线性代数 (I) 期末练习题

1. 给定方阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{pmatrix}$. 证明: A 可对角化当且仅当 $a=0$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-1&1&-1\\-2&2&-2\end{pmatrix}$, 请把 A^5 写成 I,A,A^2 的线性组合.

3. 给定平面上三个点 $(1,7)$, $(3,3)$, $(6,1)$, 用最小二乘法求出拟合这三个点的曲线 $y=a+\dfrac{b}{x}$.

4. 设复方阵 A 的特征多项式是 $\chi_A(t)=t^5(t-1)^4(t-2)^4(t-3)^3$, 极小多项式是 $\mu_A(t)=t^3(t-1)^2(t-2)^3(t-3)$, 求 A 的约当标准型.

5. 设 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\mathbf{i}&-1+\mathbf{i}\\\mathbf{i}&1&1+\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}&-1+\mathbf{i}&0\end{pmatrix}$ 是一个酉矩阵, 求酉矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 是酉矩阵.

6. (1) 把 $\mathbb{R}^4$ 中如下的正交向量组扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

(2) 设 U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间满足 $\mathbb{R}^n=U\oplus V$. 证明:

$$\mathbb{R}^n=U^{\perp}\oplus V^{\perp}.$$

7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的约当标准型;

(2) 求可逆矩阵 C, 使得 $C^{-1}AC$ 是 A 的约当标准型.

8. (1) 记 $M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实方阵形成的向量空间. 对于 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, 它的迹定义为 $\mathrm{tr}(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. 证明: $\mathrm{tr}: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是一个线性映射, 即, 对于任意的$\lambda\in\mathbb{R}$, $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, 有

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B),\quad \mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\mathrm{tr}(A).$$

(2) 设 A,B 是两个同阶的实方阵, 设 A 的极小多项式次数是 k, 设 B 的极小多项式次数是 l. 如果对于任意的 $i\le k+l-1$, 有 $\mathrm{tr}(A^i)=\mathrm{tr}(B^i)$. 证明 $\mathrm{tr}(A^i)=\mathrm{tr}(B^i), \forall i\in\mathbb{N}$.

9. 设 A 和 B 是 n 阶的实对称方阵, 且 A 正定.

(1) 证明: 存在可逆方阵 P 使得 ${}^tPAP=E$ 且 ${}^tPBP=D$, 其中 D 是对角方阵.

(2) 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 证明:

$$\max_{X\neq 0}\frac{{}^tXBX}{{}^tXAX}=\lambda_{\max}(A^{-1}B),$$

其中 $\lambda_{\max}(A^{-1}B)$ 表示 $A^{-1}B$ 的最大特征值.