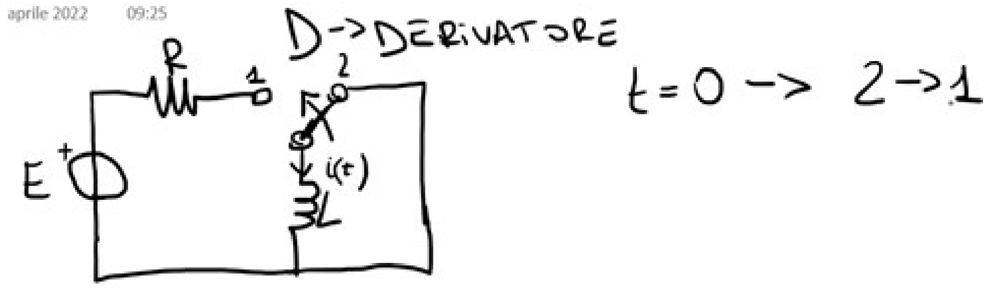
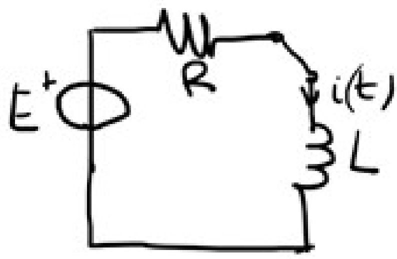
Circuito RL

Supponiamo di avere un generatore E, una resistenza R ed un nuovo tipo di interruttore, il derivatore D, poi ad esempio un induttore L.



All’istante 0+ il circuito sarà:



Facciamo la LKT a questa maglia.

$$\text{LKT: } E - v_R - v_L = 0$$

Poi le equazioni costitutive dei componenti.

$$\text{LKT: } \begin{cases} E - v_R - v_L = 0 \\ v_R = Ri \\ v_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

Da questo sistema, abbiamo:

$$E - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Quindi, dividendo per L:

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}}$$

EQ. DIFF.
I ORDINE

Sono gli stessi passaggi fatti col circuito RC.

SOL.:

- sol. dell'omogenea associata $o(t)$
- sol particolare $p(t)$

Andiamo a calcolare o di t. Equazione differenziale con il termine noto a 0.

1 Calcolo $o(t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

Scriviamo il polinomio caratteristico associato, sostituiamo alla derivata, lambda.

1 Calcolo $o(t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

$\rightarrow$ pol. caratt.: $\lambda + \frac{R}{L} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$

Quando abbiamo questo tipo di equazione differenziale, la soluzione è:

$$o(t) = A e^{\lambda t} = A e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Studiamoci l'esponente.

$$A e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \frac{R}{L}t = \text{n° puro}$$

$$\frac{L}{R} = \tau = \begin{matrix}\text{COST. DI} \\ \text{TEMPO}\end{matrix} \ [s]$$

L su R deve essere un tempo.

Ora calcoliamo la soluzione particolare p di t. Il termine noto è E su L, una costante.

② calcolo $p(t)$

$$\text{termine noto} = \frac{E}{L} = \text{costante} \rightarrow p(t) = \text{costante}$$

Sostituendo p di t all'equazione differenziale, avremo:

$$\cancel{\frac{dp}{dt}} + \frac{R}{L}p = \frac{E}{L} \rightarrow p(t) = K = \frac{E}{R}$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà:

③ $$i(t) = \alpha(t) + p(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

Ci manca di calcolare A, servono le condizioni iniziali.

④ Utilizziamo le cond. iniziali

$$i(0^-) = I_0 \rightarrow i(0^+) = I_0$$

$$i(0) = A \underbrace{\cancel{e^{-0/\tau}}}_{\rightarrow 1} + \frac{E}{R} = I_0 \rightarrow A = I_0 - \frac{E}{R}$$

$$5 \qquad i(t) = \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Questa è la soluzione dell’equazione differenziale.

Possiamo evidenziare dei termini.

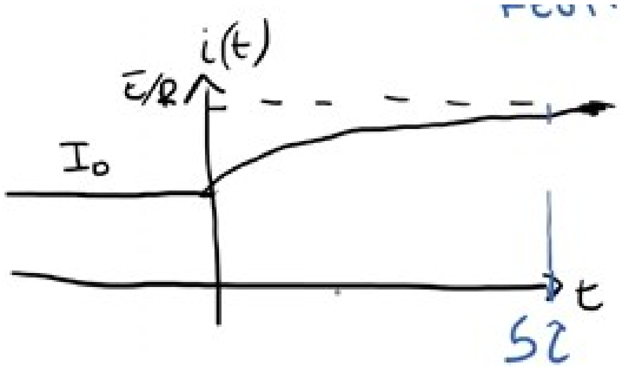
$$i(t) = \underbrace{\left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{RISP. TRANSIT.}} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{RISP. A REGIME}}$$

La risposta a regime dipende dalle forzanti. La risposta a regime si ha al termine del transitorio e coincide con la soluzione particolare.

Potremmo riscrivere l’equazione:

$$i(t) = \underbrace{\left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{RISP. TRANSIT.}} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{RISP. A REGIME}} = \underbrace{I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{EVOL. LIBERA}} + \underbrace{\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}_{\text{RISP. FORZATA}}$$

L’evoluzione libera è la risposta che si avrebbe senza generatori. La risposta forzata è imposta dai generatori.



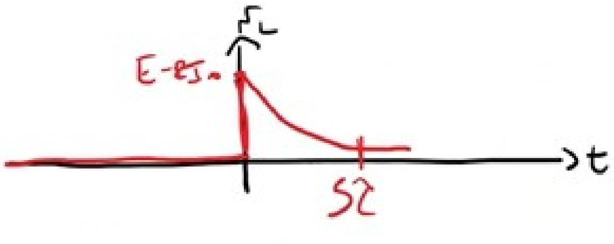
Quanto più è piccola tau, tanto più il circuito è veloce.

Calcoliamo V di L.

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[\left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}\right] = \cancel{L}\left(-\frac{R}{\cancel{L}}\right)\left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow v_L = (E - RI_0)\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

Graficamente:



la tensione non varia con continuità

Serve saperlo, perché il circuito può avere sovratensioni, da considerare quando si crea il circuito.

Confronto tra circuito RC e RL

RC)

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

RL)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

Riscriviamole.

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{\tau} = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$$

Queste due equazioni portano alla stessa equazione.

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = \underbrace{X_F}_{\text{FORZANTE}}$$

La soluzione è:

$$x(t) = o(t) + p(t)$$

In entrambi i casi, questa equazione è uguale all'evoluzione libera e il termine all'infinito:

$$x(t) = o(t) + p(t) = x_e(t) + X_\infty$$

Quale sarà la forma della soluzione?

$$x(t) = K e^{-t/\tau} + X_\infty$$

Manca la condizione iniziale.

Vale a dire:

$$\begin{cases} x(t) = K e^{-t/\tau} + X_\infty \\ x(t=0^-) = x(t=0^+) = X_0 \end{cases}$$

$$x(0) = K + x_\infty = x_0 \Rightarrow K = x_0 - x_\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = (x_0 - x_\infty)\, e^{-t/\tau} + x_\infty}$$

L’equazione evidenziata è la soluzione generale.

Circuito RLC

$t=0 \rightarrow$ T si chiude

Calcoliamo la LKT.

$$LKT: \quad E - v_R - v_L - v_C = 0$$

E le equazioni costitutive.

$$LKT: \quad E - v_R - v_L - v_C = 0$$

$$v_R = Ri$$
$$v_L = L\frac{di}{dt}$$
$$v_C = \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$$

Sostituiamo le equazioni caratteristiche alla LKT.

$$\Rightarrow E - Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau = 0$$

Deriviamo questa equazione.

$$\Big\Downarrow \text{ deriviamo}$$

$$+R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$

Riordino l’equazione e divido tutto per L.

$$\frac{d^2 i}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

EQ. DIFFER.
II ORDINE

Questa è l'equazione differenziale da risolvere.

In questo caso, il termine noto è nullo, quindi bisogna solo calcolare l'omogenea associata.

Ci aspettiamo di ottenere:

$$i(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}$$

Calcoliamola col polinomio caratteristico.

sol. dell' omog. associata

$$\text{pol. caratt.}: \quad \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Calcoliamo lambda1 e lambda2 dal polinomio caratteristico.

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Evidenziamo alcuni termini.

$$\frac{R}{2L} = \alpha$$: coeff. di smorzamento

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$: puls. di risonanza

Quindi lambda1 e lambda2 sono:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\underbrace{\alpha^2 - \omega_0^2}_{\Delta}}$$

Ci sono 3 casi:

$$\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 \begin{cases} \to > 0 & \text{sol. reali distinte} \\ \to = 0 & \text{sol. reali coincidenti} \\ \to < 0 & \text{sol. complesse coniugate} \end{cases}$$

Nel caso in cui delta sia maggiore di 0:

$\underline{\Delta > 0}$

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \to \alpha > \omega_0$$

sol. reali negative

$$i(t) = \underset{\uparrow}{A}\, e^{-\lambda_1 t} + \underset{\uparrow}{B}\, e^{-\lambda_2 t}$$

Bisogna calcolare A e B, servono le condizioni inizali.

$\Rightarrow$ utilizziamo le cond. iniziali:

- $i(0^-) = i(0^+) = 0 \to i(0) = 0 = A + B \to A = -B$

- $v_c(0) = V_{c0} \to E - Ri - L\frac{di}{dt} - V_{c0} = 0$

$$E - \cancel{R\, i(0)}^{\,0} - L\frac{di}{dt} - V_{c0} = 0 \to E - L\left.\frac{di}{dt}\right|_0 - V_{c0} = 0$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \frac{E - V_{c0}}{L}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -A\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - B\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\Big|_0 = -A\lambda_1 - B\lambda_2 = \frac{E - V_{C0}}{L}$$

Abbiamo preso l'equazione all'istante 0 e abbiamo calcolato la derivata all'istante 0.

$$A(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{E - V_{C0}}{L} \rightarrow A = \frac{E - V_{C0}}{L(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

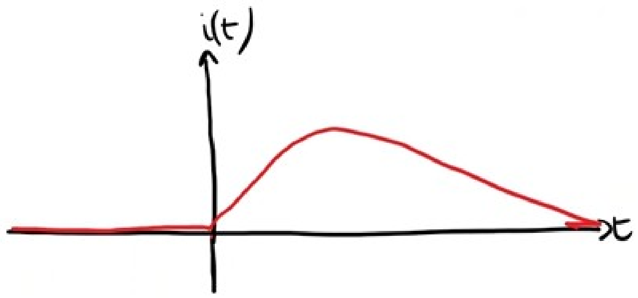
Sostituiamo A all'interno dell'equazione.

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(e^{+\lambda_1 t} - e^{+\lambda_2 t}\right)$$

$$= \frac{E - V_{C0}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}\left(e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\, t}\right) =$$

$$= \frac{E - V_{C0}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}\left(e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\, t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\, t}\right)e^{-\alpha t}$$

Questa è la soluzione nel caso in cui delta sia maggiore di 0.



RISPOSTA SOVRASMORZATA

Vediamo il caso il cui delta sia uguale a 0.

$\alpha^2 = \omega^2 \rightarrow \alpha = \omega$ risposte reali coincidenti

Otterremo:

$$i(t) = (A + Bt)\, e^{\alpha t}$$

Conosciamo lambda, è uguale a alfa. Servono le condizioni iniziali:

- Utilizziamo la cond. iniziali

$$i(t=0^-) = i(t=0^+) = 0 \rightarrow i(0) = A = 0$$

Quindi A è uguale a 0.

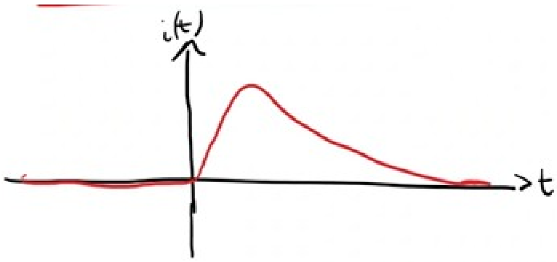
• $v_c(t=0^-) = v_c(t=0^+) = V_{C0} \rightarrow E - \cancel{R\,i(0)} - L\frac{di}{dt} - V_{C0} = 0$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E - V_{C0}}{L}$$

$$\frac{di}{dt} = -\alpha(Bt)\,e^{-\alpha t} + B\,e^{-\alpha t}\Big|_0 = B = \frac{E - V_C}{L}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L}\, t\, e^{-\alpha t}}$$

Questa è la soluzione per delta uguale a 0.



SMORZAMENTO CRITICO

Vediamo il caso delta minore di 0.

$$\alpha^2 < \omega_0^2 \rightarrow \alpha < \omega_0$$

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \sqrt{-\overbrace{(\omega_0^2 - \alpha^2)}^{\omega_d^2 \quad \text{SMORZATA}}} = -\alpha + j\omega_d$$

$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_d$$

omegad quadro è la pulsazione naturale smorzata.

Riprendendo il risultato del caso delta maggiore di 0, basta cambiare alfa quadro meno omegad sotto radice con jomegad.

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L\, j\omega_d}\left(e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}\right) e^{-\alpha t}$$

Ricordandoci le formule di Eulero:

$$\text{Eulero}: \quad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L\, j\omega_d}\left[\cancel{\cos(\omega_d t)} + j\sin(\omega_d t) - \cancel{\cos(\omega_d t)} + j\sin(\omega_d t)\right] e^{-\alpha t}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E - V_{C0}}{\cancel{2}L\, \cancel{j}\omega_d}\, \cancel{j}\, \cancel{2} \sin(\omega_d t)\, e^{-\alpha t}}$$

Questa è la soluzione. Anche in questo caso, e alla meno alfa è il termine di smorzamento. Facciamo il grafico.