子空间的交与和

设 U, V 是$\mathbb{R}^n$的两个子空间。容易验证 $U \cap V$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 (请同学们验证)。不过 $U \cup V$ 一般而言不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 (请同学们举例)。我们把 $U \cup V$ 张成的子空间称为 U 与 V 的和，记作 $U+V$. 证明：

(1) $U+V=\{u+v \mid u \in U, v \in V\}$;

(2) $U \cap V=\{0\}$ 当且仅当对于任意的 $x \in U+V$, 存在唯一的 $u \in U$ 和唯一的 $v \in V$ 使得 $x=u+v$. 这时称 $U+V$ 为直和，记作 $U \oplus V$.

(3) $U+V$ 是直和当且仅当如果 $u+v=0$, $u \in U, v \in V$, 则 $u=v=0$.

(4) 如果 $U \cap V=\{0\}$, 则 $\dim(U+V)=\dim U+\dim V$.

证明. (1) 记 W 是集合 $\{u+v \mid u \in U, v \in V\}$, 不难验证 W 是 $\mathbb{R}^n$的一个子空间且 $U, V \subseteq W$, 于是由子空间和的定义知道，$U+V \subseteq W$. 另外，W 中的任一个元素都是由 U 与 V 中的元素线性组合得到的，于是我们知道 $W=U+V$.

(2) 设 $U \cap V=\{0\}$, 对于任意的 $x \in U+V$，由定义知道，存在 $u \in U$ 与 $v \in V$，使得 $x=u+v$. 如果有另外的 $u' \in U$ 与 $v' \in V$，满足 $x=u'+v'$. 则 $u-u'=v'-v \in U \cap V=\{0\}$, 因此 $u=u'$, $v=v'$, 这就得到了 u, v 的唯一性。反过来，假设 $U \cap V \neq\{0\}$, 则有非零元 $z \in U \cap V$. 此时 $z \in U+V$ 可以写成 $z=z+0$, 也可以写成 $z=0+z$, 写法就不唯一。

(3)"$\Rightarrow$" 根据 (2) 的结果，由 0 的写法的唯一性 $0=0+0$, 必然知道 $u=v=0$.

"$\Leftarrow$" 假设 $U \cap V \neq\{0\}$, 则有非零元 $z \in U \cap V$. 此时 $0=z+(-z)$, 于是 0 的写法不唯一，这就得到了矛盾。

(4) 给了 U 的一个基 $u_1, u_2, \ldots, u_k$ 以及 V 的一个基 $v_1, v_2, \ldots, v_l$. 我们只需要说明如果 $U \cap V=\{0\}$，则 $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ 是 $U+V$ 的一个基。显然可以看出 $U+V$ 可以由 $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ 线性张成，下面只需要说明它是线性无关的即可。考虑

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i+\sum_{j=1}^l \beta_j v_j=0.$$

根据 (3), 我们知道 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i=\sum_{j=1}^{l}\beta_j v_j=0$. 由于$u_1,u_2,\dots,u_k$ 和 $v_1,v_2,\dots,v_l$ 分别是 U,V 的基底，于是 $\alpha_i=0,\beta_j=0$, $\forall i=1,2,\dots,k,j=1,2,\dots,l$. 从而 $u_1,u_2,\dots,u_k,v_1,v_2,\dots,v_l$ 是线性无关的向量组，于是也是 $U+V$ 的一个基。

$\square$

2.2 小节第 4 题给出的行秩与列秩相等的另一个证明（题目见教材）。

证明. (1) 注意到 $\widetilde{\mathbf{a}}_{j_1},\widetilde{\mathbf{a}}_{j_2},\dots,\widetilde{\mathbf{a}}_{j_t}$ 都是 $\mathbb{R}^r$ 中的向量，这些列向量张成的空间也是 $\mathbb{R}^r$ 的子空间，于是 $\widetilde{A}$ 的列秩 $t\le r$.

(2) 首先，任意的 $\widetilde{\mathbf{a}}_j$ 都可以写成 $\widetilde{\mathbf{a}}_{j_1},\widetilde{\mathbf{a}}_{j_2},\dots,\widetilde{\mathbf{a}}_{j_t}$的线性组合，即有

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j=\lambda_1\widetilde{\mathbf{a}}_{j_1}+\lambda_2\widetilde{\mathbf{a}}_{j_2}+\cdots+\lambda_t\widetilde{\mathbf{a}}_{j_t}.$$

根据此式知，对于任意的 $i\in\{i_1,i_2,\dots,i_r\}$, 我们有

$$a_{ij}=\lambda_1 a_{ij_1}+\lambda_2 a_{ij_2}+\cdots+\lambda_t a_{ij_t}.$$

因为任意的 A_i 都是 $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_r}$ 的线性组合，于是对于任意的 $i=1,2,\dots,m$, 都有

$$a_{ij}=\lambda_1 a_{ij_1}+\lambda_2 a_{ij_2}+\cdots+\lambda_t a_{ij_t}.$$

这就说明了

$$\mathbf{a}_j=\lambda_1\mathbf{a}_{j_1}+\lambda_2\mathbf{a}_{j_2}+\cdots+\lambda_t\mathbf{a}_{j_t}.$$

从而 A 的列秩 $s\le t$. 再结合 (1), 知道 $s\le t\le r$.

(3) 根据定义这是显然的。

结合 (2) 和 (3) 知道 $r=s$.

$\square$