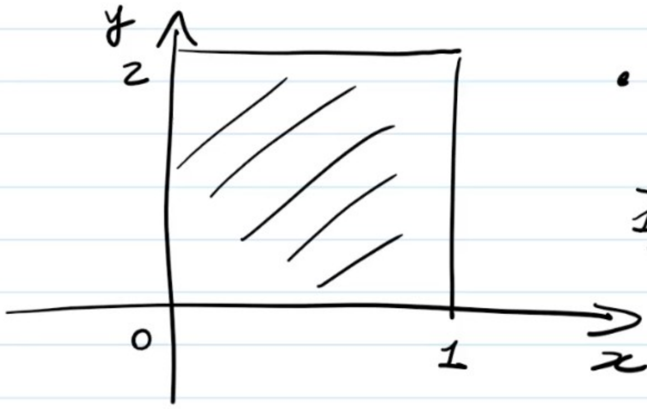
Esercizi

Una coppia di v.c. congiuntamente continue ha la funzione di densità di prob. congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} K & \text{se } x\in[0,1] \text{ e } y\in[0,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

K? $f_X(x)$ $f_Y(y)$; $Z = \min(X, Y)$: $F_Z(a)$
(INDIPENDENZA?)



• $f(x,y)$ è funzione di densità congiunta se

1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

1) $\Rightarrow K \geq 0$

2) $1 = \int_0^2 \left(\int_0^1 K\,dx \right) dy = K \int_0^2 \left(\int_0^1 1\,dx \right) dy = K \cdot \text{Area rettangolo} =$

$= 2K \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ \int_0^2 \frac{1}{2}\,dy = 1 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow X \sim U(0,1)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin [0,2] \\ \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} & \text{se } y \in [0,2] \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \in [0,1] \text{ e } y \in [0,2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \in [0,1] \text{ e } y \in [0,2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$Y \sim U(0,2)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } y \in [0,2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x)\, f_Y(y) = f(x,y)$$

$\Longrightarrow$ X e Y sono V.C. INDIPENDENTI

$$F_Z(a) = P(Z \le a) = P(\min(X,Y) \le a) =$$

$$= 1 - P(\min(X,Y) > a) = 1 - P(X > a, Y > a) =$$

$$\underset{\text{INDIP.}}{=} 1 - P(X > a)\, P(Y > a) =$$

$$= 1 - (1 - F_X(a))(1 - F_Y(a))$$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ a & \text{se } 0 \le a \le 1 \\ 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \frac{a}{2} & \text{se } 0 \le a \le 2 \\ 1 & \text{se } a > 2 \end{cases}$$

$$F_Z(a) = 1 - (1 - F_X(a))(1 - F_Y(a))$$

$$f_Z(a) = \frac{d F_Z(a)}{da} = -(-f_X(a))(1 - F_Y(a)) - (1 - F_X(a))(-f_Y(a)) =$$

$$= f_X(a)(1 - F_Y(a)) + f_Y(a)(1 - F_X(a))$$

es. 2

Un gioco consiste nel tirare un dado non truccato (cubico) e se esce un numero pari avanzare di due caselle, se esce un numero dispari restare fermi nella casella in cui ci si trova. Un giocatore partecipa al gioco lanciando il dado 30 volte e partendo dalla casella numero 1. Qual è la prob. che il giocatore si trovi alla fine in una casella con numero > 13?

X_k = 'n° di caselle aggiunte ad ogni lancio di dado'

$X_k \in \{0, 2\}$ $\quad p_X(0) = P(\text{dispari}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p_X(2) = P(\text{pari}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Y = 'avanzamento complessivo'

$$Y = \sum_{k=1}^{30} X_k$$

X_k INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE

Teorema del limite centrale.

$$E[X_k] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$E[X_k^2] = 0^2 \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow Var(X_k) = 2 - 1^2 = 1$$

$$Y = \sum_{k=1}^{30} X_k \;\tilde{\sim}\; N(30 \cdot 1, 30 \cdot 1)$$

$$P(1+Y>13)=P(Y>12)=P\left(\overbrace{\frac{Y-30}{\sqrt{30}}}^{Z\sim N(0,1)}>\frac{12-30}{\sqrt{30}}\right)=$$

$$=P\left(Z>-\frac{18}{\sqrt{30}}\right)=1-F_Z\left(-\frac{18}{\sqrt{30}}\right)$$

Se applichiamo l'approssimazione alla continuità della binomiale

$$P(Y>12)=P(Y>12.5)\ldots$$

es. 3

A e B devono prenotare una sala per la loro festa di laurea. Intendono invitare 248 amici, ma sanno che ciascuno di loro parteciperà alla festa con prob. 0.4 indipendentemente dagli altri.
Per questo motivo prenotano una sala con 100 posti
Quale è la prob. che la sala non sia sufficiente?

Se alla festa partecipano esattamente 100 persone e ciascuno ha prob. di restare tutta la serata pari al 75%, quanti saranno in media gli invitati alla fine della festa?

$X=$ 'n° invitati che partecipano alla festa'
$X\sim B(248, 0.4)$

$$X \sim B(248, 0.4) \dot{\sim} N(\underset{99.2}{248 \times 0.4}, \underset{59.52}{248 \times 0.4 \times 0.6})$$

$$P(X \leq 100) = P(X \leq 10.5) = P\left(\frac{X - 99.2}{\sqrt{59.52}} \leq \frac{10.5 - 99.2}{\sqrt{59.52}}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1.37)$$

$U =$ 'n° invitati che restano fino alla fine su 100'

$U \sim B(100, 0.75)$

$$E[U] = 100 \times 0.75 = 75$$

es.

A lancia un dado non truccato fino a quando esce 6. B fa lo stesso. Siano X e Y il numero di lanci rispettivamente di A e di B.

$P(X = Y)$?

$$X, Y \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$$

$X, Y \in \{1, 2, \dots\}$

$$P(X=Y) = P(\text{“}X=1 \cap Y=1\text{”} \cup \text{“}X=2 \cap Y=2\text{”} \cup \dots) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k \cap Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(P(X=k)\, P(Y=k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (q^{k-1} p)(q^{k-1} p) = \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} p^2 =$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \underset{k-1=J}{=} p^2 \sum_{J=0}^{+\infty} (q^2)^J =$$

$$= p^2 \frac{1}{1-q^2}$$

Nel caso dell'esercizio $p = \frac{1}{6} \Rightarrow q = \frac{5}{6}$

$$P(X=Y) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{36} \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{1}{36} \frac{36}{11} = \frac{1}{11}$$

es.

X v.c. continua

$$f(x) = \begin{cases} C\left(e^{-3x} - e^{-6x}\right) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

C? $\phi_X(t)$, $E[X]$, $Var(X)$?

$f(x)$ è funzione di densità di prob. se

1) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C \geq 0$

2) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} C\left(e^{-3x} - e^{-6x}\right)dx = C\left[-\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-6x}}{6}\right]_0^{+\infty} =$

$= C\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{C}{6} \Rightarrow 1 = \frac{C}{6} \Rightarrow C = 6$

$$\phi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} C\left(e^{-3x} - e^{-6x}\right)dx = 6\int_0^{+\infty}\left[e^{-(3-t)x} - e^{-(6-t)x}\right]dx =$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx =$

Condizioni di convergenza.

$$\begin{cases} 3-t > 0 \\ 6-t > 0 \end{cases} \Rightarrow t < 3$$

$$= 6\left[\frac{e^{-(3-t)x}}{3-t} + \frac{e^{-(6-t)x}}{6-t}\right]_0^{+\infty} = \left\{\begin{array}{l} 3-t>0 \\ 6-t>0 \end{array}\right. \Rightarrow t<3$$

$$= 6\left[\frac{1}{3-t} - \frac{1}{6-t}\right] \quad \text{pe } t<3$$

$$E[X] = \left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0} = 6\left.\left[\frac{1}{(3-t)^2} - \frac{1}{(6-t)^2}\right]\right|_{t=0} = 6\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36}\right) =$$

$$= 6\left(\frac{4-1}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \left.\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = 6\left.\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(3-t)^2} - \frac{1}{(6-t)^2}\right]\right|_{t=0}$$