习题 2.4

6. 证明：记 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, 由 $A^m = 0$ 知道，这个 A 是退化的。因此由第四题知道 $ad - bc = 0$. 再根据第五题知道，此时 $A^2 = (a+d)A$. 如果 $a + d = 0$, 则 $A^2 = 0$, 得证。如果 $a + d \neq 0$, 则

$$A^m = (a+d)A^{m-1} = (a+d)^2 A^{m-2} = \cdots = (a+d)^{m-1} A,$$

此时 A 是零矩阵，当然有 $A^2 = 0$.

7. 证明：设 A 是对称的矩阵，且可逆。对于恒等式 $AA^{-1} = E$, 取转置，则 ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = E$, 注意到 ${}^tA = A$. 因此 ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$, 即 A^{-1} 是对称的。对于斜对称的证明是类似的。

另外，我希望你们把 2.4 的第一题的(5) 给同学们仔细算一下。