Esercizi

Q 1 18/12/2013

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Valore di c, valor medio e varianza.

$f(x)$ è funzione di densità se

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c \geq 0$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{0} \cancel{0}\,dx + \int_{0}^{1} c x^2\,dx + \int_{1}^{+\infty} \cancel{0}\,dx =$

$$= c\int_0^1 x^2\,dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{c}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$c = 3$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \overset{c=3}{=} \int_0^1 x\,3x^2\,dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,3x^2\,dx = 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

Con 6 dispositivi, la probabilità che almeno la metà dei dispositivi va cambiata dopo 6 mesi.

Per un dispositivo $\displaystyle P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 3x^2\,dx =$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Y = 'n° dispositivi su 6 che si guastano entro $\frac{1}{2}$ anno'

$Y \sim B\left(6, \frac{1}{8}\right)$ $\quad P(Y \geq 3) = P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5) + P(Y=6)$

oppure

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y<3) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2)$

$$= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^0\left(\frac{7}{8}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^1\left(\frac{7}{8}\right)^5 - \binom{6}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^4$$

Qual è la risposta alla domanda precedente se i dispositivi fossero 100?

Y_{100} = 'n° dispositivi guasti entro $\frac{1}{2}$ anno su 100 dispositivi'

$Y_{100} \sim B\left(100, \frac{1}{8}\right)$ $\quad P(Y \geq 50) = \sum_{k=50}^{100} \binom{100}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k\left(\frac{7}{8}\right)^{100-k}$

Ma è impraticabile. Possiamo approssimare con la poissoniana, sarebbero comunque tanti. Usiamo il teorema del limite centrale.

per il TLC $Y_{100} \mathrel{\dot\sim} N\left(100 \cdot \frac{1}{8}, 100 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}\right)$

$$P(Y_{100} \geq 50) = P(Y_{100} \geq 49.5) = P\left(\frac{Y_{100} - \frac{100}{8}}{\sqrt{\frac{700}{8^2}}} \geq \frac{49.5 - \frac{100}{8}}{\sqrt{\frac{700}{8^2}}}\right) =$$

$$\underset{Z \sim N(0,1)}{=} P\left(Z \geq \frac{49.5 - 12.5}{\frac{10}{8}\sqrt{7}}\right) \dots$$

Il passaggio da discreto (binomiale) a continuo (gaussiana) va fatto con l'approssimazione alla continuità.

APPROSSIMAZIONE ALLA CONTINUITÀ

$Y \sim B(N, p)$ con $N >> 1$ $(N > 30)$

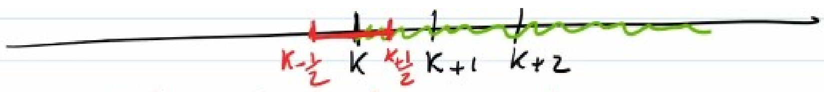
$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{N-k}$$

Se $Y \approx N(Np, Npq)$

$$P(Y = k) = \cancel{0} \Rightarrow P\left(k - \frac{1}{2} \leq Y < k + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{Npq\, 2\pi}} e^{-\frac{(y-Np)^2}{2Npq}} dy$$

Estendiamolo al caso generale.



$$P(Y \geq k) = P\left(Y \geq k - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$P(Y > k) = P\left(Y \geq k + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$P(Y \leq k) = P\left(Y \leq k + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$P(Y < k) = P\left(Y \leq k - \tfrac{1}{2}\right)$$

Q. 3 18/12/2013

$X \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad p_X(1) = p_X(2) = p_X(3) = p_X(4) = \frac{1}{4}$

$Y \geq X$

Y \ X	1	2	3	4
1		0	0	0
2			0	0
3				0
4				

$p(4,4) = p_X(4) = \frac{1}{4}$

$P(Y=3 \mid X=3)$ ovvero $P(Y=3$ scelto tra $\{3,4\})$

$p(3,3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = p(3,4)$

$$p(2,2) = \underset{\substack{\uparrow \\ p_X(2)}}{\frac{1}{4}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ p(Y=2 \mid X=2)}}{\frac{1}{3}} = p(2,3) = p(2,4)$$

ovvero Y è scelto tra i n° $(2, 3, 4)$

$$p(1,1) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{p_X(1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{P(Y=1 \mid X=1)} = \frac{1}{16} = p(1,2) = p(1,3) = p(1,4)$$

ovvero Y è scelto tra $\{1,2,3,4\}$

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	0	0
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Cerchiamo la marginale della Y.

Y \ X	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16} = \frac{3}{48}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{7}{48}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{48}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{48}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

X e Y SONO DIPENDENTI INFATTI AD ESEMPIO

$$P(X=4, Y=1) = 0 \neq P(X=4)\,P(Y=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}$$

$$P(X+Y \geq 3) = P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) +$$
$$+ P(X=1, Y=4) + P(X=2, Y=1) +$$
$$+ P(X=2, Y=2) + P(X=2, Y=3) +$$
$$+ P(X \ldots$$

oppure $P(X+Y \geq 3) = 1 - P(X+Y < 3) =$

$$= 1 - \left(P(X=1, Y=1)\right)$$

Q6 18/12/2013

$\boxed{\begin{array}{l} 6 \text{ USATE} \\ 7 \text{ NUOVE} \end{array}}$

SITUAZIONE INIZIALE

$\Rightarrow$ estrazione (senza reimmissione di 2 lampadine) $\Rightarrow$ le 2 lampadine vengono usate e rimesse nella scatola

H_1: estrazione di 2 lampadine nuove

H_2: " " " usate

H_3: " di 1 lampadina nuova + 1 usata

$$P(H_1) = \frac{C_{7,2}}{C_{13,2}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{7!}{\cancel{2!}\,5!}}{\frac{13!}{\cancel{2!}\,11!}} = \frac{7 \cdot \cancel{6}}{13 \cdot \cancel{12}_{2}} = \frac{7}{26}$$

$$P(H_2) = \frac{C_{6,2}}{C_{13,2}} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{6!}{\cancel{2!}\,4!}}{\frac{13!}{\cancel{2!}\,11!}} = \frac{\cancel{6} \cdot 5}{13 \cdot \cancel{12}_{2}} = \frac{5}{26}$$

$$P(H_3) = \frac{C_{7,1}\, C_{6,1}}{C_{13,2}} = \frac{\binom{7}{1}\binom{6}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{7 \cdot 6}{\frac{13!}{2!\,11!}} =$$

$$= \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 2}{13 \cdot \cancel{12}_{2}} = \frac{14}{26}$$

se H_1 scatola 8 usate, 5 NUOVE

se H_2 scatola 6 usate, 7 NUOVE

se H_3 scatola 7 usate, 6 NUOVE

N = 'estrazione di due lampadine nuove dalla scatola dopo la prima estrazione + impiego di 2 lampadine'

$$P(N) = P(N|H_1)P(H_1) + P(N|H_2)P(H_2) + P(N|H_3)P(H_3)$$

$$P(N|H_1) = \frac{C_{5,2}}{C_{13,2}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{5!}{\cancel{2!}\,3!}}{\frac{13!}{\cancel{2!}\,11!}} = \frac{5 \cdot 4}{13 \cdot 12}$$

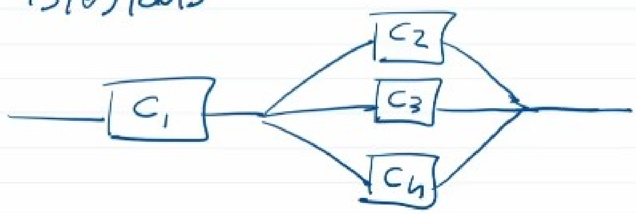
$$P(N|H_2) = \frac{C_{7,2}}{C_{13,2}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{7!}{\cancel{2!}\,5!}}{\frac{13!}{\cancel{2!}\,11!}} \ldots$$

$$P(N|H_3) = \frac{C_{6,2}}{C_{13,2}} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{6!}{\cancel{2!}\,4!}}{\frac{13!}{2!\,11!}} = \ldots$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(H_2|N) = \frac{P(N|H_2)\,P(H_2)}{P(N)}$$

Q1 13/09/2013



Durata di C_K : X_K v.c.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \text{ e } X_4 \sim U(100, 200) \\ X_2 \text{ e } X_3 \sim E\left(\frac{1}{100}\right) \end{array}\right\} \text{INDIP}$$

Y = 'durata del sistema' $F_Y(a)$!

$$P(Y > 180) = 1 - P(Y \leq 180) = 1 - F_Y(180)$$

T durata del "parallelo" di C_2, C_3, C_4

$$Y = \min(X_1, T) \quad \text{e } T = \max(x_1, x_2, x_3)$$

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = P(\min(X_1, T) \leq a) =$$

La parte parallela funziona finché almeno uno dei componenti funziona. Quando abbiamo un minimo, la probabilità che il minimo sia minore di a si fa con l'evento complementare.

$$= 1 - P(\min(X_1, T) > a) = 1 - P(X_1 > a, T > a) =$$

$$= 1 - P(X_1 > a)\, P(T > a)$$

$$\Downarrow$$

se $a \geq 0$ $\quad F_Y(a) = 1 - P(X_1 > a)\, P(T > a)$

$$P(X_1 > a) = 1 - P(X_1 \le a) = 1 - F_{X_1}(a) =$$

$$= 1 - \begin{cases} 0 & \text{se } a < 100 \\ \frac{a-100}{200-100} & \text{se } 100 \le a \le 200 \\ 1 & \text{se } a > 200 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 100 \\ 1 - \frac{a-100}{100} & \text{se } 100 \le a \le 200 \\ 0 & \text{se } a > 200 \end{cases}$$

$$P(T > a) = P(\max(X_2, X_3, X_4) > a) = 1 - P(\max(X_2, X_3, X_4) \le a) =$$

$$= 1 - P(X_2 \le a, X_3 \le a, X_4 \le a) \underset{\text{INDIP.}}{=}$$

$$= 1 - P(X_2 \le a)\, P(X_3 \le a)\, P(X_4 \le a) =$$

$$= 1 - F_{X_2}(a)\, F_{X_3}(a)\, F_{X_4}(a)$$

$$F_{X_2}(a) = F_{X_3}(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{a}{100}} & \text{se } a \ge 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F_{X_4}(a) = F_{X_1}(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 100 \\ \frac{a-100}{100} & \text{se } 100 \le a \le 200 \\ 1 & \text{se } a > 100 \end{cases}$$

Q2 27/01/2014

$$f(x) = \begin{cases} K(x^2+x) & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

K? $E[X]$?, $Var(X)$?, $F_X(x)$?

$f(x)$ è una funzione di densità di probabilità se

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies K \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \implies \int_0^1 K(x^2+x)dx = 1$

$$K\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$K \cdot \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$K\,\frac{5}{6} = 1 \implies K = \frac{6}{5}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^1 x\,\frac{6}{5}(x^2+x)\,dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{5}\;\frac{7}{12} = \frac{7}{10}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2\,\frac{6}{5}(x^2+x)\,dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}\cdot\frac{9}{20} = \frac{54}{100}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{54}{100} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{54-49}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

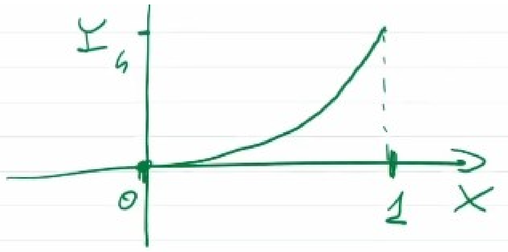
$$Y = 4X^2 \Rightarrow E[Y] = E[4X^2] = 4E[X^2] = 4 \cdot \frac{54}{100} = \frac{54}{25}$$

$$F_X(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{a} 0\,dx = 0 & \text{se } a < 0 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{a} \frac{6}{5}(x^2+x)\,dx & \text{se } a \in [0,1] \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{6}{5}(x^2+x)\,dx}_{=1} + \cancel{\int_{1}^{a} 0\,dx} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^a \frac{6}{5}(x^2+x)\,dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{6}{5}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}\right)$$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \frac{6}{5}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}\right) & \text{se } 0 \le a \le 1 \\ 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$Y = 4X^2$



Formule per funzioni di una variabile.

$Y = g(X) = 4X^2$ è monotona se $X \in [0,1]$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$Y = g(X) = 4X^2 \Rightarrow X = \sqrt{\frac{Y}{4}} = g^{-1}(Y)$$

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}\sqrt{\frac{y}{4}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy} y^{1/2} = \frac{1}{4} y^{-1/2}$$

$$f_X(g^{-1}(y)) = ? \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+x) & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(y^{-1}(y)) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(\left(\frac{y^{1/2}}{2}\right)^2 + \frac{y^{1/2}}{2}\right) & \text{se } \frac{y^{1/2}}{2} \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{6}{5}\left(\frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2}\right) & \text{se } \underline{0 \le \frac{\sqrt{y}}{2} \le 1} \\ 0 \text{ altrove} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{6}{5}\left(\frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2}\right) & \text{se } 0 \le y \le 4 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{4\sqrt{y}} \begin{cases} \frac{6}{5}\left(\frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2}\right) & \text{se } 0 \le y \le 4 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{20}\left(\frac{\sqrt{y}}{2} + 1\right) & \text{se } 0 \le y \le 4 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$

DALLA TEORIA $\quad$ Se $X \sim U(\alpha, \beta)$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}$$

$$Y \sim U(a\alpha + b,\ a\beta + b)$$

es. 5 IX FOGLIO

$X \sim U(1,2)$ $\qquad Y = 4X - 1 = g(X)$

$$\Downarrow$$

$$X = \frac{Y+1}{4} = g^{-1}(Y)$$

$$g^{-1}(y) = \frac{y+1}{4} \Rightarrow \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{4}$$

FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-1} & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow f_X(g^{-1}(y)) = \begin{cases} \frac{1}{2-1} & \text{se } 1 \le \frac{y+1}{4} \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } 3 \le y \le 7 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{4} \begin{cases} 1 & \text{se } 3 \le y \le 7 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 3 \le y \le 7 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$Y \sim U(3,7) \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 3 \\ \frac{y-3}{7-3} & \text{se } 3 \le y \le 7 \\ 1 & \text{se } y > 7 \end{cases}$$

oppure

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$$

esercizio "NUOVO"

La prob. condizionata che uno studente consegua 30L in un esame è

$$p + m\left(\frac{1-p}{30}\right) - n\,\frac{p}{30}$$

dove $p \in [0, 0.6]$, $m =$ n° esami già sostenuti con esito 30L

$n =$ n° " " " senza esito 30L

1) Quale è la probabilità che al terzo esame uno studente consegua 30L se nei due prec. esami non ha conseguito lodi?

$L_K =$ '30eLode nel K-esimo esame'

$$P(L_3 | L_1^c \cap L_2^c) = p + 0\left(\frac{1-p}{30}\right) - 2\,\frac{p}{30} = p\left(1 - \frac{1}{15}\right) = \frac{14}{15}p$$

2) Quale è la prob. che nei primi 3 esami lo studente abbia sempre ottenuto 30L?

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = P(L_3 | L_1 \cap L_2)\, P(L_1 \cap L_2) =$$

$$= P(L_3 | L_1 \cap L_2)\, P(L_2 | L_1)\, P(L_1) =$$

$$= \left(p + 2\left(\frac{1-p}{30}\right) - 0\,\frac{p}{30}\right)\left(p + 1\,\frac{(1-p)}{30} - 0\,\frac{p}{30}\right)$$

$$= \left(p + \frac{1}{15}(1-p)\right)\left(p + \frac{1-p}{30}\right)p$$

3) Qual è la prob. che sui primi 3 esami lo studente abbia avuto almeno una lode

$$P(\text{almeno una lode}) = 1 - P(\text{nessuna lode}) =$$

$$= 1 - P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) =$$

$$= 1 - P(L_3^c | L_1^c \cap L_2^c)\, P(L_2^c | L_1^c)\, P(L_1^c)$$

$$P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 1 - p$$

$$P(L_2^c | L_1^c) = 1 - P(L_2 | L_1^c) = 1 - \left(p - \frac{p}{30}\right)$$

$$P(L_3^c | L_1^c \cap L_2^c) = 1 - P(L_3 | L_1^c \cap L_2^c) = 1 - \left(p - \frac{2p}{30}\right)$$