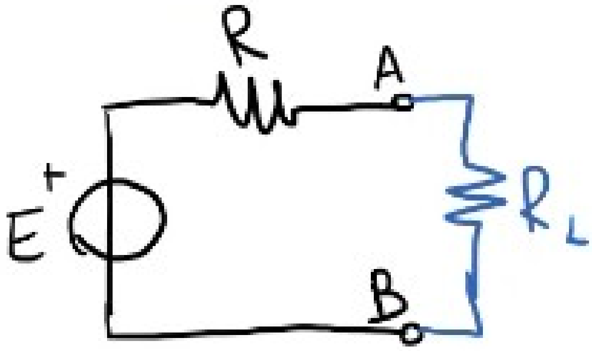
Teorema del trasferimento di potenza

Supponiamo di avere un generatore di tensione indipendente, una resistenza in serie (possiamo vederlo come un circuito equivalente di Thevenin) con i morsetti A e B. Inseriamo un carico RL.



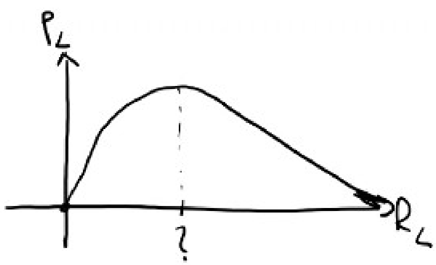
Quale valore di R_L per avere P_L MAX?

Quale valore di RL per ottenere il massimo della potenza?

Scriviamo PL.

$$P_L = R_L \cdot I^2 = R_L \left(\frac{E}{R+R_L}\right)^2$$

Vediamo come varia. Se RL fosse 0, quanto sarebbe la potenza? VL, la tensione ai capi, sarebbe o, quindi avremmo una potenza nulla. Con RL infinito cosa accadrebbe? La corrente sul circuito sarebbe 0, quindi anche la potenza 0. Ci aspettiamo qualcosa di questo genere.



La domanda è quale sia il valore massimo? Come si fa? Imponiamo la derivata uguale a 0.

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = E^2 \frac{\partial}{\partial R_L}\left[\frac{R_L}{(R+R_L)^2}\right]$$

$$= E^2 \left[\frac{(R+R_L)^2 - 2R_L(R+R_L)}{(R+R_L)^4}\right] = 0$$

Questo sarà 0 quando il numeratore sarà 0.

$$R^2 + R_L^2 + 2RR_L - 2RR_L - 2R_L^2 = 0$$

$$R^2 + \cancel{R_L^2} + \cancel{2RR_L} - \cancel{2RR_L} - \cancel{2}R_L^2 = 0 \rightarrow R = R_L$$

Avremo il massimo trasferimento di potenza al carico, quando esso è uguale alla resistenza in serie al generatore.

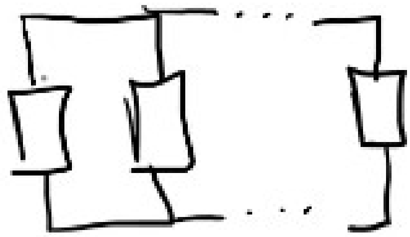
$$P_{L,max} = R\frac{E^2}{(R+R)^2} = \cancel{R}\frac{E^2}{4R^{\cancel{2}}} = \frac{E^2}{4R}$$

Teorema di Millman

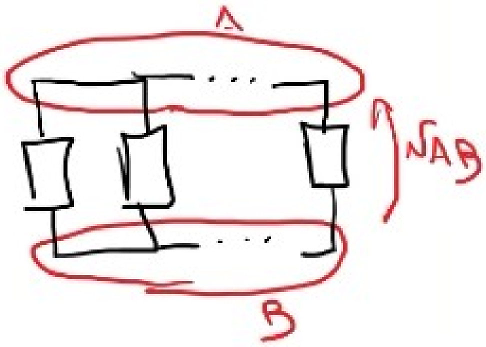
Ipotesi: linearità.

Data una rete con due o più lati in parallelo, la tensione ai capi della rete è pari al rapporto delle correnti di cortocircuito di ogni singolo lato e la sommatoria delle conduttanze di ogni lato.

Se avessimo una rete fatta in questo modo:



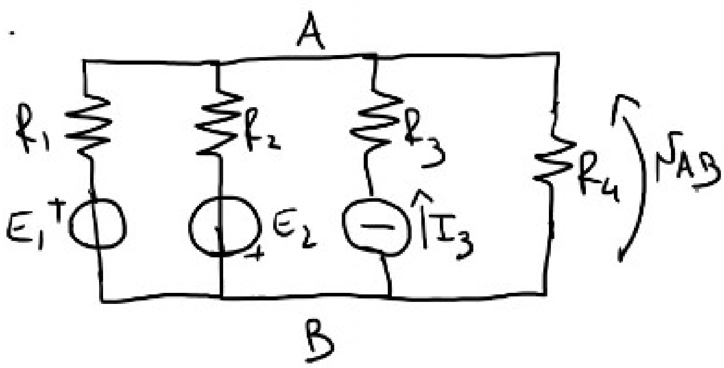
Abbiamo i nodi A e B.



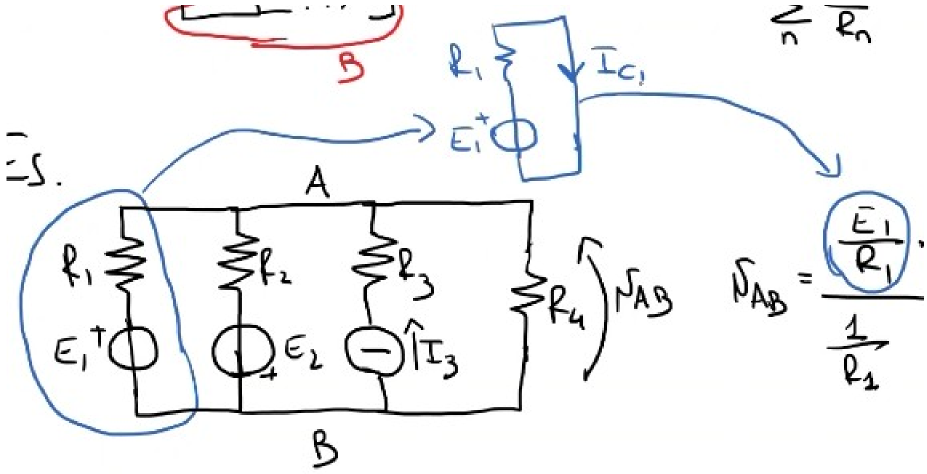
Solo in questa situazione, abbiamo:

$$V_{AB} = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k} + \sum_j i_j}{\sum_n \frac{1}{R_n}}$$

Vediamo un esempio. Supponiamo di avere questo circuito.

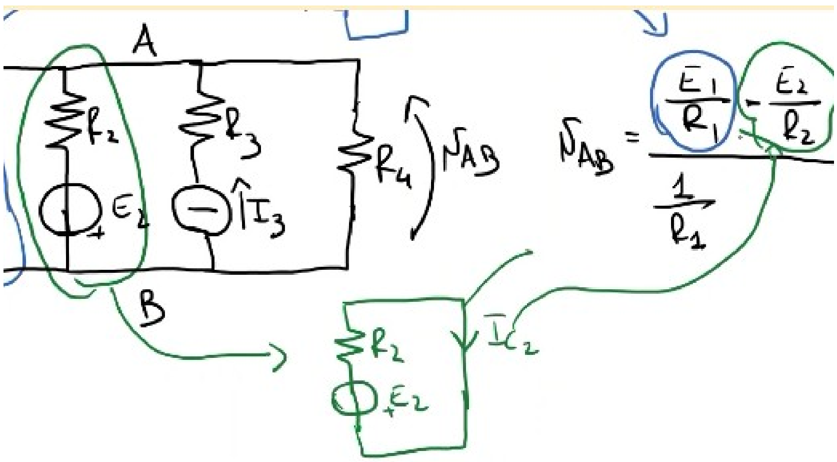


Cosa ci dice Millman? Somma delle correnti di cortocircuito. Se cortocircuitassimo il primo lato avremmo:



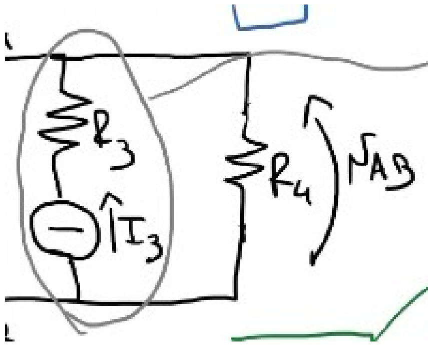
$$\frac{\bar{E}_1}{R_1}$$

Nel secondo lato avremmo verso opposto.



$$-\frac{\bar{E}_2}{R_2}$$

Al terzo lato abbiamo la corrente I3.



$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1}}$$

$$+ I_3$$

Al quarto lato, non c'è corrente, c'è solo una resistenza.

Al denominatore, la somma delle conduttanze, tranne quelle in cui ci sono i generatori di corrente. In questo caso nel lato 3.

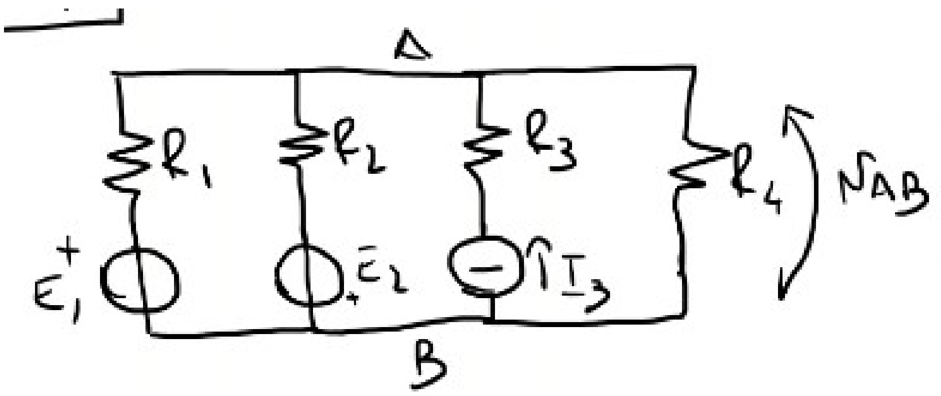
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}$$

Perché nel lato 3 la conduttanza è nulla? Se passivassimo il generatore di corrente, avremmo il circuito aperto, quindi resistenza infinita, quindi conduttanza 0.

Questa è la tensione equivalente tra i terminali A e B.

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}}$$

Vediamo la dimostrazione.



Come possiamo scrivere VAB rispetto al primo lato?

$$v_{AB} = E_1 - R_1 i_1$$

E quindi:

$$\rightarrow i_1 = \frac{E_1 - v_{AB}}{R_1}$$

Andiamo a scrivere la seconda.

$$v_{AB} = -E_2 + R_2 i_2 \rightarrow i_2 = \frac{E_2 + v_{AB}}{R_2}$$

Stiamo calcolando le correnti sui lati, nei primi 2 ho usato la LKT. Vediamo quella al lato 3.

$$i_3 = I_3$$

Nell’ultimo caso:

$$i_4 = \frac{v_{AB}}{R_4}$$

Vado a scrivere la LKC nel nodo A.

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

Quindi avremo:

$$\Rightarrow \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1} - \frac{E_2 + V_{AB}}{R_2} + I_3 - \frac{V_{AB}}{R_4} = 0$$

Un’equazione in un’incognita, VAB.

$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{V_{AB}}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{V_{AB}}{R_2} + I_3 - \frac{V_{AB}}{R_4} = 0$$

$$V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_3$$

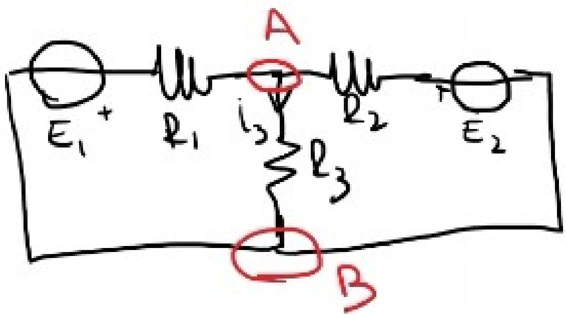
Cioè:

4

$$\rightarrow V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}}$$

La VAB che abbiamo appena calcolato risulta pari a quella calcolata con il teorema di Millman. Perché semplifica la vita? Perché non dovremmo scrivere le LKT e la LKC, sarebbe corretto, ma perderemmo molto tempo. Per risolvere un circuito abbiamo diversi metodi, tutti corretti, ma ce ne sono più comodi di altri, con l’esperienza si può capire quale sia più veloce, se non richiesto un particolare metodo.

Risolviamo l’esercizio iniziale con il teorema di Millman.



$i_3 = ?$

Abbiamo 3 lati in parallelo. Quindi possiamo applicare il teorema di Millman.

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

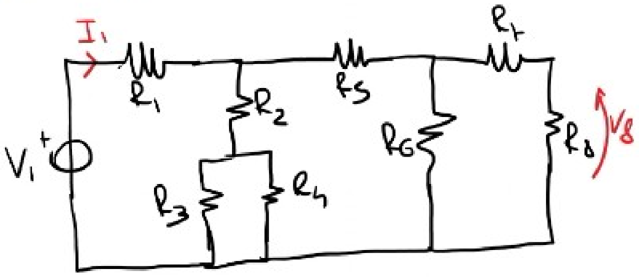
Quanto varrà i3?

$$\rightarrow i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}$$

In questo caso, Millman è molto più veloce degli altri metodi visti.

Esercizio

18 marzo 2022 10:11



$V_1 = 15\,V$

$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 25\,\Omega$

$R_3 = 50\,\Omega$

$R_4 = 20\,\Omega$

$R_5 = 24\,\Omega$

$R_6 = 20\,\Omega$

$R_7 = 50\,\Omega$

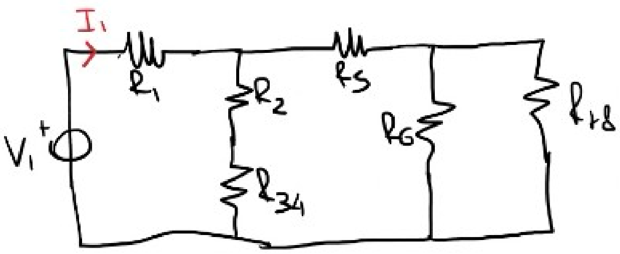
$R_8 = 30\,\Omega$

$I_1 = ?$

$V_8 = ?$

Il metodo di Tableau ci porterebbe a tante equazioni. Per cui, usiamo il metodo delle semplificazioni. In che senso? Vediamo parti del circuito con qualcosa con cui sostituirlo.

La prima cosa che possiamo notare è R3 e R4 sono in parallelo, R7 e R8 sono in serie.

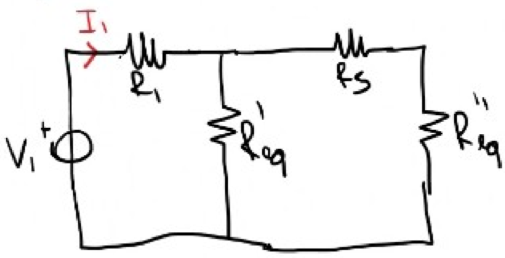


$R_{34} = R_3 // R_4 = 14{,}3\,\Omega$

$R_{78} = 80\,\Omega$

Continuiamo a vedere resistenze che sono in serie o in parallelo.

R2 e R34 sono in serie, R6 e R78 sono in parallelo.

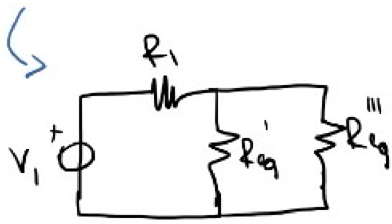


$R'_{eq} = R_2 + R_{34} = 39{,}3\,\Omega$

$R''_{eq} = R_6 // R_{78} = 16\,\Omega$

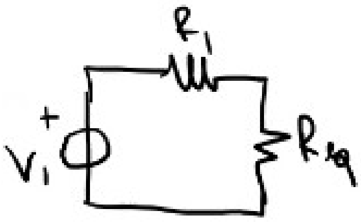
Possiamo vedere altre cose che si possono semplificare.

R5 e Req'' sono in serie.



$R'''_{eq} = R_5 + R''_{eq} = 40\,\Omega$

Questo circuito può essere ancora ridotto.



$$R_{eq} = R'_{eq} /\!/ R'''_{eq} = 19{,}8\,\Omega$$

Quindi abbiamo:

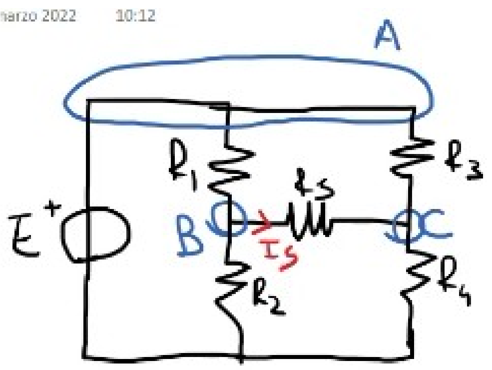
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_{eq}} \simeq 0{,}5\,A$$

Abbiamo calcolato la prima incognita.

$$V_{eq} = I_1 \cdot R_{eq} = 9{,}9\,V$$

Veq vuol dire V8, la seconda incognita.

Esercizio



$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 40\,\Omega$

$R_3 = 20\,\Omega$

$R_4 = 5\,\Omega$

$R_5 = 12\,\Omega$

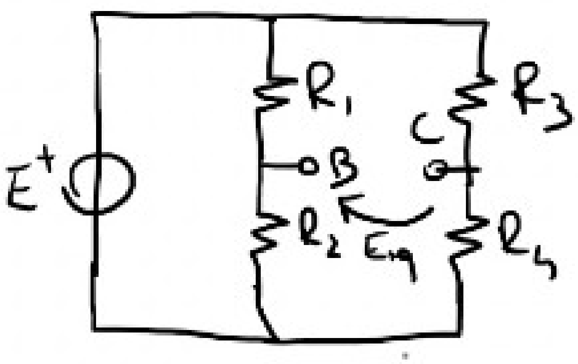
$I_5 = ?$

Dobbiamo risolverlo usando Thevenin. E è 10 V.

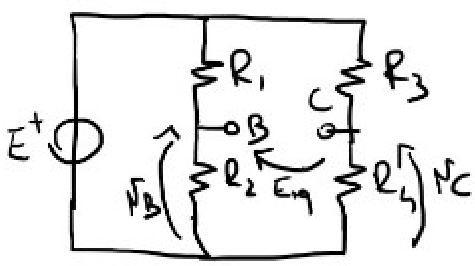
Come facciamo a calcolare i5? Tra i nodi B e C, così si semplifica il circuito, applicando Thevenin tra i nodi B e C.

Dobbiamo trovare la tensione equivalente di Thevenin e la resistenza.

Per calcolare la tensione equivalente, dobbiamo vederla a circuito aperto tra B e C.



Come possiamo calcolare la Eeq?



$$E_{eq} = V_{BC} = V_B - V_C$$

Il primo metodo può essere il partitore di tensione.

$$V_B = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

VC si può calcolare in modo diverso. Voglio passare per la corrente i3.

$$i_3 = \frac{E}{R_3 + R_4}$$

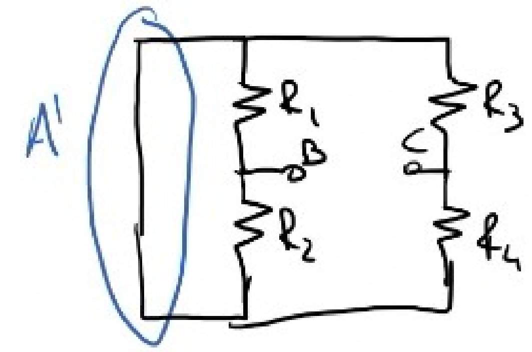
Quanto sarà VC?

$$\rightarrow V_C = R_4 \cdot i_3$$

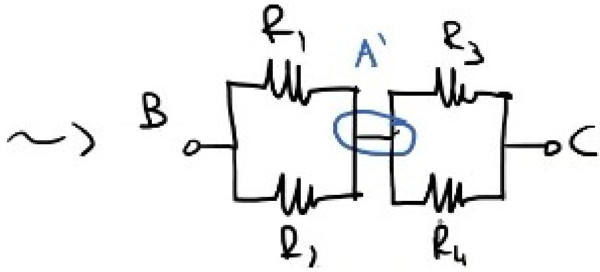
$$E_{eq} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} - E \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 6V$$

Questa è la tensione equivalente.

Req è la resistenza equivalente, si trova passivando tutti i generatori.



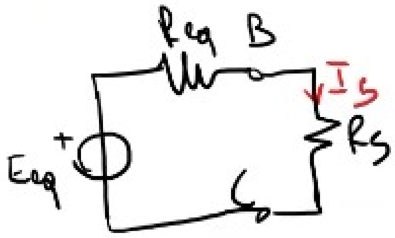
R1 e R2 sono in parallelo perché connessi a A’. Stesso discorso per R3 e R4, connessi a A’. Sarebbe come:



La resistenza equivalente sarà:

$$R_{eq} = R_1 // R_2 + R_3 // R_4 = 12\,\Omega$$

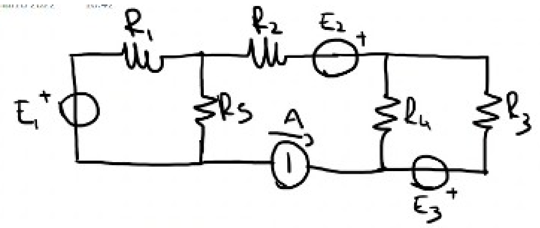
Riscriviamo il circuito come Thevenin.



$$I_5 = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_5} = \frac{6}{24} = 0{,}25\,A$$

Questa è la nostra I5.

Esercizio



$E_1 = 50\,V$
$E_2 = 30\,V$
$E_3 = -20\,V$
$A = 10\,A$

$R_1 = R_5 = 5\,\Omega$
$R_2 = 2{,}5\,\Omega$
$R_3 = R_4 = 10\,\Omega$

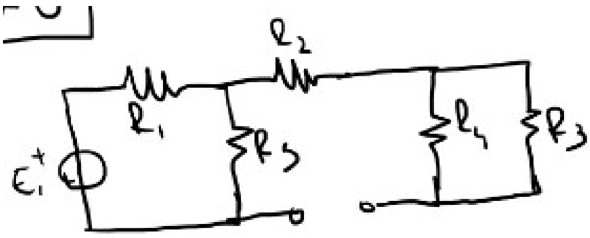
Calcolare la potenza assorbita da R_4 e R_5

Bisogna usare la sovrapposizione degli effetti.

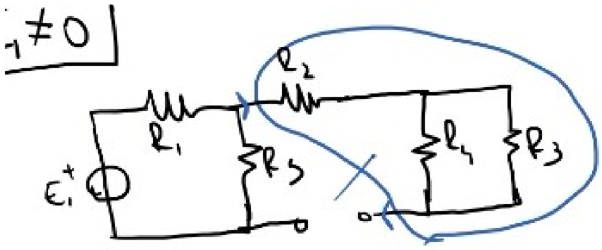
La prima cosa da ricordarci è vedere se ci sono cose che si possono semplificare. Ci sarebbe una stella, ma convertita a triangolo non cambierebbe nulla. Dobbiamo calcolare la potenza assorbita, possiamo fare la sovrapposizione sulla potenza? No. Quindi prima dovremo fare la sovrapposizione degli effetti per la corrente. Dobbiamo prendere una causa e passivare le altre.

Per calcolare la potenza su R4 e R5, le nostre incognite sono I4 e I5.

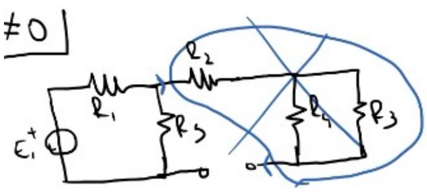
Cominciamo con E1.



Se andassi a vedere una superficie chiusa sul circuito:



Le correnti entranti sono uguali alle correnti uscenti, ma la corrente è 0, quindi si può togliere.



$r_5 =$

$I_4' = \varnothing$

$I_5' = \frac{E_1}{R_1 + R_5}$

E così via per le altre cause.