Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 4

Kostra grafu, Řadící algoritmy

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: lomicsim.github.io

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1

(Verze dokumentu: 6. 11. 2018 14:34)

4.1 Kostra grafu

- **Kostra** K souvislého grafu G je takový jeho podgraf, že: $V(K) = V(G)$ a K je strom.

Cvičení:

(a) Kolik koster má $K_{2,n}$? **(0.5 b)**

(b) Dokažte, že je-li (V, E') kostra grafu $G = (V, E)$, potom pro každé $e \in E \setminus E'$ existuje $e' \in E'$ tak, že $(V, (E' \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ je opět kostra grafu G. **(0.5 b)**

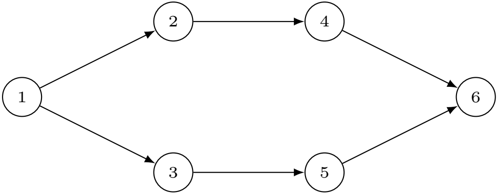
4.2 Topologické uspořádání

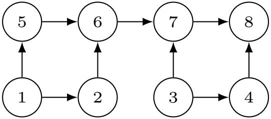
- **Topologické uspořádání** (TU) orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je takové pořadí vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ grafu G, že pro každou hranu $(v_i, v_j) \in E$ platí $i < j$.

Cvičení:

(a) Určete maximální počet hran v orientovaném acyklického grafu o n vrcholech.

(b) Určete počet topologických uspořádání:





(c) Do cíle doběhlo n závodníků, každý si zapamatoval některé z těch, co už byli v cíli (na vstupu). Kdy je možné z těchto informací jednoznačně rekonstruovat kompletní pořadí? *(najděte nutnou a postačující podmínku)*

4.3 Řazení

- Řazení založené na pouze binární operaci **porovnání-a-prohození** (Compare-And-Exchange).

Cvičení: Je dáno 9 kuliček, jedna je těžší, k dispozici máme rovnoramenné váhy (na misky lze dávat i více kuliček). Jak ji najít na 3 vážení? A jak na 2 vážení?

Cvičení: Mějme pole $A = (a_1, \ldots, a_n)$ – n prvků, které umíme pouze porovnávat a prohazovat:

- Najděte minimální prvek pomocí $n - 1$ porovnání. Dokažte, že je to dolní mez počtu porovnání.

4.4 Řazení

Cvičení: Mějme pole $A = (a_1, \ldots, a_n)$ – n prvků, které umíme pouze porovnávat a prohazovat:

(a) Najděte $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ nejmenších prvků v čase $\mathcal{O}(n)$.

(b) Seřaďte pole, přičemž minimalizujte počet prohození.
  - Nechť $a_1, \ldots, a_n$ je permutace čísel $1, \ldots, n$. Navrhněte algoritmus který pole seřadí v čase $\mathcal{O}(n)$, přičemž minimalizuje počet prohození.

(c) Co nejrychleji seřaďte pole A pokud víte, že pouze $k \ll n$ prvků je na špatné pozici.

4.5 Řazení řetězců

Mějme pole $A = ((\mathsf{J}_1, \mathsf{P}_1), \ldots, (\mathsf{J}_n, \mathsf{P}_n))$ – n jmen, každé uložené jako dva řetězce (jméno a příjmení). Nechť celé pole A v paměti zabírá M paměti, nejdelší jméno pak m paměti.

Navrhněte efektivní algoritmus, který pole seřadí podle příjmení a jména se stejným příjmením i podle jména.

4.6 Domácí úkol

1. *(zůstává z předchozího cvičení)* Mějme souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$. Chceme mazat vrcholy jeden po druhém tak, aby byl graf v průběhu mazání stále souvislý. Navrhněte algoritmus, který v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ vypíše správné pořadí mazání vrcholů a dokažte jeho správnost. **(0.5 b)**
2. V neorientovaném stromu o n vrcholech provedeme *náhodně* orientaci hran. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne právě jeden zdroj (vrchol orientovaného grafu, do kterého nevede žádná hrana). **(0.5 b)**

Úkoly odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).