

Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP Combinatorial Theory

GV: Nguyễn Huy Đức

Bộ môn: Khoa học Máy tính – ĐH Thủy lợi



0903 402 655



ducnghuy@gmail.com

Nội dung

Chương 1. Logic, Tập hợp, Ánh xạ

Chương 2. Bài toán đếm

Chương 3. Bài toán tồn tại

Chương 4. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 5. Bài toán tối ưu tổ hợp

Chương 3. BÀI TOÁN TỒN TẠI

3.1. Giới thiệu bài toán

3.2. Một số bài toán tồn tại cổ điển

3.3. Nguyên lý Dirichlet

3.4. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản

3.1. Giới thiệu bài toán

- Chương trước tập trung vào việc đếm số các cấu hình tổ hợp, trong những bài toán đó sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên và công việc chính là đếm số phần tử thoả mãn tính chất đặt ra.
- Tuy nhiên, trong rất nhiều bài toán tổ hợp, việc chỉ ra sự tồn tại của một cấu hình thoả mãn các tính chất cho trước là hết sức khó khăn.
- Trong tổ hợp xuất hiện một vấn đề thứ hai rất quan trọng là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp với các tính chất cho trước - *bài toán tồn tại tổ hợp*.
- Trong bài toán tồn tại tổ hợp cần trả lời câu hỏi: “Tồn tại hay không cấu hình tổ hợp thoả mãn các tính chất đã cho?”
- Nhiều bài toán tồn tại tổ hợp đã từng thách thức trí tuệ nhân loại.

3.2 Một số bài toán tồn tại cổ điển

Bài toán về 36 sĩ quan

- Bài toán này được Euler đề nghị, nội dung của nó như sau:

“Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá về tham gia duyệt binh ở sư đoàn bộ.

Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hàng ngang cũng như mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc sĩ quan.”

Bài toán về 36 sĩ quan

- Sử dụng:
 - A, B, C, D, E, F để chỉ các phiên hiệu trung đoàn,
 - a, b, c, d, e, f để chỉ các cấp bậc sĩ quan.
- Bài toán này có thể tổng quát hoá nếu thay con số 6 bởi n .
- Trong trường hợp $n = 4$, một lời giải của bài toán 16 sĩ quan là

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bb	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

- Một lời giải trong trường hợp $n = 5$ là

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee
Cd	De	Ea	Ab	Bc
Eb	Ac	Bd	Ce	Da
Be	Ca	Db	Ec	Ad
Dc	Ed	Ae	Ba	Cb

Bài toán về 36 sĩ quan

- ❑ Do lời giải của bài toán có thể biểu diễn bởi 2 hình vuông với các chữ cái la tinh hoa và thường chồng cạnh nhau nên bài toán tổng quát đặt ra còn được biết dưới tên gọi bài toán về *hình vuông la tinh trực giao*.
- ❑ Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan thế nhưng ông đã không thành công. Từ đó ông đã đề ra một giả thuyết tổng quát là: **Không tồn tại hình vuông la tinh trực giao cấp $n = 4k + 2$.**
- ❑ Tarri, năm 1901 chứng minh giả thuyết đúng với $n = 6$, bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xếp.
- ❑ Năm 1960 ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda chỉ ra được một lời giải với $n = 10$ và sau đó chỉ ra phương pháp xây dựng hình vuông la tinh trực giao cho mọi $n = 4k+2$, với $k > 1$.

Bài toán về 36 sĩ quan

Tưởng chừng bài toán đặt ra chỉ có ý nghĩa thuần túy của một bài toán đồ hóc búa thử trí tuệ con người. Thế nhưng gần đây người ta đã phát hiện những ứng dụng quan trọng của vấn đề trên vào:

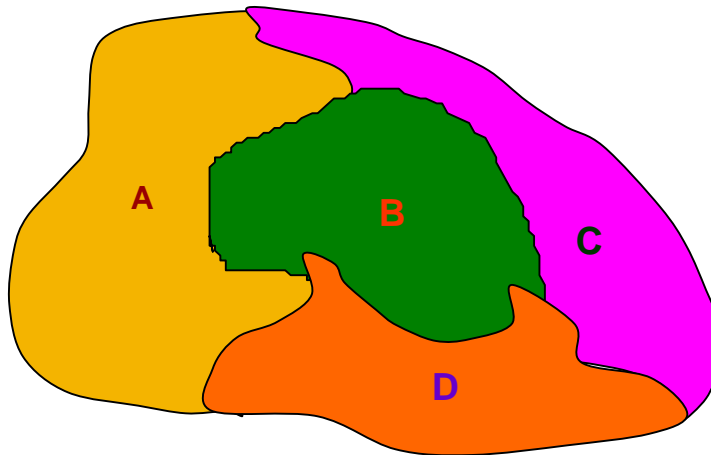
- ✓ Quy hoạch thực nghiệm (Experimental Design),
- ✓ Sắp xếp các lịch thi đấu trong các giải cờ quốc tế,
- ✓ Hình học xạ ảnh (Projective Geometry),

Bài toán 4 màu

- ❑ Có những bài toán mà nội dung của nó có thể giải thích cho bất kỳ ai, tuy nhiên lời giải của nó thì ai cũng có thể thử tìm, nhưng mà khó có thể tìm được. Ngoài định lý Fermat thì bài toán 4 màu là một bài toán như vậy.
- ❑ Bài toán có thể phát biểu trực quan như sau: **Chứng minh rằng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có hai nước láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu.**
- ❑ Chú ý rằng, ta xem như mỗi nước là một vùng liên thông và hai nước được gọi là láng giềng nếu chúng có chung biên giới là một đường liên tục.

Bài toán 4 màu

- ❑ Con số 4 không phải là ngẫu nhiên. Người ta đã chứng minh được rằng mọi bản đồ đều được tô với số màu lớn hơn 4, còn với số màu ít hơn 4 thì không tô được. Chẳng hạn bản đồ gồm 4 nước ở hình dưới không thể tô được với số màu ít hơn 4.



Bài toán 4 màu

- Vấn đề này được đề cập trong bức thư của Augustus De Morgan gửi W. R. Hamilton năm 1852 (De Morgan biết sự kiện này từ Frederick Guthrie, còn Guthrie từ người anh trai của mình...)
- Trong 110 năm rất nhiều chứng minh được công bố nhưng đều có lỗi.
- Năm 1976, Appel và Haken đã đưa ra chứng minh ***bằng máy tính điện tử!***

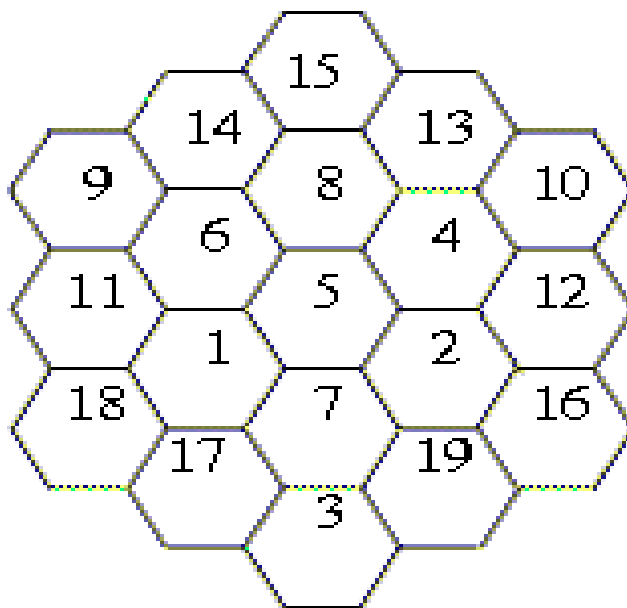
K. Appel and W. Hakin, "Every planar map is 4-colorable," Bulletin of the AMS, Volume 82 (1976), 711-712.

Bài toán 4 màu

- Trong ngôn ngữ toán học, bài toán 4 màu được phát biểu dưới dạng bài toán tô màu đồ thị phẳng.
- Việc giải quyết Bài toán 4 màu đóng góp phần quan trọng vào việc phát triển lý thuyết đồ thị.
- Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng thực tế quan trọng.

Hình lục giác thần bí

- ❖ Năm 1910 Clifford Adams đề ra bài toán hình lục giác thần bí sau: trên 19 ô lục giác (xem hình vẽ ở dưới) hãy điền vào các số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo 6 hướng của lục giác là bằng nhau (và đều bằng 38).



Hình lục giác thần bí

- ❑ Sau 47 năm trời kiên nhẫn cuối cùng ông ta đã tìm được lời giải.
- ❑ Sau đó vì sơ ý đánh mất bản thảo ông ta đã tốn thêm 5 năm để khôi phục lại. Năm 1962 Adams đã công bố lời giải đó.
- ❑ Thật không thể ngờ là đó là lời giải duy nhất (nếu không tính đến các lời giải sai khác nhau bởi phép biến hình đơn giản).

3.3. Các kỹ thuật chứng minh

3.3.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)

3.3.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

3.3.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học
(Proof by Mathematical Induction)

Mở đầu

- Chứng minh là trái tim của toán học.
- Trong suốt quá trình học từ thuở nhỏ đến trưởng thành bạn đã và sẽ còn phải làm việc với chứng minh – phải đọc, hiểu và thực hiện chứng minh.
- Có bí quyết gì không? Có phép màu gì giúp được không? Câu trả lời là: Không có bí quyết, không có phép màu. Vấn đề quan trọng là cần biết tư duy, hiểu biết một số sự kiện và nắm vững một số kỹ thuật cơ bản

Cấu trúc của chứng minh

- Cấu trúc cơ bản của chứng minh là dãy các mệnh đề, mỗi một trong số chúng sẽ
 - hoặc là giả thiết, hoặc là
 - kết luận được suy trực tiếp từ giả thiết hoặc suy ra từ các kết quả đã chứng minh trước đó.
- Ngoài ra có thể có những giải thích – cần cho người đọc và không có ảnh hưởng đến cấu trúc của chứng minh.
- Một chứng minh trình bày tốt sẽ rất dễ theo dõi: Mỗi bước trong chứng minh đều rõ ràng hoặc ít ra là được giải thích rõ ràng, người đọc được dẫn dắt đến kết luận mà không gặp những vướng mắc do những tình tiết không rõ ràng gây ra.

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Trước hết ta nhắc lại khái niệm số vô tỷ và một kết quả của số học:
- Một số thực được gọi là **số hữu tỷ** nếu nó có thể biểu diễn dưới dạng p/q , với p và q là các số nguyên. Một số thực không là số hữu tỷ được gọi là **số vô tỷ**.
- **Định lý cơ bản của số học**: Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố mà ta sẽ gọi là phân tích ra thừa số nguyên tố (sẽ viết tắt là **PTNT**) của số đó.

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Ký hiệu $s = 2^{1/2}$. Theo định nghĩa, s thoả mãn phương trình $s^2 = 2$.

- Nếu s là số hữu tỷ, thì ta có thể viết

$$s = p/q$$

trong đó p và q là hai số nguyên. Bằng cách chia cho ước chung nếu cần, ta có thể **giả thiết là p và q không có ước chung nào ngoài 1**.

- Thay biểu diễn này vào phương trình đầu tiên, sau khi biến đổi một chút, ta thu được phương trình

$$p^2 = 2 q^2 .$$

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Thế nhưng, theo *định lý cơ bản của số học*, 2 là thừa số trong PTNT của p^2 . Do 2 là số nguyên tố, nên nó cũng là thừa số trong PTNT của p . Từ đó suy ra, 2^2 cũng xuất hiện trong PTNT của p^2 , và vì thế trong cả PTNT của $2q^2$. Bằng cách chia hai vế cho 2, ta suy ra 2 là thừa số trong PTNT của q^2 .
- Tương tự như trên (như đối với p^2) ta có thể kết luận 2 là thừa số nguyên tố của q . Như vậy, ta thấy p và q có chung thừa số 2. Điều đó là mâu thuẫn với giả thiết p và q không có ước chung nào ngoài 1.
- Khẳng định được chứng minh.

3.3.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

- Chúng ta bắt đầu bằng ví dụ chứng minh tính bắc cầu của tính chất chia hết.
- **Định lý.** Nếu a chia hết b và b chia hết c thì a chia hết c .
- **Proof.** Theo giả thiết, và định nghĩa tính chia hết, ta suy ra tồn tại các số nguyên k_1 và k_2 sao cho

$$b = a k_1 \text{ và } c = b k_2.$$

- Suy ra

$$c = b k_2 = a k_1 k_2.$$

- Đặt $k = k_1 k_2$. Ta có k là số nguyên và $c = a k$, do đó theo định nghĩa về tính chia hết, a chia hết c .

3.3.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

Nếu P, thì Q (If P, Then Q)

- Phần lớn các định lý (các bài tập hay bài kiểm tra) mà bạn cần chứng minh hoặc ẩn hoặc hiện có dạng “Nếu P, Thì Q”.
- Trong ví dụ vừa nêu, "P" là “Nếu a chia hết b và b chia hết c ” còn "Q" là “ a chia hết c ”.
- Đây là dạng phát biểu chuẩn của rất nhiều định lý.
- Chứng minh trực tiếp có thể hình dung như là một dãy các suy diễn bắt đầu từ “P” và kết thúc bởi “Q”.

$$P \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$$

- Phần lớn các chứng minh là chứng minh trực tiếp. Khi phải chứng minh, bạn nên thử bắt đầu từ chứng minh trực tiếp, ngoại trừ tình huống bạn có lý do xác đáng để không làm như vậy.

Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Mỗi số nguyên lẻ đều là hiệu của hai số chính phương.
- **CM.** Giả sử $2a+1$ là số nguyên lẻ, khi đó

$$2a+1 = (a+1)^2 - a^2.$$

- **Ví dụ 2.** Số $100\dots 01$ (với $3n-1$ số không, trong đó n là số nguyên dương) là hợp số.
- **CM.** Ta có thể viết $100\dots 01 = 10^{3n} + 1$, trong đó n là số nguyên dương. Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ với $a = 10^n$ và $b = 1$, ta thu được

$$(10^n)^3 + 1 = (10^n + 1)(10^{2n} - 10^n + 1).$$

Do $(10^n + 1) > 1$ và $(10^{2n} - 10^n + 1) > 1$ khi n là nguyên dương nên ta có đpcm.

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Trong chứng minh bằng phản chứng ta sử dụng các giả thiết và mệnh đề phủ định kết quả cần chứng minh và từ đó cố gắng suy ra các điều phi lý hoặc các mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.
- Nghĩa là nếu phải chứng minh “Nếu P, Thì Q”, ta giả thiết rằng P và Not Q là đúng. Mâu thuẫn thu được có thể là một kết luận trái với một trong những giả thiết đã cho hoặc điều phi lý, chẳng hạn như $1 = 0$.
- Chứng minh căn bậc hai của 2 là số vô tỷ trong ví dụ mở đầu là một ví dụ chứng minh như vậy.

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 1.** Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.
- **Giải:**
- Chú ý rằng, cần và đủ để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng độ dài của 2 đoạn nhỏ phải lớn hơn độ dài của đoạn lớn.
- Sắp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài, ta có:
$$10 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7 < 100.$$
- Cần chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối.
- Giả thiết điều này không xảy ra.

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Từ giả thiết phản chứng suy ra đồng thời xảy ra các bất đẳng thức:

$$a_1 + a_2 \leq a_3,$$

$$a_2 + a_3 \leq a_4,$$

$$a_3 + a_4 \leq a_5,$$

$$a_4 + a_5 \leq a_6,$$

$$a_5 + a_6 \leq a_7.$$

- Từ giả thiết a_1, a_2 có giá trị lớn hơn 10, ta nhận được $a_3 > 20$. Từ $a_2 > 10$ và $a_3 > 20$, ta nhận được $a_4 > 30$, ..., cứ như vậy ta nhận được $a_5 > 50$, $a_6 > 80$ và $a_7 > 130$.
- Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100 và điều đó chứng minh kết luận của Ví dụ 1.

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 2.** Các đỉnh của một thập giác đều được đánh số bởi các số nguyên $0, 1, \dots, 9$ một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh liên tiếp có tổng các số là lớn hơn 13.
- **Giải:** Gọi x_1, x_2, \dots, x_{10} là các số gán cho các đỉnh của 1, 2, ..., 10 của thập giác. Giả sử ngược lại là không tìm được ba đỉnh nào thoả mãn khẳng định của ví dụ. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 13,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 13,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_9 + x_{10} + x_1 \leq 13,$$

$$x_{10} + x_1 + x_2 \leq 13,$$

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Cộng vế với vế tất cả các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \leq 130.$$

- Mặt khác do

$$\begin{aligned} & 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \\ &= 3(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \\ &= 135, \end{aligned}$$

- suy ra

$$135 = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \leq 130.$$

- Mâu thuẫn thu được đã chứng tỏ khẳng định trong ví dụ là đúng.

3.3.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác.
- **Giải:** Giả sử ngược lại là tìm được cách nối 31 máy sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác. Khi đó số lượng kênh nối là

$$5 \times 31 / 2 = 75,5 \text{ ?!}$$

- Điều phi lý thu được đã chứng minh khẳng định trong ví dụ là đúng.

3.3.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

- Chứng minh bằng phản đề sử dụng sự tương đương của hai mệnh đề "P kéo theo Q" và "Phủ định Q kéo theo phủ định P".

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

- Ví dụ, khẳng định “Nếu đó là xe của tôi thì nó có màu mận” là tương đương với “Nếu xe đó không có màu mận thì nó không phải của tôi”.
- Do đó, để chứng minh “Nếu P, Thì Q” bằng phương pháp phản đề, ta chứng minh “Nếu phủ định Q thì có phủ định P” ("If Not Q, Then Not P").

3.3.3. Chứng minh bằng phản đề

- **Ví dụ 1.** Nếu x và y là hai số nguyên sao cho $x+y$ là số chẵn, thì x và y có cùng tính chẵn lẻ.
- **CM.** Mệnh đề phản đề của khẳng định đã cho là “Nếu x và y là hai số nguyên không cùng chẵn lẻ, thì tổng của chúng là số lẻ.”
- Vì thế ta giả sử rằng x và y không cùng chẵn lẻ. Không giảm tổng quát, giả sử rằng x là chẵn còn y là lẻ. Khi đó ta tìm được các số nguyên k và m sao cho $x = 2k$ và $y = 2m+1$. Bây giờ ta tính tổng $x+y = 2k + 2m + 1 = 2(k+m) + 1$, mà rõ ràng là số lẻ.
- Từ đó suy ra khẳng định của ví dụ là đúng.

3.3.3. Chứng minh bằng phản đề

- **Ví dụ 2.** Nếu n là số nguyên dương sao cho $n \bmod 4$ là bằng 2 hoặc 3, thế thì n không là số chính phương.
- **CM.** Ta sẽ chứng minh mệnh đề phản đề: “Nếu n là số chính phương thì $n \bmod 4$ phải bằng 0 hoặc 1.”
- Giả sử $n = k^2$. Có 4 tình huống có thể xảy ra.
 - Nếu $k \bmod 4 = 0$, thì $k = 4q$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 = 4(4 q^2)$, suy ra $n \bmod 4 = 0$.
 - Nếu $k \bmod 4 = 1$, thì $k = 4q + 1$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 + 8 q + 1 = 4(4 q^2 + 2 q) + 1$, suy ra $n \bmod 4 = 1$.
 - Nếu $k \bmod 4 = 2$, thì $k = 4q + 2$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 + 16 q + 4 = 4(4 q^2 + 4 q + 1)$, suy ra $n \bmod 4 = 0$.
 - Nếu $k \bmod 4 = 3$, thì $k = 4q + 3$, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16 q^2 + 24 q + 9 = 4(4 q^2 + 6 q + 2) + 1$, suy ra $n \bmod 4 = 1$.

3.3.3. Chứng minh bằng phản đề

- Chứng minh bằng phản đề khác chứng minh phản chứng ở chỗ nào? Ta xét việc áp dụng chúng vào việc chứng minh "If P, Then Q".
- Chứng minh bằng phản chứng: Giả sử có P và Not Q ta cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn.
- Chứng minh bằng phản đề: Giả sử có Not Q và ta phải chứng minh Not P.
- Phương pháp chứng minh bằng phản đề có ưu điểm là bạn có mục đích rõ ràng là: Chứng minh Not P. Trong phương pháp phản chứng, bạn phải cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn mà ngay từ đầu bạn chưa thể xác định được đó là điều gì.

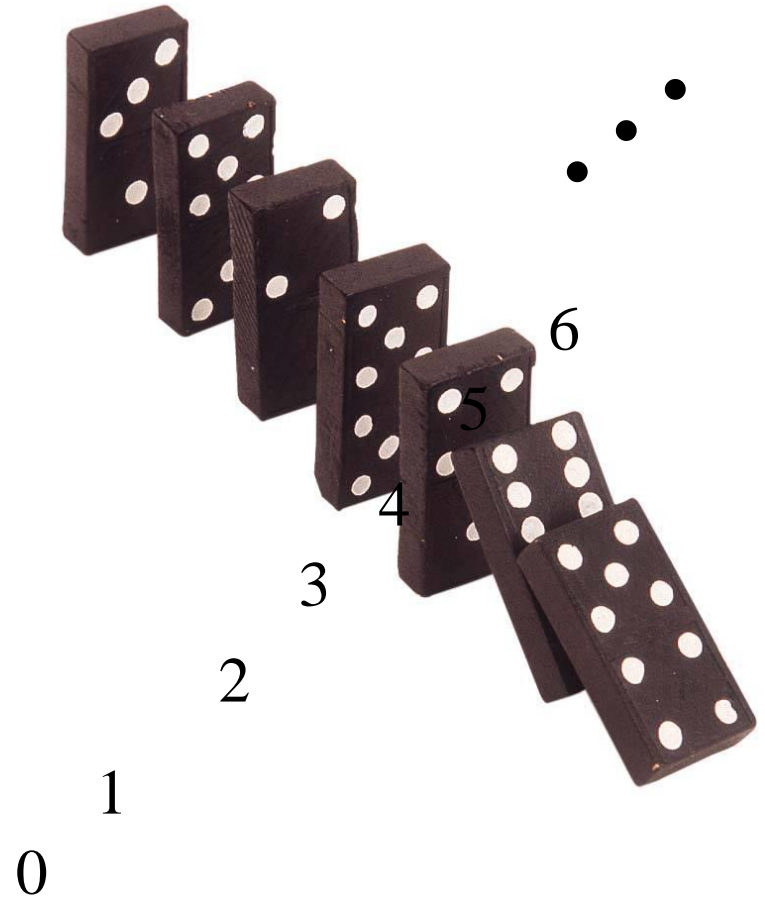
3.3.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học

- Đây là kỹ thuật chứng minh rất hữu ích khi ta phải chứng minh mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên n .
- Tương tự như nguyên lý “hiệu ứng domino”.

The “Domino Effect”

- **Bước #1:** Domino #0 đổ.
- **Bước #2:** Với mọi $n \in \mathbf{N}$, nếu domino # n đổ, thì domino # $n+1$ cũng đổ.
- **Kết luận:** Tất cả các quân bài domino đều đổ!

Chú ý:
điều này xảy ra
ngay cả khi
có vô hạn
quân bài domino!



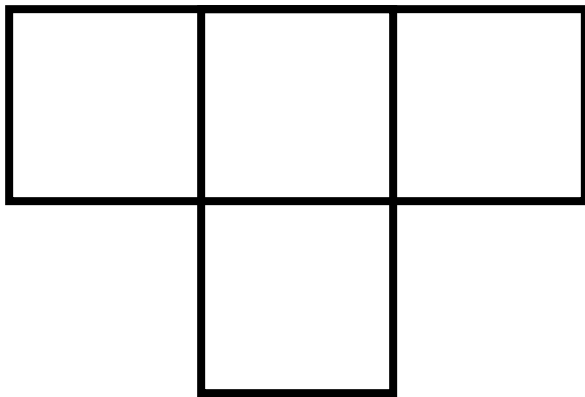
Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

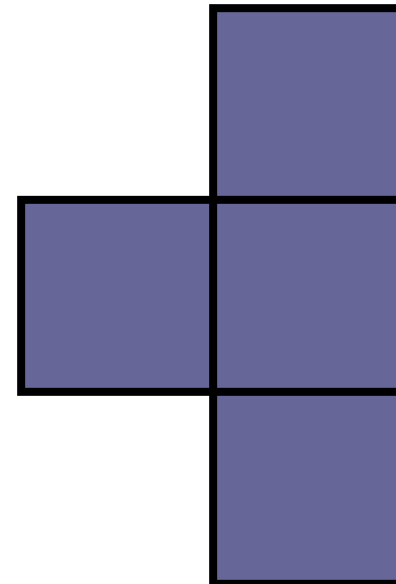
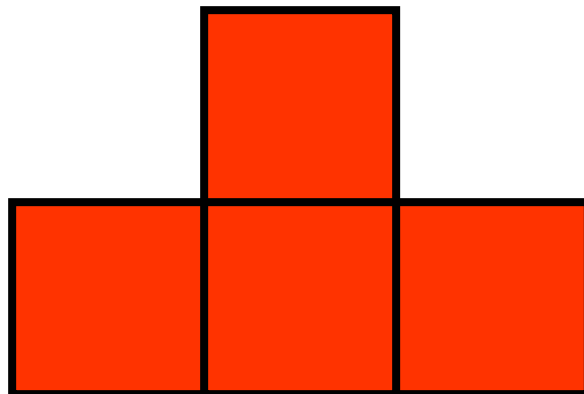
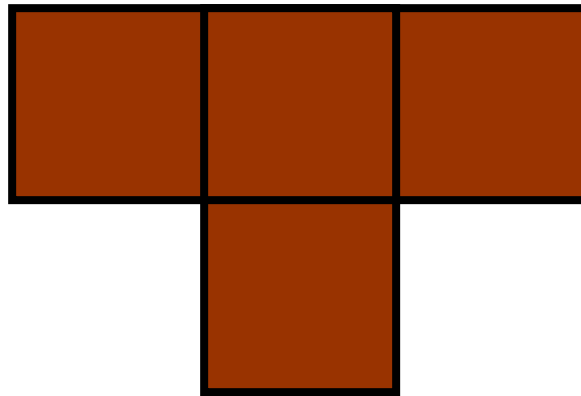
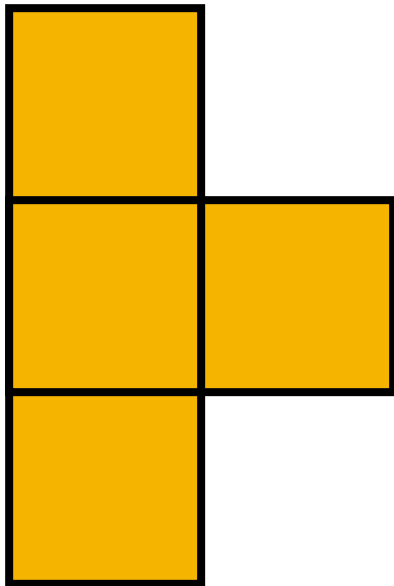
- **Bước cơ sở:** Chứng minh $P(m)$ là đúng.
- **Bước qui nạp:** Giả sử $P(n)$ là đúng với $n=k$,
Chứng minh $P(n)$ là đúng với $n=k+1$.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

Ví dụ 1

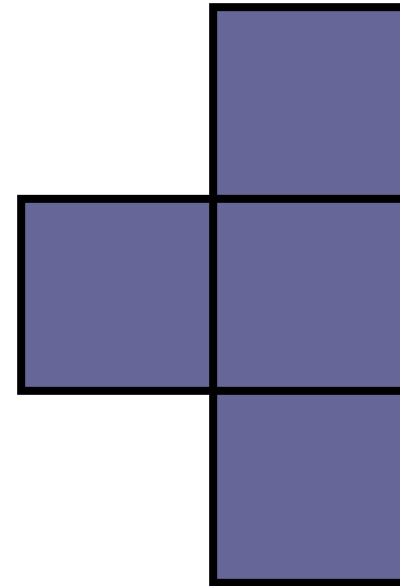
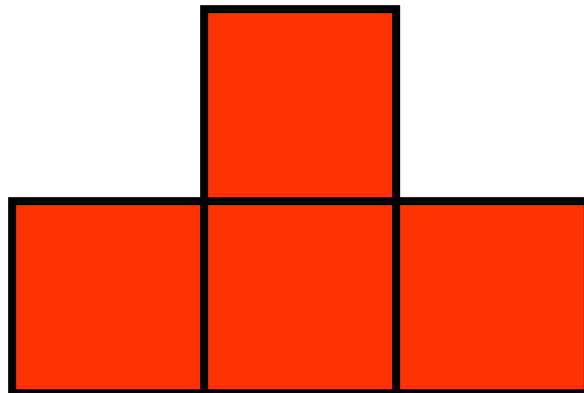
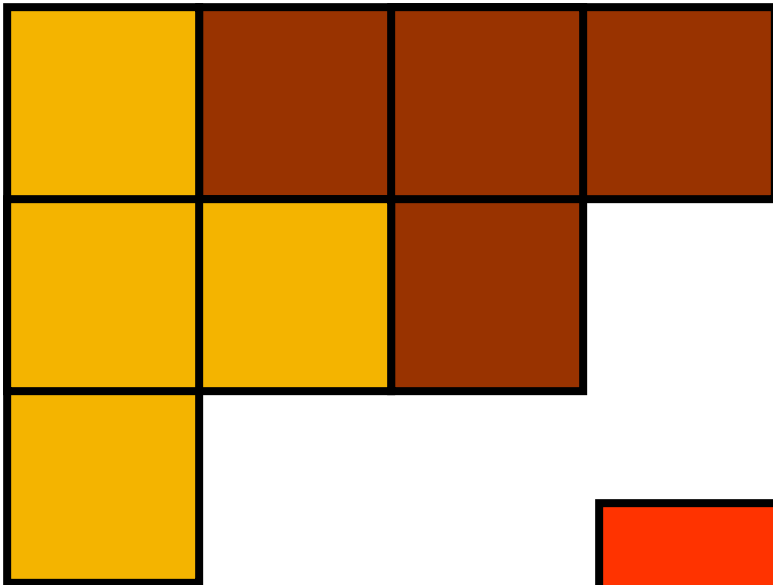
Chứng minh rằng luôn có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$ ($n > 1$) bởi các quân bài hình chữ T (T-omino).



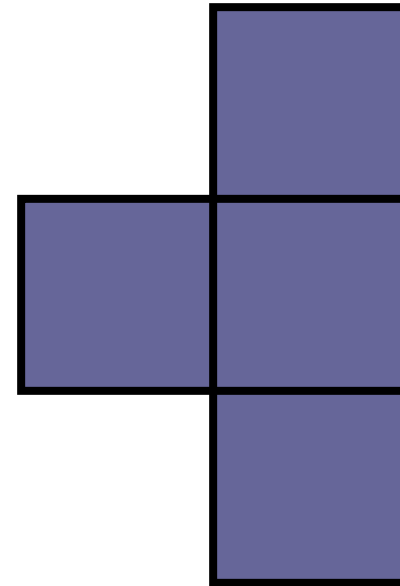
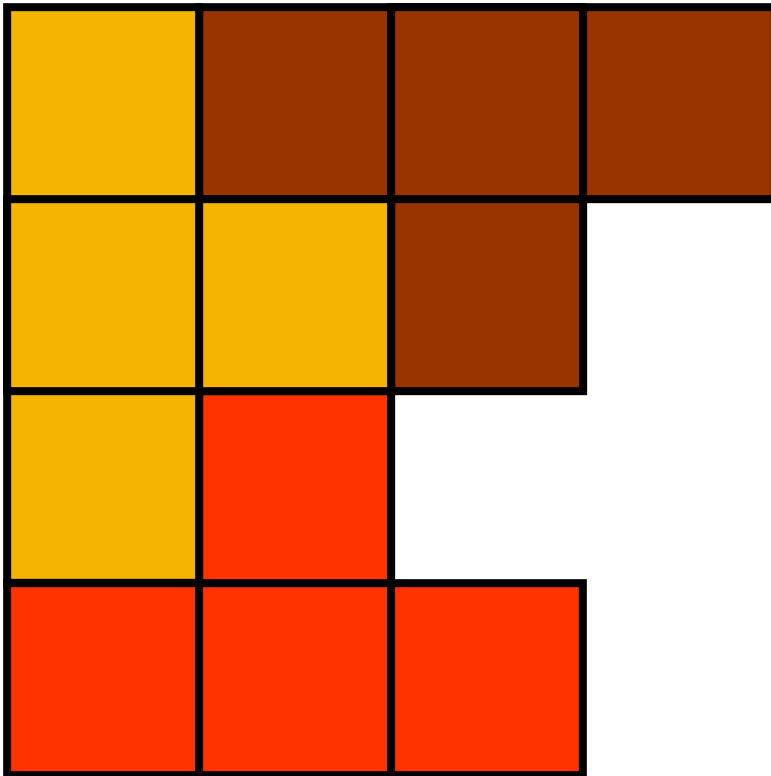
Bước cơ sở: Bảng $2^2 \times 2^2$



Bước cơ sở: Bảng $2^2 \times 2^2$



Bước cơ sở: Bảng $2^2 \times 2^2$



Bước cơ sở: Bảng $2^2 \times 2^2$

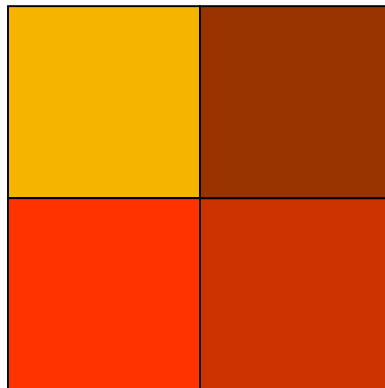
A 4x4 grid representing a $2^2 \times 2^2$ table. The cells are colored as follows:

Yellow	Brown	Brown	Brown
Yellow	Yellow	Brown	Blue
Yellow	Red	Blue	Blue
Red	Red	Red	Blue

Bước quy nạp

Giả sử ta có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$. Ta phải chứng minh có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

Thực vậy, chia bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ra thành 4 phần, mỗi phần kích thước $2^n \times 2^n$. Theo giả thiết quy nạp mỗi phần này đều có thể phủ kín bởi các quân bài chữ T. Đặt chúng vào bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ta thu được cách phủ cần tìm.



Ví dụ 2

- Kết thúc một giải vô địch bóng chuyền gồm n đội tham gia, trong đó các đội thi đấu vòng tròn một lượt người ta mời các đội trưởng của các đội ra đứng thành một hàng ngang để chụp ảnh.
- $P(n)$: Luôn có thể xếp n đội trưởng ra thành một hàng ngang sao cho ngoại trừ hai người đứng ở hai mép, mỗi người trong hàng luôn đứng cạnh một đội trưởng của đội thắng đội mình và một đội trưởng của đội thua đội mình trong giải.

Ví dụ 2

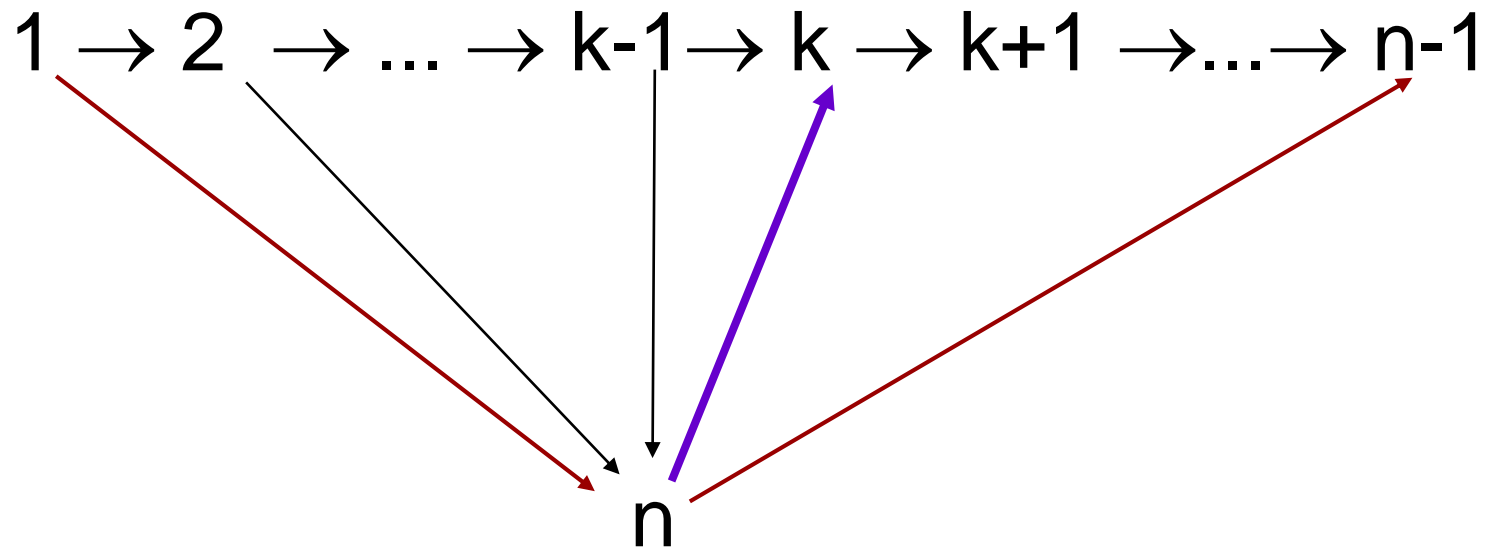
- **Chứng minh.** Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.
- Cơ sở qui nạp: Rõ ràng $P(1)$ là đúng.
- Giả sử $P(n-1)$ là đúng, ta chứng minh $P(n)$ là đúng.
- Trước hết, ta xếp $n-1$ đội trưởng của các đội $1, 2, \dots, n-1$. Theo giả thiết qui nạp, luôn có thể xếp họ ra thành hàng ngang thoả mãn điều kiện đầu bài. Không giảm tổng quát ta có thể giả thiết hàng đó là:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1.$$

Ví dụ 2

- Bây giờ ta sẽ tìm chỗ cho đội trưởng của đội n . Có 3 tình huống:
 - Nếu đội n thắng đội 1, thì hàng cần tìm là:
$$n \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1.$$
 - Nếu đội n thua đội $n-1$, thì hàng cần tìm là:
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n.$$
 - Nếu đội n thua đội 1 và thắng đội $n-1$.
 - Gọi k là chỉ số nhỏ nhất sao cho đội n thắng đội k .
 - Rõ ràng tồn tại k như vậy.
 - Hàng cần thu được từ hàng gồm $n-1$ đội đã xếp bằng cách chèn đội trưởng đội n vào vị trí giữa đội trưởng của đội $k-1$ và đội k .

Ví dụ 2



Hàng cần tìm:

$1 \rightarrow \dots \rightarrow k-1 \rightarrow n \rightarrow k \rightarrow k+1 \rightarrow \dots \rightarrow n-1$

Nghịch lý ?!

Định lý: Tất cả các con ngựa có cùng một màu.

Proof: Qui nạp theo n

Giả thiết qui nạp:

$P(n)$: “ n con ngựa bất kỳ luôn có cùng một màu”

Bước cơ sở ($n=1$):

Chỉ có 1 con tất nhiên là chỉ có một màu!

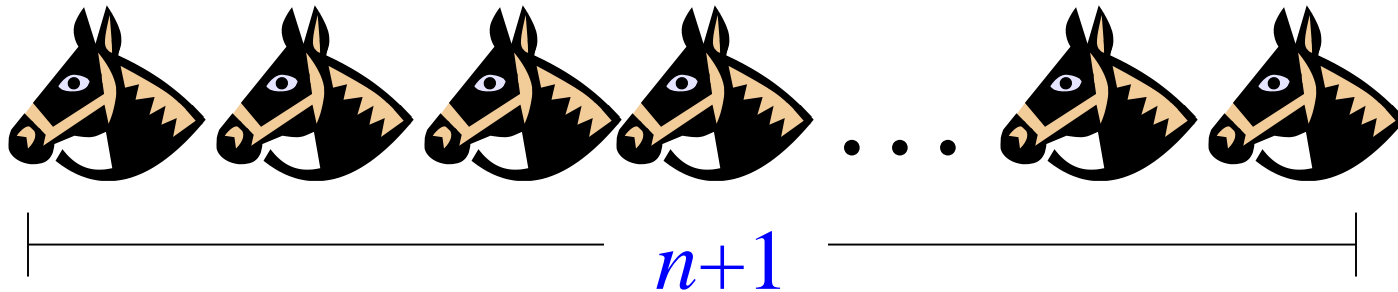


Nghịch lý ?!

Bước qui nạp:

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.



Nghịch lý ?!

Bước qui nạp:

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

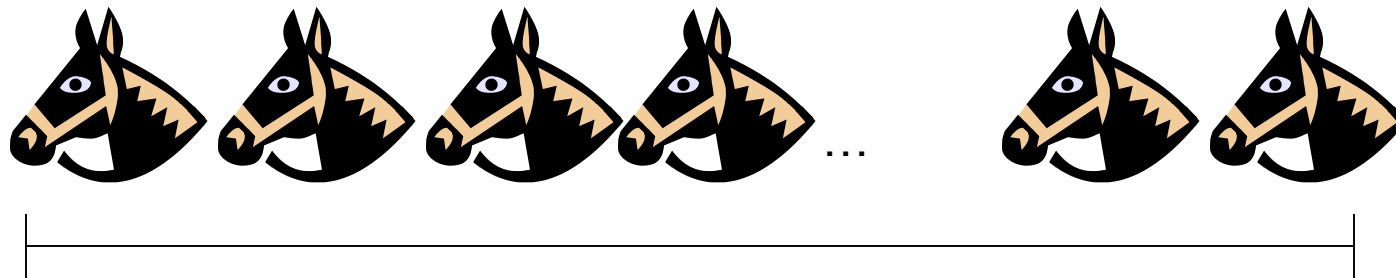


Nghịch lý ?!

Bước qui nạp:

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.



Suy ra $n+1$ con ngựa có cùng một màu!

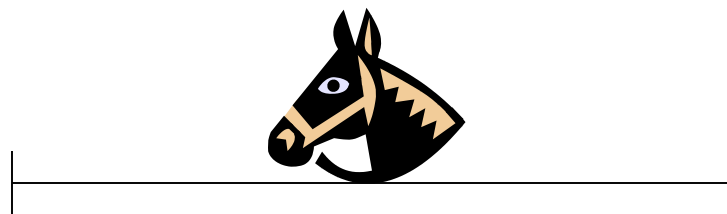
Nghịch lý ?!

Lỗi ở đâu?

$n = 1$

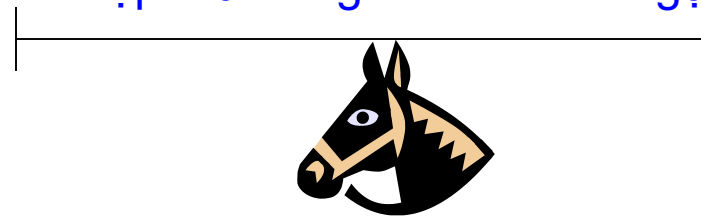
Chứng minh $P(n) \rightarrow P(n+1)$

là **false** nếu $n = 1$, bởi vì hai nhóm ngựa là không giao nhau.



Tập thứ nhất gồm $n=1$ con ngựa

Tập thứ hai gồm $n=1$ con ngựa

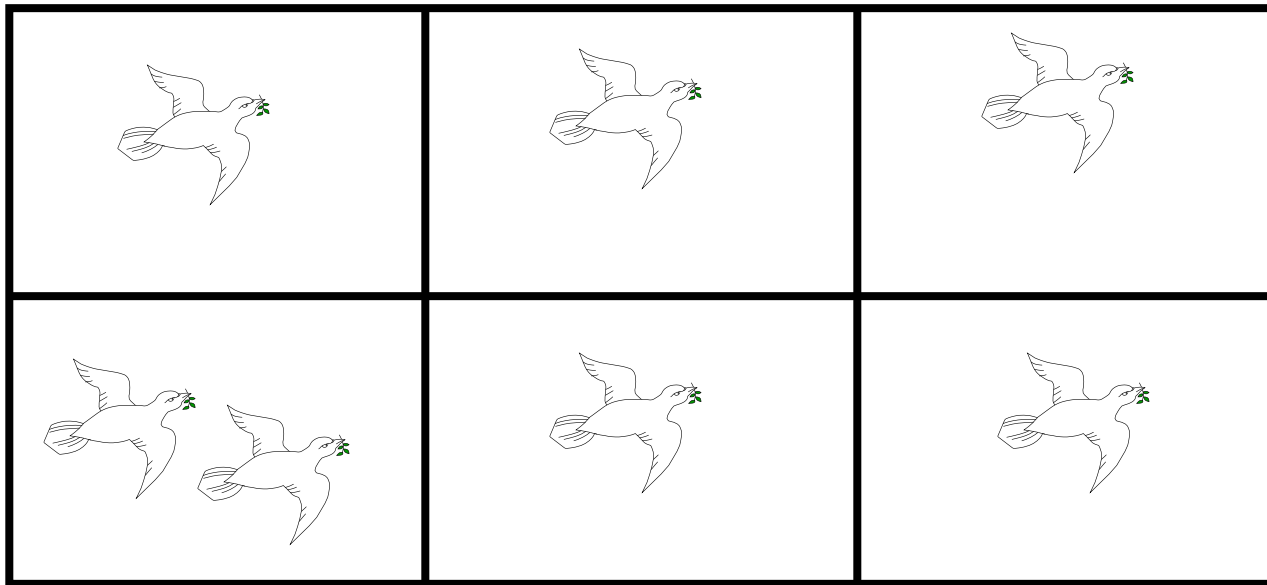


3.4. Nguyên lý Dirichlet

- Nguyên lý Dirichlet đơn giản
- Nguyên lý Dirichlet tổng quát
- Một số ví dụ ứng dụng

Nguyên lý Dirichlet đơn giản (Pigeonhole Principle)

Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ít ra là hai đối tượng.



Nguyên lý Dirichlet đơn giản

Chứng minh.

Việc chứng minh nguyên lý trên chỉ là một lập luận phản chứng đơn giản. Giả sử ngược lại là không tìm được cái hộp nào chứa không ít hơn 2 đối tượng. Điều đó có nghĩa là mỗi cái hộp chứa không quá một đối tượng. Từ đó suy ra tổng số đối tượng xếp trong n cái hộp là không vượt quá n , trái với giả thiết là có nhiều hơn n đối tượng được xếp trong chúng.

Nguyên lý Dirichlet đơn giản

Lập luận trên đã được nhà toán học người Đức là Dirichlet vận dụng thành công vào việc giải quyết rất nhiều bài toán tồn tại tổ hợp.

Trong lập luận của Dirichlet, các đối tượng được xét là các quả táo còn các cái hộp được thay bởi các cái giỏ: “Nếu đem bỏ nhiều hơn n quả táo vào n cái giỏ thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái giỏ chứa ít ra là 2 quả táo”.

Nguyên lý Dirichlet đơn giản

Trong tài liệu tiếng Anh lập luận đó lại được trình bày trong ngôn ngữ của các con chim bồ câu:

“Nếu đem nhốt nhiều hơn n con chim bồ câu vào n cái lồng thì bao giờ cũng tìm được ít nhất 1 cái lồng chứa ít ra là 2 con chim bồ câu”.

Vì thế nguyên lý còn có tên gọi là “Nguyên lý về các lồng chim bồ câu”.

Trong ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp, nguyên lý có thể phát biểu như sau:

“Nếu tập X gồm nhiều hơn n phần tử được phân hoạch thành n tập con, thì bao giờ cũng tìm được một tập con trong phân hoạch đó có lực lượng ít ra là 2”

Ví dụ

- ❖ **Ví dụ 1.** Trong số 367 người bao giờ cũng tìm được hai người có ngày sinh nhật giống nhau bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.
- ❖ **Ví dụ 2.** Trong kỳ thi học sinh giỏi điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất phải có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?
- ❖ **Giải.** Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Generalized Pigeonhole Principle

- Khi số lượng quả táo bỏ vào k cái giỏ vượt quá số lượng cái giỏ nhiều lần thì rõ ràng khẳng định trong nguyên lý về sự tồn tại cái giỏ chứa ít ra là 2 quả táo là quá ít. Trong trường hợp như vậy ta sử dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát sau đây:
- *“Nếu đem bỏ n quả táo vào k cái giỏ thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái giỏ chứa ít ra là $\lceil n/k \rceil$ quả táo”.*
- Ở đây ký hiệu $\lceil \alpha \rceil$ gọi là phần nguyên trên của số thực α - theo định nghĩa là số nguyên nhỏ nhất còn lớn hơn hoặc bằng α .

Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Generalized Pigeonhole Principle

- Chứng minh nguyên lý tổng quát: Giả sử khẳng định của nguyên lý là không đúng. Khi đó mỗi cái giỏ chứa không quá $\lceil n/k \rceil - 1$ quả táo. Từ đó suy ra tổng số quả táo bỏ trong k cái giỏ không vượt quá

$$k(\lceil n/k \rceil - 1) < k((n/k + 1) - 1) = n.$$

Mâu thuẫn thu được đã chứng minh nguyên lý.

Ví dụ

- ❖ **Ví dụ 3.** Trong 100 người có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng.
- ❖ **Giải:** Xếp những người cùng sinh một tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một nhóm có không ít hơn $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người.
- ❖ **Ví dụ 4.** Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là sáu người cùng nhận học bổng như nhau?
- ❖ **Giải:** Số sinh viên ít nhất cần có để đảm bảo chắc chắn có 6 sinh viên cùng nhận học bổng như nhau là số nguyên nhỏ nhất n sao cho $\lceil n/5 \rceil = 6$. Số nguyên nhỏ nhất đó là $n = 5 \times (6-1) + 1 = 26$. Vậy 26 là số lượng sinh viên nhỏ nhất đảm bảo chắc chắn là có sáu sinh viên cùng hưởng một loại học bổng.

Ví dụ

- **Ví dụ 5.** Trong một phòng họp bao giờ cũng tìm được hai người có số người quen trong số những người dự họp là bằng nhau.
- **Giải:** Gọi số người dự họp là n , khi đó số người quen của một người nào đó trong phòng họp chỉ có thể nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai cả) và có người có số người quen là $n-1$ (tức là quen tất cả). Vì vậy, theo số lượng người quen ta chỉ có thể phân n người ra thành $n-1$ nhóm. Theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất một nhóm phải có không ít hơn hai người, tức là luôn tìm được ít ra là hai người có số người quen là bằng nhau.

