Phần 2

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Graph Theory

GV: Nguyễn Huy Đức

Bộ môn: Khoa học Máy tính – ĐH Thủy lợi

0903 402 655 ducnghuy@gmail.com

Nội dung

- **Chương 1: Các khái niệm cơ bản**
- Chương 2: Biểu diễn đồ thị trên máy tính
- Chương 3: Các thuật toán tìm kiếm trên đồ thị
- Chương 4: Đồ thị Euler và đồ thị Hamilton
- Chương 5: Cây và cây khung của đồ thị
- Chương 6: Bài toán đường đi ngắn nhất

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Chương 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mở đầu

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Hợp của hai đồ thị

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

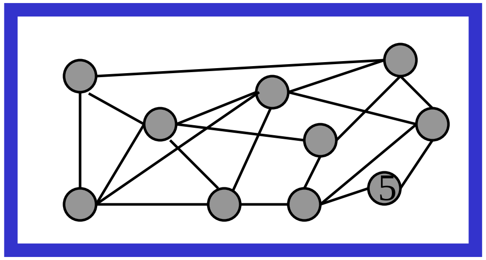
1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Mở đầu

Đồ thị là gì?

- Trong toán học đời thường hiểu là:
  Bản vẽ hay Sơ đồ biểu diễn dữ liệu nhờ sử dụng hệ thống toạ độ.

- Trong toán rời rạc:
  Đây là ***cấu trúc rời rạc có tính trực quan cao, rất tiện ích để biểu diễn các quan hệ****.*



Mở đầu

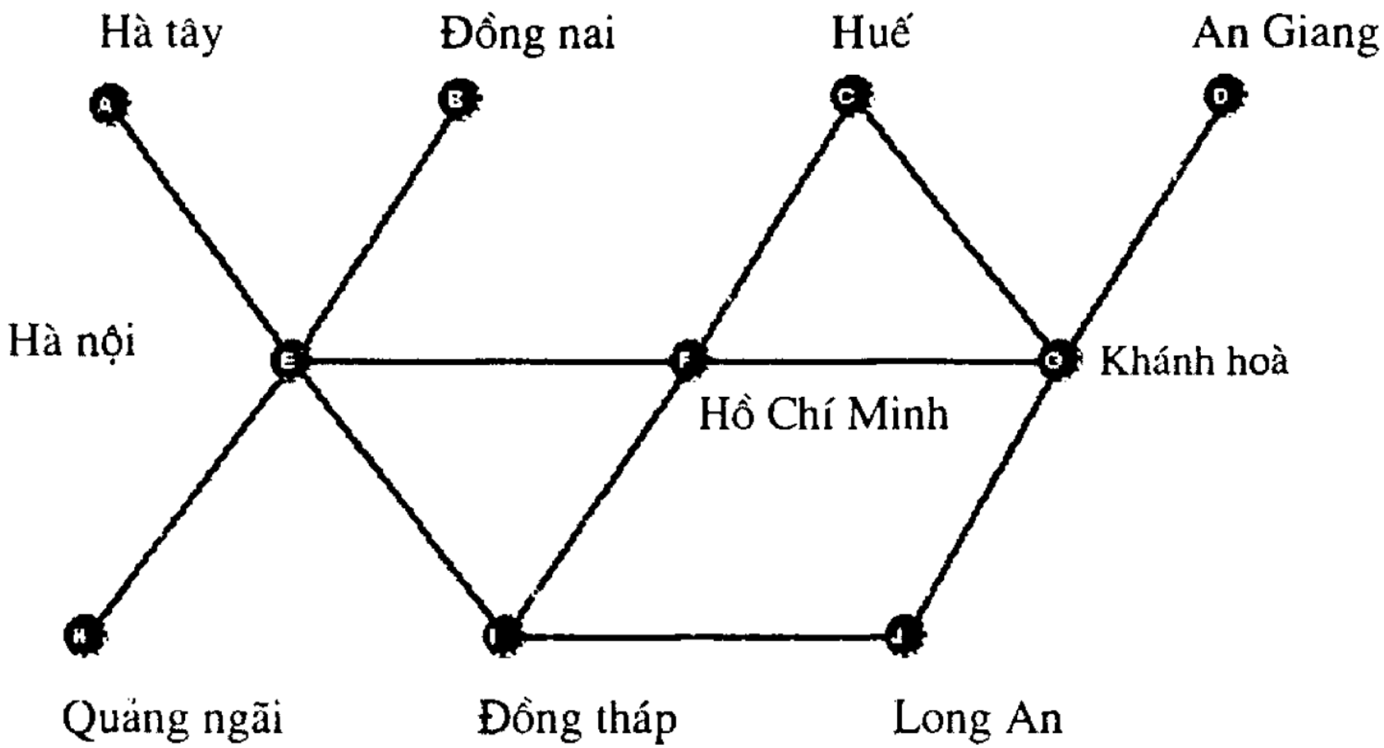
- Đồ thị là cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó.
- Phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị.
- Lý thuyết đồ thị là lĩnh vực nghiên cứu đã có từ lâu và có nhiều ứng dụng hiện đại.
- Đồ thị được sử dụng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Các ứng dụng thực tế của đồ thị

- ✓ Có tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực (Đồ thị có thể dùng để biểu diễn các quan hệ. Nghiên cứu quan hệ giữa các đối tượng là mục tiêu của nhiều lĩnh vực khác nhau).
- ✓ Ứng dụng trong mạng máy tính, mạng giao thông, mạng cung cấp nước, mạng điện,…) lập lịch, tối ưu hoá luồng, thiết kế mạch, quy hoạch phát triển...
- ✓ Các ứng dụng khác: Phân tích gen, trò chơi máy tính, chương trình dịch, thiết kế hướng đối tượng, …

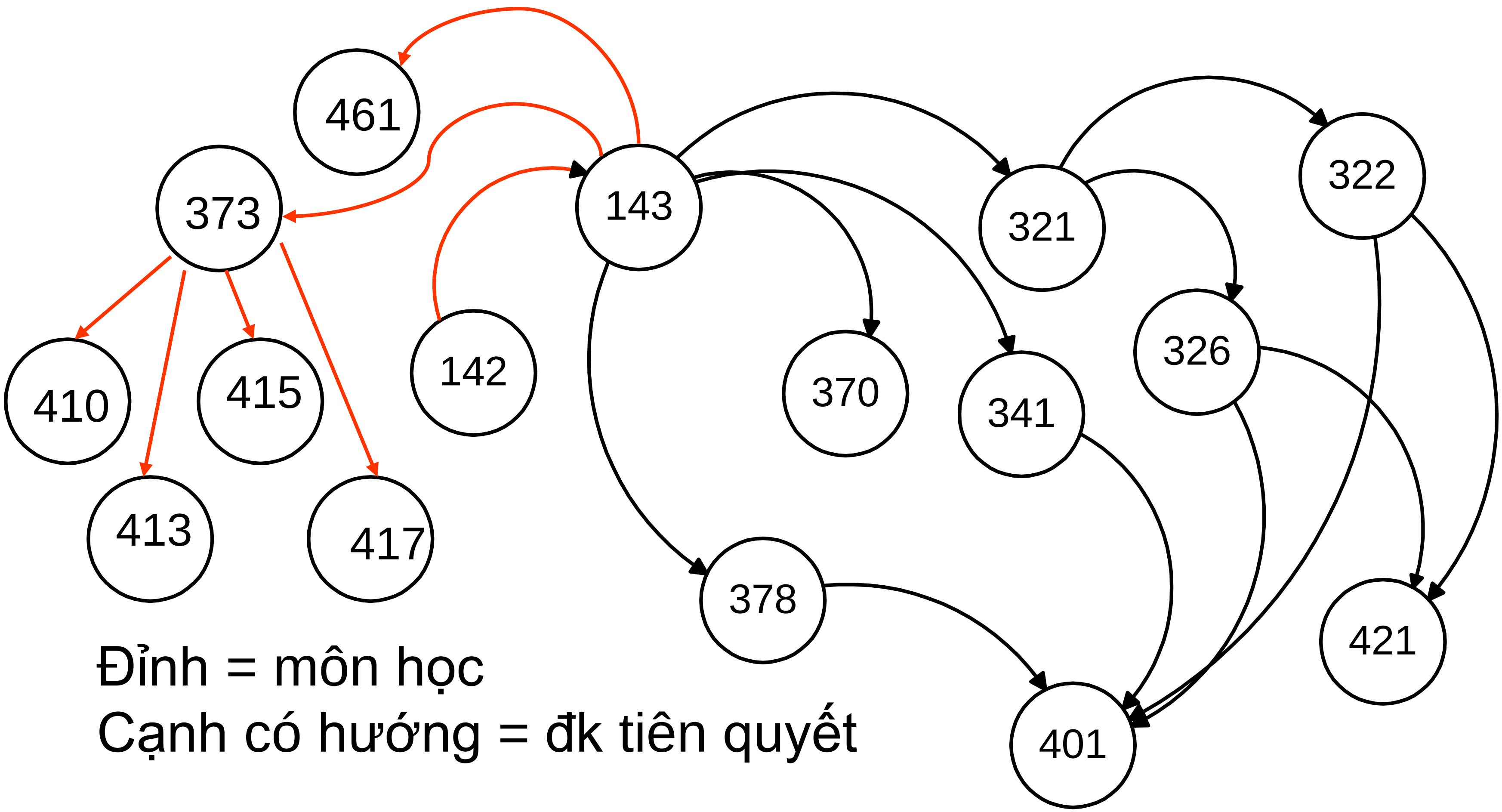
☞ Sau đây là một số ví dụ có thể đưa về mô hình đồ thị.

Sơ đồ mạng máy tính



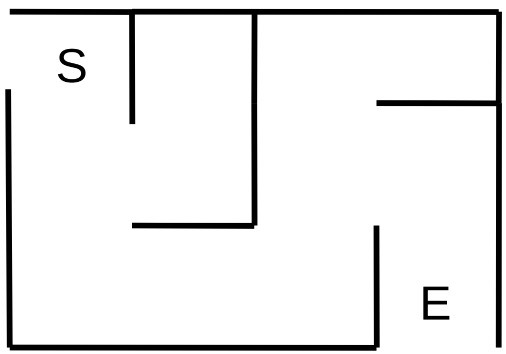
Đỉnh: các máy tính.
Cạnh: Kênh thoại nối các máy tính

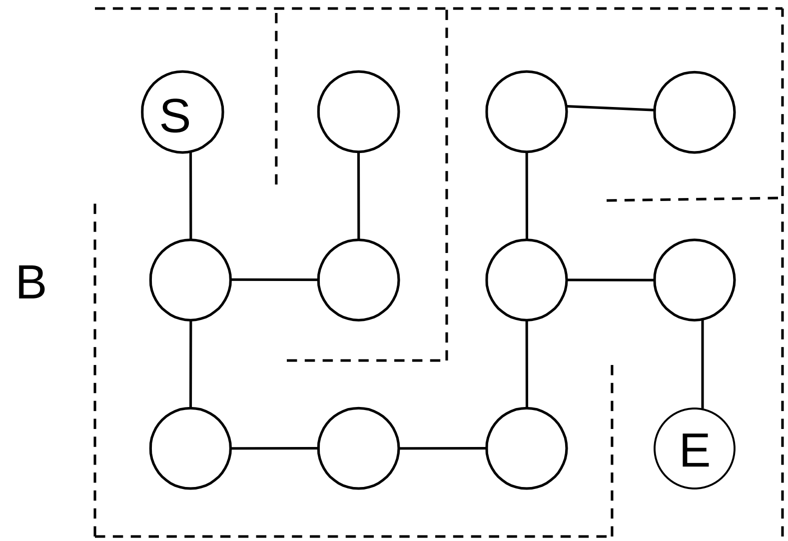
Mối liên hệ giữa các môn học



Đỉnh = môn học
Cạnh có hướng = đk tiên quyết

Biểu diễn mê cung

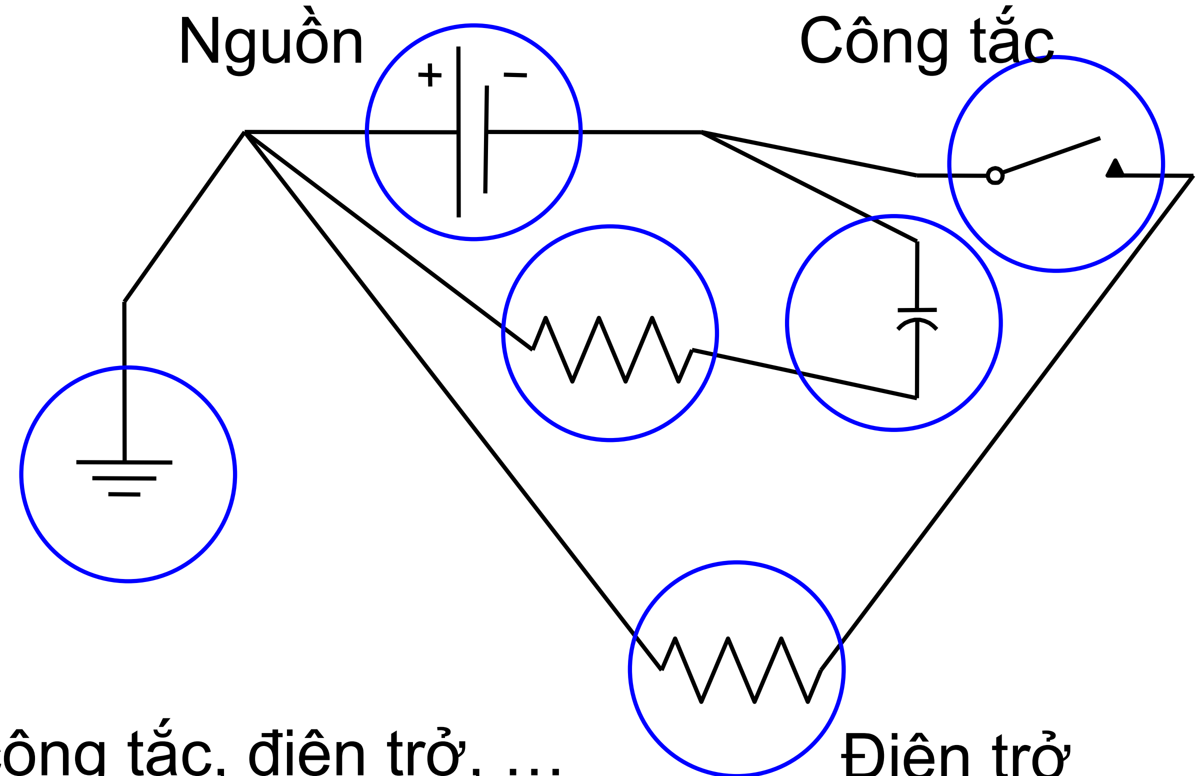




Đỉnh = phòng
Cạnh = cửa thông phòng hoặc hành lang

Biểu diễn mạch điện

(Electrical Circuits)

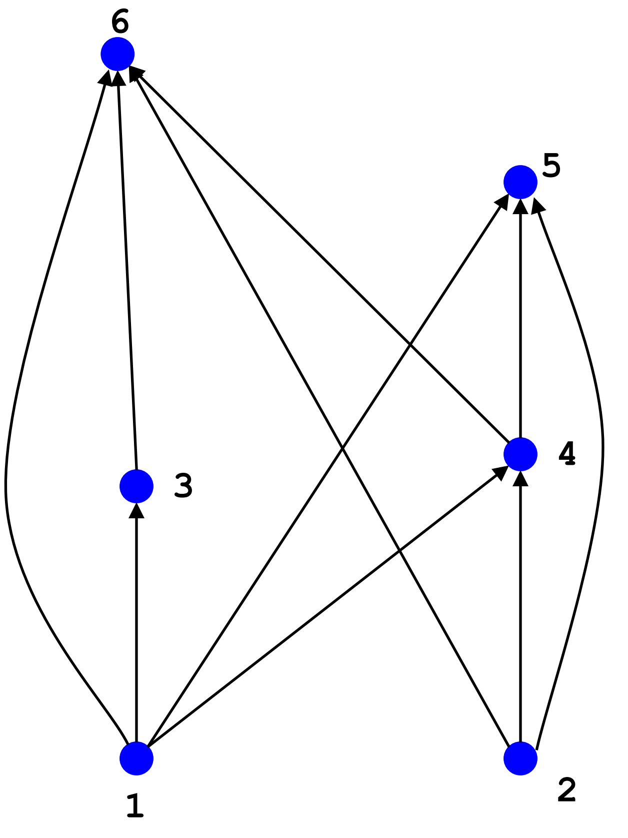


Đỉnh = nguồn, công tắc, điện trở, …

Cạnh = đoạn dây nối

Yêu cầu trình tự (Precedence)

```
S1      a=0;
S2      b=1;
S3      c=a+1
S4      d=b+a;
S5      e=d+1;
S6      e=c+d;
```



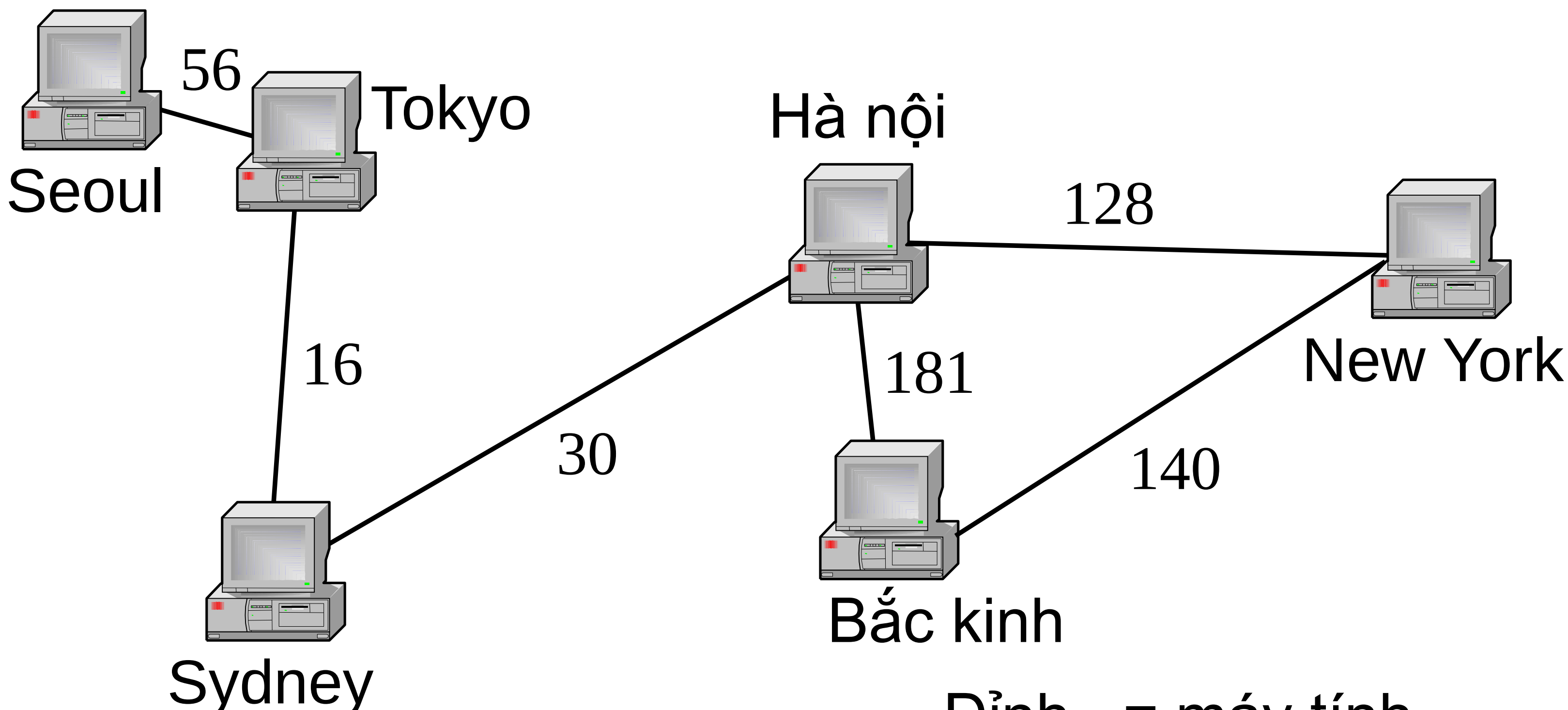
Các câu lệnh nào phải thực hiện trước S_6?

S_1, S_2, S_3, S_4

Đỉnh = câu lệnh

Cạnh = yêu cầu trình tự

Truyền thông trong mạng máy tính
(Information Transmission in a Computer Network)



Đỉnh = máy tính
Cạnh = tốc độ truyền thông

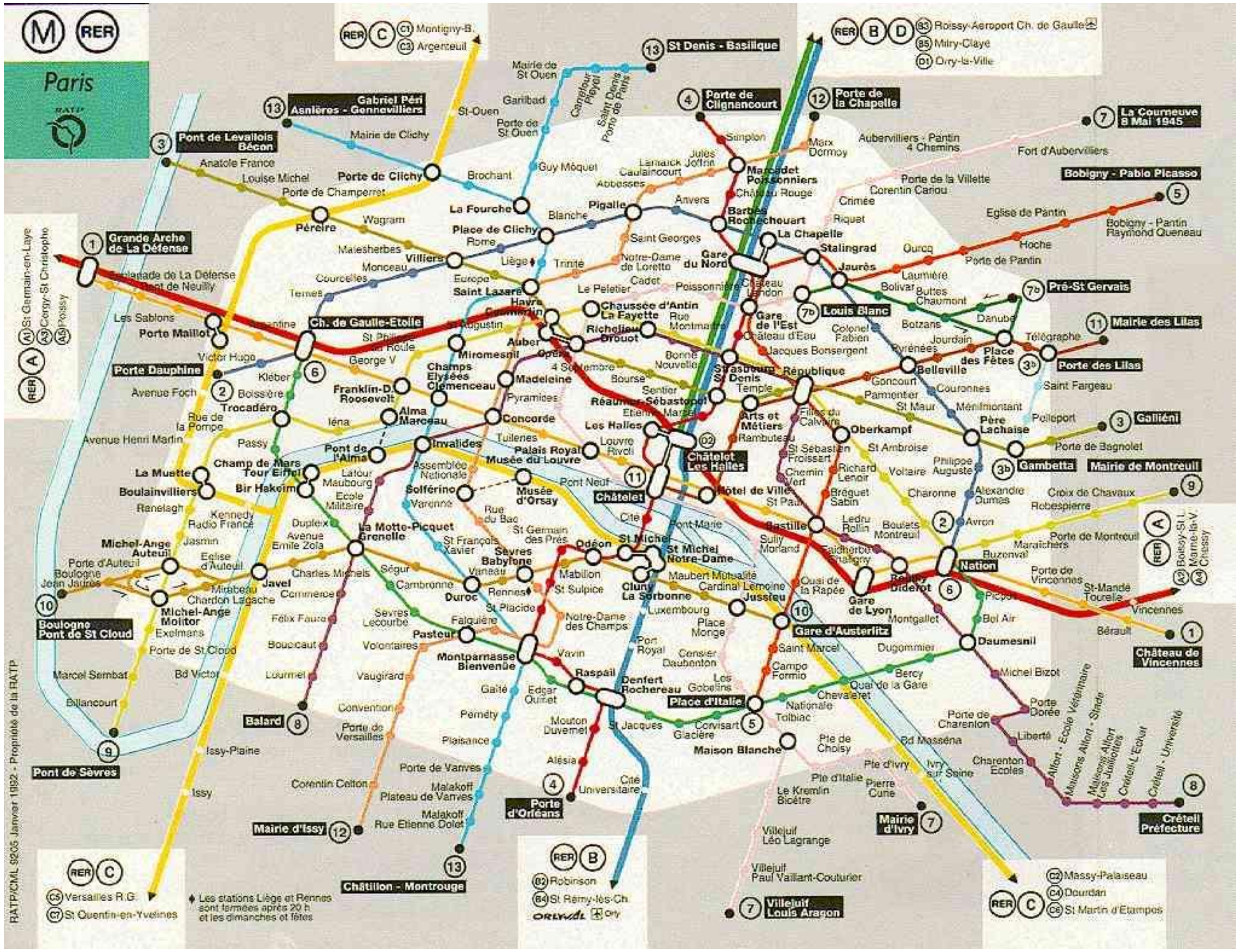
Luồng giao thông trên xa lộ

(Traffic Flow on Highways)

Đỉnh = thành phố

Cạnh = lượng xe cộ trên tuyến đường cao tốc kết nối giữa các thành phố

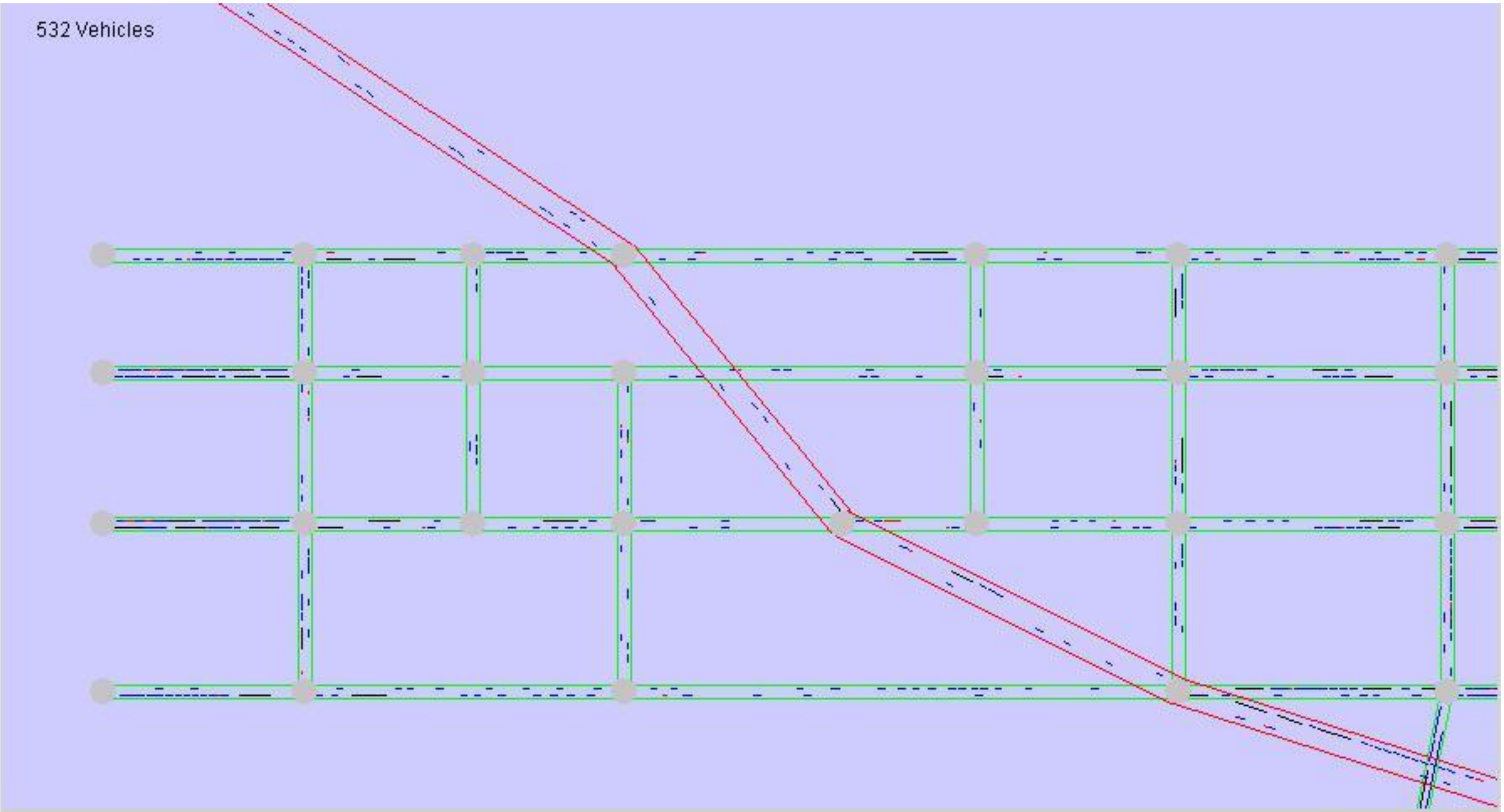
Mạng xe buýt

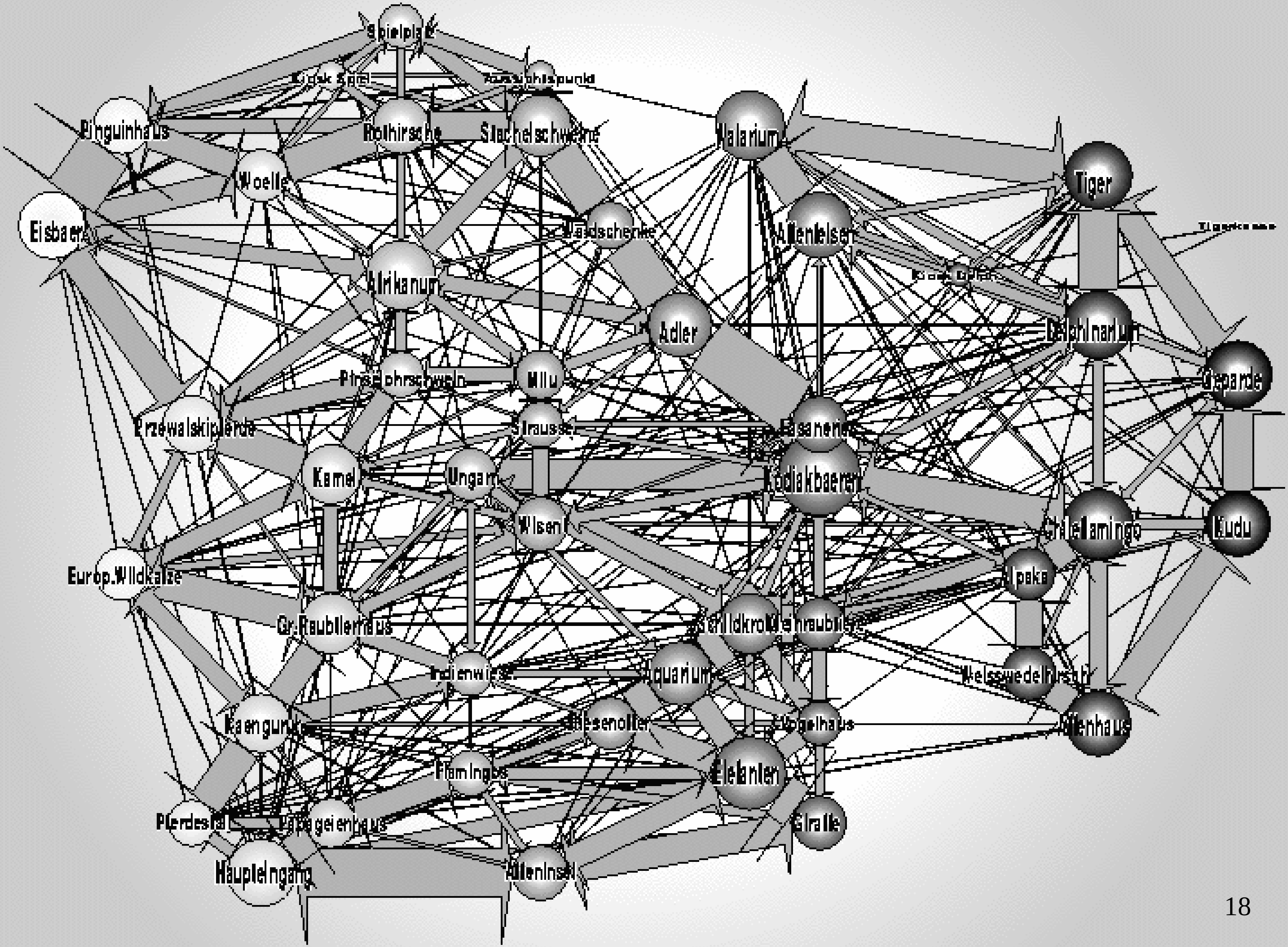


Paris
RATP
St Denis - Basilique
Gabriel Péri Asnières - Gennevilliers
Pont de Levallois Bécon
Porte de Clignancourt
Porte de la Chapelle
La Courneuve 8 Mai 1945
Bobigny - Pablo Picasso
Grande Arche de La Défense
Pré-St Gervais
Louis Blanc
Mairie des Lilas
Porte des Lilas
Ch. de Gaulle-Etoile
Porte Dauphine
Gallieni
Gambetta
Mairie de Montreuil
Châtelet
Châtelet Les Halles
Nation
Gare d'Austerlitz
Château de Vincennes
Boulogne Pont de St Cloud
Place d'Italie
Balard
Pont de Sèvres
Porte d'Orléans
Mairie d'Issy
Châtillon - Montrouge
Mairie d'Ivry
Créteil Préfecture
Villejuif Louis Aragon

Mạng tàu điện ngầm

Sơ đồ đường phố




Spielplatz
Aussichtspunkt
Pinguinhaus
Rothirsche
Stachelschweine
Walarium
Tiger
Woelfe
Eisbaer
Affenfelsen
Waldschenke
Afrikanum
Adler
Delphinarium
Gepard
Pinselohrschwein
Milu
Przewalskipferde
Strausse
Fasanerie
Kamel
Kodiakbaeren
Wisent
Chileflamingo
Kudu
Europ.Wildkatze
Alpaka
Gr.Raubtierhaus
Indienwiese
Aquarium
Weisswedelhirsch
Riesenotter
Vogelhaus
Affenhaus
Flamingos
Elefanten
Pferdestall
Papageienhaus
Giraffe
Haupteingang
Affeninsel

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mở đầu

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Hợp của hai đồ thị

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Đồ thị vô hướng
(Undirected Graphs)

<u>Định nghĩa.</u> Đơn (đa) đồ thị vô hướng $G = (V,E)$ là cặp gồm:

- Tập đỉnh V là tập hữu hạn phần tử, các phần tử gọi là các ***đỉnh***
- Tập cạnh E là tập (họ) các bộ không có thứ tự dạng

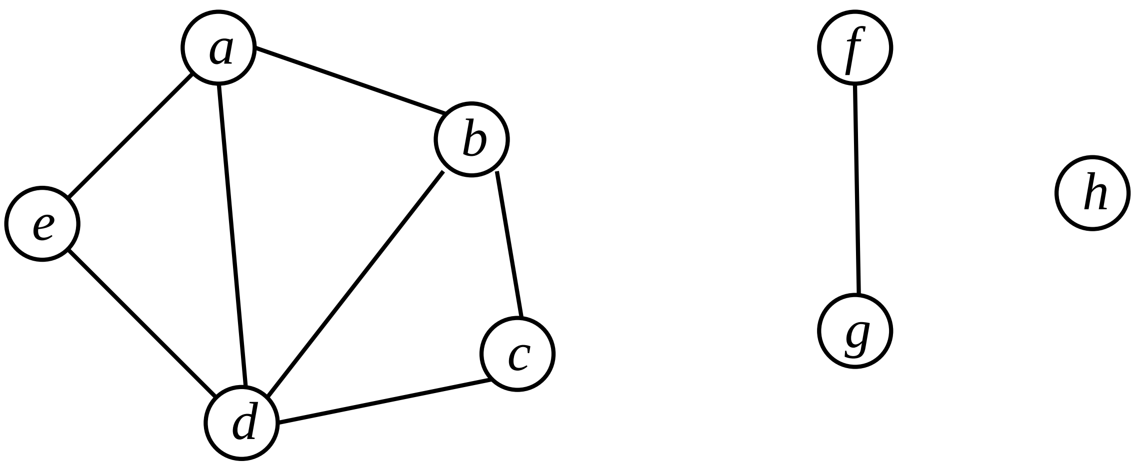
$$(u, v), u, v \in V, u \neq v$$

Đơn đồ thị vô hướng
(Simple Graph)

- **Ví dụ:** Đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$, trong đó

$V_1=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$E_1=\{(a,b), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e), (d,b), (f,g)\}$.



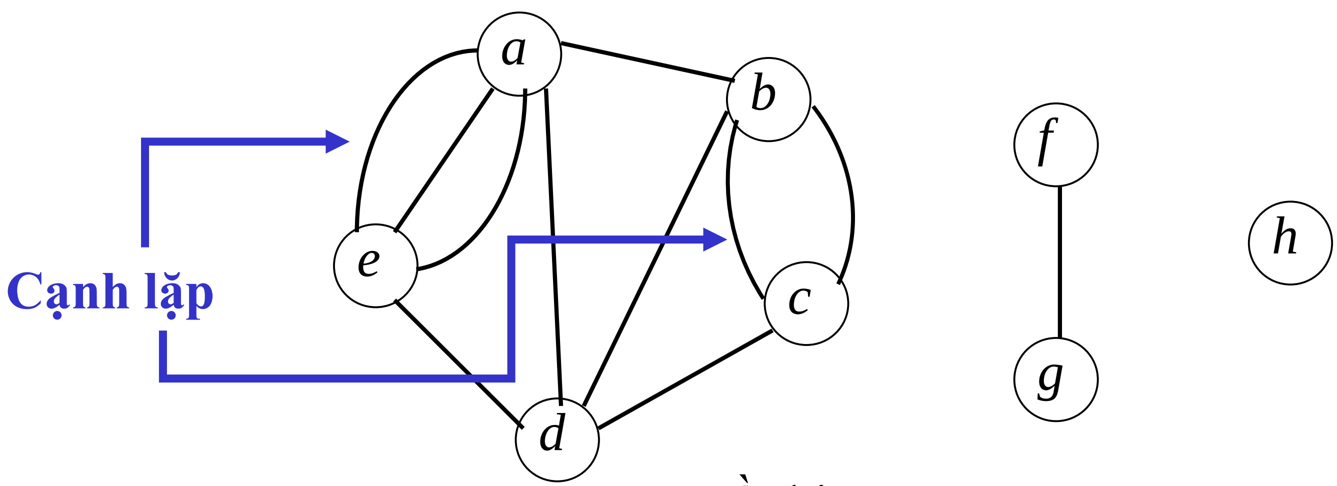
Đồ thị G_1

Đa đồ thị vô hướng
(Multi Graphs)

- **Ví dụ:** Đa đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$, trong đó

  $V_2=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

  $E_2=\{(a,b), (b,c), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e), (a,e), (a, e), (d,b), (f,g)\}$.



Đồ thị G_2

Đồ thị có hướng

(Directed Graph)

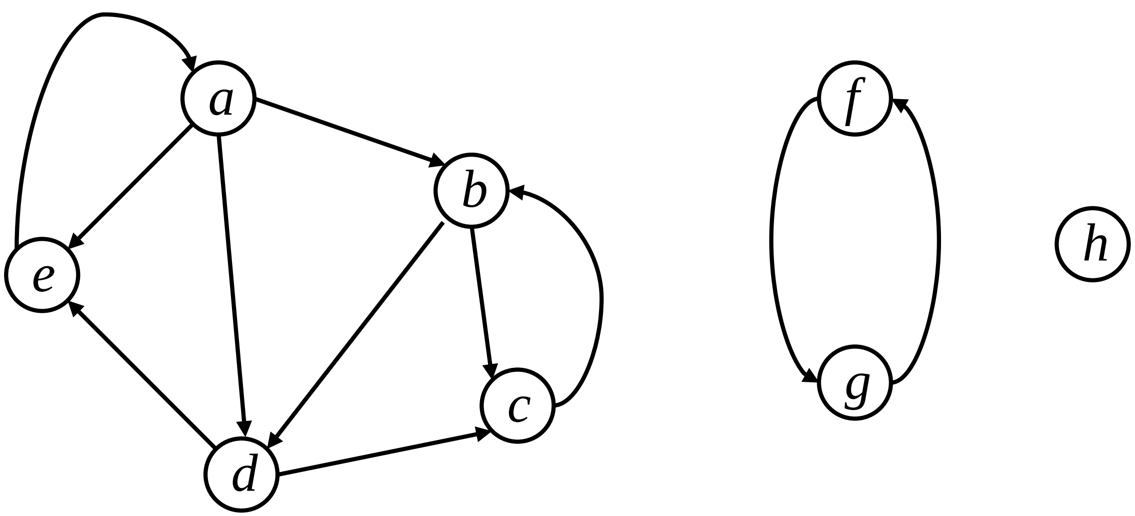
Định nghĩa. Đơn (đa) đồ thị có hướng $G = (V,E)$ là cặp gồm:

- Tập đỉnh V là tập hữu hạn phần tử, các phần tử gọi là các ***đỉnh***
- Tập cung E là tập (họ) các bộ có thứ tự dạng

$$(u, v),\ u, v \in V,\ u \neq v$$

Đơn đồ thị có hướng
(Simple digraph)

- **Ví dụ:** Đơn đồ thị có hướng $G_3 = (V_3, E_3)$, trong đó
  $V_3 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
  $E_3 = \{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c), (a,d), (b, d), (a,e), (d,e),$
  $(e,a), (f,g), (g,f)\}$



Đồ thị G_3

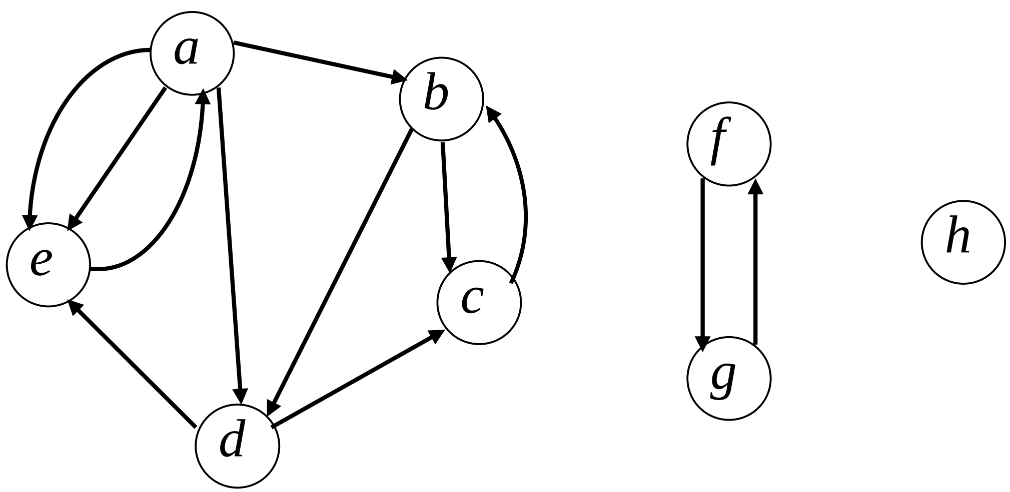
Đa đồ thị có hướng

(Multi Graphs)

- **Ví dụ:** Đa đồ thị có hướng $G_4= (V_4, E_4)$, trong đó

  $V_4=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

  $E_4=\{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c), (a,d), (b, d), (a,e), (a,e),$
  $(d,e), (e,a), (f,g), (g,f)\}$



Đồ thị G_4

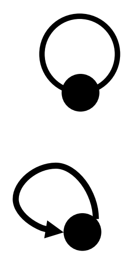
Các loại đồ thị: Tóm tắt

Loại	**Kiểu cạnh**	**Có cạnh lặp?**
Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không
Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có
Đơn đồ thị có hướng	Có hướng	Không
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có

- Chú ý:

  Một dạng đồ thị ít sử dụng hơn, đó là giả đồ thị. **Giả đồ thị** là đa đồ thị mà trong đó có các **khuyên** (cạnh nối 1 đỉnh với chính nó).

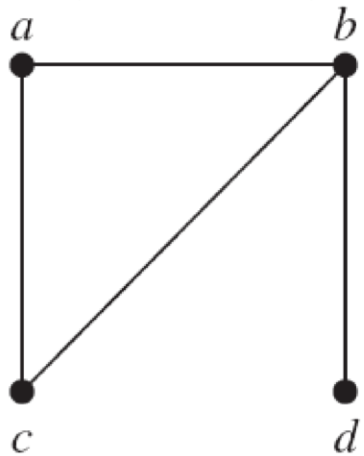
Khuyên (loop)



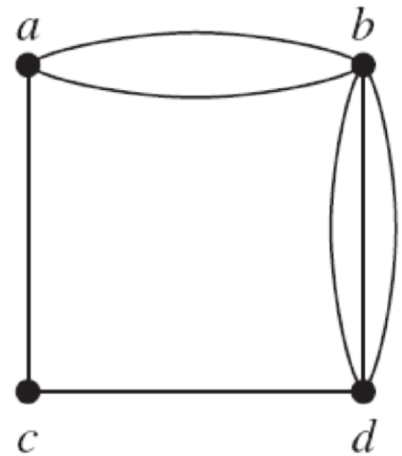
Bài tập

- **Bài 1**: Xác định các loại đồ thị cho hình bên dưới

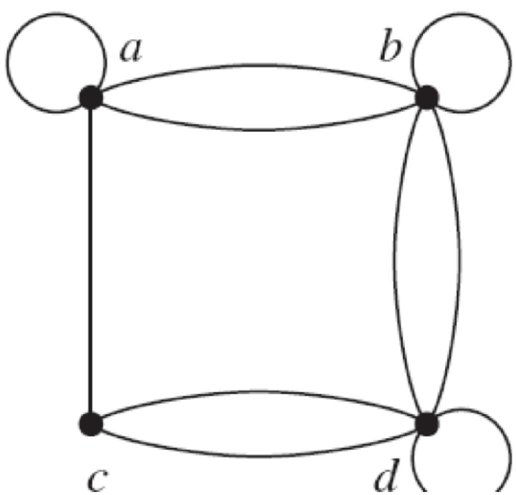
3.



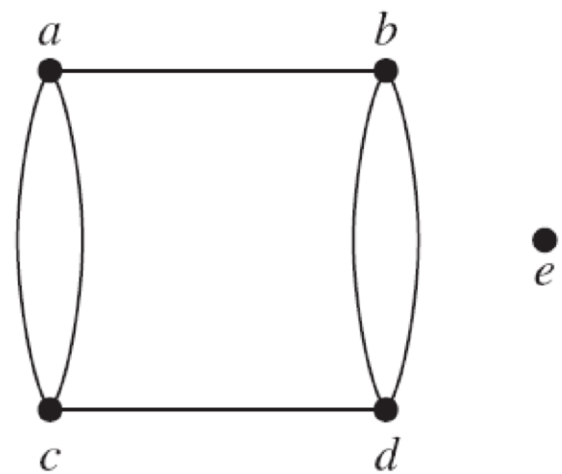
4.



5.



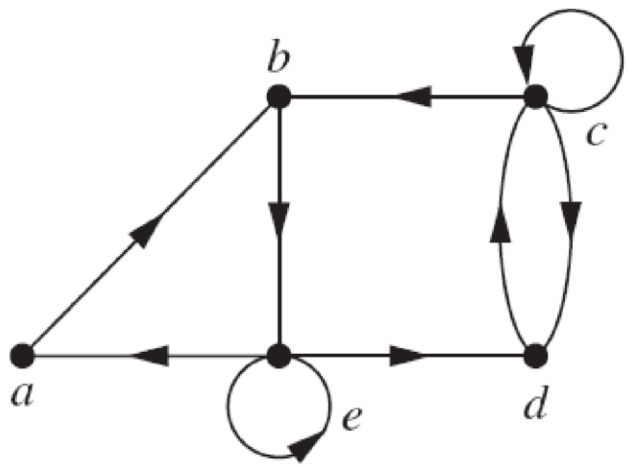
6.



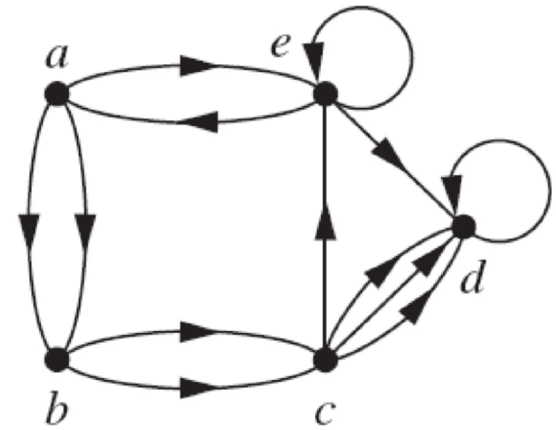
Bài tập

- **Bài 2**: Xác định các loại đồ thị cho hình bên dưới

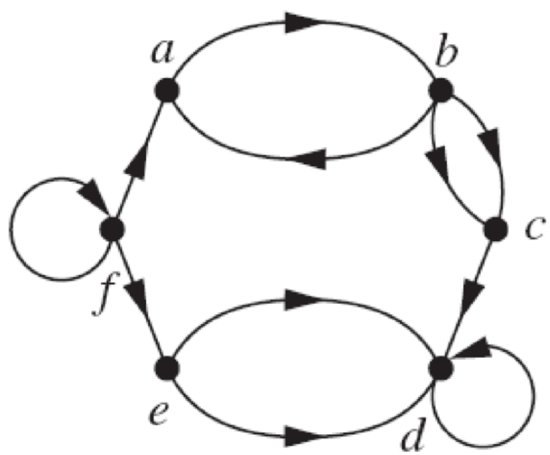
7.



8.



9.

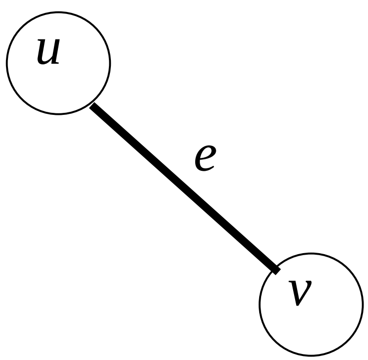


Các thuật ngữ

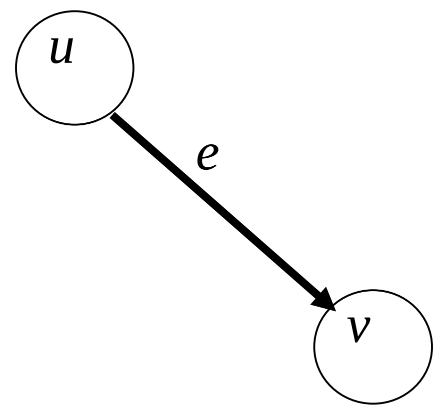
Graph Terminology

Chúng ta cần các thuật ngữ liên quan đến mối quan hệ giữa các đỉnh và các cạnh của đồ thị sau:

- *Kề nhau, nối, đầu mút, bậc, bắt đầu, kết thúc, bán bậc vào, bán bậc ra,…*

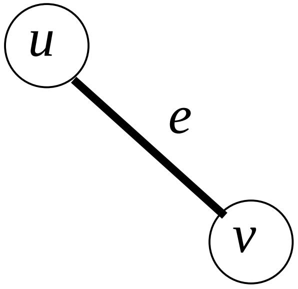


Cạnh vô hướng $e=(u,v)$



Cạnh có hướng (cung) $e=(u,v)$

Kề (Adjacency)

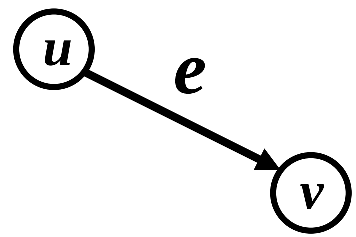


Cho *G* là đồ thị vô hướng với tập cạnh *E*. Giả sử $e \in E$ là cặp (u,v).

Khi đó ta nói:

- *u*, *v* là *kề nhau/nối với nhau*.
- Cạnh *e* là *liên thuộc* với hai đỉnh *u* và *v*.
- Cạnh *e* *nối* (*connect*) *u* và *v*.
- Các đỉnh *u* và *v* là các *đầu mút* (*endpoints*) của cạnh *e*.

Tính kề trong đồ thị có hướng



- Cho *G* là đồ thị có hướng (có thể là đơn hoặc đa) và giả sử *e* = (*u*,*v*) là cạnh của *G*. Ta nói:
  - *u* là kề tới *v*, *v* là kề từ *u*
  - *e đi ra khỏi u*, *e đi vào v*.
  - *e nối u với v*, *e đi từ u tới v*
  - Đỉnh đầu (*initial vertex*) *của e* là *u*
  - Đỉnh cuối (*terminal vertex*) của *e* là *v*

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mở đầu

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Hợp của hai đồ thị

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

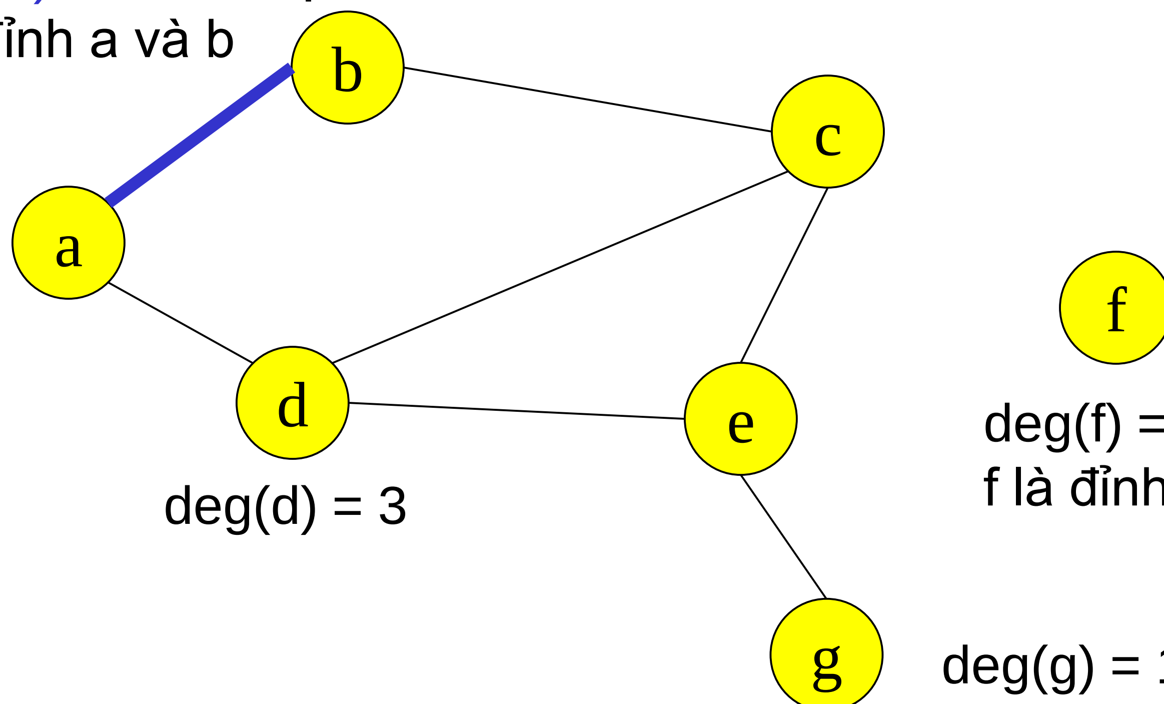
Bậc của đỉnh (Degree of a Vertex)

- Giả sử G là đồ thị vô hướng, $v \in V$ là một đỉnh nào đó.
- *Bậc* của đỉnh v, ký hiệu $\deg(v)$, là số cạnh kề với nó.
- Đỉnh bậc 0 được gọi là *đỉnh cô lập* (*isolated*).
- Đỉnh bậc 1 được gọi là *đỉnh treo* (*pendant*).

Ví dụ

Cạnh (a,b) là liên thuộc với hai đỉnh a và b

b là kề với c và c là kề với b



deg(d) = 3

deg(f) = 0
f là đỉnh cô lập

deg(g) = 1
g là đỉnh treo

Định lý bắt tay
(Handshaking Theorem)

- **Định lý.** Giả sử *G* là đồ thị vô hướng (đơn hoặc đa) với tập đỉnh *V* và tập cạnh *E*. Khi đó, tổng bậc của các đỉnh bằng 2 lần số cạnh

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

CM: Trong tổng ở vế trái mỗi cạnh $e=(u,v)\in E$ được tính hai lần: trong deg(u) và deg(v).

- **Hệ quả:** Trong một đồ thị vô hướng bất kỳ, số lượng đỉnh bậc lẻ (đỉnh có bậc là số lẻ) bao giờ cũng là số chẵn.

Ví dụ.

Biết rằng mỗi đỉnh của đồ thị vô hướng $G=(V,E)$ với 14 đỉnh và 25 cạnh đều có bậc là 3 hoặc 5.

Hỏi G có bao nhiêu đỉnh bậc 3?

Giải. Giả sử G có x đỉnh bậc 3.

Khi đó có $14–x$ đỉnh bậc 5.

Do $| E | = 25$, nên tổng tất cả các bậc là 50.

Từ đó, $3x + 5(14–x) = 50$

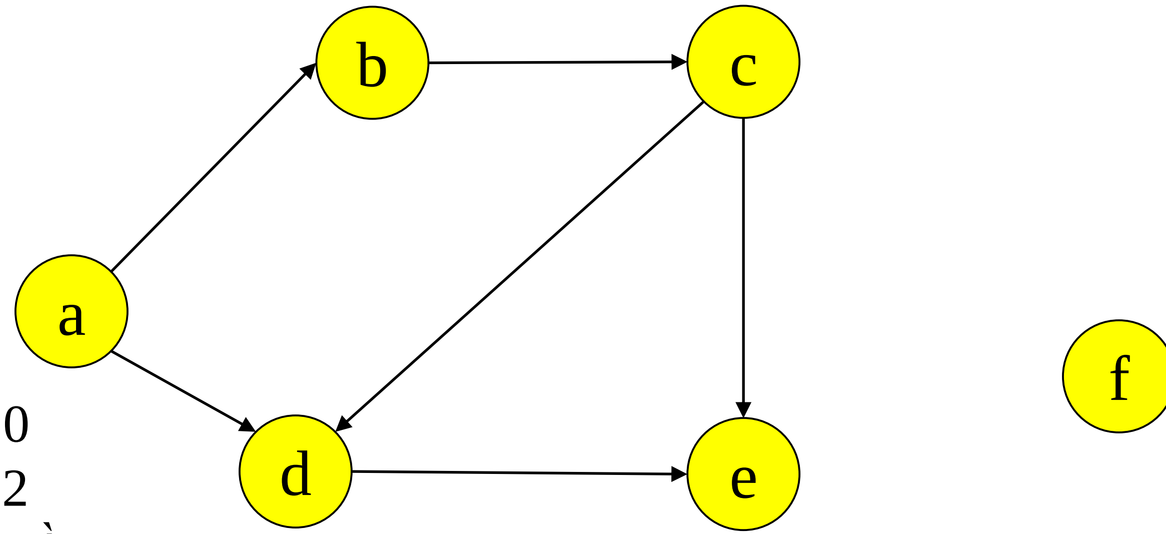
Suy ra $x = 10$.

Bậc của đỉnh của đồ thị có hướng

- Cho G là đồ thị có hướng, v là đỉnh của G.
  - *Bán bậc vào* (*in-degree*) của v, $\deg^{-}(v)$, là số cạnh đi vào v.
  - *Bán bậc ra* (*out-degree*) của v, $\deg^{+}(v)$, là số cạnh đi ra khỏi v.

Ví dụ

b kề tới c và c kề từ b



deg-(a) = 0
deg+(a)= 2
a- đỉnh nguồn

$deg^{-}(d) = 2$
$deg^{+}(d) = 1$

deg-(e) = 2
deg+(e)= 0
e – đỉnh đích (target)

deg-(f) = 0
deg+(f)= 0

Định lý bắt tay có hướng

Directed Handshaking Theorem

- **Định lý.** Giả sử G là đồ thị có hướng (có thể là đơn hoặc đa) với tập đỉnh V và tập cạnh E. Khi đó: Tổng bán bậc ra bằng tổng bán bậc vào và bằng số cạnh.

$$\sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = |E|$$

Chương 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mở đầu

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Hợp của hai đồ thị

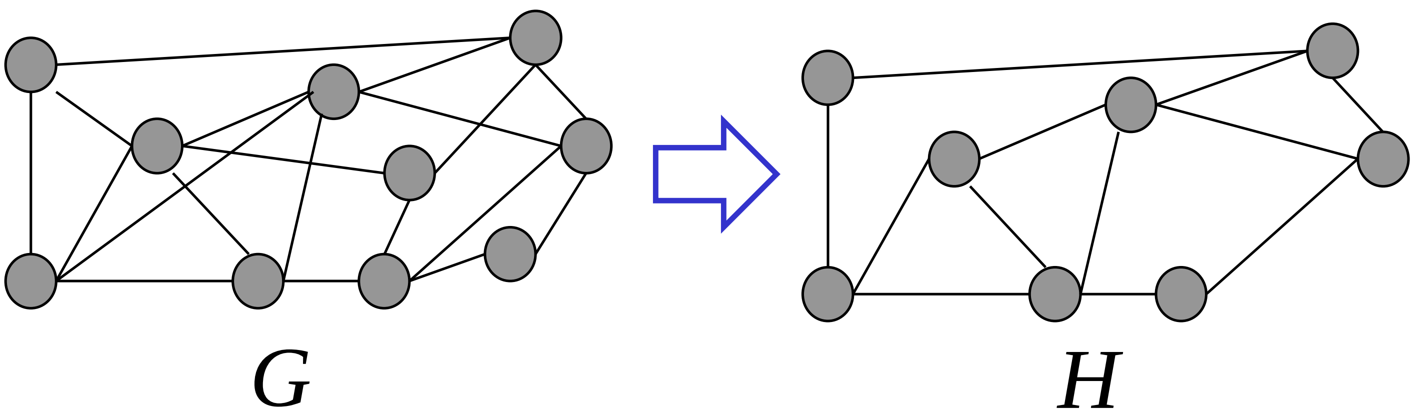
1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

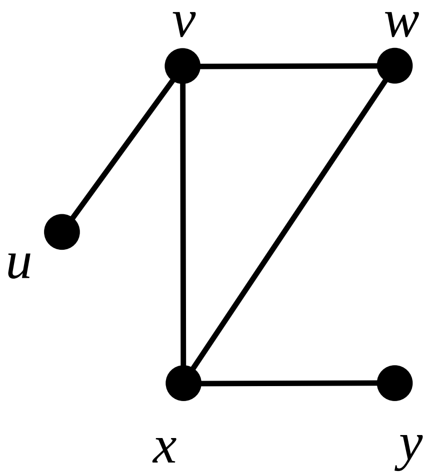
Đồ thị con (Subgraphs)

- **Định nghĩa.** Đồ thị $H=(W,F)$ được gọi là đồ thị con của đồ thị $G=(V,E)$ nếu $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.
- Ký hiệu: $H \subseteq G$.

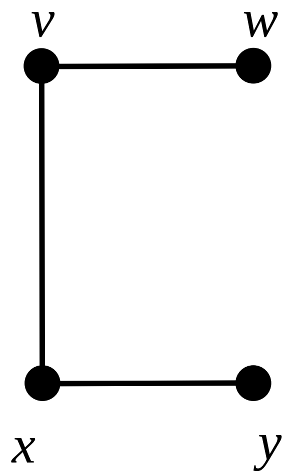


Ví dụ

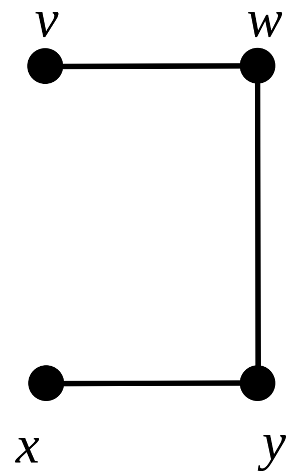
Ví dụ



G



$H \subseteq G$



$F \nsubseteq G$

Chương 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mở đầu

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Hợp của hai đồ thị

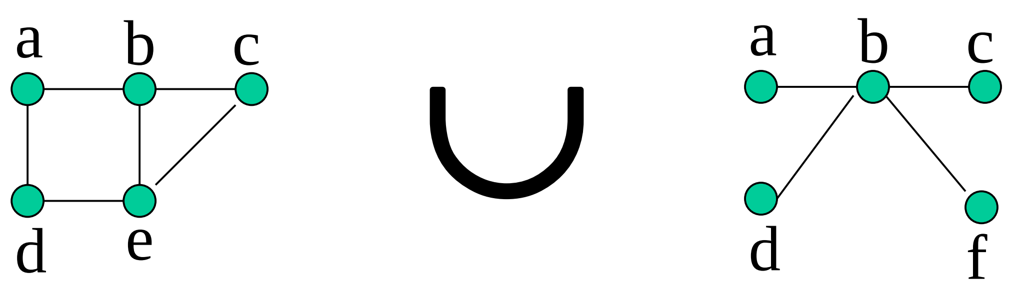
1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Hợp của hai đồ thị

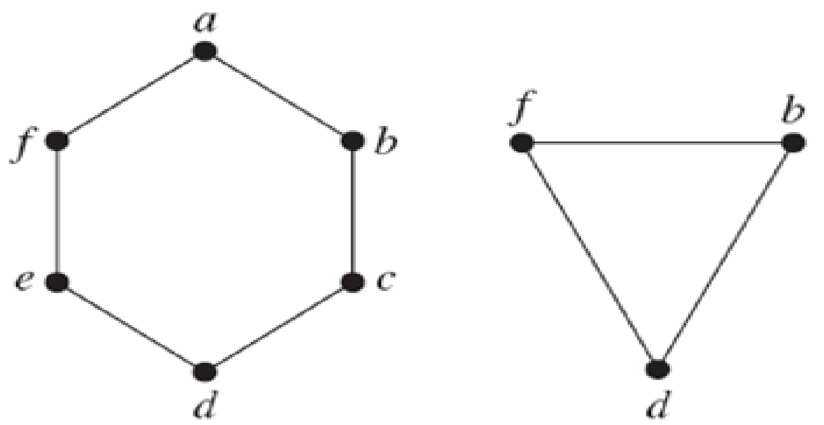
Hợp $G_1 \cup G_2$ của hai đơn đồ thị $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là đơn đồ thị $G=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.



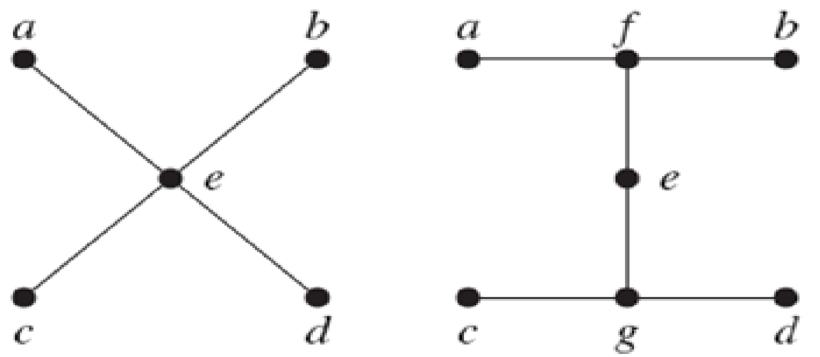
Ví dụ

Tìm hợp của cặp hai đơn đồ thị sau:

1.



2.



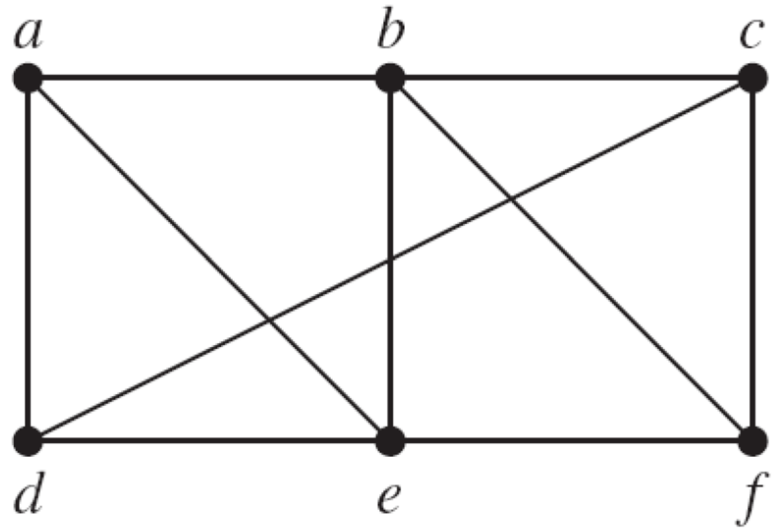
Chương 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Đường đi, Chu trình

- **Đường đi** độ dài ***n*** từ *u* tới *v*, $n \in Z_+$ của đồ thị **vô hướng** là dãy các cạnh $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sao cho $f(e_1) = (x_0, x_1)$, $f(e_2) = (x_1, x_2), \ldots, f(e_n) = (x_{n-1}, x_n)$ với $x_0 = u$ và $x_n = v$.
- Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các đỉnh: $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$; *trong đó* $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Đường đi gọi là **chu trình** nếu đỉnh đầu và đỉnh cuối của đường đi trùng nhau.
- Đường đi gọi là **đường đi đơn** nếu nó **không đi qua một cạnh quá 1 lần;** Chu trình gọi là **chu trình đơn** nếu nó **không đi qua một cạnh quá 1 lần**

Đường đi, Chu trình

Ví dụ 1:

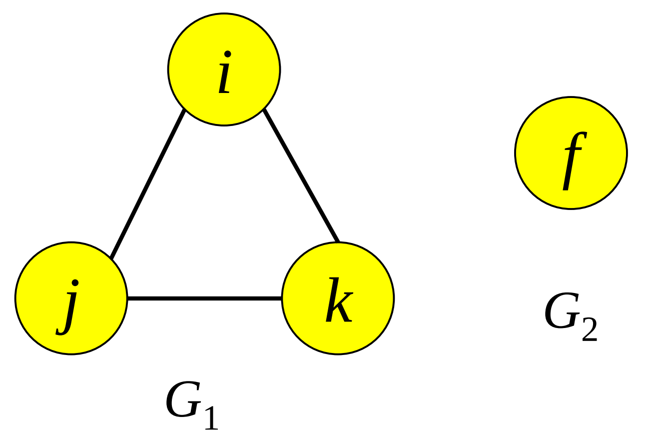


- Chỉ ra một đường đi đơn độ dài 4?
- Chỉ ra một đường chu trình độ dài 4?
- Chỉ ra đường đi độ dài 5 không là đường đi đơn?

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Tính liên thông (Connectedness)

- Đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông* nếu luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của nó.
- **Ví dụ**



- G_1 và G_2 là các đồ thị liên thông
- Đồ thị G bao gồm G_1 và G_2 không là đồ thị liên thông

Tính liên thông (Connectedness)

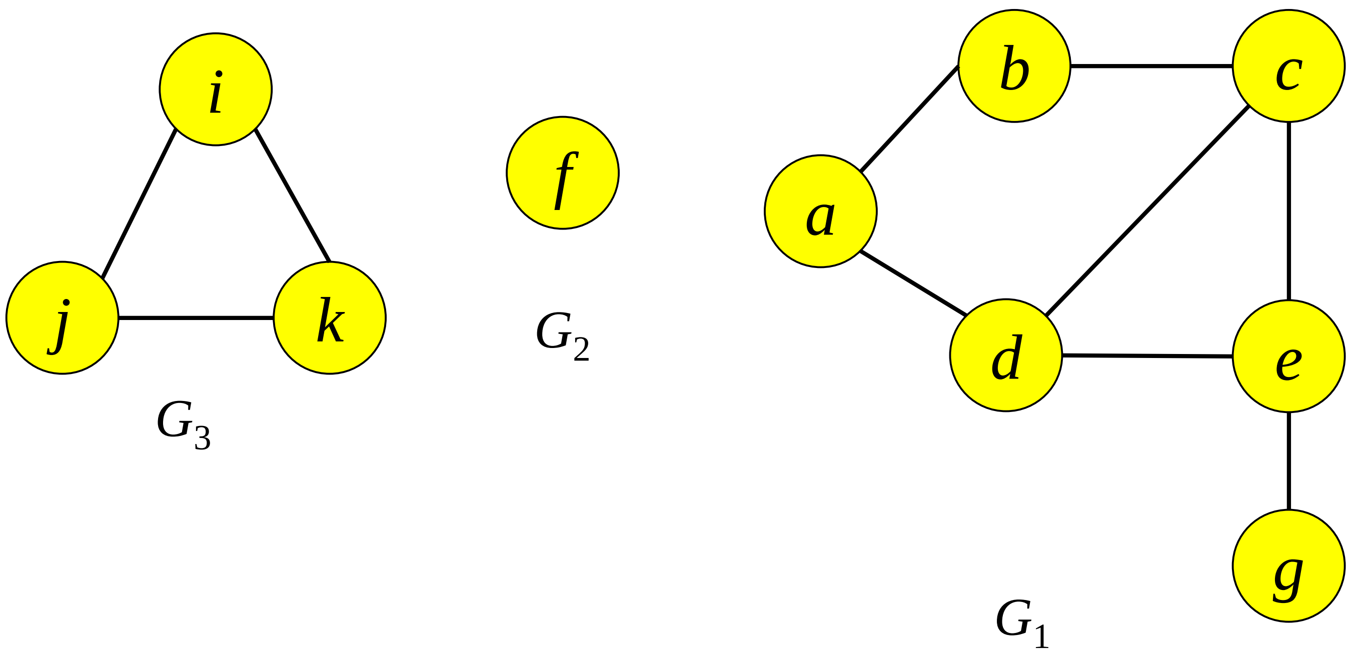
- **Mệnh đề:** Luôn tìm được đường đi đơn nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng liên thông.

- **Chứng minh.**

Theo định nghĩa, luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị liên thông. Gọi *P* là đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh *u* và *v*. Rõ ràng *P* phải là đường đi đơn.

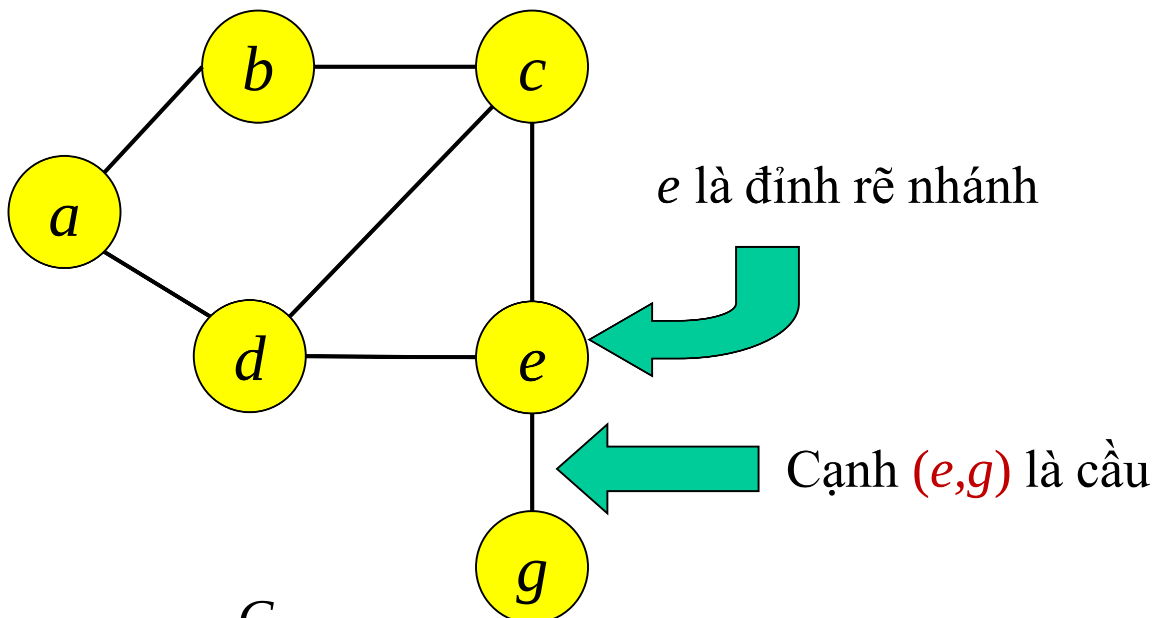
Tính liên thông (Connectedness)

- *Thành phần liên thông* (*Connected component*): Đồ thị con liên thông cực đại của đồ thị vô hướng *G* được gọi là thành phần liên thông của nó.
- **Ví dụ:** Đồ thị *G* có 3 thành phần liên thông G_1, G_2, G_3



Đỉnh rẽ nhánh và cầu (Connectedness)

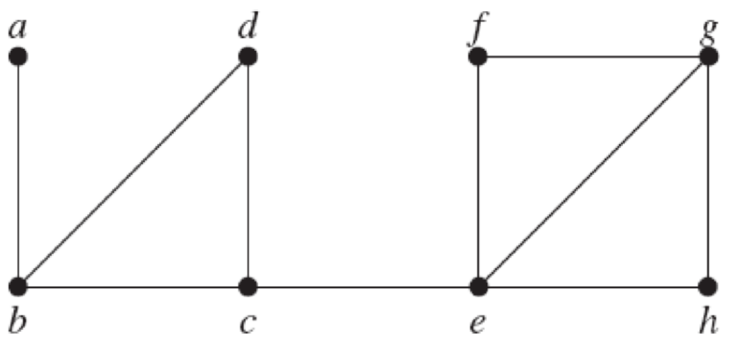
- *Đỉnh rẽ nhánh* (còn gọi *đỉnh cắt - cut vertex*): là đỉnh mà việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị
- *Cầu* (*bridge*): Cạnh mà việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị .
- **Ví dụ 1:**



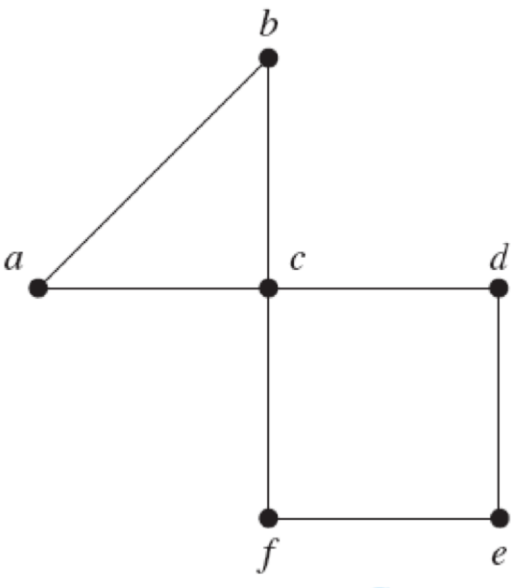
G

Đỉnh rẽ nhánh và cầu (Connectedness)

Ví dụ 2: Xác định đỉnh rẽ nhánh và cầu của đồ thị sau



G_1

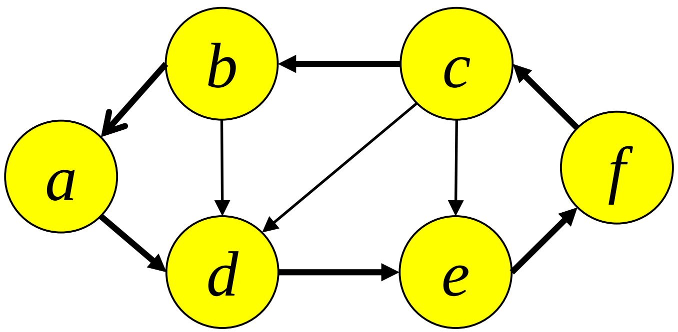


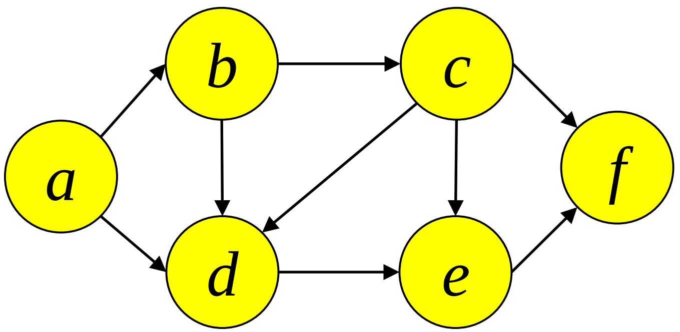
G_2

Tính liên thông của Đồ thị có hướng

- Đồ thị có hướng được gọi là *liên thông mạnh* (*strongly connected*) nếu như luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của nó.
- Đồ thị có hướng được gọi là *liên thông yếu* (*weakly connected*) nếu như đồ thị vô hướng thu được từ nó bởi việc bỏ qua hướng của tất cả các cạnh của nó là đồ thị vô hướng liên thông.
- Dễ thấy là nếu *G* là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại không luôn đúng.

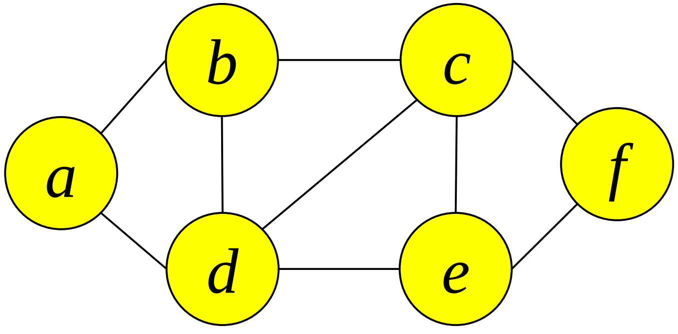
Ví dụ





- Đồ thị liên thông mạnh

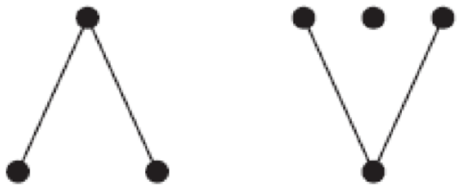
Đồ thị liên thông yếu



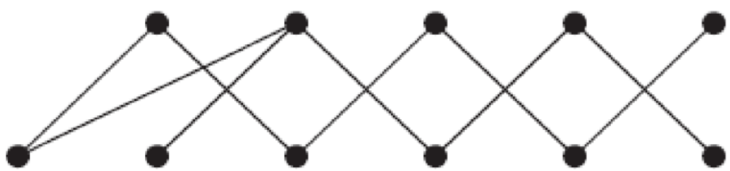
Bài tập

1. Các đồ thị sau có liên thông không?

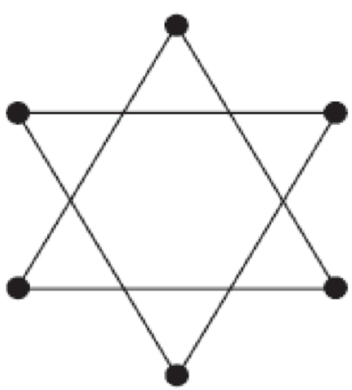
G1



G2

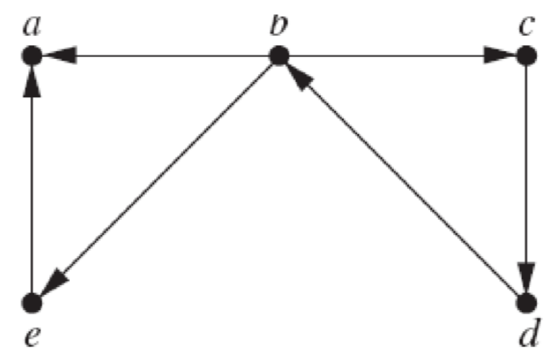


G3

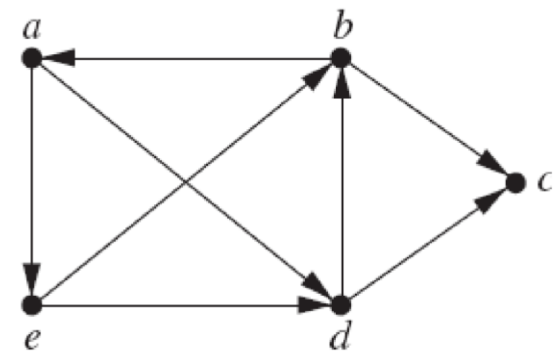


2. Đồ thị có hướng sau liên thông mạnh/yếu ?

G4



G5



Chương 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mở đầu

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Hợp của hai đồ thị

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

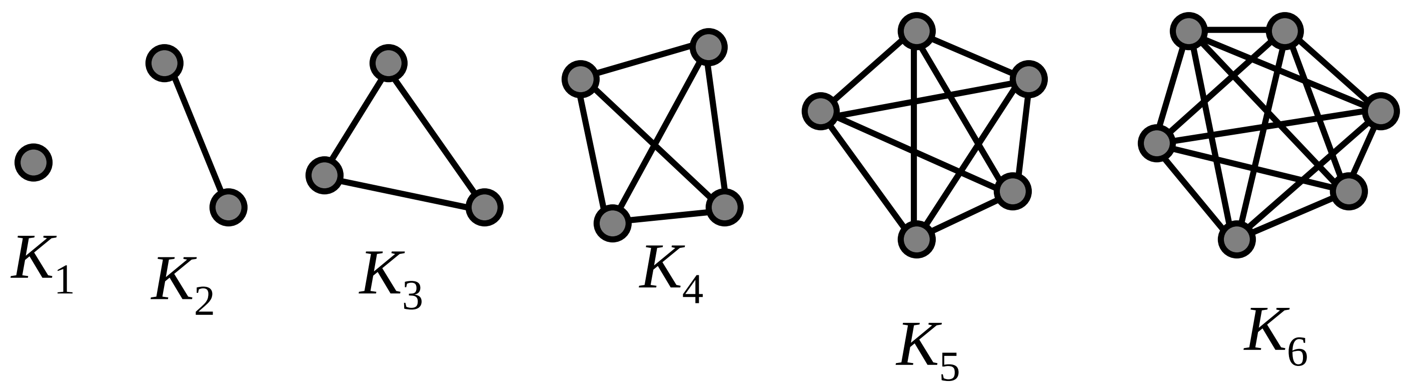
1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Một số đơn đồ thị vô hướng đặc biệt

- Đồ thị đầy đủ (Complete graphs) K_n
- Đồ thị vòng (Cycles) C_n
- Đồ thị Bánh xe (Wheels) W_n
- Đồ thị lập phương Q_n
- Đồ thị hai phía (Bipartite graphs)
- Đồ thị hai phía đầy đủ (Complete bipartite graphs) $K_{m,n}$
- Đồ thị phẳng

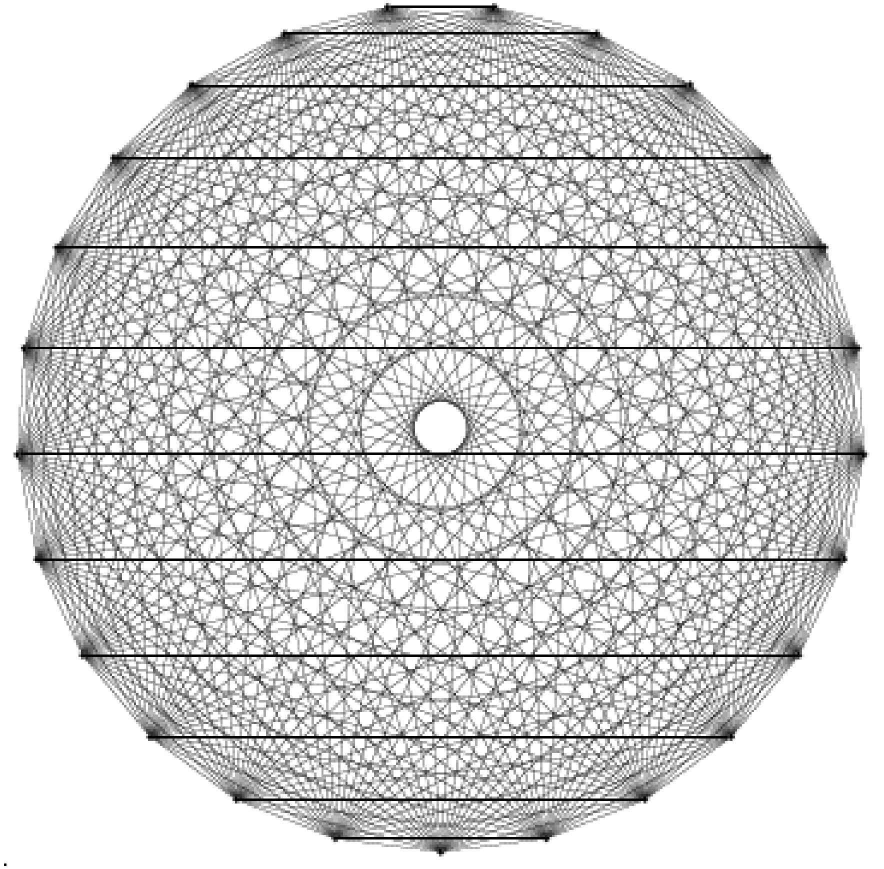
Đồ thị đầy đủ
Complete Graphs

- Với $n \in \mathbf{N}$, đồ thị đầy đủ n đỉnh, K_n, là đơn đồ thị vô hướng với n đỉnh trong đó giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có cạnh nối: $\forall u,v \in V$: $u \neq v \leftrightarrow (u,v) \in E$.



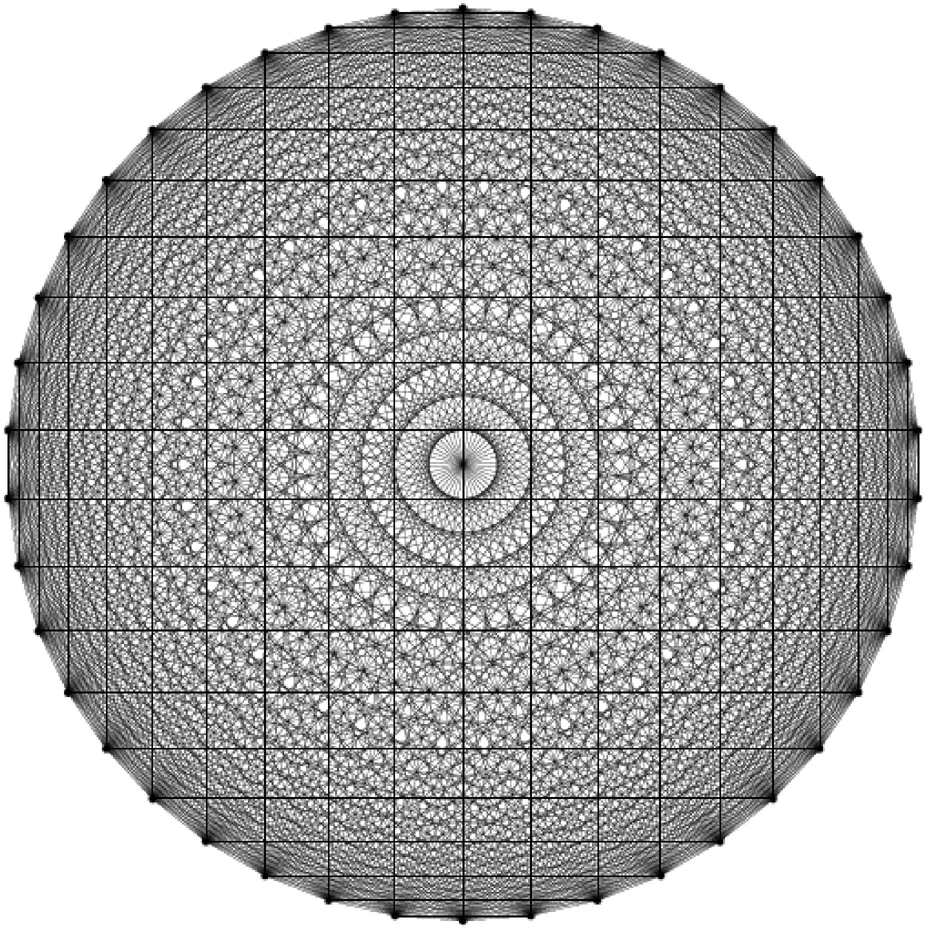
Để ý là K_n *có* $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ *cạnh.*

Đồ thị đầy đủ
Complete Graphs



K_{25}

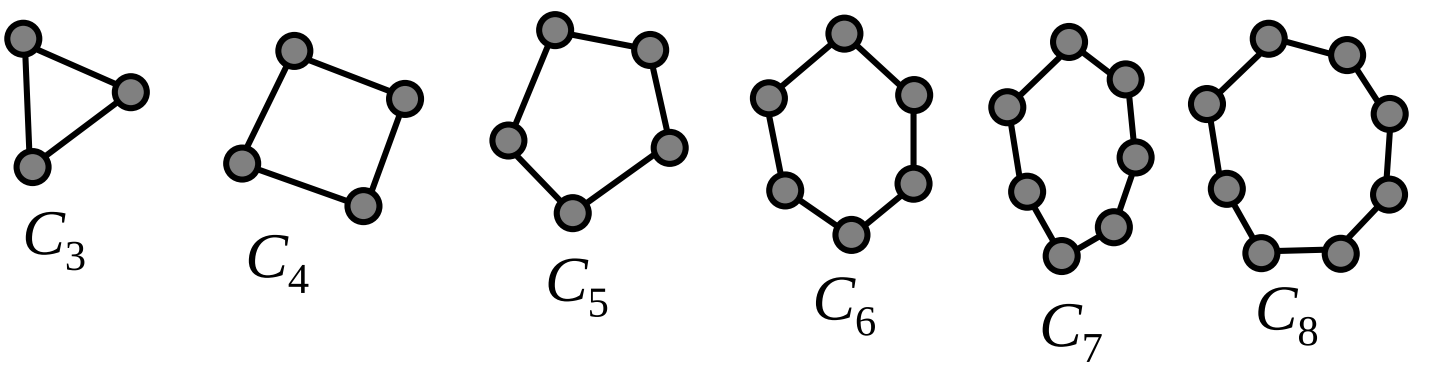
Đồ thị đầy đủ
Complete Graphs



K_{42}

Đồ thị Vòng (Cycles)

- Giả sử $n \geq 3$. Đồ thị Vòng n đỉnh, C_n, là đơn đồ thị vô hướng với $V=\{v_1,v_2,\ldots ,v_n\}$ và $E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_{n-1},v_n),(v_n,v_1)\}$.

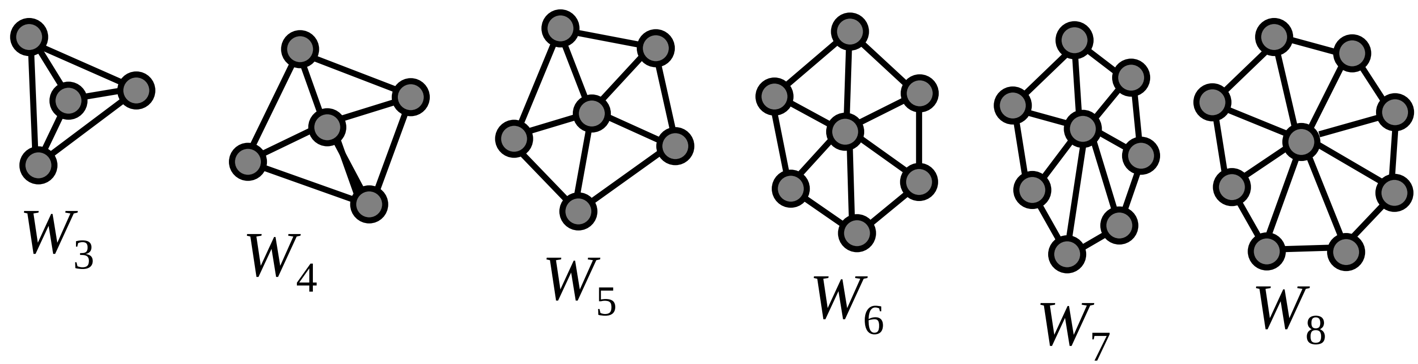


Có bao nhiêu cạnh trong C_n?

Đồ thị Bánh xe (Wheels)

- Với $n \geq 3$, *bánh xe* W_n, là đơn đồ thị vô hướng thu được bằng cách bổ sung vào chu trình C_n một đỉnh v_{hub} và n cạnh nối

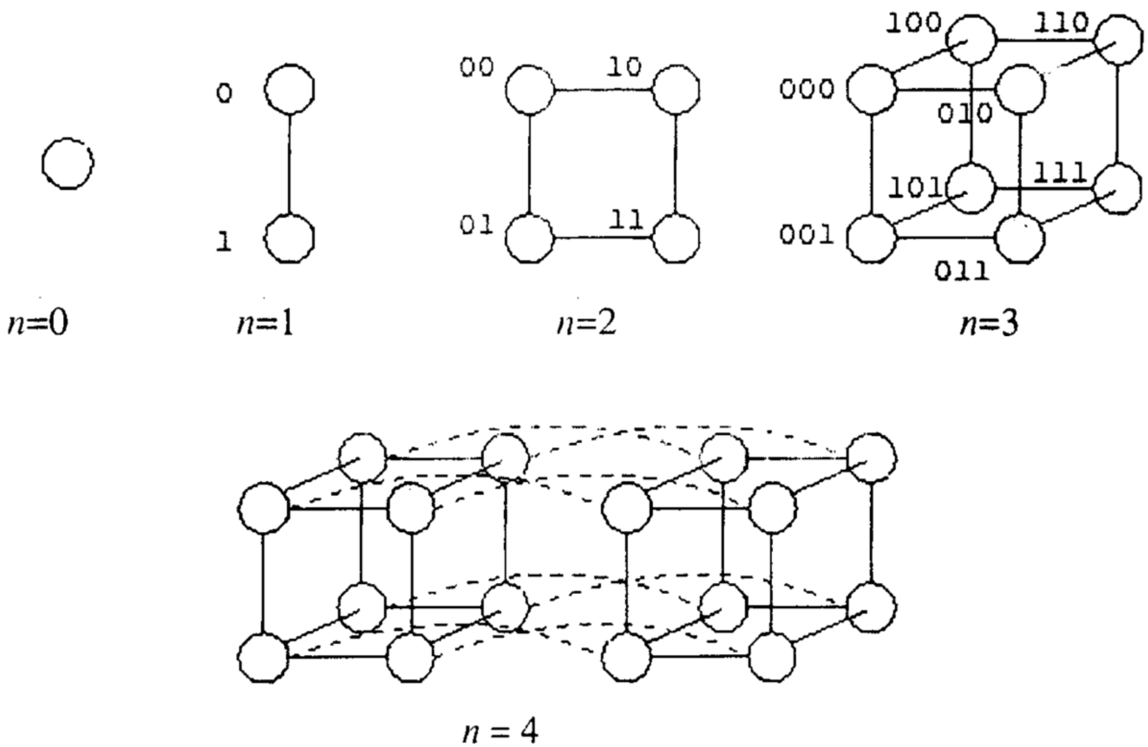
  $\{(v_{\text{hub}}, v_1), (v_{\text{hub}}, v_2), \ldots, (v_{\text{hub}}, v_n)\}$.



Có bao nhiêu cạnh trong W_n?

Đồ thị lập phương

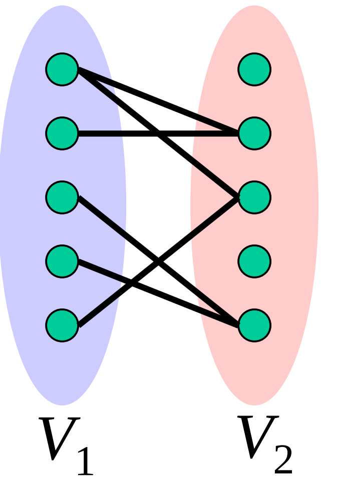
- Đồ thị lập phương n đỉnh với Q_n là đồ thị vô hướng với các đỉnh biểu diễn 2^n xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh của nó là kề nhau nếu 2 xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.



Đồ thị lập phương Q_n

Đồ thị hai phía (Bipartite Graphs)

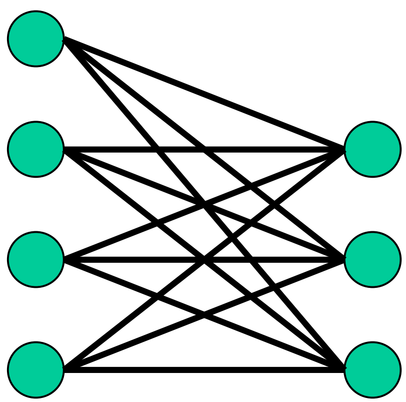
- **Định nghĩa.** Đồ thị $G=(V,E)$ là hai phía nếu và chỉ nếu $V = V_1 \cup V_2$ với $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ và $\forall e \in E: \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2: e=(v_1,v_2)$.
- **Bằng lời:** Có thể phân hoạch tập đỉnh thành hai tập sao cho mỗi cạnh nối hai đỉnh thuộc hai tập khác nhau.



Định nghĩa này là chung cho cả đơn lẫn đa đồ thị vô hướng, có hướng.

Đồ thị hai phía đầy đủ
(Complete Bipartite Graphs)

- Với m, $n \in \mathbf{N}$, đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ là đồ thị hai phía trong đó $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, và
  $E = \{(v_1,v_2)|v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2\}$.
- $K_{m,n}$ có m đỉnh ở tập bên trái, n đỉnh ở tập bên phải, và mỗi đỉnh ở phần bên trái được nối với mỗi đỉnh ở phần bên phải.



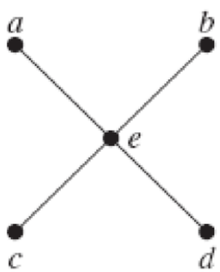
$K_{4,3}$

$K_{m,n}$ có ______ đỉnh và ______ cạnh.

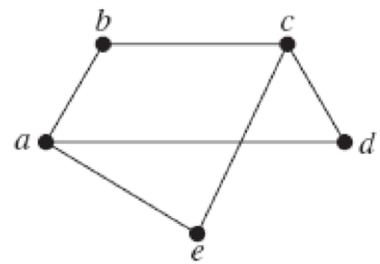
Bài tập

Các đồ thị sau có là đồ thị hai phía không ?

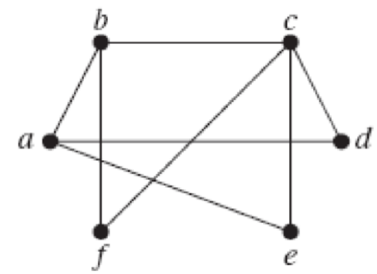
21.



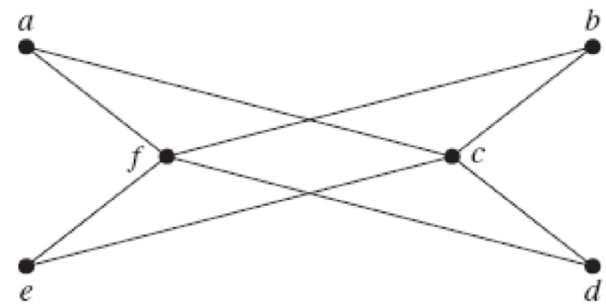
22.



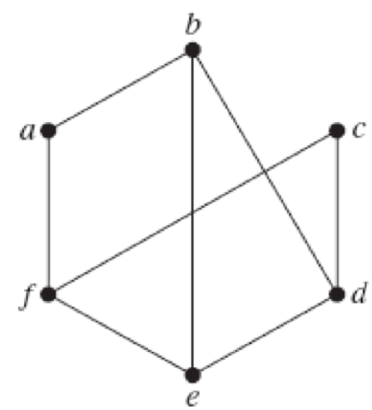
23.



24.



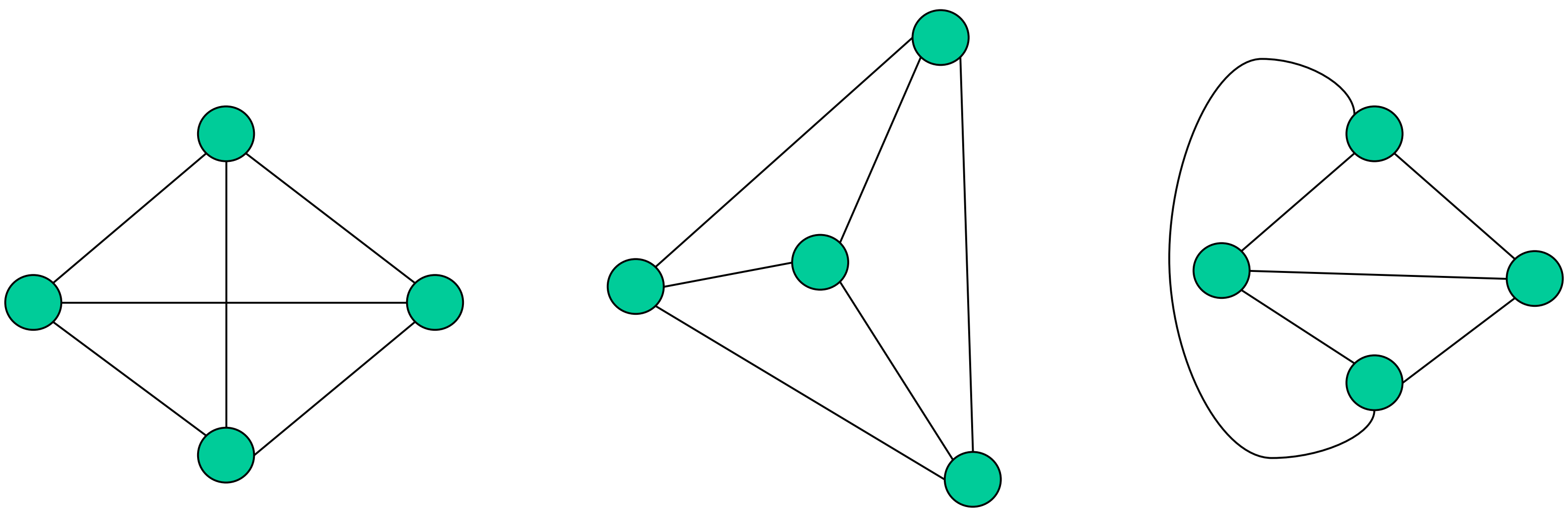
25.



Đồ thị phẳng

(Planar Graphs)

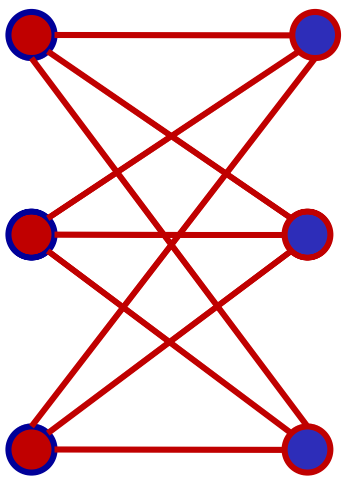
- **Định nghĩa.** Đồ thị vô hướng G được gọi là đồ thị phẳng nếu như có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau ngoài ở đỉnh.
- **Ví dụ:** K_4 là đồ thị phẳng?

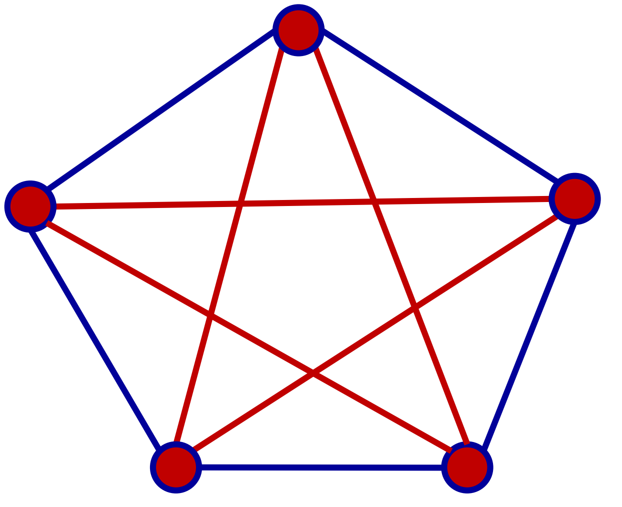


K_4 là đồ thị phẳng!

$K_{3,3}$ và K_5 không là đồ thị phẳng

- Đồ thị $K_{3,3}$ và K_5 không là đồ thị phẳng





- Mọi cách vẽ $K_{3,3}$ đều phải có ít nhất một giao điểm ngoài đỉnh (gọi là vết cắt).

Công thức Euler

- **Định lý:** Giả sử G là đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh. Gọi r là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Khi đó:

$$r=m-n+2$$

CM: Định lý có thể chứng minh bằng quy nạp.

- **Ví dụ áp dụng:** Cho G là đồ thị phẳng liên thông với 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 3. Hỏi mặt phẳng bị chia ra bao nhiêu phần bởi biểu diễn phẳng của G ?
- **Giải:** Tổng bậc các đỉnh là 3 x20 = 60. Từ đó suy ra số cạnh m= 60/2=30. Theo công thức Euler số miền cần tìm là: $r = 30 - 20 + 2 = 12$.

Bài toán xây dựng hệ thống cung cấp năng lượng

- Tìm cách xây dựng hệ thống đường ống nối 3 nguồn cung cấp khí ga, nước và điện cho 3 ngôi nhà sao cho chúng không cắt nhau: