Esercizi

es. 14 FOGLIO II

Si voglio spendere 4 banconote false su un totale di 20 banconote. Si chiede la strategia che porti al risultato migliore tra 3. Nella 1°, vengono spese tutte insieme le banconote; nella 2°, vengono spese 10 alla volta, di cui 2 false; nella 3°, vengono spese 10 banconote non false, poi 10 banconote di cui 4 false. Qual è la probabilità che vengano scoperte le banconote se ne vengono controllate il 20%.

A = 'non scoprire la presenza di banconote false del caso ⓐ
20 banconote spese insieme di cui 4 false'

$P(A) = P($'estrazione 4 banconote "vere" tra le 20'$)$

Tutte le banconote hanno la stessa probabilità di essere estratte, quindi casi favorevoli su totali.

Gli esiti totali sono di estrarre 4 banconote dalle 20, senza reimmissione, non conta l'ordine (combinazioni).

Gli esiti favorevoli, in cui vengono estratte 4 banconote dal mucchio di quelle non false (le 16 vere).

$$P(A) = P(\text{'estrazione 4 banconote "vere" tra le 20'}) =$$

$$= \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot.}} = \frac{C_{16,4}}{C_{20,4}} =$$

$$= \frac{\binom{16}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{16!}{\cancel{4!}\,12!}}{\frac{20!}{\cancel{4!}\,16!}} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$$

Secondo evento.

B = 'non scoprire la presenza di banconote false nel caso b'

Succede se non sono state scoperte banconote false la prima e la seconda volta.

B_K = 'non scoprire banconote false nell'acquisto k-esimo'
$K = 1, 2$

$$B = B_1 \cap B_2$$

Gli eventi devono accadere in simultanea. Un'ipotesi molto forte è che gli eventi siano indipendenti, perché di solito se si scopre che le banconote siano false, chi controlla sta più attento, ma immaginiamo che lo siano.

IPOTESI B_1 e B_2 indipendenti

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\,P(B_2)$$

$$P(B_k) = \frac{\text{n° casi fav.}}{\text{n° casi tot.}}$$

Casi totali: estrazione di 2 banconote da 10 (combinazioni senza ripetizione).

Casi favorevoli: 2 banconote dalle 8 vere.

$$P(B_k) = \frac{\text{n° casi fav.}}{\text{n° casi tot.}} = \frac{C_{8,2}}{C_{10,2}} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{8!}{\cancel{2!}\,6!}}{\frac{10!}{\cancel{2!}\,8!}} = \frac{8 \cdot 7}{10 \cdot 9} = \frac{36}{90}$$

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\,P(B_2) = \left(\frac{56}{90}\right)^2$$

Ultimo caso.

C = 'non scoprire banconote false nell'acquisto del caso c'

$$C = C_1 \cap C_2$$

C_1 = 'non scoprire banconote false nell'acquisto con 10 banconote vere'

C_2 = 'non scoprire b. f. nell'acquisto con 10 banconote di cui 4 false'

Ovviamente la probabilità di C1 è 1 perché non ci sono banconote false.

$$P(C_1) = 1$$

C_1 e C_2 sono indip.

Immaginiamo che siano indipendenti.

$$P(C) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{P(C_1)}\, P(C_2) = P(C_2)$$

$$P(\bar{C_2}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ esiti fav.}}{\text{n}^\circ \text{ casi tot.}} = \frac{C_{6,2}}{C_{10,2}} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{6!}{\cancel{2!}\,4!}}{\frac{10!}{\cancel{2!}\,8!}} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

Teoria delle variabili casuali (o aleatorie)

Abbiamo già visto cos'è e due tipologie. Le discrete assumono valori reali, discreti (non necessariamente interi) in numero finito o numerabile, le continue assumono valori con continuità in una porzione dell'asse reale o in tutta la retta dei reali. Nel secondo caso abbiamo una definizione precisa: è continua se è associata ad una funzione di densità di probabilità.

V.C. CONTINUE

Una v.c. X si dice continua se esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che $\forall B \subset \mathbb{R}$

$$P(X \in B) = \int_B f(s)\, ds$$

f = funzione di densità di prob.

PROPRIETÀ DI f

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds$

Per le variabili casuali continue non ha senso parlare di una funzione di massa di probabilità (viene sempre nulla). Però è interessante la funzione di ripartizione di probabilità.

Funzione di ripartizione o distribuzione di probabilità

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE O DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$F : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad F(a) \equiv P(X \le a)$$

Finora nulla di diverso dal caso discreto.

$$F(a) \equiv P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(s)\, ds$$

se X v.c. continua

Nel caso continuo io posso dare una relazione tra funzione di ripartizione e funzione di densità (integrale, per cui è per questo che vanno scritte col maiuscolo e minuscolo).

PROPRIETÀ DI $F(a)$

1) $0 \le F(a) \le 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Perché rappresenta una probabilità (sempre compresa tra 0 e 1).

2) $F(-\infty) = 0$

Come nel caso discreto.

3) $F(+\infty) = P(X \le +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = 1$

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b \quad F(a) \le F(b)$

$$\int_{-\infty}^{a} f(s)\, ds \le \int_{-\infty}^{b} f(s)\, ds$$

Non vale strettamente minore perché in certi casi la funzione può essere nulla.

La quinta proprietà è diversa. Siccome la funzione di ripartizione esce da una funzione non negativa, sarà una funzione continua.

5) F funzione continua per le v.c. continue

Il teorema fondamentale del calcolo integrale enuncia:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(s)\, ds$$

Faccio la derivata.

$$\frac{dF(a)}{da} = \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{a} f(s)\, ds$$

L'integrale dipende da a solo come estremo di integrazione (f(s) non dipende da a e l'altro estremo è – infinito). Cosa succede? Derivata e integrale sono praticamente l'uno l'inverso dell'altro, quindi rimane la funzione integranda calcolata in a.

$$\frac{dF(a)}{da} = \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{a} f(s)\, ds = f(a)$$

Quindi:

$$\frac{dF(a)}{da} = f(a)$$

Ecco perché la variabili casuali discrete non hanno funzioni di densità, perché nei punti di discontinuità non si può derivare.

per questo motivo $\nexists$ la funzione di densità di una v.c. discreta es. 1

es. 1

X v.c. continua con $f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \\ \beta e^{-s} & \text{se } s \geq 0 \end{cases}$

Quanto vale β?

F?

Cominciamo con la prima domanda. Devono valere le 2 proprietà (f mai negativa, l'integrale da – infinito a + infinito deve fare 1).

Richiediamo che $f(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$$\beta e^{-s} \geq 0 \Rightarrow \beta \geq 0$$

Prima richiesta.

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds = 1$$

Dobbiamo specificare questa condizione alla funzione di densità. Bisogna separare l'integrale in due parti.

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,ds + \int_{0}^{+\infty} \beta e^{-s}\,ds$$

Capita tutte le volte che la funzione di densità viene spezzata in rami.

$$\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,ds} + \int_{0}^{+\infty} \beta e^{-s}\,ds = 1$$

$$\beta \left[-e^{-s}\right]_{0}^{+\infty} = 1$$

$$\beta(0-(-1))=1$$

$$\beta=1$$

Occupiamoci della funzione di ripartizione. Distinguiamo il caso di a negativo e a positivo.

$$\beta=1$$

$$F(a)=P(X\le a)=\int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds=\begin{cases}\int_{-\infty}^{a} 0\,ds=0 & \text{se } a<0\\ \int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds=\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,ds}+\int_{0}^{a} e^{-s}\,ds= & \text{se } a\ge 0\end{cases}$$

$$=\left[-e^{-s}\right]_0^a=-e^{-a}+1$$

$$F(a)=\begin{cases}0 & \text{se } a<0\\ 1-e^{-a} & \text{se } a\ge 0\end{cases}$$

Si possono verificare le proprietà.

Coppie di variabili casuali

Immaginiamo di avere un esperimento in cui è naturale associare coppie di variabili casuali, composto da più parti a cui corrispondono esiti specifici (e.g. lancio due dadi, il risultato del primo e il secondo, oppure di un individuo studio peso e altezza). Una coppia di variabili casuali si immaginano associate ad un esperimento che producano coppie di esiti.

COPPIE DI V. C.

Una coppia di v.c. si immagina associata ad un esperimento che produca coppie di esiti:

es. lancio di due dadi, estrazione di due palline da una scatola, studio peso e altezza degli individui di una popolazione ecc.

Possono essere coppie a valori casuali o discreti.

COPPIA DI V.C. (O VARIABILI CASUALI DOPPIE) A VALORI DISCRETI O DISCRETE

Associamo allo stesso esperimento due variabili (un vettore).

$$(X, Y) \qquad X \in \{x_1, x_2, \dots x_m\}$$
$$Y \in \{y_1, y_2, \dots y_n\}$$

Possono non avere lo stesso insieme di valori.

Possiamo definire la funzione di massa di probabilità congiunta.

FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$p(a, b) = P(X = a \underset{\overset{\shortparallel}{\cap}}{,} Y = b)$$

Ha il significato dell'intersezione (si verifica sia X = a che Y = b).

$$p : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$$

Si definiscono anche le funzioni di massa marginali.

FUNZIONI DI MASSA DI PROB. MARGINALI

$$p_X(a) = P(X = a)$$

$$p_Y(b) = P(Y = b)$$

Si concentrano solo su una variabile.

$$p_X(a) = P(X = a) = P(X = a, Y \le +\infty) = \sum_{J=1}^{n} p(a, y_J)$$

Sommo la funzione di massa congiunta sulla variabile che non mi interessa.

Lo stesso ragionamento si può fare al contrario.

$$p_Y(b) = P(Y = b) = P(X \le +\infty, Y = b) = \sum_{k=1}^{m} p(x_k, b)$$

es. 1 Scatola contiene 3 R, 4 V, 5 N

si estraggono 3 palline senza reimmissione

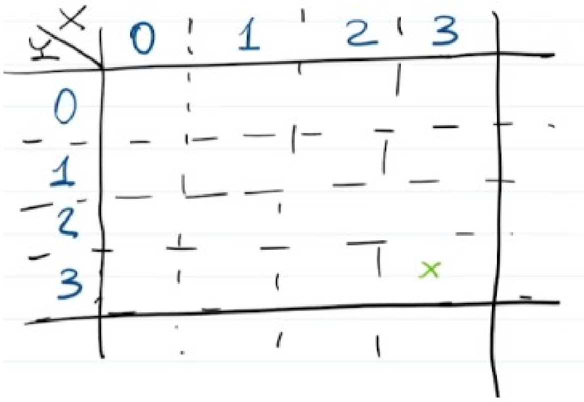
$X =$ 'n° palline rosse estratte'

$Y =$ 'n° palline verdi estratte'

$p(a, b)$? $p_X(a)$? $p_Y(b)$?

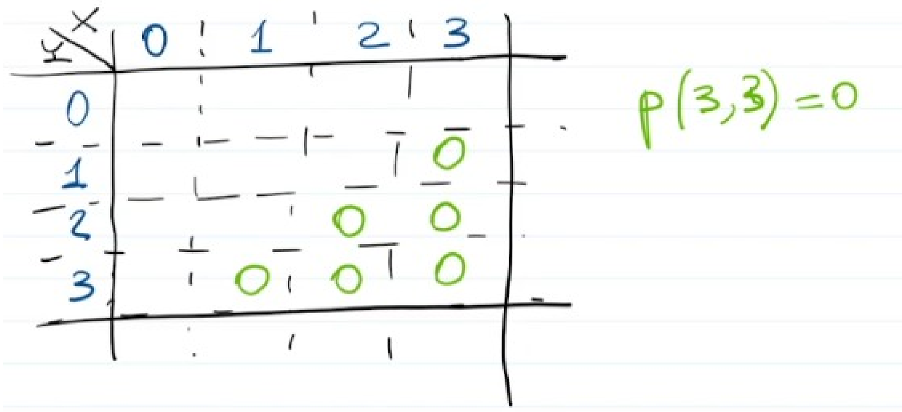
$X \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\qquad$ $Y \in \{0, 1, 2, 3\}$

Costruiamo una tabella in cui si riportano i valori della funzione di massa congiunta al variare dei valori che la X e la Y possono assumere.

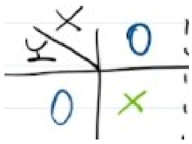


$$p(3,3)=0$$

Anche altri casi sono impossibili.



Cerchiamo di calcolare i rimanenti.



Si può verificare, perché possono essere estratte solo palline nere.

$$p(0,0)=\frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot.}}$$

Esiti favorevoli: 3 palline dalle nere.

Esiti totali: 3 palline dalle 12.

$$p(0,0) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot}} = \frac{C_{5,3}}{C_{12,3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{5!}{\cancel{3!}\,2!}}{\frac{12!}{\cancel{3!}\,9!}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{10}{220}$$

$$p(1,1) =$$

1 rossa, 1 verde, 1 nera. Stesso principio.

$$p(1,1) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot.}} = \frac{C_{3,1}\, C_{4,1}\, C_{5,1}}{C_{12,3}} =$$

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{\frac{12!}{3!\;9!}} =$$

$$= \frac{60 \cdot 3!}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{60}{220}$$

$$p(3,0) = \frac{C_{3,3}}{C_{12,3}} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{\frac{12!}{3!\;9!}} =$$

$$= \frac{3!}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{1}{220}$$

$$p(0,3) = \frac{C_{4,3}}{C_{12,3}} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{\frac{12!}{3!\;9!}} = \frac{4}{220}$$

E così via, si arriva alla tabella completa.

Y \ X	0	1	2	3
0	10/220	30/220	15/220	1/220
1	40/220	60/220	12/220	0
2	30/220	18/220	0	0
3	4/220	0	0	0

Si calcolano tutte le probabilità che non sono nulle, ottenendo questa matrice.

Come controllare che i calcoli siano corretti? Sono tutte probabilità (non più grande di 1), ragionare sui valori ottenuti.

$$\sum_{K=1}^{n} \sum_{J=1}^{m} p(x_K, y_J) = 1$$

Verificare se tutti i valori sommati insieme sono uguali a 1.

Come si calcolano le funzioni di massa marginali? Sommando tutte le righe (massa marginale di Y) o colonne (massa marginale di X) della funzione di massa di probabilità.

Y \ X	0	1	2	3	$p_Y(b)$
0	10/220	30/220	15/220	1/220	56/220
1	40/220	60/220	12/220	0	112/220
2	30/220	18/220	0	0	48/220
3	4/220	0	0	0	4/220
	84/220	108/220	27/220	1/220	

La parola marginale nasce dal fatto che venissero calcolate ai margini della tabella della funzione di massa congiunta.

Ci sono due proprietà. La prima è ovvia. La seconda è già stata enunciata.

PROPRIETÀ FUNZIONE DI MASSA DI PROB. CONGIUNTA

1) $0 \le p(a,b) \le 1 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p(x_k, y_j) = 1$

Per quanto riguarda le funzioni di massa marginali, valgono le proprietà delle funzioni di massa di una variabile normale.

PROPRIETÀ FUNZIONE DI MASSA DI PROB. MARGINALE
SONO LE STESSE DELLA FUNZIONE DI MASSA DI UNA VARIABILE

1) $0 \le p_X(a) \le 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$; 2) $\sum_{k=1}^{m} p_X(x_k) = 1$

1) $0 \le p_Y(b) \le 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$; 2) $\sum_{j=1}^{n} p_Y(y_j) = 1$

Si può definire anche la funzione di ripartizione congiunta e le funzioni di ripartizione marginali.

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$F(a,b) \equiv P(X \le a \underset{\cap}{,} Y \le b)$

$F: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$