线性代数习题课 8

2025.11.18

正交补

若 U 是内积空间 V 的子空间，那么 U 的正交补，记作 $U^\perp$，是与 U 中的每个向量都正交的所有 V 中向量所构成的集合（子空间）：

$$U^\perp = \{v \in V : \text{对于每个 } u \in U,\ \langle u, v \rangle = 0\}$$

设 U 是 V 的一个有限维子空间，那么

$$V = U \oplus U^\perp$$

> 去掉 U 是有限维这个前提条件后，上面的结论就不成立了

设 V 是有限维的，U 是 V 的子空间，那么

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$$

正交补

设 U 是 V 的一个有限维子空间，那么

$$U = (U^{\perp})^{\perp}$$

> 去掉 U 是有限维这个前提条件后，上面的结论就不成立了

设 U 是 V 的一个有限维子空间，那么

$$U^{\perp} = \{0\} \iff U = V$$

> 去掉 U 是有限维这个前提条件后，上面的结论就不成立了

正交矩阵

称方阵 A 为正交矩阵，如果它的转置矩阵 A^T 是其逆矩阵，即 $A^TA = I$，或等价地 $A^TA = I$

设 Q 是 n 阶方阵，那么下列等价：

1. Q 是正交矩阵
2. Q 的列向量形成 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基（标准正交组）
3. Q 的行向量形成 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基（标准正交组）
4. $\|Qv\| = \|v\|$ 对任一 $v \in \mathbb{R}^n$ 都成立
5. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有 $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$
6. Q 将一组标准正交基变为另一组标准正交基；

双线性型

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型，$u_1, \ldots, u_s$ 是 U 的基。对 U 中的向量

$$x = x_1 u_1 + \cdots + x_s u_s \quad y = y_1 u_1 + \cdots + y_s u_s$$

有

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i y_j = X^T F Y$$

其中 $f_{ij} = f(u_i, u_j)$，F 称为在基 $u_1, \ldots, u_s$ 下的度量矩阵

双线性型是（斜）对称的当且仅当它在任意基下的矩阵是（斜）对称的

合同

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型。那么 f 在 U 的基 (u_i) 和 U 的另一个基 (u_i') 下的矩阵 F 和 F' 之间有如下的联系：

$$F' = A^T F A$$

其中 A 是从 (u_i) 到 (u_i') 的转换矩阵

方阵 $F, F' \in M_s(\mathbb{R})$ 称为**合同**的，如果存在可逆矩阵 $A \in M_s(\mathbb{R})$ 使得 $F' = A^T F A$

合同的矩阵有相同的秩。双线性型 f 在不同基下的矩阵是合同的，它们的秩相等，记作 $\operatorname{rank} f$

双线性型 f 称为 *非退化* 的，如果它在某个基（任意基）下的矩阵是非退化的，即 $\operatorname{rank} f = s = \dim U$

二次型

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型。定义函数 $q: U \to \mathbb{R}$ 如下：

$$q(x) = f(x, x) = X^T F X = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i x_j$$

称它为相伴于 f 的二次型，也说它是 f 给出的二次型

在给出同一个二次型 q 的双线性型中，只有一个是对称的，称为 q 的极化：

$$f_q(x, y) = \frac{1}{2}\left[q(x + y) - q(x) - q(y)\right]$$

如果 $q(x) = f(x, x)$，则有 $f_q(x, y) = \frac{1}{2}\left[f(x, y) + f(y, x)\right]$，且 $f_q(x, x) = f(x, x) = q(x)$

二次型和对称双线性型之间有一一对应关系

二次型的典范式

如果对称双线性型 f 在某个基下的矩阵是对角的，那么 f 和它给出的二次型就有如下整齐简洁的形式（典范式）：

$$f(x,y) = f_1x_1y_1 + \cdots + f_sx_sy_s$$
$$q(x) = f_1x_1^2 + \cdots + f_sx_s^2$$

$\mathbb{R}^n$ 或其子空间上的每个对称双线性型 f 都有典范基

任何一个实二次型 $q(x)$，均可通过配方法（方法不唯一）找到可逆变换 $x = Py$，将它化为典范式：

$$\tilde{q}(y_1, y_2, \ldots, y_n) := q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x=Py} = \mu_1y_1^2 + \mu_2y_2^2 + \cdots + \mu_ny_n^2$$

P 的列向量即为典范基

> 求二次型的典范基的优化方法参考教材 P139-140

二次型的典范式

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，如果 U 上的二次型 q 的秩为 r，那么存在 U 的基使得 q 有如下的典范式：

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$$

每个对称矩阵都合同于某个对角矩阵

具体来说，对于任意对称矩阵 A ，存在可逆矩阵 P (初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_r$)，使得

$$P_r^T P_{r-1}^T \cdots P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_r = P^T A P = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$