线性代数期中练习题二

1. 求出如下齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

2. 设

$$X=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0 (i=1,2,\ldots,n)$. 求 X^{-1}.

3. 设 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集。证明: S 是线性无关的当且仅当 $\mathbf{v}_1 \neq 0$ 且对任意的 $2 \leq k \leq m$, 有 $\mathbf{v}_k \notin \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_{k-1}\rangle$.

4. 设 A 是一个 n 阶方阵，且各项的元素都是整数，满足 $\det A=1$。如果线性方程组 $AX=B$ 的常数项 $B=[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ 也是整数，请证明方程组 $AX=B$ 的解都是整数。

5. 给出映射 $\varphi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longrightarrow (x+y, x-y, 2x+3y)$.

(i) 将 φ 表示为 $\varphi_A:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ 的形式，其中 A 为 3×2 阶矩阵，并证明 φ 是线性映射.

(ii) φ 是否为单射? 证明你的结论.

6. 计算如下的 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

7. 设 A 是一个 n 阶方阵, 记 $A^\vee$ 是 A 的伴随矩阵。证明： $A^\vee$ 是零矩阵当且仅当 $\mathrm{rank} A < n-1$.

8. (i) 证明：如果 A 对称（斜对称），则 A^{-1} 也对称（斜对称）.
(ii) 证明：不存在奇数阶的可逆斜对称矩阵.

9. 判断下列命题是否正确，并简要说明理由。
(a) 如果 A, B 是两个 $n \times n$ 矩阵，则 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$。
(b) 如果 A, B, C 是 $n \times n$ 矩阵， $A \neq O$ 且 $AB = AC$，则必有 $B = C$。
(c) 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A，其零空间 $\mathrm{Ker}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。
(d) 设 A, B, C, D 均为 $n \times n$ 矩阵，则分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的行列式为 $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$。
(e) 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A，都有 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T A)$。