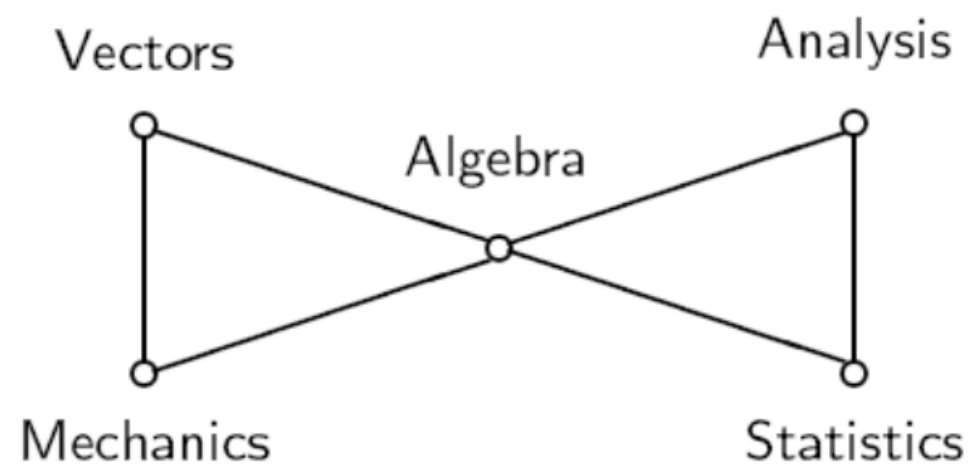


# 线性代数习题课 2

2025.9.28



# 作业

- 自由变量的取值范围

$$eg. x_3 = s, x_4 = r$$

$$s, r \in \mathbf{R}$$

- 证明子空间，无需单独考虑零子空间，只需交代子集非空即可
- 以后在Gradescope上提交作业，课程代码为GVY2KN，如有操作使用方面的问题请联系助教

# 极大线性无关组

设  $S$  是一组向量， $S_1$  是  $S$  的子向量组。若  $S_1$  线性无关，且对任意向量  $a \in S \setminus S_1$ ， $S_1 \cup \{a\}$  线性相关，则称  $S_1$  是  $S$  的**极大无关组**

这个定义比较重要：当证明有关极大无关组的等价结论时，请从最原始的定义出发证明

# 向量组的秩

设向量  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ，则有：

1.  $a_1, \dots, a_m$  线性无关，当且仅当  $\text{rank}(a_1, \dots, a_m) = m$ ；
2.  $a_1, \dots, a_m$  线性相关，当且仅当  $\text{rank}(a_1, \dots, a_m) < m$ ；
3. 若  $\{b_1, \dots, b_n\}$  可以用  $\{a_1, \dots, a_m\}$  线性表示，则  
 $\text{rank}(b_1, \dots, b_n) \leq \text{rank}(a_1, \dots, a_m)$ ；
4. 若  $\{b_1, \dots, b_n\}$  与  $\{a_1, \dots, a_m\}$  互相可以线性表示，则  
 $\text{rank}(b_1, \dots, b_n) = \text{rank}(a_1, \dots, a_m)$ ；
5. 向量  $b$  可表示成  $\{a_1, \dots, a_m\}$  的线性组合，当且仅当  
 $\text{rank}(a_1, \dots, a_m) = \text{rank}(a_1, \dots, a_m, b)$

# 矩阵的秩

矩阵  $A$  的行向量张成的线性子空间称为行空间，其维数称为  $A$  的行秩  
矩阵  $B$  的列向量张成的线性子空间称为列空间，其维数称为  $B$  的列秩

引理：初等行变换不改变矩阵的行秩/列秩

(2.14引理的证明可能比较抽象，建议同学们多看看教材这一块内容，思路是初等行变换前后两个行向量组可以互相线性表示，列向量组的线性相关性不受改变)

# 矩阵的秩

定理：矩阵 $A$ 的行秩和列秩相等，这个数称为矩阵 $A$ 的**秩**，记作  $\text{rank}(A)$

- 因此，矩阵阶梯形的非零行数/主元数目就是矩阵的秩，并且阶梯形的主元所在的列构成列向量组的一个极大线性无关组
- 上一页的引理陈述便可改为：

定理：初等行变换不改变矩阵的秩

# 矩阵的秩

设  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  为一组列向量,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  为以  $a_1, a_2, \dots, a_m$  为列构成的  $n \times m$  阶矩阵。  $A$  经一系列初等行变换变为矩阵  $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ , 则:

1.  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关 (无关) 当且仅当  $b_1, b_2, \dots, b_m$  线性相关 (无关)
2.  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  为  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的极大无关组, 当且仅当  $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_r}$  为  $b_1, b_2, \dots, b_m$  的极大无关组。其中  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$

# 子空间的若干结论

$n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中的下列结论成立

1. 设  $V \subset \mathbb{R}^n$  为  $r$  维子空间, 则  $V$  中任意  $r + 1$  个向量线性相关
2. 设  $V$  为  $r$  维子空间, 则  $V$  中任意  $r$  个线性无关的向量为  $V$  的一组基
3. 设  $U$  与  $V$  为  $\mathbb{R}^n$  的子空间, 且  $U \subseteq V$ , 则  $\dim U \leq \dim V$
4. 设  $U$  与  $V$  为  $\mathbb{R}^n$  的子空间, 且  $U \subseteq V$ , 若  $\dim U = \dim V$ , 则  $U = V$



## 子空间的和与直和

上节课我们知道，设  $U, V$  是  $\mathbb{R}^n$  的两个子空间，容易验证  $U \cap V$  也是  $\mathbb{R}^n$  的子空间，但  $U \cup V$  一般而言不是  $\mathbb{R}^n$  的子空间

我们把  $U \cup V$  张成的子空间称为  $U$  与  $V$  的**和**，记作  $U + V$ ，可以证明：

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

- 定理：设  $U$  和  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间，则
$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$$

## 子空间的和与直和

可以证明,  $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$  当且仅当对于任意的  $x \in U + V$ , 存在唯一的  $u \in U$  和唯一的  $v \in V$  使得  $x = u + v$ . 这时称  $U + V$  为**直和**, 记作  $U \oplus V$

- 定理:  $U + V$  是直和当且仅当如果  $u + v = \mathbf{0}$ ,  $u \in U$ ,  $v \in V$ , 则  $u = v = \mathbf{0}$

因此, 如果子空间  $U$  与  $V$  的和为直和, 我们也称  $U$  与  $V$  线性无关

- 定理: 如果  $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ , 则  $\dim(U + V) = \dim U + \dim V$

# 线性方程组的可解性准则

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  为  $m$  维列向量, 则一般线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解的充要条件是  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, \mathbf{b})$ , 线性方程组有唯一解的充要条件是  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, \mathbf{b}) = n$

齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解的充要条件是  $\text{rank}(A) < n$

## 向量组等价

给定两个向量组  $S = \{a_1, \dots, a_m\}$ ,  $T = \{b_1, \dots, b_r\}$ , 若  $S$  中的每个向量都可由  $T$  中的向量线性表示, 则称  $S$  可以由  $T$  线性表示。如果两个向量组互相都可以线性表示, 则称  $S$  与  $T$  等价, 记为  $S \sim T$

- 容易验证, 向量组的等价具有自反性, 对称性, 传递性
- 容易验证, 两个向量组等价当且仅当它们张成的子空间相同

## 向量组等价

- 向量组与它的任何一个极大线性无关组等价
- 等价的线性无关向量组所含向量的个数相等
- 等价的向量组有相等的秩

## 习题

设  $A$  是  $s \times n$  矩阵,  $B$  是  $l \times m$  矩阵, 证明:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

## 习题

证明:

$$\text{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s) \leq \text{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r) + \text{rank}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s)$$

## 习题

设向量组  $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  线性无关, 并且可以由向量组  $T = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  线性表示。证明: 可以用向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  替换向量  $\beta_1, \dots, \beta_t$  中某  $s$  个向量  $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_s}$ , 使得得到的向量组  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{i_{s+1}}, \dots, \beta_{i_t}\}$  与  $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  等价  
(其中  $i_1, \dots, i_t$  为  $\{1, \dots, t\}$  的某个排列)



# 习题

(教材2.2节 习题4)

设  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})$  的行秩为  $r$ , 列秩为  $s$

取  $A$  的  $r$  个线性无关的行向量  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ . 这  $r$  个行向量形成一个  $r \times n$  矩阵  $\tilde{A}$ .

设  $\tilde{A}$  的列秩为  $t$ ,  $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \dots, \tilde{a}_{j_t}$  是  $\tilde{A}$  的列向量的极大线性无关组。证明:

1.  $t \leq r$

2. 矩阵  $A$  的任何一个列向量  $a_j$  都是列向量  $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \dots, \tilde{a}_{j_t}$  的线性组合, 从而  
 $s \leq t \leq r$ , 即列秩不超过行秩

提示: 利用  $A$  的任一行向量都是  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$  的线性组合

## 习题

3. 把  $A$  的行作为列，得到如下  $n \times m$  矩阵，称为  $A$  的转置：

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

有  $r_c({}^tA) = r_r(A)$ ,  $r_r({}^tA) = r_c(A)$ .

结合 2 与 3 可知  $s \leq r$  且  $r \leq s$ ，因此  $r = s$