

# 线性代数习题课 12

2025.12.16



一脸纯朴

# 实对称矩阵

设  $A$  是  $n$  阶实对称方阵，那么对列向量空间  $\mathbb{R}^n$  中的任意两个向量  $X, Y$ ，有

$$(AX \mid Y) = (X \mid AY)$$

如果  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子  $\mathcal{A}$  满足对列向量空间  $\mathbb{R}^n$  中的任意两个向量  $X, Y$ ，有  $(\mathcal{A}X \mid Y) = (X \mid \mathcal{A}Y)$ ，那么  $\mathcal{A}$  在  $\mathbb{R}^n$  的任一标准正交基下的矩阵为对称矩阵（逆命题也成立），这时我们称  $\mathcal{A}$  是一个对称变换/自伴算子

如果  $n$  阶实方阵  $A$  正交相似于一个对角矩阵，那么  $A$  一定是实对称矩阵

两个  $n$  阶实对称矩阵正交相似的充要条件是他们相似

# 实对称矩阵的正交对角化

定理：设  $A$  是实对称矩阵，那么存在正交矩阵  $B$  使得  $B^{-1}AB$  为对角矩阵

推论：设  $A$  是  $n$  阶实对称方阵，则

1.  $A$  的特征多项式  $\chi_A(t)$  能分解成一次实多项式的乘积 ( $A$  的每个特征值都是实的)
2. 如果  $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$ , 那么  $A$  可 (通过正交矩阵) 对角化到  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

# 实对称矩阵的正交对角化

设  $A$  是  $n$  阶实对称方阵。那么

1.  $A$  的特征子空间的维数和是  $n$ , 从而  $\mathbb{R}^n$  是  $A$  的特征子空间的直和
2.  $A$  的特征子空间相互正交

把一个实对称矩阵  $A$  正交对角化的步骤:

1. 通过求解  $A$  的特征多项式得到该对称矩阵的特征值;
2. 对每个特征值  $\lambda$ , 求出线性方程组  $(A - \lambda E)X = 0$  的一个基础解系, 然后通过正交化方法, 得到该特征子空间的标准正交基;
3. 把所求得的特征子空间的标准正交基合在一起, 以其中的向量为列向量得到一个矩阵, 这是一个正交矩阵。那么原来的对称矩阵可以通过这个正交矩阵对角化。

# 对称双线性型的典范基

定理：设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间， $f$  是  $U$  上的对称双线性型。那么  $f$  有典范标准正交基。特别地， $\mathbb{R}^n$  上的每个对称双线性型  $f$  都有典范标准正交基

推论：设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  的  $s$  维线性子空间， $q(x)$  是  $U$  上的二次型。那么存在  $U$  的标准正交基，在这个基下， $q(x)$  有如下形式：

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2,$$

其中  $[x_1, x_2, \dots, x_s]$  是  $x \in U$  在这个基下的坐标列向量，

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  是二次型  $q(x)$  在  $U$  的任意一个标准正交基下的矩阵的特征值

推论（主轴定理）：设  $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  是二次齐次多项式，那么，存在  $n$  阶正交矩阵  $T$  使得做变量替换  $x = Ty$  后有  $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

# 正定矩阵

设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵,  $P$  为  $n$  阶实可逆方阵,  $B = P^T AP$ , 则  $B$  正定当且仅当  $A$  正定

设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 则下列命题等价:

1.  $A$  正定
2.  $A$  的特征值均为正
3. 存在可逆方阵  $P$  使得  $A = P^T P$  ( $A$  合同于单位矩阵)
4.  $A$  的各阶主子式均为正

# 二次曲面

## 二次曲线的分类

1. 椭圆型 ( $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ )     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0.$
2. 双曲线型 ( $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ )     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0.$
3. 抛物形 ( $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \tilde{b}_2, \tilde{c}$  中至少一个为零)     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2\tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c} = 0.$

## 二次曲面的分类

- 椭球面型 ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ )     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \lambda_4 = 0.$
- 双曲面型 ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不同号,  $\lambda_4 \neq 0$ )     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \lambda_4 = 0.$
- 二次锥面 ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不同号)     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 = 0.$
- 抛物型 ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  中有两个非零, 一个为零,  $\tilde{b}_3 \neq 0$ )     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2\tilde{b}_3 \tilde{z} = 0.$
- 二次柱面 ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  中至少一个为零,  $\tilde{b}_2, \tilde{c}$  至少有一个为零)     $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2\tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c} = 0.$

上述分类包含退化情形

## 二次曲面

在三维空间直角坐标系中，给定曲面方程

$$2x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 20 = 0.$$

该方程表示什么曲面？

# 正交矩阵

设  $A$  是  $n$  阶正交方阵，那么对列向量空间  $\mathbb{R}^n$  中的任意两个向量  $X, Y$ ，有

$$(AX \mid AY) = (X \mid Y)$$

如果  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子  $\mathcal{A}$  满足对列向量空间  $\mathbb{R}^n$  中的任意两个向量  $X, Y$ ，有

$(\mathcal{A}X \mid \mathcal{A}Y) = (X \mid Y)$ ，那么  $\mathcal{A}$  在  $\mathbb{R}^n$  的任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵  
(逆命题也成立)，这时我们称  $\mathcal{A}$  是一个正交变换/保距算子/么正算子

如果定义算子  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X \mapsto AX$ ，则算子  $\mathcal{A}$  保持点积：

$(\mathcal{A}X \mid \mathcal{A}Y) = (X \mid Y)$ ，从而也保持长度和距离： $\|\mathcal{A}X\| = \|X\|$ ，  
 $\|\mathcal{A}(X - Y)\| = \|X - Y\|$

对于内积空间上的线性算子，保距跟保内积是等价的（极化恒等式）

# 正交矩阵

设  $A$  是正交矩阵，则

1. 如果  $\lambda$  是  $A$  的实特征值，那么  $\lambda = \pm 1$
2. 如果  $X, Y$  是特征向量，且  $AX = X, AY = -Y$ ，那么  $X$  和  $Y$  正交，即
$$(X | Y) = 0$$
3.  $\det A = \pm 1$

设  $A$  是  $n$  阶正交矩阵或实对称矩阵，定义线性算子  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X \mapsto AX$ ，那么  $\mathcal{A}$  的不变子空间的正交补也是  $\mathcal{A}$  的不变子空间

# 正交矩阵

设  $Q$  是  $n$  阶实方阵，那么下列条件等价：

1.  $Q$  是正交矩阵
2.  $Q$  可逆且  $Q^{-1} = Q^T$
3.  $Q$  的列向量形成  $\mathbb{R}^n$  中的标准正交基（标准正交组）
4.  $Q$  的行向量形成  $\mathbb{R}^n$  中的标准正交基（标准正交组）
5.  $\|Qv\| = \|v\|$  对任一  $v \in \mathbb{R}^n$  都成立
6. 对任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ，有  $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
7.  $Q$  将一组标准正交基变为另一组标准正交基

## 二阶正交矩阵

假设  $A$  是二阶正交矩阵,  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X \mapsto AX$  是相应的线性算子

1. 如果  $\det A = 1$ , 那么存在角  $\theta$  使得

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

从而  $A$  是绕原点的旋转, 旋转角度是  $\theta$

2. 如果  $\det A = -1$ , 那么存在角  $\theta$  使得

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

并且  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 从而  $A$  是关于一条直线的反射, 这条直线与  $x$  轴的夹角是  $\theta/2$

## $\mathbb{R}^n$ 中的旋转矩阵

欧拉定理： $\mathbb{R}^n$  中的旋转矩阵是行列式为 1 的  $n$  阶正交矩阵

推论：绕任何两个轴的旋转的合成是绕某个其他轴的旋转

行列式为  $-1$  的  $n$  阶正交矩阵表示旋转与反射的合成

# 正交矩阵的典范式

设  $A$  是  $n$  阶正交矩阵，那么存在  $n$  阶正交矩阵  $B$  使得

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & & & \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \\ & & & \sin \theta_r & \cos \theta_r & \\ & & & & & I_k \\ & & & & & -I_l \end{pmatrix}, \quad 2r + k + l = n,$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$  均不是  $\pi$  的整数倍 ( $\theta_i$  不唯一， $\theta_i$  变化  $B$  也会相应地变化)， $I_k$  和  $I_l$  分别是  $k$  阶和  $l$  阶单位矩阵

## 正交矩阵的典范式

设  $A$  是正交矩阵，假设其特征多项式有如下因式分解：

$$\chi_A(t) = (t^2 - 2a_1t + 1)(t^2 - 2a_2t + 1) \cdots (t^2 - 2a_rt + 1) \cdot (t - 1)^k(t + 1)^l,$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的绝对值都是小于 1 的正数。取  $\theta'_i$  使得  $\cos \theta'_i = a_i$ ，那么  $A$  的典范式正如同上一页的  $B^{-1}AB$ ，其中  $\theta_i = \theta'_i$  或  $2\pi - \theta'_i$

## 习题

设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵。证明：

$$\max_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_{\max}.$$

这里  $\lambda_{\max}$  是  $A$  的最大特征值

## 习题

设  $A = (a_{ij})$  是三阶正交矩阵，且  $\det A = 1$ ，求证：

1.  $\lambda = 1$  必为  $A$  的特征值；
2. 存在正交矩阵  $T$ ，使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$3. \theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}\right)$$

## 习题

证明：秩等于  $r$  的对称矩阵可以被表示成  $r$  个秩等于 1 的对称矩阵的和

## 习题

证明：

1.  $n$  阶实矩阵  $A$  正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是： $A$  的特征多项式在复数域中的根都是实数
2. 如果  $n$  阶实矩阵  $A$  的特征多项式在复数域中的根都是实数，且  $AA^T = A^TA$ ，那么  $A$  是对称矩阵

## 习题

证明：不存在  $n$  阶复方阵  $A, B$  满足  $AB - BA = I_n$