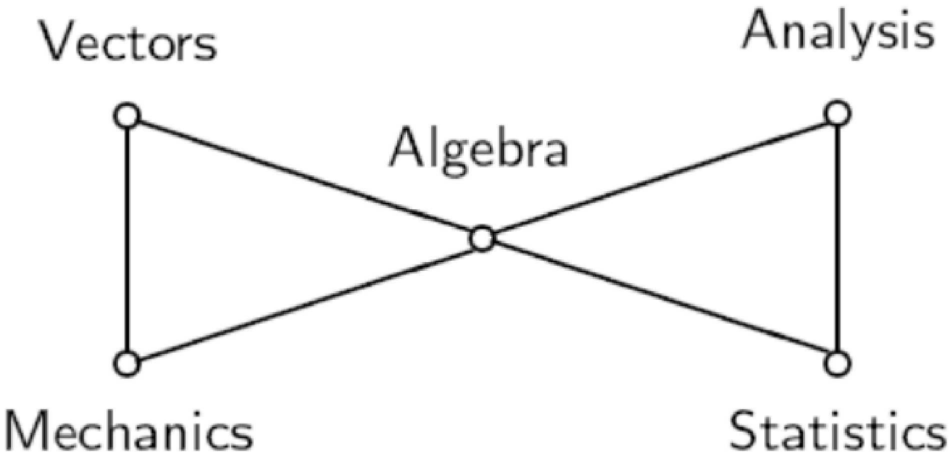
线性代数习题课 2

2025.9.28



作业

- 自由变量的取值范围
  $eg.\ x_3 = s, x_4 = r$
  $s, r \in \mathbf{R}$
- 证明子空间，无需单独考虑零子空间，只需交代子集非空即可
- 以后在 Gradescope 上提交作业，课程代码为 GVY2KN ，如有操作使用方面的问题请联系助教

极大线性无关组

设 S 是一组向量，S_1 是 S 的子向量组。若 S_1 线性无关，且对任意向量 $a \in S \setminus S_1$，$S_1 \cup \{a\}$ 线性相关，则称 S_1 是 S 的**极大无关组**

> 这个定义比较重要：当证明有关极大无关组的等价结论时，请从最原始的定义出发证明

向量组的秩

设向量 $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ，则有:

1. $a_1, \ldots, a_m$ 线性无关，当且仅当 $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m) = m$;
2. $a_1, \ldots, a_m$ 线性相关，当且仅当 $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m) < m$;
3. 若 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 可以用 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 线性表示，则 $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) \leq \operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m)$;
4. 若 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 与 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 互相可以线性表示，则 $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m)$;
5. 向量 b 可表示成 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 的线性组合，当且仅当 $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m) = \operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m, b)$

矩阵的秩

矩阵 A 的行向量张成的线性子空间称为行空间，其维数称为 A 的行秩
矩阵 B 的列向量张成的线性子空间称为列空间，其维数称为 B 的列秩

引理：初等行变换不改变矩阵的行秩/列秩
（2.14 引理的证明可能比较抽象，建议同学们多看看教材这一块内容，思路是初等行变换前后两个行向量组可以互相线性表示，列向量组的线性相关性不受改变）

矩阵的秩

定理：矩阵 A 的行秩和列秩相等，这个数称为矩阵 A 的**秩**，记作 $\mathrm{rank}(A)$

- 因此，矩阵阶梯形的非零行数/主元数目就是矩阵的秩，并且阶梯形的主元所在的列构成列向量组的一个极大线性无关组
- 上一页的引理陈述便可改为：

定理：初等行变换不改变矩阵的秩

矩阵的秩

设 $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ 为一组列向量，$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 为以 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为列构成的 $n \times m$ 阶矩阵。A 经一系列初等行变换变为矩阵 $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$，则：

1. $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关（无关）当且仅当 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 线性相关（无关）
2. $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ 为 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 的极大无关组，当且仅当 $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_r}$ 为 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 的极大无关组。其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$

子空间的若干结论

n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的下列结论成立

1. 设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 为 r 维子空间，则 V 中任意 $r+1$ 个向量线性相关
2. 设 V 为 r 维子空间，则 V 中任意 r 个线性无关的向量为 V 的一组基
3. 设 U 与 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 $U \subseteq V$，则 $\dim U \leq \dim V$
4. 设 U 与 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 $U \subseteq V$，若 $\dim U = \dim V$，则 $U = V$

子空间的和与直和

上节课我们知道，设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，容易验证 $U \cap V$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，但 $U \cup V$ 一般而言不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

我们把 $U \cup V$ 张成的子空间称为 U 与 V 的**和**，记作 $U + V$，可以证明：

$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$

- 定理：设 U 和 V 是的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$

子空间的和与直和

可以证明，$U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当对于任意的 $x \in U + V$，存在唯一的 $u \in U$ 和唯一的 $v \in V$ 使得 $x = u + v$. 这时称 $U + V$ 为**直和**，记作 $U \oplus V$

- 定理：$U + V$ 是直和当且仅当如果 $u + v = \mathbf{0}$, $u \in U$, $v \in V$, 则 $u = v = \mathbf{0}$

因此，如果子空间 U 与 V 的和为直和，我们也称 U 与 V 线性无关

- 定理：如果 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$，则 $\dim(U + V) = \dim U + \dim V$

线性方程组的可解性准则

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 为 m 维列向量，则一般线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解的充要条件是 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, \mathbf{b})$，线性方程组有唯一解的充要条件是 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, \mathbf{b}) = n$

齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是 $\operatorname{rank}(A) < n$

向量组等价

给定两个向量组 $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$，$T = \{b_1, \ldots, b_r\}$，若 S 中的每个向量都可由 T 中的向量线性表示，则称 S 可以由 T 线性表示。如果两个向量组互相都可以线性表示，则称 S 与 T 等价，记为 $S \sim T$

- 容易验证，向量组的等价具有自反性，对称性，传递性
- 容易验证，两个向量组等价当且仅当它们张成的子空间相同

向量组等价

- 向量组与它的任何一个极大线性无关组等价
- 等价的线性无关向量组所含向量的个数相等
- 等价的向量组有相等的秩

习题

设 A 是 $s \times n$ 矩阵，B 是 $l \times m$ 矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

习题

证明:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_r}, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_s}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_r}) + \operatorname{rank}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_s})$$

习题

设向量组 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ 线性无关，并且可以由向量组 $T = \{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$ 线性表示。证明：可以用向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 替换向量 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 中某 s 个向量 $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$，使得得到的向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_{i_{s+1}}, \ldots, \beta_{i_t}\}$ 与 $\{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$ 等价
（其中 $i_1, \ldots, i_t$ 为 $\{1, \ldots, t\}$ 的某个排列）

习题

（教材 2.2 节 习题 4）

设 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$的行秩为 r，列秩为 s

取 A 的 r 个线性无关的行向量 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$. 这 r 个行向量形成一个 $r \times n$ 矩阵 $\widetilde{A}$.

设 $\widetilde{A}$ 的列秩为 t，$\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 是 $\widetilde{A}$ 的列向量的极大线性无关组。证明：

1. $t \leq r$
2. 矩阵 A 的任何一个列向量 a_j 都是列向量 $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 的线性组合，从而 $s \leq t \leq r$，即列秩不超过行秩
   提示：利用 A 的任一行向量都是 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ 的线性组合

习题

3. 把 A 的行作为列，得到如下 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置：

$$^{t}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

有 $r_c(^{t}A) = r_r(A)$, $r_r(^{t}A) = r_c(A)$.

结合 2 与 3 可知 $s \leq r$ 且 $r \leq s$，因此 $r = s$