



# General Physics

## ▼ 0.0 - Informazioni generali

### Esame

- Scritto obbligatorio
  - Punteggio: 27/30 esimi.
  - Struttura: 4 esercizi e 2 domande di teoria a risposta aperta.  
Durante la prova è consentito utilizzare solamente penna, strumenti da disegno e calcolatrice.
  - Durata: 2 ore.
- Orale facoltativo
  - Punteggio: aumenta/diminuisce il voto dello scritto di massimo 5 punti.

È possibile sostenere l'orale solo durante la sessione in cui è stato svolto lo scritto.

Esercizi = teoria.

### Ore di studio

Totale: **225**

Lezione: **100**

Casa: **125** (3 al giorno - 3 giorni a settimana)

## ▼ 1.0 - Introduzione alla fisica generale

### Cos'è la fisica

La **fisica** è la disciplina che si propone di dare una spiegazione a tutti i fenomeni naturali.

Nessun modello teorico risulta valido **universalmente**, ogni teoria è infatti valida entro ben determinati limiti. Un esempio può essere l'utilizzo della teoria dei quanti per le piccole distanze e quella della relatività per elevate velocità.

### Grandezze fisiche

Una **grandezza fisica** è una proprietà o una caratteristica di un oggetto o di un fenomeno che può essere quantificata e dunque misurata.

Sono grandezze fisiche la lunghezza, la velocità, il tempo, la forza, la temperatura e la pressione, mentre non lo sono l'odore, l'intelligenza, il brutto e il bello.

### Grandezze principali e derivate

In fisica le grandezze fisiche vengono distinte in principali e derivate. Le **grandezze principali** sono grandezze definite in maniera indipendente che vengono utilizzate per come punto di partenza per descrivere altre grandezze, ovvero le **grandezze derivate**, le quali derivano dalle grandezze principali attraverso relazioni matematiche.

Un esempio di insieme di grandezze principali e derivate può essere quello composto dal tempo, la distanza e la velocità. Il tempo e la distanza sono infatti grandezze principali, mentre la velocità è una grandezza derivata per via del fatto che può essere espressa tramite la relazione:

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$$

In fisica esistono 7 grandezze principali, le restanti sono derivabili da queste:

- Lunghezza
- Tempo
- Massa
- Temperatura
- Intensità di corrente elettrica
- Intensità luminosa
- Quantità di sostanza

### Misura delle grandezze fisiche

Le grandezze fisiche sono definite in modo operativo tramite la loro misurazione.

La **misura** è il processo di determinazione di una grandezza fisica. Operativamente misurare significa una grandezza con uno standard, ovvero una misura campione di quel tipo di grandezza.

Ogni misura è identificata da due elementi:

- La parte **numerica**  $\{L\}$ .
- Lo **standard** usato o unità di misura  $[L]$ .

Ogni standard deve soddisfare i seguenti criteri:

- Essere **stabili** nel tempo.
- Essere **precisi**.
- Essere facilmente **riproducibili** in ogni parte dell'universo.

$$L = \{L\}[L]$$

Ogni formula fisica è una relazione tra grandezze fisiche, quindi in termini pratici è una **doppia relazione**, una sulla parte numerica e una sulle unità di misura:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

The diagram shows the formula  $\vec{F} = m\vec{a}$  with two arrows pointing from it to the right. The top arrow points to the numerical part  $\{\vec{F}\} = \{m\}\{\vec{a}\}$ . The bottom arrow points to the dimensional part  $[\vec{F}] = [m][\vec{a}] = [MLT^{-2}]$ .

Un insieme di unità di misura costituisce un **sistema**. Il **sistema metrico decimale** è uno tra i più utilizzati e comprende multipli e sottomultipli delle unità di misura tramite potenze di 10.

Multipli	prefisso	sottomultipli	prefisso
$10^1$	deca (da)	$10^{-1}$	deci (d)
$10^2$	etto (h)	$10^{-2}$	centi (c)
$10^3$	kilo (k)	$10^{-3}$	milli (m)
$10^6$	mega (M)	$10^{-6}$	micro ( $\mu$ )
$10^9$	giga (G)	$10^{-9}$	nano (n)

Multipli e sottomultipli del sistema metrico decimale.

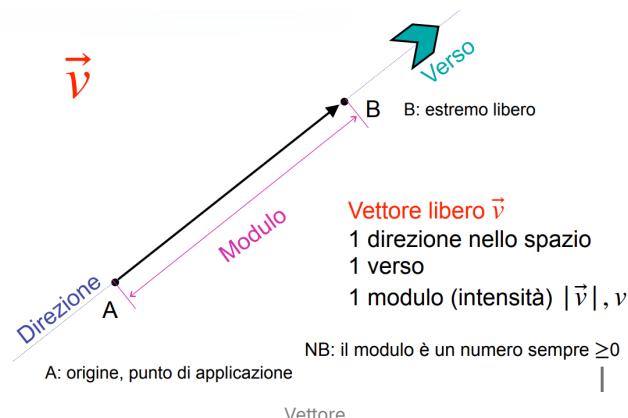
## ▼ 2.0 - Vettori

### ▼ 2.1 - Introduzione ai vettori

## Grandezze fisiche

Le grandezze fisiche possono essere suddivise nelle seguenti 3 diverse tipologie:

- Grandezze **scalari**, sono definite da un numero ed una unità di misura.
- Grandezze **vettoriali**, sono definite da 3 numeri e un'unità di misura, oppure da un numero, una unità di misura, una direzione e un verso.
- Grandezze **tensoriali**, sono definite da più di 3 numeri e un'unità di misura.



## Esempi

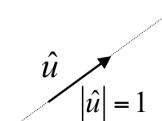
- Grandezze scalari: distanza, lunghezza, periodo, massa ecc.
- Grandezze vettoriali: spostamenti, forze, velocità, accelerazione, campi elettrici e magnetici, ecc.
- Grandezze tensoriali: momento d'inerzia, matrice di rotazione, ecc.

## Versori

Un **versore** è un vettore di modulo unitario:

$$\hat{u} : |\hat{u}| = 1$$

Un versore ha solitamente la funzione di individuare un **asse orientato** o una **direzione**.

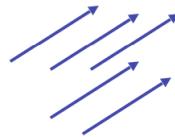


Versore.

## Vettori liberi vs vettori applicati

Esistono due tipologie di vettori:

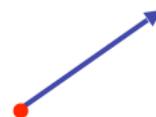
I **vettori liberi** non individuano cosa o chi si sposta, dunque sono definiti solamente da modulo, direzione e verso.



Vettore libero.

**Osservazione:** tutti i passeggeri di un treno in moto hanno lo stesso vettore spostamento.

I vettori applicati specificano un particolare spostamento, dunque oltre alle 3 componenti di un vettore libero viene specificato anche un punto di applicazione.



Vettore applicato.

## Uguaglianza tra vettori

Due o più vettori liberi sono **uguali** se hanno stessi modulo, direzione e verso.

Due o più vettori applicati sono **uguali** se hanno stessi modulo, direzione, verso e punto di applicazione.

### ▼ 2.2 - Algebra dei vettori

I vettori liberi costituiscono un'**algebra** in cui sono definite le seguenti operazioni:

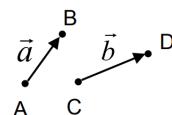
- **Somma** tra due vettori:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .
- **Moltiplicazione** tra un vettore ed uno scalare:  $\lambda \vec{a} = \vec{c}$   $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- **Prodotto scalare**:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda$   $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- **Prodotto vettoriale**:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$ .

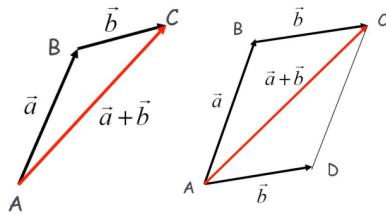
## Somma tra due vettori

**Osservazione:**  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$  (disuguaglianza triangolare).

### Regola del parallelogramma

È possibile visualizzare in maniera grafica la somma tra due vettori utilizzando la **regola del parallelogramma**, la quale afferma che dati due vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  il vettore somma è dato dalla diagonale  $\overrightarrow{AC}$  del parallelogramma costruito con i vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ .



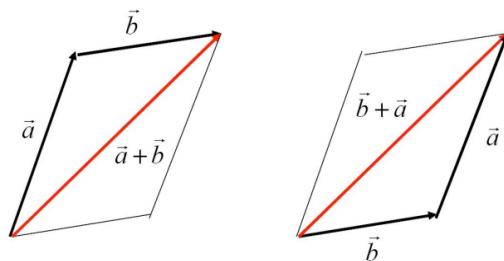


Regola del parallelogramma.

### Proprietà commutativa della somma

La somma tra vettori gode della **proprietà commutativa**:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

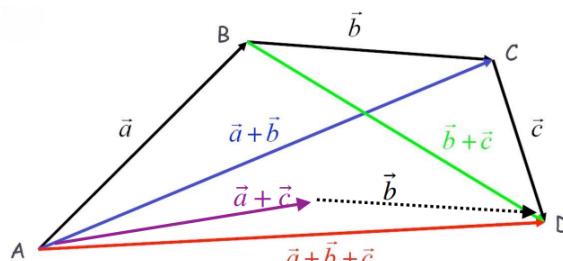


Proprietà commutativa della somma.

### Proprietà associativa della somma

La somma tra vettori gode della **proprietà associativa**:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$$



Proprietà associativa della somma.

### Vettore opposto

Il vettore opposto di un vettore è un vettore con lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto.

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \\ -\vec{a} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \end{array}$$

Vettore opposto.

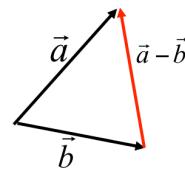
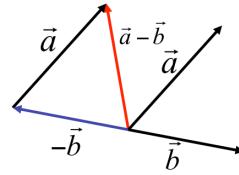
**Osservazione:** sommando ad un vettore il suo opposto si ottiene il vettore nullo:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

### Differenza tra vettori

L'operazione di **differenza** tra due vettori è definita nel seguente modo:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Osservazione: graficamente il vettore differenza parte dall'estremo libero del vettore  $\vec{b}$  e termina all'estremo libero del vettore  $\vec{a}$ .

### Moltiplicazione per uno scalare

Si può definire la moltiplicazione tra uno scalare  $\lambda$  ed un vettore  $\vec{a}$  come il vettore con modulo pari a  $|\lambda||\vec{a}|$ , direzione uguale a quella di  $\vec{a}$  e verso concorde con  $\vec{a}$  se  $\lambda > 0$ , verso opposto se  $\lambda < 0$ .

#### Proprietà della moltiplicazione per uno scalare

La moltiplicazione per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

- Commutativa:  $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$ .
- Associativa:  $(\mu\lambda)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$ .
- Distributiva sulla somma:  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$  e  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .

#### Osservazioni

- $\lambda = 0 \implies \lambda\vec{a} = \vec{0}$
- $\lambda = -1 \implies \lambda\vec{a} = -\vec{a}$
- $\lambda = 1/|\vec{a}|, |\lambda\vec{a}| = 1 \implies \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \hat{a}$  è un versore.

### Prodotto scalare

Il **prodotto scalare** associa a due vettori il seguente scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \theta$$

Dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i due vettori.

#### Proprietà del prodotto scalare

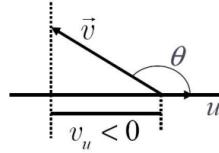
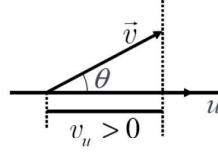
Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

- Commutativa:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .
- Distributiva sulla somma:  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

### LA componente

Dato un vettore  $\vec{v}$  e un versore  $\hat{u}$ , **LA componente**  $v_u$  è lo scalare che misura la proiezione del vettore  $\vec{v}$  lungo la direzione del versore  $\hat{u}$ , ovvero:

$$v_u = \vec{v} \cdot \hat{u} = |\vec{v}| |\hat{u}| \cos \theta = |\vec{v}| \cos \theta$$



LA componente.

### IL componente

Dato un vettore  $\vec{v}$  e un versore  $\hat{u}$ , **IL componente**  $\vec{v}_u$  è il vettore orientato lungo la direzione del versore  $\hat{u}$ , avente per modulo la componente  $v_u$ , ovvero:

$$\vec{v}_u = v_u \cdot \hat{u} = (\vec{v} \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u} = |\vec{v}| \cos \theta \cdot \hat{u}$$

### Definizione di modulo di un vettore

Il modulo di un vettore è definito nel seguente modo:

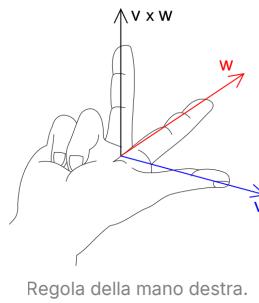
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

### Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale associa a due vettori un terzo vettore  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  con le seguenti caratteristiche:

- Modulo  $|\vec{c}| = ab|\sin \theta|$ .
- Direzione perpendicolare al piano in cui giacciono i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .
- Verso che rispetta la regola della mano destra.

### Regola della mano destra



Regola della mano destra.

### Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

- Anticommutativa:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ .
- Distributiva sulla somma:  $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$ .

### ▼ 2.3 - Vettori nello spazio

#### Rappresentazione cartesiana

##### Spazio unidimensionale

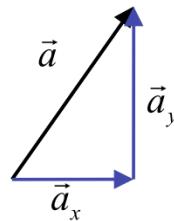
In uno spazio unidimensionale un vettore può essere espresso come uno scalare (la componente) moltiplicato il versore dell'asse.

$$\vec{a} = a_u \hat{u}$$

##### Spazio bidimensionale

In uno spazio bidimensionale, scelti due assi ortogonali  $x (\hat{i})$  e  $y (\hat{j})$ , un vettore può essere espresso come la somma delle sue due componenti in  $x$  e in  $y$ .

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = (a_x, a_y)$$



Vettore in uno spazio bidimensionale.

##### Spazio tridimensionale

In uno spazio tridimensionale, scelti tre assi ortogonali  $x (\hat{i})$ ,  $y (\hat{j})$  e  $z (\hat{k})$ , un vettore può essere espresso come la somma delle sue tre componenti in  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

#### Operazioni nella rappresentazione cartesiana

##### Somma tra vettori

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) + (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k} \end{aligned}$$

##### Moltiplicazione tra vettore e scalare

$$\begin{aligned} \lambda \vec{a} &= \lambda(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \\ &= (\lambda a_x) \hat{i} + (\lambda a_y) \hat{j} + (\lambda a_z) \hat{k} \end{aligned}$$

### Prodotto scalare

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= a_x b_x \hat{i} \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \hat{k} + a_y b_x \hat{j} \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \hat{j} + a_y b_z \hat{j} \hat{k} + a_z b_x \hat{k} \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \hat{k} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}$$

### Prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \wedge (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= a_x b_x \hat{i} \wedge \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \wedge \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \wedge \hat{k} + a_y b_x \hat{j} \wedge \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \wedge \hat{j} + a_y b_z \hat{j} \wedge \hat{k} + a_z b_x \hat{k} \wedge \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \wedge \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \wedge \hat{k} \\ &= a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{j} - a_y b_x \hat{k} + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} - a_z b_y \hat{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x + a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \\ \vec{a} \wedge \vec{b} &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x + a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}\end{aligned}$$

### ▼ 2.4 - Regole di derivazione

#### Funzioni

- $\frac{d}{dt}(f(t) \pm g(t)) = \frac{df}{dt} \pm \frac{dg}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$

#### Vettori

- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\lambda \vec{a}) = \frac{d\lambda}{dt} \vec{a} + \lambda \frac{d\vec{a}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$

Queste regole sono dimostrabili sostituendo ad ogni vettore la sua rappresentazione cartesiana.

### ▼ 3.0 - Cinematica

#### ▼ 3.1 - Rappresentazione cartesiana

##### Moto

**Il moto** è un fenomeno relativo di un punto rispetto ad un sistema di riferimento.

Il sistema di riferimento cartesiano consente di descrivere un moto tramite equazioni parametriche:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{x}(t) + \vec{y}(t) + \vec{z}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \\ \left. \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right\} &\text{equazioni parametriche}\end{aligned}$$

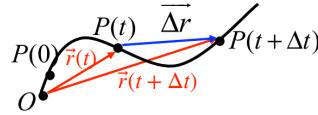
##### Traiettoria

La **traiettoria** è il luogo dei punti dello spazio per cui passa un corpo.

##### Vettore spostamento

Il **vettore spostamento** di un moto descritto da un vettore  $\vec{r}$  corrisponde a:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$



Vettore spostamento.

### Velocità vettoriale media

La **velocità vettoriale media** di un corpo il quale vettore spostamento è dato dal vettore  $\Delta \vec{r}$  corrisponde a:

$$\vec{v}_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

### Velocità vettoriale istantanea

La **velocità vettoriale istantanea** di un corpo la quale velocità vettoriale media è  $\vec{v}_m$  corrisponde a:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

### Velocità vettoriale istantanea nella rappresentazione cartesiana

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$$

▼ Dimostrazione

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d \vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \hat{k} \\ &= \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} + \dot{z}(t) \hat{k} \\ &= v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k} \end{aligned}$$

### Accelerazione vettoriale media

L'**accelerazione vettoriale media** di un corpo il quale vettore spostamento è dato dal vettore  $\Delta \vec{v}$  corrisponde a:

$$\vec{a}_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

### Accelerazione vettoriale istantanea

L'**accelerazione vettoriale istantanea** di un corpo la quale accelerazione vettoriale media è  $\vec{a}_m$  corrisponde a:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

### Accelerazione in funzione della velocità e della posizione

Si può anche esprimere l'accelerazione vettoriale in funzione della velocità vettoriale e dal vettore posizione nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\end{aligned}$$

### Accelerazione vettoriale istantanea nella rappresentazione cartesiana

$$\vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = \dot{v}_x \hat{i} + \dot{v}_y \hat{j} + \dot{v}_z \hat{k} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

## Problemi di cinematica

### Problema diretto

Il problema diretto della cinematica consiste nel, dato il vettore posizione, dover trovare il vettore velocità e quello accelerazione.

È possibile fare ciò sfruttando le formule di velocità e accelerazione rispetto al vettore posizione:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

### Problema inverso

Il problema inverso della cinematica consiste nel, dato il vettore velocità o accelerazione, dover trovare il vettore posizione o quello velocità.

È possibile fare ciò calcolando le equazioni inverse delle equazioni differenziali utilizzando l'integrazione.

Otteniamo dunque le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t) dt \\ z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t) dt \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t) dt \\ v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t) dt \end{cases}$$

Che corrispondono alle soluzioni univoche:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt\end{aligned}$$

### ▼ Dimostrazione

Effettuiamo la dimostrazione per il caso del calcolo del vettore posizione a partire da quello velocità. Quella del calcolo del vettore velocità a partire da quello accelerazione è analoga.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz}{dt} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dx = v_x(t)dt \\ dy = v_y(t)dt \\ dz = v_z(t)dt \end{array} \right. \\
 \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t)dt \\ \int_{y(t_0)}^{y(t)} dy = \int_{t_0}^t v_y(t)dt \\ \int_{z(t_0)}^{z(t)} dz = \int_{t_0}^t v_z(t)dt \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t)dt \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t v_y(t)dt \\ z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t v_z(t)dt \end{array} \right. \\
 & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t)dt \\ y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t)dt \\ z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t)dt \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

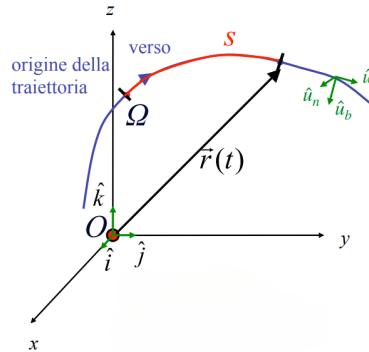
### ▼ 3.2 - Rappresentazione intrinseca

#### Rappresentazione intrinseca del moto

La **rappresentazione intrinseca del moto** consente di descrivere il moto di un oggetto utilizzando come ascissa la traiettoria di quest'ultimo. Per fare ciò occorre dunque definire una nuova terna di versori ortogonali:

- $\hat{u}_t$ : direzione tangente alla traiettoria, stesso verso della velocità.
- $\hat{u}_n$ : direzione normale alla traiettoria, verso interno alla curvatura.
- $\hat{u}_b$ : direzione ortogonale a  $\hat{u}_t$  e  $\hat{u}_n$ , verso secondo la regola della mano destra.

Nota: i 3 versori  $\hat{u}_t$ ,  $\hat{u}_n$  e  $\hat{u}_b$  variano la loro direzione durante il moto.



Tramite l'utilizzo della rappresentazione intrinseca del moto è possibile distinguere tra il vettore traiettoria  $\vec{r}(t)$  che descrive la posizione dell'oggetto al tempo  $t$  rispetto al sistema di riferimento cartesiano e la legge oraria  $s(t)$  che descrive la posizione dell'oggetto al tempo  $t$  rispetto alla nuova terna di versori ortogonali  $\hat{u}_t$ ,  $\hat{u}_n$  e  $\hat{u}_b$ .

#### Velocità scalare media

La **velocità scalare media** di un corpo che si muove seguendo una legge oraria  $s(t)$  corrisponde a:

$$v_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta s(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

#### Velocità scalare istantanea

La **velocità scalare istantanea** di un corpo che si muove con legge oraria  $s(t)$  corrisponde a:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

### Velocità vettoriale istantanea intrinseca

La **velocità vettoriale istantanea intrinseca** corrisponde a:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{u}_t$$

#### ▼ Dimostrazione

Notiamo che nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  l'ascissa curvilinea  $\Delta s$  tende a sovrapporsi al modulo del vettore  $\Delta \vec{r}$ :

$$\Delta s \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} |\Delta \vec{r}| \implies \Delta \vec{r} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} (\Delta s)\hat{u}_t$$

Possiamo a questo punto calcolare la velocità vettoriale istantanea intrinseca nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{u}_t = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t = \dot{s}\hat{u}_t \\ &\implies \vec{v} = \dot{s}\hat{u}_t \end{aligned}$$

Q.E.D.

### Osservazioni

- Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria.
- Il modulo del vettore velocità è uguale al valore assoluto della velocità scalare.

#### ▼ Dimostrazione

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(\dot{s}\hat{u}_t) \cdot (\dot{s}\hat{u}_t)} = \sqrt{\dot{s}^2(\hat{u}_t \cdot \hat{u}_t)} = \sqrt{\dot{s}^2} = |\dot{s}|$$

### Accelerazione scalare media

L'**accelerazione scalare media** di un corpo che si muove con una velocità scalare istantanea  $v(t)$  corrisponde a:

$$a_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta v(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

### Accelerazione scalare istantanea

L'**accelerazione scalare istantanea** di un corpo che si muove con velocità scalare istantanea  $v(t)$  corrisponde a:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

### Accelerazione in funzione della velocità e della legge oraria

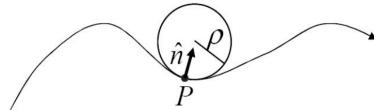
Si può anche esprimere l'accelerazione scalare in funzione della velocità scalare e della legge oraria nel seguente modo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

### Accelerazione vettoriale istantanea intrinseca

Data una generica traiettoria, in ogni punto  $P$  ci sarà una circonferenza di raggio  $\rho$  che approssima la curva in un interno di  $P$  e che forma un cerchio detto cerchio osculatore.



L'accelerazione vettoriale istantanea intrinseca corrisponde a:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$$

Notiamo che l'accelerazione vettoriale istantanea può essere espressa tramite la somma di due vettori, uno che forma la componente tangenziale  $\vec{a}_t = a_t\hat{u}_t = \ddot{s}\hat{u}_t$  e l'altro che forma la componente normale  $\vec{a}_n = a_n\hat{u}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$ .

Possiamo dunque esprimere l'accelerazione vettoriale istantanea nel seguente modo:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Notiamo dunque che il vettore accelerazione giace sul piano osculatore, non ha componente binormale.

**Dimostrazione**

#### ▼ 3.3 - Classificazione dei moti

##### Classificazione dei moti

La rappresentazione intrinseca del moto descritta in precedenza torna utile per classificare i moti.

- **Moti in 1-DIM**

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \cancel{\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n}$$

I moti in 1 dimensione sono vincolati ad una retta, dunque  $\rho \rightarrow \infty$  e l'accelerazione ha solo componente tangenziale.

- **Moto rettilineo uniforme**

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \cancel{\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n}$$

I moti rettilinei uniformi hanno velocità costante, dunque accelerazione nulla.

- **Moto rettilineo uniformemente accelerato**

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \cancel{\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n}$$

- **Moto vario**

- **Moto oscillatore armonico**

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \cancel{\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n}$$

Nel moto di un oscillatore armonico l'accelerazione ha solo componente tangenziale e la posizione è funzione armonica  $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .

- **Moti in 2-DIM**

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$$

La legge oraria viene suddivisa in due dimensioni.

- **Moto rettilineo nel piano**

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \cancel{\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n}$$

- **Moto parabolico (es. moto del proiettile)**

Scomposizione della legge oraria in un moto rettilineo uniforme e uno uniformemente accelerato.

- **Moto circolare**

Il raggio di curvatura  $\rho$  è costante. La velocità e l'accelerazione sono costanti in modulo.

- **Moto curvo vario**

Elevata varietà di casi, studieremo quelli in cui la traiettoria è facilmente esprimibile in forma parametrica.

- **Moti in 3-DIM**

Elevata varietà di casi, studieremo quelli in cui la traiettoria è facilmente esprimibile in forma parametrica.

▼ 3.4 - Moti in 1-DIM

### Moto rettilineo uniforme

Il **moto rettilineo uniforme** è un moto che presenta le seguenti caratteristiche:

- $\vec{a} = 0$
- $\hat{u}_t$  costante
- $\rho \rightarrow \infty$

In base a queste ipotesi abbiamo dunque che:

- $\vec{v} = v\hat{u}_t$
- $|\vec{v}| \equiv v$  costante
- $s(t) = s_0 + vt$
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$

### Moto rettilineo uniformemente accelerato

Il **moto rettilineo uniforme** è un moto che presenta le seguenti caratteristiche:

- $\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t$  costante
- $\hat{u}_t$  costante.
- $\rho \rightarrow \infty$

In base a queste ipotesi abbiamo dunque che:

- $v(t) = v_0 + at$

▼ Dimostrazione

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a \, dt = v_0 + a \int_{t_0}^t dt = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\underset{t_0=0}{=} v_0 + at$$

- $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

▼ Dimostrazione

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v \, dt = s_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + at) \, dt$$

$$= s_0 + \int_{t_0}^t v_0 \, dt + \int_{t_0}^t at \, dt = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$$

$$\underset{t_0=0}{=} s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

### Caduta di un grave

Per caduta di un grave si intende un oggetto che cade da fermo da un'altezza  $h$ .

Le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = h\hat{j} \\ \vec{v}_0 = \vec{0} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & y_0 = h \\ v_{0x} = 0 & v_{0y} = 0 \end{cases}$$

Al tempo  $t$  abbiamo le seguenti condizioni:

- **Velocità**

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

- **Posizione**

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

È possibile infine ricavarsi il tempo di caduta e la velocità d'impatto:

$$y(t_c) = 0 \implies h - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0 \implies t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\vec{v}(t_c) = -gt_c \hat{j} \implies \vec{v}(t_c) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \hat{j} = -\sqrt{2gh} \hat{j}$$

### Distanza tra due punti in un moto rettilineo uniformemente accelerato

Consideriamo un punto materiale che si muove da un punto  $A$  a un punto  $B$  con accelerazione costante.

Per calcolare la distanza tra i due punti data la velocità iniziale  $v_A$  e l'accelerazione  $a$ , occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} s_B = s_A + v_A t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_B = v_A + a t \end{cases}$$

Ottenendo così il risultato:

$$(s_B - s_A) = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2a}$$

### Moto rettilineo vario

Il **moto rettilineo vario** è un moto rettilineo generale, dunque con le seguenti caratteristiche:

- $\hat{u}_t$  costante.
- $\rho \rightarrow \infty$

### ▼ 3.5 - Moti in 2-DIM

#### Moto rettilineo nel piano

Il **moto rettilineo nel piano** è un moto che presenta le seguenti caratteristiche:

- $\vec{a} = 0$
- $\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t \end{cases}$

Possiamo calcolare  $y$  in funzione di  $x$  per ricavare alcune informazioni sul moto:

$$x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \underbrace{\left( y_0 - \frac{v_{0y}x_0}{v_{0x}} \right)}_{\text{intercetta asse } y} + \underbrace{\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x}_{\text{pendenza}}$$

#### Moto parabolico

Per **moto parabolico** si intende il moto di un oggetto che viene lanciato da un certo punto del piano con una certa velocità.

Le **condizioni iniziali** sono le seguenti:

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$

Al tempo  $t$  abbiamo le seguenti condizioni:

- **Velocità**

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y(t) dt \end{cases} \xrightarrow{t_0=0} \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

- **Posizione**

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t) dt \end{cases} \xrightarrow{t_0=0} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Dal risultato di  $y(t)$  capiamo che la traiettoria del grave è una parabola.

È possibile inoltre ricavarsi le seguenti informazioni riguardanti il moto:

- **Coordinate del punto di massimo della parabola:**  $\begin{cases} x_{max} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \\ y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \end{cases}$
- **Gittata:**  $x_{gittata} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$
- **Max gittata:**  $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

- **Tempo di volo:**  $t_v = \frac{2v_{0y}}{g}$
- **Velocità di impatto:**  $\begin{cases} v_x(t_v) = v_{0x} \\ v_y(t_v) = -v_{0y} \end{cases}$

### Dimostrazione

- Coordinate del punto di massimo della parabola

$$\begin{aligned} v_{y_{max}} &= v_{0y} - gt = 0 \rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g} \\ \implies x_{max} &\stackrel{x_0=0}{=} \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \\ \implies y_{max} &\stackrel{y_0=0}{=} \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}v_{0y}^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} \end{aligned}$$

- Gittata

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) \stackrel{x_0=0}{=} v_{0x}t \\ y(t) \stackrel{y_0=0}{=} v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} t = \frac{x(t)}{v_{0x}} \\ y(t) \stackrel{y_0=0}{=} v_{0y}\frac{x(t)}{v_{0x}} - \frac{g}{2}(\frac{x(t)}{v_{0x}})^2 \end{cases} \\ \implies x(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{x(t)}{v_{0x}^2}) &= 0 \rightarrow x = 0 \vee \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{x(t)}{v_{0x}^2} = 0 \\ &\rightarrow x(t) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \end{aligned}$$

- Max gittata

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = x_{max} \quad if \quad \sin 2\alpha = 1 \\ \implies 2\alpha &= \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \end{aligned}$$

- Tempo di volo

$$\begin{aligned} x(t_v) &= x_{gittata} \\ \implies v_{0x}t_v &= \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \rightarrow t_v = \frac{v_{0y}}{g} \end{aligned}$$

- Velocità di impatto

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t_v) = v_{0x} \\ v_y(t_v) = v_{0y} - \cancel{gt} = -v_{0y} \end{cases}$$

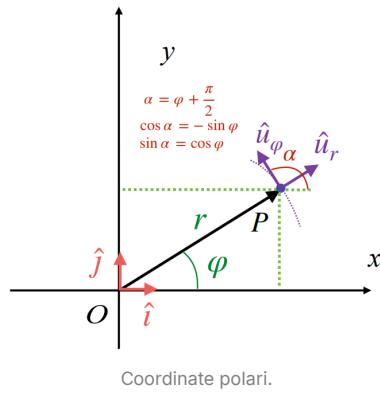
### Coordinate polari

Anzichè utilizzare le coordinate cartesiane per rappresentare il vettore posizione in un moto in 2 dimensioni è possibile utilizzare un'altra coppia di scalari, ovvero la distanza  $r$  dall'origine e l'angolo  $\varphi$  rispetto all'asse x, dette **coordinate polari**.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

I versori in coordinate polari diventano dunque i seguenti:

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{u}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{aligned}$$



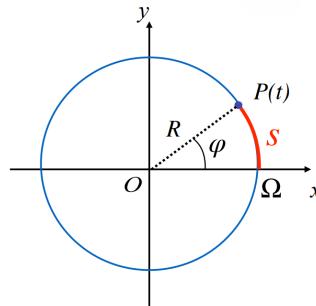
Coordinate polari.

Notiamo che i versori variano durante il moto.

### Moto circolare

Il **moto circolare** è un moto che presenta le seguenti caratteristiche:

- $s(t) = R\varphi(t)$
- $\begin{cases} x(\varphi) = R \cos \varphi \\ y(\varphi) = R \sin \varphi \end{cases} \rightarrow \vec{r} = R\hat{u}_r$



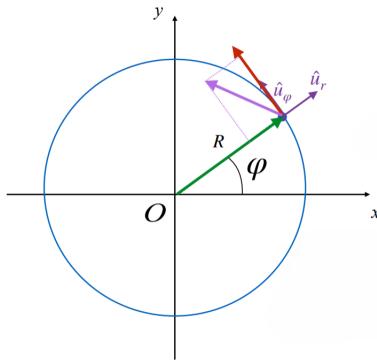
Moto circolare.

Da tali ipotesi ricaviamo inoltre che:

- **Velocità angolare:**  $\omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}$
- **Accelerazione angolare:**  $\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R}$
- **Vettore velocità:**  $\vec{v} = R\omega\hat{u}_\varphi = \dot{s}\hat{u}_\varphi$
- **Vettore accelerazione:**  $\vec{a} = R\alpha\hat{u}_\varphi + R\omega^2(-\hat{u}_r) = \ddot{s}\hat{u}_\varphi + \frac{\dot{s}^2}{R}(-\hat{u}_r)$

#### Dimostrazione

I vettori velocità e accelerazione angolare sono ortogonali al piano della circonferenza.



In rosso il vettore velocità e in viola il vettore accelerazione.

### Moto circolare uniforme

Il **moto circolare uniforme** è un tipo di moto circolare che presenta le seguenti caratteristiche:

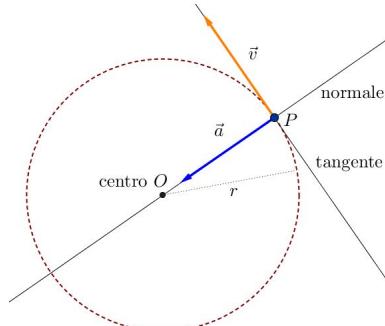
- $\omega = \text{costante}$
- $\alpha = \dot{\omega} = 0$

Il vettore velocità è costante in modulo ma cambia continuamente in direzione.

Da tali ipotesi ricaviamo inoltre che:

- $\vec{v} = R\omega\hat{u}_\varphi = \dot{s}\hat{u}_\varphi$
- $\vec{a} = -R\omega^2\hat{u}_r = -\frac{v^2}{R}\hat{u}_r$

Tale accelerazione viene detta **centripeta** in quanto diretta sempre verso il centro della circonferenza. È costante in modulo ma varia continuamente direzione.



Vettori velocità e accelerazione nel moto circolare uniforme.

### Moto periodico

Un fenomeno è detto **periodico** se, a partire da un istante qualsiasi \$t\$, le sue caratteristiche si ripresentano inalterate dopo un certo intervallo di tempo \$T\$, detto periodo.

$$\vec{r}(t + nT) = \vec{r}(t)$$

**Quantità caratteristiche** del moto periodico:

- Periodo: \$T\$.
- Frequenza: \$v = \frac{1}{T}\$.
- Pulsazione (velocità angolare): \$\omega = \frac{2\pi}{T}\$.

La **soluzione generale** del moto armonico è la seguente:

$$f(x) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

### Oscillatore armonico

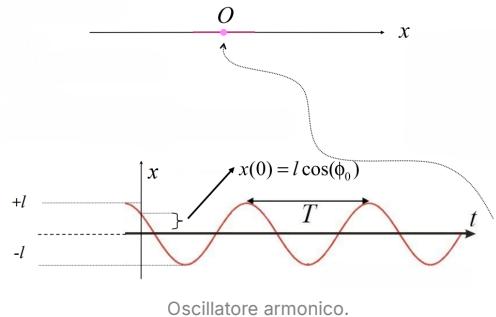
**L'oscillatore armonico** è un sistema in cui un oggetto si muove di moto armonico lungo una linea attorno a una posizione di equilibrio.

Il moto dell'oscillatore armonico è descritto dalla seguente legge oraria:

$$x(t) = l \cos(\omega t + \phi_0)$$

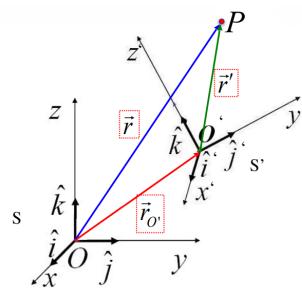
dove:

- $l$ : ampiezza.
- $\omega t + \phi_0$ : fase.
- $\phi_0$ : fase iniziale.
- $\omega$ : pulsazione.



### Moti relativi

Per **moto relativo** si intende un moto relativo ad un determinato sistema di riferimento.



Moto relativo di  $P$  rispetto al sistema di riferimento  $O$  e  $O'$ .

### Spostamento

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}$$

### Velocità

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$$

dove  $v_T = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

## Accelerazione

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{CO} + \vec{a}_T$$

dove:

- $\vec{a}_{CO} = 2m\vec{\omega}\vec{v}'$ : accelerazione di Coriolis.
- $\vec{a}_T = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}_{O'}$

### ▼ 4.0 - Statica

#### ▼ 4.1 - Forze

### Forze

La causa dei moti presenti in cinematica sono le **forze**, le quali rappresentano l'azione complessiva dell'ambiente sul corpo e descrivono la causa dei moti.

Esistono diverse tipologie di forze, le quali sono tali in quanto capaci di creare movimento o deformazioni. È importante però distinguere tra le forze **vere**, le quali sono create dall'esistenza di altri corpi, e quelle **fittizie**, legate a sistemi di riferimento non idonei.

### Misura di una forza: il dinamometro

Per definizione **due forze sono uguali** se sono in grado di produrre le stesse deformazioni sullo stesso corpo.

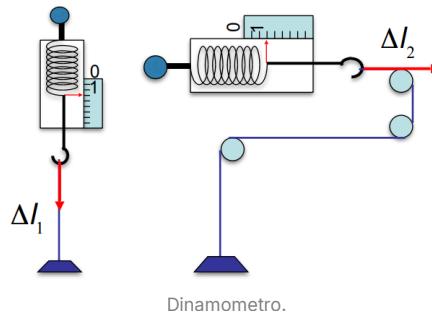
Secondo questa definizione, per comparare due forze è possibile utilizzare uno strumento come il **dynamometro**, il quale è formato da una molla ideale, elastica e deformabile, in grado di fornire la misurazione di una forza appesa ad essa dalla deformazione che questa genera.

È importante notare che tutti i dinamometri sono **lineari** per pesi sufficientemente piccoli, ovvero:

$$\begin{cases} P_1 \rightarrow \Delta l_1 \\ P_2 \rightarrow \Delta l_2 \end{cases} \implies P_1 + P_2 \rightarrow \Delta l_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

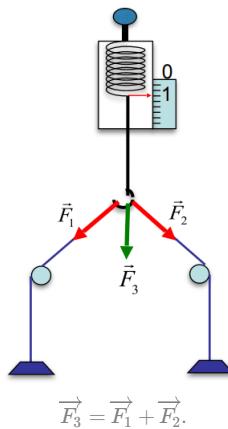
Inoltre un dinamometro misura la forza **staticamente**, in quanto la reazione elastica della molla dovuta alla deformazione equilibra la forza applicata.

Il corpo che genera la forza deve essere attaccato direttamente all'estremità della molla oppure tramite un sistema di **fili ideali**, i quali sono indeformabili e di massa trascurabile, e **carrucole**, le quali permettono di cambiare la direzione della forza senza modificarne l'intensità.



### Natura vettoriale delle forze

La forza è un **vettore**, in quanto di essa può essere calcolata l'intensità, la direzione e il verso, oltre al fatto che tramite l'utilizzo di un dinamometro si può verificare la regola del parallelogramma.



### Vettori liberi e vettori applicati

È importante fare una distinzione tra i concetti di vettori liberi e vettori applicati:

- I **vettori liberi** sono definiti da modulo, direzione e verso, e non presentano un punto di applicazione in quanto non individuano chi si sposta o si deforma.
- I **vettori applicati**, oltre che da modulo, direzione e verso, vengono definiti anche tramite un punto di applicazione al fine di indicare un particolare spostamento o deformazione.

Un vettore applicato viene dunque definito dalla coppia:  $(\vec{F}, P)$ , dove  $P$  è detto punto di applicazione.

### Momento di un vettore applicato

Dato un vettore applicato  $\vec{F}$  e un polo di riduzione  $\Omega$ , si definisce  $\vec{M}_\Omega$  come il **momento** del vettore  $\vec{F}$  rispetto al polo  $\Omega$ :

$$\vec{M}_\Omega = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

modulo:  $|\vec{M}_\Omega| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \theta$

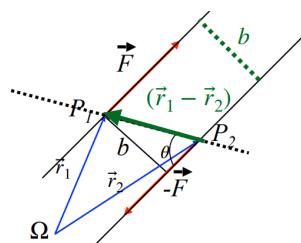
Il momento di più vettori  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  rispetto al polo  $\Omega$  corrisponde alla somma dei singoli momenti:

$$\vec{M}_\Omega = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n$$

Calcoliamo il **momento di una coppia di vettori**, ossia un insieme di due vettori applicati opposti tra loro con due diverse rette di azione. Questo è uguale a:

$$\vec{M}_\Omega = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + \vec{r}_2 \wedge (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}$$

modulo:  $|\vec{M}_\Omega| = |\vec{F}| |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sin \theta = Fb$  (b: braccio)



Notiamo che nel caso in cui tale braccio  $b$  sia nullo (la distanza tra le rette in cui giacciono le due forze è nulla), il momento angolare è **nullo**.

## ▼ 4.2 - Concetti di statica

### Definizione di statica

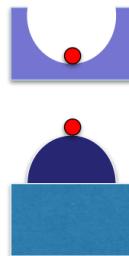
Per dare una definizione di statica occorre innanzitutto definire i termini quiete ed equilibrio.

Un punto è in **quiete** in un dato sistema di riferimento se questo ha velocità nulla in ogni istante di tempo.

Un sistema si dice in **equilibrio** se pur soggetto a forze esterne rimane in quiete.

Tale equilibrio può essere di due tipologie:

- **Equilibrio stabile:** piccole variazioni nel sistema portano a piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio.
- **Equilibrio instabile:** piccole variazioni nel sistema portano a grandi spostamenti dalla posizione di equilibrio.



Equilibrio stabile vs instabile.

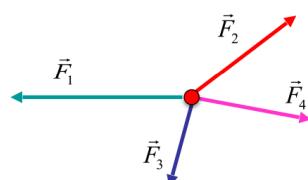
A questo punto possiamo definire la statica.

La **statica** rappresenta lo studio delle forze nei sistemi in stato di equilibrio.

### Statica del punto materiale

Condizione necessaria per l'**equilibrio di un punto materiale** è che si annulli la risultante  $\vec{R}$  di tutte le forze ad esso applicate:

$$\vec{R} = 0$$

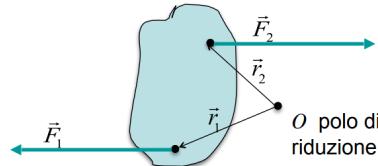


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

### Statica del corpo esteso

Condizione necessaria per l'**equilibrio di un corpo esteso** è che si annullino la risultante  $\vec{R}$  ed il momento  $\vec{M}_\Omega$  risultante di tutte le forze ad esso applicate:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_\Omega = 0 \end{cases}$$



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \implies \vec{M}_\Omega = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ \text{corpo non in equilibrio} \end{array} \right\}$$

## Vincoli

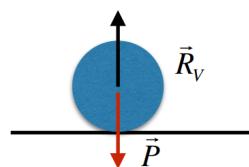
Un **vincolo** è un qualunque sistema fisico la cui azione consiste nel rendere inaccessibile ad altri corpi alcune configurazioni spaziali, ossia fornisce limitazioni al moto.

Esistono diverse tipologie di vincoli:

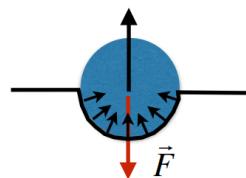
- Vincoli di **volume** (es. moto sopra il piano del tavolo, non sotto)
- Vincoli di **superficie** (es. moto sul piano del tavolo)
- Vincoli **lineari** (es. moto sulla retta x)

## Reazione vincolare

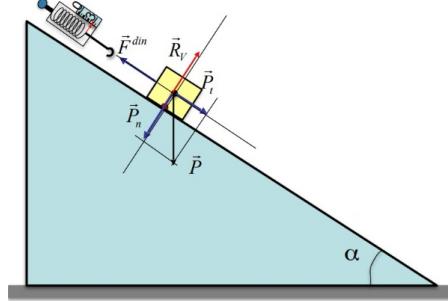
Ogni volta che un corpo si trova al di sopra di un appoggio che gli consente di non cadere, questo avviene poiché tale appoggio offre una reazione uguale e contraria alla forza peso, chiamata **reazione vincolare**.



Tecnicamente la reazione vincolare è data da alcune deformazioni dell'appoggio la quale somma delle forze è tale da sviluppare una forza uguale e contraria alla forza peso.



In un piano inclinato la reazione vincolare è uguale e contraria alla forza perpendicolare alla superficie del piano.



## ▼ 5.0 - Dinamica

### ▼ 5.1 - Primo principio

#### Primo principio della dinamica

Se in un dato sistema di riferimento la risultante delle forze applicate su un punto materiale è nulla allora tale punto si trova in uno stato di quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

Siccome il moto è relativo al sistema di riferimento inerziale, è stato riformulato il primo principio della dinamica nel seguente modo:

Esiste almeno un sistema di riferimento, detto inerziale, rispetto al quale un qualunque punto materiale che sia sufficientemente lontano da tutti gli altri corpi, rimane in quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

#### Trasformazioni di Galileo

Consideriamo due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ .  $S'$  si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a  $S$  con velocità  $\vec{v}'_0$ . Per calcolare posizione e velocità rispetto a  $S$  di un punto di cui sappiamo posizione e velocità rispetto a  $S'$  è possibile utilizzare le seguenti trasformazioni, chiamate trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + v_{0x}t \\ y(t) = y'(t) + v_{0y}t \\ z(t) = z'(t) + v_{0z}t \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{x'}(t) + v_{0x} \\ v_y(t) = v_{y'}(t) + v_{0y} \\ v_z(t) = v_{z'}(t) + v_{0z} \end{cases} \quad \vec{d} = \vec{d}'$$

#### Principio di relatività Galileiano

Tutte le leggi della fisica si scrivono nello stesso modo in ogni sistema di riferimento inerziale.

Non esiste un sistema di riferimento inerziale privilegiato.

### ▼ 5.2 - Secondo principio

#### Secondo principio della dinamica

Un qualunque punto materiale che sia sottoposto ad una o più forze ha un'accelerazione  $\vec{a}$  direttamente proporzionale alla risultante di tali forze  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

#### Forza peso

La forza peso è una forza che causa un'accelerazione verso il basso di tutti i corpi che posseggono una massa. Tale accelerazione prende il nome di  $\vec{g}$  e sulla terra vale approssimativamente  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

La forza peso di un corpo con massa  $m$  corrisponde dunque a:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

### Forza elastica

Per la **legge di Hooke** una molla con costante elastica  $k$  allungata di un lunghezza  $x$  genera una forza equivalente a:

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

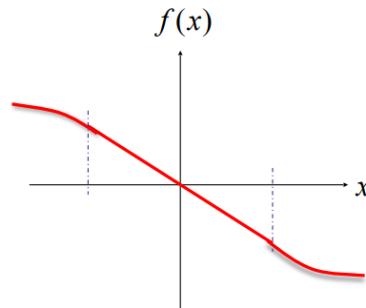
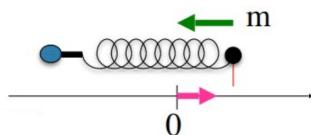


Grafico della forza elastica al variare di  $x$ .

### Oscillatore armonico monodimensionale

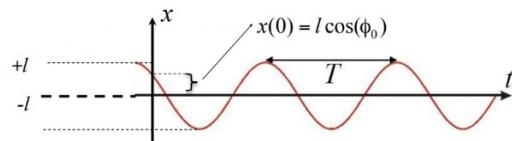
Se un corpo con massa  $m$  viene collegato all'estremità di una molla e questa viene tirata e lasciata in assenza di attrito, si nota un oscillamento continuo tra due posizioni  $+l$  e  $-l$ , creando così un oscillatore armonico monodimensionale.



La legge oraria di un oscillatore armonico è la seguente:

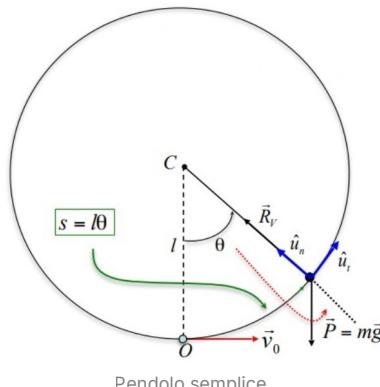
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

dove  $\phi$  rappresenta la fase iniziale dell'oscillatore in radianti e  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$



### Pendolo semplice

Un pendolo semplice consiste in un corpo di massa  $m$  connesso tramite un filo ad un punto fisso. Tale massa, una volta spostata dalla posizione di equilibrio e lasciata, effettua un movimento periodico descrivendo l'arco di una circonferenza.



Pendolo semplice.

Osserviamo che la componente normale  $\vec{P}_n = \vec{T}_n$  si equilibra, mentre per la componente tangenziale la forza risultante è  $\vec{P}_t$ . Possiamo quindi usare il secondo principio della dinamica:

$$\begin{aligned}\vec{P}_t &= m \vec{a}_t \\ \Rightarrow \cancel{\pi} g \sin \theta &= \cancel{\pi} \ddot{s} \Rightarrow g \sin \theta = \ddot{s}\end{aligned}$$

Un'altra importante cosa da sapere è che  $\theta = \frac{s}{l}$ .

Inoltre, per piccole oscillazioni  $\sin \theta = \theta$ , dunque il moto si può approssimare a quello di un'oscillatore armonico e utilizzare la seguente formula:

$$\theta(t) = \alpha \sin(\omega t)$$

dove  $\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{gl}}$  e  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Dimostrazione

### Forza di attrito statico

La forza di **attrito statico** è una forza che agisce sui corpi statici (non in movimento), che stanno cercando di muoversi, ovvero si oppone alla risultante delle forze che agiscono su tale corpo e la annulla.

$$\vec{F}_{AS} + \vec{F} = \vec{0}$$

Siccome la forza di attrito statico varia in base alle forze che agiscono sul corpo, si può individuare il valore della forza di attrito statico massimo:

$$|\vec{F}_{AS}| \leq |\vec{F}_{AS}^{max}| = \mu_S N$$

dove  $\mu_S$  è il coefficiente di attrito statico e  $N$  la forza di carico, ossia la forza perpendicolare alla superficie.

### Forza di attrito dinamico

La forza di **attrito dinamico** è una forza che agisce sui corpi dinamici (in movimento) e che si oppone al loro movimento rallentandolo.

$$\vec{F}_{AD} = -\mu_D N \hat{u}_t$$

dove  $\mu_D$  è il coefficiente di attrito dinamico e  $N$  la forza di carico, ossia la forza perpendicolare alla superficie.

### Sistemi di riferimento non inerziali

Esistono dei sistemi di riferimento detti **non inerziali** in cui non vale il secondo principio della dinamica. Tali sistemi di riferimento sono tutti quelli che si muovono di **moto accelerato** rispetto ai sistemi di riferimento inerziali, e a causa di tale accelerazione compaiono al loro interno delle forze dette **fittizie**.

Analizziamo ad esempio il caso dell'utilizzo di una **bilancia all'interno di un'ascensore**. Una normale bilancia misura solitamente il modulo della reazione vincolare.

Nel momento in cui l'ascensore è fermo dunque lo schema delle forze è il seguente:

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{R}_V &= \vec{0} \\ \implies \vec{R}_V &= -\vec{P} \\ \implies |\vec{R}_V| &= |\vec{P}| = mg\end{aligned}$$

Il peso presente nella bilancia è dunque quello giusto.

Nel momento in cui invece l'ascensore è in salita questo si trova in una fase di accelerazione, diventando così un sistema di riferimento non inerziale. Infatti nello schema delle forze compare anche una forza fittizia  $\vec{F}'$  dovuta all'accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{R}_V + \vec{F}' &= \vec{0} \\ \implies \vec{R}_V &= -(\vec{P} + \vec{F}') \\ \implies |\vec{R}_V| &= |\vec{P} + \vec{F}'| \\ &= mg + ma\end{aligned}$$

#### ▼ 6.0 - Lavoro ed energia

##### Lavoro ed energia: definizioni intuitive

Il **lavoro** rappresenta la caratteristica di una forza di operare uno spostamento.

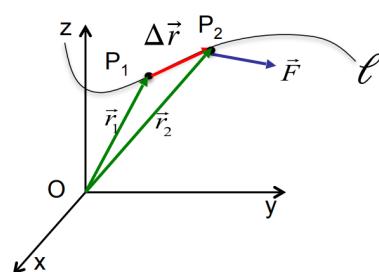
L'**energia** rappresenta la capacità di produrre un lavoro.

È possibile inoltre definire il lavoro in termini di energia dicendo che il lavoro è il processo attraverso il quale una certa quantità di energia si trasferisce da un corpo ad un altro.

#### ▼ 6.1 - Lavoro

##### Definizione di lavoro infinitesimo

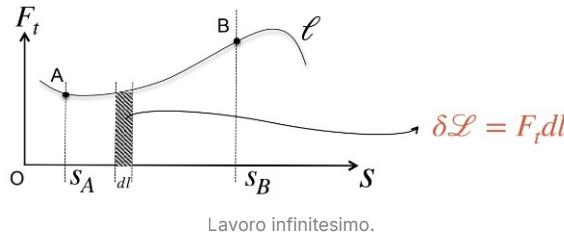
Consideriamo una regione di spazio su cui agisce una forza  $\vec{F}$  e un punto  $P$  che si muove all'interno di tale regione lungo una linea  $\ell$ . Se, in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , il punto  $P$  si sposta da  $P_1$  a  $P_2$  effettua uno spostamento  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .



Se facciamo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$ , allora lo spostamento  $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{l} = \hat{u}_t dl$  diventa tangente alla linea  $\ell$ .

Definiamo il **lavoro infinitesimo** compiuto da  $\vec{F}$  durante lo spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$  come:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \theta$$



### Definizione di lavoro

Il **lavoro totale** compiuto da una forza su un punto materiale in un intervallo di tempo in cui si sposta da  $A$  a  $B$  è la somma di tutti i lavori infinitesimi:

$$\mathcal{L} = \sum_i \delta\mathcal{L} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{l}_i$$

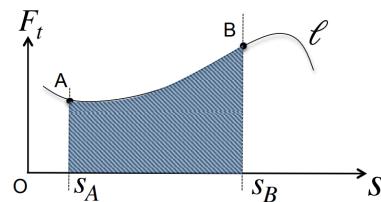
Tale quantità corrisponde all'integrale esteso alla linea di spostamento  $\ell$  del prodotto scalare fra la forza  $\vec{F}$  e lo spostamento infinitesimo  $\vec{l}$ .

Possiamo dare dunque la definizione generale di lavoro:

Il lavoro compiuto da una generica forza  $\vec{F}$ , il cui punto di applicazione  $P$  si sposta da

$A$  a  $B$  lungo una linea  $\ell$ , è l'integrale esteso a tale linea del prodotto scalare fra la forza  $\vec{F}$  e lo spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$ :

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



$$\mathcal{L} = \int_A^B F_t dl$$

Lavoro.

### Proprietà additiva dei lavori

Date  $n$  forze  $\vec{F}_i$  applicate allo stesso punto  $P$  che si muove lungo una curva  $\ell$  dal punto  $A$  al punto  $B$ , il lavoro complessivo è dato dalla somma dei lavori delle singole forze:

$$\mathcal{L}_{tot}^{\ell} = \sum_i \mathcal{L}_i^{\ell}$$

Dimostrazione

## Potenza

La potenza è la capacità di produrre lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{\delta \mathcal{L}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

È inoltre possibile utilizzare la potenza come definizione alternativa di lavoro:

$$\delta \mathcal{L} = P dt \implies \mathcal{L} = \int P dt$$

### ▼ 6.2 - Energia

## Energia cinetica e Teorema delle forze vive

Prima di definire il teorema delle forze vive occorre definire l'**energia cinetica**, la quale è equivalente a:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Il **teorema delle forze vive** afferma che il lavoro compiuto dalla risultante delle forze che agiscono su un sistema meccanico qualunque, nel passaggio da una configurazione  $A$  ad un'altra  $B$ , è uguale alla corrispondente variazione dell'energia cinetica di tale sistema:

$$\mathcal{L}_{A,B} = T_B - T_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Dimostrazioni

## Campo di forza conservativo ed energia potenziale

### Definizioni preliminari

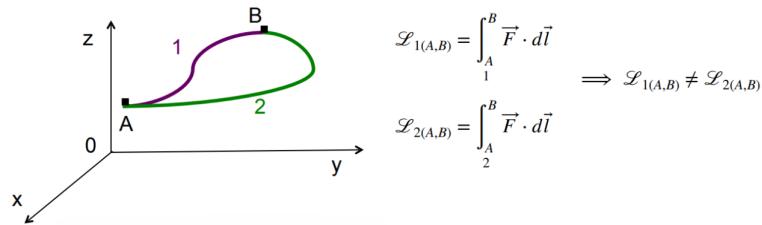
Un **campo scalare** rappresenta una grandezza scalare funzione delle coordinate spaziali  $\varphi(x, y, z)$  definita ovunque all'interno di una certa regione di spazio.

Un **campo vettoriale** rappresenta un vettore applicato funzione delle coordinate spaziali  $\vec{F}(x, y, z)$  definito ovunque all'interno di una certa regione di spazio.

Le **linee di forza** sono una o più linee sempre tangenti al vettore del campo. Le linee di forza sono più fitte dove il modulo del vettore è maggiore.

## Campo di forza conservativo ed energia potenziale

In generale il lavoro di una forza per spostare un punto materiale da un punto  $A$  a un punto  $B$  dipende dalla traiettoria.



Esistono però dei campi vettoriali di forze in cui il lavoro è indipendente dalla traiettoria eseguita.

Un **campo di forza conservativo** è un campo vettoriale in cui il lavoro è indipendente dalla particolare traiettoria eseguita, ma dipendente soltanto dagli estremi  $A$  e  $B$ .

In tali campi è possibile introdurre alcune proprietà:

- Visto che il lavoro dipende solo dagli estremi  $A$  e  $B$  del percorso eseguito si può scrivere il lavoro in funzione di questi. Per farlo si introduce una nuova funzione scalare  $U(x, y, z)$  chiamata **energia potenziale** tale che:

$$\mathcal{L}_{A,B} = U(A) - U(B)$$

- La forza è l'opposto del gradiente dell'energia potenziale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Dimostrazione

- Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di forze sia conservativo è che il rotore si annulli in tutti i punti del campo:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$$

Da questa proprietà si ricava che **ogni forza costante** (es. forza peso) è **conservativa**.

Dimostrazione

- Il lavoro su una curva chiusa di una forza conservativa è nullo:

$$\mathcal{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Dimostrazione

### Conservazione dell'energia meccanica

Sappiamo che all'interno di un campo conservativo valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{A,B} &= T(B) - T(A) \\ \mathcal{L}_{A,B} &= U(A) - U(B)\end{aligned}$$

Da ciò possiamo dunque ricavarci:

$$\begin{aligned}T(B) - T(A) &= U(A) - U(B) \\ \Rightarrow T(A) + U(A) &= T(B) + U(B)\end{aligned}$$

Notiamo dunque che all'interno di un campo conservativo la somma tra l'energia cinetica e quella potenziale si conserva. Chiamiamo dunque questa somma energia meccanica e definiamo il teorema di conservazione di tale energia:

Per un sistema meccanico sottoposto a vincoli tutti ideali ed a forze non vincolari tutte conservative, l'**energia meccanica**  $E$  si **conserva**, ossia rimane costante durante il moto:

$$E = T + U = \text{costante}$$

Il lavoro svolto dalle forze non conservative è dato dalla variazione dell'energia meccanica totale:

$$\mathcal{L}_{nc} = E[B] - E[A]$$

#### ▼ 7.0 - Terzo principio e urti

#### ▼ 7.1 - Terzo principio

### Quantità di moto

Si definisce la **quantità di moto** di un punto materiale come:

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Se la massa è costante otteniamo che:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

### Momento angolare

Si definisce **momento angolare** di un punto materiale rispetto al polo  $\Omega$  come:

$$\vec{p}_\Omega = \vec{r} \wedge \vec{q} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$$

È possibile inoltre scrivere  $\vec{v}$  in funzione della **velocità angolare**  $\vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ :

$$\vec{p}_\Omega = mr^2\vec{\omega}$$

Dimostrazione

La **derivata del momento angolare** è uguale al **momento della forza** agente sul punto materiale rispetto allo stesso polo:

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_\Omega$$

Dimostrazione

### Sistema di punti materiali

Un insieme di  $N$  punti materiali di massa  $m_i$  costituisce un **sistema di punti materiali**.

- **Massa** del sistema di punti materiali:  $M = \sum_i^n m_i$
- **Quantità di moto** del sistema di punti materiali:  $\vec{Q} = \sum_i^n m_i \vec{v}_i$

- Momento della quantità di moto del sistema di punti materiali:  $\vec{P}_\Omega = \sum_i^n m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i)$

## Forze interne ed esterne

In un sistema è possibile distinguere tra le **forze interne**, dovute agli altri punti del sistema (vincoli tra punti materiali, fili, sbarre interne al sistema, molle o sistemi di attrazione/repulsione tra punti del sistema ecc.), e le **forze esterne**, dovute a tutto ciò che non è il sistema (forze peso, vincoli tra il sistema e l'esterno, tensioni tra il sistema e l'esterno).

Un sistema si dice isolato quando la risultante delle forze esterne e quella dei momenti esterni sono nulle:

$$\vec{F}^{EST} = 0 \quad \vec{M}^{EST} = 0$$

In un sistema isolato la quantità di moto e il momento angolare del sistema sono costanti nel tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \vec{0} & \frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} &= \vec{0} \\ \implies \vec{F}^{INT} &= \vec{0} & \vec{M}^{INT} &= \vec{0} \end{aligned}$$

## Terzo principio della dinamica

Ogni volta che un corpo *A* esercita una forza su un altro corpo *B*, il secondo esercita sul primo una forza vettorialmente opposta e con la stessa retta d'azione.

## Impulso

Si definisce **impulso** il prodotto tra una forza  $\vec{F}$  e il tempo  $\Delta t$  in cui tale forza viene esercitata:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{q}$$

Il **teorema dell'impulso** stabilisce che l'impulso di una forza applicata su un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto.

### ▼ 7.2 - Urti

## Urti

Si ha un **urto** quando due corpi in movimento interagiscono e, in un intervallo di tempo molto breve, modificano le loro velocità.

Durante l'urto agiscono delle forze impulsive interne, chiamate **forze d'urto**, le quali prima e dopo l'urto sono assenti.

Durante gli urti tra punti materiali si **conserva la quantità di moto del sistema**:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{in} &= \vec{Q}_{fin} \\ \implies m_1 \vec{v}_{1,in} + m_2 \vec{v}_{2,in} &= m_1 \vec{v}_{1,fin} + m_2 \vec{v}_{2,fin} \end{aligned}$$

## Urti elastici

Un **urto elastico** è un particolare tipo di urto in cui si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{Q}_{in} = \vec{Q}_{fin} \\ T_{in} = T_{fin} \\ m_1 \vec{v}_{1,in} + m_2 \vec{v}_{2,in} = m_1 \vec{v}_{1,fin} + m_2 \vec{v}_{2,fin} \\ \frac{1}{2}m_1 \vec{v}_{1,in}^2 + \frac{1}{2}m_2 \vec{v}_{2,in}^2 = \frac{1}{2}m_1 \vec{v}_{1,fin}^2 + \frac{1}{2}m_2 \vec{v}_{2,fin}^2 \end{cases}$$

## Urti totalmente anelastici

Un **urto totalmente anelastico** è un particolare tipo di urto in cui si conserva soltanto la quantità di moto e dopo l'urto i due corpi si muovono con la stessa velocità e rimangono uniti a formare un unico corpo:

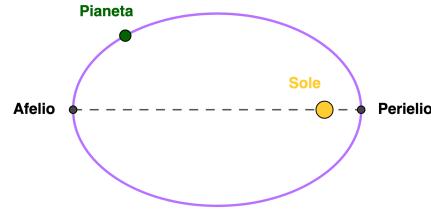
$$\begin{cases} \vec{Q}_{in} = \vec{Q}_{fin} \\ \vec{v}_{1,fin} = \vec{v}_{2,fin} \end{cases}$$

## ▼ 8.0 - Gravitazione

### Leggi di Keplero

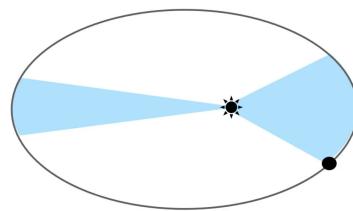
#### Prima legge

I pianeti descrivono **orbite** piane, **ellittiche**, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.



#### Seconda legge

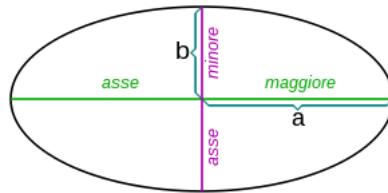
Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive **arie uguali in tempi uguali**.



#### Terza legge

I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore dell'orbita:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{costante}$$



Un sistema planetario è isolato, dunque:

$$\vec{F}^{EST} = 0 \quad \vec{M}^{EST} = 0 \\ \vec{Q}, \vec{P} \text{ si conservano}$$

### Semplificazione leggi di Keplero

Al fine di semplificare l'esecuzione degli esercizi che utilizzano le leggi di Keplero consideriamo le orbite dei pianeti come circolari, di cui il Sole occupa il centro. Inoltre, il semiasse maggiore di cui si fa riferimento nella terza legge di Keplero, lo consideriamo come fosse il raggio dell'orbita.

### Velocità vettoriale areolare

La **velocità vettoriale areolare** è un vettore che indica l'aumento dell'area descritta da un pianeta durante il suo movimento:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} \\ A(t) = \frac{1}{2} r v$$

Dimostrazione

### Legge di gravitazione universale

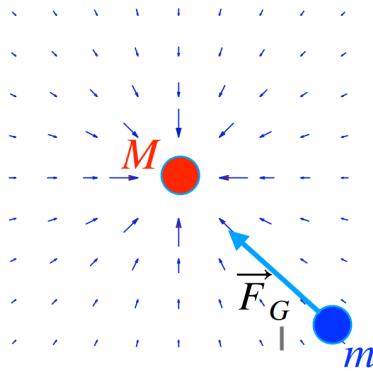
Un qualsiasi punto materiale  $P_1$  di massa  $m_1$  esercita su un qualunque altro punto materiale  $P_2$  di massa  $m_2$  una **forza gravitazionale**  $\vec{F}_{12}$  diretta secondo la congiungente di  $P_1$  con  $P_2$  tale che:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

dove  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$  (costante di gravitazione universale).

### Campo gravitazionale

La forza gravitazionale può essere riformulata utilizzando il concetto di campo di forza. Una qualsiasi massa  $M$  altera infatti le proprietà dello spazio introducendo un **campo gravitazionale** di cui è la sorgente. Qualunque massa  $m$  inserita all'interno di tale campo sentirà dunque una forza dovuta alla presenza di  $M$ .



Il campo gravitazionale introdotto da  $M$  sarà dunque  $\vec{G} = -G \frac{M}{r^2} \hat{u}_r$  e la forza gravitazionale che la massa  $m$  sentirà sarà  $\vec{F}_G = m \vec{G}$ .

### Energia potenziale gravitazionale

La forza gravitazionale e il campo gravitazionale sono **conservativi**.

Dimostrazione

Per questo motivo si può introdurre l'**energia potenziale gravitazionale**:

$$U_G(A) = -G \frac{m_1 m_2}{r_A}$$

### Velocità di fuga

La **velocità di fuga** è la velocità minima che occorre imprimere ad un corpo per far sì che si allontani da un altro corpo senza ricadervi.

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Dimostrazione

Per calcolarla teniamo a mente che il campo gravitazionale è conservativo, dunque in esso l'energia meccanica si conserva:

$$\begin{aligned} E_{in} &= E_{fin} \\ \implies T_{in} + U_{in} &= T_{fin} + U_{fin} \\ \implies \frac{1}{2}mv_{fuga}^2 - G\frac{mM}{R} &= 0 \quad (v_{fin} \rightarrow 0, r_{fin} \rightarrow +\infty) \\ \implies v_{fuga} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

## ▼ 9.0 - Elettrostatica

### ▼ 9.1 - Introduzione all'elettrostatica

#### La struttura microscopica della materia

Tutti i materiali sono formati da **atomi**, i quali sono composti da:

- nucleo formato da **protoni** (carica positiva) e **neutroni** (neutri).
- attorno al nucleo orbitano gli **elettroni** (carica negativa).

La materia ordinaria risulta **complessivamente neutra**.

La più piccola carica elettrica osservata fino ad ora in natura è quella dell'elettrone (-) e del protone (+):

$$q_p = +1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$$

La carica elettrica è **quantizzata**, dunque le cariche sono multiple della carica elettrica elementare (quella del protone e dell'elettrone).

In un sistema isolato inoltre la carica elettrica si conserva, ossia il numero totale di cariche (negative e positive) rimane invariato.

### Isolanti e conduttori

Gli **isolanti** e i **conduttori** sono due tipi di materiali che hanno diverse proprietà in relazione alla conduzione di corrente elettrica, al calore e ad altri tipi di energia.

Negli isolanti, come il vetro, la plastica o la gomma, la carica resta localizzata.

Nei conduttori, come i metalli, le cariche sono libere di muoversi.

### Elettrizzazione per strofinio

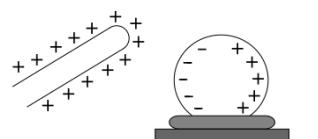
Lo **strofinio** tra due materiali produce uno spostamento degli elettroni da un materiale all'altro. In base alla seguente lista di materiali, sfregando tra loro due di questi, il più alto nella lista si carica positivamente cedendo elettroni, mentre il più basso nella lista si carica negativamente acquistando elettroni.



### Elettrizzazione per induzione

L'**elettrizzazione per induzione** è un processo attraverso il quale un corpo carico influisce sulla distribuzione delle cariche in un corpo neutro senza che vi sia contatto diretto tra i due corpi.

Questo processo sfrutta il principio della repulsione elettrostatica o dell'attrazione tra cariche elettriche.



### Elettrizzazione per contatto

L'**elettrizzazione per contatto** è un processo mediante il quale un corpo carico e un corpo neutro vengono messi in contatto diretto, consentendo il trasferimento di elettroni tra di essi.

È importante notare però che in questo tipo di elettrizzazione la **carica totale si conserva**.

## ▼ 9.2 - Forza e campo elettrostatico

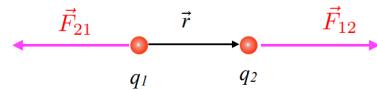
## Forza elettrostatica e legge di Coulomb

La **forza elettrostatica** è una forza che agisce tra cariche elettriche a causa delle loro interazioni elettrostatiche. Questa forza è descritta dalla legge di Coulomb:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

dove  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$  (costante dielettrica nel vuoto).

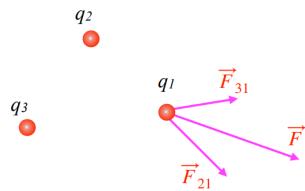
Per il terzo principio della dinamica sappiamo inoltre che  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .



La formula della forza elettrostatica ha la stessa forma di quella della forza gravitazionale, ma la prima è circa  $10^{40}$  volte più intensa della seconda.

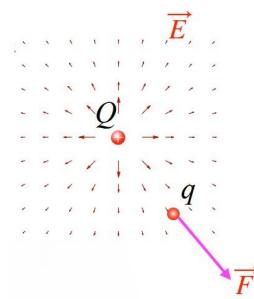
### Principio di sovrapposizione della forza elettrostatica

Il **principio di sovrapposizione della forza elettrostatica** stabilisce che il totale sulla carica  $q$  è la somma vettoriale delle forze che le cariche  $q_i$  eserciterebbero singolarmente su  $q$  se le altre cariche  $q_{j \neq i}$  fossero assenti.



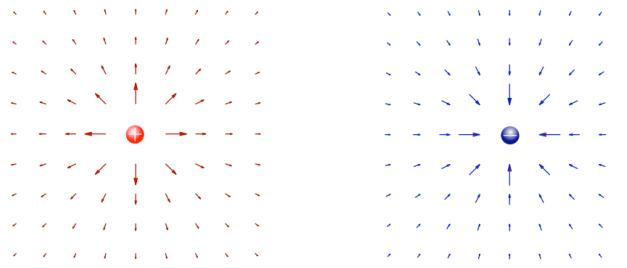
## Campo elettrostatico

La forza elettrostatica può essere riformulata utilizzando il concetto di campo di forza. Una qualsiasi carica  $Q$  altera infatti le proprietà dello spazio introducendo un **campo elettrostatico o elettrico** ( $N/C$  o  $V/m$ ) di cui è la sorgente. Qualunque carica  $q$  inserita all'interno di tale campo sentirà dunque una forza dovuta alla presenza di  $Q$ .

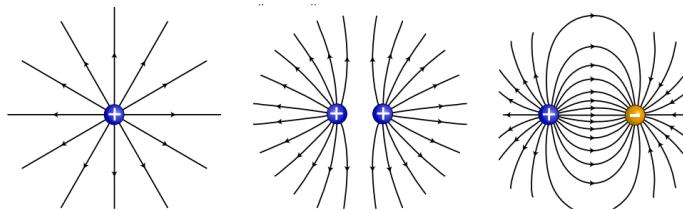


Il campo elettrostatico introdotto da  $Q$  sarà dunque  $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$  e la forza elettrostatica che la carica  $q$  sentirà sarà  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Il campo elettrico è un campo vettoriale uscente da carica  $Q$  positiva e entrante in  $Q$  negativa. Il modulo di tale campo dipende solo da  $r$ .

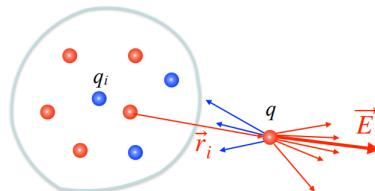


È possibile rappresentare le linee di flusso del campo elettrico, le quali sono tangenti in ogni punto al vettore campo elettrico, orientate con il verso del campo elettrico e in numero proporzionale al modulo del campo elettrico.



### Principio di sovrapposizione del campo elettrostatico

Il **principio di sovrapposizione del campo elettrostatico** stabilisce che il totale su un punto nello spazio è la somma vettoriale dei campi elettrici che le cariche  $q_i$  eserciterebbero singolarmente su tale punto se le altre cariche  $q_{j \neq i}$  fossero assenti.



### Distribuzioni continue di carica

Spesso la carica elettrica non è puntiforme ma può essere distribuita lungo una linea, su di una superficie o in un volume nello spazio. Per questo motivo vengono introdotti i concetti di densità lineare, superficiale e di volume.

Definiamo **densità lineare di carica**  $\lambda$  come:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (Q/m)$$



Definiamo **densità superficiale di carica**  $\sigma$  come:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (Q/m^2)$$



Definiamo **densità volumetrica di carica**  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad (Q/m^3)$$



Per calcolare la carica contenuta su di una linea, una superficie o un volume occorre integrare la densità di carica:

$$\begin{aligned} q_l &= \int_l \lambda dl \\ q_s &= \iint_S \sigma dS \\ q_v &= \iiint_\tau \rho d\tau \end{aligned}$$

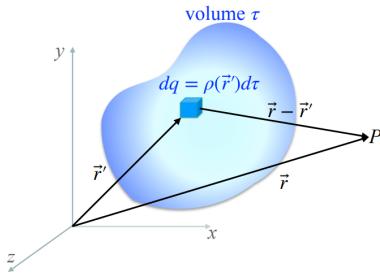
#### Campo elettrostatico da distribuzioni continue di cariche

I campi elettrostatici formati da una carica distribuita lungo una linea, su di una superficie o in un volume nello spazio corrispondono ai seguenti:

Carica distribuita in volume $\tau$	Carica distribuita su superficie $S$	Carica distribuita su linea $l$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} d\tau$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} dS$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} dl$

#### ▼ Dimostrazione

Dimostriamo il caso di un campo elettrostatico formato da una carica distribuita all'interno di un volume.



Sappiamo per definizione di carica infinitesima  $dq$  contenuta nel volume infinitesimo  $d\tau$  che il campo elettrostatico in un certo punto  $P$  generato da questa è equivalente a:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

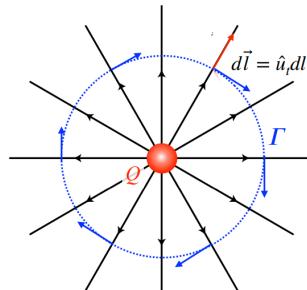
è possibile dunque calcolare il campo elettrico del punto  $P$  utilizzando l'integrale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

### Il campo elettrostatico è conservativo

**Il campo elettrostatico** generato da una carica puntiforme ferma è **conservativo**.

#### ▼ Dimostrazione



Calcoliamo la circuitazione del campo elettrostatico lungo la linea chiusa  $\Gamma$ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_r d\ell \underset{||}{=} 0$$

Notiamo che la circuitazione è nulla, dunque possiamo affermare che il campo elettrostatico è conservativo.

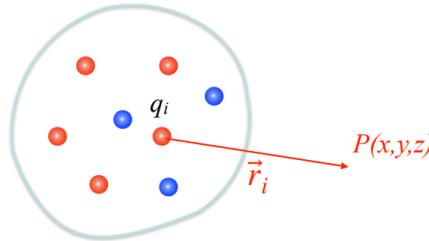
### Potenziale elettrostatico

Per questo motivo il campo elettrostatico eredita tutte le proprietà dei campi conservativi, in particolare il fatto che esiste una funzione scalare  $V(x, y, z)$  chiamata **potenziale elettrostatico** tale che:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} &= V(A) - V(B) \\ \vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (V: \text{volt}) \end{aligned}$$

È facilmente dimostrabile che un campo elettrostatico generato da  $N$  cariche discrete o da una distribuzione continua di carica è conservativo, e il potenziale elettrostatico generato da tali cariche gode del **principio di sovrapposizione**:

$$V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r})$$



#### Potenziale elettrostatico da distribuzioni continue di cariche

I **potenziali elettrostatici formati da una carica distribuita** lungo una linea, su di una superficie o in un volume nello spazio corrispondono ai seguenti:

##### Carica volumetrica

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

##### Carica superficiale

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

##### Carica lineare

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

#### Lavoro della forza elettrostatica

Il **lavoro svolto dalla forza elettrostatica** per spostare una carica  $q$  dalla posizione

$A$  alla posizione  $B$  corrisponde a:

$$\mathcal{L}_{el} = q\Delta V_{AB}$$

Dimostrazione

#### Energia potenziale elettrostatica

Possiamo definire l'**energia potenziale elettrostatica** di una carica  $q$  situata in un punto dello spazio in cui è presente un potenziale  $V$  come:

$$U_E = qV \quad (J)$$

L'energia potenziale elettrostatica rappresenta il lavoro che bisogna fare sulla carica  $q$  per portarla dall'infinito al punto in cui il potenziale vale  $V$ .

#### Energia elettrostatica di un sistema di cariche

L'**energia elettrostatica** di un sistema di cariche è equivalente al lavoro necessario per portare le  $N$  cariche, una alla volta, nella configurazione finale:

$$U_E = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

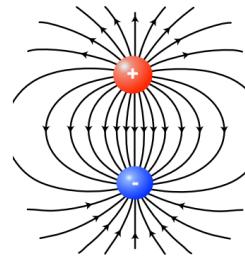
## Energia meccanica elettrostatica

In un campo elettrostatico conservativo l'**energia meccanica totale si conserva**:

$$\mathcal{E} = T + U_E = \text{costante}$$

## Il dipolo elettrico

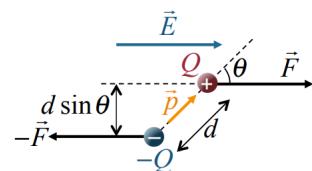
Molti materiali isolanti sono formati da molecole che hanno una struttura **dipolare**, la quale consiste nel contenere un sistema formato da 2 cariche elettriche in quiete, di uguale valore assoluto ma segno opposto ( $Q$  e  $-Q$ ), poste a una distanza fissata  $d$ .



Definiamo il **momento di dipolo** come:

$$\vec{p} = \vec{Q}d$$

Quando un dipolo viene inserito all'interno di un campo elettrico vengono create **due forze**, una per ciascuna carica del dipolo, con stesso modulo, stessa direzione e verso opposto.



Il **momento** di tali forze, prendendo come polo una delle due cariche, è equivalente a:

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

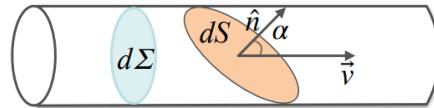
Dimostrazione

### ▼ 9.3 - Flusso del campo elettrostatico

#### Flusso di un campo vettoriale

Consideriamo un tubo di sezione infinitesima  $dS$  attraversato da un fluido incomprimibile con velocità  $\vec{v}$ . Il **flusso infinitesimo** del fluido attraverso tale sezione del tubo è definito come:

$$d\Phi = \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

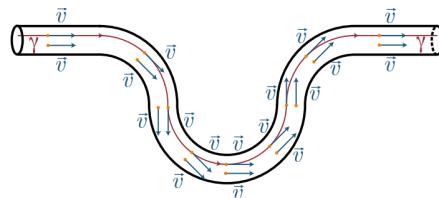


Considerando più tubi di flusso su una generica superficie  $S$  è possibile definire il flusso del campo vettoriale  $\vec{v}$  attraverso una generica superficie  $S$ .

Il **flusso del campo vettoriale**  $\vec{v}$  attraverso una generica superficie  $S$  vale:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

La **linea di flusso** di un campo vettoriale è sempre tangente ai vettori velocità delle particelle che si trovano nei punti della linea.



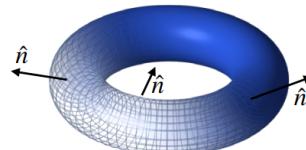
### Superfici in $\mathbb{R}^3$

È possibile classificare le superfici in  $\mathbb{R}^3$  tramite le seguenti proprietà:

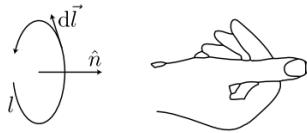
- **aperta**: se è compatta e possiede un bordo.
- **chiusa**: se è compatta e priva di bordo.
- **orientabile**: se possiede due facce.

### Flusso nelle superfici in $\mathbb{R}^3$

Nelle superfici **chiuse e orientabili**, in ogni punto della superficie possiamo distinguere la normale esterna dalla normale interna. Inoltre, per convenzione, per calcolare i flussi si usa come flusso positivo quello uscente dal volume delimitato dalla superficie chiusa, e come flusso negativo quello entrante nel volume delimitato dalla superficie chiusa.



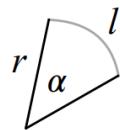
Nelle superfici **aperte e orientabili** non è possibile distinguere la normale esterna dalla normale interna. Per convenzione si utilizza dunque come positivo l'orientamento indicato dalla regola della mano destra sulla base dell'orientamento della linea del bordo.



### Angolo piano e angolo solido

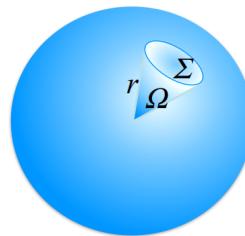
Un **angolo piano** corrisponde al rapporto tra arco di circonferenza  $l$  e raggio  $r$ :

$$\alpha = \frac{l}{r} \quad (\text{rad})$$



Un **angolo solido** corrisponde al rapporto tra la parte di superficie sferica  $\Sigma$  intercettata dal cono centrato nel vertice e il quadrato del raggio della sfera:

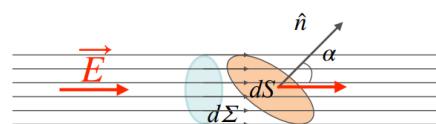
$$\Omega = \frac{\Sigma}{r^2} \quad (\text{sr})$$



### Flusso del campo elettrico

Consideriamo una superficie infinitesima  $dS$  attraversata da un campo elettrico  $\vec{E}$ . Il **flusso infinitesimo del campo elettrico** attraverso tale superficie è definito come:

$$d\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \cdot ds \cos \alpha = E \cdot d\Sigma$$



Il **flusso del campo elettrico** attraverso una superficie estesa  $S$  vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_S E \cdot dS \cos \alpha = \iint_S E \cdot d\Sigma$$

### Teorema di Gauss: flusso generato da una carica interna a una superficie

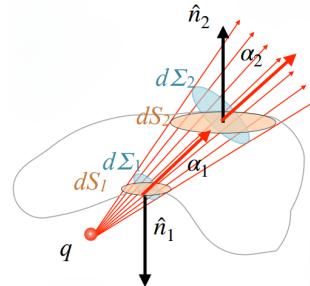
Consideriamo una superficie chiusa contenente al suo interno una carica totale  $Q_S$  che genera un campo elettrostatico. Il flusso generato da tale carica su tutta la superficie equivale a:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

Dimostrazione

### Flusso generato da una carica esterna a una superficie

Consideriamo adesso il caso in cui il campo elettrostatico è generato da una carica esterna alla superficie.



In tal caso il flusso generato da tale carica sulla superficie è nullo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = 0$$

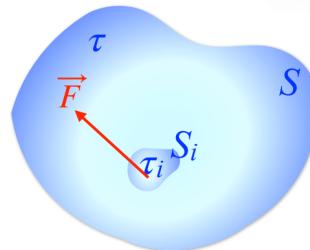
Dimostrazione

### Divergenza di un campo vettoriale

La **divergenza di un campo vettoriale** è equivalente al flusso uscente per unità di volume:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi_{S_i}(\vec{F})}{\tau_i}$$

**Intuitivamente** la divergenza di un campo vettoriale fornisce un modo di valutare localmente come il campo vettoriale si comporta in termini di espansione o contrazione in un determinato punto dello spazio. Se il valore della divergenza in un certo punto è negativo il campo vettoriale è diretto verso il punto (convergenza), se è positivo sta uscendo dal punto (divergenza), e se è nullo il campo è detto "senza sorgenti né pozzi" in quel punto. Se un campo ha divergenza sempre nulla, allora esso si definisce **solenoidale**.



È possibile esprimere la divergenza anche utilizzando l'operatore **nabla**:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

### Teorema della divergenza

Il **flusso di un campo vettoriale** attraverso una superficie  $S$  chiusa è pari all'integrale sul volume  $\tau$  delimitato da  $S$  della divergenza di tale campo vettoriale:

$$\Phi_S(\vec{F}) = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{F} d\tau$$

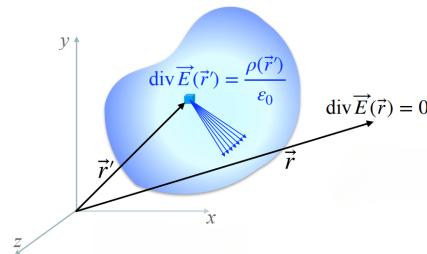
Dimostrazione

#### Teorema di Gauss in forma locale

È possibile combinare il teorema di Gauss e quello della divergenza per ottenere la formula della divergenza del campo elettrico:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Da tale formula possiamo comprendere che il campo elettrico ha divergenza non nulla solo nei punti in cui esiste una densità di carica, dunque nel vuoto la divergenza del campo elettrico è nulla.



Dimostrazione

#### Equazione di Poisson

Utilizzando il Teorema di Gauss in forma locale e la formula del campo elettrostatico in funzione del potenziale elettrostatico, è possibile ottenere l'equazione di Poisson:

L'**equazione di Poisson** stabilisce che il laplaciano del potenziale è proporzionale alla densità di carica:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

#### ▼ 9.4 - Elettrostatica dei conduttori

##### Materiali isolanti e conduttori

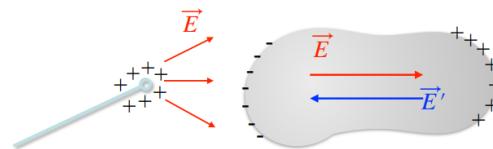
In natura è possibile distinguere due tipologie di materiali a seconda delle loro proprietà di movimento delle cariche al loro interno:

- **Isolanti:** le cariche elettriche sono localizzate, e gli elettroni sono vincolati a muoversi solamente all'interno delle molecole, avendo come unica possibilità quella di modificare l'orientamento di queste.
- **Conduttori:** le cariche elettriche sono libere di muoversi all'interno del materiale, redistribuendosi a causa della presenza di un campo esterno o di un eccesso di carica al fine di raggiungere una nuova condizione di equilibrio.

##### Campo elettrico nei conduttori

Siccome le cariche all'interno dei conduttori si dispongono in maniera tale da generare un campo interno **indotto**  $\vec{E}'$  che annulla un eventuale campo esterno  $\vec{E}$ , il campo elettrico interno ai conduttori è sempre nullo:

$$\vec{E}_{cond} = \vec{E} + \vec{E}' = 0$$

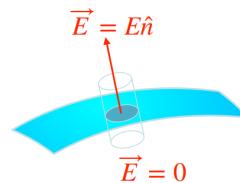


### Teorema di Coulomb

Il **teorema di Coulomb** afferma che il campo elettrostatico in prossimità dei conduttori è sempre ortogonale alla superficie del conduttore ed il modulo è proporzionale alla densità superficiale di carica:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

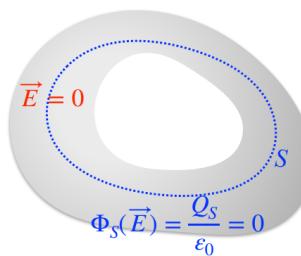
Dimostrazione



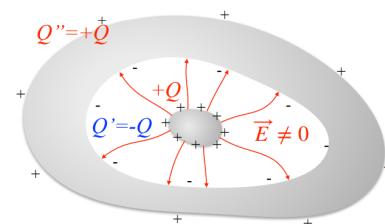
La densità superficiale di carica può variare sulla superficie, di conseguenza varierà anche l'intensità del campo elettrico.

### Conduttori cavi

In un **conduttore cavo**, siccome il campo elettrico interno ad un generico conduttore è nullo, per via della legge di Gauss la carica totale sulla superficie interna di esso sarà nulla.



Se invece poniamo il caso in cui all'interno della cavità di un tale conduttore vengono inserite delle cariche, il conduttore cavo trasferirà sulla propria superficie esterna una carica uguale al valore complessivo delle cariche contenute all'interno della cavità, in maniera tale da indurre sulla superficie interna una carica complessivamente uguale o opposta a quella presente nella cavità.



## Potenziale elettrico nei conduttori

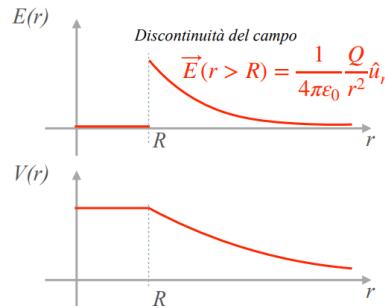
Tutti i punti interni ad un conduttore sono **equipotenziali**, quindi la differenza di potenziale tra due qualsiasi punti del conduttore è sempre nulla:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

## Conduttore sferico

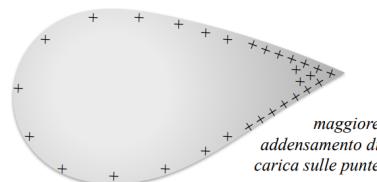
Calcoliamo ora il campo elettrico e il potenziale di un **conduttore sferico** di raggio  $R$  al variare della distanza dal centro. Sappiamo che per la forma simmetrica della superficie di una sfera la densità di carica superficiale in essa sarà uniforme, altrimenti si avrebbero dei campi elettrici tangentì alla superficie. È possibile dunque calcolare il campo elettrico al variare della distanza dal centro della sfera utilizzando la legge di Gauss e conseguentemente il potenziale:

$$\begin{cases} \vec{E}(r < R) = \vec{0} \\ \vec{E}(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r \end{cases} \quad \begin{cases} V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases}$$



## Potere delle punte

Consideriamo un conduttore di una forma generica, con raggio di curvatura che varia da punto a punto della superficie, la densità di carica è inversamente proporzionale al raggio di curvatura, dunque in vicinanza delle **punte** il campo elettrico può essere molto elevato.



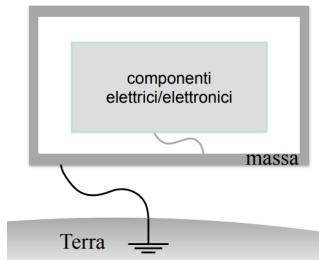
Campi molto intensi possono causare l'espulsione di cariche dal conduttore, le quali subiscono forti accelerazioni, guadagnano energia cinetica interagendo con l'aria e provocando un riscaldamento del mezzo per cui si osservano delle scintille.



### Collegamento a terra

La Terra può essere considerata come un **enorme conduttore**, dunque se un corpo con una carica si mette a contatto diretto o tramite un conduttore con la terra tutta la carica verrà scaricata su di essa, in quanto è estremamente più grande.

Per questo motivo la Terra viene solitamente utilizzata per il **collegamento a terra**, una pratica di sicurezza che consente di evitare pericoli nel caso di guasti di componenti elettriche che causerebbero una grande differenza di potenziale.



### Capacità di un conduttore

Definiamo la **capacità**  $C$  di un conduttore come l'attitudine di questo ad accumulare carica ad un dato potenziale:

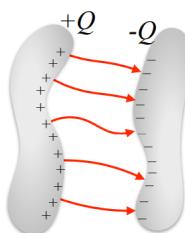
$$C = \frac{Q}{V} \quad (F : \text{Farad})$$

La capacità dipende solo dalla forma e dalle dimensioni del conduttore e dal mezzo che lo circonda, nel nostro caso il vuoto, infatti nell'esempio di una sfera questa vale:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

### Condensatore

Il **condensatore** è un sistema formato da due conduttori carichi per i quali si verifica induzione completa (tutte le linee di forza uscenti da un conduttore incontrano l'altro conduttore). Lo scopo di un condensatore è quello di immagazzinare l'energia elettrostatica associata a un campo elettrostatico.



I due conduttori sono detti **armature** e lo spazio interposto tra le armature si chiama **intercapedine**.

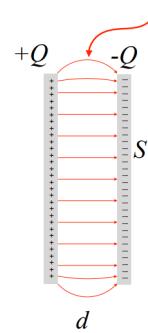
### Capacità di un condensatore

La **capacità** di un condensatore è definita come il rapporto tra la carica (presente con segno opposto sulle due armature) e la differenza di potenziale tra i due conduttori:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

### Condensatore piano

Il **condensatore piano** è costituito da due armature piane di superficie  $S$  poste parallelamente a una piccola distanza  $d \ll S$ .



Calcoliamo il **campo** e il **potenziale elettrostatico** del condensatore piano:

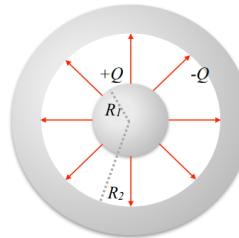
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} = \frac{Q}{S\epsilon_0} & \text{interno} \\ 0 & \text{esterno} \end{cases} \quad \Delta V = \int_0^d E \, dz = Ed = \frac{Qd}{S\epsilon_0}$$

Possiamo utilizzare i valori appena ottenuti per calcolarci la **capacità** del condensatore, la quale è proporzionale alla superficie delle armature e inversamente proporzionale alla distanza tra di esse:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

### Condensatore sferico

Un **condensatore sferico** è costituito da una sfera conduttrice di raggio  $R_1$  racchiusa all'interno di una cavità sferica di raggio  $R_2$  formata da un conduttore sferico.



La capacità di tale condensatore, ottenuta calcolando il campo e il potenziale elettrostatico, vale:

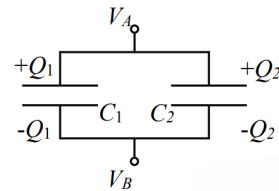
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

### Sistemi di condensatori in parallelo

Più condensatori connessi in parallelo presentano la stessa differenza di potenziale che corrisponde a quella dei due capi di connessione e una capacità la quale somma corrisponde alla capacità totale del sistema:

$$\Delta V_i = \Delta V_{AB}$$

$$C_{TOT} = \sum C_i$$

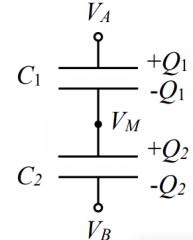


### Sistemi di condensatori in serie

Più condensatori connessi in serie presentano una differenza di potenziale differente, la quale somma corrisponde alla differenza di potenziale del sistema, e una capacità la quale somma dell'inverso corrisponde all'inverso della capacità del sistema:

$$\Delta V_{AB} = \frac{Q}{C_{TOT}}$$

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \sum \frac{1}{C_i}$$



### Energia elettrostatica di un condensatore

L'energia elettrostatica accumulata in un condensatore è:

$$U_E = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

Dimostrazione

### Densità di energia del campo elettrostatico

La densità di energia del campo elettrostatico viene definita come:

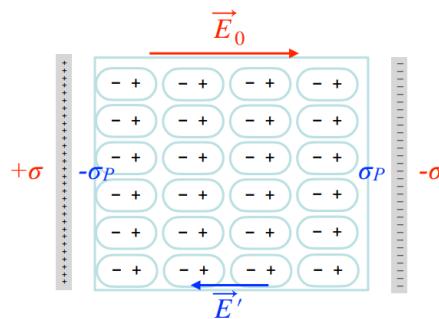
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

L'**energia elettrostatica** è pari alla densità di energia integrata su tutto lo spazio dove si estende il campo elettrostatico:

$$U_E = \int_{volume} u_E d\tau$$

### Condensatori con dielettrici

Se l'intercapedine di un condensatore viene riempita con un materiale isolante detto **dielettrico**, il condensatore si comporterà in maniera differente.



Nel dielettrico le cariche non si muovono come accade in un conduttore, ma a livello microscopico le molecole possono orientarsi. Per questo motivo nelle due superfici del dielettrico a contatto con le armature del condensatore le molecole si orientano e si osserva un eccesso di carica  $\sigma_P$ , la quale crea un campo elettrico opposto al campo del condensatore.

Dunque in tal caso il campo elettrico del condensatore diminuirà di intensità (di conseguenza anche il potenziale elettrico), mentre la capacità del condensatore aumenterà:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \\ \Delta V &= \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r} \\ C &= \epsilon_r C_0\end{aligned}$$

dove  $\vec{E}_0$ ,  $\Delta V_0$  e  $C_0$  sono i valori di un condensatore vuoto e  $\epsilon_r$  è la costante dielettrica relativa.

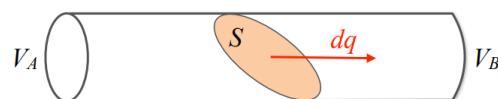
### ▼ 9.5 - Correnti elettriche

#### Corrente elettrica

Abbiamo visto che all'interno di un conduttore in condizioni statiche la differenza di potenziale è nulla. È possibile però utilizzare un artificio esterno, nello specifico un generatore, al fine di porre una differenza di potenziale tra due punti del conduttore, causando così il moto degli elettroni al suo interno con la conseguente creazione di una corrente elettrica.

Consideriamo un conduttore all'interno del quale è mantenuta una differenza di potenziale  $V_A - V_B$ . Data una sezione  $S$ , interna al conduttore, definiamo la **corrente elettrica** come la quantità di carica che attraversa il conduttore per unità di tempo:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (A)$$



Nella realtà per ogni carica positiva che si muove in una certa direzione all'interno di un conduttore, c'è una carica negativa che si muova nel verso opposto. Per convenzione viene utilizzato come verso positivo per la corrente quello in cui si muovono i portatori di carica positiva, dunque la corrente ha verso opposto al moto degli elettroni.

### Densità di corrente elettrica

Definiamo il vettore **densità di corrente elettrica** nel seguente modo:

$$\vec{j} = nq_e \vec{v}_d$$

dove  $n$  corrisponde al numero di portatori di carica.

L'intensità di corrente elettrica è pari al flusso della densità di corrente attraverso la sezione del conduttore:

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$



### Equazione di continuità

L'**equazione di continuità** afferma che la divergenza del vettore densità di corrente bilancia la variazione di carica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

### Modello di Drude-Lorentz

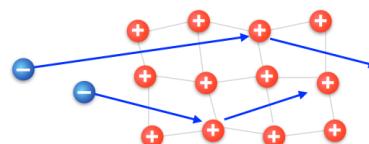
Se la differenza di potenziale all'interno di una sezione di un conduttore è costante nel tempo, lo sarà anche il campo elettrico e la forza sugli elettroni. Ci si aspetta dunque che il moto delle cariche sia uniformemente accelerato. Sperimentalmente, però, si trova che la velocità media degli elettroni è proporzionale al campo, dunque non c'è accelerazione.

È possibile spiegare questo fenomeno utilizzando il **modello di Drude-Lorentz**, secondo il quale gli elettroni si comportano come cariche libere di un gas nel reticolo cristallino, soggette al campo elettrico ed interagenti con le cariche del reticolo. Per questo motivo gli elettroni subiscono urti, cedendo energia cinetica e facendo risultare la velocità media come costante e proporzionale al campo elettrico (nella realtà la velocità non è costante e nell'intervallo di tempo tra due urti consecutivi l'elettrone si muove di moto uniformemente accelerato).

In conclusione la **velocità media** (o **velocità di deriva**) di un elettrone sarà la seguente:

$$\vec{v}_d = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \langle t \rangle$$

dove  $\langle t \rangle$  è il tempo medio che intercorre tra due urti.



## Prima legge di Ohm

Consideriamo un conduttore filiforme ai cui estremi c'è una differenza di potenziale. La **prima legge di Ohm** afferma che internamente al filo scorre una corrente proporzionale alla differenza di potenziale:

$$\Delta V = Ri$$

dove  $R$  è la **resistenza elettrica** del conduttore.

## Seconda legge di Ohm

La **seconda legge di Ohm** afferma che la resistenza di un conduttore omogeneo, filiforme di lunghezza  $l$  e sezione  $S$  vale:

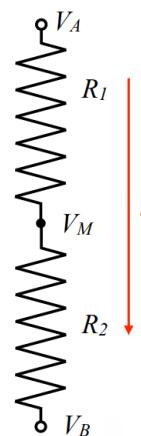
$$R = \rho_S \frac{l}{S} \quad (\Omega)$$

dove  $\rho_S$  è la resistività elettrica, la quale dipende dal materiale del conduttore (si misura in  $\Omega m$ ).

## Resistenze in serie

In un sistema formato da più **resistenze in serie**, queste sono attraversate dalla stessa corrente  $i$  e la resistenza del sistema è uguale alla somma delle singole resistenze:

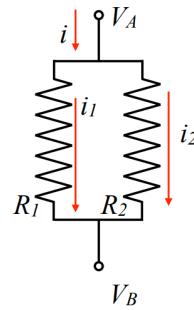
$$\begin{cases} i_i = i \\ R_{TOT} = \sum_i R_i \end{cases}$$



## Resistenze in parallelo

In un sistema formato da più **resistenze in parallelo**, queste presentano ai loro capi la stessa differenza di potenziale  $\Delta V$  e l'inverso della resistenza del sistema è uguale alla somma degli inversi delle singole resistenze:

$$\begin{cases} \Delta V_i = \Delta V \\ \frac{1}{R_{TOT}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \end{cases}$$



## Effetto Joule

La **potenza** spesa dal campo elettrico per spostare una carica attraverso un conduttore equivale a:

$$P = Ri^2$$

L'**effetto Joule** afferma che tale potenza viene persa negli urti degli elettroni di conduzione con gli atomi del conduttore, i quali aumentano la propria energia vibrazionale. La potenza viene dunque dissipata in calore, causando un aumento della temperatura del conduttore.

### Superconduttori

La resistività è funzione lineare della temperatura, dunque più la temperatura di un certo conduttore è alta più sarà alto il valore della sua resistività. Per questo motivo alcuni conduttori al di sotto di una temperatura prossima allo zero assoluto mostrano una resistività nulla, consentendo di far circolare la corrente al proprio interno senza dissipazione di energia e di conseguenza senza riscaldarsi.

## Generatori di forza elettromotrice

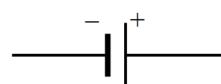
Siccome un normale conduttore è equipotenziale, al fine di generare una differenza di potenziale e quindi una corrente occorre connettere il conduttore a degli appositi dispositivi chiamati **generatori di forza elettromotrice** i quali sono in grado di creare una differenza di potenziale.

Il circuito formato da generatore e conduttore presenterà un campo elettrico che è la somma vettoriale del campo elettrostatico del conduttore, il quale è conservativo, con il **campo elettromotore** creato dal generatore, il quale non è conservativo.

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$$

È inoltre necessario distinguere tra due tipologie di generatori:

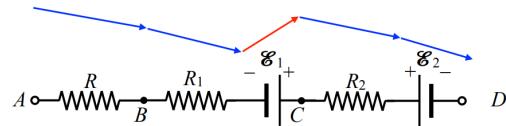
- **Generatori ideali**, i quali presentano ai propri capi una tensione che si mantiene costante.



- **Generatori reali**, i quali presentano ai propri capi una tensione che subisce una caduta ohmica e nei quali circuiti occorre considerare anche l'azione della resistenza interna del generatore, la quale è in serie al circuito.



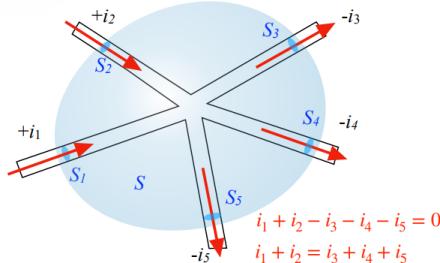
Per convenzione in un circuito viene considerata come positiva la differenza di potenziale nel caso in cui la corrente esce dal polo positivo ed entra nel polo negativo di un generatore, e negativa nel caso opposto. Controlliamo ad esempio il grafico della differenza di potenziale nel seguente esempio di circuito aperto.



### Prima legge di Kirchoff

In ogni nodo di un circuito la corrente totale entrante è uguale alla corrente totale uscente:

$$\sum_{\text{entranti}} i_k = \sum_{\text{uscenti}} i_k$$



### Seconda legge di Kirchoff

Considerando un ramo chiuso (maglia) di un circuito, la differenza di potenziale totale corrisponde alla somma delle tensioni  $\mathcal{E}$  erogate dai generatori presenti in essa:

$$\sum_k \mathcal{E}_k = R_{TOT} i$$

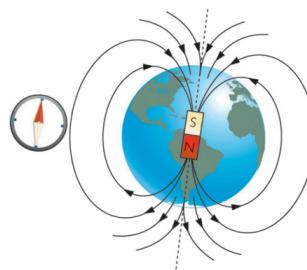
#### ▼ 10.0 - Magnetostatica

##### ▼ 10.0 - Introduzione alla magnetostatica

#### Introduzione

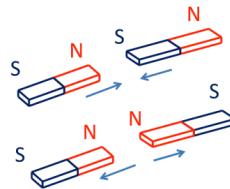
Esistono dei materiali in natura i quali hanno la capacità di attrarre oggetti contenenti ferro o materiali ferrosi. I materiali che presentano tali proprietà vengono detti **calamite**.

Le calamite esercitano forze tra di loro, che possono essere attrattive o repulsive, e ogni calamita presenta **due poli magnetici**, detti polo nord e polo sud. La definizione deriva dal fatto che la terra si comporta come una calamita. Convenzionalmente il polo nord magnetico coincide con il polo sud geografico.

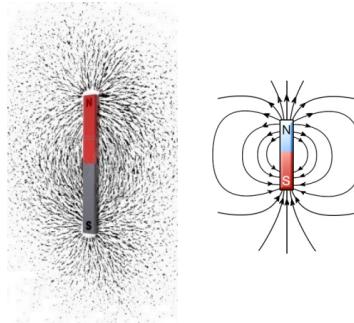


Sperimentalmente, se si spezza una calamita si otterranno due nuove calamite, infatti i poli magnetici esistono sempre a coppie di eguale valore e segno opposto, chiamati **dipoli magnetici**.

Nell'interazione tra calamite i poli opposti si attraggono, mentre i poli con lo stesso segno si respingono.



In analogia con l'elettrostatica viene introdotto un campo vettoriale  $\vec{B}$  detto **campo magnetico** (si misura in  $T$  : *Tesla*). Le linee di forza di tale campo entrano nel polo sud e escono dal polo nord. Un ago magnetico libero di ruotare si orienta con la linea di campo che esce dal polo nord (del magnete) e entra nel polo sud.



## Forza magnetica

La **forza magnetica** tra due cariche magnetiche è proporzionale al prodotto delle tali cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza:

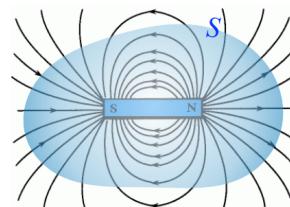
$$\vec{F}_M = k_M \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

La forza magnetica è attrattiva per cariche magnetiche opposte e repulsiva per cariche magnetiche uguali.

## Non conservatività del campo magnetico

Siccome non esistono monopoli magnetici, le linee del campo magnetico sono sempre **chiuse**. Il campo magnetico è infatti **solenoidale**:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$



Per lo stesso motivo la circuitazione  $\Gamma$  sarà in generale non nulla come anche il rotore del campo magnetico:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &\neq 0 \\ \nabla \wedge \vec{B} &\neq 0 \end{aligned}$$

È possibile dunque concludere che **il campo magnetico non è conservativo**.

### ▼ 10.1 - Campo elettromagnetico

## Magneti e cariche elettriche

Sperimentalmente è possibile osservare che non c'è interazione tra magneti e cariche elettriche ferme, ma tale interazione sussiste per magneti e cariche elettriche in movimento. È possibile dunque concludere che anche le correnti elettriche generano dei campi magnetiche:

I campi magnetici sono generati da cariche in movimento sia **macroscopicamente** (correnti) che **microscopicamente** (magneti).

## Prima legge di Laplace

La **prima legge di Laplace** afferma che per un tratto di filo infinitesimo  $d\vec{l}$  percorso da corrente  $i$ , sperimentalmente si osserva che il campo magnetico generato a distanza  $\vec{r}$  vale:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

dove  $\mu_0$  è la **permeabilità magnetica nel vuoto** e vale  $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ .

## Seconda legge di Laplace

Un tratto di filo percorso da corrente ed immerso in un campo di induzione magnetica subisce una forza descritta dalla seguente formula:

$$d\vec{F} = id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

dove la direzione ed il verso di  $d\vec{l}$  sono determinati dalla corrente che circola nel filo.



## Forza di Lorentz

Una singola carica puntiforme  $q$ , in moto con velocità  $\vec{v}$ , in presenza di un campo magnetico  $\vec{B}$ , subisce una forza detta **forza di Lorentz**:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

### Dimostrazione

Siccome le cariche elettriche interagiscono sia con il campo elettrico che con quello magnetico, se entrambi i campi sono presenti tale forza si scrive:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

## Moto di cariche in campi magnetici

Studiamo il moto di una carica  $q$  che si muove con velocità costante  $\vec{v}$  perpendicolarmente ad un campo magnetico uniforme.

La forza di Lorentz  $\vec{F}$  è ortogonale a velocità e campo magnetico, dunque la carica si muove di moto circolare uniforme di cui  $\vec{F}$  è la forza centripeta.

Possiamo ricavare il raggio di curvatura di tale moto esprimendo la forza centripeta in termini di moto circolare uniforme e di forza di Lorentz:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} = m(\cancel{\frac{dv}{dt}}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{n}) = m\frac{v^2}{R}\hat{n} \\ \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB\hat{n} \\ \Rightarrow m\frac{v^2}{R}\hat{n} = qvB\hat{n} \\ \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \end{cases}$$

### Teorema di equivalenza di Ampere

Una spira percorsa da corrente immersa in un campo magnetico si comporta come un dipolo magnetico elementare con un **momento magnetico**  $\vec{m} = iS\hat{n}$ .

Il momento magnetico è perpendicolare al piano della spira e orientato con la regola della mano destra.

#### Circuito in un campo magnetico

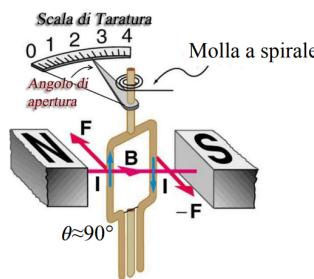
Considerando un circuito immerso in un campo magnetico  $B$  e percorso da una corrente elettrica  $i$ .

La **forza totale** sul circuito sarà  $\vec{F} = i \oint d\vec{l} \cdot \vec{B}$ .

Il **momento totale** sul circuito sarà  $\vec{M} = \oint \vec{r} \wedge d\vec{F}$ . È inoltre possibile dimostrare che il momento delle forze è uguale al prodotto vettoriale del momento magnetico della spira per il campo induzione magnetica  $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = iS\hat{n}\vec{B}$ .

#### Galvanometro

Il galvanometro è un dispositivo che misura l'intensità di corrente di un circuito. Lo fa inserendo tale circuito all'interno di un campo magnetico e misurando tramite una molla a spirale l'angolo di rotazione del circuito causata dalla presenza di corrente all'interno di un campo.



Il valore della corrente può essere ricavato eguagliando il momento delle forze elastiche dato dalla molla al momento delle forze magnetiche:

$$\begin{cases} M_{molla} = -k\alpha \\ M_M = -iSB \end{cases} \Rightarrow i = \frac{k\alpha}{SB}$$

con  $\alpha$  l'angolo di apertura della molla.

#### Motore elettrico

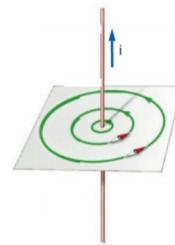
Il **motore elettrico** trasforma energia elettrica in energia meccanica. Lo fa utilizzando una spira percorsa da corrente la quale genera un campo magnetico in grado di far ruotare una bobina costituita da un materiale conduttore. Per mantenere la rotazione sempre nello stesso senso si usano delle spazzole in contatto sul commutatore per invertire il verso della corrente nella spira.

### Legge di Biot-Savart

La **legge di Biot-Savart** afferma che il campo magnetico generato da un filo di lunghezza indefinita percorso da una corrente  $i$  corrisponde a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_t$$

Le linee di tale campo magnetico sono circonferenze nel piano trasverso al filo, centrate sul filo stesso, e l'orientamento di esse segue la regola della mano destra.



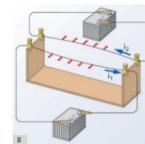
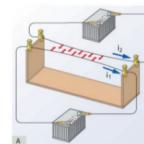
### Esperimento di Ampere

L'**esperimento di Ampere** evidenzia la forza tra due fili percorsi da corrente.

Se le correnti  $i_1$  e  $i_2$  sono dirette nello stesso verso i due fili si attrarranno con le seguenti forze (ricavate tramite la legge di Biot-Savart e la seconda legge di Laplace):

$$\begin{cases} dF_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} dl_2 \\ dF_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} dl_1 \end{cases}$$

Nel caso in cui le correnti sono di segno opposto i due fili si respingeranno con la stessa forza del primo caso.



### Campo magnetico da carica puntiforme in moto

Riformulando la prima legge di Laplace utilizzando la densità di corrente si può ricavare che una singola carica in movimento genera un campo magnetico che a distanza  $r$  dalla carica vale:

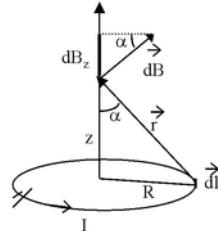
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Dimostrazione

### Campo magnetico da spira circolare su asse

Il campo magnetico sull'asse  $z$  di una spira circolare di raggio  $R$  percorsa da una corrente  $i$  equivale a:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



### Teorema di Stokes

Il **teorema di Stokes** afferma che il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie  $A$  aperta e orientata è uguale alla circuitazione del campo vettoriale lungo il bordo  $\Gamma$  di tale superficie:

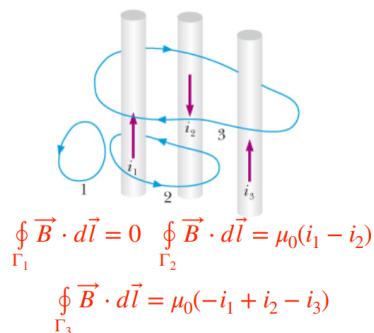
$$\iint_{S(\Gamma)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

### Legge di Ampere

La **legge di Ampere** afferma che la circuitazione del campo magnetico è proporzionale alla somma delle correnti concatenate:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k^{conc} i_k$$

Il segno delle correnti si valuta usando la regola della mano destra.



### Legge di Ampere in forma locale

La legge di Ampere in forma locale afferma che in ogni punto dello spazio, il rotore del campo magnetico è proporzionale alla densità di corrente in quel punto:

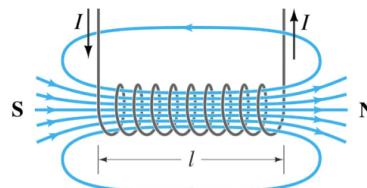
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

## Solenoide

Il campo magnetico generato da un **solenoide** è il seguente:

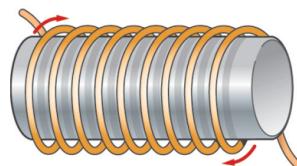
$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{L} i \hat{k} & \text{interno} \\ 0 & \text{esterno} \end{cases}$$

dove  $N$  rappresenta il numero di spire del solenoide e  $L$  la sua lunghezza.



Nel caso in cui la parte interna di un solenoide venisse **riempita**, si osserverà una variazione del campo magnetico a seconda del materiale utilizzato:

- Materiali **diamagnetici**: leggera diminuzione.
- Materiali **paramagnetici**: leggero aumento.
- Materiali **ferromagnetici**: considerevole aumento.



## Tipologie di materiali magnetici

Per spiegare il magnetismo nella materia occorre partire dalla struttura microscopica. In un modello molto semplificato possiamo pensare gli elettroni più esterni in rotazione intorno al nucleo.

Per questo motivo viene creato un **momento magnetico orbitale** generato dagli elettroni in movimento equivalente a:

$$\vec{m}_o = -\frac{q_e}{2m_e} \vec{p}_o$$

Oltre al momento magnetico orbitale, si può osservare che gli elettroni hanno un ulteriore **momento magnetico di spin**, generato dal fatto che gli elettroni ruotano attorno al proprio asse, che vale:

$$\vec{m}_s = -\frac{q_e}{m_e} \vec{p}_s$$

Il **momento magnetico totale** è dato dunque da una combinazione di momento orbitale e di spin. In base alle tipologie di momento magnetico generato, è possibile suddividere i materiali in 3 diverse categorie.

### Materiali diamagnetici

In questi materiali, l'effetto di un campo magnetico esterno è quello di deviare la traiettoria degli elettroni in moto per via della forza di Lorentz, inducendo una variazione di velocità e quindi una diminuzione della frequenza di rotazione.

L'effetto complessivo è una **diminuzione del momento magnetico**, che va ad opporsi leggermente al campo magnetico esterno.

In genere questo tipo di materiali hanno un numero pari di elettroni e una struttura simmetrica.

### Materiali paramagnetici

In questi materiali gli atomi si comportano come dipoli magnetici che per effetto di un campo magnetico esterno tendono ad allinearsi con esso, contribuendo ad **aumentarne** leggermente il valore.

I materiali paramagnetici sono caratterizzati da un numero dispari di elettroni o da strutture atomiche asimmetriche.

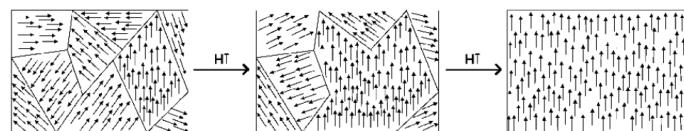
### Materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici microscopicamente hanno una configurazione elettronica per cui si creano forti interazioni tra momenti orbitali e momenti di spin. Tali interazioni comportano che momenti magnetici di atomi adiacenti si accoppiano, aumentando considerevolmente il loro effetto magnetico rispetto al singolo atomo.

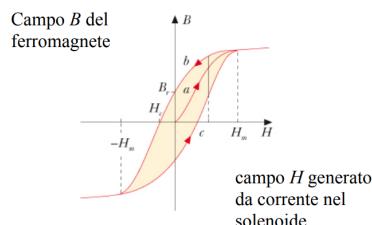
All'interno del materiale si creano regioni formate da numerosi dipoli allineati, chiamati **domini di Weiss**.

Quando un materiale ferromagnetico viene posto in un campo magnetico esterno i momenti si allineano con il campo magnetico, generando un allargamento dei domini di Weiss.

Ponendo campi magnetici sempre più intensi, si arriva ad una condizione di saturazione.



Inoltre i materiali ferromagnetici mantengono una magnetizzazione residua anche fuori dal campo magnetico, e tale permeabilità magnetica non è costante, ma governata dal **ciclo di isteresi**.



Se infatti inseriamo un cilindro di materiale ferromagnetico all'interno di un solenoide notiamo che aumentando il campo si percorre una curva detta di prima magnetizzazione. Se successivamente tale campo viene diminuito fino ad azzerarlo nel materiale si ha una magnetizzazione residua, la quale si riesce ad eliminare solo invertendo il campo.

## ▼ 10.2 - Campi variabili nel tempo

### Legge di Ampere-Maxwell

La legge di Ampere-Maxwell afferma che:

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dimostrazione

Il rotore del campo magnetico è dunque proporzionale alla somma della densità di corrente di conduzione e alla variazione del campo elettrico.

In altre parole, il campo magnetico può essere generato da cariche in moto e da campi elettrici variabili nel tempo.

### Legge di Faraday-Neumann-Lenz

La **legge di Faraday-Neumann-Lenz** afferma che la variazione temporale del flusso di un campo magnetico induce una forza elettromotrice:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

La forza elettromotrice indotta si oppone alla variazione del flusso che l'ha generata.

#### Forma locale della legge di Faraday-Neumann-Lenz

Un campo magnetico variabile nel tempo è una sorgente di campo elettrico:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Il campo elettrico può essere quindi generato da campi magnetici variabili nel tempo oppure da cariche elettriche.

Il campo elettrico indotto dalla variazione di un campo magnetico ha rotore non nullo, dunque non è conservativo, mentre quello generato da cariche elettriche ha sempre rotore nullo ed è conservativo.

### Autoinduzione

Come abbiamo visto, un circuito percorso da corrente genera un campo magnetico. Tale campo avrà un flusso concatenato con il circuito stesso, proporzionale alla corrente:

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

dove  $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$  è detto coefficiente di autoinduzione, e si misura in  $H$ .

Nel caso in cui la corrente vari nel tempo, nel circuito verrà dunque generata una  **$\mathcal{E}$  autoindotta** data dalla variazione del flusso del campo magnetico, la quale si oppone alla variazione di corrente che l'ha generata e vale:

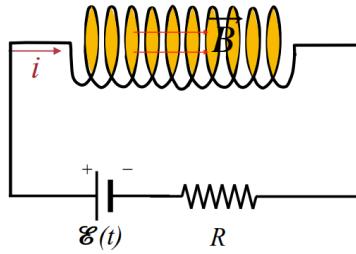
$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

### Induttanze

Un solenoide inserito all'interno di un circuito percorso da corrente variabile nel tempo viene detto **induttanza** e si comporta come un generatore di forza elettromotrice (autoindotta) con polarità opposta alla variazione di corrente.

Nel caso di un circuito con una sola induttanza e una sola resistenza l'equazione di tale circuito sarebbe dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_{autoindotta} &= Ri(t) \\ \implies \mathcal{E}(t) - L \frac{di(t)}{dt} &= Ri(t) \end{aligned}$$



### Induttanze in serie

In un circuito **induttanze in serie** sono percorse dalla stessa corrente e il sistema formato da tali induttanze ha un coefficiente di autoinduzione pari alla somma dei coefficienti di autoinduzione delle singole induttanze.

$$\begin{cases} \Delta V_{tot} = -L_{tot} \frac{di(t)}{dt} \\ L_{tot} = \sum_i L_i \end{cases}$$

### Induttanze in parallelo

In un circuito **induttanze in parallelo** presentano ai propri poli la stessa differenza di potenziale e l'inverso del coefficiente di autoinduzione del sistema formato da tali induttanze ha un valore pari alla somma degli inversi dei coefficienti di autoinduzioni delle singole induttanze.

$$\begin{cases} \Delta V_{tot} = -L_{tot} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{1}{L_{tot}} = \sum_i \frac{1}{L_i} \end{cases}$$

### Energia magnetica nelle induttanze

Siccome un'induttanza percorsa da corrente variabile nel tempo si comporta come un generatore con polarità opposta alla variazione corrente, per far innalzare la corrente nel circuito occorre far spostare una carica che deve contrastare la  $\mathcal{E}$  autoindotta, ovvero bisogna svolgere un lavoro contro tale forza.

Tale **lavoro**, per innalzare la corrente da un valore nullo a un valore  $i$ , è equivalente a:

$$\mathcal{L} = \int_0^i L i \, di = \frac{1}{2} L i^2$$

Tale lavoro accumula un'**energia magnetica** nell'induttanza pari a:

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

### Densità di energia magnetica

La **densità di energia del campo magnetico** viene definita come:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'**energia magnetica** è localizzata in ogni punto dello spazio in cui è presente il campo magnetico e si calcola come l'integrale sul volume in tutto lo spazio in cui è presente il campo magnetico:

$$U_B = \iiint_{\tau} u_B \, d\tau$$

### Equazioni di Maxwell

Riassumiamo le **quattro equazioni di Maxwell**, le quali descrivono completamente l'elettromagnetismo. A partire da esse è possibile ricavare tutte le leggi dell'elettromagnetismo, e da esse si evince che i campi elettrico e magnetico sono strettamente legati tra di loro e che essi sono due modi di manifestarsi della stessa entità chiamata campo elettromagnetico.

**Forma differenziale**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

**Forma integrale**

$$\iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k^{conc} (i_c + i_s)$$

Onde elettromagnetiche