

线性代数第一次小测

1. (1) 设 λ 是一个实数, A 是如下的 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

计算 A^k , 其中 k 是任意的正整数。

(2) 对于 $\lambda = 1$, 求矩阵 A 的逆矩阵。

2. (1) 设 A 是 $m \times r$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, C 是 $m \times n$ 矩阵。证明:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

(2) 如果你还有时间, 能不能举一些例子, 说明 (1) 中不等式的不等号可以满足等号成立, 也可以是严格的不等号。