线性代数习题课 4

2025.10.21

补充材料

例 2.6.29 (**雅各布森**[①]**引理** (Jacobson lemma)) 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$, $I = I_n$. 如果 $I - AB \in \mathrm{GL}_n(F)$, 证明 $I - BA \in \mathrm{GL}_n(F)$, 并求 $(I - BA)^{-1}$.

证明 只要找一个 $X \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 $(I - BA)X = I$. 事实上,

$$\begin{aligned} I &= I - BA + BA \\ &= I - BA + BIA \\ &= I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + (B - BAB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \\ &= (I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A), \end{aligned}$$

所以 $I - BA \in \mathrm{GL}_n(F)$, 并且 $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$. □

注记 2.6.30 读者可能会问：怎么想到这个证明？为什么叫雅各布森引理？

(1) 大家知道, $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$. 一般情况下,

$$1 - x^n = (1 + x + \cdots + x^{n-1})(1 - x).$$

若 $|x| < 1$, 则 $(1 - x)^{-1} = \dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$.

现在我们假装不知道 $(1 - x)^{-1}$ 的上述表达式需要条件, 则 $(I - BA)^{-1}$ 可以形式地展开: $(I - BA)^{-1} = I + BA + BABA + BABABA + BABABABA + \cdots$, 从而 (继续 "假装" 下去),

① Nathan Jacobson, 1910—1999, 美国数学家.

$$\begin{aligned} (I - BA)^{-1} &= I + B(I + AB + ABAB + ABABAB + \cdots)A \\ &= I + B(I - AB)^{-1}A. \end{aligned}$$

现在我们不再 "假装"! 尽管上面所得结果 "不合法", 但是, 我们仍然可以验证一下这个结果是否正确. 事实上,

$$\begin{aligned} &(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) \\ &= I - BA + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + (B - BAB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + BA \\ &= I. \end{aligned}$$

由此可见 $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$. 后面这个证明无懈可击!

哈尔莫斯[①]把前面这个技巧归功于雅各布森, 尽管这个技巧并不能直接用来证明这个引理. 有兴趣的读者可参阅文献 [37, 41].

(2) 卡普兰斯基[②]曾经这样评论: 利用这个技巧, 即使你被扔到沙漠岛上, 所有的书和文章都丢了, 你仍然可以成功地发现公式. 为了纪念卡普兰斯基这个风趣幽默的评论, 有时将 $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$ 称为 "**沙漠岛公式** (Desert Island Formula)", 详见文献 [42, 43].

(3) 前面的内容告诉我们, 有时 "不靠谱" 的想法也许会带来 "转机" 或 "突破".

初等矩阵

第一类 $F_{i,j}$：将单位矩阵的第 i 行与第 j 行互换（将单位矩阵的第 i 列与第 j 列互换）
第二类 $F_i(\lambda)$：将单位矩阵第 i 行乘以非零数 λ（将单位矩阵第 i 列乘以非零数 λ）
第三类 $F_{i,j}(\lambda)$：将单位矩阵第 j 行的 λ 倍加到第 i 行（将单位矩阵第 i 列的 λ 倍加到第 j 列）

上述三类方阵称为**初等矩阵**。每一类初等矩阵与一类初等变换相对应

对矩阵作初等行变换，等价于在矩阵左边乘上一个相应的初等矩阵；对矩阵作初等列变换，等价于在矩阵右边乘上一个相应的初等矩阵

> **左行右列**法则

初等矩阵

- F_{ij} 为对称矩阵，且 $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$
- $F_i(\lambda)$ 为对角矩阵，且 $F_i(\lambda)^{-1} = F_i(\lambda^{-1})$
- $F_{ij}(\lambda)$ 为三角矩阵，且 $F_{ij}(\lambda)^{-1} = F_{ij}(-\lambda)$

对任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ，存在一系列 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 和 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ ，使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

对任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ，存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q ，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

上面非负整数 $r = \operatorname{rank}(A)$

矩阵的分块

类似一般的初等矩阵，引入三种**分块初等矩阵**（对应分块初等变换，左行右列法则依然适用）：

$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}$ 表示第一行左乘可逆矩阵 P，或者第一列右乘可逆矩阵 P

$\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}$ 表示第一行与第二行（或者第一列与第二列）互换

$\begin{bmatrix} I & O \\ P & I \end{bmatrix}$ 表示把第一行左乘矩阵 P（不一定可逆）加到第二行，或者第二列右乘矩阵 P 加到第一列

矩阵的分块

分块三角矩阵的逆矩阵

$A \in \mathbb{R}^{m\times m},\ D \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times n},\ C \in \mathbb{R}^{n\times m}$

分块上三角：$U = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ 分块下三角：$L = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}$

若 A 与 D 可逆，则

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

U 可逆 $\iff$ A 与 D 均可逆

L 可逆 $\iff$ A 与 D 均可逆

矩阵的逆

设 A 是 n 阶方阵，则以下陈述等价：

1. A 是可逆的
2. A 是非退化（满秩）的
3. A 的行向量/列向量线性无关
4. A 的行空间/列空间等于 $\mathbb{R}^n$
5. 齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 只有平凡解
6. A 的零空间为 $\mathbf{0}$
7. A 的简化阶梯形为 I_n
8. 一般线性方程组 $Ax = \mathbf{b}$ 有且只有唯一解
9. A 可以分解为一系列初等矩阵的乘积

逆矩阵的计算

同时对 A 与 I 施行相同的初等行变换；当把 A 化为 I 时，I 即化为 A^{-1}：

$$(A \mid I) \xRightarrow{P_1} (P_1 A \mid P_1 I) \xRightarrow{P_2} \cdots \xRightarrow{P_k} \big(P_k \cdots P_2 P_1 A \,\big|\, P_k \cdots P_2 P_1 I\big) = (I \mid A^{-1})$$

沙漠岛公式：设 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的实矩阵，若 $I_n - AB$ 可逆，则 $I_m - BA$ 也可逆，且 $(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$

逆矩阵的计算

判断下面的矩阵是否可逆，如果可逆，用初等变换法计算其逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

线性方程组的解空间

线性映射 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ，其核 $\ker\varphi = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(X) = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，其像集 $\operatorname{im}\varphi = \{\varphi(X) \mid X \in \mathbb{R}^n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的线性子空间

$$\dim(\operatorname{im}\varphi) = \operatorname{rank}(A) \quad \dim(\ker\varphi) = n - \operatorname{rank}(A)$$

$$\dim(\operatorname{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = n$$

设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，定义线性映射

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad X \mapsto AX$$

- 线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间 S 就是 φ_A 的核 $\ker\varphi_A$
- 矩阵 A 的列空间 $V_c = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ 就是 φ_A 的像集 $\operatorname{im}\varphi_A$

$$\dim S + \operatorname{rank} A = \dim(\ker(\varphi_A)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi_A)) = n$$

习题

证明西尔维斯特秩不等式：设 A, B 分别是 $s \times n, n \times m$ 矩阵，则 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \leq \operatorname{rank}(AB)$

习题

设 A, B 为同阶方阵，证明：$\operatorname{rank}(AB - I) \leq \operatorname{rank}(A - I) + \operatorname{rank}(B - I)$

习题

已知 $\mathbb{R}$ 上 n 元非齐次线性方程组的解生成 $\mathbb{R}^n$，求该方程组系数矩阵的秩

习题

设 A 是实数域上的 $s \times n$ 矩阵，证明：

1. $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{rank}(AA^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(A)$
2. 对任意 $\beta \in \mathbb{R}^s$ ，线性方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}\beta$ 一定有解

习题

设 A 是 n 阶方阵，证明：

1. 如果 $\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^{m+1})$ 对某个正整数 m 成立，则 $\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^{m+k})$ 对所有正整数 k 成立
2. $\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A^{n+k})$ 对所有正整数 k 成立