Esercizi

es. 4 FOGLIO II

Ci sono 90 palline, per ogni città se ne estraggono 5. Non importa l'ordine. Se se ne azzeccano 3, si fa terno. Se se ne azzeccano 5, si fa cinquina.

Numero esiti totali: non ci interessa l'ordine, quindi abbiamo a che fare con combinazioni (90 numeri presi 5 alla volta).

Numero esiti favorevoli: devono essere estratti i 5 numeri che sono stati giocati, tutti e 5 dai 5, quindi combinazioni di 5 numeri su 5 presi.

C = 'cinquina'

$$P(C) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot}} = \frac{C_{5,5}}{C_{90,5}} = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\frac{90!}{5!\,85!}} = \frac{5!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$$

Oppure, prendendo una pallina alla volta.

oppure

$$P(C) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot}} = \frac{D_{5,5}}{D_{90,5}} = \frac{5!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$$

P_5

I METODO: estrazione simultanea

II METODO: estrazione di un n° alla volta senza reimm.

Anche con il principio di enumerazione era risolvibile.

Passiamo al terno. Si può lavorare con le combinazioni.

Esiti totali: vengono sempre estratte 5 palline da 90.

Esiti favorevoli: devono essere estratte 3 palline dal mucchio delle 3 su cui ha puntato il giocatore e poi 2 palline dalle restanti 87, prodotto tra combinazioni.

Perché il cofficiente binomiale di 87 su 2? Perché l'estrazione complessiva è di 5 palline. 3 sono quelle scelte dal giocatore, le rimanenti 2 sono scelte tra i numeri non giocati dal giocatore (90 – 3 = 87). Devo rappresentare il numero totale di esiti favorevoli, quindi le 3 palline giocate e 2 delle altre estratte.

T = 'terno'

I METODO DI ESTRAZIONE

$$P(T) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot.}} = \frac{C_{3,3}\, C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{\binom{3}{3}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{87!}{2!\, \cancel{85!}}}{\frac{90!}{5!\, \cancel{85!}}} = \frac{5!\; 87!}{2!\; 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87!}$$

$$= \frac{5!}{2 \times 90 \times 89 \times 88}$$

I METODO DI ESTRAZIONE: estrazione simultanee

Questo è un approccio. Pensiamo dal punto di vista del giocatore. Il giocatore sceglie 3 numeri, non 5, ma ne deve scegliere 3 dal mucchio di 5 che usciranno.

Oppure

PUNTO DI VISTA DEL GIOCATORE CHE FA LA SCELTA DI 3 NUMERI TRA I 5 CHE VERRANNO ESTRATTI

$$P(T) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot.}} = \frac{C_{5,3}}{C_{90,3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}}$$

$$= \frac{\frac{5!}{2!\, \cancel{3!}}}{\frac{90!}{\cancel{3!}\, 87!}} = \frac{5!}{2 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88}$$

Stesso risultato di prima da un punto di vista diverso, quello del giocatore.

es. 5 FOGLIO II

SCATOLA 10 lampadine funzionanti + 5 difettose
estrazione di 3 lampadine senza reimmissione

N = 'nessuna difettosa'

$$P(N) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot.}} = \frac{C_{10,3}}{C_{15,3}} = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{10!}{\cancel{3!}\,7!}}{\frac{15!}{\cancel{3!}\,12!}} =$$

$$= \frac{\cancel{10} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 8}{\cancel{15} \cdot \cancel{14}_{7} \cdot 13} = \frac{24}{91}$$

$$P(U) = \frac{n° \text{ esiti fav.}}{n° \text{ esiti tot.}} = \frac{C_{10,2}\, C_{5,1}}{C_{15,3}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{10!}{2!\,8!} \quad 5}{\frac{15!}{3!\,12!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 6}{2 \quad 15 \cdot 14 \cdot 13}$$

P('almeno una difettosa') = 1 − P('nessuna difettosa') =

$$= 1 - P(N) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

es. 6 FOGLIO II

Nella ricerca di un certo libro, uno studente può visitare 3 biblioteche. Ognuna di queste, indipendentemente dalle altre, ha la probabilità di avere il libro del 50%. Nel caso lo avesse, c'è una probabilità del 50% che il libro sia stato chiesto in prestito. Trovare la probabilità che lo studente riesca ad ottenere il libro.

La parola indipendentemente è una parola chiave per la soluzione.

$L_k =$ 'lo studente trova il libro nella k-esima biblioteca'

$k = 1, 2, 3$

L_1, L_2, L_3 sono INDIPENDENTI

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$$

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = P(L_1) + P(L_2) + P(L_3) - P(L_1 \cap L_2) - P(L_1 \cap L_3) - P(L_2 \cap L_3) + P(L_1 \cap L_2 \cap L_3)$$

L'ipotesi di indipendenza è un vantaggio, le intersezioni sono prodotti.

$$P(L_1) = P(L_2) = P(L_3) \underset{\text{per ipotesi}}{=} p$$

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \underbrace{P(L_1) + P(L_2) + P(L_3)}_{} - \underbrace{P(L_1 \cap L_2) - P(L_1 \cap L_3) - P(L_2 \cap L_3)}_{} + P(L_1 \cap L_2 \cap L_3)$$

$$= \underline{3p} - 3\underline{p^2} + p^3$$

Ci resta da calcolare il valore di P.

È possibile usare la probabilità di intersezione dei complementari? Sì!

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = 1 - P((L_1 \cup L_2 \cup L_3)^c) =$$

$$= 1 - P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c)$$

$$P(\text{trovare il libro}) = 1 - P(\text{non trovarlo in nessuna biblioteca})$$

$\Downarrow$ INDIPENDENZA

$$P(\text{trovare il libro}) = 1 - P(L_1^c)P(L_2^c)P(L_3^c) =$$
$$= 1 - (1-p)^3$$

$$p = P(L_1) = P(\text{libro non sia in prestito} \mid \text{libro a catalogo})\,P(\text{libro a catalogo}) =$$
$$= (100\% - 50\%) \cdot 50\% =$$
$$= \frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{trovare il libro}) = 1 - P(L_1^c)P(L_2^c)P(L_3^c) =$$
$$= 1 - (1-p)^3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 =$$
$$= \frac{64-27}{64} = \frac{37}{64}$$

Oppure:

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \underline{P(L_1) + P(L_2) + P(L_3)} - \underline{P(L_1 \cap L_2)} -$$
$$- \underline{P(L_1 \cap L_3) - P(L_2 \cap L_3)} + \underline{P(L_1 \cap L_2 \cap L_3)} =$$

$$P(L_1 \cap L_2) \overset{\text{INDIP.}}{=} P(L_1)P(L_2) = p^2$$
$$P(L_1 \cap L_3) = p^2$$
$$P(L_2 \cap L_3) = p^2$$

$$= 3p - 3p^2 + p^3 =$$

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) \overset{\text{INDIP}}{=} P(L_1)P(L_2)P(L_3) = p^3$$

$$= 3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{16} + \frac{1}{64} =$$
$$= \frac{48 - 12 + 1}{64} = \frac{37}{64}$$

oss. $E = \underline{A \cup B \cup C}$

$P(E) = 1 - P(E^c)$ per la proprietà P1 dopo gli assiomi

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c) =$$
$$= 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c)$$

Teoria delle variabili casuali

Associo un valore della variabile a ciascun esito possibile dell'esperimento. La variabile potrà assumere uno di questi valori in base all'esito dell'esperimento. Si può associare al valore della variabile anche la probabilità dell'esito.

TEORIA DELLE VARIABILI CASUALI

VARIABILE CASUALE DISCRETA

$X \in \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ n° di valori finito o numerabili

es. cercare chiave che apre porta tra un gruppo di N chiavi senza eliminare le chiavi già provate

Porta alla definizione del numero di prove che servono per aprire la porta.

X = 'n° prove che servono per aprire la porta'

$X \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

X è una variabile casuale discreta.

A X si può associare una probabilità, cioè che al k-esimo tentativo si apra la porta.

$P(X = k) = P$(al K-esimo tentativo si trovi la chiave che apre la porta) =

$$= \frac{(N-1)^{k-1} \cdot 1}{N^k} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{N}$$

Questo è un esempio di variabile casuale discreta con valori numerabili (infinita nei numeri naturali).

Funzione di massa di probabilità

FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ

$$p : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad P(X=a) = p(a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Sarà uguale a 0 quasi dappertutto, tranne che nei valori della variabile casuale.

PROPRIETÀ: 1) $0 \le p(a) \le 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2) se $X \in \{x_1, x_2, \dots x_n\}$

$$1 = P(S) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k)$$

Se faccio la somma della funzione di massa di tutti i valori della variabile casuale, otterrò la probabilità dello spazio campione, cioè 1.

C'è una seconda funzione che si può associare alla variabile casuale, sempre riguardante l'incertezza, chiamata funzione di ripartizione o distribuzione di probabilità.

Funzione di ripartizione o distribuzione di probabilità

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE O DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

X v.c. discreta

$X \in \{x_1, x_2, \dots x_n\}$

$$F(a) \equiv P(X \le a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$

È una probabilità, quindi la prima proprietà è molto semplice.

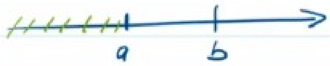
PROPRIETÀ

1) $0 \le F(a) \le 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2) $F(-\infty) = P(X \le -\infty) = 0$

3) $F(+\infty) = P(X \le +\infty) = 1$

4) Se $a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$



evento '$X < a$' $\subset$ evento '$X < b$'

Stiamo dicendo che l'evento X < a è contenuto in X < b, perché se la variabile casuale è minore di a, a maggior ragione è minore di b.

La funzione F può soltanto rimanere uguale a sé stessa in un tratto dell'asse reale o crescere al crescere del suo argomento, non può decrescere. È una funzione non decrescente.

Dalle proprietà degli eventi sappiamo che

se $A \subset B$ $\quad P(A) \le P(B)$

$$P(X < a) \le P(X \le b)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$F(a) \le F(b)$$

C'è anche una quinta proprietà, successivamente spiegata.

esempio 1 LANCIO DI MONETA EQUILIBRATA

$X \in \{0, 1\}$ $\qquad X = 0$ se T

$\qquad\qquad\qquad X = 1$ se C

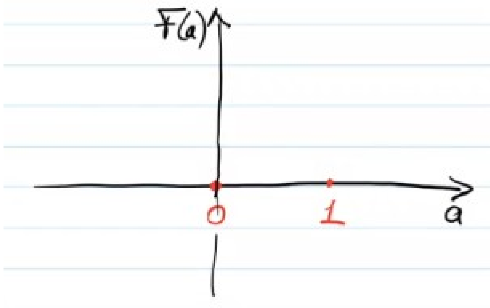
$$P(X=0) = \frac{1}{2} \; ; \; P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$$p(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } a = 0 \text{ oppure } a = 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F(a) \; ?$$

$$F(a) = P(X \le a)$$

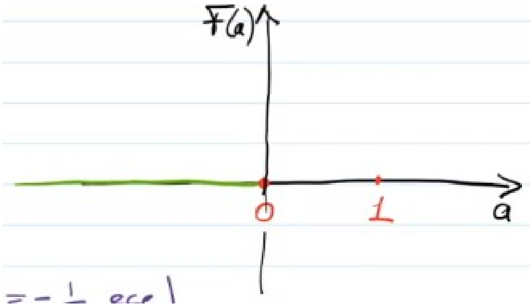
Facciamo un grafico e ragioniamo su quanto vale la funzione di ripartizione.



• $a<0$ (es. $a=-57$, $a=-\frac{1}{4}$ ecc.)

Considerando a negativo, la funzione di ripartizione varrà 0.

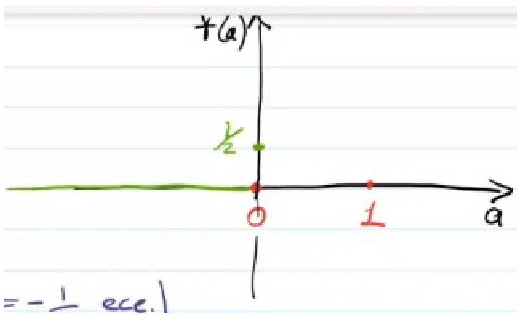
$$F(a)=P(X\le a)=0 \quad \forall a<0$$



Consideriamo a = 0, uno dei valori che la variabile può assumere.

• $a=0$

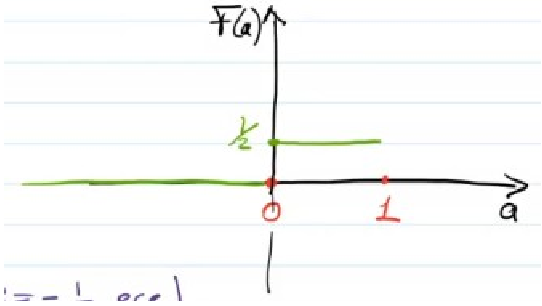
$$F(a)=P(X\le a)=P(X\le 0)=P(X<0 \cup X=0)=$$
$$=\underset{\substack{\parallel\\0}}{P(X<0)}+\underset{\substack{\parallel\\1/2}}{P(X=0)}=\frac{1}{2}$$



E tra 0 e 1? Scomponiamola come la probabilità che X sia minore di 0 più la probabilità che X sia uguale a 0 e la probabilità che X sia tra 0 e a.

- $0 < a < 1$ (es. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{18}$ ecc.)

$$F(a) = P(X \leq a) = P(X < 0) + P(X = 0) + P(0 < X < a) = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

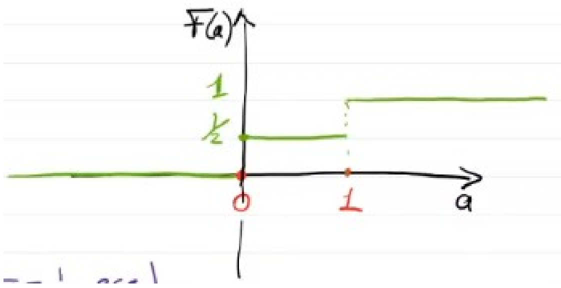


- $a = 1$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X < 0) + P(X = 0) + P(0 < X < 1) + P(X = 1) = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

- $a > 1$ (es. $a = \pi$, $a = 5^{10}$, $a = \sqrt{27}$ ...)

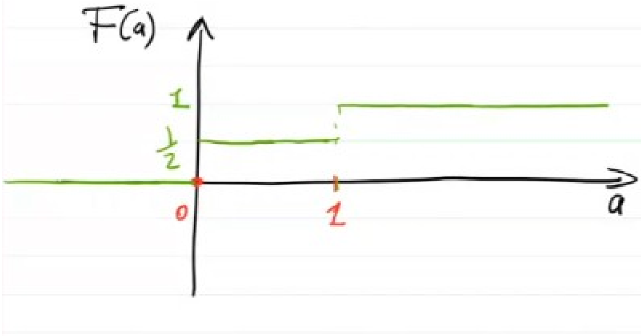
$$F(a) = P(X \leq a) = P(X < 0) + P(X = 0) + P(0 < X < 1) + P(X = 1) + P(1 < X < a) = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 1$$



In generale, costruendo una funzione di ripartizione per una variabile casuale discreta qualunque, ci aspettiamo che ci siano delle discontinuità proprio in corrispondenza dei valori della variabile (nel caso sia casuale discreta). È una funzione a gradini, cioè costante a tratti. Questa è la quinta proprietà.

5) Per v.c. discrete F è una funzione costante a tratti detta a gradini

Verifichiamo le proprietà.



Verifica delle proprietà

1) $0 \leq F(a) \leq 1$ VERIFICATA
2) $F(-\infty)=0$ VERIFICATA
3) $F(+\infty)=1$ VERIFICATA
4) $a<b \quad F(a) \leq F(b)$

Verifichiamo la quarta proprietà con degli esempi.

es. 1 $a=-3, \; b=-\frac{1}{4}$

$$F(-3)=0 \leq F\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

es. 2 $a=-27, \; b=\frac{1}{3}$

$$F(-27)=0 \leq F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$F(a)=\begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

Variabile casuale continua

Anche le variabili casuali continue sono associate a degli esperimenti, sono degli esperimenti i cui esiti si possono rappresentare non più come un numero finito numerabile, ma come un intervallo dell'asse reale o tutto l'asse reale.

La definizione è molto precisa.

VARIABILE CASUALE CONTINUA

Def. Una variabile casuale X si dice continua se è associata ad X una funzione (detta densità di probabilità) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che $\forall\, B \subset \mathbb{R}$

$$P(X \in B) = \int_B f(s)\,ds$$

È molto più complicata della definizione delle variabili casuali discrete perché richiediamo la presenza della funzione f (che non assume mai valori negativi) tale che sia possibile sempre calcolare la probabilità che la variabile casuale sia in un sottoinsieme qualunque di R tramite l'integrale di questa funzione.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ovvero $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Una f con valori negativi non può essere una funzione di densità.

La seconda proprietà viene sempre dalla definizione di variabili casuali.

2) $$P(X \in \mathbb{R}) \underset{\text{dalla (1)}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds$$

La probabilità che X assuma valori reali è una certezza, quindi l'integrale vale 1.

2) $$1 = P(X \in \mathbb{R}) \underset{\text{dalla (1)}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds = 1$$

In fisica la massa può essere modella come distribuita in maniera puntiforme (particelle di dimensioni trascurabili), può descrivere le particelle di gas che si muovo in una stanza, può essere usata per descrivere approssimativamente il moto dei pianeti. Questo è un modello discreto della distribuzione della massa. Oppure, un modello continuo è un oggetto "spalmato" di massa, quindi continuo di materia, quindi si introduce il concetto di densità di massa (densità lineare, di superficie, di volume).

Perché ciò? Perché i termini funzione di massa e funzione di densità fanno riferimento al modello fisico e vale anche nel modello delle variabili casuali.

Esistono anche le variabili casuali miste, con valori continui in alcuni intervalli e dei punti sparsi altrove.

Vediamo una conseguenze delle funzioni appena descritte.

N.B. La funzione di massa di probabilità esiste per una v.c. continua?

È una funzione priva di interesse.

.

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad p(a) = P(X=a) = \int_{x=a} f(s)\,ds = \int_a^a f(s)\,ds = 0$$

È una funzione sempre nulla.

$p(a)=0 \ \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la funzione di massa di prob. non viene usata in quanto non significativa

Quindi la funzione di massa di probabilità è una caratteristica delle variabili casuali continue.

Questo risultato così semplice insegna qualcosa di non banale.

N.B.2 Se $X \in [a_1, a_2]$ $\qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$b \in [a_1, a_2] \qquad P(X=b) = 0$

Scopriamo che la probabilità che X sia uguale a b è 0, non vuol dire che non si verifichi, ma che i valori che può assumere sono infiniti e non numerabili, per cui è impossibile indovinare il singolo valore che può assumere.

probabilità nulla NON significa qui che X NON possa essere $= b$; X assume valori non numerabili (es. un intervallo di $\mathbb{R}$) e per questo NON è possibile attribuire una prob $\neq 0$ al singolo valore

Non avrebbe senso immaginare di azzeccare quel valore, si pretenderebbe di indovinare infinite cifre decimali.

Quindi considereremo probabilità di intervalli di valori? Esattamente, si tratterà di intervalli piccoli o grandi (anche infinitesimi), ma sempre intervalli. Mai probabilità sul singolo valore. La probabilità sul singolo valore ha senso solo nelle variabili casuali discrete.

Esercizi

es. 15 FOGLIO II

In una prova si possono avere 3 possibili esiti.

$$P(E_1) = p_1 = \frac{1}{3}\ ;\quad P(E_2) = p_2 = \frac{1}{4}\ ;\quad P(E_3) = p_3 = \frac{5}{12}$$

La somma delle 3 probabilità deve fare 1, infatti lo fa.

Siccome stiamo parlando di 3 esiti, saranno sicuramente mutuamente esclusivi o disgiunti: se se ne verifica uno, gli altri non si verificano.

E_1, E_2, E_3 disgiunti in quanto <u>esiti</u>

La prova viene ripetuta 4 volte.

4 ripetizioni della prova

$P($ E_2 ed E_3 compaiano almeno una volta$)$?

Non potremo scrivere tutte le combinazioni, perché non sono esiti equiprobabili. Se venisse chiesto che E2 compaia una volta, non sarebbe così difficile (1 meno probabilità di E2 complementare). Ma qui si chiedono che due esiti compaiano, un calcolo non banale.

Definisco degli altri eventi.

A_K = l'esito E_K non si è verificato nelle 4 prove

$K = 1, 2, 3$

$$P(E_2 \text{ ed } E_3 \text{ compaiano almeno una volta}) = P(A_2^c \cap A_3^c)$$

Deve valere simultaneamente A2 complementare e A3 complementare.

C'è un problema: A2 complementare e A3 complementare non sono indipendenti, se si verifica uno, non si verifica l'altro.

A_1, A_2 e A_3 sono in generale DIPENDENTI

Riscriviamo questa probabilità.

$$P((A_2 \cup A_3)^c) \underset{P1}{=} 1 - P(A_2 \cup A_3)$$

$$= 1 - (P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3))$$

Concentriamoci sulle singole probabilità.

$$P(A_2) = P(E_2 \text{ non si verifichi in } 4 \text{ prove}) = (1-p_2)\cdot(1-p_2)(1-p_2)(1-p_2) =$$
$$= (1-p_2)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$P(A_3) = P(E_3 \text{ non si verifichi in } 4 \text{ prove}) = (1-p_3)^4 = \left(\frac{7}{12}\right)^4$$

Non sono indipendenti, quindi non è il prodotto l'intersezione.

$$P(A_2 \cap A_3) = P(E_2 \text{ ed } E_3 \text{ non si verifichino in } 4 \text{ prove}) =$$
$$= P(E_1 \text{ si sia verificato } 4 \text{ volte}) = p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 =$$
$$= p_1^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

Visto che non si verificano, qualcosa dovrà verificarsi, l'evento E1. Ora il problema è risolto.