线性代数习题课 6

2025.11.4

矩阵可逆的判据

设 A 是 n 阶方阵，则以下陈述等价：

1. A 是可逆的
2. A 是非退化（满秩）的
3. A 的行向量/列向量线性无关
4. A 的行空间/列空间等于 $\mathbb{R}^n$
5. 齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 只有平凡解
6. A 的零空间（以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间）为 $\mathbf{0}$
7. 非齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{b}$ 有且只有唯一解
8. A 可以分解为一系列初等矩阵的乘积
9. $\det A \neq 0$

> 10. A 的简化阶梯形为 I_n

伴随矩阵

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，则 A 可逆当且仅当 $\det(A)\neq 0$ ，且当 A 可逆时，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$

其中 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

A_{ij} 是元素 a_{ij} 关于行列式 $\det A$ 的代数余子式，称 A^* 为 A 的**伴随矩阵**

无论 A 是否可逆，$AA^*=A^*A=|A|I$

伴随矩阵的性质

设 A 是 $n \geq 2$ 阶方阵，A^* 为其伴随矩阵。则：

- $(A^T)^* = (A^*)^T$
- $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$
- $\det A^* = (\det A)^{n-1}$
- $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$ 如果 $n > 2$，$(A^*)^* = A$ 如果 $n = 2$
- 若 B 也是一个 n 阶方阵，则 $(AB)^* = B^* A^*$
- A 的伴随矩阵的秩只有三个可能：$0, 1, n$

克拉默法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 可逆（即 $\det A \neq 0$），则它有唯一解：

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

其中分子由常数列代替系数矩阵的行列式的第 k 列得到

矩阵的子式与矩阵的秩

矩阵 A 的非零子式的最高阶数等于矩阵 A 的秩

设矩阵 A 至少有一个 r 阶非零子式，且 A 的所有 $r+1$ 阶子式（上级）都为零，则 A 的秩为 r

几个关于分块矩阵的行列式的结论

- 若 $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{ss}$ 都是方阵，则

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix} = |A_{11}|\,|A_{22}|\cdots|A_{ss}|$$

> 分块下三角方阵同理

- 设 A, D 分别是 r 级、s 级可逆矩阵，B, C 分别是 $r\times s$，$s\times r$ 矩阵，则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D)\det(A - BD^{-1}C) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

几个关于分块矩阵的行列式的结论

- 设 A, B 分别是 $s \times n$, $n \times s$ 矩阵，则

$$\det(I_s - AB) = \det\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} = \det(I_n - BA)$$

- 设 $U = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ ，其中 A, D 都是方阵。则 U 可逆当且仅当 A, D 都可逆，L 可逆当且仅当 A, D 都可逆，此时

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}, \; L^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

转换矩阵

设列向量空间 $\mathbb{R}_n$ 有两组基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 和 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ ，两组基之间的关系如下式确定：

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= t_{11}\mathbf{a}_1 + t_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{a}_n \\
\mathbf{b}_2 &= t_{12}\mathbf{a}_1 + t_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{a}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{b}_n &= t_{1n}\mathbf{a}_1 + t_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{a}_n
\end{aligned}$$

上述式子可以写成矩阵形式：

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)\, T$$

其中**转换矩阵/过渡矩阵** T 为

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

转换矩阵

$\mathbf{b}_j$ 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 下的坐标是转换矩阵 T 的第 j 列

$\mathbb{R}^n$ 的不同基之间的转换矩阵是可逆的

任何 n 阶可逆矩阵都可以出现在 $\mathbb{R}^n$ 的从一个给定的基到另一个基的转换矩阵中

转换矩阵

设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 和向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ 分别是列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，从前者到后者的转换矩阵记为 T

令 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$, $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n]$

则 $B = AT$, $T = A^{-1}B$

转换矩阵

设列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 u 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 下的坐标列向量为 X，在基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ 下的坐标列向量为 Y，那么

$$Y = T^{-1}X$$

其中 T 是从基 $\{\mathbf{a}_i\}$ 到基 $\{\mathbf{b}_i\}$ 的转换矩阵

习题

计算下述 n 阶行列式（$n \geq 2$）：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 + a_{11} & x_1^2 + a_{21}x_1 + a_{22} & \cdots & x_1^{n-1} + a_{n-1,1}x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2 + a_{11} & x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{22} & \cdots & x_2^{n-1} + a_{n-1,1}x_2^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + a_{11} & x_n^2 + a_{21}x_n + a_{22} & \cdots & x_n^{n-1} + a_{n-1,1}x_n^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

习题

计算下述 n 阶行列式（$n \geq 2$）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{\ n-2} & x_2^{\ n-2} & \cdots & x_{n-1}^{\ n-2} & x_n^{\ n-2} \\ x_1^{\ n} & x_2^{\ n} & \cdots & x_{n-1}^{\ n} & x_n^{\ n} \end{vmatrix}$$

习题

计算下述 n 阶行列式（$n \geq 2$）

$$\begin{vmatrix} 0 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$

习题

求下述 n 阶矩阵的逆矩阵（$n \geq 2$）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$