# Transitori

FINORA SORGENTI COSTANTI -> CIRCUITI DC

Cos'è un circuito transitorio? Supponiamo di trovarci in auto e vogliamo accelerare da 50 km/h a 100 km/h. Il passaggio non è istantaneo. Il tempo per passare da 50 a 100 è detto transitorio, da una energia cinetica a un'altra.

L'importante è avere un sistema con un'energia cinetica iniziale e una finale.

Consideriamo la variabile tempo.

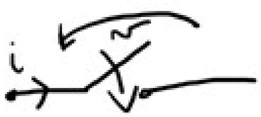
Modifiche/variazioni:

- generatori variabili nel tempo
- guasti
- interruttore

Vedremo l'ultima tipologia. Vedremo un interruttore, che permetterà la variazione della topologia.

Il simbolo dell'interruttore è:


Se l'interruttore è aperto, la corrente è 0, quindi circuito aperto.




APERTO -> $i = 0$ -> circuito aperto

Quando l'interruttore è chiuso, la differenza di potenziale è 0, quindi è un cortocircuito.


CHIUSO -> $v = 0$ -> corto circuito

Vedremo interruttori ideali, vale a dire che passano istantaneamente da ON a OFF.

RESISTORE: $v = Ri$ abbiamo un legame istantaneo

=> ADINAMICO (SENZA MEMORIA)

INDUTTORI, CONDENSATORI: legame è integro-differenziale

=> DINAMICI (CON MEMORIA)

Parlando di questi componenti, nel caso di un circuito in regime stazionario, questi due componenti non introdurrebbero niente. Tuttavia, se studiamo circuiti in regime sinusoidale o transitorio, introdurranno qualcosa. Quali sono le grandezze fondamentali nel transitorio? Abbiamo detto che partiamo da un sistema con una certa energia e si arriva a un 'altra, qual è la grandezza che descrive questo transitorio? Le variabili di stato, perché descrivono l'energia del sistema.

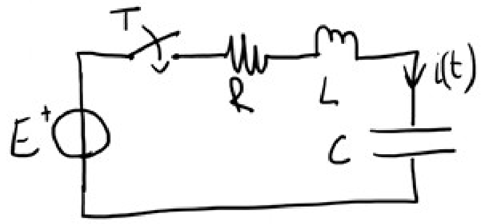
Grandezze Fondamentali -> VARIABILI DI STATO

INDUTTORE: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L I^2$ -> la corrente è la variabile di stato dell'induttore

CONDENSATORE: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C V^2$ -> la tensione è la variabile di stato del condensatore

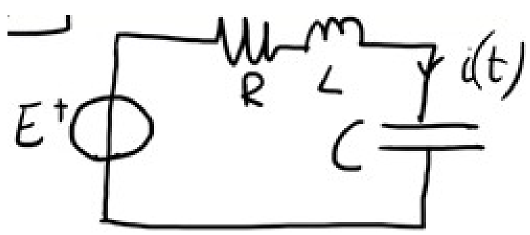
Per i transitori rimangono valide le LKT, le LKC e le equazioni costitutive.

Sono ancora valide le LKC, LKT e le eq. costitutive




All'istante $t = 0$, T si chiude

Quindi, prima della chiusura, la corrente era a 0. Quando si chiude, avremo questo circuito.



Facciamo la LKT per questa maglia.

$$LKT: \quad E - v_R - v_L - v_C = 0$$

Valgono anche le equazioni costitutive.

$$LKT: \begin{cases} E - v_R - v_L - v_C = 0 \\ v_R = Ri \\ v_L = L\dfrac{di}{dt} \\ i = C\dfrac{dv_C}{dt} \rightarrow v_C = \dfrac{1}{C}\int i\,dt \end{cases}$$

Possiamo sostituirle nella LKT.

$$E - Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

Questa è un’equazione differenziale in i.

Prima ottenevamo delle equazioni algebriche di facile risoluzione. Ora otteniamo delle equazioni integro-differenziale.

Dobbiamo risolvere l’equazione differenziale per calcolare le grandezze del circuito.

CIRCUITI LINEARI -> EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE (ODE)
A COEFF. COSTANTI

A COEFF. COSTANTI
⇓
METODO DI CAUCHY

LA SOLUZIONE SARÁ LA SOMMA DI 2 CONTRIBUTI:

- la soluzione dell'omogenea associata o(t)
- la soluzione particolare p(t)

L’omogenea associata è vista come l’evoluzione naturale del circuito, l’omogenea associata come l’evoluzione forzata.

In generale:

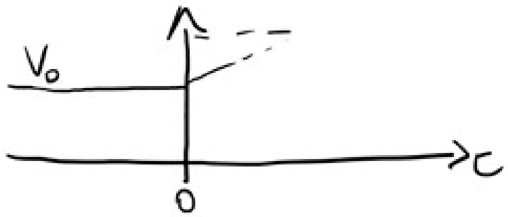
$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b(t)$$

- $b(t)$ è il termine noto
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sono i coefficienti costanti
- $x(t)$ è l'incognita

Abbiamo questa equazione differenziale di ordine n, con n coefficienti e 1 terminale. Per avere una soluzione di questa equazione, per il problema di Cauchy, abbiamo bisogno della x di t all’istante 0, cioè la condizione iniziale del sistema.

il problema di Cauchy: $x(t=0) = X_0$ COND. INIZIALE

Significa conoscere lo stato energetico del sistema prima che si inneschi il transitorio.




$V_0 = v_c(0^-)$ $\quad$ $v_c(0^+) = ?$

$v_c(0^+) = v_c(0^-)$ ?

Sarà vero? Sì, lo è. La tensione ai capi del condensatore non può variare velocemente. Questa affermazione è vera perché lo dice il postulato di continuità dell’energia.



Equivarrebbe ad avere potenza infinita. Quindi Vc a 0+ vale come Vc a 0-.

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \rightsquigarrow p \to \infty \quad \text{NO}$$

$\Rightarrow$ LE VARIABILI DI STATO VARIANO CON CONTINUITÀ

Vediamo in particolare la soluzione dell'omogenea associata e la particolare.

Per la particolare, vediamo il termine noto, p di t.

- Integrale particolare $p(t)$

$p(t)$ ha la stessa evoluzione di $b(t)$

$b(t) = \text{costante} \Rightarrow p(t) = \text{costante}$

Nel caso di questo circuito elettrico:

$b(t)$ dipende solo dai generatori

Vediamo l'integrale dell'omogenea.

- Integrale dell'omogenea associata $o(t)$

é la soluzione dell'ODE quando il termine noto é nullo $\Rightarrow$ GENERATORI PASSIVATI

Rappresenta L'EVOLUZIONE LIBERA

Partendo dall'equazione scritta precedentemente, l'omogenea la abbiamo quando poniamo a 0 il termine noto.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \emptyset$$

Qui possiamo scrivere il polinomio associato. Al posto della derivata di x di t, mettiamo lambda.

$\Rightarrow$ polinomio associato:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = \emptyset$$

$\rightarrow$ soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$

Possiamo risolvere il polinomio associato e trovare le soluzioni.

$$d(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}$$

È una combinazione lineare di esponenziali. Affinché questi esponenziali non divergano.

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$$

Per risolvere questa omogenea associata, dobbiamo trovare i coefficienti k1, k2, kn.

$$d(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}$$

DA DETERMINARE

Li determiniamo usando le condizioni iniziali, che ci garantiscono la continuità della variazione di stato.

Da qui, per ogni esponenziale, possiamo calcolare una costante di tempo associata.

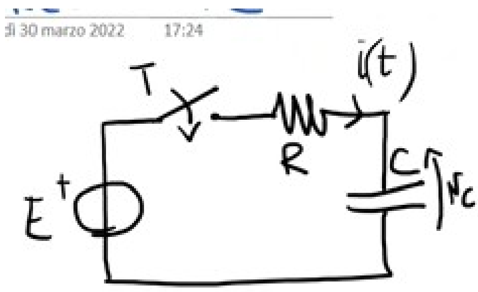
$$\tau_m = \text{COSTANTE DI TEMPO} = -\frac{1}{\lambda_m} \quad [s]$$

Descrive la rapidità dell'evoluzione libera. Più è grande, più è grande il transitorio, bisogna prendere la tau maggiore ovviamente.

Circuiti massimo del 2° ordine

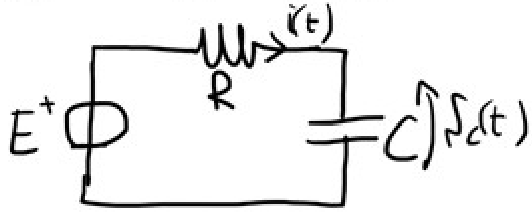
- CIRCUITI DEL I ORDINE: RC, RL
- CIRCUITI DEL II ORDINE: RLC

Prendiamo un circuito RC.




$$v_C(t=0^-) = V_{C0}$$

$t=0 \rightarrow$ T si chiude




Facciamo la LKT alla maglia e le equazioni costitutive.

$$\text{LKT}: \begin{cases} E - v_R - v_C = 0 \\ v_R = R \cdot i \\ i = C\dfrac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

Da questo sistema avremo:

$$\Rightarrow E - RC\frac{dv_C}{dt} - v_C = 0$$

Riscriviamo l’equazione come se avessimo come primo termine dVc su dt.

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

EQ. DIFF. DEL I ORDINE

La soluzione abbiamo visto che è la somma di due contributi.

soluzione:

- soluzione dell'om. associata
- soluzione particolare

Vediamo la soluzione dell'omogenea associata, cioè poniamo il termine noto a 0.

1 sol. dell'om. associata

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

Scriviamo il polinomio associato.

polin. ass.: $\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$

Abbiamo visto che la soluzione dell'omogenea associata è:

$$o(t) = A e^{-t/RC}$$

Riprendiamo l'esponente.

$$o(t) = A e^{-t/RC} \rightarrow \frac{t}{RC} = n° \text{ puro}$$

Significa che deve essere un numero adimensionale.

$$RC = \tau\ [s]$$

Ed è proprio così.

Si poteva risolvere in un altro modo, passando per gli integrali.

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{dt}{RC}$$

Si integra in entrambe le parti.

$$\int \frac{dv_C}{v_C} = -\int \frac{dt}{RC} \rightarrow \ln(v_C) + K_1 = -\frac{t}{RC} + K_2$$

$$\rightarrow \ln(v_C) = -\frac{t}{RC} + \overbrace{(K_2 - K_1)}^{K_3}$$

Posso fare l’esponenziale ad entrambi i membri.

$$\rightarrow \ln(v_C) = -\frac{t}{RC} + \overbrace{(K_2 - K_1)}^{K_3} \rightarrow v_C = e^{\left(-\frac{t}{RC} + K_3\right)}$$

E lo posso riscrivere come:

$$v_C = e^{-t/RC} \underbrace{e^{K_3}}_{A} \Rightarrow v_C = A e^{-t/RC}$$

Ovviamente, si giunge allo stesso risultato.

Vediamo la soluzione particolare.

2 Sol. particolare $p(t)$

$$b(t) = \frac{E}{RC} = \text{costante} \rightarrow p(t) = \text{costante} = K$$

Particolarizziamo l’equazione.

$$\frac{d\cancel{p(t)}}{\cancel{dt}} + \frac{p(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

La derivata di p di t è 0, quindi abbiamo:

$$\frac{d\cancel{p(t)}}{\cancel{dt}} + \frac{p(t)}{RC} = \frac{E}{RC} \Rightarrow p(t) = E$$

$$③ \quad v_c(t) = A\, e^{-t/RC} + E$$

?

Questa è la soluzione, ma non conosciamo A. Infatti non abbiamo considerato le condizioni iniziali, in questo caso la condizione iniziale.

④ Consideriamo la cond. iniziale

$$v_c(t=0^-) = V_{C0}$$

$$v_c(t=0^+) = A\, e^{-0/RC} + E = V_{C0}$$

Quindi avremo:

$$v_c(t=0^+) = A\, e^{-0/RC} + E = V_{C0} \longrightarrow A + E = V_{C0} \rightarrow \boxed{A = V_{C0} - E}$$

Ultimo passaggio. Sostituiamo quello che abbiamo calcolato nel punto 3.

$$⑤ \quad v_c(t) = (V_{C0} - E)\, e^{-t/RC} + E$$

Questa è la soluzione dell’equazione differenziale.

Evidenziamo i due termini.

$$⑤ \quad v_c(t) = \underbrace{(V_{C0} - E)\, e^{-t/RC}}_{\text{RISP. TRANSITORIA}} + \underbrace{E}_{\text{RISP. A REGIME}}$$

Il primo si chiama risposta transitoria perché se facciamo tendere t all'infinito, diventa 0. Il secondo si chiama così perché lo abbiamo a regime.

Possiamo scriverla in un altro modo, raggruppando i termini con la E.

$$V_{C0}\, e^{-t/RC} + E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

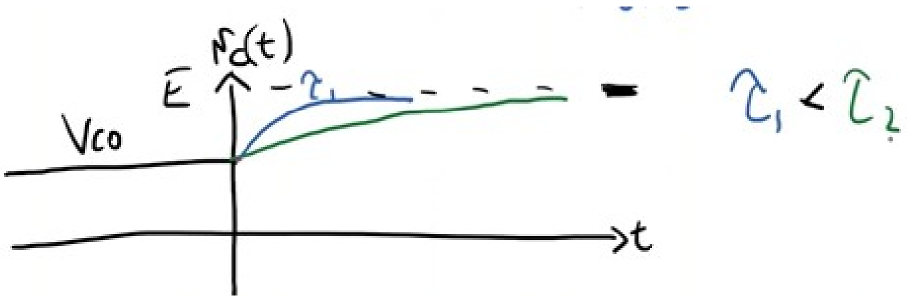
Anche in questo caso possiamo evidenziare i due termini.

$$\underbrace{V_{C0}\, e^{-t/RC}}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{E\left(1 - e^{-t/RC}\right)}_{\text{RISP. FORZATA}}$$

Possiamo notare che, infatti, se mettiamo t a 0, il secondo si annulla. Se mettiamo t a infinito, il primo si annulla.

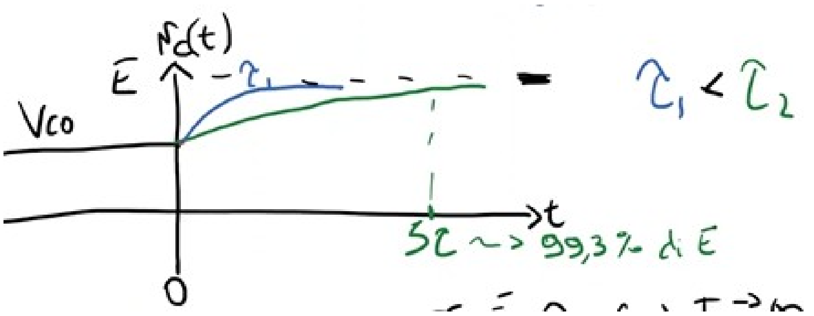
Perché abbiamo questi nomi? Se nel nostro circuito non avessimo generatori, solo resistenze, avremo solamente l'evoluzione libera. La risposta forzata indica la risposta dovuta all'interruttore. Questo vuol dire che, senza generatori, l'energia del condensatore si andrà a scaricare sulla resistenza, facendo calore.

Cos'è un transitorio? Il tempo impiegato per arrivare a regime. Da cosa dipende? Da tau.




$$e^{-t/\tau} \begin{cases} \rightarrow \text{ANALITICAMENTE È 0 CON } t \rightarrow \infty \\ \rightarrow \text{PRATICAMENTE: } e^{-5\tau/\tau} = e^{-5} = \dfrac{1}{e^5} = 0{,}0067 \end{cases}$$

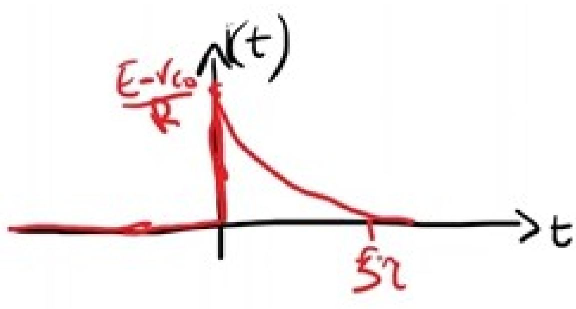
Cosa vuol dire? Vuol dire che dopo 5tau abbiamo il 99.3% del valore di regime.



Vediamo la corrente, i di t.

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[(V_{C0}-E)e^{-t/RC}+E\right] = \cancel{C}\left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right)(V_{C0}-E)e^{-t/RC}$$

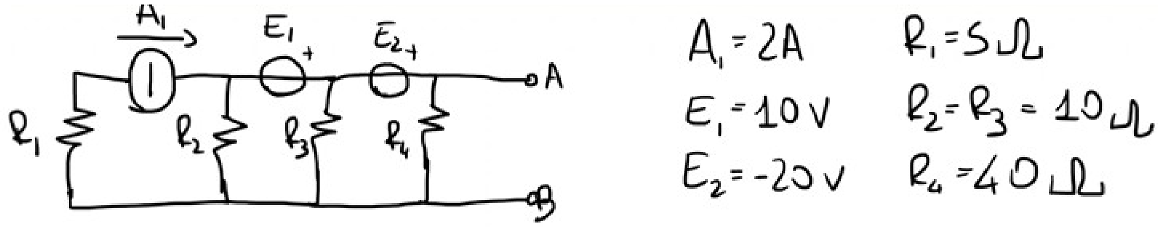
$$i(t) = \frac{E-V_{C0}}{R}\,e^{-t/RC}$$



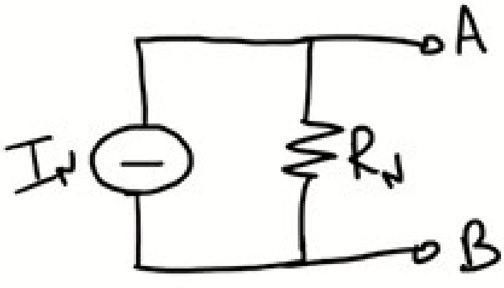

Anche in questo caso, abbiamo 5tau. La tensione del condensatore è continua, non ha brusche variazioni, ma lo sapevamo. Invece, quello che troviamo di nuovo è che la corrente, che è una variabile di stato, non varia con continuità. Nel momento in cui chiudiamo l’interruttore, la corrente sale istantaneamente.

la corrente non varia con continuità

## Esercizio

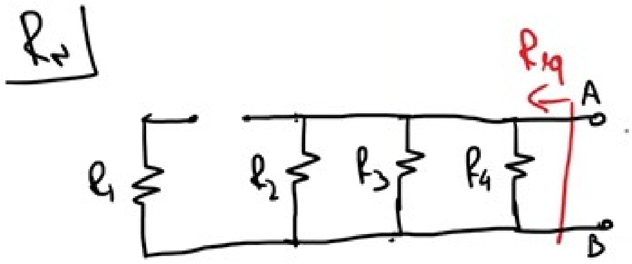



Valutare Norton tra A e B.

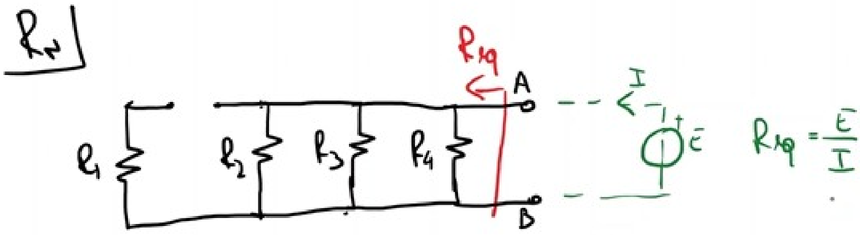


Stiamo trovando il circuito equivalente di Norton.

Calcoliamo la resistenza di Norton. Passiviamo i generatori.



Se andassimo a mettere un generatore di tensione, sarebbe:



Ora per noi è semplice.

$$R_{eq} = R_2 // R_3 // R_4$$

$$R_{eq} = R_2 // R_3 // R_4 \rightarrow G_{eq} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} =$$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}}$$

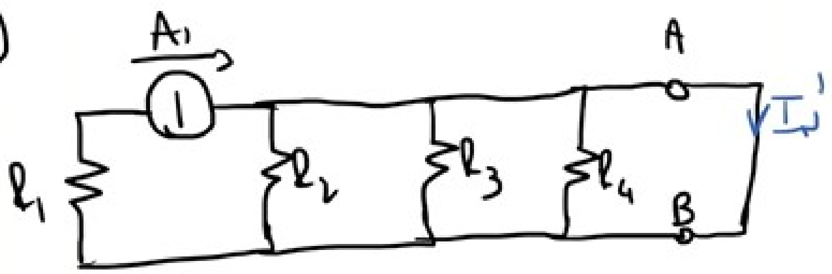
$$R_{eq} = (R_2 // R_3) // R_4 \rightarrow R_{eq} = 5\Omega // 40\Omega = \frac{40 \cdot 5}{40+5}\,\Omega = 4{,}45\,\Omega$$

$$R_N = R_{eq}$$

Calcoliamo la corrente equivalente con la sovrapposizione degli effetti.

$I_N)$

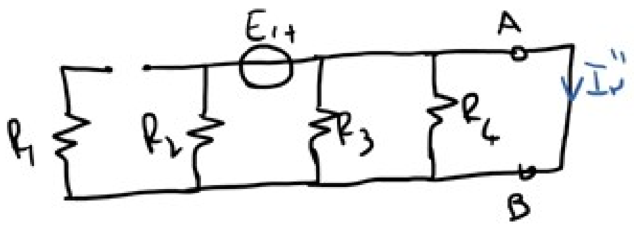
$A_1$




C'è un cortocircuito, per cui un parallelo col cortocircuito è il cortocircuito. Non bisogna fare il partitore di corrente.

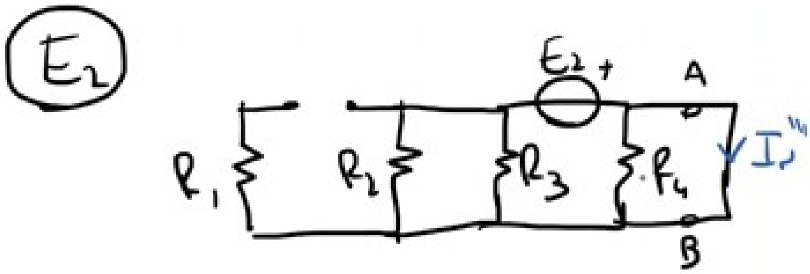
$$I_N' = A_1 = 2A$$

$E_1$




$$I_N'' = \frac{E_1}{R_2} = 1A$$

Perché abbiamo R3 parallelo a R4 è parallelo al corto, quindi abbiamo solo R2.




$$I_N''' = \frac{\bar{E}_2}{R_2 // R_3} = \frac{-20V}{5\Omega} = -4\,A$$

Perché R4 è in parallelo al corto. R2 e R3 sono in parallelo.

Quindi abbiamo che la corrente di Norton è:

$$I_N = I_N' + I_N'' + I_N''' = -1\,A$$

La corrente negativa vuol dire che, siccome abbiamo scelto il verso della corrente che andasse da A a B, la corrente va da B ad A.