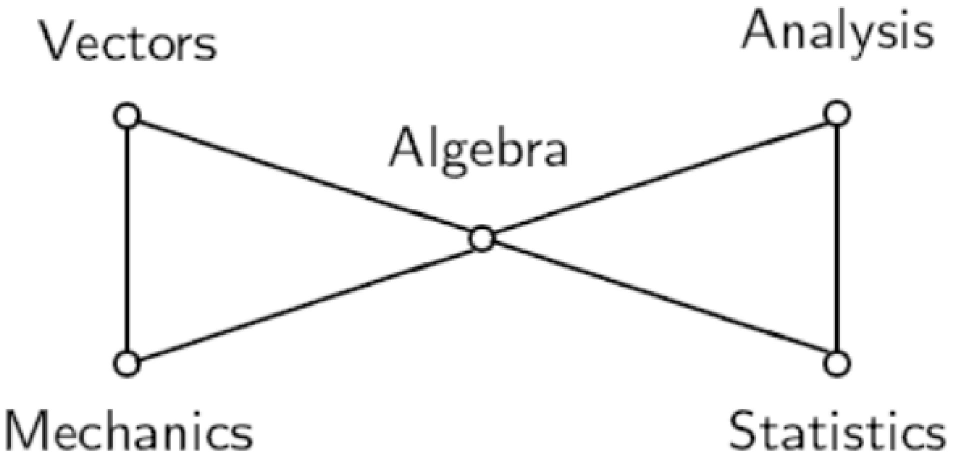
线性代数习题课 3

2025.10.14



习题

（教材 2.2 节 习题 4）
设 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$的行秩为 r，列秩为 s
取 A 的 r 个线性无关的行向量 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$. 这 r 个行向量形成一个 $r \times n$ 矩阵 $\widetilde{A}$.
设 $\widetilde{A}$ 的列秩为 t，$\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 是 $\widetilde{A}$ 的列向量的极大线性无关组。证明：

1. $t \leq r$
2. 矩阵 A 的任何一个列向量 a_j 都是列向量 $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 的线性组合，从而 $s \leq t \leq r$，即列秩不超过行秩
   提示：利用 A 的任一行向量都是 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ 的线性组合

习题

3. 把 A 的行作为列，得到如下 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置：

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, $$

有 $r_c({}^tA) = r_r(A)$, $r_r({}^tA) = r_c(A)$.

结合 2 与 3 可知 $s \leq r$ 且 $r \leq s$，因此 $r = s$

作业

- 证明任意有限维线性空间的非空子集中存在极大线性无关向量组，要说明不能有无穷个线性无关的向量
- 计算矩阵的秩，不一定非要化成阶梯形，可以考虑向量组的维数
- 计算矩阵的方幂，常用方法有归纳法，将原矩阵分解成纯量矩阵与其它矩阵（往往是幂零矩阵）的和，将矩阵视为线性映射考虑标准基的像等

> 两个矩阵只有可交换才有二项式定理

线性映射

一个数域 $\mathbb{K}$ 上的映射 $\varphi : V \to U$ 如果满足：

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall\, x, y \in V;$
2. $\varphi(\lambda x) = \lambda\, \varphi(x), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ x \in V,$

则称 φ 是（从 V 到 U 的）**线性映射**

设映射 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ，$x \mapsto y$ ，为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射。若 $y = Ax$ ，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ，则称 $\mathcal{A}$ 为 A 的线性映射, A 为线性映射 $\mathcal{A}$ 的矩阵

矩阵的运算

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathbb{R}^{n\times p}$，定义 A 与 B 的乘积为 $m \times p$ 阶矩阵 $C := (c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

它是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和。记为 $C = AB$

矩阵的运算

关于矩阵乘法的注意事项

1. 只有当 A 的列数等于 B 的行数时，A 与 B 才可以相乘；
2. AB 有意义不意味着 BA 有意义。即使 A 与 B 为同阶方阵，AB 与 BA 也不一定相等。若 $AB = BA$ ，则称 A, B 可交换；
3. **两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵**，即 $AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$ ，$AB = AC$ 不能推出 $B = C$ ；
4. 左乘对角矩阵相当于把 A 的各行分别乘上一个数；右乘对角矩阵相当于把 A 的各列分别乘上一个数；
5. 纯量矩阵（λI）与 A 相乘等价于对 A 的数乘：$(\lambda I)A = A(\lambda I) = \lambda A$. 特别地，$IA = AI = A$ ，$OA = AO = 0$

矩阵的运算

矩阵乘法的性质

- 乘法结合律：$(AB)C = A(BC)$
- 左分配律：$(A+B)C = AC + BC$
- 右分配律：$A(B+C) = AB + AC$
- 数乘结合律：$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

在 $M_n(\mathbb{R})$ 中，与所有矩阵可交换的矩阵是纯量矩阵

矩阵的逆

设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 X 满足 $XA = AX = I$ ，则称 A **可逆**，并称 X 为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1}
可逆矩阵也称为非奇异矩阵/非退化矩阵，不可逆矩阵称为奇异矩阵/退化矩阵

对任意同阶可逆矩阵 A, B ，都有：

- $(A^{-1})^{-1} = A;$
- $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \ \lambda \neq 0;$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

矩阵的逆

设 A 是 n 阶方阵，则以下陈述等价：

1. A 是可逆的
2. A 是非退化（满秩）的
3. A 的行向量/列向量线性无关
4. A 的行空间/列空间等于 $\mathbb{R}^n$
5. 齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 只有平凡解
6. A 的零空间为 $\mathbf{0}$
7. A 的简化阶梯形为 I_n
8. 一般线性方程组 $Ax = \mathbf{b}$ 有且只有唯一解
9. A 可以分解为一系列初等矩阵的乘积

矩阵的转置

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换，得到的矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记作 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$

等价地，可写成 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

矩阵的转置

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
- $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$;
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$;
- $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^{\mathrm{T}}$

矩阵乘积的秩

设 A 为 $m \times s$ 矩阵，B 为 $s \times n$ 矩阵，那么

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 和 C 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，那么

$$\operatorname{rank}(BAC) = \operatorname{rank}(A)$$

矩阵的分块

设 A 为 $m \times r$ 矩阵，B 为 $r \times n$ 矩阵，把 B 写成列向量形式
$B = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$
则 $AB = A(c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n) = (Ac_1 \quad Ac_2 \quad \cdots \quad Ac_n)$
即 AB 的第 j 列等于 A 与 B 的第 j 列 c_j 的乘积 Ac_j

设 B 为 $r \times n$ 矩阵，A 为 $m \times r$ 矩阵，把 A 写成行向量形式 $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$

则 $AB = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} r_1 B \\ r_2 B \\ \vdots \\ r_m B \end{bmatrix}$ 即 AB 的第 i 行等于 A 的第 i 行 r_i 与 B 的乘积 $r_i B$

习题

计算下列方阵的 k 次方幂，k 为正整数

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

习题

分别求与下列矩阵 A 可交换的全部矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；（2） $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$；（3） $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

习题

设方阵 A 满足 $A^k = O$ ，k 为正整数。证明：$I + A$ 可逆，并求 $(I + A)^{-1}$

习题

设方阵 A 满足：$I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O.$

证明：$I - A$ 可逆，并求 $(I - A)^{-1}$

习题

设 A, B, C 为同阶方阵且 $A - B$ 可逆，已知 $A(A-B)^{-1} = BC$ ，证明:
$(A-B)^{-1}A = CB$

习题

设 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的实矩阵，证明：若 $I_n - AB$ 可逆，则 $I_m - BA$ 也可逆；并求 $(I_m - BA)^{-1}$