线性代数习题课 11

2025.12.9

强度预警

相似不变量

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值（包括代数重数与几何重数），还有相同的秩、行列式、零空间维数、迹等不变量，但**不一定有相同的特征子空间或特征向量**

> 如果两个矩阵的特征值及代数重数相同，那么这两个矩阵相似吗?

> 如果两个矩阵的特征值相同，且不同特征值对应的特征向量/特征子空间相同，那么这两个矩阵相似吗?

> 上面两个命题如果加上两个矩阵都可对角化的条件呢?

相似不变量

n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角线上的元素之和称为 A 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(A)$，即

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

矩阵的迹具有下列性质：

1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
2. $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$
3. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

小结论

1. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbb{R}$ 上的方阵 A /线性算子 $\mathcal{A}$ 的全部（复）特征值（重数计入），则有

$$\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \quad \det A=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

2. （了解）设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵，则 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 是一个 n 次多项式，λ^n 的系数是 1，λ^{n-1} 的系数等于 $-\operatorname{tr}(A)$，常数项为 $(-1)^n|A|$，λ^{n-k} 的系数为 A 的所有 k 阶主子式的和乘以 $(-1)^k$，$1\le k<n$

> 再由韦达定理即可得到根与系数的关系（k 阶对称和）

两个重数

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵，λ_1 是 A 的一个特征值。把 A 的属于 λ_1 的特征子空间的维数叫作特征值 λ_1 的**几何重数**，而把 λ_1 作为 A 的特征多项式的根的重数叫作 λ_1 的**代数重数**，有时把代数重数简称为重数

设 λ_1 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 A 的一个特征值，则 λ_1 的几何重数不超过它的代数重数

$\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 A 在实数域上可对角化的充要条件是：A 的特征多项式的全部复根都是实根，并且 A 的每个特征值的几何重数等于它的代数重数

> 上述定义及命题同样适用于线性算子 $\mathcal{A}$

不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 U 上的线性算子。U 的线性子空间 V 称为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，如果对于 V 中的任意向量 v，都有 $\mathcal{A}v \in V$. 记 $\mathcal{A}V = \{\mathcal{A}x \mid x \in V\}$，则 V 是线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的含义是 $\mathcal{A}V \subset V$

线性算子 $\mathcal{A}$ 的像 $\mathrm{im}\,\mathcal{A}$、核 $\ker \mathcal{A}$ 与特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的和与交仍是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 U 上的线性算子，$V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle$ 是 U 的一个子空间，则 V 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间当且仅当 $\mathcal{A}\alpha_i \in V$，$i = 1, 2, \cdots, s$

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 U 上的线性算子，$\xi \in U$ 且 $\xi \neq 0$，则 $\langle \xi \rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间当且仅当 ξ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量

不变子空间

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性算子，W 是 $\mathcal{A}$ 的一个非平凡的不变子空间，在 W 中取一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，把它扩充成 V 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$，则 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵 A 为一个分块上三角矩阵
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$
其中 A_1 是 $\mathcal{A}|_W$ 在 W 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵
2. 反之，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵 A 为分块上三角矩阵
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$
令 $W = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_r \rangle$，那么 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个非平凡不变子空间，且 $\mathcal{A}|_W$ 在 W 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵是 A_1

不变子空间

1. 线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在某个基下的矩阵具有二阶分块对角的形式当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 是两个 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 V 和 W 的直和
2. 更一般地，设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性算子，则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个基下的矩阵为分块对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

   当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 能分解成 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间的直和：
   $\mathbb{R}^n=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，并且 A_i 是 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 在 W_i 的一个基下的矩阵

不变子空间与特征多项式的分解

（定理5.31） 设 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 V 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。假设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某个基下的矩阵是 A_1，那么方阵 A_1 的特征多项式 $\chi_{A_1}(t)$ 整除 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$

> 如果算子 $\mathcal{A}$ 有非平凡的不变子空间，那么该算子的特征多项式可以分解成两个正次数的多项式的乘积

推论（结合5.4节习题14理解）：如果 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子**可对角化**，即 $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{R}^n_{\lambda_i}$，$W \subset \mathbb{R}^n$ 是该线性算子的一个非平凡不变子空间，那么 $W = \bigoplus_{t=1}^r \left(W \cap \mathbb{R}^n_{\lambda_{j_t}}\right)$，即可对角化的线性算子的任一非平凡不变子空间为任意多个特征子空间的子空间的直和

（定理5.32） 设 $\mathbb{R}^n$ 是线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 $V_1, \ldots, V_k$ 的直和，A_i 为 $\mathcal{A}$ 在 V_i 的某个基下的矩阵。那么

$$\chi_A(t) = \chi_{A_1}(t)\,\chi_{A_2}(t)\cdots\chi_{A_k}(t)$$

不变子空间与特征多项式的分解

（定理5.35） $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子一定有一维或二维的不变子空间

（定理5.36） 如果 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式能分解成两个正次数的实系数多项式的乘积，那么 $\mathcal{A}$ 有非平凡的不变子空间

（定理5.37） 设 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 是两个互素（即最大公因式为 1）的多项式 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的乘积。定义

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \xi(\mathcal{A})u = 0\}, \quad V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \eta(\mathcal{A})v = 0\}.$$

那么：

1. U 和 V 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，而且 $\mathbb{R}^n$ 是 U 和 V 的直和
2. $\xi(\mathcal{A})$ 在 V 上的限制是可逆的，$\eta(\mathcal{A})$ 在 U 上的限制是可逆的

> 定理5.37对任意多个互素多项式的乘积也成立，因此引入下一页的推广命题

不变子空间与特征多项式的分解（了解）

（定理5.37推广）设 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中分解成

$$f(\lambda)=p_1^{r_1}(\lambda)p_2^{r_2}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda),$$

其中 $p_1(\lambda),p_2(\lambda),\ldots,p_s(\lambda)$ 是 F 上两两不等的首一不可约多项式，$r_i>0$，$i=1,2,\ldots,s$，则

$$V=\ker\big(p_1^{r_1}(\mathcal{A})\big)\oplus\ker\big(p_2^{r_2}(\mathcal{A})\big)\oplus\cdots\oplus\ker\big(p_s^{r_s}(\mathcal{A})\big)$$

特别地，如果 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 是 F 中两两不等的元素，$r_i>0$，$i=1,2,\ldots,s$，则

$$V=\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_1I)^{r_1}\big)\oplus\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_2I)^{r_2}\big)\oplus\cdots\oplus\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_sI)^{r_s}\big)$$

且 $\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_iI)^{r_i}\big)$ 的维数等于 r_i

凯莱-哈密顿定理

$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式在 $\mathcal{A}$ 处的取值为

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n + \chi_1 \mathcal{A}^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}\mathcal{A} + \chi_n \mathcal{E}$$

定理：线性算子 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ 是零算子，即对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 v，有 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = \mathcal{O}v = 0$

推论：设 A 是 n 阶方阵，它的特征多项式是

$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}t + \chi_n$，那么 $\chi_A(A) = 0$，即

$$\chi_A(A) = A^n + \chi_1 A^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}A + \chi_n E = 0$$

线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式零化该线性算子

方阵 A 的特征多项式零化该方阵

> 也可以说特征多项式是线性算子 $\mathcal{A}$/方阵 A 的零化多项式

极小多项式

在零化线性算子 $\mathcal{A}$ 的非零多项式中次数最小的，首项（即最高次项）系数为 1 的那个称为 $\mathcal{A}$ 的**极小多项式**（方阵同理）

> 极小多项式的存在性与唯一性感兴趣的同学自行了解

$\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$（也是 $\mathcal{A}$ 的任何零化多项式）的因子

线性算子/方阵的极小多项式和其特征多项式有相同的根（不记重数），也就是说线性算子/方阵的的极小多项式的零点即为特征值

> 这个结论在更大的域上依然成立，比如一个实方阵，它的极小多项式与特征多项式既有相同的实根，也有相同的复根（不计重数）

相似的矩阵具有相同的极小多项式

线性算子/方阵在实数域上可对角化的充要条件是其极小多项式在实数域中能分解成不同的一次因式的乘积（没有重根且所有根都是实数）

极小多项式（了解）

1. 设 A 是线性空间 V 上的线性算子，如果 V 能分解成 A 的一些非平凡不变子空间的直和：

   $$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

   那么 A 的极小多项式 $m(\lambda)$ 为

   $$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)],$$

   其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上的线性变换 $A|_{W_j}$ 的极小多项式，$j = 1, 2, \ldots, s$；$[m_1(\lambda), m_2(\lambda), \ldots, m_s(\lambda)]$ 是它们的最小公倍式

2. 设 A 是一个 n 阶分块对角矩阵，即

   $$A = \text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\},$$

   设 A_j 的极小多项式是 $m_j(\lambda)$，$j = 1, 2, \cdots, s$，则 A 的极小多项式 $m(\lambda)$ 为

   $$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$$

极小多项式

1. 求下列 $\mathbb{R}$ 上的方阵的极小多项式，并判断它们是否可对角化

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

极小多项式

2. 求下列 $\mathbb{R}$ 上的方阵 A 和 B 的极小多项式，并判断 A 与 B 是否相似

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. 设 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A^2 + A - 3I$，判断 A 是否可对角化

凯莱-哈密顿定理

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子，特征多项式为

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$$

   那么 $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当特征多项式的常数项 $\chi_n \neq 0$. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}\left(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1}\mathcal{E}\right)$$

2. 设 A 是 n 阶方阵，特征多项式为

$$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n.$$

   那么 A 可逆当且仅当特征多项式的常数项 $\chi_n \neq 0$. 这时候

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}\left(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E\right)$$

凯莱-哈密顿定理

设 A 是方阵，$f(t)$ 是多项式。带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

其中 $r(t)$ 的次数小于 $\chi_A(t)$ 的次数。根据凯莱–哈密顿定理，$\chi_A(A) = 0$，于是（约定：$A^0 = E$ 是单位矩阵）

$$f(A) = r(A).$$

余项 $r(t)$ 可以用待定系数法确定。如果 λ 是 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 的根，那么

$$f(\lambda) = q(\lambda)\chi_A(\lambda) + r(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r(\lambda) = r(\lambda)$$

如果 λ 是 $\chi_A(t)$ 的 k 重根，那么，对 $i = 0, 1, \ldots, k-1$，多项式 f 的 i 阶导数在 λ 处的值为（约定 $f^{(0)} = f$）

$$f^{(i)}(\lambda) = r^{(i)}(\lambda)$$

对角化

$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子/实方阵（在实数域上）可对角化的充要条件有：

1. 有 n 个线性无关的特征向量
2. $\mathbb{R}^n$ 中存在由其特征向量构成的一个基
3. 属于不同特征值的特征子空间维数之和为 n
4. $\mathbb{R}^n$ 是属于不同特征值的所有特征子空间的和/直和
5. 特征多项式的全部复根都是实根，并且每个特征值的几何重数等于它的代数重数
6. 极小多项式在实数域上能分解成不同的一次因式的乘积

习题

1. 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 都是 V 上的线性算子，如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可交换，那么 $\ker \mathcal{B}$, $\operatorname{Im} \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ 的特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
2. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是 V 上的线性算子。证明：如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可交换，那么 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 至少有一个公共的特征向量

习题

3. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是 V 上的线性变换，且 $\mathcal{A}$ 有 s 个不同的特征值。证明：如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可交换，那么 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 至少有 s 个公共的特征向量，并且它们线性无关
4. 设 A, B 都是 n 阶复矩阵。证明：如果 A 与 B 可交换，那么存在 n 阶可逆复矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵

习题

设 V 是 n 维线性空间，V 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. 证明：若 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间 W 有向量 α_n，则 $W = V$；
2. 证明：α_1 属于 $\mathcal{A}$ 的任意一个非零不变子空间；
3. 证明：V 不能分解成 $\mathcal{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和；
4. 求 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间