Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 2

Složitost algoritmů, základy grafů

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: lomicsim.github.io

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1

(Verze dokumentu: 8. 10. 2018 20:44)

2.1 Souvislost

- **cesta v grafu** – podgraf grafu izomorfní nějaké cestě P.
- u-v-**cesta** – cesta v grafu s koncovými vrcholy u a v:
  $P = (u = v_1, v_2, \ldots, v_k = v)$.
- Graf G je **souvislý** $\Leftrightarrow \forall u, v \in V(G)$ v něm existuje u-v-cesta.

Cvičení:

(a) Nechť G je graf na n vrcholech. Určete kolik musí minimálně obsahovat hran, abychom mohli s jistotou prohlásit, že je souvislý (**0.5b**).

(b) Rozhodněte, zda existuje nesouvislý graf, jehož doplněk je také nesouvislý (**0.5b**).

2.2 Podgraf, indukovaný podgraf, komponenty

- **Podgraf** H grafu G ($H \subseteq G$):
  - $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$.
- **Indukovaný podgraf** H grafu G ($H \leq G$):
  - $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.
- **Souvislá komponenta** – souvislý maximální indukovaný podgraf (v inkluzi).

Cvičení:

(a) 1. Určete všechny neizomorfní souvislé podgrafy úplného grafu K_4.
    2. Určete všechny neizomorfní podgrafy grafu K_4.

(b) 1. Určete počet všech podgrafů grafu K_n
    2. Určete počet všech indukovaných podgrafů grafu K_n.

(c) Dokažte, že graf, který obsahuje kružnici jako podgraf, obsahuje kružnici jako indukovaný podgraf.
  - Platí toto tvrzení i pouze pro kružnice sudé/liché délky?

0.5b Silniční síť zahrnuje $2n$ měst a z každého vede n silnic do n různých měst. Existuje cesta mezi libovolnými dvěma městy?

Matematická indukce na grafech

Matematická indukce se používá při dokazování vět ve formě:

$$\forall n \geq a : T(n), n \in \mathbb{N},$$

kde $T(n)$ značí, že tvrzení T platí pro všechny grafy o n uzlech (případně hran, komponent, ...). Důkaz se skládá ze dvou kroků:

1. **Základní krok** ukáže, že $T(a)$ platí.
2. **Indukční krok** dokáže implikaci $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Předpoklad, že $T(n)$ platí nazýváme **indukční hypotézou**.
   - *Častý postup:* Nechť G je graf na $n+1$ vrcholech. Zvolme libovolný vrchol v a odeberme ho z grafu: $G \setminus \{v\}$ má tedy n vrcholů a platí pro něj indukční hypotéza. Nyní vrátíme uzel v do grafu a dokážeme, že tvrzení bude platit i nadále.
   - Pokud jste v indukčním kroku nepoužili indukční hypotézu, pravděpodobně je důkaz špatně.

Cvičení: Dokažte indukcí:

Souvislý graf na n vrcholech má alespoň $n-1$ hran.

2.3 Matematická indukce na grafech – příklady

Dokažte matematickou indukcí:

(a) Graf na n vrcholech má c souvislých komponent. Dokažte, že má alespoň $n - c$ hran.

(b) Každý strom je bipartitní.

(c) Vrcholy grafu s maximálního stupně k lze obarvit $(k + 1)$ barvami tak, aby žádné 2 vrcholy stejné barvy nebyly spojeny hranou.

0.5b Souvislý graf o m hranách neobsahuje cykly liché délky. Dokažte, že je bipartitní.

Doplňující otázka: Graf na n vrcholech má c souvislých komponent. Kolik může mít nejvíce hran?

Prohledávání do hloubky

```
Algoritmus DFS_graf (graf G, vrchol v):
pro každý vrchol u ∈ V(G):
    stav(u) := nenalezený
DFS(v)

DFS (vrchol v):
    Když stav(v) není nenalezený
        return
    stav(v) := otevřený
    Pro každého souseda u vrcholu v:
        DFS(u)
    stav(v) := uzavřený
```

2.4 Prohledávání do hloubky

(a) Jak modifikovat DFS, aby vypsal nějakou cestu ze startu do cíle?

(b) Jak modifikovat DFS, aby spočítal počet souvislých komponent grafu?

(c) Jak hledat cestu mezi dvěma políčky bludiště, když se pohybujeme jako šachový kůň?

(d) Jak hledat cestu mezi dvěma políčky bludiště, když se pohybujeme jako *kulhavý kůň*, tj. v lichých tazích jako šachový kůň a v sudých jako šachový král?

0.5b Jsou dány tři nádoby o kapacitách n_1, n_2, n_3 litrů. Jak pomocí přelévání vody odměřit K litrů?

2.5 Domácí úkol (0.5 b)

- Je dán **souvislý** graf $G = (V, E)$ o n uzlech a m hranách. Umístěte na libovolné dva uzly dva roboty. Roboty pak posouvejte po hranách tak, aby každou hranou prošel alespoň jeden robot. Roboti se mohou vracet a každý může projít maximálně m hran.
- Efektivní řešení odevzdávejte ve formě pseudokódu s odvozenou časovou a paměťovou složitostí a důkazem správnosti (konečnosti i korektnosti).

Úkol odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).