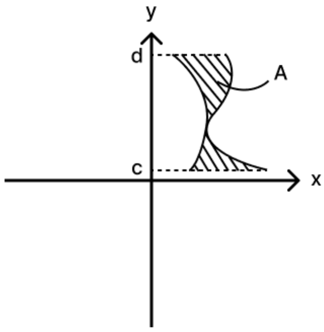
▼ **5.0 - Integrale doppio**

▼ **5.1 - Insiemi semplici**

Insieme x-semplice

Siano $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $h_1(y) \leq h_2(y) \quad \forall\, y \in [c, d]$, l'**insieme x-semplice** definito da h_1 e h_2 è definito nel seguente modo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

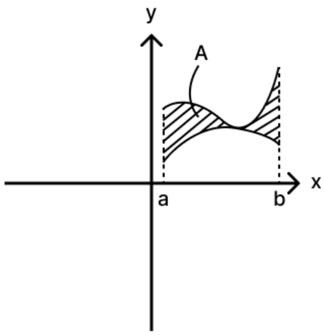


Insieme y-semplice.

Insieme y-semplice

Siano $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$, l'**insieme y-semplice** definito da g_1 e g_2 è definito nel seguente modo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



Insieme x-semplice.

▼ **5.2 - Integrale doppio**

Definizione di integrale doppio

Sia f una funzione continua e A un insieme semplice, l'**integrale doppio** di f in A viene definito nel seguente modo:

$$\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$

Proprietà dell'integrale doppio

- **Linearità**:

$$\int_A (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\ dx\ dy = \lambda_1 \int_A f_1\ dx\ dy + \lambda_2 \int_A f_2\ dx\ dy$$

- A è un insieme degenere ($g_1(x) = g_2(x) \quad \forall\ x$, quindi A è una linea)

$$\implies \int_A f(x,y)\ dx\ dy = 0$$

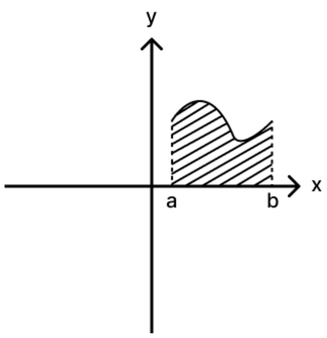
- $\int_A 1\ dx\ dy =$ area di A

Idea grafica dell'integrale doppio

Integrale in $n = 1$

Sia $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ continua, l'integrale $\int_a^b f(x)\ dx$ indica il valore dell'area del sottografico di f:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

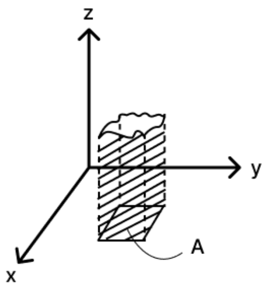


Idea grafica dell'integrale in $n = 1$.

Integrale in $n = 2$

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad ((x,y) \to f(x,y) > 0 \quad \forall\ (x,y) \in A)$, dove A è un insieme semplice, l'integrale $\int_A f(x,y)\ dx\ dy$ indica il valore del volume del sottografico di f:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$



Idea grafica dell'integrale in $n = 2$.

Formula di riduzione

Insiemi y-semplici

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, con A un insieme y-semplice del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, allora è definito $\int_A f(x, y)\ dx\ dy$ e vale la seguente **formula di riduzione**:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dy)\ dx$$

Osservazioni

- Se $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$, allora:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_A\ dx\ dy = \int_b^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = \text{area di } A$$

Insiemi x-semplici

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, con A un insieme x-semplice del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, allora è definito $\int_A f(x, y)\ dx\ dy$ e vale la seguente **formula di riduzione**:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_c^d (\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\ dx)\ dy$$

Osservazioni

- Se $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$, allora:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_A\ dx\ dy = \int_b^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = \text{area di } A$$