Esercizi

es. 2 (secondo) del FOGLIO X

$X_k =$ 'n° articoli venduti in un giorno' $\sim Po(4)$

$Y = \sum_{k=1}^{25} X_k$ = 'n° articoli venduti in 25 giorni'

X_k INDIPENDENTI

$P(Y \leq N) = 95\%$

$Y \sim Po(4 \cdot 25) = Po(100)$

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{100^k}{k!} e^{-100} = 95\%$$

oppure per TLC (anche se 25<30)

$Y = \sum_{k=1}^{25} X_k \tilde{\sim} N(100, 100)$

$$95\% = P(Y \leq N) = P(Y \leq N + \tfrac{1}{2}) = P\left(\frac{Y-100}{10} \leq \frac{N+\frac{1}{2}-100}{10}\right) =$$

$\frac{Y-100}{10} \sim Z \sim N(0,1)$

$$= F_Z\left(\frac{N-99.5}{10}\right) \Rightarrow \frac{N-99.5}{10} \simeq 1.645$$

$$N = 16.45 + 99.5 = 116$$

es. 2 FOGLIO IX

X = statura di un individuo di una certa popolazione

$X \sim N(174, \sigma^2)$ $\qquad P(154 \leq X \leq 194) = 99\%$

$$P(154 \leq X \leq 194) = P(X \leq 194) - P(X < 154)$$

Tra minore e minore o uguale non c'è differenza.

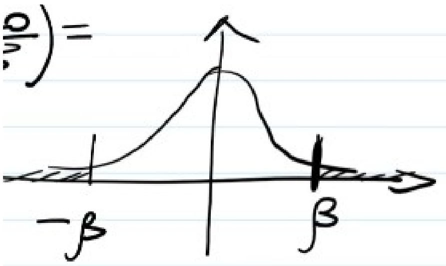
Standardizziamo.

$$99\% = P(154 \leq X \leq 194) = P(X \leq 194) - P(X \leq 154) =$$

$$= P\left(\frac{X - 174}{\sigma} \leq \frac{194 - 174}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X - 174}{\sigma} \leq \frac{154 - 174}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right)$$

Ricordiamoci che:



$$= P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - P\left(Z \geq \frac{20}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 2P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - 1$$

$$0.99 = 2P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - 1$$

$$0.99 = 2\underbrace{P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right)}_{=F_Z\left(\frac{20}{\sigma}\right)} - 1$$

$$F_Z\left(\frac{20}{\sigma}\right) = \frac{1.99}{2} = 0.995$$

Andiamo di tavole.

Tra 2.57 e 2.58.

$$\frac{20}{\sigma} \simeq 2.575 \quad \frac{2.57 + 2.58}{2}$$

$$\sigma \simeq \frac{20}{2.575}$$

$$P(174 - h \leq X \leq 174 + h) = 50\%$$

Ancora una volta, standardizzazione.

$$50\% = \frac{1}{2} = P(X \leq 174 + h) - P(X \leq 174 - h) =$$

$$= P\Bigg(\underbrace{\frac{X - 174}{\sigma}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{174 + h - 174}{\sigma}\Bigg) - P\Bigg(\underbrace{\frac{X - 174}{\sigma}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{174 - h - 174}{\sigma}\Bigg) =$$

$$= F_Z\left(\frac{h}{\sigma}\right) - F_Z\left(-\frac{h}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{h}{\sigma}\right) - \left(1 - F_Z\left(\frac{h}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= 2F_Z\left(\frac{h}{\sigma}\right)-1$$

$$\frac{1}{2} = 2F_Z\left(\frac{h}{\sigma}\right)-1$$

$$F_Z\left(\frac{h}{\sigma}\right)=\frac{3}{4}$$

Poi si va di tavole. sigma si conosce già e troviamo h.

$$\frac{h}{\sigma} \underset{\uparrow}{\simeq} 0.68 \Rightarrow h \simeq 0.68 \cdot \sigma$$

DALLE TAVOLE

es. 4 FOGLIO IX

$$I = I_0\left(e^{aV}-1\right)$$

$$a=5,\ I_0=10^{-6},\ V\sim U(1,3)$$

$$E[I],\ F_I(a),\ f_I(a)$$

$$E[I]=E\left[I_0\left(e^{aV}-1\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} I_0\left(e^{av}-1\right)f_V(v)\,dv=$$

3

La funzione è diversa da 0 tra 1 e 3.

$$= \infty$$

$$= \int_1^3 I_0\left(e^{av}-1\right)\frac{1}{2}\,dv = \frac{I_0}{2}\left[\frac{e^{av}}{a}-v\right]_1^3 =$$

$$= \frac{I_0}{2}\left[\frac{e^{3a}-e^{a}}{a}-2\right]$$

La funzione di densità la possiamo calcolare attraverso la solita formula perché è una funzione crescente.

$$f_I(y) = f_V\left(g^{-1}(y)\right)\frac{d g^{-1}(y)}{dy}$$

$$I = I_0\left(e^{aV}-1\right) \Rightarrow \frac{I}{I_0}+1 = e^{aV} \Rightarrow V = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right) =$$

$$= g^{-1}(I)$$

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{y}{I_0}+1\right) \Rightarrow \frac{d g^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\frac{y}{I_0}+1}\,\frac{1}{I_0} =$$

$$= \frac{1}{a I_0\left(\frac{y}{I_0}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{a(y+I_0)}$$

La derivata è positiva.

$$V \sim U(1,3)$$

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \le v \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_I(y) = \frac{1}{a(y+I_0)} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 1 \le \frac{1}{a}\ln\left(\frac{y}{I_0}+1\right) \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{a(y+I_0)} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } I_0(e^{a}-1) \le y \le I_0(e^{3a}-1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sostituendo a e I0 dati, si trova la soluzione.

Per la funzione di ripartizione o si integra, oppure si può usare un altro modo.

$$F_I(y) = P(I \le y) = P(I_0(e^{aV}-1) \le y)$$

Tenendo conto che V si comporta come una variabile casuale uniforme.

$$\text{oppure } F_I(y) = \int_{-\infty}^{y} f_I(x)\, d\cdot$$

Q 2 16/12/2014

$N = 37, \quad \overline{X} = 1.99, \quad S^2 = 1$

$$\mu \in \left[\overline{X} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2},36}\, S}{\sqrt{37}}, \overline{X} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2},36}\, S}{\sqrt{37}} \right]$$

$$1-\alpha = 99\% \Rightarrow 1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

Prendiamo 35 gradi di libertà dalle tavole.

35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591

$$= \left[1.99 - \frac{2.724 \times 1}{\sqrt{37}}, 1.99 + \frac{2.724 \times 1}{\sqrt{37}}\right]$$

Per la varianza campionaria la formula è simile.

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(N-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, N-1}}, \frac{(N-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, N-1}}\right] =$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$$

Dalle tavole.

36	12.5622	14.4012	15.3241	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433
36	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812	67.9852	70.5881	76.3650

$$= \left[\frac{36 \times 1}{61.5812}, \frac{36 \times 1}{17.8867}\right]$$

es. 3 FOGLIO $\underline{IX}$

$$X \sim E(1)$$

$$Y = 3 - 2\ln(X) = g(X) \Rightarrow \frac{-Y+3}{2} = \ln(X)$$

$$\boxed{f_Y(a)? \quad F_Y(a)?}$$

$$X = e^{\frac{3-Y}{2}} = g^{-1}(Y)$$

$$g^{-1}(y) = e^{\frac{3-y}{2}} \Rightarrow \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{2}e^{\frac{3-y}{2}}$$

La funzione è monotona decrescente. Dovremo cambiare il segno della derivata quando bisogna calcolare la funzione di densità.

$$f_Y(a) = f_X(g^{-1}(a)) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

$$f_X(g^{-1}(a)) = \begin{cases} e^{-g^{-1}(a)} & \text{se } g^{-1}(a) \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-e^{\frac{3-a}{2}}} & \text{se } e^{\frac{3-a}{2}} \geq 0 \\ \cancel{0} & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(a) = f_X(g^{-1}(a)) \left|\frac{dg^{-1}(a)}{da}\right| = e^{-e^{\frac{3-a}{2}}} \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{3-a}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{3-a}{2} - e^{\frac{3-a}{2}}} \qquad \text{per } a \in \mathbb{R}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(a)\,da = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2} e^{\frac{3-a}{2}} e^{-e^{\frac{3-a}{2}}}\,da$$

$$= \left[+ e^{-e^{\frac{3-a}{2}}} \right]_{-\infty}^{y}$$

$$= e^{-e^{\frac{3-y}{2}}}$$

Q 6 27/01/2014

D = 'lanci di dado con punteggi diversi'

$P(D) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ oppure $P(D) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

X = 'n° di doppi lanci per ottenere punteggi diversi per la prima volta'

$X \sim G\left(\frac{5}{6}\right)$

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{6}{5}$$

$$P(X=3) = p q^2 = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{6^3}$$

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(P(X=1) + P(X=2)\right) =$$

$$= 1 - \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

es.

Supponiamo di considerare un campione prelevato da una popolazione gaussiana con σ^2 nota ($\sigma^2 = 25$). Se l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 90% non deve superare 3, quanto numeroso deve essere il campione?

La varianza è conosciuta, useremo come valori critici quelli della normale standard.

$$\mu \in \left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} , \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

AMPIEZZA INTERVALLO: $2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq 3$

$$1 - \alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 10\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 5\% = 0.05$$

Tavole dei valori critici della normale standard.

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.6449$$

$$\sqrt{N} \geq \frac{2}{3} \times 1.6449 \times 5$$

$$N \geq \left(\frac{2}{3} \times 1.6449 \times 5 \right)^2$$

Sceglieremo il numero arrotondato per eccesso.

es.
Tre matematici distratti partecipano ad una riunione e appendono l'impermeabile (stesso modello e colore) all'attaccapanni. Alla fine della riunione ogni matematico riprende un impermeabile,
sia X = 'n° impermeabili ripresi dal legittimo proprietario'

$$p(x)? \quad E[X]? \quad Var(X)? \quad F_X(x)?$$

$$\begin{matrix} M_1, & M_2, & M_3 \\ I_1 & I_2 & I_3 \end{matrix}$$

Questa è la situazione iniziale.

Al momento della fine della riunione, gli impermeabili possono essere scambiati in tutti i modi possibili.

Usiamo il meno elegante ma più semplice metodo.

PRIMA DELLA RIUNIONE

$$\begin{matrix} M_1, & M_2, & M_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ I_1 & I_2 & I_3 \end{matrix} \Longrightarrow$$

DOPO LA RIUNIONE

M_1	M_2	M_3
I_1	I_2	I_3
I_1	I_3	I_2
I_2	I_1	I_3
I_2	I_3	I_1
I_3	I_1	I_2
I_3	I_2	I_1

Sono 6 casi perché sono le permutazioni di 3 oggetti indistinguibili (3 fattoriale).

$$X \in \{0, 1, 3\}$$

Non può essere 2, perché se 2 hanno il proprio impermeabile, non ha senso che il terzo non abbia il proprio.

$$P(X=3)=\frac{1}{6}$$

$$P(X=0)=\frac{2}{6}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{6}$$

M_1	M_2	M_3
I_1	I_2	I_3
I_1	I_3	I_2
I_2	I_1	I_3
I_2	I_3	I_1
I_3	I_1	I_2
I_3	I_2	I_1

$$E[X]=0\cdot\frac{2}{6}+1\cdot\frac{3}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=1$$

$$E[X^2]=0^2\cdot\frac{2}{6}+1^2\cdot\frac{3}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$Var(X)=2-1^2=1$$

$$F_X(a)=\begin{cases} 0 & a<0 \\ \frac{2}{6} & 0\leq a<1 \\ \frac{2}{6}+\frac{3}{6} & 1\leq a<3 \\ 1 & a\geq 3 \end{cases}$$

Esercizio per casa

es.
Alla fine della giornata il Prof. P. ripone gli occhiali
con prob. 0.9 dentro il cassetto (C), con
prob. 0.06 li lascia sul tavolo (T) e con
prob. 0.04 li infila nella borsa (B)
Il giorno seguente li cerca, ma con prob. 0.1
non li vede quando li cerca dove sono.
Quale è la prob. che gli occhiali siano
sul tavolo, se non li ha trovati nel cassetto?

È sulla probabilità discreta.