▼ **6.0 - Cambio di variabile**

Funzioni per cambio variabile

Per il cambio variabile vengono utilizzare funzioni $f : A \to G \quad A, G \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che:

$$(u, v) \to f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Matrice jacobiana di $f : A \to G$

Sia $f : A \to G$ una funzione definita come sopra e siano x e y funzioni con derivate continue in A, la **matrice jacobiana** di tale funzione è la seguente:

$$J_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Definizione di cambio di variabile

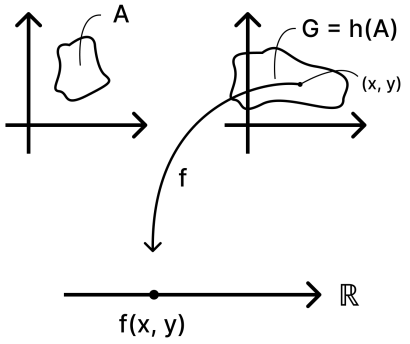
Sia $f : A \to G \quad A, G \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare (derivate continue), si dice che f è un **cambio di variabile** se:

- f è iniettiva e suriettiva.
- $det(J_{f(u,v)}) \neq 0 \quad \forall\ (u, v) \in A$.

Formula del cambio di variabile

Sia $h : A \to G$ un cambio di variabile e sia $f : G \to \mathbb{R}$ continua, allora vale:

$$\int_G f(x, y)\ dx\ dy = \int_A f(h(u, v))\ |det(J_{h(u,v)})|\ du\ dv$$



Cambio di variabile.

Esercizi

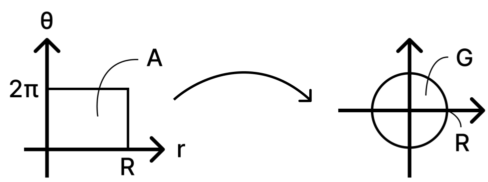
- Dato l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$, calcolare l'area di tale insieme (cerchio).

  Per calcolare l'area di un tale insieme occorre calcolare l'integrale doppio $\int_G \ dx \ dy$.

  Per fare ciò è possibile rappresentare G utilizzando un cambio di variabile:

  $$f(\{(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\mid 0 < r \leq R, \theta \in]0, 2\pi[\})$$

  Tale funzione può essere rappresentata graficamente nel seguente modo:

  Siccome $det(J_{f(r,\theta)}) = r$, possiamo calcolare l'integrale doppio utilizzando la formula del cambio di variabile:

  $$\int_G \ dx \ dy = \int_A 1 \cdot r \ dr \ r\theta$$

  Dove $A = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

  Continuiamo a questo punto il calcolo dell'integrale doppio ottenuto per ottenere l'area del cerchio:

  $$\int_A 1 \cdot r \ dr \ r\theta = \int_0^R (\int_0^{2r} \ r \ d\theta) \ dr = [\pi r^2]_0^R \ = \pi R^2$$