线性代数第一次小测参考解答

1. (1) 设 λ 是一个实数， A 是如下的 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

计算 A^k, 其中 k 是任意的正整数。

(2) 对于 $\lambda = 1$, 求矩阵 A 的逆矩阵。

解： (1)记

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是 $A = \lambda E + J$. 注意道 E 与 J 是可交换的，因此

$$A^k = (\lambda E + J)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda E)^{k-i} J^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} J^i.$$

简单计算（教材上习题2.3 2(5)）, J^i 恰为主对角线斜向上平移 i 次的位置

放置 1, 其余位置为 0 的矩阵。从而

$$(\lambda E+J)^k=\begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{3}\lambda^{k-3} & \cdots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-3}\lambda^{k-n+3} & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-4}\lambda^{k-n+4} & \binom{k}{n-3}\lambda^{k-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}.$$

(2) 此时 $A=E+J$. 注意到 $J^n=0$，从而

$$E=E-(-J)^n=(E+J)(E+(-J)+(-J)^2+\cdots+(-J)^{n-1}).$$

因此 $A^{-1}=E+(-J)+(-J)^2+\cdots+(-J)^{n-1}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^iJ^i$, 于是得到

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-3} & (-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (1) 设 A 是 $m\times r$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵， C 是 $m\times n$ 矩阵。证明：

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B.$$

(2) 如果你还有时间，能不能举一些例子，说明 (1) 中不等式的不等号可以满足等号成立，也可以是严格的不等号。

证明：(1) 设 $\mathrm{rank}A = k$, 且 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ 是 A 的行向量的一个极大线性无关组。设 $\mathrm{rank}B = l$, $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_l}$ 是 B 的行向量的一个极大线性无关组。我们说明

$$(A_{i_1}, C_{i_1}), (A_{i_2}, C_{i_2}) \ldots, (A_{i_k}, C_{i_k}), (0, B_{j_1}), (0, B_{j_2}), \ldots, (0, B_{j_l})$$

是线性无关的，据此就可以说明

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq k + l = \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B.$$

考虑如下的方程

$$\lambda_1(A_{i_1}, C_{i_1}) + \cdots + \lambda_k(A_{i_k}, C_{i_k}) + \mu_1(0, B_{j_1}) + \cdots + \mu_l(0, B_{j_l}) = 0.$$

立即得到

$$\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \cdots + \lambda_k A_{i_k} = 0,$$

$$\lambda_1 C_{i_1} + \lambda_2 C_{i_2} + \cdots + \lambda_k C_{i_k} + \mu_1 B_{j_1} + \mu_2 B_{j_2} + \cdots + \mu_l B_{j_l} = 0.$$

由上述第一个方程，结合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ 线性无关，知道 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. 待入第二个方程，而 $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_l}$ 线性无关，于是 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_l = 0$. 从而证明了

$$(A_{i_1}, C_{i_1}), (A_{i_2}, C_{i_2}) \ldots, (A_{i_k}, C_{i_k}), (0, B_{j_1}), (0, B_{j_2}), \ldots, (0, B_{j_l})$$

是线性无关的。

(2) 当 C 是零矩阵的时候，不等号变成等号，即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B.$$

不过，请注意 $C = 0$ 只是等号成立的一个充分条件，不是必要条件。严格的不等号举例是容易的，这里省略。