命题 2 设$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$都是V上的线性变换，如果$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$可交换，那么$\mathrm{Ker}\ \mathcal{B}$,$\mathrm{Im}\ \mathcal{B}$,$\mathcal{B}$的特征子空间都是$\mathcal{A}$-子空间。

证明 任取$\beta\in\mathrm{Ker}\ \mathcal{B}$,有$\mathcal{B}\beta=0$,于是

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}\beta)=(\mathcal{B}\mathcal{A})\beta=(\mathcal{A}\mathcal{B})\beta=\mathcal{A}(\mathcal{B}\beta)=\mathcal{A}(0)=0,$$

因此$\mathcal{A}\beta\in\mathrm{Ker}\ \mathcal{B}$,从而$\mathrm{Ker}\ \mathcal{B}$是$\mathcal{A}$-子空间。

任取$\gamma\in\mathrm{Im}\ \mathcal{B}$,则存在$\alpha\in V$,使得$\mathcal{B}\alpha=\gamma$,从而

$$\mathcal{A}\gamma=\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)=\mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha)。$$

因此$\mathcal{A}\gamma\in\mathrm{Im}\ \mathcal{B}$,从而$\mathrm{Im}\ \mathcal{B}$是$\mathcal{A}$-子空间。

在$\mathcal{B}$的特征子空间V_{λ_j}中任取一向量ξ,则$\mathcal{B}\xi=\lambda_j\xi$,从而$\mathcal{B}(\mathcal{A}\xi)=(\mathcal{B}\mathcal{A})\xi=(\mathcal{A}\mathcal{B})\xi=\mathcal{A}(\mathcal{B}\xi)=\mathcal{A}(\lambda_j\xi)=\lambda_j\mathcal{A}\xi$。因此$\mathcal{A}\xi\in V_{\lambda_j}$,从而$V_{\lambda_j}$是$\mathcal{A}$-子空间。 ■

例 3 设V是复数域上的n维线性空间，$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$都是V上的线性变换。证明：如果$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$可交换，那么$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$至少有一个公共的特征向量。

证明 取$\mathcal{A}$的一个特征值λ_0。由于$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$,因此$\mathcal{A}$的特征子空间$V_{\lambda_0}$是$\mathcal{B}$的不变子空间，于是$\mathcal{B}|V_{\lambda_0}$是$V_{\lambda_0}$上的一个线性变换。由于$V_{\lambda_0}$是复数域上的线性空间，因此$\mathcal{B}|V_{\lambda_0}$有特征值。取它的一个特征值$\mu_0$,则在$V_{\lambda_0}$中存在非零向量$\xi$,使得$(\mathcal{B}|V_{\lambda_0})\xi=\mu_0\xi$,即$\mathcal{B}\xi=\mu_0\xi$。又有$\mathcal{A}\xi=\lambda_0\xi$,因此$\xi$是$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的公共的特征向量。 ■

例 4 设V是复数域上的n维线性空间，$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$都是V上的线性变换，且$\mathcal{A}$有s个不同的特征值。证明：如果$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$可交换，那么$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$至少有s个公共的特征向量，并且它们线性无关。

证明 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$\mathcal{A}$的不同的特征值，从例3的证明过程看出，在$V_{\lambda_i}$中存在非零向量$\xi_i$,它是$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的公共的特征向量，$i=1,2,\cdots,s$。由于属于不同特征值的特征向量是线性无关的，因此$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关。 ■

例 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 级复矩阵。证明:如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换,那么存在 n 级可逆复矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 都是上三角矩阵。

证明 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法。

$n=1$ 时,显然命题为真。假设命题对于 $n-1$ 级复矩阵成立,现在来看 n 级复矩阵的情形。设 λ_1 是 n 级复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,因此根据例 3 得,在 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 V_{λ_1} 中存在一个非零向量 $\boldsymbol{X}_1$,使得 $\boldsymbol{BX}_1=\mu_1\boldsymbol{X}_1$。把 $\boldsymbol{X}_1$ 扩充成 $\mathbf{C}^n$ 的一个基:$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$,令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$,则 $\boldsymbol{P}_1$ 是 n 级可逆复矩阵,且

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{P}_1^{-1}(\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_n)=(\boldsymbol{P}_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AX}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AX}_n)。$$

由于 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_1=I$,因此 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$,从而

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}。$$

同理有

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BP}_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & \boldsymbol{\beta}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,因此 $(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1)(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BP}_1)=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BAP}_1=(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BP}_1)(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1)$,从而

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \boldsymbol{\beta}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \boldsymbol{\beta}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}。$$

由此得出,$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1$。根据归纳假设,存在 $n-1$ 级可逆复矩阵 $\boldsymbol{P}_2$,使得 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_2$ 与 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}_2$ 都为上三角矩阵,令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是 n 级可逆复矩阵,且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & \boldsymbol{\beta}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}。$$

因此 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 都是上三角矩阵。

根据数学归纳法原理,对一切正整数 n,此命题为真。 ■

例 10 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}。$$

（1）证明：若 $\mathscr{A}$ 的一个不变子空间 W 有向量 α_n，则 $W=V$；

（2）证明：α_1 属于 $\mathscr{A}$ 的任意一个非零不变子空间；

（3）证明：V 不能分解成 $\mathscr{A}$ 的非平凡不变子空间的直和；

（4）求 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间。

（1）**证明** 由于 $\alpha_n\in W$，因此 $\mathscr{A}\alpha_n=\alpha_{n-1}+a\alpha_n\in W$，从而 $\alpha_{n-1}\in W$，于是 $\mathscr{A}\alpha_{n-1}=\alpha_{n-2}+a\alpha_{n-1}\in W$，从而 $\alpha_{n-2}\in W$。依次下去可得，$\alpha_{n-3}\in W,\cdots,\alpha_1\in W$。因此 $W=V$。■

（2）**证明** 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的任一非零不变子空间。取 $\beta\in W$，且 $\beta\neq 0$，设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，其中 $k_s\neq 0$。由于 $\mathscr{A}\beta\in W$，因此

$$k_1a\alpha_1+k_2(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_{s-1}+a\alpha_s)=a\beta+(k_2\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_{s-1})\in W。$$

由此得出，$k_2\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_{s-1}\in W$。用 $\mathscr{A}$ 作用，得

$$k_2a\alpha_1+k_3(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_{s-2}+a\alpha_{s-1})\in W,$$

由此得出，$k_3\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_{s-2}\in W$。依次用 $\mathscr{A}$ 作用，最后可得 $k_s\alpha_1\in W$。由于 $k_s\neq 0$，因此 $\alpha_1\in W$。■

（3）**证明** 由第(2)小题得，$\mathscr{A}$ 的任意两个非零不变子空间含有公共向量 α_1，从而立即得到结论。■

（4）**解** 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的非零不变子空间，$\dim W=m$。在 W 中取一个基 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，设

$$\begin{aligned}\beta_2&=k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{2s}\alpha_s,\\ &\vdots\\ \beta_m&=k_{m1}\alpha_1+k_{m2}\alpha_2+\cdots+k_{ms}\alpha_s,\end{aligned}$$

其中 $k_{2s},\cdots,k_{ms}$ 不全为 0，不妨设 $k_{2s}\neq 0$。由于 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，因此 $m\leqslant s$。由于 $\mathscr{A}\beta_2\in W$，因此

$$k_{21}a\alpha_1+k_{22}(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_{2s}(\alpha_{s-1}+a\alpha_s)=a\beta_2+k_{22}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-1}\in W,$$

由此推出，$k_{22}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-1}\in W$。考虑它在 $\mathscr{A}$ 下的象，得

$$\begin{aligned}&k_{22}a\alpha_1+k_{23}(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_{2s}(\alpha_{s-2}+a\alpha_{s-1})\\ =&a(k_{22}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-1})+k_{23}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-2}\in W,\end{aligned}$$

由此推出，$k_{23}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-2}\in W$。$\mathscr{A}$ 继续作用下去，可得 $k_{2,s-1}\alpha_1+k_{2s}\alpha_2\in W$。于是 $k_{2s}\alpha_2\in W$。由于 $k_{2s}\neq 0$，因此 $\alpha_2\in W$。在上面用 $\mathscr{A}$ 作用的倒数第二步可得，$k_{2,s-2}\alpha_1+k_{2,s-1}\alpha_2+k_{2s}\alpha_3\in W$，由此得出 $k_{2s}\alpha_3\in W$，从而 $\alpha_3\in W$。依次返回上去，可得 $\alpha_4\in W,\cdots,\alpha_{s-1}\in W$。再从 β_2 的表达式可得，$\alpha_s\in W$。于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$ 可由 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出，从而 $s\leqslant m$。又由于 $m\leqslant s$，因此 $s=m$，于是

$$W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle。$$

由于$\mathcal{A}\alpha_1=a\alpha_1\in W$，$\mathcal{A}\alpha_2=\alpha_1+a\alpha_2\in W$，…，$\mathcal{A}\alpha_m=\alpha_{m-1}+a\alpha_m\in W$，因此$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle$的确是$\mathcal{A}$的一个不变子空间。这证明了：若$\mathcal{A}$的非零不变子空间$W$的维数为$m$，则$W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle$，从而$\mathcal{A}$的所有不变子空间为：

$$0,\langle\alpha_1\rangle,\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle,\cdots,\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\rangle,V,$$

一共有$n+1$个。

点评：例10的第(4)小题，对于$m\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathbf{A}$可以写成分块上三角矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2\end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$$

是m级矩阵。根据定理2得，$\mathcal{A}$有非平凡不变子空间$W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle$。用这种方法可以很快得出$\mathcal{A}$有下列不变子空间：

$$0,\langle\alpha_1\rangle,\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle,\cdots,\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\rangle,V。$$

但是用这种方法尚未证明$\mathcal{A}$只有这$n+1$个不变子空间，因此还需要上面写出的求解过程：设W是$\mathcal{A}$的m维不变子空间，去证$W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle$，从而$\mathcal{A}$只有上述$n+1$个不变子空间。