

线性代数期中练习题（一）参考解答

1. 当 a 取什么值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

有唯一的解，无穷多解和无解？且在方程有无穷多解的时候求出方程组的解。

解：考虑系数矩阵的行列式，会发现

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)^2(a-1).$$

于是，当 $a \neq 1, -2$ 时，方程有唯一的解。当 $a = -2$ 时，三个方程相加，得到 $0 = 3$ ，于是方程无解。而当 $a = 1$ 时，方程组退化为只含有一个方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

此时方程组的通解是 $(x_1, x_2, x_3) = (1 - t_1 - t_2, t_1, t_2)$ 。

2. 行向量空间 \mathbb{R}^4 中的向量 $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$ 张成的一个线性子空间 V , 求出 V 的一个基, 从而确定 V 的维数。

解: 将 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ 排成列向量, 得到矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

初等行变换 $F_{4,1}(1)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

初等行变换 $F_{3,2}(-1)$, $F_{4,2}(-2)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

初等行变换 $F_{4,3}(-1)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

根据首项可以判断上述矩阵的第 1, 2, 4 列线性无关。因此 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 线性无关, 是 V 的一个基。于是 $\dim V = 3$ 。

3. 求下列 4 阶方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

解: 我们采用高斯-若尔当消元法, 构造增广矩阵 $(A|I)$, 并通过初等行变换将其化为 $(I|A^{-1})$ 的形式。

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

首先将左侧矩阵化为行阶梯形。考虑行变换 $F_{2,1}(-2)$, $F_{3,1}(-1)$, 得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

再考虑 $F_{3,2}(2)$, $F_{4,2}(-1)$, 得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

接着考虑 $F_{4,3}(\frac{4}{3})$,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{array} \right)$$

此时可知 $\det(A) \neq 0$, 矩阵 A 可逆。接下来考虑 $F_4(\frac{3}{22})$, 有

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/11 & 5/22 & 2/11 & 3/22 \end{array} \right)$$

(为避免分数运算, 我们可以在最后一步进行标准化, 这里为了演示过程清晰, 先进行标准化) 从下往上消元, 将左侧化为单位矩阵。经过一系列行变换后, 最终得到:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{7}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} & -\frac{4}{11} & \frac{5}{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{11} & \frac{5}{22} & \frac{2}{11} & \frac{3}{22} \end{array} \right)$$

变换完成, 右侧的矩阵即为 A^{-1} 。所以,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{7}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{22} & -\frac{4}{11} & \frac{5}{22} \\ \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{7}{11} & \frac{5}{22} & \frac{2}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

4. (i) 若 A 为实对称矩阵 (即 ${}^tA = A$). 证明: 当 $A^2 = \mathbf{0}$ 时, $A = \mathbf{0}$.

(ii) 举一个二阶方阵的例子说明: 存在非零的方阵 B , 满足 $B^2 = \mathbf{0}$.

(i) **证明:** 因为 ${}^tA = A$, 于是 $A^2 = {}^tAA = \mathbf{0}$. 记 $A = (a_{ij})$, 简单计算发现 tAA 处于 i 行 i 列的项是 $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 0$. 因此 $a_{ik} = 0, \forall i, k$. 从而 $A = \mathbf{0}$.

(ii) **解** 我们考虑的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

很容易发现 $B^2 = \mathbf{0}$.

5. 计算如下的行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \cdots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式关于行的多重线性, 知道

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & \cdots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & \cdots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

对于上式的第二个行列式, 在第一行中提取出 x_1 , 然后用第一行的 $-x_i$ 倍加到第 i 行, 得到

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & \cdots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1y_1.$$

故 $D_n = D_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n, y_2, y_3, \dots, y_n) + x_1y_1$. 因此, 递归得到

$$D_n = 1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

6. (10分) 一个 n 阶方阵 A 称为么幂的, 如果存在正整数 k (由 A 决定) 使得 $(A - I_n)^k = \mathbf{0}$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵. 证明: 如果 A, B 是两个 n 阶么幂矩阵且 $AB = BA$, 则 AB 也是么幂矩阵.

证明: 一个矩阵 X 称为幂零的, 如果 $X^k = \mathbf{0}$. 所以一个么幂矩阵, 可以写成单位矩阵加上幂零矩阵. 现在把 A, B 写成 $A = I + U, B = I + V$, 其中 U, V 是幂零的, 于是

$$AB = I + U + V + UV.$$

由 $AB = BA$, 我们容易得到 $UV = VU$.

我们断言对于两个幂零矩阵 X, Y 可交换, 则 $X + Y$ 也是幂零矩阵. 设 $X^k = \mathbf{0}, Y^l = \mathbf{0}$, 且 $XY = YX$, 则

$$(X + Y)^{k+l} = \sum_{i=0}^{k+l} \binom{k+l}{i} X^i Y^{k+l-i} = \mathbf{0}.$$

从而 $X + Y$ 是幂零矩阵。

因此, 对于 AB 的表达式中, U, V 可交换, 于是 UV 是幂零矩阵, 因此 $U + V + UV$ 是幂零矩阵。从而 AB 是么幂矩阵。

7. 设 A 是一个可逆的上三角矩阵, 请证明 A^{-1} 也是一个上三角矩阵。

证明: 设 $A = (a_{ij})$ 是上三角矩阵, 满足 $a_{ij} = 0, \forall i > j$ 且 $a_{ii} \neq 0, \forall i$. 构造增广矩阵 $(A|E)$, 两边同时做行变换, 得到 $(E|A^{-1})$. 我们选择做的行变换都是形如 $F_s(\lambda)$ 和 $F_{s,t}(c)$ 的形式, 其中 $s < t$. 因此 A^{-1} 是一个上三角矩阵。

8. 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 存在一个 n 阶非零方阵 B 使得 $AB = \mathbf{0}$, 当且仅当 $\det A = 0$.

证明: “ \implies ” 若 $\exists B \neq \mathbf{0}$, 使得 $AB = \mathbf{0}$, 将 B 写成 $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$, 则 $AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n) = \mathbf{0}$, 即 \mathbf{b}_i 皆是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解. 由于 B 非零, 故至少有一个列向量 \mathbf{b}_i 不为零, 从而齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解, 这意味着 A 不可逆, 故 $\det A = 0$.

“ \impliedby ” 若 $\det A = 0$, 于是 A 退化, 故线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 \mathbf{x}_0 . 令 $B = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, 则 B 是一个 n 阶非零方阵满足 $AB = \mathbf{0}$.

9. 设 A 是一个可逆矩阵。

(i) 若互换 A 的第 i 行和第 j 行后 (其中 $i \neq j$)，得到的可逆矩阵记为 B 。那么 tB 可以由 tA 经过怎样的初等变换得到？请说明理由。

(ii) 若将 A 的第 i 列的 μ 倍加到第 j 列后 (其中 $i \neq j$)，得到的可逆矩阵为 C 。那么 C^{-1} 可以由 A^{-1} 经过怎样的变换得到？请说明理由。

证明: (i) 交换 A 的第 i 行和第 j 行得到 B , 于是 $F_{i,j}A = B$, 从而

$${}^tB = {}^tA {}^tF_{i,j} = {}^tA F_{i,j},$$

于是 tA 交换第 i 列和第 j 列得到 tB 。

(ii) A 的第 i 列的 μ 倍加到第 j 列后, 得到 C , 于是 $C = AF_{i,j}(\mu)$. 于是

$$C^{-1} = (F_{i,j}(\mu))^{-1}A^{-1} = F_{i,j}(-\mu)A^{-1}.$$

于是 A^{-1} 的第 j 行的 $-\mu$ 倍加到第 i 行上, 就得到矩阵 C^{-1} 。