No.

Date

第二周 习题

1\. 对 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的前 s 行做初等行变换，化成

$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $J_r: r\times n$ r行都是非零行 $r=\operatorname{rank}A$

再对后 l 行做初等行变换，化成

$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & J_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J_t: t\times m$ t行都是非零行 $t=\operatorname{rank}B$

最后做一系列两行互换，化成

$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 阶梯形 $\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= r+t$

$= \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

2\. 法一 记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ $B=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$ 即证 $\operatorname{rank}(A,B)\leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

$RHS = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (由第1题) $=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A\ B)$
$=LHS$

法二 设 $\operatorname{rank}A=m$ $\operatorname{rank}B=n$

取 $(a_1,\cdots,a_r)$ 的一个极大线性无关组 $(a_{i_1},\cdots,a_{i_m})$

$(b_1,\cdots,b_s)$ 的一个极大线性无关组 $(b_{j_1},\cdots,b_{j_n})$

$(a_{i_1},\cdots,a_{i_m},b_{j_1},\cdots,b_{j_n})$ 的一个极大线性无关组 $\{c_k\}$ 可以表示出

$(a_{i_1},\cdots,a_{i_m})$ 和 $(b_{j_1},\cdots,b_{j_n})$ 中任意一个向量，从而可以表示出 $(a_1,\cdots,a_r)$ 和 $(b_1,\cdots,b_s)$

中任意一个向量 $\Rightarrow$ $\{c_k\}$ (至多$m+n$个向量) 可作为 $(a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_s)$ 的极大线性无关组 $\Rightarrow LHS\leq m+n=RHS$

3\. 易知 $s\leq t$ 考虑归纳法

$s=1$ $\alpha_1\neq 0$ $\exists c_i$ $\alpha_1=\sum_{i=1}^{t} c_i\beta_i$ $\exists c_p\neq 0\ (1\leq p\leq t)$ $\beta_p=\frac{1}{c_p}[\alpha_1-\sum_{i=1, i\neq p}^{t} c_i\beta_i]$

α_1替换β_p即可

假设结论已对$s-1$个向量组成的集合 $S_{s-1}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1}\}$成立

即可用$\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1}$替换$T$中某$s-1$个向量，得到 $T_{s-1}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\beta_{i_s},\cdots,\beta_{i_t}\}$ $\sim T$

α_s是T的线性组合，从而也是T_{s-1}的线性组合：

$\alpha_s=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}+\lambda_s\beta_{i_s}+\cdots+\lambda_t\beta_{i_t}$

$\lambda_s,\cdots,\lambda_t$ 不全为零，否则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$ 线性相关，矛盾

$\exists\ p\in\{s,s+1,\cdots,t\}$ $\lambda_p\neq 0$ $\beta_{i_p}=\frac{1}{\lambda_p}[\alpha_s-(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}+\sum_{j=s, j\neq p}^{t}\lambda_j\beta_{i_j})]$

α_s替换T_{s-1}中的β_{i_p}，得到向量组 T_s，$T_s\sim T_{s-1}\sim T$

由数学归纳法，命题得证

KOKUYO

4. (1) $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \cdots, \tilde{a}_{j_t}$ 都是 $\mathbb{R}^r$ 中的向量（极大线性无关组）

这些列向量张成的空间是 $\mathbb{R}^r$ 的子空间，于是 $\tilde{A}$ 的列秩 $t \le r$

(2) 任意的 $\tilde{a}_j$ 都可以写成 $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \cdots, \tilde{a}_{j_t}$ 的线性组合

（列向量）$\tilde{a}_j = \alpha_{1j}\tilde{a}_{j_1} + \alpha_{2j}\tilde{a}_{j_2} + \dots + \alpha_{tj}\tilde{a}_{j_t}$

（固定第 i_p 行） $a_{i_p j} = \alpha_{1j} a_{i_p j_1} + \alpha_{2j} a_{i_p j_2} + \dots + \alpha_{tj} a_{i_p j_t}$ $(1 \le p \le r)$

任意的 $\vec{A}_l$ 都可以写成 $\vec{A}_{i_1}, \vec{A}_{i_2}, \cdots, \vec{A}_{i_r}$ 的线性组合

（行向量） $\vec{A}_l = c_{l1}\vec{A}_{i_1} + c_{l2}\vec{A}_{i_2} + \dots + c_{lr}\vec{A}_{i_r}$

（固定第 j 列） $a_{lj} = c_{l1} a_{i_1 j} + c_{l2} a_{i_2 j} + \dots + c_{lr} a_{i_r j}$ $(1 \le j \le n)$

$$\Rightarrow a_{lj} = \sum_{p=1}^{r} c_{lp} a_{i_p j} = \sum_{p=1}^{r} c_{lp}\left(\sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj} a_{i_p j_q}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj}\left(\sum_{p=1}^{r} c_{lp} a_{i_p j_q}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj} a_{l j_q}$$

故 $\vec{a}_j = \sum_{q=1}^{t} \alpha_{qj} \vec{a}_{j_q}$

即 A 的任何一个列向量 $\vec{a}_j$ 都是 $\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_t}$ 的线性组合

故 A 的列秩 $s \le t$ 从而 $s \le t \le r$

(3) 对 A^T 做同样处理，可得 $r \le s$

$s \le r, r \le s \Rightarrow r = s$