习题课 4

0 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\-1&-3&-4&-2\\2&-1&4&4\\2&3&-3&2\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{372}\begin{pmatrix}98&50&84&78\\-8&-80&-60&24\\14&-46&12&-42\\-65&1&24&9\end{pmatrix}$

1. $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-n\le\operatorname{rank}(AB)$

法一 只需证 $n+\operatorname{rank}(AB)\ge\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$

$LHS=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}\xrightarrow{②+A\cdot①}\begin{pmatrix}I_n&0\\A&AB\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\cdot(-B)}\begin{pmatrix}I_n&-B\\A&0\end{pmatrix}\xrightarrow{②\cdot(-I_m)}\begin{pmatrix}I_n&B\\A&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(①,②)}\begin{pmatrix}B&I_n\\0&A\end{pmatrix}$ 则 $LHS=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B&I_n\\0&A\end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}A=LHS$

法二 设 $\operatorname{rank}A=r$ 则 $\exists$ 可逆矩阵 P,Q s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

$AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}QB$

令 $QB=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\to r\text{行}\\\to n-r\text{行}\end{array}$ 则 $AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}H_1\\0\end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}H_1\\0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}H_1$

$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}QB=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}\Rightarrow\operatorname{rank}H_1\ge\operatorname{rank}B-(n-r)$

$\Rightarrow\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}H_1\ge\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}A-n$

2. 法一 由 $\operatorname{rank}(\tilde{A}+\tilde{B})\le\operatorname{rank}\tilde{A}+\operatorname{rank}\tilde{B}$

令 $\tilde{A}=A(B-I)$ $\tilde{B}=A-I$ 则 $\operatorname{rank}(AB-I)\le\operatorname{rank}(A(B-I))+\operatorname{rank}(A-I)$

$\le\operatorname{rank}(B-I)+\operatorname{rank}(A-I)$

法二 $RHS=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A-I&0\\0&B-I\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A-I&0\\0&B-I\end{pmatrix}\xrightarrow{①+I\cdot②}\begin{pmatrix}A-I&B-I\\0&B-I\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\cdot B}\begin{pmatrix}A-I&AB-I\\0&B-I\end{pmatrix}$

则 $RHS=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A-I&AB-I\\0&B-I\end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(B-I)=LHS$

3. 取非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一组解 $X_1,\cdots,X_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基

则 $n-1$ 个向量 $X_2-X_1,\cdots,X_n-X_1$ 都是 $AX=0$ 的解

$\lambda_2(X_2-X_1)+\cdots+\lambda_n(X_n-X_1)=0$

$-(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_nX_n=0\Rightarrow\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

故 $X_2-X_1,\cdots,X_n-X_1$ 线性无关

$AX=0$ 解空间维数：$n-\operatorname{rank}A\ge n-1$ $\operatorname{rank}A\le1$

若 $\operatorname{rank}A=0$，则 $A=0$，$AX=b$ 无解，矛盾 故 $\operatorname{rank}A=1$

$A\in\mathbb{R}^{s\times n}$

4. (1) 欲证 $\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}A$

只需证 $(A^TA)X=0$ 与 $AX=0$ 的解空间维数相同

(齐次线性方程组解空间采用记号 null)

又由于 $\operatorname{null}A\subseteq\operatorname{null}(A^TA)$ $(AX=0\Rightarrow(A^TA)X=A^T(AX)=0)$

则只需证 $\operatorname{null}A=\operatorname{null}(A^TA)$ (即证 $\operatorname{null}A\supseteq\operatorname{null}(A^TA)$)

$(A^TA)x=0\Rightarrow x^TA^TAX=0\Rightarrow(AX)^TAX=0$

设 $AX=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$ $c_1,c_2,\cdots,c_s\in\mathbb{R}$

则 $(AX)^TAX=0\Leftrightarrow c_1^2+c_2^2+\cdots+c_s^2=0\Leftrightarrow c_1=c_2=\cdots=c_s=0$

故 $Ax=0$ $\operatorname{null}A\supseteq\operatorname{null}(A^TA)$

综上，$\operatorname{null}A=\operatorname{null}(A^TA)$，$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A^TA)$

$\Rightarrow\operatorname{rank}(AA^T)=\operatorname{rank}((A^T)^TA^T)=\operatorname{rank}A^T=\operatorname{rank}A$

(2) $A^TAx=A^T\beta$ 一定有解 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}(A^TA,A^T\beta)$

$LHS\leq RHS$ 显然

$RHS=\operatorname{rank}(A^T(A,\beta))\leq\operatorname{rank}A^T=\operatorname{rank}(A^TA)=LHS$

故 $LHS=RHS$

5. 见下图

练习 4.14

设 A 是 n 阶方阵，证明：

(1) 如果 $rank\ A^m = rank\ A^{m+1}$ 对某个正整数 m 成立，则 $rank\ A^m = rank\ A^{m+k}$ 对所有的正整数 k 成立.

(2) $rank\ A^n = rank\ A^{n+k}$ 对所有的正整数 k 成立.

♣

证明 对每个正整数 k，记 V_k 为齐次线性方程组 $A^kX = \mathbf{0}$ 的解空间. 则 $dim\ V_k = n - rank\ A^k$，于是 $rank\ A^m = rank\ A^{m+k} \Leftrightarrow dim\ V_m = \dim V_{m+k}$.

对任意正整数 k 与 s 有：

$$X \in V_k \Rightarrow A^kX = 0 \Rightarrow A^{k+s}X = A^s(A^kX) = 0 \Rightarrow X \in V_{k+s}$$

这证明了 $V_k \subseteq V_{k+s}$.

(1) 现在我们证明 $V_{m+k} \subseteq V_m$，因为如果这个结论成立，立马有：

$$V_m = V_{m+k} \Rightarrow rank\ A^m = rank\ A^{m+k}$$

条件是 $dim\ V_m = dim\ V_{m+1}$，结合 $V_m \subseteq V_{m+1}$ 就有 $V_m = V_{m+1}$.

$$\begin{aligned} X \in V_{m+k} &\Rightarrow A^{m+k}X = A^{m+1}(A^{k-1}X) = 0 \Rightarrow A^{k-1}X \in V_{m+1} = V_m \\ &\Rightarrow A^{m+k-1}X = A^m(A^{k-1}X) = 0 \Rightarrow X \in V_{m+k-1} \end{aligned}$$

这证明了 $V_{m+k} \in V_{m+k-1}$. 从而 $V_{m+k} = V_{m+k-1}$ 对任意正整数 k 成立. 于是有：

$$V_{m+k} = V_{m+k-1} = V_{m+k-2} = \cdots = V_{m+1} = V_m \Rightarrow rank\ A^{m+k} = rank\ A^m$$

(2) 由于对任意正整数 k,s 都有 $V_k \subseteq V_{k+s}$，于是 $dim\ V_k = n - rank\ A^k \leq dim\ V_{k+s} = n - rank\ A^{k+s}$，从而 $rank\ A^k \geq rank\ A^{k+s}$. 如果存在 $m \leq n$ 使得 $rank\ A^m = rank\ A^{m+1}$. 那么由 (1) 的证明 $rank\ A^m = rank\ A^{m+k}$ 对任意的正整数 k 成立，从而有

$$rank\ A^{n+k} = rank\ A^{m+(n-m+k)} = rank\ A^m = rank\ A^{m+(n-m)} = rank\ A^n$$

(*)如果不存在这样的 m，这说明对所有的 $m \leq n$ 都有 $rank\ A^m \neq rank\ A^{m+1}$，从而 $rank\ A^m > rank\ A^{m+1}$，进而 $rank\ A^m \geq rank\ A^{m+1} + 1$. 由数学归纳法可知 $m + k \leq n + 1$ 时 $rank\ A^m \geq rank\ A^{m+k} + k$.

取 $m = 1, k = n$，$rank\ A \geq rank\ A^{n+1} + n \geq n$. 从而一定有 $rank\ A = n$，A 可逆，但这样 A^2 可逆，$rank\ A^2 = rank\ A$ 矛盾. 这证明了 (*) 不可能发生，于是原命题得证.