线性代数期中练习题（二）参考解答

1. 求出如下齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

解：把方程的系数写成矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$

做行变换 $F_{2,1}(-3)$, $F_{3,1}(-4)$, $F_{4,1}(-3)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix}$$

做行变换 $F_{3,2}(-3)$, $F_{4,2}(2)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，主变量是 x_1, x_2, 自由变量 x_3, x_4. 令 $x_3=1, x_4=0$, 得到 $\xi_1=(8,-6,1,0)$. 令 $x_3=0, x_4=1$, 得到 $\xi_2=(-7,5,0,1)$. 因此，ξ_1, ξ_2 是基础解系。

2. 设

$$X=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0(i=1,2,\ldots,n)$. 求 X^{-1}.

解：对于分块矩阵 $X=\begin{bmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{bmatrix}$, 若$A,C$可逆，$X^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.因此,

$$X^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

3. 设 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集。证明: S 是线性无关的当且仅当 $\mathbf{v}_1\neq 0$ 且对任意的 $2\leq k\leq m$, 有 $\mathbf{v}_k\notin\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_{k-1}\rangle$.

证明：“$\Longrightarrow$”: 假设 S 线性无关。首先必然有 $\mathbf{v}_1\neq 0$。其次固定 k 满足 $2\leq k\leq n$。若反设 $\mathbf{v}_k\in\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}\}$，则存在标量 $a_1,\ldots,a_{k-1}$ 使得

$$\mathbf{v}_k=a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}.$$

两边移项得

$$(-a_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(-a_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}+1\cdot\mathbf{v}_k=\mathbf{0},$$

其中系数不全为零（第 k 个系数为 1），这使得 S 线性相关，与假设矛盾。故必须有 $\mathbf{v}_k\notin\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}\}$。

“$\Longleftarrow$”: 反过来，假设条件 $\mathbf{v}_1\neq 0$ 且对每个 $k\geq 2$ 都有 $\mathbf{v}_k\notin\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}\}$。要证明 S 线性无关，取任意线性组合

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}.$$

我们将依次证明所有 $c_i=0$。由于 $\mathbf{v}_n\notin\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}\}$，若 $c_n\neq 0$ 则可解出

$$\mathbf{v}_n=-\frac{c_1}{c_n}\mathbf{v}_1-\cdots-\frac{c_{n-1}}{c_n}\mathbf{v}_{n-1},$$

即 $\mathbf{v}_n\in\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}\}$，这与假设矛盾。因此 $c_n=0$。把 $c_n=0$ 代入原式得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{0}.$$

同样应用对 $\mathbf{v}_{n-1}$ 的假设可推出 $c_{n-1}=0$。重复此过程，依次得到 $c_{n-2}=0,\ldots,c_2=0$。最后剩下 $c_1\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$。由 $\mathbf{v}_1\neq 0$ 可知 $c_1=0$。因此所有系数均为零，说明 S 线性无关。

4. 设 A 是一个 n 阶方阵，且各项的元素都是整数，满足 $\det A = 1$。如果线性方程组 $AX = B$ 的常数项 $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ 也是整数，请证明方程组 $AX = B$ 的解都是整数。

证明: 由克拉默法则直接得到。

5. 给出映射 $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longrightarrow (x+y, x-y, 2x+3y)$.

(i) 将 φ 表示为 $\varphi_A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ 的形式，其中 A 为 3×2 阶矩阵，并证明 φ 是线性映射.

(ii) φ 是否为单射? 证明你的结论.

解: (i) 矩阵 A 的第一列是 $\varphi(1,0)=[1,1,2]$. 矩阵 A 的第二列是 $\varphi(0,1)=[1,-1,3]$. 于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

显然，φ 是线性映射.

(ii) 我们知道 $\dim\ker\varphi + \dim \mathrm{im}\varphi = 2$, 而 $\dim \mathrm{im}\varphi = \mathrm{rank}A = 2$, 因此 $\dim\ker\varphi = 0$. 从而 φ 是单射。

6. 计算如下的 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解: 对第一行展开，有 $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. 从而

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}.$$

另一方面，$D_1 = 2$, $D_2 = 3$, 因此 $D_n = n + 1$.

7. 设 A 是一个 n 阶方阵, 记 $A^{\vee}$ 是 A 的伴随矩阵。证明： $A^{\vee}$ 是零矩阵当且仅当 $\text{rank}A < n-1$.

证明: 我们注意到 $\text{rank}A < n-1$ 当且仅当 A 的任意 $n-1$ 阶子式都是 0, 这和 $A^{\vee}$ 是零矩阵是等价的。命题得证。

8. (i) 证明：如果 A 对称（斜对称），则 A^{-1} 也对称（斜对称）.
(ii) 证明：不存在奇数阶的可逆斜对称矩阵.

证明：(a) 首先我们证明 ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$, 对等式 $AA^{-1} = E$ 两边取转置，得到 ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^tE = E$, 据此得到 ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$. 如果 A 是对称的，即 ${}^tA = A$. 则

$$
{}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1},
$$

即 A 也是对称的。对于斜对称矩阵的证明是类似的。

(b) 若A是奇数阶（设其阶数为n）的可逆斜对称矩阵，即${}^tA = -A$. 两边取行列式，得

$$
det\left({}^tA\right) = det\,(-A) = (-1)^n det\,A = -det\,A.
$$

而$det\,{}^tA = det\,A$，从而$det\,A = -det\,A$，即知$det\,A = 0$，但这与A可逆是矛盾的.

9. 判断下列命题是否正确，并简要说明理由。

(a) 如果 A, B 是两个 $n \times n$ 矩阵，则 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$。

(b) 如果 A, B, C 是 $n \times n$ 矩阵， $A \neq O$ 且 $AB = AC$，则必有 $B = C$。

(c) 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A，其零空间 $\mathrm{Ker}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。

(d) 设 A, B, C, D 均为 $n \times n$ 矩阵，则分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的行列式为 $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$。

(e) 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A，都有 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T A)$。

解: (a) **错误**。行列式对于矩阵加法不是线性的。反例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。则 $\det(A) = 0, \det(B) = 0$，所以 $\det(A) + \det(B) = 0$。但是 $A + B = I$，其行列式 $\det(A+B) = 1$。

(b)**错误**。矩阵乘法的消去律不成立，除非 A 是可逆矩阵。反例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$。这里 $A \neq O$ 且 $B \neq C$。但是 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，且 $AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。所以 $AB = AC$，但 $B \neq C$。

(c) **错误**。A 是一个 $m \times n$ 矩阵，它定义了一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射。其零空间 $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ 是定义域 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，而不是到达域 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

(d) **错误**。这个公式是对 2×2 矩阵行列式公式的错误推广。一个简单的反例是 $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。可以算出 $\det(M) = 9$。但分块来看，$A = 2I, B = I, C = I, D = 2I$。$\det(A) = 4, \det(B) = 1, \det(C) = 1, \det(D) = 4$。$\det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 15 \neq 9$。

(e) **正确**。证明这个结论的关键是证明 $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^TA)$。首先，若 $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$，则 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，那么 $A^T(A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A^TA)$。其次，若 $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A^TA)$，则 $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$。两边左乘 $\mathbf{x}^T$ 得 $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = 0$，即 $(A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = 0$。这表示向量 $A\mathbf{x}$ 的长度的平方为 0，因此 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$。因为两个核空间相等，所以它们的维数也相等。根据秩-零度定理，$\mathrm{rank}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A))$ 且 $\mathrm{rank}(A^TA) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A^TA))$。因此，$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^TA)$。