

Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 2

Souvislost, matematická indukce na grafech, prohledávání do hloubky

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: [lomicsim.github.io](https://github.com/lomicsim)

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
<https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1>



2.1 Opakování z přednášky – Souvislost

- **cesta v grafu** – podgraf grafu izomorfní nějaké cestě P .
- u - v -**cesta** – cesta v grafu s koncovými vrcholy u a v :
 $P = (u = v_1, v_2, \dots, v_k = v)$.
- Graf G je **souvislý** $\Leftrightarrow \forall u, v \in V(G)$ v něm existuje u - v -cesta.

Cvičení:

- (a) Necht G je graf na n vrcholech. Určete kolik musí minimálně obsahovat hran, abychom mohli s jistotou prohlásit, že je souvislý (**0.5b**).
- (b) Rozhodněte, zda existuje nesouvislý graf, jehož doplněk je také nesouvislý (**0.5b**).

2.2 Podgraf, indukovaný podgraf, komponenty

- **Podgraf** H grafu G ($H \subseteq G$):
 - ▶ $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$.
- **Indukovaný podgraf** H grafu G ($H \leq G$):
 - ▶ $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.
- **Souvislá komponenta** – souvislý maximální indukovaný podgraf (v inkluzi).

Cvičení:

- (a) 1. Určete všechny neizomorfní souvislé podgrafy úplného grafu K_4 .
2. Určete všechny neizomorfní podgrafy grafu K_4 .
- (b) 1. Určete počet všech podgrafů grafu K_n
2. Určete počet všech indukovaných podgrafů grafu K_n .
- (c) Dokažte, že graf, který obsahuje kružnici jako podgraf, obsahuje kružnici jako indukovaný podgraf.
 - ▶ Platí toto tvrzení i pouze pro kružnice sudé/liché délky?

0.5b Silniční síť zahrnuje $2n$ měst a z každého vede n silnic do n různých měst. Existuje cesta mezi libovolnými dvěma městy?

Matematická indukce na grafech

Matematická indukce se používá při dokazování vět ve formě:

$$\forall n \geq a : T(n), n \in \mathbb{N},$$

kde $T(n)$ značí, že tvrzení T platí pro všechny grafy o n uzlech (případně hran, komponent, ...). Důkaz se skládá ze dvou kroků:

1. **Základní krok** ukáže, že $T(a)$ platí.
2. **Indukční krok** dokáže implikaci $T(n) \Rightarrow T(n + 1)$. Předpoklad, že $T(n)$ platí nazýváme **indukční hypotézou**.
 - ▶ *Častý postup*: Nechť G je graf na $n + 1$ vrcholech. Zvolme libovolný vrchol v a odeberme ho z grafu: $G \setminus \{v\}$ má tedy n vrcholů a platí pro něj indukční hypotéza. Nyní vrátíme uzel v do grafu a dokážeme, že tvrzení bude platit i nadále.
 - ▶ Pokud jste v indukčním kroku nepoužili indukční hypotézu, pravděpodobně je důkaz špatně.

Cvičení: Dokažte indukci:

Souvislý graf na n vrcholech má alespoň $n - 1$ hran.

2.3 Matematická indukce na grafech – příklady

Dokažte matematickou indukcí:

- (a) Graf na n vrcholech má c souvislých komponent. Dokažte, že má alespoň $n - c$ hran.
- (b) Každý strom je bipartitní.
- (c) Vrcholy grafu s maximální stupně k lze obarvit $(k + 1)$ barvami tak, aby žádné 2 vrcholy stejné barvy nebyly spojeny hranou.

0.5b Souvislý graf o m hranách neobsahuje cykly liché délky. Dokažte, že je bipartitní.

Doplňující otázka: Graf na n vrcholech má c souvislých komponent. Kolik může mít nejvíce hran?

Opakování z přednášky – Prohledávání do hloubky

Algoritmus **DFS_graf** (graf G , vrchol v):

- (1) pro každý vrchol $u \in V(G)$:
- (2) stav(u) := nenalezený
- (3) **DFS**(v)

DFS (vrchol v):

- (4) Když stav(v) není nenalezený
- (5) return
- (6) stav(v) := otevřený
- (7) Pro každého souseda u vrcholu v :
- (8) **DFS**(u)
- (9) stav(v) := uzavřený

Cvičení: Jak modifikovat DFS, aby vypsal nějakou cestu ze startu do cíle?

2.4 Prohledávání do hloubky

- (a) Jak modifikovat DFS, aby spočítal počet souvislých komponent grafu?
- (b) Jak hledat cestu mezi dvěma políčky bludiště, když se pohybujeme jako šachový kůň?
- (c) Jak hledat cestu mezi dvěma políčky bludiště, když se pohybujeme jako *kulhavý kůň*, tj. v lichých tazích jako šachový kůň a v sudých jako šachový král?
- (d) Rozhodněte, zda daný graf obsahuje kružnici.
 - Navrhněte algoritmus který pracuje v čase $\mathcal{O}(n)$.

0.5b Jsou dány tři nádoby o kapacitách n_1, n_2, n_3 litrů. Jak pomocí přelévání vody odměřit K litrů?

2.5 Domácí úkol (0.5 b)

- Je dán **souvislý** graf $G = (V, E)$ o n uzlech a m hranách. Umístěte na libovolné dva uzly dva roboty. Roboty pak posouvejte po hranách tak, aby každou hranou prošel alespoň jeden robot. Roboti se mohou vracet a každý může provést maximálně m kroků.
- Efektivní řešení odevzdávejte ve formě pseudokódu s odvozenou časovou a pamětovou složitostí a důkazem správnosti (konečnosti i korektnosti).

Úkol odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).