线性代数习题课 9

2025.11.25

二次型的典范式

雅可比方法：设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 维线性子空间，f 是子空间 U 上的对称双线性型，F 是它在某个基下的矩阵。如果 F 的主子式 $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ **均不为** 0，那么存在 U 的基使得 f 和它给出的二次型 q 在这个基下有典范式：

$$f(x, y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1 y_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2 y_2 + \cdots + \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}} x_s y_s$$

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}} x_s^2$$

> 如果 F 的主子式有为 0 的，即不能直接使用雅可比方法，那么考虑任意一个与 F 合同的矩阵即可

二次型的标准形

设在某个基下，二次型 q 的典范式为

$$q(x) = f_1 x_1^2 + \cdots + f_s x_s^2$$

适当选取典范基向量的倍数，就可以让诸 f_i 取值 0 或 ± 1，再适当变动基向量的顺序，二次型的典范式就可以取成如下的**标准形**：

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

定理（惯性定律）：设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 维线性子空间，q 是 U 上的二次型，那么在其标准形中，整数 t 与 r 都仅依赖 q，不依赖典范基的选取

> 二次型的典范式往往不唯一，但标准形是唯一的

二次型的标准形

推论：

1. 任何 s 阶实对称矩阵 A 都合同于如下形式的对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   其中 $0 \le t \le r \le s$，且 r, t 由 A 唯一确定（r 为 A 的秩）

2. 如果 A 是对角矩阵，对角线上有 t 个正数、$r-t$ 个负数，那么 A 与上面的对角矩阵合同

正定

实二次型 $q : U \to \mathbb{R}$
称为 **正定** 的如果对 U 中任意非零向量 x 有 $q(x) > 0$;
称为 **半正定** 的如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \geq 0$;
称为 **负定** 的如果 $-q$ 是正定的，即当 $x \neq 0$ 时 $q(x) < 0$;
称为 **半负定** 的如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \leq 0$;
称为 **不定** 的如果它在有些向量处取正值，在另外有些向量处取负值

如果实二次型 q 在典范基 (u_i) 下的表达式是

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2,$$

那么显然 q 半正定当且仅当所有的系数都非负，正定当且仅当所有的系数为正
λ_i 就是 q 在 u_i 处的值

正定

任意的正定矩阵具有如下形式：

$$F = A^T A$$

其中 A 是非退化实方阵，逆命题也成立

假设实二次型在某个基下的矩阵的主子式 $\Delta_k (1 \leq k \leq s)$ 都是非零的，
那么二次型的负惯性指数等于下面数列的变号数（变号是指相邻两项正负号不同）：

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_s$$

$\Delta_s \neq 0$ 意味着二次型是 *非退化* 的，这时正负惯性指数的和就是 s

定理（西尔维斯特准则）：实二次型是正定（半正定）的当且仅当它（在任意基下）的矩阵的主子式都是正（非负）的

经典问题（阅读教材 P137-144）

1. 求二次型或对称双线性型的典范式（配方法/雅可比方法）

2. 判断二次型或对称矩阵是否为正定的（主子式均为正）

3. 求二次型或对称双线性型的典范基（包括分解 $F = P^T P$ ）

4. 判断两个对称矩阵是否合同（主子式序列的变号数/合同的对角矩阵的正负值个数）

习题

设有 n 元实二次型

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$$

其中 a_i $(i = 1, \ldots, n)$ 为实数。试问：当 $a_1, \ldots, a_n$ 满足何种条件时，二次型 $Q(x_1, \ldots, x_n)$ 为正定的?

习题

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组向量，定义其 Gram 矩阵

$$G = \big((\alpha_i|\alpha_j)\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

1. 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基当且仅当 $\det G \neq 0$
2. 设 α_i 在一组标准正交基下的坐标为 x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 记 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$，证明：$\det G = (\det X)^2$

习题

在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，设线性无关向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 经过 Schmidt 正交化方法，变成 $\beta_1, \ldots, \beta_m$，进而形成正交向量组。这两组向量的 Gram 矩阵分别为 G 和 G' 。
证明：

$$|G| = |G'| = \|\beta_1\|^2 \|\beta_2\|^2 \cdots \|\beta_m\|^2 \leq \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 \cdots \|\alpha_m\|^2$$

习题

$Hadamard$ 不等式：设 $C=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，证明：

$$|C|^2\le\prod_{j=1}^{n}\left(c_{1j}^2+\cdots+c_{nj}^2\right)$$