▼ **3.0 - Derivate e differenziabilità**

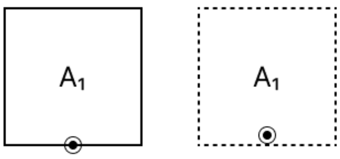
▼ **3.1 - Derivate parziali**

Insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$

> Dato un insieme $A \subseteq R^n$, si dice che A è **aperto** se $\forall \; \overline{x} \in A, \exists \; \epsilon > 0 \mid B(\overline{x}, \epsilon) \subseteq A$, dove $B(\overline{x}, \epsilon)$ è l'intorno sferico di centro $\overline{x}$ e raggio ϵ.

Esempio:

- Nella seguente figura osserviamo due insiemi, uno chiuso e uno aperto:



Notiamo che A_1 è un insieme chiuso in quanto esiste un $\overline{x} \in A_1$ che viola la definizione di insieme aperto, mentre in A_2, preso un qualunque $\overline{x} \in A_2$, questo rispetta la definizione di insieme aperto.

Derivate parziali

Caso $\mathbb{R}^2$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, poniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + t, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x}, \overline{y} + t) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t}$$

Se i due limiti esistono finiti diciamo che f è **derivabile parzialmente** in $(\overline{x}, \overline{y})$.

Inoltre, nel caso in cui f è derivabile parzialmente in $(\overline{x}, \overline{y})$, è possibile definire il **gradiente** di f in $(\overline{x}, \overline{y})$ come:

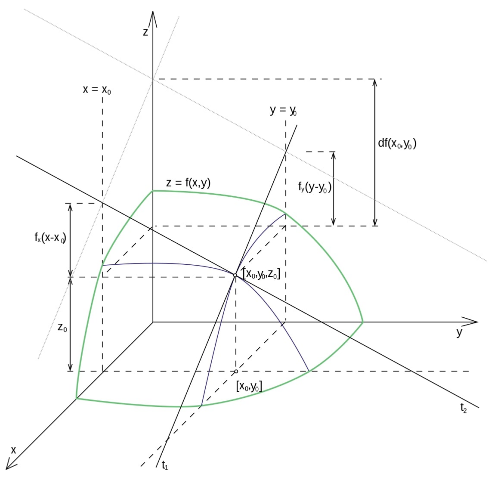
$$\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = (\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))$$

È possibile altrimenti calcolare equivalentemente i due limiti nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{x - \overline{x}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(\overline{x}, y) - f(\overline{x}, \overline{y})}{y - \overline{y}}$$



Esempio grafico delle tangenti che consentono di determinare il valore delle derivate parziali nel punto (x_0, y_0).

Esercizi:

- Sia $f(x, y) = xy^2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$.

  Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$ occorre calcolare la derivata della funzione in funzione di x e trattare il parametro y come se fosse una costante, dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = y^2$.

  Lo stesso deve essere fatto per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$, dunque $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = 2xy$.

Caso generale

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in A$, poniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + te_j) - f(\overline{x})}{t}$$

Dove $j \in \{1, \ldots, n\}$ e e_j è il vettore standard avente un 1 in posizione j. Se i limiti esistono diciamo che f è **derivabile parzialmente** in $\overline{x}$.

Inoltre, nel caso in cui f è derivabile parzialmente in $\overline{x}$, è possibile definire il **gradiente** di f in $\overline{x}$ come:

$$\nabla f(\overline{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}))$$

Esercizi:

▼ Sia $f(x, y, z) = \frac{xe^{z^2}}{x+y^2}$, calcolare il gradiente di f.

Determiniamo innanzitutto il dominio della funzione f, ovvero $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y^2 \neq 0\}$.

Calcoliamo poi le 3 derivate parziali:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2 e^{z^2}}{(x+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{2xye^{z^2}}{(x+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2xze^{z^2}}{x+y^2}$

Possiamo dunque concludere che il gradiente di f è il seguente:

$$\nabla f(x, y, z) = (\frac{y^2 e^{z^2}}{(x+y^2)^2}, -\frac{2xye^{z^2}}{(x+y^2)^2}, \frac{2xze^{z^2}}{x+y^2}) \quad (\nabla f : Dom(f) \to \mathbb{R}^3)$$

Matrice Jacobiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ tale che $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, allora la **matrice Jacobiana** $J_f(x) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ di tale funzione è definita nel seguente modo:

$$J_{f(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ & \ldots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_q & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_q \end{pmatrix}$$

▼ **3.2 - Differenziabilità**

Legame tra derivabilità e continuità

L'esistenza della derivata parziale **non implica** la continuità.

Dimostrazione

È possibile dimostrare tale teorema attraverso un esempio. Prendiamo la seguente funzione:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Possiamo infatti dimostrare che:

- f è derivabile parzialmente in $(0,0)$

  Calcoliamo infatti le derivate parziali in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

- f è discontinua in $(0,0)$

  Utilizziamo il metodo delle successioni e scegliendo la successione $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ troviamo che:

$$(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to+\infty} (0,0), f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

O-piccolo in $\mathbb{R}^2$

Sia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p > 0$, si scrive $f(x,y) = o(|(x,y)|^p)$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \quad | \quad \frac{f(x,y)}{|(x,y)|^p} \leq \epsilon \quad \forall\, (x,y) \mid |(x,y)| < \delta$$

Alternativamente:

$$\forall\, (x_n, y_n) \to (0,0), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n,y_n)}{|(x_n,y_n)|^p} = 0$$

Proposizioni

- $f(x,y)$: polinomio di grado $> p \implies f(x,y) = o(|(x,y)|^p)$

  Ad esempio, $x^3 + xy + 2y = o(|(x,y)|^2)$

Esercizi

▼ Verificare che $f(x,y) = x^2 = o(|(x,y)|)$

  Per verificare ciò dobbiamo dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|(x,y)|} = 0$.

  Utilizziamo il teorema del confronto, sapendo che:

$$f(x,y) = 0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \leq \frac{x^2}{|(x,y)|} \leq f(x,y) = \frac{|(x,y)|^2}{|(x,y)|} = |(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

  Otteniamo dunque che $\frac{x^2}{|(x,y)|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, verificando quindi il limite.

Funzione differenziabile

Caso generale

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f : A \to \mathbb{R}$, f è differenziabile in $\overline{x} \in A$ se:

- $\exists\ \partial_1 f, \dots, \partial_n f$ nel punto $\overline{x}$
- $f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + o(|h|)$, dove $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Caso $n = 2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f è **differenziabile** in $(\overline{x}, \overline{y})$ se:

- $\exists\ \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})$
- $f(\overline{x} + h, \overline{y} + k) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|)$

Polinomio di Taylor di grado 1

Se f è differenziabile possiamo sviluppare l'equazione della derivabilità impostando $x = \overline{x} + h$ e $y = \overline{y} + k$ e ottenendo il cosiddetto polinomio di Taylor di grado 1 e punto iniziale $(\overline{x}, \overline{y})$:

$$T(x, y) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (x - \overline{x}, y - \overline{y}) \rangle + o(|(x - \overline{x}, y - \overline{y})|)$$

Tale polinomio descrive il **piano tangente** al grafico di f nel punto $(\overline{x}, \overline{y}, f(\overline{x}, \overline{y}))$.

Esercizi

▼ Trovare il piano tangente della funzione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(0, 0, 1)$.

Per trovare il piano tangente a tale funzione occorre calcolare il polinomio di Taylor di grado 1.

Riscriviamo innanzitutto l'equazione in funzione di $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (non inseriamo il $\pm$ poichè dobbiamo calcolare la funzione nella parte positiva dell'asse z). Per fare ciò occorre prima di tutto calcolare le derivate parziali di f:

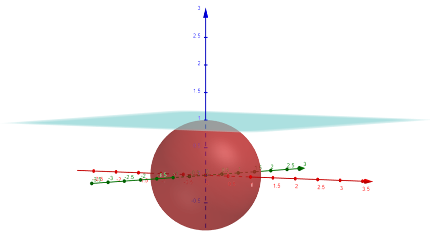
$$\partial_x f(x, y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\partial_y f(x, y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Calcoliamo a questo punto il polinomio di Taylor ottenendo il piano:

$$z = \sqrt{1 - 0 - 0} + \langle (-\frac{0}{\sqrt{1 - 0 - y^2}}, -\frac{0}{\sqrt{1 - x^2 - 0}}), (x - 0, y - 0) \rangle$$
$$= 1 + 0x + 0y = 1$$

Possiamo infatti visualizzare che il piano $z = 1$ è tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(0, 0, 1)$.



▼ Scrivere il polinomio di Taylor per la funzione $f(x, y, z) = xe^{x^2yz^2}$ in $(-1, 2, 1)$ dando per scontato che sia differenziabile.

Il polinomio di Taylor per funzioni con 3 variabili è il seguente:

$$T(x, y, z) = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), (x - \overline{x}, y - \overline{y}, z - \overline{z}) \rangle + o(|(x - \overline{x}, y - \overline{y}, z - \overline{z})|)$$

Per calcolare dunque il gradiente di f nel punto $(-1, 2, 1)$ occorre calcolare innanzitutto le 3 derivate parziali:

$$\partial_x f = 5e^2, \quad \partial_y f = -e^2, \quad \partial_z f = -4e^2$$

A questo otteniamo il polinomio di Taylor nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= f(-1, 2, 1) + \langle (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f), (x + 1, y - 2, z - 1) \rangle + o(|(x + 1, y - 2, z - \\ &= -e^2 + \langle (5e^2, -e^2, -4e^2), (x + 1, y - 2, z - 1) \rangle + o(|(x + 1, y - 2, z - 1)|) \\ &= -e^2 + 5e^2(x + 1) - e^2(y - 2) - 4e^2(z - 1) \end{aligned}$$

Proposizioni

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **differenziabile** in $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2 \implies f$ **continua** in $(\overline{x}, \overline{y})$.

  Dimostrazione:

  Supponendo che f sia differenziabile, abbiamo che $f(\overline{x} + h, \overline{y} + k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|)$, che per $h, k \to +\infty$ diventa $f(\overline{x} + h, \overline{y} + k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, dimostrando la continuità.

Teorema della differenziabilità

> Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Se $\exists\ \partial_x f, \partial_y f$ in ogni punto e le funzioni $\partial_x f, \partial_y f$ sono continue, allora $\forall\ (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, f è **differenziabile** in $(\overline{x}, \overline{y})$.

Lemma

> Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con derivate prime continue $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, allora:
>
> - $\forall\ h \in \mathbb{R}, \exists\ \theta \in [0, 1]$ tale che $f(a + h, b) - f(a, b) = \partial_x f(a + \theta h, b)h$
> - $\forall\ k \in \mathbb{R}, \exists\ \overline{\theta} \in [0, 1]$ tale che $f(a, b + k) - f(a, b) = \partial_y f(a, b + \overline{\theta} k)k$

Dimostrazione lemma

- Definiamo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in questo modo: $g(x) = f(x, b) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Uso Lagrange per g nell'intervallo $[a, a+h]$. $\exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $g(a+h) - g(a) = g'(a+\theta h)(a+h-a)$, dunque, per definizione di $\partial_x f$:

$$g(a+h) - g(a) = \partial_x f(a+\theta h, b)h$$

Cvd.

- Analogo.

Dimostrazione teorema della differenziabilità

Supponiamo che $f, \partial_x f, \partial_y f$ siano continue, dobbiamo dimostrare che f è differenziabile, dunque che vale Taylor:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|) \\ \implies f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|) \end{aligned}$$

Riscriviamo la parte a sinistra dell'$=$:

$$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, \overline{y}) + f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})$$

Da ora in avanti, per semplificare la dimostrazione, rappresentiamo la formula ottenuta come $[1]+[2]$, dove $[1] = f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, \overline{y})$ e $[2] = f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})$.

Usiamo il lemma:

- $\exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $[2] = \partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y})h$
- $\exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $[1] = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k)k$

Espandiamo le equivalenze appena ottenute nel seguente modo:

- $[2] = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h$ (aggiungendo e sottraendo $\partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h$)
- $[1] = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))k$ (aggiungendo e sottraendo $\partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k$)

Sostituiamo dunque nell'uguaglianza iniziale gli equivalenti a $[1]$ e $[2]$ appena trovati ottenendo:

$$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h + (\partial$$

Visto che $\partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k$ è equivalente a $\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle$, per dimostrare la validità di Taylor ci basta dunque dimostrare che:

$$\begin{aligned} (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))k = o(|(h,k)|) \\ \implies \frac{(\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))k}{|(h,k)|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 \\ \implies (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))\frac{h}{|(h,k)|} + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))\frac{k}{|(h,k)|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \end{aligned}$$

Osserviamo che $\frac{h}{|(h,k)|}$ e $\frac{k}{|(h,k)|} \leq \frac{|(h,k)|}{|(h,k)|} = 1$ in quanto $\sqrt{h^2+k^2}$ è sempre maggiore o alla peggio uguale dei singoli h e k, dunque ci basta dimostrare che:

$$(\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})) + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

Lo dimostriamo facilmente sostituendo ad h e k i valori ai quali tendono:

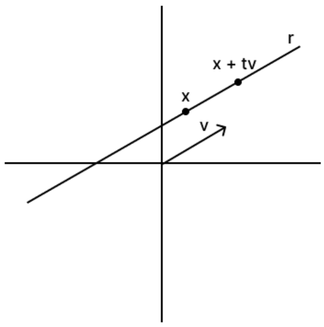
$$(\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})) + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} (\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})) + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})) = 0 + 0 = 0$$

3.3 - Derivate direzionali

Rette in $\mathbb{R}^n$

A partire da un dominio R^n di partenza e due vettori $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ è possibile definire la retta passante per x e avente direzione v tramite l'insieme:

$$r = \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$



Rappresentazione grafica di una retta generica nel piano $\mathbb{R}^2$.

Derivate direzionali in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1, v_2)$ unitario ($|v| = 1$). La **derivata direzionale** di f in $(\overline{x}, \overline{y})$ nella direzione (v_1, v_2) è il limite, se esiste finito:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((\overline{x}, \overline{y}) + t(v_1, v_2)) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_v f(\overline{x}, \overline{y}) = D_v f(\overline{x}, \overline{y})$$

Osservazione

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1, v_2)$ unitario ($|v| = 1$). Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$ è possibile introdurre una funzione ausiliaria $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

$g(t) = f((\overline{x}, \overline{y}) + t(v_1, v_2))$

Utilizzando tale funzione è possibile calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$, infatti è possibile dimostrare che:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$$

Dimostrazione

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((\overline{x},\overline{y})+t(v_1,v_2)) - f(\overline{x},\overline{y})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y})$$

Esercizi

- Data $f(x,y) = xy^2$ e $(\overline{x},\overline{y}) = (1,2)$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$.

  Per fare ciò è possibile utilizzare la funzione ausiliaria $g(t) = f((\overline{x},\overline{y}) + t(v_1,v_2)) = f((1,2)+t(v_1,v_2)) = f((1+tv_1),(2+tv_2)) = (1+tv_1)(2+tv_2)^2$.

  Calcoliamo infine il valore della derivata $g'(0)$:

  $$g'(t) = v_1(2+tv_2)^2 + (1+tv_1)2(2+tv_2)v_2$$
  $$\implies g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 4v_1 + 4v_2$$

Teorema del calcolo delle derivate direzionali in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1,v_2)$ unitario ($|v| = 1$), se f è differenziabile in $(\overline{x},\overline{y})$, allora vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (v_1,v_2)\rangle = \partial_x f(\overline{x},\overline{y})v_1 + \partial_y f(\overline{x},\overline{y})v_2$$

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim_{t\to 0} \frac{f((\overline{x},\overline{y})+t(v_1,v_2))-f(\overline{x},\overline{y})}{t}$.

Per fare ciò utilizziamo la formula di Taylor, ottenendo $f((\overline{x},\overline{y}) + t(v_1,v_2)) - f(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), t(v_1,v_2)\rangle + o(|t(v_1,v_2)|)$.

Osserviamo che $|t(v_1,v_2)| = |t|\ |(v_1,v_2)|$ e, sapendo che $|(v_1,v_2)| = 1$, otteniamo $|t(v_1,v_2)| = |t|$, quindi $o(|t(v_1,v_2)|) = o(t)$.

Calcoliamo dunque il limite iniziale sostituendo ciò che abbiamo appena trovato:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), t(v_1,v_2)\rangle + o(t)}{t} = \lim_{t\to 0}(\langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (v_1,v_2)\rangle + \frac{o(t)}{t}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (v_1,v_2)\rangle$$

Derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \overline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1,\dots,v_n)$ unitario ($|v| = 1$). La **derivata direzionale** di f in $\overline{x}$ nella direzione $(v_1,\dots,v_n)$ è il limite, se esiste finito:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{x}+tv) - f(\overline{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}) = \partial_v f(\overline{x}) = D_v f(\overline{x})$$

Teorema del calcolo delle derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ unitario ($|v| = 1$), se f è differenziabile in $\overline{x}$, allora vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}) = \langle \nabla f(\overline{x}), v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} f(\overline{x}) v_k$$

▼ 3.4 - Direzione di massima crescita

Direzione di massima crescita in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2, f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ e $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) \neq (0,0)$.

È possibile derivare $f(\overline{x}, \overline{y})$ in ∞ direzioni v unitarie in $\mathbb{R}^2$. Cerchiamo la direzione v che renda massima la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$ e la chiameremo direzione di massima crescita v_{max}.

Scriviamo il gradiente di $f(\overline{x}, \overline{y})$ utilizzando le coordinate polari: $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, con $r = |\nabla f(\overline{x}, \overline{y})|$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

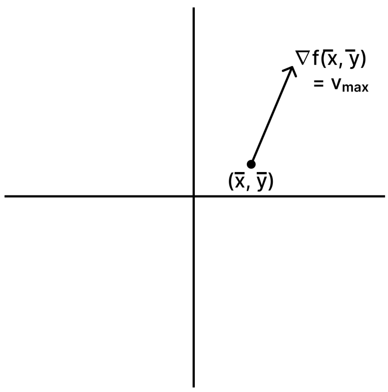
Dobbiamo trovare $v = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ ($|v| = 1$) tale che $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$ sia massima.

Ricordiamo che $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle = \langle (r \cos \varphi, r \sin \varphi), (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \rangle = r \cos \varphi \cos \vartheta + r \sin \varphi \sin \vartheta = r \cos(\varphi - \vartheta)$. Tale derivata è dunque massima se $\varphi - \vartheta = 1$, ovvero $\vartheta = \varphi \pm 2k\pi$, dunque tale direzione di massima crescita è quella del vettore gradiente e notiamo inoltre che $\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \rangle = r$.

In sintesi:

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2, f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ e $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) \neq (0,0)$, allora:

$$v_{max} = \frac{\nabla f(\overline{x}, \overline{y})}{|\nabla f(\overline{x}, \overline{y})|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = |\nabla f(\overline{x}, \overline{y})|$$

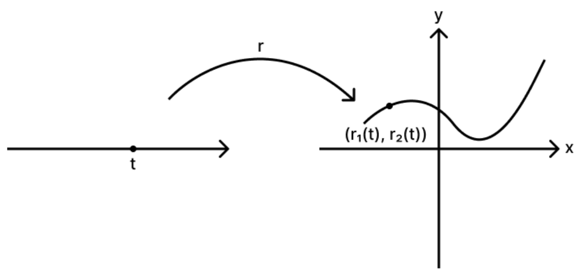


▼ 3.5 - Curve: velocità, derivate e insiemi di livello

Funzioni di curve parametrizzate

Le **funzioni di curve parametrizzate** sono del tipo $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$$



Esempio di funzione di curva parametrizzata $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Vettore velocità di una curva

Il **vettore velocità di una curva** r nel punto t indica la direzione tangente alla curva in tale punto e corrisponde al seguente vettore:

$$r'(t) = (r_1'(t), \dots, r_n'(t))$$

Velocità scalare di una curva

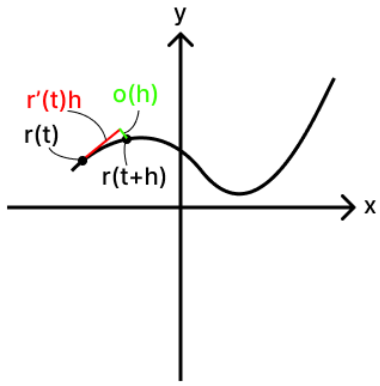
Data $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avente $r'(t)$ come vettore velocità, la **velocità scalare** di tale curva è lo scalare:

$$|r'(t)|$$

Formula di Taylor per una curva

Sia $r :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ derivabile in $t \in]a, b[$. Vale dunque:

$$\begin{cases} r_1(t+h) = r_1(t) + r_1'(t)h + o(h) \\ \dots \\ r_n(t+h) = r_n(t) + r_n'(t)h + o(h) \end{cases}$$



Esempio grafico dell'uguaglianza di Taylor in una curva.

Lunghezza di un tratto di curva

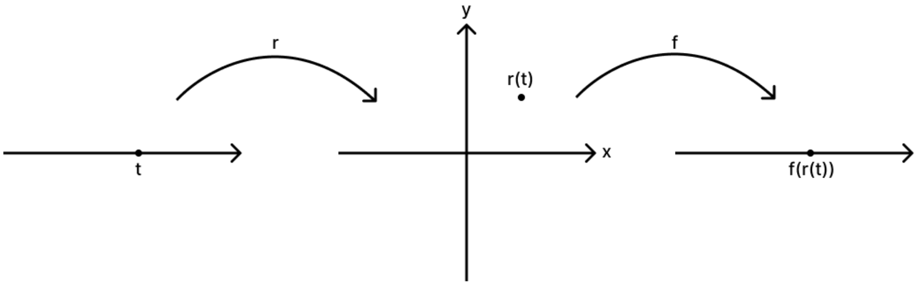
Sia $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se $r'(t) \neq 0$, allora la **lunghezza del tratto** compreso tra $r(a)$ e $r(b)$ vale:

$$lungh(a, b) = \int_a^b |r'(t)|dt$$

Derivata funzione composta

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Funzione composta: $f \circ r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(f \circ r)(t) = f(r(t))$.



Visualizzazione di una funzione composta.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile, $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivabile e sia definita $(f \circ r)(t) = f(r(t)) \ \forall \ t \in \mathbb{R}$. Tale funzione è **derivabile** $\forall \ t \in \mathbb{R}$ e vale:

$$(f \circ r)'(t) = \frac{d}{dt} f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

Dimostrazione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dobbiamo dimostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{f(r(t+h))-f(r(t))}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$.

Iniziamo scrivendo r e $f \circ r$ con Taylor:

$$r(t+h) - r(t) = r'(t)h + o(h)$$
$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r(t+h) - r(t)\rangle + o(|r(t+h) - r(t)|)$$

Sostituiamo la prima uguaglianza nella seconda espressione ottenendo:

$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)h + o(h)\rangle + o(|r(t+h) - r(t)|) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$$

A questo punto dividiamo il tutto per h, e otteniamo:

$$\frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle h}{h} + \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h)\rangle}{h} + \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h}$$

Calcoliamo dunque $\frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle h}{h} + \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h)\rangle}{h} + \frac{o(|r(t+h)-r(t)|)}{h}$ per $H \to 0$:

$$1. \frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle h}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$$
$$2. \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h)\rangle}{h} = \langle \nabla f(r(t)), \frac{o(h)}{h}\rangle = 0$$
$$3. \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h} \approx \frac{o(h)}{h} = 0 \quad (|r(t+h) - r(t)| \approx h \text{ viene lasciato informale})$$

Otteniamo infine l'uguaglianza:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$$

Esercizi

- Date $f(x,y) = \ln(1 + xy^2)$ e $r(t) = (t^2, e^{2t})$ scrivere $f \circ r$ e calcolare $(f \circ r)'(t)$ sia direttamente che con il teorema.

  Per calcolare $f \circ r$ basta sostituire $r_1(t)$ e $r_2(t)$ a x e y:

  $$f(r(t)) = \ln(1 + t^2 e^{4t})$$

  Calcolando $(f \circ r)'(t)$ direttamente otteniamo:

  $$(f \circ r)'(t) = \frac{2te^{4t} + 4t^2 e^{4t}}{1 + t^2 e^{4t}}$$

  Utilizzando il teorema dobbiamo invece prima calcolare $\nabla f(x,y)$ e $r'(t)$:

  $$\nabla f(x,y) = (\frac{y^2}{1+xy^2}, \frac{2xy}{1+xy^2}), \quad r'(t) = (2t, 2e^{2t})$$

  Calcoliamo poi $\nabla f(r(t)) = (\frac{e^{4t}}{1+t^2e^{4t}}, \frac{2t^2e^{2t}}{1+t^2e^{4t}})$ e infine la derivata:

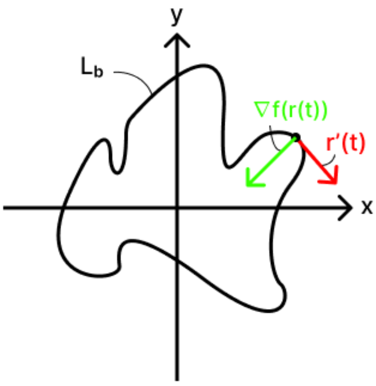
  $$(f \circ r)'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle = \frac{2te^{4t}}{1+t^2e^{4t}} + \frac{4t^2e^{4t}}{1+t^2e^{4t}} = \frac{2te^{4t} + 4t^2e^{4t}}{1+t^2e^{4t}}$$

Insiemi di livello

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile e $b \in \mathbb{R}$. Si dice **insieme di livello** il seguente insieme:

$$L_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = b\}$$

È possibile inoltre costruire una curva $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $r(t) \in L_b, \forall\, t \in \mathbb{R}$ e quindi $f(r(t)) = b, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Notiamo dunque, visto che $f \circ r$ è costante in t, la sua derivata $\frac{d}{dt} f(r(t)) = 0$, dunque anche $\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle = 0$, il che implica che il gradiente della funzione f calcolato in un qualunque punto di L_b è perpendicolare alla derivata della curva r calcolata in quel punto.



Perpendicolarità tra vettore gradiente e derivata della curva $r(t) \in L_b$.