

线性代数习题课 12

2025.12.16



实对称矩阵

设 A 是 n 阶实对称方阵，那么对列向量空间 \mathbb{R}^n 中的任意两个向量 X, Y ，有

$$(AX \mid Y) = (X \mid AY)$$

如果 \mathbb{R}^n 上的线性算子 \mathcal{A} 满足对列向量空间 \mathbb{R}^n 中的任意两个向量 X, Y ，有 $(\mathcal{A}X \mid Y) = (X \mid \mathcal{A}Y)$ ，那么 \mathcal{A} 在 \mathbb{R}^n 的任一标准正交基下的矩阵为对称矩阵（逆命题也成立），这时我们称 \mathcal{A} 是一个对称变换/自伴算子

如果 n 阶实方阵 A 正交相似于一个对角矩阵，那么 A 一定是实对称矩阵

两个 n 阶实对称矩阵正交相似的充要条件是它们相似

实对称矩阵的正交对角化

定理：设 A 是实对称矩阵，那么存在正交矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵

推论：设 A 是 n 阶实对称方阵，则

1. A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 能分解成一次实多项式的乘积（ A 的每个特征值都是实的）
2. 如果 $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$ ，那么 A 可（通过正交矩阵）对角化到 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

实对称矩阵的正交对角化

设 A 是 n 阶实对称方阵。那么

1. A 的特征子空间的维数和是 n ，从而 \mathbb{R}^n 是 A 的特征子空间的直和
2. A 的特征子空间相互正交

把一个实对称矩阵 A 正交对角化的步骤：

1. 通过求解 A 的特征多项式得到该对称矩阵的特征值；
2. 对每个特征值 λ ，求出线性方程组 $(A - \lambda E)X = 0$ 的一个基础解系，然后通过正交化方法，得到该特征子空间的标准正交基；
3. 把所求得特征子空间的标准正交基合在一起，以其中的向量为列向量得到一个矩阵，这是一个正交矩阵。那么原来的对称矩阵可以通过这个正交矩阵对角化。

对称双线性型的典范基

定理：设 U 是 \mathbb{R}^n 的线性子空间， f 是 U 上的对称双线性型。那么 f 有典范标准正交基。特别地， \mathbb{R}^n 上的每个对称双线性型 f 都有典范标准正交基

推论：设 U 是 \mathbb{R}^n 的 s 维线性子空间， $q(x)$ 是 U 上的二次型。那么存在 U 的标准正交基，在这个基下， $q(x)$ 有如下形式：

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2,$$

其中 $[x_1, x_2, \dots, x_s]$ 是 $x \in U$ 在这个基下的坐标列向量，

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是二次型 $q(x)$ 在 U 的任意一个标准正交基下的矩阵的特征值

推论（主轴定理）：设 $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ 是二次齐次多项式，那么，存在 n 阶正交矩阵 T 使得做变量替换 $x = Ty$ 后有 $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

正定矩阵

设 A 为 n 阶实对称方阵, P 为 n 阶实可逆方阵, $B = P^T A P$, 则 B 正定当且仅当 A 正定

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则下列命题等价:

1. A 正定
2. A 的特征值均为正
3. 存在可逆方阵 P 使得 $A = P^T P$ (A 合同于单位矩阵)
4. A 的各阶主子式均为正

二次曲面

二次曲线的分类

1. 椭圆型 ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0$.
2. 双曲型 ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0$.
3. 抛物形 ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \tilde{b}_2, \tilde{c}$ 中至少一个为零) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2\tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c} = 0$.

二次曲面的分类

- 椭球面型 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \lambda_4 = 0$.
- 双曲面型 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不同号, $\lambda_4 \neq 0$) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \lambda_4 = 0$.
- 二次锥面 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不同号) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 = 0$.
- 抛物型 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有两个非零, 一个为零, $\tilde{b}_3 \neq 0$) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2\tilde{b}_3 \tilde{z} = 0$.
- 二次柱面 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中至少一个为零, \tilde{b}_2, \tilde{c} 至少有一为零) $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2\tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c} = 0$.

上述分类包含退化情形

二次曲面

在三维空间直角坐标系中，给定曲面方程

$$2x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 20 = 0.$$

该方程表示什么曲面？

正交矩阵

设 A 是 n 阶正交方阵，那么对列向量空间 \mathbb{R}^n 中的任意两个向量 X, Y ，有

$$(AX \mid AY) = (X \mid Y)$$

如果 \mathbb{R}^n 上的线性算子 \mathcal{A} 满足对列向量空间 \mathbb{R}^n 中的任意两个向量 X, Y ，有 $(\mathcal{A}X \mid \mathcal{A}Y) = (X \mid Y)$ ，那么 \mathcal{A} 在 \mathbb{R}^n 的任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵（逆命题也成立），这时我们称 \mathcal{A} 是一个正交变换/保距算子/么正算子

如果定义算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， $X \mapsto AX$ ，则算子 \mathcal{A} 保持点积：

$$(\mathcal{A}X \mid \mathcal{A}Y) = (X \mid Y)，从而也保持长度和距离：\|\mathcal{A}X\| = \|X\|，$$

$$\|A(X - Y)\| = \|X - Y\|$$

对于内积空间上的线性算子，保距跟保内积是等价的（极化恒等式）

正交矩阵

设 A 是正交矩阵，则

1. 如果 λ 是 A 的实特征值，那么 $\lambda = \pm 1$
2. 如果 X, Y 是特征向量，且 $AX = X$, $AY = -Y$ ，那么 X 和 Y 正交，即 $(X | Y) = 0$
3. $\det A = \pm 1$

设 A 是 n 阶正交矩阵或实对称矩阵，定义线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$ ，那么 \mathcal{A} 的不变子空间的正交补也是 \mathcal{A} 的不变子空间

正交矩阵

设 Q 是 n 阶实方阵，那么下列条件等价：

1. Q 是正交矩阵
2. Q 可逆且 $Q^{-1} = Q^T$
3. Q 的列向量形成 \mathbb{R}^n 中的标准正交基（标准正交组）
4. Q 的行向量形成 \mathbb{R}^n 中的标准正交基（标准正交组）
5. $\|Qv\| = \|v\|$ 对任一 $v \in \mathbb{R}^n$ 都成立
6. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ ，有 $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
7. Q 将一组标准正交基变为另一组标准正交基

二阶正交矩阵

假设 A 是二阶正交矩阵, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, X \mapsto AX$ 是相应的线性算子

1. 如果 $\det A = 1$, 那么存在角 θ 使得

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

从而 A 是绕原点的旋转, 旋转角度是 θ

2. 如果 $\det A = -1$, 那么存在角 θ 使得

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

并且 $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 从而 A 是关于一条直线的反射, 这条直线与 x 轴的夹角是 $\theta/2$

\mathbb{R}^n 中的旋转矩阵

欧拉定理： \mathbb{R}^n 中的旋转矩阵是行列式为 1 的 n 阶正交矩阵

推论：绕任何两个轴的旋转的合成是绕某个其他轴的旋转

行列式为 -1 的 n 阶正交矩阵表示旋转与反射的合成

正交矩阵的典范式

设 A 是 n 阶正交矩阵，那么存在 n 阶正交矩阵 B 使得

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & & \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ & & & \sin \theta_r & \cos \theta_r \\ & & & & & I_k \\ & & & & & & -I_l \end{pmatrix}, \quad 2r + k + l = n,$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 均不是 π 的整数倍 (θ_i 不唯一, θ_i 变化 B 也会相应地变化), I_k 和 I_l 分别是 k 阶和 l 阶单位矩阵

正交矩阵的典范式

设 A 是正交矩阵，假设其特征多项式有如下因式分解：

$$\chi_A(t) = (t^2 - 2a_1t + 1)(t^2 - 2a_2t + 1) \cdots (t^2 - 2a_rt + 1) \cdot (t - 1)^k(t + 1)^l,$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_r 的绝对值都是小于 1 的正数。取 θ'_i 使得 $\cos \theta'_i = a_i$ ，那么 A 的典范式正如同上一頁的 $B^{-1}AB$ ，其中 $\theta_i = \theta'_i$ 或 $2\pi - \theta'_i$

习题

设 A 为 n 阶实对称方阵。证明：

$$\max_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_{\max}.$$

这里 λ_{\max} 是 A 的最大特征值

习题

设 $A = (a_{ij})$ 是三阶正交矩阵, 且 $\det A = 1$, 求证:

1. $\lambda = 1$ 必为 A 的特征值;
2. 存在正交矩阵 T , 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

3. $\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}\right)$

习题

证明：秩等于 r 的对称矩阵可以被表示成 r 个秩等于 1 的对称矩阵的和

习题

证明：

1. n 阶实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是： A 的特征多项式在复数域中的根都是实数
2. 如果 n 阶实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，且 $AA^T = A^T A$ ，那么 A 是对称矩阵

习题

证明：不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$