线性代数习题课 12

2025.12.16

实对称矩阵

设 A 是 n 阶实对称方阵，那么对列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个向量 X, Y，有

$$(AX \mid Y) = (X \mid AY)$$

> 如果 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 满足对列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个向量 X, Y，有 $(\mathcal{A}X \mid Y) = (X \mid \mathcal{A}Y)$，那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的任一标准正交基下的矩阵为对称矩阵（逆命题也成立），这时我们称 $\mathcal{A}$ 是一个对称变换/自伴算子

如果 n 阶实方阵 A 正交相似于一个对角矩阵，那么 A 一定是实对称矩阵

两个 n 阶实对称矩阵正交相似的充要条件是他们相似

> 因此，两个相似的实矩阵不一定正交相似

实对称矩阵的正交对角化

定理：设 A 是实对称矩阵，那么存在正交矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵

推论：设 A 是 n 阶实对称方阵，则

1. A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 能分解成一次实多项式的乘积（A 的每个特征值都是实的）
2. 如果 $\chi_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$，那么 A 可（通过正交矩阵）对角化到 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

实对称矩阵的正交对角化

设 A 是 n 阶实对称方阵。那么

1. A 的特征子空间的维数和是 n，从而 $\mathbb{R}^n$ 是 A 的特征子空间的直和
2. A 的特征子空间相互正交

把一个实对称矩阵 A 正交对角化的步骤：

1. 通过求解 A 的特征多项式得到该对称矩阵的特征值；
2. 对每个特征值 λ，求出线性方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的一个基础解系，然后通过正交化方法，得到该特征子空间的标准正交基；
3. 把所求得的特征子空间的标准正交基合在一起，以其中的向量为列向量得到一个矩阵，这是一个正交矩阵。那么原来的对称矩阵可以通过这个正交矩阵对角化

对称双线性型的典范基

定理：设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的对称双线性型。那么 f 有典范标准正交基。特别地，$\mathbb{R}^n$ 上的每个对称双线性型 f 都有典范标准正交基

推论：设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 维线性子空间，$q(x)$ 是 U 上的二次型。那么存在 U 的标准正交基，在这个基下，$q(x)$ 有如下形式：

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2,$$

其中 $[x_1, x_2, \ldots, x_s]$ 是 $x \in U$ 在这个基下的坐标列向量，
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是二次型 $q(x)$ 在 U 的任意一个标准正交基下的矩阵的特征值

推论（主轴定理）：设 $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ 是二次齐次多项式，那么，存在 n 阶正交矩阵 T 使得做变量替换 $x = Ty$ 后有 $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

正定矩阵

设 A 为 n 阶实对称方阵，P 为 n 阶实可逆方阵，$B = P^T AP$，则 B 正定当且仅当 A 正定

设 A 为 n 阶实对称矩阵，则下列命题等价：

1. A 正定
2. A 的特征值均为正
3. 存在可逆方阵 P 使得 $A = P^T P$（A 合同于单位矩阵）
4. A 的各阶主子式均为正

二次曲面（了解，最多考到二次曲线）

二次曲线的分类

1. **椭圆型**（$\lambda_1\lambda_2>0$） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3=0.$
2. **双曲型**（$\lambda_1\lambda_2<0$） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3=0.$
3. **抛物形**（$\lambda_1\neq0,\ \lambda_2=0,\ \tilde{b}_2,\tilde{c}$ 中至少一个为零） $\lambda_1\tilde{x}^2+2\tilde{b}_2\tilde{y}+\tilde{c}=0.$

二次曲面的分类

- **椭球面型**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2+\lambda_4=0.$
- **双曲面型**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不同号，$\lambda_4\neq0$） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2+\lambda_4=0.$
- **二次锥面**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不同号） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=0.$
- **抛物型**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中有两个非零，一个为零，$\tilde{b}_3\neq0$） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+2\tilde{b}_3\tilde{z}=0.$
- **二次柱面**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中至少一个为零，$\tilde{b}_2,\tilde{c}$ 至少有一为零） $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+2\tilde{b}_2\tilde{y}+\tilde{c}=0.$

> 上述分类包含退化情形

二次曲面

在三维空间直角坐标系中，给定曲面方程

$$2x^2+4y^2+5z^2-2xy+4xz+6yz-20=0.$$

该方程表示什么类型的曲面?

> 双曲面（考虑韦达定理）

正交矩阵

设 A 是 n 阶正交方阵，那么对列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个向量 X, Y，有

$$(AX \mid AY) = (X \mid Y)$$

> 如果 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 满足对列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个向量 X, Y，有 $(\mathcal{A}X \mid \mathcal{A}Y) = (X \mid Y)$，那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵（逆命题也成立），这时我们称 $\mathcal{A}$ 是一个正交变换/保距算子/幺正算子

如果定义算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$X \mapsto AX$，则算子 $\mathcal{A}$ 保持点积：$(\mathcal{A}X \mid \mathcal{A}Y) = (X \mid Y)$，从而也保持长度和距离：$\|\mathcal{A}X\| = \|X\|$，$\|A(X - Y)\| = \|X - Y\|$

> 对于内积空间上的线性算子，保距跟保内积是等价的（极化恒等式）

正交矩阵

设 A 是正交矩阵，则

1. 如果 λ 是 A 的实特征值，那么 $\lambda = \pm 1$
2. 如果 A 有特征值 ± 1 且 X, Y 分别是属于 ± 1 的特征向量，即 $AX = X$，$AY = -Y$，那么 X 和 Y 正交，即 $(X \mid Y) = 0$
3. $\det A = \pm 1$

设 A 是 n 阶正交矩阵或实对称矩阵，定义线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$X \mapsto AX$，那么 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

正交矩阵

设 Q 是 n 阶实方阵，那么下列条件等价：

1. Q 是正交矩阵
2. Q 可逆且 $Q^{-1} = Q^T$
3. Q 的列向量形成 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基（标准正交组）
4. Q 的行向量形成 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基（标准正交组）
5. $\|Qv\| = \|v\|$ 对任一 $v \in \mathbb{R}^n$ 都成立
6. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有 $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$
7. Q 将一组标准正交基变为另一组标准正交基

二阶正交矩阵

假设 A 是二阶正交矩阵，$\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$X\mapsto AX$ 是相应的线性算子

1. 如果 $\det A=1$，那么存在角 θ 使得

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

从而 A 是绕原点的旋转，旋转角度是 θ

2. 如果 $\det A=-1$，那么存在角 θ 使得

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix},$$

并且 $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，从而 A 是关于一条直线的反射，这条直线与 x 轴的夹角是 $\theta/2$

$\mathbb{R}^n$ 中的旋转矩阵

欧拉定理：$\mathbb{R}^n$ 中的旋转矩阵是行列式为 1 的 n 阶正交矩阵

推论：绕任何两个轴的旋转的合成是绕某个其他轴的旋转

行列式为 -1 的 n 阶正交矩阵表示旋转与反射的合成

正交矩阵的典范式

设 A 是 n 阶正交矩阵，那么存在 n 阶正交矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\theta_r & -\sin\theta_r & & \\ & & & \sin\theta_r & \cos\theta_r & & \\ & & & & & I_k & \\ & & & & & & -I_l \end{pmatrix}, \quad 2r+k+l=n,$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 均不是 π 的整数倍（θ_i 不唯一，θ_i 变化 T 也会相应地变化），I_k 和 I_l 分别是 k 阶和 l 阶单位矩阵

正交矩阵的典范式

设 A 是正交矩阵，假设其特征多项式在实数域上有如下因式分解：

$$\chi_A(t) = (t^2 - 2a_1 t + 1)(t^2 - 2a_2 t + 1) \cdots (t^2 - 2a_r t + 1) \cdot (t-1)^k (t+1)^l,$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 的绝对值都是小于 1 的正数。取 θ_i' 使得 $\cos\theta_i' = a_i$，那么 A 的典范式正如同上一页的 $T^{-1}AT$，其中 $\theta_i = \theta_i'$ 或 $2\pi - \theta_i'$

习题

设 A 为 n 阶实对称方阵。证明：

$$\max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\lambda_{\max}.$$

这里 $\lambda_{\max}$ 是 A 的最大特征值

习题

设 $A=(a_{ij})$ 是三阶正交矩阵，且 $\det A=1$，求证：

1. $\lambda=1$ 必为 A 的特征值；
2. 存在正交矩阵 T，使得
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};$$
3. $\theta=\arccos\left(\frac{\operatorname{tr}A-1}{2}\right)$

习题

证明：秩等于 r 的对称矩阵可以被表示成 r 个秩等于 1 的对称矩阵的和

习题

证明:

1. n 阶实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是：A 的特征多项式在复数域中的根都是实数
2. 如果 n 阶实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，且 $AA^T = A^TA$，那么 A 是对称矩阵

习题

证明：不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$