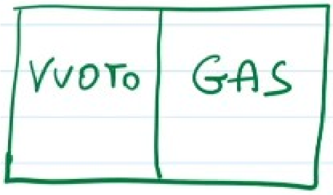
Esercizi



CONDIZIONE INIZIALE

Si elimina la parete che separa il gas dal vuoto e si aspetta un tempo transitorio.
Quale è la probabilità che dopo un certo intervallo di tempo le particelle si trovino tutte nella stessa metà del contenitore? (N particelle)

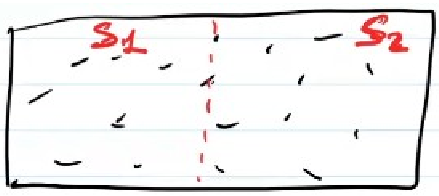
È un problema che mette in evidenza la fine del determinismo della meccanica.

Nessuno di noi si aspetta da partire in una situazione in cui il gas è in una parte della scatola e ritornarci (irreversibilità).

Da questo nacque un dibattito culminato con l'idea della probabilità.

Trascuriamo la meccanica quantistica e la relatività. Queste particelle possono muoversi in qualsiasi modo, sarebbe impossibile andare a studiare il moto di qualsiasi particella, anche con i computer più potenti. Inoltre è impossibile conoscere i dati iniziali di ogni singola particella. Ecco perché si studia la probabilità.

Tolta la parete, dopo un po' ci sarà la stessa probabilità che la particella sia in una parete o nell'altra.



Introduciamo una variabile casuale di Bernoulli per la particella. È ragionevole prendere come parametro ½.

per la k-esima particella

$$X_k \sim Be\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{se la k-esima particella si trova in } S_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

P(tutte le particelle si trovino in S_2)

$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k \qquad P(Y = N) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\dots P(X_N = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Se $N = 3$ $P(Y = 3) = \frac{1}{8}$

Se $N = 10^{23}$ $P(Y = 10^{23}) = \frac{1}{2^{10^{23}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{23}} \simeq 0$

È praticamente 0. Non è impossibile, ma è un numero così piccolo, è un evento così improbabile che praticamente non si osserva.

Questo spiega perché il problema è irreversibile.

Colui che è riuscito a spiegare l'irreversibilità grazie alla teoria della probabilità e della statistica in maniera rigorosa è Bolzmann.

Altri modelli di variabili casuali discrete

MODELLI DI V.C. DISCRETE

1) $X \sim Be(p)$ vedi lezione precedente

2) $X \sim B(n,p)$ " " "

3) VARIABILI CASUALI GEOMETRICHE

Ambientazione simile alla binomiale, ma rappresenta una quantità leggermente diversa.

Si ripete in maniera identica e indipendente un esperimento tante volte fino alla comparsa dell'evento A

X = n° esperimenti fatti fino alla comparsa di A

Per esempio lancio una moneta fin quando non esce testa. Se sono molto sfortunato X vale infinito.

$$X \in \mathbb{N}$$

$X \sim G(p)$

si comporta come una v.c. geometrica di parametro $p = P(A)$

L'evento A si chiama anche successo.

$$k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$p(k) = P(X = k) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots A_{k-1}^c \cap A_k) =$$

$$\underset{\substack{\text{esperimenti} \\ \text{indip. e identici}}}{=} P(A_1^c)P(A_2^c)\dots P(A_{k-1}^c)P(A_k) = (1-p)^{k-1} p =$$

$$= q^{k-1} p$$

Non ci sono casi da contare perché sappiamo la successione dei risultati dei nostri esperimenti (k – 1 fallimenti e l'ultimo successo). È abbastanza semplice come modello, ma il difetto sta nel calcolo del valor medio e della varianza.

Perché si chiama variabile casuale geometrica? Perché c'entra la serie geometrica.

serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$

Alfa è compreso tra 0 e 1 perché stiamo parlando di probabilità. Potrebbero esserci anche 0 e 1, ma se la probabilità di uscita è 0, sappiamo già che serviranno infiniti casi (quindi non si verifica mai) per verificare A e se è 1, l'esperimento si verifica sempre, quindi sono casi poco interessanti.

IPOTESI $0 < p < 1$
(CASO $p=0$ e $p=1$ esclusi)

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} p(k)$$

INFATTI

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p = p \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p \frac{1}{1-q} =$$

$k-1=j$

$$= \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Questa verifica è inutile, ma serve per ricordarsi come si fanno i calcoli con le serie.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} p$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{k\, q^{k-1}}_{\frac{dq^k}{dq}} p$$

La quantità evidenziata ricorda la derivata.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k\, q^{k-1}\, p$$

Anche aggiungendo k = 0, non cambia niente.

$$= p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d q^k}{d q}$$

La serie converge, quindi posso portare la derivata fuori dalla sommatoria.

$$p \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)$$

Conosco come funziona la serie.

$$= p \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p\left(-1\,(1-q)^{-2}(-1)\right) =$$

$$= p\,(1-q)^{-2} = p\left(1-(1-p)\right)^{-2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Quindi, se c'è un evento che si verifica con una certa probabilità, il numero medio di prove da osservare per ottenere il successo è l'inverso della probabilità.

Dobbiamo calcolarci il momento di ordine 2 per la varianza.

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} p =$$

$$= pq \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-2}$$

Vogliamo cercare di scrivere il tutto come una derivata seconda di q alla k.

$$pq \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 - k + k) q^{k-2} =$$

$$= pq \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 - k) q^{k-2} + pq \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-2} =$$

$$= pq \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{k(k-1) q^{k-2}}_{\frac{d^2 q^k}{dq^2}} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$$

Come in precedenza, si può usare anche k = 0.

$$= pq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^2 q^k}{dq^2} + p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{dq^k}{dq}$$

Procedo portando fuori la derivata dalla sommatoria.

$$= pq \frac{d^2}{dq^2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \right) + p \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \right) =$$

$$= pq \frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{1}{1-q} \right) + p \frac{d}{dq} \frac{1}{(1-q)} =$$

$$= pq \frac{d}{dq}(1-q)^{-2} + p\,(1-q)^{-2}$$

$$= pq\left(-2(1-q)^{-3}\cdot(-1)\right) + \frac{p}{(1-(1-p))^2} =$$

$$= 2pq\frac{1}{(1-q)^3} + \frac{p}{p^2} = \frac{2pq}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Adesso si può calcolare la varianza.

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Sono tanti passaggi. Il valor medio è facile da ricordare, di meno la varianza.

Variabili casuali binomiali negative

4) VARIABILI CASUALI BINOMIALI NEGATIVE

Si ripete un esperimento (in maniera identica e indipendente) fino a quando si osserva r volte (anche non consecutive) l'evento A

X = 'n° di esperimenti che occorrono per osservare A r volte'

$$X \in \{r, r+1, \dots, +\infty\}$$

Servono almeno r volte, fino al valore infinito.

$r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$p = P(A)$ prob. che A si verifichi in un esperimento

$X \sim NB(r, p)$

X è una v.c. binomiale negativa di parametri r e p

Per calcolare la funzione di massa di probabilità bisogna ragionare su come funzionano le ripetizioni degli esperimenti, cioè su quand'è che si smette di ripetere gli esperimenti.

$K \geq r$

$$p(K) = P(X = k) = P\begin{pmatrix} \text{in } (K-1) \text{ esperimenti} & \cap & \text{nell'ultimo esperimento} \\ \text{A si è verificato } (r-1) \text{ volte} & & \text{A si verifica} \end{pmatrix}$$

Ovviamente tutti gli eventi sono indipendenti, di conseguenza:

$$= \underbrace{P\begin{pmatrix} \text{in } (k-1) \text{ esperimenti:} \\ A \text{ si verifichi } (r-1) \text{ volte} \end{pmatrix}}_{\text{binomiale }((k-1),p)} \underbrace{P\begin{pmatrix} \text{nell'ultimo esperimento} \\ A \text{ si verifichi} \end{pmatrix}}_{= p} =$$

$$= \binom{(k-1)}{(r-1)} p^{(r-1)} q^{(k-1)-(r-1)} \; p$$

$$= \binom{k-1}{r-1} p^{r} q^{k-r}$$

Questo è il motivo per cui si chiama negativa: si collega alla binomiale, ma a differenza di essa (che ha un numero finito di prove per osservare o no un numero di eventi), k può andare a +infinito.

In realtà questa variabile casuale è anche collegata alla geometrica, perché possiamo immaginare di descrivere X nel modo seguente.

$Y_1, Y_2, \ldots Y_r$ v.c. geometriche indipendenti

$Y_i \sim G(p)$

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_r$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{r} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{r} E[Y_i] = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i\right) \underset{\text{INDIP.}}{=} \sum_{i=1}^{r} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{q}{p^2} =$$

$$= r \frac{q}{p^2}$$

In questo caso, valor medio e varianza sono calcolati molto facilmente se li vediamo come somma di altre variabili casuali.

Per questa variabile e la precedente non calcoliamo la funzione generatrice dei momenti, ma da questo risultato capiamo che una somma di geometriche non è una geometrica, ma una binomiale negativa.

N.B. Una somma di v.c. geometriche con uguale parametro e indipendenti dà una v.c. binomiale negativa $\Rightarrow$ le v.c. geometriche NON sono riproducibili!

Variabile casuale di Poisson

Introduciamola con la funzione di massa di probabilità.

5) VARIABILE CASUALE DI POISSON

$$X \sim P_o(\lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$X \in \mathbb{N} \qquad (X \in \{0, 1, \dots +\infty\})$$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, 2 \dots$$

Scopriremo che è un'approssimazione della binomiale sotto condizioni particolari che ci fanno capire quando si può utilizzare.

Calcoliamo valor medio e varianza, avremo a che fare di nuovo con delle serie.

SI RICORDA CHE $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha}$

A partire da questa serie potremmo calcolare il valor medio o passare per la funzione generatrice dei momenti, che in questo caso è molto semplice. Passiamo per questa.

$$\phi(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{tk} \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!}$$

Quindi la parte evidenziata ricorda la serie esponenziale.

$$= e^{-\lambda} e^{(e^t \lambda)} =$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

La serie esponenziale ricorda lo sviluppo in serie di Taylor. Proprio così, effettivamente lo sviluppo in serie di Taylor è legato all'espressione in serie dell'esponenziale.

Adesso possiamo calcolare il valor medio.

$$E[x] = \frac{d}{dt}\phi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)\Big|_{t=0} = \left(e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \lambda$$

Momento di ordine 2.

$$E[x^2] = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \lambda\left(e^t e^{\lambda(e^t-1)} + e^t \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right)\Big|_{t=0} = \lambda(1+\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

Varianza.

$$Var(X) = E[x^2] - E^2[x] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Questa è l'unica variabile casuale ad avere valor medio e varianza coincidenti, molto facile da ricordare. Coincidono proprio con il parametro della poissoniana.

È possibile anche grazie al fatto che il parametro non ha delle dimesioni fisiche, è un numero.

Verifichiamo se la variabile è riproducibile.

RIPRODUCIBILITÀ

Una v.c. di Poisson è riproducibile, infatti:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim Po(\lambda_1) \\ X_2 \sim Po(\lambda_2) \end{array}\right\} \text{INDIP.}$$

$X_1 + X_2 \sim ?$

$$\phi_{X_1+X_2}(t) \underset{\text{INDIP.}}{=} \phi_{X_1}(t)\,\phi_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}\, e^{\lambda_2(e^t-1)} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$$

Sono anche i valori medi e le varianze.

Perché questa variabile casuale è importante, soprattutto com'è collegata alla binomiale?

N.B. Si dimostra che una v.c. binomiale $B(n,p)$ con $n \gg 1$ ($n \to +\infty$) e p tale che $np = \lambda \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} << 1$ (p molto piccolo) si può appr. con una v.c. di Poisson ($Po(\lambda)$)

In altre parole, se considero un numero molto elevato di esperimenti, nel quale l'evento che mi interessa si verifica molto raramente, la variabile casuale binomiale diventa praticamente una poissoniana.

$\Downarrow$

per questo motivo la distribuzione di Poisson è detta legge degli eventi rari

Degli eventi rari perché si applica tutte le volte che ho un numero molto elevato di prove ma la probabilità del verificare il successo di una prova è molto piccolo. Si applica per esempio simulare il numero di individui che si mettono in coda per la posta o che accedono a un servizio online.