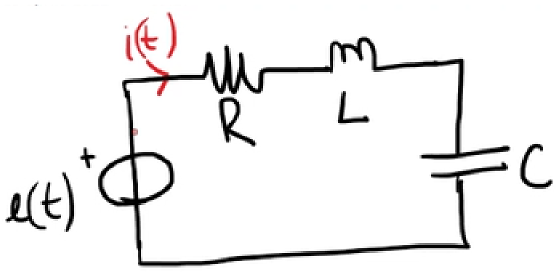
Risonanza nei circuiti in regime sinusoidale

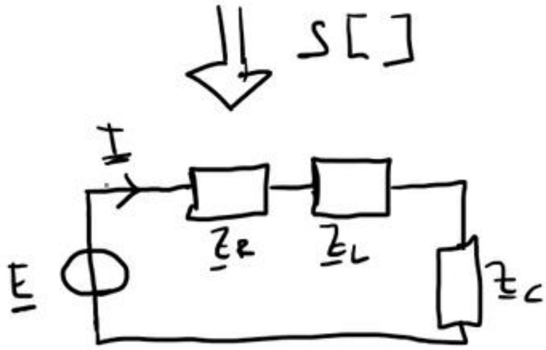


$$e(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \alpha_v) \ V$$

Studiamo questo circuito in frequenza, cioè a noi interessa sapere come si comporta in frequenza la i di t.

Studio in freq. della i(t)

Perché in circuiti in regime sinusoidale abbiamo visto che se ha componenti dinamici (con memoria) l'impedenza varia.
Facciamo la trasformata di Steinmetz.



In questo circuito possiamo già vedere qual è l'impedenza equivalente.

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

Perché la serie di impedenze è la somma di impedenze.
Abbiamo anche visto le impedenze nelle equazioni costitutive.

$$\underline{Z}_R = R$$
$$\underline{Z}_L = j\omega L$$
$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$$

Sostituiamo le impedenze nella Z equivalente.

$$\begin{cases} \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jX \\ \underline{Z}_R = R \\ \underline{Z}_L = j\omega L \\ \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{Z}_{eq} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Esiste un valore di omega per il quale la reattanza si annulla.

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \rightarrow \omega_0^2 LC - 1 = 0$$
$$\rightarrow \omega_0^2 LC = 1 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

PULSAZIONE DI RISONANZA

Se avessimo la pulsazione equivalente alla pulsazione di risonanza, la reattanza si annulla. Vediamo il fasore di I.

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{eq}} = I e^{j\alpha_I}$$

Come sempre supponiamo ora che I o V abbia fase nulla.

$$\underline{V} = V e^{j\alpha_V}$$

$$\text{Supponiamo } \alpha_V = 0 \rightarrow \underline{V} = V$$

Scriviamo il fasore I in termini di modulo e fase.

$$\underline{I} = I e^{j\alpha_I} \rightarrow |\underline{I}| = \frac{|\underline{V}|}{|\underline{Z}_{eq}|} = \frac{V}{\sqrt{Z_{eq,R}^2 + Z_{eq,I}^2}} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Scriviamo anche alfai, la fase.

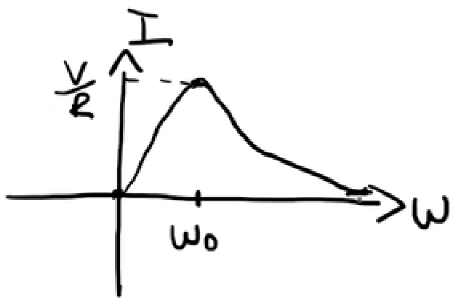
$$\rightarrow \alpha_I = -\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Analizziamo i risultati ottenuti, considerando il modulo in momenti particolari.

Alla pulsazione di risonanza, la reattanza si annulla, l'impedenza diventa puramente resistiva e assume il valore massimo.

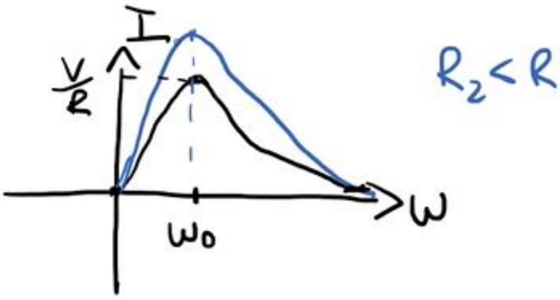
ω	$\lvert\underline{I}\rvert$
0	0
ω_0	$\frac{V}{R}$
∞	0

Vediamo il modulo di I graficamente. La risposta sarà:



In 0 la corrente è nulla perché l’impedenza tende a infinito, lo stesso se la pulsazione tende a infinito. In omega0 c’è la corrente massima.

Se al posto di R avessimo R2 (R2 < R), avremmo un picco più pronunciato.



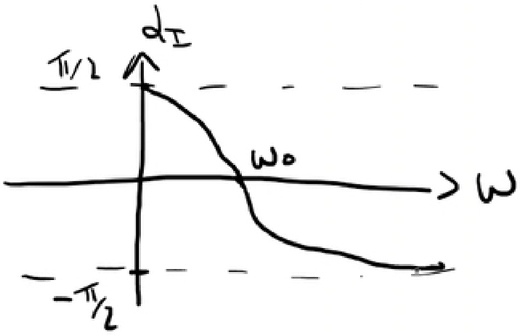
Vediamo che succede con la fase.

$$\alpha_I = \alpha_V - \varphi \rightarrow \alpha_I = -\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

L’arcotangente ha due limiti (-PI/2, +PI/2). Scriviamo la tabellina.

ω	α_I
0	$\pi/2$
ω_0	0
∞	$-\frac{\pi}{2}$

Grafichiamo la fase in funzione di omega.



Vediamo che la corrente è in anticipo rispetto alla tensione per omega minore di omega0, è un circuito ohmico-capacitivo. Dall’altra parte avremo un comportamento ohmico-induttivo.

$$\underline{Z}_{eq} = R + j(X_L - X_C)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{\underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C}{\underline{Z}_{eq}}$$

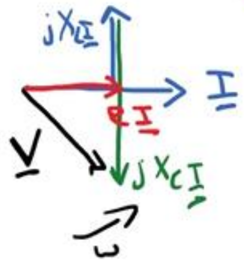
$$\omega < \omega_0 \rightarrow X_C > X_L$$

Se andassimo in un diagramma fasoriale, come sarà I?

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C$$

$$= R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

$$= R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$



Il risultato è V. Abbiamo preso I e abbiamo moltiplicato per i componenti di V, per ricavarci V.

Cosa succede se omega è uguale a omega0?

$$\omega = \omega_0 \rightarrow X_C = X_L$$

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C$$

$$= R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

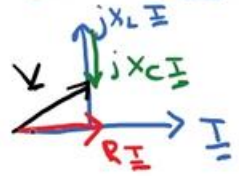
La tensione risultante è in fase con la corrente.

Se omega è maggiore di omega0? Abbiamo un comportamento ohmico-induttivo.

$$\omega > \omega_0 \rightarrow X_L > X_C$$

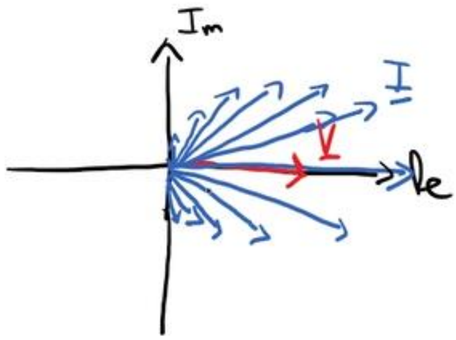
$$\underline{V} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

$$\underline{V} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$



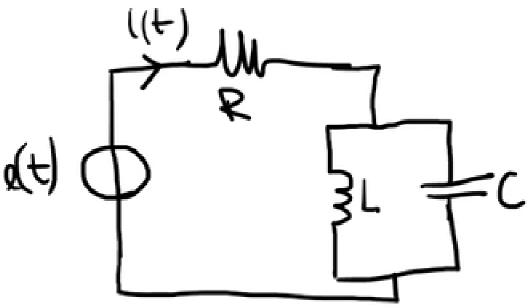
Il generatore da energia elettrica. Il resistore trasforma energia elettrica in calore. Con una pulsazione diversa da omega0, l’energia non va solo al resistore, ma anche all’induttore e al condensatore. Se invece siamo in risonanza, per metà periodo è l’induttore che prende l’energia e nell’altra metà la prende il condensatore (si palleggiano l’energia). Nella realtà, questa energia prima o poi finirà, ma idealmente non finisce mai.

Cosa succede al variare di omega sul piano complesso?



Antirisonanza

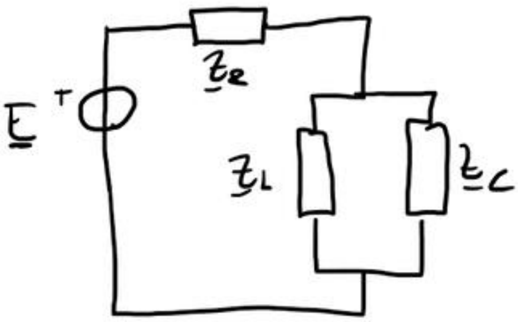
Abbiamo i componenti con memoria in parallelo.



$$e(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \alpha_v) \quad V$$

Come prima, vogliamo vedere come si comporta l'impedenza. Facciamo la trasformata di Steinmetz.

$$\Downarrow S[\ ]$$



Qual è la Z equivalente?

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underbrace{\underline{Z}_L /\!/ \underline{Z}_C}_{\underline{Z}_{LC}}$$

Calcoliamo ZLC.

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{\underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$

$$= \frac{j\omega L \cdot \left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{L/C}{-\omega^2 LC + 1} \cdot j\omega C =$$

$$= j\omega \cancel{C} \frac{L/\cancel{C}}{1-\omega^2 LC} = j \underbrace{\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}}_{X}$$

Ho la reattanza X.

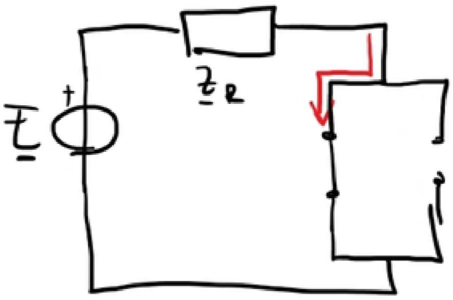
$$\underline{Z}_{eq} = R + jX$$

Anche in questo caso esiste una particolare omega che rende la reattanza infinita.
È quando il denominatore è uguale a 0.

$$1-\omega^2 LC = 0 \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

È di nuovo la pulsazione di risonanza, ma in questo caso X non tende a 0, ma tende a infinito.
Vediamo cosa succede alle diverse pulsazioni.

$\underline{\omega = 0}$

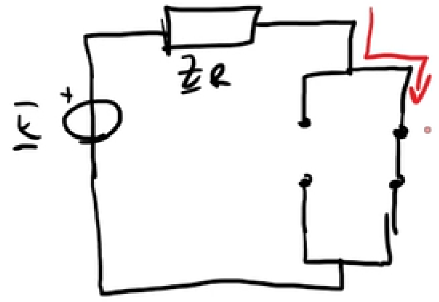


$X_L = 0$

$X_C = \infty$

Per omega uguale a 0, il fasore della tensione è in fase col fasore della corrente.

$\omega \to \infty$

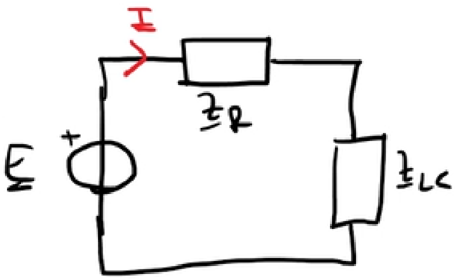


$X_L = \omega L \to \infty$

$X_C = \frac{-1}{\omega C} \to 0$

Per omega che tende all’infinito, è diverso rispetto a prima.

$\omega = \omega_0$



$I = 0$

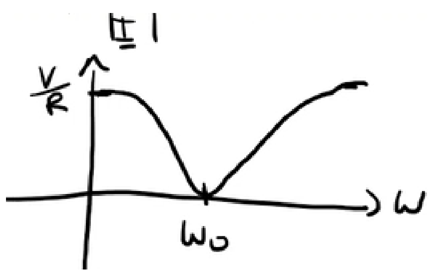
Per omega uguale a omega0, la corrente I è uguale a 0, perché la reattanza tende all’infinito.

$$X \to \infty$$

Cioè:

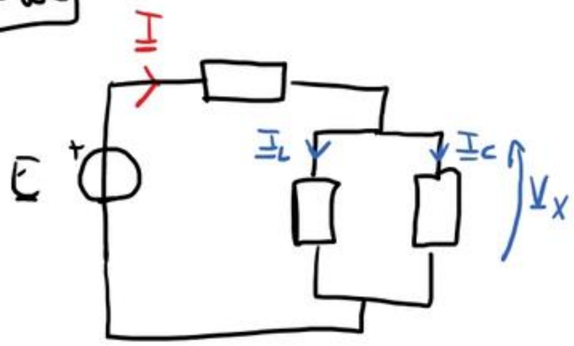
$$|I| = \frac{|V|}{|Z_{eq}|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Graficamente:



Riprendiamo omega uguale a omega0.

$$\omega=\omega_0$$



$$\underline{I}=0 \not\Rightarrow \begin{array}{l}\underline{I}_L=0\\ \underline{I}_C=0\end{array}$$

$$\underline{I}=\underline{I}_L+\underline{I}_C=0$$

$$\rightarrow \underline{I}_L=-\underline{I}_C$$

Fin qui torna. Ma prendiamo VX e facciamo la LKT alla maglia.

$$\underline{E}-R\underline{I}-\underline{V}_X=0$$

Tuttavia, I è 0.

$$\underline{E}-\cancel{R\underline{I}}-\underline{V}_X=0 \rightarrow \underline{V}_X=\underline{E}$$

La tensione ai capi del parallelo è esattamente uguale a quella del generatore.
Calcoliamo le correnti sul parallelo.

$$\underline{I}_L=\frac{\underline{V}_X}{\underline{Z}_L}=\frac{\underline{E}}{j\omega L}=\frac{\underline{E}}{j\omega_0 L}=\frac{\underline{E}}{j\frac{1}{\sqrt{LC}}L}$$

$$=-j\frac{\underline{E}}{\sqrt{\frac{L}{C}}}=-j\sqrt{\frac{C}{L}}\,\underline{E}$$

$$\underline{I}_C=\frac{\underline{V}_X}{\underline{Z}_C}=\frac{\underline{E}}{1/j\omega C}=j\omega_0 C\underline{E}=j\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot C\,\underline{E}=$$

$$=j\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\underline{E}$$

Vediamo che IL è uguale a -IC.

$$\underline{I}_L=-\underline{I}_C$$

Succede che tra induttore e condensatore ci sarà una corrente che circola, senza che il generatore dia corrente (freccetta circolare rossa). Idealmente, in antirisonanza questo scambio di energia è continuo.

$\omega = \omega_0$