▼ **6.0 - Verità, conseguenza logica e sintassi della logica**

▼ **6.1 - Verità, conseguenza ed equivalenza logica**

Verità

Esistono verità associate al mondo sensibile, come quelle fisiche, chimiche ecc., ed esse sono definite tramite esperimenti ripetibili (es. se lascio un oggetto in aria questo cade). Queste verità sono però parametriche rispetto al mondo sensibile, ovvero cambiano in base alle proprietà del mondo in cui si trovano.

La logica però non si occupa di verità parametriche, ma di quelle assolute, ovvero associate ad aspetti immodificabili.

Esistono inoltre scienze "molli", che ci parlano del mondo sensibile, come la chimica o la fisica, e scienze "dure", che non ci parlano del mondo sensibile, come la matematica e l'informatica.

Verità in matematica

In una **teoria matematica**:

- Gli **assiomi** sono come le leggi fisiche, ci dicono tutto quello che supponiamo valere nei mondi che prendiamo in considerazione.
- Un **mondo** è una descrizione completa di un concetto di verità (tutto è definito). Gli assiomi tuttavia individuano una molteplicità di mondi, in quanto non permettono di definire tutto il mondo e molte cose possono essere sia vere che false, individuando in questo modo più mondi differenti tra loro.
- Un **modello matematico** della teoria è un qualunque mondo in cui tutti gli assiomi della teoria valgono.
- Una **proposizione** potrebbe essere sicuramente vera in tutti i modelli della teoria, sicuramente falsa oppure non definita, dunque o vera o falsa.

Esempio:

- Teoria:
  - Enti primitivi:
    - 0
    - $\leq$
  - Assiomi:
    - $\leq$ ha la proprietà simmetrica, transitiva e antiriflessiva.
    - $\forall n, 0 \leq n$.
- Proposizioni:
  - 1: $\forall x.x \leq 0 \Rightarrow x = 0$
  - 2: $\forall x, y.x \leq y \vee y \leq x$
- Modelli:
  - Modello 1:
    - Interpreto gli oggetti come numeri naturali.

        - 0 come numero 0.
        - $\leq$ come $\leq$ sui naturali.

        In questo modello possiamo osservare che tutti gli assiomi sono soddisfatti ed entrambe le proposizioni sono vere, dunque è un modello accettabile.

    - Modello 2:
        - Interpreto gli oggetti come numeri naturali.
        - 0 come numero 1.
        - $\leq$ come "divide".

        Anche in questo modello possiamo osservare che tutti gli assiomi sono soddisfatti ma in questo caso solo la prima proposizione è vera. Nonostante ciò rimane un modello accettabile.

    In particolare osserviamo che in tutti i modelli derivanti da questa teoria matematica la prima proposizione è vera, mentre la seconda può essere vera o falsa. Questo per via del fatto che gli assiomi della teoria permettono di ricavare la prima proposizione (utilizzando la proprietà antiriflessiva del $\leq$ e il secondo assioma), mentre ciò non avviene per la seconda proposizione.

Conseguenza logica degli assiomi

Dal momento in cui una proposizione può essere indefinita non ha senso chiedersi se sia vera o falsa, in quanto non sappiamo in quale mondo valutarla. Ha senso invece chiedersi se sia vera in tutti i modelli della teoria, e in tal caso diciamo che la proposizione è **conseguenza logica** degli assiomi.

La logica non studia dunque la verità, ma la conseguenza logica.

> Sia Γ un insieme di sentenze (o proposizioni) e F una proposizione, F è **conseguenza logica** di Γ (o $\Gamma \Vdash F$) se F è vera in tutti i mondi in cui tutte le proposizioni $G \in \Gamma$ sono vere.

Intuitivamente si comprende dunque che le sentenze di Γ sono dei vincoli per l'esistenza dei mondi, in quanto più sentenze ci sono meno saranno i mondi in cui la teoria è applicabile. Occorre arrivare al punto in cui gli assiomi descritti sono sufficienti a dimostrare ciò che interessa, lasciando comunque la possibilità di applicare la teoria a diversi contesti o mondi.

Se $\Gamma \Vdash F$ allora la verità di F, ovvero l'insieme dei mondi in cui F è vera, è un **sovrainsieme** della verità di Γ, ovvero l'insieme dei mondi in cui le proposizioni di Γ sono vere.

Equivalenza logica

> Siano F e G due sentenze, F è **logicamente equivalente** a G ($F \equiv G$) se $F \Vdash G$ e $G \Vdash F$, ovvero se F e G sono vere negli stessi mondi.

È possibile inoltre dimostrare che l'equivalenza logica è una relazione di equivalenza, ovvero è riflessiva ($F \equiv F$), simmetrica (se $F \equiv G$ allora $G \equiv F$) e transitiva (se $F \equiv G$ e $G \equiv H$, allora $F \equiv H$).

Quando una teoria è interessante?

Una teoria è **inconsistente** quando non ammette mondi, ovvero in nessun mondo tutti gli assiomi della teoria sono contemporaneamente veri.

Esempio: la teoria con i seguenti assiomi $0 = 1$, $0 \neq 1$, $\forall x.x = x$ è una teoria inconsistente, poichè non esiste un mondo in cui tutti e 3 valgono.

Inoltre, se Γ è una teoria inconsistente, allora per ogni proposizione F si ha che F è una conseguenza logica di Γ. Da questo fatto si ha che anche una proposizione falsa, l'assurdo, è conseguenza logica di Γ ($\Gamma \Vdash \bot$). È vero anche il contrario, ovvero che se l'assurdo è conseguenza logica di Γ ($\Gamma \Vdash \bot$), allora la teoria Γ è inconsistente, dunque:

$\Gamma \Vdash \bot$ ⇔ la teoria è inconsistente.

Tutte le teorie **consistenti** sono interessanti, in quanto hanno almeno un modello/mondo in cui gli assiomi valgono. In generale più una teoria ha applicazioni in modelli diversi, più essa è interessante.

▼ **6.2 - Connotazione, denotazione, invarianza per sostituzione**

Denotazione e connotazione

La **denotazione** rappresenta ciò che vuole essere identificato, mentre la **connotazione** indica la sintassi utilizzata per farlo. Notiamo dunque che la denotazione e le connotazioni stanno in rapporto uno a tanti, ovvero ci sono tanti modi per descrivere qualcosa.

Esempio:

- Denotazione: *computer*
- Connotazioni: elaboratore, pc, computer, dispositivo elettronico ecc.

Uso meta-linguistico e invarianza per sostituzione

L'uso **meta-linguistico** di un linguaggio avviene quando si utilizzano connotazioni per riferirsi ad altre connotazioni.

Esempio:

- "Io mento" è una connotazione utilizzata per descrivere una connotazione.

Siano x e y due connotazioni per descrivere la stessa denotazione, il principio di **invarianza per sostituzione** vale se per ogni contesto P[ ], dove per contesto si intende una connotazione avente un buco in cui inserire un'altra connotazione (es. "cane __ gatto", al posto di __ può essere inserita un'altra connotazione come mangia, abbaia ecc.), le due connotazioni P[x] e P[y] denotano la stessa cosa.

Il principio di invarianza per sostituzione ci permette di stabilire se un linguaggio è meta-linguistico o meno.

Esempio:

- "cat" e "gatto" denotano la stessa cosa, ma "cat è monosillabico" denota il vero, mentre "gatto è monosillabico denota il falso, dunque "essere monosillabico" fa un uso metalinguistico.
- "2" e "3-1" denotano la stessa cosa, e sia "2 è pari" che "3-1 è pari" denotano il vero, dunque "essere pari" non fa un uso meta-linguistico.

Definizioni

- **Sentenza**: connotazione che denote un valore di verità (vero o falso).

- **Connettivo**: connotazioni che combinano sentenze per ottenere una nuova sentenza. Esistono anche connettivi binari, che si applicano ad una sola sentenza, e quelli 0-ari, ovvero le due costati vero e falso.

  Per fare logica fisseremo la loro interpretazione ad essere la stessa in ogni mondo.