线性代数习题课 14

2025.12.30

半双线性型与二次型

设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间。函数 $f : U \times U \to \mathbb{C}$ 称为（U 上的）半双线性型，如果它对第一个变量是线性的，对第二个变量是半线性的。
即对任意复数 a, b 和 U 中的向量 x, y, z，有

1. $f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z)$
2. $f(x, ay + bz) = \bar{a}\, f(x, y) + \bar{b}\, f(x, z)$

设 $v_1, \cdots, v_s$ 是 U 的基，则半双线性型 f 在诸 (v_i, v_j) 处的值完全确定了 f：

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij}\, x_i\, \bar{y}_j, \quad f_{ij} = f(v_i, v_j).$$

其中 $x = \sum_{i=1}^{s} x_i v_i, \quad y = \sum_{j=1}^{s} y_j v_j.$

矩阵 $F = (f_{ij})$ 称为 f 在基 (v_i) 下的矩阵

半双线性型与二次型

如果从基 $v_1, \cdots, v_s$ 到另一个基 $v'_1, \cdots, v'_s$ 的转换矩阵是 A，那么 f 在基 (v'_i) 下的矩阵为

$$F' = A^T F \bar{A}$$

称半双线性型 f 是埃尔米特型，如果 $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$，等价于它的矩阵 $F = (f_{ij})$ 满足条件 $F^* = F$，即 F 是埃尔米特矩阵

称半双线性型 f 是斜埃尔米特型，如果 $f(x, y) = -\overline{f(y, x)}$，等价于它的矩阵 $F = (f_{ij})$ 满足 $F^* = -F$，即 F 为斜埃尔米特矩阵

每个埃尔米特型 f 确定了一个埃尔米特二次型 $q(x) = f(x, x)$，这是 U 上的实值函数

半双线性型与二次型

如果埃尔米特型 f 在某个基下的矩阵是对角的，那么 f 和它给出的二次型就有如下整齐简洁的形式：

$$f(x,y) = f_1 x_1 \overline{y_1} + \cdots + f_s x_s \overline{y_s},$$
$$q(x) = f_1 |x_1|^2 + \cdots + f_s |x_s|^2$$

上面两式分别称为埃尔米特型 f 和埃尔米特二次型 q 的一个典范式，相应的基称为 f 和 q 的典范基

称埃尔米特二次型 $q(x)$ 是正定的：若对任意非零的 $x \in U$ 有 $q(x) > 0$. 如果 $q(x)$ 是正定的，我们也称 $q(x)$（或相应的埃尔米特型）在任何基下的矩阵是正定的

半双线性型与二次型

定理：设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的埃尔米特型。那么 f 有典范标准正交基。特别地，向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的每个埃尔米特型 f 都有典范标准正交基

推论：设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间，q 是 U 上的埃尔米特二次型，秩为 r . 那么存在 U 的标准正交基使得 q 有如下的典范式：

$$q(x) = \lambda_1|x_1|^2 + \cdots + \lambda_r|x_r|^2,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 是 x 在这个标准正交基下的坐标，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是 $q(x)$ 在这个标准正交基的前 r 个向量的值，也是 q 在任何一个标准正交基下的矩阵的非零特征值

特别地，$q(x)$ 是正定的（或半正定的）当且仅当 $q(x)$ 在一个标准正交基下的矩阵的特征值都是正的（或非负的）

半双线性型与二次型

推论（主轴定理）：设 $q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x_j}$ 是复二次函数，且 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$. 那么存在 n 阶酉矩阵 T 使得做变量替换 $x=Ty$ 后有

$$q(x)=\lambda_1|y_1|^2+\lambda_2|y_2|^2+\cdots+\lambda_r|y_r|^2.$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n 阶方阵 (a_{ij}) 的非零特征值

设 A 是 n 阶埃尔米特矩阵，那么下面条件等价：

1. A 是正定的；
2. A 的特征值都是正的；
3. 存在可逆矩阵 P（n 阶方阵）使得 $A=P^*P$
4. A 的各阶主子式都为正

酉算子

复内积空间 V 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 如果保持内积不变，即

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta), \quad \forall\, \alpha, \beta \in V,$$

那么称 $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个酉变换

n 维酉空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是酉变换

$$\begin{aligned} &\iff A \text{ 在 } V \text{ 的标准正交基下的矩阵是酉矩阵} \\ &\iff A \text{ 把 } V \text{ 的标准正交基映成标准正交基} \end{aligned}$$

酉算子的不变子空间的正交补依然是不变子空间（这个命题对埃尔米特算子也成立）

酉矩阵

酉矩阵的性质

1. 特征值的模长都为 1
2. 行列式的模长为 1
3. 不同特征值对应的特征向量正交
4. 酉矩阵的逆，乘积，共轭转置依然是酉矩阵
5. 可被酉对角化

定理：设 A 是 n 阶酉矩阵，那么存在 n 阶酉矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵，而且对角线上的数的模都是 1

酉矩阵的酉对角化步骤跟埃尔米特矩阵的酉对角化完全相同

约当标准形

设 λ 是复数，如下形式的 n 阶方阵 $J_n(\lambda)$ 称为以 λ 为特征值的 n 阶约当块：

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

约当标准形

约当矩阵就是一个分块对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

这里 λ_i, m_i 可以相同

定理：设 A 是 n 阶复方阵，那么 A 有约当标准形，即存在 n 阶复可逆方阵 C 使得 $C^{-1}AC = J(A)$ 是约当矩阵。若不计约当块之间的置换，A 的约当标准形是唯一的

> 两个复矩阵相似，当且仅当它们具有相同的约当标准形，允许对约当块的排列顺序进行置换

约当标准形-求约当标准形

> 建议看看教材和丘老高代上的一些例子

1. 首先求出 A 的特征多项式，并把它分解成一次多项式的乘积：

$$\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{p}(t-\lambda_i)^{n_i}.$$

2. 对每一个特征值 $\lambda \in \{\lambda_1 \cdots \lambda_p\}$，求出 $A-\lambda E$ 的秩。
   那么 $J(A)$ 中以 λ 为特征值的约当块的个数是

$$N(\lambda) = n - \mathrm{rank}(A-\lambda E).$$

   设 m 是 λ 的代数重数（即当 $\lambda=\lambda_i$ 时 $m=n_i$），则 m 是 λ 出现在 $J(A)$ 的对角线上的次数，它等于以 λ 为特征值的约当块的阶数的和。

约当标准形-求约当标准形

3. 要求出 k 阶约当块 $J_k(\lambda)$ 在 $J(A)$ 中出现的次数 $N(\lambda,k)$，应用公式：

$$N(\lambda,k)=\operatorname{rank}(A-\lambda E)^{k-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda E)^{k}+\operatorname{rank}(A-\lambda E)^{k+1}.$$

在 $k\geq m$ 时，有 $\operatorname{rank}(A-\lambda E)^{k}=n-m$.（若 $\lambda=\lambda_i$，则 $m=n_i$）

通过上面三个步骤，就可以求出约当标准形 $J(A)$. 如果要求出矩阵 C 使得 $C^{-1}AC=J(A)$，还需要求出算子 $\mathcal{A}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$，$X\mapsto AX$ 的约当基。

约当标准形-求约当基

4. 对特征值 λ，有广义特征空间

$$V(\lambda)=\{X\in\mathbb{C}^n \mid (A-\lambda E)^m X=0\}$$

广义特征空间是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，贡献所有以 λ 为特征值的约当块，并且也只贡献以 λ 为特征值的约当块。这里 $m=n_i$ 如果 $\lambda=\lambda_i$.

如果 p 是以 λ 为特征值的约当块的最大阶数，那么有

$$V(\lambda)=\{X\in\mathbb{C}^n \mid (A-\lambda E)^p X=0\}.$$

约当标准形-求约当基

5. 取 $V(\lambda)$ 的一个基 $X_1, \cdots, X_m$，在 $(A-\lambda E)^{p-1}X_1, \cdots, (A-\lambda E)^{p-1}X_m$ 中取一个极大线性无关组，设为 $(A-\lambda E)^{p-1}e_1$, $\cdots$, $(A-\lambda E)^{p-1}e_{s_p}$，这里的诸 e_i 都是向量组 $X_1, \cdots, X_m$ 中的元素。

   线性无关向量组 $(A-\lambda E)^{p-1}e_1, \cdots, (A-\lambda E)^{p-1}e_{s_p}$ 是

$$V(\lambda)_p = (\mathcal{A}-\lambda E)^{p-1}V(\lambda) \cap \ker(\mathcal{A}-\lambda E)$$

   的基。

   对 $e_1, \cdots, e_{s_p}$ 中每一个元素 e_i，通过 $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ 及其幂的作用得到向量组

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-1}e_i,\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-2}e_i,\ \cdots,\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})e_i,\ e_i.$$

   这些向量张成 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间，给出一个 p 阶的以 λ 为特征值的约当块。如此一来得到了约当基中贡献所有 s_p 个 $J_p(\lambda)$ 的那一部分基向量。

约当标准形-求约当基

接下来在 $V(\lambda)$ 中取线性无关的向量 $e_{s_p+1}, e_{s_p+2}, \cdots, e_{s_{p-1}}$，使得向量组 $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-1}e_1, \cdots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-1}e_{s_p}$，$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-2}e_{s_p+1}, \cdots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-2}e_{s_{p-1}}$ 是 $V(\lambda)_{p-1} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-2}V(\lambda) \cap \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ 的基。如此下去，最后得到向量组

$$e_1, \cdots, e_{s_p}, \quad e_{s_p+1}, \cdots, e_{s_{p-1}}, \quad \cdots, \quad e_{s_2+1}, \cdots, e_{s_1}.$$

使得对于不超过 p 的正整数 k，向量组

$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-1}e_1, \cdots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{p-1}e_{s_p}$，$\cdots$，$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-1}e_{s_{k+1}+1}, \cdots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-1}e_{s_k}$

是 $V(\lambda)_k = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-1}V(\lambda) \cap \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ 的基。

约当标准形-求约当基

对 $e_{s_{k+1}+1},\cdots,e_{s_k}$ 中的每一个向量 e_j，由 $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ 及其幂的作用得到向量组

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-1}e_j,\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-2}e_j,\ \cdots,\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})e_j,\ e_j,$$

这些向量张成 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间，给出一个 k 阶的以 λ 为特征值的约当块，如此一来得到了约当基中贡献所有 s_k-s_{k+1} 个 $J_k(\lambda)$ 的那一部分基向量。

这样就得到了约当基中给出以 λ 为特征值的约当块的那一部分基向量。把每一个特征值对应的这些向量合起来，就得到 $\mathcal{A}$ 的一个约当基。以这个基的向量为列向量得到一个矩阵 C，就有 $CAC^{-1}=J(A)$.

> **可以通过解矩阵方程 $AP=PJ$ 来求解约当基（并非不太可行）！！！**
> 用这个方法求解约当基的例题可以参考丘老的高代9.6节例题

Goodbye Linear Algebra Ⅰ