期末考试易错点提示

考试加油!

> 本篇内容不能起到平替复习的作用

> 前三章不是复习重点

第一章 线性方程组

- 当且仅当
  $\Rightarrow$ 充分性，$\Leftarrow$ 必要性，都要证
  或者全程使用 $\Leftrightarrow$ 等价表述
- 确定的否定：线性方程组无解或者有无穷多个解
- 高斯消元法：可能存在 $0 = d$ 的行
- 自由变量的取值范围
  $eg.\ x_3 = s, x_4 = r$
  $s, r \in \mathbb{R}$

第二章 矩阵

- 证明子空间时，零向量存在与子集非空是等价的，只不过证明子集非空的快速方法通常是证明零向量存在（另外两个条件是加法封闭与数乘封闭）

> 如果要求证明向量空间，需要证明 2 个运算封闭和教材 P20 的 8 条性质（证否向量空间只需要找到一个不成立的性质的反例即可）

- 计算矩阵的秩，不一定非要化成阶梯形，可以考虑向量组的维数
- 秩的语言刻画线性方程组的解的情况
- 矩阵乘法没有交换律与消去律（没有消去律的意思是 $AB=0$ 不能推出 $A=0$ 或 $B=0$，$AB=AC$ 不能推出 $B=C$ ）
- 只有可交换的两个矩阵才有二项式定理

第二章 矩阵

- $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量是其余向量的线性组合

  > 如果向量组线性相关，那么每一个向量都可以表示成其余向量的线性组合吗?

- 设向量组 S 是向量组 T 的一个子集。那么，如果 S 线性相关，则 T 也线性相关；反之，如果 T 线性无关，则 S 也线性无关

  > 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关，那么该向量组也线性无关吗?

第二章 矩阵

- 分块矩阵的角度刻画矩阵乘法
- 计算矩阵的方幂，常用方法有归纳法，将原矩阵分解成若干个矩阵的和（往往是纯量矩阵与幂零矩阵）或积，将矩阵视为线性映射考虑标准基的像，将矩阵相似对角化/相似约当化等
- 初等行/列变换（左乘/右乘可逆矩阵）不改变矩阵的秩
- $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$
- $\operatorname{rank}(A^T A) = \operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank} A$
- 分块初等矩阵（左行右列法则，注意左/右有双重含义）

> 二阶准三角方阵的逆

> 沙漠岛公式（尽量看懂猜的思路）

第二章 矩阵

- 秩零化度定理：

$$\text{nullity}\, A\ (\dim S) + \text{rank}\, A = \dim(\ker(\varphi_A)) + \dim(\text{im}(\varphi_A)) = n,$$

  其中 n 为 A 的列数（即未知元的数量，或者线性映射 φ_A 定义域的维数）

- 解空间的结构：对于非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，如果相容，
  非齐次线性方程组的通解 = 非齐次线性方程组的一个特解 + 相伴的齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的非平凡解（若不存在非平凡解则非齐次线性方程组只有唯一解）

> 注意求相伴的齐次线性方程组基础解系的正确方式（非齐次线性方程组通解去掉常数项即特解）

第三章 行列式

- 计算行列式时可以混合使用初等行、列变换
  但在求逆矩阵时只能使用**初等行变换或列变换中的一种**（不可混用）
- 行列式交换两行/两列后有一个负号（计算行列式时最少用的一种初等变换）
- 分块矩阵的相关行列式结论
- 伴随矩阵中，a_{ij} 的代数余子式（有符号）位于伴随矩阵的第 j 行 i 列
- 无论 A 是否可逆，$AA^* = A^*A = |A|I$

> 涉及矩阵的证明注意可能需要单独讨论矩阵不可逆的情况

第四章 向量空间 $\mathbb{R}^n$

- 转换矩阵的定义及坐标变换公式（行向量空间与列向量空间下定义有所区别）
- 线性映射 $T : V \to W$，V 为 T 的定义域，W 为 T 的到达域，而不是值域
- 两个子空间的和为直和当且仅当它们的交集为 $\{0\}$，该命题对多个子空间不成立，即考虑有两个以上子空间的直和的问题时，仅仅检验每一对子空间只交于 0 处是不够的
- 规范正交组一定线性无关，正交组不一定线性无关（零向量）
- 二次型的典范式与标准形的定义别弄反了
- 初等变换法求解二次型的典范式、典范基以及分解正定矩阵 $F = P^T P$
- 雅可比方法求解二次型的典范式与判断两个对称矩阵是否合同（如果雅可比方法不适用怎么处理）

第五章 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

- 反射、正交投影等线性算子的矩阵表示
- 复合线性映射对应矩阵的乘法，先进行的变换对应矩阵放在乘法的右边
- 特征向量要求非零
- 可对角化的各种判据
- 相似的矩阵不一定有相同的特征子空间或特征向量

> 如果两个矩阵的特征值及代数重数相同，那么这两个矩阵相似吗?

> 如果两个矩阵的特征值相同，且不同特征值对应的特征向量/特征子空间相同，那么这两个矩阵相似吗?

> 上面两个命题如果加上两个矩阵都可对角化的条件呢?

第五章 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

- 非平凡不变子空间与线性算子的矩阵具有分块上三角的形式
  线性空间分解成非平凡不变子空间的直和与线性算子的矩阵具有分块对角的形式
- 非平凡不变子空间的直和与特征多项式的分解
- 极小多项式的求解与应用
- 正交矩阵的典范式，由正交变换矩阵确认 $\sin\theta_i$ 的符号

第六章 复向量空间 $\mathbb{C}^n$

- 点积/半双线性型对第二个变量是半线性的，点积具有共轭对称性
- $(A\alpha \mid \beta) = \alpha^T A^T \overline{\beta} = (\alpha \mid A^*\beta)$
- 格拉姆-施密特正交化过程中，$v_{i+1} = u_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{(u_{i+1}|v_k)}{(v_k|v_k)} v_k$，分子别写反了
- 约当标准形与约当基的求解
- 复正交矩阵 A 是酉矩阵 $\iff$ A 是实正交矩阵
  复对称矩阵 A 是埃尔米特矩阵 $\iff$ A 是实对称矩阵
- 一个复方阵可以被酉对角化的充要条件是它是**正规矩阵**（$A^H A = AA^H$）
  一个实方阵可以被正交对角化的充要条件是它是**对称矩阵**

  > 埃尔米特矩阵是特殊的正规矩阵

- 复对称矩阵不一定可以对角化，复正交矩阵不一定可以对角化

考试信息

- 考试时间: 2026.1.14 星期三 8:00~10:00
- 考试地点: 教学中心 101
- 考试范围: 第四、五、六章 \ 5.9节
- 期末考试占总成绩的 40%
- 试卷为全中文，题型与难度参考模拟卷

具体见教务系统 - 我的考试

考前保证充足的营养摄入!

Good Luck!