Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 3

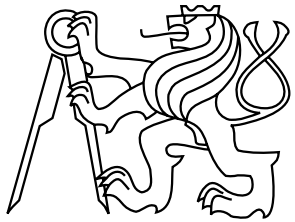
Stromy, prohledávání do šířky

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: lomicsim.github.io

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1



(Verze dokumentu: 23. 10. 2018 12:48)

Opakování z přednášky – Stromy

- **Strom** je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici (**acyklický**).
- **Les** je libovolný acyklický graf.
- **List** grafu je libovolný vrchol stupně 1.
- Každý strom T s aspoň 2 vrcholy obsahuje aspoň dva listy.
- Nechť $G = (V, E)$ je graf na aspoň 2 vrcholech a nechť $v \in V$ je list. Pak G je strom $\Leftrightarrow G - v$ je strom.
- Nechť $G = (V, E)$ je graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:
  1. G je strom.
  2. Pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje právě jedna u-v-cesta.
  3. G je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf.
  4. G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Cvičení: Kolik listů může maximálně, resp. minimálně mít strom na n vrcholech ($n \geq 2$)?

3.1 Stromy

(a) Nechť T je neorientovaný strom, v němž je maximální stupeň vrcholu $\Delta(T)$. Ukažte, že strom T má nejméně $\Delta(T)$ listů.

(b) Nechť $d_1, \ldots, d_n$ jsou kladná celá čísla. Dokažte následující ekvivalenci: Existuje strom na n vrcholech se stupni $d_1, \ldots, d_n$ právě tehdy, když $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. **(0.5b)**

3.2 Algoritmy DFS a BFS

```
Algoritmus DFS (G, u):
(1) visited = {}
(2) stack = new Stack({u})
(3) while stack.notEmpty()
(4)     v = stack.pop();
(5)     if v ∈ visited:
(6)         continue;
(7)     visited.insert(v)
(8)     for w ∈ N(v)
(9)         stack.push(w)
```

```
Algoritmus BFS (G, u):
(1) visited = {}
(2) queue = new Queue({u})
(3) while queue.notEmpty()
(4)     v = queue.pop();
(5)     if v ∈ visited:
(6)         continue;
(7)     visited.insert(v)
(8)     for w ∈ N(v)
(9)         queue.push(w)
```

Cvičení:

(a) Proč nelze použít algoritmus DFS k nalezení nejkratší u-v-cesty?

(b) Modifikujte iterační verzi algoritmu DFS tak, aby v průběhu prohledávání vypisoval použité hrany (zprávy typu: *přecházím z uzlu u do uzlu v*, každá hrana bude tedy vypsána dvakrát).

(c) Modifikujte BFS aby vypsal nejkratší cestu do libovolného uzlu z uzlu $s \in V$.

3.3 Prohledávání do šířky

(a) Na vstupu je graf G popisující plán sklepení. Uzly reprezentují křižovatky, hrany chodby. Některé chodby jsou uzamčené a na některých křižovatkách jsou umístěny klíče. Známe, který klíč patří ke které chodbě. Nalezněte nejkratší trasu, která nás dostane ze křižovatky s do křižovatky t.

1. Ve sklepení je pouze jediná zamčená chodba a jediný klíč.
2. Ve sklepení je k zamčených chodeb a k klíčů, $k \ll n$ (**0.5 bodu**).

(b) Mějme graf G a funkci $h : E \to \{0, 1\}$ ohodnocující hrany nulou či jedničkou. Nalezněte nejkratší cestu mezi uzly s a t, kde délku cesty počítáme jako součet hodnot použitých hran dle funkce h. (**0.5 bodu**)

3.4 Domácí úkol (0.5 b)

Mějme souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$. Chceme mazat vrcholy jeden po druhém tak, aby byl graf v průběhu mazání stále souvislý. Navrhněte algoritmus, který v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ vypíše správné pořadí mazání vrcholů a dokažte jeho správnost.

Můžete používa algoritmy z přednášky a známé datové strukury. Úkol odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).