Sơ Lược Về Phương Trình Bậc Cao

Nguyễn Thành Luân, K33, SP Toán, Đại Học Cần Thơ
Mai Quốc Tuấn, Tống Hoàng Nguyên, Võ Minh Nhật, lớp 10T1
THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long

1. Lời giới thiệu

Con người đã biết về phương trình và các cách giải phương trình bậc nhất, bậc hai khá sớm (khoảng 2000 TCN) nhưng mãi đến đến thế kỷ thứ XVI, các nhà toán học La Mã là Tartlia (1500 - 1557), Cardano (1501 - 1576) và nhà toán học Ferrari (1522 - 1565) mới giải được các phương trình bậc ba và bậc bốn dạng tổng quát.

Đến tận đầu thế kỷ XIX, nhà toán học người Na Uy Henrik Abel chứng minh được rằng không có cách giải phương trình tổng quát bậc lớn hơn bốn bằng các phương toán học thông thường của đại số. Không lâu sau đó, nhà toán học người Pháp Évariste Galois đã hoàn tất công trình lý thuyết về phương trình đại số của loài người.

Chính vì vậy, trong chuyên đề kì này chúng ta sẽ tìm hiểu kỉ hơn về cách giải các phương trình trên, kèm theo đó là một số ví dụ cụ thể về các phương trình dạng đặc biệt hơn.

2. Phương Trình Bậc 3

2.1 Phương trình bậc 3 có dạng

$$AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \ \left(A \neq 0\right) \ (1)$$

Vào năm 1545, Cardano đã công bố cách giải phương trình (1)

Trước hết do $A \neq 0$ nên chia hai vế của (1) cho A, ta được phương trình dạng

$$X^3 + mX^2 + nX + c = 0 \quad (2)$$

Bằng cách đặt $X = x - \frac{m}{3}$, ta đưa (2) về phương trình bậc 3 thiếu

$$x^3 + ax + b = 0 \ (3), \text{ với } a = n - \frac{m^2}{3} \text{ và } b = c + \frac{2m^3}{27} - \frac{mn}{3}$$

Đặt $x = u + v$. Như thế v có thể chọn giá trị tùy ý. Thay vào (3) ta có

$$(u+v)^3 + a(u+v) + b = 0 \Leftrightarrow (u^3 + v^3 + b) + (u+v)(3uv + a) = 0$$

Chọn v sao cho $3uv + a = 0$, bài toán quy về hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = \dfrac{-a}{3} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ u^3v^3 = \dfrac{-a^3}{27} \end{cases}$$

Như vậy u^3, v^3 là nghiệm của phương trình $t^2 + bt - \frac{a^3}{27} = 0$ (4)

Đặt $\Delta = b^2 + \frac{4a^3}{27}$. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt

$$v^3 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}, u^3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Do đó công thức nghiệm tổng quát của phương trình (3) là :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}} \text{ với } \Delta = b^2 + \frac{4a^3}{27}$$

Vậy công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$X=\sqrt[3]{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}}-\frac{m}{3}$$

Với trường hợp $\Delta\le 0$ thì cũng có thể sử dụng công thức Cardano nhưng khi $\Delta<0$ phải biết khai căn bậc ba của số phức, đó là một vấn đề rất phức tạp. Sau đây chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn phương pháp lượng giác sử dụng khi $\Delta\le 0$.

Trong $x^3+ax+b=0\Leftrightarrow x^3+ax=-b$. Ta đặt $x=k\cos y$ thì $k^3\cos^3 y+ak\cos y=-b$ (5)

Đặt $k^2=-\frac{4a}{3}$ (vì $\Delta\le 0$ thì $p\le 0$) thì phương trình (5) trở thành

$$4\cos^3 y-3\cos y=\frac{3b}{ka}=\frac{3b\sqrt{3}}{a\sqrt{-4a}}.$$

Nhưng $\Delta=b^2+\frac{4a^3}{27}\le 0\Leftrightarrow\left|\frac{3b}{ka}\right|=\left|\frac{3b\sqrt{3}}{a\sqrt{-4a}}\right|\le 1$. Đặt $\frac{3b}{ka}=\cos G$, thì $4\cos^2 y-3\cos y=\cos G$.

Suy ra nghiệm của phương trình $x^3+ax+b=0$ là

$$x_1=k\cos\frac{G}{3};x_2=k\cos\left(\frac{G+2\pi}{3}\right);x_3=k\cos\left(\frac{G+4\pi}{3}\right).$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (1) khi $\Delta\le 0$ là

$$X_1=k\cos\frac{G}{3}-\frac{m}{3},X_2=k\cos\left(\frac{G+2\pi}{3}\right)-\frac{m}{3},X_3=k\cos\left(\frac{G+4\pi}{3}\right)-\frac{m}{3}.$$

Nhận xét.

$\Delta>0$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm đơn.

$\Delta=0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm, trong đó có 1 nghiệm kép.

$\Delta<0$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Một số trường hợp đặc biệt:

Nếu $a+b+c+d=0$ thì (1) có nghiệm $x=1$. Nếu $a-b+c-d=0$ thì (1) có nghiệm $x=-1$.

Nếu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ thì (1) thì có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p,q theo thứ tự là ước của d và a.

Nếu $ac^3=db^3\,(a,d\ne 0)$ thì (1) có nghiệm $x=-\frac{c}{b}$

Ví dụ. Giải phương trình $x^3+x^2-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}=0$.

Lời giải.

Nhận xét. Vì $ac^3=1.\left(-\sqrt{2}\right)^3=db^3=-2\sqrt{2}$ nên phương trình có nghiệm $x=-\frac{c}{b}=\sqrt{2}$. Biến đổi phương trình về dạng $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{2}=0\\x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

2.2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình $y^3+3y^2+12y-16=0$.

Lời giải. Đặt $y=x-1$, ta có $(x-1)^3+3(x-1)^2+12(x-1)-16=0\Leftrightarrow x^3+9x-26=0$. Ta có

$$\Delta=b^2+\frac{4a^3}{27}=(-26)^2+\frac{4.(9)^3}{27}=784>0,$$

$$u^3=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{26+\sqrt{784}}{2}=27\Rightarrow u=3\Rightarrow v=-1.$$

Vì phương trình $x^3+9x-26=0$ có nghiệm $x=3-1=2$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $y=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $y^3+5y^2+\frac{7}{3}y-\frac{11}{9}=0$.

Lời giải. Đặt $y=x-\frac{5}{3}$, ta có $\left(x-\frac{5}{3}\right)^3+5\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{7}{3}\left(x-\frac{5}{3}\right)-\frac{11}{9}=0 \Leftrightarrow x^3-6x+4=0$

$\Delta=b^2+\frac{4a^3}{27}=4^2+\frac{4.(-6)^3}{27}=-16<0, k^2=\frac{-4a}{3}=8 \Rightarrow k=2\sqrt{2}$

Suy ra $\cos G=\frac{3b}{ak}=\frac{3.4}{-6.2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G=135°$. Do đó :

$$x_1=2\sqrt{2}.\cos.\frac{135°}{3}=2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=2,$$

$$x_2=2\sqrt{2}.\cos.\frac{135°+360°}{3}=2\sqrt{2}\cos165°=-2\sqrt{2}\cos15°=-\left(\sqrt{3}-1\right),$$

$$x_3=2\sqrt{2}.\cos\frac{135°+720°}{3}=2\sqrt{2}.\cos285°=2\sqrt{2}.\cos75°=\sqrt{3}-1.$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm là

$$y_1=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3},\ y_2=-\left(\sqrt{3}+1\right)-\frac{5}{3}=\frac{-3\sqrt{3}-8}{3} \text{ và } y_3=\sqrt{3}-1-\frac{5}{3}=\frac{3\sqrt{3}-8}{3}.$$

2.3 Định lí Viète của phương trình bậc ba

Nếu phương trình bậc ba $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0\,(A\neq 0)$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thì

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\frac{-B}{A} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{C}{A} \\ x_1x_2x_3=\frac{-D}{A} \end{cases}.$$

Bài tập áp dụng. Giả sử phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm x_1,x_2,x_3. Hãy tìm mối liên hệ giữa a,b,c khi $x_1x_3=x_2^2$.

Lời giải. Theo định lí Viét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a\,(6) \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b\,(7) \\ x_1x_2x_3=-c\,(8) \end{cases}$. Giả sử $x_1x_3=x_2^2$. Có 2 khả năng xảy ra

* $x_2=0 \Rightarrow x_1=0$ hoặc $x_3=0 \Rightarrow b=c=0$

* $x_2\neq 0$. Lúc này ta có thể viết hệ thức đã cho là $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=t$. Từ đó có thể tính được x_1,x_3 theo t và x_2: $x_1=tx_2$ và $x_3=\frac{x_2}{t}$. Thay vào (6), (7) và (8), ta thu được

$$\left(t+\frac{1}{t}+1\right)x_2=-a, \left(t+\frac{1}{t}+1\right)x_2^2=b, x_2^3=-c.$$

Chú ý rằng $t+\frac{1}{t}+1\neq 0$, ta suy ra hệ thức $x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_2^3=\left(\frac{-b}{a}\right)^3=-c \Rightarrow b^3=a^3c$.

Hệ thức này vẫn đúng khi $b=c=0$. Vậy $b^3=a^3c$ là hệ thức cần tìm.

3. Phương trình bậc 4

Phương trình bậc bốn là phương trình có dạng

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0,$$

trong đó x là ẩn số còn A,B,C,D,E là các hệ số với $a\neq 0$.

Trước hết ta hãy xét một số dạng phương trình bậc bốn mà qua phép biến đổi hoặc đặt ẩn phụ ta có thể quy về việc giải một phương trình bậc hai

3.1 Phương trình trùng phương

Phương trình có dạng $ax^4+bx^2+c=0$. Đặt $y=x^2\geq 0$ ta đưa về việc giải $\begin{cases}ay^2+by+c=0\\ y\geq 0\end{cases}$.

3.2 Phương trình dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c$.

Có thể đưa về phương trình trùng phương nhờ phép đặt ẩn phụ $y=x+\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow x=y-\dfrac{a+b}{2}$.

Khi đó $(x+a)^4+(x+b)^4=\left(y-\dfrac{a+b}{2}+a\right)^4+\left(y+\dfrac{a-b}{2}+b\right)^4=\left(y+\dfrac{a-b}{2}\right)^4+\left(y+\dfrac{b-a}{2}\right)^4$

Đặt $k=\dfrac{a-b}{2}$. Ta có $(y+k)^4+(y-k)^4=2y^4+12y^2k^2+2k^4=c$.

Vậy ta có phương trình trùng phương $2y^4+12y^2k^2+2k^4-c=0$ với $k=\dfrac{a-b}{2}$

Ví dụ. Giải phương trình $(x-1)^4+(x+3)^4=256(1)$

Lời giải. Đặt $y=x+1$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow(y-2)^4+(y+2)^4=256\Leftrightarrow 2y^4+48y^2-112=0$$

Đặt $t=y^2\geq 0$, ta được $2t^2+48t^2-224=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-28\end{array}\right.$.

Vì $t\geq 0$ nên $t=4\Rightarrow y=\pm 2\Rightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

***Chú ý.** Nếu cần kiểm tra phương trình bậc bốn dạng tổng quát $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $(a\neq 0)$ có trùng phương hay không ,ta chỉ cần đặt ẩn phụ $t=x+\dfrac{b}{4a}$.

Nếu sau khi thay vào phương trình đã cho ta không được phương trình trùng phương theo biến t thì phương trình đã cho không thuộc thuộc dạng trùng phương.

3.3 Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ với $a+b=c+d$.

Viết phương trình đã cho dưới dạng $\left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=m$

Đặt $t=x^2+(a+b)x+ab$ đưa về phương trình bậc hai theo t.

Ví dụ. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3\ (1)$

Lời giải. Nhận xét $1+4=2+3$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=3$$

Đặt $t=x^2+5x+4$. Ta có $(1)\Leftrightarrow t(t+2)=3\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=1\vee t=-3$

Khi $t=1\Rightarrow x^2+5x+4=1\Leftrightarrow x^2+5x+3-0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Khi $t=-3\Leftrightarrow x^2+5x+4=-3\Leftrightarrow x^2+5x+7=0$ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2},x_2=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$

Chú ý. Phương trình trên mở rộng thành

$$\left(a_1x+a_2\right)\left(b_1x+b_2\right)\left(c_1x+c_2\right)\left(d_1x+d_2\right)=m,$$

với điều kiện $a_1b_1=c_1d_1$ và $a_1b_2+a_2b_1=c_1d_2+c_2d_1$. Khi đó ta đặt $t=\left(a_1x+a_2\right)\left(b_1x+b_2\right)$

Ví dụ. Giải phương trình $\left(2x-1\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left(2x+3\right)=-9$

Lời giải. Phương trình viết lại dưới dạng $\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2-3x-9\right)=-9$.

Đặt $t=2x^2-3x+1$. Ta có phương trình $t\left(t-10\right)=-9\Leftrightarrow t^2-10t+9=0\Leftrightarrow t=1\vee t=9$.

Với $t=1\Rightarrow 2x^2-3x+1=1\Leftrightarrow 2x^2-3x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\dfrac{3}{2}$.

Với $t=9\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=9\Leftrightarrow 2x^2-3x-8=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{73}}{4}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x_1=0, x_2=\dfrac{3}{2}, x_3=\dfrac{3+\sqrt{73}}{4}, x_4=\dfrac{3-\sqrt{73}}{4}$.

3.4 Phương trình đối xứng bậc bốn (Phương trình hồi quy)

Phương trình đối xứng bậc bốn là phương trình có dạng $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\quad(a\neq 0)$

Cách giải.

Bước 1. Kiểm tra $x=0$ có là nghiệm của phương trình hay không?

Bước 2. Tìm nghiệm $x\neq 0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0\Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0\quad(2)$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Khi đó phương trình (2) trở thành

$$a(t^2-2)+bt+c=0\Leftrightarrow at^2+bt+c=0$$

Với cách đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$|t|=\left|x+\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{x^2+1}{x}\right|=\frac{x^2+1}{|x|}=|x|+\frac{1}{|x|}\geq 2.$$

Như vậy từ phương trình đối xứng bậc 4 ta chuyển về phương trình bậc 2 theo biến t với $|t|\geq 2$.

Ví dụ. Giải phương trình $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$.

Lời giải. Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế cho x^2, ta được

$$x^2+2x+1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2.\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}+x$, ta có $t^2-2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{2}$.

Vì $|t|\geq 2$ nên $t=-1+\sqrt{2}$. Suy ra

$$x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+x\left(1+\sqrt{2}\right)+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Chú ý. Đối với phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng lệch (phương trình phản hồi quy), dạng $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0\left(a\neq 0\right)$ thì ta vẫn có cách tương tự và đưa phương trình đã cho về dạng $at^2+bt+c+2a=0$.

3.5 Phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng tỉ lệ (phương trình phản hồi)

Phương trình phản hồi là phương trình có dạng $ax^4+bx^3+cx^2+bkx+ak^2=0(a\neq 0,k\neq 0)$.

Cách giải. Tương tự như cách giải các phương trình trên hồi quy và phản hồi quy, bằng cách chia hai vế cho x^2 (nếu $x=0$ không là nghiệm), và đặt ẩn phụ $t=\dfrac{k}{x}+x$, ta được phương trình

$$at^2+bt+c-2ak=0.$$

Ví dụ. Giải phương trình $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$.

Lời giải. Ta có $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế của phương trình cho x^2.

$$2x^2-21x+34+\frac{105}{x}+\frac{50}{x^2}=0\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x-\frac{5}{x}\right)+34=0$$

Đặt $x-\dfrac{5}{x}=t\Rightarrow x^2+\dfrac{25}{x^2}=t^2+10$, ta được $2\left(t^2+10\right)-21t+34=0\Leftrightarrow t=6\vee t=9/2$.

* Trường hợp 1. $t=6\Rightarrow x-\dfrac{5}{x}=6$, ta có $x^2-6x-5=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{14}$.

* Trường hợp 2. $t=\dfrac{9}{2}\Rightarrow x-\dfrac{5}{x}=\dfrac{9}{2}$, ta có $2x^2-9x-10=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{161}}{4}$.

3.6 Cách giải tổng quát phương trình bậc 4

Không mất tính tổng quát (bằng cách chia hai vế của phương trình cho hệ số của x^4) ta đưa phương trình về dạng

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\Leftrightarrow x^4+ax^3=-bx^2-cx-d$$

Thêm $\dfrac{a^2x^2}{4}$ vào cả hai vế, ta được $\left(x^2+\dfrac{ax}{2}\right)^2=x^2.\left(\dfrac{a^2}{4}-b\right)-cx-d$.

Cộng vào hai vế của phương trình này cho tam thức $\left(x^2+\dfrac{ax}{2}\right)y+\dfrac{y^2}{4}$ với y là hằng số

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b-y\right).x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right)(1)$$

Chọn y sao cho tam thức bậc hai ở vế phải có nghiệm kép, hay

$$\Delta=\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{ay^2}{4}-d\right)=0\Leftrightarrow y^3-by^2+(ac-4d)y-d\left(c^2-4b\right)-c^2=0(2)$$

Đây là một phương trình bậc ba và ta đã biết cách giải. Đặt

$$\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right).x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=(Ax+B)^2$$

Giả sử y_0 là một nghiệm của phương trình (2). Khi đó thay y_0 vào ta được phương trình (1) có dạng

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=(Ax+B)^2\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}+Ax+B\right).\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}-Ax-B\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}+Ax+B=0\vee x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}-Ax-B=0.$$

Như vậy việc giải phương trình bậc bốn qui về việc giải hai phương trình bậc hai và một phương trình bậc ba.

Ví dụ. Giải phương trình $x^4+8x^3+15x^2-4x-2=0$.

Lời giải. Ta có

$$x^4+8x^3+15x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow x^4+8x^3=4x+2-15x^2 \Leftrightarrow \left(x^2+4x\right)^2=x^2+4x+2.$$

Cộng hai vế của phương trình trên cho $\left(x^2+4x\right)y+\dfrac{y^2}{4}$, ta được

$$\left(x^2+4x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(1+y\right)x^2+\left(4+4y\right)x+\left(\frac{y^2}{4}+2\right)(3).$$

Lưu ý chọn y sao cho vế phải là một bình phương, muốn vậy, biệt số Δ của tam thức bậc hai đối với x phải bằng 0,

$$\Delta=\left(4+4y\right)^2-4\left(1+y\right)\left(\frac{y^2}{4}+2\right)=0 \Leftrightarrow \left(1+y\right)\left[16.\left(1+y\right)-\left(y^2+8\right)\right]=0.$$

Ta có ngay giá trị $y=-1$. Thay vào (3) phương trình trở thành

$$\left(x^2+4x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \\ x^2+4x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\pm\sqrt{3} \\ x=-2\pm\sqrt{6} \end{array}\right..$$

3.7 Định lí Viète cho phương trình bậc 4

Nếu phương trình bậc bốn $ax^4+bx^3+cx^2+d+e=0$ $\left(a\neq 0\right)$ có bốn nghiệm thì

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4=-\dfrac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4=\dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Ví dụ. Cho phương trình $x^4-8x^3+19x^2+ax+2=0$. Biết rằng phương trình có bốn nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 thoả mãn điều kiện $x_1+x_2=x_3+x_4$. Hãy tìm a và giải phương trình đã cho.

Lời giải. Theo định lí Viète, ta có $x_1+x_2+x_3+x_4=8 \Rightarrow x_1+x_2=x_3+x_4=4$.

Mặt khác $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4=x_1.x_2+x_3.x_4+x_1.\left(x_3+x_4\right)+x_2\left(x_3+x_4\right)$

$$=x_1.x_2+x_3.x_4+\left(x_1+x_2\right)\left(x_3+x_4\right)=19.$$

Do đó $x_1.x_2+x_3.x_4=3$.

Ta lại có $x_1.x_2.x_3.x_4=2$, suy ra $x_1x_2=1, x_3x_4=2$ hoặc $x_1x_2=2, x_3x_4=1$

Nếu $x_1.x_2=1$ thì $x_3.x_4=2$. Khi đó $x_1.x_2x_3+x_1.x_2x_4+x_1.x_3x_4+x_2.x_3x_4=x_3+x_4+2\left(x_1+x_2\right)=12$.

Vậy $a=-12$. Vì $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1.x_2=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3+x_4=4 \\ x_3.x_4=2 \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} x_{1,2}=2\pm\sqrt{3} \\ x_{3,4}=2\pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Trường hợp $x_3x_4=1$ cũng làm tương tự nhưng hoán đổi vai trò của x_1,x_2 với x_3,x_4.

4. Phương trình đối xứng bậc n

Phương trình đối xứng bậc n là phương trình có dạng

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

Trong đó dãy các hệ số là đối xứng, nghĩa là $a_0=a_n\neq 0$, $a_1=a_{n-1}\dots$

Cách giải

- Đối với phương trình đối xứng bậc chẵn, giả sử bậc của phương trình là $n=2m$. Do $x=0$ không thể là nghiệm nên ta có thể chia cả hai vế của phương trình cho x^m. Sau đó bằng cách nhóm thích hợp, vế trái của phương trình có thể đưa về dạng $x^k+\frac{1}{x^k}$. Chúng đều là các biểu thức đối xứng với x và $\frac{1}{x}$. Do đó, nếu ta biết đặt $t=x+\frac{1}{x}$ thì sẽ đưa đến phương trình bậc k đối với t.

- Đối với phương trình đối xứng bậc lẻ, ta dễ dàng thử lại rằng phương trình luôn nhận $x=-1$ là 1 nghiệm. Do vậy, với giả thiết $x+1\neq 0$ sao cho khi chia hai vế cho $x+1$, ta sẽ được 1 phương trình đối xứng bậc chẵn.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0$.

Lời giải. Chia cả hai vế cho x^3, ta được

$$x^3-3x^2+6x-7+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0\Leftrightarrow\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$, ta có $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$; $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Bởi vậy ta được phương trình

$$t^3-3t^2+3t-1=0\Leftrightarrow(t-1)^3=0\Leftrightarrow t=1.$$

Từ đó phương trình ban đầu tương đương với phương trình $x+\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$.

Dễ thấy phương trình trên vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2x^7-5x^6-x^5-8x^4-8x^3-5x+2=0$ (Xem như bài tập)

Một số bài tập tham khảo

Bài 1. Giải các phương trình

a) $x^3-3x^2+x+1=0$ b) $x^3-5x^2+x+7=0$ c) $x^3+2x-5\sqrt{3}=0$

d) $x^3-x-\sqrt{2}=0$ e) $x^3-3x^2+9x-9=0$ f) $x^3-x^2-x=\frac{1}{3}$

g) $x^3=6x^2+1$ h) $8x^3-2x^2-x+1=0$

Bài 2. Cho phương trình $x^3-x+1=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3. Tính $S=x_1^8+x_2^8+x_3^8$.

Bài 3. Biết rằng phương trình $x^3+px+q=0$ có ba nghiệm. Chứng minh $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$.

Bài 4. Giải và biện luận phương trình (a,b là tham số) $x^3-3abx+a^3+b^3=0$.

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $2x^4+5x^3+x^2+5x+2=0$ c) $x^4+(x-1)(x^2-2x+2)=0$

b) $x^4-2x^3+8x^2-2x+1=0$ d) $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0$

Bài 6. Cho phương trình $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm thỏa điều kiện $x_1+x_2=0$.

5. Phương trình bậc lớn hơn 4 và một số tính chất

5.1 Xét phương trình bậc năm dạng $x^5 + ax + b = 0$, $a,b \in \mathbb{Z}$.

Định lý 1. Nếu $a \equiv b \equiv 1 (\bmod 2)$ thì phương trình không giải được bằng căn thức

Định lý 2. Nếu a là số nguyên tố, $a \not\equiv 1 (\bmod 5)$ và $(a,b) = 1$ thì phương trình (1) không giải được bằng căn thức.

Ta thừa nhận các tính chất trên. Tổng quát hơn ta có định lý sau (và cũng được thừa nhận)

5.2 Định lý. Xét phương trình $f(x) = 0$, trong đó $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 5. Nếu f là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ và có đúng 2 nghiệm phức trong $\mathbb{C}$ thì phương trình $f(x) = 0$ không giải được bằng căn thức.

Để minh họa cho định lý trên, ta xét ví dụ sau. "Phương trình $f(x) = x^5 - 6x + 3 = 0$ không giải được bằng căn thức".

Thật vậy, theo tiêu chuẩn Eisenstein, đa thức $f(x) = x^5 - 6x + 3$ là đa thức bất khả trên $\mathbb{Q}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh phương trình có đúng 2 nghiệm phức hay chứng minh phương trình có đúng 3 nghiệm thực.

Để chứng minh điều này ta cần sử dụng một kết quả rất quan trọng trong giải tích, thường được gọi là **định lý Rolle**

"Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$".

Với $f(x) = x^5 - 6x + 3$, ta có $f'(x) = 5x^4 - 6$. Dễ thấy rằng f' có hai nghiệm là $\pm\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$. Sử dụng định lý Rolle, ta nhận thấy f chỉ có thể có tối đa 3 nghiệm thực.

Mặt khác, ta lại có $f(-2) = -17, f(-1) = 8, f(1) = -2, f(2) = 23$, và f là hàm liên tục nên chỉ có thể đổi dấu mỗi khi đồ thị của nó cắt trục hoành, nên f có ít nhất 3 nghiệm thực.

Vậy f có đúng 3 nghiệm thực. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập. Chứng minh rằng các phương trình sau đây không giải được bằng căn thức

a) $x^5 - 4x + 2 = 0$ b) $x^5 - 4x^2 + 2 = 0$ c) $x^5 - 6x^2 + 3 = 0$ d) $x^7 - 10x^5 + 15x + 5 = 0$

Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Hữu Bình, "Nâng cao và phát triển toán 9 (tập 2)", NXBGD, 2007.

[2] Đặng Hùng Thắng, "Phương trình bất phương trình và hệ phương trình", NXBGD, 1999.

[3] Nguyễn Trường Chấng, "Phương trình bậc 3, bậc 4, bậc n".

[4] Nguyễn Văn Mậu, "Phương pháp giải phương trình, bất phương trình", NXBGD, 1996.

[5] Hoàng Kỳ, Nguyễn Văn Bàng, Nguyễn Đức Thuận, "Đại số sơ cấp (Tập 2)", NXBGD, 1979.

[6] Bùi Xuân Hải, "Lý thuyết trường và Galois" (Lưu hành nội bộ), 2005.

[7] Blair K. Spearman, Kenneth S. Williams. "Conditions for the Insolvability of the quintic equation $x^5 + ax + b = 0$".