No.

Date

第二周 习题

1. 对 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的前 s 行做初等行变换，化成

$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $J_r: r\times n$ r行都是非零行 $r = \operatorname{rank} A$

再对后 l 行做初等行变换，化成

$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & J_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J_t: t\times m$ t行都是非零行 $t = \operatorname{rank} B$

最后做一系列两行互换，化成

$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 阶梯形 $\Longrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= r + t$

$= \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

2. 法一 记 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ $B = (b_1, b_2, \cdots, b_s)$ 即证 $\operatorname{rank}(A, B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

$RHS = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (由第1题) $= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \ge \operatorname{rank}(A \ B)$

$= LHS$

法二 设 $\operatorname{rank} A = m$ $\operatorname{rank} B = n$

取 $(a_1, \cdots, a_r)$ 的一个极大线性无关组 $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_m})$

$(b_1, \cdots, b_s)$ 的一个极大线性无关组 $(b_{j_1}, \cdots, b_{j_n})$

$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}, b_{j_1}, \cdots, b_{j_n})$ 的一个极大线性无关组 $\{c_k\}$ 可以表示出

$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_m})$ 和 $(b_{j_1}, \cdots, b_{j_n})$ 中任意一个向量，从而可以表示出 $(a_1, \cdots, a_r)$ 和 $(b_1, \cdots, b_s)$

中任意一个向量 $\Rightarrow$ $\{c_k\}$ (至多 $m+n$ 个向量) 可作为 $(a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s)$ 的极大线

性无关组 $\Rightarrow LHS \le m+n = RHS$

3. 易知 $s \le t$ 考虑归纳法

$s=1$ $\alpha_1 \ne 0$ $\exists c_i$ $\alpha_1 = \sum_{i=1}^{t} c_i \beta_i$ $\exists c_p \ne 0\ (1 \le p \le t)$ $\beta_p = \frac{1}{c_p}\left[\alpha_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i\ne p}}^{t} c_i \beta_i\right]$

α_1 替换 β_p 即可

假设结论已对 $s-1$ 个向量组成的集合 $S_{s-1} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}\}$ 成立

即可用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}$ 替换 T 中某 $s-1$ 个向量，得到 $T_{s-1} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \beta_{i_s}, \cdots, \beta_{i_t}\}$ $\sim T$

α_s 是 T 的线性组合，从而也是 T_{s-1} 的线性组合：

$\alpha_s = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_{s-1}\alpha_{s-1} + \lambda_s \beta_{i_s} + \cdots + \lambda_t \beta_{i_t}$

$\lambda_s, \cdots, \lambda_t$ 不全为零，否则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 线性相关，矛盾

$\exists\, p \in \{s, s+1, \cdots, t\}$ $\lambda_p \ne 0$ $\beta_{i_p} = \frac{1}{\lambda_p}\left[\alpha_s - (\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{s-1}\alpha_{s-1} + \sum_{\substack{j=s \\ j\ne p}}^{t} \lambda_j \beta_{i_j})\right]$

α_s 替换 T_{s-1} 中的 β_{i_p}，得到向量组 T_s，$T_s \sim T_{s-1} \sim T$

由数学归纳法，命题得证

KOKUYO

4. (1) $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \cdots, \tilde{\alpha}_{i_t}$ 都是 $\mathbb{R}^r$ 中的向量（极大线性无关组）

这些列向量张成的空间是 $\mathbb{R}^r$ 的子空间，于是 $\tilde{A}$ 的列秩 $t \le r$

(2) 任意的 $\tilde{\alpha}_j$ 都可以写成 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \cdots, \tilde{\alpha}_{i_t}$ 的线性组合

（列向量）$\tilde{\alpha}_j = \alpha_{1j}\tilde{\alpha}_{i_1} + \alpha_{2j}\tilde{\alpha}_{i_2} + \cdots + \alpha_{tj}\tilde{\alpha}_{i_t}$

（固定第 i_p 行）$a_{i_p j} = \alpha_{1j} a_{i_p j_1} + \alpha_{2j} a_{i_p j_2} + \cdots + \alpha_{tj} a_{i_p j_t}$ $(1 \le p \le r)$

任意的 $\vec{A_l}$ 都可以写成 $\vec{A_{i_1}}, \vec{A_{i_2}}, \cdots, \vec{A_{i_r}}$ 的线性组合

（行向量）$\vec{A_l} = c_1\vec{A_{i_1}} + c_2\vec{A_{i_2}} + \cdots + c_r\vec{A_{i_r}}$

（固定第 j 列）$a_{lj} = c_{l1} a_{i_1 j} + c_{l2} a_{i_2 j} + \cdots + c_{lr} a_{i_r j}$ $(1 \le j \le n)$

$$\Rightarrow a_{lj} = \sum_{p=1}^{r} c_{lp} a_{i_p j} = \sum_{p=1}^{r} c_{lp}\left(\sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj} a_{i_p j_q}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj}\left(\sum_{p=1}^{r} c_{lp} a_{i_p j_q}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj} a_{l j_q}$$

故 $\vec{a_j} = \sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj} \vec{a_{j_q}}$

即 A 的任何一个列向量 $\vec{a_j}$ 都是 $\vec{a_{j_1}}, \cdots, \vec{a_{j_t}}$ 的线性组合

故 A 的列秩 $s \le t$ 从而 $s \le t \le r$

(3) 对 A^T 做同样处理，可得 $r \le s$

$s \le r, r \le s \Rightarrow r = s$