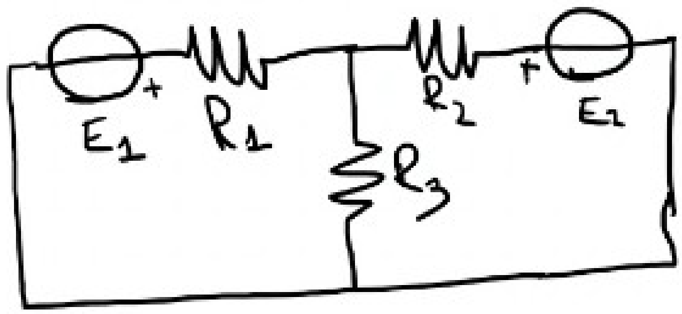
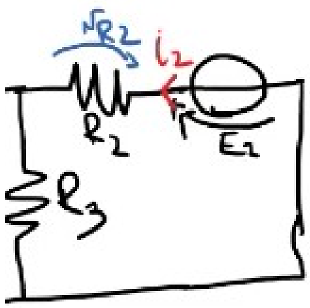
Esempio

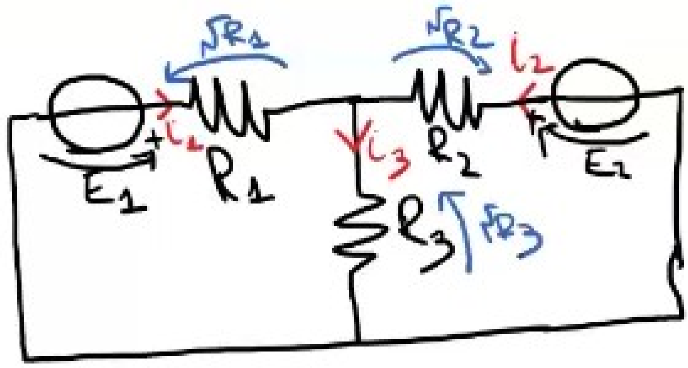


Vogliamo calcolare tensioni e correnti sui circuiti. Mettiamo la convenzione del generatore su E1 e quella dell’utilizzatore su R1.

Allo stesso modo, su E2 e R2.



Supponiamo i3 che va verso il basso e mettiamo la convenzione dell’utilizzatore su R3.

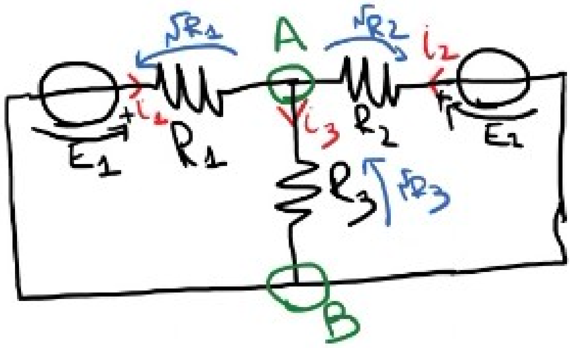


Quanti nodi funzionali ci sono nel circuito? 2. Quanti lati ci sono? 3. Questo significa che avremo 6 incognite.

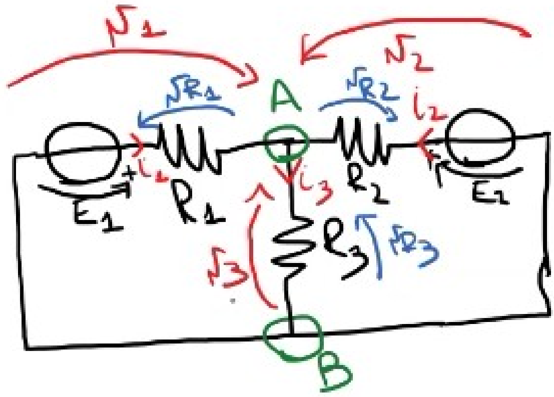
2 NODI

3 LATI $\Rightarrow 2 \cdot 3$ INCOGNITE

Consideriamo il nodo A e il nodo B.



Poi consideriamo le tensioni di lato.



Le incognite sono quelle in rosso.

Vediamo le equazioni costitutive.

EQ. COSTIT.:

LATO 1: $v_1 = E_1 - v_{R1} = E_1 - R_1 i_1$

Scriviamo l'equazione costitutiva sul lato 2.

LATO 2: $v_2 = E_2 - v_{R2} = E_2 - R_2 i_2$

Vediamo sul lato 3.

$$\text{LATO } 3: \quad v_3 = v_{R_3} = R_3 i_3$$

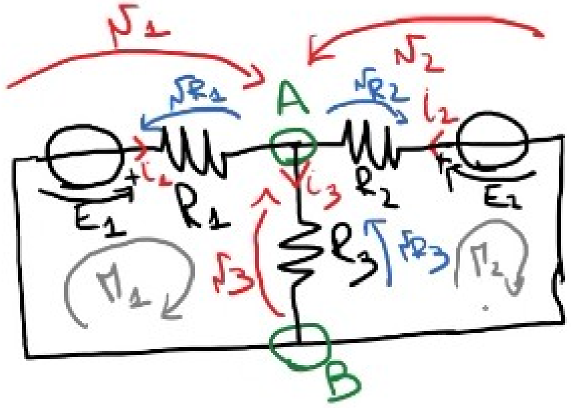
Per 3 lati, abbiamo 3 equazioni costitutive.

Quante LKC troveremo? 1.

Facciamola al nodo A, scarto il B, è una scelta. i1 e i2 entrano nel nodo A, i3 esce dal nodo A.

$$\text{LKC A}: \quad i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Quante LKT avremo? 2. LKT a 2 maglie, le maglie che non vengono intersecate dai rami.



Scelgo il verso arbitrario.

Andiamo sulla maglia 1. V1 è concorde al verso della maglia, V3 è discorde.

$$\text{LKT } M1: \quad v_1 - v_3 = 0$$

Scriviamo quella per la seconda maglia.

$$\text{LKT } M2: \quad v_3 - v_2 = 0$$

Abbiamo già trovato il sistema a 6 incognite. Quello che faremo sarà sostituire le equazioni sostitutive a quelle topologiche.

$$\text{LATO 1: } v_1 = E_1 - v_{R1} = E_1 - R_1 i_1$$
$$\text{LATO 2: } v_2 = E_2 - v_{R2} = E_2 - R_2 i_2$$
$$\text{LATO 3: } v_3 = v_{R3} = R_3 i_3$$

$$\text{LKC A: } i_1 + i_2 - i_3 = 0 \qquad\qquad i_1 + i_2 - i_3 = 0$$
$$\text{LKT M1: } v_1 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0$$
$$\text{LKT M2: } v_3 - v_2 = 0 \qquad\qquad R_3 i_3 - E_2 + R_2 i_2 = 0$$

Abbiamo 3 equazioni in 3 incognite.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ E_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0 \\ R_3 i_3 - E_2 + R_2 i_2 = 0 \end{cases}$$

Grazie alle equazioni costitutive, potremo calcolarci V1, V2, V3.

Teoremi di rete (sovrapposizione degli effetti)

Dobbiamo considerare alcune ipotesi. La prima è di linearità.

IPOTESI DI LINEARITÀ

$f(x_1+x_2)$ é lineare:

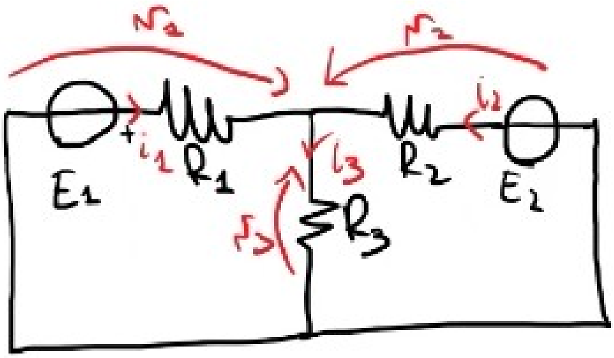
ADDITIVITÀ: $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

OMOGENEITÀ: $f(a x_1) = a\, f(x_1)$

Introdotta questa ipotesi, introduciamo il primo teorema, quello della sovrapposizione degli effetti. Questo teorema è valido dell'ipotesi della linearità.

Questo teorema ci dice che le variabili di rete (gli effetti) si possono ottenere come sovrapposizione delle risposte dovute alle singole cause.

Per esempio:



$i_3 = ?$

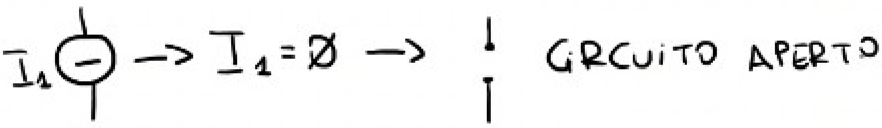
Andremo ad analizzare il circuito una causa alla volta.

una causa alla volta => PASSIVARE alcuni generatori

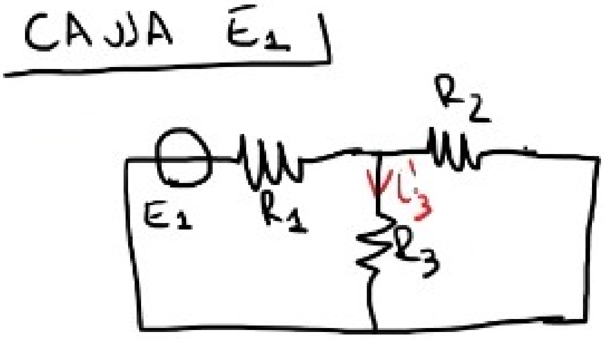
Cosa vuol dire passivare alcuni generatori?

$E_1 \to E_1 = \emptyset \to$ | CORTO-CIRCUITO

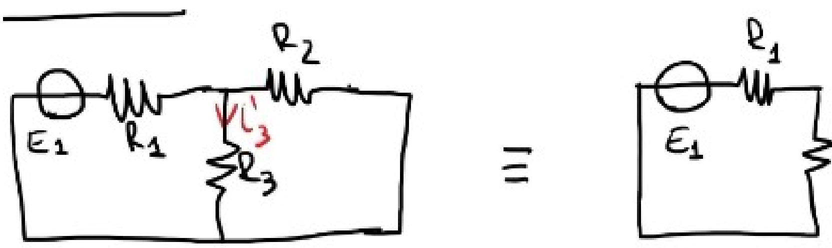
Se avessimo un generatore di corrente:



Quindi, iniziamo a passivare E2. Il circuito sarà il seguente. La causa è il generatore, quello che impone qualcosa, quindi in questo caso sarà E1. L'effetto è quello che avremo sui componenti.

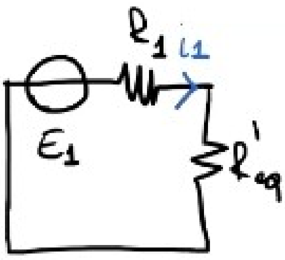


Vogliamo calcolare una i3', poi calcoleremo una i3''. Questo circuito equivale a:



$$R'_{eq} = R_2 /\!/ R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Dal circuito è banalissimo trovare la corrente i1.



$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}}$$

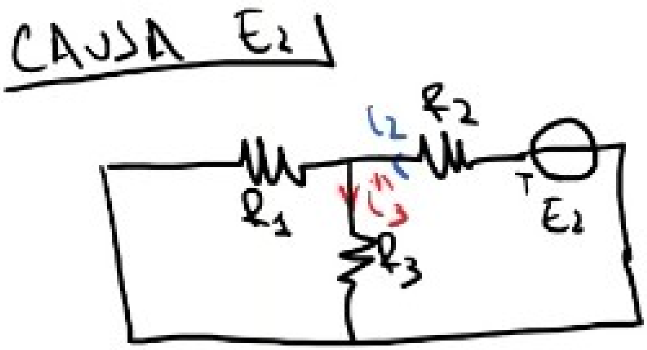
Da i1, come faremo a trovare i3'?
Partitore di corrente.

$$i_3' = i_1 \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3}$$

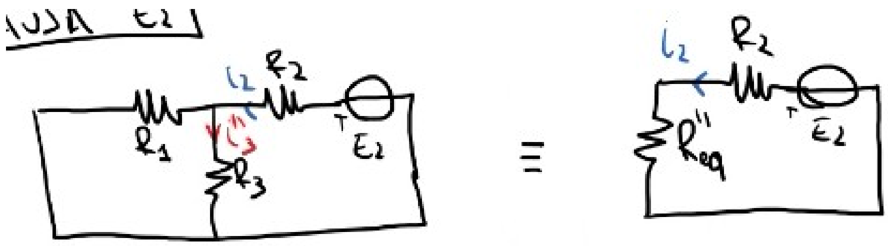
Quindi questo è pari a:

$$i_3' = i_1 \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3} = \frac{E_1}{R_1+R_{eq}'} \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3}$$

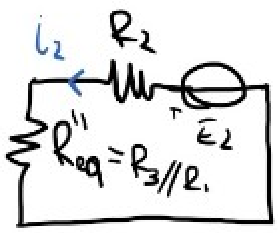
Studiamo lo stesso circuito con causa E2. Passiviamo E1.



Può essere riscritto come:



Ora è più semplice calcolare i2.



$$i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_{eq}''}$$

Per i3’’, abbiamo il partitore di corrente.

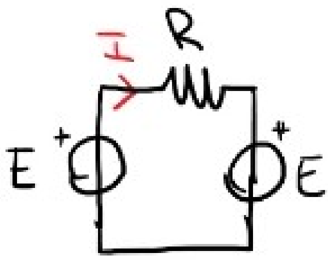
$$i_3'' = i_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Quindi, la corrente i3 sarà:

$$\Rightarrow \boxed{i_3 = i_3' + i_3''}$$

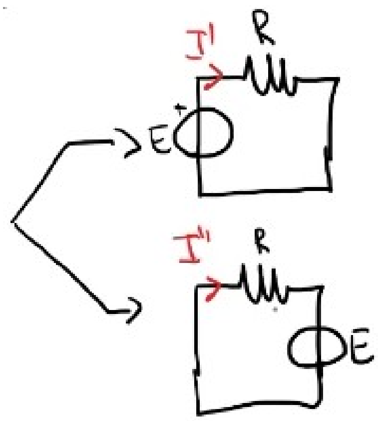
La sovrapposizione degli effetti torna molto utile per il calcolo di una specifica cosa di un circuito.

Lo stesso discorso vale per la tensione. Per la potenza cosa succede?



2 generatori di tensione alla stessa tensione. La corrente risultante sarà 0, ma non lo sappiamo. Usiamo la sovrapposizione degli effetti.

Passiviamo il generatore di destra e poi quello di sinistra.



$$I' = \frac{E}{R}$$

$$I'' = -\frac{E}{R}$$

Usando la convenzione, i = E/R nel secondo caso ha verso opposto rispetto a I'', quindi serve il meno.

$$I = I' + I'' = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} = \emptyset$$

Applichiamo la sovrapposizione degli effetti sulla potenza.

$$P = RI^2 = 0 \ W$$

Ovviamente quella vera sarà 0. Vediamo però che succede.

$$P = P' + P'' = RI'^2 + RI''^2 = R\left(\frac{E}{R}\right)^2 + R\left(-\frac{E}{R}\right)^2 = R\frac{E^2}{R^2} + R\frac{E^2}{R^2} \neq 0$$

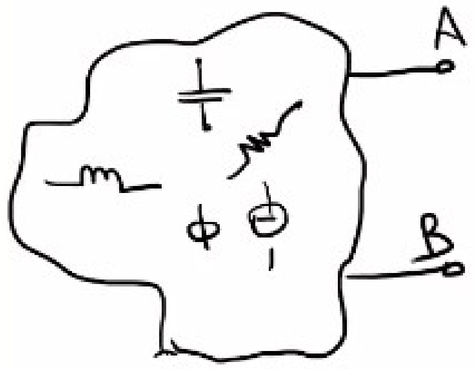
Non possiamo applicare la sovrapposizione degli effetti sulla potenza, è sbagliato.

$$\cancel{P = P' + P''}$$

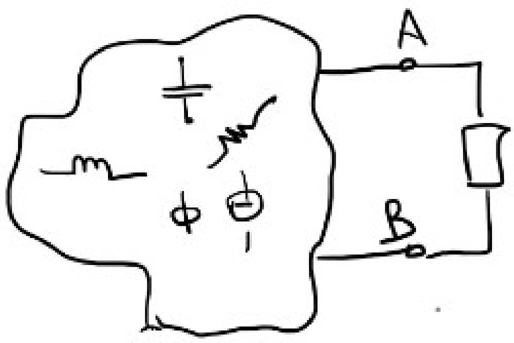
Il calcolo della potenza non è lineare.

Teorema di Thevenin

Supponiamo di avere una rete lineare (condensatori, induttori, resistori, generatori di tensione e di corrente.



Prendiamo una parte di circuito connessa ad A e B, con un carico, cioè qualcosa che assorbe potenza dal circuito.



Abbiamo bisogno di 2 ipotesi:

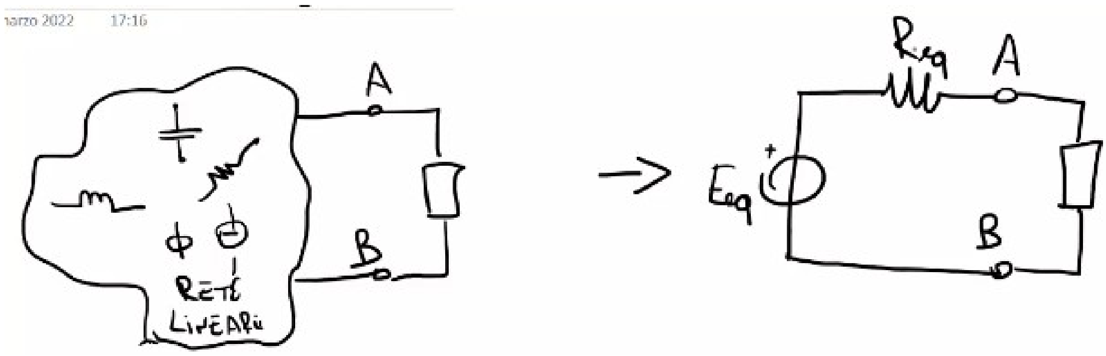
IP.: CIRCUITO LINEARE

IL CARICO NON É ACCOPPIATO CON LA RETE DA SEMPLIFICARE

.

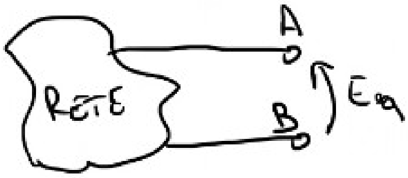
Il carico può essere qualsiasi. Le due ipotesi sono linearità e che il carico non sia accoppiato con la prima rete, quindi niente accoppiamento magnetico ad esempio.

La rete può essere semplificata in questo modo.

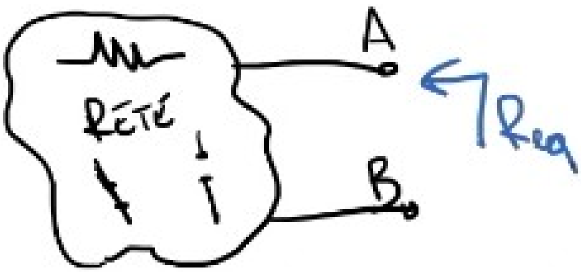


Si può semplificare in un generatore di tensione in serie con una resistenza equivalente. Se ci sono induttori o condensatori c'è un'impedenza equivalente al posto della resistenza, ma lo vedremo più avanti. Questo teorema semplifica di molto i circuiti.

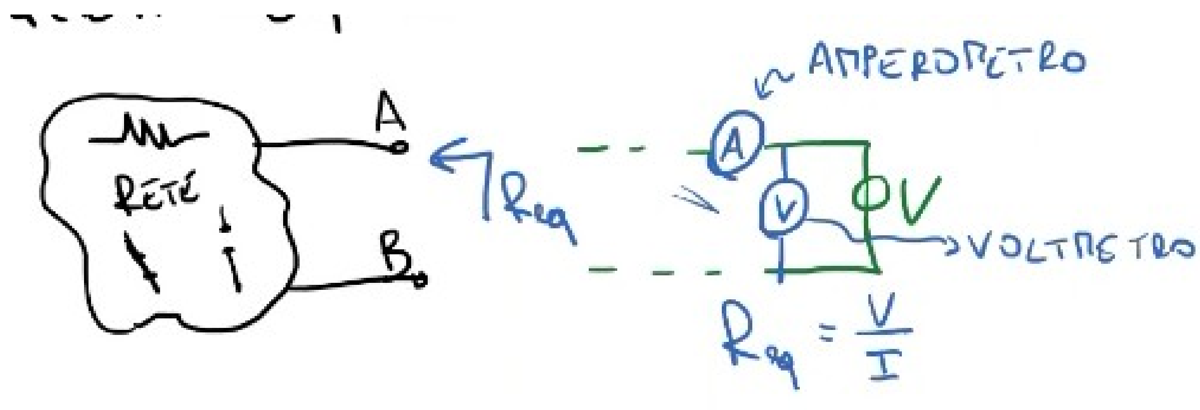
E_{eq} = é la tensione vista ai morsetti A e B a circuito aperto



R_{eq} = é la resistenza equivalente vista da A e B passivando i generatori indipendenti



Se applicassimo un generatore di tensione e misurassimo la corrente (va messo in serie al circuito l'amperometro) e la tensione (il voltmetro va in parallelo). La resistenza equivalente sarebbe V/I.

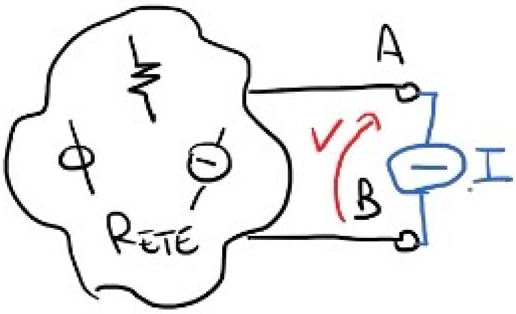


Abbiamo detto che il carico non è accoppiato, vale a dire che non c’è nessun induttore che ha lo stesso nucleo ferromagnetico di quello che sta dall’altra parte.

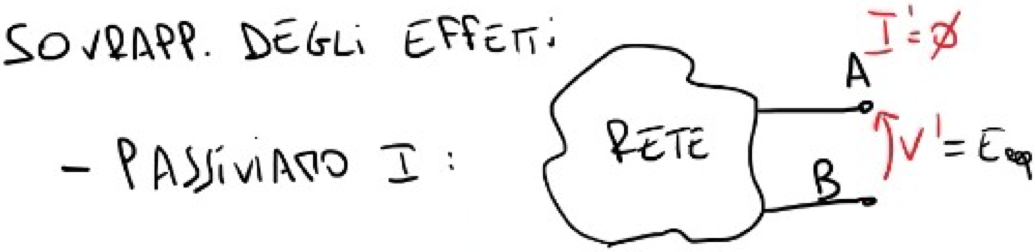
Dimostrazione del teorema di Thevenin

Useremo la sovrapposizione degli effetti.

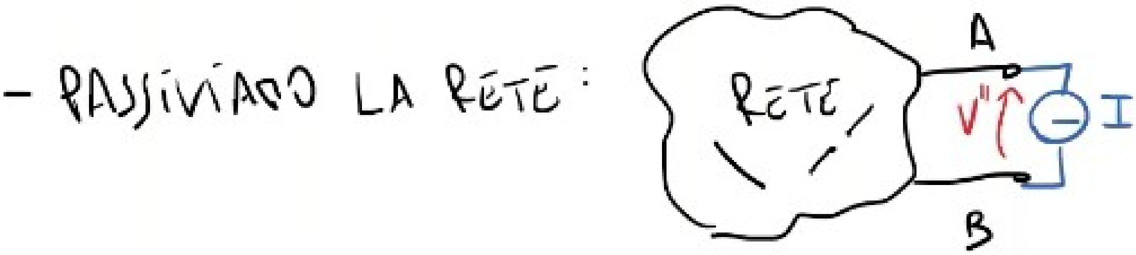
Abbiamo sempre la rete lineare.



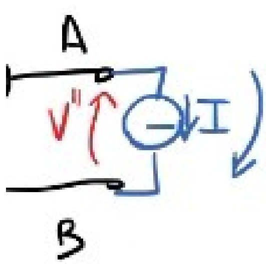
Applichiamo la sovrapposizione degli effetti. Passiviamo il generatore di corrente, cioè poniamo la corrente a 0, quindi abbiamo un circuito aperto.



Ora passiviamo la rete.



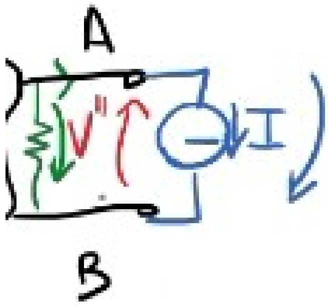
A cosa sarà uguale V''?



Per la convenzione del generatore, il verso di V'' sarà opposto.

$$V'' = -R_{eq}\, I$$

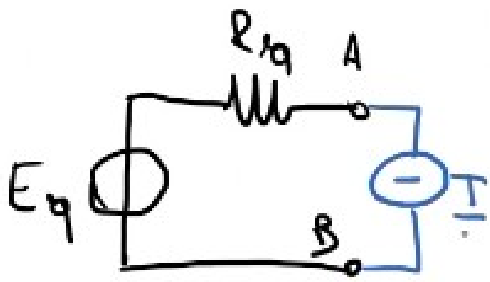
Possiamo anche vederla con la convenzione dell'utilizzatore sul carico.



Quindi grazie alla sovrapposizione degli effetti sappiamo:

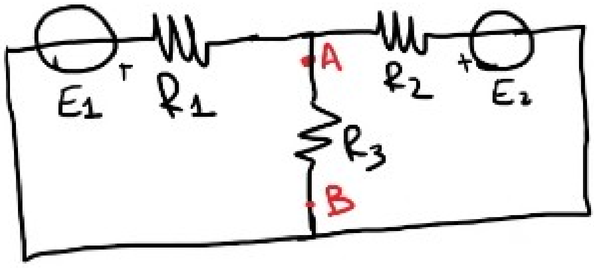
$$V = V' + V'' = E_{eq} - R_{eq}\, I$$

Lo possiamo scrivere come:



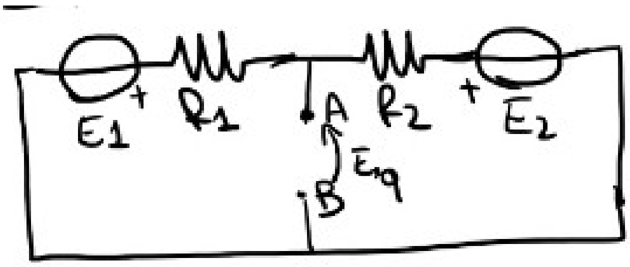
Abbiamo sostituito la rete con un generatore di tensione in serie a una resistenza equivalente.

Esempio

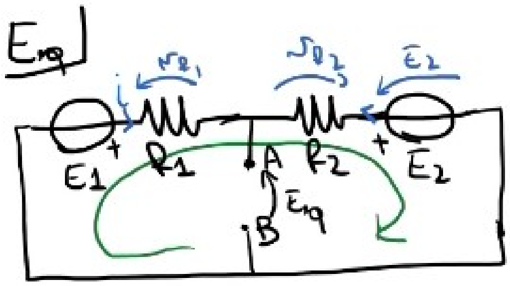


Vogliamo calcolare i3.

Applichiamo il teorema di Thevenin ai morsetti A e B. Cosa vuol dire?



Come prima cosa scriviamo la LKT alla maglia in verde.



$$\text{LKT}: \quad E_1 - v_{R_1} + v_{R_2} - E_2 = 0 \rightarrow E_1 - R_1 i - R_2 i - E_2 = 0$$

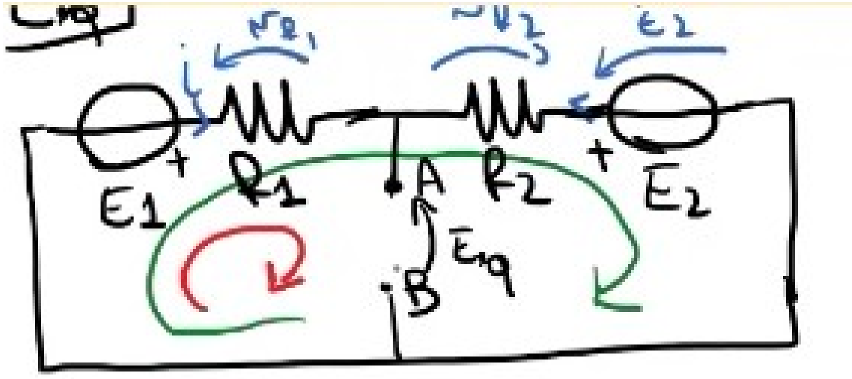
Da qui, possiamo ricavarci i.

$$E_1 - E_2 = R_1 i + R_2 i$$

Quindi, mi posso ricavare:

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) i \rightarrow i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

Facciamo la LKT alla maglia rossa, ci serve ottenere un’equazione con Eeq (presente tra A e B).



$$\text{LKT: } E_1 - R_1 i - E_{eq} = \emptyset$$

Una maglia non deve essere chiusa? Sì, stiamo usando questa definizione di maglia perché abbiamo disconnesso il carico. Possiamo vederla come se si chiedesse la differenza di potenziale tra A e B.

Quindi:

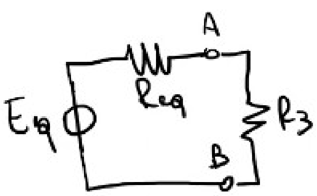
$$\text{LKT: } E_1 - R_1 i - E_{eq} = \emptyset \rightarrow \boxed{E_{eq} = E_1 - R_1 \cdot \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}$$

Questa è la tensione equivalente a circuito aperto.

Calcoliamo la R equivalente andando a passivare tutti i generatori.

$$= \quad R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Abbiamo trovato la tensione equivalente e la resistenza equivalente. Aggiungiamo il resistore R3.

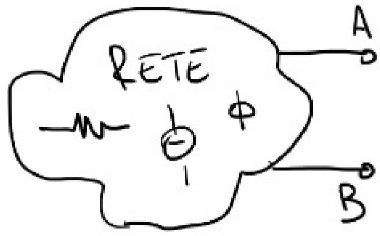


Abbiamo sostituito parte del circuito applicando Thevenin.

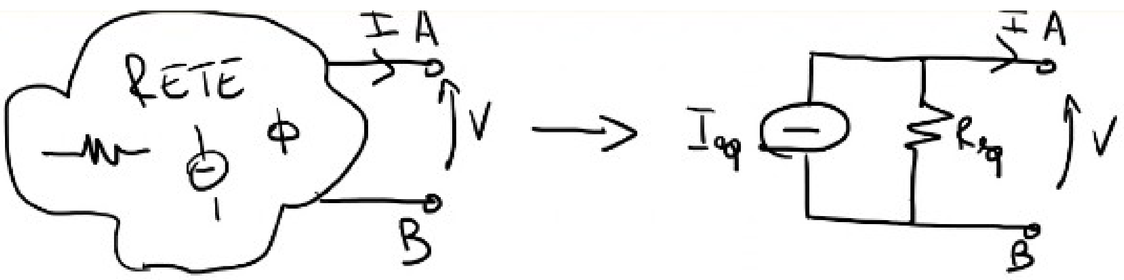
$$i_3 = \frac{E_{eq}}{R_3 + R_{eq}}$$

Teorema di Norton

Abbiamo una rete.



Questa rete può essere semplificata con un generatore di corrente in parallelo a una resistenza equivalente. Abbiamo le stesse ipotesi del teorema di Thevenin.



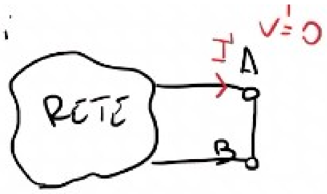
I_{eq} = é la corrente tra A e B quando vi é un corto-circuito

R_{eq} = é la resistenza vista ai morsetti A e B passivando i generatori indipendenti

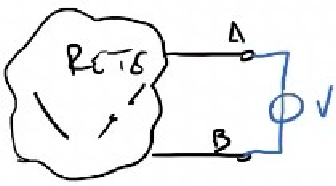
Vediamo la dimostrazione con la sovrapposizione degli effetti.

SOVRAPP. DEGLI EFFETTI:

– PASSIVIAMO V:

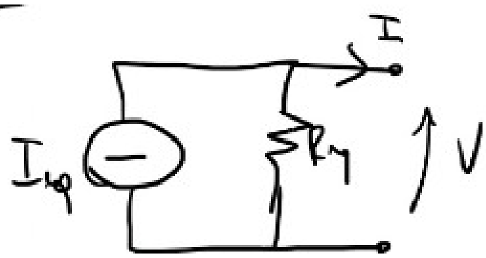


– PASSIVARE LA RETE:



$$I'' = -\frac{V}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow I = I_{eq} - \frac{V}{R_{eq}} \rightarrow$$



Abbiamo finito la dimostrazione.

Che rapporto c'è tra tensione di Thevenin, resistenze equivalenti, corrente di Norton?

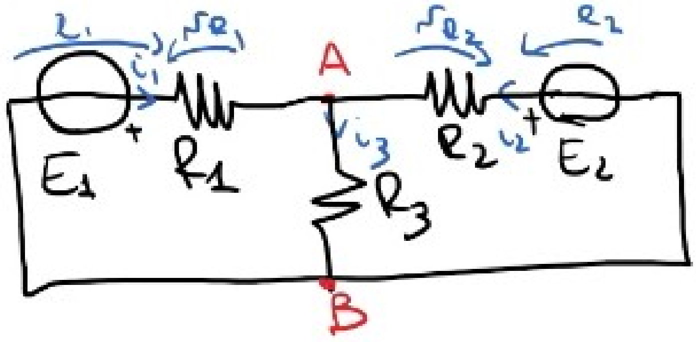
$$E_{eq} = R_{eq_N} I_{eq}$$

$$R_{eq_T} = R_{eq_N}$$

Hanno la stessa definizione le resistenze equivalenti. È facile dimostrarlo partendo da Norton e applicando il procedimento per arrivare a Thevenin.

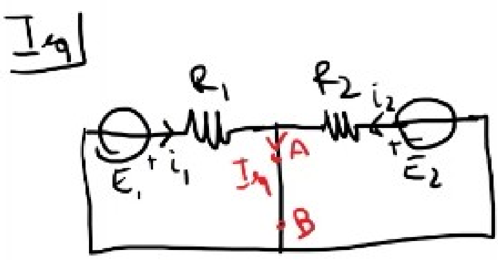
Esempio

Prendiamo il circuito di prima.



Vogliamo i3 applicando il teorema di Norton.

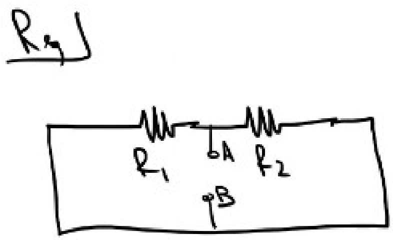
Dobbiamo cortocircuitare i morsetti A e B.



$$I_{eq} = i_1 + i_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

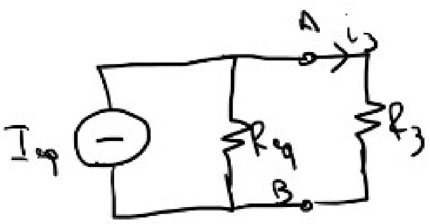
Questa è la corrente equivalente di Norton.

Andiamo a passivare i generatori.



$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

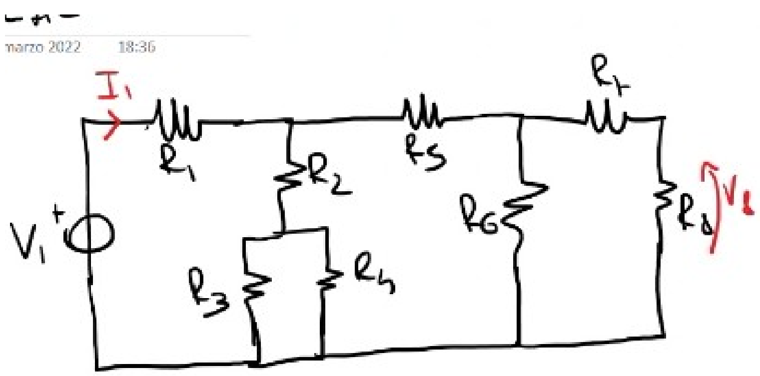
Abbiamo calcolato la corrente equivalente e la resistenza equivalente. A questo punto possiamo sostituire questa parte di circuito con il circuito di Norton.



$$i_3 = I_{eq} \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_3} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right) \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_3}$$

Svolgendo i calcoli, avremo lo stesso risultato ottenuto col teorema di Thevenin e ovviamente con la sovrapposizione degli effetti e con il metodo di Tableau.

Esercizio



$V_1 = 15\,V$

$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 25\,\Omega$

$R_3 = 50\,\Omega$

$R_4 = 20\,\Omega$

$R_5 = 24\,\Omega$

$R_6 = 20\,\Omega$

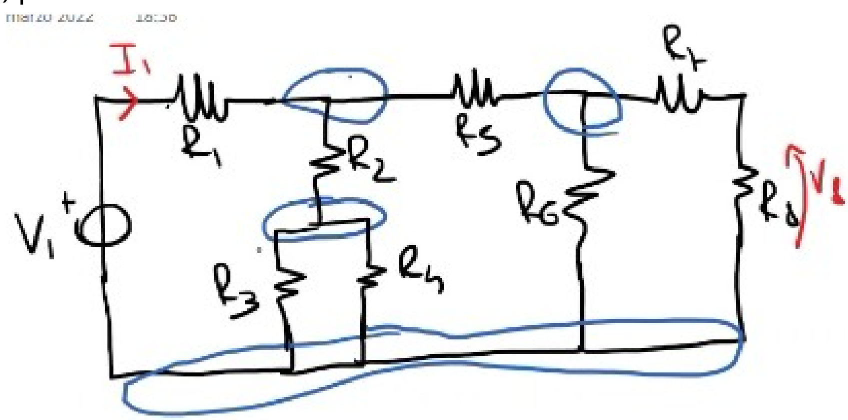
$R_7 = 50\,\Omega$

$R_8 = 30\,\Omega$

$I_1 = ?$

$V_8 = ?$

In questo caso, possiamo usare il metodo di Tableau. Abbiamo 4 nodi.



Abbiamo 7 lati, quindi 14 incognite.

Ma non risolviamolo con il metodo di Tableau, semplifichiamo il circuito. Non si può sempre, ma in questo caso sì. Con un solo generatore, come in questo caso, si semplifica di parecchio.

SEMPLIFICAZIONE

$$R'_{eq} = R_7 + R_8 = 80\,\Omega$$

$$R''_{eq} = R_6 // R'_{eq} = 16\,\Omega$$

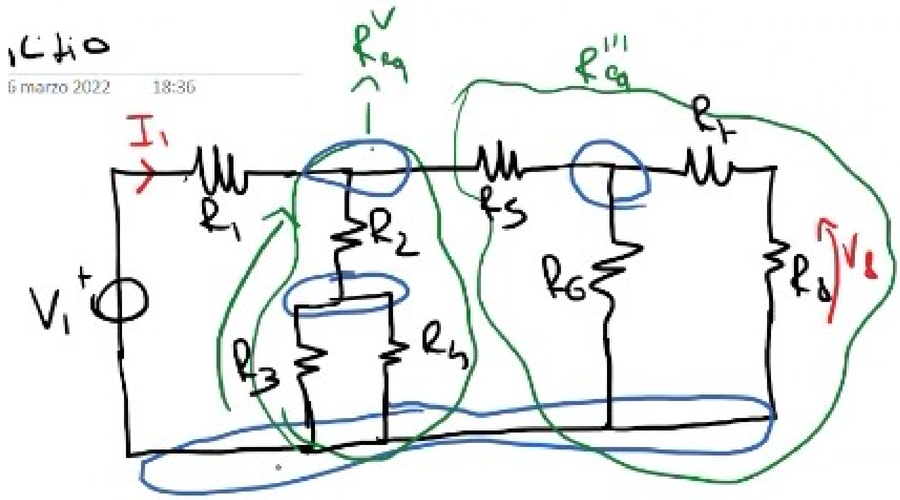
$$R'''_{eq} = R_5 + R''_{eq} = 40\,\Omega$$

$$R^{IV}_{eq} = R_3 // R_4 \simeq 14{,}3\,\Omega$$

$$R^{VI}_{eq} = R'''_{eq} // R^{V}_{eq} = 19{,}8\,\Omega$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_{eq}^{VI}} = \frac{15}{29,8} \simeq 0,5\ A$$

Le resistenze equivalenti sono state calcolate tenendo conto del fatto che fossero in serie o parallelo.



Per V8, bisogna trovare il partitore di tensione e ricavarlo.