例 11 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$):

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

解 此行列式的第 2 列是两组数($x_1,x_2,\cdots,x_n$)与($a_{11},a_{11},\cdots,a_{11}$)的和,第 3 列是 3 组数的和,…,第 n 列是 n 组数的和,从而这个行列式可以拆成 $2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdot n=n!$ 个行列式的和。在这 $n!$ 个行列式中,第 2 列为$(a_{11},a_{11},\cdots,a_{11})'$的行列式,由于第 1 列与第 2 列成比例,因此行列式的值为 0;第 2 列为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$的$\frac{1}{2}n!$个行列式中,只要第 j 列不是取$(x_1^{j-1},x_2^{j-1},\cdots,x_n^{j-1})'$这一列,那么必有两列成比例,从而这样的行列式的值为 0。因此可能不为 0 的行列式只有一个:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

这是范德蒙行列式,从而原行列式的值等于

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

***例 13** 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$):

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}.$$

分析: 这个行列式与范德蒙行列式的区别仅在于第 n 行不是$(x_1^{n-1},x_2^{n-1},\cdots,x_n^{n-1})$。为了利用范德蒙行列式的计算公式,在原行列式的第 n 列右边添加一列$(1,y,y^2,\cdots,y^{n-2},y^{n-1},y^n)'$。在第 $n-1$ 行和第 n 行之间插入一行$(x_1^{n-1},x_2^{n-1},\cdots,x_{n-1}^{n-1},x_n^{n-1},y^{n-1})$,形成一个 $n+1$ 阶行列式 $\widetilde{D}_{n+1}$,它的$(n,n+1)$元的余子式即为 D_n,也就是 $\widetilde{D}_{n+1}$ 的完全展开式中 y^{n-1} 的系数乘以$(-1)^{n+(n+1)}$即为 D_n。

解 令

$$\widetilde{D}_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n & y^n \end{vmatrix}.$$

$$=(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

$\widetilde{D}_{n+1}$的完全展开式中 y^{n-1} 的系数为

$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

因此 $$D_n=-(-1)^{n+(n+1)}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$
$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例 21 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

解 原式 $$=\left|\begin{pmatrix} a_1 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & 2a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & na_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(1,2,3,\cdots,n)-\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\right|$$

$$=\left|-\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\left[I_n-(\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\})^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(1,2,3,\cdots,n)\right]\right|$$

$$=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n\left|I_1-(1,2,3,\cdots,n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$

$|I_n-AB|$
$=|I_1-BA|$

$$=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n\left(1-\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

例 11 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵($n\geqslant 2$):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

解 先解线性方程组

$$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$。将这 n 个方程相加,得

$$\frac{1}{2}n(n+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\sum_{j=1}^{n}b_j.$$

令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$,由上式得

$$y=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}b_j.$$

从第 1 个方程减去第 2 个方程,得

$$(1-n)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=b_1-b_2,$$

由此得出

$$y-nx_1=b_1-b_2.$$

从而

$$x_1=\frac{1}{n}(y-b_1+b_2)=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-b_1+b_2\right].$$

类似地,从第 i 个方程减去第 $i+1$ 个方程($i=2,\cdots,n-1$),可求出

$$x_i=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-b_i+b_{i+1}\right],\quad i=2,\cdots,n-1.$$

从第 n 个方程减去第 1 个方程,可求出

$$x_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-b_n+b_1\right].$$

记 $s=\dfrac{2}{n(n+1)}$。分别令 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,得

$$A^{-1}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}s-1 & s+1 & s & \cdots & s\\ s & s-1 & s+1 & \cdots & s\\ s & s & s-1 & \cdots & s\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ s & s & s & \cdots & s+1\\ s+1 & s & s & \cdots & s-1\end{pmatrix}.$$

点评:

例 11 利用线性方程组来求 A 的逆矩阵,这比用初等变换法求 A^{-1} 简单多了。

No.

Date

(感谢李一轲同学提供的额外解答)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (n \geq 2)$$

设 $P(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i) = t^n - s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n$

其中 $s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$

$P(x_j) = 0 \qquad x_j^n = s_1 x_j^{n-1} - s_2 x_j^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} x_j - (-1)^n s_n$

做初等行变换 $\quad R_n \longleftarrow R_n + (s_2 R_{n-1} - s_3 R_{n-2} + \cdots - (-1)^{n-1} s_{n-1} R_2 + (-1)^n s_n R_1)$

第 n 行变为 $\quad s_1 (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \cdots, x_n^{n-1})$

则 $D_n = s_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$