall'ingresso (dipende dall'ingresso solo indirettamente, nel caso in cui quest'ultimo modifica lo stato):

$$y(t) = h(x(t), t)$$

Non forzato

Sistema non forzato non presenta ingresso $u(t)$ oppure questo è nullo, e quindi non influenza stato e uscita:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), t)\end{aligned}$$

Tempo invariante

Data una traiettoria

$(x(t), u(t)), t \geq t_0$, per ogni $\Delta \in \mathbb{R}$, vale che, per ogni $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria del sistema.

Nella pratica, se si sposta nel tempo sia l'ingresso $u(t)$ sia lo stato iniziale $x(t_0)$, la dinamica del sistema non cambia: il sistema risponde nello stesso modo, semplicemente con un ritardo (o anticipo) temporale.

Si può dimostrare che sistemi tempo invarianti sono del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Per verificare velocemente se un sistema è tempo invariante o meno basta sapere che per un sistema tempo invariante le equazioni di stato e uscita non dipendono esplicitamente da t , ma solo dallo stato attuale e dagli ingressi.

Lineare

Sistema lineare se le funzioni di stato e uscita sono lineari in x e u .

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \dots + b_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) \\
&\quad + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\
y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) \\
&\quad + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t) \\
&\vdots \\
y_p(t) &= c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) \\
&\quad + d_{p1}(t)u_1(t) + d_{p2}(t)u_2(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)
\end{aligned}$$

Si possono dunque definire le matrici $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} & B(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} \\
C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1}(t) & \dots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1}(t) & \dots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lineare tempo invariante le matrici A, B, C e D non dipendono dal tempo.

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Principio di sovrapposizione degli effetti

Vale solo per sistemi lineari:

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$.

Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$.

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è traiettoria del sistema, (ovvero applicando come ingresso $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$).

Dimostrazione (consiste nel mostrare che $(x_{ab}(t), u_{ab}(t))$ soddisfa l'equazione differenziale):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_{ab}(t) &= \alpha\dot{x}_a(t) + \beta\dot{x}_b(t) \\ &= \alpha(A(t)x_a(t) + B(t)u_a(t)) + \beta(A(t)x_b(t) + B(t)u_b(t)) \\ &= A(t)(\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)) + B(t)(\alpha u_a(t) + \beta u_b(t))\end{aligned}$$

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Sia $x_l(t)$ la traiettoria di stato ottenuta per $x_l(t_0) = x_0$ e $u_l(t) = 0$.

Sia $x_f(t)$ la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, la traiettoria di stato è data da:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

dove $x_l(t)$ è l'evoluzione libera e $x_f(t)$ è quella forzata.

Nota: vale solo per sistemi lineari.

Rappresentazioni equivalenti

È possibile effettuare un cambio di base in un sistema in forma di stato mediante una matrice T . Il cambio di base avviene nel seguente modo $\hat{x}(t) = Tx(t)$.

Otteniamo dunque un sistema del seguente tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}$$

con $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$.

Modi di un sistema LTI

Dato un sistema LTI indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A con molteplicità algebrica $n_1, \dots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Si dimostra che le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ si possono scrivere come:

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{j i q} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n,$$

I termini $t^{q-1} e^{\lambda_i t}$ sono detti modi naturali del sistema e l'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare di tali modi (anche quella dell'uscita lo è, essendo lineare nello stato).

Se prendiamo $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ autovalore di A , allora anche il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ sarà autovalore di A . Si verifica che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo:

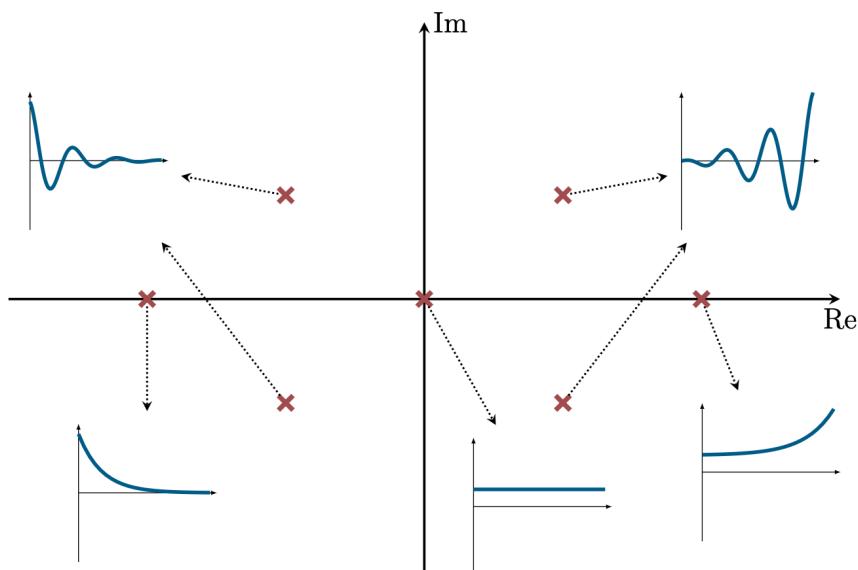
$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

Inoltre, nel caso in cui le molteplicità algebriche n_1, \dots, n_r degli autovalori di A siano = alle molteplicità geometriche, allora $h_i = 1$ e quindi i modi si semplificano in:

$e^{\lambda_i t}$	per autovalori reali
$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$	per autovalori complessi coniugati

Riassumiamo quindi i differenti grafici delle componenti dell'evoluzione libera a seconda del tipo di autovalore:

- Molteplicità algebrica = molteplicità geometrica

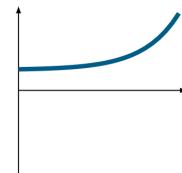


Nello specifico:

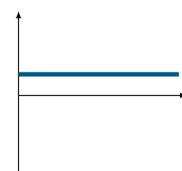
- Autovalori reali:



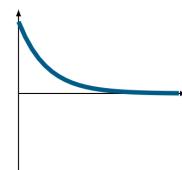
- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i > 0$



- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i = 0$



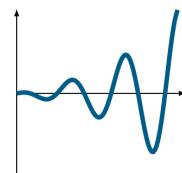
- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i < 0$



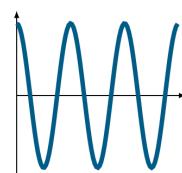
- Autovalori complessi coniugati:



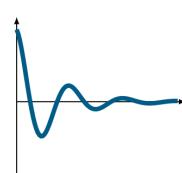
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i > 0$



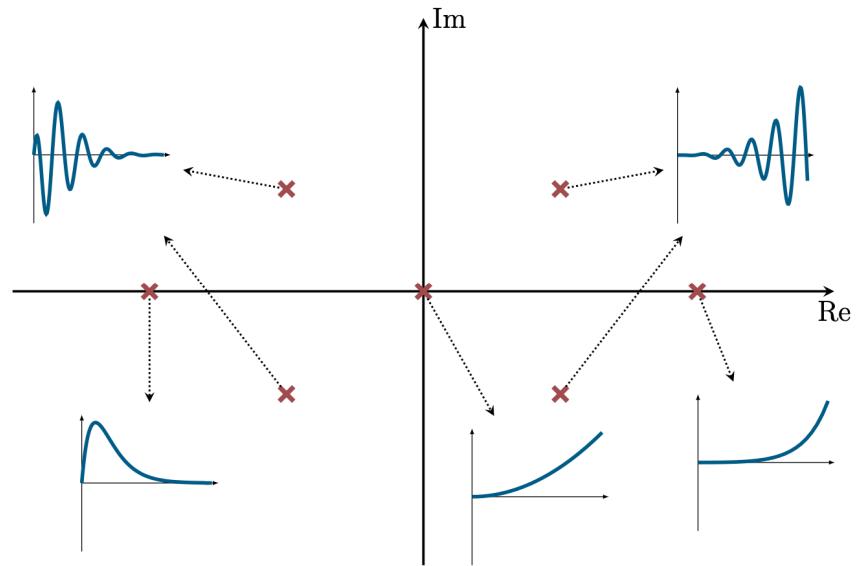
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i = 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i < 0$



- Molteplicità algebrica > molteplicità geometrica

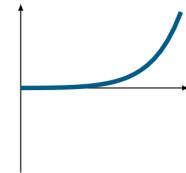


Nello specifico:

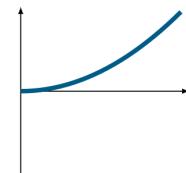
- Autovalori reali



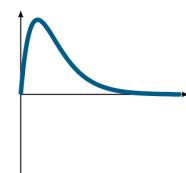
- $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i > 0$



- $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i = 0$

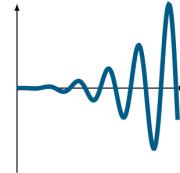


- $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i < 0$

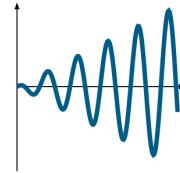


- Autovalori complessi

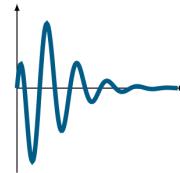
- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i > 0$



- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i = 0$



- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i < 0$



▼ 3.0 - Stabilità e controllo in retroazione dello stato

Stabilità interna

La stabilità interna tratta conseguenze sulla traiettoria legate a incertezze sullo stato iniziale con ingressi fissi e noti. Siccome l'ingresso è fissato, il sistema $f(x(t), \bar{u}(t))$ è non forzato, consideriamo quindi sistemi non forzati per la stabilità interna.

Diamo alcune definizioni:

Equilibrio stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$ per tutti i $t \geq 0$.

Equilibrio instabile Uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se non è stabile. (Esercizio: scrivere esplicitamente.)

Equilibrio attrattivo Uno stato di equilibrio x_e si dice attrattivo se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$.

Equilibrio asintoticamente stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.

Le definizioni appena date riguardano la stabilità locale, ovvero valgono solo in un intorno dello stato di equilibrio x_e , mentre tali proprietà si riferiscono alla stabilità globale se valgono per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Nei sistemi lineari $x = 0$ è sempre un equilibrio (con $u = 0$), inoltre si può dimostrare che in tali sistemi tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, dunque si parla di stabilità del sistema.

Introduciamo i seguenti teoremi per i sistemi LTI che collegano la stabilità alla tipologia di autovalori:

Teorema Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale (strettamente) negativa (< 0).

Teorema Un sistema LTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i miniblocchi di Jordan associati hanno dimensione uno).

Retroazione dello stato

Dato un sistema LTI, supponendo di misurare l'interno stato, ovvero $y(t) = x(t)$, allora possiamo progettare $u(t) = Kx(t) + v(t)$, dove $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una matrice di guadagni e $v(t)$ è un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato. Ci ritroviamo dunque la seguente equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo dunque il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile allora dobbiamo progettare K tale che $(A + BK)$ abbia autovalori tutti a parte reale negativa.

Linearizzazione di sistemi non lineari

Dato un sistema non lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

È possibile linearizzarlo attorno all'equilibrio ottenendo:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\partial}{\partial x}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} & B &= \frac{\partial}{\partial u}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\ C &= \frac{\partial}{\partial x}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} & D &= \frac{\partial}{\partial u}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = 0\end{aligned}$$

Le traiettorie del sistema non lineare soddisfano le seguenti per variazioni sufficientemente piccole:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t) \\u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \approx x_e + \Delta u(t) \\y(t) &= y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \Delta y(t)\end{aligned}$$

▼ Dimostrazione

Sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio del sistema, consideriamo una traiettoria a partire da uno stato iniziale $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \\y(t) &= y_e + \tilde{y}(t)\end{aligned}$$

Essendo una traiettoria vale:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor in (x_e, u_e) otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \\&\quad \left. \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \\&\quad \left. \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}\end{aligned}$$

Ovvero:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

\implies

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) \approx A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) \approx C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t)$$

Introduciamo i seguenti teoremi che legano la stabilità del sistema linearizzato alla stabilità dell'equilibrio:

Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e , è (localmente) asintoticamente stabile.

Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e , è instabile.

▼ 4.0 - Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento

Trasformata di Laplace

Trasformata

Data una funzione complessa di variabile t , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, è possibile definire la trasformata di Laplace di tale funzione che utilizza una variabile complessa $s = \sigma + j\omega$ come variabile:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

Le trasformate razionali si possono scrivere come $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, dove le radici di $N(s) = 0$ si dicono zeri e quelle di $D(s) = 0$ si dicono poli.

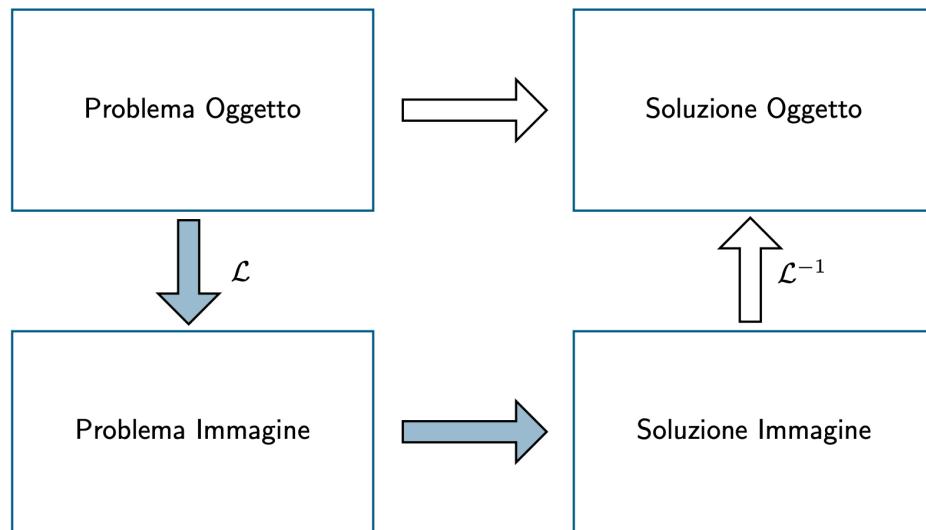
Antitrasformata

È possibile utilizzare la seguente funzione di antitrasformazione per tornare alla funzione originaria:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

La trasformata di Laplace consente di passare ad un altro dominio e risolvere un dato problema in tale dominio, nel quale solitamente la risoluzione è più semplice, per poi tramite l'antitrasformata ottenere la soluzione nel dominio di partenza.



Proprietà

Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0$$

Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Derivazione (nel tempo)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Iterando

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t)|_{t=0}$$

Integrazione (nel tempo) (f integrabile tra 0 e $+\infty$)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Convoluzione (nel tempo) Assumendo funzioni nulle per $t < 0$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

Teoremi del valore iniziale e finale

Teorema del valore iniziale Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore grado numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Teorema del valore finale Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore grado numeratore e poli nulli o a parte reale negativa, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Trasformata di segnali elementari

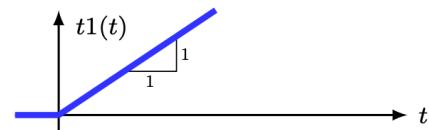
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$



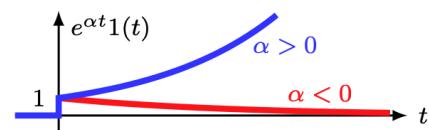
$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$



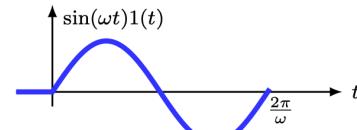
$$\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$$



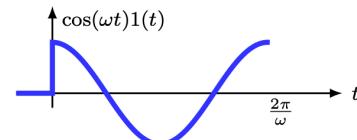
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t) 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\cos(\omega t) 1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{s \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Funzione di trasferimento

Funzione di trasferimento

Dato un sistema LTI, è possibile trasformarlo ottenendo il seguente sistema:

$$X(s) = \boxed{(sI - A)^{-1}x_0} + \boxed{(sI - A)^{-1}BU(s)}$$

$$Y(s) = \boxed{C(sI - A)^{-1}x_0} + \boxed{\left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s)}.$$

evoluzione libera **evoluzione forzata**

▼ Dimostrazione

Dato un sistema LTI:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

Trasformiamo entrambi i membri delle due equazioni ($X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$)

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(sI - A)X(s) &= x_0 + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s).\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 + \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s).\end{aligned}$$

in cui la matrice $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ è detta funzione di trasferimento, la quale ci fornisce una rappresentazione ingresso uscita (se assumiamo $x(0) = 0$)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Operativamente $G(s)$ può essere calcolata come $G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$, dunque nel caso di sistemi SISO $G(s)$ è una funzione razionale fratta, in cui il grado del numeratore è \leq grado del denominatore, e la differenza tra i gradi è detta grado relativo.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

È importante sottolineare che i poli sono radici di $\det(sI - A)$, dunque

$$\text{poli di } G(s) = \text{autovalori di } A$$

È possibile rappresentare $G(s)$ attraverso due forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

con

- ρ costante di trasferimento, μ guadagno
- g tipo
- $-z_i$ zeri reali, $-p_i$ poli reali, τ_i e T_i costanti di tempo
- $\alpha_{ni} > 0$, $\omega_{ni} > 0$ pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati
- ζ_{ni} , ξ_{ni} ($|\zeta_{ni}| < 1$, $|\xi_{ni}| < 1$), smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati.

$Y(s)$ come rapporto di polinomi

Abbiamo visto in precedenza che $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$, e in sistemi SISO si può dimostrare che gli elementi $C(sI - A)^{-1}$ sono rapporti polinomi. Sapendo inoltre che $G(s)$ è un rapporto di polinomi e che nel corso della trattazione considereremo ingressi tali che $U(s)$ sia un rapporto di polinomi (gradino, rampa, funzioni sinusoidali), anche $Y(s)$ è un rapporto di polinomi e possiamo scrivere

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Modi naturali come risposta all'impulso

Ricordiamo che per $x(0) = 0$ abbiamo $Y(s) = G(s)U(s)$, quindi, applicando in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ (con trasformata $U(s) = 1$) si ha

$$Y(s) = G(s)$$

Quindi per la risposta all'impulso le radici di $D(s)$ sono i poli di $G(s)$, che sono a loro volta autovalori di A e quindi i modi naturali del sistema.

Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici

Lo sviluppo in fratti semplici è una tecnica utilizzata per decomporre una funzione razionale in una somma di frazioni più semplici, facilitandone l'antitrasformata. Possiamo distinguere due casistiche:

- Poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)
 - Poli reali

Possiamo scrivere $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s + p_i}$$

con r_i detti residui, i quali possono essere calcolati nel seguente modo

$$r_i = (s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

- Poli complessi coniugati

Consideriamo la coppia di poli complessi coniugati $p_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i$ e $p_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$. I residui associati, anch'essi complessi coniugati, si calcolano nel seguente modo

$$r_{i,1} = M_i e^{-j\varphi_i} \quad \text{e} \quad r_{i,2} = M_i e^{j\varphi_i}.$$

A questo punto possiamo antitrasformiamo $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n r_i \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n r_i e^{-p_i t} 1(t).$$

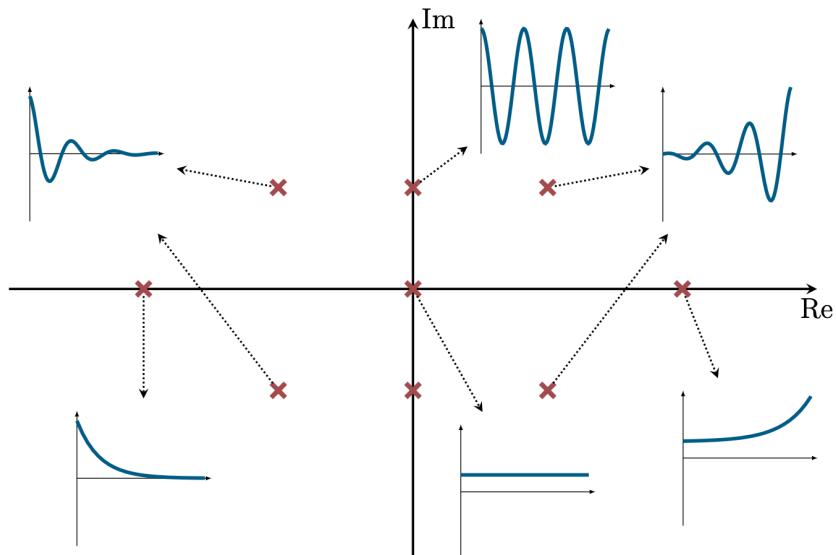
Per quanto riguarda l'antitrasformata dei due termini associati a due poli complessi coniugati otteniamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_{i,1}}{s + p_{i,1}}, \frac{r_{i,2}}{s + p_{i,2}}\right] = 2M_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) 1(t)$$

▼ Dimostrazione

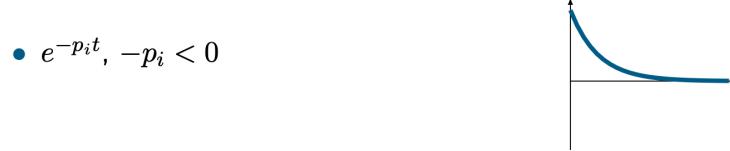
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_{i,1}}{s + p_{i,1}} + \frac{r_{i,2}}{s + p_{i,2}}\right] &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-p_{i,1}t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-p_{i,2}t} 1(t) \\ &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-(\sigma_i + j\omega_i)t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-(\sigma_i - j\omega_i)t} 1(t) \\ &= M_i e^{-\sigma_i t} (e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)}) 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \frac{(e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)})}{2} 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) 1(t). \end{aligned}$$

Le componenti appena ricavate rappresentano i modi naturali del sistema, in quanto connesse ai poli di questo.

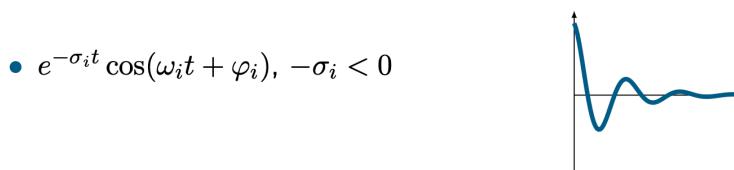
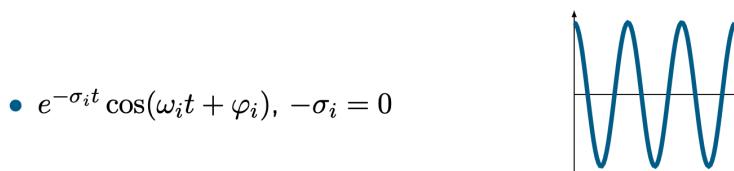
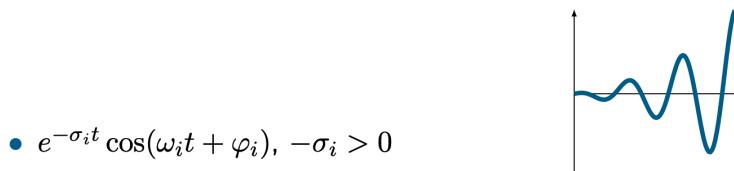


Nello specifico

- Modi naturali di poli reali distinti



- Modi naturali di poli complessi coniugati distinti



- Poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

- Poli reali

Possiamo scrivere $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con $r_{i,h}$ residui del polo $-p_i$, con $h = 1, \dots, n_i$, i quali possono essere calcolati nel seguente modo

$$r_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando $Y(s)$ sviluppata in tratti semplici otteniamo $y(t) =$

$$= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati l'antitrasformata del loro contributo elementare è il seguente

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t).$$

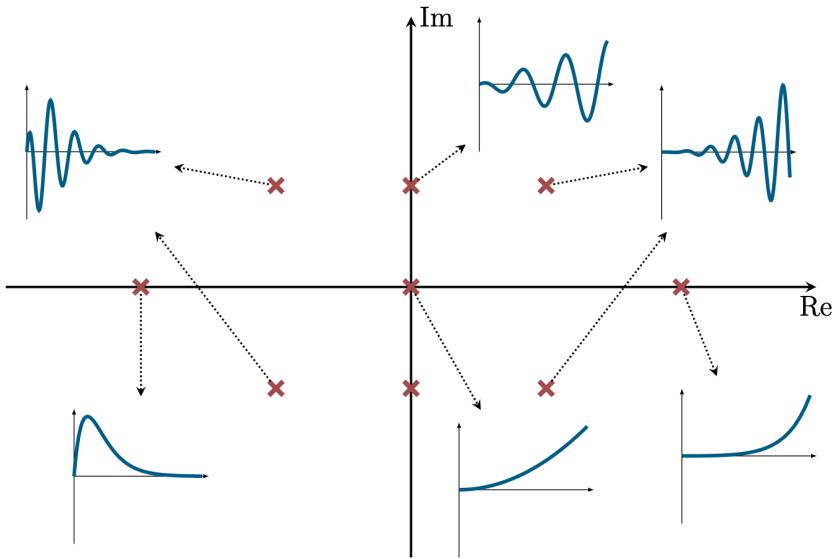
Come abbiamo visto in precedenza le componenti appena ricavate rappresentano i modi naturali del sistema, in quanto connesse ai poli di questo:

Polo reale (multiplo) $-p_i$

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

Coppia di poli complessi coniugati (multipli) $-(\sigma_i + j\omega_i)$ e $-(\sigma_i - j\omega_i)$

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$



Risposta come combinazione lineare di modi naturali

Siccome $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$ e sia $C(sI - A)^{-1}x(0)$, che $G(s)$, che $U(s)$ sono rapporti di polinomi, allora

$$\begin{aligned} y(t) &= y_\ell(t) + y_f(t) \\ &= y_\ell(t) + y_{f,G}(t) + y_{f,U}(t) \end{aligned}$$

in cui:

- $y_\ell(t)$ e $y_{f,G}(t)$ sono combinazioni lineari di modi naturali del sistema con matrici A, B, C e D .
- $y_{f,U}(t)$ è combinazione lineare di "modi" presenti nell'ingresso $u(t)$.

In sintesi dunque la risposta $y(t)$ ad un ingresso generico è combinazione lineare di modi naturali. Per questo motivo è importante studiare le risposte di sistemi elementari.

Nel caso particolare di un sistema SISO in risposta ad un ingresso delta di Dirac, siccome abbiamo visto che $Y(s) = G(s)$, $y(t)$ sarà combinazione lineare dei modi naturali del sistema LTI descritto da $G(s)$.

Stabilità esterna o BIBO

Un sistema si dice BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stabile se la sua uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato. Consideriamo l'uscita forzata ($x(0) = 0$)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

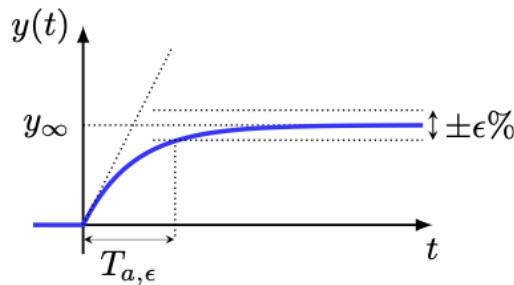
Da quanto visto fino ad ora con lo sviluppo di Heaviside (fratti semplici) si può dedurre che un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $G(s)$ sono a parte reale strettamente minore di zero.

▼ 5.0 - Risposta a gradino

Tempo di assestamento

Tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$:

tempo tale che $(1 - 0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon)y_\infty \quad \forall t \geq T_{a,\epsilon}$



Sovraelongazione percentuale

$$S\% = 100 \cdot \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

Sistema del primo ordine

Consideriamo la funzione di trasferimento generica di un sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

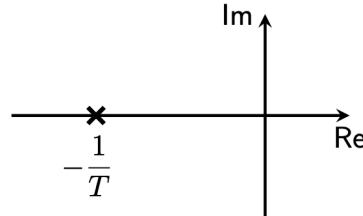
in cui μ è il guadagno e T è la costante di tempo associata al polo.

La trasformata di un gradino è $U(s) = \frac{k}{s}$, e tramite sviluppo in fratti semplici con antitrasformata troviamo che la risposta del sistema corrisponde a

$$y(t) = \mu k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$$

Notiamo che è una risposta monotona, in quanto i modi presenti sono $1(t)$ dato dall'ingresso e $e^{-\frac{t}{T}}$ dal sistema.

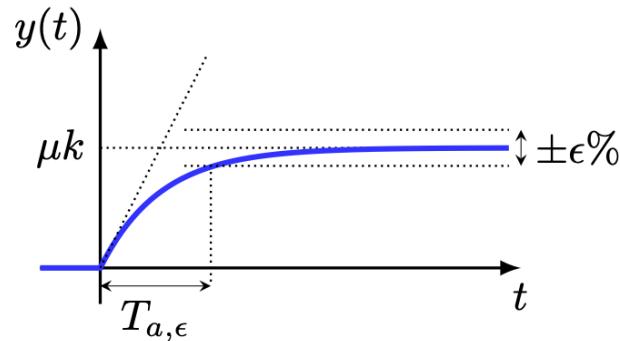
L'unico polo è il seguente



Per quanto riguarda il tempo di assestamento si può dimostrare che questo vale

$$T_{a,\epsilon} = T \ln \left(\frac{1}{0.01\epsilon} \right) \quad \Rightarrow \quad T_{a,5} \approx 3T, \quad T_{a,1} \approx 4.6T$$

Il grafico della risposta è il seguente



Sistema del primo ordine con uno zero

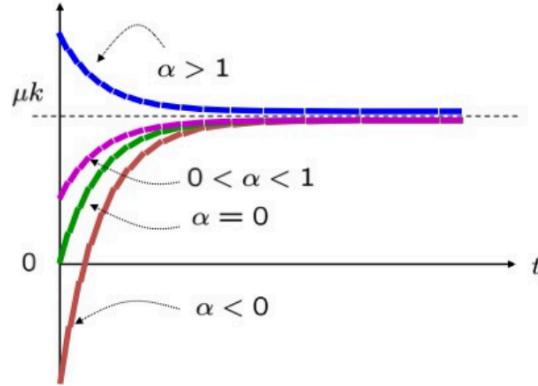
Consideriamo la funzione di trasferimento generica di un sistema del primo ordine con uno zero

$$G(s) = \mu \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

La trasformata di un gradino è $U(s) = \frac{k}{s}$, e troviamo che la risposta del sistema equivale a

$$y(t) = \mu k(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}})1(t)$$

Il grafico della risposta è il seguente



Sistema del secondo ordine con poli reali

Consideriamo la funzione di trasferimento generica di un sistema del secondo ordine con poli reali

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

La trasformata di un gradino è $U(s) = \frac{k}{s}$, e troviamo che la risposta del sistema equivale a

$$y(t) = \mu k(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}})1(t)$$

I modi presenti sono $1(t)$, $e^{-\frac{t}{T_1}}$ e $e^{-\frac{t}{T_2}}$.

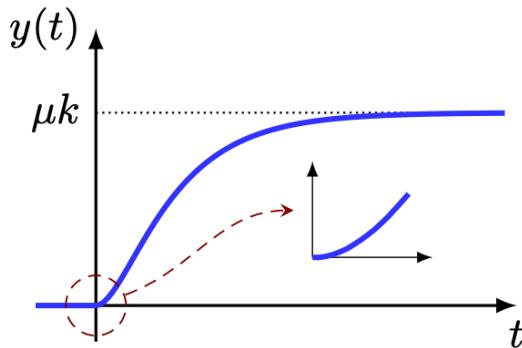
Se vi è la presenza di un polo dominante $T_1 \gg T_2$ la risposta diventa

$$y(t) = \mu k \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) 1(t)$$

I modi presenti sono in questo caso $1(t)$, $e^{-\frac{t}{T_1}}$ e $te^{-\frac{t}{T_1}}$.

La risposta è dunque monotona e nel caso di un polo dominante $T_1 \gg T_2$ è il comportamento è simile a quello di un sistema del primo ordine.

Il grafico della risposta è il seguente



Sistema del secondo ordine con poli reali e uno zero

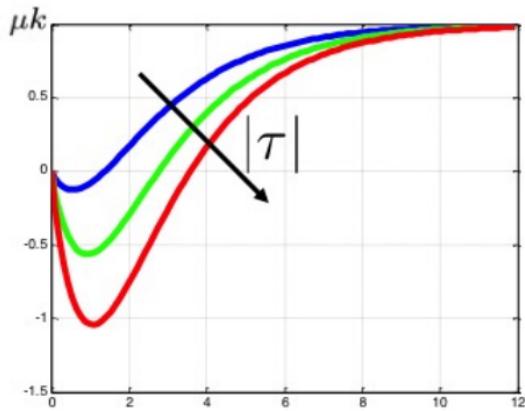
Consideriamo la funzione di trasferimento generica di un sistema del secondo ordine con poli reali e uno zero

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

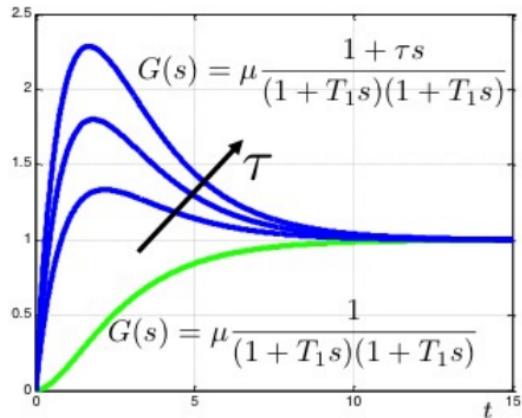
La trasformata di un gradino è $U(s) = \frac{k}{s}$, e troviamo che la risposta del sistema equivale a

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

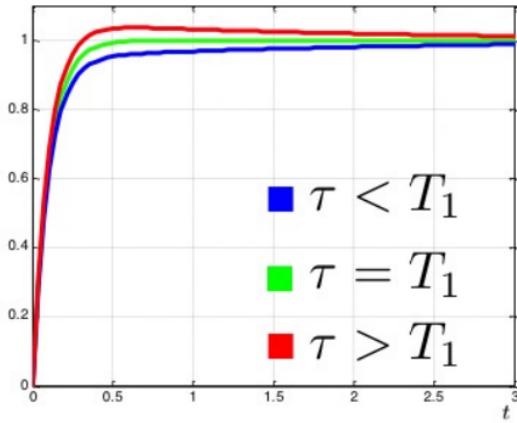
Nel caso in cui $T_1 > T_2$ e $\tau < 0$ il sistema è a fase non minima, e la risposta presenta una sottoelongazione iniziale, rispondendo in senso contrario rispetto all'ingresso. Il grafico della risposta è dunque il seguente



Nel caso invece in cui $\tau > T_1 > T_2$ il sistema è a fase minima, e la risposta presenta una sovraelongazione tanto più accentuale tanto più lo zero è vicino all'origine. Il grafico della risposta è dunque il seguente



Nel caso infine in cui $\tau \approx T_1 \gg T_2$ il sistema è a fase minima, il polo p_1 si elimina quasi del tutto con lo zero e dunque la risposta è simile a quella del sistema del primo ordine con un solo polo, ma a causa della non perfetta eliminazione vi è comunque un transitorio che si esaurisce lentamente. Il grafico della risposta è dunque il seguente



Sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

Consideriamo la funzione di trasferimento generica di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

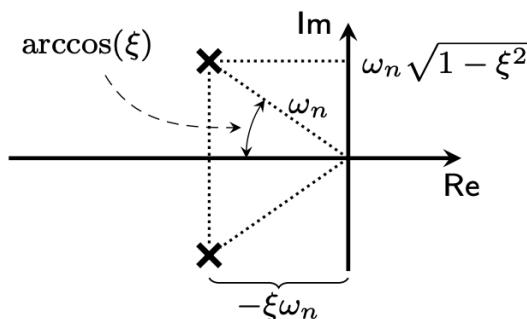
in cui μ è il guadagno, ω_n la pulsazione naturale e ξ è il coefficiente di smorzamento.

La trasformata di un gradino è $U(s) = \frac{k}{s}$, e troviamo che la risposta del sistema equivale a

$$y(t) = \mu k (1 - A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi)) 1(t)$$

$$\text{con } A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}, \omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \text{ e } \varphi = \arccos(\xi).$$

I due poli complessi coniugati sono i seguenti



Per quanto riguarda il tempo di assestamento si possono dimostrare queste approssimazioni

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi \omega_n} \quad T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi \omega_n}$$

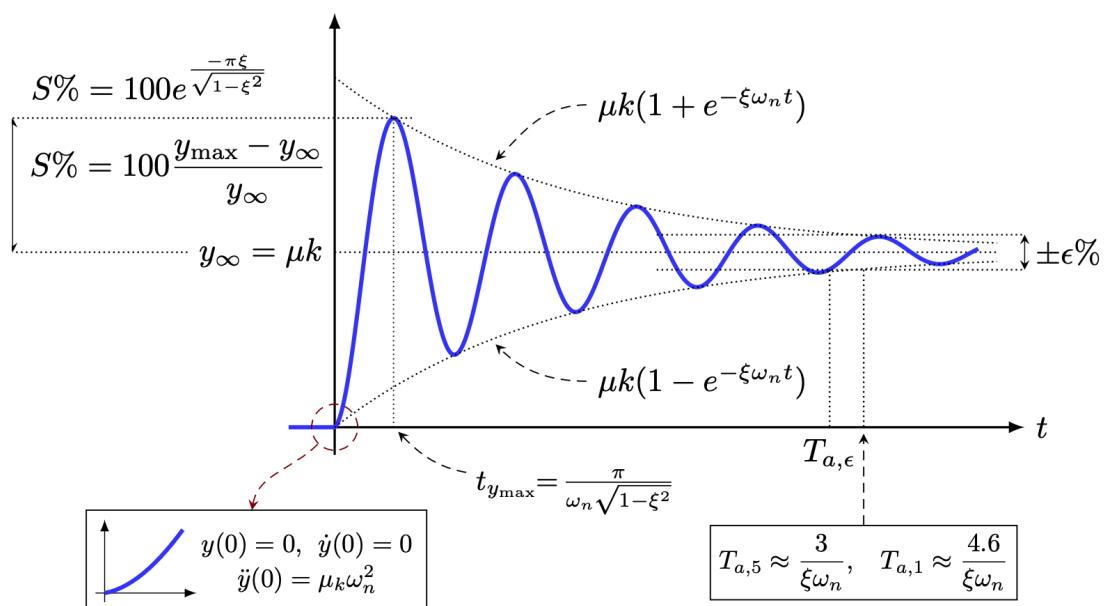
Per la sovraelongazione percentuale si trova invece

$$S\% = 100 e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Siccome questa dipende solo ad ξ , data una sovraelongazione massima da rispettare possiamo ricavare il valore di ξ necessario

$$S\% \leq S^* \iff \xi \geq \frac{\left| \ln \left(\frac{S^*}{100} \right) \right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{S^*}{100} \right)}}$$

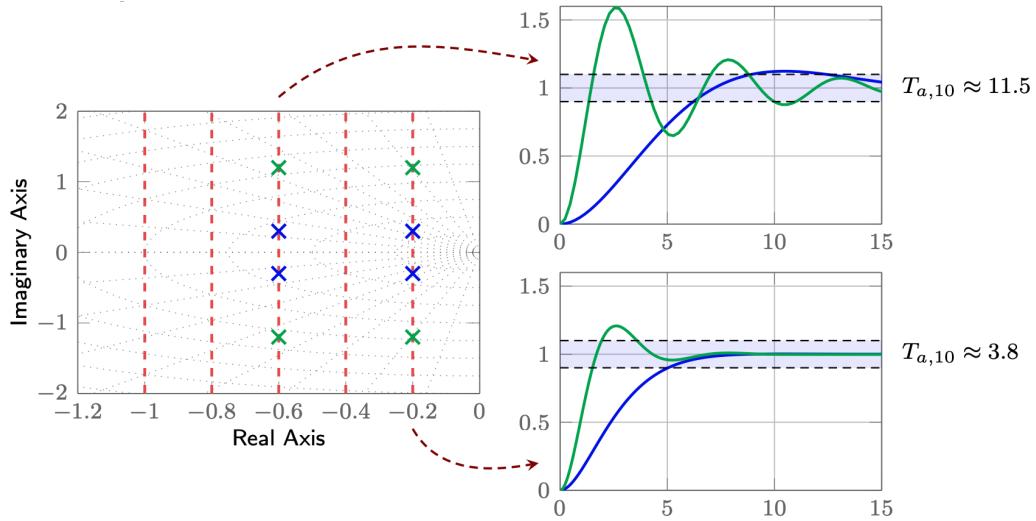
Il grafico della risposta è il seguente



Luogo di punti a tempo di assestamento costante

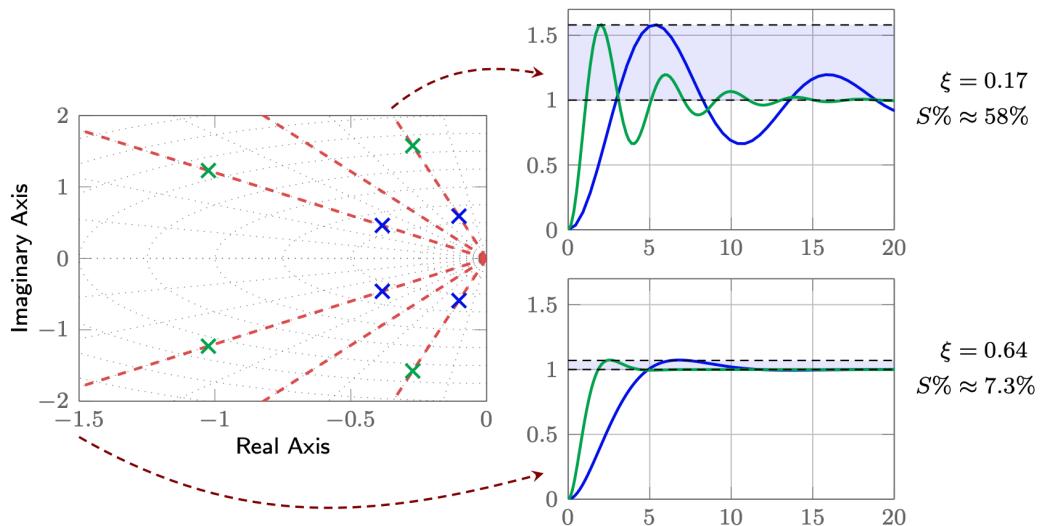
Siccome abbiamo approssimato il tempo di assestamento a $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi \omega_n}$ e $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi \omega_n}$, e abbiamo visto che la parte reale dei poli complessi coniugati

corrisponde a $-\xi\omega_n$ ricaviamo che sistemi con poli complessi coniugati che hanno la stessa parte reale avranno una risposta al gradino con stesso tempo di assestamento. Per questo motivo sul piano complesso i luoghi di punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario.



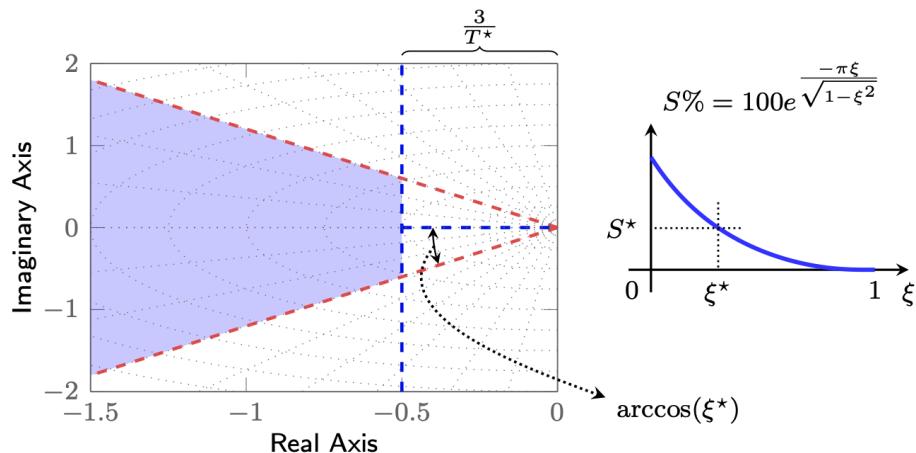
Luogo di punti a sovraelongazione costante

Siccome abbiamo visto che $S\% = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ e che l'angolo formato dai poli complessi coniugati con l'asse reale corrisponde a $\arccos \xi$, ricaviamo che sistemi con poli complessi coniugati che hanno lo stesso coefficiente di smorzamento ξ avranno una risposta al gradino con stessa sovraelongazione. Sul piano complesso i luoghi di punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine.

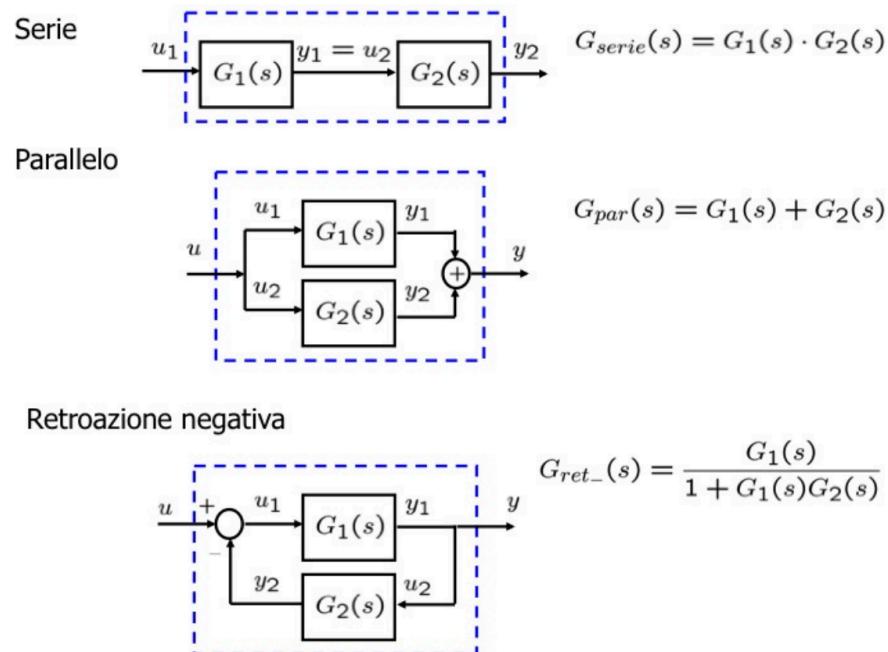


Mappatura di specifiche nel piano complesso

Secondo quanto appena visto possiamo dunque mappare nel piano complesso dei limiti per la posizione dei poli al fine di rispettare le specifiche date sul tempo di assottileamento e la sovraelongazione percentuale.



Interconnessione schemi a blocchi



▼ 6.0 - Risposta in frequenza

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Se a un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ avente poli a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

L'uscita a transitorio esaurito è data da

$$y(t) \approx U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))).$$

▼ Dimostrazione

Sappiamo che trasformata di $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ corrisponde a $U(s) = U \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$, quindi

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}.$$

Consideriamo $G(s)$ con poli distinti a parte reale negativa (BIBO stabile). Sviluppando in fratti semplici si ha

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s + p_i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{r_u}{s - j\omega}}_{+} \underbrace{\frac{\bar{r}_u}{s + j\omega}}_{Y_2(s)} \\ &= Y_1(s) + Y_2(s) \end{aligned}$$

Antitrasformando $Y(s)$ si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n r_i e^{-p_i t} 1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2|r_u| \cos(\omega t + \arg(r_u)) 1(t)}_{y_2(t)} \\ &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

Poichè i poli di $G(s)$ sono a parte reale negativa, i contributi $e^{-p_i t} 1(t)$ sono tutti convergenti a zero. Pertanto $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Il residuo r_u è invece dato da

$$\begin{aligned}
r_u &= (s - j\omega)Y(s) \Big|_{s=j\omega} = UG(j\omega) \frac{j\omega \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{j\omega + j\omega} \\
&= UG(j\omega) \frac{j \cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2j} = UG(j\omega) \frac{\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)}{2} \\
r_u &= UG(j\omega) \frac{e^{j\varphi}}{2} = \frac{U|G(j\omega)|}{2} e^{j(\arg(G(j\omega)) + \varphi)}
\end{aligned}$$

Otteniamo dunque che per $t \rightarrow \infty$, l'uscita $y(t)$ converge a

$$y(t) \approx U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))).$$

Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Consideriamo un segnale d'ingresso $u(t)$ periodico che può essere sviluppato in serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n))$$

con $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ e

$$U_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, 1, \dots$$

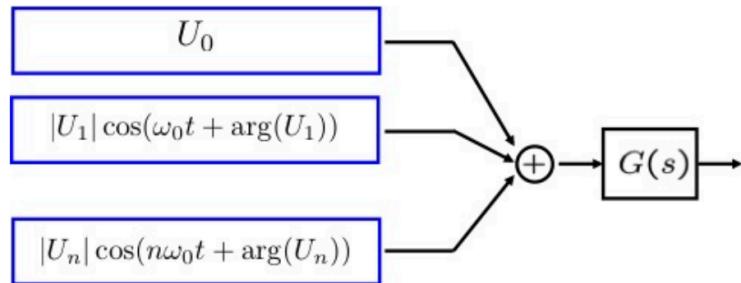
In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per t elevati

$$y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n))$$

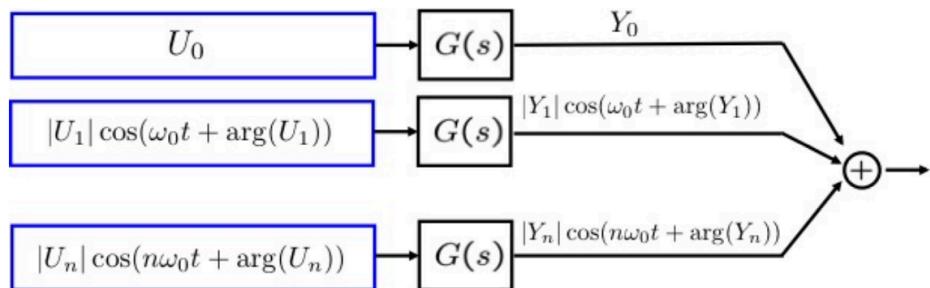
con $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ e

$$Y_n = G(jn\omega_0)U_n \quad n = 0, 1, \dots$$

Tale risultato può essere schematizzato come segue: dato in ingresso un segnale periodico, esso può essere rappresentato come la somma delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier



E sfruttando la sovrapposizione degli effetti tale schema è equivalente a considerare lo schema seguente per t elevati



Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier

Dato un segnale non periodico dotato di trasformata di Fourier, possiamo scriverlo come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega,$$

con

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Quindi, se il sistema è BIBO stabile, per t elevati abbiamo

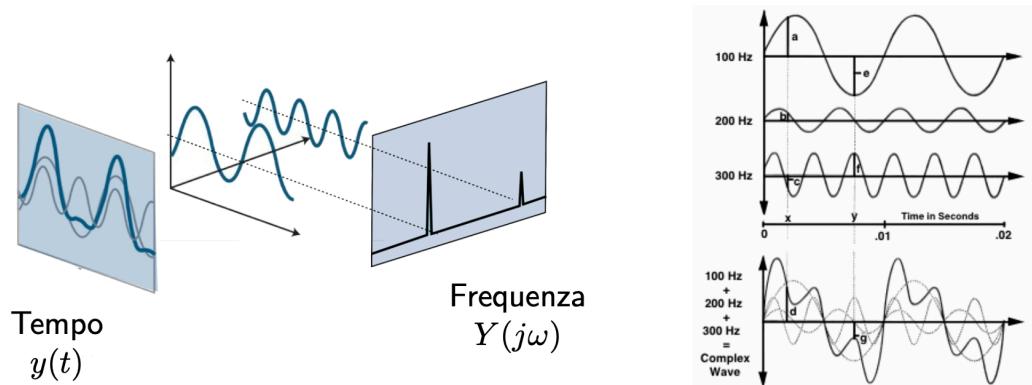
$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(Y(j\omega))) d\omega,$$

con

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

Risposta in frequenza

Ogni segnale reale si può ottenere sommando opportune onde sinusoidali



Uno stesso segnale può essere quindi visto equivalentemente nel dominio del tempo $y(t)$ o della frequenza $Y(j\omega)$. Le funzioni $y(t)$ e $Y(j\omega)$ sono ugualmente informative e offrono due prospettive complementari per osservare lo stesso fenomeno.

La funzione complessa $G(j\omega)$ ottenuta valutando $G(s)$ per $s = j\omega$ è detta risposta in frequenza. Data una funzione di trasferimento in forma fattorizzata

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2 \frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

la risposta in frequenza associata è la seguente

$$G(j\omega) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

Per un certo valore di ω , $G(j\omega)$ è un numero complesso, quindi composto da ampiezza e fase. Uno dei modi più usati per rappresentare $G(j\omega)$ sono i diagrammi di Bode in cui si rappresentano separatamente $|G(j\omega)|$ e $\arg(G(j\omega))$ in funzione di ω .

Diagrammi di Bode

Questi diagrammi utilizzano un diagramma delle ampiezze espresso in decibel ($|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$) e un diagramma delle fasi espresso in gradi.

Per quanto riguarda le ascisse viene utilizzata una scala logaritmica (si moltiplica x 10 ad ogni step).

Proprietà di numeri complessi e logaritmi

Dati due numeri complessi a e b :

$$\log(|a| |b|) = \log(|a|) + \log(|b|) \quad \arg(a b) = \arg(a) + \arg(b)$$

$$\log\left(\frac{|a|}{|b|}\right) = \log(|a|) - \log(|b|) \quad \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$

$$\log(|a|^k) = k \log(|a|) \quad \arg(a^k) = k \arg(a)$$

Contributi elementari

Abbiamo visto che la formula generale di una risposta in frequenza è data dalla seguente formula

$$G(j\omega) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

Calcolando ampiezza (in dB) e fase otteniamo

$$\begin{aligned}
|G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G(j\omega)| \\
&= 20 \log |\mu| - 20g \log |j\omega| \\
&\quad + \sum_i 20 \log |1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20 \log |1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}| \\
&\quad - \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| - \sum_i 20 \log |1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arg(G(j\omega)) &= \\
&= \arg \mu - g \arg(j\omega) \\
&\quad + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right) \\
&\quad - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg \left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} \right)
\end{aligned}$$

Siccome sia l'ampiezza che la fase sono somma di contributi elementari, possiamo studiare l'andamento di tali contributi e poi sommare i loro diagrammi di Bode. Scomponiamo dunque la formula generale di una risposta in frequenza nei contributi elementari

$$G_a(j\omega) = \mu$$

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g}$$

$$G_c(j\omega) = (1 + j\omega\tau_i) \quad \text{e} \quad G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_i}$$

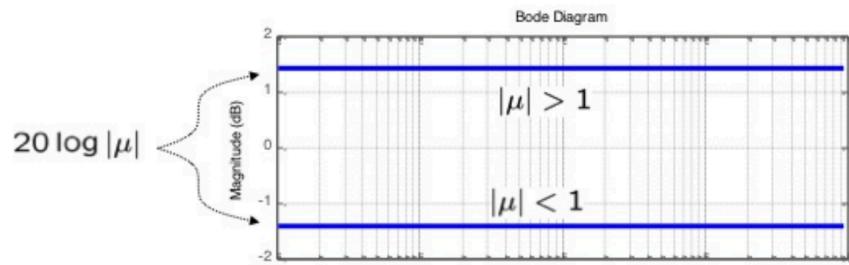
$$G_d(j\omega) = \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right) \quad \text{e} \quad G_d(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} \right)}$$

Guadagno statico

$$G_a(j\omega) = \mu$$

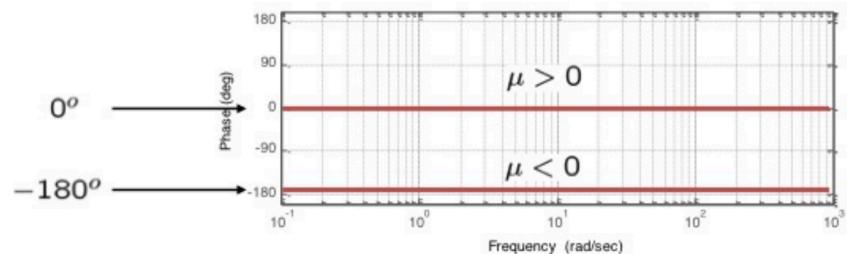
- Ampiezza

$$|G_a(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu|$$



- Fase

$$\arg(G_a(j\omega)) = \arg(\mu)$$



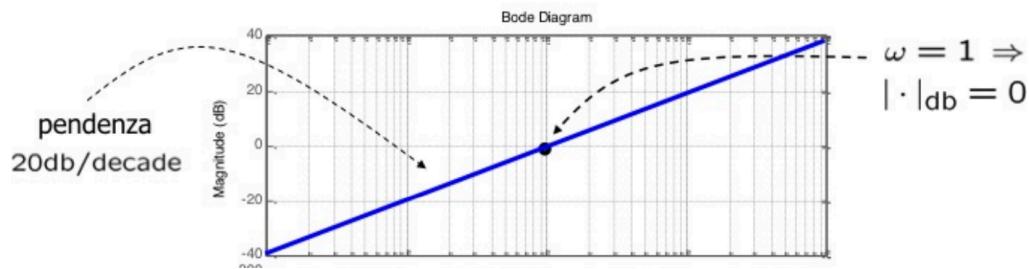
Zeri nell'origine

Zero nell'origine $\rightarrow g = -1$.

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega$$

- Ampiezza

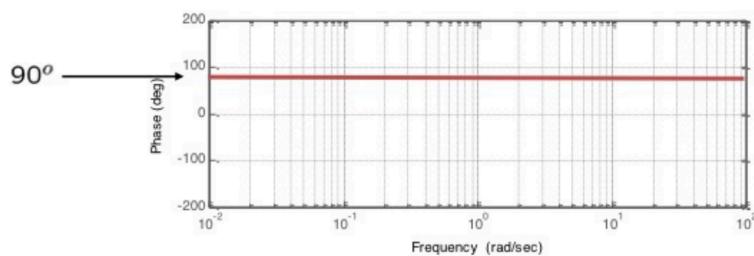
$$|G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \omega$$



Se si hanno g zeri nell'origine allora la pendenza sarà $20g$ dB/decade.

- Fase

$$\arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$



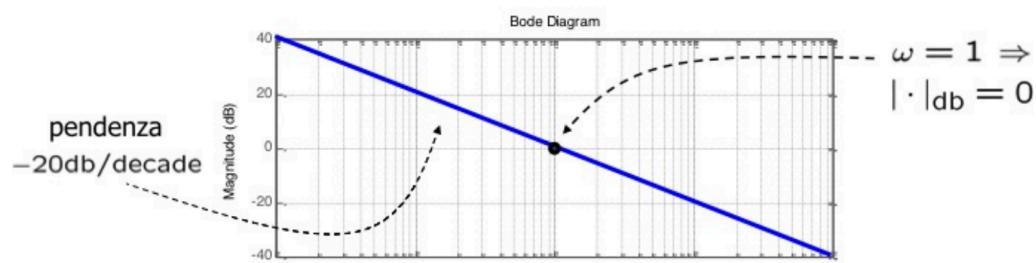
Poli nell'origine

Polo nell'origine $\rightarrow g = 1$.

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega}$$

- Ampiezza

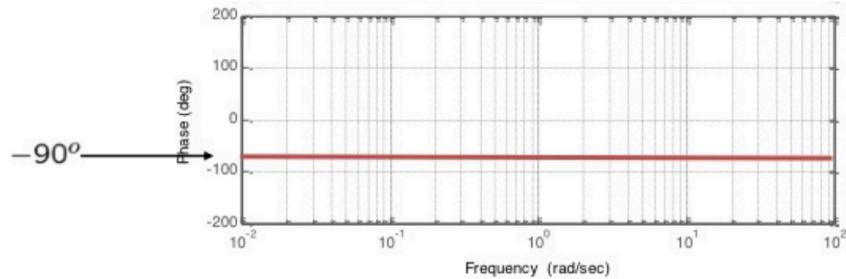
$$|G_b(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega$$



Se si hanno g poli nell'origine allora la pendenza sarà $-20g$ dB/decade.

- Fase

$$\arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$

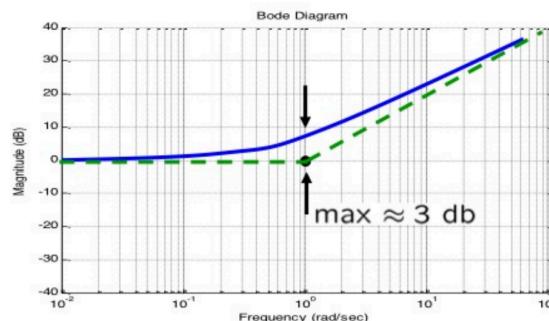


Zero reale

$$G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

- Ampiezza

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$



Fino a $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, pulsazione di taglio, andamento costante a 0dB, poi retta con pendenza 20 dB/decade.

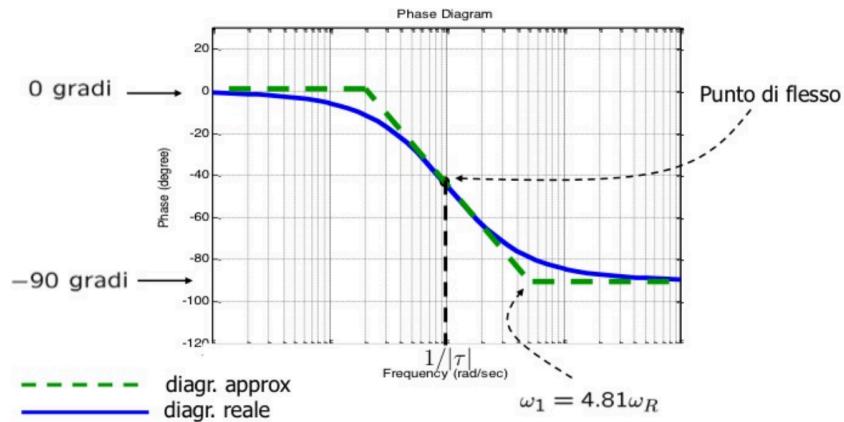
Lo scostamento massimo è nella pulsazione di taglio, dove

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1+1} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3.$$

- Fase

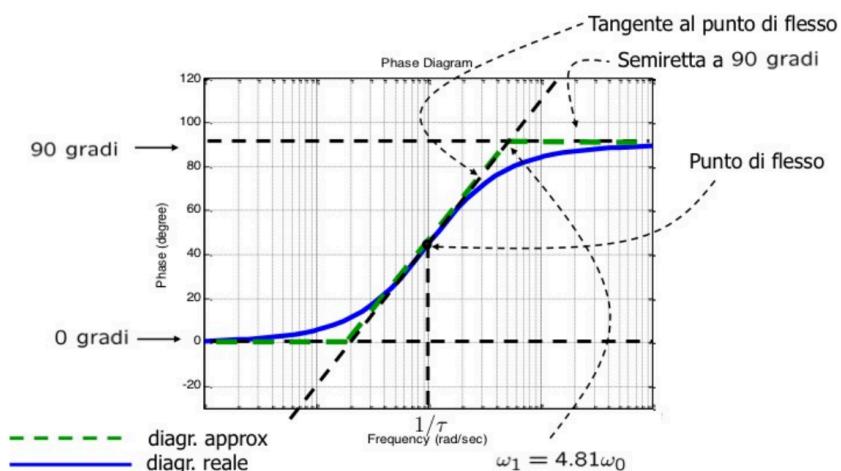
- Polo positivo ($\tau < 0$)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$



- Polo negativo ($\tau > 0$)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$



Il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{|\tau|}$.

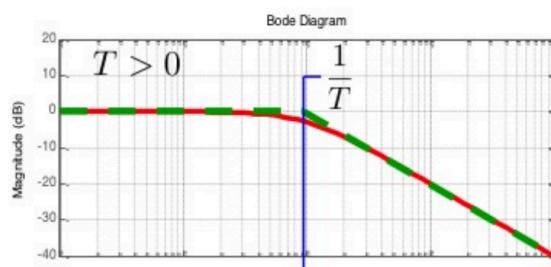
Polo reale

$$G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

Il diagramma è ottenuto da quello dello zero ribaltando rispetto all'asse reale.

- Ampiezza

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$



Fino a $\omega = \frac{1}{T}$, pulsazione di taglio, andamento costante a $0dB$, poi retta con pendenza -20 dB/decade .

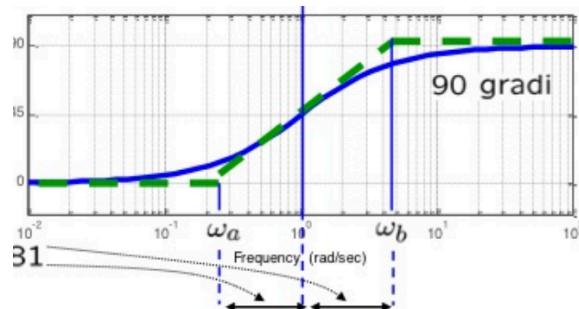
Lo scostamento massimo è nella pulsazione di taglio, dove

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + 1} = -20 \log \sqrt{2} \approx -3.$$

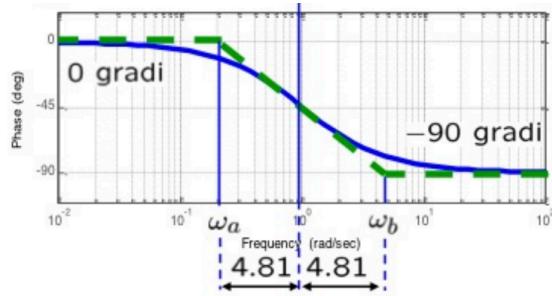
- Fase

$$\arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

- Positivo ($T < 0$)



- Negativo ($T > 0$)



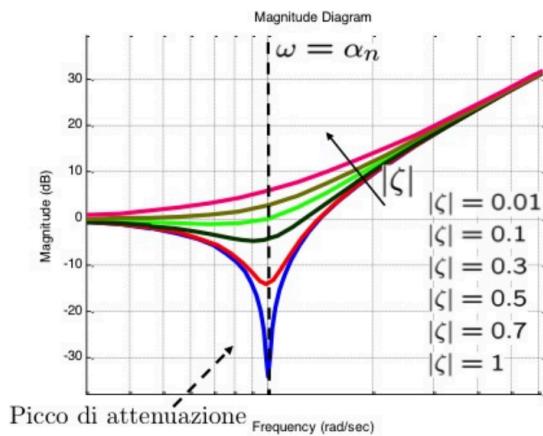
Il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{T}$.

Zeri complessi coniugati

$$G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$$

- Ampiezza

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$



Fino a $\omega = \alpha_n$, pulsazione di taglio, andamento costante a $0dB$, poi retta con pendenza 40 dB/decade .

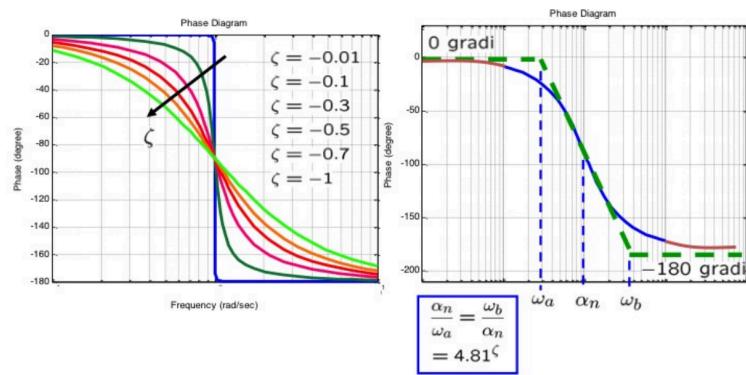
C'è uno scostamento significativo nella zona vicina alla pulsazione di taglio dipendente dal valore di ζ . Il minimo è infatti $|G_d(j\omega_r)| = 2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}$ e

si verifica alla pulsazione $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$.

- Fase

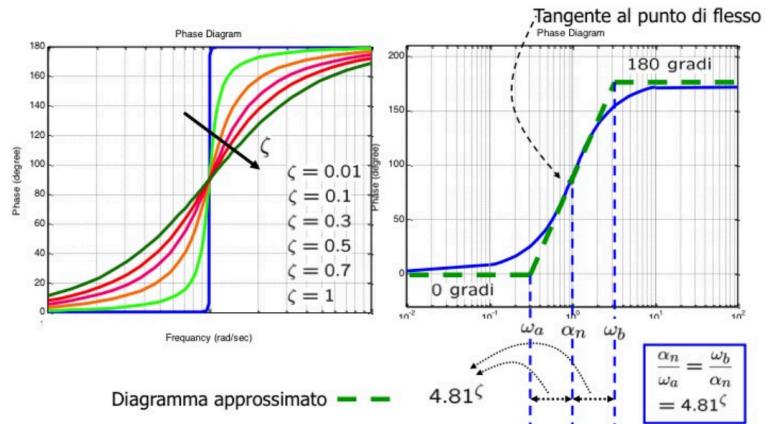
- Parte reale positiva ($\zeta < 0$)

$$\arg(G_c(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ -180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



- Parte reale negativa ($\zeta > 0$)

$$\arg(G_c(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



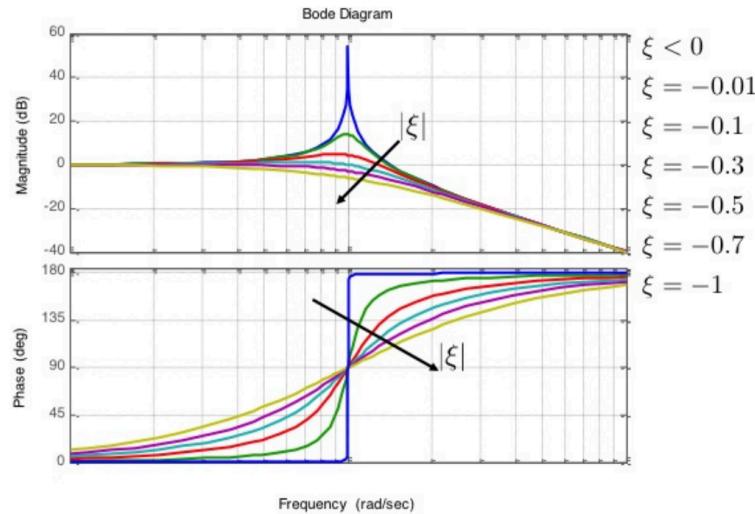
Anche il diagramma di fase dipende molto dal valore di ζ .

Poli complessi coniugati

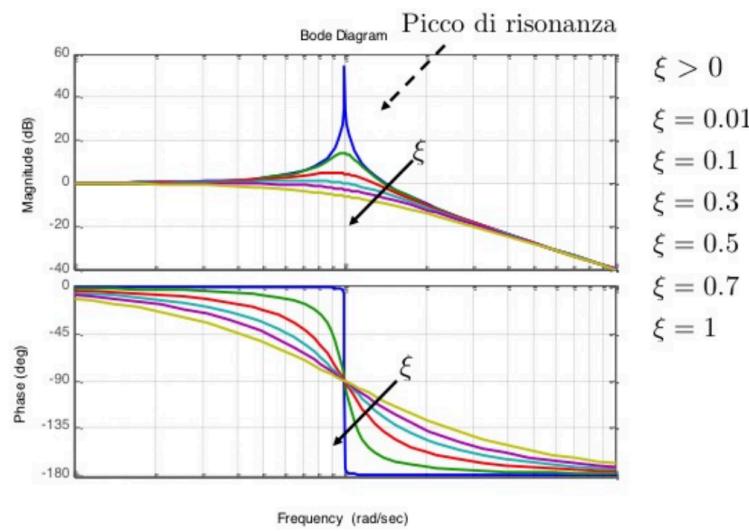
$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Il diagramma è ottenuto da quello dello zero complesso coniugato ribaltando rispetto all'asse reale.

- Parte reale positiva ($\xi < 0$)



- Parte reale negativa ($\xi > 0$)



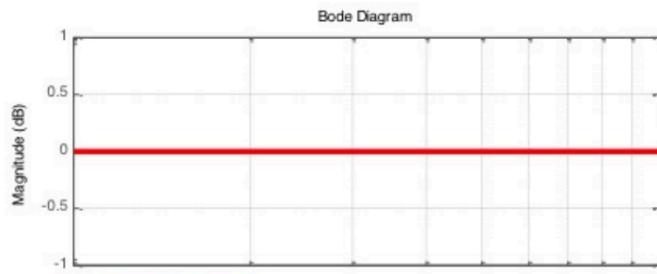
I grafici dipendono molto da ξ . Il picco di risonanza è infatti $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$ e si verifica alla pulsazione $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

Ritardo temporale

Il ritardo temporale è rappresentato dalla funzione di trasferimento $G(s) = e^{-\tau s}$ con $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$.

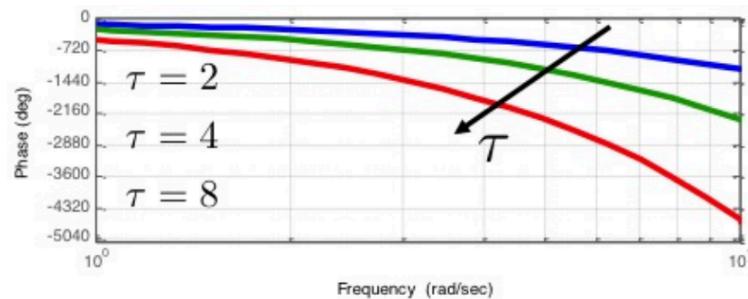
- Ampiezza

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |e^{-j\omega\tau}| = 20 \log 1 = 0$$



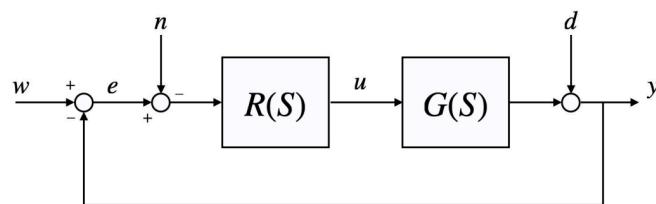
- Fase

$$\arg G(j\omega) = \arg e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau.$$



▼ 7.0 - Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni

Consideriamo il seguente schema di controllo generale in retroazione



in cui

Ingressi (del sistema in anello chiuso):

- $w(t)$ riferimento (andamento desiderato per $y(t)$)
- $d(t)$ disturbo in uscita
- $n(t)$ disturbo di misura

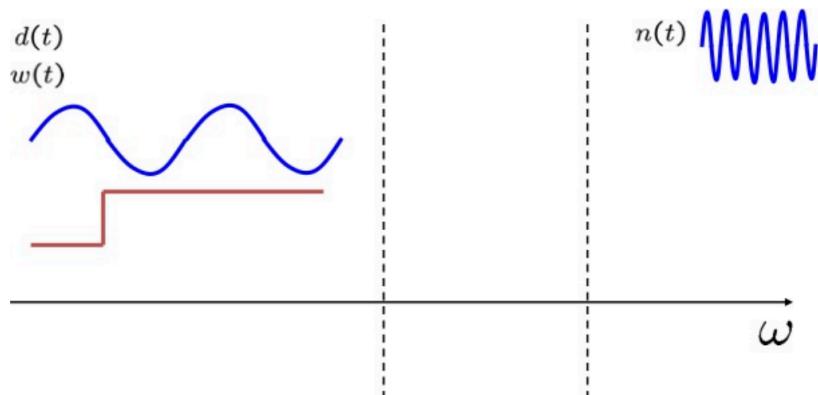
Uscite di interesse:

- $e(t) = w(t) - y(t)$ errore di inseguimento
- $y(t)$ uscita controllata
- $u(t)$ ingresso di controllo del sistema in anello aperto (impianto)

L'obiettivo è quello di creare un sistema di controllo che consente all'uscita di seguire il riferimento $w(t)$ anche in presenza di disturbi in uscita $d(t)$, disturbi di misura $n(t)$ e incertezze sul modello $G(s)$.

Frequenze dei segnali

Nelle applicazioni di interesse ingegneristico tipicamente le bande dei segnali di ingresso $\omega(t)$, $d(t)$ e $n(t)$ sono limitate in opportuni range. $\omega(t)$ e $d(t)$ hanno bande a basse frequenze, mentre $n(t)$ ha bande ad alte frequenze.

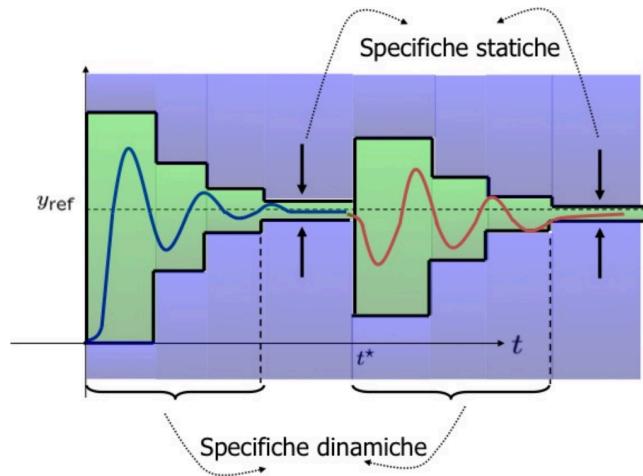


Requisiti di un sistema di controllo

Stabilità

Requisito fondamentale è l'asintotica stabilità o stabilità BIBO (esterna) se solo rappresentazione ingresso-uscita. La stabilità deve essere garantita anche in condizioni perturbate (errori di modello o incertezze nei parametri).

Prestazioni



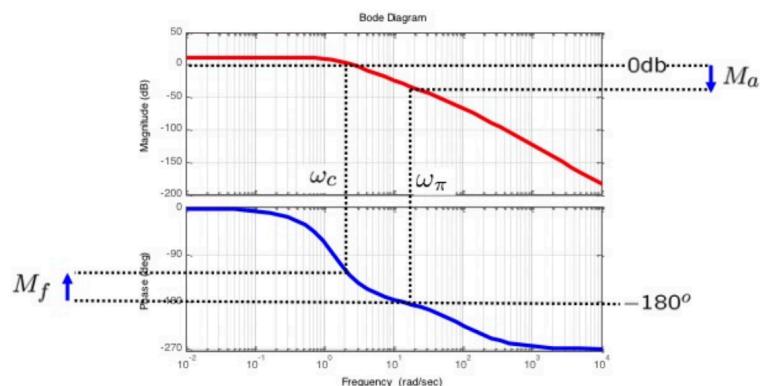
Le prestazioni si dividono in statiche e dinamiche. Quelle statiche consistono nelle prestazioni a transitorio esaurito ($t \rightarrow \infty$), quelle dinamiche sono prestazioni da rispettare durante il transitorio.

Margini di fase e ampiezza

Margine di fase

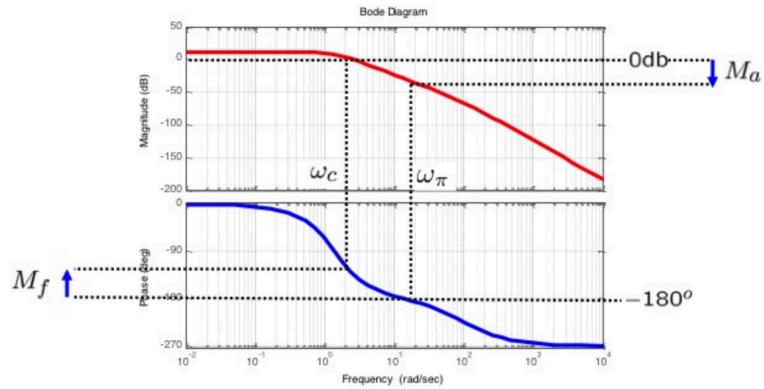
$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) \text{ con } \omega_c \text{ t.c. } |L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$$

ω_c è detta pulsazione critica.



Margine di ampiezza

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{\text{dB}} \text{ con } \omega_\pi \text{ t.c. } \arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$$



Casi patologici

Nel caso in cui il diagramma delle ampiezze attraversa l'asse a 0 dB più di una volta, oppure non attraversa per nulla tale asse oppure M_f e M_a hanno segni discordi, allora M_f e M_a non sono definiti o non sono informativi.

Criterio di Bode

Si supponga che:

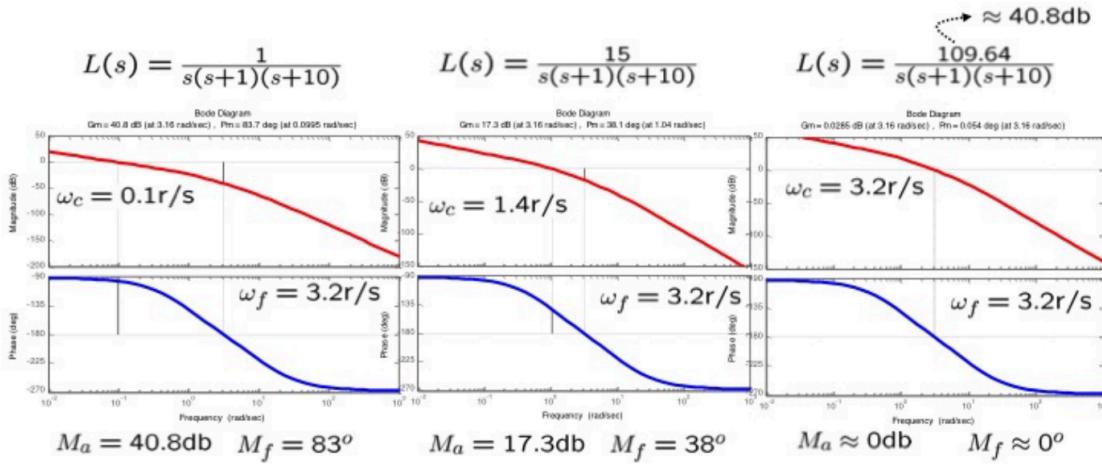
- $L(s)$ non abbia poli a parte reale > 0 .
- Il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti $\mu > 0$ (con μ guadagno statico di $L(j\omega)$) e $M_f > 0$.

Robustezza del sistema

Robustezza rispetto a incertezze sul guadagno

Il margine di ampiezza M_a rappresenta la massima incertezza tollerabile sul guadagno statico μ . Variazioni di μ determinano traslazioni del diagramma delle ampiezza e non alterano il diagramma delle fasi.



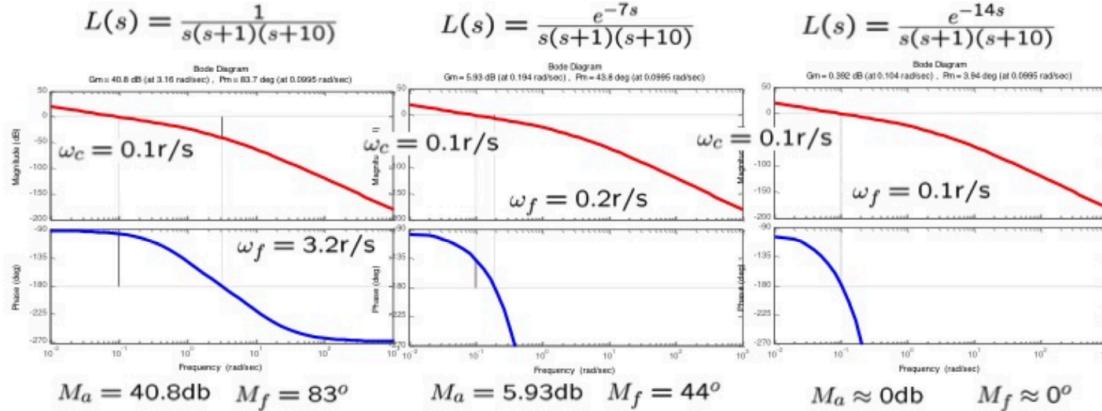
Robustezza rispetto a ritardi temporali

Un sistema che ritarda di τ ha funzione di trasferimento $e^{-s\tau}$.

Il diagramma di Bode delle ampiezze di un ritardo è costante a 0 dB, quindi se $L(s) = e^{-s\tau} \tilde{L}(s)$ la pulsazione critica ω_c non cambia.

Un ritardo però riduce il margine di fase per $\omega = \omega_c$ in questo modo

$$\arg(L(j\omega_c)) = \arg(\tilde{L}(j\omega_c)) - \tau\omega_c.$$



Funzioni di sensitività

Le funzioni di sensitività sono funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse. Sono le seguenti

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{Funzione di sensitività}$$

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{Funzione di sensitività complementare}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{Funzione di sensitività del controllo}$$

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

▼ Dimostrazione

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$$

con

- $Y_w(s)$ uscita con ingresso $W(s)$ e ponendo $D(s) = 0$ e $N(s) = 0$;
- $Y_d(s)$ uscita con ingresso $D(s)$ e ponendo $W(s) = 0$ e $N(s) = 0$;
- $Y_n(s)$ uscita con ingresso $N(s)$ e ponendo $W(s) = 0$ e $D(s) = 0$.

Calcoliamo $Y_w(s)$ come

$$Y_w(s) = R(s)G(s)(W(s) - Y_w(s))$$

quindi

$$Y_w(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}W(s)$$

$$Y_w(s) = F(s)W(s)$$

Abbiamo ottenuto quindi la funzione di sensitività complementare

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

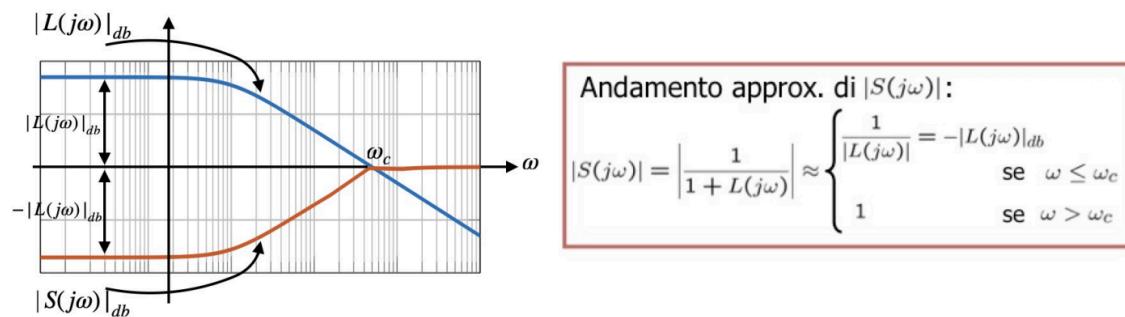
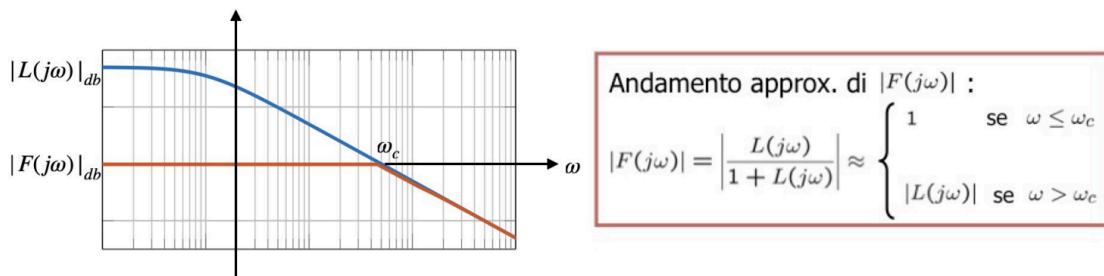
Con calcoli analoghi possono essere ottenute tutte le altre relazioni. Si può fare lo stesso anche definendo $E(s) = E_\omega(s) + E_d(s) + E_n(s)$ e $U(s) = U_\omega(s) + U_d(s) + U_n(s)$.

Considerazioni

Notiamo che $F(s) + S(s) = 1$, dunque per seguire il riferimento $\omega(t)$ e annullare l'effetto $d(t)$ un'idea potrebbe essere quella di avere $F(s) = 1$ e $S(s) = 0$. Facendo così però, con $F(s) = 1$, il disturbo $n(t)$ non verrebbe attenuato, quindi è necessaria una separazione di banda, in maniera tale da avere $|F(j\omega)| \approx 1$ a basse frequenze per seguire $\omega(t)$, quindi $|S(j\omega)| \approx 0$ a bassa frequenza per annullare $d(t)$, e ≈ 0 ad alte frequenze per annullare $n(t)$, ovvero

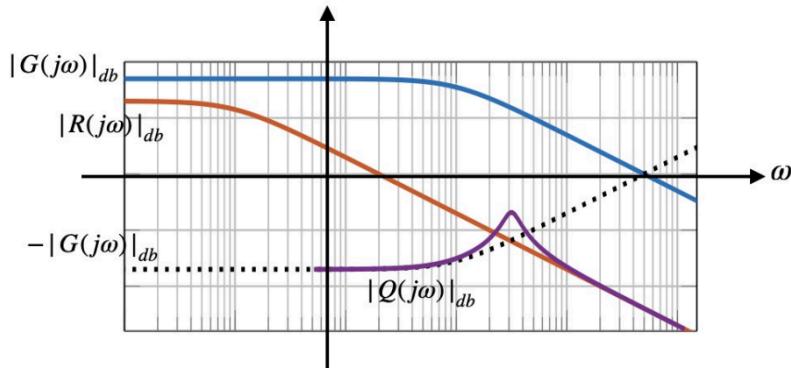
$$\begin{aligned} |L(j\omega)| &\gg 1 && \text{a basse frequenze} \\ |L(j\omega)| &\ll 1 && \text{ad alte frequenze} \end{aligned}$$

Una volta scelto ciò possiamo osservare l'andamento delle diverse funzioni di sensitività



Andamento approx. di $|Q(j\omega)|$:

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(j\omega)}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$



Relazioni tra parametri

Smorzamento e margine di fase con poli c.c.

Avendo una funzione di sensitività complementare $L(s)$ con una coppia di poli c.c. dominanti si ha

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}$$

▼ Dimostrazione

$$\begin{aligned} |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + \sin^2 \varphi_c}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos M_f^{\text{rad}})}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 M_f^{\text{rad}}}} = \frac{1}{2 \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}} \end{aligned}$$

Assumendo che $\omega_n \approx \omega_c$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\xi}$$

Uguagliando le due espressioni si ha

$$\xi = \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} \approx \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} = \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180}$$

e quindi

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}$$

Errore a gradino

Sia $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ con $e(t) = \omega(t) - y(t)$ errore in risposta a un gradino $\omega(t) = W1(t)$, si ha

$$e_\infty = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1+\mu} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

▼ Dimostrazione

Utilizzando il teorema del valore finale (sistema in anello chiuso asintoticamente stabile)

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s} = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s)$$

Sia $L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{N_L(s)}{s^g D'_L(s)}$ con $N_L(0) = \mu$ e $D'_L(0) = 1$ abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s) + s^g D'_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}$$

Si ottiene quindi

$$e_\infty = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1+\mu} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

Errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$ e principio del modello interno

Sia $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ con $e(t) = \omega(t) - y(t)$ errore in risposta a un ingresso con trasformata $W(s) = \frac{W}{s^k}$, si ha

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s^k} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k-1 \\ \frac{W}{\mu} & g = k-1 \\ 0 & g > k-1 \end{cases}$$

Dunque, affinchè l'errore a regime a $W(s) = \frac{W}{s^k}$ sia nullo occorre che $L(s)$ abbia un numero di poli almeno pari a k .

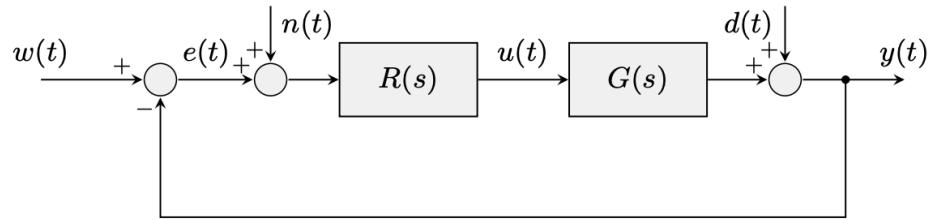
Il risultato precedente può essere generalizzato nel principio del modello interno:

Affinché un segnale di riferimento (risp. un disturbo di misura) con una componente spettrale alla frequenza ω_0 sia inseguito (risp. neutralizzato) a regime perfettamente in uscita è necessario e sufficiente che

1. il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile,
2. il guadagno d'anello $L(s)$ abbia una coppia di poli c.c. sull'asse immaginario con pulsazione naturale pari a ω_0 .

▼ 8.0 - Sistemi di controllo: progetto del regolatore

Consideriamo il seguente sistema di controllo in retroazione



Riepilogo specifiche

- Stabilità robusta

Stabilità in presenza di errori di modello o incertezze di parametri. La specifica viene espressa in $M_f \geq M_f^*$.

- Stabilità statica

Sia $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ il valore a regime dell'errore in risposta a riferimenti $\omega(t)$ o disturbi in uscita $d(t)$. La specifica comprende solitamente $e_\infty \leq$

e^* oppure $e_\infty = 0$. Per soddisfare tali specifiche va considerata l'analisi statica effettuata nel capitolo precedente sulla funzione di sensitività $S(s)$.

Esempio specifiche:

- $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a un gradino $w(t) = W^*1(t)$, $d(t) = D^*1(t)$.

Abbiamo ottenuto in precedenza che

$$e_\infty = \frac{W}{1+\mu} + \frac{D}{1+\mu} = \frac{D+W}{1+\mu} \approx \frac{D+W}{\mu}.$$

quindi

$$\mu = L(0) \geq \frac{D^* + W^*}{e^*}.$$

- $e_\infty = 0$ in risposta a $W(s) = \frac{W}{s^k}$ e $D(s) = \frac{D}{s^k} \rightarrow L(s)$ deve avere k poli nell'origine.
- $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a $W(s) = \frac{W}{s^k}$ e $D(s) = \frac{D}{s^k} \rightarrow L(s)$ deve avere $k - 1$ poli nell'origine e $\mu \geq \frac{D^* + W^*}{e^*}$.
- Stabilità dinamica

Tipicamente specifiche in termini di sovraelongazione e tempo di assestamento massimi, come $S\% \leq S^*$ e $T_{a,\epsilon} \leq T^*$.

Se progettiamo $L(j\omega)$ in modo che $F(j\omega)$ abbia una coppia di poli c.c. dominanti in $\omega_n \approx \omega_c$ con coefficiente di smorzamento ξ allora abbiamo visto che $\xi \approx \frac{M_f}{100}$.

Per la specifica sulla sovraelongazione abbiamo quindi che $S\% \leq S^*$ allora $\xi \geq \xi^*$, quindi $M_f \geq 100\xi^*$. Per calcolare ξ^* sappiamo che

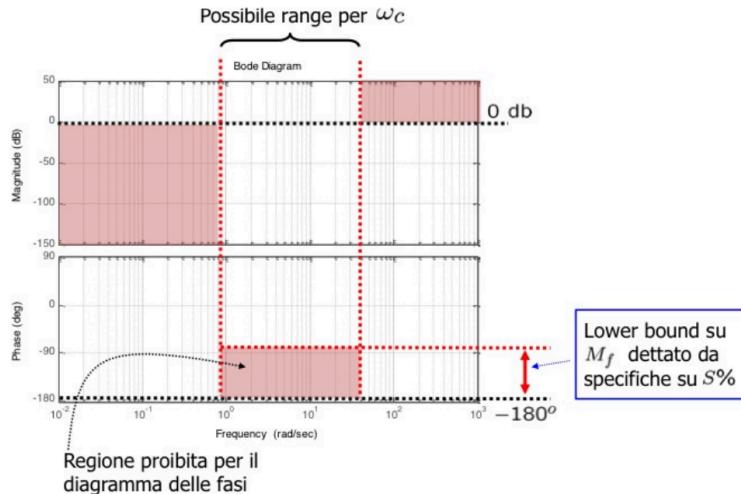
$$S\%^* = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}} \text{ e quindi tramite formula inversa otteniamo } \xi^* = \frac{|\ln(S\%^*/100)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(S\%^*/100)^2}}.$$

Per quella sul tempo di assestamento abbiamo trovato in precedenza queste approssimazioni

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n} \quad T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$$

quindi per avere $T_{a,\epsilon} \leq T^*$ occorre avere $\xi\omega_n \geq \frac{3}{T^*}$ oppure $\xi\omega_n \geq \frac{4.6}{T^*}$, ovvero $M_f\omega_c \geq \frac{300}{T^*}$ oppure $M_f\omega_c \geq \frac{460}{T^*}$.

Queste specifiche dettano dunque un lower bound sul margine di fase



- Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$

Il disturbo in uscita $d(t)$, con una banda limitata in un range di pulsazioni $[\omega_{d,min}, \omega_{d,max}]$, deve essere attenuato di A_d dB.

Ricordiamo che se $d(t) = D \cos(\omega t + \varphi)$ allora

$$y(t) = |S(j\omega)|D \cos(\omega t + \varphi + \arg(S(j\omega)))$$

e che

$$|S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo $|S(j\omega)|_{dB} \leq -A_d$ dB. Poiché $\omega_{d,max} \ll \omega_c$, si ha

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq A_d$$

- Attenuazione disturbo di misura $n(t)$

Il disturbo di misura $n(t)$, con una banda limitata in un range di pulsazioni $[\omega_{n,min}, \omega_{n,max}]$, deve essere attenuato di A_n dB.

Ricordiamo che se $n(t) = N \cos(\omega t + \varphi)$ allora

$$y(t) = |F(j\omega)|N \cos(\omega t + \varphi - \arg(F(j\omega)))$$

e che

$$|F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo $|F(j\omega)|_{dB} \leq -A_n$ dB. Poiché $\omega_{n,\min} \gg \omega_c$, si ha

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_n$$
 dB.

- Moderazione variabile di controllo $u(t)$

Contenimento dell'ampiezza della variabile di controllo u in ingresso al sistema fisico.

Ricordiamo che se $w(t) = W \cos(\omega t + \varphi)$ allora

$$u(t) = |Q(j\omega)|W \cos(\omega t + \varphi + \arg(Q(j\omega)))$$

e che

$$|Q(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c. \end{cases}$$

Poiché vogliamo contenere $|Q(j\omega)|_{dB}$ e non abbiamo controllo su $G(j\omega)$ dobbiamo

- limitare ω_c ,
- realizzare $R(j\omega)$ passa-basso.

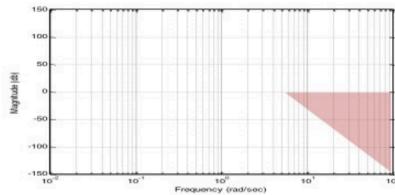
- Fisica realizzabilità del regolatore $R(s)$

Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza poli-zeri) deve essere maggiore o uguale a zero.

A pulsazioni elevate la pendenza $-k_L$ dB/dec di $|L(j\omega)|_{\text{dB}}$ è determinata dalla differenza tra poli (ciascuno contribuisce con pendenza -20 dB/dec) e zeri (ciascuno contribuisce con pendenza 20 dB/dec).

Se a pulsazioni elevate $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ ha pendenza $-k_G$ dB/dec allora

$$-k_L \leq -k_G.$$



Sintesi del regolatore

E conveniente dividere il progetto in due fasi fattorizzando $R(s)$ come

$$R(s) = R_s(s)R_d(s)$$

Regolatore statico

Il regolatore statico deve essere progettato in maniera tale da soddisfare precisione statica e attenuazione dei disturbi in uscita d .

Nel caso in cui $|e_\infty| \leq e^*$, possiamo scegliere tra $R_s(s) = \mu_s \geq \mu^*$ oppure $R_s(s) = \frac{\mu_s}{s}$, che aggiunge un polo nell'origine e porta l'errore a 0 (in questo caso sarà poi possibile scegliere μ_d , in quanto μ_s non è vincolato).

Regolatore dinamico

Il regolatore dinamico deve essere progettato per soddisfare stabilità robusta, precisione dinamica, attenuazione disturbi di misura n , moderazione controllo e fisica realizzabilità. Per questo la progettazione di $R_d(s)$ mira a:

- Imporre ω_c in un certo intervallo.
- Garantire un dato margine di fase M_f .
- Garantire una certa attenuazione e pendenza di $L(j\omega)$ a pulsazioni elevate. Per questa specifica è sufficiente introdurre poli del regolatore a pulsazione elevate.

Dopo la progettazione di un regolatore statico ci troviamo dunque il seguente sistema esteso

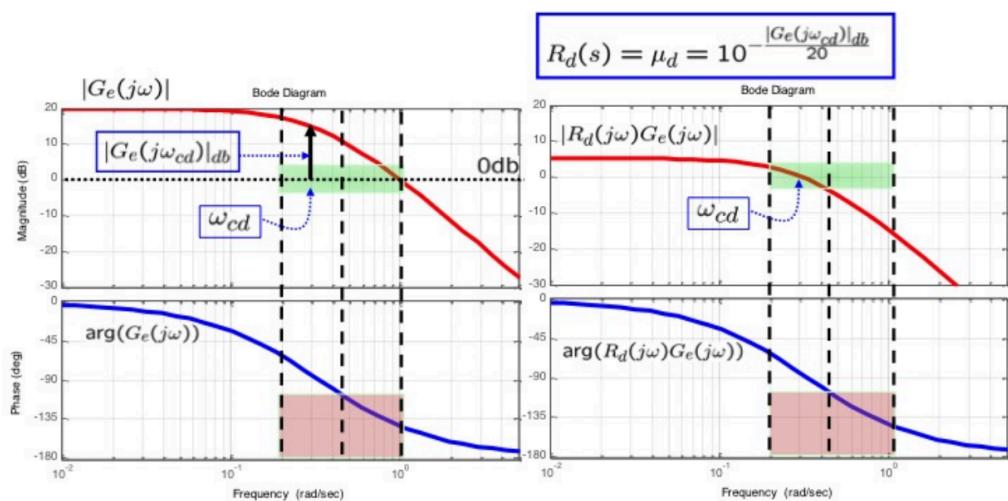
$$G_e(s) = R_s(s)G(s)$$

Possiamo avere 2 scenari:

- Scenario A: nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c esiste un sotto-intervallo in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.

In questo scenario bisogna progettare $R_d(s)$ in maniera tale da attenuare il diagramma delle ampiezze in modo che ω_c ricada nel sotto-intervallo in cui il vincolo sul margine di fase è rispettato, alterando il meno possibile la fase. È possibile farlo in due modi:

- μ_d libero $\rightarrow R_d(s) = \mu_d$ con $\mu_d < 1$.



- μ_d vincolato \rightarrow utilizzo di una rete ritardatrice, che riduce il guadagno del sistema alle alte frequenze senza modificarne il margine di fase.

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{Rete ritardatrice}$$

con

$$\tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

$$\alpha \tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

▼ Dimostrazione

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* (pulsazione a cui vorremmo $|L(j\omega)|_{dB} = 0$) la rete ritardatrice abbia una attenuazione $0 < M^* < 1$ e uno sfasamento $-\frac{\pi}{2} < \varphi^* < 0$, ovvero

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}.$$

Poniamo

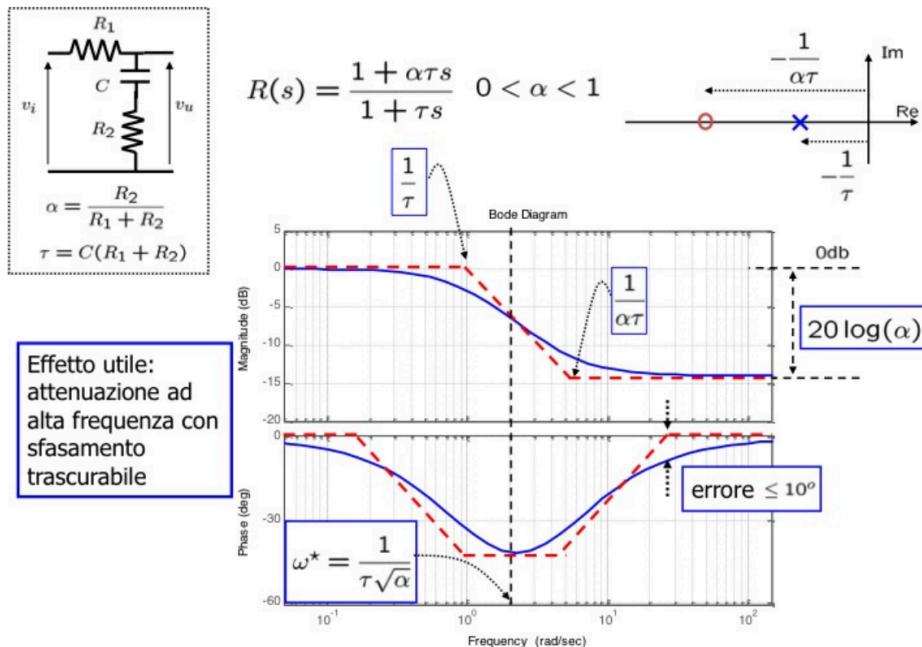
$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_c^*}{1 + j\tau\omega_c^*} = M^*(\cos\varphi^* + j\sin\varphi^*)$$

$$1 + j\alpha\tau\omega_c^* = M^*(\cos\varphi^* + j\sin\varphi^*)(1 + j\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria

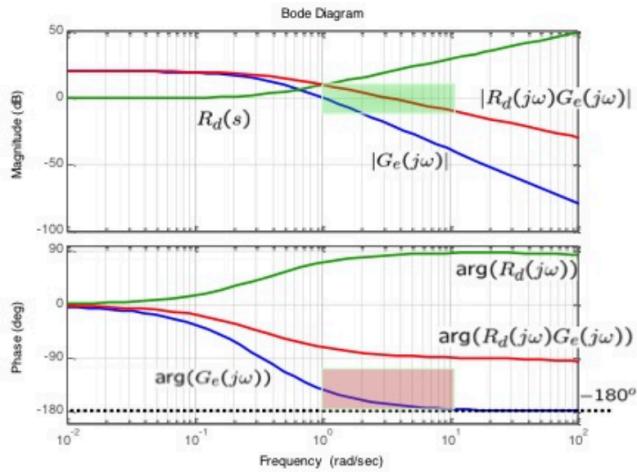
$$\begin{aligned} 1 &= M^* \cos\varphi^* - M^*\tau\omega_c^* \sin\varphi^* \\ \alpha\tau\omega_c^* &= M^*\tau\omega_c^* \cos\varphi^* + M^* \sin\varphi^* \end{aligned}$$

Tramite inversione si ottengono τ e $\alpha\tau$.



- Scenario B: nell'intervallo ("centrale") di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c non esistono pulsazioni in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.

In questo scenario bisogna progettare $R_d(s)$ in maniera tale da aumentare la fase, amplificando il meno possibile l'ampiezza. È possibile farlo aggiungendo uno o più zeri a pulsazioni precedenti quella di attraversamento desiderata al fine di aumentare la fase e aggiungendo uno o più poli a pulsazioni più alte per rispettare la fisica realizzabilità e per evitare un'eccessiva amplificazione.



Per fare ciò si può utilizzare una rete anticipatrice

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

In caso sia necessario un anticipo di fase maggiore (e.g., due zeri)

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \alpha_1 \tau_1 s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s} \quad 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1.$$

con

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

$$\alpha \tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

▼ Dimostrazione

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* (pulsazione a cui vorremmo $|L(j\omega)|_{dB} = 0$) la rete anticipatrice abbia una amplificazione $M^* > 1$ e uno sfasamento $0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$, ovvero

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}.$$

Poniamo

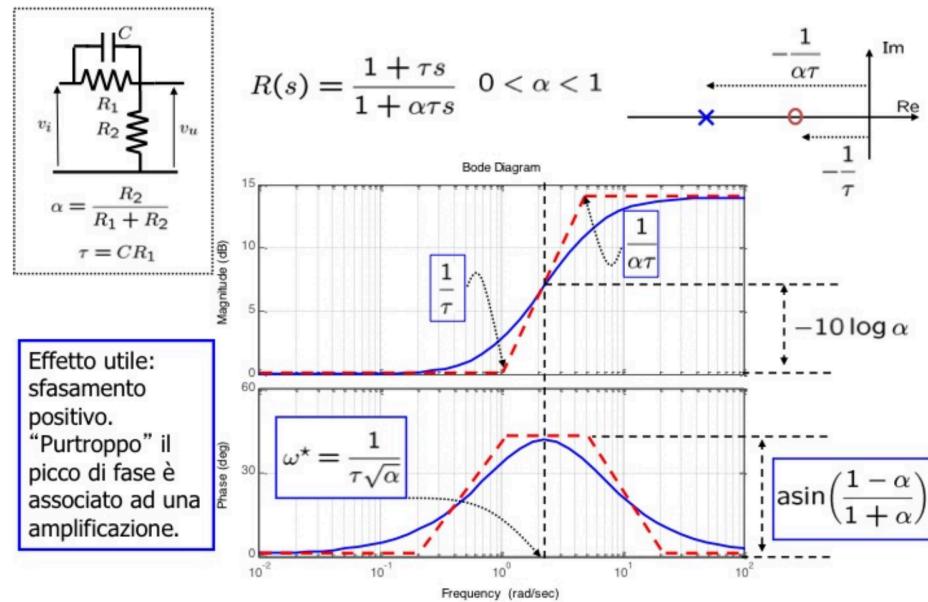
$$\frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)$$

$$1 + j\tau\omega_c^* = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)(1 + j\alpha\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$\begin{aligned} 1 &= M^* \cos \varphi^* - M^* \alpha \tau \omega_c^* \sin \varphi^* \\ \tau \omega_c^* &= M^* \alpha \tau \omega_c^* \cos \varphi^* + M^* \sin \varphi^* \end{aligned}$$

Tramite inversione si ottengono τ e $\alpha\tau$.



Una volta realizzata una rete anticipatrice (singola o multipla) si possono verificare due casi:

- ω_c è nell'intervallo di specifica e il vincolo sul margine di fase è rispettato. In questo caso il progetto è terminato.
- ω_c è fuori dall'intervallo di specifica o in un'intervallo in cui il vincolo sul margine di fase non è rispettato. Ci siamo comunque ricondotti ad uno scenario A, possiamo quindi procedere come fatto in precedenza

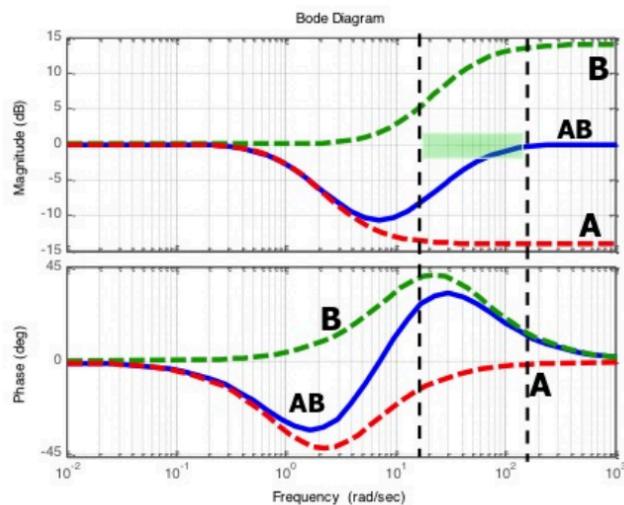
- Se μ_d libero allora scegliamo $\mu_d < 1$ per attenuare

$$R_d(s) = \mu_d \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$

- Se μ_d bloccato

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha_a \tau_a s}{1 + \tau_a s} \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$

La seconda si chiama rete a ritardo anticipo e ha il seguente grafico



Controllori PID

Un controllore PID ha la seguente formula

$$\text{PID "ideale"} \\ R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

T_i Tempo integrale
 T_d Tempo derivativo

quindi, nel dominio del tempo

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \boxed{K_p e(t)} + \boxed{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau} + \boxed{K_p T_d \frac{de(t)}{dt}}$$

termine Proporzionale termine Integrale termine Derivativo

Il PID ideale non è però fisicamente realizzabile. Infatti, sviluppando i calcoli, si vede che la funzione di trasferimento del controllore ha un numeratore con grado più elevato del denominatore

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = \frac{K_p T_i s + K_p + K_p T_i T_d s^2}{T_i s}$$

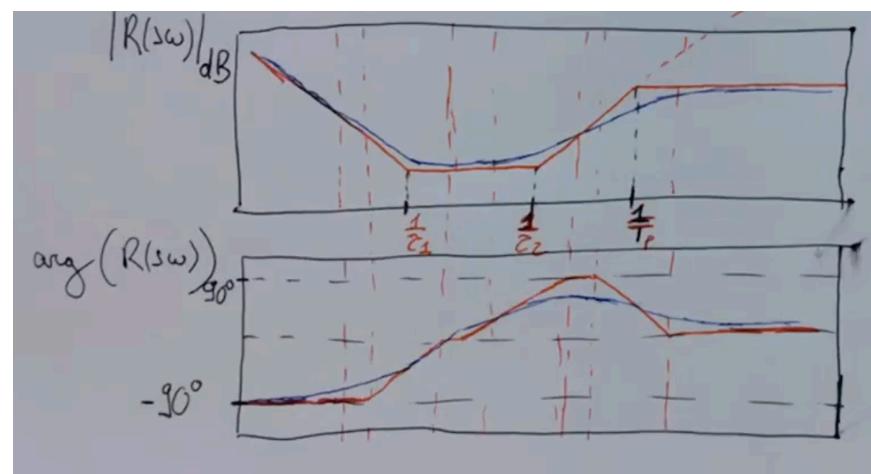
Il PID "reale" (fisicamente realizzabile) richiede di aggiungere un polo in alta frequenza

$$R^{\text{fr}}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{1}{1 + T_p s}$$

Raccogliendo i termini e definendo opportunamente τ_1 e τ_2 possiamo vedere che il PID reale è una combinazione di una rete anticipatrice e di una rete ritardatrice

$$\begin{aligned} R^{\text{fr}}(s) &= \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{s}}_{:=\mu} \frac{1}{1 + T_p s} \\ &= \mu \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s} \frac{1}{1 + T_p s} \end{aligned}$$

Quindi ha il seguente diagramma di Bode



Casi speciali

Regolatori P: se $T_i \rightarrow \infty$ e $T_d = 0$ (no termine integrale e derivativo), si ottiene un regolatore proporzionale $R(s) = K_p$

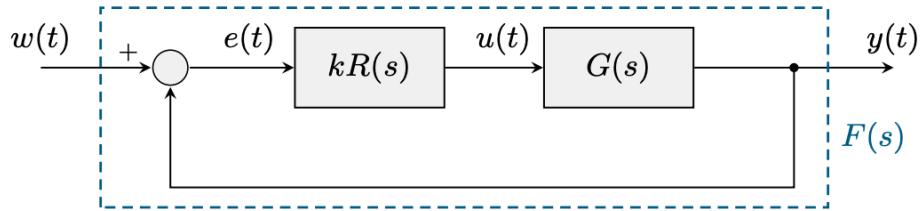
Regolatori I: in assenza di termine proporzionale e derivativo, si ottiene un regolatore puramente integrale $R(s) = \frac{K_i}{s}$. Si può interpretare come una rete ritardatrice con il polo posto nell'origine e con lo zero all'infinito.

Regolatori PI: se $T_d = 0$ (no termine derivativo), si ottiene un regolatore proporzionale integrale $R(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$. Possono essere visti come reti ritardatrici con polo nell'origine e zero in $-1/T_i$.

Regolatori PD: se $T_i \rightarrow \infty$ (no termine integrale), si ottiene un regolatore proporzionale derivativo $R(s) = K_p(1 + T_d s)$. Possono essere visti come reti anticipatrici con zero in $-1/T_d$ e polo posto all'infinito (nel caso ideale)

▼ 9.0 - Luogo delle radici

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione



in cui abbiamo messo in evidenza il guadagno k . La funzione di trasferimento in anello chiuso è

$$F(s) = \frac{kR(s)G(s)}{1 + kR(s)G(s)}$$

Luogo delle radici: posizione dei poli di $F(s)$ al variare di $k \geq 0$.

Avendo $L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, si ottiene

$$F(s) = \frac{kL(s)}{1 + kL(s)} = \frac{kN(s)}{D(s) + kN(s)}$$

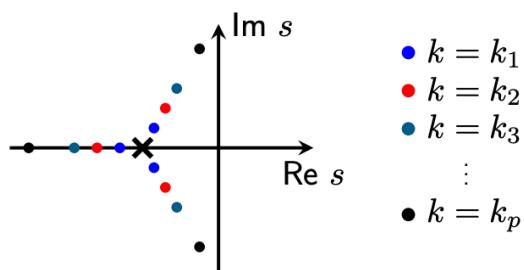
I poli del sistema retroazionato sono dunque le soluzione dell'equazione caratteristica

$$D(s) + kN(s) = 0$$

- $k = 0 \longrightarrow D(s) = 0$ I poli di $F(s)$ coincidono con quelli di $L(s)$
- $k \rightarrow \infty \longrightarrow N(s) = 0$ I poli di $F(s)$ coincidono con gli zeri di $L(s)$

Il luogo delle radici è costituito da n "rami" parametrizzati nel valore di k . Una volta fissato ad es.

$k = k_1$, gli n punti sugli n rami identificano i poli del sistema retroazionato per quel k . Ad esempio, per sistema con 3 poli



Regole di tracciamento

Sia n il numero di poli e m il numero di zeri di $L(s)$ (con $n \geq m$).

Regola 1. Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli del sistema in catena aperta.

Regola 2. Ogni ramo parte da un polo di $L(s)$ e termina in uno zero di $L(s)$ o all'infinito. In particolare, m rami terminano negli zeri di $L(s)$ e $n - m$ rami terminano all'infinito.

Regola 3. Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale.

Regola 4. I punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelli che lasciano alla propria destra un numero dispari di singolarità (cioè poli o zeri) di $L(s)$.

Regola 5. I rami che tendono all'infinito lo fanno lungo asintoti che si intersecano sull'asse reale nel punto con ascissa pari a

$$x_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{i=1}^m p_i \right)$$