

## 习题课 1

$$1. \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & -2+a & 2+2a & 6+3a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{24+3a}{5} & \frac{52+4a}{5} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} \frac{24+3a}{5} = 0 \quad a = -8 \quad \frac{52+4a}{5} \neq 0 \quad \text{无解}$$

$$\textcircled{2} \frac{24+3a}{5} \neq 0 \quad a \neq -8 \quad \text{有解}$$

$$\left( \frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{8a+24}, \frac{4a+52}{8a+24} \right)$$

法一

2. 由定理 1.4  $A\vec{x}=\vec{0}$  与  $B\vec{x}=\vec{0}$  解集相同

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -a+2 & 0 \end{bmatrix}$$

若  $a=0$   $A\vec{x}=\vec{0}$  解为  $(t, -3t, t) (t \in \mathbb{R})$  $B\vec{x}=\vec{0}$  解为  $(0, 0, 0)$  矛盾则  $a \neq 0$   $A\vec{x}=\vec{0}$  解为  $(t, -3t, t) (t \in \mathbb{R})$ 若  $a \neq 2$   $B\vec{x}=\vec{0}$  解为  $(0, 0, 0)$  矛盾则  $a=2$  此时  $B\vec{x}=\vec{0}$  解为  $(t, -3t, t) (t \in \mathbb{R})$ 

\* 其实

$$\text{(无需验证)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

法二 计算得  $\text{rank } A = \text{rank } B = 2$ 

$$\text{则 } \det A = \det B = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

3. 注意到, 前两个方程的系数向量都是后两个方程的系数向量的线性组合:

$$(3, 2, 1, 1, -3) = 3(1, 1, 1, 1, 1) - (0, 1, 2, 2, 6) \quad (5, 4, 3, 3, -1) = 5(1, 1, 1, 1, 1) - (0, 1, 2, 2, 6)$$

要使方程组相容, 系数必须满足同样的线性关系:  $a = 3 \times 1 - 3 = 0 \quad b = 5 \times 1 - 3 = 2$  $a=0, b=2$  解两个方程得通解  $(5t+5u-2, -2s-2t-6u+3, s, t, u) (s, t, u \in \mathbb{R})$ \* 补: 两个齐次线性方程组同解  $\Leftrightarrow$  它们的系数矩阵互由初等行变换得到

若两个系数矩阵规模相同, 则

证明(现在看不懂没关系)

$$\text{Null}(A) \perp \text{Row}(A)$$

$$\text{Null}(A) = \text{Null}(B) \Leftrightarrow \text{Row}(A) = \text{Row}(B) \quad (\mathbb{R}^n = \text{Null}(A) + \text{Row}(A))$$

$$\Leftrightarrow A, B \text{ 简化阶梯形相同}$$

$$\Leftrightarrow A, B \text{ 行等价}$$