No.

Date

第12周 习题

1. 实对称矩阵 A 有实特征值 λ_i 和实标准正交特征向量组 $\{v_i\}$

$\forall x\in\mathbb{R}^n\ (x\neq 0)\quad x=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$

$x^TAx=(\Sigma a_iv_i)^TA(\Sigma a_jv_j)=\sum_{i,j}a_ia_jv_i^TAv_j=\sum_{i,j}a_ia_j\lambda_jv_i^Tv_j=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\lambda_i$

$x^Tx=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\leq\lambda_{max}$ (λ_i的加权平均值)

且当 x 取属于 λ_{max} 的特征向量时上式可取等

故 $\max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\lambda_{max}$

2. (a) $\chi_A(t)$ 是3次实系数多项式，至少有一个实根 λ_1，设 $\chi_A(t)=(\lambda-\lambda_1)g(\lambda)$ $\deg g(\lambda)=2$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=1$ λ_2,λ_3 要么都为实数，要么为共轭虚数

若 λ_2,λ_3 都为实数，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$，三根只可能为 ±1 且不能全是 -1，故 $\lambda_i=1$ 为A的特征值

若 λ_2,λ_3 为共轭虚数，$\lambda_1=\frac{1}{|\lambda_2|^2}>0$，$\lambda_1=1$

综上，A 至少有一个特征值为 1

(b) (结合定理 5.61 理解) 设 X_1 是 A 的特征值 1 的特征向量，令 $P_1=\frac{X_1}{||X_1||}$

将 P_1 扩张为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基 $\{P_1\ P_2\ P_3\}$，$T=(P_1\ P_2\ P_3)$ 为正交矩阵

令 $B=T^TAT$，B 为正交矩阵

$AT=A(P_1\ P_2\ P_3)=(P_1\ AP_2\ AP_3)=TB=(P_1\ P_2\ P_3)B$

则B的第1列为 $[1,0,0]$，$B=\begin{pmatrix}1 & b_{12} & b_{13}\\ 0 & b_{22} & b_{23}\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ 正交 $|B|=|A|=1$

$b_{12}=b_{13}=0$ $B_2=\begin{pmatrix}b_{22} & b_{23}\\ b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ 为行列式为 1 的正交矩阵

故 $T^TAT=B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(c) $B\sim A$ $\operatorname{tr}B=\operatorname{tr}A=1+2\cos\theta$ $\theta=\arccos(\frac{\operatorname{tr}A-1}{2})$ (加个小条件 $\theta\in[0,\pi]$)

3. 设 A 为秩为 r 的对角矩阵，不妨设 $A=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_r,a_{r+1},\cdots,a_n)$，其中 $a_i=0\ (i>r)$

取 $A_i=\operatorname{diag}(0,0,\cdots,a_i,0,\cdots,0)$ 为仅有对角线第 i 个为 a_i 其余阵元为0的对角矩阵

则 $A=\sum_{i=1}^{r}A_i$ 且 $\operatorname{rank}(A_i)=1$

设B为秩为 r 的对称矩阵，它的特征值 λ_1 到 λ_r 不为 0，λ_{r+1} 到 λ_n 为 0

$\exists$ 正交矩阵 P s.t. $P^TBP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}=\tilde{B}$

由上述过程，$\exists\tilde{B}_i\ (1\leq i\leq r)$ s.t. $\tilde{B}=\sum_{i=1}^{r}B_i$ 且 $\operatorname{rank}(\tilde{B}_i)=1$

取 $B_i=P\tilde{B}_iP^T$ 则有 $B=P\tilde{B}P^T=\sum_{i=1}^{r}P\tilde{B}_iP^T=\sum_{i=1}^{r}B_i$ 且 $\operatorname{rank}B_i=\operatorname{rank}\tilde{B}_i=1$

4. 见附件

5. $AB-BA=I_n\Rightarrow \operatorname{tr}(AB-BA)=\operatorname{tr}(I_n)\Rightarrow 0=\operatorname{tr}(AB)-\operatorname{tr}(BA)=n$ 矛盾

KOKUYO

例 4　证明：n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是：A 的特征多项式在复数域中的根都是实数。

证明　必要性。设 n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵 $B=(b_{ij})$，则

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-B|=(\lambda-b_{11})(\lambda-b_{22})\cdots(\lambda-b_{nn}).$$

这表明 $|\lambda I-A|$ 的根 $b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn}$ 都是实数。

充分性。对实矩阵的级数作数学归纳法。$n=1$ 时，显然命题为真。假设对于 $n-1$ 级实矩阵命题为真，现在来看 n 级实矩阵 A。由于 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，因此可以取 A 的一个特征值 λ_1。设 $\boldsymbol{\eta}_1$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，且 $|\boldsymbol{\eta}_1|=1$。把 $\boldsymbol{\eta}_1$ 扩充成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，然后经过施密特正交化和单位化，得到 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基：$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$。令 $T_1=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$，则 T_1 是正交矩阵。

$$T_1^{-1}AT_1=T_1^{-1}(A\boldsymbol{\eta}_1,A\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\eta}_n)=(T_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{T}_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_n).$$

由于 $T_1^{-1}T_1=I$，因此 $T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$。从而

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}.$$

于是　$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)|\lambda I-B|$。因此 $n-1$ 级实矩阵 B 的特征多项式在复数域中的根都是实数。从而对 B 可用归纳假设：存在 $n-1$ 级正交矩阵 T_2，使得 $T_2^{-1}BT_2$ 为上三角矩阵。

令

$$T=T_1\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix},$$

则 T 是 n 级正交矩阵，且

$$\begin{aligned}T^{-1}AT&=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}^{-1}T_1^{-1}AT_1\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}T_2\\ \mathbf{0} & T_2^{-1}BT_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理，对一切正整数 n，此命题为真。■

例 5　证明：如果 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，且 $AA'=A'A$，那么 A 是对称矩阵。

证明　据例 4 的结论得，存在 n 级正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=B$，其中 $B=(b_{ij})$是上三角矩阵。从而 $T'A'(T^{-1})'=B'$，即 $T^{-1}A'T=B'$。由于 $AA'=A'A$，因此 $BB'=B'B$。于是根据习题 4.2 的第 12 题得，B 是对角矩阵。由于 A 正交相似于对角矩阵 B，因此 A 是对称矩阵（据本节命题 1）。■