习题课 9

1. $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1+a_1x_2)^2 + (x_2+a_2x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2 + (x_n+a_nx_1)^2$

法一　显然 $Q \geq 0$，只需排除 $Q=0$ 的情况

$Q=0 \Leftrightarrow \exists\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq \vec{0}$ s.t. $x_i + a_i x_{i+1} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

令 $A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，即 $A\vec{x} = \vec{0}$ 没有非零解

$$|A| = 1 - a_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i \neq (-1)^{n-1}$$

法二　二次型 Q 对应的矩阵为 $G = \begin{pmatrix} a_n^2+1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & a_1^2+1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^2+1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}^2+1 \end{pmatrix}$

考虑 G 的 k 阶主子式 $(1 \leq k \leq n)$

$k<n$　$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_n^2+1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1^2+1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & a_{k-1}^2+1 \end{vmatrix}$

$= (a_{k-1}^2+1)\Delta_{k-1} - a_{k-1}^2 \Delta_{k-2} \quad (k \geq 3)$　其中 $\Delta_1 = a_n^2+1 > 0$　$\Delta_2 = a_n^2 a_1^2 + a_n^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow \Delta_k = 1 + a_n^2 (1 + a_1^2 + a_1^2 a_2^2 + \cdots + a_1^2 a_2^2 \cdots a_{k-1}^2) > 0$

$k=n$　$\Delta_n = |G|$　注意到 $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a_i x_{i+1})^2 + (x_n + a_n x_1)^2 = \|Ax\|^2$ $(= x^T A^T A x)$（点积意义下的范数）

其中 $A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $G = A^T A$　$|G| = |A|^2 = \left(1 + (-1)^{n+1} a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = \left(1 + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

$|G| > 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i \neq (-1)^{n-1}$

2. $G = ((\alpha_i | \alpha_j)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(1) 法一（点积）令 $A = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

则 $G = A^T A$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow G$ 可逆，$|G| \neq 0$

法二（一般内积，即 $G = ((\alpha_i, \alpha_j)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$）（实内积空间下 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_j, \alpha_i)$）

"$\Rightarrow$" 反证法，假设 $|G| = 0$，$Gx = 0$ 有非零解 $x = [x_1, \cdots, x_n] \neq \vec{0}$

记 $V = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j$，$0 = (Gx)_i = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i, \alpha_j) x_j = (\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j) = (\alpha_i, V)$　$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

V 与所有基向量 α_i 正交，则 V 与 $\mathbb{R}^n$ 中所有向量正交，$V=0$　$((V,V) = 0 \Leftrightarrow V = 0)$

$\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j = 0$，而 $x = (x_1, \cdots, x_n) \neq 0$，与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关矛盾，故 $|G| \neq 0$

"$\Leftarrow$" 考虑 $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0$，记 $c = [c_1, \cdots, c_n]$

$0 = (\alpha_j, c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\alpha_j, \alpha_i)$，即 $Gc = 0$　由于 G 可逆，故 $c = 0$

即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，它们是一个基

(2) 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基，α_i 在这个标准积下的坐标为 X_i

法一（点积）记 $B=(e_1,\cdots,e_n)$，则 B 为正交矩阵

则 $A=BX$，$G=A^TA=X^TB^TBX=X^T(B^TB)X=X^TX$，$|G|=|X|^2$

法二（一般内积，即 $G=((\alpha_i,\alpha_j))$）

$X=(X_1,\cdots,X_n)$ $\alpha_i=\sum_{k=1}^{n} x_{ki}e_k$ $X_i=[X_{1i},\cdots,X_{ni}]$

$G_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)=(\sum_{k=1}^{n} x_{ki}e_k,\sum_{k=1}^{n} x_{kj}e_k)=\sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{kj}$（$e_1,\cdots,e_n$ 是标准正交基）

则 $G=X^TX$，$|G|=|X|^2$

（亦可先做 (2) 问再做 (1) 问）

3. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基

令 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(e_1,\cdots,e_n)P$（即 P 为坐标矩阵）

同第2题，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的 Gram 矩阵为 $G=P^TP$

由施密特正交化过程可知，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)Q$

Q 为上三角矩阵，且对角线上阵元都是 1 $\Rightarrow |Q|=1$

（$\beta_s=\alpha_s-\sum_{j=1}^{s-1}\lambda_{sj}\beta_j$，$\alpha_s=\sum_{j=1}^{s} q_{js}\beta_j$ $q_{ss}=1$，$q_{js}=0$ $(j>s)$，没有单位化过程）

令 $C=(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)Q^{-1}=(e_1,\cdots,e_n)PQ^{-1}$

则 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的 Gram 矩阵为 $G'=(PQ^{-1})^TPQ=(Q^{-1})^TGQ$

$|G'|=|(Q^{-1})^T||G||Q|=|G|$

由于 $(\beta_i,\beta_j)=0$ $(i\neq j)$，$(\beta_i,\beta_i)=\|\beta_i\|^2$

则 $G'=\mathrm{diag}(\|\beta_1\|^2,\cdots,\|\beta_m\|^2)$，$|G|=|G'|=\|\beta_1\|^2\cdots\|\beta_m\|^2$

$\|\alpha_s\|^2=\|\beta_s+\sum_{j=1}^{s-1}\lambda_{sj}\beta_j\|^2=\|\beta_s\|^2+\|\sum_{j=1}^{s-1}\lambda_{sj}\beta_j\|^2$（正交向量组）$\geq\|\beta_s\|^2$

故 $|G|=|G'|=\|\beta_1\|^2\cdots\|\beta_m\|^2\leq\|\alpha_1\|^2\cdots\|\alpha_m\|^2$

4. 记 $C=(C_1,\cdots,C_n)$ $C_j=[C_{1j},\cdots,C_{nj}]$

点积下，C 的 Gram 矩阵为 $G=C^TC$

由第3题，$|G|\leq\|C_1\|^2\cdots\|C_n\|^2$ （点积下 $\|C_j\|^2=C_{1j}^2+\cdots+C_{nj}^2$）

即 $|C|^2\leq\prod_{j=1}^{n}(C_{1j}^2+\cdots+C_{nj}^2)$

（这里考虑内积，相当于考虑特殊的内积，一般内积的结论当然适用）