§3.1 和 §3.2 两小节主要内容是通过有向体积来定义行列式，并介绍了行列式的初等性质。需要复习的知识点如下：

(1) 介绍有向体积满足的性质。设 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^n$ 是 n 个行向量。记 $D[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ 是以 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为邻边的形成的平行六面体的有向体积，则 $D[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ 必然满足教材中的 $(D1)$, $(D2)$ (或者 $(D2')$) 和 $(D3)$. 需要注意的是：在 $(D1)$ 成立的前提下， $(D2)$ 和 $(D2')$ 是等价的。

(2) 帮助同学们复习排列的初等知识，尤其是关于相伴排列以及逆序数的有关概念。有了排列的概念，可以明确地写出有向体积 $D[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ 的表达式 , 据此就可以定义行列式。

(3) 介绍初等行（列）变换对于行列式是如何影响的。由此，提供了行列式的计算方法。

(4) 介绍一些特殊矩阵的行列式，如三角矩阵，某一行(或者某一列) 只有一个非零元的矩阵的行列式的计算方法。

习题3.2

3. 证明：对于一个 n 阶方阵 A，定义 3.6 告诉我们

$$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{e(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}.$$

我们说明 det 满足性质 $(D1)$, $(D2')$ 和 $(D3)$. 性质 $(D3)$ 是显然成立的，下面说明 $(D1)$, $(D2')$ 即可。对于 $(D1)$, 考虑矩阵

$$A = [A_1, \cdots, \lambda A_i' + \mu A_i'', \cdots, A_n],$$

则

$$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{e(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots a_{i-1,\sigma_{i-1}} (\lambda a_{i\sigma_i}' + \mu a_{i\sigma_i}'') a_{i+1,\sigma_{i+1}} \cdots a_{n\sigma_n}$$

直接拆开，就发现

$$\det[A_1, \cdots, \lambda A_i' + \mu A_i'', \cdots, A_n] = \lambda \det[A_1, \cdots, A_i', \cdots, A_n] + \mu \det[A_1, \cdots, A_i'', \cdots, A_n].$$

故 det 满足 $(D1)$.

对于性质 $(D2')$，首先我们有如下一个观察：交换 i, j 行 (不妨设 $i < j$), 我们可以把第 i 行逐行向下交换到第 j 行的位置，此时原来的第 j 行在第 $j-1$ 行，再逐次向上交换到达第 i 行。可以发现这样的操作次数是 $2(j-i)-1$ 次。因此，问题归化到证明：交换相邻的两行，行列式改变符号。我们不妨考虑交换第一行和第二行。设矩阵 $A=(a_{ij})$ 交换第一行和第二行后，变成矩阵 $B=(b_{ij})$. 于是

$$\det B=\sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{e(\sigma)}b_{1\sigma_1}b_{2\sigma_2}\cdots b_{n\sigma_n}=\sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{e(\sigma)}a_{2\sigma_1}a_{1\sigma_2}a_{3\sigma_3}\cdots a_{n\sigma_n}$$

对于 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\in P_n$, 我们考虑 $\tilde{\sigma}=\sigma_2\sigma_1\sigma_3\ldots\sigma_n$. 容易发现当 σ 跑遍 P_n 中的排列的时候， $\tilde{\sigma}$ 也跑遍 P_n 中的排列，且此时 $e(\sigma)$ 和 $e(\tilde{\sigma})$ 的奇偶性不同。于是

$$(-1)^{e(\sigma)}a_{2\sigma_1}a_{1\sigma_2}a_{3\sigma_3}\cdots a_{n\sigma_n}=-(-1)^{e(\tilde{\sigma})}a_{1\tilde{\sigma}_1}a_{2\tilde{\sigma}_2}\cdots a_{n\tilde{\sigma}_n}.$$

从而

$$\det B=-\sum_{\tilde{\sigma}\in P_n}(-1)^{e(\tilde{\sigma})}a_{1\tilde{\sigma}_1}a_{2\tilde{\sigma}_2}\cdots a_{n\tilde{\sigma}_n}=-\det A.$$

因此性质 $(D2)$ 就证明了。

6 解：问题转换成求排列 $\sigma=n\cdots 21$ 的逆序数，容易看出 $e(\sigma)_1=n-1, e(\sigma)_2=n-2\cdots$, $e(\sigma)_{n-1}=1$. 因此逆序数就是 $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. 从而正负号就是 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

7 解：利用推论 3.11 和第6题的结果，就可以知道行列式为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n,1}.$$

8 解：注意到此矩阵的第 $3,4,5$ 行的行向量一定是线性相关的，于是根据性质 $(D2)$, 此时行列式一定是 0.

10 解：(1) 根据行列式的定义，

$$\det B = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{e(\sigma)} b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{n\sigma_n}.$$

因为 $b_{ij} = 2^{j-1} a_{ij}$, 于是

$$b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{n\sigma_n} = 2^{\sigma_1 - 1 + \sigma_2 - 2 + \cdots + \sigma_n - n} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} = a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}.$$

故 $\det B = \det A$.

(2) 矩阵 B 是由 A 交换 i 和 $n+1-i$ 行得到的，这里 $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$. 当 n 是偶数时，交换了 $\frac{n}{2}$ 次。当 n 是奇数时，交换了 $\frac{n-1}{2}$ 次。于是 $\det B = (-1)^{[\frac{n}{2}]} \det A$, 这里 $[\cdot]$ 表达对一个数向下取整。

(3) 类似于 (2) 的分析， B 是 A 先两两对调行，再两两对调列得到的。但是这样操作的次数总数是偶数，故 $\det B = \det A$.