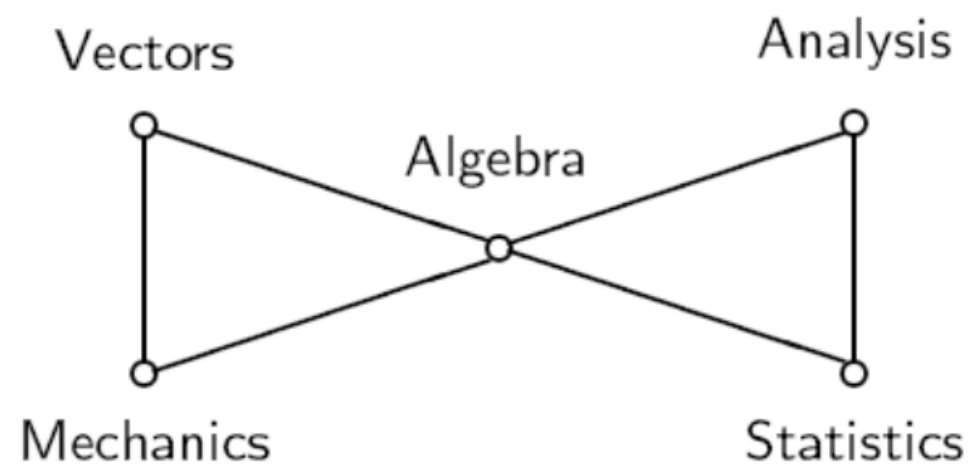


线性代数习题课 3

2025.10.14



习题

(教材 2.2 节 习题 4)

设 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行秩为 r , 列秩为 s

取 A 的 r 个线性无关的行向量 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$. 这 r 个行向量形成一个 $r \times n$ 矩阵 \tilde{A} .

设 \tilde{A} 的列秩为 t , $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \dots, \tilde{a}_{j_t}$ 是 \tilde{A} 的列向量的极大线性无关组。证明:

1. $t \leq r$

2. 矩阵 A 的任何一个列向量 a_j 都是列向量 $\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \dots, \tilde{a}_{j_t}$ 的线性组合, 从而
 $s \leq t \leq r$, 即列秩不超过行秩

提示: 利用 A 的任一行向量都是 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ 的线性组合

习题

3. 把 A 的行作为列，得到如下 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置：

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

有 $r_c({}^tA) = r_r(A)$, $r_r({}^tA) = r_c(A)$.

结合 2 与 3 可知 $s \leq r$ 且 $r \leq s$ ，因此 $r = s$

作业

- 证明任意有限维线性空间的非空子集中存在极大线性无关向量组，要说明不能有无穷个线性无关的向量
- 计算矩阵的秩，不一定非要化成阶梯形，可以考虑向量组的维数
- 计算矩阵的方幂，常用方法有归纳法，将原矩阵分解成纯量矩阵与其它矩阵（往往是幂零矩阵）的和（两个矩阵只有可交换才有二项式定理），将矩阵视为线性映射考虑标准基的像等

线性映射

一个数域 \mathbb{K} 上的映射 $\varphi : V \rightarrow U$ 如果满足：

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in V;$
2. $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V,$

则称 φ 是（从 V 到 U 的）**线性映射**

设映射 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto y$, 为 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的映射。若 $y = Ax$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则称 \mathcal{A} 为 A 的线性映射, A 为线性映射 \mathcal{A} 的矩阵

矩阵的运算

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{n \times p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ，定义 A 与 B 的乘积为 $m \times p$ 阶矩阵 $C := (c_{ij})_{m \times p}$ ，其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

它是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和。记为 $C = AB$

矩阵的运算

关于矩阵乘法的注意事项

1. 只有当 A 的列数等于 B 的行数时， A 与 B 才可以相乘；
2. AB 有意义并不意味着 BA 有意义。即使 A 与 B 为同阶方阵， AB 与 BA 也不一定相等。若 $AB = BA$ ，则称 A, B 可交换；
3. **两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵**，即 $AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$ ， $AB = AC$ 不能推出 $B = C$ ；
4. 左乘对角矩阵相当于把 A 的各行分别乘上一个数；右乘对角矩阵相当于把 A 的各列分别乘上一个数；
5. 纯量矩阵 (λI) 与 A 相乘等价于对 A 的数乘： $(\lambda I)A = A(\lambda I) = \lambda A$. 特别地， $IA = AI = A$ ， $OA = AO = 0$

矩阵的运算

矩阵乘法的性质

- 乘法结合律: $(AB)C = A(BC)$
- 左分配律: $(A + B)C = AC + BC$
- 右分配律: $A(B + C) = AB + AC$
- 数乘结合律: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

在 $M_n(\mathbb{R})$ 中, 与所有矩阵可交换的矩阵是纯量矩阵

矩阵的逆

设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 X 满足 $XA = AX = I$ ，则称 A **可逆**，并称 X 为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1}

可逆矩阵也称为非奇异矩阵/非退化矩阵，不可逆矩阵称为奇异矩阵/退化矩阵

对任意同阶可逆矩阵 A, B ，都有：

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$, $\lambda \neq 0$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

矩阵的逆

设 A 是 n 阶方阵，则以下陈述等价：

1. A 是可逆的
2. A 是非退化（满秩）的
3. A 的行向量/列向量线性无关
4. A 的行空间/列空间等于 \mathbb{R}^n
5. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有平凡解
6. A 的简化阶梯形为 I_n
7. 一般线性方程组 $Ax = b$ 有且只有唯一解
8. A 可以分解为一系列初等矩阵的乘积

矩阵的转置

将矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行列互换，得到的矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记作 $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$

等价地，可写成 $A^T =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

- $(A^T)^T = A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $\text{rank } A = \text{rank } A^T$

矩阵乘积的秩

设 A 为 $m \times s$ 矩阵, B 为 $s \times n$ 矩阵, 那么

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 和 C 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵, 那么

$$\text{rank}(BAC) = \text{rank}(A)$$

矩阵的分块

设 A 为 $m \times r$ 矩阵, B 为 $r \times n$ 矩阵, 把 B 写成列向量形式

$$B = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$$

$$\text{则 } AB = A(c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n) = (Ac_1 \quad Ac_2 \quad \cdots \quad Ac_n)$$

即 AB 的第 j 列等于 A 与 B 的第 j 列 c_j 的乘积 Ac_j

设 B 为 $r \times n$ 矩阵, A 为 $m \times r$ 矩阵, 把 A 写成行向量形式 $A =$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } AB = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} r_1 B \\ r_2 B \\ \vdots \\ r_m B \end{bmatrix}$$

即 AB 的第 i 行等于 A 的第 i 行 r_i 与 B 的乘积 $r_i B$

习题

计算下列方阵的 k 次方幂， k 为正整数

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

习题

分别求与下列矩阵 A 可交换的全部矩阵:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad (3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

习题

设方阵 A 满足 $A^k = O$, k 为正整数。证明: $I + A$ 可逆, 并求 $(I + A)^{-1}$

习题

设方阵 A 满足: $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$.

证明: $I - A$ 可逆, 并求 $(I - A)^{-1}$

习题

设 A, B, C 为同阶方阵且 $A - B$ 可逆, 已知 $A(A - B)^{-1} = BC$, 证明:
 $(A - B)^{-1}A = CB$

习题

设 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的实矩阵, 证明: 若 $I_n - AB$ 可逆, 则 $I_m - BA$ 也可逆; 并求 $(I_m - BA)^{-1}$