▼ **9.0 - Semantica intuizionista**

La **semantica intuizionista** è una teoria logica chiamata in questo modo in quanto si basa sulle idee dell'intuizionismo filosofico. In tale semantica infatti la matematica viene vista come un'invenzione, in quanto nessun suo teorema esiste in natura, ma sono tutti prodotti della mente umana.

Questa semantica viene anche detta semantica dell'evidenza, della conoscenza diretta o della calcolabilità, in quanto sostiene che la verità di un'affermazione matematica può essere stabilita solo attraverso la costruzione di un esempio concreto che la dimostri, e non attraverso la dimostrazione di una contraddizione, come può avvenire nella semantica classica.

So che c'è vs So chi è

- In logica **classica**: $\exists x.P(x)$ significa "so che **c'è** un x tale che P(x)".
- In logica **intuizionista**: $\exists x.P(x)$ significa "so **chi è** quell'x tale che P(x)", dunque dalla prova utilizzata per ottenere un $\exists$ è possibile ricavare un **algoritmo** per capire chi è.

Per questo motivo la logica intuizionista è molto più vicina e utile all'informatica. Le prove in logica intuizionista spesso sono dunque più complicate di quelle in logica classica, ma hanno un valore maggiore in quanto forniscono più informazioni.

Esempio:

- Dimostrare il seguente teorema: per ogni n, n è pari o n non è pari.
  - Dimostrazione classica: ovvio per il teorema del terzo escluso, in quanto un numero può essere solo o pari o dispari.

    Questa dimostrazione non ci fornisce un algoritmo per sapere se un certo numero è pari oppure non lo è, dunque ad esempio non possiamo sapere se il numero 5 è pari, ma sappiamo solo che o è pari o è dispari.
  - Dimostrazione intuizionista: procediamo per induzione strutturale su n.

    Caso 0: 0 = 2 * 0, dunque 0 è pari.

    Caso S m (successivo di m): per ipotesi induttiva m è pari oppure non lo è, dunque procediamo per casi:
    - m è pari: $\exists k.m = 2 \times k$, dunque $Sm = 2 \times k + 1$ non è pari in quanto non divisibile per 2.
    - m non è pari: $\exists k.m = 2 \times k + 1$, dunque $Sm = 2 \times k + 2 = 2 \times (k + 1)$ è pari in quanto divisibile per 2.

    Questa dimostrazione dunque contiene un algoritmo che ci consente di sapere se un certo numero è pari o non lo è, ad esempio sappiamo che il numero 5 è dispari perchè 4 è pari perchè 3 è dispari perchè 2 è pari perchè 1 è dispari perchè 0 è pari.

Un qualunque teorema del tipo $\forall i.\exists o.P(i, o)$, ovvero per ogni input i esiste un output o in relazione P con l'input, se viene dimostrato in logica intuizionistica la sua dimostrazione contiene un algoritmo per calcolare o a partire da i, mentre se viene dimostrato in logica classica la sua dimostrazione diventa molto più breve perchè svolge la metà del lavoro, in quanto ci dice solo se o esiste oppure no. Quando però non esiste alcun algoritmo in grado di calcolare o a partire da i le uniche dimostrazioni possibili sono classiche.

Valori di verità

Nella semantica classica:

- Il valore di verità di ogni enunciato è **sempre determinato**.
- Il valore di verità di ogni enunciato è **immutabile**.

Nella semantica intuizionista:

- Il valore di verità di ogni enunciato è determinato solo nel momento in cui se ne ha una prova/evidenza diretta (un **algoritmo**).
- Il valore di verità **può passare** dall'essere indeterminato all'avere un determinato valore di verità che non cambia più (nel momento in cui si scopre almeno un algoritmo o dimostro che non può esserci alcun algoritmo).