▼ **4.0 - Relazioni, funzioni e insiemi**

▼ **4.1 - Relazioni**

Coppie ordinate

Coppie ordinate vs insiemi

- In un **insieme** l'ordine non conta e nemmeno la numerosità degli elementi: $\{1,2\} = \{2,1\}$ e $\{1,1\} = \{1\}$.
- Una **coppia ordinata** è formata da due elementi di cui uno è identificato come primo e l'altro come secondo. Due coppie sono uguali se e solo se lo solo rispettivamente il primo e il secondo elemento. Una coppia non è l'insieme dei suoi elementi e non deve essere pensata come contenente (nel senso di $\in$) i suoi elementi.

  $\langle 1,2\rangle \neq \langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle \neq \{1,2\}, 1 \not\in \langle 1,2\rangle$.

Codifica di una coppia ordinata

Dati X, Y chiamiamo coppia ordinata di prima componente X e di seconda componente Y, e la indichiamo con $\langle X, Y\rangle$, l'insieme $\{X, \{X, Y\}\}$.

Prodotto cartesiano

> $\forall A, \forall B, \exists C, \forall Z, (Z \in C \iff \exists a, \exists b, (a \in A \land b \in B \land Z = \langle a, b\rangle))$

L'insieme C viene chiamato **prodotto cartesiano** di A e B e indicato come $A \times B$.

Esempio: $\{a,b\} \times \{1,2\} = \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle\}$

Relazioni

> Una **relazione** fra A e B è un qualunque sottoinsieme di $A \times B$.

Sia $\mathcal{R}$ una relazione, scriviamo $a\mathcal{R}b$ se $\langle a,b\rangle \in \mathcal{R}$.

Se $\mathcal{R} \subseteq A \times \emptyset$ oppure $\mathcal{R} \subseteq \emptyset \times A$ allora $\mathcal{R} = \emptyset$.

Esempio:

- La relazione $\leq$ sull'insieme $\{0,1,2\}$ è definita come segue: $\leq = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ e $0 \leq 2$ è solo una notazione per $\langle 0,2\rangle \in \leq$.

Proprietà delle relazioni

Sia $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, essa gode delle proprietà:

- **Riflessiva** se $\forall X \in A, X\mathcal{R}X$.
- **Simmetrica** se $\forall X, Y \in A, (X\mathcal{R}Y \implies Y\mathcal{R}X)$.
- **Transitiva** se $\forall X, Y, Z \in A, (X\mathcal{R}Y \land Y\mathcal{R}Z \implies X\mathcal{R}Z)$

Tipi di relazioni

> Una relazione è di **ordinamento stretto** se è transitiva e non riflessiva (es. $<$).

> Una relazione è di **ordinamento (lasco)** se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica ($\forall X, Y \in A, (X\mathcal{R}Y \wedge Y\mathcal{R}X \implies X = Y)$) (es. $=$, $\leq$).

> Una relazione è di **equivalenza** se è riflessiva, simmetrica e transitiva (es. $=$, “essere dello stesso modello”).

Due elementi sono uguali se le proprietà che vengono soddisfatte da uno sono soddisfatte anche dall’altro, mentre due elementi sono equivalenti se entrambi soddisfano delle proprietà che ci interessano per quello che si deve fare.

Esempio: se viene considerato l’insieme delle automobili, due fiat punto sono equivalenti se viene considerata come proprietà solo il modello dell’auto, ma non sono uguali in quanto ad esempio hanno numero di targa differente.

Classi di equivalenza

> Sia $\equiv \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza su A. La sua **classe di equivalenza** di $x \in A$ rispetto a $\equiv$ è definita come segue: $[x]_{\equiv} = \{y \in A | y \equiv x\}$ (tutti gli elementi di A che sono equivalenti a x).

La classe di equivalenza di $x \in A$ è dunque formata da tutti gli elementi di A che sono equivalenti a x.

Esempio: la classe di equivalenza di una fiat punto nell’insieme delle automobili con la relazione di equivalenza che tiene conto del modello è costituita dall’insieme di tutte le fiat punto.

Teorema

> Sia $\equiv \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza su A. Prese due classi di equivalenza $[x]_{\equiv}, [y]_{\equiv}$ date da due elementi $x, y \in A$, abbiamo che $[x]_{\equiv} = [y]_{\equiv}$ (quando $x \equiv y$) oppure $[x]_{\equiv}$ e $[y]_{\equiv}$ sono insiemi disgiunti, ovvero non hanno nessun elemento in comune (quando $x \not\equiv y$).

Insieme quoziente

> Sia $\equiv \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza su A. L’**insieme quoziente** di A rispetto a $\equiv$ è definito come segue: $A_{/\equiv} = \{[x]_{\equiv} | x \in A\}$.

L’insieme quoziente è dunque formato da tutte le classi di equivalenza in A, quindi è un insieme formato da insiemi di A.

Gli insiemi quoziente sono strumenti molto potenti per creare **nuovi concetti** a partire da concetti pre-esistenti.

Esempio:

- Creazione dell’insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ a partire dai naturali $\mathbb{N}$.

  Intuizione: $Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\langle 2, 4 \rangle \in \mathbb{Z} = 2 - 4$

  $\equiv \subseteq Z \times Z$: $\langle u_1, l_1 \rangle \equiv \langle u_2, l_2 \rangle \iff u_1 + l_2 = u_2 + l_1$ (es. $\langle 2, 4 \rangle \equiv \langle 3, 5 \rangle \iff 2 + 5 = 4 + 3$)

$\mathbb{Z} = Z_{/\equiv} \to Z = \{\dots, [\langle 0,2\rangle]_\equiv, [\langle 0,1\rangle]_\equiv, [\langle 0,0\rangle]_\equiv, [\langle 1,0\rangle]_\equiv, [\langle 2,0\rangle]_\equiv, \dots\}$

Sintassi: $[\langle 0,n\rangle]_\equiv = -n$, $[\langle n,0\rangle]_\equiv = +n$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$

▼ 4.2 - Funzioni

> Una **funzione** di dominio A e di codominio B è una qualunque relazione $f \subseteq A \times B$ tale che: $\forall X, (X \in A \implies \exists! Y \in B, XfY)$ (per ogni elemento del dominio c'è un unico elemento del codominio in relazione con esso).

Notazione: sia f una funzione, scriviamo $y = f(x)$ per dire xfy, ovvero $\langle x, y\rangle \in f$.

Una funzione non stabilisce dunque il modo in cui vengono calcolate le sue coppie ordinate, ma, visto che è una relazione vera e propria, stabilisce solo un insieme di coppie ordinate facenti parte di essa.

Spazio di funzioni

> $\forall A, \forall B, \exists C, \forall f, (f \in C \iff f$ è una funzione di dominio A e codominio B).

Indichiamo C come B^A, ovvero **spazio di funzioni** da A a B.

Funzioni con insiemi vuoti

- $B^\emptyset = \{\emptyset\}$ (è una funzione)
- $\emptyset^A = \emptyset \iff A \neq \emptyset$ (non è una funzione)