# 线性代数习题课 7

2025.11.11

# 子空间

$n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的下列结论成立

1. 设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 为 $r$ 维子空间，则 $V$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关
2. 设 $V$ 为 $r$ 维子空间，则 $V$ 中任意 $r$ 个线性无关的向量为 $V$ 的一组基
3. 设 $U$ 与 $V$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 $U \subseteq V$，则 $\dim U \leq \dim V$
4. 设 $U$ 与 $V$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 $U \subseteq V$，若 $\dim U = \dim V$，则 $U = V$

# 子空间的和

假设 $V_1,\cdots,V_m$ 是 $V$ 的子空间，$V_1,\cdots,V_m$ 的和是由 $V_1,\cdots,V_m$ 中元素所有可能的和所构成的集合，记作 $V_1+\cdots+V_m$ . 更确切地说，

$$V_1+\cdots+V_m=\{v_1+\cdots+v_m : v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m\}$$

假设 $V_1,\cdots,V_m$ 是 $V$ 的子空间，那么 $V_1+\cdots+V_m$ 是最小的包含 $V_1,\cdots,V_m$ 的子空间

# 子空间的直和

设 $V_1, \cdots, V_m$ 是 $V$ 的子空间

- 如果 $V_1 + \cdots + V_m$ 中的每个元素都能用 $v_1 + \cdots + v_m$（其中各 $v_k \in V_k$）这种形式唯一地表示出来，则称子空间之和 $V_1 + \cdots + V_m$ 为**直和**
- 如果 $V_1 + \cdots + V_m$ 是直和，那么用 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 来表示 $V_1 + \cdots + V_m$

假定 $V_1, \cdots, V_m$ 是 $V$ 的子空间，那么 $V_1 + \cdots + V_m$ 是直和，当且仅当用 $v_1 + \cdots + v_m$（其中各 $v_k \in V_k$）表示 0 的唯一方式是将每个 $v_k$ 都取 0

因此，如果子空间 $V_1, \cdots, V_k$ 的和为直和，我们也称 $V_1, \cdots, V_k$ 线性无关

# 子空间的和与直和

- 定理：设 $U$ 和 $V$ 是的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$
- 定理：若子空间 $U_1, \cdots, U_k$ 线性无关，则 $\dim(U_1 + \cdots + U_k) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$
- 定理：假定 $U$ 和 $W$ 是 $V$ 的子空间，那么 $U+W$ 是直和 $\iff U \cap W = \{0\}$

> 上面（最后一条）的定理只适用于两个子空间的情况，当考虑有两个以上子空间的直和的问题时，仅仅检验每一对子空间只交于0处是不够的

# 点积 $\to$ 内积

以下部分 $u, v$ 均表示内积空间中的向量

**柯西-施瓦茨不等式：** $\left|\langle u, v\rangle\right| \leq \|u\| \, \|v\|$，当且仅当 $u, v$ 成标量倍数关系时，上述不等式取得等号

三角不等式：$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$，该不等式取得等号，当且仅当 $u, v$ 中任意一者是另一者的非负实数倍

毕达哥拉斯定理：若 $u$ 和 $v$ 是正交的，则 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

平行四边形等式：$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

# 标准正交基

格拉姆–施密特过程：设 $v_1, \cdots, v_m$ 是内积空间 $V$ 中的线性无关向量组。令 $f_1 = v_1$，对 $k = 2, \cdots, m$，依次定义 $f_k$ 为

$$f_k = v_k - \frac{\langle v_k, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \cdots - \frac{\langle v_k, f_{k-1} \rangle}{\|f_{k-1}\|^2} f_{k-1}$$

对每个 $k = 1, \cdots, m$，令 $e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$，那么 $e_1, \cdots, e_m$ 是 $V$ 中的标准正交向量组，并且对每个 $k = 1, \cdots, m$ 满足 $\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k) = \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_k)$

推论：设 $A \in \mathbb{R}^{n\times s}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = s$ . 则存在 $B \in \mathbb{R}^{n\times s}$ 与 $s$ 阶可逆上三角矩阵 $C$ ，使得 $A = BC$ ，其中 $B$ 的列向量都是相互正交的单位向量

# 复习

**优先采用适合自己的复习方案与复习节奏!**

参考复习顺序:

1. 刷模拟卷，把握题型与难度
2. 教材基本的定义、定理、命题（包括证明过程)、例子
   可以先浏览我的slides，明确自己掌握得不太好的板块以找准复习的重点
3. 作业题与补充习题
4. 其他资料（如丘老的高等代数)，注意不要本末倒置

**不要陷在复杂的证明或计算中，注重定义、定理的理解，基本定理的证明思想，以及计算过程的准确性**

# 从容落笔，得偿所愿！