线性代数习题课 10

2025.12.2

$\mathbb{R}^2$上的线性算子

平面上绕原点旋转角度 θ 的变换 φ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

关于直线 $ax+by=0$ 的反射 $\mathcal{R}_l = \varphi\mathcal{R}_x\varphi^{-1}$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

沿着直线 $ax+by=0$ 垂直方向到该直线的投影 $\mathcal{P}_l = \varphi\mathcal{P}_x\varphi^{-1}$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性算子，$u_1,\dots,u_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基，那么

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u_1&=a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{n1}u_n,\\ \mathcal{A}u_2&=a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{n2}u_n,\\ &\vdots\\ \mathcal{A}u_n&=a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\cdots+a_{nn}u_n.\end{aligned}$$

矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为 $\mathcal{A}$ 在基 (u_i) 下的矩阵或关于基 (u_i) 的矩阵，简称 $\mathcal{A}$ 是 A 的（一个）矩阵。A 的第 j 列由 $\mathcal{A}u_j$ 在基 (u_i) 下的坐标构成，即

$(\mathcal{A}u_1,\dots,\mathcal{A}u_n)=(u_1,\dots,u_n)A$

$\mathbb{R}^n$上的线性算子

设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性算子，那么

1. 线性算子 $\mathcal{A}$ 的核与像均是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间
2. 线性算子 $\mathcal{A}$ 的核的维数与像的维数之和是 $n = \dim \mathbb{R}^n$，即
$$\dim \ker \mathcal{A} + \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = n$$
上述等式仅是关于维数的等式，不意味着 $\mathbb{R}^n$ 是 $\ker \mathcal{A}$ 与 $\operatorname{im} \mathcal{A}$ 的直和
3. $\mathcal{A}$ 是可逆（即非退化）的当且仅当 $\ker \mathcal{A} = \mathbf{0}$，即当且仅当 $\mathcal{A}$ 是单射
4. $\mathcal{A}$ 是可逆（即非退化）的当且仅当 $\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathbb{R}^n$，即当且仅当 $\mathcal{A}$ 是满射

相似

设 $u_1,...,u_n$ 和 $v_1,...,v_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，从基 (u_i) 到 (v_i) 的转换矩阵是 T，$\mathcal{A}$ 在基 (u_i) 下的矩阵为 A。那么 $\mathcal{A}$ 在基 (v_i) 下的矩阵是

$$B = T^{-1}AT$$

称方阵 B 和同阶方阵 A 是**相似的**，记作 $B \sim A$，如果存在可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$. 方阵的相似关系是等价关系，方阵全体在相似关系下被分成了不相交的等价类（相似类），该类中的每个元素称为一个代表元

线性算子 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵全体形成一个相似类

相似

设 A 是 n 阶方阵。那么 A 可对角化当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 中存在 n 个线性无关的向量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 和某些数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad AX_2 = \lambda_2 X_2, \quad \ldots \quad , AX_n = \lambda_n X_n$$

此时 A 与对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 相似

设 A 是 n 阶方阵。称列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的**非零向量** X 为方阵 A 的**特征向量**，如果存在实数 λ 使得 $AX = \lambda X$，此时实数 λ 称为 A 的（对应于特征向量 X 的）**特征值**

设 A 是 n 阶方阵，那么 A 可对角化当且仅当列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有一组基由 A 的特征向量构成

相似

设 A 是 n 阶方阵，数 λ 是 A 的特征值当且仅 λ 是如下方程的解：

$$\det(A - tI) = 0 \text{ , } t \text{ 为未知元}$$

设 A 是 n 阶方阵，多项式 $\det(tI - A) = (-1)^n \det(A - tI)$ 称为 A 的**特征多项式**，记作 $\chi_A(t)$

方阵（线性算子）具有不同特征值的特征向量线性无关

如果 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，那么 A 可对角化到 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

> 上述结论逆命题不成立，即 A 可对角化并不意味着 A 一定有 n 个不同的特征值

特征子空间

设 λ 是 A 的特征值，方程 $(A-\lambda I)X=0$ 的解空间称为 A 的对应于特征值 λ 的特征（子）空间，记作 $\mathbb{R}^n_\lambda$，即 $\mathbb{R}^n_\lambda=\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=\lambda X\}$

设 A 是 n 阶方阵，那么 A 可对角化当且仅当 A 的对应于不同特征值的特征子空间的维数和是 n ，或者 $\mathbb{R}^n$ 是 A 的所有特征子空间的和/直和

对角化

判断一个方阵 A 是否能对角化：先通过求解方阵的特征多项式得到方阵的特征值，再对每一个特征值 λ 求方程 $(A-\lambda I)X=0$ 的解空间，取解空间的一个基，把不同的解空间所取的基合起来，得到一组线性无关的向量

1. 如果这组向量是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，那么 A 是可对角化的，对角矩阵中一个特征值出现的次数就是这个特征值相应的解空间的维数
2. 如果这组向量不是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，那么 A 不能对角化

设 A 是 n 阶方阵，列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的基 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 由 A 的特征向量构成，即 $AX_i = \lambda_i X_i$. 命 B 为以 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为列向量的矩阵，那么 B 是可逆的，且对任意的正整数 k，方阵 $B^{-1}A^kB$ 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$

常用命题

- 相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值，还有相同的秩、行列式、零空间维数等不变量，但**不一定有相同的特征子空间或特征向量**
- n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是，A 有 n 个线性无关的特征向量（以及相关等价命题）
- 设 A 为 n 阶方阵，则属于 A 的不同特征值的特征向量是线性无关的
- 如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值，那么 A 可对角化（逆命题不成立）
- 设 λ 为 n 阶方阵 A 的一个特征值，则

1. λ^k 为 A^k 的特征值，其中 k 为正整数；
2. λ 为 A^{T} 的特征值；
3. 如果 A 是可逆方阵，那么 $\lambda \neq 0$ 且 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值
4. 若 $\lambda \neq 0$，则 $\dfrac{1}{\lambda} \det A$ 为 A 的伴随方阵 A^* 的特征值

习题

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I$，证明：A 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中 $0 \leq r \leq n$

习题

设 A, B 分别是 $\mathbb{R}$ 上的 $s \times n$, $n \times s$ 矩阵。证明：

1. AB 与 BA 有相同的非零特征值，并且重数相同；
2. 如果 α 是 AB 的属于非零特征值 λ_0 的一个特征向量，那么 $B\alpha$ 是 BA 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量

习题

1. 证明：$\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的变换 $\mathcal{A}: X \mapsto X^{\mathrm{T}}$ 是线性算子；
2. 求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量。$\mathcal{A}$ 是否可对角化?

习题

设 V 为 n 维线性空间，$\mathcal{A}: V \to V$ 为线性算子。若存在 $\alpha \in V$，使得 $\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) \neq 0$，但是 $\mathcal{A}^n(\alpha) = 0$，证明：$\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

习题

设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换。证明：

$$\operatorname{rank}\mathcal{A} - \operatorname{rank}\mathcal{A}^2 = \dim(\ker\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A})$$