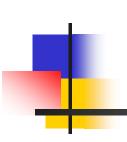
TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY LỢI Khoa Công nghệ Thông tin Bộ môn KHMT



ĐỒ HỌA MÁY TÍNH (Computer Graphics)

Ngô Trường Giang

E-mail: giangnt@tlu.edu.vn

Nội dung

- Tổng quan đồ họa máy tính
- Màu và phối màu
- Thuật toán cơ sở vẽ đồ họa
- Các kỹ thuật trong đồ họa 2D
- Phép biến đổi đồ họa 2D
- Phép biến đổi đồ họa 3D
- Quan sát đồ họa 3D
- Mô hình hóa bề mặt



PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ HỌA 2D

- Các phép toán cơ sở với ma trận
- Các phép biến đổi 2D cơ sở
- Biến đổi 2D gộp

Các phép toán cơ sở với ma trận

- Công, trừ ma trận
 - Chỉ thực hiện cho hai ma trận cùng bậc

$$[A(m, n)] + [B(m, n)] = [C(m, n)]$$
$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

- Nhân hai ma trân
 - Ma trận bậc n1xm1 và ma trận bậc n2xm2 nhân được với nhau nếu m1=n2

$$[A(m, n)][B(n, p)] = [C(m, p)]$$

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ik}$$
 j=1,...,m và k=1,...,p

Các phép toán cơ sở với ma trận

Đảo ma trận vuông

- Không có phép chia ma trận
- nếu [A][X]=[Y] thì [X]=[A]⁻¹ [Y], trong đó [A]⁻¹ là ma trận đảo của ma trận vuông [A]
- [A][A]⁻¹ = [I] trong đó [I] là ma trận đơn vị

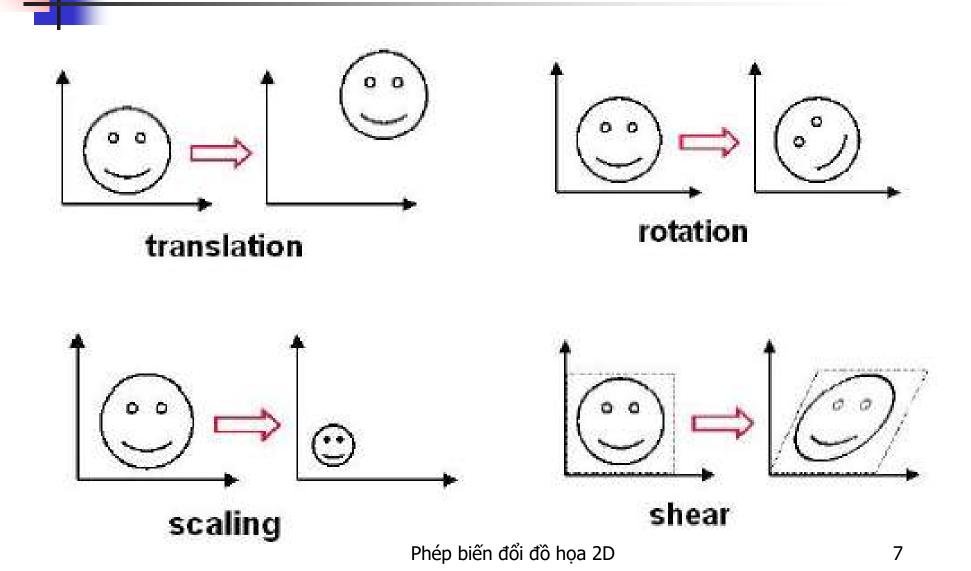
$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} ||A||^T$$

- Tính ||A||: Thay các phần tử của [A] bằng các phần phụ đại số của nó
- Phần phụ đại số của phần tử (a_{ij}) là: $(-1)^{i+j} [M_{ij}]$
- [M_{ij}] được tạo ra nhờ xóa hàng i, cột j của [A].

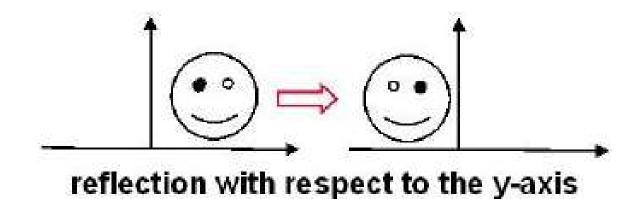
Ứng dụng của phép biến đổi

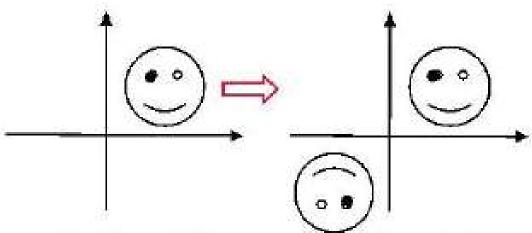
- Mô hình hóa (modeling)
 - Định vị và thay đổi kích thước các phần của đối tượng phức tạp
- Quan sát (viewing)
 - Định vị và quan sát camera ảo
- Animation
 - Xác định đối tượng chuyển động và thay đổi theo thời gian như thế nào.

Ví dụ về phép biến đổi 2D



Ví dụ về phép biến đổi 2D





reflection with respect to the origin

Các loại biến đổi

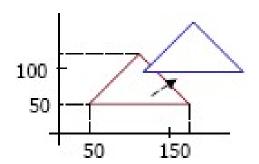
- Biến đối tuyến tính
 - Các đường thẳng giữa nguyên là đường thẳng
 - Các thí dụ trên
- Biến đổi affine
 - Các đường song song giữ nguyên song song
 - Các thí dụ trên là affine. Thí dụ non-affine: chiếu viễn cảnh
- Biến đổi trực giao
 - Bảo toàn khoảng cách, dịch chuyển đối tượng như khối rắn
- Xoay, dịch chuyển, phản chiếu là affine
 - Bấy kỳ biến đổi affine nào cũng có thể viết như sau

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$P' = P.A$$

2. Các phép biến đổi cơ sở

Tinh tiến (Translation)



Định nghĩa: P= [x y], P'=[x' y'] và T=
$$[T_x T_y]$$

 $[x' y']=[x y]+[T_x T_y]$

Co dãn (Scaling)

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

Các phép biến đổi cơ sở

Xoay hình (Rotation)

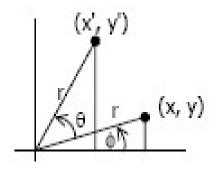
$$x' = r\cos(\phi + \theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\phi + \theta) = r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta$$
$$\theta \quad \text{G\'oc xoay}$$

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$$

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$



Tọa độ thuần nhất

Các biến đổi cơ sở có cách xử lý khác nhau

```
P' = P + T \text{ (tịnh tiến)}; \quad P' = P. S \text{ (co dẫn)}; \quad P' = P.R \text{ (xoay)}
```

- Thực tế: Nhu cầu tổ hợp các chuyển đổi cơ sở
 - Cần cách xử lý nhất quán để dễ dàng tổ hợp
 - Sử dụng hệ thống tọa độ thuần nhất (Homogeneous Coordinates)

Tọa độ thuần nhất

- Mục tiêu ban đầu của hệ tọa độ thuần nhất là để biểu diễn khái niệm vô hạn
 - Không thể biểu diễn giá trị vô hạn trong hệ tọa độ Đề các
 - Giả sử với hai số thực w và a
 - Giá trị vô hạn được biểu diễn bởi v=a/w,
 - Khi w->0 thì a/w tiến tới vô hạn: cặp (a, w) biểu diễn khái niệm vô hạn; cặp (a, 0) biểu diễn giá trị vô hạn.
- Áp dụng hệ tọa độ xy trong mặt phẳng

$$f(x, y) = 0$$

$$f(x/w, y/w) = 0$$

 Nếu f(x,y)=0 là đa thức bậc n thì nhân nó với wⁿ để loại bỏ mẫu

Ví dụ về tọa độ thuần nhất

Phương trình bậc nhất (đường thẳng):

```
Ax+By+C=0; thay x, y ta có:

A(x/w)+B(y/w)+C=0; Nhân với w ta có:

Ax+By+Cw=0
```

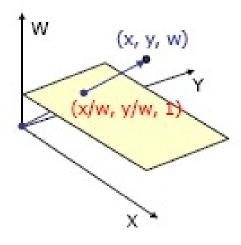
Đa thức bậc 2:

```
Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0
sau khi thay thế và nhân với w^2 ta có:
Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxw+2Eyw+Fw^2=0
```

- Nhận xét:
 - Các phần tử trong đa thức đều có bậc như nhau
 - Đa thức bậc n thì các thành phần của nó đều có bậc n
 - Cho trước đa thức bậc n, sau khi bố sung w thì mọi thành phần đều có bậc n -> gọi nó là đa thức thuần nhất và tọa độ (x, y, w) là tọa độ thuần nhất.

Tọa độ thuần nhất

- Diễn giải hình học
 - Cho trước tọa độ thuần nhất (x, y, w) của điểm trong mặt phẳng xy. (x,y,w) là điểm trong không gian xyw.
 - Đoạn thẳng nối điểm (x, y, w) với gốc tọa độ trong không gian 3D sẽ cắt mặt phẳng w=1 tại (x/w, y/w, 1)
 - Điểm đồng nhất 2D được xem như điểm trong không gian 3D và chiếu điểm 3D vào mặt phẳng w=1.
- Bất kỳ biến đổi tuyến tính nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng ma trận trong hệ thống tọa độ thuần nhất.



Từ đồng nhất sang 2D:

[x, y, w] -> [x/w, y/w]

Kết quả duy nhất

Từ 2D sang đồng nhất:

[x, y] -> [kx, ky, k]

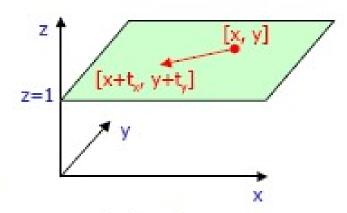
k ≠ 0

Ma trận biến đổi 2 chiều

- Biểu diễn tọa độ 2D [x,y] trong hệ tọa độ thuần nhất là bộ ba [x, y, 1]
 - Các điểm là véctơ hàng 3 phần tử
 - Ma trận biến đổi có kích thước 3x3
- Dịch chuyển

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(Tx, Ty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix}$$



Dịch chuyển:

$$x'=x+t_x=x+t_x.1$$

$$y'=y+t_y=y+t_y.1$$

$$w'=1$$

Ma trận biến đối 2 chiều

Co dãn

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(Sx, Sy) = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xoay

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Biến đổi affine tổng quát

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

3. Phép biến đổi gộp

- Giải pháp:
 - Tính ma trận kết quả của các chuyển đổi thành phần trong chuyển đổi gộp
- Dịch chuyển 2 lần

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx1 & Ty1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx2 & Ty2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx1+Tx2 & Ty1+Ty2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(Tx_1, Ty_1).T(Tx_2, Ty_2)=T(Tx_1+Tx_2, Ty_1+Ty_2)$$

Co dãn hai lần

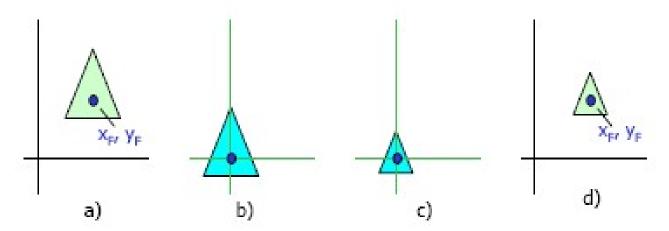
$$S(Sx_1, Sy_1).S(Sx_2, Sy_2)=S(Sx_1.Sx_2, Sy_1.Sy_2)$$

Xoay hai lần

$$R(\theta_1).R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2)$$

Co dãn đối tượng theo điểm cố định

- Vấn đề
 - Cho trước tam giác ABC, tọa độ chốt (x_F, y_F) và tỷ lệ co dãn (a)
 - Thực hiện biến đổi để có kết quả (d)
- Các bước thực hiện
 - Dịch đối tượng sao cho điểm chốt trùng gốc tọa độ
 - Thực hiện co dãn theo tỷ lệ cho trước
 - Dịch ngược đối tượng sao cho điểm chốt về vị trí ban đầu

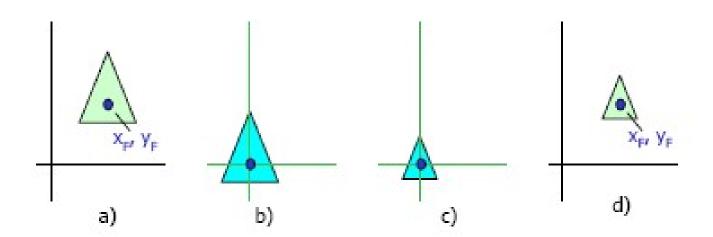


Phép biến đổi đồ họa 2D

Co dãn đối tượng theo điểm cố định

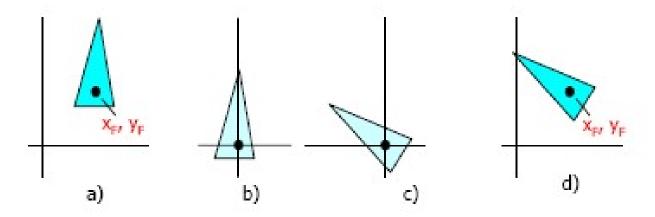
Ma trận chuyển đổi được tính:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_F & -y_F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_F & y_F & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ (1-Sx)x_F & (1-Sy)y_F & 1 \end{bmatrix}$$



Xoay đối tượng quanh điểm cố định

- Vấn đề
 - Cho trước tam giác ABC, tọa độ chốt (x_F, y_F) và góc xoay (a)
 - Thực hiện biến đổi để có kết quả (d)
- Các bước thực hiện
 - Dịch đối tượng sao cho điểm chốt trùng gốc tọa độ
 - Thực hiện xoay theo góc cho trước
 - Dịch ngược đối tượng sao cho điểm chốt về vị trí ban đầu

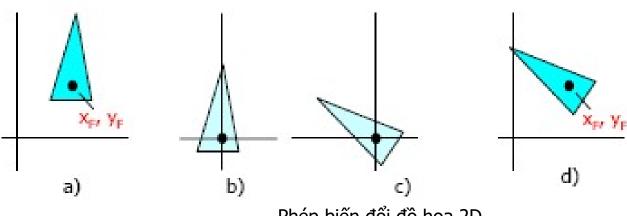


Xoay đối tượng quanh điểm cố định

Ma trận chuyển đổi được tính:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_R & -y_R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_R & y_R & 1 \end{bmatrix}$$

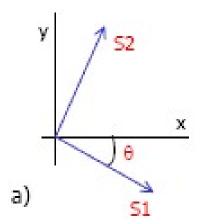
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ (1-\cos \theta)x_R + y_R \sin \theta & (1-\cos \theta)y_R - x_R \sin \theta & 1 \end{bmatrix}$$

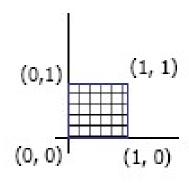


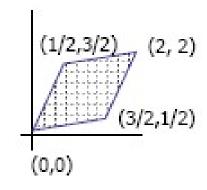
Phép biến đổi đồ họa 2D

Co dãn theo hướng tùy ý

- Ma trận biến đổi co dãn cơ bản
 - Tỷ lệ Sx và Sy áp dụng cho co dãn theo chiều trục x và y
- Co dãn theo hướng tùy ý
 - Thực hiện chuyển đổi gộp: xoay và co dãn
- Vấn đề
 - Cho trước hình vuông ABCD, hãy co dãn nó theo hướng trên hình a) và theo tỷ lệ S1, S2.







Co dãn theo hướng tùy ý

Giải pháp

- Xoay hướng S1, S2 sao cho trùng với trục x và trục y (góc xoay θ)
- Áp dụng biến đổi co dãn theo tỷ lệ S1, S2
- Xoay trả lại hướng ban đầu

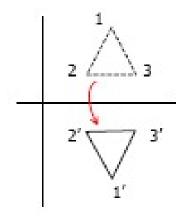
Ma trận tổ hợp

$$\begin{bmatrix} S1.\cos^2\theta + S2.\sin^2\theta & (-S1+S2)\sin\theta\cos\theta & 0\\ (-S1+S2)\sin\theta\cos\theta & S1.\sin^2\theta + S2.\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Một số phép biến đổi khác

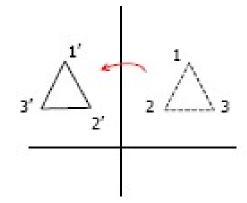
Phản chiếu (reflection)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



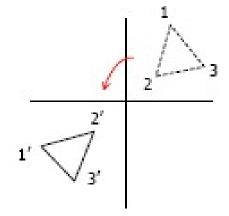
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phán chiếu qua trục y



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phản chiếu qua gốc tọa độ



Bài tập

- Hãy tìm ma trận biến đổi để có đối tượng phản chiếu qua y=x và y=-x.
- 2. Cho tam giác A(3, 1), B(1, 3), C(3,3):
 - Hãy xác định tọa độ mới của các đỉnh tam giác sau khi xoay một góc 90º ngược chiều kim đồng hồ xung quanh điểm P(2, 2).
 - Phóng to tam giác lên hai lần, giữ nguyên vị trí của điểm C.
 Tính tọa độ các đỉnh tam giác sau khi biến hình.
- Tìm ma trận biến đổi trong phép đối xứng qua đường thẳng nằm nghiêng có độ nghiêng m và đi qua điểm (0, c).
- 4. Viết các hàm C/C++ thực hiện dịch, co dãn xoay 2D.

Thực hành

- Cấu hình thư viện OpenGL
- Cài đặt các thuật toán biến đổi 2D sử dụngthư viện OpenGL