Definizione classica ricavata in maniera rigorosa

Quando si è definita la definizione classica di probabilità si è detto che bisognava considerare gli esiti equiprobabili e di numero finito.

ESITI EQUIPROBABILI E DEF. CLASSICA RICAVATA IN MANIERA RIGOROSA

Dato un esperimento con esiti in numero finito ed equiprobabili

$$S = \{e_1, e_2, \dots e_m\} \qquad m = n° \text{ esiti}$$

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots P(e_m) = p$$

Gli esiti per definizione sono disgiunti, perché non si possono verificare allo stesso tempo.

N.B. gli e_k sono disgiunti (ovvero $e_i \cap e_k = \phi$ se $i \neq k$)

$$S = e_1 \cup e_2 \dots \cup e_m = \bigcup_{J=1}^{m} e_J$$

$$\Downarrow$$

$$1 \underset{A2}{=} P(S) = P\left(\bigcup_{J=1}^{m} e_J\right) \underset{A3}{=} \sum_{J=1}^{m} P(e_J)$$

$$\sum_{J=1}^{m} P(e_J) = \sum_{J=1}^{m} p = mp$$

Partendo da 1, si arriva a mp. Ragionamento semplice ma dimostrato.

$$mp = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{m}$$

Abbiamo calcolato la probabilità di ogni esito. Verifichiamo ora la definizione classica di probabilità.

Sia $E \subset S$ $\quad E = \{e_1, e_2 \dots e_K\}$ $\quad 1 \leq K \leq m$

Consideriamo i primi K esiti.

$$E = \bigcup_{J=1}^{K} e_J$$

$$P(E) \overset{1)}{=} P\left(\bigcup_{J=1}^{K} e_J\right) \underset{A3}{=} \sum_{J=1}^{K} P(e_J) = \sum_{J=1}^{K} \frac{1}{m} = \frac{K}{m}$$

$$P(E) \overset{1)}{=} \frac{K}{m} \quad \begin{array}{l} K \to \text{n° esiti in } E \text{ (esiti favorevoli)} \\ m \to \text{n° totale di esiti} \end{array}$$

Abbiamo recuperato la definizione classica di probabilità in maniera rigorosa dagli assiomi. La probabilità di un evento contenuto in uno spazio campione di esiti equiprobabili è il rapporto tra gli esiti dell'evento e gli esiti del campione.

es. 1 Gigi ha N chiavi simili, una sola apre la porta di casa. Le prova e le scarta fino a quando trova la chiave giusta

K = n° tentativi per riuscire ad aprire la porta

$1 \leq K \leq N$

Quale è la prob. che servano K tentativi?

A_1 = 'serve 1 tentativo'

$\vdots$

A_K = 'servono k tentativi'

$$P(A_K) = \frac{\text{n° esiti fav.}}{\text{n° esiti totali}}$$

Per risolvere questi problemi si cerca di creare un modello che si recuperi attraverso la matematica.

$(N-(k-1))$

$$n° \text{ esiti totali} = N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots (N-k+1)$$

n° esiti fav. = Gigi non trova la chiave "giusta" al I, al II, ... al (k−1)esimo tentativo, ma trova la chiave giusta al k-esimo tentativo

Queste considerazioni permettono di calcolare i casi favorevoli. Perché ho K estrazioni ma so già come funzionano: non si prende la chiave giusta fino all'ultima volta. Nel primo caso ci sono N – 1 chiavi non giuste (quindi N – 1 chiavi idonee per il primo tentativo), nel secondo N – 2 e così via. Per proseguire, Gigi non deve prendere la chiave giusta fino al K-esimo tentativo. A quel punto la chiave idonea sarà solo una, la chiave giusta.

$$= \underbrace{(N-1)}_{\text{I tentativo}} \underbrace{(N-2)}_{\text{II tentativo}} \underbrace{(N-3)}_{\text{III tentativo}} \dots \underbrace{(N-k+1)}_{(k-1)\text{ tentativo}} \cdot \underbrace{1}_{k \text{ tent.}}$$

$$P(A_k) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot}} = \frac{\cancel{(N-1)}\cancel{(N-2)} \dots \cancel{(N-k+1)} \cdot 1}{N \cancel{(N-1)} \cancel{(N-2)} \dots \cancel{(N-k+1)}} = \frac{1}{N}$$

Dovendo fare K tentativi, la probabilità non cambia, è sempre la stessa.

E quale è la probabilità che occorrono K tentativi se le chiavi provate che non funzionano NON vengono scartate?

In linea di principio, potrebbero servire infiniti tentativi, quindi K può essere anche maggiore di N. In questo caso:

$$1 \leq K \leq +\infty \Rightarrow K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

E_k = 'occorrono k tentativi con reimmissione per aprire la porta'

Ogni volta che estraggo la chiave c'è un'equa possibilità di estrazione per tutte.

$$P(E_K) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti totali}}$$

Esiti totali: pescare una chiave e reimmetterla K volte, avendo sempre N possibili scelte (principio di enumerazione o disposizioni con ripetizione).

$$n^\circ \text{ esiti totali} = \underbrace{N \times N \times N \ldots \times N}_{K \text{ volte}} = N^K$$

Esiti favorevoli (non per Gigi, per Gigi favorevole è che la prima volta prenda la chiave; è favorevole all'evento, pescare K - 1 chiavi sbagliate con reimmissione prima della chiave giusta).

$$n^\circ \text{ esiti fav.} = \underbrace{(N-1) \times (N-1) \times (N-1) \ldots (N-1)}_{(K-1) \text{ volte}} \cdot \underset{K\text{-esimo tentativo}}{1} =$$

$$= (N-1)^{K-1} \cdot 1$$

$$P(E_K) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot.}} = \frac{(N-1)^{K-1} \cdot 1}{N^K} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{K-1} \frac{1}{N}$$

Al variare di K, cambia la probabilità.

$$\text{N.B. } P(E_1) = \frac{(N-1)^0}{N^1} = \frac{1}{N} = P(A_1)$$

Problemi di estrazione

Servono per imparare a risolvere degli esercizi di probabilità discreta, usando il calcolo combinatorio.

Dato comune ai problemi:

Scatola 5 palline Rosse (R)
+ 3 palline Verdi (V)

I CASO ESTRAZIONE SENZA REIMMISSIONE DI 3 PALLINE

Quale è la prob. di formare un insieme di palline estratte 2 R + 1 V?

Questo problema si può risolvere in tanti modi.

METODO DI SOLUZIONE 1: ESTRAZIONE SIMULTANEA

$$P(E) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot.}}$$

$$n^\circ \text{ esiti totali} = C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

Estraggo palline senza reimmissione.

Prendo 2 palline rosse (che sono 5) e 1 pallina verde (che sono 3), quindi serve il prodotto delle combinazioni.

$$n^\circ \text{ esiti fav} = C_{5,2}\, C_{3,1} = \binom{5}{2}\binom{3}{1} = \frac{5!}{2!\,3!}\ \frac{3!}{2!} =$$

$$= \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3!}}\ 3 = 30$$

$$P(E) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

Si può anche estrarre una pallina per volta. In questo caso ci si crea in mente un allineamento (1° estratto, 2° estratto…) ma la consegna non ci dice di badare all'ordine.

METODO DI SOLUZIONE 2: ESTRAZIONE DI UNA PALLINA PER VOLTA SENZA REIMMISSIONE

$$P(E) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot.}}$$

Esiti favorevoli e totali cambiano. Si usano le disposizioni perché si creano degli allineamenti.

$$n^\circ \text{esiti tot.} = D_{8,3} = 8 \times 7 \times 6$$

L'ordine non importa, consideriamo i 3 casi (verde prima, verde seconda, verde terza). Sono casi disgiunti, quindi vale la somma.

$$n^\circ \text{ esiti fav} = \underbrace{3 \times 5 \times 4}_{VRR} + \underbrace{5 \times 3 \times 4}_{RVR} + \underbrace{5 \times 4 \times 3}_{RRV} = 3 \times 60 = 180$$

Sono tutti casi compatibili col risultato finale.

$$P(E) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot}} = \frac{\cancel{180}^{\cancel{30}\ 15}}{\cancel{8}_{4} \times 7 \times \cancel{6}} = \frac{15}{28}$$

Il risultato è lo stesso, conferma. Modellare nell'estrazione senza reimmissione (in simultanea o in sequenza) è sempre corretto.

Cosa succede se le palline vengono rimesse nella scatola?

II CASO: ESTRAZIONE DI 3 PALLINE CON REIMMISSIONE

Fisicamente, il problema non si può più affrontare con un'estrazione simultanea. In questo caso l'estrazione può essere fatta solo in sequenza.

N.B. L'estrazione NON PUÒ ESSERE SIMULTANEA!

Non posso più figurare di agguantare 3 palline contemporaneamente. Se ne estrae una, si registra il colore e la si reimmette.

QUALE È LA PROB. DI OTTENERE 1V + 2R SENZA BADARE ALL'ORDINE?

$$E^R = \text{'estrazione di } 1V + 2R \text{ con reimmissione'}$$

$$P(E^R) = \frac{n^\circ \text{ esiti fav.}}{n^\circ \text{ esiti tot.}}$$

Bisogna ragionare usando il calcolo combinatorio.

Per gli esiti totali posso far riferimento al principio di enumerazione o alle disposizioni, combinazioni, permutazioni in maniera opportuna. Abbiamo 8 palline e ci rimettiamo ad ogni estrazione nelle condizioni iniziali, dovendo fare 3 estrazioni.

$$n^\circ \text{ esiti totali} = D^R_{8,3} = 8^3$$

Oppure 8 * 8 * 8 per il principio di enumerazione.

Negli esiti favorevoli, bisogna considerare tutti i casi possibile (verde prima, verde seconda, verde terza), considerando le reimmissioni.

$$n^\circ \text{ esiti fav} = \underset{V\ R\ R}{3 \times 5 \times 5} + \underset{R\ V\ R}{5 \times 3 \times 5} + \underset{R\ R\ V}{5 \times 5 \times 3} = 3^2 \times 5^2$$

$$P(E^R) = \frac{15^3}{8^3}$$

In questo caso non ha senso di immaginare di pescare le palline tutte insieme, quindi non ha senso parlare di combinazioni.