※·大写字母均表示$\mathbb{R}^n$的线性子空间

子空间的和与直和

① 证明：$\langle U\cup V\rangle = \{u+v : u\in U, v\in V\}$ $(:=U+V)$

$\langle U\cup V\rangle = \{\sum a_i w_i : w_i \in U\cup V\}$ 记 $W=\{u+v \mid u\in U, v\in V\}$ 欲证 $\langle U\cup V\rangle = W$

$\forall x\in\langle U\cup V\rangle$, $x=\sum a_i w_i = \underbrace{\sum_{w_i\in U} a_i w_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{w_j\in V\setminus(U\cap V)} a_j w_j}_{\in V} \in W$ $\Rightarrow \langle U\cup V\rangle \subseteq W$

另一方面，W中任何一个元素都是由U与V中元素线性组合得到 $\Rightarrow W\subseteq\langle U\cup V\rangle$

且W是$\mathbb{R}^n$的一个子空间，故 $\langle U\cup V\rangle = W := \{u+v \mid u\in U\ v\in V\}$

② 证明：$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U\cap V$（教材定理4.14）

设 $\{u_i\}_{i=1}^r$ 是 $U\cap V$的基，它可以扩充为U的基 $\{u_i\}_{i=1}^r \cup \{v_j\}_{j=1}^s$

也可以扩充为V的基 $\{u_i\}_{i=1}^r \cup \{w_j\}_{j=1}^t$

下证 $u_1,\cdots,u_r, v_1,\cdots,v_s, w_1,\cdots,w_t$ 线性无关

假设 $\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_r u_r + \beta_1 v_1+\dots+\beta_s v_s + \gamma_1 w_1+\dots+\gamma_t w_t = 0$

考虑向量 $x = \underbrace{\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_r u_r + \beta_1 v_1+\dots+\beta_s v_s}_{\in U} = \underbrace{-(\gamma_1 w_1+\dots+\gamma_t w_t)}_{\in V}$

$x\in U\cap V$ $x=\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_r u_r = -(\gamma_1 w_1+\dots+\gamma_t w_t)$

$u_1,\cdots,u_r, w_1,\cdots,w_t$ 线性无关 $\Rightarrow \gamma_1=\cdots=\gamma_t=0$ $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=\beta_1=\cdots=\beta_s=0$

$u_1,\cdots,u_r, v_1,\cdots,v_s, w_1,\cdots,w_t$ 张成$U+V$又线性无关，故它们形成$U+V$的基

$\dim(U+V) = r+s+t = \dim U + \dim V - \dim U\cap V$

③ 证明：$U\cap V=\{0\} \Leftrightarrow \forall x\in U+V$ $\exists$唯一 $u\in U$ $v\in V$ s.t. $x=u+v$（$U+V$为直和）

$\Rightarrow$ 假设$U\cap V=\{0\}$ $\forall x\in U+V$ 如果 $x=u+v=u'+v'$，则 $u-u'=v'-v\in U\cap V=\{0\}$, $u=u'$ $v=v'$

$\Leftarrow$ 反证法，假设 $U\cap V\neq\{0\}$ $\exists$非零元 $z\in U\cap V$ 同时 $z\in U+V$ $z=z+0=0+z$ 矛盾

④ 证明：$U+V$是直和 $\Leftrightarrow$ 如果 $u+v=0$ $(u\in U, v\in V)$，则 $u=v=0$

$\Rightarrow$ 由③ $0\in U+V$ 的写法唯一

$\Leftarrow$ 反证法，假设 $U+V$不是直和，等价于 $U\cap V\neq\{0\}$

$\exists$非零元 $z\in U\cap V$ $0=z+(-z)=0+0$ 矛盾

⑤ 推论：如果 $U\cap V=\{0\}$，则 $\dim(U+V)=\dim U+\dim V$