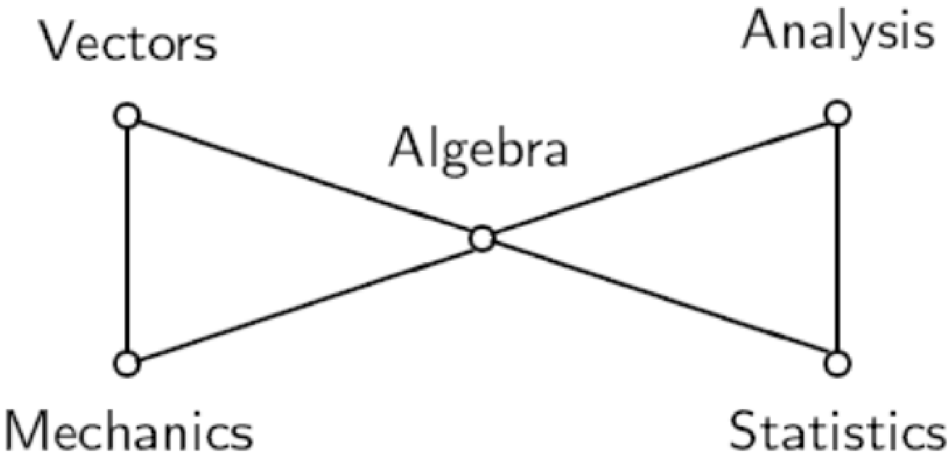
线性代数习题课 3

2025.10.14



习题

（教材2.2节 习题4）

设 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$的行秩为 r，列秩为 s

取 A 的 r 个线性无关的行向量 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$. 这 r 个行向量形成一个 $r \times n$ 矩阵 $\widetilde{A}$.

设 $\widetilde{A}$ 的列秩为 t，$\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 是 $\widetilde{A}$ 的列向量的极大线性无关组。证明：

1. $t \leq r$
2. 矩阵 A 的任何一个列向量 a_j 都是列向量 $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 的线性组合，从而 $s \leq t \leq r$，即列秩不超过行秩
   提示：利用 A 的任一行向量都是 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ 的线性组合

习题

3. 把 A 的行作为列，得到如下 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置：

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},
$$

有 $r_c({}^tA) = r_r(A)$, $r_r({}^tA) = r_c(A)$.

结合 2 与 3 可知 $s \le r$ 且 $r \le s$，因此 $r = s$

线性映射

一个数域 $\mathbb{K}$ 上的映射 $\varphi : V \to U$ 如果满足:

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall\, x, y \in V;$
2. $\varphi(\lambda x) = \lambda\, \varphi(x), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ x \in V,$

则称 φ 是（从 V 到 U 的）**线性映射**

设映射 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$x \mapsto y$，为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射。若 $y = Ax$ ，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ，则称 $\mathcal{A}$ 为 A 的线性映射, A 为线性映射 $\mathcal{A}$ 的矩阵

矩阵的运算

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ，定义 A 与 B 的乘积为 $m \times p$ 阶矩阵 $C := (c_{ij})_{m\times p}$ ，其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

它是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和。记为 $C = AB$

矩阵的运算

关于矩阵乘法的注意事项

1. 只有当 A 的列数等于 B 的行数时，A 与 B 才可以相乘；
2. AB 有意义不意味着 BA 有意义。即使 A 与 B 为同阶方阵，AB 与 BA 也不一定相等。若 $AB = BA$，则称 A, B 可交换；
3. **两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵**，即 $AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$ ，$AB = AC$ 不能推出 $B = C$ ；
4. 左乘对角矩阵相当于把 A 的各行分别乘上一个数；右乘对角矩阵相当于把 A 的各列分别乘上一个数；
5. 纯量矩阵（λI）与 A 相乘等价于对 A 的数乘：$(\lambda I)A = A(\lambda I) = \lambda A$. 特别地，$IA = AI = A$，$OA = AO = 0$

矩阵的运算

矩阵乘法的性质

- 乘法结合律：$(AB)C = A(BC)$
- 左分配律：$(A + B)C = AC + BC$
- 右分配律：$A(B + C) = AB + AC$
- 数乘结合律：$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

在 $M_n(\mathbb{R})$ 中，与所有矩阵可交换的矩阵是纯量矩阵

矩阵的逆

设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 X 满足 $XA = AX = I$，则称 A **可逆**，并称 X 为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1}
可逆矩阵也称为非奇异矩阵/非退化矩阵，不可逆矩阵称为奇异矩阵/退化矩阵

对任意同阶可逆矩阵 A, B，都有：

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$，$\lambda \neq 0$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

矩阵的逆

设 A 是 n 阶方阵，则以下陈述等价：

1. A 是可逆的
2. A 是非退化（满秩）的
3. A 的行向量/列向量线性无关
4. A 的行空间/列空间等于 $\mathbb{R}^n$
5. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有平凡解
6. A 的简化阶梯形为 I_n
7. 一般线性方程组 $Ax = b$ 有且只有唯一解
8. A 可以分解为一系列初等矩阵的乘积

矩阵的转置

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换，得到的矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记作 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$

等价地，可写成 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

矩阵的转置

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A;$
- $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}};$
- $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}};$
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}};$
- $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^{\mathrm{T}}$

矩阵乘积的秩

设 A 为 $m \times s$ 矩阵，B 为 $s \times n$ 矩阵，那么

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 和 C 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，那么

$$\operatorname{rank}(BAC) = \operatorname{rank}(A)$$

矩阵的分块

设 A 为 $m \times r$ 矩阵，B 为 $r \times n$ 矩阵，把 B 写成列向量形式 $B = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$
则 $AB = A\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ac_1 & Ac_2 & \cdots & Ac_n \end{bmatrix}$
即 AB 的第 j 列等于 A 与 B 的第 j 列 c_j 的乘积 Ac_j

设 B 为 $r \times n$ 矩阵，A 为 $m \times r$ 矩阵，把 A 写成行向量形式 $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$

则 $AB = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} r_1 B \\ r_2 B \\ \vdots \\ r_m B \end{bmatrix}$
即 AB 的第 i 行等于 A 的第 i 行 r_i 与 B 的乘积 $r_i B$

初等矩阵

第一类 S_{ij}： 将单位矩阵的第 i 行与第 j 行互换(将单位矩阵的第 i 列与第 j 列互换)
第二类 $D_i(\lambda)$： 将单位矩阵第 i 行乘以非零数 λ（将单位矩阵第 i 列乘以非零数 λ）
第三类 $T_{ij}(\lambda)$： 将单位矩阵第 i 行的 λ 倍加到第 j 行（将单位矩阵第 j 列的 λ 倍加到第 i 列）

上述三类方阵称为**初等矩阵**。每一类初等矩阵与一类初等变换相对应

对矩阵作初等行变换，等价于在矩阵左边乘上一个相应的初等矩阵；对矩阵作初等列变换，等价于在矩阵右边乘上一个相应的初等矩阵（左行右列法则）

初等矩阵

- S_{ij} 为对称矩阵，且 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$.
- $D_i(\lambda)$ 为对角矩阵，且 $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$
- $T_{ij}(\lambda)$ 为三角矩阵，且 $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

对任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，存在一系列 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 和 n 阶初等方阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$，使得 $P_s \cdots P_2 P_1\, A\, Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

对任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

上面非负整数 $r = \operatorname{rank}(A)$

矩阵的分块

类似一般的初等矩阵，引入三种**分块初等矩阵**（对应分块初等变换，左行右列法则依然适用）：

$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}$ 表示第一行左乘可逆矩阵 P，或者第一列右乘可逆矩阵 P

$\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}$ 表示第一行与第二行（或者第一列与第二列）互换

$\begin{bmatrix} I & O \\ P & I \end{bmatrix}$ 表示把第一行左乘矩阵 P（不一定可逆）加到第二行，或者第二列右乘矩阵 P 加到第一列

逆矩阵的计算

同时对 A 与 I 施行相同的初等行变换；当把 A 化为 I 时，I 即化为 A^{-1}：

$$(A \mid I) \xrightarrow{P_1} (P_1 A \mid P_1 I) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_k} \left(P_k \cdots P_2 P_1 A \;\middle|\; P_k \cdots P_2 P_1 I\right) = (I \mid A^{-1})$$

逆矩阵的计算

计算下列的矩阵逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

习题

设 A, B, C 为同阶方阵且 $A-B$ 可逆，已知 $A(A-B)^{-1}=BC$，证明：
$(A-B)^{-1}A=CB$

习题

证明西尔维斯特秩不等式：设 A, B 分别是 $s \times n, n \times m$ 矩阵，则 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s \leq \mathrm{rank}(AB)$

习题

设 A, B 为同阶方阵，证明：$\operatorname{rank}(AB - I) \leq \operatorname{rank}(A - I) + \operatorname{rank}(B - I)$

习题

设 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的实矩阵，证明：若 $I_n - AB$ 可逆，则 $I_m - BA$ 也可逆；并求 $(I_m - BA)^{-1}$