Esercizi

es. di teoria del IV FOGLIO

X, Y v.c. indipendenti, dalla def. sappiamo che

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$F(a,b) = P(X \le a, Y \le b) = P(X \in]-\infty, a], Y \in]-\infty, b]$$

Siccome c'è l'indipendenza, si può applicare la proprietà scritta sopra.

$$\underset{\text{INDIP.}}{=} P(X \in]-\infty, a])\, P(Y \in]-\infty, b])$$

Si può anche aggiungere -infinito se ha senso includerlo.

$$= F_X(a) \cdot F_Y(b)$$

Varianza

In fisica corrisponde al momento d'inerzia.

DEF. VARIANZA

Data una v.c. con valor medio $E[X] = \mu$, si definisce varianza, se esiste,

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] \left(= E[(X - E[X])^2]\right)$$

Sappiamo che il valor medio esiste.

Come si calcola nel caso discreto e nel caso continuo?

quindi

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} (x_k-\mu)^2 p(x_k) & \text{se } X \in \{x_1, x_2 \dots x_m\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx & \text{se } X \text{ v.c. continua} \end{cases}$$

N.B. $Var(X) \geq 0$

Non c'è varianza negativa, si vede dalle espressioni precedenti.

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$ scarto quadratico medio (o deviazione standard)

Perché si fa la radice quadrata della varianza? Le dimensioni della varianza sono al quadrato (nel caso le variabili avessero dimensioni fisiche), quindi ha senso chiedere dimensioni fisiche uguali a quelle della variabile, per fare confronti con la variabile stessa.

PROPRIETÀ

1) $Var(X) = \underbrace{E[X^2]}_{\text{momento secondo o momento di ordine 2}} - (E[X])^2$

$E[X^n]=$ momento n-esimo o momento di ordine n di X

Questa proprietà serve per semplificare il calcolo, ma non è la definizione di varianza.

$\boxed{\text{DIM}}$ $E[X] = \mu$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

$$= E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X] \underset{\text{proprietà 4bis) di } E[\cdot]}{=}$$

$$= E[X^2] + E[\mu^2] + E[-2\mu X] =$$

$$= E[X^2] + \mu^2 - 2\mu E[X] =$$

μ^2 e μ sono numeri non v.c.

$$= E[X^2] + \mu^2 - 2\mu^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

In questa proprietà, se si conosce il valor medio, basta calcolare il momento di ordine 2.

es. 1 VARIABILE DI BERNOULLI

$$X \sim Be(p) \qquad X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad p(1) = p, \; p(0) = q = 1-p$$

$$E[X] = p$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - (p)^2 = p(1-p) = pq$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \, p(x_k) = 0^2 q + 1^2 p = p$$

La varianza della bernoulliana è il prodotto della probabilità di valere 1 e la probabilità di valere 0.

es. 2 $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lancio del dado equilibrato

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$E[X] = \frac{7}{2} \quad \text{(vedi es. lezione prec.)}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} =$$

$$= \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$$

Quali altre proprietà ha la varianza?

$$2) \quad Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{DIM}}$ $\quad Y = \alpha X + \beta \qquad E[Y] = \alpha E[X] + \beta$

$$Var(Y) \underset{def}{=} E[(Y - E[Y])^2]$$

$$= E[(\alpha X + \cancel{\beta} - (\alpha E[X] + \cancel{\beta}))^2]$$

$$= E[\alpha^2 (X - E[X])^2]$$

$$\alpha^2 E[(X - E[X])^2] =$$

$$\underset{\text{def. varianza}}{=} \alpha^2 \; Var(X) \qquad \square$$

$$\text{N.B.} \quad \text{Se } \alpha = 0 \qquad Var(\beta) = 0$$

Perché la varianza è un modo per misurare quanto i valori si discostano dal valor medio, tanto è più grande, tanto si discostano. La varianza di un numero è 0, perché è un parametro fisso, si è persa la casualità, non è più aleatorio, ma deterministico.

$$3) \quad Var(X+Y) = ?$$

Non funziona come la media.

es. se $X = Y$

$$4\,Var(X) \underset{2)}{=} Var(2X) = Var(X+Y) \cancel{\overset{?}{=}} Var(X) + Var(Y) = 2\,Var(X)$$

$$Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$$

PER DETERMINARE UNA FORMULA PER $Var(X+Y)$ OCCORRE FARE RIFERIMENTO AD UNA NUOVA GRANDEZZA

Questa nuova grandezza si chiama covarianza.

Covarianza

Def. COVARIANZA

Date due v.c. X e Y con valori medi $E[X] = \mu_X$ ed $E[Y] = \mu_Y$, si dice covarianza, se esiste,

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

È la media del prodotto di X meno la sua media per Y meno la sua media. Serve a capire come X e Y si comportano reciprocamente (se si influenzano, se al crescere di una diminuisce l'altra, o cresce…).

PROPRIETÀ

1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

2) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\boxed{\text{DIM}} \quad Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] =$$
$$= E[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y] = \quad \mu_X \text{ e } \mu_Y \text{ numeri}$$
$$= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + E[\mu_X \mu_Y] =$$
$$= E[XY] - \mu_X \mu_Y \cancel{- \mu_Y \mu_X} \cancel{+ \mu_X \mu_Y} =$$
$$= E[XY] - \mu_X \mu_Y = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \square$$

L'uso massiccio delle proprietà del valor medio ci permette di fare calcoli in maniera compatta, senza concentrarsi su sommatorie o integrali (i casi continui o discreti con questa notazione sono già inclusi e sottintesi).

3) $Cov(X,X) = Var(X)$

4) $Cov(\alpha X, Y) = Cov(X, \alpha Y) = \alpha \, Cov(X,Y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

5) $Cov\left(\sum_{k=1}^{m} X_k, \sum_{J=1}^{n} Y_J\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} Cov(X_k, Y_J)$ $\quad X_k, Y_J$ v.c. (non la dimostriamo)

La proprietà 6 è il motivo per cui abbiamo introdotto la covarianza.

6) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$
se X e Y hanno media μ_X e μ_Y e varianza $Var(X)$ e $Var(Y)$

Dobbiamo supporre che X e Y abbiano convergente sia il calcolo del valor medio che della varianza.

DIM $Z = X + Y \qquad E[Z] = E[X+Y] = \mu_X + \mu_Y$

$$Var(Z) \underset{def}{=} E\left[(Z - E[Z])^2\right] =$$

$$= E\left[(X + Y - \mu_X - \mu_Y)^2\right]$$

$$= E\left[(X-\mu_X)^2 + (Y-\mu_Y)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] =$$

$$= E\left[(X-\mu_X)^2\right] + E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] + E\left[2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] =$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) \quad \square$$

6bis) Date $X_1, X_2, \dots X_n$ v.c. con media e varianza definite

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_k, X_j)$$

Non c'è il 2 perché si considera sia la covarianza di X1, X2 che X2, X1.

Facciamo un esercizio e poi ci calcoliamo valor medio, varianza e covarianza.

es. 6 FOGLIO IV

$X, Y \in \{-1, 0, 1\}$

$p(i,k) = c\,|i+k| \qquad$ con $i, k = -1, 0, 1$

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$2c$	c	0
0	c	0	c
1	0	c	$2c$

$$p(i,k) \in [0,1] \Rightarrow \underline{0 < c < \frac{1}{2}}$$

$$1 = \sum_{i=-1}^{1} \sum_{k=-1}^{1} p(i,k) = 2c + c + c + c + c + 2c = 8c$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{c = \frac{1}{8}}$$

$Y \backslash X$	-1	0	1	P_Y
-1	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
P_X	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	

Le funzioni di massa marginale sono identiche. C'è una simmetria già dalla consegna, poi le funzioni marginali sono identiche, quindi per il valor medio basterà calcolarne uno.

$$E[X] = -1 \cdot \frac{3}{8} + \cancel{0 \cdot \frac{2}{8}} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0$$ (stesso calcolo per Y)

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{3}{8} + \cancel{0^2 \cdot \frac{2}{8}} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(stesso risultato per Y)

$$Cov(X,Y) = E[XY] - \cancel{\underbrace{E[X]}_{=0}\,\underbrace{E[Y]}_{=0}}$$

$$E[XY] = E[h(X,Y)] \underset{\substack{\text{proprietà 3)} \\ \text{del valore atteso}}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h(x_i, y_j)\, p(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} x_i y_j\, p(x_i, y_j)$$

Prendo i valori dalla tabella (entrate e valore) e li moltiplico.

$$= (-1)(-1)\cdot\frac{2}{8} + \cancel{(-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{8}} + \cancel{(-1)\cdot 1\cdot 0} +$$
$$+ \cancel{0\cdot(-1)\cdot\frac{1}{8}} + \cancel{0\cdot 0\cdot 0} + \cancel{0\cdot 1\cdot\frac{1}{8}} +$$
$$+ \cancel{1\cdot(-1)\cdot 0} + \cancel{1\cdot 0\cdot\frac{1}{8}} + 1\cdot 1\cdot\frac{2}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$E[XY] = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Oss. Si verifica che

$Cov(X,Y) > 0 \Rightarrow X$ cresce insieme a Y o decresce insieme a Y

$Cov(X,Y) < 0 \Rightarrow X$ cresce quando Y decresce e viceversa

$Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow X$ e Y sono SCORRELATE

Per confrontare le Cov. di coppie di v.c. diverse si introduce il coeff. di correlazione

$$Corr(X,Y) \equiv \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\ \sqrt{Var(Y)}}$$

Si dimostra che $Corr(X,Y) \in [-1,1]$

es. di prima (es. 6 FOGLIO IV)

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\ \sqrt{Var(Y)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}\ \sqrt{\frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Stesso discorso della covarianza: se positivo hanno un comportamento simile, se negativo hanno un comportamento opposto.

C'è una proprietà delle variabili casuali indipendenti che permette di determinare che la covarianza tra variabili indipendenti è nulla. Non vale il contrario, cioè ci sono anche variabili dipendenti con covarianza nulla.

TEOREMA

Date due v.c. X e Y INDIPENDENTI con media $E[X]=\mu_X$ e $E[Y]=\mu_Y$, allora

$$E[XY] = E[X]E[Y] \Rightarrow Cov(X,Y)=0$$

$\boxed{\text{DIM}}$ CASO CONTINUO (X e Y congiuntamente continue)

$$f(x,y)$$

$$E[XY] \underset{\substack{\text{PROPRIETÀ 3)} \\ \text{DEL VALORE} \\ \text{ATTESO}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$$

Vale anche se le variabili non sono indipendenti questo. Supponiamo l'indipendenza.

$$\underset{\text{INDIP.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx\right)}_{E[X]} dy =$$

$$= E[X] \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy}_{E[Y]} = E[X]\,E[Y]$$

Due variabili scorrelate vuol dire che sono indipendenti? No.

N.B. Due variabili casuali indipendenti sono SEMPRE scorrelate, ma due v.c. scorrelate non è detto che siano indipendenti

Esercizi

es. 4 FOGLIO IV

X v.c. continua $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ ax^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Quanto vale a?

Se X v.c. continua $\Rightarrow F(x)$ continua

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^-} F(x) \qquad 0 = a \cdot 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^-} F(x) \qquad 1 = a\, 1^2 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 2x\, dx = \left[2\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx = \left[2\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

es. 5 FOGLIO IV

Estrazione di una pallina da ciascuna delle 3 scatole

X = somma n° estratti

Y = differenza più grande – più piccolo

$Y \backslash X$	3	4	5	6	7	8	9	
0	$\frac{1}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$		0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
1	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	0	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0	$\frac{12}{27}$
	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$	

$X=4 \Rightarrow (2,1,1)$
$(1,2,1)$
$(1,1,2)$

$X=8 \Rightarrow (3,3,2)$
$(3,2,3)$
$(2,3,3)$

$X=5 \Rightarrow (2,2,1)$
$(2,1,2)$
$(1,2,2)$
$(1,1,3)$
$(1,3,1)$
$(3,1,1)$

$X=7$ $(3,3,1)$
$(3,1,3)$
$(1,3,3)$
$(2,2,3)$
$(2,3,2)$
$(3,2,2)$

$X=6$ $(2,2,2)$ $Y=0$
$(1,2,3)$ $Y=2$ (6 permutazioni)

INDIPENDENZA:

$p(g, z) = 0$

$\cancel{\neq ?}$

$P_X(g) \cdot P_Y(z) =$

$= \frac{1}{27} \cdot \frac{12}{27}$

$\Rightarrow X$ e Y sono dipendenti

Per verificare in maniera semplice se le variabili siano indipendenti, prendiamo una situazione in cui c'è uno 0 alla funzione di massa congiunta. Se il prodotto delle relative funzioni marginali è 0, allora sono indipendenti, altrimenti no.

Esempio

Immaginiamo di fare delle misurazioni in laboratorio (pressione, temperatura…).

Quante volte si misura la grandezza fisica? Tante. In ambito di ricerca, il numero di volte va stimato oppure lo si fa fin quando non ci sono grosse variazioni sui risultati ottenuto. Le operazioni si fanno tante volte perché in laboratorio c'è sempre qualcosa di casuale, otteniamo risultati vicini ma non identici.

Fatte tante misure, come si attribuisce il valore che si voleva trovare? Con una media. Come mai la media è migliore di una singola misurazione? Si dice "per ridurre l'errore". Con le variabili casuali siamo in grado di vedere come l'errore si riduce.

I risultati di una serie di prove di laboratorio (eseguite in maniera identica e indipendente) si possono rappresentare come delle v.c. indipendenti tra loro e con la stessa distribuzione di prob. (stessa funzione di ripartizione e, se sono continue, la stessa funzione di densità, mentre se sono discrete presentano la stessa funzione di massa di prob.)

$\underbrace{(X_1, X_2, \ldots X_N)}_{\text{CAMPIONE}}$ INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE

La casualità sta nel fatto che se si facessero N esperimenti ottengo dei valori che prima non sono conosciuti, possono stare in un range o essere netti, ma non sono conosciuti.

Se $X_1, \dots X_N$ sono identicamente distribuite

$$\Downarrow$$

$$E[X_1] = E[X_2] = \dots = E[X_N]$$

$$Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = Var(X_N)$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

Ho una nuova variabile casuale, data dalla somma di tante variabili casuali, per fare la funzione di massa e di densità sarebbe complicato.

VARIABILE CASUALE
CHE RAPPRESENTA
LA MEDIA ARITMETICA
DELLE MISURE
(MEDIA CAMPIONARIA)

Media campionaria vuol dire media ricavata dal campione.

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}\right] =$$

$$= \frac{1}{N} E[X_1 + X_2 + \dots + X_N] =$$

$$= \frac{1}{N} \left(E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_N]\right) =$$

$$= \frac{1}{N} (\underbrace{\mu + \mu + \dots + \mu}_{N \text{ volte}}) = \frac{N\mu}{N} = \mu$$

La media è una variabile casuale che ha lo stesso valor medio delle misure.

Le variabili casuali che presentano una misura hanno come valor medio il valore teorico, perché se gli errori sono casuali, possono essere sia positivi che negativi.

$$Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_N)\right) =$$

$$= \frac{1}{N^2} Var(X_1 + X_2 + \dots + X_N)$$

Stiamo trattando un campione, tutte variabili indipendenti, quindi tutte le covarianze sono 0.

$$= \frac{1}{N^2}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_N)\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(\underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{N \text{ volte}}\right) = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}$$