

# 感应式无线电能传输系统的传输距离极限

Lonelybag

版本：0.1

摘 要

基于电磁场理论推导磁偶极子和电偶极子的近场传输距离极限。

关键词：电磁场磁偶极子电偶极子近场

## 1 电偶极子

- $\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}(\text{rad/m})$  - 相移
- $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  - 波速
- $\eta = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  - 特征阻抗
- $\tilde{I}$  - 电流幅值

### 1.1 理论推导

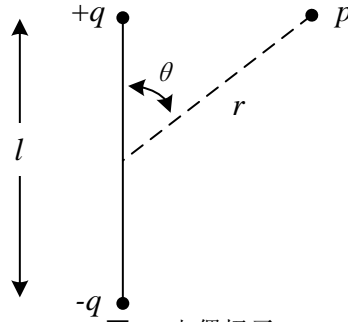


图 1: 电偶极子

首先推导磁场

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\mu} [\nabla \times \vec{A}] \\ &= \frac{j\beta\tilde{I}l}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\phi\end{aligned}\tag{1}$$

可以看出，磁场的图像是一簇水平曲线。然后推导电场

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} [\nabla \times \vec{H}] \\ &= \frac{\eta \tilde{I} l}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) \cos\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_r + \frac{j\tilde{I} \eta \beta}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2}\right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\theta\end{aligned}\quad (2)$$

可以看出，电场是垂直于平面的一簇曲线。

## 1.2 近场

定义 $\beta r \ll 1$ 的区域为近场区(near-zone fields)<sup>1</sup>。由此可以得到下列近似

$$\begin{cases} e^{-j\beta r} \rightarrow 1 \\ 1 + \frac{1}{j\beta r} \rightarrow \frac{1}{j\beta r} \\ 1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2} \rightarrow \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2} \end{cases}\quad (3)$$

因此，可以得到近场磁场方程

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{j\beta \tilde{I} l}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\phi \\ &\xrightarrow[1 + \frac{1}{j\beta r} \rightarrow \frac{1}{j\beta r}]{e^{j\beta r} \rightarrow 1} \frac{\tilde{I} l}{4\pi r^2} \sin\theta \vec{a}_\phi\end{aligned}\quad (4)$$

类似的，也可以得到近场电场方程

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} [\nabla \times \vec{H}] \\ &= \frac{\eta \tilde{I} l}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) \cos\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_r + \frac{j\tilde{I} \eta \beta}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2}\right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\theta \\ &\xrightarrow[1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2} \rightarrow \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2}]{e^{j\beta r} \rightarrow 1} \\ &= \frac{\eta \tilde{I} l}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) 2\cos\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_r + \frac{j\tilde{I} \eta \beta}{4\pi r} \left(\frac{1}{j\beta r}\right) \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\theta \\ &= \frac{\eta \tilde{I} l}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) 2\cos\theta \vec{a}_r + \frac{\tilde{I} l \eta}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) \sin\theta \vec{a}_\theta \\ &= \frac{\eta \tilde{I} l}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{j\beta r}\right) (2\cos\theta \vec{a}_r + \sin\theta \vec{a}_\theta)\end{aligned}\quad (5)$$

## 1.3 仿真

## 2 磁偶极子

- $\tilde{I}$  - 电流幅值
- $a$  - 线圈半径

<sup>1</sup>也即，近场区域内，空间电磁场的相位差远远小于 $1\text{ rad}$ 。

- $r$  - 距离

## 2.1 理论推导

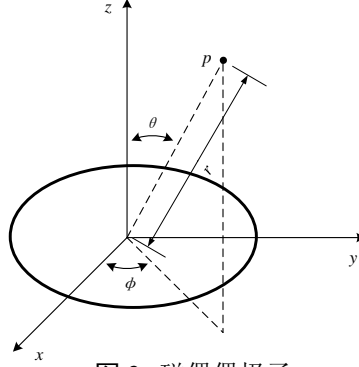


图 2: 磁偶偶极子

首先推导磁场

$$\vec{E} = -j \frac{\omega \mu (\pi a^2) \tilde{I} \beta}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\phi \quad (6)$$

然后推导磁场

$$\vec{H} = j \frac{\omega \mu (\pi a^2) \tilde{I}}{2\pi r^2 \eta} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) \cos\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_r + j \frac{\omega (\pi a^2) \tilde{I} \beta}{4\pi r \eta} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right) \sin\theta e^{-j\beta r} \vec{a}_\theta \quad (7)$$

## 2.2 近场

定义  $\beta r \ll 1$  的区域为近场区(near-zone fields)。由此可以得到

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} = 2\pi f \sqrt{\mu \epsilon} \xrightarrow{v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}} \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \\ &\xrightarrow{r \ll \frac{1}{\beta}} r \ll \frac{\lambda}{2\pi} \end{aligned} \quad (8)$$

因此可以认为，近场区为距离偶极子  $\frac{\lambda}{2\pi}$  以内的区域。

## 参考文献

- 方军雄, 2007. 所有制、制度环境与信贷资金配置[J]. 经济研究(12):82-92.
- 刘凤良, 章潇萌, 于泽, 2017. 高投资、结构失衡与价格指数二元分化[J]. 金融研究(02):54-69.
- 吕捷, 王高望, 2015. CPI 与 PPI “背离” 的结构性解释[J]. 经济研究, 50(04):136-149.
- CARLSTROM C T, FUERST T S, 1997. Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis[J]. The American Economic Review:893-910.
- LI Q, CHEN L, ZENG Y, 2018. The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com[J]. China Finance Review International, 8(3):256-274.
- QUADRINI V, 2011. Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations[J]. FRB Richmond Economic Quarterly, 97(3):209-254.