

Dal catalogo McGraw-Hill:

Canolari, Pierobon, Calvagno, *Segnali e sistemi*

Conciauro, *Fondamenti di onde elettromagnetiche*

Del Corso, *Elettronica per telecomunicazioni*

Forouzan, *Reti di calcolatori e Internet*

Jaeger, Blalock, *Microelettronica - 1 Elettronica analogica*, 2^a ed.

Jaeger, Blalock, *Microelettronica - 2 Circuiti integrati analogici*, 2^a ed.

Jaeger, Blalock, *Microelettronica - 3 Elettronica digitale*, 2^a ed.

Luise, Vitetta, *Teoria dei segnali*, 2^a ed.

Millman, Grabel, Terreni, *Elettronica di Millman*, 4^a ed.

Pantavina, *Reti di telecomunicazioni - Networking e Internet*, 2^a ed.

Rizzoni, *Elettrotecnica - Principi e applicazioni*, 2^a ed.

Spirito, *Elettronica digitale*, 2^a ed.

Collana Schaum's:

Edminister, *Circuiti elettrici*

Edminister, *Elettronica parte prima*

Edminister, *Elettronica parte seconda*

Tokheim, *Elettronica digitale*

Charles K. Alexander
Matthew N.O. Sadiku

Circuiti elettrici

Terza edizione

edizione italiana a cura di
Carmelo Gerardi, Università degli Studi di Brescia
Paolo Gubian, Università degli Studi di Brescia

McGraw-Hill

Milano • New York • San Francisco • Washington D.C. • Auckland
Bogotà • Lisboa • London • Madrid • Mexico City • Montreal
New Delhi • San Juan • Singapore • Sydney • Tokio • Toronto

Indice

<i>Prefazione all'edizione italiana</i>	XI	3.7 Analisi agli anelli modificata	90
<i>Il sito web dedicato al libro</i>	XII	3.8 Scrittura diretta delle equazioni dell'analisi nodale e dell'analisi agli anelli	91
<i>Prefazione all'edizione americana</i>	XIII	3.9 Confronto fra analisi nodale e analisi agli anelli	95
<i>Nota agli studenti</i>	XVII	3.10 Analisi dei circuiti con <i>PSpice</i>	96
<i>Percorso guidato</i>	XVIII	3.11 Applicazione, circuiti con transistor in regime stazionario	98
<i>Gli autori</i>	XX	3.12 Il diodo	102
(Il simbolo † indica i paragrafi che trattano argomenti di natura avanzata)		3.13 Il Mosfet	104
PARTE I Circuiti in regime stazionario	1	Caso pratico Ponte di Wheatstone	107
Capitolo 1 Concetti fondamentali	3	Domande di riepilogo	110
1.1 Introduzione	3	Problemi	111
1.2 Sistemi di unità di misura	4	Problemi di riepilogo	121
1.3 Carica e corrente	4		
1.4 Tensione	7		
1.5 Potenza ed energia	8		
1.6 Elementi circuituali	10		
1.7 Applicazioni	12		
1.7.1 Il tubo a raggi catodici del televisore	13		
1.7.2 Bollente elettronica	14		
†1.8 Risoluzione di problemi	14		
Caso pratico Impianto di illuminazione	17		
Domande di riepilogo	20		
Problemi	20		
Problemi di riepilogo	23		
Capitolo 2 Leggi fondamentali	25		
2.1 Introduzione	25		
2.2 Legge di Ohm	25		
2.3 Nodi, rami e maglie	30		
2.4 Leggi di Kirchhoff	32		
2.5 Resistori in serie e partitore di tensione	37		
2.6 Resistori in parallelo e partitore di corrente	38		
2.7 Trasformazioni stella-triangolo	45		
2.8 Applicazioni	51		
2.8.1 Sistemi di illuminazione	51		
2.8.2 Progetto di strumenti di misura per grandezze stazionarie	52		
Caso pratico Alimentazione di dispositivi elettronici	56		
Domande di riepilogo	60		
Problemi	61		
Problemi di riepilogo	70		
Capitolo 3 Metodi di analisi	71		
3.1 Introduzione	71		
3.2 Analisi nodale	71		
3.3 Analisi nodale in presenza di generatori di tensione	77		
3.4 Analisi nodale modificata	81		
3.5 Analisi agli anelli	83		
3.6 Analisi agli anelli in presenza di generatori di corrente	88		
		Caso pratico Calcolatore analogico	191
		Domande di riepilogo	194
		Problemi	194
		Problemi di riepilogo	204
Capitolo 4 Teoremi delle reti	123		
4.1 Introduzione	123		
4.2 Linearietà	123		
4.3 Sovrapposizione	125		
4.4 Trasformazione dei generatori	130		
4.5 Teorema di Thevenin	132		
4.6 Teorema di Norton	139		
4.7 Dimostrazione dei teoremi di Thevenin e di Norton	142		
4.8 Massimo trasferimento di potenza	144		
4.9 Verifica dei teoremi delle reti con <i>PSpice</i>	146		
4.10 Applicazioni	149		
4.10.1 Modelli dei generatori reali	149		
4.10.2 Misura delle resistenze	151		
Caso pratico Attenuatore passivo	154		
Domande di riepilogo	157		
Problemi	157		
Problemi di riepilogo	166		
Capitolo 5 Amplificatori operazionali	169		
5.1 Introduzione	169		
5.2 Amplificatori operazionali	169		
5.3 Amplificatore operazionale ideale	173		
5.4 Amplificatore invertente	175		
5.5 Amplificatore non invertente	177		
5.6 Amplificatore sommatore	179		
5.7 Amplificatore differenziale	180		
5.8 Collegamento in cascata di circuiti con operazionali	183		
5.9 Analisi dei circuiti con operazionali in <i>PSpice</i>	186		
5.10 Applicazioni	187		
5.10.1 Convertitore digitale-analogico	187		
5.10.2 Amplificatore per strumentazione	189		
Caso pratico Calcolatore analogico	191		
Domande di riepilogo	194		
Problemi	194		
Problemi di riepilogo	204		

Capitolo 6	Condensatori e induttori	205	19.6	Legge di Kirchhoff nel dominio della frequenza	361
6.1	Introduzione	205	9.7	Composizione di impedenze	362
6.2	Condensatori	205	19.8	Applicazioni:	367
6.3	Condensatori in serie e in parallelo	212	9.8.1	Circuiti di sfasamento	367
6.4	Induttori	215	9.8.2	Ponte AC	370
6.5	Induttori in serie e in parallelo	219			
6.6	Applicazioni:	223	Domande di ripilogo		174
6.6.1	Integratore	223	Problemi		374
6.6.2	Derviatore	225	Problemi di ripilogo		381
6.6.3	Calcolatore analogico	226			
Domande di ripilogo		230			
Problemi		231			
Problemi di ripilogo		239			
Capitolo 7	Circuiti del primo ordine	241	Capitolo 10	Analisi in regime sinusoidale	383
7.1	Introduzione	241	10.1	Introduzione	383
7.2	Circuito RC autonomo	241	10.2	Analisi nodale	383
7.3	Circuito RL autonomo	246	10.3	Analisi agli anelli	386
7.4	Funzioni singolari elementari	252	10.4	Principio di sovrapposizione	389
7.5	Risposta al gradino di un circuito RC	259	10.5	Trasformazione di generatori	391
7.6	Risposta al gradino di un circuito RL	265	10.6	Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton	393
7.7	Circuiti del primo ordine con amplificatori operazionali	270	10.7	Circuiti AC con amplificatori operazionali	397
7.8	Analisi in transitorio con PSpice	274	10.8	Analisi AC con PSpice	398
7.9	Applicazioni	277	10.9	Applicazioni:	402
7.9.1	Circuito di ristoro	278	10.9.1	Moltiplicatore di capacità	402
7.9.2	Flash fotografico	279	10.9.2	Oscillatori	403
7.9.3	Circuiti per relé	280			
7.9.4	Circuito di accensione per autoveicolo	281			
Domande di ripilogo		284	Domande di ripilogo		406
Problemi		284	Problemi		407
Problemi di ripilogo		293			
Capitolo 8	Circuiti del secondo ordine	295	Capitolo 11	Potenza in regime sinusoidale	417
8.1	Introduzione	295	11.1	Introduzione	417
8.2	Calcolo di condizioni iniziali e finali	296	11.2	Potenza istantanea e potenza media	417
8.3	Circuito RLC serie autonomo	299	11.3	Teorema sul massimo trasferimento di potenza media	422
8.4	Circuito RLC parallelo autonomo	305	11.4	Valori efficaci	425
8.5	Risposta al gradino di un circuito RLC serie	310	11.5	Potenza apparente e fattore di potenza	428
8.6	Risposta al gradino di un circuito RLC parallelo	314	11.6	Potenza complessa	431
8.7	Circuiti del secondo ordine nel caso generale	316	11.7	Conservazione della potenza	434
8.8	Circuiti del secondo ordine con operazionali	321	11.8	Rifasamento	437
8.9	Analisi di circuiti RLC con PSpice	323	11.9	Applicazioni:	439
8.10	Dualità	327	11.9.1	Misure delle potenze	440
8.11	Applicazioni	329	11.9.2	Costo dei consumi di elettricità	442
8.11.1	Sistema di accensione per auto	329			
8.11.2	Circuito di smoothing	331			
Domande di ripilogo		333	Caso pratico Condensatore di accoppiamento		444
Problemi		334	Domande di ripilogo		447
Problemi di ripilogo		342	Problemi		448
PARTE 2	Circuiti in regime sinusoidale	343	Problemi di ripilogo		456
Capitolo 9	Sinusoidi e fasi	345			
9.1	Introduzione	345	Capitolo 12	Circuiti trifase	457
9.2	Sinusoidi	346	12.1	Introduzione	457
9.3	Fasi	350	12.2	Tensioni trifase bilanciate	458
9.4	Relazioni tra fasi per gli elementi circuituali	356	12.3	Configurazione stella-stella bilanciata	461
9.5	Impedenza e ammettenza	358	12.4	Configurazione stella-triangolo bilanciata	465
			12.5	Configurazione triangolo-triangolo bilanciata	467
			12.6	Configurazione triangolo-stella bilanciata	469
			12.7	Potenza in un sistema trifase bilanciato	472
			12.8	Sistemi trifase sbilanciati	477
			12.9	PSpice per i circuiti trifase	480
			12.10	Applicazioni	484
			12.10.1	Misure di potenza trifase	485
			12.10.2	Cablaggio degli impianti domestici	489
Domande di ripilogo					
Problemi					
Problemi di ripilogo					

Capitolo 13 Circuiti con accoppiamento magnetico				
13.1 Introduzione	503	15.9.1 Circuiti con transistori	648	
13.2 Mutua induttanza	503	15.9.2 Sintesi di reti a scala	653	
13.3 Energia in un circuito con accoppiamento	510	Caso pratico Progetto di una rete a scala	656	
13.4 Trasformatori lineari	514	Demande di riepilogo	660	
13.5 Trasformatori ideali	519	Problemi	660	
13.6 Autotrasformatori ideali	525	Problemi di riepilogo	669	
†13.7 Trasformatori trifase	528			
13.8 Analisi con PSpice di circuiti		Appendice A Numeri complessi	671	
magneticamente accoppiati	531	A.1 Rappresentazioni dei numeri complessi	671	
†13.9 Applicazioni	535	A.2 Operazioni matematiche	673	
13.9.1 Trasformatore come dispositivo		A.3 Formule di Euler	675	
di isolamento	536	A.4 Identità notevoli	676	
13.9.2 Trasformatore come dispositivo				
di adattamento	537	Appendice B PSpice for Windows	679	
13.9.3 Distribuzione della potenza elettrica	539	B.1 Design center for Windows	679	
Caso pratico Autotrasformatore	540	B.2 Disegno di un circuito	680	
Demande di riepilogo	545	B.3 Analisi DC	686	
Problemi	546	B.4 Analisi in transitorio	692	
Problemi di riepilogo	557	B.5 Analisi AC/Risposta in frequenza	699	
		Bibliografia	705	
		Indice analitico	707	
Capitolo 14 Risposta in frequenza				
14.1 Introduzione	559	All'indirizzo		
14.2 Funzione di trasferimento	559	www.ateneonline.it/alexander3e sono		
†14.3 La scala dei decibel	563	disponibili i seguenti capitoli aggiuntivi:		
14.4 Diagramma di Bode	564			
14.5 Risonanza serie	575	Capitolo 16 Trasformata di Laplace		
14.6 Risonanza parallelo	580	16.1 Introduzione		
14.7 Filtri passivi	583	16.2 Definizione di trasformata di Laplace		
14.7.1 Filtro passa-basso	585	16.3 Proprietà della trasformata di Laplace		
14.7.2 Filtro passa-alto	586	16.4 Anttrasformata di Laplace		
14.7.3 Filtro passa-banda	586	16.5 Integrale di convoluzione		
14.7.4 Filtro arresta-banda	587	16.6 Applicazione alle equazioni		
14.8 Filtri attivi	589	Integrodifferenziali		
14.8.1 Filtro passa-basso del primo ordine	590			
14.8.2 Filtro passa-alto del primo ordine	591	Capitolo 17 Applicazioni della trasformata di		
14.8.3 Filtro passa-banda	591	Laplace		
14.8.4 Filtro arresta-banda (o notch)	592	17.1 Introduzione		
†14.9 Scaling	595	17.2 Modelli di elementi circuituali		
14.9.1 Scaling dei moduli	596	17.3 Analisi dei circuiti		
14.9.2 Scaling in frequenza	596	17.4 Funzioni di trasferimento		
14.9.3 Scaling dei moduli e della frequenza	597	17.5 Variabili di stato		
14.10 Risposta in frequenza con PSpice	598	17.6 Applicazioni		
14.11 Calcolo usando MATLAB	601	17.7 Calcolo di funzioni di trasferimento		
14.12 Applicazioni	603	con MATLAB		
14.12.1 Ricevitore radio	604	Capitolo 18 Serie di Fourier		
14.12.2 Telefono multinfrequenza	605	18.1 Introduzione		
14.12.3 Circuito crossover	607	18.2 Serie di Fourier in forma trigonometrica		
Demande di riepilogo	609	18.3 Simmetria		
Problemi	610	18.4 Applicazione ai circuiti		
Problemi di riepilogo	617	18.5 Potenza media e valori RMS		
Capitolo 15 Reti bipola		18.6 Serie di Fourier in forma esponenziale		
15.1 Introduzione	619	18.7 Analisi di Fourier con PSpice		
15.2 Parametri impedenza	620	18.8 Applicazioni		
15.3 Parametri ammettenza	623			
15.4 Parametri ibridi	627	Capitolo 19 Trasformata di Fourier		
15.5 Parametri di trasmissione	633	19.1 Introduzione		
†15.6 Relazioni tra i parametri	636	19.2 Definizione di trasformata di Fourier		
15.7 Interconnessione di bipola	640	19.3 Proprietà della trasformata di Fourier		
15.8 Calcolo dei parametri di bipola con PSpice	645	19.4 Applicazione ai circuiti		
†15.9 Applicazioni	648	19.5 Teorema di Parseval		
		19.6 Confronto fra le trasformate di Fourier		
		e di Laplace		
		19.7 Applicazioni		

Prefazione alla terza edizione italiana

L'ormai avvenuto passaggio di tutte le facoltà di Ingegneria al nuovo ordinamento, che prevede il conseguimento della laurea dopo soli tre anni di corso, ha portato ad una inevitabile revisione dei piani di studio di tutte le classi di studio; nella stragrande maggioranza di quelle legate all'Ingegneria dell'informazione, e non solo in quelle, questo ha comportato uno spostamento del corso di introduzione ai circuiti al primo anno di corso. Tutto ciò si riflette sul livello di preparazione presumibile da parte degli allievi all'inizio del corso e sul livello al quale può essere tenuta l'esposizione della materia durante il corso. L'approccio tradizionale, basato nella maggioranza delle sedi italiane sull'impostazione di testi validissimi e di lunga e provata efficacia, quale quello diffusissimo di Desoer e Kuh, nella sua prima e seconda edizione, pur riscontrando un indubbio successo tra i docenti ed anche tra gli studenti più brillanti ed interessati, può costituire una introduzione troppo astratta alla teoria dei circuiti, poco adatta a studenti del primo anno, e soprattutto lontana dalle raccomandazioni che accompagnano i nuovi ordinamenti, che prevedono la formazione di tecnici per i quali il fondamento teorico, pur rimanendo essenziale per la preparazione di un ingegnere, non è tutto concentrato nel biennio propedeutico, nel quale invece bisogna fornire anche contenuti "tecnici" e pratici. Si inserisce in questo contesto il libro di Alexander e Sadiku, che presenta i circuiti con una trattazione semplice e piana, ricchissima di esempi che guidano il lettore ad una comprensione estremamente graduale della materia. La trattazione dei fondamenti di teoria dei circuiti è quanto mai tradizionale, ciò che caratterizza, se mai, il testo è il fatto che vengono trattati esclusivamente i circuiti lineari tempo-invarianti (secondo la classificazione Kuh-Desoer-Chua), che la teoria viene introdotta in modo estremamente graduale, che ogni elemento della teoria viene immediatamente illustrato da uno o due esempi completamente svolti e da altrettanti esercizi proposti di tipo "straightforward", cioè nei quali bisogna sostanzialmente applicare una sola regola, e che alla fine di ogni capitolo vengono presentate in maniera semplificata diverse applicazioni pratiche dei concetti studiati. A volte, per precisa scelta didattica, la teoria viene semplificata e vengono tacite le eccezioni alle regole, differendone la trattazione al momento in cui l'impianto fondamentale è stato ormai assimilato. Un testo estremamente "didattico", quindi, tanto da rischiare in qualche passo di non piacere al teorico dei circuiti puro, e forse in qualche altro di eccedere nella gradualità ed annoiare lo studente particolarmente brillante. Per contro, dotato di solidità di fondo, di buone doti di chiarezza, di indubbia efficacia, in particolare su quella "media" di studenti che i nuovi ordinamenti indicano come l'obiettivo dello snellimento dei curricula e del calcolo delle unità di misura per il sistema dei crediti. Gli studenti che apprenderanno i fondamenti dei circuiti da questo testo saranno poi quei professionisti che, quando affronteranno un problema circuituale, dovranno ricorrere al simulatore non appena il problema si fa computazionalmente appena

più che banale: di qui l'introduzione all'uso di PSpice fin dai primi capitoli, ed il suo uso in tutto il libro, ed il riferimento a MATLAB come strumento per la risoluzione di sistemi di equazioni ed il tracciamento di grafici di ogni tipo. Il testo di Alexander e Sadiku riflette quindi un lungo e accurato lavoro di esposizione didattica con taglio moderno, con una semplice ma corretta esposizione della materia ed un impianto di esempi ed esercizi estremamente curato. In questo senso, esso può essere usato anche come testo per lo studio autonomo e addirittura, dati i prerequisiti di matematica abbastanza modesti, negli ultimi anni degli Istituti Secondari Superiori. Sarà compito del docente operare l'opportuna scelta di paragrafi che forniscano il "taglio" corretto ed adatto al corso svolto a lezione, come pure il fornire eventuali complementi di teoria dei circuiti che, se non sono richiesti per lo svolgimento degli esercizi, potranno stimolare l'"appetito" degli studenti più interessati e brillanti ad approfondire, in successivi corsi di circuiti, una materia che è molto più profonda e articolata di quanto qui viene presentato. La terza edizione italiana che qui presentiamo vede l'introduzione di parti completamente nuove, quali nuovi paragrafi che presentano i "Casi pratici" volti a legare ancora di più la materia trattata alle applicazioni pranche, la breve introduzione ai componenti principali dei circuiti elettronici (diodo a semiconduttore e transistor MOSFET), come pure la revisione sostanziale in particolare dei capitoli introduttivi; al fine di adattare meglio l'esposizione dei fondamenti e delle leggi principali al taglio didattico delle università italiane. Nuovi sono pure i paragrafi sull'analisi nodale e sulla analisi agli anelli modificate, che presentano una trattazione più classica dei due metodi in presenza di componenti non controllati, rispettivamente, in tensione e in corrente; i due paragrafi possono essere utilizzati anche in sostituzione di quelli originali, comunque presenti, facenti uso dei concetti di supermodo e superanello. Queste modifiche riflettono l'esigenza di trasformare sempre più il testo in uno strumento di lavoro flessibile ed aperto per docenti e studenti. Un cenno, infine, alla traduzione. Si è voluto, credendo di interpretare lo spirito del libro, utilizzare un approccio "misto", nel quale accanto ad un'esposizione e ad una scelta di terminologia tradizionale, il più possibile legate alla ormai consolidata scuola circuitistica italiana, si è scelto, nei casi in cui se ne è presentata la necessità, come ad esempio per mantenere coerenza e uniformità di terminologia tra le diverse parti del testo, di operare per quanto possibile verso il "nuovo", introducendo in qualche caso se non nuovi termini (la materia è ormai talmente consolidata, anche in Italia, da non renderlo più necessario) almeno locuzioni nuove.

Il sito web dedicato al libro

Sul sito web dedicato al libro, all'indirizzo www.ateneonline.it/alexander3e, sono disponibili materiali didattici di supporto per docenti e studenti.

- **Risorse per i docenti**

I docenti che adottano il testo possono ottenere la password per l'accesso a queste risorse registrandosi sul sito, facendo clic sul pulsante "Nuova registrazione". Nell'Area Docenti sono presenti:

- Illustrazioni del testo in formato PowerPoint
- Lucidi del testo in formato PowerPoint

- **Risorse per gli studenti**

Gli studenti possono accedere a queste risorse utilizzando il codice personale riportato sulla cartolina allegata al volume. Nell'Area Studenti sono presenti:

- Soluzioni degli esercizi contenuti nel testo
- Test a risposta multipla
- Capitoli aggiuntivi su: Trasformata di Laplace, Applicazioni della trasformata di Laplace, Serie di Fourier, Trasformata di Fourier
- Link a simulatori e software
- Link utili
- Note di carattere storico
- Tutorial

Ringraziamenti dell'editore

L'editore ringrazia i revisori che con le loro preziose indicazioni hanno contribuito alla realizzazione della terza edizione di *Circuiti elettrici*.

VINCENZO BONAIUTO, *Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"*

ERNESTO CHIARANTONI, *Politecnico di Bari*

DARIO D'AMORE, *Politecnico di Milano*

GABRIELE GRANDI, *Alma Mater Studiorum Università di Bologna*

STEFANO GRIVET-TALOCIA, *Politecnico di Torino*

ANTONIO LUCHETTA, *Università degli Studi di Firenze*

PAOLO MAFFEZZONI, *Politecnico di Milano*

ANTONIO MASSARINI, *Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia*

PAOLO MOLFINO, *Università degli Studi di Genova*

SERGIO AMEDEO PIGNARI, *Politecnico di Milano*

ANDREA SCORZONI, *Università degli Studi di Perugia*

MARCO STORACE, *Università degli Studi di Genova*

VINCENZO TUCCI, *Università degli Studi di Salerno*

Prefazione all'edizione americana

Caratteristiche

Gli obiettivi principali della terza edizione di questo libro rimangono gli stessi della prima e della seconda edizione – presentare l'analisi dei circuiti in una maniera che risulti più chiara, più interessante e più facile da comprendere di quanto non facciano i testi che lo hanno preceduto e di aiutare lo studente all'inizio del suo curriculum ad iniziare a vedere il "divertimento" negli studi di ingegneria. Tale obiettivo viene perseguito grazie ai seguenti accorgimenti:

Introduzioni e sommari dei capitoli

In ogni capitolo, il paragrafo introduttivo chiarisce il legame con i capitoli precedenti ed enuncia chiaramente gli obiettivi che nel capitolo stesso si perseguono. Inoltre, ogni capitolo termina con un sommario dei concetti e delle formule più importanti presentate.

Metodologia di soluzione dei problemi

Nel Capitolo I si presenta un metodo in sei passi da seguire per risolvere i problemi, che viene poi utilizzato con regolarità in tutto il testo, per incoraggiare lo studente ad adottare un procedimento passo-passo che porti con sicurezza alla conclusione.

Stile chiaro e conciso

Tutti i principi sono presentati in maniera concisa, logica e per mezzo di procedure passo-passo. Si è cercato sempre di evitare la verbosità e l'aggiunta di dettagli superflui, che rischiano di nascondere i concetti importanti e di impedire la chiara comprensione della materia.

Formule e termini importanti evidenziati

Le formule più importanti sono state evidenziate tipograficamente, per aiutare lo studente a distinguere ciò che riveste particolare importanza da ciò che è meno importante; sempre al fine di garantire che lo studente apprenda l'essenziale della materia, tutti i termini importanti vengono definiti ed evidenziati in maniera speciale.

Note a piè di pagina

Le note a piè di pagina vengono utilizzate a fini pedagogici: esse servono molti scopi – riferimenti incrociati, chiarimenti, avvisi, richiami di concetti esposti altrove, segnalazione degli errori più frequenti e suggerimenti per la risoluzione di problemi.

Esempi svolti

Alla fine di ogni paragrafo vengono presentati alcuni esempi interamente svolti. Gli esempi sono da consi-

derarsi parte integrante del testo e il loro svolgimento è dettagliato, senza mai richiedere al lettore di completare passaggi mancati. Questi esempi vogliono fornire allo studente una buona comprensione del problema e la confidenza necessaria ad affrontare e risolvere altri problemi autonomamente. Alcuni di questi problemi vengono risolti con due o tre metodi diversi, al fine di migliorarne la comprensione e di facilitare il confronto fra approcci diversi.

Esercizi nel testo

Per dare allo studente l'occasione di esercitarsi, ciascun esempio è seguito immediatamente da un esercizio proposto, del quale viene fornita la risposta. Lo studente può seguire passo per passo la soluzione dell'esempio per risolvere l'esercizio proposto, senza bisogno di sfogliare il testo alla ricerca di formule o definizioni. L'esercizio proposto serve allo studente per verificare di avere ben compreso l'esempio che lo precede, e per rinforzare la comprensione dei concetti prima di passare al paragrafo successivo.

Paragrafi sulle applicazioni

L'ultimo paragrafo di ciascun capitolo è dedicato alla presentazione di applicazioni pratiche dei concetti trattati nel capitolo stesso. Ogni capitolo presenta almeno uno o due problemi pratici. Tutto ciò incoraggia lo studente ad applicare i concetti appresi a situazioni della realtà.

Domande di riepilogo

Alla fine di ogni capitolo si trovano dieci domande di riepilogo a scelta multipla, con le relative risposte. Le domande spesso hanno lo scopo di mettere in evidenza quei piccoli "trucchi" che non si riescono a mettere in evidenza negli esempi e nei problemi proposti alla fine del capitolo. Le domande sono utili come autovalutazione, per aiutare lo studente a capire quanto ha veramente appreso della materia presentata nel capitolo.

Strumenti di calcolo

In tutto il testo si incoraggia lo studente a fare uso del simulatore *PSpice*, con paragrafi specificamente dedicati alla sua applicazione in quasi tutti i capitoli, e di *MATLAB*. Viene utilizzata la versione di *PSpice* per gli ambienti Windows. *PSpice* viene introdotto fino dai primi capitoli, così che lo studente lo possa utilizzare in tutto il corso. L'Appendice B contiene un'introduzione all'uso di *PSpice* for Windows.

Amplificatore operazionale

Viene introdotto l'amplificatore operazionale come elemento circuitale fin dai primi capitoli.

Novità nella presente edizione

Il corso introduttivo sull'analisi dei circuiti rappresenta probabilmente il primo approccio degli studenti ad argomenti del mondo dell'ingegneria elettrica in generale. Sono stati inclusi nel testo accorgimenti volti ad aiutare gli studenti nella familiarizzazione con la disciplina.

Grafica a colori

Un progetto grafico nuovo e la nuova grafica a colori ravvano gli schemi circuituali e aiutano a evidenziare i concetti più importanti in tutto il testo.

Esempi con svolgimento esteso

Alcuni esempi risolti in dettaglio secondo il procedimento di soluzione in sei passi servono ad incoraggiare lo studente ad affrontare i problemi in modo sistematico. In ogni capitolo, almeno uno degli esempi è nato su questo modo.

Problemi proposti

Ci sono più di 300 nuovi problemi proposti alla fine dei capitoli, che servono sia come esercizio che come rinforzo dei concetti principali presentati nel testo.

Icône identificative di problemi proposti

Ci sono delle icônes speciali che contraddistinguono quei problemi proposti che sono rappresentativi di situazioni di progetto dell'ingegneria; altre icônes segnalano i problemi che si prestano ad essere risolti con *PSpice* o con *MATLAB*.

Organizzazione

Il testo è stato concepito per un corso sull'analisi dei circuiti lineari della durata di un semestre. Il testo è diviso in due parti:

- La Parte 1, che consiste dei Capitoli da 1 a 8, è dedicata ai circuiti nel dominio del tempo, e tratta le leggi e i teoremi fondamentali, i metodi di analisi, gli elementi passivi ed attivi.
- La Parte 2, formata dai Capitoli da 9 a 15, tratta i circuiti AC. Vengono introdotti i fasi, l'analisi in regime sinusoidale, la potenza in regime sinusoidale, i valori efficaci, i sistemi trifase, la risposta in frequenza e l'analisi dei componenti a due porte.

I paragrafi che recano un simbolo (†) possono essere semplicemente accennati oppure addirittura assegnati come lettura autonoma. Essi possono in ogni caso essere omessi senza perdita di continuità. Ciascun capitolo è corredato da un elevato numero di problemi proposti, raggruppati secondo il paragrafo del testo al quale si riferiscono, e di difficoltà variabile. Il docente può sceglierne alcuni come esempi ed assegnarne altri

come esercizio autonomo. Come già accennato, in questa edizione si fa uso di tre nuove icônes: l'icône di *PSpice* denota quei problemi che richiedono l'uso di *PSpice* per la loro soluzione, oppure problemi in cui la complessità del circuito è tale che l'uso di *PSpice* può rendere la soluzione molto più agevole, oppure ancora quei problemi in cui *PSpice* può essere utilizzato per controllare la correttezza della soluzione trovata. L'icône di *MATLAB* viene usata per indicare quei problemi che richiedono l'uso di *MATLAB* per la loro soluzione, quelli in cui l'uso di *MATLAB* può rivelarsi utile per la struttura del problema o per la sua complessità, e per quei problemi in cui *MATLAB* può servire come verifica della soluzione ottenuta. Infine, viene utilizzata l'icône di Progetto per identificare quei problemi che sono particolarmente utili a sviluppare nello studente quelle abilità che sono più utili nel progetto. I problemi di maggiore difficoltà sono indicati da un asterisco (*). Alla fine della sezione dei problemi si trovano sempre dei problemi di riassunto, che sono in genere problemi di carattere applicativo che richiedono le conoscenze apprese nel capitolo.

Prerequisiti

Come per la maggior parte dei libri di testo introduttivi all'analisi dei circuiti, i prerequisiti principali sono gli elementi dei corsi di fisica e di analisi matematica. La conoscenza dei numeri complessi risulta pure utile, anche se non strettamente necessaria, essendo presente un'apposita sull'algebra dei numeri complessi.

Ringraziamenti

Desideriamo esprimere il nostro apprezzamento per l'amorevole supporto che abbiamo ricevuto dalle nostre mogli (Hannah e Kikelomo), figlie (Christina, Tamar, Jennifer, Motumrayo, Ann e Joyce), figli (Baixi) e ai membri delle nostre famiglie estese.

Desideriamo ringraziare lo staff editoriale e della produzione di McGraw-Hill: Suzanne Jeans, publisher; Michael Hackett, senior sponsoring editor; Michelle Flomenhoft e Katie White, developmental editors; Peggy Lucas e Joyce Watters, project managers; Carrie Burger, photo researcher; e Rick Noel, designer, così come ai freelancer Pamela Carley e George Watson e a Vijay Kataria di The GTS Companies. Apprezziamo inoltre il duro lavoro di Tom Hartley dell'Università di Akron per la sua dettagliatissima valutazione dei vari elementi del testo.

Desideriamo ringraziare Yongjian Fu e il suo eccellente team di studenti Bramaramba Elka e Saravanan Chinniah per i loro sforzi nello sviluppo di *KCIDE for Circuits*. Anche i loro sforzi per aiutarci a continuare a migliorare questo software sono stati molto apprezzati. La terza edizione ha tratto grande giovento dai seguenti revisori e collaboratori (in ordine alfabetico): Jean Andrian, Florida International University

*Jorge L. Aravena, Louisiana State University
 Les Axelrod, Illinois Institute of Technology
 Alok Berry, George Mason University
 Tom Brewer, Georgia Institute of Technology
 Susan Burkett, University of Arkansas
 Rich Christie, University of Washington
 Arunsi Chuku, Tuskegee University
 Thomas G. Cleaver, University of Louisville
 Randy Collins, Clemson University
 David Dietz, University of New Mexico
 Bill Diona, The University of Texas at El Paso
 Shervin Erfani, University of Windsor
 Alan Felzer, California State Polytechnic University, Pomona
 Bob Grondin, Arizona State University
 Bob Hendricks, Virginia Polytechnic Institute and State University
 Sheila Horan, New Mexico State University
 Hans Kuehl, University of Southern California
 Jack Lee, University of Texas, Austin
 Long Lee, San Diego State University
 Sam Lee, University of Oklahoma
 Jia Grace Lu, University of California, Irvine
 Hamid Majlesein, Southern University & A&M College
 Frank Merat, Case Western Reserve University
 Shayan Mookherjea, University of California, San Diego
 Mahmoud Nahvi, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
 Scott Norr, University of Minnesota, Duluth
 Barbara Oakley, Oakland University
 Tamara Papalias, San Jose State University
 Owe Petersen, Milwaukee School of Engineering
 Craig Petrie, Brigham Young University
 Michael Polis, Oakland University
 Aleksandar Prodic, University of Toronto
 Ceon Ramon, University of Washington
 Prentiss Robinson, California State Polytechnic University, Pomona
 Raghu Sattaluri, Oregon State University
 Marwan Simean, University of Pittsburgh
 Robin Strickland, University of Arizona
 Kalpathy Sundaram, University of Central Florida
 Russell Tatro, California State University
 Xiao Bang Xu, Clemson University*

Analogamente, desideriamo ringraziare i revisori delle precedenti edizioni, che hanno contribuito all'attuale successo del testo:

*Bogdan Adamczyk, Grand Valley State University
 Keyvan Ahdut, University of the District of Columbia
 Hamid Allamehzadeh, Eastern New Mexico University
 Jorge L. Aravena, Louisiana State University
 Idris Azouz, Southern Utah University
 John A. Bloom, Biola University
 Kiron C. Bordoloi, University of Louisville
 James H. Burghart, Cleveland State University*

*Phil Burton, University of Limerick
 Edward W. Chandler, Milwaukee School of Engineering
 Amit Chatterjee, Purdue University, Fort Wayne
 Erik Cheever, Swarthmore College
 Fow-Sen Choa, University of Maryland, Baltimore County
 Chiu H. Choi, University of North Florida
 Thomas G. Cleaver, University of Louisville
 Michael J. Cloud, Lawrence Technological University
 Mehmet Culur, Gannon University
 Saswati Datta, University of Maryland, Baltimore County
 Mohamed K. Darwish, Brunel University (United Kingdom)
 Shirshak Dhall, Southern Illinois University
 Kevin D. Donohue, University of Kentucky
 Fred Dreyfus, Pace University
 Amelito G. Enriquez, Canada College
 Ali Eydgahı, University of Maryland Eastern Shore
 Gary K. Fedder, Carnegie Mellon University
 Cynthia J. Finelli, Kettering University
 Rob Frohne, Walla Walla College
 Andreas Fuchs, Pennsylvania State University, Erie
 Tayeb A. Giama, University of North Florida
 Chandrakanth H. Gowda, Tuskegee University
 Duane Hanselman, University of Maine
 Reza Hashemian, Northern Illinois University
 Hassan Hassan, Lawrence Technological University
 Rod Heisler, Walla Walla College
 Amelito G. Henriquez, University of New Orleans
 H. Randolph Holt, Northern Kentucky University
 Reza Iravani, University of Toronto
 Richard Johnston, Lawrence Technological University
 William K. Kennedy, University of Canterbury (New Zealand)
 Albert M. Knebel, Monroe Community College
 William B. Kolasa, Lawrence Technological University
 Roger A. Kuntz, Penn State Erie, The Behrend College
 Sharad R. Laxpati, University of Illinois at Chicago
 Choon Sae Lee, Southern Methodist University
 Venus Lincharoen, Thammasat University
 Bin-Da Liu, National Cheng Kung University, Taiwan
 Joseph L. LoCicero, Illinois Institute of Technology
 Emeka V. Maduiken, New York Institute of Technology
 Claire L. McCullough, University of Tennessee at Chattanooga
 José Medina, State University of New York, College of Technology at Delhi
 Damon Miller, Western Michigan University
 Martin Minchev, University of Calgary
 Philip C. Munro, Youngstown State University
 Sarhan M. Musa, Prairie View A&M University*

Ahmad Nafisi, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
Nader Namazi, The Catholic University of America
Sudarshan Rao Nelatury, Villanova University
Habib Rahman, St. Louis University
V. Rajaravvarma, Central Connecticut State University
Hadi Saadat, Milwaukee School of Engineering
Robert W. Sherwood, Germanna Community College
Elisa H. Barney Smith, Boise State University
Terry L. Speicher, Pennsylvania State University
James C. Squire, Virginia Military Institute
David W. Sukow, Washington and Lee University
Fred Terry, Christian Brother University
Les Thede, Ohio Northern University
Constantine Vassiliadis, Ohio University
Sam Villareal, The University of Texas at Dallas
Promos Vohra, Northern Illinois University
Chia-Jiu Wang, University of Colorado at Colorado Springs
Xingwu Wang, Alfred University
Sandra A. Yost, University of Detroit, Mercy
Hewlon Zimmier, U.S. Merchant Marine Academy

Infine apprezziamo il feedback ricevuto da docenti e studenti che hanno utilizzato le precedenti edizioni. Vogliamo che ciò continui ad avvenire, perciò continuare a inviarci email o indirizzatele all'editore. Potete scriverci agli indirizzi c.alexander@ieee.org per Charles Alexander e sadiku@ieee.org per Matthew Sadiku.

C. K. Alexander e M. N. O. Sadiku

Nota agli studenti

Il corso che state per affrontare è probabilmente il primo corso che riguarda argomenti dell'ingegneria elettrica in generale. L'ingegneria dei sistemi elettromagnetici, con le sue grandi branche dell'energia, dell'elettronica, delle telecomunicazioni e dei sistemi di controllo costituisce un campo di studio e di lavoro vasto e affascinante. Ciononostante, il corso e il suo approccio potrebbero all'inizio intimidirvi. Questo libro è stato specificamente scritto per evitare che ciò accada. Un buon libro di testo e un buon docente costituiscono certo elementi a vostro vantaggio, ma in ultima analisi siete voi che dovete apprendere e assimilare la materia. Se durante il corso terrete presente le considerazioni che seguono, esso si rivelerà sicuramente più facile e piacevole.

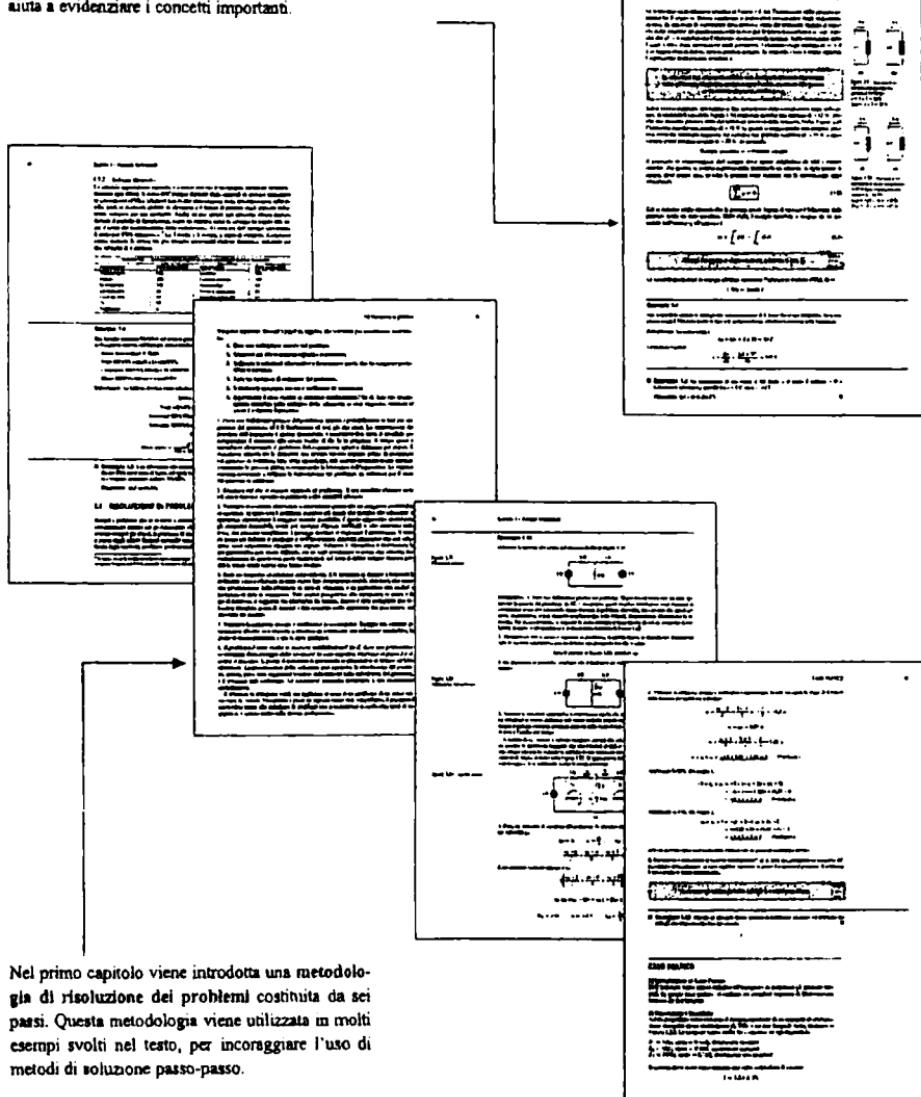
- Questo corso costituisce il fondamento su cui si basano molti dei corsi successivi del vostro curriculum. Per questo motivo, è nel vostro interesse dedicargli quanto più impegno potete. Studiate la materia progressivamente e con regolarità.
- La risoluzione di problemi rappresenta una parte essenziale dell'apprendimento della materia. Risolvete molti problemi. Iniziate dagli esercizi proposti subito dopo ciascun esempio (di cui sono fornite le risposte) e procedete poi con i problemi proposti alla fine di ogni capitolo. Il modo migliore di imparare è quello di risolvere il maggior numero possibile di problemi. I problemi contrassegnati da un asterisco sono i più difficili.
- In tutto il libro viene trattato e incoraggiato l'uso di *Spice*, un programma per l'analisi dei circuiti. *PSpice*, la versione di *Spice* per personal computer, è probabilmente il simulatore circuitale più diffuso nelle università. L'Appendice B presenta un'introduzione all'uso di *PSpice for Windows*. Vi si raccomanda di fare lo sforzo di imparare l'uso di *PSpice*, perché con esso potrete verificare la soluzione manuale dei problemi relativi ai circuiti e accertarvi di avere trovato la risposta corretta.
- *MATLAB* è un altro strumento software utile nella analisi dei circuiti e anche in molti altri corsi che seguirete più avanti. Un'appendice presente sul sito web dedicato al libro contiene un breve tutorial su *MATLAB* per darvi modo di iniziare a utilizzarlo. Il miglior modo di imparare *MATLAB* è però quello di iniziare a utilizzarlo non appena imparati i primi semplici comandi.
- Ciascun capitolo si conclude con un paragrafo che mostra come la materia presentata può essere applicata a situazioni della realtà. I concetti presentati in questi paragrafi potranno sembrarvi nuovi e forse troppo avanzati e certamente avrete modo di apprendere molto di più nei corsi superiori sui vari argomenti introdotti. Il nostro scopo è semplicemente quello di farvi acquisire maggiore familiarità con i concetti appena appresi e di mostrarne l'utilità pratica.
- Provate a rispondere alle domande di riepilogo che si trovano alla fine di ciascun capitolo. In alcuni casi, esse vi consentiranno di apprendere qualche "trucco" non presentato nelle lezioni in classe o nel testo.

Un breve richiamo ai numeri complessi e alle loro operazioni si trova nella Appendice A. Un'appendice presente sul sito web dedicato al libro riporta invece le risposte ai problemi di numero dispari. Buon divertimento!

PERCORSO GUIDATA

L'obiettivo principale del presente libro è quello di presentare l'analisi dei circuiti in una maniera più chiara, interessante e facile da apprendere che negli altri libri di testo. Per voi studenti, ecco alcune delle caratteristiche del testo che vi aiuteranno a studiare e ad apprendere con successo la materia.

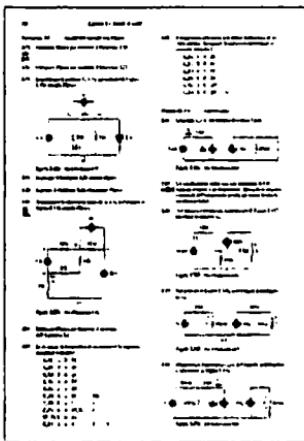
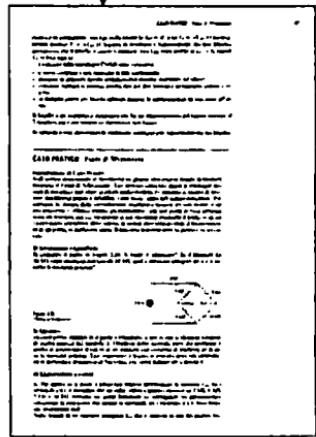
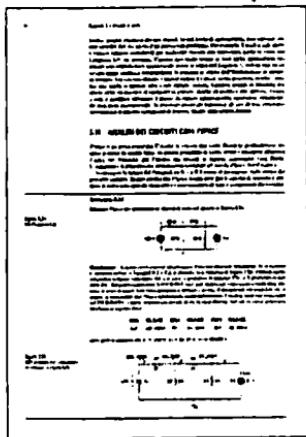
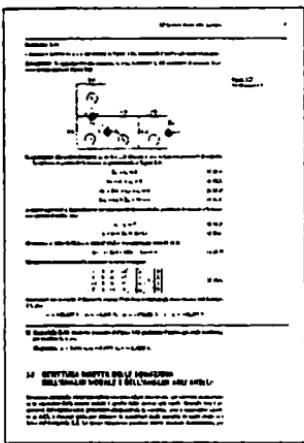
La grafica a due colori rende vivi i diagrammi circuitali e aiuta a evidenziare i concetti importanti.



Ciascun esempio risolto è seguito immediatamente da un esercizio proposto, di cui viene fornita la risposta, per verificare la comprensione dell'esempio appena visto.

PSpice® for Windows (nella versione per studenti) è un potente strumento di analisi che viene introdotto all'izio del libro e utilizzato in tutto il testo, con paragrafi dedicati ed esempi.

L'ultimo paragrafo di alcuni capitoli è dedicato ad applicazioni (Casi pratici) dei concetti illustrati nel capitolo, per introdurre gli studenti all'applicazione in laboratorio dei concetti studiati.



Particolari icone poste a fianco di alcuni dei problemi proposti alla fine dei capitoli segnalano agli studenti quei problemi che sono rappresentativi di situazioni di progetto della pratica ingegneristica e quali problemi si prestano a essere risolti utilizzando *PSpice* o *MATLAB*. Nelle Appendici vengono proposti dei tutorial su entrambi i programmi.

Gli autori



Charles K. Alexander è professore di Electrical e Computer Engineering e preside del Fenn College of Engineering alla Cleveland State University, Cleveland, Ohio. Dal 1998 al 2002, è stato direttore a interim (2000 e 2001) dell'Institute for Corrosion and Multiphase Technologies e inoltre Stocker Visiting Professor of Electrical Engineering and Computer Science alla Ohio University. Negli anni 1994-1996 è stato preside di Engineering and Computer Science alla California State University, Northridge. Dal 1989 al 1994 è stato preside incaricato del College of Engineering alla Temple University, e dal 1986 al 1989 è stato professore e direttore del Department of Electrical Engineering a Temple. Ha coperto le medesime posizioni dal 1980 al 1986 alla Tennessee Technological University. È stato professore associato e poi professore di Electrical Engineering alla Youngstown State University dal 1972 al 1980, dove ha ricevuto il riconoscimento di Distinguished Professor nel 1977 per "didattica e ricerca eccellente". È stato Assistant Professor of Electrical Engineering alla Ohio University negli anni 1971-1972. Ha ottenuto il Ph.D. (1971) e l'M.S.E.E. (1967) dalla Ohio University e il B.S.E.E. (1965) dalla Ohio Northern University. Il Dr. Alexander ha svolto consulenze per 23 compagnie private e organizzazioni governative, tra cui la Air Force e la Marina Militare, e diversi studi legali. Ha ricevuto più di 6 milioni di dollari in fondi per ricerca e sviluppo per progetti che spaziano dall'energia solare all'ingegneria del software. È autore di 40 opere, tra cui un eserciziario e una serie di lezioni su videocassette, ed è coautore di *Fundamentals of Electric Circuits* e *Problem Solving Made Almost Easy*, entrambi pubblicati con McGraw-Hill. È inoltre autore di più di 500 tra articoli e presentazioni professionali e tecniche. Il Dr. Alexander è un Fellow della IEEE ed è stato suo presidente e CEO nel 1997. Nel 1993 e 1994 è stato per l'IEEE Vice President for Professional Activities, e chairman del United States Activities Board (USAB). Negli anni 1991-1992 è stato direttore della Regione 2, membro del Regional Activities Board (RAB) e del USAB. È stato inoltre membro del Educational Activities Board. È stato chairman dello USAB Member Activities Council e vice chairman dello USAB Professional Activities Council for Engineers, e ha presieduto il RAB Student Activities Committee e lo USAB Student Professional Awareness Committee. Nel 1998 ha ricevuto il Distinguished Engineering Education Achievement Award dall'Engineering Council, e nel 1996 il Distinguished Engineering Education Leadership Award dallo stesso gruppo. Quando è diventato un Fellow dell'IEEE nel 1994, nella motivazione era riportato "per la sua leadership nel campo della didattica dell'ingegneria e dello sviluppo professionale degli studenti di ingegneria." Nel 1984 ha ricevuto la IEEE Centennial Medal, e nel 1983 l'IEEE/RAB Innovation Award, riservato al membro della IEEE che ha meglio contribuito agli scopi e agli obiettivi del RAB.



Matthew N. O. Sadiku è attualmente professore alla Prairie View A&M University. Prima di insegnare a Prairie View, è stato professore alla Florida Atlantic University, Boca Raton, e alla Temple University, Philadelphia. Ha anche lavorato per la Lucent/Avaya e per la Boeing Satellite Systems. Il Dr. Sadiku è autore di oltre 120 articoli scientifici e di più di 20 libri, tra cui *Elements of Electromagnetics* (Oxford University Press, 3^a ed., 2001), *Numerical Techniques in Electromagnetics* (2^a ed., CRC Press, 2000), *Simulation of Local Area Networks* (con M. Ilyas, CRC Press, 1994), *Metropolitan Area Networks* (CRC Press, 1994), e *Fundamentals of Electric Circuits* (con A. K. Alexander, McGraw-Hill, 2^a ed., 2004). I suoi libri sono adottati in tutto il mondo; alcuni di essi sono stati anche tradotti in coreano, cinese, italiano e spagnolo. Ha ricevuto nel 2000 il McGraw-Hill/Jacob Millman Award per importanti contributi nel campo della ingegneria elettrica. È stato chairman dell'IEEE Region 2 Student Activities Committee ed è attualmente Associate Editor delle IEEE Transactions on Education. Ha ottenuto il Ph.D. alla Tennessee Technological University, Cookeville.

PARTE I

CIRCUITI IN REGIME STAZIONARIO

Capitolo 1  *Concetti fondamentali*

Capitolo 2  *Leggi fondamentali*

Capitolo 3  *Metodi di analisi*

Capitolo 4  *Teoremi delle reti*

Capitolo 5  *Amplificatori operazionali*

Capitolo 6  *Condensatori e induttori*

Capitolo 7  *Circuiti del primo ordine*

Capitolo 8  *Circuiti del secondo ordine*

CAPITOLO

CONCETTI FONDAMENTALI

1.1 INTRODUZIONE

La teoria dei circuiti elettrici e quella dell'elettromagnetismo sono le due teorie fondamentali su cui si basano tutte le branche dell'ingegneria elettronica. Molti discipline dell'ingegneria elettrica quali l'elettronica di potenza, le macchine elettriche, i controlli, l'elettronica, le telecomunicazioni e la strumentazione si basano sulla teoria dei circuiti elettrici, che per brevità verrà chiamata d'ora in avanti solo teoria dei circuiti. Per questo motivo, il corso introduttivo alla teoria dei circuiti è il corso più importante, e il miglior punto di partenza per uno studente di altre branche delle scienze fisiche, perché i circuiti costituiscono un buon modello per lo studio dei sistemi in generale, e poiché il loro studio richiede solide conoscenze di matematica applicata, fisica e topologia.

Nell'ingegneria elettrica si è spesso interessati al trasferimento di informazione, o al trasferimento di energia fra due punti dello spazio. Ciò richiede, in generale, l'interconnessione di un certo numero di dispositivi elettrici. Nella teoria dei circuiti, ci si riferisce a tale interconnessione come a un circuito elettrico, e a ciascun componente come a un elemento.

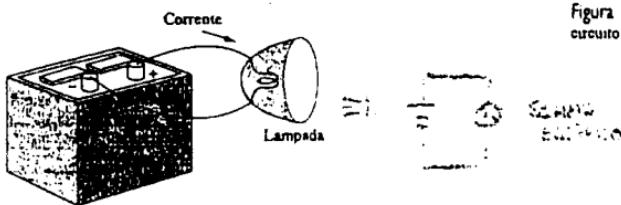
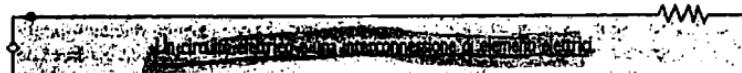


Figura 1.1 Un semplice circuito elettrico.

In Figura 1.1 è mostrato un semplice circuito elettrico, che consiste di tre componenti: una batteria, una lampadina e i fili che le collegano. Un circuito semplice di questo tipo può avere diverse applicazioni, quali per esempio una torcia elettrica o un faro per automobile.

Nella Figura 1.2 è mostrato un circuito complesso: si tratta dello schematico di un ricevitore radio. Nonostante il suo aspetto complicato, anch'esso può essere analizzato usando i metodi studiati in questo libro, il cui obiettivo è presentare tecniche analitiche e strumenti software adatti a descrivere il comportamento di circuiti simili a questo.

I circuiti elettrici sono usati in svariati sistemi elettrici, e per molti scopi. Obiettivo di questo libro non è lo studio delle modalità d'uso e delle applicazioni dei circuiti, ma l'analisi dei circuiti: cioè lo studio del loro comportamento: come reagiscono ai diversi stimoli? In che modo i dispositivi e gli elementi collegati interagiscono fra loro?

Si inizia lo studio dalla definizione di alcuni concetti fondamentali: carica, corrente, tensione, elementi circuituali, potenza ed energia. Prima però di darne le definizioni è necessario stabilire un sistema di unità di misura, che verrà utilizzato in tutto il libro.

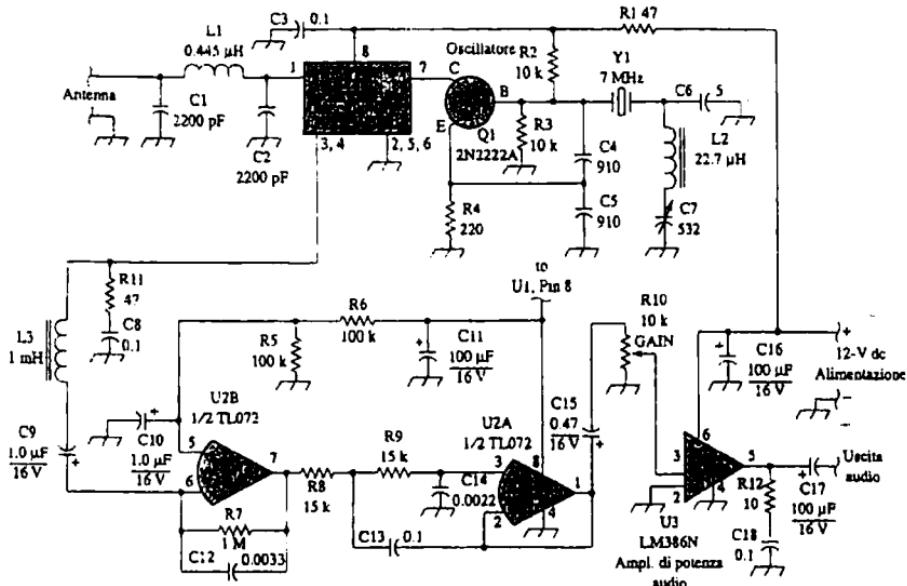


Figura 1.2 Circuito elettrico di un ricevitore radio. (Reproduced with permission from QST, August 1993, p. 23.)

1.2 SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Gli ingegneri trattano quotidianamente con quantità misurabili. Le misure, una volta effettuate devono essere comunicate usando un "linguaggio" standard, che altri ingegneri siano in grado di comprendere, indipendentemente dalla nazione in cui la misura è stata effettuata. Un tale "linguaggio" internazionale di misura è il Sistema Internazionale (SI), adottato dalla Conferenza Generale dei Pesi e Misure nel 1960. Esso consiste di sei unità di misura principali, da cui possono essere derivate le unità di misura delle altre grandezze fisiche. La Tabella 1.1 riporta le sei unità fondamentali, i loro simboli e le grandezze fisiche che rappresentano. In tutto il testo si farà uso delle unità SI.

Tabella 1.1 Le sei unità fondamentali SI

Grandezza	Unità fondamentale	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura assoluta	kelvin	K
Intensità luminosa	candela	cd

Nel sistema SI vengono inoltre utilizzati dei prefissi, mostrati in Tabella 1.2 assieme ai corrispondenti simboli, che rappresentano potenze di 10 e che servono per rappresentare grandezze molto più grandi o molto più piccole di quelle campione. Le seguenti espressioni, per esempio, rappresentano tutte la stessa lunghezza in metri (m):

600 000 000 mm 600 000 m 600 km

1.3 CARICA E CORRENTE

La carica elettrica è il principio che sta alla base di tutti i fenomeni elettrici, e quindi anche una grandezza fondamentale dei circuiti elettrici. Tutti noi possiamo sperimenten-

tare l'effetto della carica elettrica, per esempio mentre ci togliamo un maglione di lana o quando avvertiamo una leggera scossa scendendo da un tappeto.

- La carica è la proprietà delle particelle che compongono la materia. Esiste il coulomb (C).

Dalla fisica elementare è noto che la materia è costituita da "mazioni" fondamentali detti atomi, a loro volta composti da elettroni, protoni e neutroni, e che la carica di un elettrone è negativa e in valore assoluto pari a 1.602×10^{-19} C, mentre la carica di un protone è positiva e ha lo stesso valore assoluto. La presenza di un numero uguale di elettroni e protoni rende l'atomo elettricamente neutro. Si osservi inoltre quanto segue:

1. Il coulomb rappresenta una quantità di carica rilevante. In 1 C di carica ci sono $1/(1.602 \times 10^{-19}) = 6.24 \times 10^{18}$ elettroni. I valori di carica comunemente osservabili in laboratorio sono dell'ordine dei pC, nC, o μ C.¹
2. L'osservazione sperimentale mostra che in natura esistono soltanto cariche con valori multipli interi della carica dell'elettrone $e = -1.602 \times 10^{-19}$ C.
3. La legge di conservazione della carica chimica implica che la carica elettrica non si può creare né distruggere, ma solo trasferire; ciò implica che la carica elettrica totale di un sistema isolato non può variare.

Si consideri ora il flusso di cariche elettriche: una importante caratteristica della carica elettrica è quella di essere mobile, cioè di poter essere trasferita da un luogo all'altro, dove l'energia può essere convertita ad altra forma.

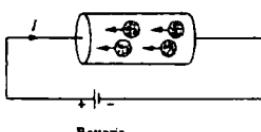


Figura 1.3 Corrente elettrica dovuta al moto di elettroni carichi in un conduttore.

Quando un filo conduttore (composto di parecchi atomi) viene collegato a una batteria (sorgente di forza elettromotrice), le cariche libere sono costrette dal campo elettrico a spostarsi: le cariche positive si muovono nell'direzione del campo, quelle negative nel senso opposto. Questo moto di cariche dà luogo alla corrente elettrica, per convenzione², la corrente elettrica viene considerata come un moto delle cariche positive, e quindi opposta al moto delle cariche negative, come mostrato in Figura 1.3. Questa convenzione venne introdotta per la prima volta da Benjamin Franklin (1706-1790), scienziato e inventore americano. Nonostante oggi sia ben noto che la corrente nei conduttori metallici è dovuta al moto degli elettroni, dotati di carica negativa, si seguirà qui la convenzione universalmente accettata che la corrente è il flusso netto di carica positiva. Perciò:

- La corrente elettrica è il flusso di carica nel tempo della carica in un conduttore.

Matematicamente, la relazione fra la corrente i , la carica q , e il tempo t è

$$i \triangleq \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

in cui la corrente è espressa in ampere (A), il simbolo \triangleq significa "uguale per definizione", e

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb/secondo}$$

$\frac{1 \text{ A}}{1 \text{ s}}$

¹ Un grosso condensatore per alimentatori può però immagazzinare anche fino a 0.5 C.

² Una convenzione è una maniera standard di descrivere qualcosa, in modo da permettere la comprensione ad altri colleghi nella professione. In questo libro, si farà uso delle convenzioni IEEE (The Institute of Electrical and Electronic Engineers).

Fattore	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	chilo	k
10^2	etto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

La carica totale trasferita fra l'istante t_0 e l'istante t si ottiene integrando entrambi i membri della (1.1) rispettivamente

$$\int_{t_0}^t q(t') dt' + q(t) = \int_{t_0}^t q(t') dt' \quad (1.2)$$

I e simboli
carica continua
 $\int_{t_0}^t q(t') dt'$

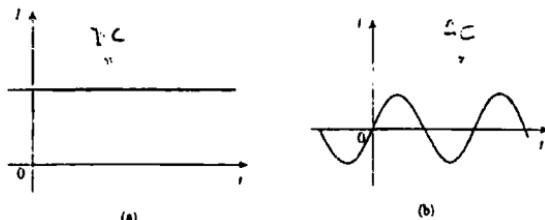
La definizione di corrente della (1.1) mostra come la corrente non sia necessariamente costante nel tempo: come si vedrà anche dagli esempi di questo e dei successivi capitoli, la carica, e quindi la corrente, possono variare nel tempo secondo diverse funzioni matematiche. Se la corrente non varia nel tempo, essa si dice stazionaria o, con direzione impropria ma diffusa, continua (DC).

Per convenzione si usa il simbolo I per rappresentare una corrente stazionaria.

Una corrente variabile nel tempo è rappresentata dal simbolo i . Una forma molto comune di corrente variabile nel tempo è la corrente sinusoidale o corrente alternata (AC).

Una corrente alternata (AC) è dunque una corrente che varia sinusoidalmente nel tempo.

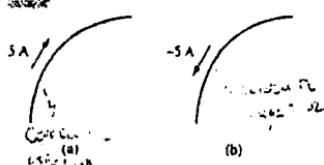
Figura 1.4 Due tipi comuni di corrente: (a) corrente stazionaria, (b) corrente alternata



Correnti alternate sono usate, per esempio, nelle case per il funzionamento di frigoriferi, condizionatori, lavatrici e altri elettrodomestici. La Figura 1.4 mostra una corrente stazionaria e una alternata: esse rappresentano i due tipi più comuni di corrente. Altri tipi di corrente verranno presi in considerazione nel seguito del libro.

Definita la corrente come movimento di cariche, è logico attendersi che essa abbia una direzione di scorrimento associata. Come si è visto, la direzione della corrente viene convenzionalmente presa come la direzione di movimento delle cariche positive. Secondo questa convenzione, una corrente di 5 A può essere rappresentata con un valore positivo o negativo, come mostrato in Figura 1.5. In altre parole, una corrente negativa di 5 A che scorre in una direzione è lo stesso di una corrente di +5 A che scorre nella direzione opposta.

Figura 1.5 Flusso convenzionale della corrente:
(a) corrente positiva,
(b) corrente negativa



Exempio 1.1

Quanta carica rappresentano 4 600 elettroni?

Soluzione: Ciascun elettrone ha una carica di -1.602×10^{-19} C. Perciò, 4 600 elettroni avranno una carica di

$$-1.602 \times 10^{-19} \text{ C/elettrone} \times 4600 \text{ elettroni} = -7.369 \times 10^{-16} \text{ C}$$

Esercizio 1.1 Calcolare la quantità di carica rappresentata da due milioni di protoni.**Risposta** $+3.204 \times 10^{-13}$ C.**Esempio 1.2**

La carica totale entrante in un terminale è data da $q = 5t \sin 4\pi t$ mC. Calcolare la corrente all'istante $t = 0.5$ s.

Soluzione:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(5t \sin 4\pi t) \text{ mC/s} = (5 \sin 4\pi t + 20\pi t \cos 4\pi t) \text{ mA}$$

Per $t = 0.5$, $i = 5 \sin 2\pi + 10\pi \cos 2\pi = 0 + 10\pi = 31.42$ mA

Esercizio 1.2 Se nell'Esempio 1.2 $q = (10 - 10e^{-2t})$ mC, determinare la corrente in $t = 0.5$ s.**Risposta** 7.36 mA.**Esempio 1.3**

Determinare la carica totale entrante in un terminale fra l'istante $t = 1$ s e l'istante $t = 2$ s se la corrente che passa attraverso il terminale è $i = (3t^2 - t)$ A.

Soluzione:

$$\begin{aligned} q &= \int_{t=1}^2 i dt = \int_1^2 (3t^2 - t) dt \\ &= \left(t^3 - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = (8 - 2) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 5.5 \text{ C} \end{aligned}$$

Esercizio 1.3 La corrente che scorre in un elemento è

$$i = \begin{cases} 2 \text{ A}, & 0 < t < 1 \\ 2t^2 \text{ A}, & t > 1 \end{cases}$$

Calcolare la carica entrante nell'elemento da $t = 0$ a $t = 2$ s.**Risposta** 6.67 C.**1.4 TENSIONE**

Come si è brevemente accennato nel paragrafo precedente, lo spostamento di un elettrone in un conduttore in una particolare direzione richiede lavoro o trasferimento di energia. Questo lavoro è fornito da una sorgente esterna di forza elettromotrice (fem), rappresentata dalla batteria in Figura 1.3. Tale forza elettromotrice è chiamata anche tensione o differenza di potenziale. La tensione v_{ab} fra due punti a e b di un circuito è l'energia (o lavoro) necessaria per spostare una carica unitaria da a a b ; analiticamente,

$$v_{ab} \triangleq \frac{dw}{dq} \quad (1.3)$$

dove w è l'energia in joule (J) e q è la carica in coulomb (C). La tensione v_{ab} , o più semplicemente v , si misura in volt (V), in onore del fisico italiano Alessandro Antonio Volta (1745-1827), che inventò la prima batteria. Dalla (1.3) risulta evidente che

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb} = 1 \text{ newton metro/coulomb}$$

Perciò,

La tensione o differenza di potenziale è l'energia necessaria a spostare una carica unitaria attraverso un elemento, e si misura in volt (V).

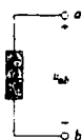


Figura 1.6 Polarità della tensione v_{ab}

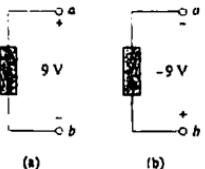


Figura 1.7 Rappresentazioni equivalenti della stessa tensione v_{ab} . (a) il punto a è a potenziale 9 V maggiore del punto b , (b) il punto b è a potenziale -9 V maggiore del punto a .

La Figura 1.6 mostra la tensione su un elemento, rappresentato come una scatola rettangolare, connesso ai punti a e b . I segni più (+) e meno (-) servono a definire la direzione di riferimento o polarità della tensione. La scrittura v_{ab} può essere interpretata in due modi: (1) il punto a ha un potenziale il cui valore è v_{ab} volt maggiore di quello del punto b ; oppure (2) il potenziale del punto a rispetto al punto b è v_{ab} . Ne consegue che, in generale

$$v_{ab} = -v_{ba} \quad (1.4)$$

Per esempio, nella Figura 1.7 si hanno due possibili rappresentazioni della stessa tensione. In Figura 1.7(a) il punto a è a un potenziale +9 V sopra al punto b ; in Figura 1.7(b) il punto b è a -9 V sopra al punto a . Si può anche dire che nella Figura 1.7(a) c'è una caduta di tensione di 9 V tra a e b o, che è lo stesso, un aumento di tensione di 9 V fra b e a . In altre parole, una caduta di tensione tra a e b è equivalente a un aumento di tensione tra b e a .

Corrente e tensione sono le due variabili fondamentali dei circuiti elettrici. Il termine segnaile viene spesso usato per rappresentare una grandezza elettrica quale una tensione o una corrente (o anche un campo elettromagnetico) che viene utilizzata per rappresentare dell'informazione. Nell'ingegneria si preferisce chiamare segnali queste variabili, invece che funzioni matematiche del tempo, per l'importanza che i segnali rivestono nelle telecomunicazioni e in altre discipline. In maniera simile alla corrente elettrica, una tensione stazionaria o continua si rappresenta con V , e una tensione variabile sinusoidalmente, o alternata, con v . Le tensioni stazionarie vengono solitamente prodotte dalle batterie, quelle alternate da altri tipi di generatori elettrici.

1.5 POTENZA ED ENERGIA

Tensione e corrente sono le due variabili fondamentali in un circuito elettrico; esse però non sono completamente sufficienti per la descrizione di molti problemi pratici, nei quali è necessario calcolare quanta potenza elettrica un dispositivo mette in gioco. Dall'esperienza quotidiana si sa che una lampadina da 100 watt è più luminosa di una da 60 watt. La bolletta dei consumi di elettricità è invece proporzionale alla energia elettrica consumata in un certo periodo di tempo. I concetti di potenza ed energia risultano molto utili nella analisi dei circuiti; per mettere in relazione potenza ed energia con tensione e corrente si ricordi dalla fisica elementare che:

La potenza è la rapida di assorbimento o di emissione di energia nel tempo, e si misura in watt (W).

Tale relazione si scrive

$$P \triangleq \frac{dw}{dt} \quad (1.5)$$

dove P è la potenza in watt (W), w è l'energia in joule (J), e t il tempo in secondi (s). Dalle (1.1), (1.3) e (1.5) segue che

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = vi \quad (1.6)$$

cioè

$$P = vi \quad (1.7)$$

La potenza P nella (1.7) è una quantità variabile nel tempo ed è chiamata potenza istantanea. La potenza assorbita o erogata da un elemento è il prodotto della tensione sull'elemento per la sua corrente. Resta da chiarire in che modo la potenza può assumere segno positivo o negativo.

La direzione di riferimento della corrente e la polarità della tensione sono quelle che determinano il segno della potenza. Se le direzioni di riferimento di corrente e tensione

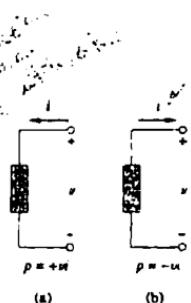


Figura 1.8

Direzioni di riferimento per la potenza; in entrambi i casi è indicata l'espressione che assume la potenza assorbita.
(a) convenzione degli utilizzatori,
(b) convenzione degli generatori.

ne si trovano nella relazione mostrata in Figura 1.8 (a). L'espressione della potenza assorbita ha il segno +. Questa condizione è anche detta convenzione degli utilizzatori: in essa la direzione di riferimento della corrente entra dal terminale recante il segno (+) della tensione. In questa condizione si dice che la potenza assorbita $p = +vi$, o anche che $vi > 0$ significa che l'elemento sta assorbindone potenza. Nella condizione della Figura 1.8(b), detta convenzione degli generatori, l'elemento eroga potenza se $vi > 0$ e vi rappresenta in questo caso la potenza erogata. In entrambi i casi è anche riportata l'espressione della potenza assorbita p .

La convenzione degli utilizzatori è quella in cui la direzione di riferimento della corrente passa dall'elemento dal terminale associato al segno (+) della tensione della risorsa.

In tale condizione la potenza assorbita $p = +vi$.

Salvo avviso contrario, nel seguito si farà sempre uso della convenzione degli utilizzatori. In entrambi i casi della Figura 1.9 l'elemento assorbe una potenza di +12 W, perché una corrente positiva entra dal terminale positivo della tensione. Nella Figura 1.10 l'elemento assorbe una potenza di -12 W (e quindi li eroga) perché una corrente positiva entra dal terminale negativo. Ad esempio una potenza assorbita di +20 W è equivalente a una potenza erogata di -20 W. In generale,

$$\text{Potenza assorbita} = -\text{Potenza erogata}$$

Il principio di conservazione dell'energia deve essere soddisfatto da tutti i circuiti elettrici. Per questo, la somma algebrica delle potenze in un circuito, in ogni istante di tempo, deve essere zero, se tutte le potenze sono espresse con la convenzione degli utilizzatori:

$$\sum p = 0 \quad (1.8)$$

Ciò si esprime anche dicendo che la potenza totale fornita al circuito è bilanciata dalla potenza totale da esso assorbita. Dalla (1.6), l'energia assorbita o erogata da un elemento dall'istante t_0 all'istante t è

$$w = \int_{t_0}^t pdt = \int_{t_0}^t vi dt \quad (1.9)$$

L'energia è la capacità di svolgere un lavoro, espressa in joule (J).

Le aziende produttrici di energia elettrica misurano l'energia in wattore (Wh), dove

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J}$$

Esempio 1.4 X

Una sorgente di energia fa scomparire una corrente costante di 2 A per 10 s in una lampadina. Se la lampadina eroga 2.3 kJ sotto forma di luce e di energia termica, calcolare la tensione sulla lampadina.

Soluzione: La carica totale è

$$\Delta q = i\Delta t = 2 \times 10 = 20 \text{ C}$$

La tensione è quindi

$$v = \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{2.3 \times 10^3}{20} = 115 \text{ V}$$

Esercizio 1.4 Lo spostamento di una carica q dal punto a al punto b richiede -30 J . Calcolare la tensione v_{ab} quando: (a) $q = 2 \text{ C}$, (b) $q = -6 \text{ C}$

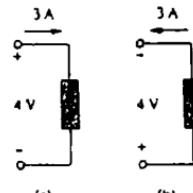


Figura 1.9 Due casi di un elemento che assorbe una potenza di 12 W: (a) $p = 4 \times 3 = 12 \text{ W}$, (b) $p = 4 \times 3 = 12 \text{ W}$.

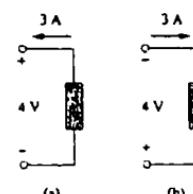


Figura 1.10 Due casi di un elemento che eroga una potenza di 12 W (cioè che assorbe una potenza di -12 W): (a) $p = -(4 \times 3) = -12 \text{ W}$, (b) $p = -(4 \times 3) = -12 \text{ W}$.

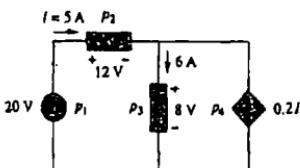
Risposta (a) -15 V, (b) 5 V.

tenere il livello specificato di corrente. I generatori ideali possono quindi in teoria erogare una quantità di energia infinita. Inoltre, essi possono non soltanto erogare potenza al circuito ma anche assorbire: di un generatore di tensione non è nota la corrente e di un generatore di corrente non è nota la tensione prima di collegarli al circuito.

Esempio 1.7

Calcolare la potenza assorbita da ciascuno degli elementi del circuito in Figura 1.15.

Figura 1.15
Per l'Esempio 1.7.



Soluzione: Si applica la convenzione di segno per la potenza assorbita della Figura 1.8. Per p_1 , la corrente di 5A esce dal terminale positivo (o entra in quello negativo) e quindi

$$p_1 = -(20 \times 5) = -100 \text{ W} \quad \text{la potenza è erogata}$$

Sia per p_2 che per p_3 , la corrente entra dal terminale positivo dell'elemento.

$$p_2 = (12 \times 5) = 60 \text{ W} \quad \text{la potenza è assorbita}$$

$$p_3 = (8 \times 6) = 48 \text{ W} \quad \text{la potenza è assorbita}$$

Per p_4 , si noti che la tensione è di 8V (positiva verso l'alto), la stessa tensione di p_3 , poiché l'elemento passivo e il generatore dipendente sono connessi agli stessi terminali (si ricordi che la tensione è sempre misurata fra i due terminali di un elemento). Poiché la corrente è uscente dal terminale positivo si ha,

$$p_4 = -8 \times (0.2 \times I) = -8 \times (-0.2 \times 5) = -8 \text{ W} \quad \text{la potenza è erogata}$$

Si osservi che sia il generatore indipendente da 20V che quello dipendente pari a $0.2I$ stanno fornendo potenza al resto del circuito, mentre i due elementi passivi assorbono potenza. Inoltre

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -100 + 60 + 48 - 8 = 0$$

In accordo con la (1.8), la potenza totale erogata è uguale alla potenza totale assorbita.

■ Esercizio 1.7 Calcolare la potenza assorbita da ciascun componente del circuito di Figura 1.16.

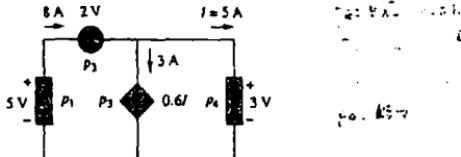


Figura 1.16 Per l'Esercizio 1.7.

Risposta $p_1 = -40 \text{ W}$, $p_2 = 16 \text{ W}$, $p_3 = 9 \text{ W}$, $p_4 = 15 \text{ W}$.

1.7 APPLICAZIONI³

Nel presente paragrafo vengono presentate due applicazioni, pratiche dei concetti illustrati nel capitolo: la prima illustra il funzionamento del tubo catodico degli apparecchi televisivi mentre nella seconda si parla di come le compagnie elettriche calcolano la bolletta dell'energia elettrica.

³ Il segno ³ dopo il titolo di un paragrafo indica che il paragrafo può essere omesso, trattato brevemente o semplicemente assegnato come lettura senza perdita di continuità.

1.7.1 Il tubo a raggi catodici del televisore

Una importante applicazione del moto degli elettroni si ha nella trasmissione e ricezione di segnali TV. Nella stazione trasmittente, una telecamera converte una scena da un'immagine ottica in un segnale elettrico. La scansione viene operata da un sottile fascio di elettroni in un tubo iconoscopico.

Nel ricevitore TV, l'immagine viene ricostruita mediante un tubo a raggi catodici (CRT), mostrato in Figura 1.17.⁴ A differenza dell'iconoscopio, il cui raggio di elettroni ha intensità costante, il raggio del CRT ha una intensità variabile con il segnale in ingresso. Il cannone elettronico, mantenuto a elevato potenziale, "lancia" il fascio di elettroni, che passa attraverso due serie di piastre di deflessione in modo che il punto dello schermo che viene colpito dal raggio può spostarsi orizzontalmente e verticalmente. Quando il fascio elettronico colpisce lo schermo fluorescente, lo schermo si illumina in quel punto. Il fascio è in grado quindi di "disegnare" una immagine sullo schermo.

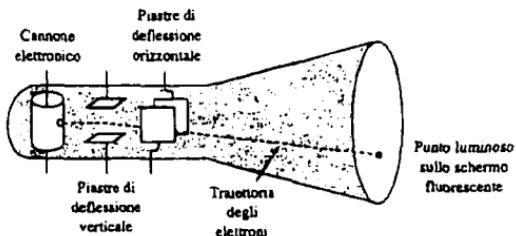


Figura 1.17 Tubo a raggi catodici. (Source: D. E. Tiley, *Contemporary College Physics* [Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1979], p. 319.)

Esempio 1.8

Il fascio elettronico di un tubo TV trasporta 10^{15} elettroni al secondo. Determinare la tensione V_0 necessaria per accelerare il fascio in modo da ottenere un potenza pari a 4 W.

Soluzione: La carica di un elettrone è

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Se il numero di elettroni è n , allora $q = ne$, e

$$i = \frac{dq}{dt} = e \frac{dn}{dt} = (-1.6 \times 10^{-19})(10^{15}) = -1.6 \times 10^{-4} \text{ A}$$

Il segno negativo indica che la corrente scorre in direzione opposta al moto degli elettroni, come mostrato nella Figura 1.18, che è un diagramma semplificato di un CRT per il caso in cui le piastre di deflessione verticale non sono elettricamente caricate. La potenza del fascio è

$$P = V_0 i \quad \text{e quindi} \quad V_0 = \frac{P}{i} = \frac{4}{1.6 \times 10^{-4}} = 25000 \text{ V}$$

La tensione richiesta è quindi 25 kV.

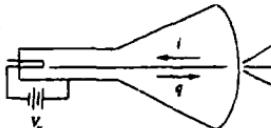


Figura 1.18 Diagramma semplificato del tubo a raggi catodici

Esercizio 1.8 Se il fascio elettronico in un cinescopio TV trasporta 10^{15} elettroni al secondo e passa attraverso due piastre mantenute a una differenza di potenziale di 30 kV, calcolare la potenza del fascio.

Risposta 48 mW.

⁴ I cinescopi moderni utilizzano una tecnologia diversa

Esempio 1.5

Calcolare il valore della potenza fornita a un elemento nell'istante $t = 3 \text{ ms}$ se la corrente che entra nel terminale positivo della tensione vale

$$i = 5 \cos 60\pi t \text{ A}$$

e la tensione è: (a) $v = 3i$, (b) $v = 3 di/dt$.

Soluzione: (a) La tensione vale $v = 3i = 15 \cos 60\pi t$; quindi, la potenza è

$$p = vi = 75 \cos^2 60\pi t \text{ W}$$

A $t = 3 \text{ ms}$,

$$p = 75 \cos^2 (60\pi \times 3 \times 10^{-3}) = 75 \cos^2 0.18\pi = 53.48 \text{ W}$$

(b) La tensione e la potenza valgono rispettivamente

$$v = 3 \frac{di}{dt} = 3(-60\pi)5 \sin 60\pi t = -900\pi \sin 60\pi t \text{ V}$$

$$p = vi = -4500\pi \sin 60\pi t \cos 60\pi t \text{ W}$$

A $t = 3 \text{ ms}$,

$$p = -4500\pi \sin 0.18\pi \cos 0.18\pi \text{ W}$$

$$= -14137.167 \sin 32.4^\circ \cos 32.4^\circ = -6.396 \text{ kW}$$

■ **Esercizio 1.5** Calcolare la potenza fornita all'elemento dell'Esempio 1.5 in $t = 5 \text{ ms}$ se la corrente rimane la stessa ma la tensione vale: (a) $v = 2i \text{ V}$, (b) $v = \left(10 + 5 \int_0^t i dt\right) \text{ V}$.

Risposta (a) 17.27 W, (b) 29.7 W.

Esempio 1.6

Quanta energia consuma una lampadina elettrica da 100 W in due ore?

Soluzione: $w = pt = 100 \text{ (W)} \times 2 \text{ (h)} \times 60 \text{ (min/h)} \times 60 \text{ (s/min)}$
 $= 720000 \text{ J} = 720 \text{ kJ}$

Che è lo stesso di

$$w = pt = 100 \text{ W} \times 2 \text{ h} = 200 \text{ Wh}$$

■ **Esercizio 1.6** Un elemento di stufa elettrica assorbe una corrente di 15 A se connesso a una presa da 120 V. In quanto tempo consumerà 30 kJ?

Risposta 16.667 s.

1.6 ELEMENTI CIRCUITALI

Come si è visto nel Paragrafo 1.1, gli elementi sono i mattoni costruttivi fondamentali dei circuiti: un circuito elettrico è semplicemente la interconnessione dei suoi elementi. L'analisi di un circuito è il processo che porta a determinare le tensioni sui suoi elementi e le correnti attraverso essi.

I circuiti possono contenere due tipi di elementi: gli elementi passivi e quelli attivi. Un elemento attivo è in grado di erogare energia, mentre uno passivo no. Esempi di elementi passivi sono le resistenze, i condensatori e gli induttori. Tipici elementi attivi sono invece i generatori, le batterie e gli amplificatori operazionali. In questo paragrafo verranno presentati alcuni importanti elementi attivi.

Gli elementi attivi di uso più frequente sono i generatori di tensione e di corrente, che spesso forniscono potenza al circuito al quale sono connessi. Esistono due tipi di generatori: i generatori indipendenti e quelli dipendenti.

Un generatore ideale indipendente è un elemento attivo che fornisce una tensione o corrente costante specificata che è completamente indipendente dalle altre variabili del circuito.

In altre parole, un generatore ideale indipendente di tensione fornisce al circuito a cui è connesso tutta la corrente necessaria a mantenere la tensione specificata fra i suoi terminali. Sorgenti di energia quali le batterie e altri generatori elettrici possono essere considerati come delle approssimazioni di generatori ideali di tensione. La Figura 1.11 mostra i simboli usati per i generatori indipendenti di tensione: entrambi i simboli di Figura 1.11(a) e 1.11(b) possono essere usati per rappresentare un generatore di tensione stazionario, per un generatore di tensione variabile nel tempo viene invece usato soltanto il simbolo di Figura 1.11(a). Allo stesso modo, un generatore ideale indipendente di corrente è un elemento attivo che fornisce una corrente specificata indipendentemente dalla tensione fra i suoi terminali: esso quindi fornisce al circuito tutta la tensione necessaria a mantenere la corrente specificata. Il suo simbolo è mostrato in Figura 1.12, in cui la freccia indica la direzione della corrente i .

Un generatore ideale dipendente è un elemento attivo a cui la tensione o corrente è controllata da un'altra tensione o corrente.

I generatori dipendenti sono solitamente indicati con simboli a forma di rombo, come si vede in Figura 1.13. Poiché il controllo del generatore dipendente può essere esercitato da una tensione o da una corrente, e il generatore può essere di tensione o di corrente, esistono quattro tipi di generatore dipendente:

1. Generatore di tensione controllato in tensione (GTCT).
2. Generatore di tensione controllato in corrente (GTCC).
3. Generatore di corrente controllato in tensione (GCCT).
4. Generatore di corrente controllato in corrente (GCCC).

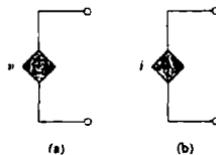
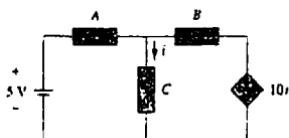


Figura 1.11 Simboli del generatore indipendente di tensione: (a) usato per tensioni costanti o variabili, (b) usato per tensioni costanti.



Figura 1.12 Simbolo del generatore indipendente di corrente.

I generatori dipendenti sono utili nella costruzione di modelli di componenti quali transistori, amplificatori operazionali e altri circuiti integrati. Nella parte destra di Figura 1.14 è mostrato un generatore di tensione controllato in corrente la cui tensione $10i$ dipende dalla corrente i che attraversa l'elemento C . Non deve trarre in inganno l'indicazione della tensione del generatore come $10i$ V (e non $10i$ A), trattandosi di un generatore di tensione: un generatore di tensione presenta sempre i segni della polarità (+-) nel simbolo, e un generatore di corrente la freccia, indipendentemente dalla grandezza da cui sono controllati.



Un generatore ideale di tensione (dipendente o no) fornirà qualunque corrente risultà necessaria per mantenere il livello di tensione specificato ai suoi terminali, e un generatore ideale di corrente stabilirà fra i suoi terminali tutta la tensione necessaria a man-

Figura 1.13 Simboli di: (a) generatore dipendente di tensione, (b) generatore dipendente di corrente.

Figura 1.14 Il generatore sulla destra è un generatore di tensione controllato in corrente.

1.7.2 Bollette elettriche

La seconda applicazione riguarda il metodo con cui le compagnie elettriche fatturano i consumi agli utenti. Il costo dell'energia dipende dalla quantità di energia consumata in kilowatt-ore (kWh). Ulteriori fattori che intervengono nella determinazione delle tariffe, quali la domanda globale di elettricità e il fattore di potenza degli impianti utilizzatori verranno per ora trascurati. Anche se una utenza non consuma alcuna energia durante il periodo di fatturazione, esiste un minimo costo di servizio da pagare che copre il costo del mantenimento della connessione. Al crescere dell'energia consumata, il costo per kWh diminuisce.⁵ La Tabella 1.3 mostra, a titolo di esempio, il consumo medio mensile di alcuni dei più comuni apparecchi elettrici domestici, calcolato per una famiglia di 5 persone.

Tabella 1.3 Consumo tipico medio di alcuni apparecchi elettrici domestici

Apparecchio	kWh consumati	Apparecchio	kWh consumati
Scaldabagno	500	Lavatrice	120
Freezer	100	Forno elettrico	100
Illuminazione	100	Asciugatrice	80
Lavastoviglie	35	Forno a microonde	25
Forno da stiro	15	Personal computer	12
TV	10	Radio	8
Tostapane	4	Orologio	2

Esempio 1.9

Una famiglia consuma 700 kWh nel mese di gennaio. Determinare la bolletta elettrica mensile usando il seguente schema tariffario per utenze residenziali:

Diritto fisso mensile € 12.00.

Primi 100 kWh mensili a 16 cent/kWh

I successivi 200 kWh mensili a 10 cent/kWh.

Oltre i 300 kWh mensili a 6 cent/kWh.

Soluzione: La bolletta elettrica viene calcolata come segue:

$$\text{Diritto fisso mensile} = \text{€ } 12.00$$

$$\text{Primi } 100 \text{ kWh a } \text{€ } 0.16/\text{kWh} = \text{€ } 16.00$$

$$\text{Successivi } 200 \text{ kWh a } \text{€ } 0.10/\text{kWh} = \text{€ } 20.00$$

$$\text{Rimanenti } 400 \text{ kWh a } \text{€ } 0.06/\text{kWh} = \text{€ } 24.00$$

$$\text{Totale bolletta} = \text{€ } 72.00$$

$$\text{Costo medio} = \frac{\text{€ } 72}{100 + 200 + 400} = 10.2 \text{ cent/kWh}$$

■ **Esercizio 1.9** Con riferimento allo schema tariffario dell'Esempio 1.9, calcolare il costo medio per kWh per il mese di luglio, nel quale la famiglia si trova in vacanza per gran parte del mese e vengono consumati soltanto 400 kWh.

Risposta: 13.5 cent/kWh. ■

1.8 RISOLUZIONE DI PROBLEMI

Benché i problemi che ci si trova a risolvere nel corso di una carriera risultino essere estremamente diversi sia in dimensioni che in complessità, i principi base da seguire restano sempre gli stessi. Il processo di risoluzione accennato di seguito è stato messo a punto dagli autori durante parecchi anni nei quali si sono trovati ad affrontare problemi degli studenti, problemi professionali nell'industria e problemi di ricerca.

⁵ In Italia, dove le tariffe elettriche sono regolate per legge, succede in realtà che per i consumi privati molto spesso il costo per kWh aumenti al crescere del consumo, venendo a cessare le agevolazioni di legge.

Vengono dapprima elencati i passi da seguire, che verranno poi brevemente commentati.

1. Dare una definizione precisa del problema.
2. Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.
3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggiore probabilità di successo.
4. Fare un tentativo di soluzione del problema.
5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.
6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente? Se sì, dare una presentazione completa dello sviluppo della soluzione; in caso negativo, ritornare al passo 3 e ripetere il processo.

1. Dare una definizione precisa del problema. Questa è probabilmente la fase più importante del processo, ed è il fondamento di tutti gli altri passi. La formulazione dei problemi dell'ingegneria è spesso incompleta: è necessario fare tutto il possibile per comprendere il problema allo stesso livello di chi lo ha proposto. Il tempo speso a identificare chiaramente il problema farà risparmiare tempo e delusioni più avanti. È importante identificare le domande che devono trovare risposta prima di proseguire nel processo di soluzione. Una volta identificate, tali risposte potranno essere ottenute contattando le persone giuste, o consultando la letteratura sull'argomento. Le risposte ottenute serviranno a raffinare la formulazione del problema, da utilizzare per il resto del processo di soluzione.

2. Elencare ciò che si conosce riguardo al problema. È ora possibile elencare tutto ciò che si conosce riguardo al problema e alle possibili soluzioni.

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggiore probabilità di successo. In quasi tutti i problemi, esistono più strade che portano alla soluzione: è opportuno identificarne il maggior numero possibile. È anche opportuno identificare gli strumenti disponibili, come per esempio *PSpice*, *MATLAB* o altri strumenti software, che possono semplificare i passaggi analitici e migliorare l'accuratezza. Il tempo speso nel definire il problema e nell'investigare approcci alternativi alla sua soluzione verrà ampiamente ripagato nel seguito. Valutare le alternative e determinare la più promettente può essere difficile, ma ne vale certamente la pena; una accurata documentazione di questa fase potrà tornare utile nel caso si debba tornare indietro perché la strada scelta non ha dato buoni risultati.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema. È il momento di iniziare a risolvere il problema: i passi effettuati devono essere ben documentati così da costituire una accurata presentazione della soluzione in caso di successo, o da permettere una analisi a posteriori in caso di insuccesso. Tale analisi può portare alla correzione di errori e di qui al successo, o suggerire vie alternative da tentare. Spesso è utile sviluppare una soluzione completa prima di inserire i dati numerici nelle equazioni: ciò può aiutare nel controllo dei risultati.

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza. Bisogna ora valutare attentamente ciò che si è ottenuto e decidere se costituisce una soluzione accettabile, in grado di essere presentata a chi la deve giudicare.

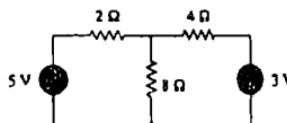
6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente? Se sì, dare una presentazione completa dello sviluppo della soluzione; in caso negativo, ritornare al passo 3 e ripetere il processo. È giunto il momento di presentare la soluzione o di tentare un'altra alternativa. La presentazione della soluzione può costituire la conclusione del processo; spesso, però, essa suggerisce ulteriori raffinamenti nella definizione del problema, e il processo può continuare. Le successive iterazioni porteranno a una conclusione soddisfacente.

Il processo di soluzione verrà ora applicato al caso di un problema di un corso elementare di circuiti. Nonostante i passi da seguire siano stati semplificati, il processo è applicabile anche alla soluzione di problemi che si incontrano in molti altri corsi di ingegneria, e spesso anche nella pratica professionale.

Esempio 1.10

Calcolare la corrente che scorre nel resistore da 8Ω in Figura 1.19

Figura 1.19
Circuito di esempio



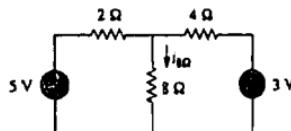
Soluzione: 1. *Dare una definizione precisa del problema.* Si può notare come non sia stata specificata la polarità del generatore da $3V$. È necessario quindi chiedere chiarimenti sulla direzione di riferimento; se ciò non è possibile si può risolvere il problema due volte, per ciascuno dei casi di polarità. In alternativa, si può scegliere ad arbitrio una delle polarità, documentando chiaramente la decisione. Per il caso presente, si suppone di avere ottenuto il chiarimento da chi ha assegnato il problema: il segno + del generatore è in basso come mostrato in Figura 1.20.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.* A questo scopo, si identificano chiaramente tutte le variabili del circuito, così da definire con precisione ciò che si cerca.

Dato il circuito in Figura 1.20, calcolare $i_{8\Omega}$

È ora opportuno, se possibile, verificare che il problema sia definito correttamente con chi lo ha assegnato

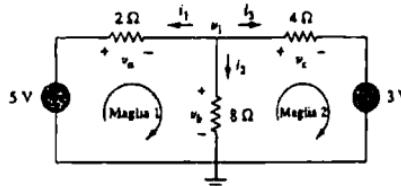
Figura 1.20
Definizione del problema



3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggiore probabilità di successo.* La soluzione di questo problema può essere ottenuta usando tre metodi generali, come si vedrà più avanti: il metodo completo (scrittura esplicita delle leggi di Kirchhoff e delle leggi di Ohm), l'analisi ai nodi e l'analisi alle maglie.

Il calcolo di $i_{8\Omega}$ usando il metodo completo porterà alla soluzione, ma richiederà probabilmente un numero di operazioni maggiore che con l'analisi ai nodi o l'analisi alle maglie. L'applicazione dell'analisi alle maglie richiede la scrittura di due equazioni simultanee aventi come incognite le due correnti di maglia indicate nella Figura 1.21. L'applicazione dell'analisi ai nodi presenta invece una sola incognita: essa costituisce quindi la strada più facile.

Figura 1.21 Analisi ai nodi



4. *Fare un tentativo di soluzione del problema.* Si scrivono dapprima tutte le equazioni necessarie per calcolare $i_{8\Omega}$:

$$i_{8\Omega} = i_2, \quad i_2 = \frac{v_1}{8}, \quad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8}$$

$$\frac{v_1 - 5}{2} + \frac{v_1 - 0}{8} + \frac{v_1 + 3}{4} = 0$$

È ora possibile risolvere rispetto a v_1 .

$$8 \left[\frac{v_1 - 5}{2} + \frac{v_1 - 0}{8} + \frac{v_1 + 3}{4} \right] = 0$$

$$\text{da cui } (4v_1 - 20) + (v_1) + (2v_1 + 6) = 0$$

$$7v_1 = +14, \quad v_1 = +2 \text{ V}, \quad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8} = \frac{2}{8} = \underline{\underline{0.25 \text{ A}}}$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne l'accuratezza. Si può ora usare la legge di Kirchoff delle tensioni per verificare il risultato.

$$i_1 = \frac{v_1 - 5}{2} = \frac{2 - 5}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5 \text{ A}$$

$$i_2 = i_{8\Omega} = 0.25 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{v_1 + 3}{4} = \frac{2 + 3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ A}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = -1.5 + 0.25 + 1.25 = 0 \quad (\text{Verificata.})$$

Applicando la KVL alla maglia 1,

$$\begin{aligned} -5 + v_a + v_b &= -5 + (-i_1 \times 2) + (i_2 \times 8) \\ &= -5 + (-(-1.5)2) + (0.25 \times 8) \\ &= \underline{-5 + 3 + 2 = 0} \quad (\text{Verificata.}) \end{aligned}$$

Applicando la KVL alla maglia 2,

$$\begin{aligned} -v_b + v_c - 3 &= -(i_2 \times 8) + (i_3 \times 4) - 3 \\ &= -(0.25 \times 8) + (1.25 \times 4) - 3 \\ &= \underline{-2 + 5 - 3 = 0} \quad (\text{Verificata.}) \end{aligned}$$

Si è ora convinti della correttezza della risposta con un grado di confidenza elevato.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente? Se sì, dare una presentazione completa dello sviluppo della soluzione; in caso negativo, ritornare al passo 3 e ripetere il processo. Il problema è stato risolto in modo soddisfacente.

La corrente nel resistore da 8 ohm è di 0.25 A e scorre verso il basso.

■ Esercizio 1.10 Provare ad applicare questo metodo di risoluzione ad alcuni dei problemi più difficili che si trovano alla fine del capitolo. ■

CASO PRATICO Impianto di illuminazione

1) Introduzione al Caso Pratico

Nell'industria viene spesso richiesto all'ingegnere di progettare gli impianti elettrici. In questo caso pratico si analizza un semplice impianto di illuminazione formato da due lampade.

2) Descrizione e Specifiche

Ad un progettista viene richiesto il dimensionamento di un impianto di illuminazione costituito da un alimentatore da 70W e da due lampade come mostrato in Figura 1.22. Le lampade vanno scelte fra i seguenti tre tipi disponibili:

$R_1 = 80\Omega$, costo = 0.60€, dimensione standard

$R_2 = 90\Omega$, costo = 0.90€, dimensione standard

$R_3 = 100\Omega$, costo = 0.75€, dimensione non standard

Il sistema deve avere costo minimo una volta soddisfatto il vincolo:

$$I = 1.2A \pm 5\%$$

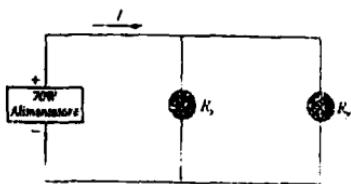


Figura 1.22 Impianto di illuminazione

Obiettivi

Lo studio di questo Caso Pratico si collega al Capitolo 1, dove si sono studiate le grandezze elettriche fondamentali, gli elementi circuituali e i concetti di potenza e energia.

Nel caso specifico, occorre trovare la combinazione di lampade che abbia il costo minore, ma che soddisfi tutte le specifiche imposte dal problema.

Elaborazione e Calcoli

Per ottenere l'obiettivo prefissato si considera l'impianto come un circuito elettrico con un generatore e due resistenze in parallelo. Si hanno tre lampade tra cui scegliere, perciò si effettuano i calcoli per tutte le tre combinazioni possibili.

a) Si usano le lampade R_1 e R_2 .

Per calcolare la potenza assorbita occorre trovare la resistenza equivalente, usando la formula del parallelo tra due resistenze (Capitolo 2, Paragrafo 2.6).

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{80 \cdot 90}{80 + 90} = 42.35 \Omega$$

Il circuito equivalente è mostrato in Figura 2:

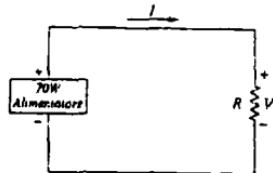


Figura 1.23 Circuito equivalente dell'impianto.

Dalle specifiche del problema la corrente I può assumere i seguenti valori limite:

$$I = 1.2 \pm 5\% = 1.2 \pm 0.06 = 1.14A \div 1.26A$$

Quindi si può calcolare la potenza totale assorbita utilizzando quanto appreso nel paragrafo 1.5:

$$P = V \cdot I = (R \cdot I) \cdot I = R \cdot I^2 = 42.35 \cdot I^2 = 55.04W \div 67.23W$$

Il costo complessivo della prima combinazione di lampade è:

$$\text{costo} = 0.60 + 0.90 = 1.50 \text{ €}$$

b) Si prendono ora le lampade R_1 e R_3 :

Con lo stesso procedimento di prima, si calcola prima la resistenza equivalente:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{80 \cdot 100}{80 + 100} = 44.44 \Omega$$

Il circuito è sempre quello della Figura 1.23, per cui la potenza totale assorbita vale:

$$P = V \cdot I = (R \cdot I) \cdot I = R \cdot I^2 = 44.44 \cdot I^2 = 57.75W \div 70.55W$$

Il costo complessivo della seconda combinazione di lampade è:

$$\text{costo} = 0.60 + 0.75 = 1.35 \text{ €}$$

c) Ultima combinazione possibile è il parallelo fra le lampade R_2 e R_3 .

Si ottiene quindi una resistenza equivalente:

$$R = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{90 \cdot 100}{90 + 100} = 47.37\Omega$$

Mentre la potenza totale assorbita vale:

$$P = V \cdot I = (R \cdot I) \cdot I = R \cdot I^2 = 47.37 \cdot I^2 = 61.56W \div 75.20W$$

Il costo complessivo della terza combinazione di lampade è:

$$\text{costo} = 0.90 + 0.75 = 1.65 \text{ €}$$

Analisi e Verifica

Il confronto tra le tre soluzioni trovate è più comodo in forma tabellare.

Combinazione lampade	Potenza assorbita minima [W]	Potenza assorbita massima [W]	Costo [€]	Dimensioni
a) R_1 e R_2	67.23	55.04	1.50	standard
b) R_1 e R_3	70.55	57.75	1.35	non standard
c) R_2 e R_3	75.20	61.56	1.65	non standard

La terza soluzione è da scartare perché ha la potenza assorbita più alta, ma anche il costo è il più alto; comunque non sarebbe stata una soluzione sfruttabile in quanto l'assorbimento di potenza supera i 70W forniti dall'alimentatore.

La seconda soluzione ha il costo più basso, ma la potenza assorbita è maggiore della prima soluzione; comunque anche questa soluzione supera i 70W.

Quindi la prima soluzione rappresenta la scelta migliore, anche perché è l'unica che consente di avere le dimensioni standard per entrambe le lampade

SOMMARIO

1) Un circuito elettrico è formato da elementi elettrici collegati fra di loro.

2) Il Sistema Internazionale (SI) è il "linguaggio" internazionale di misura, che permette agli ingegneri di comunicare i loro risultati. Da sei unità di misura principali, possono essere derivate le unità di misura delle altre grandezze fisiche.

3) La corrente è la velocità del flusso delle cariche elettriche

$$i = \frac{dq}{dt}$$

4) La tensione è l'energia necessaria a spostare una carica da 1C attraverso un elemento

$$v = \frac{dw}{dq}$$

5) La potenza è l'energia erogata o assorbita per unità di tempo. Essa è anche il prodotto di tensione e corrente

$$P = \frac{dw}{dt} \quad P = v \cdot i \quad P = \frac{v^2}{R}$$

6) Secondo la convenzione degli utilizzatori, quando una corrente positiva entra in un elemento dal terminale con polarità positiva della tensione, la potenza assorbita è positiva.

- 7) Un generatore ideale di tensione fornisce una determinata differenza di potenziale tra i suoi terminali indipendentemente dal circuito a cui viene collegato. Un generatore ideale di corrente eroga una determinata corrente dai suoi terminali indipendentemente dal circuito a cui viene collegato.

8) I generatori di tensione e di corrente possono essere dipendenti o indipendenti. Un generatore dipendente è un elemento attivo il cui valore dipende da altre tensioni e correnti del circuito a cui è collegato.

9) Due esempi di applicazione dei concetti trattati in questo capitolo sono il tubo a raggi catodici del televisore e la procedura di fatturazione della bolletta elettrica

DOMANDE DI RIEPILOGO

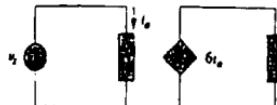


Figura 1.24 Per la domanda di riaperto 1.10

Risposte: 1.1b, 1.2d, 1.3c, 1.4a, 1.5b, 1.6c, 1.7a, 1.8c, 1.9b, 1.10d

PROBLEMI

Paragrafo 1.3 Carica e corrente

- 1.1 Quanti coulomb rappresentano i seguenti numeri di elettroni:
 (a) 6.482×10^{17} (b) 1.24×10^{18}
 (c) 2.46×10^{19} (d) 1.628×10^{20}

1.2 Calcolare la corrente che scorre in un elemento in cui il flusso di cariche vale:
 (a) $q(t) = (3t + 8)$ mC
 (b) $q(t) = (8t^2 + 4t - 2)$ C
 (c) $q(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t}$ nC

1.3 Determinare la carica $q(t)$ che passa attraverso un dispositivo la cui corrente è:
 (a) $i(t) = 3 A$, $q(0) = 1 \mu C$
 (b) $i(t) = (2t + 5)$ mA, $q(0) = 0$
 (c) $i(t) = 20 \cos(10t + \pi/6)$ μA , $q(0) = 2 \mu C$
 (d) $i(t) = 10e^{-3t} \sin 40t$ A, $q(0) = 0$

1.4 Una corrente di 3.2 A scorre in un conduttore. Calcolare quanta carica passa attraverso una qualsiasi sezione del conduttore in 20 s.

- 1.5 Determinare la carica totale trasferita nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 10$ s, quando $i(t) = \frac{1}{2}t$ A.
- 1.6 La carica che entra in un elemento è mostrata in Figura 1.25. Calcolare la corrente negli istanti:
 (a) $t = 1$ ms (b) $t = 6$ ms (c) $t = 10$ ms

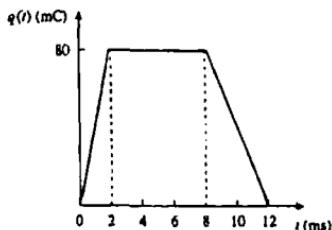


Figura 1.25 Per il Problema 1.6.

- 1.7 La carica che scorre in un filo conduttore è mostrata in Figura 1.26. Tracciare il grafico della relativa corrente.

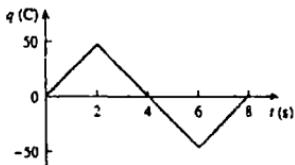


Figura 1.26 Per il Problema 1.7

- 1.8 La corrente che passa in una sezione di un dispositivo è mostrata in Figura 1.27. Calcolare la carica totale che transita nella sezione.

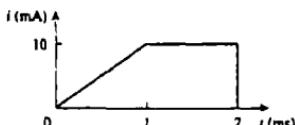


Figura 1.27 Per il Problema 1.8.

- 1.9 La corrente che attraversa un elemento è mostrata in Figura 1.28. Determinare la carica totale transitata nell'elemento agli istanti:
 (a) $t = 1$ s (b) $t = 3$ s (c) $t = 5$ s



Figura 1.28 Per il Problema 1.9

Paragrafi 1.4 e 1.5 Tensione, potenza ed energia

- 1.10 Un fulmine dotato di una corrente di 8 kA colpisce un oggetto per $15\mu\text{s}$. Quanta carica viene depositata sull'oggetto?
- 1.11 Una batteria ricaricabile per lampeggiatore è in grado di erogare 85 mA per 12 h. Quanta carica viene rilasciata in tutto? Se la tensione ai suoi terminali è di 1.2 V, quanta energia può fornire la batteria?

- 1.12 La corrente che attraversa un elemento è data da

$$i(t) = \begin{cases} 3t \text{ A}, & 0 < t < 6\text{s} \\ 18 \text{ A}, & 6 < t < 10\text{s} \\ -12 \text{ A}, & 10 < t < 15\text{s} \\ 0, & t > 15\text{s} \end{cases}$$

Tracciare il grafico della carica assorbita dall'elemento nell'intervallo $0 < t < 20$ s.

- 1.13 La carica che entra dal terminale positivo di un elemento è $q = 10 \sin 4\pi t$ mC. Mentre la tensione tra il terminale positivo e quello negativo è $v = 2 + \cos 4\pi t$ V.
 (a) Calcolare la potenza fornita all'elemento in $t = 0.3$ s.
 (b) Calcolare l'energia fornita all'elemento tra 0 e 0.6 s.
- 1.14 La tensione v e la corrente i di un dispositivo sono rispettivamente

$$v(t) = 5 \cos 2t \text{ V}, \quad i(t) = 10(1 - e^{-0.3t}) \text{ A}$$

Calcolare:

- (a) la carica totale nel dispositivo in $t = 1$ s
 (b) la potenza assorbita dal dispositivo in $t = 1$ s.

- 1.15 La corrente entrante nel terminale + di un dispositivo è $i(t) = 3e^{-2t}$ A e la tensione sul dispositivo è $v(t) = 5/di$ V.
 (a) Calcolare la carica fornita al dispositivo tra $t = 0$ e $t = 2$ s.
 (b) Calcolare la potenza assorbita.
 (c) Calcolare l'energia assorbita in 3 s.

- 1.16 La Figura 1.29 mostra l'andamento della corrente e quello della tensione di un dispositivo.
 (a) Disegnare il grafico della potenza fornita al dispositivo per $t > 0$.
 (b) Determinare l'energia totale assorbita dal dispositivo nell'intervallo $0 < t < 4$ s.

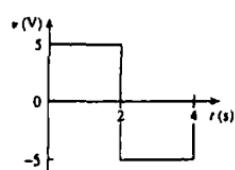
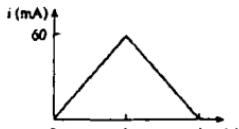


Figura 1.29 Per il Problema 1.16

Paragrafo 1.6 Elementi circuituali

- 1.17 In Figura 1.30 è mostrato un circuito con cinque elementi. Se $p_1 = -205 \text{ W}$, $p_2 = 60 \text{ W}$, $p_3 = 45 \text{ W}$, calcolare la potenza p_4 assorbita o erogata dall'elemento 3.

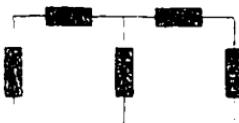


Figura 1.30 Per il Problema 1.17.

- 1.18 Calcolare la potenza assorbita da ciascuno degli elementi in Figura 1.31.

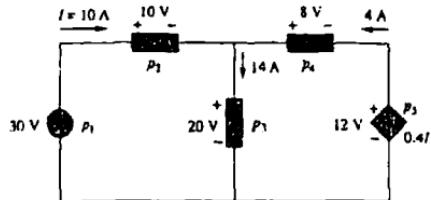


Figura 1.31 Per il Problema 1.18.

- 1.19 Determinare la corrente I nel circuito di Figura 1.32.

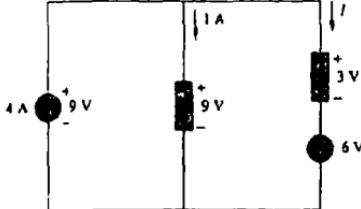


Figura 1.32 Per il Problema 1.19.

- 1.20 Determinare I_a nel circuito di Figura 1.33.

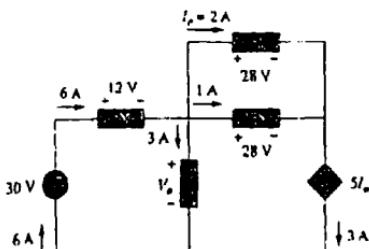


Figura 1.33 Per il Problema 1.20.

Paragrafo 1.7 Applicazioni

- 1.21 Una lampadina ad incandescenza da 60 W funziona a 120 V. Quanti elettroni e quanti coulomb attraversano la lampada in un giorno?

- 1.22 Un fulmine colpisce un aereo con 30 KA per 2 ms. Quanti coulomb di carica sono accumulati sull'aereo?
- 1.23 Uno scaldabagno elettrico da 1.8kW impiega 15 min per riscaldare una quantità di acqua. Se questa operazione viene effettuata una volta al giorno con un costo di 10 cent/KWh, quanto costa questa operazione per 30 giorni?
- 1.24 Una società di servizi fattura 8.5 cent/KWh. Se un utente fa funzionare una lampada da 40 W ininterrottamente per un giorno, quanto paga l'utente?
- 1.25 Un tostapane da 1.2 kW impiega circa 4 minuti e riscalda 4 fetta di pane. Calcolare quanto costa usare il tostapane una volta al giorno per un mese (30 giorni) se l'energia elettrica costa 9 cent/kWh.
- 1.26 La batteria per un lampadario portatile ha una capacità di 0.8 amperora (Ah) e una durata prevista di 10 ore.
- Quanta corrente è in grado di fornire?
 - Quanta potenza può erogare se la tensione ai suoi terminali è 6 V?
 - Quanta energia è immagazzinata nella batteria in kWh?
- 1.27 Per caricare una batteria di automobile è necessaria una corrente costante di 3 A per 4 ore. Se la tensione ai terminali della batteria è $10 - t/2 \text{ V}$, dove t è espresso in ore,
- quanta carica viene trasportata durante il processo di carica?
 - quanta energia viene consumata?
 - quanto costa l'operazione di carica? Si assume che l'elettricità costi 9 cent/kWh.
- 1.28 Una lampadina a incandescenza da 30 W è collegata a una sorgente da 120 V e viene lasciata permanentemente accesa a illuminare un atrio. Determinare:
- la corrente che attraversa la lampadina;
 - il costo di esercizio della lampadina per un anno non bisestile se l'energia elettrica costa 12 cent per kWh.
- 1.29 Una cucina elettrica con quattro piastre e un forno viene usata per la preparazione dei pasti secondo il seguente schema:
 Piastre 1: 20 minuti Piastre 2: 40 minuti
 Piastre 3: 15 minuti Piastre 4: 45 minuti
 Forno: 30 minuti
 Se le piastre assorbono 1.2 kW ciascuna e il forno 1.8 kW, e l'energia elettrica costa 12 cent per kWh, calcolare il costo dell'energia utilizzata.
- 1.30 Una compagnia elettrica fattura agli utenti come segue
- Durato fuso mensile di € 6
 - Primi 250 KWh a 0.02 €/KWh
 - Oltre i 250 KWh a 0.07 €/KWh
- Se un utente consuma 1218 KWh in un mese, quanto dovrà pagare alla compagnia elettrica?
- 1.31 In una abitazione viene utilizzato un personal computer da 120 W per 4 h/giorno e una lampadina da 60 W viene tenuta accesa per 8 h/giorno. Se la compagnia elettrica fattura € 0.12/kWh, calcolare quanto si spende all'anno per il consumo del PC e della lampadina.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 1.32 La corrente che attraversa un cavo telefonico è $20\mu\text{A}$. Quanto tempo è necessario perché attraverso il filo passi una carica di 15 C° ?
- 1.33 Un fulmine ha trasportato una corrente di 2 kA per una durata di 3 ms . Quanti coulomb di carica sono stati trasportati dal fulmine?
- 1.34 Il consumo di elettricità di una abitazione per un giorno è mostrato in Figura 1.34. Determinare: (a) l'energia totale consumata in kWh, (b) la potenza media consumata per ora.

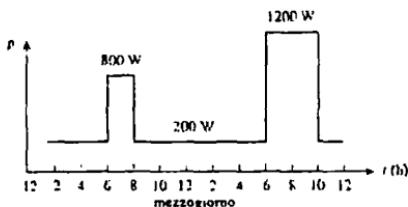


Figura 1.34 Per il Problema 1.34

- 1.35 Il grafico in Figura 1.35 rappresenta la potenza assorbita da un impianto industriale fra le 8:00 e le 8:30. Calcolare l'energia totale in MWh consumata dall'impianto.

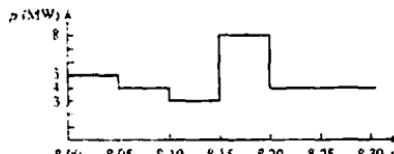


Figura 1.35 Per il Problema 1.35

- 1.36 La capacità di una batteria può essere espressa in amperora (Ah). Una batteria al piombo ha una capacità di 160 Ah :
- Quale è la corrente massima che la batteria può fornire per 40 h ?
 - Quanti giorni potrà durare se viene scaricata a 1 mA ?
- 1.37 Una batteria di 12 V ha bisogno di una carica totale di 40 Ah , per essere ricaricata. Quanti Joule sono erogati alla batteria in una ricarica?
- 1.38 Quanta energia viene erogata da un motore da 10 HP in 30 minuti ? Supponere $1\text{ HP} = 746\text{ W}$
- 1.39 Un televisore da 600 W rimane acceso per 4 ore , senza che nessuno lo sta a guardare. Se il costo dell'elettricità è di 10 cent/KWh quanti euro si sprecano?



LEGGI FONDAMENTALI

2.1 INTRODUZIONE

Nel Capitolo I sono stati introdotti i concetti fondamentali di corrente, tensione e potenza in un circuito elettrico. Per potere determinare i valori è necessario conoscere le leggi fondamentali che governano i circuiti. Esse, note come legge di Ohm e leggi di Kirchhoff, costituiscono il fondamento della analisi dei circuiti.

Il presente capitolo, oltre a illustrare le leggi suddette, introduce anche alcune tecniche elementari di frequente applicazione nella analisi e nel progetto di circuiti: la composizione di resistenze in serie e in parallelo, il partitore di tensione, il partitore di corrente e le trasformazioni triangolo-stella e stella-triangolo. L'applicazione di queste tecniche verrà per ora limitata ai circuiti resistivi. La parte finale del capitolo presenta l'applicazione delle leggi e delle tecniche appena imparate a problemi reali quali l'illuminazione elettrica e il progetto di strumenti di misura di grandezze stazionarie.

2.2 LEGGE DI OHM

Tutti i materiali manifestano, in misura maggiore o minore, la proprietà di opporsi al flusso di cariche elettriche: tale proprietà, nota come resistenza, è rappresentata dal simbolo R . La resistenza di un materiale, mostrato in Figura 2.1(a), con sezione uniforme A dipende da ρ e dalla lunghezza ℓ secondo la relazione

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (2.1)$$

dove ρ è la resistività del materiale in ohm-metri. Materiali conduttori come il rame e l'alluminio hanno resistività basse, mentre gli isolanti, come la carta e la mica, hanno resistività elevate. La Tabella 2.1 mostra i valori di ρ per alcuni materiali di uso comune, indicando anche il loro uso tipico come conduttori, isolanti o semiconduttori.

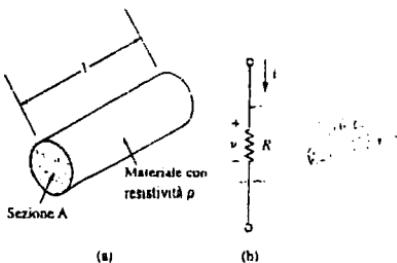


Figura 2.1
 (a) Resistore,
 (b) simbolo del resistore

L'elemento circuitalc usato per rappresentare il fenomeno della resistenza al passaggio di corrente in un materiale è il resistore. Nei circuiti della realtà, spesso i resistori sono costituiti di leghe metalliche o composti del carbonio. Il simbolo del resistore è mostrato in Figura 2.1(b), dove R rappresenta la resistenza del componente. Il resistore rappresenta il più semplice elemento passivo.

Materiale	Resistività ($\Omega \cdot m$)	Uso
Argento	1.64×10^{-8}	Conduttore
Rame	1.72×10^{-8}	Conduttore
Alluminio	2.8×10^{-8}	Conduttore
Oro	2.45×10^{-8}	Conduttore
Carbonio	4×10^{-4}	Semiconduttore
Germanio	47×10^{-3}	Semiconduttore
Silicio	6.4×10^3	Semiconduttore
Ceramica	10^{10}	Isolante
Mica	5×10^{11}	Isolante
Vetro	10^{12}	Isolante
Teflon	3×10^{12}	Isolante

Si deve al fisico tedesco Georg Simon Ohm (1789-1854) la scoperta della relazione fra la tensione e la corrente in un resistore: essa è nota come legge di Ohm.

La legge di Ohm afferma che la tensione su un resistore è direttamente proporzionale alla corrente che scorre nel resistore.

In breve,

$$V \propto i \quad (2.2)$$

Ohm definì resistenza, R , la costante di proporzionalità: essa è una proprietà legata al materiale, e può variare se vengono alterate le condizioni interne o esterne dell'elemento, come per esempio la sua temperatura. La (2.2) diventa

$$V = IR \quad (2.3)$$

che è l'espressione matematica della legge di Ohm. R nella (2.3) è espressa nella unità di misura detta ohm, il cui simbolo è Ω . Riassumendo,

La resistenza R di un elemento denota la sua proprietà di opporsi al passaggio di corrente elettrica e si misura in ohm (Ω).

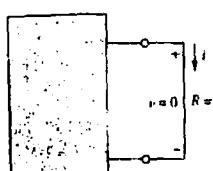
Dalla (2.3) deriva

$$R = \frac{V}{I} \quad (2.4)$$

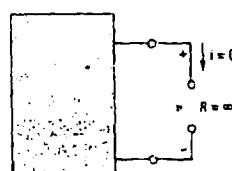
così che

$$1 \Omega = 1 V/A$$

L'applicazione della legge di Ohm come espressa nella (2.3) richiede attenzione nella scelta delle direzioni di riferimento della corrente e della tensione. La direzione della corrente e quella della tensione devono essere conformi alla convenzione degli utilizzatori, come in Figura 2.1(b). Ciò implica che la corrente venga considerata scorre dal potenziale convenzionalmente più alto a quello più basso perché sia $V = iR$. Se il flusso convenzionale della corrente è nella direzione opposta si ha invece $V = -iR$.



(a)



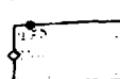
(b)

Figura 2.2
(a) Circuito con $R = 0$,
(b) circuito con $R = \infty$.

Il valore di R può variare da zero all'infinito, ed è interessante considerare i due valori limite. Un elemento con $R = 0$ è chiamato corto circuito, ed è mostrato in Figura 2.2(a). Per il corto circuito

$$v = iR = 0 \quad (2.5)$$

la tensione è quindi nulla qualunque sia la corrente. Nella pratica, un corto circuito viene spesso usato per rappresentare un filo condutore di resistenza molto piccola, perciò

 Un corto circuito è un elemento la cui resistenza tende a zero.

In maniera simile, un elemento con $R = \infty$ è detto circuito aperto, ed è mostrato in Figura 2.2(b). Per il circuito aperto,

$$i = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{v}{R} = 0 \quad (2.6)$$

la corrente è quindi zero qualunque sia la tensione.

 Un circuito aperto è un elemento la cui resistenza tende all'infinito.



Figura 2.3
Resistori fissi
(a) ad avvolgimento,
(b) a film di carbonio
(Courtesy of Tech America)

Un resistore può essere fisso o variabile: la resistenza di un resistore fisso, il tipo più frequente, è costante; i due tipi più comuni di resistore fisso (ad avvolgimento e a composizione) sono mostrati in Figura 2.3. Si usano i resistori a composizione quando si vogliono ottenere valori elevati di resistenza. Il simbolo di Figura 2.1(b) è quello di un resistore fisso. I resistori variabili hanno una resistenza di valore regolabile. Il loro simbolo è mostrato in Figura 2.4(a). Un tipo comune di resistore variabile è il poten-

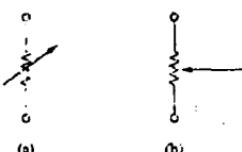


Figura 2.4
Simboli per (a) resistore variabile generico,
(b) potenziometro

ziometro, il cui simbolo è quello di Figura 2.4(b). Il potenziometro è un elemento a tre terminali dotato di un contatto scorrevole. facendo scorrere il contatto variano le resistenze fra il terminale scorrevole e i terminali fissi. Come i resistori fissi, anche quelli variabili possono essere ad avvolgimento o a composizione, come si vede in Figura 2.5.



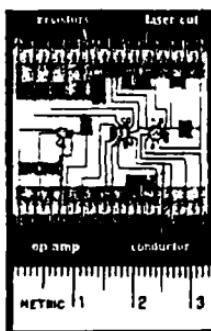
Figura 2.5
Resistori variabili.
(a) a composizione,
(b) a commutazione
(Courtesy of Tech America)

Nonostante resistori come quelli delle Figure 2.3 e 2.5 siano ancora usati nel progetto di circuiti, nella maggior parte dei circuiti di oggi i componenti, e quindi anche i resistori, sono del tipo a montaggio superficiale o integrati: un esempio è mostrato in Figura 2.6.

Figura 2.6

Resistori in un circuito a film spesso

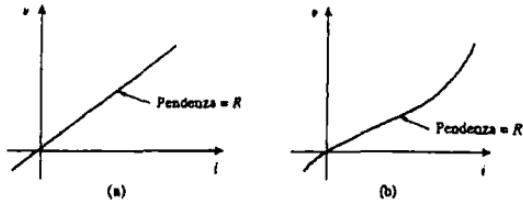
(Source: G. Daryanani,
Principles of Active Network Synthesis and Design
(New York: John Wiley, 1976),
p. 461c.)



Non tutti i resistori si comportano secondo la legge di Ohm. Un resistore che obbedisce alla legge di Ohm si dice lineare: ha una resistenza costante e quindi la sua caratteristica tensione-corrente è del tipo illustrato in Figura 2.7(a): il grafico nel piano i - v è una linea retta passante per l'origine. Un resistore non lineare non rispetta la legge di Ohm; la sua resistenza varia con la corrente; una caratteristica i - v non lineare è mostrata in Figura 2.7(b). Esempi di dispositivi con resistenza non lineare sono le lampade al magnesio e i diodi. Tutti i resistori della realtà possono presentare caratteristiche di non linearità in particolari condizioni: in questo libro si supporrà però che tutti gli elementi che sono rappresentati con resistori siano lineari.

Figura 2.7

Caratteristiche i - v :
(a) resistore lineare,
(b) resistore non lineare.



Un'altra grandezza utile nella analisi dei circuiti è l'inverso della resistenza R , detta conduttanza, e indicata con G :

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v} \quad (2.7)$$

La conduttanza è una misura di quanto bene un elemento conduce l'elettricità; la sua unità di misura è il siemens (S) nel SI.

$$1 S = 1 A/V \quad (2.8)$$

La conduttanza è la capacità di un elemento di condurre il corrente elettrica a gettato in tempo (S).

Si può esprimere il valore di una resistenza in ohm o in siemens; per esempio, 10Ω sono la stessa cosa di $0.1 S$. Dalla (2.7), è possibile scrivere

$$i = Gu \quad (2.9)$$

La potenza dissipata da un resistore può essere espressa in termini di R . Usando la

(1.7) e la (2.3),

$$\underline{p = vi = i^2 R = \frac{v^2}{R}} \quad (2.10)$$

La potenza può anche essere espressa in termini di G come

$$\underline{p = vi = v^2 G = \frac{i^2}{G}} \quad (2.11)$$

Dalle (2.10) e (2.11) è possibile notare che:

1. La potenza dissipata in un resistore è una funzione non lineare della corrente o della tensione.
2. Poiché R e G sono quantità positive, la potenza dissipata da un resistore è sempre positiva. Un resistore assorbe quindi sempre potenza dal circuito. Ciò conferma l'idea del resistore come un elemento passivo, incapace di erogare energia.

Esempio 2.1

Un ferro da stirto elettrico assorbe una corrente di 2 A a 120 V. Calcolare la resistenza.

Soluzione: Dalla legge di Ohm,

$$R = \frac{v}{i} = \frac{120}{2} = 60 \Omega$$

■ **Esercizio 2.1** Il componente principale di un tostapane è un elemento elettrico (una resistenza) che converte l'energia elettrica in calore. Quanta corrente assorbe un tostapane con resistenza di 12 Ω a 110 V?

Risposta: 9.167 A.

Esempio 2.2

Nel circuito di Figura 2.8, calcolare la corrente i , la conduttanza G e la potenza p .

Soluzione: La tensione sul resistore è la stessa di quella del generatore (30 V) essendo entrambi gli elementi collegati alla stessa coppia di terminali. La corrente è quindi

$$i = \frac{v}{R} = \frac{30}{5 \times 10^3} = 6 \text{ mA}$$

La conduttanza vale

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{5 \times 10^3} = 0.2 \text{ mS}$$

È possibile calcolare la potenza in vari modi, facendo uso delle Equazioni (1.7), (2.10) o (2.11).

$$p = vi = 30(6 \times 10^{-3}) = 180 \text{ mW}$$

oppure

$$p = i^2 R = (6 \times 10^{-3})^2 5 \times 10^3 = 180 \text{ mW}$$

oppure

$$p = v^2 G = (30)^2 0.2 \times 10^{-3} = 180 \text{ mW}$$

■ **Esercizio 2.2** Per il circuito di Figura 2.9, calcolare la tensione v , la conduttanza G e la potenza p .

Risposta: 20 V, 100 μ S, 40 mW.



Figura 2.8 Per l'Esempio 2.2.

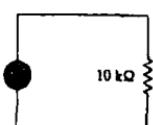


Figura 2.9 Per l'Esercizio 2.2.

Esempio 2.3

Un generatore di tensione $20 \sin \pi t$ V è collegato a un resistore da $5 \text{ k}\Omega$. Calcolare la corrente nel resistore e la potenza dissipata.

Soluzione:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{20 \sin \pi t}{5 \times 10^3} = 4 \sin \pi t \text{ mA}$$

Da cui,

$$p = vi = 80 \sin^2 \pi t \text{ mW}$$

Esercizio 2.3 Un resistore assorbe una potenza istantanea di $20 \cos^2 \pi t \text{ mW}$ quando è collegato a un generatore di tensione $v = 10 \cos \pi t$ V. Calcolare i e R .

Risposta: $2 \cos \pi t \text{ mA}$, $5 \text{ k}\Omega$

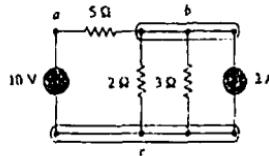
2.3 NODI, RAMI E MAGLIE

Gli elementi di un circuito elettrico possono essere interconnessi in molti modi diversi. È opportuno quindi introdurre alcuni semplici concetti di topologia. Nel seguito verrà chiamata rete una interconnessione di elementi e dispositivi, e circuito una rete in cui esistono uno o più percorsi chiusi. Inoltre, spesso parlando di topologia verrà usato il termine rete anziché circuito anche quando i due termini sono intercambiabili. La topografia della rete studia le proprietà legate alla posizione degli elementi e alla configurazione geometrica delle reti. I concetti elementari della topologia sono i rami, i nodi e le maglie.

Un ramo rappresenta un singolo elemento, quale per esempio un generatore di tensione o un resistore.

In altre parole, un ramo rappresenta un qualunque elemento a due terminali. Il circuito di Figura 2.10 ha cinque rami: il generatore di tensione da 10 V, il generatore di corrente da 2 A e i tre resistori.

Figura 2.10
Nodi, rami e maglie



Un nodo è il punto di connessione di due o più rami.

Nei circuiti, i nodi vengono indicati di solito con un pallino. Quando due nodi sono collegati da un solo circuito (un semplice filo), essi costituiscono un unico nodo. Il circuito di Figura 2.10 ha tre nodi a, b e c. Si noti che i tre punti che formano il nodo b sono collegati da fili conduttori perfetti. Lo stesso si può dire dei quattro punti che formano il nodo c. Ci si convince del fatto che il circuito di Figura 2.10 ha solo tre nodi, ridisegnandolo come in Figura 2.11. I circuiti delle Figure 2.10 e 2.11 sono identici: solo per maggiore chiarezza in Figura 2.10 i nodi b e c sono stati espansi usando conduttori perfetti.

Una maglia è un qualunque percorso chiuso in un circuito.

Una maglia è un percorso chiuso ottenuto partendo da un nodo, passando attraverso una sequenza di nodi, e ritornando al nodo di partenza senza passare più di una volta da nessuno dei nodi intermedi. Una maglia si dice indipendente se contiene un ramo che non fa parte di nessun'altra maglia. Maglie o percorsi indipendenti danno luogo a equazioni indipendenti.

Per esempio, in Figura 2.11 è possibile identificare sei maglie, ma solo tre di esse sono indipendenti. Il percorso chiuso *abca* passante per il resistore da 2Ω è indipendente. Una seconda maglia indipendente è rappresentata dal percorso chiuso *bcb* che comprende il resistore da 3Ω ed il generatore di corrente. La terza maglia indipendente potrebbe essere il percorso chiuso *hch* con il resistore da 2Ω in parallelo con il resistore da 3Ω .

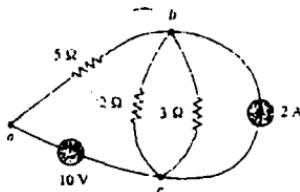


Figura 2.11

Il circuito con tre nodi di Figura 2.10 ridisegnato.

Una rete con b rami e l maglie indipendenti soddisfa il teorema fondamentale della topologia delle reti:

$$b = l + n - 1 \quad (2.12)$$

Come mostrano le due definizioni che seguono, la topologia dei circuiti è di importanza fondamentale nel calcolo delle tensioni e delle correnti in un circuito elettrico.

Due elementi sono in serie se sono connessi, cioè condividono a due a due un nodo in maniera esclusiva, e quindi sono percorsi dalla stessa corrente. Due o più elementi sono detti in parallelo se sono collegati alla stessa coppia di nodi, e quindi hanno la stessa tensione.

Due elementi sono in serie se hanno un nodo in comune e non c'è nessun altro elemento connesso a quel nodo. È anche possibile connettere gli elementi in modo che non risultino né in serie né in parallelo. Nel circuito di Figura 2.10, il generatore di tensione e il resistore da 5Ω sono in serie perché sono percorsi dalla stessa corrente. Il resistore da 2Ω , quello da 3Ω e il generatore di corrente sono invece in parallelo, perché sono collegati agli stessi due nodi (*b* e *c*) e di conseguenza hanno la stessa tensione. Il resistore da 5Ω e quello da 2Ω non sono né in serie né in parallelo tra loro.

Esempio 2.4

Determinare il numero di rami e di nodi del circuito mostrato in Figura 2.12. Identificare gli elementi collegati in serie e in parallelo.

Soluzione: Ci sono quattro elementi; il circuito ha quindi 4 rami: $10V$, 5Ω , 6Ω e $2A$. Ci sono tre nodi, evidenziati nella Figura 2.13. Il resistore da 5Ω è in serie al generatore di tensione da $10V$, perché entrambi sono percorsi dalla stessa corrente. Il resistore da 6Ω è in parallelo al generatore di corrente da $2A$, perché entrambi sono collegati ai nodi 2 e 3.

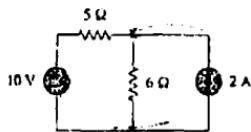


Figura 2.12 Per l'Esempio 2.4

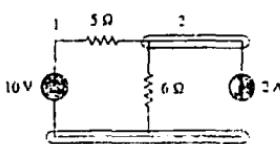


Figura 2.13 I tre nodi del circuito di Figura 2.12

■ Esercizio 2.4 Quanti rami e quanti nodi ha il circuito di Figura 2.14? Identificare gli elementi in serie e gli elementi in parallelo.

Risposta: Nella Figura 2.15 sono evidenziati cinque rami e tre nodi. I resistori da $1\ \Omega$ e $2\ \Omega$ sono in parallelo, così come il resistore da $4\ \Omega$ e il generatore da 10 V .

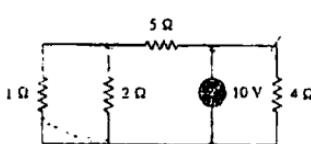


Figura 2.14 Per l'Esercizio 2.4

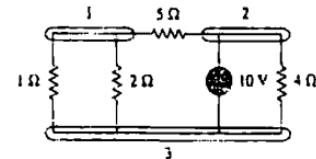


Figura 2.15 Risposta all'Esercizio 2.4

2.4 LEGGI DI KIRCHHOFF

La legge di Ohm da sola non è sufficiente per effettuare l'analisi dei circuiti. In combinazione con le due leggi di Kirchhoff essa costituisce invece un insieme di strumenti sufficienti per l'analisi di una grande varietà di circuiti. Le leggi di Kirchhoff furono introdotte per la prima volta nel 1847 dal fisico tedesco Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887); esse sono la legge delle correnti (KCL, Kirchhoff's Current Law) e la legge delle tensioni (KVL, Kirchhoff's Voltage Law).

La prima legge di Kirchhoff si basa sulla legge di conservazione della carica, la quale afferma che la somma algebrica delle cariche di un sistema isolato non può variare.

La legge di Kirchhoff delle correnti (KCL) stabilisce che la somma algebrica delle correnti entranti in un qualsiasi nodo (o in una superficie chiusa) è zero.

Matematicamente, cioè si esprime scrivendo

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (2.13)$$

dove N è il numero di rami connessi al nodo e i_n è la n -esima corrente entrante nel (o uscente dal) nodo. Per la sua applicazione, nella sommatoria una corrente con direzione entrante viene presa con il segno più, mentre una corrente con direzione uscente viene presa con segno meno.

Per avere una giustificazione della validità della KCL, si supponga che le correnti $i_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ risultino tutte entrate in un certo nodo. La somma algebrica delle correnti al nodo è allora

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots \quad (2.14)$$

Integrando entrambi i membri della (2.14), si ha

$$q_T(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + \dots \quad (2.15)$$

dove $q_k(t) = \int i_k(t) dt$ e $q_T(t) = \int i_T(t) dt$. La legge di conservazione della carica impone che la somma algebrica delle cariche elettriche in un nodo non cambi; in altre parole, nel nodo non può avere luogo alcun deposito di carica netta. Perciò $q_T(t) = 0 \rightarrow i_T(t) = 0$, che conferma la validità della KCL.

Si consideri ora il nodo di Figura 2.16. Applicando la KCL si ha

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0 \quad (2.16)$$

perché le correnti $i_1, i_3, e i_4$ hanno direzioni di riferimento entrate nel nodo, mentre le correnti i_2 e i_5 sono uscenti. Riorrendo i termini, si ottiene

$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5 \quad (2.17)$$

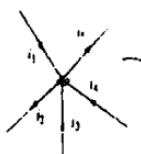


Figura 2.16
Corrente in un nodo

La (2.17) costituisce una forma alternativa della KCL.

La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti dal nodo.

Si noti che è possibile applicare la KCL anche a una superficie chiusa. Ciò può essere considerato una generalizzazione della legge, perché un nodo può essere considerato come una superficie chiusa ridotta a un singolo punto. In un disegno bidimensionale, una superficie chiusa è lo stesso di un percorso chiuso. Come illustrato dalla Figura 2.17, la corrente totale che entra nella superficie è uguale alla corrente totale che esce dalla superficie.

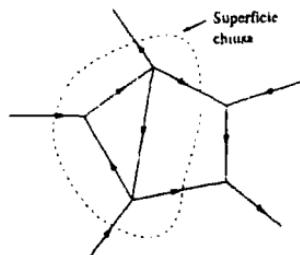


Figura 2.17
Applicazione della KCL ad una superficie chiusa.

Una semplice applicazione della KCL si ha nella combinazione in parallelo di generatori di corrente. La corrente complessiva è la somma algebrica delle correnti fornite dai singoli generatori. Per esempio, i generatori di corrente di Figura 2.18(a) possono essere combinati come in Figura 2.18(b). Il generatore di corrente equivalente¹ si ottiene applicando la KCL al nodo a .

$$I_T + I_2 = I_1 + I_3$$

o anche

$$I_T = I_1 - I_2 + I_3 \quad (2.18)$$

Un circuito non può mai avere due correnti I_1 e I_2 diverse poste in serie, a meno che $I_1 = I_2$, ciò costituirebbe una violazione della KCL.

La seconda legge di Kirchhoff deriva dal principio di conservazione dell'energia:

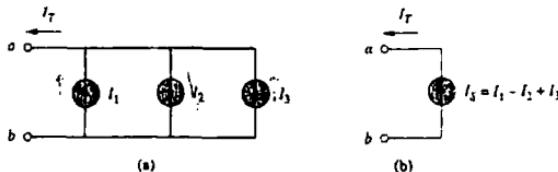


Figura 2.18
Generatori di corrente in parallelo: (a) circuito originale, (b) circuito equivalente

La legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL) afferma che la somma algebrica delle tensioni lungo un qualsiasi percorso chiuso (o maglia) è zero.

Espressa in termini matematici, la KVL stabilisce che

$$\sum_{m=1}^M v_m = 0 \quad (2.19)$$

¹ Due generatori (o in genere due circuiti) si dicono equivalenti ad una certa coppia di terminali se presentano la stessa relazione $v - i$ a quella coppia di terminali.

dove M è il numero di tensioni nella maglia (il numero di rami della maglia) e v_m è la m -esima tensione.

Per illustrare l'applicazione della KVL, si consideri il circuito di Figura 2.19. Il segno di ciascuna tensione viene preso uguale alla polarità del terminale che si incontra per primo percorrendo la maglia. Si può partire da un qualunque ramo e percorrere la maglia in senso orario o antiorario. Si supponga di partire dal generatore di tensione di sinistra e di percorrere la maglia in senso orario, come mostrato nella figura; le tensioni saranno $-v_1$, $+v_2$, $+v_3$, $-v_4$ e $+v_5$, nell'ordine. Per esempio, quando si arriva al ramo 3, si incontra il terminale positivo per primo; si ha quindi $+v_3$. Per il ramo 4, si incontra per primo il terminale negativo, per cui si ha $-v_4$. La KVL fornisce allora

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0 \quad (2.20)$$

Riordinando i termini

$$v_2 + v_3 + v_5 = v_1 + v_4 \quad (2.21)$$

che può essere letta come

$$\text{Somma delle cadute di tensione} = \text{Somma degli aumenti di tensione} \quad (2.22)$$

La (2.22) costituisce una forma alternativa della KVL. Se avessimo percorso la maglia in senso antiorario, il risultato sarebbe stato $+v_1$, $-v_5$, $+v_3$, $-v_4$ e $-v_2$, che è la stessa cosa di prima con tutti i segni invertiti. Le (2.20) e (2.21) rimangono quindi le stesse.

Quando si collegano in serie dei generatori di tensione, si può applicare la KVL per ottenere la tensione totale. Essa è la somma algebrica delle tensioni dei singoli generatori. Per esempio, per i generatori di tensione mostrati in Figura 2.20(a), il generatore di tensione equivalente di Figura 2.20(b) si ottiene applicando la KVL.

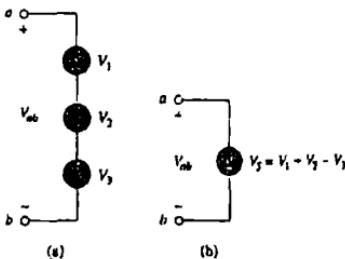
$$-V_{ab} + V_1 + V_2 - V_3 = 0$$

cioè

$$V_{ab} = V_1 + V_2 - V_3 \quad (2.23)$$

Un circuito non può mai presentare due tensioni diverse V_1 e V_2 in parallelo se non è $V_1 = V_2$; ciò costituirebbe una violazione della KVL.

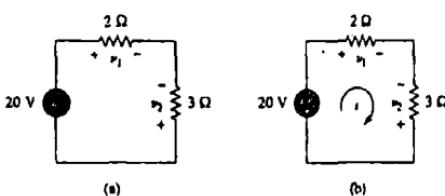
Figura 2.20
Generatori di tensione
in serie: (a) circuito originale,
(b) circuito equivalente



Esempio 2.5

Nel circuito di Figura 2.21(a), calcolare le tensioni v_1 e v_2 .

Figura 2.21
Per l'Esempio 2.5.



Soluzione: Si applicano la legge di Kirchhoff delle tensioni e la legge di Ohm. Supponiamo che la corrente i scorra nella maglia come indicato nella Figura 2.21(b). Per la legge di Ohm,

$$v_1 = 2i, \quad v_2 = -3i \quad (2.5.1)$$

Applicando la KVL alla maglia si ottiene

$$-20 + v_1 - v_2 = 0 \quad (2.5.2)$$

Sostituendo la (2.5.1) nella (2.5.2), si perviene a

$$-20 + 2i + 3i = 0 \implies 5i = 20 \implies i = 4 \text{ A}$$

Sostituendo il valore trovato di i nella (2.5.1) si ottiene quanto richiesto

$$v_1 = 8 \text{ V}, \quad v_2 = -12 \text{ V}$$

Esercizio 2.5 Determinare v_1 e v_2 nel circuito di Figura 2.22.

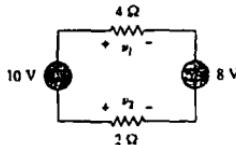
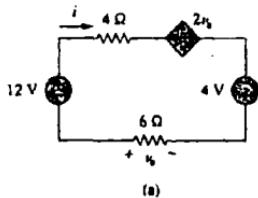


Figura 2.22
Per l'Esercizio 2.5

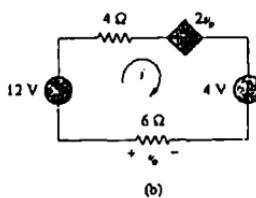
Risposta: 12 V, -6 V.

Esempio 2.6

Determinare v_a e i nel circuito di Figura 2.23(a).



(a)



(b)

Figura 2.23
Per l'Esempio 2.6

Soluzione: Applicando la KVL lungo la maglia come mostrato in Figura 2.23(b) si ottiene

$$-12 + 4i + 2v_a - 4 + 6i = 0 \quad (2.6.1)$$

La legge di Ohm per il resistore da 6 Ω fornisce

$$v_a = -6i \quad (2.6.2)$$

Sostituendo la (2.6.2) nella (2.6.1) si ha infine

$$-16 + 10i - 12i = 0 \implies i = -8 \text{ A}$$

e $v_a = 48 \text{ V}$.

Esercizio 2.6 Determinare v_a e v_b nel circuito di Figura 2.24.

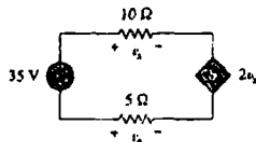


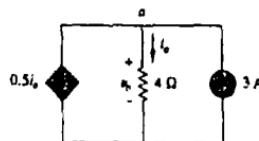
Figura 2.24
Per l'Esercizio 2.6

Risposta: 10 V, -5 V

Esempio 2.7

Calcolare la corrente i_o e la tensione v_o nel circuito di Figura 2.25.

Figura 2.25
Per l'Esempio 2.7



Soluzione: Applicando la KCL al nodo a , si ottiene

$$3 + 0.5i_o = i_o \quad \Rightarrow \quad i_o = 6 \text{ A}$$

Per il resistore da 4Ω la legge di Ohm fornisce

$$v_o = 4i_o = 24 \text{ V}$$

Esercizio 2.7 Calcolare la tensione v_o e la corrente i_o nel circuito di Figura 2.26.

Figura 2.26
Per l'Esercizio 2.7.

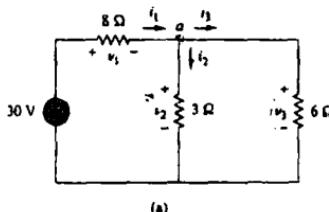


Risposta: $8 \text{ V}, 4 \text{ A}$.

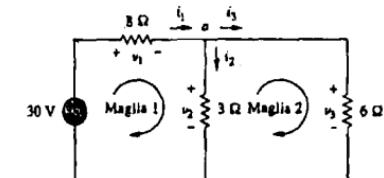
Esempio 2.8

Calcolare tensioni e correnti nel circuito di Figura 2.27(a).

Figura 2.27
Per l'Esempio 2.8.



(a)



(b)

Soluzione: Si applicano la legge di Ohm e quelle di Kirchhoff. Per la legge di Ohm,

$$v_1 = 8i_1, \quad v_2 = 3i_2, \quad v_3 = 6i_3 \quad (2.8.1)$$

Essendo la tensione e la corrente di ciascun resistore legate tra loro dalla legge di Ohm, in realtà è sufficiente determinare tre sole incognite: (v_1, v_2, v_3) oppure (i_1, i_2, i_3) . Al nodo a , la KCL fornisce

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (2.8.2)$$

Applicando la KVL alla maglia 1 di Figura 2.27(b),

$$-30 + v_1 + v_2 = 0$$

Esprimendo la stessa equazione in termini di i_1 e i_2 , usando la (2.8.1), si ottiene

$$-30 + 8i_1 + 3i_2 = 0$$

e poi

$$i_1 = \frac{(30 - 3i_2)}{8} \quad (2.8.3)$$

Applicando la KVL alla maglia 2,

$$-v_1 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_1 \quad (2.8.4)$$

come era logico attendersi, essendo i due resistori collegati in parallelo. Esprimendo anche qui v_1 e v_2 in termini di i_1 e i_2 secondo la (2.8.1), la (2.8.4) diventa

$$6i_3 = 3i_2 \quad \Rightarrow \quad i_3 = \frac{i_2}{2} \quad (2.8.5)$$

Sostituendo la (2.8.3) e la (2.8.5) nella (2.8.2) si ha

$$\frac{30 - 3i_2}{8} - i_2 - \frac{i_2}{2} = 0$$

da cui $i_2 = 2$ A. Notò il valore di i_2 , si usano ora le Equazioni da (2.8.1) a (2.8.5), ottenendo

$$i_1 = 3 \text{ A}, \quad i_3 = 1 \text{ A}, \quad v_1 = 24 \text{ V}, \quad v_2 = 6 \text{ V}, \quad v_3 = 6 \text{ V}$$

Esercizio 2.8 Calcolare tensioni e correnti nel circuito mostrato in Figura 2.28.

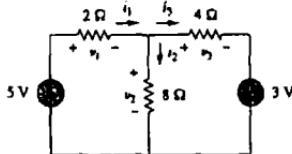


Figura 2.28
Per l'Esercizio 2.8.

Risposta $v_1 = 3 \text{ V}$, $v_2 = 2 \text{ V}$, $v_3 = 5 \text{ V}$, $i_1 = 1.5 \text{ A}$, $i_2 = 0.25 \text{ A}$, $i_3 = 1.25 \text{ A}$.

2.5 RESISTORI IN SERIE E PARTITORE DI TENSIONE

Accade di frequente che in un circuito si vogliano combinare resistori posti in serie; il processo risulta semplificato se i resistori vengono combinati due alla volta. Si consideri il circuito con una sola maglia di Figura 2.29. I due resistori sono in serie, perché percorsi dalla stessa corrente. Applicando la legge di Ohm a entrambi, si ottiene

$$v_1 = iR_1, \quad v_2 = iR_2 \quad (2.24)$$

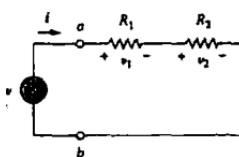


Figura 2.29
Circuito con una sola maglia e due resistori in serie.

Applicando la KVL alla maglia (percorrendola in senso orario), si ha

$$-v + v_1 + v_2 = 0 \quad (2.25)$$

La combinazione delle (2.24) e (2.25) fornisce

$$v = v_1 + v_2 = i(R_1 + R_2) \quad (2.26)$$

cioè

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \quad (2.27)$$

La (2.26) può essere scritta nella forma

$$v = iR_{eq} \quad (2.28)$$

e mostra che i due resistori possono essere sostituiti da un resistore equivalente R_{eq} , esso vale

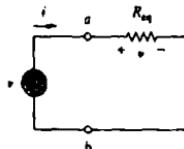
$$(R_{eq} = R_1 + R_2) \quad (2.29)$$

Il circuito di Figura 2.29 può dunque essere sostituito dal circuito equivalente di

Figura 2.30 I due circuiti sono equivalenti perché possiedono la stessa relazione tensione-corrente ai terminali *a-b*. Un circuito equivalente come quello di Figura 2.30 è utile nel semplificare l'analisi di un circuito complesso. In generale,

La resistenza equivalente di un circuito rispetto a due terminali *a-b* è il valore della resistenza che si deve inserire in serie con la linea *a-b* per avere la stessa tensione e la stessa corrente.

Figura 2.30
Circuito equivalente di quello in Figura 2.29



Per *N* resistori in serie allora,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \sum_{n=1}^N R_n \quad (2.30)$$

Per provare la tensione su ciascuno dei resistori di Figura 2.29, si sostituisce la (2.27) nella (2.24), ottenendo

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v \quad (2.31)$$

La tensione *v* del generatore si ripartisce fra i due resistori in maniera direttamente proporzionale alle loro resistenze; maggiore è la resistenza, più grande la caduta di tensione. Questa è la regola del partitore di tensione e il circuito di Figura 2.29 è chiamato partitore di tensione.

In generale, se un partitore di tensione ha *N* resistori (R_1, R_2, \dots, R_N) posti in serie, e la tensione del generatore è *v*, l'*n*-esimo resistore (R_n) avrà una caduta di tensione pari a

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v \quad (2.32)$$

2.6 RESISTORI IN PARALLELO E PARTITORE DI CORRENTE

Si consideri il circuito di Figura 2.31, nel quale due resistori sono collegati in parallelo. Essi hanno quindi la stessa tensione. Per la legge di Ohm,

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2$$

oppure

$$i_1 = \frac{v}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v}{R_2} \quad (2.33)$$

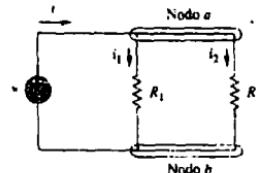


Figura 2.31
Due resistori in parallelo

Applicando la KCL al nodo a si ottiene la corrente totale i :

$$i = i_1 + i_2 \quad (2.34)$$

Sostituendo la (2.33) nella (2.34)

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} \approx v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v}{R_{eq}} \quad (2.35)$$

dove R_{eq} è la resistenza equivalente dei resistori in parallelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.36)$$

da cui

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

o anche

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.37)$$

Perciò,

La resistenza equivalente di due resistori in parallelo è pari alla somma delle resistenze inversamente proporzionali.

Dalla (2.37), se $R_1 = R_2$, allora $R_{eq} = R_1/2$.

È possibile estendere il risultato della (2.36) al caso generale di un circuito con N resistori in parallelo. La resistenza equivalente vale

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad (2.38)$$

Si noti che R_{eq} risulta sempre minore della resistenza più piccola della combinazione parallela. Se $R_1 = R_2 = \cdots = R_N = R$, allora

$$R_{eq} = \frac{R}{N} \quad (2.39)$$

Per esempio, se quattro resistori da $100\ \Omega$ vengono collegati in parallelo, la loro resistenza equivalente sarà di $25\ \Omega$. Spesso è più conveniente usare le conduttanze invece delle resistenze quando si trattano resistori in parallelo. Dalla (2.38), la conduttanza equivalente di N resistori in parallelo è

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N \quad (2.40)$$

dove $G_{eq} = 1/R_{eq}$, $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, ..., $G_N = 1/R_N$. La (2.40) afferma che:

La conduttanza equivalente di resistori collegati in parallelo è pari alla somma delle singole conduttanze.

È quindi possibile sostituire il circuito di Figura 2.31 con quello di Figura 2.32. Si noti anche la somiglianza fra la (2.30) e la (2.40); la conduttanza equivalente dei resistori in parallelo si ottiene allo stesso modo della resistenza equivalente dei resistori in serie. In maniera simile, la conduttanza equivalente dei resistori in serie si ottiene allo stesso modo della resistenza equivalente dei resistori in parallelo. La conduttanza equivalente G_{eq} di N resistori in serie (come in Figura 2.29) è quindi

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \cdots + \frac{1}{G_N} \quad (2.41)$$

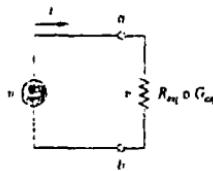


Figura 2.32
Circuito equivalente di quello in Figura 2.31.

Nota la corrente totale i entrante nel nodo a di Figura 2.31, come si ottengono le correnti i_1 e i_2 ? Si sa che il resistore equivalente ha la stessa tensione,

$$v = i R_{eq} = \frac{i R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.42)$$

Usando la (2.33) e la (2.42) si ottiene

$$i_1 = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}, \quad i_2 = \frac{R_1 i}{R_1 + R_2} \quad (2.43)$$

che mostra come la corrente totale i si ripartisca tra i due resistori in proporzione inversa al valore della loro resistenza. Questa è la regola del partitore di corrente, e il circuito di Figura 2.31 è detto partitore di corrente. La corrente più grande scorre nella resistenza più piccola.

Come caso limite, si supponga che uno dei resistori di Figura 2.31 sia zero, per esempio $R_1 = 0$; R_1 è dunque un corto circuito, come si vede in Figura 2.33(a). Nella (2.43), $R_1 = 0$ implica $i_1 = 0$, $i_2 = i$. Ciò significa che la corrente i evita R_1 e scorre tutta nel corto circuito $R_2 = 0$, il percorso di minima resistenza. Quando una parte di un circuito è cortocircuitata come in Figura 2.33(a), si devono allora ricordare due cose:

1. La resistenza equivalente $R_{eq} = 0$. [Si veda ciò che avviene ponendo $R_2 = 0$ nella (2.37).]
2. Tutta la corrente scorre nel corto circuito.

L'altro caso particolare si ha quando $R_2 = \infty$, cioè R_2 è un circuito aperto, come mostrato in Figura 2.33(b). Anche in questo caso la corrente scorre nel percorso di minima resistenza, rappresentato da R_1 . Faccendo il limite della (2.37) per $R_2 \rightarrow \infty$, si ottiene $R_{eq} = R_1$.

Nella (2.43), dividendo numeratore e denominatore per $R_1 R_2$, si ottiene

$$i_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \quad (2.44a)$$

$$i_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \quad (2.44b)$$

In generale, se un partitore di corrente è costituito da N rami (G_1, G_2, \dots, G_N) in parallelo con il generatore di corrente i , l' n -esimo conduttore (G_n) sarà percorso da una corrente

$$i_n = \frac{G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} i \quad (2.45)$$

Spesso risulta possibile e conveniente combinare resistori in serie e in parallelo, riducendo una rete resistiva a una singola resistenza equivalente R_{eq} . Questa è la resistenza fra i terminali designati della rete, e possiede la stessa caratteristica $i-v$ della rete originale agli stessi terminali.

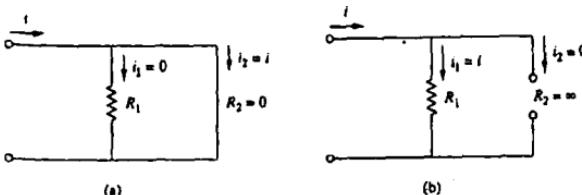


Figura 2.33

(a) Circuito con corto circuito,
(b) circuito con circuito aperto

Esempio 2.9

Determinare R_{eq} per il circuito di Figura 2.34.

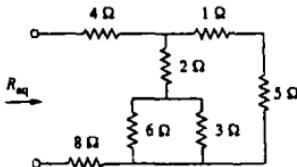


Figura 2.34
Per l'Esempio 2.9

Soluzione: Si ottiene R_{eq} applicando ripetutamente la composizione in serie e in parallelo di resistori. I resistori da 6Ω e 3Ω sono in parallelo; la loro resistenza equivalente vale

$$6\Omega \parallel 3\Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

(Il simbolo \parallel indica l'operazione di combinazione in parallelo.) Inoltre, i resistori da 1Ω e da 5Ω sono in serie, e la loro resistenza equivalente vale quindi

$$1\Omega + 5\Omega = 6\Omega$$

Il circuito di Figura 2.34 si riduce allora a quello di Figura 2.35(a), nel quale si nota che i due resistori da 2Ω sono in serie; la resistenza equivalente vale

$$2\Omega + 2\Omega = 4\Omega$$

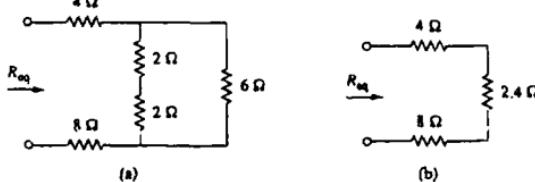


Figura 2.35
Circuiti equivalenti
dell'Esempio 2.9.

Questo resistore da 4Ω risulta ora in parallelo a quello da 6Ω della Figura 2.35(a); la loro resistenza equivalente è

$$4\Omega \parallel 6\Omega = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2.4\Omega$$

Il circuito di Figura 2.35(a) è stato sostituito da quello in Figura 2.35(b), in cui i tre resistori risultano in serie. La resistenza equivalente complessiva è quindi

$$R_{eq} = 4\Omega + 2.4\Omega + 8\Omega = 14.4\Omega$$

Esercizio 2.9 Determinare R_{eq} in Figura 2.36 combinando i resistori in serie e in parallelo.

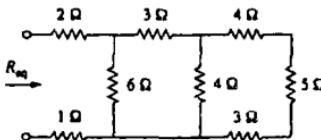


Figura 2.36
Per l'Esercizio 2.9.

Risposta 6 Ω

Esempio 2.10

Calcolare la resistenza equivalente R_{ab} nel circuito di Figura 2.37.

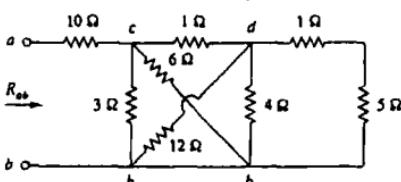


Figura 2.37
Per l'Esempio 2.10.

Soluzione: I resistori da $3\ \Omega$ e da $6\ \Omega$ sono in parallelo, perché connessi agli stessi nodi c e b . La loro resistenza complessiva è

$$3\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\ \Omega \quad (2.10.1)$$

Allo stesso modo, i resistori da $12\ \Omega$ e da $4\ \Omega$ sono in parallelo perché entrambi connessi ai nodi d e b . Quindi:

$$12\ \Omega \parallel 4\ \Omega = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\ \Omega \quad (2.10.2)$$

Inoltre, i due resistori da $1\ \Omega$ e $5\ \Omega$ sono in serie: la loro resistenza equivalente vale

$$1\ \Omega + 5\ \Omega = 6\ \Omega \quad (2.10.3)$$

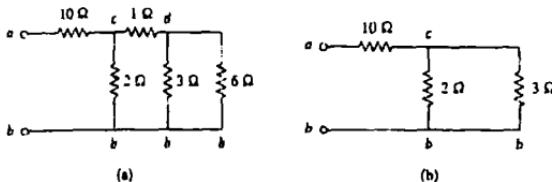
Dopo queste tre trasformazioni, il circuito di Figura 2.37 diventa quello di Figura 2.38(a), nel quale $3\ \Omega$ in parallelo a $6\ \Omega$ danno una resistenza equivalente di $2\ \Omega$ (si ricordi la (2.10.1)). La nuova resistenza equivalente da $2\ \Omega$ risulta in serie a quella da $1\ \Omega$, per una resistenza equivalente di $1\ \Omega + 2\ \Omega = 3\ \Omega$. Perciò, il circuito di Figura 2.38(a) viene sostituito da quello di Figura 2.38(b). Ora, i resistori da $2\ \Omega$ e $3\ \Omega$ in parallelo vengono combinati, e forniscono

$$2\ \Omega \parallel 3\ \Omega = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 1.2\ \Omega$$

Questo resistore da $1.2\ \Omega$ risulta in serie con quello da $10\ \Omega$, quindi

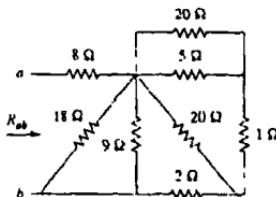
$$R_{ab} = 10 + 1.2 = 11.2\ \Omega$$

Figura 2.38
Circuiti equivalenti dell'Esempio 2.10.



Esercizio 2.10 Calcolare R_{ab} per il circuito di Figura 2.39.

Figura 2.39
Per l'Esercizio 2.10.



Risposta 11 Ω

Esempio 2.11

Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} per il circuito di Figura 2.40(a).

Soluzione: I resistori da $8S$ e $12S$ sono in parallelo, la loro conduttanza equivalente vale

$$8S + 12S = 20S$$

Il resistore equivalente da $20S$ risulta ora in serie con quello da $5S$, come mostrato in Figura 2.40(b); la conduttanza equivalente è

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4S$$

Questa è un parallelo con il resistore da $6S$, perciò

$$G_{eq} = 6 + 4 = 10S$$

Si noti che il circuito di Figura 2.40(a) è lo stesso di quello in Figura 2.40(c), nel quale i resistori so-

no espressi in siemens, mentre in quello di Figura 2.40(c) sono espressi in ohm. Per convincersi che i circuiti sono identici, si calcola ora R_{eq} nel circuito di Figura 2.40(c).

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{1}{6} \left\| \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right\| \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{6} \left\| \frac{1}{4} \right. \\ &= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{10} \Omega \\ G_{eq} &= \frac{1}{R_{eq}} = 10 S \end{aligned}$$

che è la stessa conduttanza ottenuta in precedenza

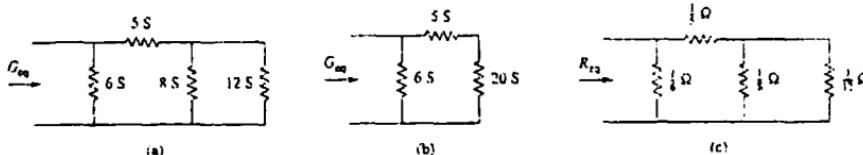


Figura 2.40

Per l'Esempio 2.11:

- (a) circuito originale.
- (b) circuito equivalente.
- (c) stesso circuito di (a) ma con i resistori espressi in ohm

Esercizio 2.11 Calcolare G_{eq} nel circuito di Figura 2.41

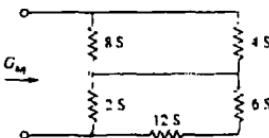


Figura 2.41 Per l'Esercizio 2.11.

Risposta 4 S

Esempio 2.12

Determinare i_a e v_b nel circuito mostrato in Figura 2.42(a). Calcolare la potenza dissipata nei resistori da 3Ω .

Soluzione: I resistori da 6Ω e 3Ω sono in parallelo; la loro resistenza equivalente è

$$6\Omega \parallel 3\Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

Il circuito si riduce quindi a quello di Figura 2.42(b). Si noti che v_b è la stessa tensione in entrambi i circuiti, perché i resistori in parallelo hanno la stessa tensione. Dalla Figura 2.42(b) è possibile ottenere v_b in due modi: applicando la legge di Ohm, ottenendo

$$i = \frac{12}{4 + 2} = 2 A$$

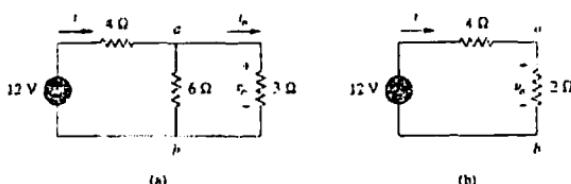


Figura 2.42

Per l'Esempio 2.12:

- (a) circuito originale
- (b) circuito equivalente

da cui: $v_b = 2i = 2 \times 2 = 4 V$; oppure usando la regola del partitore di tensione, perché la tensione di 12V in Figura 2.42(b) si ripartisce sui resistori da 4Ω e 2Ω :

$$v_b = \frac{2}{2 + 4} (12 V) = 4 V$$

Allo stesso modo, i_o può essere calcolata in due modi: applicando la legge di Ohm al resistore da $3\ \Omega$ di Figura 2.42(a), una volta nota v_o , ottenendo

$$v_o = 3i_o = 4 \quad \Rightarrow \quad i_o = \frac{4}{3} \text{ A}$$

oppure applicando la regola del partitore di corrente al circuito di Figura 2.42(a) ora che si conosce i :

$$i_o = \frac{6}{6+3}i = \frac{2}{3}(2 \text{ A}) = \frac{4}{3} \text{ A}$$

La potenza dissipata nel resistore da $3\ \Omega$ vale

$$p_o = v_o i_o = 4 \left(\frac{4}{3} \right) = 5.333 \text{ W}$$

Esercizio 2.12 Calcolare v_1 e v_2 nel circuito di Figura 2.43. Calcolare anche i_1 , i_2 e la potenza dissipata nei resistori da $12\ \Omega$ e $40\ \Omega$.

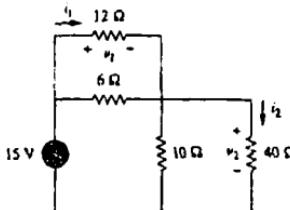


Figura 2.43 Per l'Esercizio 2.12.

Risposta $v_1 = 5 \text{ V}$, $i_1 = 416.7 \text{ mA}$, $p_1 = 2.083 \text{ W}$, $v_2 = 10 \text{ V}$, $i_2 = 250 \text{ mA}$, $p_2 = 2.5 \text{ W}$.

Esempio 2.13

Nel circuito di Figura 2.44(a), calcolare: (a) la tensione v_o , (b) la potenza erogata dal generatore di corrente, (c) la potenza assorbita da ciascun resistore.

Soluzione: (a) I resistori da $6\text{k}\Omega$ e $12\text{k}\Omega$ sono in serie, e il loro valore complessivo è $6 + 12 = 18\text{k}\Omega$. Il circuito si riduce quindi a quello di Figura 2.44(b), al quale si può applicare la regola del partitore di corrente per trovare i_1 e i_2 :

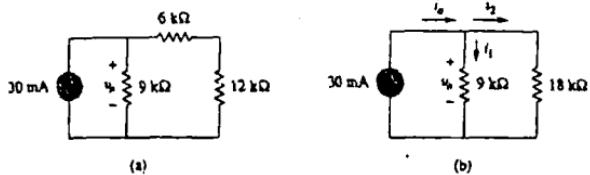
$$i_1 = \frac{18000}{9000 + 18000} (30 \text{ mA}) = 20 \text{ mA}$$

$$i_2 = \frac{9000}{9000 + 18000} (30 \text{ mA}) = 10 \text{ mA}$$

La tensione sui resistori da $9\text{k}\Omega$ e $18\text{k}\Omega$ è la stessa: $v_o = 9000i_1 = 18000i_2 = 180 \text{ V}$.

Figura 2.44

Per l'Esempio 2.13: (a) circuito originale, (b) circuito equivalente.



(b) La potenza fornita dal generatore vale

$$p_g = v_o i_o = 180(30) \text{ mW} = 5.4 \text{ W}$$

(c) La potenza assorbita dal resistore da $12\text{k}\Omega$ è

$$p = i_o v_o = i_2(i_2 R) = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2 (12000) = 1.2 \text{ W}$$

Quella assorbita dal resistore da $6\text{ k}\Omega$

$$p = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2 (6000) = 0.6 \text{ W}$$

e quella assorbita dal resistore da $9\text{ k}\Omega$ vale

$$p = \frac{v_o^2}{R} = \frac{(180)^2}{9000} = 3.6 \text{ W}$$

o anche

$$p = v_o i_1 = 180(20) \text{ mW} = 3.6 \text{ W}$$

Si noti che la potenza erogata (5.4 W) egualga la potenza assorbita ($1.2 + 0.6 + 3.6 = 5.4 \text{ W}$). Questo test costituisce una verifica della correttezza del risultato.

■ **Esercizio 2.13** Nel circuito mostrato in Figura 2.45 calcolare (a) v_1 e v_2 , (b) la potenza dissipata nei resistori da $3\text{ k}\Omega$ e $20\text{ k}\Omega$, (c) la potenza erogata dal generatore di corrente.

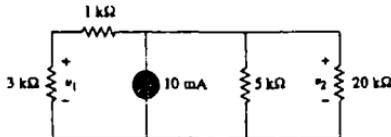


Figura 2.45 Per l'Esercizio 2.13.

Risposta (a) 15 V , 20 V , (b) 75 mW , 20 mW , (c) 200 mW



2.7 TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO†

Spesso nella analisi dei circuiti si incontrano situazioni nelle quali i resistori non sono né in serie né in parallelo.

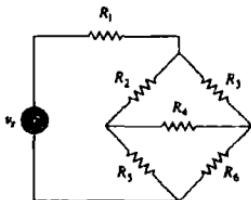


Figura 2.46 Rete a ponte.

Si consideri per esempio il circuito a ponte di Figura 2.46: come è possibile combinare i resistori da R_1 a R_6 , che non sono né in serie né in parallelo? Molti circuiti del tipo di quello di Figura 2.46 possono essere semplificati usando reti equivalenti a tre terminali: la rete a stella (Y), o a T, mostrate in Figura 2.47 e la rete a triangolo, o a pigreco (Π), mostrata in Figura 2.48. Reti di questo tipo si possono incontrare da sole, o come parti di reti più complesse, per esempio nei circuiti trifase, nei filtri e nei circuiti di accoppiamento. Il problema di cui ci si occupa ora è come identificarle quando esse si presentano come parte di una rete e come applicare la trasformazione stella-triangolo nella analisi della rete stessa.

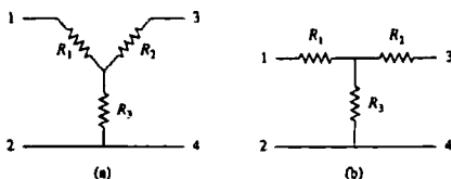
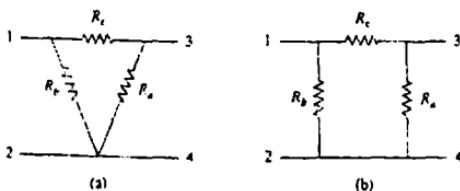


Figura 2.47
Due forme della stessa rete:
(a) stella, (b) T

Figura 2.48

Due forme della stessa rete:
(a) triangolo, (b) Δ .



Trasformazione da triangolo a stella

Si supponga che, in una certa situazione, risulti più conveniente operare con una rete a stella dove invece si trova una configurazione a triangolo. Si sovrappone allora una rete a stella alla rete a triangolo esistente, e si determinano le resistenze equivalenti nella rete a stella. Per ottenerle, si confrontano le due reti e si verifica che la resistenza fra ciascuna coppia di nodi nella prima e nella seconda sia la stessa. Per i terminali 1 e 2 in Figura 2.47 e 2.48, per esempio,

$$R_{12}(Y) = R_1 + R_3$$

$$R_{12}(\Delta) = R_b \parallel (R_a + R_c) \quad (2.46)$$

Ponendo $R_{12}(Y) = R_{12}(\Delta)$ si ha

$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.47a)$$

In maniera simile,

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.47b)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.47c)$$

Sottraendo la (2.47c) dalla (2.47a) si ottiene

$$R_1 - R_2 = \frac{R_c(R_b - R_a)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.48)$$

Sommando la (2.47b) e la (2.48)

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

(2.49)

e sottraendo la (2.48) dalla (2.47b)

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

(2.50)

Sottraendo la (2.49) dalla (2.47a),

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

(2.51)

Non è necessario ricordare a memoria le Equazioni da (2.49) a (2.51). Per trasformare una rete a triangolo nella equivalente a stella viene creato un nodo aggiuntivo n , come mostrato nella Figura 2.49, e si utilizza la seguente regola di conversione:

Ciascun resistore della rete a stella è pari al prodotto dei resistori nei due rami adiacenti della rete a triangolo, diviso per la somma dei tre resistori del triangolo

Utilizzando questa regola, è possibile ottenere le Equazioni da (2.49) a (2.51) a partire dalla Figura 2.49

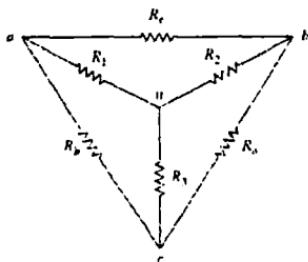


Figura 2.49

Sovrapposizione di una rete a stella ad una a triangolo, per la trasformazione di una nell'altra

Trasformazione da stella a triangolo

Per ricavare le formule di conversione per trasformare una rete a stella in una equivalente a triangolo, si nou dalle Equazioni da (2.49) a (2.51) che

$$\begin{aligned} R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 &= \frac{R_aR_bR_c(R_a + R_b - R_t)}{(R_a + R_b + R_c)^2} \\ &= \frac{R_aR_bR_c}{R_a + R_b + R_c} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dividendo la (2.52) per ciascuna delle Equazioni da (2.49) a (2.51) si ottengono le seguenti formule:

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \quad (2.53)$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \quad (2.54)$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \quad (2.55)$$

Da queste e dalla Figura 2.49 si deduce la regola di conversione da stella a triangolo come segue:

Ciascun resistore della rete a triangolo è pari alla somma di tutti i prodotti di resistori della stella presi a due a due, divisa per il resistore a esso opposto nella stella.

Le reti a stella e a triangolo si dicono *bilanciate* quando

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y, \quad R_a = R_b = R_c = R_{\Delta} \quad (2.56)$$

In tali condizioni, le formule di conversione diventano

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3} \quad \text{oppure} \quad R_{\Delta} = 3R_Y \quad (2.57)$$

Ci si potrebbe chiedere come mai R_Y sia minore di R_Δ . Una semplice spiegazione è che il collegamento a stella è simile a una "serie" mentre quello a triangolo è simile al "parallelo".

Si noti inoltre che nell'eseguire la trasformazione non si toglie né aggiunge nulla al circuito: si sostituisce semplicemente una rete diversa, ma matematicamente equivalente, con tre terminali, in modo da ottenere un circuito nel quale i resistori risultino in serie o in parallelo, riuscendo così a calcolare R_{eq} , se necessario.

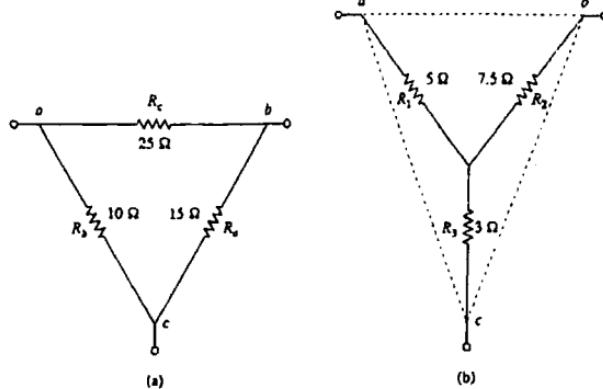
Esempio 2.14

Convertire la rete a triangolo di Figura 2.50(a) nella rete a stella equivalente.

Figura 2.50

Per l'Esempio 2.14:

- (a) rete originale a triangolo,
- (b) equivalente a stella



Soluzione: Usando le Equazioni da (2.49) a (2.51), si ottiene

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 10}{25 + 10 + 15} = \frac{250}{50} = 5 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 15}{50} = 7.5 \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 10}{50} = 3 \Omega$$

La rete a stella equivalente è mostrata in Figura 2.50(b)

■ Esercizio 2.14 Trasformare la rete a stella di Figura 2.51 in una rete a triangolo.

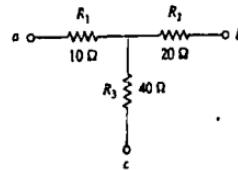


Figura 2.51 Per l'Esercizio 2.14.

Risposta $R_a = 140 \Omega$, $R_b = 70 \Omega$, $R_c = 35 \Omega$

Esempio 2.15

Calcolare la resistenza equivalente R_{ab} nel circuito di Figura 2.52, utilizzare il risultato per calcolare la corrente i .

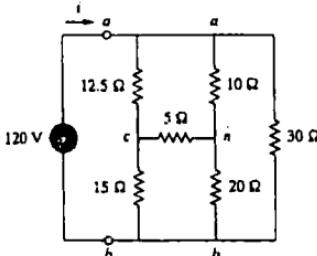


Figura 2.52 Per l'Esempio 2.15.

Soluzione: 1. *Dare una definizione precisa del problema*

Il problema è definito in modo chiaro.

2. Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.

Ovviamente, quando si toglie temporaneamente il generatore di tensione, per calcolare il resistore equivalente, si ottiene un circuito puramente resistivo. Il circuito è formato da resistori collegati a stella e triangolo, per cui si devono effettuare calcoli complessi per combinare insieme tali elementi. Si possono usare le trasformazioni stella-triangolo come primo tentativo per trovare una soluzione. È utile individuare le reti di resistori collegate a stella (ve ne sono due, uno con centro in n e l'altro con centro in c), e anche le reti di resistori collegate a triangolo (ve ne sono tre: can , abn , cnb).

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

Ci sono diverse possibilità per risolvere questo problema. Visto che il Paragrafo 2.7 spiega le trasformazioni stella-triangolo, questo potrebbe essere un metodo da usare.

Un altro modo per calcolare il resistore equivalente potrebbe essere quello di immettere una corrente da 1 A nel circuito e quindi calcolare la tensione tra a e b ; si userà questa tecnica nel Capitolo 4.

Il metodo che si può utilizzare come prima soluzione del problema potrebbe essere una trasformazione stella-triangolo. In seguito si verificherà la soluzione usando una trasformazione triangolo-stella.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

In questo circuito si possono identificare due reti a stella e tre a triangolo: la trasformazione di una qualunque di esse porta a un circuito più semplice. Se si converte la rete a stella formata dai resistori da 5Ω , 10Ω e 20Ω si ha

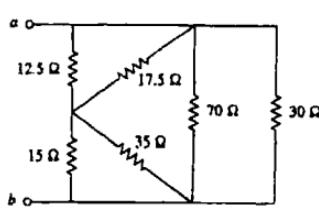
$$R_1 = 10 \Omega, \quad R_2 = 20 \Omega, \quad R_3 = 5 \Omega$$

Da cui, usando le Equazioni da (2.53) a (2.55), si ricava

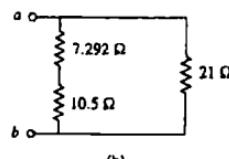
$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{10 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 10}{10} \\ = \frac{350}{10} = 35 \Omega$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{350}{20} = 17.5 \Omega$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{350}{5} = 70 \Omega$$



(a)



(b)

Figura 2.53

Circuiti equivalenti della Figura 2.52, col generatore di tensione rimosso.

Il circuito equivalente con la stella convertita in triangolo e il generatore temporaneamente rimosso è mostrato in Figura 2.53(a). Combinando le tre coppie di resistori in parallelo si ottiene

$$70 \parallel 30 = \frac{70 \times 30}{70 + 30} = 21 \Omega$$

$$12.5 \parallel 17.5 = \frac{12.5 \times 17.5}{12.5 + 17.5} = 7.3917 \Omega$$

$$15 \parallel 35 = \frac{15 \times 35}{15 + 35} = 10.5 \Omega$$

Il circuito risultante è mostrato in Figura 2.53(b); da esso si ottiene

$$R_{ab} = (7.392 + 10.5) \parallel 21 = \frac{17.792 \times 21}{17.792 + 21} = 9.632 \Omega$$

e quindi:

$$i = \frac{v_t}{R_{ab}} = \frac{120}{9.632} = 12.458 A$$

Si osserva che si è risolto con successo il problema, mentre ora si passa a valutare la soluzione.

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza

Si deve stabilire se il risultato è esatto e quindi verificare la soluzione finale.

È agevole effettuare questo controllo: basta infatti risolvere il problema a partire da una trasformazione triangolo-stella; si sceglie di trasformare la rete a triangolo con in una rete a stella.

Si pone $R_c = 10\Omega$, $R_a = 5\Omega$ e $R_n = 12.5\Omega$. Si ottiene quindi (d rappresenta il centro della rete a stella).

$$R_{ad} = \frac{R_c \cdot R_n}{R_a + R_c + R_n} = \frac{10 \cdot 12.5}{5 + 10 + 12.5} = 4.545 \Omega$$

$$R_{cd} = \frac{R_a \cdot R_n}{27.5} = \frac{5 \cdot 12.5}{27.5} = 2.273 \Omega$$

$$R_{bd} = \frac{R_a \cdot R_c}{27.5} = \frac{5 \cdot 10}{27.5} = 1.8182 \Omega$$

Questo porta al circuito in Figura 2.53 (c). Si osserva come tra i nodi d e b ci siano due gruppi di due resistori in serie; tali gruppi sono poi collegati in parallelo fra loro, per cui risulta:

$$R_{db} = \frac{(2.273 + 15) \cdot (1.8182 + 20)}{2.273 + 15 + 1.8182 + 20} = \frac{376.9}{39.09} = 9.642 \Omega$$

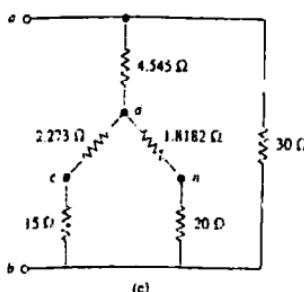


Figura 2.53c Circuito equivalente di Figura 2.52.

Sempre dalla Figura 2.53(c), si vede che il resistore R_{db} è in serie con il resistore da 4.545Ω , ed entrambi sono posti in parallelo con il resistore da 30Ω . Questo porta al calcolo della resistenza equivalente del circuito.

$$R_{eq} = \frac{(9.642 + 4.545) \cdot 30}{9.642 + 4.545 - 30} = \frac{425.6}{44.19} = 9.631 \Omega$$

e quindi:

$$i = \frac{v_t}{R_{eq}} = \frac{120}{9.631} = 12.46 A$$

Si fa notare che sfruttando due differenti trasformazioni stella-triangolo si giunge allo stesso risultato: questo rappresenta una verifica efficace della soluzione trovata.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

La soluzione è stata determinata calcolando prima la resistenza equivalente del circuito e poi verificando il risultato, per cui è una soluzione indubbiamente soddisfacente.

■ Esercizio 2.15 Nella rete a punte di Figura 2.54, calcolare R_{ab} e i .

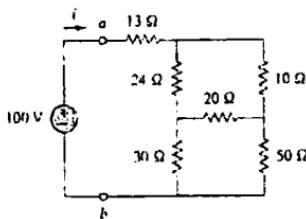


Figura 2.54 Per l'Esercizio 2.15.

Risposta 40Ω , 2.5 A .

2.8 APPLICAZIONI

I resistori vengono sovente utilizzati nella costruzione di modelli di dispositivi che convertono l'energia elettrica in calore o in altre forme di energia, quali per esempio i semplici fili conduttori², come pure scaldabagni elettrici, stufe e fornì elettrici, e anche altoparlanti audio. In questo paragrafo, in particolare, verranno presentate due situazioni della realtà: i sistemi di illuminazione elettrica e il progetto di strumenti di misura per grandezze elettriche stazionarie.

2.8.1 Sistemi di illuminazione

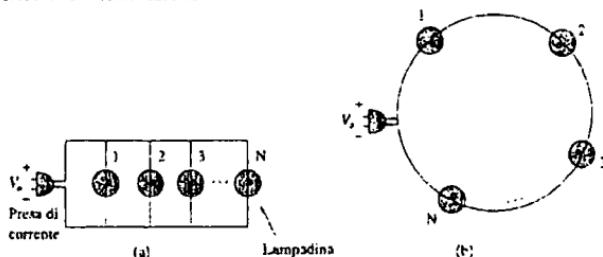


Figura 2.55
(a) Collegamento in parallelo di lampadine.
(b) collegamento in serie di lampadine

I sistemi di illuminazione, quali per esempio quello di un appartamento o quello delle luci di un albero di Natale, consistono spesso di N lampadine collegate in serie o in parallelo, come mostrato in Figura 2.55. Un buon modello per le lampadine è un resistore; supponendo che tutte le lampadine siano identiche e che sia V_0 la tensione della linea di alimentazione, la tensione su ciascuna lampadina è V_0 per la connessione in parallelo e V_0/N per quella in serie. Il collegamento in serie è di semplice fabbricazione, ma viene utilizzato raramente nella pratica per almeno due ragioni: è meno affidabile, perché quando una lampadina si brucia anche le altre si spengono; inoltre, è di manutenzione più difficile: quando una lampadina non funziona, bisogna provarla tutte una per una per scoprire quella difettosa.

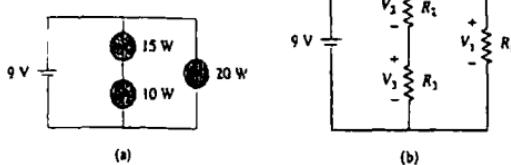
Esempio 2.16

Tre lampadine sono collegate a una batteria da 9 V, come mostrato in Figura 2.56(a). Calcolare: (a) la corrente fornita dalla batteria, (b) la corrente che passa in ciascuna lampadina, (c) la resistenza di ciascuna lampadina.

² Finora si è supposto che i fili di collegamento dei circuiti fossero conduttori perfetti, di resistenza nulla. Nei sistemi della realtà fisica, la resistenza di un filo di collegamento può invece essere apprezzabile, e in tal caso il modello del sistema deve contenere anche questa resistenza.

Figura 2.56

(a) Sistema di illuminazione con tre lampadine; (b) circuito equivalente con resistenze



Soluzione: (a) La potenza erogata dalla batteria è uguale alla potenza totale assorbita dalle lampadine, che vale

$$P = 15 + 10 + 20 = 45 \text{ W}$$

Essendo $P = VI$, la corrente fornita dalla batteria è

$$I = \frac{P}{V} = \frac{45}{9} = 5 \text{ A}$$

(b) Le lampadine possono essere rappresentate con dei resistori, come mostrato in Figura 2.56(b). R_1 (la lampadina da 20 W) è in parallelo alla batteria, così come lo è la serie di R_2 e R_3 , quindi

$$V_1 = V_2 + V_3 = 9 \text{ V}$$

La corrente in R_1 vale

$$I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{20}{9} = 2.222 \text{ A}$$

Per la KCL, la corrente della serie di R_2 e R_3 è

$$I_2 = I - I_1 = 5 - 2.222 = 2.778 \text{ A}$$

(c) Essendo $P = I^2 R$,

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{20}{2.222^2} = 4.05 \Omega$$

$$R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{15}{2.778^2} = 1.945 \Omega$$

$$R_3 = \frac{P_3}{I_3^2} = \frac{10}{2.778^2} = 1.297 \Omega$$

■ **Esercizio 2.16** Facendo riferimento alla Figura 2.55, si supponga che ci siano 10 lampadine, tutte da 40 W. Se la tensione alla presa è di 110 V sia per il collegamento parallelo che per quello serie, calcolare la corrente nelle lampadine.

Risposta 0.364 A (parallelo), 3.64 A (serie).

2.8.2 Progetto di strumenti di misura per grandezze stazionarie

I resistori trovano spesso applicazione nei circuiti con la funzione di controllare il flusso di corrente. Un primo esempio di resistore usato per controllare la corrente si ha con il potenziometro (Figura 2.57). Il termine *potenziometro*, che deriva da *potenza* e *metro*, suggerisce che il potenziale può essere graduato e misurato. Il potenziometro è un dispositivo a tre terminali che utilizza il principio del partitore di tensione; si tratta, in sostanza, di un partitore di tensione regolabile. Come regolatore di tensione esso viene usato, per esempio, per il controllo del volume in apparecchi radio e TV. Nella Figura 2.57,

$$V_{\text{out}} = V_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_{ac}} V_{in} \quad (2.58)$$

dove $R_{ac} = R_{ab} + R_{bc}$. Perciò, V_{out} diminuisce o aumenta quando il contatto scorre verso c o verso a, rispettivamente.

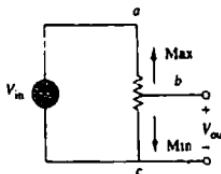


Figura 2.57
Potenziometro che controlla i livelli di potenziale

Un'altra applicazione nella quale i resistori vengono utilizzati per controllare il flusso di una corrente è negli strumenti analogici di misura per grandezze stazionarie – amperometro, voltmetro, ohmmetro, che misurano corrente, tensione e resistenza rispettivamente. Tutti questi apparecchi fanno uso dello strumento di d'Arsonval, mostrato in Figura 2.58.

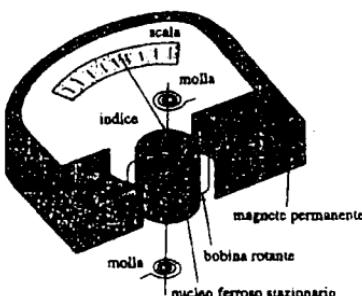


Figura 2.58 Strumento di d'Arsonval

Lo strumento consiste essenzialmente di una bobina mobile avvolta su nucleo ferroso, montata su un perno e posta tra i poli di un magnete permanente. Quando una corrente scorre nella bobina, si crea una coppia che provoca la rotazione dell'indice mobile. L'intensità della corrente nella bobina determina la deflessione dell'indice, che viene registrata su una scala solida dello strumento. Per esempio, se lo strumento è classificato come (1 mA, 50 Ω), ci vorrà una corrente da 1 mA per ottenere la deflessione a fondo scala dello strumento. Aggiungendo altri componenti circuituali allo strumento di d'Arsonval, si può costruire un voltmetro, un ohmmetro o un amperometro.³

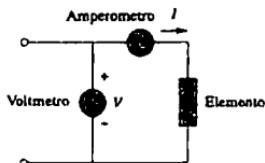


Figura 2.59 Collegamento di un voltmetro e di un amperometro ad un elemento

Si consideri la Figura 2.59, nella quale un voltmetro e un amperometro analogici sono collegati a un elemento. Il voltmetro misura la tensione su un carico⁴ ed è quindi collegato in parallelo. Come si vede in Figura 2.60(a), il voltmetro consiste di uno strumento di d'Arsonval in serie a un resistore la cui resistenza R_m viene appositamente scelta molto grande (teoricamente infinita), per rendere minima la corrente assorbita. Per estendere l'intervallo di tensioni che il voltmetro può misurare, vengono collegati in serie al voltmetro dei resistori moltiplicativi, come mostrato in Figura 2.60(b). Il voltmetro multiscala di Figura 2.60(b) può misurare tensioni da 0 a 1 V,

³ Uno strumento capace di misurare tensione, corrente e resistenza è detto multimetro.

⁴ Un carico è un componente che riceve energia, al contrario di un generatore, che fornisce energia.

Si ricava R_1 dalla (5) e si sostituisce nella (8):

$$R_2//R_{d1} \geq 225\Omega$$

Poiché è noto il valore di R_{d1} , si calcola il valore del resistore R_2 :

$$R_2 \geq 257.143\Omega$$

Si sceglie come valore del resistore R_2 proprio il limite della disequazione precedente e poi si ricava il valore del resistore R_1 dalla (5):

$$R_2 = 257.143\Omega$$

$$R_1 = \frac{5}{3} \frac{R_2 R_{d1}}{R_2 + R_{d1}} = \left(\frac{5}{3}\right) \frac{(257.143)(1800)}{257.143 + 1800} = 375\Omega$$

5) Analisi e Verifica

La arbitranetà nella scelta del valore del resistore R_2 induce a pensare che si possono scegliere altri valori altrettanto validi. Ebbene, ciò non è vero perché, dal punto di vista pratico più ci si allontana dalla condizione $R_2 = 257.143\Omega$ e più piccola è la corrente che attraversa il fusibile. Per cui i dispositivi non sarebbero più protetti se dovessero assorbire più corrente rispetto al valore nominale.

Come verifica dei risultati si applicano le KCL e le KVL a nodi e maglie della Figura 2.64, dopo aver calcolato tutte le correnti.

$$I_{d2} = \frac{V_2}{R_{d2}} = \frac{24}{1200} = 20mA$$

$$I_{d1} = \frac{V_1}{R_{d1}} = \frac{9}{1800} = 5mA$$

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{9}{257.143} = 35mA$$

Si procede prima a calcolare la corrente I_1 , applicando la KCL al nodo A, e poi si verifica che la corrente I sia pari a 60mA:

$$I_1 = I_2 + I_{d1} = 35 + 5 = 40mA \quad (\text{KCL al nodo B})$$

$$I = I_1 + I_{d2} = 40 + 20 = 60mA \quad (\text{KCL al nodo A})$$

Per la verifica della KVL si sceglie la maglia a sinistra formata dal generatore da 24V e dai resistori R_1 e R_2 , preferendo il verso di percorrenza orario:

$$-24 + (R_1 I_1) + (R_2 I_2) = 0$$

$$-24 + (375 \cdot 40 \cdot 10^{-3}) + (257.143 \cdot 35 \cdot 10^{-3}) = 0$$

$$-24 + 15 + 9 = 0$$

Per cui si può affermare che i risultati ottenuti sono soddisfacenti, poiché la verifica ha fornito gli stessi valori.

SOMMARIO

- 1) Un resistore è un elemento passivo in cui la tensione v tra i suoi terminali è direttamente proporzionale alla corrente i che lo attraversa. Per cui un resistore è un dispositivo che obbedisce alla legge di Ohm:

$$v = i \cdot R$$

dove R è la resistenza del resistore.

- 2) Un cortocircuito è un resistore con resistenza nulla. Un circuito aperto è un resistore con resistenza infinita.
 3) La conduttanza G di un resistore è l'inverso della sua resistenza:

$$G = \frac{1}{R}$$

- 4) Un ramo è un singolo elemento a due terminali in un circuito elettrico. Un nodo è un punto di connessione tra due o più rami. Una maglia è un percorso chiuso in un circuito. Il numero di rami b , di nodi n e di maglie indipendenti l di un circuito, sono legati dalla relazione:

$$b = l + n - 1$$

- 5) La legge di Kirchhoff delle correnti (KCL) stabilisce che la somma algebrica delle correnti di un nodo è zero. In altre parole, in un nodo la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.
 6) La legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL) stabilisce che la somma algebrica delle tensioni in un percorso chiuso è zero. In altre parole, la somma degli aumenti di tensione è uguale alla somma delle cadute di tensione.
 7) Due elementi sono in serie quando sono posti in fila uno dopo l'altro. Quando due elementi sono in serie, sono percorsi dalla stessa corrente ($i_1 = i_2$). Essi sono in parallelo se sono collegati agli stessi due nodi. Elementi in parallelo hanno la stessa tensione tra i loro terminali ($v_1 = v_2$).
 8) Quando due resistori $R_1 (= 1/G_1)$ e $R_2 (= 1/G_2)$ sono in serie, la loro resistenza equivalente R_{eq} e la loro conduttanza equivalente G_{eq} sono

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad G_{eq} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

- 9) Quando due resistori $R_1 (= 1/G_1)$ e $R_2 (= 1/G_2)$ sono in parallelo, la loro resistenza equivalente R_{eq} e la loro conduttanza equivalente G_{eq} sono:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad G_{eq} = G_1 + G_2$$

- 10) La regola del partitore di tensione per due resistori in serie è:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v$$

- 11) La regola del partitore di corrente per due resistori in parallelo è:

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i$$

- 12) Le formule per la trasformazione stella-triangolo sono:

$$R_1 = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad R_2 = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} \quad R_3 = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

- 13) Le formule per la trasformazione triangolo-stella sono:

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_1} \quad R_b = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_3}$$

- 14) Le leggi fondamentali trattate in questo capitolo possono essere applicate ai problemi di illuminazione elettrica e al progetto di strumenti di misura per grandezze elettriche stazionarie.

DOMANDE DI RIEPILOGO

2.1 L'inverso della resistenza è:

- (a) tensione
- (b) corrente
- (c) condutanza
- (d) coulomb

2.2 Uno scaldabagno elettrico assorbe 10 A da una linea a 120 V. La resistenza dello scaldabagno è:

- (a) 1200Ω
- (b) 120Ω
- (c) 12Ω
- (d) 1.2Ω

2.3 La caduta di tensione su un tostapane elettrico da 1.5 kW che assorbe una corrente di 12 A è:

- (a) 18 kV
- (b) 25 V
- (c) 120 V
- (d) 10.42 V

2.4 La massima corrente sopportabile per un resistore da $80\text{ k}\Omega$ e 2 W è di:

- (a) 160 mA
- (b) 40 kA
- (c) 5 mA
- (d) $25\mu\text{A}$

2.5 Una rete elettrica ha 12 rami e 8 maglie indipendenti. Quanti sono i nodi?

- (a) 19
- (b) 17
- (c) 5
- (d) 4

2.6 La corrente I nel circuito di Figura 2.65 è:

- (a) -0.8 A
- (b) -0.2 A
- (c) 0.2 A
- (d) 0.8 A

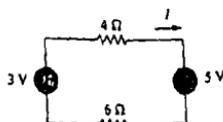


Figura 2.65 Per la domanda di riepilogo 2.6.

2.7 La corrente I_o in Figura 2.66 è:

- (a) -4 A
- (b) -2 A
- (c) 4 A
- (d) 16 A

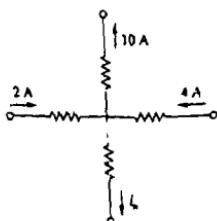


Figura 2.66 Per la domanda di riepilogo 2.7.

2.8 Nel circuito in Figura 2.67, V vale:

- (a) 30 V
- (b) 14 V
- (c) 10 V
- (d) 6.6 V

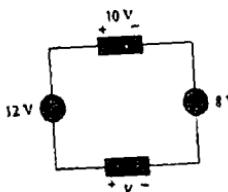


Figura 2.67 Per la domanda di riepilogo 2.8.

2.9 In quale dei circuiti di Figura 2.68 $V_{ab} = 7\text{ V}$?

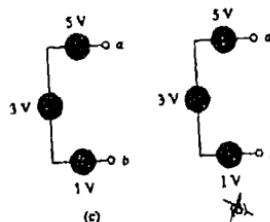
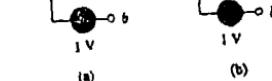
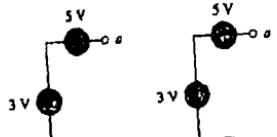


Figura 2.68 Per la domanda di riepilogo 2.9.

2.10 Nel circuito di Figura 2.69, la diminuzione del valore di R_3 porta a una diminuzione del valore di:

- (a) corrente in R_3
- (b) tensione su R_3
- (c) tensione su R_1
- (d) potenza dissipata in R_2
- (e) nessuna delle precedenti

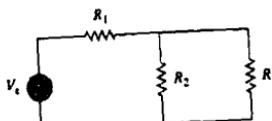


Figura 2.69 Per la domanda di riepilogo 2.10.

Risposte: 2.1c, 2.2c, 2.3b, 2.4c, 2.5c, 2.6b, 2.7a, 2.8d, 2.9d, 2.10b, d.

PROBLEMI

Paragrafo 2.2 Legge di Ohm

- 2.1 La tensione su un resistore da $5\text{ k}\Omega$ vale 16 V . Determinare la corrente che attraversa il resistore.
- 2.2 Determinare la resistenza di una lampadina da 60 W e 120 V .
- 2.3 Una barretta di silicio di sezione circolare è lunga 4 cm . Se la resistenza della barretta è di 240Ω a temperatura ambiente, quanto vale il raggio della sezione della barretta?
- 2.4 (a) Calcolare la corrente i in Figura 2.70 quando l'interruttore è in posizione 1.
 (b) Calcolare la corrente quando l'interruttore si trova in posizione 2.

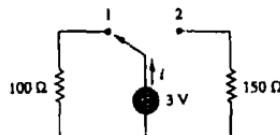


Figura 2.70 Per il Problema 2.4.

Paragrafo 2.3 Nodi, rami e maglie

- 2.5 Nel grafo di rete di Figura 2.71, determinare il numero di nodi, rami e maglie.

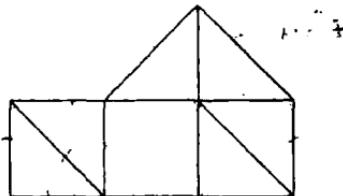


Figura 2.71 Per il Problema 2.5.

- 2.6 Determinare il numero di rami e il numero di nodi del grafo mostrato in Figura 2.72.

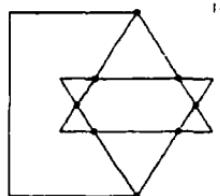


Figura 2.72 Per il Problema 2.6.

- 2.7 Determinare il numero di rami e nodi nel circuito di Figura 2.73.

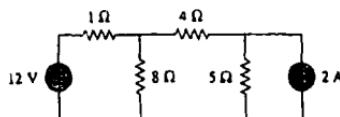


Figura 2.73 Per il Problema 2.7

Paragrafo 2.4 Leggi di Kirchhoff

- 2.8 Nel circuito mostrato in Figura 2.74, utilizzare la KCL per ottenere le correnti i_1 , i_2 e i_3 .

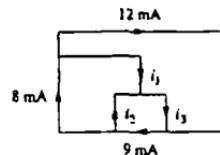


Figura 2.74 Per il Problema 2.8.

- 2.9 Determinare i_1 , i_2 e i_3 nel circuito di Figura 2.75.

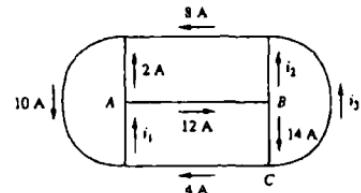


Figura 2.75 Per il Problema 2.9.

- 2.10 Determinare i_1 e i_2 nel circuito di Figura 2.76.

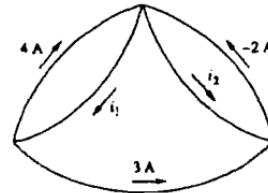


Figura 2.76 Per il Problema 2.10.

- 2.11 Determinare le tensioni da v_1 a v_7 nel circuito di Figura 2.77.

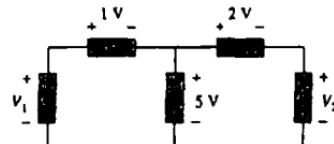
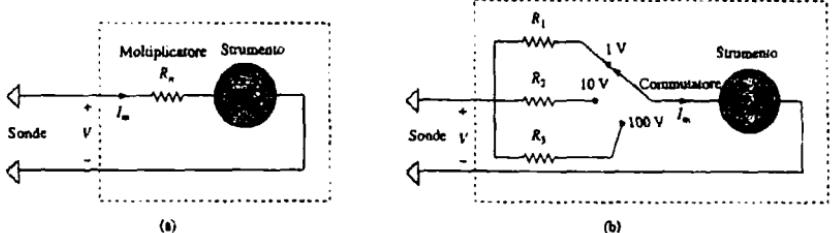


Figura 2.77 Per il Problema 2.11

da 0 a 10 V o da 0 a 100 V a seconda che il commutatore sia collegato a R_1 , R_2 o R_3 , rispettivamente.

Si calcola ora il valore del resistore moltiplicativo R_n per il voltmetro a scala singola di Figura 2.60(a), oppure $R_n = R_1$, R_2 oppure R_3 per il voltmetro multiscala di Figura 2.60(b).

Figura 2.60
Voltmetro: (a) a scala singola, (b) a scala multipla.



Si vuole dunque determinare il valore di R_n da collegare in serie alla resistenza interna R_m del voltmetro. In una situazione di progetto, è sempre opportuno prendere in considerazione le condizioni del caso peggiore. Nella situazione presente, il caso peggiore si ha quando la corrente di fondo scala $I_{fs} = I_m$ scorre nello strumento; ciò deve corrispondere alla massima lettura di tensione, o tensione di fondo scala V_{fs} . Poiché la resistenza moltiplicativa R_n è in serie alla resistenza interna,

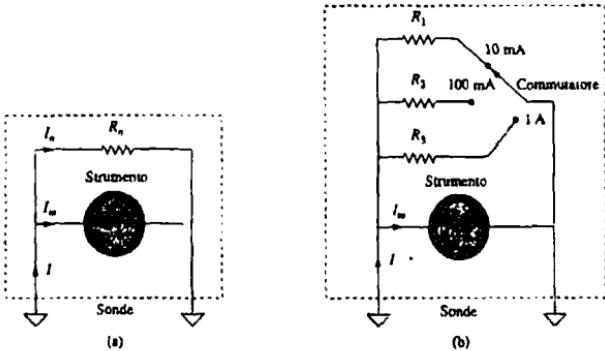
$$V_{fs} = I_m (R_n + R_m) \quad (2.59)$$

Da questa, si ottiene

$$R_n = \frac{V_{fs}}{I_m} - R_m \quad (2.60)$$

In maniera simile, un amperometro misura la corrente che attraversa un carico, e viene collegato in serie. Come si vede nella Figura 2.61(a), l'amperometro consiste di uno strumento di d'Arsonval in parallelo a un resistore la cui resistenza viene di proposito scelta molto piccola (teoricamente zero) per rendere minima la caduta di tensione sullo strumento. Per consentire la misura su più scale, si collegano dei resistori *shunt* in parallelo a R_m , come si vede in Figura 2.61(b). I resistori shunt consentono allo strumento di misurare correnti negli intervalli 0–10 mA, 0–100 mA, o 0–1 A, quando il commutatore è collegato a R_1 , R_2 o R_3 , rispettivamente.

Figura 2.61
Amperometri: (a) a scala singola, (b) a scala multipla.



Si vuole ora calcolare il valore dello shunt moltiplicativo R_n per l'amperometro a sca-

la singola di Figura 2.61(a), oppure $R_m = R_1, R_2$ oppure R_3 per l'amperometro multi-scala di Figura 2.61(b). R_m e R_n sono in parallelo, inoltre, a fondo scala $I = I_b = I_m + I_n$, dove I_n è la corrente nel resistore shunt R_n . Applicando la regola del partitore di corrente, si ottiene

$$I_m = \frac{R_n}{R_n + R_m} I_b$$

o anche

$$R_n = \frac{I_m}{I_b - I_m} R_m \quad (2.61)$$

La resistenza R_x di un resistore lineare può essere misurata in due modi. Un modo indiretto è quello di misurare la corrente I che scorre nel resistore collegando un amperometro in serie e la tensione V su di esso collegando un voltmetro in parallelo, come mostrato in Figura 2.62(a). Ne segue

$$R_x = \frac{V}{I} \quad (2.62)$$

Il metodo diretto di misura di una resistenza è invece per mezzo di un ohmmetro, che consiste essenzialmente di uno strumento di d'Arsonval, di un resistore variabile o potenziometro e di una batteria come mostrato in Figura 2.62(b). Applicando la KVL al circuito di Figura 2.62(b) si ottiene

$$E = (R + R_m + R_x) I_m$$

cioè

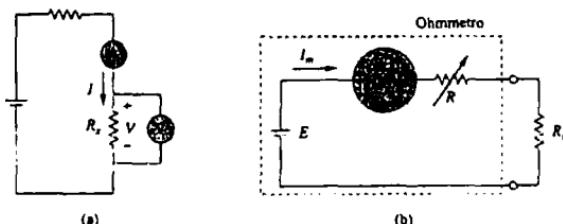
$$R_x = \frac{E}{I_m} - (R + R_m) \quad (2.63)$$

Il resistore R viene scelto in modo che lo strumento dia indicazione di fondo scala, cioè $I_m = I_b$, quando $R_x = 0$. Ciò implica che

$$E = (R + R_m) I_b \quad (2.64)$$

Sostituendo la (2.64) nella (2.63) si ottiene

$$R_x = \left(\frac{I_b}{I_m} - 1 \right) (R + R_m) \quad (2.65)$$



Come si è detto, i tipi di strumenti che sono stati discussi sono noti come strumenti analogici e sono basati sullo strumento di d'Arsonval. Un altro tipo di strumento, detto strumento digitale, si basa su elementi circuituali attivi quali per esempio gli amplificatori operazionali. Per esempio, un multimetro digitale misura tensioni e correnti continue e alternate, e anche resistenze, come numeri discreti, invece di utilizzare la deflessione di un indice su una scala continua, come in un multimetro analogico. Gli strumenti digitali sono quelli usati più di frequente nella moderna pratica di laboratorio. Il loro progetto esula tuttavia dagli scopi di questo libro.

Figura 2.62
Due modi di misurare una resistenza: (a) usando un amperometro e un voltmetro, (b) usando un ohmmetro

Esempio 2.17

Usando lo schema di voltmetro di Figura 2.60, progettare un voltmetro avente le seguenti scale:

- (a) 0-1 V (b) 0-5 V (c) 0-50 V (d) 0-100 V

Supponere la resistenza interna $R_m = 2 \text{ k}\Omega$ e la corrente di fondo scala pari a $I_b = 100 \mu\text{A}$.

Soluzione: Si applica la (2.60) supponendo che R_1, R_2, R_3 e R_4 corrispondano alle scale 0-1 V, 0-5 V, 0-50 V e 0-100 V, rispettivamente.

(a) Per la scala 0-1 V,

$$R_1 = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 10000 - 2000 = 8 \text{ k}\Omega$$

(b) Per la scala 0-5 V,

$$R_2 = \frac{5}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 50000 - 2000 = 48 \text{ k}\Omega$$

(c) Per la scala 0-50 V,

$$R_3 = \frac{50}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 500000 - 2000 = 498 \text{ k}\Omega$$

(d) Per la scala 0-100 V,

$$R_4 = \frac{100}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 1000000 - 2000 = 998 \text{ k}\Omega$$

Si noti che il rapporto tra la resistenza totale ($R_m + R_n$) e la tensione di fondo scala V_b è costante e pari a $1/I_b$ per le quattro scale. Questo rapporto, espresso in ohm per volt (Ω/V), è noto come *sensibilità* del voltmetro. Più grande è la sensibilità, migliore è il voltmetro.

Esercizio 2.17 Facendo uso dello schema di amperometro di Figura 2.61, progettare un amperometro per le seguenti scale:

- (a) 0-1 A (b) 0-100 mA (c) 0-10 mA

Si assuma la corrente di fondo scala dello strumento $I_b = 1 \text{ mA}$ e la resistenza interna pari a $R_m = 50 \Omega$.

Risposta Resistori shunt: 0.05 Ω , 0.505 Ω , 5.556 Ω .

CASO PRACTICO Alimentazione di dispositivi elettrici

1) Introduzione al Caso Pratico

In questo caso pratico si affrontano le problematiche relative all'alimentazione di apparecchiature elettriche. In particolare si vogliono alimentare due dispositivi con diversi valori di tensione; la sorgente di energia è unica ed è previsto l'uso di un fusibile per proteggere i dispositivi da aumenti improvvisi di corrente.

2) Descrizione e Specifiche

Due dispositivi delicati hanno le condizioni di funzionamento mostrate in Figura 2.139. Determinare i valori dei resistori R_1 e R_2 necessari per alimentare i dispositivi con una batteria da 24V.

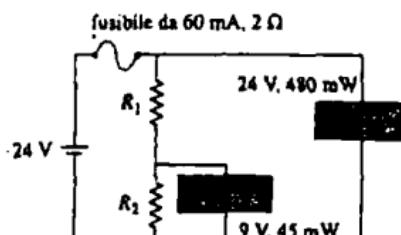


Figura 2.63 Alimentazione di dispositivi elettrici.

3) Obiettivi

Occorre calcolare i valori dei due resistori R_1 e R_2 in modo da ottenere le tensioni (9V e 24V) necessarie per alimentare i due dispositivi, e tali da non superare una corrente assorbita di 60mA. Se ciò avviene, il fusibile interviene interrompendo l'alimentazione ai due dispositivi. In questo Caso Pratico si sfruttano le conoscenze acquisite nel Capitolo 2.

4) Elaborazione e Calcoli

Per risolvere il Caso Pratico si determina il suo modello circuitale equivalente formato da generatore e resistori, come in Figura 2.64.

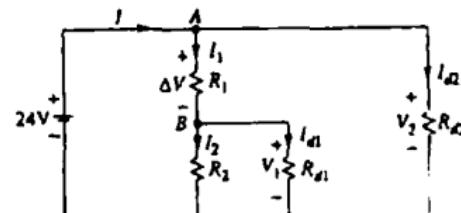


Figura 2.64 Modello circuitale equivalente.

Il fusibile ha un resistore di 2Ω e può essere attraversato al massimo da una corrente di 60mA, per cui la sua caduta di tensione massima vale:

$$\Delta V_{fusibile} = 2 \cdot 0.06 = 0.12V \quad (2.66)$$

Tale valore di tensione si può trascurare rispetto ai 24V della batteria.

Si calcolano prima i due resistori R_{d1} e R_{d2} relative ai due dispositivi, partendo dai dati forniti dal problema.

$$R_{d1} = \frac{V_1^2}{P_1} = \frac{9^2}{45 \cdot 10^{-3}} = 1.8 K\Omega \quad (2.67)$$

$$R_{d2} = \frac{V_2^2}{P_2} = \frac{24^2}{480 \cdot 10^{-3}} = 1.2 K\Omega \quad (2.68)$$

Il dispositivo 2 è alimentato alla sua tensione nominale di 24V, essendo collegato in parallelo alla batteria: questo indipendentemente dai valori di R_1 e R_2 . Per ottenere l'alimentazione di 9V per il dispositivo 1, occorre invece applicare il partitore di tensione sul parallelo dei resistori R_2 e R_{d1} :

$$V_1 = 9V = 24 \frac{(R_2//R_{d1})}{R_1 + (R_2//R_{d1})} \quad (2.69)$$

Da cui si ricava la seguente condizione:

$$\frac{R_1}{R_2//R_{d1}} = \frac{5}{3} \quad (2.70)$$

Il fusibile interrompe il circuito se la corrente che lo attraversa è superiore a 60mA, quindi si impone questa condizione applicando la KCL al nodo A della Figura 2.64:

$$I = (I_1 + I_{d2}) \leq 60 mA \quad (2.71)$$

Le correnti I_1 e I_{d2} si determinano applicando la legge di Ohm ai due rami alimentati dalla stessa tensione di 24V:

$$\left(\frac{24}{R_1 + (R_2//R_{d1})} + \frac{24}{R_{d1}} \right) \leq 60 mA \quad (2.72)$$

Da cui si ottiene la seconda condizione:

$$R_1 + (R_2 + R_{d1}) \geq 600 \Omega \quad (2.73)$$

- 2.12 Nel circuito di Figura 2.78, ricavare v_1 , v_2 e v_3 .

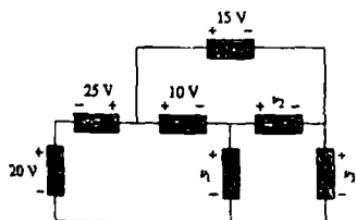


Figura 2.78 Per il Problema 2.12.

- 2.13 Nel circuito in Figura 2.79, utilizzare la KCL per calcolare le correnti di ramo da i_1 a i_4 .

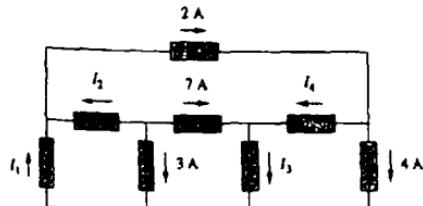


Figura 2.79 Per il Problema 2.13

- 2.14 Dato il circuito in Figura 2.80, utilizzare la KVL per determinare le tensioni di ramo da V_1 a V_4 .

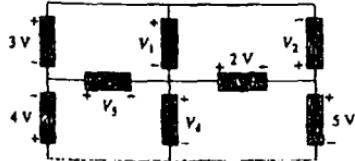


Figura 2.80 Per il Problema 2.14.

- 2.15 Calcolare v e i_3 nel circuito di Figura 2.81.

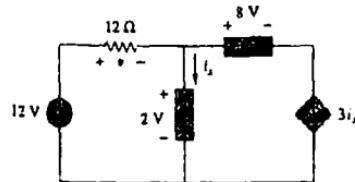


Figura 2.81 Per il Problema 2.15.

- 2.16 Determinare V_0 nel circuito di Figura 2.82.

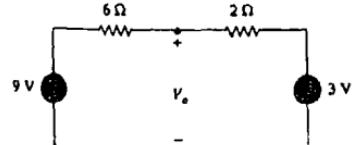


Figura 2.82 Per il Problema 2.16.

- 2.17 Calcolare le tensioni da v_1 a v_3 nel circuito di Figura 2.83.

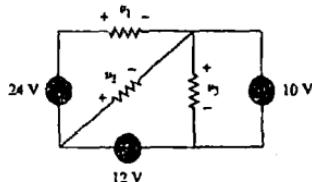


Figura 2.83 Per il Problema 2.17.

- 2.18 Determinare I e V_{ab} nel circuito di Figura 2.84.

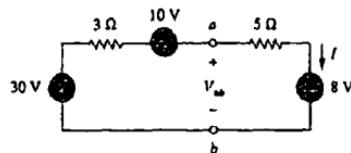


Figura 2.84 Per il Problema 2.18.

- 2.19 Dato il circuito in Figura 2.85, determinare I , la potenza dissipata dal resistore, e la potenza fornita da ciascun generatore.

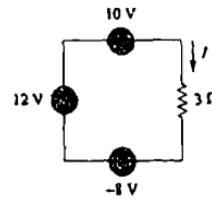


Figura 2.85 Per il Problema 2.19.

- 2.20 Determinare i_o nel circuito di Figura 2.86.

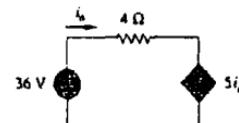


Figura 2.86 Per il Problema 2.20

- 2.21 Calcolare V_x nel circuito di Figura 2.87.

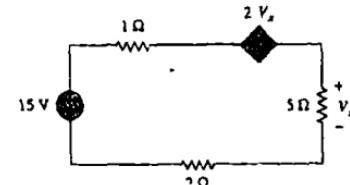


Figura 2.87 Per il Problema 2.21.

- 2.22 Determinare V_o nel circuito di Figura 2.88 e la potenza dissipata dal generatore comandato.

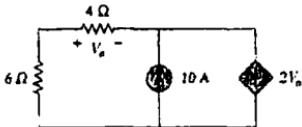


Figura 2.88 Per il Problema 2.22.

- 2.23 Nel circuito mostrato in Figura 2.89, determinare v_s e la potenza assorbita dal resistore da 12Ω .

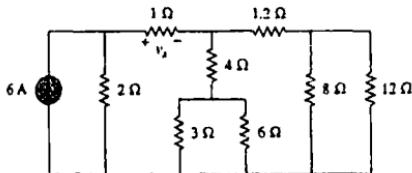


Figura 2.89 Per il Problema 2.23.

- 2.24 Per il circuito di Figura 2.90, determinare V_o/V_s in termini di α , R_1 , R_2 , R_3 e R_4 . Se $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, quale valore di α darà luogo a $|V_o/V_s| = 10$?

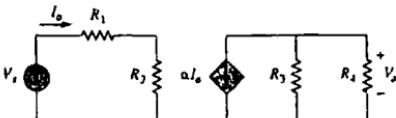


Figura 2.90 Per il Problema 2.24.

- 2.25 Per la rete in Figura 2.91, determinare corrente, tensione e potenza relativa ai resistore da $20\text{ k}\Omega$.



Figura 2.91 Per il Problema 2.25.

Paragrafi 2.5 e 2.6 Resistori in serie e parallelo

- 2.26 Nel circuito di Figura 2.92, $i_0 = 2\text{ A}$. Calcolare i_x e la potenza totale dissipata dal circuito.

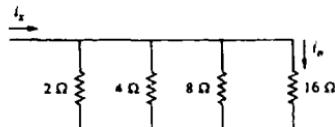


Figura 2.92 Per il Problema 2.26.

- 2.27 Calcolare V_o nel circuito di Figura 2.93.

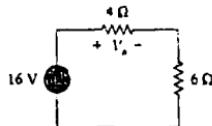


Figura 2.93 Per il Problema 2.27.

- 2.28 Calcolare v_1 , v_2 e v_3 nel circuito di Figura 2.94.

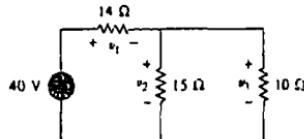


Figura 2.94 Per il Problema 2.28.

- 2.29 Tutte le resistenze di Figura 2.95 valgono 1Ω . Calcolare R_{eq} .

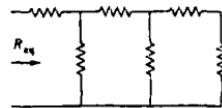


Figura 2.95 Per il Problema 2.29.

- 2.30 Calcolare R_{eq} per il circuito di Figura 2.96.

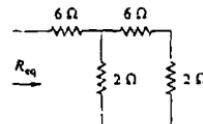


Figura 2.96 Per il Problema 2.30.

- 2.31 Per il circuito di Figura 2.97, determinare i_1 , i_2 , i_3 , i_4 e i_5 .

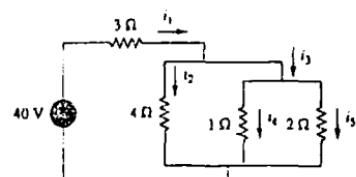


Figura 2.97 Per il Problema 2.31.

- 2.32 Determinare le correnti da i_1 a i_4 nel circuito di Figura 2.98.

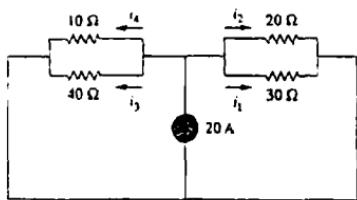


Figura 2.98 Per il Problema 2.32.

- 2.33 Calcolare v e i nel circuito di Figura 2.99.

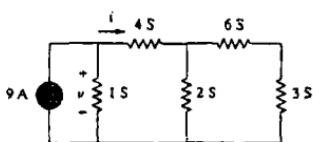


Figura 2.99 Per il Problema 2.33.

- 2.34 Usando le combinazioni serie-parallelo di resistenze, calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore nel circuito di Figura 2.100. Calcolare inoltre la potenza totale dissipata.

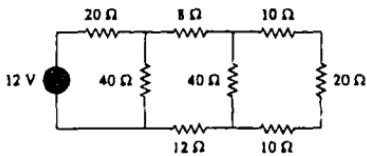


Figura 2.100 Per il Problema 2.34.

- 2.35 Calcolare V_o e I_o nel circuito di Figura 2.101.

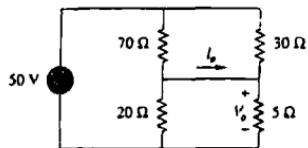


Figura 2.101 Per il Problema 2.35.

- 2.36 Calcolare i e V_o nel circuito di Figura 2.102.

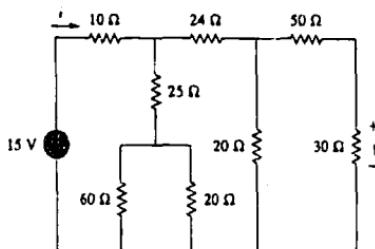


Figura 2.102 Per il Problema 2.36.

- 2.37 Calcolare R nel circuito di Figura 2.103.

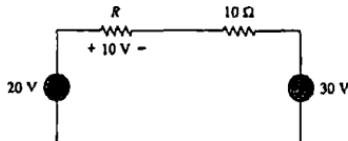


Figura 2.103 Per il Problema 2.37.

- 2.38 Determinare RE_{eq} e i_0 nel circuito di Figura 2.104.

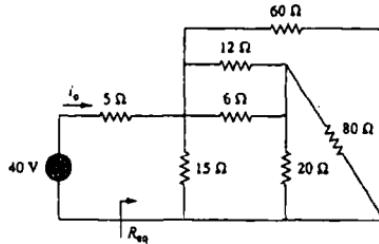


Figura 2.104 Per il Problema 2.38.

- 2.39 Determinare R_{eq} per ciascuna delle reti di Figura 2.105.

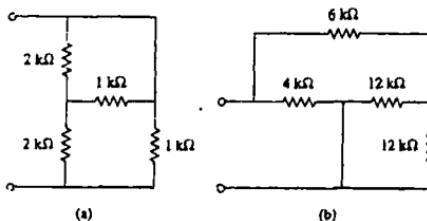


Figura 2.105 Per il Problema 2.39.

- 2.40 Nella rete a scala di Figura 2.106, determinare I e R_{eq} .

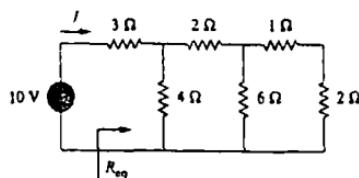


Figura 2.106 Per il Problema 2.40.

- 2.41 Se $R_{eq} = 50\Omega$ nel circuito di Figura 2.107, calcolare il valore di R .

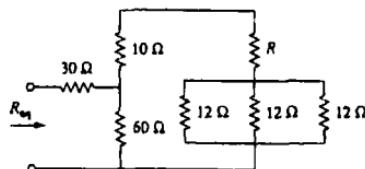


Figura 2.107 Per il Problema 2.41.

- 2.42 Ridurre ciascuno dei circuiti di Figura 2.108 a un singolo resistore ai terminali $a-b$.

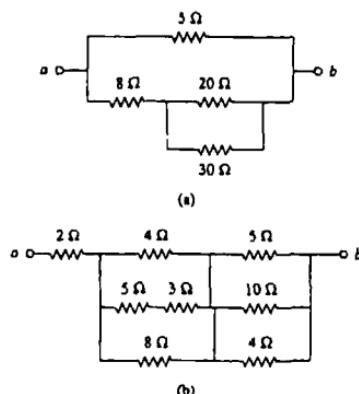


Figura 2.108 Per il Problema 2.42.

- 2.43 Calcolare la resistenza equivalente R_{ab} ai terminali $a-b$ per ciascuno dei circuiti in Figura 2.109.

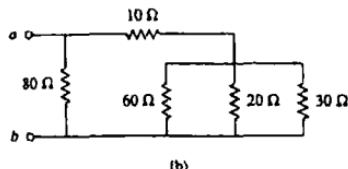
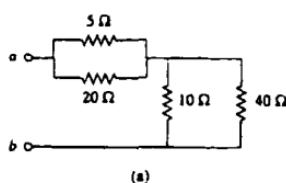


Figura 2.109 Per il Problema 2.43.

- 2.44 Per il circuito di Figura 2.110 calcolare la resistenza equivalente ai terminali $a-b$.

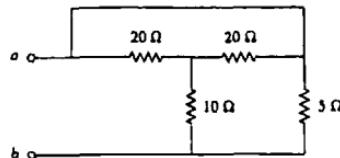


Figura 2.110 Per il Problema 2.44.

- 2.45 Determinare la resistenza equivalente ai terminali $a-b$ di ciascuno dei circuiti di Figura 2.111.

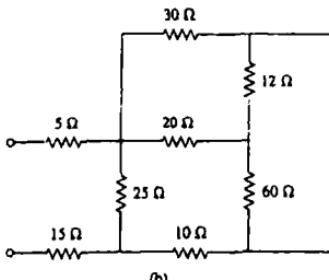
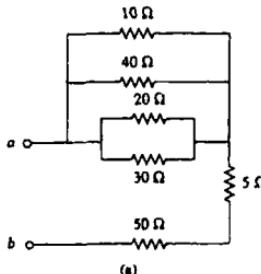


Figura 2.111 Per il Problema 2.45.

2.46 Calcolare I nel circuito di Figura 2.112.

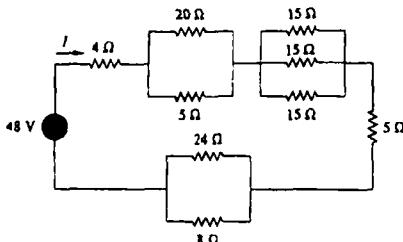


Figura 2.112 Per il Problema 2.46.

2.47 Determinare la resistenza equivalente R_{ab} nel circuito di Figura 2.113.

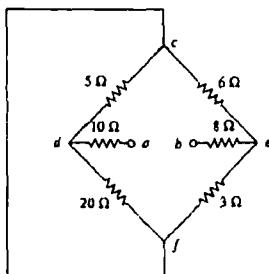


Figura 2.113 Per il Problema 2.47.

Paragrafo 2.7 Transformazioni stella-triangolo

2.48 Convertire i circuiti di Figura 2.114 da Δ a γ .

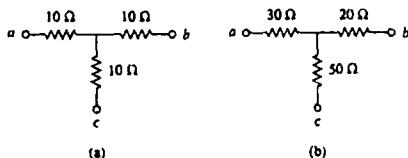


Figura 2.114 Per il Problema 2.48.

2.49 Trasformare i circuiti di Figura 2.115 da Δ a γ

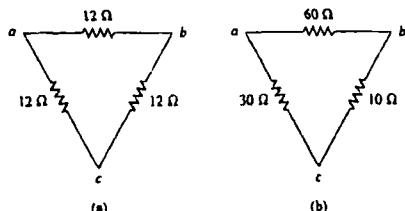


Figura 2.115 Per il Problema 2.49.

2.50 Quale valore deve avere R nel circuito di Figura 2.116 perché il generatore di corrente fornisca 800 mW ai resistori?

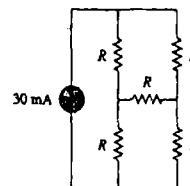
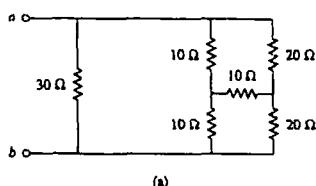
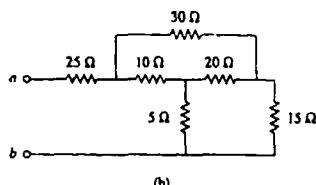


Figura 2.116 Per il Problema 2.50.

2.51 Calcolare la resistenza equivalente ai terminali $a-b$ per ciascuno dei circuiti di Figura 2.117.



(a)



(b)

Figura 2.117 Per il Problema 2.51.

*2.52 Determinare la resistenza equivalente R_{eq} nel circuito di Figura 2.118. Tutte le resistenze sono da 1 Ω.

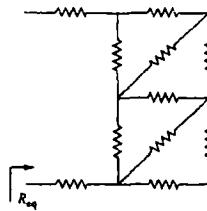


Figura 2.118 Per il Problema 2.52

*2.53 Calcolare la resistenza equivalente R_{ab} in ciascuno dei circuiti di Figura 2.119. In (b), tutte le resistenze valgono 300 Ω.

* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

*2.57 Determinare R_{eq} e I nel circuito di Figura 2.123.

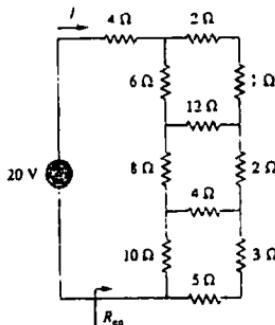


Figura 2.123 Per il Problema 2.57

- 2.54 Si consideri il circuito in Figura 2.120. Si determini la resistenza equivalente ai terminali: (a) $a-b$, (b) $c-d$.

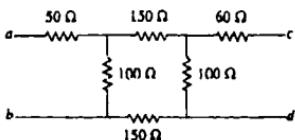


Figura 2.120 Per il Problema 2.54.

- 2.55 Calcolare I_a nel circuito di Figura 2.121.

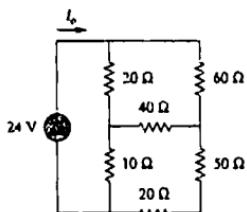


Figura 2.121 Per il Problema 2.55

- 2.56 Determinare F nel circuito di Figura 2.122.

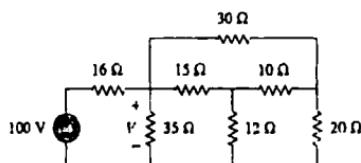


Figura 2.122 Per il Problema 2.56

Paragrafo 2.8 Applicazioni

- 2.58 Le condizioni nominali della lampadina in Figura 2.124 sono 120 V, 0.75 A. Calcolare V_i in modo che la lampadina opere nelle condizioni nominali.

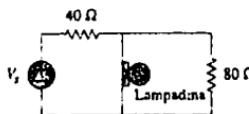


Figura 2.124 Per il Problema 2.58.

- 2.59 Tre lampadine sono collegate in serie a una batteria da 100 V come mostrato in Figura 2.125. Determinare la corrente I nelle lampadine.

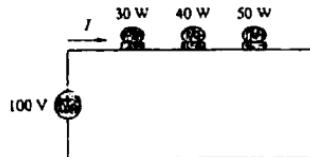


Figura 2.125 Per il Problema 2.59

- 2.60 Se le tre lampadine del Problema 2.59 sono collegate in parallelo alla batteria da 100 V, calcolare la corrente attraverso ciascuna lampadina.

- 2.61 Un sistema a tre fili alimenta due carichi A e B come mostrato in Figura 2.126. Il carico A consiste di un motore che assorbe una corrente di 8 A, mentre il carico B è un PC che assorbe 2 A. Supponendo un utilizzo di 10 h/giorno per 365 giorni a 6 cent/kWh, calcolare il costo annuale di esercizio del sistema.

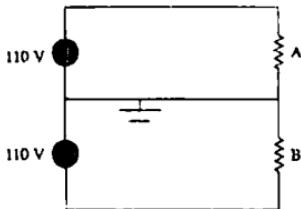


Figura 2.126 Per il Problema 2.62.

- 2.62 Se un amperometro con una resistenza interna di 100Ω e una portata di corrente di 2 mA deve misurare una corrente di 5 A , determinare il valore della resistenza necessaria. Calcolare la potenza dissipata nel resistore shunt.

2.63 Il potenziometro (resistore regolabile) R_s in Figura 2.127 deve essere progettato per regolare la corrente i_s da 1 A a 10 A . Calcolare i valori di R e R_s che soddisfano tale condizione.

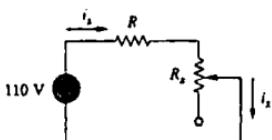


Figura 2.127 Per il Problema 2.63.

- 2.64 Uno strumento di d'Arsonval con una resistenza interna di $1\text{ k}\Omega$ richiede 10 mA per produrre la deflessione di fondo scala. Calcolare il valore della resistenza serie necessaria per misurare 50 V di fondo scala.

- 2.65 Un voltmetro da $20 \text{ k}\Omega/\text{V}$ fornisce una lettura di 10 V fondo scala.

 - Quale resistenza serie è necessaria per fare in modo che lo strumento dia una lettura di 50 V fondo scala?
 - Quanta potenza dissiperà il resistore serie quando lo strumento fornisce la lettura di fondo scala?

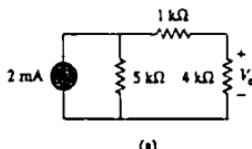
- 2.66 (a) Calcolare la tensione V_o nel circuito di Figura 2.128 (a).

(b) Determinare la tensione V'_o misurata quando un voltmetro con $6\text{ k}\Omega$ di resistenza interna viene collegato al circuito come mostrato in Figura 2.128 (b).

(c) La resistenza finita dello strumento introduce un errore nella misura. Calcolare l'errore percentuale come

$$\left| \frac{V_o - V'_o}{V_o} \right| \times 100\%$$

- (d) Calcolare l'errore percentuale se la resistenza interna fosse 36 k Ω .



(a)

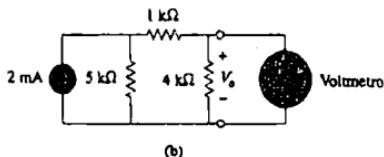
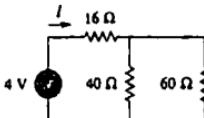


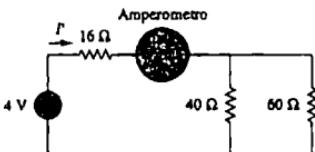
Figura 2.128 Per il Problema 2.66

- 2.67 (a) Determinare la corrente I nel circuito di Figura 2.129(a).
 (b) Un amperometro con una resistenza interna di 1Ω viene inserito nella rete per misurare I'' come mostrato in Figura 2.129(b). Quanto vale I'' ?
 (c) Calcolare l'errore percentuale introdotto dallo strumento come

$$\left| \frac{I - I'}{I} \right| \times 100\%$$



1



1

- 2.68** Un voltmetro viene utilizzato per misurare V_o nel circuito di Figura 2.130. Il modello del voltmetro consiste di un voltmetro ideale in parallelo a un resistore da $100 \text{ k}\Omega$. Siano $V_s = 40 \text{ V}$, $R_s = 10 \text{ k}\Omega$ e $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$. Calcolare V_o con e senza il voltmetro quando

 - $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$
 - $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$
 - $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$

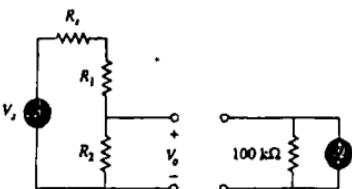


Figura 2.130 Per il Problema 2.69.

- 2.69 (a) Si consideri il ponte di Wheatstone mostrato in Figura 2.131. Calcolare v_a , v_b e v_{ab} . (b) Ripetere la parte (a) con la massa posizionata in *a* invece che in *o*.

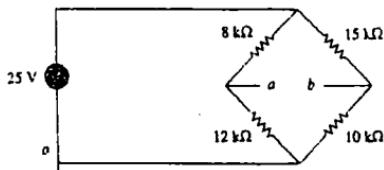


Figura 2.131 Per il Problema 2.69

- 2.70 La Figura 2.132 rappresenta il modello di un pannello solare fotovoltaico. Dati $V_s = 30 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$ e $i_L = 1 \text{ A}$, determinare R_L .

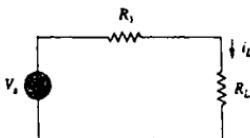


Figura 2.132 Per il Problema 2.70

- 2.71 Calcolare V_o nel separatore di potenza a due vie di Figura 2.133.

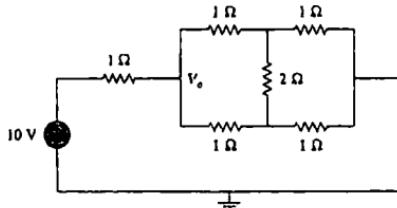


Figura 2.133 Per il Problema 2.71

- 2.72 Il modello di un amperometro consiste di un amperometro ideale in serie a un resistore da 20Ω . Esso viene collegato a un generatore di corrente e a un resistore incognito R_x , come mostrato in Figura 2.134 e viene annotata la lettura dell'amperometro. Quando viene aggiunto un potenziometro R , che viene regolato fino a che la lettura dell'amperometro scende alla metà della lettura precedente, si ha $R = 65\Omega$. Quale è il valore di R_x ?

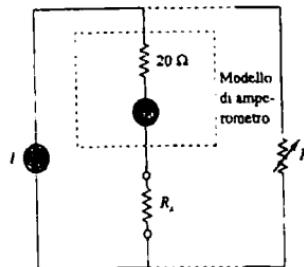


Figura 2.134 Per il Problema 2.72

- 2.73 Il circuito di Figura 2.135 deve controllare la velocità di un motore in modo che il motore assorba correnti 5 A, 3 A e 1 A quando l'interruttore è nelle posizioni alta media e bassa rispettivamente. Il motore può essere rappresentato con una resistenza di carico di $20 \text{ m}\Omega$. Determinare i valori delle resistenze serie R_1 , R_2 e R_3 .

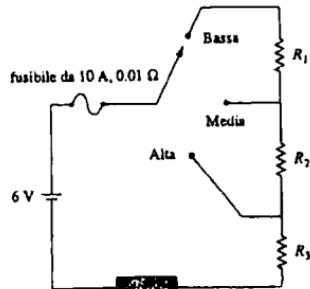


Figura 2.135 Per il Problema 2.73

- 2.74 Calcolare la resistenza equivalente R_{ab} nel separatore di potenza a quattro vie di Figura 2.136. Tutte le resistenze sono da 1Ω .

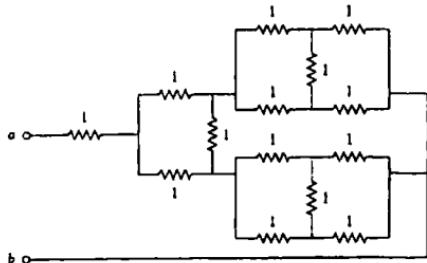


Figura 2.136 Per il Problema 2.74.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 2.75 Ripetere il Problema 2.74 per il separatore di potenza a otto vie di Figura 2.137.

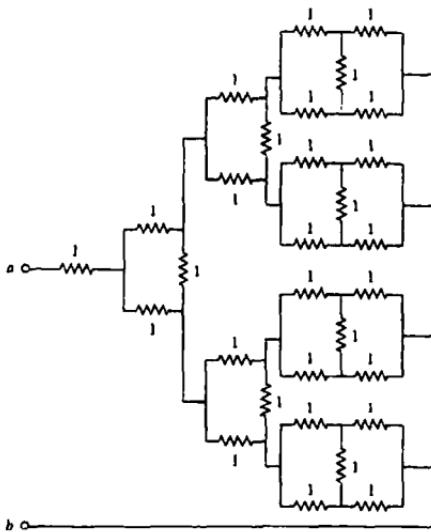


Figura 2.137 Per il Problema 2.75.

- 2.76 Si supponga che in laboratorio siano disponibili le grandi quantità i seguenti resistori standard reperibili in commercio:

1.8 Ω 20 Ω 300 Ω 24 kΩ 56 kΩ

Facendo uso di combinazioni serie e parallelo, e utilizzando il minimo numero di resistori, come è possibile ottenere le resistenze seguenti, necessarie per un progetto di circuito elettronico?

- (a) 5 Ω (b) 311.8 Ω (c) 40 kΩ (d) 52.32 kΩ

- 2.77 Nel circuito di Figura 2.138, l'elemento scorrevole divide la resistenza del potenziometro in αR e $(1 - \alpha)R$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Determinare v_a/v_b .

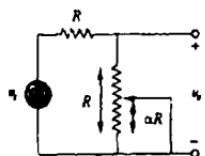


Figura 2.138 Per il Problema 2.77.

- 2.78 Un termoparamite elettrico da 240 mW, 6 V è collegato a una batteria da 9 V come mostrato in Figura 2.139. Calcolare il valore della resistenza serie R_s necessaria per alimentare il termoparamite.

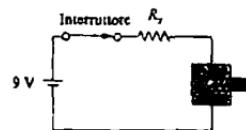


Figura 2.139 Per il Problema 2.78.

- 2.79 Un altoparlante è collegato a un amplificatore come mostrato in Figura 2.140. Se un altoparlante da 10 Ω assorbe una potenza massima di 12 W dall'amplificatore, determinare la potenza massima che verrà assorbita da un altoparlante da 4 Ω.



Figura 2.140 Per il Problema 2.79.

- 2.80 In una certa applicazione, il circuito di Figura 2.141 deve essere progettato per soddisfare i seguenti due requisiti:

- (a) $V_o/V_s = 0.05$ (b) $R_{eq} = 40 \text{ k}\Omega$

Se il resistore di carico da 5 kΩ è fisso, determinare R_1 e R_2 in modo da soddisfare i requisiti.

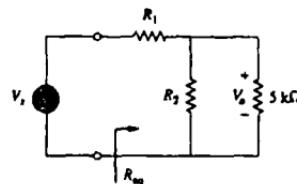


Figura 2.141 Per il Problema 2.80.

- 2.81 Il diagramma di un array di resistenze è mostrato in Figura 2.142. Determinare la resistenza equivalente tra le seguenti coppie di terminali:

- (a) 1 e 2 (b) 1 e 3 (c) 1 e 4

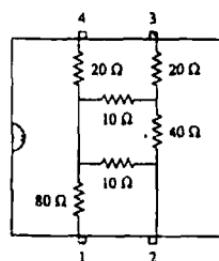


Figura 2.142 Per il Problema 2.81.

METODI DI ANALISI

3.1 INTRODUZIONE

Dopo avere introdotto le leggi elementari che governano il comportamento dei circuiti (leggi di Ohm e di Kirchhoff), è ora il momento di applicarle allo sviluppo di due importanti metodi della teoria dei circuiti: l'analisi nodale, basata sulla applicazione sistematica della legge di Kirchhoff delle correnti (KCL), e l'analisi agli anelli, basata sulla applicazione sistematica della legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL). Questi due metodi sono così importanti che si incoraggia lo studente a dedicarvi particolare attenzione, essendo il presente capitolo, probabilmente, il più importante di tutto il libro. Con i metodi che verranno sviluppati in questo capitolo è possibile analizzare quasi tutti i circuiti, ottenendo per essi un sistema di equazioni che possono essere risolti rispetto alle tensioni e alle correnti desiderate. Un metodo elegante per la risoluzione di sistemi di equazioni, di cui si farà uso negli esempi di questo capitolo, è la regola di Cramer, che consente di calcolare le incognite come quozienti di determinanti. Un altro metodo per risolvere un sistema di equazioni simultanee è quello di utilizzare MATLAB, uno strumento software presentato nell'Appendice presente sul sito web dedicato al libro.

In questo capitolo viene inoltre presentata una introduzione all'uso di *PSpice for Windows*, un programma per la simulazione di circuiti che verrà utilizzato nel resto del libro. Viene poi illustrata una importante applicazione dei metodi studiati alla analisi dei circuiti con transistori. Infine vengono descritti due componenti elettronici largamente usati in ambito elettrico ed elettronico: il diodo e il MOSFET.

3.2 ANALISI NODALE

L'analisi nodale¹ è un procedimento sistematico per analizzare i circuiti che utilizza le tensioni di nodo come incognite. L'uso delle tensioni di nodo, invece delle tensioni degli elementi, come incognite risulta conveniente perché riduce il numero di equazioni simultanee da risolvere. Per semplicità, i circuiti considerati in questo paragrafo non conterranno generatori di tensione. Circuiti con generatori di tensione verranno presi in considerazione nel prossimo paragrafo. Nell'analisi nodale si è interessati a determinare le tensioni di nodo. Data un circuito con n nodi, privo di generatori di tensione, l'analisi nodale consiste dei seguenti tre passi:

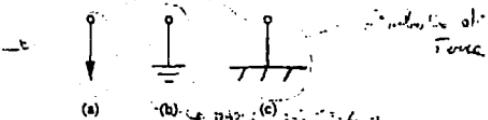
Procedura per il calcolo delle tensioni di nodo:

1. Scegliere un nodo di riferimento. Assegnare le tensioni v_1, v_2, \dots, v_{n-1} agli altri $n - 1$ nodi. Le tensioni sono misurate rispetto al nodo di riferimento.
2. Applicare la KCL agli $n - 1$ nodi diversi da quello di riferimento. Usare la legge di Ohm per esprimere le correnti di ramo in termini delle tensioni di nodo.
3. Risolvere le equazioni ottenute, calcolando così le tensioni di nodo incognite.

¹ L'analisi nodale è nota anche come *metodo dei potenziali*

I passi delineati vengono ora illustrati applicandoli a un esempio. Il primo passo della analisi nodale è la scelta del nodo di riferimento o di massa. Il nodo di riferimento è spesso detto massa perché è considerato a potenziale zero. Esso viene indicato negli schemi con uno dei simboli in Figura 3.1. Una massa del tipo di quella in Figura 3.1(b) è detta massa di telaio e viene usata quando il potenziale di riferimento per tutti i circuiti di una apparecchiatura viene preso dal telaio o dal mobile che racchiude l'apparecchiatura stessa. Quando invece viene usato il potenziale del suolo si usa il simbolo di terra di Figura 3.1(a) o (c). In questo testo verrà sempre utilizzato il simbolo di Figura 3.1(b). Una volta scelto il nodo di riferimento, si assegnano le tensioni degli altri nodi. Per esempio, nel circuito di Figura 3.2(a), il nodo 0 è il nodo di riferimento ($v = 0$), mentre ai nodi 1 e 2 sono assegnate le tensioni v_1 e v_2 , rispettivamente. Si ricordi che le tensioni di nodo sono definite rispetto al nodo di riferimento; come illustrato in Figura 3.2(a), ciascuna tensione di nodo rappresenta l'aumento del potenziale dal nodo di riferimento al nodo non di riferimento corrispondente, o semplicemente la tensione di quel nodo rispetto al nodo di riferimento.

Figura 3.1
Simboli convenzionali per indicare il nodo di riferimento



Il secondo passo consiste nella scrittura delle KCL per tutti i nodi del circuito, escluso quello di riferimento. Per evitare confusioni, il circuito di Figura 3.2(a) è stato riprodotto in Figura 3.2(b), dove sono state indicate le correnti i_1 , i_2 e i_3 che scorrono nei resistori R_1 , R_2 e R_3 , rispettivamente. Al nodo 1, la KCL fornisce

$$I_1 = I_2 + i_1 + i_2 \quad (3.1)$$

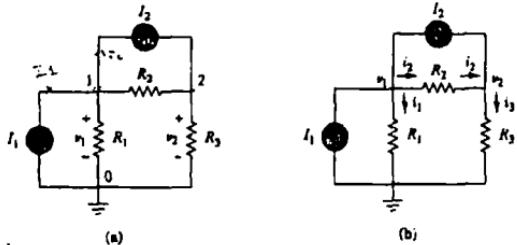
Al nodo 2,

$$I_2 + i_2 = i_3 \quad (3.2)$$

Si usa ora la legge di Ohm per esprimere le correnti incognite i_1 , i_2 e i_3 in termini delle tensioni di nodo. In questa fase, è utile tenere presente che secondo la convenzione degli utilizzatori si ha

◆ In un resistore, la tensione di connessione è il prodotto del valore del resistore con la corrente che scorre.

Figura 3.2
Circuito per l'applicazione dell'analisi nodale.



In altre parole

$$i = \frac{v_+ - v_-}{R} \quad (3.3)$$

Tutto ciò è in accordo con la definizione di resistenza del Capitolo 2 (si veda la Figura 2.1). Dalla Figura 3.2(b) si ottiene allora,

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = \frac{v_1 - 0}{R_1} \Rightarrow i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} \Rightarrow i_2 = G_2(v_1 - v_2) \\ i_3 = \frac{v_2 - 0}{R_3} \Rightarrow i_3 = G_3 v_2 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Sostituendo la (3.4) nelle (3.1) e (3.2) si ha, rispettivamente

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad (3.5)$$

$$I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_3} \quad (3.6)$$

In termini di conduttanze, le (3.5) e (3.6) diventano

$$I_1 = I_2 + G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) \quad (3.7)$$

$$I_2 + G_2 (v_1 - v_2) = G_3 v_2 \quad (3.8)$$

L'ultimo passo della analisi nodale consiste nella risoluzione delle equazioni rispetto alle tensioni di nodo. Applicando la KCL agli $n - 1$ nodi escluso quello di riferimento, si ottengono $n - 1$ equazioni come le (3.5) e (3.6) o le (3.7) e (3.8). Per il circuito di Figura 3.2, si risolvono le (3.5) e (3.6), oppure le (3.7) e (3.8), e si ottengono le tensioni di nodo v_1 e v_2 usando un qualunque metodo di risoluzione dei sistemi di equazioni, per esempio il metodo di sostituzione, quello di riduzione, la regola di Cramer o l'inversione di matrici. L'uso degli ultimi due richiede che le equazioni vengano risritte in forma matriciale. Le (3.7) e (3.8) possono essere scritte in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

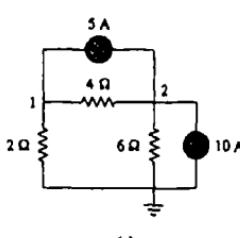
ed essere risolte rispetto a v_1 e v_2 . La (3.9) verrà generalizzata nel Paragrafo 3.6. Le equazioni possono anche essere risolte con un calcolatore tascabile quale l'HP48 o con strumenti software come MATLAB, Mathcad, Maple.

Esempio 3.1

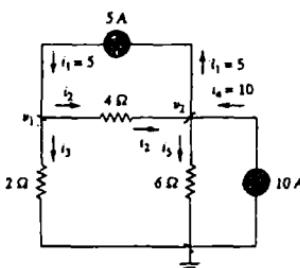
Calcolare le tensioni di nodo nel circuito mostrato in Figura 3.3(a).

Soluzione: Si consideri la Figura 3.3(b), nella quale il circuito della Figura 3.3(a) è stato preparato per l'analisi nodale. Si noti come sono state scelte le correnti per l'applicazione della KCL. Se si fa eccezione per i rami contenenti generatori di corrente, le correnti sono state indicate con versi arbitrari ma consistenti. (Per esempio, se si assume che i_2 entra nel resistore da 4Ω da sinistra, essa deve uscire dallo stesso resistore da destra.) È stato scelto il nodo di riferimento, e bisogna ora determinare le tensioni di nodo v_1 e v_2 . Al nodo 1, la KCL e la legge di Ohm forniscono

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad 5 = \frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_1 - 0}{2}$$



(a)



(b)

Moltiplicando tutti i termini della equazione precedente per 4 si ottiene

$$20 = v_1 - v_2 + 2v_1$$

cioè

$$3v_1 - v_2 = 20 \quad (3.1.1)$$

Figura 3.3
Per l'Esempio 3.1: (a) circuito originale, (b) circuito per l'analisi nodale

Al nodo 2, allo stesso modo, si ottiene

$$i_2 + i_4 = i_1 + i_3 \implies \frac{v_1 - v_2}{4} + 10 = 5 + \frac{v_2 - 0}{6}$$

Moltiplicando tutti i termini per 12 si ha

$$3v_1 - 3v_2 + 120 = 60 + 2v_2$$

riordinando

$$-3v_1 + 5v_2 = 60 \quad (3.1.2)$$

Si possono ora risolvere, con un metodo qualunque, le (3.1.1) e (3.1.2), ottenendo così i valori di v_1 e v_2 .

METODO 1

Con il metodo di riduzione, si sommano le (3.1.1) e (3.1.2).

$$4v_2 = 80 \implies v_2 = 20 \text{ V}$$

Sostituendo $v_2 = 20$ nella (3.1.1) si ottiene

$$3v_1 - 20 = 20 \implies v_1 = \frac{40}{3} = 13.33 \text{ V}$$

METODO 2

Per fare uso della regola di Cramer, è necessario scrivere le (3.1.1) e (3.1.2) in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Il determinante della matrice è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 3 = 12$$

Si ottengono ora v_1 e v_2 come

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 60 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{100 + 60}{12} = 13.33 \text{ V}$$

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -3 & 60 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{180 + 60}{12} = 20 \text{ V}$$

che è lo stesso risultato ottenuto con il metodo di riduzione.

Se necessario, le correnti possono essere facilmente calcolate a partire dai valori delle tensioni di nodo.

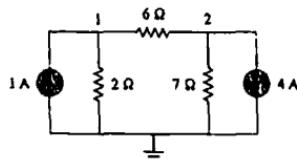
$$i_1 = 5 \text{ A}, \quad i_2 = \frac{v_1 - v_2}{4} = -1.6667 \text{ A}, \quad i_3 = \frac{v_1}{2} = 6.666$$

$$i_4 = 10 \text{ A}, \quad i_5 = \frac{v_2}{6} = 3.333 \text{ A}$$

Il fatto che i_2 sia negativa indica che la corrente scorre nella direzione opposta alla direzione di riferimento scelta.

Esercizio 3.1 Calcolare le tensioni di nodo nel circuito di Figura 3.4.

Figura 3.4
Per l'Esercizio 3.1.

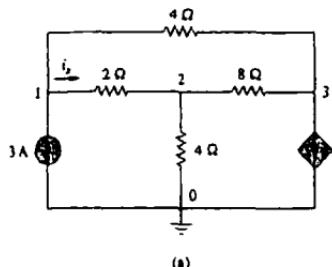


Risposta $v_1 = -2 \text{ V}$, $v_2 = -14 \text{ V}$

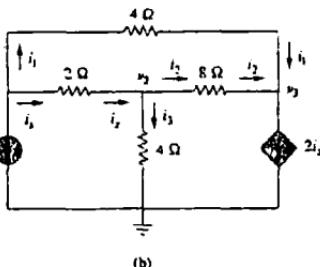
Esempio 3.2

Determinare le tensioni di nodo in Figura 3.5(a).

Soluzione: Il circuito di questo esempio presenta tre nodi oltre a quello di riferimento, mentre quello dell'esempio precedente ne aveva due. Si assegnano le tensioni ai tre nodi come mostrato nella Figura 3.5(b) e si indicano le correnti incognite.



(a)



(b)

Figura 3.5

Per l'Esempio 3.2 (a) circuito originale, (b) circuito per l'analisi nodale

Al nodo 1,

$$3 = i_1 + i_4 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2}$$

Moltiplicando per 4 e riordinando i termini si ottiene

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 12 \quad (3.2.1)$$

Al nodo 2,

$$i_4 = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_2 - v_3}{8} + \frac{v_2 - 0}{4}$$

Moltiplicando per 8 e riordinando si ottiene

$$-4v_1 + 7v_2 - v_3 = 0 \quad (3.2.2)$$

Al nodo 3,

$$i_1 + i_2 = 2i_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_3}{8} = \frac{2(v_1 - v_2)}{2}$$

Moltiplicando per 8, riordinaendo e dividendo per 3 si ottiene

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \quad (3.2.3)$$

Si deve ora risolvere un sistema di tre equazioni per ottenere le tensioni di nodo v₁, v₂ e v₃. Verranno utilizzati tre metodi diversi.

METODO 1

Con il metodo di riduzione, si sommano le (3.2.1) e (3.2.3).

$$5v_1 - 5v_2 = 12$$

cioè

$$v_1 - v_2 = \frac{12}{5} = 2.4 \quad (3.2.4)$$

Sommmando le (3.2.2) e (3.2.3) si ottiene

$$-2v_1 + 4v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 \quad (3.2.5)$$

Sostituendo la (3.2.5) nella (3.2.4) si ha

$$2v_2 - v_2 = 2.4 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2.4, \quad v_1 = 2v_2 = 4.8 \text{ V}$$

Dalla (3.2.3),

$$v_3 = 3v_2 - 2v_1 = 3v_2 - 4v_2 = -v_2 = -2.4 \text{ V}$$

E quindi,

$$v_1 = 4.8 \text{ V}, \quad v_2 = 2.4 \text{ V}, \quad v_3 = -2.4 \text{ V}$$

METODO 2

Per applicare la regola di Cramer, si scrivono le Equazioni da (3.2.1) a (3.2.3) in forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da queste si ottiene

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

dove $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ e Δ_3 sono determinanti calcolati come segue: come è noto dall'algebra delle matrici, per ottenere il determinante di una matrice 3×3 si riscrivono le prime due righe e si eseguono i prodotti incrociati.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} \hline 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|ccc|} \hline 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|ccc|} \hline -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|ccc|} \hline -4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$= 21 - 12 + 4 + 14 - 9 - 8 = 10$$

In maniera simile, si ottiene

$$\Delta_1 = \begin{array}{|ccc|} \hline 12 & -2 & -1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ \hline \end{array} = 84 + 0 + 0 - 0 - 36 - 0 = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{array}{|ccc|} \hline 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \\ \hline \end{array} = 0 + 0 - 24 - 0 - 0 + 48 = 24$$

$$\Delta_3 = \begin{array}{|ccc|} \hline 3 & -2 & 12 \\ 8 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ \hline \end{array} = 0 + 144 + 0 - 168 - 0 - 0 = -24$$

Si trova quindi

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{10} = 4.8 \text{ V}, \quad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ V} \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{10} = -2.4 \text{ V}$$

come si era ottenuto con il Metodo 1.

METODO 3

Verrà ora utilizzato MATLAB per risolvere il sistema di equazioni in forma matriciale. La (3.2.6) può essere scritta come

$$AV = B \implies V = A^{-1}B$$

dove A è la matrice quadrata 3×3 , B è il vettore colonna dei termini noti e V è un vettore colonna costituito da v_1, v_2 e v_3 che si vogliono determinare. Si usa MATLAB per determinare V nel modo seguente:

```
>> A = 3 -2 -1; -4 7 -1; 2 -3 1;
>> B = 12 0 0;
>> V = inv(A) * B
4.8000
V = 2.4000
- 2.4000
```

Quindi, $v_1 = 4.8 \text{ V}$, $v_2 = 2.4 \text{ V}$ e $v_3 = -2.4 \text{ V}$, come si era ottenuto in precedenza.

Esercizio 3.2 Determinare le tensioni dei tre nodi diversi da quello di riferimento per il circuito di Figura 3.6.

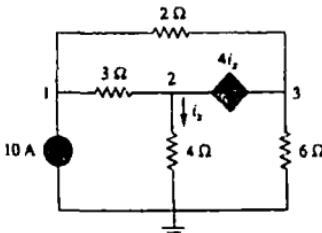


Figura 3.6
Per l'Esercizio 3.2

Risposta $v_1 = 80 \text{ V}$, $v_2 = -64 \text{ V}$, $v_3 = 156 \text{ V}$.

3.3 ANALISI NODALE IN PRESENZA DI GENERATORI DI TENSIONE

Si vedrà ora come viene modificata la formulazione delle equazioni dell'analisi nodale dalla presenza di generatori di tensione. Verrà utilizzato come esempio il circuito della Figura 3.7. Si presentano le due seguenti possibilità:

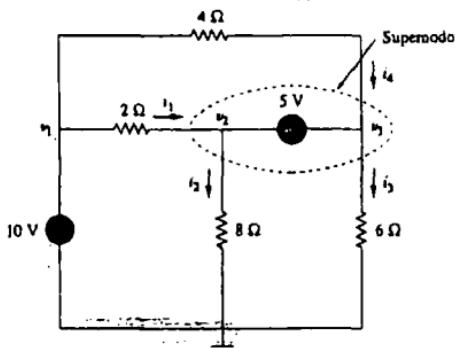


Figura 3.7
Circuito con un supernodo.

CASO 1

Se il generatore di tensione è collegato tra il nodo di riferimento e un altro nodo (non di riferimento), si pone semplicemente la tensione del nodo non di riferimento uguale alla tensione del generatore. Nella Figura 3.7, per esempio,

$$v_1 = 10 \text{ V} \quad (3.10)$$

L'analisi risulta quindi, in un certo senso, semplificata perché si conosce a priori la tensione di un nodo.

CASO 2

Se il generatore di tensione (dipendente o indipendente) è collegato tra due nodi non di riferimento, i due nodi costituiscono un nodo generalizzato o supernodo²; per determinarne le tensioni si applicano la KCL e la KVL.

Un supernodo è formato da un generatore di tensione (dipendente o indipendente) collegato tra due nodi di riferimento, e dai eventuali elementi a esso collegati in parallelo.

² Un supernodo può essere considerato come una superficie chiusa che racchiude il generatore di tensione e i due nodi a cui è collegato.

Nella Figura 3.7, i nodi 2 e 3 formano un supernodo. (Un supernodo potrebbe essere formato anche da più di due nodi; per un esempio, si veda la Figura 3.14.) L'analisi di un circuito con supernodi si effettua secondo i medesimi tre passi del paragrafo precedente, ma i supernodi necessitano di un trattamento speciale. L'applicazione della KCL a un nodo richiede infatti di scrivere l'espressione della corrente che attraversa un generatore di tensione in termini della tensione stessa. La KCL deve però essere soddisfatta in un supernodo, così come in un qualsiasi altro nodo: nel supernodo della Figura 3.7, quindi

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \quad (3.11a)$$

e quindi

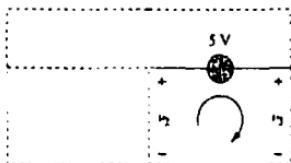
$$\frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - v_3}{4} = \frac{v_2 - 0}{8} + \frac{v_3 - 0}{6} \quad (3.11b)$$

Per applicare la legge di Kirchhoff delle tensioni al supernodo della Figura 3.7, si ridisegna il circuito come mostrato in Figura 3.8. Percorrendo la maglia in senso orario si ha

$$-v_2 + 5 + v_3 = 0 \implies v_2 - v_3 = 5 \quad (3.12)$$

Figura 3.8

Applicazione della KVL ad un supernodo.



Dalle (3.10), (3.11b) e (3.12) si ottengono le tensioni di nodo. Sono da ricordare le seguenti proprietà di un supernodo:

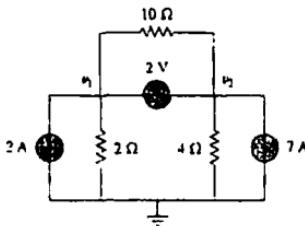
1. Il generatore di tensione interno al supernodo fornisce una equazione di vincolo necessaria al calcolo delle tensioni di nodo.
2. Un supernodo non ha una tensione propria.
3. A un supernodo si devono applicare sia la KCL che la KVL.

Esempio 3.3

Per il circuito mostrato nella Figura 3.9, determinare le tensioni di nodo.

Figura 3.9

Per l'Esempio 3.3.



Soluzione: Il supernodo è formato dal generatore da 2 V, dai nodi 1 e 2 e dal resistore da 10 Ω. Applicando la KCL al supernodo, come mostrato nella Figura 3.10(a), si ottiene

$$2 = i_1 + i_2 + 7$$

Esprimendo i_1 e i_2 in termini delle tensioni di nodo

$$2 = \frac{v_1 - 0}{2} + \frac{v_2 - 0}{4} + 7 \implies 8 = 2v_1 + v_2 + 28 \quad (3.13)$$

cioè

$$v_2 = -20 - 2v_1 \quad (3.13)$$

Per ottenere la relazione tra v_1 e v_2 , si applica lo KVL al circuito della Figura 3.10(b). Percorrendo la maglia, si ha

$$-v_1 - 2 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 + 2 \quad (3.3.2)$$

Dalle (3.3.1) e (3.3.2), si può scrivere

$$v_2 = v_1 + 2 = -20 - 3v_1$$

e anche

$$3v_1 = -22 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -7.333 \text{ V}$$

e $v_2 = v_1 + 2 = -5.333 \text{ V}$. Si noti che il resistore da 10Ω non ha alcuna influenza, essendo interno al supernodo.

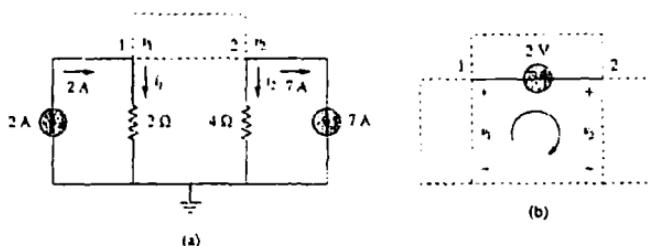


Figura 3.10
Applicazione della
(a) KCL al supernodo,
(b) KVL alla maglia

Esercizio 3.3 Calcolare v_1 e i_1 nel circuito di Figura 3.11.

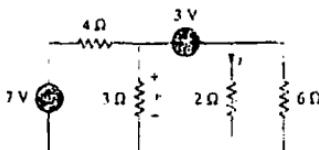


Figura 3.11
Per l'Esercizio 3.3

Risposta $-0.2 \text{ V}, 1.4 \text{ A}$.

Esempio 3.4

Calcolare le tensioni di nodo nel circuito di Figura 3.12.

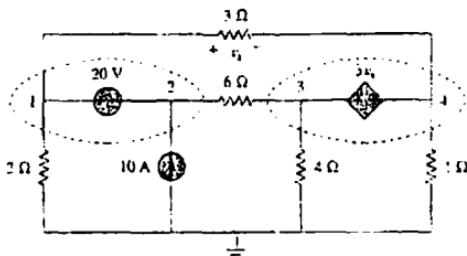


Figura 3.12
Per l'Esempio 3.4

Soluzione: I nodi 1 e 2 costituiscono un supernodo, così come i nodi 3 e 4. Si applica la KCL ai due supernodi come mostrato nella Figura 3.13(a). Al supernodo 1-2,

$$i_3 + 10 = i_1 + i_2$$

Esprimendo le correnti in termini di tensioni di nodo,

$$\frac{v_2 - v_1}{6} + 10 = \frac{v_1 - v_4}{3} + \frac{v_1}{2}$$

e riordinando

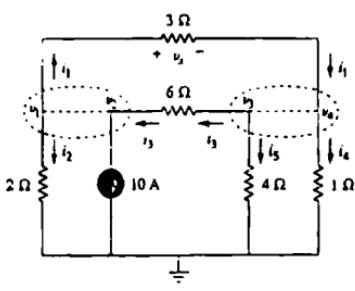
$$5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 \quad (3.4.1)$$

Al supermodo 3-4,

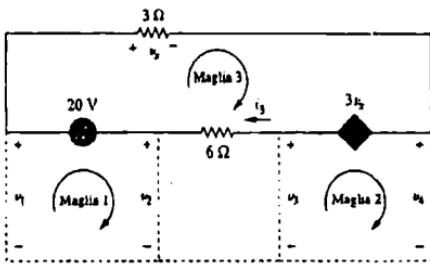
$$i_1 = i_3 + i_4 + i_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_4}{3} = \frac{v_1 - v_2}{6} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_3}{4}$$

cioè

$$4v_1 + 2v_2 - 5v_3 - 16v_4 = 0 \quad (3.4.2)$$



(a)



(b)

Figura 3.13

Applicazione della

- (a) KCL ai due supermodi.
(b) KVL alle due maglie.

Si applica ora la KVL ai rami affacciati ai generatori di tensione, come mostrato nella Figura 3.13(b). Per la maglia 1,

$$-v_1 + 20 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = 20 \quad (3.4.3)$$

Per la maglia 2,

$$-v_3 + 3v_2 + v_4 = 0$$

ma $v_4 = v_1 - v_4$, così

$$3v_1 - v_3 - 2v_4 = 0 \quad (3.4.4)$$

Per la maglia 3,

$$v_3 - 3v_2 + 6v_3 - 20 = 0$$

Ma $6v_3 = v_3 - v_2$ e $v_3 = v_1 - v_4$. Quindi

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 0 \quad (3.4.5)$$

Si vogliono ora calcolare le quattro tensioni di nodo v_1, v_2, v_3 e v_4 , e per questo servono solo quattro delle cinque equazioni da (3.4.1) a (3.4.5). Nonostante la quinta equazione sia ridondante, essa può risultare utile per la verifica dei risultati. È poi possibile eliminare una tensione di nodo, risolvendo così un sistema di tre equazioni invece di quattro. Dalla (3.4.3), $v_2 = v_1 - 20$. Sostituendo nelle (3.4.1) e (3.4.2), rispettivamente, si ottiene

$$6v_1 - v_3 - 2v_4 = 80 \quad (3.4.6)$$

e

$$6v_1 - 5v_3 - 16v_4 = 40 \quad (3.4.7)$$

Le (3.4.4), (3.4.6) e (3.4.7) possono essere messe in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

Usando la regola di Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 80 & -1 & -2 \\ 40 & -5 & -16 \end{vmatrix} = -480$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 80 & -2 \\ 6 & 40 & -16 \end{vmatrix} = -3120, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 80 \\ 6 & -5 & 40 \end{vmatrix} = 840$$

Si ottengono così le tensioni di nodo

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-480}{-18} = 26.667 \text{ V}, \quad v_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3120}{-18} = 173.333 \text{ V}$$

$$v_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{840}{-18} = -46.667 \text{ V}$$

e $v_2 = v_1 - 20 = 6.667 \text{ V}$. La (3.4.5) non è stata utilizzata, ma può servire, come si è detto, per controllare i risultati.

Esercizio 3.4 Calcolare v_1 , v_2 e v_3 nel circuito di Figura 3.14 usando l'analisi nodale.

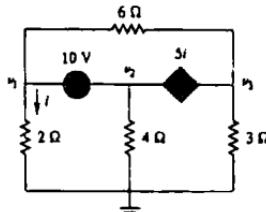


Figura 3.14
Per l'Esercizio 3.4.

Risposta $v_1 = 3.043 \text{ V}$, $v_2 = -6.956 \text{ V}$, $v_3 = 0.6522 \text{ V}$.

3.4 ANALISI NODALE MODIFICATA

Se sono presenti generatori di tensione, l'analisi nodale può essere anche eseguita senza dover identificare i supernodi, utilizzando il metodo detto della analisi nodale modificata, nel quale si scrive un sistema di equazioni in cui compaiono come incognite, oltre alle tensioni di nodo, anche le correnti nei generatori di tensione.

Si sceglie un nodo di riferimento, e si assegnano le tensioni nodali (agli $n - 1$ nodi), misurate rispetto al nodo di riferimento.

Si introducono come ulteriori incognite (in aggiunta alle $n - 1$ tensioni nodali, dove n è il numero dei nodi), le correnti dei generatori di tensione.

Si scrivono le $n - 1$ KCL relative ai nodi ad eccezione del nodo di riferimento; a queste si aggiungono un numero di equazioni pari al numero dei generatori di tensione: si hanno i due casi descritti nel Paragrafo 3.3 e si farà riferimento alla Figura 3.7.

CASO 1

Se il generatore di tensione è collegato tra il nodo di riferimento e un altro nodo, si pone la tensione dell'altro nodo pari alla tensione del generatore. Per esempio per il generatore da 10 V della Figura 3.7, si ha

$$v_1 = 10 \text{ V}$$

CASO 2

Se il generatore di tensione è collegato tra due nodi non di riferimento, si pone la differenza tra le due tensioni di nodo pari alla tensione del generatore. Per esempio per il generatore da 5 V della Figura 3.7, si ha

$$\underline{v_2 - v_3 = 5 \text{ V}}$$

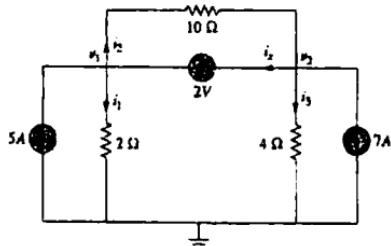
Esempio 3.5

Ripetere l'Esempio 3.3. Calcolare le tensioni nodali nel circuito di Figura 3.9, applicando l'analisi nodale modificata.

Soluzione: Si aggiunge alle due incognite v_1 e v_2 , la corrente i_2 del generatore di tensione. Il circuito diventa quello di Figura 3.15.

SI CONSIDERA
LA CORRENTE
CHE SCORRE
VIL GENERATORE
COME
CORRENTE DI RIFERIMENTO.

Figura 3.15
Per l'Esempio 3.5



Si scrivono le due KCL rispettivamente ai nodi relativi a v_1 e v_2 :

$$i_2 + i_1 - i_3 = 0 \quad (3.5.1)$$

$$i_2 + i_3 - i_1 + 7 = 0 \quad (3.5.2)$$

A queste si aggiunge la relazione tra la tensione del generatore e la differenza tra le tensioni ai nodi a cui è collegato il generatore di tensione

$$v_2 - v_1 = +2 \text{ V} \quad (3.5.3)$$

Si esprimono le correnti i_1 , i_2 e i_3 , in termini delle tensioni nodali, nelle equazioni (3.5.1) e (3.5.2).

$$\frac{v_1 - v_2}{10} + \frac{v_1}{2} - i_2 - 2 = 0 \quad (3.5.4)$$

$$i_2 + \frac{v_2}{4} - \frac{v_1 - v_2}{10} + 7 = 0 \quad (3.5.5)$$

Si ricava i_2 dalla (3.5.4) e v_2 dalla (3.5.3) e si sostituiscono nella (3.5.5).

$$\frac{v_1}{2} - 2 + \frac{v_1 + 2}{4} + 7 = 0$$

Da questa si ricava $v_1 = -22/3 \approx -7.333 \text{ V}$ e $v_2 = v_1 + 2 = -5.333 \text{ V}$.

■ **Esercizio 3.5** Risolvere l'Esercizio 3.3 applicando al circuito di Figura 3.11 l'analisi nodale modificata, per calcolare v e i .

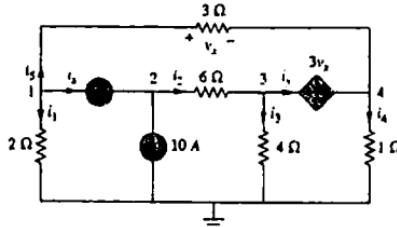
Risposta $-0.2 \text{ V}, 1.4 \text{ A}$. ■

Esempio 3.6

Ripetere l'Esempio 3.4. Calcolare le tensioni nodali nel circuito di Figura 3.12, applicando l'analisi nodale modificata.

Soluzione: Si aggiungono alle quattro incognite v_1 , v_2 , v_3 e v_4 le due correnti i_1 e i_2 dei due generatori di tensione. Il circuito diventa quello di Figura 3.16.

Figura 3.16
Per l'Esempio 3.6



Si scrivono le quattro KCL rispettivamente ai nodi 1, 2, 3 e 4.

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{v_1}{2} + i_2 + \frac{v_1 - v_4}{3} = 0 \quad (3.6.1)$$

$$i_2 - 10 - i_4 = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{v_2 - v_3}{6} - 10 - i_4 = 0 \quad (3.6.2)$$

$$i_3 + i_4 - i_2 = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{v_2}{4} + i_4 - \frac{v_2 - v_3}{6} = 0 \quad (3.6.3)$$

$$i_4 - i_5 - i_6 = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{v_4}{1} - \frac{v_5 - v_6}{3} - i_6 = 0 \quad (3.6.4)$$

A queste si aggiungono le relazioni tra le tensioni dei generatori e la differenza tra le tensioni ai nodi a cui sono collegati i generatori di tensione

$$v_1 - v_2 = +20 \text{ V} \quad (3.6.5)$$

$$v_3 - v_4 = 3v_s = 3(v_1 - v_4) \quad (3.6.6)$$

Si ricava i_2 dalla (3.6.2) e si sostituisce nella (3.6.1).

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_2 - v_3}{6} - 10 + \frac{v_1 - v_4}{3} = 0 \quad \text{cioè} \quad 5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 \quad (3.6.7)$$

Si ricava i_6 dalla (3.6.4) e si sostituisce nella (3.6.3).

$$\frac{v_2}{4} + v_4 - \frac{v_1 - v_4}{3} - \frac{v_2 - v_3}{6} = 0 \quad \text{cioè} \quad -4v_1 - 2v_2 + 5v_3 + 16v_4 = 0 \quad (3.6.8)$$

Dalla (3.6.6) si ha:

$$3v_1 - v_3 - 2v_4 = 0 \quad (3.6.9)$$

Si ricava v_2 dalla (3.6.5) e si sostituisce nelle (3.6.7) e (3.6.8) e si ottiene rispettivamente

$$6v_1 - v_3 - 2v_4 = 80 \quad (3.6.10)$$

$$6v_1 - 5v_3 - 16v_4 = 40 \quad (3.6.11)$$

Le (3.6.9), (3.6.10) e (3.6.11) possono essere riscritte in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} \quad (3.6.12)$$

La (3.6.12) coincide con la (3.4.8), per cui, usando la regola di Cramer, si hanno le stesse soluzioni dell'Esempio 3.4 cioè:

$$v_1 = +26.667 \text{ V}, \quad v_2 = +6.667 \text{ V}, \quad v_3 = +173.333 \text{ V} \quad \text{e} \quad v_4 = -46.667 \text{ V}$$

Esercizio 3.6 Risolvere l'Esercizio 3.4 applicando al circuito di Figura 3.14 l'analisi nodale modificata, per calcolare v_1 , v_2 e v_3 .

Risposta $v_1 = 3.043 \text{ V}$, $v_2 = -6.956 \text{ V}$, $v_3 = 0.6522 \text{ V}$.



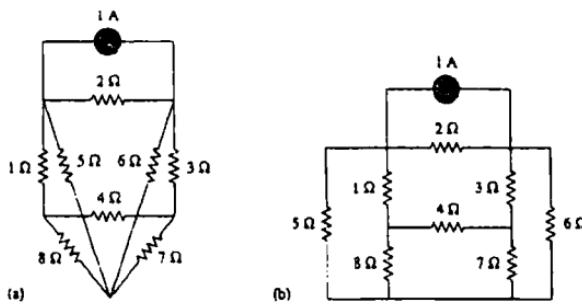
3.5 ANALISI AGLI ANELLI

(SOLUZIONE ESEMPIO 3.17: PAG. 45)

L'analisi agli anelli costituisce un altro metodo generale per l'analisi dei circuiti, che fa uso delle correnti di anello come incognite principali. L'uso delle correnti degli anelli, invece di quelle degli elementi, risulta conveniente perché riduce il numero di equazioni che devono essere risolte simultaneamente. Si ricordi che una maglia è un percorso chiuso nel quale non si transita più di una volta per ciascun nodo. Un anello è una maglia che non contiene altre maglie al suo interno. Nella analisi nodale, si applica la KCL per calcolare le tensioni incognite in un circuito, mentre nella analisi agli anelli si applica la KVL per trovare delle correnti incognite. L'analisi agli anelli non possiede però l'applicabilità generale propria della analisi nodale: essa è applicabile soltanto ai circuiti planari. Un circuito planare è un circuito che può essere disegnato in un piano senza che vi siano rami che si incrociano; un circuito che non è planare è detto non planare. Un circuito può avere rami che si incrociano ed essere comunque planare, se esiste un modo per ridisegnarlo senza gli incroci. Per esempio, il circuito in Figura 3.15(a) ha due rami che si incrociano con un altro, ma può essere ridisegnato come in Figura 3.17(b). Esso è quindi planare.

Figura 3.17

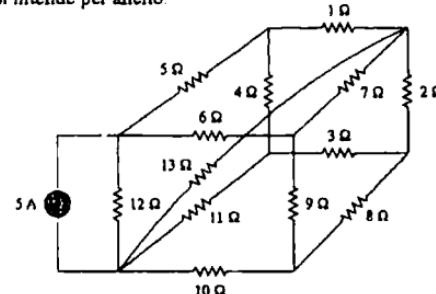
(a) Un circuito planare con rami incrociati;
 (b) lo stesso circuito disegnato senza rami incrociati.



Invece, il circuito della Figura 3.18 è non planare, perché non esiste un modo di ridisegnarlo senza che ci siano rami incrociati. È possibile analizzare i circuiti non planari usando l'analisi nodale, ma in questo libro essi non verranno comunque più presi in considerazione. Per comprendere meglio l'analisi agli anelli è bene chiarire ancora una volta cosa si intende per anello.

Figura 3.18

Circuito non planare

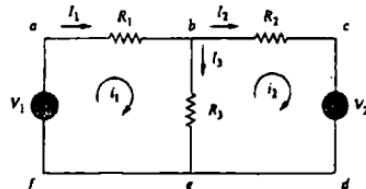


Un anello è una maglia che non contiene maglie al suo interno.

Per esempio, in Figura 3.19, i percorsi $abefa$ e $bcdeb$ sono anelli, mentre il percorso $abcdefa$ non è un anello. La corrente che scorre in un anello è detta *corrente di anello*; nella analisi agli anelli si applica la KVL per calcolare le correnti di anello di un circuito. Nel presente paragrafo si applicherà l'analisi agli anelli a circuiti planari che non contengono generatori di corrente. Circuiti con generatori di corrente verranno presi in considerazione nei prossimi paragrafi. L'analisi agli anelli di un circuito con n anelli consiste dei seguenti tre passi:

Figura 3.19

Circuito con due anelli.



Procedura per il calcolo delle correnti di anello:

- Assegnare le correnti di anello i_1, i_2, \dots, i_n agli n anelli.
- Applicare la KVL a ciascuno degli n anelli. Fare uso della legge di Ohm per esprimere le tensioni in termini di correnti di anello.
- Risolvere il sistema di n equazioni risultante, ottenendo così le correnti di anello.

A scopo illustrativo, si consideri il circuito della Figura 3.19. Nel primo passo, le correnti di anello i_1 e i_2 vengono assegnate agli anelli 1 e 2. Benché per ogni anello sia possibile scegliere il verso della corrente a piacere, è consuetudine scegliere tutte le correnti di anello con verso convenzionale orario³. Nel secondo passo, si applica la KVL a ciascun anello. Per l'anello 1 si ottiene

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0$$

cioè

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1 \quad (3.13)$$

Per l'anello 2, la KVL fornisce

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0$$

cioè

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -V_2 \quad (3.14)$$

Nella (3.13) si noti che il coefficiente di i_1 è la somma delle resistenze nel primo anello, mentre il coefficiente di i_2 è l'opposto della resistenza comune agli anelli 1 e 2. Lo stesso avviene nella (3.14). Questa può essere considerata una regola rapida per scrivere le equazioni agli anelli. Su di essa si tornerà nel Paragrafo 3.6*. Nel terzo passo, si risolve rispetto alle correnti di anello. Le (3.13) e (3.14), in forma matriciale, danno

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

e possono essere risolte per ottenere le correnti di anello i_1 e i_2 . La risoluzione del sistema di equazioni può essere eseguita usando un metodo qualsiasi. Secondo la (2.12), se un circuito ha n nodi, b rami e l maglie indipendenti o anelli, allora $l = b - n + 1$. Sono quindi necessarie l equazioni indipendenti per risolvere il circuito usando l'analisi agli anelli. Si noti che le correnti di ramo sono differenti dalle correnti di anello, a meno che l'anello non risulti isolato. Per distinguere fra i due tipi di corrente, si usa la notazione i per una corrente di anello e I per una corrente di ramo. Le correnti di ramo I_1 , I_2 e I_3 sono somme algebriche di correnti di anello. Risulta evidente dalla Figura 3.17 che

$$I_1 = i_1, \quad I_2 = i_2, \quad I_3 = i_1 - i_2 \quad (3.16)$$

Esempio 3.7

Nel circuito di Figura 3.20, determinare le correnti di ramo I_1 , I_2 e I_3 mediante l'analisi agli anelli.

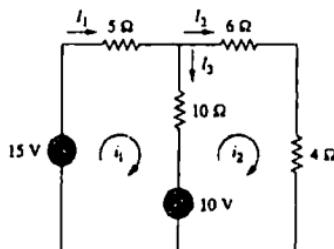


Figura 3.20
Per l'Esempio 3.7

³ Si noti che la direzione di riferimento di ciascuna corrente di anello è arbitraria (oraria o antioraria) e non influenza sulla validità della soluzione.

* Tale regola rapida non è valida quando una corrente di anello ha direzione di riferimento oraria e l'altra antioraria.

Soluzione: Si ottengono dapprima le correnti di anello usando la KVL. Per l'anello 1.

$$-15 + 5i_1 + 10(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

cioè

$$3i_1 - 2i_2 = 1$$

Per l'anello 2,

$$6i_2 + 4i_3 + 10(i_2 - i_1) - 10 = 0$$

cioè

$$i_1 = 2i_2 - 1$$

METODO 1

Con il metodo di sostituzione, si sostituisce la (3.5.2) nella (3.5.1), scrivendo

$$6i_2 - 3 - 2i_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 1 \text{ A}$$

Dalla (3.5.2), $i_1 = 2i_2 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ A}$. Perciò,

$$I_1 = i_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = i_2 = 1 \text{ A}, \quad I_3 = i_1 - i_2 = 0$$

METODO 2

Con la regola di Cramer, si scrivono le (3.5.1) e (3.5.2) in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si calcolano i determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 4$$

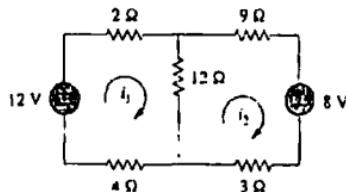
Da cui,

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1 \text{ A}, \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \text{ A}$$

come si era ottenuto in precedenza.

Esercizio 3.7 Calcolare le correnti di anello i_1 e i_2 nel circuito di Figura 3.21.

Figura 3.21
Per l'Esercizio 3.7.

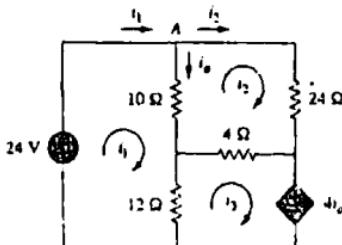


Risposta: $i_1 = \frac{2}{3} \text{ A}$, $i_2 = 0 \text{ A}$.

Esempio 3.8

Facendo uso della analisi agli anelli, calcolare la corrente i_a nel circuito di Figura 3.22.

Figura 3.22
Per l'Esempio 3.8.



Soluzione: Si applica la KVL ai tre anelli. Per l'anello 1,

$$-24 + 10(i_1 - i_2) + 12(i_1 - i_3) = 0$$

(3.5.1) cioè

$$11i_1 - 5i_2 - 6i_3 = 12 \quad (3.6.1)$$

Per l'anello 2,

$$24i_2 + 4(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) = 0$$

(3.5.2) cioè

$$-5i_1 + 19i_2 - 2i_3 = 0 \quad (3.6.2)$$

Per l'anello 3,

$$4i_3 + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

Ma al nodo A, $i_0 = i_1 - i_2$, e quindi

$$4(i_1 - i_2) + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

cioè

$$-i_1 + i_2 + 2i_3 = 0 \quad (3.6.3)$$

In forma matriciale, le Equazioni da (3.6.1) a (3.6.3) diventano

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottengono i determinanti come segue

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 418 - 30 - 10 - 114 - 22 - 50 = 192$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 456 - 24 = 432$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 120 = 144$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \\ -1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 60 + 228 = 288$$

Le correnti di anello, con la regola di Cramer, risultano quindi

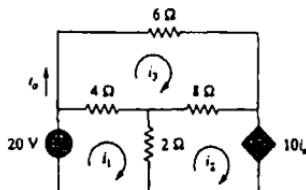
$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{432}{192} = 2.25 \text{ A}, \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{192} = 0.75 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{288}{192} = 1.5 \text{ A}$$

E in conclusione, $i_o = i_1 - i_2 = 1.5 \text{ A}$.

■ **Esercizio 3.8** Mediante l'analisi agli anelli, determinare i_o nel circuito di Figura 3.23.

Figura 3.23
Per l'Esercizio 3.8



Risposta: -5 A . ■

3.6 ANALISI AGLI ANELLI IN PRESENZA DI GENERATORI DI CORRENTE

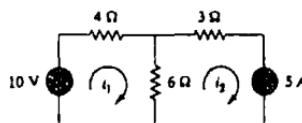
L'applicazione della analisi agli anelli a circuiti contenenti generatori di corrente (dipendenti o indipendenti), che può sembrare difficile a prima vista, risulta in realtà semplificata: la presenza dei generatori di corrente riduce il numero di equazioni e di correnti incognite. Si possono presentare i seguenti due casi.

CASO 1

Il generatore di corrente fa parte di un solo anello: si consideri per esempio il circuito di Figura 3.24. Si pone $i_2 = -5 \text{ A}$ e si scrivono le equazioni per gli altri anelli nella maniera consueta.

$$-10 + 4i_1 + 6(i_1 - i_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -2 \text{ A} \quad (3.17)$$

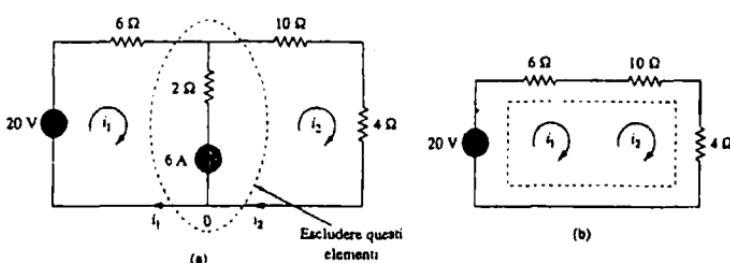
Figura 3.24
Circuito con un generatore di corrente.



CASO 2

Il generatore di corrente fa parte di due anelli: si consideri il circuito di Figura 3.25(a). Si ottiene allora un superanello, escludendo il generatore di corrente e gli eventuali elementi a esso collegati in serie, come mostrato nella Figura 3.25(b).

Figura 3.25
(a) Due anelli con un generatore di corrente in comune, (b) superanello ottenuto escludendo il generatore di corrente.



Si fa un superanello quando due anelli hanno un generatore di corrente dipendente o indipendente in comune.

Come si vede nella Figura 3.25(b), si considera il superanello costituito dalla periferia dei due anelli, e lo si tratta in maniera speciale. (Se il circuito ha due o più superanelli che si intersecano, essi vengono combinati in un unico superanello più grande). I superanelli vanno trattati in maniera speciale perché nella analisi agli anelli si applica la KVL, che richiede di conoscere l'espressione della tensione su ciascun ramo, ma non esiste alcun modo di esprimere la tensione di un generatore di corrente in termini della sua corrente. Un superanello deve soddisfare la legge delle tensioni, come qualsiasi altro anello. Applicando quindi la KVL al superanello di Figura 3.25(b) si ha

$$-20 + 6i_1 + 10i_2 + 4i_3 = 0$$

e riordinando

$$6i_1 + 14i_2 = 20 \quad (3.18)$$

Si applica ora la KCL a un nodo del ramo di intersezione dei due anelli. Applicando la KCL al nodo 0 nella Figura 3.25(a) si ottiene

$$i_2 = i_1 + 6 \quad (3.19)$$

Risolvendo le (3.18) e (3.19), si ha

$$i_1 = -3.2 \text{ A}, \quad i_2 = 2.8 \text{ A} \quad (3.20)$$

Si ricordi quindi quanto segue:

- Il generatore di corrente del superanello non può essere trascurato; esso fornisce una equazione di vincolo necessaria per risolvere rispetto alle correnti di anello.
- Un superanello non ha una corrente propria.
- La presenza di un superanello richiede l'applicazione della KVL e della KCL.

Esempio 3.9

Nel circuito di Figura 3.26, calcolare le correnti da i_1 a i_4 usando l'analisi agli anelli.

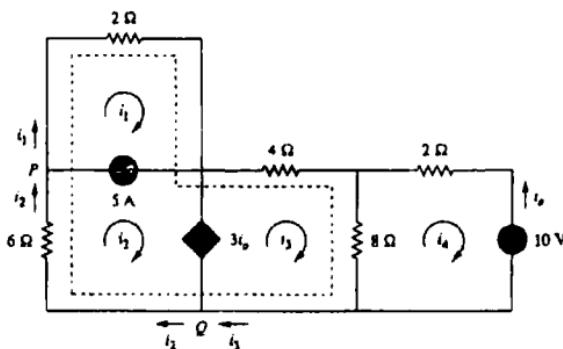


Figura 3.26
Per l'Esempio 3.9.

Soluzione: Gli anelli 1 e 2 formano un superanello, avendo un generatore di corrente indipendente in comune. Anche gli anelli 2 e 3 formano un superanello perché hanno un generatore di corrente dipendente in comune. I due superanelli si intersecano e formano un superanello più grande, come mostrato nella figura. Applicando la KVL al superanello più grande,

$$2i_1 + 4i_3 + 8(i_3 - i_4) + 6i_2 = 0$$

cioè

$$i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 \quad (3.7.1)$$

Per il generatore indipendente di corrente, si applica la KCL al nodo P :

$$i_2 = i_1 + 5 \quad (3.7.2)$$

Per il generatore dipendente, si applica la KCL al nodo Q :

$$i_2 = i_3 + 3i_4$$

Ma $i_2 = -i_4$, da cui

$$i_2 = i_3 - 3i_4 \quad (3.7.3)$$

Applicando la KVL all'anello 4,

$$2i_4 - 8(i_2 - i_1) + 10 = 0$$

cioè

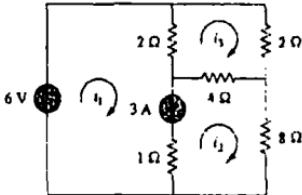
$$5i_4 - 4i_3 = -5 \quad (3.7.4)$$

Le Equazioni da (3.7.1) a (3.7.4) risolte forniscono

$$i_1 = -7.5 \text{ A}, \quad i_2 = -2.5 \text{ A}, \quad i_3 = 3.93 \text{ A}, \quad i_4 = 2.143 \text{ A}$$

■ Esercizio 3.9 Utilizzando l'analisi agli anelli, determinare i_1 , i_2 e i_3 nella Figura 3.27.

Figura 3.27
Per l'Esercizio 3.9.



Risposta: $i_1 = 3.474 \text{ A}$, $i_2 = 0.4737 \text{ A}$, $i_3 = 1.1052 \text{ A}$

3.7 ANALISI AGLI ANELLI MODIFICATA

Se sono presenti generatori di corrente, l'analisi agli anelli può essere anche eseguita, senza dover identificare i superanelli, utilizzando il metodo detto della *analisi agli anelli modificata*, nel quale si scrive un sistema di equazioni in cui compaiono come incognite, oltre alle correnti di anello, anche le tensioni sui generatori di corrente.

Si assegnano le correnti di anello agli n anelli.

Si introducono come ulteriori incognite (in aggiunta alle n correnti di anello), le tensioni ai capi dei generatori di corrente.

Si scrivono le KVL relative agli n anelli; a queste si aggiunge un numero di equazioni pari al numero dei generatori di corrente: si hanno i due casi descritti nel Paragrafo 3.6 e si farà riferimento alla Figura 3.24 e Figura 3.25.

CASO 1

Se il generatore di corrente fa parte di un solo anello, si pone la corrente di anello pari alla corrente del generatore. Per esempio per il generatore da 5 A della Figura 3.24, si ha

$$i_2 = -5 \text{ A}$$

CASO 2

Se il generatore di corrente fa parte di due anelli, si pone la somma algebrica delle correnti dei due anelli pari alla corrente del generatore. Per esempio per il generatore da 6 A della Figura 3.25, si ha

$$i_2 - i_1 = 6 \text{ A}$$

Esempio 3.10

Calcolare le correnti da i_1 a i_4 nel circuito di Figura 3.26, applicando l'analisi agli anelli modificata.

Soluzione: Si aggiunge alle due incognite v_1 e v_2 , la corrente i_r del generatore di tensione. Il circuito diventa quello di Figura 3.28.

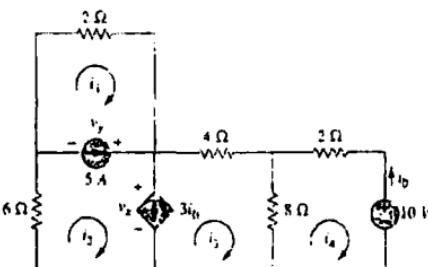


Figura 3.28
Per l'Esempio 3.10.

Si aggiungono alle quattro incognite i_1 , i_2 , i_3 e i_4 , le tensioni v_1 e v_2 , ai capi dei generatori di corrente. Si scrivono le quattro KVL relative ai quattro anelli di Figura 3.28.

$$2i_1 + v_r = 0 \quad (3.10.1)$$

$$6i_2 - v_1 + v_r = 0 \quad (3.10.2)$$

$$4i_3 + 8(i_3 - i_4) - v_r = 0 \quad (3.10.3)$$

$$8(i_4 - i_3) + 2i_4 + 10 = 0 \quad (3.10.4)$$

A queste equazioni si aggiungono le due relazioni tra le correnti dei generatori di corrente e le rispettive correnti di anello, cioè

$$i_2 - i_1 = 5 \quad (3.10.5)$$

$$i_2 - i_3 = 3i_0 = 3(-i_4) \quad (3.10.6)$$

Si ricavano v_1 dalla (3.10.1) e v_2 dalla (3.10.3) e si sostituiscono nella (3.10.2)

$$6i_2 - (-2i_1) + (12i_3 - 8i_4) = 0 \quad (3.10.7)$$

Si riscrivono rispettivamente le equazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10.8)$$

Risolvendo con la regola di Cramer il sistema (3.10.8) si ottengono gli stessi risultati dell'Esempio 3.9, cioè

$$v_1 = +26.667 \text{ V}, \quad v_2 = +6.667 \text{ V}, \quad v_3 = +173.333 \text{ V} \quad \text{e} \quad v_4 = -46.667 \text{ V}$$

Esercizio 3.10 Risolvere il circuito di Figura 3.25 applicando l'analisi agli anelli modificata, per calcolare i_1 , i_2 e i_3 .

Risposta: $i_1 = 3.474 \text{ A}$, $i_2 = 0.4737 \text{ A}$, $i_3 = 1.1052 \text{ A}$.

3.8 SCRITTURA DIRETTA DELLE EQUAZIONI DELL'ANALISI NODALE E DELL'ANALISI AGLI ANELLI

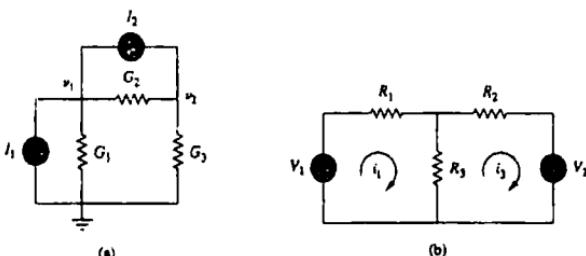
In questo paragrafo viene presentata una procedura abbreviata per scrivere direttamente le equazioni della analisi nodale e quelle della analisi agli anelli. Quando tutti i generatori del circuito sono generatori indipendenti di corrente, non è necessario scrivere la KCL a ciascun nodo per ottenere le equazioni nelle tensioni di nodo come si è fatto nel Paragrafo 3.2. Le stesse equazioni possono essere ottenute direttamente, per

ispezione, dal circuito. Per esempio, si riprenda in considerazione il circuito in Figura 3.2, per comodità ripetuto nella Figura 3.29(a). Il circuito ha due nodi oltre a quello di riferimento, e le sue equazioni nodali sono già state ricavate al Paragrafo 3.2:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Figura 3.29

(a) Il circuito di Figura 3.2,
(b) Il circuito di Figura 3.19.



Si osservi ora che ciascuno dei termini diagonali è pari alla somma delle conduttanze collegate direttamente al nodo 1 o 2, mentre i termini fuori della diagonale sono gli opposti delle conduttanze connesse tra i nodi. Inoltre, ciascuno dei termini noti della (3.21) è la somma algebrica delle correnti dei generatori di corrente entranti nel nodo corrispondente.

In generale, se un circuito con generatori di corrente indipendenti ha N nodi oltre a quello di riferimento, le equazioni nelle tensioni di nodo possono essere scritte in termini di conduttanze come

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

o semplicemente

$$Gv = i \quad (3.23)$$

dove

G_{kk} = Somma delle conduttanze collegate al nodo k

$G_{kj} = G_{jk}$ = Somma cambiata di segno delle conduttanze tra i nodi k e j , $k \neq j$

v_k = Tensione incognita del nodo k

i_k = Somma delle correnti dei generatori di corrente collegati al nodo k , con le correnti entranti considerate positive

G è detta *matrice delle conduttanze*, v è il vettore delle uscite e i è il vettore degli ingressi. La (3.22) può essere risolta per ottenere le tensioni di nodo incognite. Si ricordi che tutto ciò vale per circuiti contenenti solo generatori di corrente indipendenti e resistori lineari. In maniera simile, è possibile scrivere direttamente le equazioni nelle correnti di anello per un circuito lineare con soli generatori indipendenti di tensione. Si consideri il circuito di Figura 3.17, riprodotto per comodità nella Figura 3.29(b). Esso ha due anelli, e le sue equazioni agli anelli sono state ricavate nel paragrafo 3.4

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Si vede come ciascun termine della diagonale è la somma delle resistenze nel rispettivo anello, mentre ciascuno dei termini fuori diagonale è pari al valore cambiato di segno della resistenza in comune tra gli anelli 1 e 2. Ciascuno dei termini noti della

(3.24) è la somma algebrica, eseguita in senso orario, di tutti i generatori di tensione indipendenti nel corrispondente anello. In generale, se il circuito ha N anelli, le equazioni nelle correnti di anello possono essere rappresentate in termini di resistenze nella forma

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

o semplicemente

$$R\mathbf{i} = \mathbf{v} \quad (3.26)$$

dove

R_{kk} = Somma delle resistenze nell'anello k

$R_{kj} = R_{jk}$ = Somma cambiata di segno delle resistenze comuni agli anelli k e j , $k \neq j$

i_k = Corrente incognita dell'anello k , in senso orario

v_k = Somma, in senso orario, dei generatori indipendenti di tensione nell'anello k

R è chiamata *matrice delle resistenze*, \mathbf{i} è il vettore delle uscite e \mathbf{v} è il vettore degli ingressi. Risolvendo la (3.25) si ottengono le correnti di anello incognite.

Esempio 3.11

Scrivere direttamente le equazioni ai nodi in forma matriciale per il circuito della Figura 3.30

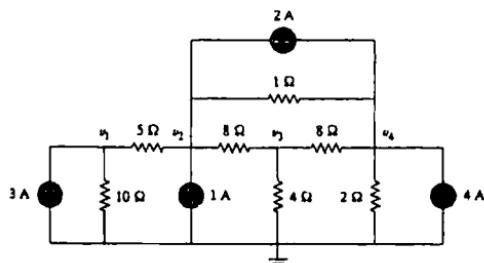


Figura 3.30
Per l'Esempio 3.11.

Soluzione: Il circuito di Figura 3.30 ha quattro nodi oltre a quello di riferimento, e servono quindi quattro equazioni nodali. La matrice delle conduttanze G sarà di dimensione 4 per 4. I termini diagonali di G , espressi in siemens, valgono

$$G_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.3, \quad G_{22} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1} = 1.325$$

$$G_{33} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 0.5, \quad G_{44} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.625$$

I termini fuori diagonale sono invece

$$G_{12} = -\frac{1}{5} = -0.2, \quad G_{13} = G_{14} = 0$$

$$G_{21} = -0.2, \quad G_{23} = -\frac{1}{8} = -0.125, \quad G_{24} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$G_{31} = 0, \quad G_{32} = -0.125, \quad G_{34} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

$$G_{41} = 0, \quad G_{42} = -1, \quad G_{43} = -0.125$$

Il vettore delle correnti di ingresso i ha le seguenti componenti, in ampere:

$$i_1 = 3, \quad i_2 = -1 - 2 = -3, \quad i_3 = 0, \quad i_4 = 2 + 4 = 6$$

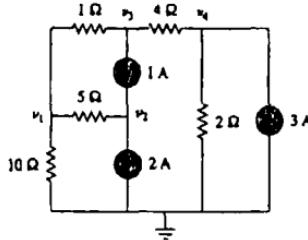
Le equazioni nodali sono quindi:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1.325 & -0.125 & -1 \\ 0 & -0.125 & 0.5 & -0.125 \\ 0 & -1 & -0.125 & 1.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

e possono essere risolte con MATLAB, ottenendo così le tensioni di nodo v_1, v_2, v_3 e v_4 .

Esercizio 3.11 Scrivere in modo diretto le equazioni nodali per il circuito di Figura 3.31.

Figura 3.31
Per l'Esercizio 3.11.

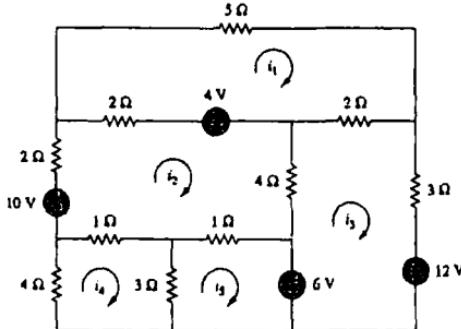


Risposta: $\begin{bmatrix} 1.3 & -0.2 & -1 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Esempio 3.12

Scrivere in maniera diretta le equazioni agli anelli per il circuito di Figura 3.32.

Figura 3.32
Per l'Esempio 3.12.



Soluzione: Ci sono cinque anelli: la matrice delle resistenze sarà allora di dimensioni 5 per 5. I termini diagonali, espressi in ohm, valgono:

$$R_{11} = 5 + 2 + 2 = 9, \quad R_{22} = 2 + 4 + 1 + 1 + 2 = 10$$

$$R_{33} = 2 + 3 + 4 = 9, \quad R_{44} = 1 + 3 + 4 = 8, \quad R_{55} = 1 + 3 = 4$$

I termini fuori diagonale valgono:

$$R_{12} = -2, \quad R_{13} = -2, \quad R_{14} = 0 = R_{15}$$

$$R_{21} = -2, \quad R_{23} = -4, \quad R_{24} = -1, \quad R_{25} = -1$$

$$R_{31} = -2, \quad R_{32} = -4, \quad R_{34} = 0 = R_{35}$$

$$R_{41} = 0, \quad R_{42} = -1, \quad R_{43} = 0, \quad R_{45} = -3$$

$$R_{51} = 0, \quad R_{52} = -1, \quad R_{53} = 0, \quad R_{54} = -3$$

Il vettore delle tensioni di ingresso v ha le seguenti componenti, in volt:

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 10 - 4 = 6 \quad v_3 = -12 + 6 = -6, \quad v_4 = 0, \quad v_5 = -6$$

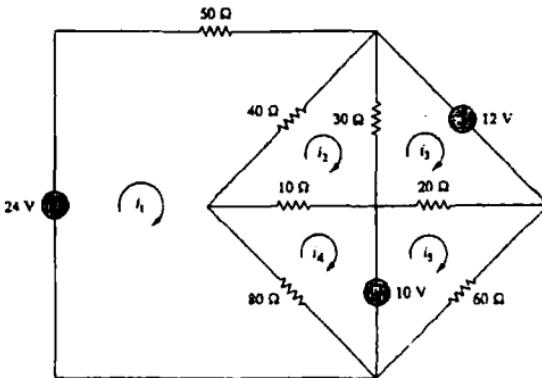
Le equazioni nelle correnti di anello sono quindi:

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Da esse si possono ottenere con MATLAB le correnti di anello i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 .

Esercizio 3.12: Ricavare in maniera diretta le equazioni nelle correnti di anello per il circuito di Figura 3.33.

Figura 3.33
Per l'Esercizio 3.12



Risposta:

$$\begin{bmatrix} 170 & -40 & 0 & -80 & 0 \\ -40 & 80 & -30 & -10 & 0 \\ 0 & -30 & 50 & 0 & -20 \\ -80 & -10 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ -12 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

■

3.9 CONFRONTO FRA ANALISI NODALE E ANALISI AGLI ANELLI

L'analisi nodale e quella agli anelli rappresentano metodi sistematici per l'analisi di reti anche complesse. È lecito chiedersi ora, data una rete da analizzare, quale dei due sia il migliore o il più efficiente. La scelta del migliore fra i due metodi è legata a due fattori. Il primo è la natura della rete in esame. Reti contenenti molti elementi collegati in serie, generatori di tensione o superanelli sono più adatte per la analisi agli anelli, mentre le reti con molti elementi in parallelo, generatori di corrente o supermeridi sono più adatte alla analisi nodale. Inoltre, un circuito che ha meno nodi che anelli si analizza più facilmente con l'analisi nodale, mentre un circuito con meno anelli che nodi si analizza più facilmente con l'analisi agli anelli. Il fattore chiave risulta quindi la scelta del metodo che porta a un numero minore di equazioni. Il secondo fattore è legato alla informazione richiesta dal problema che si sta risolvendo. Se sono richieste le tensioni di nodo può essere più conveniente applicare l'analisi nodale, mentre se servono le correnti di alcuni rami o degli anelli è meglio usare l'analisi agli anelli. È comunque utile avere familiarità con entrambi i metodi di analisi per almeno due ragioni. Innanzitutto, un metodo può essere usato per controllare i risultati ottenuti con l'altro, se entrambi risultano applicabili.

Inoltre, poiché ciascuno dei due metodi ha dei limiti di applicabilità, può capitare che uno solo dei due sia adatto a un particolare problema. Per esempio, l'analisi agli anelli è l'unico metodo utilizzabile per analizzare circuiti con transistori, come si vedrà nel Paragrafo 3.9. Al contrario, l'analisi agli anelli risulta di non facile applicabilità nei circuiti con amplificatori operazionali, come si vedrà nel Capitolo 5, perché non esiste nessun modo semplice per esprimere la tensione di uscita dell'operazionale in termini di correnti. Per reti non planari, l'analisi nodale è l'unica scelta possibile, perché l'analisi agli anelli si applica solo a reti planari. Inoltre, l'analisi nodale si dimostra più adatta nella risoluzione al computer di circuiti, perché di codifica più agevole. Grazie a essa è possibile affrontare l'analisi di circuiti estremamente complessi, impossibili da analizzare manualmente. Il prossimo paragrafo introduce all'uso di uno strumento software per il calcolo automatico di circuiti, basato sulla analisi nodale.

3.10 ANALISI DEI CIRCUITI CON PSPICE

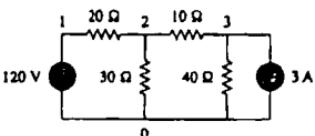
PSpice è un programma per l'analisi di circuiti che verrà illustrato gradualmente durante il corso di questo libro. In questo paragrafo si vedrà come è possibile utilizzare *PSpice for Windows* per l'analisi dei circuiti in regime stazionario visti finora. L'Appendice B presenta una introduzione completa all'uso di *PSpice for Windows*.

Si consiglia la lettura dei Paragrafi da B.1 a B.3 prima di proseguire nella lettura del presente capitolo. Si noti inoltre che *PSpice* risulta utile per il calcolo di tensioni e correnti di ramo solo quando sono noti i valori numerici di tutti i componenti del circuito.

Esempio 3.13

Utilizzare *PSpice* per determinare le tensioni di nodo del circuito in Figura 3.34.

Figura 3.34
Per l'Esempio 3.13

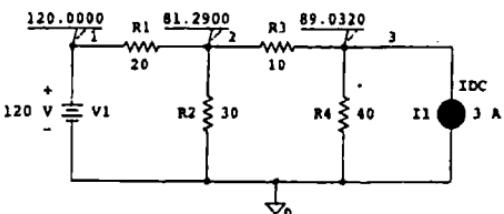


Soluzione: Il primo passo consiste nel disegnare il circuito dato con Schematics. Se si seguono le istruzioni fornite ai Paragrafi B.2 e B.3, si produrrà lo schematico di Figura 3.35. Essendo questa una analisi in regime stazionario (DC), si usano il generatore di tensione VDC e il generatore di corrente IDC. Gli pseudocomponenti VIEWPOINT sono stati inseriti per visualizzare i valori delle tensioni di nodo richieste. Una volta disegnato il circuito e salvato il disegno nel file exam310.sch, si esegue la simulazione con *PSpice* selezionando Analyse/Stimulate. I risultati vengono visualizzati nei VIEWPOINT, e anche memorizzati nel file di uscita exam310.out. Nel file di uscita si trovano, fra l'altro, le seguenti linee:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	120.0000	(2)	81.2900	(3)	89.0320

dalle quali si apprende che $V_1 = 120 \text{ V}$, $V_2 = 81.29 \text{ V}$, $V_3 = 89.032 \text{ V}$.

Figura 3.35
Per l'Esempio 3.13; schematico
del circuito in Figura 3.34



■ Esercizio 3.13 Per il circuito di Figura 3.36, usare PSpice per determinare le tensioni di nodo.

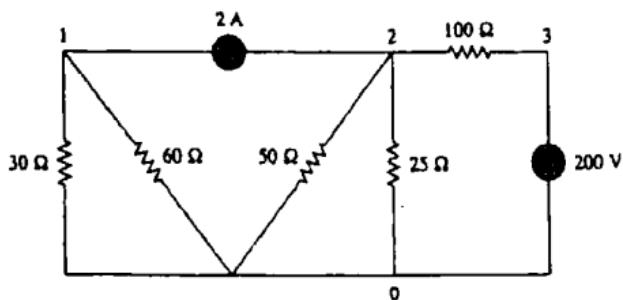


Figura 3.36 Per l'Esercizio 3.13.

Risposta $V_1 = -40 \text{ V}$, $V_2 = 57.14 \text{ V}$, $V_3 = 200 \text{ V}$

Esempio 3.14

Determinare le correnti i_1 , i_2 e i_3 nel circuito di Figura 3.37.

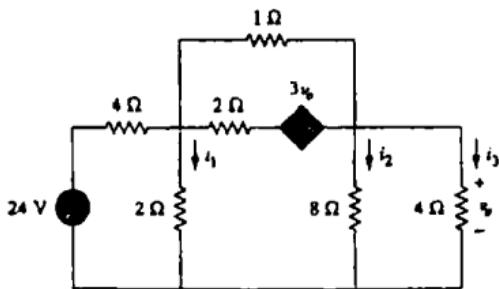


Figura 3.37 Per l'Esempio 3.14.

Soluzione: Lo schematico è mostrato in Figura 3.35. (Lo schematico di Figura 3.38 contiene anche i valori delle uscite, ed è quindi lo schematico che si vedrà sullo schermo *dopo la simulazione*.) Si noti che il generatore di tensione controllato in tensione E1 della Figura 3.38 è collegato in modo che il suo ingresso sia rappresentato dalla tensione sul resistore da 4Ω ; il guadagno è posto uguale a 3. Per poter visualizzare le correnti richieste, sono stati inseriti degli pseudocomponenti IPROBE nei rami opportuni. Lo schematico viene salvato col nome exam311.sch, e successivamente simulato selezionando Analysis/Simulate. I risultati vengono visualizzati negli IPROBE, come mostrato in Figura 3.35, e salvati nel file di uscita exam311.out. Dal file di uscita, o dagli IPROBE, si ottiene $i_1 = i_2 = 1.333 \text{ A}$ e $i_3 = 2.667 \text{ A}$.

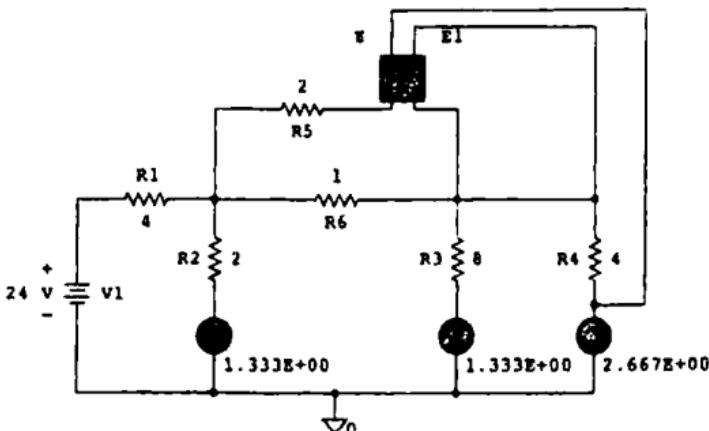
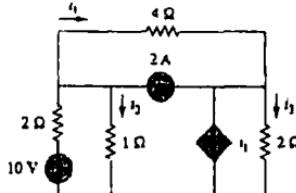


Figura 3.38 Schematico del circuito in Figura 3.37

■ **Esercizio 3.14** Usare PSpice per determinare le correnti i_1 , i_2 e i_3 nel circuito di Figura 3.39.

Figura 3.39
Per l'Esercizio 3.14

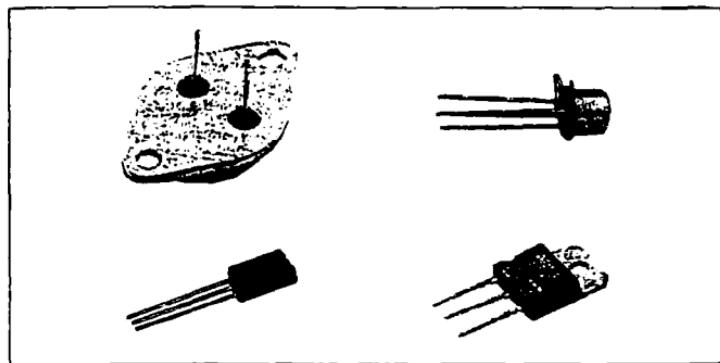


Risposta: $i_1 = -0.4286 \text{ A}$, $i_2 = 2.286 \text{ A}$, $i_3 = 2 \text{ A}$.

3.11 APPLICAZIONE: CIRCUITI CON TRANSISTORI IN REGIME STAZIONARIO

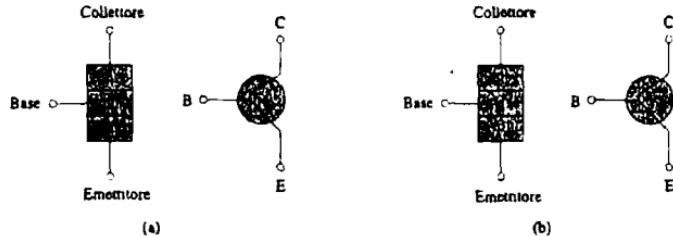
Tutti noi abbiamo esperienza quotidiana di apparecchiature elettroniche; del tutto consueto è pure diventato l'uso di un personal computer. Il componente che sta alla base dei circuiti integrati che costituiscono tutte queste apparecchiature e computer è il dispositivo attivo a tre terminali chiamato *transistor*. La conoscenza dei transistori è fondamentale per un ingegnere che voglia progettare circuiti elettronici. La Figura 3.40 mostra alcuni tipi di transistori disponibili in commercio. Esistono due categorie di transistori: i *transistori bipolarì a giunzione* (BJT, Bipolar Junction Transistor) e i *transistori a effetto di campo* (FET, Field Effect Transistor). Verranno qui considerati solo i BJT, che sono comparsi prima dei FET e sono in uso tuttora. Verranno successivamente illustrati i MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor). Ci si propone di presentare il BJT con un dettaglio sufficiente a permettere l'applicazione delle tecniche di analisi sviluppate in questo capitolo a circuiti in regime stazionario contenenti transistori.

Figura 3.40
Vari tipi di transistori (Courtesy of Tech America)



Esistono due tipi di BJT: *npn* e *pnp*, i cui simboli sono mostrati nella Figura 3.41.

Figura 3.41
I due tipi di BJT e i loro simboli:
(a) *npn*, (b) *pnp*.



Entrambi hanno tre terminali, chiamati emettitore (E), base (B) e collettore (C). Per il transistor *npn*, le correnti e le tensioni vengono prese come mostrato in Figura 3.39. Applicando la KCL alla Figura 3.42(a), si ottiene

$$I_E = I_B + I_C \quad (3.27)$$

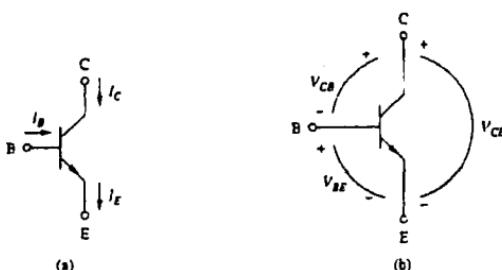


Figura 3.42
Variabili di un transistor *n-p-n*:
(a) correnti, (b) tensioni.

in cui I_E , I_C e I_B sono le correnti di emettitore, collettore e base rispettivamente. In maniera analoga, applicando la KVL alla Figura 3.42(b) si ottiene

$$V_{CE} + V_{EB} + V_{BC} = 0 \quad (3.28)$$

dove V_{CE} , V_{EB} e V_{BC} sono le tensioni collettore-emettitore, emettitore-base e base-collettore. Il BJT può operare in una delle tre seguenti condizioni (o regioni): attiva, interdizione, saturazione. Quando opera nella regione attiva, si ha solitamente $V_{BE} \approx 0.7$ V,

$$I_C = \alpha I_E \quad (3.29)$$

in cui α è detto *guadagno di corrente a base comune*. Nella (3.29), α rappresenta la frazione di elettroni iniettati dall'emettitore che raggiungono il collettore. Inoltre,

$$I_C = \beta I_B \quad (3.30)$$

in cui β è noto come *guadagno di corrente a emettitore comune*. I coefficienti α e β sono caratteristici di ogni particolare transistor e rimangono costanti per quel transistor. Valori tipici di α sono compresi tra 0.98 e 0.999, mentre β assume valori compresi tra 50 e 1000. Dalle Equazioni da (3.27) a (3.30) risulta evidente che

$$I_E = (1 + \beta) I_B \quad (3.31)$$

e

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (3.32)$$

Le ultime due equazioni mostrano che, nella regione attiva, un modello valido per il BJT è costituito da un generatore di corrente dipendente controllato in corrente. Nella analisi dei circuiti elettronici, perciò, il transistor *n-p-n* della Figura 3.43(a) può essere

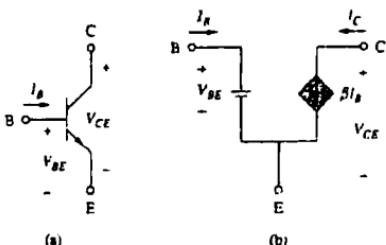


Figura 3.43
(a) Transistor *n-p-n*.
(b) modello equivalente in regime stazionario.

sostituito dal modello equivalente, valido in regime stazionario, della Figura 3.43(b). Poiché β nella (3.32) è un numero relativamente grande, una piccola corrente di base

controlla una corrente elevata nel circuito di uscita. Il transistore bipolare può quindi essere usato come un amplificatore, ed è caratterizzato da guadagno sia in corrente che in tensione. Amplificatori a transistori possono essere utilizzati per fornire potenze considerevoli a trasduttori quali gli altoparlanti o i motori di controllo⁶.

Si noti, negli esempi che seguono, come non sia possibile applicare l'analisi nodale direttamente ai circuiti con transistori, a causa della differenza di potenziale esistente fra i terminali del transistore stesso. L'analisi nodale si può applicare solo dopo che il transistore è stato sostituito con il modello equivalente.

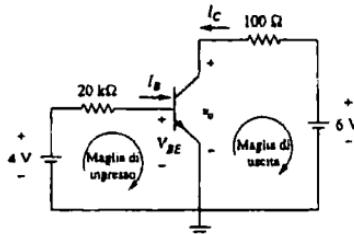
Esempio 3.15

Determinare I_B , I_C e v_o nel circuito con transistore di Figura 3.44. Supponere che il transistore funzioni nella regione attiva, e che $\beta = 50$.

Soluzione: Per la maglia di ingresso, la KVL fornisce

$$-4 + I_B(20 \times 10^3) + V_{BE} = 0$$

Figura 3.44
Per l'Esempio 3.15.



Poiché $V_{BE} = 0.7$ V nella regione attiva,

$$I_B = \frac{4 - 0.7}{20 \times 10^3} = 165 \mu\text{A}$$

Ma

$$I_C = \beta I_B = 50 \times 165 \mu\text{A} = 8.25 \text{ mA}$$

La KVL per la maglia di uscita fornisce

$$-v_o - 100 I_C + 6 = 0$$

cioè

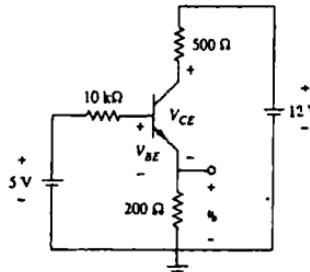
$$v_o = 6 - 100 I_C = 6 - 0.825 = 5.175 \text{ V}$$

Si noti che, in questo caso, $v_o = V_{CE}$.

■ Esercizio 3.15

Nel circuito con transistore di Figura 3.45, sia $\beta = 100$ e $V_{BE} = 0.7$ V.
Determinare v_o e V_{CE} .

Figura 3.45
Per l'Esercizio 3.15



Risposta 2.876 V, 1.984 V.

⁶ I transistori costituiscono infatti il motivo principale per cui si studiano i generatori dipendenti.

Esempio 3.16

Nel circuito a BJT di Figura 3.46, $\beta = 150$ e $V_{BE} = 0.7$ V. Calcolare v_o .

Soluzione:

1. *Dare una definizione precisa del problema.*

Il circuito è definito in modo chiaro e il problema è ben specificato.

2. *Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.*

Si deve determinare la tensione di uscita del circuito in Figura 3.46. Nel circuito c'è un transistor ideale con $\beta = 150$ e $V_{BE} = 0.7$ V. Il problema può essere risolto in due modi: con l'analisi diretta del circuito di Figura 3.43, oppure sostituendo il transistor con il suo circuito equivalente.

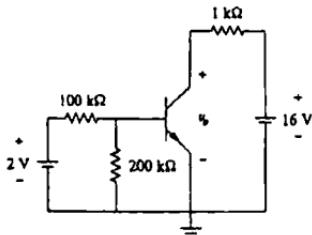


Figura 3.46
Per l'Esempio 3.16.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*

Il problema può essere risolto in due modi: con l'analisi agli anelli, oppure con l'analisi nodale sostituendo il transistor con il suo circuito equivalente. In questo modo si usano entrambi i metodi per verificare il risultato. Si potrebbe poi prendere il circuito equivalente e risolverlo con PSpice, come ulteriore verifica del risultato.

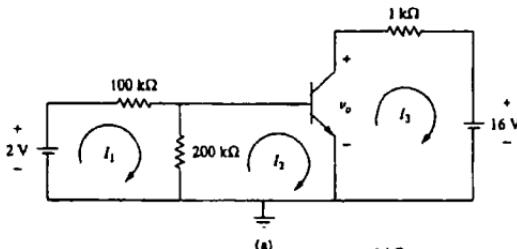
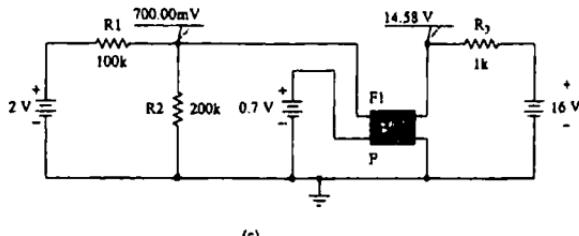
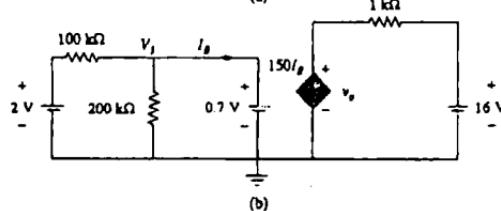


Figura 3.47
Risoluzione del problema dell'Esempio 3.16: a) metodo 1,
b) metodo 2, c) con SPICE.



4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

METODO 1

Applicando la KVL alla maglia 1 della Figura 3.44 (a)

$$-2 + 100k \cdot I_1 + 200k \cdot (I_1 - I_2) = 0 \quad \text{oppure} \quad 3 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 = 2 \cdot 10^{-3} \quad (3.13.1)$$

Per la maglia 2,

$$200k \cdot (I_2 - I_1) + V_{BE} = 0 \quad \text{cioè} \quad -2 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2 = -0.7 \cdot 10^{-3} \quad (3.13.2)$$

Si ricava un sistema di due equazioni in due incognite, per cui si possono calcolare I_1 e I_2 .

Dalla (3.13.1) e (3.13.2) si ha:

$$I_1 = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{(0.7 + 3.6) \cdot 10^{-3}}{2} = 9.5 \mu\text{A}$$

Poiché $I_3 = -150 \cdot I_2 = -1.425 \text{ mA}$ si determina v_0 dalla maglia 3:

$$-v_0 + 1k \cdot I_3 + 16 = 0 \quad \text{cioè} \quad v_0 = -1.425 + 16 = 14.575 \text{ V}$$

METODO 2Sostituendo il transistore con il suo modello equivalente, si ottiene il circuito mostrato in Figura 3.44 (b). Si può calcolare v_0 usando l'analisi nodale. Applicando la KCL al nodo relativo alla tensione di nodo $V_1 = 0.7 \text{ V}$,

$$\frac{(0.7 - 2)}{100k} + \frac{0.7}{200k} + I_B = 0 \quad \text{cioè} \quad I_B = 9.5 \mu\text{A}$$

Si applica la KCL al nodo relativo alla tensione di nodo v_0 , che si trova ai capi del generatore dipendente,

$$150 \cdot I_B + \frac{(v_0 - 16)}{1k} = 0 \quad \text{cioè} \quad v_0 = 16 - (150 \cdot 10^3 \cdot 9.5 \cdot 10^{-6}) = 14.575 \text{ V}$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

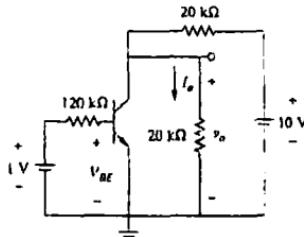
La soluzione è stata già verificata, ma si può usare Pspice come ulteriore verifica. La Figura 3.44 (c) mostra i risultati dell'analisi con Pspice.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

La soluzione è stata trovata applicando diversi metodi di risoluzione, per cui è sicuramente soddisfacente.

Esercizio 3.16 Il circuito con transistor di Figura 3.48 ha $\beta = 80$ e $V_{BE} = 0.7 \text{ V}$. Calcolare v_o e I_B .

Figura 3.48
Per l'Esercizio 3.16.



Risposta: +3 V, +150 μA.

3.12 IL DIODO

Il diodo è un dispositivo fornito di due soli terminali che ha la proprietà di lasciare passare la corrente in una sola direzione. I due terminali sono denominati anodo e catodo e il simbolo è mostrato in Figura 3.49.

Applicando una tensione positiva all'anodo rispetto al catodo ($V_{AK} > 0$), si ha un passaggio di corrente I_A che cresce molto rapidamente all'aumentare di questa tensione.

ne: in questo caso si dice che il diodo è polarizzato direttamente. Se invece si applica tensione positiva al catodo rispetto all'anodo la corrente inversa che scorre nel diodo è trascurabile (dell'ordine dei nanoampere). In questo caso si dice che il diodo è polarizzato inversamente.

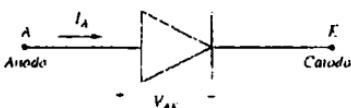


Figura 3.49
Simbolo del diodo

La relazione tra la tensione e la corrente di un diodo è la seguente:

$$I_A = I_0 \left(e^{\frac{V_{AK}}{kT}} - 1 \right) = I_0 \left(e^{\frac{-V_{AK}}{kT}} - 1 \right) \quad (3.33)$$

dove V_{AK} è la tensione fra anodo e catodo, k è una costante della tensione termica (pari a circa 25 mV quando $T = 300$ K), I_0 è la corrente inversa, q è la carica dell'elettrone, K è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta.

Dalla equazione 3.39 si può affermare che il diodo è un componente non lineare.

Se la tensione V_{AK} è negativa (polarizzazione inversa), la corrente è circa I_0 ed è molto piccola. Se invece la tensione V_{AK} è positiva (polarizzazione diretta), la corrente aumenta esponenzialmente: ma la conduzione per il diodo inizia solo dopo che $V_{AK} > V_T$ (tensione di soglia che di solito vale circa 0,65 V).

La caratteristica tensione-corrente reale di uscita di un diodo è la rappresentazione grafica della formula (1), ed è mostrata in Figura 3.50.

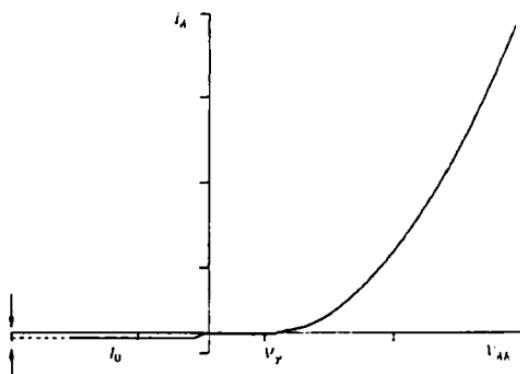


Figura 3.50
Caratteristica reale del diodo

Uno studio molto semplificato del diodo porta ad approssimarlo come in Figura 3.51, cioè lo si considera come un circuito aperto ($I = 0$) per tensioni $V_{AK} < 0$, e come un corto circuito per tensioni $V_{AK} = 0$.

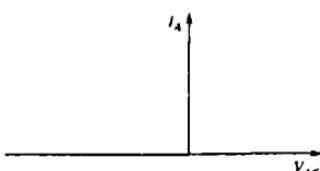
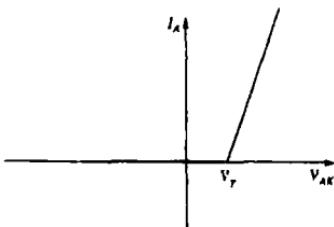


Figura 3.51
Caratteristica ideale del diodo

Per lo studio in regime stazionario del diodo, non è semplice usare la caratteristica descritta dalla (1). Se non è richiesta una grande precisione, si linearizza a tratti la caratteristica non lineare della Figura 3.50, come mostrato nella Figura 3.52.

Figura 3.52
Caratteristica lineare "a tratti"



Si introduce il concetto di conduttanza del diodo g_D , ma solo nella zona di conduzione del diodo (cioè nel primo quadrante della caratteristica I_A - V_{AK}). La conduttanza g_D corrisponde alla pendenza della retta inclinata.

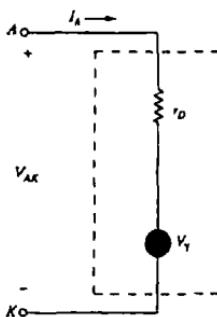
In realtà tale pendenza non è costante, ma dipende dai valori di tensione e corrente.
Il valore di g_D viene quindi scelto in base al punto di funzionamento prescelto e dipende dalla corrente costante di funzionamento I_D^* e dalla tensione termica V_T :

$$g_D = \frac{I_D^*}{V_T} \quad (*) \quad (3.34)$$

Dalla caratteristica di Figura 3 si deduce che il diodo si comporti come un circuito aperto ($I_0 \approx 0$), quando la tensione V_{AK} è inferiore alla tensione V_T .

Mentre quando $V_{AK} = V_T$ il diodo può essere sostituito da un circuito formato da una batteria di valore V_T in serie a un resistore $r_D = 1/g_D$: questo rappresenta il circuito equivalente di un diodo in regime stazionario ed è mostrato in Figura 3.53.

Figura 3.53
Circuito equivalente del diodo in regime stazionario



Si rimanda a testi universitari di elettronica analogica per approfondimenti sui diodi.

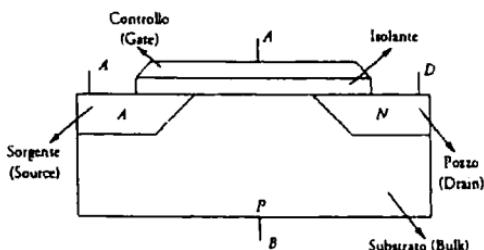
3.13 IL MOSFET

Un tipo di transistor molto usato in particolare nei circuiti integrati è il MOSFET (Transistor ad Effetto di Campo con struttura Metallo-Ossido-Semiconduttore). Esso viene utilizzato nei circuiti logici moderni, e nell'elettronica di potenza, anche se per potenze limitate.

Vi sono due tipi di Mosfet in base al tipo di funzionamento: il Mosfet a svuotamento e il Mosfet ad arricchimento.

La sua struttura è mostrata in Figura 3.54 (Mosfet ad arricchimento canale n): su una piastra di silicio debolmente drogata P chiamata substrato (bulk), vengono formate due zone di tipo N chiamate sorgente (source) e pozzo (drain); sopra queste due zone viene inserito un sottile strato di isolante (biossido di silicio SiO_2), ricoperto successivamente da uno strato conduttore, che costituisce l'elettrodo di comando (gate).

Figura 3.54
Struttura di un Mosfet a canale n.



Nei Mosfet a svuotamento la corrente tra *pozzo* e *sorgente* è massima se la tensione di gate vale zero; tale corrente diminuisce se si applica tensione al gate (di polarità opportuna). Nei Mosfet ad arricchimento la corrente tra *pozzo* e *sorgente* è nulla se la tensione di gate vale zero e cresce all'aumentare della tensione di gate.

Il principio di funzionamento del Mosfet ad arricchimento è semplice: applicando tensione V_{GS} all'elettrodo di comando si forma un campo elettrico tra la *sorgente* e il *pozzo*: se tale tensione supera il valore di soglia V_{Th} si forma il cosiddetto canale, cioè si ha la conduzione tra *sorgente* e *pozzo*.

Il funzionamento è quindi simile al Transistor bipolare ad eccezione del fatto che il Mosfet è comandato da una di tensione, mentre il Transistor (B/T), da una corrente.

Così come il B/T può essere di due tipi (*npn* e *pnp*), anche il Mosfet può essere a canale *p* e a canale *n*: cambierà ovviamente il segno della tensione da applicare per iniziare a condurre. I simboli dei due tipi di Mosfet ad arricchimento sono mostrati in Figura 3.55.



Figura 3.55
Simboli di Mosfet a canale n e p.

Passando ad un'analisi quantitativa del Mosfet ad arricchimento a canale *n*, si determina come varia la corrente del *pozzo* (I_{DS}), al variare delle tensioni applicate.

Si hanno tre regioni di funzionamento a seconda dei valori delle tensioni V_{DS} e V_{GS} :

Zona di interdizione: quando $V_{GS} < V_{Th}$, per ogni valore di V_{DS} si ha $I_{DS} = 0$.

Zona resistiva: quando $V_{GS} > V_{Th}$ e $V_{DS} < (V_{GS} - V_{Th})$, si ha

$$I_{DS} = G_n [2(V_{GS} - V_{Th})V_{DS} - V_{DS}^2] \quad (3.35)$$

dove G_n è il guadagno che dipende dalle caratteristiche geometriche del Mosfet e dal materiale semiconduttore utilizzato.

Zona di saturazione: quando $V_{GS} > V_{Th}$ e $V_{DS} > (V_{GS} - V_{Th})$, si ha

$$I_{DS} = G_n (V_{GS} - V_{Th})^2 \quad (3.36)$$

La Figura 3.56 mostra il comportamento del Mosfet ad arricchimento a canale *n* nelle tre regioni di funzionamento, in funzione del parametro V_{GS} .

In particolare, la Figura 3 mostra che il passaggio dalla regione resistiva a quella di saturazione avviene quando $V_{DS} = (V_{GS} - V_{Th})$.

Sostituendo nella (3.35) V_{DS} al posto di $(V_{GS} - V_{Th})$, si ha la funzione parabolica:

$$I_{DS} = G_n V_{DS}^2 \quad (3.37)$$

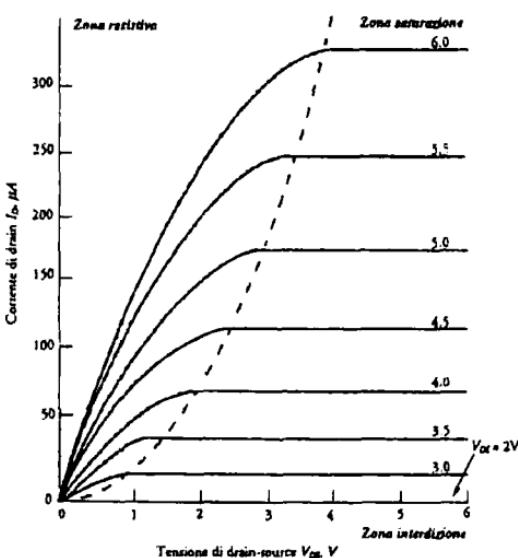
che è tratteggiata in Figura 3.56 ed è il luogo dei punti di passaggio tra la regione resistiva e quella di saturazione. La (3.37) viene detta caratteristica di funzionamento o transcaratteristica del Mosfet.

La zona di interdizione coincide con l'asse V_{DS} poiché la $I_{DS} = 0$.

La zona resistiva si può considerare lineare, cioè il Mosfet si comporta come una resistenza di valore $R = \frac{1}{2G_n(V_{GS} - V_{Th})}$, ma solo per $V_{DS} \ll (V_{GS} - V_{Th})$, infatti nella (1) si può trascurare V_{DS}^2 .

In fine, nella zona di saturazione il Mosfet si comporta come un generatore di corrente, infatti I_{DS} è costante indipendentemente dal valore di V_{DS} .

Figura 3.56
Curve caratteristiche Mosfet



I vantaggi del Mosfet rispetto al *BJT* sono legati al fatto che il comando viene applicato ad un elettrodo che risulta isolato per la presenza dello strato di ossido, quindi la corrente assorbita dall'elettrodo è praticamente nulla.

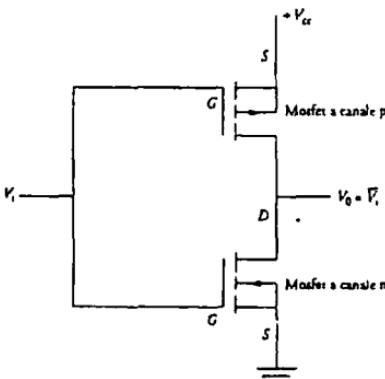
Inoltre la semplicità tecnologica dei Mosfet favorisce l'elevata densità di integrazione con cui si possono realizzare nei circuiti elettronici digitali.

Purtroppo l'alto valore della caduta di tensione del Mosfet quando conduce, limita il campo delle potenze di impiego.

Una tecnologia molto usata nei circuiti logici è la CMOS (*Complementary Mosfet*) che utilizza due Mosfet (uno a canale *p* e l'altro a canale *n*), per realizzare un invertitore dalle caratteristiche ottimali.

L'invertitore CMOS è mostrato in Figura 3.57. Il suo funzionamento è semplice: quando $V_i = 0$ (0 logico), il Mosfet a canale *n* è interdetto, per cui essendo il Mosfet a

Figura 3.57
Invertitore a CMOS.



canale p in conduzione, con V_{DS} nulla perché la $I_{DS} = 0$, si ha $V_0 = +V_{CC}$ (1 logico); mentre quando $V_i = +V_{CC}$ (1 logico), si invertono i funzionamenti dei due Mosfet, quindi si ha che il Mosfet a *canale n* conduce, con V_{DS} nulla perché la $I_{DS} = 0$, quindi $V_0 = 0$ (0 logico).

I vantaggi della tecnologia CMOS sono i seguenti:

- è molto semplice e non necessita di altri componenti;
- consente di costruire circuiti complessi con minimo ingombro sul silicio;
- consumo limitato di potenza perché uno dei due Mosfet è sicuramente spento a regime;
- la corrente scorsa nei Mosfet soltanto durante la commutazione da uno stato all'altro.

Il Mosfet è un dispositivo elettronico che ha un funzionamento più lineare rispetto al Transistor, ma è pur sempre un dispositivo non lineare.

Si rimanda a testi universitari di elettronica analogica per approfondimenti sui Mosfet.

CASO PRATICO Ponte di Wheatstone

Introduzione al Caso Pratico

Nell'ambito delle misure di laboratorio ha grande rilevanza la misura di resistori mediante il Ponte di Wheatstone. Tale metodo consente infatti di effettuare misure di resistenze con limiti di errore molto ristretti. D'altronde la misura di resistori con metodi precisi e affidabili viene molto usata nel campo industriale. Per esempio, la misura della deformazione meccanica causata da uno sforzo o da una pressione si effettua tramite gli estensimetri, che dal punto di vista elettrico sono dei resistori; per cui misurando la sua resistenza mediante il ponte, si ha un valore molto attendibile dello sforzo. In questo caso pratico oltre al bilanciamento di un ponte, si analizzerà anche il massimo trasferimento di potenza su un carico.

2) Descrizione e Specifiche

Si consideri il ponte in Figura 3.58. Il ponte è bilanciato? Se il resistore da $10 \text{ k}\Omega$ viene sostituito con uno da $18 \text{ k}\Omega$, qual è resistore collegato tra a e b assorbe la massima potenza?

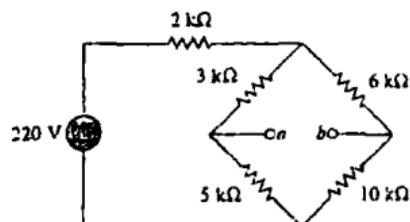


Figura 3.58
"Ponte di Wheatstone".

3) Obiettivi

Occorre prima stabilire se il ponte è bilanciato; a tale scopo si sfruttano i metodi di analisi studiati nel capitolo 3. Obiettivo della seconda parte del problema è quello di determinare il valore di un resistore che consente di trasferire su di esso la massima potenza. Tale argomento è legato ai teoremi delle reti elettriche, ed in particolare al teorema di Thevenin, che verrà trattato nel Capitolo 4.

4) Elaborazione e calcoli

- Per sapere se il ponte è bilanciato occorre determinare la tensione V_{ab} tra i terminali a e b e verificare che sia nulla: infatti i quattro resistori da $3 \text{ k}\Omega$, $6 \text{ k}\Omega$, $5 \text{ k}\Omega$ e $10 \text{ k}\Omega$ formano un ponte bilanciato se collegando un galvanometro (strumento di precisione che misura la corrente), tra i terminali a e b , esso fornisce indicazione nulla.

Nella misura di un resistore incognito R_s , che è inserito in uno dei quattro lati.

del ponte, si usa un resistore variabile R_v , anch'esso inserito nel ponte: variando il valore di R_v in modo che il galvanometro dia indicazione nulla, si ha il bilanciamento del ponte, e si calcola il valore di R_v dai valori degli altri tre resistori.

Da notare che il generatore di tensione non viene usato nel calcolo di R_v ; però più alto è il suo valore, tanto più preciso è il bilanciamento del ponte.

Per calcolare la tensione V_{ab} risulta più conveniente usare il metodo agli anelli, perché non sono presenti generatori di corrente.

Si scrivono ora le due equazioni KVL rispettivamente alle maglie 1 e 2 in Figura 3.59:

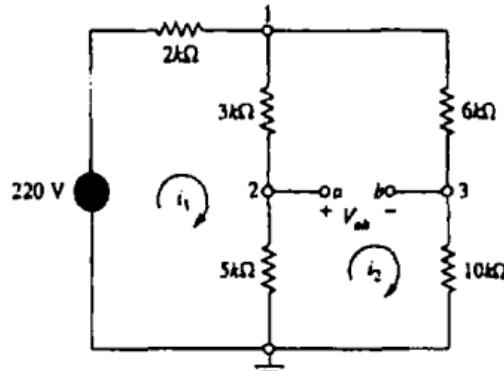


Figura 3.59
Metodo agli anelli.

$$-220 + 2 \cdot i_2 + 8 \cdot (i_1 - i_2) = 0 \quad (3.38)$$

$$+24 \cdot i_2 - 8 \cdot i_1 = 0 \quad (3.39)$$

Risolvendo si ricavano le due correnti di anello:

$$i_1 = 30 \text{ mA} \quad \text{e} \quad i_2 = 10 \text{ mA}$$

Applicando ancora la KVL alla maglia formata dai resistori da $5 \text{ k}\Omega$ e $10 \text{ k}\Omega$ e da V_{ab} , si determina la tensione V_{ab} :

$$+5 \cdot (i_2 - i_1) + V_{ab} + 10 \cdot i_2 = 0 \quad (3.40)$$

cioè si ha $V_{ab} = 0$: il ponte è bilanciato.

b. Quando si sostituisce il resistore da $10 \text{ k}\Omega$ con uno da $18 \text{ k}\Omega$, il ponte non è più bilanciato; infatti la 1 non cambia, mentre la 2 diventa:

$$+32 \cdot i_2 - 8 \cdot i_1 = 0 \quad (3.41)$$

Le correnti di anello hanno i seguenti valori:

$$i_1 = 27.5 \text{ mA} \quad i_2 = 6.875 \text{ mA}$$

Per cui la tensione V_{ab} è:

$$V_{ab} = 5 \cdot (i_1 - i_2) - 18 \cdot i_2 = -20.625 \text{ V}$$

Per determinare il valore del resistore da inserire tra i terminali $a-b$ che assorbe la massima potenza, occorre fare riferimento al paragrafo 4.8 del prossimo capitolo. Si deve cioè ricavare l'equivalente Thevenin tra i terminali $a-b$. La tensione V_{Th} si calcola tra i terminali $a-b$ a vuoto, cioè senza resistore di carico, per cui risulta uguale alla tensione V_{ab} :

$$V_{Th} = V_{ab} = -20.625 \text{ V}$$

La resistore R_{Th} si calcola tra i terminali $a-b$ spegnendo i generatori indipendenti, per cui si ricava il circuito in Figura 3.60.

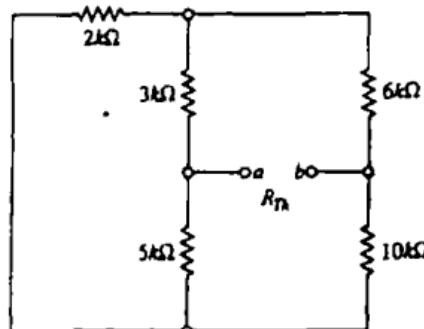


Figura 3.60
Circuito il calcolo di R_{Th} .

È comodo applicare le trasformazioni triangolo-stella, al triangolo formato dalle resistenze da $2\text{k}\Omega$, $3\text{k}\Omega$ e $5\text{k}\Omega$:

$$R_1 = \frac{3 \cdot 5}{(2 + 3 + 5)} = 1.5 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = \frac{2 \cdot 3}{(2 + 3 + 5)} = 0.6 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = \frac{2 \cdot 5}{(2 + 3 + 5)} = 1 \text{ k}\Omega$$

Per cui si ottiene il circuito in Figura 3.61, da cui si calcola R_{Th} :

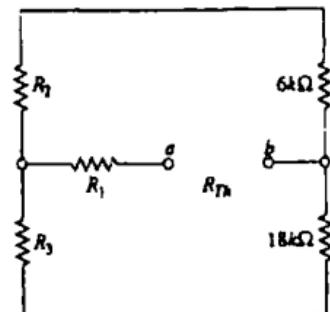


Figura 3.61
Circuito dopo la trasformazione stella-triangolo.

$$R_{Th} = R_1 + [(R_2 + 6) // (R_3 + 18)] = 1.5 + \frac{6.6 \cdot 9}{6.6 + 9} = 6.398 \text{ k}\Omega$$

Quindi il resistore da inserire tra i terminali a-b che assorbe la massima potenza è R_{Th} :

$$R_L = R_{Th} = 6.398 \text{ k}\Omega$$

Si calcola infine la massima potenza assorbita dal resistore R_L :

$$P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_L} = \frac{20.625^2}{4 \cdot 6.398} = 16.622 \text{ mW}$$

5) Analisi e Verifica

Per verificare che il ponte con il resistore da $10\text{k}\Omega$ è bilanciato si applica il metodo nodale al circuito in Figura 2. Si prende il nodo in basso come riferimento e si scrivono 3 equazioni KCL ai tre nodi rimanenti:

$$\frac{v_1 - 220}{2} + \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{6} = 0 \quad (\text{KCL al nodo 1})$$

$$\frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2 - 5}{5} = 0 \quad (\text{KCL al nodo 2})$$

$$\frac{v_3 - v_1}{6} + \frac{v_3 - 10}{10} = 0 \quad (\text{KCL al nodo 3})$$

Si ricava v_2 dalla seconda equazione ed v_3 dalla terza:

$$v_2 = \frac{5}{8} v_1 \quad \text{e} \quad v_3 = \frac{5}{8} v_1$$

La tensione V_{ab} è la differenza delle due tensioni nodali, per cui è nulla:

$$V_{ab} = v_2 - v_3 = 0$$

La verifica effettuata conferma l'esattezza dei risultati prima raggiunti.

SOMMARIO

- 1) Nell'analisi nodale si applica le leggi di Kirchhoff delle correnti ai nodi non di riferimento. È possibile applicare l'analisi nodale ai circuiti planari e ai circuiti non planari. Risolvendo il sistema di equazioni si ottengono come risultati le tensioni di nodo.
- 2) Un superodo è formato da due nodi non di riferimento, collegati da un generatore di tensione (dipendente o indipendente).
- 3) Nell'analisi agli anelli si applica le leggi di Kirchhoff delle tensioni agli anelli di un circuito planare. Risolvendo il sistema di equazioni si ottengono come risultati le correnti di anello.
- 4) Un superanello è formato da due anelli che hanno in comune un generatore di corrente (dipendente o indipendente).
- 5) L'analisi nodale è normalmente usata quando un circuito ha meno equazioni ai nodi rispetto alle equazioni agli anelli. L'analisi agli anelli è normalmente usata quando un circuito ha meno equazioni agli anelli rispetto alle equazioni ai nodi.
- 6) Si può eseguire l'analisi dei circuiti usando il programma PSpice.
- 7) I circuiti con Transistori in regime stazionario possono essere analizzati usando le tecniche tratte in questo capitolo.

DOMANDE DI RIEPILOGO

3.1 Applicando la KCL al nodo 1 del circuito di Figura 3.62, si ottiene

$$(a) 2 + \frac{12 - v_1}{3} = \frac{v_1}{6} + \frac{v_1 - v_2}{4}$$

$$(b) 2 + \frac{v_1 - 12}{3} = \frac{v_1}{6} + \frac{v_2 - v_1}{4}$$

$$(c) 2 + \frac{12 - v_1}{3} = \frac{0 - v_1}{6} + \frac{v_1 - v_2}{4}$$

$$(d) 2 + \frac{v_1 - 12}{3} = \frac{0 - v_1}{6} + \frac{v_2 - v_1}{4}$$

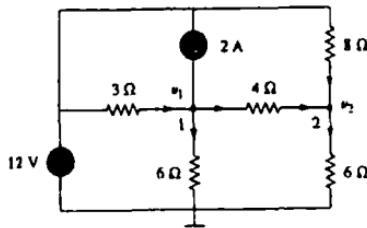


Figura 3.62 Per le domande di riepilogo 3.1 e 3.2.

3.2 Nel circuito di Figura 3.46, applicando la KCL al nodo 2 si ottiene:

$$(a) \frac{v_2 - v_1}{4} + \frac{v_2}{8} = \frac{v_2}{6}$$

$$(b) \frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_2}{8} = \frac{v_2}{6}$$

$$(c) \frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{12 - v_2}{8} = \frac{v_2}{6}$$

$$(d) \frac{v_2 - v_1}{4} + \frac{v_2 - 12}{8} = \frac{v_2}{6}$$

3.3 Nel circuito di Figura 3.63, la relazione fra v_1 e v_2 è:

$$(a) v_1 = 6i + 8 + v_2 \quad (b) v_1 = 6i - 8 + v_2$$

$$(c) v_1 = -6i + 8 + v_2 \quad (d) v_1 = -6i - 8 + v_2$$

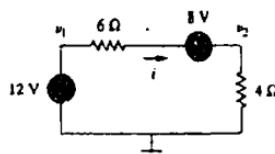


Figura 3.63 Per le domande di riepilogo 3.3 e 3.4.

- 3.4 Nel circuito della Figura 3.63, la tensione v_2 vale

- (a) -8 V
- (b) -1.6 V
- (c) 1.6 V
- (d) 8 V

- 3.5 La corrente i nel circuito di Figura 3.64 vale.

- (a) -2.667 A
- (b) -0.667 A
- (c) 0.667 A
- (d) 2.667 A

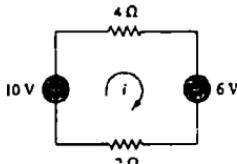


Figura 3.64 Per le domande di esercizio 3.5 e 3.6.

- 3.6 L'equazione di maglia per il circuito di Figura 3.64 è:

- ~~(a)~~ $-10 + 4i + 6 + 2i = 0$
- (b) $10 + 4i + 6 + 2i = 0$
- (c) $10 + 4i - 6 + 2i = 0$
- (d) $-10 + 4i - 6 + 2i = 0$

- 3.7 Nel circuito della Figura 3.65, la corrente i_1 vale:

- (a) 4 A
- (b) 3 A
- (c) 2 A
- (d) 1 A

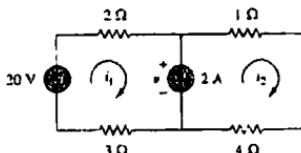


Figura 3.65 Per le domande di esercizio 3.7 e 3.8.

- 3.8 La tensione v sul generatore di corrente nel circuito di Figura 3.49 vale:

- (a) 20 V
- (b) 15 V
- (c) 10 V
- (d) 5 V

- 3.9 In PSpice, il part name del generatore di tensione controllato in corrente è

- (a) EX
- (b) FX
- (c) HX
- (d) GX

- 3.10 Quali delle seguenti affermazioni non sono vere per uno pseudocomponente (PROBE):

- (a) Deve essere inserito in serie.
- (b) Traccia il grafico della corrente di ramo.
- (c) Visualizza la corrente del ramo in cui è inserito.
- (d) Può essere utilizzato per visualizzare la tensione se viene collegato in parallelo.
- (e) Si può usare solo nella analisi DC.
- (f) Non corrisponde a nessun particolare elemento circuitale.

Risposte: 3.1a, 3.3c, 3.3a, 3.4c, 3.5c, 3.6a, 3.7d, 3.8b, 3.9c, 3.10b,d.

PROBLEMI

Paragrafi 3.2 e 3.3 Analisi nodale

- 3.1 Determinare I_1 , nel circuito di Figura 3.66 usando l'analisi nodale.

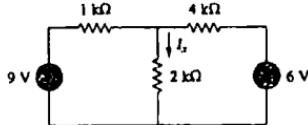


Figura 3.66 Per il Problema 3.1.

- 3.2 Per il circuito in Figura 3.67, calcolare v_1 e v_2 .

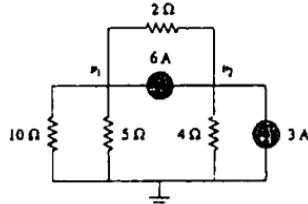


Figura 3.67 Per il Problema 3.2.

Determinare le correnti da I_1 a I_4 e la tensione v_o nel circuito di Figura 3.68.

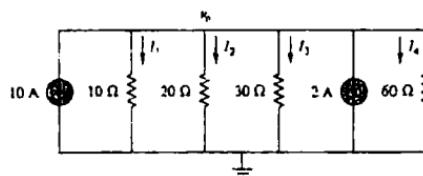


Figura 3.68 Per il Problema 3.3.

- 3.4 Dato il circuito di Figura 3.69, determinare le correnti da I_1 a I_4 .

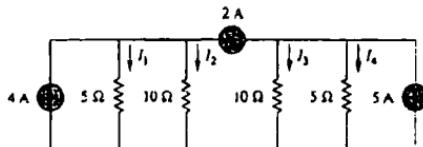


Figura 3.69 Per il Problema 3.4.

3.5 Calcolare v_o nel circuito di Figura 3.70.

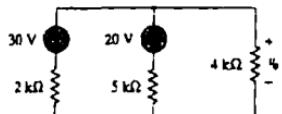


Figura 3.70 Per il Problema 3.5.

3.6 Utilizzare l'analisi nodale per ottenere v_o nel circuito di Figura 3.71.

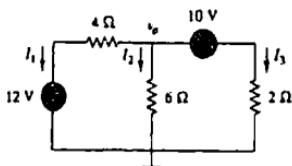


Figura 3.71 Per il Problema 3.6.

3.7 Applicare l'analisi nodale per calcolare V_x nel circuito di Figura 3.72.

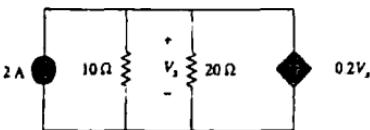


Figura 3.72 Per il Problema 3.7.

3.8 Mediante l'analisi nodale, determinare v_o nel circuito di Figura 3.73.

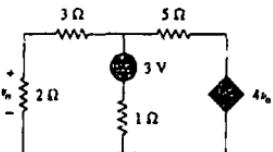


Figura 3.73 Per il Problema 3.8.

3.9 Determinare I_b nel circuito di Figura 3.74 usando l'analisi nodale.

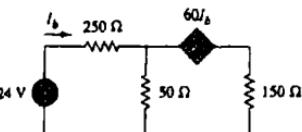


Figura 3.74 Per il Problema 3.9.

3.10 Determinare I_o nel circuito di Figura 3.75.

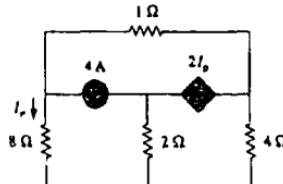


Figura 3.75 Per il Problema 3.10.

3.11 Calcolare V_0 e la potenza dissipata in tutti i resistori nel circuito di Figura 3.76.

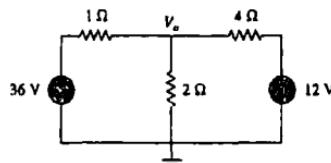


Figura 3.76 Per il Problema 3.11.

3.12 Usando l'analisi nodale, determinare V_x nel circuito di Figura 3.77.

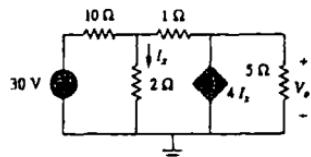


Figura 3.77 Per il Problema 3.12.

3.13 Calcolare v_1 e v_2 nel circuito di Figura 3.78 usando l'analisi nodale.

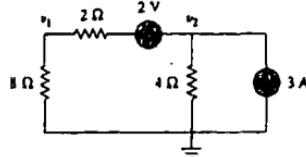


Figura 3.78 Per il Problema 3.13.

3.14 Usando l'analisi nodale, determinare v_o nel circuito di Figura 3.79.

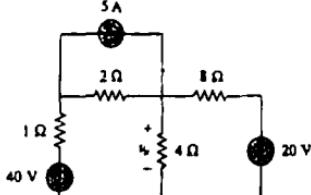


Figura 3.79 Per il Problema 3.14.

- 3.15 Applicare l'analisi nodale per determinare i_a e la potenza dissipata in ciascun resistore nel circuito di Figura 3.80.

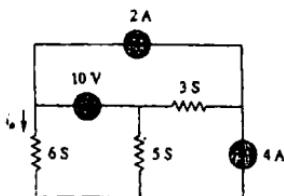


Figura 3.80 Per il Problema 3.15.

- 3.16 Determinare le tensioni da v_1 a v_3 nel circuito di Figura 3.81 usando l'analisi nodale.

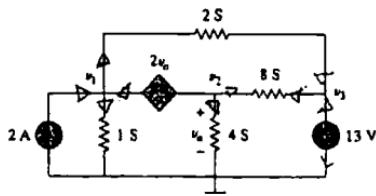


Figura 3.81 Per il Problema 3.16.

- 3.17 Usando l'analisi nodale, determinare la corrente i_a nel circuito di Figura 3.82.

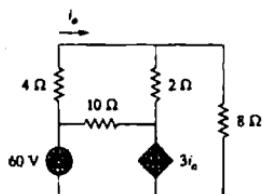


Figura 3.82 Per il Problema 3.17.

- 3.18 Determinare le tensioni di nodo nel circuito di Figura 3.83 usando l'analisi nodale.

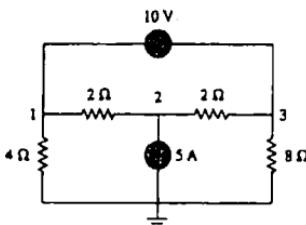


Figura 3.83 Per il Problema 3.18.

- 3.19 Utilizzare l'analisi nodale per determinare v_1 , v_2 e v_3 nel circuito di Figura 3.84.

ML

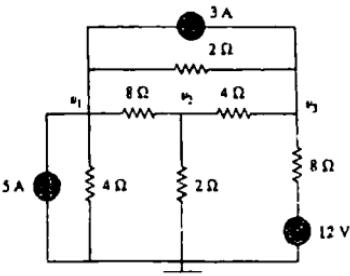


Figura 3.84 Per il Problema 3.19.

- 3.20 Per il circuito di Figura 3.85, determinare v_1 , v_2 e v_3 usando l'analisi nodale.

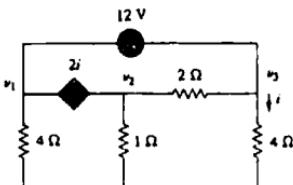


Figura 3.85 Per il Problema 3.20.

- 3.21 Nel circuito in Figura 3.86, determinare v_1 e v_2 usando l'analisi nodale.

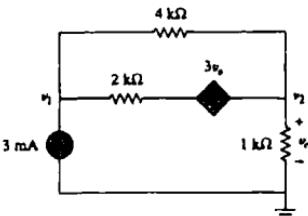


Figura 3.86 Per il Problema 3.21.

- 3.22 Determinare v_1 e v_2 nel circuito di Figura 3.87.

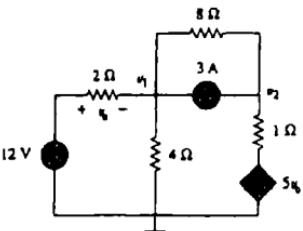


Figura 3.87 Per il Problema 3.22.

- 3.23** Usare l'analisi nodale per calcolare V_0 nel circuito di Figura 3.88.

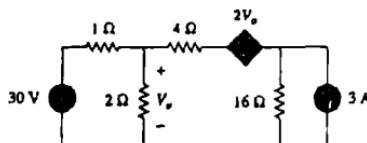


Figura 3.88 Per il Problema 3.23.

- 3.24** Usare l'analisi nodale e MATLAB per calcolare V_0 nel circuito di Figura 3.89.

ML

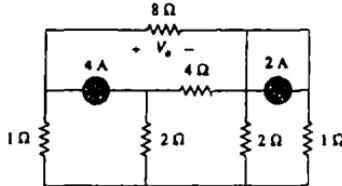


Figura 3.89 Per il Problema 3.24.

- 3.25** Usare l'analisi nodale e MATLAB per determinare le tensioni nodali in Figura 3.90.

ML

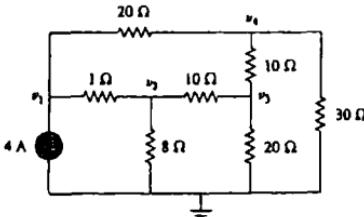


Figura 3.90 Per il Problema 3.25.

- 3.26** Calcolare le tensioni di nodo v_1 , v_2 e v_3 nel circuito di Figura 3.91.

ML

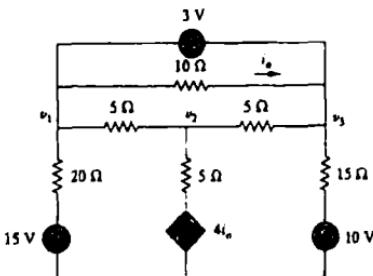


Figura 3.91 Per il Problema 3.26.

- *3.27** Utilizzare l'analisi nodale per determinare le tensioni v_1 , v_2 e v_3 nel circuito di Figura 3.92.

ML

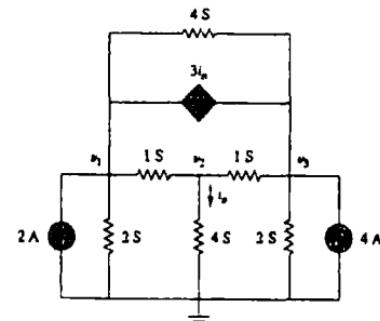


Figura 3.92 Per il Problema 3.27.

- *3.28** Utilizzare MATLAB per determinare le tensioni ai nodi a , b , c e d nel circuito di Figura 3.93.

ML

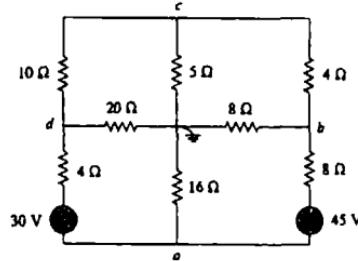


Figura 3.93 Per il Problema 3.28.

- 3.29** Utilizzare MATLAB per ottenere le tensioni di nodo nel circuito di Figura 3.94.

ML

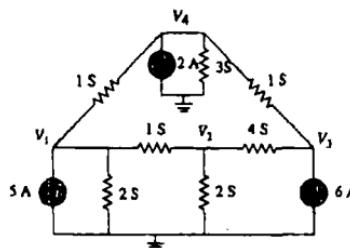


Figura 3.94 Per il Problema 3.29.

- 3.30** Mediante l'analisi nodale, determinare v_0 e i_0 nel circuito di Figura 3.95.

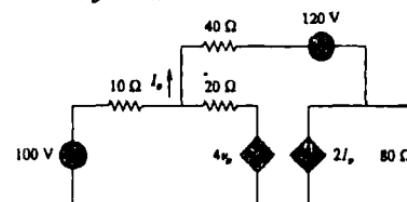


Figura 3.95 Per il Problema 3.30.

* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

3.31
ML

- Determinare le tensioni di nodo per il circuito di Figura 3.96.

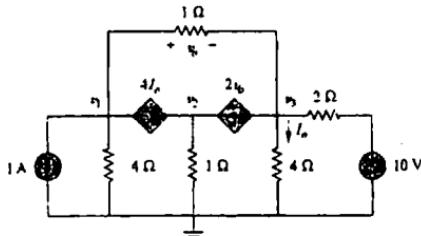


Figura 3.96 Per il Problema 3.31

- 3.32** Calcolare le tensioni di nodo v_1 , v_2 e v_3 nel circuito di Figura 3.97.

ML

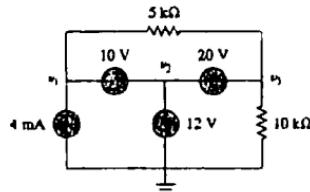
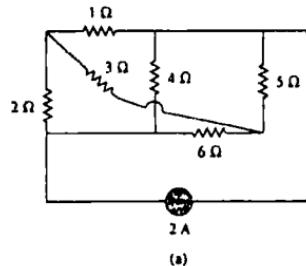


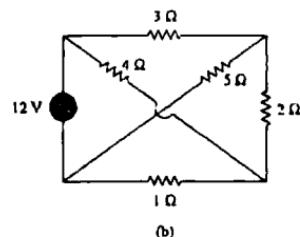
Figura 3.97 Per il Problema 3.32

Paragrafi 3.4 e 3.5 Analisi agli anelli

- 3.33** Quale dei circuiti in Figura 3.98 è pianare? Ridisegnare il circuito pianare senza rami incrociati.



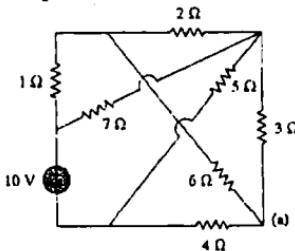
(a)



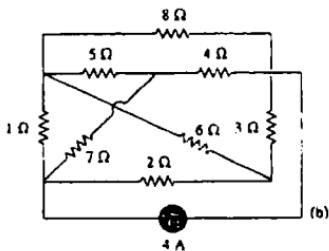
(b)

Figura 3.98 Per il Problema 3.33.

- 3.34** Determinare quale dei circuiti in Figura 3.99 è pianare e ridisegnarlo senza rami incrociati.



(a)



(b)

Figura 3.99 Per il Problema 3.34

- 3.35** Ripetere il Problema 3.5 usando l'analisi agli anelli.

- 3.36** Ripetere il Problema 3.6 usando l'analisi agli anelli.

- 3.37** Risolvere il Problema 3.8 usando l'analisi agli anelli.

- 3.38** Applicare l'analisi agli anelli al circuito di Figura 3.100 e ricavare I_0 .

ML

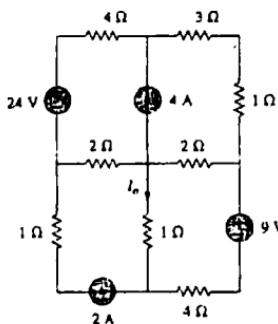


Figura 3.100 Per il Problema 3.38.

- 3.39** Determinare le correnti di anello i_1 e i_2 nel circuito mostrato in Figura 3.101.

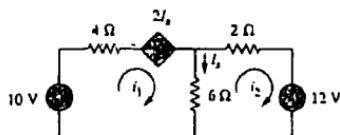


Figura 3.101 Per il Problema 3.39.

- 3.40** Per la rete a ponte in Figura 3.102, determinare i_s usando l'analisi agli anelli.

ML

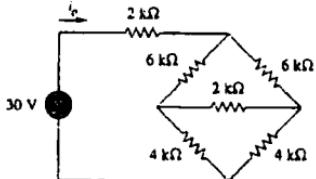


Figura 3.102 Per il Problema 3.40

- 3.41** Applicare l'analisi agli anelli per determinare i in Figura 3.103.

ML

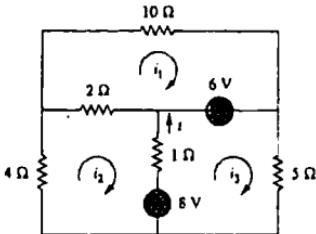


Figura 3.103 Per il Problema 3.41.

- 3.42** Determinare le correnti di anello nel circuito di Figura 3.104.

ML

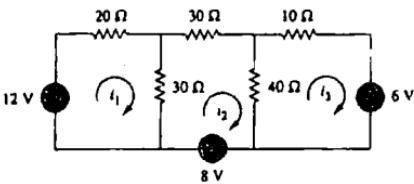


Figura 3.104 Per il Problema 3.42.

- 3.43** Utilizzare l'analisi agli anelli per determinare v_{ab} e i_o nel circuito di Figura 3.105.

ML

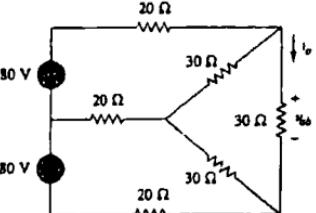


Figura 3.105 Per il Problema 3.43.

- 3.44** Utilizzare l'analisi agli anelli per ottenere i_o nel circuito di Figura 3.106.

ML

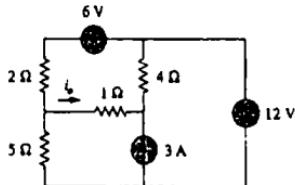


Figura 3.106 Per il Problema 3.44

- 3.45** Determinare la corrente i nel circuito in Figura 3.107.

ML

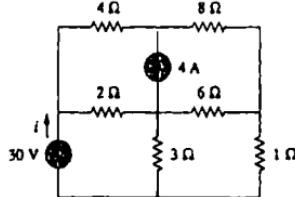


Figura 3.107 Per il Problema 3.45.

- 3.46** Calcolare le correnti di anello i_1 e i_2 in Figura 3.108.

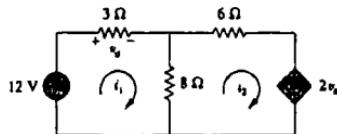


Figura 3.108 Per il Problema 3.46.

- 3.47** Ripetere il Problema 3.19 usando l'analisi agli anelli.

ML

- 3.48** Determinare la corrente che attraversa il resistore da 10 kΩ nel circuito di Figura 3.109 usando l'analisi agli anelli.

ML

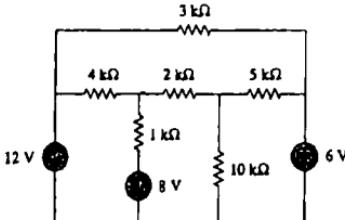


Figura 3.109 Per il Problema 3.48.

- 3.49 Determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 3.110.

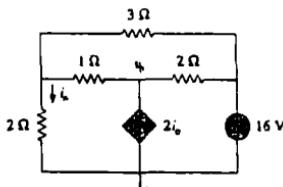


Figura 3.110 Per il Problema 3.49.

- 3.50 Utilizzare l'analisi agli anelli per determinare la corrente i_o nel circuito in Figura 3.111.

ML

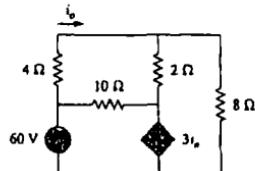


Figura 3.111 Per il Problema 3.50.

- 3.51 Applicare l'analisi agli anelli per calcolare v_o nel circuito di Figura 3.112.

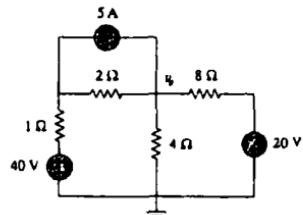


Figura 3.112 Per il Problema 3.51.

- 3.52 Utilizzare l'analisi agli anelli per calcolare i_1 , i_2 e i_3 nel circuito di Figura 3.113.

ML

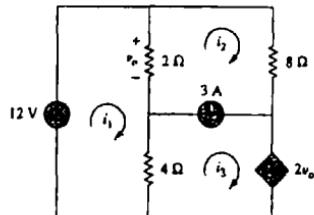


Figura 3.113 Per il Problema 3.52.

- 3.53 Calcolare le correnti di anello nel circuito di Figura 3.114 usando MATLAB.

ML

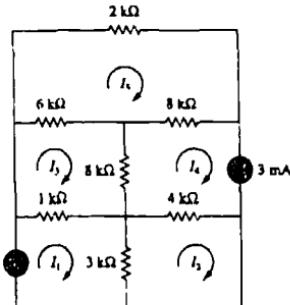


Figura 3.114 Per il Problema 3.53

- 3.54 Determinare le correnti di anello i_1 , i_2 e i_3 nel circuito di Figura 3.115.

ML

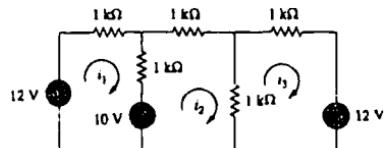


Figura 3.115 Per il Problema 3.54.

- 3.55 Nel circuito di Figura 3.116, ricavare i_1 , i_2 e i_3 .

ML

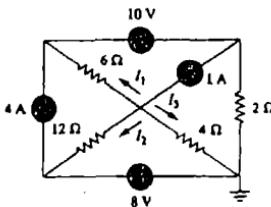


Figura 3.116 Per il Problema 3.55.

- 3.56 Determinare v_1 e v_2 nel circuito di Figura 3.117.

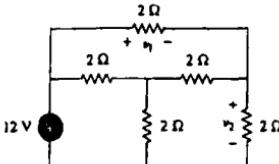


Figura 3.117 Per il Problema 3.56

- 3.57** Nel circuito di Figura 3.118, determinare i valori di R , V_1 e V_2 sapendo che $i_o = 18 \text{ mA}$.

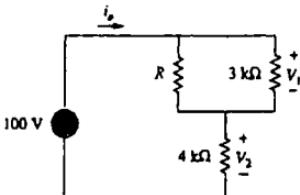


Figura 3.118 Per il Problema 3.57.

- 3.58** Determinare i_1 , i_2 e i_3 nel circuito di Figura 3.119.

ML

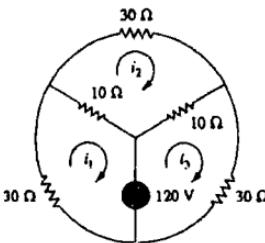


Figura 3.119 Per il Problema 3.58.

- 3.59** Ripetere il Problema 3.30 usando l'analisi agli anelli.

ML

- 3.60** Calcolare la potenza dissipata in ciascuno dei resistori nel circuito in Figura 3.120.

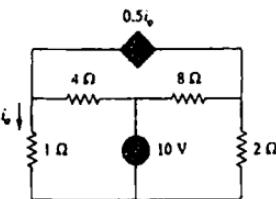


Figura 3.120 Per il Problema 3.60.

- 3.61** Calcolare il guadagno di corrente i_o/i_1 nel circuito di Figura 3.121.

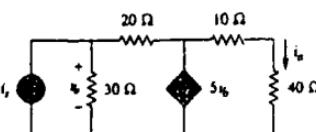


Figura 3.121 Per il Problema 3.61.

- 3.62** Determinare le correnti di anello i_1 , i_2 e i_3 nella rete di Figura 3.122.

ML

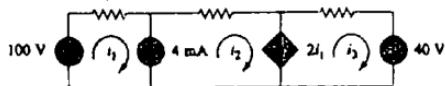


Figura 3.122 Per il Problema 3.62.

- 3.63** Determinare v_r e i_o nel circuito mostrato in Figura 3.123.

ML

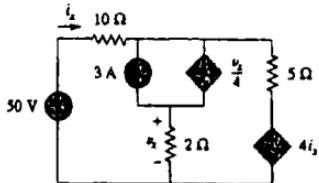


Figura 3.123 Per il Problema 3.63.

- 3.64** Determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 3.124.

ML

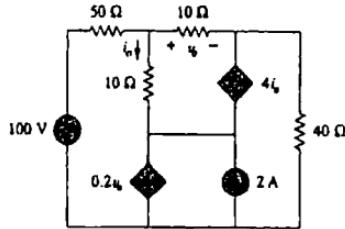


Figura 3.124 Per il Problema 3.64.

- 3.65** Utilizzare MATLAB per calcolare le correnti di anello nel circuito di Figura 3.125.

ML

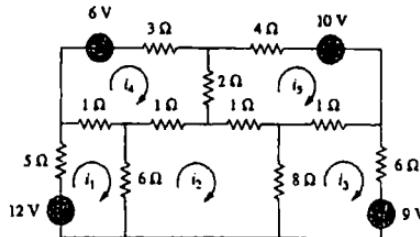


Figura 3.125 Per il Problema 3.65.

- 3.66** Scrivere un sistema di equazioni agli anelli per il circuito in Figura 3.126. Usare MATLAB per determinare le correnti di anello.

ML

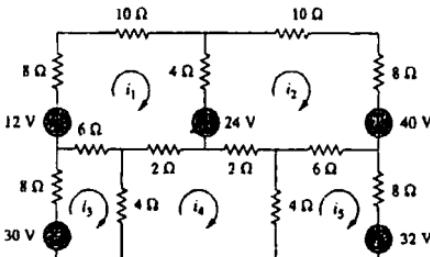


Figura 3.126 Per il Problema 3.66.

Paragrafo 3.6 Scrittura diretta della analisi nodale e della analisi agli anelli

- 3.67 Ricavare le equazioni nelle tensioni di nodo per il circuito di Figura 3.127 per scrittura diretta.
ML Calcolare la tensione V_0 .

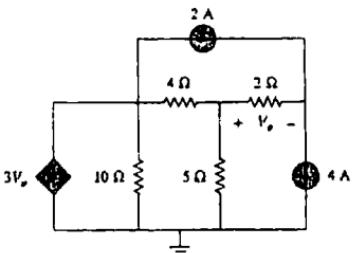


Figura 3.127 Per il Problema 3.67.

- 3.68 Calcolare la tensione V_0 nel circuito in Figura 3.128.

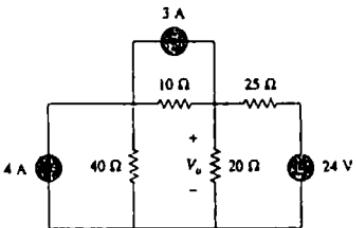


Figura 3.128 Per il Problema 3.68.

- 3.69 Per il circuito mostrato in Figura 3.129, scrivere le equazioni nelle tensioni di nodo in forma diretta

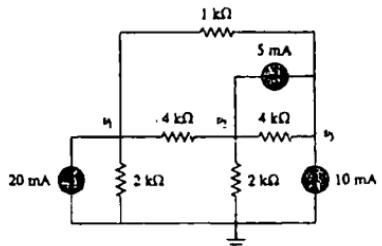


Figura 3.129 Per il Problema 3.69.

- 3.70 Scrivere le equazioni nelle tensioni di nodo in forma diretta e determinare i valori di V_1 e V_2 nel circuito di Figura 3.130.

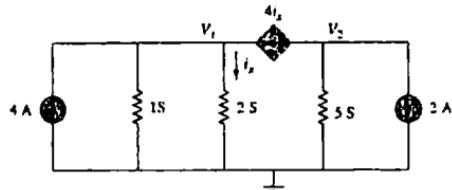


Figura 3.130 Per il Problema 3.70.

- 3.71 Scrivere le equazioni nelle correnti di anello per il circuito di Figura 3.131. Determinare poi i valori di i_1 , i_2 e i_3 .
ML

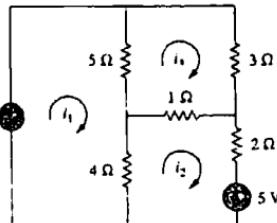


Figura 3.131 Per il Problema 3.71.

- 3.72 Scrivere in forma diretta le equazioni nelle correnti di anello per il circuito in Figura 3.132.

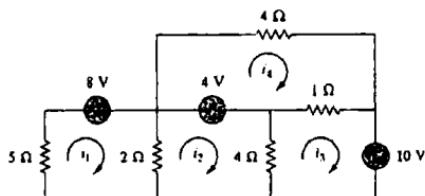


Figura 3.132 Per il Problema 3.72.

- 3.73 Scrivere le equazioni nelle correnti di anello per il circuito di Figura 3.133.

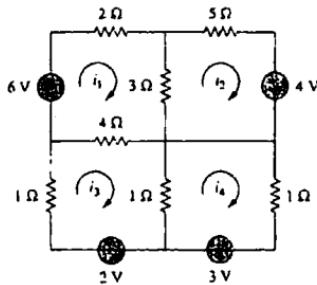


Figura 3.133 Per il Problema 3.73.

- 3.74 Ottenere in forma diretta le equazioni nelle correnti di anello per il circuito in Figura 3.134.

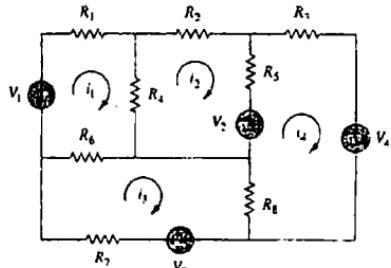


Figura 3.134 Per il Problema 3.74.

Paragrafo 3.8 Analisi dei circuiti con PSpice

3.75 Utilizzare PSpice per risolvere il Problema 3.58.

3.76 Utilizzare PSpice per risolvere il Problema 3.27.

3.77 Determinare le tensioni V_1 e V_2 nel circuito di Figura 3.135 usando PSpice.

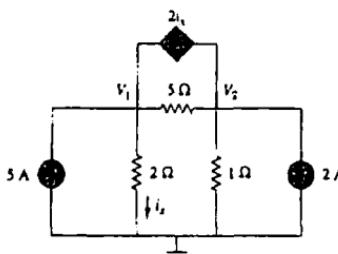


Figura 3.135 Per il Problema 3.77.

3.78 Risolvere il Problema 3.20 usando PSpice.

3.79 Ripetere il Problema 3.28 utilizzando PSpice.

3.80 Determinare le tensioni di nodo da v_1 a v_4 nel circuito di Figura 3.136 usando PSpice.

ML

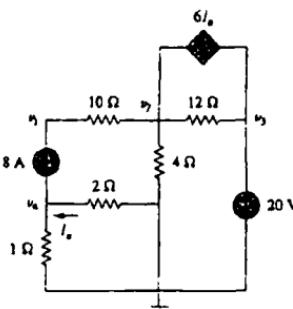


Figura 3.136 Per il Problema 3.80.

3.81 Utilizzare PSpice per risolvere il problema dell'Esempio 3.4.

3.82 Se la netlist di Schematica di un circuito è la seguente, disegnare il circuito.

```
R_R1 1 2 2K
R_R2 2 0 4K
R_R3 3 0 8K
R_R4 3 4 6K
R_R5 1 3 3K
V_VS 4 0 DC 100
I_IS 0 1 DC 4
F_F1 1 3 VF_F1 2
VF_F1 5 0 0V
E_E1 3 2 1 3 3
```

3.83 Il programma che segue è la netlist Schematica di un certo circuito. Disegnare il circuito e determinare la tensione dei nodo 2.

```
R_R1 1 2 20
R_R2 2 0 50
R_R3 2 3 70
R_R4 3 0 30
V_VS 1 0 20V
I_IS 2 0 DC 2A
```

Paragrafo 3.9 Applicazioni

3.84 Calcolare v_o e i_o nel circuito di Figura 3.137.

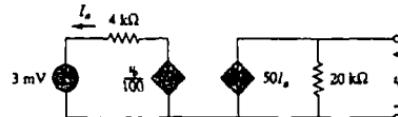


Figura 3.137 Per il Problema 3.84

3.85 Un amplificatore audio con una resistenza di 9Ω **evid** fornisce potenza a un altoparlante. Quale deve essere la resistenza dell'altoparlante perché gli venga fornita la massima potenza?

3.86 Nel circuito a transistor semplificato di Figura 3.138 calcolare la tensione v_o .

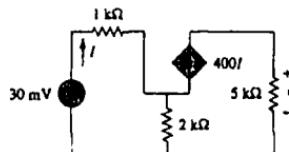


Figura 3.138 Per il Problema 3.86.

3.87 Nel circuito in Figura 3.139, determinare il guadagno v_o/v_s .

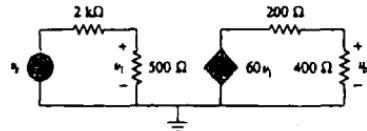


Figura 3.139 Per il Problema 3.87.

3.88 Determinare il guadagno v_o/v_s del circuito amplificatore a transistor di Figura 3.140.

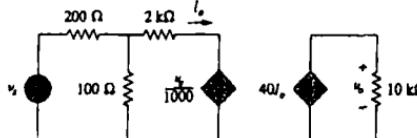


Figura 3.140 Per il Problema 3.88.

- 3.89 Per il transistore di Figura 3.141, calcolare I_B e V_{CE} .
Siano $\beta = 100$ e $V_{BE} = 0.7$ V.

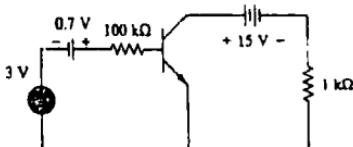


Figura 3.141 Per il Problema 3.89

- 3.90 Calcolare v_o per il transistore in Figura 3.142 dati $v_o = 4$ V, $\beta = 150$, $V_{BE} = 0.7$ V.

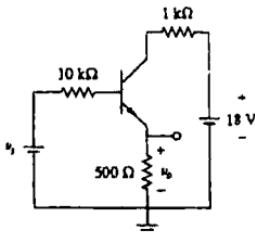


Figura 3.142 Per il Problema 3.90

- 3.91 Per il circuito con transistore di Figura 3.143, determinare I_B , V_{CE} e v_o . Si assuma $\beta = 200$, $V_{BE} = 0.7$ V.

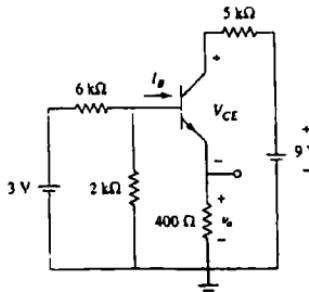


Figura 3.143 Per il Problema 3.91.

- 3.92 Determinare I_B e V_C per il circuito di Figura 3.144. Siano $\beta = 100$, $V_{BE} = 0.7$ V.

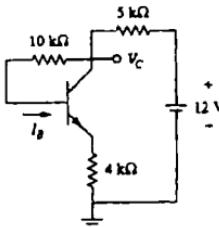
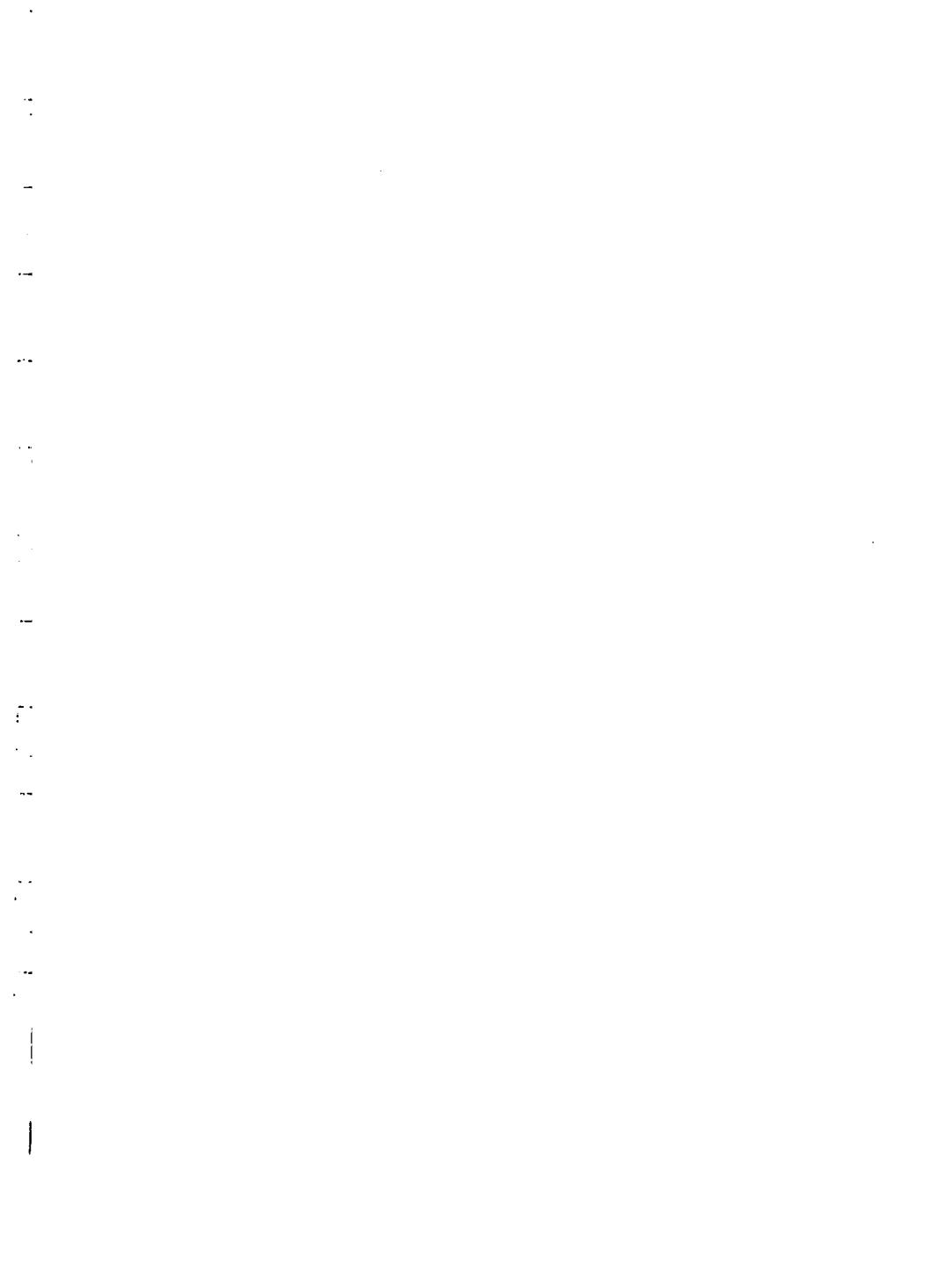


Figura 3.144 Per il Problema 3.92.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 3.93 Ripetere l'Esempio 3.11 eseguendo i calcoli a mano.



TEOREMI DELLE RETI

4.1 INTRODUZIONE

Uno dei vantaggi dell'analizzare i circuiti scrivendone direttamente le leggi di Kirchhoff, come si è fatto nel Capitolo 3, è che si possono formulare le equazioni del circuito senza modificare la configurazione originale. Uno svantaggio, invece, è che per circuiti grandi e complessi il processo richiede un notevole sforzo computazionale. E il progresso della tecnologia e delle applicazioni dei circuiti ha portato a progettare circuiti sempre più complessi. Esistono però altri metodi, basati su alcuni importanti teoremi delle reti, quali i teoremi di Thevenin e Norton, che consentono di ridurre la complessità dei problemi. Poiché questi teoremi si applicano solo a circuiti *lineari*, in questo capitolo viene dapprima illustrato il concetto di linearità di un circuito. Oltre ai teoremi prima citati, vengono presentati altri importanti metodi, quali la sovrapposizione degli effetti e le trasformazioni dei generatori e il teorema del massimo trasferimento di potenza. Infine, le applicazioni pratiche presentate riguardano la costruzione di modelli dei generatori reali e la misura delle resistenze.

4.2 LINEARITÀ

Linearità è la proprietà goduta dai modelli matematici che vengono utilizzati per rappresentare relazioni lineari fra una causa e un effetto. Esistono diversi elementi circuituali lineari, ma in questo capitolo verranno considerati soltanto i resistori lineari. La linearità è il risultato combinato delle proprietà di omogeneità e additività. La proprietà di omogeneità afferma che quando l'ingresso (o eccitazione) viene moltiplicato per un fattore costante, l'uscita (o risposta) risulta moltiplicata per lo stesso fattore. Per un resistore, per esempio, la legge di Ohm rappresenta la relazione fra l'ingresso v e l'uscita i ,

$$v = iR \quad (4.1)$$

Se la corrente aumenta di un fattore costante k , anche la tensione risulta aumentata dello stesso fattore k , cioè

$$kv = k(iR) \quad (4.2)$$

La proprietà di additività richiede invece che la risposta alla somma di un certo numero di ingressi risulti uguale alla somma delle risposte a ciascuno degli ingressi applicato separatamente. Continuando con la relazione tensione-corrente del resistore, se

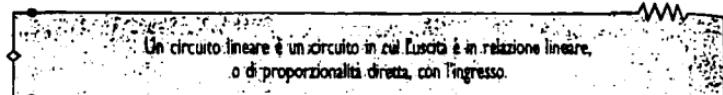
$$v_1 = i_1 R \quad (4.3a)$$

$$v_2 = i_2 R \quad (4.3b)$$

Allora applicando l'ingresso $(i_1 + i_2)$ si ha

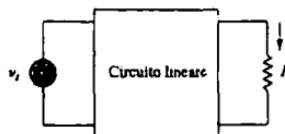
$$v = (i_1 + i_2)R = i_1 R + i_2 R = v_1 + v_2 \quad (4.4)$$

Si dice allora che il resistore è un elemento lineare, perché soddisfa sia la proprietà di omogeneità che quella di additività. Anche un circuito si dice lineare se soddisfa sia le proprietà di additività che quella di omogeneità. Un circuito lineare è costituito soltanto da elementi lineari, generatori dipendenti lineari e generatori indipendenti.



In questo testo verranno presi in considerazione solo circuiti lineari. Si noti che, essendo $p = i^2R = v^2/R$ (cioè una funzione quadratica, invece che lineare), la relazione fra la potenza e la tensione (o corrente) non è lineare. Per esempio, quando la corrente i_1 scorre in un resistore R , la potenza è $p_1 = R i_1^2$, e quando ci passa la corrente i_2 la potenza vale $p_2 = R i_2^2$. Se il resistore è percorso dalla corrente $i_1 + i_2$, la potenza assorbita vale $p_3 = R(i_1 + i_2)^2 = R i_1^2 + R i_2^2 + 2R i_1 i_2 \neq p_1 + p_2$. La relazione che esprime la potenza è quindi non lineare. I teoremi presentati in questo capitolo non si applicano allora alla potenza. Per comprendere meglio la proprietà di linearità, si consideri il circuito lineare mostrato in Figura 4.1. Il circuito non ha generatori indipendenti all'interno, risulta eccitato da un generatore di tensione v_s , che agisce da ingresso, ed è chiuso su un carico R . Si può considerare la corrente i che scorre in R come l'uscita del circuito. Se $v_s = 10 \text{ V}$ si ha $i = 2 \text{ A}$. Per la proprietà di linearità, $v_s = 1 \text{ V}$ darà allora $i = 0.2 \text{ A}$. Allo stesso modo, $i = 1 \text{ mA}$ viene ottenuta con $v_s = 5 \text{ mV}$.

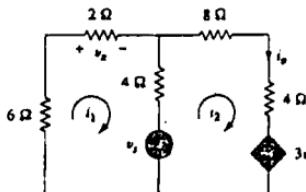
Figura 4.1
Un circuito lineare con ingresso v_s e uscita i .



Esempio 4.1

Nel circuito di Figura 4.2, calcolare i_o quando $v_s = 12 \text{ V}$ e quando $v_s = 24 \text{ V}$.

Figura 4.2
Per l'Esempio 4.1.



Soluzione: Applicando la KVL alle due maglie, si ottiene

$$12i_1 - 4i_2 + v_s = 0 \quad (4.1.1)$$

$$-4i_1 + 16i_2 - 3v_s - v_s = 0 \quad (4.1.2)$$

Ma $v_s = 2i_1$. La (4.1.2) diventa

$$-10i_1 + 16i_2 - v_s = 0 \quad (4.1.3)$$

sommmando le (4.1.1) e (4.1.3) si ottiene

$$2i_1 + 12i_2 = 0 \implies i_1 = -6i_2$$

Sostituendo nella (4.1.1),

$$-76i_2 + v_s = 0 \implies i_2 = \frac{v_s}{76}$$

Quando $v_s = 12 \text{ V}$,

$$i_o = i_2 = \frac{12}{76} \text{ A}$$

Quando $v_s = 24V$,

$$i_1 = i_2 = \frac{24}{76} A$$

e quindi, quando il valore del generatore raddoppia, anche i_0 diventa doppia

■ Esercizio 4.1 Per il circuito di Figura 4.3, determinare v_o quando $i_1 = 15$ e quando $i_1 = 30 A$.

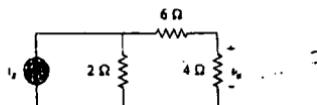


Figura 4.3
Per l'Esercizio 4.1.

Risposta: 10 V, 20 V.

Esempio 4.2

Supponere $I_o = 1 A$ e usare la proprietà di linearità per ricavare il valore di I_o nel circuito di Figura 4.4

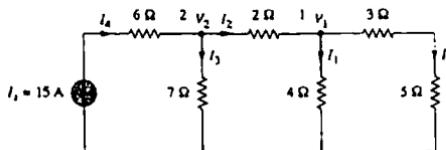


Figura 4.4
Per l'Esempio 4.2

Soluzione: Se $I_o = 1 A$, allora $V_1 = (3 + 5)I_o = 8 V$ e $I_1 = V_1/4 = 2 A$. Applicando la KCL al nodo 1,

$$I_2 = I_1 + I_o = 3A$$

$$V_2 = V_1 + 2I_2 = 8 + 6 = 14V, \quad I_3 = \frac{V_2}{7} = 2A$$

Applicando la KCL al nodo 2, si ha

$$I_4 = I_3 + I_2 = 5A$$

Perciò, $I_o = 5 A$. Se si suppone quindi $I_o = 1$ si ottiene $I_o = 5 A$; la corrente effettiva del generatore, che è 15 A, darà allora $I_o = 3$.

■ Esercizio 4.2 Supponere $V_o = 1 V$ e usare la linearità per calcolare il valore effettivo di V_o nel circuito di Figura 4.5.

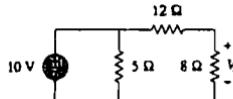


Figura 4.5
Per l'Esercizio 4.2

Risposta: 4 V.

4.3 SOVRAPPOSIZIONE

Se un circuito possiede due o più generatori indipendenti, una via possibile per calcolare il valore di una particolare variabile (tensione o corrente) è quella di usare l'analisi nodale o l'analisi agli anelli come nel Capitolo 3. Una via alternativa è però quella di calcolare il contributo di ciascuno dei generatori indipendenti al valore della variabile, e di sommare i contributi così ottenuti. Quest'ultimo approccio è noto come sovraposizione degli effetti. La sovrapposizione trova le sue basi nelle proprietà di linearità.

¹ La sovrapposizione degli effetti non è applicabile soltanto alla analisi dei circuiti, ma in qualunque modello nel quale si abbiano cause ed effetti legati da una relazione lineare.

- Il principio di sovrapposizione degli effetti risulta che la tensione su un elemento è la somma dei contributi dovuti a ciascun generatore indipendente.
- Per calcolare il contributo dovuto a un generatore indipendente si deve considerare solo questo generatore e gli altri generatori indipendenti come circuiti aperti.

Il principio di sovrapposizione risulta utile nella analisi di circuiti lineari aventi più di un generatore indipendente, perché permette di calcolare separatamente il contributo di ciascun generatore. Per applicarlo, è necessario però tenere presente quanto segue:

1. Viene considerato un generatore indipendente alla volta, con tutti gli altri generatori indipendenti spentati; ciò significa che i generatori di tensione vengono sostituiti con un generatore da 0 V (un corto circuito) e quelli di corrente con un generatore da 0 A (un circuito aperto). Si ottengono così circuiti più semplici.
2. I generatori dipendenti vengono lasciati come sono, perché sono controllati da altre variabili del circuito.

Ciò premesso, l'applicazione del principio di sovrapposizione consiste nei seguenti tre passi:

Applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti:

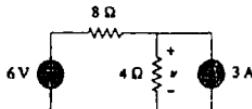
1. Spognere tutti i generatori indipendenti, eccetto uno. Calcolare il valore dell'uscita (tensione o corrente) dovuto al solo generatore funzionante, usando uno dei metodi presentati nei Capitoli 2 e 3.
2. Ripetere il passo 1 per ciascuno degli altri generatori indipendenti.
3. Calcolare il contributo totale sommando algebricamente tutti i contributi dei generatori indipendenti.

L'analisi dei circuiti con la sovrapposizione degli effetti ha uno svantaggio importante: molto spesso comporta una maggiore mole di lavoro. Se per esempio il circuito contiene tre generatori indipendenti, si dovranno analizzare tre circuiti, più semplici dell'originale, ciascuno dei quali fornisce il contributo dovuto al rispettivo generatore. La sovrapposizione è però utile nel ridurre un circuito complesso in circuiti più semplici, sostituendo generatori di tensione con corti circuiti e generatori di corrente con circuiti aperti. Si ricordi inoltre che la sovrapposizione è basata sulla linearità, e che perciò non si può applicare al calcolo della potenza su un elemento, perché la potenza dipende dal quadrato della tensione o corrente. Se si desidera conoscere il valore della potenza, bisognerà prima calcolare la corrente nell'elemento (o la tensione su di esso) usando la sovrapposizione.

Esempio 4.3

Usare il principio di sovrapposizione per calcolare v nel circuito di Figura 4.6.

Figura 4.6
Per l'Esempio 4.3.



Soluzione: Poiché ci sono due generatori, si pone

$$v = v_1 + v_2$$

dove v_1 e v_2 sono i contributi dovuti al generatore di tensione da 6 V e al generatore di corrente da 3 A, rispettivamente. Per calcolare v_1 , si pone il generatore di corrente a zero, come mostrato in Figura 4.7(a). Applicando la KVL alla maglia in Figura 4.7(a) si ha

$$12i_1 - 6 = 0 \implies i_1 = 0.5A$$

Perciò,

$$v_1 = 4i_1 = 2V$$

Si può anche usare la formula del partitore di tensione per ottenere v_1 , scrivendo

$$v_1 = \frac{4}{4+8} (6) = 2V$$

Per ottenere v_2 , si pone a zero il generatore di tensione, come in Figura 4.7(b). Usando la formula del partitore di corrente,

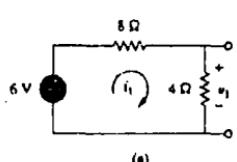
$$i_1 = \frac{8}{4+8} (3) = 2A$$

Da cui,

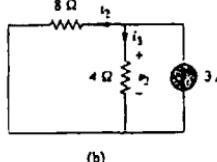
$$v_2 = 4i_1 = 8V$$

Si trova infine

$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10V$$



(a)



(b)

Figura 4.7
Per l'Esempio 4.3: (a) calcolo di v_1 ; (b) calcolo di v_2

■ **Esercizio 4.3** Applicando il principio di sovrapposizione, calcolare v_o nel circuito di Figura 4.8.

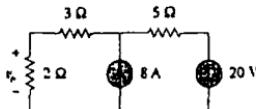


Figura 4.8
Per l'Esercizio 4.3

Risposta: 12 V ■

Esempio 4.4

Determinare i_o nel circuito di Figura 4.9 usando la sovrapposizione.

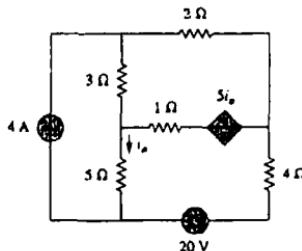


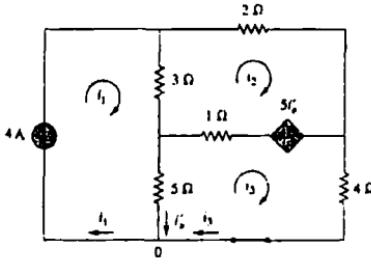
Figura 4.9
Per l'Esempio 4.4

Soluzione: Il circuito in Figura 4.9 contiene un generatore dipendente, che va lasciato così com'è. Si pone

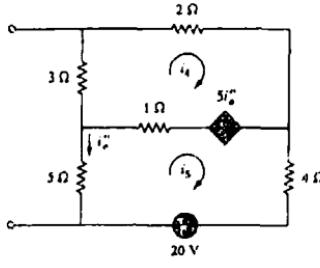
$$i_o = i'_o + i''_o \quad (4.4.1)$$

dove i'_o e i''_o sono dovuti al generatore di corrente da 4 A e al generatore di tensione da 20 V rispettivamente. Per calcolare i'_o , si spegne il generatore da 20 V e si ottiene il circuito di Figura 4.10(a). A esso si applica l'analisi agli anelli per calcolare i'_o . Per l'anello 1,

$$i_1 = 4A \quad (4.4.2)$$



(a)



(b)

Figura 4.10
Per l'Esempio 4.4: Applicazione della sovrapposizione per (a) calcolare i'_o ; (b) calcolare i''_o

Per l'anello 2,

$$-3i_1 + 6i_2 - 1i_3 - 5i'_e = 0 \quad (4.4.3)$$

Per l'anello 3,

$$-5i_1 - 1i_2 + 10i_3 + 5i'_e = 0 \quad (4.4.4)$$

Ma al nodo 0,

$$i_3 = i_1 - i'_e = 4 - i'_e \quad (4.4.5)$$

Sostituendo le (4.4.2) e (4.4.5) nelle (4.4.3) e (4.4.4) si ha un sistema di due equazioni

$$3i_2 - 2i'_e = 8 \quad (4.4.6)$$

$$i_2 + 5i'_e = 20 \quad (4.4.7)$$

che può essere risolto, ottenendo

$$i'_e = \frac{52}{17} \text{ A} \quad (4.4.8)$$

Per ottenere i''_e , si spegne il generatore di corrente da 4 A e il circuito diventa quello di Figura 4.10(b). Per l'anello 4, la KVL fornisce

$$6i_4 - i_3 - 5i''_e = 0 \quad (4.4.9)$$

e per l'anello 5,

$$-i_4 + 10i_5 - 20 + 5i''_e = 0 \quad (4.4.10)$$

Ma $i_3 = -i''_e$. Sostituendo nelle (4.4.9) e (4.4.10) si ha

$$6i_4 - 4i''_e = 0 \quad (4.4.11)$$

$$i_4 + 5i''_e = -20 \quad (4.4.12)$$

da cui, risolvendo

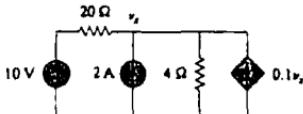
$$i''_e = -\frac{60}{17} \text{ A} \quad (4.4.13)$$

Infine, sostituendo le (4.4.8) e (4.4.13) nella (4.4.1) si ottiene

$$i_e = -\frac{8}{17} = -0.4706 \text{ A}$$

Esercizio 4.4 Faccendo uso della sovrapposizione, calcolare v_x nel circuito di Figura 4.11.

Figura 4.11
Per l'Esercizio 4.4.

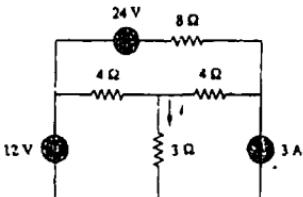


Risposta $v_x = 12.5 \text{ V}$.

Esempio 4.5

Nel circuito di Figura 4.12, usare il principio di sovrapposizione per calcolare i .

Figura 4.12
Per l'Esempio 4.5



Soluzione: In questo circuito si hanno tre generatori indipendenti. Si pone allora

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

dove i_1, i_2 e i_3 sono gli effetti dei generatori da 12 V, 24 V e 3 A rispettivamente. Per il calcolo di i_1 ,

si consideri il circuito di Figura 4.13(a). Componendo $4\ \Omega$ (il resistore di destra) in serie con $8\ \Omega$ si hanno $12\ \Omega$. I $12\ \Omega$ in parallelo con $4\ \Omega$ danno $12 \times 4 / 16 = 3\ \Omega$. Perciò,

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2\text{ A}$$

Per il calcolo di i_2 , si consideri il circuito di Figura 4.13(b). Applicando l'analisi agli anelli,

$$16i_a - 4i_b + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4i_a - i_b = -6 \quad (4.5.1)$$

$$7i_b - 4i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{7}{4}i_b \quad (4.5.2)$$

Sostituendo la (4.5.2) nella (4.5.1) si ottiene

$$i_2 = i_b = -1$$

Per il calcolo di i_3 , si consideri il circuito di Figura 4.13(c). Con l'analisi nodale,

$$3 = \frac{\nu_2}{8} + \frac{\nu_2 - \nu_1}{4} \quad \Rightarrow \quad 24 = 3\nu_1 - 2\nu_2 \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{4} = \frac{\nu_1}{4} + \frac{\nu_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \frac{10}{3}\nu_1 \quad (4.5.4)$$

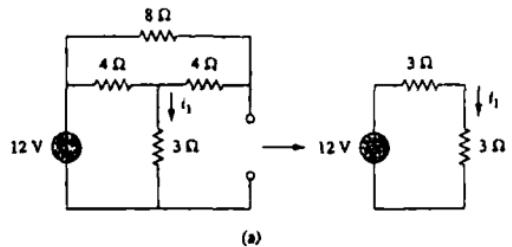
Sostituendo la (4.5.4) nella (4.5.3) si perviene a $\nu_1 = 3\text{ V}$

$$i_3 = \frac{\nu_1}{3} = 1\text{ A}$$

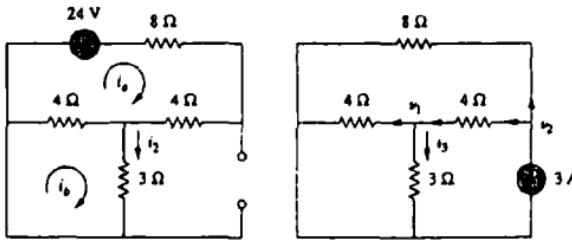
In conclusione,

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2\text{ A}$$

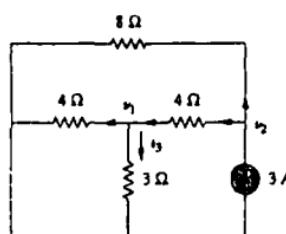
Figura 4.13
Per l'Esempio 4.5.



(a)



(b)



(c)

Esercizio 4.5 Calcolare i nel circuito di Figura 4.14 usando il principio di sovrapposizione

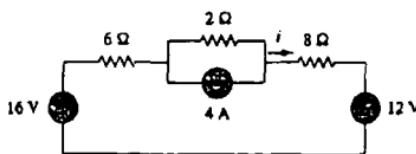


Figura 4.14
Per l'Esercizio 4.5.

Risposta: 0.75 A

CIRCUITI EQUIVALENTI:

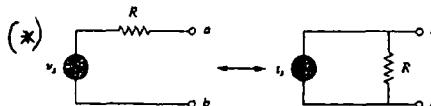
HAI VUO CARATTERISTICHE FISICHE

4.4 TRASFORMAZIONE DEI GENERATORI

Si è visto nei capitoli precedenti che le trasformazioni serie-parallelo e quelle stella-triangolo risultano utili nella semplificazione dei circuiti. Un ulteriore ausilio alla semplificazione viene dalla trasformazione dei generatori, alla cui base, così come alla base delle trasformazioni appena ricordate, sta il concetto di equivalenza. Si ricordi che un circuito è detto equivalente a un altro se le loro caratteristiche $v-i$ sono identiche. Nel Paragrafo 3.6 si è poi visto che le equazioni nelle tensioni di nodo (nelle correnti di anello) possono essere scritte in modo diretto se i generatori sono tutti indipendenti di corrente (di tensione). È quindi importante, nella analisi dei circuiti, avere la possibilità di sostituire un generatore di tensione con in serie un resistore con un generatore di corrente con un resistore in parallelo, o viceversa, come mostrato nella Figura 4.15. Entrambe le sostituzioni sono chiamate trasformazioni di generatori.

Figura 4.15
Trasformazione di generatori indipendenti

(*) LA RESISTENZA
E LA STESSA.
CONVIENE IL TIPO
L'INGRASSATORE
E LA TOPOLOGIA.



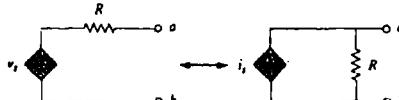
(*) La trasformazione di generatori consiste nel sostituire un generatore di tensione con in serie un resistore con un generatore di corrente o viceversa.

I due circuiti di Figura 4.15 sono equivalenti, a parità che abbiano la stessa relazione tensione-corrente ai terminali $a-b$. Quando i generatori sono spenti, la resistenza equivalente ai terminali $a-b$ è R in entrambi i circuiti. Inoltre, quando i terminali $a-b$ sono in corto circuito, la corrente che scorre nel corto circuito da a a b vale $i_{sc} = v_s/R$ nel circuito di sinistra, e $i_{sc} = i_s$ nel circuito di destra. Perché i due circuiti siano equivalenti è necessario quindi che sia $v_s/R = i_s$. La trasformazione dei generatori richiede allora che

$$v_s = i_s R \quad \text{oppure} \quad i_s = \frac{v_s}{R}. \quad (4.5)$$

La trasformazione dei generatori si applica anche ai generatori dipendenti, se si presta la dovuta attenzione alla variabile dipendente. Come si vede nella Figura 4.16, un generatore dipendente di tensione in serie con un resistore può essere trasformato in un generatore dipendente di corrente in parallelo al resistore, o viceversa, una volta verificato che la (4.5) sia rispettata.

Figura 4.16
Trasformazione di generatori dipendenti



Come nel caso della trasformazione stella-triangolo vista nel Capitolo 2, una trasformazione di generatori non altera la parte restante del circuito. Quando è applicabile, la trasformazione dei generatori rappresenta uno strumento utile per manipolare i circuiti al fine di semplificare l'analisi. È importante però tenere presente le considerazioni seguenti.

1. Come si vede dalla Figura 4.15 (o dalla Figura 4.16), la freccia del generatore di corrente è diretta verso il terminale dove c'è il segno + del generatore di tensione.
2. Dalle (4.5) si deduce che la trasformazione dei generatori non è possibile quando $R = 0$, che corrisponde al caso di un generatore ideale di tensione isolato. Solitamente però, per i generatori della realtà, $R \neq 0$. Allo stesso modo, un generatore ideale di corrente in parallelo con $R = \infty$ non può essere sostituito con un generatore di tensione. Il discorso su generatori ideali e non ideali verrà approfondito nel Paragrafo 4.10.1.

Esempio 4.6

Usare la trasformazione dei generatori per calcolare i_2 nel circuito di Figura 4.17.

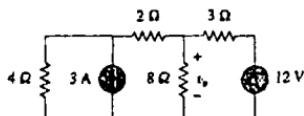


Figura 4.17
Per l'Esempio 4.6.

Soluzione: Il generatore di tensione e quello di corrente vengono trasformati per ottenere il circuito in Figura 4.18(a). Componendo poi i resistori da $4\ \Omega$ e da $2\ \Omega$ in serie, e trasformando il generatore da 12 V , si ottiene la Figura 4.18(b). Ora, componendo i resistori da $3\ \Omega$ e $6\ \Omega$ in parallelo, ottenendo un resistore da $2\ \Omega$, e componendo inoltre i generatori di corrente da 2 A e da 4 A , ottenendo un generatore da 2 A , si arriva al circuito di Figura 4.18(c).

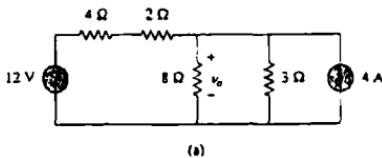
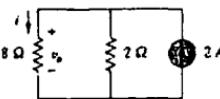
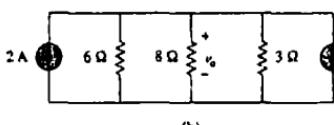


Figura 4.18
Per l'Esempio 4.6.



Per il partitore di contenuti della Figura 4.18(c) si ottiene

$$r = \frac{2}{2+8}(2) = 0.4$$

$$V_0 = 8i = 8(0.4) = 3.2 \text{ V}$$

In maniera alternativa, si può notare che i resistori da $8\ \Omega$ e $2\ \Omega$ in Figura 4.18(c), essendo in parallelo, hanno la stessa tensione v . Perciò:

$$v_p = (8 \parallel 2)(2 \text{ A}) = \frac{8 \times 2}{10} (2) = 3.2 \text{ V}$$

Esercizio 4-6 Determinare i_1 nel circuito di Figura 4-19 usando la trasformazione dei generatori.

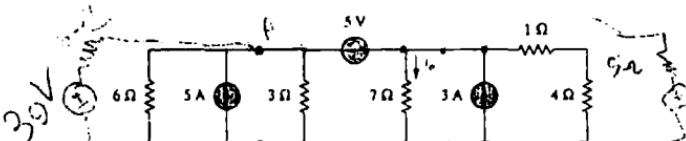


Figura 4.19
Per l'Esercizio 4.6

Risposta: 178 A

Esempio 4.7

Calcolare μ , in Figura 4-20 usando la trasformazione dei generatori.

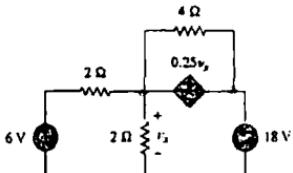


Figura 4.20
Per l'Esempio 4.7

Soluzione: Il circuito in Figura 4.20 contiene un generatore di corrente controllato in tensione. Questo può essere trasformato, assieme al generatore di tensione indipendente da 6 V, come mostrato in Figura 4.21(a). Il generatore di tensione da 18 V non viene trasformato perché non è collegato in serie a un resistore. I due resistori da 2Ω in parallelo vengono composti per dare un resistore da 1Ω , in parallelo al generatore di corrente da 3 A; questo viene poi trasformato in un generatore di tensione, come mostrato in Figura 4.21(b). Si noti che i terminali relativi alla tensione v_x non sono cambiati. Applicando la KVL alla maglia in Figura 4.21(b)

$$-3 + 5i + v_x + 18 = 0 \quad (4.7.1)$$

Figura 4.21
Per l'Esercizio 4.7: applicazione della trasformazione dei generatori al circuito di Figura 4.20.



Applicando la KVL alla maglia contenente soltanto il generatore di tensione da 3 V, il resistore da 1Ω e v_x , si ha invece

$$-3 + 1i + v_x = 0 \implies v_x = 3 - i \quad (4.7.2)$$

Sostituendo nella (4.7.1), si ottiene

$$15 + 5i + 3 - i = 0 \implies i = -4.5 \text{ A}$$

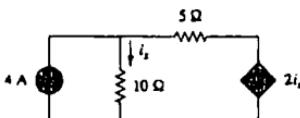
In alternativa, si può applicare la KVL alla maglia contenente v_x , il resistore da 4Ω , il generatore di tensione controllato in tensione e il generatore di tensione da 18 V in Figura 4.21(b). Si ottiene

$$-v_x + 4i + v_x + 18 = 0 \implies i = -4.5 \text{ A}$$

Pertanto, $v_x = 3 - i = 7.5 \text{ V}$.

■ **Esercizio 4.7** Utilizzare la trasformazione dei generatori per calcolare i_1 nel circuito in Figura 4.22.

Figura 4.22
Per l'Esercizio 4.7.



Risposta: 1.176 A.

4.5 TEOREMA DI THEVENIN

Accade di frequente, nei problemi di progetto di circuiti, che un particolare elemento di un circuito sia considerato variabile e venga detto *carico*, mentre gli altri elementi restano fissi. Come tipico esempio, si pensi a una presa di corrente domestica, che può essere collegata a diverse apparecchiature, le quali possono essere considerate come un carico variabile. Ogni volta che l'elemento variabile cambia, il circuito deve essere analizzato di nuovo. Al fine di semplificare il ricalcolo, il teorema di Thevenin fornisce un metodo per sostituire la parte fissa del circuito con un circuito equivalente.

Secondo il teorema di Thevenin, il circuito lineare della Figura 4.23(a) può essere sostituito da quello di Figura 4.23(b). (Il carico nella Figura 4.23 può essere costituito da un singolo resistore o da un altro circuito vero e proprio). Il circuito alla sinistra dei terminali $a-b$ nella Figura 4.23(b) è chiamato *circuito equivalente di Thevenin*; il teorema fu dimostrato nel 1883 da M. Leon Thevenin (1857-1926), un ingegnere dei telegrafi francese.

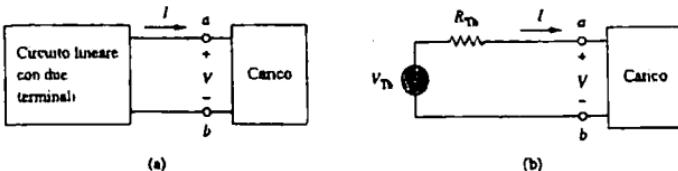


Figura 4.23
Sostituzione di un circuito lineare a due terminali con il suo equivalente Thevenin.
(a) circuito originale,
(b) circuito equivalente di Thevenin

Il teorema di Thevenin afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione V_{Th} in serie con una resistenza R_{Th} , dove V_{Th} è la tensione a circuito aperto ai terminali $a-b$, e la resistenza R_{Th} è la resistenza di ingresso del circuito.

Quando i generatori indipendenti sono spenti

La dimostrazione del teorema verrà svolta più avanti, nel Paragrafo 4.7. Un problema importante ora è quello di calcolare la tensione equivalente di Thevenin V_{Th} e la resistenza R_{Th} . A tale scopo, si supponga che i due circuiti della Figura 4.23 siano equivalenti. Due circuiti sono detti equivalenti se hanno la stessa relazione tensione-corrente ai terminali. Si ricercano ora le condizioni che rendono i due circuiti di Figura 4.23 equivalenti. Se i terminali $a-b$ vengono lasciati in circuito aperto, non scorre nessuna corrente, e la tensione a circuito aperto ai terminali $a-b$ in Figura 4.23(a) deve essere uguale al generatore di tensione V_{Th} di Figura 4.23(b), essendo i due circuiti equivalenti. Perciò V_{Th} è la tensione a circuito aperto ai terminali, come mostrato in Figura 4.24(a); cioè

$$V_{\text{Th}} = v_{oc} \quad (4.6)$$

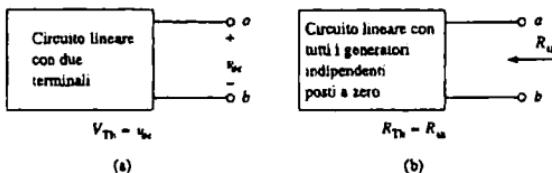


Figura 4.24
Calcolo di V_{Th} e R_{Th} .

Con il carico scollegato e i terminali $a-b$ in circuito aperto, si spengono ora tutti i generatori indipendenti. La resistenza di ingresso (o resistenza equivalente) del circuito inerte ai terminali $a-b$ nella Figura 4.23(a) deve essere uguale a R_{Th} , in Figura 4.23(b), essendo i due circuiti equivalenti. Perciò, R_{Th} è la resistenza di ingresso ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti, come mostrato nella Figura 4.24(b),

$$R_{\text{Th}} = R_{in} \quad (4.7)$$

Per l'applicazione della regola di calcolo della resistenza di Thevenin R_{Th} , bisogna considerare due casi.

CASO 1

Se la rete non ha generatori dipendenti, si spengono tutti i generatori indipendenti. R_{Th} è la resistenza di ingresso della rete vista ai terminali $a-b$, come mostrato nella Figura 4.24(b).

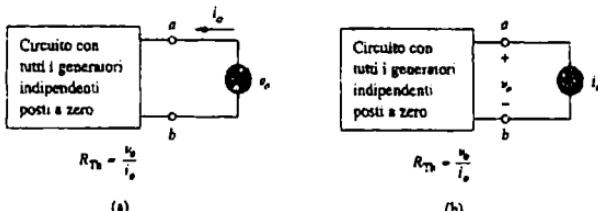
CASO 2

Se la rete contiene generatori dipendenti, si spengono tutti i generatori indipendenti. Come nel caso della sovrapposizione degli effetti, i generatori dipendenti non devono essere spenti, perché sono controllati da variabili del circuito. Si applica un generatore di tensione v_o ai terminali $a-b$, e si determina la corrente risultante i_o . Allora $R_{\text{Th}} = v_o/i_o$, come mostrato in Figura 4.25(a). In alternativa, si può collegare un generatore di corrente i_o ai terminali $a-b$ come mostrato in Figura 4.25(b) e calcolare la ten-

sione v_o ai terminali. Anche qui $R_{Th} = v_o/i_o$. Entrambi gli approcci devono fornire lo stesso risultato. In entrambi è inoltre possibile scegliere un valore arbitrario per v_o e i_o . Per esempio, si può porre $v_o = 1$ V oppure $i_o = 1$ A, o anche non specificare il valore di v_o o i_o .

Figura 4.25

Calcolo di R_{Th} in un circuito con generatori dipendenti.



Avviene talvolta che R_{Th} assuma valore negativo. In questo caso, la resistenza negativa indica che il circuito è in grado di erogare potenza. Ciò è possibile, in un circuito contenente generatori dipendenti, come verrà meglio illustrato nell'Esempio 4.10. Il teorema di Thevenin è molto importante per l'analisi dei circuiti perché aiuta a semplificarli. Un circuito con molti elementi può essere sostituito con un singolo generatore di tensione indipendente e un singolo resistore. Una simile sostituzione torna spesso utile anche nel progetto dei circuiti. Come si è appena visto, un circuito lineare con un carico variabile può essere sostituito dal suo equivalente Thevenin, escluso il carico. La rete equivalente si comporta, agli effetti esterni, allo stesso modo del circuito originale. Si consideri un circuito lineare chiuso su un carico R_L , come mostrato nella Figura 4.26(a). La corrente I_L nel carico e la tensione V_L sul carico si ottengono facilmente, dopo avere ricavato l'equivalente Thevenin del circuito collegato al carico, come si vede nella Figura 4.26(b). Dalla Figura 4.26(b), si ottiene

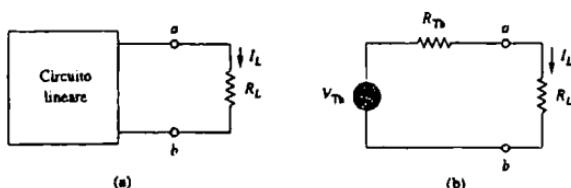
$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \quad (4.8a)$$

$$V_L = R_L I_L = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} V_{Th} \quad (4.8b)$$

Si noti dalla Figura 4.26(b) che l'equivalente Thevenin è un semplice partitore di tensione, che fornisce direttamente il valore di V_L .

Figura 4.26

Circuito con un carico:
(a) circuito originale,
(b) equivalente Thevenin.

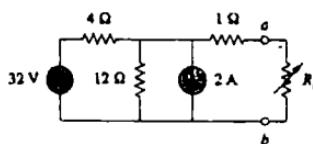


Esempio 4.8

Determinare il circuito equivalente di Thevenin del circuito mostrato in Figura 4.27, alla sinistra dei terminali a-b. Calcolare poi la corrente con $R_L = 6, 16$ e 36Ω .

Figura 4.27

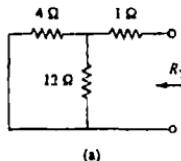
Per l'Esempio 4.8.



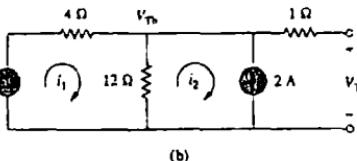
Soluzione: Si trova R_{Th} spegnendo il generatore di tensione da 32 V (sostituendolo con un corto circuito) e il generatore di corrente da 2 A (sostituendolo con un circuito aperto). Il circuito diventa

quello in Figura 4.28(a). Allora,

$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4 \Omega$$



(a)



(b)

Per determinare V_{Th} , si consideri il circuito in Figura 4.28(b). Applicando l'analisi agli anelli alle due maglie si ottiene

$$-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0, \quad i_2 = -2 \text{ A}$$

Risolvendo rispetto a i_1 , si ottiene $i_1 = 0.5 \text{ A}$. Perciò,

$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12(0.5 + 2.0) = 30 \text{ V}$$

Una alternativa ancora più semplice è quella di usare l'analisi nodale. Si trascura il resistore da 1Ω , nel quale non passa corrente. Nel nodo superiore, la KCL fornisce

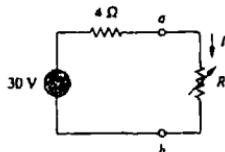
$$\frac{32 - V_{Th}}{4} + 2 = \frac{V_{Th}}{12}$$

cioè

$$96 - 3V_{Th} + 24 = V_{Th} \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 30 \text{ V}$$

come ottenuto in precedenza. Si sarebbe potuta anche usare la trasformazione dei generatori per ottenere V_{Th} . Il circuito equivalente di Thevenin è mostrato in Figura 4.29. La corrente in R_L è

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$



Quando $R_L = 6$,

$$I_L = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

Quando $R_L = 16$,

$$I_L = \frac{30}{20} = 1.5 \text{ A}$$

Quando $R_L = 36$,

$$I_L = \frac{30}{40} = 0.75 \text{ A}$$

Esercizio 4.8: Usando il teorema di Thevenin, determinare il circuito equivalente alla sinistra dei terminali a-b nel circuito di Figura 4.30. Calcolare poi la corrente i

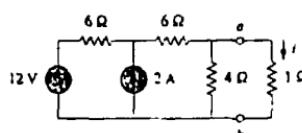


Figura 4.28

Per l'Esempio 4.8: (a) calcolo di R_{Th} , (b) calcolo di V_{Th} .

Figura 4.29

Circuito equivalente di Thevenin per l'Esempio 4.8.

Figura 4.30

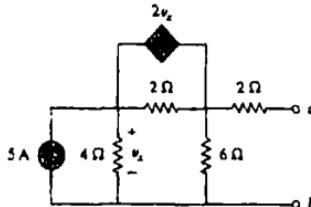
Per l'Esercizio 4.8.

Risposta $V_{Th} = 6 \text{ V}$, $R_{Th} = 3 \Omega$, $i = 1.5 \text{ A}$.

Esempio 4.9

Determinare l'equivalente Thevenin del circuito di Figura 4.31.

Figura 4.31
Per l'Esempio 4.9.



Soluzione: A differenza del circuito dell'esempio precedente, questo circuito contiene un generatore dipendente. Per ottenere R_{Th} , si pone a zero il generatore indipendente ma si lascia immutato quello dipendente. A causa della presenza del generatore dipendente, si eccita la rete con un generatore di tensione v_x collegato ai terminali come indicato in Figura 4.32(a). Si può porre $v_x = 1 \text{ V}$ per semplificare i calcoli, essendo il circuito lineare. Si vuole calcolare la corrente i_x attraverso i terminali, e da qui ottenere $R_{Th} = 1/i_x$. (In alternativa, è possibile inserire un generatore di corrente da 1 A, trovare la corrispondente tensione v_x , e ottenere $R_{Th} = v_x/1$.)

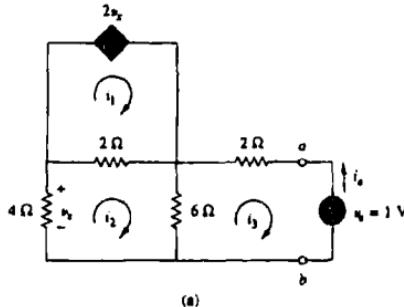
Applicando l'analisi agli anelli, alla maglia 1 del circuito di Figura 4.32(a) si ha

$$-2v_x + 2(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{cioè} \quad v_x = i_1 - i_2$$

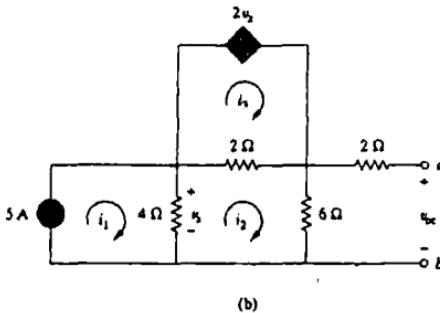
Ma $-4i_2 = v_x = i_1 - i_2$; quindi,

$$i_1 = -3i_2 \quad (4.9.1)$$

Figura 4.32
Calcolo di R_{Th} e i_x per l'Esempio 4.9



(a)



(b)

Per le maglie 2 e 3 la KVL fornisce

$$4i_2 + 2(i_2 - i_1) + 6(i_2 - i_1) = 0 \quad (4.9.2)$$

$$6(i_3 - i_2) + 2i_3 + 1 = 0 \quad (4.9.3)$$

Risolvendo queste tre equazioni si ottiene

$$i_3 = -\frac{1}{6} \text{ A}$$

Ma $i_6 = -i_3 = 1/6 \text{ A}$. Quindi,

$$R_{Th} = \frac{1 \text{ V}}{i_6} = 6 \Omega$$

Per ottenere V_{Th} , si determina v_{oc} nel circuito di Figura 4.32(b). Applicando l'analisi agli anelli, si ottiene

$$i_1 = 5 \quad (4.9.4)$$

$$-2v_s + 2(i_3 - i_2) = 0 \implies v_s = i_3 - i_2 \quad (4.9.5)$$

$$4(i_2 - i_1) + 2(i_2 - i_3) + 6i_2 = 0$$

e semplificando

$$12i_2 - 4i_1 - 2i_3 = 0 \quad (4.9.6)$$

Ma $4(i_1 - i_2) = v_s$. La soluzione di queste equazioni fornisce $i_2 = 10/3$. Quindi,

$$V_{Th} = v_{oc} = 6i_2 = 20 \text{ V}$$

L'equivalente Thevenin è mostrato nella Figura 4.33.

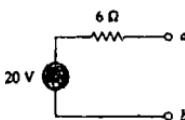


Figura 4.33
Equivalenti Thevenin del circuito di Figura 4.31.

■ **Esercizio 4.9** Determinare il circuito equivalente di Thevenin del circuito di Figura 4.34, alla sinistra dei terminali.

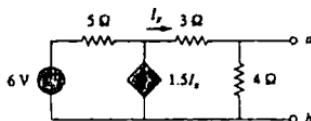


Figura 4.34
Per l'Esercizio 4.9.

Risposta $V_{Th} = 5.33 \text{ V}$, $R_{Th} = 0.44 \Omega$.

Esempio 4.10

Determinare l'equivalente Thevenin del circuito di Figura 4.35(a) ai terminali a-b.

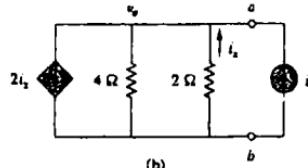
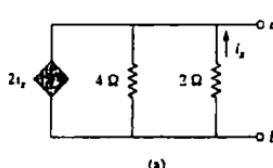
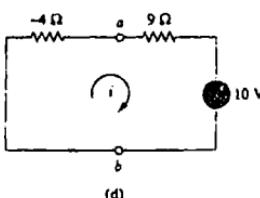
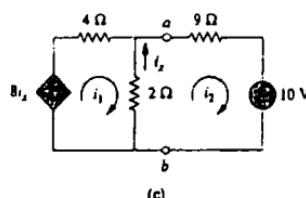


Figura 4.35
Per l'Esempio 4.10.



Soluzione: 1. Dare una definizione precisa del problema.

Il problema è definito in modo chiaro; si deve ricavare l'equivalente di Thevenin del circuito in Figura 4.35 (a).

2. Eleniare ciò che si conosce riguardo al problema.

Il circuito è formato da un resistore da 2Ω in parallelo con un generatore dipendente di corrente. È importante notare che non ci sono generatori indipendenti.

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

La prima cosa da tener presente è che non essendoci generatori indipendenti, si deve alimentare il circuito esternamente. In aggiunta, quando non ci sono generatori indipendenti, la tensione v_a , avrà valore nullo, si dovrà calcolare solo R_{Th} . Il metodo più semplice è quello di alimentare il circuito con un generatore di corrente da 1 A o di tensione da 1 V. Dal momento che si dovrà calcolare la resistenza equivalente (positiva o negativa), si preferisce usare un generatore di corrente e l'analisi nodale, che darà una tensione ai terminali di uscita pari alla resistenza equivalente (quando ai terminali scorre una corrente di 1 A, la tensione v_o è pari alla resistenza equivalente).

In alternativa, il circuito potrebbe essere alimentato anche da un generatore di tensione di 1 V e si potrebbe usare l'analisi agli anelli per ricavare la resistenza equivalente.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema

Si scrive l'equazione KCL al nodo a in Figura 4.35 (b) assumendo $i_a = 1$ A.

$$2 \cdot i_1 + \frac{(v_o - 0)}{4} + \frac{(v_o - 0)}{2} + (-1) = 0 \quad (4.10.1)$$

Visto che si hanno due incognite e una sola equazione, è necessaria un'equazione di vincolo.

$$i_1 = \frac{(0 - v_o)}{2} = -\frac{v_o}{2} \quad (4.10.2)$$

Sostituendo la (4.10.2) nella (4.10.1) si ottiene:

$$2 \cdot \left(-\frac{v_o}{2}\right) + \frac{(v_o - 0)}{4} + \frac{(v_o - 0)}{2} + (-1) = \left(-1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot v_o - 1 = 0$$

cioè

$$v_o = -4 \text{ V}$$

Essendo $v_o = 1 \cdot R_{Th}$, allora $R_{Th} = v_o = -4\Omega$.

Il valore negativo della resistenza indica che, secondo la convenzione degli utilizzatori, il circuito in Figura 4.35 (a) eroga potenza. Naturalmente i resistori in Figura 4.35 (a) non possono erogare potenza (la assorbono), e quindi a erogare potenza è il generatore dipendente. Questo è un esempio di come la combinazione di un generatore dipendente e di resistori può essere usata per simulare una resistenza negativa.

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Si nota subito che la soluzione ha valore negativo. Questo non è possibile in un circuito passivo, ma in questo circuito c'è un dispositivo attivo (il generatore dipendente di corrente). Perciò il circuito equivalente è attivo e può fornire potenza.

Ora si valuta la soluzione. Il modo migliore è di effettuare una verifica, usando metodi diversi per vedere se la soluzione ottenuta è la stessa.

Si inserisce un generatore di tensione da 10 V in serie con un resistore da 9Ω , tra i terminali di uscita del circuito iniziale e poi al circuito equivalente di Thevenin. Per facilitare la soluzione del circuito, si sostituisce il parallelo tra il generatore di corrente e il resistore da 4Ω , con la serie di un generatore di tensione e lo stesso resistore da 4Ω , usando la trasformazione dei generatori. Con questa modifica, con il nuovo carico, si ottiene il circuito in Figura 4.35 (c).

Si possono scrivere le due equazioni di anello (KVL)

$$8 \cdot i_2 + 4 \cdot i_1 + 2 \cdot (i_1 - i_2) = 0 \quad (4.10.3)$$

$$2 \cdot (i_2 - i_1) + 9 \cdot i_2 + 10 = 0 \quad (4.10.4)$$

Si hanno solo due equazioni, ma le incognite sono tre, per cui è necessaria una equazione di vincolo.

Si può usare la seguente

$$i_x = i_2 - i_1 \quad (4.10.5)$$

Sostituendo quest'ultima equazione nella (4.10.3), si ha:

$$(4 + 2 - 8) \cdot i_1 + (-2 + 8) \cdot i_2 = 0 \quad .$$

cioè

$$i_1 = 3 \cdot i_2 \quad (4.10.6)$$

Semplificando la (4.10.4):

$$-2 \cdot i_1 + 11 \cdot i_2 = -10 \quad (4.10.7)$$

Sostituendo la (4.10.6) nella (4.10.7), si ha:

$$-6 \cdot i_2 + 11 \cdot i_2 = -10$$

cioè

$$i_2 = -10/5 = -2A$$

Collegando il generatore di tensione da 10V in serie con un resistore da 9Ω al circuito equivalente di Thevenin, si ottiene un circuito molto semplice formato da una sola maglia come mostrato in Figura 4.35 (d). Applicando la KVL si ha

$$-4 \cdot i + 9 \cdot i + 10 = 0 \quad \text{cioè} \quad i = -10/5 = -2A$$

6 Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Sì è ricavato il circuito equivalente come richiesto dal problema.

La verifica della soluzione è stata fatta confrontando il risultato ottenuto usando il circuito equivalente con quello ottenuto usando il circuito iniziale.

Esercizio 4.10 Ottenere il circuito equivalente di Thevenin del circuito di Figura 4.36

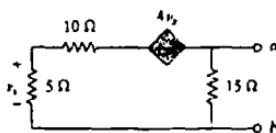


Figura 4.36
Per l'Esercizio 4.10

Risposta $i_{Th} = 0 V$, $R_{Th} = 7.5 \Omega$.

4.6 TEOREMA DI NORTON

Nel 1926, 43 anni dopo la pubblicazione del teorema di Thevenin, E. L. Norton, un ingegnere americano dei Bell Telephone Laboratories, propose un teorema simile

Il teorema di Norton afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito da un circuito equivalente formato da un generatore di corrente I_N in parallelo a un resistore R_N , in cui I_N è la corrente di corto circuito ai terminali e R_N è la resistenza equivalente, o resistenza di ingresso, ai terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.

Il circuito in Figura 4.37(a) può quindi essere sostituito da quello in Figura 4.37(b).

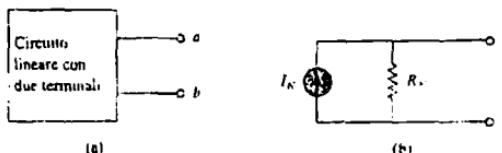


Figura 4.37
(a) Circuito originale.
(b) circuito equivalente di Norton.

La dimostrazione del teorema di Norton verrà svolta nel prossimo paragrafo. Si presenta ora il procedimento per ottenere R_N e I_N . R_N viene ottenuto nello stesso modo in cui si ottiene R_{Th} . Infatti, da quanto è noto dalle trasformazioni dei generatori, le resistenze di Thevenin e di Norton sono uguali; cioè

$$R_N = R_{Th} \quad (4.9)$$

Per calcolare la corrente di Norton I_N , si determina la corrente di corto circuito che scorre da a a b in entrambi i circuiti della Figura 4.37.

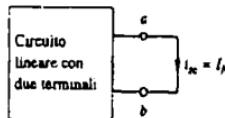
È evidente che la corrente di corto circuito della Figura 4.37(b) è I_N . Essa deve ugualarsi alla corrente di corto circuito da a a b nella Figura 4.37(a), perché i due circuiti sono equivalenti. Così

$$I_N = i_{sc} \quad (4.10)$$

come mostrato nella Figura 4.38. I generatori dipendenti e indipendenti vengono trattati alla stessa maniera del teorema di Thevenin.

Figura 4.38

Determinazione della corrente di Norton I_N .



Si osservi la stretta relazione fra i teoremi di Thevenin e di Norton: $R_N = R_{Th}$, come afferma la (4.9), e

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \quad (4.11)$$

Questo è sostanzialmente quanto affermato dalla trasformazione dei generatori. Per questo motivo, la trasformazione dei generatori è spesso detta trasformazione Thevenin-Norton. Poiché V_{Th} , I_N e R_{Th} sono legati dalla (4.11), per determinare il circuito equivalente di Thevenin o di Norton è necessario determinare:

- La tensione a circuito aperto v_{oc} ai terminali a e b .
- La corrente di corto circuito i_{sc} fra i terminali a e b .
- La resistenza equivalente, o di ingresso, R_{th} ai terminali a e b , con tutti i generatori indipendenti spenti.

È possibile calcolare due qualunque delle tre quantità citate con il metodo che richiede lo sforzo minore, e usarle per ricavare la terza mediante la legge di Ohm. L'Esempio 4.11 illustra questo procedimento. Inoltre, poiché

$$V_{Th} = v_{oc} \quad (4.12a)$$

$$I_N = i_{sc} \quad (4.12b)$$

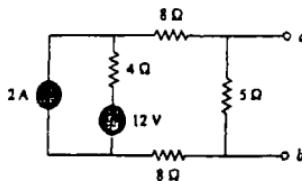
$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = R_N \quad (4.12c)$$

le prove a circuito aperto e in corto circuito sono sufficienti per ottenere entrambi gli equivalenti, Thevenin e Norton di un circuito che contiene almeno un generatore indipendente.

Esempio 4.11

Determinare il circuito equivalente di Norton per il circuito di Figura 4.39 ai terminali a - b .

Figura 4.39
Per l'Esempio 4.11.



Soluzione: R_N si calcola allo stesso modo di R_{Th} nel circuito equivalente di Thevenin: si pongono a zero i generatori indipendenti; ne risulta il circuito di Figura 4.40(a), dal quale si ricava R_N come

$$R_N = 5 \parallel (8 + 4 + 8) = 5 \parallel 20 = \frac{20 \times 5}{25} = 4 \Omega$$

Per ottenere I_N , si cortocircuitano i terminali a e b , come mostrato nella Figura 4.40(b). Il resistore da 5 Ω viene ignorato, perché cortocircuitato. Applicando l'analisi agli anelli si ottiene

$$i_1 = 2 \text{ A}, \quad 20i_2 - 4i_1 - 12 = 0$$

E da queste si ricava

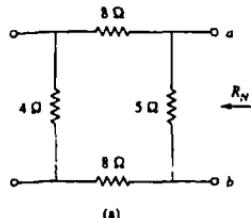
$$i_2 = 1 \text{ A} = i_{sc} = I_N$$

In alternativa, è possibile determinare i_N come V_{Th}/R_{Th} . Si ottiene V_{Th} come tensione a circuito aperto fra a e b in Figura 4.40(c). Con l'analisi degli anelli si ottiene

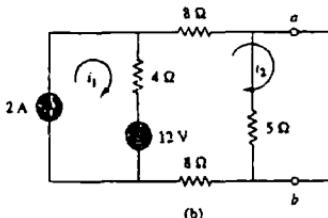
$$i_3 = 2 \text{ A}$$

$$25i_4 - 4i_3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 = 0.8 \text{ A}$$

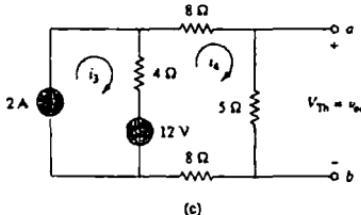
$$v_{oc} = V_{Th} = 5i_4 = 4 \text{ V}$$



(a)



(b)



(c)

Perciò,

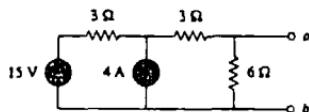
$$i_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4}{4} = 1 \text{ A}$$

come ottenuto in precedenza. Quest'ultimo risultato conferma quanto affermato dalla (4.12c), $R_{Th} = v_{oc}/i_N = 4/1 = 4 \Omega$.

Il circuito equivalente di Norton è quindi quello mostrato in Figura 4.41.



Esercizio 4.11 Determinare l'equivalente Norton per il circuito di Figura 4.42



Risposta $R_N = 3 \Omega$, $i_N = 4.5 \text{ A}$.

Esempio 4.12

Usando il teorema di Norton, calcolare R_N e i_N per il circuito di Figura 4.43 ai terminali a - b .

Soluzione: Per il calcolo di R_N , si pone a zero il generatore indipendente di tensione, e si collega un generatore di tensione $v_o = 1 \text{ V}$ (o qualunque altra tensione v_o) ai terminali. Si ottiene il circuito

Figura 4.40

Per l'Esempio 4.11:
(a) R_N , (b) $i_N = v_{oc}$,
(c) $V_{Th} = v_{oc}$.

Figura 4.41

Equivalenti Norton del circuito
in Figura 4.39.

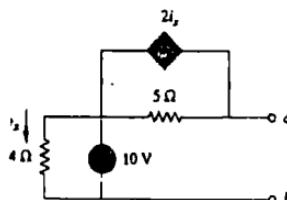
Figura 4.42

Per l'Esercizio 4.11

di Figura 4.44(a). Il resistore da 4Ω può essere trascurato perché cortocircuitato. Inoltre, a causa della presenza del corto circuito, il resistore da 5Ω , il generatore di tensione e il generatore dipendente di corrente risultano in parallelo. Quindi, $i_x = 0$. Al nodo a , $i_0 = 5/1 = 5\text{ A}$, e quindi

$$R_N = \frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{5} = 0.2\Omega$$

Figura 4.43
Per l'Esempio 4.12.



Per il calcolo di I_N , si pongono in corto circuito i terminali a e b e si trova la corrente i_{x0} , come indicato nella Figura 4.44(b). Si noti dalla figura che il resistore da 4Ω , il generatore di tensione da 10 V , il resistore da 5Ω e il generatore dipendente di corrente risultano in parallelo. Perciò

$$i_x = \frac{10}{4} = 2.5\text{ A}$$

Al nodo a , la KCL fornisce

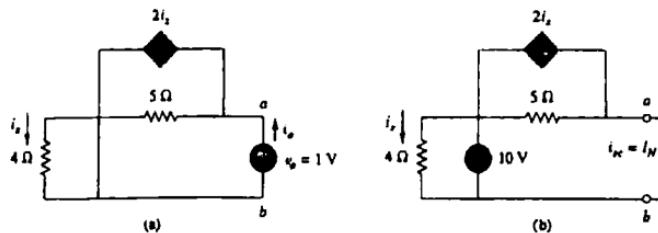
$$i_N = \frac{10}{5} + 2i_x = 2 + 2(2.5) = 7\text{ A}$$

In conclusione,

$$I_N = 7\text{ A}$$

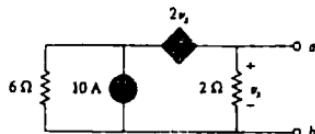
Figura 4.44

Per l'Esempio 4.12: (a) calcolo di R_N , (b) calcolo di I_N .



■ **Esercizio 4.12** Determinare il circuito equivalente di Norton del circuito in Figura 4.45 ai terminali $a-b$.

Figura 4.45
Per l'Esercizio 4.12



Risposta: $R_N = 1\Omega$, $I_N = 10\text{ A}$.

4.7 DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI DI THEVENIN E DI NORTON†

I teoremi di Thevenin e di Norton verranno dimostrati in questo paragrafo facendo uso del principio di sovrapposizione degli effetti. Si consideri il circuito lineare di Figura 4.46(a). Si supponga che il circuito contenga resistori, generatori indipendenti e generatori dipendenti. Al circuito si ha accesso tramite i terminali a e b , ai quali viene collegato un generatore di corrente esterno. Si vuole fare in modo che la relazione tensione-corrente ai terminali $a-b$ sia identica a quella dell'equivalente Thevenin in Figura 4.46(b).

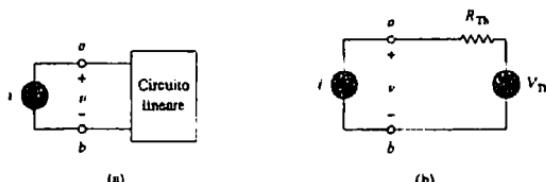


Figura 4.46
Derivazione dell'equivalente
Thevenin: (a) circuito pilotato in
corrente, (b) equivalente
Thevenin.

Per semplicità, si supponga che il circuito lineare di Figura 4.46(a) contenga due generatori indipendenti di tensione v_{s1} e v_{s2} e due generatori indipendenti di corrente i_{s1} e i_{s2} . È possibile allora ottenere una qualsiasi variabile del circuito, per esempio la tensione ai terminali $a-b$, v , applicando la sovrapposizione. Si considera allora il contributo dovuto a ciascun generatore indipendente, compreso il generatore esterno i . Per il principio di sovrapposizione, v vale

$$v = A_0i + A_1v_{s1} + A_2v_{s2} + A_3i_{s1} + A_4i_{s2} \quad (4.13)$$

dove A_0, A_1, A_2, A_3 e A_4 sono costanti. Ciascuno dei termini al secondo membro della (4.13) rappresenta il contributo del relativo generatore indipendente: A_0i è il contributo alla tensione v dovuto al generatore indipendente i , A_1v_{s1} il contributo dovuto al generatore di tensione v_{s1} , e così via. Si possono sommare i termini dovuti ai generatori indipendenti interni e indicarli complessivamente con B_0 , così che la (4.13) diventa

$$v = A_0i + B_0 \quad (4.14)$$

dove $B_0 = A_1v_{s1} + A_2v_{s2} + A_3i_{s1} + A_4i_{s2}$. Si vogliono ora determinare i valori delle costanti A_0 e B_0 . Quando i terminali a e b sono in circuito aperto, $i = 0$ e $v = B_0$. Perciò B_0 è la tensione a vuoto v_{oc} , che è lo stesso di V_{Th} ,

$$B_0 = V_{Th} \quad (4.15)$$

Quando tutti i generatori interni sono spenti, $B_0 = 0$. Il circuito può allora essere sostituito dalla resistenza equivalente R_{eq} , che è lo stesso di R_{Th} , e la (4.14) diventa

$$v = A_0i = R_{Th}i \quad \Rightarrow \quad A_0 = R_{Th} \quad (4.16)$$

Sostituendo i valori trovati di A_0 e B_0 nella (4.14), si ha

$$v = R_{Th}i + V_{Th} \quad (4.17)$$

che esprime la relazione tensione-corrente ai terminali a e b del circuito in Figura 4.46(b). I due circuiti in Figura 4.46(a) e 4.46(b) sono allora equivalenti. Quando lo stesso circuito lineare è pilotato da un generatore di tensione v , come si vede in Figura 4.47(a), la corrente che entra nel circuito può essere ottenuta con la sovrapposizione come

$$i = C_0v + D_0 \quad (4.18)$$

dove C_0v è il contributo a i dovuto al generatore di tensione esterno v e D_0 contiene il contributo a i dovuto a tutti i generatori indipendenti interni. Quando i terminali $a-b$ sono cortocircuitati, $v = 0$ e quindi $i = D_0 = -i_{sc}$, dove i_{sc} è la corrente di corto circuito uscente dal terminale a , che è lo stesso della corrente di Norton I_N .

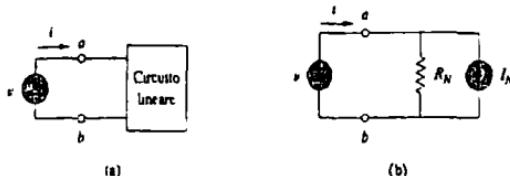
$$D_0 = -I_N \quad (4.19)$$

Quando tutti i generatori indipendenti interni sono spenti, $D_0 = 0$ e il circuito può essere sostituito da una resistenza equivalente R_{eq} (o una conduttanza equivalente $G_{eq} = 1/R_{eq}$), che è lo stesso di R_{Th} o R_N . Perciò la (4.18) diventa

$$i = \frac{v}{R_{Th}} - I_N \quad (4.20)$$

L'equazione precedente esprime la relazione tensione-corrente ai terminali *a*-*b* del circuito di Figura 4.47(b), il che conferma che i due circuiti di Figura 4.47(a) e 4.47(b) sono equivalenti.

Figura 4.47
Derivazione dell'equivalente Norton: (a) circuito pilotato in tensione, (b) il suo equivalente Norton.



4.8 MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

In molte situazioni pratiche, un circuito viene progettato per fornire potenza a un carico. Esistono aree applicative, come per esempio le telecomunicazioni, nelle quali l'obiettivo primario è quello di massimizzare la potenza fornita a un carico. Si affronta ora il problema di fornire la massima potenza possibile a un carico quando sono note le perdite interne del sistema. La soluzione del problema comporterà una rilevante perdita di potenza interna, maggiore o uguale alla potenza trasferita al carico. L'equivalente Thevenin si dimostra utile nel calcolare la potenza massima che un circuito lineare può fornire a un carico. Si suppone di poter regolare il valore della resistenza di carico R_L . Se l'intero circuito, a eccezione del carico, viene sostituito dal suo equivalente Thevenin, come mostrato in Figura 4.48, la potenza fornita al carico è

$$P = i^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L \quad (4.21)$$

Se il circuito è dato, V_{Th} e R_{Th} sono fissati; variando la resistenza di carico R_L , la potenza fornita al carico varia come nel grafico di Figura 4.49, dal quale si nota che essa risulta piccola per valori molto piccoli o molto grandi di R_L , e risulta massima per un valore di R_L compreso tra 0 e ∞ . Si vuole ora mostrare che la massima potenza si ha quando R_L è uguale a R_{Th} . Questo è noto come *teorema del massimo trasferimento di potenza*.

Figura 4.48
Circuito per il massimo trasferimento di potenza.

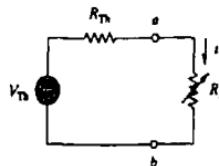
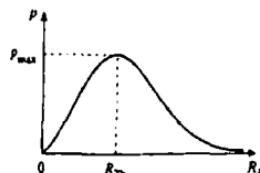


Figura 4.49
Potenza fornita al carico in funzione di R_L .



Si ha la massima potenza trasmessa al carico quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza di Thevenin vista dal carico ($R_L = R_{Th}$).

Per dimostrare il teorema, si deriva P , nella (4.21), rispetto a R_L e si uguaglia a zero il risultato. Si ottiene

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[\frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right] = V_{Th}^2 \left[\frac{(R_{Th} + R_L - 2R_L)}{(R_{Th} + R_L)^3} \right] = 0$$

Ciò implica che

$$0 = (R_{Th} + R_L - 2R_L) = (R_{Th} - R_L) \quad (4.22)$$

che fornisce

$$R_L = R_{Th} \quad (4.23)$$

la quale mostra che il massimo trasferimento di potenza si ha quando la resistenza di carico R_L egualgia la resistenza di Thevenin R_{Th} . È facile verificare che la (4.23) dà effettivamente la potenza massima, mostrando che $d^2p/dR_L^2 < 0$.² La potenza massima trasferita si ottiene sostituendo la (4.23) nella (4.21).

$$P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} \quad (4.24)$$

La (4.24) vale solo quando $R_L = R_{Th}$. Quando $R_L \neq R_{Th}$, si calcola la potenza trasferita al carico tramite la (4.21).

Esempio 4.13

Calcolare il valore di R_L che determina il massimo trasferimento di potenza nel circuito di Figura 4.50. Determinare anche la potenza massima.

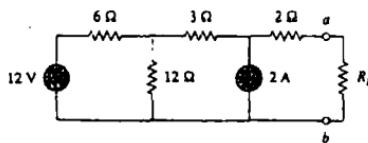


Figura 4.50
Per l'Esempio 4.13.

Soluzione: Bisogna determinare la resistenza di Thevenin R_{Th} e la tensione di Thevenin V_{Th} ai terminali a-b. Per ottenere R_{Th} , si usa il circuito della Figura 4.51(a) e si ottiene

$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \parallel 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9 \Omega$$

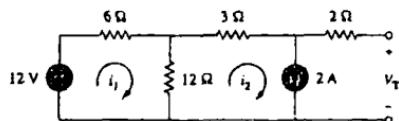
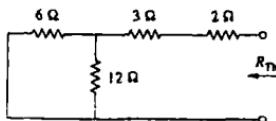


Figura 4.51
Per l'Esempio 4.13: (a) calcolo di R_{Th} , (b) calcolo di V_{Th} .

(a)

(b)

Per determinare V_{Th} , si considera il circuito di Figura 4.51(b). Applicando l'analisi agli anelli,

$$-12 + 18i_1 - 12i_2 = 0, \quad i_2 = -2 \text{ A}$$

Risolvendo rispetto a i_1 , si ottiene $i_1 = -2/3$. Applicando la KVL alla maglia esterna per ottenere V_{Th} ai terminali a-b, si ha

$$-12 + 6i_1 + 3i_2 + 2(0) + V_{Th} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 22 \text{ V}$$

Per avere allora il massimo trasferimento di potenza

$$R_L = R_{Th} = 9 \Omega$$

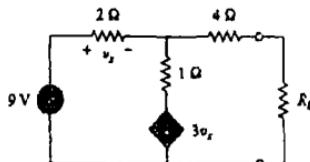
² La sorgente e il carico si dicono adattati quando $R_L = R_{Th}$

e la potenza massima è

$$P_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13.44 \text{ W}$$

Esercizio 4.13 Determinare il valore di R_L che rende massima la potenza da essa assorbita dal resto del circuito in Figura 4.52. Calcolare tale potenza massima.

Figura 4.52
Per l'Esercizio 4.13.



Risposta 4.22 Ω, 2.901 W.

4.9 VERIFICA DEI TEOREMI DELLE RETI CON PSPICE

In questo paragrafo si vedrà come è possibile utilizzare *PSpice* per verificare la validità dei teoremi presentati nel capitolo. Si prenderà in considerazione, in particolare, l'analisi DC Sweep per ottenere l'equivalente Thevenin o Norton a una qualsiasi coppia di nodi in un circuito, e il massimo trasferimento di potenza a un carico. Si consiglia la lettura del Paragrafo B.3 dell'appendice B prima della lettura del presente paragrafo.

Per ricavare l'equivalente Thevenin a una coppia di terminali aperti di un circuito si usa l'editor di schematici per disegnare il circuito e si inserisce un generatore indipendente di corrente sonda, per esempio I_p , ai terminali. Il generatore sonda deve avere part name ISRC. Si esegue poi una analisi DC Sweep su I_p , come illustrato nel Paragrafo B.3. Solitamente, si fa in modo che la corrente in I_p vari tra 0 e 1 A con incrementi di 0.1 A. Dopo aver simulato il circuito, si usa Probe per visualizzare il grafico della tensione su I_p in funzione della corrente I_p . L'intercetta del grafico con l'asse delle tensioni fornisce la tensione equivalente di Thevenin, e la pendenza del grafico rappresenta la resistenza di Thevenin.

La ricerca dell'equivalente Norton richiede un procedimento simile, a eccezione del generatore sonda che deve essere di tensione, detto V_p (con part name VSRC). Si esegue una analisi DC Sweep su V_p facendo variare V_p da 0 a 1 V con passi di 0.1 V. Usando il menu di Probe dopo la simulazione, si ottiene poi un grafico della corrente in V_p in funzione della tensione su V_p . L'intercetta con l'asse delle correnti è pari alla corrente di Norton, mentre la pendenza del grafico è uguale alla conduttanza di Norton.

La ricerca del massimo trasferimento di potenza con *PSpice* prevede l'esecuzione di uno sweep parametrico in continua sul valore del componente R_L in Figura 4.48 e l'ottenimento del grafico della potenza fornita al carico in funzione di R_L . Secondo la Figura 4.49, la potenza massima si ha quando $R_L = R_{Th}$. Il processo è illustrato meglio da un esempio, che verrà presentato come Esempio 4.15. Si usano VSRC e ISRC come part name dei generatori indipendenti di tensione e di corrente rispettivamente.

Esempio 4.14

Si consideri il circuito della Figura 4.31 (vedere l'Esempio 4.9). Si usi *PSpice* per determinare i circuiti equivalenti di Thevenin e Norton.

Soluzione: (a) Per determinare la resistenza di Thevenin R_{Th} e la tensione di Thevenin V_{Th} ai terminali a-b nel circuito della Figura 4.31, si usa dapprima Schematics per disegnare il circuito come mostrato in Figura 4.53(a). Si noti che è stato inserito un generatore di corrente sonda I_2 ai terminali. Nel menu Analysis/Setup, si seleziona DC Sweep. Nella finestra di dialogo si seleziona Linear come Sweep Type e Current Source come Sweep Var. Type. Si inserisce I_2 nella casella

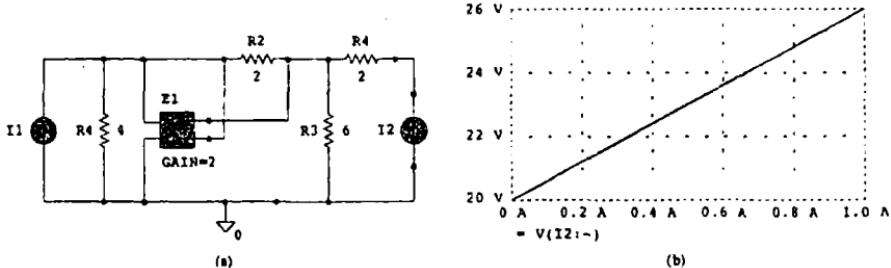
Name, 0 come *Start Value*, 1 come *End Value*, e 0.1 come *Increment*. Dopo aver eseguito la simulazione, si aggiunge la traccia $V(I2:-)$ dal menu di Probe, e si ottiene il grafico di Figura 4.53(b). Dal grafico si ricava

$$V_{Th} = \text{Intercetta} = 20 \text{ V}, \quad R_{Th} = \text{Pendenza} = \frac{26 - 20}{1} = 6 \Omega$$

che concordano con quanto ottenuto analiticamente nell'Esempio 4.9.

Figura 4.53

Per l'Esempio 4.14:

(a) schematico e (b) grafico per il calcolo di R_{Th} e V_{Th} .

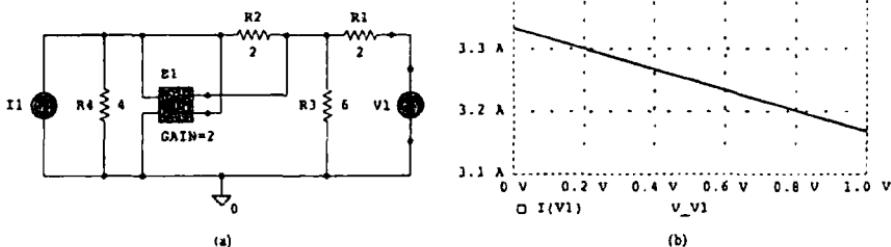
(b) Per determinare l'equivalente Norton, si modifica lo schematico di Figura 4.53(a) sostituendo il generatore di corrente sonda con uno di tensione, V_1 . Il risultato è lo schematico in Figura 4.54(a). Come prima, nella finestra di dialogo DC Sweep si seleziona Linear come Sweep Type e Voltage Source come Sweep Var. Type. Si scrive V_1 nella casella Name, 0 come Start Value, 1 come End Value e 0.1 come Increment. In Probe, si aggiunge la traccia $I(V1)$ e si ottiene il grafico in Figura 4.54(b), da cui si ricava

$$I_N = \text{Intercetta} = 3.335 \text{ A}$$

$$G_N = \text{Pendenza} = \frac{3.335 - 3.165}{1} = 0.17 \text{ S}$$

Figura 4.54

Per l'Esempio 4.14:

(a) schematico e (b) grafico per il calcolo di G_N e I_N .

Esercizio 4.14 Risolvere di nuovo l'Esercizio 4.9 usando PSpice

Risposta $V_{Th} = 5.33 \text{ V}$, $R_{Th} = 0.44 \Omega$.

Esempio 4.15

Con riferimento al circuito di Figura 4.55, utilizzare PSpice per ottenere il massimo trasferimento di potenza su R_L .

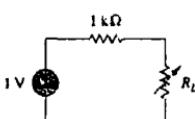


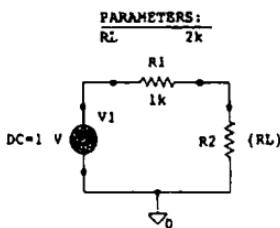
Figura 4.55

Per l'Esempio 4.15.

Soluzione: Bisogna eseguire una analisi DC Sweep su R_L per determinare quando la potenza su

di essa è massima. Si disegna dapprima il circuito con Schematics come si vede in Figura 4.56. Una volta disegnato, il circuito viene ulteriormente preparato per l'analisi secondo i seguenti tre passi.

Figura 4.56
Schematiko per il circuito in
Figura 4.55



Il primo passo consiste nel definire il valore di R_L come parametro, perché lo si vuole far variare. A tale fine:

1. Fare doppio clic sul valore 1k di R₂ (che rappresenta R_L) per aprire la finestra di dialogo Set Attribute Value.
2. Sostituire 1k con {RL} e selezionare OK per accettare la modifica.

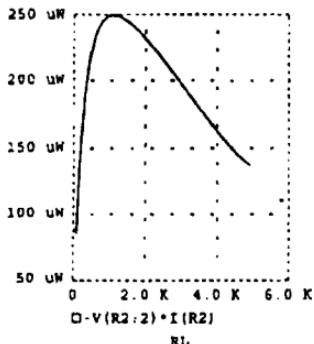
Si noti che le parentesi graffe sono necessarie. Il secondo passo consiste nel definire il parametro; a tal fine:

1. Selezionare Draw/Get New Part/Libraries .../special.lib.
2. Inserire PARAM nella casella PartName e selezionare OK.
3. Trascinare la finestra di dialogo in una posizione qualsiasi in prossimità del circuito.
4. Fare clic per terminare l'operazione di spostamento.
5. Fare doppio clic per aprire la finestra di dialogo PartName: PARAM.
6. Selezionare NAME1 = e inserire RL (senza parentesi graffe) nella casella Value, e selezionare Save Attr.
7. Selezionare VALUE1 = e inserire 2k nella casella Value, selezionare Save Attr per accettare le modifiche.
8. Selezionare OK.

Il valore 2k al punto 7 è necessario per il calcolo del punto di lavoro, e non può essere lasciato vuoto. Il terzo passo configura l'analisi DC Sweep per effettuare lo sweep del parametro

1. Selezionare Analysis/Setup per aprire la finestra di dialogo DC Sweep.
2. Selezionare Linear (oppure Octave per un intervallo più ampio di R_L) come Sweep Type.
3. Scegliere Global Parameter come Sweep Var. Type.
4. Nella casella Name inserire RL.
5. Nella casella Start Value inserire 100.
6. Nella casella End Value inserire 5k.
7. Nella casella Increment inserire 100.
8. Selezionare OK e Close per accettare i parametri.

Figura 4.57
Per l'Esempio 4.15, grafico della
potenza su R_L



Dopo avere eseguito i passi precedenti, si può avviare la simulazione Selezionare Analysis/Simulate. Se non si hanno messaggi di errore, si può selezionare Add Trace nel menu Probe e inserire $-V(R2.2)*I(R2)$ nella casella Trace Command. [Il segno negativo è necessario perché $I(R2)$ è negativa.] Si ottiene così il grafico della potenza fornita a R_L quando R_L varia da 100Ω a $5 k\Omega$. Si può ottenere la potenza assorbita da R_L anche inserendo $V(R2.2) * V(R2.2)/RL$ nella casella Trace Command. In entrambi i casi, il grafico che si ottiene è quello di Figura 4.57. Risulta evidente dal grafico che la potenza massima è $250 \mu W$. Si noti che il massimo si ottiene quando $R_L = 1 k\Omega$, come ci si attendeva dal calcolo analitico.

Esercizio 4.15 Determinare la potenza massima trasferita a R_L se il resistore da $1 k\Omega$ in Figura 4.55 viene sostituito con un resistore da $2 k\Omega$.

Risposta $125 \mu W$.



4.10 APPLICAZIONI

In questo paragrafo vengono presentate due importanti applicazioni pratiche dei concetti sviluppati nel capitolo: i modelli dei generatori reali e la misura delle resistenze.

4.10.1 Modelli dei generatori reali

I modelli delle sorgenti di energia elettrica costituiscono un esempio della unità dei circuiti equivalenti di Thevenin e Norton. Una sorgente di energia, che chiameremo *generatore reale*, viene spesso caratterizzata con il suo circuito equivalente Thevenin o Norton. Un generatore ideale di tensione fornisce una tensione costante, indipendentemente dalla corrente richiesta dal carico, e un generatore ideale di corrente fornisce una corrente costante indipendentemente dalla tensione del carico. Come mostra la Figura 4.58, i generatori di tensione e di corrente della pratica non sono ideali, a causa delle loro *resistenza interna*, o *resistenza di sorgente* R_s e R_p . Diventano ideali quando $R_s \rightarrow 0$ e $R_p \rightarrow \infty$. Per convincersi che ciò avviene, si consideri l'effetto del carico sui generatori reali di tensione, come mostrato nella Figura 4.59(a). Per il partitore di tensione, la tensione del carico è

$$v_L = \frac{R_L}{R_s + R_L} v_s \quad (4.25)$$

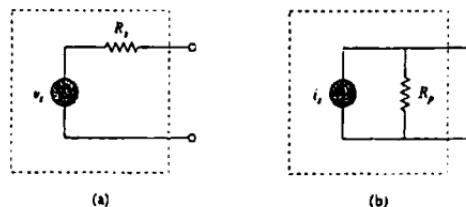


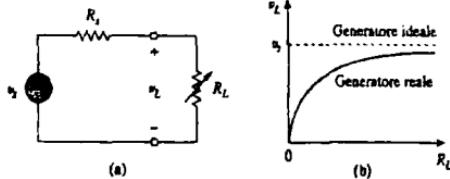
Figura 4.58
(a) Generatore reale di tensione,
(b) generatore reale di corrente.

Quando R_L aumenta, la tensione di carico si avvicina a quella del generatore v_s , come illustrato nella Figura 4.59(b). Dalla (4.25), si può notare che:

1. La tensione del carico sarà costante se la resistenza interna R_s del generatore reale è zero, o perlomeno se $R_s \ll R_L$. In altre parole, quanto più piccola è R_s in confronto a R_L , tanto più vicino a essere ideale è il generatore.
2. Quando il carico non è collegato (cioè il generatore reale è a circuito aperto, così che $R_L \rightarrow \infty$), $v_{ac} = v_s$. Perciò, v_s può essere considerata come la tensione del generatore reale in assenza di carico. Il collegamento del carico provoca una diminuzione in valore assoluto della tensione ai terminali, nota come *effetto di carico*.

Figura 4.59

(a) Generatore reale di tensione collegato ad un carico R_L . (b) la tensione del carico diminuisce se R_L diminuisce.



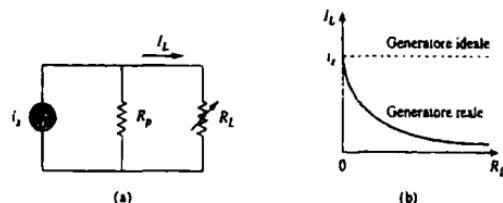
Considerazioni analoghe possono essere fatte per un generatore reale di corrente collegato a un carico come mostrato in Figura 4.60(a). Per il paritore di corrente,

$$i_L = \frac{R_p}{R_p + R_L} i_s \quad (4.26)$$

La Figura 4.60(b) mostra la variazione della corrente del carico al crescere della resistenza di carico. Si nota anche qui una diminuzione della corrente, dovuta al carico (effetto di carico), e che la corrente del carico è costante (generatore ideale di corrente) quando la resistenza interna è molto grande (cioè $R_p \rightarrow \infty$, o perlomeno $R_p \gg R_L$).

Figura 4.60

(a) Generatore reale di corrente collegato ad un carico R_L . (b) la corrente del carico diminuisce al crescere di R_L .



A volte è necessario conoscere la tensione a circuito aperto v_o e la resistenza interna R_o di un generatore reale di tensione. Per determinare v_o e R_o , si utilizza il procedimento illustrato in Figura 4.61. Si misura dapprima la tensione a circuito aperto v_{oc} come in Figura 4.61(a), e si pone

$$v_o = v_{oc} \quad (4.27)$$

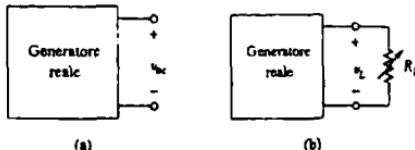
Si collega poi un carico variabile R_L ai terminali come in Figura 4.61(b). Si fa variare la resistenza R_L fino a quando non si misura una tensione di carico esattamente metà della tensione a circuito aperto, $v_L = v_{oc}/2$, perché ora $R_L = R_{Th} = R_o$. A questo punto, si sconnette R_L e la si misura. Si pone

$$R_o = R_L \quad (4.28)$$

Per esempio, una batteria d'automobile può avere i seguenti valori tipici: $v_o = 12 \text{ V}$ e $R_o = 0.05 \Omega$.

Figura 4.61

(a) Misura di v_{oc} .
(b) misura di v_L .



Esempio 4.16

La tensione ai terminali di un generatore reale di tensione è di 12 V quando viene collegato a un carico da 2 W. Quando il carico viene staccato, la tensione ai terminali sale a 12.4 V. (a) Calcolare la tensione v_o e la resistenza interna R_o . (b) Determinare la tensione quando il generatore viene collegato a un carico da 8 Ω.

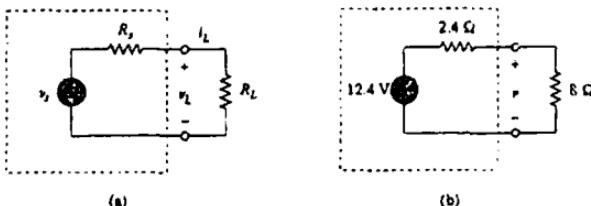


Figura 4.62
Per l'Esempio 4.16.

Soluzione: (a) Si sostituisce il generatore con il suo equivalente Thevenin. La tensione ai terminali con il carico staccato è la tensione a circuito aperto,

$$v_t = v_{oc} = 12.4 \text{ V}$$

Quando il carico è collegato, come mostrato in Figura 4.62(a), $v_L = 12 \text{ V}$ e $p_L = 2 \text{ W}$. Quindi:

$$p_L = \frac{v_L^2}{R_L} \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{v_L^2}{p_L} = \frac{12^2}{2} = 72 \Omega$$

La corrente del carico è

$$i_L = \frac{v_L}{R_L} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6} \text{ A}$$

La tensione su R_s è la differenza fra la tensione del generatore v_s e quella del carico v_L .

$$12.4 - 12 = 0.4 = R_s / i_L \quad R_s = \frac{0.4}{i_L} = 2.4 \Omega$$

(b) Ors che si conosce l'equivalente Thevenin della sorgente, si collega il carico da 8Ω all'equivalente Thevenin, come mostrato in Figura 4.62(b). Usando il partitore di tensione si ottiene

$$v = \frac{8}{8 + 2.4} (12.4) = 9.538 \text{ V}$$

■ **Esercizio 4.16** La tensione a circuito aperto misurata su un certo amplificatore è pari a 9V. La tensione scende a 8V quando all'amplificatore viene collegato un altoparlante da 20Ω . Calcolare la tensione quando viene invece collegato un altoparlante da 10Ω .

Risposta 7.2 V. ■

4.10.2 Misura delle resistenze

Anche se l'utilizzo dell'ohmmetro costituisce il metodo più semplice per misurare una resistenza, misure più accurate possono essere ottenute usando il ponte di Wheatstone. Mentre esistono ohmmetri per misurare resistenze di qualunque valore, un ponte di Wheatstone va usato per misurare solo resistenze con valori compresi fra circa 1Ω e $1 \text{ M}\Omega$. Valori molto bassi di resistenza possono essere misurati facendo uso di un *milliohmmetro*, mentre i valori molto elevati si misurano con un *tester di Megger*.

Il circuito del ponte di Wheatstone³ (o ponte di resistenze) viene usato in molte applicazioni. Qui verrà utilizzato per misurare una resistenza incognita. La resistenza incognita R_x viene collegata al ponte come mostrato nella Figura 4.63.

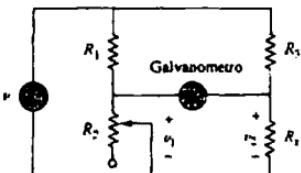


Figura 4.63
Ponte di Wheatstone: R_x è la resistenza da misurare

³ *Note storica* Il ponte di misura fu inventato da Charles Wheatstone (1802-1875), un professore inglese che inventò anche il telegrafo, in maniera indipendente da Samuel Morse che lo inventò negli Stati Uniti.

La resistenza variabile viene regolata in modo che non scorra nessuna corrente nel galvanometro, che consiste essenzialmente di uno strumento di d'Arsonval funzionante come indicatore di corrente nell'intervallo dei microampere. In questa condizione $v_1 = v_2$, e il ponte viene detto *bilanciato*. Poiché non scorre nessuna corrente nel galvanometro, R_1 e R_2 si comportano come se fossero in serie, così come R_3 e R_x . Il fatto che nel galvanometro non passi corrente implica anche che $v_1 = v_2$. Applicando la formula del partitore di tensione,

$$v_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v = v_2 = \frac{R_x}{R_3 + R_x} v \quad (4.29)$$

Quindi, non passerà corrente nel galvanometro quando

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_x}{R_3 + R_x} \implies R_2 R_3 = R_1 R_x$$

o anche

$$R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2 \quad (4.30)$$

Se $R_1 = R_3$, e R_2 viene fatta variare fino a quando nel galvanometro non passa più corrente, allora $R_x = R_2$. Per ottenere la corrente che attraversa il galvanometro quando il ponte di Wheatstone è *sibilanciato*, si determina l'equivalente Thevenin (V_{Th} e R_{Th}) rispetto ai terminali del galvanometro. Se R_m è la resistenza del galvanometro, la corrente in condizioni di sibilanciamento vale

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_m} \quad (4.31)$$

Ciò verrà meglio illustrato nell'Esempio 4.18.

Esempio 4.17

Nella Figura 4.63, $R_1 = 500 \Omega$ e $R_3 = 200 \Omega$. Il ponte risulta bilanciato quando R_2 viene portata al valore di 125Ω . Determinare la resistenza incognita R_x .

Soluzione: Usando la (4.30),

$$R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2 = \frac{200}{500} 125 = 50 \Omega$$

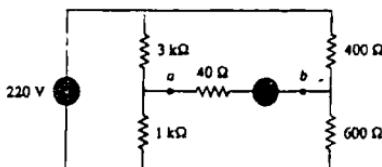
■ **Esercizio 4.17** Un ponte di Wheatstone ha $R_1 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$. R_2 viene fatta variare fino a quando nel galvanometro non passa più corrente. A quel punto, $R_2 = 3.2 \text{ k}\Omega$. Quale è il valore della resistenza incognita?

Risposta $3.2 \text{ k}\Omega$. ■

Esempio 4.18

Il circuito in Figura 4.64 rappresenta un ponte non bilanciato. Se il galvanometro ha una resistenza di 40Ω , determinare la corrente che attraversa il galvanometro.

Figura 4.64
Ponte sibilanciato dell'Esempio
4.18



Soluzione: Bisogna innanzitutto sostituire il circuito con il suo equivalente Thevenin ai terminali a e b . La resistenza di Thevenin si ottiene dal circuito di Figura 4.65(a). Si noti che i resistori da 3

$1\text{k}\Omega$ e $3\text{k}\Omega$ sono in parallelo, così come i resistori da $400\ \Omega$ e $600\ \Omega$. Le due combinazioni parallele formano una serie rispetto ai terminali a e b . Quindi,

$$R_{Th} = 3000 \parallel 1000 + 400 \parallel 600$$

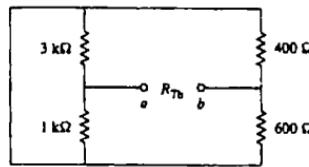
$$= \frac{3000 \times 1000}{3000 + 1000} + \frac{400 \times 600}{400 + 600} = 750 + 240 = 990\ \Omega$$

Per determinare la tensione di Thevenin, si considera il circuito di Figura 4.65(b). Usando la formula del partitore di tensione,

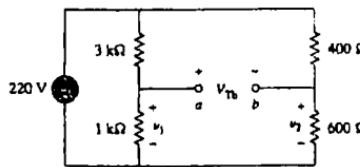
$$v_1 = \frac{1000}{1000 + 3000} (220) = 55\ \text{V}, \quad v_2 = \frac{600}{600 + 400} (220) = 132\ \text{V}$$

Applicando la KVL lungo la maglia ab si ottiene

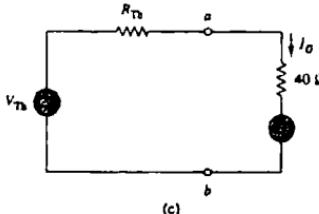
$$-v_1 + V_{Th} + v_2 = 0 \quad \text{cioè} \quad V_{Th} = v_1 - v_2 = 55 - 132 = -77\ \text{V}$$



(a)



(b)



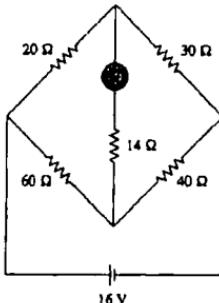
(c)

Dopo aver determinato l'equivalente Thevenin, si trova la corrente nel galvanometro usando la Figura 4.65(c).

$$I_G = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_m} = \frac{-77}{990 + 40} = -74.76\ \text{mA}$$

Il segno negativo indica che la corrente scorre nella direzione opposta a quella presunta, cioè dal terminale b al terminale a .

■ **Esercizio 4.18** Determinare la corrente nel galvanometro, che ha una resistenza di $14\ \Omega$, nel ponte di Wheatstone mostrato in Figura 4.66.



Risposta: 64 mA.

Figura 4.65

Per l'Esempio 4.18

(a) Calcolo di R_{Th} , (b) calcolo di V_{Th} , (c) calcolo della corrente nel galvanometro.

Figura 4.66

Per l'Esercizio 4.18.

CASO PRATICO Attenuatore passivo

1) Introduzione al Caso Pratico

In questo Caso Pratico si affronterà un argomento di elettronica, in particolare un circuito capace di modificare la tensione in ingresso, mantenendo la stessa resistenza di uscita. Si tratta di un Attenuatore passivo, cioè di un circuito-interfaccia tra una sorgente di segnale ed un carico.

2) Descrizione e Specifiche

Si consideri l'attenuatore in Figura 4.67:

- a) Progettare un attenuatore, specificando i valori di R_s e di R_p del circuito-interfaccia, che soddisfi i seguenti requisiti:

$$\frac{V_0}{V_s} = 0.125 \quad \text{e} \quad R_{eq} = R_{Th} = R_g = 100 \Omega$$

- b) Usando l'interfaccia progettata nella domanda (a), calcolare la corrente che scorre in un carico $R_L = 50\Omega$, quando $V_s = 12 \text{ V}$.

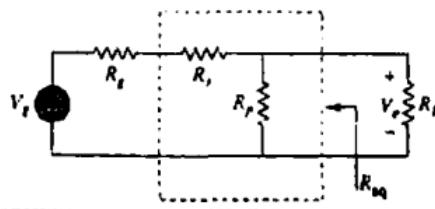


Figura 4.67 Attenuatore passivo

3) Obiettivi

Occorre applicare le nozioni apprese fino a questo punto per progettare l'attenuatore, cioè per determinare i valori dei componenti che lo costituiscono in modo da rispettare le specifiche di progetto.

Nella seconda parte si determinerà il circuito equivalente di Thevenin allo scopo di semplificare il circuito iniziale e quindi calcolare la corrente che scorre nel carico R_L .

4) Elaborazione e Calcoli

- a) Le due specifiche di progetto sono relative alla diminuzione della tensione (prima specifica), senza modificare la resistenza di uscita (seconda specifica).

Si applica al circuito in Figura 4.67 la formula del partitore di tensione studiata nel capitolo 2 (paragrafo 2.5). Si noti che la tensione V_0 è calcolata senza carico, cioè a vuoto: essa è la tensione equivalente di Thevenin V_{Th} all'uscita dell'attenuatore.

$$V_0 = V_{Th} = V_s \cdot \frac{R_p}{R_p + (R_g + R_s)} \quad (4.32)$$

Quindi imponendo la prima specifica si ha:

$$R_p + (R_g + R_s) = \frac{R_p}{V_0/V_s} = \frac{R_p}{0.125} = 8 \cdot R_p \quad (4.33)$$

$$R_g + R_s = 7 \cdot R_p \quad (4.34)$$

La resistenza di uscita R_{eq} rappresenta la resistenza equivalente di Thevenin R_{Th} , e si calcola spegnendo il generatore di tensione.

$$R_{eq} = \frac{R_p \cdot (R_g + R_s)}{R_p + (R_g + R_s)} \quad (4.35)$$

Quindi, imponendo la seconda specifica, si ha:

$$R_{eq} = R_{Th} = R_g = \frac{R_f \cdot (R_s + R_t)}{R_p + (R_s + R_t)} = 100\Omega \quad (4.36)$$

Sostituendo la (4.34) nella (4.36) si ottiene:

$$R_p = \frac{800}{7} = 114.286\Omega$$

Infine dalla (4.34) si ricava il valore di R_t :

$$R_t = 7 \cdot R_p - R_g = 700\Omega$$

b) Si determina la corrente che circola in un carico $R_L = 50\Omega$, quando il generatore ha valore $V_g = 12$ V. Per semplificare i calcoli si sostituisce il circuito equivalente di Thevenin, mostrato in Figura 4.68.

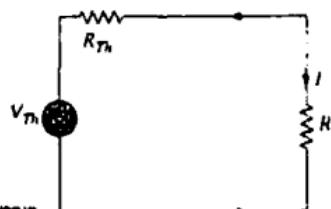


Figura 4.68 Equivalente Thevenin.

La tensione equivalente di Thevenin coincide con la tensione a vuoto, cioè:

$$V_{Th} = V_0 = 0.125 \cdot V_g = 0.125 \cdot 12 = 1.5 \text{ V}$$

La resistenza equivalente di Thevenin coincide con la resistenza R_g :

$$R_{Th} = R_g = 100\Omega$$

Si calcola la corrente I dal circuito di Figura 4.68:

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{1.5}{100 + 50} = 10 \text{ mA}$$

5) Analisi e Verifica

Il valore della corrente nel carico si può anche calcolare applicando uno dei metodi studiati nel capitolo 3, in particolare con il metodo nodale.

Dalla Figura 4.69 si applica la KCL al nodo A e si prende il nodo in basso come riferimento:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

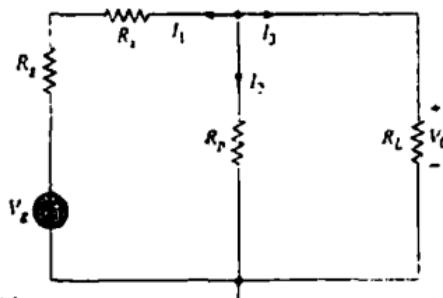


Figura 4.69 Analisi nodale.

Quindi si calcolano le tre correnti in funzione della tensione nodale v_A :

$$\frac{v_A - 12}{(R_g + R_1)} + \frac{v_A}{R_p} + \frac{v_A}{R_L} = 0$$

Passando ai valori numerici si ha:

$$\frac{v_A - 12}{(100 + 700)} + \frac{v_A}{114.286} + \frac{v_A}{50} = 0$$

Si calcola la tensione nodale v_A e quindi la corrente che scorre nel carico R_L :

$$v_A = \frac{0.015}{0.03} = 0.5V$$

$$I = I_3 = \frac{v_A}{R_L} = \frac{0.5}{50} = 10 \text{ mA}$$

Per cui si è verificato il risultato applicando un altro metodo di risoluzione dei circuiti studiato in precedenza.

SOMMARIO

- Un circuito lineare è formato da elementi lineari, da generatori dipendenti lineari e da generatori indipendenti lineari.
- I teoremi delle reti sono usati per ridurre circuiti complessi a circuiti più semplici, rendendo perciò l'analisi dei circuiti molto più agevole.
- Il principio di sovrapposizione afferma che per un circuito con più generatori indipendenti, la tensione su un elemento (o la corrente che lo attraversa), è pari alla somma algebrica di tutte le singole tensioni (o correnti), che si ricavano quando ogni generatore indipendente agisce da solo.
- La trasformazione dei generatori è un metodo per sostituire un generatore di tensione in serie con un resistore con un generatore di corrente in parallelo con un resistore, o viceversa.
- I teoremi di Thevenin e Norton consentono di isolare una porzione di circuito mentre la restante porzione è sostituita da un circuito equivalente. Il circuito equivalente di Thevenin è formato da un generatore di tensione V_{Th} in serie con un resistore R_{Th} , mentre il circuito equivalente di Norton è formato da un generatore di corrente I_N in parallelo con un resistore R_N . I due teoremi sono legati dalle formule di trasformazione dei generatori:

$$R_N = R_{Th} \quad I_N = V_{Th}/R_N$$

- Per un determinato circuito equivalente di Thevenin si ottiene il massimo trasferimento di potenza quando $R_L = R_{Th}$; cioè quando la resistenza di carico è pari alla resistenza di Thevenin.
- Il teorema del massimo trasferimento di potenza afferma che la potenza trasferita da un generatore ad un carico R_L è massima quando R_L è uguale alla resistenza di Thevenin ai terminali del carico.
- Pspice può essere utilizzato per verificare i teoremi sui circuiti trattati in questo capitolo.
- I modelli dei generatori reali e la misura delle resistenze rappresentano due applicazioni del teorema di Thevenin.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- La corrente in un ramo di una rete lineare è 2 A quando la tensione del generatore di ingresso è 10 V. Se la tensione si riduce a 1 V e la polarità viene invertita, la corrente nel ramo diventa:
 - 2
 - 0.2
 - 0.2
 - 2
 - 20
- Nella applicazione del principio di sovrapposizione, non è necessario considerare solo un generatore indipendente alla volta; ognuno dei casi può includere un numero qualsiasi di generatori insieme:
 - Vero
 - Falso
- Il principio di sovrapposizione si applica ai calcoli delle potenze:
 - Vero
 - Falso
- Si faccia riferimento alla Figura 4.70. La resistenza di Thevenin ai terminali a e b è:
 - 25 Ω
 - 20 Ω
 - 5 Ω
 - 4 Ω

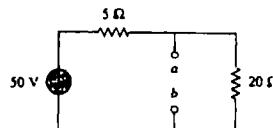


Figura 4.70 Per le domande di riepilogo da 4.4 a 4.6.

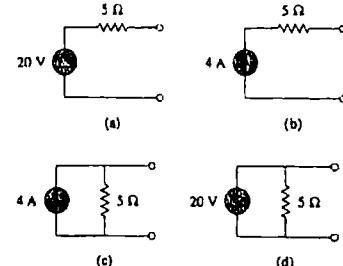


Figura 4.71 Per la domanda di riepilogo 4.8.

- Un carico è collegato a una rete. Ai terminali ai quali il carico è collegato, $R_N = 10 \Omega$ e $V_N = 40 \text{ V}$. La massima potenza fornita al carico è:
 - 160 W
 - 80 W
 - 40 W
 - 1 W
- Una sorgente fornisce la massima potenza al carico quando la resistenza di carico egualia la resistenza del generatore:
 - Vero
 - Falso

Risposte: 4.1b, 4.2a, 4.3b, 4.4d, 4.5b, 4.6a, 4.7a, 4.8c, 4.9c, 4.10a.

PROBLEMI

Paragrafi 4.2 Linearietà

- Calcolare la corrente i_o nel circuito di Figura 4.72. Quanto diventa questa corrente quando la tensione di ingresso sale a 10 V?

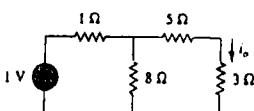


Figura 4.72 Per il Problema 4.1.

- Determinare v_o nel circuito di Figura 4.73. Se la corrente del generatore si riduce a $1 \mu\text{A}$, quanto vale v_o ?

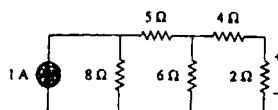


Figura 4.73 Per il Problema 4.2.

- Nel circuito di Figura 4.74, calcolare v_o e i_o quando $v_x = 1 \text{ V}$.

- (b) Determinare v_o e i_o quando $v_s = 10 \text{ V}$.
 (c) Quanto valgono v_o e i_o quando ciascuno dei resistori da 1Ω viene sostituito da un resistore da 10Ω e $v_s = 10 \text{ V}$?

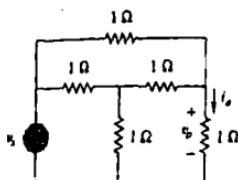


Figura 4.74 Per il Problema 4.3.

- 4.4 Utilizzare la proprietà di linearità per determinare i_o nel circuito di Figura 4.75.

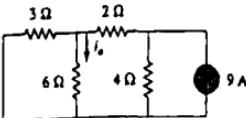


Figura 4.75 Per il Problema 4.4.

- 4.5 Nel circuito in Figura 4.76, si assuma $v_o = 1 \text{ V}$ e si usi la linearità per calcolare l'effettivo valore di v_o .

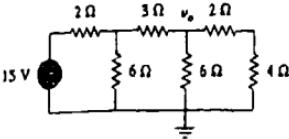


Figura 4.76 Per il Problema 4.5.

- 4.6 Per il circuito lineare di Figura 4.77, usare la linearità per compilare la seguente tabella: determinare $k = V_o/V_s$.

Esperimento	V_s	V_o
1	12 V	4 V
2		16 V
3	1 V	
4		-2 V



Figura 4.77 Per il Problema 4.6.

- 4.7 Usare la linearità, supponendo che $V_o = 1 \text{ V}$, per determinare il valore vero di V_o in Figura 4.78.

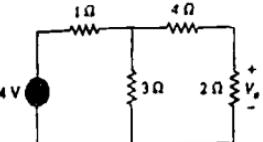


Figura 4.78 Per il Problema 4.7.

Paragrafo 4.3 Sovrapposizione

- 4.8 Usando la sovrapposizione, determinare V_o nel circuito in Figura 4.79. Verificare il risultato con PSpice.
ps

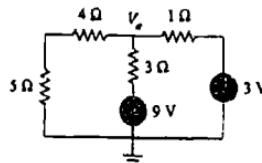


Figura 4.79 Per il Problema 4.8.

- 4.9 Usare la sovrapposizione per calcolare v_o nel circuito di Figura 4.80.
ps

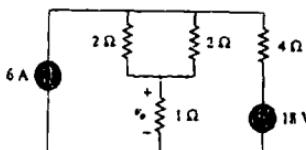


Figura 4.80 Per il Problema 4.9.

- 4.10 Nel circuito in Figura 4.81, determinare la tensione V_{ab} usando la sovrapposizione.

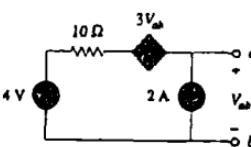


Figura 4.81 Per il Problema 4.10.

- 4.11 Usare il principio di sovrapposizione per calcolare i_o e v_o nel circuito di Figura 4.82.
ps

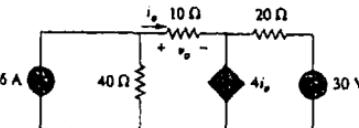


Figura 4.82 Per il Problema 4.11.

- 4.12 Determinare v_o nel circuito di Figura 4.83 usando il principio di sovrapposizione.

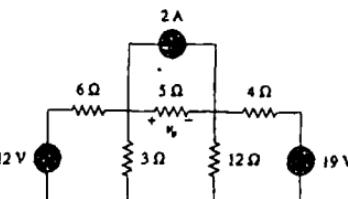


Figura 4.83 Per i Problemi 4.12 e 4.35.

- 4.13** Usare la sovrapposizione per determinare v_a nel circuito di Figura 4.84.

ps

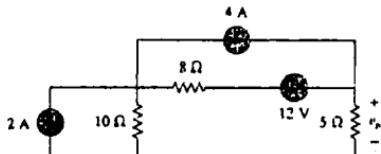


Figura 4.84 Per il Problema 4.13.

- 4.14** Applicare il principio di sovrapposizione per calcolare v_o nel circuito di Figura 4.85.

ps

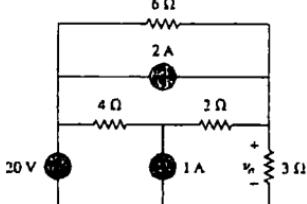


Figura 4.85 Per il Problema 4.14

- 4.15** Nel circuito in Figura 4.86, usare la sovrapposizione per calcolare i . Calcolare anche la potenza fornita al resistore da 3Ω .

ps

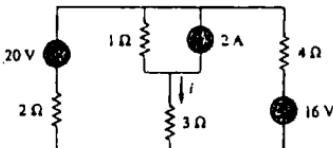


Figura 4.86 Per i Problemi 4.15 e 4.36

- 4.16** Dato il circuito di Figura 4.87, utilizzare la sovrapposizione per ottenere i_o .

ps

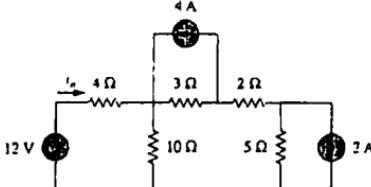


Figura 4.87 Per i Problemi 4.16 e 4.28.

- 4.17** Utilizzare la sovrapposizione per ottenere v_a nel circuito di Figura 4.88. Verificare il risultato ottenuto **PS ML** usando PSpice.

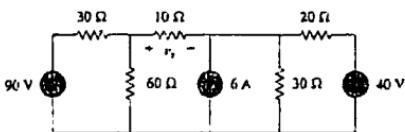


Figura 4.88 Per il Problema 4.17.

- 4.18** Usare la sovrapposizione per determinare v_o nel circuito di Figura 4.89.

ps

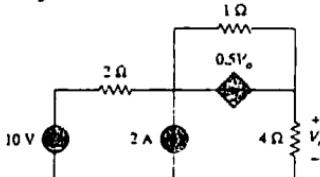


Figura 4.89 Per il Problema 4.18

- 4.19** Utilizzare la sovrapposizione per risolvere rispetto a i_x nel circuito di Figura 4.90.

ps

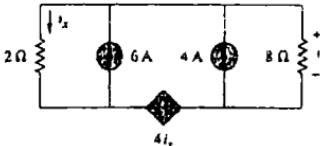


Figura 4.90 Per il Problema 4.19

Paragrafo 4.4 Trasformazione dei generatori

- 4.20** Usare la trasformazione dei generatori per ridurre il circuito di Figura 4.91 ad un circuito formato da un solo generatore di tensione in serie ad un resistore.

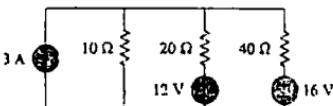


Figura 4.91 Per il Problema 4.20.

- 4.21** Applicare la trasformazione dei generatori per determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 4.92.

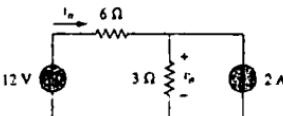


Figura 4.92 Per il Problema 4.21.

- 4.22 Nel circuito di Figura 4.93, utilizzare la trasformazione dei generatori per calcolare i .

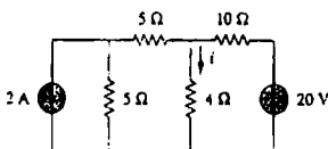


Figura 4.93 Per il Problema 4.22.

- 4.23 Con riferimento alla Figura 4.94, usare la trasformazione dei generatori per determinare la corrente e la potenza nel resistore da 8Ω .

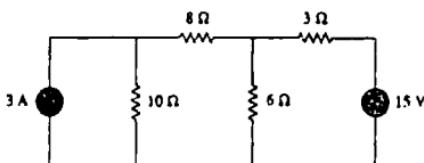


Figura 4.94 Per il Problema 4.23.

- 4.24 Usare la trasformazione dei generatori per calcolare la tensione V_2 nel circuito di Figura 4.95.

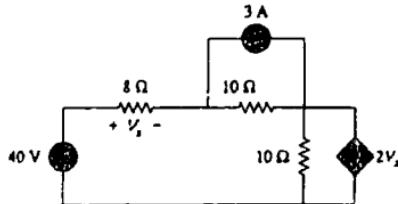


Figura 4.95 Per il Problema 4.24.

- 4.25 Calcolare v_a nel circuito di Figura 4.96 usando la trasformazione dei generatori. Verificare il risultato con PSpice

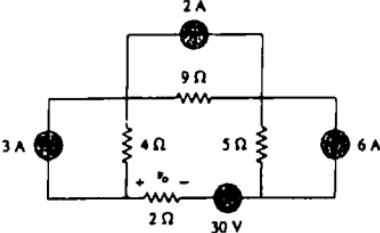


Figura 4.96 Per il Problema 4.25.

- 4.26 Usare la trasformazione dei generatori per determinare i_o nel circuito di Figura 4.97.

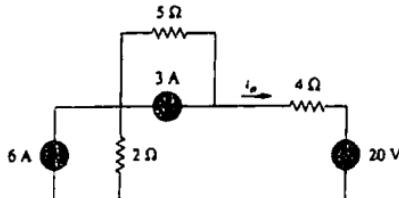


Figura 4.97 Per il Problema 4.26.

- 4.27 Applicare la trasformazione dei generatori per calcolare v_x nel circuito di Figura 4.98.

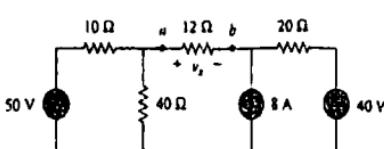


Figura 4.98 Per il Problema 4.27 e 4.40.

- 4.28 Usare la trasformazione dei generatori per calcolare i_o di Figura 4.99.

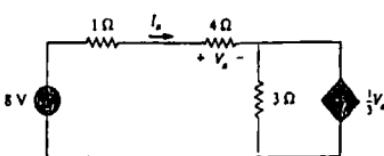


Figura 4.99 Per il Problema 4.28

- 4.29 Utilizzare la trasformazione dei generatori per calcolare v_a nel circuito di Figura 4.100.

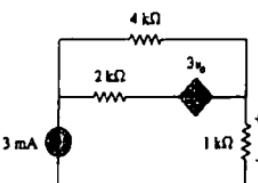


Figura 4.100 Per il Problema 4.29.

- 4.30 Utilizzare la trasformazione dei generatori nel circuito mostrato in Fig. 4.101 per calcolare i_o .

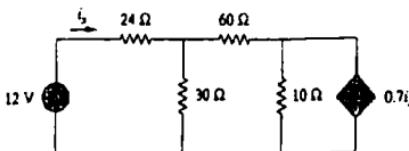


Figura 4.101 Per il Problema 4.30

- 4.31 Determinare v_x nel circuito di Figura 4.102 usando la trasformazione dei generatori.

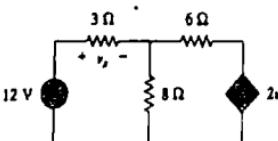


Figura 4.102 Per il Problema 4.31.

- 4.32 Utilizzare la trasformazione dei generatori per calcolare i_s nel circuito di Figura 4.103.

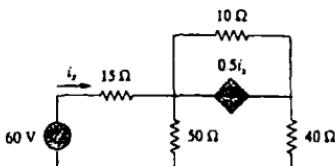
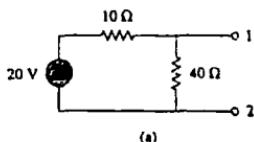


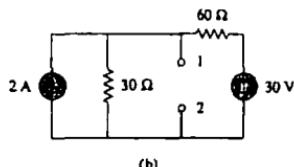
Figura 4.103 Per il Problema 4.32.

Paragrafi 4.5 e 4.6 Teoremi di Thevenin e Norton

- 4.33 Determinare R_{Th} e V_{Th} ai terminali 1-2 di ciascuno dei circuiti di Figura 4.104.



(a)



(b)

Figura 4.104 Per i Problemi 4.33 e 4.46.

- 4.34 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 4.105.

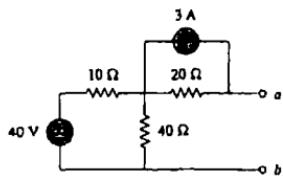


Figura 4.105 Per i Problemi 4.34 e 4.49.

- 4.35 Utilizzare il teorema di Thevenin per calcolare v_o nel Problema 4.12.

- 4.36 Risolvere rispetto alla corrente i nel circuito di Figura 4.106 usando il teorema di Thevenin.
(Suggerimento: Determinare l'equivalente Thevenin ai capi del resistore da 12 Ω.)

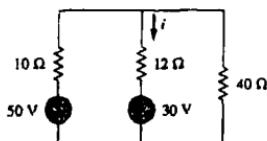


Figura 4.106 Per il Problema 4.36.

- 4.37 Determinare l'equivalente Norton rispetto ai terminali $a-b$ nel circuito mostrato in Figura 4.107.

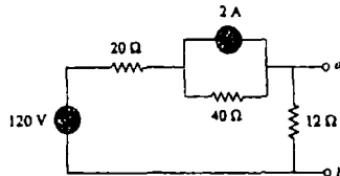


Figura 4.107 Per il Problema 4.37.

- 4.38 Applicare il teorema di Thevenin per calcolare I_o nel circuito di Figura 4.108.

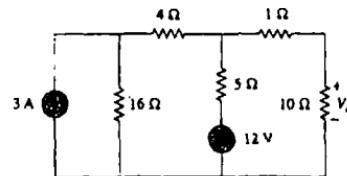


Figura 4.108 Per il Problema 4.38.

- 4.39 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali $a-b$ del circuito di Figura 4.109.

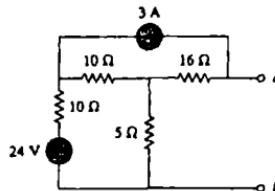


Figura 4.109 Per il Problema 4.39.

- 4.40 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali $a-b$ del circuito di Figura 4.110.

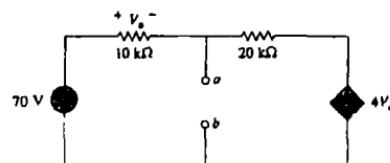


Figura 4.110 Per il Problema 4.40.

- 4.41 Determinare gli equivalenti Thevenin e Norton ai terminali $a-b$ del circuito mostrato in Figura 4.111.

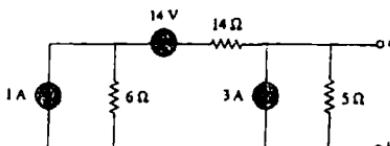


Figura 4.111 Per il Problema 4.41.

- *4.42 Per il circuito in Figura 4.112, determinare l'equivalente Thevenin tra i terminali *a* e *b*.

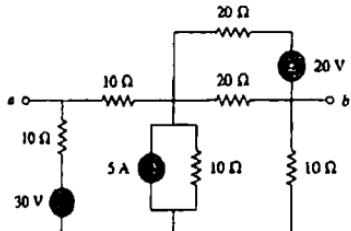


Figura 4.112 Per il Problema 4.42.

- 4.43 Determinare l'equivalente Thevenin visto ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.113 e risolvere rispetto a i_2 .

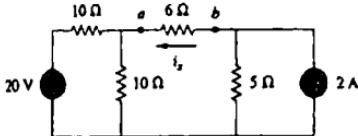


Figura 4.113 Per il Problema 4.43.

- 4.44 Per il circuito in Figura 4.114, ottenere l'equivalente Thevenin visto dai terminali:

(a) *a-b* (b) *b-c*

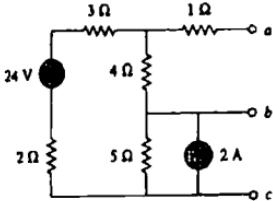


Figura 4.114 Per il Problema 4.44.

- 4.45 Determinare l'equivalente Norton del circuito di Figura 4.115.

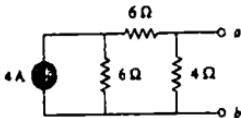


Figura 4.115 Per il Problema 4.45.

- 4.46 Determinare l'equivalente Norton ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.116.

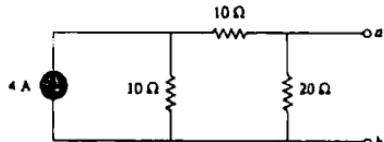


Figura 4.116 Per il Problema 4.46.

- 4.47 Ottenere i circuiti equivalenti Thevenin e Norton del circuito di Figura 4.117 rispetto ai terminali *a* e *b*.

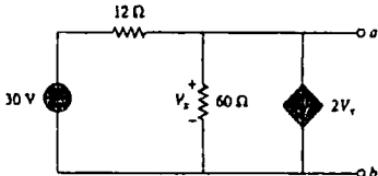


Figura 4.117 Per il Problema 4.47.

- 4.48 Determinare l'equivalente Norton ai terminali *a-b* per il circuito in Figura 4.118.

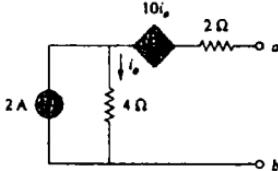


Figura 4.118 Per il Problema 4.48.

- 4.49 Determinare l'equivalente Norton visto ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.115.

- 4.50 Ottenere l'equivalente Norton del circuito di Figura 4.119 alla sinistra dei terminali *a-b*. Utilizzare il risultato per calcolare la corrente i .

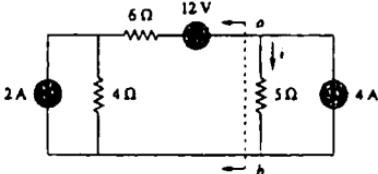


Figura 4.119 Per il Problema 4.50.

- 4.51 Dato il circuito di Figura 4.120, ottenere l'equivalente Norton visto dai terminali:

(a) *a-b* (b) *c-d*

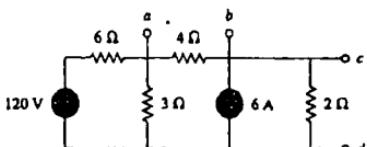


Figura 4.120 Per il Problema 4.51.

*L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

- 4.52 Per il modello di transistore in Figura 4.121, ottenere l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b*.

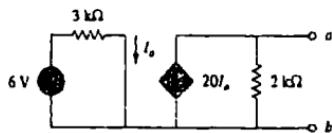


Figura 4.121 Per il Problema 4.52.

- 4.53 Determinare l'equivalente Norton ai terminali *a-b* del circuito in Figura 4.122.

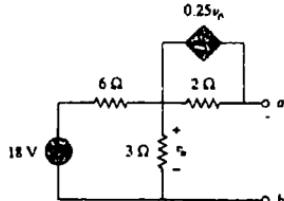


Figura 4.122 Per il Problema 4.53.

- 4.54 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.123.

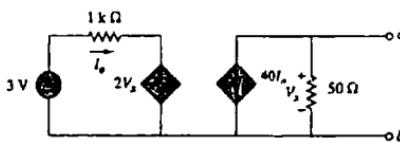


Figura 4.123 Per il Problema 4.54.

- *4.55 Ricavare l'equivalente Norton ai terminali *a-b* del circuito in Figura 4.124.

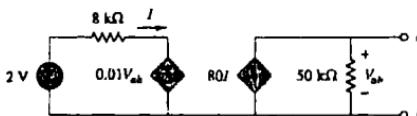


Figura 4.124 Per il Problema 4.55.

- 4.56 Usare il teorema di Norton per determinare I_a' nel circuito di Figura 4.125.

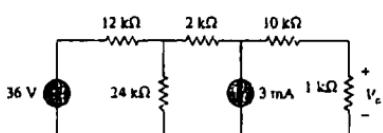


Figura 4.125 Per il Problema 4.56.

- 4.57 Ricavare i circuiti equivalenti Thevenin e Norton ai terminali *a-b* per il circuito di Figura 4.126.

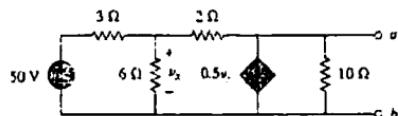


Figura 4.126 Per i Problemi 4.57 e 4.79.

- 4.58 La rete in Figura 4.127 rappresenta il modello di un amplificatore costituito da un transistor a emettitore comune collegato a un carico. Determinare la resistenza di Thevenin vista dal carico.

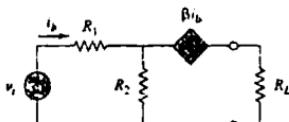


Figura 4.127 Per il Problema 4.58.

- 4.59 Determinare gli equivalenti Thevenin e Norton ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.128.

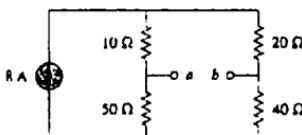


Figura 4.128 Per i Problemi 4.59 e 4.80.

- *4.60 Per il circuito in Figura 4.129, determinare i circuiti equivalenti Thevenin e Norton ai terminali *a-b*.

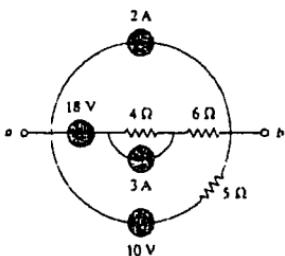


Figura 4.129 Per i Problemi 4.60 e 4.81.

- *4.61 Ottenere i circuiti equivalenti Thevenin e Norton ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.130.

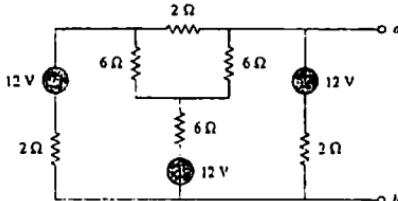


Figura 4.130 Per il Problema 4.61.

- *4.62 Determinare l'equivalente Thevenin del circuito di Figura 4.131.

ML

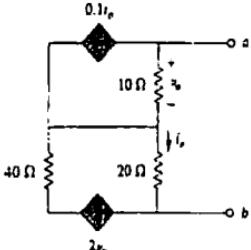


Figura 4.131 Per il Problema 4.62.

- 4.63 Determinare l'equivalente Norton per il circuito di Figura 4.132.

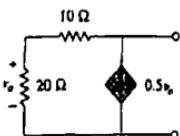


Figura 4.132 Per il Problema 4.63.

- 4.64 Ricavare l'equivalente Thevenin visto ai terminali a-b del circuito di Figura 4.133.

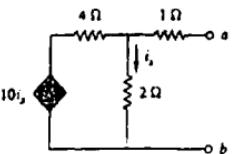


Figura 4.133 Per il Problema 4.64.

- 4.65 Per il circuito mostrato in Figura 4.134, determinare la relazione tra V_o e I_o .

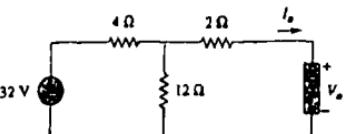


Figura 4.134 Per il Problema 4.65.

Paragrafo 4.8 Massimo trasferimento di potenza

- 4.66 Determinare la massima potenza che può essere fornita al resistore variabile R nel circuito di Figura 4.135.

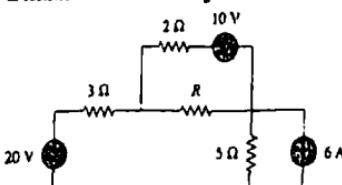


Figura 4.135 Per il Problema 4.66.

- 4.67 Il resistore variabile R di Figura 4.136 è regolato in modo da assorbire la massima potenza dal circuito.
 a) Calcolare il valore R per la massima potenza.
 b) Determinare la massima potenza assorbita da R .

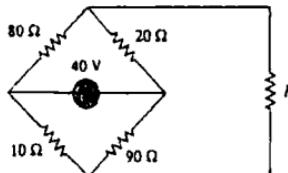


Figura 4.136 Per il Problema 4.67.

- *4.68 Calcolare il valore di R che dà luogo al massimo trasferimento di potenza al resistore da $10\ \Omega$ in Figura 4.137. Determinare la potenza massima.

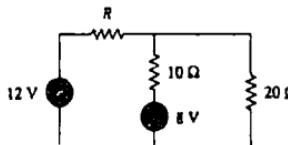


Figura 4.137 Per il Problema 4.68.

- 4.69 Determinare la massima potenza trasferita al resistore R nel circuito di Figura 4.138.

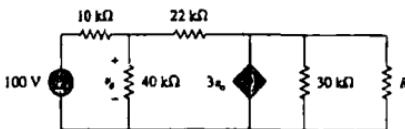


Figura 4.138 Per il Problema 4.69.

- 4.70 Determinare la massima potenza fornita al resistore variabile R mostrato nel circuito di Figura 4.139.

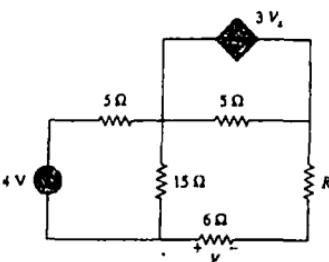


Figura 4.139 Per il Problema 4.70.

- 4.71 Per il circuito in Figura 4.140, quale resistore collegato ai terminali a-b assorberà la massima potenza dal circuito? Quanto vale tale potenza?

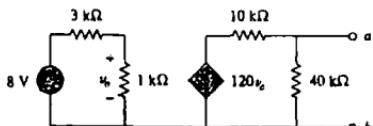


Figura 4.140 Per il Problema 4.71

- 4.72 (a) Per il circuito in Figura 4.141, ottenere l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b*.
 (b) Calcolare la corrente in $R_L = 8\Omega$
 (c) Determinare R_L in modo che a R_L sia trasferita la massima potenza.
 (d) Determinare la potenza massima.

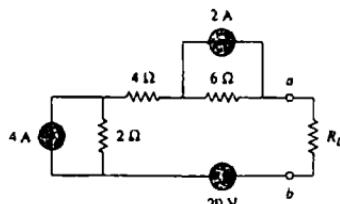


Figura 4.141 Per il Problema 4.72

- 4.73 Determinare la massima potenza che può essere fornita al resistore variabile R nel circuito di Figura 4.142

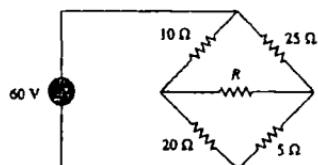


Figura 4.142 Per il Problema 4.73

- 4.74 Per il circuito a ponte mostrato in Figura 4.143, determinare il carico R_L che dà luogo al massimo trasferimento di potenza e la massima potenza assorbita dal carico.

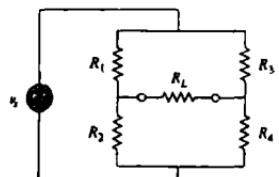


Figura 4.143 Per il Problema 4.74.

- 4.75 Per il circuito in Figura 4.144, determinare il valore di R in modo che la massima potenza trasferita al carico sia 3 mW

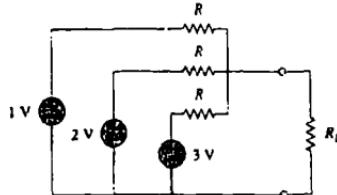


Figura 4.144 Per il Problema 4.75

Paragrafo 4.9



Verifica dei teoremi delle reti con PSpice

- 4.76 Risolvere il Problema 4.34 usando PSpice.
 4.77 Usare PSpice per risolvere il Problema 4.44.
 4.78 Usare PSpice per risolvere il Problema 4.52.
 4.79 Ricavare l'equivalente Thevenin del circuito di Figura 4.126 usando PSpice.
 4.80 Utilizzare PSpice per determinare il circuito equivalente di Thevenin ai terminali *a-b* del circuito di Figura 4.128.
 4.81 Per il circuito di Figura 4.129, usare PSpice per determinare l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b*.

Paragrafo 4.10

Applicazioni

- 4.82 Una batteria ha una corrente di corto circuito di 20 A e una tensione a circuito aperto di 12 V. Se la batteria è collegata a una lampadina elettronica di resistenza 2Ω, calcolare la potenza dissipata dalla lampadina.
 4.83 I risultati che seguono sono stati ottenuti da misure effettuate ai due terminali di una rete resistiva.

Tensione ai terminali	2 V	0 V
Corrente ai terminali	0 A	1.5 A

Determinare l'equivalente Thevenin della rete.

- 4.84 Quando è collegata a un resistore da 4Ω , una batteria presenta una tensione ai terminali di 10.8 V ma produce 12 V a circuito aperto. Determinare il circuito equivalente di Thevenin per la batteria.
 4.85 L'equivalente Thevenin ai terminali *a-b* della rete lineare mostrata in Figura 4.145 deve essere determinato con delle misure. Quando un resistore da $10\text{ k}\Omega$ è collegato ai terminali *a-b*, la tensione V_{ab} misurata è 6 V. Quando viene collegato un resistore da $30\text{ k}\Omega$, la V_{ab} misurata è 12 V. Determinare: (a) l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b*, (b) V_{ab} quando un resistore da $20\text{ k}\Omega$ è collegato ai terminali *a-b*.

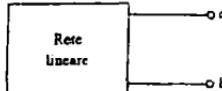


Figura 4.145 Per il Problema 4.85.

- 4.86** Una scatola nera contenente un circuito è collegata a un resistore variabile. Un amperometro ideale (con resistenza zero) e un voltmmetro ideale (con resistenza infinita) sono usati per misurare corrente e tensione come mostrato in Figura 4.146. I risultati sono mostrati nella tabella che segue.

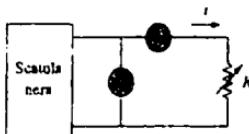


Figura 4.146 Per il Problema 4.86.

- Determinare i quando $R = 4 \Omega$.
- Determinare la massima potenza ottenibile dalla scatola.

$R (\Omega)$	$V (V)$	$i (A)$
2	3	1.5
8	8	1.0
14	10.5	0.75

- 4.87** Il modello di un trasduttore è costituito da un generatore eod di corrente I_g e da una resistenza parallela R_g . La corrente ai terminali del generatore è misurata pari a 9.975 mA quando un viene usato un amperometro con resistenza interna di 20Ω .

- Se l'aggiunta di un resistore da $2 k\Omega$ ai terminali del generatore fa scendere la lettura dell'amperometro a 9.876 mA, calcolare I_g e R_g .
- Quale sarà la lettura dell'amperometro se la resistenza tra i terminali del generatore diventa $4 k\Omega$?

- 4.88** Si consideri il circuito di Figura 4.147. Un amperometro con resistenza interna R_i viene inserito tra A e B per misurare I_a . Determinare la lettura dell'amperometro se:
- $R_i = 500 \Omega$,
 - $X = 0 \Omega$. (Suggerimento: Determinare il circuito equivalente di Thevenin ai terminali $A-B$.)

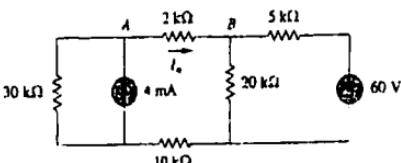


Figura 4.147 Per il Problema 4.88.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 4.92** Il circuito di Figura 4.151 rappresenta il modello di un amplificatore con transistor a emettitore comune. Determinare i_e usando la trasformazione dei generatori.

- 4.89** Si consideri il circuito di Figura 4.148 (a) Sostituire il resistore R_L con un amperometro con resistenza zero e determinare la lettura dell'amperometro. (b) Per verificare il teorema di reciprocità, scambiare tra loro l'amperometro e il generatore da 12 V e determinare di nuovo la lettura dell'amperometro.

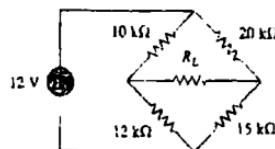


Figura 4.148 Per il Problema 4.89.

- 4.90** Il circuito a ponte di Wheatstone mostrato in Figura 4.149 viene utilizzato per misurare la resistenza di un sensore di deformazione. Il resistore regolabile ha una scala lineare con un valore massimo di 100Ω . Se la resistenza del sensore di deformazione risulta essere 42.6Ω , a quale frazione del fondo scala si troverà il cursore del resistore regolabile quando il ponte è bilanciato?

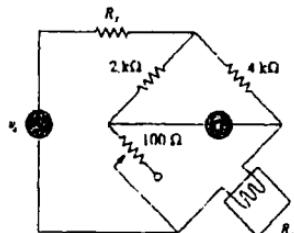


Figura 4.149 Per il Problema 4.90.

- 4.91** (a) Nel circuito a ponte di Wheatstone di Figura 4.150, scegliere i valori di R_1 e R_3 in modo che il ponte sia in grado di misurare R_x nell'intervallo di valori 0-10 Ω .

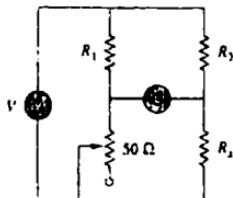


Figura 4.150 Per il Problema 4.91.

- (b) Ripetere per l'intervallo 0-100 Ω .

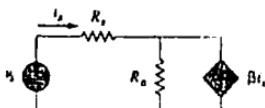


Figura 4.151 Per il Problema 4.92.

- 4.93 Un voltmetro DC con sensibilità di $20 \text{ k}\Omega/\text{V}$ viene utilizzato per determinare l'equivalente Thevenin di una rete lineare. Le letture su due scale sono le seguenti:
 (a) scala 0-10 V: 4 V (b) scala 0-50 V: 5 V
 Calcolare la tensione di Thevenin e la resistenza di Thevenin della rete.

- 4.94 Un array di resistenze è collegato a un resistore di carico R e a una batteria da 9 V come mostrato in Figura 4.152.
 (a) Determinare il valore di R in modo che $I_p = 1.8 \text{ A}$.
 (b) Calcolare il valore di R che assorbe la massima corrente. Quanto vale la massima corrente?

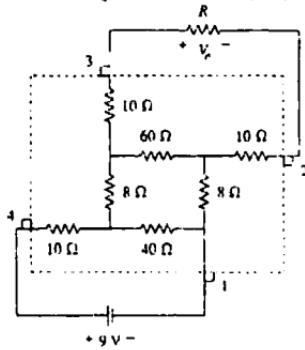


Figura 4.152 Per il Problema 4.94

- 4.95 In Figura 4.153 è mostrato un circuito amplificatore a emettitore comune. Determinare l'equivalente Thevenin alla sinistra dei punti B ed E .

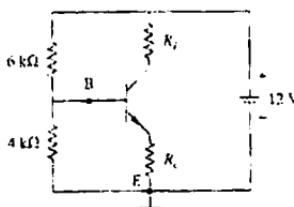


Figura 4.153 Per il Problema 4.95

- *4.96 Riferendosi all'Esercizio 4.18, determinare la corrente attraverso il resistore da 40 Ω e la potenza dissipata dal resistore.



AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

5.1 INTRODUZIONE

Dopo avere visto le leggi e i teoremi fondamentali della analisi dei circuiti, si passa ora allo studio di un importante elemento circuitale attivo: l'*amplificatore operazionale*¹.

Un amplificatore operazionale è un dispositivo elettronico che si comporta come un generatore di tensione controllata in tensione.

L'operazionale può anche essere utilizzato per realizzare un generatore di corrente controllato in corrente o in tensione; può eseguire somme di segnali, amplificare un segnale, integrarlo o derivarlo. La sua versatilità nell'eseguire operazioni matematiche è la ragione per cui è stato chiamato *amplificatore operazionale*. È anche la ragione per il frequentissimo uso degli operazionali nel progetto analogico: sono versatili, economici, facili e perfino divertenti da usare.

Si inizierà col presentare l'amplificatore operazionale ideale, per passare poi a quello non ideale. Si farà uso dell'analisi nodale per studiare circuiti con operazionali ideali, quali l'invertitore, l'inseguitore di tensione, il sommatore e l'amplificatore differenziale. Alcuni circuiti con operazionali verranno anche analizzati con *PSpice*. Infine, si vedrà come un operazionale può essere usato in un convertitore digitale-analogico e in un amplificatore per strumentazione.

5.2 AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Un amplificatore operazionale è un circuito elettronico in grado di eseguire operazioni matematiche quando ai suoi terminali vengono collegati componenti esterni quali resistori e condensatori.

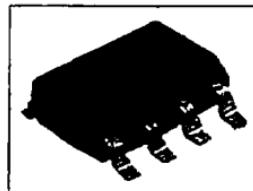
Un amplificatore operazionale è un elemento circuitale attivo progettato per eseguire le operazioni matematiche di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, derivazione e integrazione.

L'operazionale è un componente elettronico formato in realtà da una complessa interconnessione di resistori, transistori, condensatori e diodi. Una illustrazione completa di ciò che sta all'interno di un operazionale va al di là dello scopo di questo libro, nel quale ci si limiterà a trattare l'operazionale come un blocco elementare che fa parte dei circuiti e a studiare solo ciò che accade ai suoi terminali.

Gli operazionali si trovano in commercio contenuti in package per circuiti integrati di diverse forme; la Figura 5.1 mostra un tipico package per operazionale. Un formato

¹ Il termine *amplificatore operazionale* fu introdotto nel 1947 da John Ragazzini e colleghi, nei loro lavori sui calcolatori analogici per il National Defense Research Council dopo la seconda guerra mondiale. I primi operazionali utilizzavano tubi a vuoto invece di transistori.

Figura 5.1
Un tipico amplificatore operazionale
(Courtesy of Tech America)



di uso frequente è il *dual in-line package* (o DIP) da otto pin, mostrato in Figura 5.2(a). Il pin 8 non viene usato, e i terminali 1 e 5 sono di scarso interesse per gli scopi di questo testo. I cinque terminali importanti sono²:

1. L'ingresso invertente, pin 2.
2. L'ingresso non invertente, pin 3.
3. L'uscita, pin 6.
4. L'alimentazione positiva V^+ , pin 7.
5. L'alimentazione negativa V^- , pin 4.

Il simbolo circuitale per l'operazionale è il triangolo di Figura 5.2(b); come si vede, l'operazionale ha due ingressi e una uscita. Gli ingressi sono etichettati con il meno (-) e il più (+) per specificare l'ingresso *invertente* e quello *non invertente*, rispettivamente. Un ingresso applicato al terminale non invertente comparirà con la stessa polarità all'uscita, mentre un ingresso applicato al terminale invertente comparirà cambiato di segno in uscita.

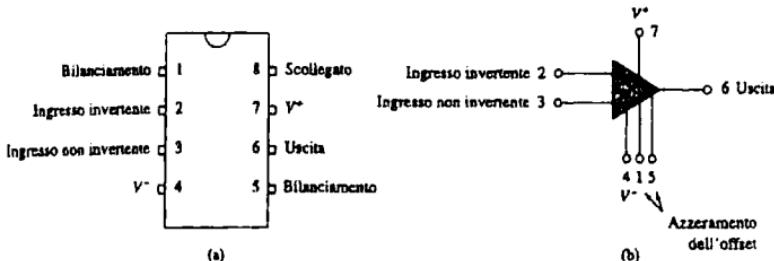
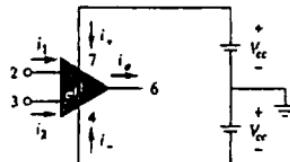


Figura 5.2
Amplificatore operazionale tipico:
(a) configurazione dei pin,
(b) simbolo circuitale.

Essendo un elemento attivo, l'operazionale deve essere alimentato da un generatore di tensione, come mostrato per esempio nella Figura 5.3. Nonostante le alimentazioni vengano spesso omesse nei diagrammi circuituali per semplificare il disegno, le correnti dovute all'alimentazione non vanno trascurate. Per la KCL,

$$i_o = i_1 + i_2 + i_+ + i_- \quad (5.1)$$

Figura 5.3
Alimentazione dell'operazionale



Il modello circuitale equivalente di un operazionale è mostrato in Figura 5.4. La sezione di uscita è composta da un generatore controllato in tensione e da una resistenza di uscita R_o . Risulta evidente dalla Figura 5.4 che la resistenza di ingresso R_i è la resi-

² Il diagramma dei pin in Figura 5.2(a) corrisponde agli operazionali della famiglia 741 della Fairchild Semiconductor.

stanza equivalente di Thevenin vista ai terminali di ingresso, mentre la resistenza di uscita R_o è la resistenza equivalente di Thevenin vista all'uscita.

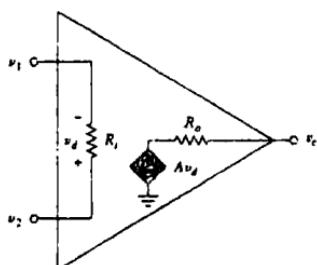


Figura 5.4
Circuito equivalente
di un operazionale non ideale

La tensione differenziale di ingresso è data da

$$v_d = v_2 - v_1 \quad (5.2)$$

dove v_1 è la tensione fra il terminale invertente e il nodo di riferimento e v_2 la tensione fra il terminale non invertente e il nodo di riferimento. L'operazionale preleva la differenza fra i due ingressi, la moltiplica per il guadagno A , e presenta la tensione risultante all'uscita. L'uscita v_o è quindi data da

$$v_o = A v_d = A(v_2 - v_1) \quad (5.3)$$

A è detto *guadagno di tensione ad anello aperto*, perché è il guadagno dell'operazionale quando non viene applicata nessuna reazione esterna dall'uscita all'ingresso. La tabella 5.1 riporta alcuni valori tipici per il guadagno di tensione A , la resistenza di ingresso R_i , la resistenza di uscita R_o e la tensione di alimentazione V_{CC} .

Tabella 5.1 Intervalli tipici per i parametri degli operazionali

Parametro	Intervallo tipico	Valore ideale
Guadagno ad anello aperto ³ , A	da 10^5 a 10^8	∞
Resistenza di ingresso, R_i	da 10^6 a $10^{12} \Omega$	$\infty \Omega$
Resistenza di uscita, R_o	da 10 a 100Ω	0Ω
Tensione di alimentazione, V_{CC}	da 5 a 24 V	

Il concetto di *reazione* o *retroazione* è molto importante per comprendere i circuiti con amplificatori operazionali. Si ottiene una reazione negativa riportando l'uscita al terminale invertente di ingresso dell'operazionale. Come si vedrà nell'Esempio 5.1, quando esiste una reazione fra uscita e ingresso, il rapporto fra tensione di uscita e tensione di ingresso viene chiamato *guadagno ad anello chiuso*. È possibile dimostrare che, in presenza di reazione negativa, il guadagno ad anello chiuso è praticamente insensibile alle variazioni del guadagno ad anello aperto A dell'operazionale. Questa è la ragione per cui gli operazionali vengono utilizzati nei circuiti reazionati.

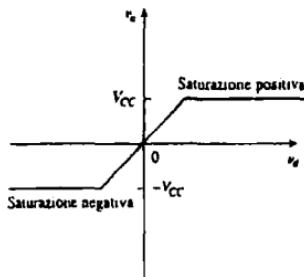
Una limitazione degli amplificatori operazionali è che il valore assoluto della tensione di uscita non può superare $|V_{CC}|$. In altre parole, la tensione di uscita dipende e risulta limitata dalla tensione di alimentazione. La Figura 5.5 mostra come l'operazionale abbia tre regioni di funzionamento, a seconda del valore della tensione differenziale di ingresso v_d :

1. Saturazione positiva, $v_o = V_{CC}$.
2. Regione lineare, $-V_{CC} \leq v_o = Av_d \leq V_{CC}$.
3. Saturazione negativa, $v_o = -V_{CC}$.

³ Spesso il guadagno in tensione viene espresso in decibel (dB), come si vedrà nel Capitolo 14.

1 dB = $20 \log_{10} A$.

Figura 5.5
Tensione di uscita
dell'operazionale v_o
in funzione della tensione
di ingresso v_i



Se si tenta di aumentare v_i oltre la regione lineare, l'operazionale satura e fornisce $v_o = V_{CC}$ o $v_o = -V_{CC}$. In tutto il libro si assumerà che gli operazionali funzionino nella regione lineare: la tensione di uscita sarà quindi limitata a:

$$-V_{CC} \leq v_o \leq V_{CC} \quad (5.4)$$

Nonostante l'ipotesi di funzionamento nella regione lineare, in un progetto con operazionali conviene sempre tenere presente la possibilità della saturazione, al fine di evitare di progettare circuiti che poi, in laboratorio, non funzionano in modo corretto.

Esempio 5.1

Un operazionale tipo 741 ha un guadagno di tensione ad anello aperto di 2×10^5 , resistenza di ingresso $2 M\Omega$ e resistenza di uscita 50Ω . L'operazionale è utilizzato nel circuito di Figura 5.6(a). Calcolare il guadagno ad anello chiuso v_o/v_i . Determinare la corrente i quando $v_i = 2 V$.

Soluzione: Usando il modello di Figura 5.4, si ottiene il circuito equivalente di Figura 5.6(b). Il circuito di Figura 5.6(b) viene risolto con l'analisi nodale.

Al nodo 1, la KCL fornisce

$$\frac{v_1 - v_2}{10 \times 10^3} = \frac{v_1}{2000 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3}$$

Moltiplicando tutti i termini per 2000×10^3 , si ottiene

$$200v_1 = 301v_1 - 100v_o$$

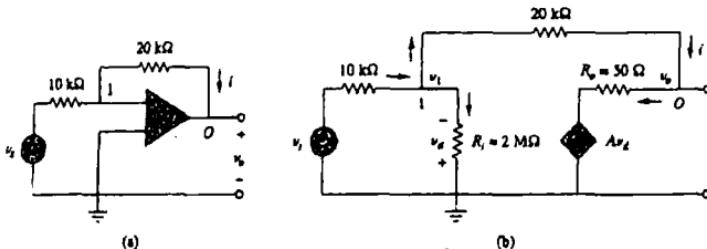
o anche

$$2v_o \approx 3v_1 - v_o \implies v_1 = \frac{2v_o + v_o}{3} \quad (5.1.1)$$

Al nodo 0,

$$\frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = \frac{v_o - Av_o}{50}$$

Figura 5.6
Per l'Esempio 5.1:
(a) circuito originale,
(b) circuito equivalente



Ma $v_o = -v_1$ e $A = 200000$. Allora

$$v_1 - v_o = 400(v_o + 200000v_1) \quad (5.1.2)$$

Sostituendo v_1 dalla (5.1.1) nella (5.1.2) si ha

$$0 \approx 26667067v_o + 53333333v_i \quad \frac{v_o}{v_i} = -1.9999699$$

Questo è il guadagno ad anello chiuso, perché il resistore di retroazione da $20 \text{ k}\Omega$ chiude l'anello fra il terminale di uscita e quelli di ingresso. Quando $v_s = 2 \text{ V}$, $v_o = -3.9999398 \text{ V}$. Dalla (5.1.1), si ottiene $v_i = 20.066667 \mu\text{V}$. Perciò,

$$i = \frac{v_i - v_o}{20 \times 10^3} = 0.19999 \text{ mA}$$

Risulta evidente da questo esempio che operare con un amplificatore operazionale non ideale comporta calcoli faticosi, a causa dei numeri molto grandi in gioco.

Esercizio 5.1 Se il medesimo operazionale 741 dell'Esempio 5.1 viene utilizzato nel circuito di Figura 5.7, calcolare il guadagno ad anello chiuso v_o/v_s . Determinare i_o quando $v_s = 1 \text{ V}$.

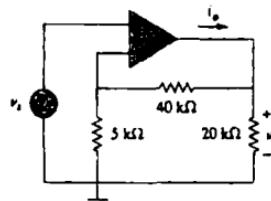


Figura 5.7
Per l'Esercizio 5.1.

Risposta 9.00041, +0.657 mA. ■

5.3 AMPLIFICATORE OPERAZIONALE IDEALE

Per semplificare l'analisi dei circuiti con operazionali, questi verranno sempre supposti ideali. Un operazionale è ideale se possiede le seguenti caratteristiche:

1. Guadagno ad anello aperto infinito, $A \approx \infty$.
2. Resistenza di ingresso infinita, $R_i \approx \infty$.
3. Resistenza di uscita nulla, $R_o \approx 0$.

Un amplificatore operazionale ideale è un amplificatore con guadagno ad anello aperto infinito, resistenza di ingresso infinita e resistenza di uscita nulla.

Benché l'ipotesi di operazionali ideali possa portare soltanto a una analisi approssimata, la maggior parte degli amplificatori odierni ha guadagno e impedanze di ingresso talmente elevati che l'analisi approssimata si rivela del tutto accettabile. Salvo avviso contrario, nel seguito si supporrà quindi che tutti gli operazionali siano ideali.

Ai fini dell'analisi dei circuiti, l'amplificatore operazionale ideale è illustrato in Figura 5.8, che è stata derivata dal modello non ideale della Figura 5.4. Due caratteristiche importanti dell'operazionale ideale sono:

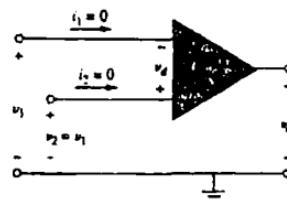


Figura 5.8
Modello per l'amplificatore operazionale ideale.

1. Le correnti in entrambi i terminali di ingresso sono nulle:

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0 \quad (5.5)$$

Ciò è dovuto alla resistenza di ingresso infinita: un resistenza infinita tra i terminali di ingresso indica la presenza di un circuito aperto; la corrente non può

quindi entrare nell'operazionale. La corrente di uscita non è però necessariamente nulla, come indica la (5.1).

2. La tensione fra i terminali di ingresso è trascurabile

$$v_d = v_2 - v_1 \approx 0 \quad (5.6)$$

cioè

$$v_1 = v_2 \quad (5.7)$$

Un amplificatore operazionale ideale ha quindi corrente nulla e tensione trascurabilmente piccola ai terminali di ingresso. Le (5.5) e (5.7) sono estremamente importanti nell'analisi dei circuiti contenenti operazionali.⁴

Esempio 5.2

Ripetere l'Esercizio 5.1 usando il modello ideale per l'operazionale.

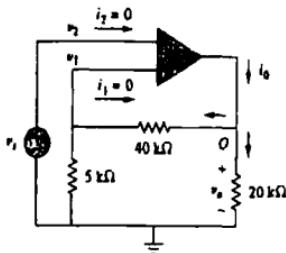
Soluzione: Si può sostituire l'operazionale in Figura 5.7 con il suo modello equivalente di Figura 5.4, come si è fatto nell'Esercizio 5.1. Ma ciò non è strettamente necessario: è sufficiente ricordare le (5.5) e (5.7) mentre si analizza il circuito di Figura 5.7, che è stato riportato in Figura 5.9. Si noti che

$$v_2 = v_1 \quad (5.2.1)$$

Poiché $i_1 = 0$, i resistori da $40\text{ k}\Omega$ e $5\text{ k}\Omega$ sono in serie, perché percorsi dalla stessa corrente. v_1 è la tensione sul resistore da $5\text{ k}\Omega$. Usando il partitore di tensione, allora,

$$v_1 = \frac{5}{3+40} v_o = \frac{v_o}{9} \quad (5.2.2)$$

Figura 5.9
Per l'Esempio 5.2.



Secondo la (5.7),

$$v_2 = v_1 \quad (5.2.3)$$

Sostituendo le (5.2.1) e (5.2.2) nella (5.2.3) si ha il guadagno ad anello chiuso,

$$v_2 = \frac{v_o}{9} \implies \frac{v_o}{v_1} = 9 \quad (5.2.4)$$

che è molto vicino al valore 9.00041 ottenuto con il modello non ideale nell'Esercizio 5.1. Ciò conferma che utilizzando il modello ideale si incorre in errori trascurabili.

Al nodo O,

$$i_o = \frac{v_o}{40+5} + \frac{v_o}{20} \text{ mA} \quad (5.2.5)$$

Dalla (5.2.4), quando $v_1 = 1\text{ V}$, $v_o = 9\text{ V}$. Sostituendo $v_o = 9\text{ V}$ nella (5.2.5) si ottiene

$$i_o = 0.2 + 0.45 = 0.65 \text{ mA}$$

Anche questo valore è vicino al 0.657 mA ottenuti nell'Esercizio 5.1 col modello non ideale.

■ Esercizio 5.2 Ripetere l'Esercizio 5.1 usando il modello ideale per l'operazionale.

Risposta -2, 0,2 mA.

⁴ Le due caratteristiche appena ricordate possono anche essere espresse dicendo che per il calcolo della tensione la porta di ingresso si comporta come un corto circuito, mentre per il calcolo delle correnti si comporta come un circuito aperto.

5.4 AMPLIFICATORE INVERTENTE

In questo paragrafo e nel prossimo vengono presi in considerazione alcuni importanti circuiti con amplificatori operazionali che vengono usati come blocchi costrutivi nel progetto di circuiti più complessi. Il primo di questi circuiti è l'amplificatore invertente mostrato in Figura 5.10. In questo circuito, l'ingresso non invertente è collegato a massa, v_1 , è collegato all'ingresso invertente attraverso R_1 , e il resistore di reazione R_f è collegato tra l'ingresso invertente e l'uscita. Si vuole trovare la relazione che lega la tensione di ingresso v_i e la tensione di uscita v_o . Applicando la KCL al nodo 1,

$$i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \quad (5.8)$$

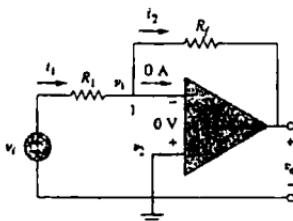


Figura 5.10
Amplificatore invertente.

Ma $v_1 = v_2 = 0$ per un operazionale ideale, perché il terminale non invertente è a massa. Quindi,

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_f}$$

cioè

$$v_o = -\frac{R_f}{R_1} v_i \quad (5.9)$$

Il guadagno di tensione è $A_v = v_o/v_i = -R_f/R_1$. Il circuito di Figura 5.10 viene anche chiamato *invertitore* a causa del segno negativo nella equazione precedente.

Un amplificatore invertente inverte la polarità del segnale di ingresso mentre lo amplifica.

Si noti che il guadagno è pari alla resistenza di retroazione divisa per la resistenza di ingresso: ciò significa che il guadagno dipende soltanto dai valori di elementi esterni collegati all'operazionale. In accordo con la (5.9), un possibile circuito equivalente per l'amplificatore invertente è quello di Figura 5.11. L'amplificatore invertente viene usato, per esempio, nei convertitori corrente-tensione.

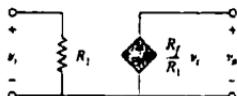
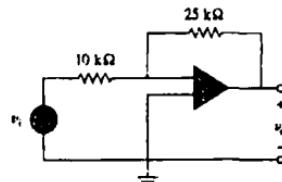


Figura 5.11
Circuito equivalente
dell'invertitore di Figura 5.10

Esempio 5.3

Con riferimento all'operazionale in Figura 5.12, se $v_i = 0.5$ V calcolare: (a) la tensione di uscita v_o e (b) la corrente nel resistore da $10k\Omega$.

Figura 5.12
Per l'Esempio 5.3.



Soluzione: (a) Usando la (5.9),

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_f}{R_1} = -\frac{25}{10} = -2.5$$

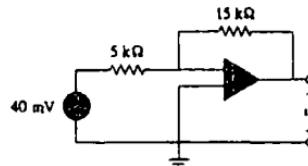
$$v_o = -2.5v_i = -2.5(0.5) = -1.25V$$

(b) La corrente nel resistore da $10 \text{ k}\Omega$ vale

$$i = \frac{v_i - 0}{R_1} = \frac{0.5 - 0}{10 \times 10^3} = 50 \mu\text{A}$$

■ **Esercizio 5.3** Calcolare la tensione di uscita del circuito con operazionale mostrato in Figura 5.13. Calcolare la corrente che attraversa il resistore di reazione.

Figura 5.13
Per l'Esempio 5.3

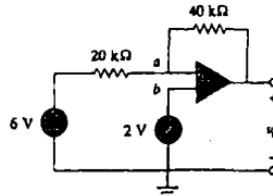


Risposta $-120 \text{ mV}, 8 \mu\text{A}$. ■

Esempio 5.4

Determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.14.

Figura 5.14
Per l'Esempio 5.4.



Soluzione: Applicando la KCL al nodo a,

$$\frac{v_a - v_b}{40 \text{ k}\Omega} = \frac{6 - v_o}{20 \text{ k}\Omega}$$

$$v_a - v_b = 12 - 2v_o \quad \Rightarrow \quad v_o = 3v_a - 12$$

Ma $v_o = v_b = 2 \text{ V}$ per un operazionale ideale, perché la tensione fra i terminali di ingresso è nulla. Quindi,

$$v_o = 6 - 12 = -6 \text{ V}$$

Si noti che se $v_b = 0 = v_o$ allora $v_o = -12$, come ci si attenderebbe dalla (5.9).

■ **Esercizio 5.4** La Figura 5.15 mostra due tipi di convertitori corrente-tensione (noti anche come *amplificatori a transresistenza*).

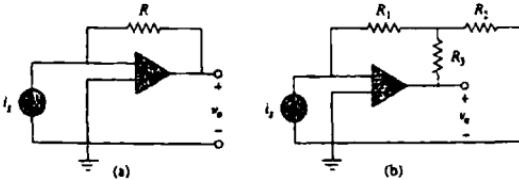
(a) Dimostrare che per il convertitore in Figura 5.15(a),

$$\frac{v_o}{i_s} = -R$$

Figura 5.15
Per l'Esercizio 5.4

(b) Dimostrare che per il convertitore in Figura 5.15(b),

$$\frac{v_o}{i_s} = -R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right)$$



Risposta Dimostrazione. ■

5.5 AMPLIFICATORE NON INVERTENTE

Un'altra importante applicazione dell'operazionale è l'amplificatore non invertente, mostrato in Figura 5.16. In questo caso, la tensione di ingresso v_i è applicata direttamente al terminale di ingresso non invertente, e il resistore R_1 è collegato tra la massa e il terminale invertente. Si è interessati alla tensione di uscita e al guadagno di tensione. Applicando la KCL al terminale invertente si ha

$$i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{0 - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \quad (5.10)$$

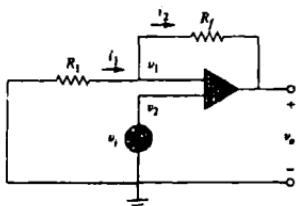


Figura 5.16
Amplificatore non invertente.

Ma $v_1 = v_2 = v_i$. La (5.10) diventa

$$\frac{-v_i}{R_1} = \frac{v_i - v_o}{R_f}$$

cioè

$$v_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_1} \right) v_i \quad (5.11)$$

Il guadagno di tensione è $A_v = v_o/v_i = 1 + R_f/R_1$, che non ha il segno negativo, il che indica che l'uscita ha la stessa polarità dell'ingresso.

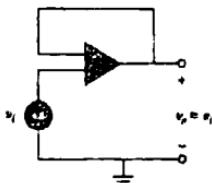
Un amplificatore non invertente è un circuito con operazionale progettato per fornire un guadagno di tensione positivo.

Si noti che il guadagno dipende, anche qui, soltanto dai resistori esterni.

Se il resistore di reazione $R_f = 0$ (corto circuito) oppure $R_1 = \infty$ (circuito aperto), o entrambe le cose, il guadagno è pari a 1. In quest'ultimo caso ($R_f = 0$ e $R_1 = \infty$), il circuito di Figura 5.16 diventa quello mostrato in Figura 5.17, che è detto *inseguitore di tensione* (o *amplificatore a guadagno unitario*) perché l'uscita *segue* l'ingresso. Per un inseguitore di tensione

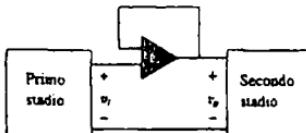
$$v_o = v_i \quad (5.12)$$

Figura 5.17
Inseguitore di tensione



Questo circuito presenta una impedenza di ingresso molto elevata, ed è quindi utile come stadio amplificatore intermedio (o *buffer*), per isolare un circuito da un altro, come schematizzato in Figura 5.18. L'inseguitore di tensione minimizza l'interazione tra i due stadi e quindi elimina gli effetti di carico interstadio.

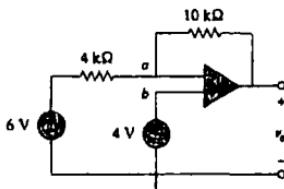
Figura 5.18
Inseguitore di tensione utilizzato
per isolare due stadi posti in
casco.



Esempio 5.5

Calcolare la tensione di uscita v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.19

Figura 5.19
Per l'Esempio 5.9.



Soluzione: Il circuito può essere risolto in due modi: con la sovrapposizione degli effetti e con l'analisi nodale.

METODO 1

Per applicare la sovrapposizione, si pone

$$v_o = v_{o1} + v_{o2}$$

dove v_{o1} è dovuta al generatore di tensione da 6 V, e v_{o2} è dovuta all'ingresso da 4 V. Per ottenere v_{o1} , si pone a zero il generatore da 4 V. In questa condizione, il circuito diventa un invertitore. La (5.9) fornisce allora

$$v_{o1} = -\frac{10}{4}(6) = -15 \text{ V}$$

Per ottenere v_{o2} , si azzera il generatore da 6 V. Il circuito diventa un amplificatore non invertente, e vale la (5.11).

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{10}{4}\right)4 = 14 \text{ V}$$

Perciò,

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = -15 + 14 = -1 \text{ V}$$

METODO 2

Applicando la KCL al nodo a ,

$$\frac{6 - v_a}{4} = \frac{v_a - v_o}{10}$$

Ma $v_a = v_b = 4$, e quindi

$$\frac{6 - 4}{4} = \frac{4 - v_o}{10} \quad \Rightarrow \quad 5 = 4 - v_o$$

cioè $v_o = -1$ V, come in precedenza.

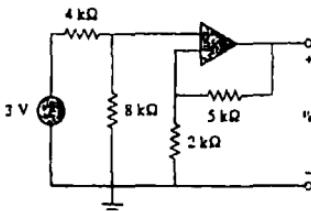
Esercizio 5.5 Calcolare v_o nel circuito di Figura 5.20.

Figura 5.20
Per l'Esercizio 5.5.

Risposta 7 V. ■

5.6 AMPLIFICATORE SOMMATORE

Oltre ad amplificare, l'operazionale è anche in grado di eseguire addizioni e sottrazioni. L'addizione si ottiene con l'amplificatore sommatore presentato in questo paragrafo; la sottrazione, con l'amplificatore differenziale illustrato nel prossimo paragrafo.

Un amplificatore sommatore è un circuito con operazionale la cui uscita è la somma pesata degli ingressi.

L'amplificatore sommatore, mostrato nella Figura 5.21, è una variante dell'amplificatore invertente che utilizza la proprietà della configurazione invertente di ammettere un numero qualsiasi di ingressi simultanei. Si tenga sempre presente che la corrente che entra nei terminali di ingresso dell'operazionale è nulla; applicando la KCL al nodo a si ha

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (5.13)$$

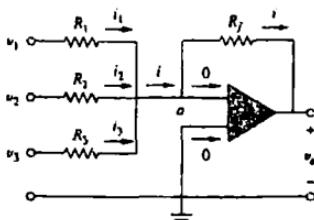


Figura 5.21
Amplificatore sommatore

Ma

$$i_1 = \frac{v_1 - v_o}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v_2 - v_o}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{v_3 - v_o}{R_3}, \quad i = \frac{v_o - v_o}{R_f} \quad (5.14)$$

Ricordando che $v_o = 0$ e sostituendo la (5.14) nella (5.13), si ottiene

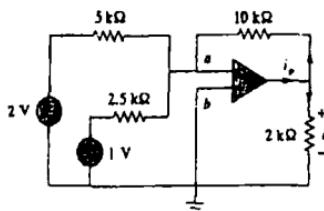
$$v_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3 \right) \quad (5.15)$$

la quale mostra che la tensione di uscita è la somma pesata degli ingressi. Per questa ragione, il circuito della Figura 5.21 è detto *sommatore*. Ovviamente, il sommatore può avere un numero qualsiasi di ingressi.

Esempio 5.6

Determinare v_o e i_o nel circuito con operazionale di Figura 5.22.

Figura 5.22
Per l'Esempio 5.6.



Soluzione: Si tratta di un sommatore a due ingressi. Usando la (5.15),

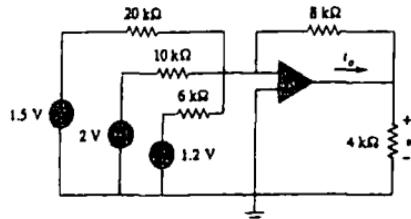
$$v_o = - \left[\frac{10}{5} (2) + \frac{10}{2.5} (1) \right] = -(4 + 4) = -8 \text{ V}$$

La corrente i_o è la somma delle correnti nei resistori da $10 \text{ k}\Omega$ e $2 \text{ k}\Omega$. Entrambi i resistori hanno una tensione $v_o = -8 \text{ V}$ su di essi, perché $v_o = v_b = 0$. Quindi,

$$i_o = \frac{v_o - 0}{10} + \frac{v_o - 0}{2} \text{ mA} = -0.8 - 4 = -4.8 \text{ mA}$$

■ Esercizio 5.6 Calcolare v_o e i_o nel circuito con operazionale mostrato in Figura 5.23.

Figura 5.23
Per l'Esercizio 5.6



Risposta $-3.8 \text{ V}, -1.425 \text{ mA}$.

5.7 AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE

Gli amplificatori differenziali vengono usati in molte applicazioni in cui è necessario amplificare la differenza fra due segnali di ingresso. Sono simili agli *amplificatori per strumentazione*, componenti molto utili e diffusi, che verranno presentati nel Paragrafo 5.10.

Un amplificatore differenziale è un dispositivo che amplifica la differenza fra due ingressi ma arresta i segnali comuni ai due ingressi.⁵

⁵ L'amplificatore differenziale è noto anche come *sottrattore*, per motivi che risulteranno chiari più avanti.

Si consideri il circuito di Figura 5.24. Si ricordi che le correnti di ingresso all'operazionale sono nulle. Applicando la KCL al nodo a ,

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_o}{R_2}$$

cioè

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) v_a - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (5.16)$$

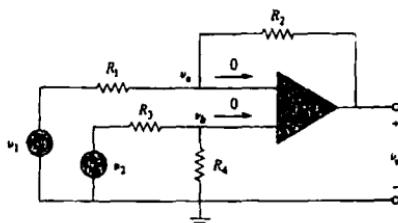


Figura 5.24
Amplificatore differenziale.

Applicando la KCL al nodo b ,

$$\frac{v_2 - v_b}{R_3} = \frac{v_b - 0}{R_4}$$

cioè

$$v_b = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 \quad (5.17)$$

Ma $v_a = v_b$. Sostituendo la (5.17) nella (5.16) si ha

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$$

e anche

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1 + R_1/R_2}{1 + R_3/R_4} \right) v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (5.18)$$

Poiché un amplificatore differenziale deve arrestare i segnali comuni ai due ingressi, esso deve possedere la proprietà che $v_o = 0$ quando $v_1 = v_2$. Ciò si verifica quando

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (5.19)$$

Perciò, quando il circuito è un amplificatore differenziale, la (5.18) diventa

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1) \quad (5.20)$$

Se $R_2 = R_1$ e $R_3 = R_4$, l'amplificatore differenziale diventa un *sottrattore*, la cui uscita è

$$v_o = v_2 - v_1 \quad (5.21)$$

Esempio 5.7

Progettare un circuito con operazionali i cui ingressi siano v_1 e v_2 e tale che $v_o = -5v_1 + 3v_2$.

Soluzione: Il circuito richiede che

$$v_o = 3v_2 - 5v_1 \quad (5.7.1)$$

e può essere realizzato in due modi

PROGETTO 1

Se si desidera fare uso di un solo operazionale, si può utilizzare il circuito di Figura 5.24. Confrontando la (5.7.1) con la (5.18),

$$\frac{R_2}{R_1} = 5 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 5R_1 \quad (5.7.2)$$

Inoltre,

$$\frac{(1 + R_1/R_2)}{(1 + R_3/R_4)} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{1 + R_3/R_4}}{1 + R_3/R_4} = \frac{3}{5}$$

e quindi

$$2 = 1 + \frac{R_3}{R_4} \quad \Rightarrow \quad R_3 = R_4 \quad (5.7.3)$$

Se si sceglie $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ e $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$, allora $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ e $R_4 = 20 \text{ k}\Omega$.

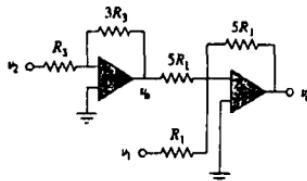
PROGETTO 2

Se si vuole utilizzare più di un operazionale, si possono porre in cascata un amplificatore invertente e un sommatore invertente a due ingressi, come mostrato in Figura 5.25. Per il sommatore,

$$v_o = -v_x - 5v_1 \quad (5.7.4)$$

e per l'invertitore,

$$v_x = -3v_2 \quad (5.7.5)$$



Combinando le (5.7.4) e (5.7.5) si ha

$$v_o = 3v_2 - 5v_1$$

che è il risultato desiderato. In Figura 5.25, si può scegliere $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ e $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ oppure $R_1 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$.

Esercizio 5.7 Progettare un amplificatore differenziale con guadagno 4.

Risposta Valori tipici: $R_1 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_4 = 40 \text{ k}\Omega$. ■

Esempio 5.8

Un *amplificatore per strumentazione*, mostrato in Figura 5.26, è un amplificatore per segnali di basso livello usato in applicazioni di controllo di processi o di misura, e disponibile in commercio in package singoli. Mostrare che

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_4} \right) (v_2 - v_1)$$

Soluzione: È facile riconoscere che l'amplificatore A_3 in Figura 5.26 è un amplificatore differenziale. Dalla (5.20), allora,

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_{o2} - v_{o1}) \quad (5.8.1)$$

Poiché gli operazionali A_1 e A_2 non assorbono corrente, la corrente i scorre nei tre resistori come se fossero in serie. Quindi,

$$v_{o1} - v_{o2} = i(R_3 + R_4 + R_5) = i(2R_3 + R_4) \quad (5.8.2)$$

Ma

$$i = \frac{v_o - v_b}{R_4}$$

e $v_o = v_1$, $v_b = v_2$. Perciò,

$$i = \frac{v_1 - v_2}{R_4} \quad (5.8.3)$$

Inserendo le (5.8.2) e (5.8.3) nella (5.8.1) si ha

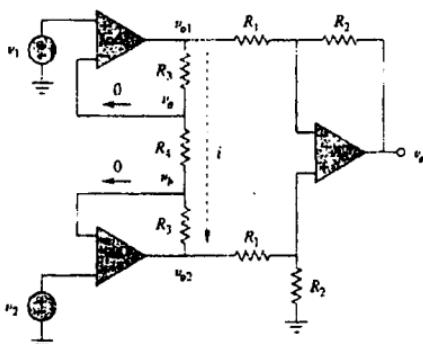


Figura 5.26
Amplificatore per strumentazione, per l'Esempio 5.8.

$$v_0 = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_1}{R_4} \right) (v_2 - v_1)$$

come richiesto. Gli amplificatori per strumentazione saranno trattati con maggiore dettaglio nel Paragrafo 5.10.

■ **Esercizio 5.8** Calcolare i_o nel circuito amplificatore per strumentazione di Figura 5.27.

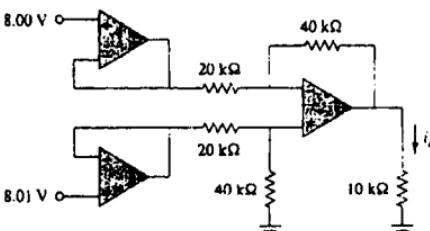


Figura 5.27
Amplificatore per strumentazione; per l'Esercizio 5.8.

Risposta $2 \mu\text{A}$. ■

5.8 COLLEGAMENTO IN CASCATA DI CIRCUITI CON OPERAZIONALI

Come si è detto, i circuiti con operazionali vengono spesso utilizzati come moduli, o blocchi costruttivi, per il progetto di circuiti complessi. Nelle applicazioni pratiche è sovente necessario collegare in cascata (cioè uno dietro l'altro) i circuiti con operazionali al fine di ottenere guadagni complessivi anche molto elevati. Due circuiti si dicono in cascata quando sono collegati in modo che l'uscita del primo coincida con l'ingresso del secondo.

Un collegamento in cascata è una configurazione formata da due o più circuiti con operazionali, in cui l'uscita di un circuito rappresenta l'ingresso del circuito successivo.

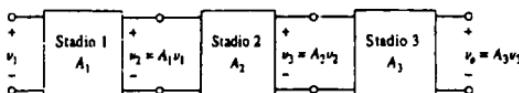
Quando dei circuiti con operazionali vengono collegati in cascata, ciascun circuito della catena è detto uno *stadio*; il segnale di ingresso originale risulta moltiplicato per il guadagno di ciascuno stadio.

Il vantaggio dei circuiti con operazionali è che possono essere collegati in cascata senza che vengano alterate le loro relazioni ingresso-uscita, grazie alla resistenza di ingresso infinita e resistenza di uscita nulla. La Figura 5.28 mostra una rappresentazione

a blocchi di tre circuiti con operazionali collegati in cascata. Poiché l'uscita di uno stadio rappresenta l'ingresso del successivo, il guadagno complessivo della cascata è il prodotto dei guadagni dei singoli stadi,

$$A = A_1 A_2 A_3 \quad (5.22)$$

Figura 5.28
Un collegamento in cascata con tre stadi.

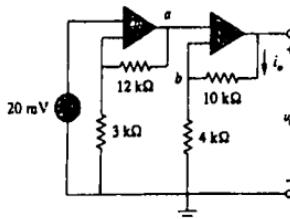


Nonostante il collegamento in cascata non presenti alcun effetto sulla relazione ingresso-uscita dei singoli stadi se considerati ideali, è necessario prestare attenzione, nel progetto di ciascuno stadio, affinché il carico presentato dallo stadio successivo non porti alla saturazione l'operazionale, facendolo così deviare dal comportamento ideale.

Esempio 5.9

Determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 5.29

Figura 5.29
Per l'Esempio 5.9.



Soluzione: Il circuito consiste di due amplificatori non invertenti in cascata. All'uscita del primo operazionale,

$$v_o = \left(1 + \frac{12}{3}\right)(20) = 100 \text{ mV}$$

All'uscita del secondo operazionale,

$$v_o = \left(1 + \frac{10}{4}\right)v_o = (1 + 2.5)100 = 350 \text{ mV}$$

La corrente richiesta i_o è la corrente nel resistore da $10 \text{ k}\Omega$.

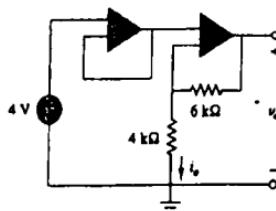
$$i_o = \frac{v_o - v_b}{10} \text{ mA}$$

Ma $v_b = v_o = 100 \text{ mV}$, quindi

$$i_o = \frac{(350 - 100) \times 10^{-3}}{10 \times 10^3} = 25 \mu\text{A}$$

Esercizio 5.9 Determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 5.30.

Figura 5.30
Per l'Esercizio 5.9.



Risposta 10 V, 1 mA.

Esempio 5.10

Nel circuito con operazionali di Figura 5.31, se $v_1 = 1 \text{ V}$ e $v_2 = 2 \text{ V}$, calcolare v_o .

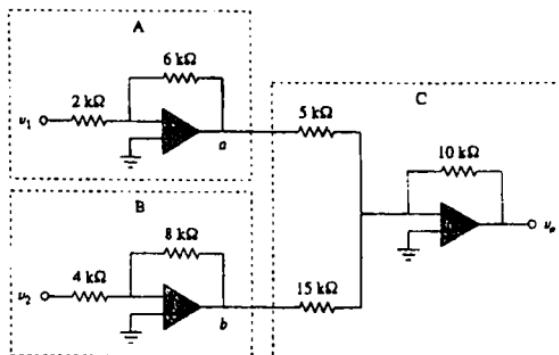


Figura 5.31
Per l'Esempio 5.10.

Soluzione: 1. *Dare una definizione precisa del problema.*

Il problema è definito in modo chiaro.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.*

Si calcola la tensione di uscita del circuito di Figura 5.31, con ingresso v_1 di 1V e v_2 di 2V.

Il circuito con amplificatore operazionale è composto da tre sottocircuiti. Il primo circuito funziona come un amplificatore di guadagno -3 (cioè $-6\text{k}\Omega/2\text{k}\Omega$) per la tensione v_1 ; mentre il secondo circuito funziona come un amplificatore di guadagno -2 (cioè $-8\text{k}\Omega/4\text{k}\Omega$) per la tensione v_2 . L'ultimo circuito serve da sommatore con due diversi guadagni per le rispettive uscite degli altri due circuiti.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*

Ci sono diversi modi per studiare questo circuito. Poiché ci sono amplificatori operazionali ideali, è più facile lavorare con un metodo puramente matematico. Un secondo metodo potrebbe essere quello di usare PSpice come conferma del primo metodo.

4. *Fare un tentativo di soluzione del problema.*

Si indica con v_{11} l'uscita del primo circuito e v_{22} l'uscita del secondo circuito. Per cui si ha:

$$v_{11} = -3 \cdot v_1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ V} \quad v_{22} = -2 \cdot v_2 = -2 \cdot 2 = -4 \text{ V}$$

Nel terzo circuito si ottiene:

$$v_o = -\left(\frac{10 \text{ K}\Omega}{5 \text{ K}\Omega}\right) \cdot v_{11} + \left[-\left(\frac{10 \text{ K}\Omega}{15 \text{ K}\Omega}\right) \cdot v_{22}\right] = -2 \cdot (-3) - \left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot (-4)\right] = 6 + 2.667 = 8.667 \text{ V}$$

5. *Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.*

Per valutare la soluzione in maniera appropriata, occorre un controllo soddisfacente. Si può perciò usare PSpice. Il risultato è mostrato in Figura 5.32.

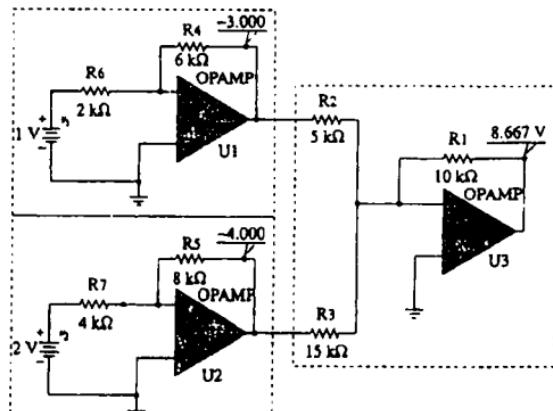


Figura 5.32
Per l'Esempio 5.10.

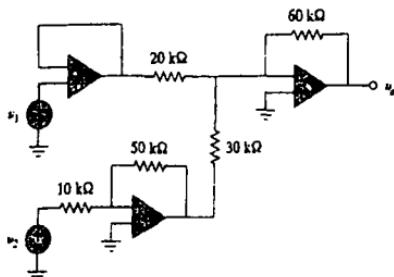
Si nota che usando due differenti tecniche si ottiene lo stesso risultato (la prima consiste nel considerare il circuito come una somma di due prodotti, e la seconda consiste nell'usare l'analisi circuitale di PSpice). Questo è un ottimo sistema per assicurarsi che il risultato è corretto.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è soddisfatti perché il lavoro svolto e la soluzione ottenuta ben rispondono alle domande del problema.

■ Esercizio 5.10 Se $v_1 = 2 \text{ V}$ e $v_2 = 1.5 \text{ V}$, calcolare v_o nel circuito di Figura 5.33.

Figura 5.33
Per l'Esercizio 5.10.

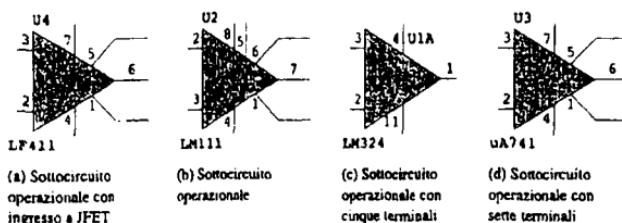


Risposta 9 V.

5.9 ANALISI DEI CIRCUITI CON OPERAZIONALI IN PSPICE

PSpice for Windows non contiene un modello standard per l'amplificatore operazionale ideale, benché sia possibile creare uno come sottocircuito usando il comando *Create Subcircuit* nel menu *Tools*. Invece di costruire un modello di operazionale ideale, nel seguito si farà uso di uno dei quattro modelli di operazionali commerciali disponibili nella libreria eval.lib di PSpice. I loro part name sono LF411, LM111, LM324 e uA741, come mostrato in Figura 5.34. Ciascuno di essi può essere richiamato con *Draw/Get New Part/libraries .../eval.lib* o semplicemente selezionando *Draw/Get New Part* e scrivendo il part name nella finestra di dialogo *PartName*. Si noti che tutti i modelli necessitano di alimentazioni in continua, senza le quali l'operazionale non funziona. Le alimentazioni devono essere collegate come mostrato in Figura 5.3.

Figura 5.34
Modelli di operazionale non ideale disponibili in PSpice.



Esempio 5.11

Risolvere l'Esempio 5.1 usando PSpice.

Soluzione: Si disegna il circuito di Figura 5.6(a) con Schematics, come mostrato in Figura 5.35. Si noti che il terminale positivo del generatore di tensione v_1 è collegato al terminale invertente (pin 2) attraverso il resistore da $10 \text{ k}\Omega$, mentre il terminale non invertente è collegato a massa come richiesto in Figura 5.6(a). Si osservi inoltre come l'operazionale è stato alimentato: il terminale positivo di alimentazione V_+ (pin 7) è collegato a un generatore di tensione DC da 15 V , mentre quello negativo, V_- (pin 4), è collegato a -15 V . I pin 1 e 5 vengono lasciati liberi perché usati soltanto per la regolazione dello zero offset, che non è di interesse in questo capitolo. Oltre ai generatori di

alimentazione, al circuito originale di Figura 5.6(a) sono stati anche aggiunti gli pseudocomponenti VIEWPOINT e IPROBE per misurare rispettivamente la tensione di uscita v_o al pin 6 e la corrente richiesta nel resistore da $20\text{ k}\Omega$.

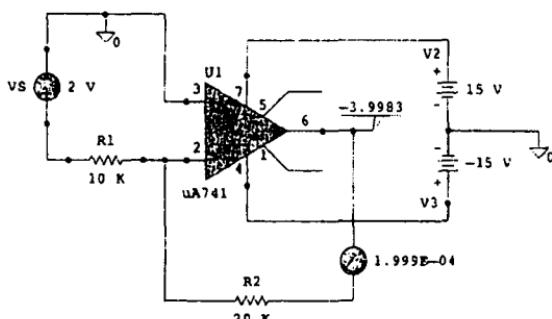


Figura 5.35
Schematico per l'Esempio 5.11.

Dopo aver salvato lo schematico, il circuito viene simulato selezionando Analysis/Simulate e i risultati vengono visualizzati su VIEWPOINT e IPROBE. Dai risultati visualizzati, il guadagno ad anello chiuso risulta

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-3.9983}{2} = -1.99915$$

e $i = 0.1999\text{ mA}$, in accordo con i risultati ottenuti analiticamente nell'Esempio 5.1.

■ Esercizio 5.11 Ripetere l'Esercizio 5.1 usando PSpice.

Risposta 9.0027, 0.6502 mA. ■

5.10 APPLICAZIONI†

L'amplificatore operazionale è un componente fondamentale nella strumentazione elettronica di oggi, e viene usato diffusamente in molti dispositivi, assieme a resistori e ad altri componenti passivi. Tra le sue numerose applicazioni pratiche si ricordano amplificatori per strumentazione, convertitori digitale-analogico, calcolatori analogici, variatori di livello, filtri, circuiti di calibrazione, invertitori, sommatori, integratori, derivatori, sottrattori, amplificatori logaritmici, comparatori, giratori, oscillatori, raddrizzatori, regolatori, convertitori tensione-corrente e corrente-tensione e limitatori, alcuni dei quali sono stati già presentati in questo capitolo. Si illustreranno ora due ulteriori applicazioni: il convertitore digitale-analogico e l'amplificatore per strumentazione.

5.10.1 Convertitore digitale-analogico

Il convertitore digitale-analogico (DAC, digital-to-analog converter) trasforma i segnali digitali in forma analogica. Un esempio tipico di DAC a quattro bit è illustrato in Figura 5.36(a). Esso può essere realizzato in molte maniere: una delle più semplici è la *scala binaria pesata*, mostrata in Figura 5.36(b). I bit sono usati come pesi diversi in funzione della loro posizione, con valori decrescenti di R_f/R_n , così che ciascun bit meno significativo ha un peso pari a metà del vicino più significativo. Il circuito è ovviamente un amplificatore sommatore invertente. La relazione fra uscita e ingressi è come nella (5.15).

$$-V_o = \frac{R_f}{R_1} V_1 + \frac{R_f}{R_2} V_2 + \frac{R_f}{R_3} V_3 + \frac{R_f}{R_4} V_4 \quad (5.23)$$

L'ingresso V_1 è chiamato *bit più significativo* (MSB, most significant bit), e l'ingresso V_4 *bit meno significativo* (LSB, least significant bit). Ciascuno dei quattro ingressi binari V_1, \dots, V_4 può assumere solo due valori di tensione: 0 V o 1 V⁶. Usando valori

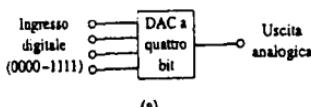
⁶ Valori più realistici per i due livelli di tensione potrebbero essere 0 e $\pm 5\text{ V}$.

appropriati per i resistori di ingresso e di reazione, il DAC fornisce una singola uscita che è proporzionale al numero binario rappresentato dagli ingressi.

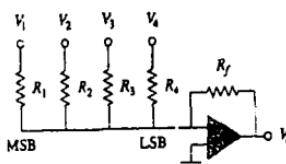
Figura 5.36

DAC a quattro bit:

- (a) diagramma a blocchi,
- (b) realizzazione a scala binaria pesata.



(a)



(b)

Esempio 5.12

Nel circuito di Figura 5.35(b), sia $R_f = 10 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 40 \text{ k}\Omega$ e $R_4 = 80 \text{ k}\Omega$. Calcolare l'uscita analogica per i seguenti ingressi binari: [0000], [0001], [0010], ..., [1111].

Soluzione: Sostituendo i valori dati per i resistori di ingresso e di reazione nella (5.23) si ottiene

$$\begin{aligned} -V_o &= \frac{R_f}{R_1} V_1 + \frac{R_f}{R_2} V_2 + \frac{R_f}{R_3} V_3 + \frac{R_f}{R_4} V_4 \\ &= V_1 + 0.5 V_2 + 0.25 V_3 + 0.125 V_4 \end{aligned}$$

Secondo questa equazione, un ingresso digitale $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0000]$ produce una uscita analogica $-V_o = 0 \text{ V}$; $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0001]$ fornisce $-V_o = 0.125 \text{ V}$. In maniera simile,

$$\begin{aligned} [V_1 V_2 V_3 V_4] = [0010] &\implies -V_o = 0.25 \text{ V} \\ [V_1 V_2 V_3 V_4] = [0011] &\implies -V_o = 0.25 + 0.125 = 0.375 \text{ V} \\ [V_1 V_2 V_3 V_4] = [0100] &\implies -V_o = 0.5 \text{ V} \\ \\ [V_1 V_2 V_3 V_4] = [1111] &\implies -V_o = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 \\ &= 1.875 \text{ V} \end{aligned}$$

La Tabella 5.2 riassume i risultati della conversione digitale-analogica. Si noti che si è assunto un valore di 0.125 V per ciascun bit: in questo sistema non è quindi possibile rappresentare tensioni comprese, per esempio, fra 1.000 e 1.125 V.

Tabella 5.2 Valori di ingresso e di uscita per il DAC a quattro bit.

Ingresso binario [V ₁ V ₂ V ₃ V ₄]	Valore decimale	Uscita -V _o
0000	0	0
0001	1	0.125
0010	2	0.25
0011	3	0.375
0100	4	0.5
0101	5	0.625
0110	6	0.75
0111	7	0.875
1000	8	1.0
1001	9	0.125
1010	10	0.25
1011	11	0.375
1011	12	1.5
1100	13	1.825
1101	14	1.75
1111	15	1.875

Questa mancanza di risoluzione è il principale difetto della conversione digitale-analogica. Per aumentare l'accuratezza è necessaria una rappresentazione binaria con lunghezza maggiore. Ma anche così, la rappresentazione digitale di una tensione analogica non è mai esatta. Nonostante questa inaccuracy intrinseca, la rappresentazione digitale viene usata in molte importanti applicazioni, quali i CD audio e la fotografia digitale.

Esercizio 5.12 La Figura 5.37 mostra un DAC a tre bit

- Determinare $|V_o|$ per $[V_1 V_2 V_3] = [010]$.
- Calcolare $|V_o|$ se $[V_1 V_2 V_3] = [110]$.
- Se si desidera $|V_o| = 1.25 \text{ V}$, quali devono essere i valori di $[V_1 V_2 V_3]$?
- Quali devono essere i valori di $[V_1 V_2 V_3]$ per ottenere $|V_o| = 1.75 \text{ V}$?

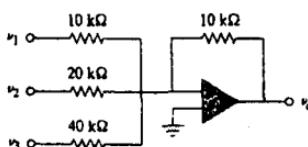


Figura 5.37
DAC a tre bit,
per l'Esercizio 5.12.

Risposta 0.5 V, 1.5 V, [101], [111]. ■

5.10.2 Amplificatori per strumentazione

Uno dei circuiti più utili e versatili per applicazioni di misura di precisione e di controllo di processi è l'*amplificatore per strumentazione* (IA, Instrumentation Amplifier), chiamato così per il suo utilizzo particolarmente diffuso nei sistemi di misura. Applicazioni tipiche dell'IA sono amplificatori di isolamento, amplificatori a termocoppia e sistemi di acquisizione dati.

L'amplificatore per strumentazione è una specializzazione dell'amplificatore differenziale, nel senso che anch'esso amplifica la differenza fra i segnali di ingresso. Come si vede nella Figura 5.26 (vedi Esempio 5.8), un amplificatore per strumentazione consiste tipicamente di tre operazionali e sette resistori. Per comodità, l'amplificatore è mostrato nuovamente in Figura 5.38(a), dove i resistori sono stati presi tutti uguali fatta eccezione per il resistore esterno di regolazione del guadagno R_G , collegato fra i terminali di regolazione del guadagno. La Figura 5.38(b) mostra il simbolo circuitale.

Nell'Esempio 5.8 si è visto che

$$v_o = A_v(v_2 - v_1) \quad (5.24)$$

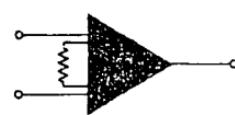
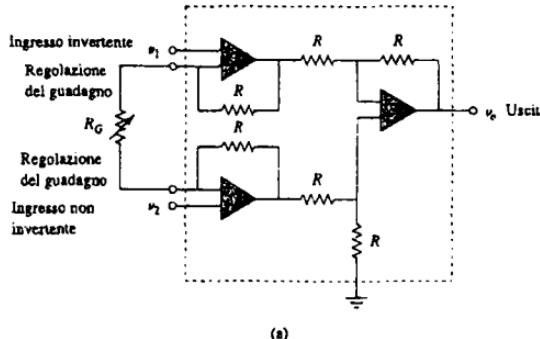


Figura 5.38
(a) Amplificatore per strumentazione con una resistenza esterna per la regolazione del guadagno.
(b) simbolo circuitale.

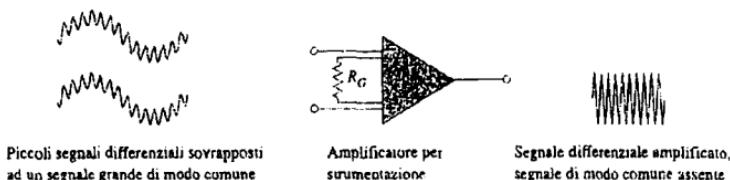
in cui il guadagno di tensione è

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} \quad (5.25)$$

Come si vede in Figura 5.39, l'amplificatore per strumentazione è in grado di amplificare piccole tensioni differenziali di segnale sovrapposte a tensioni elevate di modo comune. Poiché le tensioni di modo comune sono uguali, esse si cancellano.

Figura 5.39

L'IA arresta le tensioni comuni ma amplifica piccole tensioni di segnale differenziali. (Source: T. L. Floyd, *Electronic Devices*, 2nd ed., Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1996, p. 793.)



L'IA presenta tre importanti caratteristiche:

1. Il guadagno di tensione viene regolato da un solo resistore esterno R_G .
2. L'impedenza di ingresso in entrambi i terminali di ingresso è molto elevata e non varia al variare del guadagno.
3. L'uscita v_o dipende dalla differenza fra gli ingressi v_1 e v_2 , e non dalla tensione a loro comune (tensione di modo comune).

A causa della loro grande diffusione, i fabbricanti di IA hanno sviluppato prodotti disponibili in package singoli. Un esempio tipico è il LH0036 della National Semiconductor, il cui guadagno può essere variato grazie a un resistore esterno il cui valore va da 100Ω a $10 \text{ k}\Omega$.

Esempio 5.13

In Figura 5.37, sia $R = 10 \text{ k}\Omega$, $v_1 = 2.011 \text{ V}$, e $v_2 = 2.017 \text{ V}$. Se R_G viene posta uguale a 500Ω , determinare: (a) il guadagno di tensione, (b) la tensione di uscita v_o .

Soluzione: (a) Il guadagno di tensione è

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} = 1 + \frac{2 \times 10\,000}{500} = 41$$

(b) La tensione di uscita è

$$v_o = A_v(v_2 - v_1) = 41(2.017 - 2.011) = 41(6) \text{ mV} = 246 \text{ mV}$$

■ **Esercizio 5.13** Determinare il valore del resistore esterno di regolazione del guadagno R_G per l'IA di Figura 5.37 in modo che il guadagno risulti 142 quando $R = 25 \text{ k}\Omega$.

Risposta 354.6Ω .



CASO PRATICO Calcolatore analogico

1) Introduzione al Caso Pratico

L'amplificatore operazionale è un dispositivo elettronico molto versatile e affidabile. Esso possiede due caratteristiche che sono molto prossime a quelle ideali: l'elevatissima resistenza di ingresso e la resistenza di uscita molto piccola.

Queste caratteristiche lo rendono indispensabile nei circuiti in cui si devono eseguire delle operazioni indipendenti fra loro. A queste proprietà si aggiunge la possibilità di modificare il suo guadagno con delle semplici resistenze.

Esso è l'ideale per applicazioni come il Calcolatore Analogico, che si studierà in questo caso pratico. Questo circuito sarà in grado di svolgere semplici operazioni matematiche su segnali elettrici in ingresso.

2) Descrizione e specifiche

Progettare un circuito con amplificatore operazionale tale che:

$$v_0 = -2v_1 + 4v_2 - 5v_3 - v_4 \quad (5.26)$$

Il circuito deve avere costo minimo e tutti i resistori di valore compreso nell'intervallo da 5Ω a $100k\Omega$.

3) Obiettivi

Si sfruttano le conoscenze sugli amplificatori operazionali acquisite in questo capitolo. Occorre trovare la migliore combinazione di semplici circuiti con amplificatori operazionali (elencati nella Tabella 5.3 del Sommario), in modo da ottenere una tensione di uscita v_0 come combinazione lineare dei segnali di ingresso. Ovviamente, il calcolatore analogico progettato dovrà rispettare le specifiche imposte dal problema.

4) Elaborazione e Calcoli

Per ottenere l'espressione (5.26), si può pensare ad un sommatore invertente; la tensione di uscita si ricava dalla combinazione lineare degli ingressi:

$$v_0 = - \sum_i (c_i v_i)$$

Il sommatore invertente quindi cambia il segno dei segnali di ingresso con possibilità di amplificarli (pesarli), in modo diverso: questo va bene per le tensioni v_1 , v_3 e v_4 , ma non per v_2 , che deve avere segno positivo. Per cui l'ingresso v_2 deve subire una inversione di segno prima di entrare nel sommatore: ciò si ottiene con un amplificatore operazionale invertente con guadagno unitario.

Il valore delle quattro resistenze in entrata del sommatore, relative ai quattro ingressi, dipenderà dal guadagno, cioè dal coefficiente c_i della combinazione lineare. Dal paragrafo 5.6 si ricava il guadagno per ognuno degli ingressi, dal rapporto tra il resistore di retroazione e il relativo resistore di ingresso.

Scegliendo un resistore di retroazione $R = 20k\Omega$, si ricavano i resistori di ingresso:

$$R_1 = R/2 = 10k\Omega; \quad R_3 = R/5 = 4k\Omega; \quad R_4 = R = 20k\Omega; \quad R_2 = R/4 = 5k\Omega$$

Si ottiene il circuito completo in Figura 5.40:

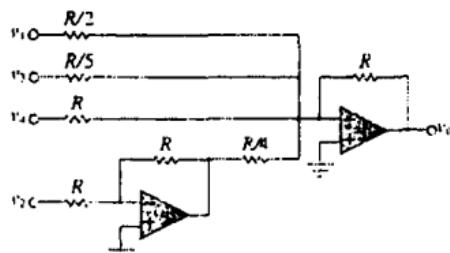


Figura 5.40 Calcolatore Analogico.

5) Analisi e Verifica

Come analisi del risultato, si progetta il calcolatore analogico che calcola l'espressione (5.26) in maniera diversa e si confrontano le due soluzioni circuituali. L'espressione (5.26) si può anche interpretare come una differenza fra due tensioni, cioè:

$$v_0 = v_0^{(+)} - v_0^{(-)} = (4 \cdot v_2) - (2 \cdot v_1 + 5 \cdot v_3 + v_4) \quad (5.27)$$

Per cui alla fine del circuito sarà presente un amplificatore differenziale.

Utilizzando semplici circuiti con amplificatore operazionale, si nota che per realizzare l'espressione (5.27) sono necessari:

- 1) un amplificatore operazionale sommatore invertente (per le tensioni v_1 , v_3 e v_4), seguito da un amplificatore operazionale invertente a guadagno unitario;
- 2) un amplificatore operazionale non invertente per la tensione v_2 ;
- 3) un amplificatore operazionale differenziale a guadagno unitario.

Si fa seguire al sommatore un circuito invertente a guadagno unitario, per cambiare nuovamente il segno alla somma pesata $2v_1 + 5v_3 + v_4$.

L'amplificatore operazionale differenziale dovrà avere guadagno unitario perché deve solo effettuare una differenza senza amplificare o pesare gli ingressi: sarà quindi formato da quattro resistori uguali.

Per quanto riguarda i valori dei resistori, si sceglie come valore di riferimento dei resistori $R = 30k\Omega$ e si fanno le seguenti considerazioni:

- i valori dei resistori di ingresso del sommatore invertente (per le tensioni v_1 , v_3 e v_4), sono rispettivamente:

$$R/2 \text{ per } v_1, \quad R/5 \text{ per } v_3 \quad R \text{ per } v_4.$$

- il resistore per l'amplificatore operazionale non invertente della tensione v_2 avrà valore pari a $R/3$: infatti per avere un guadagno pari a 4 si deve avere che:

$$(1 + R/R_3) = 4$$

Il circuito complessivo è mostrato in Figura 5.41.

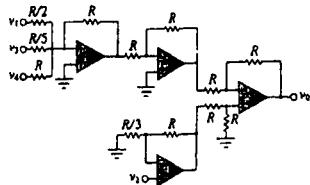


Figura 5.41 Altra soluzione circuituale

Confrontando le due soluzioni relative ai due progetti si nota che:

Soluzione 1: sono necessari 2 amplificatori operazionali e 7 resistori;

Soluzione 2: sono necessari 4 amplificatori operazionali e 12 resistori.

Quindi la soluzione migliore è la prima perché è più economica e più semplice da implementare dal punto di vista circutale.

SOMMARIO

- 1) L'amplificatore operazionale è un amplificatore ad alto guadagno che ha elevata resistenza di ingresso e bassa resistenza di uscita.
- 2) La Tabella 5.3 elenca i circuiti con amplificatori operazionali studiati in questo capitolo. La formula del guadagno di ogni circuito-amplificatore è valida in generale per ingressi in corrente continua, in corrente alternata, o comunque variabili nel tempo.

Tabella 5.3 Elenco dei circuiti fondamentali con amplificatori operazionali	
Circuito	Nome/Relazione uscita-ingresso
	Amplificatore Invertente $v_0 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_i$
	Amplificatore non invertente $v_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_i$
	Inseguitore di tensione $v_0 = v_i$
	Amplificatore sommatore $v_0 = -\left(\frac{R_2}{R_1} \cdot v_1 + \frac{R_3}{R_1} \cdot v_2 + \frac{R_4}{R_1} \cdot v_3\right)$
	Amplificatore differenziale $v_0 = \frac{R_2}{R_1} \cdot (v_2 - v_1)$

- 3) Un amplificatore operazionale ideale ha una resistenza di ingresso infinita, una resistenza di uscita nulla e guadagno infinito.
- 4) Per un amplificatore operazionale ideale, la corrente entrante in ognuno dei due terminali di ingresso è nulla, e la tensione tra gli stessi terminali è molto piccola.
- 5) In un amplificatore invertente, la tensione di uscita è il prodotto tra la tensione di ingresso e un numero negativo.
- 6) In un amplificatore non invertente, l'uscita è il prodotto tra la tensione di ingresso e un numero positivo.
- 7) In un inseguitore di tensione, l'uscita riproduce l'ingresso.
- 8) In un amplificatore sommatore, l'uscita è la somma pesata degli ingressi.
- 9) In un amplificatore differenziale, l'uscita è proporzionale alla differenza dei due ingressi.
- 10) Più circuiti con amplificatore operazionale possono essere messi in cascata senza modificare le loro relazioni ingresso-uscita.
- 11) Pspice può essere usato per analizzare circuiti con amplificatore operazionale.
- 12) Applicazioni tipiche dell'amplificatore operazionale studiato in questo capitolo sono il convertitore digitale-analogico e l'amplificatore per strumentazione.

DOMANDE DI RIEPILOGO

5.1 I due terminali di ingresso di un operazionale si chiamano:

- (a) alto e basso.
- (b) positivo e negativo.
- (c) invertente e non invertente.
- (d) differenziale e non differenziale.

5.2 Per un operazionale ideale, quali delle seguenti affermazioni non sono vere?

- (a) La tensione differenziale fra i terminali di ingresso è nulla.
- (b) La corrente che entra nei terminali di ingresso è nulla.
- (c) La corrente uscente dal terminale di uscita è nulla.
- (d) La resistenza di ingresso è nulla.
- (e) La resistenza di uscita è nulla.

5.3 Nel circuito di Figura 5.42, la tensione v_o è:

- (a) -6 V
- (b) -5 V
- (c) -1.2 V
- (d) -0.2 V

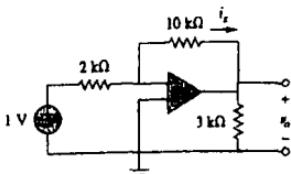


Figura 5.42 Per le domande di riepilogo 5.3 e 5.4

5.4 Nel circuito di Figura 5.42, la corrente i_x è:

- (a) 0.6 mA
- (b) 0.5 mA
- (c) 0.2 mA
- (d) $1/12 \text{ mA}$

5.5 Se $v_x = 0$ nel circuito di Figura 5.43, la corrente i_o vale:

- (a) -10 mA
- (b) -2.5 mA
- (c) $-10 \mu\text{A}$
- (d) $10/14 \text{ mA}$

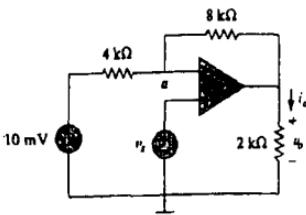


Figura 5.43 Per le domande di riepilogo da 5.5 a 5.7.

5.6 Se $v_x = 8 \text{ mV}$ nel circuito di Figura 5.43, la tensione di uscita è:

- (a) -44 mV
- (b) -8 mV
- (c) 4 mV
- (d) 7 mV

5.7 Si faccia riferimento alla Figura 5.43. Se $v_x = 8 \text{ mV}$, la tensione v_o è:

- (a) -8 mV
- (b) 0 mV
- (c) $10/3 \text{ mV}$
- (d) 8 mV

5.8 La potenza assorbita dal resistore da $4 \text{ k}\Omega$ in Figura 5.44 vale:

- (a) 9 mW
- (b) 4 mW
- (c) 2 mW
- (d) 1 mW

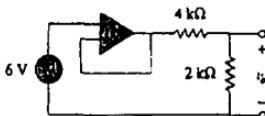


Figura 5.44 Per la domanda di riepilogo 5.8.

5.9 Quale di questi amplificatori viene utilizzato in un convertitore digitale-analogico?

- (a) amplificatore non invertente
- (b) inseguitore di tensione
- (c) amplificatore sommatore
- (d) amplificatore differenziale

5.10 Gli amplificatori differenziali sono usati in:

- (a) amplificatori per strumentazione
- (b) inseguitori di tensione
- (c) regolatori di tensione
- (d) buffer
- (e) amplificatori sommatore
- (f) amplificatori sottrattori

Risposte: 5.1c, 5.2c,d, 5.3b, 5.4b, 5.5c, 5.6c, 5.7d, 5.8b, 5.9c, 5.10a,f.

PROBLEMI

Paragrafo 5.2 Amplificatori operazionali

5.1 Il modello equivalente di un certo operazionale è mostrato in Figura 5.45. Determinare:

- (a) la resistenza di ingresso
- (b) la resistenza di uscita
- (c) il guadagno di tensione in dB.



Figura 5.45 Per il Problema 5.1.

- 5.2 Il guadagno ad anello aperto di un operazionale è 100000. Determinare la tensione di uscita quando sono presenti ingressi di $+10\mu V$ sul terminale invertente e $+20\mu V$ sul terminale noninvertente.

- 5.3 Determinare la tensione di uscita quando sono applicati $-20\mu V$ al terminale invertente di un operazionale e $+30\mu V$ al suo terminale noninvertente. Si supponga che l'operazionale abbia un guadagno ad anello aperto pari a 200000.

- 5.4 La tensione di uscita di un operazionale è $-4 V$ quando l'ingresso noninvertente è $1 mV$. Se il guadagno ad anello aperto dell'operazionale è 2×10^6 , quale è il valore dell'ingresso invertente?

- 5.5 Nel circuito con operazionale di Figura 5.46, l'operazionale ha un guadagno ad anello aperto pari a 100000, una resistenza di ingresso di $10 k\Omega$ e una resistenza di uscita di 100Ω . Determinare il guadagno di tensione v_o/v_i usando il modello non ideale dell'operazionale.

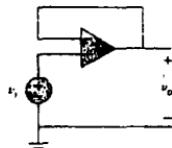


Figura 5.46 Per il Problema 5.5.

- 5.6 Usando gli stessi parametri per l'operazionale tipo 741 dell'Esempio 5.1, determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.47.

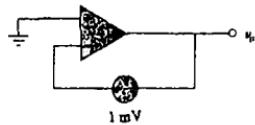


Figura 5.47 Per il Problema 5.6.

- 5.7 L'operazionale in Figura 5.48 ha $R_s = 100 k\Omega$, $R_o = 100\Omega$, $A = 100000$. Determinare la tensione differenziale v_d e la tensione di uscita v_o .

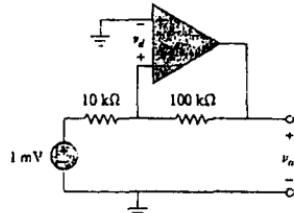


Figura 5.48 Per il Problema 5.7.

Paragrafo 5.3 Amplificatore operazionale ideale

- 5.8 Calcolare v_o per ciascuno dei circuiti con operazionale in Figura 5.49.

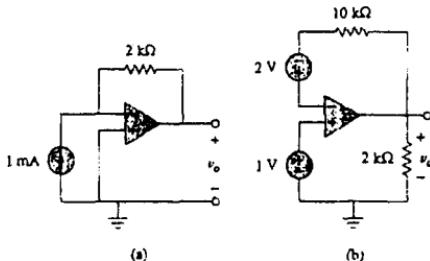


Figura 5.49 Per il Problema 5.8.

- 5.9 Determinare v_o per ciascuno dei circuiti con operazionale in Figura 5.50.

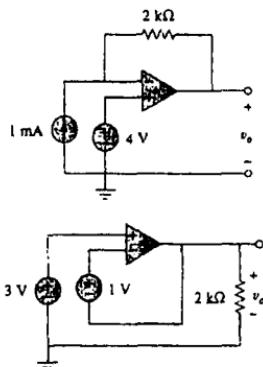


Figura 5.50 Per il Problema 5.9.

- 5.10 Determinare il guadagno v_o/v_i del circuito in Figura 5.51.

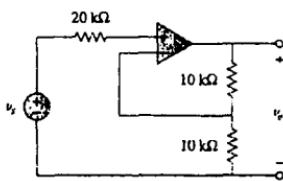


Figura 5.51 Per il Problema 5.10.

- 5.11 Determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 5.52.

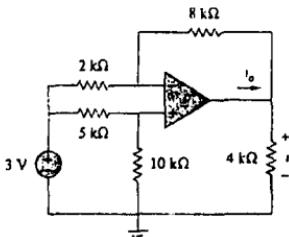


Figura 5.52 Per il Problema 5.11.

- 5.12 Si faccia riferimento al circuito con operazionale di Figura 5.53. Si determini la potenza fornita dal generatore di tensione.

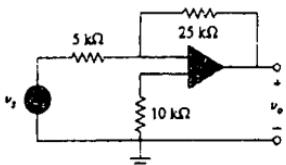


Figura 5.53 Per il Problema 5.12.

- 5.13 Determinare v_o e i_o nel circuito di Figura 5.54.

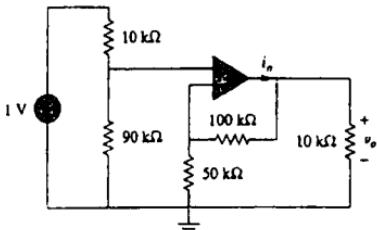


Figura 5.54 Per il Problema 5.13.

- 5.14 Determinare la tensione di uscita v_o nel circuito di Figura 5.55.

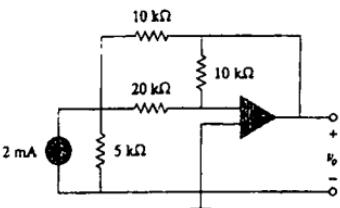


Figura 5.55 Per il Problema 5.14.

Paragrafo 5.4 Amplificatore invertente

- 5.15 (a) Determinare il rapporto v_o/i_i nel circuito con operazionale di Figura 5.56.
 (b) Calcolare il valore di tale rapporto per $R_1 = 20\text{k}\Omega$, $R_2 = 25\text{k}\Omega$, $R_3 = 40\text{k}\Omega$.

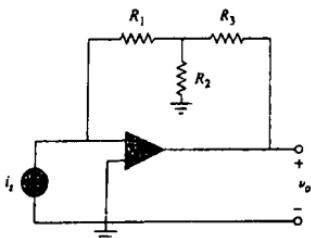


Figura 5.56 Per il Problema 5.15.

- 5.16 Calcolare i_x e i_y nel circuito con operazionale di Figura 5.57.

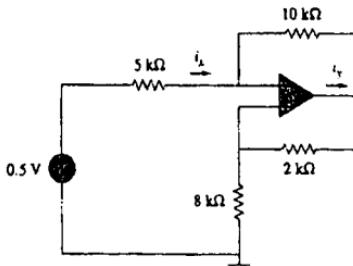


Figura 5.57 Per il Problema 5.16.

- 5.17 Calcolare il guadagno v_o/v_i quando l'interruttore in Figura 5.58 si trova in:

(a) posizione 1 (b) posizione 2 (c) posizione 3

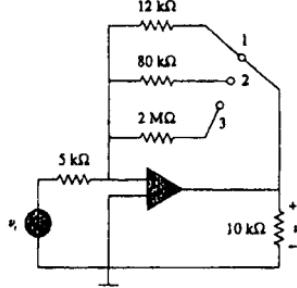


Figura 5.58 Per il Problema 5.17.

- 5.18 Per il circuito in Figura 5.59, calcolare l'equivalente di Thevenin a sinistra dei terminali $a-b$. Calcolare poi la potenza assorbita dal resistore da $20\text{k}\Omega$. Si supponga che l'amplificatore operazionale sia ideale.

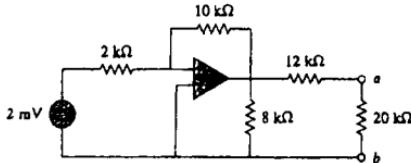


Figura 5.59 Per il Problema 5.18.

- 5.19 Determinare i_o nel circuito di Figura 5.60.

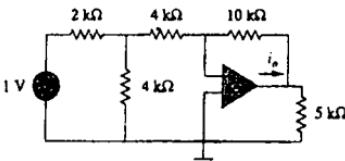


Figura 5.60 Per il Problema 5.19.

- 5.20 Nel circuito di Figura 5.61, calcolare v_o se $v_i = 0$.

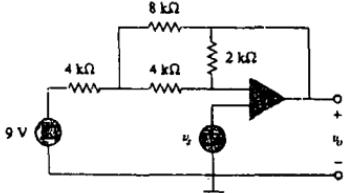


Figura 5.61 Per il Problema 5.20.

- 5.21 Calcolare v_o nel circuito con amplificatore operazionale di Figura 5.62.

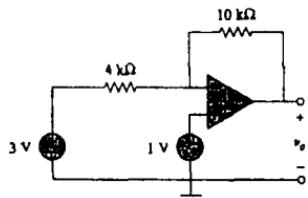


Figura 5.62 Per il Problema 5.21.

- 5.22 Progettare un amplificatore invertente con guadagno di e^{-2d} -15.

- 5.23 Per il circuito con operazionale in Figura 5.63, determinare il guadagno di tensione v_o/v_s .

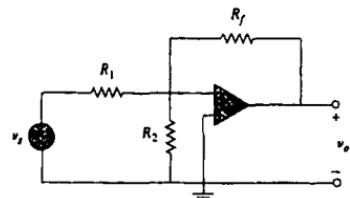


Figura 5.63 Per il Problema 5.23.

- 5.24 Nel circuito mostrato in Figura 5.64, determinare l'espressione di k nella funzione di trasferimento di tensione $v_o = kv_s$.

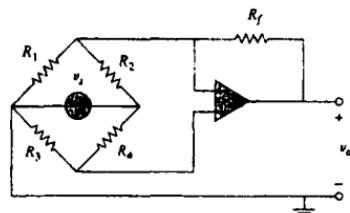


Figura 5.64 Per il Problema 5.24.

Paragrafo 5.5 Amplificatore non invertente

- 5.25 Calcolare v_o nel circuito con amplificatore operazionale di Figura 5.65.

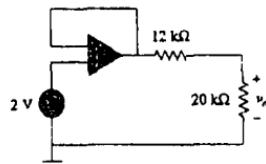


Figura 5.65 Per il Problema 5.25.

- 5.26 Determinare i_o nel circuito di Figura 5.66.

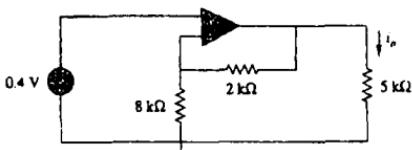


Figura 5.66 Per il Problema 5.26.

- 5.27 Calcolare v_o nel circuito con amplificatore operazionale di Figura 5.67.

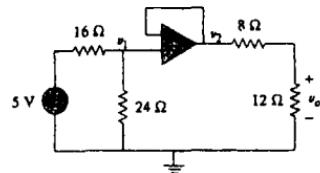


Figura 5.67 Per il Problema 5.27

- 5.28 Determinare i_o nel circuito con operazionale di Figura 5.68.

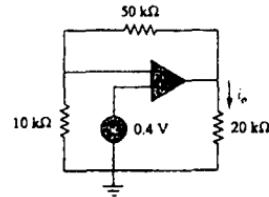


Figura 5.68 Per il Problema 5.28.

- 5.29 Determinare il guadagno di tensione v_o/v_s del circuito con operazionale di Figura 5.69.

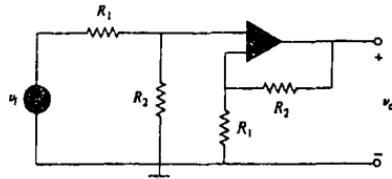


Figura 5.69 Per il Problema 5.29.

- 5.30** Nel circuito mostrato in Figura 5.70, determinare i_x e la potenza assorbita dal resistore da $20\text{k}\Omega$.

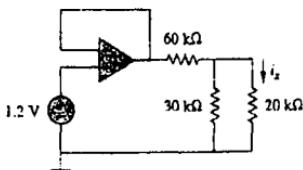


Figura 5.70 Per il Problema 5.30.

- 5.31** Nel circuito in Figura 5.71, determinare i_x .

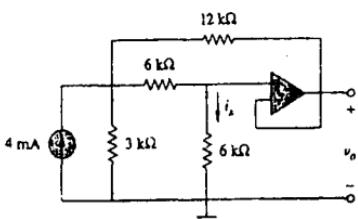


Figura 5.71 Per il Problema 5.31.

- 5.32** Calcolare i_x e v_o nel circuito di Figura 5.72. Determinare la potenza dissipata dal resistore da $60\text{k}\Omega$.

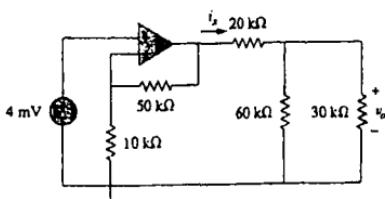


Figura 5.72 Per il Problema 5.32.

- 5.33** Si faccia riferimento al circuito con operazionale in Figura 5.73. Calcolare i_x e la potenza dissipata dal resistore da $3\text{k}\Omega$.

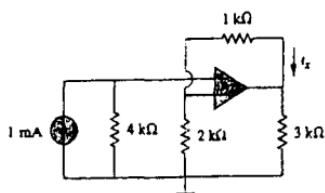


Figura 5.73 Per il Problema 5.33.

- 5.34** Dato il circuito con operazionale mostrato in Figura 5.74, esprimere v_o in termini di v_1 e v_2 .

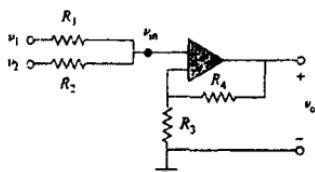


Figura 5.74 Per il Problema 5.34.

- 5.35** Progettare un amplificatore noninvertente con guadagno pari a 10.

- 5.36** Per il circuito mostrato in Figura 5.75, determinare l'equivalente Thevenin ai terminali a-b. (Suggerimento: per determinare R_{TH} , applicare un generatore di corrente i_o e calcolare v_o .)

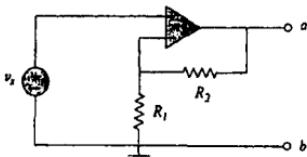


Figura 5.75 Per il Problema 5.36.

Paragrafo 5.6 Amplificatore sommatore

- 5.37** Determinare l'uscita dell'amplificatore sommatore in Figura 5.76.

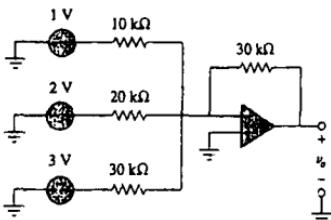


Figura 5.76 Per il Problema 5.37.

- 5.38** Calcolare la tensione di uscita prodotta dall'amplificatore sommatore mostrato in Figura 5.77.

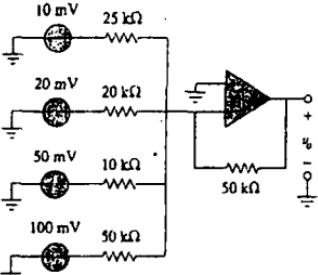


Figura 5.77 Per il Problema 5.38.

- 5.39 Per il circuito con operazionale in Figura 5.78, determinare il valore di v_2 in modo che sia $v_o = -16.5 \text{ V}$.

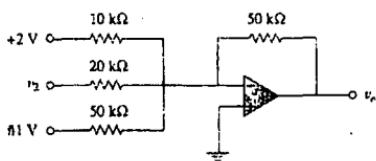


Figura 5.78 Per il Problema 5.39.

- 5.40 Un sommatore noninvertente è mostrato in Figura 5.79. Determinare v_o in termini di v_1 , v_2 e v_3 .

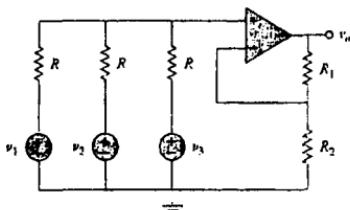


Figura 5.79 Per il Problema 5.40.

- 5.41 Un *amplificatore mediatore* è un sommatore che produce una uscita che è la media degli ingressi. Utilizzando ingressi opportuni e opportuni valori dei resistori di reazione, è possibile ottenere

$$-v_{\text{out}} = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

Facendo uso di un resistore di reazione da $10 \text{ k}\Omega$, progettare un amplificatore mediatore con quattro ingressi.

- 5.42 Un amplificatore sommatore a tre ingressi ha resistori di ingresso $R_1 = R_2 = R_3 = 30 \text{ k}\Omega$. Quale è il valore del resistore di reazione necessario per farlo diventare un amplificatore mediatore?

- 5.43 Un amplificatore sommatore a quattro ingressi ha $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 12 \text{ k}\Omega$. Quale valore del resistore di reazione è necessario per renderlo un amplificatore mediatore?

- 5.44 Mostrare che la tensione di uscita v_o del circuito in Figura 5.80 è

$$v_o = \frac{(R_2 + R_4)}{R_3(R_1 + R_2)}(R_3 v_1 + R_1 v_2)$$

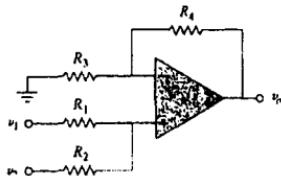


Figura 5.80 Per il Problema 5.44.

- 5.45 Progettare un circuito con operazionale che esegua la seguente operazione:

$$v_o = 3v_1 - 2v_2$$

Tutte le resistenze devono essere $\leq 100 \text{ k}\Omega$.

- 5.46 Usando soltanto due operazionali, progettare un circuito che dia

$$-v_{\text{out}} = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_3}{2}$$

Paragrafo 5.7 Amplificatore differenziale

- 5.47 Il circuito in Figura 5.81 è un amplificatore differenziale. Calcolare v_o con $v_1 = 1 \text{ V}$ e $v_2 = 2 \text{ V}$.

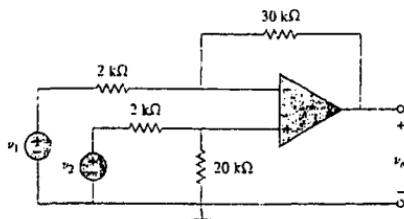


Figura 5.81 Per il Problema 5.47.

- 5.48 Il circuito in Figura 5.82 è un amplificatore differenziale pilotato da un ponte. Determinare v_o .

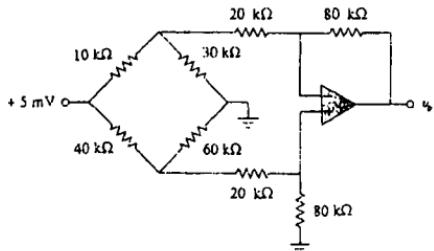


Figura 5.82 Per il Problema 5.48.

- 5.49 Progettare un amplificatore differenziale che abbia un guadagno pari a 2 e una resistenza di ingresso di modo comune di $10 \text{ k}\Omega$ a ciascun ingresso.

- 5.50 Progettare un circuito che moltiplicherà per 2 la differenza tra due ingressi.

- (a) Utilizzare soltanto un operazionale.
(b) Utilizzare due operazionali.

- 5.51 Progettare un sottrattore usando due operazionali.

- 5.52 L'amplificatore differenziale ordinario a guadagno fisso è mostrato in Figura 5.83(a). Si tratta di un circuito

* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

semplice e affidabile, a patto che non si desideri avere un guadagno variabile. Una maniera di rendere regolabile il guadagno senza perdere in semplicità e accuratezza è quella di usare il circuito in Figura 5.83(b). Un'altra alternativa è quella di usare il circuito in Figura 5.83(c). Mostrare che:

(a) per il circuito in Figura 5.83(a),

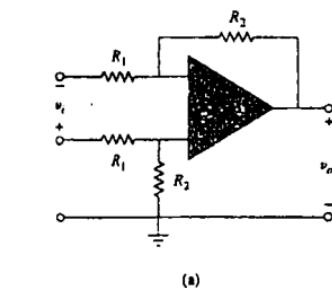
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1}$$

(b) per il circuito in Figura 5.83(b),

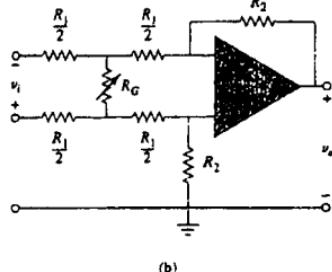
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + R_1 \cdot 2 \cdot R_G}$$

(c) per il circuito in Figura 5.83(c),

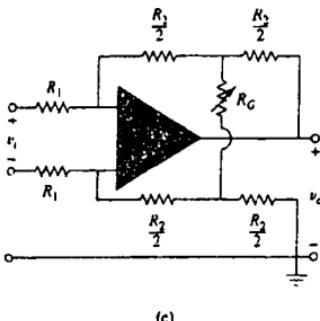
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{2 \cdot R_G}\right)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.83 Per il Problema 5.52.

Paragrafo 5.8 Collegamento in cascata di circuiti con operazionali

- 5.53 Determinare il rapporto delle tensioni v_o/v_i nel circuito con amplificatori operazionali di Figura 5.84, dove $R = 10 \text{ k}\Omega$

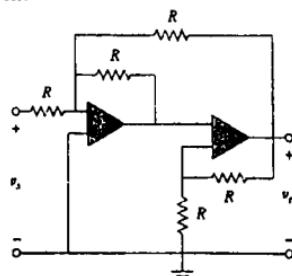


Figura 5.84 Per il Problema 5.53.

- 5.54 In un certo dispositivo elettronico, si desidera avere un amplificatore a tre stadi il cui guadagno complessivo sia 42 dB. I guadagni di tensione individuali dei primi due stadi devono essere uguali, mentre il guadagno del terzo deve essere pari a un quarto di ciascuno dei primi due. Calcolare il guadagno di tensione di ciascuno stadio.

- 5.55 Calcolare il guadagno del circuito con amplificatori operazionali di Figura 5.85.

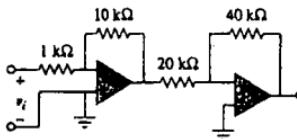


Figura 5.85 Per il Problema 5.55.

- 5.56 Calcolare v_o nel circuito con amplificatori operazionali di Figura 5.86.

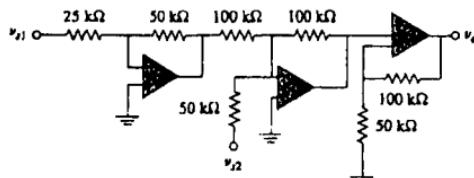


Figura 5.86 Per il Problema 5.56.

- 5.57 Calcolare i_o nel circuito con operazionale di Figura 5.87.

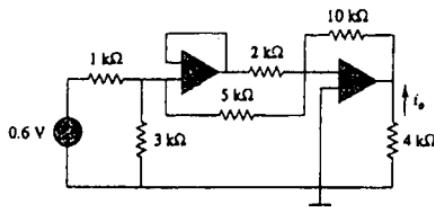


Figura 5.87 Per il Problema 5.57.

- 5.58 Nel circuito con amplificatori operazionali di Figura 5.88, determinare il guadagno di tensione v_0/v_i . Supponere $R = 10 \text{ k}\Omega$.

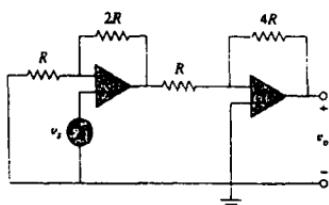


Figura 5.88 Per il Problema 5.58.

- 5.59 Calcolare v_0/v_i , nel circuito con amplificatori operazionali di Figura 5.89.

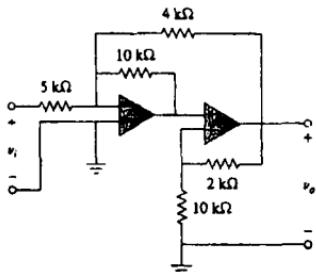


Figura 5.89 Per il Problema 5.59.

- 5.60 Determinare v_0 nel circuito in Figura 5.90.

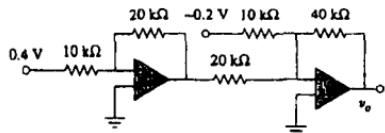


Figura 5.90 Per il Problema 5.60.

- 5.61 Calcolare il guadagno di tensione ad anello chiuso v_o/v_i del circuito in Figura 5.91.

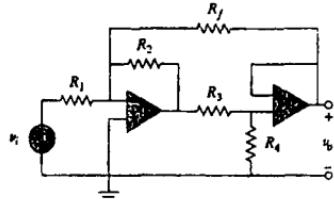


Figura 5.91 Per il Problema 5.61.

- 5.62 Determinare il guadagno v_o/v_i del circuito in Figura 5.92.

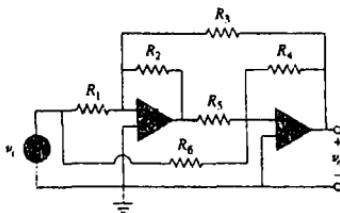


Figura 5.92 Per il Problema 5.62.

- 5.63 Per il circuito con operazionale mostrato in Figura 5.93, determinare v_o/v_i .

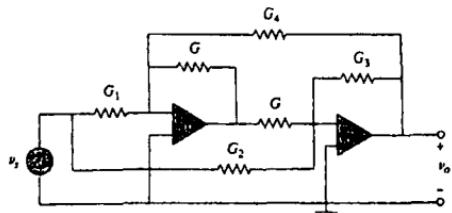


Figura 5.93 Per il Problema 5.63.

- 5.64 Determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.94.

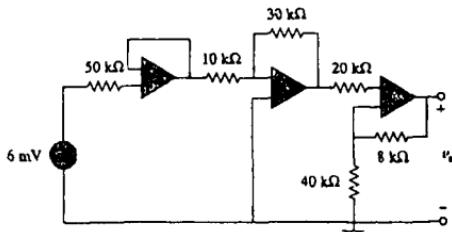


Figura 5.94 Per il Problema 5.64

- 5.65 Per il circuito in Figura 5.95, determinare v_o .

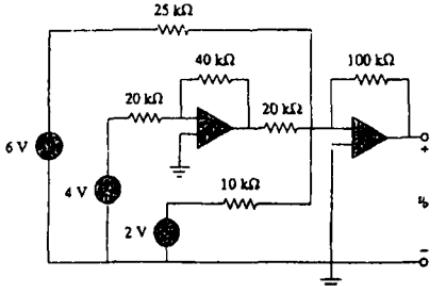


Figura 5.95 Per il Problema 5.65.

5.66 Calcolare l'uscita v_o nel circuito di Figura 5.96.

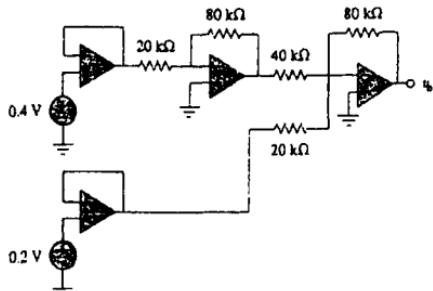


Figura 5.96 Per il Problema 5.66.

5.67 Determinare v_o nel circuito di Figura 5.97, supponendo che $R_f = \infty$ (circuito aperto).

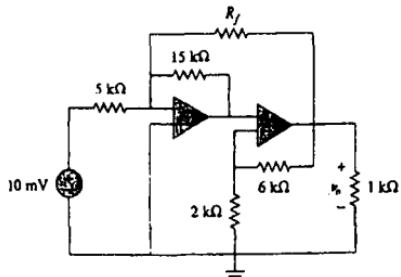


Figura 5.97 Per i Problemi 5.66 e 5.68.

5.68 Ripetere il problema precedente se $R_f = 10 \text{ k}\Omega$.

5.69 Determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.98.

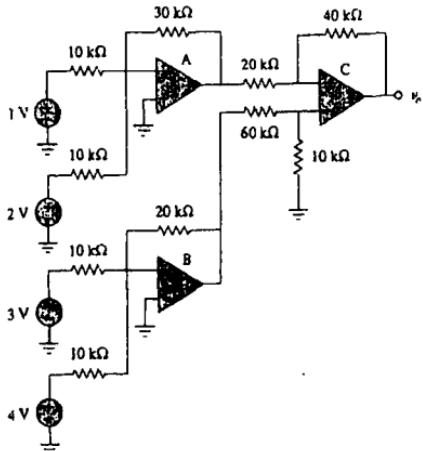


Figura 5.98 Per il Problema 5.69.

5.70 Determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.99.

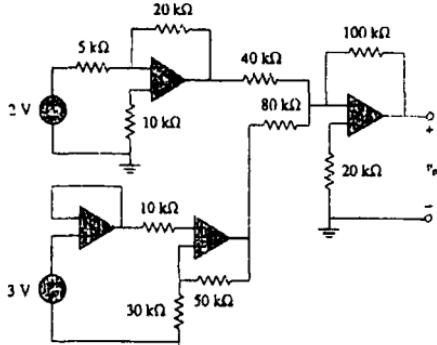


Figura 5.99 Per il Problema 5.70.

5.71 Determinare la tensione del carico v_L nel circuito di Figura 5.100.

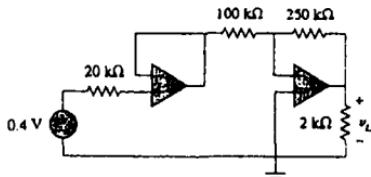


Figura 5.100 Per il Problema 5.71.

5.72 Determinare la tensione del carico v_L nel circuito di Figura 5.101.

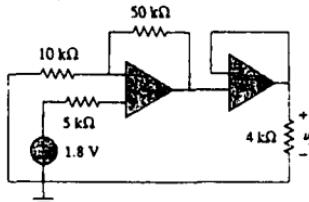


Figura 5.101 Per il Problema 5.72.

5.73 Determinare i_o nel circuito con operazionale di Figura 5.102.

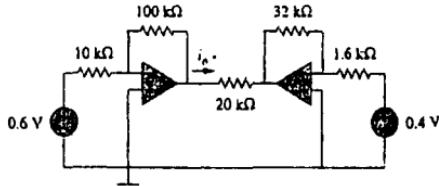


Figura 5.102 Per il Problema 5.73.

Paragrafo 5.9 Analisi di circuiti con operazionali in PSpice

- 5.74 Ripetere l'Esempio 5.11 usando l'operazionale non ideale LM324 invece che l'uA741.
- 5.75 Risolvere il Problema 5.19 usando PSpice e l'operazionale uA741.
- 5.76 Risolvere il Problema 5.48 usando PSpice e l'operazionale LM324.
- 5.77 Utilizzare PSpice per ottenere v_o nel circuito di Figura 5.103.

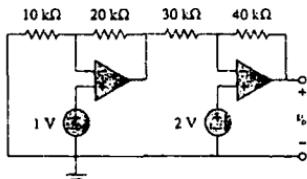


Figura 5.103 Per il Problema 5.77.

- 5.78 Determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 5.104, usando PSpice

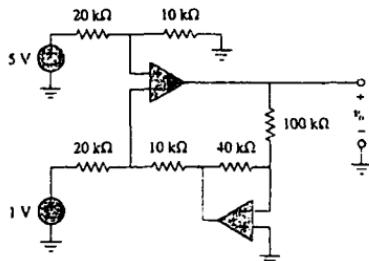


Figura 5.104 Per il Problema 5.78.

- 5.79 Utilizzare PSpice per risolvere il Problema 5.70, supponendo che gli operazionali siano di tipo uA741.
- 5.80 Utilizzare PSpice per verificare i risultati dell'Esempio 5.9. Suppone gli operazionali non ideali e di tipo LM324.

Paragrafo 5.10 Applicazioni

- 5.81 Un DAC a cinque bit copre un intervallo di tensioni da 0 a 7.75 V. Calcolare il valore in tensione di un singolo bit.

- 5.82 Progettare un convertitore digitale-analogico a sei bit.
e2d (a) Se si desidera $|V_o| = 1.1875$, quanto deve essere $[V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6]$?
 (b) Calcolare $|V_o|$ se $[V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6] = [011011]$.
 (c) Quale è il valore massimo che $|V_o|$ può raggiungere?

- *5.83 In Figura 5.105 è mostrato un DAC a scala R-2R.

(a) Misurare che la tensione di uscita è data da

$$-V_o = R_f \left(\frac{V_1}{2R} + \frac{V_2}{4R} + \frac{V_3}{8R} + \frac{V_4}{16R} \right)$$

(b) Se $R_f = 12 \text{ k}\Omega$ e $R = 10 \text{ k}\Omega$, determinare $[V_o]$ per $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [1011]$ e $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0101]$.

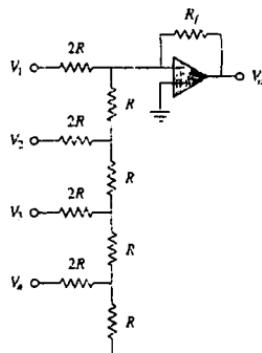


Figura 5.105 Per il Problema 5.83.

- 5.84 Nel circuito con amplificatori operazionali di Figura 5.106, calcolare il valore di R in modo che la potenza assorbita dal resistore da $10 \text{ k}\Omega$ sia 10 mW . Supporre $v_s = 2 \text{ V}$.

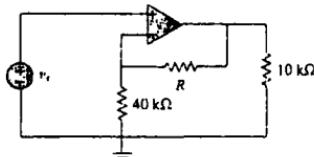


Figura 5.106 Per il Problema 5.84.

- 5.85 Supponendo un guadagno di 200 per un IA, determinare la sua tensione di uscita per:

- (a) $v_1 = 0.402 \text{ V}$ e $v_2 = 0.386 \text{ V}$
 (b) $v_1 = 1.002 \text{ V}$ e $v_2 = 1.011 \text{ V}$.

- 5.86 La Figura 5.107 mostra un amplificatore per strumentazione con due operazionali. Ricavare una espressione per v_o in termini di v_1 e v_2 . Come è possibile utilizzare questo amplificatore come un sottrattore?

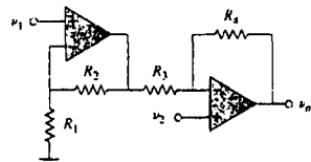


Figura 5.107 Per il Problema 5.86.

- *5.87 La Figura 5.108 mostra un amplificatore per strumentazione pilotato da un ponte. Calcolare il guadagno v_o/v_i dell'amplificatore.

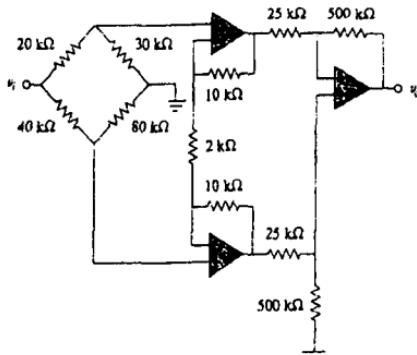


Figura 5.108 Per il Problema 5.87.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

5.88 Progettare un circuito che presenti tra la tensione di uscita v_o e la tensione di ingresso v_i la relazione $v_o = 12v_i - 10$. Sono disponibili due amplificatori operazionali, una batteria da 6V e diversi resistori.

5.89 Il circuito con operazionali in Figura 5.109 è un amplificatore di corrente. Determinare il guadagno di corrente i_o/i_i dell'amplificatore.

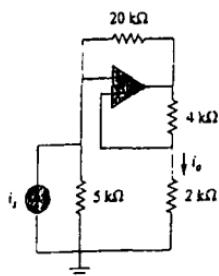


Figura 5.109 Per il Problema 5.89.

5.90 Un amplificatore di corrente noninvertente è schematizzato in Figura 5.110. Calcolare il guadagno i_o/i_i . Si ponga $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

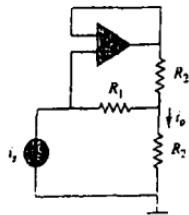


Figura 5.110 Per il Problema 5.90.

5.91 Si faccia riferimento all'*amplificatore a ponte* mostrato in Figura 5.111. Si determini il guadagno di tensione v_o/v_i .

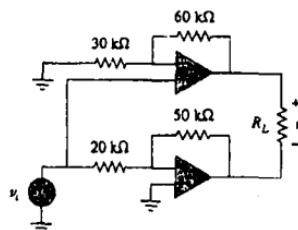


Figura 5.111 Per il Problema 5.91.

5.92 Un convertitore tensione–corrente è mostrato in Figura 5.112; ciò significa che $i_L = Av_i$ se $R_1R_2 = R_3R_4$. Determinare il valore del termine costante A .

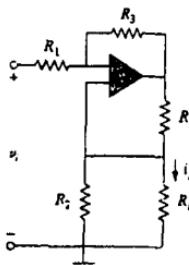


Figura 5.112 Per il Problema 5.92.

CONDENSATORI E INDUTTORI

6.1 INTRODUZIONE

Fino a ora, lo studio dei circuiti si è limitato ai circuiti resistivi. In questo capitolo vengono introdotti due nuovi e importanti elementi circuituali passivi lineari: il condensatore e l'induttore. A differenza dei resistori, che dissipano energia, condensatori e inductori sono in grado di immagazzinare l'energia e di restituirla in istanti successivi: grazie a questa proprietà, essi sono detti elementi *conservativi*.

I circuiti resistivi sono di applicabilità decisamente limitata; l'introduzione di condensatori e inductori in questo capitolo renderà possibile l'analisi di circuiti più complessi e vicini alle applicazioni pratiche. Le tecniche di analisi appresi nei capitoli 3 e 4 si dimostrano peraltro egualmente applicabili a circuiti contenenti condensatori e inductori.

Si inizierà col presentare i condensatori e le loro combinazioni in serie e in parallelo; lo stesso si farà poi per gli inductori. Le applicazioni illustrate saranno le combinazioni di condensatori con amplificatori operazionali per ottenere circuiti integratori, derivatori e circuiti per il calcolo analogico.

6.2 CONDENSATORI

Un condensatore è un elemento passivo in grado di immagazzinare energia nel suo campo elettrico. I condensatori sono, assieme ai resistori, i componenti elettrici di uso più frequente: sono usati diffusamente in elettronica, nelle telecomunicazioni, nei computer e nei sistemi di potenza. Condensatori, per esempio, vengono utilizzati nei circuiti di sintonia dei ricevitori radio e nelle celle di memoria dinamica dei computer. La struttura di un tipico condensatore è illustrata in Figura 6.1.

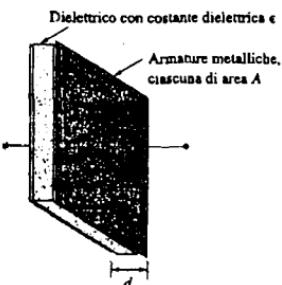


Figura 6.1
Un tipico condensatore.

Un condensatore consiste di due armature di materiale conduttore separate da un isolante (dielettrico).

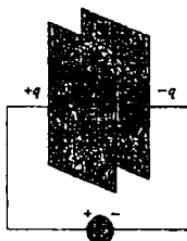
In molti condensatori della pratica, le armature sono in realtà costituite da fogli di alluminio e il dielettrico può essere aria, ceramica, carta o mica.

Quando al condensatore viene collegato un generatore di tensione v , come in Figura 6.2, il generatore deposita una carica positiva q su una armatura e una carica negativa $-q$ sull'altra. Si dice comunemente che il condensatore ha immagazzinato la carica elettrica; la quantità di carica immagazzinata q è direttamente proporzionale alla tensione applicata v

$$q = Cv \quad (6.1)$$

dove C è una costante di proporzionalità nota come *capacità* del condensatore. L'unità di misura della capacità è il farad (F), in onore del fisico inglese Michael Faraday (1791-1867). La (6.1) suggerisce la seguente definizione.

Figura 6.2
Un condensatore con una tensione v applicata.



La capacità è il rapporto fra la carica su una armatura di un condensatore e la differenza di potenziale fra le armature, e si misura in farad (F).

Si noti, dalla (6.1), che 1 farad = 1 coulomb/volt.

La capacità è quindi il rapporto C fra la carica q su una armatura e la tensione v applicata; essa è indipendente da q e da v , e dipende dalle dimensioni fisiche del condensatore. Per esempio, per il condensatore a piatti paralleli mostrato in Figura 6.1, la capacità vale

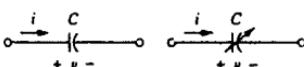
$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (6.2)$$

dove A è la superficie di ciascuna armatura, d la distanza fra le armature e ϵ la costante dielettrica del materiale fra le armature. Nonostante la (6.2) valga solo per il condensatore a piatti paralleli, da essa si osserva che, sul valore della capacità, influiscono:

1. La superficie delle armature – più grande è l'area, maggiore è la capacità.
2. La separazione fra le armature – più piccola la distanza, maggiore la capacità.
3. La costante dielettrica del materiale – più grande è la costante dielettrica, maggiore la capacità.

I condensatori sono disponibili in commercio in diversi tipi e con valori tipici di capacità che vanno dai picofarad (pF) ai microfarad (μ F). Essi vengono identificati dal tipo di materiale dielettrico di cui sono costituiti e dal fatto che siano fissi o variabili. La Figura 6.3 mostra i simboli circuituali per il condensatore fisso e per quello variabile. Si noti che, in base alla convenzione degli utilizzatori, la corrente è entrante nel terminale positivo del condensatore nella fase di carica, ed è uscente dallo stesso terminale nella fase di scarica.

Figura 6.3
Simboli circuituali per il condensatore:
(a) condensatore fisso.
(b) condensatore variabile.



¹ In alternativa: la capacità è la quantità di carica immagazzinata nelle armature del condensatore per una differenza di potenziale unitaria.

La Figura 6.4 mostra alcuni tipi comuni di condensatori fissi. I condensatori a poliestere sono di peso contenuto, sono stabili e hanno una variazione prevedibile della capacità con la temperatura. Invece del poliestere, possono essere utilizzati altri materiali dielettrici come la mica o il polistirolo. I condensatori a film sono arrotolati dentro pellicole di metallo o di plastica. I condensatori elettrolitici possono raggiungere valori anche elevati di capacità.

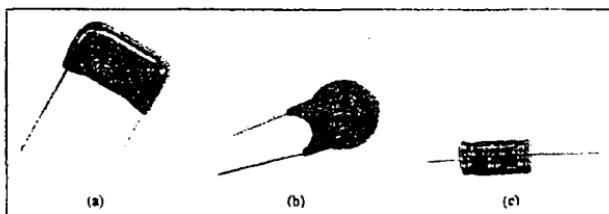


Figura 6.4
Condensatori fissi:
(a) condensatore a poliestere,
(b) condensatore ceramico,
(c) condensatore elettrolitico.
(Courtesy of Tuck America.)

La Figura 6.5 mostra i tipi più comuni di condensatori variabili. La capacità di un condensatore trimmer può essere variaata ruotando la vite. Il trimmer viene spesso posto in parallelo a un altro condensatore in modo che la capacità totale equivalente possa essere variaata in misura limitata.

La capacità di un condensatore variabile in aria viene variaata ruotando il perno. I condensatori variabili vengono utilizzati nei ricevitori radio, e permettono di sintonizzarsi sulle diverse stazioni. Inoltre, i condensatori possono essere usati per bloccare il passaggio della corrente continua, per permettere il passaggio di quella variabile, per ottenere variazioni di fase, per immagazzinare energia, per l'avviamento di motori e per la soppressione del rumore.

Per ottenere la relazione corrente-tensione del condensatore, si derivano ambo i membri della (6.1).

Poiché

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (6.3)$$

derivando entrambi i membri della (6.1) si ottiene

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (6.4)$$

Questa è la relazione corrente-tensione per un condensatore secondo la convenzione di segno degli utilizzatori². Essa è illustrata nella Figura 6.6 per un condensatore la cui capacità non dipende dalla tensione. I condensatori che soddisfano la (6.4) si dicono *lineari*. Per un condensatore *non lineare*, il grafico della relazione corrente-tensione non è una linea retta. La maggior parte dei condensatori può essere considerata lineare, e quindi in questo libro tutti i condensatori verranno supposti lineari.

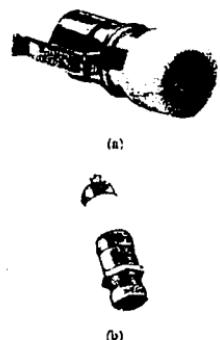
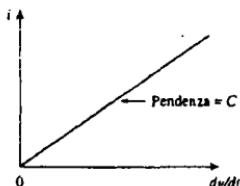


Figura 6.5
Condensatori variabili:
(a) trimmer,
(b) condensatore filmtrun
(Courtesy of Johnson.)

² Secondo la (6.4), perché in un condensatore passi corrente la tensione deve variare nel tempo. Perciò, per tensioni costanti, $i = 0$.

La stessa relazione può essere risolta rispetto alla tensione, integrando ambo i membri della (6.4), per ottenere

$$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \quad (6.5)$$

o anche

$$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0) \quad (6.6)$$

dove $v(t_0) = q(t_0)/C$ è la tensione sul condensatore all'istante t_0 . La (6.6) mostra che la tensione di un condensatore dipende dai valori assunti nel passato dalla corrente nel condensatore stesso. Si dice quindi che il condensatore ha memoria – una proprietà spesso sfruttata nelle applicazioni.

La potenza istantanea fornita al condensatore vale

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} \quad (6.7)$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è perciò

$$w = \int_{-\infty}^t p dt = C \int_{-\infty}^t v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{-\infty}^t v dv = \frac{1}{2} Cv^2 \Big|_{t=-\infty}^t \quad (6.8)$$

Si noti che $v(-\infty) = 0$, perché il condensatore era certamente scarico a $t = -\infty$. Quindi,

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 \quad (6.9)$$

Usando la (6.1), si può riscrivere la (6.9) come

$$w = \frac{q^2}{2C} \quad (6.10)$$

Le (6.9) o (6.10) rappresentano l'energia immagazzinata nel campo elettrico che esiste fra le armature del condensatore. Questa energia può essere restituita, perché un condensatore ideale non dissipa energia. La parola *capacità* denota infatti la possibilità che l'elemento ha di immagazzinare energia in un campo elettrico.

Sono da ricordare le seguenti importanti proprietà dei condensatori:

1. Secondo la (6.4), quando la tensione sul condensatore è costante nel tempo, la sua corrente è nulla.

Un condensatore si comporta come un circuito aperto nel confronto della corrente continua (DC).

Se però a un condensatore viene collegata una batteria (generatore di tensione costante), il condensatore si carica.

2. La tensione sul condensatore deve essere una funzione continua del tempo.

La tensione su un condensatore non può varcare istantaneamente.

Il condensatore si oppone a qualsiasi variazione brusca (istantanea) della sua tensione. Secondo la (6.4), una discontinuità nella tensione implica una cor-

rente infinita, cosa che è fisicamente impossibile³. La tensione su un condensatore può assumere, per esempio, la forma mostrata in Figura 6.7(a), mentre quella mostrata in Figura 6.7(b) non è fisicamente ammessa, a causa della presenza di una variazione istantanea. La corrente di un condensatore può, invece, presentare variazioni istantanee.

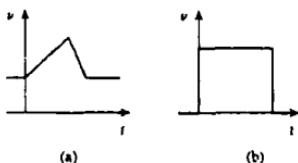


Figura 6.7

Tensione su un condensatore: (a) possibile, (b) non ammessa, non si possono avere variazioni istantanee.

3. Un condensatore ideale non dissipava energia; esso può assorbire potenza dal circuito e immagazzinare l'energia risultante nel campo elettrico, restituendola poi quando eroga potenza al circuito.
4. Un modello più realistico di un condensatore reale è quello di Figura 6.8, con una resistenza in parallelo che tiene conto delle inevitabili dissipazioni. La resistenza può avere valori attorno ai $100\text{ M}\Omega$, e può quindi essere trascurata nelle applicazioni normali. In questo libro si suppone sempre di avere a che fare con condensatori ideali.

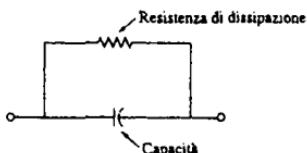


Figura 6.8

Modello circuitale di un condensatore non ideale.

Esempio 6.1

- (a) Determinare la carica immagazzinata in un condensatore da 3 pF su cui esiste una tensione di 20 V .
- (b) Calcolare l'energia immagazzinata nel condensatore.

Soluzione: (a) Poiché $q = Cv$,

$$q = 3 \times 10^{-12} \times 20 = 60\text{ pC}$$

(b) L'energia immagazzinata è

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-12} \times 400 = 600\text{ pJ}$$

Esercizio 6.1

Qual è la tensione su un condensatore da $3\text{ }\mu\text{F}$ se la carica su una delle sue armature è 0.12 mC ? Quanta energia è immagazzinata nel condensatore?

Risposta $40\text{ V}, 2.4\text{ mJ}$.

Esempio 6.2

La tensione su un condensatore da $5\text{ }\mu\text{F}$ è

$$v(t) = 10 \cos 6000t\text{ V}$$

Calcolare la corrente nel condensatore.

Soluzione: La corrente è

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (10 \cos 6000t) \\ &= -5 \times 10^{-6} \times 6000 \times 10 \sin 6000t = -0.3 \sin 6000t\text{ A} \end{aligned}$$

³ Una spiegazione alternativa di questa proprietà si ha usando la (6.9), che mostra come l'energia sia proporzionale al quadrato della tensione: poiché l'immissione o l'estrazione di energia devono avvenire in un intervallo di tempo finito, la tensione di un condensatore non può subire variazioni istantanee.

■ **Esercizio 6.2** Se un condensatore da $10 \mu\text{F}$ è collegato a un generatore di tensione con tensione

$$v(t) = 50 \sin 2000t \text{ V}$$

determinare la corrente nel condensatore.

Risposta $\cos 2000t \text{ A}$.

Esempio 6.3

Determinare la tensione su un condensatore da $2 \mu\text{F}$ se la corrente che lo attraversa è

$$i(t) = 6e^{-3000t} \text{ mA}$$

Supponere nulla la tensione iniziale del condensatore.

Soluzione: Essendo $v = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + v(0)$ e $v(0) = 0$,

$$v = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int_0^t 6e^{-3000t} \, dt \cdot 10^{-3}$$

$$= \frac{3 \times 10^3}{-3000} e^{-3000t} \Big|_0^t = (1 - e^{-3000t}) \text{ V}$$

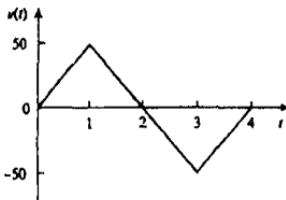
■ **Esercizio 6.3** La corrente in un condensatore da $100 \mu\text{F}$ vale $i(t) = 50 \sin 120\pi t \text{ mA}$. Calcolare la tensione sul condensatore in $t = 1 \text{ ms}$ e $t = 5 \text{ ms}$. Suppone $v(0) = 0$.

Risposta 93.14 mV, 1.736 V.

Esempio 6.4

Determinare la corrente in un condensatore da $200 \mu\text{F}$ la cui tensione è mostrata in Figura 6.9.

Figura 6.9
Per l'Esempio 6.4.



Soluzione: La forma d'onda di tensione può essere descritta analiticamente come

$$v(t) = \begin{cases} 50t \text{ V} & 0 < t < 1 \\ 100 - 50t \text{ V} & 1 < t < 3 \\ -200 + 50t \text{ V} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Poiché $i = C dv/dt$ e $C = 200 \mu\text{F}$, si deriva v rispetto al tempo e si ottiene

$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} 50 & 0 < t < 1 \\ -50 & 1 < t < 3 \\ 50 & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 10 \text{ mA} & 0 < t < 1 \\ -10 \text{ mA} & 1 < t < 3 \\ 10 \text{ mA} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La forma d'onda della corrente è quindi quella mostrata in Figura 6.10.

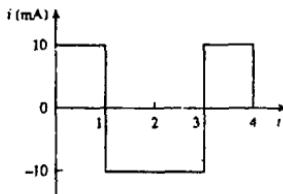


Figura 6.10
Per l'Esempio 6.4.

- **Esercizio 6.4** Un condensatore da 1 nF inizialmente scarico è percorso dalla corrente mostrata in Figura 6.11. Calcolare la tensione sul condensatore in $t = 2 \text{ ms}$ e $t = 5 \text{ ms}$.

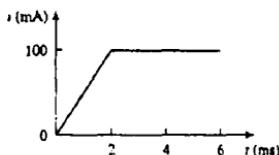


Figura 6.11
Per l'Esercizio 6.4.

Risposta 100 mV, 400 mV. ■

Esempio 6.5

Determinare l'energia immagazzinata in ciascuno dei condensatori della Figura 6.12(a) in regime stazionario.

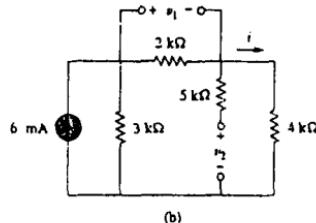
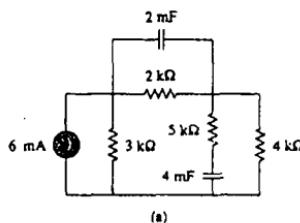


Figura 6.12
Per l'Esempio 6.5.

Soluzione: In regime stazionario è possibile sostituire ciascun condensatore con un circuito aperto, come mostrato in Figura 6.12(b). La corrente nella combinazione serie dei resistori da $2 \text{ k}\Omega$ e $4 \text{ k}\Omega$ si ottiene con il partitore di corrente

$$i = \frac{3}{3+2+4} (6 \text{ mA}) = 2 \text{ mA}$$

Perciò, le tensioni v_1 e v_2 sui condensatori valgono

$$v_1 = 2000i = 4 \text{ V} \quad v_2 = 4000i = 8 \text{ V}$$

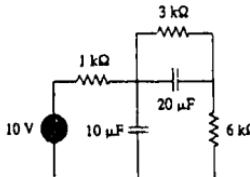
e le energie immagazzinate

$$w_1 = \frac{1}{2} C_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (2 \times 10^{-9})(4)^2 = 16 \text{ mJ}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} C_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-9})(8)^2 = 128 \text{ mJ}$$

■ Esercizio 6.5 In regime stazionario, determinare l'energia immagazzinata nei condensatori in Figura 6.13.

Figura 6.13
Per l'Esercizio 6.5.

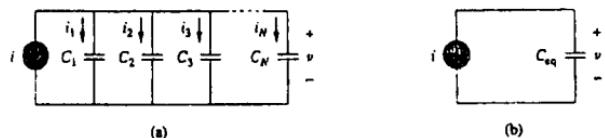


Risposta 405 μJ, 90 μJ.

6.3 CONDENSATORI IN SERIE E IN PARALLELO

Nello studio dei circuiti resistivi si è visto che la combinazione in serie e in parallelo rappresenta un utile strumento per semplificare l'analisi. Questa tecnica può essere estesa al collegamento serie-parallelo di condensatori. Si vuole quindi sostituire una serie o un parallelo di condensatori con un singolo condensatore equivalente C_{eq} .

Figura 6.14
(a) N condensatori collegati in parallelo, (b) circuito equivalente dei condensatori in parallelo



Per ottenere il condensatore equivalente C_{eq} di N condensatori in parallelo, si consideri il circuito di Figura 6.14(a). Il circuito equivalente è quello in Figura 6.14(b). Si noti che tutti i condensatori hanno la stessa tensione v . Applicando la KCL alla Figura 6.14(a),

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \quad (6.11)$$

Ma $i_k = C_k \frac{dv}{dt}$. Perciò,

$$\begin{aligned} i &= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (6.12)$$

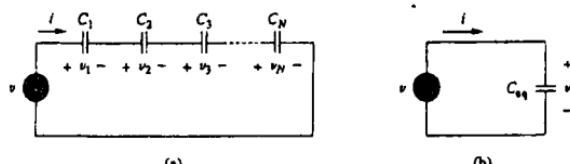
dove

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N \quad (6.13)$$

La capacità equivalente di N condensatori collegati in parallelo è pari alla somma delle singole capacità.

Si osservi che i condensatori in parallelo si combinano allo stesso modo delle resistenze in serie.

Figura 6.15
(a) N condensatori in serie,
(b) circuito equivalente dei condensatori in serie.



Si otterrà ora C_{eq} per N condensatori collegati in serie confrontando il circuito di Figura 6.15(a) con il circuito equivalente di Figura 6.15(b). Si noti che nei condensatori scorre la stessa corrente i , e su di essi è immagazzinata, di conseguenza, la stessa carica. Applicando la KVL alla maglia di Figura 6.15(a),

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \quad (6.14)$$

Ma $v_k = \frac{1}{C_k} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_k(t_0)$. Perciò,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) \\ &= \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \end{aligned} \quad (6.15)$$

dove

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}} \quad (6.16)$$

La KVL richiede che la tensione iniziale $v(t_0)$ su C_{eq} sia pari alla somma delle tensioni dei condensatori all'istante t_0 . Per la (6.15),

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0)$$

Secondo la (6.16), quindi

La capacità equivalente dei condensatori collegati in serie è il reciproco della somma dei reciproci delle singole capacità.

Si noti che i condensatori in serie si combinano come i resistori in parallelo. Per $N = 2$ (due condensatori in serie), la (6.16) diventa

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

o anche

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (6.17)$$

Esempio 6.6

Calcolare la capacità equivalente vista ai terminali a e b del circuito in Figura 6.16.

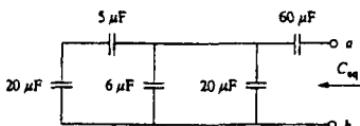


Figura 6.16
Per l'Esempio 6.6.

Soluzione: I condensatori da $20 \mu F$ e $5 \mu F$ sono in serie; la capacità equivalente vale

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4 \mu F$$

Questa capacità da $4 \mu\text{F}$ è in parallelo con i condensatori da $6 \mu\text{F}$ e da $20 \mu\text{F}$; la capacità complessiva è

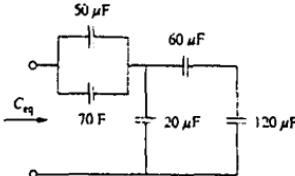
$$4 + 6 + 20 = 30 \mu\text{F}$$

Tale capacità da $30 \mu\text{F}$ è in serie con il condensatore da $60 \mu\text{F}$. La capacità equivalente del circuito complessivo vale allora

$$C_{eq} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20 \mu\text{F}$$

Esercizio 6.6 Determinare la capacità equivalente ai terminali del circuito di Figura 6.17.

Figura 6.17
Per l'Esercizio 6.6.

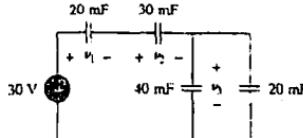


Risposta $40 \mu\text{F}$.

Esempio 6.7

Determinare la tensione su ciascuno dei condensatori del circuito di Figura 6.18.

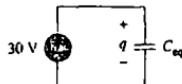
Figura 6.18
Per l'Esempio 6.7.



Soluzione: Si calcola innanzitutto la capacità equivalente C_{eq} di Figura 6.19. I due condensatori in parallelo di Figura 6.18 si possono combinare ottenendo $40 + 20 = 60 \text{ mF}$. Questo condensatore da 60 mF è in serie con i condensatori da 20 mF e 30 mF . Quindi,

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}} \text{ mF} = 10 \text{ mF}$$

Figura 6.19
Circuito equivalente per la
Figura 6.18.



La carica totale vale

$$q = C_{eq}v = 10 \times 10^{-3} \times 30 = 0.3 \text{ C}$$

Questa è la carica sui condensatori da 20 mF e 30 mF , che sono in serie con il generatore da 30 V . (Una giustificazione approssimativa si può avere immaginando che la carica si comporti come la corrente, essendo $i = dq/dt$.) Allora,

$$v_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{0.3}{20 \times 10^{-3}} = 15 \text{ V} \quad v_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{0.3}{30 \times 10^{-3}} = 10 \text{ V}$$

Avendo determinato v_1 e v_2 , si usa la KVL per ottenere v_3 ,

$$v_3 = 30 - v_1 - v_2 = 5 \text{ V}$$

In alternativa, essendo i condensatori da 40 mF e 20 mF in parallelo, essi hanno la stessa tensione v_3 , e la loro capacità equivalente vale $40 + 20 = 60 \text{ mF}$. Questa capacità risulta in serie con i condensatori da 20 mF e 30 mF , e ha quindi la stessa carica sulle armature. Perciò,

$$v_3 = \frac{q}{60 \text{ mF}} = \frac{0.3}{60 \times 10^{-3}} = 5 \text{ V}$$

■ Esercizio 6.7 Determinare la tensione su ciascuno dei condensatori di: Figura 6.20

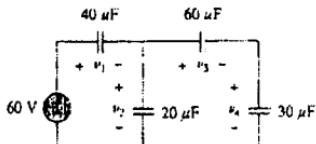


Figura 6.20
Per l'Esercizio 6.7

Risposta $v_1 = 30 \text{ V}$, $v_2 = 30 \text{ V}$, $v_3 = 10 \text{ V}$, $v_4 = 20 \text{ V}$.

6.4 INDUTTORI

Un induttore è un elemento passivo che immagazzina energia nel suo campo magnetico. Gli induttori trovano larga applicazione nell'elettronica e nei sistemi di potenza: vengono usati in alimentatori, trasformatori, apparecchi radio, televisori, radar e motori elettrici.

Qualunque filo conduttore di corrente elettrica possiede proprietà induttive, e può essere considerato un induttore. Per enfatizzare gli effetti induttivi, però, solitamente gli induttori vengono realizzati avvolgendo parecchie spire di filo conduttore formando una bobina cilindrica, come mostrato in Figura 6.21.

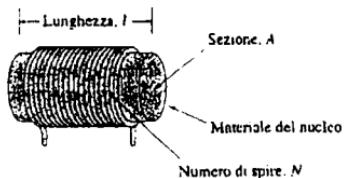


Figura 6.21
Forma tipica di un induttore.

Un induttore consiste di una bobina di filo conduttore.

Se si fa scorrere una corrente in un induttore, la sua tensione risulta proporzionale alla velocità di variazione della corrente. Con la convenzione degli utilizzatori,

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (6.18)$$

dove L è una costante di proporzionalità chiamata *induttanza* dell'induttore⁴. L'unità di misura dell'induttanza è l'*henry* (H), in onore dell'inventore americano Joseph Henry (1797-1878). Dalla (6.18) è evidente che 1 henry è pari a un volt-secondo per ampere.

L'induttanza è la proprietà grazie alla quale l'induttore si oppone alla variazione della corrente che lo attraversa, e si misura in henry (H).

L'induttanza di un induttore dipende dalle sue dimensioni fisiche e dalla sua costruzione. Le formule per il calcolo dell'induttanza per induttori di forme diverse vengono ricavate applicando la teoria dell'elettromagnetismo e si trovano nei manuali di inge-

⁴ Secondo la (6.18), perché su un induttore ci sia una tensione è necessario che la corrente vari nel tempo. Perciò $i = 0$ se nell'induttore scorre una corrente costante.

genera elettrica. Per esempio, per l'induttore (solenoid) mostrato in Figura 6.21,

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (6.19)$$

dove N è il numero di spire, l la lunghezza, A la sezione e μ la permeabilità magnetica del nucleo. Dalla (6.19) si vede che l'induttanza può essere aumentata aumentando il numero di spire della bobina, usando un nucleo di materiale con permeabilità più elevata, aumentando l'area della sezione o infine riducendo la lunghezza della bobina. Come i condensatori, anche gli induttori sono disponibili in commercio in diversi tipi e dimensioni. Induttori tipici della pratica hanno valori di induttanza che vanno dai microhenry (μH), nei sistemi delle telecomunicazioni, alle decine di henry (H), nei sistemi di potenza. Gli induttori possono essere fissi o variabili; il nucleo può essere costituito di ferro, acciaio, plastica o aria. Spesso il termine *bobina* è sinonimo di induttore.

Nella Figura 6.22 sono mostrati alcuni esempi di induttori. I simboli circuitali per l'induttore sono mostrati in Figura 6.23, con la convenzione degli utilizzatori.

Figura 6.22

Vari tipi di induttori:

- (a) induttore solenoide ad avvolgimento,
- (b) induttore toroidale,
- (c) induttore integrato. (Courtesy of Tech America.)

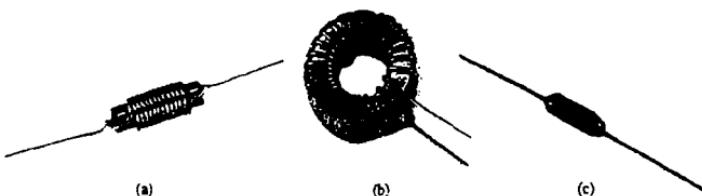


Figura 6.23

Simboli circuituali per gli induttori: (a) nucleo in aria, (b) nucleo in ferro, (c) variabile con nucleo in ferro.

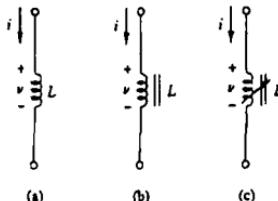
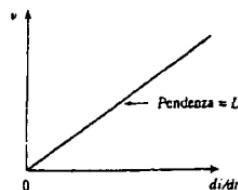


Figura 6.24

Relazione tensione-corrente per un induttore.



La stessa relazione risolta rispetto alla corrente si ottiene dalla (6.18) come

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

Integrando si ha

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt \quad (6.20)$$

oppure

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0) \quad (6.21)$$

dove $i(t_0)$ è la corrente che tiene conto di quanto è avvenuto per $-\infty < t < t_0$, e $i(-\infty) = 0$. L'idea di porre $i(-\infty) = 0$ è ragionevole, perché deve esistere un istante nel passato in cui non passava nessuna corrente nell'induttore.

L'induttore immagazzina l'energia assorbita nel campo magnetico. L'espressione dell'energia può essere ottenuta dalla (6.18). La potenza fornita all'induttore è

$$p = vi = \left(L \frac{di}{dt} \right) i \quad (6.22)$$

L'energia immagazzinata è

$$\begin{aligned} w &= \int_{-\infty}^t p dt = \int_{-\infty}^t \left(L \frac{di}{dt} \right) i dt \\ &= L \int_{-\infty}^t i di = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(-\infty) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Essendo $i(-\infty) = 0$,

$$w = \frac{1}{2} Li^2 \quad (6.24)$$

Si notino le seguenti importanti proprietà degli induttori.

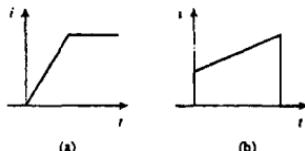


Figura 6.25
Corrente attraverso un induttore:
(a) possibile,
(b) impossibile; la corrente non può avere variazioni istantanee.

1. Dalla (6.18) segue che la tensione su un induttore percorso da una corrente costante è nulla.

Un induttore si comporta come un corto circuito per le correnti costanti.

2. Un'altra importante proprietà dell'induttore è quella di opporsi alle variazioni della corrente che lo attraversa.

La corrente di un induttore non può variare istantaneamente.

Secondo la (6.18), una discontinuità nella corrente di un induttore richiede una tensione infinita, che è fisicamente impossibile. Un induttore si oppone quindi alle variazioni istantanee della sua corrente. La corrente in un induttore può assumere, per esempio, la forma mostrata in Figura 6.25(a), ma non quella di Figura 6.25(b), per la presenza della discontinuità. La tensione sull'induttore, invece, può avere variazioni istantanee.

3. Come il condensatore ideale, anche l'induttore ideale non dissipava alcuna energia. L'energia immagazzinata può essere riottenuta in un istante successivo; mentre immagazzina l'energia, l'induttore assorbe potenza dal circuito; quando la restituisce, fornisce potenza al circuito.

si dice in genere una apprezzabile componente resistiva, tra 6.26. Ciò si deve al fatto che l'induttore è costruito con un filo, quale per esempio il rame, che ha una certa resistenza chiamata **resistenza dell'avvolgimento** R_w , ed è da considerare l'induttanza. La presenza di R_w rende l'induttore un dissipatore di energia e in parte dissipato energia; poiché però R_w è la maggior parte dei casi essa viene trascurata. Un induttore anche una **capacità dell'avvolgimento** C_w , dovuta all'azione fra le spire di conduttori. C_w è molto piccola e può essere trascurata nella maggior parte dei casi, fatta eccezione per le alte frequenze.

H è $i(t) = 10t e^{-5t}$ A. Determinare la tensione sull'induttore e l'energia immagazzinata nell'induttore.

$$e_L = 0.1 \text{ H},$$

$$0t e^{-5t} = e^{-5t} + t(-5)e^{-5t} = e^{-5t}(1 - 5t) \text{ V}$$

$$-L^2 = \frac{1}{2}(0.1)100^2 e^{-10t} = 5t^2 e^{-10t} \text{ J}$$

Per un induttore da 1 mH è $i(t) = 20 \cos 100t$ mA, calcolare la tensione ai suoi terminali e l'energia immagazzinata nell'induttore.

$$0.2 \cos^2 100t \mu\text{J}.$$

tore da 5 H se la tensione ai suoi terminali vale

$$v(t) = \begin{cases} 30t^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

immagazzinata nell'intervallo $0 < t < 5$ s.

$$dt + i(t_0) e L = 5 \text{ H},$$

$$\frac{1}{5} \int_0^t 30t^2 dt + 0 = 6 \times \frac{t^3}{3} = 2t^3 \text{ A}$$

La tensione immagazzinata è quindi

$$-dt = \int_0^5 60t^3 dt = 60 \frac{t^4}{4} \Big|_0^5 = 156.25 \text{ kJ}$$

ottenuta dalla (6.24) come

$$-\frac{1}{2} L^2(0) = \frac{1}{2} (5)(2 \times 5^3)^2 - 0 = 156.25 \text{ kJ}$$

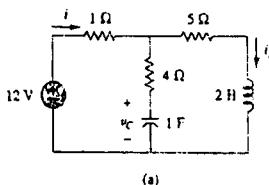
precedenza.

Il terminali di un induttore da 2 H è $v = 10(1 - t)$ V. Calcolare la tensione ai terminali di un induttore da 2 H e l'energia immagazzinata nell'intervallo $0 < t < 4$ s.

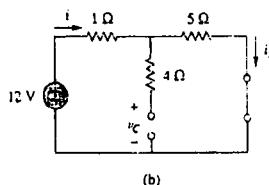
6.5 Induttori in serie e in parallelo

Esempio 6.10

Si consideri il circuito di Figura 6.27(a). In condizioni stazionarie, calcolare: (a) i , v_C e i_L . (b) l'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore.



(a)



(b)

Figura 6.27
Per l'Esempio 6.10.

Soluzione: (a) In regime stazionario, si può sostituire il condensatore con un circuito aperto e l'induttore con un corto circuito come in Figura 6.27(b). Dalla Figura 6.27(b) risulta evidente che

$$i = i_L = \frac{12}{1+5} = 2 \text{ A}$$

La tensione v_C è la stessa di quella sul resistore da 5 Ω. Quindi,

$$v_C = 5i = 10 \text{ V}$$

(b) L'energia nel condensatore è

$$w_C = \frac{1}{2} Cv_C^2 = \frac{1}{2} (1)(10^2) = 50 \text{ J}$$

e quella nell'induttore è

$$w_L = \frac{1}{2} Li_L^2 = \frac{1}{2} (2)(2^2) = 4 \text{ J}$$

Esercizio 6.10 Determinare v_C , i_L e l'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore nel circuito di Figura 6.28 in regime stazionario.

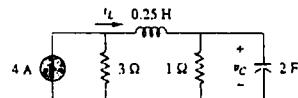


Figura 6.28
Per l'Esercizio 6.10.

Risposta: 3 V, 3 A, 9 J, 1.125 J.

6.5 INDUTTORI IN SERIE E IN PARALLELO

Si vogliono ora estendere le regole della composizione in serie e in parallelo agli induttori, ossia illustrare come si calcola l'induttanza equivalente di un insieme di induttori collegati in serie o in parallelo.

Si consideri un collegamento in serie di N induttori, mostrato in Figura 6.29(a), il cui circuito equivalente è quello di Figura 6.29(b). Gli induttori sono attraversati dalla stessa corrente: applicando la KVL alla maglia,

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \quad (6.25)$$

Sostituendo $v_k = L_k \frac{di}{dt}$ si ottiene

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N) \frac{di}{dt} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N L_k \right) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (6.26)$$

dove

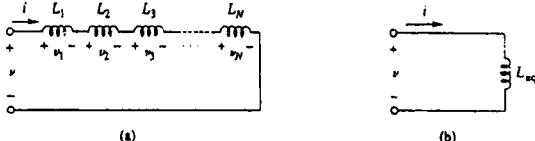
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N \quad (6.27)$$

Perciò,

L'induttanza equivalente di induttori collegati in serie è pari alla somma delle singole induttanze.

Figura 6.29

(a) Collegamento in serie di N induttori, (b) circuito equivalente degli induttori in serie.



Gli induttori in serie si combinano allo stesso modo dei resistori in serie.

Si consideri ora il collegamento in parallelo di N induttori, mostrato in Figura 6.30(a), con il circuito equivalente di Figura 6.30(b). Gli induttori hanno tutti la stessa tensione; per la KCL,

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \quad (6.28)$$

Ma $i_k = \frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v dt + i_k(t_0)$; quindi,

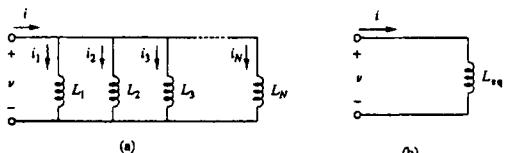
$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v dt + i_2(t_0) + \dots + \frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v dt + i_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k} \right) \int_{t_0}^t v dt + \sum_{k=1}^N i_k(t_0) = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0) \end{aligned} \quad (6.29)$$

dove

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (6.30)$$

Figura 6.30

(a) Collegamento in parallelo di N induttori, (b) circuito equivalente degli induttori in parallelo.



La corrente iniziale $i(t_0)$ che scorre in L_{eq} all'istante $t = t_0$ deve essere, per la KCL, pari alla somma delle correnti degli induttori nello stesso istante t_0 . Secondo la (6.29) allora,

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0)$$

In definitiva, per la (6.30),

L'induttanza equivalente di induttori in parallelo è il reciproco della somma dei reciproci delle singole induttanze.

Gli induttori in parallelo si combinano allo stesso modo.

Per due induttori in parallelo ($N = 2$), la (6.30) diven-

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{o anche}$$

Se tutti gli elementi sono dello stesso tipo, le trasformatori tratte nel Paragrafo 2.7, possono essere estese a

Giunti a questo punto, conviene riassumere le principali circuituali fondamentali studiati finora. Il riassunto

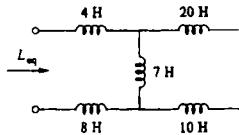
Tabella 6.1 Caratteristiche dei principali

Relazione	Resistore (R)	Condensatore
$v-i$:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt$
$i-v$:	$i = v/R$	$i = C \frac{dv}{dt}$
$p o w.$:	$p = i^2 R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2} Cv^2$
Serie:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$
Parallelo:	$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$
In regime stazionario:	identico	Circuito ac
Variable circuituale che non può variare instantaneamente:	N/A	v

^t Si usa la convenzione degli utilizzatori.

Esempio 6.11

Determinare l'induttanza equivalente del circuito di Figura 6.31.



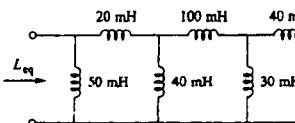
Soluzione: Gli induttori da 10 H, 12 H e 20 H sono in serie 42 H. Questo induttore da 42 H è in parallelo all'induttore da 7 H

$$\frac{7 \times 42}{7 + 42} = 6 \text{ H}$$

L'induttore risultante da 6 H è in serie con gli induttori da 4 H e 8 H

$$L_{eq} = 4 + 6 + 8 = 18 \text{ H}$$

Esercizio 6.11 Calcolare l'induttanza equivalente della ret-

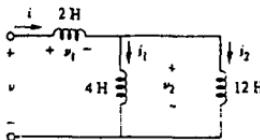


Risposta 25 mH.

Esempio 6.12

Nel circuito di Figura 6.33, $i(t) = 4(2 - e^{-10t})$ mA. Se $i_2(0) = -1$ mA, determinare: (a) $i_1(0)$; (b) $v(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$; (c) $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

Figura 6.33
Per l'Esempio 6.12.

**Soluzione:**

(a) Se $i(t) = 4(2 - e^{-10t})$ mA, $i(0) = 4(2 - 1) = 4$ mA. Poiché $i = i_1 + i_2$,

$$i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4 - (-1) = 5 \text{ mA}$$

(b) L'induttanza equivalente è

$$L_{eq} = 2 + 4 \parallel 12 = 2 + 3 = 5 \text{ H}$$

Quindi,

$$v(t) = L_{eq} \frac{di}{dt} = 5(4)(-1)(-10)e^{-10t} \text{ mV} = 200e^{-10t} \text{ mV}$$

e

$$v_1(t) = 2 \frac{di}{dt} = 2(-4)(-10)e^{-10t} \text{ mV} = 80e^{-10t} \text{ mV}$$

Poiché $v = v_1 + v_2$,

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = 120e^{-10t} \text{ mV}$$

(c) La corrente i_1 si ottiene come

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{4} \int_0^t v_2 dt + i_1(0) = \frac{120}{4} \int_0^t e^{-10t} dt + 5 \text{ mA} \\ &= -3e^{-10t} \Big|_0^t + 5 \text{ mA} = -3e^{-10t} + 3 + 5 = 8 - 3e^{-10t} \text{ mA} \end{aligned}$$

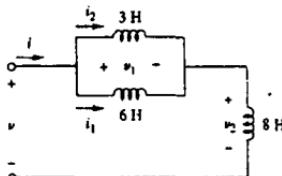
In maniera simile,

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{1}{12} \int_0^t v_2 dt + i_2(0) = \frac{120}{12} \int_0^t e^{-10t} dt - 1 \text{ mA} \\ &= -e^{-10t} \Big|_0^t - 1 \text{ mA} = -e^{-10t} + 1 - 1 = -e^{-10t} \text{ mA} \end{aligned}$$

Si noti che $i_1(t) + i_2(t) = i(t)$.

■ **Esercizio 6.12** Nel circuito di Figura 6.34, $i_1(t) = 0.6e^{-2t}$ A. Se $i(0) = 1.4$ A, determinare: (a) $i_1(0)$; (b) $i_1(t)$ e $i_2(t)$; (c) $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v(t)$.

Figura 6.34
Per l'Esercizio 6.12.



Risposta (a) 0.8 A, (b) $(-0.4 + 1.2e^{-2t})$ A, $(-0.4 + 1.8e^{-2t})$ A,
(c) $-7.2e^{-2t}$ V, $-28.8e^{-2t}$ V, $-36e^{-2t}$ V.

6.6 APPLICAZIONI

Elementi circuituali come i resistori e i condensatori sono reperibili in commercio sia in forma discreta che nei circuiti integrati. A differenza di essi, gli induttori sono invece molto difficili da fabbricare sul substrato di silicio dei circuiti integrati con valori apprezzabili dell'induttanza. Gli induttori si trovano perciò quasi solamente in forma discreta, e tendono a essere costosi e ingombranti, e quindi non altrettanto versatili quanto i resistori e i condensatori. Pur essendo di limitata applicazione, in molti casi non esistono componenti che li possano sostituire; applicazioni tipiche degli induttori sono, fra gli altri, i relè, le unità di ritardo, le testine magnetiche fonografiche, alcuni circuiti telefonici, ricevitori radio e TV, alimentatori, motori elettrici, microfoni e altoparlanti.

I condensatori e gli induttori possiedono le seguenti tre importanti proprietà che li rendono particolarmente utili nei circuiti elettrici:

1. La capacità di immagazzinare energia li rende in grado di funzionare come generatori temporanei di tensione o di corrente. Essi possono essere utilizzati per generare un valore elevato di corrente, o di tensione, per un breve intervallo di tempo.
2. I condensatori si oppongono alle variazioni istantanee della tensione, e gli induttori a quelle della corrente. Questa proprietà rende gli induttori utili per la soppressione di scintille o fenomeni di arco elettrico, e per convertire treni di impulsi di tensione in una tensione quasi costante.
3. I condensatori e gli induttori hanno un comportamento sensibile alla frequenza, e possono essere usati nei circuiti per discriminare tra frequenze diverse.

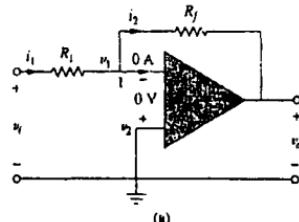
Le prime due proprietà vengono utilizzate nei circuiti in regime comunque variabile, mentre la terza viene usata nei circuiti in regime sinusoidale (AC). La loro utilità risulterà più chiara nei prossimi capitoli. Verranno ora prese in considerazione tre applicazioni che fanno uso di condensatori e amplificatori operazionali: l'integratore, il derivatore e il calcolatore analogico.

6.6.1 Integratore

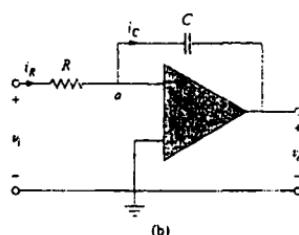
Due importanti circuiti con operazionali che fanno uso di elementi dinamici sono l'integratore e il derivatore. Questi circuiti fanno uso di resistori e condensatori ma non utilizzano gli induttori, più costosi e ingombranti.

L'integratore a operazionale viene usato in numerose applicazioni, e in particolare nei calcolatori analogici che verranno presentati nel Paragrafo 6.6.3.

Un integratore è un circuito la cui uscita è proporzionale all'integrale del segnale di ingresso.



(a)



(b)

Figura 6.35
La sostituzione del resistore di reazione nell'amplificatore invertente in (a) produce un integratore in (b).

Se il resistore di reazione R_f nell'ormai familiare amplificatore invertente di Figura 6.35(a) viene sostituito con un condensatore, si ottiene un integratore ideale, mostrato in Figura 6.35(b). Si vuole ora ricavare la rappresentazione matematica delle operazioni eseguite dal circuito. Al nodo α in Figura 6.35(b),

$$i_R = i_C \quad (6.32)$$

Ma

$$i_R = \frac{v_i}{R}, \quad i_C = -C \frac{dv_o}{dt}$$

Sostituendo queste ultime nella (6.32), si ottiene

$$\frac{v_i}{R} = -C \frac{dv_o}{dt} \quad (6.33a)$$

$$dv_o = -\frac{1}{RC} v_i dt \quad (6.33b)$$

Integrando ambo i membri

$$v_o(t) - v_o(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt \quad (6.34)$$

Per essere certi che $v_o(0) = 0$ bisogna sempre scaricare il condensatore dell'integratore prima di applicare il segnale. Supponendo $v_o(0) = 0$,

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt$$

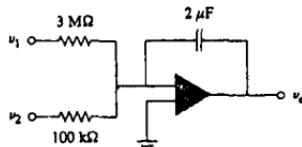
(6.35)

la quale mostra come il circuito di Figura 6.35(b) fornisca una tensione di uscita proporzionale all'integrale dell'ingresso. Nella pratica, questo circuito richiede anche un resistore di reazione per limitare il guadagno in continua e prevenire la saturazione. È necessario fare molta attenzione a che l'operazionale lavori nella zona lineare e non saturi mai.

Esempio 6.13

Se $v_1 = 10 \cos 2t$ mV e $v_2 = 0.5t$ mV, determinare v_o nel circuito di Figura 6.36. Supporre che la tensione iniziale sul condensatore sia nulla.

Figura 6.36
Per l'Esempio 6.13.



Soluzione: Il circuito è un integratore sommatore,

$$\begin{aligned}
 v_o &= -\frac{1}{R_1 C} \int v_1 dt - \frac{1}{R_2 C} \int v_2 dt \\
 &= -\frac{1}{3 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6}} \int_0^t 10 \cos 2t dt \\
 &\quad - \frac{1}{100 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6}} \int_0^t 0.5t dt \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{10}{2} \sin 2t - \frac{1}{0.2} \frac{0.5t^2}{2} = -0.833 \sin 2t - 1.25t^2 \text{ mV}
 \end{aligned}$$

■ **Esercizio 6.13** L'integratore in Figura 6.35 ha $R = 25$ kΩ, $C = 10$ μF. Determinare la tensione di uscita quando viene applicata una tensione costante di 10 mV in $t = 0$. Supporre condizioni iniziali nulle.

Risposta -40 mV.

6.6.2 Derivatore

Un derivatore è un circuito la cui uscita è proporzionale alla derivata rispetto al tempo del segnale di ingresso.

In Figura 6.35(a), se il resistore di ingresso viene sostituito con un condensatore, il circuito risultante è un derivatore, mostrato in Figura 6.37. Applicando la KCL al nodo a ,

$$i_R = i_C \quad (6.36)$$

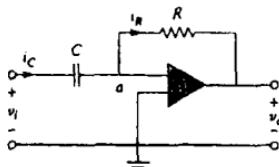


Figura 6.37
Circuito derivatore ad operazionale.

Ma

$$i_R = -\frac{v_o}{R}, \quad i_C = C \frac{dv_i}{dt}$$

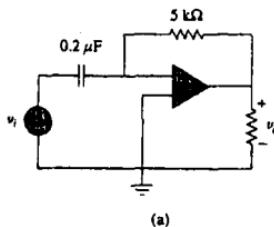
Sostituendo nella (6.36) si ha

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt} \quad (6.37)$$

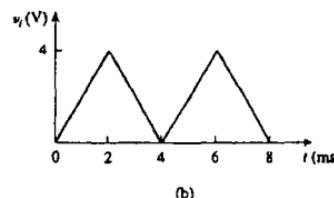
secondo la quale l'uscita è proporzionale alla derivata dell'ingresso. I circuiti derivatori sono considerati instabili dal punto di vista elettronico, perché qualunque forma di rumore elettrico in ingresso viene amplificata dal derivatore. Per questa ragione, il circuito derivatore di Figura 6.37 non è così diffuso e utile quanto l'integratore, e viene usato raramente nelle applicazioni pratiche.

Esempio 6.14

Tracciare il grafico della tensione di uscita del circuito di Figura 6.38(a), data la tensione di ingresso di Figura 6.38(b). Si assuma $v_o = 0$ a $t = 0$.



(a)



(b)

Figura 6.38
Per l'Esempio 6.14.

Soluzione: Il circuito è un derivatore con

$$RC = 5 \times 10^3 \times 0.2 \times 10^{-6} = 10^{-3} \text{ s}$$

Per $0 < t < 4 \text{ ms}$ è possibile esprimere la tensione di ingresso in Figura 6.38(b) come

$$v_i = \begin{cases} 2000t & 0 < t < 2 \text{ ms} \\ 8 - 2000t & 2 < t < 4 \text{ ms} \end{cases}$$

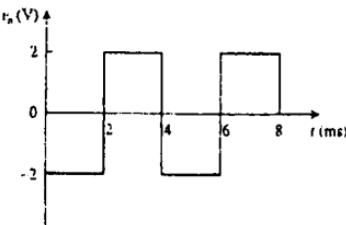
Ciò si ripete per $4 < t < 8$. Usando la (6.37), si ottiene l'uscita come

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt} = \begin{cases} -2 \text{ V} & 0 < t < 2 \text{ ms} \\ 2 \text{ V} & 2 < t < 4 \text{ ms} \end{cases}$$

Il grafico dell'uscita è mostrato in Figura 6.39.

Figura 6.39

Tensione di uscita del circuito
in Figura 6.38(a).



- **Esercizio 6.14** Il derivatore in Figura 6.37 ha $R = 10 \text{ k}\Omega$ e $C = 2 \mu\text{F}$. Dato $v_i = 3t \text{ V}$, determinare l'uscita v_o .

Risposta -60 mV .

6.6.3 Calcolatore analogico

Una delle prime applicazioni degli amplificatori operazionali furono i calcolatori elettronici analogici, circuiti programmabili in grado di risolvere in modo automatico modelli matematici di sistemi elettrici e meccanici; tali modelli vengono espressi solitamente in termini di equazioni differenziali.

La risoluzione delle equazioni differenziali usando un calcolatore analogico prevede la possibilità di collegare in cascata tre tipi di circuiti con operazionali: integratori, amplificatori sonnulatori e amplificatori invertenti e non invertenti per le operazioni di "scaling" (moltiplicazione per uno scalare positivo o negativo). Il modo migliore di illustrare il processo di risoluzione di una equazione differenziale da parte di un calcolatore analogico è tramite un esempio.

Si supponga di voler ottenere la soluzione $x(t)$ della equazione

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t), \quad t > 0 \quad (6.38)$$

dove a , b e c sono costanti, e $f(t)$ è una funzione forzante arbitraria. La soluzione si ottiene risolvendo dapprima rispetto al termine con la derivata di ordine più elevato. Risolvendo rispetto a d^2x/dt^2 si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(t)}{a} - \frac{b}{a} \frac{dx}{dt} - \frac{c}{a} x \quad (6.39)$$

Per ottenere dx/dt , si integra il termine d^2x/dt^2 . Infine, per ottenere x , viene integrato il termine dx/dt . La funzione forzante viene iniettata nel circuito nel punto opportuno. Il calcolatore analogico per la risoluzione della (6.38) viene così realizzato interconnettendo i sommatori, invertitori e integratori necessari. Si può poi utilizzare un plotter oppure un oscilloscopio per visualizzare l'uscita x oppure dx/dt oppure d^2x/dt^2 , a seconda del punto del sistema al quale esso viene collegato.

Anche se l'esempio appena presentato si riferisce a una equazione differenziale del secondo ordine, un calcolatore analogico formato da integratori, invertitori e sommatori può essere usato per simulare qualsiasi equazione differenziale. È però necessario prestare attenzione ai valori scelti per i resistori e i condensatori, al fine di evitare che gli operazionali finiscano in una delle zone di saturazione durante l'intervalllo di simulazione.

I calcolatori analogici costruiti con tubi a vuoto erano diffusi negli anni '50 e '60; il loro uso poi declinò fino a scomparire, quando furono sostituiti dai moderni elaboratori digitali. Il loro studio rimane di interesse sia per la larga diffusione e il basso costo degli amplificatori operazionali sia perché rappresentano un confronto interessante con i computer digitali.

Esempio 6.15

Progettare un calcolatore analogico che risolva l'equazione differenziale.

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2 \frac{dv_o}{dt} + v_o = 10 \sin 4t \quad t > 0$$

con $v_o(0) = -4$, $v'_o(0) = 1$. (Il simbolo ' rappresenta la derivata rispetto al tempo.)

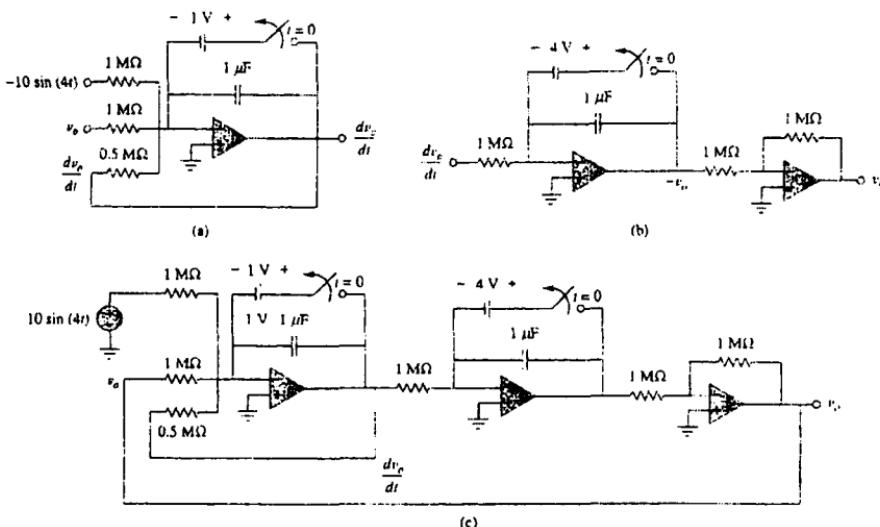


Figura 6.40
Per l'Esempio 6.15.

Soluzione:**1. Dare una definizione precisa del problema.**

Il problema e la soluzione richiesta sono ben specificati. Si ricorda allo studente che spesso il problema non è così ben definito e questa sezione del processo di Problem-Solving potrebbe richiedere molti sforzi. Infatti si deve tenere presente che il tempo impiegato in questa fase darà risultati, in termini di minore fatica, ed eviterà molte delusioni più avanti nel procedimento.

2. Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.

Utilizzando i dispositivi studiati nel paragrafo 6.6.3, si può creare il circuito desiderato del calcolatore analogico. Sono necessari uno o più circuiti invertenti e un circuito integratore (possibilmente combinato con un circuito sommatore).

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

Il metodo per risolvere il problema è molto semplice. È necessario scegliere i valori esatti dei resistori e dei condensatori che permettono di ottenere l'equazione richiesta. L'uscita del circuito fornirà il risultato desiderato.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

Ci sono un numero infinito di combinazioni per la scelta dei valori di resistori e condensatori che consentono di avere una soluzione corretta.

Valori limite di resistori e condensatori daranno risultati sbagliati. Per esempio, valori bassi di resistori sovraccaricheranno i circuiti elettronici. La scelta di resistori con valori molto alti provocherà invece un funzionamento dell'amplificatore operazionale lontano dalle condizioni (caratteristiche) ideali. I valori limite si possono calcolare dalle caratteristiche dell'amplificatore operazionale reale.

Si risolve dapprima rispetto alla derivata seconda

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = 10 \sin 4t - 2 \frac{dv_o}{dt} - v_o \quad (6.15.1)$$

La realizzazione di questa espressione richiede alcune operazioni matematiche fra cui la somma, la moltiplicazione per uno scalare e l'integrazione. Integrando entrambi i membri della (6.15.1) si ha

$$\frac{dv_0}{dt} = - \int_0^t \left(-10 \sin 4t + 2 \frac{dv_0}{dt} + v_0 \right) dt + v'_0(0) \quad (6.15.2)$$

in cui $v'_0(0) = 1$. Si può realizzare la (6.15.2) usando il circuito integratore sommatore mostrato in Figura 6.40(a). I valori dei resistori e dei condensatori sono stati scelti in modo che $RC = 1$ per il termine

$$-\frac{1}{RC} \int_0^t v_0 \, dt$$

Gli altri termini dell'integratore sommatore della (6.15.2) assumono valori che conseguono dalle scelte precedenti. La condizione iniziale $dv_0(0)/dt = 1$ si ottiene collegando una batteria da 1 V dotata di interruttore ai terminali del condensatore come mostrato in Figura 6.40(a).

Il passo successivo consiste nell'ottenere v_0 integrando dv_0/dt e cambiando di segno al risultato,

$$v_0 = - \int_0^t \left(-\frac{dv_0}{dt} \right) dt + v(0) \quad (6.15.3)$$

Ciò viene realizzato dal circuito in Figura 6.40(b) con la batteria che rappresenta la condizione iniziale di -4 V. I due circuiti di Figura 6.40 (a) e (b) vengono poi combinati per ottenere il circuito completo mostrato in Figura 6.40(c). Quando viene applicato il segnale di ingresso $10 \sin 4t$, gli interruttori vengono aperti ($t = 0$) e si ottiene la forma d'onda di uscita v_0 , che può essere visualizzata su un oscilloscopio.

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

La soluzione sembra corretta, ma è veramente così?

Una verifica valida potrebbe essere quella di ricavare prima la soluzione con PSpice. Successivamente si può confrontare questo risultato con la soluzione ottenuta sfruttando le potenzialità di MATLAB.

Visto che l'obiettivo è provare il circuito e verificare che esso realizzi l'equazione desiderata, si dispone di un metodo più semplice da usare, che consiste nell'attraversare il circuito e vedere se esso genera l'equazione voluta.

Bisogna comunque operare una scelta. Si potrebbe attraversare il circuito da sinistra a destra, ma ciò comporterebbe l'esecuzione del il differenziale del risultato per ricavare l'equazione originale. Un metodo più semplice potrebbe essere di attraversare il circuito da destra verso sinistra. Questo approccio permetterà di verificare la risposta.

Partendo dalla tensione di uscita v_0 , si vede che l'amplificatore operazionale a destra è un invertitore a guadagno unitario. Ciò implica che l'uscita del circuito intermedio è $-v_0$.

Il circuito intermedio realizza la seguente funzione.

$$v_0 = - \left(\int_0^t \frac{dv_0}{dt} dt + v_0(0) \right) = - (v_0(t) + v_0(0)) = - (v_0(t) - v_0(0) + v_0(0))$$

dove $v_0(0) = -4$ V è il valore iniziale della tensione sul condensatore.

Si esamina il circuito a sinistra nello stesso modo.

$$\frac{dv_0}{dt} = - \left(\int_0^t -\frac{d^2 v_0}{dt^2} dt + v'_0(0) \right) = - \left(-\frac{dv_0}{dt} + v'_0(0) - v'_0(0) \right)$$

Ora è necessario verificare se l'ingresso del primo amplificatore operazionale è $-d^2 v_0/dt^2$. Si vede che l'ingresso è uguale a:

$$-10 \sin(4t) + v_0 + \frac{1/10^{-6}}{0.5 M\Omega} \frac{dv_0}{dt} = -10 \sin(4t) + v_0 + 2 \frac{dv_0}{dt}$$

Confrontando questo risultato con la (6.15.1), si ottiene quindi $-d^2 v_0/dt^2$.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

La soluzione ottenuta è soddisfacente, per cui rappresenta una valida risposta al problema.

Esercizio 6.15 Progettare un calcolatore analogico che risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 3 \frac{dv_o}{dt} + 2 v_o = 4 \cos 10t \quad t > 0$$

con $v_o(0) = 2$, $v'_o(0) = 0$.

Risposta Vedere la Figura 6.41, dove $RC = 1$ s.

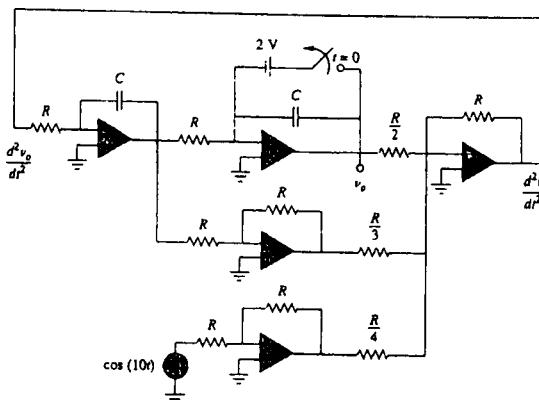


Figura 6.41
Per l'Esercizio 6.15.

SOMMARIO

- La corrente in un condensatore è direttamente proporzionale alla variazione della tensione ai suoi capi

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

La corrente in un condensatore è nulla se la tensione non varia. Perciò, un condensatore funziona come un circuito aperto in presenza di un generatore in corrente continua.

- La tensione su di un condensatore è direttamente proporzionale all'integrale nel tempo della corrente che lo attraversa

$$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \cdot dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \cdot dt + v(t_0)$$

La tensione su di un condensatore non può variare istantaneamente.

- Condensatori in serie e parallelo si combinano nello stesso modo delle conduttanze.

- La tensione su un induttore è direttamente proporzionale alla velocità di variazione della corrente che lo attraversa

$$v = L \frac{di}{dt}$$

La tensione sull'induttore è nulla se la corrente non varia. Perciò, un induttore

funziona come un cortocircuito in presenza di un generatore in corrente continua.

- 5) La corrente in di un induttore è direttamente proporzionale all'integrale nel tempo della tensione ai suoi capi

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v \cdot dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v \cdot dt + i(t_0)$$

La corrente in un induttore non può variare istantaneamente.

- 6) Induttori in serie e parallelo si combinano nello stesso modo delle resistenze.
 7) In un qualsiasi istante t l'energia immagazzinata in un condensatore è $\frac{1}{2} Cv^2$, mentre l'energia immagazzinata da un induttore è $\frac{1}{2} Li^2$.
 8) Tre applicazioni circuituali (l'integratore, il derivatore e il calcolatore analogico), possono essere realizzate utilizzando resistori, condensatori e amplificatori operazionali.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 6.1 Quale è la carica su un condensatore da 5 F quando è collegato a un generatore da 120 V?
 (a) 600 C (b) 300 C
 (c) 24 C (d) 12 C
- 6.2 La capacità si misura in:
 (a) coulomb (b) joule
 (c) henry (d) farad
- 6.3 Quando la carica totale su un condensatore raddoppia, l'energia immagazzinata:
 (a) rimane la stessa (b) si dimezza
 (c) raddoppia (d) quadruplica
- 6.4 Può la forma d'onda di tensione in Figura 6.42 essere associata a un condensatore?
 (a) Sì (b) No
- 6.5 La capacità totale di due condensatori da 40 mF collegati in serie, in parallelo a un condensatore da 4 mF è:
 (a) 3.8 mF (b) 5 mF (c) 24 mF
 (d) 44 mF (e) 84 mF
- 6.6 In Figura 6.43, se $i = \cos 4t$ e $v = \sin 4t$, l'elemento è:
 (a) un resistore (b) un condensatore
 (c) un induttore
- 6.7 Un induttore da 5 H varia la sua corrente di 3 A in 0.2 s. La tensione prodotta ai terminali dell'induttore è:
 (a) 75 V (b) 8.888 V
 (c) 3 V (d) 1.2 V
- 6.8 Se la corrente in un induttore da 10 mH aumenta da zero a 2 A, quanta energia viene immagazzinata nell'induttore?
 (a) 40 mJ (b) 20 mJ
 (c) 10 mJ (d) 5 mJ

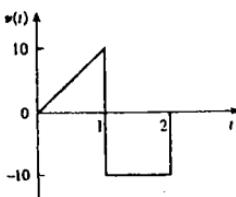


Figura 6.42 Per la domanda di riepilogo 6.4.



Figura 6.43 Per la domanda di riepilogo 6.6.

- 6.9 Gli induttori in parallelo si combinano esattamente come i resistori in parallelo.

(a) Vero (b) Falso

- 6.10 Nel circuito di Figura 6.44, la formula del partitore di tensione è:

$$(a) v_1 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} v_s \quad (b) v_1 = \frac{L_1 + L_2}{L_2} v_s$$

$$(c) v_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v_s \quad (d) v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_s$$

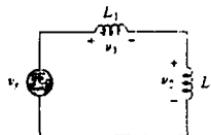


Figura 6.44 Per la domanda di riepilogo 6.10.

Risposte: 6.1a, 6.2d, 6.3d, 6.4b, 6.5c, 6.6b, 6.7a, 6.8b, 6.9a, 6.10d.

PROBLEMI

Paragrafo 6.2 Condensatori

- 6.1 Se la tensione su un condensatore da 5 F è $2te^{-3t}\text{ V}$, determinare la corrente e la potenza.
- 6.2 L'energia di un condensatore da $20\mu\text{F}$ è $w(t) = 10 \cos^2 377t\text{ J}$. Calcolare la corrente nel condensatore.
- 6.3 In 5 s , la tensione su un condensatore da 40 mF passa da 160 V a 220 V . Calcolare la corrente media attraverso il condensatore.
- 6.4 Una corrente $6 \sin 4t\text{ A}$ passa attraverso un condensatore da 2 F . Determinare la tensione $v(t)$ sul condensatore data $v(0) = 1\text{ V}$.
- 6.5 La tensione di un condensatore da $4\mu\text{F}$ è mostrata in Figura 6.45. Determinare la forma d'onda della corrente

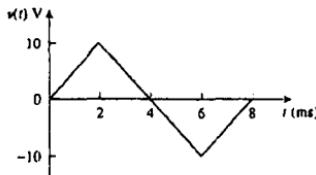


Figura 6.45 Per il Problema 6.5.

- 6.6 La forma d'onda di tensione in Figura 6.46 viene applicata a un condensatore da $30\mu\text{F}$. Tracciare il grafico della forma d'onda della corrente nel condensatore.

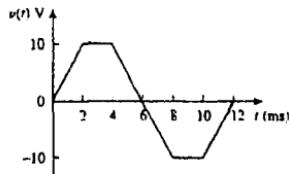


Figura 6.46 Per il Problema 6.6.

- 6.7 Per $t = 0$, la tensione su un condensatore da 50 mF è 10 V . Calcolare la tensione sul condensatore per $t > 0$ quando una corrente 4 mA scorre nel condensatore.

- 6.8 Un condensatore da 4 mF ha una tensione ai terminali

$$v = \begin{cases} 50\text{ V}, & t \leq 0 \\ Ae^{-100t} + Be^{-600t}\text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Se il condensatore ha una corrente iniziale di 2 A , determinare:

- (a) le costanti A e B .
 (b) l'energia immagazzinata nel condensatore in $t = 0$.
 (c) la corrente nel condensatore per $t > 0$.

- 6.9 La corrente attraverso un condensatore da 0.5 F è $6(1 - e^{-t})\text{ A}$. Determinare la tensione e la potenza in $t = 2\text{ s}$. Supponere $v(0) = 0$.

- 6.10 La tensione su un condensatore da 2 mF è mostrata in Figura 6.47. Determinare la corrente nel condensatore.

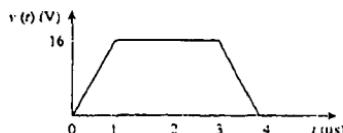


Figura 6.47 Per il Problema 6.10.

- 6.11 La forma d'onda della corrente di un condensatore da 4 mF è mostrata in Figura 6.48. Supponendo che $v(0) = 10\text{ V}$, tracciare la forma d'onda della tensione $v(t)$.

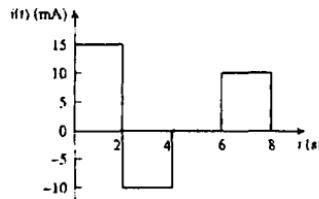


Figura 6.48 Per il Problema 6.11.

- 6.12 Una tensione di $6e^{-2000t}\text{ V}$ si trova ai capi del parallelo fra un condensatore da 100 mF e un resistore da 12Ω . Calcolare la potenza assorbita dal parallelo.

- 6.13 Determinare la tensione sui condensatori nel circuito di Figura 6.49 in condizioni stazionarie.

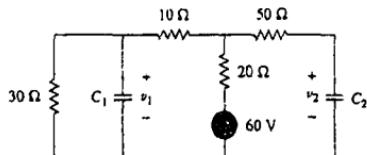


Figura 6.49 Per il Problema 6.13.

Paragrafo 6.3 Condensatori in serie e in parallelo

- 6.14 La serie di due condensatori da $20\mu F$ e $60\mu F$ è collegata in parallelo con la serie di due condensatori da $30\mu F$ e $70\mu F$. Calcolare la capacità equivalente.
- 6.15 Due condensatori ($20\mu F$ e $30\mu F$) sono collegati a un generatore da $100 V$. Determinare l'energia immagazzinata in ciascuno dei condensatori se essi sono collegati in:
 (a) parallelo (b) serie
- 6.16 La capacità equivalente ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 6.50 è $30\mu F$. Calcolare il valore di C .

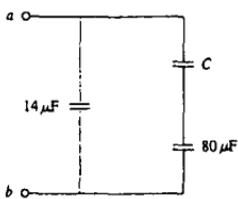


Figura 6.50 Per il Problema 6.16.

- 6.17 Determinare la capacità equivalente per ciascuno dei circuiti in Figura 6.51.

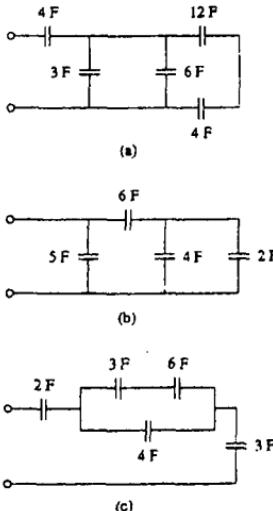


Figura 6.51 Per il Problema 6.17.

- 6.18 Determinare C_{eq} nel circuito in Figura 6.52 se tutti i condensatori hanno valore pari a $4\mu F$.

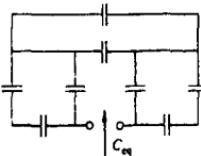


Figura 6.52 Per il Problema 6.18.

- 6.19 Determinare la capacità equivalente tra i terminali a e b nel circuito di Figura 6.53. Tutte le capacità sono espresse in μF .

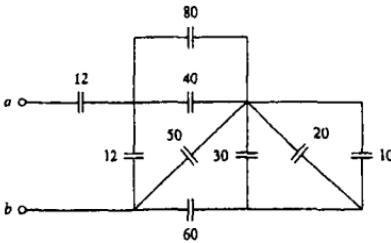


Figura 6.53 Per il Problema 6.19.

- 6.20 Calcolare la capacità equivalente ai terminali $a-b$ nel circuito in Figura 6.54.

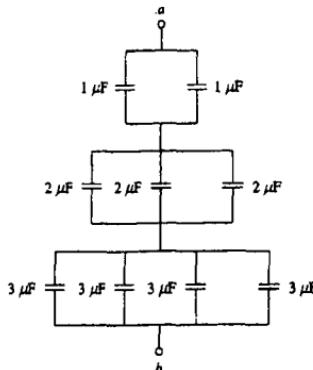


Figura 6.54 Per il Problema 6.20.

- 6.21 Determinare la capacità equivalente ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 6.55.

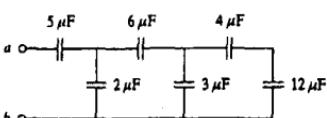


Figura 6.55 Per il Problema 6.21.

- 6.22 Calcolare la capacità equivalente del circuito in Figura 6.56.

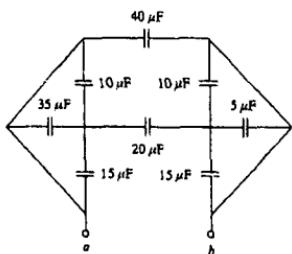


Figura 6.56 Per il Problema 6.22.

- 6.23 Per il circuito in Figura 6.57, determinare:

- (a) la tensione su ciascuno dei condensatori,
 (b) l'energia immagazzinata in ciascuno dei condensatori.

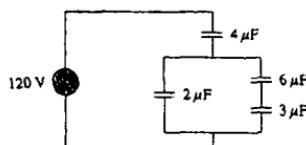


Figura 6.57 Per il Problema 6.23.

- 6.24 Ripetere il Problema 6.23 per il circuito di Figura 6.58.

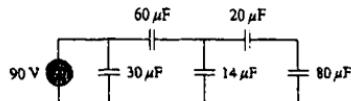


Figura 6.58 Per il Problema 6.24.

- 6.25 (a) Mostrare che la regola del partitore di tensione per due condensatori in serie come in Figura 6.59(a) è

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_s, \quad v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_s$$

supponendo che le condizioni iniziali siano nulle.

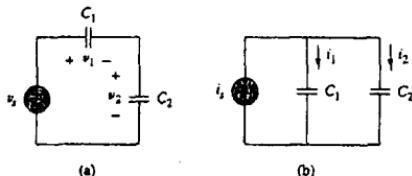


Figura 6.59 Per il Problema 6.25.

- (b) Per due condensatori in parallelo come in Figura 6.59(b), mostrare che la regola del partitore di corrente è

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i_s, \quad i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i_s$$

supponendo che le condizioni iniziali siano nulle.

- 6.26 Tre condensatori, $C_1 = 5 \mu F$, $C_2 = 10 \mu F$ e $C_3 = 20 \mu F$ sono collegati in parallelo a un generatore da 150 V. Determinare:

- (a) la capacità totale,
 (b) la carica su ciascun condensatore,
 (c) l'energia totale immagazzinata nella combinazione parallelo.

- 6.27 Se 4 condensatori da $4 \mu F$ possono essere collegati in serie e in parallelo, trovare il minimo e il massimo valore che si può ottenere da tali combinazioni serie/parallelo.

- *6.28 Calcolare la capacità equivalente della rete mostrata in Figura 6.60 per mezzo delle trasformazioni stella-triangolo.

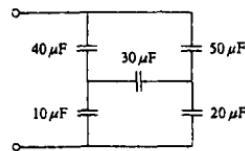


Figura 6.60 Per il Problema 6.28.

- 6.29 Determinare C_{eq} per ciascuno dei circuiti in Figura 6.61.

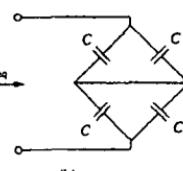
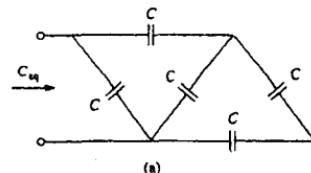


Figura 6.61 Per il Problema 6.29.

- 6.30 Supponendo che i condensatori siano inizialmente scarichi, determinare $v_o(t)$ nel circuito di Figura 6.62.

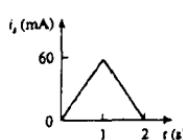
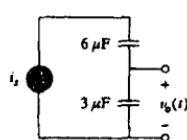


Figura 6.62 Per il Problema 6.30.



* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

- 6.31 Se $v(0) = 0$, determinare $v(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nel circuito di Figura 6.63.

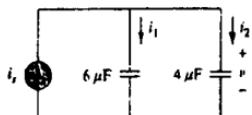
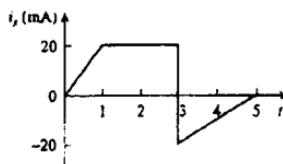


Figura 6.63 Per il Problema 6.31.

- 6.32 Nel circuito di Figura 6.64, siano $i_x = 30e^{-2t}$ mA c $v_1(0) = 50V$, $v_2(0) = 20V$. Determinare: (a) $v_1(t)$ c $v_2(t)$, (b) l'energia in ciascun condensatore per $t = 0.5$ s.

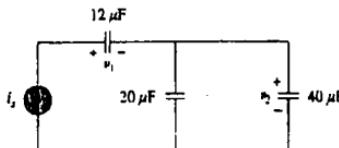


Figura 6.64 Per il Problema 6.32.

- 6.33 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b* del circuito mostrato in Figura 6.65. Si noti che, in generale, l'equivalente Thevenin non esiste per circuiti contenenti condensatori e resistori. Questo è un caso particolare in cui il circuito equivalente di Thevenin esiste.

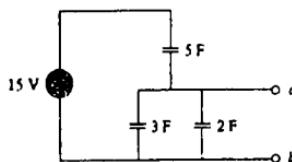


Figura 6.65 Per il Problema 6.33.

Paragrafo 6.4 Induttori

- 6.34 La corrente attraverso un induttore da 10 mH è $6e^{-t/2}$ A. Determinare la tensione e la potenza per $t = 3$ s.

- 6.35 In un induttore la corrente aumenta linearmente da 50 mA a 100 mA in 2 ms producendo una tensione di 160 mV . Calcolare il valore dell'induttore.

- 6.36 La corrente in un induttore da 12 mH è $i(t) = 30te^{-2t}$ A per $t \geq 0$. Determinare:

- la tensione sull'induttore;
- la potenza che viene erogata all'induttore a $t = 1\text{ s}$;
- l'energia immagazzinata nell'induttore a $t = 1\text{ s}$.

- 6.37 La corrente in un induttore da 12 mH è $4 \sin 100t$ A. Determinare la tensione sull'induttore per $0 < t < \pi/200\text{ s}$, e l'energia immagazzinata a $t = \pi/200\text{ s}$.

- 6.38 La corrente che passa in un induttore da 40 mH è

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ te^{-2t} \text{ A}, & t > 0 \end{cases}$$

Determinare la tensione $v(t)$.

- 6.39 La tensione su un induttore da 200 mH è data da

$$v(t) = 3t^2 + 2t + 4 \text{ V} \quad \text{per } t > 0.$$

Determinare la corrente $i(t)$ che passa nell'induttore. Supponere $i(0) = 1$ A.

- 6.40 La corrente in un induttore da 5 mH è mostrata in Figura 6.66. Determinare la tensione sull'induttore a $t = 1\text{ ms}$, 3 ms e 5 ms .

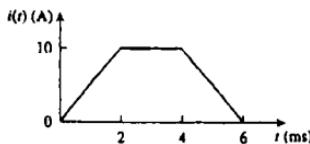


Figura 6.66 Per il Problema 6.40.

- 6.41 La tensione su un induttore da 2 H è $20(1 - e^{-2t})$ V. Se la corrente iniziale nell'induttore è 0.3 A, determinare la corrente e l'energia immagazzinata nell'induttore per $t = 1$ s.

- 6.42 Se la forma d'onda di tensione in Figura 6.67 viene applicata ai terminali di un induttore da 5 H , calcolare la corrente nell'induttore. Supponere $i(0) = -1$ A.



Figura 6.67 Per il Problema 6.42.

- 6.43 La corrente in un induttore da 80 mH aumenta da 0 a 60 mA. Quanta energia viene immagazzinata nell'induttore?

- *6.44 Un induttore da 100 mH è collegato in parallelo a un resistore da 2Ω . La corrente nell'induttore è $i(t) = 50e^{-400t}$ mA.

- determinare la tensione v_L sull'induttore;
- determinare la tensione v_R sul resistore;
- è vero che $v_R(t) + v_L(t) = 0$?
- calcolare l'energia nell'induttore a $t = 0$.

- 6.45 Se la forma d'onda di tensione in Figura 6.68 viene applicata a un induttore da 10 mH , determinare la corrente $i(t)$ dell'induttore. Supponere $i(0) = 0$.

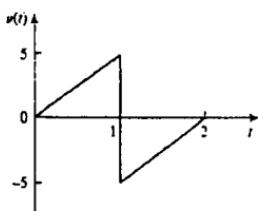


Figura 6.68 Per il Problema 6.45.

- 6.46 Determinare v_C , i_L e l'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore nel circuito di Figura 6.69 in condizioni stazionarie.

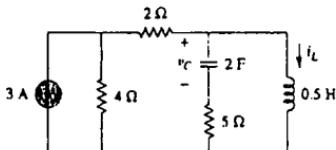


Figura 6.69 Per il Problema 6.46

- 6.47 Nel circuito di Figura 6.70, calcolare il valore di R che rende l'energia immagazzinata nel condensatore uguale a quella immagazzinata nell'induttore in condizioni stazionarie.

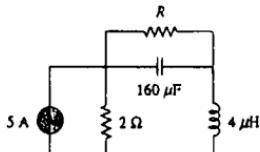


Figura 6.70 Per il Problema 6.47.

- 6.48 Calcolare i e v in condizioni di regime stazionario, nel circuito di Figura 6.71.

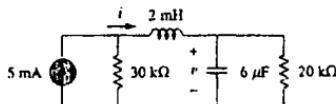


Figura 6.71 Per il Problema 6.48.

Paragrafo 6.5 Induttori in serie e in parallelo

- 6.49 Calcolare l'induttanza equivalente nel circuito di Figura 6.72. Tutti gli induttori hanno valore pari a 10 mH.

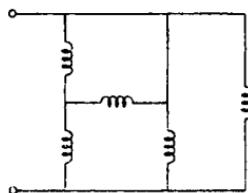


Figura 6.72 Per il Problema 6.49.

- 6.50 Un circuito capace di immagazzinare energia è formato dalla serie di due induttori da 16mH e da 14mH collegati in parallelo con la serie di due induttori da 24mH e da 36mH . Calcolare l'induttanza equivalente.

- 6.51 Determinare L_{eq} ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 6.73.

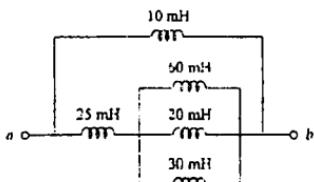


Figura 6.73 Per il Problema 6.51.

- 6.52 Calcolare L_{eq} nel circuito di Figura 6.74.

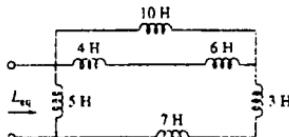


Figura 6.74 Per il Problema 6.52.

- 6.53 Determinare L_{eq} ai terminali del circuito in Figura 6.75.

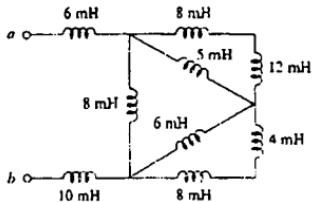


Figura 6.75 Per il Problema 6.53.

- 6.54 Determinare l'induttanza equivalente vista ai terminali del circuito in Figura 6.76.

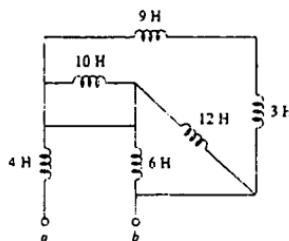
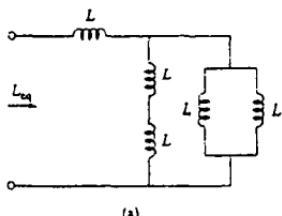
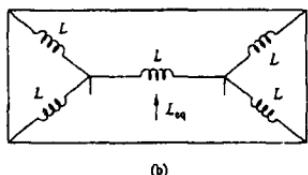


Figura 6.76 Per il Problema 6.54.

- 6.55 Determinare L_{eq} in ciascuno dei circuiti di Figura 6.77.



(a)



(b)

Figura 6.77 Per il Problema 6.55.

- 6.56 Determinare L_{eq} nel circuito di Figura 6.78.

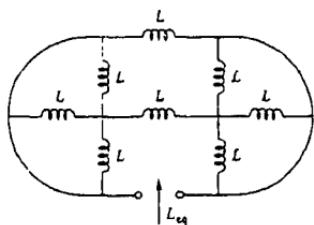


Figura 6.78 Per il Problema 6.56.

- 6.57 Determinare il valore di L_{eq} che può essere utilizzato per rappresentare la rete inductive di Figura 6.79 ai suoi terminali.

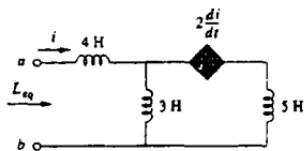


Figura 6.79 Per il Problema 6.57.

- 6.58 La forma d'onda di corrente in Figura 6.80 scorre in un induttore da 3 H. Tracciare il grafico della tensione sull'induttore nell'intervallo $0 < t < 6$ s.



Figura 6.80 Per il Problema 6.58.

- 6.59 (a) Per due induttori in serie come in Figura 6.81(a), mostrare che il principio del partitore di tensione è

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v, \quad v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v,$$

supponendo nelle le condizioni iniziali:

- (b) Per due induttori in parallelo come in Figura 6.81(b), mostrare che il principio del partitore di corrente è

$$i_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i, \quad i_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i,$$

supponendo nelle le condizioni iniziali:

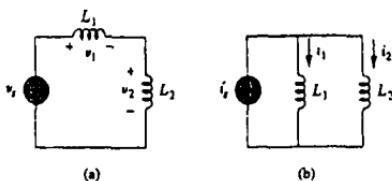


Figura 6.81 Per il Problema 6.59.

- 6.60 Nel circuito di Figura 6.82, $i_a(0) = 2$ A. Determinare $i_a(t)$ e $v_o(t)$ per $t > 0$.

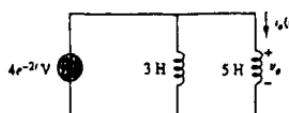


Figura 6.82 Per il Problema 6.60.

- 6.61 Esaminare il circuito di Figura 6.83. Calcolare:

(a) L_{eq} , $i_1(t)$ e $i_2(t)$ se $i_3(t) = 3e^{-t}$ mA;

(b) $v_o(t)$;

(c) l'energia immagazzinata nell'induttore da 20 mH a $t = 1$ s.

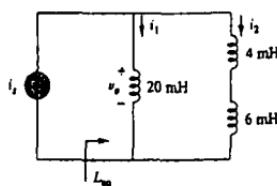


Figura 6.83 Per il Problema 6.61.

- 6.62 Si consideri il circuito in Figura 6.84. Note $v(t) = 12e^{-3t}$ mV per $t > 0$ e $i_1(0) = -10$ mA, determinare: (a) $i_1(0)$, (b) $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

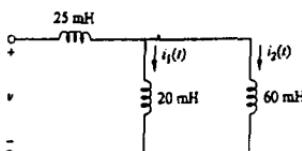


Figura 6.84 Per il Problema 6.62.

- 6.63 Nel circuito di Figura 6.85, tracciare il grafico di v_o .

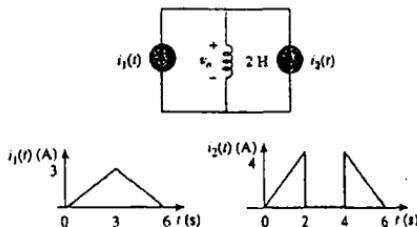


Figura 6.85 Per il Problema 6.63.

- 6.64 L'interruttore in Figura 6.86 è rimasto in posizione A per molto tempo. Nell'istante $t = 0$, l'interruttore si sposta dalla posizione A alla posizione B. L'interruttore è del tipo senza interruzioni, così che non vi è alcuna interruzione nella corrente dell'induttore. Determinare:
 (a) $i(t)$ per $t > 0$, (b) v subito dopo che l'interruttore si è spostato in posizione B, (c) $v(t)$ dopo che l'interruttore è rimasto per molto tempo in posizione B.

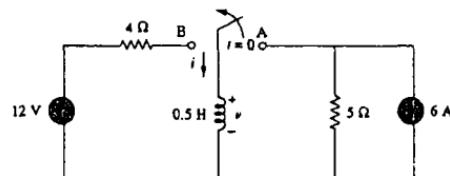


Figura 6.86 Per il Problema 6.64.

- 6.65 Gli induttori in Figura 6.87 sono inizialmente carichi e vengono collegati alla scatola nera in $t = 0$. Se $i_1(0) = 4 \text{ A}$, $i_2(0) = -2 \text{ A}$ e $v(t) = 50e^{-20t} \text{ mV}$, $t \geq 0$, determinare:
 (a) l'energia immagazzinata inizialmente in ciascun induttore,
 (b) l'energia totale trasferita alla scatola nera da $t = 0$ a $t = \infty$,
 (c) $i_1(t)$ e $i_2(t)$, $t \geq 0$,
 (d) $i(t)$, $t \geq 0$.

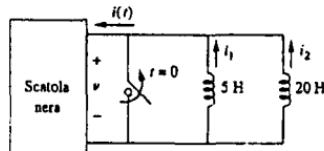


Figura 6.87 Per il Problema 6.65.

- 6.66 La corrente $i(t)$ in un induttore da 20mH è uguale, come valore, alla tensione su di esso per tutti gli istanti di tempo. Se $i(0) = 24$, calcolare $i(t)$.

Paragrafo 6.6 Applicazioni

- 6.67 Un integratore a operazionale ha $R = 50 \text{ k}\Omega$ e

$C = 0.04 \mu\text{F}$. Se la tensione di ingresso è $v_i = 10 \sin 50t \text{ mV}$, determinare la tensione di uscita.

- 6.68 Una tensione costante di 10 V viene applicata all'istante $t = 0$ a un integratore avente $R = 50 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$. Quanto tempo impiegherà l'operazionale a saturare se le tensioni di saturazione sono $+12 \text{ V}$ e -12 V ? Supponere che la tensione iniziale del condensatore sia nulla.

- 6.69 Un integratore a operazionale con $R = 4 \text{ M}\Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$ ha per ingresso la forma d'onda mostrata in Figura 6.88. Tracciare il grafico della forma d'onda di uscita.

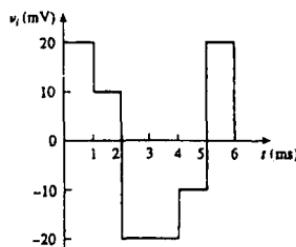


Figura 6.88 Per il Problema 6.69.

- 6.70 Utilizzando un solo operazionale, un condensatore e ~~due~~ resistori da $100 \text{ k}\Omega$ o meno, progettare un circuito che realizzi

$$v_o = -50 \int_0^t v_i(t) dt$$

Supponere $v_o = 0$ per $t = 0$.

- 6.71 Mostrare come è possibile usare un singolo operazionale per generare

$$v_o = - \int_0^t (v_1 + 4v_2 + 10v_3) dt$$

Se il condensatore di integrazione è $C = 2 \mu\text{F}$, calcolare i valori degli altri componenti.

- 6.72 In $t = 1.5 \text{ ms}$, determinare v_o dovuta agli integratori in cascata di Figura 6.89. Si supponga che gli integratori vengano riportati a 0 V in $t = 0$.

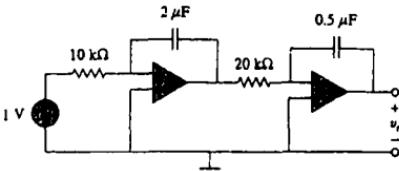


Figura 6.89 Per il Problema 6.72.

- 6.73 Mostrare che il circuito in Figura 6.90 è un integratore non inverteente.

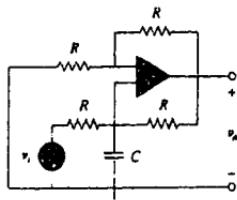
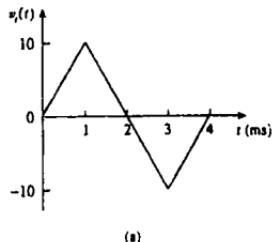
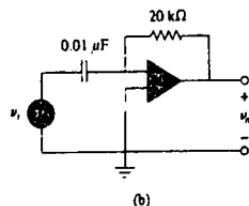


Figura 6.90 Per il Problema 6.73.

- 6.74 La forma d'onda triangolare in Figura 6.91(a) è applicata all'ingresso del derivatore a operazionale di Figura 6.91(b). Tracciare il grafico dell'uscita.



(a)



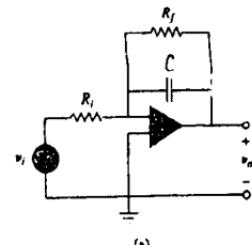
(b)

Figura 6.91 Per il Problema 6.74.

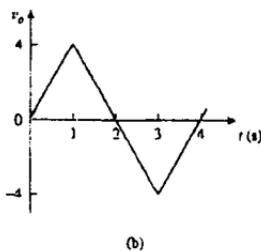
- 6.75 Un derivatore a operazionale ha $R = 250 \text{ k}\Omega$ e $C = 10 \mu\text{F}$. La tensione di ingresso è una rampa $r(t) = 12t \text{ mV}$. Determinare la tensione di uscita.

- 6.76 Una forma d'onda di tensione ha le seguenti caratteristiche: una pendenza positiva di 20 V/s per 5 ms seguita da una pendenza negativa di 10 V/s per 10 ms . Se la forma d'onda è applicata a un derivatore con $R = 50 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$, tracciare il grafico della forma d'onda di tensione in uscita.

- *6.77 L'uscita v_o del circuito con operazionale di Figura 6.92(a) è mostrata in Figura 6.92(b). Siano $R_1 = R_f = 1 \text{ M}\Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$. Determinare la forma d'onda della tensione di ingresso e tracciarne il grafico.



(a)



(b)

Figura 6.92 Per il Problema 6.77.

- 6.78 Progettare un calcolatore analogico che simuli
e~~od~~

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2 \frac{dv_o}{dt} + v_o = 10 \sin 2t$$

con $v_o(0) = 2$ e $v'_o(0) = 0$.

- 6.79 Progettare un calcolatore analogico che risolva la
e~~od~~ seguente equazione differenziale ordinaria.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = f(t)$$

con $y(0) = 1 \text{ V}$.

- 6.80 La Figura 6.93 presenta un calcolatore analogico progettato per risolvere una equazione differenziale. Supponendo nota $f(t)$, ricavare l'equazione per $f(t)$.

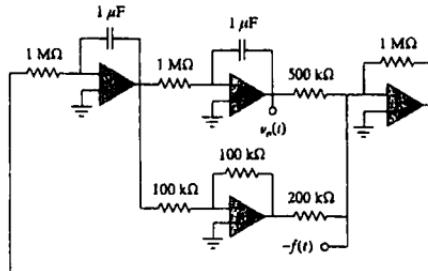


Figura 6.93 Per il Problema 6.80.

- 6.81 Progettare un calcolatore analogico che simuli la
e~~od~~ seguente equazione:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5v = -2f(t)$$

- 6.82 Progettare un circuito con operazionale tale che
e~~od~~

$$v_o = 10v_i + 2 \int v_i dt$$

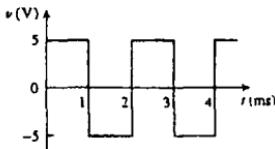
dove v_i e v_o sono la tensione di ingresso e la tensione di uscita, rispettivamente.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

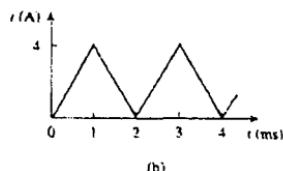
- 6.83 In laboratorio sono disponibili un gran numero di condensatori da $10 \mu\text{F}$ e 300 V. Per realizzare un banco di condensatori da $40 \mu\text{F}$ e 600 V, quanti condensatori da $10 \mu\text{F}$ sono necessari e come devono essere collegati?

- 6.84 Un induttore da 8 mH è utilizzato in un esperimento per la fusione di potenza. Se la corrente nell'induttore è $i(t) = 5 \sin^2 \pi t \text{ mA}$, per $t > 0$, calcolare la potenza fornita all'induttore e l'energia che immagazzina a $t = 0.5 \text{ s}$.

- 6.85 Un generatore di onda quadra produce la forma d'onda di tensione mostrata in Figura 6.94(a). Che tipo di componente circolare è necessario per convertire tale forma d'onda di tensione nella forma d'onda di corrente triangolare mostrata in Figura 6.94(b)? Calcolare il valore del componente, supponendo che sia inizialmente scarico.



(a)



(b)

Figura 6.94 Per il Problema 6.85

- 6.86 Un motore elettrico può essere modellato come una serie formata da un resistore da 12Ω e da un induttore da 200 mH . Se nei due elementi in serie scorre una corrente $i(t) = 2te^{-10t} \text{ A}$, calcolare la tensione sulla serie.



CAPITOLO

CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE

7.1 INTRODUZIONE

Dopo che sono stati presentati individualmente, nei capitoli precedenti, i tre elementi passivi (resistore, condensatore e induttore) e un elemento attivo (l'amplificatore operazionale), è ora possibile prendere in considerazione circuiti che contengono una combinazione di due o tre elementi passivi di diverso tipo. In questo capitolo verranno esaminati due tipi di circuiti semplici: il circuito contenente un resistore e un condensatore e il circuito contenente un resistore e un induttore. Questi vengono chiamati, rispettivamente, circuito RC e RL . Come si vedrà, nonostante si tratti di circuiti molto semplici, essi trovano larga applicazione in elettronica, nelle telecomunicazioni e nei sistemi di controllo.

L'analisi dei circuiti RC e RL verrà effettuata applicando le leggi di Kirchhoff, come si è già fatto per i circuiti resistivi. L'applicazione delle leggi di Kirchhoff a circuiti puramente resistivi dà luogo a equazioni algebriche; nel caso dei circuiti RC e RL , lo stesso procedimento porta invece a equazioni differenziali, che sono più difficili da risolvere delle equazioni algebriche. Le equazioni differenziali che risultano dalla analisi di circuiti RC e RL sono del primo ordine. Per questo motivo, questi circuiti sono noti come *circuiti del primo ordine*.

Un circuito del primo ordine è caratterizzato da una equazione differenziale del primo ordine.

Esistono due tipi di circuito del primo ordine (RC e RL), e per ciascuno di essi esistono due modi di eccitare il circuito. Il primo modo è quello di avere una condizione iniziale sull'elemento dinamico. Nei circuiti con questo tipo di eccitazione (i cosiddetti circuiti *autonomi*), l'energia iniziale è immagazzinata nell'elemento capacitivo o induttivo. L'energia iniziale provoca il passaggio di corrente nel circuito, e viene gradualmente dissipata nei resistori. Nonostante i circuiti autonomi siano privi, per definizione, di generatori indipendenti, essi possono contenere generatori dipendenti. Il secondo modo di eccitare un circuito del primo ordine è per mezzo di generatori indipendenti. I generatori indipendenti che verranno considerati in questo capitolo sono generatori costanti. (Nei prossimi capitoli verranno presi in considerazione anche generatori sinusoidali ed esponenziali). I due tipi di circuito del primo ordine e i due modi di eccitarlo rappresentano quattro situazioni possibili, che verranno tutte studiate in questo capitolo.

Verranno infine presentate quattro applicazioni tipiche dei circuiti RC e RL : i circuiti di ritardo e quelli per i relè, le unità flash per la fotografia e un circuito di accensione per automobile.

7.2 CIRCUITO RC AUTONOMO

Si ha un circuito RC autonomo quando il generatore che fornisce l'alimentazione viene, per qualsiasi ragione, scollegato dal circuito. L'energia già presente sul condensatore viene rilasciata ai resistori.

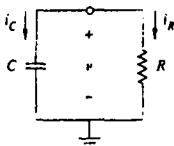


Figura 7.1
Un circuito RC autonomo.

Si consideri il collegamento in serie di un resistore e di un condensatore inizialmente carico, mostrato in Figura 7.1. (Il resistore e il condensatore potrebbero anche rappresentare la resistenza e la capacità equivalente di una interconnessione di resistori e di condensatori.) Si vuole determinare la risposta¹ del circuito che, per ragioni che risulteranno chiare più avanti, si supporrà essere la tensione $v(t)$ sul condensatore. Poiché il condensatore è inizialmente carico, si può supporre che, all'istante $t = 0$, la tensione iniziale sia

$$v(0) = V_0 \quad (7.1)$$

e il valore corrispondente dell'energia immagazzinata

$$w(0) = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad (7.2)$$

Applicando la KCL al nodo superiore del circuito di Figura 7.1,

$$i_C + i_R = 0 \quad (7.3)$$

Per definizione, $i_C = C dv/dt$ e $i_R = v/R$. Allora,

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad (7.4a)$$

o anche

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad (7.4b)$$

Questa è una *equazione differenziale del primo ordine*, perché contiene al più termini nella derivata prima di v . Per risolverla, si riordinano i termini

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} dt \quad (7.5)$$

Integrando ambo i membri si ottiene

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + \ln A$$

dove $\ln A$ è la costante di integrazione. Ne segue,

$$\ln \frac{v}{A} = -\frac{t}{RC} \quad (7.6)$$

ed eliminando il logaritmo si ottiene

$$v(t) = Ae^{-t/RC}$$

Ma, dalla condizione iniziale, $v(0) = A = V_0$. Perciò,

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad (7.7)$$

Quest'ultima equazione mostra che la risposta di tensione del circuito RC decresce esponenzialmente a partire dalla tensione iniziale. Poiché la risposta è dovuta alla energia iniziale presente sul condensatore e alle caratteristiche fisiche del circuito, e non a generatori di tensione o corrente esterni, essa viene detta *risposta naturale* del circuito.

La risposta naturale di un circuito rappresenta il comportamento (in termini di tensioni e correnti) intrinseco del circuito, senza l'intervento di sorgenti esterne di eccitazione.

¹ Si chiama risposta di un circuito il modo in cui il circuito reagisce ad una eccitazione.

La risposta naturale è illustrata nel grafico di Figura 7.2. Si noti che in $t = 0$ essa assume la condizione iniziale corretta, secondo la (7.1). Al crescere di t , la tensione diminuisce avvicinandosi a zero. La rapidità con la quale la tensione decresce viene espressa dalla *costante di tempo*, indicata dalla lettera greca tau minuscola, τ .

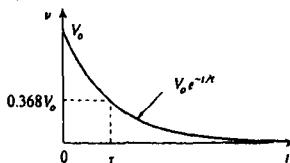


Figura 7.2
Risposta di tensione del circuito RC.

La costante di tempo di un circuito è il tempo impiegato dalla risposta per decrescere di un fattore $1/e$, cioè raggiungere il 36.8-percento del suo valore iniziale.²

Ciò significa che per $t = \tau$ la (7.7) diventa

$$V_0 e^{-\tau/RC} = V_0 e^{-1} = 0.368V_0$$

cioè

$$\tau = RC$$

(7.8)

$$(e^{-1} = 0.368)$$

per $R = ?$
 $t = ?$

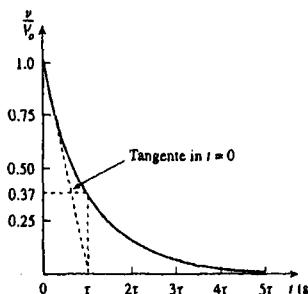


Figura 7.3
Determinazione grafica della costante di tempo τ dalla curva di risposta.

In termini della costante di tempo, la (7.7) può essere scritta come

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad (7.9)$$

Con l'ausilio di un calcolatore tascabile è facile vedere che $v(t)/V_0$ assume i valori mostrati nella Tabella 7.1. Dalla Tabella 7.1 risulta evidente come la tensione $v(t)$ assuma un valore inferiore all'1 per cento di V_0 dopo 5τ (cinque costanti di tempo). È quindi ragionevole supporre che il condensatore si sia scaricato completamente (o caricato completamente) dopo cinque costanti di tempo. In altre parole, è necessario un

² La costante di tempo può avere anche un'altra interpretazione. Calcolando la derivata di $v(t)$ nella (7.7) in $t = 0$, si ottiene

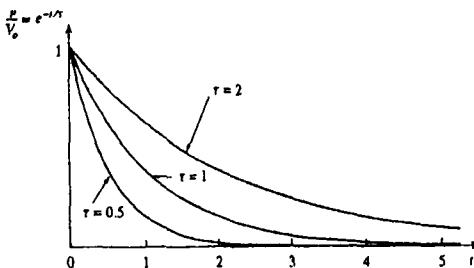
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{V_0} \right) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

Quindi, la costante di tempo è la velocità iniziale di diminuzione, oppure il tempo che impiegherebbe v/V_0 a decrescere da uno a zero, supponendo una velocità di diminuzione costante. Questa interpretazione della costante di tempo come pendenza iniziale viene usata in laboratorio per determinare graficamente τ dalla curva della risposta visualizzata su un oscilloscopio. Per ottenere τ dalla curva di risposta, si disegna la tangente alla curva in $t = 0$, come mostrato in Figura 7.3. Questa intersecca l'asse dei tempi in $t = \tau$.

tempo pari a 5τ perché il circuito raggiunga il suo stato finale, o regime, quando non intervengono altre perturbazioni. Si noti che per ogni intervallo di tempo pari a τ , la tensione si riduce al 36.8 percento del suo valore precedente, $v(t+\tau) = v(t)/e = 0.368v(t)$, indipendentemente dal valore di t .

Tavella 7.1 Valori di $v(t)/V_0 = e^{-t/\tau}$	
t	$v(t)/V_0$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674

Figura 7.4
Grafico di $v/V_0 = e^{-t/\tau}$
per diversi valori
della costante di tempo.



Si osservi dalla (7.8) che quanto più piccola è la costante di tempo, tanto più velocemente la tensione decresce, cioè tanto più veloce è la risposta. Tutto ciò è illustrato in Figura 7.4. Un circuito con una costante di tempo piccola fornisce una risposta veloce perché raggiunge il valore di regime (o stato finale) rapidamente, dissipando velocemente l'energia iniziale, mentre un circuito con costante di tempo grande fornisce una risposta lenta, perché impiega più tempo a raggiungere la condizione di regime. In tutti i casi, che la costante di tempo sia grande o piccola, il circuito raggiunge la condizione di regime dopo cinque costanti di tempo.

Usando l'espressione della tensione $v(t)$ nella (7.9), si può calcolare la corrente $i_R(t)$,

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (7.10)$$

La potenza dissipata nel resistore è

$$p(t) = vi_R = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} \quad (7.11)$$

L'energia assorbita dal resistore fino all'istante t è

$$\begin{aligned} w_R(t) &= \int_0^t p dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} dt \\ &= -\frac{\tau V_0^2}{2R} e^{-2t/\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}), \quad \tau = RC \end{aligned} \quad (7.12)$$

Si noti che quando $t \rightarrow \infty$, $w_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} C V_0^2$, che coincide con $w_C(0)$, l'energia iniziale immagazzinata nel condensatore. L'energia che inizialmente era immagazzinata nel condensatore viene tutta dissipata dal resistore.

Riassumendo:

Quantità da determinare per risolvere un circuito RC autonomo:

1. Tensione iniziale $v(0) = V_0$ sul condensatore.
2. Costante di tempo τ .

Note queste due quantità, si ottiene la risposta di tensione del condensatore $v_C(t) = v(t) = v(0)e^{-t/\tau}$. Una volta ottenuta la tensione del condensatore, le altre quantità (corrente nel condensatore i_C , tensione sul resistore v_R e corrente nel resistore i_R) possono essere facilmente determinate.³ Nell'espressione della costante di tempo $\tau = RC$, R spesso rappresenta la resistenza equivalente di Thevenin ai terminali del condensatore; si estraie, cioè, il condensatore C dal circuito e si calcola $R = R_{Th}$ ai suoi terminali.

Esempio 7.1

Nella Figura 7.5, sia $v_C(0) = 15$ V. Calcolare v_C , v_x , e i_x per $t > 0$.

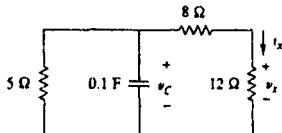


Figura 7.5
Per l'Esempio 7.1.

Soluzione: È necessario innanzitutto rendere il circuito di Figura 7.5 conforme al circuito RC standard di Figura 7.1. Si calcola la resistenza equivalente o resistenza di Thevenin ai terminali del condensatore. L'obiettivo è sempre quello di ottenere innanzitutto la tensione del condensatore v_C , dalla quale è possibile determinare v_x e i_x .

I resistori da 8Ω e 12Ω possono essere combinati in serie per ottenere un resistore da 20Ω . Questo può essere combinato in parallelo con il resistore da 5Ω e la resistenza equivalente è

$$R_{eq} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4 \Omega$$

Il circuito equivalente è quindi quello mostrato nella Figura 7.6, che è analoga alla Figura 7.1. La costante di tempo è

$$\tau = R_{eq}C = 4(0.1) = 0.4 \text{ s}$$

Allora,

$$v = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.4} \text{ V}, \quad v_C = v = 15e^{-t/0.4} \text{ V}$$

Nella Figura 7.5, si può usare il partitore di tensione per ottenere v_x :

$$v_x = \frac{12}{12 + 8}v = 0.6(15e^{-t/0.4}) = 9e^{-t/0.4} \text{ V}$$

Infine,

$$i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75e^{-t/0.4} \text{ A}$$

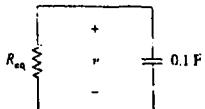


Figura 7.6
Circuito equivalente del circuito
di Figura 7.5.

■ **Esercizio 7.1** Nel circuito di Figura 7.7, sia $v_C(0) = 30$ V. Determinare v_C , v_x e i_x per $t \geq 0$.

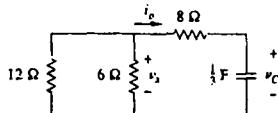


Figura 7.7
Per l'Esercizio 7.1.

Risposta $30e^{-0.25t}$ V, $10e^{-0.25t}$ V, $-2.5e^{-0.25t}$ A.

Esempio 7.2

L'interruttore nel circuito di Figura 7.8 è rimasto chiuso per molto tempo, e viene aperto a $t = 0$. Determinare $v(t)$ per $t \geq 0$. Calcolare l'energia iniziale immagazzinata nel condensatore.

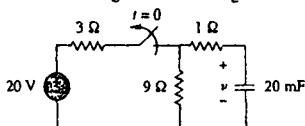


Figura 7.8
Per l'Esempio 7.2.

³ La costante di tempo è la stessa, indipendentemente da quale grandezza sia considerata come risposta.

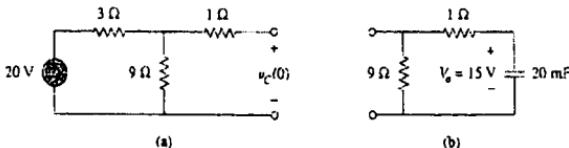
Soluzione: Per $t < 0$ l'interruttore è chiuso, il condensatore si comporta come un circuito aperto nei confronti delle correnti stazionarie, come rappresentato in Figura 7.9(a). Usando il partitore di tensione

$$v_C(t) = \frac{9}{9+3} (20) = 15 \text{ V}, \quad t < 0$$

Poiché la tensione su un condensatore non può variare istantaneamente, la tensione sul condensatore all'istante $t = 0^-$ rimane la stessa in $t = 0$,

$$v_C(0) = V_0 = 15 \text{ V}$$

Figura 7.9
Per l'Esempio 7.2
(a) $t < 0$, (b) $t > 0$.



Per $t > 0$, l'interruttore si apre, e si ha il circuito RC mostrato in Figura 7.9(b). [Si noti che il circuito RC di Figura 7.9(b) è autonomo; il generatore indipendente di Figura 7.8 è necessario per fornire V_0 , cioè l'energia iniziale del condensatore.] I resistori da 1Ω e 9Ω in serie danno

$$R_{eq} = 1 + 9 = 10 \Omega$$

La costante di tempo è

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2 \text{ s}$$

Perciò, la tensione sul condensatore per $t \geq 0$ è

$$v(t) = v_C(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.2} \text{ V}$$

cioè

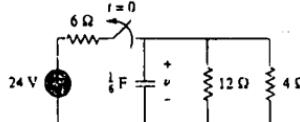
$$v(t) = 15e^{-5t} \text{ V}$$

L'energia iniziale immagazzinata nel condensatore è

$$w_C(0) = \frac{1}{2} Cv_C^2(0) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 15^2 = 2.25 \text{ J}$$

■ **Esercizio 7.2** Se l'interruttore in Figura 7.10 si apre a $t = 0$, calcolare $v(t)$ per $t \geq 0$ e $w_C(0)$.

Figura 7.10
Per l'Esercizio 7.2.



Risposta $8e^{-2t}$ V, 5.33 J.

7.3 CIRCUITO RL AUTONOMO

Si consideri il collegamento in serie di un resistore e un induttore, mostrato in Figura 7.11. Si vuole determinare la risposta del circuito, che si supporrà essere la corrente $i(t)$ nell'induttore. Viene scelta la corrente nell'induttore come risposta per sfruttare la proprietà della corrente di un induttore di non poter subire variazioni istantanee. All'istante $t = 0$, si suppone che l'induttore abbia una corrente iniziale I_0 ,

$$i(0) = I_0 \quad (7.13)$$

con la corrispondente energia immagazzinata

$$w(0) = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (7.14)$$

Applicando la KVL alla maglia in Figura 7.11.

$$v_L + v_R = 0 \quad (7.15)$$

Ma $v_L = L di/dt$ e $v_R = iR$. Perciò,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

o anche

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (7.16)$$

Riordinando i termini e integrando si ottiene

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

$$\ln i \Big|_{I_0}^{i(t)} = - \frac{Rt}{L} \Big|_0^t \implies \ln i(t) - \ln I_0 = - \frac{Rt}{L} = 0$$

e anche

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = - \frac{Rt}{L} \quad (7.17)$$

Eliminando il logaritmo si ha

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad (7.18)$$

Questa equazione mostra che la risposta naturale del circuito RL decresce esponenzialmente a partire dalla corrente iniziale.

La risposta di corrente è mostrata in Figura 7.12. Dalla (7.18) risulta evidente che la costante di tempo per il circuito RL è

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \quad (7.19)$$

con τ espressa in secondi. La (7.18) può quindi essere scritta come

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-t/\tau}} \quad (7.20)$$

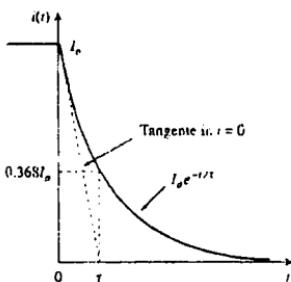


Figura 7.12
Risposta di corrente del circuito RL .

Con la corrente espressa come nella (7.20), si può determinare la tensione sul resistore

$$v_R(t) = iR = I_0 R e^{-t/\tau} \quad (7.21)$$

La potenza dissipata nel resistore è

$$P = v_R i = I_0^2 R e^{-2t/\tau} \quad (7.22)$$

e l'energia assorbita dal resistore

$$w_R(t) = \int_0^t p \, dt = \int_0^t I_0^2 R e^{-2t/\tau} \, dt = -\frac{1}{2} \tau I_0^2 R e^{-2t/\tau} \Big|_0^t, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

o anche

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}) \quad (7.23)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $w_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} L I_0^2$, che coincide con $\omega_L(0)$, l'energia iniziale immagazzinata nell'induttore, secondo la (7.14). Anche in questo caso, l'energia immagazzinata inizialmente nell'induttore viene tutta dissipata nel resistore.

Riassumendo:

Quantità da determinare per la soluzione di un circuito RL autonomo:

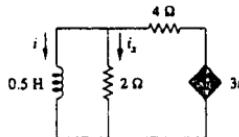
1. Corrente iniziale $i(0) = I_0$ nell'induttore.
2. Costante di tempo τ del circuito.

Note queste quantità, si può ottenere la risposta di corrente dell'induttore $i_L(t) = i(t) = i(0)e^{-t/\tau}$. Una volta calcolata la corrente dell'induttore i_L , le altre variabili (tensione sull'induttore v_L , tensione sul resistore v_R , corrente nel resistore i_R) si calcolano facilmente. Si noti inoltre che, di solito, R nella (7.19) rappresenta in realtà la resistenza equivalente di Thevenin ai terminali dell'induttore.

Esempio 7.3

Supponendo $i(0) = 10 \text{ A}$, calcolare $i(t)$ e $i_R(t)$ nel circuito di Figura 7.13.

Figura 7.13
Per l'Esempio 7.3.



Soluzione: Il problema può essere risolto in due modi: si può calcolare la resistenza equivalente ai terminali dell'induttore e poi utilizzare la (7.20), oppure scrivere direttamente le leggi di Kirchhoff per il circuito. Qualunque sia l'approccio adottato, è sempre consigliabile ottenere prima la corrente dell'induttore.

METODO 1

La resistenza equivalente è la resistenza di Thevenin ai terminali dell'induttore. A causa della presenza del generatore dipendente, per calcolarla si inserisce un generatore di tensione con $v_o = 1 \text{ V}$ ai terminali $a-b$ dell'induttore, come illustrato in Figura 7.14(a). (Si sarebbe anche potuto inserire un generatore di corrente da 1 A agli stessi terminali.) Applicando la KVL alle due maglie si ottiene

$$2(i_1 - i_2) + 1 = 0 \implies i_1 - i_2 = -\frac{1}{2} \quad (7.3.1)$$

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \implies i_2 = \frac{5}{6} i_1 \quad (7.3.2)$$

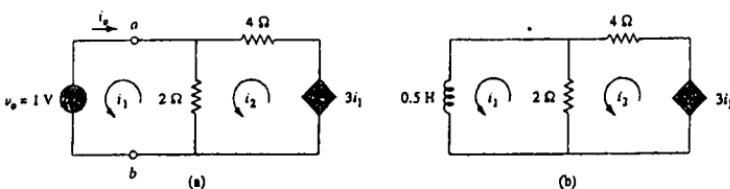


Figura 7.14
Soluzione del circuito di Figura 7.13.

Sostituendo la (7.3.2) nella (7.3.1) si ha

$$i_1 = -3 \text{ A}, \quad i_o = -i_1 = 3 \text{ A}$$

E quindi,

$$R_{eq} = R_{Th} = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{3} \Omega$$

La costante di tempo è

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ s}$$

In definitiva, la corrente nell'induttore vale

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 10e^{-(2/3)t} \text{ A}, \quad t > 0$$

METODO 2

Si può applicare direttamente la KVL al circuito, come in Figura 7.14(b). Per la maglia 1,

$$\frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_2) = 0$$

cioè

$$\frac{di_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 0 \quad (7.3.3)$$

Per la maglia 2,

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{5}{6}i_1 \quad (7.3.4)$$

Sostituendo la (7.3.4) nella (7.3.3) si ottiene

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{2}{3}i_1 = 0$$

Riordinando i termini,

$$\frac{di_1}{i_1} = -\frac{2}{3}dt$$

Essendo $i_1 = i$, si può sostituire i_1 con i e integrare:

$$\ln i \Big|_{i(0)}^{(t)} = -\frac{2}{3}t \Big|_0^t$$

e cioè

$$\ln \frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{2}{3}t$$

Eliminando i logaritmi, si ottiene infine

$$i(t) = i(0)e^{-t/(2/3)} = 10e^{-(2/3)t} \text{ A}, \quad t > 0$$

che è lo stesso risultato ottenuto con il Metodo 1.

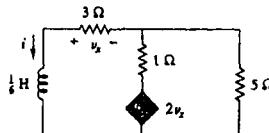
La tensione sull'induttore è

$$v = L \frac{di}{dt} = 0.5(10) \left(-\frac{2}{3} \right) e^{-(2/3)t} = -\frac{10}{3} e^{-(2/3)t} \text{ V}$$

Poiché l'induttore e il resistore da 2Ω sono in parallelo,

$$i_x(t) = \frac{v}{2} = -1.667e^{-(2/3)t} \text{ A}, \quad t > 0$$

Esercizio 7.3 Determinare i e v_x nel circuito di Figura 7.15. Supporre $i(0) = 5 \text{ A}$.



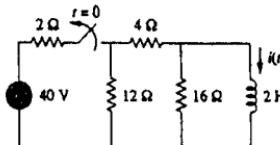
Risposta $5e^{-5t} \text{ A}, -15e^{-5t} \text{ V}$.

Figura 7.15
Per l'Esercizio 7.3.

Esempio 7.4

L'interruttore del circuito di Figura 7.16 è chiuso da molto tempo. A $t = 0$, si apre. Calcolare $i(t)$ per $t > 0$.

Figura 7.16
Per l'Esempio 7.4.



Soluzione: Per $t < 0$, l'interruttore è chiuso, e l'induttore si comporta come un corto circuito per le correnti stazionarie. Il resistore da 16Ω risulta cortocircuitato; il circuito risultante è mostrato in Figura 7.17(a). Per ottenere i_1 in Figura 7.17(a), si compongono i resistori da 4Ω e 12Ω in parallelo e si ottiene

$$\frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3 \Omega$$

Quindi,

$$i_1 = \frac{40}{2 + 3} = 8 \text{ A}$$

Si ottiene $i(t)$ da i_1 in Figura 7.17(a) con la formula del partitore di corrente,

$$i(t) = \frac{12}{12 + 4} i_1 = 6 \text{ A}, \quad t < 0$$

Poiché la corrente di un induttore non può variare istantaneamente,

$$i(0) = i(0^-) = 6 \text{ A}$$

Per $t > 0$, l'interruttore è aperto e il generatore di tensione è scollegato. Si ha allora il circuito RL in Figura 7.17(b). Componendo i resistori, si ha

$$R_{eq} = (12 + 4) \parallel 16 = 8 \Omega$$

La costante di tempo è

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ s}$$

perciò,

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 6e^{-4t} \text{ A}$$

Figura 7.17
Soluzione del circuito di
Figura 7.16: (a) per $t < 0$,
(b) per $t > 0$.

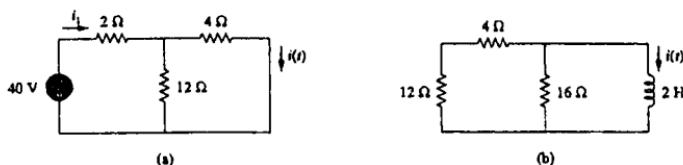
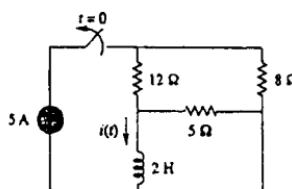
**Esercizio 7.4** Calcolare $i(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.18.

Figura 7.18 Per l'Esercizio 7.4.

Risposta $2e^{-2t} \text{ A}$, $t > 0$.

Esempio 7.5

Nel circuito di Figura 7.19, determinare i_o , v_o e i per ogni t , supponendo che l'interruttore sia rimasto aperto per molto tempo.

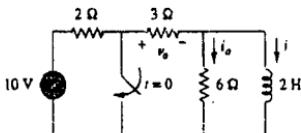


Figura 7.19
Per l'Esempio 7.5.

Soluzione: È opportuno determinare dapprima la corrente dell'induttore i e ricavare successivamente da essa le altre quantità.

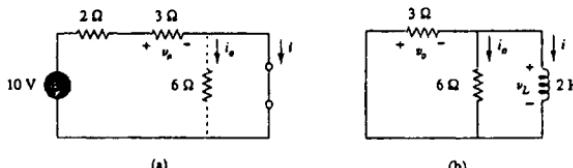


Figura 7.20
Il circuito in Figura 7.19 per:
(a) $t < 0$, (b) $t > 0$.

Per $t < 0$, l'interruttore è aperto. Poiché l'induttore si comporta come un corto circuito per le correnti stazionarie, il resistore da 6Ω risulta cortocircuitato, e si ha quindi il circuito mostrato in Figura 7.20(a). Perciò, $i_o = 0$, e

$$i(t) = \frac{10}{2+3} = 2 \text{ A}, \quad t < 0$$

$$v_o(t) = 3i(t) = 6 \text{ V}, \quad t < 0$$

Quindi, $i(0) = 2$.

Per $t > 0$, l'interruttore è chiuso, e il generatore di tensione risulta cortocircuitato. Si è quindi in presenza di un circuito RL autonomo, mostrato in Figura 7.20(b). Ai terminali dell'induttore,

$$R_{Th} = 3 \parallel 6 = 2 \Omega$$

così che la costante di tempo è

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = 1 \text{ s}$$

Allora,

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 2e^{-t} \text{ A}, \quad t > 0$$

Poiché l'induttore è in parallelo ai resistori da 6Ω e 3Ω ,

$$v_o(t) = -v_L = -L \frac{di}{dt} = -2(-2e^{-t}) = 4e^{-t} \text{ V}, \quad t > 0$$

e

$$i_o(t) = \frac{v_L}{6} = -\frac{2}{3}e^{-t} \text{ A}, \quad t > 0$$

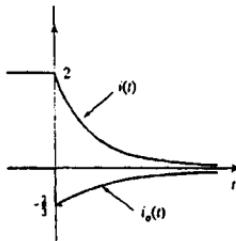
In definitiva,

$$i_o(t) = \begin{cases} 0 \text{ A}, & t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-t} \text{ A}, & t > 0 \end{cases} \quad v_o(t) = \begin{cases} 6 \text{ V}, & t < 0 \\ 4e^{-t} \text{ V}, & t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 2 \text{ A}, & t < 0 \\ 2e^{-t} \text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}$$

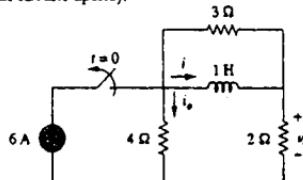
Si noti che la corrente dell'induttore risulta continua rispetto al tempo in $t = 0$, mentre la corrente nel resistore da 6Ω varia da 0 a $-2/3$ in $t = 0$, e la tensione sul resistore da 3Ω varia da 6 a 4 nell'istante $t = 0$. Si noti inoltre che la costante di tempo è la stessa indipendentemente da quale variabile di uscita si prenda in considerazione. In Figura 7.21 sono mostrati i grafici di i e i_o .

Figura 7.21
Grafici di i e i_o .



■ **Esercizio 7.5** Determinare i , i_o e v_o per ogni t nel circuito mostrato in Figura 7.22. Si supponga che l'interruttore sia rimasto chiuso per molto tempo. Si fa notare che aprendo un interruttore in serie con un generatore ideale di corrente si crea una tensione infinita ai capi del generatore. Chiaramente questo non è possibile. Con l'obiettivo di risolvere il problema, si inserisce un resistore di derivazione in parallelo al generatore (che lo rende equivalente ad un generatore di tensione con in serie un resistore). In molti circuiti usati nella pratica, i dispositivi che funzionano come generatori di corrente sono, in massima parte, circuiti elettronici. Questi circuiti fanno sì che il generatore si comporti come un generatore ideale di corrente nel campo normale di funzionamento, ma ne limitano la tensione ad un valore massimo quando il resistore di carico assume valori elevati (come in un circuito aperto).

Figura 7.22
Per l'Esercizio 7.5.



$$\text{Risposta } i = \begin{cases} 4 \text{ A}, & t < 0 \\ 4e^{-2t} \text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}, \quad i_o = \begin{cases} 2 \text{ A}, & t < 0 \\ -(4/3)e^{-2t} \text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v_o = \begin{cases} 8 \text{ V}, & t < 0 \\ (8/3)e^{-2t} \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

7.4 FUNZIONI SINGOLARI ELEMENTARI

Prima di proseguire con la seconda parte del capitolo, è necessario fare una digressione su alcuni importanti concetti di matematica che risulteranno utili nella comprensione della analisi in transitorio. Infatti la conoscenza di quelle che chiameremo *funzioni singolari elementari* si rivelà importante per spiegare il comportamento della risposta di un circuito del primo ordine alla applicazione istantanea di un generatore indipendente costante, di tensione o di corrente.

Le funzioni singolari sono molto utili nella analisi dei circuiti. Esse rappresentano infatti delle buone approssimazioni di segnali che spesso si incontrano nei circuiti che subiscono fenomeni di commutazione. Si rivelano infatti utili per descrivere in modo semplice e conciso alcuni fenomeni circuituali, in particolar modo le risposte al gradino di circuiti RC o RL , che verranno presentate nei paragrafi successivi. Per definizione,

Le funzioni singolari elementari sono funzioni discontinue o con derivate discontinue.

Le funzioni singolari elementari più usate nella analisi dei circuiti sono il *gradino unitario*, l'*impulso unitario* e la *rampa unitaria*.

L'impulso gradino unitario, noto anche con il nome di *funzione unitaria di Heaviside*, è:

In termini matematici,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

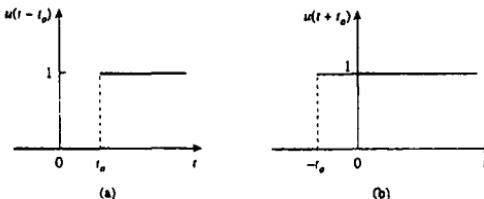
La funzione gradino unitario non è definita in $t = 0$, dove cambia istantaneamente valore da 0 a 1. È una funzione adimensionale, come le altre funzioni matematiche (per esempio, il seno e il coseno). La Figura 7.23 mostra il grafico della funzione gradino unitario. Se la variazione istantanea avviene in $t = t_0$ (con $t_0 > 0$) invece che in $t = 0$, la funzione gradino unitario diviene

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (7.25)$$

cioè ci si trova in presenza di $u(t)$ ritardata di t_0 secondi, come mostrato nella Figura 7.24(a). Per ottenere la (7.25) dalla (7.24), è sufficiente sostituire tutte le occorrenze di t con $t - t_0$. Se la variazione istantanea avviene in $t = -t_0$, la funzione gradino unitario diventa

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t > -t_0 \end{cases} \quad (7.26)$$

che si legge dicendo che $u(t)$ è anticipata di t_0 secondi, come mostrato in Figura 7.24(b).



La funzione gradino viene utilizzata per rappresentare variazioni molto rapide della tensione o della corrente, come sono quelle che si hanno nei circuiti dei sistemi di controllo o dei computer. Per esempio, la tensione

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ V_0, & t > t_0 \end{cases} \quad (7.27)$$

può essere espressa in termini di gradino unitario come

$$v(t) = V_0 u(t - t_0) \quad (7.28)$$

Se si pone $t_0 = 0$, $v(t)$ risulta semplicemente il gradino di tensione $V_0 u(t)$. Un generatore di tensione $V_0 u(t)$ è mostrato in Figura 7.25(a); il suo circuito equivalente si trova in Figura 7.25(b). Risulta evidente dalla Figura 7.25(b) che i terminali $a-b$ sono cortocircuitati per $t < 0$ e che per $t > 0$ agli stessi terminali compare una tensione $v = V_0$. In maniera simile, la Figura 7.26(a) mostra un generatore di corrente $I_0 u(t)$, e la Figura 7.26(b) il suo circuito equivalente. Si noti che per $t < 0$ si ha un circuito aperto ($i = 0$), mentre per $t > 0$ scorre una corrente $i = I_0$.

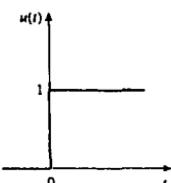
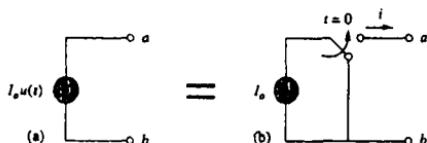
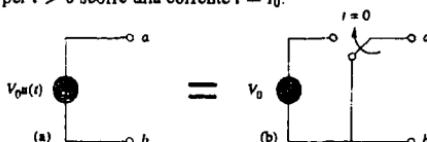


Figura 7.23
La funzione gradino unitario

Figura 7.24
(a) Funzione gradino unitario ritardata di t_0 , (b) funzione gradino unitario anticipata di t_0

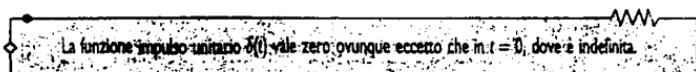
Figura 7.25
(a) Generatore di tensione $V_0 u(t)$, (b) circuito equivalente.

Figura 7.26
(a) Generatore di corrente $I_0 u(t)$, (b) circuito equivalente

La derivata della funzione gradino unitario è la funzione **impulso unitario** $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{Indefinita}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

La funzione impulso unitario – nota anche come funzione *delta* – è mostrata in Figura 7.27.



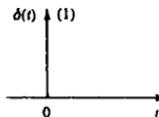
Correnti e tensioni impulsive si incontrano spesso nei circuiti elettrici in conseguenza di operazioni di commutazione o per la presenza di sorgenti impulsive. Nonostante la funzione impulso unitario non sia fisicamente realizzabile (così come non sono fisicamente realizzabili i generatori ideali, i resistori ideali ecc.), essa si rivela un utile strumento matematico.

L'impulso unitario può essere immaginato con un impulso di durata molto breve e di area unitaria. Si esprime matematicamente questa proprietà come

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (7.30)$$

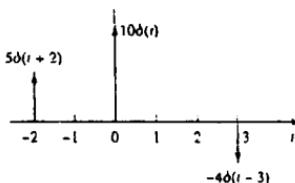
dove $t = 0^-$ denota un istante appena prima di $t = 0$ e $t = 0^+$ un istante appena dopo $t = 0$. Proprio per questa proprietà è consuetudine scrivere un 1 (che indica l'area unitaria) a fianco della freccia che viene usata per simboleggiare la funzione impulso, come in Figura 7.27. L'area unitaria viene anche detta *intensità* della funzione impulso. Quando una funzione impulso ha una intensità diversa dall'unità, l'area dell'impulso egualia l'intensità. Per esempio, una funzione impulso $10\delta(t)$ ha un'area pari a 10.

Figura 7.27
Funzione impulso unitario.



La Figura 7.28 mostra le funzioni impulso $5\delta(t+2)$, $10\delta(t)$ e $-4\delta(t-3)$.

Figura 7.28
Tre funzioni impulso



Per vedere in che modo la funzione impulso si combina con altre funzioni, si consideri l'integrale

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0) dt \quad (7.31)$$

dove $a < t_0 < b$. Poiché $\delta(t-t_0) = 0$ eccetto che in $t = t_0$, l'integrando risulta nullo ovunque eccetto che in t_0 . Perciò,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\delta(t-t_0) dt &= \int_a^b f(t_0)\delta(t-t_0) dt \\ &= f(t_0) \int_a^b \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \end{aligned}$$

cioè

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (7.32)$$

Questo risultato mostra come integrando il prodotto di una funzione qualsiasi per la funzione impulso si ottiene il valore della funzione nel punto in cui ha luogo l'impulso. Si tratta di una proprietà estremamente utile della funzione impulso, nota come *proprietà di selezione dell'impulso*. Un caso particolare della (7.31) si ha per $t_0 = 0$. In questo caso, la (7.32) diventa

$$\int_{-\infty}^{0^+} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (7.33)$$

Integrando la funzione gradino unitario $u(t)$ si ottiene la funzione *rampa unitaria* $r(t)$; si scrive

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = tu(t) \quad (7.34)$$

e anche

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7.35)$$

La funzione rampa unitaria vale zero per valori negativi di t e ha pendenza unitaria per valori positivi di t .

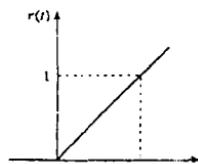


Figura 7.29
Funzione rampa unitaria.

La Figura 7.29 mostra la funzione rampa unitaria. In generale, si chiama rampa una funzione con pendenza costante.

Anche la funzione rampa unitaria può essere ritardata o anticipata, come si vede in Figura 7.30. Per la rampa ritardata

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ t - t_0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (7.36)$$

e per quella anticipata,

$$r(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq -t_0 \\ t + t_0, & t \geq -t_0 \end{cases} \quad (7.37)$$

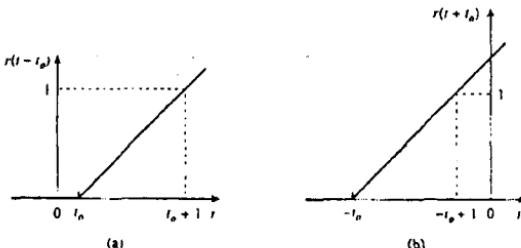


Figura 7.30
Rampa unitaria: (a) ritardata di t_0 , (b) anticipata di t_0 .

È bene ricordare che le tre funzioni singolari elementari (impulso, gradino e rampa) sono legate fra loro dall'operazione di derivazione

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad (7.38)$$

e dall'operazione di integrazione

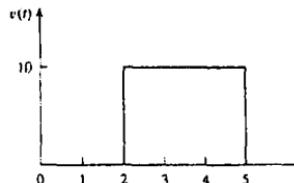
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (7.39)$$

Nonostante esistano molte altre funzioni singolari notevoli, a questo punto della trattazione risultano sufficienti le tre appena presentate (funzione impulso, funzione gradino unitario, funzione rampa unitaria).

Esempio 7.6

Esprimere l'impulso di tensione in Figura 7.31 in termini di gradini unitari. Calcolare e tracciare il grafico della derivata.

Figura 7.31
Per l'Esempio 7.6



Soluzione: La funzione mostrata in Figura 7.31 è detta *impulso rettangolare*. Può essere considerata come una funzione gradino che si attiva in un istante di tempo e si disattiva in un istante successivo. L'impulso rettangolare mostrato in Figura 7.31 si attiva in $t = 2$ s e si disattiva in $t = 5$ s. Esso consiste nella somma di due funzioni gradino, come mostrato in Figura 7.32(a). Da questa figura risulta evidente che

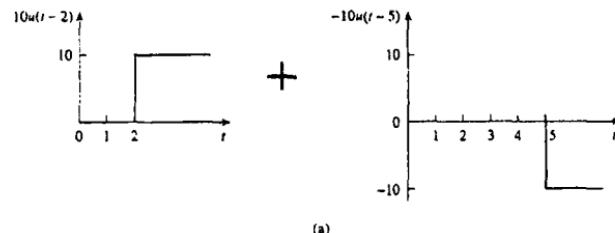
$$v(t) = 10u(t - 2) - 10u(t - 5) = 10[u(t - 2) - u(t - 5)]$$

Facendo la derivata di questa espressione si ottiene

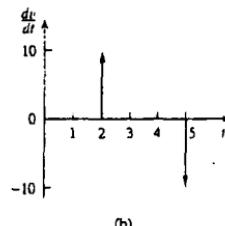
$$\frac{dv}{dt} = 10[\delta(t - 2) - \delta(t - 5)]$$

che è mostrata in Figura 7.32(b). È possibile ottenere la Figura 7.32(b) direttamente dalla Figura 7.31, osservando semplicemente che c'è un aumento istantaneo di tensione di 10 V in $t = 2$ s che porta $10\delta(t - 2)$. In $t = 5$ s, c'è una diminuzione istantanea di tensione di 10 V, che porta $-10\delta(t - 5)$.

Figura 7.32
(a) Decomposizione
dell'impulso in Figura 7.31,
(b) derivata dell'impulso in
Figura 7.31.



(a)



(b)

■ **Esercizio 7.6** Esprimere l'impulso di corrente in Figura 7.33 in termini di gradini unitari. Determinare e tracciare il grafico del suo integrale.

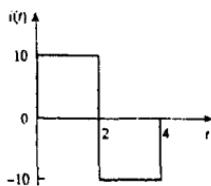
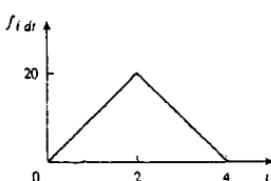


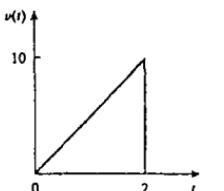
Figura 7.33 Per l'Esercizio 7.6.

Figura 7.34 Integrale di $i(t)$ in Figura 7.33.

Risposta $10[u(t) - 2u(t-2) - u(t-4)]$; $10[r(t) - 2r(t-2) + r(t-4)]$.
Vedere la Figura 7.34. ■

Esempio 7.7

Esprimere la funzione *dente di sega* mostrata in Figura 7.35 in termini di funzioni singolari elementari.

Figura 7.35
Per l'Esempio 7.7.

Soluzione: Il problema può essere risolto con tre metodi. Il primo metodo consiste in una semplice osservazione della funzione data, mentre gli altri metodi prevedono qualche operazione di manipolazione grafica della funzione.

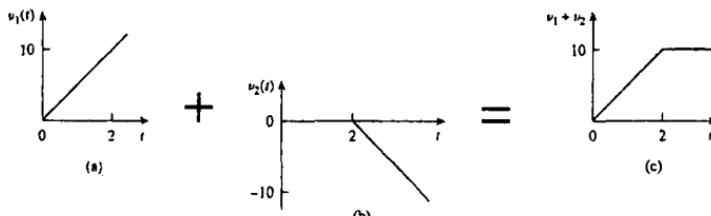
METODO 1

Osservando il grafico di $v(t)$ in Figura 7.35, non è difficile notare che la funzione data $v(t)$ si può vedere come combinazione di alcune funzioni elementari. Si pone quindi

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots \quad (7.7.1)$$

La funzione $v_1(t)$ è una rampa di pendenza 5, mostrata in Figura 7.36(a);

$$v_1(t) = 5r(t) \quad (7.7.2)$$

Figura 7.36
Decomposizione parziale di $v(t)$ in Figura 7.35.

Poiché $v_1(t)$ cresce indefinitamente, è necessaria un'altra funzione in $t = 2$ s per ottenere $v(t)$. Si indichi con v_2 questa funzione; essa è una funzione rampa di pendenza -5, come mostrato in Figura 7.36(b);

$$v_2(t) = -5r(t-2) \quad (7.7.3)$$

Sommando v_1 e v_2 si ottiene il segnale di Figura 7.36(c). Questo non coincide con $v(t)$ in Figura 7.35, ma la differenza è semplicemente un valore costante pari a 10 unità per $t > 2$ s. Aggiungendo un terzo segnale v_3 ,

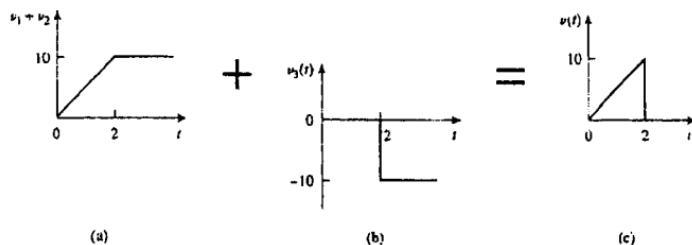
$$v_3 = -10u(t-2) \quad (7.7.4)$$

si ottiene $v(t)$, come mostrato in Figura 7.37. Sostituendo le Equazioni da (7.7.2) a (7.7.4) nella (7.7.1) si ottiene

$$v(t) = 5r(t) - 5r(t-2) - 10u(t-2)$$

Figura 7.37

Decomposizione completa di $v(t)$ in Figura 7.35.

**METODO 2**

Un'osservazione attenta della Figura 7.35 rivela che $v(t)$ è il prodotto di due funzioni: una rampa e un impulso rettangolare. Allora,

$$\begin{aligned}v(t) &= 5t[u(t) - u(t-2)] \\&= 5tu(t) - 5tu(t-2) \\&= 5r(t) - 5(t-2+2)u(t-2) \\&= 5r(t) - 5(t-2)u(t-2) - 10u(t-2) \\&= 5r(t) - 5r(t-2) - 10u(t-2)\end{aligned}$$

che è lo stesso risultato ottenuto con il Metodo 1.

METODO 3

Questo metodo è simile al Metodo 2. Si osservi dalla Figura 7.35 che $v(t)$ è il prodotto di una funzione rampa e di un gradino unitario, come mostrato in Figura 7.38. Perciò,

$$v(t) = 5r(t)u(-t+2)$$

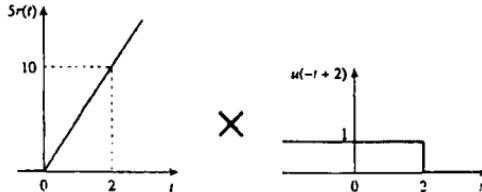
Se si sostituisce $u(-t)$ con $1 - u(t)$, è allora possibile sostituire $u(-t+2)$ con $1 - u(t-2)$. Quindi,

$$v(t) = 5r(t)[1 - u(t-2)]$$

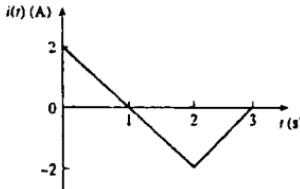
che può essere semplificato come nel Metodo 2, ottenendo lo stesso risultato.

Figura 7.38

Decomposizione di $v(t)$ in Figura 7.35

**Esercizio 7.7** Esprimere $i(t)$ nella Figura 7.39 in termini di funzioni singolari elementari.**Figura 7.39**

Per l'Esercizio 7.7.



Risposta $2u(t) - 2r(t) + 4r(t-2) - 2r(t-3)$

Esempio 7.8

Dato il segnale

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t < 0 \\ -2, & 0 < t < 1 \\ 2t - 4, & t > 1 \end{cases}$$

esprimere $g(t)$ in termini di funzioni gradino e rampa.

Soluzione: Il segnale $g(t)$ può essere considerato come la somma di tre funzioni specificate nei tre intervalli $t < 0$, $0 < t < 1$ e $t > 1$.

Per $t < 0$, $g(t)$ può essere considerata come il prodotto di 3 per $u(-t)$, con $u(-t) = 1$ per $t < 0$ e 0 per $t > 0$. Nell'intervallo di tempo $0 < t < 1$, la funzione può essere considerata come il prodotto di -2 per una funzione impulso rettangolare $[u(t) - u(t-1)]$. Per $t > 1$, la funzione può essere considerata come il prodotto di 2t-4 moltiplicato per la funzione gradino unitario $u(t-1)$. Perciò,

$$\begin{aligned} g(t) &= 3u(-t) - 2[u(t) - u(t-1)] + (2t-4)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + (2s-4+2)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2(t-1)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2r(t-1) \end{aligned}$$

È possibile evitare di utilizzare $u(-t)$ sostituendolo con $1 - u(t)$.

$$g(t) = 3[1 - u(t)] - 2u(t) + 2r(t-1) = 3 - 5u(t) + 2r(t-1)$$

In via alternativa, si potrebbe tracciare il grafico di $g(t)$ e applicare il Metodo 1 dell'Esempio 7.7.

Esercizio 7.8 Se

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4, & 0 < t < 2 \\ 6-t, & 2 < t < 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases}$$

esprimere $h(t)$ in termini di funzioni singolari elementari.

Risposta $4u(t) - r(t-2) + r(t-6)$.



Esempio 7.9

Calcolare i seguenti integrali contenenti la funzione impulso

$$\begin{aligned} &\int_0^{10} (t^2 - 4t - 2)\delta(t-2) dt \\ &\int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t-1)e^{-t} \cos t + \delta(t+1)e^{-t} \sin t) dt \end{aligned}$$

Soluzione: Per il primo integrale, si applica la proprietà di selezione della (7.32):

$$\int_0^{10} (t^2 - 4t - 2)\delta(t-2) dt = (t^2 - 4t - 2)|_{t=2} = 4 + 8 - 2 = 10$$

In maniera simile, per il secondo integrale,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t-1)e^{-t} \cos t + \delta(t+1)e^{-t} \sin t) dt \\ &= e^{-t} \cos t|_{t=1} + e^{-t} \sin t|_{t=-1} \\ &= e^{-1} \cos 1 + e^1 \sin (-1) = 0.1988 - 2.2873 = -2.0885 \end{aligned}$$

Esercizio 7.9 Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 5t^2 + 10)\delta(t+3) dt \quad \int_{\pi}^{10} \delta(t-\pi) \cos 3t dt$$

Risposta 28, -1.



7.5 RISPOSTA AL GRADINO DI UN CIRCUITO RC

Quando un generatore costante viene collegato improvvisamente a un circuito RC , il generatore (di tensione o di corrente) può essere modellato con una funzione gradino, e la risposta viene detta *risposta al gradino*.



La risposta al gradino di un circuito è il comportamento del circuito quando l'eccitazione, che può essere un generatore di tensione o di corrente, è una funzione gradino.

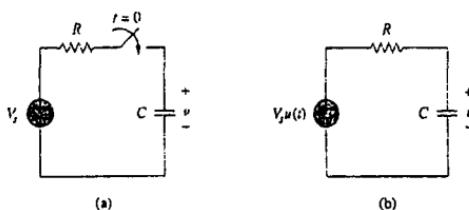
La risposta al gradino è la risposta del circuito dovuta a una improvvisa applicazione di un generatore costante di tensione o di corrente.

Si consideri il circuito RC in Figura 7.40(a) che può essere sostituito con il circuito in Figura 7.40(b), dove V_s è una tensione costante nel tempo. Anche qui si sceglie la tensione del condensatore come risposta del circuito da determinare. Si supponga che la tensione iniziale sul condensatore sia pari a V_0 , benché ciò non sia necessario per avere una risposta al gradino. Poiché la tensione del condensatore non può variare istantaneamente,

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0 \quad (7.40)$$

Figura 7.40

Circuito RC con un gradino di tensione in ingresso



dove $v(0^-)$ è la tensione sul condensatore appena prima della commutazione, e $v(0^+)$ quella appena dopo la commutazione. Applicando la KCL si ha

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s u(t)}{R} = 0$$

cioè

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC} u(t) \quad (7.41)$$

dove v è la tensione sul condensatore. Per $t > 0$, la (7.41) diventa

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC} \quad (7.42)$$

Riordinando i termini

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - V_s}{RC}$$

o anche

$$\frac{dv}{v - V_s} = -\frac{dt}{RC} \quad (7.43)$$

Integrando entrambi i membri e introducendo la condizione iniziale,

$$\ln(v - V_s) \Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln(v(t) - V_s) - \ln(V_0 - V_s) = -\frac{t}{RC} + 0$$

o anche

$$\ln \frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = -\frac{t}{RC} \quad . \quad (7.44)$$

Eliminando i logaritmi

$$\frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC$$

$$v - V_s = (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}$$

cioè

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, \quad t > 0 \quad (7.45)$$

Perciò,

$$\boxed{v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, & t > 0 \end{cases}} \quad (7.46)$$

Quest'ultima è chiamata *risposta completa* del circuito *RC* alla applicazione improvvisa di un generatore di tensione costante, supponendo che il condensatore sia già carico. La ragione dell'attributo "completa" risulterà chiara un po' più avanti. Se si suppone $V_s > V_0$, il grafico di $v(t)$ è mostrato in Figura 7.41.

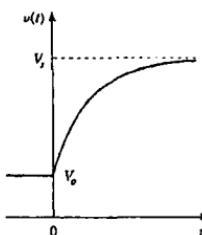


Figura 7.41
Risposta al gradino di un circuito *RC* con condensatore inizialmente carico.

Se si suppone che il condensatore sia inizialmente scarico, si pone $V_0 = 0$ nella (7.46), così che

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_s(1 - e^{-t/\tau}), & t > 0 \end{cases} \quad (7.47)$$

che, in maniera alternativa, può essere scritta come

$$v(t) = V_s(1 - e^{-t/\tau})u(t) \quad (7.48)$$

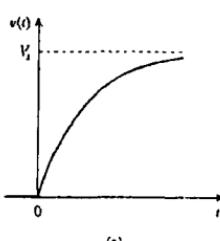
Questa è la risposta completa al gradino del circuito *RC* quando il condensatore è inizialmente scarico. La corrente nel condensatore si ottiene dalla (7.47) ricordando che $i(t) = C dv/dt$. Si ottiene

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{C}{\tau} V_s e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC, \quad t > 0$$

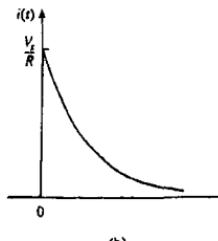
oppure

$$i(t) = \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau} u(t) \quad (7.49)$$

La Figura 7.42 mostra i grafici della tensione del condensatore $v(t)$ e della sua corrente $i(t)$.



(a)



(b)

Figura 7.42
Risposta al gradino di un circuito *RC* con condensatore inizialmente scarico:
(a) risposta di tensione,
(b) risposta di corrente.

Invece di seguire tutti i passaggi precedenti, esiste un approccio sistematico – o piuttosto, un metodo abbreviato – per determinare la risposta al gradino di un circuito RC o RL . Se si riprende in considerazione la (7.45), che è più generale della (7.48), risulta evidente che $v(t)$ è formata da due componenti.

Esistono due modi di scomporre la risposta in due componenti. Con il primo approccio, la risposta viene decomposta in "risposta naturale più risposta forzata", mentre con il secondo approccio essa viene scomposta in "risposta transitoria più risposta a regime". Iniziando dalla risposta naturale più risposta forzata, è possibile scrivere la risposta totale, o completa, come

$$\boxed{\text{Risposta completa} = \text{Risposta naturale} + \text{Risposta forzata}} \\ \text{energia immagazzinata} \quad \text{generatore indipendente}$$

in altre parole

$$v = v_n + v_f \quad (7.50)$$

in cui

$$v_n = V_o e^{-t/\tau}$$

e

$$v_f = V_s (1 - e^{-t/\tau})$$

Si ha già familiarità con la risposta naturale v_n del circuito, illustrata nel Paragrafo 7.2. v_f è detta invece risposta *forzata* perché viene prodotta dal circuito quando ad esso è applicata una "forza" esterna (un generatore di tensione, in questo caso). Essa rappresenta ciò che il circuito è "forzato" a fare dalla eccitazione in ingresso. La risposta naturale decresce nel tempo fino ad annullarsi, così come la componente transitoria della risposta forzata, lasciando quindi soltanto la componente di regime della risposta forzata.

Un altro modo di considerare la risposta completa è quello di scomporla in due componenti – una temporanea e l'altra permanente, cioè

$$\boxed{\text{Risposta completa} = \text{Risposta transitoria} + \text{Risposta a regime}} \\ \text{parte temporanea} \quad \text{parte permanente}$$

in altre parole

$$v = v_t + v_{ss} \quad (7.51)$$

dove

$$v_t = (V_o - V_s) e^{-t/\tau} \quad (7.52a)$$

e

$$v_{ss} = V_s \quad (7.52b)$$

La *risposta transitoria*, o più semplicemente *transitorio*, v_t è temporanea; si tratta della porzione della risposta completa che decresce e tende a zero quando il tempo tende all'infinito. Quindi,

 ◇ La risposta transitoria è la risposta temporanea del circuito, che tende ad annullarsi col passare del tempo.

La *risposta a regime* v_{ss} è la porzione della risposta completa che rimane dopo che la risposta transitoria si è esaurita. Quindi,

 ◇ La risposta a regime è il comportamento del circuito molto tempo dopo che è stata applicata l'eccitazione esterna.

La decomposizione del primo tipo viene effettuata in termini della causa che dà origine alle risposte, mentre la decomposizione del secondo tipo si riferisce alla permanenza delle risposte. Sotto certe condizioni, la risposta naturale e quella transitoria possono coincidere. Lo stesso si può dire della risposta forzata e della risposta a regime.

In qualunque modo la si consideri, la risposta completa della (7.45) può essere scritta nella forma

$$\nu(t) = \nu(\infty) + [\nu(0) - \nu(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (7.53)$$

dove $\nu(0)$ è la tensione iniziale a $t = 0^+$ e $\nu(\infty)$ il valore finale o di regime. Per determinare la risposta al gradino di un circuito RC sono quindi necessarie tre informazioni:⁴

1. La tensione iniziale sul condensatore $\nu(0)$.
2. La tensione finale sul condensatore $\nu(\infty)$.
3. La costante di tempo τ .

La quantità 1 si determina dal circuito per $t < 0$, mentre le quantità 2 e 3 si determinano dal circuito per $t > 0$. Una volta ottenuti questi elementi, si esprime la risposta usando la (7.53). La stessa tecnica può essere applicata ai circuiti RL , come si vedrà meglio nel prossimo paragrafo.

Si noti che se l'interruttore cambia posizione all'istante $t = t_0$, invece che in $t = 0$, si ha un ritardo nella risposta, così che la (7.53) diventa

$$\nu(t) = \nu(\infty) + [\nu(t_0) - \nu(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (7.54)$$

dove $\nu(t_0)$ è il valore iniziale a $t = t_0^+$. Si ricordi che la (7.53) o la (7.54) sono valide solo per la risposta al gradino, cioè quando l'eccitazione in ingresso è costante nel tempo.

Esempio 7.10

L'interruttore in Figura 7.43 si trova in posizione A da molto tempo. A $t = 0$, l'interruttore si sposta in B. Determinare $\nu(t)$ per $t > 0$ e calcolare il suo valore per $t = 1$ s e 4 s.

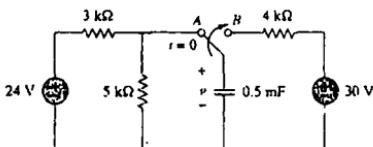


Figura 7.43
Per l'Esempio 7.10.

Soluzione: Per $t < 0$, l'interruttore è in posizione A. Il condensatore si comporta come un circuito aperto per le correnti costanti, ma ν è la stessa tensione che c'è sul resistore da $5\text{ k}\Omega$. Quindi la tensione sul condensatore poco prima di $t = 0$ si ottiene con il partitore di tensione

$$\nu(0^-) = \frac{5}{5+3}(24) = 15\text{ V}$$

Ricordando che la tensione del condensatore non può variare istantaneamente,

$$\nu(0) = \nu(0^-) = \nu(0^+) = 15\text{ V}$$

Per $t > 0$, l'interruttore è in posizione B. La resistenza di Thevenin vista dal condensatore è $R_{Th} = 4\text{ k}\Omega$, e la costante di tempo è

$$\tau = R_{Th}C = 4 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3} = 2\text{ s}$$

⁴ Una volta noti $x(0)$, $x(\infty)$ e τ , quasi tutti i problemi per i circuiti di questo capitolo possono essere risolti applicando la formula

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Poiché il condensatore, a regime, si comporta come un circuito aperto, $v(\infty) = 30 \text{ V}$. Perciò,

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 30 + (15 - 30)e^{-t/2} = (30 - 15e^{-0.5t}) \text{ V} \end{aligned}$$

Per $t = 1$,

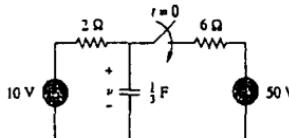
$$v(1) = 30 - 15e^{-0.5} = 20.902 \text{ V}$$

Per $t = 4$,

$$v(4) = 30 - 15e^{-2} = 27.97 \text{ V}$$

Esercizio 7.10 Determinare $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.44. L'interruttore è rimasto aperto per molto tempo e si chiude in $t = 0$. Calcolare $v(t)$ per $t = 0.5$.

Figura 7.44
Per l'Esercizio 7.10.

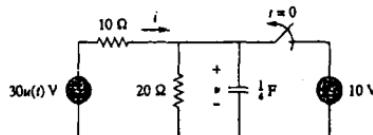


Risposta $-5 + 15e^{-2t} \text{ V}, 0.5182 \text{ V}$.

Esempio 7.11

In Figura 7.45, l'interruttore è chiuso da molto tempo e si apre a $t = 0$. Determinare i e v per ogni t .

Figura 7.45
Per l'Esempio 7.11.



Soluzione: La corrente i nel resistore può essere discontinua in $t = 0$, mentre non può esserlo la tensione del condensatore v . Per tale motivo, è sempre meglio determinare v e poi calcolare i dalla espressione di v .

Per definizione di gradino unitario,

$$30u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 30, & t > 0 \end{cases}$$

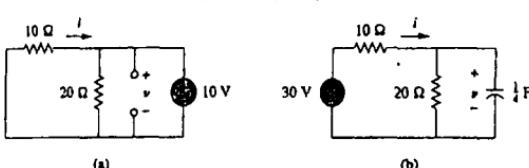
Per $t < 0$, l'interruttore è chiuso e $30u(t) = 0$, così che il generatore di tensione $30u(t)$ viene sostituito da un corto circuito e non contribuisce a determinare il valore di v . Poiché l'interruttore è rimasto chiuso per molto tempo, la tensione del condensatore ha raggiunto il valore di regime e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Il circuito diventa quindi quello mostrato in Figura 7.46(a) per $t < 0$. Da questo circuito si ottiene

$$v = 10 \text{ V}, \quad i = -\frac{v}{10} = -1 \text{ A}$$

Poiché la tensione del condensatore non può variare istantaneamente,

$$v(0) = v(0^-) = 10 \text{ V}$$

Figura 7.46
Soluzione dell'Esempio 7.11: (a)
per $t < 0$, (b) per $t > 0$.



Per $t > 0$, l'interruttore si apre e il generatore di tensione da 10 V non è più collegato al circuito. Il generatore di tensione $30u(t)$ ora funziona, e il circuito diventa quindi quello mostrato in Figura

7.46(b). Dopo molto tempo, il circuito raggiunge la condizione di regime e il condensatore si comporta di nuovo come un circuito aperto. Si ottiene $v(\infty)$ usando la formula del partitore di tensione,

$$v(\infty) = \frac{20}{20+10}(30) = 20 \text{ V}$$

La resistenza di Thevenin ai terminali del condensatore è

$$R_{Th} = 10 \parallel 20 = \frac{10 \times 20}{30} = \frac{20}{3} \Omega$$

e la costante di tempo è

$$\tau = R_{Th}C = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \text{ s}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} v(t) &= v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 20 + (10 - 20)e^{-(3/5)t} = (20 - 10e^{-0.6t}) \text{ V} \end{aligned}$$

Per ottenere i , si nota dalla Figura 7.46(b) che i è la somma delle correnti nel resistore da 20Ω e nel condensatore;

$$\begin{aligned} i &= \frac{v}{20} + C \frac{dv}{dt} \\ &= 1 - 0.5e^{-0.6t} + 0.25(-0.6)(-10)e^{-0.6t} = (1 + e^{-0.6t}) \text{ A} \end{aligned}$$

Si noti dalla Figura 7.46(b) che risulta soddisfatta la relazione $v + 10i = 30$, come ci si attendeva. Concludendo,

$$v = \begin{cases} 10 \text{ V}, & t < 0 \\ (20 - 10e^{-0.6t}) \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} -1 \text{ A}, & t < 0 \\ (1 + e^{-0.6t}) \text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Si noti che la tensione del condensatore è una funzione continua del tempo mentre non lo è la corrente nel resistore.

Esercizio 7.11 L'interruttore in Figura 7.47 si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$ e $v(t)$ per ogni t . Si noti che $u(-t) = 1$ per $t < 0$ e 0 per $t > 0$. Inoltre, $u(-t) = 1 - u(t)$.

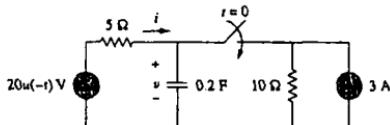


Figura 7.47
Per l'Esercizio 7.11.

Risposta $i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -2(1 + e^{-1.5t}) \text{ A}, & t > 0 \end{cases}$, $v = \begin{cases} 20 \text{ V}, & t < 0 \\ 10(1 + e^{-1.5t}) \text{ V}, & t > 0 \end{cases}$

7.6 RISPOSTA AL GRADINO DI UN CIRCUITO RL

Si consideri il circuito RL in Figura 7.48(a), che può essere sostituito dal circuito in Figura 7.48(b). Anche qui, si vuole determinare la corrente i nell'induttore, che viene detta **risposta del circuito**. Invece di applicare le leggi di Kirchhoff, si utilizzerà il semplice procedimento delle Equazioni da (7.50) a (7.53). Si esprime la risposta come somma della **risposta naturale** e della **risposta forzata**,

$$i = i_n + i_f \quad (7.55)$$

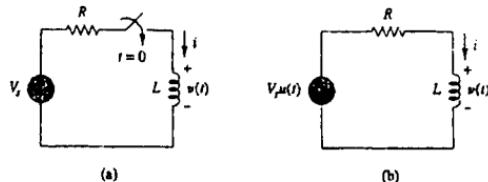
È noto che la **risposta naturale** è sempre un esponenziale decrescente, cioè

$$i_n = Ae^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (7.56)$$

dove A è una costante da determinare.

Figura 7.48

Un circuito RL con una tensione a gradino in ingresso.



La risposta forzata è il valore della corrente dopo molto tempo che l'interruttore in Figura 7.48(a) è stato chiuso. Come è noto, la risposta naturale diventa praticamente nulla dopo cinque costanti di tempo. In tale situazione, l'induttore diventa un corto circuito, e la sua tensione è zero. Tutta la tensione V_s del generatore si ritrova su R . Perciò, la risposta forzata è

$$i_f = \frac{V_s}{R} \quad (7.57)$$

Sostituendo le (7.56) e (7.57) nella (7.55) si ha

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R} \quad (7.58)$$

Si determina ora la costante A dal valore iniziale di i . Sia I_0 la corrente iniziale nell'induttore, che potrebbe essere dovuta a una sorgente diversa da V_s . Poiché la corrente nell'induttore non può variare istantaneamente,

$$i(0^+) = i(0^-) = I_0 \quad (7.59)$$

Per $t = 0$ la (7.58) diventa allora

$$I_0 = A + \frac{V_s}{R}$$

Da questa, si ottiene A come

$$A = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

Sostituendo il valore di A nella (7.58), si ha

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad (7.60)$$

Questa è la risposta completa del circuito RL , ed è illustrata in Figura 7.49. La risposta della (7.60) può essere scritta come

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] e^{-t/\tau} \quad (7.61)$$

dove $i(0)$ e $i(\infty)$ sono i valori iniziale e finale di i . In definitiva, la ricerca della risposta al gradino di un circuito RL richiede la determinazione di tre quantità:

1. La corrente iniziale nell'induttore $i(0)$ in $t = 0^+$.
2. La corrente finale nell'induttore $i(\infty)$.
3. La costante di tempo τ .

La quantità 1 viene ottenuta dal circuito dato per $t < 0$ e le quantità 2 e 3 dal circuito per $t > 0$. Una volta in possesso di questi elementi, la risposta si ottiene applicando la (7.61). Si ricordi che questo metodo è valido soltanto per la risposta al gradino.

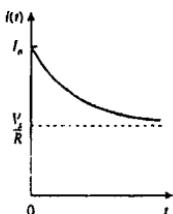


Figura 7.49
Risposta completa del circuito RL con corrente iniziale I_0 nell'induttore.

Anche in questo caso, se la commutazione avviene all'istante $t = t_0$ invece che in $t = 0$, la (7.61) diventa

$$i(t) = i(\infty) + [i(t_0) - i(\infty)] e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (7.62)$$

Se invece $I_0 = 0$, allora

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{V_s}{R} (1 - e^{-t/\tau}), & t > 0 \end{cases} \quad (7.63a)$$

o anche

$$i(t) = \frac{V_s}{R} (1 - e^{-t/\tau}) u(t) \quad (7.63b)$$

Questa è la risposta al gradino del circuito RL in assenza di corrente iniziale nell'induttore. La tensione sull'induttore si ottiene dalla (7.63) usando la relazione $v = L di/dt$. Si ha

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = V_s \frac{L}{\tau R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad t > 0$$

cioè

$$v(t) = V_s e^{-t/\tau} u(t) \quad (7.64)$$

La Figura 7.50 mostra la risposta al gradino delle (7.63) e (7.64).

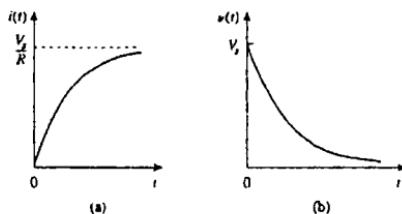


Figura 7.50
Risposta al gradino di un circuito RL senza corrente iniziale nell'induttore:
(a) risposta di corrente,
(b) risposta di tensione

Esempio 7.12

Determinare $i(t)$ nel circuito in Figura 7.51 per $t > 0$. L'interruttore è rimasto chiuso per molto tempo.

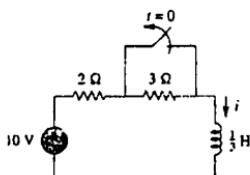


Figura 7.51
Per l'Esempio 7.12.

Soluzione: Per $t < 0$, il resistore da 3Ω è cortocircuitato, e l'induttore si comporta come un cor-

to circuito. La corrente dell'induttore in $t = 0^-$ (cioè, appena prima di $t = 0$) è

$$i(0^-) = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

Poiché la corrente dell'induttore non può variare istantaneamente,

$$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 5 \text{ A}$$

Per $t > 0$, l'interruttore è aperto. I resistori da 2Ω e 3Ω sono in serie, così che

$$i(\infty) = \frac{10}{2+3} = 2 \text{ A}$$

La resistenza di Thevenin ai terminali dell'induttore è

$$R_{Th} = 2 + 3 = 5 \Omega$$

La costante di tempo è

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{15} \text{ s}$$

Allora,

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 2 + (5 - 2)e^{-15t} = 2 + 3e^{-15t} \text{ A}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

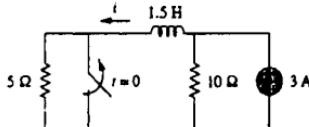
Verifica. Nella Figura 7.51, per $t > 0$, la KVL deve essere soddisfatta; cioè,

$$\begin{aligned} 10 &= 5i + L \frac{di}{dt} \\ 5i + L \frac{di}{dt} &= [10 + 15e^{-15t}] + \left[\frac{1}{3}(3)(-15)e^{-15t} \right] = 10 \end{aligned}$$

Ciò conferma il risultato.

■ **Esercizio 7.12** L'interruttore in Figura 7.52 è rimasto chiuso per molto tempo. Si apre in $t = 0$. Determinare $i(t)$ per $t > 0$.

Figura 7.52
Per l'Esercizio 7.12.

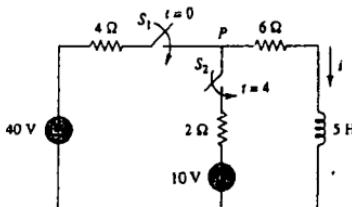


Risposta $(2 + e^{-10t}) \text{ A}$, $t > 0$.

Esempio 7.13

All'istante $t = 0$, l'interruttore 1 in Figura 7.53 si chiude, mentre l'interruttore 2 si chiude 4 s più tardi. Determinare $i(t)$ per $t > 0$. Calcolare il valore di i per $t = 2 \text{ s}$ e $t = 5 \text{ s}$.

Figura 7.53
Per l'Esempio 7.13.



Soluzione: Si devono prendere in considerazione separatamente i tre intervalli di tempo $t \leq 0$, $0 \leq t \leq 4$ e $t \geq 4$. Per $t < 0$, gli interruttori S_1 e S_2 sono aperti e quindi $i = 0$. Poiché la corrente dell'induttore non può variare istantaneamente,

$$i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0$$

Per $0 \leq t \leq 4$, S_1 è chiuso e i resistori da 4Ω e 6Ω risultano in serie (Si ricordi che in questo intervallo l'interruttore S_2 è ancora aperto). Perciò, supponendo per ora che S_1 rimanga chiuso per sempre,

$$i(\infty) = \frac{40}{4+6} = 4 \text{ A}, \quad R_{Th} = 4 + 6 = 10 \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

Quindi,

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$= 4 + (0 - 4)e^{-2t} = 4(1 - e^{-2t}) \text{ A}, \quad 0 \leq t \leq 4$$

Per $t \geq 4$, S_2 è chiuso; il generatore di tensione da 10 V è ora collegato al circuito, e il circuito si modifica. Questa variazione brusca non influenza la corrente dell'induttore, perché essa non può variare istantaneamente. La corrente iniziale è allora

$$i(4) = i(4^-) = 4(1 - e^{-8}) \approx 4 \text{ A}$$

Per trovare $i(\infty)$, sia v la tensione del nodo P in Figura 7.53. Usando la KCL,

$$\frac{40 - v}{4} + \frac{10 - v}{2} = \frac{v}{6} \implies v = \frac{180}{11} \text{ V}$$

$$i(\infty) = \frac{v}{6} = \frac{30}{11} = 2.727 \text{ A}$$

La resistenza di Thevenin ai terminali dell'induttore è

$$R_{Th} = 4 \parallel 2 + 6 = \frac{4 \times 2}{6} + 6 = \frac{22}{3} \Omega$$

da cui

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5}{\frac{22}{3}} = \frac{15}{22} \text{ s}$$

In definitiva,

$$i(t) = i(\infty) + [i(4) - i(\infty)]e^{-(t-4)/\tau}, \quad t \geq 4$$

Si deve usare $(t-4)$ nell'esponentiale a causa della traslazione nell'inizio del transitorio. Perciò,

$$i(t) = 2.727 + (4 - 2.727)e^{-(t-4)/\tau}, \quad \tau = \frac{15}{22}$$

$$= 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, \quad t \geq 4$$

Riassumendo,

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 4(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t \leq 4 \\ 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, & t \geq 4 \end{cases}$$

Per $t = 2$,

$$i(2) = 4(1 - e^{-4}) = 3.93 \text{ A}$$

Per $t = 5$,

$$i(5) = 2.727 + 1.273e^{-1.4667} = 3.02 \text{ A}$$

Esercizio 7.13 L'interruttore S_1 in Figura 7.54 si chiude a $t = 0$, e l'interruttore S_2 si chiude a $t = 2 \text{ s}$. Calcolare $i(t)$ per ogni t . Determinare $i(1)$ e $i(3)$.

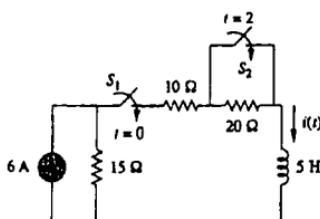


Figura 7.54
Per l'Esercizio 7.13.

Risposta

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2(1 - e^{-0t}), & 0 < t < 2 \\ 3.6 - 1.6e^{-1(t-2)}, & t > 2 \end{cases}$$

$$i(1) = 1.9997 \text{ A}, i(3) = 3.589 \text{ A}.$$

7.7 CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE CON AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Un circuito contenente amplificatori operazionali e un solo elemento dinamico avrà il comportamento di un circuito del primo ordine. I derivatori e gli integratori trattati nel Paragrafo 6.6 sono esempi di circuiti del primo ordine con operazionali. Anche in questo caso, per ragioni pratiche, gli induttori non vengono quasi mai utilizzati con gli operazionali; tutti i circuiti del primo ordine con operazionali che verranno presi in considerazione saranno quindi di tipo *RC*.

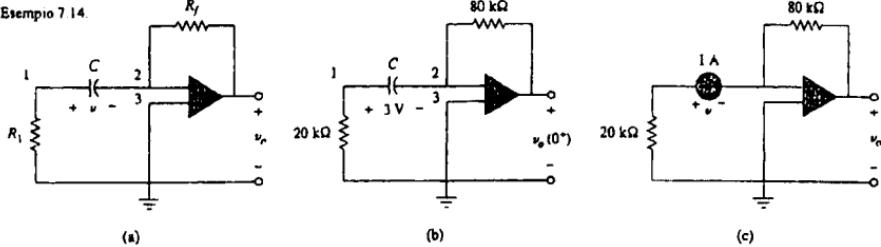
Come di consueto, si analizzano i circuiti contenenti operazionali utilizzando l'analisi nodale. Si può usare, a volte, l'equivalente Thevenin per ridurre il circuito a uno più semplice. I tre esempi che seguono illustrano i concetti precedenti: il primo è relativo a un circuito autonomo con un operazionale, e gli altri due presentano delle risposte al gradino. I tre esempi sono stati scelti in modo da esaurire tutti i tipi di circuiti *RC* con operazionali, a seconda della posizione del condensatore rispetto all'operazionale: all'ingresso, all'uscita o nell'anello di reazione.

Esempio 7.14

Nel circuito di Figura 7.55(a), determinare v_o per $t > 0$, supponendo $v(0) = 3 \text{ V}$. Sono dati $R_f = 80 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $C = 5 \mu\text{F}$.

Figura 7.55

Per l'Esempio 7.14.



Soluzione: Il problema può essere risolto in due modi:

METODO 1

Si consideri il circuito in Figura 7.55(a). Se ne otterrà l'equazione differenziale mediante l'analisi nodale. Se v_1 è la tensione del nodo 1, a quel nodo la KCL fornisce

$$\frac{0 - v_1}{R_1} = C \frac{dv}{dt} \quad (7.14.1)$$

Poiché i nodi 2 e 3 devono essere allo stesso potenziale, il potenziale del nodo 2 è zero. Perciò, $v_1 - 0 = v$ cioè $v_1 = v$ e la (7.14.1) diventa

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{CR_1} = 0 \quad (7.14.2)$$

Questa equazione è simile alla (7.4b) e la sua soluzione può essere ottenuta con lo stesso procedimento del Paragrafo 7.2, cioè

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = R_1 C \quad (7.14.3)$$

dove V_0 è la tensione iniziale sul condensatore. Ma $v(0) = 3 = V_0$ e $\tau = 20 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} = 0.1$. Perciò,

$$v(t) = 3e^{-10t} \quad (7.14.4)$$

Applicando la KCL al nodo 2

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{0 - v_o}{R_f}$$

cioè

$$v_o = -R_f C \frac{dv}{dt} \quad (7.14.5)$$

Si può ora determinare v_o come

$$v_o = -80 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} (-30e^{-10t}) = 12e^{-10t} \text{ V}, \quad t > 0$$

METODO 2

Si applica ora il metodo abbreviato della (7.53). Si vogliono determinare $v_o(0^+)$, $v_o(\infty)$ e τ . Poiché $v(0^+) = v(0^-) = 3 \text{ V}$, si applica la KCL al nodo 2 nel circuito di Figura 7.55(b) e si ottiene

$$\frac{3}{20\,000} + \frac{0 - v_o(0^+)}{80\,000} = 0$$

cioè $v_o(0^+) = 12 \text{ V}$. Poiché il circuito è privo di ingressi, $v(\infty) = 0 \text{ V}$. Per determinare τ , è necessaria la resistenza equivalente R_{eq} ai terminali del condensatore. Se si sostituisce il condensatore con un generatore di corrente da 1 A, si ottiene il circuito mostrato in Figura 7.55(c). Applicando la KVL alla maglia di ingresso si ha

$$20\,000(1) - v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 20 \text{ kV}$$

Quindi

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20\,000}} = 20 \text{ k}\Omega$$

e $\tau = R_{eq}C = 0.1$. Perciò,

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_o(\infty) + [v_o(0) - v_o(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 0 + (12 - 0)e^{-10t} = 12e^{-10t} \text{ V}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

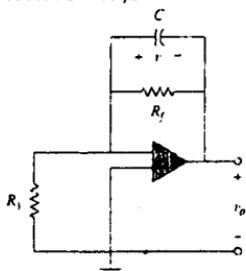
come si è ottenuto in precedenza.

Esercizio 7.14 Nel circuito di Figura 7.56, determinare v_o per $t > 0$ se $v(0) = 4 \text{ V}$.

Supponere $R_f = 50 \text{ k}\Omega$, $R_i = 10 \text{k}\Omega$ e $C = 10 \mu\text{F}$.

Figura 7.56

Per l'Esercizio 7.14.



Risposta $-4e^{-2t} \text{ V}, t > 0$.



Esempio 7.15

Determinare $v(t)$ e $v_o(t)$ nei circuiti di Figura 7.57.

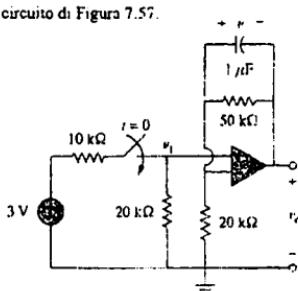


Figura 7.57

Per l'Esempio 7.15.

Soluzione: Come l'esempio precedente, questo problema può essere risolto in due modi. Si applicherà qui, però, soltanto il secondo metodo. Poiché ciò che si vuole determinare è la risposta al gradino, si può applicare la (7.53), scrivendo

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau}, \quad t > 0 \quad (7.15.1)$$

in cui è necessario conoscere soltanto la costante di tempo τ , il valore iniziale $v(0)$, e il valore finale $v(\infty)$. Poiché non c'è corrente nei terminali di ingresso dell'operazionale, gli elementi del circuito di reazione costituiscono un circuito RC , con

$$\tau = RC = 50 \times 10^3 \times 10^{-6} = 0.05 \text{ s} \quad (7.15.2)$$

Per $t < 0$, l'interruttore è aperto e non c'è tensione sul condensatore. Allora, $v(0) = 0$. Per $t > 0$, si ottiene la tensione al nodo 1 con il partitore di tensione

$$v_1 = \frac{20}{20 + 10} 3 = 2 \text{ V} \quad (7.15.3)$$

Poiché non ci sono elementi dinamici nella maglia di ingresso, v_1 rimane costante per ogni t . A regime, il condensatore si comporta come un circuito aperto e il circuito complessivo come un amplificatore non invertente. Perciò,

$$v_o(\infty) = \left(1 + \frac{50}{20}\right)v_1 = 3.5 \times 2 = 7 \text{ V} \quad (7.15.4)$$

Ma

$$v_1 - v_o = v \quad (7.15.5)$$

così che

$$v(\infty) = 2 - 7 = -5 \text{ V}$$

Sostituendo τ , $v(0)$ e $v(\infty)$ nella (7.15.1) si ottiene

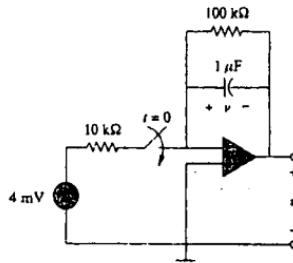
$$v(t) = -5 + [0 - (-5)]e^{-20t} = 5(e^{-20t} - 1) \text{ V}, \quad t > 0 \quad (7.15.6)$$

Dalle (7.15.3), (7.15.5) e (7.15.6), si ottiene

$$v_o(t) = v_1(t) - v(t) = 7 - 5e^{-20t} \text{ V}, \quad t > 0 \quad (7.15.7)$$

■ Esercizio 7.15 Determinare $v(t)$ e $v_o(t)$ nel circuito di Figura 7.58.

Figura 7.58
Per l'Esercizio 7.15.

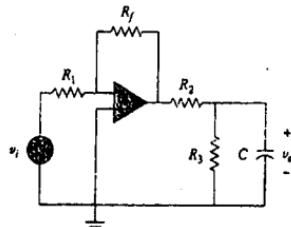


Risposta $40(1 - e^{-10t}) \text{ mV}$, $40(e^{-10t} - 1) \text{ mV}$.

Esempio 7.16

Determinare la risposta al gradino $v_o(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.59. Siano $v_i = 2u(t) \text{ V}$, $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_f = 50 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 2 \mu\text{F}$.

Figura 7.59
Per l'Esempio 7.16.



Soluzione: Si noti che il condensatore dell'Esempio 7.14 era situato nella maglia di ingresso, mentre il condensatore dell'Esempio 7.15 era situato nell'anello di reazione. In questo esempio, il condensatore è situato all'uscita dell'amplificatore operazionale. Anche in questo caso, è possibile risolvere il problema direttamente, usando l'analisi nodale. Tuttavia, l'uso del circuito equivalente di Thevenin può rendere l'analisi più semplice. Il condensatore viene temporaneamente rimosso e si determina l'equivalente Thevenin ai suoi terminali. Per calcolare V_{Th} , si consideri il circuito di Figura 7.60(a). Si tratta di un amplificatore invertente, quindi:

$$V_{op} = -\frac{R_f}{R_1} v_i$$

Con il partitore di tensione,

$$V_{Th} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{ab} = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_f}{R_1} v_i$$

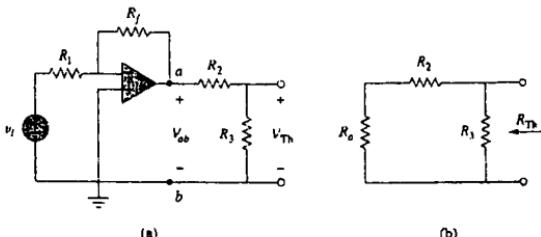


Figura 7.60

Per il calcolo di V_{Th} e R_{Th} sul condensatore in Figura 7.59

Per ottenere R_{Th} , si consideri il circuito di Figura 7.60(b), dove R_o è la resistenza di uscita dell'operazionale. Poiché per ipotesi l'operazionale è ideale, $R_o = 0$, e

$$R_{Th} = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Sostituendo i valori numerici

$$V_{Th} = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_f}{R_1} v_i = -\frac{10}{20} \frac{50}{20} 2u(t) = -2.5u(t)$$

$$R_{Th} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5 \text{ k}\Omega$$

Il circuito equivalente di Thevenin è mostrato nella Figura 7.61, che è simile alla Figura 7.40. La soluzione è quindi simile a quella della (7.48):

$$v_o(t) = -2.5(1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

con $\tau = R_{Th}C = 5 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} = 0.01$. Perciò, la risposta al gradino per $t > 0$ è

$$v_o(t) = 2.5(e^{-100t} - 1) u(t) \text{ V}$$

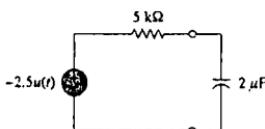


Figura 7.61

Circuito equivalente di Thevenin del circuito in Figura 7.59.

Esercizio 7.16 Determinare la risposta al gradino $v_o(t)$ del circuito di Figura 7.62. Siano $v_i = 2u(t)$ V, $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_f = 40 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 2 \mu\text{F}$.

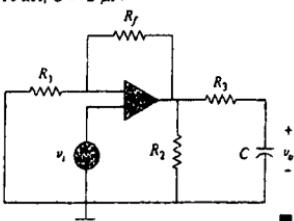
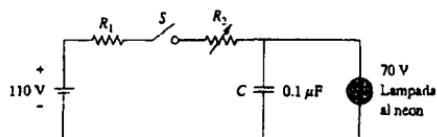


Figura 7.62

Per l'Esercizio 7.16.

Risposta $6(1 - e^{-50t})u(t)$ V.

Figura 7.73
Circuito di ritardo RC.



7.9.1 Circuiti di ritardo

Un circuito RC può essere usato per introdurre ritardi di diversa entità. La Figura 7.73 mostra un circuito di ritardo, che consiste essenzialmente in un circuito RC in cui il condensatore è collegato in parallelo a una lampada al neon. Il generatore di tensione è in grado di fornire una tensione sufficiente per provocare l'accensione della lampada. Quando l'interruttore viene chiuso, la tensione del condensatore aumenta gradualmente avvicinandosi a 110 V, a una velocità determinata dalla costante di tempo $(R_1 + R_2)C$. La lampada si comporterà come un circuito aperto e non emetterà alcuna luce fino a quando la sua tensione non supererà un particolare valore, per esempio 70 V. Quando il livello corretto di tensione viene raggiunto, la lampada si accende, e il condensatore si scarica attraverso essa. A causa della bassa resistenza della lampada quando è accesa, la tensione del condensatore diminuisce rapidamente e la lampada si spegne. Essa si comporta allora come un circuito aperto, e il condensatore torna a caricarsi. Regolando il valore di R_2 è possibile introdurre ritardi brevi o lunghi nel circuito e fare sì che la lampada si accenda ripetutamente, ogni $\tau = (R_1 + R_2)C$, perché è necessario un intervallo di tempo τ al condensatore per caricarsi a una tensione sufficiente per l'accensione, o scaricarsi a una tensione abbastanza bassa per causare lo spegnimento della lampada.

Le luci lampeggianti di avviso che si trovano comunemente vicino ai cantieri stradali sono un esempio di uso di un circuito di ritardo RC simile a questo.

Esempio 7.19

Si consideri il circuito in Figura 7.73, e si supponga $R_1 = 1.5 \text{ M}\Omega$, $0 < R_2 < 2.5 \text{ M}\Omega$. (a) Calcolare i valori estremi della costante di tempo del circuito. (b) Quanto tempo è necessario perché la lampada si accenda per la prima volta dopo che l'interruttore è stato chiuso? Si supponga che R_2 abbia il valore massimo.

Soluzione: (a) Il valore minimo di R_2 è 0Ω , e la corrispondente costante di tempo del circuito è

$$\tau = (R_1 + R_2)C = (1.5 \times 10^6 + 0) \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.15 \text{ s}$$

Il valore massimo per R_2 è $2.5 \text{ M}\Omega$, e la corrispondente costante di tempo del circuito è

$$\tau = (R_1 + R_2)C = (1.5 + 2.5) \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.4 \text{ s}$$

Perciò, con un progetto corretto del circuito, la costante di tempo può essere regolata in modo da introdurre il ritardo desiderato.

(b) Si supponga che il condensatore sia inizialmente scarico, $v_C(0) = 0$, mentre $v_C(\infty) = 110$. Allora

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 110[1 - e^{-t/\tau}]$$

dove $\tau = 0.4 \text{ s}$, come calcolato nella parte (a). La lampada si accende quando $v_C = 70 \text{ V}$. Se $v_C(t) = 70 \text{ V}$ in $t = t_0$

$$70 = 110[1 - e^{-t_0/\tau}] \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{11} = 1 - e^{-t_0/\tau}$$

e anche

$$e^{-t_0/\tau} = \frac{4}{11} \quad \Rightarrow \quad e^{t_0/\tau} = \frac{11}{4}$$

Facendo il logaritmo naturale di entrambi i membri si ottiene

$$t_0 = \tau \ln \frac{11}{4} = 0.4 \ln 2.75 = 0.4046 \text{ s}$$

Una formula più generale per determinare t_0 è

$$t_0 = \tau \ln \frac{v(0) - v(\infty)}{v(t_0) - v(\infty)}$$

La lampada lampeggerà ripetutamente ogni τ secondi se e solo se $t_0 < \tau$. In questo esempio, tale condizione non è soddisfatta.

- **Esercizio 7.19** Il circuito RC in Figura 7.74 è progettato in modo da attivare un allarme quando la corrente supera $120 \mu\text{A}$. Se $0 \leq R \leq 6 \text{k}\Omega$, determinare i valori minimo e massimo del riardo del circuito.

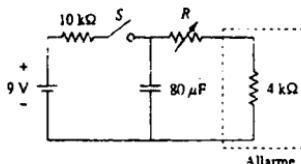


Figura 7.74
Per l'Esercizio 7.19.

Risposta Tra 47.23 ms e 124 ms.

7.9.2 Flash fotografico

Un flash elettronico costituisce un esempio molto comune di circuito RC . Esso si basa sulla proprietà del condensatore di opporsi alle variazioni brusche di tensione. La Figura 7.75 mostra un circuito semplificato, che consiste essenzialmente di un alimentatore a tensione costante ed elevata, di un grosso resistore di limitazione della corrente R_1 , e di un condensatore C in parallelo con la lampada del flash di bassa resistenza R_2 .

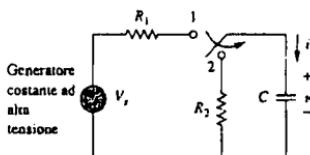


Figura 7.75
Circuito per flash con carica lenta in posizione 1 e scarica veloce in posizione 2.

Quando l'interruttore si trova in posizione 1, il condensatore si carica lentamente a causa della elevata costante di tempo ($\tau_1 = R_1 C$). Come si vede in Figura 7.76, la tensione del condensatore aumenta gradualmente da zero a V_s , mentre la sua corrente decresce gradualmente da $I_1 = V_s/R_1$ a zero. Il tempo di carica è pari a circa cinque volte la costante di tempo,

$$t_{\text{carica}} = 5R_1 C \quad (7.65)$$

Con l'interruttore in posizione 2, il condensatore si scarica. La bassa resistenza R_2 della lampada consente una elevata corrente di scarica di valore massimo $I_2 = V_s/R_2$ e di breve durata, come mostrato in Figura 7.76(b). La scarica avviene in un tempo pari a circa cinque volte la costante di tempo,

$$t_{\text{scarica}} = 5R_2 C \quad (7.66)$$

Il semplice circuito RC di Figura 7.75 fornisce quindi un impulso di corrente di valore elevato e di breve durata. Un simile circuito trova applicazione anche nelle saldatrici spot e nei tubi dei trasmettitori dei radar.

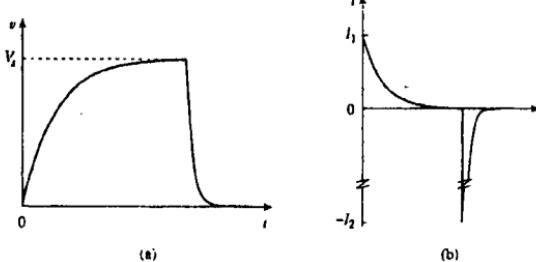


Figura 7.76
(a) Tensione del condensatore con carica lenta e scarica veloce,
(b) corrente nel condensatore con bassa corrente di carica
 $I_1 = V_s/R_1$ ed elevata corrente di scarica $I_2 = V_s/R_2$.

Esempio 7.20

Un flash elettronico contiene un resistore per la limitazione della corrente di $6 \text{ k}\Omega$ e un condensatore elettrolitico da $2000 \mu\text{F}$ caricato a 240 V . Se la resistenza della lampada è 12Ω , determinare: (a) il valore di picco della corrente di carica, (b) il tempo necessario perché il condensatore si carichi completamente, (c) il valore di picco della corrente di scarica, (d) l'energia totale immagazzinata nel condensatore, (e) la potenza media dissipata dalla lampadina.

Soluzione: (a) Il valore di picco della corrente di carica è

$$I_1 = \frac{V_s}{R_1} = \frac{240}{6 \times 10^3} = 40 \text{ mA}$$

(b) Dalla (7.65),

$$t_{\text{carica}} = 5R_1C = 5 \times 6 \times 10^3 \times 2000 \times 10^{-6} = 60 \text{ s} = 1 \text{ minuto}$$

(c) Il valore di picco della corrente di scarica è

$$I_2 = \frac{V_s}{R_2} = \frac{240}{12} = 20 \text{ A}$$

(d) L'energia immagazzinata è

$$W = \frac{1}{2} CV_s^2 = \frac{1}{2} \times 2000 \times 10^{-6} \times 240^2 = 57.6 \text{ J}$$

(e) L'energia immagazzinata nel condensatore viene dissipata attraverso la lampadina durante la scarica. Dalla (7.66),

$$t_{\text{scarica}} = 5R_2C = 5 \times 12 \times 2000 \times 10^{-6} = 0.12 \text{ s}$$

Quindi, la potenza media dissipata è

$$P = \frac{W}{t_{\text{scarica}}} = \frac{57.6}{0.12} = 480 \text{ W}$$

■ **Esercizio 7.20** L'unità flash di una macchina fotografica contiene un condensatore da 2 mF caricato a 80 V .

- Quant'è la carica sul condensatore?
- Quant'è l'energia immagazzinata nel condensatore?
- Se il lampo dura 0.8 ms , quant'è la corrente media che attraversa la lampada?
- Quant'è la potenza fornita alla lampada?
- Dopo che è stata fatta una fotografia, il condensatore deve essere ricaricato da un alimentatore che fornisce una corrente massima di 5 mA . Quanto tempo è necessario per caricare il condensatore?

Risposta (a) 0.16 C , (b) 6.4 J , (c) 200 A , (d) 8 kW , (e) 32 s .

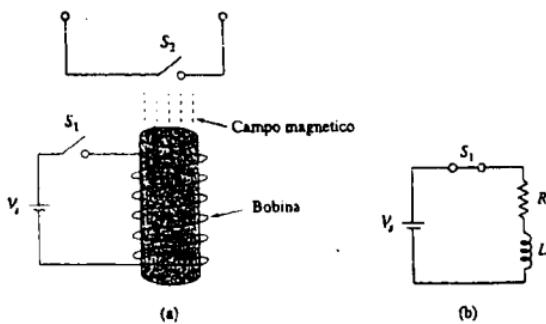


7.9.3 Circuiti per relè

Un interruttore controllato magneticamente è detto *relè*. Un relè è un dispositivo elettromagnetico usato per aprire o chiudere un interruttore che controlla un altro circuito. La Figura 7.77(a) mostra un tipico circuito con relè. Il circuito della bobina è un circuito RL simile a quello della Figura 7.77(b), dove R e L sono rispettivamente la resistenza e l'induttanza della bobina. Quando l'interruttore S_1 in Figura 7.77(a) si chiude, il circuito della bobina viene attivato. La corrente della bobina aumenta gradualmente e produce un campo magnetico, che infine diventa sufficientemente forte da attrarre il contatto mobile nell'altro circuito e chiudere l'interruttore S_2 . A questo punto si dice che il relè è attivato. L'intervallo di tempo t_d che separa la chiusura degli interruttori S_1 e S_2 è detto *ritardo del relè*.

I relè venivano utilizzati nei primi circuiti digitali e sono tuttora usati per la comunicazione di circuiti di potenza.

Figura 7.77
Un circuito a relè.



Esempio 7.21

La bobina di un relè è alimentata da una batteria da 12 V. Se la bobina ha una resistenza di 150Ω e una induttanza di 30 mH , e la corrente necessaria per azionare il relè è 50 mA , calcolare il ritardo del relè.

Soluzione: La corrente nella bobina è data da

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

dove

$$i(0) = 0, \quad i(\infty) = \frac{12}{150} = 80 \text{ mA}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30 \times 10^{-3}}{150} = 0.2 \text{ ms}$$

Perciò,

$$i(t) = 80[1 - e^{-t/\tau}] \text{ mA}$$

Se $i(t_d) = 50 \text{ mA}$, allora

$$50 = 80[1 - e^{-t_d/\tau}] \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{8} = 1 - e^{-t_d/\tau}$$

cioè

$$e^{-t_d/\tau} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad e^{t_d/\tau} = \frac{8}{3}$$

Facendo il logaritmo naturale di entrambi i membri, si ottiene

$$t_d = \tau \ln \frac{8}{3} = 0.2 \ln \frac{8}{3} \text{ ms} = 0.1962 \text{ ms}$$

In alternativa, è possibile determinare t_d usando la formula

$$t_d = \tau \ln \frac{i(0) - i(\infty)}{i(t_d) - i(\infty)}$$

Esercizio 7.21 Un relè ha una resistenza di 200Ω e una induttanza di 500 mH . I contatti del relè si chiudono quando la corrente che attraversa la bobina raggiunge i 350 mA . Quanto tempo trascorre fra l'applicazione di 110 V alla bobina e la chiusura dei contatti?

Risposta 2.529 ms.

7.9.4 Circuito di accensione per autoveicolo

La proprietà degli induttori di opporsi alle variazioni rapide di corrente li rende utili per la generazione di scintille o archi elettrici. Una possibile applicazione è rappresentata dal sistema di accensione di una automobile.

Il motore a benzina di un'automobile richiede che la miscela aria-benzina in ciascun cilindro venga accesa nell'istante appropriato. Ciò si ottiene per mezzo di una candela (Figura 7.78), che consiste essenzialmente di una coppia di elettrodi separati da un traferro di aria. Producendo una tensione elevata (migliaia di volt) tra gli elettrodi, si genera una scintilla attraverso il traferro di aria, che accende la miscela. Il problema sta nel produrre una tensione così elevata a partire dalla batteria dell'auto, che fornisce solo 12 V. La si ottiene con un induttore (la bobina) L , la cui tensione

7.8 ANALISI IN TRANSITORIO CON PSPICE

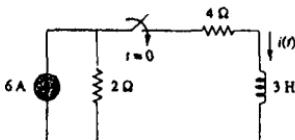
Come si è visto al Paragrafo 7.5, il transitorio è la risposta temporanea di un circuito, che si annulla col trascorrere del tempo. Si può utilizzare PSPice per ottenere la risposta in transitorio di un circuito contenente elementi dinamici. Il Paragrafo B.4 nella Appendice B illustra l'analisi in transitorio con PSPice for Windows. Si raccomanda la lettura del Paragrafo B.4 prima di proseguire nello studio del presente paragrafo.⁵

Se necessario, PSPice esegue dapprima una analisi DC per determinare le condizioni iniziali. Le condizioni iniziali così determinate vengono poi utilizzate nella analisi in transitorio per ottenere le risposte.

Esempio 7.17

Utilizzare PSPice per determinare la risposta $i(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.63.

Figura 7.63
Per l'Esempio 7.17.

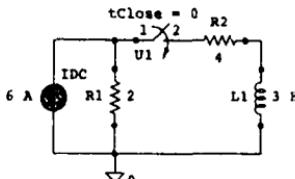


Soluzione: La risoluzione manuale di questo problema fornisce $i(0) = 0$, $i(\infty) = 2$ A, $R_m = 6$, $\tau = 3/6 = 0.5$ s, così che

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau} = 2(1 - e^{-2t}), \quad t > 0$$

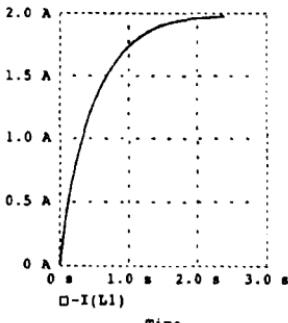
Per usare PSPice, si disegna dapprima lo schematico come mostrato in Figura 7.64. Si ricordi dall'Appendice B che il part name per un interruttore chiuso è Sw_tclos. Non è necessario specificare la condizione iniziale dell'induttore, perché PSPice la determina automaticamente dal circuito.

Figura 7.64
Schematico del circuito
in Figura 7.63



Selezionando Analysis/Setup/Transient, si pone Print Step a 25 ms e Final Step a $5\tau = 2.5$ s. Dopo aver salvato il circuito, lo si simula selezionando Analysis/Simulate. Nella finestra PSPice A/D, si seleziona Trace/Add e si visualizza $-i(L1)$ come corrente nell'induttore. La Figura 7.65 mostra il grafico di $i(t)$, che è in accordo con quanto ottenuto mediante il calcolo manuale.

Figura 7.65
Per l'Esempio 7.17, risposta del
circuito in Figura 7.63.



⁵ PSPice usa il termine "transient" (transitorio) con il significato di "funzione del tempo." La risposta in transitorio fornita da PSPice può quindi anche non decrescere asintoticamente con il tempo come ci si potrebbe aspettare.

Si noti che il segno negativo su $i(L1)$ è necessario perché la corrente entra nell'induttore dal terminale superiore, che diventa il terminale negativo dopo una rotazione in senso antiorario. Una maniera di evitare il segno negativo è fare in modo che la corrente entri dal più 1 dell'induttore. Per ottenere questo flusso di corrente, il simbolo dell'induttore, inizialmente orizzontale, deve essere ruotato in senso antiorario per 270° e piazzato nella posizione desiderata.

■ **Esercizio 7.17** Per il circuito in Figura 7.66, utilizzare PSpice per determinare $v(t)$ per $t > 0$.

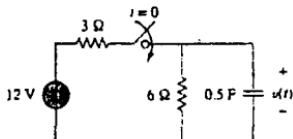


Figura 7.66
Per l'Esercizio 7.17.

Risposta $v(t) = 8(1 - e^{-t})$ V, $t > 0$. La risposta ha una forma simile a quella in Figura 7.65. ■

Esempio 7.18

Nel circuito di Figura 7.67, determinare la risposta $v(t)$.

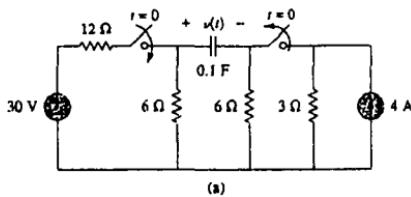
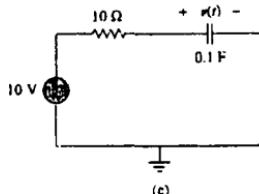
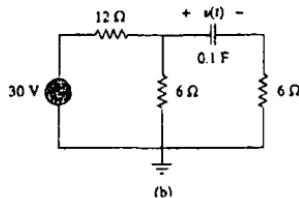


Figura 7.67
Per l'Esempio 7.18
(a) circuito originale
(b) circuito per $t > 0$
(c) circuito semplificato per $t > 0$.



Soluzione:

1. *Dare una definizione precisa del problema.*

Il problema è descritto in modo chiaro e il circuito è ben definito.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.*

Del circuito di Figura 7.67(a), determinare la risposta $v(t)$.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*

Si può risolvere questo circuito usando i metodi di analisi circuituale (metodo nodale, metodo agli anelli), o PSpice. Si risolverà il problema usando, ad esempio, il circuito equivalente di Thevenin, e poi si verificherà il risultato usando due metodi con PSpice.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

Per $t < 0$, l'interruttore a sinistra è aperto, mentre quello a destra è stato chiuso per un tempo sufficiente a raggiungere i valori di regime nel circuito; quindi il condensatore funziona come un circuito aperto e la corrente di $4A$ del generatore scorre nel parallelo formato dai resistori da 6Ω e 3Ω ($6//3 = 18/9 = 2\Omega$), fornendo una tensione pari a $2 \times 4 = 8V = -v(0)$.

Nell'istante $t = 0$, l'interruttore a sinistra si chiude, mentre quello a destra si apre; il circuito si modifica come mostrato in Figura 7.67(b).

Il metodo più semplice per determinare la soluzione è quello di ricavare il circuito equivalente di Thevenin visto dal condensatore. La tensione a vuoto (togliendo il condensatore), è uguale alla tensione sul resistore da 6Ω a sinistra, cioè $10V$. Infatti la tensione di $30V$ del generatore di tensione si ripartisce in $20V$ sul resistore da 12Ω , e $10V$ sul resistore da 6Ω . La tensione a vuoto così calcolata è la V_{Th} .

La resistenza vista dai terminali del condensatore è uguale a $6 + 12//6 = 6 + 72/18 = 10\Omega$, che rappresenta la R_{Th} .

In Figura 7.67(c) è mostrato il circuito equivalente di Thevenin. Utilizzando le condizioni al contorno ($v(0) = -8V$, $v(\infty) = 10V$ e $\tau = RC = 1s$), si ottiene

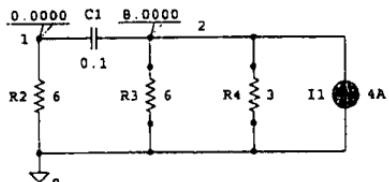
$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} = 10 - 18e^{-t} V$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

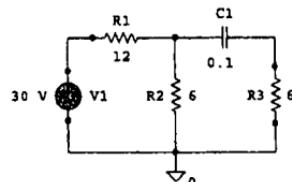
Ci sono due modi di risolvere questo problema usando PSpice.

METODO 1

Un primo modo consiste nell'eseguire dapprima un'analisi DC con PSpice per determinare la tensione iniziale del condensatore. Lo schematico del circuito relativo è illustrato in Figura 7.68(a). Sono stati inseriti due pseudocomponenti VIEWPOINT per misurare le tensioni ai nodi 1 e 2. Quando il circuito viene simulato, si ottengono i valori visualizzati in Figura 7.68(a): $V_1 = 0V$ e $V_2 = 8V$. La tensione iniziale sul condensatore è quindi $v(0) = V_1 - V_2 = -8V$. L'analisi in transitorio di PSpice utilizza questo valore con lo schematico di Figura 7.68(b). Una volta disegnato il circuito in Figura 7.68(b), si inserisce la tensione iniziale del condensatore come $IC = -8$. Si seleziona Analysis/Setup/Transient e si pone Print Step a $0.1s$ e Final Step a $4s$. Dopo aver salvato il circuito, si seleziona Analysis/Simulate per eseguire la simulazione. Nella finestra PSpice A/D, si seleziona Trace/Add e si visualizza $V(R2:2) - V(R3:2)$ oppure $V(C1:1) - V(C1:2)$ come tensione del condensatore $v(t)$. Il grafico di $v(t)$ è mostrato in Figura 7.69. Esso è in accordo con il risultato ottenuto tramite il calcolo manuale $v(t) = 10 - 18e^{-t}$.



(a)



(b)

Figura 7.68

(a) Schematico per l'analisi DC

per ottenere $v(0)$,

(b) schematico per l'analisi in

transitorio utilizzato per ottenere

la risposta $v(t)$.

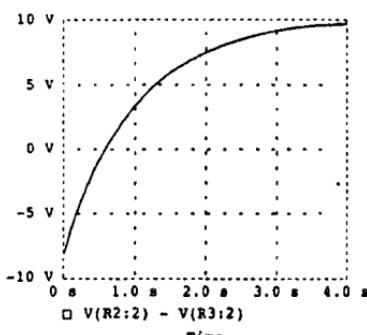


Figura 7.69

Risposta $v(t)$ per il circuito in

Figura 7.67.

METODO 2

È possibile simulare il circuito in Figura 7.67 in maniera diretta, poiché PSpice è in grado di simulare l'interruttore chiuso e aperto e determinare automaticamente le condizioni iniziali. Usando questo approccio, lo schematico viene disegnato come mostrato in Figura 7.70. Dopo aver disegnato il circuito, si seleziona Analysis/Setup/Transient e si pone Print Step a 0.1 s e Final Step a $t = 4$ s. Si salva il circuito e si seleziona Analysis/Simulate per simularlo. Nella finestra PSpice A/D, si seleziona Trace/Add e si visualizza $V(R2:2) - V(R3:2)$ come tensione del condensatore $v(t)$. Il grafico di $v(t)$ è lo stesso di quello mostrato in Figura 7.69.

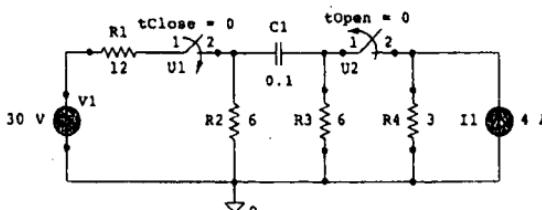


Figura 7.70
Per l'Esempio 7.18.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è ricavata la risposta di tensione $v(t)$, come richiesto dal problema. Si è poi verificata questa soluzione con PSpice. Si può quindi affermare che si è ottenuta la soluzione completa del problema.

- Esercizio 7.18** L'interruttore in Figura 7.71 è rimasto aperto per molto tempo e si è chiuso a $t = 0$. Se $i(0) = 10 \text{ A}$, determinare $i(t)$ per $t > 0$ con il calcolo manuale e con PSpice.

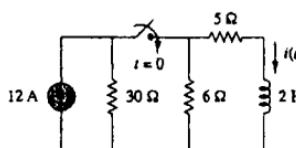


Figura 7.71
Per l'Esercizio 7.18.

Risposta $i(t) = 6 + 4e^{-5t} \text{ A}$. Il grafico di $i(t)$ ottenuto da PSpice è mostrato in Figura 7.72.

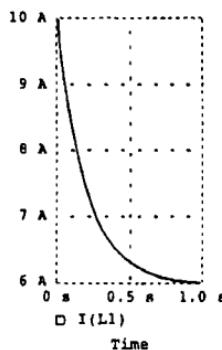


Figura 7.72
Per l'Esercizio 7.18.

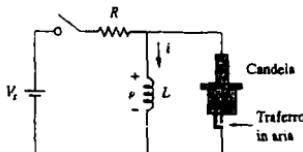
7.9 APPLICAZIONI

Tra i dispositivi nei quali trovano applicazione i circuiti RC e RL si ricordano qui il filtraggio negli alimentatori, i circuiti di condizionamento del segnale nelle comunicazioni digitali, i derivatori e gli integratori, i circuiti di ritardo e i circuiti per relè. Alcune di queste applicazioni traggono vantaggio dalle costanti di tempo di lunga o breve durata del circuito RC o RL . Verranno presentate qui quattro semplici applicazioni, due facenti uso di circuiti RC e due con circuiti RL .

$v = L di/dt$ può essere resa grande se si produce una apprezzabile variazione della corrente in un tempo molto breve. Quando l'interruttore di accensione in Figura 7.78 viene chiuso, la corrente nell'induttore aumenta gradualmente e raggiunge il suo valore finale $i = V_s/R$, con $V_s = 12 \text{ V}$. Anche in questo caso, il tempo necessario perché l'induttore si carichi è cinque volte la costante di tempo del circuito ($\tau = L/R$),

$$t_{\text{carica}} = 5 \frac{L}{R} \quad (7.67)$$

Figura 7.78
Circuito per sistema di accensione auto



Poiché a regime i è costante, $di/dt = 0$ e la tensione dell'induttore $v = 0$. Quando poi l'interruttore si apre, si sviluppa una tensione elevata sull'induttore (a causa della variazione rapida del campo), che causa la generazione di una scintilla o arco nel traferro. La scintilla dura fino a quando l'energia immagazzinata nell'induttore viene dissipata nella scarica della scintilla. In laboratorio, quando si lavora con circuiti indutivi, questo stesso effetto può dare luogo a scosse elettriche molto forti e molto pericolose.

Esempio 7.22

Un solenoide con resistenza 4Ω e induttanza 6 mH è utilizzato in un circuito di accensione per automobile simile a quello in Figura 7.78. Se la batteria fornisce 12 V , determinare: la corrente finale del solenoide quando l'interruttore viene chiuso, l'energia immagazzinata nella bobina e la tensione nel traferro, supponendo che l'interruttore impieghi $1 \mu\text{s}$ ad aprirsi.

Soluzione: La corrente finale nella bobina è

$$I = \frac{V_s}{R} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

L'energia immagazzinata nella bobina è

$$W' = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-3} \times 3^2 = 27 \text{ mJ}$$

La tensione nel traferro è

$$V' = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 6 \times 10^{-3} \times \frac{3}{1 \times 10^{-6}} = 18 \text{ kV}$$

Esercizio 7.22 La bobina di un sistema di accensione per automobile ha un'induttanza di 20 mH e una resistenza di 5Ω . Con una tensione di alimentazione di 12 V , calcolare: il tempo necessario per la carica completa della bobina, l'energia immagazzinata nella bobina e la tensione che si sviluppa nel traferro della candela se l'interruttore si apre in $2 \mu\text{s}$.

Risposta 20 ms , 57.6 mJ e 24 kV .

SOMMARIO

- È possibile applicare l'analisi studiata in questo capitolo a qualsiasi circuito che si possa trasformare in un circuito equivalente formato da un resistore e un singolo elemento che può immagazzinare energia (condensatore o induttore). Tale circuito è detto circuito del primo ordine e il suo comportamento viene descritto da un'equazione differenziale del primo ordine. Quando si studiano

circuiti RC e RL, bisogna tenere presente che il condensatore è un circuito aperto in corrente continua in condizioni di regime stazionario, mentre l'induttore è un cortocircuito nelle medesime condizioni.

- 2) La risposta naturale si ottiene quando non ci sono generatori indipendenti. Essa è caratterizzata dalla seguente formula

$$x(t) = x(0)e^{-t/\tau}$$

dove $x(t)$ è la corrente che scorre in un resistore, una capacità o un induttore (oppure la tensione ai suoi capi); $x(0)$ è il valore iniziale di $x(t)$. A causa delle perdite che hanno molti resistori, condensatori e induttori, la risposta naturale è una con la risposta transitoria, cioè si annulla dopo un certo tempo.

- 3) La costante di tempo τ è il tempo che occorre alla risposta per diminuire a $1/e$ del suo valore iniziale. Per circuiti RC, $\tau = RC$, e per circuiti RL, $\tau = L/R$.
- 4) Le funzioni singolari elementari comprendono il gradino unitario, la rampa unitaria e l'impulso unitario. La funzione gradino unitario $u(t)$ è:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

La funzione impulso unitario è:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{Indefinita}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

La funzione rampa unitaria è:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

- 5) La risposta a regime è il comportamento del circuito dopo che il generatore indipendente è stato applicato per un tempo molto lungo.
La risposta transitoria è la parte della risposta completa che si annulla dopo un certo tempo.
- 6) La risposta completa è formata dalla risposta a regime e dalla risposta transitoria.
- 7) La risposta al gradino è la risposta del circuito quando si applica all'improvviso una corrente o una tensione costante. Per determinare la risposta al gradino di un circuito del primo ordine occorrono il valore iniziale $x(0^+)$, il valore finale $x(\infty)$ e la costante di tempo τ . Con questi tre valori si determina la risposta al gradino

$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Una forma più generalizzata di questa equazione è la seguente

$$x(t) = x(\infty) + [x(t_0^-) - x(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Ottiene si può scrivere

$$\text{Valore istantaneo} = \text{Valore finale} + [\text{Valore iniziale} - \text{Valore finale}]e^{-(t-t_0)/\tau}$$

- 8) PSpice è utile per determinare la risposta transitoria di un circuito.
- 9) Quattro applicazioni pratiche per i circuiti RC e RL sono: un circuito di ritardo, un flash fotografico, un circuito per relè e un circuito di accensione per autoveicolo.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 7.1 Un circuito RC ha $R = 2\Omega$ e $C = 4 \text{ F}$. La costante di tempo è:
 (a) 0.5 s (b) 2 s (c) 4 s
 (d) 8 s (e) 15 s
- 7.2 La costante di tempo di un circuito RL con $R = 2\Omega$ e $L = 4 \text{ H}$ è:
 (a) 0.5 s (b) 2 s (c) 4 s
 (d) 8 s (e) 15 s
- 7.3 Il condensatore di un circuito RC con $R = 2\Omega$ e $C = 4 \text{ F}$ viene caricato. Il tempo necessario perché la tensione del condensatore raggiunga il 63.2 percento del suo valore di regime è:
 (a) 2 s (b) 4 s (c) 8 s
 (d) 16 s (e) nessuna delle precedenti
- 7.4 Un circuito RL ha $R = 2\Omega$ e $L = 4 \text{ H}$. Il tempo necessario perché la corrente dell'induttore raggiunga il 40 percento del suo valore di regime è:
 (a) 0.5 s (b) 1 s (c) 2 s
 (d) 4 s (e) nessuna delle precedenti
- 7.5 Nel circuito di Figura 7.79, la tensione del condensatore appena prima di $t = 0$ è:
 (a) 10 V (b) 7 V (c) 6 V
 (d) 4 V (e) 0 V

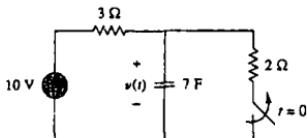


Figura 7.79 Per le domande di riepilogo 7.5 e 7.6.

- 7.6 Nel circuito di Figura 7.79, $v(\infty)$ è:
 (a) 10 V (b) 7 V (c) 6 V
 (d) 4 V (e) 0 V
- 7.7 Nel circuito di Figura 7.80, la corrente nell'induttore appena prima di $t = 0$ è:
 (a) 8 A (b) 6 A (c) 4 A
 (d) 2 A (e) 0 A

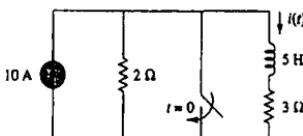


Figura 7.80 Per le domande di riepilogo 7.7 e 7.8.

- 7.8 Nel circuito di Figura 7.80, $i(\infty)$ è:
 (a) 10 A (b) 6 A (c) 4 A
 (d) 2 A (e) 0 A
- 7.9 Se v_t varia da 2 V a 4 V nell'istante $t = 0$, è possibile esprimere v_t come:
 (a) $\delta(t) V$ (b) $2u(t) V$
 (c) $2u(-t) + 4u(t) V$ (d) $2 + 2u(t) V$
 (e) $4u(t) - 2 V$
- 7.10 L'impulso in Figura 7.114(a) può essere espresso in termini di funzioni elementari come:
 (a) $2u(t) + 2u(t-1) V$ (b) $2u(t) - 2u(t-1) V$
 (c) $2u(t) - 4u(t-1) V$ (d) $2u(t) + 4u(t-1) V$

Reposte: 7.1d, 7.2b, 7.3c, 7.4b, 7.5d, 7.6a, 7.7c, 7.8e, 7.9c,d, 7.10b.

PROBLEMI

Paragrafo 7.2 Circuito RC autonomo

- 7.1 Nel circuito di Figura 7.81 si ha
 $v(t) = 56e^{-200t} \text{ V}$ $t > 0$
 $i(t) = 8e^{-200t} \text{ mA}$, $t > 0$
- (a) Calcolare i valori di R e C .
 (b) Calcolare la costante di tempo τ .
 (c) Determinare il tempo che occorre alla tensione per dimezzarsi rispetto al suo valore iniziale $v(0)$.

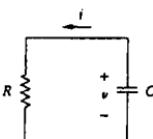


Figura 7.81 Per il Problema 7.1.

- 7.2 Determinare la costante di tempo del circuito RC in Figura 7.82.

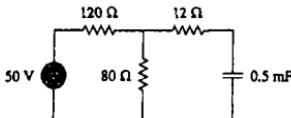


Figura 7.82 Per il Problema 7.2.

- 7.3 Calcolare la costante di tempo per il circuito di Figura 7.83.

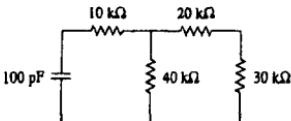


Figura 7.83 Per il Problema 7.3.

- 7.4 L'interruttore nel circuito di Figura 7.84 è rimasto nella posizione A per molto tempo. Si supponga che l'interruttore si sposti instantaneamente da A a B all'istante $t = 0$. Calcolare la tensione v per $t > 0$.

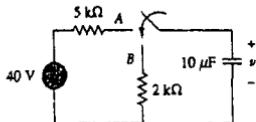


Figura 7.84 Per il Problema 7.4.

- 7.5 Per il circuito di Figura 7.85, calcolare la corrente $i(t)$ per $t > 0$.

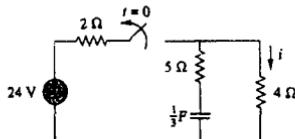


Figura 7.85 Per il Problema 7.5.

- 7.6 L'interruttore in Figura 7.86 è rimasto chiuso per molto tempo, e si apre in $t = 0$. Determinare $v(t)$ per $t \geq 0$.

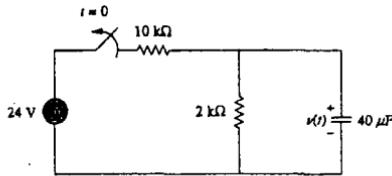


Figura 7.86 Per il Problema 7.6.

- 7.7 Supponere che l'interruttore di Figura 7.87 sia rimasto nella posizione A per molto tempo e si sposti nella posizione B a $t = 0$, calcolare $v_0(t)$ per $t \geq 0$.

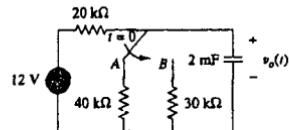


Figura 7.87 Per il Problema 7.7.

- 7.8 Nel circuito in Figura 7.88, se

$$v = 10e^{-4}V \quad e \quad i = 0.2e^{-4}A, \quad t > 0$$

- (a) Determinare R e C .
- (b) Calcolare la costante di tempo.
- (c) Calcolare l'energia iniziale nel condensatore.
- (d) Determinare il tempo necessario al circuito per dissipare il 50 percento dell'energia iniziale.

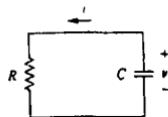


Figura 7.88 Per il Problema 7.8.

- 7.9 L'interruttore di Figura 7.89 apre a $t = 0$. Calcolare v_0 per $t > 0$.

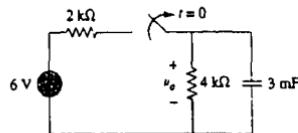


Figura 7.89 Per il Problema 7.9.

- 7.10 Per il circuito di Figura 7.90, calcolare $v_0(t)$ per $t > 0$. Determinare il tempo che occorre alla tensione sul condensatore a ridursi a 1/3 del suo valore a $t = 0$.

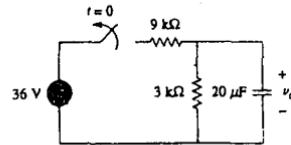


Figura 7.90 Per il Problema 7.10.

Paragrafo 7.3 Circuito RL autonomo

- 7.11 Per il circuito di Figura 7.91, calcolare i_0 per $t > 0$.

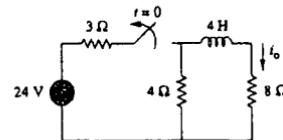


Figura 7.91 Per il Problema 7.11.

- 7.12 L'interruttore nel circuito di Figura 7.92 è rimasto chiuso per molto tempo. In $t = 0$, l'interruttore si apre. Calcolare $i(t)$ per $t > 0$.

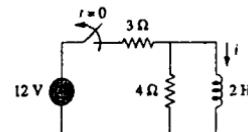


Figura 7.92 Per il Problema 7.12.

- 7.13 Nel circuito di Figura 7.93,

$$\begin{aligned}v(t) &= 20e^{-10t} \text{ V} & t > 0 \\i(t) &= 4e^{-10t} \text{ mA}, & t > 0\end{aligned}$$

- (a) calcolare R , L e τ
 (b) calcolare l'energia dissipata nella resistenza per $0 < t < 0.5 \text{ ms}$.

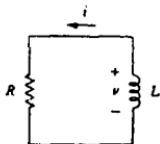


Figura 7.93 Per il Problema 7.13.

- 7.14 Calcolare la costante di tempo per il circuito di Figura 7.94.

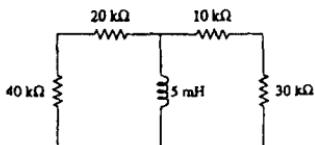


Figura 7.94 Per il Problema 7.14.

- 7.15 Determinare la costante di tempo per ciascuno dei circuiti in Figura 7.95.

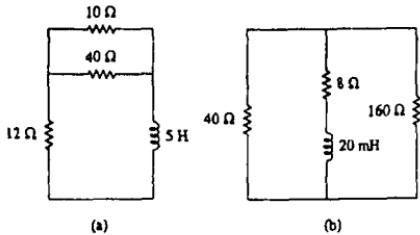


Figura 7.95 Per il Problema 7.15.

- 7.16 Determinare la costante di tempo per ciascuno dei circuiti in Figura 7.96.

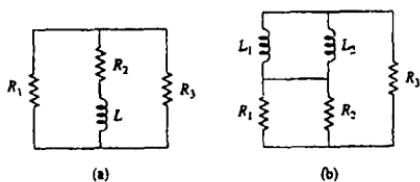


Figura 7.96 Per il Problema 7.16.

- 7.17 Si consideri il circuito di Figura 7.97. Si determini $v_o(t)$ se $i(0) = 2 \text{ A}$ e $v(t) = 0$.

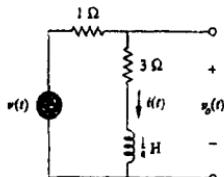


Figura 7.97 Per il Problema 7.17.

- 7.18 Per il circuito in Figura 7.98, determinare $v_o(t)$ quando $i(0) = 1 \text{ A}$ e $v(t) = 0$.

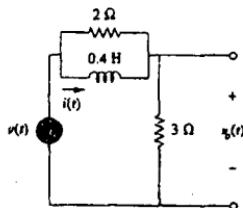


Figura 7.98 Per il Problema 7.18.

- 7.19 Nel circuito di Figura 7.99, determinare $i(t)$ per $t > 0$ se $i(0) = 2 \text{ A}$.

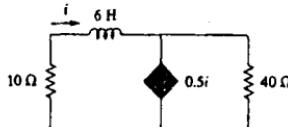


Figura 7.99 Per il Problema 7.19.

- 7.20 Nel circuito di Figura 7.100,

$$\begin{aligned}v &= 120e^{-50t} \text{ V} \\i &= 30e^{-50t} \text{ A}, \quad t > 0\end{aligned}$$

- (a) Determinare L e R .
 (b) Determinare la costante di tempo.
 (c) Calcolare l'energia iniziale nell'induttore.
 (d) Quale frazione dell'energia iniziale viene dissipata in 10 ms?

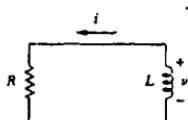


Figura 7.100 Per il Problema 7.20.

- 7.21 Nel circuito di Figura 7.101, determinare il valore di R per il quale l'energia immagazzinata nell'induttore sarà pari a 1 J.

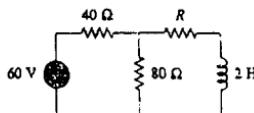


Figura 7.101 Per il Problema 7.21.

- 7.22 Determinare $i(t)$ e $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.102 se $i(0) = 10 \text{ A}$.

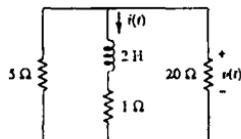


Figura 7.102 Per il Problema 7.22.

- 7.23 Si consideri il circuito in Figura 7.103. Nota $v_o(0) = 2 \text{ V}$, si determinino v_o e v_s per $t > 0$.

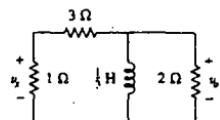


Figura 7.103 Per il Problema 7.23.

Paragrafo 7.4 Funzioni singolari elementari

- 7.24 Esprimere i seguenti segnali in termini di funzioni singolari elementari.

$$(a) v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -5, & t > 0 \end{cases}$$

$$(b) i(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ -10, & 1 < t < 3 \\ 10, & 3 < t < 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

$$(c) x(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ 4-t, & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{altro} \end{cases}$$

$$(d) y(t) = \begin{cases} 2, & t < 0 \\ -5, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

- 7.25 Tracciare i grafici delle seguenti forme d'onda.

$$(a) i(t) = u(t-2) + u(t+2)$$

$$(b) v(t) = r(t) - r(t-3) + 4u(t-5) - 8u(t-8)$$

- 7.26 Esprimere i segnali in Figura 7.104 in termini di funzioni singolari elementari.

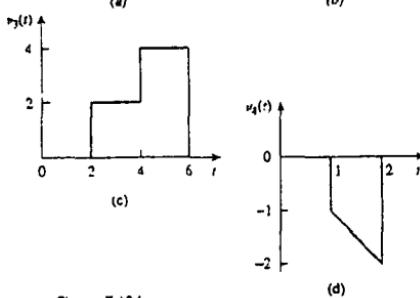
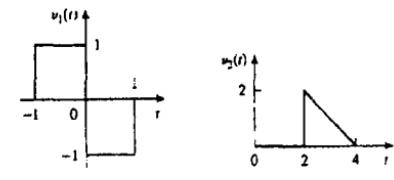


Figura 7.104 Per il Problema 7.26.

- 7.27 Esprimere la tensione $v(t)$ mostrata in Figura 7.105 in termini di funzioni gradino.

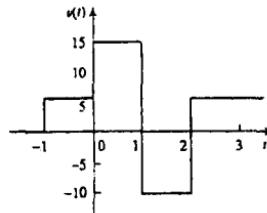


Figura 7.105 Per il Problema 7.27.

- 7.28 Tracciare il grafico della forma d'onda rappresentata da

$$i(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-2) - r(t-2) \\ + r(t-3) + u(t-4)$$

- 7.29 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$(a) x(t) = 10e^{-t}u(t-1)$$

$$(b) y(t) = 10e^{-(t-1)}u(t)$$

$$(c) z(t) = \cos 4t\delta(t-1)$$

- 7.30 Calcolare i seguenti integrali contenenti funzioni impulso:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} 4r^2\delta(t-1) dt$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} 4r^2 \cos 2\pi t\delta(t-0.5) dt$$

- 7.31 Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \delta(t-2) dt$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} [5\delta(t) + e^{-t}\delta(t) + \cos 2\pi t\delta(t)] dt$$

7.32 Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \int_1^t u(\lambda) d\lambda$$

$$(b) \int_0^t r(t-1) dt$$

$$(c) \int_2^3 (t-6)^2 (t-2) dt$$

7.33 La tensione su un induttore da 10 mH è $205(t-2) \text{ mV}$. Determinare la corrente nell'induttore, supponendo l'induttore inizialmente scarico.

7.34 Calcolare le seguenti derivate:

$$(a) \frac{d}{dt} [u(t-1)u(t+1)] \quad (b) \frac{d}{dt} [r(t-6)u(t-2)]$$

$$(c) \frac{d}{dt} [\sin 4\pi u(t-3)]$$

7.35 Calcolare la soluzione delle seguenti equazioni differenziali:

$$(a) \frac{dv}{dt} + 2v = 0, \quad v(0) = -1 \text{ V}$$

$$(b) 2 \frac{di}{dt} - 3i = 0, \quad i(0) = 2A$$

7.36 Risolvere rispetto a v le seguenti equazioni differenziali, soggette alle condizioni iniziali specificate.

$$(a) dv/dt + v = u(t), \quad v(0) = 0$$

$$(b) 2 dv/dt - v = 3u(t), \quad v(0) = -6$$

7.37 Un circuito è descritto da

$$4 \frac{dv}{dt} + v = 10$$

(a) Quale è la costante di tempo del circuito?

(b) Quanto vale $v(\infty)$, il valore finale di v ?

(c) Se $v(0) = 2$, determinare $v(t)$ per $t \geq 0$.

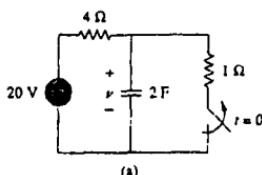
7.38 Un circuito è descritto da

$$\frac{di}{dt} + 3i = 2u(t)$$

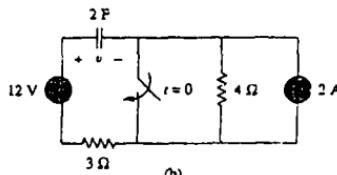
Determinare $i(t)$ per $t > 0$ data $i(0) = 0$.

Paragrafo 7.5 Risposta al gradino di un circuito RC

7.39 Calcolare la tensione del condensatore per $t < 0$ e $t > 0$ per ciascuno dei circuiti in Figura 7.106.



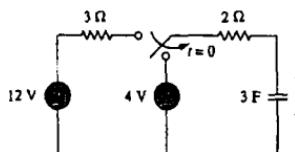
(a)



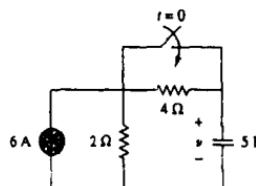
(b)

Figura 7.106 Per il Problema 7.39.

7.40 Determinare la tensione del condensatore per $t < 0$ e $t > 0$ per ciascuno dei circuiti in Figura 7.107.



(a)



(b)

Figura 7.107 Per il Problema 7.40.

7.41 Per il circuito in Figura 7.108, determinare $v(t)$ per $t > 0$.

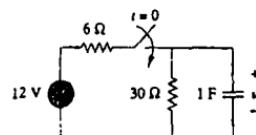


Figura 7.108 Per il Problema 7.41.

7.42 (a) Se l'interruttore in Figura 7.109 è rimasto aperto per molto tempo e viene chiuso in $t = 0$, determinare $v_o(t)$.
 (b) Si supponga che l'interruttore sia rimasto chiuso per molto tempo e venga aperto in $t = 0$. Determinare $v_o(t)$.

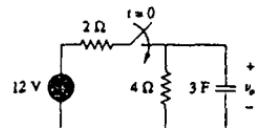


Figura 7.109 Per il Problema 7.42.

7.43 Si consideri il circuito in Figura 7.110. Si determini $i(t)$ per $t < 0$ e $t > 0$.

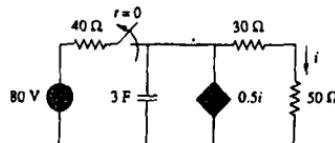


Figura 7.110 Per il Problema 7.43.

- 7.44 L'interruttore in Figura 7.111 è rimasto in posizione *a* per molto tempo. In $t = 0$, si sposta in posizione *b*. Calcolare $v(t)$ per ogni $t > 0$.

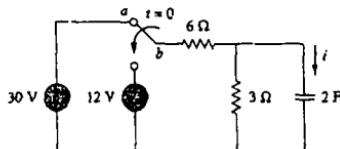


Figura 7.111 Per il Problema 7.44.

- 7.45 Calcolare v_0 per il circuito di Figura 7.112 in cui $v_s = 6u(t)$. Supponere che $v_0(0) = 1$ V.

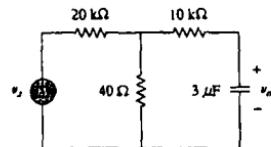


Figura 7.112 Per il Problema 7.45

- 7.46 Nel circuito di Figura 7.113, $i_x(t) = 5u(t)$. Determinare $v(t)$.

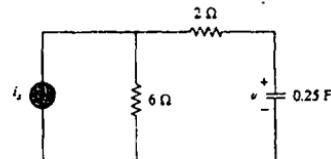


Figura 7.113 Per il Problema 7.46

- 7.47 Determinare $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.114 se $v(0) = 0$.

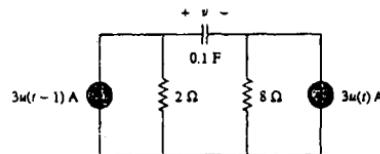


Figura 7.114 Per il Problema 7.47.

- 7.48 Determinare $v(t)$ e $i(t)$ nel circuito di Figura 7.115.

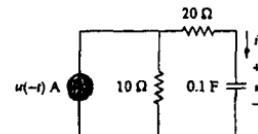


Figura 7.115 Per il Problema 7.48.

- 7.49 Se la forma d'onda in Figura 7.116(a) viene applicata al circuito di Figura 7.116(b), determinare $v(t)$. Supponere $v(0) = 0$.

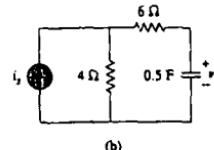
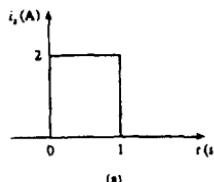


Figura 7.116 Per il Problema 7.49 e la domanda di esercizio 7.10.

- *7.50 Nel circuito di Figura 7.117, determinare i_2 per $t > 0$. Siano $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ e $C = 0.25 \mu\text{F}$.

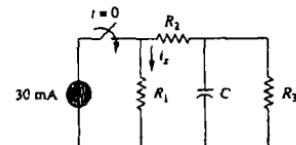


Figura 7.117 Per il Problema 7.50.

Paragrafo 7.6 Risposta al gradino di un circuito *RL*

- 7.51 Invece di applicare il metodo abbreviato utilizzato nel Paragrafo 7.6, si faccia uso della KVL per ottenere la (7.60).

- 7.52 Per il circuito in Figura 7.118, determinare $i(t)$ per $t > 0$.

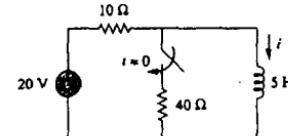
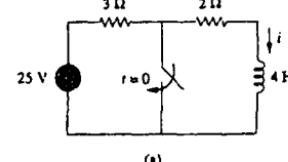


Figura 7.118 Per il Problema 7.52.

- 7.53 Determinare la corrente $i(t)$ dell'induttore per $t < 0$ e $t > 0$ in ciascuno dei circuiti di Figura 7.119.



* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

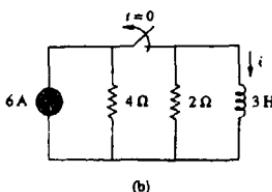
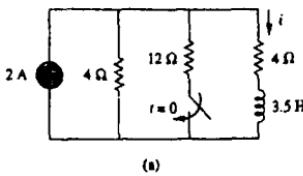
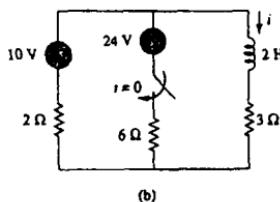


Figura 7.119 Per il Problema 7.53.

- 7.54 Calcolare la corrente nell'induttore per $t < 0$ e $t > 0$ in ciascuno dei circuiti di Figura 7.120.



(a)



(b)

Figura 7.120 Per il Problema 7.54.

- 7.55 Determinare $v(t)$ per $t < 0$ e $t > 0$ nel circuito di Figura 7.121.

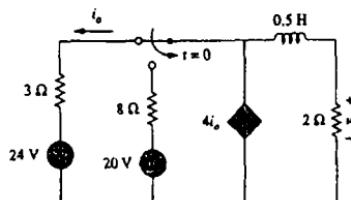


Figura 7.121 Per il Problema 7.55.

- 7.56 Nella rete mostrata in Figura 7.122, determinare $v(t)$ per $t > 0$.

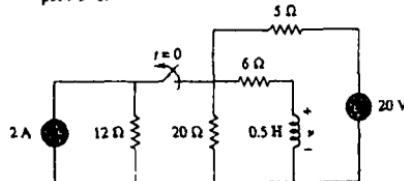


Figura 7.122 Per il Problema 7.56.

- *7.57 Determinare $i_1(t)$ e $i_2(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.123.

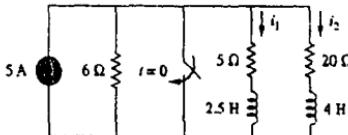


Figura 7.123 Per il Problema 7.57.

- 7.58 Ripetere il Problema 7.17 se $i(0) = 10 \text{ A}$ e $v(t) = 20u(t) \text{ V}$.

- 7.59 Determinare la risposta al gradino $v_p(t)$ all'ingresso $v_i = 12u(t)$ nel circuito di Figura 7.124.

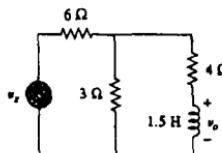


Figura 7.124 Per il Problema 7.59.

- 7.60 Determinare $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.125 se la corrente iniziale nell'induttore è nulla.

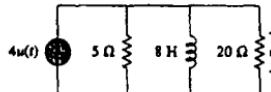


Figura 7.125 Per il Problema 7.60.

- 7.61 Nel circuito di Figura 7.126, i_1 cambia da 5 A a 10 A nell'istante $t = 0$; in altre parole, $i_1 = 5u(-t) + 10u(t)$. Determinare v e i .

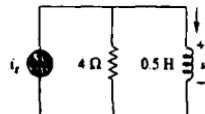


Figura 7.126 Per il Problema 7.61.

- 7.62 Per il circuito in Figura 7.127, calcolare $i(t)$ se $i(0) = 0$.

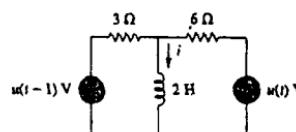


Figura 7.127 Per il Problema 7.62.

- 7.63 Calcolare $v(t)$ e $i(t)$ nel circuito di Figura 7.128.

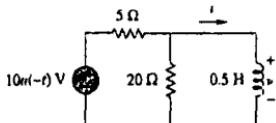


Figura 7.128 Per il Problema 7.63.

- 7.64 Determinare $v_o(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.129.

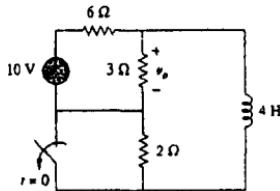


Figura 7.129 Per il Problema 7.64.

- 7.65 Se l'impulso di ingresso di Figura 7.130(a) viene applicato al circuito in Figura 7.130(b), determinare la risposta $i(t)$.

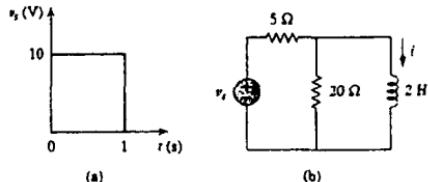


Figura 7.130 Per il Problema 7.65.

Paragrafo 7.7 Circuiti del primo ordine con amplificatori operazionali

- 7.66 Per il circuito con amplificatore operazionale di Figura 7.131, calcolare v_o . Supponere che v_i cambi bruscamente da 0 a 1 V a $t = 0$.

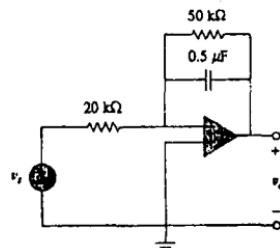


Figura 7.131 Per il Problema 7.66.

- 7.67 Se $v_o(0) = 5$ V, determinare $v_o(t)$ per $t > 0$ nel circuito con operazionale di Figura 7.132. Siano $R = 10 \text{ k}\Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$.

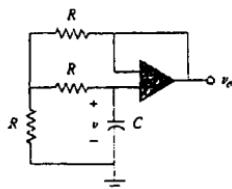


Figura 7.132 Per il Problema 7.67.

- 7.68 Calcolare v_o per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.133.

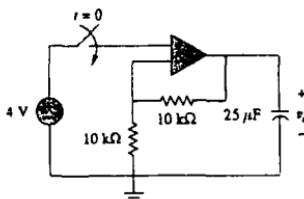


Figura 7.133 Per il Problema 7.68.

- 7.69 Nel circuito con operazionale di Figura 7.134, determinare $v_o(t)$ per $t > 0$.

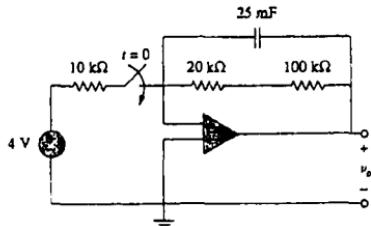


Figura 7.134 Per il Problema 7.69.

- 7.70 Determinare v_o per $t > 0$ quando $v_i = 20 \text{ mV}$ nel circuito con operazionale di Figura 7.135.

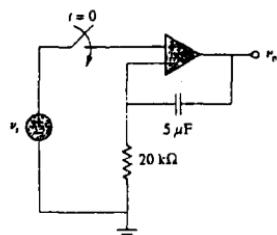


Figura 7.135 Per il Problema 7.70.

- 7.71 Per il circuito con amplificatore operazionale di Figura 7.136, supponi $v(0) = 0$ e $v_s = 3 \text{ V}$. Calcolare $v(t)$ per $t > 0$.

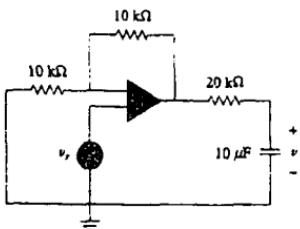


Figura 7.136 Per il Problema 7.71.

- 7.72 Determinare i_o nel circuito con operazionale di Figura 7.137. Supponi $v(0) = -2 \text{ V}$, $R = 10 \text{ kΩ}$ e $C = 10 \mu\text{F}$.

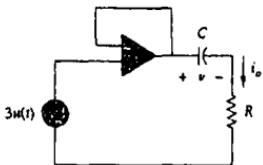


Figura 7.137 Per il Problema 7.72.

- 7.73 Nel circuito con operazionale di Figura 7.138, siano $R_1 = 10 \text{ kΩ}$, $R_f = 20 \text{ kΩ}$, $C = 20 \mu\text{F}$ e $v(0) = 1 \text{ V}$. Determinare v_o .

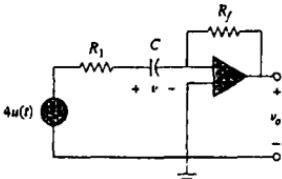


Figura 7.138 Per il Problema 7.73.

- 7.74 Determinare $v_o(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 7.139. Sia $i_s = 10v_o(t) \mu\text{A}$ e si supponga che il condensatore sia inizialmente scarico.

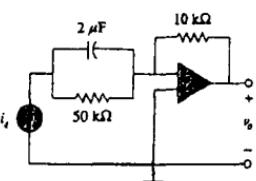


Figura 7.139 Per il Problema 7.74.

- 7.75 Nel circuito di Figura 7.140, determinare v_o e i_o , date $v_s = 4u(t) \text{ V}$ e $v(0) = 1 \text{ V}$.

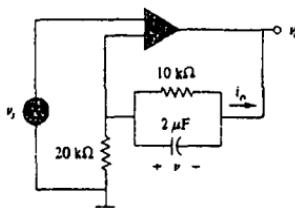


Figura 7.140 Per il Problema 7.75.

Paragrafo 7.8 Analisi in transitorio con PSpice



- 7.76 Ripetere il Problema 7.49 usando PSpice.

- 7.77 L'interruttore in Figura 7.141 si apre all'istante $t = 0$. Utilizzare PSpice per determinare $v(t)$ per $t > 0$.

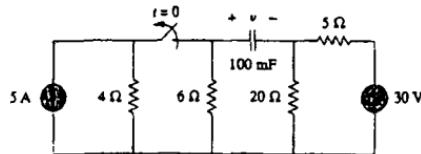


Figura 7.141 Per il Problema 7.77.

- 7.78 L'interruttore in Figura 7.142 si sposta dalla posizione a a b in $t = 0$. Utilizzare PSpice per calcolare $i(t)$ per $t > 0$.

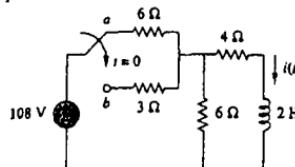


Figura 7.142 Per il Problema 7.78.

- 7.79 Nel circuito di Figura 7.143, l'interruttore è rimasto in posizione a per molto tempo ma si sposta instantaneamente nella posizione b per $t = 0$. Determinare $i_o(t)$.

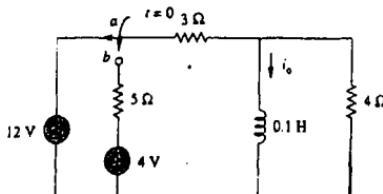


Figura 7.143 Per il Problema 7.79.

- 7.80 Nel circuito di Figura 7.144, si supponga che l'interruttore sia rimasto in posizione *a* per molto tempo; determinare:

- $i_1(0)$, $i_2(0)$ e $v_o(0)$
- $i_L(t)$
- $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ e $v_o(\infty)$.

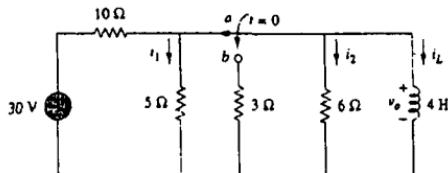


Figura 7.144 Per il Problema 7.80.

- 7.81 Ripetere il Problema 7.65 usando PSpice.

Paragrafo 7.9 Applicazioni

- 7.82 In un progetto per un circuito di elaborazione dei segnali, è necessario un condensatore da $100 \mu F$ per realizzare una costante di tempo di 3 ms. Quale è il valore del resistore per il circuito?

- 7.83 Un circuito RC è formato dal collegamento serie di un generatore da 120 V, un interruttore, un resistore da 34 MΩ e un condensatore da $15 \mu F$. Il circuito viene utilizzato per stimare la velocità di un cavallo che corre su una pista lunga 4 km. L'interruttore si chiude alla partenza del cavallo e si apre quando il cavallo attraversa la linea del traguardo. Se il condensatore si carica fino ad una tensione di 85.6 V, calcolare la velocità del cavallo.

- 7.84 La resistenza di una bobina da 160 mH è 8 Ω. Calcolare il tempo necessario affinché la corrente nella bobina raggiunga il 60 percento del suo valore finale a partire dall'istante in cui viene applicata tensione alla bobina.

- 7.85 La Figura 7.145 mostra un semplice circuito oscillatore a riassettamento. La lampada al neon si accende quando la sua tensione raggiunge i 75 V e si spegne quando la tensione scende a 30 V. La sua resistenza è 120 Ω quando è accesa ed è infinitamente grande quando è spenta.

- (a) Per quanto tempo la lampada rimane accesa durante una scarica del condensatore?

- (b) Quale è l'intervallo di tempo tra gli impulsi luminosi?

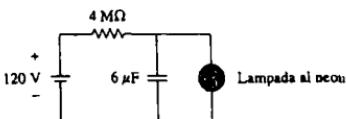


Figura 7.145 Per il Problema 7.85.

- 7.86 La Figura 7.146 mostra un circuito per la regolazione dell'intervallo di tempo durante il quale viene applicata tensione agli elettrodi di una macchina saldatrice. La durata dell'intervallo è pari al tempo necessario al condensatore per caricarsi da 0 a 8 V. Quali sono i valori massimo e minimo della durata al variare della resistenza del resistore variabile?

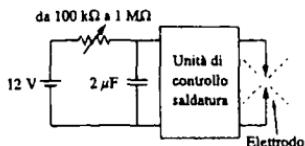


Figura 7.146 Per il Problema 7.86.

- 7.87 Un generatore costante da 120 V alimenta un motore la cui bobina ha una induttanza di 50 H e una resistenza di 100 Ω. In parallelo al motore viene collegato un resistore di scarica di campo da 400 Ω al fine di evitare danni al motore, come mostrato in Figura 7.147. Il sistema si trova a regime. Determinare la corrente che attraversa il resistore di scarica 100 ms dopo lo scatto dell'interruttore.

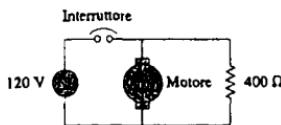
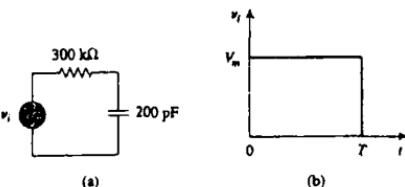


Figura 7.147 Per il Problema 7.87.

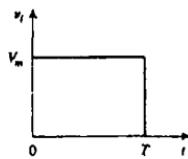
PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 7.88 Il circuito in Figura 7.148(a) può, con un certo grado di approssimazione, essere considerato un derivatore o un integratore, a seconda che l'uscita venga prelevata sul resistore o sul condensatore, ed anche a seconda del valore della costante di tempo $\tau = RC$ e della durata T dell'impulso di ingresso in Figura 7.148(b). Il circuito è un derivatore se $\tau \ll T$, ad esempio $\tau < 0.1T$, oppure un integratore se $\tau \gg T$, ad esempio $\tau > 10T$.

- Quale è la durata minima dell'impulso di ingresso che permette di avere una uscita di tipo derivatore ai capi del condensatore?
- Se l'uscita deve essere l'integrale dell'ingresso, quale è il valore massimo per la durata dell'impulso di ingresso?



(a)



(b)

Figura 7.148 Per il Problema 7.88.

- 7.89 Un circuito RL può essere utilizzato come derivatore se l'uscita viene prelevata sull'induttore e $\tau \ll T$ (ad

scorpio $\tau < 0.17$), dove T è la durata dell'impulso in ingresso. Se R è fissato al valore $200 \text{ k}\Omega$, determinare il valore massimo ammissibile per L affinché il circuito possa derivare un impulso con $T = 10\mu\text{s}$.

- 7.90 Una sonda attenuatrice da utilizzare con un oscilloscopio è progettata in modo da ridurre l'ampiezza della tensione v_i di un fattore 10. Come mostra la Figura 7.149, l'oscilloscopio ha resistenza interna R_s e capacità interna C_s , mentre la sonda ha resistenza interna R_p . Se R_p è fissa a $6 \text{ M}\Omega$, determinare R_s e C_s in modo che il circuito presenti una costante di tempo di $15 \mu\text{s}$.

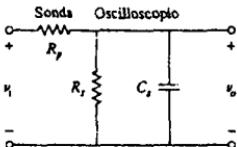


Figura 7.149 Per il Problema 7.90.

- 7.91 Il circuito in Figura 7.150 viene utilizzato da uno studente di biologia per riprodurre l'esperimento della "rana che scalcia". Lo studente nota che la rana scalcia leggermente quando l'interruttore viene chiuso, e scalcia invece violentemente per 5 s quando l'interruttore viene riaperto. Rappresentando la rana come un resistore, se ne calcoli la resistenza. Si supponga che siano necessari 10 mA per fare sì che la rana scalci violentemente.

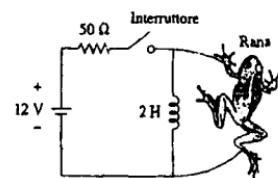


Figura 7.150 Per il Problema 7.91.

- 7.92 Per muovere il punto luminoso di un tubo a raggi catodici attraverso lo schermo ci vuole una tensione che cresce linearmente nel tempo fra le due piastre di deflessione, come mostrato in Figura 7.151. Sapendo che la capacità delle piastre è 4 nF , tracciare il grafico della corrente nelle piastre di deflessione.

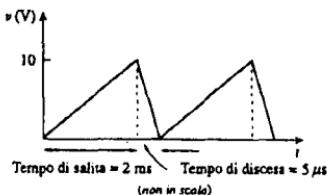


Figura 7.151 Per il Problema 7.92.

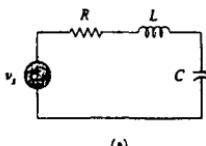
CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE

8.1 INTRODUZIONE

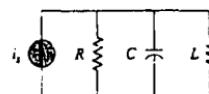
Nel capitolo precedente sono stati presi in considerazione circuiti contenenti un solo elemento dinamico (un condensatore o un induttore). Tali circuiti sono detti del primo ordine perché del primo ordine sono le equazioni differenziali che li descrivono. In questo capitolo verranno invece illustrati circuiti contenenti due elementi dinamici. Questi circuiti sono detti del *secondo ordine* perché le loro risposte sono descritte da equazioni differenziali che contengono derivate seconde.

Esempi tipici di circuiti del secondo ordine sono i circuiti *RLC*, nei quali sono presenti tre tipi di elementi passivi. Due esempi sono mostrati nelle Figure 8.1(a) e (b). Altri esempi di circuiti del secondo ordine sono i circuiti *RC* e *RL*, come mostrato in Figure 8.1(c) e (d). Dagli esempi di Figura 8.1 risulta evidente che un circuito del secondo ordine può avere due elementi dinamici dello stesso tipo o di tipo diverso (ammesso che gli elementi dello stesso tipo non possano essere rappresentati con un singolo elemento equivalente). Anche un circuito contenente un amplificatore operazionale e due elementi dinamici può essere un circuito del secondo ordine. Come nel caso dei circuiti del primo ordine, un circuito del secondo ordine può contenere un numero qualsiasi di resistori e generatori dipendenti e indipendenti.

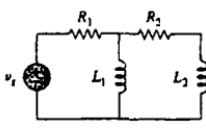
Un circuito del secondo ordine è caratterizzato da una equazione differenziale del secondo ordine.
Esso contiene resistori e l'equivalente di due elementi dinamici.



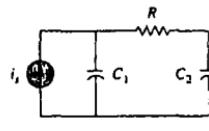
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.1
Esempi di circuiti del secondo ordine:
(a) *RLC* serie, (b) *RLC* parallelo, (c) *RL* (d) *RC*.

L'analisi dei circuiti del secondo ordine verrà trattata in maniera simile a quella dei circuiti del primo ordine. Verranno dapprima considerati circuiti la cui unica eccitazione sono le condizioni iniziali sugli elementi dinamici. Circuiti di questo tipo possono contenere generatori dipendenti ma non generatori indipendenti. La risposta fornita da

questi circuiti privi di generatori indipendenti sarà detta risposta naturale. Di seguito verranno poi presentati circuiti eccitati da generatori indipendenti. Questi circuiti forniscono sia una risposta naturale che una risposta forzata. In questo capitolo verranno presi in considerazione soltanto generatori indipendenti costanti nel tempo. Il caso di generatori con forma d'onda sinusoidale o esponenziale viene rimandato ai capitoli successivi.

Si inizia con la presentazione del metodo di calcolo delle condizioni iniziali per le variabili circuituali e le loro derivate. Vengono poi presi in considerazione i circuiti *RLC* serie e parallelo, simili a quelli mostrati nella Figura 8.1, per i due casi di eccitazione: condizioni iniziali sugli elementi dinamici oppure ingressi a gradino. Vengono poi esaminati altri tipi di circuiti del secondo ordine, compresi i circuiti con operazionali. Viene anche illustrata l'analisi dei circuiti del secondo ordine con *PSpice*. Come tipiche applicazioni dei circuiti trattati in questo capitolo vengono infine presentati il sistema di accensione di un'automobile e un circuito di condizionamento del segnale. Altre importanti applicazioni, quali per esempio i circuiti risonanti e i filtri, verranno illustrate nel capitolo 14.

8.2 CALCOLO DI CONDIZIONI INIZIALI E FINALI

La difficoltà più grande incontrata dagli studenti nell'analisi dei circuiti del secondo ordine consiste probabilmente nella determinazione delle condizioni iniziali e finali delle variabili circuituali. È solitamente abbastanza agevole determinare i valori iniziali e finali di v e i , ma spesso risulta difficile determinare i valori iniziali delle loro derivate: dv/dt e di/dt . Per questa ragione, il presente paragrafo è specificamente dedicato alla determinazione di $v(0)$, $i(0)$, $dv(0)/dt$, $di(0)/dt$, $i(\infty)$ e $v(\infty)$. Salvo avviso contrario, nel presente capitolo, v denota la tensione su un condensatore mentre i denota la corrente in un induttore.

Nella determinazione delle condizioni iniziali vanno tenuti presente due punti fondamentali: innanzitutto – come sempre nell'analisi dei circuiti – va prestata particolare attenzione alla polarità della tensione $v(t)$ sui condensatori e alla direzione di riferimento della corrente $i(t)$ degli induttori. Va sempre tenuto presente che v e i sono definite secondo la convenzione di segno degli utilizzatori (si vedano le Figure 6.3 e 6.23).

In secondo luogo, va ricordato che la tensione di un condensatore è sempre una funzione continua del tempo

$$v(0^+) = v(0^-) \quad (8.1a)$$

e che anche la corrente in un induttore è sempre una funzione continua del tempo

$$i(0^+) = i(0^-) \quad (8.1b)$$

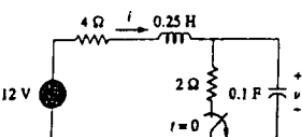
dove $t = 0^-$ denota un istante appena prima di una commutazione e $t = 0^+$ è l'istante immediatamente successivo all'evento, supponendo che l'evento di commutazione abbia luogo in $t = 0$.

Nella ricerca delle condizioni iniziali, perciò, ci si concentra dapprima su quelle variabili che non possono subire variazioni istantanee, le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori, applicando la (8.1). Gli esempi che seguono illustrano meglio il procedimento.

Esempio 8.1

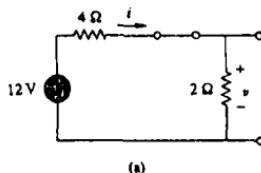
L'interruttore nella Figura 8.2 è rimasto chiuso per molto tempo. Si apre in $t = 0$. Determinare: (a) $i(0^+)$, $v(0^+)$, (b) $di(0^+)/dt$, $dv(0^+)/dt$, (c) $i(\infty)$, $v(\infty)$.

Figura 8.2
Per l'Esempio 8.1.

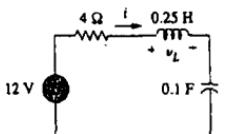


Soluzione: (a) L'interruttore è rimasto chiuso per molto tempo prima di $t = 0$; il circuito ha ormai raggiunto quando il regime stazionario in $t = 0$. In regime stazionario, l'induttore si comporta come un corto circuito, mentre il condensatore si comporta come un circuito aperto; in $t = 0^-$ si ha quindi il circuito di Figura 8.3(a). Da esso si ricava,

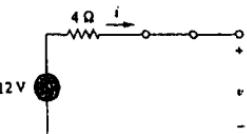
$$i(0^-) = \frac{12}{4+2} = 2 \text{ A}, \quad v(0^-) = 2i(0^-) = 4 \text{ V}$$



(a)



(b)



(c)

Poiché la corrente nell'induttore e la tensione sul condensatore non possono avere variazioni istantanee,

$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ A}, \quad v(0^+) = v(0^-) = 4 \text{ V}$$

(b) In $t = 0^+$, l'interruttore è aperto; il circuito equivalente è mostrato nella Figura 8.3(b). Nel condensatore e nell'induttore scorre la stessa corrente, quindi

$$i_C(0^+) = i(0^+) = 2 \text{ A}$$

Poiché $C \frac{dv}{dt} = i_C$, $dv/dt = i_C/C$, e

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{2}{0.1} = 20 \text{ V/s}$$

Allo stesso modo, poiché $L \frac{di}{dt} = v_L$, $di/dt = v_L/L$. Si determina ora v_L applicando la KVL alla maglia in Figura 8.3(b). Il risultato è

$$-12 + 4i(0^+) + v_L(0^+) + v(0^+) = 0$$

cioè

$$v_L(0^+) = 12 - 8 - 4 = 0$$

In definitiva,

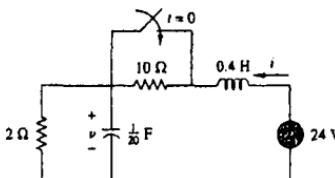
$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{0}{0.25} = 0 \text{ A/s}$$

(c) Per $t > 0$, il circuito subisce un transitorio. Ma quando $t \rightarrow \infty$, il circuito raggiunge di nuovo il regime stazionario. L'induttore si comporta come un corto circuito e il condensatore come un circuito aperto, così che il circuito diventa quello mostrato nella Figura 8.3(c), dal quale si ricava

$$i(\infty) = 0 \text{ A}, \quad v(\infty) = 12 \text{ V}$$

Esercizio 8.1 L'interruttore in Figura 8.4 è rimasto aperto per molto tempo e si è chiuso a $t = 0$. Determinare: (a) $i(0^+)$, $v(0^+)$, (b) $di(0^+)/dt$, $dv(0^+)/dt$, (c) $i(\infty)$, $v(\infty)$.

Figura 8.4
Per l'Esercizio 8.1.

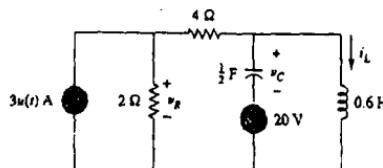


Risposta (a) 2 A, 4 V, (b) 50 A/s, 0 V/s, (c) 12 A, 24 V.

Esempio 8.2

Nel circuito di Figura 8.5, calcolare: (a) $i_L(0^+)$, $v_C(0^+)$, $v_R(0^+)$, (b) $di_L(0^+)/dt$, $dv_C(0^+)/dt$, $dv_R(0^+)/dt$, (c) $i_L(\infty)$, $v_C(\infty)$, $v_R(\infty)$.

Figura 8.5
Per l'Esempio 8.2.



Soluzione: (a) Per $t < 0$, $3u(t) = 0$. In $t = 0^-$, poiché il circuito ha raggiunto il regime stazionario, l'induttore può essere sostituito con un corto circuito, mentre il condensatore viene sostituito da un circuito aperto, come mostrato in Figura 8.6(a). Da questa figura si ottiene

$$i_L(0^-) = 0, \quad v_R(0^-) = 0, \quad v_C(0^-) = -20 \text{ V} \quad (8.2.1)$$

Nonostante non siano richieste le derivate di queste grandezze in $t = 0^-$, è evidente che esse sono tutte nulle, perché il circuito si trova in regime stazionario.

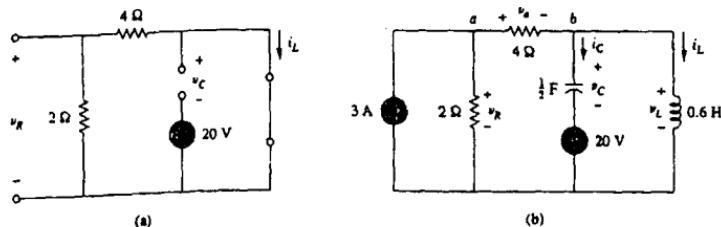
Per $t > 0$, $3u(t) = 3$, e il circuito è ora equivalente a quello in Figura 8.6(b). Poiché la corrente nell'induttore e la tensione sul condensatore non possono subire variazioni istantanee,

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0, \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = -20 \text{ V} \quad (8.2.2)$$

Anche se la tensione sul resistore da 4Ω non è richiesta, essa verrà utilizzata per applicare la KVL e la KCL, e sarà indicata con v_o . Applicando la KCL al nodo a nella Figura 8.6(b) si ottiene

$$3 = \frac{v_R(0^+)}{2} + \frac{v_o(0^+)}{4} \quad (8.2.3)$$

Figura 8.6
Circuito di Figura 8.5 per:
(a) $t = 0^-$, (b) $t = 0^+$.



Applicando la KVL all'anello intermedio in Figura 8.6(b) si ha

$$-v_R(0^+) + v_o(0^+) + v_C(0^+) + 20 = 0 \quad (8.2.4)$$

Poiché $v_C(0^+) = -20 \text{ V}$ dalla (8.2.2), la (8.2.4) implica che

$$v_R(0^+) = v_o(0^+) \quad (8.2.5)$$

Dalle (8.2.3) e (8.2.5) si ottiene

$$v_R(0^+) = v_o(0^+) = 4 \text{ V} \quad (8.2.6)$$

(b) Essendo $L \frac{di_L}{dt} = v_L$,

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L}$$

Ma l'applicazione della KVL all'anello di destra nella Figura 8.6(b) fornisce

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) + 20 = 0$$

Perciò,

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \quad (8.2.7)$$

In maniera simile, poiché $C \frac{dv_C}{dt} = i_C$, allora $\frac{dv_C}{dt} = i_C/C$. Si applica la KCL al nodo b in Figura 8.6(b) per ottenere i_C :

$$\frac{v_o(0^+)}{4} = i_C(0^+) + i_L(0^+) \quad (8.2.8)$$

Essendo $v_o(0^+) = 4$ e $i_L(0^+) = 0$, $i_C(0^+) = 4/4 = 1 \text{ A}$. Allora

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ V/s} \quad (8.2.9)$$

Per ottenere $d\nu_R(0^-)/dt$, si applica la KCL al nodo *a* e si ricava

$$3 = \frac{\nu_R}{2} + \frac{\nu_a}{4}$$

Derivando entrambi i membri e ponendo $t = 0^+$ si ottiene

$$0 = 2 \frac{d\nu_R(0^-)}{dt} + \frac{d\nu_a(0^+)}{dt} \quad (8.2.10)$$

Si applica inoltre la KVL all'anello intermedio nella Figura 8.6(b) e si ottiene

$$-\nu_R + \nu_C + 20 + \nu_a = 0$$

Anche qui, derivando entrambi i membri e ponendo $t = 0^+$

$$-\frac{d\nu_R(0^+)}{dt} + \frac{d\nu_C(0^+)}{dt} + \frac{d\nu_a(0^+)}{dt} = 0$$

Sostituendo $d\nu_C(0^+)/dt = 2$ si ha infine

$$\frac{d\nu_R(0^+)}{dt} = 2 + \frac{d\nu_a(0^+)}{dt} \quad (8.2.11)$$

Dalle (8.2.10) e (8.2.11) si ottiene

$$\frac{d\nu_R(0^+)}{dt} = \frac{2}{3} \text{ V/s}$$

È anche possibile determinare $d\nu_R(0^+)/dt$ nonostante non sia richiesta. Poiché $\nu_R = 2i_R$,

$$\frac{d\nu_R(0^+)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\nu_R(0^+)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ A/s}$$

(c) Quando $t \rightarrow \infty$, il circuito raggiunge il regime stazionario. Si ha allora il circuito equivalente di Figura 8.6(a), con in più il generatore di corrente da 3 A che ora è attivo. Con la formula del partitore di corrente,

$$i_L(\infty) = \frac{2}{2+4} 3 \text{ A} = 1 \text{ A} \quad (8.2.12)$$

$$\nu_R(\infty) = \frac{4}{2+4} 3 \text{ A} \times 2 = 4 \text{ V}, \quad \nu_C(\infty) = -20 \text{ V}$$

Esercizio 8.2 Nel circuito in Figura 8.7, determinare: (a) $i_L(0^+)$, $\nu_C(0^+)$, $\nu_R(0^+)$, (b) $di_L(0^+)/dt$, $d\nu_C(0^+)/dt$, $dv_R(0^+)/dt$, (c) $i_L(\infty)$, $\nu_C(\infty)$, $\nu_R(\infty)$.

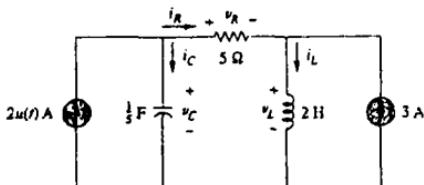


Figura 8.7
Per l'Esercizio 8.2.

Risposta (a) -3 A , 0 , 0 , (b) 0 , 10 V/s , 0 , (c) -1 A , 10 V , 10 V .

8.3 CIRCUITO RLC SERIE AUTONOMO

La comprensione della risposta naturale di un circuito *RLC* serie costituisce un prerequisito indispensabile per lo studio del progetto dei filtri e dei circuiti per le telecomunicazioni. Si consideri il circuito *RLC* serie mostrato in Figura 8.8. Il circuito risulta eccitato dall'energia iniziale immagazzinata nel condensatore e nell'induttore. Tale energia è rappresentata dalla tensione iniziale ν_0 del condensatore e dalla corrente iniziale i_0 nell'induttore. Per questo motivo, in $t = 0$,

$$v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i \, dt = V_0 \quad (8.2a)$$

$$i(0) = I_0 \quad (8.2b)$$

Applicando la KVL alla maglia di Figura 8.8,

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = 0 \quad (8.3)$$

Per eliminare l'integrale, si deriva rispetto al tempo t e si riordinano i termini:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (8.4)$$

Questa è una *equazione differenziale del secondo ordine*, ed è la ragione per cui i circuiti *RLC* di questo capitolo sono detti circuiti del secondo ordine. Per poter risolvere la (8.4) è necessario conoscere due condizioni iniziali, quali per esempio il valore iniziale di i e della sua derivata prima, oppure i valori iniziali di i e di v . Il valore iniziale di i è dato dalla (8.2b). Si può ricavare il valore iniziale della derivata di i dalle (8.2a) e (8.3);

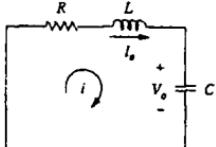


Figura 8.8
Circuito *RLC* serie autonomo

$$Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + V_0 = 0$$

cioè

$$\frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L} (RI_0 + V_0) \quad (8.5)$$

Con le due condizioni iniziali (8.2b) e (8.5), è possibile risolvere la (8.4). L'esperienza nella risoluzione dei circuiti del primo ordine nel capitolo precedente suggerisce una soluzione in forma esponenziale. Si pone allora

$$i = Ae^{st} \quad (8.6)$$

dove A e s sono costanti da determinare. Sostituendo la (8.6) nella (8.4) e calcolando le derivate indicate, si ottiene

$$As^2 e^{st} + \frac{AR}{L} s e^{st} + \frac{A}{LC} e^{st} = 0$$

o anche

$$Ae^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (8.7)$$

Poiché $i = Ae^{st}$ è la soluzione che si sta cercando, solo l'espressione tra parentesi può risultare nulla:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.8)$$

Questa equazione algebrica di secondo grado è detta *equazione caratteristica* dell'*equazione differenziale* (8.4), perché le sue radici denotano il comportamento di i . Le due radici della (8.8) sono

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.9a)$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.9b)$$

In maniera più compatta

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (8.10)$$

dove

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.11)$$

Le radici s_1 e s_2 sono chiamate *frequenze naturali*, perché sono associate alla risposta naturale del circuito; ω_0 è detta *frequenza di risonanza* o anche, a volte, *frequenza naturale non smorzata*, espressa in radianti al secondo (rad/s); α è detto *fattore di smorzamento*. In termini di α e ω_0 , la (8.8) si può scrivere

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad (8.8a)$$

Le variabili s e ω_0 sono quantità importanti che verranno utilizzate in tutto il resto del libro.

I due valori di s nella (8.10) indicano che esistono due possibili soluzioni per i , ciascuna delle quali ha la forma assunta nella (8.6); cioè,

$$i_1 = A_1 e^{s_1 t}, \quad i_2 = A_2 e^{s_2 t} \quad (8.12)$$

Poiché la (8.4) è una equazione lineare, qualunque combinazione lineare delle due soluzioni i_1 e i_2 è pure una soluzione della (8.4). La soluzione completa della (8.4) è quindi espressa da una combinazione lineare di i_1 e i_2 : la risposta naturale del circuito RLC serie è quindi

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (8.13)$$

in cui le costanti A_1 e A_2 devono essere determinate dai valori iniziali $i(0)$ e $di(0)/dt$ nelle (8.2b) e (8.5).

Dalla (8.10), si deduce che esistono tre tipi di soluzione:

1. Se $\alpha > \omega_0$, si ha il caso *sovramorzato*.
2. Se $\alpha = \omega_0$, si ha il caso di *smorzamento critico*.
3. Se $\alpha < \omega_0$, si ha il caso *sottosmorzato*.

Si considererà ora ciascuno dei tre casi separatamente.

Caso sovramorzato ($\alpha > \omega_0$)

Dalle (8.9) e (8.10), $\alpha > \omega_0$ quando $C > 4L/R^2$. Quando ciò accade, entrambe le radici s_1 e s_2 sono reali e negative. La risposta è

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (8.14)$$

che decresce e tende a zero al crescere di t . La figura 8.9(a) illustra una tipica risposta sovramorzata.

Caso di smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

Quando $\alpha = \omega_0$, $C = 4L/R^2$, e

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L} \quad (8.15)$$

Per questo caso, la (8.13) fornisce

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = A_3 e^{-\alpha t}$$

con $A_3 = A_1 + A_2$. Questa non può essere la soluzione, perché le due condizioni iniziali non possono essere entrambe soddisfatte dalla singola costante A_3 . La forma della soluzione che si è assunta non può quindi essere valida per il caso di smorzamento critico. Se si riprende in esame la (8.4), quando $\alpha = \omega_0 = R/2L$ essa diventa

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

o anche

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) + \alpha \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) = 0 \quad (8.16)$$

Se si pone

$$f = \frac{di}{dt} + \alpha i \quad (8.17)$$

allora la (8.16) diventa

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine la cui soluzione è $f = A_1 e^{-\alpha t}$, dove A_1 è una costante. La (8.17) diventa allora

$$\frac{di}{dt} + \alpha i = A_1 e^{-\alpha t}$$

cioè

$$e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha i = A_1 \quad (8.18)$$

Questa può essere scritta come

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} i) = A_1 \quad (8.19)$$

Integrando entrambi i membri si ottiene

$$e^{\alpha t} i = A_1 t + A_2$$

e anche

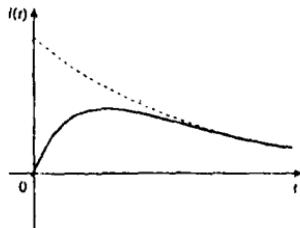
$$i = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} \quad (8.20)$$

dove A_2 è una nuova costante. La risposta naturale del circuito criticamente smorzato è allora la somma di due termini: un esponenziale negativo e un esponenziale negativo moltiplicato per un termine lineare,

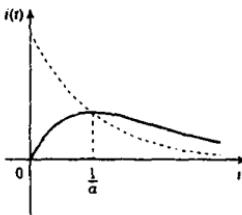
$$i(t) = (A_2 + A_1 t) e^{-\alpha t} \quad (8.21)$$

Figura 8.9

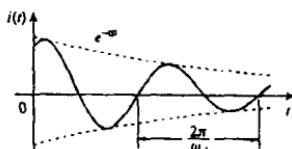
- (a) Risposta sovrasmorzata.
- (b) risposta criticamente smorzata.
- (c) risposta sottosmorzata.



(a)



(b)



(c)

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)

Per $\alpha < \omega_0$, $C < 4L/R^2$. Le radici possono essere scritte nella forma

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d \quad (8.22a)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d \quad (8.22b)$$

dove $j = \sqrt{-1}$ e $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Sia ω_0 che ω_d sono frequenze naturali perché contribuiscono alla determinazione della risposta naturale; mentre ω_0 è spesso detta *frequenza naturale non smorzata*, ω_d è chiamata *frequenza naturale smorzata*. La risposta naturale è

$$\begin{aligned} i(t) &= A_1 e^{-(\alpha-j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha+j\omega_d)t} \\ &= e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Usando le identità di Eulero,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (8.24)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t}[A_1(\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) + A_2(\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \end{aligned} \quad (8.25)$$

Sostituendo le costanti $(A_1 + A_2)$ e $j(A_1 - A_2)$ con le costanti B_1 e B_2 , si può scrivere

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (8.26)$$

A causa della presenza delle funzioni seno e coseno, risulta chiaro che la risposta naturale per questo caso è smorzata secondo un esponenziale e ha natura oscillatoria. Essa ha una costante di tempo pari a $1/\alpha$, e un periodo $T = 2\pi/\omega_d$. La figura 8.9(c) illustra una tipica risposta sottosmorzata.

Una volta ottenuta la corrente nell'induttore $i(t)$ per il circuito *RLC* serie, come si è visto, le altre grandezze circuituali, quali per esempio le tensioni dei singoli elementi, possono essere calcolate facilmente. Per esempio, la tensione del resistore è $v_R = R_i$, e la tensione sull'induttore è $v_L = L di/dt$. La corrente dell'induttore $i(t)$ è stata scelta come variabile fondamentale, da determinare per prima, per poter trarre vantaggio dalla (8.1b).

A conclusione di questo paragrafo si vogliono segnalare le seguenti interessanti proprietà di una rete *RLC*:

- Il comportamento della rete *RLC* è caratterizzato dal concetto di *smorzamento*, che consiste nella graduale perdita dell'energia iniziale immagazzinata, come evidenziato dalla diminuzione progressiva nell'ampiezza della risposta. L'effetto di smorzamento è dovuto alla presenza della resistenza R . Il fattore di smorzamento α determina la rapidità con la quale la risposta viene smorzata. Se $R = 0$, allora $\alpha = 0$, e si ha un circuito *LC* con $1/\sqrt{LC}$ come frequenza naturale non smorzata. Poiché $\alpha < \omega_0$ in questo caso, la risposta non è soltanto priva di smorzamento ma anche oscillatoria. Il circuito è detto *senza perdite*, perché l'elemento dissipatore che causerebbe lo smorzamento (R), è assente. Scegliendo opportunamente il valore di R , la risposta può essere resa non smorzata, sovrasmorzata, criticamente smorzata, sottosmorzata.
- La risposta oscillatoria è resa possibile dalla presenza di due tipi di elementi dinamici. La presenza di L e di C consente uno scambio continuo di energia tra i due. Anche l'oscillazione smorzata esibita dalla risposta sottosmorzata è dovuta alla proprietà dei due elementi conservativi L e C di trasferire energia dall'uno all'altro ripetutamente.
- Si osservi dalla Figura 8.9 che le forme d'onda delle risposte sono diverse fra loro. In generale, è difficile distinguere dalle forme d'onda la differenza tra la risposta sovrasmorzata e quella a smorzamento critico. Il caso di smorzamento critico rappresenta l'elemento di separazione tra i casi sottosmorzato e sovrasmorzato, ed è caratterizzato dalla massima velocità di decadimento. A partì di condizioni iniziali, la risposta sovrasmorzata si annulla più tardi delle altre, perché è necessario un intervallo di tempo maggiore per dissipare l'energia iniziale immagazzinata. Se si desidera la risposta più veloce, senza causare oscillazioni, la scelta giusta è il circuito a smorzamento critico.

Esempio 8.3

In Figura 8.8, $R = 4 \Omega$, $L = 4 \text{ H}$ e $C = 1/4 \text{ F}$. Calcolare le radici caratteristiche del circuito. La risposta naturale è sovramorzata, sottosmorzata o a smorzamento critico?

Soluzione: Si calcolano dapprima

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2(4)} = 5, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{4}}} = 1$$

Le radici sono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5 \pm \sqrt{25 - 1}$$

cioè

$$s_1 = -0.101, \quad s_2 = -9.899$$

Poiché $\alpha > \omega_0$, si può concludere che la risposta è sovramorzata. Ciò risulta anche evidente dal fatto che le radici sono reali e negative.

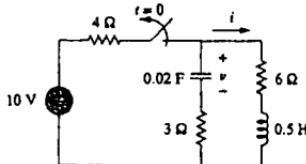
■ **Esercizio 8.3** Se $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ H}$ e $C = 2 \text{ mF}$ nella Figura 8.8, determinare α , ω_0 , s_1 e s_2 . Di che tipo sarà la risposta naturale del circuito?

Risposta $1, 10, -1 \pm j9.95$, sottosmorzata. ■

Esempio 8.4

Determinare $i(t)$ nel circuito di Figura 8.10. Supporre che il circuito abbia raggiunto il regime in $t = 0^-$.

Figura 8.10
Per l'Esempio 8.4.



Soluzione: Per $t < 0$, l'interruttore è chiuso. Il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Il circuito equivalente è mostrato nella Figura 8.11(a). In $t = 0$,

$$i(0) = \frac{10}{4 + 6} = 1 \text{ A}, \quad v(0) = 6i(0) \approx 6 \text{ V}$$

dove $i(0)$ è la corrente iniziale nell'induttore e $v(0)$ la tensione iniziale sul condensatore.

Per $t > 0$, l'interruttore è aperto e il generatore di tensione risulta scollegato. Il circuito equivalente è mostrato nella Figura 8.11(b), ed è un circuito RLC serie autonomo. Si noti che i resistori da 3Ω e 6Ω , che sono in serie nella Figura 8.10 quando l'interruttore è aperto, sono stati combinati per ottenere $R = 9\Omega$ nella Figura 8.11(b). Le radici si calcolano come segue:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2(\frac{1}{4})} = 9, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{1}{0.5}}} = 10$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm \sqrt{81 - 100}$$

cioè

$$s_{1,2} = -9 \pm j4.359$$

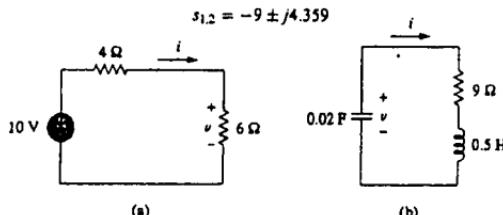


Figura 8.11
Il circuito della Figura 8.10:
(a) per $t < 0$, (b) per $t > 0$.

La risposta è quindi sotoscossa (α < ω₀), cioè

$$i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t) \quad (8.4.1)$$

Si ottengono ora A_1 e A_2 dalle condizioni iniziali. A $t = 0$,

$$i(0) = 1 = A_1 \quad (8.4.2)$$

Dalla (8.5),

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{L} [Ri(0) + v(0)] = -2[9(1) - 6] = -6 \text{ A/s} \quad (8.4.3)$$

Si noti che si è usato $v(0) = V_0 = -6 \text{ V}$, perché la polarità di v in Figura 8.11(b) è opposta a quella di Figura 8.8. Derivando $i(t)$ nella (8.4.1),

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -9e^{-9t}(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t) \\ &\quad + e^{-9t}(4.359)(-A_1 \sin 4.359t + A_2 \cos 4.359t) \end{aligned}$$

Imponendo la condizione (8.4.3) in $t = 0$ si ha

$$-6 = -9(A_1 + 0) + 4.359(-0 + A_2)$$

Ma $A_1 = 1$ dalla (8.4.2), quindi

$$-6 = -9 + 4.359A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.6882$$

Sostituendo i valori di A_1 e A_2 nella (8.4.1) si ottiene la soluzione completa

$$i(t) = e^{-9t}(\cos 4.359t + 0.6882 \sin 4.359t) \text{ A}$$

■ **Esercizio 8.4** Il circuito in Figura 8.12 ha raggiunto la condizione di regime in $t = 0^-$. Se il commutatore si sposta nella posizione b in $t = 0$, calcolare $i(t)$

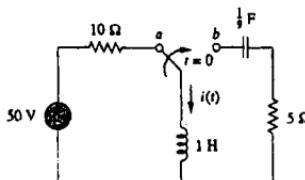


Figura 8.12
Per l'Esercizio 8.4 per $t > 0$.

Risposta $e^{-2.5t}(5 \cos 1.6583t - 7.5378 \sin 1.6583t)$ A ■

8.4 CIRCUITO RLC PARALLELO AUTONOMO

I circuiti RLC parallelo trovano svariate applicazioni nella pratica dell'ingegneria, in particolare nelle reti di telecomunicazione e nel progetto di filtri.

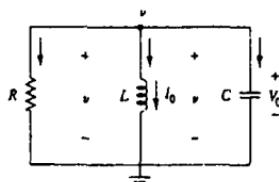


Figura 8.13
Circuito RLC parallelo autonomo.

Si consideri il circuito RLC parallelo mostrato in Figura 8.13. Si supponga che la corrente iniziale nell'induttore valga i_0 e la tensione iniziale sul condensatore V_0 ,

$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt \quad (8.27a)$$

$$v(0) = V_0 \quad (8.27b)$$

Poiché i tre elementi sono in parallelo, essi hanno la stessa tensione v . Secondo la convenzione di segno degli utilizzatori, la corrente si considera entrante in ciascun elemento, ossia uscente dal nodo superiore. Applicando la KCL al nodo superiore si ottiene quindi

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (8.28)$$

Derivando rispetto a t e dividendo per C si ha

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (8.29)$$

L'equazione caratteristica si ottiene sostituendo la derivata prima con s e la derivata seconda con s^2 . Ripetendo il ragionamento fatto per ottenere le Equazioni da (8.4) a (8.8), l'equazione caratteristica risulta

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.30)$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

oppure

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (8.31)$$

dove

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.32)$$

I nomi di tutti questi termini sono gli stessi di quelli del paragrafo precedente, perché rivestono lo stesso ruolo nella espressione che rappresenta la soluzione. Anche qui, esistono tre possibili soluzioni, a seconda che sia $\alpha > \omega_0$, $\alpha = \omega_0$ oppure $\alpha < \omega_0$. I tre casi vengono ora considerati separatamente.

Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$)

Dalla (8.32), $\alpha > \omega_0$ quando $L > 4R^2C$. Le radici dell'equazione caratteristica sono reali e negative. La risposta è

$$v(t) = A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{\alpha t} \quad (8.33)$$

Caso con smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

Per $\alpha = \omega_0$, $L = 4R^2C$. Le radici sono reali e coincidenti e la risposta è

$$v(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \quad (8.34)$$

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)

Quando $\alpha < \omega_0$, $L < 4R^2C$. In questo caso le radici sono complesse e possono essere espresse come

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (8.35)$$

dove

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (8.36)$$

La risposta è

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (8.37)$$

Le costanti A_1 e A_2 , in ciascun caso, possono essere determinate dalle condizioni iniziali. Sono necessarie $v(0)$ e $dv(0)/dt$. La prima è nota dalla (8.27b). La seconda si determina dalle (8.27) e (8.28).

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C \frac{dv(0)}{dt} = 0$$

cioè

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{(V_0 + RI_0)}{RC} \quad (8.38)$$

Le forme d'onda della tensione sono simili a quelle mostrate nella Figura 8.9, a seconda che il circuito sia sovrasmorzato, sottosmorzato o a smorzamento critico. Dopo aver determinato la tensione $v(t)$ del condensatore per il circuito RLC parallelo come appena mostrato, è facile ottenere altre variabili circuitali quali per esempio le correnti nei singoli elementi. La corrente nel resistore è $i_R = v/R$ e la corrente nel condensatore è $i_C = C dv/dt$. La tensione $v(t)$ del condensatore è stata scelta come incognita dell'equazione differenziale per poter trarre vantaggio dalla condizione (8.1a). Si noti che per il circuito RLC serie era stata scelta la corrente dell'induttore, mentre per il circuito RLC parallelo è stata scelta la tensione $v(t)$ del condensatore.

Esempio 8.5

Nel circuito parallelo di Figura 8.13, determinare $v(t)$ per $t > 0$, supponendo $v(0) = 5$ V, $I(0) = 0$, $L = 1$ H, $C = 10$ mF. Si considerino i seguenti casi: $R = 1.923$ Ω, $R = 5$ Ω e $R = 6.25$ Ω.

Soluzione:

CASO 1 Se $R = 1.923$ Ω,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = 26$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10 \times 10^{-3}}} = 10$$

Poiché $\alpha > \omega_0$ in questo caso, la risposta è sovrasmorzata. Le radici dell'equazione caratteristica sono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2, -50$$

e la risposta corrispondente è

$$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t} \quad (8.5.1)$$

Si applicano ora le condizioni iniziali per ottenere A_1 e A_2 :

$$v(0) = 5 = A_1 + A_2 \quad (8.5.2)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + RI(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = -260$$

Ma derivando la (8.5.1),

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 50A_2 e^{-50t}$$

In $t = 0$,

$$-260 = -2A_1 - 50A_2 \quad (8.5.3)$$

Dalle (8.5.2) e (8.5.3) si ottiene $A_1 = -0.2083$ e $A_2 = 5.2083$. Sostituendo A_1 e A_2 nella (8.5.1)

$$v(t) = -0.2083e^{-2t} + 5.2083e^{-50t} \quad (8.5.4)$$

CASO 2 Quando $R = 5$ Ω,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 5 \times 10 \times 10^{-3}} = 10$$

mentre $\omega_0 = 10$ rimane la stessa. Poiché $\alpha = \omega_0 = 10$, la risposta è criticamente smorzata. Perciò, $s_1 = s_2 = -10$ e

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-10t} \quad (8.5.5)$$

Per ottenere A_1 e A_2 , si applicano le condizioni iniziali

$$v(0) = 5 = A_1 \quad (8.5.6)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{5 \times 10 \times 10^{-3}} = -100$$

Ma derivando la (8.5.5),

$$\frac{dv}{dt} = (-10A_1 - 10A_2 t + A_2)e^{-10t}$$

A $t = 0$,

$$-100 = -10A_1 + A_2 \quad (8.5.7)$$

Dalle (8.5.6) e (8.5.7), $A_1 = 5$ e $A_2 = -50$. In definitiva,

$$v(t) = (5 - 50t)e^{-10t} \text{ V} \quad (8.5.8)$$

CASO 3 Quando $R = 6.25 \Omega$,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 6.25 \times 10 \times 10^{-3}} = 8$$

mentre $\omega_0 = 10$ rimane la stessa. Poiché $\alpha < \omega_0$ in questo caso, la risposta è sottosmorzata. Le radici dell'equazione caratteristica sono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -8 \pm j6$$

Allora,

$$v(t) = (A_1 \cos 6t + A_2 \sin 6t)e^{-8t} \quad (8.5.9)$$

Si ottengono ora A_1 e A_2 ,

$$v(0) = 5 = A_1 \quad (8.5.10)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{6.25 \times 10 \times 10^{-3}} = -80$$

Ma derivando la (8.5.9),

$$\frac{dv}{dt} = (-8A_1 \cos 6t - 8A_2 \sin 6t - 6A_1 \sin 6t + 6A_2 \cos 6t)e^{-8t}$$

A $t = 0$,

$$-80 = -8A_1 + 6A_1 \quad (8.5.11)$$

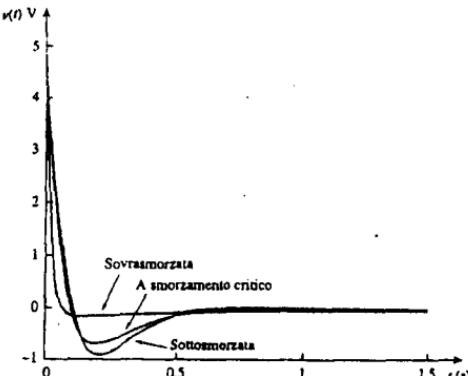
Dalle (8.5.10) e (8.5.11), $A_1 = 5$ e $A_2 = -6.667$. In definitiva,

$$v(t) = (5 \cos 6t - 6.667 \sin 6t)e^{-8t} \quad (8.5.12)$$

Si noti che, aumentando il valore di R , il grado di smorzamento decresce e le risposte hanno diversa natura. In Figura 8.14 sono riportati i grafici per i tre casi.

Figura 8.14

Per l'Esempio 8.5: risposte per i tre gradi di smorzamento.



Esercizio 8.5 Nella Figura 8.13, sia $R = 2 \Omega$, $L = 0.4 \text{ H}$, $C = 25 \text{ mF}$, $v(0) = 0$, $i(0) = 3 \text{ A}$. Determinare $v(t)$ per $t > 0$.

Risposta $-120e^{-10t} \text{ V}$.

Esempio 8.6

Determinare $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito RLC di Figura 8.15.

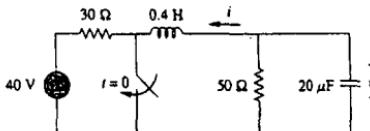


Figura 8.15
Per l'Esempio 8.6.

Soluzione: Per $t < 0$, l'interruttore è aperto; l'induttore si comporta come un corto circuito e il condensatore come un circuito aperto. La tensione iniziale sul condensatore è la stessa di quella sul resistore da 50Ω , cioè

$$v(0) = \frac{50}{30 + 50} (40) = \frac{5}{8} \times 40 = 25 \text{ V} \quad (8.6.1)$$

La corrente iniziale nell'induttore è

$$i(0) = -\frac{40}{30 + 50} = -0.5 \text{ A}$$

La direzione di i è quella indicata in Figura 8.15 ed è conforme alla direzione di I_0 in Figura 8.13, la quale a sua volta è in accordo con la convenzione che vuole la corrente entrare dal terminale positivo di un induttore (si veda la Figura 6.23). Si vuole esprimere tutto ciò in termini di dv/dt , poiché si sta cercando di determinare v .

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{25 - 50 \times 0.5}{50 \times 20 \times 10^{-6}} = 0 \quad (8.6.2)$$

Quando $t > 0$, l'interruttore è chiuso. Il generatore di tensione e il resistore da 30Ω sono separati dal resto del circuito. Il circuito RLC parallelo funziona indipendentemente dal generatore di tensione, come illustrato nella Figura 8.16. Si determinano ora le radici dell'equazione caratteristica,

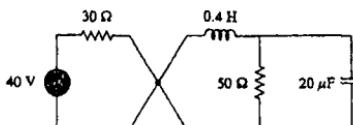
$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 500$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.4 \times 20 \times 10^{-6}}} = 354$$

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -500 \pm \sqrt{250000 - 124997.6} = -500 \pm 354 \end{aligned}$$

cioè

$$s_1 = -854, \quad s_2 = -146$$



Poiché $\alpha > \omega_0$, si è in presenza di risposta sovrassorzata

$$v(t) = A_1 e^{-854t} + A_2 e^{-146t} \quad (8.6.3)$$

A $t = 0$, si impone la condizione della (8.6.1),

$$v(0) = 25 = A_1 + A_2 \implies A_2 = 25 - A_1 \quad (8.6.4)$$

Figura 8.16
Il circuito di Figura 8.15 quando $t > 0$. Il circuito RLC parallelo sulla destra funziona in maniera indipendente dal circuito alla sinistra della giunzione.

Derviamo $v(t)$ nella (8.6.3),

$$\frac{dv}{dt} = -854A_1 e^{-154t} - 146A_2 e^{-146t}$$

Imponendo la condizione (8.6.2),

$$\frac{dv(0)}{dt} = 0 = -854A_1 - 146A_2$$

cioè

$$0 = 854A_1 + 146A_2 \quad (8.6.5)$$

Risolvendo le (8.6.4) e (8.6.5) si ottiene

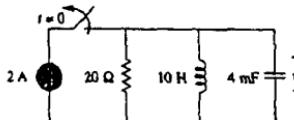
$$A_1 = -5.156, \quad A_2 = 30.16$$

La soluzione completa nella (8.6.3) diventa allora

$$v(t) = -5.156e^{-154t} + 30.16e^{-146t} \text{ V}$$

■ **Esercizio 8.6** Con riferimento al circuito in Figura 8.17 determinare $v(t)$ per $t > 0$.

Figura 8.17
Per l'Esercizio 8.6.



Risposta $66.67(e^{-10t} - e^{-2.5t}) \text{ V}$. ■

8.5 RISPOSTA AL GRADINO DI UN CIRCUITO RLC SERIE

Come si è visto nel capitolo precedente, la risposta al gradino si ottiene con l'applicazione improvvisa di un generatore costante. Si consideri il circuito RLC serie mostrato in Figura 8.18. Applicando la KVL alla maglia, per $t > 0$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = V_s \quad (8.39)$$

Ma

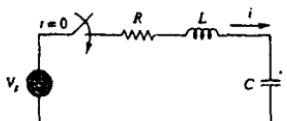
$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Sostituendo l'espressione di i nella (8.39) e riordinando i termini,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC} \quad (8.40)$$

che ha la stessa forma della (8.4). In particolare, i coefficienti sono gli stessi (e ciò è importante nella determinazione delle frequenze naturali) ma l'incognita è diversa. (Si veda anche la (8.47).) L'equazione caratteristica del circuito RLC serie non viene quindi modificata dalla presenza del generatore costante.

Figura 8.18
Gradino di tensione applicato a un circuito RLC serie



La soluzione della (8.40) è formata da due componenti: la risposta transitoria $v_t(t)$ e la risposta di regime $v_{ss}(t)$

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) \quad (8.41)$$

La risposta transitoria $v_t(t)$ è la componente della risposta completa che si annulla al passare del tempo. La forma della risposta transitoria è la stessa di quella della soluzione ottenuta nel Paragrafo 8.3 per il circuito autonomo, e specificata nelle Equazioni (8.14), (8.21) e (8.26). La risposta transitoria $v_t(t)$ per i casi sovrasmorzato, a smorzamento critico e sottosmorzato è perciò:

$$v_t(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{Sovrasmorzata}) \quad (8.42a)$$

$$v_t(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \quad (\text{A smorzamento critico}) \quad (8.42b)$$

$$v_t(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} \quad (\text{Sottosmorzata}) \quad (8.42c)$$

La risposta forzata è il valore finale, o di regime, di $v(t)$. Nel circuito di Figura 8.18, il valore finale della tensione del condensatore coincide con la tensione del generatore V_s . Perciò,

$$v_f(t) = v(\infty) = V_s \quad (8.43)$$

Le soluzioni complete per i casi sovrasmorzato, sottosmorzato e criticamente smorzato sono quindi:

$$v(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{Sovrasmorzata}) \quad (8.44a)$$

$$v(t) = V_s + (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \quad (\text{A smorzamento critico}) \quad (8.44b)$$

$$v(t) = V_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} \quad (\text{Sottosmorzata}) \quad (8.44c)$$

I valori delle costanti A_1 e A_2 si ottengono dalle condizioni iniziali: $v(0)$ e $dv(0)/dt$. Si ricordi che v e i sono, rispettivamente, la tensione sul condensatore e la corrente nell'induttore. Perciò, la (8.44) è valida soltanto per la determinazione di v . Ma una volta nota la tensione del condensatore $v_C = v$, è possibile determinare $i = C dv/dt$, che è la stessa corrente nel condensatore, induttore e resistore. Di qui, la tensione sul resistore vale $v_R = iR$, mentre la tensione sull'induttore è $v_L = L di/dt$.

In alternativa, la risposta completa per una qualunque variabile $x(t)$ si può ottenere direttamente, in quanto ha la forma generale

$$x(t) = x_{ss}(t) + x_t(t) \quad (8.45)$$

dove $x_{ss} = x(\infty)$ è il valore finale e $x_t(t)$ è la risposta transitoria. Il valore finale si ottiene come nel Paragrafo 8.2. La risposta transitoria ha la stessa forma della (8.42), e le costanti associate vengono determinate dalla (8.44) in base ai valori di $x(0)$ e $dx(0)/dt$.

Esempio 8.7

Nel circuito in Figura 8.19, determinare $v(t)$ e $i(t)$ per $t > 0$. Considerare i casi: $R = 5 \Omega$, $R = 4 \Omega$ e $R = 1 \Omega$.

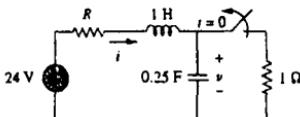


Figura 8.19
Per l'Esempio 8.7.

Soluzione:

CASO 1 $R = 5 \Omega$. Per $t < 0$, l'interruttore è chiuso. Il condensatore si comporta come un circuito aperto mentre l'induttore si comporta come un corto circuito. La corrente iniziale nell'induttore è

$$i(0) = \frac{24}{5+1} = 4 \text{ A}$$

e la tensione iniziale sul condensatore è la stessa di quella sul resistore da 1Ω , cioè

$$v(0) = i(0) = 4 \text{ V}$$

Per $t > 0$ l'interruttore è aperto, così che il resistore da 1Ω risulta scollegato. Ciò che rimane è il circuito RLC serie con il generatore di tensione. Le radici caratteristiche vengono determinate come segue:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \times 1} = 2.5, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 0.25}} = 2$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1, -4$$

Essendo $\alpha > \omega_0$, si ha una risposta naturale sovrassmorzata. La risposta completa è perciò

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t})$$

dove v_{ss} è la risposta di regime. Essa corrisponde al valore finale della tensione del condensatore. In Figura 8.19, $v_{ss} = 24$ V. Perciò,

$$v(t) = 24 + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}) \quad (8.7.1)$$

Si devono ora determinare A_1 e A_2 usando le condizioni iniziali.

$$v(0) = 4 = 24 + A_1 + A_2$$

cioè

$$-20 = A_1 + A_2 \quad (8.7.2)$$

La corrente nell'induttore non può subire variazioni istantanee, ed è la stessa corrente che scorre nel condensatore per $t = 0^+$, perché l'induttore e il condensatore sono ora in serie. Perciò,

$$i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{C} = \frac{4}{0.25} = 16$$

Prima di poter utilizzare questa condizione, è necessario derivare v nella (8.7.1).

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} \quad (8.7.3)$$

In $t = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16 = -A_1 - 4A_2 \quad (8.7.4)$$

Dalle (8.7.2) e (8.7.4), $A_1 = -64/3$ e $A_2 = 4/3$. Sostituendo A_1 e A_2 nella (8.7.1), si ottiene

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3} (-16e^{-t} + e^{-4t}) \text{ V} \quad (8.7.5)$$

Poiché l'induttore e il condensatore sono in serie per $t > 0$, la corrente nell'induttore è la stessa di quella nel condensatore. Di qui,

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

Moltiplicando la (8.7.3) per $C = 0.25$ e sostituendo i valori di A_1 e A_2 si ottiene

$$i(t) = \frac{4}{3} (4e^{-t} - e^{-4t}) \text{ A} \quad (8.7.6)$$

Si noti che $i(0) = 4$ A, come ci si attendeva.

CASO 2 $R = 4 \Omega$. Come prima, la corrente iniziale nell'induttore è

$$i(0) = \frac{24}{4+1} = 4.8 \text{ A}$$

e la tensione iniziale sul condensatore vale

$$v(0) = 1i(0) = 4.8 \text{ V}$$

Per il calcolo delle radici caratteristiche,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4}{2 \times 1} = 2$$

mentre $\omega_0 = 2$ rimane la stessa. In questo caso, $s_1 = s_2 = -\alpha = -2$, e si è in presenza di risposta naturale con smorzamento critico. La risposta completa è perciò,

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

ed essendo $v_{ss} = 24$ V,

$$v(t) = 24 + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \quad (8.7.7)$$

Per determinare A_1 e A_2 , si usano le condizioni iniziali.

$$v(0) = 4.8 = 24 + A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -19.2 \quad (8.7.8)$$

Poiché $i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 4.8$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{4.8}{C} = 19.2$$

Dalla (8.7.7),

$$\frac{dv}{dt} = (-2A_1 - 2A_2 + A_2)e^{-2t} \quad (8.7.9)$$

A $t = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = 19.2 = -2A_1 + A_2 \quad (8.7.10)$$

Dalle (8.7.8) e (8.7.10), $A_1 = -19.2$ e $A_2 = -19.2$. La (8.7.7) diventa quindi

$$v(t) = 24 - 19.2(1+t)e^{-2t} \text{ V} \quad (8.7.11)$$

La corrente nell'induttore coincide con quella nel condensatore, cioè

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

Moltiplicando la (8.7.9) per $C = 0.25$ e sostituendo i valori di A_1 e A_2 si ottiene

$$i(t) = (4.8 + 9.6t)e^{-2t} \text{ A} \quad (8.7.12)$$

Si noti che $i(0) = 4.8 \text{ A}$, come ci si attendeva.

CASO 3 $R = 1 \Omega$. La corrente iniziale nell'induttore vale

$$i(0) = \frac{24}{1+1} = 12 \text{ A}$$

e la tensione iniziale sul condensatore coincide con la tensione sul resistore da 1Ω ,

$$v(0) = 1i(0) = 12 \text{ V}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2 \times 1} = 0.5$$

Essendo $\alpha = 0.5 < \omega_0 = 2$, si ha una risposta libera sottosmorzata

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0.5 \pm j1.936$$

La risposta completa è perciò

$$v(t) = 24 + (A_1 \cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t)e^{-0.5t} \quad (8.7.13)$$

Si determinano ora A_1 e A_2 .

$$v(0) = 12 = 24 + A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -12 \quad (8.7.14)$$

Essendo $i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 12$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{12}{C} = 48 \quad (8.7.15)$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= e^{-0.5t}(-1.936A_1 \sin 1.936t + 1.936A_2 \cos 1.936t) \\ &\quad - 0.5e^{-0.5t}(A_1 \cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t) \end{aligned} \quad (8.7.16)$$

A $t = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = 48 = (-0 + 1.936A_2) - 0.5(A_1 + 0)$$

Sostituendo $A_1 = -12$ si ottiene $A_2 = 21.694$, e la (8.7.13) diventa

$$v(t) = 24 + (21.694 \sin 1.936t - 12 \cos 1.936t)e^{-0.5t} \text{ V} \quad (8.7.17)$$

La corrente nell'induttore è

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

Moltiplicando la (8.7.16) per $C = 0.25$ e sostituendo i valori di A_1 e A_2 si ottiene

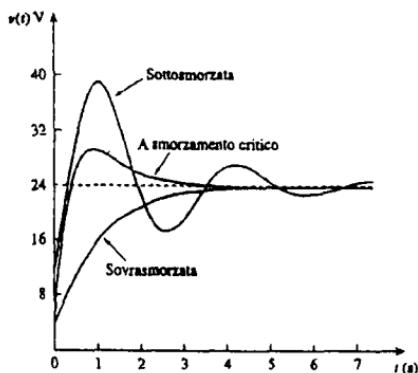
$$i(t) = (3.1 \sin 1.936t + 12 \cos 1.936t)e^{-0.5t} \text{ A} \quad (8.7.18)$$

Si noti che $i(0) = 12 \text{ A}$, come ci si attendeva.

In Figura 8.20 sono mostrati i grafici delle risposte per i tre casi. Da questa figura si osserva che la risposta con smorzamento critico è la più veloce ad avvicinarsi all'ingresso a gradino di 24 V.

Figura 8.20

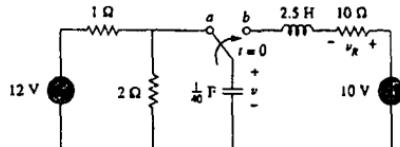
Per l'Esempio 8.7: risposta per i tre gradi di smorzamento.



■ **Esercizio 8.7** Dopo essere rimasto in posizione *a* per molto tempo, l'interruttore nella Figura 8.21 si sposta in posizione *b* in $t = 0$. Determinare $v(t)$ e $v_R(t)$ per $t > 0$.

Figura 8.21

Per l'Esercizio 8.7.



Risposta $10 - (1.1547 \sin 3.464t + 2 \cos 3.464t)e^{-2t} \text{ V}, 2.31e^{-2t} \sin 3.464t \text{ V}$

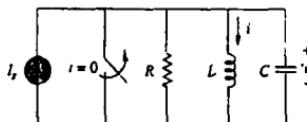
8.6 RISPOSTA AL GRADINO DI UN CIRCUITO RLC PARALLELO

Si consideri il circuito RLC parallelo mostrato in Figura 8.22. Si vuole determinare i successivamente all'applicazione improvvisa di una corrente costante. Applicando la KCL al nodo superiore, per $t > 0$

$$\frac{v}{R} + i + C \frac{dv}{dt} = I_s \quad (8.46)$$

Figura 8.22

Circuito RLC parallelo con una corrente applicata.



Ma

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Sostituendo l'espressione di v nella (8.46) e dividendo per LC , si ottiene

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC} \quad (8.47)$$

che ha la stessa equazione caratteristica della (8.29).

La soluzione completa alla (8.47) è formata da una risposta transitoria $i_t(t)$ e da una risposta di regime i_{ss} ,

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) \quad (8.48)$$

La risposta transitoria coincide con quella ottenuta nel Paragrafo 8.3. La risposta di regime è il valore finale di i . Nel circuito di Figura 8.22, il valore finale della corrente nell'induttore coincide con la corrente del generatore I_s . Perciò,

$$i(t) = I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{Sovrasmorzata})$$

$$i(t) = I_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \quad (\text{Smorzamento critico})$$

$$i(t) = I_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)e^{-\alpha t} \quad (\text{Sottosmorzata})$$

(8.49)

Le costanti A_1 e A_2 possono in ciascun caso essere determinate dalle condizioni iniziali per i e di/dt . Anche qui, si ricordi che la (8.49) è valida soltanto per la determinazione della corrente i nell'induttore. Ma una volta determinata la corrente nell'induttore $i_L = i$, è possibile calcolare $v = L di/dt$, che è la stessa tensione su induttore, condensatore e resistore. Di qui, la corrente nel resistore vale $i_R = v/R$, mentre la corrente nel condensatore è $i_C = C dv/dt$. In alternativa, la risposta completa per una qualunque variabile $x(t)$ può essere calcolata direttamente, con l'espressione

$$x(t) = x_{ss}(t) + x_t(t) \quad (8.50)$$

dove x_{ss} e x_t sono il suo valore finale e la risposta transitoria, rispettivamente.

Esempio 8.8

Nel circuito di Figura 8.23, determinare $i(t)$ e $i_R(t)$ per $t > 0$.

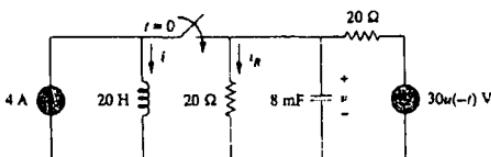


Figura 8.23
Per l'Esempio 8.8.

Soluzione: Per $t < 0$ l'interruttore è aperto, e il circuito risulta partitionato in due sottocircuiti indipendenti. La corrente di 4 A scorre nell'induttore, così che

$$i(0) = 4 \text{ A}$$

Poiché $30u(-t) = 30$ quando $t < 0$, e 0 quando $t > 0$, il generatore di tensione è attivo per $t < 0$. Il condensatore si comporta come un circuito aperto e la sua tensione coincide con la tensione del resistore da 20Ω collegato in parallelo. Per la regola del partitore di tensione, la tensione iniziale sul condensatore vale

$$v(0) = \frac{20}{20 + 20} (30) = 15 \text{ V}$$

Per $t > 0$, l'interruttore è chiuso, e si è in presenza di un circuito RLC parallelo con un generatore di corrente. Il generatore di tensione è spento o cortocircuitato. I due resistori da 20Ω sono ora in parallelo. Essi vengono combinati ottenendo $R = 20 \parallel 20 = 10 \Omega$. Le radici caratteristiche si determinano come segue:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10 \times 8 \times 10^{-3}} = 6.25$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 8 \times 10^{-3}}} = 2.5$$

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6.25 \pm \sqrt{39.0625 - 6.25} \\ &= -6.25 \pm 5.7282\end{aligned}$$

cioè

$$s_1 = -11.978, \quad s_2 = -0.5218$$

Poiché $\alpha > \omega_0$, ci si trova nel caso sovraamorzato. Perciò,

$$i(t) = I_s + A_1 e^{-11.978t} + A_2 e^{-0.5218t} \quad (8.8.1)$$

dove $I_s = 4$ è il valore finale di $i(t)$. Si usano ora le condizioni iniziali per determinare A_1 e A_2 . In $t = 0$,

$$i(0) = 4 = 4 + A_1 + A_2 \implies A_2 = -A_1 \quad (8.8.2)$$

Facendo la derivata di $i(t)$ nella (8.8.1),

$$\frac{di}{dt} = -11.978A_1 e^{-11.978t} - 0.5218A_2 e^{-0.5218t}$$

così che per $t = 0$,

$$\frac{di(0)}{dt} = -11.978A_1 - 0.5218A_2 \quad (8.8.3)$$

Ma

$$L \frac{di(0)}{dt} = v(0) = 15 \implies \frac{di(0)}{dt} = \frac{15}{L} = \frac{15}{20} = 0.75$$

Sostituendo quest'ultima nella (8.8.3) e tenendo conto della (8.8.2), si ottiene

$$0.75 = (11.978 - 0.5218)A_2 \implies A_2 = 0.0655$$

Ne consegue $A_1 = -0.0655$ e $A_2 = 0.0655$. Sostituendo A_1 e A_2 nella (8.8.1) si ottiene la soluzione completa

$$i(t) = 4 + 0.0655(e^{-0.5218t} - e^{-11.978t}) \text{ A}$$

Da $i(t)$, si può ottenere $v(t) = L \frac{di}{dt}$

$$v_R(t) = \frac{L}{20} \frac{di}{dt} = 0.785e^{-11.978t} - 0.0342e^{-0.5218t} \text{ A}$$

■ Esercizio 8.8 Determinare $i(t)$ e $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.24.

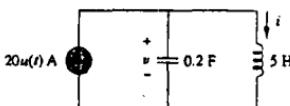


Figura 8.24
Per l'Esercizio 8.8.

Risposta $20(1 - \cos t)$ A, $100 \sin t$ V.

8.7 CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE NEL CASO GENERALE

Dopo aver trattato i casi di circuito *RLC* serie e parallelo, gli stessi procedimenti possono essere applicati a qualunque circuito del secondo ordine. Nonostante i circuiti *RLC* serie e parallelo rappresentino i circuiti del secondo ordine di maggior interesse, altri circuiti del secondo ordine, quali per esempio i circuiti contenenti amplificatori operazionali, si rivelano utili per l'ingegneria. Dato un circuito del secondo ordine, la

sua risposta al gradino $x(t)$ (che può essere una tensione o una corrente) viene determinata secondo i seguenti quattro passi¹:

- Si determinano dapprima le condizioni iniziali $x(0)$ e $dx(0)/dt$ e il valore finale $x(\infty)$, come si è visto nel Paragrafo 8.2.
- Si determina la risposta transitoria $x_r(t)$ spegnendo i generatori indipendenti e applicando la KCL e la KVL. Una volta ottenuta una equazione differenziale del secondo ordine, se ne determinano le radici caratteristiche. A seconda che la risposta sia sovrasmorzata, a smorzamento critico o sottosmorzata, si ottiene $x_r(t)$ con due costanti incognite come si è fatto nei paragrafi precedenti.
- Si ottiene la risposta di regime come

$$x_{sr}(t) = x(\infty) \quad (8.51)$$

dove $x(\infty)$ è il valore finale di x , ottenuto al passo 1.

- La risposta completa consiste ora nella somma della risposta transitoria e di quella di regime:

$$x(t) = x_r(t) + x_{sr}(t) \quad (8.52)$$

Si determinano infine le costanti associate alla risposta transitoria, imponendo le condizioni iniziali $x(0)$ e $dx(0)/dt$, determinate nel passo 1.

Questo procedimento generale può essere applicato per il calcolo della risposta al gradino di un qualunque circuito del secondo ordine, compresi quelli contenenti amplificatori operazionali. Gli esempi che seguono illustrano meglio i quattro passi del procedimento.

Esempio 8.9

Calcolare la risposta completa v , e successivamente i , per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.25.

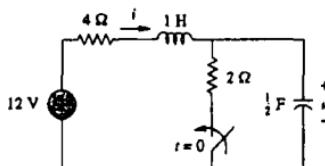


Figura 8.25
Per l'Esempio 8.9

Soluzione: Si determinano dapprima i valori iniziale e finale. In $t = 0^-$ il circuito è a regime. L'interruttore è aperto, e il circuito equivalente è mostrato nella Figura 8.26(a). Dalla figura risulta evidente che

$$v(0^-) = 12 \text{ V}, \quad i(0^-) = 0$$

Per $t = 0^+$, l'interruttore è chiuso; il circuito equivalente si trova in Figura 8.26(b). Per la proprietà di continuità della tensione sul condensatore e della corrente dell'induttore, si può affermare che

$$v(0^+) = v(0^-) = 12 \text{ V}, \quad i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad (8.9.1)$$

Per ottenere $dv(0^+)/dt$, si utilizza $C dv/dt = i_C$ cioè $dv/dt = i_C/C$. Applicando la KCL al nodo a nella Figura 8.26(b),

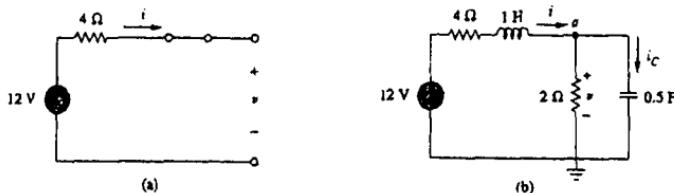
$$i(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v(0^+)}{2}$$

$$0 = i_C(0^+) + \frac{12}{2} \quad \Rightarrow \quad i_C(0^+) = -6 \text{ A}$$

¹ Un circuito può sembrare complicato a prima vista. Ma una volta che i generatori sono stati spenti, nel tentativo di determinare la risposta naturale, esso potrebbe risultare riducibile ad un circuito del primo ordine, quando gli elementi dinamici possono essere combinati fra loro, oppure ad un circuito RLC serie/parallelo. Se è riducibile ad un circuito del primo ordine, la soluzione diviene semplicemente quella trovata nel Capitolo 7. Se è riducibile ad un circuito RLC serie o parallelo, si possono applicare i procedimenti visti nei paragrafi precedenti.

Figura 8.26

Circuito equivalente del circuito in Figura 8.25 per:
(a) $i = 0^-$, (b) $i > 0$.



Ne segue,

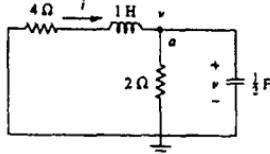
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-6}{0.5} = -12 \text{ V/s} \quad (8.9.2)$$

I valori finali si ottengono quando l'induttore viene sostituito da un corto circuito e il condensatore da un circuito aperto nella Figura 8.26(b),

$$i(\infty) = \frac{12}{4+2} = 2 \text{ A}, \quad v(\infty) = 2i(\infty) = 4 \text{ V} \quad (8.9.3)$$

Figura 8.27

Per il calcolo della risposta naturale nell'Esempio 8.9.



Si ottiene ora la risposta naturale per $t > 0$. Spegnuendo il generatore di tensione da 12 V si ha il circuito di Figura 8.27. Applicando la KCL al nodo a di questo circuito si ottiene

$$i = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} \quad (8.9.4)$$

Applicando la KVL all'anello di sinistra si ha

$$4i + \frac{1}{2} \frac{di}{dt} + v = 0 \quad (8.9.5)$$

Poiché si è interessati, per ora, al calcolo di v , si sostituisce l'espressione di i dalla (8.9.4) nella (8.9.5), ottenendo

$$2v + 2 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2v}{dt^2} + v = 0$$

cioè

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 0$$

Da questa, si ottiene l'equazione caratteristica

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

le cui radici sono $s = -2$ e $s = -3$. La risposta transitoria è dunque

$$v_t(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (8.9.6)$$

dove A e B sono costanti che verranno determinate più avanti. La risposta di regime è

$$v_{ss}(t) = v(\infty) = 4 \quad (8.9.7)$$

La risposta completa è

$$v(t) = v_t + v_{ss} = 4 + Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (8.9.8)$$

Si determinano ora A e B utilizzando i valori iniziali. Dalla (8.9.1), $v(0) = 12$. Sostituendo questo valore nella (8.9.8), per $t = 0$ si ottiene

$$12 = 4 + A + B \implies A + B = 8 \quad (8.9.9)$$

Derivando v nella (8.9.8),

$$\frac{dv}{dt} = -2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t} \quad (8.9.10)$$

Sostituendo la (8.9.2) nella (8.9.10) per $t = 0$ si ha

$$-12 = -2A - 3B \implies 2A + 3B = 12 \quad (8.9.11)$$

Dalle (8.9.9) e (8.9.11) si ottiene infine

$$A = 12, \quad B = -4$$

così che la (8.9.8) diventa

$$v(t) = 4 + 12e^{-2t} - 4e^{-3t} \text{ V}, \quad t > 0 \quad (8.9.12)$$

Una volta calcolata v , è possibile ottenere altre grandezze circuituali di interesse facendo riferimento alla Figura 8.26(b). Per ottenere i , per esempio,

$$\begin{aligned} i &= \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} = 2 + 6e^{-2t} - 2e^{-3t} - 12e^{-2t} + 6e^{-3t} \\ &= 2 - 6e^{-2t} + 4e^{-3t} \text{ A}, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (8.9.13)$$

Si noti che $i(0) = 0$, in accordo con la (8.9.1).

Esercizio 8.9 Determinare v e i per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.28. (Si vedano i commenti sui generatori di corrente nell'Esercizio 7.5).

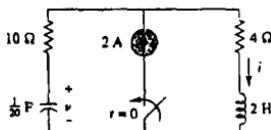


Figura 8.28
Per l'Esercizio 8.9.

Risposta $8(1 - e^{-5t}) \text{ V}$, $2(1 - e^{-5t}) \text{ A}$.

Esempio 8.10

Determinare $v_o(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.29.

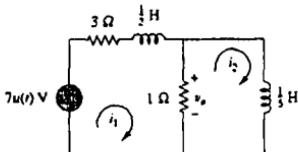


Figura 8.29
Per l'Esempio 8.10.

Soluzione: Questo è un esempio di circuito del secondo ordine con due induttori. Si ottengono dapprima le correnti di anello i_1 e i_2 , che coincidono in questo caso con le correnti degli induttori. Si vogliono quindi calcolare i valori iniziali e finali di queste correnti. Per $t < 0$, $7u(t) = 0$, così che $i_1(0^-) = 0 = i_2(0^-)$. Per $t > 0$, $7u(t) = 7$, e il circuito equivalente è quello mostrato in Figura 8.30(a). Grazie alla continuità della corrente degli induttori,

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0, \quad i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0 \quad (8.10.1)$$

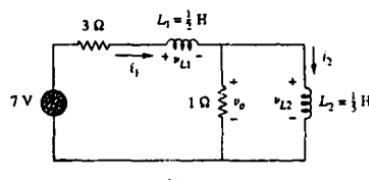
$$v_{L2}(0^+) = v_o(0^+) = 1[(i_1(0^+) - i_2(0^+))] = 0 \quad (8.10.2)$$

Applicando la KVL alla maglia di sinistra in Figura 8.30(a), per $t = 0^+$

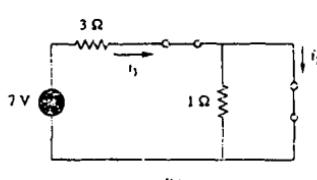
$$7 = 3i_1(0^+) + v_{L1}(0^+) + v_o(0^+)$$

cioè

$$v_{L1}(0^+) = 7 \text{ V}$$



(a)



(b)

Figura 8.30
Circuito equivalente di quello in Figura 8.29 per:
(a) $t > 0$, (b) $t \rightarrow \infty$.

Essendo $L_1 \frac{di_1}{dt} = v_{L1}$,

$$\frac{di_1(0^+)}{dt} = \frac{v_{L1}}{L_1} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14 \text{ A/s} \quad (8.10.3)$$

In maniera simile, poiché $L_2 \frac{di_2}{dt} = v_{L2}$,

$$\frac{di_2(0^+)}{dt} = \frac{v_{L2}}{L_2} = 0 \quad (8.10.4)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, il circuito raggiunge la condizione di regime, e gli induttori possono essere sostituiti con dei corti circuiti, come mostrato in Figura 8.30(b), dalla quale si ricava

$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{7}{3} \text{ A} \quad (8.10.5)$$

Si ottengono ora le risposte naturali spegnendo il generatore di tensione, come mostrato nella Figura 8.31. L'applicazione della KVL ai due anelli fornisce

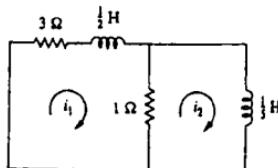
$$4i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (8.10.6)$$

e

$$i_2 + \frac{1}{5} \frac{di_2}{dt} - i_1 = 0 \quad (8.10.7)$$

Figura 8.31

Per il calcolo della risposta naturale nell'Esempio 8.10



Dalla (8.10.6),

$$i_2 = 4i_1 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} \quad (8.10.8)$$

Sostituendo la (8.10.8) nella (8.10.7) si ottiene

$$4i_1 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} + \frac{4}{5} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{10} \frac{d^2 i_1}{dt^2} - i_1 = 0$$

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 13 \frac{di_1}{dt} + 30i_1 = 0$$

L'equazione caratteristica risulta allora essere

$$s^2 + 13s + 30 = 0$$

le cui radici sono $s = -3$ e $s = -10$. La risposta transitoria è dunque

$$i_{1t} = Ae^{-3t} + Be^{-10t} \quad (8.10.9)$$

con A e B costanti. La risposta di regime è

$$i_{1u} = i_1(\infty) = \frac{7}{3} \text{ A} \quad (8.10.10)$$

Dalle (8.10.9) e (8.10.10), la risposta completa risulta quindi

$$i_1(t) = \frac{7}{3} + Ae^{-3t} + Be^{-10t} \quad (8.10.11)$$

Si ricavano infine A e B dai valori iniziali. Dalle (8.10.1) e (8.10.11),

$$0 = \frac{7}{3} + A + B \quad (8.10.12)$$

Derivando la (8.10.11), ponendo $t = 0$ nella derivata, e imponendo la condizione (8.10.3), si ottiene

$$14 = -3A - 10B \quad (8.10.13)$$

Dalle (8.10.12) e (8.10.13), $A = -4/3$ e $B = -1$. Di qui,

$$i_1(t) = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}e^{-3t} - e^{-10t} \quad (8.10.14)$$

Si ottiene ora i_2 da i_1 . Applicando la KVL alla maglia di sinistra in Figura 8.30(a) si ha

$$7 = 4i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} \implies i_2 = -7 + 4i_1 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt}$$

Sostituendo l'espressione di i_1 della (8.10.14) si ricava

$$\begin{aligned} i_2(t) &= -7 + \frac{28}{3} - \frac{16}{3}e^{-3t} - 4e^{-10t} + 2e^{-3t} + 5e^{-10t} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{10}{3}e^{-3t} + e^{-10t} \end{aligned} \quad (8.10.15)$$

Dalla Figura 8.29,

$$v_o(t) = 1[i_1(t) - i_2(t)] \quad (8.10.16)$$

E infine sostituendo le (8.10.14) e (8.10.15) nella (8.10.16) si perviene a

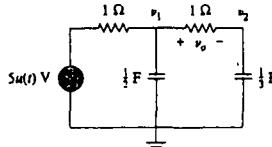
$$v_o(t) = 2(e^{-3t} - e^{-10t}) \quad (8.10.17)$$

Si noti che $v_o(0) = 0$, come ci si attendeva dalla (8.10.2).

■ Esercizio 8.10 Calcolare $v_o(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.32.

(Suggerimento: Calcolare dapprima v_1 e v_2 .)

Figura 8.32
Per l'Esercizio 8.10.



Risposta $2(e^{-t} - e^{-6t})$ V, $t > 0$.

■

8.8 CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE CON OPERAZIONALI

Un circuito contenente amplificatori operazionali e due elementi dinamici che non possono essere ridotti a un singolo elemento equivalente è un circuito del secondo ordine. A causa dell'ingombro e del peso relativo degli induttori, essi vengono usati raramente in circuiti reali contenenti operazionali. Per questo motivo, verranno qui presi in considerazione soltanto circuiti RC del secondo ordine contenenti amplificatori operazionali. Circuiti di questo tipo trovano svariate applicazioni in dispositivi quali filtri e oscillatori.²

Esempio 8.11

Nel circuito di Figura 8.33, determinare $v_o(t)$ per $t > 0$ quando $v_s = 10u(t)$ mV. Siano $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 20 \mu\text{F}$ e $C_2 = 100 \mu\text{F}$.

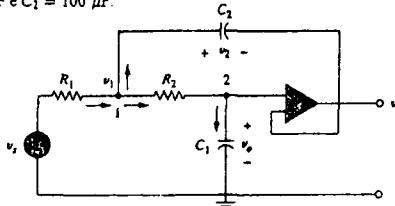


Figura 8.33
Per l'Esempio 8.11.

² L'uso di amplificatori operazionali nei circuiti del secondo ordine consente di evitare l'uso degli induttori, che sono spesso poco convenienti nelle applicazioni. L'analisi di un circuito del secondo ordine contenente operazionali consta degli stessi quattro passi visti al paragrafo precedente.

Soluzione: Nonostante sia possibile risolvere questo problema seguendo gli stessi quattro passi presentati nel paragrafo precedente, esso verrà ora risolto in maniera leggermente diversa. A causa della configurazione a inseguitore di tensione, la tensione su C_1 è pari a v_o . Applicando la KCL al nodo 1,

$$\frac{v_o - v_1}{R_1} = C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1 - v_o}{R_2} \quad (8.11.1)$$

Al nodo 2, la KCL fornisce

$$\frac{v_1 - v_o}{R_2} = C_1 \frac{dv_o}{dt} \quad (8.11.2)$$

Ma

$$v_2 = v_1 - v_o \quad (8.11.3)$$

Si vogliono ora eliminare v_1 e v_2 nelle Equazioni da (8.11.1) a (8.11.3). Sostituendo le (8.11.2) e (8.11.3) nella (8.11.1) si ha

$$\frac{v_o - v_1}{R_1} = C_2 \frac{dv_1}{dt} - C_2 \frac{dv_o}{dt} + C_1 \frac{dv_o}{dt} \quad (8.11.4)$$

Dalla (8.11.2),

$$v_1 = v_o + R_2 C_1 \frac{dv_o}{dt} \quad (8.11.5)$$

Sostituendo la (8.11.5) nella (8.11.4) si ottiene

$$\frac{v_o}{R_1} = \frac{v_o}{R_1} + \frac{R_2 C_1}{R_1} \frac{dv_o}{dt} + C_2 \frac{dv_o}{dt} + R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} - C_2 \frac{dv_o}{dt} + C_1 \frac{dv_o}{dt}$$

o anche

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{v_o}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (8.11.6)$$

Con i valori dati di R_1 , R_2 , C_1 e C_2 , la (8.11.6) diventa

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2 \frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 5v_o \quad (8.11.7)$$

Per ottenere la risposta naturale, si pone $v_o = 0$ nella (8.11.7), il che equivale a spegnere il generatore. L'equazione caratteristica è

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

che ha le radici complesse $s_{1,2} = -1 \pm j/2$. La risposta transitoria è allora

$$v_{ot} = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) \quad (8.11.8)$$

dove A e B sono costanti da determinare.

Quando $t \rightarrow \infty$, il circuito raggiunge la condizione di regime, e i condensatori possono essere sostituiti con dei circuiti aperti. Poiché a regime non passa corrente né in C_1 né in C_2 e dai terminali di ingresso dell'amplificatore operazionale ideale non entra alcuna corrente, non passa corrente nemmeno attraverso R_1 e R_2 . Perciò,

$$v_o(\infty) = v_1(\infty) = v_i$$

La risposta di regime vale allora

$$v_{on} = v_o(\infty) = v_i = 10 \text{ mV}, \quad t > 0 \quad (8.11.9)$$

La risposta completa è

$$v_o(t) = v_{ot} + v_{on} = 10 + e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) \text{ mV} \quad (8.11.10)$$

Per determinare A e B , sono necessarie le condizioni iniziali. Per $t < 0$, $v_i = 0$, così che

$$v_o(0^-) = v_2(0^-) = 0$$

Per $t > 0$, il generatore funziona, ma per la proprietà di continuità della tensione del condensatore,

$$v_o(0^+) = v_2(0^+) = 0 \quad (8.11.11)$$

Dalla (8.11.3),

$$v_1(0^+) = v_2(0^+) + v_o(0^+) = 0$$

e quindi, dalla (8.11.2),

$$\frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{v_1 - v_o}{R_2 C_1} = 0 \quad (8.11.12)$$

Viene ora imposta la condizione (8.11.11) sulla risposta completa (8.11.10) per $t = 0$, ottenendo

$$0 = 10 + A \quad \Rightarrow \quad A = -10 \quad (8.11.13)$$

Derivando la (8.11.10),

$$\frac{dv_o}{dt} = e^{-t}(-A \cos 2t - B \sin 2t - 2A \sin 2t + 2B \cos 2t)$$

Ponendo $t = 0$ e incorporando la (8.11.12), si ottiene

$$0 = -A + 2B \quad (8.11.14)$$

Dalle (8.11.13) e (8.11.14), $A = -10$ e $B = -5$. La risposta al gradino diventa allora

$$v_o(t) = 10 - e^{-t}(10 \cos 2t + 5 \sin 2t) \text{ mV}, \quad t > 0$$

■ **Esercizio 8.11** Nel circuito mostrato in Figura 8.34, $v_s = 4u(t)$ V. Determinare $v_o(t)$ per $t > 0$. Supponere $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 20 \mu\text{F}$ e $C_2 = 100 \mu\text{F}$.

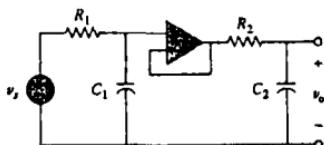


Figura 8.34
Per l'Esercizio 8.11.

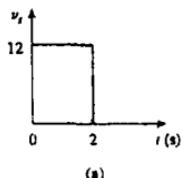
Risposta $4 - 5e^{-t} + e^{-5t}$ V, $t > 0$. ■

8.9 ANALISI DI CIRCUITI RLC CON PSPICE

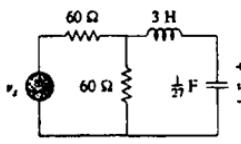
I circuiti *RLC* possono essere facilmente analizzati usando *PSpice*, proprio come i circuiti *RC* o *RL* del capitolo 7, come viene illustrato nei due esempi che seguono. Si consiglia al lettore il ripasso del Paragrafo B.4 nell'Appendice B che tratta l'analisi in transitorio con *PSpice*.

Esempio 8.12

La tensione di ingresso della Figura 8.35(a) viene applicata al circuito in Fig. 8.35(b). Tracciare il grafico di $v(t)$ per $0 < t < 4\text{s}$ usando *PSpice*.



(a)



(b)

Figura 8.35
Per l'Esempio 8.12.

Soluzione

1. *Dare una definizione precisa del problema.*

Il problema è descritto in modo chiaro.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.*

L'ingresso è composto da una singola onda quadra di valore pari a 12V con periodo di 2s. Viene richiesto di tracciare il grafico dell'uscita usando *PSpice*.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*

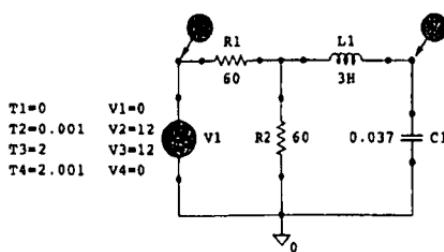
Si richiede l'uso di *PSpice*, che in genere è un'alternativa per trovare la soluzione. Si può comunque verificare il risultato utilizzando il metodo illustrato nel Paragrafo 8.5 (risposta al gradino per circuiti *RLC* serie).

4. *Fare un tentativo di soluzione del problema.*

Il circuito dato viene ridisegnato usando Schematics come nella Figura 8.36. L'impulso rettangolare è stato specificato utilizzando un generatore di tensione VPWL, ma si sarebbe potuto usare anche un

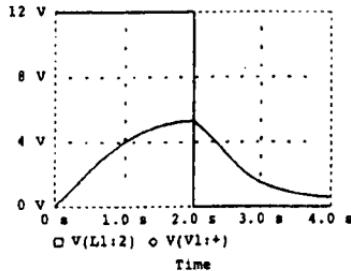
VPULSE. Utilizzando la funzione lineare a tratti, gli attributi di VPWL vengono specificati come $T1 = 0$, $V1 = 0$, $T2 = 0.001$, $V2 = 12$ e così via, come mostrato nella Figura 8.36.

Figura 8.36
Schematico per il circuito di Figura 8.35(b).



Vengono inserite due sonde di tensione per poter visualizzare il grafico della tensione di ingresso e di quella di uscita. Una volta disegnato il circuito e specificati i valori degli attributi si seleziona Analysis/Setup/Transient e si apre la finestra di dialogo Transient Analysis. Il circuito RLC parallelo ha radici caratteristiche pari a $-1 \pm j\sqrt{9}$. È possibile quindi porre Final Time a 4 s (quattro volte il valore assoluto della radice più piccola). Dopo aver salvato lo schematico, si seleziona Analysis/Simulate e si ottengono i grafici per la tensione di ingresso e quella di uscita nella finestra Probe, come mostrato nella Figura 8.37.

Figura 8.37
Per l'Esempio 8.12: tensioni di ingresso e di uscita.



Si passa ora alla verifica della soluzione utilizzando il metodo del Paragrafo 8.5. Si può iniziare ricavando l'equivalente di Thevenin per il circuito formato da generatore e resistori. Si ottiene $V_{Th} = 12/2 = 6V$ (la tensione sui resistori si divide in parti uguali quando l'induttore e il condensatore sono scollegati). La resistenza R_{Th} vale $R_{Th} = (60/60) = 30\Omega$. In questo modo si può determinare la risposta con $R = 30\Omega$, $L = 3H$ e $C = 1/27 F$.

Si devono prima calcolare α e ω_0 :

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{30}{2 \cdot 3} = 5 \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot \frac{1}{27}}} = 3$$

Quindi essendo $\alpha > \omega_0$, la risposta è sovrassmorzata

$$s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 - 9} = -1, -9 \quad v(0) = 0, v(\infty) = 6V, i(0) = 0$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

dove

$$\begin{aligned} v(t) &= A_1 e^{-t} + A_2 e^{-9t} + 6 \\ v(0) &= 0 = A_1 + A_2 + 6 \\ i(0) &= 0 = C(-A_1 - 9A_2) \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione si ricava $A_1 = -9A_2$, e sostituendo nelle altre due equazioni si ha

$$0 = -9A_2 + A_2 + 6 \quad \text{quindi} \quad A_2 = 0.75 \text{ e } A_1 = -6.75$$

Per cui si può scrivere

$$v(t) = u(t)(-6.75e^{-t} + 0.75e^{-9t} + 6)V \quad \text{per} \quad 0 < t < 2s.$$

All'istante $t = 1s$, si ha

$$v(1) = -6.75e^{-1} + 0.75e^{-9} + 6 = -2.483 + 0.001 + 6 = -3.552V$$

All'istante $t = 2s$, si ha

$$v(2) = -6.75e^{-2} + 0 + 6 = +5.086V$$

Si fa notare che per $2 < t < 4s$, $V_{Th} = 0$. Da cui si deduce che $v(\infty) = 0$. Perciò:

$$v(t) = u(t-2)(A_3 e^{-(t-2)} + A_4 e^{-9(t-2)})V$$

All'istante $t = 2s$, si ha $A_3 + A_4 = 5.086$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{(-A_3 e^{-(t-2)} - 9A_4 e^{-9(t-2)})}{27}$$

All'istante $t = 2s$, si ha

$$i(2) = \frac{6.75e^{-2} - 6.75e^{-18}}{27} = 33.83 mA$$

Perciò

$$-A_3 - 9A_4 = 0.9135.$$

Sostituendo in questa equazione A_4 , ricavato dalla precedente si ottiene:

$$A_3 - 9(5.086 - A_3) = 0.9135 \text{ che fornisce i valori seguenti}$$

$$A_3 = 5.835 \quad \text{e} \quad A_4 = -0.749$$

$$\text{All'istante } t = 3s, \quad v(3) = (2.147 - 0) = +2.147 V$$

$$\text{All'istante } t = 4s, \quad v(4) = +0.7897 V$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Il confronto tra i valori calcolati e il grafico tracciato in Figura 8.37 evidenzia una buona corrispondenza dei valori entro un certo livello di accuratezza.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è soddisfatti perché c'è accordo dei risultati ottenuti, che possono essere quindi presentati come la soluzione del problema.

■ **Esercizio 8.12** Determinare $i(t)$ per $0 < t < 4 s$ usando PSpice se la tensione impulsiva della Figura 8.35(a) viene applicata al circuito in Figura 8.38.

Risposta Vedere la Figura 8.39. ■

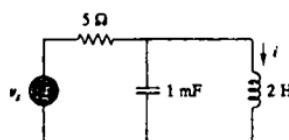


Figura 8.38 Per l'Esercizio 8.12.

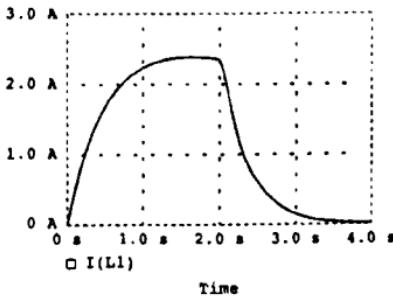


Figura 8.39 Grafico di $i(t)$ per l'Esercizio 8.12.

Esempio 8.13

Nel circuito di Figura 8.40, ottenere $i(t)$ per $0 < t < 3 s$ usando PSpice

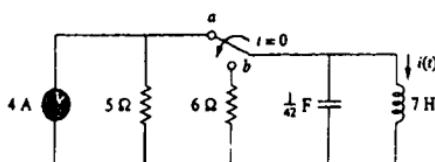


Figura 8.40
Per l'Esempio 8.13.

Soluzione: Quando l'interruttore è in posizione *a*, il resistore da 6Ω è ridondante. Lo schematico per questo caso è mostrato nella Figura 8.41(a). Per fare sì che la corrente $i(t)$ entri dal pin 1, l'induttore viene ruotato tre volte prima di essere posizionato nel circuito. La stessa cosa avviene per il condensatore. Vengono inseriti gli pseudocomponenti VIEWPOINT e IPROBE per visualizzare la tensione iniziale del condensatore e la corrente iniziale dell'induttore. Si esegue una analisi DC con PSpice selezionando Analysis/Simulate. Come si vede nella Figura 8.41(a), si ottiene una tensione iniziale sul condensatore di 0 V e una corrente iniziale $i(0)$ nell'induttore di 4 A. Questi valori iniziali verranno utilizzati nell'analisi in transitorio.

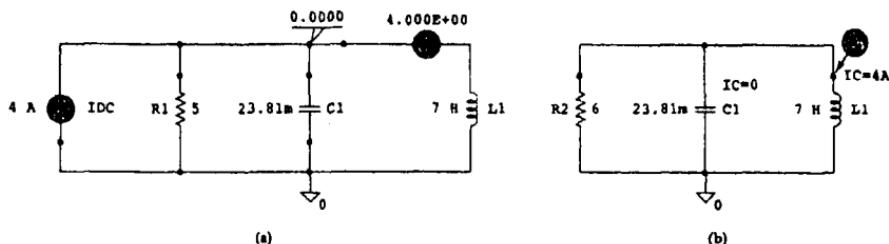
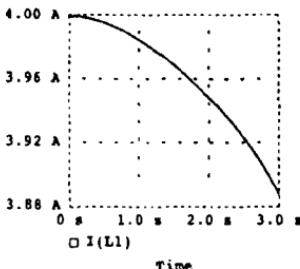


Figura 8.41 Per l'Esempio 8.13: (a) per l'analisi DC, (b) per l'analisi in transitorio.

Quando l'interruttore viene spostato in posizione *b*, il circuito diviene un circuito *RLC* parallelo autonomo, il cui schematico è mostrato nella Figura 8.41(b). Si pongono le condizioni iniziali $IC = 0$ per il condensatore e $IC = 4$ A per l'induttore. Viene inserita una sonda di corrente al pin 1 dell'induttore. Si seleziona Analysis/Setup/Transient, si apre la finestra di dialogo *Transient Analysis* e si pone *Final Time* a 3 s. Dopo aver salvato lo schematico, si seleziona Analysis/Transient. La Figura 8.42 mostra il grafico di $i(t)$. Il grafico è in accordo con l'espressione $i(t) = 4.8e^{-t} - 0.8e^{-4t}$ A, che è la soluzione calcolata manualmente.

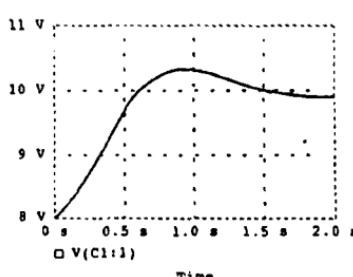
Figura 8.42
Grafico di $i(t)$ per l'Esempio 8.13.



■ **Esercizio 8.13** Con riferimento al circuito della Figura 8.21 (si veda l'Esercizio 8.7), utilizzare PSpice per ottenere $v(t)$ per $0 < t < 2$.

Risposta Si veda la Figura 8.43.

Figura 8.43
Grafico di $v(t)$ per l'Esempio 8.13.



8.10 DUALITÀ

Il concetto di dualità si rivela a volte un metodo rapido ed efficiente per risolvere problemi circuituali. Si prenda in considerazione, per esempio, la somiglianza fra la (8.4) e la (8.29). Le due equazioni sono identiche, se si scambiano fra loro le seguenti quantità: (1) tensione e corrente, (2) resistenza e conduttanza, (3) capacità e induttanza. Accade perciò, a volte nell'analisi dei circuiti, che due circuiti diversi presentino le stesse equazioni e soluzioni, se vengono scambiati fra loro i ruoli di alcuni elementi complementari. Tale intercambiabilità è nota come principio di *dualità*.

Il principio di dualità stabilisce una corrispondenza tra coppie di equazioni caratteristiche e teoremi dei circuiti aerei.

Le coppie di termini duali sono mostrate in Tabella 8.1. Si noti che la potenza non compare nella Tabella 8.1, perché la potenza non ha duale. La ragione sta nel principio di linearità; poiché la potenza non è lineare, a essa non si applica la dualità. Si noti inoltre dalla Tabella 8.1 che il principio di dualità si estende agli elementi circuituali, alle loro configurazioni e ai teoremi.

Tabella 8.1 Coppie di termini duali	
Resistenza R	Conduttanza G
Induttanza L	Capacità C
Tensione v	Corrente i
Generatore di tensione	Generatore di corrente
Nodo	Anello
Serie	Parallelo
Circuito aperto	Conto circuito
KVL	KCL
Thevenin	Norton

Due circuiti che sono descritti da equazioni della stessa forma, nelle quali le variabili duali risultano scambiate, si dicono uno il duale dell'altro.

Due circuiti si dicono duali l'uno dell'altro se sono caratterizzati dalle stesse equazioni, con le quantità duali scambiate tra loro.

L'utilità del principio di dualità è evidente. Una volta nota la soluzione di un circuito, si ha automaticamente la soluzione per il circuito duale. Risulta ovvio, per esempio, che i circuiti nelle Figure 8.8 e 8.13 sono duali. Di conseguenza, il risultato della (8.32) è il duale di quello della (8.11). Si tenga presente che il principio di dualità è limitato ai circuiti planari. I circuiti non planari non hanno duali, non potendo essere descritti con un sistema di equazioni agli anelli. Per determinare il duale di un circuito dato non è necessario scrivere le equazioni agli anelli o ai nodi; è sufficiente utilizzare una tecnica grafica. Data un circuito planare, il circuito duale si costruisce con la seguente procedura:

1. Posizionare un nodo al centro di ciascun anello del circuito dato. Posizionare il nodo di riferimento (la massa) del circuito duale al di fuori del circuito dato.
2. Disegnare delle linee fra i nodi, in modo che ciascuna linea attraversi un elemento. Sostituire quell'elemento con il suo duale (si veda la Tabella 8.1).
3. Per determinare la polarità dei generatori di tensione e la direzione dei generatori di corrente, si applichi la seguente regola: un generatore di tensione che produce una corrente di anello positiva (in senso orario) ha come duale un generatore di corrente la cui direzione di riferimento va dalla massa al nodo non di riferimento.

In caso di dubbio, è possibile verificare il circuito duale scrivendo le equazioni nodali o agli anelli. Le equazioni agli anelli (o nodali) del circuito originale sono simili alle equazioni nodali (o agli anelli) del circuito duale. Il principio di dualità è illustrato nei due esempi seguenti.

Esempio 8.14

Costruire il duale del circuito di Figura 8.44.

Soluzione: Come mostra la Figura 8.45(a), si posizionano dapprima i nodi 1 e 2 nei due anelli, e il nodo di riferimento 0 del circuito duale. Si tracciano delle linee da un nodo all'altro che attraversano gli elementi. Si sostituisce ciascuna linea che congiunge due nodi con il duale dell'elemento che essa attraversa. Per esempio, la linea fra i nodi 1 e 2 attraversa l'induttore da 2 H; si posiziona allora un condensatore da 2 F (il duale dell'induttore) sulla linea. La linea fra i nodi 1 e 0 attraversa il generatore di tensione da 6 V e contiene quindi un generatore di corrente da 6 A. Disegnando linee che attraversano tutti gli elementi si costruisce il circuito duale sovrapposto al circuito dato, come nella Figura 8.45(a). Il circuito duale è stato poi ridisegnato nella Figura 8.45(b) per maggiore chiarezza.

Figura 8.44
Per l'Esempio 8.14

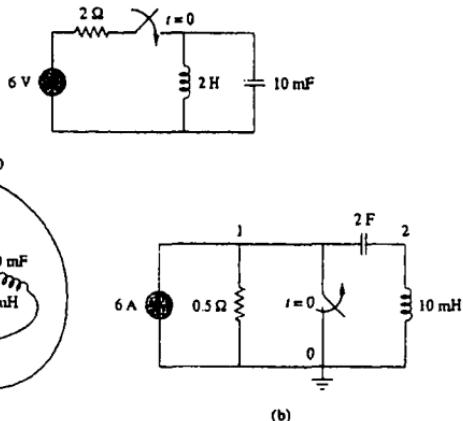


Figura 8.45 (a) Costruzione del circuito duale di quello in Figura 8.44, (b) circuito duale ridisegnato.

Esercizio 8.14 Disegnare il circuito duale di quello in Figura 8.46.

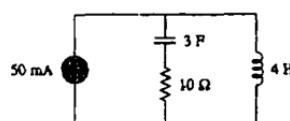


Figura 8.46 Per l'Esercizio 8.14.

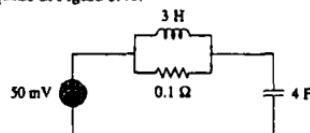


Figura 8.47 Duale del circuito in Figura 8.46.

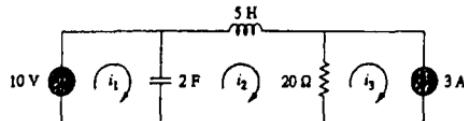
Risposta Vedere la Figura 8.47.

Esempio 8.15

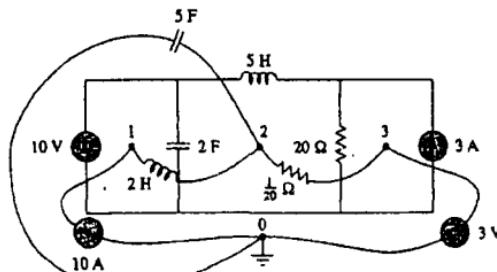
Costruire il duale del circuito in Figura 8.48.

Soluzione: Il circuito duale viene costruito sopra il circuito originale nella Figura 8.49(a). Si posizionano dapprima i nodi da 1 a 3 e il nodo di riferimento 0. Congiungendo i nodi 1 e 2 si attraversa il condensatore da 2 F, che viene sostituito da un induttore da 2 H.

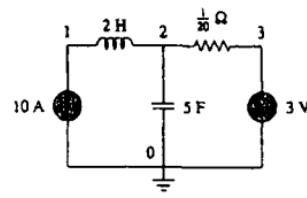
Figura 8.48
Per l'Esempio 8.15.



Congiungendo i nodi 2 e 3 si attraversa il resistore da $20\ \Omega$, che viene sostituito da un resistore da $1/20\ \Omega$. Si continua con questo procedimento fino a quando tutti gli elementi sono stati sostituiti. Il risultato è mostrato in Figura 8.49(a). Il circuito duale viene poi ridisegnato nella Figura 8.49(b).



(a)



(b)

Figura 8.49 Per l'Esempio 8.15: (a) costruzione del circuito duale di quello in Figura 8.48, (b) circuito duale ridisegnato.

Per verificare la polarità del generatore di tensione e la direzione del generatore di corrente, si possono applicare le correnti di anello i_1 , i_2 e i_3 (tutte in senso orario) nel circuito originale della Figura 8.48. Il generatore di tensione da 10 V produce la corrente di anello positiva i_1 , e il suo duale è quindi un generatore di corrente da 10 A diretto da 0 a 1. Inoltre, $i_3 = -3$ A nella Figura 8.48 ha come duale $v_3 = -3$ V nella Figura 8.49(b).

Esercizio 8.15 Per il circuito di Figura 8.50, ricavare il circuito duale.

Risposta Si veda la Figura 8.51.

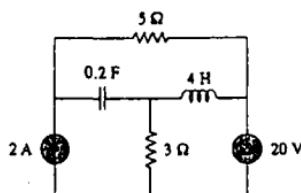


Figura 8.50 Per l'Esercizio 8.15.

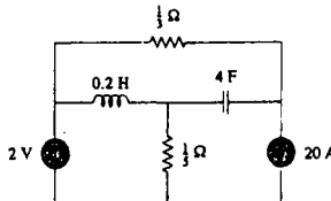


Figura 8.51 Duale del circuito in Figura 8.50.

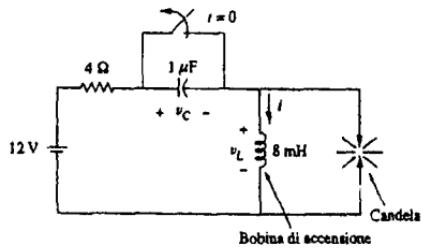
8.11 APPLICAZIONI†

I circuiti *RLC* trovano applicazione pratica in circuiti per il controllo e le telecomunicazioni, quali per esempio circuiti oscillanti, generatori di impulsi, circuiti risonanti, circuiti di condizionamento e filtri. La presentazione della maggior parte di questi circuiti deve essere differita a dopo che saranno stati trattati i generatori sinusoidali. Ci si limiterà per ora a due semplici applicazioni: un circuito di accensione per automobile e un circuito di smoothing.

8.11.1 Sistema di accensione per auto

Nel paragrafo 7.9.4, il sistema di accensione per automobile è stato presentato come un circuito di carica. Questa è soltanto una parte del sistema completo. Viene qui considerata un'altra parte – il sistema di generazione della tensione. Un possibile modello del sistema è rappresentato dal circuito mostrato nella Figura 8.52. Il generatore da 12 V rappresenta la batteria e l'alternatore. Il resistore da $4\ \Omega$ rappresenta la resistenza dell'avvolgimento. La bobina di accensione è rappresentata dall'induttore da 8 mH . Il condensatore da $1\ \mu\text{F}$ risulta in parallelo all'interruttore (detto anche *ruttore* o *accensione elettronica*). Nell'esempio che segue si mostra come il circuito *RLC* di Figura 8.52 viene utilizzato per la generazione di una tensione di valore elevato.

Figura 8.52
Circuito di accensione per auto



Esempio 8.16

Supponendo che l'interruttore nella Figura 8.52 sia rimasto chiuso per molto tempo prima di $t = 0^-$, determinare la tensione v_L sull'induttore per $t > 0$.

Soluzione: Se l'interruttore è chiuso prima di $t = 0^-$ e il circuito è nella condizione di regime; allora

$$i(0^-) = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}, \quad v_C(0^-) = 0$$

A $t = 0^+$, l'interruttore viene aperto. Le condizioni di continuità impongono che

$$i(0^+) = 3 \text{ A}, \quad v_C(0^+) = 0 \quad (8.16.1)$$

Si ottiene ora $di(0^+)/dt$ da $v_L(0^+)$. Applicando la KVL all'anello, per $t = 0^+$ si ha

$$-12 + 4i(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) = 0$$

$$-12 + 4 \times 3 + v_L(0^+) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L(0^+) = 0$$

Quindi,

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 0 \quad (8.16.2)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, il sistema raggiunge il regime, e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Allora

$$i(\infty) = 0 \quad (8.16.3)$$

Se si applica la KVL all'anello, per $t > 0$ si ottiene

$$12 = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + v_C(0)$$

Derivando ciascuno dei termini si ottiene

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (8.16.4)$$

Si calcola la risposta naturale seguendo il procedimento del Paragrafo 8.3. Sostituendo $R = 4 \Omega$, $L = 8 \text{ mH}$ e $C = 1 \mu\text{F}$, si ottiene

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 250, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1.118 \times 10^4$$

Poiché $\alpha < \omega_0$, la risposta è sottosmorzata. La frequenza naturale smorzata vale

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0 = 1.118 \times 10^4$$

La risposta naturale è

$$i_n(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t) \quad (8.16.5)$$

dove A e B sono costanti. La risposta di regime vale

$$i_{sr}(t) = i(\infty) = 0 \quad (8.16.6)$$

così che la risposta completa è

$$i(t) = i_n(t) + i_{sr}(t) = e^{-250t} (A \cos 1.118 \times 10^4 t + B \sin 1.118 \times 10^4 t) \quad (8.16.7)$$

Si determinano ora A e B .

$$i(0) = 3 = A + 0 \quad \Rightarrow \quad A = 3$$

Derivando la (8.16.7),

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} = & -250e^{-250t}(A \cos 11180t + B \sin 11180t) \\ & + e^{-250t}(-11180A \sin 11180t + 11180B \cos 11180t)\end{aligned}$$

Ponendo $t = 0$ e ricordando la (8.16.2),

$$0 = -250A + 11180B \quad \Rightarrow \quad B = 0.0671$$

Perciò

$$i(t) = e^{-250t}(3 \cos 11180t + 0.0671 \sin 11180t) \quad (8.16.8)$$

La tensione sull'induttore vale allora

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = -268e^{-250t} \sin 11180t \quad (8.16.9)$$

Questa espressione assume il valore massimo quando la funzione seno è unitaria, cioè per $11180t_0 = \pi/2$, o $t_0 = 140.5 \mu\text{s}$. All'istante t_0 , la tensione dell'induttore raggiunge il suo picco, che vale

$$v_L(t_0) = -268e^{-250t_0} = -259 \text{ V} \quad (8.16.10)$$

Nonostante questa tensione sia molto minore del valore compreso fra 6000 e 10000 V necessario per far scoccare la scintilla in una tipica candela per automobile, è possibile utilizzare un dispositivo detto *trasformatore* (che verrà presentato nel Capitolo 13) per portare la tensione dell'induttore al livello adeguato.

Esercizio 8.16 In Figura 8.52, determinare la tensione v_C del condensatore per $t > 0$.

Risposta $12 - 12e^{-250t} \cos 11180t + 267.7e^{-250t} \sin 11180t \text{ V}$.



8.11.2 Circuito di smoothing

In un tipico sistema di comunicazione digitale, il segnale da trasmettere viene dapprima campionato. Si chiama campionamento l'operazione di selezione di alcuni valori di un segnale per la loro elaborazione, invece di elaborare l'intero segnale. Ciascun campione viene convertito in un numero binario rappresentato da una serie di impulsi. Gli impulsi vengono trasmessi da una linea di trasmissione, quale per esempio un cavo coassiale, un doppino intrecciato oppure una fibra ottica. Nel ricevitore, il segnale viene applicato a un convertitore digitale-analogico (D/A) la cui uscita è una funzione costante a tratti. Per riottenere il segnale analogico trasmesso, l'uscita viene poi elaborata facendola passare attraverso un circuito di "smoothing", come illustrato nella Figura 8.53. Un circuito RLC può essere utilizzato come circuito di smoothing.

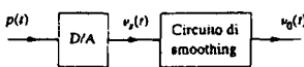
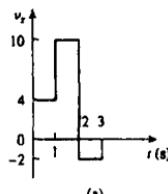


Figura 8.53

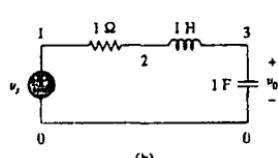
Un serie di impulsi viene applicata al convertitore digitale-analogico (D/A), la cui uscita viene applicata al circuito di smoothing.

Esempio 8.17

L'uscita di un convertitore D/A è mostrata nella Figura 8.54(a). Se il circuito RLC di Figura 8.54(b) viene usato come circuito di smoothing, determinare la tensione di uscita $v_o(t)$.



(a)

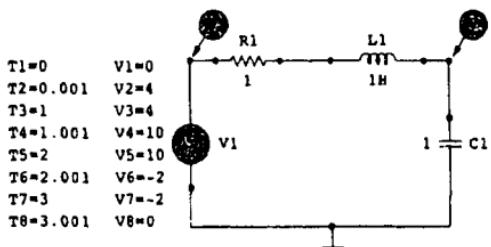


(b)

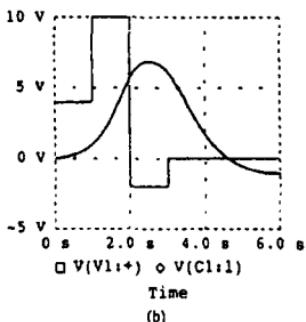
Figura 8.54

Per l'Esempio 8.17: (a) uscita del convertitore D/A, (b) circuito RLC di smoothing.

Soluzione: Per risolvere questo problema è bene utilizzare *PSpice*. Lo schematico è mostrato in Figura 8.55(a). L'impulso della Figura 8.54(a) viene specificato utilizzando la funzione lineare a tratti.



(a)



(b)

Figura 8.55 Per l'Esempio 8.17. (a) schematico, (b) tensioni di ingresso e di uscita.

Gli attributi di V_1 vengono specificati come $T1 = 0$, $V1 = 0$, $T2 = 0.001$, $V2 = 4$, $T3 = 1$, $V3 = 4$, e così via. Per poter tracciare il grafico della tensione di ingresso e di quella di uscita, si inseriscono due sonde di tensione come mostrato in Figura 8.55(a). Si seleziona Analysis/Setup/Transient e nella finestra di dialogo Transient Analysis si pone Final Time a 6 s. Una volta salvato lo schematico, si seleziona Analysis/Simulate per eseguire Probe e si ottengono i grafici mostrati nella Figura 8.55(b).

■ **Esercizio 8.17** Ripetere l'Esempio 8.17 se l'uscita del convertitore D/A è quella mostrata in Figura 8.56.

Risposta Si veda la Figura 8.57.

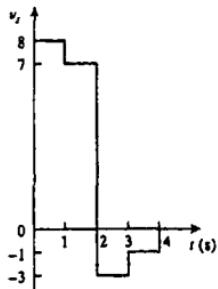


Figura 8.56 Per l'Esercizio 8.17.

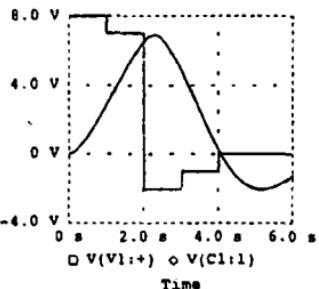


Figura 8.57 Risultato dell'Esercizio 8.17.

SOMMARIO

- Per lo studio dei circuiti del secondo ordine è importante il calcolo delle condizioni iniziali $x(0)$ e $dx(0)/dt$ della condizione finale $x(\infty)$.
- Il circuito RLC è del secondo ordine perché è descritto da una equazione differenziale del secondo ordine. La sua equazione caratteristica è $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$, dove α è il fattore di smorzamento e ω_0 è la frequenza naturale non smorzata. Per un circuito RLC serie $\alpha = R/(2L)$, per un circuito RLC parallelo $\alpha = 1/(2RC)$, e in entrambi i casi $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- Se nel circuito non ci sono generatori indipendenti, dopo un cambiamento improvviso (come può essere l'apertura o la chiusura di un interruttore), si può considerare il circuito come autonomo.

- 4) La risposta naturale di un circuito RLC è sovrasmorzata, sottosmorzata o criticamente smorzata in funzione delle radici dell'equazione caratteristica. La risposta è criticamente smorzata quando le radici sono uguali ($s_1 = s_2$ oppure $\alpha = \omega_0$), sovrasmorzata quando le radici sono reali e distinte ($s_1 \neq s_2$ oppure $\alpha > \omega_0$), oppure sottosmorzata quando le radici sono complesse coniugate ($s_1 = s_2^*$ oppure $\alpha < \omega_0$).
- 5) Se nel circuito sono presenti generatori indipendenti, la risposta completa dopo un cambiamento improvviso si ottiene dalla somma della risposta transitoria e della risposta a regime.
- 6) Si può usare PSpice per studiare i circuiti RLC nello stesso modo dei circuiti RC e RL.
- 7) Due circuiti sono duali se le equazioni agli anelli che descrivono il primo circuito, hanno la stessa forma delle equazioni nodali che descrivono il secondo circuito (duale). L'analisi di un circuito fornisce anche l'analisi del circuito duale.
- 8) Tipiche applicazioni degli argomenti trattati in questo capitolo sono il sistema di accensione dell'automobile e il circuito di smoothing.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 8.1 Nel circuito di Figura 8.58, la tensione sul condensatore in $t = 0^-$ (appena prima della chiusura dell'interruttore) è:

(a) 0 V (b) 4 V (c) 8 V (d) 12 V

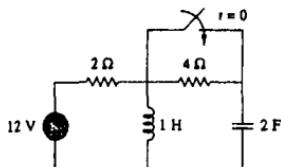


Figura 8.58 Per le domande di neipilogo 8.1 e 8.2.

- 8.2 Nel circuito di Figura 8.58, la corrente iniziale nell'induttore (nell'istante $t = 0^-$) è:

(a) 0 A (b) 2 A (c) 6 A (d) 12 A

- 8.3 Quando ad un circuito del secondo ordine viene applicato un ingresso a gradino, i valori finali delle variabili circolari si ottengono:

(a) Sostituendo i condensatori con corti circuiti e gli induttori con circuiti aperti.
 (b) Sostituendo i condensatori con circuiti aperti e gli induttori con corti circuiti.
 (c) Con nessuna delle operazioni precedenti.

- 8.4 Se le radici dell'equazione caratteristica di un circuito RLC sono -2 e -3 , la risposta vale:

(a) $(A \cos 2t + B \sin 2t)e^{-3t}$ (b) $(A + 2Bt)e^{-3t}$
 (c) $Ae^{-2t} + Bte^{-3t}$ (d) $Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

dove A e B sono costanti

- 8.5 In un circuito RLC serie, ponendo $R = 0$ si ottiene:

(a) una risposta sovrasmorzata
 (b) una risposta criticamente smorzata

- (c) una risposta sottosmorzata
 (d) una risposta senza smorzamento
 (e) nessuna delle precedenti

- 8.6 In un circuito RLC parallelo $L = 2 \text{ H}$ e $C = 0.25 \text{ F}$. Il valore di R che dà luogo ad un fattore di smorzamento unitario è:

(a) 0.5Ω (b) 1Ω (c) 2Ω (d) 4Ω

- 8.7 Si faccia riferimento al circuito RLC serie di Figura 8.59. Quale tipo di risposta esso produrrà?

(a) sovrasmorzata
 (b) sottosmorzata
 (c) a smorzamento critico
 (d) nessuna delle precedenti

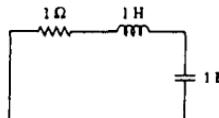


Figura 8.59 Per la domanda di neipilogo 8.7.

- 8.8 Si consideri il circuito RLC parallelo della Figura 8.60. Quale sarà il tipo di risposta prodotta?

(a) sovrasmorzata
 (b) sottosmorzata
 (c) criticamente smorzata
 (d) nessuna delle precedenti

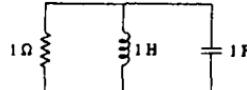


Figura 8.60 Per la domanda di neipilogo 8.8.

- 8.40** L'interruttore nel circuito di Figura 8.88 viene spostato dalla posizione *a* a *b* nell'istante $t = 0$. Determinare $i(t)$ per $t > 0$.

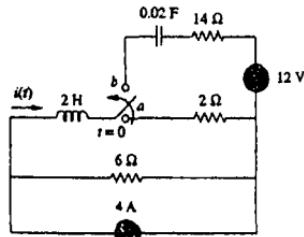


Figura 8.88 Per il Problema 8.40.

- *8.41** Nella rete di Figura 8.89, determinare $i(t)$ per $t > 0$.

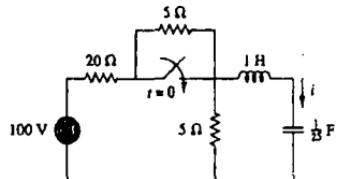


Figura 8.89 Per il Problema 8.41.

- *8.42** Data la rete in Figura 8.90, determinare $v(t)$ per $t > 0$.

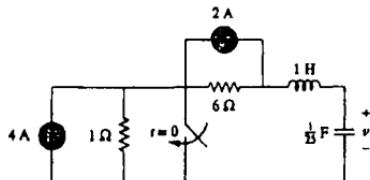


Figura 8.90 Per il Problema 8.42.

- 8.43** L'interruttore in Figura 8.91 si apre per $t = 0$, dopo che il circuito ha raggiunto la condizione di regime. Scegliere i valori di R e C in modo che $\alpha = 8 \text{ Np/s}$ e $\omega_d = 30 \text{ rad/s}$.

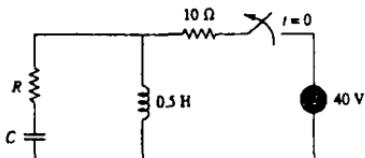


Figura 8.91 Per il Problema 8.43.

- 8.44** Un circuito *RLC* serie ha i seguenti valori: $R = 1\text{k}\Omega$, $L = 1\text{H}$ e $C = 10\text{nF}$. Quale tipo di smorzamento presenta il circuito?

Paragrafo 8.6

- Risposta al gradino di circuito *RLC* parallelo**

- 8.45** Nel circuito di Figura 8.92, determinare $v(t)$ e $i(t)$ per $t > 0$. Supponere $v(0) = 0 \text{ V}$ e $i(0) = 1 \text{ A}$.

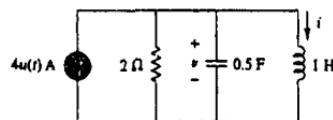


Figura 8.92 Per il Problema 8.45.

- 8.46** Determinare $i(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.93.

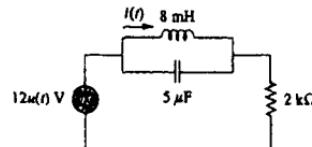


Figura 8.93 Per il Problema 8.46.

- 8.47** Determinare la tensione di uscita $v_o(t)$ nel circuito di Figura 8.94.

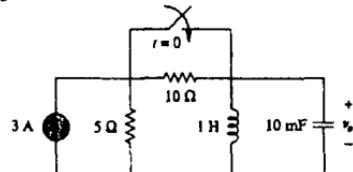


Figura 8.94 Per il Problema 8.47.

- 8.48** Dato il circuito in Figura 8.95, determinare $i(t)$ e $v(t)$ per $t > 0$.

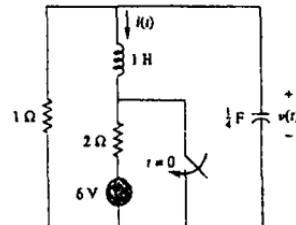


Figura 8.95 Per il Problema 8.48.

- 8.49** Determinare $i(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.96.

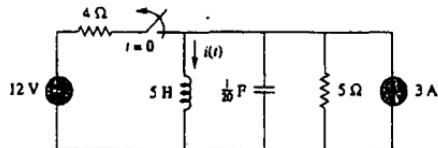


Figura 8.96 Per il Problema 8.49.

- 8.50 Nel circuito di Figura 8.97, determinare $i(t)$ per $t > 0$.

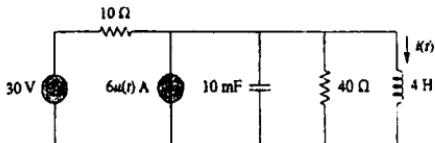


Figura 8.97 Per il Problema 8.50.

- 8.51 Determinare $v(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.98.

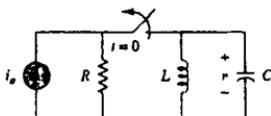


Figura 8.98 Per il Problema 8.51.

- 8.52 La risposta al gradino di un circuito RLC parallelo è $v = 10 + 20e^{-300t}(\cos 400t - 2 \sin 400t)$ V, $t \geq 0$ e l'induttore vale 50 mH. Determinare R e C .

Paragrafo 8.7 Circuiti del secondo ordine nel caso generale

- 8.53 Dopo essere rimasto aperto per un giorno, l'interruttore nel circuito di Figura 8.99 viene chiuso a $t = 0$. Determinare l'equazione differenziale risolubile per $i(t)$ per $t > 0$.

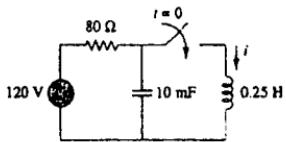


Figura 8.99 Per il Problema 8.53.

- 8.54 L'interruttore di Figura 8.100 viene spostato dalla posizione A alla posizione B a $t = 0$. Determinare:
 (a) $i(0^+)$ e $v(0^+)$,
 (b) $di(0^+)/dt$ e $dv(0^+)/dt$,
 (c) $i(\infty)$ e $v(\infty)$.

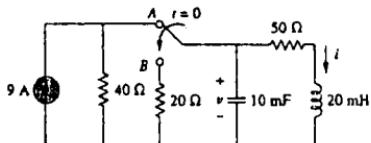


Figura 8.100 Per il Problema 8.54.

- 8.55 Nel circuito di Figura 8.101, determinare $v(t)$ per $t > 0$. Supponere $v(0^+) = 4$ V e $i(0^+) = 2$ A.

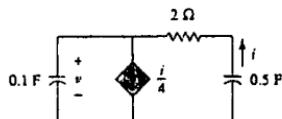


Figura 8.101 Per il Problema 8.55.

- 8.56 Nel circuito di Figura 8.102, determinare $i(t)$ per $t > 0$.

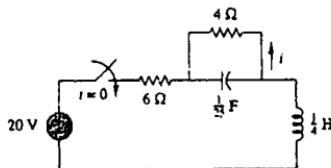


Figura 8.102 Per il Problema 8.56.

- 8.57 Se l'interruttore in Figura 8.103 è rimasto chiuso per molto tempo prima di $t = 0$ ma viene aperto in $t = 0$, determinare:

- (a) l'equazione caratteristica del circuito,
 (b) i_s e v_R per $t > 0$.

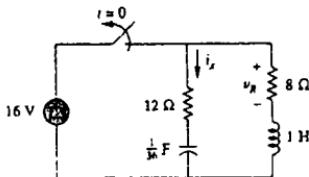


Figura 8.103 Per il Problema 8.57.

- 8.58 Nel circuito di Figura 8.104, l'interruttore è rimasto in posizione 1 per molto tempo e si è spostato in posizione 2 all'istante $t = 0$. Determinare:

- (a) $v(0^+)$, $dv(0^+)/dt$
 (b) $v(t)$ per $t \geq 0$.

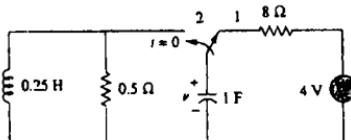


Figura 8.104 Per il Problema 8.58.

- 8.59 L'interruttore in Figura 8.105 è rimasto in posizione 1 per $t < 0$. In $t = 0$, viene spostato istantaneamente in posizione 2. Determinare $v(t)$.

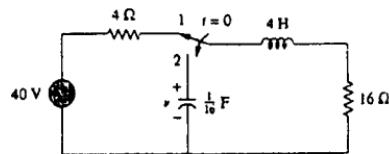


Figura 8.105 Per il Problema 8.59.

- 8.60 Calcolare i_1 e i_2 per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.106

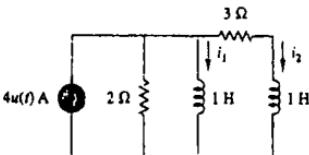


Figura 8.106 Per il Problema 8.60.

- 8.61 Nel circuito del Problema 8.5, determinare i e v per $t > 0$.
- 8.62 Calcolare la risposta $v_R(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.107. Supponere $R = 3 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$ e $C = 1/18 \text{ F}$.

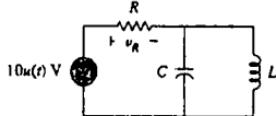


Figura 8.107 Per il Problema 8.62.

Paragrafo 8.8 Circuiti del secondo ordine con operazionali

- 8.63 Per il circuito con amplificatore operazionale di Figura 8.108 determinare l'equazione differenziale per la corrente $i(t)$.

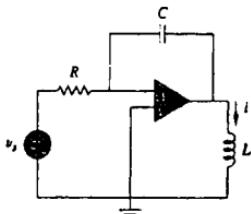


Figura 8.108 Per il Problema 8.63.

- 8.64 Per il circuito con amplificatore operazionale di Figura 8.109 ricavare l'equazione differenziale relativa a v_0 e v_1 .

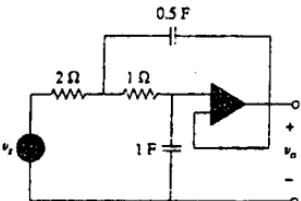


Figura 8.109 Per il Problema 8.64.

- 8.65 Scrivere l'equazione differenziale per il circuito con operazionale di Figura 8.110. Se $v_1(0^+) = 2 \text{ V}$ e $v_2(0^+) = 0 \text{ V}$, determinare v_o per $t > 0$. Supponere $R = 100 \text{ k}\Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$.

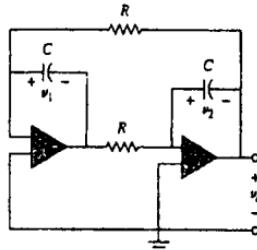


Figura 8.110 Per il Problema 8.65.

- 8.66 Ottenere l'equazione differenziale per $v_0(t)$ nel circuito con amplificatore operazionale di Figura 8.111.

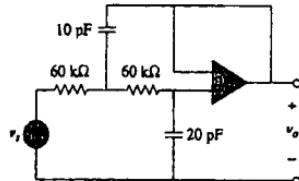


Figura 8.111 Per il Problema 8.66.

- *8.67 Nel circuito con operazionale di Figura 8.112, determinare $v_o(t)$ per $t > 0$. Sono dati $v_{in} = u(t) \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 100 \mu\text{F}$.

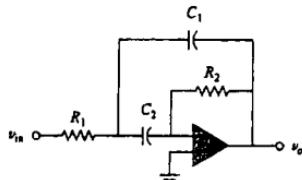


Figura 8.112 Per il Problema 8.67.

Paragrafo 8.9 Analisi di circuiti RLC con PSpice

- 8.68 Utilizzare PSpice per calcolare la risposta $v(t)$ per $0 < t < 6 \text{ s}$ alla funzione gradino $v_s = u(t) \text{ V}$ nel circuito di Figura 8.113.

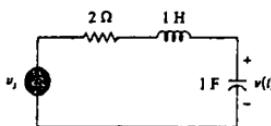


Figura 8.113 Per il Problema 8.68.

- 8.69 Dato il circuito autonomo in Figura 8.114, usare PSpice per calcolare $i(t)$ per $0 < t < 20 \text{ s}$. Supponere $v(0) = 30 \text{ V}$ e $i(0) = 2 \text{ A}$.

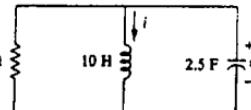


Figura 8.114 Per il Problema 8.69.

- 8.70 Nel circuito di Figura 8.115, utilizzare PSpice per calcolare $v(t)$ per $0 < t < 4$ s. Supporre che la tensione del condensatore e la corrente nell'induttore siano entrambe nulle per $t = 0$.

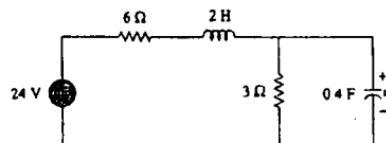


Figura 8.115 Per il Problema 8.70.

- 8.71 Calcolare $v(t)$ per $0 < t < 4$ s nel circuito di Figura 8.116 usando PSpice.

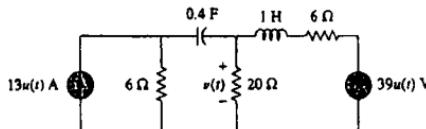


Figura 8.116 Per il Problema 8.71.

- 8.72 L'interruttore in Figura 8.117 è rimasto in posizione 1 per molto tempo. In $t = 0$, viene spostato in posizione 2. Utilizzare PSpice per calcolare $i(t)$ per $0 < t < 0.2$ s.

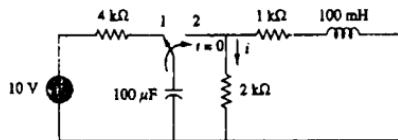
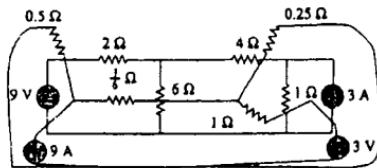


Figura 8.117 Per il Problema 8.72.

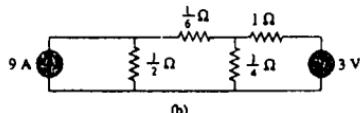
- 8.73 Ripetere il Problema 8.25 usando PSpice. Tracciare il grafico di $v_o(t)$ per $0 < t < 4$ s.

Paragrafo 8.10 Dualità

- 8.74 Nella Figura 8.118(a) è mostrato un circuito e il suo circuito duale. Il circuito duale è ridisegnato come mostrato nella Figura 8.118(b).



(a)



(b)

Figura 8.118 Per il Problema 8.74.

- 8.75 Disegnare il duale del circuito in Figura 8.119.

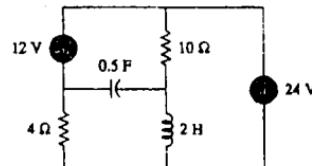


Figura 8.119 Per il Problema 8.75.

- 8.76 Disegnare il duale del circuito in Figura 8.120.

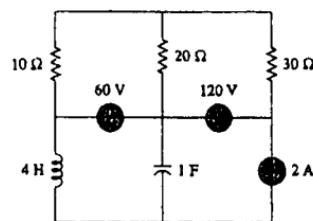


Figura 8.120 Per il Problema 8.76.

- 8.77 Disegnare il duale del circuito in Figura 8.121.

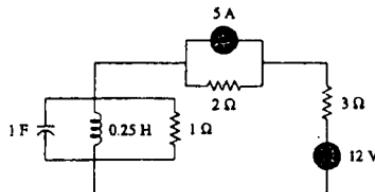


Figura 8.121 Per il Problema 8.77.

Paragrafo 8.11 Applicazioni

- 8.78 Il sistema di attivazione di un airbag per auto è rappresentato dal circuito in Figura 8.122. Calcolare il tempo necessario perché la tensione del circuito raggiunga il primo picco dopo la commutazione da A a B. Supporre $R = 3\Omega$, $C = 1/30\text{ F}$ e $L = 60\text{ mH}$.

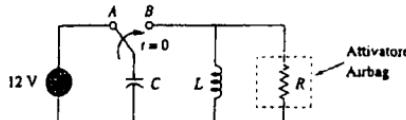


Figura 8.122 Per il Problema 8.78.

- 8.79 Un carico può essere rappresentato da un induttore da 250 mH in parallelo ad un resistore da 12Ω . Si deve collegare un condensatore al carico in modo che la rete abbia smorzamento critico a 60 Hz . Calcolare il valore del condensatore.

- 8.9 Assegnare i circuiti in Figura 8.61 con le seguenti definizioni:
- circuito del primo ordine
 - circuito serie del secondo ordine
 - circuito parallelo del secondo ordine
 - nessuno dei precedenti

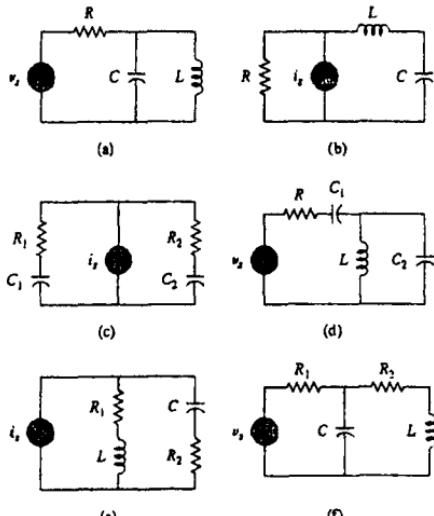


Figura 8.61 Per la domanda di esercizio 8.9.

- 8.10 In un circuito elettrico, il duale della resistenza è:
- condutanza
 - induttanza
 - capacità
 - circuito aperto
 - corto circuito

Risposte: 8.1a, 8.2c, 8.3b, 8.4d, 8.5d, 8.6c, 8.7b, 8.8b, 8.9 (i)-c, (ii)-b, e, (iii)-a, (iv)-d, f, 8.10a

PROBLEMI

Paragrafo 8.2 Calcolo di condizioni iniziali e finali

- 8.1 Nel circuito di Figura 8.62, determinare:

- $i(0^+)$ e $v(0^+)$,
- $di(0^+)/dt$ e $dv(0^+)/dt$,
- $i(\infty)$ e $v(\infty)$.

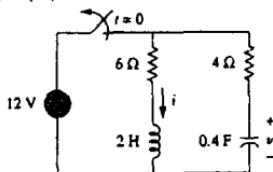


Figura 8.62 Per il Problema 8.1.

- 8.2 Nel circuito di Figura 8.63, determinare:

- $i_R(0^+)$, $i_L(0^+)$ e $i_C(0^+)$,
- $di_R(0^+)/dt$, $di_L(0^+)/dt$ e $di_C(0^+)/dt$,
- $i_R(\infty)$, $i_L(\infty)$ e $i_C(\infty)$.

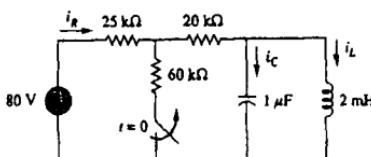


Figura 8.63 Per il Problema 8.2.

- 8.3 Si faccia riferimento al circuito mostrato in Figura 8.64. Calcolare:

- $i_L(0^+)$, $v_C(0^+)$ e $v_R(0^+)$,
- $dv(0^+)/dt$, $dv_C(0^+)/dt$ e $dv_R(0^+)/dt$,
- $i_L(\infty)$, $v_C(\infty)$ e $v_R(\infty)$.

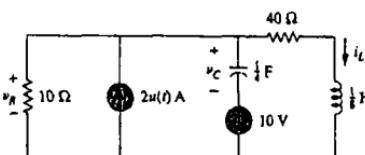


Figura 8.64 Per il Problema 8.3.

- 8.4 Nel circuito di Figura 8.65, determinare:

- $v(0^+)$ e $i(0^+)$,
- $dv(0^+)/dt$ e $di(0^+)/dt$,
- $v(\infty)$ e $i(\infty)$.

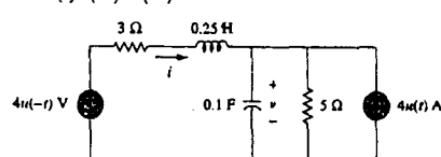


Figura 8.65 Per il Problema 8.4.

- 8.5 Si faccia riferimento al circuito in Figura 8.66. Determinare:

- $i(0^+)$ e $v(0^+)$,
- $di(0^+)/dt$ e $dv(0^+)/dt$,
- $i(\infty)$ e $v(\infty)$.

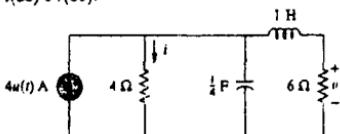


Figura 8.66 Per il Problema 8.5.

- 8.6 Nel circuito di Figura 8.67, determinare:

- $v_R(0^+)$ e $v_L(0^+)$,
- $dv_R(0^+)/dt$ e $dv_L(0^+)/dt$,
- $v_R(\infty)$ e $v_L(\infty)$.

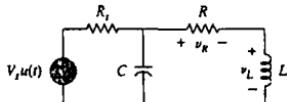


Figura 8.67 Per il Problema 8.6.

Paragrafo 8.3 Circuito RLC serie autonomo

- 8.7 Un circuito RLC serie ha $R = 10 \text{ k}\Omega$, $L = 0.1 \text{ mH}$ e $C = 10\mu\text{F}$. Quale tipo di smorzamento presenta il circuito?

- 8.8 Una corrente di un ramo è descritta dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 4 \frac{di(t)}{dt} + 10i(t) = 0$$

Determinare:

- l'equazione caratteristica;
- il tipo di smorzamento presentato dal circuito;
- $i(t)$ dato che $i(0) = 1 \text{ A}$ e $di(0)/dt = 2$.

- 8.9 La corrente in un circuito RLC è descritta da

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 10 \frac{di}{dt} + 25i = 0$$

Se $i(0) = 10$ e $di(0)/dt = 0$, determinare $i(t)$ per $t > 0$.

- 8.10 L'equazione differenziale che descrive la tensione in una rete RLC è

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 4v = 0$$

dati $v(0) = 0$, $dv(0)/dt = 10$, calcolare $v(t)$.

- 8.11 La risposta naturale di un circuito RLC è descritta dalla equazione differenziale

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + v = 0$$

le cui condizioni iniziali sono $v(0) = 10$ e $dv(0)/dt = 0$. Determinare $v(t)$.

- 8.12 Se $R = 20 \Omega$, $L = 0.6 \text{ H}$, quale valore di C rende un circuito RLC serie:

- sovramorzato,
- a smorzamento critico,
- sotromorzato?

- 8.13 Nel circuito di Figura 8.68, calcolare il valore di R necessario per avere una risposta con smorzamento critico.

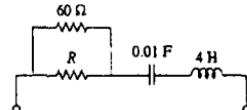


Figura 8.68 Per il Problema 8.13

- 8.14 L'interruttore di Figura 8.69 viene spostato dalla posizione A alla posizione B a $t = 0$ (notare che l'interruttore deve essere collegato al punto B prima di essere staccato dal punto A). Determinare $v(t)$ per $t > 0$.

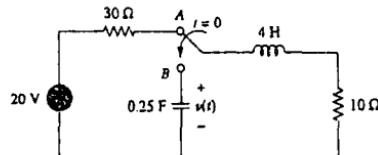


Figura 8.69 Per il Problema 8.14.

- 8.15 Le risposte di un circuito RLC serie sono

$$v_C(t) = 30 - 10e^{-20t} + 30e^{-10t} \text{ V}$$

$$i_L(t) = 40e^{-20t} - 60e^{-10t} \text{ mA}$$

dove v_C e i_L sono la tensione del condensatore e la corrente dell'induttore, rispettivamente. Determinare i valori di R , L e C .

- 8.16 Determinare $i(t)$ per $t > 0$ nel circuito di Figura 8.70.

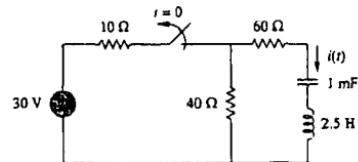


Figura 8.70 Per il Problema 8.16.

- 8.17 Nel circuito di Figura 8.71, l'interruttore si sposta instantaneamente dalla posizione A alla B nell'istante $t = 0$. Determinare $v(t)$ per ogni $t \geq 0$.

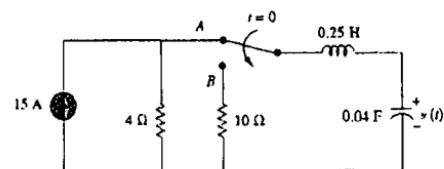


Figura 8.71 Per il Problema 8.17.

SINUSOIDI E FASORI

9.1 INTRODUZIONE

Fino a questo punto, l'analisi dei circuiti si è limitata al caso di circuiti eccitati da generatori costanti, o tempo-invarianti. Le funzioni forzanti erano solo generatori tempo-invarianti per ragioni di semplicità, per ragioni didattiche e anche per ragioni storiche. Storicamente, l'energia elettrica venne distribuita in forma di tensioni costanti nel tempo fino alla fine dell'Ottocento. La battaglia tra i sostenitori della corrente cosiddetta continua e i sostenitori della corrente alternata iniziò proprio alla fine del secolo. Entrambi i metodi di distribuzione avevano i loro sostenitori tra gli ingegneri elettrici del tempo. Grazie alla maggiore efficienza delle sorgenti alternate, unita alla maggiore economia di trasmissione su lunghe distanze, i sistemi AC finirono col risultare vittoriosi. Le sorgenti costanti sono state perciò considerate per prime in questo testo anche per mantenersi fedeli alla sequenza storica degli eventi. Si inizia ora l'analisi di circuiti in cui le tensioni e le correnti dei generatori sono tempo-varianti. In questo capitolo, si è in particolare interessati alle eccitazioni che variano nel tempo in maniera sinusoidale, o più semplicemente, eccitazioni da parte di *sinusoidi*.

 Una sinusode è un segnale che ha la forma della funzione seno o coseno.

Una corrente sinusoidale è spesso detta *corrente alternata (AC)*. Una corrente di questo tipo inverte il suo segno a intervalli regolari e assume alternativamente valori positivi e negativi. I circuiti pilotati da generatori di corrente o di tensione sinusoidali sono anche detti *circuiti AC*.

Ci si interessa alle sinusoidi per molte ragioni: innanzitutto, molti fenomeni naturali sono intrinsecamente sinusoidali. Variazioni sinusoidali si ritrovano nel moto di un pendolo, nella vibrazione di una corda, nelle onde sulla superficie dell'oceano, negli eventi politici di una nazione, nelle fluttuazioni economiche della Borsa e nella risposta naturale dei sistemi del secondo ordine sottosmorzati, per citare soltanto qualche caso. In secondo luogo, un segnale sinusoidale è facile da generare e da trasmettere. Sinusoidale è la forma della tensione di rete generata in tutti i paesi del mondo e fornita ad abitazioni, industrie, laboratori e così via. Sinusoidale è la forma di segnale dominante nelle telecomunicazioni e nella produzione di energia elettrica. In terzo luogo, grazie all'analisi di Fourier, qualunque segnale periodico può essere rappresentato come una somma di sinusoidi. Le sinusoidi giocano perciò un ruolo importante nell'analisi dei segnali periodici. Infine, una sinusoide è facile da manipolare matematicamente. Sia la derivata che l'integrale di una sinusoide sono essi stessi sinusoidi. Per queste e altre ragioni, la sinusoide è una funzione estremamente importante per l'analisi dei circuiti.

Una funzione forzante sinusoidale produce una risposta transitoria e una di regime, in maniera simile alla funzione gradino studiata nei capitoli 7 e 8. La risposta transitoria di un circuito viene determinata dalla natura del circuito stesso, mentre la risposta di regime ha sempre una forma simile alla funzione forzante. Il transitorio, tuttavia, diminuisce col passare del tempo, così che, dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo, resta soltanto la risposta di regime. Quando la risposta transitoria è divenuta trascurabile rispetto alla risposta di regime, si dice che il circuito sta operando in regi-

me sinusoidale. La *risposta in regime sinusoidale* è l'argomento di maggiore interesse in questo capitolo. Si inizia con una presentazione degli elementi delle sinusoidi e dei fasori. Vengono poi introdotti i concetti di impedenza e ammettenza. Le leggi fondamentali dei circuiti, quelle di Kirchhoff e di Ohm, introdotte per i circuiti pilotati da generatori costanti, vengono applicate anche ai circuiti AC. Vengono infine presentate due applicazioni dei circuiti AC: i circuiti a ponte e i circuiti di sfasamento.

9.2 SINUSOIDI

Si consideri la tensione sinusoidale

$$v(t) = V_m \sin \omega t \quad (9.1)$$

dove

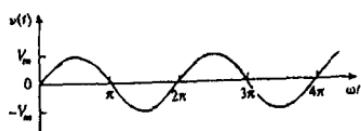
V_m = ampiezza della sinusode

ω = frequenza angolare o pulsazione in radianti/secondo

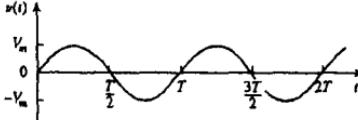
ωt = argomento della sinusode

La sinusode è mostrata in Figura 9.1(a) in funzione del suo argomento e in Figura 9.1(b) in funzione del tempo. Risulta evidente che la sinusode si ripete ogni T secondi; T è detto *periodo* della sinusode. Dai due grafici in Figura 9.1, si osserva che $\omega T = 2\pi$,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9.2)$$



(a)



(b)

Figura 9.1 Grafici di $V_m \sin \omega t$: (a) in funzione di ωt , (b) in funzione di t .

Il fatto che $v(t)$ si ripete ogni T secondi può essere verificato sostituendo t con $t + T$ nella (9.1). Si ottiene

$$\begin{aligned} v(t+T) &= V_m \sin \omega(t+T) = V_m \sin \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \\ &= V_m \sin (\omega t + 2\pi) = V_m \sin \omega t = v(t) \end{aligned} \quad (9.3)$$

Perciò,

$$v(t+T) = v(t) \quad (9.4)$$

cioè, v assume all'istante $t + T$ il valore che aveva in t e $v(t)$ è periodica. In generale,

Una funzione periodica soddisfa la condizione $f(t) = f(t+nT)$ per ogni t e per qualsiasi valore intero di n .

Come si è detto, il *periodo* T della funzione periodica è il tempo necessario per compiere un intero ciclo, cioè il numero di secondi per ciclo. Il reciproco di questa quantità è il numero di cicli per secondo, detto anche *frequenza ciclica* f della sinusode.

$$f = \frac{1}{T} \quad (9.5)$$

Dalle (9.2) e (9.5) risulta chiaro che

$$\omega = 2\pi f \quad (9.6)$$

ω è espressa in radienti al secondo (rad/s), mentre f è in hertz (Hz)¹.

Si consideri ora una espressione più generale per la sinusoida,

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (9.7)$$

dove $(\omega t + \phi)$ è l'argomento e ϕ è la fase. Sia l'argomento che la fase possono essere espressi in gradi o in radienti.

Si abbiano ora le due sinusoidi

$$v_1(t) = V_m \sin \omega t \quad e \quad v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (9.8)$$

mostrate in Figura 9.2. La partenza di v_2 in Figura 9.2 avviene prima di v_1 . Si dice che v_2 è in anticipo su v_1 di ϕ , oppure che v_1 è in ritardo rispetto a v_2 di ϕ . Se $\phi \neq 0$, si dice anche che v_1 e v_2 sono sfasate. Se $\phi = 0$, v_1 e v_2 si dicono invece in fase; esse raggiungono allora i valori minimi e massimi esattamente negli stessi istanti. È possibile confrontare v_1 e v_2 in questo modo perché esse operano alla stessa frequenza; non è invece necessario che abbiano la stessa ampiezza.

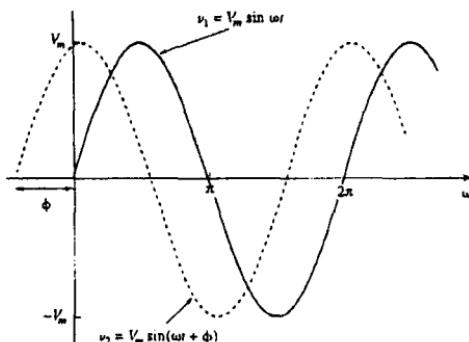


Figura 9.2
Due sinusoidi con fasi diverse.

Una sinusode può essere espressa in forma seno o in forma coseno. Quando si confrontano due sinusoidi, risulta comodo esprimerele entrambe in forma seno oppure entrambe in forma coseno, con ampiezze positive. Ciò si ottiene facendo uso delle seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{aligned} \quad (9.9)$$

Grazie a queste identità, è facile mostrare che

$$\begin{aligned} \sin(\omega t \pm 180^\circ) &= -\sin \omega t \\ \cos(\omega t \pm 180^\circ) &= -\cos \omega t \\ \sin(\omega t \pm 90^\circ) &= \pm \cos \omega t \\ \cos(\omega t \pm 90^\circ) &= \mp \sin \omega t \end{aligned} \quad (9.10)$$

Usando le relazioni precedenti, è possibile trasformare una sinusode da forma seno a forma coseno o viceversa.

Per mettere in relazione o confrontare sinusoidi è possibile utilizzare un metodo grafico, in alternativa alle identità trigonometriche delle (9.9) e (9.10). Si consideri il sistema di assi mostrato in Figura 9.3(a). L'asse orizzontale rappresenta l'ampiezza del coseno, mentre l'asse verticale (diretto verso il basso) denota l'ampiezza del seno.

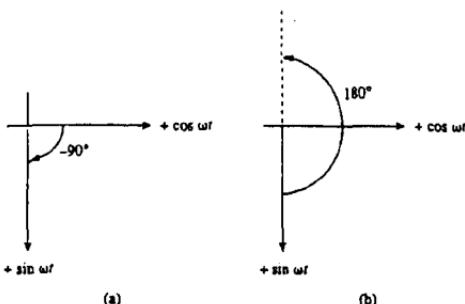
¹ L'unità di misura di f prende il nome dal fisico tedesco Heinrich R. Hertz (1857-1894).

Gli angoli sono misurati con verso positivo antiorario a partire dall'asse orizzontale, come si fa normalmente con le coordinate polari. Questo metodo grafico può essere utilizzato per confrontare due sinusoidi. Per esempio, si vede dalla Figura 9.3(a) che sottraendo 90° dall'argomento di $\cos \omega t$ si ottiene $\sin \omega t$, $\cos(\omega t - 90^\circ) = \sin \omega t$. In maniera simile, aggiungendo 180° all'argomento di $\sin \omega t$ si ottiene $-\sin \omega t$, $\sin(\omega t + 180^\circ) = -\sin \omega t$, come mostrato in Figura 9.3(b).

Figura 9.3

Metodo grafico per confrontare
coseno e seno:

- (a) $\cos(\omega t - 90^\circ) = \sin \omega t$,
- (b) $\sin(\omega t + 180^\circ) = -\sin \omega t$.



La stessa tecnica grafica può essere utilizzata anche per sommare due sinusoidi della stessa frequenza quando una è espressa in forma seno e l'altra in forma coseno. Per sommare $A \cos \omega t + B \sin \omega t$, si nota dapprima che A è l'ampiezza di $\cos \omega t$ mentre B è l'ampiezza di $\sin \omega t$, come mostrato in Figura 9.4(a). L'ampiezza e l'argomento della sinusode risultante in forma coseno si ottengono facilmente dalla diagonale del rettangolo:

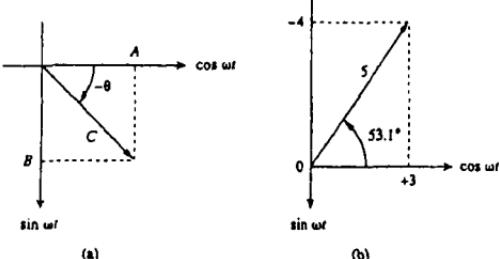
$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \theta) \quad (9.11)$$

dove

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad (9.12)$$

Figura 9.4

- (a) Somma di $A \cos \omega t$ e $B \sin \omega t$,
- (b) somma di $3 \cos \omega t$ e $-4 \sin \omega t$.



Per esempio, è possibile sommare $3 \cos \omega t$ e $-4 \sin \omega t$, come mostrato in Figura 9.4(b), ottenendo

$$3 \cos \omega t - 4 \sin \omega t = 5 \cos(\omega t + 53.1^\circ) \quad (9.13)$$

Rispetto alle identità trigonometriche delle (9.9) e (9.10), l'approccio grafico elimina la necessità di memorizzare formule difficili. È necessario tuttavia evitare di confondere gli assi di seno e coseno con gli assi del piano complesso di cui si parlerà nel prossimo paragrafo. Va inoltre ricordato nelle Figure 9.3 e 9.4 che, nonostante la tendenza naturale sia di avere l'asse verticale diretto verso l'alto, la direzione positiva per la funzione seno, in questi diagrammi, è verso il basso.

Esempio 9.1

Determinare ampiezza, fase, periodo e frequenza della sinusode

$$v(t) = 12 \cos(50t + 10^\circ)$$

- Soluzione:**
- L'ampiezza è $V_m = 12 \text{ V}$.
 - La fase è $\phi = 10^\circ$.
 - La frequenza angolare è $\omega = 50 \text{ rad/s}$.
 - Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = 0.1257 \text{ s}$.
 - La frequenza è $f = \frac{1}{T} = 7.958 \text{ Hz}$.

Esercizio 9.1

Data la sinusode $5 \sin(4\pi t - 60^\circ)$, calcolare la sua ampiezza, fase, frequenza angolare, periodo e frequenza.

Risposta 5, -60° , 12.57 rad/s, 0.5 s, 2 Hz.

Esempio 9.2

Calcolare la differenza di fase fra $v_1 = -10 \cos(\omega t + 50^\circ)$ e $v_2 = 12 \sin(\omega t - 10^\circ)$. Dire quale delle due sinusoidi risulta in anticipo.

Soluzione: La fase verrà calcolata con tre metodi, i primi due dei quali fanno uso di identità trigonometriche, mentre il terzo utilizza l'approccio grafico.

METODO 1

Per poter confrontare v_1 e v_2 , è necessario esprimere entrambe nella stessa forma. Se entrambe vengono espresse in forma coseno con ampiezze positive,

$$v_1 = -10 \cos(\omega t + 50^\circ) = 10 \cos(\omega t + 50^\circ - 180^\circ)$$

$$v_1 = 10 \cos(\omega t - 130^\circ) \quad \text{oppure} \quad v_1 = 10 \cos(\omega t + 230^\circ) \quad (9.2.1)$$

e

$$v_2 = 12 \sin(\omega t - 10^\circ) = 12 \cos(\omega t - 10^\circ - 90^\circ)$$

$$v_2 = 12 \cos(\omega t - 100^\circ) \quad (9.2.2)$$

Si può concludere dalle (9.2.1) e (9.2.2) che la differenza di fase tra v_1 e v_2 è 30° . È possibile scrivere v_2 come

$$v_2 = 12 \cos(\omega t - 130^\circ + 30^\circ) \quad \text{oppure} \quad v_2 = 12 \cos(\omega t + 260^\circ) \quad (9.2.3)$$

Confrontando la (9.2.1) e la (9.2.3) si vede chiaramente che v_2 è in anticipo su v_1 di 30° .

METODO 2

In alternativa, si può esprimere v_1 in forma seno:

$$\begin{aligned} v_1 &= -10 \cos(\omega t + 50^\circ) = 10 \sin(\omega t + 50^\circ - 90^\circ) \\ &= 10 \sin(\omega t - 40^\circ) = 10 \sin(\omega t - 10^\circ - 30^\circ) \end{aligned}$$

Ma $v_2 = 12 \sin(\omega t - 10^\circ)$. Confrontando le due espressioni si vede che v_1 è in ritardo rispetto a v_2 di 30° . Ciò equivale a dire che v_2 è in anticipo su v_1 di 30° .

METODO 3

È possibile considerare v_1 semplicemente come $-10 \cos \omega t$ con uno sfasamento di $+50^\circ$. v_1 può quindi essere rappresentata come in Figura 9.5. In maniera simile, v_2 è $12 \sin \omega t$ con uno sfasamento di -10° , come mostrato in Figura 9.5. Dalla Figura 9.5 è facile vedere che v_2 è in anticipo su v_1 di 30° , cioè $90^\circ - 50^\circ - 10^\circ$.

Esercizio 9.2 Calcolare la differenza di fase fra

$$i_1 = -4 \sin(377t + 25^\circ) \quad \text{e} \quad i_2 = 5 \cos(377t - 40^\circ)$$

i_1 è in anticipo o in ritardo rispetto a i_2 ?

Risposta 155° , i_1 è in anticipo su i_2 .

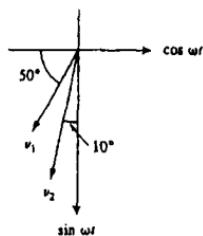


Figura 9.5
Per l'Esempio 9.2.

9.3 FASORI

Le sinusoidi possono essere espresse in maniera compatta usando i fasori, con i quali è più agevole operare rispetto alle funzioni seno e coseno.

Un fasore è un numero complesso che rappresenta l'ampiezza e l'angolo di un'onda.

I fasori costituiscono un semplice strumento per analizzare circuiti lineari eccitati da generatori sinusoidali; la soluzione di questi circuiti risulterebbe piuttosto difficile con altri metodi. L'idea di risolvere i circuiti AC utilizzando i fasori fu per la prima volta introdotta da Charles Steinmetz nel 1893. Prima di dare una definizione precisa dei fasori e di applicarli all'analisi dei circuiti, è necessario avere acquisito familiarità con i numeri complessi. Un numero complesso z può essere scritto in forma rettangolare come

$$z = x + jy \quad (9.14a)$$

dove $j = \sqrt{-1}$; x è la parte reale di z , y è la parte immaginaria.

Il numero complesso z può anche essere scritto in forma polare o esponenziale

$$z = r \angle \phi = r e^{j\phi} \quad (9.14b)$$

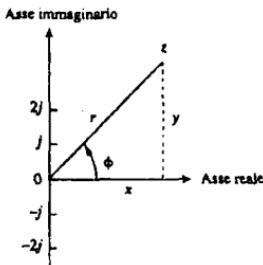
dove r è il modulo di z e ϕ è la fase di z . In definitiva, z può essere rappresentato in tre modi:

$z = x + jy$	Forma rettangolare
$z = r \angle \phi$	Forma polare
$z = r e^{j\phi}$	Forma esponenziale

(9.15)

Figura 9.6

Rappresentazione di un numero complesso $z = x + jy = r \angle \phi$.



La relazione tra la forma polare e quella rettangolare è mostrata in Figura 9.6, in cui l'asse x rappresenta la parte reale e l'asse y la parte immaginaria di un numero complesso. Dati x e y , è possibile ottenere r e ϕ come

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (9.16a)$$

Viceversa, noti r e ϕ è possibile ottenere x e y come

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (9.16b)$$

z può quindi essere scritto

$$z = x + jy = r \angle \phi = r(\cos \phi + j \sin \phi) \quad (9.17)$$

L'addizione e la sottrazione di numeri complessi si eseguono in modo più agevole in forma rettangolare; la moltiplicazione e la divisione, invece, risultano più semplici in forma polare. Dati i numeri complessi

$$z = x + jy = r \angle \phi, \quad z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 \angle \phi_1$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 \angle \phi_2$$

si possono eseguire le seguenti operazioni.

Addizione:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (9.18a)$$

Sottrazione:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (9.18b)$$

Moltiplicazione:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2 \quad (9.18c)$$

Divisione:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2 \quad (9.18d)$$

Reciproco:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \angle -\phi \quad (9.18e)$$

Radice quadrata:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \phi/2 \quad (9.18f)$$

Complesso coniugato:

$$z^* = x - jy = r \angle -\phi = re^{-j\phi} \quad (9.18g)$$

Si noti che, secondo la (9.18e)

$$\frac{1}{j} = -j \quad (9.18h)$$

L'idea della rappresentazione per mezzo dei fasori si basa sull'identità di Eulero:

$$e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \sin \phi \quad (9.19)$$

che mostra come sia possibile considerare $\cos \phi$ e $\sin \phi$ come la parte reale e la parte immaginaria di $e^{j\phi}$; si può scrivere

$$\cos \phi = \operatorname{Re}(e^{j\phi}) \quad (9.20a)$$

$$\sin \phi = \operatorname{Im}(e^{j\phi}) \quad (9.20b)$$

dove Re e Im significano *parte reale di* e *parte immaginaria di*. Data una sinusoida $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, si può usare la (9.20a) per esprimere $v(t)$ come

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) \quad (9.21)$$

oppure

$$v(t) = \operatorname{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) \quad (9.22)$$

Così,

$$v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) \quad (9.23)$$

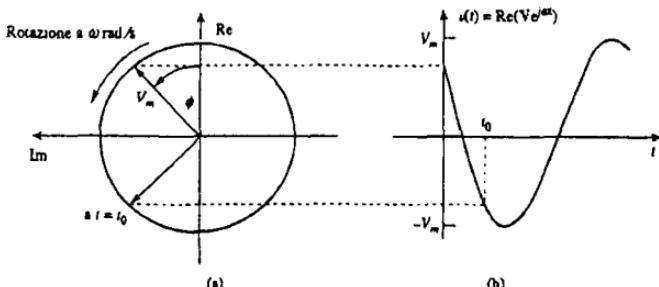
dove

$$V = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi \quad (9.24)$$

V è detto *fasore* della sinusoida $v(t)$. In altre parole, un fasore è la rappresentazione in

termini di numero complesso dell'ampiezza e della fase di una sinusoide². Per stabilire un sistema di fasori, è possibile fare uso della (9.20a) o della (9.20b), ma la convenzione standard sarà di usare la (9.20a)³.

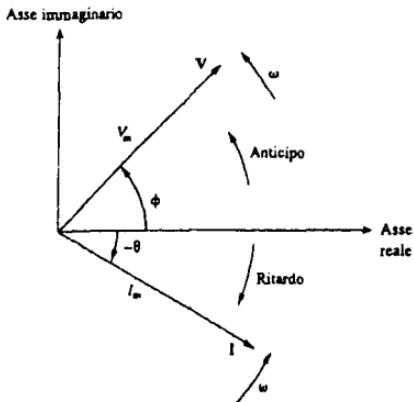
Figura 9.7
Rappresentazione di $Ve^{j\omega t}$.
(a) vettore rotante in senso antiorario, (b) la sua proiezione sull'asse reale, in funzione del tempo.



Una possibile interpretazione delle (9.23) e (9.24) è quella di considerare il grafico del vettore rotante $Ve^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ nel piano complesso. Al crescere di t , il vettore ruota descrivendo una circonferenza di raggio V_m con velocità angolare ω , in senso antiorario, come si vede in Figura 9.7(a). È possibile considerare $v(t)$ come la proiezione del vettore rotante $Ve^{j\omega t}$ sull'asse reale, come in Figura 9.7(b). Il valore del vettore rotante all'istante $t = 0$ è il fasore V della sinusode $v(t)$. Il vettore rotante può essere allora considerato come un fasore rotante: quando una sinusode viene espressa come un fasore, il termine $e^{j\omega t}$ si considera implicito. Quando si opera con i fasori è quindi importante tenere sempre presente la frequenza angolare ω del fasore; in caso contrario si rischia di commettere gravi errori.

La (9.23) afferma che per ottenere la sinusode corrispondente a un fasore V , si moltiplica il fasore per il fattore $e^{j\omega t}$ e se ne prende la parte reale. Come numero complesso, un fasore può essere espresso in forma rettangolare, polare o esponenziale. Poiché un fasore ha una ampiezza e una fase ("direzione"), esso può essere trattato alla stregua di un vettore e verrà quindi indicato con il grassetto⁴. Per esempio, i fasori $V = V_m \angle \phi$ e $I = I_m \angle -\theta$ sono rappresentati graficamente in Figura 9.8. Una simile rappresentazione grafica dei fasori è detta *diagramma fasoriale* o *vettoriale*.

Figura 9.8
Diagramma vettoriale che mostra $V = V_m \angle \phi$ e $I = I_m \angle -\theta$.



² Un fasore può essere considerato come l'equivalente matematico di una sinusode in cui è stata eliminata la dipendenza dal tempo.

³ Se si fa uso della funzione seno invece del coseno per i fasori, allora $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) = I_m (V_m e^{j(\omega t + \phi)})$ e il fasore corrispondente è lo stesso di quello della (9.24).

⁴ Si usa un carattere corsivo normale, come ad esempio x , per rappresentare numeri complessi, ma caratteri grassetti, come ad esempio V , per rappresentare i fasori, perché i fasori sono quantità simili ai vettori.

Le Equazioni da (9.21) a (9.23) mostrano che per ottenere il fasore corrispondente a una sinusoide, si deve esprimere dapprima la sinusoide in forma coseno così che la sinusoide possa essere scritta come parte reale di un numero complesso. Si elimina poi il fattore dipendente dal tempo $e^{j\omega t}$, e ciò che rimane è il fasore corrispondente alla sinusoide. Sopprimendo il fattore dipendente dal tempo, si effettua una trasformazione della sinusoide dal dominio del tempo al dominio dei fasori. Questa trasformazione si riassume come segue:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ (Rappresentazione nel dominio del tempo)	\iff $V = V_m / \underline{\phi}$ (Rappresentazione nel dominio dei fasori)	(9.25)
--	---	--------

Data la sinusoide $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, si ottiene il fasore corrispondente $V = V_m / \underline{\phi}$. La (9.25) è inoltre rappresentata nella Tabella 9.1, dove è stata considerata anche la funzione seno oltre alla funzione coseno. Dalla (9.25), si vede che per ottenere la rappresentazione in termini di fasore di una sinusoide, la si esprime in forma coseno e se ne prendono l'ampiezza e la fase. Dato un fasore, si ottiene la rappresentazione nel dominio del tempo come la funzione coseno avente la stessa ampiezza del fasore e un argomento pari a $\omega t + \theta$ più l'argomento del fasore. L'idea di rappresentare l'informazione in domini diversi si rivela fondamentale in tutti i campi dell'ingegneria.

Tabella 9.1. Trasformazioni sinusoidi-fasori.

Rappresentazione nel dominio del tempo	Rappresentazione nel dominio dei fasori
$V_m \cos(\omega t + \delta)$	$V_m / \underline{\phi}$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m / \underline{\phi - 90^\circ}$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m / \underline{\theta}$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m / \underline{\theta - 90^\circ}$

Si noti che nella (9.25) il fattore dipendente dal tempo $e^{j\omega t}$ viene soppresso, e la frequenza non viene indicata esplicitamente nella rappresentazione nel dominio dei fasori, essendo ω una costante. La rappresentazione nel dominio del tempo, tuttavia, dipende da ω . Per questa ragione, il dominio dei fasori è anche chiamato *dominio delle frequenze*.

Dalle (9.23) e (9.24), $v(t) = \operatorname{Re}(Ve^{j\omega t}) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, e quindi

$$\frac{dv}{dt} = -\omega V_m \sin(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) = \operatorname{Re}(j\omega V_m e^{j\omega t} e^{j90^\circ}) = \operatorname{Re}(j\omega V e^{j\omega t}) \quad (9.26)$$

La derivata di $v(t)$, nel dominio dei fasori, si trasforma in $j\omega V$

$$\frac{dv}{dt} \iff j\omega V \quad (\text{Dominio dei fasori}) \quad (9.27)$$

In maniera simile, l'integrale di $v(t)$ si trasforma, nel dominio dei fasori, in $V/j\omega$

$$\int v dt \iff \frac{V}{j\omega} \quad (\text{Dominio dei fasori}) \quad (9.28)$$

Le (9.27) consente di sostituire la derivata rispetto al tempo con la moltiplicazione per $j\omega$ nel dominio dei fasori, e la (9.28) di sostituire l'integrale nel tempo con la divisione per $j\omega$ nel dominio dei fasori.

Le (9.27) e (9.28) risultano utili nel calcolo della soluzione a regime, la quale non richiede la conoscenza dei valori iniziali delle variabili interessate: come si vedrà, questa è una delle più importanti applicazioni dei fasori. Oltre alla derivazione rispetto al

tempo e alla integrazione, un altro importante uso dei fasori si ha nella somma di sinusoidi della stessa frequenza. Quest'ultima proprietà viene illustrata meglio da un esempio (Esempio 9.6).

È importante sottolineare le differenze fra $v(t)$ e V :

1. $v(t)$ è la rappresentazione *istantanea o nel dominio del tempo*, mentre V è la rappresentazione nel *dominio dei fasori o delle frequenze*.
2. $v(t)$ dipende dal tempo, V non dipende dal tempo.
3. $v(t)$ è sempre reale, mentre V è in generale complesso.

Va infine ricordato sempre che l'analisi in termini di fasori si può applicare soltanto quando la frequenza è comune a tutte le sinusoidi, e può essere utilizzata per manipolare due o più segnali sinusoidali solo se essi sono della stessa frequenza. Sommare sinusoidi della stessa frequenza equivale, in particolare, a sommare i corrispondenti fasori.

Esempio 9.3

Calcolare i seguenti numeri complessi:

$$(a) (40 \angle 50^\circ + 20 \angle -30^\circ)^{1/2}$$

$$(b) \frac{10 \angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)}$$

Soluzione: (a) Usando la trasformazione da polare a rettangolare,

$$40 \angle 50^\circ = 40(\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ) = 25.71 + j30.64$$

$$20 \angle -30^\circ = 20[\cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ)] = 17.32 - j10$$

Sommando,

$$40 \angle 50^\circ + 20 \angle -30^\circ = 43.03 + j20.64 = 47.72 \angle 25.63^\circ$$

Estraendo la radice quadrata si ha infine,

$$(40 \angle 50^\circ + 20 \angle -30^\circ)^{1/2} = 6.91 \angle 12.81^\circ$$

(b) Applicando trasformazione polare-rettangolare, addizione, moltiplicazione e divisione,

$$\begin{aligned} \frac{10 \angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)} &= \frac{8.66 - j5 + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 + j5)} \\ &= \frac{11.66 - j9}{-14 + j22} = \frac{14.73 \angle -37.66^\circ}{26.08 \angle 122.47^\circ} \\ &= 0.565 \angle -160.31^\circ \end{aligned}$$

Esercizio 9.3 Calcolare i seguenti numeri complessi:

$$(a) [(5 + j2)(-1 + j4) - 5 \angle 60^\circ]^*$$

$$(b) \frac{10 + j5 + 3 \angle 40^\circ}{-3 + j4} + 10 \angle 30^\circ$$

Risposta (a) $-15.5 - j13.67$, (b) $8.293 + j2.2$.

Esempio 9.4

Trasformare le seguenti sinusoidi in fasori:

$$(a) i = 6 \cos(50t - 40^\circ) A$$

$$(b) v = -4 \sin(30t + 50^\circ) V$$

Soluzione: (a) $i = 6 \cos(50t - 40^\circ) A$ ha per fasore $I = 6 \angle -40^\circ A$

(b) Poiché $\sin A = \cos(A + 90^\circ)$,

$$\nu = -4 \sin(30t + 50^\circ) = 4 \cos(30t + 50^\circ + 90^\circ) \\ = 4 \cos(30t + 140^\circ)$$

Il fasore di ν è $V = 4 \angle 140^\circ$ V

Esercizio 9.4 Esprimere le seguenti sinusoidi come fasori:

- (a) $v = -7 \cos(2t + 40^\circ)$ V
- (b) $i = 4 \sin(10t + 10^\circ)$ A

Risposta (a) $V = 7 \angle 220^\circ$ V, (b) $I = 4 \angle -80^\circ$ A.



Esempio 9.5

Scrivere le sinusoidi rappresentate dai seguenti fasori:

- (a) $I = -3 + j4$ A
- (b) $V = j8e^{-j20^\circ}$ V

Soluzione: (a) $I = -3 + j4 = 5 \angle 126.87^\circ$ A. Trasformando al dominio del tempo si ottiene

$$i(t) = 5 \cos(\omega t + 126.87^\circ) \text{ A}$$

(b) Poiché $j = 1 \angle 90^\circ$,

$$V = j8 \angle -20^\circ = (1 \angle 90^\circ)(8 \angle -20^\circ) \\ = 8 \angle 90^\circ - 20^\circ = 8 \angle 70^\circ \text{ V}$$

Convertendo al dominio del tempo

$$v(t) = 8 \cos(\omega t + 70^\circ) \text{ V}$$

Esercizio 9.5 Scrivere le sinusoidi corrispondenti ai seguenti fasori:

- (a) $V = -10 \angle 30^\circ$ V
- (b) $I = j(5 - j12)$ A

Risposta (a) $v(t) = 10 \cos(\omega t + 210^\circ)$ V, (b) $i(t) = 13 \cos(\omega t + 22.62^\circ)$ A.



Esempio 9.6

Date $i_1(t) = 4 \cos(\omega t + 30^\circ)$ A e $i_2(t) = 5 \sin(\omega t - 20^\circ)$ A, calcolare la somma.

Soluzione: Si tratta di uno degli usi più importanti dei fasori — la somma di sinusoidi aventi la stessa frequenza. La corrente $i_1(t)$ è già espressa in forma standard. Il suo fasore è

$$I_1 = 4 \angle 30^\circ \text{ A}$$

È necessario esprimere $i_2(t)$ in forma coseno. La regola per convertire seno in coseno è di sottrarre 90° all'argomento. Quindi,

$$i_2 = 5 \cos(\omega t - 20^\circ - 90^\circ) = 5 \cos(\omega t - 110^\circ) \text{ A}$$

e il fasore è

$$I_2 = 5 \angle -110^\circ \text{ A}$$

Se si pone $i = i_1 + i_2$, allora

$$I = I_1 + I_2 = 4 \angle 30^\circ + 5 \angle -110^\circ \\ = 3.464 + j2 - 1.71 - j4.698 = 1.754 - j2.698 \\ = 3.218 \angle -56.97^\circ \text{ A}$$

Trasformando il tutto al dominio del tempo, si ottiene

$$i(t) = 3.218 \cos(\omega t - 56.97^\circ) \text{ A}$$

Naturalmente, sarebbe stato possibile calcolare $i_1 + i_2$ usando le (9.9), ma ciò sarebbe risultato molto più laborioso.

■ Esercizio 9.6 Se $v_1 = -10 \sin(\omega t + 30^\circ)$ V e $v_2 = 20 \cos(\omega t - 45^\circ)$ V, calcolare $v = v_1 + v_2$.

Risposta $v(t) = 10.66 \cos(\omega t - 30.95^\circ)$ V.

Esempio 9.7

Usando il metodo dei fasori, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito descritto dall'equazione integrodifferenziale

$$4i + 8 \int i dt - 3 \frac{di}{dt} = 50 \cos(2t + 75^\circ)$$

Soluzione: Si trasforma ciascuno dei termini dell'equazione dal dominio del tempo al dominio dei fasori. Ricordando le (9.27) e (9.28), si riscrive l'equazione data in termini di fasori

$$4I + \frac{8I}{j\omega} - 3j\omega I = 50 \angle 75^\circ$$

Ma $\omega = 2$, e quindi

$$I(4 - j4 - j6) = 50 \angle 75^\circ$$

$$I = \frac{50 \angle 75^\circ}{4 - j10} = \frac{50 \angle 75^\circ}{10.77 \angle -68.2^\circ} = 4.642 \angle 143.2^\circ \text{ A}$$

Convertendo al dominio del tempo,

$$i(t) = 4.642 \cos(2t + 143.2^\circ) \text{ A}$$

Si ricordi che quella trovata è solo la soluzione di regime, che non richiede la conoscenza delle condizioni iniziali.

■ Esercizio 9.7 Determinare la tensione $v(t)$ in un circuito descritto dall'equazione integrodifferenziale

$$2 \frac{dv}{dt} + 5v + 10 \int v dt = 20 \cos(5t - 30^\circ)$$

con il metodo dei fasori.

Risposta $v(t) = 2.12 \cos(5t - 88^\circ)$ V.

9.4 RELAZIONI TRA FASORI PER GLI ELEMENTI CIRCUITALI

Ora che si è visto come è possibile rappresentare una tensione o una corrente nel dominio delle frequenze o dei fasori, è legittimo domandarsi come si possa applicare il metodo dei fasori a circuiti contenenti elementi passivi R , L e C . Ciò che è necessario fare è trasformare le relazioni tensione-corrente dal dominio del tempo al dominio della frequenza per ciascun elemento. In tutto il paragrafo, si farà uso della convenzione di segno degli utilizzatori. Si inizia con il resistore: se la corrente attraverso un resistore R è $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$, la tensione su di esso è data dalla legge di Ohm

$$v = iR = RI_m \cos(\omega t + \phi) \quad (9.29)$$

La rappresentazione in termini di fasori di questa relazione è

$$\mathbf{V} = RI_m \angle \phi \quad (9.30)$$

Ma il fasore della corrente è $I = I_m \angle \phi$. Di qui,

$$\mathbf{V} = RI \quad (9.31)$$

che mostra come la relazione tensione-corrente per il resistore nel dominio dei fasori continui a essere la legge di Ohm, come nel dominio del tempo. La Figura 9.9 illustra la relazione tensione-corrente di un resistore.

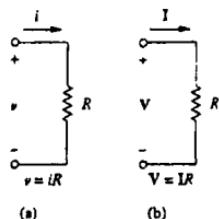


Figura 9.9

Relazioni tensione-corrente per un resistore: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio della frequenza.

È evidente dalla (9.31) che tensione e corrente sono in fase, come illustrato nel diagramma vettoriale di Figura 9.10.

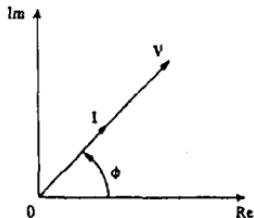


Figura 9.10
Diagramma vettoriale per il resistore.

Per l'induttore L , si supponga che la corrente che lo attraversa sia $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$. La tensione sull'induttore è

$$v = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (9.32)$$

Si ricordi, dalla (9.10), che $-\sin A = \cos(A + 90^\circ)$. È possibile allora scrivere la tensione come

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (9.33)$$

che si trasforma, nel dominio dei fasori, in

$$V = \omega L I_m e^{j(\phi + 90^\circ)} = \omega L I_m e^{j\phi} e^{j90^\circ} = \omega L I_m / \underline{\phi} e^{j90^\circ} \quad (9.34)$$

Ma $I_m / \underline{\phi} = I$ e, dalla (9.19), $e^{j90^\circ} = j$. Perciò,

$$V = j\omega L I \quad (9.35)$$

che mostra come la tensione abbia un'ampiezza pari a $\omega L I_m$ e una fase $\phi + 90^\circ$. La tensione e la corrente risultano sfasate di 90° ; in particolare, la corrente è in ritardo sulla tensione di 90° . La Figura 9.11 mostra le relazioni tensione-corrente per l'induttore e la Figura 9.12 mostra il diagramma vettoriale.

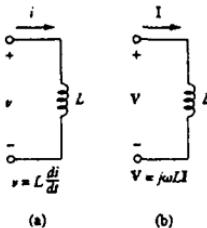


Figura 9.11 Relazioni tensione-corrente per un induttore: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio della frequenza.

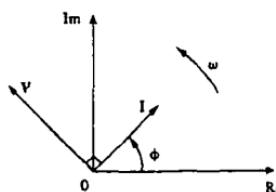


Figura 9.12 Diagramma vettoriale per l'induttore: I è in ritardo su V .

Per il condensatore C , si supponga che la tensione sia $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$. La corrente nel condensatore è

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (9.36)$$

Seguendo gli stessi passaggi utilizzati per l'induttore, oppure applicando la (9.27) alla (9.36), si ottiene

$$I = j\omega C V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{I}{j\omega C} \quad (9.37)$$

dalla quale si vede che la corrente e la tensione sono sfasate di 90° . In particolare, la corrente è in anticipo sulla tensione di 90° . La Figura 9.13 mostra le relazioni tensione-corrente per il condensatore; la Figura 9.14 fornisce il diagramma vettoriale. La ta-

bella 9.2 riassume le rappresentazioni nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza degli elementi circuituali.

Figura 9.13

Relazioni tensione-corrente per un condensatore: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio della frequenza.

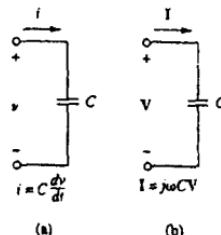


Figura 9.14

Diagramma vettoriale per il condensatore; I è in anticipo su V.

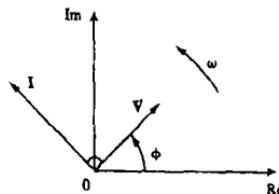


Tabella 9.2 Riassunto delle relazioni tensione-corrente

Elemento	Dominio del tempo	Dominio della frequenza
R	$v = R i$	$V = RI$
L	$v = L \frac{di}{dt}$	$V = j\omega L I$
C	$i = C \frac{dv}{dt}$	$V = \frac{1}{j\omega C} I$

Esempio 9.8

La tensione $v = 12 \cos(60t + 45^\circ)$ V viene applicata a un induttore da 0.1 H. Determinare la corrente dell'induttore a regime.

Soluzione: Per un induttore $V = j\omega LI$, dove $\omega = 60$ rad/s e $V = 12 \angle 45^\circ$ V. Di qui

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{12 \angle 45^\circ}{j60 \times 0.1} = \frac{12 \angle 45^\circ}{6 \angle 90^\circ} = 2 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Convertendo al dominio del tempo,

$$i(t) = 2 \cos(60t - 45^\circ) \text{ A}$$

■ **Esercizio 9.8** Se la tensione $v = 6 \cos(100t - 30^\circ)$ V viene applicata a un condensatore da $50 \mu\text{F}$, calcolare la corrente nel condensatore a regime.

Risposta $30 \cos(100t + 60^\circ)$ mA. ■

9.5 IMPEDENZA E AMMETTENZA

Nel paragrafo precedente sono state ottenute le relazioni tensione-corrente per i tre elementi passivi

$$V = RI, \quad V = j\omega LI, \quad V = \frac{1}{j\omega C} I \quad (9.38)$$

Queste equazioni possono essere riscritte come rapporto tra il fasore della tensione e il fasore della corrente

$$\frac{V}{I} = R, \quad \frac{V}{I} = j\omega L, \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} \quad (9.39)$$

Da queste tre espressioni si ottiene la legge di Ohm tra i fasi di un qualunque elemento come

$$Z = \frac{V}{I} \quad o \quad V = ZI \quad (9.40)$$

dove Z è una quantità dipendente dalla frequenza chiamata *impedenza*, ed espressa in ohm.

L'impedenza Z di un circuito è il rapporto tra il fasore V della tensione e il fasore I della corrente, espressa in ohm (Ω).

L'impedenza rappresenta quanto il circuito si oppone al passaggio della corrente sinusoidale. Nonostante l'impedenza sia il rapporto tra due fasi, essa non è un fasore, perché non corrisponde a una quantità che varia in maniera sinusoidale.

Le impedenze di resistori, induttori e condensatori possono essere facilmente ottenute dalla (9.39): un riassunto è riportato in Tabella 9.3. Dalla tabella si vede che $Z_L = j\omega L$ e $Z_C = -j/\omega C$; si considerino ora i due valori estremi per la frequenza angolare: quando $\omega = 0$ (cioè per generatori costanti), $Z_L = 0$ e $Z_C \rightarrow \infty$, il che conferma ciò che si sapeva già – che l'induttore si comporta come un corto circuito, mentre il condensatore si comporta come un circuito aperto. Quando $\omega \rightarrow \infty$ (cioè per frequenze molto elevate), $Z_L \rightarrow \infty$ e $Z_C = 0$, il che indica che l'induttore è un circuito aperto alle alte frequenze, mentre il condensatore è un corto circuito. Tutto ciò è illustrato in Figura 9.15.

Tabella 9.3 Impedenze e ammettenze di elementi passivi

Elemento	Impedenza	Ammettenza
R	$Z = R$	$Y = \frac{1}{R}$
L	$Z = j\omega L$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$
C	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$

Come numero complesso, l'impedenza può essere espressa in forma rettangolare

$$Z = R + jX \quad (9.41)$$

dove $R = \operatorname{Re} Z$ è la *resistenza* e $X = \operatorname{Im} Z$ è la *reattanza*. La reattanza X può essere positiva o negativa: si dice che l'impedenza è *induttiva* quando X è positiva e *capacitiva* quando X è negativa. Perciò, un'impedenza $Z = R + jX$ (con $X > 0$) è detta *induttiva*, o in ritardo, perché la corrente è in ritardo sulla tensione, mentre l'impedenza $Z = R - jX$ (con $X > 0$) è detta *capacitiva*, o in anticipo, perché la corrente è in anticipo sulla tensione. Impedenza, resistenza e reattanza sono tutte espresse in ohm. L'impedenza può anche essere scritta in forma polare come

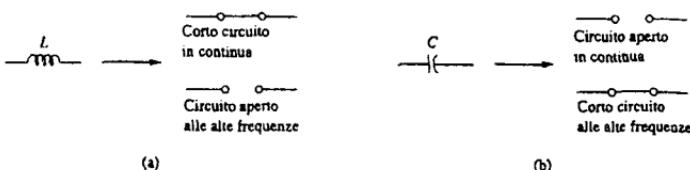
$$Z = |Z| \angle \theta \quad (9.42)$$

Confrontando la (9.41) e la (9.42),

$$Z = R + jX = |Z| \angle \theta \quad (9.43)$$

Figura 9.15

Circuiti equivalenti in continua e alle alte frequenze: (a) induttore, (b) condensatore.



dove

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad (9.44)$$

e

$$R = |Z| \cos \theta, \quad X = |Z| \sin \theta \quad (9.45)$$

A volte risulta conveniente operare con il reciproco dell'impedenza, chiamato *ammittenza*.

La ammettenza Y è il reciproco dell'impedenza, e si misura in siemens (S).

L'ammettenza Y di un elemento (o di un circuito) è il rapporto tra il fasore della corrente che lo attraversa e il fasore della tensione.

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} \quad (9.46)$$

Le ammettenze di resistori, induttori e condensatori possono essere ottenute dalla (9.39). Anch'esse sono riassunte nella Tabella 9.3.

Come numero complesso, è possibile scrivere Y in forma rettangolare

$$Y = G + jB \quad (9.47)$$

dove $G = \operatorname{Re} Y$ è detta *conduttanza* e $B = \operatorname{Im} Y$ è detta *suscettanza*. Ammettenze, conduttanze e suscettanze sono tutte espresse in siemens. Dalle (9.41) e (9.47),

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad (9.48)$$

Razionalizzando,

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (9.49)$$

Eguagliando le parti reali e immaginarie si ha

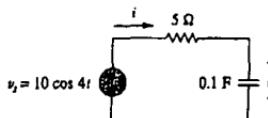
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (9.50)$$

da cui si nota che $G \neq 1/R$, come invece accade nei circuiti resistivi. Naturalmente, se $X = 0$, allora $G = 1/R$.

Esempio 9.9

Determinare $v(t)$ e $i(t)$ nel circuito mostrato in Figura 9.16.

Figura 9.16
Per l'Esempio 9.9



Soluzione: Dal generatore di tensione $10 \cos 4t$, $\omega = 4$

$$V_s = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

L'impedenza è

$$Z = 5 + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0.1} = 5 - j2.5 \Omega$$

E quindi la corrente

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_s}{Z} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2} \\ &= 1.6 + j0.8 = 1.789 \angle 26.57^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (9.9.1)$$

La tensione sul condensatore è

$$\begin{aligned} V &= IZ_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1.789 \angle 26.57^\circ}{j4 \times 0.1} \\ &= \frac{1.789 \angle 26.57^\circ}{0.4 \angle 90^\circ} = 4.47 \angle -63.43^\circ \text{ V} \end{aligned} \quad (9.9.2)$$

Convertendo I e V nelle (9.9.1) e (9.9.2) al dominio del tempo, si ottiene

$$i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^\circ) \text{ A}$$

$$v(t) = 4.47 \cos(4t - 63.43^\circ) \text{ V}$$

Si noti che $i(t)$ è in anticipo su $v(t)$ di 90° , come ci si attendeva.

■ **Esercizio 9.9** Con riferimento alla Figura 9.17, determinare $v(t)$ e $i(t)$.

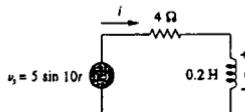


Figura 9.17
Per l'Esercizio 9.9.

Risposta $2.236 \sin(10t + 63.43^\circ) \text{ V}$, $1.118 \sin(10t - 26.57^\circ) \text{ A}$. ■

9.6 LEGGI DI KIRCHHOFF NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA†

Non è possibile effettuare analisi di circuiti nel dominio della frequenza senza le leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni. È necessario quindi esprimerele nel dominio della frequenza. Per trasformare la KVL, siano v_1, v_2, \dots, v_n le tensioni lungo un percorso chiuso. Allora

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0 \quad (9.51)$$

In regime sinusoidale, ciascuna tensione può essere espressa in forma coseno, così che la (9.51) diventa

$$V_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2} \cos(\omega t + \theta_2) + \dots + V_{mn} \cos(\omega t + \theta_n) = 0 \quad (9.52)$$

Questa può essere scritta

$$\operatorname{Re}(V_{m1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_{m2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t}) + \dots + \operatorname{Re}(V_{mn} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}) = 0$$

o anche

$$\operatorname{Re}[(V_{m1} e^{j\theta_1} + V_{m2} e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}] = 0 \quad (9.53)$$

Se si pone $V_k = V_{mk}e^{j\theta_k}$, allora

$$\operatorname{Re}[(V_1 + V_2 + \dots + V_n)e^{j\omega t}] = 0 \quad (9.54)$$

Essendo $e^{j\omega t} \neq 0$,

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0 \quad (9.55)$$

che mostra come la legge di Kirchhoff delle tensioni valga anche per i fasori.

Seguendo un procedimento simile, è possibile mostrare che la legge di Kirchhoff delle correnti vale anche per i fasori. Se si suppone che i_1, i_2, \dots, i_n sono le correnti che escono, o entrano, da una superficie chiusa in una rete all'istante t , allora

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0 \quad (9.56)$$

Se I_1, I_2, \dots, I_n sono i fasori delle sinusoidi i_1, i_2, \dots, i_n , allora

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0 \quad (9.57)$$

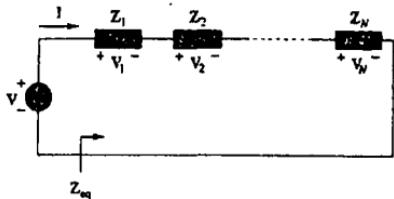
che è l'espressione della legge di Kirchhoff delle correnti nel dominio delle frequenze. Una volta dimostrato che sia la KVL che la KCL sono valide nel dominio delle frequenze, è facile estendere al dominio delle frequenze molti utili procedimenti, quali per esempio la composizione delle impedanze, l'analisi nodale e agli anelli, la sovrapposizione e la trasformazione dei generatori.

9.7 COMPOSIZIONE DI IMPEDENZE

Si considerino le N impedanze collegate in serie mostrate in Figura 9.18. Nelle impedanze passa la stessa corrente I . Applicando la KVL alla maglia si ottiene

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N = I(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N) \quad (9.58)$$

Figura 9.18
 N impedanze in serie.



L'impedenza equivalente ai terminali di ingresso è

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$$

o anche

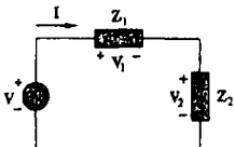
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N \quad (9.59)$$

la quale mostra che l'impedenza totale o equivalente del collegamento in serie è la somma delle singole impedenze. Questo risultato è simile alla composizione in serie delle resistenze.

Se $N = 2$, come in Figura 9.19, la corrente che attraversa le impedenze è

$$I = \frac{V}{Z_1 + Z_2} \quad (9.60)$$

Figura 9.19
Partitore di tensione.



Essendo $V_1 = Z_1 I$ e $V_2 = Z_2 I$,

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V, \quad V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V \quad (9.61)$$

che è la formula del *partitore di tensione*.

In maniera simile, è possibile ottenere l'impedenza o l'ammettenza equivalente delle N impedenze collegate in parallelo mostrate in Figura 9.20. La tensione su tutte le impedenze è la stessa; applicando la KCL al nodo superiore,

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_N = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N} \right) \quad (9.62)$$

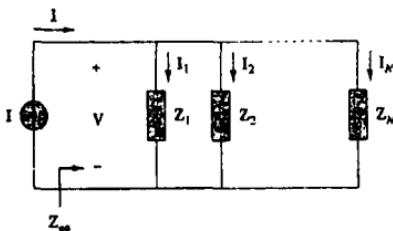


Figura 9.20
 N impedenze in parallelo.

L'impedenza equivalente è

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N} \quad (9.63)$$

e l'ammettenza equivalente

$$Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \quad (9.64)$$

Quest'ultima indica che l'ammettenza equivalente di un collegamento parallelo di ammettenze è la somma delle singole ammettenze.

Quando $N = 2$, come mostrato in Figura 9.21, l'impedenza equivalente diventa

$$Z_{\text{eq}} = \frac{1}{Y_{\text{eq}}} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{1}{1/Z_1 + 1/Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (9.65)$$

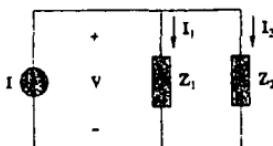


Figura 9.21
Partitore di corrente

Inoltre, essendo

$$V = I Z_{\text{eq}} = I_1 Z_1 = I_2 Z_2$$

le correnti nelle impedenze sono

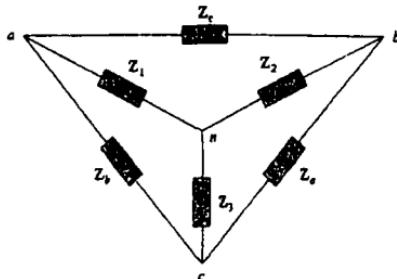
$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I, \quad I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I \quad (9.66)$$

che è il principio del *partitore di corrente*.

Le trasformazioni triangolo-stella e stella-triangolo, che sono state applicate ai circuiti resistivi, sono valide anche per le impedenze.

Con riferimento alla Figura 9.22, le formule di conversione sono le seguenti.

Figura 9.22
Reti Y e Δ sovrapposte.



Conversione: Y-Δ

$$\boxed{\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \\ Z_b &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \\ Z_c &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \end{aligned}} \quad (9.67)$$

Conversione: Δ-Y

$$\boxed{\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z_2 &= \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z_3 &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \end{aligned}} \quad (9.68)$$

◆ Un circuito a triangolo o a stella è detto bilanciato se le impedenze di tutti e tre i rami sono uguali.

Quando un circuito Δ-Y è bilanciato, le (9.67) e (9.68) diventano

$$\boxed{Z_\Delta = 3Z_Y \quad \text{oppure} \quad Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta} \quad (9.69)$$

dove $Z_Y = Z_1 = Z_2 = Z_3$ e $Z_\Delta = Z_a = Z_b = Z_c$.

Come si è visto in questo paragrafo, i principi del partitore di tensione, partitore di corrente, impedenze equivalenti e trasformazione Y-Δ si applicano tutti ai circuiti AC. Nel Capitolo 10 si vedrà come altre tecniche circuituali – quali per esempio la sovrapposizione, l'analisi nodale, l'analisi agli anelli, la trasformazione dei generatori, il teorema di Thevenin e il teorema di Norton – siano tutte applicabili ai circuiti AC in maniera simile alla loro applicazione ai circuiti in continua.

Esempio 9.10

Determinare l'impedenza d'ingresso del circuito di Figura 9.23. Supponere che il circuito operi a $\omega = 50 \text{ rad/s}$.

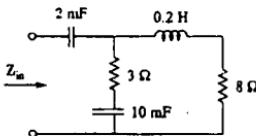


Figura 9.23
Per l'Esempio 9.10.

Soluzione: Sia

$$Z_1 = \text{Impedenza del condensatore da } 2\text{mF}$$

$$Z_2 = \text{Impedenza del resistore da } 3\Omega \text{ in serie con il condensatore da } 10\text{mF}$$

$$Z_3 = \text{Impedenza dell'induttore da } 0.2\text{H in serie con il resistore da } 8\Omega$$

Allora

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \times 2 \times 10^{-3}} = -j10 \Omega$$

$$Z_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \times 10 \times 10^{-3}} = (3 - j2) \Omega$$

$$Z_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \times 0.2 = (8 + j10) \Omega$$

L'impedenza d'ingresso è

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 = -j10 + \frac{(3 - j2)(8 + j10)}{11 + j8} \\ &= -j10 + \frac{(44 + j14)(11 - j8)}{11^2 + 8^2} = -j10 + 3.22 - j1.07 \Omega \end{aligned}$$

In definitiva,

$$Z_{in} = 3.22 - j11.07 \Omega$$

■ **Esercizio 9.10** Determinare l'impedenza d'ingresso del circuito in Figura 9.24 con $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

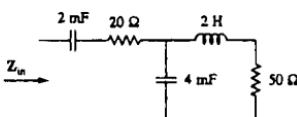


Figura 9.24
Per l'Esercizio 9.10.

Risposta $32.38 - j73.76 \Omega$. ■

Esempio 9.11

Determinare $v_o(t)$ nel circuito di Figura 9.25.

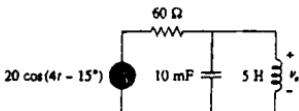


Figura 9.25
Per l'Esempio 9.11.

Soluzione: Per eseguire l'analisi nel dominio delle frequenze, è necessario dapprima trasformare il circuito nel dominio del tempo di Figura 9.25 nel suo equivalente nel dominio dei fasori di Figura 9.26. La trasformazione produce

$$v_i = 20 \cos(4t - 15^\circ) \text{ V} \implies V_i = 20 \angle -15^\circ \text{ V}, \quad \omega = 4 \text{ rad/s}$$

$$10 \text{ mF} \implies \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4 \times 10 \times 10^{-3}} = -j25 \Omega$$

$$5 \text{ H} \implies j\omega L = j4 \times 5 = j20 \Omega$$

Siano

Z_1 = Impedenza del resistore da 60Ω

Z_2 = Impedenza del collegamento parallelo del condensatore da 10mF e dell'induttore da 5H

Allora, $Z_1 = 60\Omega$ e

$$Z_2 = -j/25 \parallel j/20 = \frac{-j/25 \times j/20}{-j/25 + j/20} = j100\Omega$$

Per la regola dei partitori di tensione,

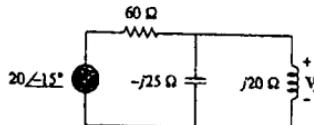
$$\begin{aligned} V_o &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_i = \frac{j100}{60 + j100} (20 \angle -15^\circ) \\ &= (0.8575 \angle 30.96^\circ) (20 \angle -15^\circ) = 17.15 \angle 15.96^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

Convertendo il tutto al dominio del tempo, si ottiene

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 15.96^\circ) \text{ V}$$

Figura 9.26

Circuito equivalente nel dominio della frequenza del circuito in Figura 9.25.



Esercizio 9.11 Calcolare v_o nel circuito di Figura 9.27.

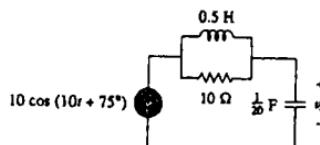


Figura 9.27

Per l'Esercizio 9.11.

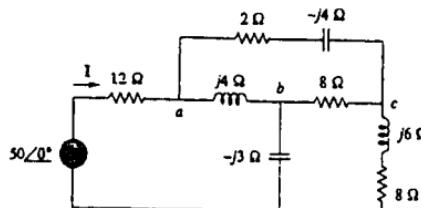
$$\text{Risposta } v_o(t) = 7.071 \cos(10t - 60^\circ) \text{ V.}$$

Esempio 9.12

Determinare la corrente I nel circuito di Figura 9.28.

Figura 9.28

Per l'Esempio 9.12.



Soluzione: La rete a triangolo connessa ai nodi a , b e c può essere convertita nella rete a stella di Figura 9.29. Si ottengono le impedenze della stella come segue, utilizzando la (9.68):

$$Z_{an} = \frac{j4(2-j4)}{j4+2-j4+8} = \frac{4(4+j2)}{10} = (1.6+j0.8)\Omega$$

$$Z_{bn} = \frac{j4(8)}{10} = j3.2\Omega, \quad Z_{cn} = \frac{8(2-j4)}{10} = (1.6-j3.2)\Omega$$

L'impedenza totale ai terminali del generatore è

$$\begin{aligned} Z &= 12 + Z_{mn} + (Z_{mn} - j3) \parallel (Z_{en} + j6 + 8) \\ &= 12 + 1.6 + j0.8 + (j0.2) \parallel (9.6 + j2.8) \\ &= 13.6 + j0.8 + \frac{j0.2(9.6 + j2.8)}{9.6 + j3} \\ &= 13.6 + j1 = 13.64 \angle 4.204^\circ \Omega \end{aligned}$$

La corrente desiderata è

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50 \angle 0^\circ}{13.64 \angle 4.204^\circ} = 3.666 \angle -4.204^\circ \text{ A}$$

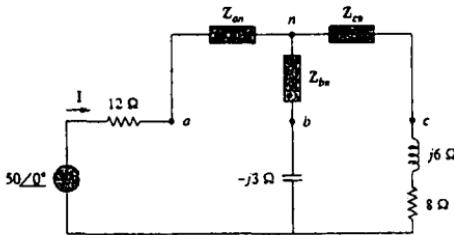


Figura 9.29

Il circuito in Figura 9.28 dopo la trasformazione triangolo-stella.

Esercizio 9.12 Determinare I nel circuito di Figura 9.30.

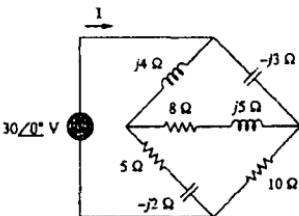


Figura 9.30

Per l'Esercizio 9.12.

Risposta $6.364 \angle 3.802^\circ \text{ A}$.

■

9.8 APPLICAZIONI†

Nei Capitoli 7 e 8 sono stati visti alcuni tra i possibili usi dei circuiti RC , RL e RLC in applicazioni in cui i generatori erano costanti. Le stesse classi di circuiti trovano applicazione anche nel caso di generatori sinusoidali: tra quelle più note ricordiamo i circuiti di accoppiamento, di sfasamento, i filtri, i circuiti risonanti, i ponti in alternata e i trasformatori, e moltissime altre. Alcune di esse verranno presentate più avanti; per ora è sufficiente esaminarne due molto semplici: i circuiti RC di sfasamento, e i ponti in alternata.

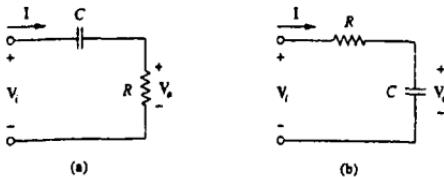
9.8.1 Circuiti di sfasamento

Un circuito di sfasamento viene spesso impiegato per correggere uno sfasamento indesiderato già presente in un circuito, oppure per produrre effetti particolari. Un circuito RC si presta bene allo scopo, perché la presenza del condensatore fa sì che la corrente del circuito risulti in anticipo rispetto alla tensione applicata. Due circuiti RC comunemente usati a questo scopo sono mostrati in Figura 9.31. (Si potrebbero utilizzare circuiti RL o qualsiasi altro circuito reattivo per lo stesso scopo.)

In Figura 9.31(a), la corrente I del circuito è in anticipo sulla tensione V_i , di un certo angolo di fase θ , con $0 < \theta < 90^\circ$, che dipende dai valori di R e C . Se $X_C = -1/\omega C$, allora l'impedenza totale è $Z = R + jX_C$, e lo sfasamento è dato da

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X_C}{R} \quad (9.70)$$

Figura 9.31
Circuiti RC di sfasamento: (a) uscita in anticipo, (b) uscita in ritardo.



L'entità dello sfasamento dipende quindi dai valori di R , C e dalla frequenza di funzionamento. Poiché la tensione di uscita V_o sul resistore è in fase con la corrente, V_o è in anticipo (ha uno sfasamento positivo) rispetto a V_i , come mostrato in Figura 9.32(a).

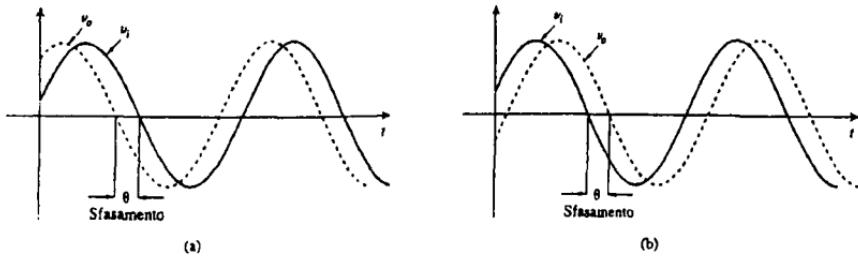


Figura 9.32 Sfasamento nei circuiti RC : (a) uscita in anticipo, (b) uscita in ritardo.

In Figura 9.31(b), l'uscita è prelevata sul condensatore. La corrente I è in anticipo sulla tensione di ingresso V_i di θ , ma la tensione di uscita $v_o(t)$ sul condensatore è in ritardo (sfasamento negativo) rispetto alla tensione di ingresso $v_i(t)$, come illustrato in Figura 9.32(b).

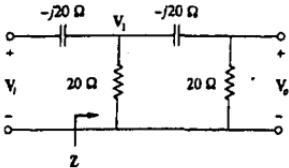
E bene ricordare che i semplici circuiti RC di Figura 9.31 agiscono anche da partitori di tensione. Perciò, quando lo sfasamento θ tende a 90° , la tensione di uscita V_o tende a zero. Per questo motivo, questi semplici circuiti RC vengono usati soltanto quando sono richiesti sfasamenti di piccola entità.

Se si desiderano sfasamenti maggiori di 60° , le reti RC semplici appena viste possono essere poste in cascata, producendo così uno sfasamento totale pari alla somma dei singoli sfasamenti. In pratica, gli sfasamenti dovuti ai singoli stadi non sono uguali, perché gli stadi successivi producono un effetto di carico su quelli iniziali, a meno che non vengano utilizzati degli operazionali per disaccoppiare gli stadi fra loro.

Esempio 9.13

Progettare un circuito RC che fornisca uno sfasamento di 90° in anticipo.

Figura 9.33
Circuito RC con sfasamento di 90° in anticipo, per l'Esempio 9.13.



Soluzione: Se si scelgono componenti aventi lo stesso valore ohmico, per esempio $R = |X_C| = 20 \Omega$, a una particolare frequenza, secondo la (9.70) lo sfasamento risulta esattamente 45° . Ponendo in cascata due circuiti RC del tipo di Figura 9.31(a) si ottiene il circuito di Figura 9.33, che

fornisce uno sfasamento positivo, o in anticipo, di 90° , come si mostrerà fra poco. Con le formule di combinazione serie-parallelo, Z in Figura 9.33 si ottiene come segue:

$$Z = 20 \parallel (20 - j20) = \frac{20(20 - j20)}{40 - j20} = 12 - j4 \Omega \quad (9.13.1)$$

Usando il partitore di tensione,

$$V_1 = \frac{Z}{Z - j20} V_i = \frac{12 - j4}{12 - j24} V_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ V_i \quad (9.13.2)$$

$$V_o = \frac{20}{20 - j20} V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ V_i \quad (9.13.3)$$

Sostituendo la (9.13.2) nella (9.13.3) si ottiene

$$V_o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ V_i \right) = \frac{1}{3} \angle 90^\circ V_i$$

Quindi, l'uscita risulta in anticipo di 90° sull'ingresso, ma la sua ampiezza è soltanto il 33 per cento circa di quella dell'ingresso.

Esercizio 9.13 Progettare un circuito RC che fornisca uno sfasamento di 90° in ritardo. Se viene applicata una tensione di 10 V rms , quale è la tensione di uscita?

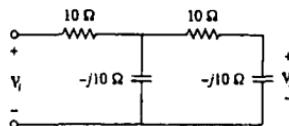


Figura 9.34
Per l'Esercizio 9.13.

Risposta La Figura 9.34 mostra un possibile progetto; 3.33 V rms .

Esempio 9.14

Per il circuito RL di Figura 9.35(a) calcolare lo sfasamento introdotto alla frequenza di 2 kHz .

Soluzione: Alla frequenza di 2 kHz , si trasformano le induttanze da 10mH e 5mH nelle corrispondenti impedenze.

$$\begin{aligned} 10 \text{ mH} &\implies X_L = \omega L = 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \\ &= 40\pi = 125.7 \Omega \\ 5 \text{ mH} &\implies X_L = \omega L = 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3} \\ &= 20\pi = 62.83 \Omega \end{aligned}$$

Si consideri il circuito in Figura 9.35(b). L'impedenza Z è la composizione parallelo di $j125.7 \Omega$ e $100 + j62.83 \Omega$:

$$\begin{aligned} Z &= j125.7 \parallel (100 + j62.83) \\ &= \frac{j125.7(100 + j62.83)}{100 + j188.5} = 69.56 \angle 60.1^\circ \Omega \end{aligned} \quad (9.14.1)$$

Per il partitore di tensione,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Z}{Z + 150} V_i = \frac{69.56 \angle 60.1^\circ}{184.7 + j60.3} V_i \\ &= 0.3582 \angle 42.02^\circ V_i \end{aligned} \quad (9.14.2)$$

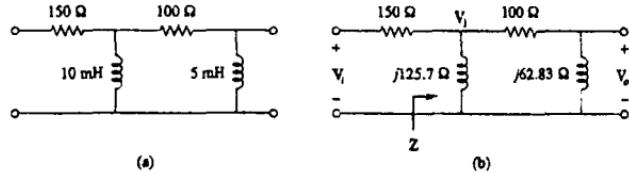
$$V_o = \frac{j62.832}{100 + j62.832} V_1 = 0.532 \angle 57.86^\circ V_i \quad (9.14.3)$$

Combinando le (9.14.2) e (9.14.3),

$$V_o = (0.532 \angle 57.86^\circ)(0.3582 \angle 42.02^\circ) V_i = 0.1906 \angle 100^\circ V_i$$

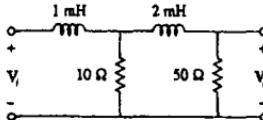
in cui si vede che l'ampiezza dell'uscita è circa il 19 per cento di quella di ingresso, ma è in anticipo sull'ingresso di 100° . Se il circuito viene terminato con un carico, esso influenzerebbe il valore dello sfasamento.

Figura 9.35
Per l'Esempio 9.14.



■ **Esercizio 9.14** Si faccia riferimento al circuito RL in Figura 9.36. Se viene applicato 1 V , determinare l'ampiezza e lo sfasamento prodotti a 5 kHz . Specificare se lo sfasamento è in anticipo o in ritardo.

Figura 9.36
Per l'Esercizio 9.14.



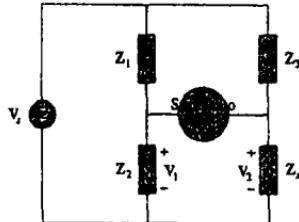
Risposta $0.172, 120.4^\circ$, in ritardo. ■

9.8.2 Ponti AC

Un circuito a ponte AC può essere usato per la misura dell'induttanza L di un induttore o della capacità C di un condensatore. Esso è di forma simile al ponte di Wheatstone per la misura di una resistenza incognita presentato nel Paragrafo 4.10, e si basa sullo stesso principio. Per misurare L e C , sono però necessari un generatore sinusoidale e uno strumento di misura AC, invece del galvanometro. Lo strumento AC può essere un amperometro o un voltmetro AC molto sensibile. Si consideri il ponte AC generico illustrato in Figura 9.37. Il ponte è detto *bilanciato* quando nello strumento non passa corrente. Questo significa che $V_1 = V_2$. Applicando il principio del partitore di tensione,

$$V_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_x = V_2 = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_x} V_x \quad (9.71)$$

Figura 9.37
Ponte AC generico.



Perciò,

$$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_x}{Z_3 + Z_x} \Rightarrow Z_2 Z_3 = Z_1 Z_x \quad (9.72)$$

o anche

$Z_x = \frac{Z_3}{Z_1} Z_2$

(9.73)

Questa è l'equazione di bilancio per il ponte AC, che è simile alla (4.30) per il ponte di resistenze in cui le R sono state sostituite dalle Z .

I circuiti a ponte AC specifici per la misura di L e C sono mostrati in Figura 9.38, dove L_x e C_x sono rispettivamente l'induttanza e la capacità da misurare, mentre L_1 e C_1 sono una induttanza e una capacità standard, i cui valori sono noti con grande precisione. In entrambi i casi, due resistori R_1 e R_2 vengono fatti variare fino a quando la lettura sullo strumento diventa zero. Allora il ponte risulta bilanciato, e dalla (9.73) si ricava

$$L_x = \frac{R_2}{R_1} L_1 \quad (9.74)$$

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} C_1 \quad (9.75)$$

Si noti che il bilanciamento dei ponti di Figura 9.38 non dipende dalla frequenza f del generatore, perché f non compare nelle relazioni (9.74) e (9.75).

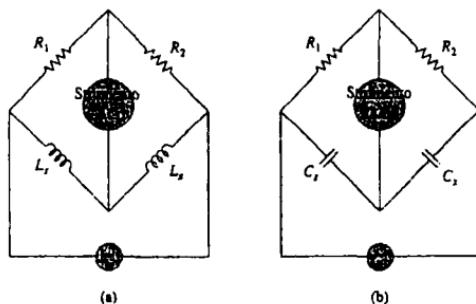


Figura 9.38
Ponti AC specifici: (a) per la misura di L , (b) per la misura di C .

Esempio 9.15

Il ponte AC di Figura 9.37 risulta bilanciato quando Z_1 è un resistore da $1 \text{ k}\Omega$, Z_2 è un resistore da $4.2 \text{ k}\Omega$, Z_3 è la combinazione parallela di un resistore da $1.5 \text{ M}\Omega$ e di un condensatore da 12 pF e $f = 2 \text{ kHz}$. Determinare: (a) i componenti serie che formano Z_x , e (b) i componenti parallelo che formano Z_x .

Soluzione:

1. *Dare una definizione precisa del problema.*

Il problema è impostato in modo chiaro.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.*

Occorre determinare le combinazioni serie e parallelo per l'impedenza incognita Z_x che bilancia il ponte AC di Figura 9.37.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*

Sebbene ci siano altri metodi che possono essere usati per determinare i valori incogniti, risulta più semplice sfruttare la (9.73).

Una volta ottenuti i risultati, questi possono essere verificati utilizzando metodi come l'analisi nodale o tramite PSpice.

4. *Fare un tentativo di soluzione del problema.*

Dalla (9.73),

$$Z_x = \frac{Z_1}{Z_2} Z_3 \quad (9.15.1)$$

con $Z_x = R_x + jX_x$,

$$Z_1 = 1000 \Omega, \quad Z_2 = 4200 \Omega \quad (9.15.2)$$

$$Z_3 = R_3 \parallel \frac{1}{j\omega C_3} = \frac{\frac{1}{j\omega C_3}}{R_3 + 1/j\omega C_3} = \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

Essendo $R_3 = 1.5 \text{ M}\Omega$ e $C_3 = 12 \text{ pF}$,

$$Z_3 = \frac{1.5 \times 10^6}{1 + j2\pi \times 2 \times 10^3 \times 1.5 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-12}} = \frac{1.5 \times 10^6}{1 + j0.2262}$$

cioè

$$Z_3 = 1.427 - j0.3228 \text{ M}\Omega \quad (9.15.3)$$

(a) Supponendo che Z_x sia costituita da componenti in serie, si sostituiscono le (9.15.2) e (9.15.3) nella (9.15.1) e si ottiene

$$\begin{aligned} R_x + jX_x &= \frac{4200}{1000} (1.427 - j0.3228) \times 10^6 \\ &= (5.993 - j1.356) \text{ M}\Omega \end{aligned}$$

Eguagliando le parti reali e immaginarie si ottiene $R_x = 5.993 \text{ M}\Omega$ e una reattanza capacitiva

$$X_x = \frac{1}{\omega C} = 1.356 \times 10^6 \Omega$$

cioè

$$C = \frac{1}{\omega X_x} = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 10^3 \times 1.356 \times 10^6} = 58.69 \text{ pF}$$

(b) l'impedenza Z_x rimane la stessa della (9.15.4), ma R_x e X_x sono in parallelo, cioè si assume una combinazione RC parallelo

$$Z_x = (5.993 - j1.356) \text{ M}\Omega$$

$$Z_x = \frac{R_x / (j\omega C_x)}{R_x + 1 / (j\omega C_x)} = \frac{R_x}{1 + j\omega C_x R_x}$$

Uguagliando tra loro le parti reali e quelle immaginarie si ottiene

$$R_x = \frac{|Re(Z_x)|^2 + |Im(Z_x)|^2}{|Re(Z_x)|} = \frac{5.993^2 + 1.356^2}{5.993} = 6.3 \text{ M}\Omega$$

$$C_x = -\frac{1}{\omega} \frac{|Im(Z_x)|}{|Re(Z_x)|^2 + |Im(Z_x)|^2} = -\frac{-1.356}{2\pi(2000)(5.993^2 + 1.356^2)} = 2.858 \mu F$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Si suppone di usare PSpice per verificare i risultati. Si fa funzionare PSpice con il circuito equivalente, formato da un circuito aperto tra i nodi del ponte di Figura 9.37 al posto dello strumento di misura AC; il ponte viene alimentato con una tensione di ingresso pari a 10V. L'analisi con PSpice produce le seguenti tensioni ai terminali delle impedenze del ponte; prendendo come riferimento il nodo in basso, si ha

FREQ	VM (\$N_0002)	VP (\$N_0002)
2.00E+03	9.993E+00	-8.634E-03
2.00E+03	9.993E+00	-8.637E-03

Poiché le tensioni sono praticamente uguali, allora nessuna corrente misurabile può scorrere tra i due nodi del ponte, qualunque elemento si colleghi: si ha un ponte bilanciato, come ci si aspettava. Questo indica che si sono ottenute le soluzioni incognite richieste.

C'è però un problema molto importante da affrontare: si è ottenuta una soluzione ideale (teorica), che non può essere usata nella realtà. La differenza tra i moduli delle impedenze poste in alto e quelle poste in basso è troppo grande e non dovrebbe essere accettata in un circuito a ponte reale.

Per una maggiore precisione, tutti i moduli delle impedenze devono essere almeno dello stesso ordine di grandezza. Per aumentare la precisione della soluzione, si raccomanda di incrementare il modulo delle impedenze poste in alto ad un valore compreso tra $500\text{k}\Omega$ e $1.5\text{M}\Omega$. Si può dire che il valore di queste impedenze crea seri problemi nella realizzazione della misura, cosicché si devono usare strumenti di misura appropriati allo scopo di ridurre la corrente assorbita sul circuito, che provocherebbe una lettura errata delle tensioni.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è risolto il problema, trovando i valori incogniti e poi si sono verificati i risultati, per cui si possono presentare questi risultati come la soluzione del problema

■ **Esercizio 9.15** Nel ponte AC di Figura 9.37, si supponga che il bilanciamento venga ottenuto quando Z_1 è un resistore da $4.8 \text{ k}\Omega$, Z_2 è un resistore da 10Ω in serie con un induttore da $0.25 \mu\text{H}$, Z_3 è un resistore da $12 \text{ k}\Omega$ e $f = 6 \text{ MHz}$. Determinare i componenti serie che costituiscono Z_x .

Risposta Un resistore da 25Ω in serie con un induttore da $0.625 \mu\text{H}$.

SOMMARIO

- 1) Una sinusoide è un segnale che ha la forma della funzione seno o coseno.
Una sinusoide si può esprimere nella forma generica

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

dove V_m è l'ampiezza, $\omega = 2\pi f$ è la frequenza angolare, $(\omega t + \phi)$ è l'argomento e ϕ è la fase.

- 2) Un fasore è una quantità complessa che rappresenta l'ampiezza e la fase di una sinusoide. Data una sinusoide $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, il suo fasore \mathbf{V} è

$$\mathbf{V} = V_m / \phi$$

- 3) In un circuito AC i fasori della tensione e della corrente hanno sempre la stessa relazione fra di loro in ogni istante di tempo. Se $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$ rappresenta la tensione ai capi di un elemento e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ rappresenta la corrente che scorre nello stesso elemento, allora si ha $\phi_i = \phi_v$ se l'elemento è un resistore, ϕ_i è in anticipo su ϕ_v di 90° se l'elemento è un condensatore, e ϕ_i è in ritardo su ϕ_v di 90° se l'elemento è un induttore.
- 4) L'impedenza Z di un circuito è il rapporto tra il favore della tensione e il favore della corrente.

$$Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

L'ammettenza Y è il reciproco dell'impedenza Z .

$$Y = \frac{1}{Z} = G(\omega) + jB(\omega)$$

Le impedenze si combinano in serie e in parallelo nello stesso modo delle resistenze serie e parallelo, cioè le impedenze in serie si sommano, mentre le ammettenze in parallelo si sommano.

- 5) Per un resistore si ha $Z = R$, per un induttore si ha $Z = jX = j\omega L$, e per un condensatore si ha $Z = -jX = 1/(j\omega C)$.
- 6) Le leggi fondamentali per i circuiti elettrici (Ohm e Kirchhoff), si applicano ad un circuito AC nello stesso modo di come vengono applicate ad un circuito in corrente continua; cioè si ha

$$\mathbf{V} = Z \cdot \mathbf{I} \quad (\text{OHM})$$

$$\sum \mathbf{I}_k = 0 \quad (\text{KCL})$$

$$\sum V_k = 0 \quad (\text{KVL})$$

- 7) Tutte le formule per i partitori di tensione/corrente, combinazioni serie/parallelo di impedenze/ammettenze, semplificazione dei circuiti e trasformazioni stella-triangolo, possono essere applicate all'analisi dei circuiti AC.
- 8) I circuiti AC hanno come applicazioni i circuiti di sfasamento e i ponti AC.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 9.1 Quale delle seguenti non è una maniera corretta di esprimere la sinusode $A \cos \omega t$?
- $A \cos 2\pi ft$
 - $A \cos(2\pi f/T)$
 - $A \cos \omega t - T'$
 - $A \sin(\omega t - 90^\circ)$
- 9.2 Una funzione che si ripete ad intervalli regolari si dice:
- fasore
 - armonica
 - periodica
 - reattiva
- 9.3 Quale di queste frequenze ha il periodo più breve?
- 1 krad/s
 - 1 kHz
- 9.4 Se $v_1 = 30 \sin(\omega t + 10^\circ)$ e $v_2 = 20 \sin(\omega t + 50^\circ)$, quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- v_1 è in anticipo su v_2
 - v_2 è in anticipo su v_1
 - v_2 è in ritardo su v_1
 - v_1 è in ritardo su v_2
 - v_1 e v_2 sono in fase
- 9.5 La tensione sull'induttore è in anticipo sulla corrente di 90° .
- Vero
 - Falso
- 9.6 La parte immaginaria dell'impedenza si chiama:
- resistenza
 - ammittenza
 - susettanza
 - conduttanza
 - reattanza
- 9.7 L'impedenza di un condensatore aumenta al crescere della frequenza.
- Vero
 - Falso
- 9.8 A quale frequenza la tensione di uscita $v_o(t)$ in Figura 9.39 sarà uguale alla tensione di ingresso $v(t)$?
- 0 rad/s
 - 1 rad/s
 - 4 rad/s
 - oo rad/s
 - nessuna delle precedenti

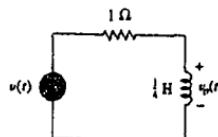


Figura 9.39 Per la domanda di riepilogo 9.8.

- 9.9 Un circuito RC serie ha $V_R = 12$ V e $V_C = 5$ V. La tensione del generatore è:
- 7 V
 - 7 V
 - 13 V
 - 17 V
- 9.10 Un circuito RCL serie ha $R = 30\Omega$, $X_C = -50\Omega$, $X_L = 90\Omega$. L'impedenza del circuito è:
- $30 + j140\Omega$
 - $30 + j40\Omega$
 - $30 - j40\Omega$
 - $-30 - j40\Omega$
 - $-30 + j40\Omega$

Risposte: 9.1d, 9.2c, 9.3b, 9.4b,d, 9.5a, 9.6e, 9.7b, 9.8d, 9.9c, 9.10b.

PROBLEMI

Paragrafo 9.2 Sinusoidi

- 9.1 Data la tensione sinusoidale $v(t) = 50 \cos(30t + 10^\circ)$ V, calcolare: (a) l'ampiezza V_m ; (b) il periodo T ; (c) la frequenza f ; (d) $v(t)$ a $t = 10$ ms.

- 9.2 Un generatore di corrente di un circuito lineare ha

$$i_s = 8 \cos(500\pi t - 25^\circ) A$$

- Quale è l'ampiezza della corrente?
- Quale è la frequenza angolare?
- Determinare la frequenza della corrente.
- Calcolare i_s per $t = 2$ ms.

- 9.3 Esprimere le seguenti funzioni in forma coseno:

- $4 \sin(\omega t - 30^\circ)$
- $-2 \sin 6t$
- $-10 \sin(\omega t + 20^\circ)$

- 9.4 (a) Esprimere $v = 8 \cos(7t + 15^\circ)$ in forma seno.
(b) Convertire $i = -10 \sin(3t - 85^\circ)$ in forma coseno.

- 9.5 Date $v_1 = 20 \sin(\omega t + 60^\circ)$ e $v_2 = 60 \cos(\omega t - 10^\circ)$, determinare lo sfasamento tra le due sinusoidi e dire quale delle due è in ritardo sull'altra.

- 9.6 Per le seguenti coppie di sinusoidi, determinare quale delle due è in anticipo sull'altra e di quanto.
(a) $v(t) = 10 \cos(4t - 60^\circ)$ e $i(t) = 4 \sin(4t + 50^\circ)$

- (b) $v_1(t) = 4 \cos(377t + 10^\circ)$ e $v_2(t) = -20 \cos 377t$
(c) $x(t) = 13 \cos 2t + 5 \sin 2t$ e
 $y(t) = 15 \cos(2t - 11.8^\circ)$

Paragrafo 9.3 Fasori

- 9.7 Se $f(\phi) = \cos \phi + j \sin \phi$, dimostrare che $f'(\phi) = e^{j\phi}$.

- 9.8 Calcolare i seguenti numeri complessi ed esprimere il risultato in forma rettangolare:

$$(a) \frac{15 \angle 45^\circ}{3 - j4} + j2$$

$$(b) \frac{8 \angle -20^\circ}{(2+j)(3-j4)} + \frac{10}{-5+j12}$$

$$(c) 10 + (8 \angle 50^\circ)(5 - j12)$$

- 9.9 Calcolare le seguenti espressioni con numeri complessi esprimendo il risultato in forma polare:

$$(a) 5 \angle 30^\circ \left(6 - j8 + \frac{3 \angle 60^\circ}{2 + j} \right)$$

$$(b) \frac{(10 \angle 60^\circ)(35 \angle -50^\circ)}{(2 + j6) - (5 + j)}$$

- 9.10 Dati $z_1 = 6 - j8$, $z_2 = 10 \angle -30^\circ$ e $z_3 = 8e^{-j120^\circ}$, determinare:
 (a) $z_1 + z_2 + z_3$ (b) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$
- 9.11 Calcolare i fasori corrispondenti ai seguenti segnali:
 (a) $v(t) = 21 \cos(4t - 15^\circ)$ V
 (b) $i(t) = -8 \sin(10t + 70^\circ)$ mA
 (c) $v(t) = 120 \sin(10t - 50^\circ)$ V
 (d) $i(t) = -60 \cos(30t + 10^\circ)$ mA
- 9.12 Siano $X = 8 \angle 40^\circ$ e $Y = 10 \angle -30^\circ$. Calcolare le seguenti quantità ed esprimere il risultato in forma polare.
 (a) $(X + Y)X^*$ (b) $(X - Y)^*$ (c) $(X + Y)/X$
- 9.13 Calcolare i seguenti numeri complessi:
 (a) $\frac{2+j3}{1-j6} + \frac{7-j8}{-5+j11}$
 (b) $\frac{(5 \angle 10^\circ)(10 \angle -40^\circ)}{(4 \angle -80^\circ)(-6 \angle 50^\circ)}$
 (c) $\begin{vmatrix} 2+j3 & -j2 \\ -j2 & 8-j5 \end{vmatrix}$
- 9.14 Semplificare le seguenti espressioni:
 (a) $\frac{(5 - j6) - (2 + j8)}{(-3 + j4)(5 - j) + (4 - j6)}$
 (b) $\frac{(240 \angle 75^\circ + 160 \angle -30^\circ)(60 - j80)}{(67 + j84)(20 \angle 32^\circ)}$
 (c) $\left(\frac{10 + j20}{3 + j4}\right)^2 \sqrt{(10 + j5)(16 - j20)}$
- 9.15 Calcolare i seguenti determinanti:
 (a) $\begin{vmatrix} 10 + j6 & 2 - j3 \\ -5 & -1 + j \end{vmatrix}$
 (b) $\begin{vmatrix} 20 \angle -30^\circ & -4 \angle -10^\circ \\ 16 \angle 0^\circ & 3 \angle 45^\circ \end{vmatrix}$
 (c) $\begin{vmatrix} 1 - j & -j & 0 \\ j & 1 & -j \\ 1 & j & 1 + j \end{vmatrix}$
- 9.16 Trasformare le seguenti sinusoidi in fasori:
 (a) $-10 \cos(4t + 75^\circ)$ (b) $5 \sin(20t - 10^\circ)$
 (c) $4 \cos 2t + 3 \sin 2t$
- 9.17 Due tensioni v_1 e v_2 sono in serie, per cui la loro somma è $v = v_1 + v_2$. Se $v_1 = 10 \cos(50t - \pi/3)$ V e $v_2 = 12 \cos(50t + 30^\circ)$ V, calcolare v .
- 9.18 Scrivere le sinusoidi corrispondenti a ciascuno dei seguenti fasori:
 (a) $V_1 = 60 \angle 15^\circ$, $\omega = 1$
 (b) $V_2 = 6 + j8$, $\omega = 40$
 (c) $I_1 = 2.8e^{-j\pi/3}$, $\omega = 377$
 (d) $I_2 = -0.5 - j1.2$, $\omega = 10^3$
- 9.19 Usando i fasori, calcolare:
 (a) $3 \cos(20t + 10^\circ) - 5 \cos(20t - 30^\circ)$
 (b) $40 \sin 50t + 30 \cos(50t - 45^\circ)$
 (c) $20 \sin 400t + 10 \cos(400t + 60^\circ) - 5 \sin(400t - 20^\circ)$

- 9.20 Un circuito lineare ha una corrente di ingresso $4 \cos(\omega t + 20^\circ)$ A e una tensione di $10 \cos(\omega t + 110^\circ)$ V. Calcolare l'impedenza associata al circuito.
- 9.21 Semplificare le seguenti espressioni:
 (a) $f(t) = 5 \cos(2t + 15^\circ) - 4 \sin(2t - 30^\circ)$
 (b) $g(t) = 8 \sin t + 4 \cos(t + 50^\circ)$
 (c) $h(t) = \int_0^t (10 \cos 40t + 5 \sin 40t) dt$
- 9.22 Una tensione alternata ha espressione $v(t) = 20 \cos(5t - 30^\circ)$. Utilizzare i fasori per calcolare $10v(t) + 4 \frac{dv}{dt} - 2 \int_{-\infty}^t v(t) dt$ supponendo che il valore dell'integrale sia zero per $t = -\infty$.
- 9.23 Applicare l'analisi dei fasori per risolvere le seguenti espressioni:
 (a) $v = 50 \cos(\omega t + 30^\circ) + 30 \cos(\omega t - 90^\circ)$ V
 (b) $i = 15 \cos(\omega t + 45^\circ) - 10 \sin(\omega t - 45^\circ)$ A
- 9.24 Determinare $v(t)$ nelle seguenti equazioni integrodifferenziali con il metodo dei fasori:
 (a) $v(t) + \int v dt = 10 \cos t$
 (b) $\frac{dv}{dt} + 5v(t) + 4 \int v dt = 20 \sin(4t + 10^\circ)$
- 9.25 Usando i fasori, calcolare $i(t)$ nelle seguenti equazioni:
 (a) $2 \frac{di}{dt} + 3i(t) = 4 \cos(2t - 45^\circ)$
 (b) $10 \int i dt + \frac{di}{dt} + 6i(t) = 5 \cos(5t + 22^\circ)$
- 9.26 L'equazione di maglia per un circuito RLC serie ha espressione $\frac{di}{dt} + 2i + \int_{-\infty}^t i dt = \cos 2t$ supponendo che il valore dell'integrale in $t = -\infty$ sia zero, determinare $i(t)$ con il metodo dei fasori.
- 9.27 Un circuito RLC parallelo ha equazione di nodo $\frac{dv}{dt} + 50v + 100 \int v dt = 110 \cos(377t - 10^\circ)$ Calcolare $v(t)$ con il metodo dei fasori. Si suppone che il valore dell'integrale in $t = -\infty$ sia zero.
- Paragrafo 9.4 Relazioni tra fasori per gli elementi circuituali**
- 9.28 Calcolare la corrente che scorre in un resistore da 8Ω collegato ad un generatore di tensione $v_s = 110 \cos 377t$ V.
- 9.29 Quale è la tensione istantanea su un condensatore da $2 \mu F$ quando la corrente che lo attraversa è $i = 4 \sin(10^3 t + 25^\circ)$ A?
- 9.30 Una tensione $v(t) = 100 \cos(60t + 20^\circ)$ V è applicata ad una combinazione parallela di un resistore da $40 k\Omega$ e un condensatore da $50 \mu F$. Calcolare le correnti a regime che scorrono nel resistore e nel condensatore.

- 9.31 Un circuito RLC serie ha $R = 80 \Omega$, $L = 240 \text{ mH}$ e $C = 5 \mu\text{F}$. Se la tensione di ingresso vale $v_i(t) = 10 \cos(2t)V$, calcolare la corrente che scorre nel circuito.
- 9.32 Per il circuito di Figura 9.40 determinare la corrente del canale I_L .

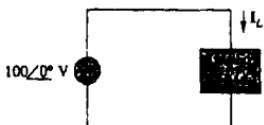


Figura 9.40 Per il Problema 9.32.

- 9.33 Un circuito RL serie è collegato ad un generatore AC da 110 V. Se la tensione sul resistore è 85 V, determinare la tensione sull'induttore.
- 9.34 Quale valore di ω darà luogo da una risposta forzata v_o nulla, in Figura 9.41?

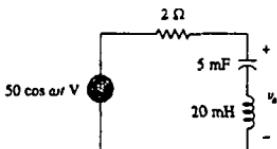


Figura 9.41 Per il Problema 9.34.

Paragrafo 9.5 Impedenza e ammettenza

- 9.35 Calcolare la corrente i nel circuito di Figura 9.42, quando $v_i(t) = 50 \cos(200t)$ V.

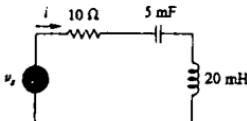


Figura 9.42 Per il Problema 9.35.

- 9.36 Nel circuito di Figura 9.43, determinare i , data $v_i = 60 \cos(200t - 10^\circ)$ V.

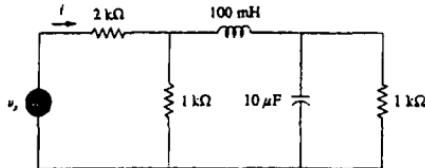


Figura 9.43 Per il Problema 9.36.

- 9.37 Calcolare l'ammettenza Y per il circuito di Figura 9.44.

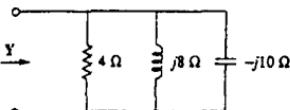
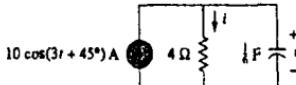
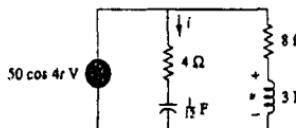


Figura 9.44 Per il Problema 9.37.

- 9.38 Determinare $i(t)$ e $v(t)$ in ciascuno dei circuiti di Figura 9.45.



(a)



(b)

Figura 9.45 Per il Problema 9.38.

- 9.39 Per il circuito mostrato in Figura 9.46, determinare Z_{eq} e usare questo risultato per calcolare la corrente I . Supponere che $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

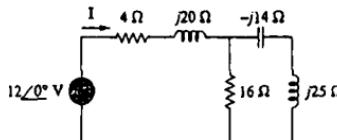


Figura 9.46 Per il Problema 9.39.

- 9.40 Nel circuito di Figura 9.47, determinare I_o quando:
- (a) $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (b) $\omega = 5 \text{ rad/s}$ (c) $\omega = 10 \text{ rad/s}$

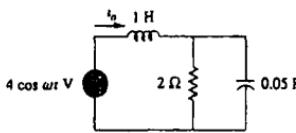


Figura 9.47 Per il Problema 9.40.

- 9.41 Determinare $v_o(t)$ nel circuito RLC di Figura 9.48.

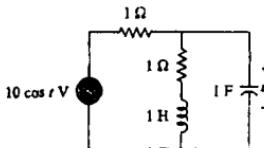


Figura 9.48 Per il Problema 9.41.

- 9.42 Calcolare $v_o(t)$ nel circuito di Figura 9.49.

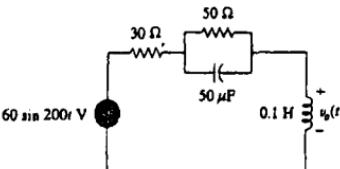


Figura 9.49 Per il Problema 9.42.

- 9.43 Calcolare la corrente I_0 per il circuito mostrato in Figura 9.50.

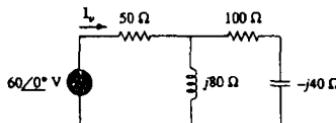


Figura 9.50 Per il Problema 9.43.

- 9.44 Calcolare $i(t)$ nel circuito di Figura 9.51.

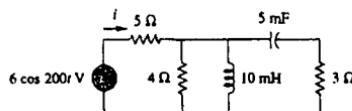


Figura 9.51 Per il Problema 9.44.

- 9.45 Determinare la corrente I_0 nella rete di Figura 9.52.

ML

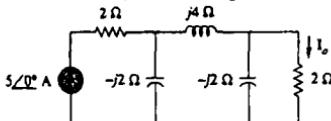


Figura 9.52 Per il Problema 9.45.

- 9.46 Se $i_s = 5 \cos(10t + 40^\circ)$ A nel circuito di Figura 9.53, determinare i_o .

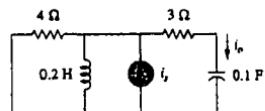


Figura 9.53 Per il Problema 9.46.

- 9.47 Nel circuito di Figura 9.54, determinare $i_s(t)$.

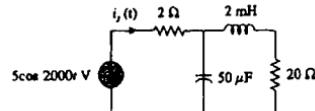


Figura 9.54 Per il Problema 9.47.

- 9.48 Nota $v_x(t) = 20 \sin(100t - 40^\circ)$ in Figura 9.55, determinare $i_x(t)$.

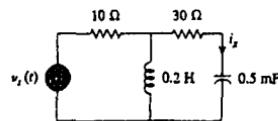


Figura 9.55 Per il Problema 9.48.

- 9.49 Determinare $v_x(t)$ nel circuito di Figura 9.56 se la corrente I_0 che attraversa il resistore da 1 Ω è $0.5 \sin 200t$ A.

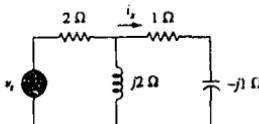


Figura 9.56 Per il Problema 9.49.

- 9.50 Determinare v_x nel circuito di Figura 9.57, data $i_s(t) = 5 \cos(100t + 40^\circ)$ A.

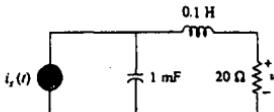


Figura 9.57 Per il Problema 9.50.

- 9.51 Se la tensione v_x sul resistore da 2 Ω nel circuito di Figura 9.58 è $10 \cos 2t$ V, determinare i_s .

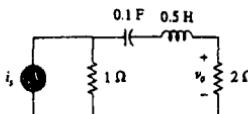


Figura 9.58 Per il Problema 9.51.

- 9.52 Se $V_o = 8 \angle 30^\circ$ V nel circuito di Figura 9.59, determinare I_s .

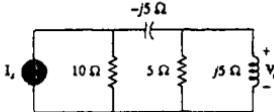


Figura 9.59 Per il Problema 9.52.

- 9.53 Determinare I_o nel circuito di Figura 9.60.

ML

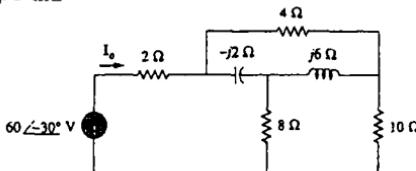


Figura 9.60 Per il Problema 9.53.

- 9.54 Nel circuito di Figura 9.61, determinare V_o , se $I_o = 2 \angle 0^\circ$ A.

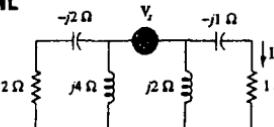


Figura 9.61 Per il Problema 9.54.

- 9.55** Determinare Z nella rete di Figura 9.62, sapendo che $V_s = 4 \angle 0^\circ$ V.

ML

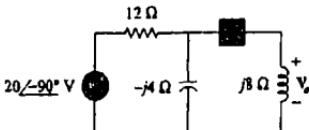


Figura 9.62 Per il Problema 9.55.

Paragrafo 9.7 Composizione di impedenze

- 9.56** Calcolare l'impedenza di ingresso del circuito in Figura 9.63, alla frequenza angolare $\omega = 377$ rad/s.

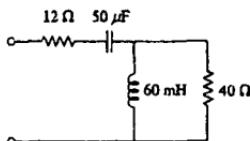


Figura 9.63 Per il Problema 9.56.

- 9.57** Alla pulsazione $\omega = 1$ rad/s, calcolare l'ammettenza di ingresso del circuito di Figura 9.64.

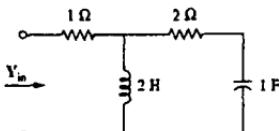


Figura 9.64 Per il Problema 9.57.

- 9.58** Determinare l'impedenza equivalente del circuito in Figura 9.65, a $\omega = 10$ k rad/s.

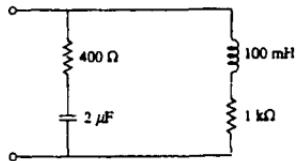


Figura 9.65 Per il Problema 9.58.

- 9.59** Per il circuito di Figura 9.66, calcolare l'impedenza Z_{in} . Supponere $\omega = 10$ rad/s.

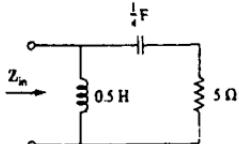


Figura 9.66 Per il Problema 9.59.

- 9.60** Calcolare Z_{in} per il circuito in Figura 9.67.

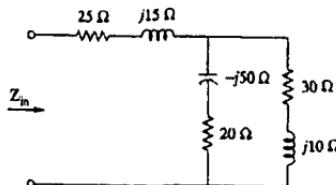


Figura 9.67 Per il Problema 9.60.

- 9.61** Determinare Z_{eq} nel circuito di Figura 9.68.

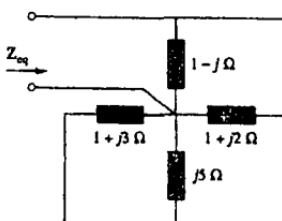


Figura 9.68 Per il Problema 9.61.

- 9.62** Nel circuito di Figura 9.69, determinare l'impedenza di ingresso Z_{in} alla frequenza 10 krad/s.

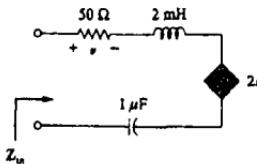


Figura 9.69 Per il Problema 9.62.

- 9.63** Nel circuito di Figura 9.70, determinare il valore di Z_T .

ML

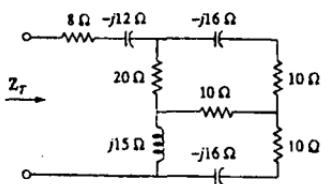


Figura 9.70 Per il Problema 9.63.

- 9.64** Determinare Z_T e I nel circuito di Figura 9.71.

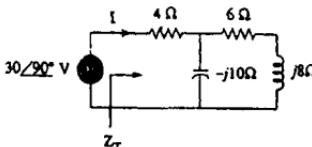


Figura 9.71 Per il Problema 9.64.

- 9.65 Determinare I e Z_T per il circuito di Figura 9.72.

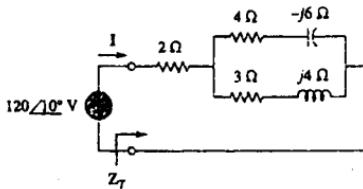


Figura 9.72 Per il Problema 9.65.

- 9.66 Nel circuito di Figura 9.73, calcolare Z_T e V_{ab} .

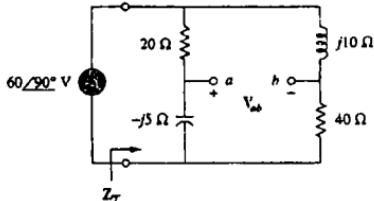
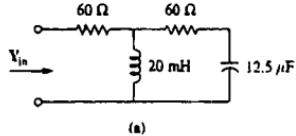
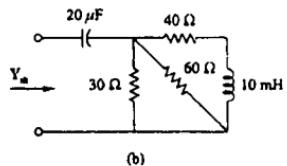


Figura 9.73 Per il Problema 9.66.

- 9.67 Alla frequenza $\omega = 10^3$ rad/s, determinare l'ammittanza di ingresso per ciascuno dei circuiti in Figura 9.74.



(a)



(b)

Figura 9.74 Per il Problema 9.67.

- 9.68 Determinare Y_{eq} per il circuito in Figura 9.75.

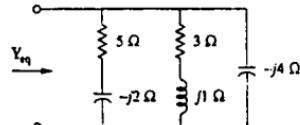


Figura 9.75 Per il Problema 9.68.

- 9.69 Determinare l'ammittanza equivalente Y_{eq} del circuito in Figura 9.76.

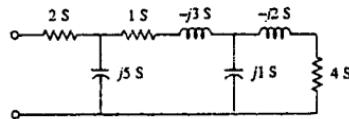


Figura 9.76 Per il Problema 9.69.

- 9.70 Determinare l'impedenza equivalente del circuito in Figura 9.77.

ML

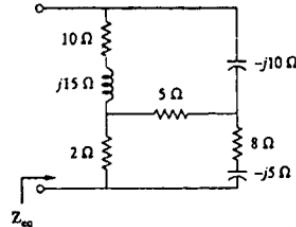


Figura 9.77 Per il Problema 9.70.

- 9.71 Calcolare l'impedenza equivalente del circuito in Figura 9.78.

ML

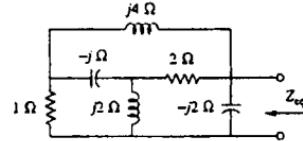


Figura 9.78 Per il Problema 9.71.

- 9.72 #Calcolare il valore di Z_{ab} nella rete di Figura 9.79.

ML

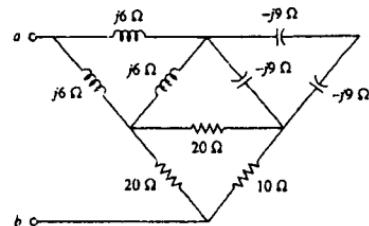


Figura 9.79 Per il Problema 9.72.

- 9.73 #Determinare l'impedenza equivalente del circuito in Figura 9.80.

ML

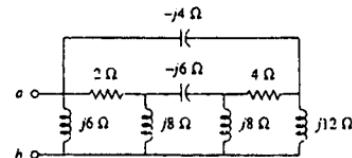


Figura 9.80 Per il Problema 9.73.

Paragrafo 9.8 Applicazioni

9.74 Progettare un circuito RL che produca uno sfasamento di 90° in anticipo.

9.75 Progettare un circuito che trasformi una sinusoida in ingresso in una cosinusoida in uscita.

9.76 Per le seguenti coppie di segnali, determinare se v_1 è in anticipo o in ritardo su v_2 e in che misura.

- (a) $v_1(t) = 10 \cos(5t - 20^\circ)$ V, $v_2(t) = 8 \sin(5t)$ V
- (b) $v_1(t) = 19 \cos(2t + 90^\circ)$ V, $v_2(t) = 6 \sin(2t)$ V
- (c) $v_1(t) = -4 \cos(10t)$ V, $v_2(t) = 15 \sin(10t)$ V

9.77 Si faccia riferimento al circuito RC in Figura 9.81.

- (a) Calcolare lo sfasamento alla frequenza di 2 MHz.
- (b) Determinare la frequenza alla quale lo sfasamento è pari a 45° .

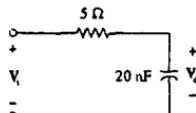


Figura 9.81 Per il Problema 9.77.

9.78 Una bobina con impedenza $8 + j6\Omega$ è collegata in serie ad una reattanza capacitiva X . La combinazione serie è a sua volta collegata in parallelo con un resistore R . Sapendo che l'impedenza equivalente del circuito risultante è $5\angle0^\circ\Omega$, determinare i valori di R e X .

9.79 (a) Calcolare lo sfasamento del circuito in Figura 9.82.
 (b) Dire se lo sfasamento è in anticipo o in ritardo (uscita rispetto ad ingresso).
 (c) Determinare il modulo dell'uscita quando l'ingresso è 120 V.

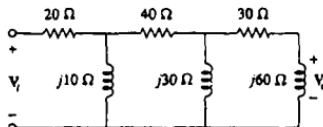


Figura 9.82 Per il Problema 9.79.

9.80 Si consideri il circuito di sfasamento in Figura 9.83. Sia $V_1 = 120$ V alla frequenza di 60 Hz. Determinare:
 (a) V_o quando R è massima
 (b) V_o quando R è minima
 (c) il valore di R che produce uno sfasamento di 45°

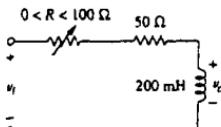


Figura 9.83 Per il Problema 9.80.

9.81 Il ponte AC in Figura 9.87 è bilanciato quando $R_1 = 400\Omega$, $R_2 = 600\Omega$, $R_3 = 1.2k\Omega$ e $C_1 = 0.3\mu F$.

Calcolare R_x e C_x . Supponere R_2 e C_1 in serie.

9.82 Un ponte per la misura di una capacità risulta bilanciato quando $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$ e $C_x = 40\mu F$. Quanto vale C_1 , la capacità del condensatore da misurare?

9.83 Un ponte per la misura di induttanze risulta bilanciato quando $R_1 = 1.2k\Omega$, $R_2 = 500\Omega$ e $L_x = 250$ mH. Quale è il valore di L_x , induttanza dell'induttore che si sta misurando?

9.84 Il ponte AC mostrato in Figura 9.84 è noto come *ponte di Maxwell*, e viene usato per la misura accurata di induttanza e resistenza di un bobina in termini di una capacità standard C_1 . Mostrare che, quando il ponte è bilanciato,

$$L_x = R_2 R_1 C_1 \quad \text{e} \quad R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3$$

Determinare L_x e R_x per $R_1 = 40$ k Ω , $R_2 = 1.6$ k Ω , $R_3 = 4$ k Ω e $C_1 = 0.45\mu F$.

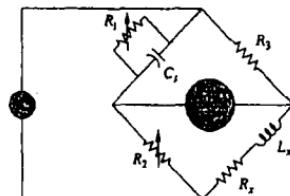


Figura 9.84 Ponte di Maxwell; per il Problema 9.84.

9.85 Il ponte AC mostrato in Figura 9.85 è chiamato *ponte di Wien*, e viene usato per misurare la frequenza di un generatore. Mostrare che, quando il ponte è bilanciato,

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_2 R_4 C_2 C_4}}$$

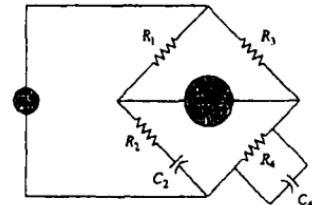


Figura 9.85 Ponte di Wien; per il Problema 9.85.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 9.86 Il circuito mostrato in Figura 9.86 è utilizzato in un ricevitore televisivo. Quale è l'impedenza totale del circuito?

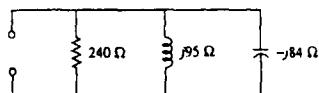


Figura 9.86 Per il Problema 9.86.

- 9.87 La rete di Figura 9.87 rappresenta parte dello schematico che descrive il circuito di un sensore elettronico industriale. Quanto vale l'impedenza totale del circuito alla frequenza di 2 kHz?

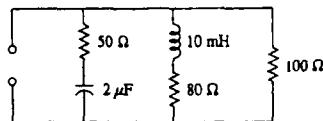


Figura 9.87 Per il Problema 9.87.

- 9.88 In Figura 9.88 è mostrato un circuito serie per frequenze audio.
(a) Quale è l'impedenza del circuito?
(b) Se la frequenza venisse dimezzata, quale sarebbe l'impedenza del circuito?

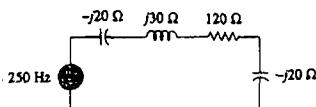


Figura 9.88 Per il Problema 9.88.

- 9.89 Un carico industriale è rappresentato dalla combinazione serie di una capacità e di una resistenza, come mostrato in Figura 9.89. Calcolare il valore di una induttanza L da collegare in parallelo alla combinazione serie in modo che l'impedenza netta risultante sia resistiva alla frequenza di 5 MHz.

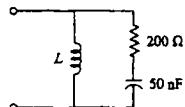


Figura 9.89 Per il Problema 9.89.

- 9.90 Una bobina per uso industriale si può rappresentare come la composizione serie di una induttanza L e una resistenza R , come mostrato in Figura 9.90. Poiché un voltmetro AC misura soltanto il modulo di una tensione sinusoidale, vengono eseguite le seguenti misure alla frequenza di 60 Hz, mentre il circuito funziona a regime:

$$|V_L| = 145 V, \quad |V_i| = 50 V, \quad |V_o| = 110 V$$

Utilizzare le misure per determinare i valori di L e R .

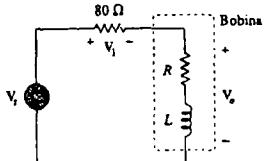


Figura 9.90 Per il Problema 9.90.

- 9.91 La Figura 9.91 mostra la combinazione parallelo di una induttanza e una resistenza. Se si desidera collegare un condensatore in serie alla combinazione parallelo in modo che l'impedenza netta risulti puramente resistiva alla frequenza di 10 MHz, quale è il valore corretto di C ?

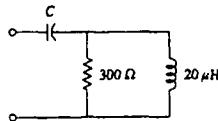


Figura 9.91 Per il Problema 9.91.

- 9.92 Una linea di trasmissione ha impedenza serie $Z = 100 \angle 75^\circ \Omega$ e ammettenza parallela $Y = 450 \angle 48^\circ \mu S$. Determinare. (a) l'impedenza caratteristica $Z_0 = \sqrt{Z/Y}$, (b) la costante di propagazione $\gamma = \sqrt{ZY}$.

- 9.93 Un sistema per la trasmissione dell'energia elettrica è rappresentato in Figura 9.92. Note le seguenti quantità: Tensione del generatore $V_i = 115 \angle 0^\circ V$, Impedenza del generatore $Z_g = 1 + j0.5 \Omega$, Impedenza della linea $Z_t = 0.4 + j0.3 \Omega$, Impedenza del carico $Z_L = 23.2 + j18.9 \Omega$, determinare la corrente del carico I_L .

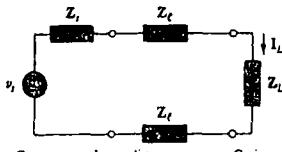
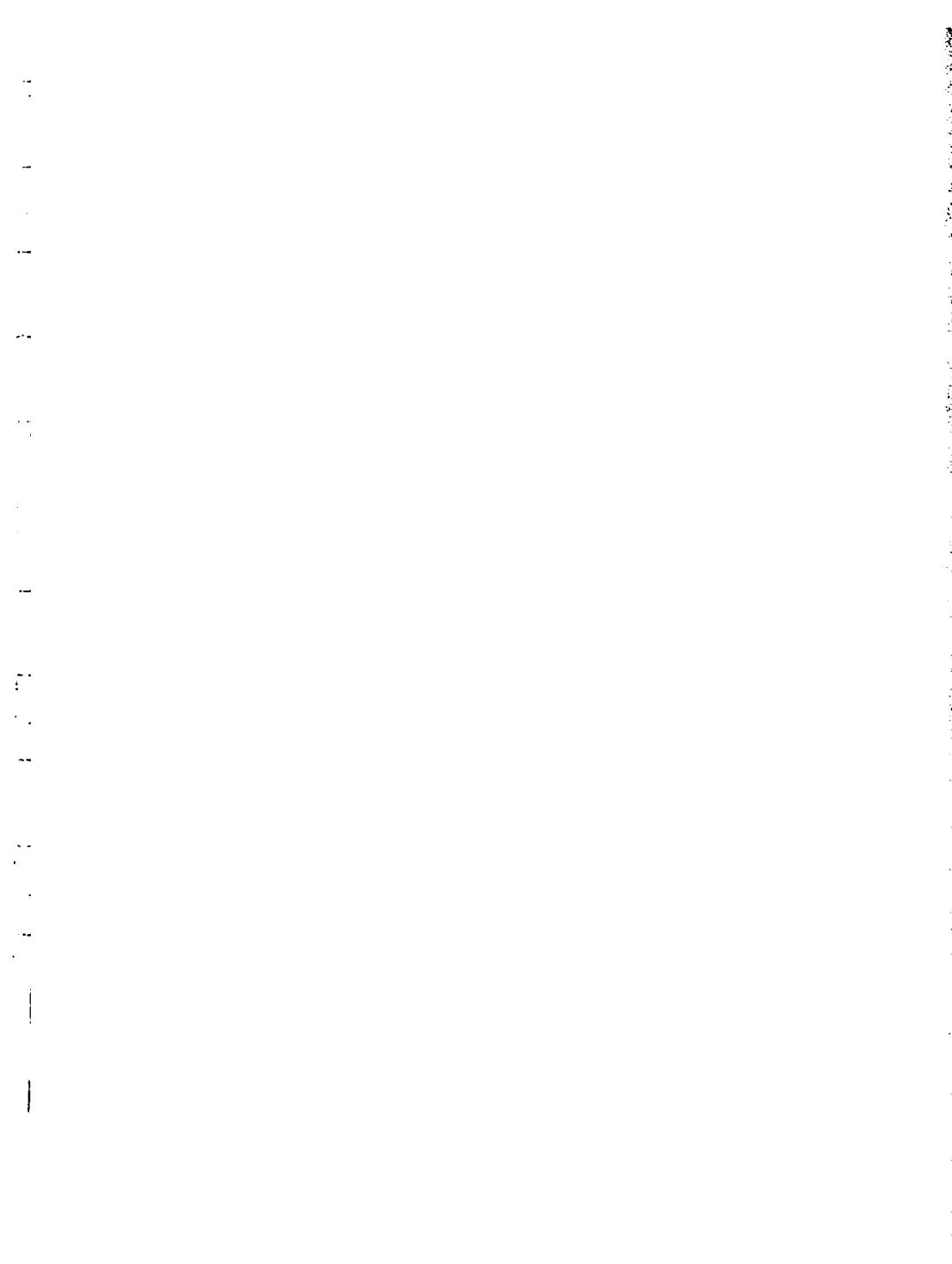


Figura 9.92 Per il Problema 9.93



ANALISI IN REGIME SINUSOIDALE

10.1 INTRODUZIONE

Nel Capitolo 9 si è visto che la risposta forzata o di regime dei circuiti con ingressi sinusoidali può essere ottenuta mediante i fasori. Si è anche visto come le leggi di Ohm e di Kirchhoff risultino valide anche per i circuiti AC.

In questo capitolo si vedrà che anche l'analisi nodale, l'analisi agli anelli, il teorema di Thevenin, il teorema di Norton, la sovrapposizione e la trasformazione dei generatori si possono applicare nell'analisi di circuiti AC.

Poiché le tecniche appena menzionate sono state già introdotte per i circuiti in regime stazionario, ci si concentrerà qui maggiormente sulla loro illustrazione mediante esempi. L'analisi dei circuiti in regime sinusoidale si suddivide in tre fasi.

Fasi principali dell'analisi dei circuiti in regime sinusoidale:

1. Trasformazione del circuito al dominio dei fasori o delle frequenze.
2. Risoluzione del problema mediante l'uso di tecniche circuituali standard (analisi nodale, analisi agli anelli, sovrapposizione, ecc.).
3. Trasformazione dei fasori risultanti al dominio del tempo.

Il passo 1 non è necessario se il problema è già stato formulato nel dominio della frequenza. Nel passo 2, l'analisi viene eseguita allo stesso modo che per i circuiti resistivi, fatta eccezione per il fatto che si ha a che fare con numeri complessi. Il passo 3 risulta ovvio, per quanto si è visto nel Capitolo 9. Verso la fine del capitolo si vedrà come è possibile applicare *PSpice* alla soluzione di problemi di circuiti AC. Infine, l'analisi dei circuiti AC verrà applicata a due circuiti della pratica: un oscillatore e un circuito moltiplicatore di capacità.

10.2 ANALISI NODALE

L'analisi modale si fonda sulla legge di Kirchhoff delle correnti. Poiché la KCL rimane valida anche per i fasori, come si è visto nel Paragrafo 9.6, è possibile analizzare i circuiti AC mediante l'analisi nodale, come illustrato dai seguenti esempi.

Esempio 10.1

Determinare i_x nel circuito di Figura 10.1 mediante l'analisi nodale.

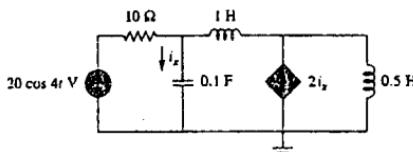


Figura 10.1
Per l'Esempio 10.1.

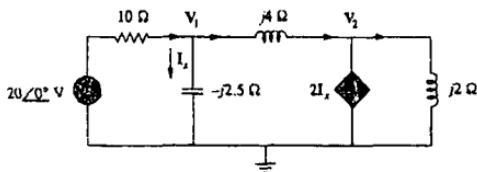
Soluzione: Si converte dapprima il circuito al dominio delle frequenze:

$$\begin{aligned} 20 \cos 4t &\Rightarrow 20 / 0^\circ, \quad \omega = 4 \text{ rad/s} \\ 1 \text{ H} &\Rightarrow j\omega L = j4 \\ 0.5 \text{ H} &\Rightarrow j\omega L = j2 \\ 0.1 \text{ F} &\Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2.5 \end{aligned}$$

Il circuito equivalente nel dominio delle frequenze è allora quello mostrato in Figura 10.2.

Figura 10.2

Circuito equivalente del circuito in Figura 10.1 nel dominio delle frequenze.



Applicando la KCL al nodo 1,

$$\frac{20 - V_1}{10} = \frac{V_1}{-j2.5} + \frac{V_1 - V_2}{j4}$$

e semplificando

$$(1 + j1.5)V_1 + j2.5V_2 = 20 \quad (10.1.1)$$

Al nodo 2,

$$2I_x + \frac{V_1 - V_2}{j4} = \frac{V_2}{j2}$$

Ma $I_x = V_1 / j2.5$. Sostituendo, si ottiene

$$\frac{2V_1}{-j2.5} + \frac{V_1 - V_2}{j4} = \frac{V_2}{j2}$$

Semplificando, si ha poi

$$11V_1 + 15V_2 = 0 \quad (10.1.2)$$

Le (10.1.1) e (10.1.2) possono essere scritte in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 + j1.5 & j2.5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottengono i determinanti come

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + j1.5 & j2.5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix} = 15 - j5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & j2.5 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 300, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 + j1.5 & 20 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -220$$

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{300}{15 - j5} = 18.97 / 18.43^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-220}{15 - j5} = 13.91 / 198.3^\circ \text{ V}$$

La corrente I_x è

$$I_x = \frac{V_1}{-j2.5} = \frac{18.97 / 18.43^\circ}{2.5 / -90^\circ} = 7.59 / 108.4^\circ \text{ A}$$

Trasformando al dominio del tempo,

$$i_x = 7.59 \cos(4t + 108.4^\circ) \text{ A}$$

■ Esercizio 10.1 Determinare v_1 e v_2 nel circuito di Figura 10.3 mediante l'analisi nodale.

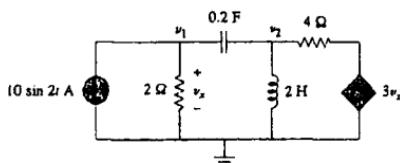


Figura 10.3
Per l'Esercizio 10.1.

Risposta $v_1(t) = 11.32 \sin(2t + 60.01^\circ)$ V, $v_2(t) = 33.02 \sin(2t + 57.12^\circ)$ V. ■

Esempio 10.2

Calcolare V_1 e V_2 nel circuito di Figura 10.4.

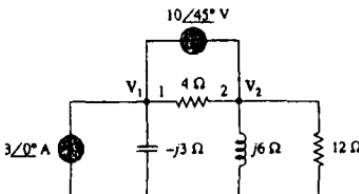


Figura 10.4
Per l'Esempio 10.2.

Soluzione: I nodi 1 e 2 formano un supernodo, come si vede in Figura 10.5. Applicando la KCL al supernodo si ottiene

$$3 = \frac{V_1}{-j3} + \frac{V_2}{j6} + \frac{V_2}{12}$$

cioè

$$36 = j4V_1 + (1 - j2)V_2 \quad (10.2.1)$$

Ma tra i nodi 1 e 2 c'è un generatore di tensione, e quindi

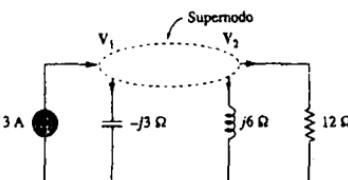


Figura 10.5
Supernodo nel circuito di Figura 10.4.

$$V_1 = V_2 + 10\angle45^\circ \quad (10.2.2)$$

Sostituendo la (10.2.2) nella (10.2.1) si ottiene

$$36 - 40\angle135^\circ = (1 + j2)V_2 \implies V_2 = 31.41\angle-87.18^\circ \text{ V}$$

Dalla (10.2.2),

$$V_1 = V_2 + 10\angle45^\circ = 25.78\angle-70.48^\circ \text{ V}$$

■ Esercizio 10.2 Calcolare V_1 e V_2 nel circuito mostrato in Figura 10.6.

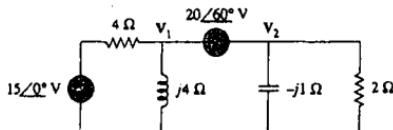


Figura 10.6
Per l'Esercizio 10.2.

Risposta $V_1 = 19.36\angle69.67^\circ$ V, $V_2 = 3.376\angle165.7^\circ$ V. ■

10.3 ANALISI AGLI ANELLI

La legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL) rappresenta il principio base dell'analisi agli anelli. La validità della KVL è stata dimostrata nel Paragrafo 9.6; l'analisi agli anelli viene illustrata negli esempi seguenti.

Esempio 10.3

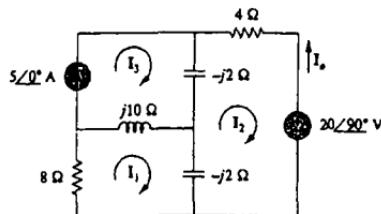
Determinare la corrente I_o nel circuito di Figura 10.7 usando l'analisi agli anelli.

Soluzione: Applicando la KVL all'anello 1 si ottiene

$$(8 + j10 - j2)I_1 - (-j2)I_2 - j10I_3 = 0 \quad (10.3.1)$$

Figura 10.7

Per l'Esempio 10.3.



Per l'anello 2,

$$(4 - j2 - j2)I_2 - (-j2)I_1 - (-j2)I_3 + 20\angle 90^\circ = 0 \quad (10.3.2)$$

Per l'anello 3, $I_3 = 5$. Sostituendo nelle (10.3.1) e (10.3.2), si ottiene

$$(8 + j8)I_1 + j2I_2 = j50 \quad (10.3.3)$$

$$j2I_1 + (4 - j4)I_2 = -j20 - j10 \quad (10.3.4)$$

Le (10.3.3) e (10.3.4) possono essere messe in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -j30 \end{bmatrix}$$

dalla quale si ottengono i determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{vmatrix} = 32(1+j)(1-j) + 4 = 68$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 + j8 & j50 \\ j2 & -j30 \end{vmatrix} = 340 - j240 = 416.17\angle -35.22^\circ$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{416.17\angle -35.22^\circ}{68} = 6.12\angle -35.22^\circ \text{ A}$$

La corrente desiderata è

$$I_o = -I_2 = 6.12\angle 144.78^\circ \text{ A}$$

■ **Esercizio 10.3** Determinare I_o in Figura 10.8 con l'analisi agli anelli.

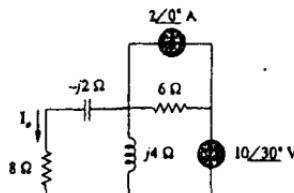


Figura 10.8

Per l'Esercizio 10.3.

Risposta $1.194\angle 65.45^\circ \text{ A}$

Esempio 10.4

Determinare V_o nel circuito in Figura 10.9 mediante l'analisi agli anelli.

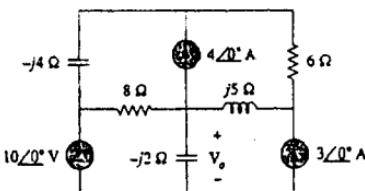


Figura 10.9
Per l'Esempio 10.4.

Soluzione: Come si vede in Figura 10.10, gli anelli 3 e 4 formano un superanello, a causa della presenza del generatore di corrente tra gli anelli. Per l'anello 1, la KVL fornisce

$$-10 + (8 - j2)I_1 - (-j2)I_2 - 8I_3 = 0$$

cioè

$$(8 - j2)I_1 + j2I_2 - 8I_3 = 10 \quad (10.4.1)$$

Per l'anello 2,

$$I_2 = -3 \quad (10.4.2)$$

Per il superanello,

$$(8 - j4)I_3 - 8I_1 + (6 + j5)I_4 - j5I_2 = 0 \quad (10.4.3)$$

Per la presenza del generatore di corrente di anelli 3 e 4, al nodo A

$$I_4 = I_3 + 4 \quad (10.4.4)$$

METODO 1

Invece di risolvere le quattro equazioni precedenti, le si riduce a due mediante sostituzioni ed eliminazioni.

Combinando le (10.4.1) e (10.4.2),

$$(8 - j2)I_1 - 8I_3 = 10 + j6 \quad (10.4.5)$$

Combinando le Equazioni da (10.4.2) a (10.4.4),

$$-8I_1 + (14 + j)I_3 = -24 - j35 \quad (10.4.6)$$

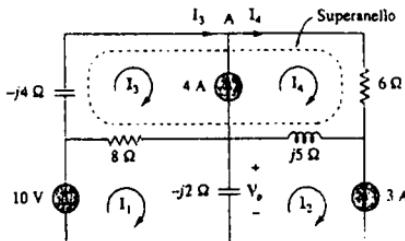


Figura 10.10
Analisi del circuito in Figura 10.9.

Dalle (10.4.5) e (10.4.6) si ottiene l'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 8 - j2 & -8 \\ -8 & 14 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + j6 \\ -24 - j35 \end{bmatrix}$$

Si ottengono da essa i seguenti determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 - j2 & -8 \\ -8 & 14 + j \end{vmatrix} = 112 + j8 - j28 + 2 - 64 = 50 - j20$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 + j6 & -8 \\ -24 - j35 & 14 + j \end{vmatrix} = 140 + j10 + j84 - 6 - 192 - j280 \\ = -58 - j186$$

La corrente I_1 si ottiene come

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-58 - j186}{50 - j20} = 3.618 \angle 274.5^\circ \text{ A}$$

La tensione richiesta V_o è

$$\begin{aligned} V_o &= -j2(I_1 - I_2) = -j2(3.618 \angle 274.5^\circ + 3) \\ &= -7.2134 - j6.568 = 9.756 \angle 222.32^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

METODO 2

Si può utilizzare MATLAB per risolvere le Equazioni da (10.4.1) a (10.4.4). Si riscrivono dapprima le equazioni nella forma

$$\begin{bmatrix} 8 - j2 & j2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -j5 & 8 - j4 & 6 + j5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (10.4.7a)$$

cioè

$$AI = B$$

Invertendo la matrice A , è possibile ricavare I come

$$I = A^{-1}B \quad (10.4.7b)$$

Si applica allora MATLAB come segue:

```
>> A = [(8-j2) j*2 -8 0;
          0 1 0 0;
          -8 -j5 (8-j4) (6+j5);
          0 0 -1 1];
>> B = [10 -3 0 4]';
>> I = inv(A)*B

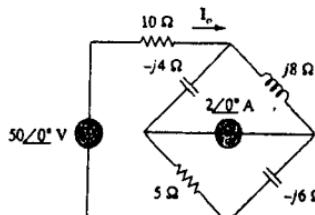
I =
0.2828 - 3.6069i
-3.0000
-1.8690 - 4.4276i
2.1310 - 4.4275i
>> Vo = -2*j*(I(1) - I(2))
```

```
Vo =
-7.2138 - 6.5655i
```

come si era ottenuto in precedenza.

Esercizio 10.4 Calcolare la corrente I_o nel circuito di Figura 10.11.

Figura 10.11
Per l'Esercizio 10.4



Risposta $5.075 \angle 5.943^\circ \text{ A}$.

10.4 PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Poiché i circuiti in regime sinusoidale sono circuiti lineari, il principio di sovrapposizione si applica a essi allo stesso modo che ai circuiti in regime stazionario. Il principio assume particolare importanza se il circuito possiede generatori che operano a frequenze diverse.

In quest'ultimo caso, poiché le impedenze dipendono dalla frequenza, si ha a che fare con un circuito nel dominio della frequenza diverso per ogni frequenza. La risposta complessiva deve essere ottenuta sommando le singole risposte nel dominio del tempo. È invece scorretto tentare di sommare le risposte nel dominio dei fasori o della frequenza, perché il fattore esponenziale $e^{j\omega t}$ è implicito nell'analisi con i fasori, e questo fattore risulta diverso per ogni diversa frequenza angolare ω . Non avrebbe quindi senso sommare le risposte alle diverse frequenze nel dominio dei fasori. Perciò, quando un circuito possiede generatori operanti a frequenze diverse, è necessario sommare le risposte dovute alle singole frequenze nel dominio del tempo.

Esempio 10.5

Utilizzare il principio di sovrapposizione per determinare I_o nel circuito di Figura 10.7.

Soluzione: Sia

$$I_o = I'_o + I''_o \quad (10.5.1)$$

dove I'_o e I''_o sono dovute al generatore di tensione e di corrente, rispettivamente. Per determinare I'_o , si consideri il circuito in Figura 10.12(a). Se si indica con Z la combinazione parallela di $-j2$ e $8+j10$, allora

$$Z = \frac{-j2(8+j10)}{-j2+8+j10} = 0.25 - j2.25$$

e la corrente I'_o è

$$I'_o = \frac{j20}{4-j2+Z} = \frac{j20}{4.25-j4.25}$$

cioè

$$I'_o = -2.353 + j2.353 \quad (10.5.2)$$

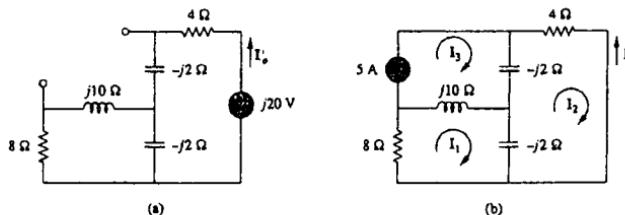


Figura 10.12
Soluzione dell'Esempio 10.5.

Per ottenere I''_o , si consideri il circuito in Figura 10.12(b). Per l'anello 1,

$$(8+j8)I_1 - j10I_3 + j2I_2 = 0 \quad (10.5.3)$$

Per l'anello 2,

$$(4-j4)I_2 + j2I_1 + j2I_3 = 0 \quad (10.5.4)$$

Per l'anello 3,

$$I_3 = 5 \quad (10.5.5)$$

Dalle (10.5.4) e (10.5.5),

$$(4-j4)I_2 + j2I_1 + j10 = 0$$

Esprimendo I_1 in termini di I_2 nell'equazione precedente

$$I_1 = (2+j2)I_2 - 5 \quad (10.5.6)$$

Sostituendo le (10.5.5) e (10.5.6) nella (10.5.3), si ottiene

$$(8 + j8)[(2 + j2)I_2 - 5] - j50 + j2I_2 = 0$$

da cui

$$I_2 = \frac{90 - j40}{34} = 2.647 - j1.176$$

La corrente I''_o si ottiene come

$$I''_o = -I_2 = -2.647 + j1.176 \quad (10.5.7)$$

Dalle (10.5.2) e (10.5.7) si può scrivere

$$I_o = I'_o + I''_o = -5 + j3.529 = 6.12 \angle 144.78^\circ \text{ A}$$

che risulta in accordo con quanto ottenuto nell'Esempio 10.3. È bene notare che l'applicazione del principio di sovrapposizione non è il metodo migliore per risolvere questo problema. Sembra infatti che il problema sia stato reso due volte più oneroso dell'originale con l'uso della sovrapposizione. Nell'Esempio 10.6, invece, la sovrapposizione risulta chiaramente l'approccio più conveniente.

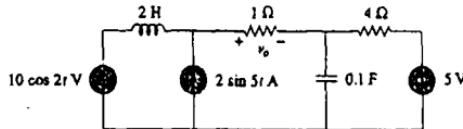
Esempio 10.5 Determinare la corrente I_o nel circuito di Figura 10.8 usando il principio di sovrapposizione.

Risposta $1.194 / 65.45^\circ \text{ A}$.

Esempio 10.6

Determinare v_o nel circuito di Fig. 10.13 mediante l'uso del principio di sovrapposizione.

Figura 10.13
Per l'Esempio 10.6.



Soluzione: Poiché il circuito contiene generatori a tre diverse frequenze ($\omega = 0$ per il generatore di tensione costante), un possibile metodo per ottenere la soluzione è quello di usare la sovrapposizione, che scomponete il problema in sottoproblemi, ciascuno a una singola frequenza. Si pone quindi

$$v_o = v_1 + v_2 + v_3 \quad (10.6.1)$$

in cui v_1 è dovuta al generatore di tensione costante da 5 V, v_2 è dovuta al generatore di tensione $10 \cos 2t \text{ V}$ e v_3 è dovuta al generatore di corrente $2 \sin 5t \text{ A}$.

Per determinare v_1 , si pongono a zero tutti i generatori eccetto il generatore costante da 5 V. Si ricorda che, a regime, un condensatore è un circuito aperto per le tensioni costanti, mentre l'induttore si comporta come un corto circuito. Esiste una maniera alternativa di esprimere quanto appena detto: per $\omega = 0$, $j\omega L = 0$, $1/j\omega C = \infty$. In entrambi i casi, il circuito equivalente è quello mostrato in Figura 10.14(a). Per il partitore di tensione,

$$-v_1 = \frac{1}{1+4} (5) = 1 \text{ V} \quad (10.6.2)$$

Per determinare v_2 , si pongono a zero il generatore da 5 V e il generatore di corrente $2 \sin 5t$ e si trasforma il circuito al dominio delle frequenze.

$$10 \cos 2t \implies 10 \angle 0^\circ, \quad \omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$2 \text{ H} \implies j\omega L = j4 \Omega$$

$$0.1 \text{ F} \implies \frac{1}{j\omega C} = -j5 \Omega$$

Il circuito equivalente risulta ora quello di Figura 10.14(b). Si ha

$$Z = -j5 \parallel 4 = \frac{-j5 \times 4}{4 - j5} = 2.439 - j1.951$$

Per il partitore di tensione,

$$V_2 = \frac{1}{1+j4+Z} (10 \angle 0^\circ) = \frac{10}{3.439+j2.049} = 2.498 \angle -30.79^\circ$$

Nel dominio del tempo,

$$v_2 = 2.498 \cos(2t - 30.79^\circ) \quad (10.6.3)$$

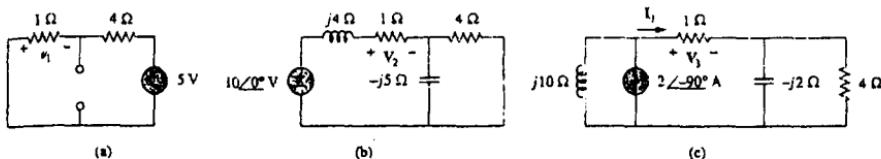


Figura 10.14 Soluzione dell'Esempio 10.6: (a) tutti i generatori posti a zero eccetto il generatore costante da 5 V, (b) tutti i generatori posti a zero eccetto il generatore di tensione AC, (c) tutti i generatori posti a zero eccetto il generatore di corrente AC.

Per ottenere v_3 , si pongono a zero i generatori di tensione e si trasforma ciò che rimane al dominio delle frequenze:

$$2 \sin 5t \Rightarrow 2 \angle -90^\circ, \quad \omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$2 \text{ H} \Rightarrow j\omega L = j10 \Omega$$

$$0.1 \text{ F} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2 \Omega$$

Il circuito equivalente è quello in Figura 10.14(c). Sia

$$Z_1 = -j2 \parallel 4 = \frac{-j2 \times 4}{4 - j2} = 0.8 - j1.6 \Omega$$

Per il partitore di corrente,

$$I_1 = \frac{j10}{j10 + 1 + Z_1} (2 \angle -90^\circ) \text{ A}$$

$$V_1 = I_1 \times 1 = \frac{j10}{1.8 + j8.4} (-j2) = 2.328 \angle -80^\circ \text{ V}$$

Nel dominio del tempo,

$$v_3 = 2.33 \cos(5t - 80^\circ) = 2.33 \sin(5t + 10^\circ) \text{ V} \quad (10.6.4)$$

Sostituendo le Equazioni da (10.6.2) a (10.6.4) nella (10.6.1), si ottiene

$$v_2(t) = -1 + 2.498 \cos(2t - 30.79^\circ) + 2.33 \sin(5t + 10^\circ) \text{ V}$$

■ **Esercizio 10.6** Determinare v_o nel circuito di Fig. 10.15 mediante il principio di sovrapposizione.

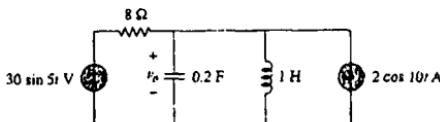


Figura 10.15
Per l'Esercizio 10.6.

Risposta $4.631 \sin(5t - 81.12^\circ) + 1.051 \cos(10t - 86.24^\circ) \text{ V}$.

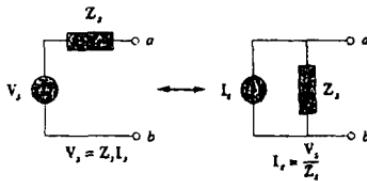


10.5 TRASFORMAZIONE DI GENERATORI

Come mostra la Figura 10.16, trasformare i generatori nel dominio della frequenza significa trasformare un generatore di tensione in serie a una impedenza in un generatore di corrente in parallelo a una impedenza, o viceversa. Nel passare da un tipo di generatore all'altro, vanno tenute presenti le seguenti relazioni:

$$V_s = Z_s I_s \quad \Leftrightarrow \quad I_s = \frac{V_s}{Z_s} \quad (10.1)$$

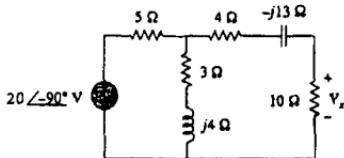
Figura 10.16
Trasformazione di generatori.



Esempio 10.7

Calcolare V_x nel circuito di Figura 10.17 usando il metodo della trasformazione dei generatori.

Figura 10.17
Per l'Esempio 10.7.



Soluzione: Si trasforma il generatore di tensione in un generatore di corrente e si ottiene il circuito in Figura 10.18(a), dove

$$I_s = \frac{20 \angle -90^\circ}{5} = 4 \angle -90^\circ = -j4 \text{ A}$$

La combinazione parallela della resistenza da 5Ω e dell'impedenza $(3 + j4)$ fornisce

$$Z_1 = \frac{5(3 + j4)}{8 + j4} = 2.5 + j1.25 \Omega$$

La conversione del generatore di corrente in un generatore di tensione porta al circuito di Figura 10.18(b), dove

$$V_s = I_s Z_1 = -j4(2.5 + j1.25) = 5 - j10 \text{ V}$$

Per il partitore di tensione,

$$V_x = \frac{10}{10 + 2.5 + j1.25 + 4 - j13} (5 - j10) = 5.519 \angle -28^\circ \text{ V}$$

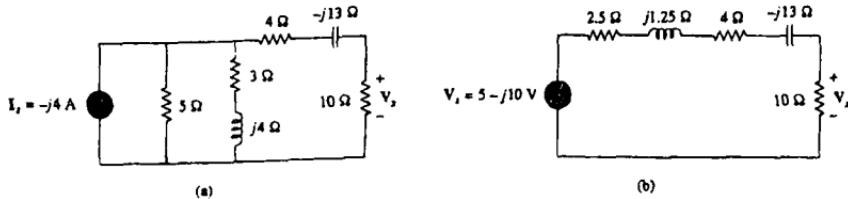
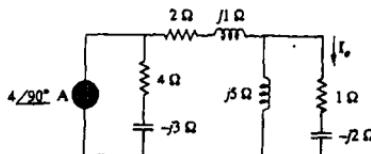


Figura 10.18 Soluzione del circuito in Figura 10.17.

■ **Esercizio 10.7** Determinare I_o nel circuito di Figura 10.19 usando il metodo della trasformazione dei generatori.

Figura 10.19
Per l'Esercizio 10.7.



Risposta 3.288 / 99.46° A.

10.6 CIRCUITI EQUIVALENTI DI THEVENIN E NORTON

I teoremi di Thevenin e Norton si applicano ai circuiti AC allo stesso modo di quanto accade per i circuiti in regime stazionario. L'unica differenza consiste nel fatto che si devono manipolare quantità complesse. La versione nel dominio delle frequenze del circuito equivalente di Thevenin è illustrata in Figura 10.20. In essa, un circuito lineare viene sostituito da un generatore di tensione in serie a un'impedenza.

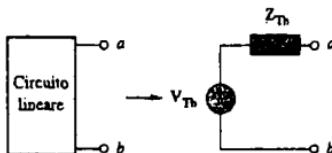


Figura 10.20
Equivalente Thevenin.

Il circuito equivalente di Norton è illustrato in Figura 10.21: in essa, un circuito lineare viene sostituito da un generatore di corrente in parallelo a un'impedenza. Si ricordi che i due circuiti equivalenti sono legati da

$$V_{Th} = Z_N I_N, \quad Z_{Th} = Z_N \quad (10.2)$$

come accade nella trasformazione dei generatori. V_{Th} è la tensione a circuito aperto, mentre I_N è la corrente di corto circuito.

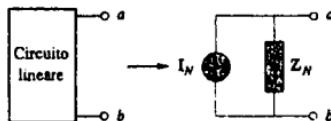


Figura 10.21
Equivalente Norton.

Se il circuito possiede generatori operanti a frequenze diverse (si veda l'Esempio 10.6), il circuito equivalente di Thevenin o di Norton va determinato per ciascuna frequenza. Ciò porta a circuiti equivalenti diversi, uno per ciascuna frequenza, e non a un unico circuito equivalente.

Esempio 10.8

Ottenerne l'equivalente Thevenin ai terminali a-b del circuito in Figura 10.22.

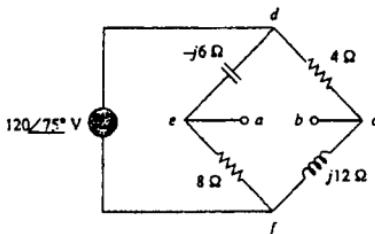


Figura 10.22
Per l'Esempio 10.8.

Soluzione: Si determina Z_{Th} ponendo a zero il generatore di tensione. Come si vede in Figura 10.23(a), la resistenza da 8Ω risulta ora in parallelo alla reattanza $-j6$, e la loro composizione fornisce

$$Z_1 = -j6 \parallel 8 = \frac{-j6 \times 8}{8 - j6} = 2.88 - j3.84 \Omega$$

In maniera simile, la resistenza da 4Ω è in parallelo con la reattanza $j12$, e la loro combinazione fornisce

$$Z_2 = 4 \parallel j12 = \frac{j12 \times 4}{4 + j12} = 3.6 + j1.2 \Omega$$

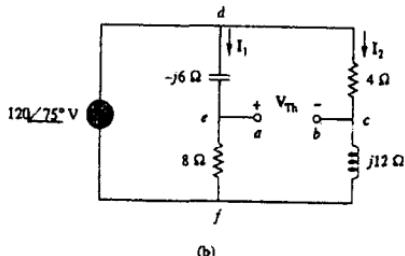
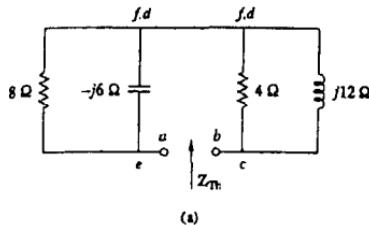


Figura 10.23 Soluzione del circuito in Figura 10.22: (a) calcolo di Z_{Th} , (b) calcolo di V_{Th} .

L'impedenza di Thevenin è la composizione serie di Z_1 e Z_2 , cioè

$$Z_{Th} = Z_1 + Z_2 = 6.48 - j2.64 \Omega$$

Per determinare V_{Th} , si consideri il circuito in Figura 10.23(b). Le correnti I_1 e I_2 si ottengono come

$$I_1 = \frac{120 \angle 75^\circ}{8 - j6} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{120 \angle 75^\circ}{4 + j12} \text{ A}$$

Applicando la KVL alla maglia $bcdeab$ in Figura 10.23(b) si ottiene

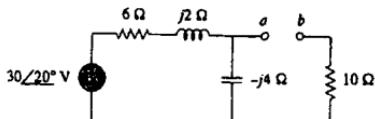
$$V_{Th} - 4I_2 + (-j6)I_1 = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} V_{Th} &= 4I_2 + j6I_1 = \frac{480 \angle 75^\circ}{4 + j12} + \frac{720 \angle 75^\circ + 90^\circ}{8 - j6} \\ &= 37.95 \angle 3.43^\circ + 72 \angle 201.87^\circ \\ &= -28.936 - j24.55 = 37.95 \angle 220.31^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Esercizio 10.8 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 10.24.

Figura 10.24
Per l'Esercizio 10.8.

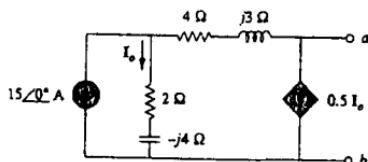


Risposta $Z_{Th} = 12.4 - j3.2 \Omega$, $V_{Th} = 18.97 \angle -51.57^\circ \text{ V}$.

Esempio 10.9

Determinare l'equivalente Thevenin visto ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 10.25.

Figura 10.25
Per l'Esempio 10.9



Soluzione: Per determinare V_{Th} , si applica la KCL al nodo 1 in Figura 10.26(a).

$$15 = I_o + 0.5I_o \implies I_o = 10 \text{ A}$$

Applicando la KVL alla maglia di destra in Figura 10.26(a) si ottiene

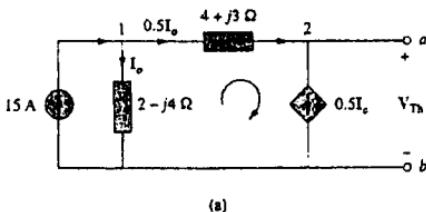
$$-I_o(2 - j4) + 0.5I_o(4 + j3) + V_{Th} = 0$$

cioè

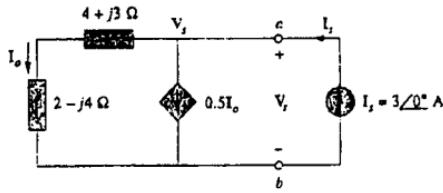
$$V_{Th} = 10(2 - j4) - 5(4 + j3) = -j55 \text{ V}$$

La tensione equivalente di Thevenin è così

$$V_{Th} = 55 \angle -90^\circ \text{ V}$$



(a)



(b)

Figura 10.26 Soluzione del problema di Figura 10.25: (a) calcolo di V_{Th} , (b) calcolo di Z_{Th} .

Per ottenere Z_{Th} , si rimuove il generatore indipendente. Poiché è presente un generatore dipendente di corrente, si collega un generatore di corrente da 3 A (3 è un valore arbitrario scelto per convenienza, cioè un numero divisibile per la somma delle correnti uscenti dal nodo) ai terminali $a-b$, come mostrato in Figura 10.26(b). Al nodo a , la KCL fornisce

$$3 = I_o + 0.5I_o \implies I_o = 2 \text{ A}$$

Applicando la KVL alla maglia esterna in Figura 10.26(b) si ha

$$V_i = I_o(4 + j3 + 2 - j4) = 2(6 - j) \text{ V}$$

L'impedenza di Thevenin è

$$Z_{Th} = \frac{V_i}{I_o} = \frac{2(6 - j)}{3} = 4 - j0.6667 \Omega$$

Esercizio 10.9 Determinare l'equivalente Thevenin del circuito in Figura 10.27, visto ai terminali $a-b$.

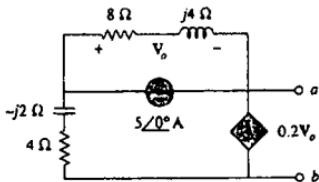


Figura 10.27
Per l'Esercizio 10.9.

Risposta $Z_{Th} = 4.473 \angle -7.64^\circ \Omega, V_{Th} = 7.35 \angle 72.9^\circ \text{ V}$. ■

Esempio 10.10

Calcolare la corrente I_o in Fig. 10.28 usando il teorema di Norton.

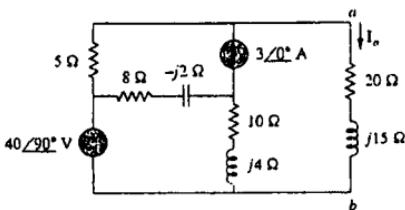


Figura 10.28
Per l'Esempio 10.10.

Soluzione: Si determina dapprima l'equivalente Norton ai terminali $a-b$. Z_N si calcola allo stesso

modo di Z_{Th} . Si pongono a zero i generatori, come mostrato in Figura 10.29(a). Come risulta evidente dalla figura, le impedenze $(8 - j2)$ e $(10 + j4)$ risultano cortocircuitate, così che

$$Z_N = 5 \Omega$$

Per ottenere I_N , si pongono in corto circuito i terminali $a-b$, come in Figura 10.29(b), e si applica l'analisi agli anelli. Si noti che gli anelli 2 e 3 formano un superanello, a causa del generatore di corrente che li unisce. Per l'anello 1,

$$-j40 + (18 + j2)I_1 - (8 - j2)I_2 - (10 + j4)I_3 = 0 \quad (10.10.1)$$

Per il superanello,

$$(13 - j2)I_2 + (10 + j4)I_3 - (18 + j2)I_1 = 0 \quad (10.10.2)$$

Al nodo a , a causa del generatore di corrente tra gli anelli 2 e 3,

$$I_3 = I_2 + 3 \quad (10.10.3)$$

Sommendo la (10.10.1) con la (10.10.2) si ottiene

$$-j40 + 5I_2 = 0 \implies I_2 = j8$$

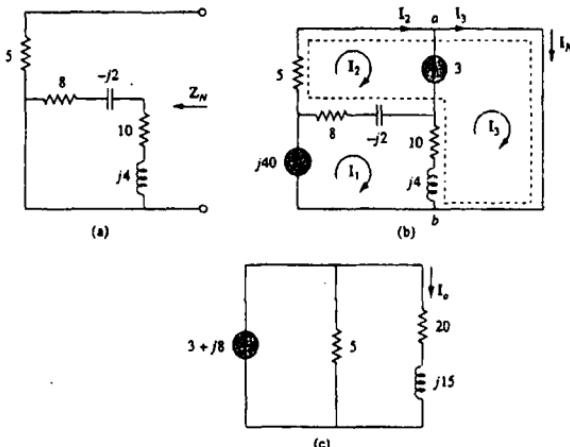
Dalla (10.10.3),

$$I_3 = I_2 + 3 = 3 + j8$$

La corrente di Norton è

$$I_N = I_3 = (3 + j8) A$$

Figura 10.29
Soluzione del circuito in
Figura 10.28:
(a) calcolo di Z_N ,
(b) calcolo di V_N ,
(c) calcolo di I_a .

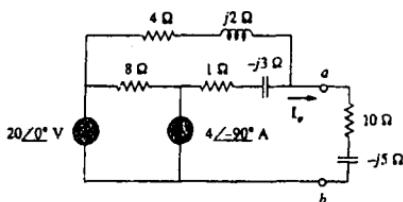


La Figura 10.29(c) mostra il circuito equivalente di Norton collegato all'impedenza ai terminali $a-b$.
Per il partitore di corrente,

$$I_o = \frac{5}{5 + 20 + j15} I_N = \frac{3 + j8}{5 + j3} = 1.465 / 38.48^\circ A$$

■ **Esercizio 10.10** Determinare l'equivalente Norton del circuito in Figura 10.30, visto ai terminali $a-b$. Utilizzare questo equivalente per calcolare I_a .

Figura 10.30
Per l'Esercizio 10.10.



Risposta $Z_N = 3.176 + j0.706 \Omega$, $I_N = 8.396 / -32.68^\circ A$, $I_o = 1.971 / -2.10^\circ A$

10.7 CIRCUITI AC CON AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

I tre passi delineati nel Paragrafo 10.1 per l'analisi di circuiti AC si applicano anche a circuiti contenenti amplificatori operazionali, ammesso che il o gli operazionali operino in regione lineare. Come al solito, gli operazionali verranno supposti ideali. (Si veda il Paragrafo 5.2.) Come si è visto nel Capitolo 5, essenziali per l'analisi di circuiti con operazionali sono due importanti proprietà dell'operazionale ideale:

1. Nei terminali di ingresso non entra alcuna corrente.
2. La tensione fra i terminali di ingresso è zero.

Gli esempi che seguono illustrano i concetti appena enunciati.

Esempio 10.11

Determinare $v_o(t)$ per il circuito in Figura 10.31(a) se $v_s = 3 \cos 1000t$ V.

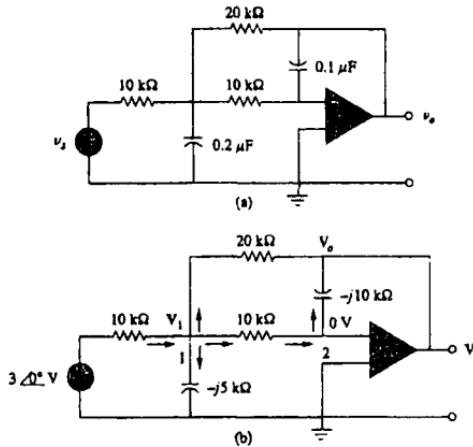


Figura 10.31
Per l'Esempio 10.11:
(a) circuito originale nel dominio
del tempo,
(b) equivalente nel dominio delle
frequenze.

Soluzione: Si trasforma dapprima il circuito al dominio delle frequenze, come mostrato in Figura 10.31(b), in cui $V_s = 3 \angle 0^\circ$, $\omega = 1000$ rad/s. Applicando la KCL al nodo 1 si ottiene

$$\frac{3 \angle 0^\circ - V_1}{10} = \frac{V_1}{-j5} + \frac{V_1 - 0}{10} + \frac{V_1 - V_o}{20}$$

cioè

$$6 = (5 + j4)V_1 - V_o \quad (10.11.1)$$

Al nodo 2, la KCL fornisce

$$\frac{V_1 - 0}{10} = \frac{0 - V_o}{-j10}$$

che porta a

$$V_1 = -jV_o \quad (10.11.2)$$

Sostituendo la (10.11.2) nella (10.11.1) si ottiene

$$6 = -j(5 + j4)V_o - V_o = (3 - j5)V_o$$

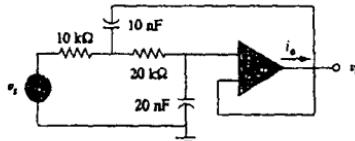
$$V_o = \frac{6}{3 - j5} = 1.029 \angle 59.04^\circ \text{ V}$$

Perciò,

$$v_o(t) = 1.029 \cos(1000t + 59.04^\circ) \text{ V}$$

■ Esercizio 10.11 Calcolare v_o e i_o nel circuito di Figura 10.32. Sia $v_i = 2 \cos 5000t$ V.

Figura 10.32
Per l'Esercizio 10.11.

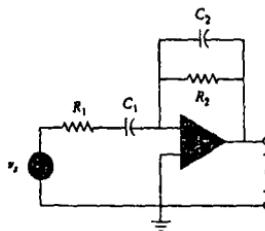


Risposta $0.667 \sin 5000t$ V, $66.67 \sin 5000t$ μA.

Esempio 10.12

Calcolare il guadagno ad anello chiuso e lo sfasamento del circuito in Figura 10.33. Supponere $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 1 \mu\text{F}$, $\omega = 200 \text{ rad/s}$.

Figura 10.33
Per l'Esempio 10.12.



Soluzione: Le impedenze di reazione e di ingresso si calcolano come

$$Z_f = R_2 \left| \frac{1}{j\omega C_2} \right| = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \quad Z_i = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1}$$

Poiché il circuito in Figura 10.33 è un amplificatore invertente, il guadagno ad anello chiuso è dato da

$$G = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} = \frac{-j\omega C_1 R_2}{(1 + j\omega R_1 C_1)(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

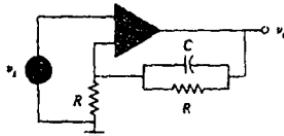
Sostituendo i valori dati di R_1 , R_2 , C_1 , C_2 e ω , si ottiene

$$G = \frac{-j4}{(1+j4)(1+j2)} = 0.434 / 130.6^\circ$$

Il guadagno ad anello chiuso è perciò 0.434 e lo sfasamento è 130.6° .

■ Esercizio 10.12 Determinare il guadagno ad anello chiuso e lo sfasamento per il circuito in Figura 10.34. Siano $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ e $\omega = 1000 \text{ rad/s}$.

Figura 10.34
Per l'Esercizio 10.12.



Risposta $1.015, -5.599^\circ$.

10.8 ANALISI AC CON PSPICE

L'uso di *PSpice* consente di evitare la faticosa manipolazione di quantità complesse nell'analisi dei circuiti AC. L'utilizzo di *PSpice* per l'analisi AC è molto simile a quello per l'analisi in regime stazionario. Si raccomanda la lettura del Paragrafo B.5

dell'Appendice B, che riassume i concetti principali dell'analisi AC con PSpice. L'analisi di circuiti AC viene effettuata nel dominio dei fasori o delle frequenze, e tutti i generatori devono avere la stessa frequenza. Nonostante l'analisi AC con PSpice preveda l'utilizzo di un AC Sweep, i circuiti di questo capitolo presentano una sola frequenza $f = \omega/2\pi$. Il file di uscita di PSpice conterrà i valori dei fasori di tensione e di corrente. Se necessario, le impedenze possono poi essere calcolate utilizzando le tensioni e le correnti estratte dal file di uscita.

Esempio 10.13

Ottenere v_o e i_o nel circuito di Figura 10.35 usando PSpice.

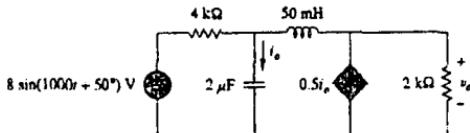


Figura 10.35
Per l'Esempio 10.13.

Soluzione: Si converte dapprima la funzione seno in coseno.

$$8 \sin(1000t + 50^\circ) = 8 \cos(1000t + 50^\circ - 90^\circ) = 8 \cos(1000t - 40^\circ)$$

La frequenza f si ottiene da ω come

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159.155 \text{ Hz}$$

Lo schematico per il circuito è mostrato in Figura 10.36. Si noti che il generatore di corrente controllato in corrente F1 è collegato in modo che la sua corrente scorrà dal nodo 0 al nodo 3, conforme-

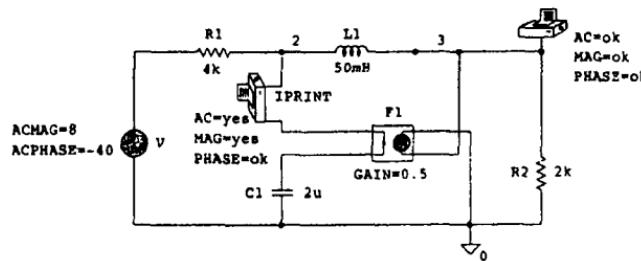


Figura 10.36
Schematico del circuito in Figura 10.35

mente al circuito originale di Figura 10.35. Poiché si desiderano soltanto l'ampiezza e la fase di v_o e i_o , gli attributi di IPRINT e VPRINT1 vengono posti entrambi a: $AC = yes$, $MAG = yes$, $PHASE = yes$. Per eseguire l'analisi a una singola frequenza, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep e si inseriscono Total Pts = 1, Start Freq = 159.155 e Final Freq = 159.155. Dopo aver salvato lo schematico, esso viene simulato selezionando Analysis/Simulate. Il file di uscita contiene la frequenza del generatore oltre alle informazioni selezionate per gli pseudocomponenti IPRINT e VPRINT1.

FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
1.592E+02	3.264E-03	-3.743E+01
FREQ	VM(3)	VP(3)
1.592E+02	1.550E+00	-9.518E+01

Da questo file di uscita, si ricava

$$V_o = 1.55 \angle -95.18^\circ \text{ V}, \quad i_o = 3.264 \angle -37.43^\circ \text{ mA}$$

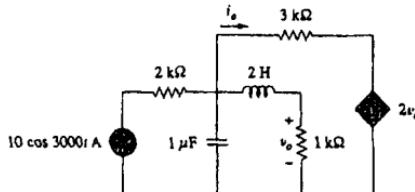
che sono i fasori di

$$v_o = 1.55 \cos(1000t - 95.18^\circ) = 1.55 \sin(1000t - 5.18^\circ) \text{ V}$$

$$\text{e} \quad i_o = 3.264 \cos(1000t - 37.43^\circ) \text{ mA}$$

■ Esercizio 10.13 Usare PSpice per ottenere v_o e i_o nel circuito di Figura 10.37.

Figura 10.37
Per l'Esercizio 10.13



Risposta $0.2682 \cos(3000t - 154.6^\circ)$ V, $0.544 \cos(3000t - 55.12^\circ)$ mA.

Esempio 10.14

Determinare V_1 e V_2 nel circuito di Figura 10.38.

Soluzione

1. Dare una definizione precisa del problema.

Il problema è presentato in maniera chiara. Si vuole sottolinea ancora una volta che il tempo speso in questa fase, farà risparmiare molto tempo più avanti.

2. Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.

Il circuito è nel dominio della frequenza e anche le due tensioni nodali incognite V_1 e V_2 sono nel dominio della frequenza. Occorre quindi un metodo per ricavare queste incognite nel dominio della frequenza.

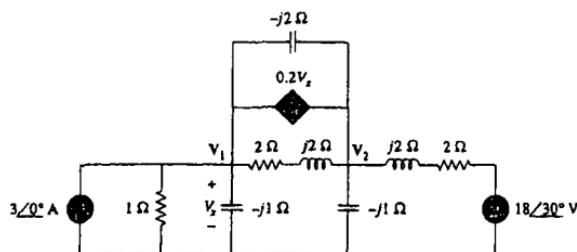
3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

Si possono usare due metodi diversi per determinare in maniera semplice la soluzione del problema. Si può usare il semplice metodo dell'analisi nodale oppure si può determinare la soluzione utilizzando PSpice. Poiché questo esempio si trova nel paragrafo dedicato a PSpice, si calcolano V_1 e V_2 utilizzando tale metodo. Successivamente si verificherà il risultato con l'analisi nodale.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

Il circuito in Figura 10.35 era nel dominio del tempo, mentre quello di Figura 10.38 è nel dominio delle frequenze. Poiché non è assegnato alcun valore di frequenza, e

Figura 10.38
Per l'Esempio 10.14.



PSpice ne richiede una, si sceglie una frequenza qualsiasi che risulti compatibile con le impedenze date. Per esempio, se si sceglie $\omega = 1$ rad/s, la frequenza corrispondente è $f = \omega/2\pi = 0.159155$ Hz. Si ottengono poi i valori delle capacità ($C = 1/\omega X_C$) e delle induttanze ($L = X_L/\omega$). Operando queste modifiche, si perviene allo schematico di Figura 10.39. Per semplificare il disegno, sono state scambiate le posizioni del generatore di corrente controllato in tensione G1 e dell'impedenza $2 + j2 \Omega$. Si noti che la corrente di G1 scorre dal nodo 1 al nodo 3, mentre la tensione di controllo è quella sul condensatore C2, come richiesto dalla Figura 10.38. Gli attributi degli pseudocomponenti VPRNT1 sono come mostrato in figura. Per eseguire l'analisi a una singola frequenza, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep e si inserisce Total Pts = 1, Start Freq = 0.159155 e Final Freq = 0.159155. Dopo aver salvato lo schematico, si seleziona Analysis/Simulate per simulare il circuito. Terminata la simulazione, il file di uscita contiene

FREQ	VM(1)	VP(1)
1.592E-01	2.708E+00	-5.673E+01
FREQ	VM(3)	VP(3)
1.592E-01	4.468E+00	-1.026E+02

dai cui si ricava $V_1 = 2.708 \angle -56.73^\circ \text{ V}$, $V_2 = 6.911 \angle -80.72^\circ \text{ V}$

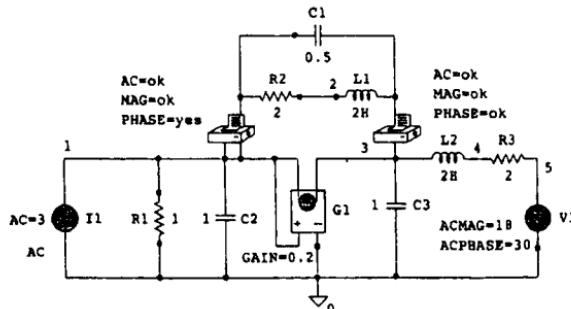


Figura 10.39
Schematico per il circuito in Figura 10.38.

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Quando si usa un programma come PSpice occorre verificare sempre i risultati. Ci sono molte possibilità per incorrere in errori, compresa anche l'eventualità di un errore nel programma, che quindi produce risultati sbagliati. Come si può verificare allora la soluzione ottenuta con PSpice? Ovviamente, si può risolvere l'intero problema con l'analisi nodale oppure usando MATLAB per vedere se si ottengono gli stessi risultati.

Si userà adesso un altro metodo per verificare la soluzione: si scrivono le equazioni nodali, quindi si sostituiscono i risultati ottenuti con PSpice, e si vede se le equazioni nodali sono soddisfatte.

Le equazioni nodali per questo circuito, sono scritte di seguito: da notare che nel generatore indipendente si è sostituito $V_1 = V_2$.

$$-3 + \frac{V_1 - 0}{1} + \frac{V_1 - 0}{-j1} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j2} + 0.2V_1 + \frac{V_1 - V_2}{-j2} = 0$$

$$(1 + j + 0.25 - j0.25 + 0.2 + j0.5)V_1$$

$$-(0.25 - j0.25 + j0.5)V_2 = 3$$

$$(1.45 + j1.25)V_1 - (0.25 + j0.25)V_2 = 3$$

$$1.9144 \angle 40.76^\circ V_1 - 0.3536 \angle 45^\circ V_2 = 3$$

Per verificare la soluzione ottenuta con PSpice, si sostituiscono i valori di V_1 e V_2 ottenuti con la simulazione nella precedente equazione

$$1.9144 \angle 40.76^\circ \times 2.708 \angle -56.73^\circ - 0.3536 \angle 45^\circ \times 6.911 \angle -80.72^\circ$$

$$= 5.184 \angle -15.98^\circ - 2.444 \angle -35.72^\circ$$

$$= 4.984 - j1.4272 - 1.9842 + j1.4269$$

$$= 3 - j0.003 \quad [\text{Soluzione verificata}].$$

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Sebbene si sia usata soltanto una equazione nodale per verificare la soluzione, essa risulta più che soddisfacente per controllare i risultati ottenuti con PSpice. Per cui si può presentare il lavoro svolto come la soluzione del problema.

Esercizio 10.14 Calcolare V_x e I_x nel circuito mostrato in Figura 10.40.

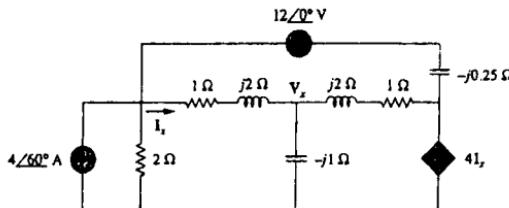


Figura 10.40
Per l'Esercizio 10.14.

Risposta $9.842 \angle 44.78^\circ \text{ V}$, $2.584 \angle 158^\circ \text{ A}$.

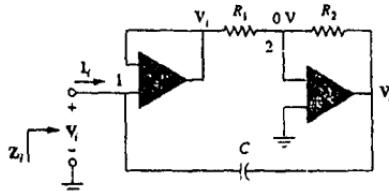
10.9 APPLICAZIONI

I concetti presentati in questo capitolo verranno applicati nei capitoli successivi al calcolo delle potenze elettriche e per la determinazione della risposta in frequenza. Gli stessi concetti vengono inoltre utilizzati nella analisi di circuiti accoppiati, circuiti trifase, circuiti AC con transistori, filtri, oscillatori ecc. In questo paragrafo essi vengono applicati allo studio di due circuiti AC della pratica: il moltiplicatore di capacità e l'oscillatore sinusoidale.

10.9.1 Moltiplicatore di capacità

Il circuito mostrato in Figura 10.41 è detto *moltiplicatore di capacità*, per motivi che risulteranno chiari fra poco. Esso viene utilizzato nei circuiti integrati per simulare l'esistenza di una capacità multipla di una capacità C quando risulta necessario avere una capacità di valore elevato. Il circuito in Figura 10.41 può essere usato per moltiplicare il valore di una capacità fino a un fattore 1000. In questo modo, per esempio, un condensatore da 10 pF può comportarsi come uno da 100 nF .

Figura 10.41
Moltiplicatore di capacità.



Nella Figura 10.41, il primo operazionale funziona da inseguitore di tensione, mentre il secondo opera come amplificatore invertente. L'inseguitore isola la capacità, costituita dal circuito nel suo complesso, dal carico imposto dall'amplificatore invertente. Poiché la corrente in ingresso ai terminali dell'operazionale è nulla, la corrente di ingresso I_i scorre tutta nel condensatore di reazione. Al nodo 1, allora

$$I_i = \frac{V_i - V_o}{1/j\omega C} = j\omega C(V_i - V_o) \quad (10.3)$$

Applicando la KCL al nodo 2 si ottiene

$$\frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{0 - V_o}{R_2}$$

cioè

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i \quad (10.4)$$

Sostituendo la (10.4) nella (10.3) si ha

$$I_i = j\omega C \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_i$$

o anche

$$\frac{I_i}{V_i} = j\omega \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) C \quad (10.5)$$

L'impedenza di ingresso è

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{j\omega C_{eq}} \quad (10.6)$$

dove

$$C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) C \quad (10.7)$$

Perciò, con una opportuna scelta dei valori di R_1 e R_2 , il circuito di Figura 10.41 può essere fatto funzionare come una capacità tra il terminale di ingresso e quello di massa il cui valore effettivo è un multiplo della capacità C .

Un limite pratico al valore della capacità effettiva è dato dalla limitazione alla tensione di uscita dell'amplificatore invertente. Maggiore è il fattore moltiplicativo e minore è la tensione ammissibile sul condensatore reale senza che si abbia la saturazione degli operazionali.

Un circuito simile a questo può essere progettato per simulare una induttanza. Esiste anche una configurazione opportuna di operazionali che funziona come moltiplicatore di una resistenza.

Esempio 10.15

Calcolare C_{eq} in Figura 10.41 quando $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ e $C = 1 \text{ nF}$.

Soluzione: Dalla (10.7)

$$C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)C = \left(1 + \frac{1 \times 10^6}{10 \times 10^3}\right)1 \text{ nF} = 101 \text{ nF}$$

■ **Esercizio 10.15** Determinare la capacità equivalente del circuito in Figura 10.41 se $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ M}\Omega$ e $C = 10 \text{ nF}$.

Risposta $10 \mu\text{F}$. ■

10.9.2 Oscillatori

È noto che la corrente continua può essere prodotta con le batterie. Ma come è possibile generare corrente alternata? Una possibile risposta è utilizzando gli *oscillatori*, circuiti che convertono segnali continui in alternati.

Un oscillatore è un circuito che produce una forma d'onda alternata quando viene eccitato da un ingresso costante.

L'unica sorgente esterna necessaria a un oscillatore è la tensione costante di alimentazione. È abbastanza singolare notare che, di solito, l'alimentazione costante viene ottenuta convertendo la tensione alternata fornita dalla rete in tensione continua. Dopo avere effettuato la conversione, ci si può chiedere come mai si voglia utilizzare l'oscillatore per convertire di nuovo la continua in alternata. La spiegazione sta nel fatto che la corrente alternata fornita dalla rete ha una frequenza standard di 50 Hz (60 Hz negli Stati Uniti), mentre molte applicazioni quali circuiti elettronici, sistemi per le telecomunicazioni e dispositivi a microonde richiedono frequenze che vanno da 0 a 10 GHz e anche più. Gli oscillatori servono a generare tali frequenze.

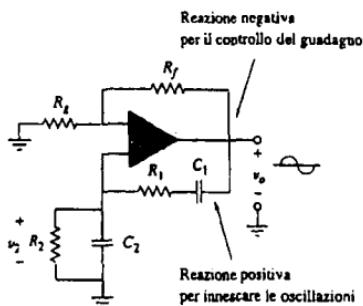
Affinché un oscillatore sinusoidale possa mantenere le oscillazioni in modo permanente, è necessario che siano soddisfatti i *criteri di Barkhausen*:

- Il guadagno complessivo dell'oscillatore deve essere maggiore o uguale a uno. Perciò, le perdite nel circuito devono essere compensate da un opportuno dispositivo amplificatore.
- Lo sfasamento totale (dall'ingresso all'uscita e di nuovo all'ingresso) deve essere nullo.

I tre tipi più comuni di oscillatori sinusoidali sono quello a sfasamento, il doppio T e quello a ponte di Wien. Verrà qui presentato soltanto l'oscillatore a ponte di Wien.

L'*oscillatore a ponte di Wien* è comunemente usato per generare sinusoidi nell'intervallo di frequenze al di sotto di 1 MHz. Si tratta di un circuito RC con operazionale con pochi componenti, facile da progettare e da accordare. Come si vede in Figura 10.42, l'oscillatore consiste essenzialmente in un amplificatore non invertente con due percorsi di reazione: il percorso di reazione positiva, verso l'ingresso non invertente, per generare le oscillazioni, e il percorso negativo verso il terminale invertente, per il

Figura 10.42
Oscillatore a ponte di Wien.



controllo del guadagno. Se si indicano con Z_s e Z_p le impedenze delle combinazioni RC serie e parallelo, allora

$$Z_s = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - \frac{j}{\omega C_1} \quad (10.8)$$

$$Z_p = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \quad (10.9)$$

Il rapporto di reazione è

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} \quad (10.10)$$

Sostituendo le (10.8) e (10.9) nella (10.10) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_o} &= \frac{R_2}{R_2 + \left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1} \right) (1 + j\omega R_2 C_2)} \\ &= \frac{\omega R_2 C_1}{\omega (R_2 C_1 + R_1 C_1 + R_2 C_2) + j(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Perché sia soddisfatto il secondo criterio di Barkhausen, V_2 deve risultare in fase con V_o , il che implica che il rapporto nella (10.11) deve essere un numero reale. La parte immaginaria deve allora essere nulla, e imponendo questa condizione si perviene alla frequenza di oscillazione ω_o ,

$$\omega_o^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1 = 0$$

cioè

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (10.12)$$

Nella maggior parte delle applicazioni pratiche, $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$, così che

$$\omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_o \quad (10.13)$$

e quindi

$f_o = \frac{1}{2\pi RC}$

(10.14)

Sostituendo la (10.13) e $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$ nella (10.11) si ottiene

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{1}{3} \quad (10.15)$$

Al fine di soddisfare il primo criterio di Barkhausen, l'operazionale deve fornire un guadagno maggiore o uguale a 3, in modo che il guadagno complessivo sia almeno unitario. Si ricordi che per un amplificatore non invertente

$$\frac{V_o}{V_2} = 1 + \frac{R_f}{R_g} = 3 \quad (10.16)$$

da cui

$$R_f = 2R_g \quad (10.17)$$

A causa del ritardo intrinseco introdotto dall'operazionale, gli oscillatori a ponte di Wien hanno un range di frequenza limitato a circa 1 MHz.

Esempio 10.16

Progettare un oscillatore a ponte di Wien che oscilla alla frequenza di 100 kHz.

Soluzione: Usando la (10.14), si ottiene la costante di tempo del circuito

$$RC = \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3} = 1.59 \times 10^{-6} \quad (10.16.1)$$

Se si sceglie $R = 10 \text{ k}\Omega$, allora si può porre $C = 159 \text{ pF}$, in modo da soddisfare la (10.16.1). Poiché il guadagno deve essere 3, $R_f/R_g = 2$. Si può scegliere $R_f = 20 \text{ k}\Omega$ e $R_g = 10 \text{ k}\Omega$.

■ **Esercizio 10.16** Nell'oscillatore a ponte di Wien della Figura 10.42, siano $R_1 = R_2 = 2.5 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1 \text{ nF}$. Determinare la frequenza f_0 dell'oscillatore.

Risposta 63.66 kHz. ■

SOMMARIO

- 1) Si utilizzano l'analisi nodale e l'analisi agli anelli nei circuiti AC, applicando le KCL e le KVL ai circuiti in forma fasoriale.
- 2) Quando si determina la risposta a regime di un circuito AC che comprende generatori indipendenti con diverse frequenze, ogni generatore indipendente deve funzionare da solo. Il metodo più semplice per studiare questi circuiti è quello di applicare il teorema di sovrapposizione. Si deve perciò risolvere ciascun circuito in forma fasoriale, in maniera indipendente per ognuna delle frequenze dei generatori: la risposta finale che si ottiene deve essere espressa nel dominio del tempo.
- 3) Si può applicare la trasformazione dei generatori anche nel dominio delle frequenze.
- 4) L'equivalente Thevenin di un circuito AC è formato da un generatore di tensione V_{Th} in serie a una impedenza di Thevenin Z_{Th} .
- 5) L'equivalente Norton di un circuito AC è formato da un generatore di corrente I_N in parallelo a una impedenza di Norton $Z_N = Z_{Th}$.
- 6) PSpice è uno strumento semplice e potente per risolvere i problemi con circuiti AC. Tramite PSpice si evita il lungo lavoro dei calcoli con i numeri complessi legati all'analisi a regime dei circuiti AC.
- 7) Il moltiplicatore di capacità e l'oscillatore AC rappresentano due tipiche applicazioni dei concetti studiati in questo capitolo. Un moltiplicatore di capacità è un circuito con amplificatore operazionale usato per creare un multiplo di una capacità. Un oscillatore AC è un dispositivo che utilizza un ingresso in corrente continua per generare una uscita in corrente alternata.

DOMANDE DI RIEPILOGO

10.1 La tensione V_o sul condensatore in Figura 10.43 è:

- (a) $5 \angle 0^\circ$ V
- (b) $7.071 \angle 45^\circ$ V
- (c) $7.071 \angle -45^\circ$ V
- (d) $5 \angle -45^\circ$ V

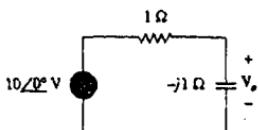


Figura 10.43 Per la domanda di riepilogo 10.1.

10.2 Il valore della corrente I_o nel circuito in Figura 10.44 è:

- (a) $4 \angle 0^\circ$ A
- (b) $2.4 \angle -90^\circ$ A
- (c) $0.6 \angle 0^\circ$ A
- (d) -1 A

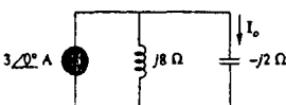


Figura 10.44 Per la domanda di riepilogo 10.2.

10.3 Usando l'analisi nodale, il valore di V_o nel circuito di Figura 10.45 è:

- (a) -24 V
- (b) -8 V
- (c) 8 V
- (d) 24 V

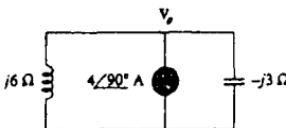


Figura 10.45 Per la domanda di riepilogo 10.3.

10.4 Nel circuito di Figura 10.46, la corrente $i(t)$ vale:

- (a) $10 \cos t$ A
- (b) $10 \sin t$ A
- (c) $5 \cos t$ A
- (d) $5 \sin t$ A
- (e) $4.472 \cos(t - 63.43^\circ)$ A

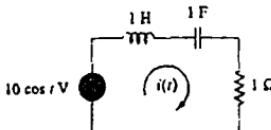


Figura 10.46 Per la domanda di riepilogo 10.4.

10.5 Facendo riferimento al circuito in Figura 10.47 e osservando che i due generatori non operano alla stessa frequenza, la corrente $i_x(t)$ può essere ottenuta con:

- (a) la trasformazione di generatori
- (b) il teorema di sovrapposizione
- (c) PSpice

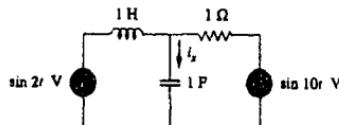


Figura 10.47 Per la domanda di riepilogo 10.5.

10.6 Nel circuito di Figura 10.48, l'impedenza di Thevenin ai terminali $a-b$ è:

- (a) 1Ω
- (b) $0.5 - j0.5\Omega$
- (c) $0.5 + j0.5\Omega$
- (d) $1 + j2\Omega$
- (e) $1 - j2\Omega$

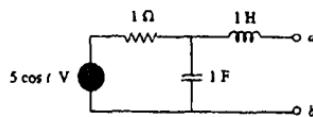


Figura 10.48 Per le domande di riepilogo 10.6 e 10.7.

10.7 Nel circuito di Figura 10.48, la tensione equivalente di Thevenin ai terminali $a-b$ è:

- (a) $3.535 \angle -45^\circ$ V
- (b) $3.535 \angle 45^\circ$ V
- (c) $7.071 \angle -45^\circ$ V
- (d) $7.071 \angle 45^\circ$ V

10.8 Si faccia riferimento al circuito in Figura 10.49. L'impedenza equivalente di Norton ai terminali $a-b$ è:

- (a) $-j4\Omega$
- (b) $-j2\Omega$
- (c) $j2\Omega$
- (d) $j4\Omega$

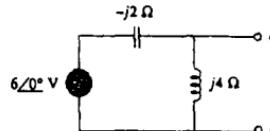


Figura 10.49 Per le domande di riepilogo 10.8 e 10.9.

10.9 La corrente equivalente di Norton ai terminali $a-b$ del circuito di Figura 10.49 è:

- (a) $1 \angle 0^\circ$ A
- (b) $1.5 \angle -90^\circ$ A
- (c) $1.5 \angle 90^\circ$ A
- (d) $3 \angle 90^\circ$ A

10.10 PSpice è in grado di analizzare un circuito con due generatori indipendenti di frequenza diversa.

- (a) Vero
- (b) Falso

PROBLEMI

Paragrafo 10.2 Analisi nodale

10.1 Calcolare i nel circuito di Figura 10.50.

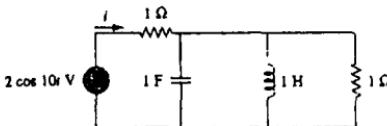


Figura 10.50 Per il Problema 10.1.

10.2 Determinare V_o nel circuito di Figura 10.51, usando l'analisi nodale.

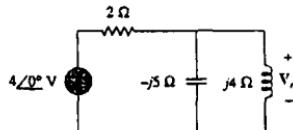


Figura 10.51 Per il Problema 10.2.

10.3 Determinare v_o nel circuito di Figura 10.52.

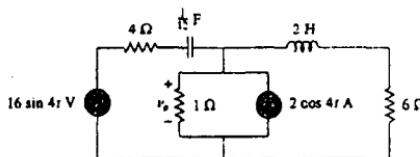


Figura 10.52 Per il Problema 10.3

10.4 Calcolare i_1 nel circuito di Figura 10.53.

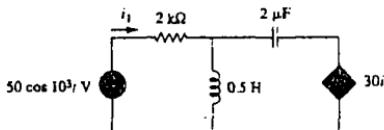


Figura 10.53 Per il Problema 10.4.

10.5 Determinare i_0 nel circuito di Figura 10.54.

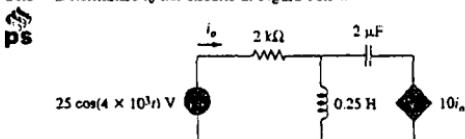


Figura 10.54 Per il Problema 10.5.

10.6 Determinare V_x in Figura 10.55.

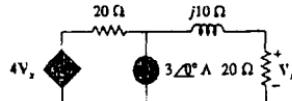


Figura 10.55 Per il Problema 10.6.

10.7 Utilizzare l'analisi nodale per calcolare V nel circuito di Figura 10.56.

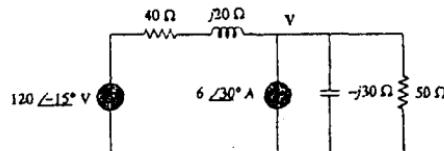


Figura 10.56 Per il Problema 10.7.

10.8 Utilizzare l'analisi nodale per calcolare i_o nel circuito di Figura 10.57, nota $i_s = 6 \cos(200t + 15^\circ)$ A.

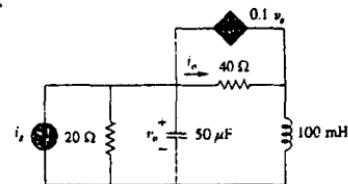


Figura 10.57 Per il Problema 10.8.

10.9 Utilizzare l'analisi nodale per calcolare v_o nel circuito di Figura 10.58.

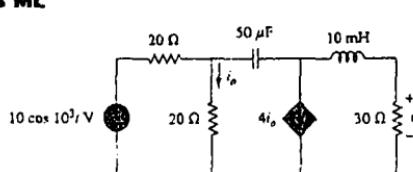


Figura 10.58 Per il Problema 10.9.

10.10 Utilizzare l'analisi nodale per calcolare v_o nel circuito di Figura 10.59, quando $\omega = 2$ krad/s.

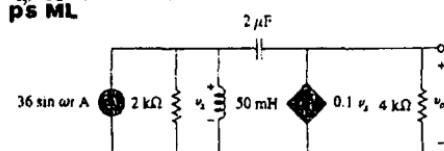


Figura 10.59 Per il Problema 10.10.

10.11 Applicare l'analisi nodale al circuito di Figura 10.60 e calcolare i_o .

ps ML

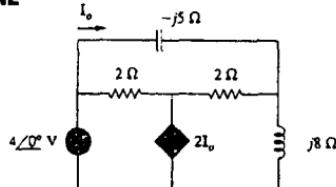


Figura 10.60 Per il Problema 10.11.

10.12 Mediante l'analisi nodale, determinare i_o nel circuito di Figura 10.61.

ps ML

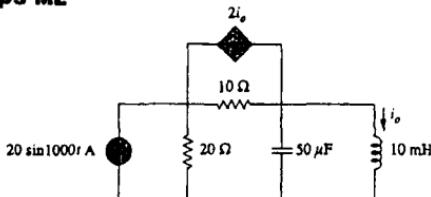


Figura 10.61 Per il Problema 10.12.

10.13 Determinare V_x nel circuito di Figura 10.62 usando un qualsiasi metodo di analisi.

ps ML

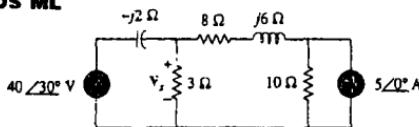


Figura 10.62 Per il Problema 10.13.

10.14 Calcolare la tensione ai nodi 1 e 2 del circuito di Figura 10.63 usando l'analisi nodale.

ps ML

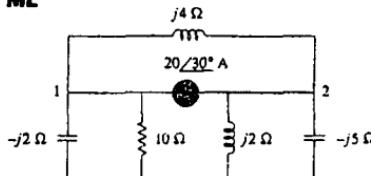


Figura 10.63 Per il Problema 10.14.

10.15 Risolvere rispetto alla corrente I il circuito di Figura 10.64 usando l'analisi nodale.

ps ML

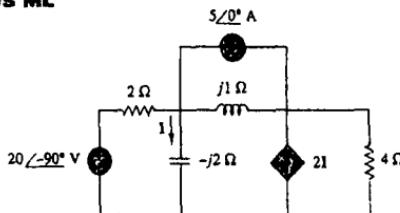


Figura 10.64 Per il Problema 10.15.

10.16 Usare l'analisi nodale per determinare V_x nel circuito di Figura 10.65.

ps ML

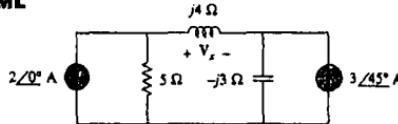


Figura 10.65 Per il Problema 10.16.

10.17 Mediante l'analisi nodale, calcolare la corrente I_o nel circuito di Figura 10.66.

ps ML

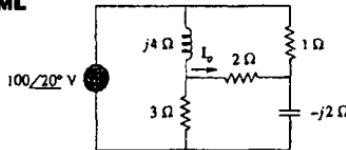


Figura 10.66 Per il Problema 10.17.

10.18 Utilizzare l'analisi nodale per ottenere V_o nel circuito di Figura 10.67.

ps ML

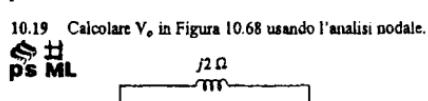


Figura 10.68 Per il Problema 10.19.

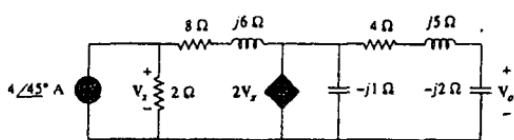


Figura 10.67 Per il Problema 10.18.

10.20 Si faccia riferimento alla Figura 10.69.

Se $v_s(t) = V_m \sin(\omega t)$ e $v_o(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, ricavare le espressioni di A e ϕ .

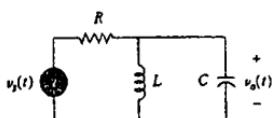
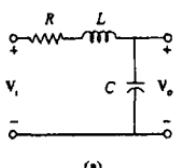
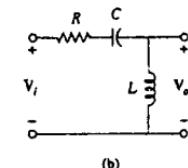


Figura 10.69 Per il Problema 10.20.

10.21 Per ciascuno dei circuiti in Figura 10.70, determinare V_o/V_i , per $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$ e $\omega^2 = 1/LC$.



(a)



(b)

Figura 10.70 Per il Problema 10.21.

10.22 Determinare V_o/V_s per il circuito in Figura 10.71.

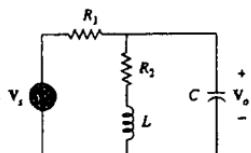


Figura 10.71 Per il Problema 10.22.

10.23 Usando l'analisi nodale calcolare V nel circuito di Figura 10.72.

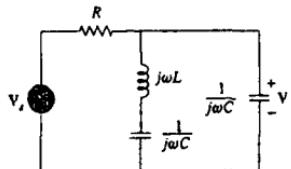


Figura 10.72 Per il Problema 10.23.

Paragrafo 10.3 Analisi agli anelli

10.24 Usare l'analisi agli anelli per calcolare V_0 nel circuito del Problema 10.2.

10.25 Risolvere rispetto ad i_o in Figura 10.73 usando l'analisi agli anelli.

ML

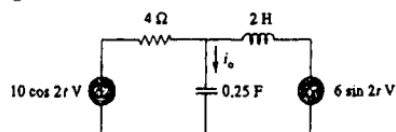


Figura 10.73 Per il Problema 10.25.

10.26 Usare l'analisi agli anelli per determinare i_0 nel circuito di Figura 10.74.

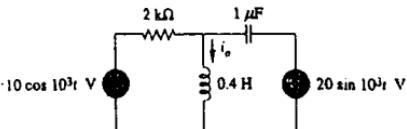


Figura 10.74 Per il Problema 10.26.

10.27 Mediante l'analisi agli anelli, determinare I_1 e I_2 nel circuito di Figura 10.75.

ML

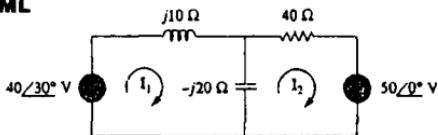


Figura 10.75 Per il Problema 10.27.

10.28 Nel circuito di Figura 10.76, determinare le correnti di anello i_1 e i_2 , date $v_1 = 10 \cos 4t$ e

ML $v_2 = 20 \cos(4t - 30^\circ)$ V.

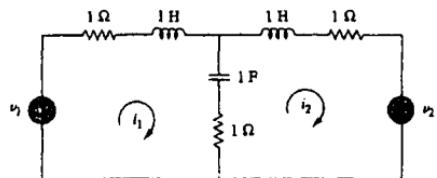


Figura 10.76 Per il Problema 10.28.

10.29 Usando l'analisi agli anelli, determinare I_1 e I_2 nel circuito mostrato in Figura 10.77.

ML

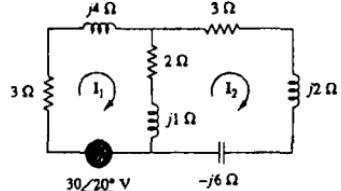


Figura 10.77 Per il Problema 10.29.

10.30 Usare l'analisi agli anelli per calcolare v_0 nel circuito di Figura 10.78. Si suppone $v_{11} = 120 \cos(100t + 90^\circ)$ V, **PS** **ML** $v_{12} = 80 \cos(100t)$ V.

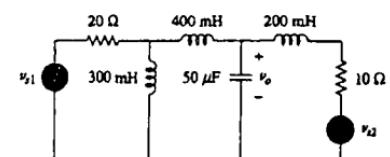


Figura 10.78 Per il Problema 10.30.

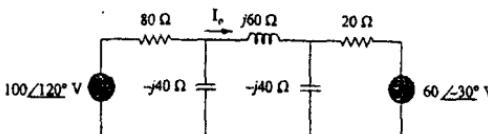


Figura 10.79 Per il Problema 10.31.

10.31 Usare l'analisi agli anelli per determinare I_o nel circuito di Figura 10.79.
ps ML

10.32 Determinare V_o e I_o nel circuito di Figura 10.80 usando l'analisi agli anelli.
ps ML

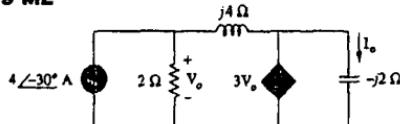


Figura 10.80 Per il Problema 10.32.

10.33 Calcolare I nel Problema 10.15 usando l'analisi agli anelli.
ps ML

10.34 Utilizzare l'analisi agli anelli per calcolare I_o in Figura 10.28 (Esempio 10.10).
ps ML

10.35 Calcolare I_o in Figura 10.30 (Esercizio 10.10) usando l'analisi agli anelli.
ps ML

10.36 Calcolare V_o nel circuito di Figura 10.81 usando l'analisi agli anelli.
ps ML

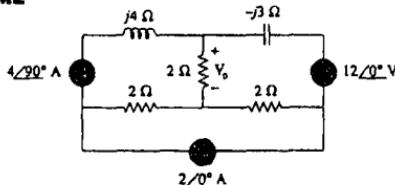


Figura 10.81 Per il Problema 10.36.

10.37 Utilizzare l'analisi agli anelli per calcolare le correnti I_1 , I_2 , e I_3 nel circuito di Figura 10.82.
ps ML

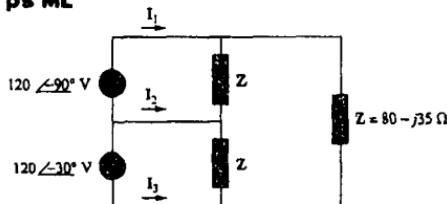


Figura 10.82 Per il Problema 10.37.

10.38 Usando l'analisi agli anelli, ricavare I_o nel circuito mostrato in Figura 10.83.
ps ML

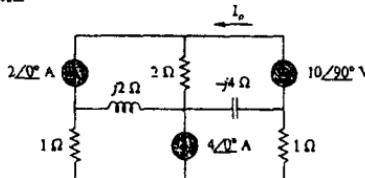


Figura 10.83 Per il Problema 10.38.

10.39 Determinare I_1 , I_2 , I_3 e I_4 nel circuito di Figura 10.84.
ps ML

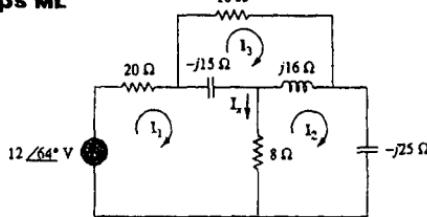


Figura 10.84 Per il Problema 10.39.

Paragrafo 10.4 Principio di sovrapposizione

10.40 Determinare i_o nel circuito mostrato in Figura 10.85 usando la sovrapposizione.

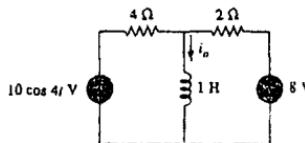


Figura 10.85 Per il Problema 10.40.

10.41 Determinare v_o nel circuito di Figura 10.86, supponendo che $v_s = 6 \cos 2t + j4 \sin 4t$ V.

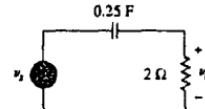


Figura 10.86 Per il Problema 10.41.

10.42 Determinare i_o nel circuito di Figura 10.87

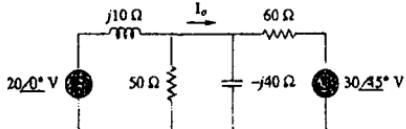


Figura 10.87 Per il Problema 10.42.

10.43 Usando il principio di sovrapposizione, determinare i_x nel circuito di Figura 10.88.

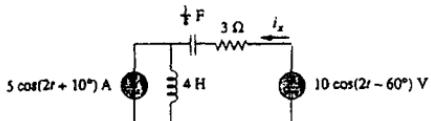


Figura 10.88 Per il Problema 10.43.

10.44 Utilizzare il principio di sovrapposizione per calcolare v_o nel circuito di Figura 10.89. Siano $v_s = 50 \sin 2t$ V e $i_t = 12 \cos(6t + 10^\circ)$ A.

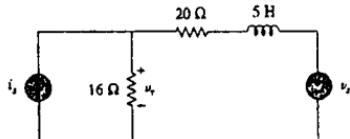


Figura 10.89 Per il Problema 10.44.

10.45 Usare la sovrapposizione per calcolare $i(t)$ nel circuito di Figura 10.90.

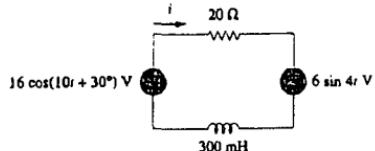


Figura 10.90 Per il Problema 10.45.

10.46 Risolvere rispetto a $v_o(t)$ nel circuito di Figura 10.91 usando il principio di sovrapposizione.

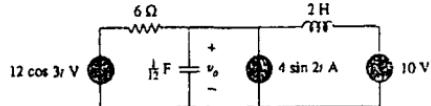


Figura 10.91 Per il Problema 10.46.

10.47 Determinare i_o nel circuito di Figura 10.92.

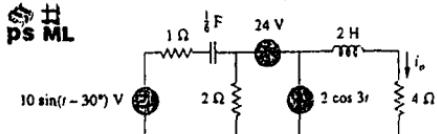


Figura 10.92 Per il Problema 10.47.

10.48 Determinare i_o nel circuito di Figura 10.93 mediante la sovrapposizione.

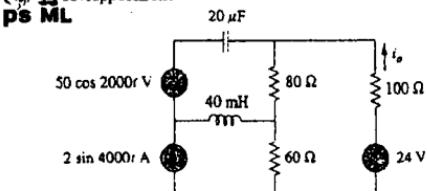


Figura 10.93 Per il Problema 10.48.

Paragrafo 10.5 Trasformazione di generatori

10.49 Usando la trasformazione dei generatori, determinare i nel circuito di Figura 10.94.

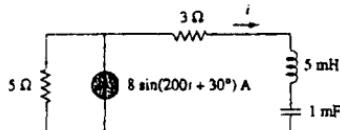


Figura 10.94 Per il Problema 10.49.

10.50 Utilizzare la trasformazione dei generatori per calcolare v_o nel circuito di Figura 10.95.

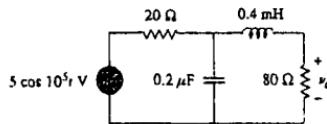


Figura 10.95 Per il Problema 10.50.

10.51 Usare la trasformazione dei generatori per calcolare I_o nel circuito del Problema 10.42.

10.52 Utilizzare il metodo della trasformazione dei generatori per calcolare I_o nel circuito di Figura 10.96.

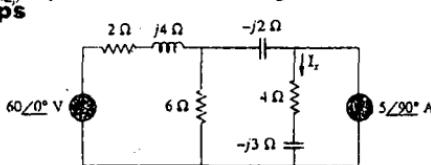


Figura 10.96 Per il Problema 10.52.

10.53 Utilizzare il concetto di trasformazione dei generatori per calcolare V_o nel circuito di Figura 10.97.

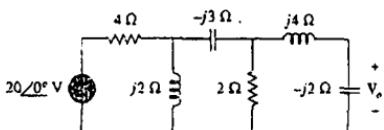
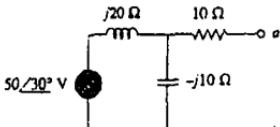


Figura 10.97 Per il Problema 10.53.

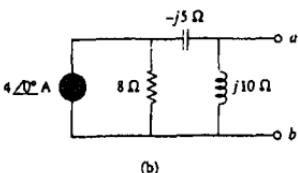
- 10.54 Ripetere il Problema 10.7 usando la trasformazione dei generatori.

Paragrafo 10.6 Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

- 10.55 Determinare i circuiti equivalenti di Thevenin e Norton ai terminali $a-b$ per ciascuno dei circuiti in Figura 10.98.



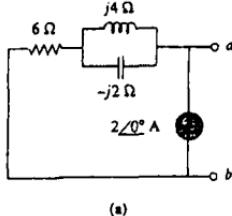
(a)



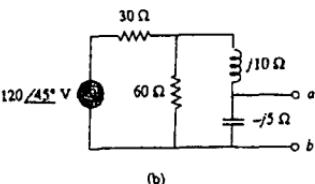
(b)

Figura 10.98 Per il Problema 10.55.

- 10.56 Per ciascuno dei circuiti in Figura 10.99, ricavare i circuiti equivalenti Thevenin e Norton ai terminali $a-b$.



(a)



(b)

Figura 10.99 Per il Problema 10.56.

- 10.57 Determinare i circuiti equivalenti Thevenin e Norton per il circuito mostrato in Figura 10.100.

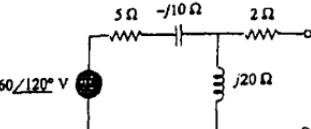


Figura 10.100 Per il Problema 10.57.

- 10.58 Per il circuito di Figura 10.101, determinare l'equivalente Thevenin ai terminali $a-b$.

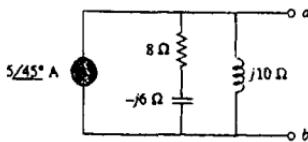


Figura 10.101 Per il Problema 10.58.

- 10.59 Calcolare l'impedenza di uscita del circuito in Figura 10.102.

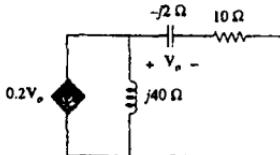


Figura 10.102 Per il Problema 10.59.

- 10.60 Determinare l'equivalente Thevenin del circuito in Figura 10.103 visto ai:

PS (a) terminali $a-b$ (b) terminali $c-d$

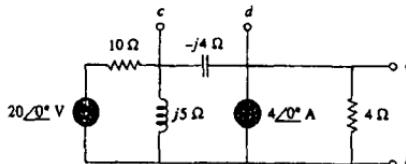


Figura 10.103 Per il Problema 10.60.

- 10.61 Determinare l'equivalente di Thevenin ai terminali $a-b$ del circuito di Figura 10.104.

PS ML

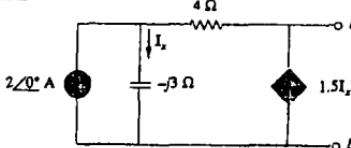


Figura 10.104 Per il Problema 10.61.

- 10.62 Applicando il teorema di Thevenin, determinare v_o nel circuito di Figura 10.105.

PS

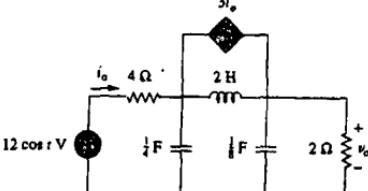


Figura 10.105 Per il Problema 10.62.

- ps** 10.63 Determinare l'equivalente Norton del circuito mostrato in Figura 10.106 ai terminali *a-b*.

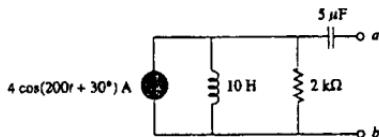


Figura 10.106 Per il Problema 10.63.

- ps** 10.64 Per il circuito mostrato in Figura 10.107, determinare l'equivalente Norton ai terminali *a-b*.

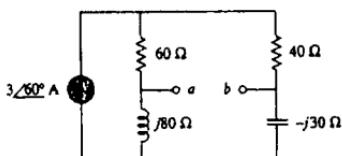


Figura 10.107 Per il Problema 10.64.

- ps** 10.65 Calcolare i_o in Figura 10.108 usando il teorema di Norton.

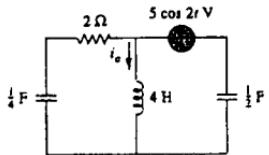


Figura 10.108 Per il Problema 10.65.

- ps** 10.66 Ai terminali *a-b* della rete mostrata in Figura 10.109, ricavare i circuiti equivalenti Thevenin e Norton. Si assuma $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

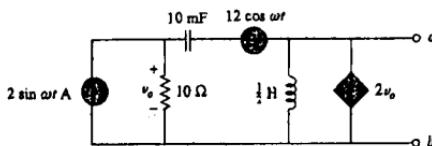


Figura 10.109 Per il Problema 10.66.

- ps** 10.67 Determinare i circuiti equivalenti Thevenin e Norton ai terminali *a-b* nel circuito di Figura 10.110.

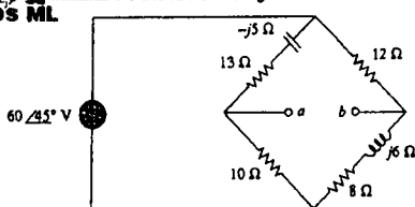


Figura 10.110 Per il Problema 10.67.

- ps** 10.68 Determinare l'equivalente Thevenin ai terminali *a-b* del circuito di Figura 10.111.

ps ML

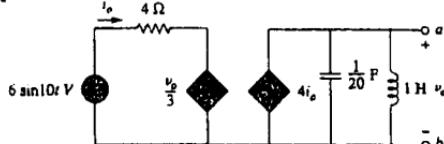


Figura 10.111 Per il Problema 10.68.

Paragrafo 10.7 Circuiti AC con amplificatori operazionali

- 10.69 Nel circuito differenziatore mostrato in Figura 10.112, ricavare V_o/V_s . Determinare $v_o(t)$ quando $v_s(t) = V_m \sin \omega t$ e $\omega = 1/RC$.

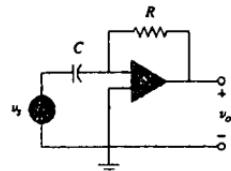


Figura 10.112 Per il Problema 10.69.

- 10.70 Il circuito in Figura 10.113 è un integratore con un resistore nel circuito di reazione. Calcolare $v_o(t)$ se $v_s = 2 \cos 4 \times 10^4 t \text{ V}$.

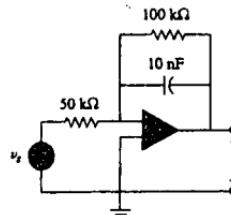


Figura 10.113 Per il Problema 10.70.

- 10.71 Determinare v_o nel circuito con operazionale di Figura 10.114.

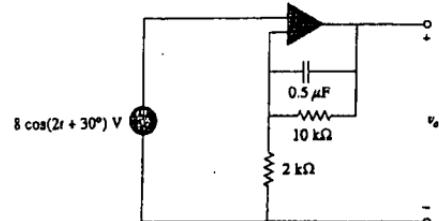


Figura 10.114 Per il Problema 10.71.

- 10.72 Calcolare $i_o(t)$ nel circuito con operazionale di Figura 10.115 se $v_i = 4 \cos 10^4 t$ V.

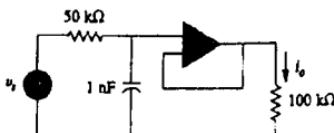


Figura 10.115 Per il Problema 10.72.

- 10.73 Se l'impedenza di ingresso è definita come $Z_{in} = V_s/I_s$, determinare l'impedenza di ingresso del circuito con operazionale in Figura 10.116 quando $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 20\text{k}\Omega$, $C_1 = 10\text{nF}$, $C_2 = 20\text{mF}$ e $\omega = 5000$ rad/s.

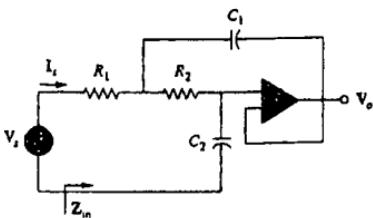


Figura 10.116 Per il Problema 10.73.

- 10.74 Calcolare il guadagno di tensione $A_v = V_o/V_s$ nel circuito con operazionale di Figura 10.117. Determinare A_v per $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$, $\omega = 1/R_1C_1$ e $\omega = 1/R_2C_2$.

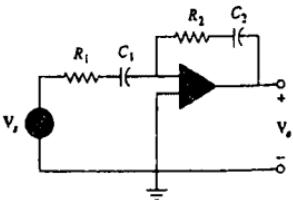


Figura 10.117 Per il Problema 10.74.

- 10.75 Nel circuito con operazionale di Figura 10.118, determinare il guadagno ad anello chiuso e lo sfasamento se $C_1 = C_2 = 1\text{nF}$, $R_1 = R_2 = 100\text{k}\Omega$, $R_3 = 20\text{k}\Omega$, $R_4 = 40\text{k}\Omega$ e $\omega = 2000$ rad/s.

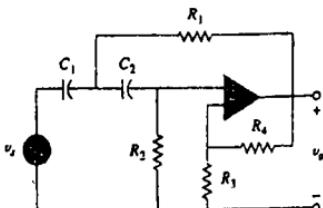


Figura 10.118 Per il Problema 10.75.

- 10.76 Determinare V_o e I_o nel circuito con operazionale di Figura 10.119.

ps ML

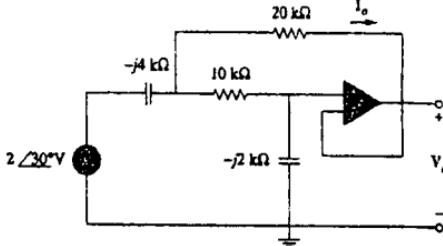


Figura 10.119 Per il Problema 10.76.

- 10.77 Calcolare il guadagno ad anello chiuso V_o/V_s per il circuito con operazionale di Figura 10.120.

ps ML

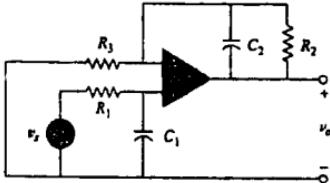


Figura 10.120 Per il Problema 10.77.

- 10.78 Determinare $v_o(t)$ nel circuito con operazionale in Figura 10.121.

ps ML

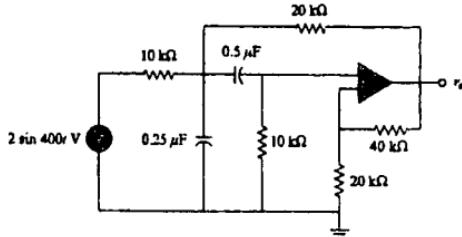


Figura 10.121 Per il Problema 10.78.

- 10.79 Calcolare $v_o(t)$ per il circuito con operazionale di Figura 10.122.

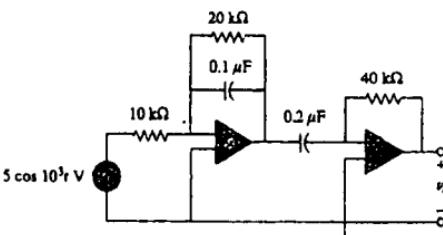


Figura 10.122 Per il Problema 10.79.

- 10.80 Calcolare $v_o(t)$ per il circuito con operazionale in Figura 10.123 se $v_s = 4 \cos(1000t - 60^\circ)$ V.

ps ML

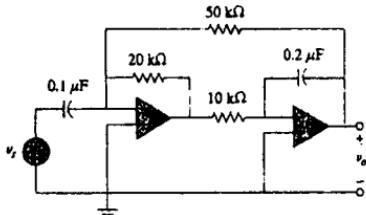


Figura 10.123 Per il Problema 10.80.

Paragrafo 10.8 Analisi AC con PSpice

ps

- 10.81 Usare PSpice per determinare V_o nel circuito di Figura 10.124. Supponere $\omega = 1$ rad/s.

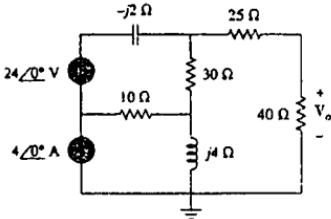


Figura 10.124 Per il Problema 10.81.

- 10.82 Risolvere il Problema 10.19 usando PSpice.

- 10.83 Utilizzare PSpice per calcolare $v_o(t)$ nel circuito di Figura 10.125, supponendo che $i_s = 2 \cos(10^3 t)$ A.

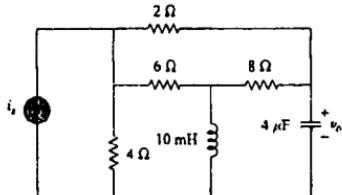


Figura 10.125 Per il Problema 10.83.

- 10.84 Calcolare V_o nel circuito di Figura 10.126 usando PSpice.

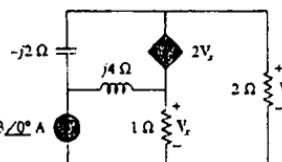


Figura 10.126 Per il Problema 10.84.

- 10.85 Utilizzare PSpice per determinare V_o nel circuito di Figura 10.127.

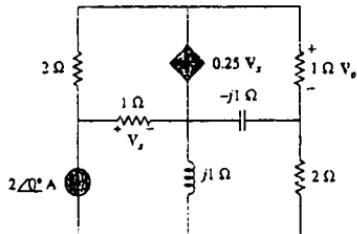


Figura 10.127 Per il Problema 10.85.

- 10.86 Utilizzare PSpice per calcolare V_1 , V_2 e V_3 nella rete di Figura 10.128.

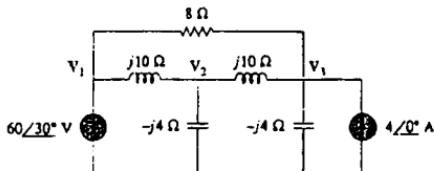


Figura 10.128 Per il Problema 10.86.

- 10.87 Determinare V_1 , V_2 e V_3 nel circuito di Figura 10.129 usando PSpice.

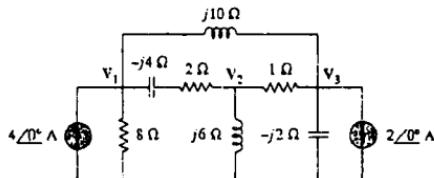


Figura 10.129 Per il Problema 10.87.

- 10.88 Utilizzare PSpice per determinare i_o nel circuito di Figura 10.130.

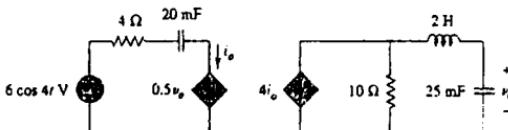


Figura 10.130 Per il Problema 10.88.

Paragrafo 10.9 Applicazioni

- 10.89 Il circuito con operazionale di Figura 10.131 è detto simulatore di induttanza. Mostrare che l'impedenza di ingresso è data da

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = j\omega L_{eq} \quad \text{dove} \quad L_{eq} = \frac{R_1 R_3 R_4}{R_2} C$$

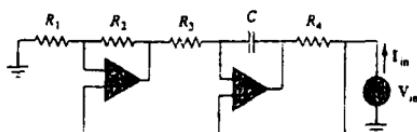


Figura 10.131 Per il Problema 10.89.

- 10.90 La Figura 10.132 mostra una rete a ponte di Wien. Mostrare che la frequenza alla quale lo sfasamento tra i segnali di ingresso e di uscita è nullo è $f = \frac{1}{2\pi RC}$, e che il guadagno necessario a quella frequenza è $A_e = V_o/V_i = 3$.

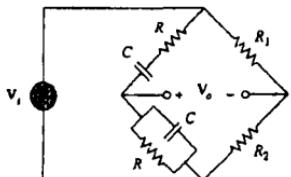


Figura 10.132 Per il Problema 10.90.

- 10.91 Si consideri l'oscillatore di Figura 10.133.

- (a) Determinare la frequenza di oscillazione.
- (b) Calcolare il minimo valore di R per il quale l'oscillazione si innesca.

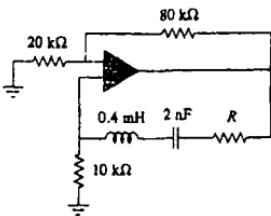


Figura 10.133 Per il Problema 10.91.

- 10.92 Il circuito oscillatore in Figura 10.134 utilizza un operazionale ideale.

- (a) Calcolare il minimo valore di R_o che dà luogo alla oscillazione.
- (b) Determinare la frequenza di oscillazione.

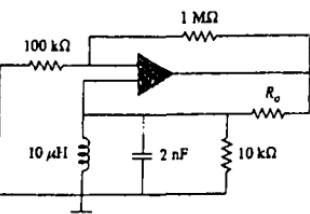


Figura 10.134 Per il Problema 10.92.

- 10.93 La Figura 10.135 mostra un oscillatore di Colpitts.

esercizio Mostrare che la frequenza di oscillazione è

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_f}}$$

dove $C_f = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$. Si assuma $R_i \gg X_C$.

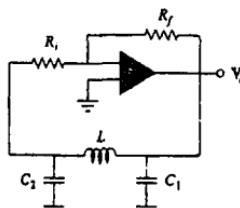


Figura 10.135 Oscillatore di Colpitts, per il Problema 10.93.

(Suggerimento: si ponga a zero la parte immaginaria della impedenza nel circuito di reazione.)

- 10.94 Progettare un oscillatore di Colpitts che oscilla a 50 kHz.

esercizio

- 10.95 La Figura 10.136 mostra un oscillatore di Hartley. Mostrare che la frequenza di oscillazione è

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_1 + L_2)}}$$

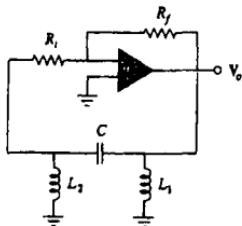


Figura 10.136 Oscillatore di Hartley, per il Problema 10.95.

- 10.96 Si faccia riferimento all'oscillatore in Figura 10.137.

- (a) Mostrare che

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{1}{3 + j(\omega L/R - R/\omega L)}$$

- (b) Determinare la frequenza di oscillazione f_o .

- (c) Ricavare la relazione tra R_1 e R_2 che rende possibile l'oscillazione.

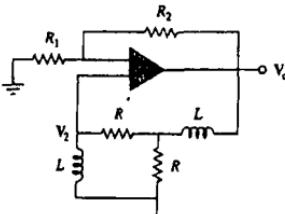


Figura 10.137 Per il Problema 10.96.

CAPITOLO III

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

III.1 INTRODUZIONE

Nella analisi dei circuiti in regime sinusoidale ci si è concentrati finora sul calcolo di tensioni e correnti. In questo capitolo, l'obiettivo sarà invece il calcolo delle potenze elettriche. La potenza elettrica è un concetto di grandissima importanza nella analisi dei circuiti elettrici. Essa è certamente la grandezza più importante per le aziende elettriche, ma è altresì importante nei sistemi elettronici e di telecomunicazione, perché anche questi sistemi implicano il trasferimento di potenza da un punto all'altro. Inoltre, ogni dispositivo elettrico industriale o domestico – ventilatore, motore, lampada, ferro da stiro, televisore, personal computer – ha una potenza di targa che indica quanta potenza è necessaria all'apparecchiatura per funzionare; il superamento di tale livello di potenza può portare a danneggiare in modo permanente l'apparecchio. La forma più comune di potenza elettrica è quella che proviene dalla corrente alternata di rete a 50 o 60 Hz. Come si è già accennato, la scelta della trasmissione in regime sinusoidale invece che in corrente continua consente la trasmissione della potenza dalle centrali agli utilizzatori con livelli di tensione elevati.

Si inizierà con la definizione ed il calcolo della *potenza istantanea* e della *potenza media*. Si introdurranno poi ulteriori quantità utili a descrivere la potenza. Come applicazione pratica dei concetti presentati si parlerà di come si effettuano le misure di potenza e di come le compagnie elettriche calcolano le bollette dei consumi.

III.2 POTENZA ISTANTANEA E POTENZA MEDIA

Come si è visto nel Capitolo 2, la *potenza istantanea* $p(t)$ assorbita da un elemento è il prodotto della tensione istantanea $v(t)$ sull'elemento per la corrente istantanea $i(t)$ che lo attraversa. Se si usa la convenzione di segno degli utilizzatori,

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (11.1)$$

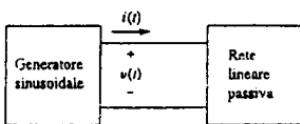


Figura 11.1
Generatore sinusoidale e circuito lineare passivo.

La potenza istantanea (in watt) è il valore della potenza in un certo istante di tempo.

Essa rappresenta la velocità di assorbimento dell'energia da parte di un elemento.

Si consideri il caso generale di potenza istantanea assorbita da una interconnessione arbitraria di elementi circuituali soggetti ad una eccitazione di tipo sinusoidale, come mostrato in Figura 11.1, e siano

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (11.2a)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.2b)$$

la tensione e la corrente ai terminali del circuito, dove V_m e I_m sono le ampiezze (o valori di picco) e θ_v e θ_i sono le fasi della tensione e della corrente rispettivamente. La potenza istantanea assorbita dal circuito è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.3)$$

Si applica ora l'identità trigonometrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \quad (11.4)$$

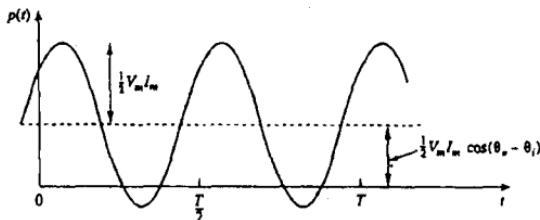
e si esprime la (11.3) come

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \quad (11.5)$$

Questa equazione mostra che la potenza istantanea è costituita da due parti, la prima delle quali costante o indipendente dal tempo, il cui valore dipende dalla differenza di fase fra la tensione e la corrente; la seconda parte è una funzione sinusoidale del tempo la cui frequenza angolare è 2ω , il doppio della frequenza angolare di tensione e corrente.

Il grafico di $p(t)$ nella (11.5) è mostrato in Figura 11.2, dove $T = 2\pi/\omega$ è il periodo della tensione e della corrente. Si osservi che $p(t)$ è periodica, $p(t) = p(t + T_0)$, e il suo periodo è $T_0 = T/2$, perché la frequenza è doppia di quella di tensione e corrente. Si osservi anche che $p(t)$ è positiva per una parte del ciclo e negativa per il resto del ciclo. Quando $p(t)$ è positiva, il circuito assorbe potenza. Quando $p(t)$ è negativa, il generatore assorbe potenza, cioè viene trasferita potenza dal circuito al generatore. Ciò è possibile a causa della presenza di elementi conservativi (condensatori e induttori) nel circuito.

Figura 11.2
Potenza istantanea $p(t)$
entrante in un circuito.



La potenza istantanea varia nel tempo, ed è quindi difficile da misurare. La potenza media si rivela invece di misura più agevole. Infatti, il wattmetro, lo strumento per la misura delle potenze, risponde alla potenza media.

La potenza media è il valore medio della potenza istantanea su un periodo.

La potenza media è data quindi da

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (11.6)$$

Nonostante nella (11.6) si effettui il calcolo del valore medio su un periodo T , si otterrebbe lo stesso risultato eseguendo l'integrazione sul periodo effettivo di $p(t)$, che è $T_0 = T/2$. Sostituendo $p(t)$ della (11.5) nella (11.6) si ottiene

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \frac{1}{T} \int_0^T dt \\ &\quad + \frac{1}{2} V_m I_m \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \end{aligned} \quad (11.7)$$

Il primo integrando è una costante, e la sua media è la costante stessa. Il secondo integrando è una sinusoida: è noto che il valor medio di una sinusoida preso su un periodo è zero, perché l'area sottesa dalla sinusoida durante il semiperiodo positivo viene compensata dall'area sottesa durante il semiperiodo negativo. Il secondo termine nella (11.7) è quindi nullo, e la potenza media diventa

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.8)$$

Poiché $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$, ciò che conta è la differenza di fase fra la tensione e la corrente.

Si noti che $p(t)$ varia nel tempo, mentre P è indipendente dal tempo. Per calcolare la potenza istantanea, è necessario conoscere le espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ nel dominio del tempo. È invece possibile calcolare la potenza media sia quando la tensione e la corrente sono espresse nel dominio del tempo, come nella (11.8), che quando sono espresse nel dominio della frequenza. I fasoni di $v(t)$ e $i(t)$ nella (11.2) sono $V = V_m \angle \theta_v$ e $I = I_m \angle \theta_i$, rispettivamente. P viene calcolata usando la (11.8) oppure con i fasoni V e I . Per utilizzare i fasoni, si noti che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} VI^* &= \frac{1}{2} V_m I_m \angle \theta_v - \theta_i = \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m [\cos(\theta_v - \theta_i) + j \sin(\theta_v - \theta_i)] \end{aligned} \quad (11.9)$$

Si vede come la parte reale di quest'ultima espressione coincida con la potenza media P secondo la (11.8). Perciò,

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[VI^*] = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.10)$$

Si considerino ora due casi particolari della (11.10). Quando $\theta_v = \theta_i$, la tensione e la corrente sono in fase. Ciò significa che il circuito è puramente resistivo, R , e

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} |I|^2 R \quad (11.11)$$

dove $|I|^2 = I \times I^*$. La (11.11) mostra che un circuito puramente resistivo assorbe potenza in ogni istante. Quando invece $\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$, si è in presenza di un circuito puramente reattivo, e

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 90^\circ = 0 \quad (11.12)$$

la quale mostra come un circuito puramente reattivo non assorbe alcuna potenza media. Riassumendo,

Un carico resistivo (R) assorbe potenza in ogni istante, mentre un carico reattivo (L o C) non assorbe potenza media.

Esempio 11.1

Note

$$v(t) = 120 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V} \quad \text{e} \quad i(t) = 10 \cos(377t - 10^\circ) \text{ A}$$

determinare la potenza istantanea e la potenza media assorbite dalla rete lineare passiva di Figura 11.1.

Soluzione: La potenza istantanea è data da

$$p = vi = 1200 \cos(377t + 45^\circ) \cos(377t - 10^\circ)$$

Applicando l'identità trigonometrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

s' ottiene

$$p = 600[\cos(754t + 35^\circ) + \cos 55^\circ]$$

cioè

$$p(t) = 344.2 + 600 \cos(754t + 35^\circ) \text{ W}$$

La potenza media è

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} 120(10) \cos[45^\circ - (-10^\circ)] \\ &= 600 \cos 55^\circ = 344.2 \text{ W} \end{aligned}$$

che è anche la parte costante di $p(t)$ calcolata in precedenza.

■ **Esercizio 11.1** Calcolare la potenza istantanea e la potenza media assorbita dalla rete lineare passiva di Figura 11.1 se

$$v(t) = 80 \cos(10t + 20^\circ) \text{ V} \quad \text{e} \quad i(t) = 15 \sin(10t + 60^\circ) \text{ A}$$

Risposta $385.7 + 600 \cos(20t - 10^\circ) \text{ W}$, 385.7 W .

Esempio 11.2

Calcolare la potenza media assorbita da un'impedenza $Z = 30 - j70 \Omega$ quando le viene applicata una tensione $V = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$.

Soluzione: La corrente nell'impedenza è

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120 \angle 0^\circ}{30 - j70} = \frac{120 \angle 0^\circ}{76.16 \angle -66.8^\circ} = 1.576 \angle 66.8^\circ \text{ A}$$

La potenza media è

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} (120)(1.576) \cos(0 - 66.8^\circ) = 37.24 \text{ W}$$

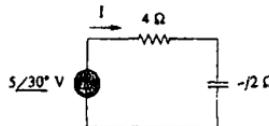
■ **Esercizio 11.2** Una corrente $I = 10 \angle 30^\circ \text{ A}$ scorre in una impedenza $Z = 20 \angle -22^\circ \Omega$. Determinare la potenza media fornita all'impedenza.

Risposta 927.2 W .

Esempio 11.3

Per il circuito mostrato in Figura 11.3, determinare la potenza media erogata dal generatore e la potenza media assorbita dal resistore.

Figura 11.3
Per l'Esempio 11.3.



Soluzione: La corrente I è data da

$$I = \frac{5 \angle 30^\circ}{4 - j2} = \frac{5 \angle 30^\circ}{4.472 \angle -26.57^\circ} = 1.118 \angle 56.57^\circ \text{ A}$$

La potenza media erogata dal generatore di tensione è

$$P = \frac{1}{2}(5)(1.118) \cos(30^\circ - 56.57^\circ) = 2.5 \text{ W}$$

La corrente nel resistore vale

$$I = I_R = 1.118 \angle 56.57^\circ \text{ A}$$

e la sua tensione è

$$V_R = 4I_R = 4.472 \angle 56.57^\circ \text{ V}$$

La potenza media assorbita dal resistore è allora

$$P = \frac{1}{2} (4.472)(1.118) = 2.5 \text{ W}$$

che coincide con la potenza media erogata; il condensatore non assorbe potenza media.

■ **Esercizio 11.3** Nel circuito di Figura 11.4, calcolare la potenza media assorbita dal resistore e dall'induttore. Determinare inoltre la potenza media erogata dal generatore di tensione.

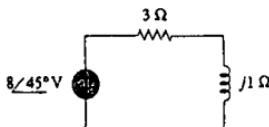
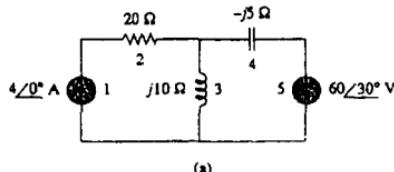


Figura 11.4
Per l'Esercizio 11.3.

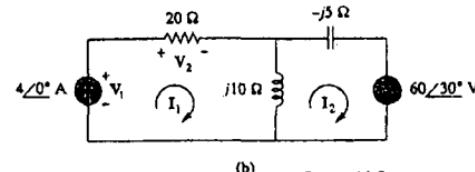
Risposta 9.6 W, 0 W, 9.6 W.

Esempio 11.4

Determinare la potenza erogata da ciascun generatore e la potenza assorbita da ciascun elemento passivo nel circuito di Figura 11.5(a).



(a)



(b)

Figura 11.5
Per l'Esempio 11.4.

Soluzione: Si applica l'analisi agli anelli, come mostrato in Figura 11.5(b). Per l'anello 1,

$$I_1 = 4 \text{ A}$$

Per l'anello 2,

$$(j10 - j5)I_2 - j10I_1 + 60\angle30^\circ = 0, \quad I_1 = 4 \text{ A}$$

e sostituendo

$$\begin{aligned} j5I_2 &= -60\angle30^\circ + j40 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -12\angle-60^\circ + 8 \\ &= 10.58\angle79.1^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Per il generatore di tensione, la corrente è $I_2 = 10.58\angle79.1^\circ \text{ A}$ e la sua tensione è $60\angle30^\circ \text{ V}$, così che la potenza media è

$$P_S = \frac{1}{2} (60)(10.58) \cos(30^\circ - 79.1^\circ) = 207.8 \text{ W}$$

Questa potenza risulta assorbita dal generatore, a causa della direzione di riferimento di I_2 e della polarità della tensione del generatore. Il circuito fornisce quindi potenza media al generatore di tensione. Per il generatore di corrente, la corrente è $I_1 = 4\angle0^\circ$ e la tensione ai suoi terminali

$$\begin{aligned} V_1 &= 20I_1 + j10(I_1 - I_2) = 80 + j10(4 - 2 - j10.39) \\ &= 183.9 + j20 = 184.984\angle6.21^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

La potenza media assorbita dal generatore di corrente risulta

$$P_I = -\frac{1}{2} (184.984)(4) \cos(6.21^\circ - 0) = -367.8 \text{ W}$$

Essa risulta negativa secondo la convenzione degli utilizzatori, il che significa che il generatore di corrente sta effettivamente fornendo potenza al circuito.

Per il resistore, la corrente vale $I_1 = 4 \angle 0^\circ$ e la tensione ai suoi capi è $20I_1 = 80 \angle 0^\circ$, così che la potenza assorbita vale

$$P_2 = \frac{1}{2} (80)(4) = 160 \text{ W}$$

Per il condensatore, la corrente che lo attraversa è $I_2 = 10.58 \angle 79.1^\circ$ e la tensione ai suoi capi $-jI_2 = (5 \angle -90^\circ)(10.58 \angle 79.1^\circ) = 52.9 \angle 79.1^\circ - 90^\circ$. La potenza media assorbita dal condensatore vale allora

$$P_4 = \frac{1}{2} (52.9)(10.58) \cos(-90^\circ) = 0$$

Per l'induttore, la corrente è $I_1 - I_2 = 2 - j10.39 = 10.58 \angle -79.1^\circ$. La tensione è $j10(I_1 - I_2) = 105.8 \angle -79.1^\circ + 90^\circ$. La potenza media assorbita dall'induttore vale quindi

$$P_3 = \frac{1}{2} (105.8)(10.58) \cos 90^\circ = 0$$

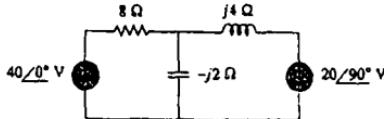
Si noti che l'induttore e il condensatore non assorbono alcuna potenza media, e che la potenza totale erogata dal generatore di corrente è pari alla somma delle potenze assorbite dal resistore e dal generatore di tensione, cioè

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = -367.8 + 160 + 0 + 0 + 207.8 = 0$$

a conferma della conservazione della potenza.

■ **Esercizio 11.4** Calcolare la potenza media assorbita da ciascuno dei cinque elementi del circuito di Figura 11.6.

Figura 11.6
Per l'Esercizio 11.4.



Risposta Generatore di tensione da 40 V : -60 W ; generatore di tensione da $20 \angle 90^\circ \text{ V}$: -40 W ; resistore: 100 W ; altri: 0 W .

11.3 TEOREMA SUL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA MEDIA

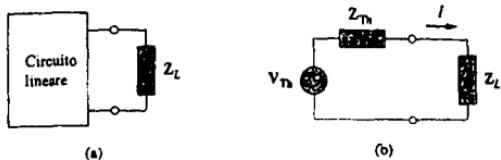
Nel Paragrafo 4.8 è stato risolto il problema di massimizzare la potenza fornita da una rete resistiva che eroga potenza ad un carico R_L . Rappresentando il circuito con l'equivalente Thevenin, si è visto che viene fornita la massima potenza al carico se la resistenza del carico è uguale alla resistenza di Thevenin, $R_L = R_{Th}$. Si vuole ora estendere questo risultato ai circuiti AC.

Si consideri la Figura 11.7, nella quale un circuito AC è collegato ad un carico Z_L . Ed è stato rappresentato con l'equivalente Thevenin. Il carico viene di solito rappresentato con una impedenza, che può rappresentare un motore elettrico, una antenna, un apparecchio televisivo, e così via. In forma rettangolare, l'impedenza di Thevenin Z_{Th} e l'impedenza di carico Z_L sono

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad (11.13a)$$

$$Z_L = R_L + jX_L \quad (11.13b)$$

Figura 11.7
Calcolo del massimo trasferimento di potenza media:
(a) circuito con carico, (b) equivalente Thevenin.



La corrente che scorre nel carico vale

$$I = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{V_{Th}}{(R_{Th} + jX_{Th}) + (R_L + jX_L)} \quad (11.14)$$

Secondo la (11.11), la potenza media fornita al carico è

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 R_L = \frac{|V_{Th}|^2 R_L / 2}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (11.15)$$

L'obiettivo è quello di far variare i parametri del carico, R_L e X_L , in modo che P risulti massima. A tale scopo, si pongono a zero $\partial P / \partial R_L$ e $\partial P / \partial X_L$. Dalla (11.15), si ottiene

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = - \frac{|V_{Th}|^2 R_L (X_{Th} + X_L)}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} \quad (11.16a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|V_{Th}|^2 [(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)]}{2[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} \quad (11.16b)$$

Eguagliando $\partial P / \partial X_L$ a zero si ha

$$X_L = -X_{Th} \quad (11.17)$$

e ponendo a zero $\partial P / \partial R_L$

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (11.18)$$

Combinando le (11.17) e (11.18) si perviene alla conclusione che, per avere il massimo trasferimento di potenza media, Z_L deve essere scelta tale che $X_L = -X_{Th}$ e $R_L = R_{Th}$, cioè

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^* \quad (11.19)$$

Per avere il massimo trasferimento di potenza media, l'impedenza di carico Z_L deve essere pari al complesso coniugato dell'impedenza di Thevenin Z_{Th}^* .

Questo risultato è noto come *teorema sul massimo trasferimento di potenza media* per il regime sinusoidale. Ponendo $R_L = R_{Th}$ e $X_L = -X_{Th}$, la (11.15) fornisce il valore della massima potenza media

$$P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}} \quad (11.20)$$

In una situazione nella quale il carico è puramente reale, la condizione per il massimo trasferimento di potenza si ottiene dalla (11.18) ponendo $X_L = 0$, cioè

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} = |Z_{Th}| \quad (11.21)$$

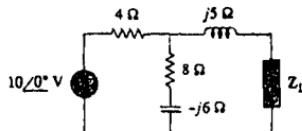
Questo significa che per avere il massimo trasferimento di potenza media in presenza di carico puramente resistivo, l'impedenza (o resistenza) di carico deve essere uguale al modulo della impedenza di Thevenin.

¹ Quando $Z_L = Z_{Th}^*$ si dice che il carico è *adattato* al generatore

Esempio 11.5

Determinare l'impedenza di carico Z_L che rende massima la potenza media assorbita dal circuito di Figura 11.8. Quanto vale tale potenza massima?

Figura 11.8
Per l'Esempio 11.5.



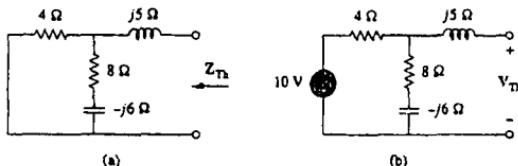
Soluzione: Si ottiene dapprima l'equivalente Thevenin ai terminali del carico. Per determinare Z_{Th} , si consideri il circuito mostrato in Figura 11.9(a). Si trova

$$Z_{Th} = j5 + 4 \parallel (8 - j6) = j5 + \frac{4(8 - j6)}{4 + 8 - j6} = 2.933 + j4.467 \Omega$$

Per determinare V_{Th} , si consideri il circuito in Figura 11.9(b). Per il partitore di tensione,

$$V_{Th} = \frac{8 - j6}{4 + 8 - j6} (10) = 7.454 \angle -10.3^\circ \text{ V}$$

Figura 11.9
Per il calcolo dell'equivalente Thevenin del circuito di Figura 11.8.



L'impedenza di carico assorbe la massima potenza dal circuito quando

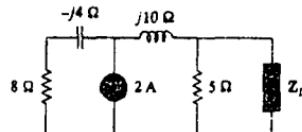
$$Z_L = Z_{Th}^* = 2.933 - j4.467 \Omega$$

Secondo la (11.20), la massima potenza media vale

$$P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{(7.454)^2}{8(2.933)} = 2.368 \text{ W}$$

■ **Esercizio 11.5** Per il circuito mostrato in Figura 11.10, determinare l'impedenza di carico Z_L che assorbe la massima potenza media, e calcolare il valore di tale potenza.

Figura 11.10
Per l'Esercizio 11.5.



Risposta $3.415 - j0.7317 \Omega, 1.429 \text{ W.}$

Esempio 11.6

Nel circuito in Figura 11.11, determinare il valore di R_L che assorbe la massima potenza media, e calcolare il valore di tale potenza.

Soluzione: Si determina dapprima l'equivalente Thevenin ai terminali di R_L .

$$Z_{Th} = (40 - j30) \parallel j20 = \frac{j20(40 - j30)}{j20 + 40 - j30} = 9.412 + j22.35 \Omega$$

Per il partitore di tensione,

$$V_{Th} = \frac{j20}{j20 + 40 - j30} (150 \angle 30^\circ) = 72.76 \angle 134^\circ \text{ V}$$

Il valore di R_L che assorbe la massima potenza media è

$$R_L = |Z_{Th}| = \sqrt{9.41^2 + 22.35^2} = 24.25 \Omega$$

La corrente nel carico vale

$$I = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + R_L} = \frac{72.76 \angle 134^\circ}{33.66 + j22.35} = 1.8 \angle 100.42^\circ \text{ A}$$

La massima potenza media assorbita da R_L è allora

$$P_{max} = \frac{1}{2} |I|^2 R_L = \frac{1}{2} (1.8)^2 (24.25) = 39.29 \text{ W}$$

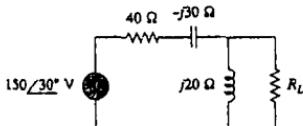


Figura 11.11
Per l'Esempio 11.6.

Esercizio 11.6 In Figura 11.12, il resistore R_L viene fatto variare fino a quando non assorbe la massima potenza media. Calcolare R_L e la massima potenza assorbita.

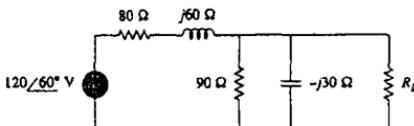


Figura 11.12
Per l'Esercizio 11.6.

Risposta 30Ω , 6.863 W .

11.4 VALORI EFFICACI

Il concetto di *valore efficace* nasce dalla necessità di esprimere quantitativamente l'efficacia con la quale un generatore di tensione o di corrente fornisce potenza ad un carico resistivo.

Il *valore efficace di una corrente periodica* è la corrente costante in grado di fornire ad un resistore la stessa potenza della corrente periodica.

In Figura 11.13, il circuito in (a) è in regime sinusoidale, mentre quello in (b) in regime stazionario. Si vuole calcolare I_{eff} in modo che al resistore R venga trasferita una potenza pari a quella fornita dalla sinusoide i . La potenza media assorbita dal resistore nel circuito AC è

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (11.22)$$

mentre quella assorbita dal resistore nel circuito in regime stazionario è

$$P = I_{eff}^2 R \quad (11.23)$$

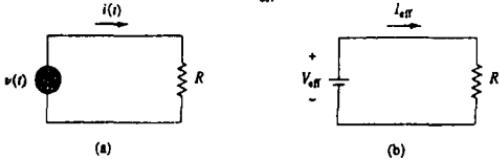


Figura 11.13
Calcolo della corrente efficace:
(a) circuito AC, (b) circuito in continua.

Eguagliando le espressioni nelle (11.22) e (11.23) e risolvendo rispetto a I_{eff} , si ottiene

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (11.24)$$

Il valore efficace della tensione si trova nella stessa maniera di quello della corrente, cioè

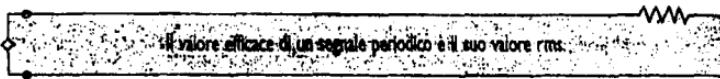
$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} \quad (11.25)$$

Quest'ultima indica che il valore efficace è la radice (root) quadrata della media (mean) del quadrato (square) del segnale periodico. Il valore efficace è quindi noto anche come valore rms, o root-mean-square o valore quadratico medio, e si scrive

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}}, \quad V_{\text{eff}} = V_{\text{rms}} \quad (11.26)$$

Per una funzione periodica generica $x(t)$, il valore rms è dato da

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt} \quad (11.27)$$

Il valore efficace di un segnale periodico è il suo valore rms.

La (11.27) afferma che per determinare il valore rms di $x(t)$, si calcola dapprima il suo quadrato (square) x^2 e se ne ottiene poi la media (mean),

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt$$

e si estrae poi la radice quadrata (root) ($\sqrt{}$) di tale media. Il valore rms di una costante è la costante stessa.

Per la sinusoide $i(t) = I_m \cos \omega t$, il valore efficace o rms è

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} \\ &= \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (11.28)$$

In maniera simile, per $v(t) = V_m \cos \omega t$,

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (11.29)$$

Si tenga presente che le (11.28) e (11.29) sono valide solo per segnali sinusoidali.

La potenza media nella (11.8) può essere scritta in termini di valori efficaci.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) \end{aligned} \quad (11.30)$$

In maniera simile, la potenza media assorbita da un resistore R nella (11.11) si può scrivere come

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \quad (11.31)$$

Quando viene specificata una tensione o una corrente sinusoidale, ciò avviene quasi sempre in termini del suo valore massimo (o di picco) oppure del suo valore efficace,

perché il valore medio è zero. Le aziende elettriche specificano le ampiezze dei fasi in termini di valori efficaci piuttosto che di valori di picco. Ad esempio, i 220 V presenti nelle prese di corrente domestiche si riferiscono al valore efficace della tensione fornita dalla azienda elettrica. Spesso, nel calcolo delle potenze, risulta conveniente esprimere la tensione e la corrente con i loro valori efficaci. Inoltre, i voltmetri e gli amperometri analogici sono progettati per fornire una lettura diretta del valore efficace di tensione e corrente, rispettivamente.

Esempio 11.7

Determinare il valore rms della forma d'onda di corrente in Figura 11.14. Se la corrente scorre in un resistore da 2Ω , calcolare la potenza media assorbita dal resistore.

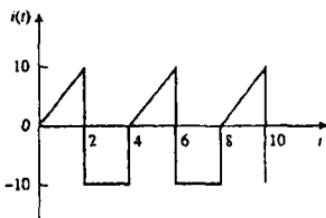


Figura 11.14
Per l'Esempio 11.7.

Soluzione: Il periodo della forma d'onda è $T = 4$. Nello spazio di un periodo, è possibile scrivere la corrente come

$$i(t) = \begin{cases} 5t, & 0 < t < 2 \\ -10, & 2 < t < 4 \end{cases}$$

Il valore rms è

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\int_0^2 (5t)^2 dt + \int_2^4 (-10)^2 dt \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[25 \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 + 100t \Big|_2^4 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{200}{3} + 200 \right)} = 8.165 \text{ A} \end{aligned}$$

La potenza assorbita da un resistore da 2Ω è

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (8.165)^2 (2) = 133.3 \text{ W}$$

■ **Esercizio 11.7** Calcolare il valore rms della forma d'onda di corrente in Figura 11.15. Se la corrente scorre in un resistore da 9Ω , calcolare la potenza media assorbita dal resistore.

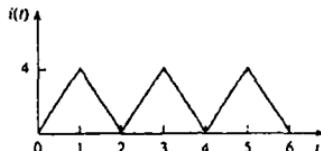


Figura 11.15
Per l'Esercizio 11.7.

Risposta 2.309 A, 48 W. ■

Esempio 11.8

La forma d'onda mostrata in Figura 11.16 è una sinusoide passata attraverso un raddrizzatore a semionda. Calcolare il valore rms e la potenza media dissipata in un resistore da 10Ω .

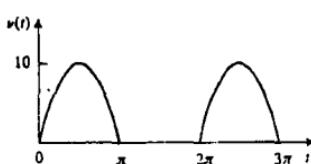


Figura 11.16
Per l'Esempio 11.8.

Soluzione: Il periodo della forma d'onda è $T = 2\pi$, e

$$v(t) = \begin{cases} 10 \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Il valore rms si ottiene come

$$V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi (10 \sin t)^2 dt + \int_\pi^{2\pi} 0^2 dt \right]$$

Ma $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$. Quindi

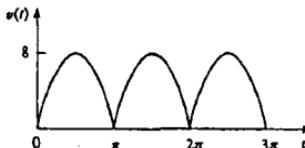
$$\begin{aligned} V_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{100}{2}(1 - \cos 2t) dt = \frac{50}{2\pi} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{50}{2\pi} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - 0 \right) = 25, \quad V_{\text{rms}} = 5 \text{ V} \end{aligned}$$

La potenza media assorbita vale

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{5^2}{10} = 2.5 \text{ W}$$

■ **Esercizio 11.8** Determinare il valore rms della sinusoide filtrata da un raddrizzatore ad onda intera di Figura 11.17. Calcolare inoltre la potenza media dissipata in un resistore da 6Ω .

Figura 11.17
Per l'Esercizio 11.8.



Risposta 5.657 V, 5.334 W. ■

11.5 POTENZA APPARENTE E FATTORE DI POTENZA

Nel Paragrafo 11.2 si è visto che se la tensione e la corrente ai terminali di un circuito sono

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad \text{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.32)$$

o anche, in forma di fasori, $\mathbf{V} = V_m \angle \theta_v$ e $\mathbf{I} = I_m \angle \theta_i$, la potenza media è

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.33)$$

Nel Paragrafo 11.4 si è anche visto che

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.34)$$

Nella equazione precedente è stato individuato un nuovo termine:

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (11.35)$$

La potenza media è il prodotto di due termini. Il prodotto $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ è chiamato *potenza apparente S*. Il fattore $\cos(\theta_v - \theta_i)$ è detto *fattore di potenza* (pf, da power factor).

La potenza apparente (in VA) è il prodotto dei valori efficaci di tensione e corrente.

La potenza apparente è chiamata così perché sarebbe la potenza che verrebbe assorbita da un circuito se ci si trovasse in regime stazionario e la tensione e la corrente fosse-

ro pari ai valori efficaci. Viene misurata in volt-ampere o VA per distinguerla dalla potenza media o reale, che si misura in watt. Il fattore di potenza è adimensionale, essendo il rapporto fra potenza media e potenza apparente.

$$pf = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.36)$$

L'angolo $\theta_v - \theta_i$ è detto *angolo del fattore di potenza*, perché è l'angolo il cui coseno è pari al fattore di potenza. L'angolo del fattore di potenza è pari all'argomento della impedenza di carico se V è la tensione sul carico e I la corrente che lo attraversa. Ciò risulta evidente dal fatto che

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_m / \theta_v}{I_m / \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} / \underline{\theta_v - \theta_i} \quad (11.37)$$

In alternativa, poiché

$$V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}} = V_{\text{eff}} / \underline{\theta_v} \quad (11.38a)$$

e

$$I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}} / \underline{\theta_i} \quad (11.38b)$$

l'impedenza è

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} / \underline{\theta_v - \theta_i} \quad (11.39)$$

Il fattore di potenza è il coseno della differenza di fase fra la tensione e la corrente.
È anche uguale al coseno dell'argomento dell'impedenza di carico.

Secondo la (11.36), il fattore di potenza può essere visto come il fattore per il quale occorre moltiplicare la potenza apparente per ottenere la potenza media o reale. Il valore del pf varia da zero a uno. Per un carico puramente resistivo, la tensione e la corrente sono in fase, così che $\theta_v - \theta_i = 0$ e $pf = 1$. Ciò significa che la potenza apparente è pari alla potenza media. Per un carico puramente reattivo, $\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$ e $pf = 0$. In questo caso, la potenza media è nulla. Tra questi due casi estremi, pf è detto *in anticipo*, o *capacitivo* e *in ritardo*, o *induttivo*. Un fattore di potenza capacitivo significa che la corrente è in anticipo rispetto alla tensione, e si è quindi in presenza di carico capacitivo. Un fattore di potenza induttivo implica che la corrente è in ritardo rispetto alla tensione, e si ha quindi un carico induttivo. Il fattore di potenza è in relazione diretta con gli importi delle bollette pagate dagli utenti delle aziende elettriche, come si vedrà al Paragrafo 11.9.2.

Esempio 11.9

Un carico di tipo serie assorbe una corrente $i(t) = 4 \cos(100\pi t + 10^\circ)$ A, quando è applicata una tensione $v(t) = 120 \cos(100\pi t - 20^\circ)$ V. Determinare la potenza apparente e il fattore di potenza del carico. Calcolare i valori degli elementi che costituiscono il carico serie.

Soluzione: La potenza apparente è

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{120}{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} = 240 \text{ VA}$$

Il fattore di potenza è

$$pf = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20^\circ - 10^\circ) = 0.866 \quad (\text{cap})$$

Il pf è capacitivo, perché la corrente è in anticipo sulla tensione. Il pf potrebbe anche essere ottenuto dalla impedenza di carico.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{120 \angle -20^\circ}{4 \angle 10^\circ} = 30 \angle -30^\circ = 25.98 - j15 \Omega$$

$$\text{pf} = \cos(-30^\circ) = 0.866 \quad (\text{cap})$$

L'impedenza di carico Z può essere rappresentata con un resistore da 25.98Ω in serie ad un condensatore avente

$$X_C = -15 = -\frac{1}{\omega C}$$

cioè

$$C = \frac{1}{15\omega} = \frac{1}{15 \times 100\pi} = 212.2 \mu\text{F}$$

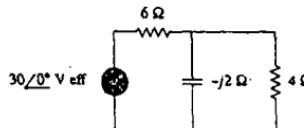
■ **Esercizio 11.9** Ottenere il fattore di potenza e la potenza apparente in un carico la cui impedenza è $Z = 60 + j40 \Omega$ quando la tensione applicata è $v(t) = 150 \cos(377t + 10^\circ)$ V.

Risposta 0.832 induttivo, 156 VA. ■

Esempio 11.10

Determinare il fattore di potenza dell'intero circuito di Figura 11.18 visto dal generatore. Calcolare la potenza media erogata dal generatore.

Figura 11.18
Per l'Esempio 11.10.



Soluzione: L'impedenza totale è

$$Z = 6 + 4 \parallel (-j2) = 6 + \frac{-j2 \times 4}{4 - j2} = 6.8 - j1.6 = 7 \angle -13.24^\circ \Omega$$

Il fattore di potenza è

$$\text{pf} = \cos(-13.24^\circ) = 0.9734 \quad (\text{cap})$$

essendo l'impedenza capacitiva. Il valore efficace della corrente è

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{Z} = \frac{30 \angle 0^\circ}{7 \angle -13.24^\circ} = 4.286 \angle 13.24^\circ \text{ A}$$

La potenza media erogata dal generatore vale

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \text{ pf} = (30)(4.286)0.9734 = 125 \text{ W}$$

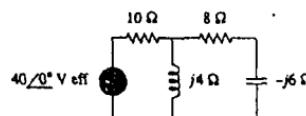
o anche

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = (4.286)^2 (6.8) = 125 \text{ W}$$

dove R è la parte resistiva di Z .

■ **Esercizio 11.10** Calcolare il fattore di potenza dell'intero circuito di Figura 11.19 visto dal generatore. Quale è la potenza media erogata dal generatore?

Figura 11.19
Per l'Esercizio 11.10.



Risposta 0.936 induttivo, 118 W. ■

11.6 POTENZA COMPLESSA

Nella storia dell'ingegneria dei circuiti si possono contare diversi tentativi di rappresentare le relazioni fra le potenze nel modo più semplice possibile. Particolamente utile è il concetto di *potenza complessa*, che viene usato per rappresentare l'effetto globale dei carichi, in particolare quelli di tipo parallelo. La potenza complessa è importante nel calcolo delle potenze perché contiene *tutte* le informazioni riguardanti la potenza assorbita da un certo carico.

Si consideri il carico AC di Figura 11.20. Dati i fasori $V = V_m \angle \theta_v$ e $I = I_m \angle \theta_i$ della tensione $v(t)$ e della corrente $i(t)$, la *potenza complessa* S assorbita dal carico è il prodotto della tensione e del complesso coniugato della corrente,

$$S = \frac{1}{2} VI^* \quad (11.40)$$

supponendo di usare la convenzione degli utilizzatori. (Si veda la Figura 11.20). In termini di fasori efficaci

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* \quad (11.41)$$

dove

$$V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}} = V_{\text{eff}} \angle \theta_v \quad (11.42)$$

e

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}} \angle \theta_i \quad (11.43)$$

È così possibile scrivere la (11.41) come

$$\begin{aligned} S &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \angle \theta_v - \theta_i \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i) \end{aligned} \quad (11.44)$$

Questa equazione potrebbe anche essere ottenuta dalla (11.9). Si nota dalla (11.44) che il modulo della potenza complessa è la potenza apparente; la potenza complessa si misura quindi in volt-ampere (VA). Si noti anche che l'argomento della potenza complessa coincide con l'angolo del fattore di potenza.

La potenza complessa può essere espressa in termini della impedenza di carico Z . Dalla (11.37), l'impedenza di carico Z può essere scritta come²

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \angle \theta_v - \theta_i \quad (11.45)$$

Allora, $V_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}}$. Sostituendo nella (11.41) si ha

$$S = I_{\text{eff}}^2 Z = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* \quad (11.46)$$

Poiché $Z = R + jX$, la (11.46) diventa

$$S = I_{\text{eff}}^2 (R + jX) = P + jQ \quad (11.47)$$

dove P e Q sono la parte reale e la parte immaginaria della potenza complessa; cioè,

$$P = \text{Re}(S) = I_{\text{eff}}^2 R \quad (11.48)$$

$$Q = \text{Im}(S) = I_{\text{eff}}^2 X \quad (11.49)$$

P è la potenza media o reale e dipende dalla resistenza di carico R . Q dipende dalla reattanza del carico X ed è chiamata potenza *reattiva* (o in quadratura).

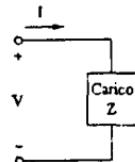


Figura 11.20
Fasori di tensione e corrente
associati ad un carico.

² Talvolta, quando si opererà con i valori efficaci di correnti o tensioni, si ometterà il pedice "eff" quando non vi sia pericolo di ingenerare confusione.

Confrontando la (11.44) con la (11.47), si nota che

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos (\theta_v - \theta_i), \quad Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin (\theta_v - \theta_i) \quad (11.50)$$

La potenza reale P è la potenza media in watt fornita al carico; essa è l'unica potenza utile, ed è anche la potenza che il carico effettivamente dissipata. La potenza reattiva Q è la misura dello scambio di energia fra il generatore e la parte reattiva del carico. L'unità di misura di Q è il volt-ampere reattivo (VAR) per distinguere dalla potenza reale, la cui unità è il watt. È noto dal Capitolo 6 che gli elementi conservativi non dissipano né erogano potenza, ma scambiano semplicemente potenza in un senso e nell'altro con il resto del circuito. Allo stesso modo, la potenza reattiva viene trasferita in un direzione e nell'altra fra il carico e il generatore. Essa rappresenta uno scambio privo di perdite fra il carico e il generatore. Si noti che:

1. $Q = 0$ per carichi resistivi (pf unitario).
2. $Q < 0$ per carichi capacitivi (pf in anticipo).
3. $Q > 0$ per carichi induttivi (pf in ritardo).

Riassumendo,

La potenza complessa (in VA) è il prodotto del fasore efficace della tensione per il complesso coniugato del fasore efficace della corrente. È una quantità complessa; la sua parte reale è la potenza reale, mentre la sua parte immaginaria è la potenza reattiva.

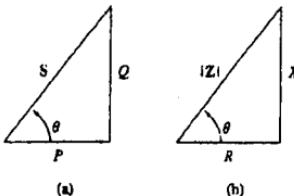
L'introduzione della potenza complessa consente di ottenere la potenza reale e la potenza reattiva direttamente dai fasori di tensione e corrente.

$$\begin{aligned} \text{Potenza complessa } S &= P + jQ = \frac{1}{2} VI^* \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} / \theta_v - \theta_i \\ \text{Potenza apparente } S &= |S| = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \text{Potenza reale } P &= \text{Re}(S) = S \cos (\theta_v - \theta_i) \\ \text{Potenza reattiva } Q &= \text{Im}(S) = S \sin (\theta_v - \theta_i) \\ \text{Fattore di potenza} &= \frac{P}{S} = \cos (\theta_v - \theta_i) \end{aligned} \quad (11.51)$$

Il riquadro precedente mostra come la potenza complessa contenga tutte le informazioni interessanti ai fini del calcolo delle potenze in un dato carico.

Figura 11.21

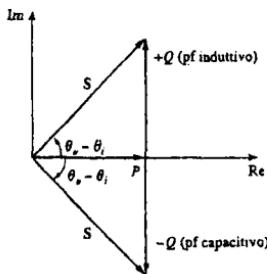
(a) Triangolo delle potenze, (b) triangolo delle impedenze.



Risulta inoltre abbastanza comune rappresentare S , P e Q in forma di triangolo, detto *triangolo delle potenze*, mostrato in Figura 11.21(a). Esso risulta simile al triangolo delle impedenze, che mostra la relazione fra Z , R e X , illustrato in Figura 11.21(b). Il triangolo delle potenze ha quattro elementi – la potenza apparente/complessa, la potenza reale, la potenza reattiva e l'angolo del fattore di potenza. Noti due di questi elementi, i due rimanenti possono essere facilmente ottenuti dal triangolo. Come mostra

la Figura 11.22, quando S giace nel primo quadrante si ha un carico induttivo e un pf in ritardo. Quando S giace nel quarto quadrante, il carico risulta capacitivo e il pf è in anticipo. È anche possibile che la potenza complessa stia nel secondo o nel terzo quadrante: ciò richiede che l'impedenza del carico abbia una resistenza negativa, cosa che può avvenire nei circuiti attivi.

Figura 11.22
Triangolo delle potenze.



Esempio 11.11

La tensione su un carico è $v(t) = 60 \cos(\omega t - 10^\circ)$ V e la corrente che attraversa l'elemento nella direzione della caduta di tensione è $i(t) = 1.5 \cos(\omega t + 50^\circ)$ A. Calcolare: (a) le potenze apparente e complessa, (b) le potenze reale e reattiva, e (c) il fattore di potenza e l'impedenza del carico.

Soluzione: (a) Usando i valori efficaci di tensione e corrente, si scrive

$$V_{\text{eff}} = \frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ, \quad I_{\text{eff}} = \frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle +50^\circ$$

La potenza complessa è

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = \left(\frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ \right) \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ \right) = 45 \angle -60^\circ \text{ VA}$$

La potenza apparente è

$$S = |S| = 45 \text{ VA}$$

(b) Si può esprimere la potenza complessa in forma rettangolare come

$$S = 45 \angle -60^\circ = 45[\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)] = 22.5 - j38.97$$

Essendo $S = P + jQ$, la potenza reale è

$$P = 22.5 \text{ W}$$

mentre la potenza reattiva è

$$Q = -38.97 \text{ VAR}$$

(c) Il fattore di potenza è

$$\text{pf} = \cos(-60^\circ) = 0.5 \text{ (cap)}$$

Esso risulta in anticipo, perché la potenza reattiva è negativa. L'impedenza di carico è

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{60 \angle -10^\circ}{1.5 \angle +50^\circ} = 40 \angle -60^\circ \Omega$$

che è una impedenza capacitiva.

■ **Esercizio 11.11** Per un dato carico, $V_{\text{eff}} = 110 \angle 85^\circ$ V, $I_{\text{eff}} = 0.4 \angle 15^\circ$ A. Determinare: (a) le potenze apparente e complessa, (b) le potenze reale e reattiva, e (c) il fattore di potenza e l'impedenza di carico.

Risposta (a) 44 VA, $44 \angle 70^\circ$ VA, (b) 15.05 W, 41.35 VAR, (c) 0.342 induttivo, $94.06 + j258.4 \Omega$.

Esempio 11.12

Un carico Z assorbe 12 kVA con un fattore di potenza di 0.856 induttivo da un generatore sinusoidale di 120 V efficaci. Calcolare: (a) le potenze reale e reattiva fornite al carico, (b) la corrente di picco, e (c) l'impedenza di carico.

Soluzione: (a) Poiché $\text{pf} = \cos \theta = 0.856$, si ottiene l'angolo corrispondente come $\theta = \cos^{-1} 0.856 = 31.13^\circ$. Se la potenza apparente è $S = 12\ 000 \text{ VA}$, allora la potenza media o reale è

$$P = S \cos \theta = 12\ 000 \times 0.856 = 10.272 \text{ kW}$$

mentre quella reattiva è

$$Q = S \sin \theta = 12\ 000 \times 0.517 = 6.204 \text{ kVAR}$$

(b) Poiché il pf è induttivo, la potenza complessa è

$$S = P + jQ = 10.272 + j6.204 \text{ kVA}$$

Da $S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, si ottiene

$$I_{\text{eff}}^* = \frac{S}{V_{\text{eff}}} = \frac{10\ 272 + j6\ 204}{120 / 0^\circ} = 85.6 + j51.7 \text{ A} = 100 / 31.13^\circ \text{ A}$$

Perciò $I_{\text{eff}} = 100 / -31.13^\circ$ e la corrente di picco è

$$I_p = \sqrt{2} I_{\text{eff}} = \sqrt{2}(100) = 141.4 \text{ A}$$

(c) L'impedenza di carico è

$$Z = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{120 / 0^\circ}{100 / -31.13^\circ} = 1.2 / 31.13^\circ \Omega$$

che è una impedenza induttiva.

Esercizio 11.12 Un generatore sinusoidale fornisce 10 kVAR di potenza reattiva a un carico $Z = 250 / -75^\circ \Omega$. Determinare: (a) il fattore di potenza, (b) la potenza apparente fornita al carico, e (c) la tensione di picco.

Risposta (a) 0.2588 capacitivo, (b) + 10.35 kVA, (c) 2.275 kV.

11.7 CONSERVAZIONE DELLA POTENZA

Il principio di conservazione della potenza risulta valido per i circuiti AC così come lo è per i circuiti in continua. (Si veda il Paragrafo 1.5).

Per illustrarne l'applicazione, si consideri il circuito in Figura 11.23(a), in cui due impedenze di carico Z_1 e Z_2 sono collegate in parallelo ad un generatore V . La KCL fornisce

$$I = I_1 + I_2 \quad (11.52)$$

La potenza complessa erogata dal generatore è

$$S = \frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} V(I_1^* + I_2^*) = \frac{1}{2} VI_1^* + \frac{1}{2} VI_2^* = S_1 + S_2 \quad (11.53)$$

dove S_1 e S_2 denotano le potenze complesse fornite ai carichi Z_1 e Z_2 , rispettivamente.

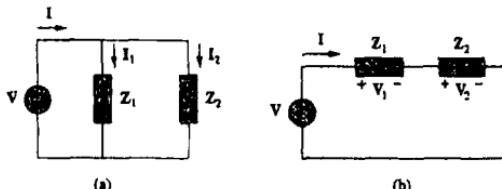


Figura 11.23
Generatore di tensione AC che alimenta carichi:
(a) in parallelo, (b) in serie.

Se i carichi sono collegati in serie al generatore di tensione, come mostrato in Figura

11.23(b), la KVL fornisce

$$V = V_1 + V_2 \quad (11.54)$$

La potenza complessa fornita dal generatore è

$$S = \frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) I^* = \frac{1}{2} V_1 I^* + \frac{1}{2} V_2 I^* = S_1 + S_2 \quad (11.55)$$

dove S_1 e S_2 denotano le potenze complesse fornite ai carichi Z_1 e Z_2 , rispettivamente. Si conclude dalle (11.53) e (11.55) che, sia che i carichi vengano collegati in serie o in parallelo (o in altro modo), la potenza totale erogata dal generatore egualia la potenza totale fornita al carico. Perciò, in generale, per un generatore collegato a N carichi,

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_N \quad (11.56)$$

Ciò significa che la potenza complessa totale di una rete è la somma delle potenze complesse dei singoli componenti. (Questo è vero anche per la potenza reale e per quella reattiva, ma non per la potenza apparente.) Quanto appena affermato costituisce una espressione del principio di conservazione della potenza:

Le potenze complesse, reali e reattive dei generatori sono uguali rispettivamente alle somme delle potenze complesse, reali e reattive dei singoli carichi.

In altre parole, il flusso di potenza reale (o reattiva) uscente dai generatori della rete egualia il flusso di potenza reale (o reattiva) entrante negli altri elementi della rete.

Esempio 11.13

La Figura 11.24 mostra un carico alimentato da un generatore di tensione attraverso una linea di trasmissione. L'impedenza della linea è rappresentata dalla impedenza $(4 + j2) \Omega$ e dal percorso di ritorno. Determinare la potenza reale e reattiva assorbita: (a) dal generatore, (b) dalla linea e (c) dal carico.

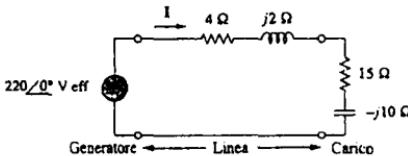


Figura 11.24
Per l'Esempio 11.13.

Soluzione: L'impedenza totale è

$$Z = (4 + j2) + (15 - j10) = 19 - j8 = 20.62 \angle -22.83^\circ \Omega$$

La corrente nel circuito è

$$I = \frac{V_t}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20.62 \angle -22.83^\circ} = 10.67 \angle 22.83^\circ \text{ A eff}$$

(a) Per il generatore, la potenza complessa è

$$\begin{aligned} S_t &= V_t I^* = (220 \angle 0^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) \\ &= 2347.4 \angle -22.83^\circ = (2163.5 - j910.8) \text{ VA} \end{aligned}$$

Da questa si ottiene la potenza reale di 2163.5 W e la potenza reattiva di 910.8 VAR (capacitivi).

(b) Per la linea, la tensione è

$$\begin{aligned} V_{\text{linea}} &= (4 + j2)I = (4.472 \angle 26.57^\circ)(10.67 \angle 22.83^\circ) \\ &= 47.72 \angle 49.4^\circ \text{ V eff} \end{aligned}$$

La potenza complessa assorbita dalla linea è

$$\begin{aligned} S_{\text{linea}} &= V_{\text{linea}} I^* = (47.72 \angle 49.4^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) \\ &= 509.2 \angle 26.57^\circ = 455.4 + j227.7 \text{ VA} \end{aligned}$$

oppure anche

$$S_{\text{linea}} = |I|^2 Z_{\text{linea}} = (10.67)^2 (4 + j2) = 455.4 + j227.7 \text{ VA}$$

E quindi la potenza reale è 455.4 W e la potenza reattiva è 227.76 VAR (induttivi).
(c) Per il carico, la tensione è

$$\begin{aligned} V_L &= (15 - j10)I = (18.03 \angle -33.7^\circ)(10.67 \angle 22.83^\circ) \\ &= 192.38 \angle -10.87^\circ \text{ V eff} \end{aligned}$$

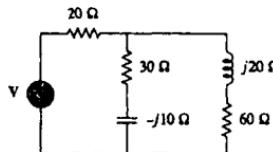
La potenza complessa assorbita dal carico è

$$\begin{aligned} S_L &= V_L I^* = (192.38 \angle -10.87^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) \\ &= 2053 \angle -33.7^\circ = (1708 - j1139) \text{ VA} \end{aligned}$$

La potenza reale è 1708 W e la potenza reattiva è 1139 VAR (capacitivi). Si noti che $S_c = S_{\text{linea}} + S_L$, come ci si attendeva. Sono stati utilizzati i valori efficaci di tensioni e correnti.

■ **Esercizio 11.13** Nel circuito di Figura 11.25, il resistore da 60Ω assorbe una potenza media di 240 W. Determinare V e la potenza complessa per ciascun ramo del circuito. Quanto è la potenza complessa totale del circuito? Supporre che la fase della corrente che scorre nel resistore da 60Ω sia nulla.

Figura 11.25
Per l'Esercizio 11.13

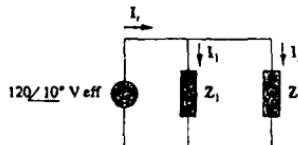


Risposta $240.67 \angle 21.45^\circ \text{ V (eff)}$; resistore da 20Ω : 656 VA;
impedenza $(30 - j10) \Omega$: $480 - j160 \text{ VA}$; impedenza $(60 + j20) \Omega$: $240 + j80 \text{ VA}$;
complessivamente: $1376 - j80 \text{ VA}$.

Esempio 11.14

Nel circuito di Figura 11.26, $Z_1 = 60 \angle -30^\circ \Omega$ e $Z_2 = 40 \angle 45^\circ \Omega$. Calcolare i totali di: (a) potenza apparente, (b) potenza reale, (c) potenza reattiva e (d) pf.

Figura 11.26
Per l'Esempio 11.14.



Soluzione: La corrente in Z_1 è

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{120 \angle 10^\circ}{60 \angle -30^\circ} = 2 \angle 40^\circ \text{ A eff}$$

mentre la corrente in Z_2 è

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{120 \angle 10^\circ}{40 \angle 45^\circ} = 3 \angle -35^\circ \text{ A eff}$$

Le potenze complesse assorbite dalle impedenze sono

$$S_1 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z_1} = \frac{(120)^2}{60 \angle 30^\circ} = 240 \angle -30^\circ = 207.85 - j120 \text{ VA}$$

$$S_2 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z_2} = \frac{(120)^2}{40 \angle 45^\circ} = 360 \angle 45^\circ = 254.6 + j254.6 \text{ VA}$$

La potenza complessa totale è allora

$$S_t = S_1 + S_2 = 462.4 + j134.6 \text{ VA}$$

(a) La potenza apparente totale è

$$|S_t| = \sqrt{462.4^2 + 134.6^2} = 481.6 \text{ VA}$$

(b) La potenza reale totale è

$$P_t = \operatorname{Re}(S_t) = 462.4 \text{ W} \text{ o anche } P_t = P_1 + P_2.$$

(c) La potenza reattiva totale è

$$Q_t = \operatorname{Im}(S_t) = 134.6 \text{ VAR} \text{ o anche } Q_t = Q_1 + Q_2.$$

(d) Il pf = $P_t / |S_t| = 462.4 / 481.6 = 0.96$ (induttivo).

Si può ottenere una ulteriore verifica dei risultati calcolando la potenza complessa S_t , erogata dal generatore.

$$\begin{aligned} I_t &= I_1 + I_2 = (1.532 + j1.286) + (2.457 - j1.721) \\ &= 4 - j0.435 = 4.024 \angle -6.21^\circ \text{ A eff} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_t &= VI_t^* = (120 \angle 10^\circ)(4.024 \angle -6.21^\circ) \\ &= 482.88 \angle 16.21^\circ = 463 + j135 \text{ VA} \end{aligned}$$

che è la stessa di prima.

Esercizio 11.14 Due carichi collegati in parallelo assorbono rispettivamente 2 kW con un pf di 0.75 in anticipo e 4 kW con un pf di 0.95 in ritardo. Calcolare il pf complessivo dei due carichi. Determinare la potenza complessa fornita dal generatore.

Risposta 0.9972 (in anticipo), $6 - j0.4495$ kVA. ■

11.8 RIFASAMENTO

La maggior parte dei carichi presentati dagli apparecchi elettrici domestici (quali ad esempio lavatrici, condizionatori e frigoriferi) e industriali (ad esempio motori a induzione) sono di tipo induttivo e funzionano con un fattore di potenza in ritardo e di valore assoluto piccolo. Nonostante non sia possibile alterare la natura induttiva del carico, è almeno possibile aumentare il fattore di potenza.

Il processo che consente di aumentare il fattore di potenza senza alterare la tensione o la corrente fornite al carico originale è noto come rifasamento.

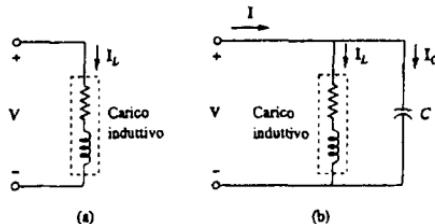


Figura 11.27
Rifasamento: (a) carico induttivo originale, (b) carico induttivo con fattore di potenza migliorato

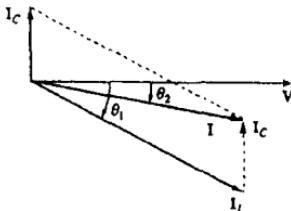
Poiché la maggior parte dei carichi è di tipo induttivo, come mostrato in Figura 11.27(a)³, il fattore di potenza di un carico può essere migliorato o corretto collegando deliberatamente un condensatore in parallelo al carico, come mostrato in Figura 11.27(b). L'effetto dell'aggiunta del condensatore può essere illustrato sia usando il triangolo delle potenze che con il diagramma fasoriale delle correnti interessate. La

³ Un carico induttivo viene rappresentato dal collegamento serie di un induttore e un resistore.

Figura 11.28 mostra quest'ultimo, nel quale si è supposto che il circuito in Figura 11.27(a) abbia un fattore di potenza $\cos \theta_1$, mentre quello in Figura 11.27(b) ha un fattore di potenza $\cos \theta_2$. Risulta evidente dalla Figura 11.28 che l'aggiunta di un condensatore ha fatto sì che l'angolo di fase fra la tensione di alimentazione e la corrente sia ridotto da θ_1 a θ_2 , aumentando il fattore di potenza. Si nota inoltre dai moduli dei vettori in Figura 11.28 che, a parità di tensione di alimentazione, il circuito in Figura 11.27(a) assorbe una corrente I_L maggiore della corrente I assorbita dal circuito in Figura 11.27(b). Le compagnie elettriche addebitano tariffe più alte per correnti più elevate, perché esse danno luogo a maggiori perdite di potenza (con un fattore quadratico, essendo $P = I^2 R$). È perciò nell'interesse sia dell'utente che della compagnia elettrica fare ogni sforzo possibile affinché il livello di corrente sia minimo, o mantenere il fattore di potenza il più vicino possibile all'unità. Scegliendo accuratamente il valore del condensatore, la corrente può essere fatta diventare totalmente in fase con la tensione, ciò che implica un fattore di potenza unitario.

Figura 11.28

Diagramma vettoriale che mostra l'effetto delle aggiunte di un condensatore in parallelo al carico induttivo.

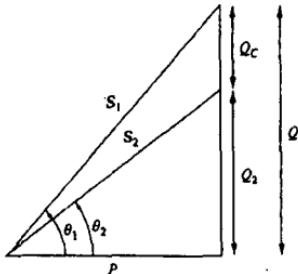


È possibile considerare il rifasamento da una prospettiva diversa. Si consideri il triangolo delle potenze in Figura 11.29. Se il carico induttivo originale ha una potenza apparente S_1 , allora

$$P = S_1 \cos \theta_1, \quad Q_1 = S_1 \sin \theta_1 = P \tan \theta_1 \quad (11.57)$$

Figura 11.29

Triangolo delle potenze che illustra l'operazione di rifasamento.



Se si vuole far aumentare il fattore di potenza da $\cos \theta_1$ a $\cos \theta_2$ senza alterare la potenza reale (cioè $P = S_2 \cos \theta_2$), la nuova potenza reattiva è

$$Q_2 = P \tan \theta_2 \quad (11.58)$$

La riduzione della potenza reattiva è dovuta al condensatore shunt, cioè

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2) \quad (11.59)$$

Ma dalla (11.49), $Q_C = V_{\text{eff}}^2 / X_C = \omega C V_{\text{eff}}^2$. Il valore richiesto per il condensatore shunt C si determina con

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{eff}}^2} = \frac{P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)}{\omega V_{\text{eff}}^2}$$

(11.60)

Si noti che la potenza reale P dissipata dal carico non viene influenzata dal rifasamento, perché la potenza media dovuta al condensatore è nulla.

Nonostante la situazione più comune sia quella di carico induttivo, è anche possibile il caso in cui il carico è capacitivo, cioè che il carico presenta un fattore di potenza in anticipo. In questo caso, è necessario collegare un induttore ai terminali del carico per ottenere il rifasamento. L'induttanza shunt L necessaria si può calcolare come

$$Q_L = \frac{V_{\text{eff}}^2}{X_L} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{V_{\text{eff}}^2}{\omega Q_L} \quad (11.61)$$

dove $Q_L = Q_1 - Q_2$, differenza fra il vecchio ed il nuovo valore della potenza reattiva.

Esempio 11.15

Quando viene collegato alla rete di alimentazione da 120 V (efficaci) e 60 Hz, un carico assorbe 4 kW con fattore di potenza induttivo di 0.8. Determinare il valore della capacità necessaria a fare aumentare il pf fino a 0.95.

Soluzione: Se il pf = 0.8, allora

$$\cos \theta_1 = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 36.87^\circ$$

dove θ_1 è lo sfasamento fra tensione e corrente. Si ottiene la potenza apparente dalla potenza reale e dal pf,

$$S_1 = \frac{P}{\cos \theta_1} = \frac{4000}{0.8} = 5000 \text{ VA}$$

La potenza reattiva è

$$Q_1 = S_1 \sin \theta_1 = 5000 \sin 36.87 = 3000 \text{ VAR}$$

Quando il pf viene aumentato a 0.95,

$$\cos \theta_2 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 18.19^\circ$$

La potenza reale P non è cambiata. La potenza apparente è invece diversa; il suo nuovo valore è

$$S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} = \frac{4000}{0.95} = 4210.5 \text{ VA}$$

La nuova potenza reattiva è

$$Q_2 = S_2 \sin \theta_2 = 1314.4 \text{ VAR}$$

La differenza fra la nuova e la vecchia potenza reattiva è dovuta alla aggiunta del condensatore in parallelo al carico. La potenza reattiva dovuta al condensatore è

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3000 - 1314.4 = 1685.6 \text{ VAR}$$

e

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{eff}}^2} = \frac{1685.6}{2\pi \times 60 \times 120^2} = 310.5 \mu\text{F}$$

Note: I condensatori sono generalmente acquistati per le tensioni previste per il normale funzionamento. In questo esempio, la tensione massima sul condensatore sarà di circa 170 V (valore di picco). Si suggerisce di acquisire un condensatore con una tensione pari a 200 V.

■ **Esercizio 11.15** Determinare il valore della capacità da collegare in parallelo per correggere un carico di 140 kVAR con pf di 0.85 induttivo per portarlo ad un pf pari a 1. Supponere che il carico sia alimentato da una linea da 110 V (efficaci) a 60 Hz.

Risposta 30.69 mF. ■

11.9 APPLICAZIONI

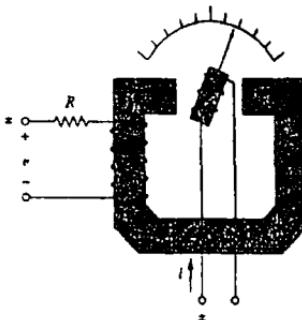
In questo paragrafo vengono presi in esame due importanti esempi applicativi: la misura delle potenze e il metodo con il quale le aziende elettriche determinano i costi dei consumi di elettricità.

11.9.1 Misura delle potenze

La potenza media assorbita da un carico viene misurata con uno strumento chiamato *wattmetro*³.

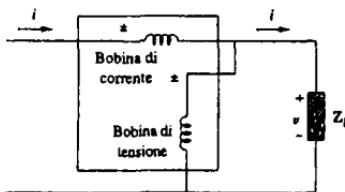


Figura 11.30
Wattmetro



La Figura 11.30 mostra un wattmetro, che consta essenzialmente di due bobine: la bobina della corrente e quella della tensione. La bobina di corrente, che ha impedenza estremamente bassa (idealmente zero), viene collegata in serie al carico (Figura 11.31) ed è percorsa dalla corrente del carico. La bobina⁴ della tensione, avente impedenza molto grande (idealmente infinita), viene collegata in parallelo al carico come mostrato in Figura 11.31 e viene sollecitata dalla tensione del carico. La bobina della corrente si comporta come un corto circuito a causa della sua impedenza estremamente bassa; la bobina di tensione come un circuito aperto, per la sua impedenza molto elevata. Ne consegue che la presenza del wattmetro non disturba il funzionamento del circuito e non ha effetto apprezzabile sulla misura della potenza.

Figura 11.31
Wattmetro collegato ad un carico.



Quando le due bobine sono eccitate, l'inerzia meccanica del sistema mobile produce un angolo di deflessione che è proporzionale al valore medio del prodotto $v(t)i(t)$. Se la tensione e la corrente del carico sono $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, i corrispondenti fasori efficaci sono

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} / \theta_v \quad \text{e} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} / \theta_i \quad (11.62)$$

³ La potenza reattiva viene misurata con uno strumento detto *varmetro*. Esso viene solitamente collegato al carico allo stesso modo del wattmetro.

⁴ Alcuni wattmetri non hanno bobine; il wattmetro qui descritto è quello di tipo elettromagnetico.

e il wattmetro misura la potenza media data da

$$P = |V_{\text{eff}}||I_{\text{eff}}| \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.63)$$

Come si vede in Figura 11.31, ciascuna delle bobine del wattmetro ha due terminali, uno dei quali reca il segno \pm . Per ottenere una deflessione positiva, il terminale \pm della bobina di corrente deve essere rivolto verso il generatore, mentre il terminale \pm della bobina di tensione viene collegato alla linea a cui è collegata la bobina di corrente. Invertendo i collegamenti di entrambe le bobine si ha ancora una deflessione positiva. Invertendo invece soltanto una delle due bobine si ha una deflessione negativa e quindi nessuna lettura sul wattmetro.

Esempio 11.16

Determinare la lettura del wattmetro nel circuito di Figura 11.32.

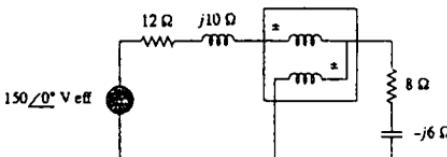


Figura 11.32
Per l'Esempio 11.16.

Soluzione

1. Dare una definizione precisa del problema.

Il problema è definito in modo chiaro. In questo problema lo studente potrebbe verificare i risultati costruendo il circuito in laboratorio e inserendo un wattmetro reale.

2. Elenare ciò che si conosce riguardo al problema.

In questo problema occorre determinare la potenza media erogata da una sorgente esterna ad un carico per mezzo di una serie di impedenze.

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

Il problema è di semplice soluzione, infatti si devono calcolare l'ampiezza e la fase della corrente che scorre nel carico, ma anche l'ampiezza e la fase della tensione ai terminali del carico stesso. Questi valori si potrebbero determinare anche usando PSpice, che quindi verrà usato per verificare i risultati.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

Nella Figura 11.32, il wattmetro legge la potenza media assorbita dalla impedenza $(8 - j6)\Omega$ perché la bobina di corrente è in serie alla impedenza mentre la bobina di tensione è in parallelo ad essa. La corrente nel circuito è

$$I_{\text{eff}} = \frac{150 \angle 0^\circ}{(12 + j10) + (8 - j6)} = \frac{150}{20 + j4} \text{ A}$$

La tensione sull'impedenza $(8 - j6)\Omega$ è

$$V_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}(8 - j6) = \frac{150(8 - j6)}{20 + j4} \text{ V}$$

La potenza complessa è

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = \frac{150(8 - j6)}{20 + j4} \cdot \frac{150}{20 - j4} = \frac{150^2(8 - j6)}{20^2 + 4^2} = 423.7 - j324.6 \text{ VA}$$

La lettura del wattmetro è quindi

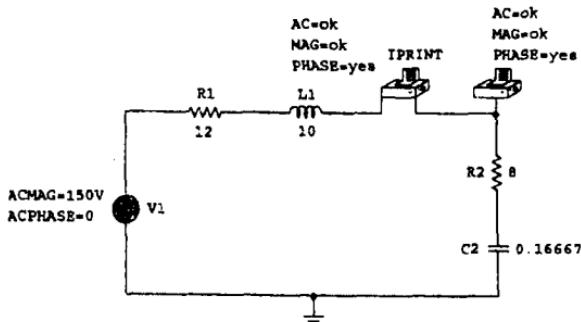
$$P = \text{Re}(S) = 432.7 \text{ W}$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Si possono verificare i risultati usando PSpice

Figura 11.33

Simulazione con PSpice.



La simulazione fornisce i seguenti valori

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
1.592E-01	7.354E+00	-1.131E+01
e		
FREQ	VM(\$N_0004)	IP(\$N_0004)
1.592E-01	7.354E+01	-4.818E+01

Per verificare i risultati si calcola la potenza dissipata dalla resistenza di carico (8Ω), in cui scorre una corrente pari a 7.354 A :

$$P = (I_L)^2 R = (7.354)^2 8 = 432.7 \text{ W}$$

che è lo stesso valore calcolato prima, quindi i risultati sono verificati.

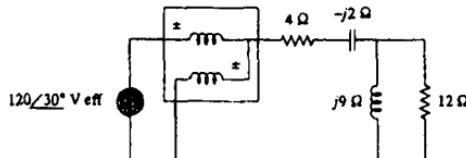
6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è risolto il problema in maniera ottimale per cui si possono presentare i risultati come la soluzione del problema.

Esercizio 11.16 Determinare la lettura del wattmetro per il circuito di Figura 11.33.

Figura 11.34

Per l'Esercizio 11.16



Risposta 1437 W.

11.9.2 Costo dei consumi di elettricità

Un carico avente fattore di potenza basso risulta costoso da servire, perché richiede correnti elevate, come si è visto nel Paragrafo 11.8. La situazione ideale sarebbe quella di assorbire la minima corrente necessaria dalla sorgente, così che $S = P$, $Q = 0$ e $\text{pf} = 1$. Un carico con Q diversa da zero implica dell'energia aggiuntiva che fluisce in entrambe le direzioni, alternativamente, fra il carico e il generatore, dando luogo ad ulteriori perdite di potenza. Con questa prospettiva, le compagnie elettriche spesso incoraggiano i loro clienti ad avere fattori di potenza il più vicini possibile all'unità, e penalizzano quei clienti che non migliorano il proprio fattore di potenza.

Le compagnie elettriche dividono i propri utenti in categorie: residenziali, commerciali e industriali, oppure utenti di bassa potenza, media potenza e grande potenza. Ogni categoria ha una differente struttura tariffaria. La quantità di energia consumata in kilowattore (kWh) viene misurata usando un misuratore di kilowattore (contatore) installato presso il cliente.

Nonostante il metodo di tariffazione dei clienti sia diverso per le diverse compagnie, la tariffa è spesso composta di due parti. La prima parte è fissa e corrisponde al costo della generazione, trasmissione e distribuzione della elettricità corrispondente al requisito

di carico del cliente. Questa parte della tariffa si esprime generalmente come un certo prezzo per kW di massima richiesta. Oppure può essere basata sui kVA di massima richiesta, per tenere conto del fattore di potenza del cliente. Può essere imposta anche una penalità per il pf in termini di un certo importo per ogni diminuzione di 0.01 del fattore di potenza al di sotto di un valore prescritto, ad esempio 0.85 o 0.9. Oppure può essere riconosciuto un credito per ogni 0.01 del pf al di sopra del valore prescritto.

La seconda parte è proporzionale all'energia consumata in kWh; essa può avere una tariffazione progressiva come, ad esempio, i primi 100 kWh a 16 centesimi/kWh, i successivi 200 kWh a 10 centesimi/kWh e così via. La bolletta viene quindi calcolata in base alla seguente equazione:

$$\text{Costo totale} = \text{Costo fisso} + \text{Costo dell'energia} \quad (11.64)$$

Esempio 11.17

Un'industria manifatturiera consuma 200 MWh in un mese. Se la massima richiesta è di 1600 KW, calcolare la bolletta del consumo di elettricità in base alla seguente tariffa a due parti:

Costo fisso: € 5.00 al mese per kW (per l'invio della fattura)
Costo dell'energia: 8 centesimi per kWh per i primi 50000 KWh,
5 centesimi per kWh per l'energia eccedente.

Soluzione

Il costo fisso mensile vale

$$€ 5.00 \times 1600 = € 8000.00 \quad (11.17.1)$$

Il costo dell'energia per i primi 50000 KWh è

$$€ 0.08 \times 50000 = € 4000.00 \quad (11.17.2)$$

L'energia eccedente vale $200000 \text{ KWh} - 50000 \text{ KWh} = 150000 \text{ KWh}$, a cui corrisponde un costo pari a

$$€ 0.05 \times 150000 = € 7500.00 \quad (11.17.3)$$

Sommando i tre costi delle (11.17.1), (11.17.2) e (11.17.3) si ricava

$$\text{Costo totale mensile} = € 8000.00 + € 4000.00 + € 7500.00 = € 19500.00$$

È evidente che il costo dell'elettricità è troppo elevato. Ma spesso questa è una piccola parte del costo complessivo di produzione per ottenere prodotti validi, o del prezzo di vendita del prodotto finito.

■ Esercizio 11.17 La lettura mensile del contatore di energia di una cartiera è la seguente

Richiesta massima: 32 MW
Energia consumata: 500 MWh

Usando la tariffa a due parti dell'Esempio 11.17, calcolare la bolletta mensile per la cartiera.

Risposta € 18 500.00. ■

Esempio 11.18

Un carico da 300 kW alimentato a 13 kV (eff), funziona per 520 ore al mese con fattore di potenza pari all'80%. Calcolare il costo medio mensile basandosi sulla seguente tariffa semplificata:

Costo dell'energia: 8 centesimi per kWh,
Sanzione per fattore di potenza: 0.1% del costo dell'energia per ogni 0.01 di decremento del fattore di potenza partendo dal valore 0.85,
Credito per fattore di potenza: 0.1% del costo dell'energia per ogni 0.01 di incremento del fattore di potenza partendo dal valore 0.85.

Soluzione

L'energia consumata è

$$W = 300 \text{ kW} \times 520 \text{ h} = 156 \text{ MWh}$$

Il fattore di potenza durante il funzionamento è $80\% = 0.8$, cioè è inferiore di 5×0.01 al valore 0.85. A questo fattore di potenza corrisponde una sanzione pari a $5 \times 0.1\% = 0.5\%$.

L'incremento del consumo di energia è pari a

$$\Delta W = 156000 \times \frac{5 \times 0.1}{100} = 780 \text{ kWh}$$

L'energia totale è

$$W_t = W + \Delta W = 156000 + 780 = 156.780 \text{ kWh}$$

Infine il costo mensile che si ottiene è

$$\text{costo} = 6 \text{ centesimi} \times W_t = € 0.06 \times 156780 = € 9406.80$$

■ **Esercizio 11.18** Un forno a induzione da 800 kW con fattore di potenza di 0.88 funziona 20 ore al giorno, per 26 giorni al mese. Calcolare la bolletta del consumo di elettricità basandosi sulla tariffa dell'Esempio 11.18.

Risposta € 24 885.12.

CASO PRATICO Condensatore di accoppiamento

1) Introduzione al Caso Pratico

Si esamina ora una interessante progetto relativo agli argomenti studiati in questo capitolo: il trasferimento della massima potenza ad un carico. In particolare si tratta di un dispositivo formato da un amplificatore ed un altoparlante: fra i due viene inserito un condensatore con la funzione di realizzare un accoppiamento con il massimo trasferimento di potenza dall'amplificatore all'altoparlante.

2) Descrizione e Specifiche

Un condensatore di accoppiamento viene utilizzato per bloccare la corrente costante di un amplificatore, come mostrato in Figura 34(a). L'amplificatore ed il condensatore si comportano come un generatore, mentre l'altoparlante costituisce il carico. Si considerano note la resistenza interna dell'amplificatore e il valore del condensatore pari a rispettivamente a 10Ω e 40 nF , come mostrato in Figura 34(b).

Inoltre, da misure effettuate sull'altoparlante si sono ricavati i seguenti valori:

- misura di resistenza in corrente continua pari a 10Ω ;
- misura di impedenza in corrente alternata sinusoidale ($\omega = 100 \text{ rad/s}$) pari a 12.8Ω .

Determinare:

- A quale frequenza si ha il massimo trasferimento di potenza all'altoparlante?
- Se $V_s = 4.6 \text{ V}$ (eff.), quanta potenza viene trasferita all'altoparlante a tale frequenza?

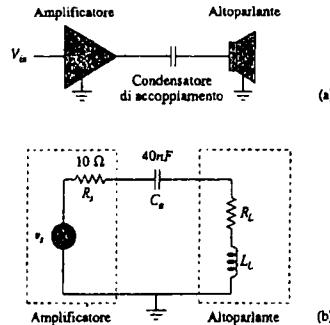


Figura 11.35
Per il Caso Pratico
"Condensatore di accoppiamento".

3) Obiettivi

Si deve calcolare l'impedenza dell'altoparlante, e quindi si determina la frequenza che consente il massimo trasferimento di potenza dall'equivalente Thevenin, come si è visto in questo capitolo. Infine si calcola la potenza erogata all'altoparlante con questo valore di frequenza.

4) Elaborazione e Calcoli

Il circuito è diviso in due parti:

- Generatore, cioè l'amplificatore e il condensatore di accoppiamento.
- Carico, cioè l'altoparlante.

A cui corrispondono le due impedenze

$$\bullet \text{ Impedenza del generatore} \quad Z_S = R_S - jX_C = R_S - j \frac{1}{C_0 \omega}$$

$$\bullet \text{ Impedenza del carico} \quad Z_L = R_L + jX_L = R_L + j\omega L_L$$

Dalle misure effettuate sull'altoparlante, di tipo ohmico-induttivo, si ricava l'impedenza Z_L .

La misura in corrente continua fornisce il valore resistivo dell'impedenza $R_L = 10 \Omega$, infatti $X_L = \omega L = 2\pi f L = 0$, essendo nulla la frequenza.

Dalla misura in corrente alternata si ricava l'impedenza $Z_L = 12.8 \Omega$, e quindi si calcola l'induttanza dell'altoparlante

$$L_L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{\sqrt{Z_L^2 - R_L^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{12.8^2 - 10^2}}{100} = 80 \text{ mH} \quad (11.65)$$

(a) Allo scopo di avere il massimo trasferimento di potenza sul carico-altoparlante, l'impedenza del generatore deve uguagliare il complesso coniugato dell'impedenza del carico, cioè $Z_S = Z_L^*$.

Quindi si scrivono le seguenti relazioni:

$$R_S = R_L \quad (11.66)$$

$$X_C = X_L \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{C_0 \omega} = \omega L \quad (11.67)$$

Infine si ricava la frequenza per cui si ha il massimo trasferimento di potenza

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_0 L}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(40 \times 10^{-9}) \times (80 \times 10^{-3})}} = 2.814 \text{ kHz} \quad (11.68)$$

(b) Si calcola la potenza trasferita al carico-altoparlante alla frequenza di 2.814 kHz con $V_s = 4.6 \text{ V}$ (eff.)

$$P_L = \frac{V_s^2}{4R_L} = \frac{4.6^2}{4 \times 10} = 529 \text{ mW} \quad (11.69)$$

5) Analisi e Verifica

Si verifica il risultato con le potenze complesse, dividendo il circuito in tre sezioni come mostrato in Figura 35.

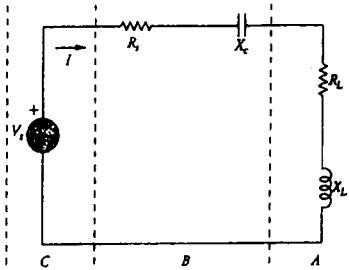


Figura 11.36
Verifica con le potenze complesse.

Si pone la fase di V_s pari a 0° , e si calcola la corrente

$$I = \frac{V_s / 0^\circ}{(R_S - jX_C) + (R_L + jX_L)} = \frac{4.6 / 0^\circ}{20} = 230 / 0^\circ \text{ mA} \quad (11.70)$$

Il valore delle due reattanze alla frequenza di 2.814 kHz è pari a

$$X_L = \omega L_L = 2\pi f L_L = 1.414 \text{ k}\Omega = X_C \quad (11.71)$$

Si calcolano prima le potenze complesse delle tre sezioni

$$S_A = P_A + jQ_A = R_L I^2 + jX_L I^2 = 0.529 + j74.8 \text{ VA}$$

$$S_B = P_B + jQ_B = R_S I^2 - jX_C I^2 = 0.529 - j74.8 \text{ VA}$$

$$S_C = V_S \cdot I_S^* = 4.6 \angle 0^\circ \times 0.23 \angle 0^\circ = 1.058 \text{ VA}$$

e risulta verificato il bilancio della potenza complessa, cioè

$$S_A + S_B = S_C = 1.058 \text{ VA} \quad (11.72)$$

Come si vede, la potenza reale che transita nelle sezioni A e B è proprio la potenza di 529 mW, come calcolato in precedenza.

SOMMARIO

- 1) La potenza istantanea assorbita da un elemento è il prodotto della tensione ai terminali dell'elemento per la corrente che scorre nell'elemento.

$$p = vi$$

- 2) La potenza media P o potenza reale (in Watt), è il valore medio della potenza istantanea in un periodo T

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T pdt$$

Se $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, allora si ha $V_{eff} = V_m / \sqrt{2}$, $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$ e $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta_v - \theta_i)$.

Induttori e condensatori non assorbono potenza media, mentre la potenza media assorbita da un resistore è $(1/2)I_m^2 R = I_{eff}^2 R$.

- 3) Il massimo trasferimento di potenza media su un carico si ha quando l'impedenza del carico è pari al complesso coniugato dell'impedenza di Thevenin "vista" tra i terminali dal carico ($Z_L = Z_{Th}^*$).

- 4) Il valore efficace di un segnale periodico $x(t)$ è il suo valore rms, cioè

$$X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt}$$

Per un segnale sinusoidale, il valore efficace o rms è il rapporto tra la sua ampiezza e $\sqrt{2}$.

- 5) Il fattore di potenza è il valore del coseno della differenza tra la fase della tensione e la fase della corrente:

$$pf = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

È anche uguale al coseno dell'argomento dell'impedenza di carico oppure al rapporto tra la potenza reale P e la potenza apparente S . Il fattore di potenza è induttivo (o in ritardo) se la corrente è in ritardo sulla tensione (carico induttivo), mentre è capacitivo (o in anticipo), se la corrente è in anticipo sulla tensione (carico capacitivo).

- 6) La potenza apparente (in VA) è il prodotto tra i valori efficaci di tensione e corrente

$$S = V_{eff} I_{eff}$$

È anche uguale a $S = |S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$, dove P è la potenza reale e Q è la potenza reattiva.

- 7) La potenza reattiva Q (in VAR) è:

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i) = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

- 8) La potenza complessa S (in VA) è il prodotto tra il favore efficace della tensione e il complesso coniugato del favore efficace della corrente. È anche uguale alla somma complessa tra la potenza reale P e la potenza reattiva Q .

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} / \underline{\theta_v - \theta_i} = P + jQ$$

oppure

$$S = I_{\text{eff}}^2 Z = V_{\text{eff}}^2 / Z$$

- 9) La potenza complessa totale in un circuito è la somma delle potenze complesse di ogni singolo componente. La potenza reale totale e la potenza reattiva totale sono anche uguali, rispettivamente, alla somma delle singole potenze reali e reattive, ma la potenza apparente totale non si può calcolare come somma delle singole potenze apparenti.
- 10) Il rifasamento è necessario per ragioni economiche; esso è il processo di miglioramento del fattore di potenza di un carico, e si ottiene riducendo la potenza reattiva totale.
- 11) Il wattmetro è lo strumento che misura la potenza media. Si può misurare l'energia consumata con un misuratore di kilowattore (contatore).

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 11.1 La potenza media assorbita da un induttore è zero.
 (a) Vero (b) Falso
- 11.2 L'impedenza di Thevenin di una rete vista dai terminali del carico è $80 + j55\Omega$. Per avere il massimo trasferimento di potenza, l'impedenza di carico deve essere:
 (a) $-80 + j55\Omega$ (b) $-80 - j55\Omega$
 (c) $80 - j55\Omega$ (d) $80 + j55\Omega$
- 11.3 L'ampiezza della tensione disponibile nelle prese da 220 V, 50 Hz di casa è:
 (a) 110 V (b) 120 V (c) 170 V (d) 311 V
- 11.4 Se l'impedenza di carico è $20 - j20$, il fattore di potenza è
 (a) $\angle -45^\circ$ (b) 0 (c) 1
 (d) 0.7071 (e) nessuna delle precedenti
- 11.5 La quantità che contiene tutte le informazioni sulla potenza in un certo carico è
 (a) il fattore di potenza (b) la potenza apparente
 (c) la potenza media (d) la potenza reattiva
 (e) la potenza complessa
- 11.6 La potenza reattiva si misura in:
 (a) watt (b) VA
 (c) VAR (d) nessuna delle precedenti
- 11.7 Nel triangolo delle potenze mostrato in Figura 11.37(a), la potenza reattiva è:
 (a) 1000 VAR in anticipo (b) 1000 VAR in ritardo
 (c) 866 VAR in anticipo (d) 866 VAR in ritardo

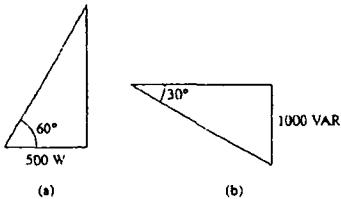


Figura 11.37 Per le domande di riepilogo 11.7 e 11.8.

- 11.8 Nel triangolo delle potenze di Figura 11.37(b), la potenza apparente è:
 (a) 2000 VA (b) 1000 VAR
 (c) 866 VAR (d) 500 VAR
- 11.9 Un generatore è collegato a tre carichi Z_1 , Z_2 e Z_3 in parallelo. Quale delle seguenti affermazioni non è vera?
 (a) $P = P_1 + P_2 + P_3$ (b) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$
 (c) $S = S_1 + S_2 + S_3$ (d) $S = S_1 + S_2 + S_3$
- 11.10 Lo strumento per la misura della potenza media è:
 (a) il voltmetro (b) l'ampierometro
 (c) il wattmetro (d) il varmetro
 (e) il misuratore di kilowattore

Risposte: 11.1a, 11.2c, 11.3c, 11.4d, 11.5e, 11.6c, 11.7d, 11.8a, 11.9c, 11.10c.

PROBLEMI

Paragrafo 11.2 Potenza istantanea e potenza media

- 11.1 Se $v(t) = 160 \cos 50t$ V e $i(t) = -20 \sin(50t - 30^\circ)$ A, calcolare la potenza istantanea e la potenza media.
- 11.2 Dato il circuito di Figura 11.38, calcolare la potenza media erogata o assorbita da ciascun elemento.

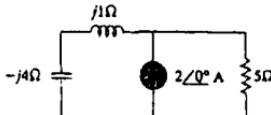


Figura 11.38 Per il Problema 11.2.

- 11.3 Un carico è costituito da un resistore da 60Ω in parallelo ad un condensatore da $90\mu F$. Se il carico è collegato ad un generatore di tensione $v_s = 40 \cos(2000t)$ V, calcolare la potenza media fornita al carico.
- 11.4 Calcolare la potenza media dissipata dal resistore nel circuito di Figura 11.39. Verificare inoltre il bilancio delle potenze.

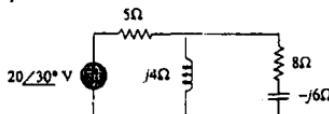


Figura 11.39 Per il Problema 11.4.

- 11.5 Supponendo che $v_s = 8 \cos(2t - 40^\circ)$ V nel circuito di Figura 11.40, determinare la potenza media erogata a ciascuno degli elementi passivi.

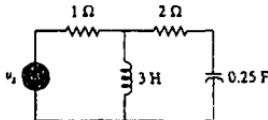


Figura 11.40 Per il Problema 11.5.

- 11.6 Nel circuito di Figura 11.41, $i_s = 6 \cos(10^3 t)$ A. Determinare la potenza media assorbita dal resistore da 50Ω .

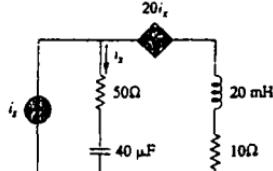


Figura 11.41 Per il Problema 11.6.

- 11.7 Dato il circuito di Figura 11.42, determinare la potenza media assorbita dal resistore da 10Ω .

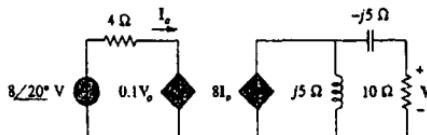


Figura 11.42 Per il Problema 11.7.

- 11.8 Nel circuito di Figura 11.43, determinare la potenza media assorbita dal resistore da 40Ω .

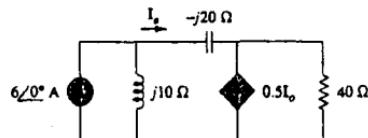


Figura 11.43 Per il Problema 11.8.

- 11.9 Nel circuito con amplificatore operazionale di Figura 11.44, $V_s = 10\angle30^\circ$ V RMS. Calcolare la potenza media assorbita dal resistore da $20\text{k}\Omega$.

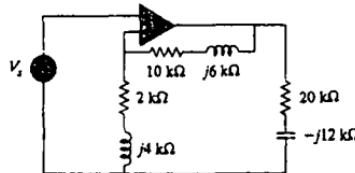


Figura 11.44 Per il Problema 11.9.

- 11.10 Nel circuito con operazionale di Figura 11.45, determinare la potenza media totale assorbita dai resistori.

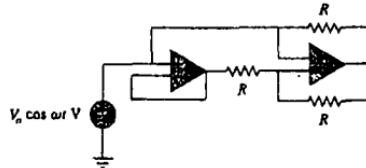


Figura 11.45 Per il Problema 11.10.

- 11.11 Nella rete di Figura 11.46, si supponga che l'impedenza della porta sia

$$Z_{eq} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} / -\tan^{-1} \omega RC$$

Si determini la potenza media consumata dalla rete quando $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 200\text{nF}$ e $i = 2 \sin(377t + 22^\circ)$ mA.

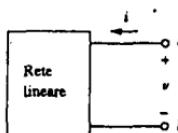


Figura 11.46 Per il Problema 11.11.

Paragrafo 11.3 Massimo trasferimento di potenza media

- 11.12 Per il circuito di Figura 11.47, determinare l'impedenza di carico Z_L per il massimo trasferimento di potenza (su Z_L). Calcolare inoltre la massima potenza assorbita dal carico.

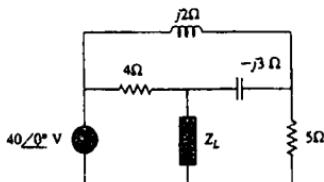


Figura 11.47 Per il Problema 11.12.

- 11.13 L'impedenza Thevenin di una sorgente è $Z_{Th} = 102 + j60 \Omega$, e la tensione massima Thevenin è $V_{Th} = 110 + j0 \text{ V}$. Calcolare la massima potenza media che la sorgente può erogare.

- 11.14 Si vuole trasferire la massima potenza ad un carico Z nel circuito di Figura 11.48. Calcolare Z e la massima potenza trasmessa. Supponere $i_s = 5 \cos(40t) \text{ A}$.

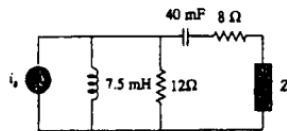


Figura 11.48 Per il Problema 11.14.

- 11.15 Nel circuito di Figura 11.49, determinare il valore di Z_L che assorbe la massima potenza e il valore di tale massima potenza.

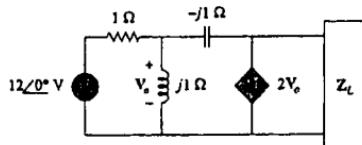


Figura 11.49 Per il Problema 11.15.

- 11.16 Nel circuito di Figura 11.50, determinare la massima potenza erogata al carico Z_L .

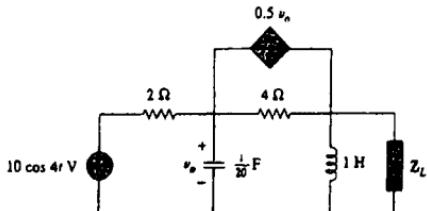


Figura 11.50 Per il Problema 11.16.

- 11.17 Calcolare il valore di Z_L nel circuito di Figura 11.51 in modo che Z_L riceva la massima potenza media. Quanto vale la massima potenza media ricevuta da Z_L ?

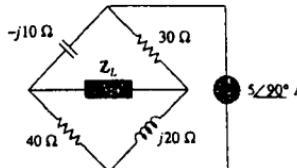


Figura 11.51 Per il Problema 11.17.

- 11.18 Determinare il valore di Z_L nel circuito di Figura 11.52 in modo da avere il massimo trasferimento di potenza.

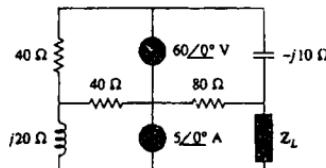


Figura 11.52 Per il Problema 11.18.

- 11.19 Il resistore variabile R nel circuito di Figura 11.53 viene regolato in modo da assorbire la massima potenza media. Determinare il valore di R e la massima potenza media assorbita.

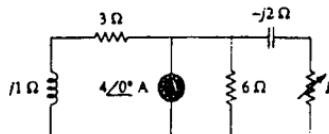


Figura 11.53 Per il Problema 11.19.

- 11.20 La resistenza di carico R_L in Figura 11.54 viene regolata in modo da assorbire la massima potenza media. Calcolare il valore di R_L e la massima potenza media.

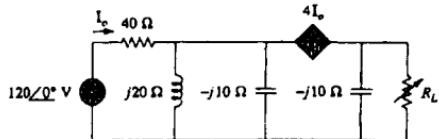


Figura 11.54 Per il Problema 11.20.

- 11.21 Supponendo che l'impedenza di carico debba essere puramente resistiva, quale carico bisogna collegare ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 11.55 in modo che al carico venga trasferita la massima potenza?

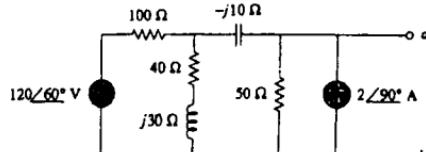


Figura 11.55 Per il Problema 11.21.

Paragrafo 11.4 Valori efficaci e RMS

- 11.22** Determinare il valore RMS della sinusoide raddrizzata mostrata in Figura 11.56.

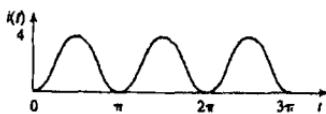


Figura 11.56 Per il Problema 11.22.

- 11.23** Determinare il valore RMS della tensione mostrata in Figura 11.57.

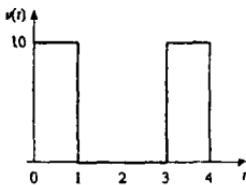


Figura 11.57 Per il Problema 11.23.

- 11.24** Determinare il valore RMS della forma d'onda in Figura 11.58.

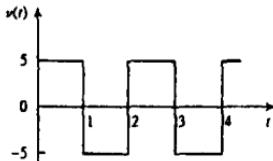


Figura 11.58 Per il Problema 11.24.

- 11.25** Determinare il valore RMS della tensione illustrata in Figura 11.59.

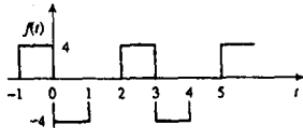


Figura 11.59 Per il Problema 11.25.

- 11.26** Determinare il valore efficace della forma d'onda di tensione in Figura 11.60.

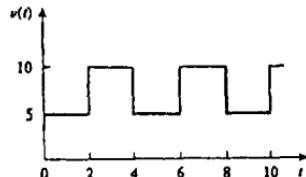


Figura 11.60 Per il Problema 11.26.

- 11.27** Calcolare il valore RMS della forma d'onda di corrente in Figura 11.61.

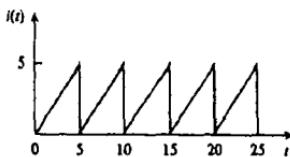


Figura 11.61 Per il Problema 11.27.

- 11.28** Determinare il valore RMS della forma d'onda di tensione di Figura 11.62 e la potenza media assorbita da un resistore da $2\ \Omega$ a cui la tensione è applicata.

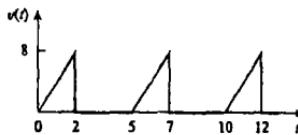


Figura 11.62 Per il Problema 11.28.

- 11.29** Calcolare il valore efficace della forma d'onda di corrente in Figura 11.63 e la potenza media erogata ad un resistore da $12\ \Omega$ quando è attraversato da tale corrente.

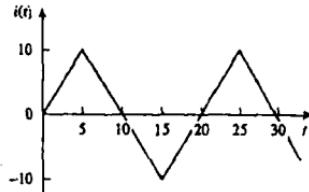


Figura 11.63 Per il Problema 11.29.

- 11.30** Calcolare il valore RMS della forma d'onda illustrata in Figura 11.64.

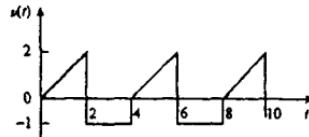


Figura 11.64 Per il Problema 11.30.

- 11.31** Determinare il valore RMS del segnale mostrato in Figura 11.65.

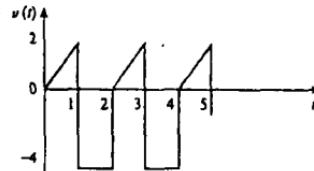


Figura 11.65 Per il Problema 11.31.

- 11.32 Calcolare il valore RMS della forma d'onda di corrente mostrata in Figura 11.66.

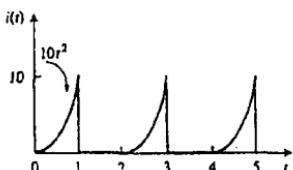


Figura 11.66 Per il Problema 11.32.

- 11.33 Determinare il valore RMS della forma d'onda di Figura 11.67.



Figura 11.67 Per il Problema 11.33.

- 11.34 Determinare il valore efficace di $f(t)$, definita in Figura 11.68.

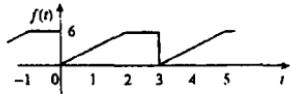


Figura 11.68 Per il Problema 11.34.

- 11.35 Un ciclo di una forma d'onda periodica di tensione è illustrato in Figura 11.69. Determinare il valore efficace della tensione. Si noti che il ciclo inizia a $t = 0$ e finisce a $t = 6$ s.

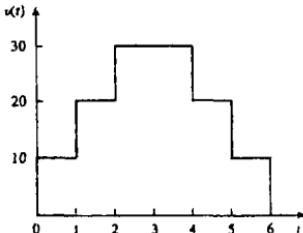


Figura 11.69 Per il Problema 11.35.

- 11.36 Calcolare il valore RMS per ciascuna delle seguenti funzioni:

$$(a) i(t) = 10 \text{ A} \quad (b) v(t) = 4 + 3 \cos 5t \text{ V}$$

$$(c) i(t) = 8 - 6 \sin 2t / \text{A} \quad (d) v(t) = 5 \sin t + 4 \cos 7t \text{ V}$$

- 11.37 Calcolare il valore RMS della somma delle seguenti tre correnti:

$$i_1 = 8A \quad i_2 = 4 \sin(t + 10^\circ)A \quad i_3 = 6 \cos(2t + 30^\circ)A$$

Paragrafo 11.5 Potenza apparente e fattore di potenza

- 11.38 Per il circuito di potenza di Figura 11.70 calcolare: (a) la potenza media; (b) la potenza reattiva; (c) il fattore di potenza. Si noti che 220V è un valore efficace.

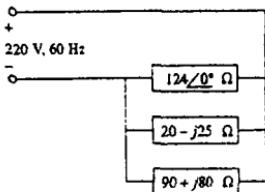
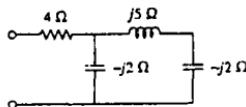


Figura 11.70 Per il Problema 11.38.

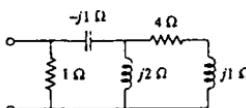
- 11.39 Un motore AC con impedenza $Z_L = 4.2 + j3.6 \Omega$ è alimentato con un generatore da 220 V, 60 Hz. Calcolare: (a) il fattore di potenza, P e Q ; (b) determinare il valore del condensatore da inserire in parallelo al motore per rendere unitario il fattore di potenza.

- 11.40 Un carico formato da un motore a induzione, assorbe 80 kW con $p_f = 0.72$ (induttivo), se alimentato da una linea elettrica di potenza con 220 V, 60 Hz. Calcolare il valore del condensatore necessario per incrementare il fattore di potenza a 0.92.

- 11.41 Calcolare il fattore di potenza per ciascuno dei circuiti in Figura 11.71. Per ciascun fattore di potenza specificare la natura capacitiva o induttiva



(a)



(b)

Figura 11.71 Per il Problema 11.41.

Paragrafo 11.6 Potenza complessa

- 11.42 Un generatore da 220 V, 60 Hz è applicato a una impedenza di carico Z . La potenza apparente del carico è di 120 VA con un fattore di potenza pari a 0.707 (induttivo).

(a) Calcolare la potenza complessa.

(b) Calcolare il valore RMS della corrente assorbita dal carico.

(c) Determinare l'impedenza Z .

(d) Supponendo $Z = R + j\omega L$, calcolare i valori di R e L .

- 11.43 Un generatore fornisce 50 kVA ad un carico con fattore di potenza induttivo del 65 percento. Determinare le potenze media e reattiva del carico.

- 11.44 Calcolare la potenza complessa erogata dal generatore v_s , per la rete in Figura 11.72. Supponere
 $v_s = 100 \cos(2000t)$ V.

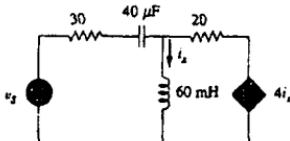


Figura 11.72 Per il Problema 11.44.

- 11.45 La tensione su un carico e la corrente che lo attraversa sono date da

$$v(t) = 20 + 60\cos 100t \text{ V}$$

$$i(t) = 1 - 0.5\sin 100t \text{ A}$$

Calcolare:

- (a) i valori RMS della tensione e della corrente
- (b) la potenza media dissipata nel carico

- 11.46 Per i seguenti fasori di tensione e di corrente, calcolare la potenza complessa, la potenza apparente, la potenza reale e la potenza reattiva. Specificare se il pf è capacitivo o inattivo.

- (a) $V = 220 \angle 30^\circ$ V eff, $I = 0.5 \angle 60^\circ$ A eff
- (b) $V = 250 \angle -10^\circ$ V eff,
 $I = 6.2 \angle -25^\circ$ A eff
- (c) $V = 120 \angle 0^\circ$ V eff, $I = 2.4 \angle -15^\circ$ A eff
- (d) $V = 160 \angle 45^\circ$ V eff, $I = 8.5 \angle 90^\circ$ A eff

- 11.47 Per ciascuno dei seguenti casi, determinare la potenza complessa, la potenza media e la potenza reattiva:

- (a) $v(t) = 112 \cos(\omega t + 10^\circ)$ V,
 $i(t) = 4 \cos(\omega t - 50^\circ)$ A
- (b) $v(t) = 160 \cos 377t$ V,
 $i(t) = 4 \cos(377t + 45^\circ)$ A
- (c) $V = 80 \angle 60^\circ$ V eff, $Z = 50 \angle 30^\circ \Omega$
- (d) $I = 10 \angle 60^\circ$ A eff, $Z = 100 \angle 45^\circ \Omega$

- 11.48 Determinare la potenza complessa per i seguenti casi:

- (a) $P = 269 \text{ W}$, $Q = 150 \text{ VAR}$ (capacitiva)
- (b) $Q = 2000 \text{ VAR}$, $\text{pf} = 0.9$ (capacitivo)
- (c) $S = 600 \text{ VA}$, $Q = 450 \text{ VAR}$ (induttiva)
- (d) $V_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$, $P = 1 \text{ kW}$,
 $|Z| = 40 \Omega$ (induttiva)

- 11.49 Determinare la potenza complessa per i seguenti casi:

- (a) $P = 4 \text{ kW}$, $\text{pf} = 0.86$ (induttivo)
- (b) $S = 2 \text{ kVA}$, $P = 1.6 \text{ kW}$ (capacitiva)
- (c) $V_{\text{eff}} = 208 \angle 20^\circ$ V, $I_{\text{eff}} = 6.5 \angle -50^\circ$ A
- (d) $V_{\text{eff}} = 120 \angle 30^\circ$ V, $Z = 40 + j60 \Omega$

- 11.50 Calcolare l'impedenza complessiva per i seguenti casi:

- (a) $P = 1000 \text{ W}$, $\text{pf} = 0.8$ (capacitivo),
 $V_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$
- (b) $P = 1500 \text{ W}$, $Q = 2000 \text{ VAR}$ (induttiva),
 $I_{\text{eff}} = 12 \text{ A}$
- (c) $S = 4500 \angle 60^\circ \text{ VA}$, $V = 120 \angle 45^\circ$ V

- 11.51 Per l'intero circuito di Figura 11.73, calcolare

- (a) il fattore di potenza
- (b) la potenza media erogata dal generatore
- (c) la potenza reattiva
- (d) la potenza apparente
- (e) la potenza complessa

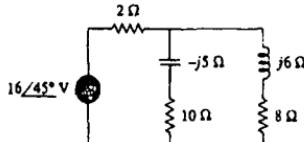


Figura 11.73 Per il Problema 11.51.

- 11.52 Nel circuito di Figura 11.74, il dispositivo A riceve 2 kW con pf 0.8 inattivo, il dispositivo B riceve 3 kVA con pf 0.4 capacitivo, mentre il dispositivo C è inattivo e consuma 1 kW ricevendo 500 VAR.

- (a) Determinare il fattore di potenza dell'intero sistema.
- (b) Determinare I data $V_s = 120 \angle 45^\circ$ V RMS.

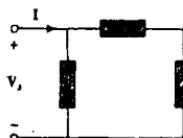


Figura 11.74 Per il Problema 11.52.

- 11.53 Nel circuito di Figura 11.75, il carico A riceve 4 kVA con pf 0.8 capacitivo. Il carico B riceve 2.4 kVA con pf 0.6 inattivo. Il componente C è un carico inattivo che consuma 1 kW e riceve 500 VAR.

- (a) Determinare I.
- (b) Calcolare il fattore di potenza della combinazione.

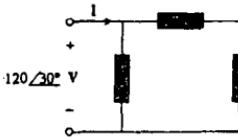


Figura 11.75 Per il Problema 11.53.

Paragrafo 11.7 Conservazione della potenza

- 11.54 Per la rete in Figura 11.76, determinare la potenza complessa assorbita da ciascun elemento.

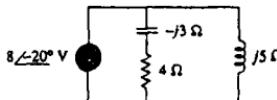


Figura 11.76 Per il Problema 11.54.

- 11.55 Determinare la potenza complessa assorbita da ciascuno dei cinque elementi nel circuito di Figura 11.77.

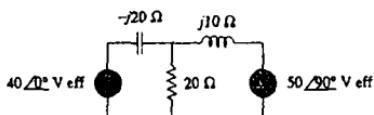


Figura 11.77 Per il Problema 11.55.

- 11.56 Calcolare la potenza complessa erogata dal generatore nel circuito di Figura 11.78.

ps ML

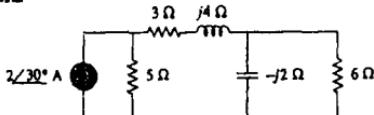


Figura 11.78 Per il Problema 11.56.

- 11.57 Per il circuito in Figura 11.79, determinare le potenze media, reattiva e complessa erogate dal generatore dipendente di tensione.

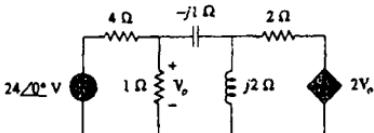


Figura 11.79 Per il Problema 11.57.

- 11.58 Calcolare la potenza complessa trasferita al resistore da 10 kΩ in Figura 11.80.

ps ML

- 11.59 Calcolare la potenza reattiva nell'induttore e nel condensatore del circuito in Figura 11.81.

ps ML

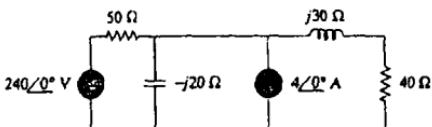


Figura 11.81 Per il Problema 11.59.

- 11.60 Nel circuito in Figura 11.82, determinare V_o ed il fattore di potenza in ingresso.

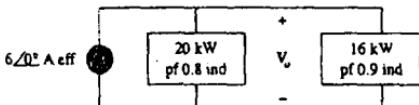


Figura 11.82 Per il Problema 11.60.

- 11.61 Dato il circuito in Figura 11.83, determinare I_o e la potenza complessa totale erogata.

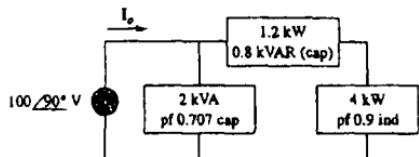


Figura 11.83 Per il Problema 11.61.

- 11.62 Nel circuito di Figura 11.84, determinare V_o .

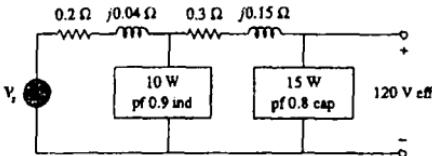


Figura 11.84 Per il Problema 11.62.

- 11.63 Determinare I_o nel circuito di Figura 11.85.

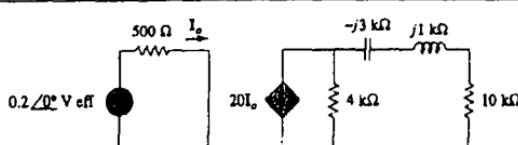


Figura 11.80 Per il Problema 11.58.

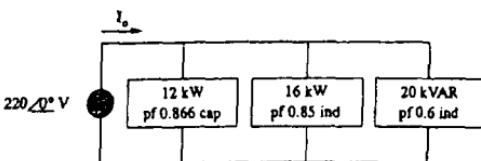


Figura 11.85 Per il Problema 11.63.

- 11.64 Determinare I_s nel circuito di Figura 11.86, se il generatore di tensione fornisce 2.5 kW e 0.4kVAR (capacitivi).

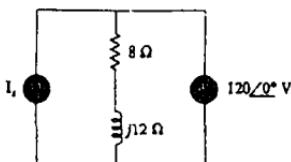


Figura 11.86 Per il Problema 11.64.

- 11.65 Nel circuito con operazionale di Figura 11.87, $v_s = 4 \cos 10^4 t \text{ V}$. Determinare la potenza media fornita al resistore da $50 \text{ k}\Omega$.

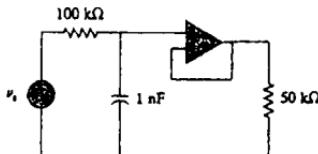


Figura 11.87 Per il Problema 11.65.

- 11.66 Calcolare la potenza media assorbita dal resistore da $6 \text{ k}\Omega$ nel circuito con operazionale di Figura 11.88.

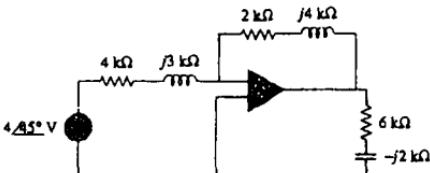


Figura 11.88 Per il Problema 11.66.

- 11.67 Per il circuito con operazionale in Figura 11.89, calcolare:

- la potenza complessa erogata dal generatore di tensione
- la potenza media nel resistore da 12Ω

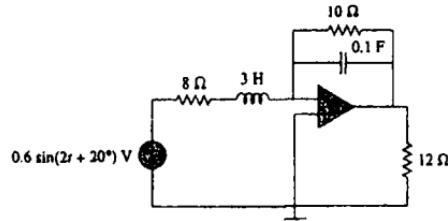


Figura 11.89 Per il Problema 11.67.

- 11.68 Calcolare la potenza complessa erogata dal generatore di corrente del circuito RLC serie in Figura 11.90.

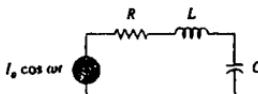


Figura 11.90 Per il Problema 11.68.

Paragrafo 11.8 Rifasamento

- 11.69 Si faccia riferimento al circuito mostrato in Figura 11.91.
 (a) Quanto vale il fattore di potenza?
 (b) Quanto vale la potenza media dissipata?
 (c) Quale è il valore della capacità che, quando collegata al carico, dà luogo ad un fattore di potenza unitario?

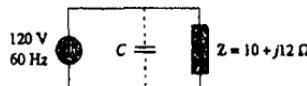


Figura 11.91 Per il Problema 11.69.

- 11.70 Un carico da 880 VA , 220 V , 50 Hz ha un fattore di potenza 0.8 induttivo. Quale valore di capacità posta in parallelo porterà il fattore di potenza del carico ad essere unitario?

- 11.71 Tre carichi sono collegati in parallelo a un generatore da $120 \angle 0^\circ \text{ V}$ (eff). Il carico 1 assorbe $60 \text{ k}\Omega \text{ V}$ con $\text{pf} = 0.85$ (induttivo); il carico 2 assorbe 90 kW e 50kVAR (capacitivo); il carico 3 assorbe 100 kW con $\text{pf} = 1$. (a) Determinare l'impedenza equivalente. (b) Calcolare il fattore di potenza totale della combinazione in parallelo dei carichi. (c) Determinare la corrente erogata dal generatore.

- 11.72 Due carichi sono collegati in parallelo e assorbono una potenza totale pari a 2.4 kW con $\text{pf} = 0.8$ (induttivo), quando vengono alimentati da una linea $120 \text{ V}, 60 \text{ Hz}$. Un carico assorbe 1.5 kW con $\text{pf} = 0.707$ (induttivo). Determinare: (a) il fattore di potenza del secondo carico, (b) l'elemento da inserire in parallelo per correggere il fattore di potenza a 0.9 (induttivo) per entrambi i carichi.

- 11.73 Un generatore da 240 V eff, a 60 Hz alimenta un carico da 10 kW (resistivo), 15 kVAR (capacitivo) e 22kVAR (induttivi). Determinare:
 (a) la potenza apparente
 (b) la corrente erogata dal generatore
 (c) la potenza in kVAR e la capacità necessaria a migliorare il fattore di potenza a 0.96 induttivo
 (d) la corrente erogata dal generatore nelle nuove condizioni di fattore di potenza.

- 11.74 Un generatore da 120 V eff 60 Hz alimenta due carichi collegati in parallelo, come mostrato in Figura 11.92.
 (a) Determinare il fattore di potenza della combinazione parallelo.
 (b) Calcolare il valore della capacità collegata in parallelo che rende unitario il fattore di potenza.

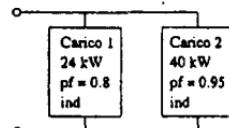


Figura 11.92 Per il Problema 11.74.

- 11.75 Si consideri il sistema di potenza mostrato in Figura 11.93. Calcolare:
- la potenza complessa totale
 - il fattore di potenza
 - la capacità necessaria per ottenere un fattore di potenza unitario

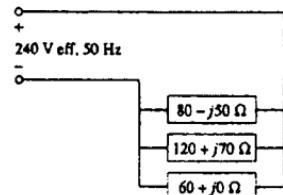


Figura 11.93 Per il Problema 11.75.

Paragrafo 11.9 Applicazioni

- 11.76 Calcolare la lettura del wattmetro nel circuito di Figura 11.94.

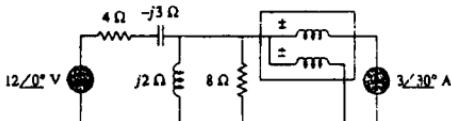


Figura 11.94 Per il Problema 11.76.

- 11.77 Quale è la lettura del wattmetro nella rete di Figura 11.95?

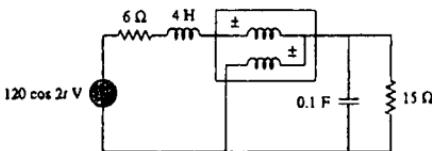


Figura 11.95 Per il Problema 11.77.

- 11.78 Calcolare la lettura del wattmetro nel circuito mostrato in Figura 11.96.

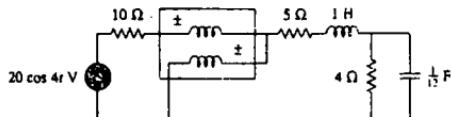


Figura 11.96 Per il Problema 11.78.

- 11.79 Determinare la lettura del wattmetro nel circuito di Figura 11.97.

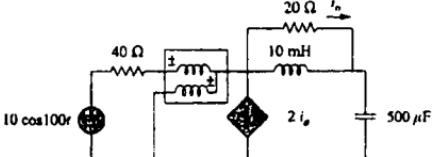


Figura 11.97 Per il Problema 11.79.

- 11.80 Il circuito di Figura 11.98 mostra un wattmetro collegato ad una rete A.C.
- Determinare la corrente del carico.
 - Calcolare la lettura del wattmetro.

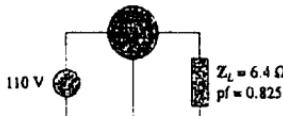


Figura 11.98 Per il Problema 11.80.

- 11.81 Un asciugacapelli elettrico da 120 V, 60 Hz consuma 600 W con $\rho f = 0.92$ (induttivo). Calcolare il valore della corrente efficace assorbita dall'asciugacapelli.

- 11.82 Un generatore da 240 V eff, 60 Hz alimenta il collegamento parallelo di un riscaldatore da 5 kW e di un motore a induzione da 30 kVA il cui fattore di potenza è 0.82. Determinare:

- la potenza apparente del sistema
- la potenza reattiva del sistema
- la potenza in kVA di un condensatore che porti il fattore di potenza del sistema a 0.9 induttivo
- il valore del condensatore

- 11.83 Misure effettuate all'oscilloscopio indicano che la tensione su un carico e le correnti che lo attraversano sono, rispettivamente, $210 \angle 60^\circ$ V e $8 \angle 25^\circ$ A. Determinare:

- la potenza reale
- la potenza apparente
- la potenza reattiva
- il fattore di potenza

- 11.84 Una utenza ha un consumo annuale di 1200 MWh con domanda di picco pari a 2.4 MVA. L'addebito per la domanda di picco è di € 30.00 per kVA per anno, e il costo dell'energia per kWh è di 4 cent.

- Determinare il costo annuale dell'energia.
- Progettare una tariffa per kWh basata su uno schema tariffario "flat", con il vincolo che il ricavo della compagnia elettrica deve rimanere lo stesso del caso con tariffa costituita da due componenti.

- 11.85 Il circuito di un impianto elettrico domestico monofase a tre fili consente di collegare apparecchi sia a 120 V che a 240 V, 60 Hz. Il circuito dell'impianto è rappresentato come mostrato in Figura 11.98. Calcolare:

- le correnti I_1 , I_2 e I_3
- la potenza complessa totale fornita
- il fattore di potenza complessivo del circuito

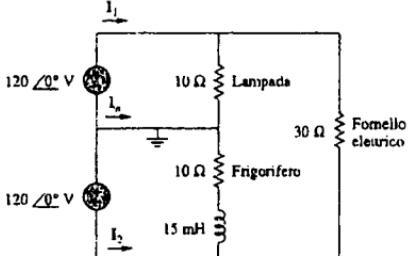


Figura 11.99 Per il Problema 11.85.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 11.86 Un trasmettitore fornisce la massima potenza ad una antenna quando l'antenna è regolata in modo da rappresentare un carico con resistenza 75Ω in serie con una induttanza da $4 \mu H$. Se il trasmettitore opera a 4.12 MHz, determinare la sua impedenza interna.
- 11.87 In un trasmettitore TV, un circuito serie ha una impedenza di $3 k\Omega$ e una corrente totale di 50 mA . Se la tensione sul resistore è 80 V , quale è il fattore di potenza del circuito?
- 11.88 Un circuito elettronico è collegato ad una linea da 110 V AC . Il valore efficace della corrente assorbita è 2 A , con fase 55° .
- Determinare la potenza effettiva assorbita dal circuito.
 - Calcolare la potenza apparente.
- 11.89 Un riscaldatore industriale ha dati di targa: 210 V 60 Hz 12 kVA $\text{pf} 0.78$ induttivo. Determinare:
- le potenze apparente e complessa
 - l'impedenza del riscaldatore.
- *11.90 Ad un generatore a turbina da 2000 kW con fattore di potenza 0.85 che funziona con il carico di targa, viene aggiunto un ulteriore carico da 300 kW con fattore di potenza 0.8 . Quale è la potenza in kVAR che deve essere assorbita da un banco di condensatori per continuare ad utilizzare il generatore senza che vada in sovraccarico?
- 11.91 La targa di un motore elettrico riporta i seguenti dati:
eff
 Tensione di linea: 220 V eff
 Corrente di linea: 15 A eff
 Frequenza di linea: 60 Hz
 Potenza: 2700 W
 Determinare il fattore di potenza (induttivo) del motore.
 Determinare il valore della capacità C da collegare al motore per portare il pf all'unità.
- 11.92 Come illustrato in Figura 11.100, una linea di alimentazione da 550 V alimenta un impianto industriale formato da un motore che assorbe 60 kW con $\text{pf} = 0.75$ (induttivo), da un condensatore di potenza da 20 kVAR e dall'impianto di illuminazione che assorbe 20 kW .
- Calcolare la potenza reattiva totale e la potenza apparente totale assorbite dall'impianto.
 - Determinare il pf complessivo.
 - Determinare la corrente nella linea di alimentazione.

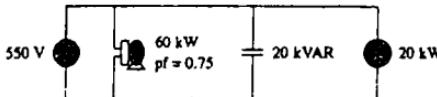


Figura 11.100 Per il Problema 11.92.

- 11.93 Uno stabilimento presenta i seguenti quattro carichi principali:

- Un motore da 5 hp , con $\text{pf} 0.8$ induttivo ($1 \text{ hp} = 0.7457 \text{ kW}$).
 - Un riscaldatore da 1.2 kW , $\text{pf} 1.0$.
 - Dieci lampade da 120 W .
 - Un motore sincrono da 1.6 kVA , con $\text{pf} 0.6$ capacitivo.
- Calcolare le potenze reale e reattiva totali.
 - Calcolare il fattore di potenza complessivo.

- 11.94 Una sottostazione da 1 MVA funziona a pieno carico **eff** con fattore di potenza 0.7 . Si desidera migliorare il fattore di potenza a 0.95 mediante l'installazione di condensatori. Si supponga che le nuove apparecchiature di sottostazione e distribuzione costino $\text{€} 120$ per kVA installato, e che i condensatori costino $\text{€} 30$ per kVA installato.

- Calcolare il costo dei condensatori necessari.
- Calcolare il risparmio in termini di carico della sottostazione rilasciato.
- I condensatori rappresentano una soluzione economica per ridurre il carico della sottostazione?

- 11.95 Un amplificatore di potenza ha impedenza di uscita **eff** $40 + j8\Omega$, e produce una tensione di uscita in assenza di carico di 146 V a 300 Hz .

- Determinare l'impedenza del carico che provoca il massimo trasferimento di potenza.
- Calcolare la potenza sul carico in tale condizione di accoppiamento.

- 11.96 Un sistema di trasmissione della potenza è rappresentato come in Figura 11.101. Se $V_s = 240 \angle 0^\circ \text{ eff}$, determinare la potenza media assorbita dal carico.

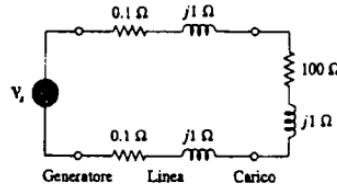


Figura 11.101 Per il Problema 11.96.

CIRCUITI TRIFASE

12.1 INTRODUZIONE

Fino a questo momento, sono stati considerati solo circuiti monofase, cioè circuiti contenenti un solo generatore collegato ad un carico attraverso una coppia di fili (una linea di trasmissione), come in Figura 12.1(a). Nel circuito monofase di Figura 12.1(a) V_p è l'ampiezza della tensione del generatore e ϕ è la fase. Lo schema più comune di circuito per la trasmissione dell'energia elettrica è però quello monofase a tre fili¹, mostrato in Figura 12.1(b), che consiste di due generatori identici (stessa ampiezza e stessa fase) collegati a due carichi per mezzo di due fili esterni e del neutro comune. Monofase a tre fili è, ad esempio, l'impianto di alcune abitazioni, perché consente il collegamento di apparecchiature a tensioni diverse (la tensione standard e quella doppia della standard).

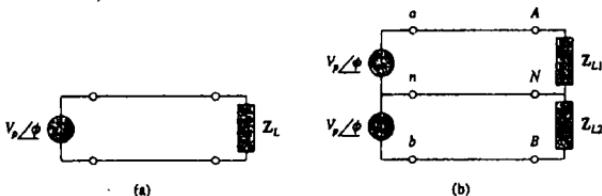


Figura 12.1
Sistemi monofase: (a) a due fili,
(b) a tre fili.

I circuiti o sistemi nei quali i generatori sinusoidali operano alla stessa frequenza ma con fasi diverse sono detti *polifase*. La Figura 12.2 mostra un sistema bifase a tre fili, e la Figura 12.3 ne mostra uno trifase a quattro fili.

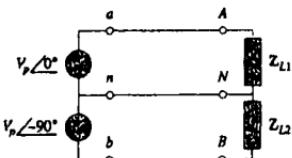


Figura 12.2
Sistema bifase a tre fili.

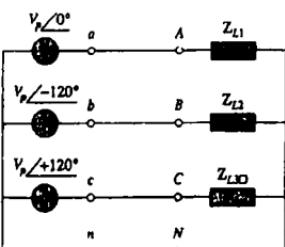


Figura 12.3
Sistema trifase a quattro fili.

¹ L'invenzione del sistema con tre fili invece di quattro si deve a Thomas Edison.

A differenza di un sistema monofase, un sistema bifase è caratterizzato da un generatore formato da due bobine posizionate perpendicolarmente una all'altra, in modo che la tensione generata da una di esse sia in ritardo di 90° rispetto all'altra. In maniera simile, in un sistema trifase si hanno tre generatori le cui tensioni hanno la stessa ampiezza e la stessa frequenza, ma sono sfasate di 120° una rispetto all'altra. Poiché il trifase rappresenta il sistema più usato e più economico tra i sistemi polifase, l'attenzione in questo capitolo sarà prevalentemente concentrata su questo sistema.

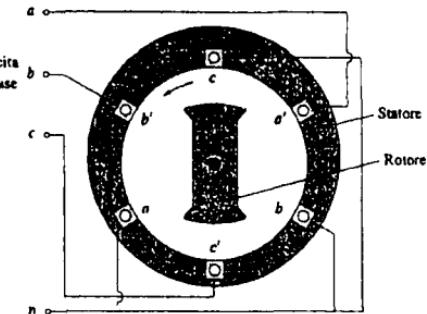
I sistemi trifase sono importanti per almeno tre ragioni. Innanzitutto, praticamente tutta la potenza elettrica prodotta dalle aziende elettriche viene generata e distribuita in forma trifase, alla frequenza di 50 Hz ($\omega = 314$ rad/s), o 60 Hz ($\omega = 377$ rad/s) negli Stati Uniti. Nelle applicazioni in cui è necessaria una corrente monofase o bifase, le fasi necessarie vengono prelevate dal sistema trifase, invece che generate indipendentemente. Una elaborazione della corrente trifase si ha anche nelle applicazioni nelle quali risultano necessarie più di tre fasi – come ad esempio nell'industria dell'alluminio, che richiede 48 fasi nel processo di fusione. In secondo luogo, la potenza istantanea rimane costante nel tempo nei sistemi trifase, mentre ha un andamento impulsivo negli altri sistemi, come si vedrà nel Paragrafo 12.7. L'effetto benefico è quello di una trasmissione uniforme della potenza e di minori vibrazioni meccaniche nelle macchine elettriche trifase. In terzo luogo, il sistema di trasmissione trifase si rivela più economico del monofase a parità di potenza trasmessa, perché richiede una minore quantità di cablaggio.

Si inizia con la presentazione del sistema di tensioni trifase bilanciato, e se ne passano in rassegna tutte le quattro possibili configurazioni. Si passa poi alla illustrazione dei sistemi trifase sbilanciati. Viene illustrato l'uso di *PSpice for Windows* per l'analisi di sistemi trifase bilanciati e sbilanciati, e infine si applicano i concetti del capitolo alle misure di potenza trifase e ai principi del cablaggio degli impianti elettrici domestici.

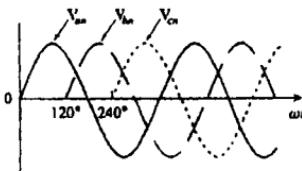
12.2 TENSIONI TRIFASE BILANCiate

Un sistema di tensioni trifase viene di solito prodotto con un generatore AC trifase (alternatore), la cui sezione è mostrata in Figura 12.4.

Figura 12.4
Generatore trifase.

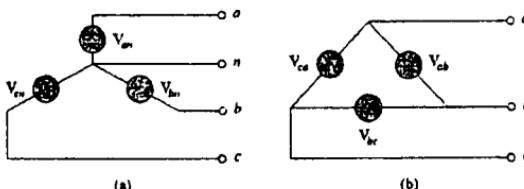


Il generatore è costituito essenzialmente da un magnete rotante (detto *rotore*) circondato da un sistema di avvolgimenti fisso (detto *stator*). Nello statore hanno sede tre avvolgimenti separati, i cui terminali $a-a'$, $b-b'$ e $c-c'$ sono spaziali di 120° lungo la circonferenza. I terminali a ed a' , ad esempio, rappresentano i terminali di una bobina i cui fili entrano ed escono perpendicolarmente al foglio. Quando il rotore ruota attorno ad un asse perpendicolare al foglio, il suo campo magnetico produce un flusso nei tre avvolgimenti e provoca in essi delle tensioni indotte. Essendo gli avvolgimenti posti a 120° l'uno dall'altro, le tensioni indotte sono della stessa ampiezza, ma sfasate di 120° (Figura 12.5). Ciascun avvolgimento può essere considerato come un generatore monofase indipendente; il generatore trifase può quindi essere utilizzato per fornire potenza a carichi monofase o trifase.



Un tipico sistema trifase è formato da tre generatori indipendenti di tensione collegati ai carichi per mezzo di tre o quattro fili (o linee di trasmissione). (Sistemi trifase costituiti con generatori di corrente sono invece estremamente rari).

Un sistema trifase risulta equivalente a tre circuiti monofase; i generatori di tensione possono essere collegati a stella, come mostrato in Figura 12.6(a), oppure a triangolo come in Figura 12.6(b).



Si consideri per ora il sistema di tensioni collegato a stella di Figura 12.6(a). Le tensioni V_{an} , V_{bn} e V_{cn} sono prese rispettivamente tra le linee a , b , c e la linea del neutro n , e sono chiamate *tensioni di fase*. Se i generatori di tensione hanno la stessa ampiezza e frequenza ω , e sono sfasati di 120° l'uno rispetto all'altro, le tensioni sono dette *bilanciate*. Le relazioni tra loro sono:

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \quad (12.1)$$

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| \quad (12.2)$$

Tensioni di fase bilanciate hanno lo stesso modulo e sono sfasate di 120° l'una rispetto all'altra.

Poiché le tensioni trifase sono sfasate di 120° l'una rispetto all'altra, esse possono presentarsi in due modi. La prima possibilità è mostrata in Figura 12.7(a), e rappresentata matematicamente con

$V_{an} = V_p \angle 0^\circ$
$V_{bn} = V_p \angle -120^\circ$
$V_{cn} = V_p \angle -240^\circ = V_p \angle +120^\circ$

$$(12.3)$$

in cui V_p è la tensione efficace, o rms². Questo ordinamento delle tensioni è detto *sequenza abc o sequenza positiva*: in essa, V_{an} è in anticipo su V_{bn} , che a sua volta è in anticipo su V_{cn} . La sequenza *abc* viene prodotta quando il rotore di Figura 12.4 ruota in senso antiorario. L'altra possibilità è mostrata in Figura 12.7(b), e matematicamente da

$V_{an} = V_p \angle 0^\circ$
$V_{cn} = V_p \angle -120^\circ$
$V_{bn} = V_p \angle -240^\circ = V_p \angle +120^\circ$

$$(12.4)$$

² Come è tradizione nella trattazione dei sistemi di potenza, le tensioni e le correnti in questo capitolo saranno sempre intese come valori efficaci, salvo avviso contrario.

Figura 12.5
Tensioni generali, spaziate di 120° l'una dall'altra.

Figura 12.6
Generatori di tensione trifase: (a) collegati a stella (Y), (b) collegati a triangolo (Δ).

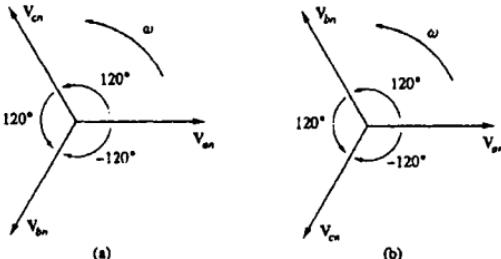
Essa è detta *sequenza acb* o *sequenza negativa*: la tensione V_{an} è in anticipo su V_{cn} , che a sua volta è in anticipo su V_{bn} . La sequenza *acb* viene prodotta quando il rotore in Figura 12.4 ruota in senso orario. È facile vedere che sia le tensioni delle (12.3) che quelle delle (12.4) soddisfano le condizioni (12.1) e (12.2). Ad esempio, dalle (12.3),

$$\begin{aligned} V_{an} + V_{bn} + V_{cn} &= V_p \angle 0^\circ + V_p \angle -120^\circ + V_p \angle +120^\circ \\ &= V_p(1.0 - 0.5 - j0.866 - 0.5 + j0.866) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.5)$$

La sequenza delle fasi è la sequenza temporale nella quale le tensioni raggiungono i rispettivi valori massimi.

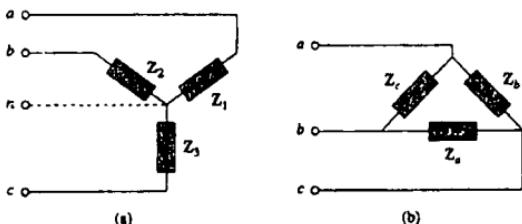
La sequenza delle fasi si determina osservando l'ordine nel quale i vettori rotanti transitano per un punto prefissato nel diagramma delle fasi.

Figura 12.7
Sequenze delle fasi:
(a) sequenza *aic*, o positiva, (b)
sequenza *acb*, o negativa.



In Figura 12.7(a), quando i fasori ruotano in senso antiorario con velocità angolare ω , essi transitano per l'asse orizzontale nella sequenza *abcacba*.... La sequenza è allora *abc* o *bca* o *cab*. In maniera simile, per i fasori in Figura 12.7(b), durante la rotazione in senso antiorario essi transitano per l'asse orizzontale nella sequenza *acbaca*..., che è la sequenza *acb*. La sequenza delle fasi è un elemento importante nella distribuzione della potenza elettrica in forma trifase: essa determina, ad esempio, la direzione nella quale ruota un motore elettrico collegato alla rete.

Figura 12.8
Due possibili configurazioni
di carico trifase: (a) a stella ($\text{\textcircled{Y}}$),
(b) a triangolo (Δ).



Come per i generatori, anche un sistema di carichi trifase può essere collegato a stella o a triangolo, a seconda della configurazione delle apparecchiature utilizzate. La Figura 12.8(a) mostra un carico trifase collegato a stella, e la Figura 12.8(b) uno collegato a triangolo. La linea del neutro in Figura 12.8(a) può essere presente o no, a seconda che il sistema sia a tre o a quattro fili. (Ovviamente, il collegamento neutro è topologicamente impossibile nella configurazione a triangolo.) Un carico trifase collegato a stella o a triangolo è detto *sbilanciato* se le impedenze di fase non hanno tutte lo stesso modulo e lo stesso argomento.

In un carico sbilanciato, le impedenze di fase sono uguali in modulo e argomento.

In un carico bilanciato collegato a stella,

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y \quad (12.6)$$

dove Z_Y è l'impedenza di carico per fase. Per un carico bilanciato collegato a triangolo,

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_\Delta \quad (12.7)$$

dove Z_Δ è l'impedenza di carico per fase di questa configurazione. Si ricordi, dalla (9.69), che

$$Z_\Delta = 3Z_Y \quad \text{oppure} \quad Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta \quad (12.8)$$

e quindi che un carico collegato a stella può essere trasformato in uno equivalente collegato a triangolo e viceversa, usando la (12.8).

Poiché sia il generatore trifase che il carico trifase possono essere collegati a stella oppure a triangolo, si hanno quattro possibili configurazioni:

- Collegamento Y-Y (cioè, generatore collegato a stella con carico collegato a stella).
- Collegamento Y-Δ (o stella-triangolo).
- Collegamento Δ-Δ (o triangolo-triangolo).
- Collegamento Δ-Y (o triangolo-stella).

Nei paragrafi seguenti verranno prese in esame, una alla volta, tutte le possibili configurazioni.

Il collegamento a triangolo del carico risulta molto più comune di quello a stella nelle applicazioni pratiche. Ciò è dovuto al fatto che è più facile aggiungere o togliere un elemento di carico da una fase in una connessione a triangolo, mentre in una connessione a stella spesso il terminale del neutro è di accesso difficile o impossibile. Al contrario, generatori collegati a triangolo sono poco comuni, perché nella maglia che essi formano può circolare una corrente indesiderata, se c'è anche un lieve sbilanciamento fra di essi.

Esempio 12.1

Determinare la sequenza delle fasi per l'insieme di tensioni

$$v_{an} = 200 \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$$

$$v_{bn} = 200 \cos(\omega t - 230^\circ) \text{ V}, \quad v_{cn} = 200 \cos(\omega t - 110^\circ) \text{ V}$$

Soluzione: I fasori delle tensioni sono

$$V_{an} = 200 \angle 10^\circ \text{ V}, \quad V_{bn} = 200 \angle -230^\circ \text{ V}, \quad V_{cn} = 200 \angle -110^\circ \text{ V}$$

Si vede che V_{an} precede V_{bn} di 120° , e V_{cn} a sua volta precede V_{bn} di 120° . Si è quindi nel caso di sequenza *acb*.

■ **Esercizio 12.1** Data $V_{bn} = 110 \angle 30^\circ \text{ V}$ determinare V_{an} e V_{cn} , nell'ipotesi di sequenza *abc*.

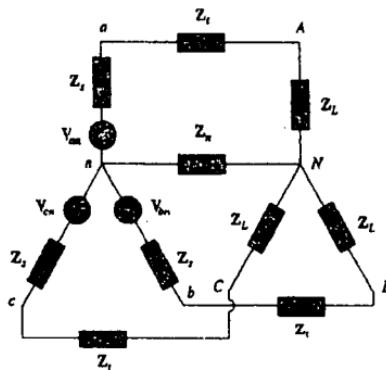
Risposta $110 \angle 150^\circ \text{ V}$, $110 \angle -90^\circ \text{ V}$. ■

12.3 CONFIGURAZIONE STELLA-STELLA BILANCIATA

Si inizia l'analisi dal caso del sistema stella-stella, anche perché qualunque sistema trifase è riducibile, tramite opportune trasformazioni, ad un sistema equivalente di tipo stella-stella. L'analisi di questo primo sistema verrà utilizzata come base per la risoluzione di tutti gli altri sistemi trifase.

Si consideri il sistema bilanciato stella-stella a quattro fili di Figura 12.9, nel quale un carico a stella è collegato ad un generatore a stella. Il carico è supposto bilanciato, le impedenze del carico sono quindi uguali.

Figura 12.9
Sistema stella-stella bilanciato,
con indicate le impedenze
di generatore, linea e carico.

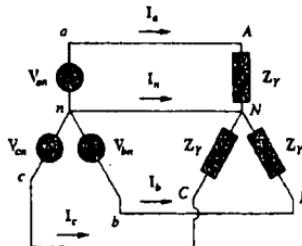


L'impedenza Z_Y rappresenta l'impedenza totale della fase, e può anche essere considerata come la somma dell'impedenza del generatore Z_s , dell'impedenza di linea Z_t e della impedenza di carico Z_L per ciascuna fase, perché tali impedenze risultano in serie. Come si vede in Figura 12.9, Z_s rappresenta l'impedenza interna dell'avvolgimento relativo ad una fase del generatore; Z_t l'impedenza della linea che collega una fase del generatore con una fase del carico; Z_L l'impedenza di ciascuna delle fasi del carico; infine, Z_n rappresenta l'impedenza della linea del neutro. Si può quindi scrivere

$$Z_Y = Z_s + Z_t + Z_L \quad (12.9)$$

Molto spesso, Z_s e Z_t sono piccole in confronto a Z_L , e si può quindi supporre $Z_s = Z_t$ se non viene specificato alcun valore per l'impedenza del generatore o della linea. In ogni caso, sostituendo i collegamenti serie con le impedenze equivalenti, il sistema Y-Y di Figura 12.9 può essere semplificato, ottenendo quello in Figura 12.10.

Figura 12.10
Configurazione stella-stella
bilanciata.



Nel caso di sequenza positiva, le tensioni *di fase* (da linea a neutro) sono

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_p / 0^\circ \\ V_{bn} &= V_p / -120^\circ, \quad V_{cn} = V_p / +120^\circ \end{aligned} \quad (12.10)$$

Le tensioni *da linea a linea* o, più semplicemente, tensioni *di linea* V_{ab} , V_{bc} e V_{ca} sono legate alle tensioni di fase: ad esempio,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p / 0^\circ - V_p / -120^\circ \\ &= V_p \left(1 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} V_p / 30^\circ \end{aligned} \quad (12.11a)$$

In maniera simile, è possibile ottenere

$$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{bn} - \mathbf{V}_{cn} = \sqrt{3} V_p / -90^\circ \quad (12.11b)$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{cn} - \mathbf{V}_{an} = \sqrt{3} V_p / -210^\circ \quad (12.11c)$$

Il modulo della tensione di linea V_L è $\sqrt{3}$ volte il modulo della tensione di fase V_p ,

$$V_L = \sqrt{3} V_p \quad (12.12)$$

dove

$$V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad (12.13)$$

e

$$V_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}| \quad (12.14)$$

Inoltre, ciascuna tensione di linea è in anticipo sulla corrispondente tensione di fase di 30° , come illustra la Figura 12.11(a). La Figura 12.11(a) mostra inoltre come si può determinare \mathbf{V}_{ab} dalle tensioni di fase, mentre in Figura 12.11(b) è illustrato lo stesso procedimento per le tre tensioni di linea. Si noti che \mathbf{V}_{ab} è in anticipo su \mathbf{V}_{bc} di 120° , e \mathbf{V}_{bc} è in anticipo su \mathbf{V}_{ca} di 120° , e quindi la somma delle tensioni di linea vale zero, come accade per le tensioni di fase.

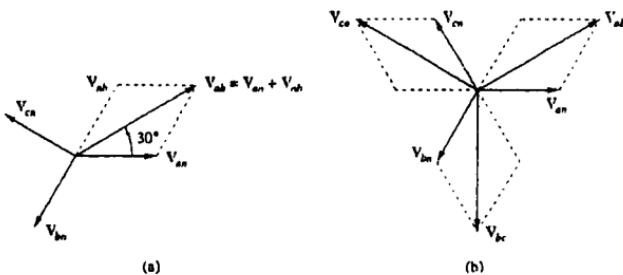


Figura 12.11
Diagramma vettoriale ad illustrazione della relazione fra tensioni di linea e tensioni di fase.

Applicando la KVL a ciascuna fase in Figura 12.10, si ottengono le correnti di linea

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{\mathbf{V}_{an}}{Z_Y}, \quad I_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{Z_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an} / -120^\circ}{Z_Y} = I_a / -120^\circ \\ I_c &= \frac{\mathbf{V}_{cn}}{Z_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an} / -240^\circ}{Z_Y} = I_a / -240^\circ \end{aligned} \quad (12.15)$$

È facile dedurre che la somma delle correnti di linea è nulla,

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad (12.16)$$

così che

$$I_a = -(I_b + I_c) = 0 \quad (12.17a)$$

o anche

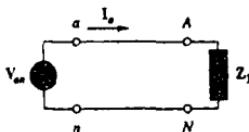
$$\mathbf{V}_{nN} = Z_n I_n = 0 \quad (12.17b)$$

cioè la tensione sul conduttore del neutro è zero. È possibile allora rimuovere il filo del neutro senza modificare il funzionamento del sistema. Infatti, nei collegamenti per la trasmissione della potenza a lunga distanza vengono usati fasci di conduttori in

multipli di 3, sfruttando il suolo come conduttore per il neutro. Sistemi di questo tipo devono essere messi a terra con dei buoni collegamenti nei punti critici, così da garantire una adeguata sicurezza per le persone e le cose.

La corrente di linea è la corrente che scorre in ciascuna delle linee, mentre la corrente di fase è la corrente in ciascuna delle fasi del generatore o del carico. Nel sistema stella-stella, la corrente di linea coincide con la corrente di fase. Verrà utilizzato un solo pedice per indicare le correnti di linea perché la direzione di riferimento verrà sempre assunta dal generatore verso il carico.

Figura 12.12
Circuito equivalente monofase.



Un metodo alternativo per trattare il sistema stella-stella bilanciato è quello di eseguire l'analisi "per fasi": viene presa in considerazione una sola fase, ad esempio la fase a , e si analizza il circuito equivalente monofase in Figura 12.12: la corrente di linea I_a vale

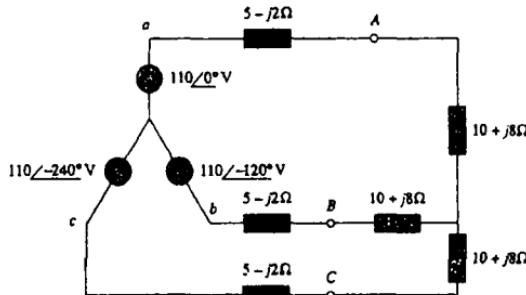
$$I_a = \frac{V_m}{Z_T} \quad (12.18)$$

Da I_a , nota la sequenza delle fasi, è possibile ricavare le altre correnti di linea. Perciò, se il sistema è bilanciato, è sufficiente analizzare una sola delle fasi, anche quando la linea del neutro è assente, come nel sistema a tre fili.

Esempio 12.2

Calcolare le correnti di linea nel sistema stella-stella a tre fili di Figura 12.13.

Figura 12.13
Sistema stella-stella a tre fili; per l'Esempio 12.2.



Soluzione: Il circuito trifase di Figura 12.13 è bilanciato, ed è quindi possibile sostituirlo con un circuito equivalente monofase del tipo illustrato in Figura 12.12. Dall'analisi del circuito monofase si ottiene I_a ,

$$I_a = \frac{V_m}{Z_T}$$

con $Z_T = (5 - j2) + (10 + j8) = 15 + j6 = 16.155 \angle 21.8^\circ \Omega$. Quindi,

$$I_a = \frac{110 \angle 0^\circ}{16.155 \angle 21.8^\circ} = 6.81 \angle -21.8^\circ A$$

Poiché le tensioni dei generatori in Figura 12.13 sono in sequenza positiva, tali sono anche le correnti di linea,

$$I_b = I_a \angle -120^\circ = 6.81 \angle -141.8^\circ A$$

$$I_c = I_a \angle -240^\circ = 6.81 \angle -261.8^\circ A = 6.81 \angle 98.2^\circ A$$

- Esercizio 12.2** Un generatore trifase bilanciato a stella con impedenza di $0.4 + j0.3 \Omega$ per fase è collegato ad un carico bilanciato a stella con impedenza $24 + j19 \Omega$ per fase. La linea che collega il generatore ha impedenza $0.6 + j0.7 \Omega$ per fase. Supponendo la sequenza positiva per le tensioni del generatore, e conoscendo $V_{an} = 120 \angle 30^\circ$ V, determinare: (a) le tensioni di linea, (b) le correnti di linea.

Risposta (a) $207.85 \angle 60^\circ$ V, $207.85 \angle -60^\circ$ V, $207.85 \angle -180^\circ$ V,

(b) $3.75 \angle -8.66^\circ$ A, $3.75 \angle -128.66^\circ$ A, $3.75 \angle -111.34^\circ$ A.

12.4 CONFIGURAZIONE STELLA-TRIANGOLO BILANCIATA

Un sistema stella-triangolo ($\gamma-\Delta$) bilanciato è formato da un generatore bilanciato a stella che alimenta un carico bilanciato a triangolo.

Si tratta dello schema di uso più frequente nella pratica dei sistemi trifase, illustrato in Figura 12.14. Non c'è in questo caso, ovviamente, alcun collegamento neutro tra generatore e carico. Supponendo la sequenza positiva, le tensioni di fase sono ancora

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\ V_{bn} &= V_p \angle -120^\circ, \quad V_{cn} = V_p \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (12.19)$$

Come si è visto al Paragrafo 12.3, le tensioni di linea sono allora

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ = V_{AB}, \quad V_{bc} = \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ = V_{BC} \\ V_{ca} &= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ = V_{CA} \end{aligned} \quad (12.20)$$

Quest'ultima equazione mostra che le tensioni di linea sono uguali alle tensioni sulle impedenze di carico, in questa configurazione. Dalle tensioni, è possibile ricavare le correnti di fase

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta}, \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_\Delta}, \quad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} \quad (12.21)$$

Queste correnti hanno ampiezze uguali ma sono sfasate di 120° l'una rispetto all'altra.

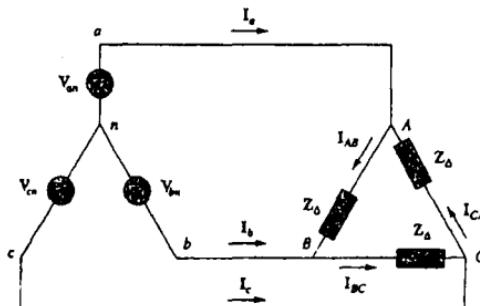


Figura 12.14
Configurazione
stella-triangolo bilanciata.

Una via alternativa, e più generale, per ottenere le correnti di fase è quella di utilizzare la KVL. Ad esempio, applicando la KVL alla maglia $aABbn$ si ha

$$-V_{an} + Z_\Delta I_{AB} + V_{bn} = 0$$

cioè

$$I_{AB} = \frac{V_{an} - V_{bn}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} \quad (12.22)$$

che coincide con la (12.21).

Le correnti di linea si ottengono dalle correnti di fase applicando la KCL ai nodi *A*, *B* e *C*:

$$I_a = I_{AB} - I_{CA}, \quad I_b = I_{BC} - I_{AB}, \quad I_c = I_{CA} - I_{BC} \quad (12.23)$$

Poiché $I_{CA} = I_{AB} \angle -240^\circ$,

$$\begin{aligned} I_a &= I_{AB} - I_{CA} = I_{AB}(1 - 1 \angle -240^\circ) \\ &= I_{AB}(1 + 0.5 - j0.866) = I_{AB}\sqrt{3} \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (12.24)$$

e quindi l'ampiezza I_L della corrente di linea è pari a $\sqrt{3}$ volte l'ampiezza I_p della corrente di fase

$$I_L = \sqrt{3} I_p \quad (12.25)$$

dove

$$I_L = |I_a| = |I_b| = |I_c| \quad (12.26)$$

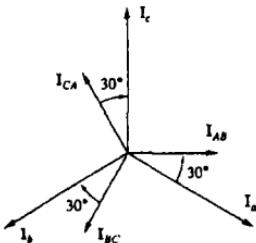
e

$$I_p = |I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}| \quad (12.27)$$

Inoltre, le correnti di linea risultano in ritardo rispetto alle corrispondenti correnti di fase di 30° , nel caso di sequenza positiva. Il diagramma vettoriale di Figura 12.15 illustra la relazione tra correnti di fase e di linea.

Figura 12.15

Diagramma vettoriale che illustra la relazione tra correnti di fase e di linea.



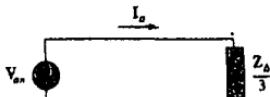
Una maniera alternativa di analizzare il circuito stella-triangolo consiste nel trasformare il carico collegato a triangolo in una stella equivalente; con la trasformazione triangolo-stella della (9.69),

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad (12.28)$$

Una volta eseguita la trasformazione, ci si trova in presenza di un sistema stella-stella come in Figura 12.10, e quindi il sistema trifase stella-triangolo di Figura 12.14 può essere sostituito dal circuito equivalente monofase di Figura 12.16.

Figura 12.16

Circuito equivalente monofase di un circuito stella-triangolo bilanciato.



Da questo circuito è possibile ottenere soltanto le correnti di linea; le correnti di fase possono essere ricavate usando la (12.25) ed il fatto che ciascuna corrente di fase è in anticipo di 30° sulla corrispondente corrente di linea.

Esempio 12.3

Un generatore trifase bilanciato a stella con sequenza *abc* e $V_{an} = 100 \angle 10^\circ$ V è collegato ad un carico bilanciato a triangolo da $(8 + j4)$ Ω per fascio. Calcolare le correnti di fase e di linea.

Soluzione: Questo problema può essere risolto in due modi.

METODO 1

L'impedenza di carico è

$$Z_\Delta = 8 + j4 = 8.944 \angle 26.57^\circ \Omega$$

Se la tensione di fase è $V_{an} = 100 \angle 10^\circ$, la tensione di linea è

$$V_{ab} = V_{an} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 100\sqrt{3} \angle 10^\circ + 30^\circ = V_{AB}$$

cioè

$$V_{AB} = 173.2 \angle 40^\circ \text{ V}$$

Le correnti di fase sono

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{173.2 \angle 40^\circ}{8.944 \angle 26.57^\circ} = 19.36 \angle 13.43^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = I_{AB} \angle -120^\circ = 19.36 \angle -106.57^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = I_{AB} \angle +120^\circ = 19.36 \angle 133.43^\circ \text{ A}$$

Le correnti di linea sono

$$\begin{aligned} I_a &= I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ = \sqrt{3}(19.36) \angle 13.43^\circ - 30^\circ \\ &= 33.53 \angle -16.57^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$I_b = I_a \angle -120^\circ = 33.53 \angle -136.57^\circ \text{ A}$$

$$I_c = I_a \angle +120^\circ = 33.53 \angle 103.43^\circ \text{ A}$$

METODO 2

In alternativa, mediante l'analisi del circuito monofase,

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_\Delta / 3} = \frac{100 \angle 10^\circ}{2.981 \angle 26.57^\circ} = 33.54 \angle -16.57^\circ \text{ A}$$

come prima. Le altre correnti di linea si ottengono applicando la sequenza *abc*.

■ **Esercizio 12.3** Una delle tensioni di linea di un generatore bilanciato a stella è $V_{AB} = 180 \angle -20^\circ$ V. Se il generatore è collegato ad un carico a triangolo di $20 \angle 40^\circ$ Ω, determinare le correnti di fase e di linea, supponendo una sequenza *abc*.

Risposta $9 \angle -60^\circ, 9 \angle -180^\circ, 9 \angle 60^\circ, 15.59 \angle -90^\circ, 15.59 \angle -150^\circ, 15.59 \angle 30^\circ$ A. ■

12.5 CONFIGURAZIONE TRIANGOLO-TRIANGOLO BILANCIATA

Un sistema triangolo-triangolo ($\Delta-\Delta$) bilanciato è un sistema nel quale sia il generatore che il carico sono bilanciati e collegati a triangolo.

È possibile che in un sistema si abbia sia il generatore che il carico collegati a triangolo, come in Figura 12.17; anche qui, l'obiettivo è quello di ottenere le correnti di fase e di linea. Supponendo di trovarsi nel caso di sequenza positiva, le tensioni di fase per il generatore a triangolo sono

$$V_{ab} = V_p / 0^\circ$$

(12.29)

$$V_{bc} = V_p / -120^\circ, \quad V_{ca} = V_p / +120^\circ$$

Le tensioni di linea sono uguali alle tensioni di fase. Come si vede in Figura 12.17, supposta nulla l'impedenza della linea, le tensioni di fase del generatore a triangolo sono uguali alle tensioni sulle impedenze del carico, cioè

$$V_{ab} = V_{AB}, \quad V_{bc} = V_{BC}, \quad V_{ca} = V_{CA} \quad (12.30)$$

Le correnti di fase sono allora

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta}, & I_{BC} &= \frac{V_{BC}}{Z_\Delta} = \frac{V_{bc}}{Z_\Delta} \\ I_{CA} &= \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ca}}{Z_\Delta} \end{aligned} \quad (12.31)$$

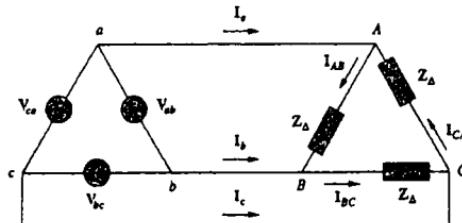
Poiché il carico è collegato a triangolo, come nel paragrafo precedente, alcune delle formule ivi ottenute rimangono valide. Le correnti di linea si ottengono dalle correnti di fase applicando la KCL ai nodi *A*, *B* e *C*, come si è visto nel paragrafo precedente:

$$I_a = I_{AB} - I_{CA}, \quad I_b = I_{BC} - I_{AB}, \quad I_c = I_{CA} - I_{BC} \quad (12.32)$$

Inoltre, sempre come nel paragrafo precedente, ciascuna corrente di linea è in ritardo sulla corrispondente corrente di fase di 30° ; l'ampiezza I_L della corrente di linea è pari a $\sqrt{3}$ volte l'ampiezza I_p della corrente di fase,

$$I_L = \sqrt{3} I_p \quad (12.33)$$

Figura 12.17
Configurazione
triangolo-triangolo bilanciata.



Un metodo alternativo per analizzare il circuito triangolo-triangolo è quello di convertire il generatore e il carico nei loro equivalenti a stella: si è già visto che $Z_Y = Z_\Delta / 3$; per convertire un generatore collegato a triangolo in uno collegato a stella si possono usare le formule riportate nel prossimo paragrafo.

Esempio 12.4

Un carico bilanciato collegato a triangolo con impedenza $20 - j15 \Omega$ è collegato ad un generatore a triangolo a sequenza positiva con $V_{ab} = 330 / 0^\circ$ V. Calcolare le correnti di fase del carico e le correnti di linea.

Soluzione: L'impedenza di carico per fase è

$$Z_\Delta = 20 - j15 = 25 / -36.87^\circ \Omega$$

Le correnti di fase sono

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta} = \frac{330 / 0^\circ}{25 / -36.87} = 13.2 / 36.87^\circ A$$

$$I_{BC} = I_{AB} / -120^\circ = 13.2 / -83.13^\circ A$$

$$I_{CA} = I_{AB} / +120^\circ = 13.2 / 156.87^\circ A$$

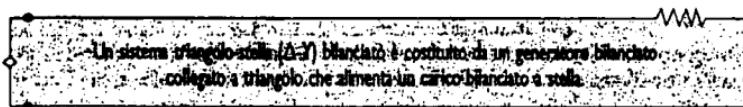
Per un carico a triangolo, la corrente di linea è sempre in ritardo di 30° rispetto alla corrispondente corrente di fase, ed ha una ampiezza $\sqrt{3}$ volte quella della corrente di fase. Le correnti di linea sono allora

$$\begin{aligned} I_a &= I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ = (13.2 \angle 36.87^\circ) (\sqrt{3} \angle -30^\circ) \\ &= 22.86 \angle 6.87^\circ \text{ A} \\ I_b &= I_a \angle -120^\circ = 22.86 \angle -113.13^\circ \text{ A} \\ I_c &= I_a \angle +120^\circ = 22.86 \angle 126.87^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

■ **Esercizio 12.4** Un generatore bilanciato a sequenza positiva collegato a triangolo alimenta un carico bilanciato a triangolo. Se l'impedenza del carico è $18 + j12 \Omega$ per fase e $I_a = 22.5 \angle 35^\circ \text{ A}$, calcolare I_{AB} e V_{AB} .

Risposta $13 \angle 65^\circ \text{ A}$, $281.2 \angle 98.69^\circ \text{ V}$. ■

12.6 CONFIGURAZIONE TRIANGOLO-STELLA BILANCIATA



Si consideri il circuito triangolo-stella di Figura 12.18. Assumendo anche in questo caso la sequenza abc , le tensioni di fase del generatore a triangolo sono

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_p \angle 0^\circ, & V_{bc} &= V_p \angle -120^\circ \\ V_{ca} &= V_p \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (12.34)$$

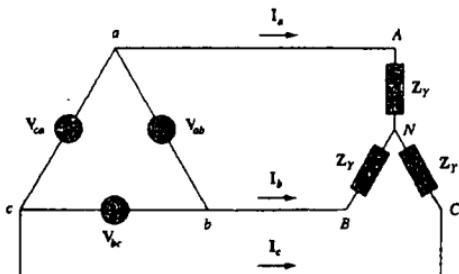


Figura 12.18
Collegamento triangolo-stella bilanciato.

Queste sono anche le tensioni di linea.

È possibile ottenere le correnti di linea in molti modi diversi. Uno di questi consiste nell'applicare la KVL alla maglia $aANBba$ in Figura 12.18,

$$-V_{ab} + Z_Y I_a - Z_Y I_b = 0$$

cioè

$$Z_Y (I_a - I_b) = V_{ab} = V_p \angle 0^\circ$$

Di qui,

$$I_a - I_b = \frac{V_p \angle 0^\circ}{Z_Y} \quad (12.35)$$

Ma I_b è in ritardo su I_a di 120° , avendo supposto la sequenza abc ; allora $I_b = I_a \angle -120^\circ$. Quindi,

$$\begin{aligned} I_a - I_b &= I_a (1 - 1 \angle -120^\circ) \\ &= I_a \left(1 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = I_a \sqrt{3} \angle 30^\circ \end{aligned} \quad (12.36)$$

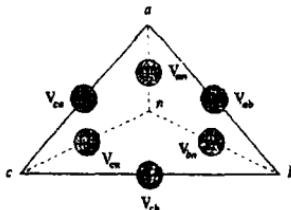
Sostituendo la (12.36) nella (12.35) si ottiene

$$I_a = \frac{V_p / \sqrt{3} / -30^\circ}{Z_Y} \quad (12.37)$$

Da questa è possibile ottenere le altre correnti di linea, I_b e I_c , usando la sequenza positiva, cioè $I_b = I_a / -120^\circ$, $I_c = I_a / +120^\circ$. Le correnti di fase sono uguali alle correnti di linea.

Figura 12.19

Trasformazione di un generatore a triangolo in uno equivalente collegato a stella.



Un altro metodo per ottenere le correnti di linea è quello di sostituire il generatore collegato a triangolo con il suo equivalente a stella, mostrato in Figura 12.19. Nel Paragrafo 12.3, si è visto che le tensioni da linea a linea di un generatore collegato a stella sono in anticipo sulle corrispondenti tensioni di fase di 30° . Le tensioni di fase del generatore equivalente a stella si ottengono dividendo le corrispondenti tensioni di linea del generatore collegato a triangolo per $\sqrt{3}$ e traslando la fase di -30° . Il generatore equivalente collegato a stella ha quindi tensioni di fase

$$\begin{aligned} V_{an} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} / -30^\circ \\ V_{bn} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} / -150^\circ, \quad V_{cn} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} / +90^\circ \end{aligned} \quad (12.38)$$

Se il generatore a triangolo ha impedenza interna Z_t per fase, il generatore equivalente a stella avrà impedenza interna $Z_t / 3$ per fase, secondo la (9.69).

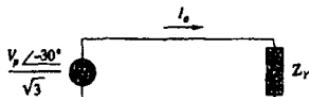
Una volta che il generatore è stato trasformato in una stella, il circuito diventa un sistema stella-stella. È allora possibile utilizzare il circuito equivalente monofase mostrato in Figura 12.20, dal quale si vede che la corrente di linea per la fase a è

$$I_a = \frac{V_p / \sqrt{3} / -30^\circ}{Z_Y} \quad (12.39)$$

che coincide con la (12.37).

Figura 12.20

Circuito equivalente monofase.



In alternativa, è possibile trasformare il carico collegato a stella nel suo equivalente a triangolo, ottenendo così un sistema triangolo-triangolo, che può essere analizzato come visto nel Paragrafo 12.5. È opportuno notare che

$$V_{AN} = I_a Z_Y = \frac{V_p}{\sqrt{3}} / -30^\circ \quad (12.40)$$

$$V_{BN} = V_{AN} / -120^\circ, \quad V_{CN} = V_{AN} / +120^\circ$$

Come si è già detto, il carico a triangolo risulta nella pratica più conveniente di quello a stella, perché risulta più facile alterarne le impedenze che lo costituiscono, che sono collegate direttamente tra le linee. Il generatore collegato a triangolo è invece usato raramente nella pratica, perché la presenza di uno sbilanciamento anche piccolo tra le

tensioni di fase dà luogo ad una corrente indesiderata, che circola nell'anello costituito dal triangolo stesso.

La Tabella 12.1 presenta un riepilogo delle formule che legano le tensioni di fase e di linea e le correnti di fase e di linea per le quattro configurazioni esaminate. È opportuno che il lettore acquisisca una comprensione completa del modo in cui queste formule sono state ricavate, evitando così di doverle imparare a memoria. Tutte le formule, peraltro, possono sempre essere ottenute applicando direttamente la KCL e la KVL al corrispondente circuito trifase.

Tabella 12.1 Riepilogo delle tensioni/correnti di fase e di linea per i sistemi trifase bilanciati.¹

Collegamento	Tensioni/correnti di fase	Tensioni/correnti di linea
Y-Y	$V_{an} = V_p /0^\circ$ $V_{bn} = V_p /-120^\circ$ $V_{cn} = V_p /+120^\circ$ Come le correnti di linea	$V_{ab} = \sqrt{3}V_p /30^\circ$ $V_{bc} = V_{ab} /-120^\circ$ $V_{ca} = V_{ab} /+120^\circ$ $I_a = V_{an}/Z_Y$ $I_b = I_a /-120^\circ$ $I_c = I_a /+120^\circ$
Y-Δ	$V_{an} = V_p /0^\circ$ $V_{bn} = V_p /-120^\circ$ $V_{cn} = V_p /+120^\circ$ $I_{AB} = V_{AB}/Z_\Delta$ $I_{BC} = V_{BC}/Z_\Delta$ $I_{CA} = V_{CA}/Z_\Delta$	$V_{ab} = V_{AB} = \sqrt{3}V_p /30^\circ$ $V_{bc} = V_{BC} = V_{ab} /-120^\circ$ $V_{ca} = V_{CA} = V_{ab} /+120^\circ$ $I_a = I_{AB}\sqrt{3} /-30^\circ$ $I_b = I_a /-120^\circ$ $I_c = I_a /+120^\circ$
Δ-Δ	$V_{ab} = V_p /0^\circ$ $V_{bc} = V_p /-120^\circ$ $V_{ca} = V_p /+120^\circ$ $I_{AB} = V_{ab}/Z_\Delta$ $I_{BC} = V_{bc}/Z_\Delta$ $I_{CA} = V_{ca}/Z_\Delta$	Come le tensioni di fase
Δ - Y	$V_{ab} = V_p /0^\circ$ $V_{bc} = V_p /-120^\circ$ $V_{ca} = V_p /+120^\circ$ Come le correnti di linea	$I_a = I_{AB}\sqrt{3} /-30^\circ$ $I_b = I_a /-120^\circ$ $I_c = I_a /+120^\circ$ Come le tensioni di fase $I_a = \frac{V_p /-30^\circ}{\sqrt{3}Z_Y}$ $I_b = I_a /-120^\circ$ $I_c = I_a /+120^\circ$

¹ Si suppone sequenza abc o positiva.

Esempio 12.5

Un carico bilanciato collegato a stella con impedenza di fase $40 + j25\Omega$ viene alimentato da un generatore bilanciato, a sequenza positiva e collegato a triangolo con tensione di linea di 210 V. Calcolare le correnti di fase. Utilizzare V_{ab} come riferimento.

Soluzione: L'impedenza di carico è

$$Z_Y = 40 + j25 = 47.17 /32^\circ \Omega$$

e la tensione del generatore è

$$V_{ab} = 210 /0^\circ \text{ V}$$

Quando il generatore a triangolo viene trasformato in una stella,

$$V_{an} = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} /-30^\circ = 121.2 /-30^\circ \text{ V}$$

Le correnti di linea sono

$$I_a = \frac{V_{ab}}{Z_1} = \frac{121.2 \angle -30^\circ}{47.17 \angle 32^\circ} = 2.57 \angle -62^\circ \text{ A}$$

$$I_b = I_a \angle -120^\circ = 2.57 \angle -178^\circ \text{ A}$$

$$I_c = I_a \angle 120^\circ = 2.57 \angle 58^\circ \text{ A}$$

che coincidono con le correnti di fase.

- **Esercizio 12.5** In un circuito triangolo-stella bilanciato, $V_{ab} = 240 \angle 15^\circ \text{ V}$ e $Z_Y = (12 + j15) \Omega$. Calcolare le correnti di linea.

Risposta $7.21 \angle -66.34^\circ, 7.21 \angle -173.66^\circ, 7.21 \angle 53.66^\circ \text{ A}$.

12.7 POTENZA IN UN SISTEMA TRIFASE BILANCIATO

Si prende ora in esame il calcolo delle potenze in un sistema trifase bilanciato, iniziando con l'esame della potenza istantanea assorbita dal carico. Trattandosi di potenza istantanea, l'analisi va necessariamente eseguita nel dominio del tempo. Per un carico collegato a stella, le tensioni di fase sono

$$\begin{aligned} v_{AN} &= \sqrt{2}V_p \cos \omega t, & v_{BN} &= \sqrt{2}V_p \cos (\omega t - 120^\circ) \\ v_{CN} &= \sqrt{2}V_p \cos (\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (12.41)$$

dove il fattore $\sqrt{2}$ si è reso necessario essendo V_p definito come il valore efficace della tensione di fase. Se $Z_Y = Z \angle \theta$, le correnti di fase sono in ritardo sulle corrispondenti tensioni di fase di θ :

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}I_p \cos (\omega t - \theta), & i_b &= \sqrt{2}I_p \cos (\omega t - \theta - 120^\circ) \\ i_c &= \sqrt{2}I_p \cos (\omega t - \theta + 120^\circ) \end{aligned} \quad (12.42)$$

dove I_p è il valore efficace della corrente di fase. La potenza istantanea totale nel carico è la somma delle potenze istantanee nelle tre fasi, cioè

$$\begin{aligned} p &= p_a + p_b + p_c = v_{AN}i_a + v_{BN}i_b + v_{CN}i_c \\ &= 2V_p I_p [\cos \omega t \cos (\omega t - \theta) \\ &\quad + \cos (\omega t - 120^\circ) \cos (\omega t - \theta - 120^\circ) \\ &\quad + \cos (\omega t + 120^\circ) \cos (\omega t - \theta + 120^\circ)] \end{aligned} \quad (12.43)$$

Applicando l'identità trigonometrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos (A + B) + \cos (A - B)] \quad (12.44)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} p &= V_p I_p [3 \cos \theta + \cos (2\omega t - \theta) + \cos (2\omega t - \theta - 240^\circ) \\ &\quad + \cos (2\omega t - \theta + 240^\circ)] \\ &= V_p I_p [3 \cos \theta + \cos \alpha + \cos \alpha \cos 240^\circ + \sin \alpha \sin 240^\circ \\ &\quad + \cos \alpha \cos 240^\circ - \sin \alpha \sin 240^\circ] \\ &\quad \text{con } \alpha = 2\omega t - \theta \\ &= V_p I_p \left[3 \cos \theta + \cos \alpha + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right] = 3V_p I_p \cos \theta \end{aligned} \quad (12.45)$$

La potenza istantanea totale in un sistema trifase bilanciato è quindi costante – non varia nel tempo come fanno invece le potenze istantanee delle singole fasi. Questo risultato è valido sia per un carico a stella che per un carico a triangolo, e costituisce una

prima importante ragione per utilizzare un sistema trifase per generare e distribuire la potenza elettrica. Poiché la potenza istantanea complessiva è indipendente dal tempo, la potenza media per fase P_p per il carico collegato a stella o a triangolo è $p/3$.

$$P_p = V_p I_p \cos \theta \quad (12.46)$$

e la potenza reattiva per fase è

$$Q_p = V_p I_p \sin \theta \quad (12.47)$$

La potenza apparente per fase è

$$S_p = V_p I_p \quad (12.48)$$

La potenza complessa per fase è

$$S_p = P_p + jQ_p = V_p I_p^* \quad (12.49)$$

dove V_p e I_p sono la tensione e la corrente di fase i cui moduli sono V_p e I_p rispettivamente. La potenza media complessiva è la somma delle potenze medie delle fasi:

$$P = P_a + P_b + P_c = 3P_p = 3V_p I_p \cos \theta = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta \quad (12.50)$$

Per un carico collegato a stella, $I_L = I_p$ ma $V_L = \sqrt{3}V_p$, mentre per un carico collegato a triangolo $I_L = \sqrt{3}I_p$ ma $V_L = V_p$. La (12.50) risulta allora valida sia per carichi a stella che a triangolo. In maniera simile, la potenza reattiva totale vale

$$Q = 3V_p I_p \sin \theta = 3Q_p = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta \quad (12.51)$$

e la potenza complessa totale

$$S = 3S_p = 3V_p I_p^* = 3I_p^2 Z_p = \frac{3V_p^2}{Z_p^*} \quad (12.52)$$

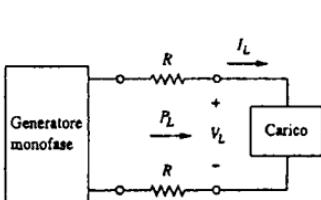
dove $Z_p = Z_p \angle \theta$ è l'impedenza di carico per fase. (Z_p può rappresentare Z_Y o Z_Δ .) In alternativa, si può scrivere la (12.52) come

$$S = P + jQ = \sqrt{3}V_L I_L \angle \theta \quad (12.53)$$

Si ricordi che V_p , I_p , V_L e I_L sono tutti valori efficaci e che θ è l'argomento dell'impedenza di carico, o anche l'angolo tra la tensione di fase e la corrente di fase.

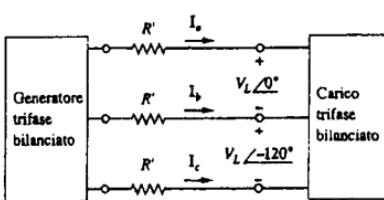
Un altro importante vantaggio dell'uso dei sistemi trifase per la distribuzione dell'energia elettrica è che i sistemi trifase necessitano di una quantità di cablaggio inferiore rispetto ai sistemi monofase a parità di tensione di linea V_L e di potenza assorbita P_L . Si effettuerà ora il confronto, supponendo che i fili siano dello stesso materiale in entrambi i casi (ad esempio rame, di resistività ρ), della stessa lunghezza ℓ , e che i carichi siano resistivi (cioè con fattore di potenza unitario). Per il sistema monofase a due fili di Figura 12.21(a), $I_L = P_L/V_L$, e la perdita di potenza nei due fili è

$$P_{\text{perda}} = 2I_L^2 R = 2R \frac{P_L^2}{V_L^2} \quad (12.54)$$



Linee di trasmissione

(a)



Linee di trasmissione

(b)

Figura 12.21
Confronto fra le perdite di potenza in (a) un sistema monofase e (b) un sistema trifase.

Per il sistema trifase a tre fili di Figura 12.21(b), $I'_L = |I_a| = |I_b| = |I_c| = P_L / \sqrt{3} V_L$ dalla (12.50). La potenza dissipata nei tre fili è

$$P'_{\text{perca}} = 3(I'_L)^2 R' = 3R' \frac{P_L^2}{3V_L^2} = R' \frac{P_L^2}{V_L^2} \quad (12.55)$$

Le (12.54) e (12.55) mostrano che a parità di potenza totale P_L fornita al carico e di tensione di linea V_L ,

$$\frac{P_{\text{perca}}}{P'_{\text{perca}}} = \frac{2R}{R'} \quad (12.56)$$

Ma dal Capitolo 2, $R = \rho\ell/\pi r^2$ e $R' = \rho\ell/\pi r'^2$, dove r e r' sono i raggi delle sezioni circolari dei fili. Ne segue

$$\frac{P_{\text{perca}}}{P'_{\text{perca}}} = \frac{2r'^2}{r^2} \quad (12.57)$$

Se si immagina di tollerare lo stesso valore di potenza dissipata in entrambi i sistemi, allora $r^2 = 2r'^2$. Il rapporto fra le quantità di materiale conduttore richieste viene determinato dal numero di fili e dai loro volumi, e quindi

$$\frac{\text{Materiale per sistema monofase}}{\text{Materiale per sistema trifase}} = \frac{2(\pi r^2 \ell)}{3(\pi r'^2 \ell)} = \frac{2r^2}{3r'^2} = \frac{2}{3}(2) = 1.333 \quad (12.58)$$

perché $r^2 = 2r'^2$. Si vede dalla (12.58) che il sistema monofase richiede il 33 percento di materiale in più del sistema trifase, o anche che il trifase richiede solo il 75 percento di materiale rispetto al monofase. In altre parole, per trasportare e fornire la stessa quantità di energia è necessario molto meno materiale con il sistema trifase che con il sistema monofase.

Esempio 12.6

Con riferimento al circuito in Figura 12.13 (Esempio 12.2), determinare la potenza media totale, la potenza reattiva totale e le potenze complesse totali al generatore e al carico.

Soluzione: Essendo il sistema bilanciato, è sufficiente considerare una sola fase. Per la fase a ,

$$V_p = 110 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \text{e} \quad I_p = 6.81 \angle -21.8^\circ \text{ A}$$

Al generatore, la potenza complessa è allora

$$\begin{aligned} S_g &= -3V_p I_p^* = -3(110 \angle 0^\circ)(6.81 \angle 21.8^\circ) \\ &= -2247 \angle 21.8^\circ = -(2087 + j834.6) \text{ VA} \end{aligned}$$

La potenza media o reale è -2087 W e la potenza reattiva è -834.6 VAR . Al carico, la potenza complessa assorbita vale

$$S_L = 3|I_p|^2 Z_p$$

dove $Z_p = 10 + j8 = 12.81 \angle 38.66^\circ$ e $I_p = I_a = 6.81 \angle -21.8^\circ$

Ne segue

$$\begin{aligned} S_L &= 3(6.81)^2 12.81 \angle 38.66^\circ = 1782 \angle 38.66^\circ \\ &= (1392 + j1113) \text{ VA} \end{aligned}$$

La potenza reale assorbita è 1391.7 W e quella reattiva 1113.3 VAR . La differenza fra le due potenze complesse viene assorbita dall'impedenza di linea di $(5 - j2) \Omega$. Per convincersene, si può calcolare la potenza complessa assorbita dalla linea come

$$S_t = 3|I_p|^2 Z_t = 3(6.81)^2 (5 - j2) = 695.6 - j278.3 \text{ VA}$$

che è proprio la differenza fra S_g e S_L , e cioè $S_g + S_t + S_L = 0$, come ci si attendeva.

Esercizio 12.6 Nel circuito stella-stella dell'Esercizio 12.2 calcolare la potenza complessa al generatore e al carico.

Risposta $-(1054 + j843.3)$ VA, $(1012 + j801.6)$ VA.

Esempio 12.7

Un motore trifase può essere considerato come un carico bilanciato a stella. Un certo motore trifase assorbe 5.6 kW quando la tensione di linea è 220 V e la corrente di linea è 18.2 A. Determinare il fattore di potenza del motore.

Soluzione: La potenza apparente è

$$S = \sqrt{3}V_L I_L = \sqrt{3}(220)(18.2) = 6935.13 \text{ VA}$$

Poiché la potenza reale è

$$P = S \cos \theta = 5600 \text{ W}$$

il fattore di potenza è

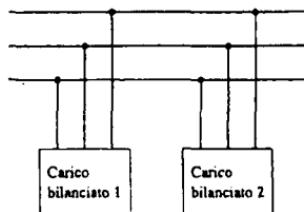
$$\text{pf} = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{5600}{6935.13} = 0.8075$$

Esercizio 12.7 Calcolare la corrente di linea necessaria ad un motore trifase da 30kW avente un fattore di potenza di 0.85 induttivo se esso viene collegato ad un generatore bilanciato con tensione di linea 440 V.

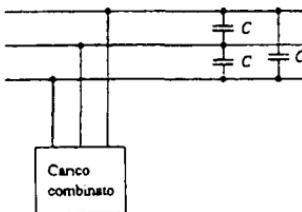
Risposta 46.31 A.

Esempio 12.8

Due carichi bilanciati sono collegati ad una linea da 240kV efficaci a 60Hz, come mostrato in Figura 12.22(a). Il carico 1 assorbe 30 kW con fattore di potenza 0.6 induttivo, mentre il carico 2 assorbe 45 kVAR con fattore di potenza 0.8 induttivo. Supponendo di essere nella sequenza abc, determinare: (a) le potenze complessa, reale e reattiva assorbite dalla combinazione dei due carichi. (b) le correnti di linea e (c) la potenza in kVAR di tre condensatori collegati a triangolo in parallelo al carico in grado di portare il fattore di potenza a 0.9 induttivo, e la capacità di ciascun condensatore.



(a)



(b)

Figura 12.22
Per l'Esempio 12.8:
(a) Carichi bilanciati originali,
(b) carico combinato con fattore di potenza migliorato.

Soluzione: (a) Per il carico 1, da $P_1 = 30 \text{ kW}$ e $\cos \theta_1 = 0.6$ segue $\sin \theta_1 = 0.8$. Allora,

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos \theta_1} = \frac{30 \text{ kW}}{0.6} = 50 \text{ kVA}$$

e $Q_1 = S_1 \sin \theta_1 = 50(0.8) = 40 \text{ kVAR}$. La potenza complessa relativa al carico 1 è allora

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = 30 + j40 \text{ kVA} \quad (12.8.1)$$

Per il carico 2, se $Q_2 = 45 \text{ kVAR}$ e $\cos \theta_2 = 0.8$ allora $\sin \theta_2 = 0.6$. Si trova

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin \theta_2} = \frac{45 \text{ kVA}}{0.6} = 75 \text{ kVA}$$

e $P_2 = S_2 \cos \theta_2 = 75(0.8) = 60 \text{ kW}$. La potenza complessa dovuta al carico 2 è allora

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = 60 + j45 \text{ kVA} \quad (12.8.2)$$

Dalle (12.8.1) e (12.8.2) la potenza complessa totale assorbita dal carico è

$$S = S_1 + S_2 = 90 + j85 \text{ kVA} = 123.8 \angle 43.36^\circ \text{ kVA} \quad (12.8.3)$$

il cui fattore di potenza è $\cos 43.36^\circ = 0.727$ induttivo. La potenza reale è allora 90 kW, e quella reattiva 85 kVAR.

(b) Poiché $S = \sqrt{3}V_L I_L$, la corrente di linea è

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3}V_L} \quad (12.8.4)$$

Si applica questa relazione a ciascun carico, ricordando che, per entrambi i carichi, $V_L = 240$ kV. Per il carico 1,

$$I_{L1} = \frac{50\,000}{\sqrt{3} \cdot 240\,000} = 120.28 \text{ mA}$$

Essendo il fattore di potenza induttivo, la corrente di linea è in ritardo rispetto alla tensione di linea di $\theta_1 = \cos^{-1} 0.6 = 53.13^\circ$. Allora,

$$I_{e1} = 120.28 / -53.13^\circ \text{ mA}$$

Per il carico 2,

$$I_{L2} = \frac{75\,000}{\sqrt{3} \cdot 240\,000} = 180.42 \text{ mA}$$

e la corrente di linea è in ritardo sulla tensione di linea di $\theta_2 = \cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$. Quindi,

$$I_{e2} = 180.42 / -36.87^\circ \text{ mA}$$

La corrente di linea totale è

$$\begin{aligned} I_e &= I_{e1} + I_{e2} = 120.28 / -53.13^\circ + 180.42 / -36.87^\circ \\ &= (72.168 - j96.224) + (144.336 - j108.252) \\ &= 216.5 - j204.472 = 297.8 / -43.36^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

In alternativa, si sarebbe potuta ottenere la corrente dalla potenza complessa totale usando la (12.8.4)

$$I_L = \frac{123\,800}{\sqrt{3} \cdot 240\,000} = 297.82 \text{ mA}$$

e

$$I_e = 297.82 / -43.36^\circ \text{ mA}$$

che coincide con il risultato di prima. Le altre correnti di linea, I_b e I_c , possono essere ottenute rispettando la sequenza abc (cioè, $I_b = 297.82 / -163.36^\circ$ mA e $I_c = 297.82 / 76.64^\circ$ mA).

(c) Si può determinare la potenza reattiva necessaria a portare il fattore di potenza a 0.9 induttivo usando la (11.59),

$$Q_C = P(\tan \theta_{\text{vecchio}} - \tan \theta_{\text{nuovo}})$$

dove $P = 90$ kW, $\theta_{\text{vecchio}} = 43.36^\circ$, e $\theta_{\text{nuovo}} = \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$:

$$Q_C = 90\,000(\tan 43.36^\circ - \tan 25.84^\circ) = 41.4 \text{ kVAR}$$

Questa è la potenza reattiva per tre condensatori. Ogni condensatore avrà quindi una potenza reattiva $Q_C' = 13.8$ kVAR. Dalla (11.60), la capacità vale

$$C = \frac{Q'_C}{\omega V_{\text{eff}}^2}$$

Poiché i condensatori sono collegati a triangolo, come mostrato in Figura 12.22(b), V_{eff} nella formula precedente è la tensione linea-linea, o tensione di linea, che è di 240 kV. Ne segue,

$$C = \frac{13\,800}{(2\pi 60)(240\,000)^2} = 635.5 \text{ pF}$$

Esercizio 12.8 I due carichi bilanciati in Figura 12.22(a) sono alimentati da una linea da 840 V efficaci e 60Hz. Il carico 1 è collegato a stella con $30 + j40 \Omega$ per fase, mentre il carico 2 è un motore trifase bilanciato che assorbe 48 kW con fattore di potenza 0.8 induttivo. Supponendo la sequenza abc, calcolare: (a) la potenza complessa assorbita dal carico combinato, (b) la potenza in kVAR di ciascuno dei tre condensatori collegati a triangolo in parallelo al carico tali da portare il fattore di potenza all'unità, e (c) la corrente assorbita in condizioni di fattore di potenza unitario.

Risposta (a) $56.47 + j47.29$ kVA, (b) 15.7 kVAR, (c) 38.813 A.

12.8 SISTEMI TRIFASE SBILANCIATI

La trattazione dei sistemi trifase di questo capitolo sarebbe incompleta se non venissero menzionati i sistemi trifase sbilanciati. Un sistema sbilanciato può essere causato da due situazioni: (1) le tensioni del generatore non hanno ampiezze tutte uguali e/o hanno fasi diverse, oppure (2) le impedenze di carico non sono uguali. In sintesi:

Un sistema sbilanciato è caratterizzato da generatori di tensione sbilanciati o da un carico sbilanciato.

Per semplificare l'analisi, si supporrà che le tensioni del generatore siano bilanciate e siano invece sbilanciati i carichi. La risoluzione dei sistemi trifase sbilanciati avviene mediante l'applicazione diretta della analisi nodale o agli anelli.

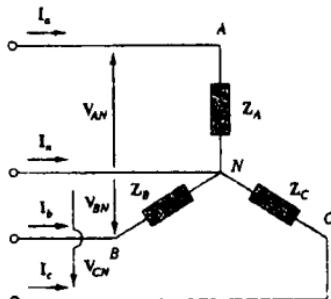


Figura 12.23
Carico trifase sbilanciato collegato a stella.

La Figura 12.23 mostra un esempio di sistema trifase sbilanciato consistente in un sistema di tensioni di generatore bilanciate (non mostrate nella figura) e di un carico a stella sbilanciato (mostrato nella figura). Poiché il carico non è bilanciato, Z_A , Z_B e Z_C non sono uguali. Le correnti di linea si determinano con la legge di Ohm

$$I_a = \frac{V_{AN}}{Z_A}, \quad I_b = \frac{V_{BN}}{Z_B}, \quad I_c = \frac{V_{CN}}{Z_C} \quad (12.59)$$

Questo insieme di correnti di linea sbilanciate dà luogo ad una corrente nella linea del neutro, che era invece nulla nel caso di sistema bilanciato. Applicando la KCL al nodo N , si ottiene la corrente del neutro come

$$I_n = -(I_a + I_b + I_c) \quad (12.60)$$

In un sistema a tre fili, privo della linea del neutro, è ancora possibile ottenere le correnti di linea I_a , I_b e I_c usando l'analisi agli anelli. Al nodo N , la KCL deve essere soddisfatta, e quindi $I_a + I_b + I_c = 0$ in questo caso. Una analisi simile potrebbe essere eseguita anche per un sistema triangolo-stella, stella-triangolo o triangolo-triangolo a tre fili. Come si è già visto, nei sistemi per la trasmissione della potenza a lunga distanza vengono usati conduttori in multipli di tre (sistemi a tre fili multipli), e si utilizza il suolo quale conduttore per il neutro.

Per calcolare la potenza in un sistema trifase sbilanciato è necessario determinare la potenza in ciascuna fase usando le Equazioni da (12.46) a (12.49). La potenza totale non è semplicemente pari a tre volte la potenza in una fase, ma è la somma delle potenze nelle tre fasi.

Esempio 12.9

Il carico sbilanciato collegato a stella di Figura 12.23 è soggetto a tensioni bilanciate di 100 V con sequenza acb. Calcolare le correnti di linea e la corrente del neutro. Supponre $Z_A = 15 \Omega$, $Z_B = 10 + j5 \Omega$, $Z_C = 6 - j8 \Omega$.

Soluzione: Usando la (12.59), le correnti di linea sono

$$I_a = \frac{100 / 0^\circ}{15} = 6.67 / 0^\circ \text{ A}$$

$$I_b = \frac{100 / 120^\circ}{10 + j5} = \frac{100 / 120^\circ}{11.18 / 26.56^\circ} = 8.94 / 93.44^\circ \text{ A}$$

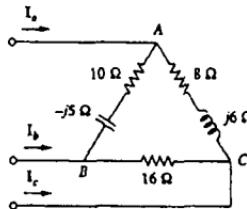
$$I_c = \frac{100 / -120^\circ}{6 - j8} = \frac{100 / -120^\circ}{10 / -53.13^\circ} = 10 / -66.87^\circ \text{ A}$$

Per la (12.60), la corrente nella linea del neutro vale

$$I_n = -(I_a + I_b + I_c) = -(-6.67 - 0.54 + j8.92 + 3.93 - j9.2) \\ = -10.06 + j0.28 = 10.06 / 178.4^\circ \text{ A}$$

Esercizio 12.9 Il carico a triangolo sbilanciato di Figura 12.24 è alimentato da tensioni bilanciate di 200 V in sequenza positiva. Determinare le correnti di linea, assumendo V_{ab} come riferimento.

Figura 12.24
Carico a triangolo sbilanciato;
per l'Esercizio 12.9.



Risposta 18.05 / -41.06°, 29.15 / -139.8°, 31.87 / 74.27° A.

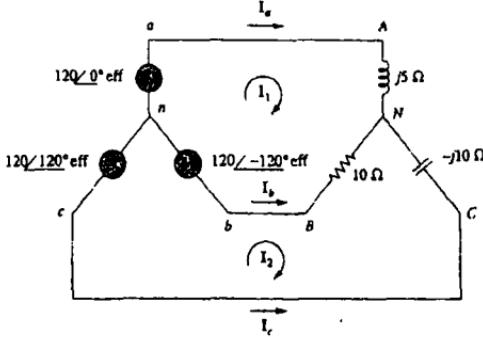
Esempio 12.10

Nel circuito sbilanciato di Figura 12.25, determinare: (a) le correnti di linea, (b) la potenza complessa totale assorbita dal carico, e (c) la potenza complessa totale erogata dal generatore.

Soluzione: (a) Si farà uso della analisi agli anelli per calcolare le correnti richieste. Per l'anello 1

$$120 / -120^\circ - 120 / 0^\circ + (10 + j5)I_1 - 10I_2 = 0$$

Figura 12.25
Per l'Esempio 12.10.



cioè

$$(10 + j5)I_1 - 10I_2 = 120\sqrt{3} / 30^\circ \quad (12.10.1)$$

Per l'anello 2,

$$120 / 120^\circ - 120 / -120^\circ + (10 - j10)I_2 - 10I_1 = 0$$

o anche

$$-10I_1 + (10 - j10)I_2 = 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \quad (12.10.2)$$

Le (12.10.1) e (12.10.2) costituiscono una equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 10+j5 & -10 \\ -10 & 10-j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \\ 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \end{bmatrix}$$

I determinanti sono

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10+j5 & -10 \\ -10 & 10-j10 \end{vmatrix} = 50-j50 = 70.71 \angle -45^\circ$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 120\sqrt{3} \angle 30^\circ & -10 \\ 120\sqrt{3} \angle -90^\circ & 10-j10 \end{vmatrix} = 207.85(13.66 - j13.66) \\ &= 4015 \angle -45^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 10+j5 & 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \\ -10 & 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \end{vmatrix} = 207.85(13.66 - j5) \\ &= 3023 \angle -20.1^\circ \end{aligned}$$

Le correnti di anello valgono

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4015.23 \angle -45^\circ}{70.71 \angle -45^\circ} = 56.78 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3023.4 \angle -20.1^\circ}{70.71 \angle -45^\circ} = 42.75 \angle 24.9^\circ \text{ A}$$

Le correnti di linea sono allora

$$I_a = I_1 = 56.78 \text{ A}, \quad I_c = -I_2 = 42.75 \angle -155.1^\circ \text{ A}$$

$$I_b = I_2 - I_1 = 38.78 + j18 - 56.78 = 25.46 \angle 135^\circ \text{ A}$$

(b) È ora possibile calcolare la potenza complessa assorbita dal carico. Per la fasc A,

$$S_A = |I_a|^2 Z_A = (56.78)^2 (j5) = j16120 \text{ VA}$$

Per la fasc B,

$$S_B = |I_b|^2 Z_B = (25.46)^2 (10) = 6480 \text{ VA}$$

Per la fasc C,

$$S_C = |I_c|^2 Z_C = (42.75)^2 (-j10) = -j18276 \text{ VA}$$

La potenza complessa totale assorbita dal carico è allora

$$S_L = S_A + S_B + S_C = 6480 - j2156 \text{ VA}$$

(c) Il risultato appena trovato può essere verificato calcolando la potenza complessa al generatore.

Per il generatore di tensione della fase a,

$$S_a = -V_{av} I'_a = -(120 \angle 0^\circ)(56.78) = -6813.6 \text{ VA}$$

Per quello della fase b,

$$\begin{aligned} S_b &= -V_{bv} I'_b = -(120 \angle -120^\circ)(25.46 \angle -135^\circ) \\ &= -3055.2 \angle 105^\circ = 790 - j2951.1 \text{ VA} \end{aligned}$$

Per quello della fase c,

$$\begin{aligned} S_c &= -V_{cv} I'_c = -(120 \angle 120^\circ)(42.75 \angle 155.1^\circ) \\ &= -5130 \angle 275.1^\circ = -456.03 + j5109.7 \text{ VA} \end{aligned}$$

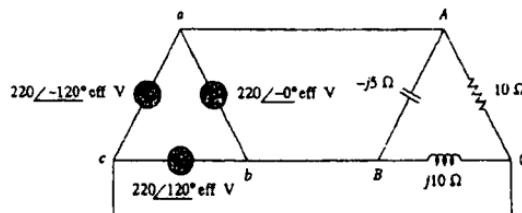
La potenza complessa totale del generatore trifase è

$$S_t = S_a + S_b + S_c = -6813.6 - 790 - j2951.1 + -456.03 + j5109.7 \text{ VA}$$

che conferma $S_t + S_L = 0$, cioè il principio di conservazione della potenza in regime sinusoidale.

■ Esercizio 12.10 Determinare le correnti di linea nel circuito trifase sbilanciato di Figura 12.26 e la potenza reale assorbita dal carico.

Figura 12.26
Per l'Esercizio 12.10.



Risposta: $64\angle 80.1^\circ$, $38.1\angle -60^\circ$, $42.5\angle 225^\circ \text{ A}$, 4.84 kW .

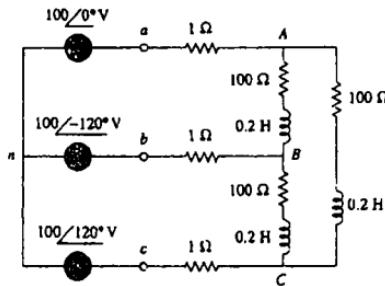
12.9 PSPICE PER I CIRCUITI TRIFASE

PSpice può essere utilizzato per analizzare circuiti trifase bilanciati o sibilanciati, allo stesso modo di come viene usato per l'analisi di circuiti AC monofase. Due importanti problemi sono però associati ad un generatore collegato a triangolo che deve essere analizzato con PSpice. Innanzitutto, un generatore trifase collegato a triangolo è una maglia di generatori di tensione, che non si può trattare con PSpice, perché presenta una corrente indeterminata. Per evitare questo primo problema, è possibile inserire un resistore di valore trascurabile (ad esempio, $1\mu\Omega$ per fase) in ciascuna fase del generatore a triangolo. In secondo luogo, un generatore trifase a triangolo non possiede un nodo al quale associare in modo comodo il nodo di massa o di riferimento, necessario in tutte le analisi effettuate con PSpice. Questo problema può essere aggirato introducendo un sistema di tre resistori di valore molto elevato (ad esempio, $1M\Omega$ per fase) collegati a stella all'interno del generatore a triangolo, in modo da utilizzare il nodo comune dei resistori a stella come nodo 0. Ciò verrà meglio illustrato nell'Esempio 12.12.

Esempio 12.11

Nel circuito stella-triangolo bilanciato di Figura 12.27, utilizzare PSpice per determinare la corrente di linea I_{AA} , la tensione di fase V_{AB} e la corrente di fase I_{AC} . La frequenza del generatore è 60 Hz.

Figura 12.27
Per l'Esempio 12.11.



Soluzione: Lo schematico è mostrato in Figura 12.28. Gli pseudocomponenti IPRINT sono stati inseriti nelle linee opportune per ottenere le letture di I_{AA} e I_{AC} , mentre VPRINT2 è stato inserito tra i nodi A e B per visualizzare la tensione differenziale V_{AB} . Si inseriscono gli attributi di IPRINT e VPRINT2 $AC = yes$, $MAG = yes$, $PHASE = yes$, per visualizzare soltanto ampiezza e fase di correnti e tensioni. Poiché si tratta di una analisi ad una unica frequenza, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep e si inserisce $Total Pts = 1$, $Start Freq = 60$ e $Final Freq = 60$. Dopo aver salvato il circuito, si avvia la simulazione selezionando Analysis/Simulate. Il file di uscita contiene, fra l'altro, le seguenti informazioni:

FREQ	V(A,B)	V(P,A,B)
6.000E+01	1.699E+02	3.081E+01

FREQ IM(V_PRINT2) IP(V_PRINT2)
6.000E+01 2.350E+00 -3.620E+01

FREQ IM(V_PRINT3) IP(V_PRINT3)
6.000E+01 1.357E+00 -6.620E+01

Da queste, si ottiene

$$I_{af} = 2.35 \angle -36.2^\circ \text{ A}$$

$$V_{AB} = 169.9 \angle 30.81^\circ \text{ V}, \quad I_{AC} = 1.357 \angle -66.2^\circ \text{ A}$$

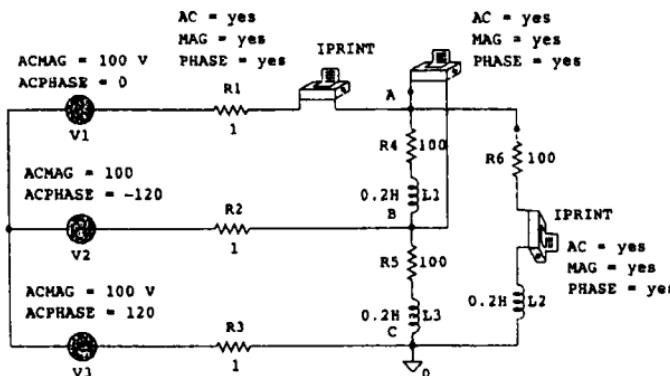


Figura 12.28
Schematico per il circuito di Figura 12.27.

Esercizio 12.11 Si consideri il circuito bilanciato stella-stella di Figura 12.29. Si usi PSpice per ottenere la corrente di linea I_{ab} e la tensione di fascia V_{AN} . Supponete $f = 100 \text{ Hz}$.

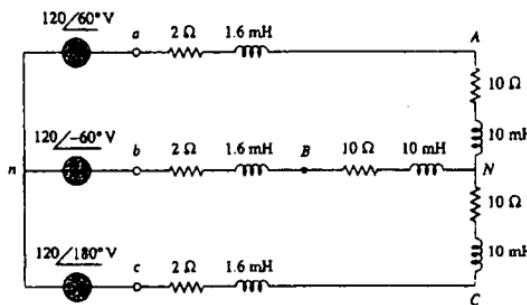


Figura 12.29
Per l'Esercizio 12.11.

Risposta $8.547 \angle -91.27^\circ \text{ A}, 100.9 \angle 60.87^\circ \text{ V}$.

Esempio 12.12

Si consideri il circuito triangolo-triangolo sbilanciato di Figura 12.30. Si utilizzi PSpice per determinare la corrente del generatore I_{ab} , la corrente di linea I_{ab} e la corrente di fase I_{bc} .

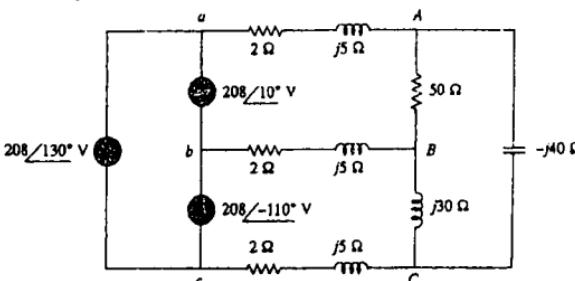


Figura 12.30
Per l'Esempio 12.12.

Soluzione**1. Dare una definizione precisa del problema.**

Il problema e il processo per ottenere la soluzione sono chiaramente definiti.

2. Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.

Si deve calcolare la corrente del generatore che scorre da a a b , la corrente di linea da b a B ed infine la corrente di fase che scorre da B a c .

3. Verificare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

Ci sono diversi metodi per risolvere il problema, ma è preferibile l'uso di PSpice.

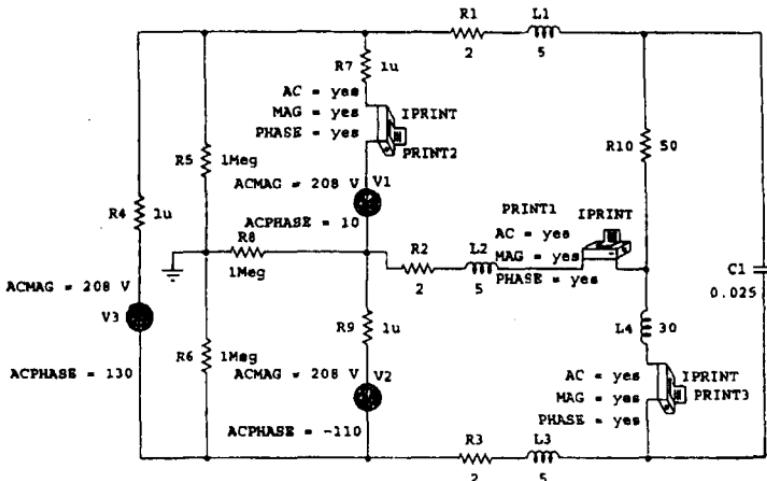
4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

Come si è detto, è necessario eliminare la maglia di generazione inserendo un resistore da $1\mu\Omega$ in serie a ciascun generatore del triangolo. Per dare un nodo di massa al circuito, si inserisce una stella bilanciata di resistori ($1\text{ M}\Omega$ per fase) nel triangolo di generatori, come mostrato nello schematico di Figura 12.31. Sono stati inseriti tre pseudocomponenti IPRINT per poter visualizzare le correnti richieste I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} . Poiché non è nota la frequenza di funzionamento e PSpice richiede di specificare i valori di induttanze e capacità invece dei valori delle impedenze, si suppone $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e quindi $f = 1/2\pi = 0.159155 \text{ Hz}$. Allora,

$$L = \frac{X_L}{\omega} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{\omega X_C}$$

Figura 12.31

Schematico per il circuito in Figura 12.30.



Si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep scegliendo Total Pts = 1, Start Freq = 0.159155 e Final Freq = 0.159155. Dopo aver salvato lo schematico, selezionando Analysis/Simulate si avvia la simulazione. Al termine, il file di uscita contiene:

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
1.592E-01	9.105E+00	1.685E+02
FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
1.592E-01	5.959E+00	-1.772E+02
FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
1.592E-01	5.500E+00	1.725E+02

da cui si ricava

$$I_{ab} = 5.595 / -177.2^\circ \text{ A}$$

$$I_{bc} = 9.106 / 168.5^\circ \text{ A}, \quad I_{ca} = 5.5 / 172.5^\circ \text{ A}$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Si possono verificare i risultati usando l'analisi agli anelli. Si chiamano gli anelli $aABb$, $bBCc$ e $cACa$ rispettivamente anello 1, anello 2 e anello 3, con le corrispondenti correnti di anello che scorrono tutte con verso orario. Si ottengono le seguenti equazioni di anello:

Maglia 1

$$(54 + j10)I_1 - (2 + j5)I_2 - (50)I_3 = 208 \angle 10^\circ = 204.8 + j36.12$$

Maglia 2

$$-(2 + j5)I_1 + (4 + j40)I_2 - (j30)I_3 = 208 \angle -110^\circ = -71.14 - j195.46$$

Maglia 3

$$-(50)I_1 - (j30)I_2 + (50 - j10)I_3 = 0$$

Usando MATLAB per risolvere il problema si ottiene:

```
>Z=[(54+10i),(-2-5i),-50;(-2-5i),(4+40i),-30i;-50,-30i,(50-50i)]
Z=
54.0000+10.0000i-2.0000-5.0000i-50.0000-2.0000-5.0000i
4.0000+40.0000i 0-30.0000i-50.0000 0-30.0000i 50.0000-10.0000i
>>V=[(204.8+36.12i);(-71.14-195.46i);0]
```

```
V=
1.0e002*
2.0480+0.3612i
-0.7114-1.9546i
0
>>I=inv(Z)*V
```

```
I=
8.9317+2.6983i
0.0096+4.5175i
5.4619+3.7964i
```

$$I_{bB} = -I_1 + I_2 = -(8.932 + j2.698) + (0.0096 + j4.518) = \\ = -8.922 + j1.82 = 9.106 \angle 168.47^\circ \text{ A} \quad (\text{Risultato verificato})$$

$$I_{bC} = I_1 - I_3 = (0.0096 + j4.518) - (5.462 + j3.796) = \\ = -5.452 + j0.722 = 5.5 \angle 172.46^\circ \text{ A} \quad (\text{Risultato verificato})$$

Si calcola ora I_{ab} . Supponendo che ogni sorgente abbia una piccola impedenza interna, si può ottenere un valore ragionevolmente attendibile per I_{ab} . Aggiungendo un resistore interno di 0.01Ω , e inserendo una quarta maglia, si ha:

Maglia 1

$$(54.01 + j10)I_1 - (2 + j5)I_2 - (50)I_3 - 0.01I_4 = 208 \angle 10^\circ \\ = 204.8 + j36.12$$

Maglia 2

$$-(2 + j5)I_1 + (4.01 + j40)I_2 - (j30)I_3 - 0.01I_4 \\ = 208 \angle -110^\circ = -71.14 - j195.46$$

Maglia 3

$$-(50)I_1 - (j30)I_2 + (50 - j10)I_3 = 0$$

Maglia 4

$$-(0.01)I_1 - (0.01)I_2 + (0.03)I_4 = 0$$

```
>>Z=[(54.01+10i),(-2-5i),-50,-0.01;(-2-5i),
(4.01+40i),-30i,-0.01;-50,-30i,(50-50i),0;-0.01,-0.01,0,0.03]
Z=
54.0100+10.0000i-2.0000-5.0000i-50.0000-0.0100-2.0000-5.0000i
4.0000+40.0000i 0-30.0000i 0.0100-50.0000 0-30.0000i
50.0000-10.0000i 0
-0.0100-0.0100 0 0.0300
>>V=[(204.8+36.12i);(-71.14-195.46i);0;0]
```

```

V=
1.0e002*
2.0480+0.3612i
-0.7114-1.9546i
0
0
>>I=inv(Z)*V
I=
8.9309+2.6973i
0.0093+4.5159i
5.4623+3.7954i
2.9801+2.4044i

```

$$I_{ab} = -I_1 + I_4 = -(8.931 + j2.697) + (2.98 + j2.404) = \\ = -5.951 - j0.293 = 5.958 \angle -177.18^\circ \text{ A}$$

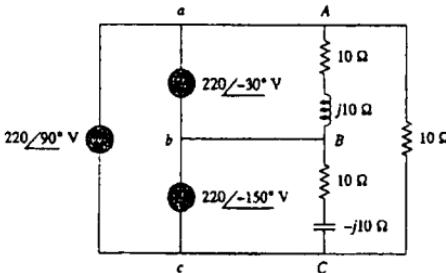
(Risultato verificato)

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

La soluzione ottenuta è soddisfacente e rappresenta una efficace verifica. Si possono quindi presentare i risultati come la soluzione del problema.

■ **Esercizio 12.12** Per il circuito sbilanciato di Figura 12.32, utilizzare PSpice per ottenere la corrente del generatore I_{ca} , la corrente di linea I_{cc} e la corrente di fase I_{AB} .

Figura 12.32
Per l'Esercizio 12.12.



Risposta $24.68 \angle -90^\circ \text{ A}$, $37.25 \angle 83.8^\circ \text{ A}$, $15.556 \angle -75^\circ \text{ A}$. ■

12.10 APPLICAZIONI†

Nelle applicazioni pratiche, è possibile trovare sia il collegamento a stella che quello a triangolo del generatore. Il collegamento a stella al generatore viene scelto per la trasmissione a lunga distanza dell'energia elettrica, nella quale è importante minimizzare le perdite di tipo resistivo ($I^2 R$): il collegamento a stella è infatti caratterizzato da una tensione di linea $\sqrt{3}$ volte maggiore che per il collegamento a triangolo; a parità di potenza, quindi, la corrente di linea risulta $\sqrt{3}$ volte inferiore. Il collegamento a triangolo al generatore viene utilizzato invece quando si vogliono realizzare tre circuiti monofase da un generatore trifase.

Una simile conversione da trifase a monofase è richiesta negli impianti domestici, perché l'illuminazione e le apparecchiature elettriche domestiche fanno uso di correnti monofase.

La corrente trifase viene invece utilizzata direttamente negli impianti industriali che richiedono potenze elevate. In molte applicazioni, non ha importanza se il carico è collegato a stella o a triangolo: ad esempio, entrambe le configurazioni sono accettabili nel caso di un motore a induzione; alcuni modelli possono essere infatti collegati a triangolo per una tensione e a stella per un'altra, in modo da poter funzionare con due tensioni differenti.

Vengono ora presentate due applicazioni pratiche dei concetti trattati in questo capitolo: le misure di potenza nei circuiti trifase e i principi alla base degli impianti elettrici domestici.

12.10.1 Misure di potenza trifase

Nel paragrafo 11.9 si è parlato del wattmetro come strumento per la misura della potenza media (o reale) nei circuiti monofase. È possibile utilizzare un singolo wattmetro per misurare la potenza media di un circuito trifase che risulti bilanciato, così che $P_1 = P_2 = P_3$; la potenza totale sarà pari a tre volte la lettura del wattmetro. Se invece il sistema è sbilanciato, sono necessari tre wattmetri monofase; il *metodo dei tre wattmetri* per la misura della potenza, illustrato in Figura 12.33, risulta valido sia per sistemi bilanciati che sbilanciati, collegati a stella o a triangolo, e risulta particolarmente opportuno nelle misure di potenza su sistemi trifase con fattore di potenza che subisce variazioni nel tempo. La potenza media totale è la somma algebrica delle letture dei tre wattmetri,

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \quad (12.61)$$

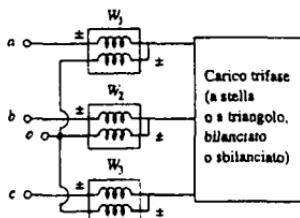


Figura 12.33
Metodo dei tre wattmetri per la misura della potenza trifase.

in cui P_1 , P_2 e P_3 corrispondono alle letture dei wattmetri W_1 , W_2 e W_3 , rispettivamente. Si osservi che il punto di riferimento o in Figura 12.33 è stato scelto arbitrariamente. Se il carico è collegato a stella, il punto o può essere collegato al neutro n . Nel caso invece di carico a triangolo, il punto o può essere collegato ad un punto qualunque del sistema; ad esempio, se o viene collegato al punto b , la bobina di tensione del wattmetro W_2 ha una lettura nulla, e quindi $P_2 = 0$, da cui si deduce che il wattmetro W_2 non è necessario: due wattmetri risultano sufficienti per la misura della potenza totale. Il *metodo dei due wattmetri* è il metodo più comune per la misura della potenza in regime trifase. I due wattmetri devono essere collegati opportunamente a due fasi qualunque, come mostrato in Figura 12.34.

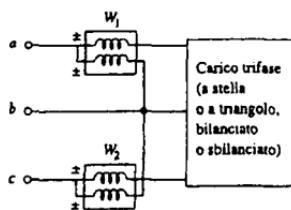


Figura 12.34
Metodo dei due wattmetri per la misura della potenza trifase.

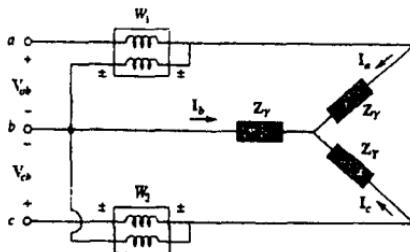
Si noti che la bobina di corrente di entrambi i wattmetri misura una corrente di linea, mentre la corrispondente bobina di tensione è collegata tra la linea e la terza linea e misura la tensione di linea. Inoltre, il terminale \pm della bobina di tensione è collegato alla linea in cui è inserita la corrispondente bobina di corrente. Benché nessuno dei due wattmetri misuri direttamente la potenza assorbita da una fase, la somma algebrica delle letture dei due wattmetri è uguale alla potenza media totale assorbita dal carico, a triangolo o a stella, bilanciato o no. La potenza reale totale è pari alla somma algebrica delle letture dei due wattmetri,

$$P_T = P_1 + P_2 \quad (12.62)$$

Verrà ora dimostrata la validità del metodo per un sistema trifase bilanciato.

Figura 12.35

Metodo dei due wattmetri applicato ad un carico bilanciato a stella



Si consideri il carico bilanciato collegato a stella mostrato in Figura 12.35. Si vuole applicare il metodo dei due wattmetri per determinare la potenza media assorbita dal carico, supponendo che il generatore abbia sequenza abc e l'impedenza del carico sia $Z_T = Z_Y/\theta$. A causa della presenza dell'impedenza di carico, la lettura di ciascuna bobina di tensione è in anticipo sulla corrispondente bobina di corrente di un angolo θ , e il fattore di potenza è quindi $\cos \theta$. Se si ricorda inoltre che ciascuna tensione di linea è in anticipo sulla corrispondente tensione di fase di 30° , si vede che la differenza di fase totale fra la corrente di fase I_a e la tensione di linea V_{ab} è $\theta + 30^\circ$, e la potenza media letta dal wattmetro W_1 è

$$P_1 = \operatorname{Re}[V_{ab}I_a^*] = V_{ab}I_a \cos(\theta + 30^\circ) = V_L I_L \cos(\theta + 30^\circ) \quad (12.63)$$

In maniera simile, è possibile mostrare che la potenza media letta dal wattmetro 2 vale

$$P_2 = \operatorname{Re}[V_{cb}I_c^*] = V_{cb}I_c \cos(\theta - 30^\circ) = V_L I_L \cos(\theta - 30^\circ) \quad (12.64)$$

Si usano ora le identità trigonometriche

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \quad (12.65)$$

per calcolare la somma e la differenza delle letture dei due wattmetri nelle (12.63) e (12.64):

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= V_L I_L [\cos(\theta + 30^\circ) + \cos(\theta - 30^\circ)] \\ &= V_L I_L (\cos \theta \cos 30^\circ - \sin \theta \sin 30^\circ \\ &\quad + \cos \theta \cos 30^\circ + \sin \theta \sin 30^\circ) \\ &= V_L I_L 2 \cos 30^\circ \cos \theta = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \end{aligned} \quad (12.66)$$

perché $2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$. Confrontando la (12.66) con la (12.50) si vede che la somma delle letture dei due wattmetri fornisce la potenza media totale,

$$P_T = P_1 + P_2 \quad (12.67)$$

In maniera simile,

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= V_L I_L [\cos(\theta + 30^\circ) - \cos(\theta - 30^\circ)] \\ &= V_L I_L (\cos \theta \cos 30^\circ - \sin \theta \sin 30^\circ \\ &\quad - \cos \theta \cos 30^\circ - \sin \theta \sin 30^\circ) \\ &= -V_L I_L 2 \sin 30^\circ \sin \theta \end{aligned} \quad (12.68)$$

$$P_2 - P_1 = V_L I_L \sin \theta$$

perché $2 \sin 30^\circ = 1$. Confrontando la (12.68) con la (12.51) si vede che la differenza delle letture dei wattmetri è proporzionale alla potenza reattiva totale,

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) \quad (12.69)$$

Dalle (12.67) e (12.69), la potenza apparente totale può essere ottenuta come

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \quad (12.70)$$

Dividendo la (12.69) per la (12.67) si ottiene la tangente dell'angolo del fattore di potenza

$$\tan \theta = \frac{Q_T}{P_T} = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \quad (12.71)$$

dalla quale il fattore di potenza può essere ricavato come $\text{pf} = \cos \theta$. Il metodo dei due wattmetri fornisce allora non soltanto la potenza reale e la potenza reattiva complessive, ma può anche essere utilizzato per calcolare il fattore di potenza. Dalle (12.67), (12.69) e (12.71), si conclude che:

1. Se $P_2 = P_1$, il carico è resistivo.
2. Se $P_2 > P_1$, il carico è induuttivo.
3. Se $P_2 < P_1$, il carico è capacitivo.

Questi risultati, ottenuti per un carico bilanciato collegato a stella, sono tuttavia validi anche per un carico bilanciato collegato a triangolo. Il metodo dei due wattmetri non può tuttavia essere usato per effettuare misure di potenza in un sistema trifase a quattro fili, a meno che la corrente nella linea del neutro non sia nulla. In caso contrario, è sempre possibile utilizzare il metodo dei tre wattmetri per misurare la potenza reale.

Esempio 12.13

Tre wattmetri W_1 , W_2 e W_3 sono collegati, rispettivamente, alle fasi a , b e c per misurare la potenza totale assorbita dal carico bilanciato collegato a stella dell'Esempio 12.9 (si veda la Figura 12.23). (a) Calcolare le letture dei wattmetri. (b) Determinare la potenza totale assorbita.

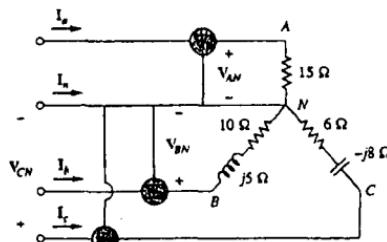


Figura 12.36
Per l'Esempio 12.13.

Soluzione: Parte di questo problema risulta già risolta dall'Esempio 12.9. Si supponga che i wattmetri siano collegati correttamente come in Figura 12.36.

(a) Dall'Esempio 12.9,

$$V_{AN} = 100 \angle 0^\circ, \quad V_{BN} = 100 \angle 120^\circ, \quad V_{CN} = 100 \angle -120^\circ \text{ V}$$

mentre

$$I_a = 6.67 \angle 0^\circ, \quad I_b = 8.94 \angle 93.44^\circ, \quad I_c = 10 \angle -66.87^\circ \text{ A}$$

Le letture dei wattmetri vengono calcolate come segue:

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Re}(V_{AN} I_a^*) = V_{AN} I_a \cos(\theta_{V_{AN}} - \theta_{I_a}) \\ &= 100 \times 6.67 \cos(0^\circ - 0^\circ) = 667 \text{ W} \\ P_2 &= \text{Re}(V_{BN} I_b^*) = V_{BN} I_b \cos(\theta_{V_{BN}} - \theta_{I_b}) \\ &= 100 \times 8.94 \cos(120^\circ - 93.44^\circ) = 800 \text{ W} \\ P_3 &= \text{Re}(V_{CN} I_c^*) = V_{CN} I_c \cos(\theta_{V_{CN}} - \theta_{I_c}) \\ &= 100 \times 10 \cos(-120^\circ + 66.87^\circ) = 600 \text{ W} \end{aligned}$$

(b) La potenza totale assorbita è

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 667 + 800 + 600 = 2067 \text{ W}$$

È possibile determinare la potenza assorbita dai resistori in Figura 12.36 e utilizzare il risultato per verificare quello appena ottenuto.

$$\begin{aligned} P_T &= |I_a|^2(15) + |I_b|^2(10) + |I_c|^2(6) \\ &= 6.67^2(15) + 8.94^2(10) + 10^2(6) \\ &= 667 + 800 + 600 = 2067 \text{ W} \end{aligned}$$

che coincide con quanto appena ottenuto.

■ **Esercizio 12.13** Ripetere il calcolo dell'Esempio 12.13 per la rete in Figura 12.24 (vedere l'Esercizio 12.9). Suggerimento: collegare il punto di riferimento σ in Figura 12.33 al punto B .

Risposta (a) 2722 W, 0 W, 6177 W, (b) 8899 W.

Esempio 12.14

L'applicazione del metodo dei due wattmetri produce le letture $P_1 = 1560$ W e $P_2 = 2100$ W, se applicato ad un carico collegato a triangolo. Se la tensione di linea è 220 V, calcolare: (a) la potenza media per fase, (b) la potenza reattiva per fase, (c) il fattore di potenza e (d) l'impedenza di fase.

Soluzione: Si possono applicare i risultati appena trovati al carico collegato a triangolo.

(a) La potenza media o reale complessiva è

$$P_T = P_1 + P_2 = 1560 + 2100 = 3660 \text{ W}$$

La potenza media per fase è allora

$$P_p = \frac{1}{3} P_T = 1220 \text{ W}$$

(b) La potenza reattiva totale è

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) = \sqrt{3}(2100 - 1560) = 935.3 \text{ VAR}$$

e quella reattiva per fase

$$Q_p = \frac{1}{3} Q_T = 311.77 \text{ VAR}$$

(c) L'angolo del fattore di potenza è

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Q_p}{P_p} = \tan^{-1} \frac{935.3}{3660} = 14.33^\circ$$

Il fattore di potenza è allora

$$\cos \theta = 0.9689 \text{ (ind)}$$

È un pf induttivo, perché Q_T è positiva, o anche perché $P_2 > P_1$.

(c) L'impedenza di fase è $Z_p = Z_p / \theta$. Si sa che θ coincide con l'angolo del fattore di potenza, cioè $\theta = 14.33^\circ$.

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p}$$

Si ricordi inoltre che per il carico a triangolo, $V_p = V_L = 220$ V. Dalla (12.46),

$$P_p = V_p I_p \cos \theta \quad \Rightarrow \quad I_p = \frac{1220}{220 \times 0.9689} = 5.723 \text{ A}$$

E quindi,

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{220}{5.723} = 38.44 \Omega$$

e

$$Z_p = 38.44 / 14.33^\circ \Omega$$

■ **Esercizio 12.14** In Figura 12.35 sia $V_L = 208$ V la tensione di linea e le letture dei wattmetri nel sistema bilanciato siano $P_1 = -560$ W e $P_2 = 800$ W. Determinare:

1. la potenza reale totale
2. la potenza reattiva totale
3. il fattore di potenza
4. l'impedenza di fase

L'impedenza è induttiva o capacitiva?

Risposta (a) 240 W, (b) 2355.6 VAR, (c) 0.1014, (d) $18.25 / 84.18^\circ \Omega$, induttiva.

Esempio 12.15

Il carico trifase bilanciato di Figura 12.35 ha impedenza di fase $Z_Y = 8 + j6 \Omega$. Se il carico è collegato a linee da 208 V, calcolare le letture dei wattmetri W_1 e W_2 . Determinare inoltre P_T e Q_T .

Soluzione: L'impedenza per fase è

$$Z_Y = 8 + j6 = 10 / 36.87^\circ \Omega$$

e quindi l'angolo del pf è 36.87° . Essendo la tensione di linea $V_L = 208 \text{ V}$, la corrente di linea vale

$$I_L = \frac{V_p}{|Z_Y|} = \frac{208/\sqrt{3}}{10} = 12 \text{ A}$$

Allora

$$P_1 = V_L I_L \cos(\theta + 30^\circ) = 208 \times 12 \times \cos(36.87^\circ + 30^\circ) = 980.48 \text{ W}$$

$$P_2 = V_L I_L \cos(\theta - 30^\circ) = 208 \times 12 \times \cos(36.87^\circ - 30^\circ) = 2478.1 \text{ W}$$

Il wattmetro 1 legge 980.48 W, mentre il wattmetro legge 2478.1 W. Poiché $P_2 > P_1$, il carico è induttivo. Ciò risulta comunque evidente dalla natura stessa del carico Z_Y . Inoltre,

$$P_T = P_1 + P_2 = 3.4586 \text{ kW}$$

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) = \sqrt{3}(1497.6) \text{ VAR} = 2.594 \text{ kVAR}$$

■ **Esercizio 12.15** Se il carico in Figura 12.35 è collegato a triangolo con impedenza per fase $Z_Y = 30 - j40 \Omega$ e $V_L = 440 \text{ V}$, calcolare le letture dei wattmetri W_1 e W_2 . Calcolare inoltre P_T e Q_T .

Risposta 6.166 kW, 0.8021 kW, 6.968 kW, -9.291 kVAR. ■

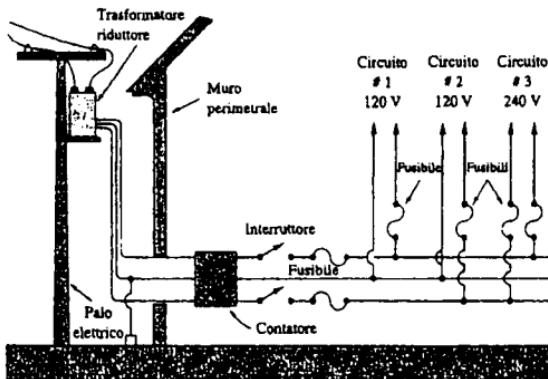


Figura 12.37

Impianto elettrico domestico a 120/240 V.

(Source: A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd ed. [Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975], p. 324.)

12.10.2 Cablaggio degli impianti domestici

Negli Stati Uniti, la maggior parte degli apparecchi per illuminazione e degli elettrodomestici funziona con corrente alternata monofase da 120 V, 60 Hz. (La corrente elettrica può anche essere distribuita a 110, 115 o 117 V, a seconda della regione.) La compagnia elettrica locale alimenta l'edificio con un sistema a tre fili. Tipicamente, come si vede in Figura 12.37, la tensione della linea, ad esempio di 12000 V, viene ridotta fino a 120/240 V per mezzo di un trasformatore (i trasformatori verranno esaminati in dettaglio nel prossimo capitolo). I tre fili provenienti dal trasformatore sono di solito colorati in rosso, nero e bianco (il neutro). Come si vede in Figura 12.38, le due tensioni di 120 V sono in opposizione di fase e quindi la loro somma è zero, $V_W = 0 \angle 0^\circ$, $V_B = 120 \angle 0^\circ$, $V_R = 120 \angle 180^\circ = -V_B$.

$$V_{BR} = V_B - V_R = V_B - (-V_B) = 2V_B = 240 \angle 0^\circ \quad (12.72)$$

Alla altre abitazioni

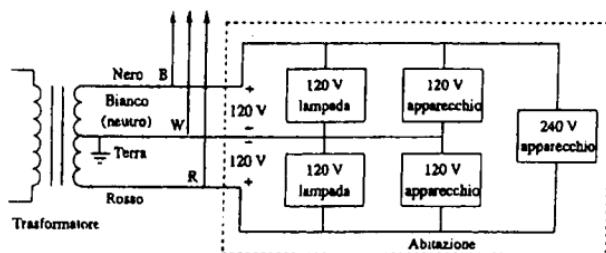


Figura 12.38

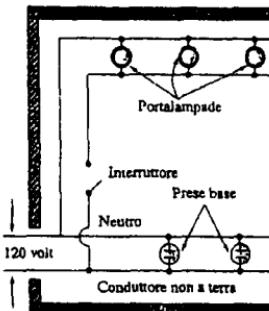
Cablaggio residenziale monofase a tre fili.

Poiché la maggior parte degli apparecchi funziona con 120 V, essi vengono collegati assieme all'impianto di illuminazione, alle linee da 120 V, come illustrato in Figura 12.39 per una stanza di una abitazione. Si noti nella Figura 12.37 che tutte le apparecchiature sono collegate in parallelo; alcuni elettrodomestici ad elevato assorbimento di corrente, quali ad esempio condizionatori d'aria, lavastoviglie, fornì e lavatrici possono invece essere collegati alla linea da 240 V.

Figura 12.39

Tipico diagramma di cablaggio di una stanza.

(Source: A. Marcus and C. M. Thomson, *Electricity for Technicians*, 2nd ed. [Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975], p. 325.)

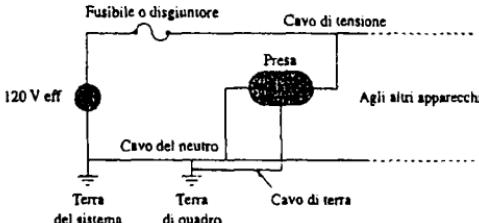


A causa dei pericoli legati alla presenza dell'elettricità nelle abitazioni, l'esecuzione dei cablaggi domestici è soggetta a regolamenti dettati da normative locali specifiche e dal National Electrical Code (NEC). In particolare, vengono utilizzati isolamenti, messa a terra, fusibili e interruttori per prevenire gli incidenti; negli impianti moderni è richiesto anche un terzo filo per fornire un collegamento separato a terra. Il filo di terra non è coinvolto nella trasmissione di potenza elettrica, e serve soltanto a fornire alla apparecchiatura un collegamento dedicato alla terra. La Figura 12.40 mostra il collegamento di una presa di corrente alla linea da 120 V efficaci e alla terra. Come si nota dalla figura, il filo del neutro viene collegato a terra (il suolo) in parecchi punti, e la linea dedicata di collegamento a terra parrebbe quindi ridondante. Essa è invece importante per diverse ragioni: innanzitutto è specificamente prevista dalla normativa NEC. In secondo luogo, una buona messa a terra fornisce un percorso di scarica per un eventuale fulmine che dovesse colpire l'impianto. In terzo luogo, la messa a terra minimizza il rischio di scosse elettriche: la scossa elettrica è causata dal passaggio di corrente da un punto all'altro del corpo umano; nei confronti della corrente elettrica, il corpo umano si comporta come un grosso resistore R . Se V è la differenza di potenziale tra il corpo e la terra, la corrente che attraversa il corpo viene determinata dalla legge di Ohm come

$$I = \frac{V}{R} \quad (12.73)$$

Figura 12.40

Collegamento di una presa di corrente alla linea e alla terra.



Il valore di R è diverso da persona a persona, e varia anche a seconda che il corpo sia asciutto o bagnato. L'entità è quindi la pericolosità della scossa elettrica dipende dalla quantità di corrente, dal percorso che la corrente segue e dalla durata dell'esposizione al passaggio della corrente. Le correnti al di sotto di 1 mA di solito non risultano dannose, mentre correnti superiori ai 10 mA possono provocare danni interni di seria entità. Un moderno dispositivo impiegato per aumentare la sicurezza è l'interruttore

"ground-fault", usato nei circuiti all'esterno delle abitazioni o nei bagni, dove il rischio di scosse elettriche è maggiore, e che consiste essenzialmente in un interruttore che si apre quando la somma delle correnti i_R , i_W e i_B nei fili rosso, bianco e nero non è nulla, $i_R + i_W + i_B \neq 0$. Il modo migliore di evitare il rischio di scosse elettriche è quello di seguire le note raccomandazioni di sicurezza nell'uso di apparati e sistemi elettrici, alcune delle quali sono:

- Non presumere mai che un circuito sia privo di tensione, ma controllare sempre prima di toccarlo.
- Utilizzare dispositivi di sicurezza quando è necessario, e indossare abiti adatti (scarpe isolanti, guanti, ecc.).
- Non usare mai entrambe le mani nel provare circuiti ad alta tensione, perché una eventuale corrente da una mano all'altra passerebbe per il petto e il cuore.
- Non toccare apparecchiature elettriche se si è bagnati; ricordare sempre che l'acqua è un buon conduttore di elettricità.
- Prestare estrema attenzione quando si lavora con apparecchi elettronici quali radio e televisori, perché sono dotati di grossi condensatori, che impiegano un certo tempo a scaricarsi dopo che è stata tolta la corrente.
- Lavorare sempre al cablaggio elettrico in presenza di un'altra persona, così da non trovarsi soli in caso di incidente.

SOMMARIO

- 1) La sequenza delle fasi è la sequenza temporale con cui evolvono (o variano) le tensioni di fase del generatore trifase. In una sequenza *abc* di tensioni bilanciate, V_{an} è in anticipo su V_{bn} di 120° , che a sua volta è in anticipo su V_{cn} di 120° . In una sequenza *acb* di tensioni bilanciate, V_{an} è in anticipo su V_{cn} di 120° , che a sua volta è in anticipo su V_{bn} di 120° .
- 2) Un carico bilanciato collegato a stella o a triangolo è formato da tre impedanze di fase uguali in modulo e argomento.
- 3) Il metodo più semplice per studiare un circuito trifase bilanciato consiste nel trasformare generatore e carico, entrambi in un sistema stella-stella e poi analizzare il circuito equivalente di una sola fase. La Tabella 12.1 mostra un sommario delle formule di correnti e tensioni di fase e di correnti e tensioni di linea, per le quattro possibili configurazioni.
- 4) La corrente di linea I_L è la corrente che scorre dal generatore al carico in ognuna delle linee di trasmissione di un sistema trifase. La tensione di linea V_L è la tensione tra ogni coppia di linee, escludendo la linea del neutro se esiste. La corrente di fase I_p è la corrente che scorre in ognuna delle fasi di un carico trifase. La tensione di fase V_p è la tensione di ogni fase.

Per un carico collegato a stella si ha:

$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_p \quad \text{e} \quad I_L = I_p$$

Per un carico collegato a triangolo si ha:

$$V_L = V_p \quad \text{e} \quad I_L = \sqrt{3} \cdot I_p$$

- 5) La potenza istantanea totale in un sistema trifase bilanciato è costante ed è uguale alla potenza media.
- 6) La potenza complessa totale in un sistema trifase bilanciato

$$S = P + jQ = (\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L) \angle \theta$$

dove θ è la fase delle impedenze di carico.

- 7) Un sistema trifase sbilanciato può essere studiato usando l'analisi nodale o l'analisi agli anelli.
 - 8) *PSpice* è usato per studiare circuiti trifase nello stesso modo utilizzato per studiare i circuiti monofase.
 - 9) La potenza reale totale nei sistemi trifase viene misurata utilizzando sia il metodo con tre wattmetri, sia il metodo con due wattmetri.
 - 10) Negli impianti residenziali del Nordamerica si utilizzano sistemi trifase a tre fili con 120/240 V, per ogni singola fase.

DOMANDE DI RIEPILOGO

Risposte: 12.1a, 12.2a, 12.3c, 12.4a, 12.5b, 12.6e, 12.7c,
12.8b, 12.9a, 12.10a.

PROBLEMI¹

Paragrafo 12.2 Tensioni trifase bilanciate

- 12.1 Se $V_{ab} = 400 \text{ V}$ in un generatore trifase bilanciato a stella, determinare le tensioni di fase, supponendo che la sequenza delle fasi sia:
 (a) abc (b) acb

12.2 Qual è la sequenza delle fasi di un circuito trifase bilanciato in cui $V_{ea} = 160 \angle -90^\circ \text{ V}$ e $V_{eb} = 160 \angle -90^\circ \text{ V}$? Determinare V_{ec} .

- 12.3** Determinare la sequenza delle fasi di un circuito trifase bilanciato in cui $V_{an} = 208 \angle 130^\circ$ V e $V_{cn} = 208 \angle 10^\circ$ V. Calcolare V_{gn} .

12.4 Un sistema trifase con sequenza abc e $V_L = 200$ V alimenta un carico equilibrato collegato a stella con $Z_L = 40 \angle 30^\circ$ Ω. Calcolare le correnti di linea.

12.5 Per un carico collegato a stella, si hanno le seguenti tre tensioni tra fase e neutro, espresse nel dominio del tempo:

$$v_{AN} = 150 \cos(\omega t + 32^\circ) \text{ V}$$

$$v_{BN} = 150 \cos(\omega t - 88^\circ) \text{ V}$$

$$v_{CN} = 150 \cos(\omega t + 152^\circ) \text{ V}$$

¹ Si ricordi che, salvo avviso contrario, i valori di tutte le tensioni e correnti vanno intesi come efficaci.

Paragrafo 12.3 Configurazione stella-stella bilanciata

- 12.6 Nel circuito stella-stella di Figura 12.41, determinare le correnti di linea, le tensioni di linea e le tensioni del carico.

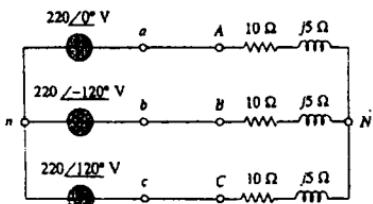


Figura 12.41 Per il Problema 12.6.

- 12.7 Calcolare le correnti di linea nel circuito trifase di Figura 12.42.
- 12.8 In un sistema trifase bilanciato stella-stella, i generatori di tensione hanno una sequenza *abc*, e $V_{an} = 100\angle 20^\circ$ V (efficaci). L'impedenza di linea di ogni fase è $0.6 + j1.2\Omega$, mentre l'impedenza per fasce del carico è $10 + j14\Omega$. Calcolare le correnti di linea e le tensioni su ogni carico.
- 12.9 Un sistema bilanciato stella-stella a quattro fili ha tensioni di fase

$$V_{an} = 120\angle 0^\circ, \quad V_{bn} = 120\angle -120^\circ \\ V_{cn} = 120\angle 120^\circ$$

L'impedenza di carico per fase è $19 + j13\Omega$, e l'impedenza di linea per fase è $1 + j2\Omega$. Calcolare le correnti di linea e la corrente del neutro.

- 12.10 Nel circuito di Figura 12.43, determinare la corrente nella linea del neutro.

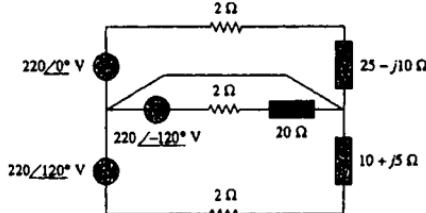


Figura 12.43 Per il Problema 12.10.

Paragrafo 12.4 Configurazione stella-triangolo bilanciata

- 12.11 In un sistema stella-triangolo mostrato in Figura 12.44, la sequenza dei generatori è positiva con $V_{an} = 120\angle 0^\circ$ V e impedenza di fase $Z_p = 2 - j3\Omega$. Calcolare la tensione di linea V_L e la corrente di linea I_L .

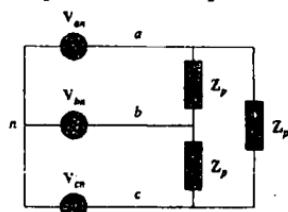


Figura 12.44 Per il Problema 12.11.

- 12.12 Nel circuito stella-triangolo di Figura 12.45, si ponga $Z_\Delta = 60\angle 45^\circ\Omega$. Calcolare le correnti di linea.

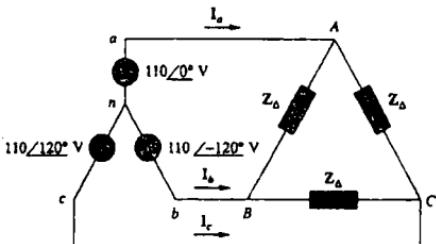


Figura 12.45 Per il Problema 12.12.

- 12.13 Nel sistema trifase bilanciato stella-triangolo di Figura 12.46, calcolare la corrente di linea I_L e la potenza media erogata al carico.

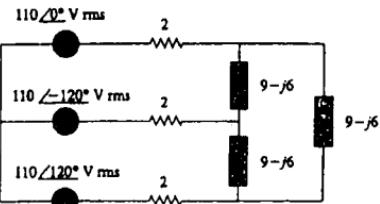


Figura 12.46 Per il Problema 12.13.

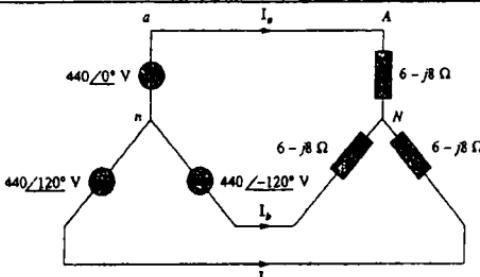


Figura 12.42 Per il Problema 12.7.

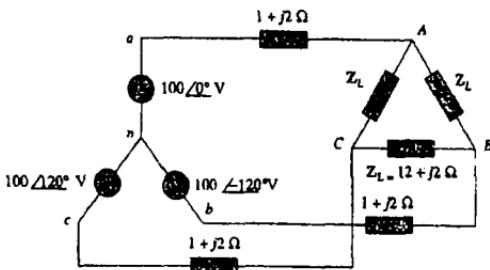


Figura 12.47 Per il Problema 12.14.

12.14 Calcolare le correnti di linea nel circuito trifase di

Figura 12.47.

12.15 Il circuito in Figura 12.48 è alimentato da un generatore

ps trifase bilanciato con tensione di linea di 210 V. Se $Z_f = 1 + j1 \Omega$, $Z_\Delta = 24 - j30 \Omega$ e $Z_Y = 12 + j5 \Omega$, determinare il modulo della corrente di linea della combinazione di carichi.

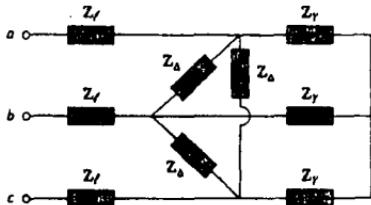


Figura 12.48 Per il Problema 12.15.

12.16 Un carico bilanciato collegato a triangolo ha una corrente di fase $I_{AC} = 10 \angle -30^\circ$ A.

(a) Determinare le tre correnti di linea supponendo che il circuito open con sequenza delle fasi positiva.

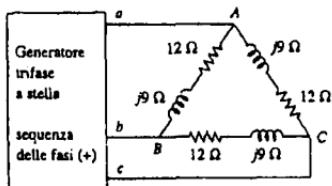
(b) Calcolare l'impedenza di carico se la tensione di linea è $V_{AB} = 110 \angle 0^\circ$ V.12.17 Un carico trifase bilanciato collegato a triangolo ha una corrente di linea pari a $I_a = 10 \angle -25^\circ$ A. Determinare le correnti di linea I_{AB} , I_{BC} e I_{CA} .12.18 Se $V_{an} = 440 \angle 60^\circ$ V nella rete di Figura 12.49, determinare le correnti di fase del carico I_{AB} , I_{BC} e I_{CA} .

Figura 12.49 Per il Problema 12.18.

Paragrafo 12.5**Configurazione triangolo-triangolo bilanciata**

12.19 Calcolare le correnti di fase e di linea nel circuito triangolo-triangolo di Figura 12.50.

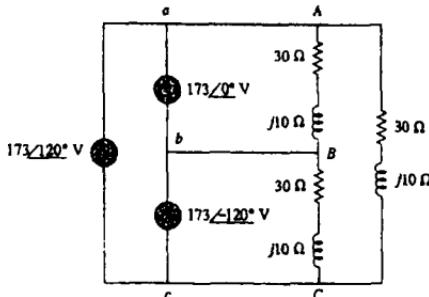


Figura 12.50 Per il Problema 12.19.

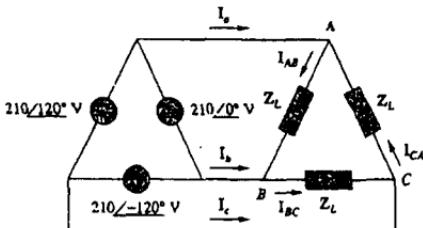
12.20 Si faccia riferimento al circuito triangolo-triangolo di Figura 12.51. Si determinino le correnti di linea e di fase, supponendo che l'impedenza di carico sia $12 + j9 \Omega$ per fase.

Figura 12.51 Per il Problema 12.20.

12.21 Tre generatori da 230 V costituiscono un generatore a triangolo che è collegato ad un carico bilanciato a triangolo con $Z_L = 10 + j8 \Omega$ per fase come mostrato in Figura 12.52.(a) Determinare il valore di I_{AC} .(b) Quale è il valore di I_b ?

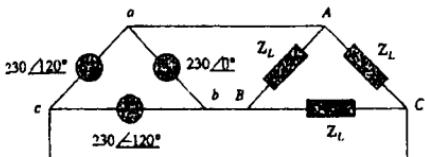


Figura 12.52 Per il Problema 12.21.

12.22 Determinare le correnti di linea I_a , I_b e I_c , nella rete trifase di Figura 12.53. Si ponga $Z_\Delta = 12 - j15 \Omega$, $Z_Y = 4 + j6 \Omega$ e $Z_L = 2 \Omega$.

12.23 Un sistema trifase bilanciato con tensione di linea 202 V eff alimenta un carico collegato a triangolo con $Z_P = 25\angle60^\circ \Omega$.

(a) Determinare la corrente di linea.

(b) Determinare la potenza totale fornita al carico usando due wattmetri collegati alle linee A e C .

12.24 Un generatore bilanciato a triangolo ha tensione di fase $V_{ab} = 416\angle30^\circ \text{ V}$ e sequenza delle fasi positiva. Se il generatore viene collegato ad un carico bilanciato a triangolo, calcolare le correnti di linea e di fase, supponendo che l'impedenza di carico per fascia sia pari a $60\angle30^\circ \Omega$ e l'impedenza di linea per fascia sia $1 + j1 \Omega$.

Paragrafo 12.6 Configurazione triangolo-stella bilanciata

12.25 Nel circuito di Figura 12.54, se $V_{ab} = 440\angle10^\circ \text{ V}$, $V_{bc} = 440\angle250^\circ \text{ V}$ e $V_{ca} = 440\angle130^\circ \text{ V}$, determinare le correnti di linea.

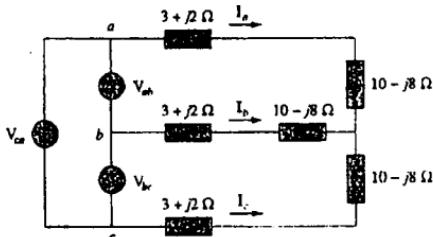


Figura 12.54 Per il Problema 12.25.

12.26 Nel circuito bilanciato di Figura 12.55, $V_{ab} = 125\angle0^\circ \text{ V}$. Determinare le correnti di linea I_{aA} , I_{bB} e I_{cC} .

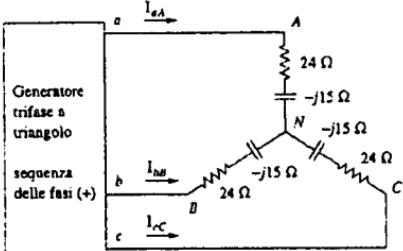


Figura 12.55 Per il Problema 12.26.

12.27 Un sistema di generatori collegati a triangolo eroga potenza ad un carico collegato a stella, in un sistema trifase bilanciato. L'impedenza di linea per ogni fascia è $6 + j4\Omega$; calcolare l'ampiezza della tensione di linea ai capi del carico. Si supponga una tensione pari a $V_{ab} = 208\angle0^\circ \text{ V}$ (efficaci).

12.28 La tensione di linea in un carico trifase collegato a stella di ampiezza 440 V ha un sequenza positiva e frequenza pari a 60 Hz. Se il carico è bilanciato con $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 25\angle30^\circ \Omega$, calcolare tutte le correnti di linea e le tensioni di fase.

Paragrafo 12.7 Potenza in un sistema trifase bilanciato

12.29 Un sistema trifase bilanciato stella-triangolo ha $V_{an} = 120\angle0^\circ \text{ V}$ (efficaci) e $Z_\Delta = 51 + j45\Omega$. Se l'impedenza di linea per ogni fascia è $0.4 + j1.2\Omega$, calcolare la potenza complessa erogata al carico.

12.30 In Figura 12.56, il valore efficace della tensione di linea è 208 V. Determinare la potenza media trasferita al carico.

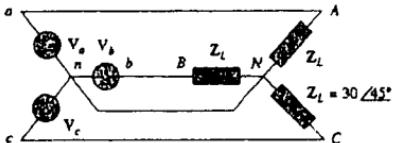


Figura 12.56 Per il Problema 12.30.

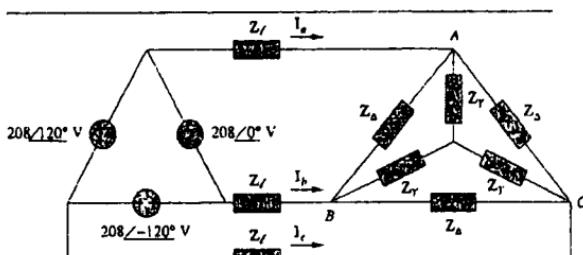


Figura 12.53 Per il Problema 12.22.

- 12.31 Un carico bilanciato collegato a triangolo è alimentato da un generatore trifase a 60 Hz con tensione di linea di 240 V. Ciascuna fase del carico assorbe 6 kW con fattore di potenza induttivo di 0.8. Determinare:

- l'impedenza di carico per fase
- la corrente di linea
- il valore di capacità da collegare in parallelo a ciascuna fase del carico per rendere minima la corrente dai generatori

- 12.32 Un carico a stella equilibrato è collegato a dei generatori trifase da 60 Hz con $V_{ab} = 240 \angle 0^\circ$ V. Il carico ha fattore di potenza 0.5 induttivo e ogni fase assorbe 5 kW. (a) Determinare l'impedenza di carico Z_Y . (b) Calcolare I_a , I_b e I_c .

- 12.33 Un generatore trifase fornisce 4800 VA ad un carico a stella con tensione di fase di 208 V e fattore di potenza 0.9 induttivo. Calcolare la corrente di linea la tensione di linea del generatore.

- 12.34 Un carico bilanciato collegato a stella con impedenza di fase $10 - j16 \Omega$ è collegato ad un generatore trifase bilanciato con tensione di linea di 220 V. Determinare la corrente di linea e la potenza complessa assorbita dal carico.

- 12.35 Tre impedenze uguali, ciascuna di $60 + j30 \Omega$, sono collegate a triangolo ad un circuito trifase da 230 V eff. Altre tre impedenze uguali, ciascuna da $40 + j10 \Omega$, sono collegate a stella sullo stesso circuito agli stessi punti. Determinare:

- la corrente di linea
- la potenza complessa totale fornita ai due carichi
- il fattore di potenza della combinazione dei due carichi

- 12.36 Una linea di trasmissione trifase da 4200 V ha una impedenza di $4 + j\Omega$ per fase. Se la linea alimenta un carico di 1 MVA con fattore di potenza 0.75 (induttivo), determinare:

- la potenza complessa
- la perdita di potenza in linea
- la tensione sul lato trasmissione

- 12.37 La potenza totale misurata in un sistema trifase che alimenta un carico bilanciato collegato a stella è 12 kW con fattore di potenza 0.6 capacitivo. Se la tensione di linea è 208 V, calcolare la corrente di linea I_L e l'impedenza di carico Z_Y .

- 12.38 Dato il circuito in Figura 12.57, determinare la potenza complessa totale assorbita dal carico.

PS

- 12.39 Determinare la potenza reale assorbita dal carico in Figura 12.58.

PS

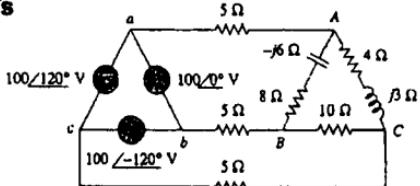


Figura 12.58 Per il Problema 12.39.

- 12.40 Nel circuito trifase di Figura 12.59 determinare la potenza media assorbita dal carico collegato a triangolo se $Z_\Delta = 21 + j24 \Omega$.

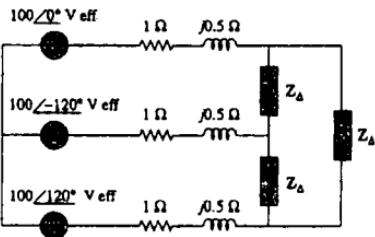


Figura 12.59 Per il Problema 12.40.

- 12.41 Un carico bilanciato collegato a triangolo assorbe 5 kW con fattore di potenza di 0.8 induttivo. Se il sistema trifase ha un tensione di linea di 400 V, determinare la corrente di linea.

- 12.42 Un generatore trifase bilanciato fornisce 7.2 kW ad un carico a stella con impedenza $30 - j40 \Omega$ per fase. Determinare la corrente di linea I_L e la tensione di linea V_L .

- 12.43 Con riferimento alla Figura 12.48, si calcoli la potenza complessa assorbita dalla combinazione dei carichi.

PS

- 12.44 Un linea trifase ha un'impedenza di $1 + j3 \Omega$ per fase. La linea alimenta un carico bilanciato collegato a

PS

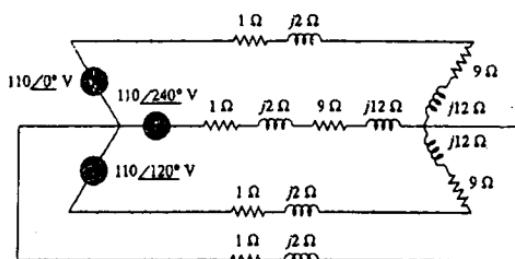


Figura 12.57 Per il Problema 12.38.

triangolo che assorbe una potenza complessa totale di $12 + j5$ kVA. Se la tensione di linea sul lato del carico ha ampiezza 240 V, calcolare il modulo della tensione di linea sul lato del generatore ed il fattore di potenza del generatore.

- 12.45 Un carico bilanciato a stella è collegato al generatore da una linea di trasmissione bilanciata con impedenza di $0.5 + j2 \Omega$ per fase. Se il carico assorbe 450 kW con fattore di potenza inattivo 0.708, ad una tensione di linea di 440 V, determinare la tensione di linea del generatore.

- 12.46 Un carico trifase è costituito da tre resistori da 100Ω che possono essere collegati a stella o a triangolo. Determinare quale dei due collegamenti assorbe la maggiore potenza media da un generatore trifase con tensione di linea di 110 V, supponendo nulla l'impedenza di linea.

- 12.47 I seguenti tre carichi trifase, collegati in parallelo, sono alimentati da un generatore trifase bilanciato.

Carico 1: 250 kVA, pf 0.8 inattivo
Carico 2: 300 kVA, pf 0.95 capacitivo
Carico 3: 450 kVA, pf unitario

Se la tensione di linea è 13.8 kV, calcolare la corrente di linea ed il fattore di potenza del generatore, supponendo nulla l'impedenza di linea.

- 12.48 Un generatore bilanciato a stella, con sequenza positiva, ha $V_{an} = 240 / 0^\circ$ V eff e alimenta un carico sbilanciato collegato a triangolo attraverso una linea di trasmissione con impedenza $2 + j3 \Omega$ per fase.

- (a) Calcolare le correnti di linea se $Z_{AB} = 40 + j15 \Omega$, $Z_{BC} = 60 \Omega$, $Z_{CA} = 18 - j12 \Omega$.
(b) Calcolare la potenza complessa erogata dal generatore.

- 12.49 Il carico di ciascuna fase è formato da un resistore da 20Ω e da una reattività inattiva da 10Ω . Con una tensione di linea di 220 V eff, calcolare la potenza media assorbita dal carico se:

- (a) i tre carichi sono collegati a triangolo
(b) i carichi sono collegati a stella

- 12.50 Un generatore trifase bilanciato con $V_L = 240$ V eff sta fornendo 8 kW con fattore di potenza 0.6 inattivo a due carichi a stella collegati in parallelo. Se uno dei due carichi assorbe 3 kW con fattore di potenza unitario, calcolare l'impedenza per fase del secondo carico.

Paragrafo 12.8 Sistemi trifase sibilanciati

- 12.51 Si consideri il sistema trifase triangolo-triangolo mostrato in Figura 12.60, e si supponga $Z_1 = 8 + j6 \Omega$, $Z_2 = 4.2 - j2.2 \Omega$, $Z_3 = 10 + j0 \Omega$.

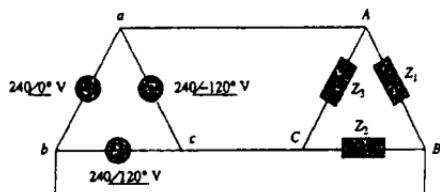


Figura 12.60 Per il Problema 12.51.

- (a) Determinare le correnti di fase I_{AB} , I_{BC} e I_{CA} .
(b) Calcolare le correnti di linea I_{AB} , I_{BC} e I_{CA} .

- 12.52 In un circuito stella-stella a quattro fili si ha

$$V_m = 120 / 120^\circ, \quad V_{dn} = 120 / 0^\circ$$

$$V_{cn} = 120 / -120^\circ \text{ V}$$

Se le impedenze sono

$$Z_{AN} = 20 / 60^\circ, \quad Z_{BN} = 30 / 0^\circ$$

$$Z_{CN} = 40 / 30^\circ \Omega$$

determinare la corrente nella linea del neutro.

- 12.53 Nel sistema stella-stella mostrato in Figura 12.61, i carichi collegati ai generatori sono sibilanciati.

- (a) Calcolare I_a , I_b e I_c . (b) Determinare la potenza totale erogata al carico. Si supponga $V_p = 240$ V (efficaci).

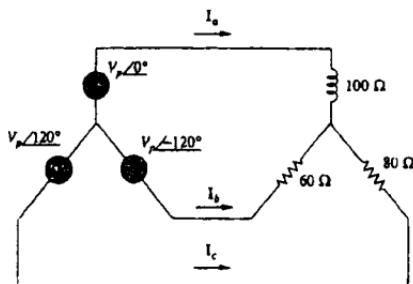


Figura 12.61 Per il Problema 12.53.

- 12.54 Un sistema trifase di generatori collegati a stella con $V_p = 210$ V (efficaci), alimenta un carico trifase collegato a stella con impedenza di fase pari a $Z_A = 80 \Omega$, $Z_B = 60 + j90 \Omega$, $Z_C = j80 \Omega$. Calcolare le correnti di linea e la potenza complessa totale erogata al carico. Si supponga che il filo di neutro sia collegato.

- 12.55 Un'alimentazione trifase con tensione di linea pari a 240 V (efficaci) e sequenza positiva, è collegata ad un carico sibilanciato a triangolo come mostrato in Figura 12.62. Calcolare le correnti di fase e la potenza complessa totale.

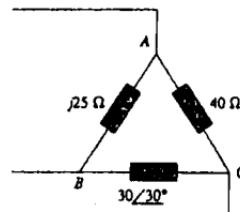


Figura 12.62 Per il Problema 12.55.

- 12.56 Con riferimento al circuito trifase sibilanciato di Figura 12.63, calcolare:

- (a) le correnti di linea
(b) la potenza reale assorbita dal carico
(c) la potenza complessa totale erogata dal generatore

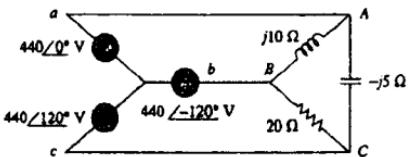


Figura 12.63 Per il Problema 12.56.

- 12.57 Determinare le correnti di linea per il circuito trifase di Figura 12.64, sapendo che $V_a = 110\angle 0^\circ$, $V_b = 110\angle -120^\circ$ e $V_c = 110\angle 120^\circ$.

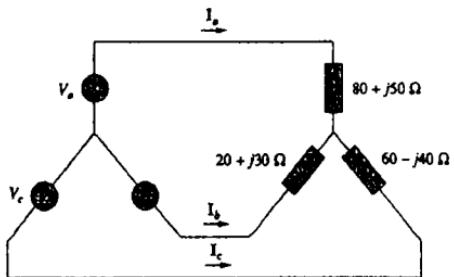


Figura 12.64 Per il Problema 12.57.

Paragrafo 12.9 PSpice per i circuiti trifase



- 12.58 Risolvere il Problema 12.10 usando PSpice.

- 12.59 Il generatore in Figura 12.65 è bilanciato con sequenza delle fasi positiva. Nota $f = 60$ Hz, si utilizzi PSpice per calcolare V_{AN} , V_{BN} e V_{CN} .

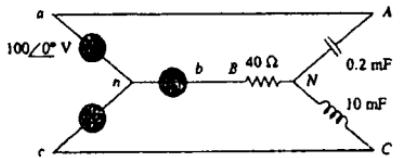


Figura 12.65 Per il Problema 12.59.

- 12.60 Utilizzare PSpice per determinare I_o nel circuito monofase a tre fili di Figura 12.66. Siano $Z_1 = 15 - j10 \Omega$, $Z_2 = 30 + j20 \Omega$ e $Z_3 = 12 + j5 \Omega$.

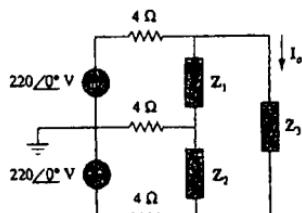


Figura 12.66 Per il Problema 12.60.

- 12.61 Dato il circuito in Figura 12.67, usare PSpice per determinare le correnti I_{ab} e la tensione V_{BN} .

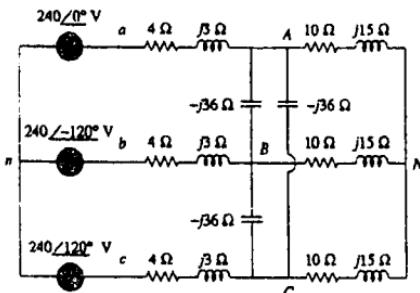


Figura 12.67 Per il Problema 12.61.

- 12.62 Il circuito in Figura 12.68 funziona a 60 Hz. Utilizzare PSpice per calcolare la corrente del generatore I_{ab} e la corrente di linea I_{bg} .

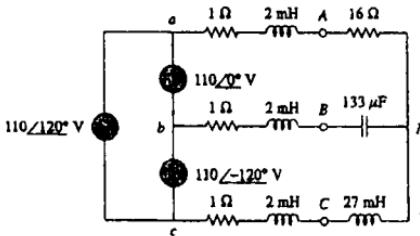
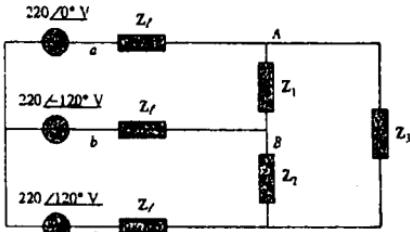


Figura 12.68 Per il Problema 12.62.

- 12.63 Utilizzare PSpice per calcolare le correnti I_{ab} e I_{AC} nel sistema trifase sbilanciato mostrato in Figura 12.69. Si ponga

$$Z_L = 2 + j, \quad Z_1 = 40 + j20 \Omega, \\ Z_2 = 50 - j30 \Omega, \quad Z_3 = 25 \Omega$$



- 12.64 Per il circuito in Figura 12.58, usare PSpice per calcolare le correnti di linea e le correnti di fase.

- 12.65 Un circuito trifase bilanciato è mostrato in Figura 12.70. Utilizzare PSpice per calcolare le correnti di linea I_{ab} , I_{ba} e I_{bc} .

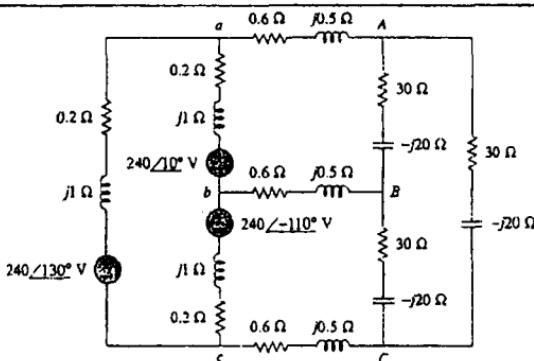


Figura 12.70 Per il Problema 12.65.

Paragrafo 12.10 Applicazioni

12.66 Un sistema trifase a quattro fili operante con una tensione di linea di 208 V è mostrato in Figura 12.71. Le tensioni del generatore sono bilanciate. La potenza assorbita dal carico resistivo collegato a stella viene misurata con il metodo dei tre wattmetri. Calcolare:

- la tensione rispetto al neutro
- le correnti I_1 , I_2 , I_3 e I_n
- le letture dei wattmetri
- la potenza totale assorbita dal carico

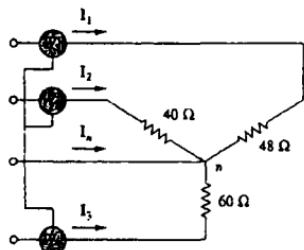


Figura 12.71 Per il Problema 12.66.

12.67 Una linea trifase a quattro fili con tensione di fase di 120 V alimenta un motore di carico bilanciato da 260 kVA con $\text{pf} 0.85$ induttivo come mostrato in Figura 12.72. Il motore di carico è collegato alle tre linee principali marcate a , b e c . In aggiunta, alcune lampade ad incandescenza (pf unitario) sono collegate come segue: 24 kW dalla linea a al neutro, 15 kW dalla linea b al neutro e 9 kW dalla linea c al neutro.

- Se tre wattmetri vengono collegati per misurare la potenza in ciascuna linea, calcolare la lettura di ciascuno di essi.
- Determinare la corrente nella linea del neutro.

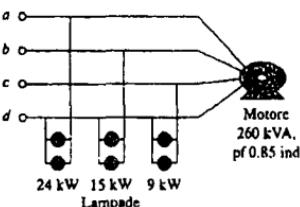


Figura 12.72 Per il Problema 12.67.

12.68 Le letture degli strumenti per un alternatore trifase a stella che fornisce potenza ad un motore indicano che le tensioni di linea sono di 330 V , le correnti di linea 8.4 A , e la potenza totale di linea è 4.5 kW . Determinare:

- il carico in VA
- il pf del carico
- la corrente di fusibile
- la tensione di fase

12.69 Un negozio contiene i seguenti tre carichi trifasi bilanciati:

- Carico 1: 1 kVA con fattore di potenza 0.85 (induttivo)
- Carico 2: 12 kVA con fattore di potenza 0.85 (induttivo)
- Carico 3: 8 kW con fattore di potenza unitario.

La tensione di linea sul carico è 208 V (efficaci) a 60 Hz , con impedenza di linea pari a $0.4 + j0.8\Omega$. Calcolare le correnti di linea e la potenza complessa erogata ai tre carichi.

12.70 Il metodo dei due wattmetri fornisce $P_1 = 1200 \text{ W}$ e $P_2 = -400 \text{ W}$ per un motore trifase operante su una linea da 240 V . Supponendo che il carico del motore sia collegato a stella e che assorba una corrente di linea di 6 A , calcolare il pf del motore e la sua impedenza di fase.

* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

- 12.71 In Figura 12.73, due wattmetri sono opportunamente collegati ad un carico sbilanciato alimentato da un generatore bilanciato in modo che $V_{ab} = 208 \angle 0^\circ$ V con sequenza delle fasi positiva.

- (a) Determinare la lettura di ciascun wattmetro.
 (b) Calcolare la potenza apparente totale assorbita dal carico.

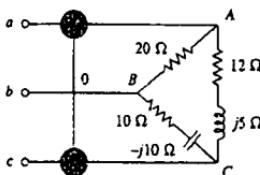


Figura 12.73 Per il Problema 12.71.

- 12.72 Se due wattmetri W_1 e W_2 sono collegati in modo corretto, rispettivamente tra le linee a e b e le linee b e c , per misurare la potenza assorbita dal carico collegato a triangolo di Figura 12.44, calcolare le loro letture.

- 12.73 Determinare le letture dei wattmetri per il circuito mostrato in Figura 12.74.

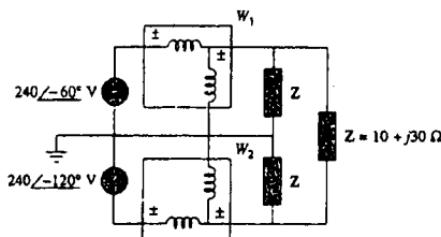


Figura 12.74 Per il Problema 12.73.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 12.77 Un generatore trifase eroga 3.6 kVA con fattore di potenza 0.85 induttivo. Se al carico vengono trasferiti 2500 W e le perdite in linea sono di 80 W per fase, quanto valgono le perdite nel generatore?

- 12.78 Un carico induttivo trifase da 440 V, 51 kW, 60 kVA funziona a 60 Hz ed è collegato a stella. Si desidera correre il fattore di potenza a 0.95 induttivo. Quale valore di capacità devono avere i condensatori posti in parallelo a ciascuna impedenza del carico?

- 12.79 Un generatore trifase bilanciato ha sequenza delle fasi abc con tensione di fase $V_{an} = 253 \angle 0^\circ$ V. Il generatore alimenta un motore a induzione che può essere rappresentato da un carico bilanciato collegato a stella con impedenza di $12 + j5 \Omega$ per fase. Determinare le correnti di linea e le tensioni del carico, supponendo che l'impedenza di linea sia pari a 2Ω per fase.

- 12.80 Un generatore trifase bilanciato fornisce potenza ai seguenti tre carichi:

- 12.74 Calcolare le letture dei wattmetri per il circuito in Figura 12.75.

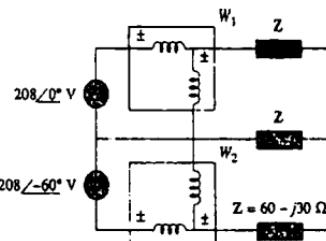


Figura 12.75 Per il Problema 12.74.

- 12.75 La resistenza elettrica del corpo di un uomo è pari a 600Ω . Calcolare la corrente che scorre all'interno del corpo non collegato a terra:

- (a) quando vengono toccati i terminali di una batteria per automobile da 12 V;
 (b) quando si mettono le dita in una presa di corrente da 120 V.

- 12.76 Mostrare che le perdite di tipo I^2R sono maggiori per una apparecchiatura da 120 V che per una da 240 V, se entrambe hanno la stessa potenza di targa.

Carico 1: 6 kVA, pf 0.83 induttivo

Carico 2: incognito

Carico 3: 8 kW, pf 0.7071 capacitivo

Se la corrente di linea è 84.6 A eff, la tensione di linea al carico è 208V eff, e il carico combinato ha un pf di 0.8 induttivo, determinare il carico incognito.

- 12.81 Un'officina è alimentata da un generatore trifase bilanciato. L'officina possiede i quattro carichi trifase bilanciati seguenti:

Carico 1: 150 kVA, pf 0.8 capacitivo

Carico 2: 100 kW, pf unitario

Carico 3: 200 kVA, pf 0.6 induttivo

Carico 4: 80 kW e 95 kVAR (induttivi)

Se l'impedenza di linea è $0.02 + j0.05 \Omega$ per fase e la tensione di linea ai carichi è 480 V, determinare il modulo della tensione di linea al generatore.

- 12.82 Un sistema trifase bilanciato ha un cablaggio di distribuzione con impedenza $2 + j6 \Omega$ per fase. Il sistema alimenta due carichi trifase collegati in parallelo. Il primo è un carico bilanciato collegato a stella che assorbe 400 kVA con fattore di potenza 0.8 induttivo; il secondo è un carico bilanciato collegato a triangolo con impedenza $10 + j8 \Omega$ per fase. Se il modulo della tensione di linea sui carichi è 2400 V eff, calcolare il modulo della tensione di linea al generatore e la potenza complessa totale fornita ai due carichi.

- 12.83 Un motore ad induzione trifase funziona a pieno carico di 120 hp (1 hp = 746 W) con efficienza del 95 percento e con fattore di potenza 0.707 induttivo. Il motore è collegato in parallelo ad un riscaldatore trifase bilanciato da 80 kW avente fattore di potenza unitario. Se il modulo della tensione di linea è 480 V eff, calcolare la corrente di linea.

- *12.84 La Figura 12.76 illustra un carico costituito da un motore trifase a triangolo che è collegato ad una tensione di linea di 440 V e assorbe 4 kVA con fattore di potenza induttivo del 72 percento. In aggiunta ad esso, un singolo condensatore da 1.8 kVAR è collegato tra le linee *a* e *b*, ed un carico costituito da un sistema di illuminazione da 800 W è collegato tra la linea *c* e il neutro. Supponendo di avere sequenza *abc* e ponendo $V_{as} = V_p / 12^\circ$, determinare il modulo e la fase delle correnti I_a , I_b , I_c e I_n .

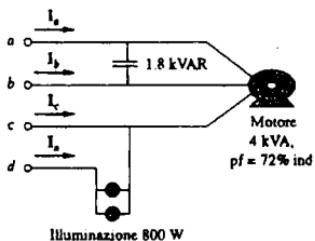


Figura 12.76 Per il Problema 12.84.

- 12.85 Progettare un riscaldatore trifase con carichi simmetrici appropriati usando delle resistenze pure, collegate a stella. Si supponga che il riscaldatore sia alimentato da una linea a 240 V e che debba avere una potenza riscaldante di 27 kW.

- 12.86 Per il sistema monofase a tre fili di Figura 12.77, determinare le correnti I_{aa} , I_{ab} e I_{an} .

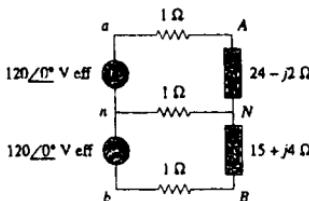


Figura 12.77 Per il Problema 12.86.

- 12.87 Si consideri il sistema monofase a tre fili mostrato in Figura 12.78. Si determini la corrente nel filo del neutro e la potenza complessa fornita da ciascun generatore. Si consideri V_g come un generatore da 115 / 0° V, 60 Hz.

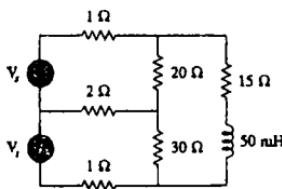


Figura 12.78 Per il Problema 12.87.

CIRCUITI CON ACCOPPIAMENTO MAGNETICO

13.1 INTRODUZIONE

I circuiti finora presentati possono essere considerati ad *accoppiamento conduttivo*, in quanto in essi i vari percorsi chiusi si influenzano l'un l'altro attraverso il passaggio della corrente negli elementi in comune. Quando invece si hanno due maglie, che possono essere o no in contatto elettrico, in cui il campo magnetico generato in una di esse influenza l'altra, esse si dicono ad *accoppiamento magnetico*.

Il trasformatore è un dispositivo elettrico progettato appositamente per sfruttare l'accoppiamento magnetico tra due circuiti: esso è formato da due bobine accoppiate magneticamente, per mezzo delle quali il trasformatore trasferisce energia da un circuito all'altro. I trasformatori sono componenti importanti di molti tipi di circuiti: essi vengono usati nei sistemi per la trasmissione dell'energia elettrica per elevare o ridurre il livello delle tensioni o delle correnti, e nei sistemi elettronici quali i ricevitori radio e TV per adattare impedanze, isolare una parte di circuito dalle altre e ancora per modificare il livello di tensioni e correnti.

Il capitolo inizia con l'illustrazione del concetto di mutua induttanza, e viene introdotta la convenzione dei "puntini" per la determinazione della polarità delle tensioni in componenti con accoppiamento induttivo. Sulla base del concetto di mutua induttanza, viene poi presentato l'elemento circuitale *trasformatore*, ed in particolare il trasformatore lineare, il trasformatore ideale, l'autotrasformatore ideale e il trasformatore trifase. Infine, tra le importanti applicazioni dei trasformatori, si considera il loro impiego come dispositivi per isolamento ed adattamento e le applicazioni del trasformatore nella distribuzione dell'energia elettrica.

13.2 MUTUA INDUTTANZA

Quando due induttori (bobine) si trovano molto vicini uno rispetto all'altro, il flusso magnetico dovuto alla corrente in una delle bobine si concatena con l'altra bobina, inducendo una tensione in quest'ultima. Questo fenomeno è noto come *mutua induttanza*.

Si consideri dapprima un singolo induttore, una bobina di N spire. Quando la corrente i scorre attraverso la bobina, si produce un flusso magnetico ϕ in prossimità della bobina stessa (Figura 13.1). Secondo la legge di Faraday, la tensione v indotta nella bobina risulta proporzionale al numero di spire N e alla rapidità con cui varia il flusso magnetico ϕ , cioè

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \quad (13.1)$$

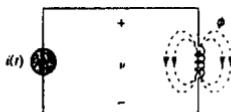


Figura 13.1
Flusso magnetico prodotto da una singola bobina di N spire.

Ma il flusso ϕ è prodotto dalla corrente i , e quindi qualunque variazione di ϕ è causata da una variazione della corrente. La (13.1) può allora essere scritta come

$$v = N \frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} \quad (13.2)$$

o anche

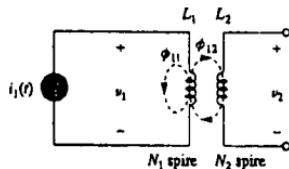
$$v = L \frac{di}{dt} \quad (13.3)$$

che rappresenta la relazione costitutiva dell'induttore. Dalle (13.2) e (13.3), l'induttanza L dell'induttore è quindi data da

$$L = N \frac{d\phi}{di} \quad (13.4)$$

Essa è comunemente detta *autoinduttanza*, perché lega fra loro la tensione indotta in una bobina con la corrente variabile che percorre la bobina stessa.

Figura 13.2
Mutua induttanza M_{21}
della bobina 2 rispetto
alla bobina 1.



Si considerino ora due bobine con autoinduttanze L_1 e L_2 situate molto vicine nello spazio (Figura 13.2). La bobina 1 ha N_1 spire e la bobina 2 ha N_2 spire. Si suppone, per semplicità, che il secondo induttore non sia percorso da corrente. Il flusso magnetico ϕ_1 prodotto dalla bobina 1 è formato da due componenti: una componente ϕ_{11} , concatenata con la sola bobina 1 e un'altra componente ϕ_{12} , concatenata con entrambe le bobine,

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (13.5)$$

Anche se le due bobine sono fisicamente separate, esse si dicono in *accoppiamento magnetico*. L'intero flusso ϕ_1 si concatena con la bobina 1, e quindi la tensione indotta sulla bobina 1 è

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (13.6)$$

Soltanto la componente ϕ_{12} si concatena invece con la bobina 2, e la tensione ivi indotta è quindi

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad (13.7)$$

Come prima, poiché i flussi magnetici sono causati dalla corrente i_1 che scorre nella bobina 1, la (13.6) può essere scritta come

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1} \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (13.8)$$

dove $L_1 = N_1 d\phi_1 / di_1$ è l'autoinduttanza della bobina 1. In maniera simile, la (13.7) può essere scritta come

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (13.9)$$

dove

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \quad (13.10)$$

M_{21} è detta *mutua induttanza* della bobina 2 rispetto alla bobina 1. Il pedice 21 indica che l'induttanza M_{21} mette in relazione la tensione indotta nella bobina 2 con la cor-

bobina 2 è allora

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (13.11)$$

Si supponga ora di fare scorrere una corrente i_2 nella bobina 2, mentre nella bobina 1 non passa corrente (Figura 13.3). Il flusso magnetico ϕ_2 , prodotto dalla bobina 2, si compone del flusso ϕ_{22} concatenato alla sola bobina 2 e del flusso ϕ_{21} che si concatena con entrambe le bobine,

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} \quad (13.12)$$

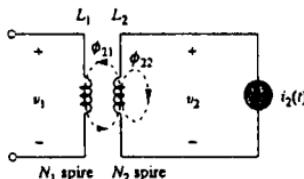


Figura 13.3
Mutua induttanza M_{12}
della bobina 1 rispetto
alla bobina 2.

L'intero flusso ϕ_2 risulta concatenato con la bobina 2, e la tensione indotta nella bobina 2 è quindi

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{di_2} \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (13.13)$$

dove $L_2 = N_2 d\phi_2/di_2$ è l'autoinduttanza della bobina 2. Soltanto il flusso ϕ_{21} si concatena invece con la bobina 1, la cui tensione indotta è

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (13.14)$$

dove

$$M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad (13.15)$$

è la *mutua induttanza* della bobina 1 rispetto alla bobina 2. La *tensione indotta* a circuito aperto sulla bobina 1 è quindi

$$v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (13.16)$$

Come si vedrà nel prossimo paragrafo, M_{12} e M_{21} sono uguali,

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (13.17)$$

e d'ora in poi verrà indicata con M la mutua induttanza fra le due bobine. Come l'autoinduttanza L , la mutua induttanza M si misura in henry (H). Si ricordi che l'accoppiamento mutuo ha luogo soltanto quando gli induttori, o bobine, sono situati a breve distanza nello spazio, e i circuiti sono pilotati da generatori variabili nel tempo. Gli induttori, infatti, si comportano come corti circuiti nei confronti delle correnti costanti.

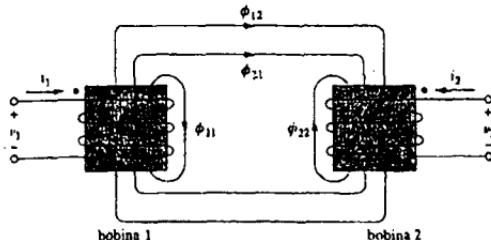
I due casi presentati nelle Figure 13.2 e 13.3 consentono di concludere che si ha mutua induttanza quando una tensione in un circuito viene indotta da una corrente variabile presente in un altro circuito.

La mutua induttanza è la proprietà posseduta da un induttore di sviluppare una tensione come reazione alla corrente variabile presente in un altro induttore posto in prossimità.

La mutua induttanza è la proprietà di un induttore di provvedere una tensione in un induttore vicino essa si misura in henry (H).

Anche se la mutua induttanza M è sempre una quantità positiva, la tensione indotta $M \frac{di}{dt}$ può risultare positiva o negativa, come la tensione autoindotta $L \frac{di}{dt}$. Tuttavia, a differenza della tensione autoindotta $L \frac{di}{dt}$, la cui polarità viene determinata dalle direzioni di riferimento della corrente e della tensione (secondo la convenzione degli utilizzatori), la polarità della tensione dovuta alla mutua induzione $M \frac{di}{dt}$ non è di semplice determinazione, perché coinvolge quattro terminali. La scelta della polarità corretta per $M \frac{di}{dt}$ viene fatta esaminando l'orientamento secondo il quale il filo è stato fisicamente avvolto sulle due bobine ed applicando la legge di Lenz assieme alla regola della mano destra. Poiché è scomodo essere costretti a mostrare i dettagli costruttivi delle bobine sugli schemi circuitali, si utilizza la cosiddetta *convenzione dei puntini*, secondo la quale viene disegnato un puntino in prossimità di un terminale per ciascuno dei due induttori magneticamente accoppiati, che indica la direzione del flusso magnetico in presenza di corrente positiva entrante nel terminale con il palino stesso. Tutto ciò è illustrato in Figura 13.4. Dato il circuito, i puntini risultano di solito già posizionati vicino alle bobine, e non è quindi necessario occuparsi del modo in cui essi sono stati scelti. I puntini vengono utilizzati, assieme alla convenzione omonima, per determinare la polarità della tensione mutualmente indotta. La convenzione è la seguente:

Figura 13.4
Illustrazione della convenzione
dei puntini



Se la corrente entra dal terminale con il puntino di una bobina,
la direzione di riferimento della tensione mutualmente indotta nella seconda bobina
ha il segno positivo nel terminale col puntino della seconda bobina.

In alternativa,

Se la corrente esce dal terminale con il puntino di una bobina,
la direzione di riferimento della tensione mutualmente indotta nella seconda bobina
ha il segno negativo nel terminale col puntino della seconda bobina.

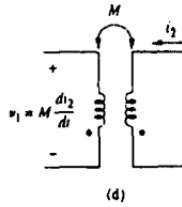
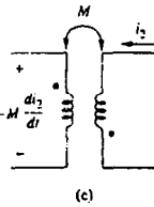
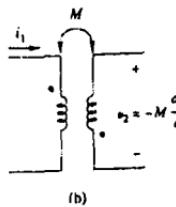
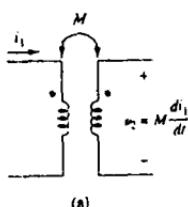


Figura 13.5
Esempi che illustrano
l'applicazione della convenzione
dei puntini.

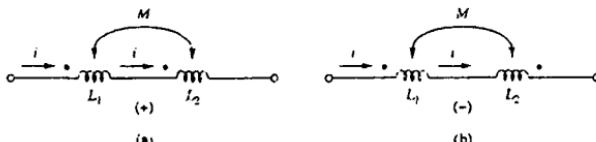
La direzione di riferimento della tensione indotta dipende quindi dalla direzione di riferimento della corrente che genera il flusso e dalle posizioni dei puntini sulle bobine accoppiate. L'applicazione della convenzione è illustrata dalle quattro coppie di induttori mostrate in Figura 13.5. Per le bobine accoppiate in Figura 13.5(a), il segno della

tensione indotta v_2 viene determinato dalla direzione di riferimento di v_2 e dalla direzione di i_1 . Poiché i_1 entra nel terminale col puntino della bobina 1 e v_2 ha il segno $-$ al terminale col puntino della bobina 2, la tensione indotta è $+M \frac{di_1}{dt}$. Per le bobine in Figura 13.5(b), la corrente i_1 entra nel terminale col puntino della bobina 1 e v_2 ha il segno $-$ al terminale con puntino della bobina 2. La tensione indotta è quindi $-M \frac{di_1}{dt}$. Un ragionamento analogo può essere applicato alle bobine di Figura 13.5(c) e 13.5(d). La Figura 13.6 mostra la convenzione dei puntini applicata a bobine accoppiate collegate in serie. Per le bobine di Fig. 13.6(a), l'induttanza totale è

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (\text{Collegamento serie concorde}) \quad (13.18)$$

Per quelle in Figura 13.6(b),

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (\text{Collegamento serie in opposizione}) \quad (13.19)$$

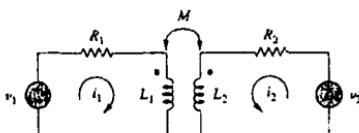


Ora che si è visto come si determina la polarità della tensione indotta, si possono analizzare circuiti contenenti mutue induttanze. Come primo esempio, si consideri il circuito in Figura 13.7. Applicando la KVL alla bobina 1 si ottiene

$$v_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (13.20a)$$

Per la bobina 2, la KVL fornisce

$$v_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (13.20b)$$



La (13.20) può essere scritta nel dominio delle frequenze come

$$V_1 = (R_1 + j\omega L_1)I_1 + j\omega M I_2 \quad (13.21a)$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 \quad (13.21b)$$

Come secondo esempio, si consideri il circuito in Figura 13.8, che verrà analizzato direttamente nel dominio delle frequenze. Applicando la KVL alla bobina 1 si ottiene

$$V = (Z_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 \quad (13.22a)$$

Per la bobina 2, la KVL fornisce

$$0 = -j\omega M I_1 + (Z_L + j\omega L_2)I_2 \quad (13.22b)$$

Le (13.21) e (13.22) possono essere poi risolte nel solito modo per ottenere le correnti.

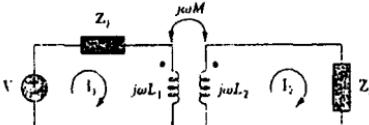


Figura 13.6
Convenzione dei puntini per bobine in serie; il segno indica la polarità della tensione indotta: (a) collegamento serie concorde, (b) collegamento serie in opposizione

Figura 13.7
Analisi nel dominio del tempo di un circuito contenente bobine accoppiate

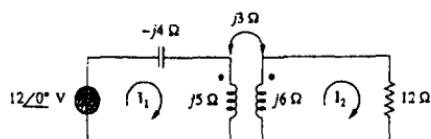
Figura 13.8
Analisi nel dominio delle frequenze di un circuito contenente bobine accoppiate

In un corso introduttivo quale è il presente, non ci si occuperà della determinazione delle mutue induttanze delle bobine, e del conseguente posizionamento dei puntini. Analogamente ad R , L e C , il calcolo di M richiederebbe di applicare le equazioni dell'elettromagnetismo alle caratteristiche fisiche delle bobine. In questo testo si supporterà invece che la mutua induttanza e la posizione dei puntini convenzionali siano "dati" del problema circuitale, così come sono dati del problema i valori dei componenti R , L e C .

Esempio 13.1

Calcolare i fasori di corrente I_1 e I_2 nel circuito di Figura 13.9.

Figura 13.9
Per l'Esempio 13.1.



Soluzione: Per la bobina 1, la KVL fornisce

$$-12 + (-j4 + j5)I_1 - j3I_2 = 0$$

cioè

$$jI_1 - j3I_2 = 12 \quad (13.1.1)$$

Per la bobina 2,

$$-j3I_1 + (12 + j6)I_2 = 0$$

cioè

$$I_1 = \frac{(12 + j6)I_2}{j3} = (2 - j4)I_2 \quad (13.1.2)$$

Sostituendo quest'ultima nella (13.1.1), si ottiene

$$(j2 + 4 - j3)I_2 = (4 - j)I_2 = 12$$

o anche

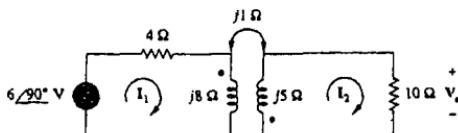
$$I_2 = \frac{12}{4 - j} = 2.91 \angle 14.04^\circ \text{ A} \quad (13.1.3)$$

Dalle (13.1.2) e (13.1.3),

$$\begin{aligned} I_1 &= (2 - j4)I_2 = (4.472 \angle -63.43^\circ)(2.91 \angle 14.04^\circ) \\ &= 13.01 \angle -49.39^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

■ Esercizio 13.1 Determinare la tensione V_o nel circuito di Figura 13.10.

Figura 13.10
Per l'Esercizio 13.1.

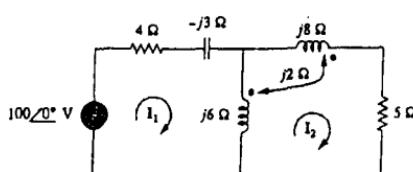


Risposta $0.6 \angle -90^\circ \text{ V}$.

Esempio 13.2

Calcolare le correnti di anello nel circuito di Figura 13.11.

Figura 13.11
Per l'Esempio 13.2.



Soluzione: Il problema principale nell'analisi di circuiti con accoppiamento magnetico è la conoscenza della polarità della tensione indotta; a questo scopo è stata introdotta la convenzione dei puntini. Nella Figura 13.11, si supponga che la bobina 1 sia quella con la reattanza da 6Ω , e la bobina 2 quella con la reattanza da 8Ω .

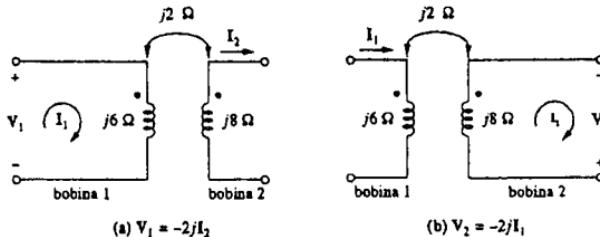
Per determinare la polarità della tensione indotta nella bobina 1 dovuta alla corrente I_2 , si osserva che I_2 esce dal terminale con il puntino della bobina 2. Poiché si sta applicando la KVL in senso orario, ciò implica che la tensione indotta ha il segno $-$, cioè $-j2I_2$.

In alternativa, si potrebbe meglio determinare la tensione indotta ridisegnando la parte rilevante del circuito, come mostrato in Figura 13.12(a), dalla quale risulta chiaro che la tensione indotta è $V_1 = -2jI_2$. Perciò, per l'anello 1 in Figura 13.11, la KVL fornisce

$$-100 + I_1(4 - j3 + j6) - j6I_2 - j2I_2 = 0$$

cioè

$$100 = (4 + j3)I_1 - j8I_2 \quad (13.2.1)$$



In maniera simile, al fine di determinare la tensione indotta nella bobina 2 dovuta alla corrente I_1 , si consideri la parte rilevante del circuito, mostrata in Figura 13.12(b). Applicando la convenzione dei puntini si ottiene la tensione indotta $V_2 = -2jI_1$. Inoltre, la corrente I_2 vede le due bobine accoppiate poste in serie in Figura 13.11; poiché essa è uscente dai terminali con il puntino in entrambe le bobine, si applica la (13.18). Perciò, per l'anello 2, la KVL fornisce

$$0 = -2jI_1 - j6I_1 + (j6 + j8 + j2 \times 2 + 5)I_2$$

e quindi

$$0 = -j8I_1 + (5 + j18)I_2 \quad (13.2.2)$$

Scrivendo le (13.2.1) e (13.2.2) in forma matriciale, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + j3 & -j8 \\ -j8 & 5 + j18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

I determinanti sono

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 + j3 & -j8 \\ -j8 & 5 + j18 \end{vmatrix} = 30 + j87$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -j8 \\ 0 & 5 + j18 \end{vmatrix} = 100(5 + j18)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 + j3 & 100 \\ -j8 & 0 \end{vmatrix} = j800$$

Le correnti di anello valgono quindi

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{100(5 + j18)}{30 + j87} = \frac{1868.2 \angle 74.5^\circ}{92.03 \angle 71^\circ} = 20.3 \angle 3.5^\circ \text{ A}$$

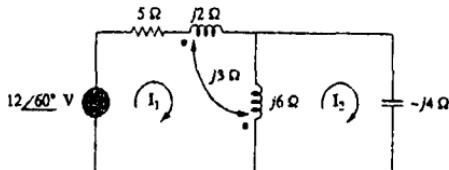
$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{j800}{30 + j87} = \frac{800 \angle 90^\circ}{92.03 \angle 71^\circ} = 8.693 \angle 19^\circ \text{ A}$$

Figura 13.12

Per l'Esempio 13.2, parti rilevanti del circuito di Figura 13.11 ai fini della determinazione delle tensioni indotte, secondo la convenzione dei puntini.

■ Esercizio 13.2 Determinare i fasori di corrente I_1 e I_2 nel circuito di Figura 13.13.

Figura 13.13
Per l'Esercizio 13.2.



Risposta 2.15 / 86.56°, 3.23 / 86.56 A.

13.3 ENERGIA IN UN CIRCUITO CON ACCOPPIAMENTO

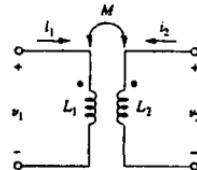
Nel Capitolo 6, si è visto che l'energia immagazzinata in un induttore è data da

$$w = \frac{1}{2} L i^2 \quad (13.23)$$

Si vuole ora procedere alla determinazione dell'energia immagazzinata nei circuiti in cui è presente un accoppiamento magnetico.

Figura 13.14

Per il calcolo dell'energia nei circuiti con accoppiamento.



Si consideri il circuito in Figura 13.14. Si suppone che le correnti i_1 e i_2 siano inizialmente nulle, così che l'energia immagazzinata nelle bobine è pure nulla. Se si fa crescere i_1 da zero a I_1 mantenendo $i_2 = 0$, la potenza nella bobina 1 vale

$$p_1(t) = v_1 i_1 = i_1 L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (13.24)$$

e l'energia immagazzinata nel circuito è

$$w_1 = \int p_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (13.25)$$

Se ora si mantiene $i_1 = I_1$ e si fa crescere i_2 da zero a I_2 , la tensione indotta nella bobina 1 è $M_{12} di_2/dt$, mentre la tensione indotta nella bobina 2 è nulla, perché i_1 non varia. La potenza nelle bobine è ora

$$p_2(t) = i_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2 = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (13.26)$$

e l'energia immagazzinata nel circuito

$$\begin{aligned} w_2 &= \int p_2 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 \\ &= M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \end{aligned} \quad (13.27)$$

L'energia totale immagazzinata nelle bobine dopo che i_1 e i_2 hanno raggiunto un valore costante è allora

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \quad (13.28)$$

Se si inverte l'ordine nel quale le correnti vengono fatte raggiungere il loro valore fi-

nale, cioè se si fa crescere dapprima i_2 da zero a I_2 e poi i_1 da zero a I_1 , l'energia totale immagazzinata nelle bobine sarà

$$\omega = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2 \quad (13.29)$$

Poiché l'energia totale immagazzinata deve essere la stessa, indipendentemente dal modo in cui la condizione finale è stata raggiunta, il confronto della (13.28) con la (13.29) porta a concludere che

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (13.30a)$$

e

$$\omega = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (13.30b)$$

Quest'ultima equazione è stata ottenuta nella ipotesi che entrambe le correnti siano entrate nei rispettivi terminali contrassegnati con il puntino; se invece una corrente è entrante nel terminale con il puntino mentre l'altra è uscente dal terminale con il puntino, la tensione indotta risulta negativa, e l'energia mutua $M I_1 I_2$ risulta anch'essa negativa. In tal caso

$$\omega = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad (13.31)$$

Inoltre, essendo I_1 e I_2 dei valori arbitrari, essi possono essere sostituiti con i_1 e i_2 , ottenendo per l'energia istantanea immagazzinata nel circuito l'espressione generale

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2} \quad (13.32)$$

Viene scelto il segno positivo per il termine dovuto alla mutua induttanza nell'ipotesi che entrambe le correnti siano entrate o uscite dai rispettivi terminali con il puntino; in caso contrario si avrà il segno negativo. Verrà ora stabilito un limite superiore per il valore della mutua induttanza M . L'energia immagazzinata nel circuito non può essere negativa, trattandosi di un circuito passivo. Ciò significa che la quantità $1/2L_1 i_1^2 + 1/2L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$ deve risultare maggiore o uguale a zero,

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \geq 0 \quad (13.33)$$

Per ottenere una espressione contenente un quadrato, si può sommare e sottrarre il termine $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ al primo membro della (13.33), ottenendo

$$\frac{1}{2} (i_1 \sqrt{L_1} - i_2 \sqrt{L_2})^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) \geq 0 \quad (13.34)$$

Il termine al quadrato non può mai essere negativo, e il suo valore minimo è zero. Il secondo termine nella (13.34) deve perciò essere maggiore o uguale a zero, cioè

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \geq 0$$

o anche

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.35)$$

Ne consegue che la mutua induttanza non può mai superare la media geometrica delle autoinduttanze delle bobine. Una misura di quanto la mutua induttanza M si avvicina a tale valore limite si ha con il coefficiente di accoppiamento k , dato da

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (13.36)$$

cioè

$$\boxed{M = k \sqrt{L_1 L_2}} \quad (13.37)$$

con $0 \leq k \leq 1$ o equivalentemente $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$. Il coefficiente di accoppiamento rappresenta la frazione del flusso totale prodotto da una delle bobine che si concatena con l'altra bobina. Ad esempio, in Figura 13.2,

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{11} + \phi_{12}} \quad (13.38)$$

e in Figura 13.3,

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} = \frac{\phi_{21}}{\phi_{22} + \phi_{21}} \quad (13.39)$$

Quando tutto il flusso prodotto da una bobina si concatena con l'altra bobina, e quindi $k = 1$, si ha accoppiamento al 100 percento, e le bobine si dicono *perfettamente accoppiate*. Per $k < 0.5$, le bobine si dicono *a basso accoppiamento*, mentre per $k > 0.5$ esse sono dette *ad accoppiamento stretto*. Riassumendo,

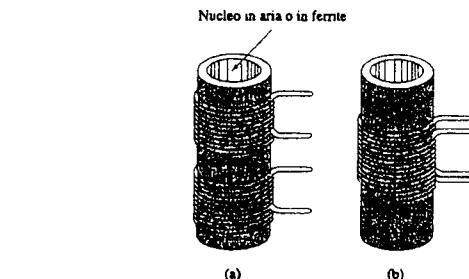
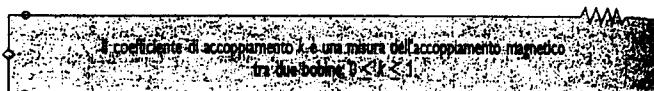


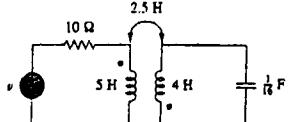
Figura 13.15
Avvolgimenti:
(a) a basso accoppiamento, (b) ad accoppiamento stretto; la vista in spaccato mostra entrambi gli avvolgimenti.

È ragionevole attendersi che k dipenda da quanto le bobine sono fisicamente prossime, dai loro nuclei, dal loro orientamento e dai loro avvolgimenti. La Figura 13.15 mostra esempi di avvolgimenti a basso accoppiamento e di avvolgimenti ad accoppiamento stretto. I trasformatori in aria utilizzati nei circuiti a radiofrequenza sono un esempio di avvolgimenti a basso accoppiamento, mentre i trasformatori con nucleo in ferro utilizzati nei sistemi di potenza sono un esempio di accoppiamento stretto. I trasformatori lineari trattati nel Paragrafo 13.4 sono per la maggior parte con nucleo in aria, mentre i trasformatori ideali dei Paragrafi 13.5 e 13.6 sono in maggioranza con nucleo in ferro.

Esempio 13.3

Si consideri il circuito in Figura 13.16. Determinare il coefficiente di accoppiamento. Calcolare inoltre l'energia immagazzinata negli induttori accoppiati all'istante $t = 1$ s se $v = 60 \cos(4t + 30^\circ)$ V.

Figura 13.16
Per l'Esempio 13.3.



Soluzione: Il coefficiente di accoppiamento è

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{2.5}{\sqrt{20}} = 0.56$$

Il suo valore indica che gli induttori sono strettamente accoppiati. Per determinare l'energia immagazzinata, è necessario ottenere il circuito equivalente nel dominio delle frequenze.

$$\begin{aligned} 60 \cos(4t + 30^\circ) &\Rightarrow 60 / 30^\circ, \omega = 4 \text{ rad/s} \\ 5 \text{ H} &\Rightarrow j\omega L_1 = j20 \Omega \\ 2.5 \text{ H} &\Rightarrow j\omega M = j10 \Omega \\ 4 \text{ H} &\Rightarrow j\omega L_2 = j16 \Omega \\ \frac{1}{16} \text{ F} &\Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j4 \Omega \end{aligned}$$

L'equivalente nel dominio delle frequenze è mostrato in Figura 13.17. Si può applicare ora l'analisi agli anelli. Per l'anello 1,

$$(10 + j20)I_1 + j10I_2 = 60 / 30^\circ \quad (13.3.1)$$

Per l'anello 2,

$$j10I_1 + (j16 - j4)I_2 = 0$$

cioè

$$I_1 = -1.2I_2 \quad (13.3.2)$$

Sostituendo quest'ultima equazione nella (13.3.1) si ottiene

$$I_2(-12 - j14) = 60 / 30^\circ \Rightarrow I_2 = 3.254 / 160.6^\circ \text{ A}$$

e

$$I_1 = -1.2I_2 = 3.905 / -19.4^\circ \text{ A}$$

Nel dominio del tempo,

$$i_1 = 3.905 \cos(4t - 19.4^\circ), \quad i_2 = 3.254 \cos(4t + 160.6^\circ)$$

All'istante $t = 1$ s, $4t = 4$ rad = 229.2°, e

$$i_1 = 3.905 \cos(229.2^\circ - 19.4^\circ) = -3.389 \text{ A}$$

$$i_2 = 3.254 \cos(229.2^\circ + 160.6^\circ) = 2.824 \text{ A}$$

L'energia totale immagazzinata negli induttori accoppiati è allora

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \\ &= \frac{1}{2} (5)(-3.389)^2 + \frac{1}{2} (4)(2.824)^2 + 2.5(-3.389)(2.824) = 20.73 \text{ J} \end{aligned}$$

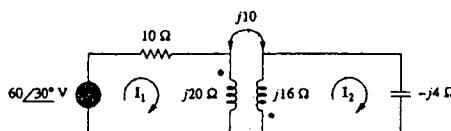


Figura 13.17
Equivalente nel dominio delle frequenze del circuito in Figura 13.16.

Esercizio 13.3 Per il circuito in Figura 13.18, determinare il coefficiente di accoppiamento e l'energia immagazzinata negli induttori accoppiati all'istante $t = 1.5$ s.

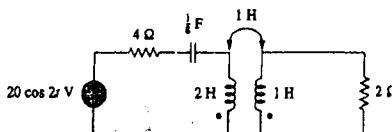


Figura 13.18
Per l'Esercizio 13.3.

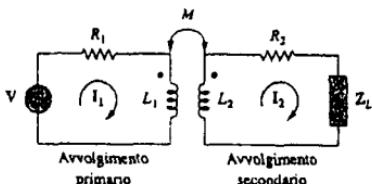
Risposta 0.7071, 9.85 J.

13.4 TRASFORMATORI LINEARI

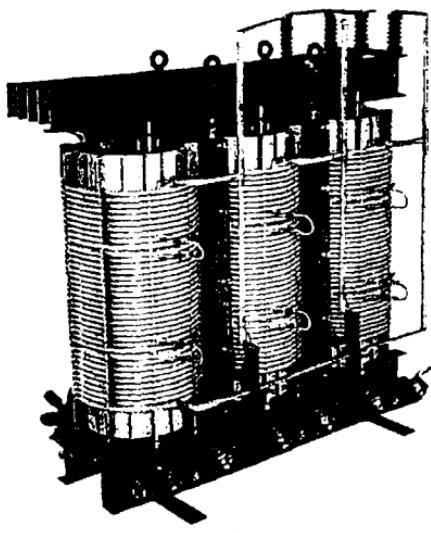
Viene ora introdotto un nuovo elemento circuituale: il trasformatore. Un trasformatore è un dispositivo elettromagnetico che utilizza il fenomeno della mutua induttanza.

Un trasformatore è, in genere, un dispositivo a quattro terminali formato da due (o più) bobine magneticamente accoppiate.

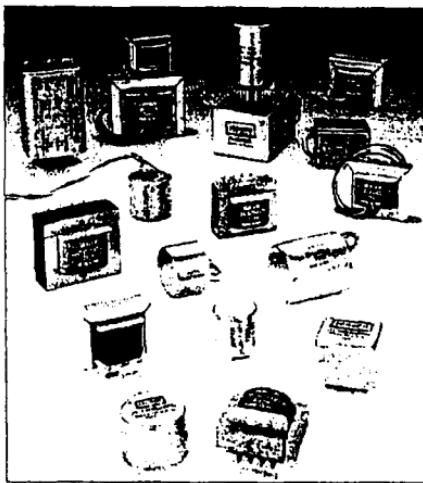
Figura 13.19
Trasformatore lineare.



Come si vede in Figura 13.19, la bobina che è elettricamente collegata al generatore di tensione è detta *avvolgimento primario*. Quella collegata al carico è chiamata *avvolgimento secondario*. Le resistenze R_1 e R_2 sono state state incluse per tenere conto delle perdite (potenza dissipata) nelle bobine. Il trasformatore è detto *lineare* se le bobine sono avvolte su un nucleo di materiale magnetico lineare – un materiale la cui permeabilità magnetica è costante¹. Esempi di materiali magnetici lineari sono l'aria, la plastica, la bachelite e il legno. La maggior parte dei materiali, in effetti, esibisce comportamento magnetico lineare. I trasformatori lineari sono spesso detti *trasformatori a nucleo in aria*, benché non tutti abbiano gli avvolgimenti su un nucleo in aria. Sono usati principalmente negli apparecchi radio e TV. La Figura 13.20 mostra alcuni esempi di trasformatori.



(a)



(b)

Figura 13.20

Alcuni tipi di trasformatori:
(a) trasformatore di potenza
a secco con avvolgimenti
in rame. (b) trasformatori audio.
(Courtesy of:
(a) Electric Service Co.,
(b) Jensen Transformers.)

¹ Un trasformatore lineare può anche essere definito come un trasformatore il cui flusso è proporzionale alle correnti negli avvolgimenti.

Si vuole ora calcolare l'impedenza di ingresso Z_{in} vista dal generatore, perché Z_{in} è quella che determina il comportamento del circuito primario. Applicando la KVL ai due anelli in Figura 13.19 si ottiene

$$V = (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 \quad (13.40a)$$

$$0 = -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)I_2 \quad (13.40b)$$

Nella (13.40b), si esprime I_2 in termini di I_1 e si sostituisce l'espressione nella (13.40a), ottenendo per l'impedenza di ingresso

$$Z_{in} = \frac{V}{I_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \quad (13.41)$$

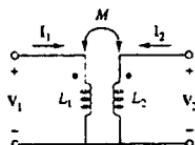
L'impedenza di ingresso è formata da due termini: il primo, $(R_1 + j\omega L_1)$, è l'impedenza del primario; il secondo termine è dovuto all'accoppiamento tra gli avvolgimenti primario e secondario.

È come se questa impedenza fosse riflessa sul primario, ed è anche detta *impedenza riflessa* Z_R ,

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \quad (13.42)$$

È bene anche notare che il risultato della (13.41) o (13.42) è indipendente dalla posizione dei puntini convenzionali sul trasformatore, perché anche sostituendo M con $-M$ si ottiene lo stesso risultato.

L'esperienza fatta ai Paragrafi 13.2 e 13.3 nella analisi di circuiti con accoppiamento magnetico ha mostrato come l'analisi di questi circuiti risulti più complicata rispetto ai circuiti dei capitoli precedenti. Per questa ragione è spesso conveniente sostituire un circuito con accoppiamento magnetico con un circuito equivalente privo di accoppiamento. Si vuole allora sostituire il trasformatore lineare in Figura 13.19 con un circuito equivalente a T o a Π , senza mutua induttanza. Se si trascurano le resistenze delle bobine e si suppone che le bobine abbiano un terminale in comune, si ottiene il dia-gramma di Figura 13.21.



L'ipotesi di un terminale comune alle due bobine rappresenta una limitazione importante alla validità dei circuiti equivalenti, e viene imposta al trasformatore di Figura 13.21 per poter applicare a esso i circuiti equivalenti a T o a Π mostrati nelle Figure 13.22 e 13.23.

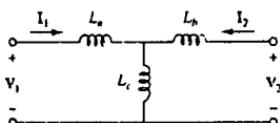


Figura 13.21
Per la determinazione del circuito equivalente di un trasformatore lineare

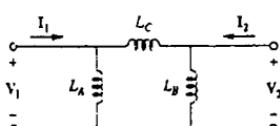


Figura 13.22
Circuito equivalente a T.

Figura 13.23
Circuito equivalente a Π .

Le relazioni tensione-corrente per la bobina primaria e secondaria si possono esprimere in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (13.43)$$

e possono essere riscritte, invertendo la matrice, come

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (13.44)$$

Si vogliono ora fare corrispondere i termini delle (13.43) e (13.44) con i termini corrispondenti delle equazioni delle reti a T e a Π .

Per la rete a T (o a Y) di Figura 13.22, l'applicazione della analisi agli anelli fornisce le seguenti equazioni

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (13.45)$$

Se i circuiti delle Figure 13.21 e 13.22 devono essere equivalenti, le (13.43) e (13.45) devono essere identiche. Eguagliando i termini delle matrici delle impedenze delle (13.43) e (13.45) si ottiene

$$L_a = L_1 - M, \quad L_b = L_2 - M, \quad L_c = M \quad (13.46)$$

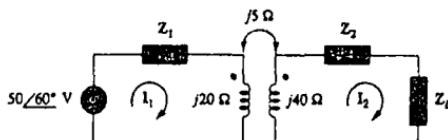
Per la rete a Π (o a Δ) di Figura 13.23, l'analisi nodale porta alle seguenti equazioni

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L_A} + \frac{1}{j\omega L_C} & -\frac{1}{j\omega L_C} \\ -\frac{1}{j\omega L_C} & \frac{1}{j\omega L_B} + \frac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (13.47)$$

Eguagliando i termini nelle matrici delle ammettenze delle (13.44) e (13.47), si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} L_A &= \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}, & L_B &= \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} \\ L_C &= \frac{L_1L_2 - M^2}{M} \end{aligned}} \quad (13.48)$$

Si noti che nelle Figure 13.22 e 13.23 gli induttori non hanno alcun accoppiamento magnetico. Si noti inoltre che lo spostamento della posizione dei puntini nella Figura 13.21 può fare sì che M diventi $-M$. Come mostrerà l'Esempio 13.6, un valore negativo di M non è fisicamente realizzabile, ma il modello equivalente rimane matematicamente valido.



Esempio 13.4

Nel circuito di Figura 13.24, calcolare l'impedenza di ingresso e la corrente I_1 . Siano $Z_1 = 60 - j100 \Omega$, $Z_2 = 30 + j40 \Omega$ e $Z_L = 80 + j60 \Omega$.

Figura 13.24
Per l'Esempio 13.4

Soluzione: Dalla (13.41),

$$\begin{aligned} Z_{\infty} &= Z_1 + j20 + \frac{(5)^2}{j40 + Z_2 + Z_L} \\ &= 60 - j100 + j20 + \frac{25}{110 + j140} \\ &= 60 - j80 + 0.14 \angle -51.84^\circ \\ &\approx 60.09 - j80.11 = 100.14 \angle -53.1^\circ \Omega \end{aligned}$$

Quindi,

$$I_1 = \frac{V}{Z_{\infty}} = \frac{50 \angle 60^\circ}{100.14 \angle -53.1^\circ} = 0.5 \angle 113.1^\circ \text{ A}$$

■ **Esercizio 13.4** Determinare l'impedenza di ingresso del circuito in Figura 13.25 e la corrente uscente dal generatore di tensione.

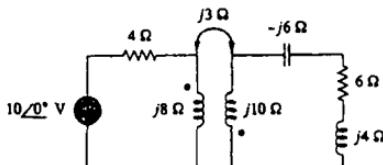


Figura 13.25
Per l'Esercizio 13.4.

Risposta $8.58 \angle 58.05^\circ \Omega$, $1.165 \angle -58.05^\circ \text{ A}$.

Esempio 13.5

Determinare il circuito equivalente a T del trasformatore lineare in Figura 13.26(a).

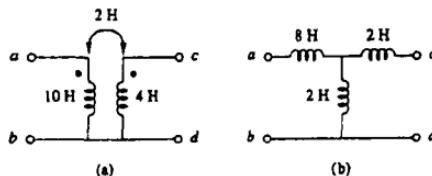


Figura 13.26
Per l'Esempio 13.5:
(a) trasformatore lineare,
(b) circuito equivalente a T.

Soluzione: Dati $L_1 = 10$, $L_2 = 4$ e $M = 2$, la rete equivalente a T ha i parametri seguenti:

$$L_a = L_1 - M = 10 - 2 = 8 \text{ H}$$

$$L_b = L_2 - M = 4 - 2 = 2 \text{ H}, \quad L_c = M = 2 \text{ H}$$

Il circuito equivalente a T è mostrato in Figura 13.26(b). Si sono supposte direzioni di riferimento delle correnti e polarità delle tensioni negli avvolgimenti primario e secondario conformi a quelle in Figura 13.21. In caso contrario, potrebbe essere necessario sostituire M con $-M$, come illustra l'Esempio 13.6.

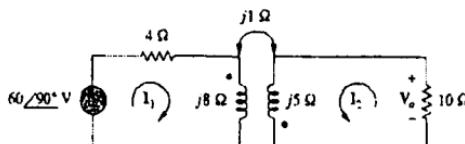
■ **Esercizio 13.5** Per il trasformatore lineare di Figura 13.26 (a), determinare il circuito equivalente a T.

Risposta $L_A = 18 \text{ H}$, $L_B = 4.5 \text{ H}$, $L_C = 18 \text{ H}$.

Esempio 13.6

Determinare I_1 , I_2 e V_o in Figura 13.27 (lo stesso circuito dell'Esercizio 13.1) utilizzando il circuito equivalente a T per il trasformatore lineare.

Figura 13.27
Per l'Esempio 13.6.

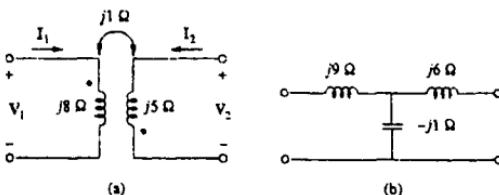


Soluzione: Si noti che il circuito in Figura 13.27 coincide con quello in Figura 13.10, fatta eccezione per la direzione di riferimento della corrente I_2 , che risulta invertita, così che le direzioni di riferimento per le correnti nelle bobine magneticamente accoppiate risultano conformi a quelle in Figura 13.21.

Figura 13.28

Per l'Esempio 13.6:

- (a) circuito per le bobine accoppiate di Figura 13.27,
- (b) circuito equivalente a T.



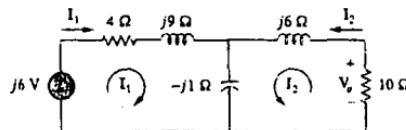
Si devono sostituire le bobine con accoppiamento magnetico con il circuito equivalente a T. La parte di circuito in Figura 13.27 interessata alla trasformazione è mostrata in Figura 13.28(a). Confrontando la Figura 13.28(a) con la Figura 13.21 si notano due differenze: innanzitutto, a causa delle direzioni di riferimento delle correnti e delle polarità delle tensioni, è necessario sostituire M con $-M$ per rendere la Figura 13.28(a) conforme alla Figura 13.21. Inoltre, il circuito in Figura 13.21 è nel dominio del tempo, mentre il circuito in Figura 13.28(a) è nel dominio delle frequenze. La differenza è rappresentata dal fattore $j\omega$; infatti, L in Figura 13.21 è sostituito con $j\omega L$ e M con $j\omega M$. Poiché ω non è specificata, si può supporre $\omega = 1$, o qualunque altro valore, senza che ciò influenzi il calcolo. Ricordando le due differenze appena note,

$$\begin{aligned}L_a &= L_1 - (-M) = 8 + 1 = 9 \text{ H} \\L_b &= L_2 - (-M) = 5 + 1 = 6 \text{ H}, \quad L_c = -M = -1 \text{ H}\end{aligned}$$

Il circuito equivalente a T delle due bobine accoppiate è allora quello mostrato in Figura 13.28(b).

Inserendo il circuito equivalente a T di Figura 13.28(b) in sostituzione delle due bobine in Figura 13.27, si ottiene il circuito equivalente di Figura 13.29, che può essere risolto applicando l'analisi nodale o l'analisi agli anelli. Con l'analisi agli anelli, si ottiene

$$j6 = I_1(4 + j9 - j1) + I_2(-j1) \quad (13.6.1)$$



c

$$0 = I_1(-j1) + I_2(10 + j6 - j1) \quad (13.6.2)$$

Dalla (13.6.2),

$$I_1 = \frac{(10 + j5)}{j} I_2 = (5 - j10) I_2 \quad (13.6.3)$$

Sostituendo la (13.6.3) nella (13.6.1) si ha

$$j6 = (4 + j8)(5 - j10) I_2 - jI_2 = (100 - j) I_2 \approx 100 I_2$$

Poiché 100 è molto grande in confronto a 1, la parte immaginaria del numero $(100 - j)$ può essere trascurata, e quindi $100 - j \approx 100$. Ne consegue

$$I_2 = \frac{j6}{100} = j0.06 = 0.06 \angle 90^\circ \text{ A}$$

Dalla (13.6.3),

$$I_1 = (5 - j10)/j0.06 = 0.6 + j0.3 \text{ A}$$

$$V_o = -10I_2 = -j0.6 = 0.6/-90^\circ \text{ V}$$

Questo risultato è in accordo con la risposta all'Esercizio 13.1. Naturalmente, la direzione di I_2 in Figura 13.10 è opposta a quella in Figura 13.27. Ciò non ha alcuna influenza su V_o , ma il valore di I_2 nel presente esempio è l'opposto di quello nell'Esercizio 13.1. Utilizzando il modello equivalente a T per le bobine magneticamente accoppiate non è necessario preoccuparsi delle posizioni dei puntini convenzionali sulle bobine stesse.

Esercizio 13.6 Risolvere il problema dell'Esempio 13.1 (si veda la Figura 13.9) utilizzando il modello equivalente a T per le bobine magneticamente accoppiate.

Risposta 13 /-49.4° A. 2.91 /14.04° A.

13.5 TRASFORMATORI IDEALI

Un trasformatore ideale è un trasformatore ad accoppiamento perfetto ($k = 1$), e consiste praticamente di due (o più) bobine con un gran numero di spire, avvolte attorno ad un nucleo comune ad alta permeabilità. A causa della elevata permeabilità del nucleo, il flusso si concatena con tutte le spire di entrambi gli avvolgimenti, dando luogo ad un accoppiamento perfetto.

Per convincersi di come il trasformatore ideale rappresenti il caso limite di due induttori accoppiati quando l'induttanza tende all'infinito e l'accoppiamento è perfetto, si riesamina il circuito in Figura 13.14. Nel dominio delle frequenze,

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad (13.49a)$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \quad (13.49b)$$

Dalla (13.49a), $I_1 = (V_1 - j\omega M I_2)/j\omega L_1$. Sostituendo nella (13.49b) si ottiene

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + \frac{M V_1}{L_1} - \frac{j\omega M^2 I_2}{L_1}$$

Ma $M = \sqrt{L_1 L_2}$ nell'accoppiamento perfetto ($k = 1$). Quindi,

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + \frac{\sqrt{L_1 L_2} V_1}{L_1} - \frac{j\omega L_1 L_2 I_2}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_1 = n V_1$$

dove $n = \sqrt{L_2/L_1}$ è chiamato *rappporto spire*. Quando $L_1, L_2, M \rightarrow \infty$ mantenendo invariato n , le bobine accoppiate diventano un trasformatore ideale. Un trasformatore è detto ideale se ha le seguenti proprietà:

- Le bobine hanno reattanze molto elevate ($L_1, L_2, M \rightarrow \infty$).
- Il coefficiente di accoppiamento è unitario ($k = 1$).
- Le bobine primaria e secondaria sono prive di perdite ($R_1 = 0 = R_2$).

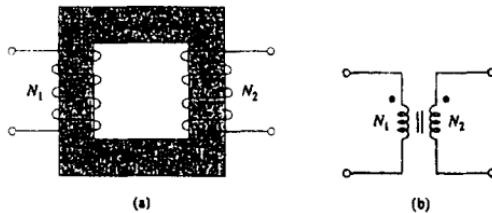
Un trasformatore ideale è un trasformatore ad accoppiamento unitario, senza perdite, in cui le bobine primaria e secondaria hanno autoinduttanze infinite.

Trasformatori con nucleo in ferro rappresentano delle buone approssimazioni dei trasformatori ideali; essi sono largamente utilizzati nei sistemi di potenza e in elettronica.

La Figura 13.30(a) mostra un tipico trasformatore ideale; il corrispondente simbolo circuitale è mostrato in Figura 13.30(b).

Figura 13.30

- (a) Trasformatore ideale.
- (b) simbolo circuitale per il trasformatore ideale.



Le linee verticali tra le due bobine rappresentano il nucleo in ferro, per distinguerlo dal nucleo in aria utilizzato nei trasformatori lineari. L'avvolgimento primario ha N_1 spire, il secondario N_2 spire.

Quando una tensione sinusoidale viene applicata all'avvolgimento primario, come mostrato in Figura 13.31, lo stesso flusso ϕ interessa entrambi gli avvolgimenti. Secondo la legge di Faraday, la tensione dell'avvolgimento primario è

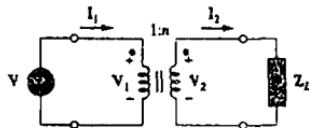
$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (13.50a)$$

e quella dell'avvolgimento secondario

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (13.50b)$$

Figura 13.31

Relazione fra grandezze al primario e al secondario in un trasformatore ideale.



Dividendo la (13.50b) per la (13.50a), si ottiene

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad (13.51)$$

dove n è, ancora, il *rapporto spire* o *rapporto di trasformazione*. È anche possibile utilizzare i fasori delle tensioni \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 invece dei valori istantanei v_1 e v_2 , riscrivendo la (13.51) nella forma

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad (13.52)$$

Se si vogliono evitare sprechi di energia, l'energia fornita al primario deve essere uguale all'energia assorbita dal secondario, essendo il trasformatore ideale privo di perdite. Ne consegue

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (13.53)$$

In termini di fasori, la (13.53) unita alla (13.52) diventa

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = n \quad (13.54)$$

che mostra come le correnti del primario e del secondario sono legate dalla relazione inversa di quella che lega le tensioni. In definitiva

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n} \quad (13.55)$$

Quando $n = 1$, il trasformatore è detto *trasformatore di isolamento*, per un motivo che apparirà ovvio nel Paragrafo 13.9.1. Se $n > 1$, si ha invece un *trasformatore elevatore*, perché la tensione aumenta dal primario al secondario ($V_2 > V_1$). Quando infine $n < 1$, si è in presenza di un *trasformatore riduttore*, perché la tensione diminuisce dal primario al secondario ($V_2 < V_1$).

In un trasformatore riduttore la tensione al secondario è minore della tensione sul primario.

In un trasformatore elevatore la tensione sul secondario è maggiore della tensione sul primario.

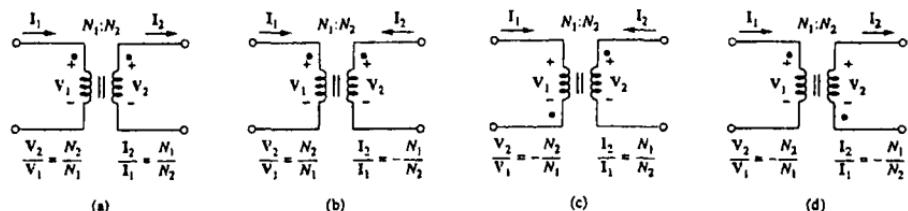
I dati di targa dei trasformatori vengono solitamente specificati come V_1/V_2 . Un trasformatore da 2400/120 V è progettato per avere 2400 V sul primario e 120 sul secondario (è quindi un trasformatore riduttore). Si ricordi sempre che le tensioni sono intese come efficaci.

Le aziende elettriche spesso producono l'elettricità ad un livello di tensione conveniente, ed utilizzano poi trasformatori elevatori per aumentare la tensione in modo che l'energia possa essere trasmessa a tensione molto alta e corrente bassa sulle linee di trasmissione, ottenendo notevoli risparmi sui costi. In prossimità delle abitazioni alle quali l'energia deve essere fornita, vengono utilizzati trasformatori riduttori per portare la tensione ai livelli di rete (220 V in Europa). Nel Paragrafo 13.9.3 si tratterà ulteriormente di questi sistemi.

È importante ricordare il modo in cui vanno scelte le polarità delle tensioni e le direzioni di riferimento per le correnti del trasformatore di Figura 13.31. Se la polarità di V_1 o V_2 , oppure la direzione di riferimento di I_1 o I_2 viene modificata, il rapporto spire n nelle Equazioni da (13.51) a (13.55) potrebbe dover essere sostituito con $-n$. Le due semplici regole da seguire sono:

- Se V_1 e V_2 hanno *entrambe* il segno + o il segno - ai terminali con il puntino, usare $+n$ nella (13.52). Altrimenti usare $-n$.
- Se I_1 e I_2 sono *entrambi* entranti o entrambi uscenti dai terminali con il punto, si usi $-n$ nella (13.55). Altrimenti, si usi $+n$.

Queste regole sono illustrate dai quattro circuiti in Figura 13.32.



Utilizzando le (13.52) e (13.55), è sempre possibile esprimere V_1 in termini di V_2 e I_1 , o in termini di I_2 , o viceversa:

$$V_1 = \frac{V_2}{n} \quad \text{oppure} \quad V_2 = nV_1 \quad (13.56)$$

$$I_1 = nI_2 \quad \text{oppure} \quad I_2 = \frac{I_1}{n} \quad (13.57)$$

La potenza complessa nell'avvolgimento primario è

$$S_1 = V_1 I_1^* = \frac{V_2}{n} (nI_2)^* = V_2 I_2^* = S_2 \quad (13.58)$$

Figura 13.32
Circuiti tipici ad illustrazione delle polarità di tensione e direzioni di riferimento corrette in un trasformatore ideale.

e quindi tutta la potenza complessa fornita al primario viene trasferita al secondario senza perdite; il trasformatore non assorbe alcuna potenza, come ci si attendeva dal trasformatore ideale, privo di perdite. L'impedenza di ingresso vista dal generatore in Figura 13.31 si trova dalle (13.56) e (13.57)

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{n^2} \frac{V_2}{I_2} \quad (13.59)$$

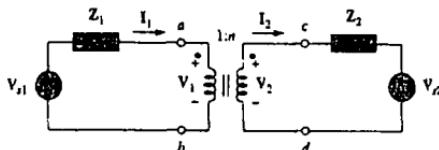
Dalla Figura 13.31 risulta evidente che $V_2/I_2 = Z_L$, e quindi

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{n^2} \quad (13.60)$$

L'impedenza di ingresso è anche detta *impedenza riflessa*, perché è come se l'impedenza di carico si riflettesse nel primario. La proprietà del trasformatore di trasformare una data impedenza in un'altra impedenza suggerisce un metodo per *adattare le impedenze* ai fine di portarsi in condizioni di massimo trasferimento di potenza. Il procedimento verrà meglio illustrato nel Paragrafo 13.9.2.

Figura 13.33

Circuito con trasformatore ideale di cui si vogliono determinare i circuiti equivalenti



Nell'analisi di circuiti contenenti un trasformatore ideale, è pratica consueta quella di eliminare il trasformatore "riflettendo" le impedenze ed i generatori da un lato all'altro del trasformatore. Nel circuito di Figura 13.33, si supponga di voler riflettere il lato secondario del circuito nel lato primario. Si determina il circuito equivalente di Thevenin a destra dei terminali *a-b*. Si ottiene V_{Th} , tensione a circuito aperto ai terminali *a-b*, come mostrato in Figura 13.34(a). Essendo i terminali *a-b* in circuito aperto, $I_1 = I_2 = 0$ e quindi $V_2 = V_{s2}$. Dalla (13.56) segue allora

$$V_{Th} = V_1 = \frac{V_2}{n} = \frac{V_{s2}}{n} \quad (13.61)$$

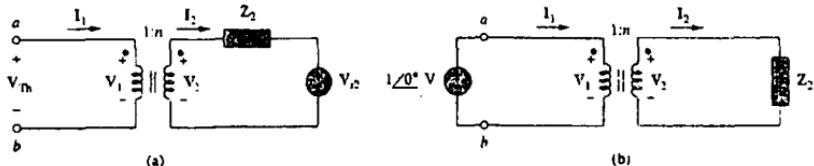


Figura 13.34

(a) Determinazione di V_{Th} per il circuito in Figura 13.33. (b) determinazione di Z_{Th} per il circuito in Figura 13.33.

Per determinare Z_{Th} , si rimuove il generatore di tensione nell'avvolgimento secondario e si inserisce un generatore unitario ai terminali *a-b*, come in Figura 13.34(b). Dalle (13.56) e (13.57), $I_1 = nI_2$ e $V_1 = V_2/n$, così che

$$Z_{Th} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2/n}{nI_2} = \frac{Z_2}{n^2}, \quad V_2 = Z_2 I_2 \quad (13.62)$$

che è quanto ci si attendeva dalla (13.60). Noti V_{Th} e Z_{Th} , si collega l'equivalente Thevenin alla parte di circuito in Figura 13.33 a sinistra dei terminali *a-b*. La Figura 13.35 mostra il risultato.

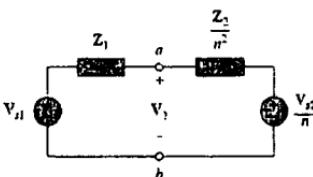


Figura 13.35
Circuito equivalente della Figura 13.33 ottenuto riflettendo il circuito secondario dalla parte del primario.

La regola generale per l'eliminazione del trasformatore e la riflessione del circuito secondario nel primario è dividere l'impedenza nel secondario per n^2 , dividere la tensione del secondario per n e moltiplicare la corrente del secondario per n .

È anche possibile riflettere il lato primario del circuito in Figura 13.33 nel secondario. La Figura 13.36 mostra il circuito equivalente.

La regola per eliminare il trasformatore e riflettere il circuito primario nel circuito secondario è moltiplicare l'impedenza del primario per n^2 , moltiplicare la tensione del primario per n e dividere la corrente del primario per n .

Secondo la (13.58), la potenza rimane invariata se calcolata al lato primario o al secondario. Ma è bene ricordare che il procedimento di riflessione è applicabile solo nel caso in cui non esistono collegamenti esterni fra l'avvolgimento primario e il secondario. Nel caso in cui, invece, si abbiano dei collegamenti esterni tra i due avvolgimenti, è necessario utilizzare le normali analisi nodale o agli anelli. Esempi di circuiti in cui sono presenti collegamenti esterni fra l'avvolgimento primario e il secondario si trovano nelle Figure 13.39 e 13.40. Si noti anche che se le posizioni dei puntini convenzionali in Figura 13.33 vengono modificate, potrebbe risultare necessario utilizzare $-n$ invece di n per rispettare la convenzione illustrata in Figura 13.32.

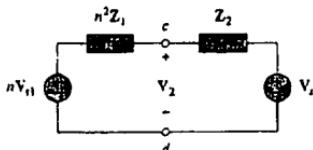


Figura 13.36
Circuito equivalente per la Figura 13.33 ottenuto riflettendo il circuito primario nel lato secondario.

Esempio 13.7

Un trasformatore ideale ha valori di targa 2400/120 V, 9.6 kVA e 50 spire nell'avvolgimento secondario. Calcolare: (a) il rapporto spire, (b) il numero di spire nell'avvolgimento primario e (c) i valori di corrente per l'avvolgimento primario e secondario.

Soluzione: (a) Si tratta di un trasformatore riduttore, perché $V_1 = 2400 \text{ V} > V_2 = 120 \text{ V}$.

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{120}{2400} = 0.05$$

(b)

$$n = \frac{N_2}{N_1} \quad \Rightarrow \quad 0.05 = \frac{50}{N_1}$$

cioè

$$N_1 = \frac{50}{0.05} = 1000 \text{ spire}$$

(c) $S = V_1 I_1 = V_2 I_2 = 9.6 \text{ kVA}$. Quindi,

$$I_1 = \frac{9600}{V_1} = \frac{9600}{2400} = 4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{9600}{V_2} = \frac{9600}{120} = 80 \text{ A} \quad \text{o anche} \quad I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{4}{0.05} = 80 \text{ A}$$

■ **Esercizio 13.7** La corrente nel primario di un trasformatore ideale con valori di targa 3300/110 V è di 3 A. Calcolare: (a) il rapporto spire, (b) la potenza di targa in kVA, (c) la corrente nel secondario.

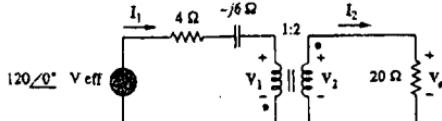
Risposta (a) 1/30, (b) 9.9 kVA, (c) 90 A.

Esempio 13.8

Per il circuito con trasformatore ideale di Figura 13.37, determinare: (a) la corrente I_1 del generatore, (b) la tensione di uscita V_o e (c) la potenza complessa erogata dal generatore.

Figura 13.37

Per l'Esempio 13.8.



Soluzione: (a) L'impedenza da 20 Ω può essere riflessa nel lato primario, ottenendo

$$Z_R = \frac{20}{n^2} = \frac{20}{4} = 5 \Omega$$

Ne segue,

$$Z_{ia} = 4 - j6 + Z_R = 9 - j6 = 10.82 \angle -33.69^\circ \Omega$$

$$I_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{Z_{ia}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{10.82 \angle -33.69^\circ} = 11.09 \angle 33.69^\circ \text{ A}$$

(b) Poiché sia I_1 che I_2 sono uscenti dai terminali con il puntino convenzionale,

$$I_2 = -\frac{1}{n} I_1 = -5.545 \angle 33.69^\circ \text{ A}$$

$$V_o = 20I_2 = 110.9 \angle 213.69^\circ \text{ V}$$

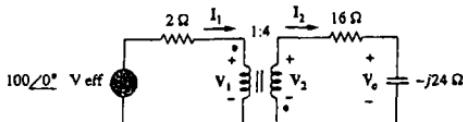
(c) La potenza complessa erogata è

$$S = V_o I_2^* = (120 \angle 0^\circ)(11.09 \angle -33.69^\circ) = 1330.8 \angle -33.69^\circ \text{ VA}$$

■ **Esercizio 13.8** Nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.38, determinare V_o e la potenza complessa erogata dal generatore.

Figura 13.38

Per l'Esempio 13.8.



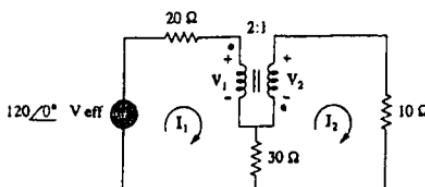
Risposta 178.9 ∠116.56° V, 2981.5 ∠-26.56° VA.

Esempio 13.9

Calcolare la potenza fornita al resistore da 10 Ω nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.39.

Figura 13.39

Per l'Esempio 13.9.



Soluzione: La riflessione sul lato del secondario o del primario non può essere operata in questo circuito, in quanto esiste un collegamento diretto fra il lato primario e il secondario per mezzo del resistore da $30\ \Omega$. Si applica allora l'analisi agli anelli. Per l'anello 1,

$$-120 + (20 + 30)I_1 - 30I_2 + V_1 = 0$$

cioè

$$50I_1 - 30I_2 + V_1 = 120 \quad (13.9.1)$$

Per l'anello 2,

$$-V_2 + (10 + 30)I_2 - 30I_1 = 0$$

cioè

$$-30I_1 + 40I_2 - V_2 = 0 \quad (13.9.2)$$

Ai terminali del trasformatore,

$$V_2 = -\frac{1}{2}V_1 \quad (13.9.3)$$

$$I_2 = -2I_1 \quad (13.9.4)$$

(Si noti che $n = 1/2$.) Si hanno ora quattro equazioni in quattro incognite, ma è richiesta soltanto I_2 . Si sostituiscono allora le espressioni di V_1 e I_1 in termini di V_2 e I_2 , nelle (13.9.1) e (13.9.2). La (13.9.1) diventa

$$-55I_2 - 2V_2 = 120 \quad (13.9.5)$$

e la (13.9.2) diventa

$$15I_2 + 40I_2 - V_2 = 0 \implies V_2 = 55I_2 \quad (13.9.6)$$

Sostituendo la (13.9.6) nella (13.9.5),

$$-165I_2 = 120 \implies I_2 = -\frac{120}{165} = -0.7272 \text{ A}$$

La potenza assorbita dal resistore da $10\ \Omega$ è

$$P = (-0.7272)^2(10) = 5.3 \text{ W}$$

Esercizio 13.9 Calcolare V_o nel circuito di Figura 13.40.

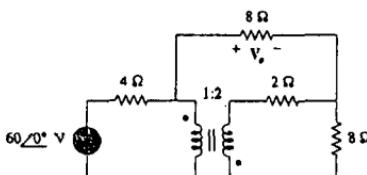


Figura 13.40
Per l'Esercizio 13.9.

Risposta 24 V.



13.6 AUTOTRASFORMATORI IDEALI

A differenza dei tradizionali trasformatori a due avvolgimenti considerati finora, un *autotrasformatore* possiede un singolo avvolgimento continuo, avente un punto di connessione tra il lato primario e il secondario. Il punto di connessione è spesso mobile, in modo da permettere di ottenere il rapporto spire desiderato per aumentare o diminuire il livello di tensione. In questo modo, ad un carico collegato all'autotrasformatore è possibile fornire una tensione regolabile.

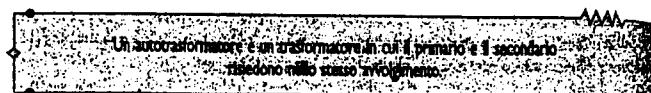
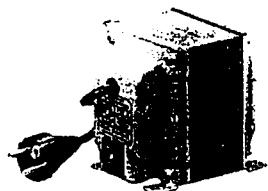


Figura 13.41
Un tipico autotrasformatore.
(Courtesy of Todd Systems, Inc.)



La Figura 13.41 mostra un tipico autotrasformatore. Come si vede in Figura 13.42, l'autotrasformatore può operare come elevatore e come riduttore. L'autotrasformatore appartiene alla categoria dei trasformatori di potenza. Il suo principale vantaggio nei confronti del trasformatore a due avvolgimenti è la possibilità di trasferire una potenza apparente molto più elevata, come mostrerà l'Esempio 13.10. Un ulteriore vantaggio consiste nel fatto che un autotrasformatore è di solito più piccolo e leggero di uno equivalente a due avvolgimenti. L'*isolamento elettrico*, cioè la mancanza di connessione elettrica diretta fra circuito primario e secondario, viene però perso, perché i due avvolgimenti coincidono. (Il modo in cui si trae vantaggio pratico dall'isolamento elettrico in un trasformatore convenzionale verrà illustrato nel Paragrafo 13.9.1.) Tale mancanza di isolamento elettrico tra avvolgimento primario e secondario è il principale svantaggio dell'impiego di un autotrasformatore.

Alcune delle formule ottenute per il trasformatore ideale rimangono valide per l'autotrasformatore. Per il circuito con autotrasformatore riduttore di Figura 13.42(a), l'applicazione della (13.52) fornisce

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2} \quad (13.63)$$

Trattandosi di un autotrasformatore ideale, non ci sono perdite, e la potenza complessa al primario è la stessa di quella dell'avvolgimento secondario:

$$S_1 = V_1 I_1' = S_2 = V_2 I_2' \quad (13.64)$$

La (13.64) può anche essere espressa come

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

o anche

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} \quad (13.65)$$

La relazione tra le correnti è allora

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \quad (13.66)$$

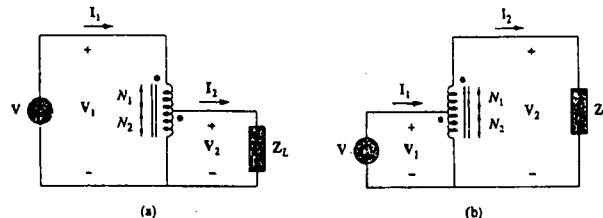


Figura 13.42
(a) Autotrasformatore riduttore,
(b) autotrasformatore elevatore.

Per il circuito con autotrasformatore elevatore di Figura 13.42(b),

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_1 + N_2}$$

cioè

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \quad (13.67)$$

La potenza complessa data dalla (13.64) rimane valida anche per l'autotrasformatore elevatore, e quindi anche la (13.65) rimane valida. La relazione fra le correnti è allora

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = 1 + \frac{N_2}{N_1} \quad (13.68)$$

Una importante differenza fra i trasformatori convenzionali e gli autotrasformatori è che il lato primario e il lato secondario di un autotrasformatore sono accoppiati non soltanto magneticamente ma anche elettricamente. L'autotrasformatore può essere utilizzato in sostituzione di un trasformatore convenzionale quando non è necessario avere isolamento elettrico tra i due circuiti.

Esempio 13.10

Confrontare i valori di potenza del trasformatore a due avvolgimenti in Figura 13.43(a) e dell'autotrasformatore in Figura 13.43(b).

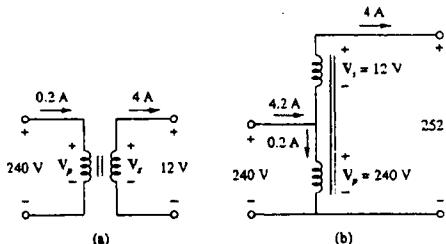


Figura 13.43
Per l'Esempio 13.10.

Soluzione: Nonostante gli avvolgimenti primario e secondario dell'autotrasformatore siano costituiti in realtà da un solo avvolgimento continuo, essi sono stati disegnati separati in Figura 13.43(b) per maggiore chiarezza. Si noti che la corrente e la tensione di ciascun avvolgimento dell'autotrasformatore in Figura 13.43(b) sono le stesse di quelle per il trasformatore a due avvolgimenti in Figura 13.43(a). Su questa base verranno confrontati i rispettivi valori di potenza. Per il trasformatore a due avvolgimenti, i valori di potenza sono

$$S_1 = 0.2(240) = 48 \text{ VA} \quad \text{o} \quad S_2 = 4(12) = 48 \text{ VA}$$

Per l'autotrasformatore, i valori di potenza sono

$$S_1 = 4.2(240) = 1008 \text{ VA} \quad \text{o} \quad S_2 = 4(252) = 1008 \text{ VA}$$

che è pari a 21 volte il valore della potenza del trasformatore a due avvolgimenti.

Esercizio 13.10 Si faccia riferimento alla Figura 13.43. Se il trasformatore a due avvolgimenti è un trasformatore da 60VA, 120V/10V, quale è la potenza di targa dell'autotrasformatore?

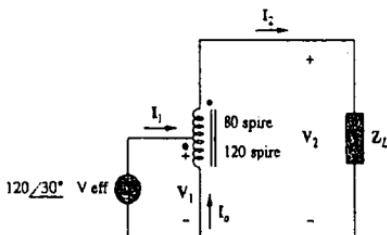
Risposta 780 VA.

Esempio 13.11

Si faccia riferimento al circuito con autotrasformatore in Figura 13.44. Calcolare: (a) I_1 , I_2 e I_c se $Z_L = 8 + j6 \Omega$, (b) la potenza complessa fornita al carico.

Soluzione: (a) Si tratta di un autotrasformatore elevatore con $N_1 = 80$, $N_2 = 120$, $V_1 = 120 \angle 30^\circ$, e quindi si può utilizzare la (13.67) per ottenere V_2

Figura 13.44
Per l'Esempio 13.11.



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{80}{200}$$

quindi

$$V_2 = \frac{200}{80} V_1 = \frac{200}{80} (120 \angle 30^\circ) = 300 \angle 30^\circ V$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L} = \frac{300 \angle 30^\circ}{8 + j6} = \frac{300 \angle 30^\circ}{10 \angle 36.87^\circ} = 30 \angle -6.87^\circ A$$

Ma

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \frac{200}{80}$$

cioè

$$I_1 = \frac{200}{80} I_2 = \frac{200}{80} (30 \angle -6.87^\circ) = 75 \angle -6.87^\circ A$$

Alla presa centrale, la KCL fornisce

$$I_1 + I_o = I_2$$

e quindi

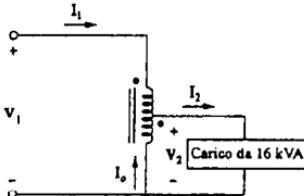
$$I_o = I_2 - I_1 = 30 \angle -6.87^\circ - 75 \angle -6.87^\circ = 45 \angle 173.13^\circ A$$

(b) La potenza complessa fornita al carico è

$$S_2 = V_2 I_2^* = |I_2|^2 Z_L = (30)^2 (10 \angle 36.87^\circ) = 9 \angle 36.87^\circ \text{ kVA}$$

■ **Esercizio 13.11** Nel circuito con autotrasformatore di Figura 13.45, determinare le correnti I_1 , I_2 e I_o . Supponere $V_1 = 1250$ V, $V_2 = 800$ V.

Figura 13.45
Per l'Esercizio 13.11.



Risposta 12.8 A, 20 A, 7.2 A.

13.7 TRASFORMATORI TRIFASE

Per soddisfare l'esigenza di trasmettere la potenza elettrica in forma trifase, sono necessari collegamenti di trasformatori compatibili con lo schema trifase. Tali connessioni si possono ottenere in due modi: collegando tre trasformatori monofase a formare un cosiddetto *banco di trasformatori*, oppure utilizzando speciali trasformatori trifase. A parità di potenza di targa in kVA, un trasformatore trifase risulta sempre più piccolo e meno costoso di tre trasformatori monofase. Quando si utilizzano trasforma-

tori monofase, è necessario assicurarsi che il rapporto spire n sia lo stesso per tutti i trasformatori, in modo da mantenere bilanciato il sistema trifase. Esistono quattro configurazioni standard in cui collegare tre trasformatori monofase o un trasformatore trifase in un sistema trifase: Y-Y, Δ - Δ , Y- Δ e Δ -Y.

Per tutte e quattro le connessioni, la potenza apparente totale S_T , la potenza reale totale P_T e la potenza reattiva totale Q_T si ottengono come

$$S_T = \sqrt{3} V_L I_L \quad (13.69a)$$

$$P_T = S_T \cos \theta = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (13.69b)$$

$$Q_T = S_T \sin \theta = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta \quad (13.69c)$$

dove V_L e I_L sono, rispettivamente, pari alla tensione di linea V_{Lp} e alla corrente di linea I_{Lp} per il lato primario, oppure alla tensione di linea V_{Ls} e alla corrente di linea I_{Ls} per il lato secondario. Si noti dalla (13.69) che per tutte e quattro le connessioni, $V_{Ls} I_{Ls} = V_{Lp} I_{Lp}$, perché in un trasformatore ideale la potenza si conserva.

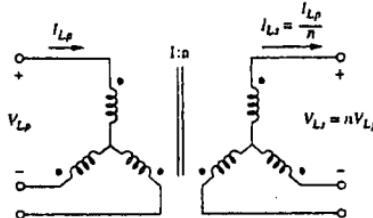


Figura 13.46
Collegamento Y-Y di trasformatore trifase.

Per la connessione Y-Y (Figura 13.46), la tensione di linea V_{Lp} al lato primario, la tensione di linea V_{Ls} sul lato secondario, la corrente di linea I_{Lp} nel lato primario e la corrente di linea I_{Ls} nel lato secondario sono legate al rapporto spire per fase n del trasformatore secondo le (13.52) e (13.55):

$$V_{Ls} = n V_{Lp} \quad (13.70a)$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n} \quad (13.70b)$$

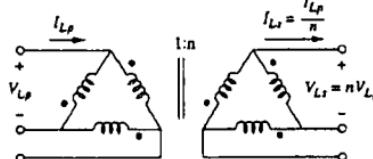


Figura 13.47
Collegamento Δ - Δ di trasformatore trifase.

Per la connessione Δ - Δ (Figura 13.47), la (13.70) rimane valida per le tensioni di linea e le correnti di linea. Questo schema possiede la proprietà distintiva che se uno dei trasformatori viene rimosso per riparazione o manutenzione, gli altri due costituiscono un *triangolo aperto*, che è in grado di fornire tensioni trifase ad un livello ridotto rispetto al trasformatore trifase originale.

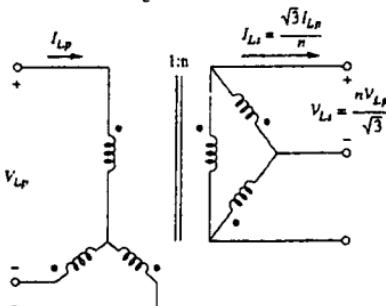


Figura 13.48
Collegamento Y- Δ di trasformatore trifase.

Per la connessione Y-Δ (Figura 13.48), compare un fattore $\sqrt{3}$ dovuto ai rapporti fra i valori di linea e di fase, in aggiunta al rapporto spire n per fase del trasformatore. Quindi,

$$V_{Lx} = \frac{n V_{Lp}}{\sqrt{3}} \quad (13.71a)$$

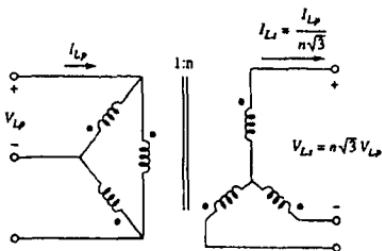
$$I_{Lx} = \frac{\sqrt{3} I_{Lp}}{n} \quad (13.71b)$$

In maniera simile, per la connessione Δ-Y (Figura 13.49),

$$V_{Lx} = n \sqrt{3} V_{Lp} \quad (13.72a)$$

$$I_{Lx} = \frac{I_{Lp}}{n \sqrt{3}} \quad (13.72b)$$

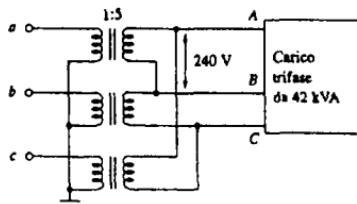
Figura 13.49
Collegamento Δ-Y
di trasformatore trifase.



Esempio 13.12

Il carico bilanciato da 42 kVA mostrato in Figura 13.50 è alimentato attraverso un trasformatore trifase. (a) Determinare il tipo di connessione del trasformatore. (b) Calcolare la tensione di linea e la corrente nel lato primario. (c) Determinare la potenza in kVA di ciascun trasformatore in un banco di trasformatori. Supporre i trasformatori ideali.

Figura 13.50
Per l'Esempio 13.12.



Soluzione: (a) Una attenta osservazione della Figura 13.50 rivela che il lato primario è collegato a Y, mentre il lato secondario è collegato a Δ. Il trasformatore trifase è dunque di tipo Y-Δ, simile a quello di Figura 13.48.

(b) Dato il carico con potenza apparente totale $S_T = 42 \text{ kVA}$, il rapporto spire $n = 5$, e la tensione di linea sul secondario $V_{Lx} = 240 \text{ V}$, è possibile determinare la corrente di linea nel secondario usando la (13.69a),

$$I_{Lx} = \frac{S_T}{\sqrt{3} V_{Lx}} = \frac{42000}{\sqrt{3}(240)} = 101 \text{ A}$$

Dalla (13.71a),

$$I_{Lp} = \frac{n}{\sqrt{3}} I_{Lx} = \frac{5 \times 101}{\sqrt{3}} = 292 \text{ A}$$

$$V_{Lp} = \frac{\sqrt{3}}{n} V_{Lx} = \frac{\sqrt{3} \times 240}{5} = 83.14 \text{ V}$$

(c) Poiché il carico è bilanciato, ciascuno dei trasformatori sopporta la stessa parte di carico e poiché non ci sono perdite (supponendo i trasformatori ideali), la potenza in kVA di ciascun trasformatore è $S = S_T/3 = 14 \text{ kVA}$. In alternativa, la potenza di targa dei trasformatori può essere determinata dal prodotto della corrente di fase e della tensione di fase del lato primario o secondario. Per il lato secondario, ad esempio, si ha un collegamento a triangolo, così che la tensione di fase coincide con la tensione di linea di 240 V, mentre la corrente di fase è $I_L/\sqrt{3} = 58.34 \text{ A}$. Quindi, $S = 240 \times 58.34 = 14 \text{ kVA}$.

■ **Esercizio 13.12** Un trasformatore trifase Δ - Δ viene utilizzato per ridurre la tensione di linea di 625 kV, fino ad alimentare un impianto che opera con tensione di linea di 12.5 kV. L'impianto assorbe 40 MW con fattore di potenza induttivo dell'85 percento. Calcolare: (a) la corrente assorbita dall'impianto, (b) il rapporto spire, (c) la corrente nel lato primario del trasformatore e (d) il carico sopportato da ciascun trasformatore.

Risposta (a) 2.1736 kA, (b) 0.02, (c) 43.47 A, (d) 15.69 MVA. ■

13.8 ANALISI CON PSPICE DI CIRCUITI MAGNETICAMENTE ACCOCCIATI

PSpice è in grado di analizzare circuiti con accoppiamento magnetico allo stesso modo dei circuiti contenenti induttori, a patto di rispettare la convenzione dei puntini. La convenzione di Schematic è che il puntino (non mostrato) si trova sempre vicino al pin 1, che è anche il terminale di sinistra dell'induttore quando un componente con part name L viene piazzato orizzontalmente, senza rotazioni, in uno schematico. Il puntino, o pin 1, si troverà allora in basso dopo una rotazione di 90° in senso antiorario, perché le rotazioni avvengono sempre attorno al pin 1. Una volta posizionati gli induttori accoppiati, ricordando la convenzione dei puntini, e dopo aver fissato il loro valore in henry, si utilizza il simbolo di accoppiamento K_LINEAR per specificare l'accoppiamento. Per ciascuna coppia di induttori accoppiati si applica il seguente procedimento:

1. Selezionare Draw/Get New Part e scrivere K_LINEAR.
2. Premere (enter) o selezionare OK, e posizionare il simbolo K_LINEAR sullo schematico, come mostrato in Figura 13.51. (Si noti che K_LINEAR non è un componente e quindi non ha terminali.)
3. DCLICKL su COUPLING e inserire il valore del coefficiente di accoppiamento k .
4. DCLICKL sulla lettera K nella casella (il simbolo dell'accoppiamento) e scrivere i nomi dei riferimenti per gli induttori accoppiati nella forma L_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Ad esempio, se gli induttori L20 e L23 risultano accoppiati, si pone $L1 = L20$ e $L2 = L23$. È obbligatorio assegnare un valore ad L1 e ad almeno un altro L_i ; gli altri L_i possono essere lasciati vuoti.

Al passo 4, è possibile specificare fino a sei induttori accoppiati aventi lo stesso accoppiamento.



Figura 13.51
Componente K_LINEAR per la definizione dell'accoppiamento.

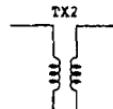
Il partname del trasformatore con nucleo in aria è XFRM_LINEAR. Esso può essere inserito in un circuito selezionando Draw/Get Part Name e scrivendone il nome, oppure selezionandolo dalla libreria analog.slb. Come si vede nell'esempio in Figura 13.52(a), gli attributi principali di un trasformatore lineare sono il coefficiente di accoppiamento k e i valori delle induttanze $L1$ e $L2$, espressi in henry. Se è specificata la mutua induttanza M , il suo valore deve essere utilizzato assieme a $L1$ ed $L2$ per calcolare k . Si ricordi che il valore di k deve essere compreso tra 0 e 1.

Figura 13.52

(a) Trasformatore lineare

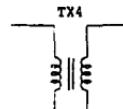
XFRM. LINEAR.

(b) Trasformatore ideale



COUPLING=0.5
L1_VALUE=1mH
L2_VALUE=25mH

(a)



COUPLING=0.5
L1_TURNS=500
L2_TURNS=1000

11

Per il trasformatore ideale, il part name è XFRM_NONLINEAR; esso si trova nella libreria breakout.lib. Lo si può includere selezionando Draw/Get Part Name e scrivendone poi il part name. I suoi attributi sono il coefficiente di accoppiamento e i numeri di spire associati a L1 ed L2, come è illustrato dall'esempio in Figura 13.52(b). Il valore del coefficiente di accoppiamento mutuo deve essere $k = 1$.

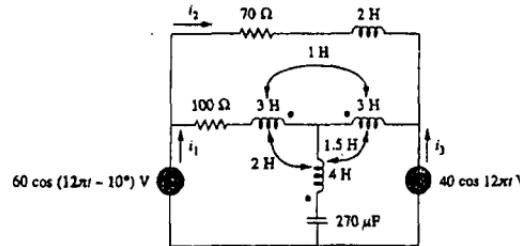
PSpice contiene anche altre configurazioni di trasformatori che non verranno però qui presentate.

Esempio 13.13

Utilizzare PSpice per ottenere i_1 , i_2 e i_3 nel circuito mostrato in Figura 13.53.

Figura 13.53

Per l'Esempio 13.13



Soluzione: I coefficienti di accoppiamento dei tre induttori accoppiati si determinano come segue.

$$k_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1}{\sqrt{3 \times 3}} = 0.3333$$

$$k_{13} = \frac{M_{13}}{\sqrt{L_1 L_3}} = \frac{2}{\sqrt{3 \times 4}} = 0.5774$$

$$k_{23} = \frac{M_{23}}{\sqrt{L_2 L_3}} = \frac{1.5}{\sqrt{3 \times 4}} = 0.433$$

La frequenza di funzionamento f si ottiene dalla Figura 13.53 come $\omega = 12\pi = 2\pi f \rightarrow f = 6\text{ Hz}$. Lo schematico per il circuito è mostrato in Figura 13.54. Si noti come sia stata rispettata la convenzione dei puntini. Per L2, il puntino (non mostrato) si trova sul pin 1 (il terminale di sinistra) e viene perciò piazzato senza rotazione. Per L1, affinché il puntino si venga a trovare sulla destra dell'induttore, esso deve essere ruotato di 180° . Per L3, l'induttore deve essere ruotato di 90° in modo che il puntino finisca in basso. Si noti che l'induttore da 2H (L_4) non è accoppiato. Per trattare i tre induttori accoppiati, si utilizzano tre parti K_LINEAR, presenti nella libreria analogica, e se ne fissano i seguenti attributi (con un doppio clic sul simbolo K nella casella)²:

K1 - K_LINEAR

$$L_1 = L_2$$

L2 = L2

COUPLING = 0.3333

² I valori sulla destra sono i riferimenti agli induttori dello schematico

K2 - K_LINEAR
 L1 = L2
 L2 = L3
 COUPLING = 0.433

K3 - K_LINEAR
 L1 = L1
 L2 = L3
 COUPLING = 0.5774

Sono stati inseriti tre pseudocomponenti IPRINT nei rami opportuni, in ruolo da ottenere le correnti richieste i_1 , i_2 e i_3 . Poiché è richiesta una analisi AC ad una singola frequenza, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep scegliendo Total Pts = 1, Start Freq = 6 e Final Freq = 6. Dopo aver salvato lo schematico, si seleziona Analysis/Simulate per simularlo. Il file di uscita contiene:

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
6.000E+00	2.114E-01	-7.575E+01
FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
6.000E+00	4.654E-01	-7.025E+01
FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
6.000E+00	1.095E-01	1.715E+01

Da questi si ottiene

$$I_1 = 0.4654 \angle -70.25^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 0.2114 \angle -75.75^\circ \text{ A}, \quad I_3 = 0.1095 \angle 17.15^\circ \text{ A}$$

Quindi,

$$i_1 = 0.4654 \cos(12\pi t - 70.25^\circ) \text{ A}$$

$$i_2 = 0.2114 \cos(12\pi t - 75.75^\circ) \text{ A}$$

$$i_3 = 0.1095 \cos(12\pi t + 17.15^\circ) \text{ A}$$

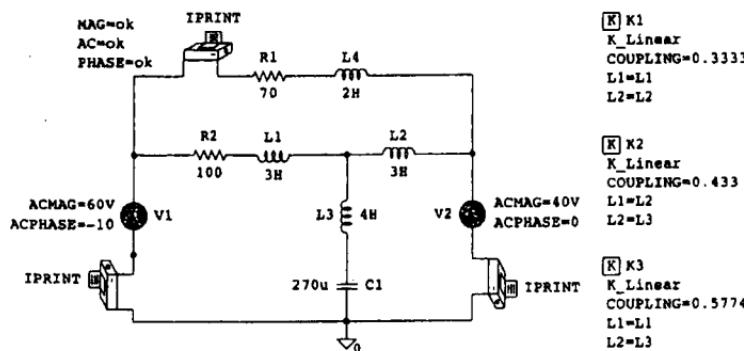


Figura 13.54
 Schematico del circuito in Figura 13.53.

Esercizio 13.13 Determinare i_a nel circuito di Figura 13.55 usando PSpice.

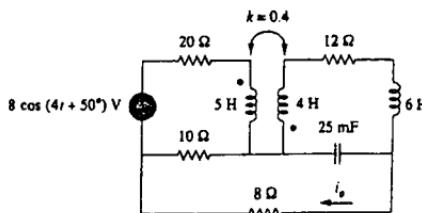


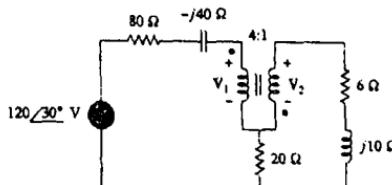
Figura 13.55
 Per l'Esercizio 13.13.

Risposta $0.1006 \cos(4t + 68.52^\circ) \text{ A}$.

Esempio 13.14

Determinare V_1 e V_2 nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.56 usando PSpice.

Figura 13.56
Per l'Esempio 13.14.



Soluzione

1. Dare una definizione precisa del problema

Il problema è definito in modo chiaro.

2. Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.

Si devono determinare le tensioni di ingresso e di uscita di un trasformatore ideale. Si utilizza PSpice per analizzare il circuito e ricavare le tensioni.

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.
Nel problema viene chiesto di usare PSpice; si potrà poi fare uso dell'analisi agli anelli per verificare i risultati.

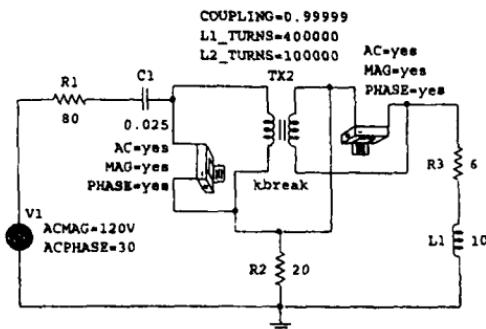
4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

Come al solito, si suppone $\omega = 1$ e si determinano i valori corrispondenti della capacità e dell'induttanza degli elementi:

$$j10 = j\omega L \implies L = 10 \text{ H}$$

$$-j40 = \frac{1}{j\omega C} \implies C = 25 \text{ mF}$$

Figura 13.57
Schematico per il circuito
in Figura 13.56.



La Figura 13.57 mostra lo schematico. Per il trasformatore ideale, si sceglie un fattore di accoppiamento 0.999 e numeri di spire 400 000 e 100 000³. I due pseudocomponenti VPRJNT2 sono collegati ai terminali del trasformatore per ottenere V_1 e V_2 . Si effettua una analisi ad una singola frequenza, selezionando Analysis/Setup/AC Sweep e scegliendo Total Pts = 1, Start Freq = 0.1592 e Final Freq = 0.1592. Dopo aver salvato lo schematico, si sceglie Analysis/Simulate per simularlo. Il file di uscita contiene:

FREQ	VM(\$N_0003,\$N_0006)	VP(\$N_0003,\$N_0006)
1.592E-01	9.112E+01	3.792E+01
FREQ	VM(\$N_0006,\$N_0005)	VP(\$N_0006,\$N_0005)
1.592E-01	2.278E+01	-1.421E+02

³ Si ricordi che le induttanze dell'avvolgimento primario e secondario di un trasformatore ideale sono infinitamente grandi.

Da questi si ottiene

$$V_1 = 91.12 \angle 37.92^\circ \text{ V} \quad \text{e} \quad V_2 = 27.78 \angle -142.1^\circ \text{ V}$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Si possono verificare i risultati usando l'analisi agli anelli, come riportato di seguito:

$$\text{Anello 1} \quad -120 \angle 30^\circ + (80 - j40)I_1 + V_1 + 20(I_1 - I_2) = 0$$

$$\text{Anello 2} \quad 20(-I_1 + I_2) - V_2 + (6 + j10)I_2 = 0$$

Ma, $V_2 = -V_1/4$ e $I_2 = -4I_1$. Quindi si ha:

$$-120 \angle 30^\circ + (80 - j40)I_1 + V_1 + 20(I_1 + 4I_1) = 0$$

$$(180 - j40)I_1 + V_1 = 120 \angle 30^\circ$$

$$20(-I_1 - 4I_1) + V_1/4 + (6 + j10)(-4I_1) = 0$$

$$(-124 - j40)I_1 + 0.25V_1 = 0 \quad \text{oppure} \quad I_1 = V_1/(496 + j160)$$

Sostituendo questa nella prima equazione si ottiene:

$$(180 - j40)V_1/(496 + j160) + V_1 = 120 \angle 30^\circ$$

$$\begin{aligned} & (184.39 \angle -12.53^\circ / 521.17 \angle 17.88^\circ) V_1 + V_1 = \\ & = (0.3538 \angle -30.41^\circ + 1) V_1 = (0.3051 + 1 - j0.1791) V_1 = 120 \angle 30^\circ \end{aligned}$$

$$V_1 = 120 \angle 30^\circ / 1.3173 \angle -7.81^\circ \cdot 1.3173 \angle -7.81^\circ = 91.1 \angle -37.81^\circ \text{ V} \quad \text{e} \quad V_2 = 27.78 \angle -142.1^\circ \text{ V}$$

Quindi i risultati sono verificati.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è risolto il problema in modo soddisfacente e poi si sono verificati i risultati. Si può quindi presentare come la soluzione del problema.

Esercizio 13.14 Determinare V_1 e V_2 nel circuito di Figura 13.58 usando PSpice.

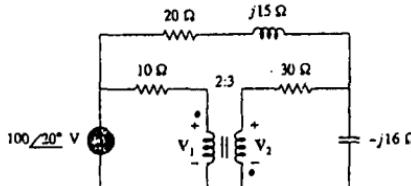


Figura 13.58
Per l'Esercizio 13.14.

Risposta 63.1 ∠28.65° V, 94.64 ∠-151.4° V.

13.9 APPLICAZIONI†

I trasformatori rappresentano spesso i componenti più grossi, pesanti e costosi dei circuiti. Ciononostante, essi sono componenti passivi indispensabili per molti circuiti. Sono tra le macchine più efficienti esistenti, presentando una efficienza normalmente attorno al 95 per cento e potendo raggiungere anche il 99 per cento. Hanno perciò numerosissime applicazioni, tra le quali si ricordano:

- Elevamento o riduzione dei livelli di tensione o corrente, rendendola adatta alla trasmissione e alla distribuzione della potenza elettrica.
- Isolamento di una parte di un circuito da un'altra (cioè, trasferimento di potenza elettrica in assenza di collegamento elettrico).
- Adattamento di impedanze per realizzare le condizioni di massimo trasferimento di potenza.
- Circuiti con comportamento selettivo alle diverse frequenze.

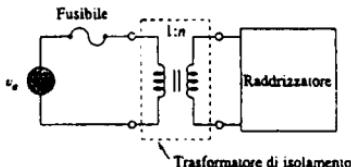
Proprio per i loro svariati impieghi, esistono moltissimi tipi di trasformatori (solo alcuni dei quali vengono presentati in questo capitolo)⁴: trasformatori di tensione, trasformatori di corrente, trasformatori di potenza, trasformatori di distribuzione, trasformatori per adattamento di impedenze, trasformatori audio, trasformatori monofase, trasformatori trifase, trasformatori raddrizzatori, trasformatori invertitori e molti altri. In questo paragrafo, verranno presentate tre importanti applicazioni: l'uso del trasformatore per l'isolamento tra due circuiti interagenti, il trasformatore come adattatore di impedenze e infine verrà fatto un cenno alla struttura dei sistemi di distribuzione della potenza elettrica.

13.9.1 Trasformatore come dispositivo di isolamento

Si dice che si ha isolamento elettrico tra due dispositivi quando non esiste connessione elettrica fra loro. In un trasformatore, l'energia viene trasferita attraverso l'accoppiamento magnetico, senza necessità di alcun collegamento elettrico tra il circuito primario e il secondario. Si considerano ora tre semplici esempi pratici nei quali si trae vantaggio da questa proprietà.

Si consideri innanzitutto il circuito in Figura 13.59. Un raddrizzatore è un circuito elettronico che converte una tensione AC in una tensione continua. Spesso viene utilizzato un trasformatore per accoppiare la sorgente AC di energia con il raddrizzatore. Il trasformatore serve a due scopi: eleva o abbassa il livello di tensione, e agisce da isolamento elettrico fra la presa di corrente ed il raddrizzatore, riducendo così il rischio di scosse elettriche nella manipolazione dei componenti elettronici.

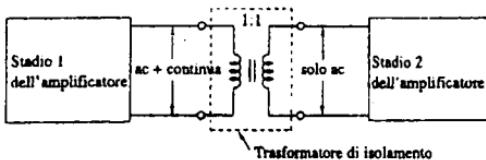
Figura 13.59
Trasformatore usato
per isolare una sorgente AC
di energia da un raddrizzatore.



Trasformatore di isolamento

Come secondo esempio, il trasformatore viene spesso usato per accoppiare due stadi di un amplificatore, per impedire alle tensioni costanti di uno stadio di influenzare la polarizzazione dello stadio successivo. La polarizzazione consiste nella applicazione di tensioni costanti ad un amplificatore a transistori, o a qualunque altro dispositivo elettronico, in modo tale da portarlo in una prefissata zona di funzionamento. Ciascuno stadio dell'amplificatore viene polarizzato separatamente in modo da operare in una particolare modalità; tale modalità potrebbe venire compromessa se il trasformatore non isolasse le tensioni costanti nei vari stadi. Come si vede in Figura 13.60, solo il segnale AC passa da uno stadio al successivo attraverso il trasformatore. Si ricordi infatti che l'accoppiamento magnetico non si applica alle tensioni costanti. Trasformatori vengono usati nei ricevitori radio e TV per accoppiare gli stadi degli amplificatori ad alta frequenza. Quando l'unico ruolo del trasformatore è quello di fornire isolamento, il suo rapporto spire n può essere reso unitario. Un trasformatore di isolamento ha perciò $n = 1$.

Figura 13.60
Trasformatore per isolare
la continua tra due stadi
di un amplificatore



Come terzo esempio, si consideri la misura della tensione fra linee da 13.2 kV. Ovviamente, non è affatto sicuro collegare direttamente un voltmetro a delle linee con tensione così elevata. Si può allora utilizzare un trasformatore per isolare elettricamente

⁴ Per maggiori informazioni sui diversi tipi di trasformatori, un buon testo è W. M. Flanagan, *Handbook of Transformer Design and Applications*, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill, 1993).

te la tensione di linea dal voltmetro e ridurre la tensione fino ad un livello tale da garantire la sicurezza di chi effettua la misura, come mostrato in Figura 13.61. Dopo che il voltmetro ha misurato la tensione del secondario, mediante il rapporto spire è possibile risalire alla tensione sul lato primario.

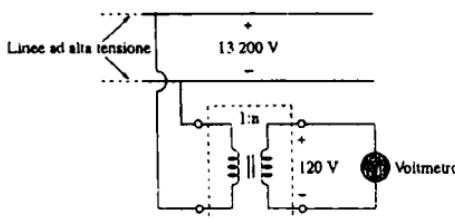
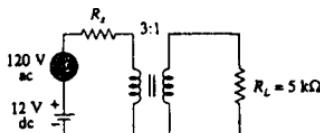


Figura 13.61
Trasformatore per isolare un voltmetro dalla linea ad alta tensione.

Esempio 13.15

Determinare la tensione sul carico in Figura 13.62.



Soluzione: Si può applicare il principio di sovrapposizione per ottenere la tensione sul carico. Si pone $v_L = v_{L1} + v_{L2}$, dove v_{L1} è dovuta al solo generatore in continua e v_{L2} è dovuta al generatore AC. Si considerano i due generatori separatamente, come mostrato in Figura 13.63. La tensione di carico dovuta al generatore costante è nulla, perché è necessaria una tensione variabile nel tempo nel circuito primario per indurre una tensione nel circuito secondario. Perciò, $v_{L1} = 0$. Per il generatore AC,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{120} = \frac{1}{3} \quad \text{da cui} \quad V_2 = \frac{120}{3} = 40 \text{ V}$$

Quindi, $V_{L2} = 40 \text{ V AC}$ o anche $v_{L2} = 40 \cos \omega t$; cioè, soltanto la tensione AC viene trasferita al carico dal trasformatore. Questo esempio mostra come il trasformatore fornisca isolamento nei confronti delle tensioni costanti.

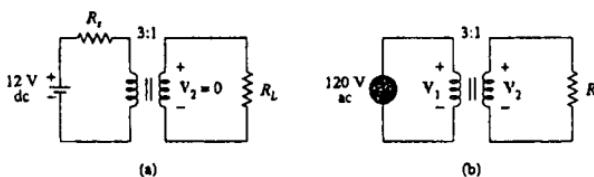


Figura 13.63
Per l'Esempio 13.15:
(a) generatore costante,
(b) generatore AC.

■ **Esercizio 13.15** Si faccia riferimento alla Figura 13.61. Calcolare il rapporto spire necessario a ridurre la tensione di linea di 13.2 kV ad un più sicuro valore di 120 V.

Risposta 110.

13.9.2 Trasformatore come dispositivo di adattamento

Come si ricorderà, per avere il massimo trasferimento di potenza, il resistore di carico R_L deve essere adattato alla resistenza del generatore R_s . In molti casi, le due resistenze non sono adattate, hanno valori fissi e non possono essere modificate. Può allora essere utilizzato un trasformatore con nucleo in ferro per adattare la resistenza di carico alla resistenza del generatore, operazione detta *adattamento delle impedenze*. Ad esempio, per collegare un altoparlante ad un amplificatore audio di potenza è necessario un trasformatore, perché la resistenza dell'altoparlante è di qualche ohm mentre la resistenza interna dell'amplificatore è di qualche migliaio di ohm.

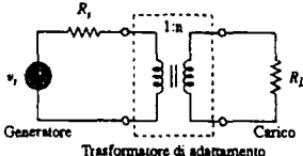
Si consideri il circuito mostrato in Figura 13.64. Si ricordi dalla (13.60) che il trasformatore ideale riflette il suo carico nel primario con un fattore di scala pari a n^2 . Per adattare questo carico riflesso R_L/n^2 alla resistenza interna del generatore R_g , si fa in modo che essi risultino uguali,

$$R_g = \frac{R_L}{n^2} \quad (13.73)$$

La (13.73) può essere soddisfatta mediante una scelta appropriata del rapporto spire n . Dalla (13.73), si vede che è necessario un trasformatore riduttore ($n < 1$) come dispositivo di adattamento quando $R_g > R_L$, e un trasformatore elevatore ($n > 1$) quando $R_g < R_L$.

Figura 13.64

Trasformatore usato come dispositivo di adattamento

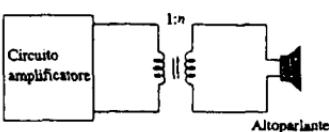


Esempio 13.16

Il trasformatore ideale in Figura 13.65 viene utilizzato per adattare il circuito amplificatore all'altoparlante, in modo da ottenere il massimo trasferimento di potenza. L'impedenza di Thevenin (o di uscita) dell'amplificatore è 192Ω , e l'impedenza interna dell'altoparlante 12Ω . Determinare il rapporto spire del trasformatore.

Figura 13.65

Uso di un trasformatore ideale per adattare l'altoparlante all'amplificatore; per l'Esempio 13.16.



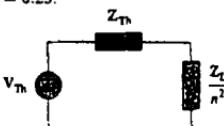
Soluzione: Si sostituisce il circuito amplificatore con l'equivalente Thevenin e si riflette l'impedenza $Z_L = 12 \Omega$ dell'altoparlante nel lato primario del trasformatore ideale. La Figura 13.66 mostra il risultato. Per avere il massimo trasferimento di potenza

$$Z_{Th} = \frac{Z_L}{n^2} \quad \text{cioè} \quad n^2 = \frac{Z_L}{Z_{Th}} = \frac{12}{192} = \frac{1}{16}$$

Perciò il rapporto spire è $n = 1/4 = 0.25$.

Figura 13.66

Circuito equivalente del circuito in Figura 13.65, per l'Esempio 13.16.



Mediante la formula $P = I^2 R$ è possibile mostrare che la potenza fornita all'altoparlante è effettivamente molto più grande di quanto sarebbe senza il trasformatore ideale. Senza il trasformatore ideale, l'amplificatore è collegato direttamente all'altoparlante. La potenza fornita all'altoparlante è allora

$$P_L = \left(\frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} \right)^2 Z_L = 288 V_{Th}^2 \mu W$$

Con il trasformatore, le correnti del primario e del secondario sono

$$I_p = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L/n^2}, \quad I_s = \frac{I_p}{n}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} P_L &= I_s^2 Z_L = \left(\frac{V_{Th}/n}{Z_{Th} + Z_L/n^2} \right)^2 Z_L \\ &= \left(\frac{nV_{Th}}{n^2 Z_{Th} + Z_L} \right)^2 Z_L = 1302 V_{Th}^2 \mu W \end{aligned}$$

che conferma quanto appena detto.

- Esercizio 13.16** Calcolare il rapporto spire del trasformatore ideale necessario per adattare un carico da 100Ω ad un generatore con impedenza interna di $2.5 \text{ k}\Omega$. Determinare la tensione di carico quando la tensione del generatore è 30 V.

Risposta 0.2, 3 V.

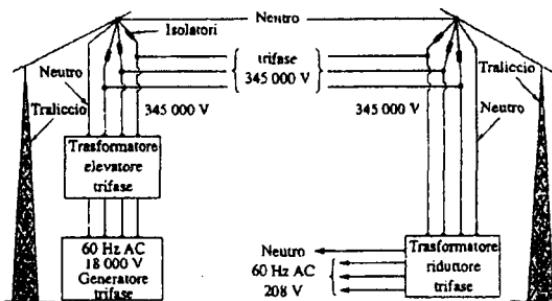


Figura 13.67

Schema di sistema per la distribuzione della potenza elettrica

(Source: A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd ed /Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975), p. 337)⁵

13.9.3 Distribuzione della potenza elettrica

Un sistema per la generazione e la distribuzione della potenza elettrica consiste essenzialmente di tre componenti: generazione, trasmissione e distribuzione. La compagnia elettrica locale mantiene in funzione un impianto che genera diverse centinaia di megavolt-ampere (MVA), ad una tensione tipica di 18 kV.

Come illustra la Figura 13.67, vengono poi utilizzati dei trasformatori elevatori trifase per alimentare le linee di trasmissione. Perché l'impiego dei trasformatori? Si supponga di voler trasmettere 100 000 VA su una distanza di 50 km. Poiché $S = IV$, l'uso di una tensione di linea di 1000 V implica che la linea di trasmissione deve trasportare 100 A, e ciò richiede una linea con conduttori di diametro elevato. Se invece si utilizza una tensione di linea di 10 000 V, la corrente è soltanto di 10 A.⁵

Una corrente più bassa riduce il diametro richiesto per i conduttori, il che costituisce già un risparmio, ma minimizza anche le perdite di tipo I^2R della linea di trasmissione. La minimizzazione delle perdite richiede quindi un trasformatore; senza il trasformatore, la maggior parte della potenza verrebbe dissipata dalle linee di trasmissione. La proprietà del trasformatore di elevare o ridurre la tensione, e quindi di distribuire la potenza in modo economico, è la ragione principale per cui praticamente tutta l'energia elettrica viene prodotta e trasmessa in forma alternata invece che continua. In definitiva, tanto più elevata è la tensione, tanto minori sono le perdite. La tensione più alta in uso oggi è di 1 MV; questo livello potrà anche aumentare se lo renderanno possibile ricerche ed esperimenti attualmente in corso.

Al di là della centrale di generazione, la potenza elettrica viene trasmessa per centinaia di chilometri attraverso una rete elettrica detta anche *griglia di potenza*. Essa è in forma trifase, e viene trasportata da linee di trasmissione sotsese fra tralicci in acciaio di varie forme e dimensioni. Le linee, costituite di condutore in alluminio e rinforzate in acciaio, hanno diametri tipici complessivi di circa 40 mm e sono in grado di trasportare correnti fino a 1380 A.

Alla sottostazione, vengono stavolta utilizzati trasformatori di distribuzione per ridurre la tensione. Il processo di riduzione viene di solito effettuato in due fasi. La potenza può poi essere distribuita nei vari punti di una località per mezzo di altri cavi sospesi o sotterranei.

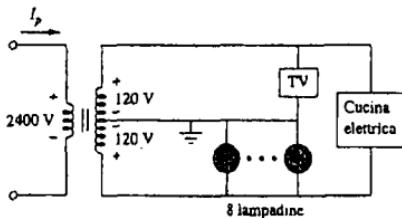
⁵ Ci si potrebbe chiedere come mai l'aumento della tensione non provochi l'aumento corrispondente della corrente, aumentando così le perdite di tipo I^2R . Si ricordi che $I = V_t/R$, dove V_t è la differenza di potenziale fra gli estremi di invio e ricezione della linea. La tensione che viene aumentata è quella di invio V , non V_t . Se il lato ricevente è V_R , allora $V_t = V - V_R$. Poiché V e V_R sono molto vicine, V_t rimane piccola anche quando V viene fatta aumentare.

Le sottostazioni distribuiscono la potenza ai vari clienti privati, commerciali e industriali. Al lato ricevente, ad una utenza domestica viene fornita una tensione di 120/240 V (220 V in Europa), mentre le utenze commerciali e industriali ricevono tensioni più alte quali 460/208 V (380 V in Europa). Le utenze domestiche vengono di solito alimentate da trasformatori di distribuzione montati sui pali della compagnie elettriche. Quando è necessaria una tensione continua, essa viene prodotta dalla corrente alternata tramite raddrizzatori elettronici.

Esempio 13.17

Un trasformatore di distribuzione è utilizzato per alimentare una abitazione come illustrato in Figura 13.68. Il carico consiste di otto lampadine da 100 W, una TV da 350 W, e una cucina da 15 kW. Se il lato secondario del trasformatore ha 72 spire, calcolare: (a) il numero di spire dell'avvolgimento primario, e (b) la corrente I_p nell'avvolgimento primario.

Figura 13.68
Per l'Esempio 13.17.



Soluzione: (a) La posizione dei puntini sugli avvolgimenti non è rilevante, perché si è interessati soltanto ai moduli delle variabili in gioco. Essendo

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s}$$

si ottiene

$$N_p = N_s \frac{V_p}{V_s} = 72 \frac{2400}{240} = 720 \text{ spire}$$

(b) La potenza totale assorbita dal carico è

$$S = 8 \times 100 + 350 + 15000 = 16.15 \text{ kW}$$

Ma $S = V_p I_p = V_s I_s$, così che

$$I_p = \frac{S}{V_p} = \frac{16150}{2400} = 6.729 \text{ A}$$

■ **Esercizio 13.17** Nell'Esempio 13.17, se le otto lampadine da 100 W vengono sostituite da dodici lampadine da 60 W e la cucina viene sostituita con un condizionatore d'aria da 4.5 kW, determinare: (a) la potenza totale fornita, (b) la corrente I_p nell'avvolgimento primario.

Risposta (a) 5.57 kW, (b) 2.321 A. ■

CASO PRATICO Autotrasformatore

1) Introduzione al Caso Pratico

Nelle applicazioni che prevedono la trasmissione dell'energia da un circuito ad un altro per mezzo di un trasformatore, è sempre importante che il sistema sia il più efficiente possibile. Per questo motivo, nei casi in cui il rendimento del processo non è importante, si cerca di mettersi in condizioni di massimo trasferimento di potenza media, regolando opportunamente i componenti del circuito che possono essere variati.

2) Descrizione e Specifiche

Nel circuito di Figura 13.69, l'impedenza Z_L sul secondario di un autotrasformatore viene regolata in modo che ad essa venga trasferita la massima potenza media. Determinare Z_L e la massima potenza media trasferita, sapendo che $N_1 = 600$ spire e $N_2 = 200$ spire.

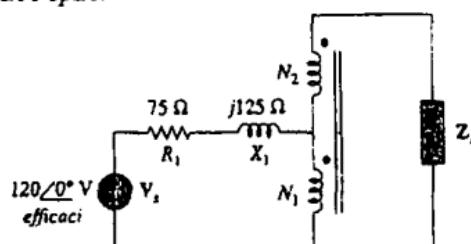


Figura 13.69

Per il Caso Pratico "Autotrasformatore".

3) Obiettivi

Si vuole trasferire la massima potenza media al carico Z_L , che è anche l'unica quantità variabile del problema. Si dovrà quindi determinare il valore di Z_L che rende massima la potenza media trasferita; per determinarlo, si deve trasformare il circuito nel circuito più semplice di Figura 11.7b, determinando l'equivalente Thevenin di ciò che è collegato all'impedenza Z_L . Si potrà poi porre Z_L uguale al coniugato dell'impedenza di Thevenin per essere nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza media.

4) Elaborazione e Calcoli

Occorre determinare l'equivalente di Thevenin tra i terminali del secondario dell'autotrasformatore.

Per cui si calcola prima la tensione V_{Th} a vuoto come mostrato in Figura 13.70.

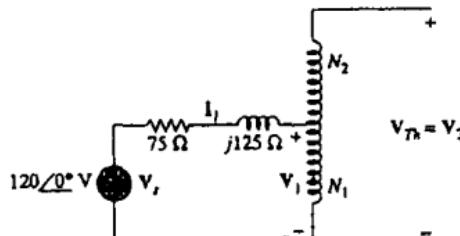


Figura 13.70

Per il calcolo di V_{Th} .

Si scrive la KVL al primario dell'autotrasformatore:

$$-V_s + (75 + j125)I_1 + V_1 = 0$$

La corrente sul secondario è nulla $I_2 = 0$, e quindi

$$I_1 = \frac{N_1 + N_2}{N_1} I_2 = 0$$

Allora si ha $V_1 = V_s$.

Applicando le formule di un trasformatore elevatore ideale si ha:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{600}{800} = \frac{3}{4}$$

... e quindi

$$V_2 = \frac{4}{3} V_1 = 160 \angle 0^\circ V = V_{Th} \quad (\text{efficaci})$$

Per determinare Z_{Th} si collega un generatore di tensione pari a $1 \angle 0^\circ V$ (efficaci) al secondario dell'autotrasformatore, come mostrato in Figura 13.71.

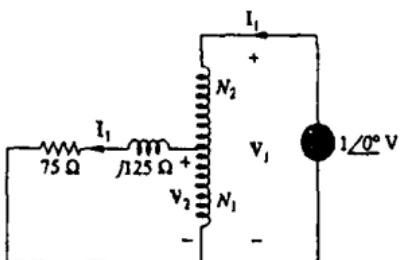


Figura 13.71
Per il calcolo di Z_{Th} .

Si ha un trasformatore riduttore ideale per cui valgono le seguenti formule:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} \quad e \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

Si ricava la tensione V_2 e la corrente I_2 :

$$V_2 = \frac{3}{4} V_1 = 0.75 \angle 0^\circ V$$

$$I_2 = \frac{V_2}{75 + j125} = \frac{0.75}{75 + j125} V_1$$

Infine si ottiene la corrente I_1 e l'impedenza Z_{Th} :

$$I_1 = I_2 \frac{3}{4} = \frac{0.75^2}{75 + j125} V_1$$

$$Z_{Th} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{75 + j125}{0.75^2} = 133.333 + j222.222 \Omega$$

L'impedenza del Z_L carico che permette di trasferire la massima potenza media è

$$Z_L = Z_{Th}^* = 133.333 - j222.222 \Omega$$

... e la massima potenza media trasferita

$$P_L = \frac{|V_{Th}|^2}{4R_L} = \frac{160^2}{4 \times 133.333} = 48 W$$

5) Analisi e Verifica

Si verificano i risultati applicando le KVL rispettivamente alle maglie del primario e del secondario dell'autotrasformatore come in Figura 4. L'obiettivo è di ricavare la corrente I_2 del secondario e quindi la potenza erogata al carico.

$$-V_s + (R_1 + jX_1)I_1 + V_1 = 0$$

$$-V_2 + Z_L I_2 = 0$$

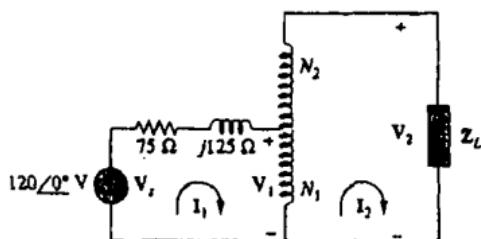


Figura 13.72
Verifica con l'analisi agli anelli.

Si ha un trasformatore elevatore ideale per cui si ottiene:

$$I_1 = \frac{N_1 + N_2}{N_1} I_2 = \frac{4}{3} I_2 \quad e \quad V_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} V_2 = \frac{3}{4} V_2$$

Sostituendo nella prima KVL si determina V_2 in funzione di I_2 :

$$-V_s + (R_1 + jX_1) \frac{4}{3} I_2 + \frac{3}{4} V_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{4}{3} V_s - \left(\frac{4}{3} \right)^2 (R_1 + jX_1) I_2$$

Infine si sostituisce nella seconda KVL

$$-\frac{4}{3} V_s + \left(\frac{4}{3} \right)^2 (R_1 + jX_1) I_2 + Z_L I_2 = 0$$

Inserendo i valori numerici si calcola la corrente I_2 sul secondario dell'autotrasformatore e quindi la potenza erogata al carico:

$$-\frac{4}{3} 120 + \left(\frac{4}{3} \right)^2 (75 + j125) I_2 + (133.333 + j222.222) I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{160 / 0^\circ}{266.667 / 0^\circ} = 0.6 / 0^\circ A$$

$$P_L = R_L I_2^2 = 133.333 \times 0.6^2 = 48 W$$

Si è quindi determinata la potenza trasferita al carico Z_L , che risulta anche essere la massima possibile.

SOMMARIO

- 1) Due bobine si dicono mutuamente accoppiate se il flusso magnetico ϕ prodotto da una bobina attraversa anche l'altra. La mutua induttanza tra due bobine è data da:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

dove k è il coefficiente di accoppiamento, con $0 \leq k \leq 1$.

- 2) Se v_1 e i_1 sono rispettivamente la tensione e la corrente della bobina 1, mentre v_2 e i_2 sono la tensione e la corrente della bobina 2, allora

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad e \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Quindi la tensione indotta in una bobina accoppiata si compone di una tensione di autoinduzione e di una tensione di mutua induzione.

- 3) La polarità della tensione di mutua induzione è indicata negli schemi circuituali dalla convenzione dei puntini.

- 4) L'energia immagazzinata in due bobine accoppiate è

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

- 5) Un trasformatore è un dispositivo a quattro terminali formato da due (o più), bobine magneticamente accoppiate. È utilizzato per modificare i valori di tensione, corrente o impedenza di un circuito.

- 6) Un trasformatore lineare è formato da bobine avvolte su un nucleo di materiale magnetico lineare. Nell'analisi dei circuiti con trasformatori lineari, esso può essere sostituito da reti equivalenti a T e a Π .
- 7) Un trasformatore ideale è un trasformatore senza perdite ($R_1 = R_2 = 0$), con coefficiente di accoppiamento unitario ($k = 1$), e induttanze infinite ($L_1, L_2, M \rightarrow \infty$).
- 8) Per un trasformatore ideale si ha

$$V_2 = nV_1; \quad I_2 = I_1/n; \quad S_1 = S_2; \quad Z_R = Z_L/n^2$$

dove $n = N_2/N_1$ è il rapporto spire. N_1 è il numero delle spire dell'avvolgimento primario e N_2 è il numero delle spire dell'avvolgimento secondario. Il trasformatore aumenta la tensione del primario quando $n > 1$, la diminuisce quando $n < 1$, mentre serve come dispositivo di isolamento quando $n = 1$.

- 9) Un autotrasformatore è un trasformatore con un solo avvolgimento per entrambi i circuiti del primario e del secondario.
- 10) PSpice è uno strumento utile per analizzare circuiti magneticamente accoppiati.
- 11) I trasformatori sono necessari in tutti gli stadi dei sistemi di distribuzione dell'energia elettrica. Le tensioni trifase possono essere aumentate o diminuite da trasformatori trifase.
- 12) Importanti utilizzi dei trasformatori nelle applicazioni elettroniche sono i dispositivi di isolamento elettrico e i dispositivi di adattamento delle impedanze.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 13.1 Con riferimento alle due bobine magneticamente accoppiate di Figura 13.73(a), la polarità della tensione indotta è:

(a) Positiva

(b) Negativa

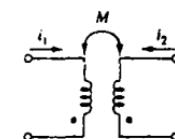
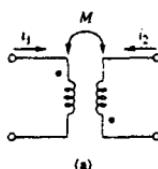


Figura 13.73 Per le domande di riepilogo 13.1 e 13.2.

- 13.2 Per le due bobine magneticamente accoppiate di Figura 13.73(b), la polarità della tensione indotta è:

(a) Positiva

(b) Negativa

- 13.3 Il coefficiente di accoppiamento di due bobine aventi $L_1 = 2 \text{ H}$, $L_2 = 8 \text{ H}$, $M = 3 \text{ H}$:

- (a) 0.1875
(c) 1.333
(b) 0.75
(d) 5.333

- 13.4 Un trasformatore viene usato per ridurre o elevare:
(a) tensioni costanti
(b) tensioni alternate
(c) tensioni costanti e alternate

- 13.5 Il trasformatore ideale in Figura 13.74(a) ha $N_2/N_1 = 10$. Il rapporto V_2/V_1 è:
(a) 10
(b) 0.1
(c) -0.1
(d) -10

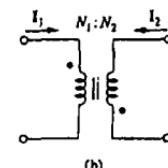
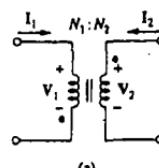
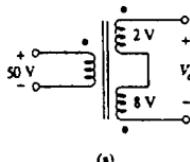


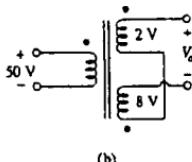
Figura 13.74 Per le domande di riepilogo 13.5 e 13.6.

- 13.6 Per il trasformatore ideale di Figura 13.74(b), $N_2/N_1 = 10$. Il rapporto I_2/I_1 è:
 (a) 10 (b) 0.1 (c) -0.1 (d) -10

- 13.7 Un trasformatore a tre avvolgimenti è collegato come mostrato in Figura 13.75(a). Il valore della tensione di uscita V_o è:
 (a) 10 (b) 6 (c) -6 (d) -10



(a)



(b)

Figura 13.75 Per le domande di riepilogo 13.7 e 13.8.

- 13.8 Se il trasformatore a tre avvolgimenti viene collegato

come in Figura 13.75(b), il valore della tensione di uscita V_o è:

- (a) 10 (b) 6 (c) -6 (d) -10

- 13.9 Per poter adattare un generatore con impedenza interna di 500Ω ad un carico da 15Ω , è necessario:

- (a) un trasformatore elevatore lineare
 (b) un trasformatore riduttore lineare
 (c) un trasformatore elevatore ideale
 (d) un trasformatore riduttore ideale
 (e) un autotrasformatore

- 13.10 Quale di questi trasformatori può essere utilizzato come dispositivo di isolamento?

- (a) trasformatore lineare (b) trasformatore ideale
 (c) autotrasformatore (d) tutti i precedenti

Risposte: 13.1b, 13.2a, 13.3b, 13.4b, 13.5d, 13.6b, 13.7c, 13.8a, 13.9d, 13.10b.

PROBLEMI

Paragrafo 13.2 Mutua induttanza

- 13.1 Calcolare l'induttanza totale per le tre bobine accoppiate di Figura 13.76.

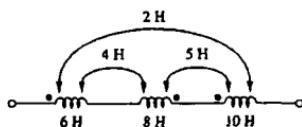


Figura 13.76 Per il Problema 13.1.

- 13.2 Determinare l'induttanza dei tre induttori collegati in serie di Figura 13.77.

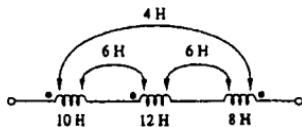


Figura 13.77 Per il Problema 13.2.

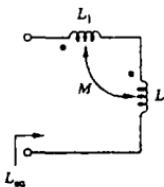
- 13.3 Due bobine collegate in serie in maniera concorde hanno induttanza totale di 250 mH . Quando vengono collegate in serie ma in opposizione, le bobine hanno una induttanza totale di 150 mH . Se l'induttanza di una bobina (L_1) è pari a tre volte quella dell'altra, determinare L_1 , L_2 e M . Quanto vale il coefficiente di accoppiamento?

- 13.4 (a) Per le bobine accoppiate in Figura 13.78(a), mostrare che

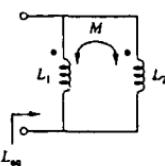
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

- (b) Per le bobine accoppiate in Figura 13.78(b), mostrare che

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2 - 2M^2}$$



(a)



(b)

Figura 13.78 Per il Problema 13.4.

- 13.5 Due bobine mutuamente accoppiate hanno $L_1 = 25 \text{ mH}$, $L_2 = 60 \text{ mH}$ e $k = 0.5$. Calcolare l'induttanza equivalente massima possibile se:

- (a) le due bobine sono collegate in serie
 (b) le bobine sono collegate in parallelo

- 13.6 La bobina in Figura 13.79 ha $L_1 = 40 \text{ mH}$, $L_2 = 5 \text{ mH}$ e coefficiente di accoppiamento $k = 0.6$. Calcolare $i_1(t)$ e $v_2(t)$, se $v_1(t) = 10 \cos(\omega t) \text{ V}$ e $i_2(t) = 2 \sin(\omega t) \text{ A}$, $\omega = 2000 \text{ rad/s}$.

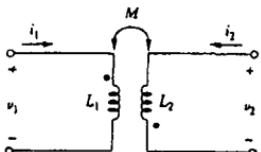


Figura 13.79 Per il Problema 13.6.

13.7 Nel circuito di Figura 13.80 calcolare V_o .

ps ML

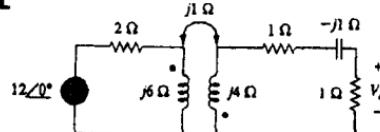


Figura 13.80 Per il Problema 13.7.

13.8 Calcolare $v(t)$ per il circuito di Figura 13.81.

ps ML

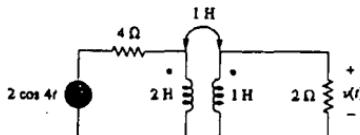


Figura 13.81 Per il Problema 13.8.

13.9 Determinare V_x nella rete mostrata in Figura 13.82.

ps ML

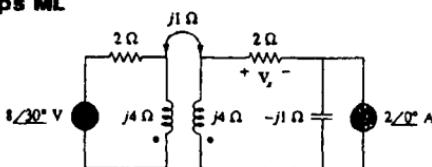


Figura 13.82 Per il Problema 13.9.

13.10 Calcolare v_0 per il circuito di Figura 13.83.

ps ML

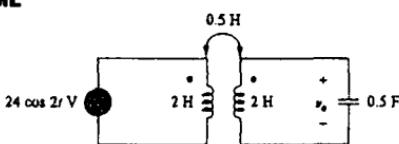


Figura 13.83 Per il Problema 13.10.

13.11 Usare l'analisi agli anelli per determinare i_r nel circuito di Figura 13.84, dove $i_r = 4 \cos(600t)$ A e $v_r = 110 \cos(600t + 30^\circ)$ V.

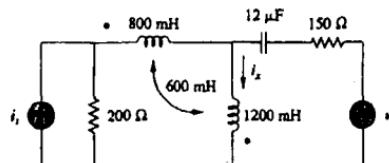


Figura 13.84 Per il Problema 13.11.

13.12 Determinare l'induttanza equivalente L_{eq} nel circuito di Figura 13.85.

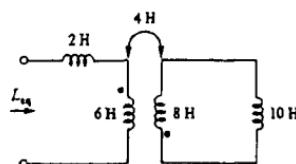


Figura 13.85 Per il Problema 13.12.

13.13 Per il circuito di Figura 13.86, determinare l'impedenza vista dal generatore.

ps ML

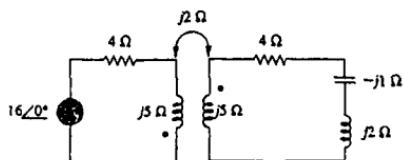


Figura 13.86 Per il Problema 13.13.

13.14 Determinare l'equivalente Thevenin per il circuito in Figura 13.87 ai terminali $a-b$.

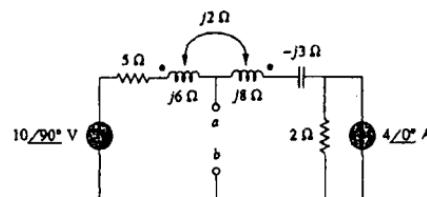


Figura 13.87 Per il Problema 13.14.

13.15 Determinare l'equivalente Norton per il circuito in Figura 13.88 ai terminali $a-b$.

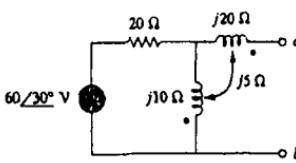


Figura 13.88 Per il Problema 13.15.

- 13.16 Ricavare l'equivalente Norton ai terminali $a-b$ del circuito in Figura 13.89.

ps ML

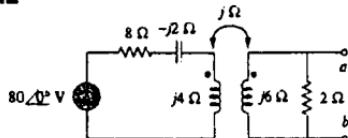


Figura 13.89 Per il Problema 13.16.

- 13.17 Nel circuito di Figura 13.90, Z_L è un induttore da 15 mH che ha un'impedenza di $j4\Omega$. Calcolare Z_{in} se $k = 0.6$.

ML

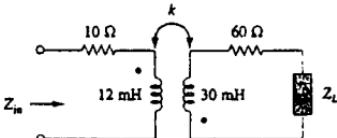


Figura 13.90 Per il Problema 13.17.

- 13.18 Determinare l'equivalente Thevenin alla sinistra del canale Z nel circuito di Figura 13.91.

ps ML

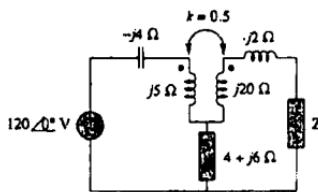


Figura 13.91 Per il Problema 13.18.

- 13.19 Determinare un circuito equivalente a T che possa essere utilizzato per sostituire il trasformatore in Figura 13.92.

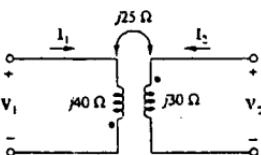


Figura 13.92 Per il Problema 13.19.

Paragrafo 13.3

Energia in un circuito con accoppiamento

- 13.20 Determinare le correnti I_1 , I_2 e I_3 nel circuito di Figura 13.93. Calcolare l'energia immagazzinata nelle bobine accoppiate per $t = 2\text{ ms}$, supponendo $\omega = 1000\text{ rad/s}$.

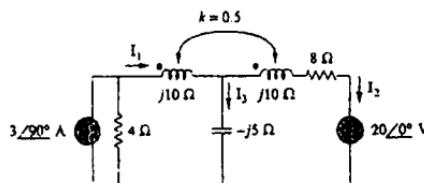


Figura 13.93 Per il Problema 13.20.

- 13.21 Determinare I_1 e I_2 nel circuito di Figura 13.94. Calcolare la potenza assorbita dal resistore da 4Ω .

ps ML

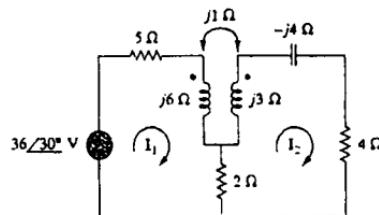


Figura 13.94 Per il Problema 13.21.

- *13.22 Determinare la corrente I_o nel circuito di Figura 13.95.

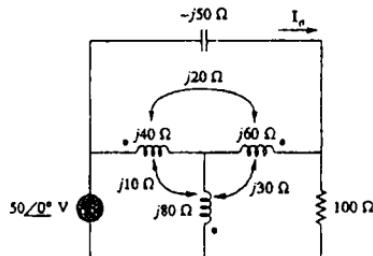


Figura 13.95 Per il Problema 13.22.

- 13.23 Se $M = 0.2\text{ H}$ e $v_1 = 12 \cos 10t\text{ V}$ nel circuito di Figura 13.96, determinare i_1 e i_2 . Calcolare l'energia immagazzinata nelle bobine accoppiate per $t = 15\text{ ms}$.

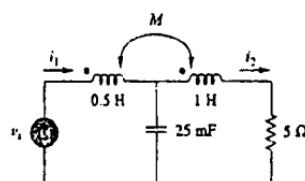


Figura 13.96 Per il Problema 13.23.

* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

13.24 Nel circuito di Figura 13.97.

- PS ML**
- determinare il coefficiente di accoppiamento,
 - calcolare v_o ,
 - determinare l'energia immagazzinata negli induction accoppiati per $t = 2 \text{ s}$.

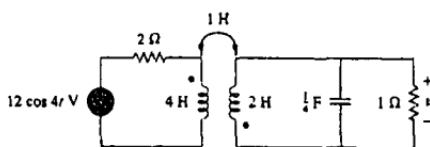


Figura 13.97 Per il Problema 13.24.

13.25 Nella rete di Figura 13.98, determinare Z_{ab} e I_o .

PS ML

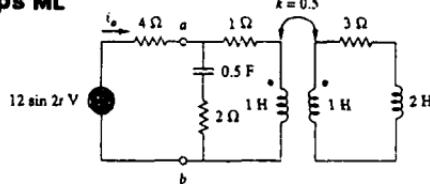


Figura 13.98 Per il Problema 13.25.

13.26 Determinare I_o nel circuito di Figura 13.99. Invertire la posizione del punto nell'avvolgimento di destra e ricalcolare I_o .

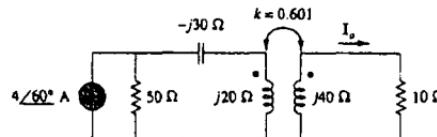


Figura 13.99 Per il Problema 13.26.

13.27 Calcolare la potenza media dissipata nel resistore da 50 Ω nel circuito di Figura 13.100.

PS ML

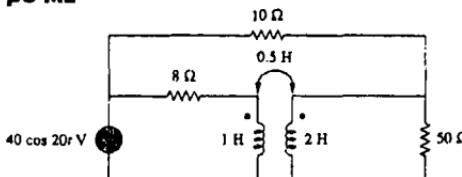


Figura 13.100 Per il Problema 13.27.

*13.28 Nel circuito di Figura 13.101, determinare il valore di X che produce il massimo trasferimento di potenza al canale da 20 Ω.

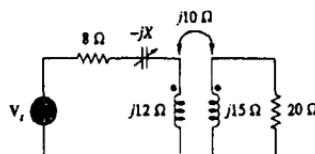


Figura 13.101 Per il Problema 13.28.

Paragrafo 13.4 Trasformatori lineari

13.29 Nel circuito di Figura 13.102, determinare il valore del coefficiente di accoppiamento k che fa dissipare 320 W al resistore da 10 Ω. Per questo valore di k , determinare l'energia immagazzinata nelle bobine accoppiate per $t = 1.5 \text{ s}$.

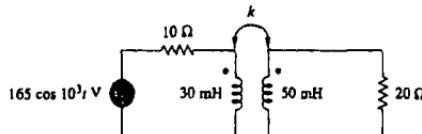


Figura 13.102 Per il Problema 13.29.

13.30 (a) Determinare l'impedenza di ingresso del circuito in Figura 13.103 usando il concetto di impedenza riflessa.

(b) Calcolare l'impedenza di ingresso sostituendo il trasformatore lineare con il suo equivalente a T.

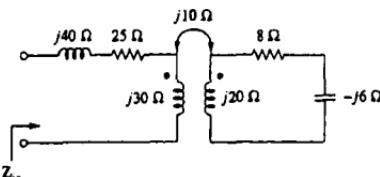


Figura 13.103 Per il Problema 13.30.

13.31 Per il circuito in Figura 13.104, determinare:

- il circuito equivalente a T,
- il circuito equivalente a Π.

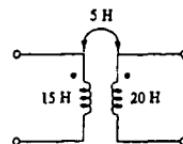


Figura 13.104 Per il Problema 13.31.

*13.32 Due trasformatori lineari sono posti in cascata come mostrato in Figura 13.105. Mostrare che

$$\omega^2 R(L_a^2 + L_a L_b - M_b^2)$$

$$Z_m = \frac{-\omega^2 (L_a^2 L_b + L_a L_b^2 - L_a M_b^2 - L_b M_a^2)}{\omega^2 (L_a L_b + L_a^2 - M_b^2) - j\omega R(L_a + L_b)}$$

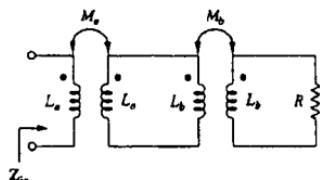


Figura 13.105 Per il Problema 13.32.

- 13.33** Determinare l'impedenza di ingresso del circuito con trasformatore con nucleo in aria di Figura 13.106.
ML

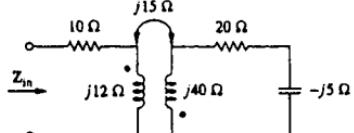


Figura 13.106 Per il Problema 13.33.

- 13.34** Determinare l'impedenza di ingresso del circuito in Figura 13.107.
ML

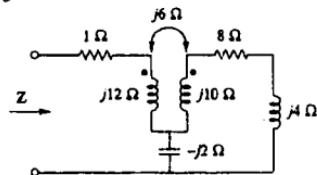


Figura 13.107 Per il Problema 13.34.

- 13.35** Calcolare le correnti I_1 , I_2 e I_3 nel circuito di Figura 13.108.
PS ML

Paragrafo 13.5 Trasformatori ideal

- 13.36** Come si è fatto in Figura 13.32, ricavare la relazione fra le tensioni e le correnti ai terminali per ciascuno dei trasformatori ideali in Figura 13.109.

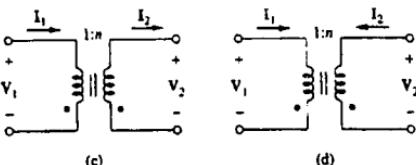
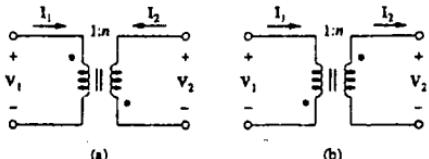


Figura 13.109 Per il Problema 13.36.

- 13.37** Un trasformatore elevatore ideale da 480/2400 V eff fornisce 50 kW ad un carico resistivo. Calcolare:

- il rapporto spire
- la corrente nel primario
- la corrente nel secondario

- 13.38** Un trasformatore da 4 kVA, 2300/230 V eff ha una impedenza equivalente $2 \angle 10^\circ \Omega$ sul lato primario. Se il trasformatore è collegato ad un carico con fattore di potenza 0,6 capacitivo, calcolare l'impedenza di ingresso.

- 13.39** Un trasformatore da 1200/240 V efficaci ha impedenza $60 \angle -30^\circ \Omega$ sul lato alta tensione. Se il trasformatore è collegato ad un carico da $0,8 \angle 10^\circ \Omega$ sul lato bassa tensione, determinare le correnti nel primario e nel secondario quando il trasformatore è alimentato a 1200 V efficaci.

- 13.40** Il primario di un trasformatore ideale con un rapporto spire pari a 5 è collegato a un generatore con parametri di Thevenin $V_{Th} = 10 \cos(200t)$ V e $R_{Th} = 100\Omega$. Calcolare la potenza media dissipata da un carico da 200Ω collegato all'avvolgimento secondario.

- 13.41** Determinare I_1 e I_2 nel circuito di Figura 13.110.

PS ML

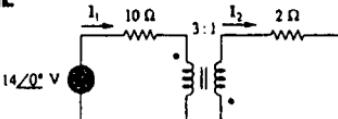


Figura 13.110 Per il Problema 13.41.

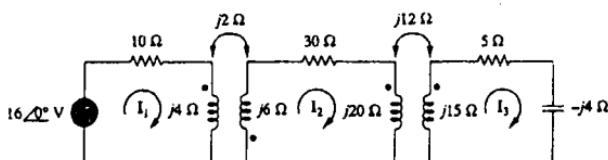


Figura 13.108 Per il Problema 13.35.

- 13.42 Per il circuito di Figura 13.111, determinare la potenza assorbita dal resistore da 2Ω . Si supponga che 80 V sia un valore efficace.

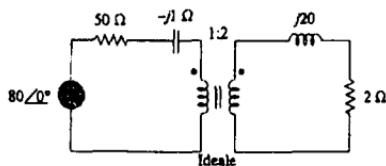


Figura 13.111 Per il Problema 13.42.

- 13.43 Calcolare V_1 e V_2 nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.112.

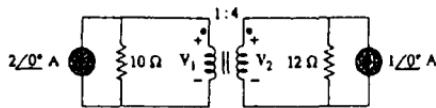
ps ML

Figura 13.112 Per il Problema 13.43.

- *13.44 Nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.113, determinare $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

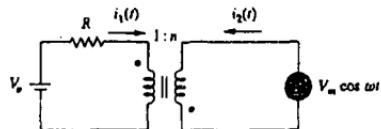


Figura 13.113 Per il Problema 13.44.

- 13.45 Nel circuito di Figura 13.114, determinare il valore della potenza media assorbita dal resistore da 8Ω .

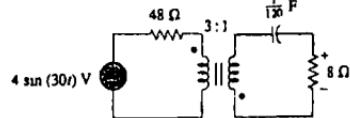
ps ML

Figura 13.114 Per il Problema 13.45.

- 13.46 (a) Determinare I_1 e I_2 nel circuito di Figura 13.115.
ps ML (b) Invertire la posizione del punto in uno degli avvolgimenti. Ricalcolare I_1 e I_2 .

- 13.47 Calcolare $v(t)$ per il circuito di Figura 13.116.

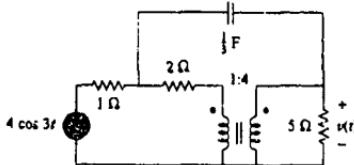
ps ML

Figura 13.116 Per il Problema 13.47.

- 13.48 Determinare I_1 nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.117.

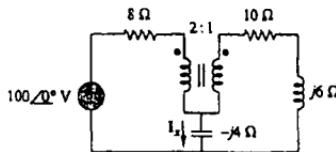
ps ML

Figura 13.117 Per il Problema 13.48.

- 13.49 Determinare la corrente i_2 nel circuito con trasformatore ideale mostrato in Figura 13.118.

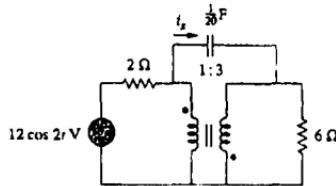
ps ML

Figura 13.118 Per il Problema 13.49.

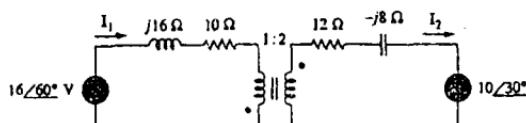


Figura 13.115 Per il Problema 13.46.

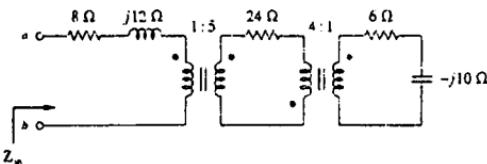


Figura 13.119 Per il Problema 13.50.

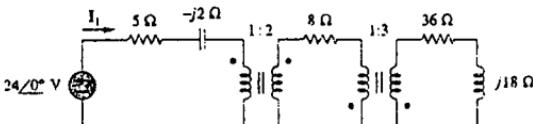


Figura 13.120 Per il Problema 13.51.

13.50 Calcolare l'impedenza di ingresso per la rete in

Figura 13.119.

ML

13.51 Applicando il concetto di impedenza riflessa, calcolare

l'impedenza di ingresso e la corrente I_1

in Figura 13.120.

13.52 Nel circuito di Figura 13.121, determinare il rapporto

spire n che provoca il massimo trasferimento di potenza

media al carico, e la massima potenza media trasferita.

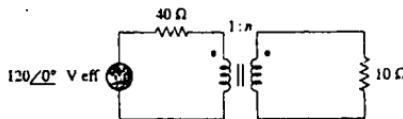


Figura 13.121 Per il Problema 13.52.

13.53 Si faccia riferimento alla rete in Figura 13.122.

(a) Determinare n in modo che venga fornita la massima potenza al carico da 200Ω .

(b) Determinare la potenza nel carico da 200Ω se

$$n = 10.$$

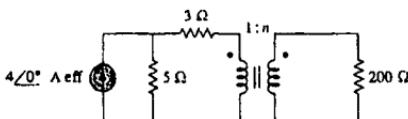


Figura 13.122 Per il Problema 13.53

13.54 Un trasformatore viene utilizzato per accoppiare un

amplificatore ad un carico da 8Ω come mostrato in

Figura 13.123. L'equivalente Thevenin dell'amplificatore

è: $V_{TH} = 10 \text{ V}$, $Z_{TH} = 128 \Omega$.

(a) Determinare il rapporto spire che realizza il massimo

trasferimento di potenza.

(b) Determinare le correnti nel primario e nel secondario.

(c) Calcolare le tensioni del primario e del secondario.

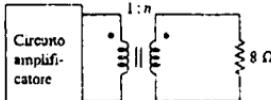


Figura 13.123 Per il Problema 13.54.

13.55 Per il circuito di Figura 13.124, calcolare la resistenza

equivalente.

ML

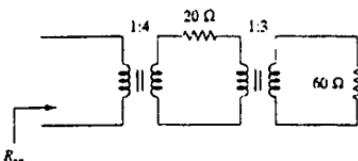


Figura 13.124 Per il Problema 13.55.

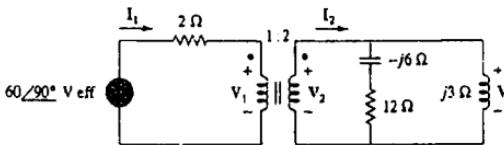


Figura 13.126 Per il Problema 13.57.

13.56 Determinare la potenza assorbita dal resistore da $10\ \Omega$ nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.125.

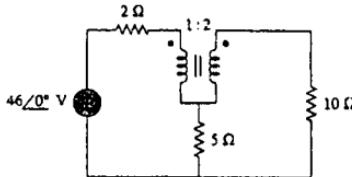


Figura 13.125 Per il Problema 13.56.

13.57 Per il circuito con trasformatore ideale di Figura 13.126, determinare:

- ps ML** (a) I_1 e I_2 , (b) V_1 , V_2 e V_0 ,
(c) la potenza complessa erogata dal generatore.

13.58 Determinare la potenza media assorbita da ciascun resistore nel circuito di Figura 13.127.

ps ML

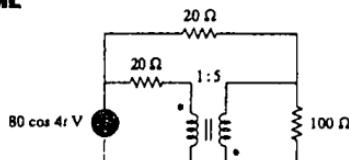


Figura 13.127 Per il Problema 13.58.

13.59 Nel circuito di Figura 13.128, supponere $v_1 = 40 \cos(1000t)$ V. Calcolare la potenza media dissipata da ciascun resistore.

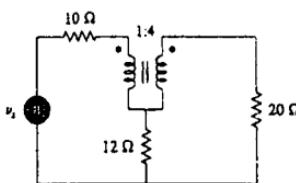


Figura 13.128 Per il Problema 13.59.

13.60 Si faccia riferimento al circuito in Figura 13.129.

- ps ML** (a) Determinare le correnti I_1 , I_2 e I_3 .
(b) Determinare la potenza dissipata nel resistore da $40\ \Omega$.

13.61 Nel circuito di Figura 13.130, determinare I_1 , I_2 e V_0 .

ps ML

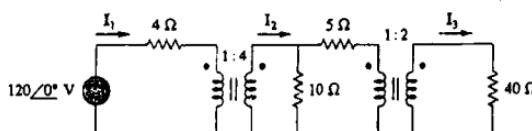


Figura 13.129 Per il Problema 13.60.

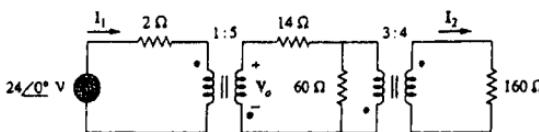


Figura 13.130 Per il Problema 13.61.

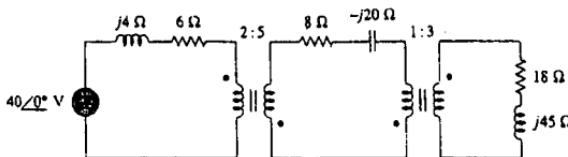


Figura 13.131 Per il Problema 13.62.

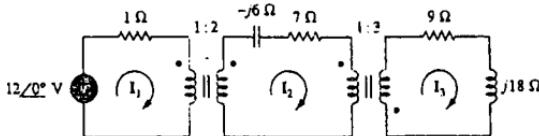


Figura 13.132 Per il Problema 13.63.

13.62 Per la rete in Figura 13.131, determinare

- PS ML** (a) la potenza complessa erogata dal generatore,
 (b) la potenza media fornita al resistore da 18Ω .

13.63 Determinare le correnti di anello nel circuito di

Figura 13.132.

ML

13.64 Per il circuito di Figura 13.133, calcolare il rapporto

- PS ML** spire in modo che la potenza dissipata dal resistore da $30 \text{ k}\Omega$ sia la massima possibile.

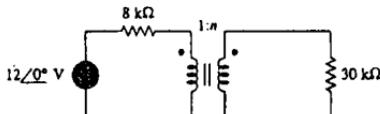


Figura 13.133 Per il Problema 13.64.

*13.65 Calcolare la potenza media dissipata dal resistore da 20Ω in Figura 13.134.

- PS ML**

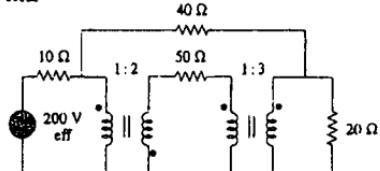


Figura 13.134 Per il Problema 13.65.

Paragrafo 13.6 Autotrasformatori ideali

- 13.66 Un autotrasformatore ideale elevator con rapporto spire 1:4 ha il secondario collegato ad un carico da 120Ω ed il primario ad un generatore da 420 V . Determinare la corrente nel primario.

13.67 Un autotrasformatore con una presa al 40 percento di tensione è alimentato da un generatore da $400 \text{ V}, 60 \text{ Hz}$ ed è usato come riduttore. Un carico da 5 kVA con fattore di potenza unitario è collegato ai terminali del secondario. Determinare:

- (a) la tensione del secondario
 (b) la corrente del secondario
 (c) la corrente del primario

13.68 Nell'autotrasformatore ideale di Figura 13.135, calcolare I_1 , I_2 e I_a . Determinare la potenza media fornita al carico.

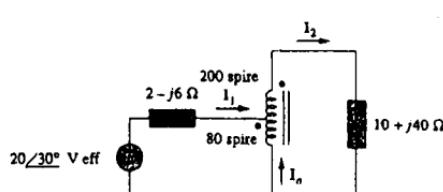


Figura 13.135 Per il Problema 13.68

13.69 Nel circuito con autotrasformatore ideale mostrato in Figura 13.136, determinare la potenza media fornita al carico.

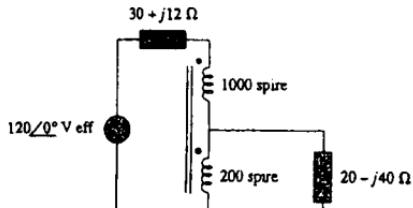


Figura 13.136 Per il Problema 13.69.

- 13.70 Nel circuito con autotrasformatore di Figura 13.137, mostrare che

$$Z_m = \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

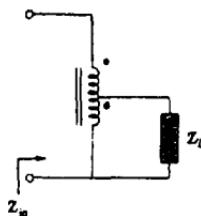


Figura 13.137 Per il Problema 13.70.

Paragrafo 13.7 Trasformatori trifase

- 13.71 Per rispondere ad una emergenza, tre trasformatori monofase da 12470/7200 V eff vengono collegati in configurazione triangolo-stella per formare un trasformatore trifase che viene alimentato da una linea di trasmissione a 12470 V. Se il trasformatore fornisce 60 MVA ad un certo carico, determinare:

- (a) il rapporto spire per ciascun trasformatore,
- (b) le correnti negli avvolgimenti primario e secondario del trasformatore,
- (c) le correnti entranti ed uscenti dalla linea di trasmissione.

- 13.72 La Figura 13.138 mostra un trasformatore trifase che alimenta un carico collegato a stella.

- ML**
- (a) Identificare il tipo di collegamento del trasformatore
 - (b) Calcolare le correnti I_1 e I_2 .
 - (c) Determinare la potenza media assorbita dal carico.

- 13.73 Si consideri il trasformatore trifase mostrato in Figura 13.139. Il primario è alimentato da un generatore trifase con tensione di linea 2.4 kV eff, mentre il secondario alimenta un carico trifase bilanciato da 120 kW con pf di 0.8. Determinare:

- (a) i tipi dei collegamenti dei trasformatore,
- (b) i valori di I_{LP} e I_{PS} ,
- (c) i valori di I_{LP} e I_{PP} ,
- (d) la potenza in kVA di ciascuna fase del trasformatore.

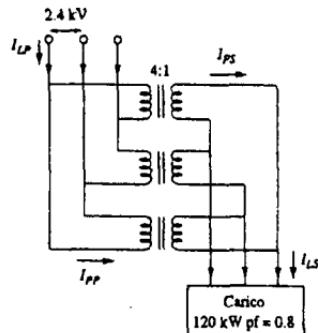


Figura 13.139 Per il Problema 13.73.

- 13.74 Un banco di trasformatori trifase bilanciati in configurazione triangolo-stella, mostrato in Figura 13.140, è usato per ridurre le tensioni di linea da 4500 V eff a 900 V eff. Se il banco di trasformatori alimenta un carico di 120 kVA, determinare:
- (a) il rapporto spire per il trasformatore,
 - (b) le correnti di linea sui lati primario e secondario.

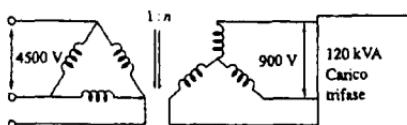


Figura 13.140 Per il Problema 13.74.

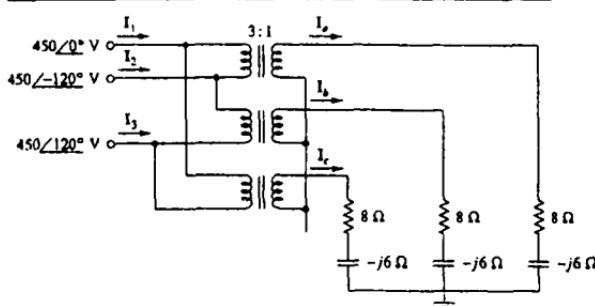


Figura 13.138 Per il Problema 13.72.

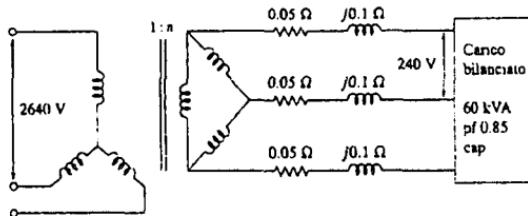


Figura 13.141 Per il Problema 13.75.

- 13.75** Un trasformatore trifase stella-triangolo è collegato ad un carico di 60 kVA con fattore di potenza 0.85 (capacitivo) tramite delle linee la cui impedenza è $0.05 + j0.1 \Omega$ per fase, come mostrato in Figura 13.141.

Determinare il modulo delle seguenti quantità:

- la corrente di linea al cancro,
- la tensione di linea sul lato secondario del trasformatore,
- la corrente di linea sul lato primario del trasformatore.

- 13.76** Il sistema trifase di una cittadina distribuisce la potenza elettrica con una tensione linea di 13.2 kV. Un trasformatore di traliccio, collegato ad un singolo filo e a terra, riduce l'alta tensione fino a 120 V eff., ed alimenta una abitazione come mostrato in Figura 13.142.

- Calcolare il rapporto spire del trasformatore di traliccio.
- Determinare quanta corrente assorbe dalla linea ad alta tensione una lampadina da 100 W collegata alla linea da 120 V.

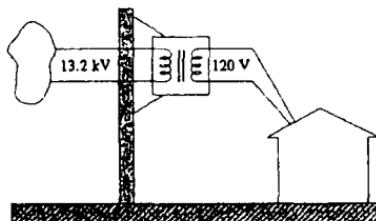


Figura 13.142 Per il Problema 13.76.

Paragrafo 13.8 **Ausilsi con PSpice di circuiti magneticamente accoppiati**

- 13.77** Usare PSpice per determinare le correnti di anello nel circuito di Figura 13.143. Supporre $\omega = 1$ rad/s.

PS

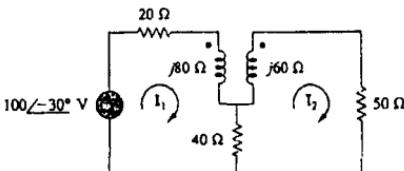


Figura 13.143 Per il Problema 13.77.

- 13.78** Utilizzare PSpice per calcolare I_1 , I_2 e I_3 nel circuito di Figura 13.144.

PS

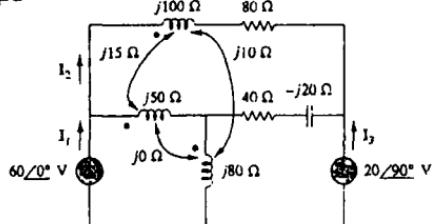


Figura 13.144 Per il Problema 13.78.

- 13.79** Ripetere il Problema 13.22 usando PSpice.

PS

- 13.80** Utilizzare PSpice per calcolare I_1 , I_2 e I_3 nel circuito di Figura 13.145.

PS

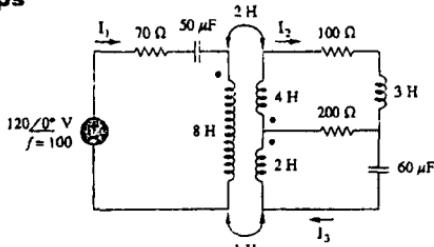


Figura 13.145 Per il Problema 13.80.

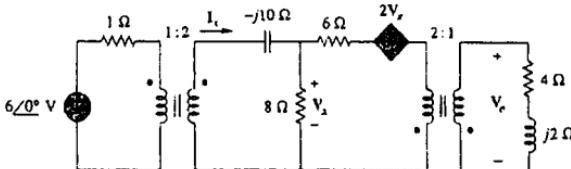


Figura 13.147 Per il Problema 13.82.

- 13.81** Utilizzare PSpice per calcolare V_1 , V_2 e I_o nel circuito di Figura 13.146.

ps

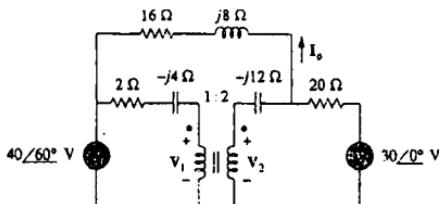


Figura 13.146 Per il Problema 13.81.

- 13.82** Determinare I_o e V_r nel circuito di Figura 13.147 usando PSpice.

- 13.83** Determinare I_1 , I_2 e I_3 nel circuito con trasformatore ideale di Figura 13.148 usando PSpice.

ps

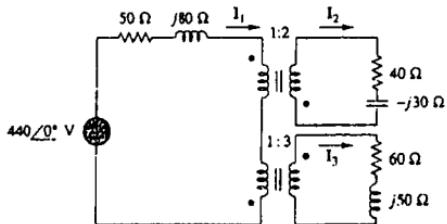


Figura 13.148 Per il Problema 13.83.

Paragrafo 13.9 Applicazioni

- 13.84** Un circuito amplificatore stereo con impedenza di uscita $7.2\text{ k}\Omega$ deve essere accoppiato ad un altoparlante, avente impedenza di ingresso $8\text{ }\Omega$, per mezzo di un trasformatore il cui primario ha 3000 spire. Calcolare il numero di spire necessarie nel secondario.

- 13.85** Un trasformatore con 2400 spire nel primario e 48 spire nel secondario viene utilizzato come dispositivo di accoppiamento di impedenze. Quale è il valore riflesso di un carico da $3\text{ }\Omega$ collegato al secondario?

- 13.86** Un ricevitore radio ha una resistenza di ingresso di $300\text{ }\Omega$. Quando è collegato direttamente ad un sistema di antenna con impedenza caratteristica di $75\text{ }\Omega$, si ha un disaccoppiamento di impedenze. Inserendo un trasformatore di accoppiamento delle impedenze prima del ricevitore, si può ottenere la massima potenza. Calcolare il rapporto spire necessario.

- 13.87** Un trasformatore riduttore di potenza con rapporto spire $n = 0.1$ fornisce 12.6 V eff ad un carico resistivo. Se la corrente nel primario è 2.5 A eff , quanta potenza viene trasferita al carico?

- 13.88** Un trasformatore di potenza da $240/120\text{ V eff}$ ha potenza nominale 10 kVA . Determinare il rapporto spire, la corrente nel primario e quella nel secondario.

- 13.89** Un trasformatore da 4 kVA , $2400/240\text{ V eff}$ ha 250 spire sul lato primario. Calcolare:
- il rapporto spire,
 - il numero di spire sul lato secondario,
 - le correnti nel primario e nel secondario.

- 13.90** Un trasformatore di distribuzione da $25000/240\text{ V eff}$ ha una corrente nominale del primario di 75 A .
- Determinare la potenza nominale del trasformatore in kVA.
 - Calcolare la corrente del secondario.

- 13.91** Una linea di trasmissione a 4800 V eff alimenta un trasformatore di distribuzione con 1200 spire nel primario e 28 spire nel secondario. Quando viene collegato un carico da $10\text{ }\Omega$ al secondario, determinare:
- la tensione del secondario,
 - le correnti nel primario e nel secondario,
 - la potenza fornita al carico.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

13.92 In molti apparati elettronici quali PC, VCR, ecc., viene spesso utilizzato un trasformatore a quattro avvolgimenti (Figura 13.149) se l'apparecchiatura deve funzionare con tensioni di alimentazione sia di 110 V che di 220 V. Ciò rende l'apparecchio adatto all'impiego sia localmente che all'estero. Determinare quali collegamenti sono necessari per fornire:

- (a) una uscita a 12 V con un ingresso a 110 V,
- (b) una uscita a 50 V con un ingresso a 220 V.

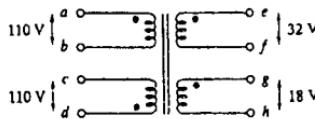


Figura 13.149 Per il Problema 13.92.

***13.93** Un trasformatore ideale da 440/110 V può essere collegato in modo da diventare un autotrasformatore

ideale da 550/440 V. Esistono quattro possibilità di collegamento, due delle quali sono sbagliate. Determinare la tensione di uscita di:

- (a) un collegamento sbagliato,
- (b) il collegamento giusto.

13.94 Dieci lampadine poste in parallelo sono alimentate da un trasformatore da 7200/120 V come mostrato in Figura 13.150, dove le lampadine sono rappresentate con resistori da 144Ω . Determinare:

- (a) il rapporto spire n ,
- (b) la corrente attraverso l'avvolgimento primario

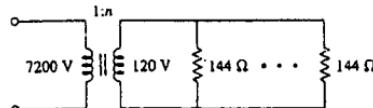


Figura 13.150 Per il Problema 13.94.

RISPOSTA IN FREQUENZA

14.1 INTRODUZIONE

Nella analisi dei circuiti in regime sinusoidale condotta finora, si è visto come calcolare tensioni e correnti di un circuito quando i generatori sono tutti ad una singola frequenza. Se si fa in modo che l'ampiezza di un generatore sinusoidale rimanga costante, e si fa variare la frequenza del generatore stesso, si ottiene la cosiddetta *risposta in frequenza*. La risposta in frequenza può essere considerata come la descrizione completa del comportamento in regime sinusoidale di un circuito in funzione della frequenza.

La risposta in frequenza di un circuito rappresenta la variazione del suo comportamento al variare della frequenza del segnale.

La risposta in frequenza dei circuiti in regime sinusoidale risulta importante per molte applicazioni, in particolare nelle telecomunicazioni e nei sistemi di controllo. Una applicazione specifica si ha, ad esempio, nei filtri elettrici, che sono in grado di eliminare o attenuare segnali a frequenze indesiderate e invece fare passare inalterati i segnali alle frequenze desiderate. Essi sono utilizzati nei sistemi radio, TV e telefonici per separare una delle frequenze trasmesse dalle altre presenti in una trasmissione.

Il capitolo inizia con il calcolo della risposta in frequenza di semplici circuiti mediante le funzioni di trasferimento. Si illustrano poi i diagrammi di Bode, un metodo standard per la presentazione dell'andamento delle risposte in frequenza. Si esaminano poi i circuiti risonanti serie e parallelo, dei quali si discutono importanti concetti quali la risonanza, il fattore di qualità, le frequenze di taglio e la larghezza di banda. Si presentano poi diversi tipi di filtri ed il processo di scaling dei valori nominali in un progetto.

Nel paragrafo finale vengono presentate una applicazione pratica dei circuiti risonanti e due applicazioni dei filtri.

14.2 FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

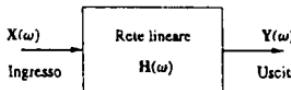
La funzione di trasferimento $H(\omega)$ (chiamata anche *funzione di rete*) rappresenta uno strumento analitico utile per la determinazione della risposta in frequenza di un circuito. La risposta in frequenza è infatti il grafico della funzione di trasferimento del circuito $H(\omega)$ in funzione di ω , con ω che varia da $\omega = 0$ a $\omega = \infty$.

Una funzione di trasferimento è il rapporto, dipendente dalla frequenza, tra la grandezza forzata e la grandezza forzante (o di una uscita rispetto all'ingresso).

L'idea di funzione di trasferimento era implicita quando sono stati introdotti i concetti di impedenza e ammettenza per mettere in relazione tensione e corrente. In generale, una rete lineare può essere rappresentata con il diagramma a blocchi mostrato in Figura 14.1.

Figura 14.1

Rappresentazione di una rete
lineare come diagramma
a blocchi



La funzione di trasferimento $H(\omega)$ di un circuito è il rapporto, dipendente dalla frequenza, di un fasore di uscita $Y(\omega)$ (tensione o corrente di un elemento) rispetto ad un fasore di ingresso $X(\omega)$ (tensione o corrente di un generatore).

In formula,

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (14.1)$$

supponendo condizioni iniziali nulle. Poiché sia l'ingresso che l'uscita possono essere tensioni o correnti in un qualunque punto del circuito, esistono quattro possibili tipi di funzione di trasferimento ¹:

$$H(\omega) = \text{Guadagno di tensione} = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} \quad (14.2a)$$

$$H(\omega) = \text{Guadagno di corrente} = \frac{I_o(\omega)}{I_i(\omega)} \quad (14.2b)$$

$$H(\omega) = \text{Impedenza di trasferimento} = \frac{V_o(\omega)}{I_i(\omega)} \quad (14.2c)$$

$$H(\omega) = \text{Ammettanza di trasferimento} = \frac{I_o(\omega)}{V_i(\omega)} \quad (14.2d)$$

in cui i pedici i ed o indicano valori di ingresso e di uscita. Trattandosi di una quantità complessa, $H(\omega)$ ha un modulo $H(\omega)$ e un argomento, o fase ϕ , cioè $H(\omega) = H(\omega) / \phi$. Per ottenere la funzione di trasferimento secondo la (14.2), si costruisce dapprima l'equivalente nel dominio delle frequenze del circuito, sostituendo resistori, induttori e condensatori con le rispettive impedenze R , $j\omega L$ e $1/j\omega C$. Si utilizza poi un metodo qualsiasi per calcolare le grandezze che compaiono nella (14.2). È possibile poi ottenere la risposta in frequenza tracciando il grafico del modulo e della fase della funzione di trasferimento al variare della frequenza. Molto spesso si ricorre al computer per tracciare rapidamente tali grafici.

La funzione di trasferimento $H(\omega)$ può essere espressa in termini del polinomio numeratore $N(\omega)$ e del polinomio denominatore $D(\omega)$ come

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (14.3)$$

dove $N(\omega)$ e $D(\omega)$ non coincidono necessariamente con le espressioni della funzione di uscita e di ingresso, rispettivamente. La rappresentazione di $H(\omega)$ nella (14.3) presuppone che eventuali fattori comuni a numeratore e denominatore siano stati eliminati, riducendo così la frazione ai minimi termini. Le radici di $N(\omega) = 0$ si chiamano *zeri* di $H(\omega)$, e vengono solitamente rappresentati come $j\omega = z_1, z_2, \dots$. In maniera simile, le radici di $D(\omega) = 0$ sono i *poli* di $H(\omega)$ e sono rappresentati come $j\omega = p_1, p_2, \dots$

¹ Alcuni autori usano $H(j\omega)$ come espressione della funzione di trasferimento invece di $H(\omega)$, perché w e j compaiono sempre assieme.

Uno zéro (radice del polinomio numeratore) è un valore che rende nulla la funzione.

Un polo (radice del polinomio denominatore) è un valore per il quale la funzione diventa infinita.

Per evitare di manipolare quantità immaginarie, a volte può essere utile sostituire temporaneamente $j\omega$ con s nell'operare con $H(\omega)$ e risostituire s con $j\omega$ al termine del calcolo.

Esempio 14.1

Determinare la funzione di trasferimento V_o/V_i e la risposta in frequenza per il circuito RC in Figura 14.2(a). Si assume $v_i = V_m \cos \omega t$.

Soluzione: Il circuito equivalente nel dominio della frequenza è mostrato in Figura 14.2(b). Per la regola del partitore di tensione, la funzione di trasferimento è data da

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Confrontando questa equazione con la (9.18e), si ottengono il modulo e la fase di $H(\omega)$ come

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}, \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0}$$

dove $\omega_0 = 1/RC$. Per tracciare il grafico di H e di ϕ per $0 < \omega < \infty$, se ne calcolano i valori per alcuni punti critici dell'asse ω e si traccia quindi il grafico approssimato.

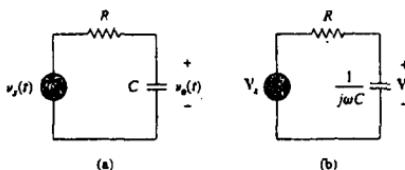


Figura 14.2
Per l'Esempio 14.1: (a) circuito RC nel dominio del tempo.
(b) circuito RC nel dominio della frequenza.

Per $\omega = 0$, $H = 1$ e $\phi = 0$. Per $\omega = \infty$, $H = 0$ e $\phi \approx -90^\circ$. Inoltre, per $\omega = \omega_0$, $H = 1/\sqrt{2}$ e $\phi = -45^\circ$.

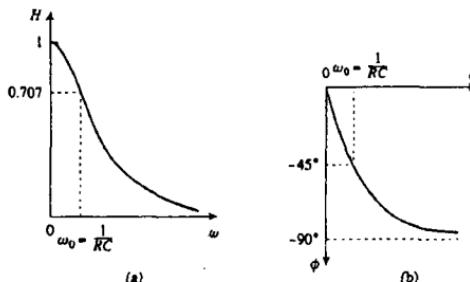


Figura 14.3
Risposta in frequenza del circuito RC : (a) ampiezza,
(b) fase.

Con questi valori e con quelli mostrati nella Tabella 14.1, si trova che la risposta in frequenza è quella mostrata in Figura 14.3. Alcune interessanti proprietà della risposta in frequenza in Figura 14.3 verranno meglio illustrate nel Paragrafo 14.6.1 parlando dei filtri passa-basso.

Tabella 14.1 Per l'esempio 14.1.

ω/ω_0	H	ϕ	ω/ω_0	H	ϕ
0	1	0	10	0.1	-84°
1	0.71	-45°	20	0.05	-87°
2	0.45	-63°	100	0.01	-89°
3	0.32	-72°	∞	0	-90°

■ **Esercizio 14.1** Ottenere la funzione di trasferimento V_o/V_i per il circuito RL in Figura 14.4, supponendo $v_i = V_m \cos \omega t$. Tracciare il grafico approssimato della risposta in frequenza.

Risposta $j\omega L/(R + j\omega L)$; si veda la Figura 14.5 per la risposta in frequenza. ■

Figura 14.4
Circuito RL per l'Esercizio 14.1.

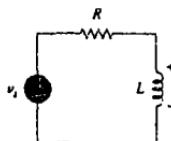
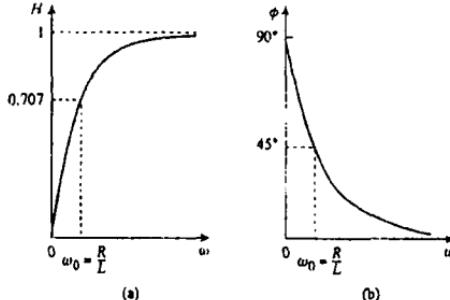


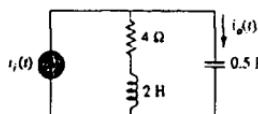
Figura 14.5
Risposta in frequenza del circuito RL in Figura 14.4



Esempio 14.2

Per il circuito in Figura 14.6, calcolare il guadagno di corrente $I_o(\omega)/I_i(\omega)$, i poli e gli zeri.

Figura 14.6
Per l'Esempio 14.2.



Soluzione: Per il partitore di corrente,

$$I_o(\omega) = \frac{4 + j2\omega}{4 + j2\omega + 1/j0.5\omega} I_i(\omega)$$

o anche

$$\frac{I_o(\omega)}{I_i(\omega)} = \frac{j0.5\omega(4 + j2\omega)}{1 + j2\omega + (j\omega)^2} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 1}, \quad s = j\omega$$

Gli zeri sono in

$$s(s+2) = 0 \implies z_1 = 0, z_2 = -2$$

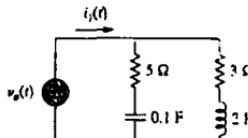
I poli sono in

$$s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$$

Si ha quindi un polo multiplo (polo doppio) in $p = -1$.

■ **Esercizio 14.2** Calcolare la funzione di trasferimento $V_o(\omega)/V_i(\omega)$ per il circuito di Figura 14.7. Ottenere anche gli zeri e i poli.

Figura 14.7
Per l'Esercizio 14.2.



Risposta $\frac{5(s+2)(s+1.5)}{s^2 + 4s + 5}$, $s = j\omega$; zeri: $-2, -1.5$, poli: $-2 \pm j$.

14.3 LA SCALA DEI DECIBEL †

Non è sempre semplice ottenere rapidamente un grafico del modulo e della fase della funzione di trasferimento come si è fatto negli esempi appena visti. Una via più sistematica per visualizzare la risposta in frequenza è quella di utilizzare i diagrammi di Bode. Prima però di parlare dei diagrammi di Bode, è importante vedere come è possibile utilizzare i logaritmi e i decibel per esprimere un guadagno.

Poiché i diagrammi di Bode si basano sui logaritmi, è bene ricordare le seguenti proprietà dei logaritmi:

1. $\log P_1 P_2 = \log P_1 + \log P_2$
2. $\log P_1/P_2 = \log P_1 - \log P_2$
3. $\log P^n = n \log P$
4. $\log 1 = 0$

Nei sistemi di telecomunicazione, il guadagno viene spesso misurato in *bel*; storicamente, il bel veniva usato per misurare il rapporto tra due livelli di potenza, o guadagno di potenza G^2 ,

$$G = \text{Numero di bel} = \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.4)$$

Il *decibel* (dB) è una unità di misura più piccola, essendo pari a 1/10 di bel, e la sua espressione è

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.5)$$

Quando $P_1 = P_2$, non c'è variazione di potenza e il guadagno è di 0 dB. Se $P_2 = 2P_1$, il guadagno è

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 2 \simeq 3 \text{ dB} \quad (14.6)$$

e quando $P_2 = 0.5P_1$, il guadagno è

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 0.5 \simeq -3 \text{ dB} \quad (14.7)$$

Le (14.6) e (14.7) mostrano un'altra ragione per il largo uso che si fa dei logaritmi in questo contesto: il logaritmo del reciproco di una quantità è semplicemente il logaritmo della quantità stessa cambiato di segno.

In alternativa, il guadagno G può essere espresso in termini di rapporto fra tensioni e/o correnti.

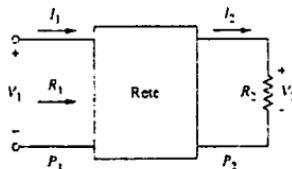


Figura 14.8
Relazioni tensione-corrente per una rete a quattro terminali.

A questo scopo, si consideri la rete mostrata in Fig. 14.8. Se P_1 è la potenza in ingresso, P_2 la potenza di uscita (sul carico), R_1 la resistenza di ingresso e R_2 la resistenza di carico, allora $P_1 = 0.5V_1^2/R_1$ e $P_2 = 0.5V_2^2/R_2$, e la (14.5) diventa

[†] Il *bel* prende il nome da Alexander Graham Bell, uno degli inventori del telefono.

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1} \quad (14.8)$$

$$= 10 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 + 10 \log_{10} \frac{R_1}{R_2}$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} - 10 \log_{10} \frac{R_2}{R_1} \quad (14.9)$$

Per il caso in cui $R_2 = R_1$, situazione che viene spesso assunta per ipotesi quando si vogliono confrontare livelli di tensione, la (14.9) diventa

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} \quad (14.10)$$

Se invece $P_1 = I_1^2 R_1$ e $P_2 = I_2^2 R_2$, per $R_1 = R_2$, si ottiene

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \quad (14.11)$$

Tre osservazioni sono importanti riguardo alle (14.5), (14.10) e (14.11):

1. Si usa $10 \log$ per la potenza, mentre si usa $20 \log$ per la tensione o la corrente, a causa della relazione quadratica fra loro ($P = V^2/R = I^2R$).
2. Il valore in dB è una misura logaritmica del *rapporto* di una variabile rispetto ad un'altra variabile *dello stesso tipo*. Può quindi essere usato nell'esprimere la funzione di trasferimento H nella (14.2a) e nella (14.2b), che sono quantità adimensionali, ma non per esprimere H nella (14.2c) e nella (14.2d).
3. Nelle (14.10) e (14.11) si usano soltanto i moduli di tensioni e correnti. Dei segni e degli angoli di fase si tiene conto separatamente, come si vedrà nel Paragrafo 14.4.

Ciò premesso, si applicheranno ora i concetti dei logaritmi e dei decibel alla costruzione dei diagrammi di Bode.

14.4 DIAGRAMMI DI BODE

La determinazione della risposta in frequenza a partire dalla funzione di trasferimento, come si è fatto nel Paragrafo 14.2, è particolarmente faticosa. Inoltre, l'intervallo di frequenze di interesse della risposta in frequenza è spesso così ampio che non risulta conveniente utilizzare una scala lineare per l'asse delle frequenze. Esiste tuttavia un metodo più sistematico per individuare i punti rilevanti dei diagrammi di modulo e fase della funzione di trasferimento.

Costituisce pratica standard nell'ingegneria utilizzare una scala logaritmica per l'asse delle frequenze e una scala lineare per le ordinate di modulo e fase, in grafici separati. Tali grafici semilogaritmici della funzione di trasferimento, noti come *diagrammi di Bode*, sono diventati uno standard universalmente accettato³.

Diagrammi di Bode sono grafici semilogaritmici del modulo (in decibel) e della fase (in gradi) di una funzione di trasferimento in funzione della frequenza.

³ Essi prendono il nome da Hendrik W. Bode (1905-1982), ingegnere dei Bell Telephone Laboratories, a memoria del suo lavoro pionieristico degli anni '30 e '40.

I diagrammi di Bode contengono la stessa informazione dei grafici non logaritmici presentati nel paragrafo precedente, ma sono molto più semplici da costruire, come si vedrà tra poco. La funzione di trasferimento può essere scritta come

$$H = H \angle \phi = He^{j\phi} \quad (14.12)$$

Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i membri,

$$\ln H = \ln H + \ln e^{j\phi} = \ln H + j\phi \quad (14.13)$$

Perciò, la parte reale di $\ln H$ è funzione del modulo mentre la parte immaginaria è la fase. Nel diagramma di Bode del modulo, il guadagno

$$H_{dB} = 20 \log_{10} H \quad (14.14)$$

viene rappresentato in decibel (dB) in funzione della frequenza. La Tabella 14.2 fornisce alcuni valori di H , assieme ai corrispondenti valori in decibel. Nel diagramma di Bode della fase, si traccia il grafico di ϕ , espressa in gradi, in funzione della frequenza. Entrambi i grafici vanno di solito tracciati su carta semilogaritmica.

Tabella 14.2 Valori del guadagno e corrispondenti valori in decibel.

Modulo H	$20 \log_{10} H$ (dB)
0.001	-60
0.01	-40
0.1	-20
0.5	-6
$1/\sqrt{2}$	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
10	20
20	26
100	40
1000	60

Una funzione di trasferimento nella forma (14.3) può essere scritta in forma fattorizzata, evidenziando le parti reali e immaginarie. Una possibile rappresentazione è

$$H(\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)[1+j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2] \dots}{(1+j\omega/p_1)[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2] \dots} \quad (14.15)$$

che si ottiene raccogliendo poli e zeri in $H(\omega)$. La rappresentazione di $H(\omega)$ della (14.15) è chiamata *forma standard*. In questo caso particolare, $H(\omega)$ consta di sette fattori diversi, che possono comparire in diverse combinazioni in una funzione di trasferimento.

1. Un guadagno K .
2. Un polo $(j\omega)^{-1}$, o uno zero $(j\omega)$, nell'origine⁴.
3. Un polo semplice $1/(1+j\omega/p_1)$, o uno zero semplice $(1+j\omega/z_1)$.
4. Un polo quadratico $1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$ o uno zero quadratico $[1+j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]$.

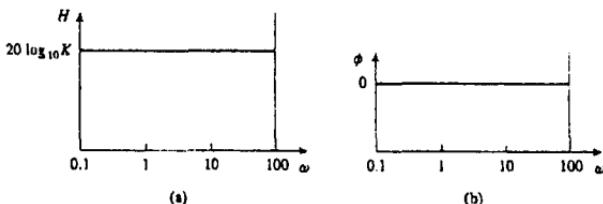
Nella costruzione di un diagramma di Bode, si tracciano i grafici di tutti i fattori separata mente e li si combina poi mediante tecniche grafiche. I singoli fattori possono essere rappresentati uno alla volta e poi sommati graficamente proprio perché sono espressi in forma logaritmica. È questa importante proprietà, legata ai logaritmi, che rende i dia-

⁴ L'origine è smarata dove $\omega = 1$ o $\log \omega = 0$ e il guadagno è nullo.

grammi di Bode uno strumento efficiente per l'ingegnere che vuole tracciare rapidamente i grafici delle risposte. Verranno ora tracciati grafici lineari a tratti approssimati dei vari fattori appena menzionati. Si vedrà come questi semplici grafici, noti come diagrammi di Bode, approssimino i grafici reali con un sorprendente livello di accuratezza.

Figura 14.9

Diagrammi di Bode per il guadagno K : (a) modulo, (b) fase.

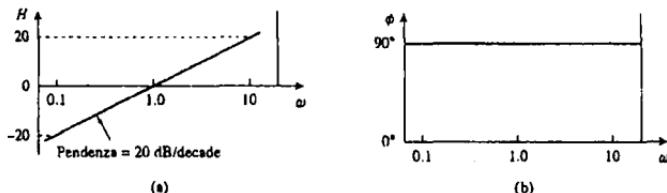


Terme costante: Per il guadagno K , il modulo è $20 \log_{10} K$ e la fase è 0° ; entrambi sono costanti al variare della frequenza. I grafici di modulo e fase del guadagno sono mostrati in Figura 14.9. Se K è negativo, il modulo resta $20 \log_{10} |K|$ ma la fase diventa $\pm 180^\circ$.

Polo/zero nell'origine: Per lo zero ($j\omega$) nell'origine, il modulo è $20 \log_{10} \omega$ e la fase 90° . Essi sono rappresentati in Figura 14.10, dalla quale si nota che la pendenza del grafico del modulo è di 20 dB/decade^5 , mentre la fase risulta costante al variare della frequenza⁶. I diagrammi di Bode per il polo $(j\omega)^{-1}$ sono simili, eccetto il fatto che la pendenza del diagramma del modulo è di -20 dB/decade mentre la fase è -90° . In generale, per $(j\omega)^N$, con N intero, il diagramma del modulo avrà una pendenza $20 N \text{ dB/decade}$, e la fase sarà di $90 N$ gradi.

Figura 14.10

Diagramma di Bode per uno zero ($j\omega$) nell'origine:
(a) modulo, (b) fase.



Polo/zero semplice: Per lo zero semplice $(1 + j\omega/z_1)$, il modulo è $20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1|$ e la fase è $\tan^{-1} \omega/z_1$. Si nota che

$$H_{dB} = 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{z_1} \right| \Rightarrow 20 \log_{10} 1 = 0 \quad (14.16)$$

per $\omega \rightarrow 0$

$$H_{dB} = 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{z_1} \right| \Rightarrow 20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1} \quad (14.17)$$

per $\omega \rightarrow \infty$

Queste equazioni suggeriscono come sia possibile approssimare il modulo con zero (una linea retta con pendenza nulla) per piccoli valori di ω e con una linea retta di pendenza 20 dB/decade per valori grandi di ω . La frequenza $\omega = z_1$, in cui le due linee asintotiche si incontrano, è detta *frequenza d'angolo* o *frequenza di taglio*. Il diagramma approssimato del modulo è allora quello mostrato in Figura 14.11(a), nella quale è

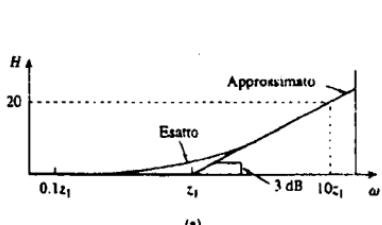
⁵ Una decade è un intervallo fra due frequenze con rapporto pari a 10, ad esempio tra ω_0 e $10\omega_0$, oppure tra 10 e 100 Hz. Perciò, 20 dB/decade significa che il modulo varia di 20 dB quando la frequenza si moltiplica per 10, o varia di una decade.

⁶ Il caso particolare del segnale stazionario ($\omega = 0$) non compare mai nei diagrammi di Bode, perché $\log 0 = -\infty$, e quindi la frequenza zero si trova all'infinito verso sinistra rispetto all'origine dei diagrammi.

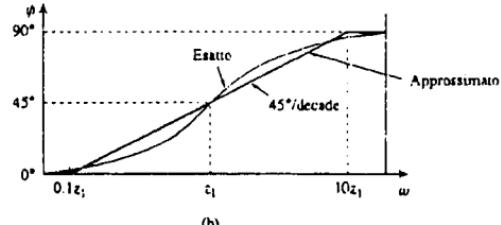
anche mostrato il grafico esatto. Si noti che il diagramma approssimato risulta vicino a quello esatto, eccetto che alla frequenza di taglio, in cui $\omega = z_1$, e la distanza è pari a $20 \log_{10} |(1+j1)| = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$. La fase $\tan^{-1}(\omega/z_1)$ si può esprimere come

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z_1}\right) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ 45^\circ, & \omega = z_1 \\ 90^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14.18)$$

Per ottenere una approssimazione lineare a tratti, si pone $\phi \approx 0$ per $\omega \leq z_1/10$, $\phi \approx 45^\circ$ per $\omega = z_1$ e $\phi \approx 90^\circ$ per $\omega \geq 10z_1$. Come mostrato in Figura 14.11(b) assieme al grafico esatto, il grafico a tratti ha una pendenza di 45° per decade.



(a)



(b)

I diagrammi di Bode per il polo $1/(1+j\omega/p_1)$ sono simili a quelli in Figura 14.11, fatta eccezione per il fatto che la frequenza di taglio si trova in $\omega = p_1$, il modulo ha pendenza -20 dB/decade e la fase ha pendenza -45° per decade.

Polo/zero quadratico: Il modulo di un polo quadratico $1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$ è $-20 \log_{10} |1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2|$ e la fase è $-\tan^{-1}(2\zeta_2\omega/\omega_n)/(1-\omega^2/\omega_n^2)$. Ma

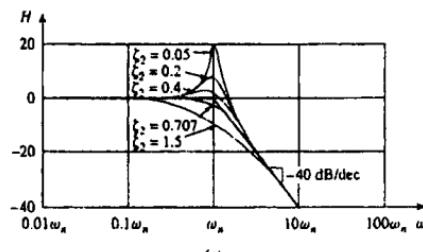
$$H_{dB} = -20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| \Rightarrow 0 \quad \text{per } \omega \rightarrow 0 \quad (14.19)$$

e

$$H_{dB} = -20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| \Rightarrow -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \quad (14.20) \quad \text{per } \omega \rightarrow \infty$$

Il diagramma del modulo consiste allora di due linee rette asintotiche: una con pendenza nulla, per $\omega < \omega_n$ e l'altra con pendenza -40 dB/decade , per $\omega > \omega_n$, con ω_n come frequenza di taglio.

La Figura 14.12(a) mostra i grafici approssimato ed esatto. Si noti che il grafico esatto dipende dal fattore di smorzamento ζ_2 oltre che dalla frequenza di taglio ω_n . Il picco significativo situato in prossimità della frequenza di taglio dovrebbe essere riprodotto nel grafico lineare a tratti, se si desiderasse una maggiore accuratezza. Tuttavia, nel seguito si utilizzerà il solo grafico approssimato della Figura 14.12, al fine di mantenere semplice la trattazione.



(a)

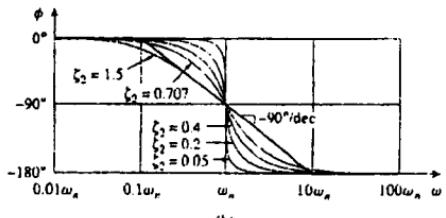


Figura 14.12
Diagrammi di Bode del polo quadratico
 $|1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (\omega/\omega_n)^2|^{-1}$:
(a) modulo, (b) fase

La fase può essere espressa come

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta_2 \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_n \\ -180^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14.21)$$

Il diagramma della fase è di una linea retta con pendenza 90° per decade a partire da $\omega_n/10$ che termina in $10\omega_n$, come mostrato in Figura 14.12(b). Si nota ancora che la differenza fra il grafico esatto e il diagramma lineare a tratti dipende dal fattore di smorzamento. Si noti anche che le approssimazioni a tratti del modulo e della fase per il polo quadratico sono le stesse di quelle per un polo doppio $(1 + j\omega/\omega_n)^{-2}$. Ciò era atteso, perché il polo doppio $(1 + j\omega/\omega_n)^{-2}$ è uguale al polo quadratico $1/[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (\omega/\omega_n)^2]$ quando $\zeta_2 = 1$. Perciò, un polo quadratico può essere trattato come un polo doppio ai fini del tracciamento del grafico approssimato a tratti. Per lo zero quadratico $[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (\omega/\omega_k)^2]$, i diagrammi di Figura 14.12 risultano invertiti, perché il diagramma del modulo ha una pendenza di $40 \text{ dB}/\text{decade}$ mentre il grafico della fase ha pendenza 90° per decade.

La Tabella 14.3 riporta un riassunto dei diagrammi di Bode per i sette fattori esaminati. Per tracciare i diagrammi di Bode di una funzione $H(\omega)$ nella forma della (14.15), si segnano dapprima le frequenze di taglio sulla carta semilogaritmica, si tracciano i diagrammi dei vari fattori, uno alla volta, come si è appena visto, ed infine si sommano i grafici dei vari fattori. Il grafico combinato che si ottiene viene spesso tracciato da sinistra a destra, cambiando opportunamente pendenza ogni volta che si incontra una frequenza di taglio. Gli esempi che seguono illustrano meglio la procedura⁷.

Tabella 14.3 Riassunto dei diagrammi di Bode approssimati a tratti per modulo e fase.

Fattore	Modulo	Fase
K	$20 \log_{10} K$	0°
$(j\omega)^N$	$20N \text{ dB}/\text{decade}$	$90N^\circ$
$\frac{1}{(j\omega)^N}$	$-20N \text{ dB}/\text{decade}$	$-90N^\circ$

(segue)

⁷ Esiste un altro procedimento, probabilmente più veloce ed efficiente, per ottenere i diagrammi di Bode, oltre a quello appena presentato. Esso consiste nel tenere conto del fatto che gli zeri causano un aumento della pendenza, mentre i poli danno luogo ad una diminuzione della pendenza. Partendo dall'assimeto a bassa frequenza del diagramma di Bode, e percorrendo l'asse delle frequenze, si aumenta o diminuisce la pendenza ogni volta che si raggiunge una frequenza di taglio, ottenendo così il diagramma senza dover disegnare i singoli contributi per poi sommarli. Questa procedura può essere utilizzata una volta che si è acquisita familiarità con quella presentata nel testo.

La diffusione dei personal computer ha poi reso il procedimento qui presentato quasi obsoleto. Strumenti software quali PSpice, MATLAB, Mathcad e Micro-Cap possono essere usati facilmente per generare grafici delle risposte in frequenza. L'impiego di PSpice, in particolare, verrà presentato più avanti nel capitolo.

Tabella 14.3 Riassunto dei diagrammi di Bode approssimati a tratti per modulo e fase

Fattore	Modulo	Fase
$\left(1 + \frac{j\omega}{z}\right)^N$	<p>20N dB/decade</p>	<p>90N°</p>
$\frac{1}{(1 + j\omega/p)^N}$	<p>p</p> <p>-20N dB/decade</p>	<p>p</p> <p>10p</p> <p>0°</p> <p>-90N°</p>
$\left[1 + \frac{2j\omega\zeta}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$	<p>40N dB/decade</p>	<p>180N°</p>
$\frac{1}{[1 + 2j\omega\zeta/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]^N}$	<p>omega_k</p> <p>-40N dB/decade</p>	<p>omega_k</p> <p>10\omega_k</p> <p>0°</p> <p>-180N°</p>

Esempio 14.3

Costruire i diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento

$$H(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

Soluzione: È necessario dapprima porre $H(\omega)$ in forma standard, dividendo per i poli e gli zeri.

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{10j\omega}{(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/10)} \\ &= \frac{10|j\omega|}{|1 + j\omega/2||1 + j\omega/10|} \angle 90^\circ - \tan^{-1}\omega/2 - \tan^{-1}\omega/10 \end{aligned}$$

Il modulo e la fase sono allora

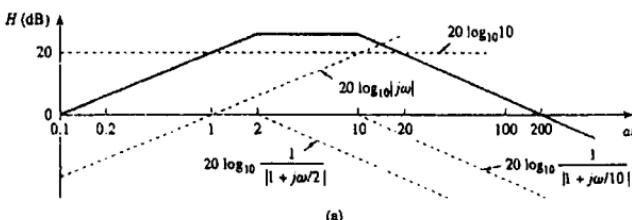
$$\begin{aligned} H_{dB} &= 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10}|j\omega| - 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{2}\right| \\ &\quad - 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{10}\right| \\ \phi &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{10} \end{aligned}$$

Come si vede, si hanno due frequenze di taglio in $\omega = 2, 10$. I vari termini componenti, sia per il grafico del modulo che per quello della fase, sono rappresentati in Figura 14.13 con linee tratteggiate. I termini vengono poi sommati graficamente per ottenere i grafici complessivi mostrati con linee continue.

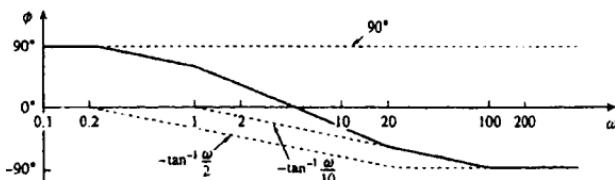
Figura 14.13

Per l'Esempio 14.3:

- (a) diagramma del modulo,
- (b) diagramma della fase.



(a)



(b)

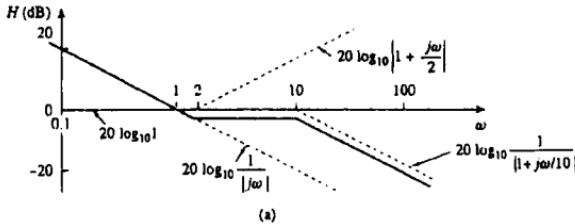
■ Esercizio 14.3 Tracciare i diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento

$$H(\omega) = \frac{5(j\omega + 2)}{j\omega(j\omega + 10)}$$

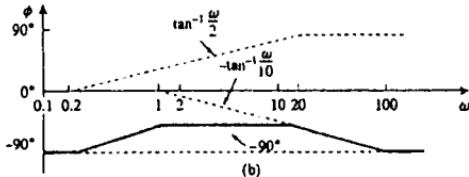
Risposta Si veda la Figura 14.14.

Figura 14.14

Per l'Esercizio 14.3: (a) ampiezza, (b) fase.



(a)

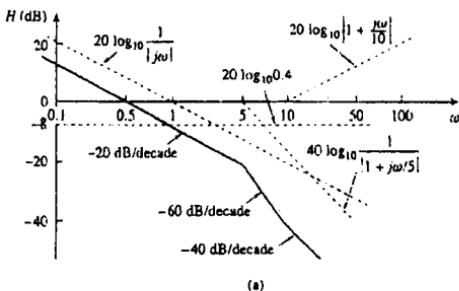


(b)

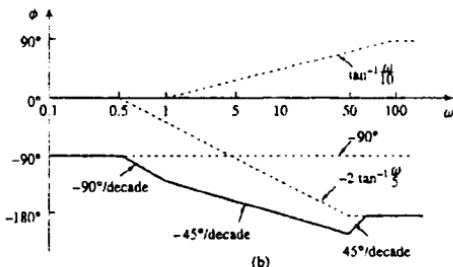
Esempio 14.4

Tracciare i diagrammi di Bode per

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega + 5)^2}$$



(a)



(b)

Figura 14.15
Diagrammi di Bode per
l'Esempio 14.4:
(a) modulo, (b) fase

Soluzione: Scrivendo $H(\omega)$ in forma standard, si ottiene

$$H(\omega) = \frac{0.4(1 + j\omega/10)}{j\omega(1 + j\omega/5)^2}$$

Da questa espressione, si ottengono il modulo e la fase come

$$\begin{aligned} H_{dB} &= 20 \log_{10} 0.4 + 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{10} \right| - 20 \log_{10} |j\omega| \\ &\quad - 40 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{5} \right| \end{aligned}$$

$$\phi = 0^\circ + \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - 90^\circ - 2 \tan^{-1} \frac{\omega}{5}$$

Si hanno due frequenze di taglio, in $\omega = 5, 10$ rad/s. Per il polo con frequenza di taglio $\omega = 5$, la pendenza del diagramma del modulo è -40 dB/decade e quella del diagramma della fase è -90° per decade, a causa della presenza dell'esponente 2. I diagrammi di modulo e fase per i singoli termini (linee tratteggiate) e per l'intera $H(j\omega)$ (linea continua) sono mostrati in Figura 14.15.

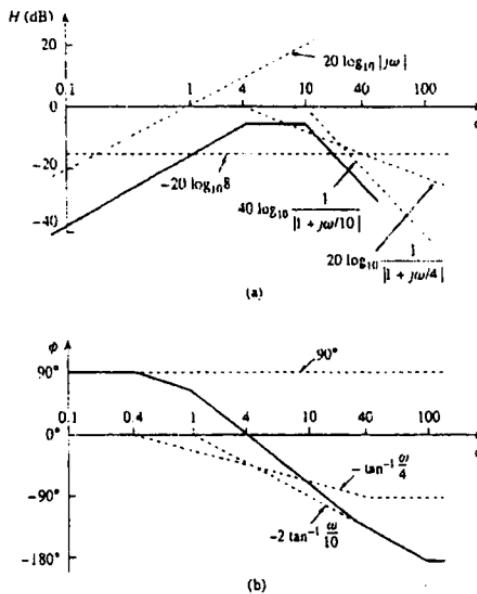
Esercizio 14.4 Tracciare i diagrammi di Bode per

$$H(\omega) = \frac{50j\omega}{(j\omega + 4)(j\omega + 10)^2}$$

Risposta Si veda la Figura 14.16. ■

Figura 14.16

Per l'Esercizio 14.4 (a) diagramma del modulo, (b) diagramma della fase.



Esempio 14.5

Tracciare i diagrammi di Bode per

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 60s + 100}$$

Soluzione

1. *Dare una definizione precisa del problema.*

Il problema è definito in modo chiaro e si seguirà il metodo descritto in questo capitolo.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.*

Si determina il diagramma di Bode approssimato per la funzione $H(s)$ del problema.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*
Le due scelte più efficaci per risolvere il problema potrebbero essere il metodo approssimato descritto nel capitolo, che verrà usato in questo Esempio, e MATLAB, con cui si può ottenere un diagramma di Bode preciso.

4. *Fare un tentativo di soluzione del problema.*

Si esprime $H(s)$ nella forma

$$H(s) = \frac{1/100(1+j\omega)}{1+j\omega/10 + (j\omega/10)^2}$$

Per il polo quadrattico, $\omega_n = 10$ rad/s, che è la frequenza di taglio. Il modulo e la fase sono

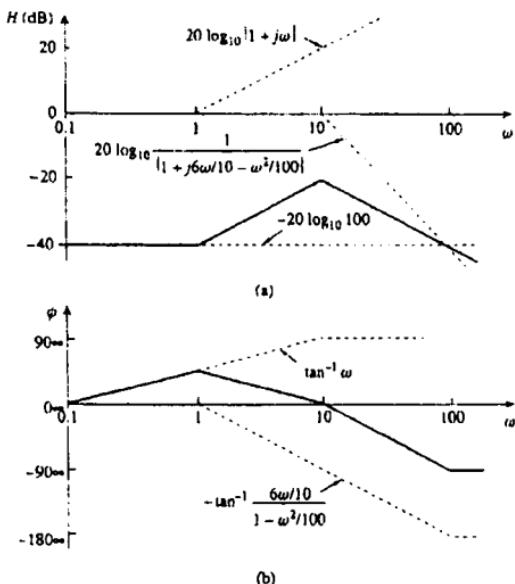
$$H_{dB} = -20 \log_{10} 100 + 20 \log_{10} |1 + j\omega|$$

$$-20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100} \right|$$

$$\phi = 0^\circ + \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \left[\frac{\omega/10}{1 - \omega^2/100} \right]$$

La Figura 14.17 mostra i diagrammi di Bode. Si noti che il polo quadrattico è stato trattato come un polo multiplo in ω_1 , cioè $(1 + j\omega/\omega_1)^2$, il che costituisce in realtà una approssimazione.

Figura 14.17
Diagrammi di Bode per l'Esempio 14.5
(a) modulo, (b) fase.



5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Pur potendo contare su MATLAB per verificare la soluzione, si userà un metodo più semplice. Innanzitutto, si ricordi che il denominatore presuppone che si abbia $\zeta = 0$ nella approssimazione, e quindi, per la verifica della risposta, si userà la seguente equazione:

$$H(s) \approx \frac{s+1}{s^2 + 10^2}$$

Occorre determinare il guadagno H_{dB} e il relativo angolo di fase ϕ . Prima si pone $\omega = 0$.

$$H_{dB} = 20 \log_{10}(1/100) = -40 \text{ dB} \quad \text{e} \quad \phi = 0$$

Poi si prova con $\omega = 1 \text{ rad/s}$:

$$H_{dB} = 20 \log_{10}(1.4142/99) = -36.9 \text{ dB}$$

Questo è il valore esatto della funzione che supera di 3 dB il valore approssimato alla frequenza di taglio.

Da $H(j) = \frac{j+1}{-1+100}$, si ottiene $\phi = 45^\circ$

Infine si calcola con $\omega = 100 \text{ rad/s}$:

$$H_{dB} = 20 \log_{10}(100) - 20 \log_{10}(9900) = 39.91 \text{ dB}$$

L'angolo di fase si calcola sottraendo ai 90° del numeratore, 180° del denominatore, e il risultato è -90° .

Si sono perciò determinati tre punti diversi e, visto che questa è un'approssimazione, si può affermare di aver risolto il problema con successo.

Ma perché non si è provato con $\omega = 10 \text{ rad/s}$?

Se si usa lo stesso valore approssimato esaminato prima, si ottiene un valore infinito, che è il valore previsto per $\zeta = 0$ (si veda la Figura 14.12a).

Se si usa il valore effettivo di $H(j10)$ si otterrà un valore molto diverso, poiché $\zeta = 6$ e la Figura 14.12a mostra un sensibile scostamento dall'approssimazione.

Si potrebbe risolvere il problema con $\zeta = 0.707$ e questo porterebbe ad avvicinarsi al valore approssimato.

Comunque, si tralascia di rifare i calcoli, visto che si hanno sufficienti punti per determinare la soluzione.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è lavorato con successo alla risoluzione del problema per cui si è soddisfatti del lavoro svolto. Si possono quindi presentare i risultati come la soluzione del problema.

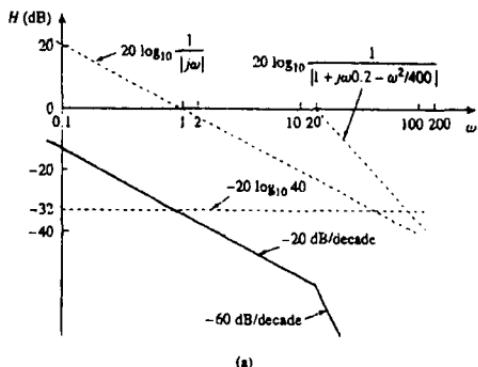
■ **Esercizio 14.5** Costruire i diagrammi di Bode per

$$H(s) = \frac{10}{s(s^2 + 80s + 400)}$$

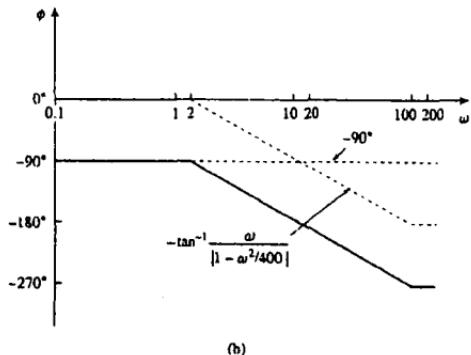
Risposta Si veda la Figura 14.18.

Figura 14.18

Per l'Esercizio 14.5: (a) diagramma del modulo, (b) diagramma della fase



(a)



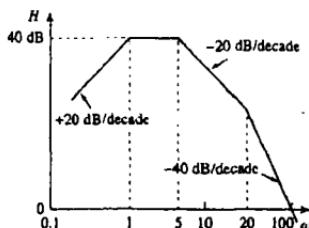
(b)

Esempio 14.6

Dato il diagramma di Bode in Figura 14.19, ricavare la funzione di trasferimento $H(\omega)$.

Figura 14.19

Per l'Esempio 14.6



Soluzione: Per ottenere $H(\omega)$ dal diagramma di Bode, va ricordato che uno zero produce sempre una deviazione verso l'alto del diagramma alla frequenza di taglio, mentre un polo dà luogo ad una deviazione verso il basso. Dalla Figura 14.19 si nota che c'è uno zero $j\omega$ nell'origine che avrebbe dovuto intersecare l'asse delle frequenze in $\omega = 1$. Ciò è indicato dalla retta con pendenza +20 dB/decade. Il fatto che questa retta sia traslata di 40 dB indica che si è in presenza di un guadagno di 40 dB, cioè

$$40 = 20 \log_{10} K \implies \log_{10} K = 2$$

cioè

$$K = 10^2 = 100$$

In aggiunta allo zero $j\omega$ nell'origine, si nota che ci sono altri tre fattori con frequenze di taglio in $\omega = 1,5$ e 20 rad/s . Si ha quindi:

1. Un polo in $p = 1$ con pendenza -20 dB/decade , che produce una deviazione verso il basso e controbilancia il polo nell'origine. Il polo in $p = 1$ ha espressione $1/(1 + j\omega/1)$.
2. Un ulteriore polo in $p = 5$ con pendenza -20 dB/decade , che produce una deviazione verso il basso. Il polo vale $1/(1 + j\omega/5)$.
3. Un terzo polo in $p = 20$ con pendenza -20 dB/decade che produce una ulteriore deviazione verso il basso. Il polo vale $1/(1 + j\omega/20)$.

Mettendo insieme tutti i termini si ottiene la funzione di trasferimento corrispondente come

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{100j\omega}{(1 + j\omega/1)(1 + j\omega/5)(1 + j\omega/20)} \\ &= \frac{j\omega 10^4}{(j\omega + 1)(j\omega + 5)(j\omega + 20)} \end{aligned}$$

o anche

$$H(s) = \frac{10^4 s}{(s+1)(s+5)(s+20)}, \quad s = j\omega$$

Esercizio 14.6 Ricavare la funzione di trasferimento $H(\omega)$ corrispondente al diagramma di Bode in Figura 14.20.

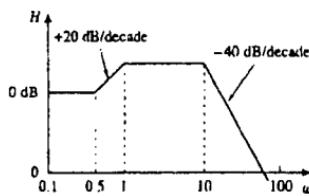


Figura 14.20
Per l'Esercizio 14.6

Risposta $H(\omega) = \frac{200(s+0.5)}{(s+1)(s+10)}$.

14.5 RISONANZA SERIE

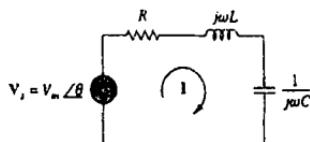
Spesso, la caratteristica più significativa della risposta in frequenza di un circuito è un picco pronunciato (o *picco risonante*) presentato dal diagramma del modulo. Il concetto di risonanza si ritrova in parecchie aree della scienza e dell'ingegneria. Si ha risonanza in qualunque sistema che possiede una coppia di poli complessi coniugati, che provocano oscillazioni dell'energia immagazzinata da una forma all'altra. La risonanza è il fenomeno che permette la discriminazione tra frequenze diverse nelle reti di telecomunicazione, e si verifica in qualsiasi circuito che contenga un induttore ed un condensatore.

La risonanza è una condizione che si stabilisce in un circuito RLC quando le reattanze capacitive e inductive risultano uguali in modulo, dando luogo così ad una impedenza puramente resistiva.

I circuiti risonanti (serie o parallelo) sono utili nella costruzione di filtri, perché la loro funzione di trasferimento può essere resa molto selettiva nei confronti delle diverse

frequenze. Essi sono utilizzati in molte applicazioni, quale ad esempio quella di selezione della stazione desiderata nei ricevitori radio e TV.

Figura 14.21
Circuito risonante serie.



Si consideri il circuito RLC serie mostrato in Figura 14.21 nel dominio delle frequenze. L'impedenza di ingresso è

$$Z = H(\omega) = \frac{V_s}{I} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (14.22)$$

o anche

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (14.23)$$

Si ha risonanza quando la parte immaginaria della funzione di trasferimento è nulla,

$$\text{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (14.24)$$

Il valore di ω che soddisfa questa condizione è chiamato *frequenza di risonanza* ω_0 . La condizione di risonanza è quindi

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (14.25)$$

cioè

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s}} \quad (14.26)$$

Essendo $\omega_0 = 2\pi f_0$,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz} \quad (14.27)$$

Si noti che, alla risonanza:

1. L'impedenza è puramente resistiva, e perciò $Z = R$. In altre parole, la combinazione serie LC si comporta come un corto circuito, e tutta la tensione si ritrova su R .
2. La tensione V_s e la corrente I sono in fase, e quindi il fattore di potenza risulta unitario.
3. Il modulo della funzione di trasferimento $H(\omega) = Z(\omega)$ è minimo.
4. La tensione dell'induttore e quella del condensatore possono assumere valori molto più grandi della tensione del generatore ⁸.

⁸ L'osservazione n. 4 risulta evidente dal fatto che

$$|V_L| = \frac{V_s}{R} \omega_0 L = Q V_s$$

$$|V_C| = \frac{V_s}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = Q V_s$$

dove Q è il fattore di qualità, definito nella (14.38).

La risposta in frequenza del modulo della corrente

$$I = |I| = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (14.28)$$

è mostrata in Figura 14.22; si riesce a notare la simmetria del grafico solo quando esso viene rappresentato su un asse delle frequenze logaritmico. La potenza media dissipata dal circuito RLC è

$$P(\omega) = \frac{1}{2} I^2 R \quad (14.29)$$

La potenza più alta viene dissipata alla risonanza, quando $I = V_m/R$, così che

$$P(\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \quad (14.30)$$

Per due particolari frequenze $\omega = \omega_1, \omega_2$, la potenza dissipata è metà del valore massimo, cioè

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{2R} = \frac{V_m^2}{4R} \quad (14.31)$$

Per questo motivo, ω_1 e ω_2 sono chiamate *frequenze di metà potenza*.

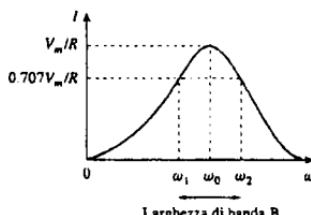


Figura 14.22
Ampiezza della corrente in funzione della frequenza per il circuito risonante serie di Figura 14.21.

Le frequenze di metà potenza si ottengono imponendo che Z valga $\sqrt{2}R$, e scrivendo

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}R \quad (14.32)$$

Risolvendo rispetto a ω , si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}} \quad (14.33)$$

Si possono mettere in relazione le due frequenze di metà potenza con la frequenza di risonanza. Dalle (14.26) e (14.33),

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (14.34)$$

la quale mostra che la frequenza di risonanza è la media geometrica delle frequenze di metà potenza. Si noti che ω_1 e ω_2 non sono, in generale, situate simmetricamente attorno alla frequenza di risonanza ω_0 , perché la risposta in frequenza non è in generale

simmetrica. Tuttavia, come verrà illustrato tra poco, la collocazione simmetrica delle frequenze di metà potenza attorno alla frequenza di risonanza costituisce molto spesso una approssimazione accettabile. Nonostante l'altezza della curva in Figura 14.22 sia determinata dal valore di R , la larghezza della curva dipende anche da altri fattori. La larghezza della curva di risposta dipende dalla *larghezza di banda B*, che è definita come la differenza fra le due frequenze di metà potenza,

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (14.35)$$

Questa definizione di larghezza di banda è solo una delle tante che vengono comunemente usate. A rigor di termini, B nella (14.35) rappresenta la larghezza di banda di metà potenza, perché è la larghezza della banda di frequenza compresa tra le due frequenze di metà potenza. La "precisione" della risonanza in un circuito risonante è misurata quantitativamente dal *fattore di qualità Q*. Alla risonanza, l'energia reattiva nel circuito oscilla tra l'induttore e il condensatore. Il fattore di qualità mette in relazione l'energia massima, o di picco, immagazzinata rispetto all'energia dissipata per ciclo di oscillazione:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia massima immagazzinata nel circuito}}{\text{Energia dissipata dal circuito}} \quad (14.36)$$

in un periodo, alla risonanza

Esso può anche essere considerato come la capacità di immagazzinare energia di un circuito in rapporto alla dissipazione di energia. Nel circuito *RLC* serie, il picco di energia immagazzinata è $\frac{1}{2}L I^2$, mentre l'energia dissipata in un periodo è $\frac{1}{2}(I^2 R)(1/f_0)$. Quindi,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I^2}{\frac{1}{2} I^2 R (1/f_0)} = \frac{2\pi f_0 L}{R} \quad (14.37)$$

e quindi

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (14.38)$$

Si noti che il fattore di qualità è adimensionale. La relazione fra la larghezza di banda B e il fattore di qualità Q si ottiene sostituendo la (14.33) nella (14.35) e usando la (14.38).

$$B = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (14.39)$$

o anche $B = \omega_0^2 C R$. Riassumendo:

Il fattore di qualità di un circuito risonante è il rapporto tra la frequenza di risonanza e la larghezza di banda.

Si tenga presente che le (14.26), (14.33), (14.38) e (14.39) sono valide soltanto per il circuito *RLC* serie.

Come è illustrato nella Figura 14.23, tanto più grande è il valore di Q , tanto più selettivo è il circuito ma tanto minore è la larghezza di banda. La *seleattività* di un circuito *RLC* è la proprietà del circuito di rispondere ad una certa frequenza, discriminandola rispetto a tutte le altre frequenze.

Se la banda di frequenze da selezionare o rifiutare è molto stretta, il fattore di qualità del circuito deve essere elevato. Se la banda di frequenze è larga, il fattore di qualità deve essere basso.

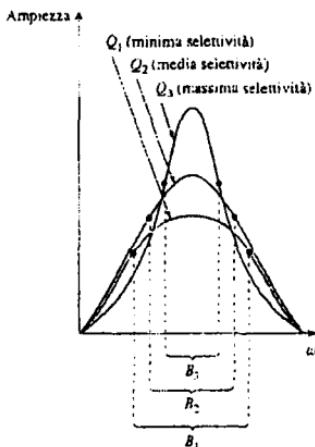


Figura 14.23
Tanto più grande è il Q del circuito, tanto minore è la larghezza di banda

Un circuito risonante viene progettato per operare alla frequenza di risonanza, o in prossimità di essa, e viene detto a Q elevato se il suo fattore di qualità è uguale o maggiore di 10. Per circuiti a Q elevato, ($Q \geq 10$), le frequenze di metà potenza si possono considerare, per tutti gli scopi pratici, simmetriche rispetto alla frequenza di risonanza e possono essere approssimate con

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2} \quad (14.40)$$

Circuiti a Q elevato vengono spesso usati nelle reti di telecomunicazione. Si vede quindi che un circuito risonante è caratterizzato da cinque parametri in relazione tra loro: le due frequenze di metà potenza ω_1 e ω_2 , la frequenza di risonanza ω_0 , la larghezza di banda B ed il fattore di qualità Q .

Esempio 14.7

Nel circuito di Figura 14.24, $R = 2\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ e $C = 0.4 \mu\text{F}$. (a) Determinare la frequenza di risonanza e le frequenze di metà potenza. (b) Calcolare il fattore di qualità e la larghezza di banda. (c) Determinare l'ampiezza della corrente in ω_0 , ω_1 e ω_2 .

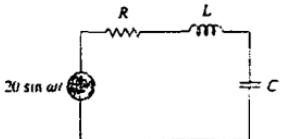


Figura 14.24
Per l'Esempio 14.7

Soluzione: (a) La frequenza di risonanza è

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 0.4 \times 10^{-6}}} = 50 \text{ krad/s}$$

METODO 1

La frequenza inferiore di metà potenza è

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ &= -\frac{2}{2 \times 10^{-3}} + \sqrt{(10^1)^2 + (50 \times 10^3)^2} \\ &= -1 + \sqrt{1 + 2500} \text{ krad/s} = 49 \text{ krad/s} \end{aligned}$$

Allo stesso modo, la frequenza superiore di metà potenza è

$$\omega_2 = 1 + \sqrt{1 + 2500} \text{ krad/s} = 51 \text{ krad/s}$$

(b) La larghezza di banda è

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2 \text{ krad/s}$$

oppure

$$B = \frac{R}{L} = \frac{2}{10^{-3}} = 2 \text{ krad/s}$$

Il fattore di qualità vale

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{50}{2} = 25$$

METODO 2

In alternativa, è possibile ottenere

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{50 \times 10^3 \times 10^{-3}}{2} = 25$$

Nota Q , si trova

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{50 \times 10^3}{25} = 2 \text{ krad/s}$$

Essendo $Q > 10$, si tratta di un circuito con Q elevato, ed è quindi possibile ottenere le frequenze di metà potenza come

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 50 - 1 = 49 \text{ krad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 50 + 1 = 51 \text{ krad/s}$$

come si è visto in precedenza.

(c) In $\omega = \omega_0$,

$$I = \frac{V_m}{R} = \frac{20}{2} = 10 \text{ A}$$

In $\omega = \omega_1, \omega_2$,

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{2}R} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.071 \text{ A}$$

■ **Esercizio 14.7** Un circuito RLC serie ha $R = 4\Omega$ e $L = 25 \text{ mH}$. (a) Calcolare il valore di C che dà luogo ad un fattore di qualità pari a 50. (b) Calcolare ω_1, ω_2 e B . (c) Determinare la potenza media dissipata per $\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2$. Si assuma $V_m = 100 \text{ V}$.

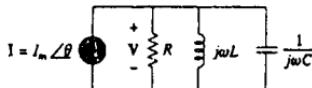
Risposta (a) $0.625 \mu\text{F}$, (b) $7920 \text{ rad/s}, 8080 \text{ rad/s}, 160 \text{ rad/s}$,

(c) $1.25 \text{ kW}, 0.625 \text{ kW}, 0.625 \text{ kW}$.

14.6 RISONANZA PARALLELO

Figura 14.25

Circuito risonante parallelo.



Il circuito RLC parallelo in Figura 14.25 è il duale del circuito RLC serie, e per questo motivo si eviteranno inutili ripetizioni. L'ammesso è

$$Y = H(\omega) = \frac{I}{V} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad (14.41)$$

o anche

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (14.42)$$

Si ha la risonanza quando la parte immaginaria di Y si annulla,

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad (14.43)$$

cioè

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s} \quad (14.44)$$

che coincide con la (14.26) per il circuito risonante serie. La tensione $|V|$ è mostrata in Figura 14.26 in funzione della frequenza. Si noti che, alla risonanza, la combinazione parallelo LC si comporta come un circuito aperto, così che tutta la corrente scorre in R . Inoltre, le correnti dell'induttore e del condensatore, alla risonanza, possono essere anche molto più grandi della corrente del generatore⁹.

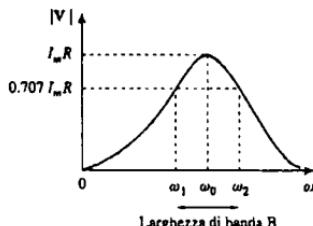


Figura 14.26
Ampiezza della tensione
in funzione della frequenza per il
circuito risonante parallelo di
Figura 14.25.

Si trae vantaggio dalla dualità tra le Figure 14.21 e 14.25 confrontando la (14.42) con la (14.23). Sostituendo R , L e C nell'espressione valida per il circuito serie con $1/R$, $1/C$ e $1/L$ rispettivamente, si ottiene per il circuito parallelo

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}} \quad (14.45)$$

$$\boxed{B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}} \quad (14.46)$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}} \quad (14.47)$$

⁹ Ci si convince di ciò dal fatto che

$$|I_L| = \frac{I_m R}{\omega_0 L} = Q I_m$$

$$|I_C| = \omega_0 C I_m R = Q I_m$$

dove Q è il fattore di qualità, definito nella (14.47).

Mediante le (14.45) e (14.47) è possibile esprimere le due frequenze di metà potenza in termini del fattore di qualità. Il risultato è

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{\omega_0}{2Q}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{\omega_0}{2Q} \quad (14.48)$$

Anche in questo caso, per circuiti con Q elevato ($Q \geq 10$)

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2} \quad (14.49)$$

La Tabella 14.4 presenta un riassunto delle caratteristiche dei circuiti risonanti serie e parallelo. Esistono altri tipi di circuiti risonanti, oltre ai circuiti RLC serie e parallelo considerati qui. L'Esempio 14.9 ne mostra un caso tipico.

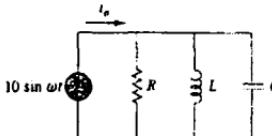
Tabella 14.4 Riasunto delle caratteristiche dei circuiti risonanti RLC .

Caratteristica	Circuito serie	Circuito parallelo
Frequenza di risonanza, ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Fattore di qualità, Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$ oppure $\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$ oppure $\omega_0 RC$
Larghezza di banda, B	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
Frequenze di metà potenza, ω_1, ω_2	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$
Per $Q \geq 10$, ω_1, ω_2	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$

Esempio 14.8

Nel circuito RLC parallelo in Figura 14.27, $R = 8 \text{ k}\Omega$, $L = 0.2 \text{ mH}$ e $C = 8 \mu\text{F}$. (a) Calcolare ω_0 , Q , B . (b) Determinare ω_1 e ω_2 . (c) Determinare la potenza dissipata in ω_0 , ω_1 e ω_2 .

Figura 14.27
Per l'Esempio 14.8.



Soluzione: (a)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.2 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-6}}} = \frac{10^3}{4} = 25 \text{ rad/s}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{8 \times 10^3}{25 \times 10^3 \times 0.2 \times 10^{-3}} = 1600$$

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = 15.625 \text{ rad/s}$$

(b) Poiché il circuito ha un Q di valore elevato,

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 25000 - 7.812 = 24992 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 25000 + 7.8125 = 25008 \text{ rad/s}$$

(c) Per $\omega = \omega_0$, $Y = 1/R$ o $Z = R = 8 \text{ k}\Omega$. Allora,

$$I_o = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle -90^\circ}{8000} = 1.25 \angle -90^\circ \text{ mA}$$

Poiché alla risonanza tutta la corrente scorre in R , la potenza media dissipata per $\omega = \omega_0$ è

$$P = \frac{1}{2} |I_o|^2 R = \frac{1}{2} (1.25 \times 10^{-3})^2 (8 \times 10^3) = 6.25 \text{ mW}$$

o anche

$$P = \frac{V^2}{2R} = \frac{100}{2 \times 8 \times 10^3} = 6.25 \text{ mW}$$

Per $\omega = \omega_1, \omega_2$,

$$P = \frac{V^2}{4R} = 3.125 \text{ mW}$$

Esercizio 14.8 Un circuito risonante parallelo ha $R = 100 \text{ k}\Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ e $C = 5 \text{ nF}$. Calcolare $\omega_0, \omega_1, \omega_2, Q, B$.

Risposta 100 krad/s, 99 krad/s, 101 krad/s, 50, 2 krad/s.

Esempio 14.9

Determinare la frequenza di risonanza del circuito in Figura 14.28.

Soluzione: L'ammettenza di ingresso è

$$Y = j\omega 0.1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2 + j\omega 2} = 0.1 + j\omega 0.1 + \frac{2 - j\omega 2}{4 + 4\omega^2}$$

Alla risonanza, $\text{Im}(Y) = 0$, e quindi

$$\omega_0 0.1 - \frac{2\omega_0}{4 + 4\omega_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

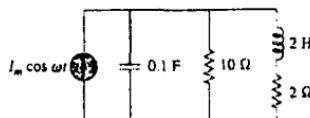


Figura 14.28
Per l'Esempio 14.9

Esercizio 14.9 Calcolare la frequenza di risonanza del circuito in Figura 14.29.

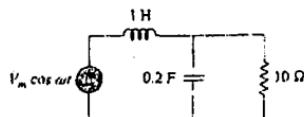


Figura 14.29
Per l'Esercizio 14.9.

Risposta 2.179 rad/s.

14.7 FILTRI PASSIVI

Il concetto di filtro costituisce parte integrante della storia dell'ingegneria elettrica ed elettronica fin dai suoi primordi. Molti delle conquiste della tecnologia non sarebbero state possibili se non esistessero i filtri elettronici. Proprio per questo ruolo del tutto

preminente, molto tempo è stato dedicato ai filtri sia nella ricerca teorica, che per il loro progetto e costruzione, e molti libri e articoli scientifici sono stati scritti sull'argomento, così che la presentazione che ne verrà qui fatta è da considerarsi del tutto introduttiva.

Un filtro è un circuito progettato per lasciare passare i segnali delle frequenze desiderate e bloccare, o attenuare, quelli alle altre frequenze.

Usato come dispositivo selezionatore di frequenze, un filtro può servire per limitare lo spettro di frequenze di un segnale all'interno di una banda specificata. Filtri sono i circuiti usati nei ricevitori radio e TV che consentono di selezionare un segnale desiderato tra una moltitudine di segnali provenienti da tutte le trasmissioni.

Un filtro si dice *passivo* se consiste di soli elementi passivi R , L e C . Si dice invece *attivo* se contiene elementi attivi (quali transistori e amplificatori operazionali) oltre agli elementi passivi R , L e C . I filtri passivi verranno considerati in questo paragrafo, mentre ai filtri attivi è dedicato il paragrafo seguente. I filtri LC vengono utilizzati nelle applicazioni pratiche da più di ottant'anni. La tecnologia dei filtri LC costituisce un fondamento per aree applicative correlate quali quelle degli equalizzatori, delle reti per l'adattamento delle impedenze, dei trasformatori, delle reti per il condizionamento dei segnali e per la ripartizione della potenza elettrica, degli attenuatori e degli accoppiatori direzionali, e fornisce continuamente agli ingegneri dell'industria opportunità per innovare e sperimentare. Oltre ai tipi di filtri che verranno qui studiati, esistono altri tipi di filtri – quali ad esempio i filtri digitali, clettromeccanici e quelli per microonde – che non verranno trattati in questo testo.

Come si vede in Figura 14.30, esistono quattro tipi fondamentali di filtri, sia passivi che attivi:

1. Un *filtro passa-basso* lascia passare le frequenze basse e arresta le frequenze alte, come mostrato nel grafico ideale di Figura 14.30(a).
2. Un *filtro passa-alto* lascia passare le frequenze alte e arresta le frequenze basse, come mostrato nel grafico ideale di Figura 14.30(b).
3. Un *filtro passa-banda* lascia passare le frequenze all'interno di una certa banda e blocca o attenua quelle al di fuori della banda, come mostrato nel grafico ideale di Figura 14.30(c).
4. Un *filtro arresta-banda* lascia passare le frequenze al di fuori di una banda prefissata e blocca o attenua quelle all'interno della banda, come mostrato nel grafico ideale di Figura 14.30(d).

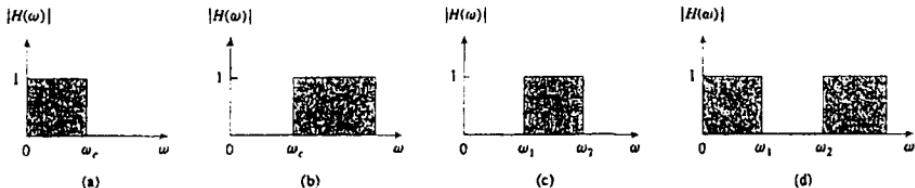


Figura 14.30
Risposta in frequenza ideale dei quattro tipi di filtro:
(a) filtro passa-basso,
(b) filtro passa-alto,
(c) filtro passa-banda,
(d) filtro arresta-banda.

La Tabella 14.5 presenta un riassunto delle caratteristiche di questi filtri. Si ricordi che le caratteristiche di Tabella 14.5 sono valide soltanto per filtri del primo o del secondo ordine – ma non se ne deve trarre l'impressione che esistano solo questi tipi di filtri.

Vengono ora presi in considerazione semplici circuiti che realizzano i filtri mostrati in Tabella 14.5.

Tabella 14.5 Riassunto delle caratteristiche dei filtri.

Tipo di filtro	$H(0)$	$H(\infty)$	$H(\omega_c) \circ H(\omega_0)$
Passa-basso	1	0	$1/\sqrt{2}$
Passa-alto	0	1	$1/\sqrt{2}$
Passa banda	0	0	1
Arresta banda	1	1	0

 ω_c è la frequenza di taglio per i filtri passa-basso e passa-alto. ω_0 è la frequenza centrale per i filtri passa-banda e arresta-banda.

14.7.1 Filtro passa-basso

Un tipico filtro passa-basso si ottiene prelevando l'uscita di un circuito RC sul condensatore, come mostrato in Figura 14.31.

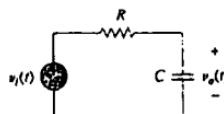


Figura 14.31
Filtro passa-basso

La funzione di trasferimento (si veda anche l'Esempio 14.1) è

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \\ H(\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \quad (14.50)$$

Si noti che $H(0) = 1$, $H(\infty) = 0$. La Figura 14.32 mostra il grafico di $|H(\omega)|$, assieme alla caratteristica ideale. La frequenza di metà potenza, che nel campo dei filtri è detta *frequenza di taglio ω_c* , si ottiene imponendo che il modulo di $H(\omega)$ sia uguale a $1/\sqrt{2}$, cioè

$$H(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (14.51)$$

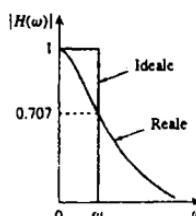


Figura 14.32
Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro passa-basso.

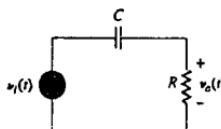
La frequenza di taglio è anche detta *frequenza di rolloff*¹⁰.

Un filtro passa-basso è progettato per lasciare passare soltanto le frequenze da 0 (segnale stazionario) fino alla frequenza di taglio ω_c .

¹⁰ La frequenza di taglio è la frequenza alla quale la funzione di trasferimento si diminuisce in modulo fino al 70.71% del suo valore massimo. Viene anche considerata come la frequenza alla quale la potenza dissipata nel circuito è pari alla metà del suo valore massimo.

Si ottiene un filtro passa-basso anche prelevando l'uscita di un circuito RL sul resistore. Esistono, ovviamente, molti altri modi nei quali si può formare un filtro passa-basso.

Figura 14.33
Filtro passa-alto.



14.7.2 Filtro passa-alto

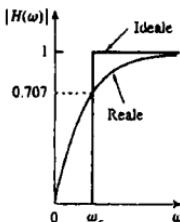
Si ottiene un filtro passa-alto prelevando l'uscita di un circuito RC sul resistore, come si vede in Figura 14.33. La funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} \\ H(\omega) &= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \quad (14.52)$$

Si noti che $H(0) = 0$, $H(\infty) = 1$. La Figura 14.34 mostra il grafico di $|H(\omega)|$. Anche qui, la frequenza di taglio è

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (14.53)$$

Figura 14.34
Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro passa-alto.



Un filtro passa-alto è progettato per lasciar passare tutte le frequenze superiori alla sua frequenza di taglio ω_c .

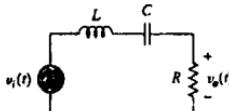
Si ottiene un filtro passa-alto anche prelevando l'uscita di un circuito RL sull'induttore.

14.7.3 Filtro passa-banda

Il circuito risonante RLC serie si comporta come filtro passa-banda se l'uscita viene prelevata sul resistore, come mostrato in Figura 14.35. La funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (14.54)$$

Figura 14.35
Filtro passa-banda.



Si osservi che $H(0) = 0$, $H(\infty) = 0$. La Figura 14.36 mostra il grafico di $|H(\omega)|$. Il filtro passa-banda lascia passare una banda di frequenze ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) centrata in ω_0 , la frequenza centrale, che è pari a

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.55)$$

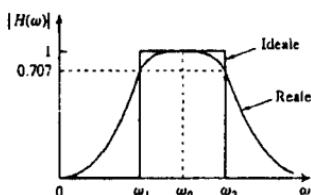


Figura 14.36
Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro passa-banda.

Un filtro passa-banda è progettato per lasciar passare tutte le frequenze contenute all'interno di una banda di frequenze, $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Poiché il filtro passa-banda di Figura 14.35 è un circuito risonante serie, le frequenze di metà potenza, la larghezza di banda e il fattore di qualità sono quelli calcolati al Paragrafo 14.5. È possibile ottenere un filtro passa-banda anche ponendo in cascata il filtro passa-basso (con $\omega_2 = \omega_c$) di Figura 14.31 e il filtro passa-alto (con $\omega_1 = \omega_c$) di Figura 14.33.

14.7.4 Filtro arresta-banda

Un filtro che arresta le frequenze in una banda compresa fra due valori specificati (ω_1 e ω_2) è noto con i nomi di *arresta-banda*, *rigetta-banda* o filtro *notch*. Un filtro arresta-banda si ottiene prelevando l'uscita di un circuito risonante *RLC* serie sul collegamento serie *LC*, come mostra la Figura 14.37.

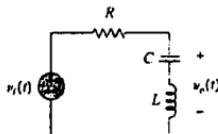


Figura 14.37
Filtro arresta-banda

La funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j(\omega L - 1/\omega C)}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (14.56)$$

Si noti che $H(0) = 1$, $H(\infty) = 1$. La Figura 14.38 mostra il grafico di $|H(\omega)|$. Anche qui, la frequenza di centro banda è data da

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.57)$$

mentre le due frequenze di metà potenza, la larghezza di banda e il fattore di qualità si calcolano usando le formule del Paragrafo 14.5 per il circuito risonante serie. In questo caso, ω_0 è detta *frequenza di reiezione*, mentre la corrispondente larghezza di banda è nota come *larghezza di banda di reiezione*. Riassumendo,

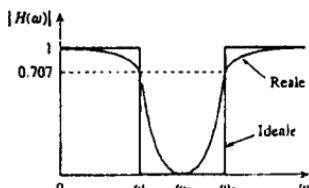


Figura 14.38
Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro arresta-banda.

Un filtro arresta banda è progettato per bloccare o attenuare tutta la frequenza compresa all'interno di una banda, $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

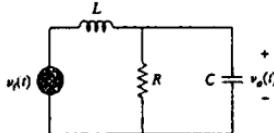
Si noti che sommando le funzioni di trasferimento del passa-banda e dell'arresta-banda si ottiene 1 a tutte le frequenze, a parità di valori di R , L e C . Questa non è una proprietà generale, ma risulta valida solo per i circuiti qui trattati, ed è dovuta al fatto che la caratteristica di uno dei due è l'inverso di quella dell'altro. In conclusione di paragrafo, è bene notare che:

- Dalle (14.50), (14.52), (14.54) e (14.56) si vede che il valore massimo per il guadagno di un filtro passivo è l'unità. Per avere un guadagno superiore all'unità è necessario utilizzare filtri attivi, come si mostrerà nel prossimo paragrafo.
- Esistono molti altri modi per ottenere i tipi di filtro presentati in questo paragrafo.
- I filtri qui presentati sono di topologia molto semplice. Esistono molti altri tipi di filtri, dotati di risposte in frequenza molto più complesse e che presentano pendenze molto più elevate alle frequenze di taglio.

Esempio 14.10

Stabilire che tipo di filtro è il circuito mostrato in Figura 14.39. Calcolare la frequenza di taglio. Supponere $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 2 \text{ H}$ e $C = 2 \mu\text{F}$.

Figura 14.39
Per l'Esempio 14.10.



Soluzione: La funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R \parallel 1/sC}{sL + R \parallel 1/sC}, \quad s = j\omega \quad (14.10.1)$$

Ma

$$R \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R/sC}{R + 1/sC} = \frac{R}{1 + sRC}$$

Sostituendo nella (14.10.1) si ottiene

$$H(s) = \frac{R/(1 + sRC)}{sL + R/(1 + sRC)} = \frac{R}{s^2RLC + sL + R}, \quad s = j\omega$$

e quindi

$$H(\omega) = \frac{R}{-\omega^2RLC + j\omega L + R} \quad (14.10.2)$$

Poiché $H(0) = 1$ e $H(\infty) = 0$ si conclude, dalla Tabella 14.5, che il circuito in Figura 14.39 è un filtro passa-basso del secondo ordine. Il modulo di H è

$$H = \frac{R}{\sqrt{(R - \omega^2RLC)^2 + \omega^2L^2}} \quad (14.10.3)$$

La frequenza di taglio coincide con la frequenza di metà potenza, cioè la frequenza alla quale H si riduce di un fattore $1/\sqrt{2}$. Poiché il valore in continua di $H(\omega)$ è 1, alla frequenza di taglio la (14.10.3) diventa, dopo averla elevata al quadrato

$$H^2 = \frac{1}{2} = \frac{R^2}{(R - \omega_c^2RLC)^2 + \omega_c^2L^2}$$

da cui

$$2 = (1 - \omega_c^2LC)^2 + \left(\frac{\omega_c L}{R}\right)^2$$

Sostituendo i valori di R , L e C , si ottiene

$$2 = (1 - \omega_c^2 4 \times 10^{-6})^2 + (\omega_c 10^{-3})^2$$

Supponendo che ω_c sia espressa in krad/s,

$$2 = (1 - 4\omega_c^2)^2 + \omega_c^2 \quad \text{cioè} \quad 16\omega_c^4 - 7\omega_c^2 - 1 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in ω_c^2 , si ottiene $\omega_c^2 = 0.5509$, cioè

$$\omega_c = 0.742 \text{ krad/s} = 742 \text{ rad/s}$$

■ **Esercizio 14.10** Per il circuito in Figura 14.40, ottenere la funzione di trasferimento $V_o(\omega)/V_i(\omega)$. Identificare il tipo di filtro che il circuito rappresenta e determinare la frequenza di taglio. Supponere $R_1 = 100 \Omega$ = R_2 , $L = 2 \text{ mH}$.

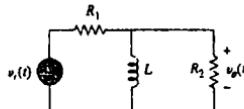


Figura 14.40
Per l'Esercizio 14.10.

Risposta $\frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{j\omega}{j\omega + \omega_c} \right)$, passa-alto

$$\omega_c = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} = 25 \text{ krad/s.}$$

Esempio 14.11

Se il filtro arresta-banda di Figura 14.37 deve attenuare le sinusoide a 200 Hz e passare inalterate le altre frequenze, calcolare i valori di L e C . Supponere $R = 150 \Omega$ e larghezza di banda pari a 100 Hz.

Soluzione: Si utilizzano le formule per il circuito risonante serie del Paragrafo 14.5.

$$B = 2\pi(100) = 200\pi \text{ rad/s}$$

Ma

$$B = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{R}{B} = \frac{150}{200\pi} = 0.2387 \text{ H}$$

L'attenuazione della sinusoide a 200 Hz significa che f_0 è 200 Hz, così che ω_0 in Figura 14.38 vale

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi(200) = 400\pi$$

Essendo $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$,

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(400\pi)^2 (0.2387)} = 2.653 \mu\text{F}$$

■ **Esercizio 14.11** Progettare un filtro passa-banda della forma mostrata in Figura 14.35 con una frequenza di taglio inferiore di 20.1 kHz e una frequenza di taglio superiore di 20.3 kHz. Supponere $R = 20 \text{ k}\Omega$. Calcolare L , C e Q .

Risposta 15.92 H, 3.9 pF, 101.

14.8 FILTRI ATTIVI

I filtri passivi considerati nel paragrafo precedente possiedono tre limitazioni di fondo: non possono avere guadagno maggiore di 1, perché gli elementi passivi non pos-

sono immettere energia nella rete; possono richiedere l'impiego di grossi e costosi induttori; in terzo luogo, essi non esibiscono buone prestazioni per frequenze al di sotto della banda audio (300 Hz < f < 3000 Hz). Essi risultano tuttavia utili per impieghi alle alte frequenze.

I filtri attivi consistono invece di combinazioni di resistori, condensatori e amplificatori operazionali, ed offrono alcuni vantaggi nei confronti dei filtri passivi *RLC*. Innanzitutto, essi sono spesso più piccoli e meno costosi, perché non contengono induttori, cosa che li rende anche realizzabili sui circuiti integrati. In secondo luogo, essi sono in grado di avere un guadagno, allo stesso modo degli amplificatori, oltre ad esibire risposte in frequenze simili a quelle dei filtri *RLC*. In terzo luogo, i filtri attivi possono essere combinati con amplificatori buffer (inseguitori di tensione) per isolare ciascuno stadio del filtro dagli effetti delle impedanze della sorgente e del carico. L'isolamento consente di progettare gli stadi in maniera indipendente e di disporli poi in cascata per realizzare la funzione di trasferimento desiderata. (Essendo i diagrammi di Bode logaritmici, se le funzioni di trasferimento vengono poste in cascata i diagrammi si sommano.) I filtri attivi sono però meno affidabili e meno stabili. Il limite pratico della maggior parte dei filtri attivi è circa 100 kHz – e la maggior parte dei filtri viene fatta lavorare a frequenze ben inferiori a questo limite.

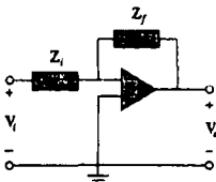
I filtri vengono spesso classificati secondo il loro ordine (o numero di poli), o anche secondo il tipo di topologia.

14.8.1 Filtro passa-basso del primo ordine

Un possibile filtro del primo ordine è mostrato in Figura 14.41. I componenti scelti per Z_i e Z_f determinano se il filtro è di tipo passa-basso o passa-alto, ma uno di essi deve necessariamente essere un componente reattivo.

Figura 14.41

Filtro attivo generico del primo
ordine.



La Figura 14.42 mostra un tipico filtro attivo passa-basso. Per questo filtro, la funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} \quad (14.58)$$

dove $Z_i = R_i$ e

$$Z_f = R_f \left| \frac{1}{j\omega C_f} \right| = \frac{R_f / j\omega C_f}{R_f + 1/j\omega C_f} = \frac{R_f}{1 + j\omega C_f R_f} \quad (14.59)$$

Sostituendo,

$$H(\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + j\omega C_f R_f} \quad (14.60)$$

Si noti che la (14.60) è simile alla (14.50), fatta eccezione per la presenza di un guadagno a bassa frequenza ($\omega \rightarrow 0$), o guadagno in continua, pari a $-R_f/R_i$. Inoltre, la frequenza di taglio è

$$\omega_c = \frac{1}{R_f C_f} \quad (14.61)$$

e non dipende da R_i . Ciò significa che sarebbe possibile sommare diversi ingressi, cia-

scuno con una diversa R_i , se necessario, e la frequenza di taglio rimarrebbe la stessa per tutti gli ingressi.

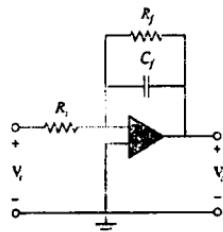


Figura 14.42
Filtro attivo passa-basso del primo ordine

14.8.2 Filtro passa-alto del primo ordine

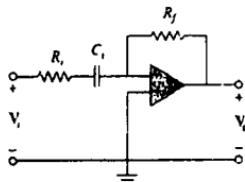


Figura 14.43
Filtro attivo passa-alto del primo ordine.

La Figura 14.43 mostra un tipico filtro passa-alto. Come nel caso precedente,

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} \quad (14.62)$$

dove $Z_i = R_i + 1/j\omega C_i$ e $Z_f = R_f$, così che

$$H(\omega) = -\frac{R_f}{R_i + 1/j\omega C_i} = -\frac{j\omega C_i R_f}{1 + j\omega C_i R_i} \quad (14.63)$$

Quest'ultima è simile alla (14.52), con la sola eccezione che a frequenze molto alte ($\omega \rightarrow \infty$), il guadagno tende a $-R_f/R_i$. La frequenza di taglio è

$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i} \quad (14.64)$$

14.8.3 Filtro passa-banda

Il circuito in Figura 14.42 può essere combinato con quello in Figura 14.43 per formare un filtro passa-banda, che esibirà un guadagno K nell'intervallo di frequenze desiderato. Ponendo in cascata un filtro passa-basso con guadagno unitario, un filtro passa-alto con guadagno unitario, e un invertitore con guadagno $-R_f/R_i$, come mostra il diagramma a blocchi della Figura 14.44(a), si costruisce un filtro passa-banda la cui risposta in frequenza è quella di Figura 14.44(b).

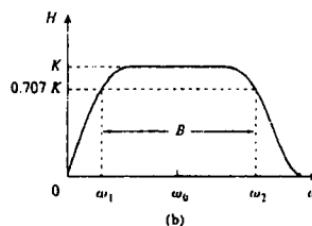


Figura 14.44
Filtro attivo passa-banda:
(a) schema a blocchi,
(b) risposta in frequenza

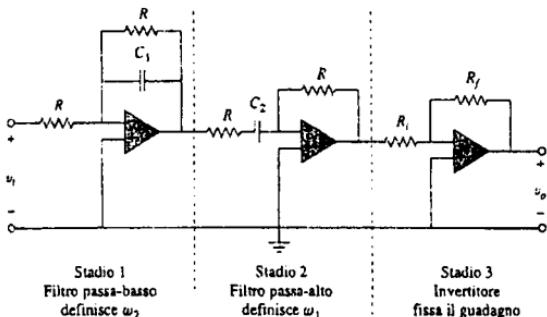
La struttura effettiva del filtro passa-banda è mostrata in Figura 14.45. L'analisi del filtro passa-banda è relativamente semplice. La sua funzione di trasferimento si ottie-

ne moltiplicando la (14.60) per la (14.63) e poi per il guadagno dell'invertitore, cioè

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \left(-\frac{1}{1+j\omega C_1 R} \right) \left(-\frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R} \right) \left(-\frac{R_f}{R_i} \right) \\ &= -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1+j\omega C_1 R} \frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R} \end{aligned} \quad (14.65)$$

Figura 14.45

Filtro attivo passa-banda.



La sezione passa-basso determina la frequenza di taglio superiore

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \quad (14.66)$$

mentre la sezione passa-alto determina la frequenza di taglio inferiore

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \quad (14.67)$$

Con i valori precedenti di ω_1 e ω_2 , la frequenza di centro banda, la larghezza di banda e il fattore di qualità si determinano come segue:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (14.68)$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (14.69)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \quad (14.70)$$

Per calcolare il guadagno K del passa-banda, si riscrive la (14.65) nella forma standard (14.15),

$$H(\omega) = \frac{R_f}{R_i} \frac{j\omega/\omega_1}{(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)} = \frac{R_f}{R_i} \frac{j\omega\omega_2}{(\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)} \quad (14.71)$$

Alla frequenza centrale $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, il modulo della funzione di trasferimento vale

$$|H(\omega)| = \left| \frac{R_f}{R_i} \frac{j\omega\omega_2}{(\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)} \right| = \frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (14.72)$$

Il guadagno del passa-banda è allora

$$K = \frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (14.73)$$

14.8.4 Filtro arresta-banda (o notch)

Un filtro arresta-banda può essere ottenuto collegando in parallelo un filtro passa-basso e un filtro passa-alto, con un amplificatore sommatore, come mostrato nel diagramma

ma a blocchi di Figura 14.46(a). Il circuito è progettato in modo che la frequenza di taglio inferiore ω_1 sia imposta dal filtro passa-basso, mentre la frequenza di taglio superiore ω_2 viene imposta dal filtro passa-alto. L'intervallo tra ω_1 e ω_2 è la larghezza di banda del filtro. Come mostra la Figura 14.46(b), il filtro lascia passare le frequenze al di sotto di ω_1 e al di sopra di ω_2 .

Il diagramma a blocchi di Figura 14.46(a) è mostrato in una realizzazione effettiva in Figura 14.47. La funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_i} \left(-\frac{1}{1+j\omega C_1 R} - \frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R} \right) \quad (14.74)$$

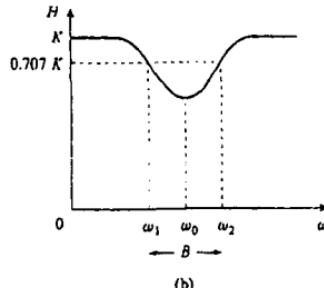
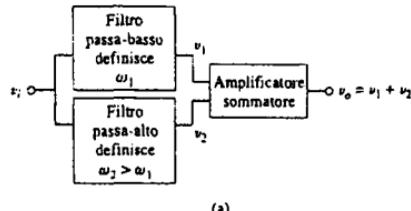


Figura 14.46
Filtro attivo arresta-banda:
(a) diagramma a blocchi,
(b) risposta in frequenza.

Le formule per il calcolo dei valori di ω_1 , ω_2 , frequenza di centro-banda, larghezza di banda e fattore di qualità sono le stesse delle Equazioni da (14.66) a (14.70).

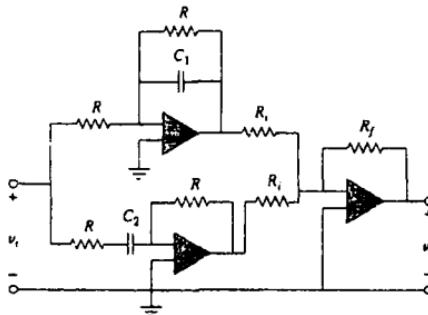


Figura 14.47
Filtro attivo arresta-banda.

Per determinare il guadagno passa-banda K del filtro, è possibile scrivere la (14.74) in termini delle frequenze di taglio superiore e inferiore come

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{1}{1+j\omega/\omega_2} + \frac{j\omega/\omega_1}{1+j\omega/\omega_1} \right) \\ &= \frac{R_f}{R_i} \frac{(1+j2\omega/\omega_1 + (j\omega)^2/\omega_1\omega_2)}{(1+j\omega/\omega_2)(1+j\omega/\omega_1)} \end{aligned} \quad (14.75)$$

Confrontando questa formula con la forma standard (14.15), si vede che nelle due bande passanti ($\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$) il guadagno è

$$K = \frac{R_f}{R_i} \quad (14.76)$$

È anche possibile calcolare il guadagno alla frequenza centrale determinando il modulo della funzione di trasferimento in $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$, scrivendo

$$H(\omega_0) = \left| \frac{R_f}{R_i} \frac{(1 + j2\omega_0/\omega_1 + (j\omega_0)^2/\omega_1\omega_2)}{(1 + j\omega_0/\omega_2)(1 + j\omega_0/\omega_1)} \right| \\ = \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \quad (14.77)$$

È bene ripetere che i filtri trattati in questo paragrafo rappresentano semplicemente degli esempi tipici. Esistono molti altri tipi, più complessi, di filtri attivi.

Esempio 14.12

Progettare un filtro attivo passa-basso con guadagno in continua pari a 4 e frequenza di taglio 500 Hz.

Soluzione: Dalla (14.61),

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(500) = \frac{1}{R_f C_f} \quad (14.12.1)$$

Il guadagno in continua è

$$H(0) = -\frac{R_f}{R_i} = -4 \quad (14.12.2)$$

Si hanno due equazioni in tre incognite. Se si sceglie $C_f = 0.2 \mu F$, allora

$$R_f = \frac{1}{2\pi(500)0.2 \times 10^{-6}} = 1.59 \text{ k}\Omega$$

e

$$R_i = \frac{R_f}{4} = 397.5 \Omega$$

Si può usare un resistore da 1.6 kΩ per R_f e un resistore da 400 Ω per R_i . La Figura 14.42 mostra il filtro realizzato.

■ **Esercizio 14.12** Progettare un filtro passa-alto avente un guadagno ad alta frequenza pari a 5 e una frequenza di taglio di 2 kHz. Utilizzare nel progetto un condensatore da 0.1 μF.

Risposta $R_i = 800 \Omega$ e $R_f = 4 \text{ k}\Omega$.

Esempio 14.13

Progettare un filtro passa-banda avente la forma mostrata in Figura 14.45, che lasci passare le frequenze comprese tra 250 Hz e 3000 Hz e avente $K = 10$. Utilizzare $R = 20 \text{ k}\Omega$.

Soluzione

1. Dare una *definizione precisa del problema*.

Il problema è definito in modo chiaro e il circuito da usare nel progetto è ben specificato.

2. *Elencare ciò che si conosce riguardo al problema.*

Viene richiesto l'uso del circuito con amplificatore operazionale di Figura 14.45, per progettare un filtro passa-banda. È stato fissato il valore del resistore R da usare (20 kΩ). In aggiunta l'intervallo di frequenze dei segnali di uscita del filtro deve essere compreso tra 250 Hz e 3 kHz.

3. *Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.*

Si useranno le equazioni studiate nel Paragrafo 14.8.3 per ottenere la soluzione. Si userà quindi la relativa funzione di trasferimento per verificare la risposta del filtro.

4. *Fare un tentativo di soluzione del problema.*

Essendo $\omega_1 = 1/RC_1$, si ottiene

$$C_1 = \frac{1}{R\omega_1} = \frac{1}{2\pi f_1 R} = \frac{1}{2\pi \times 250 \times 20 \times 10^3} = 31.83 \text{ nF}$$

Allo stesso modo, poiché $\omega_2 = 1/RC_2$,

$$C_2 = \frac{1}{R\omega_2} = \frac{1}{2\pi f_2 R} = \frac{1}{2\pi \times 3000 \times 20 \times 10^3} = 2.65 \text{ nF}$$

Dalla (14.73),

$$\frac{R_f}{R_i} = K \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} = K \frac{f_1 + f_2}{f_1} = \frac{10(3.250)}{3.000} = 10.83$$

Se si sceglie $R_i = 10 \text{ k}\Omega$, allora $R_f = 10.83 R_i \approx 108.3 \text{ k}\Omega$.

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

L'uscita del primo amplificatore operazionale è:

$$\frac{V'_1 - 0}{20 \text{ k}\Omega} + \frac{V_1 - 0}{20 \text{ k}\Omega} + \frac{s2.65 \times 10^{-9}(V'_1 - 0)}{1} = 0 \quad \text{cioè} \quad V_1 = \frac{V'_1}{1 + 5.3 \times 10^{-3}s}$$

L'uscita del secondo amplificatore operazionale è:

$$\frac{V_1 - 0}{20 \text{ k}\Omega + \frac{1}{s31.83 \text{ nF}}} + \frac{V_2 - 0}{20 \text{ k}\Omega} = 0 \quad \text{cioè}$$

$$V_2 = - \frac{6.366 \times 10^{-5} s V_1}{1 + 6.366 \times 10^{-4}s} = - \frac{6.366 \times 10^{-5} s V_1}{(1 + 6.366 \times 10^{-4}s)(1 + 5.3 \times 10^{-3}s)}$$

L'uscita del terzo amplificatore operazionale si ottiene:

$$\frac{V_2 - 0}{10 \text{k}\Omega} + \frac{V_0 - 0}{108.3 \text{k}\Omega} = 0 \quad \text{cioè} \quad V_0 = 10.83 V_2$$

quindi

$$V_0 = - \frac{6.894 \times 10^{-3} s V_1}{(1 + 6.366 \times 10^{-4}s)(1 + 5.3 \times 10^{-3}s)}$$

Si ponga ora $s = j2\pi \times 250$ e si ottenga l'ampiezza di V_0/V_1 .

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{-j10.829}{(1+j1)(1)}$$

cioè

$$|V_0/V_1| = 7.6572, \text{ che è il punto relativo alla frequenza di taglio inferiore.}$$

Se si pone $s = j2\pi \times 3000$, si ottiene:

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{-j129.94}{(1+j12)(1+j1)} = \frac{129.94 \angle -90^\circ}{(12.042 \angle 85.24^\circ)(1.4142 \angle 45^\circ)} = 7.6303 \angle -18.61^\circ$$

Ovviamente questo è il punto relativo alla frequenza di taglio superiore e quindi la risposta è verificata.

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è progettato il circuito in modo completo e soddisfacente, per cui si possono presentare i risultati come la soluzione del problema.

Esercizio 14.13 Progettare un filtro notch basato sullo schema di Figura 14.47 avente $\omega_0 = 20 \text{ krad/s}$, $K = 5$ e $Q = 10$. Utilizzare $R = R_i = 10 \text{ k}\Omega$.

Risposta $C_1 = 5.263 \text{ nF}$, $C_2 = 4.762 \text{ nF}$ e $R_f = 50 \text{ k}\Omega$



14.9 SCALING†

Nella analisi e nel progetto di filtri e circuiti risonanti, ma anche nella analisi di circuiti in generale, spesso risulta conveniente operare con elementi i cui valori sono 1Ω , 1 H o 1 F , e trasformare poi tali valori in valori più realistici mediante una operazione di scaling. In questo testo si è utilizzata questa idea evitando di usare valori realistici per gli elementi nella maggior parte degli esempi e degli esercizi; l'acquisizione della padronanza dei metodi della analisi circuitale è resa più facile se si utilizzano valori numerici molto semplici. I calcoli numerici sono stati dunque resi fin qui più agevoli, sapendo che si sarebbe poi potuto utilizzare lo scaling per rendere realistici i valori trovati.

Esistono due modi di scalare un circuito: lo *scaling dei moduli* o delle *impedenze*, e lo *scaling in frequenza*. Entrambi risultano utili nello scalare le risposte e gli elementi circuitali, per riportarli a valori compresi negli intervalli che si ritrovano più comunemente nella pratica. Mentre lo scaling dei moduli lascia la risposta in frequenza del circuito inalterata, lo scaling in frequenza consente di traslare la risposta in frequenza verso l'alto o verso il basso lungo l'asse delle frequenze.

14.9.1 Scaling dei moduli

Lo scaling dei moduli consiste nell'aumentare tutti i valori di impedenza di una rete di un certo fattore, mantenendo invariata la risposta in frequenza.

Si ricordi che le impedenze dei singoli elementi R , L e C sono date da

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (14.78)$$

Per fare lo scaling dei moduli, si moltiplica l'impedenza di ciascun elemento del circuito per un fattore K_m , e si lascia invariata la frequenza. Questa operazione produce delle nuove impedenze di valore

$$\begin{aligned} Z'_R &= K_m Z_R = K_m R, & Z'_L &= K_m Z_L = j\omega K_m L \\ Z'_C &= K_m Z_C = \frac{1}{j\omega C / K_m} \end{aligned} \quad (14.79)$$

Confrontando la (14.79) con la (14.78), si notano le seguenti variazioni nei valori degli elementi: $R \rightarrow K_m R$, $L \rightarrow K_m L$ e $C \rightarrow C / K_m$. Perciò, dopo lo scaling dei moduli, i nuovi valori degli elementi e della frequenza sono

$$\begin{aligned} R' &= K_m R, & L' &= K_m L \\ C' &= \frac{C}{K_m}, & \omega' &= \omega \end{aligned} \quad (14.80)$$

Le variabili con l'apice indicano i nuovi valori e quelle senza apice i valori vecchi. Si consideri il circuito RLC serie o parallelo; si ha dopo lo scaling

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_m LC / K_m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (14.81)$$

da cui si vede che la frequenza di risonanza, come ci si aspettava, non è cambiata. In maniera simile si può vedere che nemmeno il fattore di qualità e la larghezza di banda sono stati alterati dallo scaling dei moduli. Inoltre, lo scaling dei moduli non altera le funzioni di trasferimento della forma (14.2a) e (14.2b), che sono quantità adimensionali.

14.9.2 Scaling in frequenza

Lo scaling in frequenza è il procedimento che opera una traslazione della risposta in frequenza di una rete verso l'alto o verso il basso lungo l'asse delle frequenze, lasciando inalterata l'impedenza.

Si ottiene uno scaling in frequenza moltiplicando la frequenza per un fattore K_f e lasciando inalterata l'impedenza¹¹.

¹¹ Lo scaling in frequenza equivale a rietichettare l'asse delle frequenze nel grafico di una risposta in frequenza. Si dimostra necessario quando bisogna traslare le frequenze notevoli, quali la frequenza di risonanza, una frequenza di taglio, una larghezza di banda, ecc.. fino a raggiungere un livello realistico. Può essere utilizzato per riportare i valori di capacità e induttanza a valori compresi entro intervalli convenienti per le applicazioni pratiche.

Dalla (14.78), si vede che le impedenze di L e C dipendono dalla frequenza. Se si applica lo scaling in frequenza a $Z_L(\omega)$ e $Z_C(\omega)$ nella (14.78), si ottiene

$$Z_L = j(\omega K_f) L' = j\omega L \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{L}{K_f} \quad (14.82a)$$

$$Z_C = \frac{1}{j(\omega K_f) C'} = \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{C}{K_f} \quad (14.82b)$$

perché le impedenze dell'induttore e del condensatore devono rimanere le stesse dopo avere operato lo scaling in frequenza. Si notano le seguenti variazioni nei valori degli elementi: $L \rightarrow L/K_f$ e $C \rightarrow C/K_f$. Il valore di R non risulta influenzato, perché la sua impedenza non dipende dalla frequenza. Nello scaling in frequenza, i nuovi valori degli elementi e della frequenza sono allora,

$$\begin{aligned} R' &= R, & L' &= \frac{L}{K_f} \\ C' &= \frac{C}{K_f}, & \omega' &= K_f \omega \end{aligned} \quad (14.83)$$

Se si considera ancora il circuito RLC serie o parallelo, per la frequenza di risonanza

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{(L/K_f)(C/K_f)}} = \frac{K_f}{\sqrt{LC}} = K_f \omega_0 \quad (14.84)$$

e per la larghezza di banda

$$B' = K_f B \quad (14.85)$$

ma il fattore di qualità resta lo stesso ($Q' = Q$).

14.9.3 Scaling dei moduli e della frequenza

Se un circuito viene scalato contemporaneamente sia in modulo che in frequenza, allora

$$\begin{aligned} R' &= K_m R, & L' &= \frac{K_m}{K_f} L \\ C' &= \frac{1}{K_m K_f} C, & \omega' &= K_f \omega \end{aligned} \quad (14.86)$$

Queste sono formule più generali di quelle della (14.80) e (14.83). Se non si ha scaling dei moduli, si pone $K_m = 1$ nella (14.86); si pone invece $K_f = 1$ quando non si ha scaling in frequenza.

Esempio 14.14

In Figura 14.48(a) è mostrato un filtro Butterworth passa-basso del quarto ordine. Il filtro è progettato in modo da presentare una frequenza di taglio $\omega_c = 1$ rad/s. Scalare il circuito in modo da ottenere una frequenza di taglio di 50 kHz usando resistori da 10 k Ω .

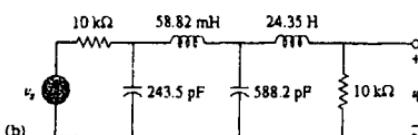
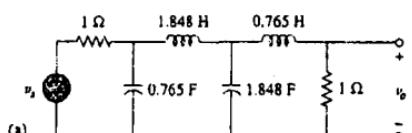


Figura 14.48
Per l'Esempio 14.14:
(a) filtro Butterworth
passa-basso normalizzato,
(b) versione scalata dello stesso
filtro passa-basso.

Soluzione: Se la frequenza di taglio deve passare da $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ a $\omega'_c = 2\pi(50) \text{ krad/s}$, allora il fattore di scala per la frequenza è

$$K_f = \frac{\omega'_c}{\omega_c} = \frac{100\pi \times 10^3}{1} = \pi \times 10^5$$

Inoltre, se ciascuno dei resistori da 1Ω deve essere sostituito da un resistore da $10 \text{ k}\Omega$, allora il fattore di scala dei moduli deve essere

$$K_m = \frac{R'}{R} = \frac{10 \times 10^3}{1} = 10^4$$

Utilizzando la (14.86),

$$L'_1 = \frac{K_m}{K_f} L_1 = \frac{10^4}{\pi \times 10^5} (1.848) = 58.82 \text{ mH}$$

$$L'_2 = \frac{K_m}{K_f} L_2 = \frac{10^4}{\pi \times 10^5} (0.765) = 24.35 \text{ mH}$$

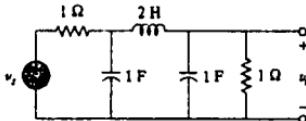
$$C'_1 = \frac{C_1}{K_m K_f} = \frac{0.765}{\pi \times 10^9} = 243.5 \text{ pF}$$

$$C'_2 = \frac{C_2}{K_m K_f} = \frac{1.848}{\pi \times 10^9} = 588.2 \text{ pF}$$

Il circuito scalato è mostrato in Figura 14.48(b). Questo circuito utilizza componenti con valori facilmente reperibili in commercio, ed è in grado di esibire la stessa funzione di trasferimento del prototipo di Figura 14.48(a), ma traslata in frequenza.

■ **Esercizio 14.14** In Figura 14.49 è mostrato un filtro Butterworth del terzo ordine normalizzato a $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. Scalare il circuito fino alla frequenza di taglio di 10 kHz . Utilizzare condensatori da 15 nF .

Figura 14.49
Per l'Esercizio 14.14.



Risposta $R'_1 = R'_2 = 1.061 \text{ k}\Omega$, $C'_1 = C'_2 = 15 \text{ nF}$, $L' = 33.77 \text{ mH}$.

14.10 RISPOSTA IN FREQUENZA CON PSPICE

PSpice si rivela un utilissimo strumento, a disposizione del moderno progettista di circuiti, per ottenere la risposta in frequenza. La risposta in frequenza si ottiene usando lo Sweep AC, presentato nel Paragrafo B.5 (Appendice B). Questa analisi richiede che vengano specificati nella finestra di dialogo AC Sweep i parametri *Total Pts*, *Start Freq*, *End Freq* e il tipo di sweep. *Total Pts* è il numero di punti nello sweep in frequenza, e *Start Freq* e *End Freq* sono, rispettivamente, la frequenza iniziale e finale, in hertz. Per poter conoscere quali sono le frequenze da specificare come *Start Freq* e *End Freq* è necessario avere un'idea dell'intervallo di frequenze di interesse, magari tracciando a mano un diagramma estremamente approssimato della risposta in frequenza. In un circuito complicato, in cui ciò non sia possibile, si può usare un approccio per tentativi. Esistono tre tipi di sweep.

- *Linear*: la frequenza viene fatta variare linearmente da *Start Freq* a *End Freq* con *Total Pts* (o risposte) equispaziati.
- *Octave*: la frequenza viene variata in maniera logaritmica, per ottave, da *Start Freq* a *End Freq* con *Total Pts* punti per ottava. Una ottava corrisponde ad un fattore 2 (ad esempio, da 2 a 4, da 4 a 8, da 8 a 16).

- *Decade*: la frequenza viene variata in maniera logaritmica, per decadi, da *Start Freq* a *End Freq* con *Total* punti per decade. Una decade corrisponde ad un fattore 10 (ad esempio, da 2 Hz a 20 Hz, da 20 Hz a 200 Hz, da 200 Hz a 2 kHz).

È bene fare uso di uno sweep lineare quando si vuole visualizzare un intervallo limitato di frequenze che risultino di particolare interesse, perché lo sweep lineare è in grado di mostrare i dettagli della risposta se l'intervallo di frequenze è limitato. Al contrario, è meglio usare uno sweep logaritmico (per ottime o per decadi) per rappresentare un intervallo di frequenze ampio a cui si è interessati – se viene usato uno sweep lineare su un intervallo ampio, tutti i dati risulteranno ammucchiati all'estremo di bassa o di alta frequenza, e risulteranno invece insufficienti in vicinanza dell'altro estremo. Con le specifiche di cui si è parlato, PSpice esegue una analisi in regime sinusoidale del circuito, facendo variare la frequenza di tutti i generatori indipendenti da *Start Freq* a *End Freq*. Il programma Probe genera poi una uscita grafica. Il tipo di dato prodotto in uscita può essere specificato nella *Trace Command Box*, aggiungendo uno dei suffissi seguenti a V o I:

- M Ampiezza della sinusoide.
- P Fase della sinusoide.
- dB Ampiezza della sinusoide in decibel, cioè $20 \log_{10}$ (ampiezza).

Esempio 14.15

Determinare la risposta in frequenza del circuito mostrato in Figura 14.50.

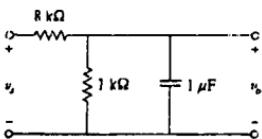


Figura 14.50
Per l'Esempio 14.15.

Soluzione: Si suppone che la tensione di ingresso v_s sia una sinusoide di ampiezza 1 V e fase 0°.

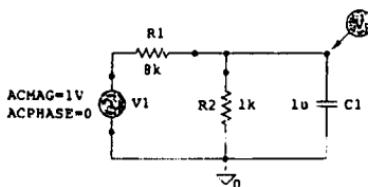


Figura 14.51
Schematoco per il circuito
in Figura 14.50.

La Figura 14.51 riporta lo schematico per il circuito. Il condensatore è stato ruotato di 270° in senso antiorario, facendo in modo che il pin 1 (il terminale positivo) risulti in alto. La sonda di tensione è stata inserita per prelevare la tensione di uscita sul condensatore. Per eseguire uno sweep lineare in frequenza per $1 < f < 1000$ Hz con 50 punti, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep, DCLICK Linear, scrivendo 50 nella casella Total Pts., 1 nella casella Start Freq e 1000 nella casella End Freq. Dopo aver salvato il file, si seleziona Analysis/Simulate per simulare il circuito. Se non ci sono errori, la finestra di Probe mostrerà il grafico di $V(C1:1)$, che coincide con V_o e anche con $H(\omega) = V_o / V_s$, come mostrato in Figura 14.52(a). Questo è il grafico del modulo, perché specificare $V(C1:1)$ è lo stesso che specificare $VM(C1:1)$. Per ottenere il grafico della fase, si seleziona Trace/Add nel menu PSpice A/D e si scrive $VP(C1:1)$ nella casella Trace Command. La Figura 14.52(b) mostra il risultato. Mediante il calcolo manuale, la funzione di trasferimento risulta

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1000}{9000 + j\omega 8}$$

cioè

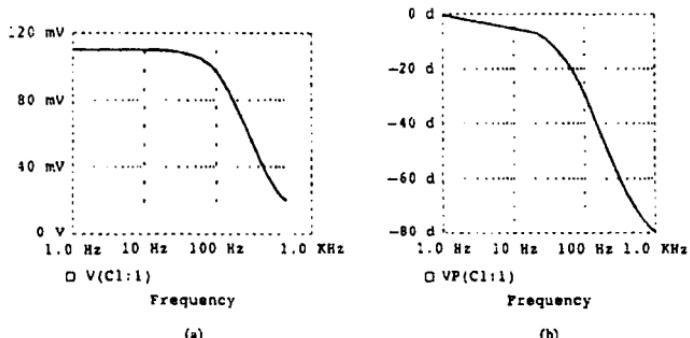
$$H(\omega) = \frac{1}{9 + j16\pi \times 10^{-3}}$$

e quindi il circuito è un filtro passa-basso, come confermato dalla Figura 14.52. Si noti che i grafici in Figura 14.52 sono simili a quelli in Figura 14.3.

Figura 14.52

Per l'Esempio 14.15:

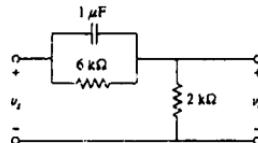
- (a) diagramma del modulo.
- (b) diagramma della fase della risposta in frequenza



■ **Esercizio 14.15** Ottenere la risposta in frequenza del circuito in Figura 14.53 utilizzando PSpice. Eseguire uno sweep lineare in frequenza con valori $1 < f < 1000$ Hz e 100 punti.

Figura 14.53

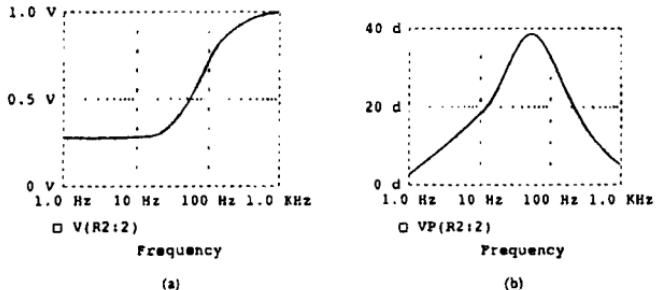
Per l'Esercizio 14.15.



Risposta: Si veda la Figura 14.54.

Figura 14.54

Per l'Esercizio 14.15: (a) diagramma del modulo, (b) diagramma della fase della risposta in frequenza.

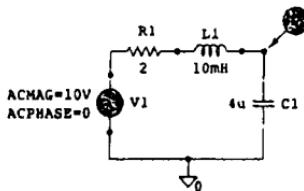


Esempio 14.16

Usare PSpice per generare i diagrammi di Bode del guadagno e della fase di V_o nel circuito di Figura 14.55.

Figura 14.55

Per l'Esempio 14.16



Soluzione: Il circuito esaminato nell'Esempio 14.15 era del primo ordine mentre quello presentato in questo esempio è del secondo ordine. Poiché si è interessati ai diagrammi di Bode, si utilizzerà

uno sweep in frequenza decadico con $300 < f < 3000$ Hz e 50 punti per decade. È stato scelto questo intervallo di frequenze perché si sa che la frequenza di risonanza del circuito cade all'interno dell'intervallo stesso. Si ricordi che

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \text{ krad/s} \quad \text{e quindi} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 795.8 \text{ Hz}$$

Dopo avere disegnato il circuito come in Figura 14.55, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep, DCLICK Decade, si scrive 50 nella casella Total Pts., 300 nella casella Start Freq e 3000 nella casella End Freq. Dopo aver salvato il file, lo si simula selezionando Analysis/Simulate. Questa operazione farà comparire automaticamente la finestra PSpice A/D con il grafico di $V(C1:1)$, se non sono stati riscontrati errori. Poiché si vogliono i diagrammi di Bode, si seleziona Trace/Add nel menu PSpice A/D e si scrive $\text{dB}(V(C1:1))$ nella casella Trace Command. Il risultato è il diagramma di Bode del modulo, mostrato in Figura 14.56(a). Per il diagramma della fase, si seleziona Trace/Add nel menu PSpice A/D e si scrive $\text{VP}(C1:1)$ nella casella Trace Command. Il risultato è il diagramma di Bode della fase mostrato in Figura 14.56(b). Si noti che i grafici confermano il valore della frequenza di risonanza di 795.8 Hz.

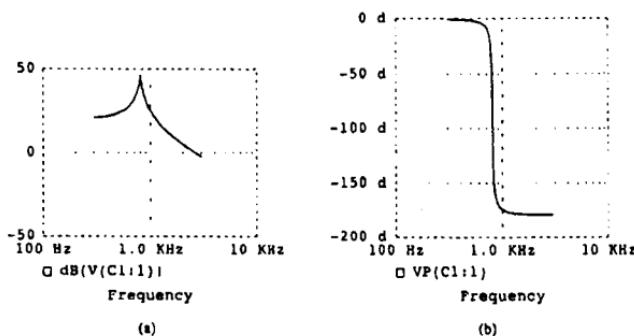


Figura 14.56
Per l'Esempio 14.16
(a) diagramma di Bode del modulo, (b) diagramma della fase della risposta in frequenza.

■ **Esercizio 14.16** Si consideri la rete di Figura 14.57. Si utilizzi PSpice per ottenere i diagrammi di Bode per V_o alle frequenze da 1 kHz fino a 100 kHz, usando 20 punti per decade.

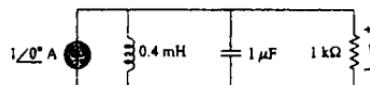


Figura 14.57
Per l'Esercizio 14.16

Risposta: Si veda la Figura 14.58.

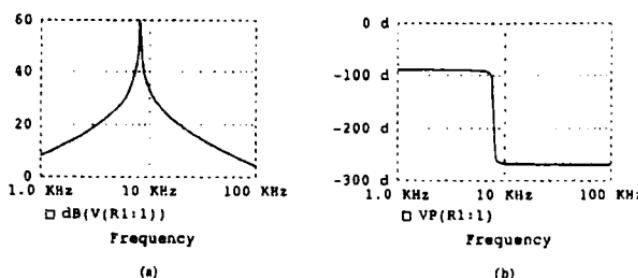


Figura 14.58
Per l'Esercizio 14.16: (a) diagramma di Bode del modulo, (b) diagramma della fase.

14.11 CALCOLO USANDO MATLAB

MATLAB è un software applicativo largamente usato in ambito ingegneristico per calcoli e simulazioni. Un richiamo su **MATLAB** è presentato nell'Appendice E per chi inizia. Questo paragrafo illustra come usare il software per eseguire molte operazioni matematiche presentate in questo capitolo.

La chiave per definire un sistema in *MATLAB* è di specificare il numeratore (*num*) e il denominatore (*den*) della funzione di trasferimento del sistema. Una volta che questo è stato fatto, si possono usare vari comandi di *MATLAB* per ottenere i diagrammi di Bode del sistema (risposta in frequenza), e la risposta del sistema ad un determinato segnale di ingresso.

Il comando *bode* traccia i diagrammi di Bode (ampiezza e fase), di una determinata funzione di trasferimento $H(s)$. La sintassi del comando è *bode (num, den)*, dove *num* è il numeratore di $H(s)$ e *den* è il suo denominatore. L'intervallo di frequenze e il numero di punti vengono determinati automaticamente.

Per esempio, si consideri la funzione di trasferimento dell'Esempio 14.3.

È meglio scrivere prima il numeratore e il denominatore in forma polinomiale.

Perciò:

$$H(s) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)} = \frac{200s}{s^2 + 12s + 20}, \quad s = j\omega$$

Mediante i seguenti comandi si ottengono i diagrammi di Bode come mostrato in Figura 14.59. Se necessario si può inserire il comando *logspace* per generare una scala logaritmica delle frequenze, e il comando *semilogx* può essere usato per produrre una scala semilogaritmica.

```
>> num = [200 0]; %specifica il numeratore di H(s)
>> den = [1 12 20]; %specifica il denominatore di H(s)
>> bode (num, den); %determina e traccia i diagrammi di Bode
```

La risposta al gradino $y(t)$ di un sistema rappresenta la sua uscita quando in ingresso c'è un gradino unitario.

Il comando *step* traccia la risposta al gradino di un sistema, noti il numeratore e il denominatore della funzione di trasferimento del sistema stesso.

Per esempio si consideri un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{12}{s^2 + 3s + 12}$$

Si ottiene la risposta al gradino del sistema mostrata in Figura 14.60 usando i seguenti comandi:

```
>> n = 12; %specifica il numeratore
>> d = [1 3 12]; %specifica il denominatore
>> step (n, d); %traccia la risposta al gradino
```

Si può verificare il grafico di Figura 14.60 ricavando $y(t) = x(t) * u(t)$ oppure $Y(s) = X(s)H(s)$.

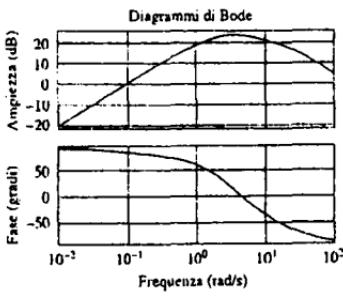


Figura 14.59
Diagrammi di ampiezza e fase.

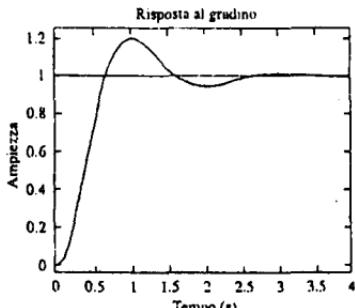


Figura 14.60
Risposta al gradino di $H(s) \approx 12/(s^2 + 3s + 12)$.

Il comando `lsim` è più completo rispetto al comando `step`. Esso calcola la risposta nel dominio del tempo di un sistema con un segnale di ingresso qualsiasi. La sintassi del comando è `y = bode (num, den, x, t)`, dove $x(t)$ è il segnale di ingresso, t è il vettore dei tempi, e $y(t)$ è l'uscita prodotta.

Per esempio, si consideri un sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s + 4}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10}$$

Per determinare la risposta $y(t)$ del sistema con ingresso $x(t) = 10e^{-t}u(t)$, si usano i seguenti comandi *MATLAB*:

```
>> t = 0:0.02:5; % vettore dei tempi 0 < t < 5 con incremento
                  % pari a 0.02
>> x = 10 * exp (-t); % ingresso esponenziale
>> num = [1 4];
>> den = [1 2 5 10]; % determina la risposta del sistema
>> y = lsim(num,den,x,t); % traccia il grafico della risposta
>> plot(t,x,t,y) % del sistema
```

I grafici della risposta $y(t)$ e dell'ingresso $x(t)$ sono mostrati in Figura 14.61.

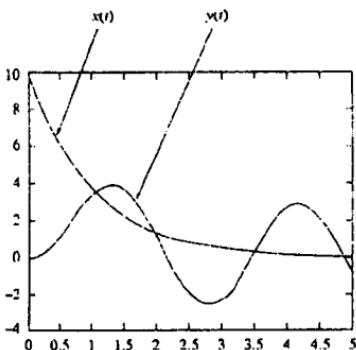


Figura 14.61

Risposta del sistema descritto da $H(s) = (s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 5s + 10)$ ad un ingresso esponenziale

14.12 APPLICAZIONI

I circuiti risonanti e i filtri trovano larghissimo uso in tutta l'ingegneria elettrica, ed in particolare in elettronica, nei sistemi di potenza e in quelli delle telecomunicazioni. Ad esempio, un filtro notch con frequenza di taglio superiore pari a 50 Hz può essere impiegato per eliminare il rumore a 50 Hz (60 Hz negli Stati Uniti), dovuto alla linea elettrica di alimentazione, presente in vari apparecchi elettronici per le comunicazioni. Il filtraggio dei segnali nei sistemi di telecomunicazione è necessario al fine di selezionare il segnale desiderato entro una moltitudine di altri segnali nello stesso intervallo di frequenze (come nel caso dei ricevitori che verranno presentati fra poco), ed anche per minimizzare gli effetti del rumore e delle interferenze sul segnale desiderato. Nel presente paragrafo vengono presentate: una applicazione pratica dei circuiti risonanti e due applicazioni dei filtri. L'obiettivo di ciascuna presentazione non è quello di comprendere i dettagli del funzionamento delle apparecchiature, ma bensì di mostrare come i circuiti considerati in questo capitolo possono trovare applicazione nei sistemi della pratica.

14.12.i Ricevitore radio

I circuiti risonanti serie o parallelo vengono comunemente usati nei ricevitori radio e TV, per sintonizzarsi sulle stazioni e per separare il segnale audio dall'onda portante a radiofrequenza. Come esempio, si consideri lo schema a blocchi di un ricevitore radio AM, mostrato in Figura 14.62. Le onde radio entranti, modulate in ampiezza (migliaia di onde a frequenze differenti provenienti da differenti stazioni trasmesse), vengono ricevute dall'antenna. È necessario un circuito risonante (o filtro passa-banda) per selezionare soltanto una delle onde entranti. Il segnale selezionato è molto debole e viene amplificato lungo vari stadi, al fine di generare un'onda udibile ad audiofrequenza. Si ha quindi un amplificatore a radiofrequenza (RF) per amplificare il segnale di trasmissione selezionato, un amplificatore a frequenza intermedia (IF) per amplificare un segnale generato internamente sulla base del segnale RF, e l'amplificatore audio per amplificare il segnale audio poco prima che raggiunga l'altoparlante. È molto più facile amplificare il segnale in tre stadi invece di costruire un amplificatore che fornisca la stessa amplificazione per tutta la banda di frequenze.

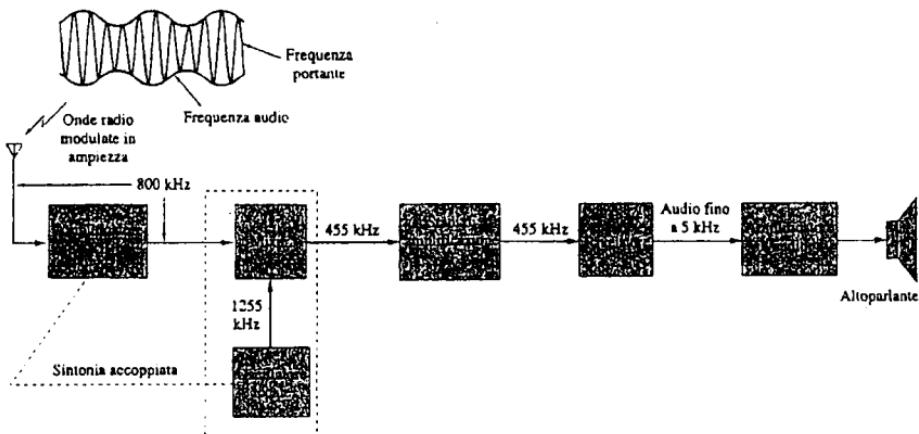


Figura 14.62
Diagramma a blocchi semplificato di un ricevitore radio AM supereterodina.

Il ricevitore AM mostrato in Figura 14.62 è del tipo noto come *ricevitore supereterodina*. Nei primi anni dello sviluppo della radio, ciascuno stadio di amplificazione doveva venire sintonizzato sulla frequenza del segnale entrante. In questo modo, ciascuno stadio doveva possedere circuiti accordati per coprire tutta la banda AM (da 540 a 1600 kHz). Per eliminare il problema dei troppi circuiti risonanti, i ricevitori moderni utilizzano un *mixer di frequenze* o circuito *eterodina*, che produce sempre lo stesso segnale IF (445 kHz), ma preserva le frequenze audio trasportate dal segnale in ingresso. Per produrre una frequenza IF costante, i rotori di due condensatori variabili separati vengono accoppiati meccanicamente tra loro in modo che possano venire ruotati simultaneamente con una singola manopola; questo sistema è detto *sintonia accoppiata*. Un *oscillatore locale*, accoppiato all'amplificatore RF, produce un segnale RF che viene combinato con l'onda entrante dal mixer di frequenze, e produce un segnale in uscita che contiene le frequenze somma e differenza dei due segnali. Ad esempio, se il circuito risonante è accordato per ricevere un segnale in ingresso di 800 kHz, l'oscillatore locale deve produrre un segnale a 1255 kHz, in modo che la somma (1255 + 800 = 2055 kHz) e la differenza (1255 - 800 = 455 kHz) delle frequenze risultino disponibili all'uscita del mixer. Tuttavia, solo la differenza, 455 kHz, viene poi utilizzata. Questa è l'unica frequenza sulla quale sono accordati tutti gli stadi di amplificazione IF, indipendentemente dalla stazione radio sintonizzata. Il segnale audio originale (contenente l'"intelligenza") viene estratto nello stadio rivelatore. Il rivelatore, sostanzialmente, rimuove il segnale IF, lasciando il solo segnale audio, che viene poi amplificato per poter pilotare l'altoparlante, che agisce da trasduttore che converte il segnale elettrico in suono. Il nostro interesse principale si rivolge al circuito di sintonia per il ricevitore radio AM. Il funzionamento di un ricevitore radio FM è diverso da

quello del ricevitore AM qui presentato, che opera inoltre in un intervallo di frequenze molto diverso, ma il funzionamento della sintonia è molto simile.

Esempio 14.17

In Figura 14.63 è mostrato il circuito risonante o di sintonia di un ricevitore radio AM. Data $L = 1\mu\text{H}$, quale deve essere l'intervallo di valori di C in modo che la frequenza di risonanza possa assumere i valori agli estremi della banda AM?

Soluzione: L'intervallo di frequenze delle trasmissioni radio in AM è da 540 a 1600 kHz. Si considerano quindi gli estremi superiore e inferiore della banda. Poiché il circuito risonante in Figura 14.60 è di tipo parallelo, si applicano le formule del Paragrafo 14.6. Dalla (14.44),

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

da cui

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$$

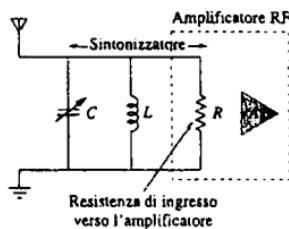


Figura 14.63
Circuito di sintonia per l'Esempio 14.17.

Nell'estremo superiore della banda AM, $f_0 = 1600 \text{ kHz}$, e il valore corrispondente di C è

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \times 1600^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 9.9 \text{ nF}$$

All'estremo inferiore della banda AM, $f_0 = 540 \text{ kHz}$, e il corrispondente valore di C è

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 \times 540^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 86.9 \text{nF}$$

Riepilogando, C deve essere un condensatore variabile in grado di assumere valori da 9.9 nF a 86.9 nF.

Esercizio 14.17 Per un ricevitore radio FM, l'onda in ingresso cade nell'intervallo di frequenze da 88 a 108 MHz. Il circuito di sintonia è un circuito RLC parallelo con una bobina da $4\mu\text{H}$. Calcolare l'intervallo di valori per un condensatore variabile in grado di coprire l'intera banda.

Risposta Da 0.543 pF a 0.818 pF. ■

14.12.2 Telefono multifrequenza

Una applicazione tipica del filtraggio si ha nell'apparecchio telefonico multifrequenza mostrato in Figura 14.64. La tastiera consta di 12 tasti, disposti su quattro righe e tre colonne. L'apparecchio fornisce 12 segnali distinti usando sette toni divisi in due gruppi: il gruppo a bassa frequenza (da 697 a 941 Hz) e il gruppo ad alta frequenza (da 1209 a 1477 Hz). La pressione di un tasto produce una somma di due sinusoidi, corrispondente ad una distinta coppia di frequenze. Ad esempio, premendo il tasto 6 si generano due toni sinusoidali con frequenze 770 Hz e 1477 Hz.

Quando un utente seleziona un numero telefonico, viene trasmesso un insieme di segnali alla centralina, nella quale i segnali in multifrequenza vengono decodificati, riconoscendo le frequenze in essi contenute. La Figura 14.65 mostra un diagramma a blocchi dello schema di rivelazione. I segnali vengono dapprima amplificati e separati nei rispettivi gruppi dai filtri passa-basso (LP) e passa-alto (HP). I limitatori (L) ven-

gono usati per convertire i toni ormai separati in onde quadre. I singoli toni vengono identificati mediante sette filtri passa-banda (BP), in cui ciascun filtro fa passare un tono e rigetta gli altri. Ciascun filtro è seguito da un rivelatore (detector, D), che si attiva quando la sua tensione di ingresso supera un dato livello. Le uscite dei rivelatori forniscono i segnali in corrente continua necessari al sistema di commutazione per collegare l'utente con il numero chiamato.

Figura 14.64

Assegnamento delle frequenze per la selezione in multifrequenza. (Adapted from G. Daryanani, *Principles of Active Network Synthesis and Design* [New York: John Wiley & Sons], 1976, p. 79.)

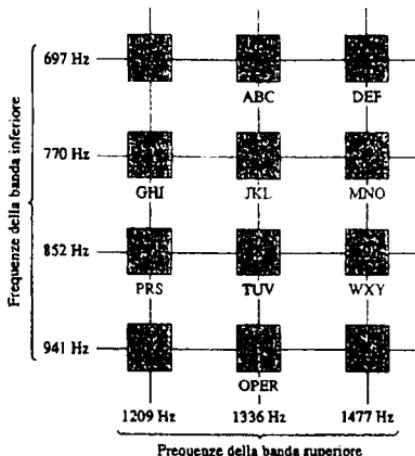
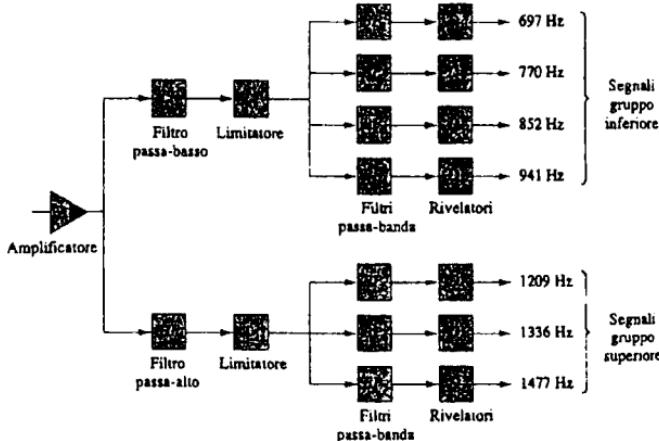


Figura 14.65

Diagramma a blocchi dello schema di rivelazione. (Source: G. Daryanani, *Principles of Active Network Synthesis and Design* [New York: John Wiley & Sons], 1976, p. 79.)



Esempio 14.18

Progettare il filtro passa-banda BP_2 in Figura 14.65, utilizzando il resistore standard da 600Ω usato nei circuiti telefonici ed un circuito RLC serie.

Soluzione: Il filtro passa-banda è il circuito RLC serie di Figura 14.35. Poiché BP_2 fa passare le frequenze da 697 Hz a 852 Hz ed è centrato in $f_0 = 770$ Hz, la sua larghezza di banda è

$$B = 2\pi(f_2 - f_1) = 2\pi(852 - 697) = 973.89 \text{ rad/s}$$

Dalla (14.39),

$$L = \frac{R}{B} = \frac{600}{973.89} = 0.616 \text{ H}$$

Dalla (14.27) o (14.57),

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \times 770^2 \times 0.616} = 69.36 \text{ nF}$$

■ **Esercizio 14.18** Ripetere l'Esempio 14.18 per il filtro passa-banda BP_b .

Risposta 0.356 H, 39.83 nF.

14.12.3 Circuito crossover

Un'altra applicazione tipica dei filtri è il circuito *crossover*, che serve ad accoppiare un amplificatore audio a degli altoparlanti di tipo woofer o tweeter, come mostrato in Figura 14.66(a). Il circuito consiste sostanzialmente di un filtro RC passa-alto e di un filtro RL passa-basso, ed inistra le frequenze superiori ad una frequenza prefissata di crossover f_c al tweeter (altoparlante per le alte frequenze) e le frequenze al di sotto di f_c al woofer (altoparlante per le basse frequenze). Questi altoparlanti sono progettati per avere risposte in frequenza particolari. Un woofer è un altoparlante per basse frequenze, progettato per riprodurre accuratamente la parte bassa dell'intervallo di frequenze audio, fino a circa 3 kHz. Un tweeter è in grado di riprodurre le frequenze audio da circa 3 kHz fino a circa 20 kHz. I due tipi di altoparlante possono essere combinati in un sistema per la riproduzione dell'intera gamma audio di interesse, fornendo una risposta in frequenza ottimale.

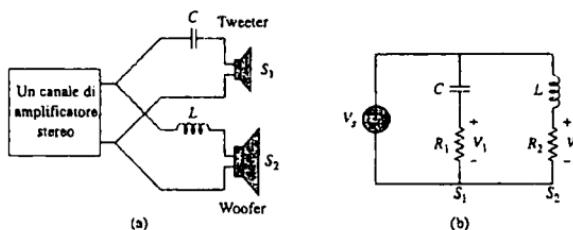


Figura 14.66
(a) Circuito crossover per due altoparlanti.
(b) modello equivalente.

Sostituendo l'amplificatore con un generatore di tensione, il circuito equivalente approssimato del crossover è mostrato in Figura 14.66(b), nella quale gli altoparlanti sono stati modellati con dei resistori. Come filtro passa-alto, la funzione di trasferimento V_1/V_s è data da

$$H_1(\omega) = \frac{V_1}{V_s} = \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} \quad (14.87)$$

In maniera simile, la funzione di trasferimento del filtro passa-basso è data da

$$H_2(\omega) = \frac{V_2}{V_s} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \quad (14.88)$$

I valori di R_1 , R_2 , L e C possono essere scelti in modo che i due filtri abbiano la stessa frequenza di taglio, chiamata anche *frequenza di crossover*, come mostrato in Figura 14.67.

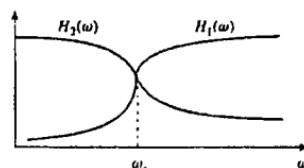


Figura 14.67
Risposte in frequenza del crossover in Figura 14.66.

Il principio che sta alla base del crossover viene usato anche nel circuito risonante di un ricevitore TV, nel quale è necessario separare le bande video e audio dalle frequenze RF portanti. La banda a bassa frequenza (informazione sull'immagine, nell'intervallo che va da circa 30 Hz a circa 4 MHz) viene instradata verso l'amplificatore video del ricevitore, mentre la banda ad alta frequenza (informazione audio, a circa 4.5 MHz) viene instradata all'amplificatore audio.

Esempio 14.19

Nel circuito crossover di Figura 14.66, suppone che ciascun altoparlante si comporti come una resistenza da 6Ω . Determinare C e L se la frequenza di crossover deve essere 2.5 kHz.

Soluzione: Per il filtro passa-alto,

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{R_1 C}$$

da cui

$$C = \frac{1}{2\pi f_c R_1} = \frac{1}{2\pi \times 2.5 \times 10^3 \times 6} = 10.61 \mu F$$

Per il filtro passa-basso,

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{R_2}{L}$$

da cui

$$L = \frac{R_2}{2\pi f_c} = \frac{6}{2\pi \times 2.5 \times 10^3} = 382 \mu H$$

■ **Esercizio 14.19** Se entrambi gli altoparlanti in Figura 14.66 hanno una resistenza di 8Ω e $C = 10 \mu F$, determinare L e la frequenza di crossover.

Risposta 0.64 mH, 1.989 kHz. ■

SOMMARIO

- La funzione di trasferimento $H(\omega)$ è il rapporto tra la risposta di uscita $Y(\omega)$ e l'eccitazione di ingresso $X(\omega)$; cioè $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$.
- La risposta in frequenza è la variazione della funzione di trasferimento con la frequenza.
- Gli zero della funzione di trasferimento $H(\omega)$ sono i valori di $s = j\omega$ che rendono nulla $H(s)$, mentre i poli sono i valori di s per i quali $H(s)$ tende a infinito.
- Il decibel è l'unità di misura del logaritmo del guadagno. L'equivalente in decibel del guadagno di tensioni e correnti, è $G_{dB} = 20 \log_{10} G$.
- I diagrammi di Bode sono grafici semilogaritmici del modulo e della fase della funzione di trasferimento in funzione della frequenza. Si possono tracciare grafici lineari approssimati a tratti di H (modulo in dB) e ϕ (fase in gradi), usando le frequenze di taglio definite da poli e zeri di $H(\omega)$.
- La frequenza di risonanza è quella frequenza che annulla la parte immaginaria della funzione di trasferimento. Per circuiti RLC serie e parallelo si ha:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Le frequenze di metà potenza (ω_1, ω_2) sono quelle frequenze in cui la potenza dissipata è metà del valore massimo, cioè del valore dissipato alla frequenza

di risonanza. La media geometrica tra le frequenze di metà potenza è la frequenza di risonanza

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

- 8) La larghezza di banda è la differenza fra le frequenze di metà potenza:

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

- 9) Il fattore di qualità è la misura della precisione del picco di risonanza. Esso è il rapporto tra la frequenza di risonanza e la larghezza di banda:

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

- 10) Un filtro è un circuito progettato per lasciare passare una banda di frequenze e bloccare le altre. I filtri passivi sono costruiti con resistori, condensatori e induttori. I filtri attivi sono costruiti con resistori, condensatori e un elemento attivo, in genere un amplificatore operazionale.

- 11) I quattro tipi fondamentali di filtri sono passa-basso, passa-alto, passa-banda e arresta-banda. Un filtro passa-basso lascia passare solo segnali con frequenze inferiori alla frequenza di taglio ω_c . Un filtro passa-alto lascia passare solo segnali con frequenze maggiori della frequenza di taglio ω_c . Un filtro passa-banda lascia passare solo segnali con frequenze all'interno di un certo intervallo ($\omega_1 < \omega < \omega_2$). Un filtro arresta-banda lascia passare solo segnali con frequenze al di fuori di un prefissato intervallo ($\omega < \omega_1$ e $\omega > \omega_2$).

- 12) Lo scaling è l'operazione per mezzo della quale i valori non realistici di elementi circuituali sono scalati in modulo di un fattore K_m e/o scalati in frequenza di un fattore K_f per ottenere valori realistici.

$$R = K_m R; \quad L = \frac{K_m}{K_f} L; \quad C = \frac{1}{K_m K_f} C$$

- 13) PSpice può essere usato per ottenere la risposta in frequenza di un circuito, dopo aver specificato, nella finestra di dialogo AC Sweep, l'intervallo di frequenza per la risposta e il numero di punti all'interno dell'intervallo.

- 14) Il ricevitore radio è un'applicazione pratica dei circuiti risonanti, e fa uso di un circuito risonante passa-banda per sintonizzarsi ad una stazione radio, fra tutti i segnali di trasmissione ricevuti dall'antenna.

- 15) Il telefono multifrequenza e il circuito di crossover sono due tipiche applicazioni dei filtri. Il telefono multifrequenza fa uso di filtri per dividere i toni di diverse frequenze per azionare interruttori elettronici. Il circuito di crossover divide i segnali in differenti intervalli di frequenze affinché si possano trasferire a diversi dispositivi come tweeter e woofer di un sistema di altoparlanti.

DOMANDE DI RIEPILOGO

- 14.1 Uno zero della funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

si trova in

- (a) 10 (b) -1 (c) -2 (d) -3

- 14.2 In un diagramma di Bode del modulo, la pendenza del polo $1/(s+j\omega)^2$ è

- (a) 20 dB/decade (b) 40 dB/decade
(c) -40 dB/decade (d) -20 dB/decade

- 14.3 In un diagramma di Bode della fase per $0.5 < \omega < 50$, la pendenza di $[1 + j10\omega - \omega^2/25]^2$ è

- (a) 45°/decade (b) 90°/decade
(c) 135°/decade (d) 180°/decade

- 14.4 Qual è il valore dell'induttanza necessario per andare in risonanza a 5 kHz con una capacità di 12 nF?

- (a) 2652 H (b) 11.844 H
(c) 3.333 H (d) 84.43 mH

- 14.5 La differenza delle frequenze di metà potenza è detta:
 (a) fattore di qualità (b) frequenza di risonanza
 (c) larghezza di banda (d) frequenza di taglio
- 14.6 In un circuito *RLC* serie, quale dei seguenti fattori di qualità dà luogo alla curva con pendenza maggiore alla risonanza?
 (a) $Q = 20$ (b) $Q = 12$
 (c) $Q = 8$ (d) $Q = 4$
- 14.7 In un circuito *RLC* parallelo, la larghezza di banda B è direttamente proporzionale ad R .
 (a) Vero (b) Falso
- 14.8 Quando gli elementi di un circuito *RLC* vengono scalati sia in modulo che in frequenza, quale proprietà rimane invariata?
 (a) resistenza (b) frequenza di risonanza
- 14.9 Quale tipo di filtro può essere usato per selezionare il segnale di una particolare stazione radio?
 (a) passa-basso (b) passa-alto
 (c) passa-banda (d) arresta-banda
- 14.10 Un generatore di tensione fornisce un segnale di ampiezza costante, da 0 a 40 kHz, ad un filtro *RC* passa-basso. Il resistore di carico raggiunge la massima tensione a:
 (a) regime stazionario (b) 10 kHz
 (c) 20 kHz (d) 40 kHz

Risposte: 14.1b, 14.2c, 14.3d, 14.4d, 14.5c, 14.6a, 14.7b, 14.8d, 14.9c, 14.10a

PROBLEMI

Paragrafo 14.2 Funzione di trasferimento

- 14.1 Calcolare la funzione di trasferimento V_o/V_i del circuito *RC* in Figura 14.68. Esprimere il risultato in funzione di $\omega_0 = 1/RC$.

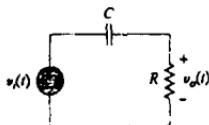


Figura 14.68 Per il Problema 14.1.

- 14.2 Ottenere la funzione di trasferimento V_o/V_i del circuito di Figura 14.69.

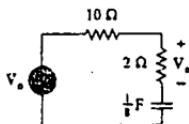


Figura 14.69 Per il Problema 14.2.

- 14.3 Per il circuito di Figura 14.70, calcolare $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

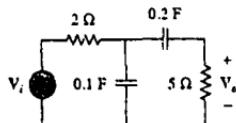
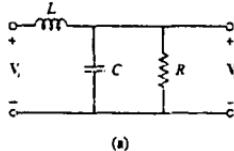
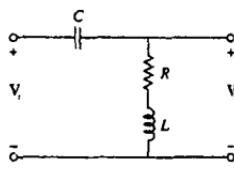


Figura 14.70 Per il Problema 14.3.

- 14.4 Determinare la funzione di trasferimento $H(\omega) = V_o/V_i$ dei circuiti mostrati in Figura 14.71.



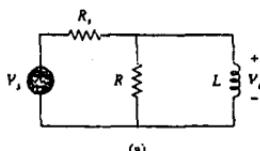
(a)



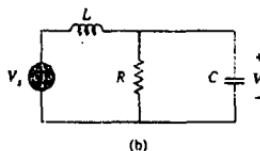
(b)

Figura 14.71 Per il Problema 14.4.

- 14.5 Per ciascuno dei circuiti di Figura 14.72 calcolare $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.



(a)



(b)

Figura 14.72 Per il Problema 14.5.

- 14.6 Per il circuito di Figura 14.73, calcolare $H(s) = I_o(s)/I_e(s)$.

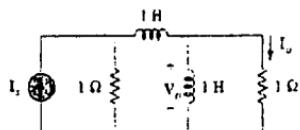


Figura 14.73 Per il Problema 14.6.

Paragrafo 14.3 La scala dei decibel

- 14.7 Calcolare $|H(\omega)|$ se H_{dB} vale

- (a) 0.05 dB
- (b) -6.2 dB
- (c) 104.7 dB

- 14.8 Determinare il modulo (in dB) e la fase (in gradi) di $H(\omega)$ per $\omega = 1$ se $H(\omega)$ vale

- (a) 0.05
- (b) 125
- (c) $\frac{10j\omega}{2+j\omega}$
- (d) $\frac{3}{1+j\omega} + \frac{6}{2+j\omega}$

Paragrafo 14.4 Diagrammi di Bode

- 14.9 Un rete a scala ha un guadagno di tensione pari a

$$H(\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

Tracciare i diagrammi di Bode del guadagno

- 14.10 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase di:

$$H(j\omega) = \frac{50}{j\omega(5+j\omega)}$$

- 14.11 Tracciare i diagrammi di Bode per

$$H(j\omega) = \frac{10+j\omega}{j\omega(2+j\omega)}$$

- 14.12 Un funzione di trasferimento ha espressione

$$T(s) = \frac{s+1}{s(s+10)}, \quad s = j\omega$$

Tracciare i diagrammi di Bode di ampiezza e fase.

- 14.13 Costruire i diagrammi di Bode per

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)}, \quad s = j\omega$$

- 14.14 Tracciare i diagrammi di Bode per

$$H(\omega) = \frac{50(\omega+1)}{j\omega(\omega^2+10j\omega+25)}$$

- 14.15 Costruire i diagrammi di Bode di ampiezza e fase per

$$H(s) = \frac{40(s+1)}{(s+2)(s+10)}, \quad s = j\omega$$

- 14.16 Disegnare i diagrammi di Bode di ampiezza e fase per

$$H(s) = \frac{10}{s(s^2+s+16)}, \quad s = j\omega$$

- 14.17 Tracciare i diagrammi di Bode per

$$G(s) = \frac{s}{(s+2)^4(s+1)}, \quad s = j\omega$$

- 14.18 Un circuito lineare ha la seguente funzione di trasferimento

ML

$$H(s) = \frac{7s^2 + s + 4}{s^3 + 8s^2 + 14s + 5}, \quad s = j\omega$$

Usare MATLAB oppure un software equivalente per disegnare i diagrammi di Bode di ampiezza e fase (in gradi) della funzione di trasferimento. Si consideri $0.1 < \omega < 10$ rad/s.

- 14.19 Disegnare i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase per

$$H(s) = \frac{100s}{(s+10)(s+20(s+40))}, \quad s = j\omega$$

- 14.20 Disegnare i diagrammi di Bode di ampiezza e fase per

$$H(j\omega) = \frac{100j\omega}{(j\omega+1)(j\omega+5)^2(j\omega+40)}$$

- 14.21 Disegnare il diagramma di Bode dell'ampiezza per

$$H(s) = \frac{s(s+20)}{(s+1)(s^2+60s+400)}, \quad s = j\omega$$

- 14.22 Determinare la funzione di trasferimento $H(\omega)$ avente il diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 14.74.

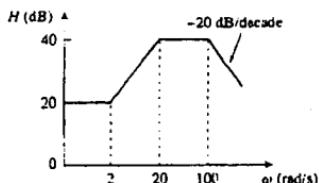


Figura 14.74 Per il Problema 14.22.

- 14.23 Il diagramma di Bode del modulo di $H(\omega)$ è mostrato in Figura 14.75. Determinare $H(\omega)$.

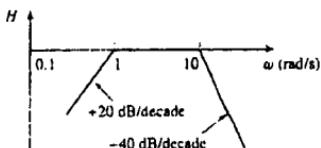


Figura 14.75 Per il Problema 14.23.

- 14.24 Il diagramma delle ampiezze di Figura 14.76 rappresenta la funzione di trasferimento di un preamplificatore. Calcolare $H(s)$.

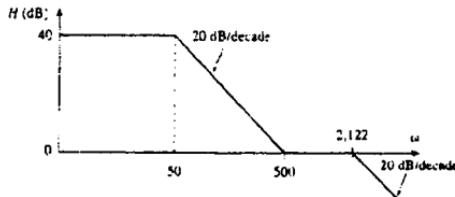


Figura 14.76 Per il Problema 14.24.

Paragrafo 14.5 Risonanza serie

- 14.25 Una rete *RLC* serie ha $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 40 \text{ mH}$ e $C = 1 \mu\text{F}$. Calcolare l'impedenza alla risonanza e alle frequenze un quarto, metà, doppia e quattro volte la frequenza di risonanza.
- 14.26 Una bobina con resistenza di 3Ω e induttanza di 100 mH è collegata in serie con un condensatore di 50 pF , un resistore di 6Ω , ed un generatore di segnale che fornisce 110 V (eff) a tutte le frequenze. Calcolare ω_0 , Q e B alla frequenza di risonanza del circuito *RLC* equivalente serie.
- 14.27 Progettare un circuito *RLC* serie risonante con $\omega_0 = 40 \text{ rad/s}$ e $B = 10 \text{ rad/s}$.
- 14.28 Progettare un circuito *RLC* serie con $B = 20 \text{ rad/s}$ e $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$. Calcolare il Q del circuito.
- 14.29 Si consideri $v_s = 20 \cos(\omega t) \text{ V}$ per il circuito di Figura 14.77. Calcolare ω_0 , Q e B visti dal condensatore.

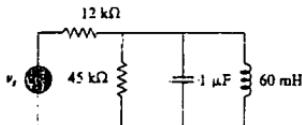


Figura 14.77 Per il Problema 14.29.

- 14.30 Un circuito è costituito da una bobina di induttanza 10 mH e resistenza 20Ω , collegata in serie con un condensatore e un generatore con una tensione efficace pari a 100 V . Calcolare:
- il valore del condensatore che porterà il circuito in risonanza alla frequenza di 15 kHz ;
 - la corrente che scorre nell'induttanza alla frequenza di risonanza;
 - il fattore di qualità Q del circuito.

Paragrafo 14.6 Risonanza parallelo

- 14.31 Progettare un circuito *RLC* risonante parallelo con $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ e $Q = 20$. Calcolare la larghezza di banda del circuito.
- 14.32 Un circuito *RLC* parallelo ha i seguenti valori: $R = 60 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 50 \mu\text{F}$. Calcolare il fattore di qualità, la frequenza di risonanza e la larghezza di banda del circuito *RLC*.
- 14.33 Un circuito risonante parallelo con fattore di qualità 120 ha una frequenza di risonanza di $6 \times 10^6 \text{ rad/s}$. Calcolare la larghezza di banda e le frequenze di metà potenza

14.34 Un circuito *RLC* parallelo va in risonanza a 5.6 MHz , ha un Q di 80 ed il ramo resistivo è di $40 \text{ k}\Omega$. Determinare i valori di L e C negli altri due rami.

- 14.35 Un circuito *RLC* parallelo ha $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 8 \text{ mH}$ e $C = 60 \mu\text{F}$. Determinare:
- la frequenza di risonanza
 - la larghezza di banda
 - il fattore di qualità

14.36 Si desidera che un circuito *RLC* risonante parallelo abbia una ammettenza di centro banda di $25 \times 10^3 \text{ S}$, fattore di qualità 80 e frequenza di risonanza di 200 rad/s . Calcolare i valori di R , L e C . Determinare la larghezza di banda e le frequenze di metà potenza.

- 14.37 Ripetere il Problema 14.25 se gli elementi sono collegati in parallelo.
- 14.38 Determinare la frequenza di risonanza del circuito in Figura 14.78.

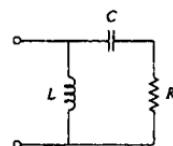


Figura 14.78 Per il Problema 14.38.

14.39 Determinare la frequenza di risonanza per il circuito "serbatoio" di Figura 14.79.

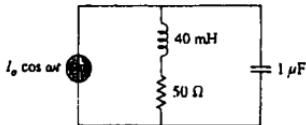


Figura 14.79 Per i Problemi 14.39 e 14.91.

- 14.40 Un circuito risonante parallelo ha una resistenza di $2 \text{ k}\Omega$ e frequenze di metà potenza di 86 kHz e 90 kHz . Determinare:
- la capacità
 - l'induttanza
 - la frequenza di risonanza
 - la larghezza di banda
 - il fattore di qualità

14.41 Per il circuito mostrato in Figura 14.80:

- Calcolare la frequenza di risonanza ω_0 , il fattore di qualità Q e la larghezza di banda B .
- Quale valore di capacità bisogna collegare in serie al condensatore da $20 \mu\text{F}$ per raddoppiare la larghezza di banda?

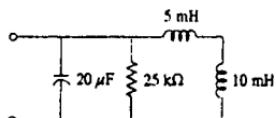


Figura 14.80 Per il Problema 14.41.

- 14.42 Per i circuiti in Figura 14.81, determinare la frequenza di risonanza ω_0 , il fattore di qualità Q e la larghezza di banda B .

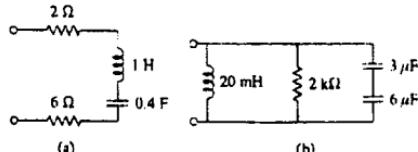


Figura 14.81 Per il Problema 14.42.

- 14.43 Calcolare la frequenza di risonanza di ciascuno dei circuiti in Figura 14.82.

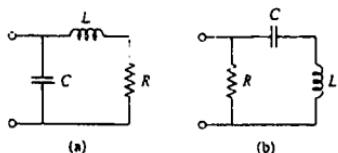


Figura 14.82 Per il Problema 14.43.

- *14.44 Per il circuito in Figura 14.83, determinare:

- (a) la frequenza di risonanza ω_0
(b) $Z_{in}(\omega)$

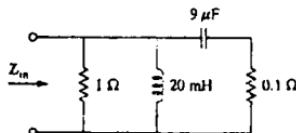


Figura 14.83 Per il Problema 14.44

- 14.45 Per il circuito di Figura 14.84, calcolare ω_0 , Q e B visti dalla tensione ai capi dell'induttanza.

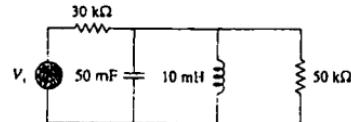


Figura 14.84 Per il Problema 14.45.

- 14.46 Per la rete illustrata in Figura 14.85, determinare

- (a) la funzione di trasferimento $H(\omega) = V_o(\omega)/I(\omega)$.
(b) il modulo di H per $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.

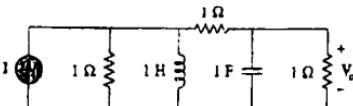


Figura 14.85 Per i Problemi 14.46, 14.78 e 14.92.

Paragrafo 14.7 Filtri passivi

- 14.47 Dimostrare che un circuito LR serie è un filtro passa-basso se si ricava l'uscita dai terminali del resistore. Calcolare la frequenza di taglio f_c se $L = 2 \text{ mH}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$.

- 14.48 Determinare la funzione di trasferimento V_o/V_i del circuito in Figura 14.86. Mostrare che il circuito è un filtro passa-basso.

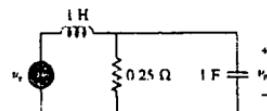


Figura 14.86 Per il Problema 14.48.

- 14.49 Determinare la frequenza di taglio del filtro passa-basso descritto da

$$H(\omega) = \frac{4}{2 + j\omega 10}$$

Determinare il guadagno in dB e la fase di $H(\omega)$ per $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

- 14.50 Determinare di quale tipo è il filtro in Figura 14.87. Calcolare la frequenza di taglio f_c .

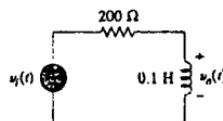


Figura 14.87 Per il Problema 14.50.

- 14.51 Progettare un filtro RL passa-basso che utilizzi una bobina da 40 mH e abbia una frequenza di taglio di 5 kHz .

- 14.52 In un filtro RL passa-alto con frequenza di taglio di 100 kHz , $L = 40 \text{ mH}$. Determinare R .

- 14.53 Progettare un filtro passa-banda tipo RLC serie con frequenze di taglio di 10 kHz e 11 kHz . Supponendo $C = 80 \text{ pF}$, determinare R , L e Q .

- 14.54 Progettare un filtro arresta-banda passivo con $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ e $Q = 20$.

- 14.55 Determinare l'intervallo di frequenze che vengono fatte passare da un filtro passa-banda RLC serie con $R = 10 \Omega$, $L = 25 \text{ mH}$ e $C = 0.4 \mu\text{F}$. Calcolare il fattore di qualità.

- 14.56 (a) Mostrare che per un filtro passa-banda,

$$H(s) = \frac{sB}{s^2 + sB + \omega_0^2}$$

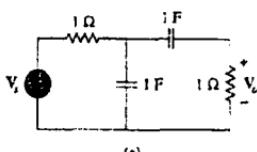
dove B è la larghezza di banda del filtro e ω_0 è la frequenza centrale.

- (b) In maniera simile, mostrare che per un filtro arresta-banda,

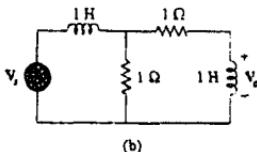
$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + sB + \omega_0^2}$$

* L'asterisco denota un problema di difficoltà superiore alla media.

- 14.57 Determinare la frequenza di centro banda e la larghezza di banda dei filtri passa-banda di Figura 14.88.



(a)



(b)

Figura 14.88 Per il Problema 14.57.

- 14.58 I parametri circuituali di un filtro arresta-banda RCL serie sono $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 40 \text{ pF}$. Calcolare:

- la frequenza di centro banda
- le frequenze di metà potenza
- il fattore di qualità

- 14.59 Determinare la larghezza di banda e la frequenza di centro banda del filtro arresta-banda di Figura 14.89.

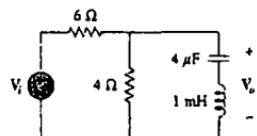
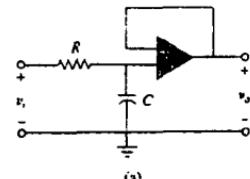


Figura 14.89 Per il Problema 14.59.

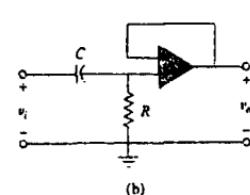
Paragrafo 14.8 Filtri attivi

- 14.60 Calcolare la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto avente guadagno nella banda passante pari a 10 e frequenza di taglio di 50 rad/s.

- 14.61 Determinare la funzione di trasferimento di ciascuno dei filtri attivi in Figura 14.90.



(a)



(b)

Figura 14.90 Per i Problemi 14.61 e 14.62.

- 14.62 Il filtro in Figura 14.90(b) ha una frequenza di taglio a 3 dB di 1 kHz. Se il suo ingresso è collegato ad un segnale a frequenza variabile di ampiezza 120 mV, determinare la tensione di uscita a:

- 200 Hz
- 2 kHz
- 10 kHz

- 14.63 Progettare un filtro attivo passa-alto del primo ordine con

$$H(s) = -\frac{100s}{s + 10}, \quad s = j\omega$$

Utilizzare un condensatore da $1 \mu\text{F}$.

- 14.64 Calcolare la funzione di trasferimento del filtro attivo in Figura 14.91. Di che tipo di filtro si tratta?

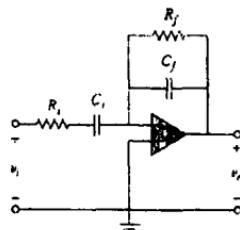


Figura 14.91 Per il Problema 14.64.

- 14.65 Un filtro passa-alto è illustrato in Figura 14.92. Mostrare che la funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

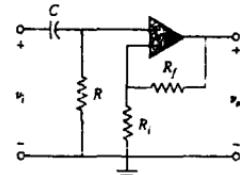


Figura 14.92 Per il Problema 14.65.

- 14.66 In Figura 14.93 è mostrato un filtro del primo ordine "generale".

- (a) Mostrare che la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{R_4}{R_1 + R_4} \times \frac{s + (1/R_1 C)[R_1/R_2 - R_1/R_4]}{s + 1/R_1 C}, \quad s = j\omega$$

- (b) Quale condizione deve essere soddisfatta perché il circuito operi come filtro passa-alto?

- (c) Quale condizione deve essere soddisfatta perché il circuito operi come filtro passa-basso?

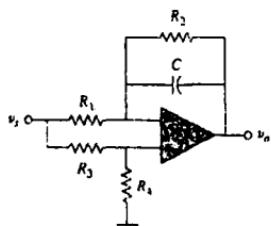


Figura 14.93 Per il Problema 14.66.

14.67 Progettare un filtro attivo passa-basso con guadagno in dB continuo di 0,25 e frequenza di taglio di 500 Hz.

14.68 Progettare un filtro attivo passa-alto avente guadagno ad dB alta frequenza di 5 e frequenza di taglio 200 Hz.

14.69 Progettare il filtro in Figura 14.94 in modo che soddisfi i seguenti requisiti:

- Deve attenuare un segnale a 2 kHz di 3 dB rispetto al suo valore a 10 MHz.
- Deve fornire una uscita a regime $v_o(t) = 10 \sin(2\pi \times 10^3 t + 180^\circ) \text{ V}$ per un ingresso $v_i(t) = 4 \sin(2\pi \times 10^4 t) \text{ V}$.

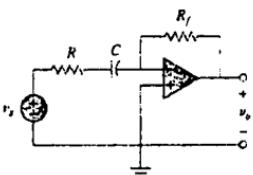


Figura 14.94 Per il Problema 14.69.

*14.70 Un filtro attivo del secondo ordine noto come filtro Butterworth è mostrato in Figura 14.95.

- Determinare la funzione di trasferimento V_o/V_i .
- Mostrare che si tratta di un filtro passa-basso.

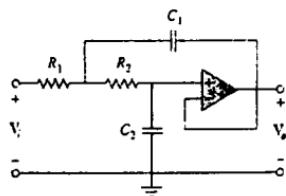


Figura 14.95 Per il Problema 14.70.

Paragrafo 14.9 Scaling

14.71 Applicare lo scaling dei moduli e della frequenza al circuito di Figura 14.76 per ottenere un circuito equivalente in cui l'induttore e il condensatore hanno valori 1 H e 1 F rispettivamente.

14.72 Quali valori di K_m e K_f servono per scalare un induttore da 4 mH ed un condensatore da 20 μF a 1 H e 1 F rispettivamente?

14.73 Calcolare i valori di R , L e C che danno luogo ad $R = 12 \text{ k}\Omega$, $L = 40 \mu\text{H}$ e $C = 300 \text{ nF}$ rispettivamente quando viene operato uno scaling dei moduli di 800 ed uno scaling in frequenza di 1000.

14.74 Un circuito ha $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$ e $C = 1/10 \text{ F}$. Se il circuito viene scalato in modulo di un fattore 100 e in frequenza di un fattore 10^4 , determinare i nuovi valori degli elementi circuituali.

14.75 In un circuito RLC , $R = 20 \Omega$, $L = 4 \text{ H}$ e $C = 1 \text{ F}$. Il circuito viene scalato in modulo di un fattore 10 e in frequenza di un fattore 10^4 . Calcolare i nuovi valori degli elementi.

14.76 Si consideri un circuito RLC parallelo con $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ e $C = 20 \mu\text{F}$; se il circuito è scalato in modulo di $K_m = 500$ e scalato in frequenza di $K_f = 10^4$, calcolare i valori corrispondenti di R , L e C .

14.77 Un circuito RLC serie ha $R = 10 \Omega$, $\omega_0 = 40 \text{ rad/s}$ e $B = 5 \text{ rad/s}$. Determinare L e C quando il circuito viene scalato:

- in modulo di un fattore 600.
- in frequenza di un fattore 1000.
- in modulo di un fattore 400 e in frequenza di un fattore 10^4 .

14.78 Riprogettare il circuito in Figura 14.82 in modo che tutti gli elementi resistivi siano scalari di un fattore 1000 e tutti gli elementi reattivi siano scalari in frequenza di un fattore 10^4 .

*14.79 Si faccia riferimento alla rete in Figura 14.96.

- Determinare $Z_{in}(s)$.
- Scalare gli elementi di $K_m = 10$ e $K_f = 100$. Determinare $Z_{in}(s)$ e ω_0 .

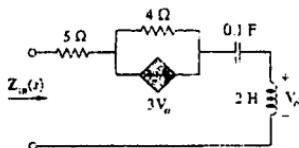


Figura 14.96 Per il Problema 14.79

14.80 (a) Dato il circuito in Figura 14.97, disegnare il nuovo circuito che si ottiene dopo che è stato scalato di $K_m = 200$ e $K_f = 10^4$.

(b) Calcolare l'impedenza equivalente di Thevenin ai terminali $a-b$ del circuito scalato per $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$.

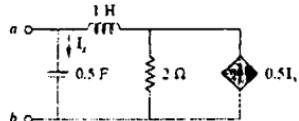


Figura 14.97 Per il Problema 14.80

14.81 Il circuito mostrato in Figura 14.98 ha impedenza

$$Z(s) = \frac{1000(s+1)}{(s+1+1/(50))(s+1-1/(50))}$$

Determinare:

- i valori di R , L , C e G .
- i valori degli elementi che causano un aumento della frequenza di risonanza di un fattore 10^3 a causa dello scaling in frequenza.

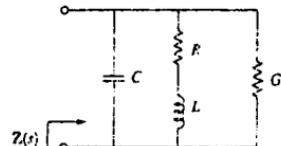


Figura 14.98 Per il Problema 14.81

- 14.82 Scalare il filtro attivo passa-basso in Figura 14.99 in modo che la sua frequenza di taglio aumenti da 1 rad/s a 200 rad/s. Utilizzare un condensatore da $1 \mu\text{F}$.

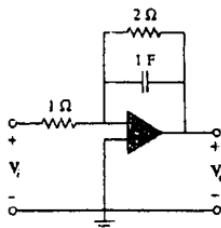


Figura 14.99 Per il Problema 14.82.

- 14.83 Il circuito con operazionale in Figura 14.100 deve essere scalato in modulo di 100 e scalato in frequenza di 10^5 . Determinare i valori risultanti degli elementi.

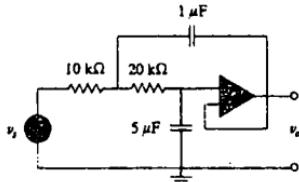


Figura 14.100 Per il Problema 14.83.

Paragrafo 14.10 Risposta in frequenza con PSpice

- 14.84 Calcolare la risposta in frequenza del circuito in Figura 14.101 usando PSpice.

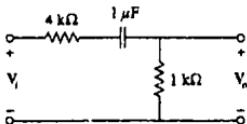


Figura 14.101 Per il Problema 14.84.

- 14.85 Utilizzare PSpice per ottenere i diagrammi di modulo e fase di V_o/V_i , nel circuito di Figura 14.102.

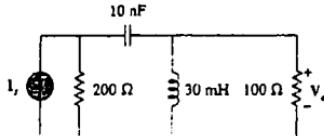


Figura 14.102 Per il Problema 14.85.

- 14.86 Utilizzare PSpice per ricavare la risposta in frequenza (modulo e fase di i) del circuito in Figura 14.103. Usare uno sweep in frequenza lineare da 1 a 10 000 Hz.

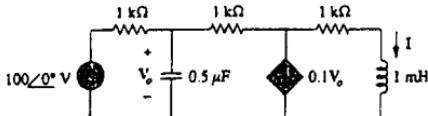


Figura 14.103 Per il Problema 14.86.

- 14.87 Nell'intervallo $0.1 < f < 100$ Hz, tracciare il grafico della risposta della rete in Figura 14.104. Classificare il filtro e determinare ω_0 .

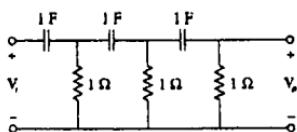


Figura 14.104 Per il Problema 14.87.

- 14.88 Utilizzare PSpice per generare i diagrammi di Bode di ampiezza e fase di V_o , nel circuito di Figura 14.105.

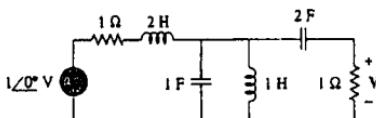


Figura 14.105 Per il Problema 14.88.

- 14.89 Ottenere il grafico del modulo della risposta V_o , nella rete di Figura 14.106 nell'intervallo di frequenze $100 < f < 1000$ Hz.

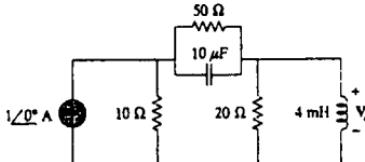


Figura 14.106 Per il Problema 14.89.

- 14.90 Determinare la risposta in frequenza del circuito in Figura 14.40 (vedere l'Esercizio 14.10). Si ponga $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$, con $1 < f < 100 000$ Hz.

- 14.91 Per il circuito "serbatoio" di Figura 14.79, ricavare la risposta in frequenza (tensione sul condensatore) usando PSpice. Determinare la frequenza di risonanza del circuito.

- 14.92 Usando PSpice, tracciare il grafico del modulo della risposta in frequenza del circuito in Figura 14.82.

Paragrafo 14.11 Applicazioni

- 14.93 Per il circuito a sfasamento di Figura 14.107, calcolare $H = V_o/V_i$.

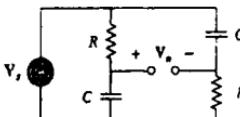


Figura 14.107 Per il Problema 14.93.

- 14.94 In una situazione di emergenza, si deve realizzare un filtro RC passa-alto avendo a disposizione un condensatore da 10 pF , un condensatore da 30 pF , un resistore da $1.8 \text{ k}\Omega$ e un resistore da $3.3 \text{ k}\Omega$. Calcolare la massima frequenza di taglio ottenibile usando gli elementi a disposizione.

- 14.95** Un circuito di sintonia di antenna di tipo serie è formato da un condensatore variabile da 40 a 360 pF e da una bobina di antenna da $240\text{ }\mu\text{H}$ con resistenza in continua di $12\text{ }\Omega$.

- Determinare l'intervallo di frequenze dei segnali radio sui quali è possibile sintonizzare il circuito.
- Determinare il valore di Q a ciascun estremo dell'intervallo di frequenze.

- 14.96** Il circuito crossover in Figura 14.108 è un filtro passa-basso collegato ad un woofer. Determinare la funzione di trasferimento $H(\omega) = V_o(\omega)/V_i(\omega)$.

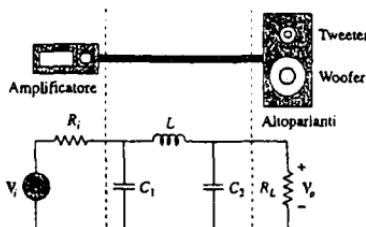


Figura 14.108 Per il Problema 14.96.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 14.98** Un certo circuito elettronico in prova in laboratorio ha prodotto una curva di risonanza con punti di metà potenza a 432 Hz e 454 Hz . Se $Q = 20$, quale è la frequenza di risonanza del circuito?

- 14.99** In un dispositivo elettronico viene impiegato un circuito serie avente una resistenza di $100\text{ }\Omega$, una reattanza capacitiva di $5\text{ k}\Omega$ e una reattanza induttiva di $300\text{ }\Omega$ quando viene utilizzato a 2 MHz . Determinare la frequenza di risonanza e la larghezza di banda del circuito.

- 14.100** In una certa applicazione, un semplice filtro RC passa-basso è progettato per ridurre il rumore ad alta frequenza. Se la frequenza di taglio desiderata è 20 kHz e $C = 0.5\text{ }\mu\text{F}$, determinare il valore di R .

- 14.101** In un circuito amplificatore si utilizza un semplice filtro RC passa-alto per bloccare la componente continua lasciando passare la componente variabile nel tempo. Se la frequenza di taglio desiderata è 15 Hz e $C = 10\text{ }\mu\text{F}$, determinare il valore di R .

- 14.102** Il progetto di filtri RC della pratica prevede resistenze al generatore e al carico, come mostrato in Figura 14.110. Si supponga $R = 4\text{ k}\Omega$ e $C = 40\text{ nF}$. Calcolare la frequenza di taglio quando:

- $R_i = 0$, $R_L = \infty$.
- $R_i = 1\text{ k}\Omega$, $R_L = 5\text{ k}\Omega$.

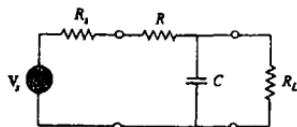


Figura 14.110 Per il Problema 14.102.

- 14.97** Il circuito crossover in Figura 14.109 è un filtro passa-alto collegato ad un tweeter. Determinare la funzione di trasferimento $H(\omega) = V_o(\omega)/V_i(\omega)$.

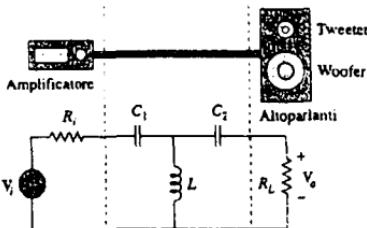


Figura 14.109 Per il Problema 14.97.

- 14.103** Il circuito RC in Figura 14.111 è utilizzato come compensatore nel progetto di un sistema. Calcolare la funzione di trasferimento del circuito.

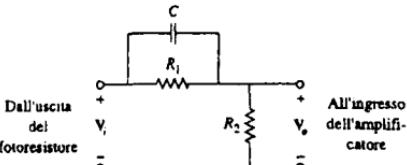


Figura 14.111 Per il Problema 14.103.

- 14.104** Un filtro passa-banda doppiamente accordato a basso **effid** fattore di qualità è mostrato in Figura 14.112. Utilizzare PSpice per generare il diagramma del modulo di $V_o(\omega)$.

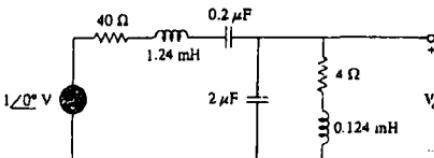


Figura 14.112 Per il Problema 14.104.

CAPITOLO I

RETI BIPORTA

15.1 INTRODUZIONE

Una coppia di terminali attraverso i quali la corrente può entrare e uscire da una rete è chiamata *porta*. Gli elementi a due terminali (o *bipoli*) quali resistori, condensatori e induttori, si possono considerare come reti a una sola porta. Anche la maggior parte dei circuiti finora presi in considerazione possedeva due terminali, e quindi una sola porta, come rappresentato schematicamente in Figura 15.1(a). Di essi sono state studiate la tensione e la corrente alla coppia di terminali – per esempio i due terminali di un resistore, un condensatore o un induttore. Sono stati anche studiati circuiti con quattro terminali, o circuiti a due porte (detti anche *biporta* o *doppi bipoli*), quali per esempio amplificatori operazionali, transistori e trasformatori, come mostrato in Figura 15.1(b).

In generale, una rete può avere n porte; una porta è un punto di accesso alla rete consistente in una coppia di terminali; la corrente che entra in un terminale di una porta è uguale a quella che esce dall'altro terminale, così che la corrente netta entrante dalla porta è zero.

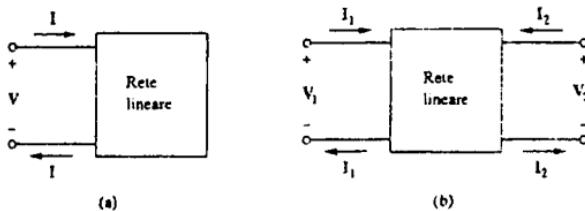


Figura 15.1
(a) Rete a una porta.
(b) rete a due porte.

Nel presente capitolo ci si occuperà principalmente di reti a *due porte*, o più semplicemente *biporta* o *doppi bipoli*.

Definizione: La biporta è una rete elettronica avente due porte diverse, una di ingresso e l'altra di uscita.

Un biporta possiede dunque due coppie di terminali che costituiscono i suoi punti di accesso. Come mostra la Figura 15.1(b), la corrente che entra in un terminale di una coppia esce dall'altro terminale della coppia. Anche i dispositivi a tre terminali, quali per esempio i transistori, possono essere configurati e trattati come biporta.

Si studiano i biporta per almeno due ragioni. Innanzitutto, si tratta di reti di grande utilità nelle telecomunicazioni, nei sistemi di controllo, nei sistemi di potenza e nell'elettronica. Per esempio, i biporta sono usati in elettronica nei modelli dei transistori, e per rendere più agevole il progetto di sistemi posti in cascata. In secondo luogo, la conoscenza dei parametri di un biporta consente di trattarlo come una "scatola nera" quando esso viene inserito in una rete più grande.

La caratterizzazione di un biporta richiede la determinazione delle relazioni fra le grandezze ai suoi terminali, cioè V_1 , V_2 , I_1 e I_2 in Figura 15.1(b), due delle quali vengono considerate indipendenti. I diversi termini che legano fra loro tali tensioni e correnti sono detti *parametri*. L'obiettivo di questo capitolo è quello di ottenere i sei possibili insiemi di parametri. Verranno anche mostrate le relazioni che sussistono tra i

parametri e il modo in cui i biporta possono venire collegati in serie, in parallelo o in cascata.

Come nel caso degli amplificatori operazionali, si è qui interessati soltanto al comportamento di questi circuiti visti ai loro terminali. Si supporrà inoltre che i circuiti all'interno dei biporta non contengano generatori indipendenti, benché essi possano invece contenere generatori dipendenti. Infine, alcuni dei concetti presentati nel capitolo verranno applicati alla analisi di alcuni semplici circuiti con transistori e alla sintesi di reti a scala. Si supporranno tutti i circuiti in regime sinusoidale, e pertanto tutte le analisi verranno condotte con i fasori delle tensioni e delle correnti.

15.2 PARAMETRI IMPEDENZA

I parametri di impedenza e ammettenza sono comunemente usati nel processo di sintesi dei filtri. Essi si rivelano utili anche nella analisi e nel progetto di reti per l'adattamento di impedenze, e delle reti per la distribuzione dell'energia elettrica. I parametri di impedenza vengono presentati in questo paragrafo, quelli di ammettenza nel paragrafo seguente.

Un biporta può venire pilotato in tensione, come in Figura 15.2(a), oppure in corrente come in Figura 15.2(b). Dalle Figure 15.2(a) e (b) è possibile scrivere una relazione fra i fasori delle tensioni ai terminali e i fasori delle correnti nella forma

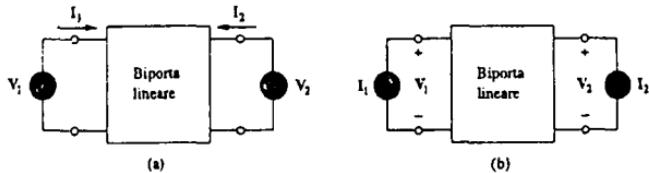
$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (15.1)$$

o anche, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

in cui i termini z sono detti *parametri di impedenza*, o semplicemente *parametri z*, e sono espressi in ohm¹.

Figura 15.2
Biporta lineare:
(a) pilotato da generatori di tensione,
(b) pilotato da generatori di corrente.



I valori dei parametri possono essere ricavati ponendo $I_1 = 0$ (porta di ingresso in circuito aperto) oppure $I_2 = 0$ (porta di uscita in circuito aperto):

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_1=0}, & z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_2=0} \\ z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_1=0}, & z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_2=0} \end{aligned} \quad (15.3)$$

Poiché i parametri z si ottengono ponendo in circuito aperto la porta di ingresso o quella di uscita, essi sono anche detti *parametri di impedenza a circuito aperto*. In particolare,

z_{11} = Impedenza di ingresso a circuito aperto

z_{12} = Impedenza di trasferimento a circuito aperto dalla porta 2 alla porta 1

z_{21} = Impedenza di trasferimento a circuito aperto dalla porta 1 alla porta 2

z_{22} = Impedenza di uscita a circuito aperto

¹ Si ricordi che solo due delle quattro variabili (V_1 , V_2 , I_1 e I_2) sono da considerare indipendenti. Le altre due sono determinate dalla (19.1).

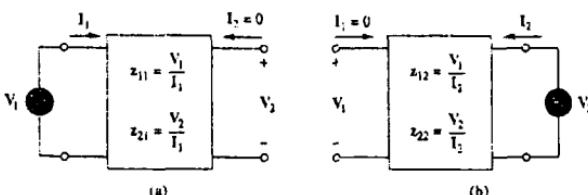


Figura 15.3
Determinazione dei parametri:
(a) z_{11} e z_{21} ; (b) z_{12} e z_{22}

Interpretando la (15.3), si possono ottenere z_{11} e z_{21} collegando un generatore di tensione V_1 (oppure un generatore di corrente I_1) alla porta 1 lasciando la porta 2 in circuito aperto, come in Figura 15.3(a), e calcolando I_1 e V_2 ; si ricava poi

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1}, \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \quad (15.5)$$

In maniera simile, si possono ottenere z_{12} e z_{22} collegando un generatore di tensione V_2 (oppure un generatore di corrente I_2) alla porta 2 lasciando la porta 1 in circuito aperto, come in Figura 15.3(b), e calcolando I_2 e V_1 ; si ricava poi

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \quad (15.6)$$

La procedura appena illustrata fornisce un metodo per il calcolo o la misura dei parametri z . z_{11} e z_{22} sono a volte dette *autoimpedenze*, mentre z_{12} e z_{21} sono dette *impedenze di trasferimento* o *transimpedenze*. Un'autoimpedenza è l'impedenza di ingresso di un dispositivo a due terminali (una porta). Perciò, z_{11} è l'autoimpedenza di ingresso con la porta di uscita in circuito aperto, mentre z_{22} è l'autoimpedenza di uscita con la porta di ingresso in circuito aperto.

Quando $z_{11} = z_{22}$, il biparta si dice *simmetrico*. In tal caso, il circuito contenuto nel biparta presenta una simmetria speculare rispetto a una qualche linea centrale: è cioè possibile trovare una linea che divide il circuito in due parti simmetriche.

Quando il biparta è lineare e non contiene generatori dipendenti, le transimpedenze sono uguali ($z_{12} = z_{21}$), e il biparta è detto *reciproco*. Ciò significa che se il punto di eccitazione e di risposta vengono scambiati fra loro, le transimpedenze rimangono le stesse. Come illustra la Figura 15.4, un biparta è reciproco se, scambiando il generatore ideale di tensione a una porta con l'amperometro ideale all'altra porta, la lettura dell'amperometro rimane la stessa. Si ha la relazione $V = z_{12}I$, in accordo con la (15.1), quando il biparta viene collegato come in Figura 15.4(a), mentre è $V = z_{21}I$ quando il biparta è collegato come in Figura 15.4(b). Ciò è possibile soltanto se $z_{12} = z_{21}$.

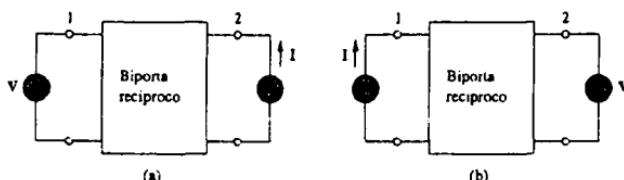


Figura 15.4
L'interscambio del generatore di tensione ad una porta con l'amperometro ideale all'altra porta dà luogo alla stessa lettura, se il biparta è reciproco.

Un qualsiasi biparta costituito di soli resistori, condensatori e induttori deve essere reciproco. Per un biparta reciproco, è possibile utilizzare il circuito equivalente a T di Figura 15.5(a). Se invece il biparta non è reciproco, si ha un circuito equivalente più generale, mostrato in Figura 15.5(b); si noti che questo circuito equivalente si può determinare direttamente dalla (15.1).

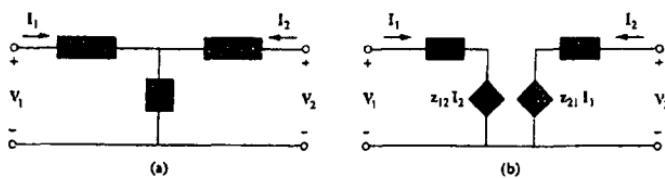


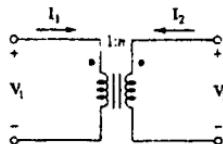
Figura 15.5
(a) Circuito equivalente a T (solo per il caso reciproco),
(b) circuito equivalente generale.

È bene convincersi che per alcuni biporta i parametri z non esistono, perché di essi non è possibile ottenere una descrizione del comportamento nella forma (15.1). Come esempio, si consideri il trasformatore ideale di Figura 15.6. Le relazioni costitutive del biporta sono:

$$V_1 = \frac{1}{n} V_2, \quad I_1 = -n I_2 \quad (15.7)$$

Come si osserva, è impossibile esprimere le tensioni in termini delle correnti, o viceversa, come richiede la (15.1). Il trasformatore ideale perciò non ammette parametri z . Esso possiede però i parametri ibridi, come si vedrà nel Paragrafo 15.4.

Figura 15.6
Un trasformatore ideale non ammette parametri z .



Esempio 15.1

Determinare i parametri z per il circuito in Figura 15.7.

Soluzione:

METODO 1

Per determinare z_{11} e z_{21} , si applica un generatore di tensione V_1 alla porta di ingresso e si lascia la porta di uscita in circuito aperto, come in Figura 15.8(a). Allora,

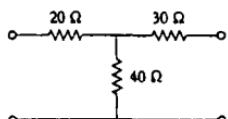


Figura 15.7
Per l'Esempio 15.1.

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(20 + 40)I_1}{I_1} = 60 \Omega$$

cioè, z_{11} rappresenta l'impedenza di ingresso alla porta 1.

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{40I_1}{I_1} = 40 \Omega$$

Per determinare z_{12} e z_{22} , si applica un generatore di tensione V_2 alla porta di uscita, lasciando la porta di ingresso in circuito aperto, come in Figura 15.8(b). Allora,

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{40I_2}{I_2} = 40 \Omega, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{(30 + 40)I_2}{I_2} = 70 \Omega$$

Riassumendo,

$$[z] = \begin{bmatrix} 60 \Omega & 40 \Omega \\ 40 \Omega & 70 \Omega \end{bmatrix}$$

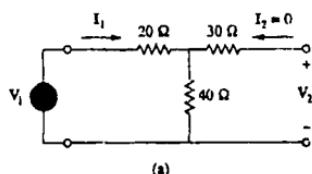
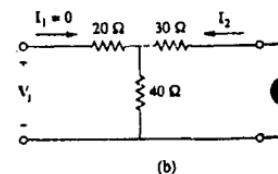


Figura 15.8
Per l'Esempio 15.1:
(a) calcolo di z_{11} e z_{21} ,
(b) calcolo di z_{12} e z_{22} .



METODO 2

In alternativa, poiché il circuito non contiene generatori dipendenti, $z_{12} = z_{21}$, e quindi è possibile fare uso della Figura 15.5(a). Confrontando la Figura 15.7 con la Figura 15.5(a), si ottiene

$$\begin{aligned} z_{12} &= 40 \Omega = z_{21} \\ z_{11} - z_{12} &= 20 \quad \Rightarrow \quad z_{11} = 20 + z_{12} = 60 \Omega \\ z_{22} - z_{12} &= 30 \quad \Rightarrow \quad z_{22} = 30 + z_{12} = 70 \Omega \end{aligned}$$

■ **Esercizio 15.1** Determinare i parametri z del bipola in Figura 15.9.

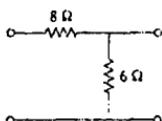


Figura 15.9
Per l'Esercizio 15.1

Risposta: $z_{11} = 14$, $z_{12} = z_{21} = z_{22} = 6 \Omega$.

■ **Esempio 15.2**

Calcolare I_1 e I_2 nel circuito di Figura 15.10.

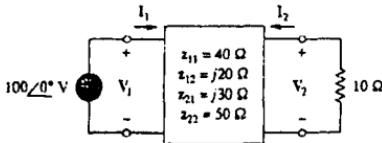


Figura 15.10
Per l'Esempio 15.2

Soluzione: Si tratta di un bipola non reciproco. Si potrebbe utilizzare il circuito equivalente in Figura 15.5(b), ma è anche possibile fare uso direttamente della (15.1). Sostituendo nella (15.1) i parametri z dati,

$$V_1 = 40I_1 + j20I_2 \quad (15.2.1)$$

$$V_2 = j30I_1 + 50I_2 \quad (15.2.2)$$

Poiché si vogliono calcolare I_1 e I_2 , si sostituiscono

$$V_1 = 100\angle0^\circ, \quad V_2 = -10I_2$$

nelle (15.2.1) e (15.2.2), che diventano

$$100 = 40I_1 + j20I_2 \quad (15.2.3)$$

$$-10I_2 = j30I_1 + 50I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = j2I_2 \quad (15.2.4)$$

Sostituendo la (15.2.4) nella (15.2.3) si ottiene

$$100 = j80I_2 + j20I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{100}{j100} = -j$$

Dalla (15.2.4), $I_1 = j2(-j) = 2$. Infine,

$$I_1 = 2\angle0^\circ \text{ A}, \quad I_2 = 1\angle-90^\circ \text{ A}$$

■ **Esercizio 15.2** Calcolare I_1 e I_2 nel bipola di Figura 15.11.

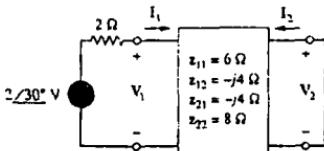


Figura 15.11
Per l'Esercizio 15.2

Risposta: $200\angle30^\circ \text{ mA}$, $100\angle120^\circ \text{ mA}$.

■ **15.3 PARAMETRI AMMETTENZA**

Nel paragrafo precedente si è visto che un bipola può non ammettere parametri impedenza. Sono quindi necessarie altre rappresentazioni per descrivere i bipola. Esiste in-

fatti un secondo insieme di parametri, che si ottengono esprimendo le correnti alle due porte in funzione delle tensioni ai terminali delle porte. Nelle Figure 15.12(a) e (b), le correnti di porta possono essere espresse in termini delle tensioni come

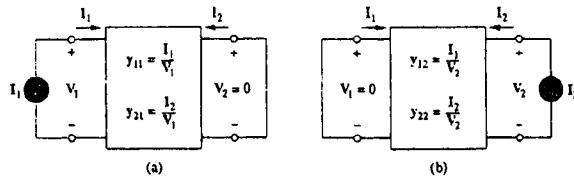
$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad (15.8)$$

o anche, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15.9)$$

I termini y sono chiamati *parametri ammettenza* (o più semplicemente *parametri y*) e sono espressi in siemens.

Figura 15.12
Determinazione dei parametri y .
(a) calcolo di y_{11} e y_{21} ,
(b) calcolo di y_{12} e y_{22} .



I valori dei parametri possono essere ricavati ponendo $V_1 = 0$ (porta di ingresso in corto circuito) oppure $V_2 = 0$ (porta di uscita in corto circuito). In formule,

$$\begin{aligned} y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}, & y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}, & y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (15.10)$$

Poiché i parametri y vengono ottenuti mettendo in corto circuito la porta di ingresso o la porta di uscita, essi sono anche detti *parametri ammettenza in corto circuito*. Specificamente,

y_{11} = Ammettenza di ingresso in corto circuito

y_{12} = Ammettenza di trasferimento in corto circuito dalla porta 2 alla porta 1

y_{21} = Ammettenza di trasferimento in corto circuito dalla porta 1 alla porta 2

y_{22} = Ammettenza di uscita in corto circuito (15.11)

Secondo la (15.10), è possibile ottenere y_{11} e y_{21} collegando un generatore di corrente I_1 alla porta 1 e mettendo in corto circuito la porta 2, come in Figura 15.12(a), determinando V_1 e I_2 , e calcolando poi

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}, \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \quad (15.12)$$

In maniera simile, si ottengono y_{12} e y_{22} collegando un generatore di corrente I_2 alla porta 2 e ponendo in corto circuito la porta 1 come in Figura 15.12(b), determinando I_1 e V_2 , e calcolando poi

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2}, \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \quad (15.13)$$

La procedura appena vista costituisce un metodo per il calcolo o la misura dei parametri y . Si può fare riferimento ai parametri impedenza e ammettenza con l'unica espressione di parametri *inmettenza*.

In un bipola lineare privo di generatori dipendenti, le ammettenze di trasferimento sono uguali ($y_{12} = y_{21}$). La dimostrazione di questa affermazione può essere effettuata

in modo analogo a quanto si è fatto per i parametri z . Un bipola reciproco ($y_{12} = y_{21}$) ammette il circuito equivalente a Π di Figura 15.13(a). Se invece il bipola non è reciproco, il circuito equivalente più generale è mostrato in Figura 15.13(b).

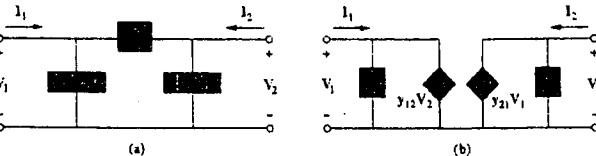


Figura 15.13
(a) Circuito equivalente a Π (per il solo caso reciproco),
(b) circuito equivalente generale.

Esempio 15.3

Ricavare i parametri y per il bipola a Π mostrato in Figura 15.14.

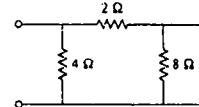


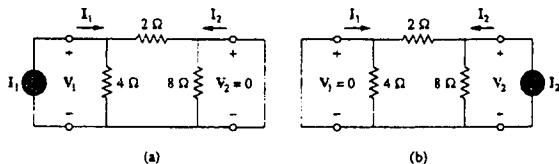
Figura 15.14
Per l'Esempio 15.3.

Soluzione:

METODO 1

Per calcolare y_{11} e y_{21} , si cortocircuita la porta di uscita e si collega un generatore di corrente I_1 alla porta di ingresso, come in Figura 15.15(a). Escendo il resistore da 8 ohms in cortocircuito, il resistore da 2 ohms si trova in parallelo con quello da 4 ohms. Quindi,

$$V_1 = I_1 (4 \parallel 2) = \frac{4}{3} I_1, \quad y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 0.75 \text{ S}$$



Per il partitore di corrente,

$$-I_2 = \frac{4}{4+2} I_1 = \frac{2}{3} I_1, \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{-\frac{2}{3} I_1}{V_1} = -0.5 \text{ S}$$

Per ottenere y_{12} e y_{22} , si cortocircuita la porta di ingresso e si collega un generatore di corrente I_2 alla porta di uscita, come in Figura 15.15(b). Il resistore da 4 ohms risulta cortocircuitato, così che i resistori da 2 ohms e 8 ohms sono in parallelo.

$$V_2 = I_2 (8 \parallel 2) = \frac{8}{5} I_2, \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{I_2}{\frac{8}{5} I_2} = \frac{5}{8} = 0.625 \text{ S}$$

Per il partitore di corrente,

$$-I_1 = \frac{8}{8+2} I_2 = \frac{4}{5} I_2, \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{\frac{8}{5} I_2} = -0.5 \text{ S}$$

METODO 2

In alternativa, confrontando la Figura 15.14 con la Figura 15.13(a),

$$y_{12} = -\frac{1}{2} \text{ S} = y_{21}$$

$$y_{11} + y_{12} = \frac{1}{4} \implies y_{11} = \frac{1}{4} - y_{12} = 0.75 \text{ S}$$

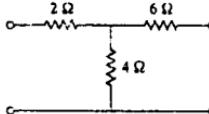
$$y_{22} + y_{12} = \frac{1}{8} \implies y_{22} = \frac{1}{8} - y_{12} = 0.625 \text{ S}$$

come si era ottenuto con il Metodo 1.

Figura 15.15
Per l'Esempio 15.3:
(a) calcolo di y_{11} e y_{21} ,
(b) calcolo di y_{12} e y_{22} .

Esercizio 15.3 Calcolare i parametri y per il bipola a T mostrato in Figura 15.16.

Figura 15.16
Per l'Esercizio 15.3.

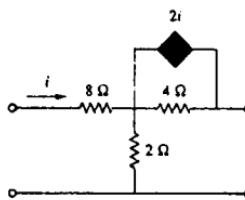


Risposta $y_{11} = 0.2273 \text{ S}$, $y_{12} = y_{21} = -0.0909 \text{ S}$, $y_{22} = 0.1364 \text{ S}$.

Esempio 15.4

Calcolare i parametri y per il bipola mostrato in Figura 15.17.

Figura 15.17
Per l'Esempio 15.4.



Soluzione: Si seguirà lo stesso procedimento dell'esempio precedente. Per ottenere y_{11} e y_{21} , si usa il circuito in Figura 15.18(a), nel quale la porta 2 è cortocircuitata ed è stato applicato un generatore di corrente alla porta 1. Al nodo 1,

$$\frac{V_1 - V_o}{8} = 2I_1 + \frac{V_o}{2} + \frac{V_o - 0}{4}$$

Ma $I_1 = \frac{V_1 - V_o}{8}$; perciò,

$$0 = \frac{V_1 - V_o}{8} + \frac{3V_o}{4}$$

$$0 = V_1 - V_o + 6V_o \quad \Rightarrow \quad V_1 = -5V_o$$

Di conseguenza,

$$I_1 = \frac{-5V_o - V_o}{8} = -0.75V_o$$

e

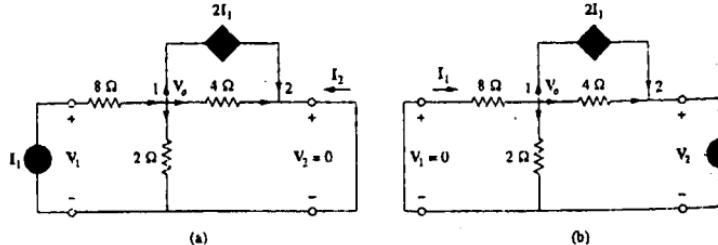
$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{-0.75V_o}{-5V_o} = 0.15 \text{ S}$$

Al nodo 2,

$$\frac{V_o - 0}{4} + 2I_1 + I_2 = 0$$

Figura 15.18
Soluzione dell'Esempio 15.4.

- (a) calcolo di y_{11} e y_{21} .
- (b) calcolo di y_{12} e y_{22} .



da cui

$$-I_2 = 0.25V_o - 1.5V_o = -1.25V_o$$

Di conseguenza,

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{1.25V_o}{-5V_o} = -0.25 \text{ S}$$

In maniera simile, si ottengono y_{12} e y_{21} usando la Figura 15.18(b). Al nodo 1,

$$\frac{0 - V_o}{8} = 2I_1 + \frac{V_o}{2} + \frac{V_o - V_2}{4}$$

Ma $I_1 = \frac{0 - V_o}{8}$; perciò,

$$0 = -\frac{V_o}{8} + \frac{V_o}{2} + \frac{V_o - V_2}{4}$$

cioè

$$0 = -V_o + 4V_o + 2V_o - 2V_2 \implies V_2 = 2.5V_o$$

Ne segue.

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-V_o/8}{2.5V_o} = -0.05 \text{ S}$$

Al nodo 2,

$$\frac{V_o - V_2}{4} + 2I_1 + I_2 = 0$$

cioè

$$-I_2 = 0.25V_o - \frac{1}{4}(2.5V_o) - \frac{2V_o}{8} = -0.625V_o$$

Quindi,

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{0.625V_o}{2.5V_o} = 0.25 \text{ S}$$

Si noti che $y_{12} \neq y_{21}$ in questo caso, perché il bipola non è reciproco.

■ Esercizio 15.4 Calcolare i parametri y per il circuito in Figura 15.15.

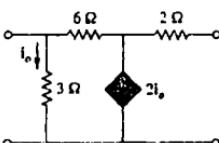


Figura 15.19
Per l'Esercizio 15.4.

Risposta $y_{11} = 0.625 \text{ S}$, $y_{12} = -0.125 \text{ S}$, $y_{21} = 0.375 \text{ S}$, $y_{22} = 0.125 \text{ S}$

■

15.4 PARAMETRI IBRIDI

Non è sempre possibile determinare i parametri z o y di un bipola. Risulta allora necessario definire un nuovo insieme di parametri. Questo terzo insieme si basa sull'idea di considerare V_1 e I_2 come variabili dipendenti. Si ottiene allora

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}} \quad (15.14)$$

oppure, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15.15)$$

I termini h sono detti *parametri ibridi* (o più semplicemente *parametri h*), perché costituiscono un insieme ibrido di rapporti. Essi si rivelano molto utili per descrivere i dispositivi elettronici quali i transistori (si veda il Paragrafo 15.9); risulta infatti molto più semplice misurare sperimentalmente i parametri h di tali dispositivi di quanto non lo sia misurare i parametri z o y .

Si è visto poi che il trasformatore ideale in Figura 15.6, descritto dalla (15.7), non ammette parametri z . Il trasformatore ideale può essere invece descritto in termini di parametri ibridi, perché la (15.7) risulta conforme alla (15.14). I valori dei parametri si determinano come

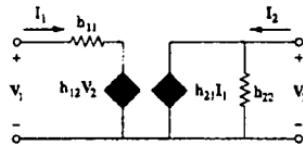
$$\boxed{\begin{aligned} h_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}, & b_{12} &= \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} \\ h_{21} &= \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_1=0}, & h_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned}} \quad (15.16)$$

Risulta evidente dalla (15.16) che i parametri h_{11} , h_{12} , h_{21} e h_{22} rappresentano un'impedenza, un guadagno di tensione, un guadagno di corrente e una ammettenza, rispettivamente, ed è per questo motivo che vengono detti ibridi. Più specificamente,

- h_{11} = Impedenza di ingresso in corto circuito
- h_{12} = Guadagno di tensione inverso in circuito aperto
- h_{21} = Guadagno di corrente diretta in corto circuito
- h_{22} = Ammettenza di uscita in circuito aperto

Il procedimento per il calcolo dei parametri h è simile a quello utilizzato per i parametri z o y . Si applica un generatore di tensione o di corrente alla porta opportuna, si pone in corto circuito o in circuito aperto l'altra porta, a seconda del parametro di interesse, e si analizza normalmente il circuito risultante. Per bipola reciprocità, $h_{12} = -h_{21}$. Quest'ultima affermazione può essere dimostrata nello stesso modo in cui si è dimostrato che $z_{12} = z_{21}$. La Figura 15.20 mostra il modello ibrido di un bipola.

Figura 15.20
Circuito equivalente
di un bipola in termini
dei parametri h .



Un insieme di parametri strettamente legato ai parametri h è quello dei *parametri g*, o *parametri ibridi inversi*. Essi vengono utilizzati per esprimere le tensioni e le correnti di porta nella forma

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned}} \quad (15.18)$$

o anche

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (15.19)$$

I valori dei parametri g vengono determinati come segue:

$$\boxed{\begin{aligned} g_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}, & g_{12} &= \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0} \\ g_{21} &= \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0}, & g_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0} \end{aligned}} \quad (15.20)$$

I parametri ibridi inversi hanno quindi le denominazioni

- g_{11} = Ammettenza di ingresso in circuito aperto
- g_{12} = Guadagno di corrente inverso in corto circuito
- g_{21} = Guadagno di tensione diretta in circuito aperto
- g_{22} = Impedenza di uscita in corto circuito

La Figura 15.21 mostra il circuito equivalente ibrido inverso per un biparta.

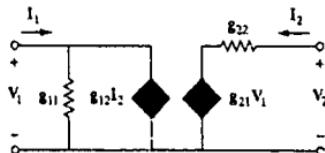


Figura 15.21
Circuito equivalente
di un biparta in termini
dei parametri g.

Esempio 15.5

Calcolare i parametri ibridi per il biparta di Figura 15.22.

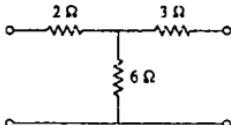
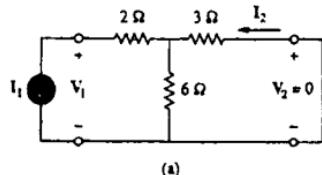


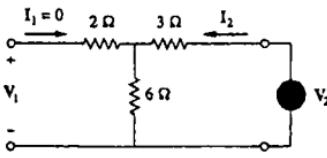
Figura 15.22
Per l'Esempio 15.5.

Soluzione: Per ottenere h_{11} e h_{21} , si pone in corto circuito la porta di uscita e si collega il generatore di corrente I_1 alla porta di ingresso, come mostrato in Figura 15.23(a). Dalla Figura 15.23(a),

$$V_1 = I_1(2 + 3 \parallel 6) = 4I_1$$



(a)



(b)

Figura 15.23
Per l'Esempio 15.5:
(a) calcolo di h_{11} e h_{21} ,
(b) calcolo di h_{21} e h_{22} .

Quindi,

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 4 \Omega$$

Inoltre, sempre dalla Figura 15.23(a) si ottiene, per il partitore di corrente,

$$-I_2 = \frac{6}{6+3} I_1 = \frac{2}{3} I_1$$

Perciò,

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{2}{3}$$

Per ottenere h_{21} e h_{22} , si lascia in circuito aperto la porta di ingresso e si collega il generatore di tensione V_2 alla porta di uscita, come si vede in Figura 15.23(b). Per il partitore di tensione,

$$V_1 = \frac{6}{6+3} V_2 = \frac{2}{3} V_2$$

Quindi,

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$$

Inoltre,

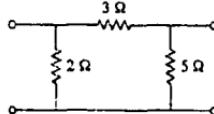
$$V_2 = (3 + 6)I_2 = 9I_2$$

E quindi,

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{9} S$$

Esercizio 15.5 Determinare i parametri h per il circuito in Figura 15.24.

Figura 15.24
Per l'Esercizio 15.5.

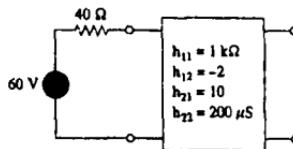


Risposta $h_{11} = 1.2 \Omega$, $h_{12} = 0.4$, $h_{21} = -0.4$, $h_{22} = 0.4 \text{ S}$

Esempio 15.6

Determinare l'equivalente Thevenin alla porta di uscita del circuito in Figura 15.25.

Figura 15.25
Per l'Esempio 15.6

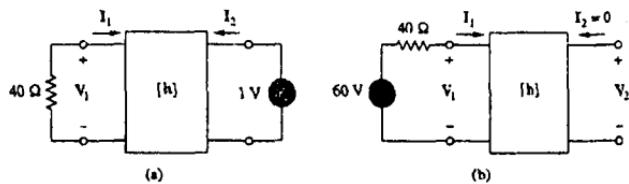


Soluzione: Per calcolare Z_{Th} e V_{Th} verrà applicato il procedimento normale, tenendo presenti le formule che legano fra loro le porte di ingresso e di uscita nel modello a parametri h . Per ottenere Z_{Th} , si rimuove il generatore di tensione da 60 V alla porta di ingresso e si applica un generatore di tensione di 1 V alla porta di uscita, come mostrato in Figura 15.26(a). Dalla (15.14),

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (15.6.1)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (15.6.2)$$

Figura 15.26
Per l'Esempio 15.6:
(a) calcolo di Z_{Th} ,
(b) calcolo di V_{Th} .



Ma $V_2 = 1$ e $V_1 = -40I_1$. Sostituendo queste espressioni nelle (15.6.1) e (15.6.2), si ottiene

$$-40I_1 = h_{11}I_1 + h_{12} \implies I_1 = -\frac{h_{12}}{40 + h_{11}} \quad (15.6.3)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22} \quad (15.6.4)$$

Sostituendo la (15.6.3) nella (15.6.4) si ha

$$I_2 = h_{22} - \frac{h_{21}h_{12}}{h_{11} + 40} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} + h_{22}40}{h_{11} + 40}$$

Perciò,

$$Z_{Th} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{1}{I_2} = \frac{h_{11} + 40}{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} + h_{22}40}$$

Sostituendo i valori numerici dei parametri h ,

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{1000 + 40}{10^3 \times 200 \times 10^{-6} + 20 + 40 \times 200 \times 10^{-6}} \\ &= \frac{1040}{20.21} = 51.46 \Omega \end{aligned}$$

Per determinare V_{Th} , si calcola la tensione V_2 a circuito aperto in Figura 15.26(b). Alla porta di ingresso,

$$-60 + 40I_1 - V_1 = 0 \implies V_1 = 60 - 40I_1 \quad (15.6.5)$$

All'uscita,

$$I_2 = 0 \quad (15.6.6)$$

Sostituendo le (15.6.5) e (15.6.6) nelle (15.6.1) e (15.6.2), si ottiene

$$60 - 40I_1 = h_{11}I_1 - h_{12}V_2$$

cioè

$$60 = (h_{11} + 40)I_1 + h_{12}V_2 \quad (15.6.7)$$

e

$$0 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \implies I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}}V_2 \quad (15.6.8)$$

Sostituendo ora la (15.6.8) nella (15.6.7) si ottiene

$$60 = \left[-(h_{11} + 40) \frac{h_{22}}{h_{21}} + h_{12} \right] V_2$$

cioè

$$V_{Th} = V_2 = \frac{60}{-(h_{11} + 40)h_{22}/h_{21} + h_{12}} = \frac{60h_{21}}{h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22} - 40h_{21}}$$

Sostituendo i valori numerici dei parametri h ,

$$V_{Th} = \frac{60 \times 10}{-20.21} = -29.69 \text{ V}$$

Esercizio 15.6 Calcolare l'impedenza alla porta di ingresso del circuito in Figura 15.27.

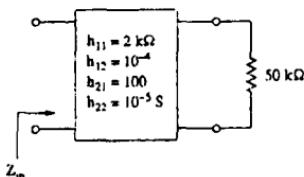


Figura 15.27
Per l'Esercizio 15.6.

Risposta 1667 Ω.

Esempio 15.7

Nel circuito di Figura 15.28, determinare i parametri g in funzione di $s = j\omega$

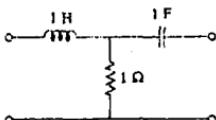


Figura 15.28
Per l'Esempio 15.7.

Soluzione: In termini di $s = j\omega$,

$$1 \text{ H} \implies sL = s, \quad 1 \text{ F} \implies \frac{1}{sC} = \frac{1}{j} \quad (15.6.9)$$

Per ottenere g_{11} e g_{21} , si lascia in circuito aperto la porta di uscita e si collega un generatore di tensione V_1 alla porta di ingresso, come in Figura 15.29(a). Dalla figura,

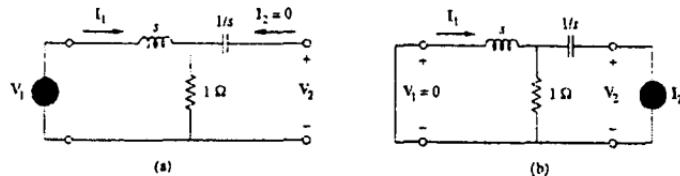
$$I_1 = \frac{V_1}{s + 1}$$

e anche

$$g_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{s+1}$$

Figura 15.29

Determinazione dei parametri g in funzione di s per il circuito in Figura 15.28.



Per il partitore di tensione,

$$V_2 = \frac{1}{s+1} V_1$$

cioè

$$g_{21} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s+1}$$

Per ottenere g_{12} e g_{22} , si pone in corto circuito la porta di ingresso e si collega un generatore di corrente I_2 alla porta di uscita, come in Figura 15.29(b). Per il partitore di corrente,

$$I_1 = -\frac{1}{s+1} I_2$$

cioè

$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{s+1}$$

Inoltre,

$$V_2 = I_2 \left(\frac{1}{s} + s \parallel 1 \right)$$

cioè

$$g_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{1}{s} + \frac{s}{s+1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)}$$

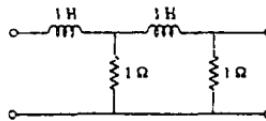
In conclusione,

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

■ Esercizio 15.7 Per la rete a scala di Figura 15.30, determinare i parametri g in funzione di s .

Figura 15.30

Per l'Esercizio 15.7.



Risposta

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2 + 3s + 1} & -\frac{1}{s^2 + 3s + 1} \\ \frac{1}{s^2 + 3s + 1} & \frac{s(s+2)}{s^2 + 3s + 1} \end{bmatrix}$$

15.5 PARAMETRI DI TRASMISSIONE

Poiché non esistono limitazioni riguardo a quali tensioni o correnti di porta possono essere considerate indipendenti e quali invece sono da considerare variabili dipendenti, si può pensare di generare altri insiemi di parametri. Il nuovo insieme di parametri che viene ora introdotto mette in relazione le variabili alla porta di ingresso con quelle alla porta di uscita:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}} \quad (15.22)$$

o anche

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (15.23)$$

Le (15.22) e (15.23) costituiscono una relazione fra le variabili di ingresso (V_1 e I_1) e le variabili di uscita (V_2 e $-I_2$). Si noti che nel calcolo dei parametri di trasmissione viene usata $-I_2$ invece di I_2 , perché la corrente viene considerata uscente dal biparta, come mostra la Figura 15.31, invece che entrante come in Figura 15.1(b). Ciò avviene per ragioni puramente convenzionali: quando si pongono in cascata dei biparta (uscita con ingresso), è più logico considerare I_2 come uscente.



Figura 15.31
Variabili di porta usate per definire i parametri ABCD

I parametri delle (15.22) e (15.23) forniscono una misura di come un circuito trasmette la tensione e la corrente dal generatore al carico. Essi si rivelano utili nella analisi di linee di trasmissione (quali per esempio i cavi e le fibre ottiche), perché esprimono le variabili del lato trasmittente (V_1 e I_1) in termini delle variabili del lato ricevente (V_2 e $-I_2$). Per questa ragione essi sono detti *parametri di trasmissione*. Essi sono anche noti come parametri ABCD. Vengono usati, fra l'altro, nel progetto di sistemi telefonici, reti a microonde e sistemi radar. I parametri di trasmissione si determinano come

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}, & B &= -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \\ C &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}, & D &= -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned}} \quad (15.24)$$

I parametri di trasmissione assumono quindi le seguenti denominazioni specifiche:

A = Rapporto di tensioni in circuito aperto

B = Impedenza di trasferimento negativa in corto circuito

C = Ammettenza di trasferimento in circuito aperto

D = Rapporto di correnti negativo in corto circuito

(15.25)

A e D sono adimensionali, B è espresso in ohm mentre C è espresso in siemens. Poiché i parametri di trasmissione forniscono una relazione diretta tra le variabili di ingresso e di uscita, essi si rivelano particolarmente utili nel caso di biparta posti in cascata. L'ultimo insieme di parametri che può essere definito esprime le variabili alla porta di uscita in termini di quelle alla porta di ingresso:

$$\begin{aligned} V_2 &= aV_1 - bI_1 \\ I_2 &= cV_1 - dI_1 \end{aligned} \quad (15.26)$$

o anche

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (15.27)$$

I parametri a , b , c e d sono chiamati *parametri di trasmissione inversi*. Essi vengono determinati come segue:

$$\begin{aligned} a &= \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_1=0}, \quad b = -\frac{V_2}{I_1} \Big|_{V_1=0} \\ c &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{I_1=0}, \quad d = -\frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (15.28)$$

Dalla (15.28) e dall'esperienza acquisita con le famiglie di parametri viste finora, risulta evidente che questi parametri sono detti individualmente

- a = Guadagno di tensione in circuito aperto
- b = Impedenza di trasferimento negativa di corto circuito
- c = Ammettenza di trasferimento in circuito aperto
- d = Guadagno di corrente negativo di corto circuito

a e d sono adimensionali, mentre b e c sono espressi in ohm e siemens, rispettivamente. In termini di parametri di trasmissione diretti o inversi, un bipola è reciproco se

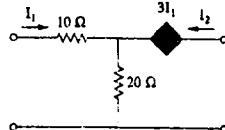
$$AD - BC = 1, \quad ad - bc = 1 \quad (15.30)$$

Queste relazioni possono essere dimostrate con un procedimento analogo a quello utilizzato per dimostrare la relazione corrispondente tra i parametri z . In alternativa, si può utilizzare la Tabella 15.1 presentata più avanti per ricavare la (15.30) dal fatto che $z_{12} = z_{21}$ per un bipola reciproco.

Esempio 15.8

Determinare i parametri di trasmissione per il bipola in Figura 15.32.

Figura 15.32
Per l'Esempio 15.8.



Soluzione: Per determinare A e C , si lascia la porta di uscita in circuito aperto, come in Figura 15.33(a), così che $I_2 = 0$, e si collega un generatore di tensione V_1 alla porta di ingresso. Si ha

$$V_1 = (10 + 20)I_1 = 30I_1 \quad \text{e} \quad V_2 = 20I_1 - 3I_1 = 17I_1$$

Allora,

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{30I_1}{17I_1} = 1.765, \quad C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{17I_1} = 0.0588 S$$

Per ottenere B e D , si pone in corto circuito la porta di uscita così che $V_2 = 0$, come mostrato in Figura 15.33(b), e si collega un generatore di tensione V_1 alla porta di ingresso. Al nodo a nel circuito di Figura 15.33(b), la KCL fornisce

$$\frac{V_1 - V_a}{10} - \frac{V_a}{20} + I_2 = 0 \quad (15.8.1)$$

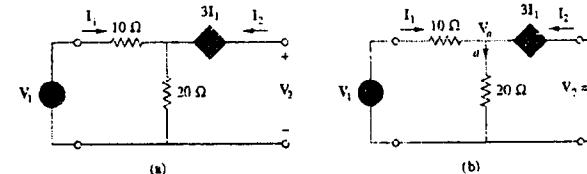


Figura 15.33
Per l'Esempio 15.8.
(a) calcolo di A e C .
(b) calcolo di B e D .

Ma $V_a = 3I_1$ e $I_1 = (V_1 - V_a)/10$. Combinando queste due equazioni si ottiene

$$V_a = 3I_1 \quad V_1 = 13I_1 \quad (15.8.2)$$

Sostituendo la $V_a = 3I_1$ nella (15.8.1) e sostituendo il primo termine con I_1 ,

$$I_1 - \frac{3I_1}{20} + I_2 = 0 \implies \frac{17}{20}I_1 = -I_2$$

Perciò,

$$D = -\frac{I_2}{I_1} = \frac{20}{17} = 1.176, \quad B = -\frac{V_1}{I_2} = \frac{-13I_1}{(-17/20)I_1} = 15.29 \Omega$$

■ **Esercizio 15.8** Calcolare i parametri di trasmissione per il circuito in Figura 15.16 (si veda l'Esercizio 15.3).

Risposta $A = 1.5$, $B = 11 \Omega$, $C = 0.25 S$, $D = 2.5$.

Esempio 15.9

I parametri ABCD del bipola in Figura 15.34 sono

$$\begin{bmatrix} 4 & 20 \Omega \\ 0.1 S & 2 \end{bmatrix}$$

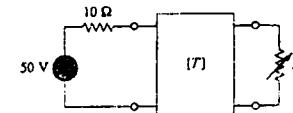


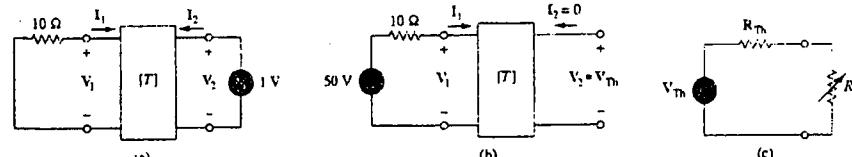
Figura 15.34
Per l'Esempio 15.9.

La porta di uscita è collegata a un carico variabile, al fine di ottenere il massimo trasferimento di potenza. Determinare R_L e la potenza massima trasferita.

Soluzione: È necessario determinare l'equivalente Thevenin (Z_{Th} e V_{Th}) visto dal carico, o alla porta di uscita. Si determina Z_{Th} mediante il circuito in Figura 15.35(a). L'obiettivo è di ottenere $Z_{Th} = V_2/I_2$. Sostituendo i parametri ABCD dati nella (15.22), si ottiene

$$V_1 = 4V_2 - 20I_2 \quad (15.9.1)$$

$$I_1 = 0.1V_2 - 2I_2 \quad (15.9.2)$$



Alla porta di ingresso, $V_1 = -10I_1$. Sostituendo questa espressione nella (15.9.1),

$$-10I_1 = 4V_2 - 20I_2$$

cine

$$I_1 = -0.4V_2 + 2I_2 \quad (15.9.3)$$

Figura 15.35
Soluzione dell'Esempio 15.9:
(a) calcolo di Z_{Th} ,
(b) calcolo di V_{Th} ,
(c) calcolo di R_L in modo da avere massimo trasferimento di potenza.

Uguagliando i secondi membri delle (15.9.2) e (15.9.3),

$$0.1V_2 - 2I_2 = -0.4V_2 + 2I_2 \implies 0.5V_2 = 4I_2$$

Perciò,

$$Z_{Th} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{4}{0.5} = 8 \Omega$$

Per determinare V_{Th} , si usa il circuito di Figura 15.35(b). Alla porta di uscita, $I_2 = 0$ e alla porta di ingresso $V_1 = 50 - 10I_1$. Sostituendo queste relazioni nelle (15.9.1) e (15.9.2),

$$50 - 10I_1 = 4V_2 \quad (15.9.4)$$

$$I_1 = 0.1V_2 \quad (15.9.5)$$

Sostituendo la (15.9.5) nella (15.9.4),

$$50 - V_1 = 4V_2 \implies V_2 = 10$$

In conclusione,

$$V_{Th} = V_2 = 10 \text{ V}$$

Il circuito equivalente è mostrato in Figura 15.35(c). Per avere il massimo trasferimento di potenza,

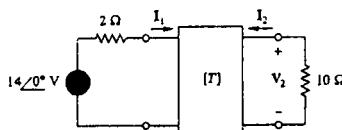
$$R_L = Z_{Th} = 8 \Omega$$

Per la (4.24), la potenza massima trasferita vale

$$P = I^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{2R_L} \right)^2 R_L = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{100}{4 \times 8} = 3.125 \text{ W}$$

Esercizio 15.9 Determinare I_1 e I_2 se i parametri di trasmissione per il biparta in Figura 15.36 sono

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \Omega \\ 0.4 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$$



Risposta 1 A, -0.2 A.

15.6 RELAZIONI TRA I PARAMETRI

Poiché i sei insiemi di parametri legano tra loro le stesse variabili di porta di ingresso e di uscita dello stesso biparta, devono esistere delle relazioni che legano fra loro le diverse famiglie di parametri. Se per un biparta esistono due insiemi di parametri, è allora possibile trovare la relazione tra un insieme e l'altro. Il procedimento per determinare tale relazione verrà illustrato mediante due esempi. Come primo esempio, dati i parametri z , si vogliono ottenere i parametri y . Dalla (15.2),

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (15.31)$$

da cui

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15.32)$$

Inoltre, dalla (15.9),

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15.33)$$

Confrontando la (15.32) con la (15.33), si vede che

$$[y] = [z]^{-1} \quad (15.34)$$

La matrice aggiunta della matrice $[z]$ è

$$\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

Sostituendo tutto ciò nella (15.34), si ottiene

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_z} \quad (15.35)$$

Eguagliando ordinatamente i termini,

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z}, \quad y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z}, \quad y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_z}, \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z} \quad (15.36)$$

Come secondo esempio, si vogliono determinare i parametri h a partire dai parametri z . Dalla (15.1),

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (15.37a)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (15.37b)$$

Risolvendo la (15.37b) rispetto a I_2 ,

$$I_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22}} I_1 + \frac{1}{z_{22}} V_2 \quad (15.38)$$

Sostituendo nella (15.37a),

$$V_1 = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{22}} I_1 + \frac{z_{12}}{z_{22}} V_2 \quad (15.39)$$

Ponendo le (15.38) e (15.39) in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15.40)$$

Dalla (15.15),

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Confrontando quest'ultima equazione con la (15.40), si ottiene

$$h_{11} = \frac{\Delta_z}{z_{22}}, \quad h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}}, \quad h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}, \quad h_{22} = \frac{1}{z_{22}} \quad (15.41)$$

La Tabella 15.1 elenca le formule di conversione per i sei insiemi di parametri dei biparta. Dato un insieme di parametri, la Tabella 15.1 può essere usata per ottenere altri insiemi di parametri. Per esempio, dati i parametri T , si possono determinare i parametri h corrispondenti nella quinta colonna della terza riga. Inoltre, sapendo che $z_{21} = z_{12}$ per un biparta reciproco, è possibile utilizzare la tabella per esprimere questa condizione in termini di altri parametri. È anche possibile mostrare che

$$[g] = [h]^{-1} \quad (15.42)$$

ma

$$[t] \neq [T]^{-1} \quad (15.43)$$

Tavella 15.1 Conversione di parametri di biparta.

	z		y		h		g		t	
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_n}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_T}{g_{11}}$	$\frac{1}{G}$	$\frac{D}{C}$
y	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
h	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_n}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_n}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_n}$	h_{11}	h_{12}	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{\Delta_T}{d}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{\Delta_b}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{21}}$	$\frac{g_{12}}{g_{21}}$	C	D
t	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta_T}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$-\frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{12}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_b}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \quad \Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}, \quad \Delta_T = AD - BC$$

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}, \quad \Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}, \quad \Delta_t = ad - bc$$

Esempio 15.10

Calcolare [z] e [g] di un biparta se

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & 1.5 \Omega \\ 2 S & 4 \end{bmatrix}$$

Soluzione: Se $A = 10, B = 1.5, C = 2, D = 4$, il determinante della matrice è

$$\Delta_T = AD - BC = 40 - 3 = 37$$

Dalla Tavella 15.1,

$$z_{11} = \frac{A}{C} = \frac{10}{2} = 5, \quad z_{12} = \frac{\Delta_T}{C} = \frac{37}{2} = 18.5$$

$$z_{21} = \frac{1}{C} = \frac{1}{2} = 0.5, \quad z_{22} = \frac{D}{C} = \frac{4}{2} = 2$$

$$g_{11} = \frac{C}{A} = \frac{2}{10} = 0.2, \quad g_{12} = -\frac{\Delta_T}{A} = -\frac{37}{10} = -3.7$$

$$g_{21} = \frac{1}{A} = \frac{1}{10} = 0.1, \quad g_{22} = \frac{B}{A} = \frac{1.5}{10} = 0.15$$

Perciò,

$$[z] = \begin{bmatrix} 5 & 18.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \Omega, \quad [g] = \begin{bmatrix} 0.2 & -3.7 \\ 0.1 & 0.15 \Omega \end{bmatrix}$$

Esercizio 15.10 Determinare $[y]$ e $[T]$ per un bipola i cui parametri z sono

$$[z] = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Omega$$

Risposta $[y] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix} S$, $[T] = \begin{bmatrix} 1.5 & 5 \Omega \\ 0.25 S & 1.5 \end{bmatrix}$

Esempio 15.11

Ottenere i parametri y del circuito con amplificatore operazionale in Figura 15.37. Dimostrare che il circuito non ammette parametri z .

Soluzione: Poiché dai terminali di ingresso dell'operazionale non entra corrente, $I_1 = 0$, il che può essere espresso in termini di V_1 e V_2 come

$$I_1 = 0V_1 + 0V_2 \quad (15.11.1)$$

Confrontando quest'ultima equazione con la (15.8), si ottiene

$$y_{11} = 0 = y_{12}$$

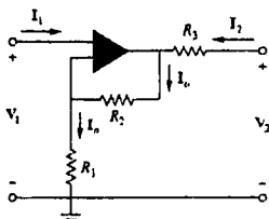


Figura 15.37
Per l'Esempio 15.11.

Inoltre,

$$V_2 = R_3 I_2 + I_e (R_1 + R_2)$$

dove I_e è la corrente che attraversa R_1 e R_2 . Ma $I_e = V_1 / R_1$, e quindi,

$$V_2 = R_3 I_2 + \frac{V_1 (R_1 + R_2)}{R_1}$$

che può essere scritta nella forma

$$I_2 = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_3} V_1 + \frac{V_2}{R_3}$$

Il confronto di quest'ultima equazione con la (15.8) mostra che

$$y_{21} = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_3}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_3}$$

Il determinante della matrice $[y]$ è

$$\Delta_y = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21} = 0$$

Poiché $\Delta_y = 0$, la matrice $[y]$ non ammette inversa, e quindi la matrice $[z]$ non esiste, secondo la (15.34). Si noti che il circuito non è reciproco, a causa della presenza dell'elemento attivo.

Esercizio 15.11 Determinare i parametri z del circuito con operazionale mostrato in Figura 15.38. Dimostrare che il circuito non ammette parametri y .

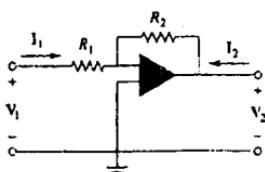


Figura 15.38
Per l'Esercizio 15.11.

Risposta $[z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix}$. $[z]^{-1}$ non esiste, e quindi $[y]$ non esiste.

15.7 INTERCONNESSIONE DI BIPORTA

A volte, un circuito grande e complesso può venire suddiviso in sottoreti, al fine di semplificare l'analisi o il progetto. Le sottoreti assumono spesso la forma di biparta, collegati tra loro a formare la rete originale. I biparta possono quindi essere considerati come blocchi costruttivi, che vengono interconnessi per formare un circuito più complesso. L'interconnessione può avvenire in serie, in parallelo, oppure in cascata. Benché un biparta collegato ad altri possa essere descritto da uno qualunque dei sei insiemi di parametri, spesso un particolare insieme risulta vantaggioso rispetto agli altri: per esempio, quando i biparta sono in serie, i loro parametri z si possono sommare per ottenere i parametri z del biparta complessivo. Quando sono in parallelo, i parametri dei componenti si sommano per ottenere i parametri z del biparta risultante. Quando sono posti in cascata, i loro parametri di trasmissione possono essere moltiplicati tra loro per ottenere i parametri di trasmissione per il biparta composto.

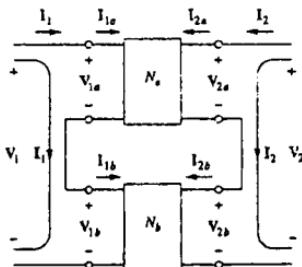
Si consideri il collegamento in serie di due biparta mostrato in Figura 15.39. I biparta sono considerati in serie perché le loro correnti di ingresso e di uscita sono le stesse e le loro tensioni si sommano. Inoltre, ciascun biparta possiede un riferimento comune, e quando i circuiti vengono posti in serie, i punti di riferimento comuni di ciascun circuito risultano collegati assieme. Per il biparta N_s ,

$$\begin{aligned} V_{1a} &= z_{11a}I_{1a} + z_{12a}I_{2a} \\ V_{2a} &= z_{21a}I_{1a} + z_{22a}I_{2a} \end{aligned} \quad (15.44)$$

e per il biparta N_b ,

$$\begin{aligned} V_{1b} &= z_{11b}I_{1b} + z_{12b}I_{2b} \\ V_{2b} &= z_{21b}I_{1b} + z_{22b}I_{2b} \end{aligned} \quad (15.45)$$

Figura 15.39
Collegamento in serie
di due biparta.



Si nota dalla Figura 15.39 che

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}, \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b} \quad (15.46)$$

e che

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1a} + V_{1b} = (z_{11a} + z_{11b})I_1 + (z_{12a} + z_{12b})I_2 \\ V_2 &= V_{2a} + V_{2b} = (z_{21a} + z_{21b})I_1 + (z_{22a} + z_{22b})I_2 \end{aligned} \quad (15.47)$$

Perciò, i parametri z per il biparta complessivo sono

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \quad (15.48)$$

oppure, in forma matriciale

$$[z] = [z_a] + [z_b] \quad (15.49)$$

Le ultime due equazioni mostrano che i parametri z del biparta composto sono ciascuno la somma dei parametri z corrispondenti dei biparta componenti. Questo risultato si può estendere a n biparta in serie. Se due biparta di cui sono dati i parametri $[z]$, po-

esempio, vengono collegati in serie, si può usare la Tabella 15.1 per convertire gli h in z e applicare poi la (15.49). Infine, il risultato viene riconvertito in h sempre mediante la Tabella 15.1.

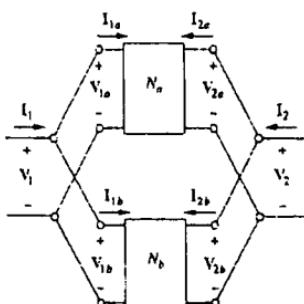


Figura 15.40
Collegamento in parallelo di due biporta.

Due biporta sono in parallelo quando le loro tensioni di porta sono ordinatamente uguali e le correnti di porta del biporto complessivo sono le somme delle singole correnti di porta. Inoltre, ciascun circuito deve avere un riferimento comune, e quando i biporta vengono collegati assieme, tutti quanti devono avere il riferimento comune collegato a un unico punto. Il collegamento parallelo di due biporta è mostrato in Figura 15.40. Per i due biporta,

$$\begin{aligned} I_{1a} &= y_{11a}V_{1a} + y_{12a}V_{2a} \\ I_{2a} &= y_{21a}V_{1a} + y_{22a}V_{2a} \end{aligned} \quad (15.50)$$

$$\begin{aligned} I_{1b} &= y_{11b}V_{1b} + y_{12b}V_{2b} \\ I_{2b} &= y_{21b}V_{1b} + y_{22b}V_{2b} \end{aligned} \quad (15.51)$$

Ma, dalla Figura 15.40,

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b}, \quad V_2 = V_{2a} = V_{2b} \quad (15.52a)$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}, \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b} \quad (15.52b)$$

Sostituendo le (15.50) e (15.51) nella (15.52b) si ottiene

$$\begin{aligned} I_1 &= (y_{11a} + y_{11b})V_1 + (y_{12a} + y_{12b})V_2 \\ I_2 &= (y_{21a} + y_{21b})V_1 + (y_{22a} + y_{22b})V_2 \end{aligned} \quad (15.53)$$

I parametri y per il biporto complessivo sono allora

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \quad (15.54)$$

o anche

$$[y] = [y_a] + [y_b] \quad (15.55)$$

da cui si vede che i parametri y del biporto composto sono pari alla somma dei parametri y dei singoli biporta. Il risultato può essere esteso a n biporta in parallelo.

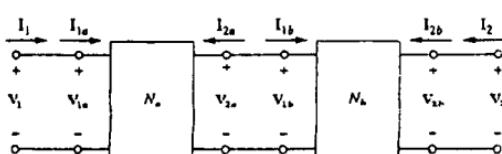


Figura 15.41
Collegamento in cascata di due biporta.

Due bipola si dicono *in cascata* quando l'uscita del primo è collegata all'ingresso del secondo. Il collegamento di due bipola in cascata è mostrato in Figura 15.41. Per i due bipola,

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad (15.56)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} \quad (15.57)$$

Dalla Figura 15.41,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (15.58)$$

Sostituendo queste ultime nelle (15.56) e (15.57),

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (15.59)$$

Perciò, la matrice dei parametri di trasmissione del bipola complessivo è il prodotto delle matrici dei parametri di trasmissione dei singoli bipola:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \quad (15.60)$$

o anche

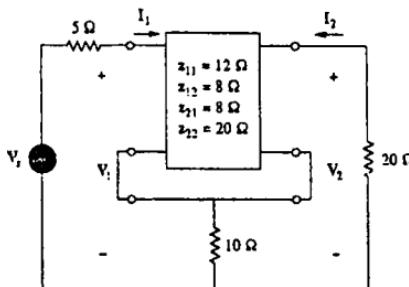
$$[T] = [T_a][T_b] \quad (15.61)$$

È proprio questa proprietà che rende i parametri di trasmissione così utili. Si ricordi che il prodotto delle matrici deve essere eseguito nello stesso ordine in cui i bipola N_a e N_b sono stati posti in cascata.

Esempio 15.12

Calcolare V_2/V_s nel circuito di Figura 15.42.

Figura 15.42
Per l'Esempio 15.12.



Soluzione: Il circuito può essere considerato come il collegamento in serie di due bipola. Per N_b ,

$$z_{12b} = z_{21b} = 10 = z_{11} = z_{22}$$

Perciò,

$$[z] = [z_a] + [z_b] = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$$

Ma

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = 22I_1 + 18I_2 \quad (15.12.1)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = 18I_1 + 30I_2 \quad (15.12.2)$$

Inoltre, alla porta di ingresso

$$V_1 = V_2 - 5I_1 \quad (15.12.3)$$

e alla porta di uscita,

$$V_2 = -20I_2 \implies I_2 = -\frac{V_2}{20} \quad (15.12.4)$$

Sostituendo le (15.12.3) e (15.12.4) nella (15.12.1) si ottiene

$$V_1 - 5I_1 = 22I_1 - \frac{18}{20}V_2 \implies V_1 = 27I_1 - 0.9V_2 \quad (15.12.5)$$

mentre sostituendo la (15.12.4) nella (15.12.2),

$$V_2 = 18I_1 - \frac{30}{20}V_2 \implies I_1 = \frac{2.5}{18}V_2 \quad (15.12.6)$$

Sostituendo la (15.12.6) nella (15.12.5),

$$V_1 = 27 \times \frac{2.5}{18}V_2 - 0.9V_2 = 2.85V_2$$

Infine,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2.85} = 0.3509$$

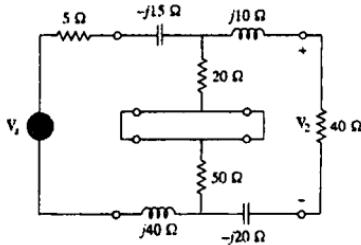
Esercizio 15.12 Determinare V_2/V_1 nel circuito di Figura 15.43.

Figura 15.43
Per l'Esercizio 15.12.

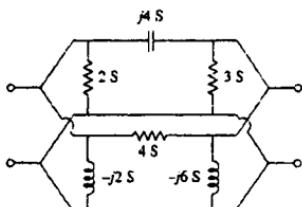
Risposta 0.6799 $\angle -29.05^\circ$.**Esempio 15.13**Calcolare i parametri y del biponto in Figura 15.44.

Figura 15.44
Per l'Esempio 15.13.

Soluzione: Si farà riferimento al biponto in alto come N_a e a quello in basso come N_b . I due biponti sono collegati in parallelo. Confrontando N_a e N_b con il circuito in Figura 15.13(a), si ricava

$$y_{12a} = -j4 = y_{21a}, \quad y_{11a} = 2 + j4, \quad y_{22a} = 3 + j4$$

o anche

$$[y_a] = \begin{bmatrix} 2+j4 & -j4 \\ -j4 & 3+j4 \end{bmatrix} S$$

e

$$y_{12b} = -4 = y_{21b}, \quad y_{11b} = 4 - j2, \quad y_{22b} = 4 - j6$$

cioè

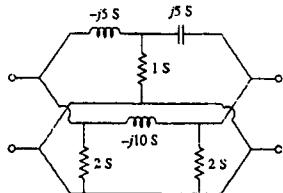
$$[y_b] = \begin{bmatrix} 4 - j2 & -4 \\ -4 & 4 - j6 \end{bmatrix} S$$

I parametri y complessivi sono

$$[y] = [y_a] + [y_b] = \begin{bmatrix} 6+j2 & -4-j4 \\ -4-j4 & 7-j2 \end{bmatrix} S$$

Esercizio 15.13 Ricavare i parametri y per il biparta in Figura 15.45.

Figura 15.45
Per l'Esercizio 15.13.

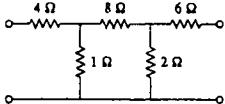


Risposta $\begin{bmatrix} 27-j15 & -25+j10 \\ -25+j10 & 27-j5 \end{bmatrix} S$

Esempio 15.14

Determinare i parametri di trasmissione per il circuito in Figura 15.46.

Figura 15.46
Per l'Esempio 15.14.

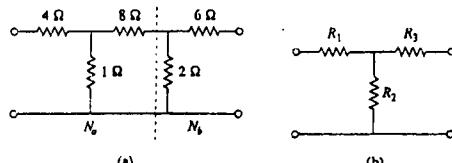


Soluzione: È possibile considerare il circuito rappresentato in Figura 15.46 come il collegamento in cascata di due reti a T, come mostrato in Figura 15.47(a). È inoltre possibile far vedere che una rete a T come quella mostrata in Figura 15.47(b) possiede i seguenti parametri di trasmissione [si veda il Problema 15.52(b)]:

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}, \quad B = R_3 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_2}$$

$$C = \frac{1}{R_2}, \quad D = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

Figura 15.47
Per l'Esempio 15.14:
(a) scomposizione del circuito in Figura 15.46 in due biparta,
(b) biparta a T generico.



Applicando questo risultato ai biparta in cascata N_a e N_b in Figura 15.47(a), si ottiene

$$A_a = 1 + 4 = 5, \quad B_a = 8 + 4 \times 9 = 44 \Omega$$

$$C_a = 1 S, \quad D_a = 1 + 8 = 9$$

oppure, in forma matriciale,

$$[T_a] = \begin{bmatrix} 5 & 44 \Omega \\ 1 S & 9 \end{bmatrix}$$

e

$$A_b = 1, \quad B_b = 6 \Omega, \quad C_b = 0.5 S, \quad D_b = 1 + \frac{6}{2} = 4$$

cioè,

$$[T_b] = \begin{bmatrix} 1 & 6 \Omega \\ 0.5 S & 4 \end{bmatrix}$$

Perciò, per il biparta composto di Figura 15.46,

$$[T] = [T_a][T_b] = \begin{bmatrix} 5 & 44 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 44 \times 0.5 & 5 \times 6 + 44 \times 4 \\ 1 \times 1 + 9 \times 0.5 & 1 \times 6 + 9 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 206 \Omega \\ 5.5 S & 42 \end{bmatrix}$$

Si noti che

$$\Delta r_a = \Delta r_b = \Delta r = 1$$

e che quindi il biparta è reciproco.

Esercizio 15.14 Ricavare la rappresentazione con parametri ABCD del circuito in Figura 15.48.

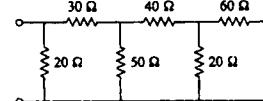


Figura 15.48
Per l'Esercizio 15.14.

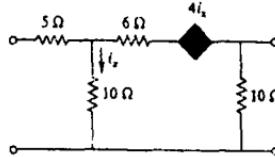
Risposta $[T] = \begin{bmatrix} 29.25 & 2200 \Omega \\ 0.425 S & 32 \end{bmatrix}$

15.8 CALCOLO DEI PARAMETRI DI BIOPORTA CON PSPICE

Il calcolo manuale dei parametri di un biparta può diventare faticoso quando il biparta è complesso. In tali situazioni è possibile fare ricorso a PSPice. Se il circuito è puramente resistivo, si può usare l'analisi DC di PSPice; per gli altri circuiti, solitamente, si esegue una analisi AC a una particolare frequenza specificata. Per utilizzare PSPice nel calcolo di un parametro per un biparta, è importante ricordare il modo con cui il parametro viene definito, e vincolare di conseguenza le variabili di porta opportune usando generatori da 1A oppure 1V, e contemporaneamente un circuito aperto o un corto circuito all'altra porta, per impostare la seconda condizione. I due esempi che seguono illustrano meglio il procedimento.

Esempio 15.15Determinare i parametri h del bipola in Figura 15.49.

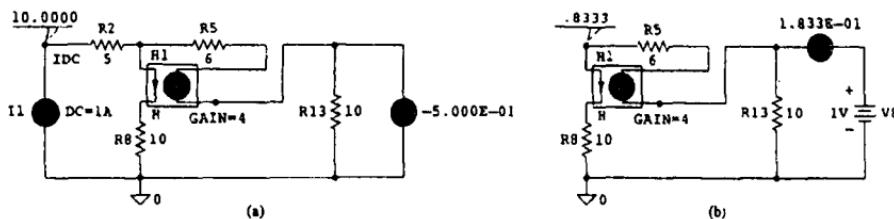
Figura 15.49
Per l'Esempio 15.15.

**Soluzione:** Dalla (15.16),

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}, \quad h_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

dalla quale si vede che h_{11} e h_{21} possono essere determinati ponendo $V_2 = 0$. Imponendo inoltre $I_1 = 1$ A, h_{11} diventa $V_1/1$ mentre h_{21} diventa $I_2/1$. Tenendo presente tutto ciò, si disegna lo schematico in Figura 15.50(a). È stato inserito un generatore di corrente IDC da 1A per rappresentare la condizione $I_1 = 1$ A, lo pseudocomponente VIEWPOINT per visualizzare V_1 e lo pseudocomponente IPROBE per visualizzare I_2 . Dopo aver salvato lo schematico, si fa eseguire PSpice selezionando Analysis/Simulate, e si osservano i valori visualizzati dagli pseudocomponenti. Si ottiene

$$h_{11} = \frac{V_1}{1} = 10 \Omega, \quad h_{21} = \frac{I_2}{1} = -0.5$$

**Figura 15.50**

Per l'Esempio 15.15:
(a) calcolo di h_{11} e h_{21} ,
(b) calcolo di h_{12} e h_{22} .

In maniera del tutto simile, dalla (15.16),

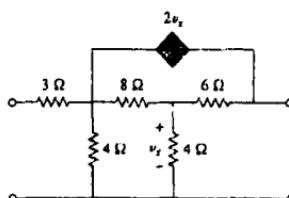
$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}, \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

che mostra come è possibile ottenere h_{12} e h_{22} lasciando in circuito aperto la porta di ingresso ($I_1 = 0$). Se si fa $V_2 = 1$ V, h_{12} diventa $V_1/1$ mentre h_{22} diventa $I_2/1$. Si usa allora lo schematico in Figura 15.50(b) con un generatore di tensione VDC da 1 V inserito ai terminali di uscita, per rispettare la condizione $V_2 = 1$ V. Gli pseudocomponenti VIEWPOINT e IPROBE sono stati inseriti per visualizzare i valori di V_1 e I_2 , rispettivamente. (Si noti che nella Figura 15.50(b) il resistore da 5 Ω viene ignorato, perché la porta di ingresso si trova in circuito aperto e PSpice non permetterebbe di lasciarlo non completamente collegato. Sarebbe possibile includere il resistore da 5 Ω se si sostituisse il circuito aperto con un resistore molto grande, per esempio 10 MΩ). Dopo aver simulato lo schematico, si ottengono i valori visualizzati sugli pseudocomponenti come mostrato in Figura 15.50(b). Ne segue,

$$h_{12} = \frac{V_1}{1} = 0.8333, \quad h_{22} = \frac{I_2}{1} = 0.1833 \text{ S}$$

Esercizio 15.15 Ottenere i parametri h del bipola in Figura 15.51 usando PSpice.

Figura 15.51
Per l'Esercizio 15.15.

**Risposta** $h_{11} = 4.238 \Omega$, $h_{21} = -0.6190$, $h_{12} = -0.7143$, $h_{22} = -0.1429 \text{ S}$.

Esempio 15.16

Determinare i parametri z per il circuito in Figura 15.52 alla frequenza $\omega = 10^6$ rad/s.

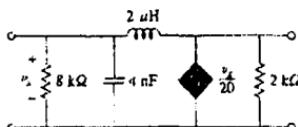


Figura 15.52
Per l'Esempio 15.16.

Soluzione: Nell'Esempio 15.15 era stata utilizzata l'analisi DC, perché il circuito in Figura 15.49 era puramente resistivo. Si userà qui invece l'analisi AC alla frequenza $f = \omega/2\pi = 0.15915$ MHz, perché L e C hanno impedanze che dipendono dalla frequenza. Nella (15.3), sono stati definiti i parametri z come

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Questa definizione suggerisce che se si pone $I_1 = 1$ A e si lascia in circuito aperto la porta di uscita, così che $I_2 = 0$, si ottiene

$$z_{11} = \frac{V_1}{1} \quad \text{e} \quad z_{21} = \frac{V_2}{1}$$

Tutto ciò è stato realizzato nello schematico di Figura 15.53(a). Sono stati inseriti un generatore di corrente IAC da 1A ai terminali di ingresso del circuito, e due pseudocomponenti VPRNT1 per ottenere V_1 e V_2 . Gli attributi dei due VPRNT1 sono stati scelti come $AC = yes$, $MAG = yes$ e $PHASE = yes$, affinché essi visualizzino i valori di modulo e fase delle tensioni. Si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep scegliendo 1 come Total Pts, 0.1519MEG come Start Freq, e 0.1519MEG come Final Freq nella finestra di dialogo AC Sweep and Noise Analysis. Dopo aver salvato lo schematico, si seleziona Analysis/Simulate per simularlo. Si ottengono V_1 e V_2 dal file di uscita. In conclusione,

$$z_{11} = \frac{V_1}{1} = 15.70 / 175.7^\circ \Omega, \quad z_{21} = \frac{V_2}{1} = 15.79 / 170.2^\circ \Omega$$

In maniera simile, dalla (15.3),

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}, \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

che suggerisce di porre $I_1 = 1$ A e lasciare in circuito aperto la porta di ingresso.

$$z_{12} = \frac{V_1}{1} \quad \text{e} \quad z_{22} = \frac{V_2}{1}$$

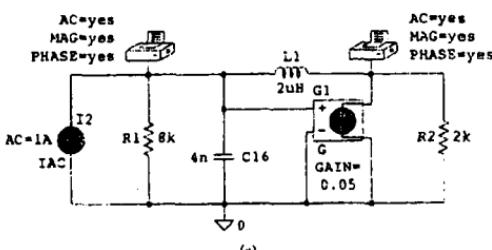
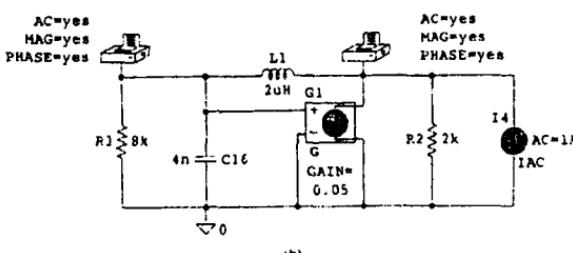


Figura 15.53
Per l'Esempio 15.16
(a) circuito per la determinazione di z_{11} e z_{21} , (b) circuito per la determinazione di z_{12} e z_{22} .

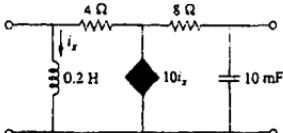


Tutto ciò porta allo schematico in Figura 15.53(b). L'unica differenza tra questo schematico e quello in Figura 15.53(a) è che in questo il generatore di corrente IAC da 1A si trova ora ai terminali di uscita. Si esegue la simulazione dello schematico in Figura 15.53(b) e si ottengono V_1 e V_2 dai file di uscita. In conclusione,

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 15.70 \angle 175.7^\circ \Omega, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 15.56 \angle 175.7^\circ \Omega$$

■ Esercizio 15.16 Ottenere i parametri z del circuito in Figura 15.54 alla frequenza $f = 60$ Hz.

Figura 15.54
Per l'Esercizio 15.16.



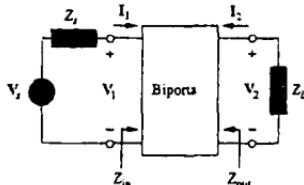
Risposta $z_{11} = 3.987 \angle 175.5^\circ$, $z_{21} = 0.0175 \angle -2.65^\circ$, $z_{12} = 0$, $z_{22} = 0.2651 \angle 91.9^\circ \Omega$. ■

15.9 APPLICAZIONI†

Come si è visto, i sei insiemi di parametri esaminati in questo capitolo possono essere usati per caratterizzare una grande varietà di biporta. A seconda del modo in cui i biporta vengono interconnessi per formare una rete di dimensioni più grandi, un particolare insieme di parametri può presentare vantaggi nei confronti degli altri, come si è notato nel Paragrafo 15.7. Nel presente paragrafo verranno prese in considerazione due importanti aree di applicazione per i parametri dei biporta: i circuiti con transistori e la sintesi delle reti a scala.

15.9.1 Circuiti con transistori

Figura 15.55
Biporta usato per isolare un generatore dal carico.



Una rete caratterizzata come un biporta viene spesso utilizzata per isolare un carico dalla eccitazione di ingresso. Per esempio, il biporta in Figura 15.55 potrebbe rappresentare un amplificatore, un filtro o una rete di altro tipo. Quando un biporta rappresenta un amplificatore, risulta facile ricavare le espressioni per il guadagno di tensione A_v , il guadagno di corrente A_i , l'impedenza di ingresso Z_{in} e l'impedenza di uscita Z_{out} dell'amplificatore. Essi sono definiti come segue, in termini di $s = j\omega$,

$$A_v = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \quad (15.62)$$

$$A_i = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \quad (15.63)$$

$$Z_{in} = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \quad (15.64)$$

$$Z_{out} = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1=0} \quad (15.65)$$

Si può utilizzare uno qualunque dei sei insiemi di parametri per i bipola per ricavare le espressioni delle Equazioni da (15.62) a (15.65).

I parametri ibridi (h) sono tuttavia quelli più utili per descrivere i transistori; essi risultano facili da misurare e spesso sono quelli forniti direttamente dai fogli di specifiche dei costruttori.

I parametri h permettono inoltre una stima rapida delle prestazioni dei circuiti a transistori. Essi vengono usati per determinare con precisione il guadagno di tensione, l'impedenza di ingresso e l'impedenza di uscita di un transistore. I parametri h per i transistori hanno un significato particolare, rappresentato dai loro pedici. L'elenco dei parametri e la corrispondenza con i parametri h generali sono i seguenti:

$$h_i = h_{11}, \quad h_r = h_{12}, \quad h_f = h_{21}, \quad h_o = h_{22} \quad (15.66)$$

I pedici i , r , f e o significano rispettivamente ingresso, inverso (reverse), diretto (forward) e uscita (output). La seconda lettera nel pedice specifica invece il tipo di collegamento usato: e per emettitore comune (CE), c per collettore comune (CC) e b per base comune (CB). In questo paragrafo si è interessati in particolare al collegamento a emettitore comune. I quattro parametri h per l'amplificatore a emettitore comune sono dunque:

h_{ie} = Impedenza di ingresso

h_{re} = Rapporto di tensioni inverso (15.67)

h_{fe} = Guadagno di corrente base collettore

h_{oe} = Ammettenza di uscita

Essi vengono calcolati o misurati allo stesso modo dei parametri h generici. Valori tipici per questi parametri sono $h_{ie} = 6 \text{ k}\Omega$, $h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}$, $h_{fe} = 200$, $h_{oe} = 8 \mu\text{S}$. È importante ricordare che questi valori rappresentano caratteristiche AC dei transistori, misurate in condizioni ben specificate.

In Figura 15.56 è mostrato lo schema circuitale dell'amplificatore a emettitore comune e il suo modello equivalente ibrido. Dalla figura si vede che

$$V_b = h_{ie} I_b + h_{re} V_c \quad (15.68a)$$

$$I_c = h_{fe} I_b + h_{oe} V_c \quad (15.68b)$$

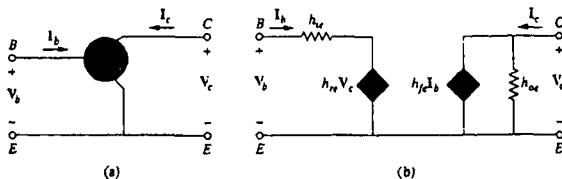


Figura 15.56
Amplificatore ad emettitore comune: (a) schema circuitale, (b) modello ibrido.

Si consideri ora l'amplificatore a transistor collegato a un generatore AC e a un carico, come in Figura 15.57. Questo schema potrebbe rappresentare un esempio di bipola facente parte di una rete più grande. È possibile analizzare il circuito equivalente ibrido con i metodi tradizionali, ricordando la (15.68) (si veda l'Esempio 15.6). Riconoscendo, dalla Figura 15.57, che $V_c = -R_L I_c$ e sostituendo questa espressione nella (15.68b), si ottiene

$$I_c = h_{fe} I_b - h_{oe} R_L I_c$$

cioè

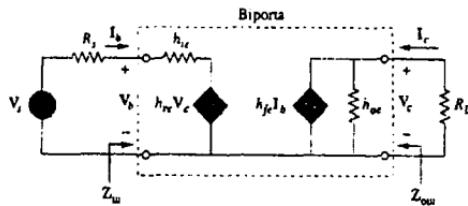
$$(1 + h_{oe} R_L) I_c = h_{fe} I_b \quad (15.69)$$

Da quest'ultima, si può ricavare il guadagno di corrente

$$A_i = \frac{I_c}{I_b} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe} R_L} \quad (15.70)$$

Figura 15.57

Amplificatore a transistor con generatore di tensione e resistenza di carico.



Dalle (15.68b) e (15.70), è possibile esprimere I_b in termini di V_c :

$$I_c = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} I_b = h_{fe}I_b + h_{oe}V_c$$

cioè

$$I_b = \frac{h_{oe}V_c}{\frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} - h_{fe}} \quad (15.71)$$

Sostituendo la (15.71) nella (15.68a) e dividendo per V_c , si ha

$$\begin{aligned} \frac{V_b}{V_c} &= \frac{\frac{h_{oe}h_{fe}}{h_{fe}} + h_{re}}{\frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} - h_{fe}} \\ &= \frac{h_{re} + h_{ie}h_{oe}R_L - h_{re}h_{fe}R_L}{-h_{fe}R_L} \end{aligned} \quad (15.72)$$

Il guadagno di tensione è allora

$$A_v = \frac{V_c}{V_b} = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe})R_L} \quad (15.73)$$

Sostituendo $V_c = -R_L I_c$ nella (15.68a)

$$V_b = h_{re}I_b - h_{re}R_L I_c$$

da cui

$$\frac{V_b}{I_b} = h_{re} - h_{re}R_L \frac{I_c}{I_b} \quad (15.74)$$

Sostituendo I_c/I_b con il guadagno di corrente calcolato nella (15.70) si ottiene l'impedenza di ingresso

$$Z_{in} = \frac{V_b}{I_b} = h_{re} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L} \quad (15.75)$$

L'impedenza di uscita Z_{out} coincide con quella dell'equivalente Thevenin ai terminali di uscita. Come sempre, eliminando il generatore di tensione, e collegando un generatore da 1 V ai terminali di uscita si ottiene il circuito di Figura 15.58, dal quale si determina Z_{out} come $1/I_c$. Poiché $V_c = 1$ V, la maglia di ingresso fornisce

$$h_{re}(1) = -I_b(R_s + h_{ie}) \quad \Rightarrow \quad I_b = -\frac{h_{re}}{R_s + h_{ie}} \quad (15.76)$$

Per la maglia di uscita,

$$I_c = h_{oe}(1) + h_{fe}I_b \quad (15.77)$$

Sostituendo la (15.76) nella (15.77)

$$I_c = \frac{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}}{R_s + h_{ie}} \quad (15.78)$$

Da quest'ultima si può ottenere l'impedenza di uscita Z_{out} come $1/I_c$, cioè

$$Z_{out} = \frac{R_s + h_{re}}{(R_s + h_{re})h_{oc} - h_{re}h_{fe}} \quad (15.79)$$

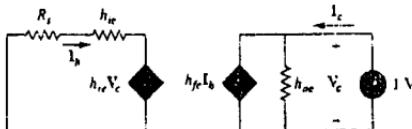


Figura 15.58
Determinazione dell'impedenza di uscita del circuito amplificatore in Figura 15.57.

Esempio 15.17

Si consideri l'amplificatore a emettitore comune di Figura 15.59. (a) Determinare il guadagno di tensione, il guadagno di corrente, l'impedenza di ingresso e l'impedenza di uscita usando i seguenti parametri h :

$$h_{re} = 1 \text{ k}\Omega, \quad h_{re} = 2.5 \times 10^{-4}, \quad h_{fe} = 50, \quad h_{oc} = 20 \mu\text{S}$$

(b) Determinare la tensione di uscita V_o .

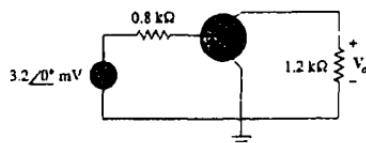


Figura 15.59
Per l'Esempio 15.17

Soluzione

1. Dare una definizione precisa del problema.

Il problema in prima analisi sembra definito in modo chiaro. Ma si devono determinare l'impedenza di ingresso e il guadagno di tensioni riferiti al transistore oppure al circuito?

Per quanto riguarda il guadagno di corrente e l'impedenza di uscita, essi coincidono nei due casi.

Si decide di calcolare le impedenze di ingresso e di uscita, e i guadagni di tensione e di corrente solo per il circuito e non per il transistore. È interessante notare che il problema può essere considerato come un semplice progetto: dati i parametri h , progettare un semplice amplificatore con guadagno pari a -60 .

2. Elenicare ciò che si conosce riguardo al problema.

Partendo da un semplice circuito con transistori con tensione di ingresso pari a 3.2 mV, e non i parametri h del transistore, si deve calcolare la tensione di uscita.

3. Valutare le soluzioni alternative e determinare quella che ha maggior probabilità di successo.

Ci sono due modi per risolvere il problema, il più semplice utilizza il circuito di Figura 15.57. Partendo dal circuito equivalente si utilizzano i metodi di analisi circuitale per determinare la soluzione. Si può verificare la soluzione sostituendo i risultati nelle equazioni che risolvono il circuito, per controllare se sono corrette.

Un altro metodo consiste nel semplificare la parte a destra del circuito equivalente, e poi eseguire i calcoli a ritroso per vedere se i risultati che si ottengono sono approssimativamente gli stessi. Qui si userà quest'ultimo metodo.

4. Fare un tentativo di soluzione del problema.

(a) Si nota che $R_s = 0.8 \text{ k}\Omega$ e $R_L = 1.2 \text{ k}\Omega$. Il transistore di Figura 15.59 verrà trattato come un bipolo. Si applicano allora le Equazioni da (15.70) a (15.79).

$$h_{re}h_{oc} - h_{re}h_{fe} = 10^3 \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50 = 7.5 \times 10^{-5}$$

$$A_v = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{re} + (h_{re}h_{oc} - h_{re}h_{fe})R_L} = \frac{-50 \times 1200}{1000 + 7.5 \times 10^{-5} \times 1200} = -59.46$$

A_v è il guadagno di tensione del transistore $= V_o/V_i$. Per calcolare il guadagno di tensione del circuito occorre determinare V_o/I_c . Si ottiene questo risultato usando l'equazione di anello di sinistra del circuito, e le equazioni (15.71) e (15.73).

$$-V_i + R_s I_b + I'_s = 0$$

quindi:

$$V_o = 800 \frac{\frac{20 \times 10^{-6}}{50} - \frac{1}{59.46} V_0}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^3 - 50} = -0.03047 \cdot V_0$$

Perciò il guadagno di tensione del circuito è pari a $V_o/V_s = -32.82$. Si può calcolare la tensione di uscita:

$$V_o = \text{guadagno} \times V_s = -105.09 \text{ mV}$$

Il guadagno di corrente e l'impedenza di ingresso sono rispettivamente:

$$A_i = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} = \frac{50}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1200} = 48.83$$

$$Z_{in} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L} = 1000 - \frac{2.5 \times 10^{-4} \times 50 \times 1200}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1200} = 985.4 \Omega$$

Si può anche calcolare l'impedenza di ingresso del circuito aggiungendo il resistore di 800Ω , cioè $800 + 985.4 = 1785.4\Omega$.

L'impedenza di uscita è:

$$Z_{out} = \frac{R_o + h_{re}}{(R_o + h_{re})h_{oe} - h_{re}h_{fe}} = \frac{800 + 1000}{1800 \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50} = 76.62 \Omega$$

5. Valutare la soluzione trovata e verificarne la accuratezza.

Nel circuito equivalente h_{oe} è un resistore di $50\text{k}\Omega$, in parallelo con il resistore di carico di $12\text{k}\Omega$. Il valore del resistore di carico è molto piccolo rispetto a h_{oe} , per cui quest'ultimo si può trascurare. Si ha:

$$I_c = h_{fe}I_b = 50I_b \quad V_c = -1200I_b$$

Si calcola la corrente I_b dall'equazione alla maglia di ingresso del circuito equivalente:

$$-V_s + (R_s + h_{re})I_b + h_{re}V_c = 0$$

$$-0.0032 + (800 + 1000)I_b + (0.00025)(-1200)(50)I_b = 0$$

Da cui si ricava:

$$I_b = 0.0032/1785 = 1.7927\mu A \quad I_c = 50 \times 1.7927 = 89.64\mu A$$

$$V_c = -1200 \times 89.64 \times 10^{-6} = -107.57 \text{ mV}$$

Quest'ultimo valore è una buona approssimazione di -105.09 mV

$$\text{guadagno di tensione} = V_o/V_s = -107.57/3.2 = -33.62$$

Anche questo valore è una buona approssimazione di -32.82 .

L'impedenza di ingresso del circuito è $0.032/1.7927 \times 10^{-6} = 1785\Omega$ che è praticamente uguale al valore calcolato prima 1785.4Ω .

Per questi calcoli si è ipotizzato $Z_{out} = \infty\Omega$. Il calcolo precedente ha fornito $72.6\text{k}\Omega$. Si può verificare l'ipotesi fatta calcolando la resistenza equivalente tra questo valore e la resistenza di carico:

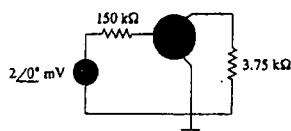
$$(72600 \times 1200)/(72600 + 1200) = 1.1805 \text{ k}\Omega$$

6. Il problema è stato risolto in maniera soddisfacente?

Si è risolto il problema in modo soddisfacente e si sono verificati i risultati. Si possono quindi presentare i risultati ottenuti come la soluzione del problema.

Esercizio 15.17 Per l'amplificatore a transistori di Figura 15.60, determinare il guadagno di tensione, il guadagno di corrente, l'impedenza di ingresso e l'impedenza di uscita. Supponere che:

$$h_{fe} = 6\text{k}\Omega, \quad h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}, \quad h_{re} = 200, \quad h_{oe} = 8\mu S$$



Risposta guadagno di tensione per il transistore -123.61 e per il circuito -4.754 ; guadagno di corrente 194.17; resistenza di ingresso per il transistore $6\text{k}\Omega$ e per il circuito $156\text{k}\Omega$; resistenza di uscita $128.08\text{k}\Omega$.

15.9.2 Sintesi di reti a scala

Un'altra applicazione per i parametri dei bipolaari si ha nella sintesi (o costruzione) di reti a scala, che si incontrano spesso nella pratica e sono di particolare utilità nel progetto di filtri passa-basso. In base a quanto è stato detto sui circuiti del secondo ordine nel Capitolo 8, l'ordine del filtro è pari all'ordine dell'equazione caratteristica che descrive il filtro, il quale a sua volta viene determinato dal numero di elementi reattivi che non possono essere combinati con altri elementi (per esempio, con composizioni in serie o in parallelo). La Figura 15.61(a) mostra una rete a scala LC contenente un numero dispari di elementi (per realizzare un filtro di ordine dispari), mentre in Figura 15.61(b) ne è mostrata una con un numero pari di elementi (per realizzare un filtro di ordine pari).

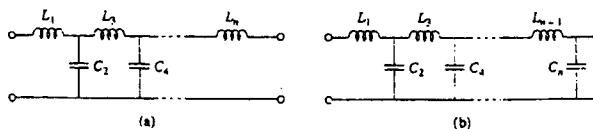


Figura 15.61
Rete a scala LC per filtro passa-basso di: (a) ordine dispari.
(b) ordine pari.

Quando l'una o l'altra delle reti mostrate viene terminata con una impedenza di carico e una impedenza di ingresso, si ottiene la struttura in Figura 15.62. Per rendere il progetto più semplice, si supporrà qui che $Z_s = 0$. Si vuole quindi sintetizzare la funzione di trasferimento della rete a scala LC; si inizia dalla caratterizzazione della rete a scala per mezzo dei suoi parametri ammettenza, cioè

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (15.80a)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (15.80b)$$

(Naturalmente, si sarebbero potuti utilizzare i parametri impedenza invece dei parametri ammettenza). Alla porta di ingresso, $V_1 = V_s$, perché $Z_s = 0$. Alla porta di uscita, $V_2 = V_o$ e $I_2 = -V_o/Z_L = -V_o Y_L$. La (15.80b) diventa allora

$$-V_o Y_L = y_{21}V_s + y_{22}V_o$$

e quindi

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-y_{21}}{Y_L + y_{22}} \quad (15.81)$$

È possibile riscrivere questa equazione come

$$H(s) = -\frac{y_{21}/Y_L}{1 + y_{22}/Y_L} \quad (15.82)$$

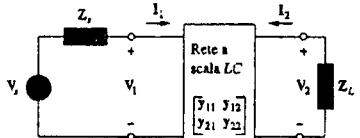


Figura 15.62
Rete a scala LC terminata da impedenze.

È possibile trascurare il segno negativo nella (15.82) perché solitamente i requisiti per i filtri vengono specificati in termini di modulo della funzione di trasferimento. Lo scopo principale nel progetto dei filtri è la scelta dei valori dei condensatori e degli induttori, in modo che vengano sintetizzati i parametri y_{21} e y_{22} , realizzando così la funzione di trasferimento desiderata. Per ottenere tutto ciò, si trae vantaggio da una importante proprietà della rete a scala LC: tutti i parametri z e y sono rapporti di polinomi che contengono soltanto potenze pari di s , oppure potenze dispari di s - cioè, essi sono rapporti $Od(s)/Ev(s)$ oppure $Ev(s)/Od(s)$, con Od e Ev funzioni dispari e pari, ri-

Figura 15.60
Per l'Esercizio 15.17.

spettivamente. Si pone

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_o + N_e}{D_o + D_e} \quad (15.83)$$

dove $N(s)$ e $D(s)$ sono il numeratore e il denominatore della funzione $H(s)$; N_o e N_e sono le parti dispari e pari di N , rispettivamente; D_o e D_e sono la parte dispari e pari di D . Poiché $N(s)$ deve essere dispari o pari, è possibile scrivere la (15.83) come

$$H(s) = \begin{cases} \frac{N_o}{D_o + D_e}, & (N_e = 0) \\ \frac{N_e}{D_o + D_e}, & (N_o = 0) \end{cases} \quad (15.84)$$

che si può ulteriormente riscrivere come

$$H(s) = \begin{cases} \frac{N_o/D_e}{1 + D_o/D_e}, & (N_e = 0) \\ \frac{N_e/D_o}{1 + D_e/D_o}, & (N_o = 0) \end{cases} \quad (15.85)$$

Confrontando quest'ultima con la (15.82), si ottengono i parametri y del bipolita

$$\frac{y_{21}}{Y_L} = \begin{cases} \frac{N_o}{D_e}, & (N_e = 0) \\ \frac{N_e}{D_o}, & (N_o = 0) \end{cases} \quad (15.86)$$

e

$$\frac{y_{22}}{Y_L} = \begin{cases} \frac{D_o}{D_e}, & (N_e = 0) \\ \frac{D_e}{D_o}, & (N_o = 0) \end{cases} \quad (15.87)$$

L'esempio che segue illustra meglio il procedimento.

Esempio 15.18

Progettare una rete a scala LC terminata su un resistore da 1Ω , avente la funzione di trasferimento normalizzata

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

(Questa è una funzione di trasferimento per un filtro passa-basso di tipo Butterworth).

Soluzione: Il denominatore mostra che si tratta di una rete del terzo ordine; la rete a scala LC corrispondente è mostrata in Figura 15.63(a), con due induttori e un condensatore. Si vogliono ora determinare i valori degli induttori e del condensatore. Per ottenerli, si raggruppano i termini nel denominatore in parte dispari e parte pari:

$$D(s) = (s^3 + 2s) + (2s^2 + 1)$$

e quindi

$$H(s) = \frac{1}{(s^3 + 2s) + (2s^2 + 1)}$$

Si dividono ora numeratore e denominatore per la parte dispari del denominatore, ponendo

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s^3 + 2s}}{1 + \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}} \quad (15.15.1)$$

Dalla (15.82), quando $Y_L = 1$,

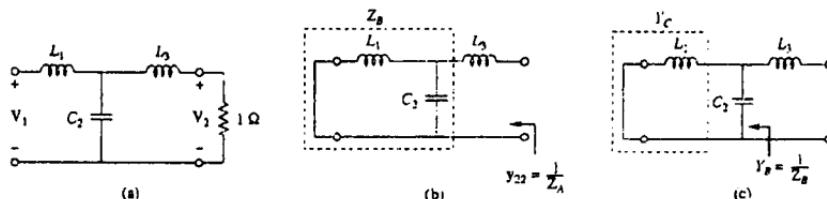
$$H(s) = \frac{-Y_{21}}{1 + Y_{22}} \quad (15.15.2)$$

Confrontando le (15.15.1) e (15.15.2), si ottiene

$$Y_{21} = -\frac{1}{s^2 + 2s}, \quad Y_{22} = \frac{2s^2 - 1}{s^2 + 2s}$$

Qualunque realizzazione di Y_{21} realizzerà automaticamente anche Y_{22} , essendo Y_{22} l'ammettenza della porta di uscita, cioè l'ammettenza vista alla porta di uscita con la porta di ingresso in corto circuito. Si determinano ora i valori di L e C in Figura 15.63(a) che forniranno il valore corrente per Y_{22} . Ricordando che Y_{22} è l'impedenza di uscita in corto circuito, si pone in corto circuito la porta di ingresso, come mostrato in Figura 15.63(b). Si ottiene dapprima Z_A , ponendo

$$Z_A = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{s^2 + 2s}{2s^2 - 1} = sL_3 + Z_B \quad (15.15.3)$$



Dividendo tra loro numeratore e denominatore,

$$Z_A = 0.5s + \frac{1.5s}{2s^2 + 1} \quad (15.15.4)$$

Il confronto fra la (15.15.3) e la (15.15.4) mostra che

$$L_3 = 0.5 \text{ H}, \quad Z_B = \frac{1.5s}{2s^2 + 1}$$

Si tenta ora di determinare C_2 come in Figura 15.63(c), ponendo

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{2s^2 + 1}{1.5s} = 1.333s + \frac{1}{1.5s} = sC_2 + Y_C$$

da cui $C_2 = 1.33 \text{ F}$ e

$$Y_C = \frac{1}{1.5s} = \frac{1}{sL_1} \quad \Rightarrow \quad L_1 = 1.5 \text{ H}$$

È stata allora sintetizzata la rete a scala LC in Figura 15.63(a) con $L_1 = 1.5 \text{ H}$, $C_2 = 1.333 \text{ F}$ e $L_3 = 0.5 \text{ H}$, in modo da fornire la funzione di trasferimento data $H(s)$. Il risultato può essere confermato calcolando $H(s) = V_2/V_1$ nella Figura 15.63(a), oppure calcolando la Y_{21} dal circuito e confrontandola con quella richiesta.

Esercizio 15.18 Realizzare la seguente funzione di trasferimento usando una rete a scala LC terminata su un resistore da 1Ω .

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + s^2 + 4s + 2}$$

Risposta Rete a scala in Figura 15.63(a) con $L_1 = L_3 = 1.0 \text{ H}$ e $C_2 = 0.5 \text{ F}$.

Figura 15.63
Per l'Esempio 15.18

CASO PRATICO Progetto di una rete a scala

1) Introduzione al Caso Pratico

I filtri attivi e passivi rappresentano una delle più importanti applicazioni dei circuiti elettrici ed elettronici. Molto spesso, per una particolare applicazione di telecomunicazioni o di controllo di processo, si desidera un filtro avente una ben definita funzione di trasferimento. La reti a scala LC sono in grado di realizzare molte delle funzioni di trasferimento richieste ai filtri.

2) Descrizione e Specifiche

Determinare la funzione di trasferimento e progettare una rete a scala LC tale che:

$$Y_{22} = \frac{s^3 + 5s}{s^4 + 10s^2 + 8}$$

3) Obiettivi

Si vuole quindi realizzare una rete bipola in cui uno dei parametri y abbia una espressione prefissata. È possibile risolvere il problema utilizzando il procedimento illustrato in questo capitolo, chiamato sintesi perché ricava in maniera sistematica i valori dei componenti da utilizzare nella rete.

4) Elaborazione e Calcoli

In base a quanto si è appreso nel Paragrafo 15.9.2, e con riferimento alla Figura 15.62, la rete a scala LC ha alla porta di ingresso un segnale $V_s = V_1$, perché $Z_s = 0$; alla porta di uscita si collega un'ammettenza unitaria $Y_L = 1 S$.

La funzione di trasferimento che si ottiene è

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = -\frac{Y_{21}}{1 + Y_{22}}$$

Si determina la funzione di trasferimento partendo dal parametro ammettenza Y_{22} e in base a quanto studiato nel Paragrafo 15.9.2 si ha

$$Y_{22} = \frac{s^3 + 5s}{s^4 + 10s^2 + 8} = \frac{D_0}{D_e} (N_e = 0)$$

$$Y_{21} = -\frac{1}{s^4 + 10s^2 + 8} = \frac{N_0}{D_e} (N_e = 0)$$

Quindi si ottiene

$$H(s) = \frac{N_0}{D_a + D_e} = \frac{1}{s^4 + s^3 + 10s^2 + 5s + 8}$$

Dal denominatore si vede che si tratta di una rete del quarto ordine. Per ottenere i valori degli induttori e condensatori si realizza solo y_{22} della funzione di trasferimento, come si è visto nell'Esempio 15.18.

Si ricorda che y_{22} è l'ammettenza di uscita con l'ingresso in cortocircuito come in Figura 15.64.

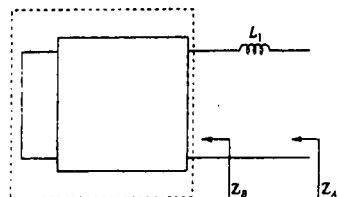


Figura 15.64
Calcolo dell'impedenza Z_A .

Si ottiene l'impedenza Z_A , e, dividendo numeratore e denominatore, anche l'impedenza Z_B :

$$Z_A = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{s^4 + 10s^2 + 8}{s^3 + 5s} = s + \frac{8s^2 + 8}{s^3 + 5s} = sL_1 + Z_B$$

$$\text{Quindi si ha } L_1 = 1H \text{ e } Z_B = \frac{8s^2 + 8}{s^3 + 5s}.$$

Passando all'ammettenza Y_B , e si dividono numeratore e denominatore:

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{s^3 + 5s}{8s^2 + 8} = s0.2 + \frac{3.4s}{8s^2 + 8} = sC_2 + Y_C$$

Si ottiene C_2 come mostrato in Figura 15.65, cioè

$$C_2 = 0.2F \quad \text{e} \quad Y_C = \frac{3.4s}{8s^2 + 8}$$

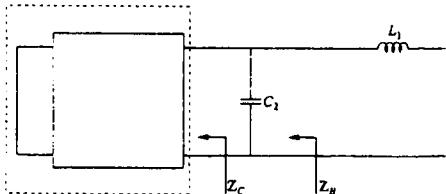


Figura 15.65
Calcolo dell'impedenza Z_B .

Si determina l'impedenza Z_C , e si divide nuovamente numeratore e denominatore:

$$Z_C = \frac{1}{Y_C} = \frac{8s^2 + 8}{3.4s} = \frac{8s}{3.4} + \frac{8}{3.4s} = sL_3 + \frac{1}{sC_4}$$

Si ottengono i valori di L_3 e C_4

$$L_3 = \frac{5}{3.4} = 1.471H \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{3.4}{8} = 0.425 F$$

e quindi la rete LC di Figura 15.66

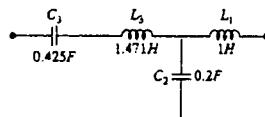


Figura 15.66
Rete a scala LC.

Si è quindi sintetizzata una rete a scala LC che realizza la richiesta del progetto.

In Figura 15.67 è rappresentato un possibile utilizzo della rete appena progettata con $Z_s = 0$ e $Y_L = 1 S$, in funzione di s (i valori dei componenti passivi sono espressi in Siemens).

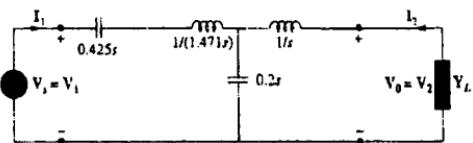


Figura 15.67
Utilizzo della rete a scala.

5) Analisi e Verifica

Si confermano i risultati calcolando y_{22} dal circuito di Figura 15.68, cortocircuitando la porta di ingresso e inserendo un generatore di $10^\circ V$ alla porta di uscita, come mostrato in Figura 15.68.

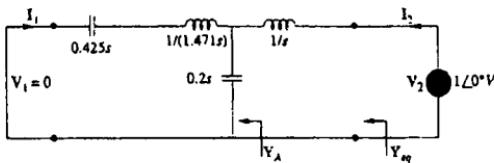


Figura 15.68 Calcolo di y_{22} .

Occorre cioè determinare l'ammittenza Y_{eq} equivalente vista dal generatore di tensione V_2 .

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} = Y_{eq}$$

$$Y_A = 0.2s + \frac{\frac{1}{0.425s \cdot \frac{1}{1.471s}}}{0.425s + \frac{1}{1.471s}} = 0.2s + \frac{0.425s}{1 + 0.625s} = \frac{0.125s^3 + 0.625s}{1 + 0.625s^2}$$

e quindi l'ammittenza y_{22} si ottiene con

$$y_{22} = Y_{eq} = \frac{\frac{1}{s} \cdot Y_A}{\frac{1}{s} + Y_A} = \frac{0.125s^3 + 0.625s}{0.125s^4 + 1.25s^2 + 1} = \frac{s^2 + 5s}{s^4 + 10s^2 + 8}$$

che è proprio la funzione di trasferimento richiesta dal progetto.

SOMMARIO

- 1) Un biparta è una rete elettrica con due porte (o due coppie di terminali di accesso), denominate porta di ingresso e di uscita.
- 2) I sei parametri usati per caratterizzare una rete biparta sono i parametri impedenza [z], ammettenza [y], ibridi [h], ibridi inversi [g], di trasmissione [T] e di trasmissione inversi [t].
- 3) È possibile scrivere le relazioni tra i parametri e le variabili di ingresso e di uscita nella forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [z] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [y] \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [h] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [g] \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [t] \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

- 4) I parametri possono essere calcolati o misurati cortocircuitando oppure ponendo in circuito aperto in modo appropriato le porte di ingresso o di uscita.
- 5) Un biparta è reciproco se $z_{12} = z_{21}$, $y_{12} = y_{21}$, $h_{12} = h_{21}$, $g_{12} = -g_{21}$, $\Delta_T = 1$, $\Delta_t = 1$. Reti elettriche con generatori dipendenti non sono reciproche.
- 6) La Tabella 15.1 elenca le formule di conversione per i sei insiemi di parametri. È possibile dimostrare che:

$$[y] = [z]^{-1}, \quad [g] = [h]^{-1}, \quad [t] \neq [T]^{-1}$$

- 7) Le reti biparta si possono collegare in serie, in parallelo e in cascata. Nel collegamento serie i parametri z si sommano, nel collegamento parallelo i parametri y si sommano e nel collegamento in cascata i parametri di trasmissione si moltiplicano fra loro nel corretto ordine.
- 8) Si può usare PSpice per determinare i parametri di un biparta alimentando in modo appropriato le porte di ingresso e di uscita con un generatore di 1A o 1V, e usando contemporaneamente un circuito aperto o un cortocircuito nell'altra porta per impostare le necessarie condizioni.
- 9) I parametri delle reti biparta trovano larga applicazione nell'analisi di circuiti con transistori e nella sintesi di reti LC a scala.
I parametri delle reti biparta sono particolarmente utilizzati nell'analisi dei circuiti con transistori perché questi circuiti si caratterizzano facilmente con reti biparta.
Le reti LC a scala sono molto importanti nel progetto di filtri passivi passabasso, che presentandosi come reti a T in cascata possono essere studiate come reti biparta.

- 15.5 Calcolare i parametri z per la rete in Figura 15.74 in funzione di s .

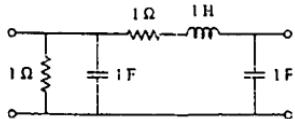


Figura 15.74 Per il Problema 15.5

- 15.6 Calcolare i parametri z per il circuito in Figura 15.75.

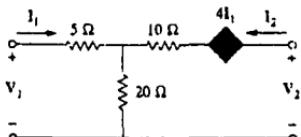


Figura 15.75 Per il Problema 15.6

- 15.7 Determinare l'equivalente in termini di parametri impedenza del circuito in Figura 15.76.

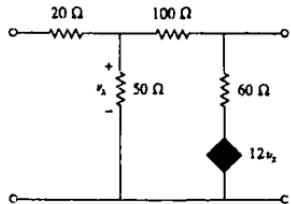


Figura 15.76 Per il Problema 15.7.

- 15.8 Determinare i parametri z del biponta in Figura 15.77.

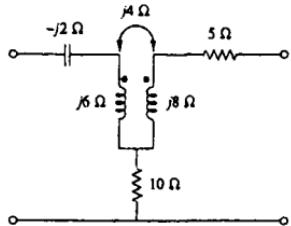


Figura 15.77 Per il Problema 15.8.

- 15.9 I parametri y di una rete elettronica sono:

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} s$$

Calcolare i parametri z della rete f.

- 15.10 Costruire un biponta per ciascuno dei seguenti insiemi di parametri z ($s = j\omega$).

(a) $[z] = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Omega$

(b) $[z] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 2s + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \Omega$

- 15.11 Costruire un biponta che sia rappresentato dai seguenti parametri z :

$$[z] = \begin{bmatrix} 6 + j3 & 5 - j2 \\ 5 - j2 & 8 - j \end{bmatrix} \Omega$$

- 15.12 Si consideri per il circuito di Figura 15.78

$$[z] = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Omega$$

Calcolare I_1 , I_2 , V_1 e V_2 .

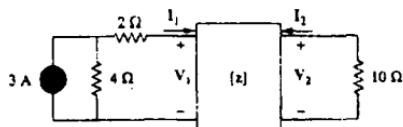


Figura 15.78 Per il Problema 15.12.

- 15.13 Calcolare la potenza media assorbita da $Z_L = 5 + j5\Omega$ nel circuito di Figura 15.79. Note: i 50V sono da intendersi efficaci.

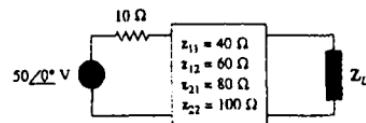


Figura 15.79 Per il Problema 15.13.

- 15.14 Per il biponta di Figura 15.80, mostrare che ai terminali di uscita,

$$Z_{Th} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_1}$$

e

$$V_{Th} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_1} V_1$$

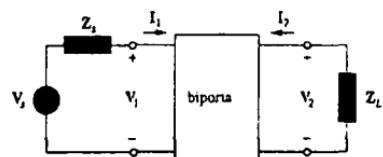


Figura 15.80 Per i Problemi 15.14 e 15.41.

- 15.15 Nel circuito di Figura 15.81,

$$[z] = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 80 & 120 \end{bmatrix} \Omega$$

(a) Determinare Z_L in modo da avere massimo trasferimento di potenza al carico.

(b) Calcolare la massima potenza erogata al carico.

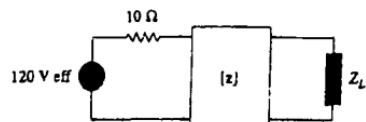


Figura 15.81 Per il Problema 15.15.

- 15.16** Nel circuito di Figura 15.82, per $\omega = 2 \text{ rad/s}$, $z_{11} = 10 \Omega$, $z_{12} = z_{21} = j6 \Omega$, $z_{22} = 4 \Omega$. Ricavare il circuito equivalente di Thevenin ai terminali $a-b$ e calcolare v_a .

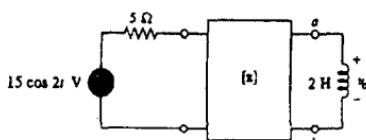


Figura 15.82 Per il Problema 15.16.

Paragrafo 15.3 Parametri ammettenza

- *15.17** Determinare i parametri z e y per il circuito in Figura 15.83.

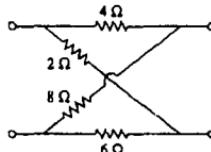


Figura 15.83 Per il Problema 15.17.

- 15.18** Calcolare i parametri y per il biponto in Figura 15.84.

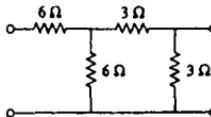


Figura 15.84 Per Problemi 15.18 e 15.37.

- 15.19** Determinare i parametri y del biponto in Figura 15.85 in funzione di s .

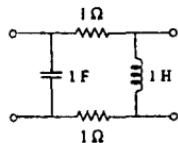


Figura 15.85 Per il Problema 15.19.

- 15.20** Determinare i parametri y per il circuito in Figura 15.86.

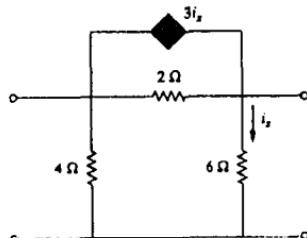


Figura 15.86 Per il Problema 15.20.

- 15.21** Determinare il circuito equivalente in termini di parametri ammettenza del biponto in Figura 15.87.

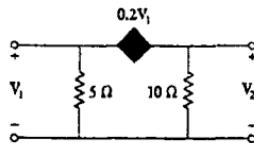


Figura 15.87 Per il Problema 15.21.

- 15.22** Determinare i parametri y della rete bipola in Figura 15.88.

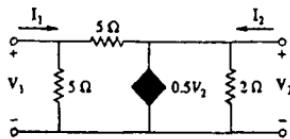


Figura 15.88 Per il Problema 15.22.

- 15.23** Determinare i parametri y del biponto in Figura 15.89.

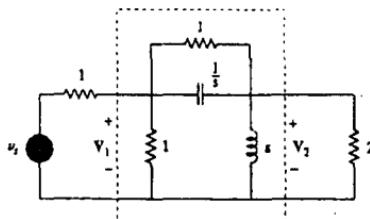


Figura 15.89 Per il Problema 15.23.

- 15.24** Determinare un circuito resistivo che presenti i seguenti parametri y :

$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

- 15.25** Disegnare un biponto avente i seguenti parametri y :

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} S$$

- 15.26** Calcolare $[y]$ per il biponto in Figura 15.90.

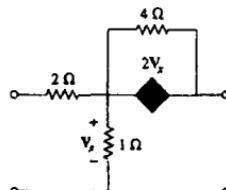


Figura 15.90 Per il Problema 15.26.

15.27 Determinare i parametri y per il circuito in Figura 15.91

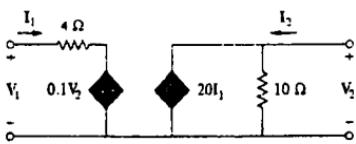


Figura 15.91 Per il Problema 15.27.

15.28 Nel circuito di Figura 15.70, la porta di ingresso è collegata ad un generatore di corrente costante da 1 A. Calcolare la potenza dissipata dal resistore da 2 Ω usando i parametri y . Confermare il risultato mediante l'analisi diretta del circuito.

15.29 Nel circuito a ponte di Figura 15.92, $I_1 = 10 \text{ A}$ e $I_2 = -4 \text{ A}$.

- (a) Determinare V_1 e V_2 usando i parametri y .
- (b) Confermare il risultato della parte (a) analizzando direttamente il circuito.

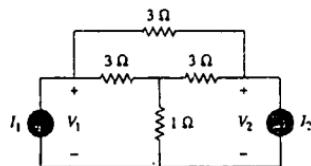


Figura 15.92 Per il Problema 15.29.

Paragrafo 15.4 Parametri ibridi

15.30 Determinare i parametri h per le reti in Figura 15.93.

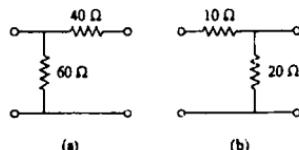


Figura 15.93 Per il Problema 15.30

15.31 Determinare i parametri ibridi per la rete in Figura 15.94.

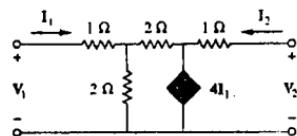


Figura 15.94 Per il Problema 15.31.

15.32 Determinare i parametri h e g del biponto in Figura 15.95 in funzione di s .

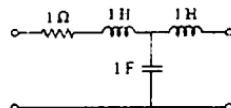


Figura 15.95 Per il Problema 15.32.

15.33 Calcolare i parametri h per il biponto di Figura 15.96.

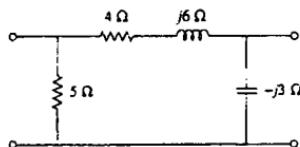


Figura 15.96 Per il Problema 15.33.

15.34 Calcolare i parametri h e g del biponto in Figura 15.97.

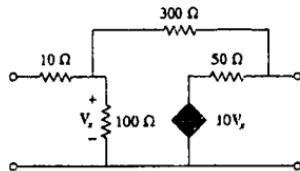


Figura 15.97 Per il Problema 15.34.

15.35 Determinare i parametri h per la rete in Figura 15.98.

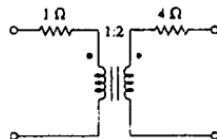


Figura 15.98 Per il Problema 15.35

15.36 Per il biponto in Figura 15.99,

$$[h] = \begin{bmatrix} 16 \Omega & 3 \\ -2 & 0.01 \text{ S} \end{bmatrix}$$

Determinare:

- (a) V_2/V_1
- (b) I_2/I_1
- (c) I_1/V_1
- (d) V_2/I_1

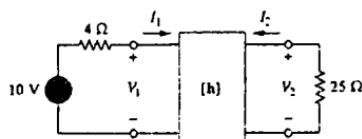


Figura 15.99 Per il Problema 15.36.

- 15.37 La porta di ingresso del circuito in Figura 15.84 è collegata ad un generatore di tensione costante da 10 V, mentre la porta di uscita è terminata da un resistore da 5 Ω. Determinare la tensione sul resistore da 5 Ω usando i parametri h del circuito. Confermare il risultato mediante l'analisi diretta del circuito.

- 15.38 I parametri h del biparta di Figura 15.100 sono

$$[h] = \begin{bmatrix} 600 \Omega & 0.04 \\ 30 & 2mS \end{bmatrix}$$

Se si pone $Z_i = 2 k\Omega$ e $Z_L = 400 \Omega$, calcolare Z_{in} e Z_{out} .

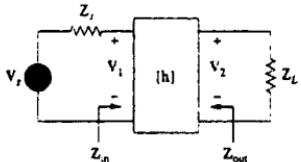


Figura 15.100 Per il Problema 15.38.

- 15.39 Determinare i parametri g per il circuito di Figura 15.101.

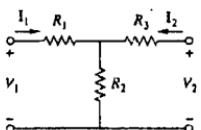


Figura 15.101 Per il Problema 15.39.

- 15.40 Determinare i parametri g per il circuito in Figura 15.102.

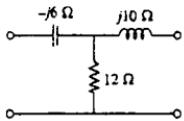


Figura 15.102 Per il Problema 15.40.

- 15.41 Per il biparta in Figura 15.80, mostrare che

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_2}{B_{11}Z_L + \Delta_g}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{B_{21}Z_L}{(1 + B_{11}Z_L)(B_{22} + Z_L) - B_{21}B_{12}Z_L}$$

dove Δ_g è il determinante della matrice $[g]$

- 15.42 I parametri h di un dispositivo biparta sono:

$$h_{11} = 600 \Omega, \quad h_{12} = 10^{-3},$$

$$h_{21} = 120, \quad h_{22} = 2 \times 10^{-6} S$$

Disegnare un modello circuituale del dispositivo inserendo i valori di ogni elemento.

Paragrafo 15.5 Parametri di trasmissione

- 15.43 Determinare i parametri di trasmissione per i biparta formati da un singolo elemento di Figura 15.103.

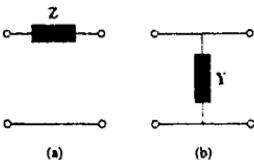


Figura 15.103 Per il Problema 15.43.

- 15.44 Determinare i parametri di trasmissione del circuito in Figura 15.104.

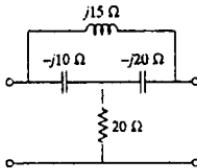


Figura 15.104 Per il Problema 15.44.

- 15.45 Calcolare i parametri ABCD per il circuito di Figura 15.105.

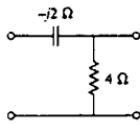


Figura 15.105 Per il Problema 15.45.

- 15.46 Determinare i parametri di trasmissione per il circuito in Figura 15.106.

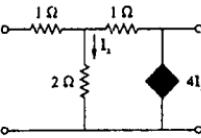


Figura 15.106 Per il Problema 15.46.

- 15.47 Calcolare i parametri ABCD per la rete in Figura 15.107.

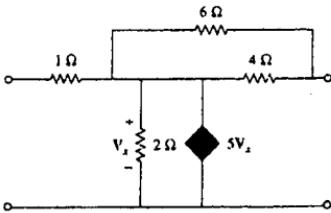


Figura 15.107 Per il Problema 15.47.

- 15.48 In un biparta si ha $A = 4$, $B = 30 \Omega$, $C = 0.1 S$ e $D = 1.5$. Calcolare l'impedenza di ingresso $Z_{in} = V_1/I_1$ quando:

(a) i terminali di uscita sono cortocircuitati,

(b) la porta di uscita è a circuito aperto,

(c) la porta di uscita è terminata su un carico da 10Ω .

- 15.49 Usando le impedenze nel dominio s , calcolare i parametri di trasmissione per il circuito in Figura 15.108.

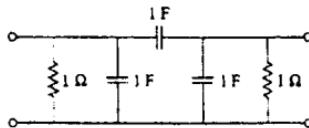


Figura 15.108 Per il Problema 15.49.

- 15.50 Determinare le espressioni nel dominio s per i parametri t del circuito in Figura 15.109.

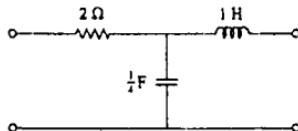


Figura 15.109 Per il Problema 15.50.

- 15.51 Calcolare i parametri t per la rete in Figura 15.110.

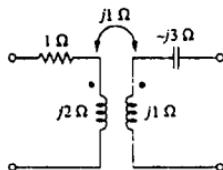


Figura 15.110 Per il Problema 15.51.

Paragrafo 15.6 Relazioni tra i parametri

- 15.52 (a) Per la rete a T in Figura 15.111, mostrare che i parametri h sono:

$$h_{11} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3}, \quad h_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$h_{21} = -\frac{R_2}{R_2 + R_3}, \quad h_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3}$$

- (b) Per la stessa rete, mostrare che i parametri di trasmissione sono:

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}, \quad B = R_3 + \frac{R_1}{R_2}(R_2 + R_3)$$

$$C = \frac{1}{R_2}, \quad D = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

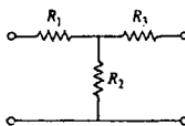


Figura 15.111 Per il Problema 15.52.

- 15.53 Mediante calcolo analitico, esprimere i parametri z in termini dei parametri ABCD.

- 15.54 Mostrare che i parametri di trasmissione di un biponta possono essere ottenuti dai parametri y come:

$$A = -\frac{y_{22}}{y_{11}}, \quad B = -\frac{1}{y_{21}}$$

$$C = -\frac{\Delta_y}{y_{21}}, \quad D = -\frac{y_{11}}{y_{21}}$$

- 15.55 Dimostrare che i parametri g possono essere ottenuti dai parametri z come

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}}, \quad g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}}, \quad g_{22} = \frac{\Delta_z}{z_{11}}$$

- 15.56 Per il circuito di Figura 15.112, calcolare V_o/V_s .

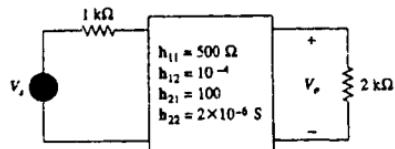


Figura 15.112 Per il Problema 15.56.

- 15.57 Dati i parametri di trasmissione

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

ricavare le altre cinque famiglie di parametri del biponta.

- 15.58 Un biponta è descritto da

$$V_1 = I_1 + 2V_2, \quad I_2 = -2I_1 + 0.4V_2$$

Determinare: (a) i parametri y , (b) i parametri di trasmissione.

- 15.59 Data

$$[g] = \begin{bmatrix} 0.06 \text{ S} & -0.4 \\ 0.2 & 2 \Omega \end{bmatrix}$$

determinare:

- (a) $[z]$ (b) $[y]$ (c) $[h]$ (d) $[T]$

- 15.60 Progettare una rete a T che realizzzi i seguenti parametri con $\omega = 10^6$ rad/s:

$$[z] = \begin{bmatrix} 4 + j3 & 2 \\ 2 & 5 - j \end{bmatrix}$$

- 15.61 Per il circuito a ponte in Figura 15.113, calcolare:

- (a) i parametri z

- (b) i parametri h

- (c) i parametri di trasmissione

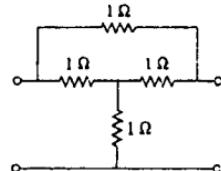


Figura 15.113 Per il Problema 15.61.

- 15.62 Determinare i parametri z del circuito con operazionale in Figura 15.114. Calcolare i parametri di trasmissione.

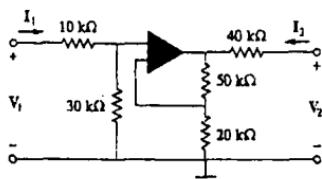


Figura 15.114 Per il Problema 15.62.

- 15.63 Determinare i parametri z del biparta in Figura 15.115.

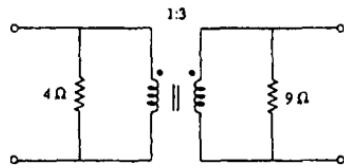


Figura 15.115 Per il Problema 15.63.

- 15.64 Determinare i parametri y alla frequenza $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ per il circuito con operazionale di Figura 15.116. Determinare i corrispondenti parametri h .

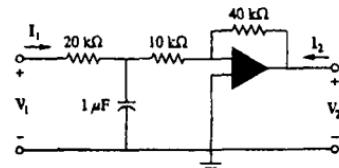


Figura 15.116 Per il Problema 15.64.

Paragrafo 15.7 Interconnessione di biporta

- 15.65 Quale è la rappresentazione in termini di parametri y del circuito in Figura 15.117?

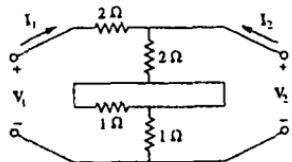


Figura 15.117 Per il Problema 15.65.

- 15.66 Nel biparta di Figura 15.118 si ha $y_{12} = y_{21} = 0$, $y_{11} = 2 \text{ mS}$ e $y_{22} = 10 \text{ mS}$. Determinare V_o/V_i .

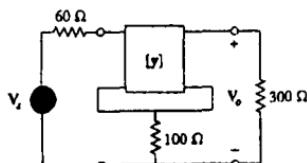


Figura 15.118 Per il Problema 15.66.

- 15.67 Se tre copie del circuito di Figura 15.119 sono collegate in parallelo, calcolare i parametri di trasmissione totali.

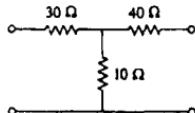


Figura 15.119 Per il Problema 15.67.

- 15.68 Calcolare i parametri h per la rete in Figura 15.120.

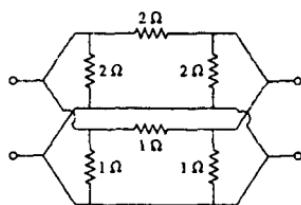


Figura 15.120 Per il Problema 15.68.

- *15.69 Il circuito in Figura 15.121 può essere considerato come due biporta collegati in parallelo. Calcolare i parametri y in funzione di s .

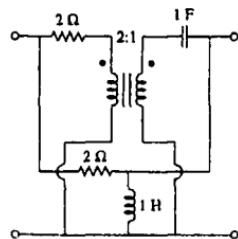


Figura 15.121 Per il Problema 15.69.

- *15.70 Per il collegamento parallelo-serie dei due biporta in Figura 15.122, determinare i parametri g .

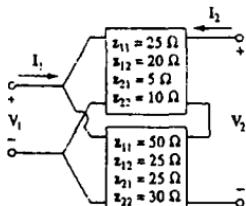


Figura 15.122 Per il Problema 15.70.

*15.71 Determinare i parametri z per la rete di Figura 15.123.

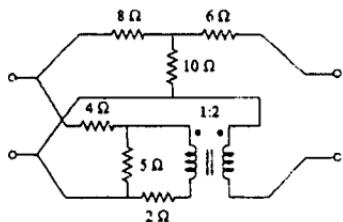


Figura 15.123 Per il Problema 15.71.

*15.72 In Figura 15.124 è mostrato un collegamento serie-parallelo di due biporta. Determinare la rappresentazione in termini di parametri z della rete.

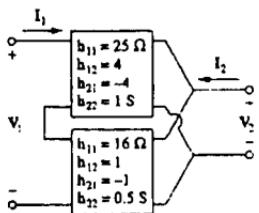


Figura 15.124 Per il Problema 15.72.

15.73 Tre copie del circuito di Figura 15.75 sono collegate in cascata. Determinare i parametri z .

ML

*15.74 Determinare i parametri ABCD del circuito in Figura 15.125 in funzione di s . (Suggerimento: ML partizionare il circuito in sottocircuìti e metterli in cascata usando i risultati del Problema 15.43.)

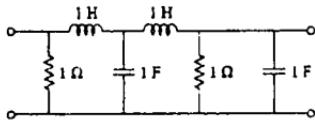


Figura 15.125 Per il Problema 15.74.

*15.75 Per i singoli biporta mostrati in Figura 15.126,

ML

$$[z_b] = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Omega \quad [y_b] = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} S$$

- Determinare i parametri y del biporta complessivo.
- Determinare il rapporto di tensioni V_o/V_i , quando $Z_L = 2\Omega$.

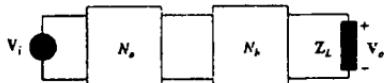


Figura 15.126 Per il Problema 15.75.

Paragrafo 15.8

Calcolo dei parametri di biporta con PSpice

15.76 Utilizzare PSpice per ottenere i parametri z della rete in Figura 15.127.

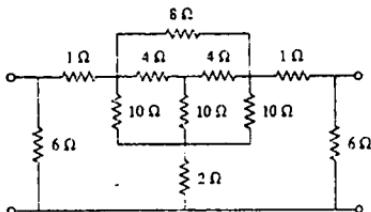


Figura 15.127 Per il Problema 15.76.

15.77 Usando PSpice, determinare i parametri h della rete in Figura 15.128, ponendo $\omega = 1$ rad/s.

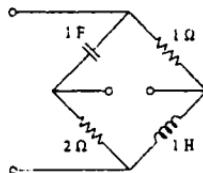


Figura 15.128 Per il Problema 15.77.

15.78 Calcolare i parametri h per $\omega = 4$ rad/s nel circuito di Figura 15.129 usando PSpice.

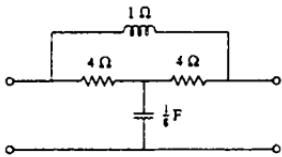


Figura 15.129 Per il Problema 15.78.

15.79 Utilizzare PSpice per determinare i parametri z del circuito in Figura 15.130, se $\omega = 2$ rad/s.

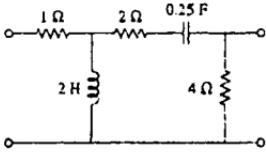


Figura 15.130 Per il Problema 15.79.

15.80 Utilizzare PSpice per calcolare i parametri z del circuito del Problema 15.7.

15.81 Ripetere il Problema 15.26 usando PSpice.

15.82 Utilizzare PSpice per ripetere il Problema 15.31.

15.83 Ripetere il Problema 15.47 usando PSpice.

- 15.84 Usando PSpice, determinare i parametri di trasmissione per la rete in Figura 15.131.

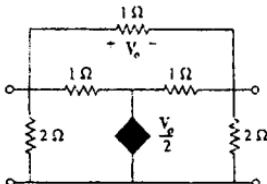


Figura 15.131 Per il Problema 15.84.

- 15.85 Alla frequenza $\omega = 1 \text{ rad/s}$, determinare i parametri di trasmissione della rete in Figura 15.132 usando PSpice.

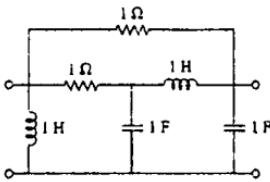


Figura 15.132 Per il Problema 15.85.

- 15.86 Determinare i parametri g per la rete in Figura 15.133 usando PSpice.

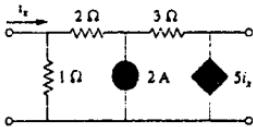


Figura 15.133 Per il Problema 15.86.

- 15.87 Nel circuito mostrato in Figura 15.134, utilizzare PSpice per ricavare i parametri t , supponendo $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

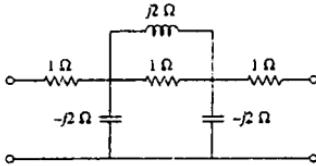


Figura 15.134 Per il Problema 15.87.

Paragrafo 15.9 Applicazioni

- 15.88 Usando i parametri y , ricavare le espressioni di Z_{in} , Z_{out} , A_v e A_i per il circuito con transistor ad emettitore comune.

- 15.89 Un transistor ha i seguenti parametri in un circuito ad emettitore comune:

$$h_{ie} = 2640 \Omega, \quad h_{re} = 2.6 \times 10^{-4}$$

$$h_{fe} = 72, \quad h_{oe} = 16 \mu\text{s}, \quad R_L = 100 \text{ k}\Omega$$

Quale è l'amplificazione di tensione del transistor? A quanti decibel corrisponde tale guadagno?

- 15.90 Un transistor avente

end

$$h_{ie} = 120, \quad h_{re} = 2 \text{ k}\Omega$$

$$h_{re} = 10^{-4}, \quad h_{oe} = 20 \mu\text{s}$$

viene utilizzato in un amplificatore ad emettitore comune per fornire una resistenza di ingresso di $1.5 \text{ k}\Omega$.

- (a) Determinare la resistenza di carico R_L necessaria.
 (b) Calcolare A_v , A_i e Z_{out} se l'amplificatore è pilotato da un generatore da 4 mV avente resistenza interna di 600Ω .
 (c) Determinare la tensione sul carico.

- 15.91 Nel circuito con transistor di Figura 15.135,

$$h_{ie} = 80, \quad h_{re} = 1.2 \text{ k}\Omega$$

$$h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}, \quad h_{oe} = 20 \mu\text{s}$$

Determinare quanto segue:

- (a) guadagno di tensione $A_v = V_o/V_s$,
 (b) guadagno di corrente $A_i = I_o/I_s$,
 (c) impedenza di ingresso Z_{in} ,
 (d) impedenza di uscita Z_{out} .

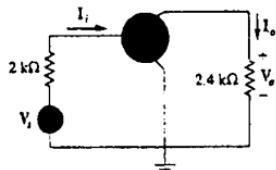


Figura 15.135 Per il Problema 15.91.

- *15.92 Determinare A_v , A_i , Z_{in} e Z_{out} per l'amplificatore mostrato in Figura 15.136, sapendo che

$$h_{ie} = 4 \text{ k}\Omega, \quad h_{re} = 10^{-4}$$

$$h_{fe} = 100, \quad h_{oe} = 30 \mu\text{s}$$

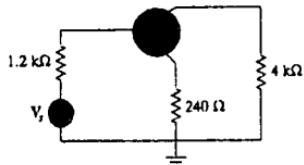


Figura 15.136 Per il Problema 15.92.

- *15.93 Calcolare A_v , A_i , Z_{in} e Z_{out} per la rete con transistor di Figura 15.137, sapendo che

$$h_{ie} = 2 \text{ k}\Omega, \quad h_{re} = 2.5 \times 10^{-4}$$

$$h_{fe} = 150, \quad h_{oe} = 10 \mu\text{s}$$

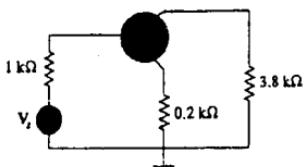


Figura 15.137 Per il Problema 15.93.

- 15.94 Un transistore nel suo collegamento ad emettitore comune è descritto da

$$[h] = \begin{bmatrix} 200\Omega & 0 \\ 100 & 10^{-6} \text{ S} \end{bmatrix}$$

Due transistori identici di questo tipo sono collegati in cascata per formare un amplificatore a due stadi da utilizzare per frequenze audio. Se l'amplificatore è terminato da un resistore da $4 \text{ k}\Omega$, calcolare A_v e Z_{in} complessivi.

- 15.95 Progettare una rete a scala LC che realizzzi un filtro passa-basso con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

- 15.96 Sintetizzare la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^3}{s^3 + 6s^2 + 12s + 24}$$

usando la rete a scala LC in Figura 15.138.

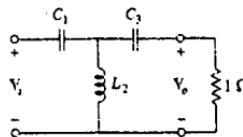


Figura 15.138 Per il Problema 15.96.

- 15.97 L'amplificatore a due stadi in Figura 15.139 contiene due stadi identici con

$$[h] = \begin{bmatrix} 2 \text{ k}\Omega & 0.004 \\ 200 & 500 \mu\text{S} \end{bmatrix}$$

Se $Z_L = 20 \text{ k}\Omega$, determinare il valore di V_i che produce $V_o = 16 \text{ V}$.

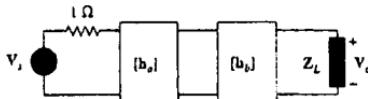
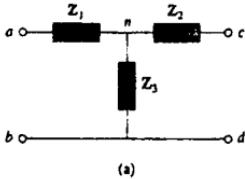


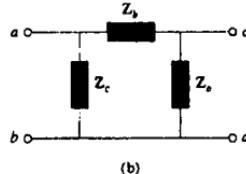
Figura 15.139 Per il Problema 15.97.

PROBLEMI DI RIEPILOGO

- 15.98 Si supponga che i due circuiti in Figura 15.140 siano equivalenti ed i parametri dei due circuiti siano quindi uguali. Si ricavino le Equazioni (9.67) e (9.68) usando questa uguaglianza ed i parametri z.



(a)



(b)

Figura 15.140 Per il Problema 15.98.

Appendice A

Numeri complessi

La capacità di manipolare numeri complessi si rivela molto utile nella analisi dei circuiti e nell'ingegneria elettrica in generale. I numeri complessi sono di particolare importanza nella analisi dei circuiti AC. Benché siano ormai diffusi calcolatori tascabili e pacchetti software in grado di manipolare numeri complessi, resta comunque consigliabile per lo studente acquisire una certa familiarità con il calcolo manuale dei numeri complessi.

A.1 RAPPRESENTAZIONI DEI NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso z può essere scritto in forma rettangolare come

$$z = x + jy \quad (\text{A.1})$$

dove $j = \sqrt{-1}$; x è la parte reale di z mentre y è la parte immaginaria di z ; cioè,

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z) \quad (\text{A.2})$$

Il numero complesso z è rappresentato nel piano complesso in Figura A.1. Essendo $j = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &= -j \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\ j^4 &= j^2 \cdot j^2 = 1 \\ j^5 &= j \cdot j^4 = j \\ &\vdots \\ j^{n+4} &= j^n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Un secondo modo di rappresentare il numero complesso z è quello di specificarne il modulo r e l'angolo θ che forma con l'asse reale, come mostra la Figura A.1. Questa forma è nota come forma polare. Si scrive

$$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta \quad (\text{A.4})$$

dove

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{A.5a})$$

cioè

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (\text{A.5b})$$

e quindi,

$$z = x + jy = r \angle \theta = r \cos \theta + j r \sin \theta \quad (\text{A.6})$$

Nella conversione da forma rettangolare a polare mediante la (A.5), si deve prestare attenzione alla determinazione del valore corretto per θ . Si hanno le seguenti quattro possibilità:

$$z = x + jy, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{Primo quadrante})$$

$$z = -x + jy, \quad \theta = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{Secondo quadrante})$$

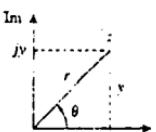


Figura A.1
Rappresentazione grafica di un numero complesso.

$$z = -x - jy, \quad \theta = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{y}{x} \text{ (Terzo quadrante)}$$

(A.7)

$$z = x - jy, \quad \theta = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{x} \text{ (Quarto quadrante)}$$

supponendo x e y positive.

La terza rappresentazione possibile per il numero complesso z è la forma esponenziale:

$$z = r e^{j\theta} \quad (\text{Forma esponenziale}) \quad (\text{A.8})$$

La forma esponenziale è praticamente identica alla forma polare, facendo uso dello stesso modulo r e dello stesso angolo θ .

Le tre forme di rappresentazione di un numero complesso sono riassunte nel riquadro seguente.

$$z = x + jy, \quad (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) \text{ Forma rettangolare}$$

$$z = r \angle \theta, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}) \text{ Forma polare}$$

$$z = r e^{j\theta}, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}) \text{ Forma esponenziale}$$

Le prime due forme sono legate tra loro dalle (A.5) e (A.6). Nel Paragrafo A.3 verrà dimostrata la formula di Eulero, dalla quale si vedrà che la terza forma è anch'essa equivalente alle prime due.

Esempio A.1

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma polare ed esponenziale: (a) $z_1 = 6 + j8$, (b) $z_2 = 6 - j8$, (c) $z_3 = -6 + j8$, (d) $z_4 = -6 - j8$.

Soluzione: Si noti che i numeri complessi sono stati appositamente scelti in modo da cadere nei quattro quadranti, come mostra la Figura A.2.

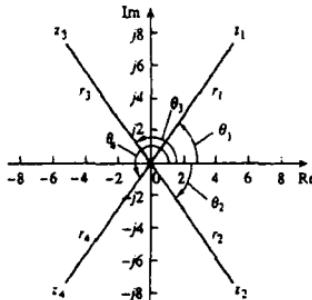


Figura A.2
Per l'Esempio A.1.

(a) Per $z_1 = 6 + j8$ (1 quadrante),

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ$$

La forma polare è quindi $10 \angle 53.13^\circ$ e la forma esponenziale $10e^{j53.13^\circ}$.

(b) Per $z_2 = 6 - j8$ (4 quadrante),

$$r_2 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10, \quad \theta_2 = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 306.87^\circ$$

per cui la forma polare è $10 \angle 306.87^\circ$ e la forma esponenziale $10e^{j306.87^\circ}$. L'angolo θ_2 può anche essere preso come -53.13° , come mostrato in Figura A.2, così che la forma polare diventa $10 \angle -53.13^\circ$ e quella esponenziale $10e^{-j53.13^\circ}$.

¹ In forma esponenziale, $z = re^{j\theta}$ e quindi $dz/d\theta = jre^{j\theta} = jz$.

(c) Per $z_3 = -6 + j8$ (2 quadrante),

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10, \quad \theta_3 = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 126.87^\circ$$

La forma polare è allora $10 \angle 126.87^\circ$ e quella esponenziale è $10e^{j126.87^\circ}$.

(d) Per $z_4 = -6 - j8$ (3 quadrante),

$$r_4 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10, \quad \theta_4 = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = 233.13^\circ$$

da cui la forma polare è $10 \angle 233.13^\circ$ e la forma esponenziale è $10e^{j233.13^\circ}$.

Esercizio A.1 Convertire i seguenti numeri complessi alle forme polari ed esponenziali:

- (a) $z_1 = 3 - j4$, (b) $z_2 = 5 + j12$, (c) $z_3 = -3 - j9$, (d) $z_4 = -7 + j$.

Risposta (a) $5 \angle 306.9^\circ, 5e^{j306.9^\circ}$, (b) $13 \angle 67.38^\circ, 13e^{j67.38^\circ}$,

(c) $9.487 \angle 251.6^\circ, 9.487e^{j251.6^\circ}$, (d) $7.071 \angle 171.9^\circ, 7.071e^{j171.9^\circ}$.

Esempio A.2

Convertire i seguenti numeri complessi alla forma rettangolare:

- (a) $12 \angle -60^\circ$, (b) $-50 \angle 285^\circ$, (c) $8e^{j10^\circ}$, (d) $20e^{-j\pi/3}$.

Soluzione: (a) Usando la (A.6),

$$12 \angle -60^\circ = 12 \cos(-60^\circ) + j12 \sin(-60^\circ) = 6 - j10.39$$

Si noti che $\theta = -60^\circ$ è lo stesso di $\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

(b) Si può scrivere

$$-50 \angle 285^\circ = -50 \cos 285^\circ - j50 \sin 285^\circ = -12.94 + j48.3$$

(c) In maniera simile,

$$8e^{j10^\circ} = 8 \cos 10^\circ + j8 \sin 10^\circ = 7.878 + j1.389$$

(d) Infine,

$$20e^{-j\pi/3} = 20 \cos(-\pi/3) + j20 \sin(-\pi/3) = 10 - j17.32$$

Esercizio A.2 Determinare la forma rettangolare dei seguenti numeri complessi:

- (a) $-8 \angle 210^\circ$, (b) $40 \angle 305^\circ$, (c) $10e^{-j30^\circ}$, (d) $50e^{j\pi/2}$.

Risposta (a) $6.928 + j4$, (b) $22.94 - j32.77$, (c) $8.66 - j5$, (d) $j50$.

A.2 OPERAZIONI MATEMATICHE

Due numeri complessi $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ sono uguali se e soltanto se sono uguali le loro parti reali e le loro parti immaginarie²,

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \tag{A.10}$$

Il *complesso coniugato* del numero complesso $z = x + jy$ è

$$z^* = x - jy = r \angle -\theta = re^{-j\theta} \tag{A.11}$$

Il coniugato di un numero complesso si ottiene quindi sostituendo ciascuna occorrenza di j con $-j$.

Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 \angle \theta_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 \angle \theta_2$, la loro somma è

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{A.12}$$

² Si utilizza qui il carattere semplice per indicare i numeri complessi – che non dipendono dal tempo o dalla frequenza – mentre si utilizza il grassetto per indicare i fasori.

e la loro differenza è

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (\text{A.13})$$

Mentre risulta più conveniente eseguire l'addizione e la sottrazione di numeri complessi in forma rettangolare, il prodotto e il quoziente di due numeri complessi si effettuano più comodamente a partire dalla forma polare o da quella esponenziale.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{A.14})$$

In alternativa, usando la forma rettangolare,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Per il quoziente,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{A.16})$$

In alternativa, usando la forma rettangolare,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \quad (\text{A.17})$$

Si razionalizza il denominatore moltiplicando numeratore e denominatore per $x_2^2 + y_2^2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \quad (\text{A.18})$$

Esempio A.3

Se $A = 2 + j5$ e $B = 4 - j6$, calcolare: (a) $A^*(A + B)$, (b) $(A + B)/(A - B)$.

Soluzione:

(a) Se $A = 2 + j5$, allora $A^* = 2 - j5$ e

$$A + B = (2 + 4) + j(5 - 6) = 6 - j$$

così che

$$A^*(A + B) = (2 - j5)(6 - j) = 12 - j2 - j30 - 5 = 7 - j32$$

(b) In maniera simile,

$$A - B = (2 - 4) + j(5 - (-6)) = -2 + j11$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{A + B}{A - B} &= \frac{6 - j}{-2 + j11} = \frac{(6 - j)(-2 - j11)}{(-2 + j11)(-2 - j11)} \\ &= \frac{-12 - j66 + j2 - 11}{(-2)^2 + 11^2} = \frac{-23 - j64}{125} = -0.184 - j0.512 \end{aligned}$$

■ Esercizio A.3 Dati $C = -3 + j7$ e $D = 8 + j$, calcolare:

(a) $(C - D^*)(C + D^*)$, (b) D^2/C^* , (c) $2CD/(C + D)$.

Risposta (a) $-103 - j26$, (b) $-5.19 + j6.776$, (c) $6.054 + j11.53$. ■

Esempio A.4

Calcolare:

$$(a) \frac{(2 + j5)(8e^{j0^\circ})}{2 + j4 + 2\angle -40^\circ} \quad (b) \frac{j(3 - j4)^*}{(-1 + j6)(2 + j)^2}$$

Soluzione:

(a) Poiché sono presenti termini in forma polare ed esponenziale, è bene esprimere dapprima tutti i

termini in forma polare:

$$\begin{aligned} 2+j5 &= \sqrt{2^2+5^2} / \tan^{-1} 5/2 = 5.385 / 68.2^\circ \\ (2+j5)(8e^{10^\circ}) &= (5.385 / 68.2^\circ)(8 / 10^\circ) = 43.08 / 78.2^\circ \\ 2+j4 + 2 / -40^\circ &= 2+j4 + 2 \cos(-40^\circ) + j2 \sin(-40^\circ) \\ &= 3.532 + j2.714 = 4.454 / 37.54^\circ \end{aligned}$$

Ne segue,

$$\frac{(2+j5)(8e^{10^\circ})}{2+j4 + 2 / -40^\circ} = \frac{43.08 / 78.2^\circ}{4.454 / 37.54^\circ} = 9.672 / 40.66^\circ$$

(b) Questa espressione può essere valutata in forma rettangolare, essendo tutti i termini espressi in questa forma. Si ha

$$\begin{aligned} j(3-j4)^* &= j(3-j4) = -4-j3 \\ (2+j)^2 &= 4+j4-1 = 3+j4 \\ (-1+j6)(2+j)^2 &= (-1+j6)(3-j4) = -3-4j+j18-24 \\ &= -27+j14 \end{aligned}$$

Perciò,

$$\begin{aligned} \frac{j(3-j4)^*}{(-1+j6)(2+j)^2} &= \frac{-4+j3}{-27+j14} = \frac{(-4+j3)(-27-j14)}{27^2+14^2} \\ &= \frac{108+j56-j81+42}{925} = 0.1622 - j0.027 \end{aligned}$$

■ Esercizio A.4 Valutare le seguenti frazioni complesse:

$$(a) \frac{6 / 30^\circ + j5 - 3}{-1 + j + 2e^{45^\circ}} \quad (b) \left[\frac{(15-j7)(3+j2)^*}{(4+j6)^*(3 / 70^\circ)} \right]^*$$

Risposta (a) $3.387 / -5.615^\circ$, (b) $2.759 / -287.6^\circ$



A.3 FORMULA DI EULERO

La formula di Eulero è un importante risultato che riguarda le variabili complesse. Lo si dimostra partendo dalle espansioni in serie di e^x , $\cos \theta$ e $\sin \theta$. È noto che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (\text{A.19})$$

Sostituendo x con $j\theta$ si ottiene

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (\text{A.20})$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

così che

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\text{A.22})$$

Confrontando le (A.20) e (A.22), si conclude che

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A.23})$$

Quest'ultima è nota come *formula di Euler*. La forma esponenziale di rappresentazione di un numero complesso, presentata nella (A.8), è basata sulla formula di Euler. Dalla (A.23), si noti che

$$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{j\theta}), \quad \sin \theta = \operatorname{Im}(e^{j\theta}) \quad (\text{A.24})$$

e che

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

Sostituendo θ con $-\theta$ nella (A.23) si ottiene

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (\text{A.25})$$

Sommando le (A.23) e (A.25)

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (\text{A.26})$$

Sottraendo la (A.25) dalla (A.23) si ha invece

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (\text{A.27})$$

A.4 IDENTITÀ NOTEVOLI

Le seguenti identità si rivelano utili nella manipolazione dei numeri complessi. Se $z = x + jy = r \angle \theta$, allora

$$zz^* = x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{A.28})$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + jy} = \sqrt{r} e^{j\theta/2} = \sqrt{r} \angle \theta/2 \quad (\text{A.29})$$

$$z^n = (x + jy)^n = r^n \angle n\theta = r^n e^{jn\theta} = r^n (\cos n\theta + j \sin n\theta) \quad (\text{A.30})$$

$$z^{1/n} = (x + jy)^{1/n} = r^{1/n} \angle \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A.31})$$

$$\ln(re^{j\theta}) = \ln r + \ln e^{j\theta} = \ln r + j\theta + j2k\pi \quad (k = \text{intero}) \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &= -j \\ e^{\pm j\pi} &= -1 \\ e^{\pm j2\pi} &= 1 \\ e^{j\pi/2} &= j \\ e^{-j\pi/2} &= -j \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{(a+j\omega)t}) &= \operatorname{Re}(e^{at} e^{j\omega t}) = e^{at} \cos \omega t \\ \operatorname{Im}(e^{(a+j\omega)t}) &= \operatorname{Im}(e^{at} e^{j\omega t}) = e^{at} \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Esempio A.5

Se $A = 6 + j8$, calcolare: (a) \sqrt{A} , (b) A^4

Soluzione:

(a) Si converte dapprima A alla forma polare:

$$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ, \quad A = 10 \angle 53.13^\circ$$

Allora

$$\sqrt{A} = \sqrt{10} \angle 53.13^\circ / 2 = 3.162 \angle 26.56^\circ$$

(b) Poiché $A = 10 \angle 53.13^\circ$,

$$A^4 = r^4 \angle 4\theta = 10^4 \angle 4 \times 53.13^\circ = 10000 \angle 212.52^\circ$$

■ **Esercizio A.5** Se $A = 3 - j4$, calcolare: (a) $A^{1/3}$ (3 radici) e (b) $\ln A$.

Risposta (a) $1.71 \angle 102.3^\circ, 1.71 \angle 222.3^\circ, 1.71 \angle 342.3^\circ$.

(b) $1.609 + j5.356 + j2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

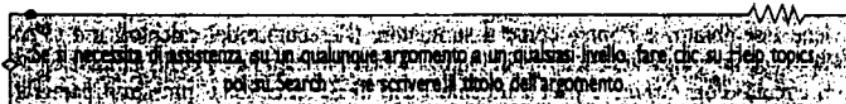
Appendice B

PSpice for Windows

Molti dei più diffusi strumenti software per personal computer, quali per esempio *Spice*, *Mathcad*, *Quattro*, *Matlab* e *Maple*, possono essere utilmente impiegati nella analisi dei circuiti. Tra questi, il più indicato e il più diffuso è certamente *Spice*, acronimo di *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*, che venne sviluppato presso il Department of Electrical Engineering and Computer Sciences della University of California at Berkeley negli anni '70, per i computer della classe mainframe in uso a quei tempi. Da allora, circa 20 versioni di *Spice* sono state sviluppate a partire dalla versione originale. *PSpice*, una versione di *Spice* per personal computer, fu sviluppato dalla MicroSim Corporation in California, e commercializzato a partire dal 1984, e distribuito in seguito da OrCAD e Cadence. *PSpice* è disponibile in numerose versioni per i diversi sistemi operativi (DOS, Windows, Unix, etc.). È possibile scaricare *PSpice* dal sito web di Cadence, oppure richiederne una copia a:

- Cadence PCB Systems Division
13211 SW 68th Parkway, Suite 200
Portland, OR 97223
Phone: (503) 671-9500 oppure (800) CADENC2
Website: www.pcb.cadence.com oppure www.pspice.com

Poiché la versione per Windows di *PSpice* è quella che va acquisendo maggiore diffusione, questa è la versione che si è scelto di utilizzare in tutto il testo. In particolare, la versione utilizzata è la versione 9.1 per studenti di *PSpice for Windows*. In un personal computer equipaggiato con il sistema operativo Windows 95 o 98, nel quale il software di *PSpice* sia già stato installato, è possibile avviare il sistema selezionando l'icona Start nell'angolo sinistro dello schermo, posizionando il cursore su Programs, poi su *PSpice student*, e infine cliccando su *Schematics*¹. Obiettivo di questa appendice è quello di fornire una breve introduzione all'uso della versione Windows di *PSpice* su un PC IBM o equivalente. *PSpice* è in grado di analizzare circuiti contenenti fino a circa 130 elementi e 100 nodi. Può eseguire tre classi principali di analisi sui circuiti: analisi DC (in regime stazionario, o in continua), analisi in transitorio e analisi AC. È inoltre in grado di calcolare funzioni di trasferimento, di eseguire analisi di Fourier e di calcolare il punto di lavoro di un circuito elettronico. I circuiti possono contenere resistori, induttori, condensatori, generatori indipendenti e dipendenti di tensione e di corrente, amplificatori operazionali, trasformatori, linee di trasmissione e dispositivi a semiconduttore. Si supporrà che il lettore abbia familiarità con l'uso del sistema operativo Microsoft Windows e che *PSpice for Windows* sia già stato installato correttamente. Come tutte le applicazioni Windows, *PSpice* possiede una funzionalità di help on-line.



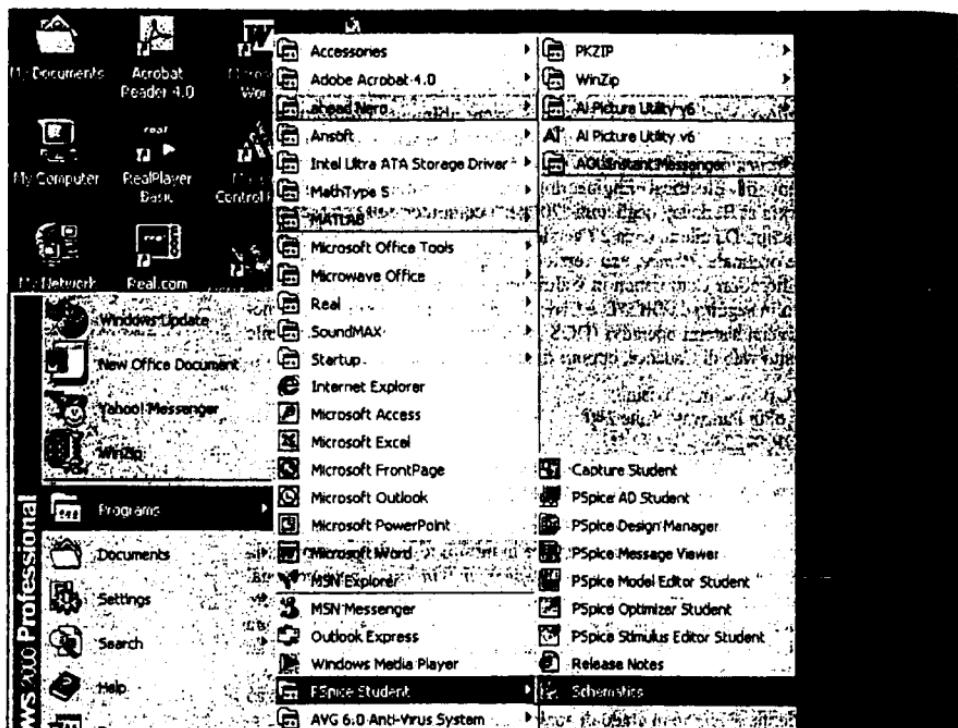
B.1 DESIGN CENTER FOR WINDOWS

Nelle versioni di *PSpice* precedenti a quella per Windows 95, *PSpice for Windows* era chiamato *MicroSim Design Center*, un ambiente completo per la simulazione di circuiti elettrici. *Design Center for Windows* comprende i seguenti programmi:

¹ Si suppone che il lettore abbia una qualche familiarità con l'uso di finestre, menu e finestre di dialogo. In caso contrario, non è comunque difficile apprendere i primi rudimenti del loro uso seguendo le istruzioni di questa appendice.

Figura B.1
Avvio di *PSpice* in Windows 95.

- **Schematics:** Un editor grafico, usato per disegnare sullo schermo il circuito da simulare. Consente di posizionare i componenti, collegarli assieme per formare il circuito e inoltre di specificare il tipo di analisi da eseguire.



- ***PSpice*:** Il programma che simula il circuito creato con Schematics. Simulare un circuito significa costruire un modello matematico del circuito a partire dai modelli dei componenti, e risolvere poi le equazioni risultanti.
- **Orcad PSpice:** Programma che fornisce una visualizzazione grafica dei risultati generati da *PSpice*. Può essere utilizzato per tracciare il grafico di una qualsiasi tensione o corrente del circuito.

Ciascuno dei programmi citati è rappresentato da una icona nella Figura B.1. Si può pensare a Schematics come a un banco di laboratorio simulato, sul quale il circuito viene assemblato, a *PSpice* come il simulatore (l'esecutore del calcolo), e a Orcad PSpice come a un oscilloscopio simulato. La fase più complessa della simulazione di un circuito con *PSpice* è probabilmente l'uso di Schematics. Il prossimo paragrafo presenta una breve introduzione al disegno dei circuiti con Schematics.

B.2 DISEGNO DI UN CIRCUITO

L'analisi di un circuito con *PSpice* consiste di tre fasi: (1) creazione del circuito, (2) simulazione e (3) stampa dei risultati in forma tabellare o grafica. Il presente paragrafo è dedicato alla presentazione dei passi necessari a costruire un circuito usando il programma Schematics.

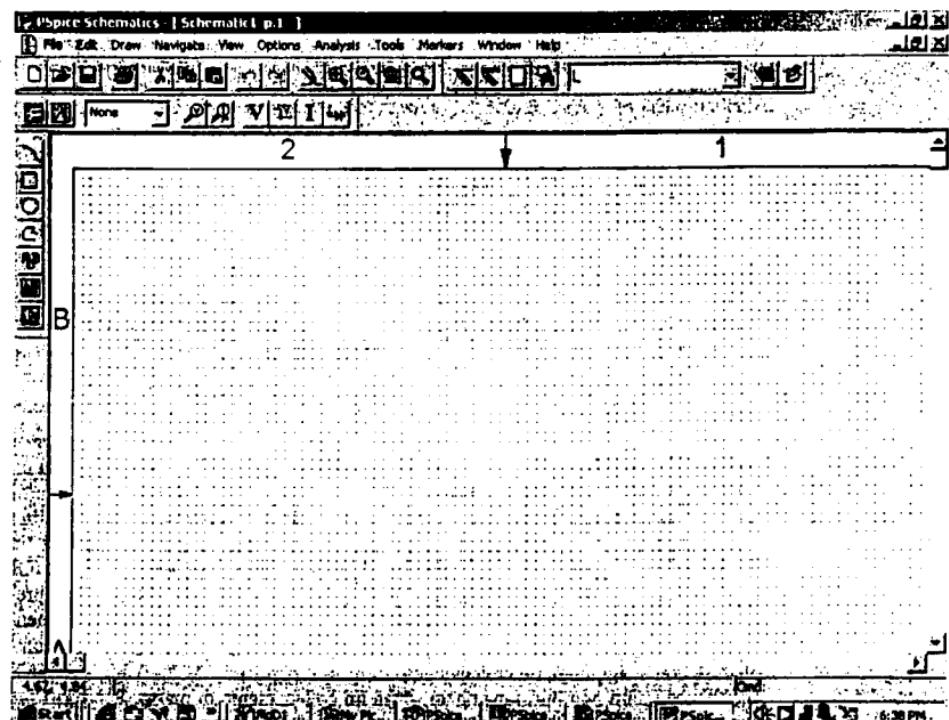
Prima di parlare dell'uso del programma Schematics, è necessario richiamare le varie modalità di uso del mouse per la selezione di un oggetto e l'esecuzione di azioni.

Schematics fa uso sia del mouse che della tastiera per iniziare e completare la maggior parte delle operazioni. In tutto questo testo, verranno utilizzate le seguenti sigle per rappresentare operazioni eseguite con il mouse:

- **CLICKL** : clic sul pulsante sinistro una sola volta, per selezionare un oggetto.
- **CLICKR** : clic sul pulsante destro una sola volta per terminare una modalità.
- **DCLICKL** : doppio clic sul pulsante sinistro, per modificare una selezione oppure terminare una modalità.
- **DCLICKR** : doppio clic sul pulsante destro, per ripetere un'azione.
- **CLICKLH** : clic sul pulsante sinistro, mantenere premuto il pulsante spostando il mouse, per spostare un oggetto selezionato. Rilasciare il pulsante sinistro dopo che l'oggetto è stato posizionato.
- **DRAG** : Spostare il mouse (senza clic), per spostare un oggetto.

Il termine "clic" viene usato per rappresentare una rapida pressione e rilascio del bottone sinistro del mouse. La selezione di un oggetto richiede CLICKL, mentre l'esecuzione di una azione richiede DCLICKL. Inoltre, per evitare di scrivere "clic" troppe volte, l'elemento del menu su cui fare clic verrà indicato con un carattere grassetto. Per esempio, l'operazione "clic su Draw, clic su Get New Part" verrà anche scritta come Draw/Get New Part. Inoltre, è sempre possibile premere il tasto <Esc> per annullare una qualunque operazione in corso. Se si sta utilizzando Windows 95, è possibile avviare PSpice con un clic sull'icona Start nell'angolo sinistro dello schermo, spostando il cursore su Programs, poi su PSpice student, e infine su Schematics, come mostrato in Figura B.1. In alternativa, si può DCLICK sull'icona PSpice presente sullo schermo. In entrambi i casi, comparirà una schermata vuota, come mostra la Figura B.2. Al circuito che non è ancora stato salvato è assegnato il nome [Schematic p.1]. È possibile modificarlo tramite il menu File.

Figura B.2
Finestra di Schematics.



La creazione di circuiti con Schematics richiede tre passi: (1) piazzamento delle parti o componenti del circuito, (2) collegamento delle parti tra loro per formare il circuito e (3) modifica degli attributi delle parti.

Passo 1: Piazzamento delle parti

Una qualsiasi parte o componente di un circuito può essere ritrovata con la seguente procedura:

- Selezionare Draw/Get New Part per attivare il menu Draw (oppure premere il tasto <Ctrl G>).
- Usare la barra di scorrimento per selezionare la parte (oppure scrivere il part name, per esempio R per il resistore, nella casella *PartName*). Le Figure da B.3 a B.5 mostrano alcuni part name e i corrispondenti simboli per gli elementi circuituali e per i generatori indipendenti di tensione e di corrente.

Figura B.3

Simboli delle parti e attributi per gli elementi circuituali: (a) resistore, (b) condensatore, (c) induttore.

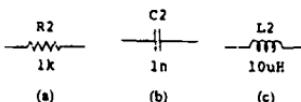


Figura B.4

Simboli delle parti e attributi dei generatori indipendenti di tensione.

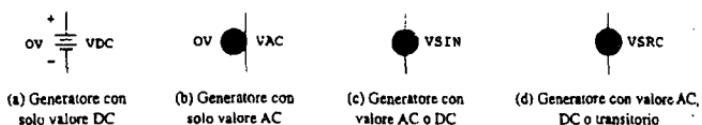
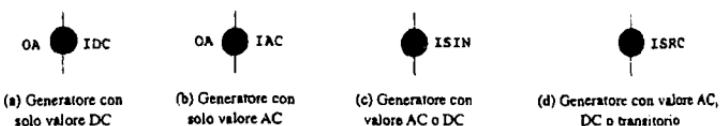


Figura B.5

Simboli delle parti e attributi dei generatori indipendenti di corrente.



- Clic su Place & Close (oppure <Enter>).
- DRAG della parte fino alla posizione desiderata sullo schermo.
- CLICKR per terminare la modalità piazzamento.

A volte, si desidera effettuare la rotazione di 90° di una parte. Per ruotare, a esempio, un resistore, selezionare la parte di nome R e poi selezionare Edit/Rotate (oppure premere <Ctrl R>). Per cancellare una parte, CLICKL per selezionare la parte (essa apparirà colorata in rosso), e poi selezionare Edit/Cut (oppure premere <Delete>).

Passo 2: Collegamento delle parti

Il circuito viene poi completato collegando le parti tra loro. Si seleziona dapprima Draw/Wire (oppure <Ctrl-W>) per attivare la modalità collegamento. Comparirà un cursore a forma di matita al posto della freccia. A questo punto, DRAG del cursore fino al primo punto che si desidera collegare e CLICKL; poi, DRAG del cursore fino al secondo punto del collegamento e CLICKL, per trasformare la linea tratteggiata in una linea continua. (Solo le linee continue sono considerate collegamenti). CLICKR per terminare la modalità collegamento. Per riprendere a tracciare collegamenti, premere il tasto <Spazio>. La procedura precedente va ripetuta per ciascun collegamento nel circuito, fino a quando tutte le parti sono state collegate. Il circuito non è completo se non si aggiunge un collegamento di massa (part name AGND) allo schematico; PSpice infatti non può funzionare senza un collegamento di massa. Per verificare che le parti vengano effettivamente collegate assieme, l'opzione Junctions che si trova

nel menu Options/Set Display Level, deve risultare attivata durante la fase di collegamento delle parti. Per default, l'opzione Junctions è contrassegnata da un marcatore (\checkmark) nella finestra di dialogo, a indicare che è attivata. Su alcuni dei collegamenti compare un puntino nero indicante la connessione.

Nonostante non sia necessaria la presenza di un puntino nel punto in cui un filo è collegato a un pin, ai fini dell'esistenza di un collegamento, la sua presenza è utile per indicare la presenza del collegamento. Per assicurarsi che il puntino compaia, si deve fare in modo che il filo si sovrapponga al pin.

Se si commette un errore, è possibile cancellare la parte oppure il collegamento prima selezionandolo (CLICKL) e poi premendo il tasto <Delete>. Il tasto <Ctrl-L> serve invece a cancellare eventuali frammenti di collegamento che non fanno in realtà parte dello schematico.

Passo 3: Modifica degli attributi delle parti

Come si vede nelle Figure da B.3 a B.5, ciascun componente possiede almeno un attributo, oltre al simbolo. Gli attributi sono equivalenti a etichette per le parti². Ciascun attributo consiste di un *nome* e del suo corrispondente *valore*. Per esempio, R e VSRC sono i nomi del resistore e del generatore di tensione (DC, AC oppure transitorio), mentre 2k e DC = +10V sono valori scelti per il resistore e per il generatore di tensione, rispettivamente.

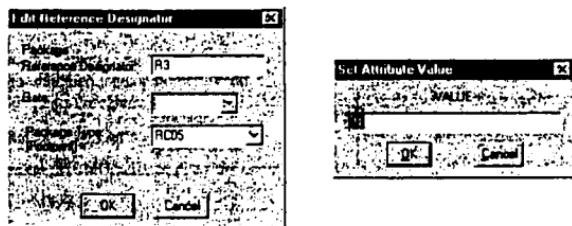


Figura B.6
(a) Modifica del nome R3 in RX,
(b) modifica di 1k in 10Meg.

Quando le parti vengono posizionate sullo schermo, a esse vengono assegnati automaticamente dei nomi per numerazione progressiva (R1, R2, R3, ecc.). Inoltre, ad alcune parti vengono assegnati valori predefiniti. Per esempio, tutti i resistori vengono posizionati orizzontalmente, e a essi viene assegnato il valore 1 k Ω . Spesso è necessario modificare gli attributi (nomi e valori) di una parte. Esistono parecchi metodi per modificare gli attributi, ma quello indicato di seguito è uno dei più semplici.

Per modificare il nome R3 in RX, per esempio, DCLICKL sul testo R3 per attivare la finestra di dialogo *Edit Reference Designator* di Figura B.6(a). Scrivere il nuovo nome RX e fare clic sul bottone OK per accettare la modifica. Lo stesso procedimento può essere usato per modificare, per esempio, VDC in V1 o in un qualsiasi altro nome. Per modificare invece il valore 1k in 10Meg, per esempio, DCLICKL sull'attributo 1k (non sul simbolo) per attivare la finestra di dialogo *Set Attribute Value* di Figura B.6(b). Scrivere il nuovo valore 10Meg (non lasciare nessuno spazio tra 10 e Meg) e fare clic sul bottone OK per accettare la modifica. In maniera simile, per modificare il valore di default 0V in 15kV per il generatore di tensione VDC, DCLICKL nel simbolo di VDC per attivare la finestra di dialogo *PartName*. DCLICKL sull'attributo DC = e scrivere 15kV nella casella del valore. Per maggiore comodità, è possibile esprimere i valori numerici per mezzo dei fattori di scala riportati nella Tabella B.1. Per esempio, 6.6×10^{-8} può essere scritto come 66N oppure 0.066U.

Fatta eccezione per il nodo di massa, a cui viene automaticamente assegnato il numero di nodo 0, a ciascun nodo viene dato un nome (oppure un numero) manualmente oppure in modo automatico. È possibile etichettare un nodo dando un nome a un fi-

² Un componente può avere molti attributi, alcuni dei quali vengono visualizzati per default. Se necessario, è possibile visualizzare altri, ma è bene nascondere gli attributi non importanti per evitare di sovraccaricare il disegno.

lo collegato a quel nodo. DCLICKL sul filo per attivare la finestra di dialogo Set Attribute Value, e scrivere direttamente il valore dell'etichetta³.

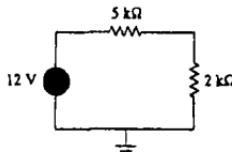
Tabella B.1 Fattori di scala.		
Simbolo	Valore	Nome del suffisso
T	10^{12}	tera
G	10^9	giga
MEG	10^6	mega
K	10^3	kilo
M	10^{-3}	milli
U	10^{-6}	micro
N	10^{-9}	nano
P	10^{-12}	pico
F	10^{-15}	femto

Per ottenere una copia stampata della schermata/schematico, selezionare File/Print/OK. Per salvare lo schematico appena creato, selezionare File/Save As e scrivere il nome del file che conterrà lo schematico. Fare clic su OK oppure premere <Enter>. Questa operazione genera un file di nome "<nomefile>" ed estensione .sch e lo salva su disco.

Esempio B.1

Disegnare il circuito in Figura B.7 usando Schematics.

Figura B.7
Per l'Esempio B.1



Soluzione: Verrà seguito il procedimento in tre fasi appena illustrato. Si inizia con doppio clic sull'icona Schematics. Compare una schermata con un foglio di lavoro bianco su cui disegnare il circuito. Si seguono ora i passi delineati di seguito per creare il circuito di Figura B.7.

Piazzamento del generatore di tensione:

1. Clic su Draw/Get New Part (oppure <Ctrl-G>).
2. Scrivere VSRC nella casella Part Browser Basic.
3. Clic su OK (oppure <Enter>).
4. DRAG della parte fino alla posizione desiderata sullo schermo.
5. CLICKL per posizionare VSRC e CLICKR per terminare la modalità piazzamento.

A questo punto, sullo schermo compare il solo generatore di tensione V1 in Figura B.8(a), in colore rosso. Per piazzare i resistori:

1. Clic su Draw/Get New Part.
2. Scrivere R nella casella Part Browser Basic.
3. Clic su OK.
4. DRAG del resistore fino alla posizione di R1 sullo schermo.
5. CLICKL per posizionare R1.
6. CLICKL per posizionare R2 e CLICKR per terminare la modalità piazzamento.
7. DRAG di R2 fino alla sua posizione.
8. Edit/Rotate (oppure <Ctrl-R>) per ottenere la rotazione di R2.

³ È sempre conveniente numerare i nodi numerando i fili corrispondenti. In caso contrario, Schematics etichetterà i nodi a modo suo, e potrebbe risultare poi difficile distinguere i vari nodi nei risultati tabulati in uscita.

A questo punto, sono state create le tre parti mostrate in Figura B.8(a). Il passo successivo consiste nel collegare le parti tra loro.

1. Clic su Draw/Wire per entrare in modalità collegamento, indicata dal cursore a forma di matita.
2. DRAG del cursore fino all'estremo superiore di V1.
3. CLICKL per collegare il filo all'estremo superiore di V1.
4. DRAG del filo tratteggiato fino all'angolo superiore.
5. CLICKL per trasformare il segmento di filo in un tratto continuo, e ancorarlo all'angolo.
6. DRAG del filo tratteggiato fino al terminale sinistro di R1.
7. CLICKL per trasformare il segmento di filo in tratto continuo e ancorarlo al terminale sinistro di R1.
8. CLICKR per terminare la modalità collegamento.

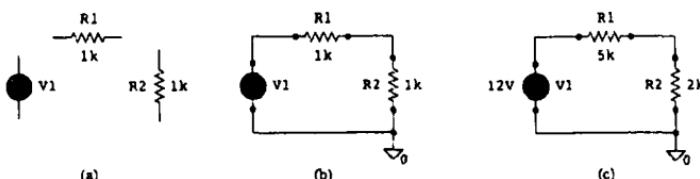


Figura B.8
Creazione del circuito in Figura B.7: (a) piazzamento delle parti,
(b) collegamento delle parti,
(c) modifica degli attributi.

La procedura precedente deve essere ripetuta per collegare R1 con R2 e V1 con R2. (È possibile ritornare nella modalità collegamento premendo <Spazio>.) A questo punto, il circuito appare come in Figura B.8(b), fatta eccezione per il simbolo di massa. Il simbolo di massa viene inserito come segue:

1. Clic su Draw/Get New Part.
2. Scrivere AGND nella casella *Part Browser Basic*.
3. Clic su OK.
4. DRAG della parte fino alla posizione desiderata sullo schermo.
5. CLICKL per posizionare AGND e CLICKR per terminare la modalità piazzamento.

L'ultima operazione consiste nel modificare o assegnare valori agli attributi. Per assegnare l'attributo 12V a V1, i passi sono i seguenti:

1. DCLICKL sul simbolo V1 per aprire la finestra di dialogo *PartName*.
2. DCLICKL sull'attributo *DC* =.
3. Scrivere +12V (o semplicemente 12) nella casella *Value*.
4. Clic su *Save Attr*.
5. Clic su *OK*.

Per assegnare 5k a R1, i passi sono i seguenti:

1. DCLICKL sull'attributo 1k di R1 per attivare la finestra di dialogo *Set Attribute Value*.
2. Scrivere 5k nella casella *Value*.
3. Clic su *OK*.

La stessa procedura può essere utilizzata per assegnare il valore 2k a R2. La Figura B.8(c) mostra il circuito finale.

Esercizio B.1 Costruire il circuito in Figura B.9 usando Schematics.

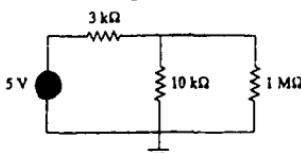
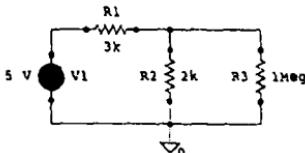


Figura B.9
Per l'Esercizio B.1

Figura B.10
Per l'Esercizio B.1.

Risposta Si veda lo schematico in Figura B.10.



B.3 ANALISI DC

L'analisi DC è una delle analisi standard che si possono eseguire con *PSpice*. Le altre analisi standard sono quella in transitorio, l'analisi AC, e l'analisi di Fourier. Nella analisi DC, *PSpice* può effettuare due tipi di simulazione: l'analisi nodale in DC e la DC sweep.

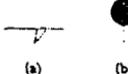
I. Analisi nodale in DC

PSpice esegue l'analisi nodale in regime stazionario per i generatori aventi attributi della forma DC =, e fornisce in uscita la tensione stazionaria di ciascun nodo del circuito e le correnti stazionarie di ramo, se richieste. La visualizzazione delle tensioni di nodo e delle correnti di ramo richiede l'inserzione di due nuovi tipi di parti, mostrate in Figura B.11.

Figura B.11

Simboli per

- (a) VIEWPOINT di tensione,
- (b) IPROBE di corrente.



Il simbolo VIEWPOINT viene collegato a ciascun nodo del quale si desidera visualizzare la tensione, mentre il simbolo IPROBE viene collegato in un ramo di cui si desidera visualizzare la corrente. Tale operazione richiede la modifica dello schematico. Per esempio, si consideri l'aggiunta di VIEWPOINT di tensione e IPROBE di corrente allo schematico di Figura B.8(c).

Per aggiungere i VIEWPOINT, si usa il seguente procedimento:

1. Clic su Draw/Get New Part (oppure <Ctrl-G>).
2. Scrivere VIEWPOINT nella casella Part Browser Basic.
3. Clic su OK (oppure <Enter>).
4. DRAG per posizionare il VIEWPOINT sopra V1 e CLICKL.
5. DRAG per posizionare il VIEWPOINT su R2 e CLICKL.
6. CLICKR per terminare la modalità piazzamento.

La Figura B.12 mostra i due VIEWPOINT di tensione. Poiché il simbolo IPROBE deve essere collegato in serie al ramo corrispondente, è necessario spostare R2 verso il basso selezionandolo e spostandolo assieme ai fili a esso collegati. Una volta eseguita questa operazione, il simbolo IPROBE viene aggiunto come segue:

1. Clic su Draw/Get New Part (oppure <Ctrl-G>).
2. Scrivere IPROBE nella casella Part Browser Basic.
3. Clic su OK (oppure <Enter>).
4. DRAG per posizionare IPROBE al di sopra di R2 e CLICKL.
5. CLICKR per terminare la modalità piazzamento.
6. Tracciare tutti i restanti collegamenti.

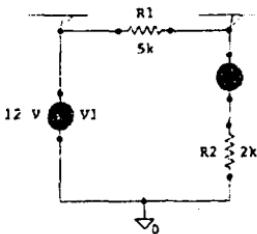
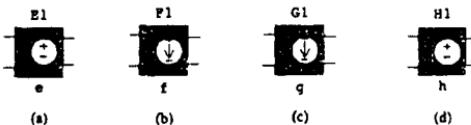


Figura B.12
Piazzamento di VIEWPOINT e IPROBE

Lo schematico diventa quello mostrato in Figura B.12. Si è ora pronti per simulare il circuito. A questo punto, lo schematico deve essere salvato — *PSpice* non si avvia se lo schematico da simulare non viene prima salvato. Prima di vedere come è possibile eseguire il programma *PSpice*, si osservi quanto segue:

1. Un nodo di riferimento o collegamento a massa (la parte AGND) deve necessariamente esistere in ogni schematico. Qualunque nodo può venire utilizzato come massa, e le tensioni degli altri nodi risulteranno specificate rispetto a quel nodo di riferimento.
2. I generatori dipendenti si trovano nella libreria Parts. Essi vengono richiamati selezionando Draw/Get New Part e scrivendo direttamente il part name. La Figura B.13 mostra il part name per ciascun tipo di generatore, assieme ai corrispondente guadagno. *E* è un generatore di tensione controllato in tensione con guadagno *e*; *F* è un generatore di corrente controllato in corrente con guadagno *f*; *G* è un generatore di corrente controllato in tensione con transconduttanza *g*; *H* è un generatore di tensione controllato in corrente con transresistenza *h*.



3. Per convenzione, nell'analisi DC si suppone che tutti i condensatori siano circuiti aperti e tutti gli induttori corti circuiti.

Si esegue *PSpice* selezionando Analysis/Simulate. Viene dapprima attivata la fase di *electric rule check* (ERC), nella quale viene generata la *netlist*. La ERC esegue un controllo sulla connettività dello schematico prima della creazione della netlist. La netlist è una lista che descrive il tipo di ciascun componente del circuito e i suoi collegamenti. Ogni linea della netlist rappresenta un singolo componente del circuito⁴. La netlist può essere visualizzata selezionando Analysis/Examine Netlist nella finestra Schematics. Se ci sono errori nello schematico, apparirà una finestra *error*. Fare clic su OK (oppure premere <Enter>) per visualizzare la lista degli errori. Dopo avere visualizzato gli errori, è necessario uscire dalla *error list* e ritornare a Schematics per correggere gli errori⁵. Se invece non ci sono errori, il sistema avvia automaticamente *PSpice* ed esegue la simulazione (analisi nodale). Quando l'analisi è terminata, il programma visualizza *Bias point calculated*, e genera un file di risultati/uscita avente estensione .out.

Per esaminare il file di uscita, selezionare Analysis/Examine Output dalla finestra Schematics (oppure File/Examine Output dalla finestra *PSpice*). Per stampare il file di uscita, selezionare File/Print, e per uscire da questa fase selezionare File/Exit. È anche possibile esaminare i risultati della simulazione osservando i valori visualizzati sulle parti VIEWPOINT e IPROBE dello schematico dopo che la simulazione è terminata.

Figura B.13
Generatori dipendenti:
(a) generatore di tensione controllato in tensione (VCVS),
(b) generatore di corrente controllato in corrente (CCCS),
(c) generatore di corrente controllato in tensione (VCCS),
(d) generatore di tensione controllato in corrente (CCVS).

⁴ La netlist può essere generata manualmente oppure automaticamente da Schematics.

⁵ Esistono due tipi principali di errori in *PSpice*: (1) errori legati alla topologia del circuito, (2) errori che si verificano durante la simulazione.

I valori visualizzati sui VIEWPOINT e IPROBE sono gli stessi che compaiono nel file di uscita.

2. DC Sweep

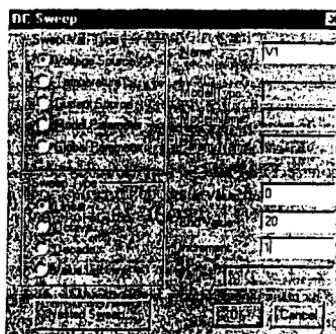
L'analisi nodale in DC permette di simulare un circuito con generatori stazionari aventi tensioni e correnti fissate. L'analisi DC sweep consente una maggiore flessibilità, perché calcola le tensioni di nodo e le correnti di ramo di un circuito quando a uno o più generatori vengono fatti assumere valori compresi in un intervallo. Come nella analisi nodale, si suppone che i condensatori siano dei circuiti aperti e gli induttori corti circuiti. Si supponga, per esempio, di voler eseguire una DC sweep del generatore di tensione V1 in Figura B.12 da 0 a 20 volt con incrementi di 1 volt. Si procede come segue:

1. Selezionare Analysis/Setup.
2. CLICKL il bottone DC Sweep.
3. Clic nella casella *Name* e scrivere *V1*.
4. Clic nella casella *Start Value* e scrivere 0.
5. Clic nella casella *End Value* e scrivere 20.
6. Clic nella casella *Increment* e scrivere 1.
7. Clic su OK per chiudere la finestra di dialogo DC Sweep e salvare i parametri.
8. Clic su Close per chiudere il menu Analysis Setup.

La Figura B.14 mostra la finestra di dialogo DC Sweep. Si noti che il valore di default per la *Swept Var. Type* è *Voltage Source*, ed è *Linear* per *Sweep Type*. Se necessario, si possono scegliere altre opzioni selezionando i corrispondenti bottoni.

Per eseguire l'analisi DC sweep, selezionare Analysis/Simulate. Schematics genera una netlist e farà successivamente eseguire PSpice se non si verificano errori. Se ci sono errori nello schematico, essi vanno controllati nella *Error List* e corretti come al solito. Se non vengono riscontrati errori, i dati generati da PSpice vengono passati a Orcad PSpice. Apparirà la finestra Orcad PSpice, che visualizza un grafico in cui l'asse X per default rappresenta la variabile del generatore e l'intervallo di variazione della DC sweep, e l'asse Y è inizialmente vuoto. Per visualizzare uno o più grafici particolari, selezionare Trace/Add nel menu Orcad PSpice per aprire la finestra di dialogo Add Traces. Questa finestra contiene le tracce, che sono le variabili di uscita (tensioni di nodo e correnti di ramo) presenti nel file di dati e disponibili per la visualizzazione. Scegliere le tracce da visualizzare facendo clic sopra a ciascuna di esse o scrivendone il nome, e selezionare poi OK. Le tracce scelte verranno visualizzate sullo schermo. Si possono aggiungere un numero qualsiasi di tracce allo stesso grafico, oppure aprire ulteriori finestre. È possibile aprire una nuova finestra facendo clic su Window/New. Per cancellare una traccia, selezionare il nome della traccia nella legenda del grafico per illuminarla, e poi selezionare Edit/Delete (o premere <Delete>).

Figura B.14
Finestra di dialogo DC sweep analysis.



È importante avere presente il modo in cui le tracce vanno interpretate. Le variabili di tensione e di corrente vanno sempre intese secondo la convenzione degli utilizzatori. Quando le parti vengono inizialmente posizionate orizzontalmente in uno schematico, come mostrato in Figura B.3, il terminale di sinistra è detto pin 1, mentre il terminale di destra è il pin 2. Quando un componente (per esempio R1) viene fatto ruotare una volta in senso antiorario, il pin 2 finisce in alto, perché la rotazione avviene sempre attorno al pin 1. Perciò, se la corrente entra attraverso il pin 2, la corrente $I(R1)$ che attraversa R1 risulterà negativa. In altre parole, una corrente positiva significa sempre che la corrente entra attraverso il pin 1, e una corrente negativa che la corrente entra dal pin 2.

Per le variabili di tensione, esse vanno sempre intese rispetto a massa. Per esempio, $V(R1:2)$ è la tensione (rispetto a massa) sul pin 2 del resistore R1; $V(V1:+)$ è la tensione (rispetto a massa) sul terminale positivo del generatore di tensione V1; infine, $V(E2:1)$ è la tensione al pin 1 del componente E2 rispetto a massa, indipendentemente dalla polarità del componente.

Esempio B.2

Per il circuito in Figura B.15, determinare le tensioni di nodo e la corrente i_o .

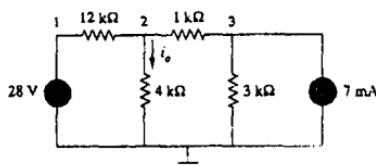


Figura B.15
Per l'Esempio B.2.

Soluzione: Si utilizza Schematics per disegnare il circuito. Dopo averlo salvato, si seleziona Analysis/Simulate per simularlo. Si possono ottenere i risultati della analisi dai file di uscita, oppure dalle parti VIEWPOINT e IPROBE, come mostrato in Figura B.16. Il contenuto del file di netlist è mostrato in Figura B.17. Si noti che la netlist contiene il nome, il valore e le connessioni per ciascun elemento del circuito. Per esempio, la prima linea afferma che il generatore di tensione V1 ha un valore di 28 V ed è collegato tra i nodi 0 e 1. La Figura B.18 mostra una versione ridotta del file di uscita. Il file di uscita contiene, oltre a quanto mostrato dalla figura, anche la netlist, che è stata invece omessa nella Figura B.18. Dal simbolo IPROBE, oppure dal file di uscita, si ottiene il valore di i_o pari a 3.25 mA.

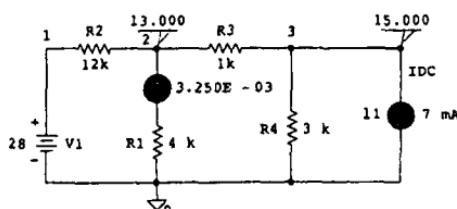


Figura B.16
Per l'Esempio B.2, schematico
per il circuito in Figura B.15

* Schematics Netlist *

```

V_V1      1 0 28
R_R1      0 4 4k
R_R2      1 2 12k
R_R3      2 3 1k
R_R4      0 3 3k
I_I1      0 3 DC 7mA
v_V2      2 4 0

```

Figura B.17
Il file di netlist per l'Esempio B.2.

**** 11/26/99 20:56:05 ***** NT Evaluation PSpice (Nov. 1999) *****

* C:\ MSIMEV63\ examd2.sch

***** CIRCUIT DESCRIPTION

* Schematics Version 6.3 - April 1996

* Sat Jul 26 20:56:04 1997

**** INCLUDING examd2.als ****

* Schematics Aliases *

.ALIASES

V_V1 V1(+=1 -=0)

R_R1 R1(1=0 2=4)

R_R2 R2(1=1 2=2)

R_R3 R3(1=2 2=3)

R_R4 R4(1=0 2=3)

I_I1 I1(+=0 -=3)

v_V2 V2(+-2 --4)

--(1=1)

--(2=2)

--(3=3)

.ENDALIASES

.probe

.END

NCDE VOLTAGE	NODE VOLTAGE	NODE VOLTAGE	NODE VOLTAGE
(1) 28.0000	(2) 13.0000	(3) 15.0000	(4) 13.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT

V_V1 -1.250E-03

v_V2 3.250E-03

TOTAL POWER DISSIPATION 3.50E-02 WATTS

Figura B.18 File di uscita (modificato) per l'Esempio B.2.

■ Esercizio B.2 Determinare le tensioni di nodo e la corrente i_x nel circuito di Figura B.19 usando PSpice.

Risposta: $V_1 = 50$, $V_2 = 37.2$, $V_3 = 27.9$, $i_x = 3.1 \text{ mA}$.

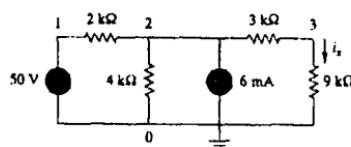


Figura B.19
Per l'Esercizio B.2.

Esempio B.3

Tracciare i grafici di I_1 e I_2 quando il generatore di tensione stazionario in Figura B.20 viene fatto variare da 2 V a 10 V.

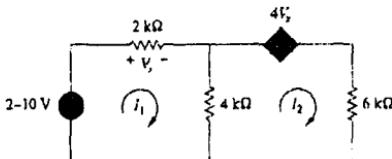


Figura B.20
Per l'Esempio B.3

Soluzione: Si disegna lo schematico del circuito e si scelgono gli attributi come mostrato in Figura B.21.

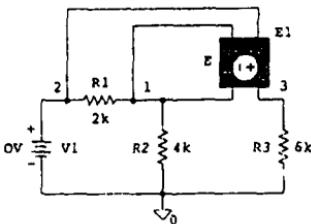


Figura B.21
Schematico del circuito in Figura B.20.

Si osservi in particolare il modo in cui il generatore di tensione controllato in tensione E_1 è stato collegato. Dopo avere completato lo schematico, si seleziona Analysis/Setup e si inseriscono i valori iniziale, finale e di incremento pari a 2, 10 e 0.5, rispettivamente. Selezionando Analysis/Simulate, si attiva il menu Orcad PSpice. Si seleziona Trace/Add e si scelgono $I(R1)$ e $-I(R3)$ per la visualizzazione (il segno negativo è necessario per rendere la corrente attraverso R_3 positiva). La Figura B.22 mostra il risultato.

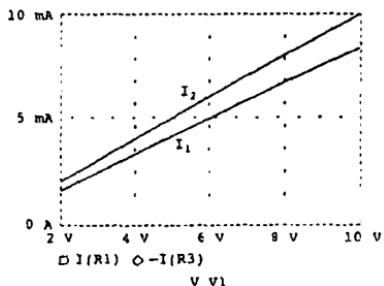


Figura B.22
Grafici di I_1 e I_2 in funzione di V_1 .

■ **Esercizio B.3** Usare PSpice per ottenere i grafici di i_s e i_o , se il generatore di tensione stazionaria di Figura B.23 viene fatto variare da 2 V a 10 V.

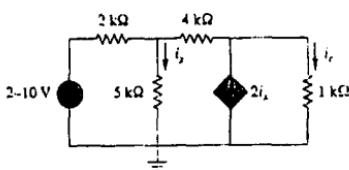
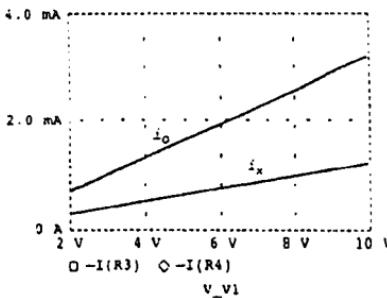


Figura B.23
Per l'Esercizio B.3

Risposta: I grafici di i_s e i_o sono mostrati in Figura B.24.

Figura B.24
Grafici di i_x e i_o in funzione
di V_1 .



B.4 ANALISI IN TRANSITORIO

In *PSpice*, l'analisi in transitorio viene utilizzata per ottenere il comportamento di una forma d'onda (tensione o corrente) in funzione del tempo. L'analisi in transitorio risolve le equazioni differenziali che descrivono il circuito e calcola le tensioni e le correnti in funzione del tempo. L'analisi in transitorio viene anche utilizzata come preliminare all'analisi di Fourier. Nell'analisi in transitorio di un circuito con *PSpice*, si passa solitamente attraverso tre fasi: (1) disegno del circuito, (2) specifiche di analisi, (3) simulazione del circuito.

I. Disegno del circuito

Per poter eseguire una analisi in transitorio, il circuito deve prima essere creato usando Schematics e si deve specificare la forma d'onda del generatore. *PSpice* contiene vari tipi di funzioni o generatori variabili nel tempo, che possono essere utilizzati per l'analisi in transitorio. Essi sono, fra gli altri:

- VSIN, ISIN: generatore di tensione o di corrente sinusoidale smorzato, per esempio $v(t) = 10e^{-0.2t} \sin(120\pi t - 60^\circ)$
- VPULSE, IPULSE: impulso di tensione o di corrente.
- VEXP, IEXP: generatore di tensione o di corrente esponenziale, per esempio $i(t) = 6[1 - e^{-0.5t}]$.
- VPWL, IPWL: tensione o corrente lineare a tratti, che può essere utilizzata per specificare una forma d'onda arbitraria.

Si esaminano ora più in dettaglio tutte queste funzioni.

VSIN è un generatore di tensione sinusoidale con smorzamento esponenziale, quale per esempio.

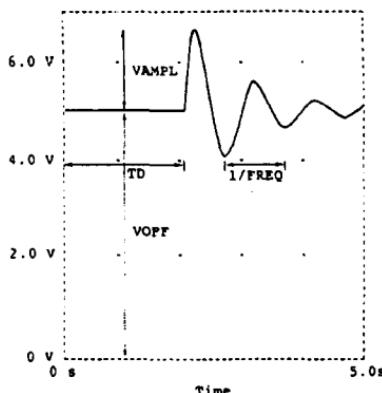
$$v(t) = V_o + V_m e^{-\alpha(t-t_d)} \sin[2\pi f(t - t_d) + \phi] \quad (B.1)$$

Il generatore VSIN possiede i seguenti attributi, che sono illustrati in Figura B.25 e possono essere confrontati con la (B.1).

$$\begin{aligned} \text{VOFF} &= \text{Tensione di Offset, } V_o \\ \text{VAMPL} &= \text{Ampiezza, } V_m \\ \text{TD} &= \text{Ritardo in secondi, } t_d \\ \text{FREQ} &= \text{Frequenza in Hz, } f \\ \text{DF} &= \text{Fattore di smorzamento (adimensionale), } \alpha \\ \text{PHASE} &= \text{Fase in gradi, } \phi \end{aligned} \quad (B.2)$$

Gli attributi TD, DF e PHASE valgono zero per default, ma possono essere modificati se lo si desidera. Tutto quanto è stato detto per VSIN vale anche per ISIN.

Figura B.25
Generatore di tensione sinusoidale VSIN.



Il generatore VPULSE possiede i seguenti attributi, che sono visualizzati in Figura B.26.

V1 = Tensione bassa

V2 = Tensione alta

TD = Ritardo iniziale in secondi

TR = Tempo di salita in secondi

TF = Tempo di discesa in secondi

PW = Ampiezza dell'impulso in secondi

PER = Periodo in secondi

È obbligatorio specificare i valori per **V1** e **V2**. Per default, l'attributo **TD** vale 0. **TR** e **TF** ricevono il valore di default *print step*; **PW** e **PER** ricevono il valore di default *final time*. I valori di *print step* e *final time* vengono ottenuti come valori di default dalle specifiche fornite dall'utente in *Transient Analysis/Setup*, di cui si parlerà fra poco.

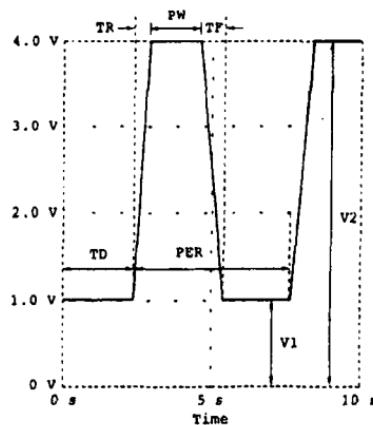


Figura B.26
Generatore di tensione impulsivo VPULSE.

Il generatore di tensione esponenziale VEXP ha i seguenti attributi, illustrati in Figura B.27.

V1 = Tensione iniziale

V2 = Tensione finale

TD1 = Ritardo di salita in secondi

TC1 = Costante di tempo di salita in secondi

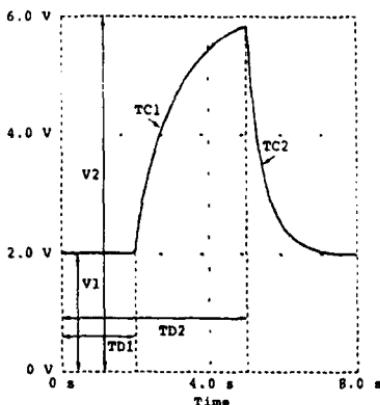
TD2 = Ritardo di discesa in secondi

TC2 = Costante di tempo di discesa in secondi

(B.4)

Figura B.27

Generatore di tensione esponenziale VEXP.



Il generatore di tensione lineare a tratti VPWL, quale per esempio quello mostrato in Figura B.28, richiede di specificare coppie TN, VN , dove VN è la tensione al tempo TN per $N = 1, 2, \dots, 10$. Per esempio, per la funzione mostrata in Figura B.29, sarà necessario specificare gli attributi $T1 = 0, V1 = 0, T2 = 2, V2 = 4, T3 = 6, V3 = 4$ e $T4 = 8, V4 = -2$.

Figura B.28

Generatore di tensione lineare a tratti VPWL.

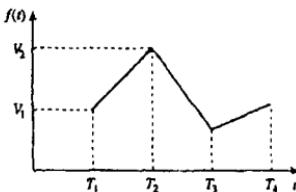
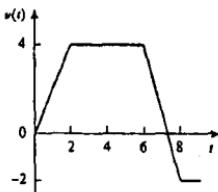


Figura B.29

Esempio di generatore di tensione lineare a tratti VPWL.



Per ottenere informazioni riguardo agli altri tipi di generatori, si può selezionare Help/ Search for Help on ... e scrivere il nome della classe di generatore desiderata. Per aggiungere un generatore allo schematico, si eseguono i seguenti passi:

1. Selezionare Draw/Get New Part.
2. Scrivere il nome del generatore.
3. Clic su OK e DRAG del simbolo alla posizione desiderata
4. DCLICKL sul simbolo del generatore per aprire la finestra di dialogo *PartName*.
5. Per ciascun attributo, DCLICKL sull'attributo, inserire il valore, e cliccare su Save Attr per accettare le modifiche.
6. Clic su OK per accettare i nuovi attributi.

Al passo 5 può accadere che, dopo che gli attributi sono stati modificati, essi non vengono mostrati sullo schematico. Per ottenere la visualizzazione di un attributo, selezionare Change Display/Both Name and Value nella finestra di dialogo *PartName*.

Oltre a specificare il generatore da utilizzare nella analisi in transitorio, può risultare necessario specificare le condizioni iniziali sui condensatori e sugli induttori del circuito. A tal fine, DCLICKL sul simbolo della parte per attivare la finestra di dialogo *PartName*, clic su IC = e scrivere il valore della condizione iniziale. L'attributo IC consente di specificare le condizioni iniziali su un condensatore o un induttore. Il valore di default per IC è 0. Gli attributi degli interruttori di tipo aperto/chiuso (i cui part name sono Sw_tClose e Sw_tOpen) possono essere modificati nella stessa maniera.

2. Specifiche di analisi

Dopo che il circuito è stato disegnato e il generatore specificato assieme ai suoi attributi, è necessario aggiungere alcune specifiche relative alla analisi in transitorio vera e propria. Si supponga, per esempio, di desiderare che l'analisi proceda da 0 a 10ms con un intervallo di stampa di 2ns; la procedura per specificare tali requisiti è la seguente:

1. Selezionare Analysis/Setup/Transient per aprire la finestra di dialogo *Transient Analysis*.
2. CLICKL su *Print Step* e scrivere 2ns.
3. CLICKL su *Final Time* e scrivere 10ms.
4. CLICKL su *Step Ceiling* e scrivere 5us.
5. CLICKL su OK/Close per accettare le specifiche.

Queste specifiche controllano la simulazione e la visualizzazione delle variabili di uscita. *Final Time* specifica per quanto a lungo la simulazione deve durare. In altre parole, la simulazione va da $t = 0$ a $t = \text{Final Time}$. *Print Step* si riferisce all'intervallo di tempo con il quale la funzione di stampa produrrà i risultati in uscita. Esso controlla la frequenza con la quale i risultati vengono scritti nel file di uscita. Il valore di *Print Step* può essere un qualunque valore inferiore a *Final Time*, ma non può essere zero. *Step Ceiling* è l'intervallo di tempo massimo tra due punti di simulazione; la specifica del suo valore è opzionale. Scegliendo 10 ms come *Final Time* e 5 μ s come *Step Ceiling*, la simulazione avrà un minimo di 10 ms/5 μ s = 2000 punti. Quando *Step Ceiling* non viene specificato, PSpice sceglie automaticamente il suo time step interno — il tempo tra due punti di simulazione. Il time step viene scelto il più grande possibile, al fine di ridurre il tempo di simulazione. Se l'utente non ha alcuna idea di quale sarà l'aspetto delle forme d'onda dei risultati, si raccomanda di lasciare non specificato il valore di *Step Ceiling*. Se i grafici in uscita risultano poco chiari a causa della scelta di un time step troppo grande da parte di PSpice, è allora possibile specificare uno *Step Ceiling* al fine di rendere il grafico più chiaro. Si tenga comunque presente che un valore più piccolo di *Step Ceiling* produce più punti di simulazione, ma richiede una maggiore quantità di tempo di calcolo⁶.

⁶ Per ottenere le componenti di Fourier di un segnale, si attiva l'opzione Fourier nella finestra di dialogo *Transient Analysis*. Si veda il Capitolo 16 sul sito dedicato al volume.

3. Simulazione del circuito

Dopo che il circuito è stato disegnato, che sono state fornite le specifiche per l'analisi in transitorio e che il circuito è stato salvato, si è pronti per eseguire la simulazione. Per eseguire l'analisi in transitorio si seleziona **Analysis/Simulate**. Se non ci sono errori, la finestra *Orcad PSpice* apparirà automaticamente. Come al solito, verrà disegnato l'asse dei tempi (o asse X) ma non verranno visualizzate curve. Selezionare **Trace/Add**, e scegliere le variabili da visualizzare. Un metodo alternativo per visualizzare i risultati è quello di utilizzare i *marker*: Esistono molti e diversi tipi di marker, ma qui verranno citati soltanto i marker di tensione e di corrente. Un marker di tensione viene utilizzato per visualizzare la tensione di un nodo relativa a massa; un marker di corrente serve per visualizzare la corrente in un pin di un elemento. Per posizionare un marker di tensione su un nodo, eseguire i seguenti passi nella finestra *Schematics*:

1. Selezionare **Markers/Mark Voltage/Level**.
2. DRAG del marker di tensione fino al nodo desiderato.
3. CLICKL per posizionare il marker e CLICKR per terminare la modalità piazzamento.

A questo punto si sono verificate due cose: il marker di tensione è diventato parte del circuito, e la tensione di nodo corrispondente verrà visualizzata dalla finestra *Orcad PSpice* quando si eseguirà lo schematico. Per posizionare un marker di corrente su un pin di un componente, eseguire i seguenti passi, sempre nella finestra *Schematics*:

1. Selezionare **Markers/Mark current into pin**.
2. DRAG del marker di corrente fino al pin desiderato.
3. CLICKL per posizionare il marker e CLICKR per terminare la modalità piazzamento.

Queste operazioni faranno sì che la corrente nel pin scelto venga aggiunta automaticamente al grafico di *Probe*. È molto importante che il marker di corrente venga posizionato proprio sul pin del componente; in caso contrario, il sistema rifiuterà il marker. È possibile posizionare quanti marker di tensione e di corrente si vogliono su un circuito. Per cancellare i marker da un circuito, e di conseguenza i loro grafici dalla finestra *Orcad PSpice*, selezionare **Markers/Clear All** dalla finestra *Schematics*.

Esempio B.4

Supponendo $i(0) = 10 \text{ A}$, tracciare il grafico della risposta libera $i(t)$ nel circuito di Figura B.30 per $0 < t < 4 \text{ s}$ usando *PSpice*.

Soluzione: Il circuito è identico a quello dell'Esempio 7.3, per il quale è stata ottenuta la soluzione

$$i(t) = 10e^{(-2/3)t}$$

Lo schematico per l'analisi con *PSpice* è quello mostrato in Figura B.31, in cui il generatore controllato in corrente H1 è stato collegato in maniera conforme al circuito di Figura B.30.

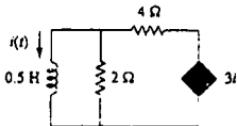


Figura B.30
Per l'Esempio B.4

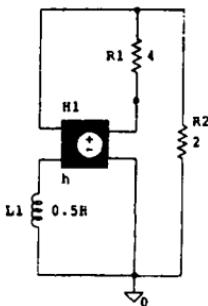


Figura B.31
Schematico del circuito
in Figura B.30.

La tensione di H1 è 3 volte la corrente nell'induttore L1. Perciò, per H1 si sceglie GAIN = 3, e per

l'induttore L1 si sceglie la condizione iniziale $i_C = 10$. Tramite la finestra di dialogo Analysis/Setup/Transient, si scelgono Print Step = 0.25s e Final Time = 4s. Dopo avere effettuato la simulazione del circuito, l'uscita viene presa sulla corrente dell'induttore $i(t)$, e il grafico è mostrato in Figura B.32.

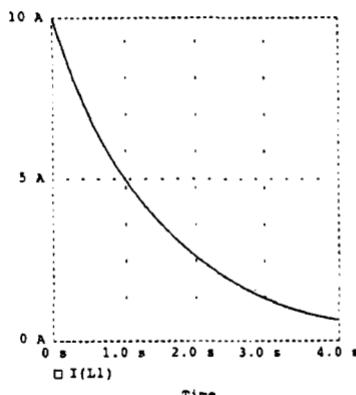


Figura B.32
Grafico dell'uscita per
l'Esempio B.4.

- **Esercizio B.4** Usando PSpice, tracciare il grafico della risposta libera $v(t)$ del circuito di Figura B.33, supponendo $v(0) = 10$ V.

Risposta: La Figura B.34 mostra il grafico. Si noti che $v(t) = 10e^{-0.25t} \cos 0.5t + 5e^{-0.25t} \sin 0.5t$ V.

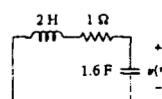


Figura B.33
Per l'Esercizio B.4

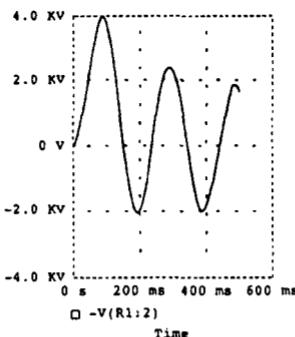
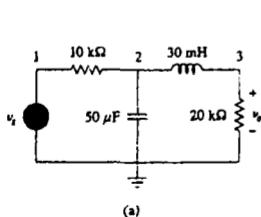


Figura B.34
Grafico dell'uscita per
l'Esercizio B.4.

Esempio B.5

Tracciare il grafico della risposta forzata $v_o(t)$ nel circuito di Figura B.35(a) per $0 < t < 5$ s, se la tensione del generatore è quella mostrata in Figura B.35(b).



(a)

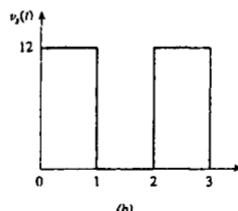
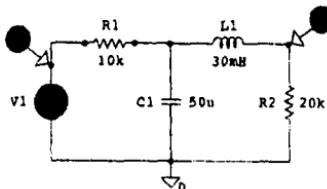


Figura B.35
Per l'Esempio B.5

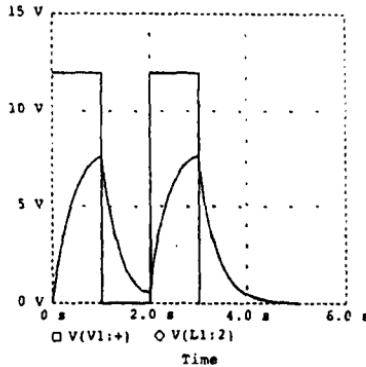
Soluzione: Si disegna il circuito e si sceglono gli attributi come mostrato in Figura B.36. Si inseriscono i dati di Figura B.35(b) facendo doppio clic sul simbolo del generatore di tensione V1 e scrivendo $T1 = 0$, $V1 = 0$, $T2 = 1\text{ns}$, $V2 = 12$, $T3 = 1\text{s}$, $V3 = 12$, $T4 = 1.001\text{s}$, $V4 = 0$, $T5 = 2\text{s}$, $V5 = 0$, $T6 = 2.001\text{s}$, $V6 = 12$, $T7 = 3\text{s}$, $V7 = 12$, $T8 = 3.001\text{s}$, $V8 = 0$. Nella finestra di dialogo Analysis/SetupTransient, si scelgono Print Step = 0.2s e Final Time = 5s. Dopo avere simulato il circuito, dall'interno della finestra Orcad PSpice, si chiude o si iconizza la finestra per ritornare alla finestra Schematics. Si posizionano due marker di tensione, come mostrato in Figura B.36, per ottenere i grafici dell'ingresso v_i e dell'uscita v_o .

Figura B.36
Schematico del circuito
in Figura B.35.



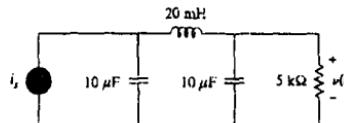
Premendo <Alt-Esc> si ritorna alla finestra *Orcad PSpice*, e si ottengono i grafici mostrati in Figura B.37.

Figura B.37
Grafico dell'uscita per
l'Esempio B.5.



Esercizio B.5 Ottenere il grafico di $v(t)$ nel circuito di Figura B.38 per $0 < t < 0.5\text{s}$ se $i_s = 2e^{-t} \sin 2\pi(5)t$ A.

Figura B.38
Per l'Esercizio B.5.



Risposta: Si veda la Figura B.39.

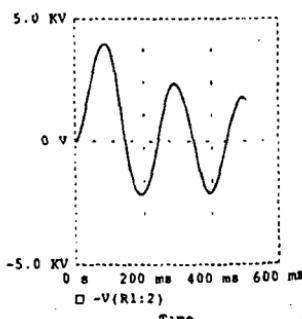


Figura B.39 Grafico dell'uscita per l'Esercizio B.5.

B.5 ANALISI AC/RISPOSTA IN FREQUENZA

Per mezzo della analisi AC, *PSpice* è in grado di eseguire una analisi in regime sinusoidale di un circuito a una singola frequenza, oppure su un intervallo di frequenze, con incrementi che possono variare linearmente, per decadi o per ottave. Nella analisi AC, uno o più generatori vengono fatti variare su un intervallo di frequenze mentre le tensioni e le correnti del circuito vengono ricalcolate a ogni frequenza. L'analisi AC si usa dunque sia per eseguire analisi fassoriali che per ricavare risposte in frequenza: da essa si possono ottenere i diagrammi di *Bode* per il modulo e per la fase. (Si ricordi che un fattore è una quantità complessa con parte reale e immaginaria, oppure modulo e fase).

Mentre l'analisi in transitorio viene effettuata nel dominio del tempo, l'analisi AC viene effettuata nel dominio delle frequenze. Per esempio, se $v_t = 10 \cos(377t + 40^\circ)$, è possibile utilizzare l'analisi in transitorio per ottenere il grafico di v_t in funzione del tempo, mentre nella analisi AC se ne otterrà il modulo pari a 10 e la fase pari a 40° . L'analisi AC si effettua in tre passi, simili a quelli per l'analisi in transitorio: (1) disegno del circuito, (2) specifiche di analisi, (3) simulazione del circuito.

1. Disegno del circuito

Si disegna innanzitutto il circuito usando Schematics e se ne specificano i generatori. I generatori usati nella analisi AC sono quelli di tipo AC (VAC e IAC). Gli attributi dei generatori vengono specificati all'interno di Schematics con un procedimento simile a quello del paragrafo precedente. Per ciascun generatore indipendente è necessario specificare l'ampiezza e la fase.

2. Specifiche di analisi

Prima di simulare il circuito, è necessario inserire le specifiche per l'analisi AC. Si supponga, per esempio, di voler eseguire uno sweep lineare alle frequenze 50, 100 e 150 Hz. I parametri si specificano allora come segue:

1. Selezionare Analysis/Setup/AC Sweep per aprire la finestra di dialogo AC Sweep.
2. CLICKL su Linear per l'asse X, per specificare una scala lineare.
3. Scrivere 3 nella casella Total Pts.
4. Scrivere 50 nella casella Start Freq.
5. Scrivere 150 nella casella End Freq.
6. CLICKL su OK/Close per accettare le specifiche.

Uno sweep lineare significa che i punti di simulazione sono distribuiti uniformemente tra la frequenza iniziale e la frequenza finale. Si noti che *Start Freq* non può mai essere zero, perché 0 Hz corrisponde all'analisi DC. Se si desidera una simulazione a una singola frequenza, si può scrivere 1 al passo 3 e lo stesso valore di frequenza nei passi 4 e 5. Se si desidera invece che l'analisi AC effettui la simulazione del circuito da 1 Hz a 10 MHz con 10 punti per decade, CLICKL su Decade al passo 2 per rendere logaritmico l'asse X, scrivere 10 nella casella Total Pts al passo 3, scrivere 1 nella casella Start Freq, e scrivere 10Meg nella casella End Freq. Si ricordi che una decade corrisponde a un fattore 10. In questo caso, una decade va da 1 Hz a 10 Hz, da 10 Hz a 100 Hz, da 100 Hz a 1 kHz, e così via.

3. Simulazione del circuito

Dopo avere fornito le specifiche necessarie e aver salvato il circuito, si esegue l'analisi AC selezionando Analysis/Simulate. Se non si incontrano errori, il circuito viene simulato. Alla fine della simulazione, il sistema visualizza AC analysis finished e crea un file di uscita con estensione .out. Inoltre, sempre se non ci sono stati errori, verrà automaticamente avviato il programma *Orcad PSpice*. In esso, l'asse delle frequenze (o asse X) viene disegnato ma non viene mostrata ancora nessuna curva.

Selezionare Trace/Add dalla barra di menu *Orcad PSpice* e fare clic sulle variabili da visualizzare. È anche possibile fare uso di marker di tensione o di corrente per visualizzare le tracce, come si è visto nel paragrafo precedente. Per utilizzare marker avanzati quali *vdb*, *idb*, *vphase*, *iphas*, *vreal* e *ireal*, selezionare **Markers/Mark Advanced**.

Nel caso in cui la risoluzione della traccia non risulti abbastanza buona, si può effettuare un controllo sui punti calcolati per vedere se essi sono in numero sufficiente. A tale fine, selezionare **Tools/Options/Mark Data Points/OK** nel menu *Orcad PSpice* e verranno evidenziati i dati contenuti nel file dei risultati. Se necessario, è possibile migliorare la risoluzione aumentando il valore del dato nella casella **Total Pts** nella finestra di dialogo **Analysis/Setup/AC Sweep and Noise Analysis** per l'analisi AC.

I diagrammi di Bode sono diagrammi separati di ampiezza e di fase in funzione della frequenza. Per ottenere i diagrammi di Bode, il procedimento più comune è quello di utilizzare un generatore AC, per esempio V1, con ampiezza 1 volt e fase zero. Dopo aver selezionato **Analysis/Simulate** e avere avviato il programma *Orcad PSpice*, è possibile visualizzare i grafici di modulo e fase come si è visto prima. Si supponga di voler visualizzare il diagramma di Bode del modulo di V(4). Si seleziona Trace/Add e si scrive *dB(V(4))* nella casella **Trace Command**. *dB(V(4))* è equivalente a $20\log(V(4))$, e poiché il modulo di V1, oppure $V(R1:1)$, è unitario, *dB(V(4))* corrisponde effettivamente a *dB(V(4)/V(R1:1))*, che è proprio il guadagno di tensione. Aggiungendo la traccia *dB(V(4))* si otterrà il diagramma di Bode del modulo/guadagno con l'asse *Y* in dB.

Una volta ottenuto il grafico nella finestra *Orcad PSpice*, è possibile aggiungervi delle etichette per migliorarne la documentazione. Per aggiungere un titolo al grafico, selezionare **Edit/Modify Title** nel menu *Orcad PSpice* e scrivere il titolo nella finestra di dialogo. Per aggiungere un'etichetta per l'asse *Y*, selezionare **Plot/Y Axis Settings**, scrivere il testo dell'etichetta e **CLICKL** su OK. L'etichetta per l'asse *X* si aggiunge in maniera simile. In via alternativa, è possibile evitare del tutto di eseguire il programma *Orcad PSpice*, utilizzando degli *pseudocomponenti* che mandano i loro risultati nel file di uscita. Gli pseudocomponenti sono equivalenti a delle parti, e possono essere inseriti in uno schematico come se fossero elementi circuituali, mentre in realtà non corrispondono a nessun elemento del circuito. È possibile aggiungerli al circuito per specificare condizioni iniziali o per controllare l'uscita. In effetti, due tipi di pseudocomponenti, **VIEWPOINT** e **IPROBE**, sono stati già menzionati per l'analisi DC. Altri importanti pseudocomponenti, assieme al loro uso, sono mostrati in Figura B.40, ed elencati nella Tabella B.2.

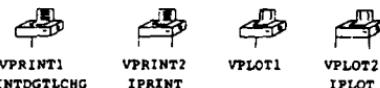


Figura B.40
Pseudocomponenti print e plot.

Tabella B.2 Pseudocomponenti print e plot.

Simbolo	Descrizione
IPLT	Grafico della corrente di ramo; deve essere posizionato in serie
IPRINT	Tabella dei valori della corrente di ramo; deve essere posizionato in serie
VPLOT1	Grafico della tensione del nodo al quale il simbolo è collegato
VPLOT	Grafico della tensione tra i due punti ai quali il simbolo è collegato
VPRINT1	Tabella dei valori della tensione del nodo al quale il simbolo è collegato
VPRINT2	Tabella dei valori della tensione tra i due punti ai quali il simbolo è collegato

Gli pseudocomponenti vengono aggiunti allo schematico. Per aggiungere uno pseudocomponento, selezionare Draw/Get New Part nella finestra Schematics, selezionare lo pseudocomponente, posizionarlo nel punto desiderato e modificarne opportunamente gli attributi, come al solito. Una volta che gli pseudocomponenti sono stati aggiunti allo schematico, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep e si inseriscono le specifiche per l'analisi AC, e infine si seleziona Analysis/Simulate per eseguire l'analisi AC. Se non si incontrano errori, le tensioni e le correnti specificate negli pseudocomponenti verranno salvate nel file di uscita. Il file di uscita può essere visualizzato selezionando Analysis/Examine Output nella finestra Schematics.

Esempio B.6

Determinare la corrente i nel circuito in Figura B.41.

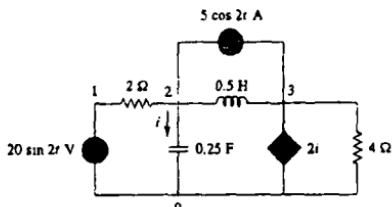


Figura B.41
Per l'Esempio B.6.

Soluzione: Si ricordi che $20 \sin 2t = 20 \cos(2t - 90^\circ)$ e che $f = \omega/2\pi = 2/2\pi = 0.31831$. Lo schematico è mostrato in Figura B.42. Gli attributi di V1 vengono scelti come $ACMAG = 20$, $ACPHASE = -90$, mentre gli attributi di IAC sono $AC = 5$. Il generatore di corrente controllato in corrente è stato collegato in maniera conforme a quella del circuito originale in Figura B.41; il suo guadagno è stato scelto uguale a 2. Gli attributi degli pseudocomponenti IPRINT sono scelti come $AC = yes$, $MAG = yes$, $PHASE = ok$, $REAL = 1$ e $IMAG = 0$. Poiché si effettua una analisi AC a una singola frequenza, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep e si scrive $Total Pts = 1$, $Start Freq = 0.31831$ e $Final Freq = 0.31831$. Il circuito viene salvato e si seleziona Analysis/Simulate per la simulazione. Il file di uscita contiene

```
FREQ IM(V_PRINT3) IP(V_PRINT3)
```

```
3.183E-01 7 906E+00 4.349E+01
```

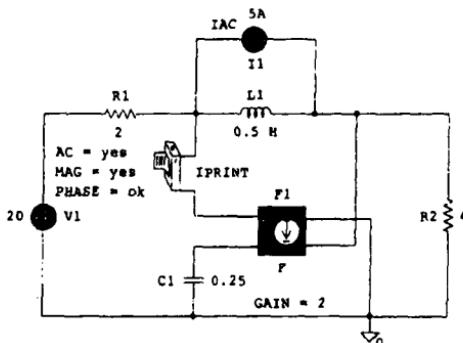


Figura B.42
Schematico del circuito in Figura B.41.

Dal file di uscita, si ricava $i = 7.906 / 43.49^\circ$ A, cioè $i(t) = 7.906 \cos(2t + 43.49^\circ)$ A. In questo esempio è stata eseguita una analisi AC a una singola frequenza; l'Esempio B.7 presenta invece un'analisi AC su un intervallo di frequenze.

Esercizio B.6 Determinare $i_s(t)$ nel circuito in Figura B.43.

Risposta: Dal file di uscita, $i_s = 7.59 / 108.43^\circ$ cioè $i_s = 7.59 \cos(4t + 108.43^\circ)$ A.

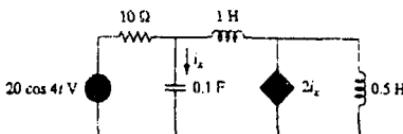
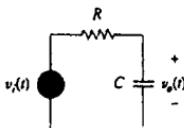


Figura B.43 Per l'Esercizio B.6.

Esempio B.7

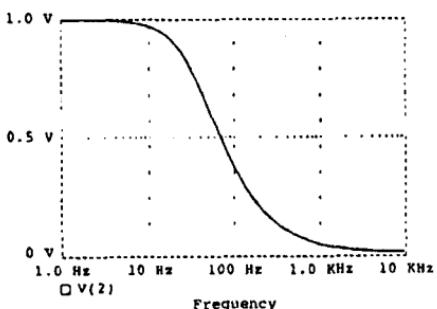
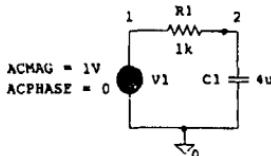
Per il circuito RC mostrato in Figura B.44, tracciare il diagramma dell'ampiezza della tensione di uscita v_o per frequenze comprese tra 1 Hz e 10 kHz. Supponere $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 4\mu\text{F}$.

Figura B.44
Per l'Esempio B.7.

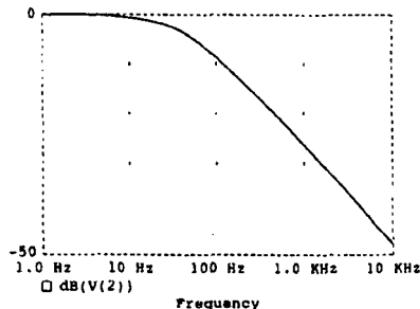


Soluzione: Lo schematico è mostrato in Figura B.45. Si suppone che il modulo di V1 sia 1 e che la sua fase sia zero; si inseriscono questi valori come attributi di V1. Si sceglono inoltre 10 punti per decade. Per le specifiche dell'analisi AC, si seleziona Analysis/Setup/AC Sweep e si scrive 10 nella casella Total Pts, 1 nella casella Start Freq e 10k nella casella Final Freq. Dopo aver salvato il circuito, si seleziona Analysis/Simulate. Dal menu Orcad PSpice, si ottiene il grafico in Figura B.46(a) selezionando Trace/Add e scegliendo V(2). Inoltre, selezionando Trace/Add e scrivendo dB(V(2)) nella casella Trace Command, si ottiene il diagramma di Bode in Figura B.46(b). I due grafici in Figura B.46 mostrano che il circuito è un filtro passa-basso: le frequenze basse vengono lasciate passare invariate, mentre le alte frequenze vengono attenuate.

Figura B.45
Schematico del circuito
in Figura B.44.



(a)



(b)

Figura B.46 Risultati dell'Esempio B.7: (a) diagramma lineare, (b) diagramma di Bode.

- **Esercizio B.7** Nel circuito di Figura B.44, sostituire il condensatore C con un induttore $L = 4 \text{ mH}$ e ottenere il diagramma dell'ampiezza (lineare e di Bode) di v_2 per $10 \leq f \leq 100 \text{ MHz}$.

Risposta: Si vedano i grafici in Figura B.47.

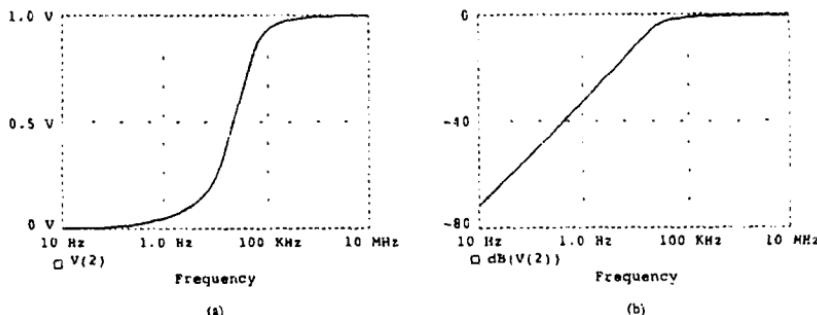


Figura B.47 Risultati dell'Esercizio B.7: (a) diagramma lineare, (b) diagramma di Bode

■

Bibliografia

- Aidala, J. B., and L. Katz. *Transients in Electric Circuits*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.
- Angerbaur, G. J. *Principles of DC and AC Circuits*. 3rd ed. Albany, NY: Delman Publishers, 1989.
- Attia, J. O. *Electronics and Circuit Analysis Using MATLAB*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
- Balanian, N. *Electric Circuits*. New York: McGraw-Hill, 1994.
- Bartkowiak, R. A. *Electric Circuit Analysis*. New York: Harper & Row, 1985.
- Blackwell, W. A., and L. L. Grigsby. *Introductory Network Theory*. Boston, MA: PWS Engineering, 1985.
- Bobrow, L. S. *Elementary Linear Circuit Analysis*. 2nd ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1987.
- Boctor, S. A. *Electric Circuit Analysis*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- Boylestad, R. L. *Introduction to Circuit Analysis*. 10th ed. Columbus, OH: Merrill, 2000.
- Budak, A. *Circuit Theory Fundamentals and Applications*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- Carlson, B. A. *Circuit: Engineering Concepts and Analysis of Linear Electric Circuits*. Boston, MA: PWS Publishing, 1999.
- Chattergy, R. *Spicey Circuits: Elements of Computer-Aided Circuit Analysis*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1992.
- Chen, W. K. *The Circuit and Filters Handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
- Choudhury, D. R. *Networks and Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- Ciletti, M. D. *Introduction to Circuit Analysis and Design*. New York: Oxford Univ. Press, 1995.
- Cogdell, J. R. *Foundations of Electric Circuits*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- Cunningham, D. R., and J. A. Stuller. *Circuit Analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- Davis, A., (ed.). *Circuit Analysis Exam File*. San Jose, CA: Engineering Press, 1986.
- Davis, A. M. *Linear Electric Circuit Analysis*. Washington, DC: Thomson Publishing, 1998.
- DeCarlo, R. A., and P. M. Lin. *Linear Circuit Analysis*. 2nd ed. New York: Oxford Univ. Press, 2001.
- Del Toro, V. *Engineering Circuits*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- Dorf, R. C., and J. A. Svoboda. *Introduction to Electric Circuits*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- Edminister, J. *Schaum's Outline of Electric Circuits*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1996.
- Floyd, T. L. *Principles of Electric Circuits*. 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- Franco, S. *Electric Circuits Fundamentals*. Fort Worth, FL: Saunders College Publishing, 1995.
- Goody, R. W. *Microsim PSpice for Windows*. Vol. 1. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- Harrison, C. A. *Transform Methods in Circuit Analysis*. Philadelphia, PA: Saunders, 1990.
- Harter, J. J., and P. Y. Lin. *Essentials of Electric Circuits* 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.
- Hayt, W. H., and J. E. Kemmerly. *Engineering Circuit Analysis*. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2001.
- Hazen, M. E. *Fundamentals of DC and AC Circuits*. Philadelphia, PA: Saunders, 1990.
- Hostetter, G. H. *Engineering Network Analysis*. New York: Harper & Row, 1984.
- Huelsman, L. P. *Basic Circuit Theory*. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- Irwin, J. D. *Basic Engineering Circuit Analysis*. 7th ed. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- Jackson, H. W., and P. A. White. *Introduction to Electric Circuits*. 7th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997.
- Johnson, D. E. et al. *Electric Circuit Analysis*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- Karni, S. *Applied Circuit Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- Kraus, A. D. *Circuit Analysis*. St. Paul, MN: West Publishing, 1991.
- Madhu, S. *Linear Circuit Analysis*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- Mayergoz, I. D., and W. Lawson. *Basic Electric Circuits Theory*. San Diego, CA: Academic Press, 1997.
- Mottershead, A. *Introduction to Electricity and Electronics: Conventional and Current Version*. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.
- Nasar, S. A. *3000 Solved Problems in Electric Circuits (Schaum's Outline)*. New York: McGraw-Hill, 1988.
- Neudorfer, P. O., and M. Hassul. *Introduction to Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.
- Nilsson, J. W., and S. A. Riedel. *Electric Circuits*. 5th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996.
- O'Malley, J. R. *Basic Circuit Analysis (Schaum's Outline)*. New York: McGraw-Hill, 2nd ed., 1992.
- Parrett, R. *DC-AC Circuits: Concepts and Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

- Paul, C. R. *Analysis of Linear Circuits*. New York: McGraw-Hill, 1989.
- Pouliotis, A. D., (ed.). *The Transforms and Applications Handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2nd ed., 1999.
- Ridsdale, R. E. *Electric Circuits*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1984.
- Sander, K. F. *Electric Circuit Analysis: Principles and Applications*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.
- Scott, D. *Introduction to Circuit Analysis: A Systems Approach*. New York: McGraw-Hill, 1987.
- Smith, K. C., and R. E. Alley. *Electrical Circuits: An Introduction*. New York: Cambridge Univ. Press, 1992.
- Stanley, W. D. *Transform Circuit Analysis for Engineering and Technology*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- Strum, R. D., and J. R. Ward. *Electric Circuits and Networks*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985.
- Su, K. L. *Fundamentals of Circuit Analysis*. Prospect Heights, IL: Waveland Press, 1993.
- Thomas, R. E., and A. J. Rosa. *The Analysis and Design of Linear Circuits*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- Tocci, R. J. *Introduction to Electric Circuit Analysis*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.
- Tuinenga, P. W. *SPICE: A Guide to Circuit Simulation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- Whitehouse, J. E. *Principles of Network Analysis*. Chichester, U.K.: Ellis Horwood, 1991.
- Yorke, R. *Electric Circuit Theory*. 2nd ed. Oxford, U.K.: Pergamon Press, 1986.

Indice analitico

Il numero di pagina seguito da "f" o da "t" indica che il termine si trova rispettivamente in una figura o in una tabella. La lettera "d" indica invece che nella pagina è presente la definizione del termine cui si rimanda.

A

- A, ampere, 5d
- AC
 - circuiti, 345
 - con amplificatori operazionali, circuiti, 397
 - corrente alternata, 6d, 345
 - generico, ponte, 370f
 - ponti, 370
 - specifici, ponti, 371f
- accensione
 - auto, circuito per sistema di, 282f
 - elettronica, 329
 - per auto, sistema di, 329
 - per autoveicolo, circuito di, 281
- accoppiamento
 - conduttivo, circuiti ad, 503
 - k, coefficiente di, 512d
 - magnetico, analisi di circuiti con, 509
 - magnetico, bobine in, 504
 - magnetico, maglie ad, 503
- adattamento
 - delle impedenze, 537
 - trasformatore come dispositivo di, 537
 - trasformatore usato come dispositivo di, 538f
- additività, proprietà di, 123
- Alessandro Antonio Volta, 7
- Alexander Graham Bell, 563
- alimentazione dell'operazionale, 170f
- ammettenza in corto circuito,
 - parametri, 624
- ammettenza, 359t, 360d
 - parametri, 624
- ampere, A, 5d
- amperometri
 - a scala multipla, 54f
 - a scala singola, 54f
- amperometro, 54
- amplificatore
 - a frequenza intermedia, IF, 604
 - a guadagno unitario, 178

- a radiofrequenza, RF, 604
- a transistori con generatore e resistenza di carico, 649f
- ad emettitore comune, 649f
- audio, 604
- differenziale, 180d, 181f
- invertente, 175d, 175f
- non invertente, 177d, 177f
- operazionale ideale, 173d, 173f
- operazionale, 169d
- operazionale, applicazioni dell', 187
- operazionale, tipico, 169f
- per strumentazione, 182, 182f, 189, 1A, 189
- sommatore, 179s, 179f
- transistori bipolare come un, 100
- amplificatori operazionali
 - circuiti ac con, 397
 - circuiti del primo ordine con, 270
- analisi
 - agli anelli, 83, 386
 - agli anelli modificata, 90
 - con PSpice di circuiti magneticamente accoppiati, 531
 - dei circuiti con la sovrapposizione degli effetti, 126
 - dei circuiti in regime sinusoidale, 383
 - di circuiti con accoppiamento magnetico, 509
 - di un circuito, 10
 - nodale e analisi agli anelli, confronto fra, 95
 - nodale, 71
 - nodale modificata, 81
- anelli
 - analisi agli, 83, 386
 - anello, 84d
 - aperto, guadagno di tensione ad, 171
 - chiuso, guadagno ad, 171
 - calcolo delle correnti di, 84
 - corrente di, 84
- angolo del fattore di potenza, 429

- applicazione
 - dei bipola, 648
 - del collegamento a stella al generatore, 484
 - del collegamento a triangolo al generatore, 484
 - della KCL ai due supermodi, 80f
 - della KCL al supermodo, 79f
 - della KCL, 33f
 - della KVL ad un supermodo, 78f
 - della KVL alla maglia, 79f
 - della KVL alle due maglie, 80f
- applicazioni
 - dei circuiti risonanti, 603
 - dei circuiti RLC, 329
 - dei filtri, 603
 - dei trasformatori, 535
 - dell'amplificatore operazionale, 187
 - della corrente trifase, 484
- arresta-banda notch, filtro, 592
- arresta-banda, filtro, 588d
- assegnamento delle frequenze per la selezione multifrequenza, 606f
- autoimpedenza, 621
- autoinduttanza, 504
- autotrasformatore, 526d, 526f
 - elevatore, 527f
 - riduttore, 527f
- avvolgimenti
 - C_w , capacità degli, 218
 - R_w , resistenza degli, 218
- avvolgimento
 - primario, 514
 - secondario, 514

B

- banco di trasformatori, 528
- Barkhausen, criteri di, 403
- bel, 563
- Bell, Alexander Graham, 563
- Benjamin Franklin, 5

- bipoli**
- con PSpice, doppi, 645
 - in cascata, 642
 - applicazione dei doppi, 648
 - collegamento in cascata di due doppi, 641f
 - collegamento in parallelo di due doppi, 640f, 641f
 - interconnessione di doppi, 640
- bipolo**
- reciproco, doppio, 621
 - doppio, 619d
- biporta**, 619, 619d
- con PSpice, 645
 - reciproco, 621
 - applicazione dei, 648
 - collegamento in cascata di due, 641f
 - collegamento in parallelo di due, 641f
 - collegamento in serie di due, 640f
 - interconnessione di, 640
- BJT**
- opa, npn, 98
 - tipi di, 98f
 - transistori bipolari a giunzione, 98
- bobina**, 216
- bobine**
- a basso accoppiamento, 512
 - accoppiate, circuito contenente, 507f
 - ad accoppiamento stretto, 512
 - in accoppiamento magnetico, 504
 - in serie, convenzione dei puntini per, 507f
 - perfettamente accoppiate, 512
- Bode**
- del polo quadratico, diagrammi di, 567f
 - per lo zero, diagrammi di, 567f
 - per uno zero, diagramma di, 566f
- Bode, Hendrik W.**, 565
- buffer**, 178
- Butterworth passa-basso**
- normalizzato, filtro, 598f
- C**
- C, coulomb**, 5d
- cablaggio di impianti domestici**, 489
- di una stanza, tipico diagramma di, 490f
 - residenziale monofase a tre fili, 489f
- caduta di tensione**, 8
- calcolatore analogico**, 226
- calcolo**
- del massimo trasferimento di potenza media, 422f
 - dell'energia nei circuiti con accoppiamento, 510f
 - della corrente efficace, 425f
 - delle correnti di anello, 84
 - delle potenze in un sistema trifase bilanciato, 472
 - delle tensioni di nodo, 71
 - di R_{Th} in un circuito con generatori dipendenti, 134f
- canale**, 106
- capacità**, 206d
- circuito moltiplicatore di, 402
 - degli, avvolgimenti C_w , 218
 - equivalente dei condensatori in serie, 213d
 - equivalente di condensatori in parallelo, 212d
- caratteristiche**
- dei circuiti risonanti RLC, 582t
 - dei filtri, riassunto delle, 585t
 - dei principali elementi circuituali, 221t
- carica**, 5d
- carico**
- bilanciato, 460d
 - effetto di, 149
 - trifase sbilanciato collegato a stella, 477f
- cascata, bipoli in**, 642
- Charles Steinmetz**, 350
- Charles Wheatstone**, 151
- circuiti**
- AC, 345
 - AC con amplificatori operazionali, 397
 - a relè, 280f
 - a stella bilanciato, 364d
 - a triangolo bilanciato, 364d
 - ad accoppiamento conduttivo, 503
 - analisi di un, 10
 - aperto, 27d
 - aperto, parametri di impedenza a, 620
 - autonomi, 241
 - con accoppiamento magnetico, analisi di, 509
 - con accoppiamento, calcolo dell'energia nei, 510f
- con accoppiamento, energia in un, 510
 - con circuito aperto, 40f
 - con corto circuito, 40f
 - con due anelli, 84
 - con generatori dipendenti, calcolo di R_{Th} in un, 134f
 - con transistori in regime stazionario, 98
 - con transistori, 648
 - con un generatore di corrente, 89f
 - con un supermodulo, 77f
 - con una sola maglia, 34f
 - contenente bobine accoppiate, 507f
 - costante di tempo di un, 243d
 - crossover per due altoparlanti, 607f
 - crossover, 607
 - del primo ordine con amplificatori operazionali, 270
 - del secondo ordine con operazionali, 321
 - del secondo ordine in generale, 316
 - del secondo ordine, 295
 - del secondo ordine, esempi di, 296f
 - derivatore ad operazionale, 225
 - di accensione per autoveicolo, 281
 - di ritardo RC, 278, 278f
 - di sfasamento, 367
 - di smoothing, 331
 - di smoothing, 331f
 - duali, 327d
 - elementi attivi dei, 10
 - elementi passivi dei, 10
 - elettrico di un ricevitore radio, 4f
 - elettrico, 3d, 3f
 - equivalente di Norton, 393, 139f
 - equivalente di Thevenin, 132, 393
 - equivalente monofase, 464f
 - eterodina, 604
 - in regime sinusoidale, analisi dei, 383
 - lineare, 124d
 - magneticamente accoppiati, analisi con PSpice di, 531
 - moltiplicatore di capacità, 402
 - non planare, 84f
 - parametri ammettenza in corto, 624
 - per flash, 279f
 - per sistema di accensione auto, 282f
 - planare, 83f
 - polifase, 457
 - potenza istantanea entrante in un, 418f

- RC autonomo, 241, 241f
- RC autonomo, soluzione di un, 244
- RC con sfasamento di 90° in anticipo, 368f
- RC con un gradino, 260f
- RC di sfasamento, 368f
- RC, risposta al gradino di un, 259
- RC, risposta al gradino di un, 261f
- RC, risposta completa del, 261
- RC, risposta di tensione del, 243f
- RC, sfasamento nei, 368
- risonante parallelo, 580f
- risonante serie, 576f
- risonanti RLC, caratteristiche dei, 582t
- risposta al gradino di un, 259d
- risposta in frequenza di un, 559d
- risposta naturale di un, 242d
- RL autonomo, 246
- RL autonomo, 247f
- RL autonomo, soluzione di un, 248
- RL con tensione a gradino in ingresso, 266f
- RL, risposta al gradino di un, 265
- RL, risposta al gradino di un, 267f
- RLC parallelo autonomo, 305, 305f
- RLC parallelo con una corrente applicata, 314f
- RLC parallelo, risposta al gradino di, 314
- RLC serie autonomo, 299, 300f
- RLC serie, gradino di tensione a un, 310f
- RLC serie, risposta al gradino di, 310
- RLC, applicazioni dei, 329
- RLC, selettività di un, 578
- senza perdite, 303
- sommatore, 180
- trifase, 480
- coefficiente di accoppiamento k , 512d
- collegamento
 - in cascata di due biporta, 641f
 - in cascata, 183d
 - in parallelo di due biporta, 641f
 - in parallelo di lampadine, 51f
 - in serie di due biporta, 640f
 - in serie di lampadine, 51f
 - triangolo-stella bilanciato, 469f
- CMOS, 106
- composizione di impedenze, 362
- concetto di dualità, 327
- condensatore, 205, 205d
- a poliestere, 207f
- ceramico, 207f
- elettrolitico, 207f
- filnitrum, 207f
- non ideale, modello circuitale di un, 209f
- relazione corrente-tensione per un, 207f
- relazioni tensione-corrente per un, 357f
- struttura di un tipico, 205
- tensione su un, 209f
- condensatori
 - in parallelo, 212f
 - in parallelo, capacità equivalente di, 212d
 - in serie, 213f
 - in serie, capacità equivalente dei, 213d
- condutanza, 28, 28d, 360
- equivalente di resistor in parallelo, 39d
- conduttanze, G matrice delle, 92
- configurazione
 - stella-stella bilanciata, 462f
 - stella-triangolo bilanciata, 465f
 - triangolo-triangolo bilanciata, 468f
- confronto fra analisi nodale e analisi agli anelli, 95
- conservazione
 - dell'energia, principio di, 9
 - della carica, legge di, 5
 - della potenza, 434
- consumi di elettricità, costo dei, 442
- convenzione
 - degli utilizzatori, 9d
 - dei puntini, 506, 506f
 - dei puntini per bobine in serie, 507f
 - dei puntini, illustrazione della, 506f
- convertitore
 - digitale-analogico, D/A, DAC, 187, 331
- coppie di termini duali, 327
- corrente
 - a base comune, guadagno di, 99
 - ad enettitore comune, guadagno di, 99
 - alternata, AC, 6d, 345
 - attraverso un induttore, 217f
 - continua, 6d
 - del circuito RL, risposta di, 247f
 - di anello, 84
 - di fase, 464
 - di linea, 464
 - di Norton I_N , 140
- efficace, calcolo della, 425f
- elettrica, 5d
- in un resistore, 72d
- partitore di, 363, 363f
- penodica, valore efficace di una, 425d
- stazionaria, 6d
- trifase, applicazioni della, 484
- correnti di fase e di linea, relazione tra, 466f
- corto circuito, 27d
- costante
 - di tempo di un circuito, 243d
 - di tempo τ , 243, 243f
- corto dei consumi di elettricità, 442
- coulomb, C, 5d
- Cramer, regola di, 71
- criteri di Barkhausen, 403
- criticamente smorzata, risposta, 301, 302f, 306
- crossover
 - circuito, 607
 - frequenza di, 607
 - per due altoparlanti, circuito, 607f
- CRT, tubo a raggi catodici, 13

distribuzione della potenza elettrica,

539

dominio

- dei fasi, 353

- delle frequenze, 353

dualità

- concetto di, 327

- principio di, 327d

E

E. L. Norton, 139

effetto di carico, 149

elementi

- attivi dei circuiti, 10

- circuituali, 10

- in parallelo, 31d

- in serie, 31d

- passivi dei circuiti, 10

elemento, 3

elevatore, trasformatore, 521, 521d

energia

- in un circuito con accoppiamento, 510

- nei circuiti con accoppiamento, calcolo dell', 510f

energia, 9d

- di circuiti del secondo ordine, 296f

- principio di conservazione dell', 9

eterodina, circuito, 604

F**f della sinusoide, frequenza ciclica,**

346

F, farad, 206

farad, F, 206

Faraday, Michael, 206

fasi, sequenza delle, 460d

fasore, 350

- della sinusoide, 351

fasi

- per gli elementi circuituali, relazioni tra, 356

- dominio dei, 353

- rappresentazione grafica dei, 352

fattore

- di potenza pf, 429d

- di potenza, angolo del, 429

- di qualità Q, 578, 578d

fattore di smorzamento, 301

FET, transistori ad effetto di campo,

98

filtri

- applicazioni dei, 603

- arresta-banda notch, 592

- arresta-banda, 584

- arresta-banda, 588d

- attivi, 589

- attivo generale del primo ordine, 590f

- attivo passa-banda, 592f

- attivo, 584

- Butterworth passa-basso normalizzato, 598f

- notch, 587

- passa-alto del primo ordine, 591

- passa-alto, 584, 586d

- passa-banda, 584, 587d, 591

- passa-basso del primo ordine, 590

- passa-basso, 584, 585d

- passivo, 584

- riassunto delle caratteristiche dei, 585t

filtro, 584d**flash**

- elettronico, 279

- circuito per, 279f

forma standard H omega, 565

Franklin Benjamin, 5

frequenza

- ciclica f della sinusoide, 346

- con PSpice, risposta in, 598

- d'angolo, 566

- di crossover, 607

- di reiezione, 587

- di risonanza ω_0 , 576

- di risonanza, 301, 577

- di rolloff, 585

- di taglio ω_c , 585

- di taglio, 566

- leggi di Kirchhoff nel dominio della, 361

- naturale non smorzata, 301

- scaling dei moduli e della, 597

- scaling in, 596

frequenze

- dominio delle, 353

- di metà potenza, 577

- naturali, 301

funzione

- dente di sega, 257

- di rete, 559

- di trasferimento $H(\omega)$, 559, 560d- gradino unitario ritardata di t_0 , 253f

- gradino unitario, 252d

- impulso rettangolare, 256

- impulso unitario, 254d

- periodica, 346d

- rampa unitaria, 255d, 255f

funzioni singolari elementari, 252d

G

G, matrice delle conduttanze, 92

g, parametri, 628

generatore

- applicazione del collegamento a stella al, 484

- applicazione del collegamento a triangolo al, 484

- dipendente di corrente, 11f

- dipendente di tensione, 11f

- ideale dipendente, 11d

- ideale indipendente, 11d

- reale, 149

- reale di corrente, 149f

- reale di tensione, 149f

- trifase, 458f

generatori

- di tensione trifase, 459f

- dipendenti, trasformazione di, 130f

- indipendenti, trasformazione di, 130f

- reali, modelli dei, 149

- trasformazione di, 130d, 391

Georg Simon Ohm, 26

gradino

- circuito RC con un, 260f

- di tensione a un circuito RLC serie, 310f

- di un circuito RC, risposta al, 261f

- unitario, funzione, 252d

- unitario ritardata di t_0 , funzione, 253f

griglia di potenza, 539

guadagno

- ad anello chiuso, 171

- di corrente a base comune, 99

- di corrente ad emettitore comune,

99

- di tensione ad anello aperto, 171

- unitario, amplificatore a, 178

Gustav Robert Kirchhoff, 32

HH(ω) forma standard, 565H(ω), funzione di trasferimento, 559, 560d

H, henry, 215d
 h, parametri, 627
 Heinrich R. Hertz, 347
 Hendrik W. Bode, 565
 Henry, Joseph, 215
 Hertz, Heinrich R., 347
 hertz, Hz, 347
 Hz, hertz, 347

I
 IA, amplificatore per strumentazione, 189

ibridi inversi, parametri, 628

ibridi, parametri, 627

IF, amplificatore a frequenza intermedia, 604

illustrazione della convenzione dei puntini, 506f

immettanza, parametri, 620, 624

impedenza, 359t

- a circuito aperto, parametri di, 620

- riflessa, 515, 522

- Z, 359d

impedenze

- adattamento delle, 537

- composizione di, 362

- di trasferimento, 621

- rete a scala LC terminata da, 653f

- scaling delle, 596

impianti domestici, cablaggio di, 489

impulso

- rettangolare, funzione, 256

- unitario, funzione, 254d

- proprietà di selezione dell', 255

induttanza, 215d

- equivalente di induttori in parallelo, 220d

- equivalente di induttori in serie, 220d

- mutua, 503, 504f, 505d

induttore

- integrato, 216f

- lineare, 216

- non lineare, 216

- reale, modello circuitale di un, 218f

- solenoidale, 216f

- toroidale, 216f

- corrente attraverso un, 217f

- relazione tensione-corrente per un induttore, 216f

- relazioni tensione-corrente per un, 357f

induttori

- in parallelo, 219

- in serie, 219

- simboli circuitali per gli, 216f

- tipi di, 216f

inseguitore di tensione, 178, 178f

integratore, 223d

interconnessione di biporta, 640

invertitore, 175

isolamento

- elettrico, 526

- trasformatore come dispositivo di, 536

J_N , corrente di Norton, 140f

J

J, joule, 9d

John Ragazzini, 169

Joseph Henry, 215

joule, J, 9d

K

k, coefficiente di accoppiamento, 512d

K, diagrammi di Bode per il guadagno, 566f

KCL

- ai due supernodi, applicazione della, 80f

- al supernodo, applicazione della, 79f

- applicazione della, 33f

- legge di Kirchhoff delle correnti, 32d

Kirchhoff

- delle correnti, KCL, legge di, 32

- delle tensioni, KVL, legge di, 33d

- nel dominio della frequenza, leggi di, 361

Kirchhoff, Gustav Robert, 32

KVL

- ad un supernodo, applicazione della, 78f

- alla maglia, applicazione della, 79f

- alle due maglie, applicazione della, 80f

- legge di Kirchhoff delle tensioni, 33d

L

larghezza di banda di ricezione, 587

legge

- di conservazione della carica, 5

- di Kirchhoff delle correnti, KCL, 32d

- di Kirchhoff delle tensioni, KVL, 33d

- di Ohm, 26d

leggi di Kirchhoff nel dominio della frequenza, 361

linearità, 123

logaritmi, proprietà dei, 563

M

M. Leon Thevenin, 132

maglia, 30d

- indipendente, 31

- applicazione della KVL alla, 79f

maglie

- ad accoppiamento magnetico, 503

- applicazione della KVL alle due, 80f

massa di telaio, 72

massima potenza trasferita al carico, 144d

massimo

- trasferimento di potenza media, 423d

- trasferimento di potenza media, calcolo del, 422f

matrice

- delle conduttanze, G, 92

- delle resistenze, R, 93

Megger, tester di, 151

metodo

- dei potenziali, 71

- dei tre wattmetri, 485

Michael Faraday, 206

millionmetro, 151

misura

- della resistenza, 55f

- delle potenze, 440

- delle resistenze, 151

misure di potenza trifase, 485

modelli dei generatori reali, 149

modello

- circuituale di un condensatore non ideale, 209f

- circuituale di un induttore reale, 218f

moduli

e della frequenza, scaling dei, 597

moduli, scaling dei, 596d
Morse, Samuel, 151
mosfet, 104
- ad arricchimento, 105
- a svuotamento, 105
multimetro, 54
mutua induttanza, 503, 504f, 505d

N

nodo, 30d
- calcolo delle tensioni di, 71
- di massa, 72
- di riferimento, 72
- generalizzato, 77
Norton
- I_N , corrente di, 140f
- circuito equivalente di, 139f, 393
- dimostrazione del teorema di Thevenin e di, 142
Norton, E. L., 139
Norton, teorema di, 139d
noteh
- filtro, 587
- filtro arresta-banda, 592
npn, pnp, BJT, 98
npn
- transistor, 99f
- variabili di un transistor, 99f

O

Ohm Georg Simon, 26
Ohm, legge di, 26
ohm, Omega, 26d
ohmmetro, 55
 ω_c , frequenza di taglio, 585
 Ω , ohm, 26d
omogeneità, proprietà di, 123
operazionale non ideale, 171f
operazionale, 169d
- alimentazione dell', 170f
- circuiti del secondo ordine con, 321
- parametri degli, 171f
oscillatore, 403d
- a ponte di Wien, 403

P

parallelo
- autonomo, circuito RLC, 305, 305f

- di lampadine, collegamento in, 51f
- elementi in, 31d
parametri
- ammettenza, 624
- ammettenza in corto circuito, 624
- degli operazionali, 171t
- di impedenza, 620
- di impedenza a circuito aperto, 620
- di trasmissione, 633
- di trasmissione inversa, 634
- g, 628
- h, 627
- ibridi, 627
- ibridi inversi, 628
- immettanza, 624
- relazioni tra i, 636
partitore
- di corrente, 38, 363, 363f
- di tensione, regola del, 38
- tensione, 37, 363f
passa-alto del primo ordine, filtro, 591
passa-alto, filtro, 586d
passa-banda, filtro, 585d, 587d, 591
passa-banda, filtro attivo, 592f
passa-basso del primo ordine, filtro, 590
passa-basso, rete a scala LC per filtro, 653f
pf, fattore di potenza, 429d
picco risonante, 575
pnp, BJT, npn, 98
polo, 561d
ponte
- AC generico, 370f
- di Wheatstone, 107, 151
- di Wheatstone bilanciato, 152
- Wheatstone sbilanciato, 152
ponti AC, 370
- specifici, 371f
porta, 619
porte, reti a due, 619
potenza, 8
- apparente, 428d
- assorbita, 9f
- complessa, 431
- conservazione della, 434
- elettrica, distribuzione della, 539
- erogata, 9f
- griglia di, 539
- istantanea entrante in un circuito, 418f
- istantanea, 8, 417, 417d
- media, 418d
- media, calcolo dei massimi trasferimento di, 422f
- media, massimo trasferimento di, 423d
- teorema del massimo trasferimento di, 144
- trasferita al carico, massima, 144d
- trifase, misure di, 485
potenze
- in un sistema trifase bilanciato, calcolo delle, 472
- misura delle, 440
potenziali, metodo dei, 71
potenziometro, 27, 52
principio
- di conservazione dell'energia, 9
- di dualità, 327d
- di sovrapposizione, 389
- di sovrapposizione degli effetti, 126d
proprietà
- dei logaritmi, 563
- di additività, 123
- di omogeneità, 123
- di selezione dell'impulso, 255
PSpice
- bipola con, 645
- risposta in frequenza con, 598
puntini
- convenzione dei, 506, 506f
- illustrazione della convenzione dei, 506f
- per bobine in serie, convenzione dei, 507f

Q

Q, fattore di qualità, 578

R

R, matrice delle resistenze, 93
R, resistenza, 25, 26d
Ragazzini, John, 169
ramo, 30d
rampa unitaria, funzione, 255d, 255f
rapporto
- di trasformazione, 520
- spire, 519-520
rappresentazione grafica dei fasori, 352

RC

- autonomo, circuito, 241, 241f
 - autonomo, soluzione di un circuito, 244
 - circuito di ritardo, 278f
 - con sfasamento di 90° in anticipo, circuito, 368f
 - con un gradino, circuito, 260f
 - di sfasamento, circuiti, 368f
 - risposta al gradino di un circuito, 259, 261f
 - risposta completa del circuito, 261
 - risposta di tensione del circuito, 243f
 - sfasamento nei circuiti, 368
- reattanza, 359
- reazione, 171
- regime stazionario, circuiti con transistori in, 98
- regola
- del partitore di tensione, 38
 - di Cramer, 71
- reiezione
- frequenza di, 587
 - larghezza di banda di, 587
- relazione
- corrente-tensione per un condensatore, 207f
 - tensione-corrente per un induttore, 216f
 - tra correnti di fase e di linea, 466f
- relazioni
- tensione-corrente per un condensatore, 357f
 - tensione-corrente per un induttore, 357f
 - tensione-corrente per un resistore, 356f
 - tensione-corrente, riassunto delle, 358f
 - tra fasori per gli elementi circuituali, 356
 - tra i parametri, 636
- relé, 280
- circuito a, 280f
 - ritardo del, 280
- resistenza
- degli avvolgimenti R_w , 218
 - di Thevenin R_{Th} , 133
 - equivalenti di due resistori in parallelo, 39d
 - equivalenti di resistori collegati in serie, 38d
 - R , 25, 26d

misura della, 55f

- resistenze
- misura delle, 151
 - R , matrice delle, 93
- resistività
- di alcuni materiali, 26t
 - ρ , 25
- resistore, 25, 25f
- corrente in un, 72d
 - lineare, 28
 - non lineare, 28
 - relazioni tensione-corrente per un, 356f
- resistori
- fissi, 27f
 - in parallelo, 38
 - in serie, 37
 - variabili, 28f
- Rete
- funzione di, 559
 - a ponte, 45f
 - a scala LC per filtro passa-basso, 653, 653f
 - a scala LC terminata da impedenze, 653f
- reti
- a due porte, 619
 - a scala, sintesi di, 653
 - a stella e a triangolo bilanciate, 47
- retroazione, 171
- RF, amplificatore a radiofrequenza, 604
- ρ , resistività, 25
- riassunto
- delle caratteristiche dei filtri, 585t
 - delle relazioni tensione-corrente, 358t
- ricevitore
- radio, 604
 - radio AM supereterodina, diagramma a blocchi di un, 604f
- ricevitore
- radio, circuito elettrico di un, 4f
 - supereterodina, 604
- riduttore, trasformatore, 521d
- rifasamento, 437d
- risonanza, 575d
- frequenza di, 301, 577
 - ω_0 , frequenza di, 576
- risposta
- a smorzamento critico, 314f
 - al gradino di circuito RLC parallelo, 314

- al gradino di circuito RLC serie, 310
 - al gradino di un circuito RC, 259, 261f
 - al gradino di un circuito RL, 265, 267f
 - al gradino di un circuito, 259d
 - completa del circuito RC, 261
 - criticamente smorzata, 301, 302f, 306
 - naturale di un circuito, 242d
 - sottosmorzata, 302, 302f, 306, 314
 - sovrasmorzata, 301, 302f, 306, 314
- ritardo del relè, 280

RL

- autonomo, circuito, 246, 247f
- autonomo, soluzione di un circuito, 248
- con tensione a gradino in ingresso, circuito, 266f
- risposta al gradino di un circuito, 265, 267f
- risposta di corrente del circuito, 247f

RLC

- applicazioni dei circuiti, 329
 - caratteristiche dei circuiti risonanti, 582t
 - parallelo con una corrente applicata, circuito, 314f
 - parallelo, risposta al gradino di circuito, 314
 - serie autonomo, circuito, 299, 300f
 - serie, gradino di tensione a un circuito, 310f
 - serie, risposta al gradino di circuito, 310
 - selettività di un circuito, 578
- rolloff, frequenza di, 585
- rotore, 458
- ruotore, 329
- R_{Th} in un circuito con generatori dipendenti, calcolo di, 134f
- R_{Th} , resistenza di Thevenin, 133

S

- S , siemens, 28d
Samuel Morse, 151

- scaling, 595
 - dei moduli e della frequenza, 596d
 - dei moduli, 596d
 - delle impedenze, 596
 - in frequenza, 596
- schema di rivelazione, diagramma a blocchi, 606f
- segnaletica, 8
 - periodico, valore efficace di un, 426d
- seleattività di un circuito RLC, 578
- selezione multifrequenza, assegnamento delle frequenze per la, 606f
- sequenza delle fasi, 460d
- serie
 - di lampadine, collegamento in, 51f
 - elementi in, 31d
- sfasamento
 - circuiti di, 367
 - circuiti RC di, 368f
 - di 90° in anticipo, circuito RC con, 368f
 - nei circuiti RC, 368
- SI, Sistema Internazionale, 4
- SI, unità fondamentali, 4t, 14
- siemens, S, 28d
- simboli
 - circuituali per gli induttori, 216f
 - circuituali per il condensatore, 206f
- simbolo
 - circuituale per il trasformatore ideale, 519f
 - del resistore, 25f
 - di terra, 72
- sintesi di reti a scala, 653
- sintonia accoppiata, 604
- sinusoide, 345d
 - frequenza ciclica f della, 346
- sistema
 - bifase a tre fili, 457f
 - di accensione per auto, 329
 - Internazionale, SI, 4
 - monofase, 457f
 - sbilanciato, 477d
 - stella-stella a tre fili, 464f
 - stella-stella bilanciato, 462d
 - stella-triangolo bilanciato, 465d
 - triangolo-stella bilanciato, 469d
 - triangolo-triangolo bilanciato, 467d
 - trifase a quattro fili, 458f
 - trifase bilanciato, calcolo delle potenze in un, 472
 - trifase, tipico, 459
 - bipolare come un amplificatore, 100
 - npn, 99f
 - npn, variabili di un, 99f
 - transistori
 - ad effetto di campo, FET, 98
 - bipolari a giunzione, BJT, 98
 - circuiti con, 648
- sistemi trifase bilanciati, tensioni/correnti di fase e di linea per i, 471t
- smoothing, circuito di, 331, 331f
- smorzamento, 303
 - critico, risposta a, 314f
 - fattore di, 301
- soluzione
 - di un circuito RC autonomo, 244
 - di un circuito RL autonomo, 248
- sommatorie, circuito, 180
- sottosmorzata, risposta, 302, 302f, 306, 314
- sottrattore, 181
- sovraposizione, 125
 - degli effetti, analisi dei circuiti con la, 126
 - degli effetti, principio di, 126d
 - principio di, 389
- sovrasmorzata, risposta, 301, 302f, 314
- spire, rapporto, 519-520
- stator, 458
- Steinmetz, Charles, 350
- stella
 - al generatore, applicazione del collegamento a, 484
 - bilanciato, circuito a, 364d
 - carico trifase sbilanciato collegato a, 477f
 - stella a tre fili, sistema, 464f
 - stella bilanciata, configurazione, 462f
 - stella bilanciato, sistema, 462d
 - triangolo bilanciata, configurazione, 465f
 - triangolo bilanciato, sistema, 465d
 - triangolo, trasformazioni, 45
- strumentazione, amplificatore per, 182, 182f
- strumento di d'Arsonval, 53f, 152
- strutture di un tipico condensatore, 205
- superancillo, 89d
- supermodi, applicazione della KCL ai due, 80f
- supermodo, 77, 77d
 - applicazione della KCL al, 79f
 - applicazione della KVL ad un, 78f
- suscettanza, 360
- τ , costante di tempo, 243, 243f
- telaio, massa di, 72
- telefono
 - equivalente di Thevenin, V_{Th} , 133
 - multifrequenza, 605
- tensione, 7d
 - caduta di, 8
 - indotta, 505
 - rotta, 505
 - paritore di, 37, 363f
 - su un condensatore, 209f
- tensione-corrente
 - per un condensatore, relazioni, 357f
 - per un induttore, relazioni, 357f
 - per un resistore, relazioni, 356f
 - riassunto delle relazioni, 358t
- tensioni
 - di fase, 459
 - di fase bilanciate, 459
 - trifase bilanciate, 458
 - KVL, legge di Kirchhoff delle, 33d
- tensioni/correnti di fase e di linea per i sistemi trifase bilanciati, 471t
- teorema
 - del massimo trasferimento di potenza, 144
 - di Norton, 139d
 - di Thevenin, 132, 133d
- termini duali, coppie di, 327
- terra, simbolo di, 72
- tester di Megger, 151
- Thevenin
 - circuito equivalente di, 132, 393
 - e di Norton, Dimostrazione dei teoremi di, 142
 - M. Leon, 132
 - R_{Th} , resistenza di, 133
 - teorema di, 132
 - teorema di, 133d
 - V_{Th} , tensione equivalente di, 133
- tipi
 - di BJT, 98f
 - di induttori, 216f
 - di trasformatori, 515f
- tipico
 - amplificatore operazionale, 169f
 - diagramma di cablaggio di una stanza, 490f
 - sistema trifase, 459
- transimpedenze, 621
- transistori, 98
 - bipolare come un amplificatore, 100
 - npn, 99f
 - npn, variabili di un, 99f
 - transistori
 - ad effetto di campo, FET, 98
 - bipolari a giunzione, BJT, 98
 - circuiti con, 648

- con generatore e resistenza di carico, amplificatore a, 649f
- in regime stazionario, circuiti con, 98
- trasferimento
 - impedenze di, 621
 - $H\omega$, funzione di, 559, 560d
 - di potenza media, massimo, 423d
- trasformatore, 514d
 - come dispositivo di adattamento, 537
 - come dispositivo di isolamento, 536
 - di isolamento, 521, 536f
 - di potenza a secco ad avvolgimenti in rame, 515f
 - elevatore, 521, 521d
 - ideale, 519, 519d, 521f
 - ideale, simbolo circuittale per il, 519f
 - lineare, 514
 - riduttore, 521d
 - usato come dispositivo di adattamento, 538f
- trasformatori
 - a nucleo in aria, 514
 - banco di, 528
 - audio, 515f
 - trifase, 528
- trasformazione
 - di generatori, 130d, 391
 - di generatori dipendenti, 130f
 - di generatori indipendenti, 130f
 - rapporto di, 520
- trasformazioni
 - sinusoidi-fasori, 353t
 - stella-triangolo, 45
- trasmissione
 - inversi, parametri di, 634

- parametri di, 633
- triangolo
 - al generatore, applicazione del collegamento a, 484
 - bilanciato, circuito a, 364d
 - delle impedenze, 432f
 - delle potenze, 432
- triangolo-stella bilanciato, collegamento, 469f
- triangolo-triangolo bilanciata, configurazione, 468f
- triangolo-triangolo bilanciato, sistema, 467d
- trimmer, 207f
- tubo a raggi catodici, CRT, 13

U

- unità di misura, 4
- unità fondamentali SI, 4t, 14
- utilizzatori, convenzione degli, 9d

V

- V, volt, 7d
- valore
 - efficace di un segnale periodico, 426d
 - efficace di una corrente periodica, 425d
- VAR, volt-ampere reattivo, 432
- variabili di un transistore npn, 99f
- varmetro, 440
- volt, V, 7d
- volt-ampere reattivo, VAR, 432
- Volta Alessandro Antonio, 7
- voltmetri

- a scala multipla, 54f
- a scala singola, 54f
- voltmetro, 53
- V_{Th} , tensione equivalente di Thevenin, 133

W

- W, watt, 8d
- watt, W, 8d
- wattmetro, 440d
- wattore, Wb, 9
- Wh, wattore, 9
- Wheatstone
 - Charles, 151
 - ponte di, 151
 - ponte di bilanciato, 152
 - ponte di sbilanciato, 152
- Wien, oscillatore a ponte di, 403

Y

- Y, ammettenza, 360d

Z

- Z, impedenza, 359d
- zero, 561d
- zero
 - diagramma di Bode per uno, 566f
 - diagrammi di Bode per lo, 567f
- zona
 - di interdizione, 105
 - di saturazione, 105
 - resistiva, 105