# 习题课 3

1. 记 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ & & \vdots & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)=a^Tb$

$ba^T=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^n b_ia_i$

$\Rightarrow A^k=(a^Tb)^k=[a^T(ba^T\cdots ba^T)b]=a^T(\sum_{i=1}^n b_ia_i)^{k-1}b=(\sum_{i=1}^n a_ib_i)^{k-1}a^Tb$
$=(\sum_{i=1}^n a_ib_i)^{k-1}A$

2. (1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad AB=BA \Leftrightarrow (A-I)B=B(A-I)$

设 $B=(b_{ij})_{2\times2}$ $\quad (A-I)B=\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad B(A-I)=\begin{pmatrix}0&b_{11}\\0&b_{21}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow b_{21}=0 \quad b_{11}=b_{22} \quad B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\0&b_1\end{pmatrix}=b_1I+b_2(A-I)$

(2) $A=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ $\quad \lambda_1=3 \quad \lambda_2=2 \quad \lambda_3=5$

设 $B=(b_{ij})_{3\times3}$ $\quad AB$与$BA$的$(i,j)$元分别为$\lambda_ib_{ij}$与$b_{ij}\lambda_j$

$AB=BA \Leftrightarrow \lambda_ib_{ij}=b_{ij}\lambda_j\ (\forall 1\le i,j\le 3) \Leftrightarrow (\lambda_i-\lambda_j)b_{ij}=0$

$\Rightarrow b_{ij}=0\ (i\neq j) \quad B=\mathrm{diag}\{b_1,b_2,b_3\}$

(3) $A=3I+N$ $\quad \left(N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad N^3=O\right)$

$AB=BA \Leftrightarrow NB=BN$

设 $B=(b_{ij})_{3\times3}$ $\quad NB=\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad BN=\begin{pmatrix}0&b_{11}&b_{12}\\0&b_{21}&b_{22}\\0&b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\0&b_1&b_2\\0&0&b_1\end{pmatrix}=b_1I+b_2(A-3I)+b_3(A-3I)^2$

注：可以证明，可以写成同一个矩阵的多项式的两个矩阵可交换！

3. 希望找到一个$B$ s.t. $(I+A)B=I$

$I=I^k-(-A)^k=(I-(-A))\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-A)^i\right)$ $\quad (A^k=O\Rightarrow(-A)^k=(-1)^kA^k=O)$

故 $(I+A)^{-1}=\sum_{i=0}^{k-1}(-A)^i$

4. 希望找到一个$B$ s.t. $(I-A)B=I$

$I-2A-3A^2+4A^3+5A^4-6A^5=O$

$\Leftrightarrow 2I-2A-3A^2+4A^3+5A^4-6A^5=I$

$\Leftrightarrow (I-A)(2I-3A^2+A^3+6A^4)=I$

故 $(I-A)^{-1}=2I-3A^2+A^3+6A^4$

注：关于矩阵多项式的因式分解(系数为标量)，若是单个矩阵自变量，分解与标量多项式同步；若是多个矩阵自变量，相关矩阵最好两两可交换，否则通常会失败(例如：$A^2-B^2\neq(A-B)(A+B)$)

5. $A(A-B)^{-1}=BC$

$I=(A-B)(A-B)^{-1}=A(A-B)^{-1}-B(A-B)^{-1}=BC-B(A-B)^{-1}$
$=B(C-(A-B)^{-1})$
$=(C-(A-B)^{-1})B$ (互逆矩阵可交换)

则 $CB = I+(A-B)^{-1}B = (A-B)^{-1}(A-B) + (A-B)^{-1}B = (A-B)^{-1}(A-B+B) = (A-B)^{-1}A$

6. 法零 考虑 $\det(I_n-AB) = \det\begin{pmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m-BA)$

$\det\begin{pmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_m & B \\ O & I_n-AB \end{pmatrix} = \det(I_m)\det(I_n-AB) = \det(I_n-AB)$

$\det\begin{pmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_m-BA & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m-BA)\det(I_n) = \det(I_m-BA)$

$\det(I_n-AB)=0 \iff \det(I_m-BA)=0$ 即 $I_n-AB$ 可逆 $\iff$ $I_m-BA$ 可逆

$(I_m-BA)^{-1}$ ?

法一（来自丘老）设法找到一个 $m$ 阶矩阵 $X$ s.t. $(I_m-BA)(I_m+X)=I_m$

（欣赏）由上式得 $X-BAX=BA$

令 $X=BYA$，$Y$是待定的 $n$阶矩阵，代入上式得

$B(Y-ABY)A=BA$

取 $Y=(I_n-AB)^{-1}$ 上式成立

故 $(I_m-BA)^{-1}=I_m+BYA=I_m+B(I_n-AB)^{-1}A$

法二（来自董老）由 $\begin{pmatrix} I_n-AB & A \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ B & I_m-BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ O & I_m \end{pmatrix}$ (*)

（更容易接受） 若 $I_n-AB$ 可逆，则 $\begin{pmatrix} I_n-AB & A \\ O & I_m \end{pmatrix}$ 可逆

而 $\begin{pmatrix} I_n & O \\ B & I_m \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} I_n & A \\ O & I_m \end{pmatrix}$ 也可逆

故 $\begin{pmatrix} I_n & O \\ B & I_m-BA \end{pmatrix}$ 也可逆，$I_m-BA$ 可逆

（分块三角矩阵可逆 $\iff$ 每个对角块都可逆）

引理：$\begin{pmatrix} U_{n\times n} & X_{n\times m} \\ O & V_{m\times m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}XV^{-1} \\ O & V^{-1} \end{pmatrix}$ （证明略）

由引理及(*)式 $\begin{pmatrix} I_n & O \\ B & I_m-BA \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & A \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (I_n-AB)^{-1} & -(I_n-AB)^{-1}A \\ O & I_m \end{pmatrix}$

取右下块，$(I_m-BA)^{-1}=I_m+B(I_n-AB)^{-1}A$

（(*)式可看作 $\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$ 分别做了一次分块初等列变换的逆变换过程）

（ 引理2：$\begin{pmatrix} U_{n\times n} & O \\ Y_{m\times n} & V_{m\times m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & O \\ -V^{-1}YU^{-1} & V^{-1} \end{pmatrix}$ ）