Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 1

Složitost algoritmů, základy grafů

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: lomicsim.github.io

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1

(Verze dokumentu: 15. 10. 2018 22:40)

Obsah cvičení

- Grafy
  1. Složitost algoritmů, grafy
  2. Grafy – cesty, souvislost, stromy, kostry, DFS
  3. Vzdálenost v (neohod.) grafech, BFS, topologické třídění
- Algoritmy a datové struktury
  4. Třídící algoritmy, binární haldy
  5. Binomiální hlady a amortizovaná složitost
  6. Binární vyhledávací stromy a AVL stromy
  7. Pravděpodobnost, hashování
  8. Rozděl a panuj
  9. Třídění
  10. Dynamické programování
- Opět grafy
  11. Minimální kostry
  12. Nejkratší cesty v grafu

Hodnocení – Zápočet

- **Semestrální písemka**:
  - V 10. týdnu semestru.
  - Maximum 20, minimum 10.
  - Možnost opravy v posledním týdnu semestru.
- **Kvízy** v Marastu:
  - Každý 2. týden 1 otázka, celkem 6 otázek.
  - Správná odpověď: 1 bod, špatná nebo žádná odpověď: -1 bod.
  - Celkem lze získat nejvýše 6 bodů a nejméně -6 bodů.
- **Programovací úlohy** v Progtestu:
  - Během semestru **tři** programovací úlohy v jazyce C/C++.
  - Celkem 30 bodů.
  - Na každou úlohu 2 týdny, za vyřešení v 1.týdnu 25% bonus.

Hodnocení – Zápočet – Pokračování

- **Aktivita** během cvičení:
  - Lze získat 0 až 5 bodů.
  - Body lze získávat za řešení bodovaných úloh ve cvičení a za domácí úlohy.
- Účast v soutěži ACM ICPC:
  - Za každou vyřešenou úlohu na CTU Open 2 body, ve vyšších kolech 6 bodů.

Celkem je možno získat 56 bodů + bonusy.

Udělení zápočtu je podmíněno splněním 2 podmínek:

- získáním minimálně 10 bodů ze semestrální písemku
- a získáním minimálně 28 bodů celkově.

- Analýza složitosti algoritmů
- Úpravy známých algoritmů
- Úlohy na dynamické programování
- Návrh algoritmu ve formě pseudokódu
- Důkaz korektnosti algoritmu (konečnost a správnost)

1.1 Motivační úloha (1/2 bodu)

Mějme pole $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n **seřazených** čísel ($a_i \in \mathbb{N}$) a přirozené číslo $K \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda existují indexy i, j, $1 < i, j < n, i \neq j$ takové, že $a_i + a_j = K$.

- Navrhněte efektivní algoritmus, který tento problém řeší, a popište jej pseudokódem.
- Dokažte korektnost Vašeho algoritmu (alespoň hlavní myšlenku).
- Proveďte analýzu časové a paměťové složitosti algoritmu.

1.2 Složitost algoritmů

Analyzujte následující algoritmy na výpis hvězdiček a co nejpřesněji určete kolik hvězdiček program vypíše a kolik kroků program vykoná.

a)
```
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
    print "*"
```

b)
```
for i:=1 to n do
  for j:=1 to i do
   print "*"
```

c)
```
while n > 0 do
  print "*"
  n := n/2
```

d)
```
while n > 0 do
  for i:= 1 to n do
    print "*"
  n := n/2
```

e)
```
while n > 0 do
  if (n is odd) then
    print "*"
  n := n/2
```

f)
```
while n > 0 do
  if (n is odd) then
    for i:= 1 to n do
      print "*"
  n := n/2
```

Opakování z přednášky – Neorientovaný graf

- **Neorientovaný graf** je uspořádaná dvojice (V, E), kde
  - V je neprázdná konečná množina **vrcholů** (nebo také **uzlů**),
  - E je množina **hran**.
    - Hrana je dvouprvková podmnožina V, $E \subset \binom{V}{2} \subset 2^V$.
- Množinu vrcholů a hran grafu G budeme značit $V(G)$ a $E(G)$.
- **Stupeň** vrcholu v v grafu G, $\deg_G(v)$ značí počet hran grafu G obsahujících vrchol v.
- k-**regulární** graf: $\forall v \in V(G) : \deg(v) = r$.
- **(Otevřené) okolí** $N_G(v)$ – množina všech sousedů.
- **Uzavřené okolí** $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- **Princip sudosti** Pro každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

1.3 Vlastnosti grafů

(a) Uveďte příklady použití grafů na reálných objektech.

(b) Existuje soubor stupňů grafu (multiset čísel velikosti n), který splňuje princip sudosti a přesto graf s tímto souborem neexistuje? A když jsou všechna čísla v multisetu menší jak n?

0.5b Máme graf $G = (V, E)$ pro který platí $|E| = 2|V| + 5$. V grafu je 10 vrcholů stupně 1 a ostatní jsou stupně 6. Kolik má celkem vrcholů?

Opakování z přednášky – Důležité grafy

- **Úplný graf** $K_n = (V, \binom{V}{2})$, kde $|V| = n$.
- **Úplný bipartitní graf** $K_{n,m}$ $= (A \cup B, \{\{a,b\} \mid a \in A, b \in B\})$, kde $A \cap B = \emptyset$, $|A| = n$ a $|B| = m$.
- **Cesta** $P_m = (\{0, \ldots, m\}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \{0, \ldots, m-1\}\})$.
- **Kružnice** C_n $= (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, \ldots, n-1\}\} \cup \{\{1, n\}\})$.
- **Hvězda** $S_n = K_{1,n}$.

Cvičení: Uveďte maximální délku nejdelší cesty v každém z těchto grafů.

1.4 Existence grafu s požadovanými vlastnostmi

Nakreslete graf s požadovanými vlastnostmi nebo uveďte, proč takový graf neexistuje:

(a) Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

(b) 6 vrcholů a všechny jsou stupně 3,

(c) 6 vrcholy a všechny jsou stupně 1,

(d) 4 vrcholy se stupni 1, 2, 3, 4,

(e) 5 vrcholů se stupni 2, 3, 3, 4, 4.

(f) Pro která n existuje graf na n vrcholech, ve kterém má každý vrchol jiný stupeň?

0.5b Pro která n existuje graf na n vrcholech, ve kterém má každý vrchol jiný stupeň, kromě dvou, které mají stejné?

Opakování z přednášky – Izomorfismus

Nechť G a H jsou dva grafy.

(a) **izomorfismus grafů**: *bijekce* $f : V(G) \to V(H)$, kde $\forall u, v \in V(G)$ platí $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$.

(b) G a H jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus grafů G a H, značíme $G \simeq H$.

(c) **Automorfismus** grafu G je izomorfismus se sebou samým (izomorfismus $f : V(G) \to V(G)$).

Cvičení: Mějme vzájemně izomorfní grafy G, H ($G \simeq H$). Víme že G má n automorfismů. Kolik atomorfismů má graf H?

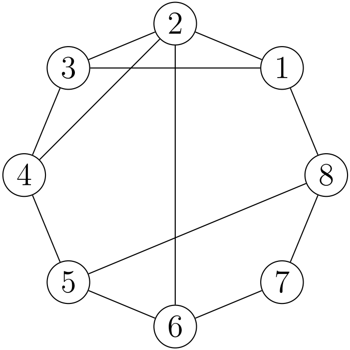
1.5 Izomorfismus

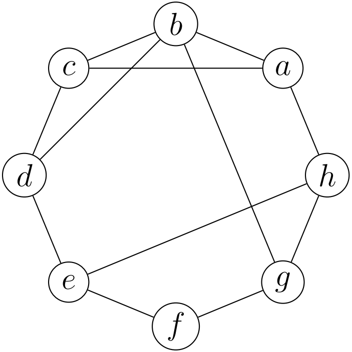
(a) Jsou každé dva $(n-1)$-regulární grafy izomorfní?

(b) Jsou každé dva $(n-2)$-regulární grafy izomorfní?

(c) Jsou každé dva $(n-3)$-regulární grafy izomorfní?

(d) Rozhodněte, zda jsou následující grafy izomorfní.





1.6 Počet automorfismů určitých grafů

Určete počet automorfismů následujících grafů pro $m, n > 1$:

(a) úplný graf K_n, z něhož je odstraněna jedna hrana,

(b) úplný graf K_n, z něhož jsou odstraněny dvě sousední hrany,

(c) úplný graf K_n, z něhož jsou odstraněny dvě nesousední hrany.

(d) Najděte příklad grafu, který má právě jeden automorfismus (na alespoň dvou vrcholech).

1.7 Domácí úkol

Definice

Doplněk $\overline{G}$ grafu $G = (V, E)$ je graf $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

- Ukažte, že G je izomorfní H právě tehdy, když $\overline{G}$ je izomorfní $\overline{H}$. *(1/2 bodu)*

Úkol odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).