线性代数习题课 13

2025.12.23

正交投影

设 U 是内积空间 V 的一个有限维子空间。将 V 映成 U 的正交投影是定义如下的算子 $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$: 对每个 $v \in V$，将其写成 $v = u + w$, 其中 $u \in U$ 且 $w \in U^{\perp}$, 然后令 $\mathcal{P}_U v = u$

若 $e_1, \ldots, e_m$ 是 U 的一个标准正交基，$v \in V$，那么

$$\mathcal{P}_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m \rangle e_m$$

设 U 是内积空间 V 的有限维子空间，$v \in V$ 且 $u \in U$. 那么

$$\|v - \mathcal{P}_U v\| \leq \|v - u\|.$$

上述不等式取得等号当且仅当

$$u = \mathcal{P}_U v$$

最小二乘法

给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

上述线性方程组 $AX = B$ 的最小二乘解就是 $[c_1, \ldots, c_n]$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} \left(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n - b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n - b_i\right)^2, \quad \forall\, k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$$

即使得 AX_0 与 B 的距离尽可能小的解：

$$\|AX_0 - B\|^2 = \min_{X \in \mathbb{R}^n} \|AX - B\|^2$$

最小二乘法

给定线性方程组 $AX = B$：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

它的最小二乘解就是线性方程组 $A^TAX = A^TB$ 的解

格拉姆矩阵

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是列向量空间 $\mathbb{R}^m$ 的一组向量，定义其格拉姆矩阵

$$G = \big((\alpha_i, \alpha_j)\big) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当 $\det G \neq 0$

如果考虑欧氏空间上的点积，列向量空间 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 线性无关当且仅当矩阵 $A^T A$ 的行列式不等于 0，其中 A 是以 $a_1, \ldots, a_n$ 为列向量的矩阵

> 可参考第 9 周习题

内积空间

> $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$
> V 代表 $\mathbb{F}$ 上的线性空间

V 上的内积是一个函数，它将由 V 中元素构成的每个有序对 (u, v) 对应至一个数 $\langle u, v\rangle \in \mathbb{F}$，并满足如下性质：

正性 对于所有 $v \in V$，均有 $\langle v, v\rangle \geq 0$

定性 $\langle v, v\rangle = 0$ 当且仅当 $v = 0$

第一个位置上的可加性 对于所有 $u, v, w \in V$，均有 $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

第一个位置上的齐次性 对于所有 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和所有 $u, v \in V$，均有$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

共轭对称性 对于所有 $u, v \in V$，均有 $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

内积空间

> $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$
> V 代表 $\mathbb{F}$ 上的内积空间

$\mathbb{F}^n$ 上的欧几里得内积/点积定义为：对所有 $(w_1, \cdots, w_n), (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$\langle (w_1, \cdots, w_n), (z_1, \cdots, z_n) \rangle = w_1 \overline{z_1} + \cdots + w_n \overline{z_n}$$

带点积的向量空间 $\mathbb{C}^n$ 称为埃尔米特空间

对每个固定的 $v \in V$，将 $u \in V$ 对应到 $\langle u, v \rangle$ 的函数都是 V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射

对每个 $v \in V$，均有 $\langle 0, v \rangle = 0, \langle v, 0 \rangle = 0$

对所有 $u, v, w \in V$，均有 $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

对所有 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $u, v \in V$，均有 $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$（对第二个变量是半线性的）

内积空间

> u, v 代表内积空间 V 中的向量

柯西-施瓦茨不等式：$\left|\langle u, v\rangle\right| \leq \|u\|\,\|v\|$，当且仅当 u, v 成标量倍数关系时，不等式取得等号

三角不等式：$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$，当且仅当 u, v 中任意一者是另一者的非负实数倍时，该不等式取得等号

毕达哥拉斯定理：若 u 和 v 是正交的，则 $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

平行四边形等式：$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

标准正交基

设内积空间 V 是有限维的。那么 V 中每个长度为 $\dim V$ 的标准正交向量组都是 V 的标准正交基

设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的标准正交基且 $u, v \in V$. 那么

1. $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$
2. $\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2$
3. $\langle u, v \rangle = \langle u, e_1 \rangle \overline{\langle v, e_1 \rangle} + \cdots + \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}$ （帕塞瓦尔等式）

实正交矩阵 $\to$ 酉矩阵

设 Q 是 n 阶复方阵，那么下列命题等价：

1. Q 是酉矩阵
2. Q 的行向量形成 $\mathbb{C}^n$ 中的标准正交组
3. Q 的列向量形成 $\mathbb{C}^n$ 中的标准正交组
4. $Q^*Q = QQ^* = I_n$
5. $\|Qv\| = \|v\|$ 对任一 $v \in \mathbb{C}^n$ 都成立
6. 对任意 $u, v \in \mathbb{C}^n$，有 $\langle Qu, Qv\rangle = \langle u, v\rangle$
7. Q 是 $\mathbb{C}^n$ 的某两个标准正交基之间的转换矩阵

> 复正交矩阵 A 是酉矩阵 $\iff$ A 是实正交矩阵

> 复正交矩阵未必可以复正交对角化，但酉矩阵一定可以酉对角化

实对称矩阵 $\to$ 埃尔米特矩阵

称复方阵 A 为埃尔米特矩阵，如果 A 的共轭转置与 A 相等，即 $\overline{A}^T = A$
把 A 的共轭转置记作 A^H（或者 A^*），则满足 $A^H = A$ 的复矩阵 A 称为埃尔米特矩阵

设 A 是埃尔米特矩阵，定义算子 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, X \mapsto AX$，则

1. 对任意 $X, Y \in \mathbb{C}^n$ 有 $(\mathcal{A}X, Y) = (X, \mathcal{A}Y)$
2. 算子 $\mathcal{A}$ 的特征值（或者 A 的特征值）都是实数
3. 算子 $\mathcal{A}$ 的不同特征值对应的特征向量正交
4. 算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间（这个结论对酉算子也成立）

定理：设 A 是埃尔米特矩阵，那么存在酉矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵

> 复对称矩阵 A 是埃尔米特矩阵 $\Longleftrightarrow$ A 是实对称矩阵

> 一个复方阵可以被酉对角化的充要条件是它是**正规矩阵**（$A^H A = AA^H$）

酉矩阵与埃尔米特矩阵

酉矩阵的性质

1. 特征值的模长都为 1
2. 行列式的模长为 1
3. 不同特征值对应的特征向量正交
4. 酉矩阵的逆，乘积，共轭转置依然是酉矩阵
5. 可被酉对角化

埃尔米特矩阵的性质

1. 特征值都是实数
2. 不同特征值对应的特征向量正交
3. 可被酉对角化

> 埃尔米特矩阵的乘积未必是埃尔米特矩阵（除非可交换）

酉矩阵与埃尔米特矩阵

酉矩阵与埃尔米特矩阵一定可以酉对角化

但是复正交矩阵和复对称矩阵不一定可以对角化！！！

伴随变换

设 $\mathcal{A}$ 是复内积空间 V 上的一个线性变换，如果存在 V 上的一个线性变换，记作 $\mathcal{A}^*$，满足

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta), \quad \forall\, \alpha, \beta \in V,$$

那么称 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个伴随变换

对于一个有限维复内积空间上的线性变换，其伴随变换一定存在且唯一

设 $\mathcal{A}$ 是有限维复内积空间 V 上的一个线性变换，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个标准正交基下的矩阵为 A，那么 $\mathcal{A}^*$ 在这个标准正交基下的矩阵是 A^*

习题

设 A, B 都是 n 阶埃尔米特矩阵。证明：

$$AB = BA \iff \exists\text{酉矩阵 } U,\ \text{使得 } U^*AU = \Lambda_1,\ U^*BU = \Lambda_2,$$

其中 Λ_1, Λ_2 都是实对角矩阵

> 可将此题与第11周习题第一题（两个复矩阵可交换的充要条件是可以被同一个变换矩阵上三角化）对照

习题

1. 设 A, B 都是 n 阶埃尔米特矩阵。证明：如果 A 是正定的，B 是半正定的，那么存在一个 n 阶可逆矩阵 C，使得 C^*AC 与 C^*BC 都是对角矩阵
2. 设 A, B 都是 n 阶埃尔米特矩阵。证明：如果 A 是正定的，B 是半正定的，那么
$$|A+B| \geq |A| + |B|$$

习题

1. 求证：

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{可以写成 } A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 的多项式}$$

2. 利用 A 的对角化将 B 相似于对角阵 D

3. 利用 D 的行列式求 B 的行列式