

线性代数习题课 11

2025.12.9



一脸纯朴

相似不变量

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值（包括代数重数与几何重数），还有相同的秩、行列式、零空间维数、迹等不变量，但**不一定有相同的特征子空间或特征向量**

| 如果两个矩阵的特征值相同，且不同特征值对应的特征向量/特征子空间相同，那么这两个矩阵相似吗？

| 如果加上两个矩阵都可对角化的条件呢？

相似不变量

n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角线上的元素之和称为 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$, 即

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

矩阵的迹具有下列性质:

$$1. \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$2. \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$$

$$3. \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$4. \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

两个小结论

设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 \mathbb{R} 上的方阵 A / 线性算子 \mathcal{A} 的全部 (复) 特征值 (重数计入)，则有

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

设 A 是 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵，则 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 是一个 n 次多项式， λ^n 的系数是 1， λ^{n-1} 的系数等于 $-\operatorname{tr}(A)$ ，常数项为 $(-1)^n |A|$ ， λ^{n-k} 的系数为 A 的所有 k 阶主子式的和乘以 $(-1)^k$ ， $1 \leq k < n$

两个重数

设 A 是 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵， λ_1 是 A 的一个特征值。把 A 的属于 λ_1 的特征子空间的维数叫作特征值 λ_1 的**几何重数**，而把 λ_1 作为 A 的特征多项式的根的重数叫作 λ_1 的**代数重数**，有时把代数重数简称为重数

设 λ_1 是 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵 A 的一个特征值，则 λ_1 的几何重数不超过它的代数重数

\mathbb{R} 上的 n 阶矩阵 A 在实数上可对角化的充要条件是： A 的特征多项式的全部复根都是实根，并且 A 的每个特征值的几何重数等于它的代数重数

不变子空间

设 \mathcal{A} 是线性空间 U 上的线性算子。 U 的线性子空间 V 称为 \mathcal{A} 的不变子空间，如果对于 V 中的任意向量 v ，都有 $\mathcal{A}v \in V$. 记 $\mathcal{A}V = \{\mathcal{A}x \mid x \in V\}$ ，则 V 是线性算子 \mathcal{A} 的不变子空间的含义是 $\mathcal{A}V \subset V$

线性算子 \mathcal{A} 的像 $\text{im } \mathcal{A}$ 、核 $\ker \mathcal{A}$ 与特征子空间都是 \mathcal{A} 的不变子空间

线性算子 \mathcal{A} 的不变子空间的和与交仍是 \mathcal{A} 的不变子空间

设 \mathcal{A} 是线性空间 U 上的线性算子， $V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$ 是 U 的一个子空间，则 V 是 \mathcal{A} 的不变子空间当且仅当 $\mathcal{A}\alpha_i \in W$, $i = 1, 2, \dots, s$

设 \mathcal{A} 是线性空间 U 上的线性算子， $\xi \in U$ 且 $\xi \neq 0$ ，则 $\langle \xi \rangle$ 是 \mathcal{A} 的不变子空间当且仅当 ξ 是 \mathcal{A} 的一个特征向量

不变子空间

设 \mathcal{A} 是 n 维线性空间 V 上的一个线性算子， W 是 \mathcal{A} 的一个非平凡的不变子空间，在 W 中取一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ，把它扩充成 V 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ ，则 \mathcal{A} 在此基下的矩阵 A 为一个分块上三角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 $\mathcal{A}|_W$ 在 W 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 下的矩阵

反之，如果 \mathcal{A} 在 V 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵 A 为分块上三角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

令 $W = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle$ ，那么 W 是 \mathcal{A} 的一个非平凡不变子空间，且 $\mathcal{A}|_W$ 在 W 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 下的矩阵是 A_1

不变子空间

1. 线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在某个基下的矩阵具有二阶分块对角的形式当且仅当 \mathbb{R}^n 是两个 \mathcal{A} 的不变子空间 V 和 W 的直和
2. 更一般地, 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的一个线性算子, 则 \mathcal{A} 在 \mathbb{R}^n 的一个基下的矩阵为分块对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

当且仅当 \mathbb{R}^n 能分解成 \mathcal{A} 的非平凡不变子空间的直和: $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$, 并且 A_i 是 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 在 W_i 的一个基下的矩阵

不变子空间与特征多项式的分解

(定理5.31) 设 \mathbb{R}^n 的子空间 V 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子 \mathcal{A} 的不变子空间。假设 \mathcal{A} 在 V 的某个基下的矩阵是 A_1 ，那么方阵 A_1 的特征多项式 $\chi_{A_1}(t)$ 整除 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$

(如果算子 \mathcal{A} 有非平凡的不变子空间，那么该算子的特征多项式可以分解成两个正次数的多项式的乘积)

推论：如果 \mathbb{R}^n 上的线性算子可对角化，即 $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{R}_{\lambda_i}^n$ ，其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 互不相同且 $\mathbb{R}_{\lambda_i}^n$ 是特征值 λ_i 的特征子空间， $W \subset \mathbb{R}^n$ 是该线性算子的一个不变子空间，那么 $W = \bigoplus_{i=1}^m (W \cap \mathbb{R}_{\lambda_i}^n)$

(定理5.32) 设 \mathbb{R}^n 是线性算子 \mathcal{A} 的不变子空间 V_1, \dots, V_k 的直和， A_i 为 \mathcal{A} 在 V_i 的某个基下的矩阵。那么

$$\chi_A(t) = \chi_{A_1}(t) \chi_{A_2}(t) \cdots \chi_{A_k}(t)$$

不变子空间与特征多项式的分解

(定理5.35) \mathbb{R}^n 上的线性算子一定有一维或二维的不变子空间

(定理5.36) 如果 \mathbb{R}^n 上的线性算子 \mathcal{A} 的特征多项式能分解成两个正次数的实系数多项式的乘积，那么 \mathcal{A} 有非平凡的不变子空间

(定理5.37) 设 \mathbb{R}^n 上的线性算子 \mathcal{A} 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 是两个互素（即最大公因式为 1）的多项式 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的乘积。定义

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \xi(\mathcal{A})u = 0\}, \quad V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \eta(\mathcal{A})v = 0\}.$$

那么：

1. U 和 V 都是 \mathcal{A} 的不变子空间，而且 \mathbb{R}^n 是 U 和 V 的直和
2. $\xi(\mathcal{A})$ 在 V 上的限制是可逆的， $\eta(\mathcal{A})$ 在 U 上的限制是可逆的

不变子空间与特征多项式的分解

(定理5.37推广) 设 \mathcal{A} 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中分解成

$$f(\lambda) = p_1^{r_1}(\lambda)p_2^{r_2}(\lambda) \cdots p_s^{r_s}(\lambda),$$

其中 $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_s(\lambda)$ 是 F 上两两不等的首一不可约多项式,

$r_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$, 则

$$V = \ker(p_1^{r_1}(\mathcal{A})) \oplus \ker(p_2^{r_2}(\mathcal{A})) \oplus \cdots \oplus \ker(p_s^{r_s}(\mathcal{A}))$$

特别地, 如果 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 F 中两两不等的元素, $r_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$, 则

$$V = \ker((\mathcal{A} - \lambda_1 I)^{r_1}) \oplus \ker((\mathcal{A} - \lambda_2 I)^{r_2}) \oplus \cdots \oplus \ker((\mathcal{A} - \lambda_s I)^{r_s})$$

且 $\ker((\mathcal{A} - \lambda_i I)^{r_i})$ 的维数等于 r_i

凯莱-哈密顿定理

\mathbb{R}^n 上的线性算子 \mathcal{A} 的特征多项式在 \mathcal{A} 处的取值为

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n + \chi_1 \mathcal{A}^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{A} + \chi_n \mathcal{E}$$

定理：线性算子 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ 是零算子，即对于 \mathbb{R}^n 中任意向量 v ，有 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = \mathcal{O}v = 0$

推论：设 A 是 n 阶方阵，它的特征多项式是

$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$ ，那么 $\chi_A(A) = 0$ ，即

$$\chi_A(A) = A^n + \chi_1 A^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} A + \chi_n E = 0$$

线性算子 \mathcal{A} 的特征多项式零化该线性算子

方阵 A 的特征多项式零化该方阵

极小多项式

在零化线性算子 \mathcal{A} 的非零多项式中次数最小的，首项（即最高次项）系数为 1 的那个称为 \mathcal{A} 的**极小多项式**（方阵同理）

| 极小多项式的存在性与唯一性感兴趣的同学自行了解

\mathcal{A} 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 是 \mathcal{A} 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ （也是 \mathcal{A} 的任何零化多项式）的因子。线性算子/方阵的极小多项式和其特征多项式有相同的根（不记重数），也就是说线性算子/方阵的的极小多项式的零点即为特征值（在更大的域上依然成立）

相似的矩阵具有相同的极小多项式

线性算子/方阵可对角化的充要条件是其极小多项式在 $F[\lambda]$ 中能分解成不同的一次因式的乘积

极小多项式

设 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的线性算子，如果 V 能分解成 \mathcal{A} 的一些非平凡不变子空间的直和：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

那么 \mathcal{A} 的极小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots, m_s(\lambda)],$$

其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上的线性变换 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的最小多项式， $j = 1, 2, \dots, s$ ；
 $[m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots, m_s(\lambda)]$ 是 $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots, m_s(\lambda)$ 的最小公倍式

设 A 是一个 n 阶分块对角矩阵，即

$$A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_s\},$$

设 A_j 的极小多项式是 $m_j(\lambda)$ ， $j = 1, 2, \dots, s$ ，则 A 的极小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots, m_s(\lambda)]$$

极小多项式

1. 求下列 \mathbb{R} 上的方阵的极小多项式，并判断它们是否可对角化

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

极小多项式

2. 求下列 \mathbb{R} 上的方阵 A 和 B 的极小多项式，并判断 A 与 B 是否相似

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. 设 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A^2 + A - 3I$, 判断 A 是否可对角化

凯莱-哈密顿定理

1. 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子，特征多项式为

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$$

那么 \mathcal{A} 可逆当且仅当特征多项式的常数项 $\chi_n \neq 0$. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1} (\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E})$$

2. 设 A 是 n 阶方阵，特征多项式为

$$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n.$$

那么 A 可逆当且仅当特征多项式的常数项 $\chi_n \neq 0$. 这时候

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1} (A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E)$$

凯莱-哈密顿定理

设 A 是方阵, $f(t)$ 是多项式。带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

其中 $r(t)$ 的次数小于 $\chi_A(t)$ 的次数。根据凯莱-哈密顿定理, $\chi_A(A) = 0$, 于是 (约定: $A^0 = E$ 是单位矩阵)

$$f(A) = r(A).$$

余项 $r(t)$ 可以用待定系数法确定。如果 λ 是 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 的根, 那么

$$f(\lambda) = q(\lambda)\chi_A(\lambda) + r(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r(\lambda) = r(\lambda)$$

如果 λ 是 $\chi_A(t)$ 的 k 重根, 那么, 对 $i = 0, 1, \dots, k - 1$, 多项式 f 的 i 阶导数在 λ 处的值为 (约定 $f^{(0)} = f$)

$$f^{(i)}(\lambda) = r^{(i)}(\lambda)$$

对角化

线性算子/方阵（在实数域上）可对角化的充要条件有：

1. 有 n 个线性无关的特征向量
2. \mathbb{R}^n 中存在由其特征向量构成的一个基
3. 属于不同特征值的特征子空间维数之和为 n
4. \mathbb{R}^n 是属于不同特征值的所有特征子空间的和/直和
5. 特征多项式的全部复根都是实根，并且每个特征值的几何重数等于它的代数重数
6. 极小多项式在实数域上能分解成不同的一次因式的乘积

习题

1. 设 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 都是 V 上的线性算子，如果 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 可交换，那么 $\ker \mathcal{B}$, $\text{Im } \mathcal{B}$, \mathcal{B} 的特征子空间都是 \mathcal{A} 的不变子空间
2. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间， \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是 V 上的线性算子。证明：如果 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 可交换，那么 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 至少有一个公共的特征向量

习题

3. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是 V 上的线性变换, 且 \mathcal{A} 有 s 个不同的特征值。证明: 如果 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 可交换, 那么 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 至少有 s 个公共的特征向量, 并且它们线性无关
4. 设 A, B 都是 n 阶复矩阵。证明: 如果 A 与 B 可交换, 那么存在 n 阶可逆复矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵

习题

设 V 是 n 维线性空间, V 上的线性算子 \mathcal{A} 在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. 证明: 若 \mathcal{A} 的一个不变子空间 W 有向量 α_n , 则 $W = V$;
2. 证明: α_1 属于 \mathcal{A} 的任意一个非零不变子空间;
3. 证明: V 不能分解成 \mathcal{A} 的两个非平凡不变子空间的直和;
4. 求 \mathcal{A} 的所有不变子空间