ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - קיץ 2021ג

כתב: ברק קנדל

יולי 2021 - סמסטר קיץ - תשפ״א

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

לתשומת לבכם:
סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

בכל בעיה שמתעוררת אפשר לפנות למרכז ההוראה בקורס ברק קנדל, בימי ה' בין השעות 13:00 -15:00 בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני, לכתובת: kandell@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות 20425 /2021ג

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	תאריך אחרון למשלוח	
			ממ״ח (לאו״פ)	ממ״ן (למנחה)
1	9.7.2021-4.7.2021	1		
2	16.7.2021-11.7.2021	2		
3	23.7.2021-18.7.2021 (א צום ט׳ באב)	3	01 18.7.2021	
4	30.7.2021-25.7.2021	4		11 25.7.2021
5	6.8.2021-1.8.2021	4-5		
6	13.8.2021-8.8.2021	5	02 8.8.2021	
7	20.8.2021-15.8.2021	6		12 15.8.2021
8	27.8.2021-22.8.2021	7		13 22.8.2021
9	3.9.2021-29.8.2021	7-8		14 3.9.2021

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

המשקל של כל **מטלת מנחה הוא 6 נקודות** והמשקל של כל **מטלה ממוחשבת הוא 3 נקודות**.

המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה.

שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2021 ג **מועד אחרון להגשה:** 18.07.21

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה קופסה ובה 20 כדורים: 2 אדומים ו- 18 כחולים.

מוציאים את הכדורים מן הקופסה בזה אחר זה וללא החזרה, <u>עד להוצאת שני הכדורים האדומים</u>.

<u>שאלה 1</u>

מהי ההסתברות שהכדור האדום הראשון יוצא לאחר הפעם החמישית?

א. $\frac{21}{38}$ ב. $\frac{7}{95}$ ג. $\frac{3}{38}$ ד. $\frac{3}{4}$

<u>שאלה 2</u>

מהי ההסתברות שהכדור האדום השני יוצא לאחר הפעם העשירית?

א. $\frac{1}{2}$ ב. $\frac{29}{38}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{9}{38}$

<u>שאלה 3</u>

מהי ההסתברות שהכדור האדום השני יוצא בפעם ה-13?

א. $\frac{1}{20}$ ב. $\frac{6}{95}$ ג. $\frac{1}{12}$ ד. $\frac{12}{95}$

<u>שאלה 4</u>

מהי ההסתברות ששני הכדורים האדומים יוצאו בשתי פעמים עוקבות (כלומר, בזה אחר זה)?

א. $\frac{1}{10}$ ב. $\frac{1}{38}$ ג. $\frac{1}{19}$ ד. $\frac{1}{20}$

שאלות 5-8 מתייחסות לבעיה הבאה:

מפזרים באקראי $2n$ כדורים זהים ב- n תאים ממוספרים ($n > 2$).

<u>שאלה 5</u>

כמה אפשרויות פיזור שונות קיימות במרחב המדגם?

א. $\binom{3n}{n-1}$ ב. $\binom{2n}{n}$ ג. $\binom{3n}{2n}$ ד. $\binom{3n-1}{2n}$

<u>שאלה 6</u>

בכמה מאפשרויות הפיזור יש בדיוק שני תאים ריקים?

א. $\binom{2n-1}{n-3}$ ב. $\binom{n}{2}\binom{3n-3}{n+2}$ ג. $\binom{n}{2}\binom{2n-1}{n-3}$ ד. $\binom{3n-3}{n+2}$

<u>שאלה 7</u>

בכמה מאפשרויות הפיזור יש בכל תא מספר זוגי של כדורים?

א. $\binom{3n-1}{2n}$ ב. $\binom{2n-1}{n}$ ג. $\binom{2n}{n}$ ד. $\binom{3n}{2n}$

<u>שאלה 8</u>

בכמה מאפשרויות הפיזור יש בדיוק שלושה תאים <u>סמוכים</u> לא-ריקים ושאר התאים ריקים?

א. $\binom{n}{3}\binom{2n-1}{2}$ ב. $n(2n-1)(n-2)$ ג. $\binom{2n-1}{2}$ ד. $(2n-1)(n-1)(n-2)$

שאלות 9-12 מתייחסות לבעיה הבאה:

בוחרים באקראי 10 מספרים מתוך הקבוצה $\{-9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9\}$.

<u>שאלה 9</u>

כמה אפשרויות בחירה קיימות אם הבחירה היא עם החזרה ויש חשיבות לסדר בחירת המספרים?

א. $\binom{19}{10}$ ב. $\binom{28}{10}$ ג. 19^{10} ד. $\frac{19^{10}}{10!}$

<u>שאלה 10</u>

כמה אפשרויות בחירה קיימות אם הבחירה היא עם החזרה ואין חשיבות לסדר בחירת המספרים?

א. $\binom{19}{10}$ ב. $\binom{28}{10}$ ג. 19^{10} ד. $\frac{19^{10}}{10!}$

<u>שאלה 11</u>

כמה אפשרויות בחירה קיימות אם הבחירה היא ללא החזרה ויש חשיבות לסדר בחירת המספרים?

א. $\binom{19}{10}$ ב. $\binom{28}{10}$ ג. $\frac{28!}{18!}$ ד. $\frac{19!}{9!}$

<u>שאלה 12</u>

כמה אפשרויות בחירה קיימות אם הבחירה היא ללא החזרה ואין חשיבות לסדר בחירת המספרים?

א. $\binom{19}{10}$ ב. $\binom{28}{10}$ ג. $\frac{28!}{18!}$ ד. $\frac{19!}{9!}$

שאלות 13-15 מתייחסות לבעיה הבאה:

בוחרים באקראי 10 מספרים מתוך הקבוצה $\{-9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9\}$.

נניח שהבחירה היא <u>עם החזרה</u> ו<u>יש חשיבות</u> לסדר בחירת המספרים.

<u>שאלה 13</u>

בכמה מאפשרויות הבחירה הקיימות הערך המוחלט של המספר הראשון שנבחר שווה לערך המוחלט של המספר האחרון שנבחר?

א. $37\cdot19^8$ ב. $36\cdot19^8$ ג. 19^9 ד. $18\cdot19^8$

<u>שאלה 14</u>

בכמה מאפשרויות הבחירה הקיימות סכום שלושת המספרים האחרונים שנבחרו הוא זוגי?

א. $3{,}159\cdot19^7$ ב. $1{,}629\cdot19^7$ ג. $729\cdot19^7$ ד. $3{,}429\cdot19^7$

<u>שאלה 15</u>

בכמה מאפשרויות הבחירה הקיימות <u>בדיוק</u> שלושה מהמספרים שנבחרו הם כפולות של 3?

הערה: כפולה של 3 היא כל מספר שמתחלק ב-3 ללא שארית (ובכלל זה המספר אפס ומספרים שליליים).

א. $7^3\cdot12^7$ ב. $10\cdot7^3\cdot12^8$ ג. $7^3\cdot19^7$ ד. $120\cdot7^3\cdot19^7$

שאלות 16-19 מתייחסות לבעיה הבאה:

ליוסי 8 קופסאות בצבעים שונים ו- 15 גולות שונות זו מזו.
יוסי מפזר באקראי את הגולות בקופסאות.

<u>שאלה 16</u>

מהי ההסתברות שיוסי ישים את כל הגולות באותה הקופסה?

א. $\frac{1}{8^{14}}$ ב. $\frac{1}{8^{15}}$ ג. $\frac{1}{15!\cdot8^{14}}$ ד. $\frac{1}{15!\cdot8^{15}}$

<u>שאלה 17</u>

מהי ההסתברות שהגולות יוכנסו ל- 2 קופסאות בדיוק?

א. $\frac{114,688}{8^{14}}$ ב. $\frac{1,470}{8^{10}}$ ג. $\frac{114,681}{8^{14}}$ ד. $\frac{32,766}{8^{15}}$

<u>שאלה 18</u>

מהי ההסתברות שבדיוק 2 קופסאות יישארו ריקות?

א. 0.009 ב. 0.133 ג. 0.241 ד. 0.867

<u>שאלה 19</u>

מהי ההסתברות שבכל אחת מ- 4 הקופסאות: הצהובה, הירוקה, האדומה והכחולה – יהיה מספר שווה של גולות?

א. 0.121 ב. 0.012 ג. 0.211 ד. 0.421

<u>שאלה 20</u>

בקופת חולים "מאוחדת" בסניף שפרינצק עובדים 8 אחים ו- 12 אחיות. למשמרת בוקר בוחרים באקראי 6 אחים ואחיות ומשבצים אותם בתאים שמספרם 1 עד 6. כל אחד בתא נפרד.

מה ההסתברות שבתא מספר 1 ישובץ אח וביתר התאים אחיות?

א. $\frac{44}{1615}$ ב. $\frac{264}{1615}$ ג. $\frac{77}{1615}$ ד. $\frac{476}{1615}$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית ואי-תלות

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021 ג **מועד אחרון להגשה:** 25.07.21

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

לכלי רכב מסוים יש 3 גלגלים: שניים אחוריים – ימני ושמאלי – ואחד קדמי.
לכלי הרכב הזה אסור לעלות על הכביש, אם לחץ האוויר אינו תקין לפחות בשניים מגלגליו.

ידוע כי עבור כלי רכב מסוג זה מתקיימים התנאים הבאים –

לחץ האוויר תקין בכל אחד (בנפרד) מגלגליו האחוריים בהסתברות 0.85;

לחץ האוויר אינו תקין בשני הגלגלים האחוריים (בו-זמנית) בהסתברות 0.06;

לחץ האוויר תקין לפחות באחד מהגלגלים בהסתברות 0.96;

ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-ימני שווה להסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-שמאלי;

ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל האחורי הימני שווה ל- ¾ מההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל הקדמי;

אם לחץ האוויר בגלגל האחורי הימני אינו תקין, ההסתברות שלרכב אסור לעלות על הכביש היא 0.6.

(10 נק׳) א. הגדירו <u>שלושה</u> מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, ציירו עבורם דיאגרמת ון, המתארת את הבעיה, ומלאו בשטחים החלקיים שנוצרים בדיאגרמה את כל ההסתברויות <u>הנובעות</u> מנתוני הבעיה (ישירות או באמצעות חישוב).
הסבירו <u>בקצרה</u> את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, **באמצעות טענות הסתברות בסיסיות**.

בכל אחד מהסעיפים שלהלן בטאו את המאורע המתואר בסעיף <u>באמצעות המאורעות שהגדרתם בסעיף א</u>.

(5 נק׳) ב. מהי ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-ימני?

(5 נק׳) ג. מהי ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל הקדמי?

(5 נק׳) ד. מהי ההסתברות שלרכב מותר לעלות על הכביש?

(5 נק׳) ה. בהינתן שלפחות באחד מגלגלי הרכב לחץ האוויר אינו תקין, מהי ההסתברות שיוכל לעלות על הכביש?

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונים 18 כדורים שונים זה מזה – 6 אדומים ו- 12 כחולים.

א. מסדרים באקראי את הכדורים בשורה.
אם ידוע שבמקומות 1-10 בשורה יש בדיוק 4 כדורים אדומים,
מהי ההסתברות שכל הכדורים האדומים ממוקמים במקומות 1-14?

ב. מסדרים באקראי את הכדורים במעגל.
אם ידוע שאין במעגל שני כדורים אדומים סמוכים,
מהי ההסתברות שבין כל שני כדורים אדומים יש מספר שווה של כדורים כחולים?

שאלה 3 (20 נקודות)

ברשותכם מאגר של מתגים, שכל אחד מהם **סגור** בהסתברות 0.8, ואז **יכול לעבור בו זרם**.
אין תלות בין מתגים שונים.

א. ציירו מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $1 - 0.2^5$.

ב. ציירו מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $3 \cdot 0.8 - 3 \cdot 0.8^2 + 0.8^3$.

ג. ציירו מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $0.8^2 \cdot (1 - 0.2^3)$.

שאלה 4 (30 נקודות)

להלן טבלה המציגה את ההסתברות שצוללת אירנית תהיה באזורים שונים. בנוסף, הטבלה מציגה את ההסתברות שהצוללת תתגלה על ידי חיל הים הישראלי בהינתן שהיא באזור כלשהו.

האזור	A	B	C	D	E
ההסתברות להמצא:	0.5	0.2	0.15	0.1	0.05
ההסתברות להתגלות:	0.9	0.8	0.6	0.5	0.3

א. שרטטו עץ הסתברות לתאור הנתונים.

ב. מהי ההסתברות שהצוללת האירנית תתגלה ברגע נתון על ידי חיל הים הישראלי?

ג. נניח ברגע נתון הצוללת האירנית לא התגלתה על ידי חיל הים הישראלי, מהי ההסתברות שהצוללת לא נמצאת באיזור E?

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2021 ג **מועד אחרון להגשה:** 8.08.21

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-2 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון מטבע שההסתברות לקבל בו H היא 0.6.

מטילים את המטבע שוב ושוב, עד שמקבלים H בפעם העשירית.

<u>שאלה 1</u>

מהי ההסתברות שהמטבע יוטל בדיוק 20 פעמים?

א. 0.1171 ב. 0.1065 ג. 0.0586 ד. 0.0976

<u>שאלה 2</u>

ידוע שבהטלה הראשונה ובהטלה הרביעית התקבל H.

מהי ההסתברות שהמטבע הוטל בדיוק 20 פעמים?

א. 0.0343 ב. 0.0123 ג. 0.0771 ד. 0.0277

שאלות 3-6 מתייחסות לבעיה הבאה:

מספר הגפרורים בקופסת גפרורים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20.

אין תלות בין קופסאות שונות.

<u>שאלה 3</u>

מהי ההסתברות שבקופסה מקרית יהיו בדיוק 23 גפרורים?

א. 0.0724 ב. 0.0669 ג. 0.0001 ד. 0.0033

<u>שאלה 4</u>

בוחרים באקראי 10 קופסאות גפרורים.

מהי ההסתברות שתהיה ביניהן לפחות קופסה אחת שיש בה בדיוק 23 גפרורים?

א. 0.3587 ב. 0.5640 ג. 0.4996 ד. 0.6690

<u>שאלה 5</u>

בוחרים באקראי קופסאות גפרורים, בזו אחר זו, עד למציאת 5 קופסאות שיש בהן בדיוק 23 גפרורים.
מהי שונות מספר הבחירות שתדרשנה לשם כך?

א. 1,042.4   ב. 32.3   ג. 0.31   ד. 74.7

<u>שאלה 6</u>

נתונה קבוצה של N אנשים, כאשר N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל-10.
(כלומר, הערכים האפשריים של המשתנה המקרי N הם 1, 2, ..., 10, וכל אחד מתקבל בהסתברות 0.1).
מחלקים לאנשי הקבוצה קופסאות גפרורים: לכל אחד – קופסה אחת.
מהי ההסתברות שאף לא אחד מאנשי הקבוצה יקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 23 גפרורים?

א. 0.5004   ב. 0.6969   ג. 0.0500   ד. 0.7629

שאלות 7-9 מתייחסות לבעיה הבאה:

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי:
$$Y = \begin{cases} X & , \quad X \le 2 \\ X - 2 & , \quad X \ge 3 \end{cases}$$

<u>שאלה 7</u>

מהי $P\{Y = 2\}$?

א. $p(1-p)(1-2p+p^2)$ ב. $p(1-p)^3$ ג. $p(1-p)$ ד. $p(1-p)(2-2p+p^2)$

<u>שאלה 8</u>

מהי $P\{Y > 5\}$?

א. $p(1-p)^5$ ב. $p(1-p)^7$ ג. $(1-p)^7$ ד. $(1-p)^5$

<u>שאלה 9</u>

מהי $E[Y]$?

א. $\frac{1}{p}(2-p+p^2-2p^3)$ ב. $\frac{1}{p}(2-4p+5p^2-2p^3)$ ג. $\frac{1}{p}(1-p+2p^2-p^3)$ ד. $\frac{1}{p}(1-2p+4p^2-2p^3)$

שאלות 10-12 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה קבוצה של 20 ילדים – 10 בנים ו- 10 בנות.

מחלקים לילדים באקראי 20 כובעים צבעוניים – 10 אדומים, 5 כחולים ו- 5 ירוקים.

כל אחד מהילדים מקבל כובע אחד, ואין הבדל בין כובעים <u>מאותו</u> הצבע.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות שמקבלות כובעים אדומים.

<u>שאלה 10</u>

מהי $P\{X=i\}$, לכל $i=0,1,\ldots,10$?

א. $\left(\frac{10}{20}\right)^i$ ב. $\binom{10}{i}\Big/\binom{20}{i}$ ג. $\binom{10}{i}\left(\frac{10}{20}\right)^i\left(\frac{10}{20}\right)^{10-i}$ ד. $\binom{10}{i}\binom{10}{10-i}\Big/\binom{20}{10}$

<u>שאלה 11</u>

מהי השונות של X ?

א. 0.376 ב. 1.316 ג. 2.5 ד. 5

<u>שאלה 12</u>

יהי Y המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנים שמקבלים כובעים אדומים.

מהי השונות של Y ?

א. 2.5 ב. 1.316 ג. 7.5 ד. 8.684

שאלות 13-16 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה קבוצה של n אנשים, וביניהם אסף.

כל שניים מחברי-הקבוצה לוחצים ידיים בהסתברות p $(0<p<1)$.

אין תלות בין זוגות שונים של אנשים מהקבוצה.

<u>שאלה 13</u>

מהי שונות מספר האנשים בקבוצה שאסף לוחץ להם יד?

א. $np(1-p)$ ב. $np^2(1-p^2)$ ג. $(n-1)p(1-p)$ ד. $(n-1)p^2(1-p^2)$

<u>שאלה 14</u>

מהי שונות מספר לחיצות הידיים שמתבצעות בקרב חברי-הקבוצה?

א. $n(n-1)p(1-p)$ ב. $n^2p^2(1-p^2)$ ג. $\frac{1}{2}n(n-1)p^2(1-p^2)$ ד. $\frac{1}{2}n(n-1)p(1-p)$

<u>שאלה 15</u>

נניח כי $n = 1{,}001$ וכי $p = 0.005$, וכי ידוע שאסף לחץ יד עם חבר-קבוצה אחד לפחות.

מהי ההסתברות שאסף לחץ יד עם 3 בדיוק מחברי-הקבוצה?

א. 0.1403 ב. 0.1412 ג. 0.8826 ד. 0.0839

<u>שאלה 16</u>

נניח כי $n = 1{,}001$ וכי $p = 0.005$, וכי ידוע שאסף לחץ יד עם חבר-קבוצה אחד לפחות.

חשבו קירוב פואסוני להסתברות המותנית שאסף לחץ יד עם 3 בדיוק מחברי-הקבוצה?

א. 0.1404 ב. 0.1413 ג. 0.8821 ד. 0.0842

שאלות 17-18 מתייחסות לבעיה הבאה:

מטילים קובייה שוב ושוב עד אשר מקבלים בקובייה תוצאה המתחלקת ב- 3 (ללא שארית).

<u>שאלה 17</u>

מה תוחלת מספר ההטלות בהן התוצאה **אינה** מתחלקת ב-

א. 2 ב. 3 ג. 4 ד. 1.5

<u>שאלה 18</u>

מה שונות מספר ההטלות בהן התוצאה **אינה** מתחלקת ב-

א. 6 ב. 1.5 ג. 5 ד. 0.75

<u>שאלה 19</u>

מטילים מטבע בזה אחר זה.

יהי X - מספר ההטלות עד קבלת H בפעם השניה. יהי Y - מספר ההטלות עד קבלת H בפעם השלישית. מה ההתפלגות של Y-X ?

א. גאומטרית ב. בינומית ג. בינומית שלילית r=3 ד. היפרגאומטרית

<u>שאלה 20</u>

מטילים זוג מטבעות הוגנים עד אשר מתקבל בשתי המטבעות עץ.

נסמן ב X -את מספר ההטלות של זוג המטבעות.

מה התוחלת של X^2 ?

א. 28 ב. 4 ג. 12 ד. 16

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021 ג **מועד אחרון להגשה:** 15.08.21

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

וורנר אוהב לקרוא ספרים. X - משך הזמן (בדקות) שוורנר קורא, מדי יום, מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 40 \\ a(x-40) & 40 \le x < 50 \\ b - a(x-50) & 50 \le x < 60 \\ 0 & 60 \le x \end{cases}$$

ידוע ש $E[X] = 50$.

א. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ג. יום הוא <u>'יום ספרי'</u> אם וורנר יקרא בו יותר מ-55 דקות. נסמן ב- W את מספר ימי הספר מתוך 10 הימים הבאים. חשבו את התוחלת של W^2, תחת הנחת אי-תלות בין הימים.

ד. מדי יום וורנר יושב ומסכם לעצמו את הספרים שהוא קרא. בתחילת זמן הסיכום, הוא מקציב לעצמו 3 דקות של מחשבה, ובנוסף, יקדיש דקה לסיכום על כל 10 דקות של קריאה. נסמן ב- Y את משך הזמן שוורנר מקדיש לסיכום מדי יום (כולל זמן המחשבה). חשבו את התוחלת של Y^2.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי X , עבור $\theta > 0$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \theta^x - 1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

א. מצאו את הערך של θ בעזרת פונקציית ההתפלגות המצטברת הנתונה בלבד, כלומר, מבלי למצוא את פונקציית הצפיפות של X . נמקו את תשובתך.

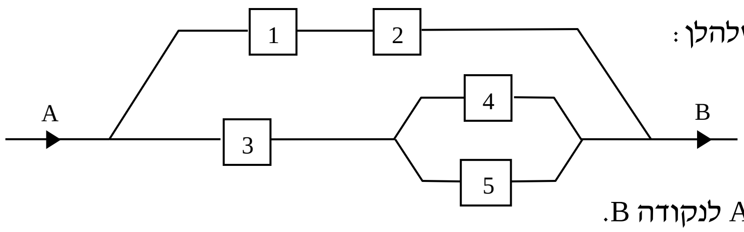
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות של X .

ג. חשבו את התוחלת של X .

ד. חשבו את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = 2^X - 1$, וזהו את התפלגותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

במערכת 5 רכיבים המסודרים במבנה שלהלן :



המערכת פועלת אם עובר זרם מנקודה A לנקודה B.

נסמן ב- X_i את אורך-החיים (בשנים) של רכיב i , לכל $i = 1,2,3,4,5$. אין תלות בין רכיבים שונים.

כמו כן, לכל אחד מהמשתנים המקריים X_1 ו- X_2 יש התפלגות נורמלית עם תוחלת 2.5 ושונות 1, ולכל אחד מהמשתנים המקריים X_3 , X_4 ו- X_5 יש התפלגות אחידה בין 1 ל- 3.

מפעילים מערכת שכל הרכיבים בה חדשים. אין אפשרות להחליף במערכת רכיב שהתקלקל.

א. מהי ההסתברות שהמערכת עדיין פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?

ב. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 4 תקין בזמן זה?

שאלה 4 (25 נקודות)

במטע מסוים מגדלים תפוחים מזן "חרמון".

המשקל (בגרמים) של כל תפוח מקרי שגודל במטע הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 150 ושונות 400.

אין תלות בין משקלים של תפוחים שונים, הנבחרים באקראי מהמטע.

15% מיבול התפוחים במטע, אלו בעלי המשקל הקטן ביותר, נשלחים למפעל לייצור מיצים ;

25% מיבול התפוחים במטע, אלו בעלי המשקל הגדול ביותר, נשלחים ליצוא ;

והשאר, 60% מיבול התפוחים במטע, נשלחים לשיווק בארץ.

א. בוחרים 3 תפוחים באקראי. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם ישקול יותר מ- 168.5 גרם?

ב. מהו המשקל המינימלי של התפוחים שנשלחים לשיווק בארץ?

ג. בוחרים באקראי 20 תפוחים מיבול המטע.

1. מהי ההסתברות ש-4 מהם יישלחו למפעל-המיצים ו-11 יישלחו לשיווק בארץ?

2. ידוע ש-5 מתוך 20 תפוחים אלו שוקלים פחות מ-130 גרם.
מהי ההסתברות שהמשקל של 3 מהתפוחים יהיה בין 120 גרם ל-130 גרם?

הערה: בכל סעיפי השאלה, ערכו אינטרפולציה לינארית היכן שהיא נדרשת.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021 ג **מועד אחרון להגשה:** 22.08.21

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (25 נקודות)

בוחרים באקראי בזה אחר זה **<u>וללא החזרה</u>** 3 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,\ldots,10\}$.

יהי X_i משתנה מקרי המוגדר על-ידי המספר שנבחר בבחירה ה-i-ית, לכל $i = 1,2,3$.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 , X_2 ו- X_3 .
רשומו אותה באופן מדויק : ערכים אפשריים והסתברויות משותפות.

ב. מצאו את פונקציית ההסתברות השולית של X_3 . רשמו אותה באופן מדויק.

ג. חשבו את $P\{X_1 < X_2\ ,\ X_1 < X_3\}$.

ד. חשבו את $P\{X_3 = 8 \mid X_2 < X_3\}$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נניח כי X_1 ו- X_2 הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p ($p > 0$).

א. חשבו את $P\{X_1 > m\}$, לכל $m = 0,1,2,...$.

ב. מהי ההתפלגות של $X_1 + X_2$ ומהי שונותה?

ג. יהי $Z = \max\{X_1, X_2\}$.
חשבו את $P\{Z \le m\}$, לכל $m = 1,2,...$.

שאלה 3 (25 נקודות)

וורנר מתאמן בקליעה למטרה. כאשר הוא מגיע לאימון עומדות לרשותו 10 מטרות, שהן 7 מטרות גדולות ו-3 מטרות קטנות. בשלב הראשון, מתוך המטרות הללו וורנר בוחר באקראי וללא החזרה 3 מטרות.
בשלב השני, וורנר יורה 3 חצים, כאשר לכל חץ הוא בוחר באופן אקראי ועם החזרה את המטרה אליה יירה את החץ מתוך המטרות שנבחרו בשלב הראשון. כל חץ פוגע במטרה אליה וורנר כיוון.
נסמן ב:

X – מספר המטרות הקטנות שוורנר יבחר.

Y – מספר המטרות הקטנות שבהן וורנר יקלע בדיוק חץ אחד.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X,Y).

ג. מצאו את ההתפלגות של $X \mid X+Y=2$.

שאלה 4 (25 נקודות)

בחבילת עוגיות יש 50 עוגיות.
בכל עוגייה יש X פצפוצי-שוקולד, כאשר X הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 6.
אין תלות בין עוגיות שונות מאותה חבילה או בין עוגיות מחבילות שונות.

א. מה שונות מספר פצפוצי-השוקולד שיש בחבילת עוגיות שלמה?

ב. כל פצפוץ-שוקולד הוא חום בהסתברות 0.8 ולבן בהסתברות 0.2.
מהי שונות מספר פצפוצי-השוקולד הלבנים שיש בחבילת עוגיות שלמה?

ג. אם בשלוש עוגיות יש בסך-הכל 20 פצפוצי-שוקולד, מהי ההסתברות שבעוגייה אחת (כלשהי) יש 9 פצפוצים, באחרת 6 ובשלישית 5?

ד. מהי ההסתברות, שבחבילה מקרית של עוגיות, המספר המינימלי של פצפוצי-שוקולד בעוגייה אחת יהיה בדיוק 2?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021 ג **מועד אחרון להגשה:** 03.09.21

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-מתואמים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הראו כי:
$$\rho(X, X+Y) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{Var}(Y)}{\mathrm{Var}(X)}}}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

טל אוהב לספר בדיחות. מספר הבדיחות שהוא מספר במשך שעה מתפלג לפי התפלגות פואסונית, בכל מקרה.

בשעה טובה, טל מספר בדיחות בקצב של 2 בדיחות לשעה.

בשעה מעולה, טל מספר בדיחות בקצב של 3 בדיחות לשעה.

ההסתברות לשעה טובה היא p וההסתברות לשעה מעולה היא $1-p$.

ההסתברות שטל יספר בשעה הבאה לפחות בדיחה אחת היא 0.916.

א. חשבו את p .

ב. ידוע שכל השעות ביום שלישי תהיינה שעות טובות. נסמן:

X - מספר הבדיחות שטל יספר ביום שלישי בין 8:00 ל 9:00.

Y - מספר הבדיחות שטל יספר ביום שלישי בין 8:30 ל 9:30.

1. חשבו את $P\{X=2, Y=2\}$.
2. חשבו את $Cov(X,Y)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

למסיבת פתיחה של חנות חדשה הוזמנו 400 אנשים.

כל אחד מהמוזמנים מגיע למסיבה בהסתברות 0.52 ובאופן בלתי-תלוי במוזמנים אחרים.

כל אחד מהאנשים שמגיעים למסיבה קונה בחנות מוצרים בסכום מקרי שתוחלתו 150 ₪ ושונותו 900 ₪.

נניח שאין תלות בין סכומי-הקנייה של מוזמנים שונים וכן בין מספר המוזמנים המגיעים למסיבה לבין סכומי-הקנייה של כל אחד ואחד מהם.

(6 נק׳) א. חשבו את תוחלת ההכנסות של החנות מרכישות המוזמנים, שמגיעים למסיבת הפתיחה.

(6 נק׳) ב. חשבו את שונות ההכנסות של החנות מרכישות המוזמנים, שמגיעים למסיבת הפתיחה.

שאלה 4 (20 נקודות)

בגדר בעלת $n-1$ קטעים מותקנים n גלאי-פריצה בלתי-תלויים, כמתואר באיור שלהלן :

כל אחד מהגלאים תקין (ופועל) בהסתברות 0.8.

את הגדר אפשר לפרוץ רק בקטעים, הנמצאים בין שני גלאי-פריצה סמוכים ומקולקלים.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הקטעים בגדר שאפשר לפרוץ דרכם.

א. חשבו את $E[X]$.

ב. חשבו את $\mathrm{Var}(X)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נניח שההתפלגות של המשתנה המקרי X היא פואסונית עם הפרמטר λ, ונניח שההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה Y בהינתן $X=i$ היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{2^i}{2^i+1}$, לכל $i=0,1,\ldots$.

א. חשבו את התוחלת של Y.

ב. חשבו את השונות של Y.

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות :

$$f_X(x)=\frac{e^{2x}}{2} \qquad , \qquad -\infty<x<\ln 2$$

מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X.

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצאו קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשבו קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשבו חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000| \le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1, X_2, \ldots, X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$. חשבו חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.

הוכיחו כי
$$P\{X \le \mu t\} \ge 1-\frac{1}{t}$$

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.

הראו בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים:
$$P\left\{\overline{X}_n \le \tfrac{2}{p}\right\} \ge 1-\tfrac{1-p}{n}$$

הערה: $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

5. הוכיחו, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$$

.6 יהיו $X_1 , X_2 , \ldots , X_{200}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים:

$$M_X(t) = \left(\frac{e^t}{5-4e^t} \right)^2$$

, עבור $t < \ln 1.25$. מצאו קירוב ל- $P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\}$.

.7 א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i = 1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשבו קירוב ל- $P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5, 0.5]$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

.8 אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הניחו שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

.9 נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשבו **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשבו **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

.10 יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n > 4$.

הוכיחו בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים:

$$P\{X \ge n-2\} \le \frac{n}{2(n-4)^2}$$

11. רשמו את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7 ;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7 ;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הניחו ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הניחו שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

14. נתונה קופסה ובה 18 כדורים: 10 לבנים, 5 שחורים ו- 3 אדומים. כל הכדורים **שונים** זה מזה.
בוחרים מהקופסה באקראי **וללא החזרה** 5 כדורים, רושמים את צבעיהם ומחזירים אותם לקופסה.
חוזרים על התהליך 90 פעמים, כך שאין תלות בין החזרות השונות.

יהי Y המספר **הכולל** של הכדורים הלבנים שנבחרו במהלך 90 החזרות הללו.

חשבו <u>חסם עליון</u> (הטוב ביותר האפשרי) להסתברות של המאורע $\{|Y - 250| \geq 13\}$.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה תופענה טענות מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 15 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}\quad,\quad i=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p\quad,\quad i=1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i!\quad,\quad i=0,1,\ldots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r\quad,\quad i=r,r+1,\ldots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n}\quad,\quad i=0,1,\ldots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}\quad,\quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a)\quad,\quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\,t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\quad,\quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}\quad,\quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t)\quad,\quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}\quad,\quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j|A)=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x xp_X(x)=\int xf(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t|X>t\}=P\{X>s\}\quad,\quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X|Y=y]=\sum_x xp_{X|Y}(x|y)=\int xf_{X|Y}(x|y)dx$

שונות מותנית

$$\mathrm{Var}(X\,|\,Y=y) \;=\; E[X^2|Y=y]-(E[X\,|\,Y=y])^2$$

נוסחת התוחלת המותנית

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y = y]p_Y(y)$$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430)

$$E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$$

נוסחת השונות המותנית

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; E[\mathrm{Var}(X\,|\,Y)] + \mathrm{Var}(E[X\,|\,Y])$$

תוחלת של סכום משתנים מקריים

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

שונות משותפת

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

מקדם המתאם הלינארי

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)\Big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$$

פונקציה יוצרת מומנטים

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \qquad ; \qquad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$$

$$M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$$ כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים :

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה)

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$$

$$M_{X_1+\ldots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב

$$P\{X \ge a\} \le E[X]/a \qquad , \qquad a>0 \;,$$ X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב

$$P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \qquad , \qquad a>0 \;,\; \mu,\sigma^2 < \infty$$

משפט הגבול המרכזי

$$P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(a) \qquad , \qquad \mu,\sigma^2 < \infty \;,$$ X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad ; \qquad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad ; \qquad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \;,\; -1<x<1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \;,\; 0<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \;,\; n \ne -1 \qquad ; \qquad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \qquad ; \qquad \int b^{ax}dx = \tfrac{1}{a\ln b}b^{ax}$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a/\log_m n \qquad ; \qquad \log_n(a^b) = b\cdot\log_n a \qquad ; \qquad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע (a, b), עבור $a < b$.

הוכח כי: $E[X] = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

9. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה. הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$. הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

12. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה. הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

13. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי: $\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$

14. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי:

$$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2 / n$$

15. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n - j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג.

$$Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

16. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

17. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

18. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

19. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

20. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה:

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326