



Electrical engineering

▼ 1.0 - Introduzione all'elettrostatica

▼ 1.1 - Elettromagnetismo

La carica elettrica e la forza di Coulomb

Qualora due particelle cariche, supposte puntiformi, di carica q_0 e q_1 , siano ad una distanza finita fra loro nel vuoto, la legge di Coulomb descrive la forza elettrostatica interagente fra loro:

$$|F_C| \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad [N]$$

Il coefficiente di proporzionalità è $1/(4\pi\epsilon_0)$ dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto.

L'unità di misura della carica elettrica nel sistema di misura SI è il coulomb [C].

In natura esistano solamente cariche multiple di $e = 1,6021 \cdot 10^{-19}$.

La cariche elettriche ed il loro moto

Forza che agisce su una particella carica:

$$F = q(E + u \times B)$$

dove u : velocità della carica.

Se $B = 0$ allora $F = qE$, dunque il **campo elettrico** $E = \frac{F}{q}$ è una forza per unità di carica $[N/C] = [V/m]$. Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione.

Se $E = 0$ allora $F = q(u \times B)$, dunque il **vettore induzione magnetica** B è una forza per unità di carica e di velocità $[Ns/Cm]$.

Una particella carica induce una forza sulle cariche che la circondano. Tale forza può essere attrattiva o repulsiva. Essa è la forza Coulombiana F_C (o forza elettrostatica). In ogni punto della regione attorno alla carica od in presenza di una distribuzione di cariche vi è un campo elettrico $E(x,y,z)$ definito dalla forza indotta su una carica di prova puntiforme unitaria posta nel punto considerato.

Qualora su una carica in moto si induca una forza deviante perpendicolare al moto, tale forza è la **forza magnetica** o **forza di Lorentz** F_L . Il campo di induzione magnetica $B(x,y,z)$, legato a F_L , è dato dalla forza indotta su una carica unitaria in moto per unità di velocità della carica stessa. La direzione del campo B è perpendicolare alla velocità ed alla forza F_L .

Densità volumetrica di carica

La carica elettrica non può essere creata o distrutta (legge della conservazione della carica elettrica). Può solo essere trasferita. Pertanto, la carica elettrica totale di un sistema isolato non può variare. La **densità volumetrica di carica** (o **distribuzione di carica**) è definita da:

$$\rho_C(x, y, z) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau}$$

dove $d\tau$ è l'elemento infinitesimo di volume.

Corrente elettrica

La seguente è una lista delle **leggi dell'elettromagnetismo** in forma integrale e in forma locale, le quali verranno spiegate successivamente.

Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale

$$\oint_{\mathcal{L}_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_c = i_t \quad \left(\text{dove } i_t = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right) \quad 1^\circ \text{ legge di Maxwell}$$

$$\oint_{\mathcal{L}_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_c = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \left(\text{dove } \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right) \quad 2^\circ \text{ legge di Maxwell}$$

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \frac{dq}{dt} \quad \text{legge di conservazione della carica}$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = q \quad \text{legge di Gauss}$$

$$\oiint_S \mathbf{J}_t \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \mathbf{J}_t \text{ ovunque solenoidale}$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \mathbf{B} \text{ ovunque solenoidale}$$

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad 1^\circ \text{ legge di Maxwell} \quad (\text{dal teorema di Stokes})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad 2^\circ \text{ legge di Maxwell} \quad (\text{dal teorema di Stokes})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad \text{legge di conservazione della carica (teor. divergenza)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad \text{legge di Gauss (dal teorema della divergenza)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0 \quad \mathbf{J}_t \text{ ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{B} \text{ ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)}$$

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

Densità di corrente

La densità di corrente elettrica \mathbf{J} è il vettore il cui modulo è la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla velocità \mathbf{u} delle cariche. La direzione ed il verso di \mathbf{J} sono la direzione ed il verso di \mathbf{u} :

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta S} \lim_{\Delta t} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \quad [C/(m^2 s)] = [A/m^2]$$

$J(x,y,z)$ definisce un campo vettoriale ed è la densità di flusso delle cariche. La corrente elettrica i è il flusso di carica attraverso una superficie S :

$$i = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS$$

Corrente elettrica

La **corrente elettrica** i che attraversa una superficie è la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad [A] = [C/s]$$

La **corrente elettrica istantanea** è:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico

La **tensione elettrica** e_{12} fra i punti 1 e 2 lungo il percorso l , è il lavoro $L_{q=1}^{1 \rightarrow 2, l}$ che il campo elettrico $E(x,y,z)$ compie per portare una carica unitaria dal punto 1 al punto 2 lungo l :

$$e_{12} = \int_{1,l}^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [V]$$

Per spostare la carica q dal punto 1 al 2 il lavoro è: $L_q^{1 \rightarrow 2, l} = qe_{12}$.

e_{12} dipende da valori che assume il campo E lungo la linea l (per il calcolo di e_{12} è necessario conoscere il valore di E in ogni punto di l).

Qualora la tensione e_{12} dipenda dai valori di una funzione $v(x,y,z)$ definita in una regione che contiene la linea l , essa diviene:

$$e_{12} = \int_{1,l}^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{1,l}^2 dv = v_1 - v_2 = v_{12}$$

dove $v(x,y,z)$ è la **funzione potenziale elettrico** e v_{12} è la **differenza di potenziale elettrico**.

Poiché v_{12} è la differenza fra i valori che la funzione $v(x,y,z)$ assume nel punto iniziale e nel punto finale di l , v_{12} non dipende dal percorso che unisce i due punti. In questo caso E è un vettore conservativo con $E = -\nabla v(x,y,z)$.

Per un percorso chiuso l_c contenuto nella regione ove E è conservativo, si ha:

$$e_{l_c} = \oint_{l_c} E \cdot dl_c = - \oint_{l_c} \nabla v \cdot dl_c = 0$$

Legge di Ampere - Prima legge di Maxwell

La grandezza vettoriale campo magnetico H è definito dalla legge di Ampere (prima legge di Maxwell):

$$\oint_{l_c} H \cdot dl_c = i_t \quad (\text{la corrente totale } i_t = i + i_s)$$

Anche in questo caso la corrente totale i_t è il flusso del vettore j_t ovunque solenoidale ($J_t = J + \partial D / \partial t$).

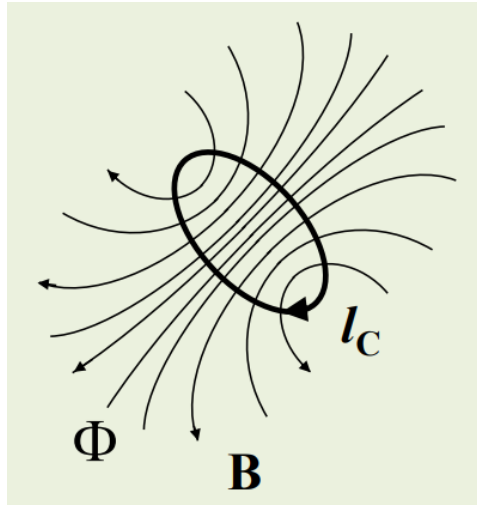
L'unità di misura SI di H è l'ampere su metro [A/m].

Legge dell'induzione di Faraday - Seconda legge di Maxwell

La legge dell'induzione (o legge di Faraday od anche seconda legge di Maxwell) stabilisce che:

$$e_{l_c} = \oint_{l_c} E \cdot dl_c = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

ove $\Phi(B)$ è il flusso magnetico concatenato con la linea chiusa l_c .



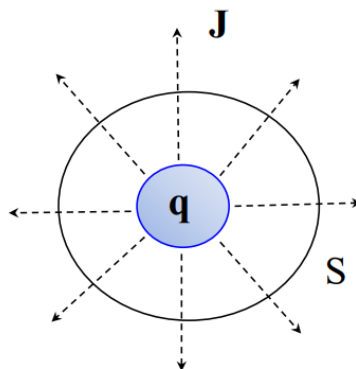
e_{l_c} è la tensione elettrica indotta sulla linea chiusa dalla variazione del flusso magnetico concatenato con l_c ed è detta **forza elettromotrice**, f.e.m.

In questo caso E non è conservativo.

Legge di conservazione della carica elettrica

La carica elettrica non si crea né si distrugge. Perciò la diminuzione della carica elettrica all'interno di un volume t corrisponde alle cariche che lasciano t fluendo attraverso la superficie chiusa S , superficie esterna di t . La **legge di conservazione della carica elettrica** afferma questo ed è espressa dall'espressione:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

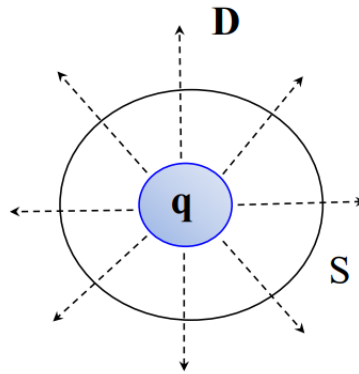


Legge di Gauss

Il campo induzione elettrica o campo spostamento elettrico è definito dalla legge di Gauss. Considerando una superficie chiusa S , che

delimita il volume V ; sia \hat{n} il versore normale alla superficie. La **legge di Gauss** afferma che:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \rho dV = Q$$



Differenza tra \mathbf{E} , \mathbf{B} e \mathbf{D} , \mathbf{H}

- \mathbf{D} ed \mathbf{H} descrivono ciò che produce il fenomeno elettromagnetico (la carica elettrica nel primo caso e la corrente totale nel secondo). Ne descrivono la causa.
- \mathbf{E} e \mathbf{B} descrivono le forze prodotte dal fenomeno elettromagnetico sulle cariche (forza elettrica per unità di carica e forza magnetica per unità di carica e di velocità della carica). Esse descrivono ciò che viene prodotto dal fenomeno EM. Ne descrivono l'effetto.

Per materiali lineari $\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{D}$, ove ϵ è la costante dielettrica del materiale. Per mezzi non lineari $\mathbf{E} = f(\mathbf{D})$.

Per materiali lineari $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, ove μ è la permeabilità magnetica del materiale. Per mezzi non lineari $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$. Solitamente per i materiali magnetici non lineari f è una funzione isteretica (materiali ferromagnetici).

Esiste anche una relazione tra \mathbf{J} ed \mathbf{E} . Per materiali lineari infatti $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, ove σ è la conducibilità elettrica del materiale. Per mezzi non lineari $\mathbf{J} = f(\mathbf{E})$. Tale relazione può essere espressa anche tramite l'utilizzo della resistività elettrica $\rho = 1/\sigma$, ottenendo $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$.

▼ 1.2 - Teoria dei circuiti

Negli apparati elettrici è necessario trasferire segnali elettrici o energia elettrica da un punto ad un altro. Ciò richiede un'interconnessione di dispositivi elettrici. L'interconnessione può essere effettuata in un circuito elettrico e ogni componente del circuito è noto come elemento circuitale.

L'elemento circuitale è una regione di spazio all'interno della quale sono confinati i fenomeni elettromagnetici. Le interconnessioni sono canali conduttori (cavi) in cui le cariche fluiscono da un componente all'altro.

Approssimazione circuitale

L'approssimazione circuitale si basa sull'ipotesi dell'approssimazione dell'Elettrodinamica quasi-stazionaria secondo la quale si ha che $\frac{\partial D}{\partial t}$ e $\frac{\partial B}{\partial t}$ non possono essere diverse da zero entrambe nello stesso punto. Si assume quindi che una variazione di B nel tempo non provochi la variazione di D ed una variazione di D nel tempo non causi la variazione di B. Il tempo di propagazione del segnale si considera nullo.

L'approssimazione circuitale assume che:

1. solo all'interno degli elementi circuitali $\frac{\partial D}{\partial t}$ o $\frac{\partial B}{\partial t}$ possono essere non nulli. All'esterno degli elementi circuitali:
 - La densità di corrente elettrica totale è data dalla densità di corrente di conduzione, quindi all'esterno degli elementi circuitali la densità di corrente di conduzione è un vettore solenoidale ($\nabla \cdot J_t = \nabla \cdot J = 0$)
 - Il campo elettrico è un vettore conservativo e la tensione elettrica fra due punti coincide con la differenza della funzione potenziale elettrico nei due punti
2. la propagazione dei segnali EM (tensioni e correnti) all'interno dell'intero circuito sia istantanea.

Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

Per la condizione 1 dell'approssimazione circuitale, poiché J_t è solenoidale e $J = J_t$ all'esterno degli elementi circuitali nei conduttori che connettono gli elementi, per una superficie chiusa che interseca conduttori ma non interseca elementi circuitali, il flusso totale di J uscente dalla superficie è nullo. Tale flusso è dato dalla somma algebrica delle h correnti negli h conduttori intersecati dalla superficie:

$$i_1 + \dots + i_n = 0$$

Equazione di nodo: la somma algebrica delle correnti che entrano in un nodo è uguale a zero.

Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT)

La condizione 1 consente di considerare all'esterno degli elementi circuitali il campo elettrico conservativo. Per il campo elettrico conservativo abbiamo dunque le seguenti due formule:

$$\int_1^2 E \cdot dl = v_1 - v_2 = v_{12}$$

$$\oint E \cdot dl = 0$$

Quindi se la linea chiusa interseca connessioni fra elementi all'esterno degli elementi stessi, ma non interseca elementi, si ha:

$$\oint E \cdot dl = v_{12} + v_{23} + \dots + v_{n1} = 0$$

Equazione di maglia: la somma algebrica delle tensioni di ramo in una maglia è nulla.

Analisi circuitale

In un circuito elettrico costituito da r elementi circuitali a due terminali (detti anche rami del circuito) connessi fra loro in n nodi, connessioni di più terminali. Ogni ramo è descritto dalle r coppie i - v di ogni ramo. Il circuito è quindi descritto da $2r$ incognite. Il problema dell'analisi circuitale consiste nella ricerca dello stato EM del circuito dato dalle $2r$ incognite. Esse sono legate dalle r equazioni ottenute dalle leggi Kirchhoff con $n-1$ (n sono il numero di nodi, connessione fra rami in un circuito) ottenute dalla LKC e $r-n+1$ dalla LKT) e dalle r equazioni degli elementi circuitali [$v = f(i)$].

$$(n-1) \text{ eq. } i \quad \sum_n i_k = 0$$

$$(r-n+1) \text{ eq. } i \quad \sum_m v_k = 0$$

$$r \text{ eq. } i \quad v_k = R_k i_k + V_{0,k}$$

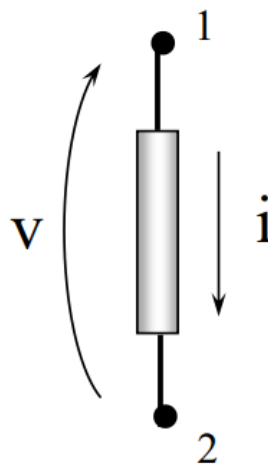
Esempio di equazione di un elemento circuitale con un resistore R_k ed un generatore indipendente di tensione $V_{0,k}$.

▼ 2.0 - Elementi circuitali

▼ 2.1 - Introduzione agli elementi circuitali

Introduzione agli elementi circuitali

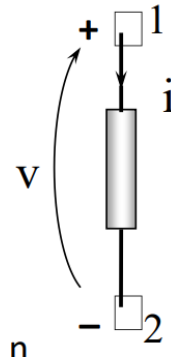
L'elemento circuitale a due terminali è un elemento costituito da una superficie chiusa S da cui escono i due terminali. Tutti i fenomeni EM sono attivi all'interno di S . Qui il campo E può essere non conservativo. Tutti i fenomeni EM tacciono all'esterno di S . Gli elementi sono collegati tra loro attraverso i terminali.



Un elemento circuitale a due terminali è un ramo del circuito.

Lo stato dell'elemento circuitale a due terminali è descritto da corrente di ramo i e tensione di ramo v . Per la solenodalità di J nei conduttori la corrente entrante dal terminale 1 è uguale alla corrente uscente dal terminale 2 ed è detta corrente di ramo i . All'esterno di S , E è conservativo. Pertanto all'esterno degli elementi circuitali esiste una funzione potenziale v definita dalla relazione $E = -\nabla v$. Detti v_1 e v_2 i valori della funzione potenziale v rispettivamente nei terminali 1 e 2, la differenza di potenziale $v = v_1 - v_2$ è la tensione di ramo.

L'elemento a due terminali è anche detto bipolo.



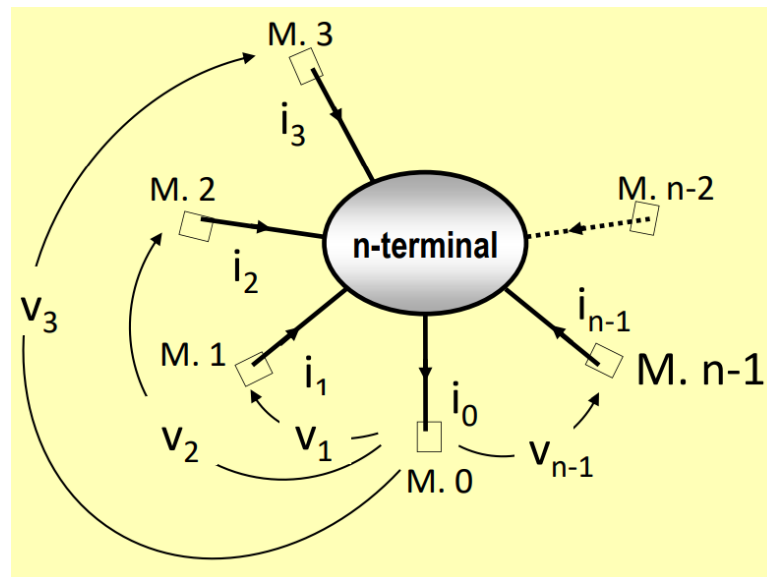
La corrente di ramo i è positiva quando entra nel terminale con potenziale maggiore ed esce dal terminale a potenziale minore. La relazione $v = f(i)$, con $v = v_1 - v_2$, caratteristica di ciascun bipolo, è l'equazione dell'elemento circuitale, o equazione di ramo.

Il lavoro svolto dal campo E sulle cariche che attraversano una sezione trasversale dell'elemento per unità di tempo è la potenza elettrica utilizzata dall'elemento circuitale a due terminali:

$$p(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_1^2 \frac{\Delta q E \cdot dl}{dt} \right) = \frac{dq}{dt} \int_1^2 E \cdot dl = i(t) \cdot v(t) \quad [W]$$

Elemento circuitale a n terminali

Un elemento di circuito avente n terminali con $n > 2$ è detto elemento circuitale a n terminali. Viene definito un terminale di riferimento (M.O) e gli altri terminali vengono riferiti ad esso.



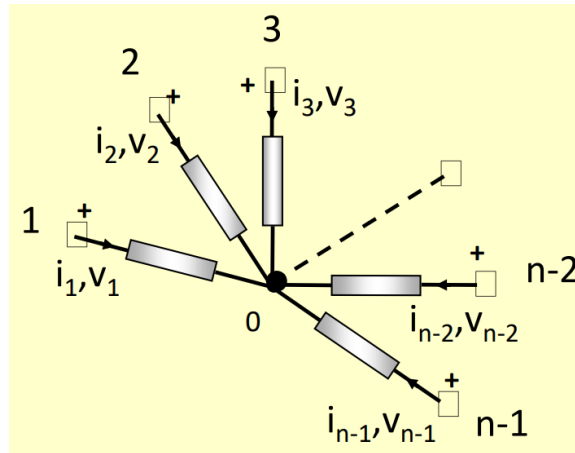
- Per la LKC si ha:

$$i_0 = i_1 + \dots + i_{n-1}$$

- Poichè il campo E esternamente all'elemento è conservativo si ha:

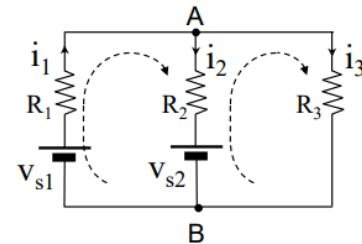
$$\begin{aligned} V_1 &= V_{M.1} - V_{M.0} \\ V_2 &= V_{M.2} - V_{M.0} \\ V_3 &= V_{M..3} - V_{M.0} \\ &\dots\dots\dots \\ V_{n-1} &= V_{M.n-1} - V_{M.0} \end{aligned}$$

Un elemento a n terminali è equivalente a n-1 elementi circuitali a due terminali posti con il terminale di riferimento in comune (stella di n-1 bipoli):



Esempio di analisi circuitale

La topologia del circuito con 3 rami e 2 nodi, i valori della tensione generata dai due generatori (V_{s1} , V_{s2}) e i valori delle resistenze (R_1 , R_2 , R_3) sono l'input del problema. Le tensioni e le correnti di ramo (v_1 , v_2 , v_3 , i_1 , i_2 , i_3) sono l'output del problema. Si deve:



1. Orientare i rami (definire il verso positivo delle correnti risultanti di ramo e i versi positivi opposti a quelli delle correnti).
2. Definire i nodi e le maglie per le equazioni della topologiche, $r-n+1$ eq.i delle maglie e $n-1$ eq.i dei nodi (nel circuito della figura: $n-1 = 1$; $r-n+1 = 2$).
3. Definire la direzione di percorrenza di ciascuna maglia (orario od antiorario).
4. Scrivere le equazioni topologiche e le equazioni degli elementi circuitali.

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ -v_1 - v_2 &= 0 \\ v_2 - v_3 &= 0 \\ v_1 &= R_1 i_1 - v_{s1} \\ v_2 &= R_2 i_2 + v_{s2} \\ v_3 &= R_3 i_3 \end{aligned}$$



Sostituendo le tensioni delle eq.i di ramo nelle eq.i topologiche si ottiene:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ -R_1 i_1 - R_2 i_2 &= -v_{s1} + v_{s2} \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 &= -v_{s2} \end{aligned}$$



Dalle 3 eq.i si ricavano le correnti di ramo (i_1 , i_2 , i_3). Sostituendo le correnti i_1 , i_2 , i_3 nelle eq.i di ramo si ricavano le tensioni di ramo v_1 , v_2 , v_3 .

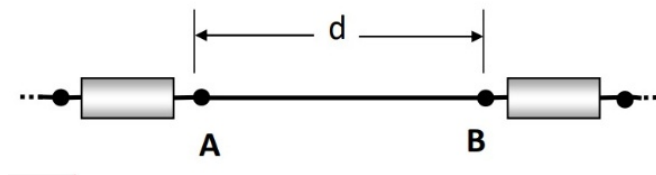
Approssimazione circuitale

Le grandezze elettriche possono avere variazioni temporali rapide o lente rispetto ai tempi di transito fra gli elementi di un circuito. L'ipotesi dell'approssimazione quasi stazionaria è che i tempi di transito dei segnali elettrici all'interno del circuito siano nulli rispetto alla variazione temporale delle grandezze elettriche considerate. Per una grandezza sinusoidale nel tempo, il tempo per la sua propagazione fra due elementi collegati è dato da $t_{AB} = d/v$, dove A e B sono i punti di uscita ed ingresso del segnale elettrico dai due elementi, d è la loro distanza (lunghezza del conduttore) e c è la velocità della luce, velocità di

propagazione del segnale elettrico ($c = 3 \times 10^8$ m/s). La frequenza della grandezza elettrica è f , e periodo T con $f = 1/T$ e lunghezza d'onda $\lambda = c/f$, con $T = \lambda/c$. Per l'approssimazione circuitale deve essere:

$$t_{AB} \ll T \quad \longleftrightarrow \quad d \ll \lambda$$

Per circuiti di piccole dimensioni l'approssimazione corrisponde quasi totalmente alla realtà, mentre ciò non avviene per circuiti di grandi dimensioni, in cui occorre considerare il tempo di propagazione del segnale.

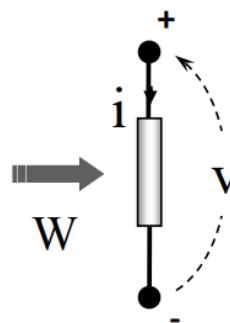


Convenzione del bipolo passivo e attivo

- Bipolo passivo

Nella bipolo passivo la corrente entra nell'elemento dal terminale a potenziale maggiore. Negli elementi passivi l'energia è sempre positiva o uguale a zero (non è mai generata).

Tra questi troviamo i resistori, condensatori e induttori.



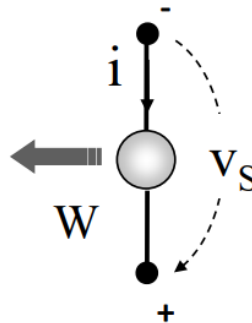
- Bipolo attivo

Nel bipolo attivo viene generata energia ed il flusso delle cariche è prodotto dal bipolo stesso. Le cariche, e quindi la corrente elettrica entrano nell'elemento dal terminale a potenziale minore (terminale

negativo) e sono fatte fluire verso il terminale a potenziale più elevato. Il bipolo quindi produce lavoro sulle cariche.

Le sorgenti di energia elettrica (il generatore di tensione ed il generatore di corrente) sono gli elementi circuitali attivi.

Negli elementi attivi l'energia è sempre negativa (è sempre generata).

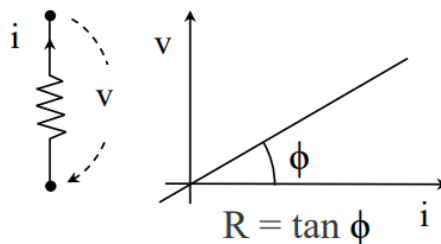


▼ 2.2 - I dipoli ideali passivi

Il resistore

Il resistore è un dipolo passivo che dissipa energia ed è descritto dalla seguente equazione costitutiva (legge di Ohm):

$$v(t) = R \cdot i(t)$$



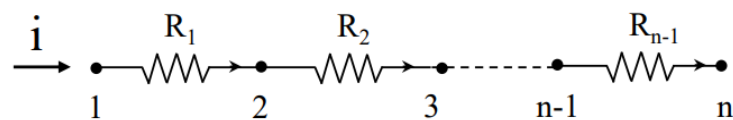
La resistività elettrica $\rho = \frac{1}{\sigma}$ di un materiale descrive la proprietà del materiale di contrastare il flusso delle cariche elettriche.

La resistenza elettrica R di un elemento è il parametro che descrive la proprietà dell'elemento di contrastare la corrente, e in un elemento circuitale con sezione trasversale costante S , lunghezza l , resistività ρ uniforme in tutto il volume, e con densità di corrente perpendicolare a S , la resistenza è:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Resistori in serie

Due o più bipoli sono in serie se sono collegati l'uno dopo l'altro con i terminali frapposti in comune. I nodi in comune collegano solamente due bipoli in serie, mentre i nodi iniziale e finale della serie possono collegare più rami. La corrente di un bipolo in serie fluisce esclusivamente nel bipolo successivo della serie, pertanto nei bipoli in serie la stessa corrente scorre attraverso i bipoli uno dopo l'altro.

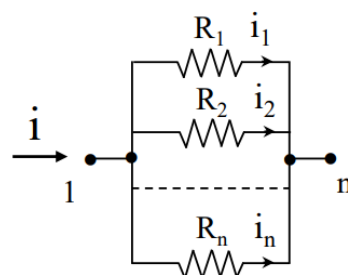


La resistenza equivalente di n resistori in serie è la seguente:

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

Resistori in parallelo

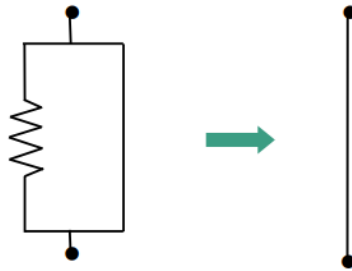
Due o più bipoli sono in parallelo se condividono gli stessi due terminali. Pertanto sono sottoposti alla stessa tensione.



La resistenza equivalente di n resistori in parallelo vale:

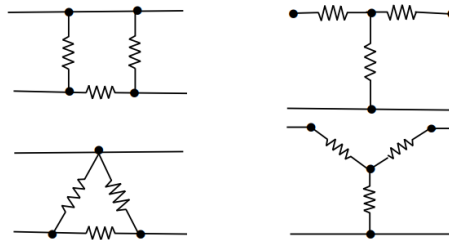
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

È importante ricordare che un resistore in parallelo con uno in circuito chiuso equivale a un circuito chiuso:



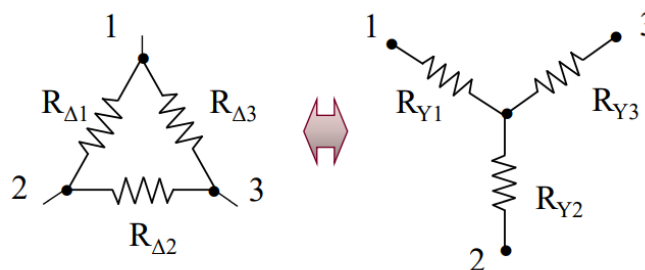
Resistori a stella ed a triangolo

Un sistema di tre resistenze può essere collegato a triangolo o a stella.



Colleg. a triangolo **Colleg. a stella**

Una rete a stella può essere equivalente ad una rete a triangolo. Ciò significa che le stesse tensioni v_{12} , v_{23} e v_{31} inducono le stesse correnti entranti nella stella e nel triangolo al nodo 1, 2 e 3.



Per fare ciò ogni resistenza della stella è il prodotto dei due resistori del triangolo collegati allo stesso nodo, diviso per la somma dei resistori del triangolo.

$$R_{Y1} = \frac{R_{\Delta1} R_{\Delta3}}{R_{\Delta1} + R_{\Delta2} + R_{\Delta3}}; R_{Y2} = \frac{R_{\Delta1} R_{\Delta2}}{R_{\Delta1} + R_{\Delta2} + R_{\Delta3}}; R_{Y3} = \frac{R_{\Delta2} R_{\Delta3}}{R_{\Delta1} + R_{\Delta2} + R_{\Delta3}}$$

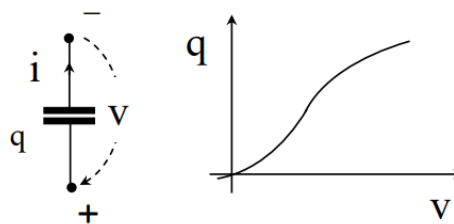
Ogni resistenza del triangolo è invece la somma dei prodotti due a due dei resistori della stella, divisi per la resistenza nel ramo opposto della stella.

$$R_{\Delta1} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y3}}; R_{\Delta2} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y1}}; R_{\Delta3} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y2}}$$

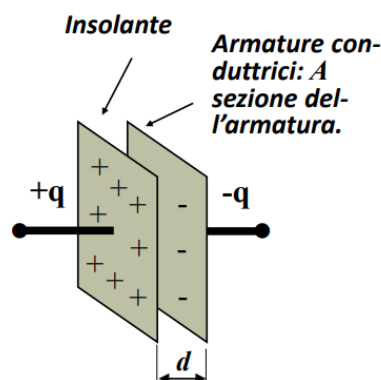
Il condensatore

Il condensatore è costituito da due piastre conduttrici (armature) separate da materiale isolante. È caratterizzato dalla seguente equazione costitutiva:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



dove $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$ è la capacità del condensatore [F (farad)].



La carica contenuta nel condensatore è data dalla formula:

$$Q = CV$$

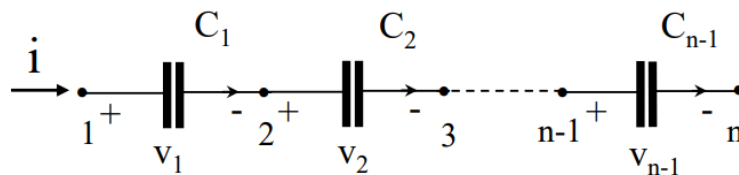
Energia immagazzinata nel condensatore al tempo t :

$$W_C = \frac{1}{2} C v(t)^2$$

Il condensatore è un elemento passivo che non dissipa energia. L'energia viene immagazzinata sotto forma di energia elettrostatica. La corrente non può attraversarlo ma porta cariche positive su un'armatura e negative sull'altra. L'energia elettrostatica immagazzinata è utilizzata per la creazione del campo elettrico dovuto alla separazione di carica. Essa viene resa quando la corrente cambia direzione portando via le cariche accumulate sulle armature.

Condensatori in serie

In più condensatori in serie scorre la stessa corrente.

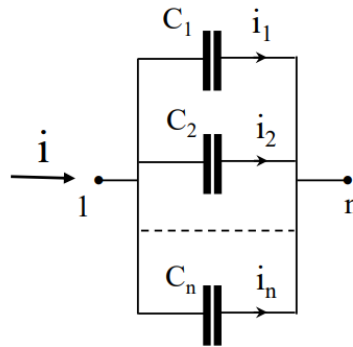


La capacità equivalente di n condensatori in serie equivale alla seguente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

Condensatori in parallelo

Più condensatori in parallelo sono sottoposti alla stessa tensione.



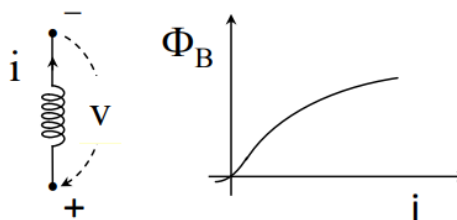
La capacità equivalente di n condensatori in parallelo equivale alla seguente:

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k$$

L'induttore

L'induttore è costituito da avvolgimenti attorno a un nucleo ferromagnetico. La corrente che scorre attraverso gli avvolgimenti genera un flusso magnetico Φ_B . L'equazione caratteristica dell'induttore è la seguente:

$$v = \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



Ogni induttore presenta un valore del flusso magnetico in funzione della corrente $\Phi_B = f(i)$, nel caso dell'induttore lineare tempo-indipendente si ha:

$$\Phi_B(t) = Li(t)$$

dove L è l'induttanza $[H]$, ed è data dalla seguente formula:

$$L = \mu \frac{SN}{l}$$

dove μ è la permeabilità magnetica, N il numero di spire, S la sezione della spira e l la lunghezza dell'induttore.

È possibile inoltre esprimere la corrente che circola nell'induttore in funzione del tempo:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

▼ Dimostrazione

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \\ \Rightarrow di &= \frac{1}{L} v(t) dt \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t') dt' \\ i(t) &= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt' \end{aligned}$$

L'energia immagazzinata nell'induttore è la seguente:

$$W_L = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

▼ Dimostrazione

$$\epsilon_L = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' = \int_{-\infty}^t L \frac{di}{dt'} i(t') dt' = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

Notiamo che quando la corrente è costante nel tempo, la tensione fra i terminali dell'induttore è nulla. Esso quindi in regime di corrente continua si comporta da corto circuito.

Induttori in serie

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k$$

Induttori in parallelo

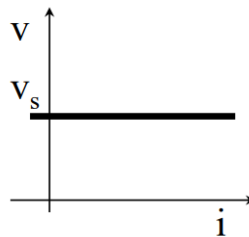
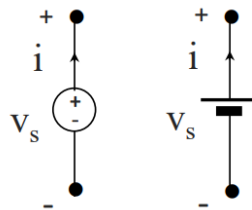
$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

▼ 2.3 - I dipoli ideali attivi

Generatore di tensione ideale

Il generatore di tensione ideale mantiene la tensione v_s tra i suoi terminali indipendentemente dalla corrente che lo attraversa.

$$v = E$$

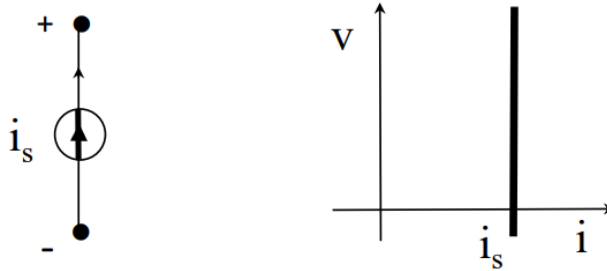


Per simulare un generatore di tensione reale si considera una resistenza interna R_i in serie con il generatore ideale:

$$v = E - R_i i$$

Generatore di corrente ideale

Il generatore di corrente ideale è un elemento attivo. Mantiene la corrente che lo attraversa al valore i_s indipendentemente dalla differenza di potenziale fra i suoi terminali.



Per simulare un generatore di corrente reale si considera un resistore R_i in parallelo con il generatore ideale:

$$i = i_s - \frac{v}{R_i}$$

▼ 3.0 - Metodi di analisi circuitale

Risolvere un circuito significa trovare tutte le tensioni e le correnti di lato.

Metodo algebrico di Tableau

In un circuito sussistono $2L$ incognite, con L il numero dei lati del circuito, e per ricavarlo occorre dunque utilizzare $2L$ equazioni. Per ogni lato sussiste un'equazione costitutiva connessa all'elemento circuitale presente, dunque ci sono L equazioni costitutive. Per raggiungere le $2L$ equazioni occorre dunque aggiungere L equazioni, ricavate dalle leggi LKC e LKT , dunque:

- L equazioni costitutive
- L equazioni di kirchhoff

N nodi:

- $N - 1$ LKC
- $L - N + 1$ $LKTs$

Il metodo algebrico di Tableau consiste nel risolvere il sistema formato dalle $2L$ equazioni in $2L$ incognite.

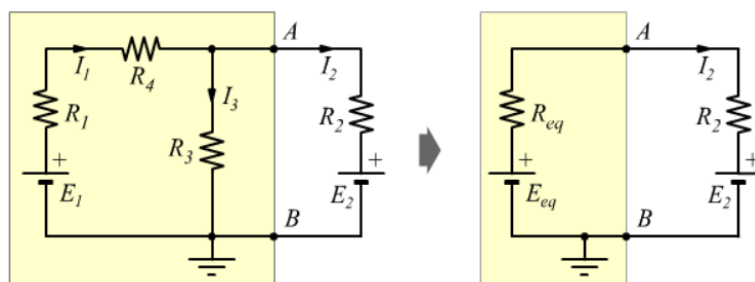
Sovrapposizione degli effetti

Le variabili di rete (effetti) si possono ottenere come sovrapposizione delle risposte dovute alle singole cause.

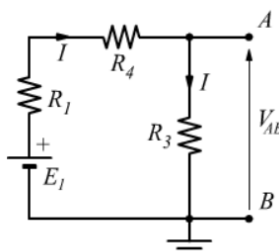
Con il metodo della sovrapposizione degli effetti si analizza dunque una causa alla volta passivando tutti i generatori tranne quello in questione e si scrive l'equazione della corrente che circola nel circuito passivato.

Teorema di Thevenin

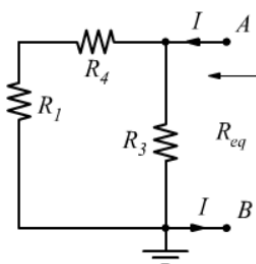
Una rete lineare vista da due nodi può essere sostituita da un generatore di tensione E_{eq} che rappresenta la tensione a circuito aperto fra i due nodi, in serie con la resistenza equivalente R_{eq} vista ai capi dei due nodi calcolata passivando i generatori indipendenti.



E_{eq} : è la tensione vista ai morsetti A e B a circuito aperto.



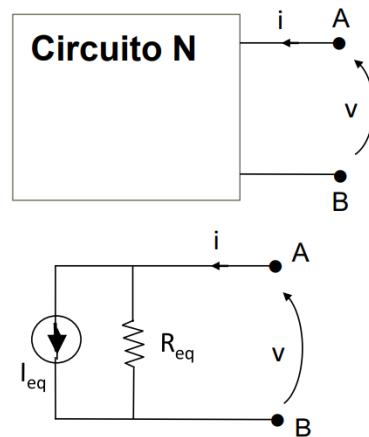
R_{eq} : è la resistenza vista da A e B passivando i generatori indipendenti.



Teorema di Norton

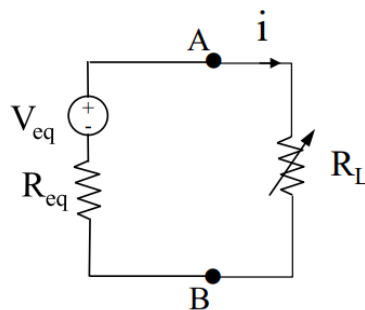
Una rete lineare vista da due nodi può essere sostituita da un generatore di corrente I_{eq} che rappresenta la corrente fra i due nodi quando vi è un corto,

in parallelo con la resistenza equivalente R_{eq} vista ai capi dei due nodi calcolata passivando i generatori indipendenti.



Teorema del massimo trasferimento di potenza

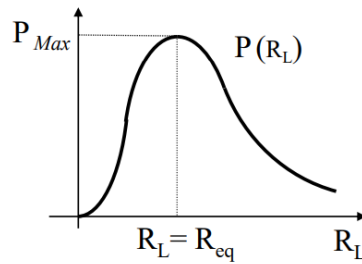
Il circuito equivalente di Thévenin può essere utilizzato per determinare la potenza massima che un circuito lineare può fornire ad una resistenza R_L collegata alla porta del circuito.



La potenza assorbita da R_L è:

$$p = R_L i^2 = \left(\frac{V_{eq}}{R_{eq} + R_L} \right)^2 R_L$$

ed ha il seguente grafico:



Il teorema di trasferimento della massima potenza afferma che: la potenza massima viene trasferita ad una resistore di carico quando la sua resistenza è uguale alla resistenza equivalente di Thévenin.

Teorema di Millman

Data una rete con 2 o più lati in parallelo, la tensione ai capi della rete è pari al rapporto delle corrente di corto-circuito di ogni singolo lato e la sommatoria delle conduttanze di ogni lato.

$$v_{AB} = \frac{\sum_k \frac{v_k}{R_k} + \sum_j i_j}{\sum_n \frac{1}{R_n}}$$

▼ 4.0 - Analisi del transitorio

▼ 4.1 - Introduzione al transitorio

Transitorio

Finora abbiamo considerato solo circuiti a corrente costante, adesso consideriamo anche la variabile tempo.

Modifiche o variazioni, chiamate transitorio, che possono presentarsi in un circuito sono le seguenti:

- Generatori variabili nel tempo
- Guasti
- Interruttori

Un interruttore può essere:

- Aperto $\rightarrow i = 0 \rightarrow$ circuito aperto
- Chiuso $\rightarrow v = 0 \rightarrow$ corto circuito

La risposta di un circuito ad un transitorio si compone di una risposta temporanea del circuito che si esaurisce con il passare del tempo e da

una risposta di regime stazionario che descrive il comportamento del circuito molto tempo dopo l'improvviso cambiamento. Questa è la parte permanente della risposta.

risposta completa: risposta transitoria + risposta stazionaria

È possibile inoltre dividere gli elementi circuitali passivi visti sinora in:

- Adinamici (resistori): non hanno memoria.
- Dinamici (induttori e condensatori): hanno memoria.

Principio di conservazione dell'energia

Gli elementi con memoria per cambiare il loro stato operativo devono rispettare il principio di conservazione dell'energia, quindi non è possibile che l'energia immagazzinata da ciascuno di questi elementi subisca durante l'evento che causa il transitorio una variazione istantanea finita. Deve essere quindi (E : energia):

$$E(0^-) = E(0^+)$$

Infatti una variazione istantanea dell'energia sarebbe causata solo da una eccitazione con potenza infinita.

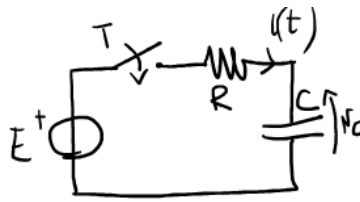
$$\begin{aligned} \varepsilon_L(t) &= \frac{1}{2} L i^2 && \leftarrow \begin{array}{l} \text{Energia magnetica dell'induttore} \\ \text{Nell'induttore variazioni istantanee di } i \text{ non sono possibili} \end{array} \\ \varepsilon_C(t) &= \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} && \leftarrow \begin{array}{l} \text{Energia elettrostatica del condensatore} \\ \text{Nel condensatore variazioni istantanee di } v \text{ e } Q \text{ non sono possibili} \end{array} \end{aligned}$$

Questo implica dunque che:

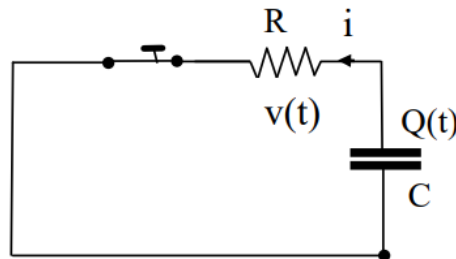
$$\begin{aligned} i(0^+) &= i(0^-) && \text{nei rami con induttori} \\ v(0^+) &= v(0^-) && \text{tra i terminali di un condensatore} \\ Q(0^+) &= Q(0^-) && \text{in ciascuna armatura di un condensatore} \end{aligned}$$

▼ 4.2 - Circuiti del primo ordine

Circuito RC



Un circuito RC è un circuito formato da un resistore e un condensatore.



All'istante $t = 0$ l'interruttore del circuito RC viene chiuso. Per $-\infty < t \leq 0$ il condensatore è carico con $Q = Q_0 = CV_0$. Alla chiusura dell'interruttore la tensione, dovuta al campo elettrostatico creato dalle cariche $+Q_0$ e $-Q_0$ sulle due armature, spinge le cariche da un'armatura all'altra lungo il conduttore attraverso il resistore creando corrente elettrica, la quale trasferisce l'energia elettrostatica del condensatore al resistore dove è dissipata come energia termica. Quando le armature si sono scaricate, tutta l'energia elettrostatica è trasformata in calore dal resistore e dissipata. Il campo elettrico e la tensione si annullano e il transitorio si spegne.

Per $0 \leq t < +\infty$, tramite la LKC è possibile ricavare che:

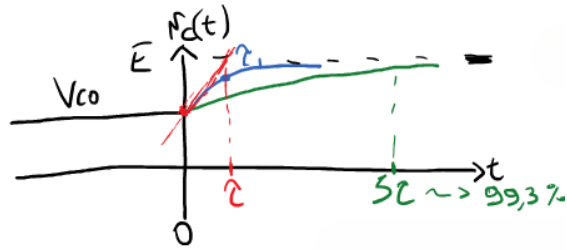
$$i_R + i_C = 0 \implies \frac{dv}{dt} + \frac{v}{CR} = 0$$

Questa è un'equazione differenziale omogenea del primo ordine, la cui risoluzione porta alla formula:

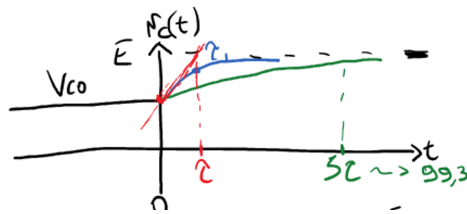
$$v_C(t) = (V_{C0} - E)e^{-t/\tau} + E$$

$$\implies i(t) = C \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - V_{C0}}{R} e^{-t/\tau}$$

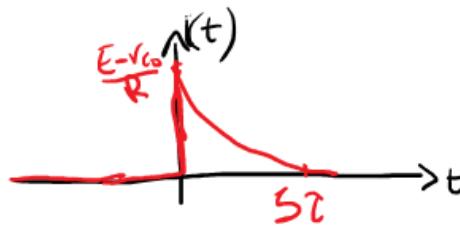
dove $\tau = RC$ è la costante di tempo, ovvero il tempo necessario per il decadimento di un fattore $1/e = 0.368$ del suo valore iniziale.



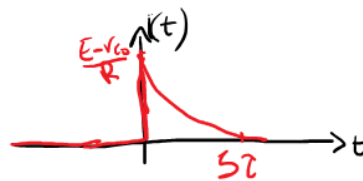
Dopo un intervallo di 5τ la tensione di transitorio si è ridotta al disotto dell'1 % e lo stato stabile può essere considerato raggiunto.



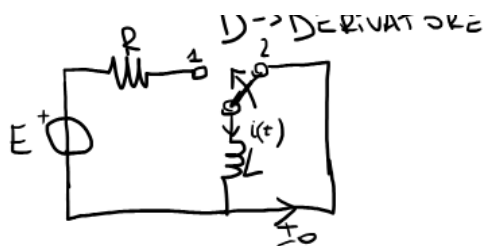
La tensione è continua.



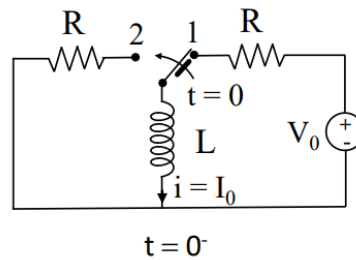
La corrente non varia con continuità.



Circuito RL



Un circuito RL è un circuito formato da un resistore e un induttore.



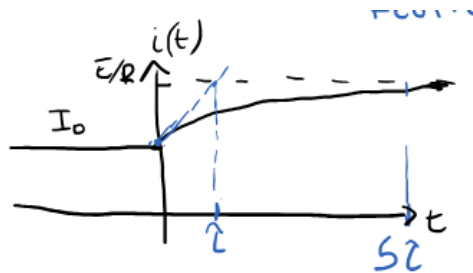
La risposta naturale del circuito RL è data dalla chiusura del derivatore da 2 a 1.

La soluzione dell'equazione è:

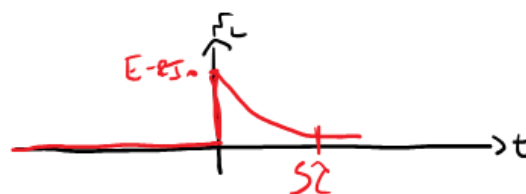
$$i(t) = \left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow v_L(t) = L \frac{di}{dt} = (E - RI_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove $\tau = \frac{L}{R}$.



La corrente è continua.

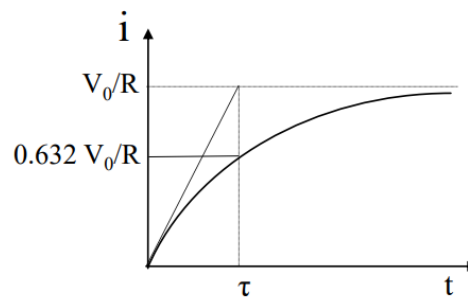
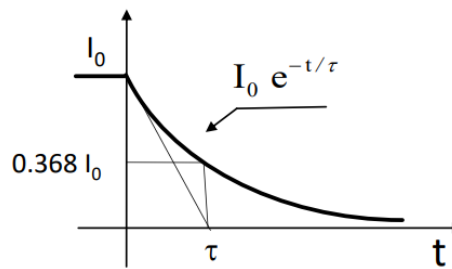


La tensione non varia con continuità.

Relazione tra RC e RL

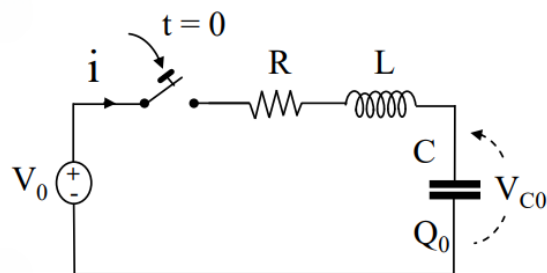
Notiamo che in entrambe i casi le variabili di stato presentano la seguente formula durante il transitorio.

$$x(t) = (x_0 - x_\infty)e^{-t/\tau} + x_\infty$$



▼ 4.3 - Circuiti del secondo ordine

Circuito RLC



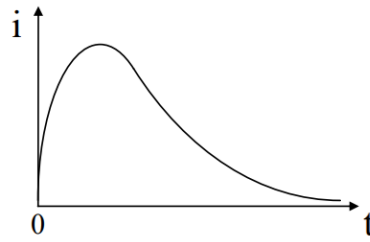
Alcune definizioni:

- $\alpha = \frac{R}{2L}$: fattore di smorzamento.
- $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$: frequenza di risonanza.

La soluzione della risposta completa del transitorio si presentano tre casi:

- $\alpha > \omega_0$: caso sovrasmorzato.

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}(e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t}) - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t}e^{-\alpha t}$$



- $\alpha = \omega_0$: caso con smorzamento critico.

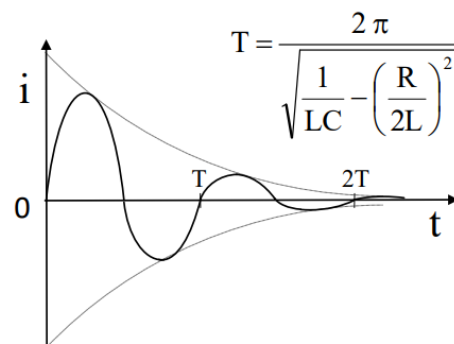
$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L} t e^{-\alpha t}$$



- $\alpha < \omega_0$: caso sottosmorzato.

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\alpha t}$$

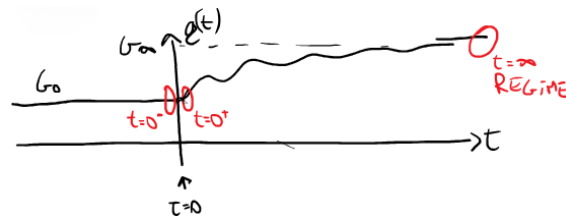
dove $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$.



▼ 4.4 - Metodo per ispezione

Siccome risolvere equazioni differenziali di ordine superiore al secondo è complesso, viene utilizzato il metodo per ispezione al fine di effettuare un'analisi del transitorio di un circuito di ordine superiore al secondo.

Siccome i grafici della corrente e della tensione di un circuito di ordine superiore al secondo sono del seguente tipo:



nel metodo per ispezione ci si interessa solamente dei momenti:

- $t = 0^-$: istante prima che si instauri il transitorio.

In questa fase, la quale è a regime stazionario, le derivate della corrente e della tensione rispetto ai tempi sono equivalenti a 0. Per questo motivo:

condensatori \rightarrow circuiti aperti ($i = C \frac{dv}{dt} = 0$)

induttori \rightarrow cortocircuiti ($v = L \frac{di}{dt} = 0$)

- $t = 0^+$: istante immediatamente dopo l'istaurazione del transitorio.

In questa fase abbiamo che $x(0^-) = x(0^+)$, ma non si è più in regime stazionario, dunque:

condensatori \rightarrow generatori di tensione con $v_c(0^-) = v_c(0^+) = V_\infty$

induttori \rightarrow generatori di corrente con $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_\infty$.

Vanno comunque mantenute le convenzioni di corrente e tensione.

- $t = \infty$: regime.

In questa fase si ritorna a regime stazionario, quindi:

condensatori \rightarrow circuiti aperti

induttori \rightarrow cortocircuiti

▼ 5.0 - Regime sinusoidale

▼ 5.1 - Fasori

Grandezza sinusoidale

Si definisce come grandezza sinusoidale nel tempo quanto segue:

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha)$$

dove:

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$: periodo

- $f = \frac{1}{T}$: frequenza
- $A_m = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt = 0$: valore medio
- $A = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$: valore efficace

Potenza media dissipata da R

La potenza media dissipata da un resistore R in un circuito a corrente alternata è:

$$p(t) = \frac{1}{T} \int_0^T Ri(t)^2 dt = R \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt = RI^2$$

Notiamo che è uguale a quella consumata in regime stazionario se il valore efficace nei due regimi sono uguali.

Sistemi isofrequenziali

In un sistema isofrequenziale due grandezze sono alla stessa frequenza:

$$\begin{aligned} a(t) &= \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) \\ b(t) &= \hat{B} \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

Le grandezze sono dunque individuate da due numeri reali: ampiezza e fase. Lo sfasamento di $b(t)$ rispetto a $a(t)$ è dato da:

$$\varphi = \alpha - \beta$$

- $\varphi = 0$: in fase
- $\varphi > 0$: $a(t)$ in anticipo rispetto a $b(t)$
- $\varphi < 0$: $a(t)$ in ritardo rispetto a $b(t)$
- $\varphi = \pm\pi$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in opposizione di fase (il massimo di a corrisponde al minimo di b)
- $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in quadratura (il massimo di a corrisponde allo zero di b)

In un circuito isolato si definisce lo zero dei tempi per il sistema di riferimento ponendo per una grandezza la fase nulla.

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t)$$

$$b(t) = \hat{B} \cos(\omega t - \varphi)$$

Fasori

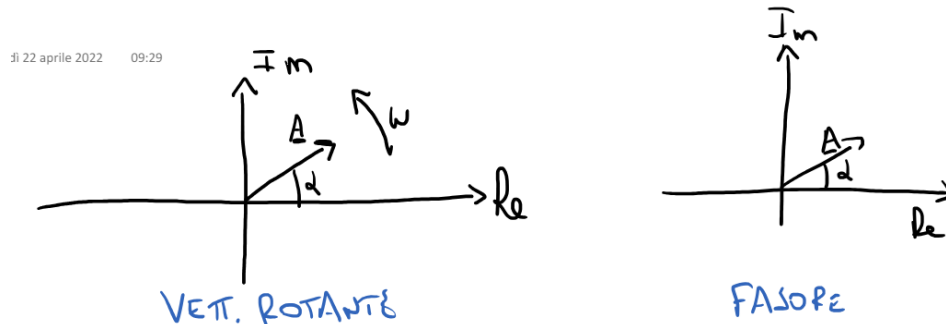
Rappresentiamo una grandezza sinusoidale tramite un numero complesso (un vettore). Questo ci permetterà di risolvere i circuiti in maniera più agevole.

Per l'identità di Eulero si ha che $e^{ja} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, per cui $Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha)$ e dunque:

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}[\hat{A}e^{j(\omega t + \alpha)}]$$

dove $\hat{A}e^{j(\omega t + \alpha)}$ è il vettore rotante nel piano complesso.

Segnali isofrequenziali presentano lo stesso fattore rotante ($e^{j\omega t}$), per distinguerli si introduce dunque la nozione di fase: $\underline{A} = Ae^{j\alpha} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$ è il fasore di $a(t)$.



Trasformata di Steinmetz

$$S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \dots = Ae^{j\alpha}$$

La trasformata di Steinmetz associa ad una grandezza nel tempo una grandezza nel dominio fasoriale.

La trasformata di Steinmetz è un operatore lineare, dunque:

$$S[ma(t) + nb(t)] = mS[a(t)] + nS[b(t)]$$

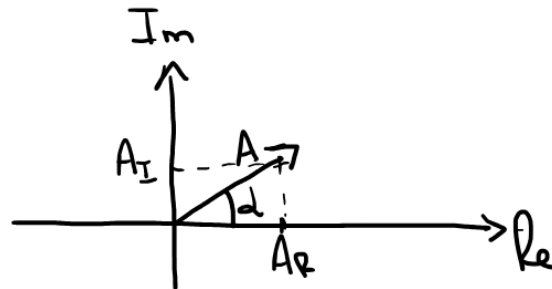
Inoltre:

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = j\omega S[a(t)]$$

Operazioni sui numeri complessi

Un fasore può essere rappresentato in due modi:

- Rappresentazione cartesiana: $\hat{A} = A_R + jA_I$
- Rappresentazione polare: $\hat{A} = Ae^{j\alpha}$



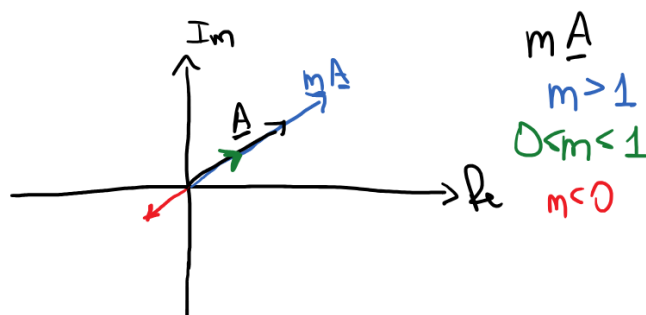
Conversione polare → cartesiana

$$Ae^{j\alpha} = \begin{cases} A_R = A \cos(\alpha) \\ A_I = A \sin(\alpha) \end{cases}$$

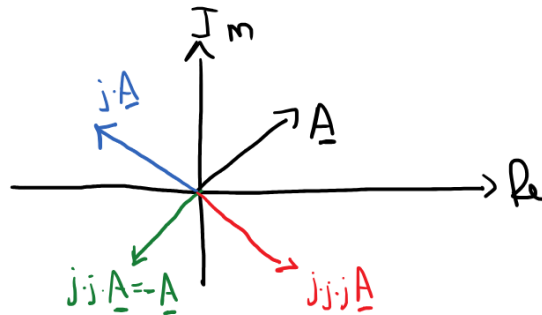
Conversione cartesiana → polare

$$A_R + jA_I = \begin{cases} A = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \\ \alpha = \arctg\left(\frac{A_I}{A_R}\right) \end{cases}$$

Moltiplicazione per un numero reale



Moltiplicazione per j



Operazioni tra numeri complessi

$$\hat{A} = A_R + jA_I = Ae^{j\alpha}$$

$$\hat{B} = B_R + jB_I = Be^{j\beta}$$

- Somma

$$\hat{A} + \hat{B} = (A_R + B_R) + j(A_I + B_I)$$

- Prodotto

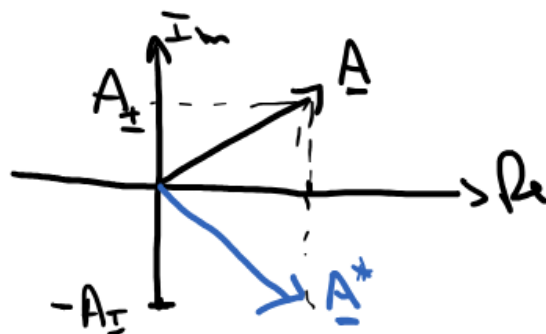
$$\hat{A} \cdot \hat{B} = A \cdot B e^{j(\alpha+\beta)}$$

- Rapporto

$$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}$$

- Complesso coniugato

$$\hat{A}^* = A_R - jA_I = Ae^{-j\alpha}$$



Impedenza e ammettenza

Impedenza

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$$

Inoltre, siccome $\underline{V} = V e^{j\alpha}$ e $\underline{I} = I e^{j\beta}$, allora $\underline{Z} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha-\beta)}$, dove $\varphi = \alpha - \beta$ è lo sfasamento.

Infine, siccome $\underline{Z} = R + jX$ è un numero complesso, chiamiamo la sua parte immaginaria X come reattanza.

Ammetenza

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Legge di Ohm simbolica

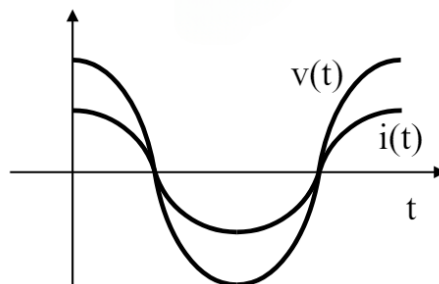
$$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$$

Equazioni di elementi circuitali

Equazione del resistore

$$v(t) = Ri(t) \iff \underline{V} = R\underline{I}$$

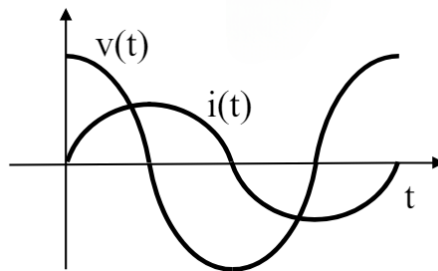
$$\underline{Z} = R \implies \begin{cases} Z_R = R \\ Z_I = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |Z| = R \\ \varphi = 0 \end{cases}$$



Equazione dell'induttore

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \iff \underline{V} = jL\omega \underline{I}$$

$$\underline{Z} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \implies \begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = \omega L \end{cases} \quad \begin{cases} |Z| = \omega L \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

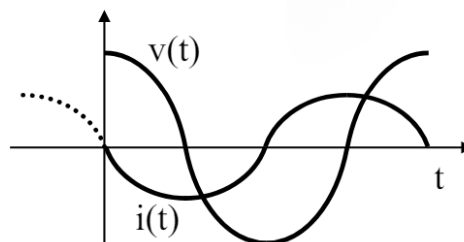


Reattanza induttiva: $X_L = \omega L$.

Equazione del condensatore

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' \iff i(t) = C \frac{dv}{dt} \iff \underline{V} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$$

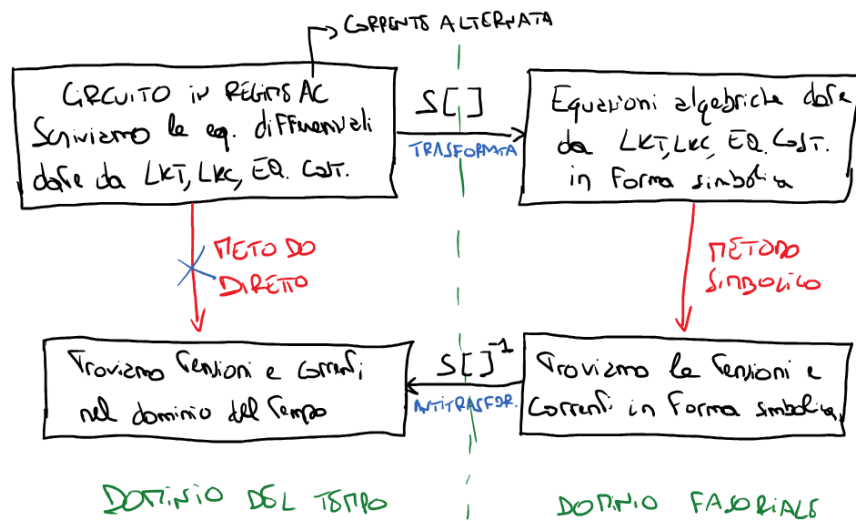
$$\underline{Z} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \implies \begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = -\frac{1}{\omega C} \end{cases} \quad \begin{cases} |Z| = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



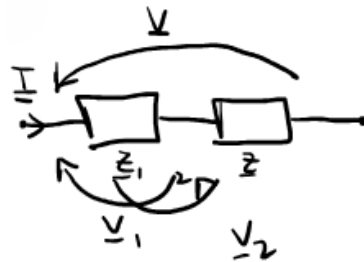
Reattanza capacitiva: $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.

Metodo simbolico

Per circuiti in corrente alternata non è possibile trovare tensioni e correnti nel dominio del tempo tramite metodo diretto, ma occorre passare per il dominio fasoriale trasformando e antitrasformando:



Serie e parallelo



$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} = \underbrace{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}_{\underline{Z}_{eq}} \underline{I}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$



$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right)}_{\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{Y}_{eq}} \underline{V}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

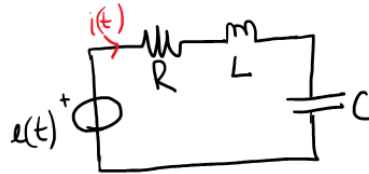
☐ Esercizi

▼ 5.2 - Risonanza e antirisonanza

Risonanza

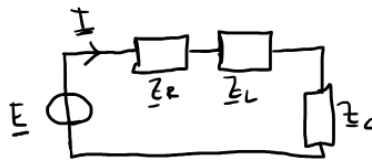
Pulsazione di risonanza

Consideriamo un circuito RLC in regime AC.



dove $e(t) = \hat{V} \cos(\omega t + \alpha_V)$.

Trasformiamolo in regime fasoriale:



Possiamo dunque calcolare l'impedenza equivalente:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C \\ \underline{Z}_R = R \\ \underline{Z}_L = j\omega L \\ \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

dove X è il valore della reattanza.

È possibile ora calcolare il valore della pulsazione di risonanza, definita come il valore della pulsazione per il quale la reattanza si annulla:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Tensione e corrente rispetto alla risonanza

Sappiamo che la tensione del circuito considerato vale $\underline{V} = V e^{j\alpha_V}$.

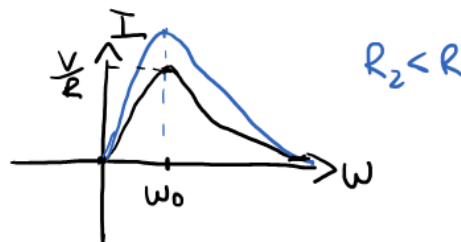
Supponiamo $\alpha_V = 0 \rightarrow \underline{V} = V$.

--

La corrente ha invece il valore $\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{eq}} = I e^{j\alpha_I}$, ovvero:

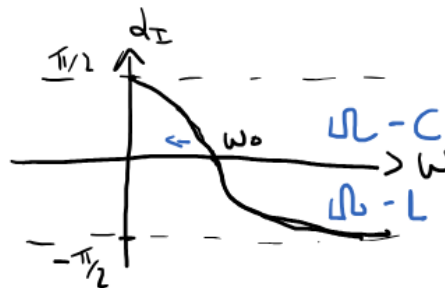
- $|\underline{I}| = \frac{|\underline{V}|}{|\underline{Z}_{eq}|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$

ω	$ \underline{I} $
0	0
ω_0	$\frac{V}{R}$
∞	0



- $\alpha_I = -\varphi = -\arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

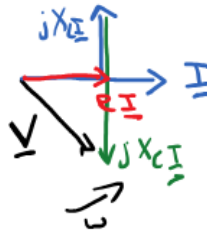
ω	α_I
0	$\pi/2$
ω_0	0
∞	$-\pi/2$



Reattanza induttiva e capacitiva rispetto alla risonanza

Sapendo inoltre che $\underline{Z}_{eq} = R + j(X_L - X_C)$ e che $\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$ possiamo distinguere i casi:

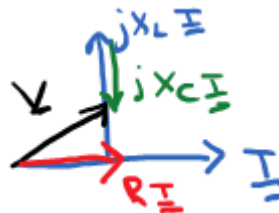
- $\omega < \omega_0 \rightarrow X_C > X_L$



- $\omega = \omega_0 \rightarrow X_C = X_L$



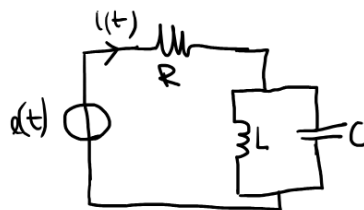
- $\omega > \omega_0 \rightarrow X_L > X_C$



Antirisonanza

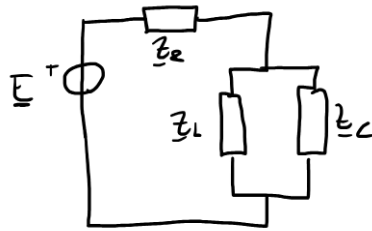
Pulsazione di antirisonanza

Consideriamo un circuito RLC, con induttanza e condensatore in parallelo, in regime AC.



dove $e(t) = \underline{V} \cos(\omega t + \alpha_v)$.

Trasformiamolo in regime fasoriale:



Possiamo dunque calcolare l'impedenza equivalente:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L // \underline{Z}_C \\ \underline{Z}_R = R \\ \underline{Z}_L = j\omega L \\ \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = R + j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = R + jX$$

dove X è il valore della reattanza.

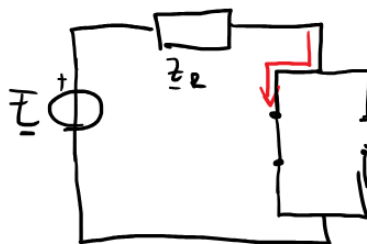
È possibile ora calcolare il valore della pulsazione di antirisonanza, definita come il valore della pulsazione per il quale la reattanza diventa infinita:

$$1 - \omega^2 LC = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Reattanza induttiva e capacitiva rispetto alla risonanza

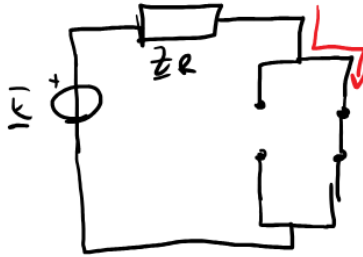
Possiamo distinguere tre casi:

- $\omega = 0$



$$\begin{aligned} X_L &= 0 \\ X_C &= \infty \end{aligned}$$

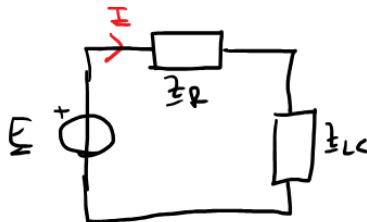
- $\omega \rightarrow \infty$



$$X_L = \omega L \rightarrow \infty$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \rightarrow 0$$

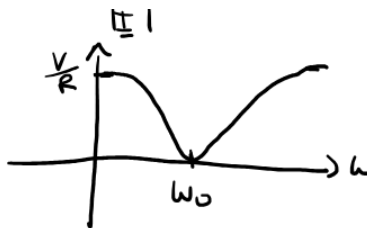
- $\omega = \omega_0$



$$X \rightarrow \infty$$

$$\underline{I} = 0$$

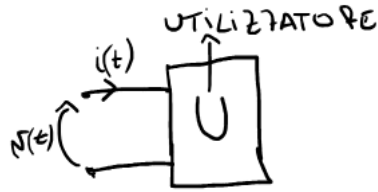
$$|\underline{I}| = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$



È possibile inoltre dimostrare che $\underline{I} = 0$ non implica che $\underline{I}_L = 0$ e $\underline{I}_C = 0$, ma solo che $\underline{I}_L = -\underline{I}_C$.

▼ 5.3 - Potenza in regime sinusoidale

Potenza



La potenza istantanea assorbita da U corrisponde a:

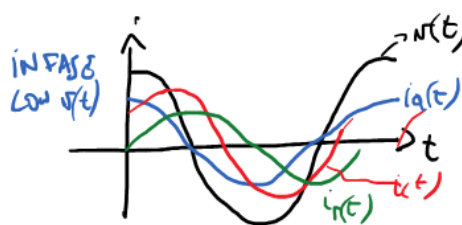
$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

con $v(t) = \underline{V} \cos(\omega t)$ e $i(t) = \underline{I} \cos(\omega t + \alpha_I)$.

Scomponiamo ora la corrente $i(t)$ in due componenti, una in fase con $v(t)$ e una in quadratura.

$$\begin{aligned} i(t) &= i_a(t) + i_r(t) \\ \begin{cases} i_a(t) = \underline{I} \cos \varphi \cos(\omega t) \\ i_r(t) = \underline{I} \sin \varphi \sin(\omega t) \end{cases} \end{aligned}$$

□ Dimostrazione

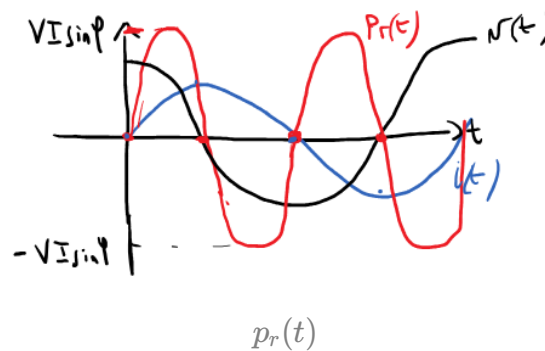
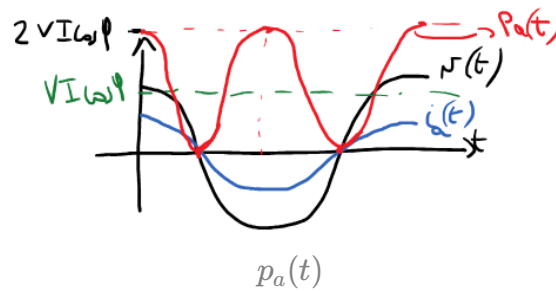


Ricaviamo ora la potenza assorbita da U dalla corrente appena scomposta:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \cdot i(t) = v(t)(i_a(t) + i_r(t)) \\ &= \underbrace{v(t)i_a(t)}_{\text{pot. attiva istantanea}} + \underbrace{v(t)i_r(t)}_{\text{pot. reattiva istantanea}} \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare le due potenze $p_a(t)$ e $p_r(t)$ in funzione della corrente e della tensione. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} p_a(t) &= 2VI \cos \varphi \cos^2(\omega t) \\ p_r(t) &= VI \sin \varphi \sin(2\omega t) \end{aligned}$$



Osserviamo che $p_a(t)$ è sempre positiva, dunque è una potenza che va sempre dal generatore verso il carico, mentre $p_r(t)$ può essere sia positiva che negativa, quindi è associata ad una potenza che può andare dal generatore al carico o viceversa. Dunque $p_a(t)$ è associata al resistore, mentre $p_r(t)$ è associata al condensatore e all'induttore.

Energia

L'energia assorbita dal carico U è la seguente:

$$VI \cos \varphi \cdot T$$

□ Dimostrazione

Lavoro utile

Il lavoro utile corrisponde alla potenza media assorbita dal carico, dunque:

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt = \frac{1}{T} VI \cos \varphi T \\ &= VI \cos \varphi \end{aligned}$$

Potenza complessa

La potenza complessa è definita come:

$$\underline{N} = \underline{V} \cdot \underline{I}^*$$

Sapendo che se $\underline{x} = x_r + jx_I = Xe^{j\alpha}$ allora $\underline{x}^* = x_r - jx_I = Xe^{-j\alpha}$, possiamo calcolare la potenza complessa:

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{V} \cdot \underline{I}^* = Ve^{j\alpha_V} \cdot Ie^{-j\alpha_I} = VIe^{j(\alpha_V - \alpha_I)} = VIe^{j\varphi} \\ &= \underbrace{VI \cos \varphi}_{P: \text{ pot. attiva}} + j \underbrace{VI \sin \varphi}_{Q: \text{ pot. reattiva}} = P + jQ \end{aligned}$$

Possiamo scrivere la potenza complessa anche in un altro modo, sfruttando il concetto di impedenza:

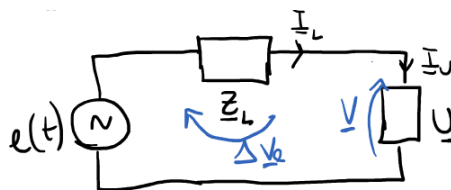
$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{V} \cdot \underline{I}^* = \underline{ZI} \cdot \underline{I}^* = \underline{ZI}^2 = (R + jX)I^2 \\ &= \underbrace{RI^2}_P + j \underbrace{XI^2}_Q \end{aligned}$$

dove $P > 0$ è associata al resistore, mentre Q è associata al condensatore e all'induttore ($Q_L = \omega LI^2 > 0$ e $Q_C = -\frac{1}{\omega C}I^2 < 0$).

▼ 5.4 - Rifasamento e massimo trasferimento di potenza

Rifasamento in monofase

Consideriamo il seguente circuito in regime AC.



dove:

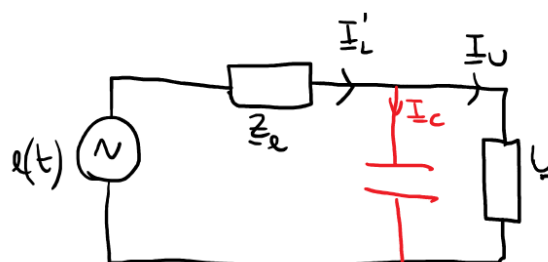
- $\underline{Z}_L = R_L + j\omega L$ è l'impedenza di linea.
- \underline{U} è l'utilizzatore.

Sappiamo che la potenza P assorbita dal carico equivale a:

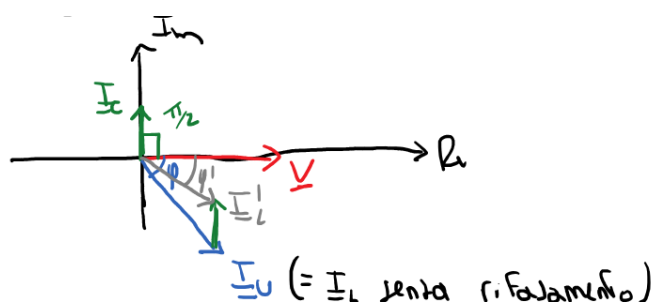
$$P = VI_U \cos \varphi = VI_L \cos \varphi$$

Al fine di migliorare l'efficienza del circuito occorre minimizzare il valore di I_L per cui viene generata una certa potenza P . Sapendo dunque per formula inversa che $I_L = \frac{P}{V \cos \varphi}$, per minimizzare I_L occorre massimizzare $\cos \varphi$, ovvero minimizzare φ , ossia mettere più in fase \underline{V} e \underline{I} . Questo procedimento si chiama rifasamento.

Per fare ciò è possibile inserire in parallelo al carico un condensatore:



In questo modo $\underline{I}'_L = \underline{I}_U + \underline{I}_C$.



Dall'immagine del piano complesso notiamo che $\varphi' < \varphi$, dunque il rifasamento è avvenuto.

È inoltre possibile calcolare il valore di C in funzione delle fasi prima e dopo il rifasamento:

$$C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2}$$

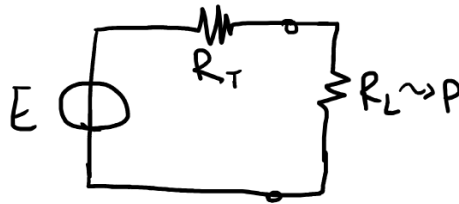
Solitamente il valore di $\cos \varphi$ è compreso tra 0,7 e 0,95. Se questo si trova al di sotto di 0,7 scatta l'obbligo di rifasamento.

Massimo trasferimento di potenza

In un circuito a regime DC, per massimizzare la potenza trasferita a un carico R_L , la resistenza del carico deve essere uguale alla resistenza

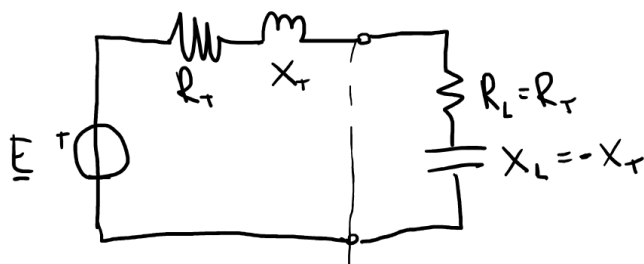
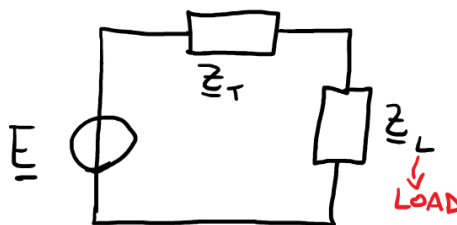
interna della sorgente R_T :

$$R_L = R_T$$



In un circuito a regime AC, invece, per massimizzare la potenza trasferita a un carico \underline{Z}_L deve valere:

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_T^* = R_T - jX_T$$



□ Dimostrazione

Teorema di Boucherot

Prima di enunciare il teorema di Boucherot effettuiamo un richiamo al teorema di Tellegen. Questo afferma che:

$$\sum_{n=1}^{\text{generatori}} p_m(t) = \sum_{k=1}^{\text{utilizzatori}} p_k(t)$$

Il teorema di Boucherot afferma invece la seguente uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\text{generatori}} \underline{N}_n = \sum_{k=1}^{\text{utilizzatori}} \underline{N}_k$$

Da ciò, sapendo che $\underline{N} = P + jQ$, è possibile ricavare che:

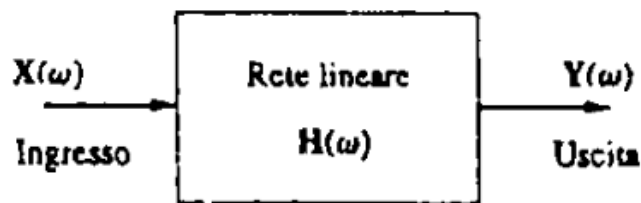
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\text{generatori}} P_n = \sum_{k=1}^{\text{utilizzatori}} P_k \\ \sum_{n=1}^{\text{generatori}} Q_n = \sum_{k=1}^{\text{utilizzatori}} Q_k \end{cases}$$

▼ 6.0 - Risposta in frequenza

La risposta in frequenza di un circuito rappresenta la variazione del suo comportamento al variare della frequenza del segnale.

Funzione di trasferimento

La risposta in frequenza corrisponde al grafico della funzione di trasferimento del circuito $H(\omega)$ in funzione di ω .



La funzione di trasferimento $\underline{H}(\omega)$ di un circuito è il rapporto, dipendente dalla frequenza, di un fasore di uscita $\underline{Y}(\omega)$ rispetto ad un fasore di ingresso $\underline{X}(\omega)$.

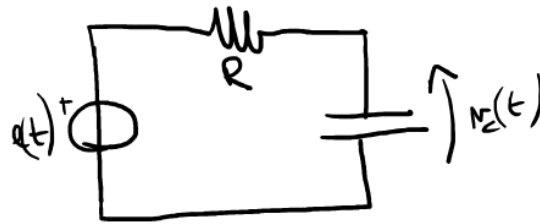
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)}$$

Le risposte in frequenza sono utilizzate ad esempio per realizzare i filtri, ossia circuiti progettati per lasciare passare i segnali delle frequenze desiderate e bloccare, o attenuare, quelli delle altre frequenze.

Filtro passa-basso

Un filtro passa-basso lascia passare le frequenze basse e arresta le frequenze alte.

Esso può essere realizzato prelevando l'uscita di un circuito RC sul condensatore.



La funzione di trasferimento è:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}_C(\omega)}{\underline{E}(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}$$

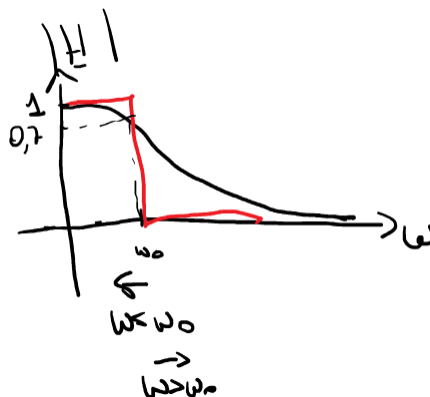
$$= \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

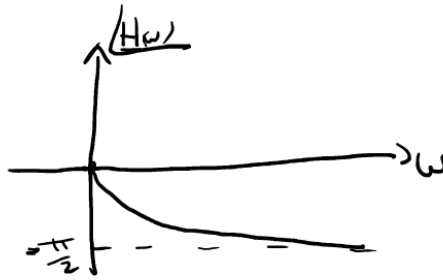
Possiamo dunque ricavarci il modulo e l'angolo della funzione di trasferimento al fine di tracciare i grafici:

$$\begin{cases} |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \\ \angle \underline{H} = \tan^{-1}(-\omega CR) \end{cases}$$

È inoltre possibile calcolare la frequenza di taglio ω_0 , la quale si ottiene imponendo che il modulo di $H(\omega)$ sia uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$





Filtro passa-alto

Un filtro passa-basso lascia passare le frequenze alte e arresta le frequenze basse.

Esso può essere realizzato prelevando l'uscita di un circuito RL sull'induttore.



La funzione di trasferimento è:

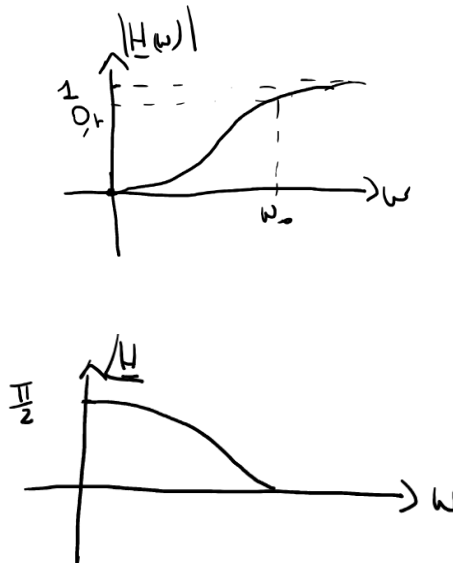
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}_L(\omega)}{\underline{E}(\omega)} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R}$$

Possiamo dunque ricavarci il modulo e l'angolo della funzione di trasferimento al fine di tracciare i grafici:

$$\begin{cases} |\underline{H}| = \frac{\omega L/R}{\sqrt{1+(\omega L/R)^2}} \\ \angle \underline{H} = \tan^{-1}\left(\frac{R}{\omega L}\right) \end{cases}$$

È inoltre possibile calcolare la frequenza di taglio ω_0 :

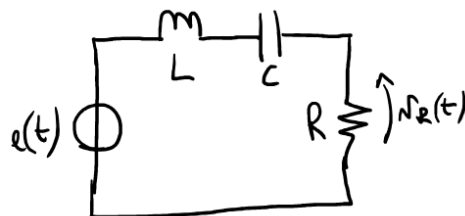
$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$



Filtro passa-banda

Un filtro passa-basso lascia passare le frequenze all'interno di un certo range e arresta quelle al di fuori.

Esso può essere realizzato prelevando l'uscita di un circuito RLC sul resistore.



La funzione di trasferimento è:

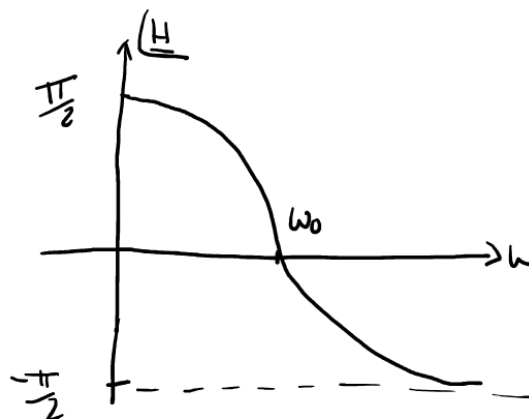
$$\underline{H}(\omega) = \frac{V_R(\omega)}{E(\omega)} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

Possiamo dunque ricavarci il modulo e l'angolo della funzione di trasferimento al fine di tracciare i grafici:

$$\begin{cases} |\underline{H}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\ \angle \underline{H} = \tan^{-1}\left(\frac{-(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}\right) \end{cases}$$

È inoltre possibile calcolare la frequenza di taglio ω_0 :

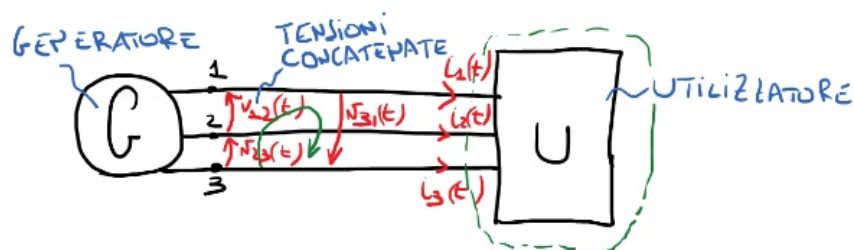
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



▼ 7.0 - Sistemi trifase

Fino a questo momento sono stati considerati solo circuiti monofase, cioè circuiti che collegano il generatore e l'utilizzatore con una sola coppia di fili. Lo schema più comune di circuito per la trasmissione dell'energia elettrica è però quello monofase a tre fili.

I circuiti o sistemi nei quali i generatori sinusoidali operano alla stessa frequenza ma con fasi diverse sono detti polifase. Il trifase rappresenta il sistema più usato e più economico tra i sistemi polifase.



Per la LKT e LKC otteniamo che:

$$\begin{cases} LKT : v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0 \\ LKC : i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \end{cases}$$

Tensioni trifase bilanciate

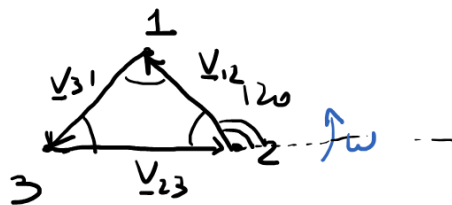
Un sistema tipico trifase è formato da 3 generatori indipendenti di tensione collegati a stella o a triangolo.

Se tali generatori di tensione hanno la stessa ampiezza e frequenza ω , e sono sfasati di 120° l'uno rispetto all'altro, le tensioni sono dette bilanciate, ovvero:

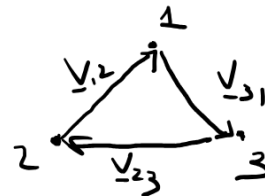
$$|V_{12}| = |V_{23}| = |V_{31}| = |V|$$

Poichè le tensioni sono sfasate di 120° l'una rispetto all'altra, esse possono essere rappresentate in due modi, tramite terna diretta e terna inversa:

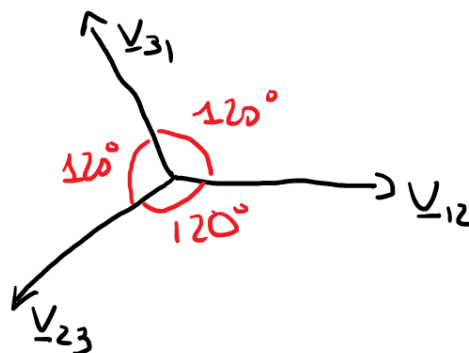
TERNA DIRETTA



TERNA INVERSA



La sequenza delle fasi è la sequenza temporale nella quale le tensioni raggiungono i rispettivi valori massimi. Rappresentiamo ora la sequenza delle fasi per una terna diretta.

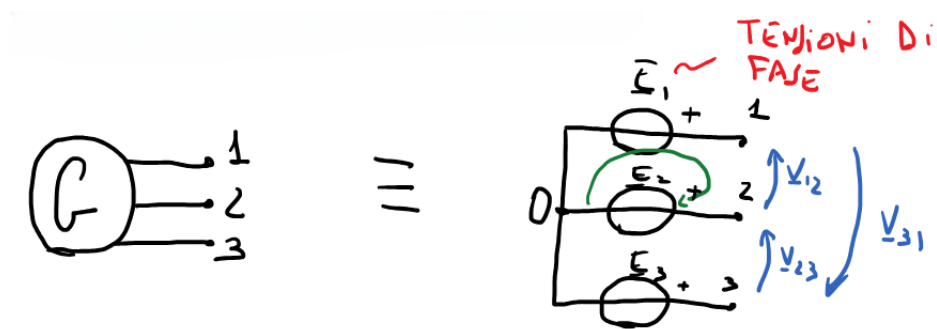


Per una tale terna abbiamo dunque i seguenti fasori:

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = V e^{j0} \\ \underline{V}_{23} = V e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \underline{V}_{12} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \underline{V}_{31} = V e^{j\frac{2}{3}\pi} = \underline{V}_{12} e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Modello del generatore

Ogni generatore di un sistema trifase può essere rappresentato tramite un sistema a stella.



Tramite le LKT troviamo una relazione tra tensioni di fase e di linea:

$$\begin{cases} v_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ v_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 \\ v_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1 \end{cases}$$

Le tensioni di fase sono una terna simmetrica:

$$|\underline{E}_1| = |\underline{E}_2| = |\underline{E}_3| = E$$

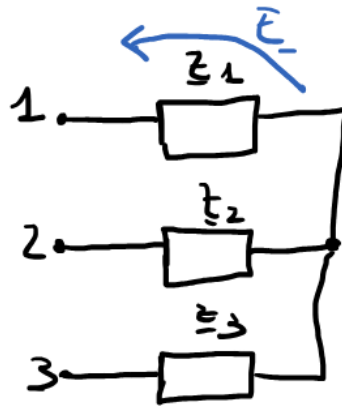
Inoltre, il modulo della tensione di linea è $\sqrt{3}$ volte il modulo della tensione di fase:

$$V = \sqrt{3}E$$

Il carico

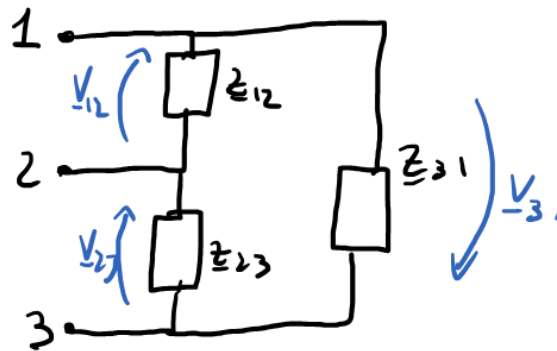
Il carico può essere disposto seguendo due modalità di connessione:

- Connessione a stella



Le impedenze vedono la tensione di fase.

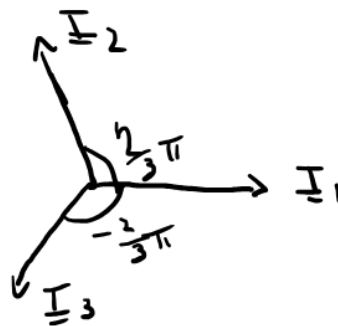
- Connessione a triangolo



Le impedenze vedono la tensione concatenata.

Se le impedenze sono uguali, ovvero il carico è equilibrato, le correnti rappresentano una terna simmetrica:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} \rightarrow |\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$$



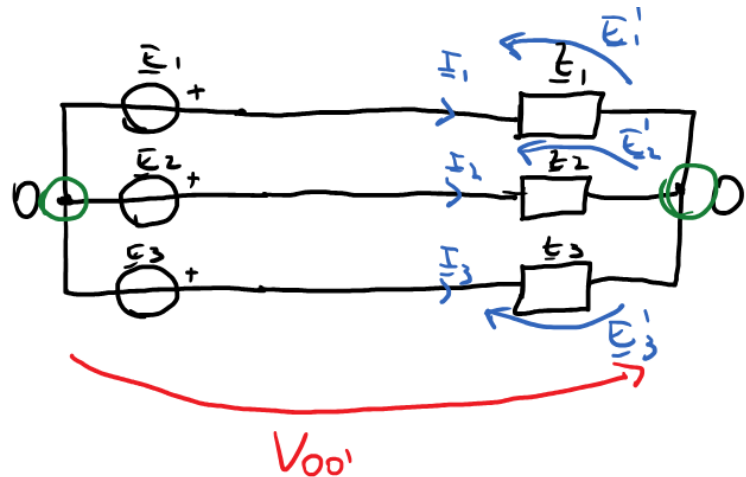
È possibile calcolare ora la potenza complessa:

$$\underline{N} = \sqrt{3}VI(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\rightarrow \begin{cases} P = \sqrt{3}VI \cos \varphi \\ Q = \sqrt{3}VI \sin \varphi \end{cases}$$

□ Dimostrazione

Sistema trifase a 4 conduttori



Consideriamo le tensioni di fase come una terna simmetrica ($|\underline{E}_1| = |\underline{E}_2| = |\underline{E}_3| = E$).

Tramite la LKT possiamo ricavarci le tensioni viste dai carichi:

$$\begin{cases} \underline{E}'_1 = \underline{E}_1 - V_{00'} \\ \underline{E}'_2 = \underline{E}_2 - V_{00'} \\ \underline{E}'_3 = \underline{E}_3 - V_{00'} \end{cases}$$

Calcoliamo ora $V_{00'}$:

$$V_{00'} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

Valutiamo ora $V_{00'}$ in base al carico:

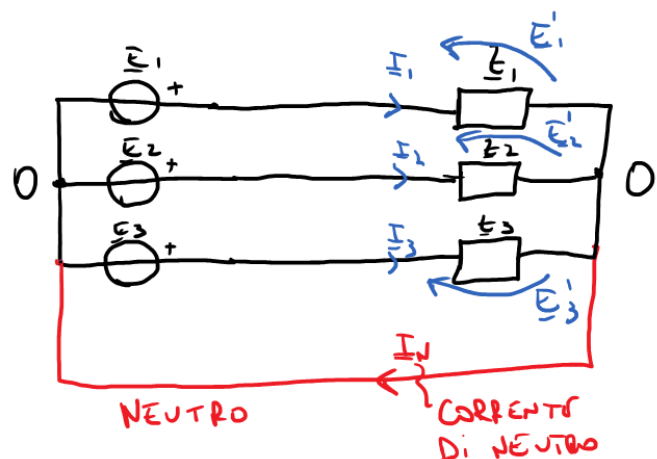
- Se il carico è equilibrato ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$)

$$V_{00'} = \frac{\frac{1}{Z}(\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3)}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = 0 \implies \begin{cases} \underline{E}'_1 = \underline{E}_1 \\ \underline{E}'_2 = \underline{E}_2 \\ \underline{E}'_3 = \underline{E}_3 \end{cases}$$

- Se il carico è squilibrato

$$V_{00'} \neq 0$$

Tanto più il carico è squilibrato tanto più $V_{00'} \neq 0$.



Calcoliamo ora la corrente di neutro:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1}{Z_1} + \frac{\underline{E}_2}{Z_2} + \frac{\underline{E}_3}{Z_3}$$

Notiamo che \underline{I}_N sarà tanto più alta tanto più il carico è squilibrato.

▼ 8.0 - Circuiti magnetici

▼ 8.1 - Introduzione ai circuiti magnetici

Proprietà magnetiche dei materiali

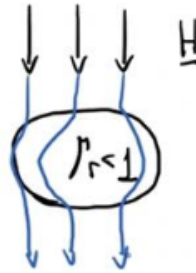
$$\underline{B} = \mu \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto e μ_r è la permeabilità magnetica relativa al materiale.

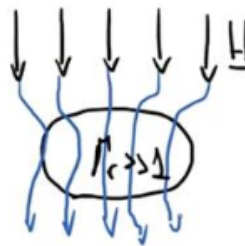
I materiali magnetici si possono dividere in 3 tipologie:

- Materiali diamagnetici: $\mu_r < 1$

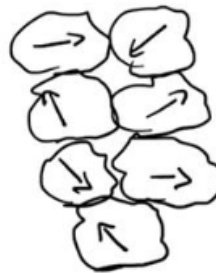
Il materiale deforma il campo allontanando le linee di campo.



- Materiali paramagnetici: $\mu_r > 1$
- Materiali ferromagnetici: $\mu_r \gg 1$



All'interno del materiale si possono individuare dei domini che presentano un'orientazione magnetica.



Con la presenza di un campo magnetico incidente i domini cominciano ad orientarsi.

Macchina elettrica

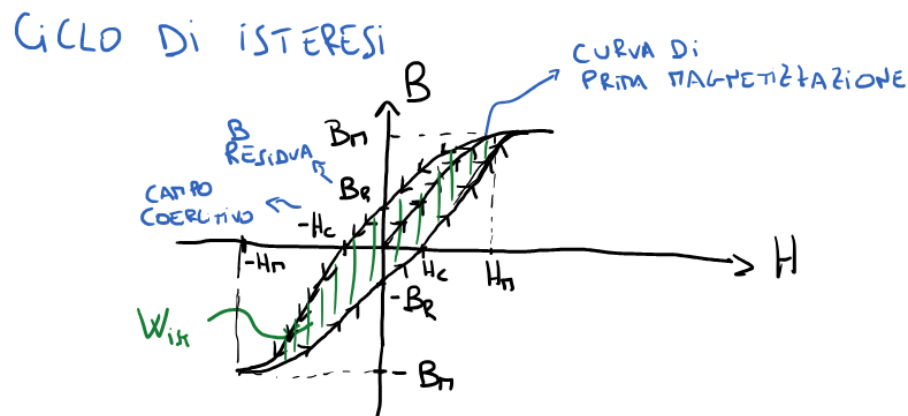
Il funzionamento di una macchina elettrica è il seguente:

$$V_1 \rightarrow I_1 \xrightarrow{\oint \underline{H} dl = \mu_0 I} \underline{H} \xrightarrow{\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}} \underline{B} \xrightarrow{\frac{\partial B}{\partial t}} fem \rightarrow I_2$$

Per massimizzare la fem occorre massimizzare \underline{B} , cosa possibile massimizzando μ_r , ovvero lavorando sul materiale e utilizzando materiali ferromagnetici.

Ciclo di isteresi

I materiali ferromagnetici hanno per la suscettività magnetica un comportamento isteretico. Perciò la relazione $B = f(H)$ è una funzione isterica e questa presenta il seguente grafico generale.



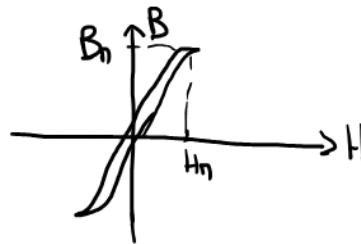
Troviamo dunque la curva di prima saturazione, la quale porta appunto alla saturazione dovuta al fatto che i domini di Weiss non si possono orientare maggiormente. Quando il valore del campo magnetico viene diminuito fino a diventare pari a 0 rimane nel materiale una magnetizzazione residua, dovuta al fatto che una parte dei domini restano orientati. Per fare in modo che la magnetizzazione si annulli occorre fare uso di un campo magnetico negativo. Il valore del campo magnetico necessario per annullare l'induzione magnetica è detto campo coercitivo.

Si dimostra che la superficie occupata dal ciclo di isteresi è equivalente a W_{ist} , ovvero l'energia persa dal materiale durante un ciclo di isteresi per effetto joule per via dello sfregamento dei domini di Weiss l'uno con l'altro al fine di orientarsi. La potenza specifica dissipata per effetto joule durante il ciclo di isteresi è equivalente invece a $P_{ist} = W_{ist} \cdot f$, dove f è la frequenza del ciclo di isteresi ($f = \frac{1}{T}$).

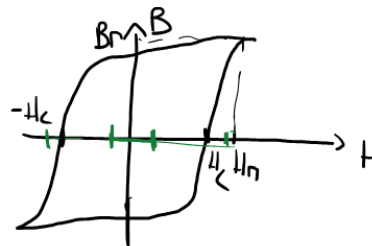
Materiali ferromagnetici dolci e duri

È possibile distinguere tra i materiali ferromagnetici dolci e duri in base alle caratteristiche del loro ciclo di isteresi.

I materiali ferromagnetici dolci hanno alti valori di permeabilità magnetica ($\mu_r \gg 1 \rightarrow B_M$ grande) e un piccolo campo coercitivo (H_c piccolo $\rightarrow W_{ist}$ piccolo). Pertanto la superficie del ciclo di isteresi è piccola (perdite per isteresi ridotta).



I materiali ferromagnetici duri hanno un'alta densità di flusso magnetico residua (B_R grande) e un campo coercitivo elevato (H_c grande). Pertanto la superficie del ciclo di isteresi è grande (perdita per isteresi elevata).



I materiali dolci possono essere utilizzati per le macchine elettriche, in quanto come visto in precedenza hanno bisogno di una μ_r molto alta, e inoltre l'area di isteresi è piccola, quindi si ha una perdita di potenza minima.

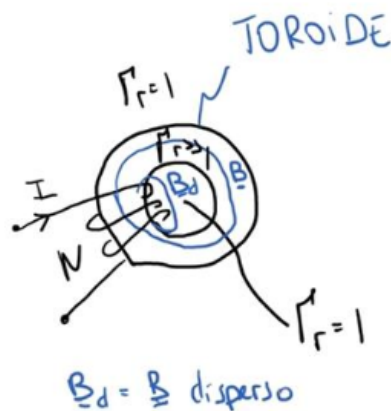
I materiali duri vengono invece utilizzati per i magneti permanenti, in quanto una volta che il materiale viene magnetizzato questo conserva la sua magnetizzazione ed è difficile che si smagnetizzi.

Dai campi ai circuiti magnetici

Supponiamo di avere una spira di corrente. Sappiamo che la corrente che attraversa il conduttore genera un campo magnetico solenoidale.



Pensiamo invece a cosa accade se mettiamo un materiale ferromagnetico. Il materiale convoglierà le linee di campo all'interno del materiale. Introducendo dunque delle spire attorno ad un anello di materiale ferromagnetico (toroide), le linee di campo vengono confinate nel materiale.



Questo viene chiamato tubo di flusso e può essere considerato come un circuito magnetico.

A differenza dei circuiti elettrici, in cui $\frac{\sigma_{materiale}}{\sigma_{isolante}} = 10^{20}$, nei circuiti magnetici $\frac{\mu_{ferromagnetico}}{\mu_{aria}} = 10^4$, in quanto una piccola percentuale del campo viene dispersa, visto che alcune linee di campo non restano confinate e si richiudono, andando a creare un flusso disperso.

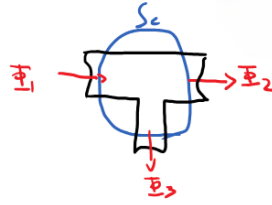
Un altro problema di questo circuito è che il materiale, essendo ferromagnetico, tende a saturare.

LKC e LKT magnetiche

LKC magnetica

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k = 0$$

È dato dal fatto che $\oint \underline{B} \cdot \hat{n} dS = 0$.



LKT magnetica

$$\sum_{k=1}^N \psi_k = 0$$

dove ψ è il potenziale magnetico.

Legge di Ohm magnetica

Considerando un circuito elettrico di questo tipo:



è possibile dimostrare la seguente formula, detta legge di Ohm magnetica:

$$NI = \mathcal{R}\Phi$$

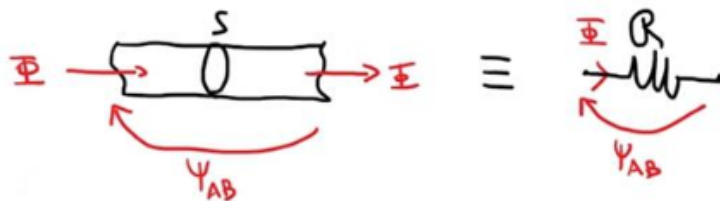
dove $\mathcal{R} = \frac{L}{\mu S}$ è la riluttanza, equivalente della resistenza nel contesto magnetico, Φ è il flusso del campo magnetico e $NI = fmm$ [Asp] è la forza magnetomotrice.

NI è detta forza magneto motrice, equivalente magnetica della forza elettro motrice.

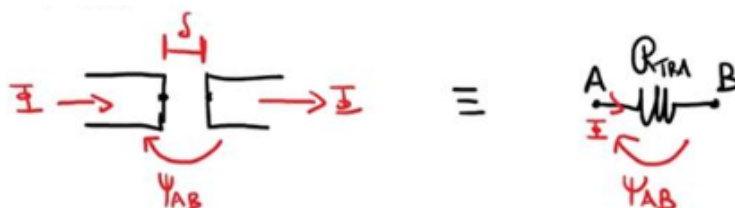
□ Dimostrazione

Circuiti a parametri concentrati

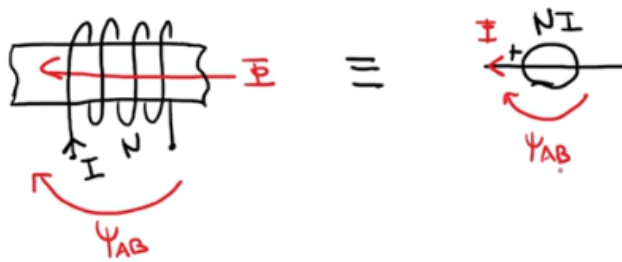
Consideriamo un tratto di materiale ferromagnetico attraversato da un flusso (non consideriamo il flusso disperso). È possibile considerare questo tratto come una riluttanza di valore $\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_0 \mu_r S}$.



Consideriamo ora un traferro di lunghezza δ . Questo può essere considerato come una riluttanza di valore $\mathcal{R} = \frac{\delta}{\mu_0 S}$.



Consideriamo infine un avvolgimento, il quale può essere visto come un generatore di tensione di valore NI .

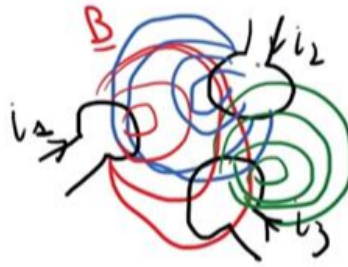


□ Esercizi

▼ 8.2 - Trasformatore

Coefficiente di auto e mutua induzione

Consideriamo più circuiti elettrici percorsi da corrente.



Questi generano un campo magnetico e dunque un flusso. Definiamo:

Φ_{cj} : flusso concatenato con la spira j

Φ_{cjk} : flusso concatenato alla spira j generato dalla spira k

Φ_{cj} può essere calcolato nel seguente modo:

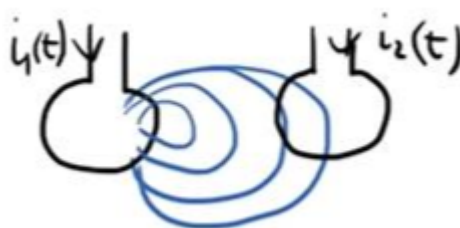
$$\Phi_{cj} = \sum_{k=1}^N \Phi_{cjk} = \sum_{k=1}^N M_{jk} i_k$$

dove M_{jk} è il coefficiente di mutua-induzione.

Nel caso in cui $j = k$, $M_{JJ} = L_J$ è il coefficiente di autoinduzione.

Macchine elettriche

Alcune macchine elettriche sono composte da due circuiti elettrici accoppiati magneticamente.



Il primo avvolgimento crea un flusso Φ , parte del quale si concatena con il secondo avvolgimento creando $\Phi_{c2,1}$ e una fem indotta data da:

$$fem = - \frac{\partial \Phi_{c2,1}}{\partial t}$$

Per fare in modo che la macchina elettrica funzioni occorre avere una $fem \neq 0$.

È possibile fare ciò in due modi:

- Fem trasformatrice: si varia il valore della corrente che passa per il primo circuito.

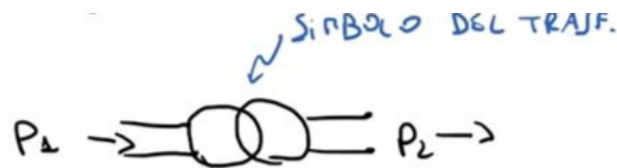
$$\frac{\partial i_1}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{c2,1}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow f_{em} \neq 0$$

- Fem mozionale: si istaura un moto relativo tra i due avvolgimenti.

$$\frac{\partial \Phi_{c21}}{\partial t} \neq 0$$

Trasformatore monofase

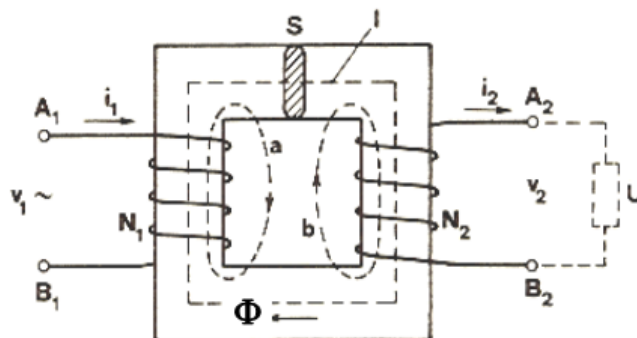
Il trasformatore monofase è una macchina statica che consente di accoppiare due circuiti magneticamente. La sua funzione è quella di variare i valori della tensione e della corrente in un circuito.



$$P_2 = \eta P_1$$

dove $\eta > 0,98$ è il rendimento.

Il trasformatore è reversibile e non genera energia.



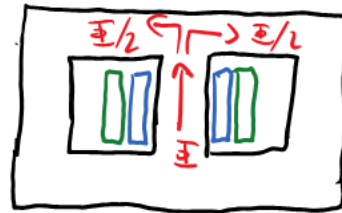
L'avvolgimento 1 in figura viene detto primario ed è quello che viene alimentato. L'avvolgimento 2 viene invece detto secondario e ad esso è collegato il carico.

Nell'ipotesi di trasformatore ideale i due circuiti si considerano perfettamente accoppiati magneticamente. Il flusso generato da un avvolgimento è completamente concatenato con l'altro, e si ritengono nulli i flussi dispersi (linee di flusso a e b in figura).

Nella realtà però ci sono delle perdite, le quali sono di diverso tipo:

- Flusso disperso

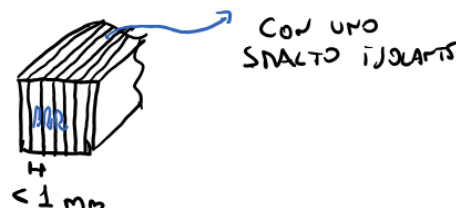
Per minimizzare tale perdita è possibile fare uso di un nucleo a mantello.



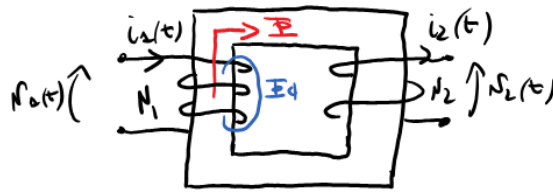
- Perdite nel ferro

Le perdite nel ferro sono dovute sia al ciclo di isteresi ($P_{ist} \propto f, B_M^{1,6}$), che come abbiamo detto genera energia, sia per le correnti parassite concentriche che si creano nel materiale ferromagnetico ($P_{CP} \propto f^2, B_n^2$).

Per la legge di Ohm sappiamo che tali correnti hanno un valore $I_{CP} = \frac{V}{R_{fe}}$. Al fine di diminuire I_{CP} è possibile dunque aumentare $R_{fe} = \frac{L}{\sigma S}$. Siccome L deriva dal materiale magnetico scelto, è possibile farlo diminuendo σ , ovvero drogando il materiale con del silicio, oppure diminuendo S dal punto di vista elettrico e facendolo rimanere uguale dal punto di vista magnetico al fine di non variare il valore del flusso. È possibile fare ciò utilizzando un nucleo fatto di lamierini.



Equazioni del trasformatore



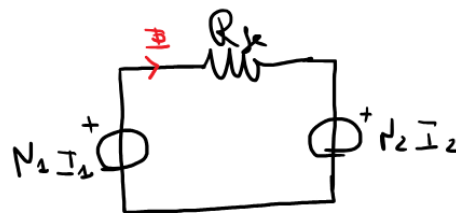
$v_1(t)$ e $v_2(t)$ hanno i seguenti valori:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt}$$

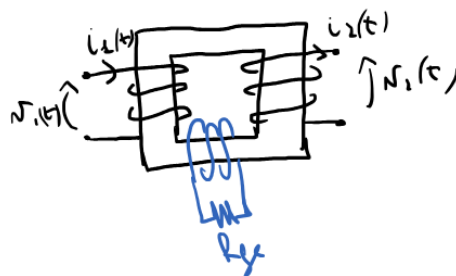
Circuito magnetico equivalente a parametri concentrati

È possibile costruire un circuito magnetico equivalente ad un trasformatore monofase a parametri concentrati.



$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = R_{fe} \Phi$$

È possibile anche considerare le perdite nel ferro nella figura del trasformatore monofase nel seguente modo:



Equazioni del trasformatore ideale

In un trasformatore ideale:

$$R_1 = R_2 = L_{d1} = L_{d2} = R_{fe} = 0$$

Le equazioni di un tale trasformatore sono le seguenti:

$$\begin{cases} v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ v_2(t) = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{cases} \implies \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = k$$
$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

dove k è il rappresentante di trasformazione.