Eventi disgiunti, indipendenti

Abbiamo a che fare con eventi disgiunti quando il verificarsi di uno implica il non verificarsi dell'altro.

EVENTI DISGIUNTI O INCOMPATIBILI
O MUTUAMENTE ESCLUSIVI

$E, F \subset S$

$$E \cap F = \emptyset$$

Vuol dire che non hanno esiti in comune, quindi se si verifica E, non si verifica F, si condizionano a vicenda.

E ed F NON possono verificarsi simultaneamente

Eventi indipendenti e disgiunti non sono la stessa cosa.

Def PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Dati $E, F \subset S$ si dice probabilità di E condizionata da F

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

se $P(F) \neq 0$

Due eventi sono indipendenti se non si condizionano.

Due eventi sono indipendenti se non si condizionano, se il verificarsi dell'uno non modifica la prob. di verificarsi dell'altro

Scriviamo la definizione rigorosa.

Def. EVENTI INDIPENDENTI (rigorosa)
Dati $E, F \subset S$, essi si dicono indipendenti se
$$P(E \cap F) = P(E)\,P(F)$$

Ha delle conseguenze sulla probabilità condizionata.

OSS. Se $\begin{cases} P(F) \neq 0 \\ E, F \text{ INDIP} \end{cases} \Rightarrow P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(E)\cancel{P(F)}}{\cancel{P(F)}}$

$$\Downarrow$$
$$P(E|F) = P(E)$$

Se $\begin{cases} P(E) \neq 0 \\ E, F \text{ INDIP.} \end{cases} \Rightarrow P(F|E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{\cancel{P(E)}P(F)}{\cancel{P(E)}}$

$$\Downarrow$$
$$P(F|E) = P(F)$$

Non si usa questa osservazione come definizione perché implicherebbe che una delle probabilità non sia uguale a 0.

DOMANDA: Gli eventi incompatibili possono essere indipendenti?

$E, F \subset S$ e incompatibili: $E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cap F) = 0$

se sono indipendenti: $P(E \cap F) = P(E)\,P(F)$

Sappiamo dalla definizione di incompatibilità che la probabilità di E intersecato F sia nullo.

gli eventi incompatibili possono essere indipendenti a patto di supporre che almeno uno dei due abbia probabilità nulla

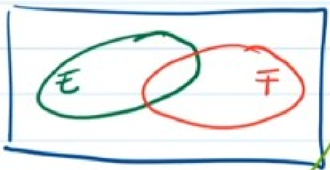
Questo è un caso molto particolare. Quindi, in generale, è impossibile che due eventi incompatibili siano indipendenti, perché in effetti l'incompatibilità condiziona fortemente gli eventi.

TEOREMA

DATI $E, F \subset S'$ INDIPENDENTI, ALLORA ANCHE E ed F^c, F ed E^c, F^c ed E^c SONO INDIPENDENTI

È una proprietà molto intuitiva.

Dim



$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$

con $(E \cap F) \cap (E \cap F^c) = \emptyset$

$$P(E) = P((E \cap F) \cup (E \cap F^c)) \overset{A3}{=}$$

$$= P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

$$P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F) \overset{INDIP.}{=}$$

$$= P(E) - P(E)P(F)$$

$$= P(E)(1 - P(F)) \overset{P1}{=} P(E)P(F^c)$$

Partendo dalla probabilità di E intersezione F complementare, ci siamo ricavati l'indipendenza.

E ed F^c sono INDIPENDENTI PER DEF.

In maniera simile si dimostrano le altre proprietà $\square$

esempio Due dispositivi di protezione proteggono indipendentemente l'uno dall'altro.
Dispositivo 1 ha prob. 80% di funzionare
Dispositivo 2 " " 70% " "
Utilizzandoli simultaneamente quale è la prob. di essere protetti?

$$\text{INDIP.}\begin{cases} A = \text{'}D_1 \text{ funziona'} & P(A) = 0.8 \\ B = \text{'}D_2 \text{ funziona'} & P(B) = 0.7 \end{cases}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Senza l'ipotesi dell'indipendenza, non si sarebbe potuto risolvere perché non si avrebbe il dato dell'intersezione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \underset{\text{INDIP.}}{=}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) =$$
$$= 0.8 + 0.7 - 0.56 = 0.94$$

Ci si potrebbe fare la domanda sull'evento complementare (altro metodo di risoluzione).

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c)$$

Si può usare il teorema enunciato in precedenza.

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) \underset{\text{INDIP.}}{=}$$
$$= 1 - P(A^c)\,P(B^c) =$$
$$= 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7) = 1 - 0.2 \times 0.3 =$$
$$= 1 - 0.06 = 0.94$$

es. 2 Pierino (P) e Filippo (F) suonano dei campanelli a caso in una pulsantiera che presenta 10 campanelli. Ognuno suona indipendentemente dall'altro. P suona 7 campanelli, Filippo 4 campanelli:

1) Quale è la prob. che P suoni il campanello del Sig. Rossi?

$$P(A) = P(\text{P suoni il campanello R}) = \frac{7}{10}$$

2) Quale è la prob. che il campanello di R sia suonato almeno una volta

B = "F suona R"

$$P(R) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) =$$
$$= \frac{7}{10} + \frac{4}{10} - \frac{28}{100} = \frac{82}{100} = \frac{41}{50}$$

Cosa succede se ho 3, 4, 5, 10 eventi indipendenti? Posso usare la definizione iniziale.

Dati $A, B, C \subset S$ essi si dicono INDIPENDENTI se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

Non basta, intersezioni a 2 a 2.

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$$

3 eventi sono indipendenti se TUTTE queste relazioni sono valide. Se anche solo una di esse non è valida, gli eventi non sono tutti e 3 indipendenti.

Nel caso di N eventi, l'indipendenza è verificata se le prec. proprietà valgono per tutte le intersezioni di $N, N-1, N-2, \dots 2$ eventi.

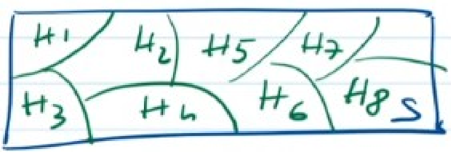
C'è una maniera per visualizzare graficamente se gli eventi sono indipendenti? Purtroppo no.

Partizione di uno spazio campione

È una suddivisione: immaginiamo una torta divisa in fette, allo stesso modo le partizioni sono delle suddivisioni di eventi che non hanno nulla in comune, ma che insieme danno lo spazio campione.

Def PARTIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE

Dato uno spazio campione S si dice partizione di S una suddivisione in eventi $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$ tali che $H_i \cap H_J = \phi$ se $i \neq J$ e $\bigcup_{J=1}^{n} H_J = S$



$\boxed{\text{N.B. Gli } H_k \text{ si chiamano usualmente IPOTESI}}$

Ci sono due risultati molto semplici e banali, ma importanti e applicati in ambiti diversi.

Teorema delle probabilità totali

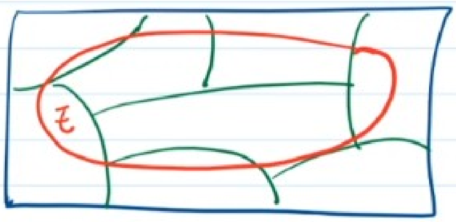
Abbiamo uno spazio campione, la sua suddivisione è una partizione. Prendiamo un evento.

FORMULA (O TEOREMA) DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Data una partizione di S $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$ e un evento $E \subset S$

$$P(E) = \sum_{J=1}^{n} P(E \mid H_J)\, P(H_J)$$

DIM



Riprendendo l'esempio della torta, è come una decorazione messa su una torta. Per ricomporla nella sua interezza, bisogna prendere tutti i pezzi della torta.

$$E = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \dots \cup (E \cap H_n)$$

È chiaro che possano esserci insiemi vuoti, ma la definizione rimane corretta.

$$(E \cap H_i) \cap (E \cap H_J) = 0 \quad \text{se } i \neq J$$
$$\text{perché } H_i \cap H_J = \phi$$

Dato che nessuno degli elementi della partizione ha elementi in comune, allora nemmeno le intersezioni hanno qualcosa in comune.

$$P(E) = P\left(\bigcup_{J=1}^{n} (E \cap H_J)\right) \underset{\circledast\ A3}{=} \sum_{J=1}^{n} P(E \cap H_J)$$

Posso passare la probabilità d'intersezione alla definizione di probabilità condizionata.

$$= \sum_{J=1}^{n} P(E|H_J)\, P(H_J) \quad A3$$

A cosa serve questa formula?

es. 1 Esame del sangue per individuare una malattia M è efficace al 99% e presenta un 1% di falsi positivi

In 99 casi su 100 individua la malattia (inverosimile). I falsi positivi sono l'1% (sempre inverosimile). Da notare che 1% sembra il complementare del 99%, ma è solo un caso (potevamo avere un 20% di falsi positivi, da analizzare a seguito di un esame risultato positivo).

Si sa che la malattia M ha un'incidenza nella popolazione di 0.5%. Preso un individuo a caso nella popolazione, qual è la prob. che il suo esame del sangue sia positivo?

Si può rispondere a questa domanda usando il teorema delle probabilità totali.

Abbiamo 2 partizioni.

H_1 = presentare malattia M $\quad P(H_1) = 0.005$

$H_2 = H_1^c \quad P(H_2) = 0.995$

E = 'esame del sangue positivo'

Secondo il teorema delle probabilità totali, la probabilità di E è:

$$P(E) = P(E|H_1)\,P(H_1) + P(E|H_2)\,P(H_2)$$

$$P(E|H_1) = 0.99\ ; \quad P(E|H_2) = 0.01$$

$$P(E) = 0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995 =$$
$$= 0,0149 \simeq 1.5\%$$

Rispetto al fatto che ci siano 5/1000 individui con la malattia, ci sono 15/1000 individui a cui l'esame risulta positivo.

Cosa può interessare? Se un individuo risulta positivo, qual è la probabilità che sia malato?

Teorema di Bayes

È anche noto come teorema delle probabilità posteriori.

Dato uno spazio campione S ed una sua partizione $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$ e dato $E \subset S$ $(P(E) \neq 0)$

$$P(H_i | E) = \frac{P(E|H_i)\,P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E|H_k)\,P(H_k)} \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Abbiamo uno spazio campione (un esperimento), abbiamo un evento sempre contenuto nello spazio campione, abbiamo delle partizioni (ipotesi). Mi domando quale sia la probabilità di un'ipotesi se si è verificato l'evento E.

$\boxed{\text{DIM}}$

$$P(H_i \cap E) = P(E|H_i)\,P(H_i)$$

Si può anche vedere il condizionamento contrario.

$$P(H_i|E)P(E) = P(H_i \cap E) = P(E|H_i)\,P(H_i)$$
$$\Downarrow$$
$$P(H_i|E)\,P(E) = P(E|H_i)\,P(H_i)$$
$$\Downarrow$$
$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)\,P(H_i)}{P(E)}$$

Si può fare perché la probabilità di E per ipotesi è diversa da 0.

Infine si può usare la formula delle probabilità totali.

$$\underset{\substack{\text{FORMULA}\\\text{PROB. TOTALI}}}{=} \frac{P(E|H_i)\,P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E|H_k)\,P(H_k)}$$

Quando si usa il teorema di Bayes? Si usa anche a livelli avanzati. Il difficile sta nel capire quando va usata, serve pratica.

es. (caso di prima dell'esame del sangue)
Se un individuo ottiene esito positivo dall'esame del sangue, quale è la prob. di essere malato?

$$P(H_1|E)$$

Usiamo il teorema di Bayes.

$$P(H_1|E) \underset{\substack{\text{TEO}\\\text{DI BAYES}}}{=} \frac{P(E|H_1)\,P(H_1)}{\sum_{k=1}^{2} P(E|H_k)\,P(H_k)} =$$

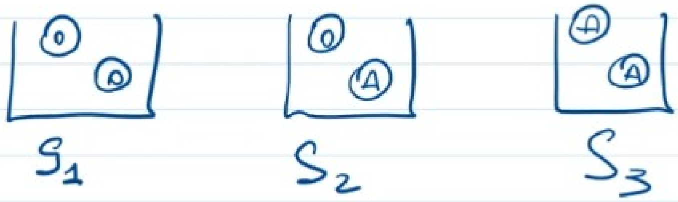
$$= \frac{P(E|H_1)\,P(H_1)}{P(E)} = \frac{0.99 \times 0.005}{0.0145} \simeq$$

$$\simeq 0.33$$

Paradosso delle scatole di Bertrand

Abbiamo 3 scatole apparentemente identiche.

PROBLEMA O PARADOSSO DELLE SCATOLE DI BERTRAND



Qual è la probabilità di estrarre una moneta d’oro?

$$H_i = \text{'scelta della scatola } S_i\text{'} \quad i = 1, 2, 3$$

Le scatole sono indistinguibili, quindi possono essere scelte in maniera uguale.

$$P(H_i) = \frac{1}{3}$$

$$O = \text{'estrazione di una moneta d'oro'}$$

Per la probabilità di O, usiamo la formula delle probabilità totali.

$$P(O) = P(O|H_1)\,P(H_1) + P(O|H_2)\,P(H_2) + P(O|H_3)\,P(H_3)$$

$$P(O|H_1) = 1\,; \quad P(O|H_3) = 0\,; \quad P(O|H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(O) = P(O|H_1)P(H_1) + P(O|H_2)P(H_2) + P(O|H_3)P(H_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Domanda da teorema di Bayes. Se pesco una moneta d'oro, qual è la probabilità che sia una moneta della prima scatola?

Se è stata estratta una moneta d'oro quale è la prob. di aver scelto S_1?

Questo problema si chiama paradosso perché vengono risultati diversi a seconda del punto di vista (2/3 o 50%). Però usiamo il teorema di Bayes.

$$P(H_1|O) \underset{\text{TEO DI BAYES}}{=} \frac{P(O|H_1)P(H_1)}{P(O)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Altri esempi di applicazione del teorema di Bayes

es. 2 Una compagnia di assicurazione classifica i propri clienti in 3 categorie

H_1: basso rischio (prob. avere incidenti in un anno 0.05)

H_2: medio rischio (prob. avere incidenti in un anno 0.15)

H_3: alto rischio (prob. avere incidenti in un anno 0.30)

Si sa che il 20% della popolazione è a basso rischio
il 50% " " " " medio "
il 30% " alto

Quale è la prob. che un nuovo assicurato abbia incidenti nel primo anno?

$P(H_1) = 20\%$; $P(H_2) = 50\%$, $P(H_3) = 30\%$

I = 'avere incidenti in un anno'

$P(I|H_1) = 0.05$, $P(I|H_2) = 0.15$; $P(I|H_3) = 0.30$

$$P(I) = P(I|H_1)\,P(H_1) + P(I|H_2)\,P(H_2) + P(I|H_3)\,P(H_3) =$$

$$= 0.05 \times 0.20 + 0.15 \times 0.5 + 0.3 \times 0.3 =$$
$$= 0.01 + 0.075 + 0.09 = 0.175$$

$$P(H_1|I) = \frac{P(I|H_1)\,P(H_1)}{P(I)} = \frac{0.05 \times 0.2}{0.175} =$$

$$= \frac{10^{-2}}{17.5 \times 10^{-2}} \simeq \frac{1}{17}$$

Problema della rovina del giocatore

Apparentemente la soluzione è complicatissima, ma scegliente una strada alternativa, viene un risultato molto elegante.

A e B giocano lanciando una moneta, se T (esce testa) B dà ad A una moneta da 1€, se C (esce croce) A dà a B una moneta da 1€. Inizialmente A possiede K monete da 1€ ($0 < K < n$) e B possiede $(n - K)$ monete da 1€

Vince il giocatore che dopo diverse partite (diversi lanci di moneta) ottiene tutte le monete (perde chi perde tutte le monete).

Quale è la prob. che A vinca?

In linea di principio potrebbero servire infiniti lanci.

Non bisogna conoscere quante monete hanno inizialmente A e B? Sì, A ha K monete, B ha N – K monete. La probabilità di vittoria dipende anche da quante monete possegga il giocatore (se A ha solo una moneta è poco probabile che vinca, se invece ne avesse tante è più probabile).

La strada dei casi possibili non è praticabile, per questo è difficilissimo (apparentemente non alla portata).

In realtà, usando un trucco, lo diventa: applicare la formula delle probabilità totali al primo lancio.

A = 'A vince'
T = 'uscita di testa in un lancio di moneta'
$C = T^c$

$$P(T) = p \Rightarrow P(C) = 1 - p = q$$

Usiamo sempre Q per indicare 1 – P.

$$P(A) = p_k$$

Siccome K non è N e nemmeno 0, servirà almeno un lancio di moneta per la sconfitta o vittoria.

Se $0 < k < n$ occorre sempre almeno un lancio di moneta

$$P(A) = P(A \mid T)\, P(T) + P(A \mid C)\, P(C)$$

Se esce testa, A ha più probabilità di vittoria. Viceversa, la probabilità di A si riduce.

$$\begin{array}{ccccccccc} P(A) & = & P(A \mid T) & P(T) & + & P(A \mid C) & P(C) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ p_k & = & p_{k+1} & p & + & p_{k-1} & q \end{array}$$

Questa è una formula ricorsiva: a seconda del valore di K, si lega il valore della probabilità di vittoria.

$$p_k = p_{k+1}\, p + p_{k-1}\, q$$

moltiplico $p_k \underbrace{(p+q)}_{=1}$

$$(p+q)\, p_k = p_{k+1}\, p + p_{k-1}\, q$$

$$(p_{k+1} - p_k)\, p = (p_k - p_{k-1})\, q$$

se $p \neq 0$

$$p_{k+1} - p_k = (p_k - p_{k-1}) \frac{q}{p} \qquad k = 1, \dots, n-1$$

$$k=1 \quad p_2 - p_1 = (p_1 - p_0)\frac{q}{p}$$
$$k=2 \quad p_3 - p_2 = (p_2 - p_1)\frac{q}{p}$$
$$k=3 \quad p_4 - p_3 = (p_3 - p_2)\frac{q}{p}$$
$$\vdots$$
$$k=n-1 \quad p_n - p_{n-1} = (p_{n-1} - p_{n-2})\frac{q}{p}$$

Sono relazioni ricorsive, particolari, perché tutte le volte che si passa al valore successivo, il termine che si trova da un lato, nella relazione successiva si ritrova dall'altro. La probabilità di vincere con 0 monete è 0.

$$k=1 \quad \underline{p_2 - p_1} = (p_1 - \cancel{p_0}^{\,0})\frac{q}{p} \qquad \text{N.B. } p_0 = 0$$
$$k=2 \quad \underline{p_3 - p_2} = (\underline{p_2 - p_1})\frac{q}{p} = p_1\left(\frac{q}{p}\right)^2$$
$$k=3 \quad p_4 - p_3 = (\underline{p_3 - p_2})\frac{q}{p} = p_1\left(\frac{q}{p}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$k=n-1 \quad p_n - p_{n-1} = (p_{n-1} - p_{n-2})\frac{q}{p} = p_1\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

Sommiamo tutte le relazioni.

SOMMO LE RELAZIONI $\quad p_n - p_1 = \sum_{k=1}^{n-1} p_1\left(\frac{q}{p}\right)^k$

N.B. $p_n = 1$

$$\Downarrow$$
$$1 = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_1\left(\frac{q}{p}\right)^k$$
$$1 = p_1 \sum_{k=0} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k}$$

Questa è la probabilità che A vinca se ha una sola moneta.

Se la moneta è equilibrata?

CASO 1: $p = q = \frac{1}{2}$

$$P_1 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} 1} = \frac{1}{n}$$

$$P_2 - P_1 = P_1 \frac{q}{p} \Rightarrow P_2 = P_1 + P_1 \underbrace{\frac{q}{p}}_{\frac{q}{p}=1} = 2P_1 = \frac{2}{n}$$

$$P_3 - P_2 = P_1 \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Rightarrow P_3 \underset{\frac{q}{p}=1}{=} P_2 + P_1 = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$P_k = \frac{k}{n}$$

CASO 2 $p \neq q$

$\frac{q}{p} \neq 1$

$$P_1 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k} = \frac{1}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \frac{q}{p}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}$$

Generalizzazione del falso quadrato al denominatore.

$$p_2 = p_1 + p_1 \frac{q}{p} = \frac{\left(1+\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^2}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}$$

$$p_k = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}$$

Il rapporto può essere maggiore o minore di 1, nel caso si abbiano numeratori e denominatori negativi si avrebbe comunque un risultato compatibile con gli assiomi di Kolmogorov.