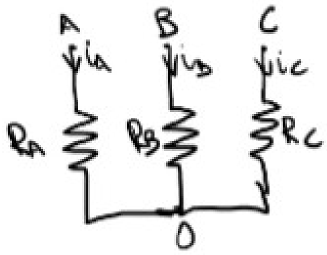
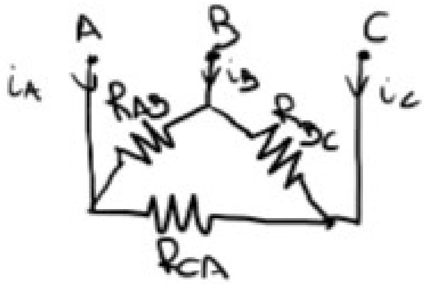
Collegamento stella triangolo

Vediamo per primo il collegamento a stella.



Hanno il punto O in comune.

Vediamo il collegamento a triangolo.



Vediamo com'è possibile passare da un collegamento all'altro.

Supponiamo di avere il collegamento a stella e vogliamo passare a quello a triangolo. Dobbiamo calcolare il valore delle resistenze per il collegamento a triangolo, avendo le resistenze per il collegamento a stella.

Costruiamo il sistema di equazioni. Supponiamo di scollegare il terminale C. Ora se andassimo a scollegare il terminale C, che resistenza equivalente avremmo nel terminale A e B nel caso a stella? Un collegamento in serie, che sarà uguale a quello che si avrà scollegando il terminale C nel collegamento a triangolo.

Supponiamo di scollegare il terminale C:

->PARALLELO

$$(1)\quad R_A + R_B = R_{AB} // (R_{BC} + R_{CA})$$

Con lo stesso procedimento, scolleghiamo il terminale B.

scolleghiamo B:

$$(2)\quad R_A + R_C = R_{CA} // (R_{AB} + R_{BC})$$

Come terza equazione, scolleghiamo il terminale A.

scolleghiamo A:

$$(3) \quad R_B + R_C = R_{BC} // (R_{AB} + R_{CA})$$

Abbiamo 3 equazioni per 3 incognite.

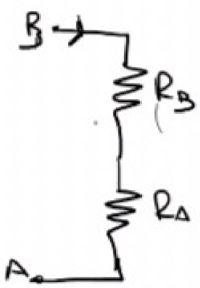
Nel caso volessimo trovare quelle a stella dal triangolo:

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

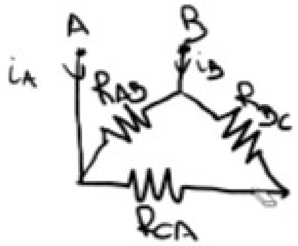
$$R_B = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

Perché scollegando il terminale C sulla stella viene in serie? Scollegandolo avremmo questo.



E sul triangolo? Accade questo.



Qual è la correlazione tra stella e triangolo? Quando avremo sistemi trifase (con 3 conduttori), avranno un carico, il carico sarà disposto a stella o a triangolo. Inoltre, quando avremo un circuito formato da resistori, ci tornerà utile.

Perché scolleghiamo i terminali? È una sorta di sovrapposizione degli effetti, non si scollegano veramente i terminali, ma tramite questo metodo troviamo le equazioni delle singole resistenze.

Manca l'altro set di equazioni. Vediamo il viceversa, da stella a triangolo.

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

$$R_{CA} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

Sempre lo stesso numeratore, ma resistenza diversa, quella non indicata dalle letterine della resistenza.

Cosa succede se tutte le resistenze uguali?

$$R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R_{\Delta} \Rightarrow R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

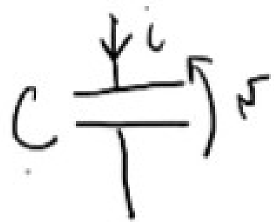
La resistenza della stella sarà un terzo di quella a triangolo.

$$R_A = R_B = R_C = R_Y \Rightarrow R_{\Delta} = 3R_Y$$

E lo stesso al contrario.

Condensatore

Vediamo il simbolo.



Convenzione dell'utilizzatore.

Vediamo l'equazione costitutiva.

EQ. COSTITUTIVA:

$$i = \overset{\text{CAPACITÀ [F]}}{C}\,\frac{dv}{dt}$$

Condensatore è l'elemento, capacità è l'unità di misura.

Abbiamo delle piastre metalliche conduttive di sezione S, parallele, con in mezzo un dielettrico, un isolante. Se in un piatto abbiamo cariche positive, nell'altro avremmo cariche negative, con le relative linee di campo.

$$Q = CV$$

La carica è proporzionale alla tensione.

Ora sappiamo che:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dv}{dt}$$

Quanto vale C? Il valore di C nel caso di un condensatore a facce piane e parallele è uguale a:

$$C = \overset{\text{PERMITTIVITÀ DEL MATERIALE}}{\varepsilon} \cdot \frac{S \rightsquigarrow \text{SEZIONE}}{l \rightsquigarrow \text{DISTANZA}}$$

Vediamo la potenza che abbiamo sul componente.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Definizione di potenza.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = v(t) \cdot C\,\frac{dv}{dt}$$

Questa derivata può essere sia positiva che negativa. Se positiva, il componente assorbe potenza e viceversa.

$$v(t) \cdot C\,\frac{dv}{dt} \begin{cases} \rightarrow p > 0 & \text{POT. ASSORBITA} \\ \rightarrow p < 0 & \text{POT. EROGATA} \end{cases}$$

È diverso dal resistore, qui la potenza si può assorbire o erogare.

Questo è un condensatore ideale, non dissipativo, immagazzina la potenza.

NON DISSIPATIVO

Vediamo l’energia calcolata tra gli istanti t2 e t1.

$$\overset{\text{energia}}{w}(t_2,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, d\tau = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot C \cdot \frac{dv}{dt}\, dt = C \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dv = \frac{1}{2} C\, V^2 \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{1}{2} C \left[V^2(t_2) - V^2(t_1) \right]$$

Supponiamo di essere all’istante t1 uguale a 0.

$$t_1 = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{2} C \left[V^2(t_2) - V^2(0) \right]$$

Se il componente fosse scarico all’istante 0:

$$t_1 = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{2} C \left[V^2(t_2) - \cancel{V^2(0)} \right]$$

In tal caso, l’energia non può essere negativa. Può esserlo solo se è carico all’istante 0, altrimenti no. Per questo è un elemento passivo.

PASSIVO

La tensione definisce lo stato energetico. Data la tensione possiamo capire quanta energia ha il condensatore. La tensione è una variabile di stato.

LA TENSIONE DEFINISCE LO STATO ENERGETICO $\Rightarrow$ VARIABILE DI STATO

Vediamo come possiamo calcolare la tensione V di t.

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

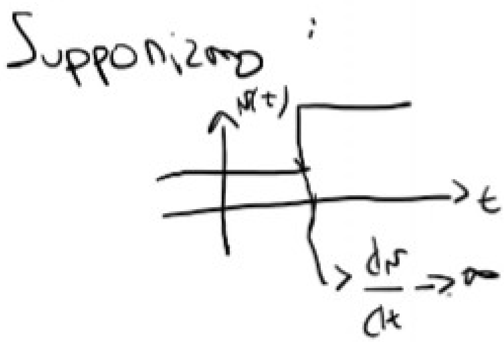
Questo integrale possiamo scomporlo in due parti.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,d\tau}_{v(0)} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau = \underbrace{v(0)}_{\text{COND. INIZIALE}} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

Da qui capiamo che la tensione dipende da una condizione iniziale e da un istante diverso da quello iniziale, quindi è un elemento con memoria.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,d\tau}_{v(0)} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau = \underbrace{v(0)}_{\substack{\text{COND. INIZIALE} \\ \text{MEMORIA}}} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

Vediamo 2 casi limite.



Se avessimo una variazione a gradini, la derivata tenderebbe all'infinito. Quindi la corrente tende all'infinito.

$$i = C\frac{dv}{dt} \to \infty \qquad p = v(t)\cdot i(t) \to \infty$$

Quindi la potenza tende all'infinito, ma questo non è possibile. La tensione di un condensatore non può variare bruscamente. Abbiamo raggiunto questo risultato in un caso per assurdo.

$$i = C\frac{dv}{dt} \to \infty \qquad p = v(t) \cdot i(t) \to \infty$$ NON È POSSIBILE

$\Rightarrow$ LA TENSIONE NON PUÒ VARIARE BRUSCAMENTE

Cosa succede se la tensione è costante?

$$v(t) = V \to i(t) = C\frac{dv}{dt} = 0$$

Il condensatore, se non abbiamo variazione di tensione, si comporta come un circuito aperto.

$$v(t) = V \to i(t) = C\frac{dv}{dt} = 0$$

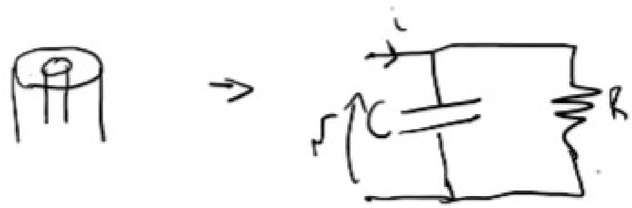
CIRCUITO APERTO

Abbiamo detto che questo è un componente ideale. Come potremmo rappresentare un componente reale? Un condensatore cilindrico ha una struttura di questo genere.

Condensatore cilindrico:

Se avessimo un condensatore reale, come potremmo rappresentarlo? Come un condensatore ideale con in parallelo una resistenza.

Condensatore cilindrico:



La resistenza tiene conto della dissipazione del condensatore.

Condensatori in parallelo

Collegamento in parallelo:

Quale sarà la capacità equivalente?

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Perché?

Abbiamo che la corrente sarà i1 più i2, cioè:

$$i = i_1 + i_2 = C_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = \overbrace{(C_1 + C_2)}^{C_{eq}} \frac{dv}{dt}$$

Condensatori in serie

Collegamento in serie

La capacità equivalente di un collegamento in serie è:

$$C_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$$

Per dimostrare questa uguaglianza, ci sono diverse strade, scegliamo la più semplice.

La i è uguale a C equivalente per la derivata rispetto al tempo di V.

$$i = C_{eq} \cdot \frac{dv}{dt}$$

V è uguale a V1 più V2.

$$i = C_{eq} \cdot \frac{dv}{dt} = C_{eq}\left(\overbrace{\frac{dv_1}{dt}}^{\frac{i_1}{C_1}} + \overbrace{\frac{dv_2}{dt}}^{\frac{i_2}{C_2}}\right)$$

Tutto questo si può scrivere come:

$$C_{eq}\left(\frac{i_1}{C_1}+\frac{i_2}{C_2}\right)$$

Ma i è uguale, quindi:

$$C_{eq}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)i$$

Dividendo per i, possiamo riscrivere C equivalente.

$$= C_{eq}\left(\frac{i_1}{C_1}+\frac{i_2}{C_2}\right)=\underbrace{C_{eq}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}i$$

$$C_{eq}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=1$$

$$\Rightarrow C_{eq}=\frac{1}{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Induttore

Il simbolo è:

Scriviamo l’equazione caratteristica del componente.

EQ. CARATTERISTICA:

$$v = \underbrace{L}_{\text{INDUTTANZA [H]}} \frac{di}{dt}$$

Come si ottiene un induttore? Abbiamo un filo conduttore avvolto in un materiale ferromagnetico.

Dalla legge della circuitazione magnetica sappiamo che se ho una corrente i, genero un flusso di induzione magnetica.

$$\Phi = L\, i$$

Sappiamo dalla legge di Faraday che:

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

Perché non mettiamo il meno? La legge di Faraday ci dice che data la variazione del flusso abbiamo il meno. Ma da come abbiamo definito la tensione:

È DOVUTO AL FATTO CHE LE CARICHE SONO NEGATIVE

$$\bar{e} = \int_1^2 \ominus \, dv = -(v_2 - v_1)$$

Quindi meno per meno fa più.

Da cosa è data l'induttanza?

$$L = \frac{\mu \cdot S \cdot N}{l}$$

μ → PERMEABILITÀ DEL MATERIALE

N → NUMERO DI SPIRE

S → SEZIONE DELLA SPIRA

l → LUNGHEZZA

Come prima, possiamo calcolare la corrente. Come prima, abbiamo una condizione iniziale.

LUNGHEZZA

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau = \underbrace{\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(\tau)\,d\tau}_{i(0)} + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\,d\tau = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

CON MEMORIA

Anche in questo caso, abbiamo un elemento con memoria, perché la corrente all'istante t non dipende solo dall'istante t, ma anche da istanti precedenti.

Calcoliamo la potenza.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$$

$i(0)$

$p > 0$ → POT. ASSORBITA

$p < 0$ → POT. EROGATA

Anche in questo caso, la derivata può essere positiva o negativa, con tutte le conseguenze.

Calcoliamo l’energia (si può scrivere iL la corrente degli induttori).

$$\underset{\text{ENERGIA}}{w(t_1,t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \overset{\text{PCP}}{\int_{t_1}^{t_2} L\, i(t) \frac{di}{dt} \cdot dt} = L \int_{t_1}^{t_2} i(t)\, di_L = \frac{1}{2} L I^2 \Big|_{t_1}^{t_2} =$$
$$= \frac{1}{2} L \left[I^2(t_2) - I^2(t_1) \right]$$

Allo stesso modo:

$$w(0,t_x) = \frac{1}{2} L \left[I^2(t_x) - \cancel{I^2(0)} \right] \qquad \text{PASSIVO}$$

Quindi è un elemento passivo, perché se all’istante 0 non c’è corrente, deve per forza assorbire.

Chiaramente questo è un induttore ideale, quindi un componente non dissipativo. Come per il condensatore, la corrente definisce lo stato energetico dell’induttore, quindi è una variabile di stato.

LA CORRENTE INDICA LO STATO ENERGETICO → VARIABILE DI STATO

Vediamo dei casi limite.

Supponiamo:

Variazione a gradini, quindi derivata che tende a infinito.

Supponiamo:

$\frac{di}{dt} \to \infty \Rightarrow v = L\frac{di}{dt} \to \infty \Rightarrow p(t) = v(t) \cdot i(t) \to \infty$ NON È POSSIBILE

Come il condensatore non accetta variazioni istantanee della tensione, l'induttore non accetta variazioni istantanee della corrente.

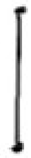
NON POSSIAMO AVERE VARIAZIONI ISTANTANEE DELLA CORRENTE

Vediamo cosa succede se la corrente è costante.

$$i(t) = I \to v = L\frac{di}{dt} = 0$$

Come si comporta l'induttore con corrente costante? Come un circuito aperto o come un cortocircuito? Come un cortocircuito, perché la corrente è costante, non la tensione.

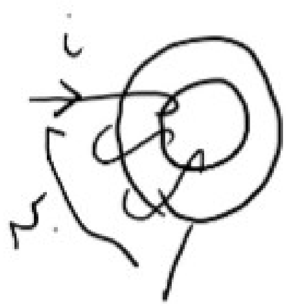
$$i(t) = I \to v = L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$$



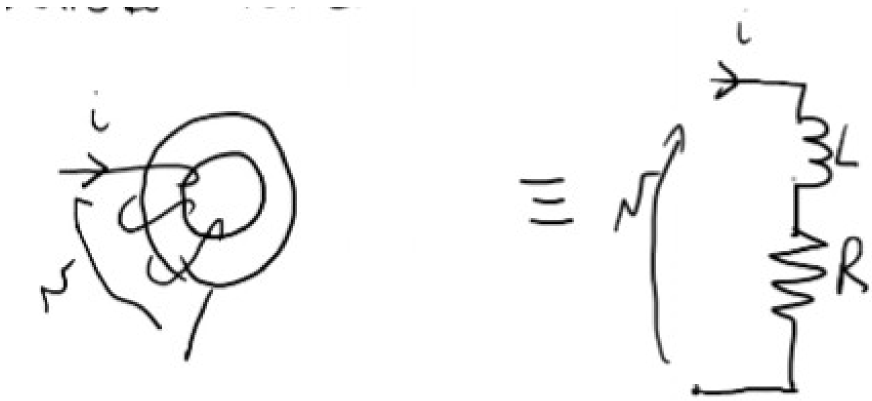
COME UN CORTO-CIRCUITO

Induttore reale

Abbiamo il materiale ferromagnetico e il conduttore avvolto sul materiale.



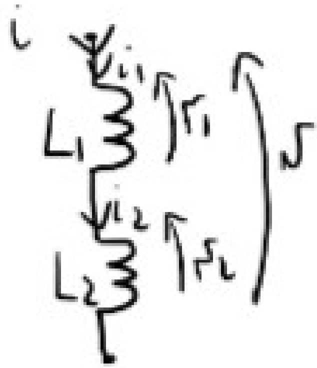
Come possiamo rappresentare un induttore reale? Come un induttore ideale con in serie una resistenza.



Abbiamo una perdita data per effetto Joule, rappresentabile con una R (sempre molto piccola).

Perché in questo caso abbiamo messo una resistenza in serie e nel condensatore una resistenza in parallelo? Nel caso dell'induttore la resistenza rappresenta le perdite Joule del conduttore, in un parametro concentrato. Quindi nel circuito equivalente viene l'induttore ideale con la resistenza in serie. Ovviamente questi sono modelli, dobbiamo modellare delle perdite. Vogliamo creare un induttore con perdite molto piccole. Nel caso del condensatore, mettendo la resistenza in parallelo, essa deve essere molto alta, sennò tutta la corrente andrebbe nel condensatore. Nel caso del condensatore ideale, la resistenza è infinita, perché stiamo descrivendo un dielettrico (isolante). Nel caso reale è molto alta, ma non infinita. Stiamo descrivendo la non idealità. Allo stesso modo, nell'induttore la resistenza è idealmente nulla, nel caso reale è molto bassa.

Induttori in serie



L’induttanza equivalente sarà:

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

Come si dimostra facilmente?

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

i1 e i2 sono uguali.

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = \overbrace{(L_1 + L_2)}^{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

Induttori in parallelo

L’induttanza equivalente è:

$$L_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{L_i} \right)^{-1}$$

Quindi possiamo vedere la dualità coi condensatori in serie e viceversa.

La dimostrazione può essere fatta in tanti modi, scegliamo il più semplice.

$$v = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt}$$

Ma i è composta da i1 e i2.

$$v = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} = L_{eq} \left(\overbrace{\frac{di_1}{dt}}^{\sim \frac{v_1}{L_1}} + \overbrace{\frac{di_2}{dt}}^{\sim \frac{v_2}{L_2}} \right) =$$

$$= L_{eq} \left(\frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} \right)$$

Ma V1 e V2 sono uguali, quindi:

$$= L_{eq}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) v$$

Infine:

$$v = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} = L_{eq}\left(\overset{\frac{v_1}{L_1}}{\frac{di_1}{dt}} + \overset{\frac{v_2}{L_2}}{\frac{di_2}{dt}}\right) = L_{eq}\left(\frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2}\right) = \underbrace{L_{eq}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}_{=1} v$$

$$\Rightarrow L_{eq} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^{-1}$$