▼ 8.0 - Deduzione naturale per la logica proposizionale

> $\Gamma \vdash F$ (si legge “dalle ipotesi Γ deduco la conclusione F”).

Il simbolo appena introdotto $\vdash$ è equivalente ad affermare che F è **dimostrabile** partendo dalle ipotesi Γ tramite una prova esplicita.

▼ 8.1 - Albero di deduzione naturale

Un **albero di deduzione naturale** per $\Gamma \vdash F$ è una struttura dati ad albero che consente di rappresentare una dimostrazione in modo grafico.

Struttura dell’albero

Esso è composto da:

- I **Nodi**, etichettati con delle formule di inferenza.
- Le **foglie**, che possono essere sia **formule scaricate** $[G]$ (ipotesi locali) che **formule non scaricate** G (ipotesi globali).
    - Le formule non scaricate sono etichettate con formule appartenenti a Γ, ovvero le ipotesi globali.
    - Le formule scaricate lo sono solo nella regola di inferenza della radice, mentre nel resto della dimostrazione sono formule locali valide.
- La **radice**, etichettata con la formula da dimostrare.
- I **nodi interni**, oltre alla formula, sono etichettati con delle **regole di inferenza**, le quali stabiliscono anche il modo in cui la dimostrazione va sviluppata.

  Consiglio: nella costruzione di una dimostrazione, scrivere prima la regola di inferenza da utilizzare e poi svilupparla, non viceversa.

Esempio:

- $\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge (B \Rightarrow C)]}{B \Rightarrow C} \wedge e^2 \quad B}{C} \Rightarrow e}{A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C} \Rightarrow i$

Struttura ricorsiva

Gli alberi di deduzione naturale vengono dunque indicati componendo **ricorsivamente** regole di interferenza. La struttura ricorsiva permette di definire funzioni per ricorsione strutturale su alberi di deduzione e di effettuare prove per induzione strutturale.

Esempio:

- $\dfrac{\dfrac{F_1 \dots F_n}{H_1}(regola-1) \dots \dfrac{G_1 \dots G_m}{H_l}(regola-2)}{H}(regola - x)$

▼ 8.2 - Regole di inferenza

Regole di inferenza

Le regole di inferenza presentano la seguente sintassi:
$\frac{F_1 ... F_n}{F}$ (nome regola)

- F è la **conclusione** della regola.

- $F_1 \ldots F_2$ sono le **premesse** della regola.

Per indicare che è possibile assumere localmente A per concludere F_1, scriviamo la singola premessa F_1 nel seguente modo:

- $$\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ F_1 \end{array}$$

Una regola che non presenta premesse si dice **assioma**. I casi base sono dunque rappresentati da foglie o da assiomi.

Passi di inferenza

Per ogni connettivo esistente esistono due tipi di passi di inferenza:

- **Regole di introduzione.**

  Ci dicono tutti i modi in cui è possibile concludere una formula che presenta un determinato connettivo.

- **Regole di eliminazione.**

Ogni passo di inferenza ammette sempre due letture:

- **Bottom-up**: dalle premesse alla conclusione.
- **Top-down**: dalla conclusione alle premesse.

I **matematici**, al fine di trovare una nuova dimostrazione, utilizzano solitamente un procedimento top-down, in quanto la conclusione è unica mentre le ipotesi sono spesso molteplici, dunque lo spazio di ricerca partendo dalle ipotesi è più ampio. Dopo averla trovata però la presentano in maniera prevalentemente bottom-up per aumentarne l'eleganza.

Il metodo top-down per fare dimostrazioni permette dunque di trovare la strada giusta per dimostrare, ma, a differenza del metodo bottom-up, presenta la possibilità di sbagliarsi nel momento in cui si applicano in maniera errata regole non invertibili. A volte è più facile alternare le due strategie applicandole in maniera mista.

Correttezza

> Una regola $\frac{F_1 \ldots F_n}{H}$ è **corretta** quando $F_1 \ldots F_n \Vdash H$.

Se in una regola la premessa contempla **ipotesi scaricate**, esse vanno integrate nella formula finale per dimostrarne la correttezza in questo modo:

$$\frac{E \quad \begin{array}{c} [F] \\ \vdots \\ G \end{array}}{F_3} \quad (\wedge_e) \text{ è corretta quando } E, F \Rightarrow G \Vdash H.$$

Se un insieme di regole è corretto e questo viene combinato per creare un albero di deduzione, allora tutto l'albero sarà corretto in quanto la conclusione della dimostrazione sarà una conseguenza logica delle premesse.

Invertibilità

> Una regola $\frac{F_1 \ldots F_n}{H}$ è **invertibile** quando per ogni i si ha che $H \Vdash F_i$.

Come per la correttezza, se le premesse contemplano ipotesi scaricate, esse vanno incluse con una implicazione (es. {}).

L'invertibilità gioca un ruolo fondamentale nella ricerca di **dimostrazioni** in quanto se una regola è invertibile può essere sempre applicata nella ricerca top-down senza portare a vicoli ciechi.

Inoltre solitamente un buon metodo per dimostrare è quello di applicare in **maniera meccanica** tutte le regole invertibili che si possono applicare, per poi iniziare a ragionare solo nel momento in cui si è costretti ad applicare una regola non invertibile.

Infine, se nel fare una dimostrazione si arriva ad un vicolo cieco, occorre fare **backtracking**, ovvero fare dei passi indietro nella dimostrazione, ma ha senso fare questo procedimento per le regole non invertibili, in quanto la correttezza delle altre nei due versi è garantita.

Regole del connettivo $\wedge$

Regola di introduzione

> $\frac{F_1 \quad F_2}{F_1 \wedge F_2}(\wedge_i)$

- Lettura **bottom-up**: se F_1 e F_2, allora $F_1 \wedge F_2$.
- Lettura **top-down**: per dimostrare $F_1 \wedge F_2$, devo dimostrare sia F_1 che F_2.

La regola è sempre **invertibile**.

Dimostrazione della **correttezza**: $F_1, F_2 \Vdash F_1 \wedge F_2$ in quanto, per ogni mondo v, se $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 1$ allora $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$.

Dimostrazione dell'**invertibilità**: $F_1 \wedge F_2 \Vdash F_i$ per $i \in \{1, 2\}$ in quanto, per ogni mondo v, se $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = min([\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v) = 1$ allora $[\![F_i]\!]^v = 1$ per $i \in \{1, 2\}$.

Regola di eliminazione

> $$\frac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{matrix}[F_1][F_2] \\ \vdots \\ F_3\end{matrix}}{F_3} \quad (\wedge_e)$$

- Lettura **bottom-up**: se $F_1 \wedge F_2$ e se ipotizzando F_1 e F_2 concludo F_3, allora F_3.
- Lettura **top-down**: per dimostrare F_3 data l'ipotesi $F_1 \wedge F_2$ è sufficiente dimostrare F_3 sotto le ipotesi F_1 e F_2.

La regola è **invertibile** solo quando $F_1 \wedge F_2$ è dimostrabile.

(Dimostrazione della correttezza nella slide 13 del pacco "Deduzione naturale").

Regole alternative di eliminazione

> $\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}(\wedge_{e_1}), \ \frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}(\wedge_{e_2})$

- Lettura **bottom-up**: se $F_1 \wedge F_2$ allora F_1 (o F_2).
- Lettura **top-down**: per dimostrare F_1 (o F_2) basta dimostrare $F_1 \wedge F_2$.

Le due regole sono **invertibili** solo quando $F_1 \wedge F_2$ è dimostrabile.

(Dimostrazione della correttezza nella slide 17 del pacco "Deduzione naturale").

Regole del connettivo $\vee$

Regole di introduzione

> $\frac{F_1}{F_1 \vee F_2}(\vee_{i_1})$, $\frac{F_2}{F_1 \vee F_2}(\vee_{i_2})$

- Lettura **bottom-up**: se F_1 (o F_2) vale, allora vale anche $F_1 \vee F_2$.
- Lettura **top-down**: per dimostrare $F_1 \vee F_2$ è sufficiente dimostrare F_1 (o F_2).

Le due regole sono **invertibili** solo quando F_1 (o F_2) è dimostrabile.

(Dimostrazione della correttezza nella slide 24 del pacco "Deduzione naturale").

Regola di eliminazione

> $$\frac{F_1 \vee F_2 \quad \begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots \\ F_3\end{array} \quad \begin{array}{c}[F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3}(\vee_e)$$

- Lettura **bottom-up**: se vale $F_1 \vee F_2$ e F_3 vale sia quando vale F_1 che quando vale F_2, allora vale F_3.
- Lettura **top-down**: per dimostrare qualunque cosa sapendo che $F_1 \vee F_2$ vale è sufficiente procedere per casi, dimostrando la stessa cosa assumendo prima che F_1 valga e poi che F_2 valga.

La regola è **invertibile** solo quando $F_1 \wedge F_2$ è dimostrabile.

(Dimostrazione della correttezza nella slide 26 del pacco "Deduzione naturale").

Regole del connettivo $\perp$

Regole di introduzione

Nessuna, poichè non è possibile dimostrare il $\perp$.

Regole di eliminazione

> $\frac{\perp}{F}(\perp_e)$

- Lettura **bottom-up**: dal falso segue qualunque cosa.
- Lettura **top-down**: per dimostrare qualunque cosa posso ridurmi a dimostrare l'assurdo.

La regola è **invertibile** solo quando $\perp$ è dimostrabile.

Dimostrazione della **correttezza**: $\perp \Vdash F$.

Regole del connettivo $\top$

Regole di introduzione

> $\overline{\top}(\top_i)$

Questa regola è utile per concludere un ramo della dimostrazione senza generare sottorami.

Regola di eliminazione (inutile)

$$\frac{\top \quad F}{F}\,(\top_e)$$

- Lettura **bottom-up**: il $\top$ è vero.
- Lettura **top-down**: per dimostrare $\top$ non debbo fare nulla.

La regola è **invertibile**.

Dimostrazione della **correttezza**: $\Vdash \top$.

Dimostrazione dell'**invertibilità**: la regola è invertibile.

Regole del connettivo $\Rightarrow$

Regola di introduzione

$$\frac{\begin{matrix}[F_1] \\ \vdots \\ F_2\end{matrix}}{F_1 \Rightarrow F_2}\,(\Rightarrow_i)$$

- Lettura **bottom-up**: se ipotizzando F_1 dimostro F_2, allora $F_1 \Rightarrow F_2$.
- Lettura **top-down**: per dimostrare $F_1 \Rightarrow F_2$ basta assumere F_1 e dimostrare F_2.

La regola è **invertibile**.

Dimostrazione della **correttezza** e dell'**invertibilità**: $F_1 \Rightarrow F_2 \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$.

Regola di eliminazione

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2 \quad F_1}{F_2}\,(\Rightarrow_e)$$

- Lettura **bottom-up**: se F_1 e $F_1 \Rightarrow F_2$, allora F_2.
- Lettura **top-down**: per dimostrare F_2 devo trovare un F_1 che valga e tale per cui $F_1 \Rightarrow F_2$.

La regola **non è invertibile**.

(Dimostrazione della correttezza nella slide 37 del pacco "Deduzione naturale").

Regole del connettivo $\neg$

Siccome in logica classica $\neg \equiv (F_1 \Rightarrow \bot)$ le regole del connettivo $\neg$ vengono riprese da quelle del connettivo $\Rightarrow$.

Regola di introduzione

$$\frac{\begin{matrix}[F] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg F}\,(\neg_i)$$

- Lettura **bottom-up**: se ipotizzando F_1 dimostro l'assurdo, allora $\neg F_1$.
- Lettura **top-down**: per dimostrare $\neg F_1$ basta assumere F_1 e dimostrare l'assurdo.

La regola è **invertibile**.

(Dimostrazioni della correttezza e dell'invertibilità sono le stesse del connettivo $\Rightarrow$).

Regola di eliminazione

> $\dfrac{\neg F \quad F}{\bot}(\neg_e)$

- Lettura **bottom-up**: è assurdo avere sia F_1 e $\neg F_1$.
- Lettura **top-down**: per dimostrare l'assurdo basta dimostrare qualcosa e il suo contrario.

La regola **non è invertibile**.

(Dimostrazione della correttezza è la stessa del connettivo $\Rightarrow$).

Completezza e correttezza delle regole introdotte

Dopo aver introdotto le regole di inferenza per la logica proposizionale classica, vogliamo verificare che siano soddisfatti i due teoremi di correttezza e completezza.

Teorema di correttezza

> $\forall \Gamma, F. \Gamma \vdash F \Rightarrow \Gamma \Vdash F$

Enunciato: se F è dimostrabile da Γ, allora F è conseguenza logica di Γ.

Intuizione: tutte le regole introdotte sono corrette.

Dimostrazione: il teorema di correttezza delle regole visto fino ad ora è facilmente dimostrabile tramite induzione strutturale sull'albero di derivazione $\Gamma \vdash F$ (dimostrazione slide 48 del pacco di slide "Deduzione naturale").

Teorema di completezza

> $\forall \Gamma, F. \Gamma \Vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash F$

Enunciato: se F è conseguenza logica di Γ, allora F è dimostrabile da Γ.

Intuizione: tutto ciò che è conseguenza logica è dimostrabile con le regole introdotte.

Per convincersi che con le regole introdotte non abbiamo raggiunto la completezza basta dare uno sguardo ai seguenti due teoremi, che sono tautologie in logica classica ma che non sono dimostrabili con le regole introdotte finora:

- $\Vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ (ragionamento per assurdo - RAA)
- $\Vdash A \vee \neg A$ (excluded middle - EM)

Questi due teoremi sono tautologie in logica classica per il fatto che in quest'ultima logica i valori di verità sono 2 (vero e falso), mentre in altre logiche possono non valere. Visto però che nessuna delle regole introdotte finora si basa sul concetto che i valori di verità sono esclusivamente 2, allora non siamo in grado di dimostrare queste tautologie.

Per questo motivo occorre inserire un'altra regola al fine di raggiungere la completezza in logica classica.

Regola di dimostrazione per assurdo (RAA)

> $\neg[F]$
>
> $\vdots$
>
> $\dfrac{\bot}{F}(RAA)$

- Lettura **bottom-up**: se F_1 e $F_1 \Rightarrow F_2$, allora F_2.
- Lettura **top-down**: per dimostrare F_2 devo trovare un F_1 che valga e tale per cui $F_1 \Rightarrow F_2$.

La regola è **invertibile**.

(Dimostrazione della correttezza e dell'invertibilità nella slide 53 del pacco "Deduzione naturale").

Una dimostrazione per assurdo avviene in maniera differente rispetto a come abbiamo visto finora, in quanto per dimostrare l'assurdo possono essere utilizzate tutte le regole, invertibili e non invertibili, con l'unico scopo di accumulare più ipotesi possibili.

Tutte le dimostrazioni effettuate senza l'utilizzo della regola di dimostrazione per assurdo possono essere tradotte in programmi informatici, mentre ciò non è detto nel caso in cui questa regola venga utilizzata.

Utilizzo frequente della RAA

Un utilizzo frequente della RAA è il seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ A\end{matrix} \quad [\neg A]}{\bot}(\neg_e)}{A}(RAA)$$

Principio del terzo escluso

> $\vdash A \vee \neg A$

Spesso le dimostrazioni effettuate utilizzando la RAA risultano molto laboriose e anti-intuitive, tuttavia però è possibile dimostrare tramite la RAA il principio del terzo escluso, il quale fornisce uno schema di prova molto potente per via del fatto che inserisce all'interno della dimostrazione il concetto che in logica classica esistono solo due valori di verità.

Uno schema molto potente di dimostrazione consiste infatti nell'utilizzo del principio del terzo escluso combinato alla regola di eliminazione dell'or:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \vee \neg A\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ F\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ F\end{matrix}}{F}(\vee_e)$$