Variabili casuali doppie discrete

V.C. DOPPIE DISCRETE

(X, Y) $\quad X \in \{x_1, x_2, \dots x_m\}$

$Y \in \{y_1, y_2 \dots y_n\}$

FUNZIONE DI MASSA DI PROB. CONGIUNTA

$$p(a,b) = P(X=a, Y=b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$
$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$$

FUNZIONI DI MASSA DI PROB. MARGINALI

$$p_X(a) = P(X=a) = \sum_{J=1}^{n} p(a, y_J)$$

$$p_Y(b) = P(Y=b) = \sum_{K=1}^{m} p(x_K, b)$$

Se conosco la funzione congiunta è facile ricavare le funzioni marginali, ma non il viceversa.

N.B. Se conosciamo $p_X(a)$ e $p_Y(b)$ non è in generale possibile ricavare $p(a,b)$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI PROB. CONGIUNTA

$$F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$
$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$$

FUNZIONI DI RIPARTIZIONE DI PROB. MARGINALI

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P(X \leq a, Y \leq +\infty) = F(a, +\infty)$$

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(X \leq +\infty, Y \leq b) = F(+\infty, b)$$

Abbiamo introdotto le principali funzioni collegate alla probabilità associate a una coppia di variabili casuali. La funzione di ripartizione nelle variabili casuali discrete non si usa molto perché difficile da gestire (a scalini). Da rappresentare in uno spazio tridimensionale: alla base X e Y e lungo l'asse z i valori delle funzioni. Si può comunque definire sempre.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI MASSA DI PROB. CONGIUNTA

1) $0 \leq p(a,b) \leq 1$

2) $\sum_{K=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} p(x_K, y_J) = 1$

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI PROB. CONGIUNTA

La prima è banale. La seconda e la terza sono molto semplici.

1) $0 \leq F(a,b) \leq 1$

2) $F(-\infty, -\infty) = P(X \leq -\infty, Y \leq -\infty) = 0$

3) $F(+\infty, +\infty) = P(X \leq +\infty, Y \leq +\infty) = 1$

Per la quarta, la funzione va studiata nelle singole variabili.

4) F NON DECRESCE

Per la quinta, riusciamo a identificare dei gradini nella funzione.

5) F È CONTINUA A TRATTI E PRESENTA DISCONTINUITÀ IN CORRISPONDENZA DEI VALORI CHE X e Y possono assumere

Coppie di variabili casuali congiuntamente continue

Cosa vuol dire? Che sono continue insieme.

COPPIE DI V.C. CONGIUNTAMENTE CONTINUE
(O V.C. DOPPIE CONGIUNTAMENTE CONTINUE)

C'è una definizione precisa.

Def X e Y sono v.c. congiuntamente continue se $\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ tale che $\forall \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$

$$P((X,Y) \in \mathcal{C}) = \iint_{\mathcal{C}} f(s,t)\, ds\, dt$$

f è detta funzione di densità di prob. congiunta

Presenta le solite proprietà.

PROPRIETÀ

1) $f(a,b) \geq 0 \quad \forall a,b$

2) $1 = P((X,Y) \in \mathbb{R}^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\, ds\, dt$

C'è anche la funzione di ripartizione.

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI PROB. CONGIUNTA

$F(a,b) = P(X \leq a, P\ Y \leq b)$

$F: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$

PROPRIETÀ DI F

1), 2), 3), 4) VEDI V.C. DISCRETE

La differenza la fa la 5°.

$$5)\ F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

Ricordiamoci del fatto che stiamo parlando di una coppia di variabili casuali congiuntamente continue. Facendo l'integrale e andando a decidere come varia la variabile di integrazione s (per x) e t (per y).

$$5)\ F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{a} f(s,t)\,ds\right)dt$$

Sempre per il teorema fondamentale del calcolo integrale si può dire.

$$f(a,b) = \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial a\,\partial b}$$

La funzione di ripartizione è regolare, per cui è indifferente derivare prima in a o in b.

Nel caso di variabili casuali continue:

F è continua e derivabile

Si possono introdurre le funzioni di ripartizione marginali.

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P(X \leq a, Y \leq +\infty) = F(a, +\infty) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{a} f(s,t)\,ds\right)dt$$

In maniera speculare, si può lavorare con la funzione di ripartizione marginale della y.

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(X \leq +\infty, Y \leq b) = F(+\infty, b) =$$
$$= \int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,ds\right)dt$$

Da qui ricavo:

la funzione di densità di prob. marginale di X

$$f_X(a) = \frac{d}{da} F_X(a) = \frac{d}{da}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{a} f(s,t)\,ds\right)dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a,t)\,dt$$

Prendo la funzione congiunta e la integro nella variabile che non mi interessa per ricavare una funzione di densità di probabilità marginale. Lo stesso vale per Y.

la funzione di densità marginale di Y

$$f_Y(b) = \frac{d}{db} F_Y(b) = \frac{d}{db}\left\{\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,ds\right)dt\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,b)\,ds$$

es. 1

(X, Y) v. c. congiuntamente continue

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Questa funzione viene data. Immaginiamo di calcolare le altre funzioni.

$$F? \quad f_X? \quad f_Y?$$

Cominciamo dalla funzione di ripartizione congiunta.

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{b} \left(\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Procediamo ricordandoci che ci sono 2 rami, regioni in cui la funzione di densità è nulla. Tutte le volte che avremo un valore di a o b negativo, sarà nullo.

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \cup b<0 \\ \int_0^b \left(\int_0^a 2e^{-x-2y}\,dx \right) dy & \text{se } a\geq 0 \text{ e } b\geq 0 \end{cases}$$

$$= 2\int_0^b e^{-2y}\,dy \cdot \int_0^a e^{-x}\,dx = \cancel{2}\left[-\frac{e^{-2y}}{\cancel{2}} \right]_0^b \left[-e^{-x} \right]_0^a =$$

$$= \left(1-e^{-2b}\right)\left(1-e^{-a}\right)$$

Per calcolare la funzione di densità marginale della X, dalle formule viste in precedenza:

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a,t)\,dt$$

Attenzione: se uno dei suoi argomenti è negativo, viene 0.

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a,t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_0^{+\infty} 2e^{-a-2t}\,dt = & \text{se } a\geq 0 \end{cases}$$

$$= e^{-a}\cancel{2}\left[-\frac{e^{-2t}}{\cancel{2}} \right]_0^{+\infty} = e^{-a} \cdot 1$$

Lo stesso vale per la funzione di densità marginale della Y.

$$f_Y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,b)\,ds = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,ds} + \int_{0}^{+\infty} 2e^{-s-2b}\,ds = & b \geq 0 \end{cases}$$

$$= 2e^{-2b} \underbrace{\left[-e^{-s}\right]_0^{+\infty}}_{=1} = 2e^{-2b}$$

Approfondimento sull'integrale doppio:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \right) dy$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI

$$f(x,y) = g(x)\,h(y)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,h(y)\,dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} h(y) \left(\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \right) dy$$

$h(y)$ e x_1 e x_2 NON DIPENDONO DA y

$$\ldots = \int_{y_1}^{y_2} h(y) \left(\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \right) dy$$

$$= \left(\int_{x_1}^{x_2} g(x)\, dx\right)\left(\int_{y_1}^{y_2} h(y)\, dy\right)$$

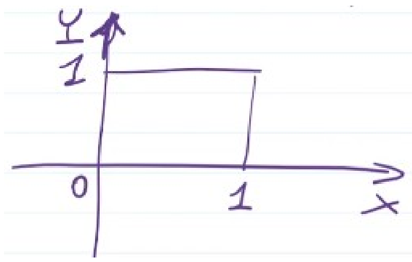
Questo capita nelle condizioni scritte prima: gli estremi non dipendono tra di loro.

es. 2

(X, Y) v.c. congiuntamente continue con

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x+y) & \text{se } x \in [0,1] \text{ e } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

È diversa solo in un quadrato. La coppia di variabili casuali assumerà valori solo lì.



1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{K(x+y)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow K \geq 0$$

La seconda è la condizione più importante.

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\right) dy = 1$$

$\Downarrow$ fuori da $[0,1]$ $f(x,y) = 0$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 K(x+y)\, dx\right) dy = 1$$

$$k \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\, dx \right) dy = 1$$

$$k \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^1 \right) dy = 1$$

$$K \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy = 1$$

$$K \left[\frac{1}{2} y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow K \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 1$$

$$k = 1$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione (conosciamo la costante k).

$$F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \left(\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\, dx \right) dy =$$

Se una delle due è minore di 0, viene 0.

Prendendo a E b più grandi di 1, la probabilità che la X e la Y siano minori di a e b è 1.

Quando a e b sono compresi tra 0 e 1 :

$$\text{se } a, b \in [0,1]$$

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{b} \left(\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^b \left(\int_b^a (x+y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^b \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^a dy =$$

$$= \int_0^b \left[\frac{a^2}{2} + ay\right] dy = \left[\frac{a^2}{2}y + a\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a^2}{2}b + a\frac{b^2}{2} =$$

$$= \frac{ab}{2}(a+b)$$

Quindi F vale:

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \text{ e/o } b<0 \\ \frac{ab}{2}(a+b) & \text{se } a,b \in [0,1] \\ 1 & \text{se } a>1 \text{ e } b>1 \end{cases}$$

Cosa succede se soltanto a o b è tra 0 e 1 e l'altra è più grande di 1?

Ad esempio:

se $a \in [0,1]$ e $b>1$

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^a f(x,y)\,dx\right)dy + \cancel{\int_1^b\left(\int_0^a 0\,dx\right)dy}$$

$$= \dots = \frac{a}{2}(a+1)$$

se $b \in [0,1]$ e $a>1$

$$F(a,b) = \frac{b}{2}(b+1)$$

Calcoliamo le funzioni marginali:

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } a \notin [0,1] \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dy} + \int_0^1 (a+y)\,dy + \cancel{\int_1^{+\infty} 0\,dy} = & \text{se } a \in [0,1] \end{cases}$$

$$= \left[ay + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = a + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(b) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \notin [0,1] \\ b + \frac{1}{2} & \text{se } b \in [0,1] \end{cases}$$

Vediamo una definizione nuova del concetto di indipendenza, applicato alle variabili casuali. Servono ovviamente almeno due variabili, altrimenti non avrebbe senso.

DEFINIZIONE DI COPPIA DI V.C. INDIPENDENTI

Due v.c. X e Y si dicono indipendenti se $\forall A, B \subset \mathbb{R}$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Prendo due sottoinsiemi dei numeri reali, la probabilità che X appartenga ad A e contemporaneamente Y appartenga a B, se indipendenti, equivale al prodotto: stessa definizione.

Dove sono le parti interessanti? Come faccio a verificare che le variabili casuali indipendenti? In ogni sottoinsieme le variabili casuali devono essere indipendenti. In linea di principio è impossibile saperlo con certezza(un sottoinsieme stranissimo per il quale la proprietà non è vera). È una definizione non operativa (la capisco ma non me ne faccio niente per verificare).

Quindi ci sono dei teoremi per verificare che le variabili casuali siano indipendenti.

OSS. Questa definizione è chiara e semplice, ma di difficile applicazione.

TEOREMA 1

Due v.c. X e Y sono indipendenti se e solo se

$$F(a,b) = F_X(a)\, F_Y(b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

La funzione di ripartizione si può introdurre nel caso discreto e continuo. Ma non è sempre facile calcolarla, quindi ci sono altri 2 teoremi (uno per le casuali discrete e uno per le casuali continue) che anziché controllare la funzione di ripartizione controllano la funzione di massa o di densità.

TEOREMA 2

Due v.c. discrete X e Y sono indipendenti se e solo se

$$p(a,b) = p_X(a)\, p_Y(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

È più facile da calcolare, perché si usano le funzioni di massa di probabilità.

TEOREMA 3

Due v.c. congiuntamente continue X e Y sono indipendenti se e solo se

$$f(a,b) = f_X(a)\, f_Y(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Stesso discorso, ma con le funzioni di densità.

es. 1 (vedi es. precedente)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\, e^{-x} e^{-y} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Come verifichiamo che siano indipendenti? Prendo le funzioni marginali, le moltiplico e verifico se il risultato è la funzione di densità congiunta.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ SONO INDIP.}$$

es. 2 (vedi esercizio precedente)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x,y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & \text{se } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Facciamo il prodotto.

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x,y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & \text{se } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) & \text{se } x,y \in [0,1] \\ 0 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ sono DIPENDENTI}$$

OSS. Se X e Y sono indip. da $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ è possibile ricavare $f(x,y)$; se X e Y sono DIPENDENTI non è possibile determinare $f(x,y)$ a partire dalle marginali.

Se le variabili casuali sono indipendenti basta conoscerle separatamente per conoscere il loro comportamento congiunto, se sono dipendenti invece no.

es. 3 Si lancia due volte una moneta equilibrata

$X =$ n° T uscite

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se nel I lancio esce C} \\ 1 & \text{se '' '' '' esce T} \end{cases}$$

Prendiamo la variabile casuale Y.

$$Y \in \{0,1\} \qquad p_Y(1) = P(T) = \frac{1}{2}$$

$$p_Y(0) = P(C) = \frac{1}{2}$$

Ora passiamo alla variabile casuale X, vale il numero di teste uscite nel corso di due lanci.

$$X \in \{0, 1, 2\} \qquad p_X(0) = P(C_1 \cap C_2) \underset{\substack{\text{INDIP.}\\ \text{DEI LANCI}}}{=} P(C_1)P(C_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

La massa di probabilità calcolata in 1, testa è uscita al primo o al secondo lancio.

$$\begin{aligned} p_X(1) &= P\big((T_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap T_2)\big) = \\ &= P(T_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap T_2) = \\ &= P(T_1)P(C_2) + P(C_1)P(T_2) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che X sia 2 (uscita di testa in tutti i lanci)?

$$p_X(2) = P(T_1 \cap T_2) \underset{\substack{\text{INDIP.}\\ \text{LANCI}}}{=} P(T_1)P(T_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Abbiamo le funzioni di massa marginale di X e Y. Costruiamoci la funzione di massa congiunta.

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_Y(y)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$p(2,0) = P(X=2, Y=0) = 0$$

$$p(0,1) = P(X=0, Y=1) = 0$$

$$p(0,0) = P(C_1 \cap C_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad p(1,0) = P(C_1 \cap T_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$p(2,1) = P(T_1 \cap T_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad p(1,1) = P(T_1 \cap C_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Le probabilità sono calcolate col principio di indipendenza, dato che i lanci sono indipendenti.

X e Y sono indipendenti? Verifichiamolo col teorema 2. Dovremmo ottenere la funzione congiunta moltiplicando le marginali.

X e Y sono indipendenti:

$$p(a,b) \stackrel{?}{=} p_X(a)\, p_Y(b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$p(2,0) = 0 \qquad p_X(2) = \frac{1}{4}$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2}$$

$$p_X(2)\, p_Y(0) = \frac{1}{8} \neq 0 = p(2,0)$$

$\Rightarrow$ X e Y NON SONO INDIPENDENTI

Conoscendo le funzioni marginali, non si può ricondursi alla funzione congiunta, quindi va calcolata a parte.

Esercizi

Un sistema satellitare è formato da 6 satelliti e funziona se almeno 5 funzionano.

es. 16 FOGLIO II

per funzionare il sistema satellitare ha necessità di avere almeno 5 su 6 dispositivi funzionanti

A = 'piove'

F_J = 'il Jesimo dispositivo funziona' $J = 1, 2, \ldots, 6$

$$P(F_J \mid A) = \frac{2}{5}, \quad P(F_J \mid A^c) = \frac{4}{5}$$

F_J sono indipendenti tra loro

$$P(A) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A^c) = \frac{7}{10}$$

Qual è la probabilità che in un giorno di febbraio il sistema satellitare funzioni?

$$E = \text{'sistema satellitare funzionante'}$$

$$P(E) = P(E|A)\,P(A) + P(E|A^c)\,P(A^c)$$

$$P(E|A) = P\Big(\underset{\text{funzionano}}{\text{tutti i 6 dispositivi}} \cup \underset{\text{funzionano}}{\text{5 dispositivi}} \Big| A\Big)$$

$$= P\Big(\underset{\text{funzionano}}{\text{tutti i 6 dispositivi}} \Big| A\Big) + P\Big(\underset{\text{funzionano}}{\text{5 dispositivi}} \Big| A\Big) =$$

Si può fare il prodotto tra probabilità perché i dispositivi sono indipendenti. Se 5 funzionano, 1 non funziona, quindi vanno considerati tutti i casi (o il 1° è rotto, o il 2° è rotto, o il 3° è rotto e così via).

$$\overset{\text{INDIPENDENZA}}{=} P(F_1|A)\,P(F_2|A)\,P(F_3|A)\,P(F_4|A)\,P(F_5|A)\,P(F_6|A) +$$

$$+ \Big[P(F_1^c|A)\,P(F_2|A)\,P(F_3|A) \dots P(F_6|A) +$$

$$+ P(F_1|A)\,P(F_2^c|A)\,P(F_3|A) + \dots P(F_6|A) +$$

$$\vdots$$

$$+ P(F_1|A)\,P(F_2|A) \dots + P(F_6^c|A) \Big] =$$

Siccome sono tutte uguali le probabilità, si può sostituire con una moltiplicazione.

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^6 + 6\left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left[\frac{2}{5} + \frac{18}{5}\right] = 4\left(\frac{2}{5}\right)^5$$

In maniera simile, bisogna considerare il caso che i dispositivi funzionino e non piova.

$$P(E|A^c) \underset{\text{IN MANIERA SIMILE}}{=} \underbrace{P(F_1|A^c)\,P(F_2|A^c)\dots P(F_6|A^c)}_{\text{TUTTI E 6 FUNZIONANO}} +$$
$$+ \left[P(F_1^c|A^c)\,P(F_2|A^c)\dots P(F_6|A^c) + \right.$$
$$+ P(F_1|A^c)\,P(F_2^c|A^c)\,P(F_3|A^c)\dots P(F_6|A^c) +$$
$$\left. + P(F_1|A^c)\,P(F_2|A^c)\dots P(F_6^c|A^c)\right] =$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^6 + 6\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}+\frac{6}{5}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

Quindi il risultato finale sarà:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|A^c)\,P(A^c) =$$
$$= 4\left(\frac{2}{5}\right)^5 \frac{3}{10} + 2\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{7}{10} =$$
$$= \frac{2^5\,(12 + 14 \cdot 32)}{5^5\ 10} = \frac{2^4\,(12+448)}{5^6} = \frac{2^4\ 460}{5^6}$$

Se il sistema satellitare funziona, qual è la probabilità che piova? Scopriamolo col teorema di Bayes.

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)\ P(A)}{P(E)} = \frac{4\left(\frac{2}{5}\right)^5 \frac{3}{10}}{\frac{2^4 \cdot 460}{5^6}}$$

Può capitare di applicare la formula delle probabilità totali non al sistema satellitare, ma al singolo dispositivo e facendo una media pesata tra il funzionamento in un giorno di pioggia e in un giorno di non pioggia, poi considerando il funzionamento del satellite da quella probabilità. È sbagliato perché si mischiano dispositivi in un giorno di pioggia o in un giorno di sole, il che è impossibile, perché tutti i dispositivi sono in un giorno di piogga o non.

Con i modelli di variabili casuali (variabile casuale binomiale in questo caso) questo esercizio si semplifica mostruosamente.

es. 4 FOGLIO III

X v.c. continua $\quad f(x) = A e^{-|x|} \quad x \in \mathbb{R}$

A? $\quad P(X>0)$

Calcoliamo A con le due richieste.

$$\cdot \; f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A \geq 0$$

$$\cdot \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-|x|}\,dx = 1$$

La funzione, secondo l'analisi è pari.

$$f(x) = A e^{-|x|} \text{ funzione pari} \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

Questa proprietà si può riusare nell'integrale (funzione pari).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} A e^{-x}\,dx$$

$$= 2A\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= 2A \cdot 1 = 2A \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo la probabilità che X sia maggiore di 0, cioè che appartenga alla semiretta tra 0 e + infinito. Si calcola facendo l'integrale della funzione di densità.

$$P(X>0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$