线性代数习题课 11

2025.12.9

相似不变量

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值（包括代数重数与几何重数），还有相同的秩、行列式、零空间维数、迹等不变量，但**不一定有相同的特征子空间或特征向量**

> 如果两个矩阵的特征值及代数重数相同，那么这两个矩阵相似吗?

> 如果两个矩阵的特征值相同，且不同特征值对应的特征向量/特征子空间相同，那么这两个矩阵相似吗?

> 上面两个命题如果加上两个矩阵都可对角化的条件呢?

相似不变量

n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角线上的元素之和称为 A 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(A)$，即

$$\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

矩阵的迹具有下列性质：

1. $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$
2. $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}(A)$
3. $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$
4. $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

两个小结论

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\mathbb{R}$ 上的方阵 A /线性算子 $\mathcal{A}$ 的全部（复）特征值（重数计入），则有

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵，则 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 是一个 n 次多项式，λ^n 的系数是 1，λ^{n-1} 的系数等于 $-\operatorname{tr}(A)$，常数项为 $(-1)^n|A|$，λ^{n-k} 的系数为 A 的所有 k 阶主子式的和乘以 $(-1)^k$，$1 \le k < n$

两个重数

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵，λ_1 是 A 的一个特征值。把 A 的属于 λ_1 的特征子空间的维数叫作特征值 λ_1 的**几何重数**，而把 λ_1 作为 A 的特征多项式的根的重数叫作 λ_1 的**代数重数**，有时把代数重数简称为重数

设 λ_1 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 A 的一个特征值，则 λ_1 的几何重数不超过它的代数重数

$\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 A 在实数上可对角化的充要条件是：A 的特征多项式的全部复根都是实根，并且 A 的每个特征值的几何重数等于它的代数重数

不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 U 上的线性算子。U 的线性子空间 V 称为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，如果对于 V 中的任意向量 v，都有 $\mathcal{A}v \in V$. 记 $\mathcal{A}V = \{\mathcal{A}x \mid x \in V\}$，则 V 是线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的含义是 $\mathcal{A}V \subset V$

线性算子 $\mathcal{A}$ 的像 $\operatorname{im}\mathcal{A}$、核 $\ker\mathcal{A}$ 与特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的和与交仍是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 U 上的线性算子，$V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle$ 是 U 的一个子空间，则 V 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间当且仅当 $\mathcal{A}\alpha_i \in W$，$i = 1, 2, \cdots, s$

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 U 上的线性算子，$\xi \in U$ 且 $\xi \neq 0$，则 $\langle \xi \rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间当且仅当 ξ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量

不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性算子，W 是 $\mathcal{A}$ 的一个非平凡的不变子空间，在 W 中取一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，把它扩充成 V 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$，则 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵 A 为一个分块上三角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 $\mathcal{A}|_W$ 在 W 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵

反之，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵 A 为分块上三角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

令 $W = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_r \rangle$，那么 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个非平凡不变子空间，且 $\mathcal{A}|_W$ 在 W 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵是 A_1

不变子空间

1. 线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在某个基下的矩阵具有二阶分块对角的形式当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 是两个 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 V 和 W 的直和
2. 更一般地，设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性算子，则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个基下的矩阵为分块对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 能分解成 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间的直和：$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$，并且 A_i 是 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 在 W_i 的一个基下的矩阵

不变子空间与特征多项式的分解

（定理5.31） 设 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 V 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。假设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某个基下的矩阵是 A_1，那么方阵 A_1 的特征多项式 $\chi_{A_1}(t)$ 整除 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$（如果算子 $\mathcal{A}$ 有非平凡的不变子空间，那么该算子的特征多项式可以分解成两个正次数的多项式的乘积）

推论：如果 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子可对角化，即 $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{R}^n_{\lambda_i}$，其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 互不相同且 $\mathbb{R}^n_{\lambda_i}$ 是特征值 λ_i 的特征子空间，$W \subset \mathbb{R}^n$ 是该线性算子的一个不变子空间，那么 $W = \bigoplus_{i=1}^m \left(W \cap \mathbb{R}^n_{\lambda_i}\right)$

（定理5.32） 设 $\mathbb{R}^n$ 是线性算子 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 $V_1, \ldots, V_k$ 的直和，A_i 为 $\mathcal{A}$ 在 V_i 的某个基下的矩阵。那么

$$\chi_A(t) = \chi_{A_1}(t)\,\chi_{A_2}(t)\cdots\chi_{A_k}(t)$$

不变子空间与特征多项式的分解

（定理5.35） $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子一定有一维或二维的不变子空间

（定理5.36） 如果 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式能分解成两个正次数的实系数多项式的乘积，那么 $\mathcal{A}$ 有非平凡的不变子空间

（定理5.37） 设 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 是两个互素（即最大公因式为 1）的多项式 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的乘积。定义

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \xi(\mathcal{A})u = 0\}, \quad V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \eta(\mathcal{A})v = 0\}.$$

那么：

1. U 和 V 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，而且 $\mathbb{R}^n$ 是 U 和 V 的直和
2. $\xi(\mathcal{A})$ 在 V 上的限制是可逆的，$\eta(\mathcal{A})$ 在 U 上的限制是可逆的

不变子空间与特征多项式的分解

（定理5.37推广）设 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中分解成

$$f(\lambda)=p_1^{r_1}(\lambda)p_2^{r_2}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda),$$

其中 $p_1(\lambda),p_2(\lambda),\ldots,p_s(\lambda)$ 是 F 上两两不等的首一不可约多项式，
$r_i>0$，$i=1,2,\ldots,s$，则

$$V=\ker\big(p_1^{r_1}(\mathcal{A})\big)\oplus\ker\big(p_2^{r_2}(\mathcal{A})\big)\oplus\cdots\oplus\ker\big(p_s^{r_s}(\mathcal{A})\big)$$

特别地，如果 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 是 F 中两两不等的元素，$r_i>0$，$i=1,2,\ldots,s$，则

$$V=\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_1I)^{r_1}\big)\oplus\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_2I)^{r_2}\big)\oplus\cdots\oplus\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_sI)^{r_s}\big)$$

且 $\ker\big((\mathcal{A}-\lambda_iI)^{r_i}\big)$ 的维数等于 r_i

凯莱-哈密顿定理

$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式在 $\mathcal{A}$ 处的取值为

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n + \chi_1 \mathcal{A}^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}\mathcal{A} + \chi_n \mathcal{E}$$

定理：线性算子 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ 是零算子，即对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 v，有 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = \mathcal{O}v = 0$

推论：设 A 是 n 阶方阵，它的特征多项式是
$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}t + \chi_n$，那么 $\chi_A(A) = 0$，即

$$\chi_A(A) = A^n + \chi_1 A^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}A + \chi_n E = 0$$

线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征多项式零化该线性算子
方阵 A 的特征多项式零化该方阵

极小多项式

在零化线性算子 $\mathcal{A}$ 的非零多项式中次数最小的，首项（即最高次项）系数为 1 的那个称为 $\mathcal{A}$ 的**极小多项式**（方阵同理）

> 极小多项式的存在性与唯一性感兴趣的同学自行了解

$\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$（也是 $\mathcal{A}$ 的任何零化多项式）的因子

线性算子/方阵的极小多项式和其特征多项式有相同的根（不记重数），也就是说线性算子/方阵的的极小多项式的零点即为特征值（在更大的域上依然成立）

相似的矩阵具有相同的极小多项式

线性算子/方阵可对角化的充要条件是其极小多项式在 $F[\lambda]$ 中能分解成不同的一次因式的乘积

极小多项式

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性算子，如果 V 能分解成 $\mathcal{A}$ 的一些非平凡不变子空间的直和：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

那么 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)],$$

其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上的线性变换 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的最小多项式，$j = 1, 2, \cdots, s$；
$[m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$ 是 $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的最小公倍式

设 A 是一个 n 阶分块对角矩阵，即

$$A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\},$$

设 A_j 的极小多项式是 $m_j(\lambda)$，$j = 1, 2, \cdots, s$，则 A 的极小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$$

极小多项式

1. 求下列 $\mathbb{R}$ 上的方阵的极小多项式，并判断它们是否可对角化

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

极小多项式

2. 求下列 $\mathbb{R}$ 上的方阵 A 和 B 的极小多项式，并判断 A 与 B 是否相似

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. 设 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A^2 + A - 3I$，判断 A 是否可对角化

凯莱-哈密顿定理

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子，特征多项式为

$$\chi_{\mathcal{A}}(t)=t^n+\chi_1 t^{n-1}+\cdots+\chi_{n-1}t+\chi_n$$

那么 $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当特征多项式的常数项 $\chi_n\neq 0$. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1}=-\chi_n^{-1}\left(\mathcal{A}^{n-1}+\chi_1\mathcal{A}^{n-2}+\cdots+\chi_{n-1}\mathcal{E}\right)$$

2. 设 A 是 n 阶方阵，特征多项式为

$$\chi_A(t)=t^n+\chi_1 t^{n-1}+\cdots+\chi_{n-1}t+\chi_n.$$

那么 A 可逆当且仅当特征多项式的常数项 $\chi_n\neq 0$. 这时候

$$A^{-1}=-\chi_n^{-1}\left(A^{n-1}+\chi_1 A^{n-2}+\cdots+\chi_{n-1}E\right)$$

凯莱-哈密顿定理

设 A 是方阵，$f(t)$ 是多项式。带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

其中 $r(t)$ 的次数小于 $\chi_A(t)$ 的次数。根据凯莱–哈密顿定理，$\chi_A(A) = 0$，于是（约定：$A^0 = E$ 是单位矩阵）

$$f(A) = r(A).$$

余项 $r(t)$ 可以用待定系数法确定。如果 λ 是 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 的根，那么

$$f(\lambda) = q(\lambda)\chi_A(\lambda) + r(\lambda) = q(\lambda)\cdot 0 + r(\lambda) = r(\lambda)$$

如果 λ 是 $\chi_A(t)$ 的 k 重根，那么，对 $i = 0, 1, \ldots, k-1$，多项式 f 的 i 阶导数在 λ 处的值为（约定 $f^{(0)} = f$）

$$f^{(i)}(\lambda) = r^{(i)}(\lambda)$$

对角化

线性算子/方阵（在实数域上）可对角化的充要条件有：

1. 有 n 个线性无关的特征向量
2. $\mathbb{R}^n$ 中存在由其特征向量构成的一个基
3. 属于不同特征值的特征子空间维数之和为 n
4. $\mathbb{R}^n$ 是属于不同特征值的所有特征子空间的和/直和
5. 特征多项式的全部复根都是实根，并且每个特征值的几何重数等于它的代数重数
6. 极小多项式在实数域上能分解成不同的一次因式的乘积

习题

1. 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 都是 V 上的线性算子，如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可交换，那么 $\ker \mathcal{B}$，$\operatorname{Im} \mathcal{B}$，$\mathcal{B}$ 的特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
2. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是 V 上的线性算子。证明：如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可交换，那么 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 至少有一个公共的特征向量

习题

3. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是 V 上的线性变换，且 $\mathcal{A}$ 有 s 个不同的特征值。证明：如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可交换，那么 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 至少有 s 个公共的特征向量，并且它们线性无关
4. 设 A, B 都是 n 阶复矩阵。证明：如果 A 与 B 可交换，那么存在 n 阶可逆复矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵

习题

设 V 是 n 维线性空间，V 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. 证明：若 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间 W 有向量 α_n，则 $W = V$；
2. 证明：α_1 属于 $\mathcal{A}$ 的任意一个非零不变子空间；
3. 证明：V 不能分解成 $\mathcal{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和；
4. 求 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间