

Analisi matematica II

Matteo Lombardi

Indice

1.0 - Integrali

1.1 - Somma di Riemann

1.2 - Integrale

1.3 - Funzioni integrali e primitive elementari

1.4 - Integrazione per parti, cambio variabile e integrali generalizzati

2.0 - Spazio euclideo

2.1 - Operazioni nello spazio euclideo

2.2 - Vettori

2.3 - Successioni e funzioni nello spazio euclideo

3.0 - Derivate e differenziabilità

3.0 - Derivate parziali

3.1 - Differenziabilità

3.2 - Derivate direzionali

3.3 - Direzione di massima crescita

3.4 - Curve: velocità, derivate e insiemi di livello

4.0 - Punti critici e forme quadratiche

4.1 - Tipologie di punti critici

4.2 - Derivate parziali seconde e forme quadratiche

4.3 - Teorema di Taylor

4.4 - Teorema di classificazione dei punti critici

5.0 - Integrale doppio

5.1 - Insiemi semplici

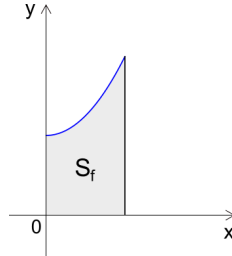
5.2 - Integrale doppio

6.0 - Cambio di variabile

▼ 1.0 - Integrali

Gli **integrali** sono utili per calcolare l'**area delle figure curvilinee**.

Con essi è infatti possibile determinare l'area del **sottografo** di una certa funzione curvilinea. Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in [a, b]. f(x) \geq 0$, il suo sottografo corrisponde a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$:

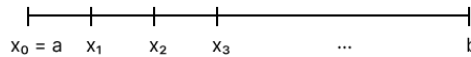


Sottografo di una funzione.

▼ 1.1 - Somma di Riemann

Scomposizione di un intervallo

Dato un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e un numero $n \in \mathbb{N}$, divido $[a, b]$ in n parti uguali:



Ogni k -esima x dell'intervallo è ricavabile tramite: $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

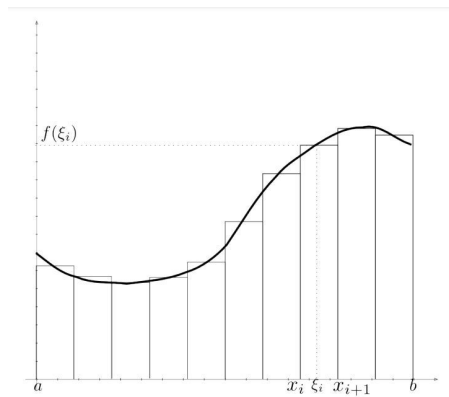
Per ogni parte dell'intervallo scelgo un suo punto interno $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Somma di Riemann

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, definiamo la **somma di Riemann** come segue:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k)h = \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n}$$

Nota: S_n **dipende** dalla scelta dei vari c_k , la quale è arbitraria.



Somma di Riemann.

▼ 1.2 - Integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (non dipende dalla scelta dei punti c_k). Si è soliti scrivere tale limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ come $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$ e si dice che f è **integrabile**.

Osservazioni

- $\int_a^a f(x) dx = 0$ e $\int_a^b c dx = c(b - a)$.
- L'integrale $\int_a^b f(x) dx$ è un numero e indica l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Proprietà dell'integrale

1. Linearità

f, g continue su $[a, b]$. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. Additività

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

I reali a, b e c possono trovarsi in qualunque posizione, non devono per forza essere nell'ordine $a < b < c$.

3. Monotonia

f, g continue su $[a, b]$.

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. Convenzione

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

Teorema della media integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora $\exists c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dimostrazione

Siccome f è continua in $[a, b]$, è possibile utilizzare il teorema di Weierstrass in tale intervallo e affermare che $\exists x_1, x_2$ punti di minimo e massimo in $[a, b]$.

Per definizione di punti di minimo e massimo sappiamo che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$.

Per la proprietà di monotonia dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x_1) dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x_2) dx \\ \implies f(x_1)(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq f(x_2)(b-a) \\ \implies f(x_1) &\leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq f(x_2) \end{aligned}$$

Per il teorema dei valori intermedi:

$$\exists c \in [a, b] \text{ tale che } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$$

qed

Primitiva di una funzione

Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, la funzione $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si dice **primitiva** di f su $]a, b[$ se vale:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$$

Proposizioni

- Se F è la primitiva di f su $]a, b[$, allora anche $H :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(x) + c$ è primitiva di $f \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

Le primitive di una funzione f sono dunque infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a $F(x) + c$, dove c è uno scalare.

- Siano F e G primitive di f su $]a, b[$. Allora:

$$\exists k \in \mathbb{R}, F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione

Sia $H :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(x) - G(x)$.

Calcoliamo la derivata di $H(x)$, ovvero $H'(x) = F'(x) - G'(x)$, che per definizione di primitiva diventa $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Siccome la derivata di $H(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$, allora $H(x)$ è costante in $]a, b[$, dunque $H(x) = F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in]a, b[$.

qed

▼ 1.3 - Funzioni integrali e primitive elementari

Funzione integrale

Sia $f :]a_0, b_0[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $c \in]a_0, b_0[$, la **funzione integrale di punto base c** è la funzione $I_c :]a_0, b_0[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

Osservazioni

- La funzione integrale rappresenta l'area sottesa al grafico di f da un certo punto base c fino a x .

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua in $]a, b[$ e sia $c \in]a, b[$, allora:

$$I'_c(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione

Bisogna dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$.

Sviluppiamo il numeratore del limite utilizzando la definizione di funzione integrale $I_c(x+h) - I_c(x) = \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt$.

Utilizziamo le proprietà dell'integrale $\int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$ e abbiamo dimostrato che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$.

Per il teorema della media integrale:

$$\exists c \in]x, x+h[\text{ tale che } \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Notiamo che $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ è equivalente al contenuto del limite da dimostrare, dunque ci basta dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$. Visto che $c \in]x, x+h[$, se $h \rightarrow 0$ allora $c \rightarrow x$, quindi $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$.

qed.

Teorema fondamentale del calcolo integrale 2 - Formula di Torricelli

Sia f continua su $]a, b[$ e sia F la primitiva di f su $]a, b[$, allora:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione

Sia $c \in]a, b[$. Sappiamo per ipotesi che $F(x)$ e $I_c(x)$ sono due primitive di $f(x)$ in $]a, b[$, dunque $F(x) - I_c(x) = k \quad \forall x \in]a, b[\implies F(x) = I_c(x) + k \quad \forall x \in]a, b[$.

Partendo da $F(b) - F(a)$ e passando per la definizione di funzione integrale $I_c(x)$ dimostriamo che $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= I_c(b) + k - I_c(a) - k = I_c(b) - I_c(a) \\ &= \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

qed.

Primitive elementari

$$\begin{aligned} \int k &\rightarrow kx \\ \int x^\alpha, \alpha \neq -1 &\rightarrow \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \int x^{-1} &\rightarrow \ln |x| \\ \int a^x &\rightarrow \frac{a^x}{\ln a} \quad [\int e^x \rightarrow e^x] \\ \int \sin x &\rightarrow -\cos x \\ \int \cos x &\rightarrow \sin x \\ \int 1 + \tan^2 x &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \tan x \\ \int 1 + \cot^2 x &= \int \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow -\cot x \\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\rightarrow \arccos x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\rightarrow \arcsin x \\ \int \frac{1}{1+x^2} &\rightarrow \operatorname{arctg} x \\ \int f'(g(x))g'(x) &\rightarrow f(g(x)) \end{aligned}$$

▼ 1.4 - Integrazione per parti, cambio variabile e integrali generalizzati

Integrazione per parti

Per integrare un prodotto può essere talvolta utilizzata la seguente formula di **integrazione per parti**:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Nota: per integrare $\int \sin x e^x$ occorre utilizzare due volte la formula di integrazione per parti.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \implies f'(x)g(x) &= d(f(x)g(x)) - f(x)g'(x) \\ \implies \int f'(x)g(x) &= \int d(f(x)g(x)) - \int f(x)g'(x) \\ \implies \int f'(x)g(x) &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \end{aligned}$$

qed.

Formula per il cambio variabile

Siano I, J intervalli aperti, sia $h : I \rightarrow J$ una funzione con derivata h' continua su I e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t) dt$$

Osservazioni

- Integrali del tipo $\int_a^b g(f(x))f'(x) dx$ possono essere risolti sostituendo a $f(x)$ una variabile come z , e visto che $dz = f'(x) dx$ possiamo arrivare all'integrale $\int_a^b g'(x) dx$. Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo dunque concludere che $\int_a^b g(f(x))f'(x) dx = [g(x)]_a^b$.

Caso particolare: $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x)$.

Integrali generalizzati

Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato su** $[a, +\infty[$ se:

$$\exists \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x) dx := \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

La definizione per $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ è omessa perchè analoga.

Osservazioni

- Se $f(x) \geq 0$ su $[a, +\infty[$ e $\int_a^{+\infty} f(x)$ converge, allora tale integrale esprime l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, +\infty[$.

Esercizio:

▼ Studiare l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \forall p > 0$

- Esponente $1 - p < 0 \implies p > 1$: la prima frazione del limite tende a $+\infty$ e l'integrale diverge, dunque vale $+\infty$.
- Esponente $1 - p > 0 \implies p < 1$: la prima frazione del limite tende a 0 e l'integrale è dunque uguale a $\frac{1}{p-1}$.

Per studiare tale integrale occorre dunque studiare il seguente limite: $\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{dx}{x^p}$.

A questo punto il valore dell'integrale dipende dal valore del parametro p in quanto questo determina il valore dell'esponente di z :

- Esponente $p \neq 1$: il limite da valutare è $\lim_{z \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$, il quale dipende a sua volta dal valore dell'esponente di z :
- Esponente $1 - p = 0 \implies p = 1$: il limite da valutare è $\lim_{z \rightarrow +\infty} [\ln(x)]_1^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \ln(z) - \ln(1)$, dunque l'integrale diverge, ovvero vale $+\infty$.

Sia $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx$$

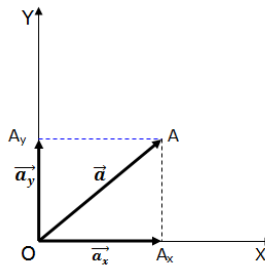
▼ 2.0 - Spazio euclideo

Lo spazio \mathbb{R}^n o **spazio euclideo** è definito nel seguente modo:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

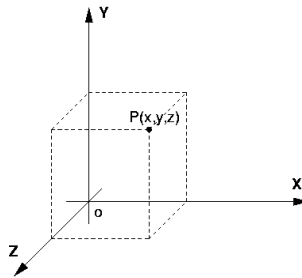
Esempi di spazi euclidei:

- \mathbb{R}^2 = piano cartesiano. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio \mathbb{R}^2 .

- \mathbb{R}^3 = spazio ordinario. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio \mathbb{R}^3 .

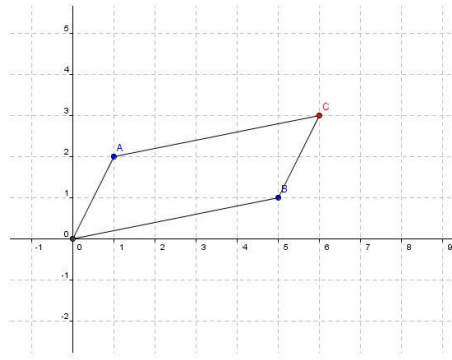
▼ 2.1 - Operazioni nello spazio euclideo

Somma tra vettori

Dati due vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, definiamo la **somma** tra di essi come:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

La somma tra vettori nello spazio \mathbb{R}^2 può essere visualizzata in maniera grafica tramite la regola del parallelogramma:



Regola del parallelogramma.

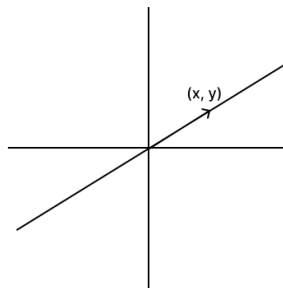
Prodotto con scalare

Dato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto con scalare come:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

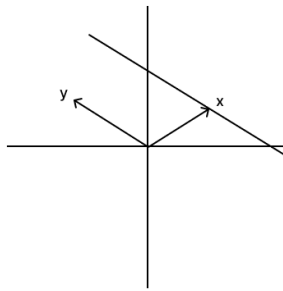
Il prodotto con scalare nello spazio \mathbb{R}^2 può essere visualizzato in maniera grafica tramite un cambiamento della lunghezza e/o direzione del vettore di partenza.

Inoltre, se il vettore di partenza è un vettore non nullo, ovvero $x \neq (0, \dots, 0)$, allora l'insieme $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta generata dal vettore x .



Retta generata da un vettore tramite prodotto con scalare.

Se partiamo da due vettori non nulli invece l'insieme $\{x + ty \mid t \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta passante per x avente direzione e verso del vettore y .



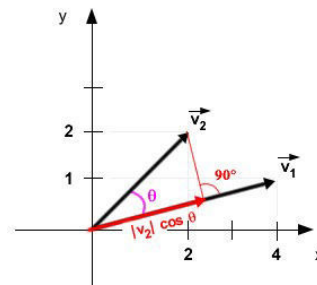
Retta generata dalla somma di un vettore e un prodotto con scalare.

Prodotto scalare euclideo

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo il prodotto scalare euclideo come:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Possiamo visualizzare in maniera grafica il prodotto scalare in \mathbb{R}^2 come il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori per la lunghezza della componente x dell'altro vettore rispetto al vettore iniziale:



Visualizzazione grafica del prodotto scalare nel piano cartesiano.

Proprietà

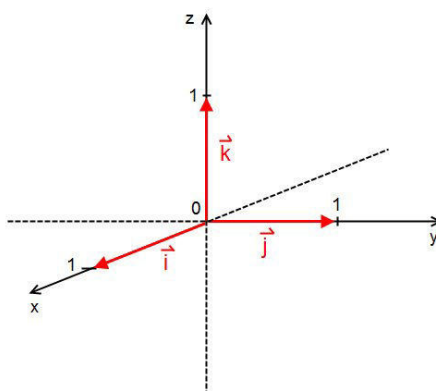
1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
 - $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

▼ 2.2 - Vettori

Vettori standard

In uno spazio vettoriale di dimensione n , ci sono n vettori standard i quali hanno tutte le componenti uguali a zero tranne una, che è uguale a 1:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

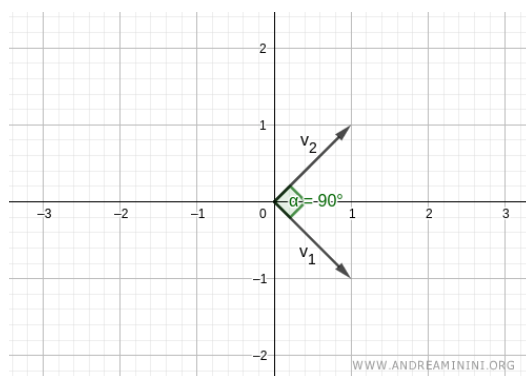


Visualizzazione grafica dei vettori standard dello spazio \mathbb{R}^3 .

Ortogonalità/Perpendicolarità tra vettori

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali/perpendicolari** se $\langle x, y \rangle = 0$.

L'ortogonalità/perpendicolarità può anche essere visualizzata per due vettori $\in \mathbb{R}^2$. Prendiamo infatti ad esempio due vettori $x = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $y = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Possiamo verificare che tali vettori sono ortogonali calcolando il loro prodotto euclideo $\langle x, y \rangle = -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$. Concludiamo dunque che tutti i vettori che differiscono di un angolo $\frac{\pi}{2}$ sono perpendicolari tra loro.



Visualizzazione grafica di 2 vettori ortogonali tra loro nel piano cartesiano.

Proposizioni

- Il **vettore nullo** è perpendicolare a tutti i vettori, infatti $\sum_{k=1}^n 0y_k = 0$.
- In \mathbb{R}^n i vettori standard e_1, \dots, e_n sono ortogonali tra loro.

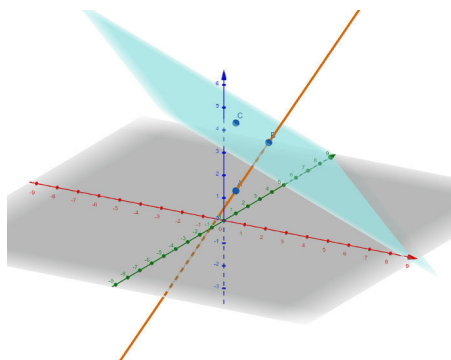
Esercizi:

- ▼ Dato il vettore $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$, trovare un vettore $x = (x, y, z) \perp v$ diverso dal vettore nullo.

Occorre impostare l'equazione $\langle x, v \rangle = 0$, ovvero $x + 2y + 3z = 0 \implies x = -2y - 3z$.

Abbiamo dunque trovato che l'insieme $\{(-2y - 3z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ è un insieme di vettori perpendicolari al vettore v .

Osserviamo che l'insieme trovato rappresenta un piano, infatti ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tranne il vettore nullo identifica un piano di vettori perpendicolari ad esso.



Visualizzazione grafica di un piano perpendicolare ad un vettore.

- ▼ Trovare il rapporto dei parametri m e p affinché le due rette $y = mx$ e $y = px$ siano ortogonali.

Costruiamo i vettori corrispondenti alle due rette: $(1, m)$ e $(1, p)$.

Impostiamo l'equazione $\langle (1, m), (1, p) \rangle = 1 + mp = 0$, ovvero $p = -\frac{1}{m}$.

Norma euclidea

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo la **norma euclidea** nel seguente modo:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$$

Nota: le notazioni $\|x\|$ e $|x|$ sono equivalenti.

Proposizioni

- **Teorema di pitagora generalizzato in \mathbb{R}^n :** se $x \perp y$ in \mathbb{R}^n , allora $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, che è equivalente, in \mathbb{R}^2 , al quadrato della lunghezza della diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori x e y .

Dimostrazione

Per ipotesi abbiamo che $\langle x, y \rangle = 0$.

Dimostriamo la formula del quadrato di un binomio generalizzata sui vettori ($|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$). Sappiamo che $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$, utilizziamo la proprietà della linearità del primo argomento per ricavarci $\langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$ e la linearità del secondo argomento per ottenere $\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$, dalla quale, visto che $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, otteniamo infine che $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Utilizziamo dunque la formula del quadrato di un binomio generalizzata appena dimostrata e per ottenere che $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y \rangle| = |x|^2 + |y|^2 + 0$, qed.

Esempio:

- In \mathbb{R}^2 , $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- In \mathbb{R}^3 , $|(a, b, c)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Notiamo che la norma di un vettore indica la "lunghezza" di tale vettore.

Proprietà

1. $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
 - a. $|x| = 0 \iff x = \langle 0, \dots, 0 \rangle$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$

La possiamo anche leggere come $len(x + y) \geq len(x) + len(y)$, ovvero la **disuguaglianza triangolare**.

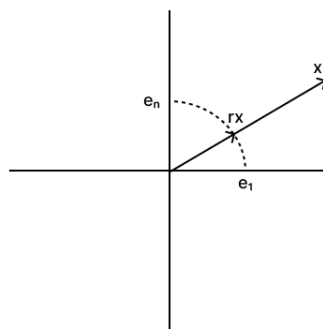
Normalizzato di un vettore

Il normalizzato di un vettore consiste in quell'unico vettore positivo multiplo del vettore di partenza che ha come norma 1.

Dobbiamo dunque trovare uno scalare $r > 0$ tale che $|rx| = 1$. Scomponiamo la norma in questo modo $|r||x| = r|x| = 1$ e otteniamo che $r = \frac{1}{|x|}$. Il vettore normalizzato $|rx|$ vale dunque $\frac{x}{|x|}$.

Dato il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, il **normalizzato** di x è l'unico vettore positivo multiplo di x che ha norma 1, e vale:

$$\frac{x}{|x|}$$



Visualizzazione grafica del normalizzato di un vettore.

Esercizi:

- ▼ Trovare il normalizzato di $x = (2, 3)$

Per trovare il normalizzato di x occorre calcolare il prodotto scalare $\frac{x}{|x|}$.

Calcoliamo dunque $|x|$, il quale è uguale a $|(2, 3)| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Infine calcoliamo il normalizzato come $\frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.

▼ Trovare il normalizzato di $x = (14, 21, -28)$

Per semplificarci i calcoli osserviamo che $\frac{x}{|x|} = \frac{\lambda x}{|\lambda x|}$, dunque possiamo calcolare il normalizzato nel seguente modo: $\frac{(14,21,-28)}{|(14,21,-28)|} = \frac{(2,3,-4)}{|(2,3,-4)|} = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}})$.

Coordinate polari di un vettore

Osserviamo che dato un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, $x = |x| \frac{x}{|x|}$.

Visto che $\frac{x}{|x|}$ è il normalizzato del vettore e ha lunghezza 1, esso, se il vettore x appartiene a \mathbb{R}^2 , può anche essere scritto in questo modo: $(\cos \theta, \sin \theta)$.

Utilizziamo inoltre la notazione $r := |x|$ e scriviamo il vettore x come $r(\cos \theta, \sin \theta)$.

Concludiamo dunque che è possibile descrivere un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^2$ tramite l'utilizzo di due parametri, detti **coordinate polari**: (r, θ) .

Esercizi:

▼ Trovare le coordinate polari del vettore $(0, 3)$

Per trovare le coordinate polari dobbiamo calcolare il valore dei due parametri r e θ .

Sappiamo che $r = |(0, 3)| = 3$, dunque $x = 3y$, dove y è un vettore che moltiplicato a 3 restituisce x . Troviamo dunque facilmente che $y = (0, 1)$ e, avendo che $\cos \theta = 0$ e $\sin \theta = 1$, otteniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Concludiamo dunque che il vettore $(0, 3)$ può essere scritto in coordinate polari come $(3, \frac{\pi}{2})$.

Prodotto scalare in coordinate polari

Presi due vettori $x = r(\cos \theta, \sin \theta)$ e $y = p(\cos \phi, \sin \phi)$, risulta:

$$\langle x, y \rangle = rp \cos(\theta - \phi) = |x||y| \cos(\theta - \phi)$$

Dove $\theta - \phi$ è l'angolo compreso tra i due vettori.

Disuguaglianza Cauchy-Schwarz

Per ogni vettore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente **disuguaglianza**:

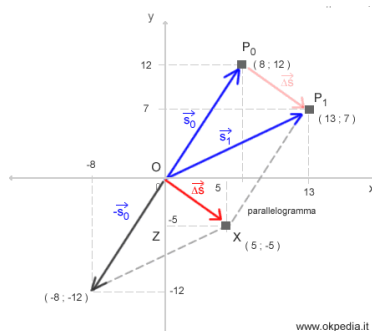
$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Notiamo che l'uguaglianza vale solo nel caso in cui i due vettori sono dipendenti tra loro, dunque in \mathbb{R} giacciono sulla stessa retta.

Distanza tra due vettori in \mathbb{R}^n

La **distanza tra due vettori/punti** in \mathbb{R}^n può essere calcolata tramite la formula:

$$|x - y|$$



Esempio grafico di distanza tra due vettori.

Intorni sferici/palle

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $r > 0$, possiamo costruire l'insieme intorno sferico/palla con centro x e raggio r in questo modo:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$$

▼ 2.3 - Successioni e funzioni nello spazio euclideo

Successioni in \mathbb{R}^n

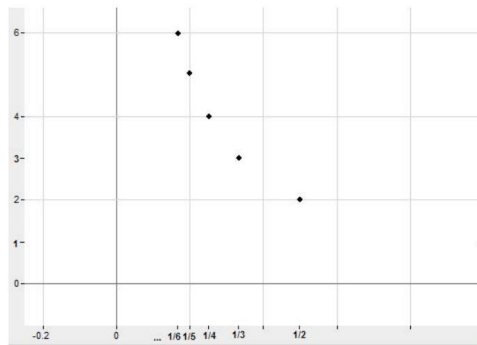
Una **successione** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n è una collezione di n successioni in \mathbb{R} :

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$$

Esempio:

- $(\frac{1}{k}, k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione in \mathbb{R}^2 .

È possibile visualizzare alcuni dei punti che fanno parte di questa successione nella seguente figura:



Successione $(\frac{1}{k}, k)$.

Successione convergente

Data una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n e un vettore $a = (a_1, \dots, a_n)$ si dice che:

$$x_k \underset{\text{converge}}{\rightarrow} a \text{ per } k \rightarrow \infty \iff \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^1 = a_1 \\ \dots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^n = a_n \end{cases}$$

Esempi:

- $(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k+1}) \rightarrow (0, 1)$, dunque la successione è convergente.
- $((-1)^k, \frac{1}{k})$ non è una successione convergente in quanto $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k$ è indefinito.

Funzioni

Dati 2 insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$ e data una funzione $f : A \rightarrow B$, il **grafico** di f può essere definito come l'insieme:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

Funzioni radiali

Le **funzioni radiali** sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x, y) = g(|(x, y)|) \quad g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

Esempi:

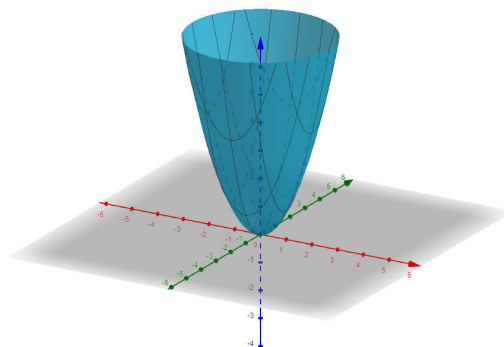
- $f(x, y) = x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$

Innanzitutto creiamo l'insieme grafico di tale funzione: $Graf(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Per disegnare tale grafico è utile scrivere (x, y) come $(r \cos \theta, r \sin \theta)$. In questo modo abbiamo che $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$.

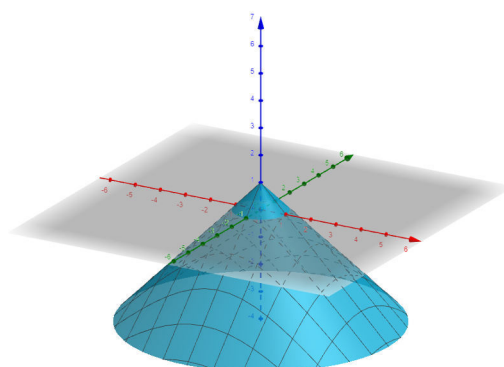
Riscriviamo dunque l'insieme grafico utilizzando le coordinate polari: $Graf(f) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, r^2) \mid r \geq 0\}$.

Notiamo dunque che l'insieme appena ottenuto descrive il grafico di una parabola nello spazio \mathbb{R}^3 :



- $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - |(x, y)|$

Il grafico di tale funzione è il seguente:



Funzioni affini

Le funzioni affini sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x, y) = ax + by + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

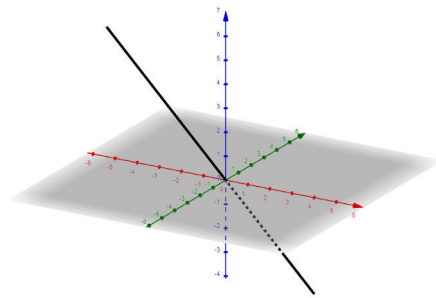
Notiamo che tali funzioni individuano insiemi grafici del tipo $Graf(f) = \{(x, y, ax + by + c) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, i quali descrivono dei piani in \mathbb{R}^3 .

Esempi:

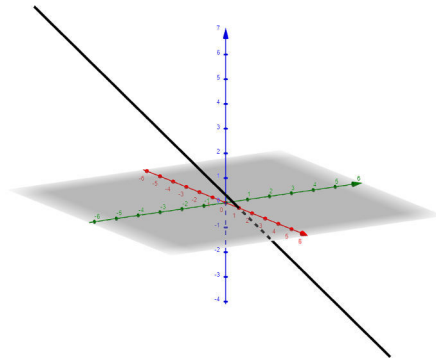
- $f(x, y) = -y$

Per disegnare il grafico di questa funzione è possibile effettuarne l'intersezione con due piani.

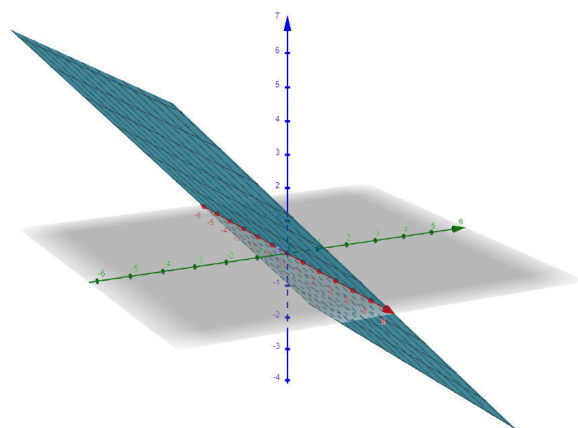
Intersechiamo con il piano $x = 0$ e otteniamo $Graf(f) \cap x = 0 : \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Intersechiamo ora con un altro piano, ad esempio $x = 1$, e otteniamo $Graf(f) \cap x = 1 : \{(1, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Tramite tali intersezioni possiamo dunque prevedere il grafico della funzione data, il quale è il seguente piano:



Funzioni continue

Sia $f : A \rightarrow B$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$), f si dice **continua** in \bar{x} se:

$$\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_k) \text{ successione in } A, x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \bar{x} \implies f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(\bar{x})$$

È possibile dimostrare che tale definizione di funzione continua è equivalente alla seguente:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ t.c. } |f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon \quad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta)$$

Proposizioni

- Tutte le **funzioni elementari** sono continue nei loro domini.

▼ 3.0 - Derivate e differenziabilità

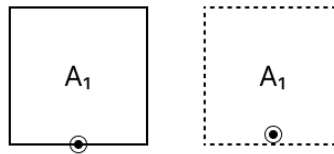
▼ 3.1 - Derivate parziali

Insiemi aperti in \mathbb{R}^n

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che A è **aperto** se $\forall \bar{x} \in A, \exists \epsilon > 0 \mid B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq A$, dove $B(\bar{x}, \epsilon)$ è l'intorno sferico di centro \bar{x} e raggio ϵ .

Esempio:

- Nella seguente figura osserviamo due insiemi, uno chiuso e uno aperto:



Notiamo che A_1 è un insieme chiuso in quanto esiste un $\bar{x} \in A_1$ che viola la definizione di insieme aperto, mentre in A_2 , preso un qualunque $\bar{x} \in A_2$, questo rispetta la definizione di insieme aperto.

Derivate parziali

Caso \mathbb{R}^2

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, poniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + t) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$$

Se i due limiti esistono finiti diciamo che f è **derivabile parzialmente** in (\bar{x}, \bar{y}) .

Inoltre, nel caso in cui f è derivabile parzialmente in (\bar{x}, \bar{y}) , è possibile definire il **gradiente** di f in (\bar{x}, \bar{y}) come:

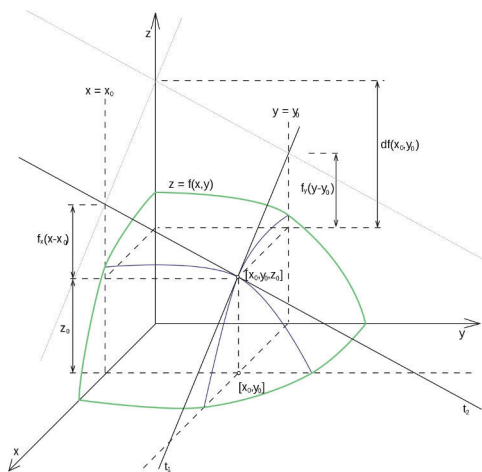
$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}), \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}))$$

È possibile altrimenti calcolare equivalentemente i due limiti nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{x - \bar{x}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{y \rightarrow \bar{y}} \frac{f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, \bar{y})}{y - \bar{y}}$$



Esempio grafico delle tangenti che consentono di determinare il valore delle derivate parziali nel punto (x_0, y_0) .

Esercizi:

▼ Sia $f(x, y) = xy^2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$.

Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$ occorre calcolare la derivata della funzione in funzione di x e trattare il parametro y come se fosse una costante, dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}^2$.

Lo stesso deve essere fatto per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$, dunque $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 2\bar{x}\bar{y}$.

Caso generale

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in A$, poniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + te_j) - f(\bar{x})}{t}$$

Dove $j \in \{1, \dots, n\}$ e e_j è il vettore standard avente un 1 in posizione j . Se i limiti esistono diciamo che f è **derivabile parzialmente** in \bar{x} .

Inoltre, nel caso in cui f è derivabile parzialmente in \bar{x} , è possibile definire il **gradiente** di f in \bar{x} come:

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

Esercizi:

- ▼ Sia $f(x, y, z) = \frac{xe^{z^2}}{x+y^2}$, calcolare il gradiente di f .

Determiniamo innanzitutto il dominio della funzione f , ovvero $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 \neq 0\}$.

Calcoliamo poi le 3 derivate parziali:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{ye^{z^2}}{(x+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{2xye^{z^2}}{(x+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2xze^{z^2}}{x+y^2}$

Possiamo dunque concludere che il gradiente di f è il seguente:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{ye^{z^2}}{(x+y^2)^2}, -\frac{2xye^{z^2}}{(x+y^2)^2}, \frac{2xze^{z^2}}{x+y^2} \right) \quad (\nabla f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}^3)$$

Matrice Jacobiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ tale che $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$, allora la **matrice Jacobiana** $J_f(x) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ di tale funzione è definita nel seguente modo:

$$J_{f(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_q & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_q \end{pmatrix}$$

▼ 3.2 - Differenziabilità

Legame tra derivabilità e continuità

L'esistenza della derivata parziale **non implica** la continuità.

Dimostrazione

È possibile dimostrare tale teorema attraverso un esempio. Prendiamo la seguente funzione:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Possiamo infatti dimostrare che:

- f è derivabile parzialmente in $(0, 0)$

Calcoliamo infatti le derivate parziali in $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

- f è discontinua in $(0, 0)$

Utilizziamo il metodo delle successioni e scegliendo la successione $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ troviamo che:

$$(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (0, 0), f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k} \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0$$

O-piccolo in \mathbb{R}^2

Sia $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p > 0$, si scrive $f(x, y) = o(|(x, y)|^p)$ se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | \quad \frac{f(x, y)}{|(x, y)|^p} \leq \epsilon \quad \forall (x, y) \mid |(x, y)| < \delta$$

Alternativamente:

$$\forall (x_n, y_n) \rightarrow (0, 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n, y_n)}{|(x_n, y_n)|^p} = 0$$

Proposizioni

- $f(x, y)$: polinomio di grado $> p \implies f(x, y) = o(|(x, y)|^p)$

Ad esempio, $x^3 + xy + 2y = o(|(x, y)|^2)$

Esercizi

- ▼ Verificare che $f(x, y) = x^2 = o(|(x, y)|)$

Per verificare ciò dobbiamo dimostrare che $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{|(x, y)|} = 0$.

Utilizziamo il teorema del confronto, sapendo che:

$$f(x, y) = 0 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \leq \frac{x^2}{|(x, y)|} \leq f(x, y) = \frac{|(x, y)|^2}{|(x, y)|} = |(x, y)| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Otteniamo dunque che $\frac{x^2}{|(x, y)|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$, verificando quindi il limite.

Funzione differenziabile

Caso generale

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, f è differenziabile in $\bar{x} \in A$ se:

- $\exists \partial_1 f, \dots, \partial_n f$ nel punto \bar{x}
- $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + o(|h|)$, dove $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Caso $n = 2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f è differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) se:

- $\exists \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}), \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})$
- $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|)$

Polinomio di Taylor di grado 1

Se f è differenziabile possiamo sviluppare l'equazione della derivabilità impostando $x = \bar{x} + h$ e $y = \bar{y} + k$ e ottenendo il cosiddetto polinomio di Taylor di grado 1 e punto iniziale (\bar{x}, \bar{y}) :

$$T(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle + o(|(x - \bar{x}, y - \bar{y})|)$$

Tale polinomio descrive il **piano tangente** al grafico di f nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.

Esercizi

- ▼ Trovare il piano tangente della funzione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(0, 0, 1)$.

Per trovare il piano tangente a tale funzione occorre calcolare il polinomio di Taylor di grado 1.

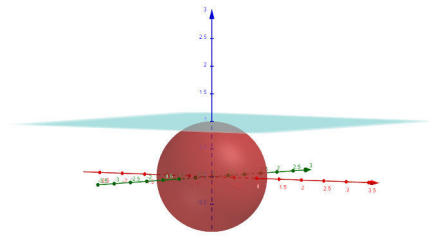
Riscriviamo innanzitutto l'equazione in funzione di $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (non inseriamo il \pm poichè dobbiamo calcolare la funzione nella parte positiva dell'asse z). Per fare ciò occorre prima di tutto calcolare le derivate parziali di f :

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\end{aligned}$$

Calcoliamo a questo punto il polinomio di Taylor ottenendo il piano:

$$\begin{aligned}z &= \sqrt{1 - 0 - 0} + \left\langle \left(-\frac{0}{\sqrt{1 - 0 - y^2}}, -\frac{0}{\sqrt{1 - x^2 - 0}}\right), (x - 0, y - 0)\right\rangle \\ &= 1 + 0x + 0y = 1\end{aligned}$$

Possiamo infatti visualizzare che il piano $z = 1$ è tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(0, 0, 1)$.



▼ Scrivere il polinomio di Taylor per la funzione $f(x, y, z) = xe^{x^2yz^2}$ in $(-1, 2, 1)$ dando per scontato che sia differenziabile.

Il polinomio di Taylor per funzioni con 3 variabili è il seguente:

$$T(x, y, z) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) \rangle + o(|(x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z})|)$$

Per calcolare dunque il gradiente di f nel punto $(-1, 2, 1)$ occorre calcolare innanzitutto le 3 derivate parziali:

$$\partial_x f = 5e^2, \quad \partial_y f = -e^2, \quad \partial_z f = -4e^2$$

A questo otteniamo il polinomio di Taylor nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= f(-1, 2, 1) + \langle (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f), (x + 1, y - 2, z - 1) \rangle + o(|(x + 1, y - 2, z - 1)|) \\ &= -e^2 + \langle (5e^2, -e^2, -4e^2), (x + 1, y - 2, z - 1) \rangle + o(|(x + 1, y - 2, z - 1)|) \\ &= -e^2 + 5e^2(x + 1) - e^2(y - 2) - 4e^2(z - 1) \end{aligned}$$

Proposizioni

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **differenziabile** in $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \implies f$ **continua** in (\bar{x}, \bar{y}) .

Dimostrazione:

Supponendo che f sia differenziabile, abbiamo che $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|)$, che per $h, k \rightarrow +\infty$ diventa $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, dimostrando la continuità.

Teorema della differenziabilità

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $\exists \partial_x f, \partial_y f$ in ogni punto e le funzioni $\partial_x f, \partial_y f$ sono continue, allora $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, f è **differenziabile** in (\bar{x}, \bar{y}) .

Lemma

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua con derivate prime continue $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, allora:

- $\forall h \in \mathbb{R}, \exists \theta \in [0, 1]$ tale che $f(a + h, b) - f(a, b) = \partial_x f(a + \theta h, b)h$
- $\forall k \in \mathbb{R}, \exists \bar{\theta} \in [0, 1]$ tale che $f(a, b + k) - f(a, b) = \partial_y f(a, b + \bar{\theta}k)k$

Dimostrazione lemma

- Definiamo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in questo modo: $g(x) = f(x, b) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Uso Lagrange per g nell'intervallo $[a, a + h]$. $\exists \theta \in [0, 1]$ tale che $g(a + h) - g(a) = g'(a + \theta h)(a + h - a)$, dunque, per definizione di $\partial_x f$:

$$g(a + h) - g(a) = \partial_x f(a + \theta h, b)h$$

Cvd.

- Analogo.

Dimostrazione teorema della differenziabilità

Supponiamo che $f, \partial_x f, \partial_y f$ siano continue, dobbiamo dimostrare che f è differenziabile, dunque che vale Taylor:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|) \\ \implies f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|) \end{aligned}$$

Riscriviamo la parte a sinistra dell'=:

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y}) + f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})$$

Da ora in avanti, per semplificare la dimostrazione, rappresentiamo la formula ottenuta come $[1] + [2]$, dove $[1] = f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y})$ e $[2] = f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})$.

Usiamo il lemma:

- $\exists \theta \in [0, 1]$ tale che $[2] = \partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y})h$
- $\exists \theta \in [0, 1]$ tale che $[1] = \partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k)k$

Espandiamo le equivalenze appena ottenute nel seguente modo:

- $[2] = \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h + (\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}))h$ (aggiungendo e sottraendo $\partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h$)
- $[1] = \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}))k$ (aggiungendo e sottraendo $\partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k$)

Sostituiamo dunque nell'uguaglianza iniziale gli equivalenti a $[1]$ e $[2]$ appena trovati ottenendo:

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h + \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k + (\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}))h + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}))k$$

Visto che $\partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h + \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k$ è equivalente a $\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle$, per dimostrare la validità di Taylor ci basta dunque dimostrare che:

$$\begin{aligned} &(\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}))h + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}))k = o(|(h, k)|) \\ \implies &\frac{(\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}))h + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}))k}{|(h, k)|} \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0 \\ \implies &(\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})) \frac{h}{|(h, k)|} + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})) \frac{k}{|(h, k)|} \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che $\frac{h}{|(h, k)|}$ e $\frac{k}{|(h, k)|} \leq \frac{|(h, k)|}{|(h, k)|} = 1$ in quanto $\sqrt{h^2 + k^2}$ è sempre maggiore o alla peggio uguale dei singoli h e k , dunque ci basta dimostrare che:

$$(\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})) + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})) \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Lo dimostriamo facilmente sostituendo ad h e k i valori ai quali tendono:

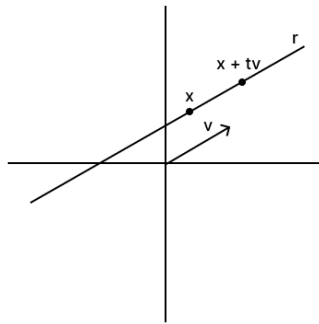
$$(\partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})) + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} \\ (\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})) + (\partial_y f(\bar{x}, \bar{y}) - \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})) = 0 + 0 = 0$$

▼ 3.3 - Derivate direzionali

Rette in \mathbb{R}^n

A partire da un dominio R^n di partenza e due vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$ è possibile definire la retta passante per x e avente direzione v tramite l'insieme:

$$r = \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$



Rappresentazione grafica di una retta generica nel piano \mathbb{R}^2 .

Derivate direzionali in \mathbb{R}^2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1, v_2)$ unitario ($|v| = 1$). La **derivata direzionale** di f in (\bar{x}, \bar{y}) nella direzione (v_1, v_2) è il limite, se esiste finito:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}, \bar{y}) + t(v_1, v_2)) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_v f(\bar{x}, \bar{y}) = D_v f(\bar{x}, \bar{y})$$

Osservazione

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1, v_2)$ unitario ($|v| = 1$). Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$ è possibile introdurre una funzione ausiliaria $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$g(t) = f((\bar{x}, \bar{y}) + t(v_1, v_2))$$

Utilizzando tale funzione è possibile calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$, infatti è possibile dimostrare che:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$$

Dimostrazione

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}, \bar{y}) + t(v_1, v_2)) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$$

Esercizi

▼ Data $f(x, y) = xy^2$ e $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 2)$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2)$.

Per fare ciò è possibile utilizzare la funzione ausiliaria $g(t) = f((\bar{x}, \bar{y}) + t(v_1, v_2)) = f((1, 2) + t(v_1, v_2)) = f((1 + tv_1), (2 + tv_2)) = (1 + tv_1)(2 + tv_2)^2$.

Calcoliamo infine il valore della derivata $g'(0)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= v_1(2 + tv_2)^2 + (1 + tv_1)2(2 + tv_2)v_2 \\ \implies g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 4v_1 + 4v_2 \end{aligned}$$

Teorema del calcolo delle derivate direzionali in \mathbb{R}^2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1, v_2)$ unitario ($|v| = 1$), se f è differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) , allora vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle = \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})v_1 + \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})v_2$$

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}, \bar{y}) + t(v_1, v_2)) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$.

Per fare ciò utilizziamo la formula di Taylor, ottenendo $f((\bar{x}, \bar{y}) + t(v_1, v_2)) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), t(v_1, v_2) \rangle + o(|t(v_1, v_2)|)$.

Osserviamo che $|t(v_1, v_2)| = |t| |(v_1, v_2)|$ e, sapendo che $|(v_1, v_2)| = 1$, otteniamo $|t(v_1, v_2)| = |t|$, quindi $o(|t(v_1, v_2)|) = o(t)$.

Calcoliamo dunque il limite iniziale sostituendo ciò che abbiamo appena trovato:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), t(v_1, v_2) \rangle + o(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + \frac{o(t)}{t} \right) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Derivate direzionali in \mathbb{R}^n

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ unitario ($|v| = 1$). La **derivata direzionale** di f in \bar{x} nella direzione (v_1, \dots, v_n) è il limite, se esiste finito:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \partial_v f(\bar{x}) = D_v f(\bar{x})$$

Teorema del calcolo delle derivate direzionali in \mathbb{R}^n

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ unitario ($|v| = 1$), se f è differenziabile in \bar{x} , allora vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} f(\bar{x}) v_k$$

▼ 3.4 - Direzione di massima crescita

Direzione di massima crescita in \mathbb{R}^2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, f differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) e $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$.

È possibile derivare $f(\bar{x}, \bar{y})$ in ∞ direzioni v unitarie in \mathbb{R}^2 . Cerchiamo la direzione v che renda massima la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$ e la chiameremo direzione di massima crescita v_{max} .

Scriviamo il gradiente di $f(\bar{x}, \bar{y})$ utilizzando le coordinate polari: $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, con $r = |\nabla f(\bar{x}, \bar{y})|$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

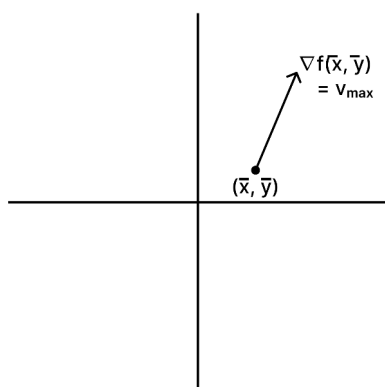
Dobbiamo trovare $v = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ ($|v| = 1$) tale che $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$ sia massima.

Ricordiamo che $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle = \langle (r \cos \varphi, r \sin \varphi), (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \rangle = r \cos \varphi \cos \vartheta + r \sin \varphi \sin \vartheta = r \cos(\varphi - \vartheta)$. Tale derivata è dunque massima se $\varphi - \vartheta = 1$, ovvero $\vartheta = \varphi \pm 2k\pi$, dunque tale direzione di massima crescita è quella del vettore gradiente e notiamo inoltre che $\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \rangle = r$.

In sintesi:

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, f differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) e $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$, allora:

$$v_{max} = \frac{\nabla f(\bar{x}, \bar{y})}{|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y}) = |\nabla f(\bar{x}, \bar{y})|$$

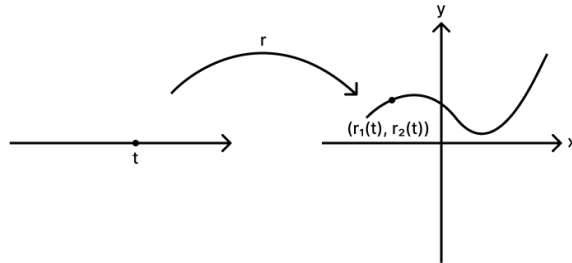


▼ 3.5 - Curve: velocità, derivate e insiemi di livello

Funzioni di curve parametrizzate

Le **funzioni di curve parametrizzate** sono del tipo $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$$



Esempio di funzione di curva parametrizzata $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Vettore velocità di una curva

Il **vettore velocità di una curva** r nel punto t indica la direzione tangente alla curva in tale punto e corrisponde al seguente vettore:

$$r'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$$

Velocità scalare di una curva

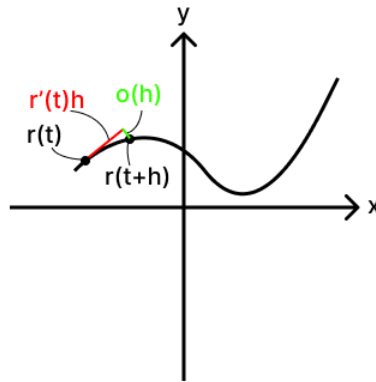
Data $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ avente $r'(t)$ come vettore velocità, la **velocità scalare** di tale curva è lo scalare:

$$|r'(t)|$$

Formula di Taylor per una curva

Sia $r :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile in $t \in]a, b[$. Vale dunque:

$$\begin{cases} r_1(t+h) = r_1(t) + r'_1(t)h + o(h) \\ \dots \\ r_n(t+h) = r_n(t) + r'_n(t)h + o(h) \end{cases}$$



Esempio grafico dell'uguaglianza di Taylor in una curva.

Lunghezza di un tratto di curva

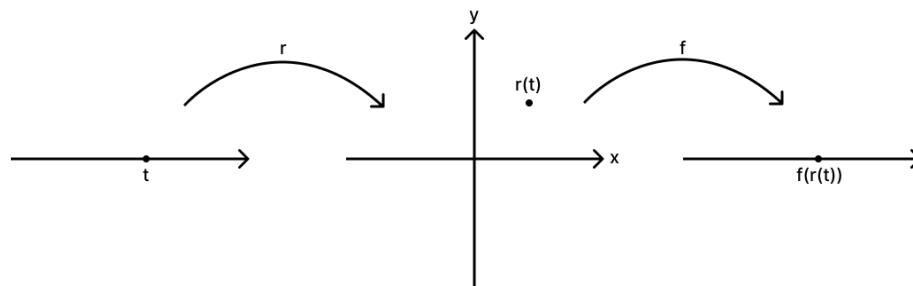
Sia $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se $r'(t) \neq 0$, allora la **lunghezza del tratto** compreso tra $r(a)$ e $r(b)$ vale:

$$lung_h(a, b) = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Derivata funzione composta

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Funzione composta: $f \circ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $(f \circ r)(t) = f(r(t))$.



Visualizzazione di una funzione composta.

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile e sia definita $(f \circ r)(t) = f(r(t)) \forall t \in \mathbb{R}$. Tale funzione è **derivabile** $\forall t \in \mathbb{R}$ e vale:

$$(f \circ r)'(t) = \frac{d}{dt} f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

Dimostrazione

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dobbiamo dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$.

Iniziamo scrivendo r e $f \circ r$ con Taylor:

$$\begin{aligned} r(t+h) - r(t) &= r'(t)h + o(h) \\ f(r(t+h)) - f(r(t)) &= \langle \nabla f(r(t)), r(t+h) - r(t) \rangle + o(|r(t+h) - r(t)|) \end{aligned}$$

Sostituiamo la prima uguaglianza nella seconda espressione ottenendo:

$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)h + o(h) \rangle + o(|r(t+h) - r(t)|) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle h + o(h)$$

A questo punto dividiamo il tutto per h , e otteniamo:

$$\frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle h}{h} + \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle}{h} + \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h}$$

Calcoliamo dunque $\frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle h}{h} + \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle}{h} + \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h}$ per $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} 1. \frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle h}{h} &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle \\ 2. \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle}{h} &= \langle \nabla f(r(t)), \frac{o(h)}{h} \rangle = 0 \\ 3. \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h} &\approx \frac{o(h)}{h} = 0 \quad (|r(t+h) - r(t)| \approx h \text{ viene lasciato informale}) \end{aligned}$$

Otteniamo infine l'uguaglianza:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

Esercizi

▼ Date $f(x, y) = \ln(1 + xy^2)$ e $r(t) = (t^2, e^{2t})$ scrivere $f \circ r$ e calcolare $(f \circ r)'(t)$ sia direttamente che con il teorema.

Per calcolare $f \circ r$ basta sostituire $r_1(t)$ e $r_2(t)$ a x e y :

$$f(r(t)) = \ln(1 + t^2 e^{4t})$$

Calcolando $(f \circ r)'(t)$ direttamente otteniamo:

$$(f \circ r)'(t) = \frac{2te^{4t} + 4t^2 e^{4t}}{1 + t^2 e^{4t}}$$

Utilizzando il teorema dobbiamo invece prima calcolare $\nabla f(x, y)$ e $r'(t)$:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y^2}{1 + xy^2}, \frac{2xy}{1 + xy^2} \right), \quad r'(t) = (2t, 2e^{2t})$$

Calcoliamo poi $\nabla f(r(t)) = \left(\frac{e^{4t}}{1 + t^2 e^{4t}}, \frac{2t^2 e^{2t}}{1 + t^2 e^{4t}} \right)$ e infine la derivata:

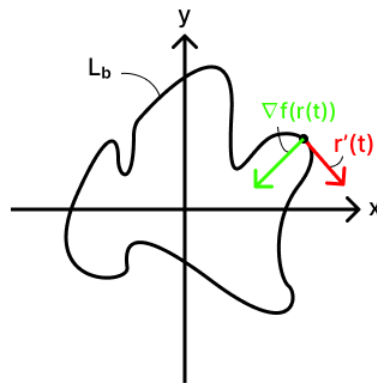
$$(f \circ r)'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle = \frac{2te^{4t}}{1 + t^2 e^{4t}} + \frac{4t^2 e^{4t}}{1 + t^2 e^{4t}} = \frac{2te^{4t} + 4t^2 e^{4t}}{1 + t^2 e^{4t}}$$

Insiemi di livello

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e $b \in \mathbb{R}$. Si dice **insieme di livello** il seguente insieme:

$$L_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = b\}$$

È possibile inoltre costruire una curva $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $r(t) \in L_b, \forall t \in \mathbb{R}$ e quindi $f(r(t)) = b, \forall t \in \mathbb{R}$. Notiamo dunque, visto che $f \circ r$ è costante in t , la sua derivata $\frac{d}{dt}f(r(t)) = 0$, dunque anche $\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle = 0$, il che implica che il gradiente della funzione f calcolato in un qualunque punto di L_b è perpendicolare alla derivata della curva r calcolata in quel punto.



Perpendicolarità tra vettore gradiente e derivata della curva $r(t) \in L_b$.

▼ 4.0 - Punti critici e forme quadratiche

▼ 4.1 - Tipologie di punti critici

Punti di massimo e minimo locale

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$), $\bar{x} \in A$ si dice di **massimo (minimo) locale** per f se:

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } f(x) \leq (\geq) f(\bar{x}) \quad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta)$$

Teorema di Fermat

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$), f differenziabile. Se $\bar{x} \in A$ è di massimo/minimo locale, allora:

$$\nabla f(\bar{x}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione in $n = 2$

Definiamo la funzione $h(t) = f(\bar{x} + t, \bar{y})$, definita per $t \in$ intorno dell'origine. Siccome f ha un minimo in (\bar{x}, \bar{y}) , allora $f(\bar{x} + t, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall t \in$ intorno dell'origine, dunque $h(t) \geq h(0)$, quindi $h(t)$ ha un minimo in 0.

Inoltre, per definizione di derivata parziale, abbiamo che $\exists h'(t) = \partial_x f(\bar{x} + t, \bar{y})$. Per il teorema di Fermat in $n = 1$ sappiamo infine che $h'(0) = 0$, e possiamo quindi concludere che $\partial_x f(\bar{x} + t, \bar{y}) = 0$.

È possibile fare lo stesso ragionamento con $h(t) = f(\bar{x}, \bar{y} + t)$ e arrivare alla conclusione che $\partial_y f(\bar{x} + t, \bar{y}) = 0$, dunque abbiamo dimostrato che $\nabla f(\bar{x}) = (0, 0)$.

Punto critico o stazionario

Un punto in cui $\nabla f(x) = \underline{0}$ si dice **punto critico o stazionario**.

Caso $n = 1$

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, può avere in x :

- Punto di **massimo**
- Punto di **minimo**
- Punto di **flesso**

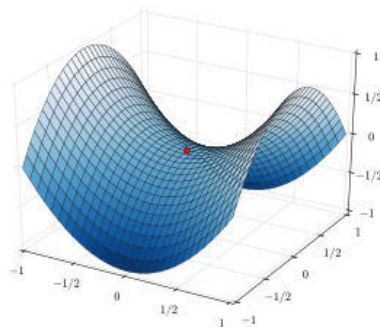
Caso $n = 2$

Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$, con $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, può avere in \bar{x} :

- Punto di **massimo**
- Punto di **minimo**
- Punto di **sella**

Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ha un punto di sella in $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \text{ intorno } B(\bar{x}, \delta), \exists x_- \text{ e } x_+ \in B(\bar{x}, \delta) \text{ tale che } f(x_-) < f(\bar{x}) \text{ e } f(x_+) > f(\bar{x})$$



Esempio grafico di punto di sella.

▼ 4.2 - Derivate parziali seconde e forme quadratiche

Derivate parziali seconde

Caso \mathbb{R}^2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile con $\begin{cases} \partial_x f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \partial_y f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$, allora definiamo **derivate parziali seconde** le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{cases} \rightarrow \text{miste}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{cases} \rightarrow \text{pure}$$

Caso \mathbb{R}^n

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, allora definiamo **derivate parziali seconde** le seguenti:

$$\forall j, k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$$

Nel caso in cui $j = k$ scriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ e tali derivate vengono dette **pure**.

Nel caso in cui $j \neq k$ tali derivate vengono dette **miste**.

Teorema di Schwarz

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) e siano tutte le sue derivate seconde continue allora:

$$\forall j, k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \quad (\text{in ogni punto di } A)$$

Matrice Hessiana

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) e siano tutte le sue derivate seconde continue allora possiamo definire la **matrice Hessiana** $Hf(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nel seguente modo:

$$(Hf(x))_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \quad Hf = \begin{pmatrix} \partial_{11}f & \partial_{12}f & \dots & \partial_{1n}f \\ \partial_{21}f & \partial_{22}f & \dots & \partial_{2n}f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{n1}f & \partial_{n2}f & \dots & \partial_{nn}f \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è l'**equivalente del gradiente** per le derivate seconde.

Proposizioni

- Per il teorema del gradiente la matrice Hessiana $Hf(x)$ è simmetrica $\forall x \in A$.

Forma quadratica

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = A^T$, la **forma quadratica** associata ad A è la funzione:

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad q(h) = \langle Ah, h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Caso \mathbb{R}^2

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la forma quadratica associata ad A è:

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) &= \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \end{aligned}$$

Segno di forme quadratiche

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $\langle Ah, h \rangle > 0, \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n \iff A > 0$
- $\langle Ah, h \rangle < 0, \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n \iff A < 0$
- $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n, \langle Ah^-, h^- \rangle < 0 < \langle Ah^+, h^+ \rangle \iff A$ è indefinita.

Osservazioni

- Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
 - $\begin{cases} a > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \iff A > 0$.
 - $\begin{cases} a < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \iff A < 0$.
 - $\det(A) < 0 \iff A$ è indefinita.
 - $\det(A) = 0 \iff A$ è semidefinita ($A \geq 0$ oppure $A \leq 0$ in base al valore di a).

Dimostrazione

Dimostriamo solo il caso in cui $A > 0$:

◦ \implies

Dalle ipotesi abbiamo che $a > 0 \wedge \det(A) = ac - b^2 > 0$. Siccome $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ si possono presentare i seguenti due casi:

▪ $h_2 = 0$

In questo caso deve essere sicuramente $h_1 \neq 0$, e calcolando la forma quadratica otteniamo $q(h) = ah_1^2$, la quale è sicuramente $> 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ perchè dalle ipotesi abbiamo che $a > 0$.

▪ $h_2 \neq 0$

Calcolando la forma quadratica otteniamo $q(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = h_2^2(a(\frac{h_1}{h_2})^2 + 2b\frac{h_1}{h_2} + c)$. Calcoliamo il $\Delta = 4b^2 - 4ac = -4(ac - b^2)$. Dalle ipotesi abbiamo che $ac - b^2 > 0$, quindi $\Delta < 0 \implies q(h) > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

◦ \impliedby

Dalle ipotesi abbiamo che $A > 0 \implies \langle A(h_1, h_2), A \rangle > 0 \implies ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Scegliamo ad esempio $h = (1, 0)$, in tal caso la disequazione diventa $a > 0$, avendo dimostrato la prima condizione.

Scegliendo invece $h = (x, 1)$ la disequazione diventa $ax^2 + 2bx + c > 0$. Poniamo il $\Delta = b^2 - ac < 0 \implies -\det(A) < 0 \implies \det(A) > 0$.

qed

- Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora A ammette n **autovalori** reali e vale:
 - $A > 0 \iff$ tutti gli autovalori sono > 0
 - $A < 0 \iff$ tutti gli autovalori sono < 0
 - A indefinita $\iff \exists \lambda_1, \lambda_2$ autovalori tali che $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$

Esercizi

- ▼ Classificare il segno della forma quadratica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$ al variare di e nei reali.

Calcoliamo innanzitutto il valore di $\det(A) = 2e - 1$.

Notando che $a = 2$ otteniamo 3 casistiche:

- $e > \frac{1}{2} \iff \det(A) > 0 \iff A > 0$.
- $e < \frac{1}{2} \iff \det(A) < 0 \iff A < 0$.
- $e = \frac{1}{2} \iff \det(A) = 0 \iff A$ è semidefinita positiva.

Calcoliamo inoltre la forma quadratica associata ad A :

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 = \frac{1}{2}(4h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(2h_1 + h_2)^2 \geq 0 \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Possiamo infatti notare che $q(h_1, h_2)$ si annulla $\forall h = \lambda(1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dunque A non può essere definita positiva.

Segno del determinante delle sottomatrici

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, considero A_k (es. $A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ecc.), allora:

- $\det(A_k) > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \implies A > 0$
- $(-1)^k \det(A_k) > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \implies A < 0$

Ovvero il determinante assume segni alternati per ogni k (k pari $\implies \det(A_k)$ positivo, k dispari $\implies \det(A_k)$ negativo).

▼ 4.3 - Teorema di Taylor

Teorema di Taylor di grado 2

Caso \mathbb{R}^2

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con f' e f'' continue, allora $\forall \bar{x}, h \in \mathbb{R}, \exists \sigma \in]0, 1[$ tale che:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + f''(\bar{x} + \sigma h)\frac{h^2}{2} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}$$

Osservazioni

- Dalla formula trovata segue quella con gli o piccoli:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + f''(\bar{x} + \sigma h)\frac{h^2}{2} \\ &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + f''(\bar{x})\frac{h^2}{2} + \underbrace{(f''(\bar{x} + \sigma h) - f''(\bar{x}))\frac{h^2}{2}}_{o(h^2)} \end{aligned}$$

Dimostrazione

Usando $x = \bar{x} + h$ dimostriamo che $\forall \bar{x}, x \in \mathbb{R}, \exists \sigma \in]0, 1[$ tale che:

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f''(\bar{x} + \sigma(x - \bar{x})) \frac{(x - \bar{x})^2}{2}$$

Modifichiamo la formula da dimostrare nella seguente: $f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x}) - k(x - \bar{x})^2 = 0$ e mostriamo che esiste $\sigma \in]0, 1[$ tale che $k = \frac{f''(\bar{x} + \sigma(x - \bar{x}))}{2}$.

Costruiamo la seguente funzione:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - k(x - t)^2$$

Se utilizziamo x e \bar{x} come t otteniamo:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - f(x) - f'(x)(x - x) - k(x - x)^2 = 0 \\ g(\bar{x}) &= f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x}) - k(x - \bar{x})^2 = 0 \end{aligned}$$

Siccome $g(x) = g(\bar{x})$ possiamo utilizzare il teorema di Rolle nell'intervallo $[x, \bar{x}]$ e ottenere:

$$\exists \sigma \in]0, 1[\quad g'(\bar{x} + \sigma(x - \bar{x})) = 0$$

Calcoliamo $g'(t)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(t) - f''(t)(x - t) - f'(t)(-1) - 2k(x - t)^1(-1) \\ &= (-f''(t) + 2k)(x - t) \end{aligned}$$

Sappiamo dunque che:

$$\exists \sigma \in]0, 1[\quad (-f''(\bar{x} + \sigma(x - \bar{x})) + 2k)(x - \bar{x} + \sigma(x - \bar{x})) = 0$$

Siccome per $\sigma \in]0, 1[\implies (x - \bar{x} + \sigma(x - \bar{x})) \neq 0$, allora $(-f''(\bar{x} + \sigma(x - \bar{x})) + 2k) = 0$, ovvero $k = \frac{f''(\bar{x} + \sigma(x - \bar{x}))}{2}$, come volevasi dimostrare.

Caso \mathbb{R}^n

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) con derivate parziali prime e seconde continue, allora $\forall \bar{x} \in A, h \in \mathbb{R}^n, \exists \sigma \in]0, 1[$ ($\{\bar{x} + \sigma h\} \subseteq A$) tale che:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h) &= f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x} + \sigma h)h, h \rangle \\ &= f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^n \partial_k f(\bar{x}) h_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \partial_{jk} f(\bar{x} + \sigma h) h_j h_k \end{aligned}$$

Osservazioni

- Dalla formula trovata segue quella con gli o piccoli:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x})h, h \rangle + o(h^2)$$

Dimostrazione

Basta mostrare che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x} + \sigma h)h, h \rangle - \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x})h, h \rangle &= o(|h|^2) \\ \iff \frac{1}{2} \underbrace{\langle (Hf(\bar{x} + \sigma h) - Hf(\bar{x}))h, h \rangle}_{0 \quad h \rightarrow 0} &= o(|h|^2) \end{aligned}$$

Dimostrazione

Siano f, \bar{x}, h come da ipotesi, costruiamo la funzione:

$$g(t) = f(\bar{x} + th) \quad t \in [0, 1]$$

Abbiamo dunque che $g(0) = f(\bar{x}), g(1) = f(\bar{x} + h)$.

Utilizziamo Taylor grado 2 per $g(1)$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\sigma)$$

Calcoliamo ora $g'(t)$ utilizzando il teorema per il calcolo della derivata di una funzione su una curva:

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x} + th) = \langle \nabla f(\bar{x} + th), h \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\bar{x} + th) h_j$$

Dunque, $g'(0) = \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle$.

Passiamo a calcolare $g''(t)$:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\partial_k \partial_j f(\bar{x} + th) h_k) h_j = \sum_{k,j=1}^n \partial_{kj} f(\bar{x} + th) h_k h_j \\ &= \langle Hf(\bar{x} + th)h, h \rangle \end{aligned}$$

Dunque, $g''(\sigma) = \langle Hf(\bar{x} + \sigma h)h, h \rangle$.

Possiamo infine concludere che:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x} + \sigma h)h, h \rangle$$

▼ 4.4 - Teorema di classificazione dei punti critici

Teorema di classificazione dei punti critici

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) con derivate parziali prime e seconde continue e sia $\bar{x} \in A$, se $\nabla f(\bar{x}) = 0$ allora:

- se $Hf(\bar{x}) > 0 \implies \bar{x}$ è un punto di **minimo locale**.
- se $Hf(\bar{x}) < 0 \implies \bar{x}$ è un punto di **massimo locale**.
- se $Hf(\bar{x})$ è indefinita \implies è un punto di **sella**.
- se $Hf(\bar{x})$ è semidefinita \implies nessuna conclusione, occorre verificare in altro modo, magari analizzando gli intorni di \bar{x} .

Lemma

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $A > 0$, allora:

$$\exists m > 0 \quad \langle Ah, h \rangle \geq m \underbrace{|h|^2}_{\langle Ih, h \rangle = \sum_{j=1}^n h_j^2} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione lemma in \mathbb{R}^2

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tale che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$.

Sia $h = (r \cos \theta, r \sin \theta) \neq 0$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, e sia $r = |h|$.

Calcoliamo $\langle Ah, h \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Ah, h \rangle &= ar^2 \cos^2 \theta + 2br^2 \sin \theta \cos \theta + cr^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2(a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) = r^2 g(\theta) = |h|^2 g(\theta) \end{aligned}$$

Siccome $A > 0$, allora $g(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Inoltre, siccome $g(\theta)$ è continua su $[0, 2\pi]$, allora per il teorema di Weierstrass esiste un valore $\bar{\theta} \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\theta) \geq \underbrace{g(\bar{\theta})}_{m > 0} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Siccome $\langle Ah, h \rangle = |h|^2 g(\theta) \geq |h|^2 m$, possiamo dunque concludere che:

$$\langle Ah, h \rangle \geq |h|^2 m$$

Dimostrazione (primo caso)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in A$, supponiamo che $\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ Hf(\bar{x}) > 0 \end{cases}$, dobbiamo dimostrare che \bar{x} è un punto di minimo, ovvero che.

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \quad f(\bar{x} + h) &\geq f(\bar{x}) \quad \forall h \in B(0, \delta) \\ \text{ovvero} \\ f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) &\geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \end{aligned}$$

Approssimiamo $f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})$ tramite la formula di Taylor:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) &= \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x})h, h \rangle + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x})h, h \rangle + o(|h|^2) \end{aligned}$$

Siccome da ipotesi sappiamo che $Hf(\bar{x}) > 0$, per il lemma abbiamo che $\exists m > 0$ $\langle Hf(\bar{x})h, h \rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Per l'equivalenza mostrata sopra abbiamo dunque che:

$$f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) \geq \frac{m}{2}|h|^2 + o(|h|^2)$$

Usando la definizione di o piccolo con $\epsilon = \frac{m}{4}$ sappiamo che $\exists \delta > 0$ tale che $-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall h \in B(0, \delta)$, dunque, per $|h| < \delta$, abbiamo che $o(|h|^2) \leq \frac{m}{4}|h|^2$ e $o(|h|^2) \geq -\frac{m}{4}|h|^2$.

Possiamo dunque procedere affermando che:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) &\geq \frac{m}{2}|h|^2 + \left(-\frac{m}{4}|h|^2\right) \quad \forall h \in B(0, \delta) \\ \implies f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) &\geq \frac{m}{4}|h|^2 \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \\ \implies f(\bar{x} + h) &\geq f(\bar{x}) \quad \forall h \in B(0, \delta) \\ \implies \bar{x} &\text{ è di minimo locale.} \end{aligned}$$

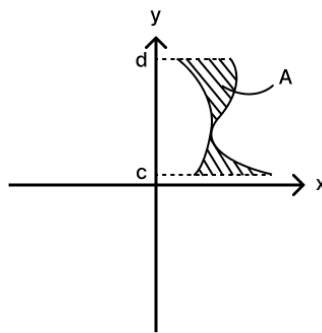
▼ 5.0 - Integrale doppio

▼ 5.1 - Insiemi semplici

Insieme x-semplce

Siano $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e tali che $h_1(y) \leq h_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$, l'**insieme x-semplce** definito da h_1 e h_2 è definito nel seguente modo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

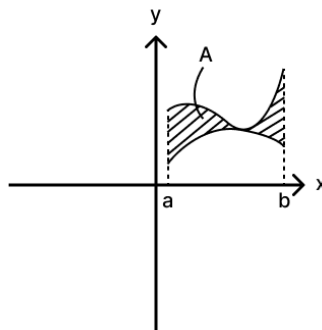


Insieme y-semplce.

Insieme y-semplce

Siano $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e tali che $g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$, l'**insieme y-semplce** definito da g_1 e g_2 è definito nel seguente modo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



Insieme x-semplce.

▼ 5.2 - Integrale doppio

Definizione di integrale doppio

Sia f una funzione continua e A un insieme semplice, l'**integrale doppio** di f in A viene definito nel seguente modo:

$$\int_A f(x, y) dx dy$$

Proprietà dell'integrale doppio

- **Linearità:**

$$\int_A (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx dy = \lambda_1 \int_A f_1 dx dy + \lambda_2 \int_A f_2 dx dy$$

- A è un insieme degenere ($g_1(x) = g_2(x) \quad \forall x$, quindi A è una linea)

$$\implies \int_A f(x, y) dx dy = 0$$

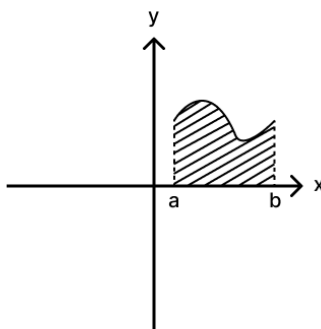
- $\int_A 1 dx dy = \text{area di } A$

Idea grafica dell'integrale doppio

Integrale in $n = 1$

Sia $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ continua, l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ indica il valore dell'area del sottografico di f :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

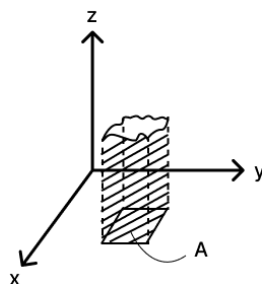


Idea grafica dell'integrale in $n = 1$.

Integrale in $n = 2$

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($(x, y) \rightarrow f(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in A$), dove A è un insieme semplice, l'integrale $\int_A f(x, y) dx dy$ indica il valore del volume del sottografico di f :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$



Idea grafica dell'integrale in $n = 2$.

Formula di riduzione

Insiemi y-semplici

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con A un insieme y-semplice del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, allora è definito $\int_A f(x, y) dx dy$ e vale la seguente **formula di riduzione**:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Osservazioni

- Se $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$, allora:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A dx dy = \int_b^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = \text{area di } A$$

Insiemi x-semplici

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con A un insieme x-semplice del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, allora è definito $\int_A f(x, y) dx dy$ e vale la seguente **formula di riduzione**:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Osservazioni

- Se $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$, allora:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A dx dy = \int_b^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = \text{area di } A$$

▼ 6.0 - Cambio di variabile

Funzioni per cambio variabile

Per il cambio variabile vengono utilizzate funzioni $f : A \rightarrow G$ $A, G \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che:

$$(u, v) \rightarrow f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Matrice jacobiana di $f : A \rightarrow G$

Sia $f : A \rightarrow G$ una funzione definita come sopra e siano x e y funzioni con derivate continue in A , la **matrice jacobiana** di tale funzione è la seguente:

$$J_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Definizione di cambio di variabile

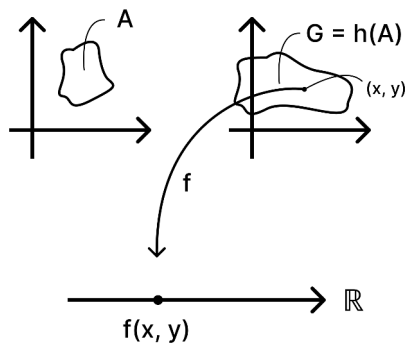
Sia $f : A \rightarrow G$ $A, G \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare (derivate continue), si dice che f è un **cambio di variabile** se:

- f è iniettiva e suriettiva.
- $\det(J_{f(u,v)}) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A$.

Formula del cambio di variabile

Sia $h : A \rightarrow G$ un cambio di variabile e sia $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora vale:

$$\int_G f(x, y) \, dx \, dy = \int_A f(h(u, v)) \, |\det(J_{h(u,v)})| \, du \, dv$$



Cambio di variabile.

Esercizi

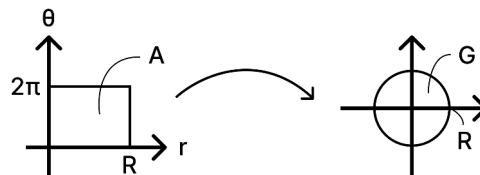
▼ Dato l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$, calcolare l'area di tale insieme (cerchio).

Per calcolare l'area di un tale insieme occorre calcolare l'integrale doppio $\int_G dx dy$.

Per fare ciò è possibile rappresentare G utilizzando un cambio di variabile:

$$f(\{(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\mid 0 < r \leq R, \theta \in]0, 2\pi[\})$$

Tale funzione può essere rappresentata graficamente nel seguente modo:



Siccome $\det(J_{f(r, \theta)}) = r$, possiamo calcolare l'integrale doppio utilizzando la formula del cambio di variabile:

$$\int_G dx dy = \int_A 1 \cdot r dr d\theta$$

Dove $A = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Continuiamo a questo punto il calcolo dell'integrale doppio ottenuto per ottenere l'area del cerchio:

$$\int_A 1 \cdot r dr d\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r d\theta \right) dr = [\pi r^2]_0^R = \pi R^2$$