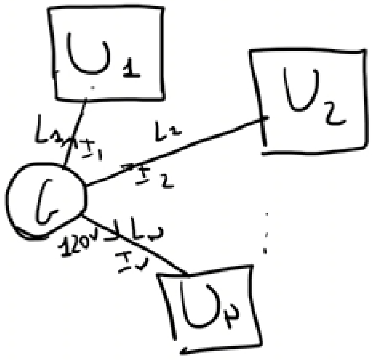
Regime sinusoidale



$$I_1 = \frac{P_1}{V_n} \uparrow \qquad P_1 \uparrow \;\to\; I_1 \uparrow$$

$$P_{diss} = R \cdot I^2$$
$$R \to \rho \frac{l}{S}$$

Solitamente, in regime stazionario un generatore viene usato da tanti utilizzatori, tramite dei collegamenti. Ovviamente abbiamo perdite di potenza, la potenza dissipata. Dobbiamo ridurre il più possibile queste perdite. Quali sono le possibilità?

Si potrebbe ridurre il rho, quindi questo vuol dire cambiare il materiale, di solito si prende il rame.

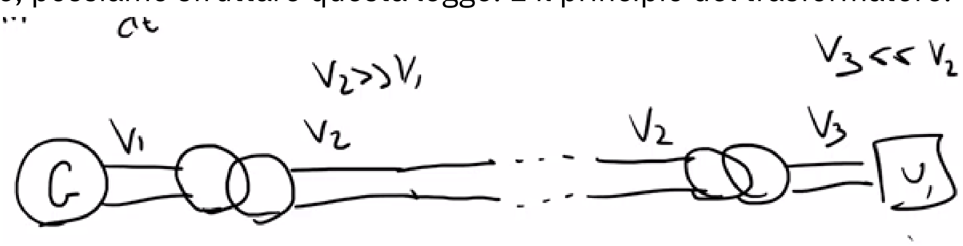
Un'altra possibilità sarebbe quella di ridurre l, questo è un problema (sarebbe come mettere un generatore di una città in città).

Potremmo aumentare la sezione del cavo, questo significherebbe aumentare la quantità di materiali, di costi. È un problema.

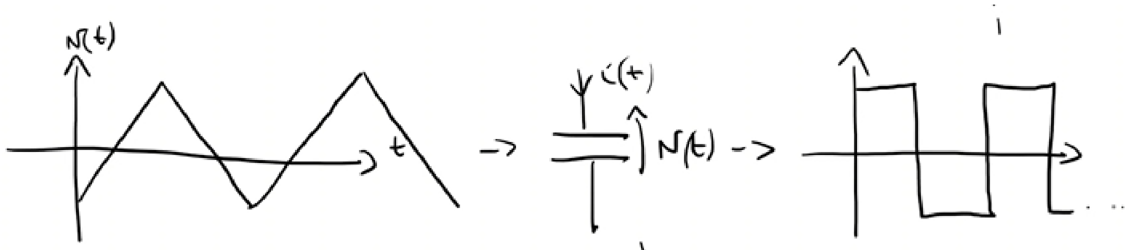
Un'altra possibilità è quella di aumentare la tensione, tuttavia dovremmo fare qualche considerazione. Questa è la legge di Faraday.

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

In regime stazionario, è a 0. Se lavoriamo in regimi in cui ci sono variazioni, tra cui il regime sinusoidale, possiamo sfruttare questa legge. È il principio del trasformatore.



Perché il regime sinusoidale? Perché un qualunque segnale periodico, tramite Fourier, è scrivibile come una combinazione di sinusoidi.



$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

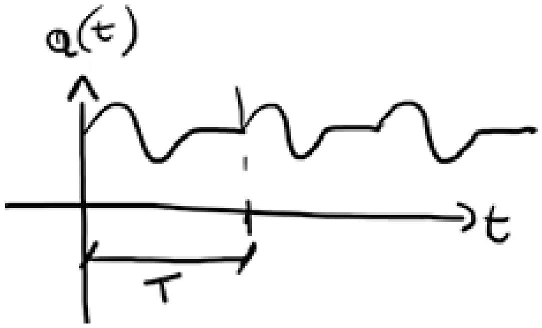
Segnali periodici

Una grandezza tempovariante si dice periodica quando si ripete ad ogni intervallo di tempo T.

mercoledì 20 aprile 2022 17:03

Una grandezza tempovariante $a(t)$ si definisce periodica quando si ripete ad ogni periodo T:

$$a(t) = a(t + \underbrace{n}_{\text{numero intero}} \overbrace{T}^{\text{PERIODO}}) \quad \forall t$$



T : PERIODO [s]

f : FREQUENZA [1/s] [Hz] $= \frac{1}{T}$

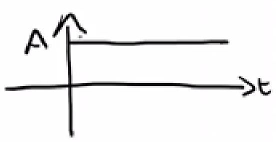
Cosa possiamo definire sul segnale? Il valore medio e il valore efficace.

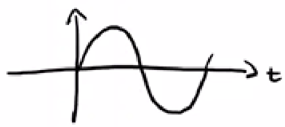
A_m : VALORE MEDIO : $A_m = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt$

A_{eff} : VALORE EFFICACE : $A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)\,dt}$

Il valore medio è piuttosto chiaro. Cos'è il valore efficace?

Supponiamo di avere un resistore e 2 segnali: uno continuo e uno periodico.





Il valore efficace ci dice quanta potenza viene dissipata dal resistore. Possiamo confrontare i 2 segnali col valore efficace, per vedere quale dissipa di più.

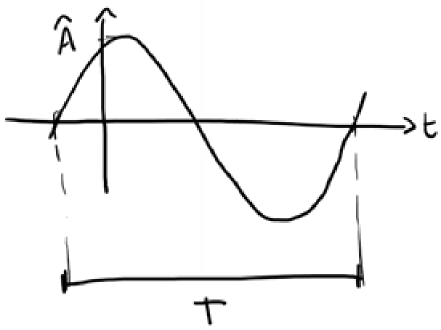
SEGNALI PERIODICI

SEGNALI ALTERNATI ($A_m = 0$) VALORE MEDIO NULLO

SEGNALI SINUSOIDALI

Segnali sinusoidali

$$a(t) = \underbrace{\hat{A}}_{\text{VALORE DI PICCO}} \cos(\overbrace{\omega}^{\text{PULSAZIONE}} t + \underbrace{\alpha}_{\text{FASE}}) \qquad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Se calcolassimo il valore medio di questo segnale:

$$A_m = \text{val. medio} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{A}\cos(\omega t + \alpha)\,dt = 0$$

Vuol dire che le aree sottese dalla curva sono uguali.
Andiamo a calcolare il valore efficace.

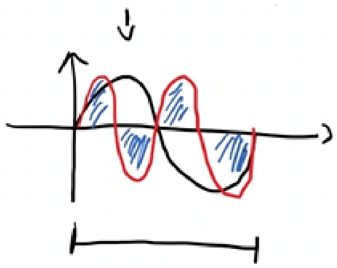
$$A = \text{val.eff.} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [\hat{A}\cos(\omega t + \alpha)]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{A}^2 \cos^2(\omega t + \alpha)\,dt} = \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \alpha)\,dt} =$$

FORMULA DI DUPLIC.
$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)}{2}\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\alpha)\,dt\right]}$$



$$= \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cancel{\cos(2\omega t + 2\alpha)\,dt}\right]}$$

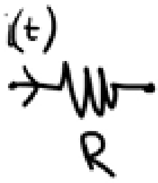
Un integrale si annulla, perché le aree sottese sono equivalenti.

$$= \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{\cancel{T}}\left(\frac{1}{2}\cancel{T}\right)} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underbrace{A}_{\text{VAL. EFF.}} = \frac{\hat{A}}{\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{FATTORE DI FORMA}}}$$

SEMPRE VERO PER UNA SINUSOIDE

Data una sinusoide, il suo valore efficace è sempre il valore di picco diviso radice di 2. La radice di 2 è definita anche fattore di forma.

Ritorniamo all’esempio del resistore. Vogliamo calcolare la potenza media dissipata dal resistore.



$$p(t) = R\,i^2(t)$$

Nel nostro caso, i di t è una sinusoide.

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \alpha)$$

Quant’è la potenza media?

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T R\,i^2(t)\,dt$$

Calcolo mediamente quanto dissipo sul resistore.

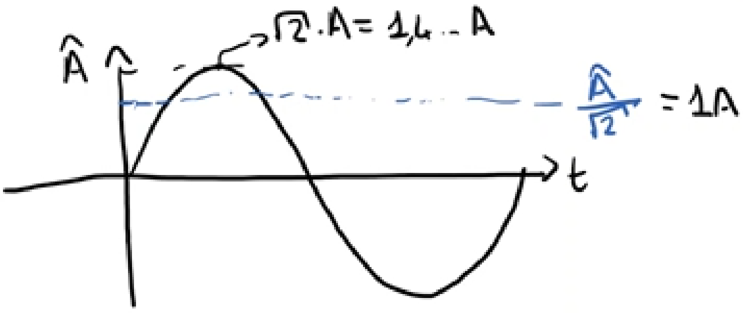
Si può riscrivere come:

$$R\,\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$$

La potenza istantanea varia nel tempo. La potenza media no.

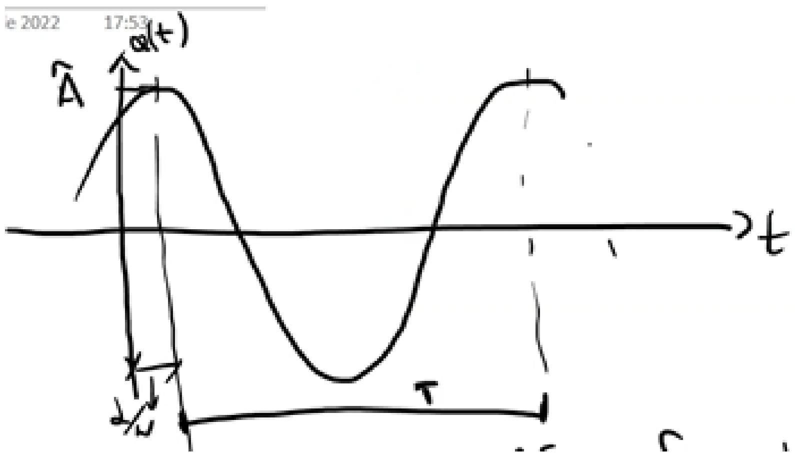
$$\underbrace{\int_0^T i^2(t)\,dt}_{I^2}$$

L’integrale equivale al quadrato del valore efficace.
Cosa vuol dire?



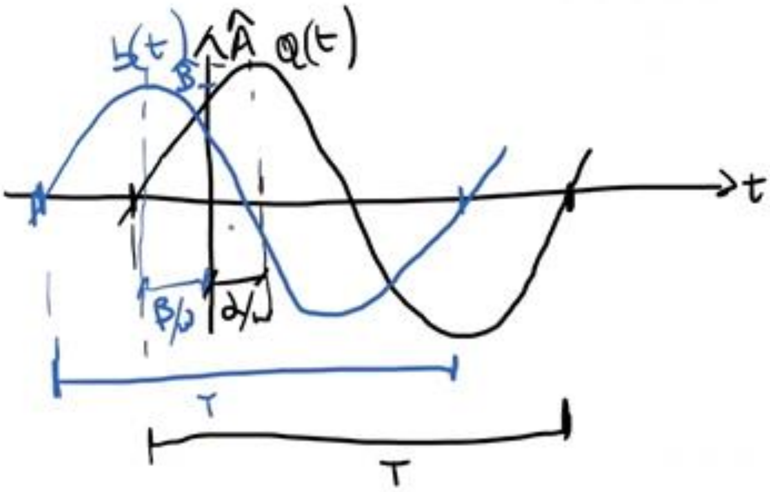
Quello che ci dice il valore efficace è: una corrente DC di 1 A comporta una potenza dissipata sul resistore pari a quella di una corrente sinusoidale di valore efficace pari a 1 A.
Una sinusoide è completamente definita da 3 parametri:

- Valore massimo $\hat{A}$ o val. efficace A : $A = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$
- pulsazione ω o frequenza f o periodo T : $f = \frac{1}{T}$; $\omega = 2\pi f$
- fase α



$$\left.\begin{aligned} a(t) &= \hat{A}\cos(\omega t+\alpha) \\ b(t) &= \hat{B}\cos(\omega t+\beta) \end{aligned}\right\} \text{SEGNALI ISOFREQUENZIALI}$$

Hanno lo stesso periodo.



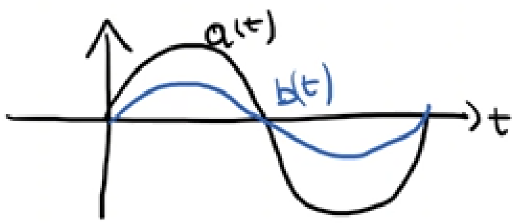
Possiamo definire uno sfasamento.

$$\varphi = \text{sfasamento} = \alpha - \beta \quad (\text{DIFFERENZA DI FASE})$$

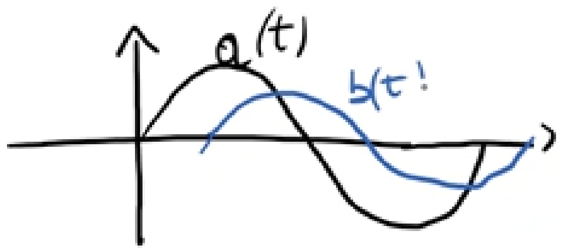
Se spostassimo l'asse delle origini, avremmo alfa e beta diversi, tuttavia lo sfasamento rimarrebbe sempre lo stesso.

Analizziamolo.

$\varphi = 0$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in FASE

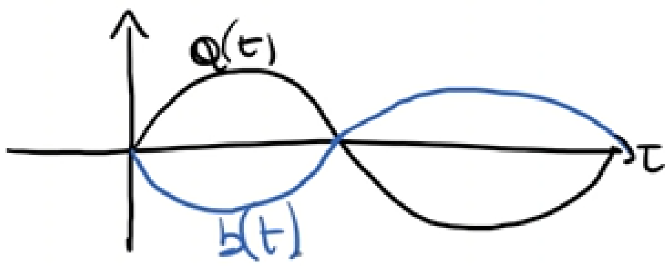


$\varphi > 0$: $a(t)$ é in ANTICIPO rispetto a $b(t)$
$b(t)$ é in RITARDO rispetto a $a(t)$



E viceversa.

$\varphi = \pm\pi$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in OPPOSIZIONE DI FASE



$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in QUADRATURA

Fasore

Rappresenteremo una grandezza sinusoidale tramite un numero complesso (un vettore). Questo ci permetterà di risolvere i circuiti in maniera più agevole.

Ricordiamo l'identità di Eulero.

IDENTITÀ DI EULERO: $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$

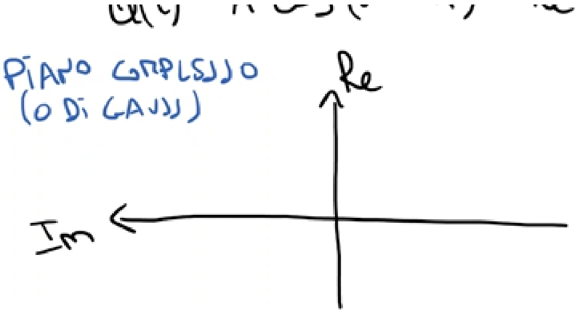
OPERATORE COMPLESSO $= \sqrt{-1}$

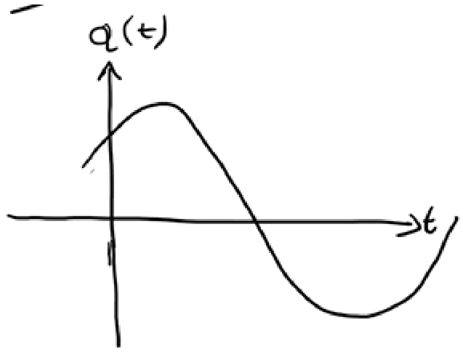
$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

Se avessimo un segnale a di t.

$$a(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \alpha) = Re\left[\hat{A}\, e^{j(\omega t + \alpha)}\right]$$

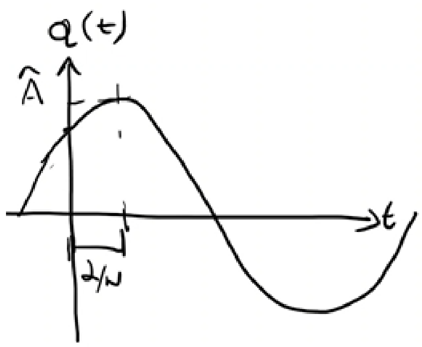
Introduciamo il piano complesso, o di Gauss.



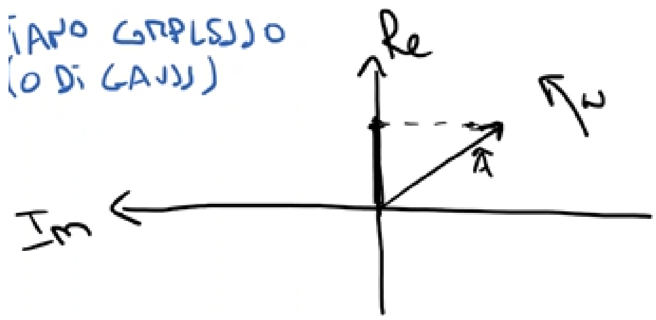


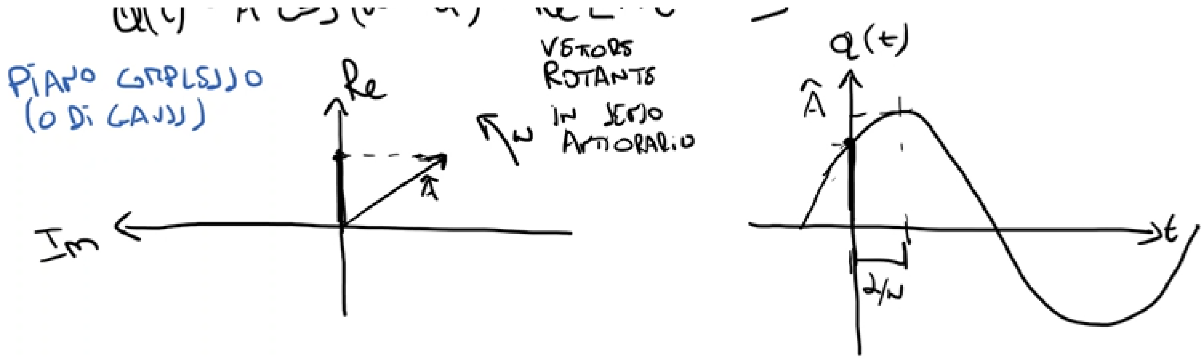
Nell'altro piano abbiamo la sinusoide.

All'inizio abbiamo un certo sfasamento.

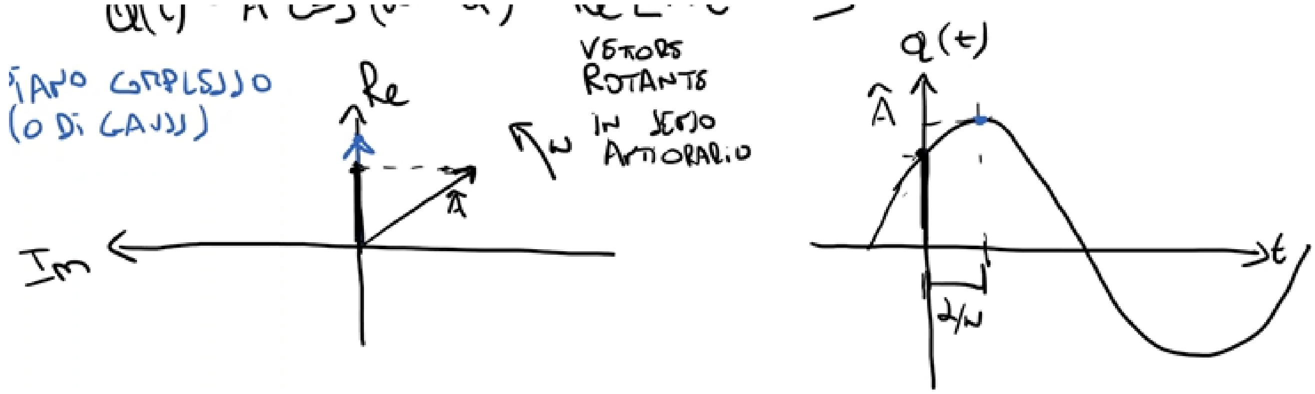


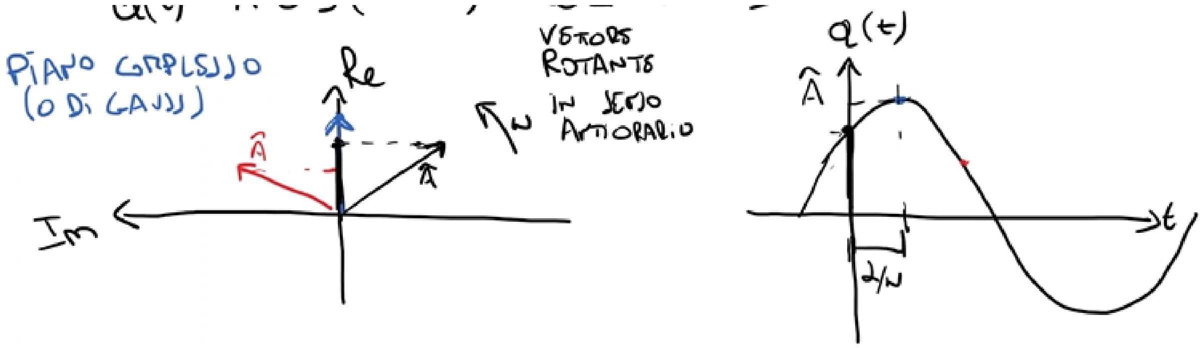
Rappresentiamo il punto sull’asse nel piano di Gauss.



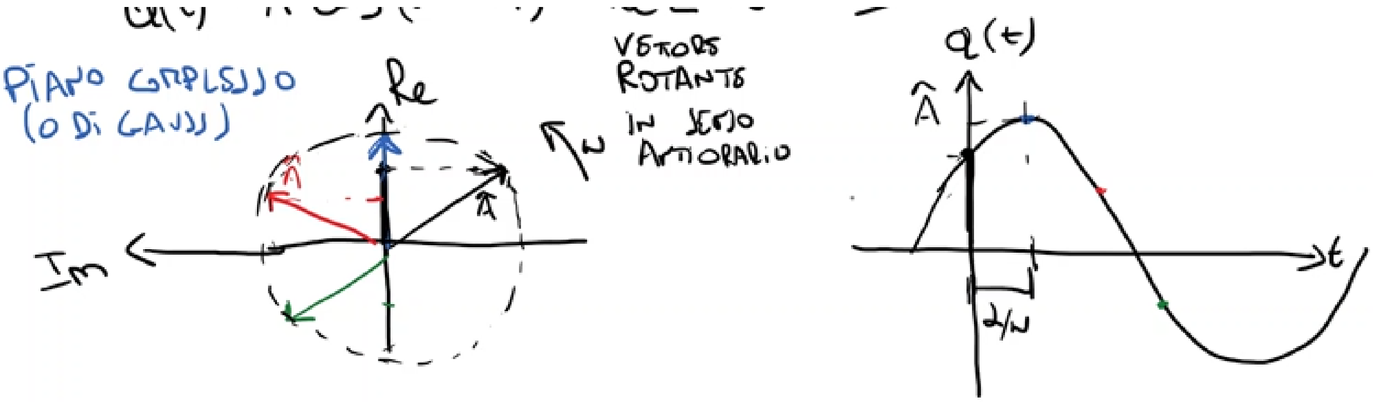


È un vettore rotante in senso antiorario. Se voglio rappresentare il primo picco in blu:





Il modulo del vettore è sempre A cappello.



In pratica, questo vettore costruisce una circonferenza nel piano complesso, una circonferenza di raggio A cappello.

Il vettore ruota con una pulsazione omega. Possiamo vedere la sinusoide come la parte reale del complesso. Se proiettiamo la parte reale che cambia nel tempo, otteniamo il grafico di destra. Abbiamo rappresentato il vettore nel piano complesso.

$$\mathrm{Re}\Big[\overbrace{\hat{A}\, e^{j(\omega t+\alpha)}}^{\text{VETTORE ROTANTE NEL PIANO COMPLESSO}}\Big]$$

Cosa succede se abbiamo diverse sinusoidi?

SEGNALI ISOFREQ.

$$\downarrow$$

$$q_1 = \hat{A}_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$
$$q_2 = \hat{A}_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$
$$\vdots$$
$$q_n = \hat{A}_n \cos(\omega t + \alpha_n)$$

Ogni sinusoide ha il suo vettore corrispondente.

SEGNALI ISOFREQ.

$$a_1 = \hat{A}_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \longleftrightarrow \hat{A}_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)}$$

$$a_2 = \hat{A}_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \longleftrightarrow \hat{A}_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \hat{A}_n \cos(\omega t + \alpha_n) \longleftrightarrow \hat{A}_n e^{j(\omega t + \alpha_n)}$$

Li possiamo riscrivere come:

SEGNALI ISOFREQ.

$$a_1 = \hat{A}_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \longleftrightarrow \hat{A}_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)} = \hat{A}_1 e^{j\omega t} e^{j\alpha_1}$$

$$a_2 = \hat{A}_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \longleftrightarrow \hat{A}_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)} = \hat{A}_2 e^{j\omega t} e^{j\alpha_2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \hat{A}_n \cos(\omega t + \alpha_n) \longleftrightarrow \hat{A}_n e^{j(\omega t + \alpha_n)} = \hat{A}_n e^{j\omega t} e^{j\alpha_n}$$

Notiamo che c'è un termine uguale per tutti, il fattore rotante.

$$\hat{A}_1 \boxed{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_1}$$

$$\hat{A}_2 \boxed{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_2}$$

$$\hat{A}_n \boxed{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_n}$$

Tutte le sinusoidi differiscono per l'ampiezza e lo sfasamento alfa.

Tutti i vettori ruotano alla stessa pulsazione in senso antiorario nel piano complesso.

Evidenziamo il valore efficace.

$$\hat{A}_1 e^{j\omega t} e^{j\alpha_1} = \sqrt{2} A_1 e^{j\omega t} e^{j\alpha_1}$$

$$\hat{A}_2 e^{j\omega t} e^{j\alpha_2} = \sqrt{2} A_2 e^{j\omega t} e^{j\alpha_2}$$

$$\hat{A}_n e^{j\omega t} e^{j\alpha_n} = \sqrt{2} A_n e^{j\omega t} e^{j\alpha_n}$$

FATTORE ROTANTE

Posso tralasciare il fattore rotante, è uguale per tutti. Tralasciamo anche la radice di 2.

Ci interessano:

$$\sqrt{2}\, A_n\, e^{j\omega t}\, e^{j\alpha_n}$$

Il fasore è uguale a:

$$\text{Fasore} \quad \underline{A} = A e^{j\alpha}$$

Perché il fattore rotante è uguale per tutti. La radice di 2 allo stesso modo. Ho evidenziato il valore efficace. La barretta può essere anche sotto.

$$\boxed{\text{Fasore} \quad \underline{A} = A e^{j\alpha}}$$

FASE INIZIALE

VAL. EFF.

VETTORE NEL PIANO COMPLESSO

Questa è una definizione. Molto spesso, per esempio in telecomunicazioni, al posto del valore efficace c'è il valore di picco. In elettrotecnica si definisce con il valore efficace, perché è più legato alla potenza.

Ovviamente, il metodo fasoriale è valido per i segnali isofrequenziali.

Nel caso della sinusoide siamo nel piano del tempo, nel caso del fasore siamo nel piano complesso.