▼ **10.0 - Logica del prim'ordine**

La logica proposizionale classica non riesce in modo corretto a tradurre i **quantificatori** del linguaggio naturale, fin'ora abbiamo infatti utilizzato una metalogica per giustificare il per ogni e l'esiste nelle dimostrazioni.

Nella logica del prim'ordine introduciamo quindi 2 identificatori: $\forall$ e $\exists$. In questo modo non siamo ancora completi rispetto al linguaggio naturale, ma riusciamo comunque a tradurre un numero maggiore di frasi.

▼ **10.1 - Sintassi e semantica**

Sintassi della logica del prim'ordine

La logica del prim'ordine è composta da:

- Termini

> $$t ::= x|c|f^n(t_1, ..., t_n)$$

  - x: variabili (x, y ecc.).
  - c: costanti (0, 1, π ecc.).
  - $f^n(t_1 + ... + t_n)$: funzioni che prendono in input n termini e restituiscono un nuovo termine (funzione di addizione, sottrazione ecc.).

- Preposizioni

> $$P ::= P^n(t_1, ..., t_n)|\bot|\top|\neg P|P \wedge P|P \vee P|P \implies P|\forall x.P|\exists x.P$$

  Funzioni che prendono in input dei termini e restituiscono dei valori di verità.

Viene chiamata logica del prim'ordine in quanto i quantificatori $\forall$ e $\exists$ possono essere applicati solo agli **elementi appartenenti ad un insieme**, e non a funzioni o predicati, come avviene nelle logiche del second'ordine, terz'ordine e così via.

Esempi:

- $\forall x.x > 4$ **appartiene** alla logica del prim'ordine.
- $\forall f.f(x) > 4$ **non appartiene** alla logica del prim'ordine.
- $\forall P.P(x)$ **non appartiene** alla logica del prim'ordine.

La logica proposizionale classica è un caso particolare di logica del prim'ordine in cui non vengono utilizzati quantificatori e termini e vengono presi in considerazione solo predicati 0-ari. Ogni variabile proposizionale A, B, C... rappresenta infatti un predicato P^0, Q^0, R^0... che possono assumere i valori 0 e 1.

Semantica classica della logica del prim'ordine

Seguendo la semantica classica della logica del prim'ordine ciascun mondo v fissa un insieme non vuoto A e assegna:

- A ogni simbolo di costante c un elemento appartenente all'insieme A (es. $[\![\pi]\!]^v = 2$).
- A ogni simbolo di funzione n-aria f^n una funzione n-aria appartenente all'insieme A (es. $[\![+]\!]^v = \times$).

- A ogni simbolo di predicato n-ario P^n un predicato n-ario appartenente all'insieme A (es. $[\![>]\!]^v = |$, ovvero "divide").

Quindi, seguendo gli esempi, $[\![(\pi + \pi) > \pi]\!]^v = (2 \times 2)|2 = 4|2$ è falso, poichè 4 non divide 2.

Semantica dei quantificatori:

- $[\![\forall x.P]\!]^v = 1$ se e solo se il valore di P nel mondo v è sempre 1 al variare della semantica di x su tutti gli elementi dell'insieme A.
- $[\![\exists x.P]\!]^v = 1$ se e solo se il valore di P nel mondo v è almeno una volta 1 al variare della semantica di x su tutti gli elementi dell'insieme A.

▼ **10.2 - Equivalenze logiche**

Equivalenze logiche notevoli

Quantificatori dello **stesso tipo commutano**:

- $\forall x.\forall y.P \equiv \forall y.\forall x.P$
- $\exists x.\exists y.P \equiv \exists y.\exists x.P$

Quantificatori di **tipo diverso non commutano**:

- $\exists x.\forall y.P \Vdash \forall y.\exists x.P$, ma $\forall x.\exists y.P \nVdash \exists y.\forall x.P$ (provare con $P : x \leq y$)

($\wedge$ e $\vee$) Le seguenti equivalenze vengono utilizzate per spostare i quantificatori in **posizione di testa** nelle formule:

- $(\forall x.P) \wedge (\forall x.Q) \equiv \forall x.(P \wedge Q)$
- $(\exists x.P) \vee (\exists x.Q) \equiv \exists x.(P \vee Q)$

($\neg$) Leggi di **De Morgan**:

- $\neg\forall x.P \equiv \exists x.\neg P$, in logica classica, ma in logica intuizionista vale solo la parte $\exists x.\neg P \Vdash \neg\forall x.P$.
- $\neg\exists x.P \equiv \forall x.\neg P$, sia in logica classica che intuizionista.

Nota: per dimostrare $\neg\forall x.P$ basta dimostrare $\exists x.\neg P$, ovvero è sufficiente un **controesempio**, ma per dimostrare $\neg\exists x.P$ bisogna dimostrare $\forall x.\neg P$, ovvero occorre una vera e proprio **dimostrazione**.

($\implies$) Per portare fuori i quantificatori da una premessa questi devono essere trasformati nel loro duale:

- $(\forall x.P) \implies Q \equiv \exists x.(P \implies Q)$
- $(\exists x.P) \implies Q \equiv \forall x.(P \implies Q)$

($\implies$) Per portare fuori i quantificatori da una conclusione questi non devono essere trasformati:

- $Q \implies (\forall x.P) \equiv \forall x.(Q \implies P)$
- $Q \implies (\exists x.P) \equiv \exists x.(Q \implies P)$

Quantificazioni limitate

Spesso vengono utilizzate delle quantificazioni limitate a un particolare dominio o proprietà:

- $\forall x \in A.P(x)$, la quale corrisponde a $\forall x.(x \in A \implies P(x))$
- $\exists x \in A.P(x)$, la quale corrisponde a $\exists x.(x \in A \wedge P(x))$

Le leggi di De Morgan in questo caso sono:

- $\neg\forall x \in A.P(x) \equiv \exists x \in A.\neg P(x)$, la quale in logica intuizionista vale solo nella parte $\exists x \in A.\neg P(x) \Vdash \neg\forall x \in A.P(x)$
- $\neg\exists x \in A.P(x) \equiv \forall x \in A.\neg P(x)$