习题课 10

1. $A^2=I$ 设λ为A的特征值，则λ^2为A^2的特征值 $\Rightarrow \lambda^2=1$ $\lambda=\pm1$

$\mathbb{R}^n_1=\ker(A-I)$ $\mathbb{R}^n_{-1}=\ker(A+I)$

欲证 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n_1\oplus\mathbb{R}^n_{-1}$，即证 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n_1+\mathbb{R}^n_{-1}$

只需证 $\forall v\in\mathbb{R}^n$，$\exists v_1\in\mathbb{R}^n_1$ $(Av_1=v_1)$，$v_2\in\mathbb{R}^n_{-1}$ $(Av_2=-v_2)$ s.t. $v=v_1+v_2$

结合$A^2=I$，构造 $v_1=\frac{1}{2}(v+Av)$，$v_2=\frac{1}{2}(v-Av)$

有 $v=v_1+v_2$，$v_1\in\mathbb{R}^n_1$ $(Av_1=v_1)$，$v_2\in\mathbb{R}^n_{-1}$ $(Av_2=-v_2)$

故 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n_1\oplus\mathbb{R}^n_{-1}$，$A$可对角化为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}$ $(0\le r\le n)$

2. (1) 考虑AB与BA的特征多项式

$\lambda\neq0$，$|\lambda I_s-AB|=|\lambda(I_s-\frac{1}{\lambda}AB)|=\lambda^s|I_s-(\frac{1}{\lambda}A)B|=\lambda^s|I_n-B(\frac{1}{\lambda}A)|=\frac{\lambda^s}{\lambda^n}|\lambda I_n-BA|$

则$\lambda_0\neq0$是AB的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0是BA的特征值

设$\lambda_0\neq0$是AB的l重特征值，将AB的特征多项式因式分解

$|\lambda I_s-AB|=(\lambda-\lambda_0)^l\cdot P(\lambda)$ $P(\lambda)$是关于λ的$s-l$次多项式且不含因式$(\lambda-\lambda_0)$

$|\lambda I_n-BA|=\frac{\lambda^n}{\lambda^s}|\lambda I_s-AB|=\frac{\lambda^n}{\lambda^s}(\lambda-\lambda_0)^lP(\lambda)\Rightarrow\lambda_0$是$BA$的$l$重特征值

同理，若$\lambda_0\neq0$是BA的l重特征值，则λ_0是AB的l重特征值

(2) $(AB)\alpha=\lambda_0\alpha$ $(\lambda_0\neq0$ $\alpha\neq\vec{0})$

$\Rightarrow(BA)(B\alpha)=\lambda_0(B\alpha)$

假设$B\alpha=\vec{0}$，则$\lambda_0\alpha=(AB)\alpha=A(B\alpha)=\vec{0}$，与$\lambda_0\neq0$，$\alpha\neq\vec{0}$矛盾

故$B\alpha\neq\vec{0}$，$B\alpha$是BA的属于λ_0的特征向量

3. (1) 易证

(2) $\mathcal{A}^2(X)=(X^T)^T=X\Rightarrow\mathcal{A}^2=\mathcal{E}$ $\mathcal{A}$的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$

$\lambda_1=1$ $\mathcal{A}(X)=X=X^T$ X为对称矩阵

$\lambda_2=-1$ $\mathcal{A}(X)=-X=X^T$ X为斜对称矩阵

证明$\mathcal{A}$可对角化有两种方法

法一 考虑特征子空间的直和

$\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$X$可以唯一地分解为一个对称矩阵和斜对称矩阵的和：

$X=\frac{1}{2}(X+X^T)+\frac{1}{2}(X-X^T)$ 故 $\mathbb{R}^{n\times n}=\mathbb{R}^{n\times n}_1\oplus\mathbb{R}^{n\times n}_{-1}$，$\mathcal{A}$可对角化

法二 考虑线性无关的特征向量

记E_{ij}为只有(i,j)元为1，其余元素全为0的基本矩阵

E_{ii} $(1\le i\le n)$，$X_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$ $(i<j)$ 这$\frac{n(n+1)}{2}$个矩阵为$\lambda_1=1$对应的特征向量

$Y_{ij}=E_{ij}-E_{ji}\ (i<j)$ 这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个矩阵为 $\lambda_2=-1$ 对应的特征向量

而 E_{ii}, X_{ij}, Y_{ij} 这 n^2 个特征向量线性无关，故 A 可对角化

($\sum\limits_i a_i E_{ii}+\sum\limits_{i<j} b_{ij}X_{ij}+\sum\limits_{i<j} c_{ij}Y_{ij}=0$ (i,i)位置：$a_k=0 \quad 1\le k\le n$

(i,j)位置：$b_{ij}+c_{ij}=0$ (j,i)位置：$b_{ij}-c_{ij}=0 \Rightarrow b_{ij}=c_{ij}=0 \quad 1\le i<j\le n$)

4. 见后

5. 见后

练习 7.6 (P216 6.42)

设 V 为 n 维线性空间，$\mathcal{A}: V \to V$ 为线性变换. 若存在 $\alpha \in V$，使得 $\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) \neq 0$，但是 $\mathcal{A}^{n}(\alpha) = 0$，证明：$\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证明 当我们记 $\beta_i = \mathcal{A}^{n-i}(\alpha)$ $(1 \leq i \leq n)$ 时，会发现我们有 $\mathcal{A}(\beta_{i+1}) = \beta_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ 和 $\mathcal{A}(\beta_1) = 0$.

所以我们只需要证明 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \cdots, \mathcal{A}^{n-1}(\alpha)$ 是 V 的一组基，也就是他们线性无关.

首先设

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{A}^{i-1}(\alpha) = 0 \tag{$\star$}$$

两侧作 $n-1$ 次 $\mathcal{A}$ 变换：

$$a_1 \mathcal{A}^{n-1}(\alpha) + a_2 \mathcal{A}^{n}(\alpha) + \cdots + a_n \mathcal{A}^{2n-2}(\alpha) = 0$$

由于 $\mathcal{A}^{n}(\alpha) = 0$，自然就会有：

$$\mathcal{A}^{m}(\alpha) = 0 \ (m \geq n)$$

那么就可以推出：$a_1 \mathcal{A}^{n-1}(\alpha) = 0$，结合 $\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) \neq 0$ 即 $a_1 = 0$.

若我们已经证明了 $a_1. \cdots, a_j$ 为 0，对 $(\star)$ 两侧作 $n-j-1$ 次变换：

$$a_{j+1} \mathcal{A}^{n-1}(\alpha) + \sum_{i=j+2}^{n} a_i \mathcal{A}^{i+n-j-2}(\alpha) = 0 \Rightarrow a_{j+1} = 0$$

从而可归纳证明 $a_1 = \cdots = a_n = 0$，这说明 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \cdots, \mathcal{A}^{n-1}(\alpha)$ 线性无关.

从而我们证明了 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}^{n-1}(\alpha), \mathcal{A}^{n-2}(\alpha), \cdots, \alpha$ 这组基下的矩阵如题所求.

练习 6.12

设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换。求证：

$$\operatorname{rank} \mathcal{A} - \operatorname{rank} \mathcal{A}^2 = \dim(\ker \mathcal{A} \cap \operatorname{Im} \mathcal{A})$$

解 考虑 $\mathcal{A}$ 在 $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ 上的限制映射：

$$\mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}} : \operatorname{Im} \mathcal{A} \to V, \quad \alpha \mapsto \mathcal{A}(\alpha)$$

由秩-零化度公式可得：

$$\dim \ker(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} - \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}}) \tag{1}$$

又由于：

$$\ker(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}}) = \ker \mathcal{A} \cap \operatorname{Im} \mathcal{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{A}$$

且：

$$\operatorname{Im}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}}) = \mathcal{A}(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}^2(V), \quad \dim \mathcal{A}^2(V) = \operatorname{rank} \mathcal{A}^2$$

代入公式 (1) 得：

$$\dim(\ker \mathcal{A} \cap \operatorname{Im} \mathcal{A}) = \operatorname{rank} \mathcal{A} - \operatorname{rank} \mathcal{A}^2$$

如所欲证。 □