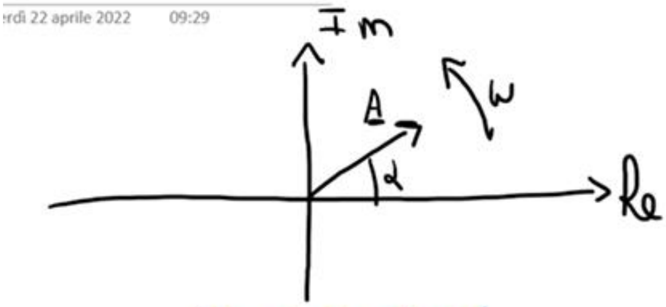
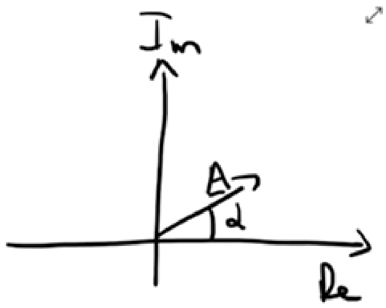
Trasformata di Steinmetz

Formalizziamo il fasore.



VETT. ROTANTE



FASORE

Questa è una trasformata, perché stiamo passando da un dominio temporale al dominio fasoriale.

Ripetiamo le cose dette in maniera formale.

La trasformata di Steinmetz si indica in questo modo:

$$S[\ ]$$

$$S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Supponiamo che a di t sia pari alla sinusoide.

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\rightarrow S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \hat{A} \cos(\omega t + \alpha)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{T}\hat{A}\int_0^T \frac{e^{j(\omega t+\alpha)}+e^{-j(\omega t+\alpha)}}{2}\cdot e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{T}\frac{\hat{A}}{2}\int_0^T \left[e^{j(\omega t+\alpha)}+e^{-j(\omega t+\alpha)}\right]\cdot e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{T}\frac{\hat{A}}{2}\left[\int_0^T e^{j\alpha}\,dt + \cancelto{0}{\int_0^T e^{-2j\omega t+\alpha}\,dt}\right] =$$

$$= \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}\,\cancel{T}}\cdot e^{j\alpha}\,\cancel{T} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}e^{j\alpha} = \underbrace{A e^{j\alpha}}_{\text{FASORI}}$$

Tutto quello visto prima viene formalizzato con la trasformata di Steinmetz.
La trasformata di Steinmetz associa ad una grandezza nel tempo una grandezza nel dominio fasoriale.

La trasformata $S[\ ]$ è un operatore lineare

Significa che:

$$S[m a(t) + n b(t)] = m S[a(t)] + n S[b(t)]$$

È interessante sapere quanto vale:

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right]$$

Vediamo cosa succede.

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T \frac{da(t)}{dt}\,e^{-j\omega t}\,dt$$

Dovremmo svolgere un’integrale per parti, abbiamo una derivata per un altro termine.

integrando per parti:

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = \frac{\sqrt{2}}{T}\left[\left[a(t)e^{-j\omega t}\right]_0^T - \int_0^T a(t)\left(-j\omega\, e^{-j\omega t}\right)dt\right]$$

A cosa è uguale?

$$= \frac{\sqrt{2}}{T}\left[+j\omega \int_0^T a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right] =$$

$$= j\omega \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Se analizziamo la soluzione trovata, noteremo che un termine è la trasformata di Steinmetz di a di t.

$$= j\omega \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{S[a(t)]}$$

Quindi:

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = j\omega\, S[a(t)]$$

Stiamo dicendo che la derivata introduce uno sfasamento e una variazione d'ampiezza. Però è molto comodo ora gestire le derivate.

$$\boxed{S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = j\omega\, S[a(t)]}$$

SFASAMENTO

Le proprietà più importanti sono appunto la linearità e la trasformazione di Steinmetz di una derivata.

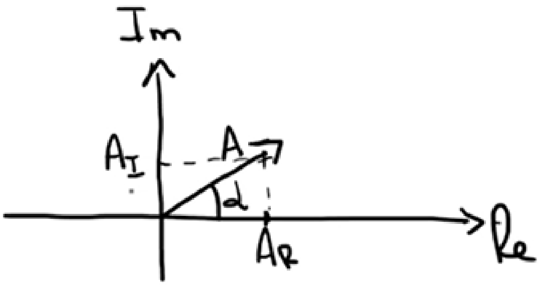
Operazioni sui numeri complessi

É una rappresentazione del Fasore

Possiamo rappresentare il fasore in 2 modi.

Fasore
- Rappres. cartesiana: $\underline{A} = A_R + jA_I$
- Rappres. polare: $\underline{A} = A e^{j\alpha}$

Vediamolo sul piano complesso.



Ora vediamo come possiamo andare da una rappresentazione all'altra.

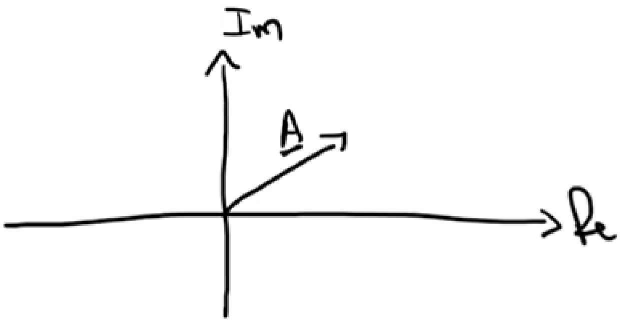
POLARE → CARTESIANA

$$A e^{j\alpha} \quad \begin{cases} A_R = A\cos(\alpha) \\ A_I = A\sin(\alpha) \end{cases}$$

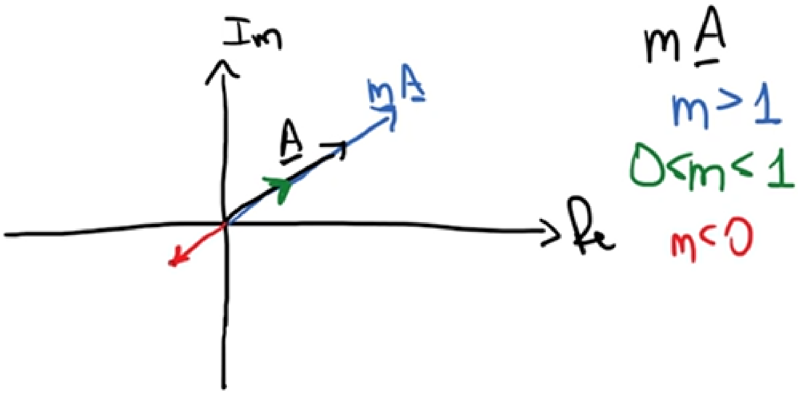
CARTESIANA → POLARE

$$A_R + jA_I \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{A_I}{A_R}\right) \end{cases}$$

Riprendiamo il piano cartesiano.

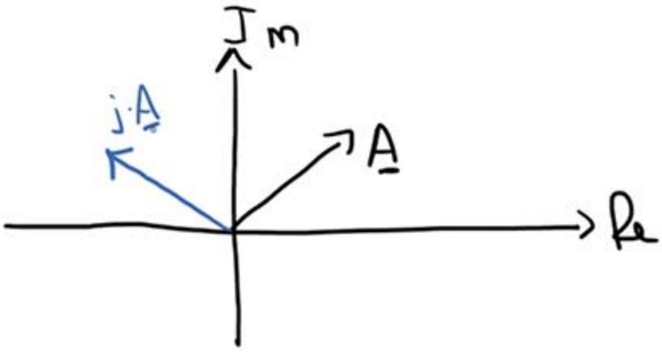


Vediamo che succede se moltiplichiamo A per un coefficiente m.

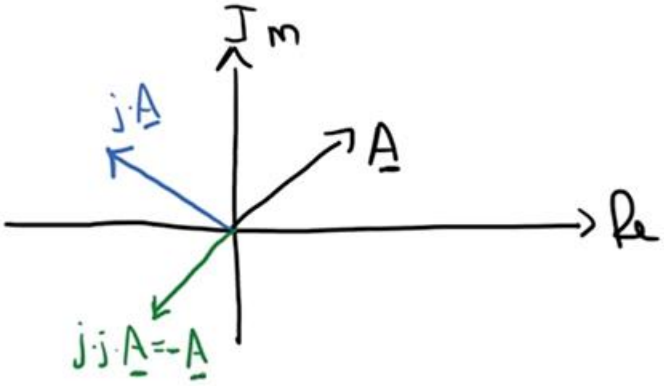


Vediamo cosa succede con l’operatore j. Stiamo moltiplicando il fasore per e elevato alla j pi greco mezzi, cioè anticipiamo il fasore di 90°.

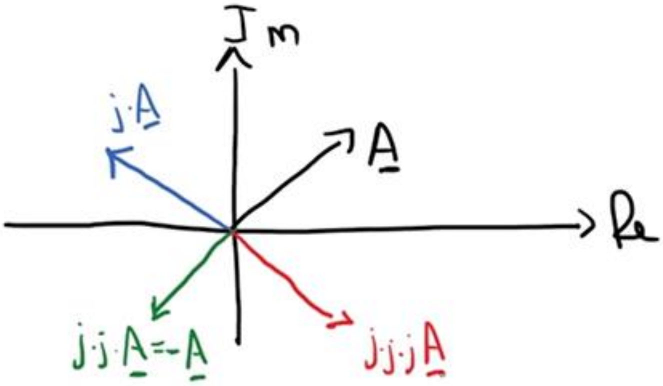
L'effetto di j: $e^{j\frac{\pi}{2}}$



Se lo moltiplicassimo nuovamente per j, avremmo:



Se lo moltiplichiamo ancora una volta per j:



Se lo moltiplicassimo ancora per j, torneremo in A.
Prendiamo un numero complesso B e facciamo altre operazioni con A.

SOMMA)

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = A_R + jA_I + B_R + jB_I = \underbrace{(A_R + B_R)}_{C_R} + j\underbrace{(A_I + B_I)}_{C_I}$$

PRODOTTO)

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = A e^{j\alpha} \cdot B e^{j\beta} = \underbrace{A \cdot B}_{C} \, e^{j\overbrace{(\alpha+\beta)}^{\gamma}}$$

RAPPORTO)

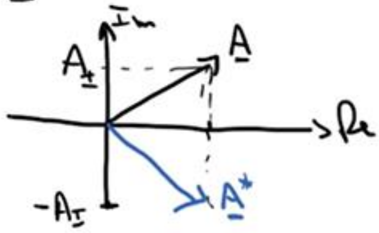
$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \underbrace{\frac{A}{B}}_{C} \, e^{j\overbrace{(\alpha-\beta)}^{\gamma}}$$

Vediamo un’altra operazione di nostro interesse, il complesso coniugato.

COMPLESSO CONIUGATO!

COMPLESSO CONIUGATO

$$\underline{A} = A_R + j A_I \longrightarrow \underline{A}^* = A_R - j A_I$$



La trasformata di Steinmetz ci aiuta a risolvere i circuiti a regime sinusoidale in maniera semplice. Il metodo di risoluzione si chiama metodo simbolico.

Metodo simbolico

METODO SIMBOLICO: Utilizziamo Steinmetz sulle eq. differenziale in modo da avere delle eq. algebriche

Al posto di equazioni differenziali, abbiamo equazioni algebriche. Si prendono i componenti con memoria, si applica la trasformata di Steinmetz e poi si antitrasforma per tornare nel tempo. Possiamo usare le LKT e LKC che già conosciamo.

Vediamo.

$$LKT: \quad \sum_{i=1}^{m} v_i(t) = 0$$

Vediamo come si traduce nel dominio fasoriale.

$$LKT: \quad \sum_{i=1}^{m} v_i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \underline{V}_i = 0$$

Si ritraduce con “la sommatoria dei fasori delle tensioni è uguale a 0”.

Vediamo la LKC.

$$LKC: \quad \sum_{i=1}^{n} i(t) = 0$$

E si ritraduce con “la sommatoria dei fasori delle correnti è uguale a 0”:

$$LKC: \quad \sum_{i=1}^{n} i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_i = 0$$

Quindi continuano a valere le equazioni di Kirchhoff.

Vediamo cosa succede alle equazioni costitutive dei componenti. Useremo le proprietà viste sopra.

Resistore.

$$R: \quad v(t) = R\,i(t) \longrightarrow S[v(t)] = \underline{V} = S[R\,i(t)] = R\,S[i(t)]$$
$$\rightarrow \underline{V} = R\underline{I}$$

Induttore.

$$L: \quad v(t) = L\frac{di}{dt} \longrightarrow S[v(t)] = \underline{V} = S\left[L\frac{di}{dt}\right] =$$
$$= L\,S\left[\frac{di}{dt}\right] = L\,j\omega\,S[i(t)]$$
$$\rightarrow \underline{V} = j\omega L\,\underline{I}$$

Condensatore. Nell’ultimo passaggio abbiamo moltiplicato sopra e sotto per j.

$$C: \quad i(t) = C\frac{dv}{dt} \longrightarrow S[i(t)] = S\left[C\frac{dv}{dt}\right] = C\,S\left[\frac{dv}{dt}\right]$$
$$\rightarrow \underline{I} = j\omega C\,\underline{V} \rightarrow \underline{V} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$$
$$\underline{V} = -\frac{j}{\omega C}\underline{I}$$

Generatore. Abbiamo messo in evidenza il valore efficace E. Si traduce nel fasore più semplice

$$e(t) = \sqrt{2}\,E\cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \underline{E} = E\,e^{j\alpha}$$

Vale a dire:

$$e(t) = \sqrt{2}\,E\cos(\omega t + \alpha) \rightarrow S[e(t)] = \underline{E}$$
$$i(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t + \beta) \rightarrow S[i(t)] = \underline{I}$$

Tutte le equazioni scritte sono dette equazioni costitutive in forma simbolica perché compaiono i fasori.

Possiamo definire una grandezza importantissima, l’impedenza.

Definiamo IMPEDENZA $\underline{Z}$:

$$\boxed{\underline{Z} = \underline{V} / \underline{I}}$$

È il rapporto tra il fasore della tensione e il fasore della corrente.

$\varphi > 0 \rightarrow \alpha_V > \alpha_I \rightarrow$ tensione è in anticipo rispetto alla corr.

$\varphi < 0 \rightarrow \alpha_V < \alpha_I \rightarrow$ tensione è in ritardo rispetto alla corr.

$\underline{Z}$ COMPORTAMENTO TRA TENSIONE E CORR.

I componenti con memoria introducono uno sfasamento tra tensione e corrente. Introduciamo anche l'ammettenza, il reciproco dell'impedenza.

AMMETTENZA: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

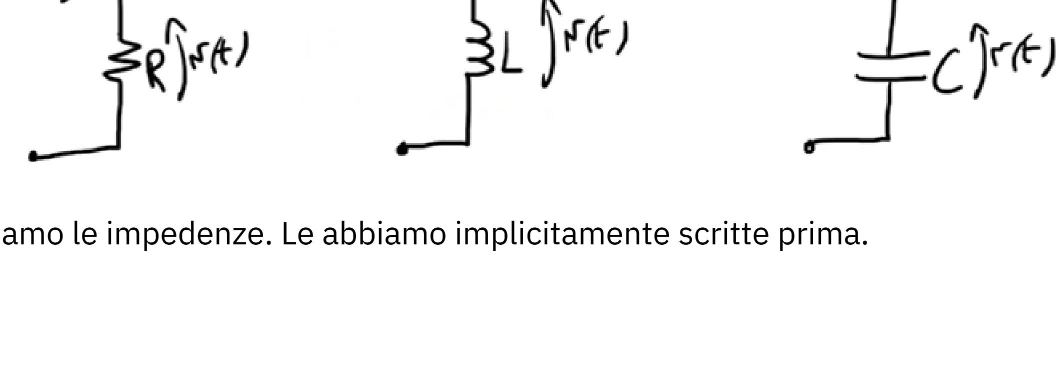
Dall'impedenza possiamo riscrivere:

$$\boxed{\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}}$$

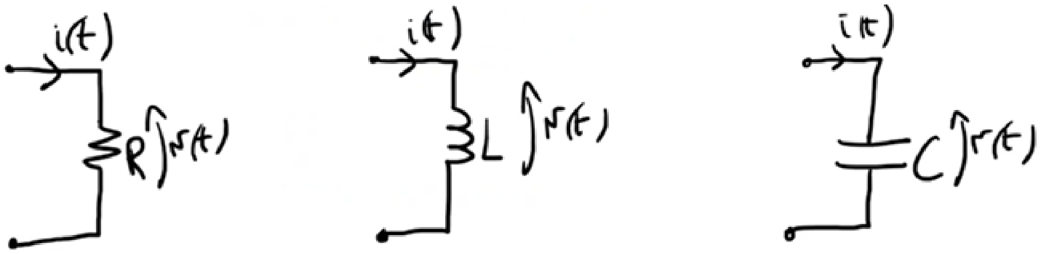
LEGGE DI OHM SIMBOLICA

È una forma più generale della legge di Ohm vista all'inizio.

Prendiamo i componenti.



E scriviamo le impedenze. Le abbiamo implicitamente scritte prima.



$$\underline{Z} = R \qquad \underline{Z} = j\omega L \qquad \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Calcoliamo le correnti. Prendiamo come fase della tensione 0 per riferimento.

$$\underline{Z} = R \qquad \underline{Z} = j\omega L \qquad \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{R} \qquad \underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{j\omega L} \qquad \underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = j\omega C\,\underline{V}$$

$$I = \frac{V}{R} \qquad I = \frac{V}{\omega L} \qquad I = \omega C V$$

$$\alpha_V = 0,\ \varphi = 0 \rightarrow \alpha_I = 0 \qquad \alpha_V = 0,\ \alpha_I = -\frac{\pi}{2} \qquad \alpha_V = 0,\ \alpha_I = \frac{\pi}{2}$$