习题课 4

0 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{372}\begin{pmatrix} 98 & 50 & 84 & 78 \\ -8 & -80 & -60 & 24 \\ 14 & -46 & 12 & -42 \\ -65 & 1 & 24 & 9 \end{pmatrix}$

1. $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank}(AB)$

法一 只需证 $n + \operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

$LHS = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{②+A\cdot①} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\cdot(-B)} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\cdot(-I_m)} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(①,②)} \begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 则 $LHS = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} A = LHS$

法二 设 $\operatorname{rank} A = r$ 则 $\exists$ 可逆矩阵 P, Q s.t. $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$

(了解即可) $AB = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QB$

令 $QB = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \to r\text{行} \\ \to n-r\text{行} \end{matrix}$ 则 $AB = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} H_1$

$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} QB = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} H_1 \geq \operatorname{rank} B - (n-r)$

$\Longrightarrow \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} H_1 \geq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} A - n$

法三 见下一页

2. 法一 由 $\operatorname{rank}(\tilde{A}+\tilde{B}) \leq \operatorname{rank}\tilde{A} + \operatorname{rank}\tilde{B}$

令 $\tilde{A} = A(B-I)$ $\tilde{B} = A-I$ 则 $\operatorname{rank}(AB-I) \leq \operatorname{rank}(A(B-I)) + \operatorname{rank}(A-I)$

$\leq \operatorname{rank}(B-I) + \operatorname{rank}(A-I)$

法二 $RHS = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-I & 0 \\ 0 & B-I \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A-I & 0 \\ 0 & B-I \end{pmatrix} \xrightarrow{①+I\cdot②} \begin{pmatrix} A-I & B-I \\ 0 & B-I \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\cdot B} \begin{pmatrix} A-I & AB-I \\ 0 & B-I \end{pmatrix}$

则 $RHS = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-I & AB-I \\ 0 & B-I \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A-I) + \operatorname{rank}(B-I) = LHS$

3. 取非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一组解 $X_1, \cdots, X_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基

则 $n-1$ 个向量 $X_2 - X_1, \cdots, X_n - X_1$ 都是 $AX=0$ 的解

$\lambda_2(X_2-X_1) + \cdots + \lambda_n(X_n - X_1) = 0$

$-(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

故 $X_2 - X_1, \cdots, X_n - X_1$ 线性无关

$AX=0$ 解空间维数：$n - \operatorname{rank} A \geq n-1$ $\operatorname{rank} A \leq 1$

若 $\operatorname{rank} A = 0$，则 $A = 0$，$AX=b$ 无解，矛盾 故 $\operatorname{rank} A = 1$

$A\in\mathbb{R}^{s\times n}$

4. (1) 欲证 $\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}A$

只需证 $(A^TA)X=0$ 与 $AX=0$ 的解空间维数相同

(齐次线性方程组解空间采用记号 null)

又由于 $\operatorname{null}A\subseteq\operatorname{null}(A^TA)$ $(AX=0\Rightarrow(A^TA)X=A^T(AX)=0)$

则只需证 $\operatorname{null}A=\operatorname{null}(A^TA)$ (即证 $\operatorname{null}A\supseteq\operatorname{null}(A^TA)$)

$(A^TA)x=0\Rightarrow x^TA^TAX=0\Rightarrow(Ax)^TAX=0$

设 $AX=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$ $c_1,c_2,\cdots,c_s\in\mathbb{R}$

则 $(AX)^TAX=0\Leftrightarrow c_1^2+c_2^2+\cdots+c_s^2=0\Leftrightarrow c_1=c_2=\cdots=c_s=0$

故 $Ax=0$ $\operatorname{null}A\supseteq\operatorname{null}(A^TA)$

综上，$\operatorname{null}A=\operatorname{null}(A^TA)$，$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A^TA)$

$\Rightarrow\operatorname{rank}(AA^T)=\operatorname{rank}((A^T)^TA^T)=\operatorname{rank}A^T=\operatorname{rank}A$

(2) $A^TAx=A^T\beta$ 一定有解 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}(A^TA,A^T\beta)$

$LHS\le RHS$ 显然、

$RHS=\operatorname{rank}(A^T(A,\beta))\le\operatorname{rank}A^T=\operatorname{rank}(A^TA)=LHS$

故 $LHS=RHS$

5. 见下图

附：$\operatorname{rank}\overset{s\times n}{A}+\operatorname{rank}\overset{n\times m}{B}-n\le\operatorname{rank}(\overset{s\times m}{AB})$

法二：若 $A=0$ 或 $B=0$ 命题显然成立

若 $A\neq0$ 且 $B\neq0$，设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ (列向量组)

设 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m)$ 的一个极大线性无关组为 $(A\beta_{i_1},A\beta_{i_2},\cdots,A\beta_{i_t})$

$(t=\operatorname{rank}(AB))$

$A\beta_j=b_1A\beta_{i_1}+b_2A\beta_{i_2}+\cdots+b_tA\beta_{i_t}=A(b_1\beta_{i_1}+b_2\beta_{i_2}+\cdots+b_t\beta_{i_t})$

$A(\beta_j-(b_1\beta_{i_1}+\cdots+b_t\beta_{i_t}))=0$ $\forall j\in\{1,2,\cdots,m\}$

设 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ $(r=\operatorname{rank}A)$

则 $\beta_j-(b_1\beta_{i_1}+\cdots+b_t\beta_{i_t})=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$

$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 可由 $\{\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t},X_1,\cdots,X_{n-r}\}$ 线性表出

$\Rightarrow\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}\le\operatorname{rank}\{\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t},X_1,\cdots,X_{n-r}\}$

$\le t+n-r=\operatorname{rank}(AB)+n-\operatorname{rank}A$

练习 4.14

设 A 是 n 阶方阵，证明：

(1) 如果 $rank\ A^m = rank\ A^{m+1}$ 对某个正整数 m 成立，则 $rank\ A^m = rank\ A^{m+k}$ 对所有的正整数 k 成立.

(2) $rank\ A^n = rank\ A^{n+k}$ 对所有的正整数 k 成立. ♣

证明 对每个正整数 k，记 V_k 为齐次线性方程组 $A^kX = \mathbf{0}$ 的解空间. 则 $dim\ V_k = n - rank\ A^k$，于是 $rank\ A^m = rank\ A^{m+k} \Leftrightarrow dim\ V_m = \dim V_{m+k}$.

对任意正整数 k 与 s 有：

$$X \in V_k \Rightarrow A^kX = 0 \Rightarrow A^{k+s}X = A^s(A^kX) = 0 \Rightarrow X \in V_{k+s}$$

这证明了 $V_k \subseteq V_{k+s}$.

(1) 现在我们证明 $V_{m+k} \subseteq V_m$，因为如果这个结论成立，立马有：

$$V_m = V_{m+k} \Rightarrow rank\ A^m = rank\ A^{m+k}$$

条件是 $dim\ V_m = dim\ V_{m+1}$，结合 $V_m \subseteq V_{m+1}$ 就有 $V_m = V_{m+1}$.

$$\begin{aligned} X \in V_{m+k} &\Rightarrow A^{m+k}X = A^{m+1}(A^{k-1}X) = 0 \Rightarrow A^{k-1}X \in V_{m+1} = V_m \\ &\Rightarrow A^{m+k-1}X = A^m(A^{k-1}X) = 0 \Rightarrow X \in V_{m+k-1} \end{aligned}$$

这证明了 $V_{m+k} \in V_{m+k-1}$. 从而 $V_{m+k} = V_{m+k-1}$ 对任意正整数 k 成立. 于是有：

$$V_{m+k} = V_{m+k-1} = V_{m+k-2} = \cdots = V_{m+1} = V_m \Rightarrow rank\ A^{m+k} = rank\ A^m$$

(2) 由于对任意正整数 k,s 都有 $V_k \subseteq V_{k+s}$，于是 $dim\ V_k = n - rank\ A^k \le dim\ V_{k+s} = n - rank\ A^{k+s}$，从而 $rank\ A^k \ge rank\ A^{k+s}$. 如果存在 $m \le n$ 使得 $rank\ A^m = rank\ A^{m+1}$. 那么由 (1) 的证明 $rank\ A^m = rank\ A^{m+k}$ 对任意的正整数 k 成立，从而有

$$rank\ A^{n+k} = rank\ A^{m+(n-m+k)} = rank\ A^m = rank\ A^{m+(n-m)} = rank\ A^n$$

(*)如果不存在这样的 m，这说明对所有的 $m \le n$ 都有 $rank\ A^m \ne rank\ A^{m+1}$，从而 $rank\ A^m > rank\ A^{m+1}$，进而 $rank\ A^m \ge rank\ A^{m+1} + 1$. 由数学归纳法可知 $m + k \le n + 1$ 时 $rank\ A^m \ge rank\ A^{m+k} + k$.

取 $m = 1, k = n$，$rank\ A \ge rank\ A^{n+1} + n \ge n$. 从而一定有 $rank\ A = n$，A 可逆，但这样 A^2 可逆，$rank\ A^2 = rank\ A$ 矛盾. 这证明了 (*) 不可能发生，于是原命题得证.