# 线性代数期中练习题一

1. 当 $a$ 取什么值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

有唯一的解，无穷多解和无解？且在方程有无穷多解的时候求出方程组的解.

2. 行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\mathbf{a}_1=(1,0,0,-1)$, $\mathbf{a}_2=(2,1,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_4=(1,2,3,4)$, $\mathbf{a}_5=(0,1,2,3)$ 张成的一个线性子空间 $V$，求出 $V$ 的一个基，从而确定 $V$ 的维数。

3. 求下列 4 阶方阵 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. (i) 若 $A$ 为实对称矩阵（即 ${}^tA=A$). 证明: 当 $A^2=\mathbf{0}$ 时, $A=\mathbf{0}$.
(ii) 举一个二阶方阵的例子说明: 存在非零的方阵 $B$, 满足 $B^2=\mathbf{0}$.

5. 计算如下的行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \cdots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

6. (10分) 一个 $n$ 阶方阵 $A$ 称为幺幂的, 如果存在正整数 $k$ (由 $A$ 决定) 使得 $(A-I_n)^k=\mathbf{0}$, 其中 $I_n$ 是 $n$ 阶单位矩阵. 证明: 如果 $A,B$ 是两个 $n$ 阶幺幂矩阵且 $AB=BA$, 则 $AB$ 也是幺幂矩阵.

7. 设 $A$ 是一个可逆的上三角矩阵，请证明 $A^{-1}$ 也是一个上三角矩阵。

8. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，证明：存在一个 $n$ 阶非零方阵 $B$ 使得 $AB=\mathbf{0}$，当且仅当 $detA=0$.

9. 设 $A$ 是一个可逆矩阵。

(i) 若互换 $A$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行后 (其中 $i\neq j$)，得到的可逆矩阵记为 $B$. 那么 ${}^tB$ 可以由 ${}^tA$ 经过怎样的初等变换得到？请说明理由。

(ii) 若将 $A$ 的第 $i$ 列的 $\mu$ 倍加到第 $j$ 列后 (其中 $i\neq j$)，得到的可逆矩阵为 $C$. 那么 $C^{-1}$ 可以由 $A^{-1}$ 经过怎样的变换得到？请说明理由。