Московский физико-технический институт

Лекции Скубачевского А. А. по решению задач из курса «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

Автор:
Максим Гуринов

весна 2026

Содержание

1. Комплексные числа

1.1. Алгебраическая форма записи

Опр. Комплексное число — это число вида $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i такое число, что $i^2 = -1$. Число $a = \operatorname{Re} z$ называется действительной частью z, $b = \operatorname{Im} z$ — мнимой.

Пусть дано два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$. Рассмотрим некоторые операции с ними:

1. Сложение (вычитание): $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.
2. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_2ib_1 + a_1ib_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2)$.
3. Комплексное сопряженное: $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$.
4. Модуль: $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\bar{z}$.
5. Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Отметим, что $z^2 \neq |z|^2$.

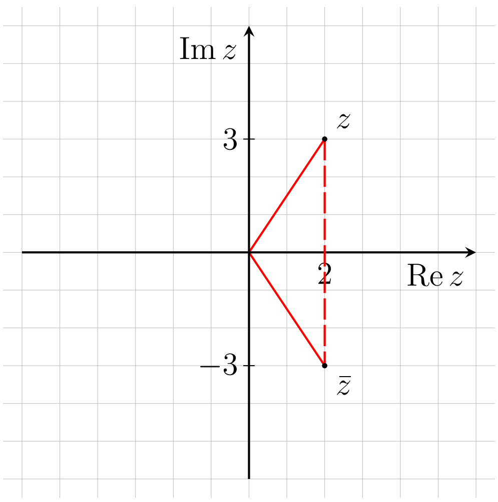
Пр. $z_1 = \sqrt{5} - i$, $z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

1. $z_1 + z_2 = 2\sqrt{5} - 3i$.
2. $z_1 - z_2 = i$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} - 2i) = 3 - 3i\sqrt{5}$.
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{(\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} + 2i)}{9} = \dfrac{7}{9} + \dfrac{\sqrt{5}}{9}i$.

1.2. Геометрическая форма записи

Опр. Комплексное число — точка на комплексной плоскости.

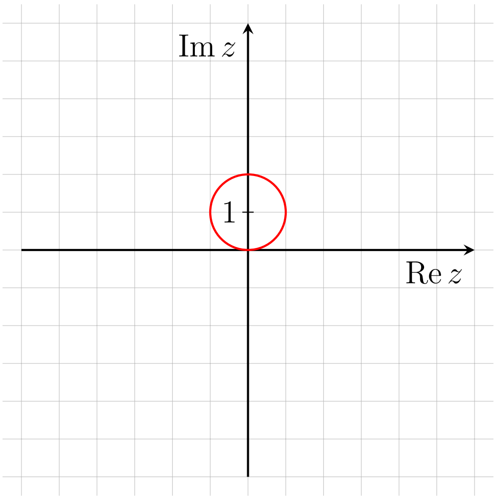
Пр. $z = 2 + 3i$.



При этом $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

Пр. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

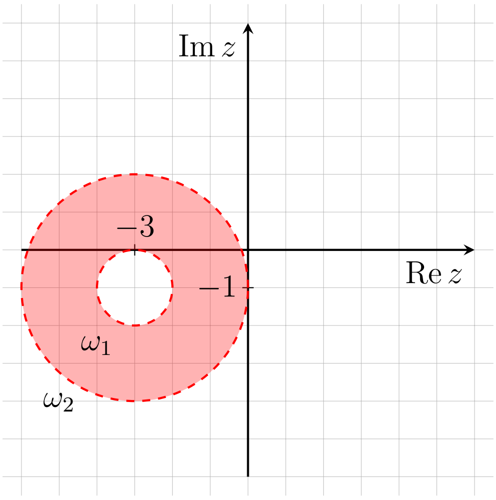
1. $|z - i| = 1$ — множество z, удалённых от i на расстояние 1.



2. $1 < |z + 3 + i| < 3$.
Поскольку в формуле расстояния стоят плюсы, перепишем в более удобном виде:

$$1 < |z - (-3 - i)| < 3 \iff \begin{cases} |z - (-3 - i)| > 1, \\ |z - (-3 - i)| < 3. \end{cases}$$

Первое уравнение системы отвечает внешней части окружности ω_1, а второе — внутренней части ω_2:

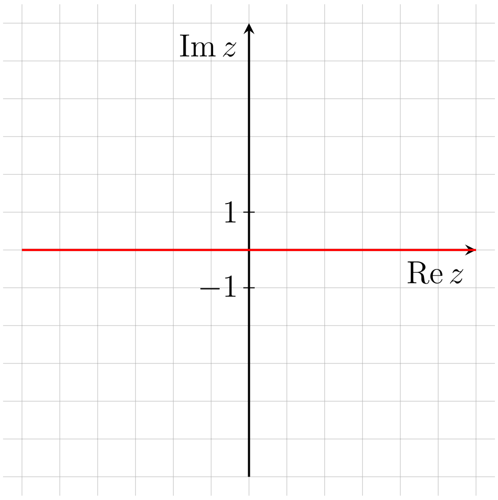


3. $|z|^2 - 6z - 6\bar{z} = 0$.
Сразу неясно, что это такое. Возьмём $z = x + iy$, тогда:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6iy - 6x + 6iy = 0$$
$$x^2 + y^2 - 12x = 0$$
$$(x - 6)^2 + y^2 = 36$$

Получили уравнение окружности.

4. $|z-i| = |z+i|$ — множество точек, равноудалённых от точек $(0,1)$ и $(0,-1)$ на комплексной плоскости, т.е. серединный перпендикуляр:



1.3. Показательная и тригонометрические формы записи

Координаты (x, y) точки z на комплексной плоскости можно представить в виде:

$$x = |z| \cdot \cos\varphi, \; y = |z| \cdot \sin\varphi,$$

где φ — угол между радиус-вектором точки z и положительным направлением оси x. Угол φ ещё называют аргументом z ($\varphi = \arg z$).

Положим по определению $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Это выражение также называется формулой Эйлера.

Тогда, переписав полученный ранее результат, получим показательную форму записи комплексного числа:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = ze^{i\varphi}.$$

Пр. Представить в тригонометрической и показательной форме.

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \; \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Однако угол $\frac{\pi}{3} + \pi$ нам не подходит, т.к. z_1 принадлежит первой четверти. Поэтому просто возьмём $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Получим:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2. $z_2 = 1 - i$.

$$|z_2| = \sqrt{2}, \; \operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \sin\varphi = -\frac{\pi}{4},$$
$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Пр. Упростить $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4}$.

Заметим, что эта дробь равна $\dfrac{z_1^6}{z_2^4}$, где z_1 и z_2 — числа из предыдущего примера. Тогда:

$$\frac{z_1^6}{z_2^4} = \frac{64e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 6}}{4e^{-4\frac{\pi}{4}\cdot 4}} = 16\frac{e^{2i\pi}}{e^{-i\pi}} = 16\cdot\frac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}{cos(-\pi)+i\sin(-\pi)} = -16.$$

Пример можно было решить и проще, если заметить, что:

$$z = |z|\cdot e^{i\varphi} \Rightarrow |z| = |z|\cdot|e^{i\varphi}| \Rightarrow |e^{i\varphi}| = 1.$$

Пр. Решить уравнение $z^3 = -1$.
Попробуем для начала решить уравнение в общем виде:

$$z^n = a.$$

Для этого мы можем представить z и a соответственно как:

$$z = |z|e^{i\varphi},\ a = |a|e^{i\alpha} \Rightarrow |z|^n e^{i\varphi n} = |a|e^{i\alpha}.$$

Два комплексных числа равны, если равны их модули и аргументы:

$$\begin{cases} |z|^n = |a|, \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|}, \\ \varphi = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi k}{n},\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили бесконечное число корней. Однако при $k = 0$ имеем $\varphi = \alpha$, а при $k = n$ получаем $\varphi = \alpha + 2\pi$, т.е. наши корни чередуются через n точек. Поэтому итоговый ответ:

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отметим, что если коэффициенты уравнения — действительные числа, то сопряжённое каждого комплексного корня также будет являться корнем.

2. Интегралы

2.1. Интегрирование дробей

Пр. Вычислить $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$.
Для решения разложим дробь под интегралом на элементарные:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3} = \frac{A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$x = A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)$$

Два многочлена равны в двух случаях: а) если коэффициенты при соответствующих степенях равны; б) если многочлены равны при любом значении переменной. Воспользуемся вторым условием, тогда:

$$x=-1\colon\ -1=-4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}.$$
$$x=-2\colon\ -2=B\cdot(-1)\cdot(-5) \Rightarrow B=-\frac{2}{5}.$$
$$x=3\colon\quad 3=20C \Rightarrow C=\frac{3}{20}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{3}{20}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{4}\ln|x+1|-$$
$$-\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Ещё несколько примеров разложения дроби на элементарные:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$
$$\frac{1}{(x-1)(x-3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3}.$$

Стоит помнить, что дробь можно так разложить только если степень меньше степени знаменателя. В противном случае нужно сначала выделить целую часть (т.е. поделить числитель на знаменатель в стоблик).

Пр. Разложить дробь $\dfrac{1}{x^4+1}$ на сумму элементарных.
Для этого нужно выделить в знаменателе разность квадратов:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2.$$

А дальше действовать привычным образом.

Пр. Вычислить $\displaystyle\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx.$
Для начала преобразуем дробь:

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}.$$

А затем разложим полученную дробь на сумму элементарных:

$$\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}=\frac{A(2x^2+2x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(2x^2+2x+1)}.$$

Получим $A=1,\ B=4,\ C=3.$
Тогда исходный интеграл равен:

$$\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx=\int x\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+$$
$$+\int\frac{4x+2+1}{2x^2+2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\int\frac{d(2x^2+2x+1)}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\ln(2x^2+2x+1)+\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arctg}\left(2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$