线性代数习题课 5

2025.10.28

前置知识

行列式的几何意义：平行六面体的有向体积

我们用 $D[A_1,\cdots,A_n]$ 记以 $A_1,\cdots,A_n$ 为邻边形成的定向平行六面体 $\Delta=\Delta(A_1,\cdots,A_n)$ 的有向体积 OV_Δ ，平行六面体的有向体积满足的性质有：

$(D1)$ 有向体积 $D[A_1,\cdots,A_n]$ 是向量 $A_1,\cdots,A_n$ 的多重线性函数。即：若固定 A_k $k\neq i$，则 $D[A_1,\cdots,A_n]$ 关于 A_i 为线性函数。换句话说，若 $A_i=\lambda A_i'+\mu A_i'',\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad A_i',A_i''\in\mathbb{R}^n$ ，则

$$D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots,A_n]$$
$$=\lambda D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i',A_{i+1},\cdots,A_n]+\mu D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i'',A_{i+1},\cdots,A_n]$$

前置知识

行列式的几何意义：平行六面体的有向体积

我们用 $D[A_1,\cdots,A_n]$ 记定向平行六面体 $\Delta=\Delta(A_1,\cdots,A_n)$ 的有向体积 OV_Δ ，平行六面体的有向体积满足的性质有：

　$(D2)$ 若向量组 $A_1,\cdots,A_n\in\mathbb{R}^n$ 线性相关，则它们构建的定向平行六面体 Δ 的有向体积 $D[A_1,\cdots,A_n]=0$.特别地，若向量组中存在两个向量相同，则 $D[A_1,\cdots,A_n]=0$
　$(D2')$ 在 $A_1,\cdots,A_n\in\mathbb{R}^n$ 中交换任意两个向量的位置，有向体积改变符号，即 $D[A_1,\cdots,A_i,\cdots,A_j,\cdots,A_n]=-D[A_1,\cdots,A_j,\cdots,A_i,\cdots,A_n]$

在 $(D1)$ 成立的前提下，$(D2)$ 与 $(D2')$ 是等价的

前置知识

行列式的几何意义：平行六面体的有向体积

我们用 $D[A_1, \cdots, A_n]$ 记定向平行六面体 $\Delta = \Delta(A_1, \cdots, A_n)$ 的有向体积 OV_Δ ，平行六面体的有向体积满足的性质有：

$(D3)$ 平行六面体 $\Delta(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ 的有向体积为为 $D(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 1$

前置知识

将 $1, 2, 3, \cdots, n$ 按某种顺序排成的一个有序数组称为一个排列，记作 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$

互换排列中 i, j 位置的两个数 σ_i, σ_j $(i < j)$ 称为一次对换

对排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，定义其*相伴的排列* $\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'$：

$$\text{若 } \sigma_i = k \text{ ，则 } \sigma_k' = i$$

每个排列都是某个排列的相伴排列，从而 $P_n = \{\sigma' \mid \sigma \in P_n\}$

对任意排列 $\sigma \in P_n$ ，其反序总数与相伴排列的反序总数相等：$e(\sigma) = e(\sigma')$

若满足 $i < j, \sigma_i > \sigma_j$ ，则称 (σ_i, σ_j) 为一个反序/逆序；σ 中的反序总数称为该排列的**逆序数**，记作 $e(\sigma)$

每个排列 σ 可经由 $e(\sigma)$ 次相邻位置的对换可变成从小到大的顺序排列 $(e(\sigma) = e(\sigma)_1 + e(\sigma)_2 + \cdots + e(\sigma)_n)$

行列式

n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式定义为

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{e(\sigma)}\,a_{1\sigma_1}\,a_{2\sigma_2}\,\cdots\,a_{n\sigma_n}$$

其中 P_n 为 $\{1,\ldots,n\}$ 的全排列集合，$e(\sigma)$ 表示排列 σ 的逆序数

行列式的性质

1. 若 B 由 A 通过交换两行（两列）得到，则
   $\det B = -\det A$
2. 若 B 由 A 通过把某一行（或某一列）乘以非零标量 k 得到，则
   $\det B = k \det A$
3. 若 B 由 A 通过把一行（或一列）的若干倍加到另一行（或另一列）得到，则
   $\det B = \det A$

> 计算行列式时可以**混合**使用行、列变换
> 但在求逆矩阵时只能使用**初等行变换或列变换中的一种**（不可混用）！

行列式的性质

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
  $\Rightarrow$ 若 $R = ABCD \cdots$ ，则 $\det R = \det A \cdot \det B \cdot \det C \cdot \det D \cdots$
- $\det A^k = (\det A)^k$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det A^T = \det A$
- $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

行列式的性质

- 若方阵 A 的某一行（或者某一列）是两向量之和，则 $\det A$ 可拆成两行列式之和
- 若方阵 A 的两行（或两列）成比例，或者方阵的行向量（或列向量）线性相关，则 $\det A = 0$
- 三角矩阵的行列式的值等于对角线上所有值的乘积
- 准三角方阵的行列式的值等于对角线上方阵行列式的乘积
- 某一行或者某一列只有一个非零元的矩阵的行列式 $\cdots$

行列式按某一行或某一列的元素展开

矩阵 $A=(a_{ij})$ 去掉第 i 行与第 j 列得到的子矩阵的行列式记为 M_{ij}，称为矩阵 A 的阵元 a_{ij} 的**余子式**。$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为矩元 a_{ij} 的**代数余子式**

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$，则

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

（行列式按照第 i 行的元素展开）

$$\det A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

（行列式按照第 j 列的元素展开）

行列式按某一行或某一列的元素展开

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}\det A$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}\det A$$

行列式计算常用技巧

- 进行初等行（列）变换，尽量把某一行（或一列）变成含有尽可能多零元素的形式，然后使用余子式展开进行计算
- 如果能得到递推式，可以像求数列通项一样得到行列式的值，或者根据矩阵与其转置的行列式相等得到两个递推式，解方程组得到行列式的值
- 有时可以考虑拆成若干个行列式的和
- 如果能猜到答案，也可以在低维情形计算行列式，再用数学归纳法推广到一般情况
- 适当找一些习题练手
- $\cdots$

猎杀时刻

计算下面的行列式

$$\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & b+a_1 \end{vmatrix}$$

猎杀时刻

计算下面的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

猎杀时刻

计算下面的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & a \\ 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

猎杀时刻

计算下面的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

猎杀时刻

计算下面的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \quad (y \neq z)$$