Laboratorium Metod Optymalizacji

Problem liniowo-kwadratowy (LQ)

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z problemami obliczeniowymi występującymi przy rozwiązywaniu zagadnienia wyznaczania sterowania minimalizującego kwadratowy wskaźnik jakości dla liniowego układu dyskretnego oraz z własnościami rozwiązania i niektórymi możliwymi uogólnieniami. Ważność problemu wynika zarówno z faktu, że prawo sterowania daje się uzyskać na drodze analitycznej, jak i z jego znaczenia praktycznego. Odpowiedni dobór wskaźnika jakości umożliwia bowiem kształtowanie własności układu; problem liniowo-kwadratowy może być ponadto traktowany jako baza dla szeregu innych zagadnień teorii metod optymalizacji, estymacji i sterowania.

2. Stacjonarny problem liniowo-kwadratowy

Dany jest układ opisany równaniami stanu:

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{x}_0 - \text{dane} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1}$$

gdzie wymiar macierzy stanu stanu $\boldsymbol{A}$ jest $n \times n$, macierzy sterowania $\boldsymbol{B}$ - $n \times m$, $\boldsymbol{x}_i$ jest n-wymiarowym wektorem stanu, $\boldsymbol{u}_i$ - m-wymiarowym wektorem sterowań.
Korzystając z zasady optymalności i metody programowania dynamicznego można wykazać, że sterowanie $\boldsymbol{u}_i$ minimalizujące wskaźnik[1]:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_i) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N'\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_N, \tag{2}$$

ma postać

$$\boldsymbol{u}_i = -\underbrace{(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{S}_i'}\boldsymbol{x}_i, \tag{3}$$

a minimalna wartość wskaźnika wynosi:

$$J^o = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x}_0, \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{K}_i$ jest symetrycznym dodatnio półokreślonym rozwiązaniem równania Riccatiego:

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{A}'\left(\boldsymbol{K}_{i+1} - \boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\right)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q}, \qquad \boldsymbol{K}_N = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

dla $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$. Zakłada się przy tym, że macierze $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{F}$ o wymiarach $n \times n$ są dodatnio półokreślone, a macierz $\boldsymbol{R}$ o wymiarach $m \times m$ dodatnio określona; $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$ - symetryczne.

Metoda programowania dynamicznego pozwala również na określenie optymalnej wartości wskaźnika jakości począwszy od i-tego kroku. Wartość ta wynosi:

$$J_i^o = \min_{\left\{\substack{u_k \\ k=1,\ldots,N-1}\right\}} \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=i}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k'\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_k) + \boldsymbol{x}_N'\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_N\right\} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}_i. \tag{6}$$

[1] wyrażenie $\boldsymbol{X}'$ oznacza transpozycję wektora/macierzy: $\boldsymbol{X}' \equiv \boldsymbol{X}^T$

W przypadku gdy $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, warunek końcowy dla równania (5) ma oczywiście postać $\boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{0}$.

W tym przypadku celowe jest rozpatrzenie (przy pewnych dodatkowych założeniach) problemu o nieskończonym horyzoncie optymalizacji, tzn. $N \to \infty$. Wówczas bowiem $\boldsymbol{K}_i$ staje się macierzą o stałych elementach $\hat{\boldsymbol{K}}$ będąca rozwiązaniem algebraicznego nieliniowego równania:

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{A}' \left(\hat{\boldsymbol{K}} - \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{B} \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{B} \right)^{-1} \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{K}} \right) \boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q}. \tag{7}$$

Dodatkowe wymaganie gwarantujące istnienie rozwiązania w tym przypadku polega na założeniu całkowitej sterowalności układu (1). Wymaganie to jest spełnione, jeśli rząd macierzy:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \ldots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{8}$$

wynosi n.
Rozwiązanie równania (7) może być traktowane jako rozwiązanie ustalone równania (5), tzn.:

$$\lim_{i \to \infty} \boldsymbol{K}_{N-1} = \hat{\boldsymbol{K}}. \tag{9}$$

Ten wniosek jest zresztą najczęściej stosowaną podstawą do wyznaczenia $\hat{\boldsymbol{K}}$. Mianowicie rozwiązuje się równanie (5) aż do spełnienia warunku $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_{i+1}$. Ze względu na możliwość rozsymetryzowania się macierzy $\boldsymbol{K}_i$, bardzo często wyznacza się jej wszystkie elementy k_i^{st} ($s = 1, 2, \ldots, n$, $t = 1, 2, \ldots, n$), a następnie przyjmuje się:

$$\bar{k_i^{st}} = \bar{k_i^{ts}} = \frac{k_i^{st} + k_i^{ts}}{2}. \tag{10}$$

Powoduje to zwiększenie nakładu i czasu obliczeń, trzeba bowiem w każdym kroku wyznaczać n^2 elementów zamiast $\frac{1}{2}(n+1)n$, ale zabezpiecza przed propagacją błędu.

Algorytm wyznaczania sterowania optymalnego dla skończonego horyzontu N składa się z następujących punktów:

1. Przyjmij $i = N$, $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{F}$.
2. Dla $i = N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 0$ wyznacz i zapamiętaj macierze $\boldsymbol{K}_i$ z równania (5).
3. Oblicz $J^o = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_0$.
4. Przyjmij $i = 0$, $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_0$.
5. Dla $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$ wyznacz $\boldsymbol{u}_i$ oraz $\boldsymbol{x}_{i+1}$ z równań (3) i (1). $\boldsymbol{x}_{i+1}$ można również wyznaczyć bezpośrednio bez wyznaczenia $\boldsymbol{u}_i$, posługując się zależnością:

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B} \right)^{-1} \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1} \right) \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i. \tag{11}$$

$\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową o wymiarze $n \times n$.

3. Wybrane uogólnienia

W niektórych przypadkach zarówno współczynniki w równaniach układu, jak i macierze wag we wskaźniku jakości nie są stałe, lecz zmieniają się w określony sposób z kroku na krok. Mamy wówczas do czynienia z przypadkiem niestacjonarnym, w którym równania stanu mają postać:

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i, \tag{12}$$

a wskaźnik:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{u}_i) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N'\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_N. \tag{13}$$

Prawo sterowania jak i sposób jego wyznaczania nie ulegają jednak zmianie z wyjątkiem zastąpienia macierzy $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ przez macierze $\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{R}_i$. W tym przypadku nie jest jednak uzasadnione ani celowe rozważanie przypadku granicznego $N \to \infty$.

Innym naturalnym uogólnieniem jest uwzględnienie wpływu zakłóceń $\boldsymbol{w}_i$ na układ. Przyjmując, że wpływ ten określa równanie stanu:

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{w}_i, \tag{14}$$

otrzymuje się sterowanie minimalizujące wskaźnik (2) w postaci:

$$\boldsymbol{u}_i = -(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{g}_{N-i-1}), \tag{15}$$

gdzie $\boldsymbol{g}_{N-i-1}$ jest rozwiązaniem równania:

$$\boldsymbol{g}_{i+1} = \boldsymbol{A}'\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{N-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{N-1}\right)\boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{K}_{N-i-1}\boldsymbol{w}_{N-1-2}, \quad \boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{0}, \tag{16}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Należy zauważyć, że sterowanie w kroku i-tym zależy wówczas nie tylko od stanu $\boldsymbol{x}_i$, ale również poprzez $\boldsymbol{g}_{N-i-1}$ od zakłócenia w przyszłości, tzn. od chwili $N-2$ ($\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową o wymiarze $n \times n$).

Podobnym problemem jest zagadnienie nadążania, w którym dla układu o równaniu (1) należy minimalizować wskaźnik:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\{(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{s}_i)'\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{s}_i) + \boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_i\} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{s}_N)'\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{s}_N), \tag{17}$$

przy czym $\boldsymbol{s}_i$ jest zadanym sygnałem. Zadanie wyznaczenia sterowania daje się tu w prosty sposób sprowadzić do problemu sterowania w obecności zakłóceń.

4. Podsumowanie

Istotną cechą zagadnień obliczeniowych związanych z problemem liniowo-kwadratowym i jego uogólnieniami jest fakt wyznaczania wartości macierzy $\boldsymbol{K}_i$ względnie wektora $\boldsymbol{g}_i$ w kierunku odwrotnym niż wyznaczenie wartości wektora $\boldsymbol{x}_i$. W przeciwieństwie jednak do problemów dwugranicznych występujących w innych problemach optymalizacji dynamicznej mamy tu niezależność $\boldsymbol{K}_i$ oraz $\boldsymbol{g}_i$ od $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{u}_i$, co umożliwia ich wcześniejsze wyznaczenie i zapamiętanie. Pewne problemy obliczeniowe związane są z koniecznością odwracania macierzy $(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B})$. Należy ostrożnie dobierać algorytm odwracania lub też omijający odwracanie tak, aby nie stało się ono przyczyną powstania błędów.

Przebieg ćwiczenia

1. Opracuj szczegółowy schemat blokowy algorytmu wyznaczania sterowania optymalnego dla skończonego i nieskończonego horyzontu N. Zapewnij w nim: sprawdzenie sterowalności układu (1) oraz (w przypadku $n \geqslant 2$) symetrię macierzy $\boldsymbol{K}_i$ (zaproponuj macierzowy zapis zależności (10)).
   Narysuj schemat blokowy *zamkniętego układu regulacji*.
2. Na podstawie schematów blokowych wyznacz (wykorzystując środowisko MATLAB) wartości sterowań $\boldsymbol{u}_i$ oraz wartości składowe wektora stanu $\boldsymbol{x}_i$ $\{i = 0, 1, \ldots, N-1\}$ dla podanego przez prowadzącego układu (1) oraz wskaźnika jakości (2).
3. Wyznacz oraz wykreśl wartości składowe wektora stanu $\boldsymbol{x}_i$ układu oraz wartości sterowań $\boldsymbol{u}_i$ dla różnych warunków początkowych $\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{R}$ – dowolne). Przedstaw w tabeli: wartość sterowania w chwili początkowej $\boldsymbol{u}_0$ oraz minimalną wartość wskaźnika jakości J^o.
4. Zbadaj wpływ współczynnika $\boldsymbol{R}$ na odpowiedzi czasowe (dla jednego warunku początkowego $\boldsymbol{x}_0$). Wykreśl odpowiednie przebiegi czasowe. Zaprezentuj w tabeli: $\boldsymbol{u}_0$ i J^o.

5. Sprawdź sterowalność układu (1).
6. Dla paramertów $\boldsymbol{R}$ z punktu 4 oblicz wartości własne macierzy:
$$\left\{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}_{i+1}\right\}\boldsymbol{A}.$$
   Pokaż na rysunku, że zawsze leżą one wewnątrz koła jednostkowego.
7. Dla przykładowego warunku początkowego $\boldsymbol{x}_0$ i wagi $\boldsymbol{R}$ zaobserwuj ustalanie się elementów macierzy $\boldsymbol{K}_i$ – przedstaw je na wykresie. Porównaj wartości sterowań przy przyjęciu $\boldsymbol{K}_i$ zmiennego oraz ustalonego $\boldsymbol{K}_i = \hat{\boldsymbol{K}}$. Wykreśl odpowiedzi czasowe $\boldsymbol{x}_i$ i $\boldsymbol{u}_i$.
   Wyznacz wartości wskaźników jakości J^o i J_i^o. Przedstaw J_i^o na wykresie.

Przydatne polecenia Matlaba: *stairs*, *plot*, *eig*, *rank*.

Zaliczenie ćwiczenia

Ocena z ćwiczenia jest średnią ważoną: oceny wykonanych punktów podczas trwania laboratorium oraz oceny za sprawozdanie.

Podczas trwania laboratorium należy przygotować dla zrealizowanych punktów: schematy blokowe, tabele oraz opracowane (w postaci elektronicznej) przebiegi czasowe i wykorzystane m-pliki.

Sprawozdanie natomiast powinno zawierać przebiegi czasowe, charakterystyki i listingi wykorzystanych programów dla pozostałych, niezrealizowanych podczas trwania laboratorium punktów, a także omówienie otrzymanych wyników i końcowe wnioski z całego ćwiczenia laboratoryjnego.

Literatura

[1] Z. Duda, A. Ordys, A. Świerniak, *Laboratorium metod optymalizacji dynamicznej*, Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej, Nr. 1171, Gliwice.