

Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 4

Kostra grafu, Řadící algoritmy

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: [lomicsim.github.io](https://github.com/lomicsim)

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
<https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1>



(Verze dokumentu: 30. 10. 2018 19:11)

4.1 Kostra grafu

- **Kostra** K souvislého grafu G je takový jeho podgraf, že:
 $V(K) = V(G)$ a K je strom.

Cvičení:

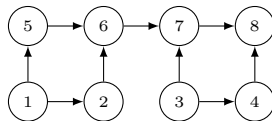
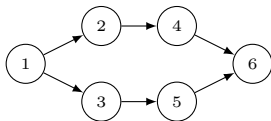
- (a) Kolik koster má $K_{2,n}$? **(0.5 b)**
- (b) Dokažte, že je-li (V, E') kostra grafu $G = (V, E)$, potom pro každé $e \in E \setminus E'$ existuje $e' \in E'$ tak, že $(V, (E' \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ je opět kostra grafu G . **(0.5 b)**

4.2 Topologické uspořádání

- **Topologické uspořádání** (TU) orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je takové pořadí vrcholů v_1, v_2, \dots, v_n grafu G , že pro každou hranu $(v_i, v_j) \in E$ platí $i < j$.

Cvičení:

- (a) Určete maximální počet hran v orientovaném acyklickém grafu o n vrcholech.
- (b) Určete počet topologických uspořádání:



- (c) Do cíle doběhlo n závodníků, každý si zapamatoval některé z těch, co už byli v cíli (na vstupu). Kdy je možné z těchto informací jednoznačně rekonstruovat kompletní pořadí? (*najděte nutnou a postačující podmínku*)

4.3 Řazení

- Řazení založené na pouze binární operaci **porovnání-a-prohození** (Compare-And-Exchange).

Cvičení: Je dáno 9 kuliček, jedna je těžší, k dispozici máme rovnoramenné váhy (na misky lze dávat i více kuliček). Jak ji najít na 3 vážení? A jak na 2 vážení?

Cvičení: Mějme pole $A = (a_1, \dots, a_n)$ – n prvků, které umíme pouze porovnávat a prohazovat:

- Najděte minimální prvek pomocí $n - 1$ porovnání. Dokažte, že je to dolní mez počtu porovnání.

4.4 Řazení

Cvičení: Mějme pole $A = (a_1, \dots, a_n)$ – n prvků, které umíme pouze porovnávat a prohazovat:

- (a) Najděte $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ nejmenších prvků v čase $\mathcal{O}(n)$.
- (b) Seřadte pole, přičemž minimalizujte počet prohození.
 - ▶ Nechť a_1, \dots, a_n je permutace čísel $1, \dots, n$. Navrhněte algoritmus který pole seřadí v čase $\mathcal{O}(n)$, přičemž minimalizuje počet prohození.
- (c) Co nejrychleji seřadte pole A pokud víte, že pouze $k \ll n$ prvků je na špatné pozici.

4.5 Řazení

Cvičení: Mějme pole $A = ((J_1, P_1), \dots, (J_n, P_n))$ – n jmen, každé uložené jako dva řetězce (jméno a příjmení). Nechť celé pole A v paměti zabírá M paměti.

Navrhněte efektivní algoritmus, který pole seřadí podle příjmení a jména se stejným příjmením i podle jména.

4.6 Domácí úkol

1. (*zůstává z předchozího cvičení*) Mějme souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$. Chceme mazat vrcholy jeden po druhém tak, aby byl graf v průběhu mazání stále souvislý. Navrhněte algoritmus, který v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ vypíše správné pořadí mazání vrcholů a dokažte jeho správnost. **(0.5 b)**
2. V neorientovaném stromu o n vrcholech provedeme *náhodně* orientaci hran. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne právě jeden zdroj (vrchol orientovaného grafu, do kterého nevede žádná hrana). **(0.5 b)**

Úkoly odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).