

Московский физико-технический институт

Лекции Скубачевского А. А. по решению задач из курса
«Многомерный анализ, интегралы и ряды»

Автор:
Максим Гуринов

весна 2026

Содержание

1. Комплексные числа	3
1.1. Алгебраическая форма записи	3
1.2. Геометрическая форма записи	3
1.3. Показательная и тригонометрические формы записи	5
2. Интегралы	6
2.1. Интегрирование дробей	6

1. Комплексные числа

1.1. Алгебраическая форма записи

Опр. Комплексное число — это число вида $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i такое число, что $i^2 = -1$. Число $a = \operatorname{Re} z$ называется действительной частью z , $b = \operatorname{Im} z$ — мнимой.

Пусть дано два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$. Рассмотрим некоторые операции с ними:

1. Сложение (вычитание): $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.
2. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_2ib_1 + a_1ib_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2)$.
3. Комплексное сопряженное: $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$.
4. Модуль: $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\bar{z}$.
5. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Отметим, что $z^2 \neq |z|^2$.

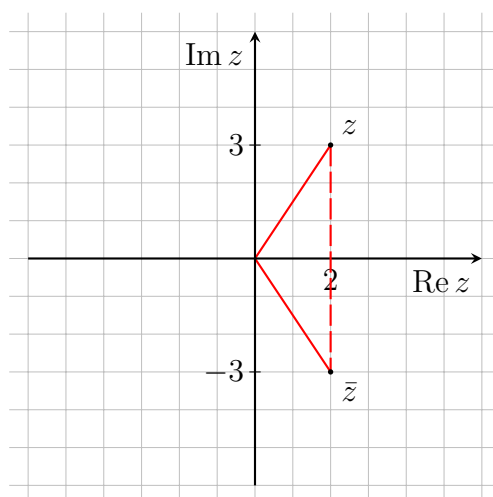
Пр. $z_1 = \sqrt{5} - i$, $z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

1. $z_1 + z_2 = 2\sqrt{5} - 3i$.
2. $z_1 - z_2 = i$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} - 2i) = 3 - 3i\sqrt{5}$.
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} + 2i)}{9} = \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{5}}{9}i$.

1.2. Геометрическая форма записи

Опр. Комплексное число — точка на комплексной плоскости.

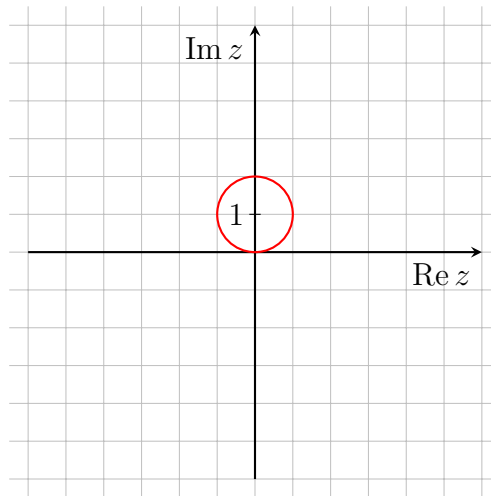
Пр. $z = 2 + 3i$.



При этом $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2 .

Пр. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

1. $|z - i| = 1$ — множество z , удалённых от i на расстояние 1.

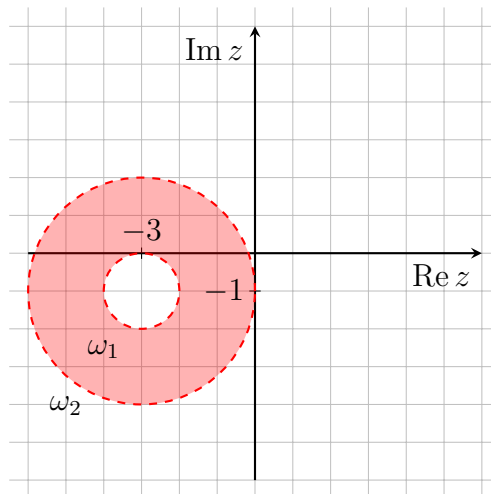


2. $1 < |z + 3 + i| < 3$.

Поскольку в формуле расстояния стоят плюсы, перепишем в более удобном виде:

$$1 < |z - (-3 - i)| < 3 \iff \begin{cases} |z - (-3 - i)| > 1, \\ |z - (-3 - i)| < 3. \end{cases}$$

Первое уравнение системы отвечает внешней части окружности ω_1 , а второе — внутренней части ω_2 :



3. $|z|^2 - 6z - 6\bar{z} = 0$.

Сразу неясно, что это такое. Возьмём $z = x + iy$, тогда:

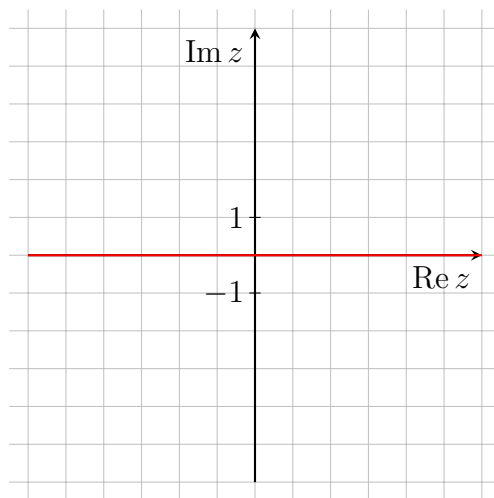
$$x^2 + y^2 - 6x - 6iy - 6x + 6iy = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 36$$

Получили уравнение окружности.

4. $|z - i| = |z + i|$ — множество точек, равноудалённых от точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$ на комплексной плоскости, т.е. серединный перпендикуляр:



1.3. Показательная и тригонометрические формы записи

Координаты (x, y) точки z на комплексной плоскости можно представить в виде:

$$x = |z| \cdot \cos \varphi, \quad y = |z| \cdot \sin \varphi,$$

где φ — угол между радиус-вектором точки z и положительным направлением оси x . Угол φ ещё называют аргументом z ($\varphi = \arg z$).

Положим по определению $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Это выражение также называется формулой Эйлера.

Тогда, переписав полученный ранее результат, получим показательную формулу записи комплексного числа:

$$z = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = ze^{i\varphi}.$$

Пр. Представить в тригонометрической и показательной форме.

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Однако угол $\frac{\pi}{3} + \pi$ нам не подходит, т.к. z_1 принадлежит первой четверти. Поэтому просто возьмём $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Получим:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2. $z_2 = 1 - i$.

$$|z_2| = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -1 \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Пр. Упростить $\frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4}$.

Заметим, что эта дробь равна $\frac{z_1^6}{z_2^4}$, где z_1 и z_2 — числа из предыдущего примера. Тогда:

$$\frac{z_1^6}{z_2^4} = \frac{64e^{i\frac{\pi}{3} \cdot 6}}{4e^{-4\frac{\pi}{4} \cdot 4}} = 16 \frac{e^{2i\pi}}{e^{-i\pi}} = 16 \cdot \frac{\cos 2\pi + i \sin 2\pi}{\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)} = -16.$$

Пример можно было решить и проще, если заметить, что:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow |z| = |z| \cdot |e^{i\varphi}| \Rightarrow |e^{i\varphi}| = 1.$$

Пр. Решить уравнение $z^3 = -1$.

Попробуем для начала решить уравнение в общем виде:

$$z^n = a.$$

Для этого мы можем представить z и a соответственно как:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad a = |a|e^{i\alpha} \Rightarrow |z|^n e^{i\varphi n} = |a|e^{i\alpha}.$$

Два комплексных числа равны, если равны их модули и аргументы:

$$\begin{cases} |z|^n = |a|, \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|}, \\ \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили бесконечное число корней. Однако при $k = 0$ имеем $\varphi = \alpha$, а при $k = n$ получаем $\varphi = \alpha + 2\pi$, т.е. наши корни чередуются через n точек. Поэтому итоговый ответ:

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Отметим, что если коэффициенты уравнения — действительные числа, то сопряжённое каждого комплексного корня также будет являться корнем.

2. Интегралы

2.1. Интегрирование дробей

Пр. Вычислить $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} dx$.

Для решения разложим дробь под интегралом на элементарные:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)$$

Два многочлена равны в двух случаях: а) если коэффициенты при соответствующих степенях равны; б) если многочлены равны при любом значении переменной. Воспользуемся вторым условием, тогда:

$$\begin{aligned}x = -1: -1 &= -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}. \\x = -2: -2 &= B \cdot (-1) \cdot (-5) \Rightarrow B = -\frac{2}{5}. \\x = 3: 3 &= 20C \Rightarrow C = \frac{3}{20}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{20} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{4} \ln|x+1| - \\&\quad - \frac{2}{5} \ln|x+2| + \frac{3}{20} \ln|x-3| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ещё несколько примеров разложения дроби на элементарные:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}, \\ \frac{1}{(x-1)(x-3)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}.\end{aligned}$$

Стоит помнить, что дробь можно так разложить только если степень меньше степени знаменателя. В противном случае нужно сначала выделить целую часть (т.е. поделить числитель на знаменатель в столбик).

Пр. Разложить дробь $\frac{1}{x^4+1}$ на сумму элементарных.

Для этого нужно выделить в знаменателе разность квадратов:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2.$$

А дальше действовать привычным образом.

Пр. Вычислить $\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} dx$.

Для начала преобразуем дробь:

$$\frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{6x^2 + x - 2}{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)}.$$

А затем разложим полученную дробь на сумму элементарных:

$$\frac{6x^2 + x - 2}{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{A(2x^2 + 2x + 1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)}.$$

Получим $A = 1$, $B = 4$, $C = 3$.

Тогда исходный интеграл равен:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} dx &= \int x dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{4x+3}{2x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \\&\quad + \int \frac{4x+2+1}{2x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{d(2x^2 + 2x + 1)}{2x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} dx = \\&= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{arctg} \left(2 \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$