

# 线性代数习题课 4

2025.10.21



# 补充材料

**例 2.6.29 (雅各布森<sup>①</sup>引理 (Jacobson lemma))** 设  $A, B \in M_n(F)$ ,  $I = I_n$ . 如果  $I - AB \in GL_n(F)$ , 证明  $I - BA \in GL_n(F)$ , 并求  $(I - BA)^{-1}$ .

**证明** 只要找一个  $X \in M_n(F)$  使得  $(I - BA)X = I$ . 事实上,

$$\begin{aligned} I &= I - BA + BA \\ &= I - BA + BIA \\ &= I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + (B - BAB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \\ &= (I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A), \end{aligned}$$

所以  $I - BA \in GL_n(F)$ , 并且  $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$ . □

**注记 2.6.30** 读者可能会问: 怎么想到这个证明? 为什么叫雅各布森引理?

(1) 大家知道,  $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$ . 一般情况下,

$$1 - x^n = (1 + x + \cdots + x^{n-1})(1 - x).$$

若  $|x| < 1$ , 则  $(1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ .

现在我们假装不知道  $(1 - x)^{-1}$  的上述表达式需要条件, 则  $(I - BA)^{-1}$  可以形式地展开:  $(I - BA)^{-1} = I + BA + BABA + BABABA + BABABABA + \cdots$ , 从而 (继续“假装”下去),

<sup>①</sup> Nathan Jacobson, 1910—1999, 美国数学家.

$$\begin{aligned} (I - BA)^{-1} &= I + B(I + AB + ABAB + ABABAB + \cdots)A \\ &= I + B(I - AB)^{-1}A. \end{aligned}$$

现在我们不再“假装”! 尽管上面所得结果“不合法”, 但是, 我们仍然可以验证一下这个结果是否正确. 事实上,

$$\begin{aligned} &(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) \\ &= I - BA + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + (B - BAB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + BA \\ &= I. \end{aligned}$$

由此可见  $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$ . 后面这个证明无懈可击!

哈尔莫斯<sup>②</sup>把前面这个技巧归功于雅各布森, 尽管这个技巧并不能直接用来证明这个引理. 有兴趣的读者可参阅文献 [37, 41].

(2) 卡普兰斯基<sup>③</sup>曾经这样评论: 利用这个技巧, 即使你被扔到沙漠岛上, 所有的书和文章都丢了, 你仍然可以成功地发现公式. 为了纪念卡普兰斯基这个风趣幽默的评论, 有时将  $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$  称为“沙漠岛公式 (Desert Island Formula)”, 详见文献 [42, 43].

(3) 前面的内容告诉我们, 有时“不靠谱”的想法也许会带来“转机”或“突破”.

# 初等矩阵

第一类  $F_{i,j}$ ：将单位矩阵的第  $i$  行与第  $j$  行互换（将单位矩阵的第  $i$  列与第  $j$  列互换）

第二类  $F_i(\lambda)$ ：将单位矩阵第  $i$  行乘以非零数  $\lambda$ （将单位矩阵第  $i$  列乘以非零数  $\lambda$ ）

第三类  $F_{i,j}(\lambda)$ ：将单位矩阵第  $j$  行的  $\lambda$  倍加到第  $i$  行（将单位矩阵第  $i$  列的  $\lambda$  倍加到第  $j$  列）

上述三类方阵称为**初等矩阵**。每一类初等矩阵与一类初等变换相对应

对矩阵作初等行变换，等价于在矩阵左边乘上一个相应的初等矩阵；对矩阵作初等列变换，等价于在矩阵右边乘上一个相应的初等矩阵

## 左行右列法则

# 初等矩阵

- $F_{ij}$  为对称矩阵, 且  $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$
- $F_i(\lambda)$  为对角矩阵, 且  $F_i(\lambda)^{-1} = F_i(\lambda^{-1})$
- $F_{ij}(\lambda)$  为三角矩阵, 且  $F_{ij}(\lambda)^{-1} = F_{ij}(-\lambda)$

对任意矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 存在一系列  $m$  阶初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$  和  $n$  阶初等矩阵  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ , 使得  $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

对任意矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

上面非负整数  $r = \text{rank}(A)$

# 矩阵的分块

类似一般的初等矩阵，引入三种**分块初等矩阵**（对应分块初等变换，左行右列法则依然适用）：

$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}$  表示第一行左乘可逆矩阵  $P$ ，或者第一列右乘可逆矩阵  $P$

$\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}$  表示第一行与第二行（或者第一列与第二列）互换

$\begin{bmatrix} I & O \\ P & I \end{bmatrix}$  表示把第一行左乘矩阵  $P$ （不一定可逆）加到第二行，或者第二列右乘矩阵  $P$  加到第一列

# 矩阵的分块

## 分块三角矩阵的逆矩阵

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m}, D \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\text{分块上三角: } U = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \quad \text{分块下三角: } L = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}$$

若  $A$  与  $D$  可逆, 则

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$U$  可逆  $\iff A$  与  $D$  均可逆

$L$  可逆  $\iff A$  与  $D$  均可逆

# 矩阵的逆

设  $A$  是  $n$  阶方阵，则以下陈述等价：

1.  $A$  是可逆的
2.  $A$  是非退化（满秩）的
3.  $A$  的行向量/列向量线性无关
4.  $A$  的行空间/列空间等于  $\mathbb{R}^n$
5. 齐次线性方程组  $Ax = \mathbf{0}$  只有平凡解
6.  $A$  的零空间为  $\mathbf{0}$
7.  $A$  的简化阶梯形为  $I_n$
8. 一般线性方程组  $Ax = \mathbf{b}$  有且只有唯一解
9.  $A$  可以分解为一系列初等矩阵的乘积

## 逆矩阵的计算

同时对  $A$  与  $I$  施行相同的初等行变换；当把  $A$  化为  $I$  时， $I$  即化为  $A^{-1}$ ：

$$(A \mid I) \xrightarrow{P_1} (P_1 A \mid P_1 I) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_k} (P_k \cdots P_2 P_1 A \mid P_k \cdots P_2 P_1 I) = (I \mid A^{-1})$$

沙漠岛公式：设  $A, B$  分别是  $n \times m, m \times n$  的实矩阵，若  $I_n - AB$  可逆，则  $I_m - BA$  也可逆，且  $(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$



# 逆矩阵的计算

判断下面的矩阵是否可逆，如果可逆，用初等变换法计算其逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

# 线性方程组的解空间

线性映射  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  , 其核  $\ker \varphi = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(X) = 0\}$  是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间, 其像集  $\operatorname{im} \varphi = \{\varphi(X) \mid X \in \mathbb{R}^n\}$  是  $\mathbb{R}^m$  的线性子空间

$$\dim(\operatorname{im} \varphi) = \operatorname{rank}(A) \quad \dim(\ker \varphi) = n - \operatorname{rank}(A)$$

$$\dim(\operatorname{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = n$$

设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 定义线性映射

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad X \mapsto AX$$

- 线性方程组  $AX = \mathbf{0}$  的解空间  $S$  就是  $\varphi_A$  的核  $\ker \varphi_A$
- 矩阵  $A$  的列空间  $V_c = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  就是  $\varphi_A$  的像集  $\operatorname{im} \varphi_A$

$$\dim S + \operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{im}(\varphi_A)) + \dim(\ker(\varphi_A)) = n$$

## 习题

证明西尔维斯特秩不等式：设  $A, B$  分别是  $s \times n, n \times m$  矩阵，则

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB)$$

## 习题

设  $A, B$  为同阶方阵，证明： $\text{rank}(AB - I) \leq \text{rank}(A - I) + \text{rank}(B - I)$

## 习题

已知  $\mathbb{R}$  上  $n$  元非齐次线性方程组的解生成  $\mathbb{R}^n$ ，求该方程组系数矩阵的秩

## 习题

设  $A$  是实数域上的  $s \times n$  矩阵，证明：

1.  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A A^T) = \text{rank}(A)$
2. 对任意  $\beta \in \mathbb{R}^s$ ，线性方程组  $A^T A x = A^T \beta$  一定有解

## 习题

设  $A$  是  $n$  阶方阵，证明：

1. 如果  $\text{rank}(A^m) = \text{rank}(A^{m+1})$  对某个正整数  $m$  成立，则  $\text{rank}(A^m) = \text{rank}(A^{m+k})$  对所有正整数  $k$  成立
2.  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+k})$  对所有正整数  $k$  成立