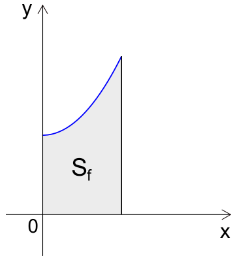
▼ 1.0 - Integrali

Gli **integrali** sono utili per calcolare l'**area delle figure curvilinee**.

Con essi è infatti possibile determinare l'area del **sottografico** di una certa funzione curvilinea. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $\forall\ x \in [a, b] . f(x) \geq 0$, il suo sottografico corrisponde a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$:

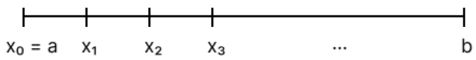


Sottografico di una funzione.

▼ 1.1 - Somma di Riemann

Scomposizione di un intervallo

Dato un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e un numero $n \in \mathbb{N}$, divido $[a, b]$ in n parti uguali:



Ogni k-esima x dell'intervallo è ricavabile tramite: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

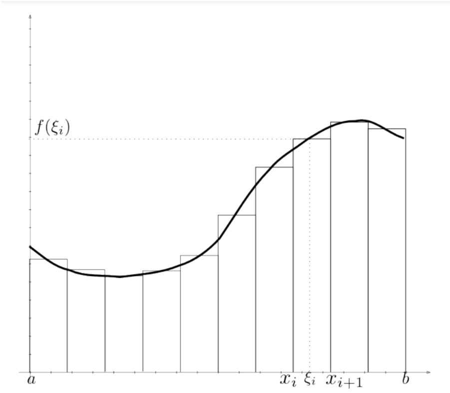
Per ogni parte dell'intervallo scelgo un suo punto interno $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Somma di Riemann

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, definiamo la **somma di Riemann** come segue:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)h = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n}$$

Nota: S_n **dipende** dalla scelta dei vari c_k, la quale è arbitraria.



Somma di Riemann.

▼ 1.2 - Integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora esiste finito il $\lim_{n\to\infty} S_n$ (non dipende dalla scelta dei punti c_k). Si è soliti scrivere tale limite $\lim_{n\to\infty} f(x)$ come $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f$ e si dice che f è **integrabile**.

Osservazioni

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ e $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$.
- L'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ è un numero e indica l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Proprietà dell'integrale

1. **Linearità**

   f, g continue su $[a, b]$. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale:

   $$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività**

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile.

   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:

   $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

   I reali a, b e c possono trovarsi in qualunque posizione, non devono per forza essere nell'ordine $a < b < c$.

3. **Monotonia**

   f, g continue su $[a, b]$.

   $$f(x) \leq g(c) \quad \forall\ x \in [a, b] \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. **Convenzione**

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Teorema della media integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora $\exists\ c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

Dimostrazione

Siccome f è continua in $[a, b]$, è possibile utilizzare il teorema di Weierstrass in tale intervallo e affermare che $\exists\ x_1, x_2$ punti di minimo e massimo in $[a, b]$.

Per definizione di punti di minimo e massimo sappiamo che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\ x \in [a, b]$. Per la proprietà di monotonia dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x_1)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b f(x_2)\, dx \\ \implies f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq f(x_2)(b-a) \\ \implies f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \leq f(x_2) \end{aligned}$$

Per il teorema dei valori intermedi:

$$\exists\ c \in [a, b] \text{ tale che } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$$

qed

Primitiva di una funzione

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, la funzione $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ si dice **primitiva** di f su $]a, b[$ se vale:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in]a, b[$$

Proposizioni

- Se F è la primitiva di f su $]a, b[$, allora anche $H :]a, b[\to \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(x) + c$ è primitiva di $f \quad \forall\ c \in \mathbb{R}$.

  Le primitive di una funzione f sono dunque infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a $F(x) + c$, dove c è uno scalare.

- Siano F e G primitive di f su $]a, b[$. Allora:

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, F(x) - G(x) = k \quad \forall\, x \in \,]a, b[$$

Dimostrazione

Sia $H :]a, b[\to \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(x) - G(x)$.

Calcoliamo la derivata di $H(x)$, ovvero $H'(x) = F'(x) - G'(x)$, che per definizione di primitiva diventa $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Siccome la derivata di $H(x) = 0 \quad \forall\, x \in \,]a, b[$, allora $H(x)$ è costante in $]a, b[$, dunque $H(x) = F(x) - G(x) = k \quad \forall\, x \in \,]a, b[$.

qed

▼ **1.3 - Funzioni integrali e primitive elementari**

Funzione integrale

Sia $f :]a_0, b_0[\, \to \mathbb{R}$ continua e sia $c \in \,]a_0, b_0[$, la **funzione integrale di punto base** c è la funzione $I_c :]a_0, b_0[\, \to \mathbb{R}$ tale che:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

Osservazioni

- La funzione integrale rappresenta l'area sottesa al grafico di f da un certo punto base c fino a x.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua in $]a, b[$ e sia $c \in \,]a, b[$, allora:

$$I_c'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \,]a, b[$$

Dimostrazione

Bisogna dimostrare che $\lim_{h \to o} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$.

Sviluppiamo il numeratore del limite utilizzando la definizione di funzione integrale $I_c(x+h) - I_c(x) = \int_c^{x+h} f(t)\, dt - \int_c^x f(t)\, dt$.

Utilizziamo le proprietà dell'integrale $\int_c^{x+h} f(t)\, dt - \int_c^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt$ e abbiamo dimostrato che $\lim_{h \to o} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)}{h}\, dt$.

Per il teorema della media integrale:

$$\exists\, c \in \,]x, x+h[\text{ tale che } \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Notiamo che $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ è equivalente al contenuto del limite da dimostrare, dunque ci basta dimostrare che $\lim_{h \to o} f(c) = f(x)$. Visto che $c \in \,]x, x+h[$, se $h \to 0$ allora $c \to x$, quindi $\lim_{h \to o} f(c) = f(x)$.

qed.

Teorema fondamentale del calcolo integrale 2 - Formula di Torricelli

Sia f continua su $]a, b[$ e sia F la primitiva di f su $]a, b[$, allora:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \quad \forall\ x \in\ ]a, b[$$

Dimostrazione

Sia $c \in\ ]a, b[$. Sappiamo per ipotesi che $F(x)$ e $I_c(x)$ sono due primitive di $f(x)$ in $]a, b[$, dunque $F(x) - I_c(x) = k \quad \forall\ x \in\ ]a, b[\implies F(x) = I_c(x) + k \quad \forall\ x \in\ ]a, b[$.

Partendo da $F(b) - F(a)$ e passando per la definizione di funzione integrale $I_c(x)$ dimostriamo che $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx$:

$$\begin{gathered} F(b) - F(a) = I_c(b) + k - I_c(a) - k = I_c(b) - I_c(a) \\ = \int_c^b f(x)\ dx - \int_c^a f(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx + \int_a^c f(x)\ dx \\ = \int_a^b f(x)\ dx \end{gathered}$$

qed.

Primitive elementari

$$\begin{gathered} \int k \to kx \\ \int x^\alpha, \alpha \neq -1 \to \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \int x^{-1} \to \ln|x| \\ \int a^x \to \frac{a^x}{\ln a}\ [\int e^x \to e^x] \\ \int \sin x \to -\cos x \\ \int \cos x \to \sin x \\ \int 1 + \tan^2 x = \int \frac{1}{\cos^2 x} \to \tan x \\ \int 1 + \cot^2 x = \int \frac{1}{\sin^2 x} \to -\cot x \\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \arccos x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \arcsin x \\ \int \frac{1}{1+x^2} \to \operatorname{arctg} x \\ \int f'(g(x))g'(x) \to f(g(x)) \end{gathered}$$

▼ 1.4 - Integrazione per parti, cambio variabile e integrali generalizzati

Integrazione per parti

Per integrare un prodotto può essere talvolta utilizzata la seguente formula di **integrazione per parti**:

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx$$

Nota: per integrare $\int \sin x\ e^x$ occorre utilizzare due volte la formula di integrazione per parti.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \implies f'(x)g(x) = d(f(x)g(x)) - f(x)g'(x) \\ \implies \int f'(x)g(x) = \int d(f(x)g(x)) - \int f(x)g'(x) \\ \implies \int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \end{aligned}$$

qed.

Formula per il cambio variabile

Siano I, J intervalli aperti, sia $h : I \to J$ una funzione con derivata h' continua su I e $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\forall\ \alpha, \beta \in I$ vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t)\ dt$$

Osservazioni

- Integrali del tipo $\int_a^b g(f(x))f'(x)\ dx$ possono essere risolti sostituendo a $f(x)$ una variabile come z, e visto che $dz = f'(x)\ dx$ possiamo arrivare all'integrale $\int_a^b g'(x)\ dx$. Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo dunque concludere che $\int_a^b g(f(x))f'(x)\ dx = [g(x)]_a^b$.

Caso particolare: $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$.

Integrali generalizzati

Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato su** $[a, +\infty[$ se:

$$\exists \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)\ dx := \int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

La definizione per $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ è omessa perchè analoga.

Osservazioni

- Se $f(x) \geq 0$ su $[a, +\infty[$ e $\int_{a}^{+\infty} f(x)$ converge, allora tale integrale esprime l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, +\infty[$.

Esercizio:

▼ Studiare l'integrale generalizzato $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \forall p > 0$

- Esponente $1 - p < 0 \implies p > 1$: la prima frazione del limite tende a $+\infty$ e l'integrale diverge, dunque vale $+\infty$.
- Esponente $1 - p > 0 \implies p < 1$: la prima frazione del limite tende a 0 e l'integrale è dunque uguale a $\frac{1}{p-1}$.

Per studiare tale integrale occorre dunque studiare il seguente limite: $\lim_{z \to +\infty} \int_{1}^{z} \frac{dx}{x^p}$.

A questo punto il valore dell'integrale dipende dal valore del parametro p in quanto questo determina il valore dell'esponente di z:

- Esponente $p \neq 1$: il limite da valutare è $\lim_{z \to +\infty} [\frac{x^{1-p}}{1-p}]_{1}^{z} = \lim_{z \to +\infty} \frac{z^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$, il quale dipende a sua volta dal valore dell'esponente di z:
- Esponente $1 - p = 0 \implies p = 1$: il limite da valutare è $\lim_{z \to +\infty} [\ln(x)]_{1}^{z} = \lim_{z \to +\infty} \ln(z) - \ln(1)$, dunque l'integrale diverge, ovvero vale $+\infty$.

Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se:

$$\exists \lim_{z \to a^+} \int_{z}^{b} f(x)\, dx := \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$