期中考试参考解答

1. **解**: 首先写出方程相应的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \end{pmatrix},$$

考虑初等行变换 $F_{2,1}(-1)$, $F_{3,1}(-2)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \end{pmatrix},$$

交换 $2,3$ 两行，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

再做初等行变换 $F_{3,2}(1-\lambda)$，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+6 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

分析得，如果 $\lambda \neq 2, -3$ 有唯一的解，如果 $\lambda = 2$ 时，无穷多解，如果 $\lambda = -3$，无解。当 $\lambda = 2$ 时，方程的解是

$$(x_1, x_2, x_3) = (5t, 1-4t, t) = (5, -4, 1)t + (0, 1, 0)$$

2.**解**: 我们把 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 作为列向量排成矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

考虑初等行变换 $F_{2,1}(-2)$, $F_{3,1}(1)$, $F_{4,1}(-1)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

再做初等行变换 $F_{3,2}(-5), F_{4,2}(3)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵的秩是 2, 注意到 α_1,α_2 成比例。因此如下的五个结果都是正确的

$$\{\alpha_1,\alpha_3\},\ \{\alpha_1,\alpha_4\},\ \{\alpha_2,\alpha_3\},\ \{\alpha_2,\alpha_4\},\ \{\alpha_3,\alpha_4\}.$$

3. **证明**: (i) 考虑如下的方程

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

用 f 映射在两边，得到

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

由于 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, 从而 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$ 线性无关.

(ii) 判断为否。给出例子，如 f 为零映射。

4. **解**: (i) 记 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是标准基底，于是

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = [1,0,0],\ \varphi(\mathbf{e}_2) = [0,4,2],\ \varphi(\mathbf{e}_3) = [3,0,1],\ \varphi(\mathbf{e}_4) = [1,5,0].$$

从而矩阵 A 就是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(ii) 很容易看出矩阵 A 的秩是 3. 因此 $\dim \mathrm{im}\varphi = \mathrm{rank} A = 3$. 同时，$\dim \mathrm{im}\varphi + \dim\ker\varphi = 4$, 于是 $\dim\ker\varphi = 1$.

5. **证明**: 对于 $A = M(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$, $B = M(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})$, 有

$$A + B = M(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_{n-1} + b_{n-1}) \in G.$$

通过矩阵的乘法，我们发现：对于 $A = M(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$, 有

$$A^{-1} = M(-a_1, -a_2, \cdots, -a_{n-1}) \in G.$$

6. **解**: (i) 5; (ii) 9.

(iii) 对矩阵的第一行余子式展开，有

$$
\text{原式} = a_0x^{n-1} + (-1)\cdot(-1)\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.
$$

从而，得到行列式为

$$
a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}.
$$

7. **证明**: (i) 设 A 的列向量的极大线性无关组是 $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}$, B 的列向量的极大线性无关组是 $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \cdots, \mathbf{b}_{j_s}$. 因此在矩阵 $(A\,B)$ 中，$\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}$ 线性无关，且 $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \cdots, \mathbf{b}_{j_s}$ 线性无关，因此自然有

$$\max\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\} \leq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

同时，我们发现矩阵 $(A\,B)$ 的列空间可以由 $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \cdots, \mathbf{b}_{j_s}$ 张成。因此，会有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B.$$

(ii) 判断为不成立。举一个反例如下：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

此时，

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = 2, \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 1.$$

8. **解**: 考虑矩阵 $(A \mid E)$, 依次做行变换 $F_{1,2}(-1), F_{2,3}(-1), \cdots, F_{n-1,n}(-1)$, $F_2(\frac{1}{2}), F_3(\frac{1}{3}), \cdots, F_n(\frac{1}{n})$, 此时 A 变成单位矩阵，而单位矩阵变成

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} \\ & & & & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

注意到 $A = (\det A)A^{-1} = n!A^{-1}$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = n! \cdot \frac{1}{n} = (n-1)!$$

9. **证明**: 首先 $AX = B$ 有解当且仅当 B 可以写成 A 的列向量的线性组合。基于这一点，如果 $AX = B$ 有解，则 $(A \mid B)$ 的列向量线性相关，因此 $(A \mid B)$ 的行列式为 0.

反过来，假设 $AX = B$ 无解，则 B 不能写成 A 的列向量的线性组合，而 $\mathrm{rank} A = n$, 因此 A 的列向量线性无关，于是 $(A \mid B)$ 的列向量也是线性无关，从而 $(A \mid B)$ 的行列式不为 0, 得到矛盾。