No.

Date

第十三周 习题

1\. "$\Leftarrow$" $AB=(U\Lambda_1U^*)B=U\Lambda_1(U^*B)=U\Lambda_1\Lambda_2U^*$

$BA=(U\Lambda_2U^*)A=U\Lambda_2(U^*A)=U\Lambda_2\Lambda_1U^*$ $\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1 \Rightarrow AB=BA$

"$\Rightarrow$" A是埃尔米特矩阵，$\exists$ 酉矩阵 U s.t. $U^*AU=\Lambda_1$ （Λ_1为实对角矩阵）

设 $\Lambda_1=diag(\lambda_1 I_{n_1},\cdots,\lambda_s I_{n_s})$ （$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两不同）

$AB=U\Lambda_1U^*B=BA=BU\Lambda_1U^*$ $\Lambda_1U^*BU=U^*BU\Lambda_1$

记 $\tilde{B}=U^*BU$ $\Lambda_1\tilde{B}=\tilde{B}\Lambda_1$

则 $\tilde{B}$为准对角方阵，记 $\tilde{B}=diag(B_1,\cdots,B_s)$ （B_i为n_i阶方阵）

$\tilde{B}$为埃尔米特矩阵，则每个B_i均为埃尔米特矩阵

$\exists n_i$阶酉矩阵Q_i s.t. $Q_i^*B_iQ_i=\Lambda_{n_i}$ $\forall i\in\{1,2,\cdots,s\}$ （Λ_{n_i}为实对角矩阵）

记 $Q=diag(Q_1,\cdots,Q_s)$ Q为酉矩阵

令 $\tilde{U}=UQ$，$\tilde{U}$为酉矩阵 $\tilde{U}^*A\tilde{U}=Q^*\Lambda_1Q=\Lambda_1Q^*Q=\Lambda_1$

$\tilde{U}^*B\tilde{U}=Q^*\tilde{B}Q=diag(\Lambda_{n_1},\cdots,\Lambda_{n_s})$

即A、B可以同时被$\tilde{U}$酉对角化

2\. 见附件

3\. 见附件

KOKUYO

例 91 设 A,B 都是 n 级 Hermite 矩阵。证明：如果 A 是正定的，B 是半正定的，那么存在一个 n 级可逆矩阵 C，使得 C^*AC 与 C^*BC 都是对角矩阵。

证明 由于 A 是正定 Hermite 矩阵，因此存在一个 n 级可逆复矩阵 C_1，使得$C_1^*AC_1=I$。

由于$(C_1^*BC_1)^*=C_1^*B^*(C_1^*)^*=C_1^*BC_1$，因此 $C_1^*BC_1$ 是 Hermite 矩阵。于是存在 n 级酉矩阵 P，使得

$$P^{-1}(C_1^*BC_1)P=\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $C_1^*BC_1$ 的特征值，它们都是实数。

令 $C=C_1P$，则 $C^*=P^*C_1^*=P^{-1}C_1^*$。于是 C 可逆，且

$$C^*AC=P^{-1}C_1^*AC_1P=P^{-1}IP=I,$$

$$C^*BC=\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}.$$ ■

例 92 设 A,B 都是 n 级 Hermite 矩阵。证明：如果 A 是正定的，B 是半正定的，那么

$$|A+B|\geqslant|A|+|B|,$$

等号成立当且仅当 $B=0$。

证明 据例 91 的证明过程知道，存在一个 n 级可逆复矩阵 C，使得

$$C^*AC=I,C^*BC=\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $C_1^*BC_1$ 的特征值。由于 B 半正定，因此 $C_1^*BC_1$ 也半正定，据例 90 得，$\mu_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n$。

$$|A|=|(C^*)^{-1}C^{-1}|=|\overline{C^{-1}}||C^{-1}|=\|C^{-1}\|^2,$$

$$|B|=|(C^*)^{-1}\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}C^{-1}|=\|C^{-1}\|^2\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,$$

$$\begin{aligned}|A+B|&=|(C^*)^{-1}(I+\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\})C^{-1}|\\&=\|C^{-1}\|^2(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)&=1+(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)+(\mu_1\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\mu_n)\\&\quad+\cdots+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\\&\geqslant1+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=0$，因此

$$|A+B|\geqslant\|C^{-1}\|^2(1+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)=|A|+|B|,$$

且等号成立当且仅当 $C^*BC=0$，从而 $B=0$。 ■