线性代数第二次小测参考解答

1. 设 $\mathbb{R}^3$ 上的双线性型 $f(x,y)$ 在标准基下有如下的形式

$$f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

令 $q(x)$ 是由双线性型 $f(x,y)$ 给出的二次型，求出 $q(x)$ 的一个典范基和相应的典范式，并由此写出 $q(x)$ 的符号差。

解：首先, 因为 $q(x) = f(x,x)$, 那么

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

由此知道二次型相应的矩阵是

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

对 F 考虑如下的对合

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

再考虑

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

于是，我们令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而

$$
{}^tAFA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

矩阵 A 的列向量就是一个典范基，在这个典范基底下，二次型

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2.$$

正负惯性指数分别是 2 和 1, 因此符号差是 $(2, 1)$.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A 的一个对角形和相应的对角化变换矩阵；即求 T 和 D, 使得 $T^{-1}AT = D$ 是一个对角矩阵。

解：首先，计算特征多项式，得到

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t+4 & 0 & -6 \\ 3 & t-2 & -3 \\ 3 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2.$$

因此，特征值是 -1 和 2. 当 $\lambda = -1$ 时，考虑方程 $(A+E)X = 0$, 取方程的一个非零解为 $X_1 = [2,1,1]$. 当 $\lambda = 2$ 时，考虑方程 $(A-2E)X = 0$, 取方程的一个基础解系为 $X_2 = [0,1,0]$, $X_3 = [1,0,1]$. 因此，我们令

$$T = (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $T^{-1}AT = D = \mathrm{diag}(-1,2,2)$.