期中考试易错点提示

考试加油！

第一章 线性方程组

- 当且仅当
  $\Rightarrow$ 充分性，$\Leftarrow$ 必要性，都要证
  或者全程使用 $\Leftrightarrow$ 等价表述
- 确定的否定：线性方程组无解或者有无穷多个解
- 高斯消元法：可能存在 $0 = d$ 的行
- 自由变量的取值范围
  $eg.\ x_3 = s, x_4 = r$
  $s, r \in \mathbb{R}$

第二章 矩阵

- 证明子空间时，零向量存在与子集非空是等价的，只不过证明子集非空的快速方法通常是证明零向量存在（另外两个条件是加法封闭与数乘封闭）
- 如果要求证明向量空间，需要证明 2 个运算封闭和教材 P20 的 8 条性质(证否向量空间只需要找到一个不成立的性质的反例即可)
- 计算矩阵的秩，不一定非要化成阶梯形，可以考虑向量组的维数
- 秩的语言刻画线性方程组的解的情况
- 矩阵乘法没有交换律与消去律（没有消去律的意思是 $AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$，$AB = AC$ 不能推出 $B = C$）
- 只有可交换的两个矩阵才有二项式定理

第二章 矩阵

- $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量是其余向量的线性组合

> 如果向量组线性相关，那么每一个向量都可以表示成其余向量的线性组合吗?

- 设向量组 S 是向量组 T 的一个子集。那么，如果 S 线性相关，则 T 也线性相关；反之，如果 T 线性无关，则 S 也线性无关

> 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关，那么该向量组也线性无关吗?

第二章 矩阵

- 分块矩阵的角度刻画矩阵乘法
- 计算矩阵的方幂，常用方法有归纳法，将原矩阵分解成若干个矩阵的和（往往是纯量矩阵与幂零矩阵）或积，将矩阵视为线性映射考虑标准基的像等
- 初等行/列变换（左乘/右乘可逆矩阵）不改变矩阵的秩
- $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$
- $\operatorname{rank}(A^T A) = \operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank} A$
- 分块初等矩阵（左行右列法则，注意左/右有双重含义）
- 二阶准三角方阵的逆
- 沙漠岛公式（尽量看懂猜的思路）

第二章 矩阵

- $\text{nullity}\, A(\dim S) + \text{rank}\, A = \dim(\ker(\varphi_A)) + \dim(\text{im}(\varphi_A)) = n$，其中 n 为 A 的列数（即未知元的数量）
- 解空间的结构：对于非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，如果相容，
  非齐次线性方程组的通解 = 非齐次线性方程组的一个特解 + 相伴的齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的非平凡解（若不存在非平凡解则非齐次线性方程组通解只有唯一解）

> 注意求相伴的齐次线性方程组基础解系的正确方式（非齐次线性方程组通解去掉常数项即特解）

第三章 行列式

- 计算行列式时可以混合使用初等行、列变换
  但在求逆矩阵时只能使用**初等行变换或列变换中的一种**（不可混用）
- 行列式交换两行/两列后有一个负号（计算行列式时最少用的一种初等变换）
- 分块矩阵的相关行列式结论
- 伴随矩阵中，a_{ij} 的代数余子式（有符号）位于伴随矩阵的第 j 行 i 列
- 无论 A 是否可逆，$AA^* = A^*A = |A|I$

考试信息

- 考试时间: 2025.11.16 星期日 9:00~11:00
- 考试地点: 教学中心101
- 考试内容: 前三章
- 期中考试占总成绩 30%
- 试卷为全中文，题型与难度参考两套练习卷

具体见教务系统 - 我的考试

考前保证充足的营养摄入!

Good Luck!