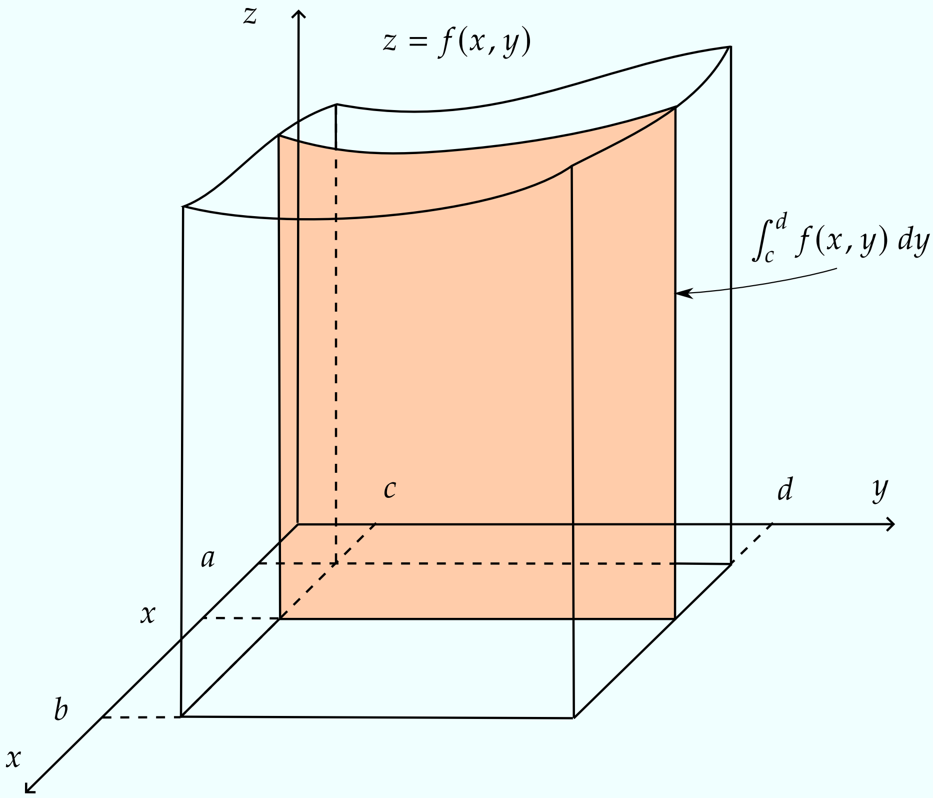
TÍCH PHÂN BỘI và GIẢI TÍCH VECTƠ

Bài giảng



$\iint$

Huỳnh Quang Vũ

Bài giảng Tích phân bội và Giải tích vectơ

Huỳnh Quang Vũ

Bản ngày 27 tháng 9 năm 2024

Đây là bài giảng cho môn Giải tích 3A về tích phân Riemann của hàm nhiều biến và Giải tích vectơ, môn học dành cho sinh viên các ngành toán ở Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. Bài giảng này được biên soạn và cập nhật từ năm 2008.

Huỳnh Quang Vũ

Địa chỉ: Khoa Toán - Tin học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

email: hqvu@hcmus.edu.vn

web: https://sites.google.com/view/hqvu/

Bản mới nhất của tài liệu này, cùng mã nguồn, có ở
https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.

Mục lục

Giới thiệu 1

I Tích phân bội **3**

1 Tích phân trên hình hộp 6
2 Các hàm khả tích 21
3 Tích phân trên tập tổng quát 28
4 Công thức Fubini 39
5 Công thức đổi biến 59
6 Ứng dụng của tích phân bội 83
7 * Các đề tài bổ sung về tích phân bội 96

II Giải tích vectơ **113**

8 Tích phân đường 116
9 Công thức Newton–Leibniz 131
10 Công thức Green 138
11 Tích phân mặt 154
12 Công thức Stokes 171
13 Công thức Gauss–Ostrogradsky 178
14 Vài ứng dụng của giải tích vectơ 186
15 * Các đề tài bổ sung về Giải tích vectơ 190

Gợi ý cho một số bài tập **201**

Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính **205**

Tài liệu tham khảo **206**

Chỉ mục **210**

Giới thiệu

Môn học Giải tích 3A gồm nội dung về Tích phân bội (tích phân Riemann của hàm nhiều biến) và Giải tích vectơ (phép tính vi tích phân trên đường và mặt trong không gian Euclid hai và ba chiều). Môn này tiếp nối các môn học Vi tích phân 1A và Vi tích phân 2A, là kiến thức căn bản cho trình độ đại học các ngành khoa học kĩ thuật. Là môn đại cương cho các ngành Toán học, Toán tin, Toán ứng dụng, môn học yêu cầu tính chặt chẽ, chính xác, tổng quát cao hơn so với môn tương ứng cho các ngành khác.

Môn học cung cấp cơ sở cho các khảo sát dùng tích phân (trong các môn như Xác suất, Giải tích hàm), cho các khảo sát bằng mô hình toán học dùng công cụ Vi tích phân (trong Cơ học, Thống kê, Phương trình toán lý, Phương trình đạo hàm riêng, Tính toán khoa học, Máy học, ...), cho các phát triển toán học (trong Giải tích, Hình học, …) và Vật lý.

Trình độ môn học ở mức tối thiểu là trình độ dành cho sinh viên khoa học kĩ thuật tương đồng quốc tế như trong [Ste16], [BMGT]. Ở mức trung bình hướng tới phù hợp hơn với ngành toán, có yêu cầu cao hơn về tính chính xác và hàm lượng lý thuyết. Đối với sinh viên khá giỏi hướng tới trình độ tiếp cận các phần tương ứng trong các giáo trình Giải tích như [Rud76], [Lan97].

Cụ thể trong các chuẩn đầu ra của môn học có các yêu cầu tóm tắt sau:

- Trình bày và sử dụng được các khái niệm và tính chất chính.
- Vận dụng thuần thục các công cụ để tính toán.
- Vận dụng giải một số bài toán ứng dụng.
- Làm được lý luận và biến đổi đơn giản trên kí hiệu.
- Thực hành sử dụng máy tính để làm các tính toán và minh họa.

Phần lớn các ví dụ và bài tập của môn này tương đối đơn giản. Mỗi ví dụ người học nên thử tự làm, khi gặp khó khăn thì có thể tham khảo tài liệu một chút, rồi lại tiếp tục tự làm.

Trong tài liệu này, dấu ✓ ở một bài tập là để lưu ý người đọc đây là một bài tập đặc biệt có ích hoặc quan trọng, nên làm.

Cuối tài liệu này có phần gợi ý cho một số bài tập.

Những phần có đánh dấu * là tương đối khó hơn, không bắt buộc. Tài liệu này hướng tới còn được đọc lại, tra cứu và tham khảo sau khi môn học kết thúc, khi đó những phần * này có thể thể hiện rõ hơn ý nghĩa.

Phần I Tích phân bội

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu tích phân Riemann trong không gian nhiều chiều. Một phần của lý thuyết tích phân cho ta một lý thuyết về diện tích và thể tích.

Ý niệm chiều dài, diện tích, thể tích để đo kích thước của vật đã có từ hàng nghìn năm trước. Trong chương trình toán phổ thông [SGKPT] chiều dài xuất hiện từ lớp 1, diện tích từ lớp 3, và thể tích từ lớp 5. Các khái niệm này, mà ta gọi chung là thể tích, trong Hình học Euclid [Euclid] không được định nghĩa mà được giả định là tồn tại thỏa những tính chất được tổng kết từ nhu cầu đo lường trong cuộc sống:

(a) thể tích của một hình là một số thực không âm,

(b) thể tích của hội của hai hình rời nhau thì bằng tổng thể tích của hai hình ("tính cộng"),

(c) thể tích không thay đổi qua một phép dời hình.

Với sự xuất hiện của tích phân, như ta đã thấy trong chương trình toán phổ thông trung học và trong môn Vi tích phân 1, có mối quan hệ giữa tích phân và diện tích.

Trong môn học này chúng ta xây dựng khái niệm thể tích một cách chặt chẽ theo quan niệm đương đại, từ đó thu được một cách chặt chẽ một số tính chất và công thức tính toán hiệu quả. Công cụ của chúng ta không phải là Hình học Euclid, mà là Hình học Giải tích, cùng với tích phân Riemann.

Phát triển của chúng ta vẫn nhắm tới sự tương thích và chứa các trường hợp số chiều một, hai, ba mà ta đã học ở trung học phổ thông, người học nếu gặp khó khăn với trường hợp tổng quát thì trước tiên có thể chỉ xét các trường hợp số chiều thấp này.

Trong môn học này khi nói đến không gian $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, thì ta dùng cấu trúc tuyến tính, chuẩn, khoảng cách, và tích trong Euclid, cụ thể nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì chuẩn (tức chiều dài) của x là

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

kí hiệu $|x|$ cũng thường được dùng đặc biệt ở số chiều $n = 1, 2, 3$. Khoảng cách giữa x và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ là

$$\|x - y\| = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right)^{1/2}.$$

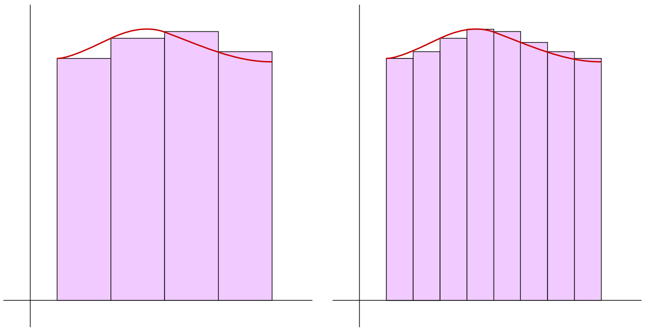
Tích trong giữa x với y là

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Ta dùng thuật ngữ khoảng số thực có thể gồm hoặc không gồm đầu mút, do đó có thể đóng hoặc mở hoặc không đóng cũng không mở.

1 Tích phân trên hình hộp

Tích phân trên không gian nhiều chiều là sự phát triển tương tự của tích phân một chiều. Do đó các ý chính đã quen thuộc và không khó, người đọc hãy xem lại và đối chiếu với phần tích phân một chiều trong môn Vi tích phân 1 trong các tài liệu như [Duc06] [BMGT] để dễ theo dõi hơn.

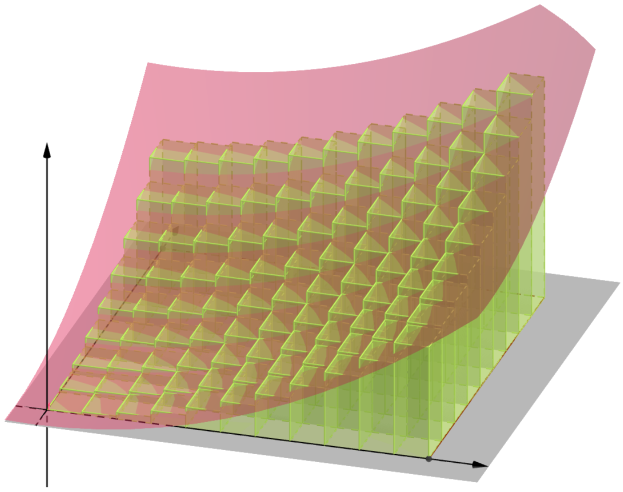


Hình 1.1: Xấp xỉ diện tích tập bên dưới đồ thị bởi diện tích các hình chữ nhật.

Trước hết ta xét cách tiếp cận quen thuộc hơn bằng hình học. Cho I là một hình hộp, và cho hàm $f : I \to \mathbb{R}$. Giả sử hàm f có giá trị không âm. Ta muốn tìm "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của hàm f bên trên hình hộp I. Ta chia nhỏ hình hộp I bằng những hình hộp con. Ta chờ đợi rằng trên mỗi hình hộp con nhỏ hơn đó đồ thị của hàm f thay đổi ít hơn nhờ đó ta có thể xấp xỉ thể tích của khối bằng thể tích của một hình hộp với đáy là hình hộp con và chiều cao là chiều cao tại một điểm nhất định trên đồ thị bên trên hình hộp con đó. Ta xấp xỉ thể tích của khối bằng tổng thể tích của những hình hộp, xem Hình 1.1 và Hình 1.2. Ta hy vọng rằng nếu ta chia càng mịn thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn khi số hình hộp tăng ra vô hạn thì ta được giá trị đúng của thể tích.

Ví dụ. Ở Hình 1.2, ta xét tình huống lượng nước mưa rơi trên một vùng đất hình chữ nhật I. Tổng lượng nước mưa rơi trên I được xấp xỉ bằng cách chia I thành những ô chữ nhật nhỏ, trong mỗi ô nhỏ lấy một điểm đại diện để đo lượng nước mưa rơi tại điểm đó, rồi nhân với diện tích của ô chữ nhật nhỏ để thu được xấp xỉ lượng nước mưa rơi trên ô chữ nhật nhỏ đó, rồi cộng trên tất cả các ô chữ nhật nhỏ. ■

Ví dụ trên là một tình huống mà ta muốn tính "tổng giá trị" của hàm f trên hình hộp I. Ta chia nhỏ hình hộp I bằng những hình hộp con. Ta chờ đợi rằng trên mỗi hình hộp con nhỏ hơn đó giá trị của hàm f thay đổi ít hơn nhờ đó ta có thể xấp xỉ các giá trị f bằng giá trị của f tại một điểm nhất định trong hình hộp con đó, và tổng giá trị của hàm được xấp xỉ bởi hằng số đó nhân với thể tích của hình hộp con. Ta xấp xỉ tổng giá trị của f bằng tổng các giá trị xấp xỉ trên tất cả các hình hộp con. Ta hy vọng rằng nếu ta chia càng mịn thì xấp



Hình 1.2: Trường hợp nhiều chiều: Xấp xỉ thể tích khối bên dưới đồ thị bởi thể tích các hình hộp.

xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn khi số hình hộp tăng ra vô hạn thì ta được giá trị đúng của tổng giá trị của f.

Dưới đây ta bắt đầu làm chính xác hóa các ý tưởng này.

Hình hộp và thể tích của hình hộp

Ta định nghĩa một **hình hộp n-chiều** trong $\mathbb{R}^n$ là một tập con của $\mathbb{R}^n$ có dạng $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ với $a_i < b_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$, tức là tích của n đoạn thẳng. Ví dụ một hình hộp 1-chiều là một đoạn thẳng trong $\mathbb{R}$.

Ví dụ. Để khởi đầu về thể tích của hình hộp, chúng ta hãy xét trường hợp một chiều. Chiều dài của đoạn thẳng $[a, b]$, như ta đã quen biết, được cho bằng số thực $b - a$. Ta thử giải thích vì sao như vậy.

Trước hết chiều dài của một đoạn thẳng $[a, b]$, kí hiệu là $|[a, b]|$, là một số thực không âm.

Nếu $a = b$ thì đoạn $[a, b]$ chỉ gồm đúng một điểm. Nếu chiều dài một điểm mà là một số dương thì chiều dài của một đoạn như $[0, 1]$ gồm vô hạn điểm không thể là một số thực nào, do tính cộng, vì thế chiều dài của một điểm cần phải bằng số 0.

Ta muốn khi dời đoạn thẳng thì chiều dài không đổi, do đó nếu ta tịnh tiến đoạn thẳng thì chiều dài không đổi, nên cần có $|[a, b]| = |[0 + a, (b - a) + a]| = |[0, b - a]|$. Như vậy ta chỉ cần xét chiều dài của một đoạn thẳng $[0, a]$, $a > 0$. Ta lần lượt xét a là số nguyên, số hữu tỉ, số thực.

Nếu $a = m$ là số nguyên dương, thì vì đoạn thẳng $[0, m]$ gồm n đoạn thẳng $[0, 1]$ được tịnh tiến, cụ thể là $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \ldots, [m - 1, m]$, và vì chiều dài của một điểm bằng 0, nên tính cộng của chiều dài dẫn tới $|[0, m]| = m|[0, 1]|$.

Nếu $a = \frac{m}{n}$ với m và n là số nguyên dương, thì vì đoạn thẳng $[0, m]$ gồm n đoạn thẳng $[0, \frac{m}{n}]$ được tịnh tiến, nên $\|[0, m]\| = n\|[0, \frac{m}{n}]\|$, hay $\|[0, \frac{m}{n}]\| = \frac{1}{n}\|[0, m]\| = \frac{m}{n}\|[0, 1]\|$.

Với a là số vô tỉ dương, thì gần a tùy ý có các số hữu tỉ dương b và c sao cho $b < a < c$, dẫn tới

$$\|[0, b]\| = b\|[0, 1]\| \leq \|[0, a]\| \leq \|[0, c]\| = c\|[0, 1]\|$$

hay

$$b \leq \frac{\|[0, a]\|}{\|[0, 1]\|} \leq c$$

dẫn tới bắt buộc $\frac{\|[0,a]\|}{\|[0,1]\|} = a$, tức $\|[0, a]\| = a\|[0, 1]\|$.

Vậy với hai số thực $a < b$ bất kì ta phải có $\|[a, b]\| = \|[0, b-a]\| = (b-a)\|[0, 1]\|$, tức là chiều dài đoạn $[a, b]$ bắt buộc phải bằng $(b - a)$ nhân với chiều dài đoạn $[0, 1]$. Để chuẩn hóa ta thường lấy $\|[0, 1]\| = 1$, và như thế $\|[a, b]\| = (b - a)$.

Giải thích trên chỉ ra nguồn gốc vấn đề là chiều dài cần có những tính chất như tính cộng và tính không thay đổi dưới phép dời hình. Các tính chất đó dẫn tới chiều dài phải được định nghĩa theo một cách duy nhất sai khác một cách chọn chiều dài đơn vị, giống như việc chọn đơn vị đo trong vật lý.

Ta có thể giải thích công thức thể tích của hình hộp ở số chiều bất kì một cách tương tự. ∎

Phù hợp với phân tích trên, ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. **Thể tích** [1] *n-chiều của hình hộp $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ được định nghĩa là số thực $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$.*

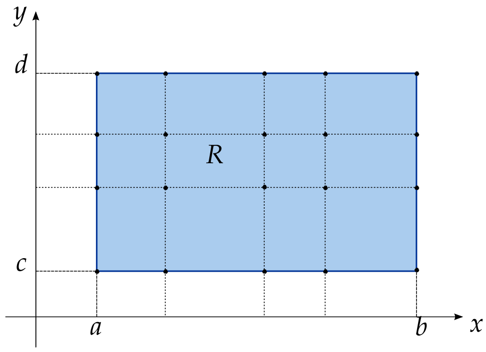
Ta thường dùng kí hiệu $|I|$ để chỉ thể tích của I. Khi số chiều $n = 1$ ta thường thay từ thể tích bằng từ **chiều dài** [2]*, khi $n = 2$ ta thường dùng từ* **diện tích**[3].

Chia nhỏ hình hộp

Một **phép chia** hay một **phân hoạch** [4] của một khoảng $[a, b]$ là một tập con hữu hạn của khoảng $[a, b]$ mà chứa cả a và b. Ta có thể đặt tên các phần tử của một phép chia là $x_0, x_1, \ldots, x_m$ với $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$. Mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ là một **khoảng con** của khoảng $[a, b]$ tương ứng với phép chia.

Một phép chia của hình hộp $I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ là một tích Descartes của các phép chia của các khoảng $[a_i, b_i]$. Cụ thể nếu mỗi P_i là một phép chia của khoảng $[a_i, b_i]$ thì $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ là một phép chia của hình hộp I. Xem ví dụ ở Hình 1.3.

[1] volume
[2] length
[3] area
[4] partition



Hình 1.3: Một phép chia của hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ gồm những điểm mà các tọa độ thứ nhất tạo thành một phép chia của $[a,b]$ và các tọa độ thứ hai tạo thành một phép chia của $[c,d]$.

Một **hình hộp con** ứng với một phép chia P của một hình hộp I là một tích các khoảng con của các cạnh của hình hộp I. Cụ thể một hình hộp con của hình hộp I có dạng $\prod_{i=1}^n T_i$ trong đó T_i là một khoảng con của khoảng $[a_i,b_i]$ ứng với phép chia P_i.

Kí hiệu $H(P)$ là tập hợp tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P.

Tích phân trên hình hộp

Cho I là một hình hộp, và $f: I \to \mathbb{R}$. Với một phép chia P của I, theo ý tưởng ở trên, ta thành lập **tổng Riemann** [5], là tổng trên tất cả hình hộp con R của phép chia P của giá trị của f tại một điểm đại diện (còn gọi là điểm lấy mẫu [6]) bất kì x_R trong R nhân với thể tích của R:

$$\sum_{R\in H(P)} f(x_R)|R|.$$

1.5 Ví dụ. Xét hàm $f(x,y) = x+2y$ trên hình chữ nhật $[0,4]\times[0,2]$. Chia đều hình chữ nhật này thành 4 phần bằng kích thước, cụ thể dùng các điểm chia với các tọa độ $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2$. Lấy điểm đại diện trên mỗi hình chữ nhật con là điểm giữa của hình chữ nhật con. Xem Hình 1.6.

Tổng Riemann tương ứng là

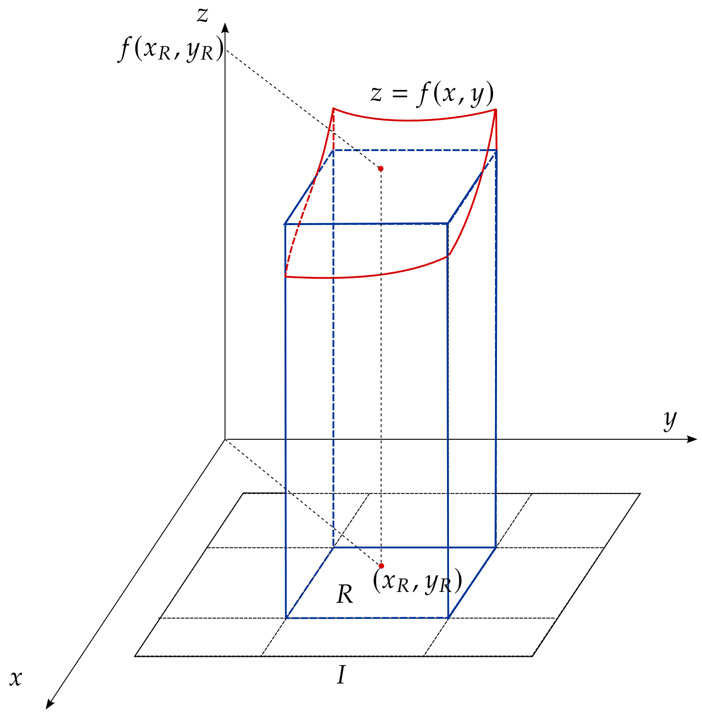
$$[f(1;0{,}5)+f(3;0{,}5)+f(1;1{,}5)+f(3;1{,}5)]\times 2\times 1 = [2+4+4+6]\times 2 = 32.$$

■

"Giới hạn" của tổng Riemann khi phép chia "mịn hơn" là tích phân của

[5] Bernhard Riemann đã đề xuất một định nghĩa chặt chẽ cho tích phân vào khoảng năm 1854.

[6] sample point



Hình 1.4: Tổng Riemann.

hàm f trên I. Ta có thể nói chính xác "giới hạn" này như sau: ***tích phân là số thực thỏa tổng Riemann gần tùy ý số này nếu kích thước của hình hộp con của phép chia đủ nhỏ***.

1.7 Định nghĩa. *Ta nói hàm số f là* **khả tích Riemann** *trên hình hộp I nếu có một số thực, gọi là* **tích phân Riemann** *của f trên I, kí hiệu là $\int_I f$, thỏa với mọi $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho, nếu chiều dài các cạnh của các hình hộp con của P đều nhỏ hơn δ, thì với mọi cách chọn điểm đại diện x_R thuộc các hình hộp con R của P ta có $\left|\sum_R f(x_R)|R| - \int_I f\right| < \epsilon$.*

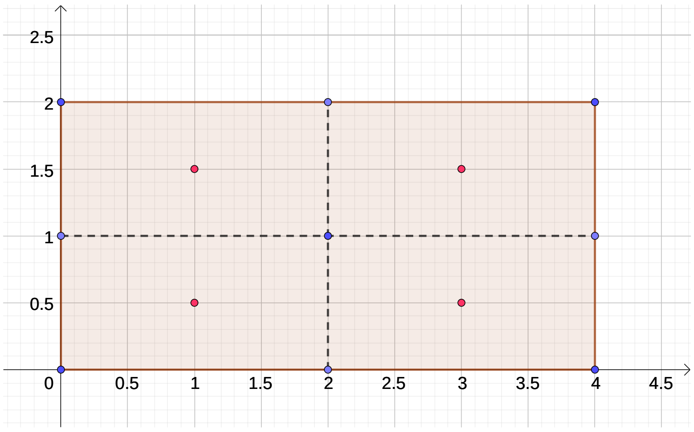
Ví dụ. Với kí hiệu c để chỉ là một hàm hằng có giá trị bằng hằng số c trên hình hộp I, thì các tổng Riemann với mọi phép chia đều bằng $c\,|I|$, nên hàm c khả tích trên I và tích phân của c trên I là

$$\int_I c = c\,|I|\,.$$

■

Nếu $f \geq 0$ thì tổng Riemann là một xấp xỉ của "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của f bên trên I, và $\int_I f$ đại diện cho "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của f bên trên I. Một ý nghĩa khác, tổng Riemann là một xấp xỉ của "tổng giá trị" của f trên I, và $\int_I f$ đại diện cho"tổng giá trị"của hàm f trên I [7]. Giống

[7] Kí hiệu $\int$ do Gottfried Leibniz đặt ra khi xây dựng phép tính vi tích phân vào thế kỉ 17, đại diện cho chữ cái "s" trong chữ Latin "summa" (tổng).



Hình 1.6: Chia đều hình chữ nhật $[0, 4] \times [0, 2]$ thành 4 phần bằng kích thước, và lấy điểm giữa của hình chữ nhật con làm điểm đại diện.

như tích phân của hàm một biến, ban đầu tích phân có ý nghĩa chính là thể tích, nhưng về sau ý nghĩa tổng của tích phân nổi bật hơn và tổng quát hơn, như có thể thấy ở phần sau của môn học này.

- Khi số chiều $n = 1$ ta có tích phân của hàm một biến quen thuộc từ trung học và đã được khảo sát trong môn Vi tích phân 1, với $\int_{[a,b]} f$ chính là $\int_a^b f(x)\, dx$. Như vậy ***ta thừa hưởng tất cả các kết quả về tích phân hàm một biến đã có trong Vi tích phân 1***, chẳng hạn như công thức Newton–Leibniz để tính tích phân.

- Khi $n = 2$ ta có **tích phân bội hai,** thường được viết là $\iint_I f(x, y)\, dA$ hay $\iint_I f(x, y)\, dxdy$.

- Khi $n = 3$ ta có **tích phân bội ba**, thường được viết là $\iiint_I f(x, y, z)\, dV$ hay $\iiint_I f(x, y, z)\, dxdydz$.

Trong môn này các kí hiệu dx, $dxdy$, $dxdydz$, dA, dV được dùng để chỉ loại tích phân, không có ý nghĩa độc lập.

Định nghĩa 1.7 phổ biến trong các tài liệu Vi tích phân, như [Fic77], [Ste16], [BMGT], trực tiếp, ngắn gọn. Định nghĩa này cho cách tính tích phân, chẳng hạn với phép chia đều và lấy các điểm đại diện là tâm của các hình hộp con thì giới hạn của tổng Riemann khi số hình hộp con tiến ra vô cùng đúng bằng tích phân. Định nghĩa này cũng cho cách tính gần đúng: chia các cạnh của hình hộp đủ nhỏ (chẳng hạn bằng cách chia đều với số hình hộp con đủ lớn) thì giá trị tổng Riemann sai khác giá trị tích phân một lượng nhỏ tùy ý.

Tổng dưới và tổng trên

Tiếp theo ta tìm hiểu một cách trình bày khác, có những ưu điểm, và cũng cho ra tích phân Riemann. Tổng dưới và tổng trên giúp ta hiểu rõ hơn tổng Riemann và là công cụ chính để xét tính khả tích.

Giả sử hàm f bị chặn.

Gọi

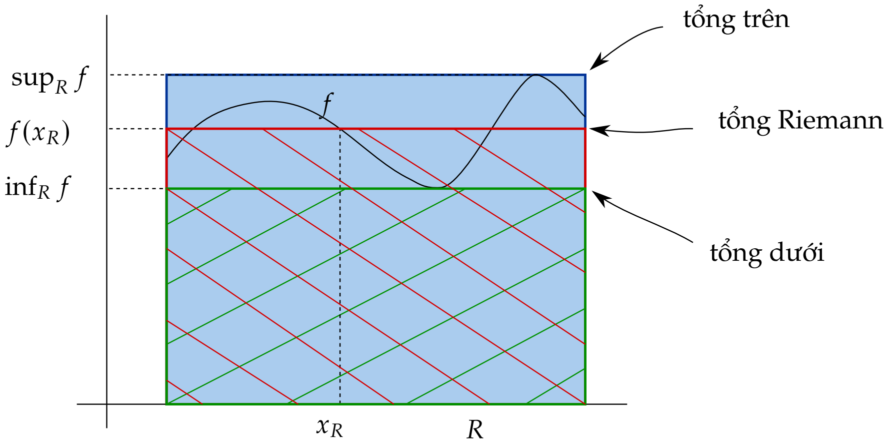
$$L(f,P) = \sum_{R \in H(P)} (\inf_R f)|R|$$

là **tổng dưới** ứng với P. Gọi

$$U(f,P) = \sum_{R \in H(P)} (\sup_R f)|R|$$

là **tổng trên** ứng với P.

Rõ ràng một tổng Riemann bất kì nằm giữa tổng dưới và tổng trên ứng với cùng phép chia. Xem Hình 1.8.



Hình 1.8: tổng dưới ≤ tổng Riemann ≤ tổng trên.

1.9 Ví dụ. Tiếp tục Ví dụ 1.5, với phép chia đều P đã lấy, vì hàm $f(x,y) = x+2y$ tăng theo x và tăng theo y, nên chặn dưới lớn nhất trên mỗi hình chữ nhật con xảy ra ở đỉnh dưới bên trái, còn chặn trên nhỏ nhất xảy ra ở đỉnh trên bên phải. Chẳng hạn $\inf_{[2,3]\times[1,2]} f = f(2,1)$, $\sup_{[2,3]\times[1,2]} f = f(3,2)$. Vậy

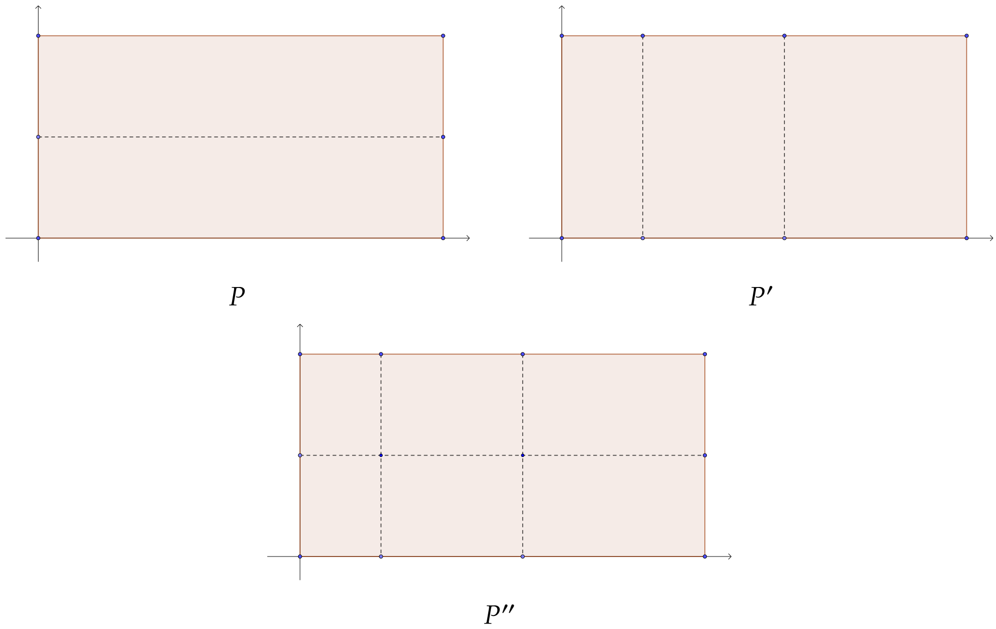
$$L(f,P) = \left[f(0,0) + f(2,0) + f(0,1) + f(2,1)\right] \cdot 2 \cdot 1 = 16.$$

$$U(f,P) = \left[f(2,1) + f(4,1) + f(2,2) + f(4,2)\right] \cdot 2 \cdot 1 = 48.$$

■

Qua ví dụ trên ta để ý thấy nếu trên tất cả các hình hộp con inf và sup đều đạt được, trở thành min và max, chẳng hạn như khi hàm là liên tục, thì tổng dưới và tổng trên trở thành các tổng Riemann. Còn ngược lại thì tổng dưới và tổng trên không phải là tổng Riemann.

Với P và P' là hai phép chia của cùng một hình hộp, nếu $P \subset P'$ thì ta nói P' là **mịn hơn** P.



Hình 1.10: Ba phép chia của cùng một hình chữ nhật, trong đó P và P' không so sánh được với nhau, còn P'' mịn hơn cả P lẫn P'.

Bổ đề **(chia mịn hơn thì tổng dưới tăng và tổng trên giảm).** *Nếu phép chia P' là mịn hơn phép chia P thì $L(f,P) \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P)$.*

Chứng minh. Lý do chính là với tập con thì inf tăng lên và sup giảm đi.

Cụ thể, mỗi hình hộp con R' của P' nằm trong một hình hộp con R của P. Ta có $\inf_{R'} f \ge \inf_R f$. Vì thế

$$\begin{aligned}\sum_{R'\subset R, R'\in H(P')} (\inf_{R'} f)|R'| &\ge \sum_{R'\subset R, R'\in H(P')} (\inf_{R} f)|R'| \\ &= \inf_R f \sum_{R'\subset R, R'\in H(P')} |R'| = (\inf_R f)|R|.\end{aligned}$$

Lấy tổng hai vế của bất đẳng thức trên theo tất cả hình hộp con R của P ta được $L(f,P') \ge L(f,P)$.

Trường hợp sup tương tự. □

Khi chia mịn hơn thì tổng dưới tăng lên còn tổng trên giảm đi, gần hơn tới giá trị tích phân nằm ở giữa. Đây một ưu điểm quan trọng của tổng trên và tổng dưới so với tổng Riemann, bởi vì với tổng Riemann thì chia mịn hơn không nhất thiết dẫn tới xấp xỉ tốt hơn do còn phụ thuộc vào cách chọn điểm đại diện, xem Ví dụ 1.11 và Bài tập 1.29.

1.11 Ví dụ. Tiếp tục Ví dụ 1.9, với phép chia đều P' thành 8 hình chữ nhật con, cụ thể dùng các điểm chia với các tọa độ $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,$

$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2$, thì

$$\begin{aligned} L(f,P') = \big[&f(0,0)+f(1,0)+f(2,0)+f(3,0)+\\ &+f(0,1)+f(1,1)+f(2,1)+f(3,1)\big]\cdot 1\cdot 1 = 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f,P') = \big[&f(1,1)+f(2,1)+f(3,1)+f(4,1)+\\ &+f(1,2)+f(2,2)+f(3,2)+f(4,2)\big]\cdot 1\cdot 1 = 44. \end{aligned}$$

Ta thấy P' mịn hơn P, và $L(f,P) \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P)$.

Nếu ta tính tổng Riemann ứng với điểm đại diện là đỉnh trên bên trái của hình chữ nhật con thì được

$$\begin{aligned} \big[&f(0,1)+f(1,1)+f(2,1)+f(3,1)+\\ &+f(0,2)+f(1,2)+f(2,2)+f(3,2)\big]\cdot 1\cdot 1 = 36. \end{aligned}$$

Sau vài bài nữa, ở Ví dụ 4.6, ta dễ dàng tính được giá trị đúng của tích phân là 32, cho thấy tổng Riemann này kém chính xác hơn tổng Riemann ở Ví dụ 1.5 mặc dù phép chia mịn hơn. ■

Bổ đề (tổng dưới nhỏ hơn hay bằng tổng trên). *Nếu P và P' là hai phép chia bất kì của cùng một hình hộp thì $L(f,P) \le U(f,P')$.*

Chứng minh. Với hai phép chia P và P' bất kì thì luôn có một phép chia P'' mịn hơn cả P lẫn P', chẳng hạn nếu $P = \prod_{i=1}^n P_i$ và $P' = \prod_{i=1}^n P'_i$ thì có thể lấy $P'' = \prod_{i=1}^n P''_i$ với $P''_i = P_i \cup P'_i$. Xem Hình 1.10.

Khi đó $L(f,P) \le L(f,P'') \le U(f,P'') \le U(f,P')$. □

Một hệ quả là chặn trên nhỏ nhất của tập hợp tất cả các tổng dưới $\sup_P L(f,P)$ và chặn dưới lớn nhất của tập hợp tất cả các tổng trên $\inf_P U(f,P)$ tồn tại, và

$$\sup_P L(f,P) \le \inf_P U(f,P).$$

1.12 Định nghĩa. *Hàm $f : I \to \mathbb{R}$ trên hình hộp I là* **khả tích Darboux** [8] *khi và chỉ khi f bị chặn và $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$, và khi đó* **tích phân Darboux** *của f chính là số thực này,*

$$\boxed{\int_I f = \sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P).}$$

Như vậy ***tích phân Darboux là số thực duy nhất nằm giữa tất cả các tổng dưới và tất cả các tổng trên***.

[8] Jean Gaston Darboux đề xuất cách trình bày này vào khoảng năm 1870. Tên Darboux có thể được phát âm theo tiếng Pháp tựa như "Đác-bu".

Ví dụ. Với một hàm hằng c trên hình hộp I, thì các tổng dưới và tổng trên với mọi phép chia đều bằng $c\,|I|$, nên hàm c khả tích trên I và tích phân của c trên I là
$$\int_I c = c\,|I|\,.$$
■

1.13 Mệnh đề. *Cho f bị chặn trên hình hộp I. Khi đó f là khả tích Darboux trên I nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$ có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.*

Như vậy ***hàm khả tích Darboux khi và chỉ khi tổng dưới và tổng trên gần nhau tùy ý nếu phép chia đủ mịn***.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Cho f khả tích. Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P và P' sao cho
$$L(f,P) > -\epsilon + \int_I f$$
và
$$U(f,P') < \epsilon + \int_I f.$$
Lấy P'' mịn hơn cả P và P'. Khi đó
$$U(f,P'') - L(f,P'') \leq U(f,P') - L(f,P) < 2\epsilon$$

($\Leftarrow$) Giả sử với $\epsilon > 0$ cho trước bất kì có phép chia P sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Bất đẳng thức này dẫn tới $U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon$, do đó $\inf_P U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon$, hay $0 \leq \inf_P U(f,P) - \sup_P L(f,P) < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$. Do đó $\inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P)$. □

Ta nói ngay rằng thực sự hai tích phân này trùng nhau:

1.14 Mệnh đề. *Hàm là khả tích Darboux khi và chỉ khi nó khả tích Riemann, và khi đó hai tích phân bằng nhau.*

Vì vậy ta không phân biệt hai tích phân này, và gọi chung chúng là tích phân Riemann.

Chứng minh mệnh đề trên cho hàm liên tục có ở Định lý 2.1, trường hợp tổng quát có ở phần bổ sung, mục 7.1 trang 96.

Ghi chú. Việc khảo sát tính khả tích một cách tổng quát dùng Mệnh đề 1.13 đơn giản hơn so với dùng tổng Riemann, nên nhiều tài liệu Giải tích chỉ trình bày tích phân Darboux.

Tính chất của tích phân

Dưới đây ta có những tính chất căn bản của tích phân của hàm nhiều biến, tương tự trường hợp cho hàm một biến.

1.15 Mệnh đề. *Nếu f và g khả tích trên hình hộp I thì:*

(a) *$f + g$ khả tích và $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.*

(b) *Với mọi số thực c thì cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$.*

(c) *Nếu $f \le g$ thì $\int_I f \le \int_I g$.*

Các tính chất này có thể được giải thích từ ý nghĩa của tích phân. Chẳng hạn tính chất (c) nghĩa là vì đồ thị của f nằm dưới đồ thị của g nên thể tích của khối bên dưới đồ thị của f nhỏ hơn hay bằng thể tích của khối bên dưới đồ thị của g, hay vì tại mỗi điểm giá trị của f nhỏ hơn hay bằng giá trị của g nên tổng giá trị của f nhỏ hơn hay bằng tổng giá trị của g.

Ta chứng minh tính chất (a) và (b). Tính chất (c) được để ở Bài tập 1.31. Ta xét cả hai cách chứng minh dùng tổng Riemann và dùng tổng dưới tổng trên.

Chứng minh dùng tổng Riemann. (a) Cho $\epsilon > 0$, với phép chia có độ lớn hình hộp con đủ nhỏ để mọi tổng Riemann của f sai khác tích phân của f nhỏ hơn $\epsilon/2$, và mọi tổng Riemann của g sai khác tích phân của g nhỏ hơn $\epsilon/2$, thì với bất kì tổng Riemann nào của $f+g$ ta có

$$\left|\sum_R (f+g)(x_R)|R| - \left(\int_I f + \int_I g\right)\right| \le \left|\sum_R f(x_R)|R| - \int_I f\right| + \left|\sum_R g(x_R)|R| - \int_I g\right| < \epsilon.$$

Vậy $f+g$ khả tích và tích phân bằng $\int_I f + \int_I g$.

(b) Khi $c = 0$ kết quả hiển nhiên đúng. Xét $c \neq 0$. Cho $\epsilon > 0$, với phép chia có độ lớn hình hộp con đủ nhỏ để mọi tổng Riemann của f sai khác $\int_I f$ nhỏ hơn ϵ, ta có

$$\left|\sum_R cf(x_R)|R| - c\int_I f\right| = |c|\left|\sum_R f(x_R)|R| - \int_I f\right| \le |c|\epsilon.$$

Suy ra cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$. □

Chứng minh dùng tổng dưới và tổng trên. (a) Với một phép chia P của I, trên một hình hộp con R ta có $\inf_R f + \inf_R g \le f(x) + g(x)$, $\forall x \in R$. Suy ra $\inf_R f + \inf_R g \le \inf_R (f+g)$. Do đó $L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P)$.

Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P sao cho $L(f,P) > \int_I f - \epsilon$ và có phép chia P' sao cho $L(g,P') > \int_I g - \epsilon$. Lấy phép chia P'' mịn hơn cả P và P' thì $L(f,P'') \ge L(f,P) > \int_I f - \epsilon$ và $L(g,P'') \ge L(g,P') > \int_I g - \epsilon$. Suy ra

$$L(f+g,P'') \ge L(f,P'') + L(g,P'') > \int_I f + \int_I g - 2\epsilon.$$

Tương tự, có phép chia Q sao cho

$$U(f+g,Q) \le U(f,Q) + U(g,Q) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Lấy phép chia Q' mịn hơn cả P'' và Q thì ta được

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < L(f+g,Q') \le U(f+g,Q') < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Hệ thức này dẫn tới $U(f+g,Q') - L(f+g,Q') < 4\epsilon$, do đó $f+g$ khả tích theo Mệnh đề 1.13. Hơn nữa

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < \int_I (f+g) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon,\ \forall \epsilon > 0,$$

do đó $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

(b) Khi $c = 0$ kết quả hiển nhiên đúng.

Xét $c > 0$. Sử dụng kết quả trong Bài tập 1.30, ta có

$$L(cf,P) = \sum_{R\in H(P)} (\inf_R cf)|R| = \sum_{R\in H(P)} c(\inf_R f)|R| = cL(f,P).$$

$$U(cf,P) = \sum_{R\in H(P)} (\sup_R cf)|R| = \sum_{R\in H(P)} c(\sup_R f)|R| = cU(f,P).$$

Dẫn tới

$$\sup_P L(cf,P) = \sup_P cL(f,P) = c\sup_P L(f,P) = c\int_I f.$$

$$\inf_P U(cf,P) = \inf_P cU(f,P) = c\inf_P U(f,P) = c\int_I f.$$

Vậy cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$.

Xét $c < 0$. Sử dụng kết quả trong Bài tập 1.30, ta có

$$L(cf,P) = \sum_{R\in H(P)} (\inf_R cf)|R| = \sum_{R\in H(P)} c(\sup_R f)|R| = cU(f,P).$$

$$U(cf,P) = \sum_{R\in H(P)} (\sup_R cf)|R| = \sum_{R\in H(P)} c(\inf_R f)|R| = cL(f,P).$$

Dẫn tới

$$\sup_P L(cf,P) = \sup_P cU(f,P) = c\inf_P U(f,P) = c\int_I f.$$

$$\inf_P U(cf,P) = \inf_P cL(f,P) = c\sup_P L(f,P) = c\int_I f.$$

Vậy cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$. □

Ví dụ. Ước lượng giá trị của tích phân sau nếu nó tồn tại

$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} x^2y^3\,dxdy.$$

Ta có đánh giá với $0 \le x \le 1, 2 \le y \le 4$:

$$0 = 0^2 \cdot 2^3 \le x^2y^3 \le 1^2 \cdot 4^3 = 64.$$

Suy ra

$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} 0\,dxdy \le \iint x^2y^3\,dxdy \le \iint_{[0,1]\times[2,4]} 64\,dxdy.$$

Vậy

$$0 = 0 \cdot (1-0) \cdot (4-2) \le \iint_{[0,1]\times[2,4]} x^2y^3\,dxdy \le 64 \cdot (1-0) \cdot (4-2) = 128.$$

■

Bài tập

1.16. Cho hàm số f định bởi $f(x) = x^3 + 1$ trên đoạn $[2, 10]$. Hãy viết biểu thức tổng Riemann của f trên $[2, 10]$ bằng cách chia đoạn này thành 16 đoạn con đều nhau, điểm lấy mẫu là trung điểm của mỗi đoạn con.

1.17. Một chiếc xe di chuyển thẳng theo một chiều, với tốc độ tức thời tại thời điểm t là $v(t)$ (đơn vị là km/h). Ta có dữ liệu tốc độ định kì mỗi 30 phút trong bảng sau.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$v(t)$	0	60	80	70	55	80	60

Hãy ước lượng chiều dài quãng đường đi được.

1.18. Tốc độ chạy của một vận động viên được ghi nhận trong bảng sau, với t là thời điểm kể từ thời điểm xuất phát và v là tốc độ tại thời điểm t.

t (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
v (m/s)	0	2	4	5,5	6	6	5,8

Hãy ước tính chiều dài quãng đường mà vận động viên đã chạy được.

1.19. Tốc độ hấp thụ CO_2 của cây trong quá trình quang hợp P được cho bằng cách đo thể tích CO_2 được hấp thụ trên một đơn vị diện tích bề mặt lá cây trong một đơn vị thời gian (tính bằng phút). Số liệu thu thập được như sau:

t	0	10	40	55	60
$P(t)$	4,1	6,2	7,7	8,4	9,2

Hãy ước tính tổng lượng CO_2 được cây hấp thụ trong khoảng thời gian này, đo bằng thể tích CO_2 hấp thụ trên một đơn vị diện tích bề mặt lá cây.

1.20. Cho hàm số f liên tục trên $[1, 9]$. Biết một số thông tin giá trị hàm f như bảng sau.

x	1	3	5	7	9
$f(x)$	0,5	1	1,5	2	2,5

Tìm xấp xỉ tích phân $\int_1^9 f(x)\,dx$ bằng cách tính tổng Riemann tương ứng với phân hoạch đoạn $[1,9]$ thành 4 đoạn với điểm mẫu (điểm đại diện) là điểm bên trái của mỗi đoạn con.

1.21. Một hồ nước hình chữ nhật kích thước 4 m × 8 m có độ sâu không đều. Người ta đo được chiều sâu tại một số điểm trên hồ như trong bảng sau. Ví dụ trong bảng này độ sâu tại điểm cách bờ trái 5 m và bờ trên 1m là 4,6 m. Hãy ước lượng lượng nước trong hồ.

vị trí	1	3	5	7
1	3,1	4,5	4,6	4,0
3	3,7	4,1	4,5	4,4

1.22. Về địa lý, một tỉnh nọ có thể được xem như một hình chữ nhật kích thước dài 110 km rộng 55 km. Tỉnh được chia đều thành 3×2 vùng hình chữ nhật, chiều dài được chia làm 3, chiều rộng được chia làm 2, ở mỗi vùng có một trạm quan trắc khí tượng. Dưới đây là dữ liệu lượng mưa đo được ở các trạm quan trắc này trong năm 2020:

1293,4	1230,8	1938,2
3196,5	2690,1	1452,0

Lượng mưa có đơn vị là mm, theo đó 1 mm nghĩa là 1 mm nước mưa trên 1 m^2 diện tích. Dùng dữ liệu trên, hãy ước tính tổng lượng nước mưa trên cả tỉnh trong năm.

1.23. Cho $f(x,y) = x$ trên hình chữ nhật $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Hãy tính các tổng dưới, tổng trên, và tổng Riemann ứng với điểm đại diện là điểm giữa của các hình chữ nhật con ứng với các phép chia sau.

(a) Chia đôi chiều x, tức là dùng các điểm chia $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, y_0 = 0, y_1 = 1$.

(b) Chia đều chiều x làm 4 đoạn cùng chiều dài, tức là dùng các điểm chia $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1, y_0 = 0, y_1 = 1$.

1.24. Cho $f(x,y) = xy$ trên hình chữ nhật $1 \le x \le 3$, $1 \le y \le 4$. Hãy tính các tổng dưới, tổng trên, và tổng Riemann ứng với điểm đại diện là điểm giữa của các hình chữ nhật con ứng với các phép chia sau.

(a) Chia đôi chiều x, tức là dùng các điểm chia $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, y_0 = 1, y_1 = 4$.

(b) Dùng các điểm chia $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$, $y_0 = 1, y_1 = 3, y_2 = 4$.

(c) Chia đều thành các hình vuông có cạnh chiều dài 1.

1.25. Cho $f(x,y) = \frac{x}{y}$ trên hình chữ nhật $1 \le x \le 3$, $1 \le y \le 4$. Hãy tính các tổng dưới, tổng trên, và tổng Riemann ứng với điểm đại diện là điểm giữa của các hình chữ nhật con ứng với các phép chia sau.

(a) Chia đôi chiều x, tức là dùng các điểm chia $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, y_0 = 1, y_1 = 4$.

(b) Dùng các điểm chia $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$, $y_0 = 1, y_1 = 3, y_2 = 4$.

(c) Chia đều thành các hình vuông có cạnh chiều dài 1.

1.26. Hãy cho một ước lượng cho giá trị của tích phân (nghĩa là cho biết tích phân có thể có giá trị trong khoảng số thực nào)

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} e^{x^2y^3}\, dxdy.$$

1.27. Điều sau đây là đúng hay sai, giải thích:

$$\iint_{[0,1]\times[1,4]} (x^2+\sqrt{y})\sin(xy^2)\, dA = 10.$$

1.28. Giả sử hàm $f(x,y)=x$ khả tích trên hình chữ nhật $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, hãy tính tích phân của f bằng cách lấy giới hạn của tổng Riemann ứng với phép chia đều với điểm lấy mẫu là điểm giữa.

1.29. Hãy cho một ví dụ minh họa rằng xấp xỉ Riemann ứng với một phép chia mịn hơn không nhất thiết tốt hơn. Có thể xét trường hợp một chiều.

1.30. Trong phần chứng minh của Mệnh đề 1.15 ta có thể dùng các tính chất sau của sup và inf. Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, khác rỗng, bị chặn. Với số thực c, kí hiệu $cA=\{cx \mid x\in A\}$, $-A=(-1)A=\{-x \mid x\in A\}$. Hãy kiểm:

(a) Nếu $c>0$ thì $\sup cA = c\sup A$, $\inf cA = c\inf A$.

(b) $\sup(-A) = -\inf A$, $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(c) Nếu $c<0$ thì $\sup cA = c\inf A$, $\inf cA = c\sup A$.

1.31. Chứng minh tính chất (c) của tích phân ở Mệnh đề 1.15, dùng tổng Riemann.

1.32. Chứng minh tính chất (c) của tích phân ở Mệnh đề 1.15, dùng tổng dưới và tổng trên.

1.33. Hãy chứng tỏ rằng tích phân của một hàm số trên một hình hộp đúng bằng thể tích của hình hộp nhân với giới hạn của giá trị trung bình của hàm số tại các điểm đại diện trong phép chia đều. Cụ thể hơn, lấy phép chia đều mỗi cạnh của hình hộp $I\subset\mathbb{R}^n$ thành m khoảng con dài bằng nhau. Trong mỗi hình hộp con R_i, $1\le i\le m^n$, lấy điểm x_{R_i} làm điểm đại diện. Chứng tỏ nếu f khả tích thì

$$\int_I f = |I|\left[\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{m^n} f(x_{R_i})\right].$$

2 Các hàm khả tích

Ở mục này ta khảo sát điều kiện để hàm khả tích trên hình hộp.

Trong ý của tích phân, việc xấp xỉ dựa trên giả thiết nếu biến thay đổi ít thì giá trị của hàm thay đổi ít, tức là sự liên tục của hàm. Như vậy sự khả tích phụ thuộc chặt chẽ vào sự liên tục.

2.1 Định lý (liên tục thì khả tích). *Một hàm thực liên tục trên một hình hộp thì khả tích Darboux lẫn khả tích Riemann và hai tích phân này bằng nhau.*

Đây là một điều kiện đủ cho sự khả tích mà ta dùng thường xuyên trong môn này.

Chứng minh. Chứng minh chủ yếu dựa vào tính liên tục đều của của hàm. Ta dùng các kết quả quan trọng sau trong Giải tích 2 (xem chẳng hạn ở [TTQ11], [TTV], [Lan97, tr. 193]):

(a) Một tập con của $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

(b) Một hàm thực liên tục trên một tập con compắc của $\mathbb{R}^n$ thì bị chặn, hơn nữa có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

(c) Một hàm thực liên tục trên một tập con compắc của $\mathbb{R}^n$ thì liên tục đều.

Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên hình hộp I. Khi đó f liên tục đều trên I, do đó cho trước $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $\|x - y\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \epsilon$.

Lấy một phép chia P của I sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình hộp con là nhỏ hơn δ. Điều này không khó: nếu chiều dài mỗi cạnh của một hình hộp nhỏ hơn α thì chiều dài của một đường chéo của hình hộp đó nhỏ hơn $\sqrt{n}\alpha$.

Tuy ta không nhất thiết phải dùng điều sau trong chứng minh, nhưng chú ý rằng trên mỗi hình hộp con R ứng với phép chia P thì hàm f liên tục nên đạt được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất, tức là $\inf_R f = \min_R f$, $\sup_R f = \max_R f$, do đó các tổng dưới và tổng trên trở thành các tổng Riemann.

Với hai điểm x, y bất kì thuộc về một hình hộp con R thì $f(x) - f(y) < \epsilon$, nên $\max_{x\in R} f(x) - \min_{y\in R} f(y) < \epsilon$. Do đó

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_R (\max_R f - \min_R f)\,|R| < \epsilon \sum_R |R| = \epsilon\,|I|\,.$$

Theo Mệnh đề 1.13 hàm f khả tích Darboux và giá trị của tích phân Darboux

$$\beta = \inf_P U(f, P) = \sup_P L(f, P)$$

thỏa $L(f, P) \leq \beta \leq U(f, P)$ với mọi P.

Mặt khác, tổng Riemann bất kì ứng với phép chia P cũng thỏa

$$L(f,P) \le \sum_R f(x_R)|R| \le U(f,P).$$

Suy ra

$$\left|\sum_R f(x_R)|R| - \beta\right| \le U(f,P) - L(f,P) < \epsilon|I|.$$

Ta kết luận được f khả tích Riemann và tích phân Riemann của f đúng bằng β. □

Trong chứng minh trên, có được ứng viên cho tích phân Riemann là nhờ có tích phân Darboux, thể hiện sự thuận tiện của việc dùng tổng dưới và tổng trên. Người đọc có thể so sánh với cách trình bày vấn đề liên quan trong các tài liệu như [Fic77], [Duc06], [TPTT02].

Đa số hàm ta xét trong môn này được cho bởi các công thức sơ cấp, nên liên tục và do đó khả tích trên hình hộp.

Ví dụ. Xét tích phân

$$\iint_{[0,1]^2} xy\, dxdy.$$

Vì hàm $(x,y) \mapsto xy$ liên tục, nên tích phân tồn tại. ■

Tập có thể tích không

Một hàm không liên tục vẫn có thể khả tích, như ví dụ sau.

Ví dụ. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Hàm f không liên tục tại $\frac{1}{2}$.

Cho trước $\epsilon > 0$, lấy một phép chia P của $[0,1]$ sao cho chiều dài của các khoảng con nhỏ hơn $\frac{\epsilon}{2}$. Điểm $\frac{1}{2}$ thuộc về tối đa hai khoảng con, trên các khoảng con đó thì $\sup f = 1$ và $\inf f = 0$, còn trên các khoảng con còn lại thì $\sup f = \inf f = 0$. Như thế $L(f,P) = 0$ trong khi $U(f,P)$ bằng tổng chiều dài các khoảng con chứa điểm $\frac{1}{2}$, nhỏ hơn $2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Vậy sai khác giữa $U(f,P)$ và $L(f,P)$ nhỏ hơn ϵ. Ta kết luận hàm f khả tích. Hơn nữa $0 \le \int_{[0,1]} f \le U(f,P) < \epsilon$ nên $\int_{[0,1]} f = 0$.

Như vậy trong ví dụ này hàm liên tục trừ tại một điểm vẫn có thể khả tích, và giá trị của hàm tại điểm không liên tục không ảnh hưởng tới giá trị của tích phân. ■

Mặt khác nếu tập điểm không liên tục "lớn" thì hàm có thể không còn khả tích, như ví dụ sau minh họa.

Ví dụ. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ta có thể kiểm nhanh được ngay rằng f không liên tục tại bất kì điểm nào.

Với bất kì phép chia P nào của khoảng $[0,1]$, trên bất kì khoảng con nào thì $\inf f = 0$ và $\sup f = 1$, do đó $L(f,P) = 0$ and $U(f,P) = 1$. Suy ra f không khả tích. ■

Vậy không liên tục như thế nào thì còn khả tích? Vấn đề này tương đối khó nhưng cần cho môn học.

Phần tiếp theo chỉ ra rằng nếu tập điểm không liên tục "có thể tích không" thì hàm vẫn khả tích. Có thể hình dung sơ lược tập "có thể tích không" là "không đáng kể đối với thể tích và tích phân".

Cụ thể, ***một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có thể tích không nếu có thể phủ tập đó bằng hữu hạn hình hộp $n-$chiều có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì***. Chính xác hơn:

2.2 Định nghĩa. *Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ được gọi là* **có thể tích không** [9] *trong $\mathbb{R}^n$ nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một họ hữu hạn các hình hộp n-chiều $(U_1, U_2, \dots, U_m)$ sao cho $\bigcup_{i=1}^m U_i \supset C$ và $\sum_{i=1}^m |U_i| < \epsilon$.*

2.3 Ví dụ. Ta có thể thấy nhanh (Bài tập 2.14):

(a) Tập rỗng $\emptyset$ có thể tích không với mọi số chiều $n \geq 1$.

(b) Tập hợp gồm một điểm trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích không với mọi $n \geq 1$.

(c) Một đoạn thẳng nằm ngang hay thẳng đứng trong $\mathbb{R}^2$ có diện tích không.

(d) Hội của hai tập có thể tích không là một tập có thể tích không.

■

2.4 Mệnh đề. *Đồ thị của một hàm khả tích trên một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Ví dụ. Đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$. Suy ra một đoạn thẳng, đồ thị của hàm $y = ax + b$ với $c \leq x \leq d$, là

[9] tiếng Anh là "of content zero"

một tập có diện tích không (đoạn thẳng thẳng đứng cũng có diện tích không theo ví dụ trước).

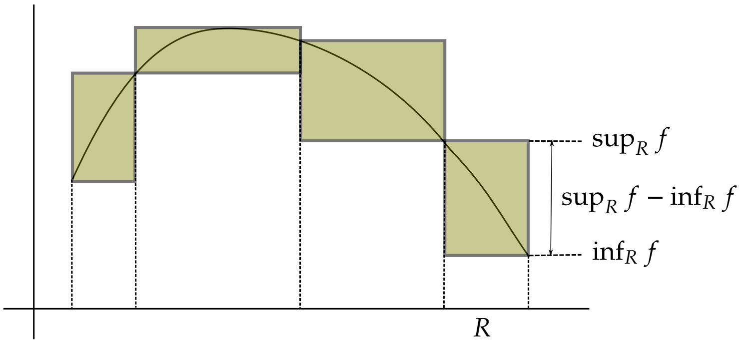
Tương tự, một đoạn parabola $y = x^2$ với $a \leq x \leq b$ có diện tích không. ∎

2.5 Ví dụ. Một hình tam giác trong mặt phẳng, hội của ba đoạn thẳng, là một tập có diện tích không.

Tương tự, một hình đa giác, hội của hữu hạn đoạn thẳng, là một tập có diện tích không. ∎

2.6 Ví dụ. Xét đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Nửa đường tròn trên là đồ thị của hàm $y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, $-r \leq x - a \leq r$, là một hàm liên tục nên khả tích, nên theo 2.4 tập này có diện tích không. Tương tự nửa đường tròn dưới có diện tích không. Đường tròn là hội của nửa đường tròn trên và nửa đường tròn dưới, là hội của hai tập có thể tích không, nên có diện tích không. ∎

Chứng minh. Cho f khả tích trên hình hộp $I \subset \mathbb{R}^n$. Cho trước $\epsilon > 0$ có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) = \sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R| < \epsilon$. Đồ thị của hàm f, tập $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$, được phủ bởi họ tất cả các hình hộp $R \times [\inf_R f, \sup_R f]$, xem Hình 2.7.



Hình 2.7:

Tổng thể tích của các hình hộp này bằng $\sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R|$, nhỏ hơn ϵ. □

2.8 Định lý (liên tục trừ ra trên tập có thể tích không thì khả tích). *Một hàm thực trên một hình hộp nếu bị chặn và liên tục trừ ra trên một tập có thể tích không thì khả tích.*

2.9 Ví dụ. Cho hàm

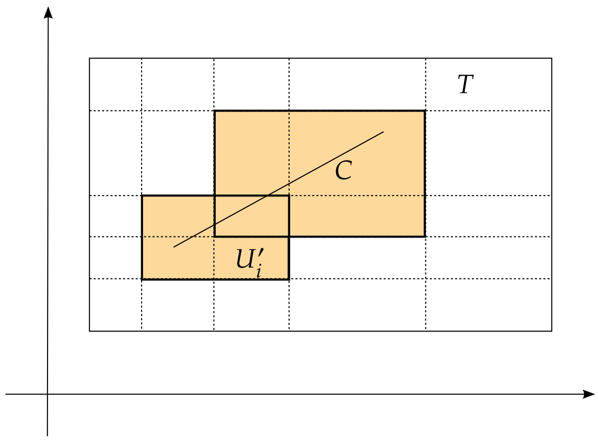
$$f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 3, & y \neq 2, \\ 4, & y = 2. \end{cases}$$

Hàm f bị chặn và tập điểm không liên tục là đoạn thẳng gồm những điểm (x, y) với $0 \leq x \leq 1$, $y = 2$, một tập có diện tích không. Vậy f khả tích. ■

Chứng minh. Giả sử f là một hàm thực bị chặn trên hình hộp I, do đó có số thực M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$. Cho C là tập hợp các điểm thuộc I mà tại đó hàm f không liên tục. Giả thiết cho C có thể tích không.

Ý của chứng minh là dùng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ để phủ C và dùng tính bị chặn của f đối với phần này. Trên phần của hình hộp còn lại thì f liên tục đều, ta sử dụng lập luận như trong phần chứng minh của 2.1. Để dễ theo dõi hơn người đọc có thể tiến hành cho một ví dụ cụ thể như ở Hình 2.10.

Cho $\epsilon > 0$, có một họ các hình hộp $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ phủ C và có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ. Có thể giả sử mỗi hình hộp U_i là một hình hộp con của I, bằng cách thay U_i bởi $U_i \cap I$ nếu cần. Ta muốn tách rời C khỏi các hình hộp không thuộc họ này. Mở rộng mỗi hình hộp U_i thành một hình hộp U_i' chứa trong I có thể tích không quá hai lần thể tích của U_i sao cho phần trong của U_i' chứa U_i (ở đây ta xét phần trong tương đối với I, nghĩa là các tập được xét được coi là tập con của không gian I.) Như vậy ta có được một họ mới $(U_i')_{1 \leq i \leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn 2ϵ, hội các phần trong của các hình hộp này chứa C. Đặt $T = I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{U_i'}$ thì T rời khỏi C do đó f liên tục trên T.



Hình 2.10: Trường hợp C là một đoạn thẳng.

Bây giờ ta làm tương tự như ở Định lý 2.1. Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i' làm các điểm chia trên các cạnh của I. Vì T là compắc nên f liên tục đều trên T, do đó ta có thể lấy được một phép chia P' mịn hơn P sao cho với bất kì hình hộp con R của P' chứa trong T thì $\sup_R f - \inf_R f < \epsilon$. Khi đó với P' ta có

$$\sum_{R \subset T} (\sup_R f - \inf_R f)\,|R| < \epsilon \sum_{R \subset T} |R| \leq \epsilon\,|I|\,.$$

Nếu hình hộp con R của P' không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U'_i nào đó, do đó

$$\sum_{R\not\subset T}(\sup_R f - \inf_R f)|R| \le \sum_{R\not\subset T} 2M|R| = 2M\sum_{R\not\subset T}|R| = 2M\sum_{i=1}^{m}|U'_i| < 2M2\epsilon.$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta có $U(f,P') - L(f,P') < (|I| + 4M)\epsilon$. Từ đó ta kết luận hàm f khả tích. □

2.11 Định lý. *Cho f và g là hàm bị chặn trên một hình hộp I và $f = g$ trên I trừ một tập có thể tích không. Ta có f khả tích trên I khi và chỉ khi g khả tích trên I, và khi đó $\int_I f = \int_I g$.*

Vậy ***giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.***

Ví dụ. Tiếp tục Ví dụ 2.9, trên hình chữ nhật $[0,1]\times[0,2]$, hàm f bằng hàm hằng 3 trừ ra trên một tập có diện tích không, nên tích phân của f bằng tích phân của hàm hằng 3, và bằng $3\times 1\times 2 = 6$. ■

Chứng minh. Đặt $h = g - f$ thì h bị chặn, và $h(x) = 0$ trừ ra trên một tập C có thể tích không. Ta chỉ cần chứng minh h khả tích và $\int_I h = 0$, sau đó dùng Mệnh đề 1.15. Ta tiến hành giống như cách chứng minh Định lý 2.8.

Cho trước $\epsilon > 0$, ta có một họ $(U_i)_{1\le i\le m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn ϵ và hội các phần trong (tương đối với không gian I) của các hình hộp này chứa C. Đặt $T = I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{U_i}$ thì T rời khỏi C do đó $h = 0$ trên T.

Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i làm các điểm chia trên các cạnh của I. Trên T thì

$$\sum_{R\subset T}(\sup_R h)|R| = \sum_{R\subset T}(\inf_R h)|R| = 0.$$

Do h bị chặn nên có số $M > 0$ sao cho $|h(x)| \le M$ với mọi $x \in I$. Nếu hình hộp con R không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i nào đó, do đó

$$\sum_{R\not\subset T}(\sup_R h)|R| \le \sum_{R\not\subset T} M|R| = M\sum_{R\not\subset T}|R| = M\sum_{i=1}^{m}|U_i| < M\epsilon.$$

Tương tự:

$$\sum_{R\not\subset T}(\inf_R h)|R| \ge \sum_{R\not\subset T} -M|R| = -M\sum_{R\not\subset T}|R| = -M\sum_{i=1}^{m}|U_i| > -M\epsilon.$$

Vậy $-M\epsilon < L(h,P) \le U(h,P) < M\epsilon$.

Từ đây ta có thể kết luận hàm h khả tích và $\int_I h = 0$. □

Ta đã đưa ra một điều kiện đủ cho sự khả tích trên hình hộp. Một câu trả lời hoàn chỉnh cho cho sự khả tích trên hình hộp, một điều kiện cần và đủ, có ở phần bổ sung, Định lý 7.3, mục 7.2, trang 99.

Bài tập

2.12. Các hàm sau có khả tích không?

(a) $f(x, y) = x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

(b) $f(x, y) = x + 2y, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$.

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}, 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3$.

2.13. Các hàm sau có khả tích không? Nếu hàm khả tích thì hãy tính tích phân của hàm nếu có thể.

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1,\ y = 0. \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ (x, y) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 5, & (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y \neq x, \\ x, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y = x. \end{cases}$

(e) $f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y \neq x^2, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y = x^2. \end{cases}$

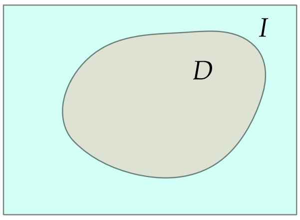
2.14. Kiểm các ví dụ tập thể tích không trong Ví dụ 2.3.

2.15. Chứng tỏ biên của một hình hộp n-chiều có thể tích n-chiều không.

3 Tích phân trên tập tổng quát

Chúng ta chỉ xét các tập con của $\mathbb{R}^n$. Để ngắn gọn hơn ta thường dùng từ **miền** để chỉ một tập như vậy. Chúng ta ***chỉ xét tích phân trên những miền bị chặn.*** Nhớ lại, với hàm một biến để xét tích phân trên khoảng không bị chặn ta đã dùng giới hạn của tích phân trên khoảng bị chặn, gọi là tích phân suy rộng.

Để xây dựng tích phân trên một miền bị chặn bất kì ta dùng một ý rất đơn giản: Cho hàm giá trị 0 bên ngoài miền xác định ban đầu, và lấy tích phân hàm mới này trên một hình chữ nhật chứa miền xác định ban đầu. Như thế phần bên ngoài miền xác định ban đầu chỉ đóng góp giá trị 0 vào tích phân, nên tích phân thực sự đại diện cho tổng giá trị của hàm đã cho trên miền xác định ban đầu. Một cách trực quan, phần thể tích của khối bên dưới đồ thị bên ngoài miền xác định ban đầu có độ cao 0 nên có thể tích bằng 0, do đó thể tích của khối mà đáy là hình chữ nhật vẫn chỉ bằng thể tích của khối ban đầu.



Cụ thể hơn như sau.

Định nghĩa. *Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ là một tập bị chặn, và cho $f : D \to \mathbb{R}$. Vì D bị chặn nên có hình hộp I chứa D. Mở rộng hàm f lên hình hộp I thành hàm $F : I \to \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Ta nói f là **khả tích** *trên D nếu F khả tích trên I, và khi đó* **tích phân** *của f trên D được định nghĩa là tích phân của F trên I:*

$$\boxed{\int_D f = \int_I F.}$$

Để tích phân của f trên D được định nghĩa thì F phải bị chặn trên I, do đó ***f phải bị chặn trên D.***

3.1 Bổ đề. *Tích phân $\int_D f$ không phụ thuộc vào cách chọn hình hộp I.*

Bổ đề này nói rằng định nghĩa tích phân nói trên chỉ phụ thuộc đầu vào là hàm f. Như thế người ta thường nói rằng tích phân đã được "định nghĩa tốt". Chứng minh bổ đề này không khó trong trường hợp chung, nhưng để xét hết các trường hợp thì khá dài, nên được để ở cuối mục này, trang 35.

Ví dụ. Khi D là một hình hộp thì định nghĩa tích phân này trùng với định nghĩa đã có của tích phân trên hình hộp. ■

Ta định nghĩa thể tích thông qua tích phân:

Định nghĩa. *Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$.* **Thể tích** [10] *n-chiều của D được định nghĩa là tích phân của hàm 1 trên D:*

$$\boxed{|D| = \int_D 1.}$$

Có thể giải thích định nghĩa này là thể tích của khối có chiều cao 1 chính bằng diện tích đáy.

Ví dụ. Nếu D là một hình hộp thì thể tích của D vẫn bằng thể tích của một hình hộp. ■

Sự khả tích và sự có thể tích

Có thể giải thích chi tiết hơn định nghĩa thể tích ở trên như sau. Đặt miền bị chặn D vào trong một hình hộp I. Xét hàm có giá trị bằng 1 trên D và bằng 0 ngoài D. Hàm này thường được gọi là **hàm đặc trưng** [11] của D, kí hiệu là χ_D:

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

Định nghĩa nói rằng

$$|D| = \int_I \chi_D.$$

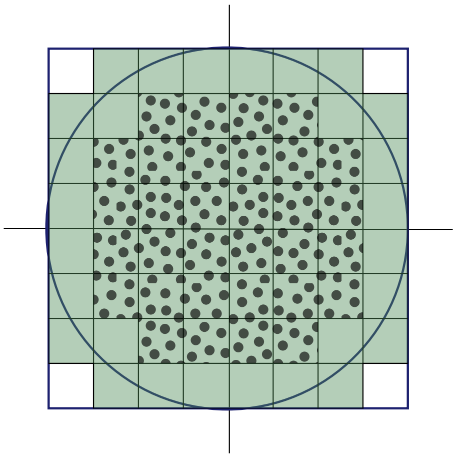
Xét một phép chia P của I. Ta có $U(\chi_D, P) = \sum_R (\sup_R \chi_D)|R| = \sum_{R\cap D\neq\emptyset} |R|$, bằng tổng thể tích của các hình chữ nhật con của I mà có phần chung khác rỗng với D, chính là một chặn trên "thể tích" của D. Trong khi đó $L(\chi_D, P) = \sum_R (\inf_R \chi_D)|R| = \sum_{R\subset D} |R|$, bằng tổng thể tích của các hình chữ nhật con của I mà nằm trong D, chính là một chặn dưới "thể tích" của D. Tập D có thể tích khi và chỉ khi hai chặn này có thể gần nhau tùy ý, và số thực duy nhất nằm giữa được gọi là thể tích của D.

Chặn dưới và chặn trên của thể tích của một tập có thể gần nhau tùy ý khi các hình hộp phủ phần biên có tổng thể tích nhỏ tùy ý, từ đó ta có một trả lời cho câu hỏi "hình nào có thể tích?":

3.3 Định lý. *Một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều khi và chỉ khi biên của nó có thể tích n-chiều không.*

[10] Có khi để rõ hơn ta gọi đây là thể tích Riemann. Một số tài liệu còn gọi đây là thể tích Jordan.

[11] χ là một chữ cái Hy Lạp, có thể đọc là "khi"



Hình 3.2: Chặn dưới (xấp xỉ trong) và chặn trên (xấp xỉ ngoài) diện tích của miền bao bởi một hình tròn.

Chứng minh. Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, lấy một hình hộp I chứa D. Tập D có thể tích khi và chỉ khi hàm đặc trưng χ_D khả tích trên I. Tập hợp các điểm không liên tục của χ_D là chính tập điểm biên ∂D của D.

Vậy nếu ∂D có thể tích không thì χ_D khả tích, theo Định lý 2.8. Đây là một điều kiện đủ để có thể tích.

Chiều ngược lại, điều kiện cần, dùng thêm một lý luận, được để ở phần bổ sung, mục 7.2, trang 99. □

3.4 Ví dụ (đa giác có diện tích). Một miền bao bởi tam giác, tức là phần mặt phẳng bị chặn bao bởi ba cạnh của một tam giác, thì có diện tích, vì biên của nó là hội của ba đoạn thẳng nên là một tập có diện tích không, như đã thấy ở Ví dụ 2.5.

Tương tự, một miền bao bởi đa giác là có diện tích vì biên là hội của hữu hạn đoạn thẳng nên có diện tích không, như đã thấy ở Ví dụ 2.5. ■

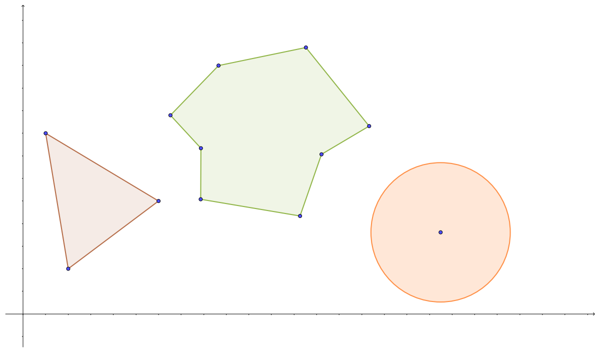
3.5 Ví dụ (hình tròn có diện tích). Phần mặt phẳng bị chặn có biên là một đường tròn được gọi là một miền được bao bởi đường tròn, hoặc có khi gọi là một hình tròn. Đường tròn là một tập có diện tích không như đã thấy ở Ví dụ 2.6, do đó theo Định lý 3.3 miền này có diện tích. [12] ■

Tương tự điều kiện khả tích trên hình hộp, Định lý 2.8, ta có một điều kiện đủ cho sự khả tích trên tập tổng quát, đủ dùng cho môn học này:

3.7 Định lý. *Cho D là tập con có thể tích của $\mathbb{R}^n$. Khi đó f khả tích trên D nếu f bị chặn và tập điểm không liên tục của f là tập có thể tích không.*

Chứng minh. Cho I là một hình hộp chứa D và cho F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Tích phân $\int_D f$ tồn tại nếu và chỉ nếu tích phân $\int_I F$ tồn

[12] Người ta thường gọi ngắn gọn diện tích của tam giác và diện tích của hình tròn để chỉ diện tích của phần mặt phẳng bị chặn bao bởi các cạnh của tam giác và diện tích của phần mặt phẳng bị chặn bao bởi đường tròn.



Hình 3.6: Những hình có diện tích.

tại. Tập E các điểm tại đó F không liên tục gồm tập C các điểm trên D mà tại đó f không liên tục và có thể những điểm trên biên của D, tức là $C \subset E \subset (C \cup \partial D)$. Theo Định lý 3.3, do D có thể tích nên ∂D là tập có thể tích không. Nếu C là tập có thể tích không thì $C \cup \partial D$ là tập có thể tích không, dẫn đến E là tập có thể tích không, do đó F khả tích, theo Định lý 2.8. □

Một điều kiện cần và đủ cho sự khả tích có ở phần bổ sung, Định lý 7.8, mục 7.2 trang 99.

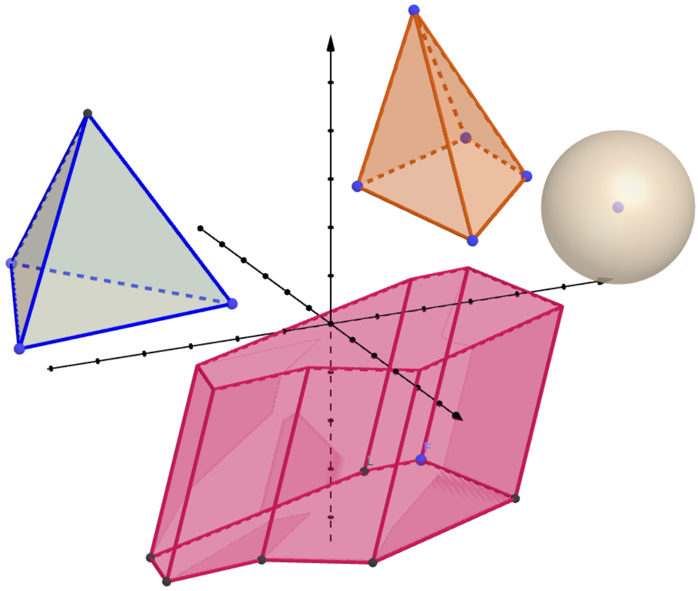
Tương tự Mệnh đề 2.4 ta có:

3.8 Mệnh đề (đồ thị của hàm khả tích có thể tích không). *Đồ thị của một hàm khả tích trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ thì có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Chứng minh. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và $f : D \to \mathbb{R}$. Gọi I là một hình hộp chứa D và F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Vì f khả tích nên F khả tích trên I. Theo Mệnh đề 2.4, đồ thị của F có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Đồ thị của f là một tập con của đồ thị của F. □

Ví dụ (khối đa diện có thể tích). Khối đa diện là phần không gian $\mathbb{R}^3$ bao bởi hữu hạn mặt, mỗi mặt là một miền bao bởi đa giác trong một mặt phẳng. Biên của khối đa diện là hội của các mặt này. Mỗi mặt biên S bao bởi một đa giác trong một mặt phẳng P trong $\mathbb{R}^3$ có hình chiếu vuông góc xuống một trong ba mặt phẳng tọa độ là một đa giác T, do đó S là đồ thị của một hàm liên tục (hàm tuyến tính xác định mặt phẳng P) xác định trên tập bị chặn T, do đó S có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$, theo Mệnh đề 3.8. Suy ra khối đa diện có thể tích, theo Định lý 3.3. ■

3.9 Ví dụ (quả cầu có thể tích). Xét quả cầu cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Nửa mặt cầu trên là đồ thị của hàm $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ với (x, y) thuộc về hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$. Vì hình tròn có diện tích và hàm trên liên tục, nên theo Định lý 3.7 hàm trên khả tích, và theo Mệnh đề 3.8 thì đồ thị của nó là một tập có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự nửa mặt cầu dưới cũng là một tập có thể tích không, nên mặt cầu là một tập có thể tích không, và do Định lý 3.3 nên quả cầu có thể tích. ■



Hình 3.10: Những hình có thể tích.

Như vậy ta đã giải thích được sự tồn tại diện tích của những hình như miền bao bởi đa giác và sự tồn tại thể tích của những hình như khối đa diện, điều mà trong chương trình toán phổ thông ta đã phải giả định [SGKPT, Hình học 12, tr. 21].

Tính chất của tích phân

Những tính chất sau là hệ quả đơn giản của những tính chất tương ứng cho hình hộp, Mệnh đề 1.15:

3.11 Mệnh đề. *Nếu f và g khả tích trên D thì:*

(a) *$f+g$ khả tích và $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$.*

(b) *Với mọi số thực c thì cf khả tích và $\int_D cf = c\int_D f$.*

(c) *Nếu $f \le g$ thì $\int_D f \le \int_D g$.*

Chứng minh. Ta chứng minh phần (a), các phần còn lại được để ở phần bài tập. Lấy một hình hộp I chứa D và gọi F và G lần lượt là mở rộng của f và g lên I, bằng 0 ngoài D. Theo định nghĩa của tích phân, do f và g khả tích trên D nên F và G khả tích trên I. Theo tính chất của tích phân trên hình hộp, Mệnh đề 1.15, ta có $(F+G)$ khả tích trên I và

$$\int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G.$$

Vì $(F+G)$ là mở rộng của $(f+g)$ lên I bằng 0 ngoài D nên $(F+G)$ khả tích trên I dẫn tới $(f+g)$ khả tích trên D. Hơn nữa

$$\int_D (f+g) = \int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G = \int_D f + \int_D g.$$

□

Ví dụ. Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$, A có thể tích. Cho $c \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_A c = \int_A c \cdot 1 = c \int_A 1 = c|A|.$$

■

Tương tự như kết quả cho hình hộp, Định lý 2.11, ta có:

3.12 Mệnh đề. *Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, f và g bị chặn trên D, và $f = g$ trên D trừ một tập có thể tích không. Ta có f khả tích khi và chỉ khi g khả tích, và khi đó $\int_D f = \int_D g$.*

Nói tóm tắt, ***giá trị của một hàm bị chặn trên một tập thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.***

Chứng minh. Lấy một hình hộp I chứa D. Gọi F và G là các mở rộng của f và g lên I, bằng không ngoài D. Khi đó $F(x) = G(x)$ trên I trừ ra một tập thể tích không. Nếu f khả tích trên D thì F khả tích trên I. Từ đây theo Định lý 2.11 thì G khả tích trên I, nên g khả tích trên D, và $\int_D f = \int_I F = \int_I G = \int_D g$. □

3.13 Hệ quả (thêm bớt một tập thể tích không không ảnh hưởng tới tích phân). *Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, C là tập con của D có thể tích không, và f bị chặn trên D. Ta có f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên $D \setminus C$, và khi đó $\int_D f = \int_{D\setminus C} f$.*

Chứng minh. Đặt hàm g xác định trên D sao cho $g(x) = f(x)$ trên $D \setminus C$ và $g(x) = 0$ trên C. Do Mệnh đề 3.12 hàm g cũng khả tích trên D và $\int_D g = \int_D f$. Mặt khác từ định nghĩa của tích phân trên tập tổng quát ta rút ra $\int_D g = \int_{D\setminus C} g = \int_{D\setminus C} f$. □

Ví dụ. Hàm sau có khả tích không, nếu có thì tích phân bằng bao nhiêu?

$$f(x,y) = -1,\ 0 \le x < 1,\ 0 \le y \le 2.$$

Tập xác định của hàm f là hình chữ nhật $D = [0,1] \times [0,2]$ bỏ đi tập $C = \{1\} \times [0,2]$. Hàm f bằng thu hẹp của hàm hằng -1 từ tập D xuống tập $D \setminus C$. Tập C là tập diện tích không nên theo Hệ quả 3.13 tính khả tích và tích phân của f trùng với tính khả tích và tích phân của hàm -1 trên D. Vậy f khả tích và tích phân của f bằng $(-1) \times 1 \times 2 = -2$. ■

3.14 Hệ quả. *Cho D_1 và D_2 là hai tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. Giả sử $D_1 \cap D_2$ có thể tích không. Nếu f khả tích trên D_1 và trên D_2 thì f khả tích trên $D_1 \cup D_2$, và*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Kết quả này cho phép ta ***tính tích phân trên một miền bằng cách chia miền đó thành những miền đơn giản hơn***.

Ví dụ. Một trường hợp riêng, ta có công thức quen thuộc cho hàm một biến:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

■

Chứng minh. Đặt f_1 xác định trên $D = D_1 \cup D_2$ sao cho $f_1 = f$ trên D_1 và $f_1 = 0$ trên $D \setminus D_1$. Tương tự, đặt f_2 xác định trên D sao cho $f_2 = f$ trên D_2 và $f_2 = 0$ trên $D \setminus D_2$. Vì f khả tích trên D_1 nên từ định nghĩa tích phân ta có ngay f_1 khả tích trên D và $\int_D f_1 = \int_{D_1} f$. Tương tự f_2 khả tích trên D và $\int_D f_2 = \int_{D_2} f$.

Ta có $f_1 + f_2 = f$ trên $D \setminus (D_1 \cap D_2)$. Vì $f_1 + f_2$ khả tích trên D và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không nên do Mệnh đề 3.12 hàm f khả tích trên D và do Mệnh đề 3.11:

$$\int_D f = \int_D (f_1 + f_2) = \int_D f_1 + \int_D f_2 = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

□

Ví dụ. Hàm sau có khả tích không, nếu có thì tích phân bằng bao nhiêu?

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 3, & 1 < x \le 2,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Theo Hệ quả 3.14 ta có

$$\iint_{[0,2]\times[0,1]} f = \iint_{[0,1]\times[0,1]} f + \iint_{(1,2]\times[0,1]} f = \iint_{[0,1]\times[0,1]} 2 + \iint_{(1,2]\times[0,1]} 3.$$

Vì tập $\{1\} \times [0,1]$ có diện tích không nên theo Hệ quả 3.13 ta có

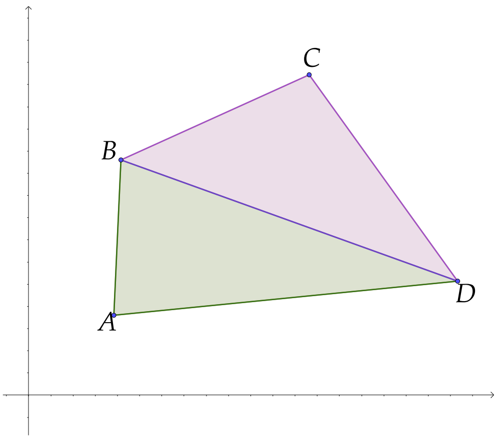
$$\iint_{(1,2]\times[0,1]} 3 = \iint_{[1,2]\times[0,1]} 3.$$

Vậy f khả tích và tích phân của f bằng $2 + 3 = 5$. ■

Trong Mệnh đề 3.14 trên lấy $f = 1$ ta có kết quả:

3.15 Hệ quả (tính cộng của thể tích). *Nếu D_1 và D_2 có thể tích và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không thì $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$. Đặc biệt, điều này đúng khi D_1 và D_2 rời* *nhau.*

Đây là một trong những tính chất nền tảng của thể tích mà ta hướng tới từ đầu. Khi tính diện tích một hình ta vẫn thường chia hình đó thành những hình đơn giản hơn bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong (vốn có diện tích không), rồi cộng các diện tích của các hình đơn giản hơn đó lại với nhau.

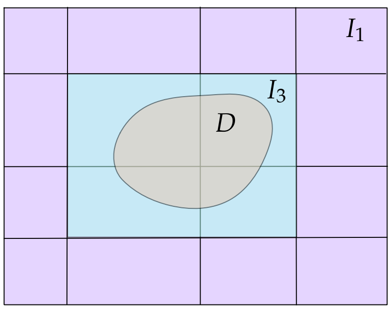


Hình 3.16: Diện tích miền bao bởi tứ giác $ABCD$ bằng diện tích miền bao bởi tam giác ABD cộng diện tích miền bao bởi tam giác BCD. Hai tam giác này có phần giao là cạnh BD, tuy khác rỗng nhưng có diện tích không.

* *Chứng minh Bổ đề 3.1.* Giả sử F_1 là mở rộng của f lên $I_1 \supset D$ bằng không ngoài D, và F_2 là mở rộng của f lên $I_2 \supset D$ bằng không ngoài D. Ta cần chứng minh điều sau: nếu F_1 khả tích trên I_1 thì F_2 khả tích trên I_2, và $\int_{I_1} F_1 = \int_{I_2} F_2$.

Đặt $I_3 = I_1 \cap I_2$ thì I_3 là một hình hộp con của I_1, và F_3 là mở rộng của f lên $I_3 \supset D$ bằng không ngoài D. Ta chứng minh điều sau là đủ: F_1 khả tích trên I_1 khi và chỉ khi F_3 khả tích trên I_3, và $\int_{I_1} F_1 = \int_{I_3} F_3$.

Đặt hàm F_1' xác định trên I_1 sao cho F_1' trùng với F_1 trừ ra trên biên của I_3, nơi mà F_1' được định nghĩa là bằng không. Vì F_1' chỉ khác F_1 trên một tập có thể tích không nên theo 2.11 F_1' khả tích khi và chỉ khi F_1 khả tích, và $\int_{I_1} F_1' = \int_{I_1} F_1$.



Một phép chia bất kì P của I_3 sinh ra một phép chia P' của I_1 bằng cách thêm vào tọa độ các đỉnh của I_1. Nếu một hình hộp con R ứng với P' không chứa trong I_3 thì $\sup_R F_1' = \inf_R F_1' = 0$ (ở chỗ này có dùng giả thiết F_1' bằng không trên biên của I_3). Điều này dẫn tới $U(F_1', P') = U(F_1' |_{I_3}, P)$ và $L(F_1', P') =$

$L(F_1'|_{I_3}, P)$. Do đó ta kết luận nếu $F_1'|_{I_3}$ khả tích thì F_1' khả tích và $\int_{I_1} F_1' = \int_{I_3} F_1'|_{I_3}$.

Ngược lại, một phép chia bất kì P' của I_1 sinh ra một phép chia P'' của I_1 mịn hơn P' bằng cách thêm vào tọa độ các đỉnh của I_3. Hạn chế P'' lên I_3 ta được một phép chia P của I_3. Giống như đoạn vừa rồi, $U(F_1', P'') = U(F_1'|_{I_3}, P)$ và $L(F_1', P'') = L(F_1'|_{I_3}, P)$. Do đó nếu F_1' khả tích thì $F_1'|_{I_3}$ khả tích và $\int_{I_3} F_1'|_{I_3} = \int_{I_1} F_1'$.

Cuối cùng, hàm $F_1'|_{I_3}$, hạn chế của F_1' xuống I_3, chỉ có thể khác F_3 trên biên của I_3, một tập có thể tích không. Do đó $F_1'|_{I_3}$ khả tích khi và chỉ khi F_3 khả tích, và $\int_{I_3} F_1'|_{I_3} = \int_{I_3} F_3$. □

Bài tập

3.17. Giải thích tại sao khoảng (a, b) có chiều dài bằng $(b - a)$.

3.18. Giải thích tại sao miền phẳng bên dưới parabola $y = 1 - x^2$ bên trên đoạn $-1 \leq x \leq 1$ có diện tích.

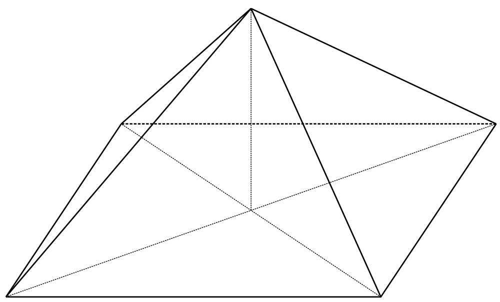
3.19. Giải thích tại sao miền phẳng bao bởi một đường elip (một hình bầu dục)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

là có diện tích.

3.20. Hãy giải thích chi tiết tại sao khối tứ diện với 4 đỉnh $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ là có thể tích.

3.21. Hãy giải thích tại sao khối chóp đáy là một hình chữ nhật, Hình 3.22, là có thể tích.



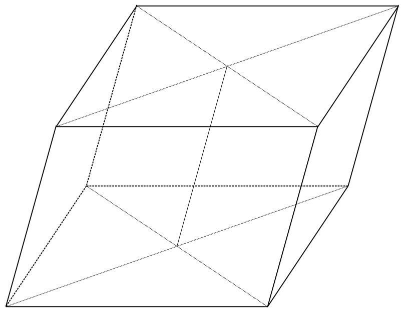
Hình 3.22: Khối chóp đáy là một hình chữ nhật, còn gọi là khối kim tự tháp.

3.23. Hãy giải thích tại sao khối lăng trụ đáy là một hình chữ nhật, Hình 3.24, là có thể tích.

3.25. Hàm sau có khả tích không, nếu có thì tích phân bằng bao nhiêu?

(a)

$$f(x, y) = 4, \ 0 < x < 1, \ 0 \leq y < 2.$$



Hình 3.24: Khối lăng trụ đáy là một hình chữ nhật.

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ -2, & 1 < x \le 3,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 4, & 0 \le x \le 1,\ 1 < y \le 2, \\ 5, & 1 < x \le 2,\ 0 \le y \le 2. \end{cases}$$

3.26. Ở Ví dụ 3.5 ta đã giải thích được miền bao bởi hình tròn có diện tích. Ta có thể gọi số π là diện tích của miền bao bởi hình tròn bán kính 1 (có thể đọc thêm ở mục **??**). Từ đó ta có một cách đơn giản trực quan để ước lượng số π bằng diện tích, từ ý ở Hình 3.2. Ta đếm số hình vuông nằm trong hình tròn từ đó có một chặn dưới, và đếm số hình vuông tối thiểu để phủ miền bao bởi hình tròn, từ đó có một chặn trên, xem Hình 3.27.

Ví dụ ở hình bên trái của Hình 3.27, với phép chia trong hình, có 4 hình vuông bên trong miền bao bởi hình tròn, và cần 16 hình vuông để phủ miền bao bởi hình tròn, do đó ta có chặn

$$4 \times (0{,}5 \times 0{,}5) = 1 \le \pi \le 16 \times (0{,}5 \times 0{,}5) = 4.$$

Nếu ta lấy phép chia mịn hơn thì đánh giá tốt hơn. Hãy cải thiện đánh giá cho số π bằng cách dùng phép chia ở hình bên phải của Hình 3.27.

3.28. Chứng minh Mệnh đề 3.11.

3.29. Giả sử $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, A và B có thể tích. Chứng tỏ $|A| \le |B|$.

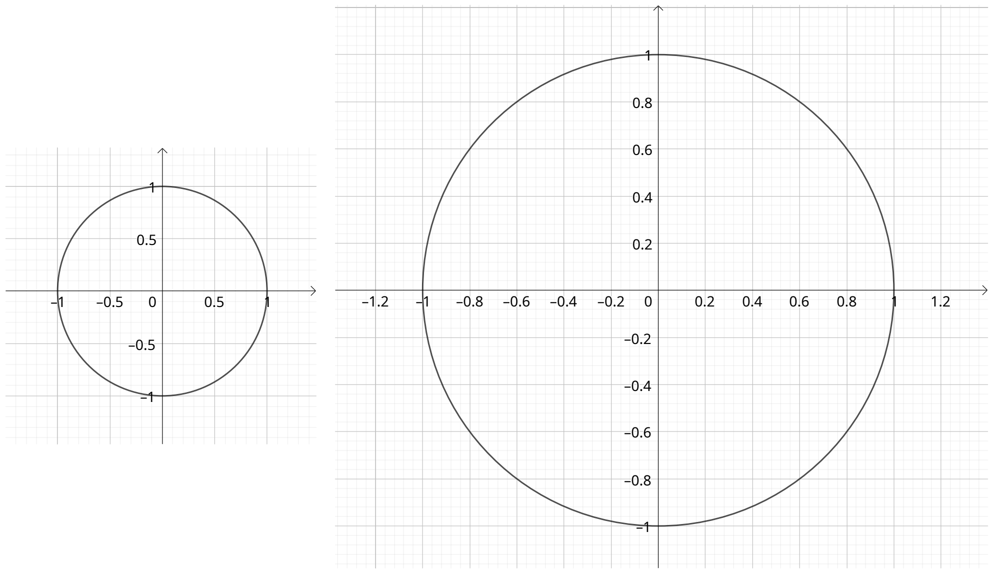
3.30. Giả sử $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, f khả tích trên A và B, và $f \ge 0$. Chứng tỏ $\int_A f \le \int_B f$.

3.31. Cho f khả tích trên D. Giả sử $|f|$ khả tích trên D, chứng tỏ $\left|\int_D f\right| \le \int_D |f|$. (Xem thêm Bài tập 3.32.)

3.32. * Chứng minh rằng nếu f khả tích trên D thì $|f|$ cũng khả tích trên D.

3.33. * Chứng tỏ tích phân của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không thì bằng không.

3.34. * Giả sử hàm f liên tục trên hình hộp I và $f(x) \ge 0$ trên I. Chứng minh rằng nếu $\int_I f = 0$ thì $f = 0$ trên I. Điều này có còn đúng không nếu bỏ giả thiết liên tục?



Hình 3.27: Ước lượng số π bằng diện tích.

3.35. * Tìm tập $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho tích phân

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

đạt giá trị lớn nhất.

3.36. * Chứng tỏ một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không khi và chỉ khi nó có thể tích và thể tích đó bằng không. Như vậy "thể tích không" chính là "thể tích bằng không"!

4 Công thức Fubini

Công thức Fubini [13] trong mặt phẳng có dạng:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy. \tag{4.1}$$

Một tích phân của tích phân như ở vế phải của (4.1) được gọi là một **tích phân lặp** [14]. Công thức Fubini đưa bài toán tính tích phân của hàm nhiều biến về bài toán tính tích phân của hàm một biến, hay còn được nói là ***đưa tích phân bội về tích phân lặp***.

Ví dụ. Để nhanh chóng minh họa, ta thử dùng công thức Fubini để tính tích phân $\iint_{[0,1]\times[2,4]} x\,dxdy$.

Giả sử công thức Fubini áp dụng được, thì:

$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} x\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_2^4 x\,dy\right) dx = \int_0^1 xy\Big|_{y=2}^{y=4} dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Áp dụng công thức Fubini theo thứ tự ngược lại:

$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} x\,dxdy = \int_2^4 \left(\int_0^1 x\,dx\right) dy = \int_2^4 \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_2^4 \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}y\Big|_{y=2}^{y=4} = 1.$$

■

Về mặt số lượng công thức Fubini nói rằng tổng giá trị của hàm trên hình chữ nhật bằng tổng của các tổng giá trị trên các đoạn cắt song song.

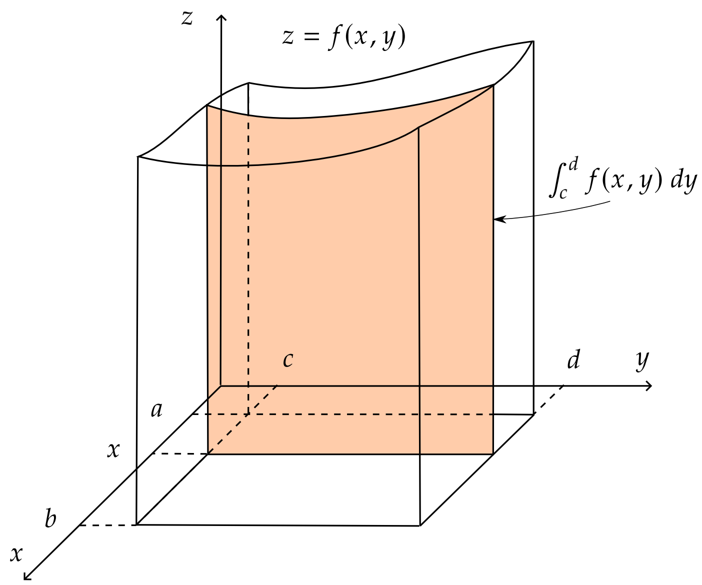
Về mặt trực quan ta có thể giả thích công thức (4.1) trên như sau, xem Hình 4.2. Giả sử $f > 0$. Khi đó $\int_{[a,b]\times[c,d]} f$ là "thể tích" của khối bên dưới mặt $z = f(x,y)$ bên trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, còn $\int_c^d f(x_0,y)\,dy$ là "diện tích" của mặt cắt [15] của khối bởi mặt phẳng $x = x_0$. Vậy công thức Fubini nói rằng ***thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song.***

Còn có thể giải thích công thức (4.1) bằng cách xấp xỉ thể tích của khối như sau. Chia khoảng $[a,b]$ thành những khoảng con. Ứng với những khoảng con này, khối được cắt thành những mảnh bởi những mặt cắt song song. Vì chiều dài mỗi khoảng con là nhỏ, ta có thể xấp xỉ thể tích của mỗi mảnh bởi diện tích một mặt cắt nhân với chiều dài của khoảng con. Giải thích cũng gợi ý tên gọi **phương pháp cắt lớp**.

[13] Guido Fubini chứng minh một dạng tổng quát của công thức vào đầu thế kỉ 20, nhưng những kết quả dạng này đã được biết trước đó khá lâu.

[14] iterated integral

[15] cross-section



Hình 4.2: Giải thích công thức Fubini (4.1).

Chi tiết hơn, ta xấp xỉ theo tổng Riemann như sau. Giả sử $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ là một phép chia của khoảng $[a, b]$ và $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ là một phép chia của khoảng $[c, d]$. Với x_i^* là điểm đại diện bất kì thuộc khoảng con $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ và y_j^* là điểm đại diện bất kì thuộc $\Delta y_j = [y_{j-1}, y_j]$, xem Hình 1.3, thì

$$\begin{aligned}
\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy &\approx \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} f(x_i^*, y_j^*) \left|\Delta x_i \times \Delta y_j\right| \\
&= \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} f(x_i^*, y_j^*) \left|\Delta x_i\right| \left|\Delta y_j\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \left|\Delta y_j\right| \right) \left|\Delta x_i\right| \\
&\approx \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(x_i^*, y)\, dy \right) \left|\Delta x_i\right| \\
&\approx \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Giải thích trên cho thấy công thức Fubini tương ứng với việc tính tổng Riemann của tích phân bội hai bằng cách lấy tổng trên các hình hộp con lần lượt theo cột hoặc lần lượt theo hàng.

4.3 Định lý (công thức Fubini). *Cho A là một hình hộp trong $\mathbb{R}^m$ và B là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$. Cho f khả tích trên hình hộp $A \times B$ trong $\mathbb{R}^{m+n}$. Giả sử với mỗi $x \in A$*

tích phân $\int_B f(x,y)\,dy$ tồn tại, khi đó

$$\boxed{\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)\,dx.}$$

Tương tự, giả sử với mỗi $y \in B$ tích phân $\int_A f(x,y)\,dx$ tồn tại, khi đó

$$\boxed{\int_{A\times B} f = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx\right)\,dy.}$$

Chứng minh dùng tổng Riemann. Đây chỉ là viết lại chính xác giải thích bằng xấp xỉ với tổng Riemann ở trên.

Ta chứng minh công thức thứ nhất, công thức thứ hai là tương tự.

Cho $\epsilon > 0$ bất kì. Lấy các phép chia đều hình hộp A thành K^m hình hộp con và chia đều hình hộp B thành L^n hình hộp con. Do f khả tích, tồn tại các số nguyên dương K_0 và L_0 để với mọi $K \geq K_0$ và với mọi $L \geq L_0$ và với mọi cách chọn điểm đại diện x_i^* thuộc hình hộp con $R_{A,i}$ của A và y_j^* thuộc hình hộp con $R_{B,j}$ của B thì

$$\left|\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy - \sum_{1\leq i\leq K^m, 1\leq j\leq L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{A,i}\times R_{B,j}\right|\right| < \epsilon. \tag{4.4}$$

Ta viết

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq K^m, 1\leq j\leq L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{A,i}\times R_{B,j}\right| &= \sum_{1\leq i\leq K^m, 1\leq j\leq L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{A,i}\right|\left|R_{B,j}\right| \\ &= \sum_{i=1}^{K^m}\left(\sum_{j=1}^{L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{B,j}\right|\right)\left|R_{A,i}\right|.\end{aligned}$$

Với mỗi i thỏa $1 \leq i \leq K^m$, do $f(x_i^*, y)$ khả tích theo biến y trên B nên tồn tại số nguyên dương L_i sao cho với mọi $L \geq L_i$ thì

$$\left|\sum_{j=1}^{L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{B,j}\right| - \int_B f(x_i^*, y)\,dy\right| < \epsilon.$$

Nếu $L \geq \max\{L_i \mid 0 \leq i \leq K^m\}$ thì bất đẳng thức trên đúng với mọi i, nên

$$\left|\sum_{i=1}^{K^m}\left(\sum_{j=1}^{L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{B,j}\right| - \int_B f(x_i^*, y)\,dy\right)\left|R_{A,i}\right|\right| < \sum_{i=1}^{K^m} \epsilon\left|R_{A,i}\right| = \epsilon|A|,$$

tức là

$$\left|\sum_{i=1}^{K^m}\left(\sum_{j=1}^{L^n} f(x_i^*, y_j^*)\left|R_{B,j}\right|\right)|R_{A,i}| - \sum_{i=1}^{K^m}\left(\int_B f(x_i^*, y)\, dy\right)|R_{A,i}|\right| < \epsilon|A|. \tag{4.5}$$

Kết hợp lại (4.4) và (4.5) ta thu được, nếu $K \geq K_0$ thì với mọi cách chọn điểm đại diện x_i^* ta có

$$\left|\int_{A\times B} f(x, y)\, dxdy - \sum_{i=1}^{K^m}\left(\int_B f(x_i^*, y)\, dy\right)|R_{A,i}|\right| < \epsilon(1 + |A|).$$

Ta kết luận hàm $\int_B f(x, y)\, dy$ khả tích theo biến x trên A, và tích phân của nó phải bằng $\int_{A\times B} f(x, y)\, dxdy$. □

Chứng minh bằng tổng dưới và tổng trên. Đây thực ra là một lý luận tương tự cách trên, nhưng thay tổng Riemann bởi tổng dưới và tổng trên.

Ta chứng minh công thức thứ nhất, công thức thứ hai là tương tự.

Gọi P là một phép chia bất kì của hình hộp $A \times B$. Khi đó P là tích của một phép chia P_A của A và một phép chia P_B của B. Ta có:

$$\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{R_A\times R_B}\left(\inf_{R_A\times R_B} f\right)|R_A \times R_B| \\
&= \sum_{R_A\times R_B}\left(\inf_{R_A\times R_B} f\right)|R_A||R_B| \\
&= \sum_{R_A}\left(\sum_{R_B}\left(\inf_{(x,y)\in R_A\times R_B} f(x, y)\right)|R_B|\right)|R_A|\,.
\end{aligned}$$

Với mỗi $x \in R_A$ ta có $\inf_{(x,y)\in R_A\times R_B} f(x, y) \leq \inf_{y\in R_B} f(x, y)$, nên (dấu chấm ở vị trí của biến chỉ việc ta xét hàm theo biến đó còn các biến khác thì cố định)

$$\begin{aligned}
\sum_{R_B}\left(\inf_{(x,y)\in R_A\times R_B} f(x, y)\right)|R_B| &\leq \sum_{R_B}\left(\inf_{y\in R_B} f(x, y)\right)|R_B| \\
&= L(f(x, \cdot), P_B) \\
&\leq \int_B f(x, y)\, dy,
\end{aligned}$$

lấy $\inf_{x\in R_A}$ ta được

$$\sum_{R_B}\left(\inf_{(x,y)\in R_A\times R_B} f(x, y)\right)|R_B| \leq \inf_{x\in R_A}\int_B f(x, y)\, dy,$$

do đó

$$L(f,P) \le \sum_{R_A} \left(\inf_{x \in R_A} \int_B f(x,y)\,dy \right) |R_A| = L\Big(\int_B f(\cdot,y)\,dy, P_A\Big).$$

Tương tự đối với tổng trên, thay inf bởi sup trong lý luận trên, ta được

$$U\Big(\int_B f(\cdot,y)\,dy, P_A\Big) \le U(f,P).$$

Áp dụng tiêu chuẩn khả tích 1.13, từ giả thiết f khả tích ta suy ra $\int_B f(\cdot,y)\,dy$ phải khả tích trên A, và giá trị của $\int_A \left(\int_B f(\cdot,y)\,dy \right)\,dx$ phải trùng với giá trị của $\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy$. □

4.6 Ví dụ. Trở lại Ví dụ 1.11, ta tính tích phân $\iint_{[0,4]\times[0,2]} (x+2y)\,dxdy$.

Vì hàm $(x,y) \mapsto x+2y$ là liên tục trên hình chữ nhật $[0,4]\times[0,2]$ nên tích phân trên tồn tại, công thức Fubini áp dụng được, cho:

$$\begin{aligned}\iint_{[0,4]\times[0,2]} (x+2y)\,dxdy &= \int_0^4 \left(\int_0^2 (x+2y)\,dy \right) dx = \int_0^4 (xy+y^2)\Big|_{y=0}^{y=2}\,dx \\ &= \int_0^4 (2x+4)\,dx = (x^2+4x)\Big|_{x=0}^{x=4} = 32.\end{aligned}$$

Ta cũng có thể áp dụng công thức Fubini theo thứ tự khác:

$$\begin{aligned}\iint_{[0,4]\times[0,2]} (x+2y)\,dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^4 (x+2y)\,dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2+2xy\right)\Big|_{x=0}^{x=4}\,dx \\ &= \int_0^2 (8+8y)\,dy = (8y+4y^2)\Big|_{y=0}^{y=2} = 32.\end{aligned}$$

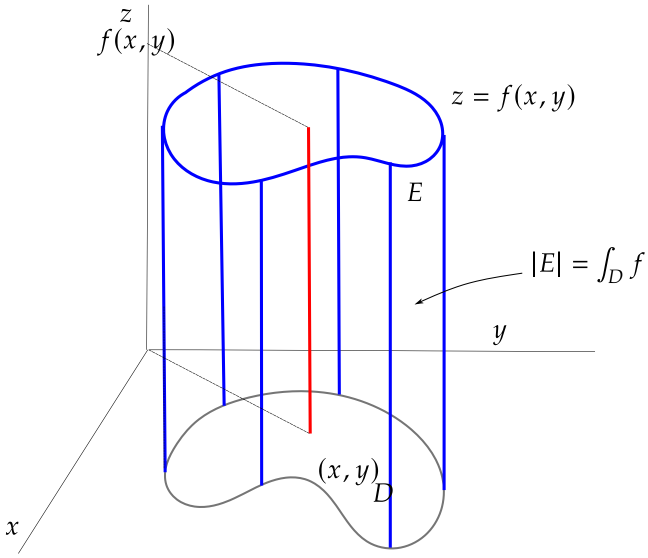
■

4.7 Hệ quả (thể tích của miền dưới đồ thị). *Giả sử f là hàm xác định và không âm trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^n$. Gọi E là miền dưới đồ thị của f bên trên miền D, tức $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in D,\ 0 \le y \le f(x)\}$. Nếu E có thể tích thì f khả tích và thể tích của E bằng tích phân của f trên D:*

$$\boxed{|E| = \int_D f.}$$

Vậy ***thể tích bên dưới đồ thị bằng tích phân của hàm***. Ta đã hướng tới điều này từ đầu khi xây dựng tích phân nhưng tới giờ mới thu được.

Ví dụ. Trường hợp hàm một biến, diện tích bên dưới đồ thị $y = f(x) \ge 0$ với



Hình 4.8: Thể tích của miền bên dưới đồ thị.

$a \leq x \leq b$ bằng tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$. Trong Vi tích phân [BMGT] điều này thường được lấy làm định nghĩa. ■

Chứng minh. Vì E có thể tích nên nó bị chặn, có một hình hộp chứa nó. Ta có thể lấy hình hộp đó là $I \times [0, c]$ với I là một hình hộp n-chiều trong $\mathbb{R}^n$ chứa D và c đủ lớn. Áp dụng công thức Fubini:

$$|E| = \int_E 1 = \int_{I \times [0,c]} \chi_E = \int_I \left(\int_0^c \chi_E(x, y)\,dy \right) dx.$$

Nếu $x \in I \setminus D$ thì $\chi_E(x, y) = 0\ \forall y \in [0, c]$, do đó $\int_0^c \chi_E(x, y)\,dy = 0$. Nếu $x \in D$ thì $\chi_E(x, y) = 1$ khi và chỉ khi $0 \leq y \leq f(x)$, do đó $\int_0^c \chi_E(x, y)\,dy = \int_0^{f(x)} 1\,dy = f(x)$. Do đó theo định lý Fubini thì f khả tích và

$$\int_I \left(\int_0^c \chi_E(x, y)\,dy \right) dx = \int_D \left(\int_0^c \chi_E(x, y)\,dy \right) dx = \int_D f(x)\,dx.$$

□

Ví dụ (diện tích một tam giác vuông). Xét D là tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), với $a, b > 0$. Đây là miền dưới đồ thị $y = \frac{b}{a}x$ với $0 \leq x \leq a$. Như ta đã biết ở 3.4, tam giác D có diện tích. Ta tính

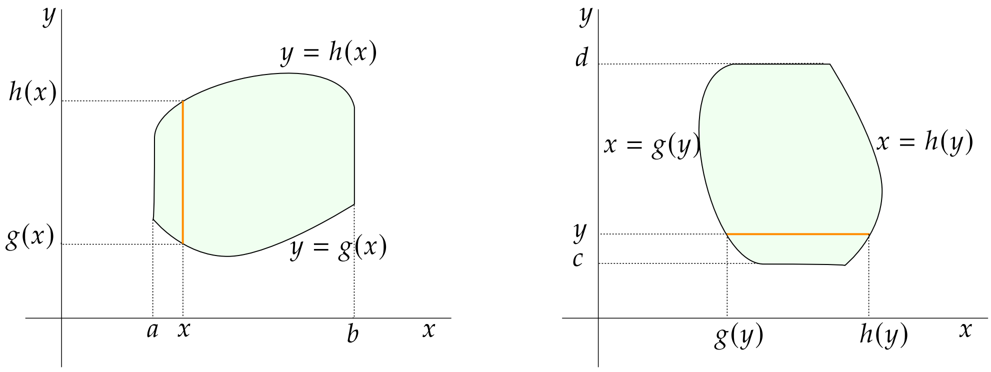
$$|D| = \int_0^a \frac{b}{a} x\,dx = \frac{1}{2}ab.$$

Vậy diện tích tam giác vuông này bằng phân nửa tích chiều dài hai cạnh góc vuông. ■

Công thức Fubini cho miền phẳng

Công thức Fubini áp dụng dễ dàng hơn đối với những miền "đơn giản". Một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một **miền đơn giản theo chiều đứng** nếu nó có dạng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Đây là một miền giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng đứng nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng.

Tương tự, một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một **miền đơn giản theo chiều ngang** nếu nó có dạng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ g(y) \leq x \leq h(y)\}$.



Hình 4.9: Miền hai chiều đơn giản.

4.10 Mệnh đề. *Cho miền đơn giản theo chiều đứng $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Giả sử f, g và h liên tục. Khi đó*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.}$$

Công thức có thể đúng dưới những điều kiện tổng quát hơn như ở 4.7 nhưng chúng ta chỉ phát biểu ở dạng thường dùng trong môn học này. Trường hợp miền đơn giản theo chiều nằm ngang là tương tự.

Chứng minh. Ta chỉ ra với những điều kiện này thì miền D có diện tích. Do g và h bị chặn nên D bị chặn. Ta chứng tỏ biên của D có diện tích không.

Ta có thể kiểm tra là phần trong của D chứa tập $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ g(x) < y < h(x)\}$. Một cách kiểm tra là bằng định nghĩa điểm trong, giả sử $a < x_0 < b$ và $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Có số $\epsilon > 0$ sao cho $g(x_0) < y_0 - \epsilon$ và $h(x_0) > y_0 + \epsilon$. Do g và h liên tục nên có khoảng mở U chứa x_0 sao cho với $x \in U$ thì $g(x) < y_0 - \epsilon$ và $h(x) > y_0 + \epsilon$. Suy ra hình chữ nhật mở $U \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ được chứa trong D, mà đó là một lân cận mở của điểm (x_0, y_0), vậy điểm (x_0, y_0) là một điểm trong của D.

Một cách kiểm tra khác là như sau. Đặt $p(x,y) = y - g(x)$, và $q(x,y) =$

$y - h(x)$, là các hàm thực hai biến liên tục trên $(a, b) \times \mathbb{R}$. Viết

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ g(x) < y < h(x)\} = p^{-1}((0, \infty)) \cap q^{-1}((-\infty, 0))$$

ta thấy đây là một tập mở trong $(a, b) \times \mathbb{R}$, do đó cũng mở trong $\mathbb{R}^2$.

Tương tự, ta kiểm tra được tập D là đóng. Suy ra biên của D chứa trong $D \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ g(x) < y < h(x)\}$, bằng hội của đồ thị của g và h và hai đoạn thẳng $\{(a, y) \mid g(a) \le y \le h(a)\}$ và $\{(b, y) \mid g(b) \le y \le h(b)\}$. Do 3.8 các tập này có diện tích không.

Lấy một hình chữ nhật $I = [a, b] \times [c, d]$ chứa D. Gọi F là mở rộng của f lên I bằng không ngoài D. Vì f liên tục trên tập có diện tích D nên f khả tích trên D, do đó F khả tích trên I. Ngoài ra $\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy$ tồn tại. Áp dụng công thức Fubini cho F:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\, dxdy &= \iint_I F(x, y)\, dxdy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.\end{aligned}$$

□

4.11 Ví dụ (diện tích miền nằm giữa hai đồ thị). Cho $f = 1$, ta được diện tích của miền nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục g và h, với $g \le h$, bên trên đoạn $[a, b]$, là $\int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx$. Đặc biệt nếu $g = 0$ thì diện tích bên dưới đồ thị hàm liên tục h là $\int_a^b h(x)\, dx$. Trong môn Vi tích phân 1 các công thức này thường được lấy làm định nghĩa của diện tích. ■

4.12 Ví dụ (diện tích của miền bao bởi đường tròn). Với đường tròn tâm tại gốc tọa độ bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$ thì miền bao bởi đường tròn nằm giữa nửa đường tròn trên $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ và nửa đường tròn dưới $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Dùng 4.11, diện tích của miền này là

$$\int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \right) \right) dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Đổi biến $x = R \sin t$, $dx = R \cos t\, dt$, $x = -R \implies t = -\pi/2$, $x = R \implies t =$

$\pi/2$, ta được

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2 t\ dt \\ &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt \\ &= R^2 \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.\end{aligned}$$

Tương tự, với đường tròn tổng quát, tâm ở điểm (a, b) bán kính R, có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, thì diện tích bao bởi đường tròn này là, với phép thế (đổi biến) $u = x - a$,

$$\begin{aligned}\int_{a-R}^{a+R} \left(\left(b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}\right) - \left(b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}\right)\right)\, dx &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - u^2}\, du \\ &= \pi R^2.\end{aligned}$$

■

Ví dụ. Tính tích phân $\iint_D e^{y^2}\, dA$, trong đó D là tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(0, 2)$.

Ta có thể miêu tả D theo hai cách

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2y\}.$$

Để thấy hai cách miêu tả này tương đương, ta có thể dùng trực quan hình học qua hình vẽ, hoặc biến đổi mỗi hệ bất phương trình dẫn tới hệ còn lại.

Các giả thiết ở 4.10 để áp dụng công thức Fubini được thỏa cho cả hai cách miêu tả.

Theo cách miêu tả thứ nhất, tức là xem D là miền đơn giản theo chiều đứng, thì công thức Fubini cho:

$$I = \iint_D e^{y^2}\, dA = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2} e^{y^2}\, dy\right) dx.$$

Tuy nhiên người ta biết nguyên hàm của hàm e^{y^2} theo biến y không phải là một hàm sơ cấp, do đó không có công thức cho nó, khiến ta không tính được tích phân lặp này.

Ta chuyển hướng dùng cách miêu tả thứ hai, xem D là miền đơn giản theo chiều ngang. Ta đổi thứ tự tích phân lặp:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^{2y} e^{y^2}\, dx \right) dy = \int_0^2 x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=2y} dy = \int_0^2 2y e^{y^2}\, dy = e^{y^2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\ &= e^4 - 1. \end{aligned}$$

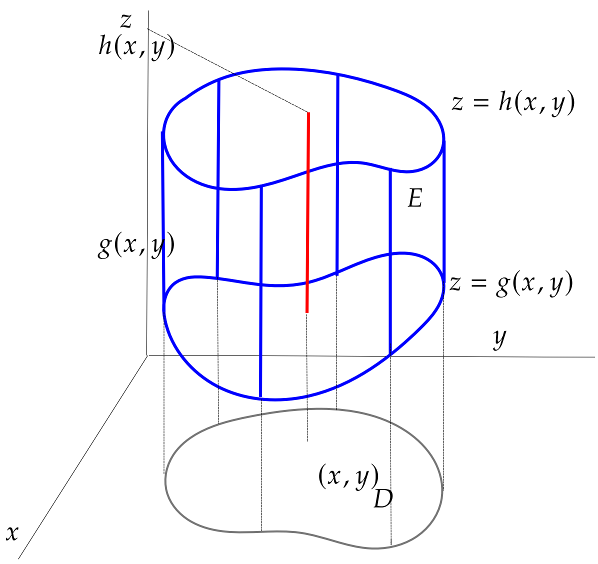
Đây là một ví dụ cho **phương pháp đổi thứ tự tích phân lặp**. ■

Trong trường hợp tính tích phân trên một miền không đơn giản ta có thể tìm cách chia miền này thành những miền đơn giản, rồi dùng 3.14.

Ghi chú. * Trong hai ví dụ trên ta dùng hàm lượng giác và hàm mũ. Các hàm này rất quen thuộc, nhưng xây dựng chúng một cách suy diễn từ tập hợp số thực và rút ra các tính chất của chúng với đầy đủ chi tiết chưa được làm trong chương trình trung học và ít khi được thảo luận trong chương trình đại học. Tuy nhiên chúng ta an tâm là việc này thực hiện được, nhờ đó các hàm này và các tính chất của chúng nằm trong cùng hệ suy diễn của môn học này, xem chẳng hạn ở [Vnt].

Công thức Fubini cho miền ba chiều

Tương tự trường hợp hai chiều ta có thể nói về miền ba chiều đơn giản. Một tập con của $\mathbb{R}^3$ được gọi là một **miền đơn giản theo chiều trục z** nếu nó có dạng $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g(x, y) \le z \le h(x, y)\}$. Đây là miền nằm giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng cùng phương với trục z nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng. Xem Hình 4.13. Tương tự có khái niệm miền đơn giản theo chiều trục x và trục y.



Hình 4.13: Miền ba chiều đơn giản theo chiều trục z.

Tương tự trường hợp hai chiều 4.10, ta có:

4.14 Mệnh đề. *Cho miền $D \subset \mathbb{R}^2$ đóng và có diện tích, và một miền đơn giản theo chiều trục z là $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\}$. Giả sử f, g và h liên tục. Khi đó*

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.}$$

Chứng minh. Ta kiểm với những điều kiện này thì E có thể tích.

Vì g và h liên tục trên D bị đóng và bị chặn (compắc) nên g và h bị chặn, nên E bị chặn.

Ta kiểm biên của E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Làm tương tự như trong chứng minh cho trường hợp hai chiều ở trên (4.10), ta có thể kiểm E là tập đóng và phần trong của E chứa tập $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in \mathring{D},\ g(x,y) < z < h(x,y)\}$, do đó biên của E chứa trong hội của đồ thị của g và h và với "mặt đứng" của E là tập $K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \partial D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\}$. Xem Hình 4.13.

Theo 3.8 đồ thị của g và h có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Đặt D trong một hình chữ nhật I trong $\mathbb{R}^2$. Có một khoảng $[a,b]$ sao cho hình hộp $I \times [a,b]$ chứa E thì $K \subset (\partial D \times [a,b])$. Vì D có diện tích nên ∂D có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$, theo 3.3. Cho trước $\epsilon > 0$ ta có thể phủ ∂D bằng hữu hạn hình chữ nhật với tổng diện tích nhỏ hơn ϵ. Lấy tích của mỗi hình chữ nhật đó với khoảng $[a,b]$ ta được một phủ của $\partial D \times [a,b]$ bởi các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn $\epsilon(b-a)$. Vậy K có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$, và ta kết luận E có thể tích. Hàm f liên tục trên E nên khả tích.

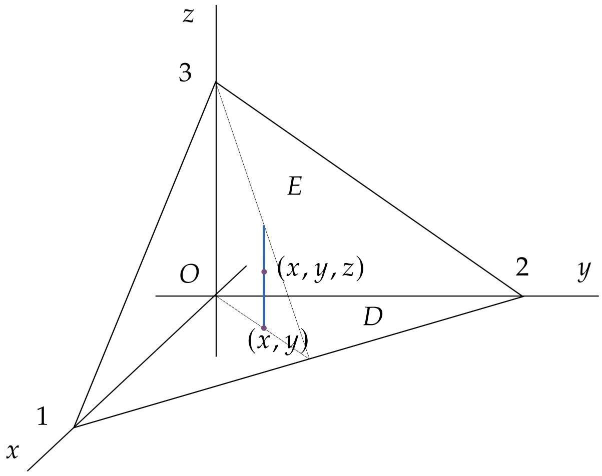
Lấy mở rộng F của f lên $I \times [a,b]$ sao cho F bằng không ngoài E. Nếu $(x,y) \notin D$ thì F có giá trị 0 trên $\{(x,y)\} \times [a,b]$. Nếu $(x,y) \in D$ thì $\int_a^b F(x,y,z)\,dz = \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$. Áp dụng công thức Fubini cho F:

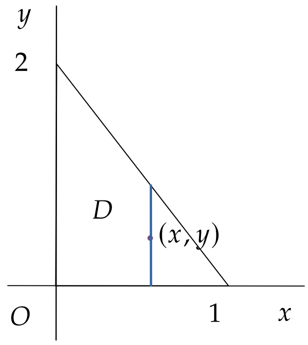
$$\begin{aligned}
\iiint_{I\times[a,b]} F(x,y,z)\,dV &= \iint_I \left(\int_a^b F(x,y,z)\,dz \right) dA \\
&= \iint_D \left(\int_a^b F(x,y,z)\,dz \right) dA \\
&= \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA.
\end{aligned}$$

□

4.15 Ví dụ. Tính tích phân $\iiint_E x\,dV$ với E là khối tứ diện với các đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.

Bước chính là miêu tả khối E. Ta có thể xem E là một khối đơn giản theo chiều trục z, là miền bên dưới mặt phẳng P qua ba điểm $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ và bên trên tam giác D với các đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ trong mặt phẳng xy.





Ta viết phương trình mặt phẳng P. Ta nhắc lại một cách là trước hết tìm một vectơ pháp tuyến. Lấy hai vectơ $(0,0,3)-(1,0,0)=(-1,0,3)$ và $(0,0,3)-(0,2,0)=(0,-2,3)$, vectơ tích có hướng của chúng là $(-1,0,3)\times(0,-2,3)=(6,3,2)$ vuông góc với mặt phẳng P, là một vectơ pháp tuyến. Một điểm (x,y,z) nằm trên P khi và chỉ khi vectơ $(x,y,z)-(0,0,3)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến $(6,3,2)$, đồng nghĩa với tích vô hướng của hai vectơ này bằng 0. Vậy phương trình của P là $(x,y,z-3)\cdot(6,3,2)=0$, tức là $6x+3y+2z=6$.

Nếu ta dùng dạng tổng quát của phương trình mặt phẳng là $ax+by+cz=d$ thì bằng cách thế các điểm thuộc mặt phẳng P vào ta cũng rút ra được phương trình của P.

Từ phương trình của mặt phẳng P ta rút ra $z=(6-6x-3y)/2$, cho thấy E có thể được xem như một khối đơn giản theo chiều trục z, là khối nằm dưới đồ thị của hàm $z=(6-6x-3y)/2$ bên trên miền D trong mặt phẳng xOy:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D, 0\le z\le (6-6x-3y)/2\}.$$

Điều này cho

$$\iiint_E x\,dV=\iint_D\left(\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} x\,dz\right)dxdy.$$

Tiếp theo ta có thể chọn coi tam giác D là miền đơn giản theo chiều trục y trong mặt phẳng xy:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2-2x\}.$$

Khi thông thạo hơn ta có thể kết hợp hai bước trên để viết trực tiếp miêu tả khối E:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2-2x, 0\le z\le (6-6x-3y)/2\}.$$

Chú ý là các điều kiện áp dụng công thức Fubini ở 4.14 đều được thỏa, ta được:

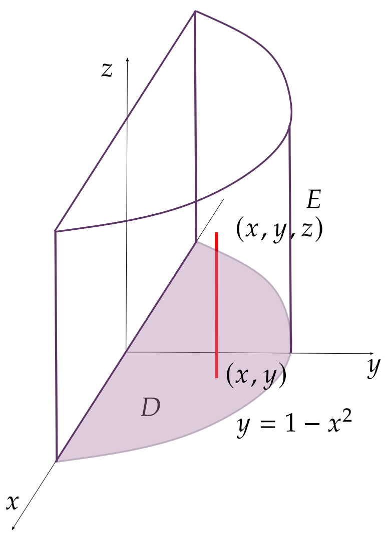
$$\begin{aligned}
\iiint_E x\,dV &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} x\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x \left(3 - 3x - \frac{3}{2}y \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x(3-3x)y - \frac{3}{4}xy^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x)\,dx = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

■

Ví dụ. Cho $E \subset \mathbb{R}^3$ là khối được bao bởi các mặt $z = 0$, $z = 2$, $y = 0$, $y = 1 - x^2$. Tính tích phân

$$\iiint_E y\,dV.$$

Khối được miêu tả dựa vào trực quan vì thế ta nên phác họa hình hay dùng máy tính để vẽ hình (xem hướng dẫn ở trang 205).



Hình 4.16:

Với trợ giúp từ Hình 4.16, ta có thể nhìn E như một khối trụ theo chiều trục z và miêu tả

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \le z \le 2\}$$

với

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}$$

hay

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2, 0 \le z \le 2\}.$$

Xem E là khối đơn giản theo chiều trục z, các điều kiện ở 4.14 đều được thỏa, áp dụng công thức Fubini, ta được

$$\iiint_E y\, dV = \int_0^2 \left(\iint_D y\, dx dy \right) dz.$$

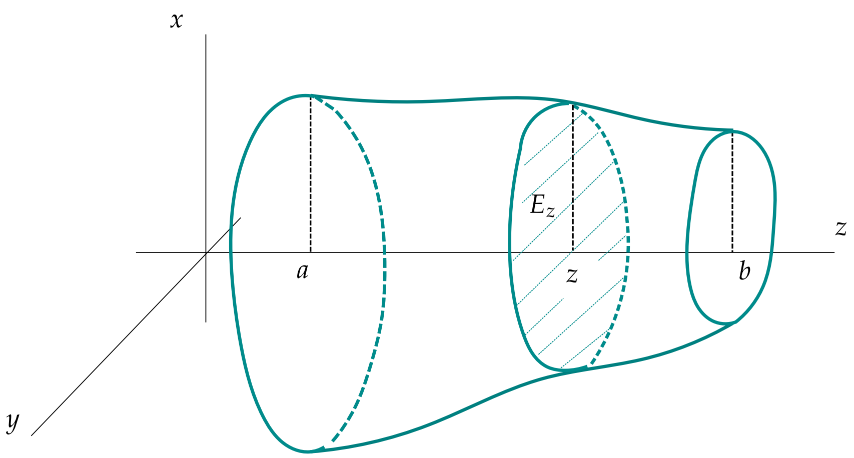
Tiếp theo xem D là miền đơn giản theo chiều trục y và lại áp dụng công thức Fubini, ta được

$$\begin{aligned}
\iiint_E y\, dV &= \int_0^2 \left(\iint_D y\, dx dy \right) dz = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} y\, dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=1-x^2} dx \right) dz \\
&= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - 2x^2 + x^4)\, dx \right) dz = \int_0^2 \frac{1}{2} \frac{16}{15}\, dz = \frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

■

Phương pháp cắt lớp cho thể tích

Giả sử tập $E \subset \mathbb{R}^3$ có thể tích. Giả sử $a \le z \le b$ với mọi $(x, y, z) \in E$. Giả sử với mỗi $z \in [a, b]$ tập $E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in E\}$ có diện tích. Tập E_z tương ứng với mặt cắt (hay thiết diện) của khối E bởi mặt phẳng vuông góc trục z tại tọa độ z. Xem Hình 4.17.



Hình 4.17: Tính thể tích khối bằng phương pháp cắt lớp.

Đặt E vào trong một hình hộp $I \times [a, b]$ với I là một hình chữ nhật trong

$\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức Fubini cho hình hộp $I \times [a,b]$ và hàm χ_E ta được

$$\begin{aligned}|E| &= \iiint_{I\times[a,b]} \chi_E \, dxdydz = \int_{[a,b]} \left(\iint_I \chi_E(x,y,z)\, dxdy \right) dz \\ &= \int_{[a,b]} \left(\iint_I \chi_{E_z}(x,y)\, dxdy \right) dz = \int_a^b |E_z|\, dz.\end{aligned}$$

Ta thu được công thức đáng chú ý, nói rằng ***thể tích của khối bằng tích phân của diện tích mặt cắt***:

$$\boxed{|E| = \int_a^b |E_z|\, dz.} \tag{4.18}$$

Trong sách giáo khoa Giải tích lớp 12 [SGKPT] công thức này đã được thừa nhận. Từ công thức này ta có thể thu được công thức tính thể tích của một số khối hay gặp, như khối cầu, khối lăng trụ, khối hình chóp, khối hình chóp cụt, xem các bài tập của mục này và các bài tập 4.36, 5.35.

4.19 Ví dụ (thể tích quả cầu). Ta đã biết ở 3.9 là quả cầu có thể tích. Các mặt cắt vuông góc trục z, $-R \le z \le R$, của quả cầu $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ là những miền phẳng bao bởi đường tròn $x^2+y^2 = R^2 - z^2$, nên có diện tích bằng $\pi(R^2-z^2)$, vậy thể tích quả cầu bán kính R bằng

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\, dz = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

■

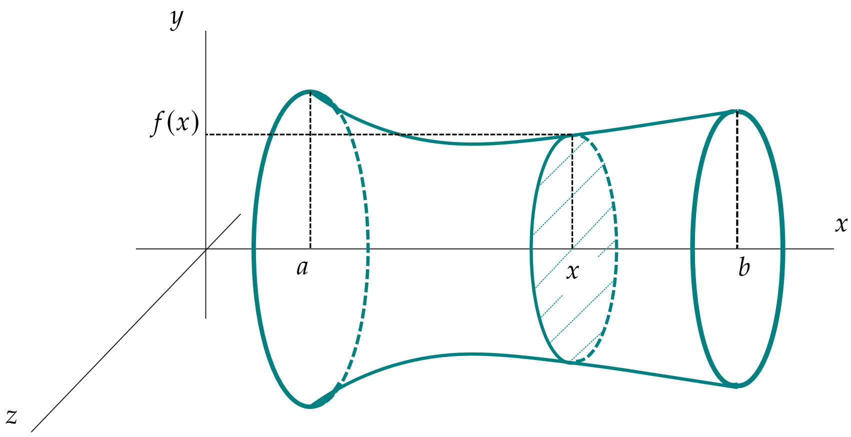
4.20 Ví dụ (thể tích khối tròn xoay). Cho f là hàm liên tục trên khoảng $[a,b]$ và $f(x) > 0$ trên $[a,b]$. Xét khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của f quanh trục x.

Mỗi mặt cắt của khối tròn xoay này với mặt phẳng vuông góc trục x là một miền phẳng bao bởi đường tròn có tâm trên trục x và bán kính là $f(x)$, vậy khối tròn xoay này gồm những điểm (x,y,z) thỏa $a \le x \le b$ và $y^2+z^2 \le f(x)^2$.

Khối này có biên gồm hai miền phẳng bao bởi đường tròn và một mặt tròn xoay $a \le x \le b$, $y^2+z^2 = f(x)^2$. Có thể xem mặt tròn xoay này là hội của hai đồ thị của hai hàm liên tục $z = \pm\sqrt{f(x)^2 - y^2}$ trên miền $a \le x \le b$, $|y| \le f(x)$. Nhờ đó ta thấy biên của khối tròn xoay có thể tích không, do đó khối tròn xoay có thể tích. Xem Hình 4.21.

Để tính thể tích ta áp dụng phương pháp cắt lớp ở (4.18). Khối tròn xoay này có mặt cắt tại mỗi x là một hình tròn có bán kính là $f(x)$, có diện tích là $\pi[f(x)]^2$. Vậy thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của f quanh trục x bằng

$$\boxed{\int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx.}$$



Hình 4.21: Khối tròn xoay và mặt cắt.

Khối tròn xoay còn có thể được tạo ra bằng cách xoay quanh trục y, khi đó ta cần chỉnh công thức cho phù hợp. ■

Tính tích phân bằng máy tính

Nhờ công thức Fubini các tích phân nhiều chiều có thể được đưa về các tích phân một chiều. Chúng ta đã thấy từ môn Vi tích phân 1 là tính đúng tích phân hàm một biến nói chung là khó. Người ta đã đưa ra những phương pháp chuyên biệt để tính các loại tích phân, cũng như soạn những bản tích phân rất lớn. Trong những trường hợp khác việc tính toán đơn giản nhưng dài. Có thuật toán Risch xác định một hàm cho trước có nguyên hàm sơ cấp hay không và nếu có thì xuất ra công thức. Do đó việc tính tích phân thích hợp để lập trình cho máy tính thực hiện.

Một cách để tính xấp xỉ tích phân là tính tổng Riemann. Việc xây dựng các phương pháp tính xấp xỉ tích phân và khảo sát hiệu quả của chúng là một chủ đề của môn Giải tích số (Numerical Analysis). Tính xấp xỉ cũng thường cần một lượng tính toán lớn, thích hợp để dùng máy tính.

Ở trang 205 có hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính để tính tích phân.

Bài tập

Các bài toán nào không yêu cầu kiểm tra các điều kiện để áp dụng các công thức thì người làm không cần trình bày. Để tính tích phân một biến có thể dùng máy tính. Nếu không tìm được giá trị đúng của tính phân thì có thể tính gần đúng.

4.22. Tính tích phân của hàm và giải thích cơ sở cho các tính toán.

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3y, & (x,y) \in [0,1]\times[0,2] \setminus \{(0,0)\}, \\ 2023, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \le y \\ xy, & x > y. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, y \le x^2, \\ xy^2, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, y > x^2. \end{cases}$$

4.23. Hãy tính các tính phân sau. Nên vẽ phác họa các hình liên quan để xác định tích phân. Kiểm điều kiện áp dụng các công thức.

(a) Tính tích phân $\iint_D x^2 y\, dA$, với D là hình chữ nhật $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

(b) Gọi D là miền bao bởi các đường cong $y = x^2$ và $x = y^4$, hãy tính

$$\iint_D (\sqrt{x} - y^2)\, dA.$$

(c) Gọi D là miền được bao bởi các đường cong $x = y^2$, $y - x = 3$, $y = -3$, $y = 2$. Tính $\iint_D x\, dA$.

(d) Gọi D là miền trong góc phần tư thứ nhất, nằm bên trên đường hyperbola $xy = 1$, bên trên đường thẳng $y = x$, bên dưới đường thẳng $y = 2$. Tính $\iint_D y\, dA$.

(e) Tính tích phân của hàm $1 + x + y$ trên miền được bao bởi các đường $y = -x$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$.

(f) Tính tích phân của hàm xy trên hình tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

(g) Tính tích phân của hàm x^2y^3 trên miền được bao bởi các đường $y = 4x^2$, $y = 5 - \sqrt{3}x^2$.

4.24. Hãy tính các tích phân sau. Có thể cần đổi thứ tự tích phân.

(a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x e^{-y^2}\, dy \right) dx$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 2}\, dx \right) dy$.

(c) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 \cos(x^2)\, dx \right) dy$.

(d) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y \cos(x^2)\, dx \right) dy$.

(e) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy \right) dx$.

(f) $\iint_D \frac{\sin x}{x}\, dA$, trong đó D là tam giác bao bởi trục x, đường $y = x$, và đường $x = 1$.

(g) $\iint_D e^{y/x}\, dA$, trong đó D là tam giác bao bởi đường $y = x$, đường $y = 0$, và đường $x = 1$.

4.25. Hãy tính các tích phân sau. Nên vẽ phác họa các hình liên quan để xác định tích phân. Kiểm điều kiện áp dụng các công thức.

(a) Tính thể tích của khối bên dưới mặt $z = 4 - x - y$ bên trên hình chữ nhật $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$.

(b) Tính tích phân $\iiint_E y\, dV$ trong đó E là khối tứ diện với 4 đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ và $(0,0,1)$.

(c) Tính tích phân $\iiint_E z\, dV$ trong đó E là khối được bao bởi các mặt $z = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = 1$, $z = 2x + 3y$.

(d) Tìm thể tích của khối được bao bởi các mặt $y = 0, z = 0, z = 1-x+y, y = 1-x^2$.

(e) Tính thể tích của khối bên dưới đồ thị của hàm $z = y^2$ bên trên hình chữ nhật $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0$.

(f) Tính thể tích của khối bao bởi các mặt $z = 0$, $y + z = 1$, $y = x^2$.

(g) Tính thể tích của khối bao bởi các mặt $x = 4 - y^2$, $y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

(h) Tính thể tích của khối bao bởi các mặt $x^2 + y^2 = 1$, $z = -y$, $z = 0$.

4.26. Dùng phương pháp cắt lớp, hãy tìm công thức thể tích của:

(a) Hình lăng trụ, xem Hình 3.24 trang 37.

(b) Hình nhận được bằng cách xoay phần bên dưới đường $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, quanh trục x.

(c) Hình nhận được bằng cách xoay phần giữa đường $y = \sqrt{x}$ và đường $y = 1$, $1 \leq x \leq 4$, quanh trục $y = 1$.

(d) Hình nhận được bằng cách xoay phần giữa đường $x = 2/y$ và trục y, $1 \leq y \leq 2$, quanh trục y.

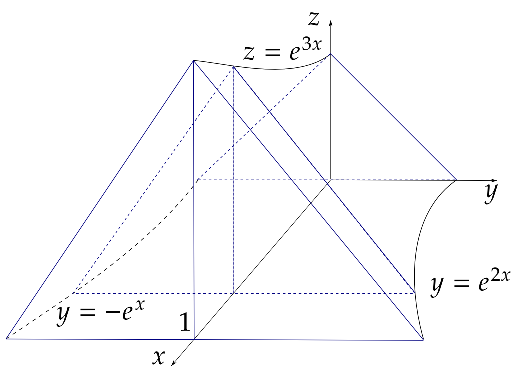
(e) Hình nhận được bằng cách xoay phần giữa đường $x = y^2 + 1$ và đường $x = 3$, quanh trục $x = 3$.

(f) Hình nhận được bằng cách xoay phần giữa đường $y = x^2 + 1$ và đường $y = -x + 3$, quanh trục x.

(g) Hình nhận được bằng cách xoay phần giữa đường $y = x^2$ và đường $y = 2x$, $x \geq 0$, quanh trục y.

4.27. Một cái chén có dạng đồ thị của hàm $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, có chiều cao là 2. Hỏi cái chén có thể đựng được bao nhiêu nước?

4.28. Tính thể tích của khối được miêu tả trong Hình 4.29.

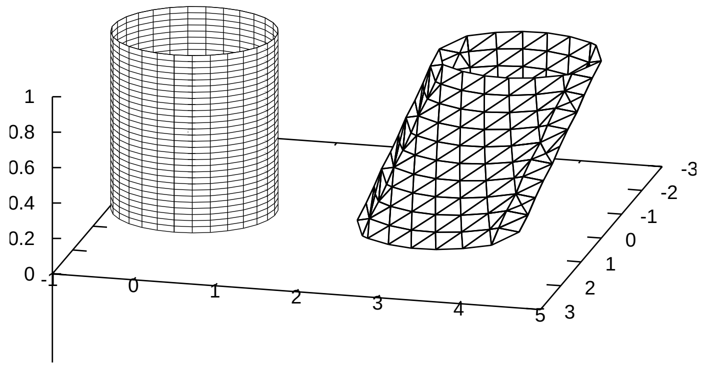


Hình 4.29:

4.30 (nguyên lý Cavalieri [16]). Hãy giải thích vì sao nếu hai khối ba chiều có thể tích, và có một phương sao cho mọi mặt phẳng với phương đó cắt hai khối theo hai mặt cắt có cùng diện tích, thì hai khối đó có cùng thể tích.

Nguyên lý Cavalieri là một trường hợp riêng của phương pháp cắt lớp cho thể tích, ở toán trung học được dùng để rút ra một số công thức diện tích và thể tích.

4.31. Chứng tỏ rằng thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$, $0 \le z \le 1$ bằng với thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$ (Hình 4.32).



Hình 4.32: Mặt $x^2 + y^2 = 1$ (trái) và mặt $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$ (phải).

4.33. Cho f là hàm liên tục, hãy viết lại tích phân $\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ theo thứ tự $dx\,dz\,dy$.

4.34. Tính $\int_0^2\int_0^1\int_{z^2}^4 x^3 z\cos(y^2)\,dy\,dx\,dz$.

4.35. Cho g liên tục trên hình hộp $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, chứng tỏ

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} g(x,y,z)\,dV = \int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^f g(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx.$$

4.36 (thể tích của khối lăng trụ tổng quát). Giả sử D là một miền trong mặt phẳng Oxy. Cho v là một vectơ của $\mathbb{R}^3$ không nằm trong mặt phẳng Oxy. Tập hợp tất cả các điểm có dạng $p + tv$ với $p \in D$, $0 \le t \le 1$, được gọi là một khối lăng trụ. Miền D được gọi là đáy của khối lăng trụ, còn khoảng cách từ v tới mặt phẳng Oxy được gọi là chiều cao của khối lăng trụ. Xem Hình 4.37.

Ta chứng tỏ thể tích của khối lăng trụ đúng bằng diện tích đáy nhân chiều cao.

(a) * Chứng tỏ nếu đáy có diện tích thì khối lăng trụ có thể tích.

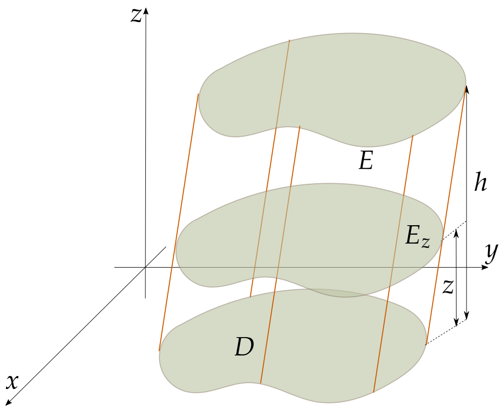
(b) Dùng phương pháp cắt lớp để tính thể tích khối lăng trụ.

4.38. * Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp hai (tức là các đạo hàm riêng tới cấp hai tồn tại và liên tục).

(a) Trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ bất kì, dùng định lý Fubini, hãy chứng tỏ

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,dA.$$

[16] Bonaventura Francesco Cavalieri là một nhà toán học sống vào đầu thế kỉ 17.



Hình 4.37: Khối lăng trụ.

(b) Dùng phần (a), chứng tỏ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Đây là một chứng minh dùng tích phân bội của một kết quả thường dùng trong Vi phân hàm nhiều biến nói rằng nếu hàm khả vi liên tục cấp hai thì thứ tự lấy đạo hàm riêng không ảnh hưởng tới kết quả.

5 Công thức đổi biến

Nhớ lại trong tích phân hàm một biến, để tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ta thường làm như sau. Đặt $x = \sin t$ thì $dx = \cos t\ dt$, $x = 0$ tương ứng $t = 0$, $x = 1$ tương ứng $t = \pi/2$, và

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Mục đích của bài này là khảo sát tổng quát hóa phương pháp ở trên lên nhiều chiều: Với tích phân $\int_A f(x)\,dx$, nếu đổi biến $x = \varphi(u)$ thì tích phân biến đổi như thế nào?

Nhắc lại về đạo hàm của hàm nhiều biến

Người đọc có thể ôn lại nội dung này trong các tài liệu về Vi phân hàm nhiều biến như [TTQ11], [Lan97], [BMGT].

Cho D là một tập con của $\mathbb{R}^n$, x là một ***điểm trong*** của D. Kí hiệu $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots,e_n = (0,\dots,0,1)$ là các vectơ tạo thành cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$. **Đạo hàm riêng** của hàm $f : D \to \mathbb{R}$ theo biến thứ i tại x được định nghĩa là số thực

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}.$$

Đây chính là đạo hàm một biến của hàm f khi xem f chỉ là hàm theo biến x_i, là tỉ lệ thay đổi của giá trị của hàm f so với giá trị của biến thứ i tại điểm đang xét.

Tổng quát hơn, xét hàm $f : D \to \mathbb{R}^m$. Ma trận các đạo hàm riêng của f tại x được gọi là **ma trận Jacobi** của f tại x, kí hiệu là $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$.

Nếu tất cả các đạo hàm riêng của các hàm thành phần của f tồn tại và liên tục tại x thì ta nói f **khả vi liên tục** (continuously differentiable) hay **trơn** (smooth) tại x.

Ví dụ. Khi $m = 1$ ma trận Jacobi $J_f(x)$ chính là **vectơ gradient**

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

∎

Nếu có một ánh xạ tuyến tính $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho có một quả cầu $B(x, \epsilon) \subset D$ và một hàm $r : B(x, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ thỏa mãn $\forall h \in B(x, \epsilon)$,

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)(h) + r(h) \tag{5.1}$$

và $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, thì ánh xạ $f'(x)$ được gọi là **đạo hàm** của f tại x. Ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ còn được kí hiệu là $df(x)$, và còn được gọi là **đạo hàm Fréchet**.

Trong môn này ta chỉ dùng khái niệm ánh xạ đạo hàm một chút ở phần phép đổi biến tiếp theo, nhưng vì người mới học thường gặp khó khăn với khái niệm này nên ta thảo luận thêm dưới đây.

Từ công thức 5.1 ta thấy đạo hàm cho một xấp xỉ tuyến tính của hàm,

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)(h),$$

hơn nữa sự tồn tại ánh xạ đạo hàm đảm bảo xấp xỉ tuyến tính trên là tốt, theo nghĩa là phần dư $r(h)$ là một "vô cùng bé" so với biến h.

Ví dụ. Trong trường hợp $m = n = 1$, giả sử hàm thực một biến f có đạo hàm theo nghĩa trong Vi tích phân hàm một biến là số thực $f'(x)$, thì

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Đặt

$$r(h) = f(x + h) - f(x) - f'(x)h$$

thì

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$$

với

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{r(h)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x + h) - f(x) - f'(x)h}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| = 0,$$

dẫn tới $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$. Vậy f có đạo hàm Fréchet tại x, là ánh xạ tuyến tính nhân mỗi số thực h với số thực $f'(x)$:

$$\begin{aligned} df(x) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto f'(x)h. \end{aligned}$$

Vậy hai khái niệm đạo hàm này không trùng nhau nhưng quan hệ mật thiết với nhau. ■

Ví dụ. Nếu f là một ánh xạ tuyến tính thì xấp xỉ tuyến tính của f tại x chính là f, cụ thể

$$f(x + h) = f(x) + f(h) + 0.$$

Vậy $f'(x) = f$, đạo hàm của f tại x chính là f. ∎

Có thể thấy ngay từ công thức (5.1) là nếu hàm có đạo hàm tại x thì nó liên tục tại x.

Ta có kết quả nếu f khả vi liên tục tại x thì f có đạo hàm tại x, và ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ được biểu diễn trong cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ bởi ma trận Jacobi $J_f(x)$, tức là $f'(x)(h) = J_f(x) \cdot h$, trong đó phép nhân bên vế phải là phép nhân ma trận. Đặc biệt, $\det f'(x) = \det J_f(x)$.

Cho U, V, W là tập mở của $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$, $\mathbb{R}^p$ theo thứ tự đó, cho $f : U \to V$ và $g : V \to W$ có đạo hàm, thì có công thức đạo hàm hàm hợp

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Nếu các hàm là khả vi liên tục thì công thức đạo hàm hàm hợp cho công thức nhân ma trận biểu diễn

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

Trong công thức (5.1) lấy vectơ v, viết $h = tv$ với $t \in \mathbb{R}$, thì thu được

$$f'(x)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Vậy $f'(x)(v)$ là đạo hàm của f tại x theo vectơ v. Nếu v là một vectơ đơn vị, tức vectơ có chiều dài bằng 1, thì $f'(x)(v)$ là **đạo hàm theo hướng** của f tại x theo hướng v, đo tỉ lệ thay đổi của f theo hướng v tại x.

Khái niệm ánh xạ đạo hàm giúp trình bày một số vấn đề lý thuyết một cách rõ ràng hơn nhờ sử dụng công cụ của Đại số tuyến tính.

Phép đổi biến

Cho A và B là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là một **phép vi đồng phôi**[17] hay một **phép đổi biến** , nếu f là song ánh, khả vi liên tục, và ánh xạ ngược f^{-1} cũng khả vi liên tục.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^n$ phép tịnh tiến $x \mapsto x + a$ là một phép đổi biến. ∎

Cho f là một phép vi đồng phôi trên một tập mở. Đặt $y = f(x)$. Từ đẳng thức $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ với mọi x, lấy đạo hàm hai vế, theo quy tắc đạo hàm của hàm hợp ta được $(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ [18], hay

$$(f^{-1})'(y) \circ f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

[17] diffeomorphism
[18] identity: ánh xạ đồng nhất

Tương tự do $(f \circ f^{-1})(y) = y$ nên $f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, hay

$$f'(x) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Hai điều này dẫn tới $(f^{-1})'(y)$ chính là ánh xạ ngược của $f'(x)$. Từ đó ta rút ra một đẳng thức đáng lưu ý, rằng ma trận Jacobi của ánh xạ ngược tại y chính là nghịch đảo của ma trận Jacobi của ánh xạ ban đầu tại x:

$$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}. \tag{5.2}$$

Điều ngược lại là nội dung của một định lý rất quan trọng:

Định lý (định lý hàm ngược). *Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ mở và $f : D \to \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục tại x. Nếu $f'(x)$ khả nghịch thì x có một lân cận mà trên đó f là một vi đồng phôi. Nói cách khác, nếu $\det(J_f(x)) \neq 0$ thì có một lân cận mở U của x và một lân cận mở V của $f(x)$ sao cho $f : U \to V$ là song ánh và $f^{-1} : V \to U$ là khả vi liên tục.*

Hệ quả. *Giả sử U và V là các tập mở của $\mathbb{R}^n$, và $f : U \to V$ là một song ánh khả vi liên tục. Nếu $\det J_f$ luôn khác không thì f là một vi đồng phôi.*

Hệ quả này cho thấy ta có thể kiểm tra một ánh xạ là một phép đổi biến mà không cần phải tìm ánh xạ ngược.

Công thức đổi biến cho vi phân và tích phân

Dưới đây là một phiên bản của công thức đổi biến cho tích phân Riemann [Spi65, tr. 65–67]:

Định lý (công thức đổi biến). *Công thức đổi biến*

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|\det \varphi'| \tag{5.3}$$

được thỏa dưới những giả thiết: A là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một phép đổi biến từ A lên $\varphi(A)$, A và $\varphi(A)$ có thể tích, f và $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ khả tích.

Có một cách viết hình thức dễ nhớ tương tự trường hợp một chiều như sau. Đặt

$$x = \varphi(u)$$

thì

$$\boxed{dx = |\det \varphi'(u)|\, du.}$$

Nếu

$$x \in X \iff u \in U$$

thì

$$\boxed{\int_X f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(u))|\det \varphi'(u)|\,du.}$$

Để tính toán, nhớ rằng

$$\boxed{\det \varphi' = \det J_\varphi.}$$

Nếu viết $x = x(u)$ và $\frac{\partial x}{\partial u} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$ thì có thể viết một cách hình thức dễ nhớ công thức cho đổi biến của dạng vi phân:

$$dx = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| du.$$

Dấu trị tuyệt đối có thể được bỏ đi nếu ta biết dấu của $\det \varphi'$. Nếu $\det \varphi'$ luôn dương thì φ được gọi là một **phép đổi biến bảo toàn định hướng**, nếu $\det \varphi'$ luôn âm thì φ được gọi là một **phép đổi biến đảo ngược định hướng**.

Như trường hợp một chiều, đổi biến có thể dùng để làm cho hàm dưới dấu tích phân đơn giản hơn. Trong trường hợp nhiều chiều, đổi biến thường được dùng để làm cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

5.4 Ví dụ (đổi biến một chiều). Ta kiểm trong trường hợp này đây là phương pháp đổi biến trong tích phân cho hàm một biến quen thuộc.

Cho $x = \varphi(t)$ với $t \in [a,b]$, với φ liên tục và $\varphi : (a,b) \to \varphi((a,b))$ là một phép đổi biến. Cho f khả tích trên $\varphi([a,b])$. Theo công thức đổi biến:

$$\int_{\varphi((a,b))} f(x)\,dx = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right| dt.$$

Do $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (a,b)$ nên hoặc $\varphi'(t) > 0,\ \forall t \in (a,b)$ hoặc $\varphi'(t) < 0,\ \forall t \in (a,b)$. Vì vậy hoặc φ là hàm tăng hoặc φ là hàm giảm trên $[a,b]$.

Nếu φ là hàm tăng (bảo toàn định hướng) thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(a),\varphi(b)]$. Do đó, dùng 3.13 để chuyển đổi giữa tích phân trên khoảng mở và tích phân trên khoảng đóng, ta được

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_{[a,b]} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_{(\varphi(a),\varphi(b))} f(x)\,dx = \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f(x)\,dx\\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nếu φ là hàm giảm (đảo ngược định hướng) thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(b),\varphi(a)]$ và

$\left|\varphi'(t)\right| = -\varphi'(t)$. Do đó

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= -\int_{(a,b)} f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right|\,dt\\
&= -\int_{(\varphi(b),\varphi(a))} f(x)\,dx\\
&= -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Trong cả hai trường hợp ta được công thức đổi biến cho tích phân hàm một biến:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Trong Vi tích phân một biến công thức đổi biến được chứng minh bằng cách dùng công thức Newton–Leibniz và quy tắc đạo hàm hàm hợp, chỉ giả thiết hàm f là liên tục và hàm φ là trơn, xem [BMGT]. ■

Ví dụ (đổi biến hai chiều). Với phép đổi biến $(u,v) \mapsto (x,y)$ người ta thường dùng kí hiệu

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Với kí hiệu này công thức đổi biến có dạng như sau. Nếu phép đổi biến $(u,v) \mapsto (x,y)$ mang tập A thành tập B thì

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv.$$

Một cách hình thức ta có thể viết:

$$\boxed{dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.}$$

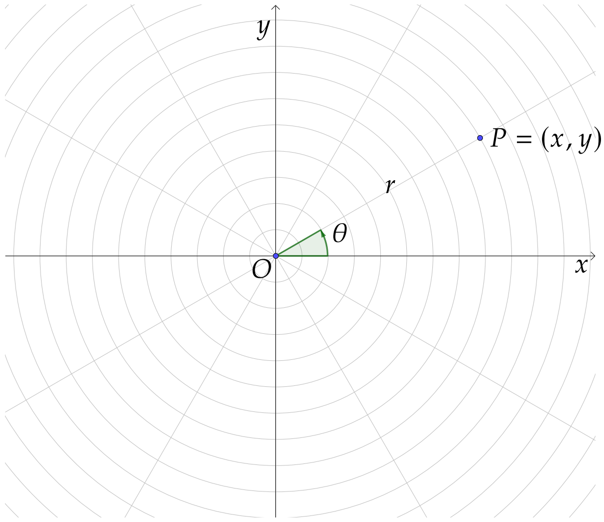
Chú ý rằng do công thức (5.2):

$$\boxed{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.} \tag{5.6}$$

■

Tọa độ cực

Một điểm $P = (x,y)$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có thể được miêu tả bằng hai số thực (r,θ), với r là khoảng cách từ O tới P, và $0 \le \theta \le 2\pi$ là góc từ vectơ $(1,0)$ (hay tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OP}$.

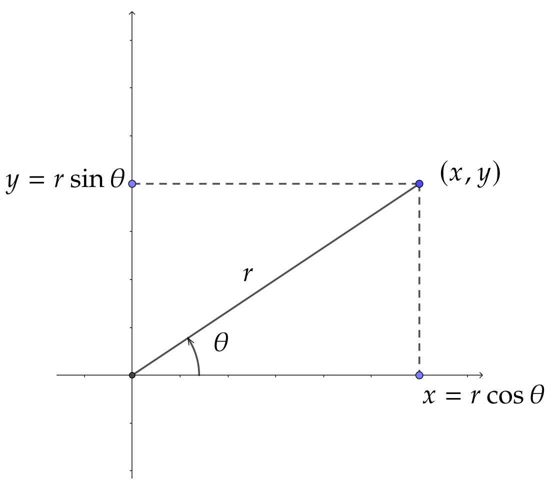


Hình 5.7: Tọa độ cực.

Tuy nhiên, tại một điểm trên tia Ox thì θ có thể nhận giá trị 0 lẫn giá trị 2π. Gần một điểm trên tia Ox thì θ vừa có thể gần 0 vừa có thể gần 2π. Tại gốc tọa độ thì $r = 0$ còn θ có thể bằng bất kì giá trị nào. Như thế tương ứng $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ từ tọa độ Descartes sang tọa độ cực không là song ánh và không liên tục trên tia Ox.

Vì vậy để có một song ánh giữa hai hệ tọa độ ta phải thu hẹp miền xác định là mặt phẳng bỏ đi tia Ox. Khi đó ánh xạ từ tọa độ cực sang tọa độ Euclid là

$$\begin{aligned} (0,\infty)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\} \\ (r,\theta) &\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned}$$



Hình 5.8: Tương ứng từ tọa độ cực sang tọa độ Descartes.

Ta tính được

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r > 0.$$

Vậy đây là một phép đổi biến.

Có thể ghi nhớ kí hiệu hình thức rằng

$$\boxed{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ dxdy = r\,drd\theta.}$$

Ví dụ (tích phân trên hình tròn). Trong $\mathbb{R}^2$, gọi $B'(O,R)$ là hình tròn đóng tâm tại gốc tọa độ O bán kính R. Để áp dụng công thức đổi biến ta dùng phép vi đồng phôi φ từ hình chữ nhật mở $(0,R)\times(0,2\pi)$ sang miền D là $B'(O,R)$ bỏ đi đường tròn biên và tia Ox. Giả sử f khả tích trên $B'(O,R)$. Tập bị bỏ đi có diện tích không, do đó nó không ảnh hưởng đến tích phân, theo 3.13, nên:

$$\begin{aligned}\iint_{B'^2(O,R)} f(x,y)\,dxdy &= \iint_D f(x,y)\,dxdy\\ &= \iint_{(0,R)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta\\ &= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta.\end{aligned}$$

■

Như vậy với mục đích lấy tích phân thì phần bỏ đi trong tọa độ cực không ảnh hưởng tới tích phân. Về sau ta thường không nhắc lại chi tiết này, và để đơn giản ta thường lấy cận trong tọa độ cực là $r \geq 0$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ví dụ (diện tích của hình tròn). Tính theo tọa độ cực:

$$|B'(O,R)| = \iint_{B'^2(O,R)} 1\,dxdy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} 1\cdot r\,d\theta\right) dr = \pi R^2.$$

■

Ví dụ (thể tích của quả cầu). Quả cầu tâm O bán kính R có thể coi là miền ba chiều đơn giản theo chiều trục z nằm giữa hai đồ thị $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ và $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ trên miền bao bởi đường tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$ trên mặt phẳng $z = 0$. Thể tích của khối này tính theo tọa độ cực và công thức Fubini

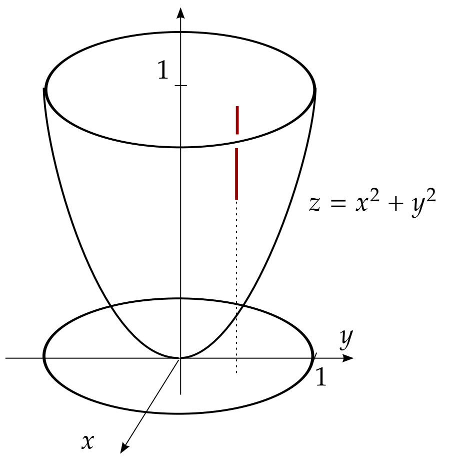
4.14 bằng:

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\le R^2}\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\right)dxdy\\
&=\iint_{x^2+y^2\le R^2} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy\\
&=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} 2\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,d\theta\right)dr\\
&=-4\pi\frac{1}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=R}=\frac{4\pi}{3}R^3.
\end{aligned}$$

■

Ví dụ. Cho E là khối được bao bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$. Tính $\iiint_E z\,dxdydz$.

"Bao" ở đây chỉ là một miêu tả trực quan, vì thế ta nên vẽ hình rồi từ đó đưa ra một miêu tả toán học, tức là miêu tả dưới dạng tập hợp.



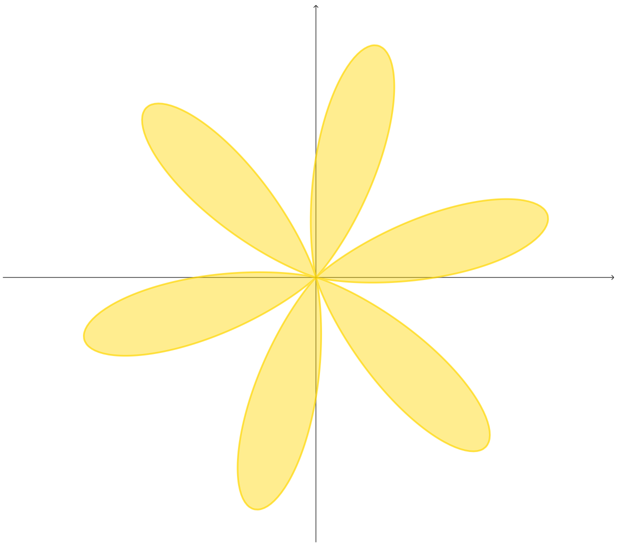
Xem E là một khối đơn giản theo chiều trục z, nằm trên mặt $z = x^2 + y^2$, dưới mặt $z = 1$. Như vậy $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 1\}$. Chiếu khối E xuống mặt phẳng xOy ta được hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$. Áp dụng công thức Fubini, các điều kiện áp dụng công thức Fubini ở 4.14 đều được thỏa:

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\,dxdydz &= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^1 z\,dz\right)dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2}z^2\Big|_{z=x^2+y^2}^{1}dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2}\left(1-\left(x^2+y^2\right)^2\right)dxdy\\
&= \iint_{0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\left(r^2\right)^2\right)r\,drd\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(r-r^5)\,d\theta\right)dr=\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Trong ví dụ này một điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ được miêu tả bằng cách dùng tọa độ cực (r, θ) để miêu tả (x, y). Người ta thường gọi hệ tọa độ (r, θ, z) là hệ ***tọa độ trụ***. ■

Ví dụ. Tính diện tích của miền được bao bởi đường cong $r = 1 + \sin(6\theta)$.

Đường bông hoa này, xem Hình 5.9, là đường cong tham số hóa trong $\mathbb{R}^2$ với phương trình $x = (1 + \sin(6\theta))\cos\theta$, $y = (1 + \sin(6\theta))\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ trong tọa độ xy. Miền bao bởi đường này là tập D trong $\mathbb{R}^2$ mà mỗi điểm có khoảng cách r tới tâm 0 nhỏ hơn hay bằng $1 + \sin(6\theta)$. Khi đổi biến sang tọa độ cực thì D trở thành tập tất cả các điểm (r, θ) thỏa $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1 + \sin(6\theta)$. Tập D có diện tích, như ta thấy một cách trực quan và có thể kiểm được tuy có thể cần thêm lập luận (tham khảo Bài tập 8.22).



Hình 5.9: Miền bao bởi đường $r = 1 + \sin(6\theta)$ vẽ trong tọa độ (x, y).

Ta tính diện tích của D bằng cách dùng tọa độ cực:

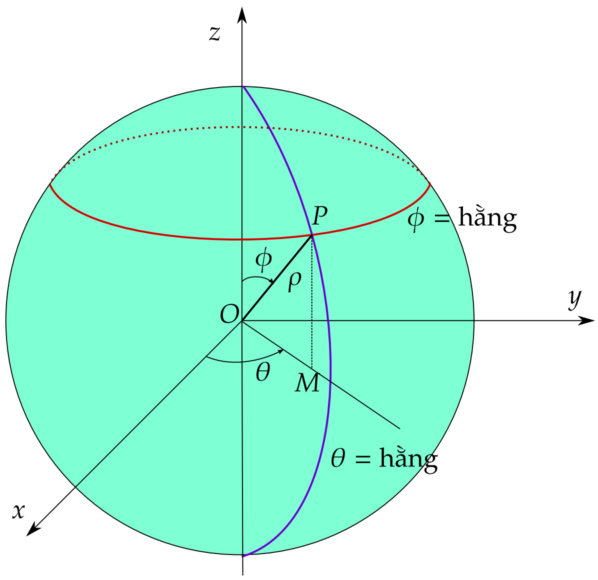
$$\begin{aligned}
|D| &= \iint_D 1\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin(6\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\sin(6\theta))^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sin(6\theta) + \frac{1-\cos(12\theta)}{2}\right)d\theta \\
&= \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

■

Tọa độ cầu

Một điểm $P = (x, y, z)$ trong $\mathbb{R}^3$ có thể được miêu tả bằng bộ ba số thực (ρ, ϕ, θ), với ρ là khoảng cách từ O tới P, ϕ là góc giữa vectơ $(0, 0, 1)$ (tia Oz)

và vectơ $\overrightarrow{OP}$, và nếu gọi $M = (x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm P xuống mặt phẳng Oxy thì θ là góc từ vectơ $(1, 0, 0)$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OM}$.



Hình 5.10: ρ = hằng ứng với một mặt cầu. Trên mỗi mặt cầu các đường ϕ = hằng là các đường vĩ tuyến, các đường θ = hằng là các đường kinh tuyến, với $0 \leq \rho$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Bộ (ρ, ϕ, θ) đại diện cho (cao độ, vĩ độ, kinh độ) của một điểm trong không gian. Đây cơ bản là hệ tọa độ địa lý trên Quả đất, tuy khác cách chọn gốc và đơn vị đo.

Trong Hình 5.10 ta tính được ngay: $z = PM = \rho\cos\phi$, $OM = \rho\sin\phi$, $x = OM\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = OM\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$.

Tương tự như trường hợp tọa độ cực, để có một phép đổi biến thực sự ta phải hạn chế miền xác định bằng cách bỏ đi tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \geq 0\}$, tức một nửa của mặt phẳng xOz, ứng với $\rho = 0$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \geq 0\} \\ (\rho, \phi, \theta) &\mapsto (x, y, z) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi) \end{aligned}$$

là một song ánh, có

$$\det J_\varphi(\rho, \phi, \theta) = \det\begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{pmatrix} = \rho^2\sin\phi > 0.$$

Người học nên làm chi tiết tính toán định thức này.

Vậy đây là một phép đổi biến. Phần bị bỏ đi không ảnh hưởng tới tích phân, và như trong trường hợp tọa độ cực ta thường không nhắc lại chi tiết kĩ thuật này.

Có thể ghi nhớ kí hiệu hình thức rằng

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta,\ y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho\cos\phi,\ dxdydz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta.}$$

Có tài liệu dùng thứ tự trong tọa độ cầu là (ρ, θ, ϕ). Thứ tự tọa độ trong tọa độ cầu liên quan tới định hướng trên mặt cầu, tuy không ảnh hưởng tới tích phân bội nhưng ảnh hưởng tới tích phân mặt ở chương sau.

Ví dụ (thể tích quả cầu). Gọi $B^3(O, R)$ là quả cầu mở tâm O bán kính R trong $\mathbb{R}^3$. Thể tích của quả cầu này là:

$$|B^3(O,R)| = \iiint_{B^3(O,R)} 1\, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

■

Các phép đổi biến khác

Ví dụ (diện tích hình bầu dục). Một hình bầu dục (elip, ellipse) D trong mặt phẳng là tập hợp các điểm thỏa

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \le 1$$

trong đó $a, b > 0$. Viết lại công thức ở dạng

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 \le 1,$$

ta thấy có thể làm phép đổi biến

$$u = \frac{x-x_0}{a}$$
$$v = \frac{y-y_0}{b}.$$

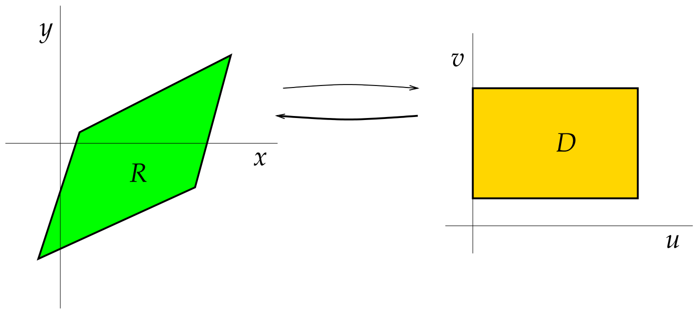
Phép đổi biến này đưa hình bầu dục về hình tròn $u^2 + v^2 \le 1$. Đây chẳng qua là một phép tịnh tiến tâm hình bầu dục về gốc tọa độ rồi hợp với một phép co dãn trục tọa độ biến hình bầu dục thành hình tròn. Ta tính được ngay $dudv = \frac{1}{ab} dxdy$, nên

$$|D| = \iint_D 1\, dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 1} 1 \cdot ab\, dudv = ab \iint_{u^2+v^2 \le 1} 1\, dudv = ab\pi.$$

■

Ví dụ. Tính $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\, dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, và $3x - y = 8$.

Đặt $u = x - 2y$ và $v = 3x - y$. Miền bao bởi các đường thẳng $u = 0$, $u = 4$, $v = 1$, và $v = 8$ là hình chữ nhật $D = [0,4] \times [1,8]$ trong mặt phẳng (u,v).



Vì

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$

nên ánh xạ $(x,y) \mapsto (u,v)$ là một phép đổi biến từ phần trong của R sang phần trong của D. Biên của R và D không ảnh hưởng đến tích phân vì chúng có diện tích không và ta đang lấy tích phân hàm liên tục (xem 3.13).

Chú ý rằng từ công thức (5.6)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{5}.$$

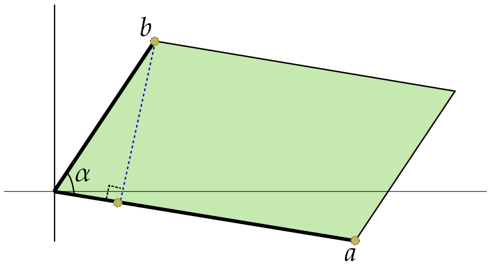
Công thức đổi biến cho:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dxdy &= \iint_D \frac{u}{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\ &= \iint_D \frac{u}{v}\frac{1}{5}dudv = \frac{1}{5}\int_0^4 \left(\int_1^8 \frac{u}{v}\,dv\right) du = \frac{8}{5}\ln 8. \end{aligned}$$

■

Thể tích và định thức

5.11 Ví dụ (diện tích hình bình hành). Dưới đây ta tìm cách tính diện tích của hình bình hành trong mặt phẳng dùng hiểu biết hình học Euclid ở trung học.



Hình 5.12: Diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ.

Xem Hình 5.12. "Chiều cao" của hình bình hành, dùng lượng giác, bằng $|b|\sin\alpha$ với

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{a\cdot b}{|a||b|}\right)^2} = \frac{\sqrt{|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2}}{|a||b|}.$$

Lý luận rằng diện tích của hình bình hành này bằng chiều dài cạnh đáy $|a|$ nhân chiều cao $|b|\sin\alpha$, ta thu được diện tích bằng $\sqrt{|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2}$.

Ta cũng có thể cho rằng diện tích của hình bình hành này bằng hai lần diện tích của tam giác sinh bởi a và b, vốn bằng $\frac{1}{2}|a||b|\sin\alpha$, do đó diện tích của hình bình hành bằng

$$2\frac{1}{2}|a||b|\sin\alpha = \sqrt{|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2}.$$

Thuần túy biến đổi trên số thực, ta lại có

$$\begin{aligned}\sqrt{|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2} &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\ &= \sqrt{a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2}\\ &= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = |a_1b_2-a_2b_1|\\ &= \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\right| = |\det(a,b)|.\end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp hai chiều, diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ a và b bằng $|\det(a,b)|$.

Xem thêm ở các Bài tập 5.43 và 5.45. ■

Ví dụ. Trong trường hợp riêng ba chiều, cho ba vectơ $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b =$

(b_1, b_2, b_3), $c = (c_1, c_2, c_3)$, xét ma trận các tọa độ của ba vectơ này

$$\begin{aligned}\det(a,b,c) &= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3\\ &= (a \times b) \cdot c\end{aligned}$$

trong đó $a \times b$ là tích có hướng của a với b, được cho bởi

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Dùng hình học Euclid, và ý nghĩa hình học của tích có hướng (được nhắc lại ở Hình 11.2), thể tích của hình bình hành sinh bởi ba vectơ a, b, c trong $\mathbb{R}^3$ bằng diện tích đáy là $|a \times b|$ nhân chiều cao bằng độ dài hình chiếu của c xuống $a \times b$ (xem Hình 8.4), bằng

$$|a \times b| \left| c \cdot \frac{a \times b}{|a \times b|} \right| = |(a \times b) \cdot c|.$$

Vậy trong trường hợp ba chiều, thể tích của hình bình hành sinh bởi ba vectơ a, b và c bằng $|\det(a,b,c)|$. ∎

Các công thức trong hai ví dụ trên, vốn dựa trên hình học Euclid, bây giờ có thể được coi như là những trường hợp riêng của công thức tổng quát tính thể tích hình bình hành bằng định thức. Dưới đây ta rút ra công thức này từ công thức đổi biến của tích phân. Chứng minh trực tiếp công thức này mà không dùng công thức đổi biến có ở phần bổ sung, Mệnh đề 7.9 trang 103.

Xét phép đổi biến tuyến tính cho bởi $T(e_i) = v_i$, $1 \le i \le n$. Cho T tác động lên hình hộp $(0,1)^n$. Vì T là tuyến tính nên

$$T\left((0,1)^n\right) = \{T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid 0 < \alpha_i < 1\}$$

chính là hình bình hành (mở) sinh bởi các vectơ v_i. Áp dụng công thức đổi biến (5.3) cho hàm hằng 1 và phép đổi biến T, chú ý vì T tuyến tính nên $T'(x) = T$, ta được

$$\left|T\left((0,1)^n\right)\right| = \int_{T((0,1)^n)} 1 = \int_{(0,1)^n} 1 \circ T |\det T'| = |\det T|.$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính T chính là ma trận các tọa độ của các vectơ v_i, vậy ***thể tích của hình bình hành sinh bởi n vectơ $v_1, \ldots, v_n$ trong $\mathbb{R}^n$ bằng $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$***.

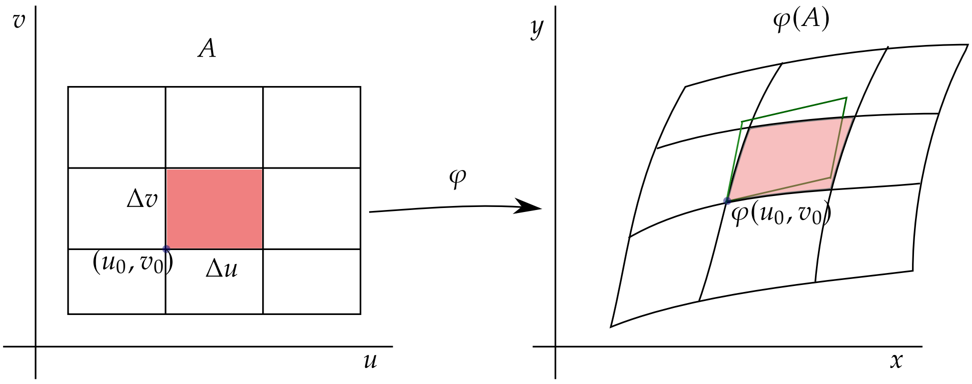
Ta vừa được một giải thích ý nghĩa hình học của định thức: giá trị tuyệt đối của định thức của ma trận chính là thể tích của hình bình hành sinh bởi các vectơ cột của ma trận. Bản thân dấu của định thức cũng có thể được giải thích thông qua "định hướng" của bộ vectơ, xem Mệnh đề 7.9.

Giải thích công thức đổi biến

Dưới đây chúng ta đưa ra một giải thích bằng xấp xỉ, tuy chưa phải là một chứng minh, nhưng giúp ta hiểu rõ hơn công thức.

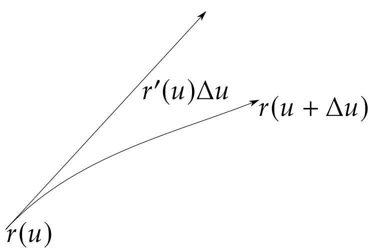
Để đơn giản, xét trường hợp A là một hình chữ nhật. Ánh xạ φ mang miền A trên mặt phẳng (u,v) sang miền $\varphi(A)$ trên mặt phẳng (x,y), xem Hình 5.13.

Xét một phép chia A thành những hình chữ nhật con. Ta xem tác động của φ lên một hình chữ nhật con đại diện $[u_0, u_0+\Delta u]\times[v_0, v_0+\Delta v]$, có diện tích $\Delta u \Delta v$. Hàm trơn φ mang mỗi cạnh của hình chữ nhật này thành một đoạn cong trên mặt phẳng (x,y), do đó ta được một "hình chữ nhật cong" trên mặt phẳng (x,y) với một đỉnh là điểm $\varphi(u_0,v_0)$.



Hình 5.13: Minh họa công thức đổi biến.

Bây giờ ta tính diện tích hình chữ nhật cong này bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Đoạn cong từ $\varphi(u_0,v_0)$ tới $\varphi(u_0+\Delta u, v_0)$ sẽ được xấp xỉ tuyến tính bằng một đoạn thẳng tiếp tuyến tại $\varphi(u_0,v_0)$. Vì vectơ tiếp xúc chính là $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0)$ nên đoạn tiếp tuyến này cho bởi vectơ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u$, xem Hình 5.14.



Hình 5.14: Xấp xỉ tuyến tính đường cong, với đường $r(u) = \varphi(u,v)$ (v cố định), cho bởi $r(u+\Delta u) - r(u) \approx r'(u)\Delta u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\Delta u$.

Tương tự, đoạn cong $\varphi(u_0, v_0+\Delta v)$ được xấp xỉ bởi vectơ tiếp xúc $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$. Vậy hình chữ nhật cong được xấp xỉ bởi hình bình hành sinh bởi hai vectơ tiếp xúc trên. Diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$ và $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$ là

$$\begin{aligned}|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v\right)| &= |\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)|\Delta u\Delta v\\ &= |\det J_\varphi(u_0, v_0)|\Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Điều này cũng giải thích sự xuất hiện của dấu trị tuyệt đối.

Không khó lắm để kiểm tra công thức đổi biến trong trường hợp phép đổi biến là một phép biến đổi đơn giản là phép tịnh tiến (Bài tập 5.46). Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát các chứng minh hiện có cho công thức đổi biến khó và dài vượt khỏi phạm vi môn học này, xem phần bổ sung ở trang 107.

Bài tập

5.15. Tính:

(a) Tính thể tích của khối được bao bởi mặt $z = 4 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng xOy.

(b) Tính thể tích của khối được bao bởi mặt $z = 9 - x^2 - y^2$, thỏa $y \le x$, trong góc phần tám thứ nhất (tức $x, y, z \ge 0$).

(c) Tính tích phân $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$ trong đó D là miền được bao bởi hai đường cong $x^2 + y^2 = 4$ and $x^2 + y^2 = 9$.

(d) Tính tích phân $\iint_D (x + y)\, dA$ trong đó D là miền được bao bởi hai đường cong $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$ trong góc phần tư thứ nhất.

(e) Tính tích phân $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$ trong đó D là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 9$, đường thẳng $y = 0$ và $y = \sqrt{3}x$.

(f) Tính tích phân $\iint_D \frac{y^2}{x^2}\, dA$ trong đó D là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, đường thẳng $y = 0$ và $y = x$.

(g) Tính tích phân $\iint_D x^2\, dA$ trong đó D là miền được bao bởi e-líp $3x^2 + 4y^2 = 8$.

5.16. Tính:

(a) Tính tích phân $\iiint_E \cos\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right]\, dV$ trong đó E là quả cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

(b) Tính thể tích của khối được bao phía trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và được bao phía dưới bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$.

(c) Tìm thể tích của khối bị chặn trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và bị chặn dưới bởi mặt nón $z^2 = 3x^2 + 3y^2$, $z \ge 0$.

(d) Tìm thể tích của khối bị chặn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 9$ và mặt trụ $x^2+y^2 = 2y$.

(e) Tính thể tích của miền phía dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ phía trên mặt phẳng $z = 1/\sqrt{2}$.

(f) Tính thể tích của khối bên dưới mặt $z = 4 - x^2 - y^2$ bên trên mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

(g) Tính thể tích của khối được bao bởi các mặt $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$.

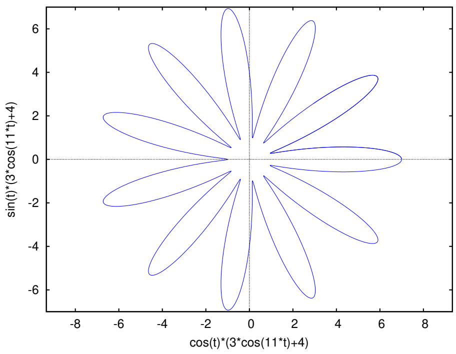
(h) Tính thể tích của khối được bao bởi các mặt $z = 3 - 2y$, $z = x^2 + y^2$.

(i) Tính tích phân $\iiint_E x\,dV$ trong đó E là khối được bao bởi hai mặt $z = 6 - x^2 - y^2$ và $z = x^2 + 3y^2$.

5.17. Tính thể tích của khối được miêu tả bởi điều kiện $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3(x^2 + y^2)$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

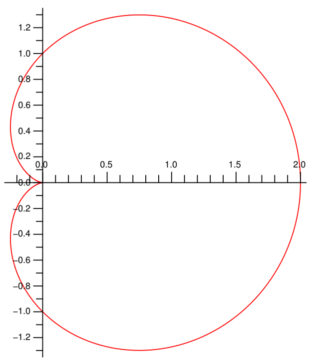
5.18. Tính:

(a) Tính diện tích của miền được bao bởi đường cong hình bông hoa $r = 4 + 3\cos(11\theta)$. Đây là tập con của $\mathbb{R}^2$ mà trong tọa độ cực được xác định bởi bất đẳng thức $0 \leq r \leq 4 + 3\cos(11\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Trong tọa độ (x, y) đây là miền được bao bởi đường $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ với $r = 4 + 3\cos(11\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



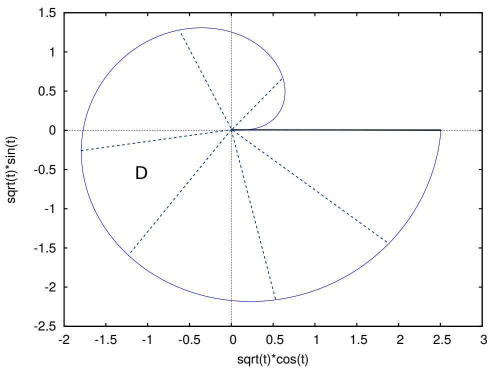
Hình 5.19: Đường $r = 4 + 3\cos(11\theta)$ vẽ trong tọa độ (x, y).

(b) Tính diện tích miền được bao bởi đường cong hình trái tim $r = 1 + \cos\theta$.



Hình 5.20: Đường $r = 1 + \cos\theta$ vẽ trong tọa độ (x, y).

(c) Đường cong trong mặt phẳng xy cho bởi phương trình $r = \sqrt{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ cùng với tia Ox bao một miền D hình vỏ ốc được vẽ trong Hình 5.21. Hãy tính tích phân $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$.



Hình 5.21: Đường $r = \sqrt{\theta}$.

5.22. Tính:

(a) Tính tích phân $\iint_R (x^2 + 2xy)\,dxdy$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $y = 2x + 3$, $y = 2x + 1$, $y = 5 - x$, $y = 2 - x$.

(b) Tính tích phân $\iint_R (x+y)^2\,dxdy$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$.

(c) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $y = 1/x$, $y = 2/x$.

(d) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong $y^2 = x$, $3y^2 = x$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

5.23. Xét khối bầu dục E được bao bởi mặt có phương trình $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Hãy tính thể tích của E bằng cách đổi biến để đưa về thể tích của quả cầu. Tìm công thức thể tích của khối bầu dục tổng quát.

5.24. Tìm diện tích của miền phẳng được bao bởi đường cong $x^2-2xy+2x+3y^2-2y = 2$.

5.25. Gọi D là miền phẳng được xác định bởi bất phương trình $x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 \leq 1$. Hãy tính tích phân $\iint_D x\,dxdy$.

5.26. Tìm thể tích của khối được tạo bằng cách xoay miền bao bởi đồ thị của hàm $f(x) = x - x^3$ và trục x quanh trục y.

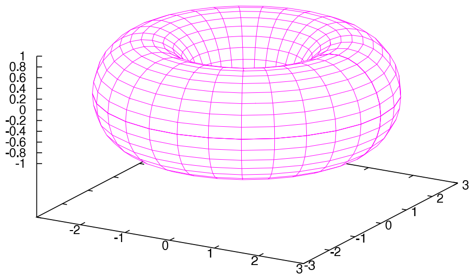
5.27. Dùng máy tính hãy vẽ những đường cong hình bông hoa tương tự các đường ở Hình 5.9 và Hình 5.19. Tính diện tích các miền được bao bởi các đường này.

5.28. Dùng máy tính hãy vẽ mặt cầu mấp mô cho bởi phương trình trong tọa độ cầu $\rho = 1 + \sin^2(3\theta)\sin^4(5\phi)$. Tính thể tích của khối bao bởi mặt này.

5.29. Hãy tìm lại kết quả ở 4.20 (thể tích khối tròn xoay) bằng cách đổi biến.

5.30. Giải bài 4.31 bằng cách dùng công thức đổi biến.

5.31. Khối bao bởi mặt xuyến (torus) có thể được miêu tả như là khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay quanh trục z miền bao bởi một đường tròn trên mặt phẳng Oyz tâm trên tia Oy và không cắt trục z, xem Hình 5.32 và Hình 5.33.

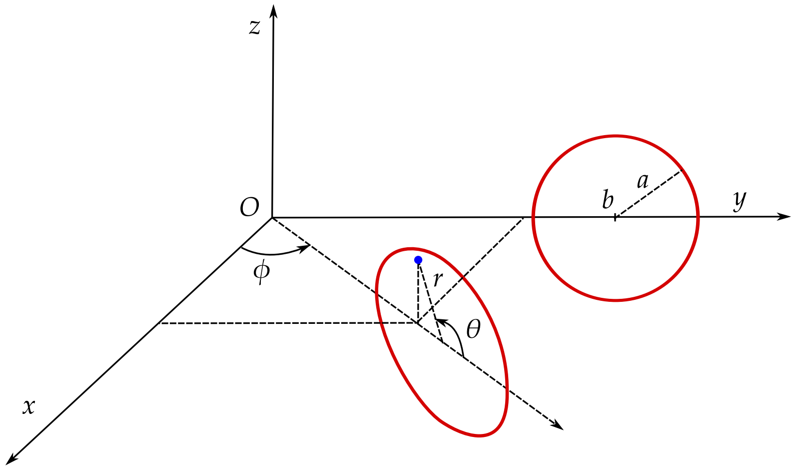


Hình 5.32: Khối xuyến.

(a) Hãy kiểm tra rằng khối xuyến có phương trình dạng ẩn:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2 \le a^2,\ 0<a<b.$$

Dùng phương pháp cắt lớp bằng những mặt cắt vuông góc trục z, hãy tính thể



Hình 5.33: Phương trình của khối xuyến.

tích của khối xuyến.

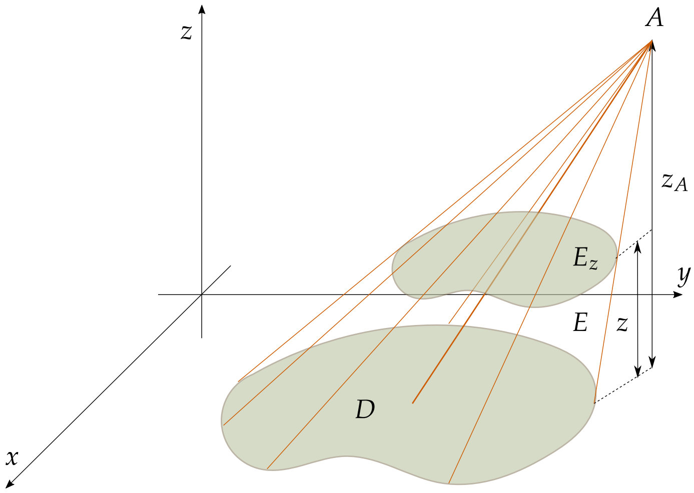
(b) Hãy kiểm tra rằng khối xuyến có phương trình dạng tham số:

$$((b+r\cos\theta)\cos\phi, (b+r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta),\ 0\le r\le a, 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

Dùng phương pháp đổi biến, hãy tính thể tích của khối xuyến.

5.34. Tính thể tích khối chóp cân đáy là một hình chữ nhật, tức là hình kim tự tháp, xem Hình 3.22.

5.35 (thể tích của khối nón tổng quát). * Giả sử D là một miền trong mặt phẳng Oxy. Cho A là một điểm phía trên mặt phẳng Oxy trong $\mathbb{R}^3$. Tập hợp tất cả các điểm nằm trên các đoạn thẳng nối A với các điểm thuộc D được gọi là một khối nón hay khối chóp. Chẳng hạn một khối tứ diện là một khối nón. Miền D được gọi là đáy của khối nón, còn khoảng cách từ A tới mặt phẳng Oxy được gọi là chiều cao của khối nón. Xem Hình 5.36.



Hình 5.36: Khối nón (khối chóp).

Ta chứng tỏ thể tích của khối nón bằng một phần ba diện tích đáy nhân chiều cao. Có thể làm theo các bước sau.

(a) * Chứng tỏ nếu đáy có diện tích thì khối nón có thể tích.

(b) Hãy viết khối nón là $E = \{(1-t)(x, y, 0) + t(x_A, y_A, z_A) \mid t \in [0, 1], (x, y) \in D\}$, với $A = (x_A, y_A, z_A)$, $z_A > 0$. Mặt cắt ứng với mỗi z, $0 \le z \le z_A$, là $E_z = \{(1-t)(x, y) + t(x_A, y_A) \mid t \in [0, 1], (x, y) \in D, tz_A = z\}$.

(c) Chứng tỏ, với $t = \frac{z}{z_A}$ cho trước, ánh xạ

$$\begin{aligned} D &\to E_z \\ (x, y) &\mapsto (1-t)(x, y) + t(x_A, y_A) \end{aligned}$$

là một phép đổi biến. Đây là hợp của phép vị tự với hệ số $(1-t)$ với phép tịnh tiến theo vectơ (x_A, y_A) trên mặt phẳng. Như vậy mặt cắt E_z đồng dạng với đáy D với tỉ số đồng dạng là $(1-t)$.

(d) Tính diện tích của mặt cắt E_z.

(e) Tính thể tích E bằng phương pháp cắt lớp.

5.37 (thể tích quả cầu nhiều chiều). Tọa độ cầu trong $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, được cho bởi:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1, && r > 0,\ 0 < \varphi_1 < \pi \\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, && 0 < \varphi_2 < \pi \\
&\vdots \\
x_i &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{i-1}\cos\varphi_i, && 0 < \varphi_i < \pi \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, && 0 < \varphi_{n-1} < 2\pi \\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hãy dùng tọa độ cầu để kiểm công thức sau cho thể tích của quả cầu $B^n(R) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2\}$:

$$|B^n(R)| = \begin{cases} \dfrac{2(2\pi)^{(n-1)/2}}{1\cdot 3\cdots n} R^n, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \dfrac{(2\pi)^{n/2}}{2\cdot 4\cdots n} R^n, & \text{nếu } n \text{ chẳn.} \end{cases}$$

5.38. Sau đây là một cách khác để tính thể tích quả cầu.

(a) Dùng công thức đổi biến, chứng tỏ $|B^n(R)| = |B^n(1)|R^n$.

(b) Chứng tỏ

$$|B^n(1)| = \iint_{x_1^2+x_2^2\le 1} \left(\int_{x_3^2+\cdots+x_n^2 \le 1-x_1^2-x_2^2} 1 \right) dx_1 dx_2.$$

(c) Suy ra $|B^n(1)| = \frac{2\pi}{n}|B^{n-2}(1)|$. Từ đó tính $|B^n(R)|$.

Có thể tham khảo [Ang97], [Lan97, tr. 598].

5.39. Sau đây là một cách nữa để tính thể tích quả cầu.

(a) Dùng công thức đổi biến, chứng tỏ $|B^n(R)| = |B^n(1)|R^n$.

(b) Dùng công thức Fubini, chứng tỏ

$$|B^n(1)| = \int_{-1}^{1} |B^{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)|\, dx_n.$$

(c) Đưa bài toán về việc tính tích phân $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt$. Từ đó tính $|B^n(R)|$.

5.40 (phép quay). Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ một phép quay quanh gốc tọa độ một góc α có thể được miêu tả trong tọa độ cực là ánh xạ $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$.

(a) Rút ra công thức phép quay tương ứng trong tọa độ (x, y) là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Dùng công thức đổi biến, hãy chứng tỏ một phép quay quanh gốc tọa độ mang một hình thành một hình có cùng diện tích.

5.41. * Một **phép dời hình** trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa là một song ánh φ từ $\mathbb{R}^n$ vào chính nó bảo toàn khoảng cách, tức là $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Một ma trận $n \times n$ được gọi là một ma trận trực giao nếu các vectơ cột của nó tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Nói cách khác ma trận A là trực giao nếu $A^T A = I$ trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A. Ta chứng minh rằng bất kì một phép dời hình nào cũng có dạng $\varphi(x) = A \cdot x + b$ trong đó A là một ma trận $n \times n$ trực giao và $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một phép dời hình. Đặt $T(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$. Hãy kiểm T cũng là một phép dời hình, cố định 0.

(b) Kiểm T bảo toàn độ lớn của vectơ.

(c) Kiểm T bảo toàn tích vô hướng của vectơ.

(d) Kiểm T bảo toàn góc giữa hai vectơ.

(e) Đặt $a_i = T(e_i)$. Chứng tỏ $(a_i)_{1\le i\le n}$ là một cơ sở tuyến tính trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Gọi A là ma trận mà các cột là các tọa độ của các vectơ a_i, kiểm A là một ma trận trực giao.

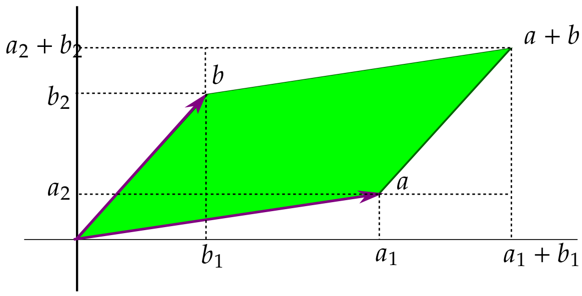
(f) Kiểm T là một ánh xạ tuyến tính với ma trận biểu diễn trong cơ sở tuyến tính chuẩn tắc là A.

(g) Rút ra rằng, trong mặt phẳng, một phép dời hình bất kì là một hợp của phép tịnh tiến, phép quay, và phép lấy đối xứng qua một đường thẳng.

5.42 (phép dời hình bảo toàn thể tích). Dùng công thức đổi biến của tích phân và Bài tập 5.41, hãy chứng tỏ ***thể tích của một hình không thay đổi qua một phép dời hình***. Đây là một tính chất nền tảng của khái niệm thể tích mà ta hướng tới từ đầu.

Chứng minh điều này mà không dùng công thức đổi biến của tích phân có ở phần bổ sung, Mệnh đề 7.12 trang 107.

5.43. Hình 5.44 là một minh họa dựa trên hình học Euclid cho công thức diện tích của hình bình hành bằng định thức. Hãy giải thích.



Hình 5.44: Minh họa rằng diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ (a_1, a_2) và (b_1, b_2) bằng $|a_1b_2 - a_2b_1|$.

5.45 (diện tích của tam giác). * Cho a và b là hai vectơ khác 0 trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ với tích trong Euclid. Ta định nghĩa góc giữa a và b là số thực $\alpha \in [0, \pi]$ sao cho

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{\|a\|\,\|b\|}.$$

Nếu góc giữa hai vectơ này là $\pi/2$, tức là nếu $a \cdot b = 0$, thì ta nói a và b vuông góc với nhau.

Hình chiếu của a lên b được định nghĩa là vectơ

$$(\|a\|\cos\alpha)\frac{b}{\|b\|} = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2}b.$$

Các định nghĩa này tương thích với cách tiếp cận trong môn lượng giác ở trung học. Lưu ý hàm cos và hàm sin có thể được định nghĩa trước khái niệm góc này, bằng phương pháp của Giải tích, xem phần bổ sung về hàm lượng giác ở mục **??** trang **??**.

Chứng tỏ, bằng cách dùng công thức diện tích hình bình hành thông qua định thức, và làm ngược lại Ví dụ 5.11, rằng diện tích của tam giác sinh bởi a và b bằng $\frac{1}{2}\|a\|\|b\|\sin\alpha$.

5.46. * Hãy chứng minh công thức đổi biến cho trường hợp phép đổi biến là một phép tịnh tiến.

6 Ứng dụng của tích phân bội

Khi có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện. Nếu tại mỗi điểm x_i, $1 \le i \le n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng đó là $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Nếu tập hợp D các điểm đang xét là vô hạn thì hàm $f: D \to \mathbb{R}$ thường được gọi là **hàm mật độ** của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là $\int_D f$.

Ví dụ. Điện tích phân bố trên mảnh kim loại hình chữ nhật $[0,1]\times[0,2]$ theo hàm mật độ điện tích cho bởi công thức $\rho(x,y) = 1000xy$. Hãy tính lượng điện tích có trên mảnh này.

Tổng lượng điện tích có trên mảnh là

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} \rho(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 1000xy\,dy\right) dx \\ &= 1000\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right) = 1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2 = 1000.\end{aligned}$$

■

Giá trị trung bình

Khái niệm này đã được khảo sát cho hàm một biến, ở đây ta xét cho hàm nhiều biến. Nếu tại các điểm x_i, $1 \le i \le n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử $f: D \to \mathbb{R}$, thì **giá trị trung bình** của f được định nghĩa bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân:

$$\frac{1}{|D|}\int_D f.$$

Ví dụ. Nhiệt độ tại điểm (x,y) trên mặt phẳng là $50e^{-x^2-y^2}$ (độ Celcius). Tìm nhiệt độ trung bình trên đĩa tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ.

Gọi D là đĩa tròn $x^2+y^2 \le 1$. Nhiệt độ trung bình trên D được cho bởi

$$\begin{aligned}\frac{1}{|D|}\iint_D 50e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} 50e^{-r^2} r\,d\theta\,dr \\ &= 50\left(1-\frac{1}{e}\right) \approx 31{,}6.\end{aligned}$$

■

Ví dụ. Khu trung tâm thành phố được miêu tả như một hình tam giác với các đỉnh tại $(0,0)$, $(2,0)$ và $(0,3)$ (đơn vị chiều dài là kilomét). Giá đất trong khu vực này được mô hình hóa bằng hàm $p(x,y) = 3x + 2y + 1$ (trăm triệu đồng/m^2 tức 10^6 triệu đồng/km^2). Hãy tính giá đất trung bình ở khu vực này.

Các đỉnh $(0,0)$, $(2,0)$ và $(0,3)$ tạo thành tam giác D bao bởi hai trục tọa độ theo chiều dương và đường thẳng $3x + 2y = 6$. Giá đất trung bình ở khu vực này là giá trị trung bình của hàm p trên miền D, cho bởi

$$\frac{1}{|D|}\iint_D p.$$

Diện tích tam giác D là $|D| = 3$. Xem D là miền đơn giản theo chiều trục y và áp dụng Công thức Fubini ta được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|D|}\iint_D p &= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(\int_0^{3-\frac{3}{2}x} (3x + 2y + 1)\, dy\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2 \left((3xy + y^2 + y)\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x}\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(3x(3 - \frac{3}{2}x) + (3 - \frac{3}{2}x)^2 + (3 - \frac{3}{2}x)\right) dx = 5.
\end{aligned}$$

Tích phân cuối ta có thể dùng máy để tính. Vậy giá đất trung bình của khu vực là 5 trăm triệu đồng/m^2. ∎

Tâm khối lượng

Trong trường hợp hai chất điểm có khối lượng m_1 tại điểm p_1 và có khối lượng m_2 tại điểm p_2 thì tâm khối lượng của hệ hai điểm này, theo nguyên tắc đòn bẩy của vật lý, nằm tại điểm p trên đoạn thẳng từ p_1 tới p_2 thỏa

$$m_1(p - p_1) = m_2(p_2 - p),$$

tức là

$$p = \frac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1 + m_2}.$$

Điểm tâm khối lượng này được xem là mang tổng khối lượng $m = m_1 + m_2$.

Đối với hệ gồm n chất điểm, bằng quy nạp, vị trí của tâm khối lượng là

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_ip_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

với tổng khối lượng là $m = \sum_{i=1}^n m_i$.

Xét trường hợp khối lượng liên tục, giả sử ta có một khối vật chất chiếm phần không gian E trong $\mathbb{R}^3$. Tại mỗi điểm $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gọi $\rho(p)$ là mật độ khối lượng của khối tại p, đó là giới hạn của khối lượng trung bình quanh p, có thể hiểu là khối lượng tại điểm p. Khối lượng của khối chính là tích phân của mật độ khối lượng:

$$m = \int_E \rho.$$

Từ công thức của trường hợp rời rạc ở trên ta đưa ra vị trí của tâm khối lượng trong trường hợp liên tục là

$$\frac{\int_E \rho p}{\int_E \rho} = \frac{\int_E \rho p}{m}.$$

Ở đây tích phân của hàm vectơ được hiểu là vectơ tích phân của từng thành phần, cụ thể hơn, nếu $p = (x, y, z)$ thì tâm khối lượng là điểm

$$\frac{1}{m}\left(\int_E \rho(x,y,z)x\,dxdydz, \int_E \rho(x,y,z)y\,dxdydz, \int_E \rho(x,y,z)z\,dxdydz\right).$$

Ví dụ. Ta tìm tâm khối lượng của nửa hình tròn đồng chất. Gọi D là nửa trên của hình tròn tâm O bán kính R và gọi hằng số ρ là mật độ khối lượng của nó. Khối lượng của khối này là $m = \iint_D \rho\,dA = \rho\pi R^2/2$. Tọa độ của tâm khối lượng là

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m}\iint_D \rho x\,dxdy = 0,\\ y &= \frac{1}{m}\iint_D \rho y\,dxdy = \frac{\rho}{m}\int_0^R\int_0^\pi (r\sin\theta)r\,d\theta\,dr = \frac{4}{3\pi}R. \end{aligned}$$

■

Xác suất

Một biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào $\mathbb{R}$. Trong trường hợp tập giá trị D của X là hữu hạn thì ta nói X là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Với mỗi giá trị $x \in D$ có một số thực $0 \le f(x) \le 1$ là xác suất để X có giá trị x, kí hiệu là $P(X = x)$. Hàm f được gọi là **hàm mật độ xác suất** [19] của biến ngẫu nhiên X.

Xác suất [20] để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Ta phải có $\sum_{x\in D} f(x) = P(X \in D) = 1$.

[19] probability density function
[20] probability

Giá trị **trung bình** theo xác suất [21] hay **kì vọng** [22] của X được cho bởi:

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f(x).$$

Ví dụ. Xét một trò chơi với con xúc xắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc xắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi X là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc xắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là $f(10) = 5/6$ và $f(60) = 1/6$. Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất X. Ta có $E(X) = 10 \cdot \frac{5}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20$, như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi sẽ bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi sẽ hưởng lợi. ■

Trong trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục, tập giá trị D của biến ngẫu nhiên X là một tập con vô hạn của $\mathbb{R}$. Tương tự với trường hợp rời rạc, có một **hàm mật độ xác suất** $f : D \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq 0$ và xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$\boxed{P(X \in C) = \int_C f.}$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa $P(X \in D) = \int_D f = 1$.

Trung bình hay **kì vọng** của biến ngẫu nhiên X được cho bởi:

$$\boxed{E(X) = \int_D x f.}$$

Ví dụ. Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực $t \geq 0$ là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất theo năm. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$. Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành sẽ là

$$P(0 \leq T \leq 2) = \int_0^2 0{,}1e^{-0{,}1t}\, dt \approx 18\%.$$

Tập giá trị của biến xác suất là khoảng $[0, \infty)$. Hàm mật độ xác suất thỏa

$$\int_0^\infty 0{,}1e^{-0{,}1t}\, dt = \lim_{h \to \infty} \int_0^h 0{,}1e^{-0{,}1t}\, dt = \lim_{h \to \infty} -e^{-0{,}1t}\Big|_0^h = \lim_{h \to \infty} (-e^{-0{,}1h} + 1) = 1.$$

[21] mean
[22] expected value

Thời điểm hư hỏng trung bình của sản phẩm là giá trị trung bình xác suất hay kì vọng cho bởi

$$\int_0^\infty t0{,}1e^{-0{,}1t}\,dt = \lim_{h\to\infty}\int_0^h 0{,}1te^{-0{,}1t}\,dt.$$

Ta có thể tìm nguyên hàm bằng cách dùng tích phân từng phần hoặc sử dụng máy tính, và thu được

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^h 0{,}1te^{-0{,}1t}\,dt = \lim_{h\to\infty} -(t+10)e^{-0{,}1t}\Big|_0^h = \lim_{h\to\infty}(-(h+10)e^{-0{,}1h}+10) = 10.$$

Giới hạn trên có thể tìm được bằng cách dùng Quy tắc l'Hôpital. Vậy trung bình sản phẩm hư sau 10 năm. ■

Trong trường hợp có n biến ngẫu nhiên thì tập giá trị của biến ngẫu nhiên là một tập con của $\mathbb{R}^n$, và các tích phân trên là tích phân nhiều biến. Cụ thể, với biến ngẫu nhiên $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ có giá trị thuộc tập $D \subset \mathbb{R}^n$ thì **hàm mật độ xác suất** là một hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa

$$\int_D f = 1.$$

Xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$\boxed{P(X \in C) = \int_C f.}$$

Trung bình hay **kì vọng** của X_i là

$$\boxed{E(X_i) = \int_D x_i f.}$$

Trung bình hay **kì vọng** của X là

$$\boxed{E(X) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)) = \left(\int_D x_1 f, \int_D x_2 f, \ldots, \int_D x_n f\right).}$$

Ta để ý thấy sự tương tự của công thức này với công thức của tâm khối lượng.

Ví dụ. Một chuyến xe buýt thường tới trạm trễ, nhưng không quá 10 phút, và đợi ở trạm 5 phút. Giả sử hàm mật độ xác suất của giờ xe tới trạm X được cho bởi $f_1(x) = -0{,}02x + 0{,}2$, $0 \le x \le 10$. Một người thường đi xe buýt vào giờ này nhưng hay bị trễ, có khi tới 20 phút. Giả sử hàm mật độ xác suất của giờ người này tới trạm Y được cho bởi $f_2(y) = -0{,}005y + 0{,}1$, với $0 \le y \le 20$.

Hai biến xác suất X và Y độc lập nên hàm mật độ xác suất của cặp biến (X, Y) là $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ xác định trên tập giá trị của cặp biến ngẫu nhiên là $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 10, 0 \le y \le 20\}$.

(a) Xác suất để người này đón được chuyến xe buýt là

$$\begin{aligned} P(Y \le X+5) &= \iint_{\{(x,y)\in D \ \mid \ y \le x+5\}} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^{10} \left(\int_0^{x+5} (-0{,}02x + 0{,}2)(-0{,}005y + 0{,}1)\,dy \right) dx \approx 65\%. \end{aligned}$$

(b) Trung bình thời điểm xe tới trạm là

$$\begin{aligned} E(X) &= \iint_D x f(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{0\le x\le 10, 0 \le y \le 20} x(-0{,}02x + 0{,}2)(-0{,}005y + 0{,}1)\,dxdy \\ &= \left(\int_0^{10} x(-0{,}02x + 0{,}2)\,dx \right) \left(\int_0^{20} (-0{,}005y + 0{,}1)\,dy \right) = \frac{10}{3} \cdot 1. \end{aligned}$$

Như vậy trung bình xe tới trễ khoảng 3,3 phút.

(c) Trung bình thời điểm người tới trạm là

$$\begin{aligned} E(Y) &= \iint_D y f(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{0\le x\le 10, 0 \le y \le 20} y(-0{,}02x + 0{,}2)(-0{,}005y + 0{,}1)\,dxdy \\ &= \left(\int_0^{10} (-0{,}02x + 0{,}2)\,dx \right) \left(\int_0^{20} y(-0{,}005y + 0{,}1)\,dy \right) = 1 \cdot \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Như vậy trung bình người này tới trễ khoảng 6,7 phút. ■

Ví dụ. Hàm mật độ xác suất của hai biến ngẫu nhiên X và Y có dạng

$$f(x,y) = cxe^{-y}, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

(a) Tìm giá trị của hằng số c: Điều kiện để f là hàm mật độ xác suất là tích phân của f bằng 1,

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} cxe^{-y}\,dxdy = c\int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{-y}\,dy \right) dx \\ &= c\left(\int_0^1 x\,dx \right) \left(\int_0^1 e^{-y}\,dy \right) = c\frac{1}{2}(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

Vậy $c = \frac{2}{1-e^{-1}}$.

(b) Tính kì vọng $E(X)$ của X:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \iint_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} xf(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} cx^2e^{-y}\,dxdy = c\int_0^1\left(\int_0^1 x^2e^{-y}\,dy\right)dx \\
&= c\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^1 e^{-y}\,dy\right) = c\frac{1}{3}(1-e^{-1}) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Tính kì vọng $E(Y)$ của Y:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \iint_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} yf(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} cxye^{-y}\,dxdy = c\int_0^1\left(\int_0^1 xye^{-y}\,dy\right)dx \\
&= c\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 ye^{-y}\,dy\right) = c\frac{1}{2}\int_0^1 ye^{-y}\,dy.
\end{aligned}$$

Để tính tích phân $\int_0^1 ye^{-y}\,dy$ có thể dùng máy tính, hoặc dùng tích phân từng phần áp dụng cho $u = y$ và $v' = e^{-y}$:

$$\int_0^1 ye^{-y}\,dy = y(-e^{-y})\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 -e^{-y}\,dy = 1 - 2e^{-1}.$$

Vậy $E(Y) = \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} \approx 0{,}41$.

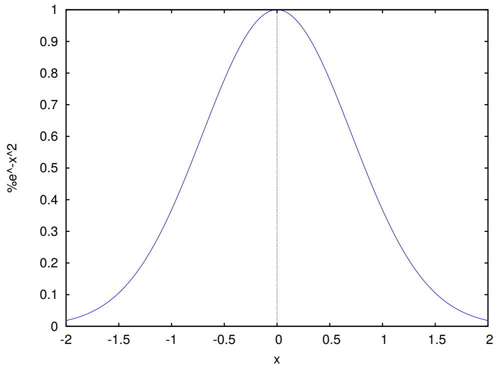
(d) Tính xác suất X có giá trị giữa 0 và $\frac{1}{2}$ và Y có giá trị giữa 0 và $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
P(0\le X\le \frac{1}{2}, 0\le Y\le \frac{1}{3}) &= \iint_{(x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{3}]} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_{(x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{3}]} cxe^{-y}\,dxdy \\
&= c\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{-y}\,dy\right)dx \\
&= c\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx\right)\left(\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-y}\,dy\right) \\
&= c\frac{1}{4}(1-e^{-\frac{1}{3}}) = \frac{1-e^{-\frac{1}{3}}}{2(1-e^{-1})} \approx 22\%.
\end{aligned}$$

■

Ví dụ (tính $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$). Tích phân này có vai trò quan trọng trong môn Xác suất. Ở đây ta tính nó thông qua tích phân bội.

Ý của tính toán này là tích phân của e^{-x^2} có thể rút ra được từ tích phân của $e^{-(x^2+y^2)}$ trên mặt phẳng, mà ta tính được bằng cách dùng tọa độ cực.



Hình 6.1: Đường cong e^{-x^2} thường được gọi là đường hình chuông.

Gọi $I(R)$ là hình vuông tâm 0 với chiều dài cạnh $2R$, tức $I(R) = [-R, R] \times [-R, R]$. Theo công thức Fubini

$$\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Lấy giới hạn $R \to \infty$ ta được

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Gọi $B'(R)$ là hình tròn đóng tâm 0 bán kính R, tức $B'(R) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. Vì $B'(R) \subset I(R) \subset B'(R\sqrt{2})$ nên

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leq \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leq \iint_{B'(R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Lấy giới hạn $R \to \infty$, do tính chất kẹp, và dùng tọa độ cực, ta được

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy &= \lim_{R\to\infty}\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\
&= \lim_{R\to\infty}\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r\,drd\theta \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-r^2} r\,dr\right)d\theta \\
&= \lim_{R\to\infty}\pi(1-e^{-R^2}) = \pi.
\end{aligned}$$

Vậy ta rút ra được công thức nổi tiếng:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.}$$

■

Ví dụ **(phân bố chuẩn [23]).** Đặt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$. Ta kiểm f thỏa yêu cầu của một hàm mật độ xác suất. Đổi biến $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ thì

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{h\to\infty}\int_{-h}^{h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_{-\frac{h}{\sqrt{2}}}^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}\sqrt{2}dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1.\end{aligned}$$

■

Để tìm hiểu thêm về ứng dụng trong Xác suất người học có thể đọc các giáo trình về Xác suất như [Ros20, Chapter 6].

Các ứng dụng khác

Tích phân còn có vai trò là phép biến đổi ngược của vi phân. Các công thức liên hệ vi phân và tích phân trong phần Giải tích vectơ tiếp theo minh họa điều này. Một bài toán vi phân có thể được chuyển thành một bài toán tích phân, xem một ví dụ ở Bài tập 14.3. Điều này được phát triển thành những phương pháp quan trọng và phổ biến trong toán lý thuyết lẫn ứng dụng. Tích phân đóng vai trò chính trong các môn học chuyên ngành toán như Giải tích hàm, Phương trình toán lý.

Bài tập

6.2. Xét một mô hình đơn giản cho cấu trúc hành tinh Trái đất, gồm phần lõi cứng ở gần tâm có mật độ khối lượng cao và phần ngoài có mật độ khối lượng giảm dần từ trong ra ngoài. Gọi ρ là khoảng cách từ một điểm tới tâm, thì mật độ khối lượng tại điểm đó được mô hình hóa như sau:

$$f(\rho) = \begin{cases} 13\cdot 10^9, & 0 \le \rho \le 1000,\\ \frac{13\cdot 10^{12}}{\rho}, & 1000 \le \rho \le 6400,\end{cases}$$

ở đây đơn vị khối lượng là kg và đơn vị chiều dài là km. Hãy ước lượng khối lượng của Trái đất.

6.3. Giả sử rằng gốc tọa độ ở trung tâm thành phố và mật độ dân số tại điểm có tọa độ (x, y) có mô hình $p(x, y) = 2000(x^2 + y^2)^{-0,2}$ người trên km^2, hãy tìm số dân trong bán kính 5 km từ trung tâm thành phố.

6.4. Tính giá trị trung bình của hàm trên miền.

(a) Hàm $f(x, y) = x\cos(xy)$ trên miền $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

(b) Hàm $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ trên miền $x^2 + y^2 \le 1$.

[23] normal distribution

(c) Hàm $f(x, y) = x - y^2$ trên miền bao bởi các đường $y = x^2$ và $x = y^4$.

(d) Hàm $f(x, y, z) = xyz$ trên hình hộp bao bởi các mặt phẳng $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 2$, $z = 3$.

6.5. Khu trung tâm thành phố được miêu tả như một hình chữ nhật $[0, 1] \times [0, 2]$ với đơn vị chiều dài là km. Giá đất trong khu vực này trong được mô hình hóa bằng hàm p, ở vị trí $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ thì $p(x, y) = 200 - 10(x - \frac{1}{2})^2 - 15(y - 1)^2$ (triệu đồng/m^2). Hãy tính giá đất trung bình ở khu vực này.

6.6. Tính:

(a) Tìm tâm khối lượng của hình chữ nhật đồng chất $[-1, 1] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Tìm tâm khối lượng của vật có hình dạng một mảnh mỏng chiếm miền trên mặt phẳng bao bởi đường $y = 12{,}37x^2$ và đường $y = 8{,}5$ với hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y) = 103{,}6x^4y^{1{,}2}$.

(c) Tìm tâm khối lượng của hình trái tim ở Hình 5.20.

(d) Tìm tâm khối lượng của hình vỏ ốc ở Hình 5.21.

(e) Chứng tỏ tâm khối lượng của một tam giác chính là trọng tâm (giao điểm của ba đường trung tuyến) của tam giác.

(f) Tìm tâm khối lượng của một khối đồng chất có dạng hình nón nhọn cân chiều cao là h và với đáy là hình tròn bán kính R.

(g) Tìm tâm khối lượng của khối tứ diện đồng chất được bao bởi các mặt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $a, b, c > 0$.

6.7. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ là một tập đồng chất, đối xứng qua gốc tọa độ O tức là nếu $p \in D$ thì $-p \in D$. Hãy tìm tâm khối lượng của D.

6.8. Giả sử miền $D \subset \mathbb{R}^n$ có tâm khối lượng ở p, chứng tỏ

$$\int_D (x - p)\, dV = 0.$$

Công thức trên có thể hiểu là tích phân của hàm vectơ, tức là với mọi $1 \leq i \leq n$ thì

$$\int_D (x_i - p_i)\, dV = 0.$$

6.9. Một cái bồn có dạng hình hộp với chiều rộng 3 mét, chiều dài 4 mét, chiều cao 5 mét chứa đầy nước. Ta cần tính công W – năng lượng cần thiết để bơm hết nước ra khỏi bồn qua mặt trên của bồn.

(a) Gọi x là khoảng cách từ một chất điểm trong bồn tới mặt trên của bồn. Giải thích vì sao công để đưa chất điểm này ra khỏi bồn là $x\rho g$, với mật độ khối lượng của nước là $\rho = 1000\, kg/m^3$, hằng số trọng lực là $g = 9,8\, m/s^2$.

(b) Thiết lập công thức $W = \int_0^5 x\rho g \cdot 3 \cdot 4\, dx$. Tính W.

6.10. Kim tự tháp Vua Khufu là kim tự tháp lớn nhất ở Ai Cập, được xây dựng trong khoảng từ năm 2580 TCN tới 2560 TCN. Đáy của nó là một hình vuông với chiều dài cạnh là 230,4 m và chiều cao là 146,5 m.

(a) Hãy ước lượng thể tích của kim tự tháp.

(b) Kim tự tháp được làm bằng đá vôi. Mật độ khối lượng của đá vôi vào khoảng 2400 kg/m^3. Hãy ước lượng khối lượng của kim tự tháp.

(c) Tìm tâm khối lượng của kim tự tháp.

(d) Hãy ước lượng công xây dựng kim tự tháp này. Công này ít nhất bằng thế năng trọng trường của khối kim tự tháp.

(e) Mỗi người nhận khoảng 2000 $kcal$ năng lượng mỗi ngày từ thức ăn. Giả sử mỗi người dùng được 20% năng lượng đó để làm việc. Kim tự tháp được xây trong 20 năm. Hãy ước lượng cần ít nhất bao nhiêu người mỗi ngày để xây kim tự tháp này? (Chưa tính việc sử dụng công cụ lao động để lấy nguồn năng lượng khác.)

6.11. Hai công ty sản xuất hai sản phẩm cạnh tranh với nhau. Gọi X và Y là biến xác suất ứng với thời điểm hư hỏng của hai sản phẩm tính theo thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất (theo năm), và giả sử hai biến này là độc lập với nhau. Giả sử các hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$ và $g(y) = 0{,}1e^{-0{,}1y}$, và hàm mật độ xác suất chung được cho bởi $h(x, y) = f(x)g(y)$. Hãy tính xác suất sản phẩm của công ty thứ nhất bị hư trước sản phẩm của công ty thứ hai trong thời gian bảo hành 3 năm.

6.12. Một chuyến xe buýt thường tới trạm trễ không quá 10 phút, và đợi ở trạm 1 phút. Giả sử hàm mật độ xác suất của giờ xe tới trạm được cho bởi $f_1(x) = -0{,}02x + 0{,}2$, $0 \le x \le 10$. Một người thường đi xe buýt vào giờ này, có mặt ở trạm có khi sớm tới 5 phút có khi trễ tới 5 phút. Giả sử hàm mật độ xác suất của giờ người này tới trạm được cho bởi $f_2(y) = 0{,}1$, với $-5 \le y \le 5$. Tính xác suất người này đón được chuyến xe buýt.

6.13. Hai người hẹn gặp nhau trong khoảng thời gian giữa 12 giờ và 12 giờ 30 phút. Thời điểm mỗi người tới cuộc hẹn phân bố ngẫu nhiên đều trong khoảng thời gian này, tức là có hàm mật độ xác suất là hàm hằng 1/30. Tính xác suất để một người phải đợi người kia hơn 10 phút.

6.14. Hàm mật độ xác suất của hai biến ngẫu nhiên X và Y có dạng

$$f(x, y) = cx^2e^{-y}, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3.$$

(a) Tìm giá trị của hằng số c.

(b) Tính kì vọng $E(X)$ của X.

(c) Tính kì vọng $E(Y)$ của Y.

6.15. Điểm ngẫu nhiên được phân bố đều trên miền bao bởi đường tròn tâm tại gốc tọa độ bán kính R trong mặt phẳng. Gọi $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ là tọa độ của điểm, thì hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên là

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

(a) Hãy tính giá trị của c.

(b) Tính xác suất để biến ngẫu nhiên (X,Y) ở cách tâm không quá khoảng cách $R/2$.

(c) Tìm giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên (X,Y).

6.16. Chứng tỏ hàm được dùng trong mô hình phân bố chuẩn trong môn Xác suất

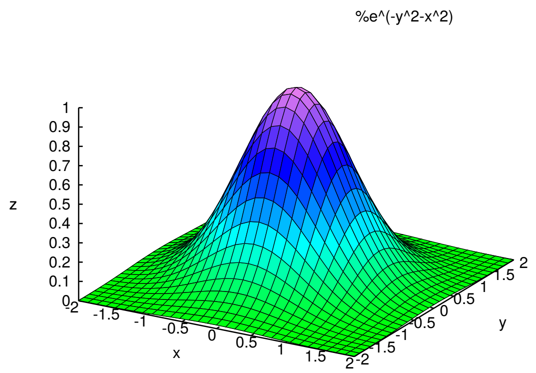
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

thỏa mãn tính chất cần có của hàm mật độ xác suất: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

6.17. Hàm sau được dùng làm hàm phân bố chuẩn nhiều biến trong môn Xác suất

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{2}}.$$

Xem Hình 6.18. Chứng tỏ hàm f thỏa mãn tính chất $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ cần có của hàm mật độ xác suất.



Hình 6.18: Hàm $e^{-(x^2+y^2)}$ xuất hiện trong phân bố chuẩn của hai biến ngẫu nhiên.

6.19 (hàm Gamma). Hàm Gamma là một mở rộng của hàm giai thừa lên tập hợp các số thực. Ta định nghĩa

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt, \qquad z \in \mathbb{R},\ z > 0.$$

(a) Chứng tỏ $\Gamma(z)$ được xác định.

(b) Kiểm tra rằng $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Suy ra với số nguyên dương n thì $\Gamma(n+1) = n!$.

(c) Kiểm tra công thức $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(d) Chứng tỏ thể tích của quả cầu n-chiều bán kính R (xem 5.37) có thể được viết ngắn gọn là

$$|B^n(R)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n.$$

6.20 (công thức Pappus). Hãy tìm lại công thức của Pappus[24]: Thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền phẳng quanh một trục bên ngoài bằng diện tích của miền nhân với chiều dài của đường đi của tâm khối lượng của miền.

[24] Pappus xứ Alexandria, một nhà hình học sống vào thế kỉ thứ 4 sau Công nguyên.

Cụ thể hơn, gọi D là miền bao bởi hai đồ thị của hai hàm f và g trên đoạn $[a,b]$, với $0 \le g(x) \le f(x)$ trên $[a,b]$. Gọi (x_0, y_0) là tâm khối lượng của D. Khi đó thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền D quanh trục x bằng $2\pi y_0 |D|$.

Ứng dụng, hãy tìm lại công thức thể tích của khối xuyến.

7 * Các đề tài bổ sung về tích phân bội

Mục này trình bày vài chứng minh kết quả quan trọng và vài thảo luận nâng cao. Những nội dung này tuy hơi khó hơn và không bắt buộc nhưng hẳn rất bổ ích dù ban đầu người học có thể chỉ mới tiếp thu một phần. Một số nội dung này hiện không nằm trong môn học nào khác của chương trình đại học. Người học cũng có thể quay trở lại đọc nội dung này về sau.

7.1 Tích phân Darboux trùng với tích phân Riemann

Dưới đây ta viết ra một chứng minh cho Mệnh đề 1.14 rằng tích phân Darboux trùng với tích phân Riemann.

Trường hợp hàm liên tục ta đã chứng minh một cách đơn giản ở Định lý 2.1. Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát.

Mệnh đề. *Hàm khả tích Riemann thì bị chặn.*

Ta kí hiệu, với phép chia P của hình hộp I thì $H(P)$ là tập hợp tất cả các hình hộp con của P, và $\|P\|$ là chiều dài cạnh lớn nhất trong các hình hộp con của P, đại diện cho độ mịn của phép chia. Một cách chọn điểm đại diện trong mỗi hình hộp con của P là một ánh xạ $x : H(P) \to I$ thỏa với hình hộp con R thì $x(R) \in R$. Cho hàm thực f trên I, ứng với mỗi cặp (P, x) ta có một tổng Riemann

$$S(f, P, x) = \sum_{R \in H(P)} f(x(R))|R|.$$

Chứng minh. Ý của chứng minh là nếu hàm không bị chặn thì tổng Riemann có độ lớn bất kì khi chọn điểm đại diện phù hợp dù phép chia như thế nào.

Lấy một phép chia P và cố định một cách chọn điểm đại diện x ứng với P.

Giả sử f không bị chặn. Cho trước số $M > 0$ bất kì, tồn tại một điểm a_M thuộc một hình hộp con R_M nào đó của P sao cho $|f(a_M)| > M$.

Lấy cách chọn điểm đại diện x' ứng với P sao cho x' trùng với x trên các hình hộp con khác với R_M còn trên R_M thì lấy $x'(R_M) = a_M$.

Khi đó

$$\begin{aligned} S(f, P, x') - S(f, P, x) &= \sum_{R \in H(P)} \left[f(x'(R)) - f(x(R)) \right] |R| \\ &= \left[f(x'(R_M)) - f(x(R_M)) \right] |R_M| \\ &= \left[f(a_M) - f(x(R_M)) \right] |R_M|, \end{aligned}$$

dẫn tới

$$
\begin{aligned}
|S(f,P,x')| &\geq |S(f,P,x') - S(f,P,x)| - |S(f,P,x)| \\
&\geq \left| f(a_M) - f(x(R_M)) \right| |R_M| - |S(f,P,x)| \\
&\geq |f(a_M)| |R_M| + |f(x(R_M))| |R_M| - |S(f,P,x)| \\
&\geq M \|P\|^n + |f(x(R_M))| \, \|P\|^n - |S(f,P,x)| \\
&\geq M \|P\|^n + \left[\min_{R \in H(P)} |f(x(R))| \right] | \, \|P\|^n - |S(f,P,x)| = M\|P\|^n + c,
\end{aligned}
$$

trong đó c là một số cố định chỉ phụ thuộc vào f, P, và x. Vậy ta có thể chọn điểm đại diện của x' sao cho tổng Riemann $S(f,P,x')$ có độ lớn tùy ý dù cố định phép chia P. Điều này dẫn tới f không khả tích, mâu thuẫn. □

Mệnh đề. *Khả tích Riemann dẫn tới khả tích Darboux, và hai tích phân bằng nhau.*

Chứng minh. Giả sử f khả tích Riemann với tích phân Riemann bằng α. Cho $\epsilon > 0$. Có phép chia P sao cho với mọi cách chọn điểm đại diện x thì $|S(f,P,x) - \alpha| < \epsilon$. Theo mệnh đề trên, f bị chặn. Với mỗi $R \in H(P)$ thì do tính chất của inf có $x(R) \in R$ sao cho $0 \leq f(x(R)) - \inf_R f < \epsilon$. Điều này dẫn tới $0 \leq S(f,P,x) - L(f,P) < \epsilon|I|$. Suy ra $|L(f,P) - \alpha| \leq \epsilon + \epsilon|I|$. Tương tự $|U(f,P) - \alpha| \leq \epsilon + \epsilon|I|$. Do đó $|U(f,P) - L(f,P)| \leq 2\epsilon(1 + |I|)$. Dùng Mệnh đề 1.13 ta kết luận được f khả tích Darboux và tích phân Darboux bằng α. □

Mệnh đề. *Khả tích Darboux dẫn tới khả tích Riemann, và hai tích phân bằng nhau.*

Chứng minh. Khác biệt chính giữa khả tích Darboux và khả tích Riemann là một bên dùng tính mịn hơn của phép chia còn một bên dùng tính đủ nhỏ của độ mịn của phép chia. Lý luận ở đây nhằm xử lý sự khác biệt này.

Để dễ theo dõi hơn trước tiên ta viết chứng minh cho trường hợp một chiều, $n = 1$.

Gọi β là tích phân Darboux của f trên I. Vì f khả tích Darboux nên theo định nghĩa f bị chặn, do đó có số thực $M > 0$ sao cho $|f| \leq M$.

Cho $\epsilon > 0$ bất kì. Theo Mệnh đề 1.13 có phép chia Q của I sao cho $\beta - \epsilon < L(f,Q) \leq \beta \leq U(f,Q) < \beta + \epsilon$. Xét một phép chia P và một phép chọn điểm đại diện x ứng với P. Đặt $Q' = Q \cup P$, thì do $n = 1$ nên Q' là một phép chia của I, mịn hơn cả P và Q. Mỗi đoạn con R' của Q' chứa trong một đoạn con R nào đó của P, nên ta viết được với một phép chọn điểm đại diện y nào đó ứng với Q':

$$\begin{aligned}
S(f,P,x)-S(f,Q',y) &= \sum_{R\in H(P)} f(x(R))|R| - \sum_{R'\in H(Q')} f(y(R'))|R'| \\
&= \sum_{R\in H(P)} \sum_{R'\in H(Q'),R'\subset R} \left[f(x(R))|R| - f(y(R'))|R'| \right] \\
&= \sum_{R\in H(P)} \sum_{R'\in H(Q'),R'\subset R} \left[f(x(R)) - f(y(R')) \right] |R'| \\
&= \sum_{R\in H(P)} \left[\sum_{R'\in H(Q'),R'=R} \left[f(x(R)) - f(y(R')) \right] |R'| + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{R'\in H(Q'),R'\subsetneq R} \left[f(x(R)) - f(y(R')) \right] |R'| \right].
\end{aligned}$$

Lấy y thỏa $y(R') = x(R)$ nếu $R' = R$. Nếu $R' \subsetneq R$ thì R' phải chứa một điểm thuộc Q, do đó số R' như vậy không quá hai lần số phần tử $|Q|$ của Q. Ta rút ra

$$\begin{aligned}
|S(f,P,x)-S(f,Q',y)| &\le \sum_{R\in H(P)} \sum_{R'\in H(Q'),R'\subsetneq R} |f(x(R)) - f(y(R'))||R'| \\
&\le \sum_{R\in H(P)} \sum_{R'\in H(Q'),R'\subsetneq R} 2M|R'| \\
&\le 2M\|P\|2|Q|.
\end{aligned}$$

Vì Q' mịn hơn Q nên

$$\beta-\epsilon < L(f,Q) \le L(f,Q') \le S(f,Q',y) \le U(f,Q') \le U(f,Q) < \beta+\epsilon.$$

Giờ ta có

$$|S(f,P,x)-\beta| \le |S(f,P,x)-S(f,Q',y)| + |S(f,Q',y)-\beta| \le 4M\|P\||Q| + \epsilon.$$

Đánh giá này cho thấy nếu $\|P\|$ đủ nhỏ thì $|S(f,P,x)-\beta| < 2\epsilon$. Vậy f khả tích Riemann với tích phân Riemann bằng β.

Trường hợp nhiều chiều, $n \ge 1$, ta chỉnh lý luận trên ở hai chỗ như sau. Lấy Q' có các điểm chia trên mỗi cạnh của I là hội các điểm chia trên cạnh đó của Q và P. Nếu $H(Q') \ni R' \subsetneq R \in H(P)$ thì R' phải chứa một đỉnh không thuộc P do đó đỉnh này có ít nhất một tọa độ là tọa độ của một điểm chia của Q. Trong $\mathbb{R}^n$ số hình hộp con có cùng một đỉnh chung là không quá 2^n, do đó tổng thể tích các hình hộp R' mà có một đỉnh có cùng một tọa độ là tọa độ của một điểm chia của Q không quá $2^n\|P\|$ nhân với chiều dài các cạnh của I

không chứa tọa độ này, dẫn tới đánh giá

$$\sum_{R\in H(P)} \sum_{R'\in H(Q'), R'\subsetneq R} |R'| \leq \|P\| |Q| C$$

trong đó C là một hằng số chỉ phụ thuộc I. □

Nội dung này ít có tài liệu trình bày, người đọc có thể tham khảo thêm ở [Fol01, tr. 422].

7.2 Điều kiện cần và đủ cho sự khả tích Riemann

7.1 Ví dụ. Sau đây là một ví dụ thường gặp về một hàm khả tích có tập hợp các điểm không liên tục không có thể tích không.

Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \gcd(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Rõ ràng f không liên tục tại các số hữu tỉ. Mặt khác không khó để kiểm là f liên tục tại các số vô tỉ (Bài tập 7.13). Tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0,1]$ không có thể tích không (Bài tập 7.14).

Hóa ra hàm f khả tích. Thực vậy, cho $\epsilon > 0$, gọi C_ϵ là tập hợp các số hữu tỉ x trong $[0,1]$ sao cho nếu $x = \frac{p}{q}$ ở dạng tối giản thì $\frac{1}{q} \geq \epsilon$. Vì $0 \leq p \leq q \leq \frac{1}{\epsilon}$, nên tập C_ϵ là hữu hạn. Ta phủ C_ϵ bằng một họ U gồm hữu hạn các khoảng con rời nhau của khoảng $[0,1]$ có tổng chiều dài nhỏ hơn ϵ. Các điểm đầu mút của các khoảng này sinh ra một phép chia P của khoảng $[0,1]$. Ta có $\sum_{R\in U}(\sup_R f)|R| \leq \sum_{R\in U} |R| < \epsilon$. Trong khi đó nếu số $x = \frac{p}{q}$ ở dạng tối giản không thuộc C_ϵ thì $\frac{1}{q} < \epsilon$, do đó $\sum_{R\notin U}(\sup_R f)|R| < \epsilon \sum_{R\notin U} |R| \leq \epsilon$. Vậy $U(f,P) < 2\epsilon$. Từ đây ta kết luận f khả tích, hơn nữa $\int_{[0,1]} f = 0$.

Như vậy dù tập không liên tục không có thể tích không nhưng hàm này vẫn khả tích. ■

Từ ví dụ trên, mở rộng khái niệm thể tích không, ta nói một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có độ đo không nếu ta có thể phủ tập đó bằng một họ ***đếm được*** các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì. Cụ thể hơn:

7.2 Định nghĩa. *Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ là* **có độ đo không**[25] *trong $\mathbb{R}^n$ nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một họ các hình hộp n-chiều $(U_1, U_2, \dots, U_i, \dots)$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset C$ và $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i| < \epsilon$.*

Ví dụ. Ta suy ra ngay một tập có thể tích không thì có độ đo không. ■

[25] of measure zero

Ví dụ. Tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0,1]$ không có thể tích không nhưng có độ đo không (Bài tập 7.14). ■

Đối với tích phân thì có thể hiểu sơ lược tập có độ đo không là tập "không đáng kể". Người ta thường nói một mệnh đề $P(x)$ là đúng **hầu như khắp nơi** hay **hầu khắp** [26] nếu nó đúng với mọi x trừ ra trên một tập có độ đo không.

Dưới đây là câu trả lời hoàn chỉnh cho vấn đề khả tích, một điều kiện cần và đủ, thường được gọi là điều kiện khả tích Lebesgue:

7.3 Định lý (khả tích = bị chặn + liên tục hầu khắp). *Một hàm thực trên một hình hộp là khả tích khi và chỉ khi hàm bị chặn và liên tục hầu khắp.*

Cho f là một hàm bị chặn trên miền xác định là $D \subset \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa ***dao động*** của f tại $x \in D$ là số thực

$$o(f,x) = \inf_{\delta>0}\left(\sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f\right).$$

Ta thấy ngay $o(f,x)$ được xác định và không âm. Đây là một cách lượng hóa sự không liên tục của hàm số tại một điểm.

7.4 Bổ đề. *Hàm f liên tục tại x khi và chỉ khi $o(f,x) = 0$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử $o(f,x) = 0$. Cho trước $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $\sup_{B(x,\delta)} f - \inf_{B(x,\delta)} f < \epsilon$. Suy ra $f(y) - f(x) < \epsilon$ và $f(x) - f(y) < \epsilon$, vì thế $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ với mọi $y \in B(x,\delta) \cap D$. Vậy f liên tục tại x.

($\Leftarrow$) Giả sử f liên tục tại x. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ với mọi $y \in B(x,\delta) \cap D$. Vì vậy với mọi $y, z \in B(x,\delta) \cap D$ ta có $|f(y) - f(z)| < 2\epsilon$. Suy ra $\sup_{B(x,\delta)} f - \inf_{B(x,\delta)} f \le 2\epsilon$. Vậy $o(f,x) = 0$. □

Chứng minh phần điều kiện đủ của 7.3. Phần này được phát triển từ chứng minh của 2.8, dùng kĩ thuật trong 7.1, cơ bản là chứng minh trong [Spi65].

Giả sử $|f(x)| \le M$ với mọi x trong hình hộp I. Gọi C là tập các điểm trong I tại đó f không liên tục, và giả sử C có độ đo không.

Cho trước $\epsilon > 0$. Đặt $C_\epsilon = \{x \in I \mid o(f,x) \ge \epsilon\}$. Khi đó theo 7.5, C_ϵ là một tập compắc, chứa trong C, do đó theo 7.6 C_ϵ có thể tích không. Như trong phần chứng minh của 2.8, có một họ hữu hạn các hình hộp $(U_1, U_2, \ldots, U_m)$, mỗi hình hộp này chứa trong I, sao cho C_ϵ được phủ bởi họ các phần trong đối với I của các U_i, nghĩa là $C \subset \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{U_i}$, và $\sum_{i=1}^m |U_i| < \epsilon$.

Đặt $T = I \setminus \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{U_i}$. Khi đó T rời khỏi C_ϵ. Với mỗi $x \in T$ thì $o(f,x) < \epsilon$. Có hình hộp R_x là lân cận của x trong I sao cho $\sup_{R_x} f - \inf_{R_x} f < \epsilon$. Vì T compắc, mọi phủ mở có một phủ con hữu hạn (xem chẳng hạn [Lan97, tr. 203], [Vto]), nên họ $\{\overset{\circ}{R_x} \mid x \in T\}$ phủ T có một phủ con hữu hạn $\{R_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$.

[26] almost everywhere, a.e.

Các hình hộp U_i và R_j, $1 \leq i \leq m$ và $1 \leq j \leq k$ sinh ra một phép chia P của I, được tạo ra từ các tọa độ đỉnh của các hình hộp.

Nếu hình hộp con R của P nằm trong T thì $R \subset R_j$ nào đó, vì thế $\sup_R f - \inf_R f < \epsilon$. Do đó

$$\sum_{R \subset T} (\sup_R f - \inf_R f)\,|R| < \epsilon \sum_{R \subset T} |R| < \epsilon\,|I|\,.$$

Nếu hình hộp con R của P không chứa trong T thì $R \subset U_i$ nào đó. Do đó

$$\sum_{R \not\subset T} (\sup_R f - \inf_R f)\,|R| \leq \sum_{R \not\subset T} 2M\,|R| = 2M \sum_{R \not\subset T} |R| = 2M \sum_{i=1}^{m} |U_i| < 2M\epsilon$$

Từ hai đánh giá trên ta có $U(f,P) - L(f,P) < (|I| + 2M)\epsilon$. Ta kết luận hàm f khả tích. □

Trong chứng minh trên ta đã dùng các bổ đề sau:

7.5 Bổ đề. *Với mọi $\epsilon > 0$, tập $\{x \in D \mid o(f,x) \geq \epsilon\}$ là tập đóng trong D.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng $A = \{x \in D \mid o(f,x) < \epsilon\}$ là tập mở trong D. Giả sử $x \in A$. Có $\delta > 0$ sao cho $\sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f < \epsilon$. Lấy $y \in B(x,\delta) \cap D$. Lấy $\delta' > 0$ sao cho $B(y,\delta') \subset B(x,\delta)$. Khi đó $\sup_{B(y,\delta')\cap D} f - \inf_{B(y,\delta')\cap D} f < \sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f < \epsilon$. Điều này dẫn tới $y \in A$. □

7.6 Bổ đề. *Một tập compắc có độ đo không thì có thể tích không.*

Chứng minh. Giả sử C là compắc và có độ đo không. Cho $\epsilon > 0$, có họ các hình hộp đóng $U_1, U_2, \ldots$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset C$ và $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i| < \epsilon/2$. Mở rộng kích thước tất cả các cạnh của mỗi U_i để được hình hộp U_i' sao cho $|U_i'| < 2|U_i|$. Khi đó $\mathring{U}_i'$ chứa U_i, do đó $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{U}_i' \supset C$, và $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i'| < \epsilon$. Vì C compắc nên họ $(\mathring{U}_i')_{i=1}^{\infty}$ có một họ con hữu hạn $(\mathring{U}_{i_k}')_{k=1}^{n}$ thỏa $\bigcup_{k=1}^{n} \mathring{U}_{i_k}' \supset C$. Suy ra $\sum_{k=1}^{n} |\mathring{U}_{i_k}'| < \epsilon$. Vậy C có thể tích không. □

Chứng minh phần điều kiện cần của 7.3. Giả sử $\left|f(x)\right| \leq M$ với mọi x trong hình hộp I và f khả tích trên I. Gọi C là tập các điểm trong I tại đó f không liên tục. Với $m \in \mathbb{Z}^+$ đặt $C_{1/m} = \{x \in I \mid o(f,x) \geq 1/m\}$. Khi đó $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{1/m}$. Ta sẽ chứng minh mỗi tập $C_{1/m}$ có thể tích không, và do đó theo 7.7 tập C có độ đo không.

Cho $\epsilon > 0$. Vì f khả tích nên có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Tập $C_{1/m}$ gồm các điểm trong (đối với I) của một số hình hộp con của P, họ tất cả các hình hộp như vậy ta gọi là S, và các điểm biên của một số hình hộp con khác, tập tất cả các điểm như vậy ta gọi là T.

Nếu $R \in S$ thì R có điểm trong $x \in C_{1/m}$, do đó $\sup_R f - \inf_R f \geq o(f, x) \geq 1/m$, nên

$$\epsilon > \sum_{R \in S} (\sup_R f - \inf_R f)|R| \geq \sum_{R \in S} \frac{1}{m}|R|,$$

dẫn tới

$$\sum_{R \in S} |R| < m\epsilon.$$

Tập T chứa trong hội của hữu hạn biên của các hình hộp, vốn có thể tích không theo 2.15, nên tập T có thể tích không. Có một phủ Q của T bằng hữu hạn các hình hộp sao cho tổng thể tích của các hình hộp này nhỏ hơn ϵ. Do đó $C_{1/m}$ được phủ bởi họ $S \cup Q$ với tổng thể tích nhỏ hơn $(m+1)\epsilon$. Ta kết luận $C_{1/m}$ có thể tích không. □

Trong chứng minh trên ta đã dùng bổ đề sau:

7.7 Bổ đề. *Hội của một họ đếm được các tập có thể tích không là một tập có độ đo không.*

Chứng minh. Giả sử C_i, $i \in \mathbb{Z}^+$ là một tập có thể tích không. Đặt $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

Cho $\epsilon > 0$. Với mỗi i có một họ hữu hạn các hình hộp $\{U_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ phủ C_i và $\sum_{j=1}^{n_i} \left|U_{i,j}\right| < \frac{\epsilon}{2^i}$.

Bây giờ ta liệt kê các tập $U_{i,j}$ theo thứ tự

$$U_{1,1}, U_{1,2}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, U_{2,2}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots$$

Đây là một phủ đếm được của C có tổng diện tích nhỏ hơn $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$. Vậy C có độ đo không. □

Từ điều kiện cần cho sự khả tích ta rút ra một điều kiện cần cho sự có thể tích, Định lý 3.3: Một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều thì biên của nó có thể tích n-chiều không.

Chứng minh điều kiện cần của Định lý 3.3. Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, lấy một hình hộp I chứa D. Tập hợp các điểm không liên tục của χ_D là chính tập biên ∂D của D. Vậy χ_D khả tích khi và chỉ khi ∂D có độ đo không, theo 7.3. Biên của một tập con của $\mathbb{R}^n$ luôn là một tập đóng, ngoài ra vì D bị chặn nên ∂D cũng bị chặn, do đó ∂D là compắc. Do 7.6, ta biết ∂D có độ đo không khi và chỉ khi nó có thể tích không. □

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ có biên đúng bằng $[0,1]$, do đó tập này không có chiều dài (xem thêm 7.14). ■

Từ trường hợp hình hộp ở Định lý 7.3, ta có một điều kiện cần và đủ cho sự khả tích trên tập tổng quát:

7.8 Định lý **(khả tích trên tập có thể tích = bị chặn + liên tục hầu khắp).** *Cho D là tập con có thể tích của $\mathbb{R}^n$. Khi đó f khả tích trên D khi và chỉ khi f bị chặn và liên tục hầu khắp trên D.*

Chứng minh. Cho I là một hình hộp chứa D và cho F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Tích phân $\int_D f$ tồn tại nếu và chỉ nếu tích phân $\int_I F$ tồn tại. Theo 7.3 ta biết tích phân $\int_I F$ tồn tại khi và chỉ khi F liên tục hầu khắp trên I. Tập E các điểm tại đó F không liên tục gồm tập C các điểm trên D mà tại đó f không liên tục và có thể những điểm khác trên biên của D, tức là $C \subset E \subset (C \cup \partial D)$. Do giả thiết, ∂D có thể tích không. Nếu C có độ đo không thì $C \cup \partial D$ có độ đo không (xem 7.16), dẫn đến E có độ đo không, do đó F khả tích. Ngược lại, nếu F khả tích thì E có độ đo không, do đó C có độ đo không. □

7.3 Sơ lược về chứng minh công thức đổi biến

Ở mục này ta viết ra một chứng minh thể tích không thay đổi qua phép dời hình một cách trực tiếp mà không sử dụng công thức đổi biến, và miêu tả sơ lược vài ý để chứng minh công thức đổi biến tổng quát.

7.9 Mệnh đề. *Thể tích của của hình bình hành sinh bởi n vectơ $v_1, \dots, v_n$ trong $\mathbb{R}^n$ bằng* $|\det(v_1, \dots, v_n)|$.

Dưới đây là một chứng minh trực tiếp dựa theo [Lan97, tr. 584]. Một kết quả tổng quát hơn được chứng minh ở [Rud86, tr. 54] bằng cách dùng sự duy nhất của độ đo Lebesgue.

Chứng minh. Ta nói bộ có thứ tự n vectơ $(v_1, \dots, v_n)$ có định hướng dương nếu $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$ và có định hướng âm nếu $\det(v_1, \dots, v_n) < 0$.

Kí hiệu $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]$ là hình bình hành sinh bởi các vectơ $v_1, v_2, \dots, v_n$, tức là tập $\{\sum_{i=1}^n t_i v_i \mid t_i \in [0,1]\}$.

Đặt

$$\operatorname{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{cases} |[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]|, & (v_1, \dots, v_n) \text{ định hướng dương,} \\ -|[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]|, & (v_1, \dots, v_n) \text{ định hướng âm,} \\ 0 & (v_1, \dots, v_n) \text{ phụ thuộc tuyến tính,} \end{cases}$$

trong đó $|\cdot|$ là thể tích Riemann. Như thế vol là thể tích có dấu của hình bình hành.

Ta sẽ chứng tỏ rằng vol là hàm tuyến tính theo từng biến.

Ta kiểm $\operatorname{vol}(cv_1, v_2, \dots, v_n) = c \operatorname{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ với $c \in \mathbb{R}$ theo các bước như sau.

Với $c \in \mathbb{Z}^+$, ví dụ khi $c = 2$, ta viết được

$$[\![2v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] \cup (v_1 + [\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!])$$

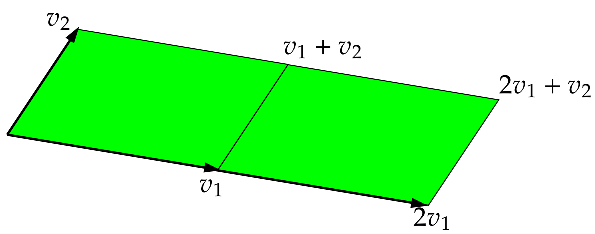
bởi vì

$$t_1 2v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_nv_n = \begin{cases} 2t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_nv_n, & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2}, \\ v_1 + (2t_1 - 1)v_1 + \cdots + t_nv_n, & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1. \end{cases}$$

Phần giao $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] \cap (v_1 + [\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!])$ là hình bình hành $(n-1)$-chiều $v_1 + [\![v_2, \dots, v_n]\!]$, ta có thể kiểm được là tập có thể tích không trong $\mathbb{R}^n$, xem Hình 7.10. Theo tính cộng của thể tích (Hệ quả 3.15)

$$|[\![2v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| = |[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| + |v_1 + [\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| .$$

Mặt khác $|v_1 + [\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| = |[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]|$ do tính bất biến của thể tích dưới phép tịnh tiến (Bài tập 5.46). Từ đó $|[\![2v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| = 2\,|[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]|$.



Hình 7.10: $\mathrm{vol}(2v_1, v_2) = 2\,\mathrm{vol}(v_1, v_2)$.

Trường hợp tổng quát $c \in \mathbb{Z}^+$ có thể thu được nhờ lý luận quy nạp.

Với c là số hữu tỉ $\frac{p}{q} > 0$ thì

$$\left|\left[\!\!\left[\frac{p}{q}v_1, v_2, \dots, v_n\right]\!\!\right]\right| = p\left|\left[\!\!\left[\frac{1}{q}v_1, v_2, \dots, v_n\right]\!\!\right]\right|,$$

và

$$q\left|\left[\!\!\left[\frac{1}{q}v_1, v_2, \dots, v_n\right]\!\!\right]\right| = |[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| ,$$

nên

$$\left|\left[\!\!\left[\frac{p}{q}v_1, v_2, \dots, v_n\right]\!\!\right]\right| = \frac{p}{q}\,|[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!]| .$$

Với số vô tỉ $c > 0$ thì với mọi $\epsilon > 0$ có hai số hữu tỉ dương α và β sao cho

$c - \epsilon < \alpha < c < \beta < c + \epsilon$. Suy ra

$$\begin{aligned}\alpha \left|\llbracket \beta v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket\right| = |\llbracket \alpha v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket| &\le |\llbracket c v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket| \\ &\le \left|\llbracket \beta v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket\right| \\ &= \beta\, |\llbracket v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket|,\end{aligned}$$

từ đây có thể suy ra ngay $|\llbracket c v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket| = c\, |\llbracket v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket|$. Cuối cùng vì $\mathrm{vol}(-v_1, v_2, \dots, v_n) = -\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ nên ta được $\mathrm{vol}(c v_1, v_2, \dots, v_n) = c\,\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.

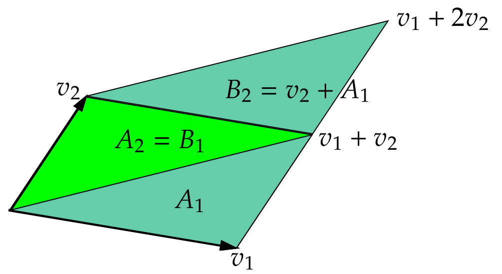
Bây giờ ta kiểm tính chất $\mathrm{vol}(v_1 + v_1', v_2, \dots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) + \mathrm{vol}(v_1', v_2, \dots, v_n)$. Viết v_1' trong cơ sở $(v_1, \dots, v_n)$ và dùng tính chất vừa có được ở trên ta thấy vấn đề đưa về kiểm tra rằng $\mathrm{vol}(v_1 + v_i, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ với $1 \le i \le n$. Ta viết chứng minh cho $i = 2$. Ta có phân tích $\llbracket v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket = A_1 \cup A_2$ với

$$A_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid t_i \in [0,1], t_1 \ge t_2 \right\},$$

và

$$A_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid t_i \in [0,1], t_1 \le t_2 \right\}.$$

Tương tự ta cũng có phân tích $\llbracket v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n \rrbracket = B_1 \cup B_2$ với



Hình 7.11: $\mathrm{vol}(v_1 + v_2, v_2) = \mathrm{vol}(v_1, v_2)$.

$$B_1 = \left\{ t_1(v_1 + v_2) + t_2 v_2 + \sum_{i=3}^{n} t_i v_i \mid t_i \in [0,1], t_1 + t_2 \le 1 \right\},$$

và

$$B_2 = \left\{ t_1(v_1 + v_2) + t_2 v_2 + \sum_{i=3}^{n} t_i v_i \mid t_i \in [0,1], t_1 + t_2 \ge 1 \right\}.$$

Chú ý rằng $B_1 = A_2$ còn $B_2 = v_2 + A_1$, ta được điều phải chứng minh.

Vậy vol là tuyến tính theo từng biến. Ta chú ý rằng nếu hoán vị hai biến thì vol sẽ bị đổi dấu, và vol bằng 0 nếu có hai biến có cùng giá trị. Dùng các tính chất này ta viết được:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(v_1, \cdots, v_n) &= \mathrm{vol}\left(\sum_{j_1=1}^{n} v_{j_1,1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} v_{j_n,n} e_{j_n}\right) \\
&= \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_n \le n} v_{j_1,1} \cdots v_{j_n,n} \,\mathrm{vol}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(n)} v_{\sigma(1),1} \cdots v_{\sigma(n),n} \,\mathrm{vol}(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(n)} v_{\sigma(1),1} \cdots v_{\sigma(n),n} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \,\mathrm{vol}(e_1, \ldots, e_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S(n)} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} v_{\sigma(1),1} \cdots v_{\sigma(n),n} \\
&= \det(v_1, \ldots, v_n).
\end{aligned}$$

Vậy

$$\mathrm{vol} = \det.$$

∎

Mệnh đề. *Phép dời hình biến hình bình hành thành hình bình hành có cùng thể tích.*

Chứng minh. Ở Bài tập 5.41 ta biết mỗi phép dời hình của $\mathbb{R}^n$ có dạng $f(x) = A \cdot x + b$ trong đó A là một ma trận trực giao, $A^T \cdot A = I$, và b là một vectơ hằng. Mệnh đề đúng với phép tịnh tiến (5.46) nên ta chỉ cần xét $f(x) = A \cdot x$. Vì f tuyến tính nên mang hình bình hành thành hình bình hành. Kí hiệu $[\![v_1, v_2, \ldots, v_n]\!]$ là hình bình hành sinh bởi các vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$, thì f mang hình bình hành này thành hình bình hành $[\![f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)]\!]$ sinh bởi các vectơ $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$. Thể tích Riemann của hình bình hành này bằng, chú ý do $A^T \cdot A = I$ nên $|\det A| = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\det(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))\right| &= |\det(A \cdot v_1, A \cdot v_2, \ldots, A \cdot v_n)| \\
&= |\det(A \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n))| \\
&= |\det(A) \det(v_1, v_2, \ldots, v_n)| \\
&= |\det(A)| \, |\det(v_1, v_2, \ldots, v_n)| \\
&= |\det(v_1, v_2, \ldots, v_n)|
\end{aligned}$$

bằng thể tích của hình bình hành ban đầu. ∎

Mệnh đề. *Phép dời hình mang một hình có thể tích thành một hình có thể tích.*

Chứng minh. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và có thể tích Riemann. Do điều kiện để có thể tích 3.3, biên ∂D có thể tích không. Cho trước $\epsilon > 0$, có hữu hạn hình hộp chữ nhật $(I_j)_{1 \le j \le m}$ phủ ∂D thỏa $\sum_{j=1}^{m} |I_j| < \epsilon$. Cho f là một phép dời hình. Vì f bảo toàn khoảng cách, nên không khó để kiểm là f mang điểm trong thành điểm trong, điểm biên thành điểm biên, do đó biên của $f(D)$ là $\partial f(D) = f(\partial D)$. Ta có $f(\partial D) \subset f\left(\bigcup_{1\le j\le m} I_j\right) = \bigcup_{1\le j\le m} f(I_j)$. Mặt khác do $f(I_j)$ là các hình bình hành và f bảo toàn thể tích của hình bình hành nên

$$\left|\bigcup_{1\le j\le m} f(I_j)\right| \le \sum_{1\le j\le m} \left|f(I_j)\right| = \sum_{j=1}^{m} \left|I_j\right| < \epsilon.$$

Từ điều này ta có thể rút ra được $f(\partial D)$ phải có thể tích không. Vậy $f(D)$ có thể tích. □

7.12 Mệnh đề. *Phép dời hình mang một hình có thể tích thành một hình có cùng thể tích.*

Chứng minh. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và có thể tích Riemann. Cho f là một phép dời hình của $\mathbb{R}^n$. Đặt D vào trong một hình hộp I, và xét một phân hoạch P của I, với tập hợp các hình hộp con $H(P)$. Dùng tính bảo toàn khoảng cách, bảo toàn tính thẳng, và bảo toàn thể tích của f, ta suy ra

$$\begin{aligned} U(\chi_D, P) &= \sum_{R\in H(P)} \left(\sup_R \chi_D\right)|R| = \sum_{R\in H(P), R\cap D\neq\emptyset} |R| \\ &= \sum_{R\in H(P), f(R)\cap f(D)\neq\emptyset} |f(R)| = \left|\bigcup_{R\in H(P), f(R)\cap f(D)\neq\emptyset} f(R)\right| \ge \left|f(D)\right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\chi_D, P) &= \sum_{R\in H(P)} \left(\inf_R \chi_D\right)|R| = \sum_{R\in H(P), R\subset D} |R| \\ &= \sum_{R\in H(P), f(R)\subset f(D)} |f(R)| = \left|\bigcup_{R\in H(P), f(R)\subset f(D)} f(R)\right| \le \left|f(D)\right|. \end{aligned}$$

Mặt khác vì D có thể tích nên $U(\chi_D, P) \ge |D| \ge L(\chi_D, P)$ và $U(\chi_D, P) - L(\chi_D, P)$ nhỏ hơn số dương tùy ý khi P đủ mịn. Do đó phải có $\left|f(D)\right| = |D|$. □

Vậy ta đã chứng minh xong tính bất biến của thể tích Riemann qua phép dời hình một cách trực tiếp mà không dùng công thức đổi biến của tích phân.

Sau đây ta miêu tả sơ lược một số ý để chứng minh công thức đổi biến cho tích phân Riemann của hàm nhiều biến. Các tài liệu [Lan97], [Rud76], [Spi65], [Mun91] có chứng minh công thức này dưới những giả thiết khác nhau.

Một chứng minh có thể gồm các ý sau:

(a) Với mỗi phép đổi biến, đưa bài toán về trong một lân cận đủ nhỏ nhờ một công cụ gọi là "phân hoạch đơn vị".

(b) Công thức là đúng nếu nó đúng cho hàm hằng 1. Đưa bài toán về bài toán thể tích.

(c) Kiểm công thức đúng cho hai phép đổi biến thì đúng cho hàm hợp của hai phép đổi biến.

(d) Kiểm công thức cho trường hợp phép đổi biến sơ cấp ở dạng hoán vị hai biến, thay một biến bằng tổng của nó với một biến khác, hoặc nhân một biến với một số thực (tương ứng với các biến đổi sơ cấp trên ma trận).

(e) Công thức đúng với phép đổi biến tuyến tính, vì mỗi phép đổi biến tuyến tính là hợp của các phép đổi biến sơ cấp.

(f) Trên lân cận đủ nhỏ, đưa bài toán về trường hợp phép đổi biến sơ cấp. Do mỗi phép đổi biến sơ cấp cố định một biến, đưa bài toán về ít hơn một biến, sử dụng công thức Fubini, và quy nạp theo số biến.

Ngày nay công thức đổi biến thường được chứng minh ở dạng tổng quát hơn thông qua tích phân Lebesgue [Ang97], [Rud86].

7.4 Thay thế tích phân Riemann bằng tích phân Lebesgue

Môn học này sử dụng tích phân Riemann, do Bernhard Riemann xây dựng chặt chẽ vào giữa thế kỉ 19, dù phép tích tích phân đã được sử dụng rộng rãi trước đó và ý tưởng về cách tính thể tích bằng xấp xỉ rồi qua giới hạn đã có từ thời Archimedes hơn 200 năm trước Công nguyên.

Vào đầu thế kỉ 20 Henri Lebesgue đã xây dựng nên một tích phân mới trên $\mathbb{R}^n$ tổng quát hơn tích phân Riemann. Tích phân Lebesgue có những ưu điểm lớn so với tích phân Riemann, đặc biệt là với quá trình qua giới hạn.

Ngày nay lý thuyết tích phân được xây dựng không chỉ cho $\mathbb{R}^n$ mà cho tập bất kì được trang bị một độ đo. Độ đo và tích phân Lebesgue trở thành một trường hợp riêng của lý thuyết độ đo và tích phân tổng quát.

Trong môn học này chúng ta vẫn học tích phân Riemann vì nó đơn giản hơn, dễ hiểu hơn so với tích phân tổng quát. Trong các tính toán cho một số đối tượng thường gặp như trong môn này thì tích phân Riemann là đủ dùng. Ngoài ra, nếu một loại tích phân có những ý nghĩa và tính chất nhất định thường dùng như tích phân Riemann, thì nó trùng với tích phân Riemann ([Lan97, tr. 575]).

Dưới đây chúng ta điểm qua tích phân Lebesgue nhằm giúp người học hình dung sơ nét về sự phát triển này.

Độ đo Lebesgue

Có một họ đặc biệt M các tập con của $\mathbb{R}^n$ được gọi là họ các **tập đo được Lebesgue**, có những tính chất sau:

- kín dưới phép hội, giao đếm được và phép lấy phần bù trong $\mathbb{R}^n$,
- chứa tất cả các tập mở và tập đóng của $\mathbb{R}^n$. Do đó các tập có thể tích Riemann đều đo được Lebesgue.

Có một hàm đặc biệt $\mu : M \to [0, \infty]$, được gọi là **độ đo Lebesgue** trên $\mathbb{R}^n$, có những tính chất sau:

- độ đo Lebesgue cho phép giá trị ∞, ví dụ $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$,
- độ đo của một hình hộp $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ bằng $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$,
- có tính cộng đếm được (so với tính cộng hữu hạn của thể tích Riemann), nếu $(A_i)_{i=1}^\infty$ là một họ các tập đo được rời nhau thì $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ là đo được và $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$,
- không thay đổi dưới phép dời hình của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$,
- tập có độ đo không như được định nghĩa ở 7.2 chính là tập đo được Lebesgue có độ đo Lebesgue bằng 0,
- nếu một tập có thể tích Riemann thì nó đo được Lebesgue và thể tích Riemann của tập đó bằng với độ đo Lebesgue của nó.

Theo một nghĩa nhất định có duy nhất một đối tượng toán học với những tính chất như vậy, vì thế độ đo Lebesgue là phát triển phù hợp của khái niệm thể tích Riemann mà ta đã xét trong môn học này.

Hàm khả tích Lebesgue

Cho $\Omega \in M$ là một tập đo được Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$. Một hàm $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là một hàm đo được nếu ảnh ngược của mỗi tập mở là một tập đo được Lebesgue.

Cho f là một hàm đo được không âm. Nếu trong tích phân Riemann ta xấp xỉ hàm bằng các hàm hằng trên từng hình hộp con thì giờ ta cũng làm như vậy, chỉ khác là ta thay hình hộp bằng tập đo được. Cụ thể ta xấp xỉ dưới bằng cách dùng những hàm thuộc tập S những hàm không âm đo được có hữu hạn giá trị, tức hàm bậc thang, có dạng

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{C_i}$$

với $C_i = s^{-1}(c_i)$. Giá trị của xấp xỉ này là $\int_\Omega s = \sum_{i=1}^k c_i\mu(C_i)$. Ta định nghĩa tích phân Lebesgue của f là

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup\left\{\int_\Omega s \mid s \in S, s \le f\right\}.$$

Cho f là hàm đo được có dấu bất kì. Đặt $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ và $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ thì $f = f^+ - f^-$ và ta định nghĩa

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

Nếu tích phân là một số thực thì hàm được gọi là khả tích Lebesgue.

Như vậy lý thuyết tổng quát xây dựng độ đo trước rồi xây dựng tích phân sau, khác trình tự với tích phân và thể tích Riemann.

Tích phân Lebesgue có những tích chất như tích phân Riemann, như tính tuyến tính. Đặc biệt, một hàm khả tích Riemann thì khả tích Lebesgue và khi đó tích phân Riemann có cùng giá trị với tích phân Lebesgue.

Công thức Fubini và công thức đổi biến

Phát biểu công thức Fubini cho tích phân Lebesgue có đơn giản hơn một chút:

Định lý. *Cho f khả tích Lebesgue trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Khi đó*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy\right) dx.$$

Sự đơn giản hơn này là do cách hiểu như sau: tích phân $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy$ có thể không tồn tại với mọi x, nhưng có thể chứng minh được nó tồn tại hầu khắp.

Công thức đổi biến cũng được thỏa với giả thiết đơn giản hơn:

Định lý. *Giả sử A là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một vi đồng phôi từ A lên $\varphi(A)$, và $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ khả tích Lebesgue, thì $f \circ \varphi|\det \varphi'|$ khả tích Lebesgue trên A, và*

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|\det \varphi'|.$$

Các định lý hội tụ

Tích phân Lebesgue có những tính chất quan trọng mà tích phân Riemann không có, liên quan tới việc qua giới hạn, theo kiểu

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int f_n$$

khiến tích phân Lebesgue có ưu thế trong các nghiên cứu lý thuyết. Dưới đây là một kết quả nổi bật:

Định lý (định lý hội tụ bị chặn). *Giả sử* $(f_n)_n$ *là một dãy hàm số đo được hội tụ từng điểm về hàm* f*, và giả sử các hàm* f_n *bị chặn bởi cùng một hàm khả tích, tức là có* g *khả tích sao cho* $\forall n, |f_n| \leq g$*, thì* f *khả tích và dãy các tích phân của* f_n *hội tụ về tích phân của* f*.*

Để tìm hiểu thêm người học có thể đọc các giáo trình về Lý thuyết độ đo và tích phân, Giải tích thực, các tài liệu như [Rud76, Rud86, Ang97, SS05].

Bài tập

7.13. Chứng tỏ hàm được định nghĩa trong Ví dụ 7.1 liên tục tại các số vô tỉ.

7.14. Chứng tỏ tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0, 1]$ có độ đo không nhưng không có thể tích không.

7.15. Mệnh đề 2.11 có còn đúng không nếu thay thể tích không bằng độ đo không?

7.16. Chứng tỏ hội của một tập có độ đo không với một tập có thể tích không thì có độ đo không.

7.17. Hãy tìm một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ mà không có diện tích.

Phần II Giải tích vectơ

Trong chương trước chúng ta đã khảo sát thể tích của miền trong không gian n-chiều và tích phân trên những miền đó. Tuy nhiên những câu hỏi chẳng hạn như về chu vi của đường tròn, diện tích của mặt cầu, hay nói chung là độ đo của tập con "k-chiều" trong không gian n-chiều với $k < n$ và tích phân trên đó thì chúng ta chưa xét. Chương này sẽ trả lời những câu hỏi này cho trường hợp đường ($k = 1$) và mặt ($k = 2$).

Mỗi phần tử của tập hợp $\mathbb{R}^n$ có vai trò tùy theo khía cạnh mà ta quan tâm: là một **vectơ** nếu ta quan tâm tới phép toán vectơ, hay là một **điểm** nếu ta quan tâm hơn tới khoảng cách. Chính vì vậy một phần tử của $\mathbb{R}^n$ khi thì được gọi là một vectơ, khi thì được gọi là một điểm, và ta không nhất thiết phải dùng kí hiệu khác nhau để phân biệt điểm hay vectơ.

8 Tích phân đường

Đường

Khi nói tới một "đường" ta thường nghĩ tới một "con đường", tức là một tập hợp điểm, ví dụ một đường thẳng hay một đường tròn. Mục đích của chúng ta trong chương này là thực hiện các đo đạc trên đường, chẳng hạn như đo chiều dài của đường. Các đo đạc đó sẽ được thực hiện qua một chuyến đi trên con đường. Tuy nhiên ta có thể đi trên một con đường theo nhiều cách khác nhau, và ta chưa có căn cứ để cho rằng các đo đạc bằng các cách đi khác nhau trên cùng một con đường sẽ cho ra cùng một kết quả. Do đó trước mắt chúng ta sẽ làm việc với từng cách đi cụ thể mà ta gọi là đường đi.

Một **đường đi** [27] là một ánh xạ từ một khoảng đóng $[a,b]$ vào $\mathbb{R}^n$ (một tương ứng mỗi thời điểm với một vị trí).

Tập hợp các điểm mà đường đi đã đi qua được gọi là **vết của đường đi** (đây là "con đường" như đã bàn ở trên). Với đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ thì vết của r tập ảnh $r([a,b]) = \{r(t) \mid t \in [a,b]\}$.

Đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là:

- **đóng** hay **kín** [28] nếu $r(a) = r(b)$, tức là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

- **đơn** [29] nếu nó không đi qua điểm nào hai lần (không có điểm tự cắt). Chính xác hơn, nếu r không phải là đường đi kín thì nó được gọi là đơn nếu r là đơn ánh trên $[a,b]$; nếu r là đường đi kín thì nó được gọi là đơn nếu r là đơn ánh trên $[a,b)$.

- **liên tục** nếu r là hàm liên tục trên $[a,b]$.

Đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **trơn** [30] nếu r là hàm trơn trên $[a,b]$, nghĩa là nếu r mở rộng được thành một hàm trơn trên một khoảng (c,d) chứa $[a,b]$. Điều này đồng nghĩa với việc r có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

Ví dụ. Nếu r là một đường đi trơn thì r có ý nghĩa vật lý là một chuyển động trong không gian theo thời gian, đạo hàm $r'(t)$ là **vận tốc** [31] tại thời điểm t, độ lớn của vận tốc $\|r'(t)\|$ là **tốc độ** [32] tại thời điểm t. ∎

[27] path
[28] closed
[29] đơn giản, simple
[30] smooth
[31] velocity
[32] speed

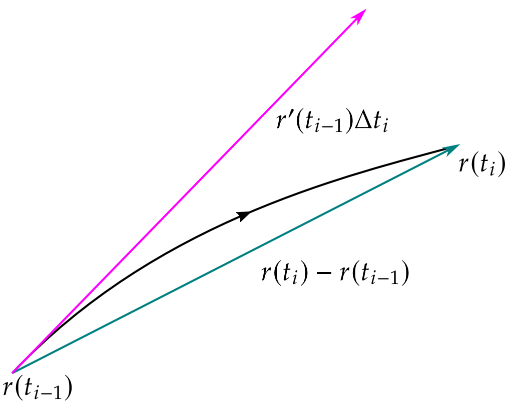
Chiều dài của đường đi

Trong vật lý, nếu một vật di chuyển với vận tốc không đổi, tức là chuyển động đều, thì quãng đường đi được bằng tốc độ nhân thời gian đi. Về mặt toán học, nếu $r'(t) = v \in \mathbb{R}$ không đổi thì $r(t) = vt + r(0)$, với $t \in [a, b]$ thì vết của r là $r([a, b]) = [r(a), r(b)]$ và chiều dài của nó là $r(b) - r(a) = v(b - a)$.

Nếu chuyển động không đều thì sao?

Ý tưởng cơ bản là tích phân: nếu vận tốc chuyển động có tính liên tục, thì trên những khoảng thời gian nhỏ vận tốc thay đổi nhỏ, do đó trên khoảng thời gian nhỏ đó ta có thể xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều.

Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ của $[a, b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \le i \le m$, ta xấp xỉ tuyến tính đường đi: $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Nói cách khác, ta xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều với vận tốc không đổi $r'(t_{i-1})$. Quãng đường đi được trong khoảng thời gian từ t_{i-1} tới t_i được xấp xỉ bởi vectơ $r'(t_{i-1})\Delta t_i$, với chiều dài là $\|r'(t_{i-1})\Delta t_i\|$, xem Hình 8.1.



Hình 8.1: Xấp xỉ tuyến tính: $r(t_i) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})\Delta t_i$.

Như vậy "chiều dài" của đường đi được xấp xỉ bởi $\sum_{i=1}^{m} \|r'(t_{i-1})\| \Delta t_i$. Đây chính là tổng Riemann của hàm $\|r'(t)\|$ trên khoảng $[a, b]$, khi "qua giới hạn" tổng Riemann này hội tụ về tích phân của hàm $\|r'(t)\|$ trên khoảng $[a, b]$.

Định nghĩa. **Chiều dài của đường đi** $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *được định nghĩa là*

$$\boxed{\int_a^b \|r'(t)\| \, dt.} \tag{8.2}$$

Ví dụ. Giả sử một vật di chuyển trên một đường với tốc độ hằng v, trong khoảng thời gian từ a tới b, thì quãng đường vật đã đi được có chiều dài là $\int_a^b v \, dt = v(b - a)$. Vậy định nghĩa trên chứa công thức quen thuộc: quãng đường đi được = tốc độ × thời gian. Tổng quát, quãng đường đi được bằng tích phân của tốc độ theo thời gian. ∎

Ví dụ. Cho đường đi $r(x) = (x, x^2)$, $0 \le x \le 1$. Chiều dài đường đi này bằng

$$\int_0^1 \|r'(x)\|\ dx = \int_0^1 \|(1, 2x)\|\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 1{,}48.$$

■

Ghi chú. Có thể tiếp cận vấn đề chiều dài đường dùng xấp xỉ bằng các đoạn cát tuyến (tức là bằng đường gấp khúc) thay vì bằng các đoạn tiếp tuyến như ở đây, xem phần bổ sung mục 15.2 trang 191. Tuy nhiên cách xấp xỉ bằng đoạn tiếp tuyến thuận lợi hơn với phép tính vi phân, và áp dụng được cho các loại tích phân khác tiếp theo.

Tích phân đường loại một

Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ và f là một hàm thực xác định trên vết của đường, tức $f : r([a, b]) \to \mathbb{R}$, ta muốn tính ***tổng giá trị của hàm trên đường***.

Ví dụ. Một sợi dây được làm bằng một vật liệu có mật độ khối lượng là ρ. Sợi dây được miêu tả bằng một hàm $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Khối lượng của sợi dây bằng bao nhiêu? ■

Ta làm một cách tương tự như đã làm khi định nghĩa chiều dài đường đi, chia nhỏ và xấp xỉ trên mỗi khoảng chia bằng hàm hằng. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. Trên khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$ xấp xỉ tuyến tính đường đi $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Trên phần đường này xấp xỉ hàm f bởi hàm hằng với giá trị $f(r(t_{i-1}))$. Tổng giá trị của f trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $f(r(t_{i-1}))\,\|r'(t_{i-1})\|\ \Delta t_i$. Tổng giá trị của f trên đường r được xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^m f(r(t_{i-1}))\,\|r'(t_{i-1})\|\ \Delta t_i$, chính là một tổng Riemann của hàm $f(r(t))\,\|r'(t)\|$.

Định nghĩa (tích phân đường loại một). *Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ và hàm giá trị thực $f : r([a, b]) \to \mathbb{R}$. Tích phân của f trên r được định nghĩa là*

$$\boxed{\int_r f\, ds = \int_a^b f(r(t))\,\|r'(t)\|\ dt.}$$

Ghi chú. Có một số cách kí hiệu khác cho tích phân đường loại một, chẳng hạn $\int_r f\, dl$.

Ví dụ. Nếu $f \equiv 1$ thì $\int_r 1\, ds = \int_a^b \|r'(t)\|\ dt$ là chiều dài của đường đi r. ■

Ví dụ. Xét trường hợp hai chiều, $n = 2$. Viết $r(t) = (x(t), y(t))$, khi đó

$$\int_r f\, ds = \int_a^b f((x(t), y(t)))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Bằng kí hiệu hình thức có thể nhớ rằng

$$\boxed{ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.}$$

■

Ví dụ. Cho đường đi $r(x) = (x, x^2)$, $0 \leq x \leq 1$. Vết của đường đi này là hình parabola có phương trình $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Giả sử tại mọi điểm trên vết này có một giá trị thực $f(x, y) = xy$. Tích phân của hàm thực f trên đường đi này bằng

$$\begin{aligned}\int_r f\, ds &= \int_0^1 f(r(x))\, \|r'(x)\|\, dx = \int_0^1 f(x, x^2)\, \|r'(x)\|\, dx \\ &= \int_0^1 x \cdot x^2\, \|(1, 2x)\|\, dx = \int_0^1 x^3\sqrt{1+4x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Đổi biến $u = 1 + 4x^2$ ta được

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+4x^2}\, dx = \int_1^5 u^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(u-1)\frac{1}{8}\, du = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

■

Để có tích phân thì đường đi phải khả vi. Nếu đường đi chỉ **khả vi từng khúc**, tức là có các số $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$ sao cho trên mỗi khoảng $[t_{i-1}, t_i]$ ánh xạ r là khả vi, thì gọi r_i là thu hẹp của đường r lên khoảng $[t_{i-1}, t_i]$, ta định nghĩa:

$$\int_r f\, ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{r_i} f\, ds.$$

Tích phân đường loại hai

Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, và cho F là một trường vectơ xác định trên vết của r, tức là một ánh xạ $F : r([a, b]) \to \mathbb{R}^n$ tương ứng mỗi điểm trên ảnh của r với một vectơ trong $\mathbb{R}^n$. Ta muốn tính ***tổng thành phần của trường cùng chiều đường đi***.

Ví dụ. Trong vật lý, nếu một vật di chuyển theo một đường dưới tác động của một trường lực thì tổng tác động của lực, tức tổng thành phần của lực cùng chiều chuyển động, được gọi là**công** [33] của trường lực, đo tác động của trường lực lên chuyển động. Trong trường hợp đơn giản hơn, nếu lực là hằng $\vec{F}$ và vật chuyển động đều trên một đường thẳng theo một vectơ $\vec{s}$ thì công của lực bằng phần vô hướng của chiếu vuông góc của $\vec{F}$ xuống $\vec{s}$ nhân với $|\vec{s}|$, tức là $\left\|\vec{F}\right\| \cos(\vec{F}, \vec{s}) \left\|\vec{s}\right\| = \vec{F} \cdot \vec{s}$, xem Hình 8.4. ■

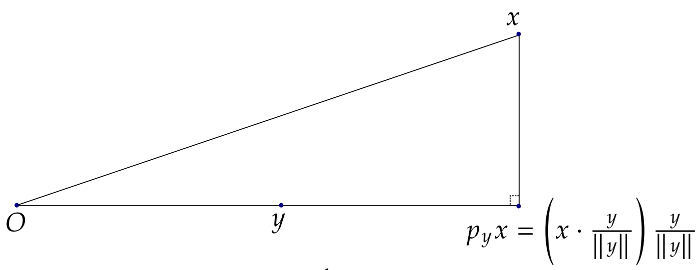
[33] work

Tương tự như công, trong trường hợp trường F là hằng, xác định dọc theo một đoạn thẳng từ A tới B thì thành phần cùng phương với đường của F là chiếu của F lên $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, là số thực $F \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$. Tổng lượng này trên đường $\overrightarrow{AB}$ là $\left(F \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}\right) \|\vec{s}\| = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Các phân tích trên cho thấy ở đây ta cần dùng phép toán chiếu vuông góc một vectơ lên một vectơ khác. Ta nhắc lại phép toán này. Cho $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$. **Chiếu vuông góc** [34] của x lên y được định nghĩa là vectơ

$$\boxed{p_y x = \left(x \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) \frac{y}{\|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y.} \tag{8.3}$$

Đây là vectơ cùng phương với y, do đó tỉ lệ với vectơ đơn vị theo chiều của y là $\frac{y}{\|y\|}$, có độ lớn bằng độ dài $\|x\| \cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|y\|} = x \cdot \frac{y}{\|y\|}$ trong đó θ là góc giữa hai vectơ x và y (xem Bài tập 5.45), tương thích với hình học Euclid. Ta có thể tính để kiểm tra $(x - p_y x) \perp y$ (Bài tập 8.10). Xem Hình 8.4.

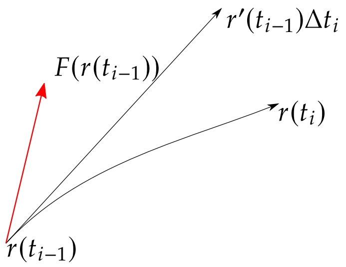


Hình 8.4: Chiếu vuông góc một vectơ lên một vectơ khác.

Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát khi trường F thay đổi trên đường. Ý tưởng vẫn là chia nhỏ miền xác định và xấp xỉ trên mỗi khoảng chia bằng hàm hằng. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ của $[a, b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq m$, ta xấp xỉ đường bằng xấp xỉ tuyến tính: $r(t) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Khi đó phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Trên phần đường này trường F có thể được xấp xỉ bằng trường hằng, đại diện bởi vectơ $F(r(t_{i-1}))$. Tổng của thành phần cùng chiều đường đi của trường F trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i$, xem Hình 8.5. Tổng thành phần tiếp tuyến của F dọc theo r được xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^{m} F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i$, chính là một tổng Riemann của hàm $F(r(t)) \cdot r'(t)$. Vậy ta định nghĩa:

Định nghĩa (tích phân đường loại hai). *Cho F là một trường vectơ trên vết của một đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Tích phân của F trên r được kí hiệu là $\int_r F \cdot d\vec{s}$ và*

[34] projection



Hình 8.5: Xấp xỉ tổng thành phần của trường cùng chiều đường đi.

được định nghĩa là:

$$\boxed{\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt.}$$

Định nghĩa này được mở rộng cho đường khả vi từng khúc theo cách như tích phân đường loại một.

Ghi chú. Có một số cách kí hiệu khác cho tích phân đường loại hai, chẳng hạn $\int_r F \cdot d\vec{r}$, $\int_r F \cdot d\vec{l}$.

Ví dụ. Xét trường hợp hai chiều, $n = 2$. Viết $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ và $r(t) = (x(t), y(t))$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_r F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \big(P(x(t),y(t)), Q(x(t))\big) \cdot \big(x'(t), y'(t)\big)\ dt.\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\,dt.\end{aligned}$$

Từ đó người ta thường dùng hai kí hiệu:

$$\boxed{\int_r P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt.}$$

$$\boxed{\int_r Q(x,y)\,dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt.}$$

Với các kí hiệu này người ta thường viết

$$\boxed{\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_r P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.}$$

Bằng kí hiệu hình thức có thể nhớ rằng

$$\boxed{d\vec{s} = r'(t)\,dt,\ dx = x'(t)\,dt,\ dy = y'(t)\,dt.}$$

■

Ví dụ. Cho đường đi $r(x) = (x, x^2)$, $0 \leq x \leq 1$. Vết của đường đi này là hình parabola có phương trình $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Giả sử tại mọi điểm trên vết này có một vectơ $F(x, y) = (y, x)$. Tích phân của trường vectơ F trên đường đi này bằng

$$\begin{aligned}\int_r F \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 F(r(x)) \cdot r'(x)\, dx = \int_0^1 F(x, x^2) \cdot (1, 2x)\, dx \\ &= \int_0^1 (x^2, x) \cdot (1, 2x)\, dx = \int_0^1 3x^2\, dx = 1.\end{aligned}$$

Ta cũng có thể viết bằng kí hiệu mới vừa giới thiệu:

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_r y\, dx + x\, dy = \int_0^1 x^2\, dx + x\,(2x dx) = \int_0^1 3x^2\, dx = 1.$$

Ta có thể nhận thấy các kí hiệu này đã được thiết kế để việc tính toán đơn giản chỉ là thế vào. ∎

Đổi biến và sự phụ thuộc vào đường đi

Như đã bàn ở đầu mục này, ta quan tâm tới việc các kết quả đo đạc có thay đổi hay không nếu ta đi theo những đường đi khác nhau trên cùng một con đường.

Cho $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ là một phép vi đồng phôi, tức một phép đổi biến. Cho $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ là một đường đi, thì $r \circ \varphi$ là một đường đi cùng vết với r. Ta nói $r \circ \varphi$ và r sai khác một phép đổi biến. Ta có kết quả đơn giản sau đây về sự bất biến của tích phân đường qua một phép đổi biến.

8.6 Định lý (đổi biến trong tích phân đường). *(a) Tích phân đường loại một không thay đổi qua phép đổi biến.*

(b) Tích phân đường loại hai không thay đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng và đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Chứng minh. Cho f là một hàm thực và F là một trường vectơ xác định trên vết của đường $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Cho $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ là một phép đổi biến. Theo công thức đổi biến của tích phân bội, và đạo hàm của hàm hợp, với phép đổi biến $u = \varphi(t)$ thì

$$\begin{aligned}
\int_r f\ ds = \int_a^b f(r(u))\,\|r'(u)\|\ du &= \int_c^d f(r(\varphi(t)))\,\|r'(\varphi(t))\|\,\|\varphi'(t)\|\ dt \\
&= \int_c^d f(r(\varphi(t)))\,\|r'(\varphi(t))\varphi'(t)\|\ dt \\
&= \int_c^d f(r\circ\varphi(t))\,\|(r\circ\varphi)'(t)\|\ dt \\
&= \int_{r\circ\varphi} f\ ds.
\end{aligned}$$

Trong khi đó, xét trường hợp φ đảo ngược định hướng,

$$\begin{aligned}
\int_r F\cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r(u))\cdot r'(u)\,du &= \int_c^d [F(r(\varphi(t)))\cdot r'(\varphi(t))]\,\|\varphi'(t)\|\ dt \\
&= -\int_c^d [F(r(\varphi(t)))\cdot r'(\varphi(t))]\varphi'(t)\,dt \\
&= -\int_c^d F(r\circ\varphi(t))\cdot(r\circ\varphi)'(t)\,dt \\
&= -\int_{r\circ\varphi} F\cdot d\vec{s}.
\end{aligned}$$

Trường hợp φ bảo toàn định hướng tương tự, nhưng tích phân không bị đổi dấu. □

Ví dụ. Cả hai loại tích phân đường không thay đổi dưới một phép tịnh tiến của biến thời gian $t \mapsto t + c$ với $c \in \mathbb{R}$. ■

Ví dụ. Với đường đi $r(t)$, $t \in [a,b]$ thì đường $r(a+b-t)$, $t \in [a,b]$, khởi đầu ở $r(b)$ và kết thúc ở $r(a)$, được gọi là **đường ngược** của đường r, trái chiều với đường r. Định lý 8.6 nói ***nếu đảo ngược định hướng của đường thì tích phân đường loại một không thay đổi trong khi đó tích phân đường loại hai bị đổi dấu.*** ■

Tiếp theo ta bàn khái niệm định hướng của đường.

Đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **chính quy** [35] nếu r trơn trên $[a,b]$ và vận tốc $r'(t)$ luôn khác không [36].

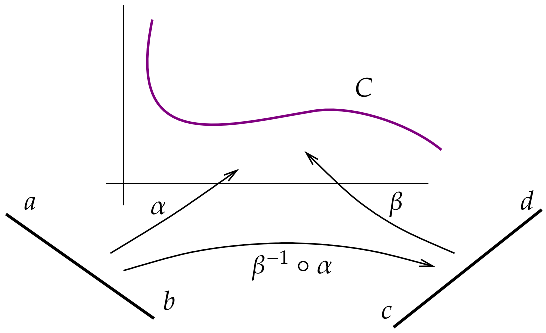
Mệnh đề sau nói rằng hai đường đi đơn chính quy có cùng vết chỉ khác biệt một phép đổi biến:

8.7 Bổ đề. *Giả sử $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ và $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ là hai đường đi đơn chính quy với cùng vết.*

[35] regular
[36] thuật ngữ đường trơn trong [Ste16] là thuật ngữ đường chính quy ở đây

(a) Nếu α và β không là đường đi kín thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a, b) \to (c, d)$ là một phép đổi biến.

(b) Nếu α và β là đường đi kín, đặt $\beta(t_1) = \alpha(a)$ và $\alpha(s_1) = \beta(c)$, thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a, b) \setminus \{s_1\} \to (c, d) \setminus \{t_1\}$ là một phép đổi biến.



Bổ đề này được chứng minh ở phần bổ sung, trang 190.

Viết $\alpha = \beta \circ (\beta^{-1} \circ \alpha)$, bổ đề này nói rằng hai đường α và β cơ bản khác biệt bởi phép đổi biến $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha$.

Ta nói hai đường đi đơn chính quy có cùng vết α và β là **cùng định hướng** nếu phép đổi biến φ bảo toàn định hướng, nghĩa là đạo hàm φ' luôn dương, xem Ví dụ 5.4 trang 63. Ngược lại nếu φ đảo ngược định hướng, nghĩa là đạo hàm φ' luôn âm, thì ta nói α và β là **trái định hướng**.

Do đạo hàm hàm hợp nên $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t)$, cho thấy α và β là cùng định hướng khi và chỉ khi vectơ vận tốc $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương cùng chiều, ngược lại α và β là trái định hướng khi và chỉ khi vectơ vận tốc $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương trái chiều.

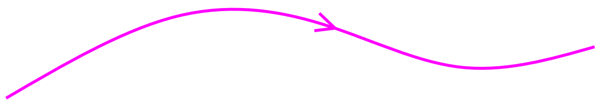
Tóm lại, ***hai đường đi cùng vết là cùng định hướng khi vận tốc luôn cùng chiều***, ***trái định hướng khi vận tốc luôn trái chiều***.

Ta có thể nói đến tích phân đường (chẳng hạn chiều dài) trên một **tập điểm**, ví dụ như một đường tròn, một đồ thị, ... nếu tập điểm ấy là vết của một đường đi đơn chính quy nào đó. Trong trường hợp này ta nói vết đó là một **đường cong** [37]. Đường cong có thể được cho thêm một **định hướng**, gồm những đường đi cùng định hướng trên đường cong.

Trong môn học này ta thường hình dung một cách trực quan định hướng trên một đường như là một "chiều" trên đường đó. Trên hình vẽ trực quan ta thường chỉ định hướng bằng một mũi tên trên đường. Mũi tên đó chỉ chiều của vectơ vận tốc của một chuyển động trên đường. Đây là cách phổ biến và quen thuộc trong đời sống để chỉ chiều của một con đường.

Ví dụ. Đường cong được định hướng C nếu được định hướng ngược lại thì thường được kí hiệu là $-C$. ∎

[37] curve



Hình 8.8: Minh họa trực quan một đường cong được định hướng.

Từ Bổ đề 8.7 và Định lý 8.6 ta rút ra ngay được kết quả chính của phần này:

8.9 Định lý (tích phân trên đường cong). *(a) Tích phân đường loại một dọc theo hai đường đi đơn chính quy có cùng vết thì bằng nhau.*

(b) Tích phân đường loại hai dọc theo hai đường đi đơn chính quy có cùng vết thì bằng nhau nếu hai đường có cùng định hướng và đối nhau nếu hai đường trái định hướng.

Ví dụ. Định lý 8.9, trong trường hợp chiều dài đường đi, nói rằng: cùng một con đường, đi theo cách nào, thời gian nào, chiều nào, miễn là đi một cách trơn tru, không dừng lại và do đó không quay đầu, thì đi được cùng một chiều dài quãng đường.

Cùng một con đường, khi ta xuống dốc thì công của trọng lực là dương, còn khi ta lên dốc thì công của trọng lực là âm, bằng nhau về độ lớn nhưng đối nhau, tương thích với Định lý 8.9 về tích phân đường loại hai. ■

Tóm tắt lại:

Các bước tính tích phân đường trên một đường cong

1: Chọn một đường đi, tức là một tham số hóa đơn chính quy bất kì trên đường cong.

2: Xác định đây là tích phân đường loại một hay loại hai.

3: Thay tham số hóa vào công thức trong định nghĩa của đúng loại tích phân để tính.

4: Nếu là tích phân đường loại hai thì đường cong được cho một định hướng, thường ở dạng trực quan. Xác định tham số hóa ở Bước 1 là cùng định hướng hay trái định hướng được cho, bằng trực quan hay bằng tính điểm đầu và điểm cuối của đường đi. Nếu là trái định hướng thì lấy giá trị đối của tích phân đã thu được ở Bước 3.

Ví dụ. Giả sử hàm thực f xác định trên khoảng $[a,b]$. Gọi γ là một đường chính quy bất kì đi từ a tới b. Vì khoảng $[a,b]$ cũng là vết của đường đơn chính quy $\alpha(t) = t$ với $t \in [a,b]$ nên

$$\int_\gamma f\, ds = \int_\alpha f\, ds = \int_a^b f(\alpha(t))|\alpha'(t)|\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Đây chính là tích phân của hàm f trên khoảng $[a, b]$. Vậy tích phân của hàm thực trên khoảng là một trường hợp riêng của tích phân đường loại một. ■

Ví dụ (chiều dài của đoạn thẳng). Cho hai điểm A và B trong $\mathbb{R}^n$. Xét đường đi $r(t) = (1-t)A + tB, 0 \leq t \leq 1$, một đường đi với vận tốc hằng, tức là đi đều từ A tới B. Chiều dài của đường này là $\int_0^1 \|r'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|B-A\|\, dt = \|B-A\|$.

Nếu ta lấy một đường đi khác, $\alpha(t) = A + \frac{1}{3}\left(t^2 + 2t\right)(B-A), 0 \leq t \leq 1$, thì vận tốc đường này là $\alpha'(t) = \frac{1}{3}(2t+2)(B-A)$. Đây là một đường đơn chính quy. Chiều dài của đường này là

$$\int_0^1 \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^1 \left\|\frac{1}{3}(2t+2)(B-A)\right\| dt = \int_0^1 \frac{1}{3}(2t+2)\|(B-A)\|\, dt = \|(B-A)\|.$$

Trong cả hai trường hợp, chiều dài đường đi đều đúng bằng chiều dài Euclid của đoạn thẳng từ A tới B, cũng là khoảng cách Euclid giữa hai điểm A và B, đúng như ta chờ đợi. ■

Ví dụ (chiều dài của đường tròn). Xét đường đi $r(t) = (R\cos t, R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$, một đường đi với tốc độ hằng quanh đường tròn tâm O bán kính R. Chiều dài của đường này là $\int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$.

Nếu ta lấy một đường đi khác, $\alpha(t) = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t)), 0 \leq t \leq 1$, thì chiều dài của đường này là $\int_0^1 \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^1 2\pi R\, dt = 2\pi R$.

Bây giờ ta có thể nói chiều dài của đường tròn bằng $2\pi R$, không phụ thuộc vào cách chọn một tham số hóa đơn chính quy để tính.

Như đã bàn ở một phần trước, ta định nghĩa được các hàm lượng giác cos và sin từ số thực bằng Giải tích, xem [Vnt], nên như vậy ta đã rút ra được bằng Giải tích chiều dài của đường tròn trong mặt phẳng tọa độ. ■

Ví dụ. Cho trường $\vec{F}(x, y) = (2y, -3x)$ và C là đường cong $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$, định hướng từ $(0, 0)$ tới $(1, 1)$. Ta tính $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Ta cần đưa ra một tham số hóa cho đường cong C. Vì C là một đồ thị, ta có ngay tham số hóa $C_1(x) = (x, x^2), 0 \leq x \leq 1$. Ta cũng có thể dùng các tham số hóa khác như $C_2(y) = (\sqrt{y}, y), 0 \leq y \leq 1$, hoặc $C_3(t) = (\ln t, \ln^2 t), 1 \leq t \leq e$. Đây đều là các đường đi đơn, chính quy với vết C, theo định hướng đã cho. Với C_1:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(C_1(x)) \cdot C_1'(x)\, dx = \int_0^1 (2x^2, -3x) \cdot (1, 2x)\, dx = -\frac{4}{3}.$$

Với C_2:

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(C_2(y)) \cdot C_2'(y)\, dy = \int_0^1 (2y, -3\sqrt{y}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}, 1\right) dy = -\frac{4}{3}.$$

Với C_3:

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_1^e \vec{F}(C_3(t))\cdot C_3'(t)\,dt = \int_1^e (2\ln^2 t, -3\ln t)\cdot\left(\frac{1}{t}, \frac{2\ln t}{t}\right)\,dt\\ &= \int_1^e -4\frac{\ln^2 t}{t}\,dt = -\frac{4}{3}\ln^3 t\Big|_1^e = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

■

Liên hệ giữa hai loại tích phân đường

Nếu α và β là hai đường đi đơn chính quy cùng định hướng ứng với đường cong C thì theo 8.7 ta có $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ trong đó $\varphi'(t) > 0$ với $a < t < b$ (trong trường hợp đường đi kín ta giả sử hai đường có cùng điểm đầu và điểm cuối). Vì $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t)$ nên hai vectơ $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương cùng hướng. Từ đó ta đưa ra định nghĩa **hướng tiếp tuyến** của đường cong được định hướng C, vết của một đường đi đơn chính quy $r(t)$ theo hướng đã cho, $a \le t \le b$, tại điểm $p = r(t)$, $a < t < b$, là hướng của vectơ vận tốc $r'(t)$. Hướng tiếp tuyến tại một điểm trên đường cong được định hướng không phụ thuộc vào cách chọn đường đi đơn chính quy trên đó. Vì vậy ***việc định hướng cho đường cong đồng nghĩa với việc chọn hướng tiếp tuyến***.

Tại điểm $p = r(t)$ **vectơ tiếp tuyến cùng chiều đơn vị** được định nghĩa, đó là $T(p) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$, không phụ thuộc vào cách chọn đường đi r theo định hướng của C.

Nếu F là một trường vectơ trên C thì

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_a^b \left[F(r(t))\cdot\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}\right]|r'(t)|\,dt\\ &= \int_a^b [F(r(t))\cdot T(r(t))]\,|r'(t)|\,dt = \int_C F\cdot T\,ds.\end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp này tích phân đường loại hai có thể được biểu diễn qua tích phân đường loại một. Biểu thức trên cũng khẳng định lại ý nghĩa của tích phân loại hai, đó là tổng thành phần tiếp tuyến của trường dọc theo đường.

Bài tập

8.10. Kiểm các tính chất của phép chiếu vuông góc một vectơ lên vectơ khác $p_y x$ ở (8.3):

(a) $(x - p_y x) \perp y$.

(b) $\|x\|^2 = \|p_y x\|^2 + \|y\|^2$.

8.11. Tính:

(a) Chiều dài của đường $r(t) = (2\sqrt{2}t, e^{-2t}, e^{2t})$, $0 \le t \le 1$.

(b) Tìm khối lượng của sợi dây hình parabol $y = x^2$, $1 \le x \le 2$, với mật độ khối lượng $\rho(x, y) = y/x$.

(c) $\int_C (x^2 + y)\, ds$, với C là cung tròn $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

(d) $\int_C (x + y + z)\, ds$, với C là đường xoắn $(\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le \pi$.

(e) $\int_C \sqrt{1 + 9xy}\, ds$, với C là đường $y = x^3$, $0 \le x \le 1$.

(f) $\int_C x^2 y\, ds$, với C là đường thẳng đi từ $(1, 2)$ tới $(3, 5)$.

(g) $\int_C 4y dx + 2x dy$, với C là đường $y = x^3$, $0 \le x \le 1$.

(h) $\int_C x^2 y dx + x y^2 dy$, với C là đường $y = x^3$, $1 \le x \le 2$.

(i) $\int_C \sin z^2 dx + e^x dy + e^y dz$, với C là đường $(2, t, e^t)$, $0 \le t \le 1$.

(j) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, với $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, z, -xy)$ và C là đường $(\cos\theta, \sin\theta, \theta)$, $0 \le \theta \le 9\pi/4$.

(k) Tìm công của trường $\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2, z^2 + x, yz)$ trên đường (t, t^2, t^3), $0 \le t \le 1$.

(l) Tìm công của trường $\vec{F}(x, y, z) = (2z, x^2, 3x)$ trên đường (t, t^2, e^t), $0 \le t \le 1$.

8.12. Cho trường $F(x, y) = \left(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}\right)$. Tính tích phân đường của trường này dọc theo một đường đi từ điểm $(0, 0)$ tới điểm $(1, 1)$ bằng các cách sau:

(a) dùng một đường thẳng,

(b) dùng một đường gấp khúc,

(c) dùng một đường khác.

8.13. (a) Một vật di chuyển trong trường trọng lực của Quả đất từ một điểm có cao độ 100 mét đến một điểm có cao độ 200 mét. Hỏi công của trọng lực là âm, bằng không, hay dương?

(b) Cho C là một đường và n là vectơ pháp tuyến. Hỏi $\int_C n \cdot d\vec{s}$ là âm, bằng không, hay dương?

8.14. Phân tử DNA trong không gian ba chiều có hình dạng đường xoắn ốc kép, mỗi đường có thể được mô hình hóa bởi đường $(R\sin t, R\cos t, ht)$. Bán kính của mỗi đường xoắn ốc khoảng 10 angstrom (1 angstrom = $10^{-8}\ cm$). Mỗi đường xoắn ốc xoắn lên khoảng 34 angstrom sau mỗi vòng xoay. Hãy vẽ đường này. Hãy ước tính chiều dài của mỗi vòng xoay của phân tử DNA.

8.15. Một sợi dây với hai đầu cố định dưới tác động của trọng trường sẽ có hình dạng một đường xích (catenary) với phương trình $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, với cosh là hàm hyperbolic cosine cho bởi $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

Đài tưởng niệm Gateway Arch ở Saint Louis nước Mỹ có dạng một đường xích đảo ngược. Vị trí điểm tâm hình học (cũng là tâm khối lượng của mặt cắt vuông góc) (centroid) của cổng được thiết kế theo công thức $y = 693{,}8597 - 68{,}7672\cosh 0{,}0100333x$ với y là khoảng cách tới mặt đất và $-299{,}2239 \le x \le 299{,}2239$, đơn vị đo là feet.

(a) Hãy tính chiều dài của đường tâm hình học.

(b) * Mỗi mặt cắt vuông góc với đường tâm hình học là một tam giác đều chỉ xuống đất. Diện tích của mặt cắt này là $125{,}1406\cosh 0{,}0100333x$. Dùng bài 8.20, hãy tính thể tích của Gateway Arch.

8.~~16.~~ Cầu Akashi-Kaikyo ở Nhật Bản hiện là một trong những cây cầu treo dài nhất thế giới. Hai tháp cao 297m tính từ mặt biển. Chiều dài nhịp chính (khoảng cách giữa hai tháp) là 1991 m. Mỗi sợi cáp chính có dạng một đường parabola. Điểm thấp nhất của sợi cáp chính cách mặt biển khoảng 97 m. Hãy tính chiều dài của một sợi cáp chính, bằng tính chính xác hoặc tính xấp xỉ.

8.17. Khi nào thì chiều dài của một đường đi bằng 0?

8.18. Cho đường đi chính quy $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Đặt

$$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\|\ du.$$

Hàm s được gọi là **hàm chiều dài** [38] của r. Đặt chiều dài của r là $l = s(b)$.

(a) Chứng tỏ hàm $s(t)$ có hàm ngược trơn. Gọi hàm đó là $t(s)$, $0 \le s \le l$.

(b) Kiểm tra rằng đường $\alpha(s) = r(t(s))$ có cùng vết với đường r. Chứng tỏ tốc độ của α luôn là 1.

Việc thay r bởi α được gọi là **tham số hóa lại theo chiều dài** [39]. Chú ý rằng $\frac{ds}{dt}(t) = \|r'(t)\|$. Điều này thường được viết dưới dạng kí hiệu là $ds = \|r'(t)\|\ dt$.

8.19. Giả sử đường γ trong $\mathbb{R}^3$ được tham số hóa theo chiều dài có vết C. **Độ cong** [40] của đường C là tốc độ biến thiên của phương chuyển động, do đó được tính qua gia tốc, cho bởi $k = \|\gamma''\|$.

(a) Chứng tỏ độ cong của một đường tròn bán kính R đúng bằng $\frac{1}{R}$ tại mọi điểm.

(b) Đặt $T = \gamma'$ thì T là vectơ tiếp xúc đơn vị của γ. Chứng tỏ $T' \perp T$.

(c) Giả sử với mọi s thì $T'(s) = \gamma''(s) = k(s) \neq 0$. Đặt $N = T'/\|T'\|$ thì N là một vectơ pháp tuyến đơn vị của C. Đặt $B = T \times N$. Chứng tỏ tại mỗi điểm trên đường cong thì bộ ba $\{T, N, B\}$ là một cơ sở tuyến tính trực chuẩn cho $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ $T' = kN$.

Có thể đọc thêm về độ cong của đường trong các tài liệu Hình học vi phân, như [Vhh].

8.20 (thể tích của khối ống). * Xét một khối ống là một tập $E \subset \mathbb{R}^3$ với đường γ là đường tâm khối lượng, tức là mỗi mặt cắt D_p của E vuông góc với đường γ tại điểm p nhận điểm p làm tâm khối lượng. Ta tìm công thức tích thể tích của E.

[38] arc-length function
[39] reparametrization by arc-length
[40] curvature

(a) Ta sẽ dùng công thức đổi biến của tích phân để đưa về trường hợp tâm nằm trên đường thẳng. Giả sử γ được tham số hóa theo chiều dài, và có gia tốc luôn khác không. Đặt $T = \gamma'$, $N = T'/\|T'\|$ và $B = T \times N$, thường được gọi là khung Frenet. Xét phép đổi biến $(u, v, s) \mapsto \gamma(s) + uN + vB$. Tính định thức của ma trận Jacobi của phép đổi biến này.

(b) Chứng minh rằng nếu ống có mặt cắt đủ nhỏ thì thể tích của khối ống đúng bằng

$$\int_\gamma |D_p| \, ds.$$

(c) Ứng dụng, hãy tìm lại công thức Pappus ở 6.20.

8.21. Liên quan tới phần chứng minh của 8.7: Chứng minh rằng nếu $\psi : [a, b] \to [c, d]$ là một song ánh liên tục thì $\psi(a) = c$ và $\psi(b) = d$, hoặc $\psi(a) = d$ và $\psi(b) = c$. Suy ra nếu α và β là hai đường đi liên tục, đơn, không kín, có cùng vết, thì chúng có cùng tập điểm đầu và điểm cuối, tức là $\{\alpha(a), \alpha(b)\} = \{\beta(c), \beta(d)\}$.

8.22. * Chứng minh vết (ảnh) của một đường đi trơn trên mặt phẳng $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ có diện tích không.

9 Công thức Newton–Leibniz

Ta có một công thức đơn giản và hiệu quả để tính tích phân đường, tương tự như công thức tính tích phân hàm một biến:

Định lý (công thức Newton–Leibniz). *Giả sử r là một đường đi trơn bắt đầu ở A và kết thúc ở B. Cho f là một hàm thực trơn trên một tập mở chứa vết của r. Khi đó:*

$$\boxed{\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).}$$

Công thức trên cho mối liên hệ giữa tích phân của đạo hàm với giá trị của nguyên hàm trên biên. Hình thức của nó có thể viết là

$$\int_A^B f' = f(B) - f(A).$$

Như thế có thể coi đây là một tổng quát hóa của công thức Newton–Leibniz của hàm một biến, do đó công thức này còn được gọi là **Định lý cơ bản của tích phân đường**.

Công thức trên có một hệ quả là tích phân $\int_r \nabla f \cdot d\vec{s}$ không phụ thuộc vào sự lựa chọn đường đi r từ điểm A tới điểm B. Ta nói tích phân này là ***độc lập với đường đi.***

Chứng minh. Giả sử $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $r(a) = A$ và $r(b) = B$. Khi đó theo công thức Newton–Leibniz của hàm một biến:

$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ r)(t)\, dt$$
$$= (f \circ r)(b) - (f \circ r)(a) = f(r(b)) - f(r(a)) = f(B) - f(A).$$

□

Công thức Newton–Leibniz gợi ý ta xét những trường vectơ mà là gradient của một hàm nào đó.

Định nghĩa. *Một trường vectơ F được gọi là* **bảo toàn** [41] *nếu có hàm thực f, gọi là một* **hàm thế** [42] *của F, sao cho $\nabla f = F$.*

Vectơ $\nabla f(x)$ đại diện cho đạo hàm $f'(x)$, vì thế ta có thể hiểu là $f' = F$ và hàm thế f là một "nguyên hàm" của hàm F. Có thể hiểu ***trường bảo toàn là trường có nguyên hàm***. Một trường bảo toàn còn được gọi là một **trường gradient**.

[41] conservative
[42] potential function

Ví dụ (trường hằng). Giả sử $c \in \mathbb{R}^n$ và F là trường trên $\mathbb{R}^n$ cho bởi $F(x) = c$. Ta tìm được ngay một nguyên hàm của F là $f(x) = c \cdot x$. Vậy trường hằng là bảo toàn. ■

Hệ quả (tích phân của trường bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi). *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn trong D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi.*

Hệ quả (tích phân của trường bảo toàn trên đường đi kín bằng không). *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn kín trong D bằng không.*

Những kết quả trong phần trên có thể được mở rộng cho các đường trơn từng khúc.

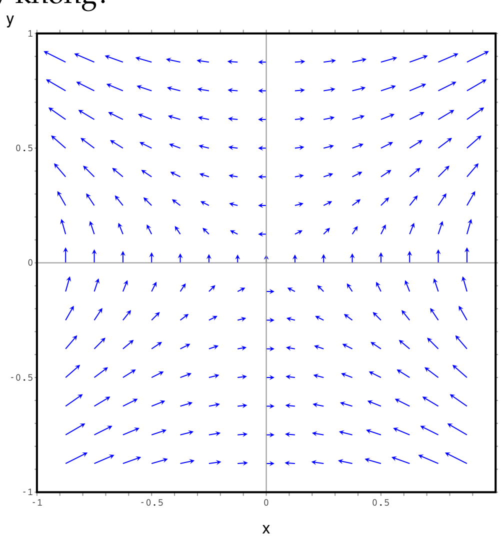
Ví dụ. Tính tính phân $\int_C y\,dx + (x+6y)dy$ trong đó C là một đường đi từ $(1,0)$ tới $(2,1)$.

Ta tìm một hàm thế cho trường $(y, x+6y)$. Ta giải hệ phương trình đạo hàm riêng để tìm nguyên hàm:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x+6y. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta được $f(x,y) = \int y\,dx = xy + D(y)$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $D'(y) = 6y$, suy ra $D(y) = \int 6y\,dy = 3y^2 + E$. Vậy ta tìm được một hàm thế là $f(x,y) = xy + 3y^2$. Suy ra tích phân đã cho bằng $f(2,1) - f(1,0) = 5$. ■

Ví dụ. Dự đoán trường vectơ trong hình sau có bảo toàn quanh điểm giữa hay không?



Lấy một đường kín quanh điểm giữa, chẳng hạn một đường tròn hay đường vuông, ta thấy chiếu của của các vectơ của trường lên đường khử nhau đôi một, do đó tích phân của trường dọc theo đường đó bằng 0. Do đó ta dự đoán trường trong hình là bảo toàn. ∎

Ý nghĩa vật lý của trường bảo toàn

Vì tích phân của trường trên một chuyển động là công của trường đóng góp vào chuyển động, nên công của một trường bảo toàn trên một chuyển động kín thì bằng 0. Điều này giải thích tên gọi "bảo toàn".

9.1 Ví dụ (trường trọng lực ở gần bề mặt Quả đất). Xét vật có khối lượng m ở trong không gian gần bề mặt Quả đất. Ta xấp xỉ bằng cách giả sử trọng trường không đổi trong phần không gian này. Nếu ta đặt trục z vuông góc với mặt đất, chỉ ra ngoài, và gốc tọa độ trên mặt đất thì trọng lực tác động lên vật là $\vec{F} = -mg\vec{k} = (0, 0, -mg)$ trong đó $g \approx 9{,}8\, m/s^2$ là hằng số trọng trường gần mặt đất. Ta tìm được hàm thế của trường này có dạng $f(z) = -mgz + C$. Trong vật lý ta thường cho thế năng của vật ở trên mặt đất là dương, còn thế năng tại mặt đất bằng 0, do đó thế năng của vật được cho bởi hàm $U(z) = mgz$. ∎

9.2 Ví dụ (trường trọng lực tổng quát). Chính xác hơn, giả sử một vật có khối lượng M nằm ở gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$, và một vật có khối lượng m nằm ở điểm $\vec{r} = (x, y, z)$. Theo cơ học Newton, vật có khối lượng m chịu tác động của lực hấp dẫn từ vật có khối lượng M bằng

$$F(\vec{r}) = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

với G là một hằng số.

Ta tìm một nguyên hàm cho F bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -mMG\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -mMG\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -mMG\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, lấy tích phân theo x,

$$f(x, y, z) = \int -mMG\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dx = \frac{mMG}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + C(y, z).$$

Thay vào hai phương trình còn lại, thực sự $C(y, z)$ chỉ là một hằng số C. Vậy trường trọng lực là bảo toàn với hàm thế $f(\vec{r}) = \frac{mMG}{|\vec{r}|} + C$. ∎

Bây giờ ta xét trường bảo toàn nói chung. Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của *tổng lực* F là một trường bảo toàn với f là một hàm thế. Giả sử vị trí của vật ở thời điểm t là $r(t)$. Giả sử $r(t_0) = x_0$ và $r(t_1) = x_1$. Ta định nghĩa **động năng** [43] (năng lượng từ chuyển động) của vật là $K(t) = \frac{1}{2}m|r'(t)|^2$; và **thế năng** [44] (năng lượng từ vị trí) của vật là $U(x) = -f(x)$. Chú ý, như đã thấy ở trên trong trường hợp trọng trường, thế năng của vật lý là đối của hàm thế của toán, xem chẳng hạn [YF20, tr. 221].

Theo định lý cơ bản của tích phân đường:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} = f(x_1) - f(x_0) = -(U(x_1) - U(x_0)).$$

Vậy công của trường bằng đối của biến thiên thế năng. Mặt khác theo cơ học Newton thì $F = ma = mr''$. Do đó:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} mr''(t) \cdot r'(t)\, dt.$$

Bây giờ dùng công thức (xem 9.17)

$$(r' \cdot r')' = r'' \cdot r' + r' \cdot r'' = 2r'' \cdot r'$$

hay

$$r'' \cdot r' = \frac{1}{2}(|r'|^2)'$$

ta biến đổi

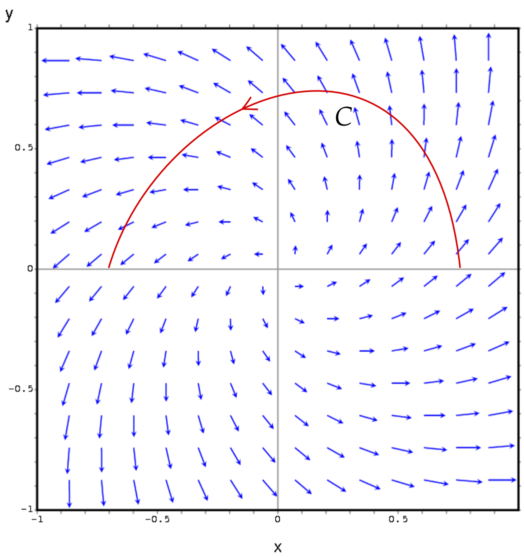
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} &= \int_{t_0}^{t_1} m\frac{1}{2}(|r'(t)|^2)'\, dt \\ &= \frac{1}{2}m|r'(t_1)|^2 - \frac{1}{2}m|r'(t_0)|^2 = K(t_1) - K(t_0). \end{aligned}$$

Vậy công của trường bằng biến thiên động năng. Ta kết luận $K(t) + U(r(t))$ không đổi. Vậy ***tổng động năng và thế năng, tức năng lượng cơ học, là không đổi trong quá trình chuyển động dưới tác động của một trường bảo toàn***.

Bài tập

9.3. Hình 9.4 vẽ của một trường vectơ.

[43] kinetic energy
[44] potential energy. Từ "thế" ở đây có nghĩa như trong "vị thế".

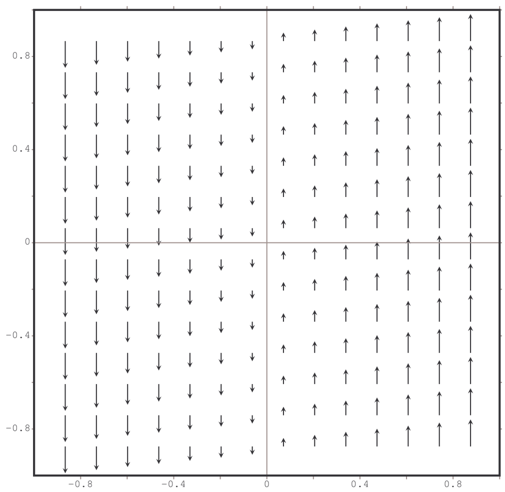


Hình 9.4:

(a) Ước đoán trường có bảo toàn không?

(b) Ước đoán tích phân của trường dọc theo đường C là âm, dương hay bằng 0?

9.5. Ước đoán trường trong Hình 9.6 có bảo toàn không?



Hình 9.6: Bài tập 9.5.

9.7. Tính:

(a) Tìm một hàm $f(x, y, z)$ sao cho $f(0, 0, 0) = 6$ và $\nabla f(x, y, z) = (2y, 2x, e^z)$.

(b) Tính công của trường lực $F(x, y, z) = (2, 3y, 4z^2)$ khi vật đi từ điểm $(1, 1, 1)$ tới điểm $(1, 0, 0)$.

(c) Giải Bài tập 8.12 bằng cách dùng hàm thế.

(d) Tìm hàm thế cho trường $(e^x \sin y - yz, e^x \cos y - xz, z - xy)$.

(e) Tìm một hàm thế cho trường

$$\left(xy - \sin z, \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right).$$

(f) Tính tích phân $\int_C (2y-3z)\,dx + (2x+z)dy + (y-3x)\,dz$ với C là đường gấp khúc đi từ $(0,0,0)$ tới $(0,1,2)$ tới $(3,4,3)$ rồi tới $(2,3,1)$.

(g) Tính $\int_C (x-4y^2)\,dx + (\ln y - 8xy)\,dy$ với C là một đường trên nửa mặt phẳng $y > 0$ đi từ điểm $(-3,4)$ tới điểm $(2,6)$.

(h) Tính $\int_C (\sqrt{x} + 8xy)\,dx + (\sqrt{y} + 4x^2)\,dy$ với C là một đường trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng đi từ điểm $(3,2)$ tới điểm $(4,1)$.

9.8. Cho C là đường $y = x^3$ từ điểm $(0,0)$ tới điểm $(1,1)$.

(a) Tính $\int_C 3y\,dx + 2x\,dy$.

(b) Dùng câu trên, tính $\int_C (3y + ye^x)\,dx + (2x + e^x + e^y)\,dy$.

9.9. Cho C là đường elíp $4x^2 + y^2 = 4$.

(a) Tính $\int_C (e^x \sin y + 2y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$.

(b) Tính $\int_C (e^x \sin y + 4y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$.

9.10 (điện trường là bảo toàn). ✓ Định luật Coulomb [45] là một định luật của vật lý có được từ thực nghiệm được phát biểu như sau: Nếu trong $\mathbb{R}^3$ có hai điện tích q_1 và q_2 thì điện tích q_1 tác động lên điện tích q_2 một lực bằng

$$F(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3}\vec{r},$$

trong đó $\vec{r}$ là vectơ từ điểm mang điện tích q_1 sang điểm mang điện tích q_2, và ϵ_0 là một hằng số. Để đơn giản ta giả sử điện tích q_1 nằm ở gốc tọa độ, khi đó $\vec{r} = (x,y,z)$ là vị trí của điện tích q_2. Chứng tỏ điện trường là một trường bảo toàn.

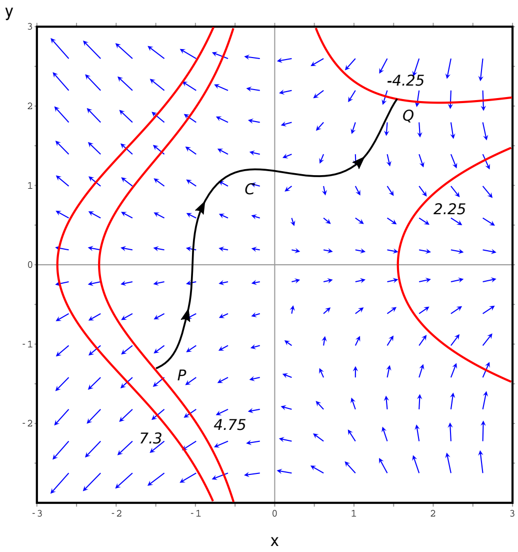
9.11. Chứng tỏ công của trọng trường do vật ở vị trí O tạo ra khi một vật khác di chuyển từ vị trí P tới vị trí Q chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ O tới P và khoảng cách từ O tới Q.

9.12. Tính công của trường lực bảo toàn tác động lên vật di chuyển từ điểm P tới điểm Q theo đường C trong Hình 9.13. Trong hình các đường cong khác C là các đường mức của một hàm thế với các mức tương ứng được ghi. Chú ý các đường mức này đều vuông góc với trường vectơ (xem Bài tập 9.16).

9.14. Hãy khảo sát sự tương thích giữa trường trọng lực ở gần bề mặt Quả đất (Ví dụ 9.1) và trường trọng lực tổng quát (Ví dụ 9.2).

9.15. Chứng tỏ hai hàm thế bất kì của cùng một trường xác định trên một miền mở liên thông sai khác nhau một hằng số. Điều này có cùng đúng không nếu bỏ giả thiết miền liên thông?

[45] Định luật này được phát biểu lần đầu tiên bởi Charles Coulomb năm 1785.



Hình 9.13

9.16 **(trường gradient luôn vuông góc với tập mức).** Cho F là một trường bảo toàn trên mặt phẳng, tức là một trường gradient, $F = \nabla f$. ***Tập mức*** (level set) của f là tập các điểm có cùng một giá trị qua f, tức là tập $f^{-1}(c) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid f(p) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

Nếu với mọi $p \in f^{-1}(c)$ thì $F(p) = \nabla f(p) \neq 0$ thì giá trị c còn được gọi là một ***giá trị chính quy*** (regular value) của f.

(a) * Chứng minh rằng nếu c là một giá trị chính quy của f thì tập mức $f^{-1}(c)$ là một đường cong, chính xác hơn phương trình "ở dạng ẩn" $f(x, y) = c$ xác định vết một đường đi $C(t) = (x(t), y(t))$ trên một lân cận của điểm p.

(b) Từ điều kiện $f(C(t)) = c$ hãy suy ra $\nabla f(C(t)) \cdot C'(t) = 0$. Hãy giải thích vì sao điều đó có nghĩa là $F(p) \perp C$. Xem minh họa ở hình 9.13.

(c) Chứng minh rằng

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{s} = 0.$$

Vậy tích phân của trường gradient trên đường mức luôn bằng 0.

9.17. Cho $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}^3$. Hãy kiểm tra các công thức sau về đạo hàm:

(a) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

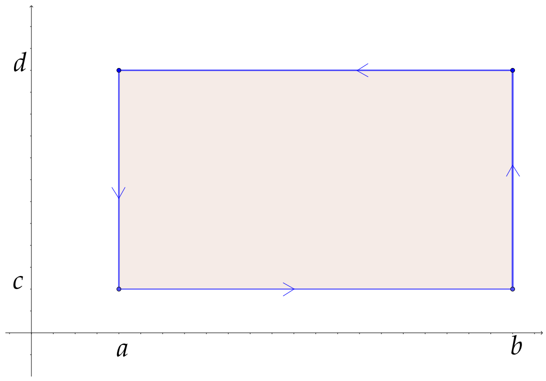
(b) $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

10 Công thức Green

Trong phần này ta chỉ làm việc trên mặt phẳng Euclid hai chiều $\mathbb{R}^2$.

Công thức Green cho miền đơn giản

Ví dụ. Để dễ nắm được ý chính hơn, trước hết ta xét trường hợp đơn giản trên hình chữ nhật. Cho hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ với biên được định hướng tương thích như Hình 10.1.



Hình 10.1: Một hình chữ nhật với định hướng biên tương thích.

Giả sử (P,Q) là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa hình chữ nhật này. Áp dụng công thức Fubini và Công thức Newton-Leibniz ta có

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]}\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy &= \int_a^b\left(\int_c^d\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx\\ &= \int_a^b[P(x,d)-P(x,c)]\,dx\\ &= \int_a^b P(x,d)\,dx-\int_a^b P(x,c)\,dx.\end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy &= \int_c^d\left(\int_a^b\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\right)dy\\ &= \int_c^d[Q(b,y)-Q(a,y)]\,dy\\ &= \int_c^d Q(b,y)\,dy-\int_c^d Q(a,y)\,dy.\end{aligned}$$

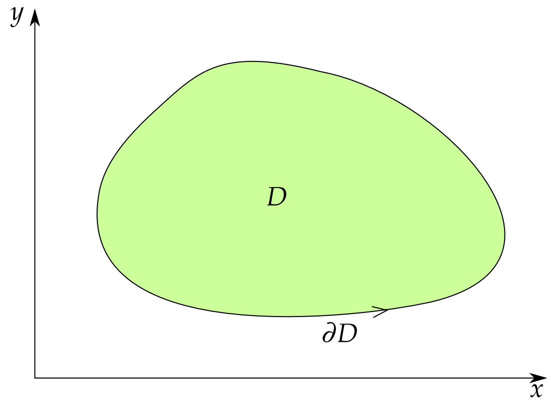
Ta nhận ra

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\int_a^b P(x,c)\,dx+\int_c^d Q(b,y)\,dy-\int_a^b P(x,d)\,dx-\int_c^d Q(a,y)\,dy$$

chính là tích phân của trường (P,Q) dọc theo các cạnh biên của hình chữ nhật theo chiều chỉ trong Hình 10.1. Như vậy ta tìm được một công thức liên hệ một tích trên bội hai trên một hình chữ nhật với một tích phân đường trên biên của hình chữ nhật. Đây được gọi là một công thức Green [46]. ■

Bây giờ ta tổng quát hóa một cách tương tự cho miền phẳng đơn giản.

Ta dùng **định hướng tương thích của biên** của một miền phẳng đơn giản. Miêu tả trực quan của định hướng tương thích là: biên được định hướng sao cho khi đi trên biên thì miền nằm bên tay trái; hoặc: đặt bàn tay phải theo hướng của biên thì miền nằm ở phía lòng bàn tay. Xem Hình 10.2.



Hình 10.2: Định hướng tương thích của biên của miền phẳng đơn giản.

Thường trong các tính toán cụ thể như trong môn học này thì miêu tả trực quan này là đủ dùng. Ta sẽ miêu tả chính xác định hướng tương thích khi chứng minh, còn giờ ta phát biểu ngay công thức Green và làm ví dụ minh họa.

10.3 Định lý (Công thức Green). *Cho D là một miền đơn giản theo cả hai chiều với biên trơn từng khúc được định hướng tương thích, và cho $\vec{F} = (P,Q)$ là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa D, thì*

$$\boxed{\int_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy.}$$

Công thức Green cho một quan hệ giữa tích phân trên một miền với tích phân trên biên của miền đó, giống như Công thức Newton–Leibniz nhưng ở một chiều cao hơn.

Ví dụ. Tính tính phân $I = \int_C (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$ với C là đường tròn tâm tại gốc tọa độ bán kính 3 định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Tính trực tiếp, ta dùng một tham số hóa của C, tức một đường đi trên C, như $r(t) = (x(t), y(t)) = (3\cos t, 3\sin t)$ với $0 \le t \le 2\pi$. Ta thấy đường r cùng

[46] George Green là một nhà toán học sống vào thế kỉ 19

chiều C, và ta tính được $dx = x'(t)dt = -3\sin t\,dt$, $dy = y'(t)dt = 3\cos t\,dt$. Ta có

$$I = \int_0^{2\pi} [(3\cos t - 3\sin t)(-3\sin t) + (3\cos t + 3\sin t)3\cos t]\,dt = \int_0^{2\pi} 9\,dt = 18\pi.$$

Bây giờ ta có một cách tiếp cận mới là dùng Công thức Green. Xét D là hình tròn được bao bởi đường tròn C. Định hướng của C trùng với định hướng biên của D. Áp dụng Công thức Green ta đưa tích phân đường trên C thành tích phân bội trên D:

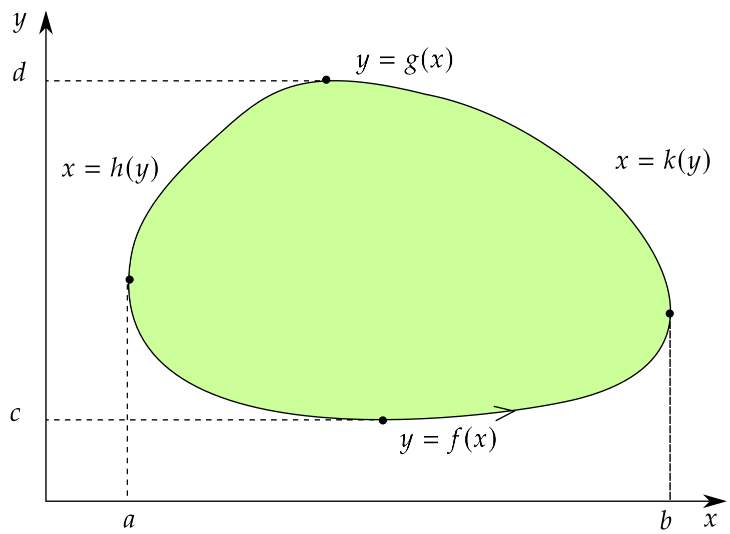
$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right] dxdy = \iint_D 2\,dxdy = 2|D| = 2\pi 3^2 = 18\pi.$$

■

Chứng minh Định lý 10.3. Là một miền đơn giản theo chiều thẳng đứng thì $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$ trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hàm trơn từng khúc, và là miền đơn giản theo chiều nằm ngang thì $D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h(y) \le x \le k(y)\}$ trong đó $h(y)$ và $k(y)$ là hàm trơn từng khúc, vậy

$$D = \{(x,y) \in [a,b] \times [c,d] \mid f(x) \le y \le g(x),\ h(y) \le x \le k(y)\}.$$

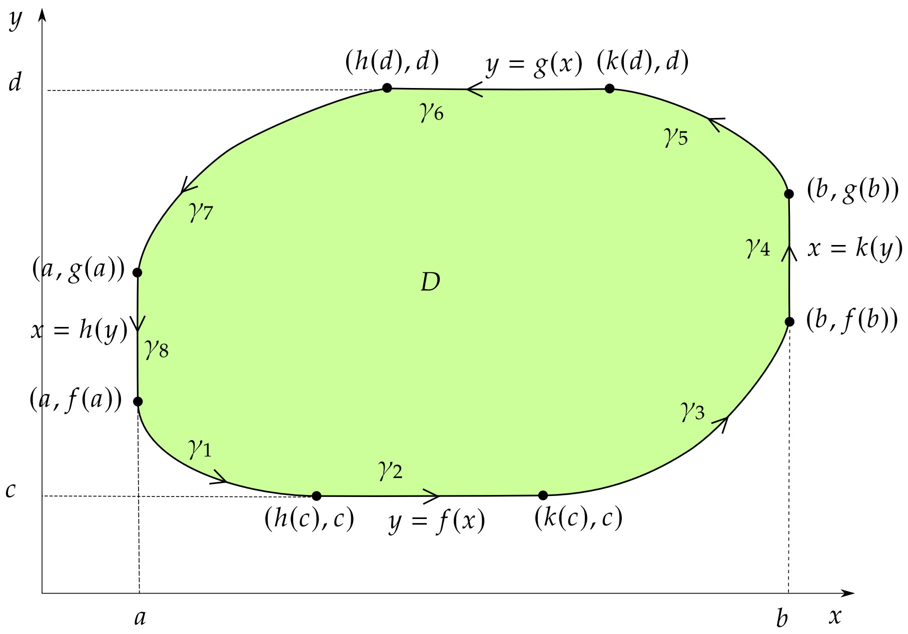
Xem miêu tả trực quan trong Hình 10.4 và Hình 10.5. Việc kiểm định hướng biên phù hợp với trực quan được để lại ở phần cuối chứng minh này.



Hình 10.4: Miền đơn giản theo cả hai chiều và định hướng biên trong một trường hợp thường gặp.

Ta rút ra Công thức Green từ Công thức Fubini và Công thức Newton-Leibniz tương tự như trong trường hợp hình chữ nhật.

Xem D là miền đơn giản theo chiều thẳng đứng, do các đạo hàm riêng của



Hình 10.5: Miền đơn giản theo cả hai chiều và định hướng biên trong trường hợp tổng quát.

trường là liên tục trên D nên ta áp dụng được công thức Fubini:

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=f(x)}^{y=g(x)}\, dx \\
&= \int_a^b [P(x,g(x)) - P(x,f(x))]\, dx \\
&= \int_a^b P(x,g(x))\, dx - \int_a^b P(x,f(x))\, dx \\
&= -\int_{\partial D} P\, dx,
\end{aligned}
$$

chú ý rằng $\int_{\gamma_4} P\, dx = \int_{\gamma_8} P\, dx = 0$ vì x bằng hằng trên hai đường đó.

Tính toán tương tự, xem D là miền đơn giản theo chiều nằm ngang,

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy &= \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{k(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\, dx \right) dy = \int_a^b Q(x,y)\Big|_{x=h(y)}^{x=k(y)}\, dy \\
&= \int_c^d [Q(k(y),y) - Q(h(y),y)]\, dy \\
&= \int_c^d Q(k(y),y)\, dx - \int_c^d Q(h(y),y)\, dy \\
&= \int_{\partial D} Q\, dy,
\end{aligned}
$$

chú ý rằng $\int_{\gamma_2} Q\, dy = \int_{\gamma_6} Q\, dy = 0$ vì y bằng hằng trên hai đường đó.

Vậy

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

Sau đây ta bàn kỹ hơn định hướng biên, đảm bảo rằng miêu tả trực quan trong Hình 10.5 là chính xác. Phần này người học có thể gác lại đọc sau.

Như lý luận ở phần chứng minh của Mệnh đề 4.10, ta xác định biên của D chứa trong hội của các đường γ_i, $1 \le i \le 8$.

Ta khẳng định rằng vết γ_1 của đường $(x, f(x))$ với $a \le x \le h(c)$ cũng là vết của đường $(h(y), y)$ với $c \le y \le f(a)$, và định hướng của hai đường này là trái nhau.

Ta chứng tỏ điểm $(x, f(x))$ thuộc đồ thị của f cũng là điểm $(h(f(x)), x)$ thuộc đồ thị của h, tức là $\forall x \in [a, h(c)], h(f(x)) = x$.

Nếu có $a \le x \le h(c)$ mà $h(f(x)) > x$, thì điểm $(x, f(x)) \in D$ nằm bên trái điểm $(h(f(x)), f(x)) \in D$, trái định nghĩa hàm h.

Nếu có $a \le x \le h(c)$ mà $h(f(x)) < x$, thì $h(f(x)) < x \le h(c)$, nên Định lý giá trị trung gian áp dụng cho hàm h trên đoạn $[c, f(x)]$ đảm bảo có $y \in [c, f(x))$ sao cho $h(y) = x$. Khi đó điểm $(h(y), y) = (x, y) \in D$ nằm bên dưới điểm $(x, f(x)) \in D$, trái định nghĩa hàm f.

Vậy tại một điểm trên γ_1 thì $(x, f(x)) = (h(y), y)$, nên $h(f(x)) = x$ và $f(h(y)) = y$, do đó f và h là hàm ngược của nhau. Lấy đạo hàm ta được $h'(f(x))f'(x) = 1$, dẫn tới f' không đổi dấu và cùng dấu với h'. Mặt khác $f(a) \ge c = f(h(c))$ trong khi $a \le h(c)$, nên f không thể tăng ngặt, do đó f' chỉ có thể luôn âm. Vận tốc của hai đường này tại cùng một điểm lần lượt là $(1, f'(x))$ và $(h'(y), 1)$, có tích vô hướng bằng $f'(x) + h'(y) < 0$, vậy hai đường này ngược chiều nhau.

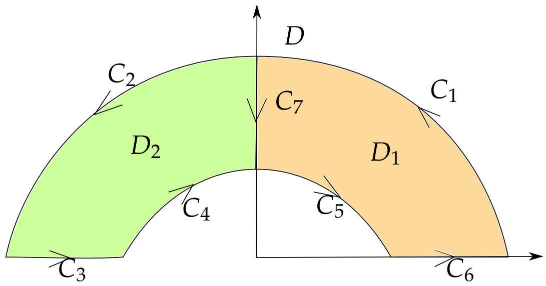
Tại các đường γ_i còn lại ta có thể làm tương tự. □

Công thức Green cho miền không đơn giản

Đối với một miền không đơn giản nhưng có thể được phân chia thành một hội của hữu hạn những miền đơn giản với những phần chung chỉ nằm trên biên, ta có thể áp dụng công thức Green cho từng miền đơn giản rồi cộng lại.

Ví dụ. Công thức Green vẫn đúng cho miền $D = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ y \ge 0\}$, mặc dù miền này không phải là một miền đơn giản.

Chia D thành hội của hai miền đơn giản D_1 và D_2 được miêu tả trong hình vẽ. Chú ý rằng khi được định hướng dương ứng với D_2 thì đường C_7 được định hướng ngược lại, trở thành $-C_7$. Áp dụng công thức Green cho D_1 và D_2 ta được:



$$\begin{aligned}
\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA &= \iint_{D_1} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA \\
&= \int_{\partial D_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\partial D_2} F \cdot d\vec{s} \\
&= \left(\int_{C_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_7} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_5} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_6} F \cdot d\vec{s}\right) + \\
&\quad + \left(\int_{C_2} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F \cdot d\vec{s} + \int_{-C_7} F \cdot d\vec{s}\right) \\
&= \int_{C_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F \cdot d\vec{s} + \\
&\quad + \int_{C_5} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_6} F \cdot d\vec{s} \\
&= \int_{\partial D} F \cdot d\vec{s}.
\end{aligned}$$

■

Một khó khăn khi muốn phát biểu công thức Green cho những miền tổng quát hơn là việc định nghĩa một cách chính xác những khái niệm xuất hiện trong công thức, như thế nào là định hướng dương của biên, khi nào thì biên của một miền là một đường, khi nào thì một đường bao một miền, ... Một tiếp cận có trong [Kel29, tr. 119], xấp xỉ miền không đơn giản bằng những miền là hội của hữu hạn miền đơn giản, sau đó qua giới hạn. Ngày nay công thức Green thường được xét như là một trường hợp riêng của công thức Stokes tổng quát nhiều chiều, xem phần bổ sung ở trang 194.

Điều kiện để trường vectơ phẳng là bảo toàn

10.6 Định lý (điều kiện cần để trường là bảo toàn). *Nếu trường $F = (P, Q)$ trơn và bảo toàn trên một tập mở chứa tập D thì trên D ta phải có*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Chứng minh. Giả sử f là hàm thế của F. Khi đó $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ và $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Với giả thiết về tính trơn như trên thì các đạo hàm riêng của P và Q tồn tại và liên tục trên D, và $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ và $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Vì $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ tồn tại và liên tục nên chúng bằng nhau, do đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. □

Đây là một điều kiện cần để trường là bảo toàn. Ta thường áp dụng điều kiện cần theo cách phản đảo: ***nếu điều kiện $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ không thỏa thì trường không thể bảo toàn***.

Ví dụ. Xét trường $(2y, x)$. Vì $\frac{\partial(2y)}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial(x)}{\partial x}$ nên trường không bảo toàn. Ta cũng có thể thấy nếu tìm cách tính nguyên hàm của trường này. ■

Điều kiện $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ là một điều kiện cần để trường bảo toàn, nhưng không phải là một điều kiện đủ. Ví dụ sau chỉ rõ điều này.

10.7 Ví dụ ($P_y = Q_x$ cần nhưng không đủ). Xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên trên miền xác định là mặt phẳng bỏ đi điểm $(0, 0)$. Mặt khác, ta thử tính tích phân của $\vec{F}$ trên đường tròn bán kính đơn vị C tâm tại $(0, 0)$ ngược chiều kim đồng hồ, tham số hóa bởi $r(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$, thì

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t)\, dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi,$$

khác 0. Vậy $\vec{F}$ không phải là một trường vectơ bảo toàn trên miền xác định của nó. Xem Hình 10.8.

Đây là ví dụ thường gặp cho một trường thỏa điều kiện $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nhưng không bảo toàn. Có thể tìm hiểu thêm về ví dụ này ở Bài tập 10.23. ■

Bây giờ ta tìm hiểu về điều kiện đủ để trường là bảo toàn.

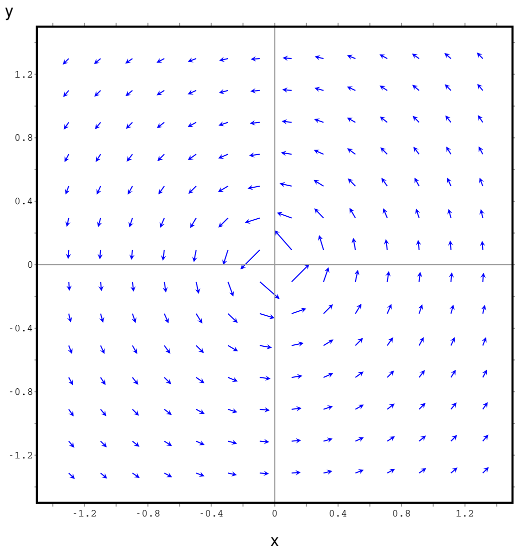
Một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một **miền hình sao** [47] nếu có một điểm $p_0 \in D$ sao cho với mọi điểm $p \in D$ thì đoạn thẳng nối p_0 và p được chứa trong D.

Ví dụ. $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao. Một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao. $\mathbb{R}^n$ trừ đi một điểm không là miền hình sao. ■

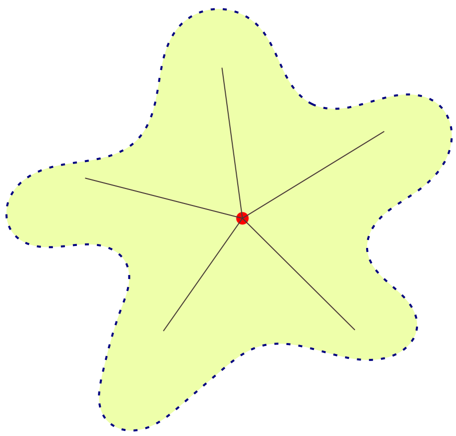
Kết quả dưới đây nói rằng nếu miền là mở hình sao thì điều kiện $P_y = Q_x$ cũng là một điều kiện đủ để trường là bảo toàn.

10.10 Định lý (điều kiện đủ để trường là bảo toàn). *Giả sử $F = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở hình sao D. Nếu $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trên D thì F là bảo toàn trên D.*

[47] star-shaped region



Hình 10.8: Trường $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Từ hình có thể thấy là tích phân của trường trên một đường tròn tâm tại gốc tọa độ là khác 0, phù hợp với tính toán trên.



Hình 10.9: Miền hình sao.

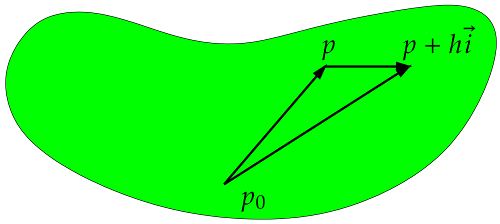
Chứng minh. Để gợi ý, ở đây ta dùng kí hiệu $\int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}$ để chỉ tích phân của F trên đoạn thẳng $p_0 + t(p - p_0)$, $0 \leq t \leq 1$, nối điểm p_0 với điểm p. Đặt

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}.$$

thì đây chính là một hàm thế của F. Ta sẽ kiểm tra rằng $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, chứng minh $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ là tương tự. Theo định nghĩa của đạo hàm, với $\vec{i} = (1, 0)$, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s} \right].$$

Chú ý do D mở nên nếu h đủ nhỏ thì điểm $p + h\vec{i}$ sẽ nằm trong D. Nếu ba điểm p_0, p và $p + h\vec{i}$ không cùng nằm trên một đường thẳng thì chúng tạo



Hình 10.11: Điều kiện đủ cho tính bảo toàn trên miền hình sao.

thành một tam giác. Tam giác này là một miền đơn giản do đó ta có thể áp dụng định lý Green cho miền này, dùng giả thiết $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ta được tích phân đường trên biên của tam giác bằng 0, tức là

$$\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s} = \int_{p}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s}.$$

Công thức này cũng đúng nếu ba điểm là thẳng hàng. Viết $p = (x, y)$, và lấy đường đi thẳng từ p tới $p + h\vec{i}$ là $r(t) = (t, y)$ với $x \leq t \leq x + h$, ta được

$$\int_{p}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} = \int_{x}^{x+h} P(t, y)\, dt.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} P(t, y)\, dt = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x}^{x+h} P(t, y)\, dt - \int_{x}^{x} P(t, y)\, dt}{h}. \\ &= \frac{d}{du} \int_{x}^{u} P(t, y)\, dt \bigg|_{u=x} = P(x, y). \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối là một tính toán thường có trong Định lý cơ bản của phép tính Vi tích phân, xem Bài tập 10.34. □

Ví dụ. Trường $\vec{F}(x, y) = (e^{x^2}, y^3)$ có bảo toàn hay không?

Ta có $\frac{\partial e^{x^2}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial y^3}{\partial x}$. Miền xác định của trường là $\mathbb{R}^2$, một miền mở hình sao. Định lý 10.10 áp dụng được, cho ta kết luận trường là bảo toàn trên miền xác định. Mặt khác, nếu ta tìm hàm thế thì có thể thu được một hàm là $f(x, y) = \int e^{x^2}\, dx + \frac{1}{4}y^4$, không phải là hàm sơ cấp. ■

Nếu có một trường (P, Q) mà $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nhưng lại không bảo toàn thì Định lý 10.10 cho biết miền xác định của trường không phải là một miền hình sao. Như vậy một giả thiết giải tích đã đưa đến một kết luận hình học.

Ta thấy chứng minh của Định lý 10.10 vẫn đúng nếu luôn tồn tại đường đi từ điểm p_0 tới điểm p, không nhất thiết phải là đường thẳng, dưới giả thiết tích phân $\int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu p_0 và điểm cuối p. Từ đó ta có:

Mệnh đề. *Giả sử $F = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở liên thông đường $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu tích phân đường của F trên D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi thì F là bảo toàn trên D.*

Ghi chú. Kết luận của Định lý 10.10 vẫn đúng nếu thay miền hình sao bởi miền tổng quát hơn gọi là **miền đơn liên** [48], đại khái là miền chỉ gồm một mảnh không có lỗ thủng. Để trình bày chính xác cần vượt ra ngoài phạm vi môn học này, xem chẳng hạn ở [Sja06, VSt].

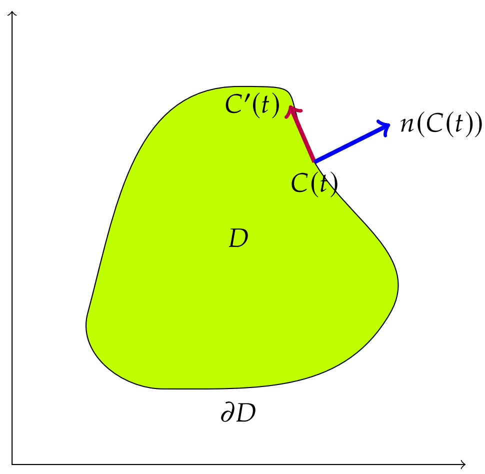
Dạng thông lượng của công thức Green

Cho D là miền phẳng và F là một trường trên D sao cho ta có thể áp dụng công thức Green. Giả sử ∂D được tham số hóa theo chiều dương bởi $C(t) = (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$.

Vectơ vận tốc của đường biên là $C'(t) = (x'(t), y'(t))$. **Vectơ pháp tuyến ngoài** n của ∂D tại điểm $(x(t), y(t))$ là

$$n = \frac{1}{|C'(t)|}(y'(t), -x'(t)).$$

Ta giải thích điều này sau đây. Vectơ $(-y'(t), x'(t))$ vuông góc $(x'(t), y'(t))$ (do tích vô hướng bằng 0), vậy n cùng phương với $(-y'(t), x'(t))$. Chiều của n được xác định theo nguyên tắc chiều từ pháp tuyến ngoài sang tiếp tuyến phải cùng chiều với chiều dương chuẩn tắc của mặt phẳng, tức là chiều từ $(1, 0)$ sang $(0, 1)$. Do đó định thức của ma trận gồm hai vectơ n và $C'(t)$ phải dương và ta xác định được được chính xác công thức của n như trên.



[48]simply connected

Từ công thức Green:

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot n\, ds &= \int_a^b \langle (P(C(t)), Q(C(t))), \frac{1}{|C'(t)|}(y'(t), -x'(t))\rangle\, |C'(t)|\ dt\\ &= \int_C -Q\, dx + P\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA.\end{aligned}$$

Người ta thường đặt

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Toán tử div sẽ được thảo luận nhiều hơn ở mục 13. Vậy

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot n\, ds = \iint_D \operatorname{div} F\, dA.} \tag{10.12}$$

Tích phân $\int_C F \cdot n\, ds$ là tổng thành phần pháp tuyến ngoài của F dọc theo biên ∂D. Nếu F là một trường vectơ vận tốc thì tích phân này thể hiện**thông lượng** [49] qua ∂D.

Bài tập

10.13. Tính:

(a) Cho C là biên của hình vuông $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ định hướng theo chiều kim đồng hồ. Tính tích phân $\int_C x^3\, dx + (x + \sin(2y))\, dy$.

(b) Cho C là biên của hình vuông $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ định hướng theo chiều kim đồng hồ. Tính tích phân $\int_C x^2\, dy + y^2\, dx$.

(c) Cho $F(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$. Gọi T là tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giải thích tại sao $\int_T F \cdot d\vec{s} = 0$ bằng ba cách.

(d) $\int_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ trong đó C là chu tuyến (đường biên) theo chiều dương của tam giác OAB với $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$, $B = (4, 2)$ bằng cách tính trực tiếp và bằng công thức Green.

(e) $\int_C \sin x dx + x^2 y^3 dy$ trong đó C là đường biên theo chiều dương của tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ bằng cách tính trực tiếp và bằng công thức Green.

(f) Cho $F(x, y) = (x^2 + y, x + \sqrt{y^4 + y^2 + 1})$. Trường này có bảo toàn không? Gọi $C(t) = (1 - \cos^2 t, \sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$. Tính $\int_C F \cdot d\vec{s}$.

(g) Cho $F(x, y) = (y - 2xye^{-x^2}, e^{-x^2} + y)$. Tính tích phân của trường này trên cung tròn đơn vị trong góc phần tư thứ nhất đi từ $(1, 0)$ tới $(0, 1)$.

(h) Hãy kiểm chứng công thức Green trong trường hợp miền được bao bởi hai đường cong $y = x$ và $y = x^2$ và trường là (xy, y^2).

[49] lượng đi qua, flux

(i) Hãy kiểm chứng công thức Green trong trường hợp miền được bao bởi hai đường cong $y = \sqrt{x}$ và $y = x^2$ và trường là $(x + y, x^2 + y^2)$.

(j) Tính tích phân $\int_C 4y dx - 5dy$ với C là đường elíp $x = 2 + 4\cos\theta$, $y = 3 + 2\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ bằng 2 cách.

10.14. ✓ Gọi D là một miền trên đó công thức Green có thể áp dụng được. Chứng tỏ diện tích của D có thể được tính theo công thức

$$|D| = -\int_{\partial D} y\, dx = \int_{\partial D} x\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx.$$

10.15. Cho đường cong trong mặt phẳng (x, y) viết bằng phương trình dùng tọa độ cực $r = 4 + 3\cos(11\theta)$, với $0 \le \theta \le 2\pi$ (xem Hình 5.19). Dùng Bài tập 10.14, hãy tính diện tích của miền được bao bởi đường cong này.

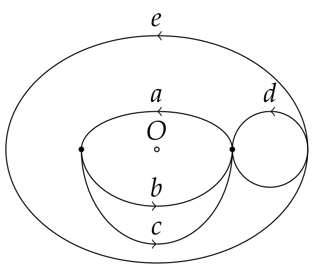
10.16. Cho đường cong hình sao [50] $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

(a) Vẽ đường này, dùng tham số hóa $x = 2\cos^3\theta,\ y = 2\sin^3\theta$.

(b) Tính diện tích của miền bao bởi đường cong trên bằng cách dùng tích phân bội.

(c) Tính diện tích miền này bằng cách dùng tích phân đường.

10.17. Cho $\vec{F} = (P, Q)$ là trường vectơ trơn xác định trên mặt phẳng trừ điểm O, có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tại mọi điểm. Cho $\int_a \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1$ và $\int_b \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2$, xem Hình 10.18. Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên c, d, và e.



Hình 10.18: Bài tập 10.17.

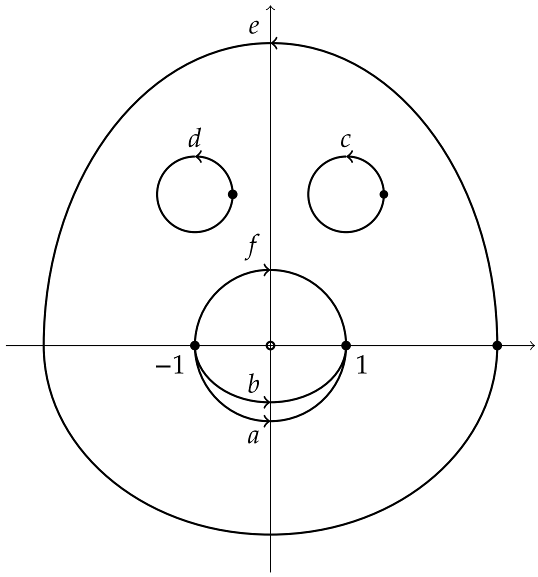
10.19. Cho $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Cho C_1 là đường e-líp $9x^2 + 4y^2 = 36$ và C_2 là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, đều được định hướng cùng chiều kim đồng hồ. Chứng tỏ tích phân của F trên C_1 và trên C_2 là bằng nhau.

10.20. Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(2x - \frac{y}{x^2 + y^2}, 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

(a) Trong Hình 10.21 thì a là một nửa đường tròn đi từ $(-1, 0)$ tới $(1, 0)$). Tính tích phân của $\vec{F}$ trên a.

[50] astroid



Hình 10.21: Bài tập 10.20.

(a) Tính tích phân của $\vec{F}$ trên f (một nửa đường tròn đi từ $(-1,0)$ tới $(1,0)$).

(b) Dùng công thức Green, hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên c và d.

(c) Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên b (một đường từ $(-1,0)$ tới $(1,0)$).

(d) Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên e.

10.22. Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Kiểm tra rằng $P_y = Q_x$ trên miền xác định của F.

(b) Trường F có bảo toàn trên miền xác định không?

10.23. * Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Kiểm tra rằng nếu $x \neq 0$ thì F có một hàm thế là $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, với θ chính là biến góc trong tọa độ cực. Người ta thường viết một cách hình thức

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

(b) Có thể mở rộng θ thành một hàm trơn trên toàn miền xác định của F không?

(c) Tích phân $\frac{1}{2\pi}\int_C d\theta$ được gọi **số vòng**[51], tính theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, của đường đi C quanh điểm O. Chứng tỏ số vòng của đường đi $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2n\pi$ đúng bằng n.

[51]winding number

10.24 **(tích phân từng phần).** Cho D là miền đơn giản trên mặt phẳng có biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho f và g là hàm thực khả vi liên tục trên một tập mở chứa D và công thức Green áp dụng được. Hãy chứng minh công thức tích phân từng phần sau:

$$\iint_D f_x g \, dxdy = \int_{\partial D} fg \, dy - \iint_D f g_x \, dxdy.$$

10.25. Cho D là miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho f là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Hãy kiểm rằng:

(a)
$$\int_{\partial D} f_x \, dx + f_y \, dy = 0.$$

(b)
$$\int_{\partial D} -f_y \, dx + f_x \, dy = \iint_D \Delta f \, dxdy.$$

Ở đây với $f(x, y)$ là hàm thực trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ kí hiệu **toán tử Laplace** tác động vào f là $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

10.26. Cho D là miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho (P, Q) là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa D. Hãy kiểm rằng

$$\int_{\partial D} (QP_x - PQ_x) \, dx + (PQ_y - QP_y) \, dy = 2 \iint_D (PQ_{xy} - QP_{xy}) \, dxdy.$$

10.27. ✓ Kí hiệu đạo hàm của f theo hướng cho bởi vectơ đơn vị v là $D_v f$. Nhắc lại công thức $D_v f = \nabla f \cdot v$. Kí hiệu n là véctơ pháp tuyến đơn vị ngoài của ∂D. Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các **công thức Green**, với giả thiết dạng thông lượng của công thức Green ở công thức (10.12) có thể áp dụng được.

(a) $\int_{\partial D} D_n f \, ds = \iint_D \Delta f \, dA$.

(b) $\int_{\partial D} (f \nabla g) \cdot n \, ds = \iint_D (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA$.

(c) $\int_{\partial D} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, ds = \iint_D (f \Delta g - g \Delta f) \, dA$.

10.28 **(diện tích của đa giác).** (a) Một tam giác trong mặt phẳng có 3 đỉnh có tọa độ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Dùng công thức Green chứng tỏ diện tích của tam giác này bằng

$$\frac{1}{2} \left| x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 \right|.$$

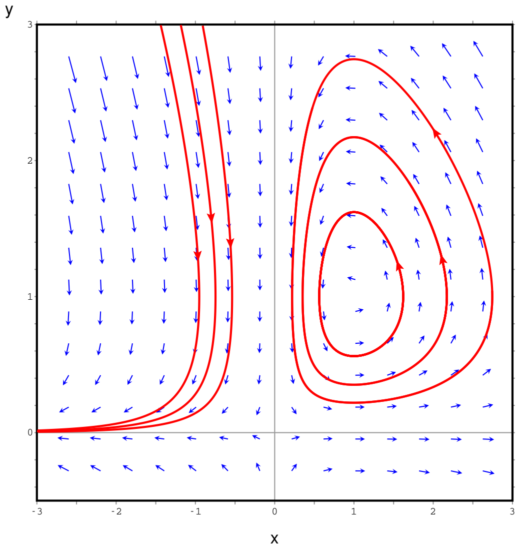
(b) Tổng quát hơn, giả sử một đa giác trong mặt phẳng bao một miền mà công thức Green áp dụng được. Giả sử các đỉnh của đa giác này có tọa độ (x_i, y_i), $1 \le i \le n$ với thứ tự theo định hướng "đa giác nằm bên trái" của công thức Green. Để cho tiện, đặt $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$. Khi đó ta có công thức cho diện tích của đa giác là

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right).$$

(c) Hãy kiểm sự tương thích của công thức trên với công thức đã có cho diện tích của hình bình hành ở Hình 5.44 trang 81.

10.29. Giả sử nhiệt độ tại một điểm (x, y) trên mặt phẳng được cho bởi $f(x, y)$. Dùng công thức Green 10.27, hãy giải thích vì sao nếu phân bố nhiệt độ là **điều hòa** [52], nghĩa là $\Delta f = 0$, thì trên mỗi miền kín lượng nhiệt đi ra luôn đúng bằng lượng nhiệt đi vào.

10.30 (tiêu chuẩn Bendixson cho quỹ đạo kín của dòng). Gọi F là trường vectơ vận tốc tại một thời điểm nhất định của một **dòng** [53] trên mặt phẳng, ví dụ một dòng chất lỏng hay một dòng khí. Một quỹ đạo [54] của một chất điểm là một đường γ trong mặt phẳng sao cho $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$ với mọi t trên miền xác định của γ, nghĩa là đường này luôn nhận vectơ của trường tại mỗi điểm đường đi qua làm vectơ vận tốc. Giả sử γ là một quỹ đạo kín bao miền liên thông D mà công thức Green áp dụng được. Xem minh họa ở Hình 10.31.



Hình 10.31: Minh họa quỹ đạo của dòng ứng với trường $F(x, y) = (x(1-y), (x-1)y)$. Trường này là một ví dụ của **hệ con săn mồi–con mồi** trong sinh thái học. Bên phải có các quỹ đạo kín, bên trái có các quỹ đạo không kín.

(a) Chứng tỏ $\iint_D \operatorname{div} F = 0$.

(b) Chứng tỏ phải có một điểm p trong D sao cho $\operatorname{div} F(p) = 0$. Như vậy một quỹ đạo kín của dòng phải bao ít nhất một điểm tại đó div bằng 0.

10.32. Nếu F là một trường bảo toàn trên một tập mở liên thông đường, chứng tỏ rằng một hàm thế của F được cho bởi công thức

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}$$

trong đó p_0 là một điểm cố định và tích phân là trên một đường trơn bất kì từ p_o tới p.

[52] harmonic
[53] flow
[54] trajectory

10.33. Dựa vào trường hợp 2-chiều, hãy cho một điều kiện cần để một trường n-chiều là bảo toàn. Hãy cho ví dụ một trường n-chiều không bảo toàn. Hãy cho ví dụ một trường n-chiều thỏa điều kiện cần đã đưa ra mà không bảo toàn.

10.34. Liên quan phần chứng minh của 10.10, hãy kiểm: Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và $x \in [a, b]$ thì $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(x)$. Hãy kiểm lại rằng điều này dẫn tới Định lý cơ bản của Vi tích phân hàm một biến nói rằng $\int_a^x f(t)\, dt$ là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$.

10.35. * Tiếp tục Bài tập 10.25. Chứng tỏ hàm f trơn cấp hai thỏa phương trình Laplace $\Delta f = 0$ trên mặt phẳng khi và chỉ khi với mọi miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương D ta có $\int_{\partial D} -f_y\, dx + f_x\, dy = 0$.

Đây là một trường hợp mà một điều kiện vi phân tương đương với một điều kiện tích phân.

11 Tích phân mặt

Mặt trong $\mathbb{R}^3$

Đầu tiên ta ôn lại nội dung liên quan về hình học trong $\mathbb{R}^3$, vốn đã phần nào được thảo luận ở trung học [SGKPT, Hình học 12] và trong môn Vi tích phân 2, người học có thể xem lại các tài liệu môn học.

Cho hai vectơ $u = (u_1, u_2, u_3)$ và $v = (v_1, v_2, v_3)$ trong $\mathbb{R}^3$. Tích có hướng của hai vectơ này, kí hiệu là $u \times v$, được định nghĩa là vectơ

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Người ta thường dùng một công thức kí hiệu hình thức, thao tác trên các đối tượng như những số thực dù chúng có thể không phải là số thực, giúp dễ nhớ công thức hơn:

$$u \times v = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

Tích có hướng phụ thuộc vào thứ tự của vectơ: $u \times v = -v \times u$. Tích có hướng có tính chất $(u \times v) \perp u$ và $(u \times v) \perp v$, mà ta kiểm trực tiếp được ngay bằng cách lấy tích vô hướng. Ta có thể kiểm bằng tính toán trực tiếp tính chất sau (Bài tập 11.15):

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

Từ Ví dụ 5.11 ta thấy $\|u \times v\|$ đúng bằng diện tích của hình bình hành phẳng sinh bởi u và v nếu như hai vectơ này nằm trong mặt phẳng Oxy. Tổng kết ta có thể miêu tả trực quan tích có hướng trong Hình 11.2.

Ví dụ (mặt phẳng). Trong $\mathbb{R}^3$, phương trình $ax + by + cz = d$ với $(a, b, c) \neq 0$ xác định một tập hợp điểm P mà ta quen gọi là một mặt phẳng. Nếu ta biết một điểm $A = (x_0, y_0, z_0) \in P$ thì ta có thể viết lại phương trình của P là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = -(ax_0 + by_0 + cz_0) + d = 0$$

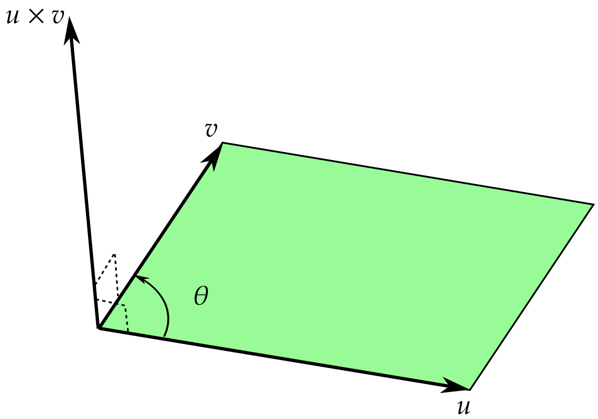
hay

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Như vậy mặt phẳng P là tập hợp tất cả các điểm $M = (x, y, z)$ sao cho vectơ $M - A$ từ điểm A tới điểm M vuông góc với vectơ $N = (a, b, c)$. Vì vậy ta gọi vectơ N là một **vectơ pháp tuyến** [55] chỉ phương của mặt phẳng P.

Nếu ta biết thêm điểm B và điểm C thuộc P thì đặt $u = B - A$, $v = C - A$, ta có $N \perp u$ và $N \perp v$, do đó N cùng phương với $u \times v$, nói cách khác $u \times v$

[55] normal



Hình 11.2: Miêu tả trực quan: $u \times v$ là vectơ vuông góc với u và v có độ lớn bằng "diện tích" của hình bình hành sinh bởi u và v, có hướng xác định bởi **quy tắc bàn tay phải**: với bàn tay phải, lòng bàn tay uốn theo chiều từ u sang v thì ngón cái chỉ chiều của $u \times v$; hoặc ngón cái chỉ chiều của u, ngón trỏ chỉ chiều của v, ngón giữa ở vị trí vuông góc với ngón cái và ngón trỏ chỉ chiều của $u \times v$.

cũng có phương pháp tuyến với mặt phẳng P. Từ đó ta có thể miêu tả P là mặt phẳng đi qua điểm A có phương cho bởi hai vectơ u và v, hay mặt phẳng đi qua điểm A sinh bởi hai vectơ u và v (tham khảo Bài tập 11.15), xem Hình 11.3. ∎

Giống như với đường, vì ban đầu ta cần làm việc với miêu tả cụ thể của tập điểm, nên đối với chúng ta trước mắt một **mặt** [56] là một ánh xạ $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Khác với đường, ở đây ta chỉ xét mặt trong $\mathbb{R}^3$ chứ không phải trong $\mathbb{R}^n$ bất kì. Tập ảnh $r(D)$ được gọi là **vết** của mặt. Như vậy vết của mặt được miêu tả thông qua hai biến số thực độc lập, cho ý niệm mặt hai chiều.

Ví dụ (tham số hóa mặt phẳng). Trong $\mathbb{R}^3$, phương trình $ax + by + cz = d$ với $(a, b, c) \neq 0$ xác định một tập hợp điểm P mà ta quen gọi là một mặt phẳng. Giả sử $c \neq 0$, mặt phẳng P là vết của ánh xạ

$$(x, y) \mapsto (x, y, z = (d - ax - by)/c)$$

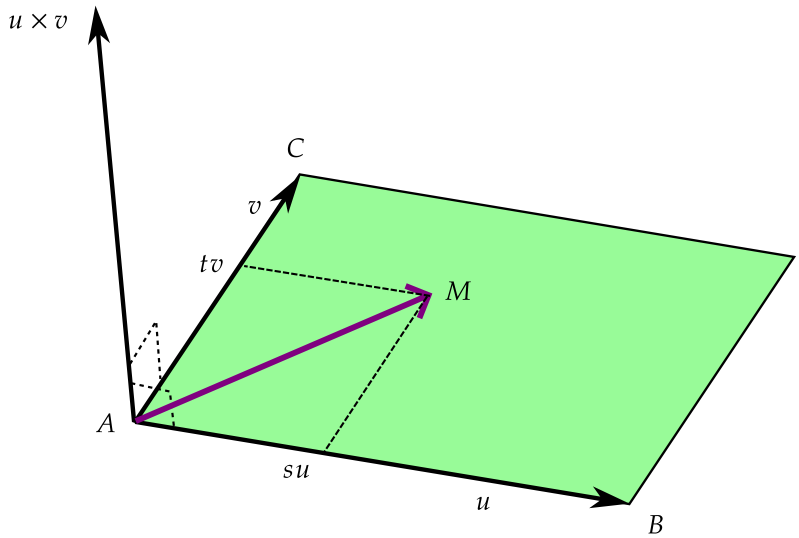
với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vậy ánh xạ này là một mặt, tham số hóa mặt phẳng P.

Nếu ta biết ba điểm A, B, và C thuộc P thì đặt $u = B - A$, $v = C - A$, giả sử u và v không cùng phương, thì với mọi điểm $M \in P$ vectơ $M - A$ là một tổ hợp tuyến tính của u và v, tức là $M - A = su + tv$ trong đó s và t là hai số thực bất kì. Như thế

$$(s, t) \mapsto A + su + tv$$

là một tham số hóa khác của mặt phẳng P đi qua điểm A sinh bởi hai vectơ u và v độc lập tuyến tính cho trước, xem Hình 11.3. ∎

[56] surface



Hình 11.3: Minh họa mặt phẳng và tham số hóa mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ (tham số hóa mặt cầu). Nửa trên của mặt cầu đơn vị là vết của mặt $(x, y, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ với $x^2 + y^2 \leq 1$ (tọa độ Descartes). Đó cũng là vết của mặt $(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ với $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và $0 \leq \phi \leq \pi/2$ (tọa độ cầu). ■

Ví dụ (tham số hóa mặt đồ thị). Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Đồ thị của hàm f là tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ là vết của mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$, $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Ta nói r là một **tham số hóa** của đồ thị của hàm f. ■

Tổng quát, cho mặt

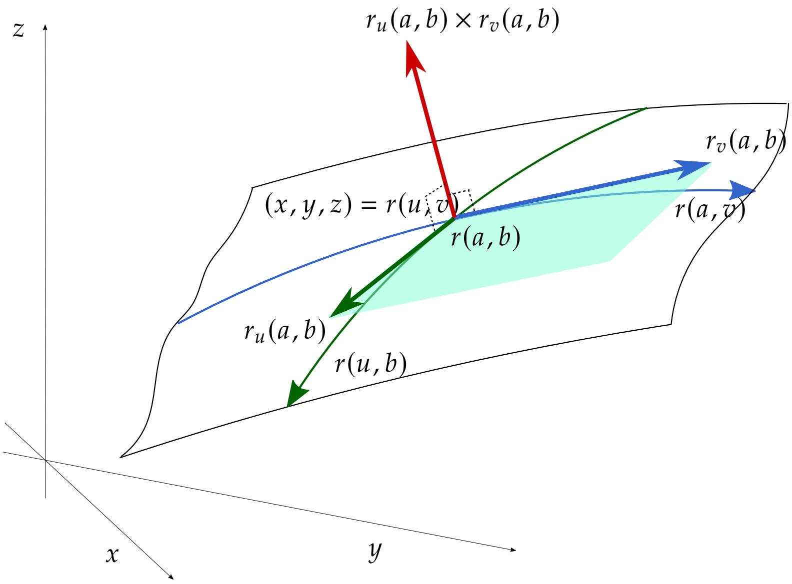
$$\begin{aligned} r : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto r(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Nếu giữ v cố định và chỉ cho u thay đổi thì $r(u, v)$ trở lại là một đường đi trong $\mathbb{R}^3$ theo tham số u. Đạo hàm của đường đi này theo u là $\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = r_u(u, v)$ là vectơ vận tốc của đường này, do đó ta có thể coi vectơ đó là một vectơ tiếp xúc của mặt r tại điểm $r(u, v)$. Như vậy với $(a, b) \in D$ cho trước ta có sẵn hai vectơ tiếp xúc của mặt là $r_u(a, b)$ và $r_v(a, b)$. Xem Hình 11.4.

Diện tích mặt

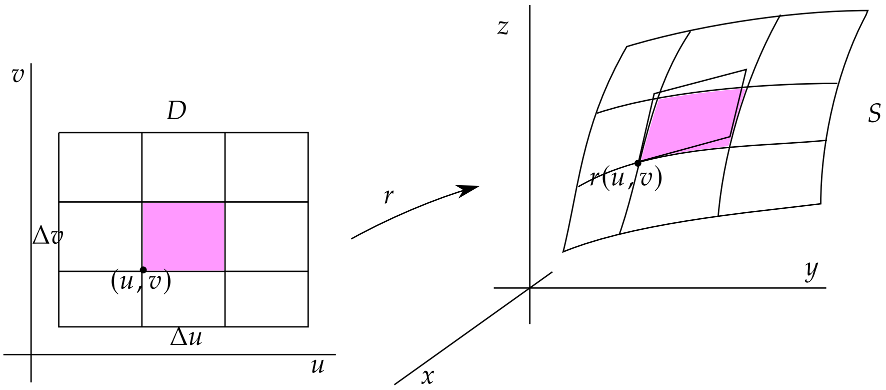
Cho mặt

$$\begin{aligned} r : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto r(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$



Hình 11.4: Vectơ tiếp xúc và vectơ pháp tuyến của mặt.

Ta có một ý để đo "diện tích" của mặt như sau. Giả sử D là một hình chữ nhật, với một phép chia của D ta có tương ứng một phép chia của mặt thành những mảnh nhỏ. Một hình chữ nhật con của phép chia với kích thước $\Delta u \times \Delta v$ được mang thành một mảnh trên mặt, mảnh này được xấp xỉ tuyến tính bằng hình bình hành xác định bởi hai vectơ $r_u(u,v)\Delta u$ và $r_v(u,v)\Delta v$. Diện tích của hình bình hành này được cho bởi độ lớn của tích có hướng của hai vectơ này, tức là $\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| \Delta u \Delta v$. Xem Hình 11.5.



Hình 11.5: Xấp xỉ mảnh nhỏ của mặt bằng hình bình hành tiếp xúc.

Diện tích của mặt được xấp xỉ bởi tổng trên các hình chữ nhật con $\sum \|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| \Delta u \Delta v$, là tổng Riemann của hàm $\|r_u \times r_v\|$ trên D.

Vậy ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. **Diện tích của mặt** $r : D \to \mathbb{R}^3$ *là*

$$\boxed{\iint_D \|r_u \times r_v\| \, dudv.}$$

Ví dụ (diện tích mặt đồ thị). Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, có vết là đồ thị của hàm f. Ta tính được $r_x = (1, 0, f_x)$, $r_y = (0, 1, f_y)$, $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$. Diện tích của mặt này là

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

Đặc biệt, nếu $f \equiv 0$ thì mặt này là một mặt phẳng, tức, diện tích của mặt chính là diện tích của miền phẳng D. ■

Ví dụ. Xét mặt $r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, xác định trên $x^2 + y^2 \le 1$, có vết là đồ thị của hàm $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ trên hình tròn đơn vị. Diện tích của mặt này là

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r\, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \right) d\theta = \frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

■

Tích phân mặt loại một

Ta xét câu hỏi vật lý, nếu một mặt được làm một chất liệu với mật độ khối lượng được biết thì khối lượng của mặt được tính như thế nào? Ta muốn tính *tổng giá trị của hàm giá trị thực trên mặt*. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ và cho f là một hàm thực xác định trên vết $S = r(D)$. Làm như trong phần diện tích mặt, trên mỗi mảnh con của mặt ta xấp xỉ tuyến tính diện tích của mảnh con bằng diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ $r_u(u, v)\Delta u$ và $r_v(u, v)\Delta v$, bằng $\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|\Delta u\Delta v$, và xấp xỉ giá trị của hàm f trên mảnh bằng giá trị của nó tại một điểm $r(u, v)$. Ta thu được giá trị xấp xỉ là tổng trên các hình chữ nhật con $\sum f(r(u, v))\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|\Delta u\Delta v$, là tổng Riemann của hàm $f(r(u, v))\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|$ trên D. Vậy ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. *Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho $f : S \to \mathbb{R}$. **Tích phân mặt loại một** của f trên r là*

$$\boxed{\iint_r f\, dS = \iint_D f(r(u, v))\, \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|\, dudv.}$$

Ghi chú. Có những kí hiệu khác cho tích phân mặt loại một như $\int_S f\, d\sigma$, $\int_S f\, d\Sigma$.

Ví dụ. Nếu $f \equiv 1$ thì $\iint_r 1\, dS$ chính là diện tích của mặt r. ■

Ví dụ (tích phân mặt loại một trên mặt đồ thị). Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x,y) = (x, y, f(x,y))$ có vết là đồ thị S của hàm f. Giả sử $g : S \to \mathbb{R}$. Khi đó tích phân của g trên r là

$$\iint_r g\, dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dxdy.$$

■

Ví dụ. Xét mặt $r(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$, xác định trên $x^2+y^2 \le 1$, có vết là đồ thị của hàm $z = f(x,y) = x^2+y^2$ trên hình tròn đơn vị. Giả sử tại mỗi điểm (x,y,z) trên vết này ta có một giá trị thực $g(x,y,z) = 2x$. Ta tính

$$\begin{aligned}\iint_r g\, dS &= \iint_{x^2+y^2\le 1} g(x,y,g(x,y))\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\, dxdy\\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} 2x\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy\\ &\left(= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2r\cos\theta\sqrt{1+4r^2}r\, dr\right) d\theta\right) = 0.\end{aligned}$$

■

Tích phân mặt loại hai

Cho một trường vectơ trên vết của mặt, ta muốn tính ***tổng thành phần pháp tuyến của trường trên mặt***. Đại lượng này thường được dùng để đại diện cho lượng của trường đi xuyên qua mặt, tức là **thông lượng** [57].

Cách xây dựng có ý tương tự cách xây dựng tích phân đường loại hai và tích phân mặt loại một. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S, tức $F : S \to \mathbb{R}^3$. Như trong tích phân mặt loại một, diện tích của một mảnh con của mặt được xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ $r_u(u,v)\Delta u$ và $r_v(u,v)\Delta v$, bằng $\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|\Delta u\Delta v$. Trên mảnh con này trường F được xấp xỉ bằng giá trị của nó tại một điểm $r(u,v)$. Vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt tại điểm $r(u,v)$ là

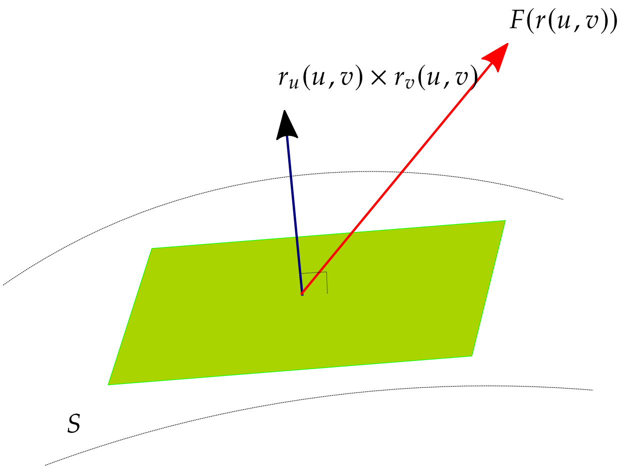
$$\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}.$$

Thành phần pháp tuyến của vectơ $F(r(u,v))$ cho số thực, tương ứng với chiếu vuông góc, xem Hình 11.6,

$$F(r(u,v))\cdot\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}.$$

Tổng thành phần pháp tuyến của F trên mảnh con đó được xấp xỉ bằng

[57] flux



Hình 11.6: Thành phần pháp tuyến của vectơ của trường trên mặt.

$$\begin{aligned}
F(r(u,v)) \cdot \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\|} \|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| \, \Delta u \Delta v \\
= [F(r(u,v)) \cdot (r_u(u,v) \times r_v(u,v))] \Delta u \Delta v.
\end{aligned}$$

Như các trường hợp trước, tới đây ta có thể nhận thấy một định nghĩa phù hợp:

Định nghĩa. *Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S, tức $F : S \to \mathbb{R}^3$.* **Tích phân mặt loại hai** *của của F trên r là*

$$\boxed{\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u(u,v) \times r_v(u,v)) \, du dv.}$$

Ví dụ. Xét mặt $r(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, xác định trên $x^2+y^2 \le 1$, có vết là đồ thị của hàm $z = x^2+y^2$ trên hình tròn đơn vị. Giả sử tại mỗi điểm (x,y,z) trên vết này ta có một vectơ hằng $\vec{F}(x,y,z) = (2,3,1)$. Ta tính

$$\begin{aligned}
\iint_r \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (\vec{F} \circ r) \cdot \left(r_x \times r_y\right) \, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (\vec{F}(r(x,y)) \cdot \left(r_x \times r_y\right)(x,y) \, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (2,3,1) \cdot (-2x,-2y,1) \, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-4x - 6y + 1) \, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (-4r\cos\theta - 6r\sin\theta + 1) r \, dr \right) d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

■

Remark 11.1. Ta tính được ngay, với $r(u,v) = (x,y,z)$, dùng kí hiệu ở công thức (5.5) trang 64 và công thức (11.1) trang 154:

$$r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}.$$

Từ đó trong một số tài liệu người ta dùng thêm các tích phân mặt:

$$\iint_r P(x,y,z)\,dydz = \iint_r P\vec{i}\cdot d\vec{S} = \iint_r P(r(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,dudv,$$

Ghi chú.

$$\iint_r Q(x,y,z)\,dzdx = \iint_r Q\vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_r Q(r(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,dudv,$$

$$\iint_r R(x,y,z)\,dxdy = \iint_r R\vec{k}\cdot d\vec{S} = \iint_r R(r(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv.$$

Với các kí hiệu này và $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ thì

$$\iint_r F\cdot d\vec{S} = \iint_r (P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy).$$

Tuy nhiên trong tài liệu này ta ít dùng các kí hiệu trên.

Mặt như là tập điểm và định hướng mặt

Tương tự như đã xảy ra với đường, trong nhiều ứng dụng ta muốn xem một mặt, chẳng hạn một mặt cầu, như là một tập hợp điểm chứ không phải là một ánh xạ. Bây giờ ta xây dựng quan điểm này theo cách tương tự như đã làm với đường.

11.7 Định lý (bất biến của tích phân mặt qua phép đổi biến). *Giả sử D và D' là hai tập con mở bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và $\varphi : D' \to D$ là một phép đổi biến. Cho mặt trơn $r : D \to \mathbb{R}^3$. Khi đó:*

(a) *Tích phân mặt loại một không đổi qua phép đổi biến:*

$$\iint_r f\,dS = \iint_{r\circ\varphi} f\,dS.$$

(b) *Tích phân mặt loại hai không đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng:*

$$\iint_r F\cdot d\vec{S} = \iint_{r\circ\varphi} F\cdot d\vec{S}.$$

(c) Tích phân mặt loại hai đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng:

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = -\iint_{r\circ\varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

Chứng minh. Theo quy tắc đạo hàm của hàm hợp:

$$J_{r\circ\varphi}(s,t) = J_r(u,v) J_\varphi(s,t).$$

Cụ thể hơn:

$$\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Nhân có hướng hai vectơ này, dùng tính tuyến tính và đơn giản hóa, ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial s}\times\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right)\\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.\end{aligned}$$

Viết cách khác:

$$(r\circ\varphi)_s \times (r\circ\varphi)_t = (r_u \times r_v)\det J_\varphi(s,t). \tag{11.8}$$

Bây giờ dùng công thức đổi biến của tích phân bội ta được điều phải chứng minh. ☐

Bây giờ ta bàn về định hướng mặt.
Mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ được gọi là:

- **đơn** [58] nếu r là đơn ánh,
- **chính quy** [59] nếu hai vectơ $r_u(u,v)$ và $r_v(u,v)$ xác định và luôn không cùng phương trên D; nói cách khác vectơ $r_u(u,v)\times r_v(u,v)$ luôn khác 0 trên D. Một cách trực quan, mặt là chính quy nếu pháp tuyến có thể được xác định.

Tương tự như kết quả 8.7 cho đường, ta có kết quả sau đây,nói rằng với giả thiết nhất định thì hai mặt chính quy có cùng vết cơ bản chỉ sai khác một phép đổi biến.

11.9 Bổ đề. *Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và cho $r : D \to \mathbb{R}^3$ và $r' : D' \to \mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn, liên tục, và chính quy trên phần trong của miền xác*

[58] simple
[59] regular

định, có cùng vết. Khi đó $r(\partial D) = r'(\partial D')$, và $r'^{-1} \circ r : \overset{\circ}{D} \to \overset{\circ}{D'}$ là một phép đổi biến.

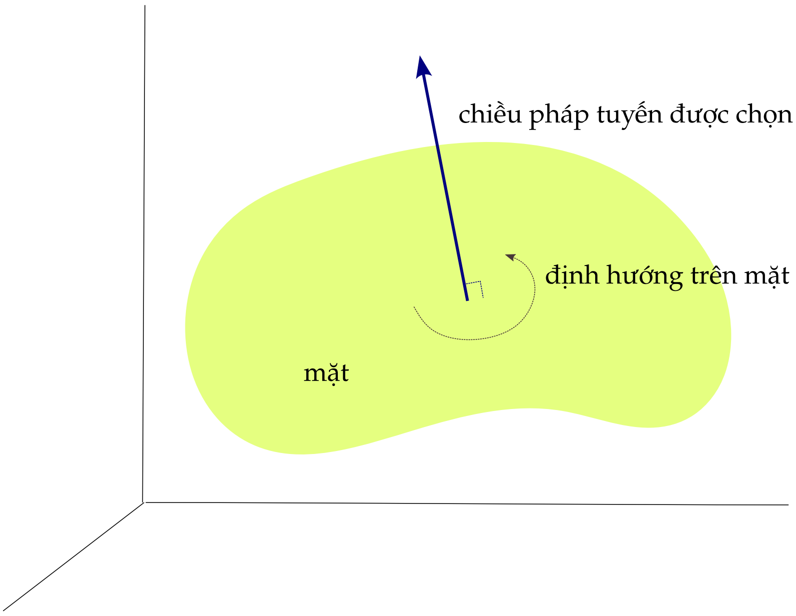
Chứng minh của bổ đề này được để ở phần bổ sung ở trang 193.

Từ bổ đề này, ta nói hai mặt r và r' **cùng định hướng** nếu $\varphi = r'^{-1} \circ r$ là một phép đổi biến bảo toàn định hướng; và **trái định hướng** nếu φ là một phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Từ công thức (11.8), ***hai mặt cùng định hướng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến luôn cùng chiều***, và ***trái định hướng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến luôn trái chiều***.

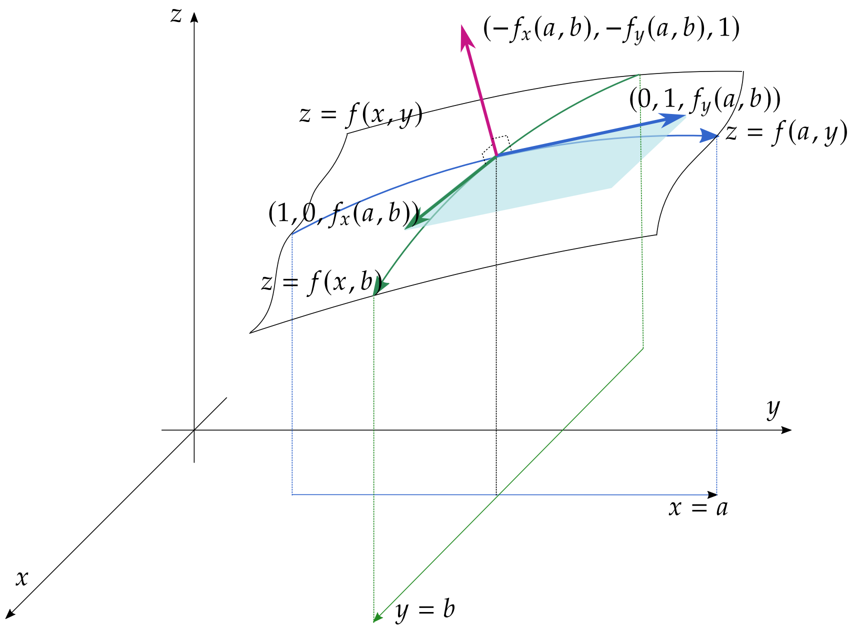
Một tập điểm được gọi là một **mặt cong** nếu tập điểm đó là vết của một mặt như trong Bổ đề 11.9. Mỗi lớp các tham số hóa có cùng định hướng của mặt cong được gọi là một **định hướng của mặt cong**.

Trong môn học này ta thường hình dung trực quan ***một định hướng trên mặt cong là một chiều pháp tuyến được chọn trên mặt cong đó***. Xem Hình 11.10.



Hình 11.10: Minh họa trực quan định hướng của mặt cong. Miêu tả trực quan tương ứng là mặt được định hướng theo **quy tắc bàn tay phải**: ngón tay cái của bàn tay phải hướng theo chiều pháp tuyến được chọn, thì lòng bàn tay phải uốn theo định hướng của mặt.

11.11 Ví dụ (mặt đồ thị). Cho hàm thực f trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ với $(x, y) \in D$. Vết của r là mặt đồ thị $z = f(x, y)$. Ta có $r_x = (1, 0, f_x)$ và $r_y = (0, 1, f_y)$, do đó $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0$. Vậy r là một mặt đơn, chính quy. Vì vectơ pháp tuyến $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$ hướng về nửa không gian trên (nửa không gian $z > 0$) nên đây thường được gọi là một **mặt hướng lên**. Xem Hình 11.12. ∎



Hình 11.12: Mặt đồ thị hướng lên.

Ví dụ (định hướng của mặt cầu). Xét phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1, x, y, z > 0$. Tập điểm này có thể được tham số hóa như là một mặt đồ thị $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$. Một cách khác để tham số hóa tập này là dùng tọa độ cầu: $x = \sin\phi\cos\theta$, $y = \sin\phi\sin\theta$, $z = \cos\phi$, với $0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$. Với thứ tự (ϕ, θ) của tọa độ cầu, phép biến đổi $(\phi, \theta) \mapsto (x, y)$ có $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = \sin\phi\cos\phi > 0$, do đó bảo toàn định hướng. Như vậy hai tham số hóa này có cùng định hướng. Hai vectơ pháp tuyến của hai tham số hóa này có cùng hướng, là hướng ra ngoài quả cầu bao bởi mặt cầu. ■

Dùng 11.9, 11.7, và 3.13, ta rút ra kết quả chính của phần này:

11.13 Định lý (tích phân trên mặt cong). *Trên những mặt đơn xác định trên tập con đóng bị chặn có diện tích của $\mathbb{R}^2$ chính quy trên tập mở chứa miền xác định, với cùng vết, thì:*

(a) tích phân mặt loại một là như nhau,

(b) tích phân mặt loại hai là như nhau nếu hai mặt cùng định hướng và đối nhau nếu hai mặt trái định hướng.

Như vậy ta có thể nói tới tích phân mặt trên một mặt cong. Với S là một mặt cong ta có thể dùng kí hiệu $\iint_S f\, dS$ và $\iint_S F \cdot d\vec{S}$.

Tóm tắt lại:

Các bước tính tích phân mặt trên một mặt cong

1: Chọn một tham số hóa, đơn chính quy bất kì trên mặt cong.

2: Xác định đây là tích phân mặt loại một hay loại hai.

3: Thay tham số hóa vào công thức trong định nghĩa của đúng loại tích phân để tính.

4: Nếu là tích phân mặt loại hai thì mặt cong được cho thêm một định hướng, thường ở dạng trực quan. Xác định tham số hóa đã chọn ở Bước 1 là cùng định hướng hay trái định hướng đã cho, bằng trực quan. Nếu là trái định hướng thì lấy giá trị đối của tích phân đã thu được ở Bước 3.

Ví dụ. Tính tích phân của trường $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,1)$ trên mặt S là đồ thị $z = x^2+y^2$, với $x^2+y^2 \le 1$, định hướng lên trên.

Mặt S có thể được tham số hóa bởi mặt đơn, chính quy $r(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, trên miền $x^2+y^2 \le 1$, xem 11.11. Tham số hóa này cho định hướng lên trên như yêu cầu. Vậy:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2\le 1} (\vec{F}\circ r)\cdot (r_x \times r_y)\ dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x,y,1)\cdot(-2x,-2y,1)\,dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-2x^2-2y^2+1)\,dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r^2+1)r\,dr\,d\theta = 2\pi.
\end{aligned}$$

■

Ví dụ (diện tích mặt cầu). Xét phần mặt cầu nằm trong góc phần tám thứ nhất, tập hợp $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x>0, y>0, z>0\}$.

Tham số hóa phần này như là một mặt đồ thị $r(x,y) = (x,y,z = \sqrt{R^2-x^2-y^2})$, $x^2+y^2 < R^2$, $x>0$, $y>0$. Ta tính được

$$(r_x \times r_y)(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right).$$

Diện tích tính theo tham số hóa r bằng

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2<R^2,x>0,y>0} \left|(r_x \times r_y)(x,y)\right| \, dxdy &= \iint_{x^2+y^2<R^2,x>0,y>0} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \, dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}} \, dr \, d\theta \\
&= \pi R^2/2.
\end{aligned}$$

Tham số hóa tập A bằng tọa độ cầu $s(\phi,\theta) = R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$, $0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$. Ta tính được

$$(s_\phi \times s_\theta)(\phi,\theta) = R^2 \sin\phi(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

Diện tích tính theo tham số hóa s bằng

$$\begin{aligned}
\iint_{0<\phi<\pi/2,0<\theta<\pi/2} |(s_\phi \times s_\theta)(\phi,\theta)| \, d\phi d\theta &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= \pi R^2/2.
\end{aligned}$$

Ta thấy diện tích mặt tham số r đúng bằng diện tích mặt tham số hóa s.

Tham số hóa toàn bộ mặt cầu bằng tọa độ cầu $t(\phi,\theta) = R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$, $0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$, thì diện tích tính theo tham số hóa t bằng

$$\begin{aligned}
\iint_{0\le\phi\le\pi,0\le\theta\le2\pi} |(t_\phi \times t_\theta)(\phi,\theta)| \, d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

■

Ghi chú. Ta hiện không có một tham số hóa đơn liên tục xác định trên tập đóng bị chặn cho cả mặt cầu, nên không áp dụng được Định lý 11.13. Việc tính diện tích mặt cầu bằng cách chia thành nhiều phần dẫn tới những câu hỏi về cách chia và sự phụ thuộc vào cách chia. Vấn đề này cần những khảo cứu nâng cao hơn, tham khảo phần bổ sung ở trang 194.

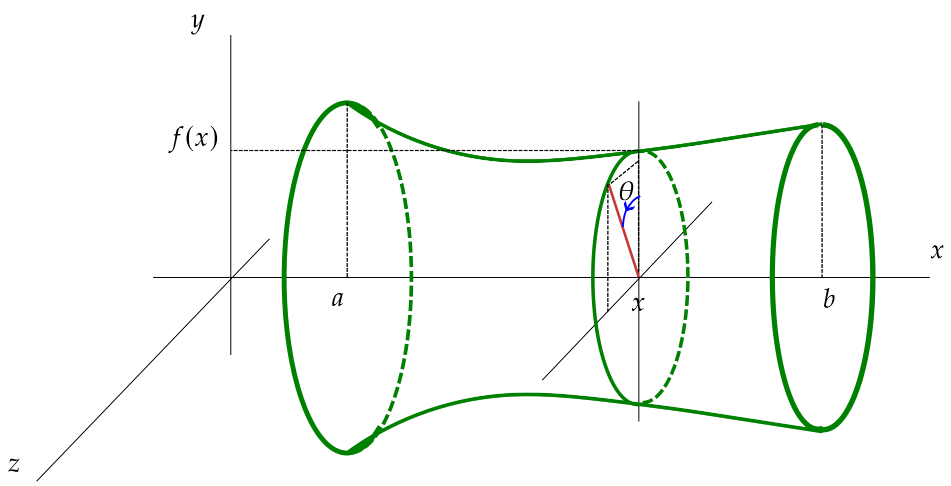
Ví dụ (diện tích mặt tròn xoay). Xét mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đường đồ thị $y = f(x)$, $a \le x \le b$, quanh trục x. Giả sử f trơn và $f \ge 0$. So sánh với khối tròn xoay ở Ví dụ 4.20.

Tham số hóa mặt, dùng tọa độ cực trên mỗi mặt cắt, xem Hình 11.14:

$$\varphi(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta), a \le x \le b, 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Ta tính:

$$\varphi_x(x,\theta) = (1, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta)$$



Hình 11.14: Mặt tròn xoay và tham số hóa.

$$\varphi_\theta(x,\theta) = (0, -f(x)\sin\theta, f(x)\cos\theta).$$

$$\begin{aligned}\|\ \varphi_x \times \varphi_\theta\ \|^2\ (x,\theta) &= \left(\|\ \varphi_x\ \|^2\|\ \varphi_\theta\ \|^2 - (\varphi_x \cdot \varphi_\theta)^2\right)(x,\theta)\\ &= \left(f'(x)^2 + 1\right) f(x)^2 - 0.\end{aligned}$$

Nếu $f > 0$ thì $\|\ \varphi_x \times \varphi_\theta\ \| > 0$, và đây là một tham số hóa đơn chính quy của mặt. Diện tích mặt bằng

$$\begin{aligned}\iint_{a\le x\le b, 0\le\theta\le 2\pi} \|\ \varphi_x \times \varphi_\theta\ \|\ dx d\theta &= \iint_{a\le x\le b, 0\le\theta\le 2\pi} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx d\theta\\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx.\end{aligned}$$

■

Ví dụ (diện tích mặt cầu). Xem mặt cầu như một mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay nửa đường tròn $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, quanh trục x. Theo thiết lập trên, diện tích của mặt bằng

$$\begin{aligned}2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, dx &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\, dx\\ &= 4\pi R^2.\end{aligned}$$

■

Liên hệ giữa hai loại tích phân mặt

Nhắc lại, dưới các giả thiết của Bổ đề 11.9, giả sử r và r' có cùng định hướng, giả sử $p = r(u,v) = r'(s,t)$ với $(u,v) \in \overset{\circ}{D}$ và $(s,t) \in \overset{\circ}{D'}$, thì theo phương trình

(11.8) tại điểm p hai vectơ pháp tuyến $r_u \times r_v$ và $r'_s \times r'_t$ có cùng phương cùng chiều. Tại p **vectơ pháp tuyến đơn vị**

$$n(p) = \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\|} = \frac{r'_s(s,t) \times r'_t(s,t)}{\|r'_s(s,t) \times r'_t(s,t)\|}$$

được xác định không phụ thuộc vào cách chọn tham số hóa cùng định hướng.

Ta viết

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r(u,v)) \cdot \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|} |r_u(u,v) \times r_v(u,v)| \, dA \\ &= \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u(u,v) \times r_v(u,v)) \, dA \\ &= \iint_S F \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

vậy

$$\boxed{\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot n \, dS.}$$

Điều này khẳng định lại rằng tích phân mặt loại hai là tổng thành phần pháp tuyến của trường trên mặt.

Bài tập

11.15. Hãy kiểm tra các tính chất của tích có hướng của hai vectơ trong $\mathbb{R}^3$:

(a) $(u \times v) \perp u$, $(u \times v) \perp v$.

(b) $u \times v = -v \times u$.

(c) $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$ với mọi số thực α.

(d) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.

(e) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$.

(f) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \widehat{(u,v)}$ trong đó $\widehat{(u,v)}$ là góc giữa hai vectơ u và v.

(g)

$$\|u \times v\| = \left[\det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix}\right]^{1/2}.$$

(h) $u \times v = 0$ khi và chỉ khi u và v cùng phương.

(i) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, với $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

(j) $\det(u, v, u \times v) \geq 0$.

(k) $(u \times v) \perp \langle\{u,v\}\rangle$, trong đó $\langle\{u,v\}\rangle = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$, là tập hợp tất cả tổ hợp tuyến tính của u và v, thường được gọi là mặt phẳng sinh bởi u và v.

11.16. Tính:

(a) Tính diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2, 3 \le z \le 5$.

(b) Cho S là mặt xác định bởi $z = x^2 + y$ với $1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$. Tính $\iint_S x\, dS$.

(c) Cho S là mặt cầu tâm 0 bán kính 2. Tính $\iint_S z^4\, dS$.

(d) Cho S là tam giác trong $\mathbb{R}^3$ với các đỉnh $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Tính $\iint_S y\, dS$.

(e) Cho S là mặt trụ $x^2 + y^2 = 9, 0 \le z \le 2$. Tính $\iint_S z\, dS$.

(f) Cho $\vec{F}(x, y, z) = (-x, y, z)$. Cho S là mặt tứ diện bao bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + z = 2$, định hướng ra ngoài. Tính tích phân $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

(g) Cho khối E xác định bởi điều kiện $x^2 + y^2 \le 1, 1 \le z \le 2$. Gọi S là mặt biên của E, định hướng ra ngoài. Cho $F(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$. Tính thông lượng của F qua S.

(h) Tính tích phân của trường $(x, y, z - 2y)$ trên mặt $(s\cos t, s\sin t, t)$, $0 \le s \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$.

11.17. Cho mặt elliptic paraboloid $z = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$, $z \le 5$.

(a) Bằng cách đổi biến $\frac{x}{3} = r\cos\theta$, $\frac{y}{4} = r\sin\theta$ đưa ra một phương trình tham số của mặt.

(b) Tính xấp xỉ diện tích của mặt này.

11.18. Cho S là mặt $z = xy$ với $0 \le x \le 2$ và $0 \le y \le 3$. Tính tích phân mặt

$$\iint_S xyz\, dS$$

ra số thập phân.

11.19. Mặt helocoid có phương trình tham số $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $1 < r < 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Vẽ mặt này. Giả sử một vật có hình dạng một mặt helocoid có mật độ khối lượng tỉ lệ với khoảng cách tới trục, cụ thể $\rho(x, y, z) = r$. Hãy tính khối lượng của vật này.

11.20. Trên bề mặt Quả đất, tọa độ kinh tuyến và vĩ tuyến có liên hệ chặt chẽ với tọa độ cầu. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O ở tâm Quả đất, trục Oz đi qua Cực Bắc, và phần tư đường tròn từ tia Oz sang tia Ox đi qua Greenwich, nước Anh. Giả sử một điểm có tọa độ là $\varphi°$ vĩ độ Bắc và $\lambda°$ kinh độ Đông, khi đó tọa độ cầu của điểm đó là $\phi = (90 - \varphi)°$ và $\theta = \lambda°$ (tuy nhiên nhớ là trong tọa độ cầu góc cần được đo bằng radian).

Thành phố Hồ Chí Minh nằm trong vùng từ 10°10′ tới 10°38′ vĩ độ Bắc và 106°22′ tới 106°54′ kinh độ Đông (1′ = 1/60°). Tính diện tích của vùng này. Bán kính của Quả đất là 6378 km.

11.21. ✓ Cho $v = (y^2, x^2, z^2 + 2y)$ là trường vectơ vận tốc (đơn vị centimeter/giây) của một dòng chất lỏng trong $\mathbb{R}^3$. Hãy tính tốc độ chất lỏng đi qua mặt cầu đơn vị tâm tại gốc tọa độ (tức là thể tích chất lỏng đi qua mặt trong một đơn vị thời gian).

11.22 (định luật Gauss về điện trường). Gọi E là điện trường gây bởi điện tích q tại điểm O. Lấy quả cầu $B(O,R)$ tâm O, định hướng ra ngoài. Dùng định luật Coulomb (9.10), hãy tính tích phân và chứng tỏ

$$\iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Vậy thông lượng của điện trường qua một mặt cầu tâm tại vị trí của điện tích tỉ lệ với điện tích (xem dạng tổng quát hơn ở mục 14).

11.23. Giá trị trung bình của hàm f trên mặt S được định nghĩa bằng

$$\frac{1}{|S|}\iint_S f\, dS.$$

Nhiệt độ trên một mái vòm hình nửa mặt cầu bán kính 20 mét tỉ lệ với cao độ, cụ thể nhiệt độ tại điểm (x,y,z) trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-50)^2 = 20^2$ là $T(x,y,z) = \frac{1}{2}z$. Hãy tính nhiệt độ trung bình trên mái vòm này.

11.24. Tính diện tích mặt trụ đứng đáy là đường tròn.

11.25. Tính diện tích mặt nón cân đáy là đường tròn.

11.26. Tính diện tích mặt ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11.27 (cái kèn Gabriel [60]). Xét S là mặt tròn xoay của đồ thị hàm $y = \dfrac{1}{x}, 1 < x < h$, xoay quanh trục x.

(a) Hãy vẽ mặt S.

(b) Hãy tính diện tích $A(S)$ của mặt S.

(c) Hãy tính thể tích $V(S)$ của khối tròn xoay bao bởi mặt S.

(d) Chứng tỏ $\lim_{h\to\infty} A(S) = \infty$ trong khi $\lim_{h\to\infty} V(S) < \infty$.

Mặt này nổi tiếng vì có diện tích vô hạn nhưng bao một thể tích hữu hạn.

11.28. Không cần tính, hãy cho giá trị của tích phân

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} x\, dS.$$

11.29. Cho S là mặt cầu tâm 0 bán kính R. Hãy tính $\iint_S x^2\, dS$ mà không cần tham số hóa.

Có thể làm theo ý sau đây:

(a) Chứng tỏ, mà không cần tính, rằng $\iint_S x^2\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_S z^2\, dS$.

(b) Tính $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\, dS$ mà không cần tham số hóa.

11.30. Không cần tính, hãy cho giá trị của $\iint_S (x,y,z)\cdot d\vec{S}$ trong đó S là mặt cầu tâm 0 bán kính R định hướng ra ngoài.

[60] Gabriel's horn

12 Công thức Stokes

Định nghĩa. *Với* $F = (P, Q, R)$ *là trường theo ba biến* (x, y, z) *trên* $\mathbb{R}^3$ *thì ta đặt*

$$\boxed{\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).}$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức, với $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, thì $\operatorname{curl} F = \nabla \times F$. Trường $\operatorname{curl} F$ còn được gọi là **trường xoay** của trường F. Toán tử curl [61] còn được kí hiệu là rot [62].

Công thức Stokes là một phát triển của Công thức Green lên không gian ba chiều, liên hệ một tích phân bên trong một mặt với một tích phân trên biên của mặt đó. Đây là công thức có dạng

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Trong công thức này, tương tự như với Công thức Green, biên ∂S của mặt S cần được định hướng tương thích với định hướng của S. Điều này ta sẽ làm rõ hơn sau.

Ví dụ. Nếu S là một miền phẳng và F là một trường phẳng trên S thì $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. Công thức Stokes trở thành

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy &= \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot d\vec{S} = \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot k\,dS \\ &= \iint_S (Q_x - P_y)\,dS = \iint_S (Q_x - P_y)\,dxdy,\end{aligned}$$

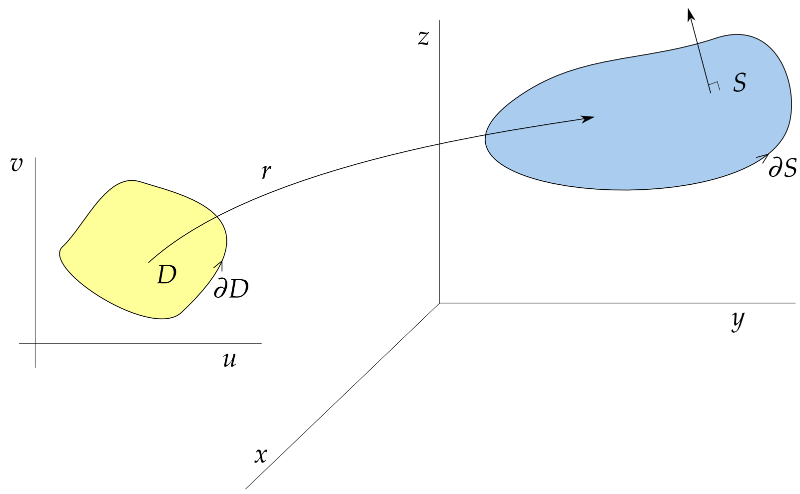
chính là Công thức Green. ∎

Dưới đây là một phát biểu chính xác dạng tham số hóa của công thức Stokes:

12.1 Định lý (công thức Stokes ở dạng tham số). *Cho miền phẳng* D *có biên* ∂D *là vết của đường* γ *có hướng tương thích với* D *và giả sử công thức Green có thể áp dụng được cho* D*. Cho mặt* r *trơn cấp hai trên một tập mở chứa* D*. Gọi* $\partial r = r \circ \gamma$ *là đường biên của* r*. Cho trường* F *trơn trên một tập mở chứa vết của* r*. Khi đó:*

$$\int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} = \iint_r \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

[61] trong tiếng Anh curl đọc tựa “kơn”, có nghĩa là xoay, xoắn, cuộn, quăn, …
[62] rotation – xoay



Hình 12.2: Mặt và định hướng trong dạng tham số của công thức Stokes.

Chứng minh. Chứng minh dưới đây tuy chứa những biểu thức dài nhưng chỉ gồm những tính toán trực tiếp và việc áp dụng Công thức Green. Viết $F = (P, Q, R)$ và $(x, y, z) = r(u, v)$. Viết $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, $a \le t \le b$, một tham số hóa theo định hướng dương của ∂D. Ta được (trong vài biểu thức dưới đây biến được lược bỏ cho gọn hơn):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(u(t), v(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(u(t), v(t))\, dt \\
&= \int_a^b F(r(u(t), v(t)) \cdot (r_u u' + r_v v')\, dt \\
&= \int_a^b [P(x, y, z)(x_u u' + x_v v') + Q(x, y, z)(y_u u' + y_v v') + \\
&\quad +R(x, y, z)(z_u u' + z_v v')]\, dt \\
&= \int_a^b [(P(x, y, z)x_u + Q(x, y, z)y_u + R(x, y, z)z_u)u' + (P(x, y, z)x_v + \\
&\quad +Q(x, y, z)y_v + R(x, y, z)z_v)v']\, dt \\
&= \int_\gamma (Px_u + Qy_u + Rz_u)\, du + (Px_v + Qy_v + Rz_v)\, dv.
\end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng Công thức Green cho D ta được tích phân trên bằng

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} (Px_v + Qy_v + Rz_v) - \frac{\partial}{\partial v} (Px_u + Qy_u + Rz_u) \right] dudv.$$

Tính các đạo hàm hàm hợp, chẳng hạn

$$(Px_v)_u = (P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u)\, x_v + Px_{uv},$$

và đơn giản hóa, dùng tính trơn cấp hai của r, ta được tích phân trên bằng

$$\iint_D [(R_y - Q_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (P_z - R_x)(z_u x_v - x_u z_v) +$$
$$+ (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u)]\, du dv$$
$$= \iint_D [\mathrm{curl}(P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v)]\, du dv = \iint_r \mathrm{curl}\, F \cdot d\vec{S}.$$

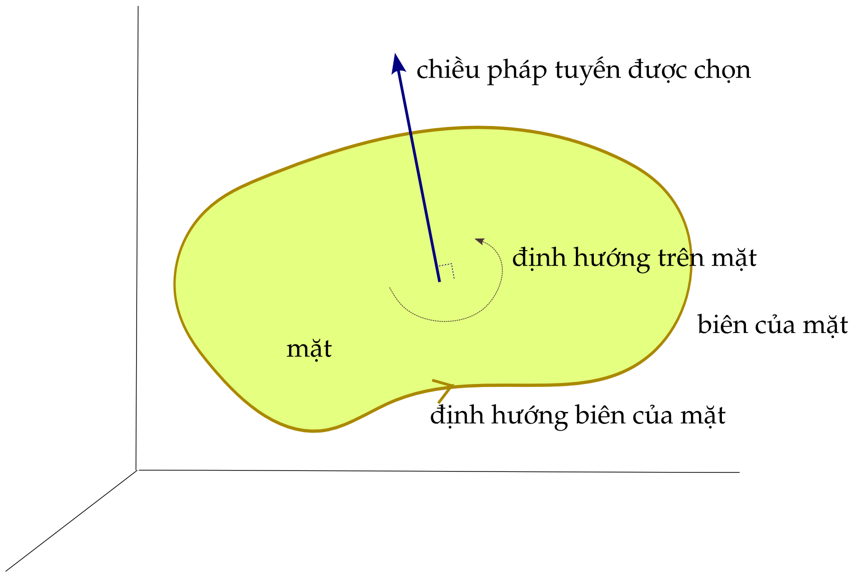
□

Bây giờ ta đưa ra một phát biểu độc lập với tham số hóa, là dạng thường gặp trong môn học này.

Sử dụng các khái niệm được đưa ra ở Bổ đề 11.9 và ngay sau đó, với mặt cong $S = r(D)$, ta gọi tập $r(\partial D)$, ảnh của biên của miền xác định của mặt, là **biên của mặt cong** S, kí hiệu là ∂S.

Nếu S được định hướng thì với r là một tham số hóa cùng định hướng của S, và γ là một tham số hóa theo định hướng tương thích của biên ∂D của miền phẳng D, thì **định hướng tương thích của biên của mặt** ∂S được cho bởi định hướng của đường $r \circ \gamma$, xem Hình 12.2.

Trong môn này biên của mặt cong thường được hình dung trực quan như phần "rìa" hay "bờ" của mặt cong, và thường được miêu tả một cách trực quan, thường thông qua hình vẽ. Định hướng tương thích của biên của mặt cũng thường được miêu tả trực quan như ở Hình 12.3.



Hình 12.3: Minh họa trực quan biên của mặt và định hướng của mặt. Một cách miêu tả trực quan cho định hướng trên biên là khi đi dọc theo biên theo chiều đã định, thân người hướng theo chiều pháp tuyến đã chọn của mặt thì mặt phải nằm bên tay trái. Một cách miêu tả khác là tại một điểm gần biên ***đặt bàn tay phải sao cho ngón cái chỉ chiều của pháp tuyến thì lòng bàn tay hướng theo chiều của biên***.

Ghi chú. Khái niệm biên của mặt khác với khái niệm biên của tập con của không gian Euclid mà ta xét trong tích phân bội. Ví dụ với một cái đĩa trong mặt phẳng thì hai loại biên này trùng nhau, nhưng với một nửa mặt cầu trong không gian ba chiều thì biên của mặt là một đường tròn, trong khi biên của tập con là cả nửa mặt cầu.

Định lý (công thức Stokes). *Giả sử S là vết của một mặt, mà miền xác định là một tập đóng bị chặn có diện tích của mặt phẳng có biên là vết của một đường chính quy từng khúc trên đó công thức Green áp dụng được. Giả sử mặt này là đơn, chính quy, trơn cấp hai trên tập mở chứa miền xác định. Giả sử S và ∂S có định hướng tương thích. Cho trường F trơn trên một tập mở chứa S. Khi đó*

$$\boxed{\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.}$$

Chứng minh. Lấy r là mặt đơn, chính quy trên miền phẳng đóng bị chặn D với vết S, đại diện cho định hướng của S. Theo 11.13 thì tích phân $\iint_r \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$ không phụ thuộc vào cách chọn r. Biên ∂D là vết của đường γ chính quy từng khúc. Đường $r \circ \gamma$ cũng chính quy từng khúc, xem 12.16, do đó theo 8.9 tích phân $\int_{r\circ\gamma} F \cdot d\vec{s}$ không phụ thuộc vào cách chọn γ. Mặt $S = r(D)$ và biên $\partial S = r(\partial D)$ có định hướng tương thích có nghĩa là γ có hướng tương thích với D theo công thức Green, định hướng của S được cho bởi r, và định hướng của ∂S được cho bởi đường $r \circ \gamma$. Bây giờ 12.1 cho hai vế bằng nhau. □

Ví dụ. Công thức Stokes còn có thể được viết ở dạng tọa độ, xem Ghi chú 11.1 trang 160:

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S (R_y - Q_z)\,dydz + (P_z - R_x)\,dzdx + (Q_x - P_y)\,dxdy.$$

Dạng này thể hiện rõ sự tương tự với Công thức Green. ■

Ghi chú. Các bài tập và ví dụ của môn này không yêu cầu việc kiểm tra các giả thiết áp dụng công thức Stokes.

Ví dụ. Cho $F(x,y,z) = (x^2, y^3, z^4)$. Cho C là đường tam giác với các đỉnh $(1,2,3)$, $(2,0,-1)$, $(4,3,1)$, định hướng theo thứ tự đó. Ta tính $\int_C F \cdot d\vec{s}$.

Có thể tính trực tiếp hoặc dùng phương pháp trường bảo toàn, nhưng bây giờ ta có thêm một công cụ là công thức Stokes. Đường tam giác C bao hình tam giác S với định hướng sinh bởi C. Áp dụng công thức Stokes:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Ở đây $\operatorname{curl} F = 0$. Vậy tích phân trên bằng 0. ■

Ví dụ. Cho $F(x,y,z) = (xy, yz, zx)$. Gọi C là giao của mặt phẳng $x+y+z=1$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Ta tính $I = \int_C F \cdot d\vec{s}$ bằng hai cách: tính trực tiếp, và dùng công thức Stokes.

(a) Tính trực tiếp: Ta lấy một tham số hóa của đường C là $C(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Tính trực tiếp I:

$$\begin{aligned} I &= \int_C F(C(t)) \cdot C'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin t(1-\cos t - \sin t) + (1 - \cos t - \sin t)\cos t) \cdot \\ &\quad \cdot(-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)\, dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

(b) Dùng công thức Stokes: Trước hết tính được $\text{curl}F(x,y,z) = (-y,-z,-x)$. Tham số hóa mặt S bao bởi C bởi $r(x,y) = (x, y, 1-x-y)$, $x^2+y^2 \le 1$. Tham số hóa này có vectơ pháp tuyến tương ứng là $r_x \times r_y(x,y) = (1,1,1)$, hướng lên, do đó phù hợp với định hướng cần thiết trong công thức Stokes. Bây giờ:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \text{curl}F \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \text{curl}F(x,y) \cdot (r_x \times r_y(x,y))\, dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-y, -(1-x-y), -x) \cdot (1,1,1)\, dxdy = -\pi. \end{aligned}$$

■

Điều kiện để trường ba chiều là bảo toàn

12.4 Mệnh đề (curl grad = 0)**.** *Nếu f là hàm thực có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó* $\text{curl}(\nabla f) = 0$.

Dùng kí hiệu hình thức thì $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

Chứng minh. Tương tự như trường hợp hai chiều 10.6, tính trực tiếp ta được[63]

$$\text{curl}\,\nabla f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0.$$

□

[63] Chú ý quy ước về kí hiệu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

Ta thu được ngay:

Hệ quả (điều kiện cần để trường ba chiều là bảo toàn). *Nếu F là trường trơn bảo toàn trên một tập mở thì* $\operatorname{curl} F = 0$ *trên đó. Nói cách khác điều kiện sau phải được thỏa:*

$$\begin{cases} R_y &= Q_z \\ P_z &= R_x \\ Q_x &= P_y. \end{cases}$$

Ta có thể dùng kết quả này để chứng tỏ một trường là không bảo toàn bằng cách chỉ ra rằng curl của nó khác 0.

Ví dụ. Trường $F(x, y, z) = (y, x, y)$ có bảo toàn trên $\mathbb{R}^3$ hay không?

Trường F trơn cấp một trên $\mathbb{R}^3$. Nếu F là bảo toàn thì phải có $\operatorname{curl} F = 0$. Nhưng trong trường hợp này $\operatorname{curl} F = (1, 0, 0) \neq 0$, vậy F không bảo toàn. ■

Bằng cách chứng minh tương tự ở 10.10 nhưng thay công thức Green bởi công thức Stokes ta được (Bài tập 12.17):

12.5 Mệnh đề (điều kiện đủ để trường ba chiều là bảo toàn). *Nếu F trơn trên một miền mở hình sao trong $\mathbb{R}^3$ và* $\operatorname{curl} F = 0$ *thì F là bảo toàn trên đó.*

Ví dụ. Trường $F(x, y, z) = (y, x + z, y)$ có bảo toàn trên $\mathbb{R}^3$ hay không?

Như trước đây ta có thể tìm hàm thế bằng cách giải hệ phương trình đạo hàm riêng, nhưng giờ ta có một phương pháp khác. Trường F trơn cấp một trên $\mathbb{R}^3$ và $\operatorname{curl} F = 0$. Vì $\mathbb{R}^3$ là một miền mở hình sao trong $\mathbb{R}^3$ nên theo Mệnh đề 12.5 trường F là bảo toàn. ■

Bài tập

12.6. Trường sau có bảo toàn hay không?

(a) $F(x, y, z) = (y, x, y)$.

(b) $F(x, y, z) = (2xe^{x^2}, z \sin y^2, z^3)$.

12.7. Cho S là mặt $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$, định hướng lên trên. Tính lưu lượng của trường $\vec{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ trên S (tức là $\iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S}$) bằng hai cách:

(a) Tính trực tiếp.

(b) Dùng công thức Stokes.

12.8. Cho S là mặt $z = 9 - x^2 - y^2$ với $z \geq 0$, định hướng lên trên.

(a) Cho trường $F(x, y, z) = (2z - y, x + z, 3x - 2y)$. Tính trực tiếp lưu lượng của F trên S, tức $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

(b) Dùng công thức Stokes tính $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

12.9. Cho C là đường giao của mặt $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 40$ và mặt $z = 2$ được định hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống. Tìm $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ với $\vec{F}(x, y, z) = (y, 2yz + 1, xz^4 + \cos(2z + 1))$ bằng cách tính trực tiếp và bằng cách dùng công thức Stokes.

12.10. Cho $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$. Gọi C là giao của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Đặt $I = \int_C F \cdot d\vec{s}$.

(a) Tìm một tham số hóa của đường C.

(b) Tính trực tiếp I.

(c) Tính $\operatorname{curl} F$.

(d) Dùng công thức Stokes, tính I.

12.11. Cho f và g là hai hàm thực trơn cấp hai trên $\mathbb{R}^3$.

(a) Chứng tỏ $\operatorname{curl}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$.

(b) Tính tích phân $\int_C f\nabla f \cdot d\vec{s}$ trong đó $C(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

12.12. Trong $\mathbb{R}^3$ cho S_1 là nửa mặt cầu trên $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$; cho S_2 là mặt paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$, cả hai được định hướng lên trên.

(a) Vẽ hai mặt này trên cùng một hệ tọa độ.

(b) Cho F là một trường trơn trên $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ $\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

(c) Hãy tổng quát hóa.

12.13. ✓ Nếu S là mặt cầu thì $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = 0$.

12.14. Cho $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ cố định. Cho S là một mặt mà trên đó công thức Stokes có thể áp dụng được. Hãy chứng minh:

$$\int_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{r}) \cdot d\vec{s} = 2 \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS,$$

trong đó $\vec{r}$ là vectơ vị trí, tức $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

12.15. (a) Chứng minh đẳng thức

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$

(b) Từ đó chứng minh

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F.$$

Ở đây ΔF được hiểu là toán tử Laplace $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ tác động vào từng thành phần của F.

12.16. Chứng tỏ nếu γ là một đường chính quy trên mặt phẳng và r là một mặt chính quy xác định trên vết của γ thì $r \circ \gamma$ là một đường chính quy trong $\mathbb{R}^3$.

12.17. * Chứng minh Bổ đề Poincaré ba chiều, Mệnh đề 12.5.

13 Công thức Gauss–Ostrogradsky

Định nghĩa. *Với $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$ thì*

$$\boxed{\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức thì $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$. Hàm $\operatorname{div} F$ còn được gọi là **hàm phân tán** [64] của trường F.

Công thức Gauss–Ostrogradsky[65] còn được gọi là Công thức Phân tán. Đây là tổng quát hoá của dạng thông lượng của công thức Green 10.12, cho một công thức có dạng như sau. Cho khối E có biên ∂E được "định hướng ra ngoài", thì (xem Ghi chú 11.1 về kí hiệu)

$$\iint_{\partial E} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_E \left(P_x + Q_y + R_z\right)\,dxdydz.$$

Dưới đây ta sẽ phát biểu và chứng minh công thức này cho khối đơn giản theo cả ba chiều, với những giả thiết nhất định, ta nói khối như vậy là **khối đơn giản với biên trơn từng mảnh**.

Ta nói rõ giả thiết cho khối đơn giản với biên trơn từng mảnh sau đây. Theo mỗi chiều thì khối là miền nằm giữa hai đồ thị. Chẳng hạn theo chiều trục z thì khối là $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$, với D đóng, bị chặn, có diện tích. Giả sử thêm rằng trên ∂D thì hoặc $f = g$ hoặc $f < g$. Giả sử các hàm f, g là trơn thì biên ∂E, như đã thảo luận ở 4.14, là hội của mặt dưới là $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ (chính quy, hướng xuống), mặt trên là $\{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ (chính quy, hướng lên), ngoài ra nếu trên ∂D mà $f < g$ thì biên còn gồm mặt bên hông là $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$. Giả sử thêm ∂D là vết của một đường chính quy từng khúc.

Ví dụ. Quả cầu đóng, khối ellipsoid, khối hộp chữ nhật là những khối đơn giản với biên trơn từng mảnh. ■

Định lý (Công thức Gauss–Ostrogradsky). *Cho trường F trơn trên một tập mở chứa một khối đơn giản E với biên trơn từng mảnh được định hướng ra ngoài. Khi đó:*

$$\boxed{\iint_{\partial E} F \cdot n\,dS = \iint_{\partial E} F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F\,dV.}$$

[64] divergence, có nghĩa là sự phát tán, sự phân kì, sự phân rã, …
[65] tên nhà toán học Ostrogradsky còn được viết là Ostrogradski

Công thức Gauss–Ostrogradsky cũng cho một liên hệ giữa tích phân trên miền với tích phân trên biên của miền. Như thế nó có cùng dạng như các công thức Newton–Leibniz, Green, Stokes, nhưng cho trường hợp miền ba chiều.

Chứng minh. Chứng minh này tương tự như chứng minh của Công thức Green, gồm áp dụng Công thức Fubini rồi Công thức Newton-Leibniz. Viết $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Viết E như là khối đơn theo chiều Oz như là tập hợp những điểm (x, y, z) với $f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$ trong đó f, g là hàm trơn xác định trên miền phẳng D. Ta sẽ chứng tỏ

$$\iint_{\partial E} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial}{\partial z} R \, dV.$$

Tương tự ta chứng minh hai biểu thức tương ứng cho hai chiều còn lại, cộng lại và được đẳng thức phải được chứng minh.

Nếu $f < g$ trên ∂D thì ∂E có mặt hông, tích phân của $R\vec{k}$ bằng không trên đó, cơ bản là vì pháp tuyến của mặt hông nằm ngang, do đó vuông góc với trường $R\vec{k}$. Chi tiết đầy đủ được trình bày trong đoạn ngay dưới đây.

Biên ∂D trừ ra hữu hạn điểm là chính quy. Tại mỗi điểm (x_0, y_0) trên ∂D mà tại đó biên là chính quy thì có một tập mở U của $\mathbb{R}^2$ sao cho $U \cap \partial D$ đồng phôi với một khoảng mở (a, b) (xem chứng minh của 8.7) và sao cho có $\epsilon > 0$ sao cho $(U \cap \partial D) \times (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$ được chứa trong mặt hông (do tính liên tục của f và g). Phần này của mặt hông như vậy có pháp tuyến. Mặt hông chứa đoạn thẳng (x_0, y_0, z) với $z \in (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$. Đường này có vectơ tiếp xúc là $\vec{k}$, do đó $\vec{k}$ là một vectơ tiếp xúc của mặt hông, vì thế vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt hông.

Như vậy tích phân của $R\vec{k}$ trên ∂E bằng tổng tích phân của $R\vec{k}$ trên mặt trên và mặt dưới, là các mặt đồ thị, bằng:

$$\begin{aligned}
&\iint_D R(x, y, g(x, y))\vec{k} \cdot (-g_x, -g_y, 1) \, dA + \\
&\qquad + \iint_D R(x, y, f(x, y))\vec{k} \cdot (f_x, f_y, -1) \, dA \\
&\qquad\qquad = \iint_D \left[R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))\right] \, dA.
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo công thức Fubini

$$\begin{aligned}
\iiint_E R_z \, dV &= \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} R_z \, dz \right) dA \\
&= \iint_D \big(R(x, y, g(x, y) - R(x, y, f(x, y))\big) \, dA.
\end{aligned}$$

Vậy ta được đẳng thức mong muốn. □

Ghi chú. Các bài tập và ví dụ của môn này không yêu cầu việc kiểm tra các giả thiết áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky.

Ví dụ. Dùng Công thức Gauss–Ostrogradsky, ta tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (2x + e^y z, x^2 y, yz)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 = 1$ định hướng ra ngoài:

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2+z^2=1} F\cdot d\vec{S} &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \operatorname{div} F(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} (2+x^2+y)\, dxdydz \\
&= 2\frac{4\pi}{3} + \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (\rho\sin\phi\cos\theta)^2\rho^2\sin\phi\, d\theta d\phi d\rho + 0 \\
&= \frac{8\pi}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{44\pi}{15}.
\end{aligned}$$

■

Ví dụ. Hãy tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (x,y,2-2z)$ qua mặt S cho bởi $z = 1-x^2-y^2$, $z \ge 0$, định hướng lên trên, bằng hai cách: (a) tính trực tiếp, và (b) tính thông lượng của F qua một mặt khác và dùng Công thức Gauss–Ostrogradsky.

(a) Tham số hóa mặt S: $r(x,y) = (x,y,1-x^2-y^2)$ với $x^2+y^2 \le 1$. Có $r_x \times r_y(x,y) = (2x,2y,1)$ hướng lên trên.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S F\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} F(r(x,y))\cdot(r_x\times r_y)(x,y)\, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x,y,2-2(1-x^2-y^2))\cdot(2x,2y,1)\, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} 4(x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\, rdrd\theta = 2\pi.
\end{aligned}$$

(b) Gọi S_1 là mặt cho bởi $x^2+y^2 \le 1, z=0$, định hướng xuống dưới. Mặt S cùng S_1 tạo thành mặt kín S_2 bao khối E. Áp dụng Công thức Gauss–Ostrogradsky:

$$\iint_S F\cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} F\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} F\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F\, dV = \iiint_D 0\, dV = 0.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} F\cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} F\cdot\vec{n}\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} (x,y,2-0)\cdot(0,0,-1)\, dA \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} -2\, dA = -2\pi.
\end{aligned}$$

Do đó $\iint_S F \cdot d\vec{S} = 2\pi$. ∎

13.1 Ví dụ (diện tích mặt cầu). Ta áp dụng Công thức Gauss–Ostrogradsky cho hàm $F(x,y,z) = (x,y,z)$ và khối cầu $B'(0,R)$ tâm tại 0 với bán kính R. Vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của biên, chính là vectơ đơn vị theo hướng từ tâm tới điểm trên mặt cầu $S(0,R)$, là $\frac{1}{R}(x,y,z)$. Vậy

$$\iiint_{B'(0,R)} \operatorname{div}(x,y,z)\,dV = \iint_{S(0,R)} (x,y,z) \cdot \left[\frac{1}{R}(x,y,z)\right] dS$$

dẫn tới

$$\iiint_{B'(0,R)} 3\,dV = \frac{1}{R}\iint_{S(0,R)} (x^2+y^2+z^2)\,dS$$

hay

$$3\iiint_{B'(0,R)} 1\,dV = \frac{1}{R}\iint_{S(0,R)} R^2\,dS = R\iint_{S(0,R)} 1\,dS.$$

Ta thu được kết quả: diện tích mặt cầu bán kính R bằng $\frac{3}{R}$ thể tích quả cầu bán kính R. Suy ra diện tích mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$. ∎

Tính trực tiếp từ công thức tương tự như ở 12.4 ta có kết quả sau:

Mệnh đề (div curl = 0). *Nếu F là trường có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó* $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$.

Viết bằng kí hiệu hình thức: $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$. Kết quả này cho một điều cần để một trường là trường curl của một trường khác.

Ý nghĩa của div và curl

Ta dùng bổ đề sau đây về giới hạn của giá trị trung bình của một hàm liên tục:

13.2 Bổ đề. *Cho f là một hàm thực khả tích trên một lân cận của điểm $p \in \mathbb{R}^n$ và liên tục tại p. Gọi $B'(p,r)$ là quả cầu đóng tâm tại p với bán kính r. Khi đó:*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{B'(p,r)} f = f(p).$$

Vậy ***giá trị trung bình của một hàm liên tục quanh một điểm tiến về giới hạn là giá trị của hàm tại điểm đó***. Đây là trường hợp nhiều chiều của Bài tập 10.34.

Chứng minh. Vì f liên tục tại p nên cho $\epsilon > 0$, với r đủ nhỏ thì với mọi $q \in$

$B'(p,r)$ ta có $\left|f(q) - f(p)\right| \leq \epsilon$. Từ đó

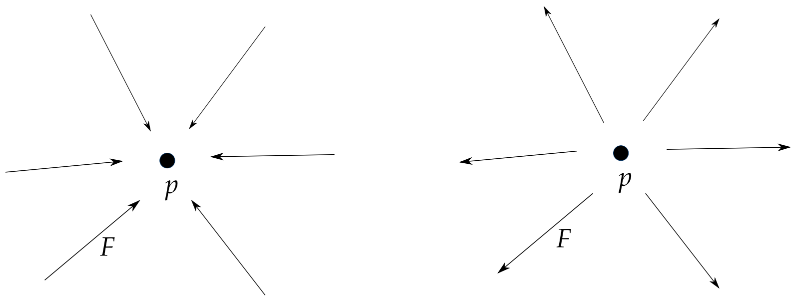
$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\int_{B'(p,r)} f\right) - f(p)\right| &= \left|\frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\int_{B'(p,r)} [f(q) - f(p)]\right| \\
&\leq \frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\int_{B'(p,r)} |f(q) - f(p)| \\
&\leq \frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\int_{B'(p,r)} \epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Áp dụng bổ đề trên cho div và công thức Gauss–Ostrogradsky ta được

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} F\, dA = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n\, dS. \tag{13.3}$$

Tích phân $\iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n\, dS$ là thông lượng của trường F ra khỏi mặt cầu $\partial B'(p,r)$. Vậy div $F(p)$ ***chỉ độ phát tán của trường*** F ***trên đơn vị thể tích quanh*** p.



div $F(p) < 0$ div $F(p) > 0$

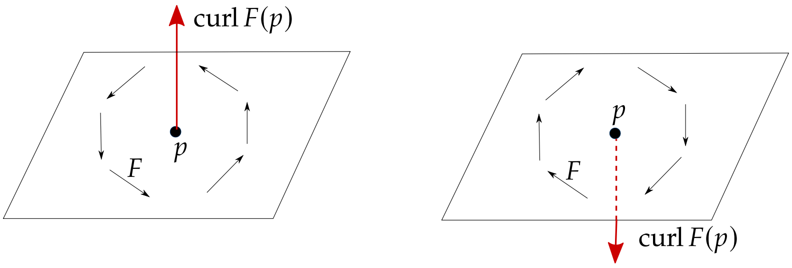
Xét một điểm p. Lấy một mặt phẳng qua p với phương định bởi pháp tuyến n. Xét hình tròn $B'(p,r)$ trên mặt phẳng này với tâm tại p và bán kính r. Ta có:

$$\operatorname{curl} F(p) \cdot n = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\iint_{B'(p,r)} \operatorname{curl} F \cdot n\, dA = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\left|B'(p,r)\right|}\int_{\partial B'(p,r)} F \cdot d\vec{s}. \tag{13.4}$$

Vậy curl $F(p) \cdot n$ thể hiện lưu lượng ngược chiều kim đồng hồ (độ xoay) của trường F trên phần tử diện tích quanh p trong mặt phẳng qua p vuông góc n.

Ta có curl $F(p) \cdot n$ đạt giá trị lớn nhất khi n cùng phương cùng chiều với curl $F(p)$. Vậy curl $F(p)$ cho phương của mặt phẳng mà trên đó độ xoay của trường quanh p là lớn nhất, chiều của nó được xác định bởi chiều xoay của trường theo quy tắc bàn tay phải. Hơn nữa có thể chứng tỏ là độ lớn của curl $F(p)$ tỉ lệ với tốc độ xoay theo góc của trường quanh p. Nói vắn tắt, curl $F(p)$ ***chỉ sự xoay của trường*** F ***tại điểm*** p. Từ điều này tích phân $\iint_S$ curl $F \cdot$

$d\vec{S}$ còn được gọi là lưu lượng [66] của trường F trên mặt S.



Ta có một miêu tả trực quan cho curl $F(p)$: Tưởng tượng rằng ta thả một cái chong chóng vào trường, cố định nó tại điểm p nhưng để cho nó tự do đổi hướng và tự do xoay. Khi đó hướng ổn định của chong chóng chính là hướng của curl $F(p)$, chiều xoay của nó chính là chiều xoay của trường, còn vận tốc xoay của chong chóng chỉ độ xoay của trường quanh p.

Công thức cho div (13.3) và cho curl (13.4) cho thấy chúng là những đại lượng vật lý, không phụ thuộc hệ tọa độ. Từ đây ta có giải thích vật lý, ***Công thức Stokes nói rằng tổng lưu lượng trên mặt bằng tổng lưu lượng trên biên của mặt***, còn ***Công thức Gauss–Ostrogradsky nói rằng tổng độ phát tán trong khối bằng tổng thông lượng ra biên của khối***.

Bài tập

13.5. Tiếp tục bài tập 9.3 và 9.5, xem F như là trường phẳng trong không gian ba chiều. Ước đoán div$F$ tại điểm gốc tọa độ là âm, dương hay bằng không? Hãy miêu tả curl$F$ tại điểm gốc tọa độ.

13.6. Tồn tại hay không một trường F khả vi liên tục cấp hai thỏa curl $F(x, y, z) = (e^{yz}, \sin(xz^2), z^5)$?

13.7. Tính:

(a) Tiếp tục bài tập 11.16. Nếu mặt S là kín hãy tính tích phân $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ bằng cách dùng công thức Gauss–Ostrogradsky.

(b) Tính thông lượng của trường $\vec{F}(x, y, z) = (3x, y^2, z^2)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, định hướng ra ngoài.

(c) Tính thông lượng của trường $F(x, y, z) = (2x + e^{yz}, 2xy, y^2)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ định hướng ra ngoài.

(d) Tính thông lượng của trường $F(x, y, z) = (y, z, x)$ qua mặt $x^2 + y^4 + z^6 = 2$, định hướng ra ngoài.

13.8. Cho trường

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Chú ý đây là một trường xuyên tâm, tỉ lệ với trọng trường và điện trường.

[66] circulation

(a) Tính $\operatorname{div}(\vec{F})$.

(b) Gọi S_2 là mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$ được định hướng ra ngoài. Dùng công thức Gauss–Ostrogradsky, hãy tính $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

(c) Gọi S_1 là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ được định hướng ra ngoài. Tính tích phân mặt $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ bằng cách dùng tọa độ Euclid (x, y, z) hoặc dùng tọa độ cầu.

(d) Gọi S_3 là mặt $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ được định hướng ra ngoài. Hãy tính $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

13.9. Cho S là mặt $z = 9 - x^2 - y^2$ với $z \geq 0$, định hướng lên trên.

(a) Cho $G(x, y, z) = (e^y \cos z, x^2 z, y^2 + z)$. Cho S_1 là đĩa $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 0$, định hướng xuống dưới. Tính thông lượng của G qua S_1, tức $\iint_{S_1} G \cdot\, d\vec{S}$.

(b) Dùng định lý Gauss–Ostrogradsky tính $\iint_{S \cup S_1} G \cdot\, d\vec{S}$.

(c) Tính $\iint_S G \cdot\, d\vec{S}$.

13.10. Cho T là nhiệt độ trên một miền $D \subset \mathbb{R}^3$, giả sử là một hàm trơn cấp hai. Vì nhiệt được chuyển từ nơi có nhiệt độ cao tới nơi có nhiệt độ thấp, và vectơ gradient chỉ hướng mà hàm có tốc độ thay đổi lớn nhất, nên sự thay đổi nhiệt trên miền này được mô hình hóa một cách đơn giản bằng trường dòng nhiệt $F = -k\nabla T$, với k là một hằng số dương.

(a) Chứng tỏ $\operatorname{curl} F = 0$.

(b) Chứng tỏ $\operatorname{div} F = -k\Delta T$, trong đó Δ là toán tử Laplace: $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

(c) Chứng tỏ nếu T là ***hàm điều hòa***, tức là $\Delta T = 0$, thì tổng dòng nhiệt qua một mặt cầu bất kì trong miền D luôn bằng không. (Xem 10.29.)

13.11. ✓ Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các ***công thức Green***, với giả thiết công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được. Ở đây n là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài. So sánh Bài tập 10.27.

(a) $\iint_{\partial E} \nabla f \cdot n\, dS = \iiint_E \Delta f\, dV$.

(b) $\iint_{\partial E} (f \nabla g) \cdot n\, dS = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$.

(c) $\iint_{\partial E} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n\, dS = \iiint_E (f \Delta g - g \Delta f)\, dV$.

(d) $\iint_{\partial E} f n_i\, dS = \iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dV$. Ở đây n_i là tọa độ thứ i của vectơ pháp tuyến n.

(e) $\iint_{\partial E} f g n_i\, dS = \iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dV + \iiint_E f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dV$ (công thức tích phân từng phần).

13.12. Dùng công thức Gauss–Ostrogradsky hãy đưa ra một cách khác để tìm ra thể tích của một khối nón (xem 5.35). Cụ thể, đặt đỉnh khối nón ở O và đáy khối nón trên một mặt phẳng nằm ngang $z = a$, và áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky cho trường (x, y, z).

13.13. Mặt cyclide nhận được từ một mặt xuyến qua phép nghịch đảo qua một mặt cầu. Mặt xuyến được cho bởi tham số hóa

$$r(u, v) = ((5 + \cos u)\cos v, (5 + \cos u)\sin v, \sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Đưa mặt xuyến này ra ngoài mặt cầu đơn vị tâm O bán kính 1 bằng một phép tịnh tiến, chẳng hạn theo vectơ $(9,0,0)$, được một mặt xuyến mới với tham số hóa

$$\mathrm{rtorus}(u,v) = (9 + (5+\cos u)\cos v, (5+\cos u)\sin v, \sin u), \quad 0 \le u, v \le 2\pi.$$

Thực hiện phép lấy nghịch đảo qua mặt cầu tâm O bán kính 1, tức là phép biến đổi mang mỗi điểm $p \neq 0$ thành điểm $\frac{p}{\|p\|^2}$. Khi đó mặt xuyến trở thành mặt cyclide S với tham số hóa

$$\mathrm{rcyclide}(u,v) = \frac{\mathrm{rtorus}(u,v)}{\|\mathrm{rtorus}(u,v)\|^2}.$$

(a) Vẽ mặt cyclide S.

(b) Tính diện tích mặt cyclide S ra số thập phân.

(c) Cho trường $F(x,y,z) = (y,x,3z)$. Tính thông lượng của F qua mặt cyclide S ra số thập phân.

(d) Tính thể tích của khối bao bởi mặt cyclide S ra số thập phân.

14 Vài ứng dụng của giải tích vectơ

Điện từ

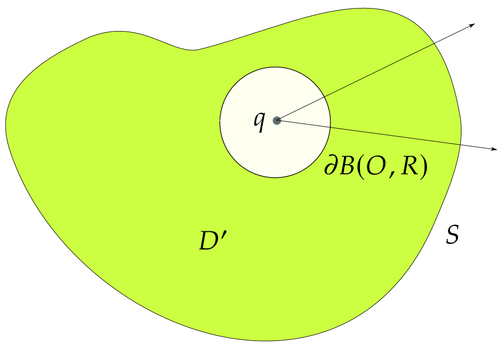
Gọi E là điện trường gây bởi điện tích q tại điểm O. Giả sử S là một mặt kín, biên của khối D. Giả sử công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được cho D. Nhắc lại từ 14.1 là $\operatorname{div} E = 0$. Nếu D không chứa điểm O thì

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Nếu D chứa điểm O ở phần trong, nói cách khác nếu S bao điểm O, thì lấy một quả cầu $B(O,R)$ đủ nhỏ sao cho nó không cắt S, và cho biên $\partial B(O,R)$ định hướng ra ngoài $B(O,R)$. Khi đó S cùng $\partial B(O,R)$ tạo thành biên của một khối D' không chứa O. Giả sử công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được cho D', ta được

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} - \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{D'} \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Suy ra $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S}$. Ở bài tập 11.22, dùng định luật Coulomb (9.10), ta đã tính được $\iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$.



Vậy

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

thông lượng của điện trường qua một mặt kín bao điện tích không phụ thuộc vào mặt và tỉ lệ với điện tích. Đây là nội dung của định luật Gauss.

Ở trên ta vừa trình bày định luật Coulomb và định luật Gauss cho một điện tích. Trong trường hợp môi trường chứa điện tích tại mọi điểm (môi trường liên tục) thì ta có:

Định luật Coulomb	Định luật Gauss
$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, với ρ là hàm mật độ điện tích	$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với D là khối được bao bởi mặt S và Q là tổng điện tích trên D

Mệnh đề. *Định luật Gaussvà Định luật Coulomb tương đương về mặt toán học.*

Vậy phát biểu ở dạng vi phân (vi mô) và phát biểu ở dạng tích phân (vĩ mô) tương đương nhau.

Chứng minh. Ta chứng tỏ định luật Gauss dẫn tới định luật Coulomb. Xét một điểm p bất kì và xét quả cầu đóng $B'(p,r)$ tâm tại điểm đó với bán kính r. Theo định luật Gauss và công thức Gauss–Ostrogradsky:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{B'(p,r)} \rho \, dV = \iint_{\partial B'(p,r)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} E \, dV.$$

Chia hai vế cho thể tích của quả cầu $B'(p,r)$ và lấy giới hạn khi $r \to 0$, dùng tính chất về giới hạn của giá trị trung bình của hàm liên tục 13.2 ta được định luật Coulomb.

$$\frac{\rho(p)}{\epsilon_0} = \operatorname{div} E(p).$$

Ngược lại định luật Gauss có thể nhận được từ định luật Coulomb bằng cách áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky. □

Định luật Coulomb cho môi trường mang điện liên tục có thể nhận được một cách thuần túy toán học từ định luật Coulomb cho một điện tích bằng cách lấy tích phân và dùng hàm Dirac, một hàm suy rộng.

Không lâu sau hai định luật Coulomb và Gauss, trong thập kỉ 1820, André Marie Ampère phát hiện ra rằng một dòng điện tạo ra quanh nó một từ trường theo định luật:

$$\int_C B \cdot d\vec{s} = \mu_0 I,$$

trong đó C là một đường cong kín bao quanh một dòng điện có cường độ không đổi I, B là từ trường, và μ_0 là một hằng số.

Năm 1831 Michael Faraday phát hiện rằng một từ trường thay đổi theo thời gian tới lượt nó lại tạo ra một điện trường. Định luật Faraday cho công thức:

$$\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cdot d\vec{S}.$$

Năm 1864, James Clerk Maxwell phát triển định luật Ampère và thống nhất điện trường với từ trường:

Các phương trình Maxwell	
Dạng vi phân	Dạng tích phân
(1) (Coulomb) $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Gauss) $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với S là một mặt kín
(2) $\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	(Faraday) $\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cdot d\vec{S}$
(3) $\operatorname{div} B = 0$	$\iint_S B \cdot d\vec{S} = 0$, với S là một mặt kín
(4) (Ampère) $\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \operatorname{curl} B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$, với J là mật độ dòng điện	$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \int_{\partial S} B \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\epsilon_0} + \frac{d}{dt} \iint_S E \cdot d\vec{S}$, với I là cường độ dòng điện qua mặt S

Chẳng bao lâu sau lý thuyết của Maxwell đã được ứng dụng trong thực tế với việc phát minh ra sóng điện từ của Heinrich Hertz năm 1887. Các phương trình Maxwell cùng với các định luật của Newton tổng kết vật lý cổ điển (trước tương đối và lượng tử). Có thể đọc thêm trình bày vật lý ở [Fey64, Chương 18], [YF20, tr. 970].

Cơ học

Giải tích vectơ được ứng dụng trực tiếp vào vật lý và các ngành toán học liên quan [Arn89], như khảo sát các phương trình vật lý toán, thường là các phương trình đạo hàm riêng [Eva97]. Các toán tử vi phân của Giải tích vectơ xuất hiện phổ biến trong mô hình hóa các hiện tượng cơ học.

Ví dụ. Gọi $\vec{F}$ là trường vận tốc chuyển động của một dòng chất lỏng. Nếu $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (tại mọi điểm) thì người ta nói dòng chất lỏng là không nén được [67] (vì nó không có chỗ bơm vào lẫn chỗ thoát ra).

Phương trình Navier–Stokes là một phương trình quan trọng mô tả dòng chảy chất lỏng đang được tập trung nghiên cứu: ■

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F} - \nu\Delta\vec{F} &= -\nabla w + \vec{g}, \\ \operatorname{div} \vec{F} &= 0. \end{cases}$$

Bài tập

14.1. Giả sử có một điện tích q tại một điểm O. Theo định luật Coulomb (9.10), điện trường gây bởi điện tích q này tại một điểm bất kì trong không gian có vị trí cho bởi vectơ $\vec{r}$ đi từ điểm mang điện tích q tới điểm đang xét là:

$$E(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{r}.$$

[67] incompressible

Đáng chú ý là điện trường có độ lớn tỉ lệ nghịch với $|\vec{r}|^2$, do đó định luật Coulomb thường được gọi là một luật nghịch đảo bình phương. Như ta đã thấy ở Ví dụ 9.2, trọng trường cũng được cho bởi một luật nghịch đảo bình phương.

(a) Tính toán trực tiếp, chứng tỏ div $E = 0$.

(b) * Chứng tỏ rằng một trường có dạng $E = k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^m}$ (được gọi là một trường xuyên tâm) thì có div $E = 0$ khi và chỉ khi $m = 3$. (Các thí nghiệm sau này kiểm chứng hằng số m trong định luật Coulomb bằng 3 sai khác không quá 3×10^{-16}.)

14.2 (cảm ứng điện từ). Định luật Faraday phát biểu rằng khi thông lượng từ trường qua một mặt giới hạn bởi một mạch kín thay đổi thì trong mạch xuất hiện dòng điện cảm ứng. Chính xác hơn, gọi $\vec{E}$ là điện trường, $\vec{B}$ là từ trường, S là một mặt với biên là đường ∂S được định hướng tương thích như trong công thức Stokes, thì

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Giả sử một nguồn năng lượng cơ học như sức nước hay sức gió làm quay một trục với vận tốc ω vòng/đơn vị thời gian. Một vòng dây phẳng được gắn vào trục này, được đặt trong một từ trường cố định $\vec{B}$. Gọi A là diện tích của hình phẳng bao bởi vòng dây. Đại lượng $\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ thường được kí hiệu là emf. Chứng tỏ

$$\text{emf} = -A|\vec{B}| 2\pi\omega \sin(2\pi\omega t).$$

Vậy trong vòng dây xuất hiện một dòng điện xoay chiều. Đây là một nguyên lý cơ sở của máy phát điện.

14.3. * Chứng tỏ các dạng vi phân và dạng tích phân của các phương trình Maxwell là tương đương với nhau về mặt toán học.

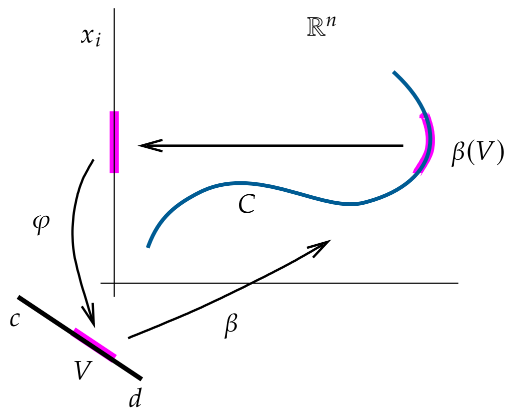
15 * Các đề tài bổ sung về Giải tích vectơ

15.1 Về tích phân đường

Ta chứng minh Bổ đề 8.7. Chứng minh này chứa những kĩ thuật hữu ích.

Chứng minh Bổ đề 8.7. Ta viết chứng minh cho trường hợp đường đi không kín. Trên (a, b) thì $\beta^{-1} \circ \alpha$ đã là một song ánh (xem thêm 8.21). Cái chính cần được kiểm tra đó là việc $\beta^{-1} \circ \alpha$ là hàm trơn (việc $\alpha \circ \beta^{-1}$ trơn là tương tự). Viết $\beta(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Xét điểm $\beta(t_0)$ với $t_0 \in (c, d)$. Do $\beta'(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)) \neq 0$ nên có chỉ số i sao cho $x_i'(t_0) \neq 0$. Áp dụng định lý hàm ngược cho hàm x_i, có một khoảng mở $V \subset (c, d)$ chứa t_0 trên đó hàm x_i là một vi đồng phôi. Do đó x_i có hàm ngược trơn $\varphi : x_i(V) \to V$, $\varphi(x_i) = t$. Suy ra với $t \in V$ thì

$$\beta(t) = (x_1(\varphi(x_i)), \ldots, x_{i-1}(\varphi(x_i)), x_i, x_{i+1}(\varphi(x_i)), \ldots, x_n(\varphi(x_i))).$$



Như vậy $\beta(V)$ là đồ thị của một hàm theo biến x_i và trên $\beta(V)$ thì ánh xạ ngược β^{-1} trùng với hợp của ánh xạ chiếu xuống tọa độ thứ i và ánh xạ φ:

$$\begin{array}{rcccl} \beta(V) & \xrightarrow{p_i} & x_i(V) & \xrightarrow{\varphi} & V \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i & \mapsto & t. \end{array}$$

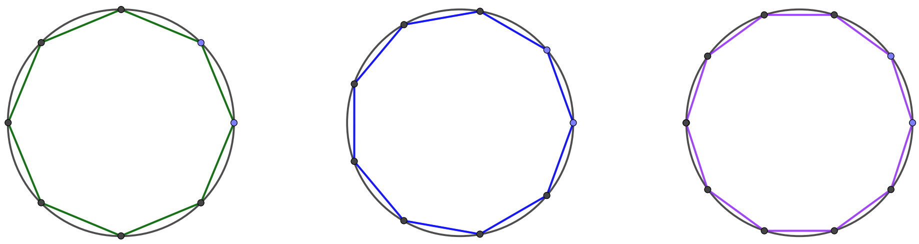
Do đó trên $\alpha^{-1}(\beta(V))$ thì $\beta^{-1} \circ \alpha = (\varphi \circ p_i) \circ \alpha$.

Điểm mấu chốt còn lại là kiểm tra rằng $\alpha^{-1}(\beta(V))$ là một tập mở trong (a, b). Do α và β là song ánh nên $[a, b] \setminus \alpha^{-1}(\beta(V)) = \alpha^{-1}(\beta([c, d] \setminus V))$. Vì $[c, d] \setminus V$ là tập đóng bị chặn của $\mathbb{R}$ nên nó compắc, do đó tập $\beta([c, d] \setminus V)$ là compắc, nên đóng trong $\mathbb{R}^n$, dẫn tới $\alpha^{-1}(\beta([c, d] \setminus V))$ là đóng trong $[a, b]$. Vậy $\alpha^{-1}(\beta(V))$ phải là một tập mở trong $[a, b]$, và vì nó không chứa a hay b nên nó là tập mở trong (a, b).

Trường hợp đường đi kín cũng giống như trên. Chú ý rằng nếu α kín thì β cũng phải kín, điều này đưa về việc một đường tròn thì không thể đồng phôi với một đoạn thẳng, một kết quả trong môn Tôpô, có thể xem ở [Vto]. □

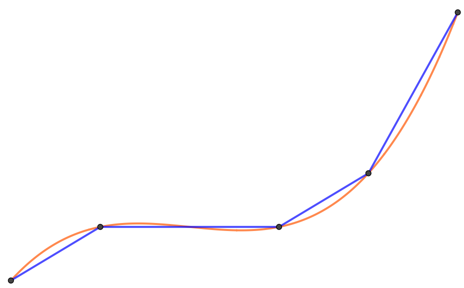
15.2 Một cách tiếp cận khác về chiều dài đường cong

Với bài toán chiều dài đường tròn, khoảng 200 năm trước Công nguyên Archimedes đã có ý tưởng khi số cạnh của đa giác đều nội tiếp tăng ra vô hạn thì chu vi của đa giác trở thành chu vi của đường tròn.



Hình 15.1: Khi số cạnh của đa giác đều nội tiếp tăng ra vô hạn thì chu vi của đa giác trở thành chu vi của đường tròn.

Tổng quát hơn, ta có thể tiếp cận chiều dài của một đường cong thông qua "giới hạn" của chiều dài đường gấp khúc nối các điểm trên đường cong.



Hình 15.2: Chiều dài đường cong như "giới hạn" của chiều dài đường gấp khúc nối các điểm trên đường cong.

Ý tưởng này có thể làm chính xác như sau. Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Cho một phép chia P của đoạn $[a, b]$ thành các đoạn $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq m$. Đường gấp khúc nối các đỉnh $r(t_i)$ có chiều dài là

$$\sum_{i=1}^{m} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| .$$

Ta gọi chiều dài của đường r là

$$\sup_P \sum_{i=1}^{m} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| \tag{15.3}$$

nếu sup tồn tại. Đây là chặn trên nhỏ nhất của chiều dài các đường gấp khúc nối các điểm trên vết của đường đi.

Mệnh đề. *Nếu đường khả vi liên tục thì chiều dài đường cho bởi công thức* (15.3) *trùng với chiều dài đường cho bởi tích phân ở công thức* (8.2).

Chứng minh. Dùng Định lý giá trị trung bình, ta viết

$$\begin{aligned} r(t_i) - r(t_{i-1}) &= (x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}), x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}), \dots, x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})) \\ &= \Big((x_1'(t_{i,1})(t_i - t_{i-1}), x_2'(t_{i,2})(t_i - t_{i-1}), \dots, x_n'(t_{i,n})(t_i - t_{i-1})\Big) \end{aligned}$$

trong đó $t_{i,j}$ là một điểm nào đó trong khoảng (t_{i-1}, t_i) phụ thuộc vào hàm x_i. Dẫn tới

$$\begin{aligned} \ell(r, P) &= \sum_{i=1}^{m} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| \, (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left\|((x_1'(t_{i,1}), x_2'(t_{i,2}), \dots, x_n'(t_{i,n}))\right\| (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Trong khi đó viết tích phân Riemann qua tổng dưới thì

$$\int_a^b \|r'(t)\| \; dt = \sup_P L(\|r'\|\,, P) = \sup_P \sum_{i=1}^{m} \left\|r'(t_i^*)\right\| (t_i - t_{i-1})$$

trong đó $\left\|r'(t_i^*)\right\| = \min_{t\in[t_{i-1},t_i]} \|r'(t)\|$.

Xét hàm số

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b]^n &\to \mathbb{R} \\ (s_1, s_2, \dots, s_n) &\mapsto \left\|((x_1'(s_1), x_2'(s_2), \dots, x_n'(s_n))\right\| \end{aligned}$$

thì đây là một hàm thực liên tục trên một tập compắc, nên liên tục đều trên đó. Dẫn tới khi phép chia P đủ mịn, chiều dài tất cả các khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$

đủ nhỏ, thì với $\epsilon > 0$ cho trước bất kì,

$$\begin{aligned}
&|\ell(r,P) - L(\|r'\|, P)|\\
=&\left|\sum_{i=1}^{m} \left\|\left((x_1'(t_{i,1}), x_2'(t_{i,2}), \dots, x_n'(t_{i,n})\right)\right\| (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} \|r'(t_i^*)\| (t_i - t_{i-1})\right|\\
=&\left|\sum_{i=1}^{m} \|\varphi(t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,n})\| (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} \|\varphi(t_i^*, t_i^*, \dots, t_i^*)\| (t_i - t_{i-1})\right|\\
\le& \sum_{i=1}^{m} \left| \|\varphi(t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,n})\| - \|\varphi(t_i^*, t_i^*, \dots, t_i^*)\| \right| (t_i - t_{i-1})\\
\le& \epsilon \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) = \epsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Như thế $\ell(r,P)$ và $L(\|r'\|, P)$ gần nhau tùy ý miễn P đủ mịn, trong khi đó $L(\|r'\|, P)$ gần $\int_a^b \|r'(t)\|\ dt$ tùy ý khi P đủ mịn, suy ra $\ell(r,P)$ gần $\int_a^b \|r'(t)\|\ dt$ tùy ý khi P đủ mịn. Mặt khác, do bất đẳng thức tam giác cho khoảng cách, khi P mịn hơn thì $\ell(r,P)$ tăng lên, do đó $\ell(r,P)$ gần $\sup_P \ell(r,P)$ tùy ý khi P đủ mịn. Vậy phải có $\sup_P \ell(r,P) = \int_a^b \|r'(t)\|\ dt$. □

Có thể đọc thêm ở [Rud76, tr. 136].

15.3 Về tích phân mặt

Ở phần này ta chứng minh Bổ đề 11.9 về tích phân mặt.

Ta cần thêm bổ đề sau, bản thân nó cũng có ý nghĩa độc lập:

Bổ đề. *Nếu $D \subset \mathbb{R}^2$ đóng và bị chặn, $r : D \to \mathbb{R}^3$ là một mặt đơn liên tục với vết $S = r(D)$ thì r là một đồng phôi lên S.*

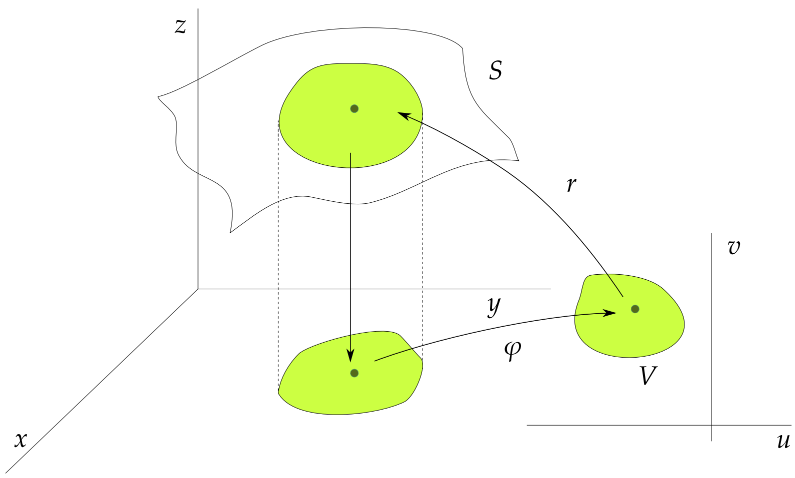
Chứng minh. Ta chứng minh ánh xạ ngược r^{-1} là liên tục. Giả sử U là một tập mở trên D, ta cần chứng tỏ $(r^{-1})^{-1}(U) = r(U)$ là mở trong S. Vì $D \setminus U$ là tập con đóng bị chặn của $\mathbb{R}^2$ nên nó compắc. Do đó ảnh của nó $r(D \setminus U)$ là tập compắc, do đó đóng trong S. Do đó $S \setminus r(D \setminus U) = r(U)$ mở trong S. □

Chứng minh Bổ đề 11.9. Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$; $r : D \to \mathbb{R}$ và $r' : D' \to \mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn chính quy có cùng vết S. Do bổ đề trên, ta có $r'^{-1} \circ r : D \to D'$ là một đồng phôi. Suy ra $r'^{-1} \circ r$ hạn chế lại trên $\mathring{D}$ là một đồng phôi lên ảnh của nó. Theo một định lý trong môn Tôpô gọi là định lý bất biến miền ([Mun00, tr. 381]), thì một tập con của $\mathbb{R}^2$ mà đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^2$ thì phải mở trong $\mathbb{R}^2$. Do đó $(r'^{-1} \circ r)(\mathring{D})$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$. Như vậy $r'^{-1} \circ r$ mang điểm trong của D thành điểm trong của D'. Tương tự $r^{-1} \circ r'$ mang điểm trong của D' thành điểm trong của D, do đó $r(\mathring{D}) = r'(\mathring{D'})$. Từ đó ta cũng có $r(\partial D) = r'(\partial D') = \partial S$.

Tiếp theo ta chứng minh $r^{-1} \circ r'$ là hàm trơn trên $\overset{\circ}{D}'$ bằng cách tương tự trong chứng minh của kết quả cho tích phân đường 8.7. Viết $r(u,v) = (x,y,z)$. Xét điểm $r(u_0,v_0)$ với $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{D}$. Vì $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) \neq 0$ nên một trong các số

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$$

phải khác 0. Giả sử $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0$. Theo định lý hàm ngược, có một lân cận mở $V \subset \overset{\circ}{D}$ của (u_0,v_0) sao cho trên V ánh xạ $(u,v) \longrightarrow (x,y)$ là một vi đồng phôi với ánh xạ ngược trơn φ. Khi đó những điểm trên $r(V)$ có dạng $(x,y,z(\varphi(x,y)))$, nói cách khác $r(V)$ là đồ thị của một hàm theo hai biến x và y.



Trên $r(V)$ thì ánh xạ r^{-1} là hợp của ánh xạ chiếu $r(V) \xrightarrow{p} \varphi^{-1}(V)$ và ánh xạ φ:

$$\begin{array}{ccccc} r(V) & \xrightarrow{p} & \varphi^{-1}(V) & \xrightarrow{\varphi} & V \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) & \mapsto & (u,v). \end{array}$$

Vì $(r^{-1} \circ r')^{-1}(V)$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$ chứa trong D' và trên tập này $r^{-1} \circ r' = (\varphi \circ p) \circ r'$ là hợp của những hàm trơn nên ta kết luận $r^{-1} \circ r'$ là hàm trơn trên $\overset{\circ}{D}'$. □

15.4 Công thức Stokes tổng quát

Mục này giới thiệu sơ lược một số vấn đề liên quan tới tổng quát hóa của công thức Stokes và Giải tích vectơ. Có thể đọc chi tiết hơn chẳng hạn ở [VSt].

Sau đây là một trường hợp của công thức Stokes được dùng phổ biến trong nghiên cứu các phương trình vật lý toán và phương trình đạo hàm riêng

([Eva97, tr. 627], [GT01, tr. 13]). Với $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ đặt

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} D_i F_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

15.4 Định lý. *Cho Ω là một tập con mở bị chặn của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Giả sử biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1. Giả sử ν là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của $\partial\Omega$. Giả sử trường vectơ F có các thành phần thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$. Khi đó:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\, dS.$$

Trong công thức trên, ta nói biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 có nghĩa là mỗi điểm trên $\partial\Omega$ có một lân cận vi đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^{n-1}$. Có thể thấy từ phần chứng minh của 8.7 và 11.9, khái niệm này là tổng quát hóa của khái niệm đường chính quy và mặt chính quy.

Như đã thấy ở Ví dụ 5.11 và Bài tập 11.15, ta có công thức

$$|a \times b| = \left[\det\begin{pmatrix} a\cdot a & a\cdot b \\ b\cdot a & b\cdot b\end{pmatrix}\right]^{1/2}.$$

Có thể dùng công thức này để định nghĩa tích phân mặt loại một cho mặt trong $\mathbb{R}^n$ với $n \geq 3$, không phải hạn chế $n = 3$ như trước. Tuy nhiên có một khó khăn là có thể cần tới nhiều hơn một phép tham số hóa để phủ được hoàn toàn mặt. Để vượt qua khó khăn này người ta dùng một công cụ gọi là "phân hoạch đơn vị".

Công thức Stokes tổng quát có dạng

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw.$$

Về mặt hình học, M là một mặt k-chiều, theo nghĩa mỗi điểm trên M có một lân cận vi đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^k$ hoặc một tập mở của một nửa không gian của $\mathbb{R}^k$, những điểm không thuộc loại đầu tạo thành biên ∂M. Đây là khái niệm **đa tạp trơn** [68] k-chiều.

Đối tượng hàm w là một **dạng vi phân** [69] bậc $(k-1)$. Khi đó dw là đạo hàm của dạng w và là một dạng bậc k.

Thế nào là tích phân của một dạng vi phân trên một mặt? Vì mỗi điểm trên mặt có một lân cận vi đồng phôi với với một tập con của $\mathbb{R}^k$ nên thông qua phép vi đồng phôi ta mang tích phân trên mặt về tích phân trên $\mathbb{R}^k$ bằng một công thức liên quan tới công thức đổi biến của tích phân.

[68] smooth manifold
[69] differential form

Miêu tả sơ lược dưới đây nhằm giới thiệu vài ý, hy vọng người đọc sẽ tìm hiểu thêm sau này.

Dạng vi phân

Những kí hiệu dx, dy, dA, dV, $dxdy$, ds, dS, $d\vec{s}$, $d\vec{S}$, ... mà ta thấy xuất hiện trong môn học cho tới nay chưa được cho ý nghĩa riêng. Chúng là phần tử của tập hợp nào? Quan hệ giữa chúng ra sao?

Viết $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Lạm dụng kí hiệu ta chỉ x_i là hàm cho ra tọa độ thứ i của x, tức là hàm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Khi đó ta định nghĩa dạng vi phân dx_i chính là đạo hàm của hàm x_i. Tức là $dx_i = dx_i$! Tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^n$, giá trị $dx_i(x)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, được đại diện bởi vectơ $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ trong đó số 1 nằm ở tọa độ thứ i.

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn thì đạo hàm df của f là một dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$. Tại mỗi điểm x thì $df(x)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, được đại diện bởi vectơ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$. Từ đó ta có đẳng thức:

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2(x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(x)$$

hay ngắn gọn hơn:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Trong trường hợp một chiều công thức trên là:

$$df = f'dx.$$

Ta định nghĩa một dạng vi phân bậc 1 trên $\mathbb{R}^n$ là một hàm cho tương ứng mỗi điểm với một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, cho bởi công thức

$$f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

trong đó $f_1, \dots, f_n$ là các hàm trơn.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^2$, dạng bậc 1 được cho bởi công thức $Pdx + Qdy$ trong đó P, Q là hàm trơn trên $\mathbb{R}^2$. ∎

Tích của dạng vi phân

Phép nhân của dạng vi phân có tính phân phối với phép cộng. Nó có một tính chất đặc biệt, là tính phản đối xứng:

$$dxdy = -dydx.$$

Một hệ quả là $dxdx = 0$.

Ví dụ. Khi $n = 2$: Ta có $dxdy$ là một dạng vi phân bậc 2. Tại mỗi điểm $p \in \mathbb{R}^2$, giá trị $dxdy(p)$ là một ánh xạ mà tác động vào cặp vectơ $u, v \in \mathbb{R}^2$ cho ra $\det(u, v)$, chính là diện tích có hướng của hình bình hành sinh bởi u và v. Vì vậy có lẽ không quá ngạc nhiên khi ta biết kí hiệu dA chính là $dxdy$:

$$dA = dxdy.$$

■

Ví dụ. Khi $n = 3$: Ta có $dxdydz$ là một dạng vi phân bậc 3. Tại mỗi điểm $p \in \mathbb{R}^3$, giá trị $dxdydz(p)$ là một ánh xạ mà tác động vào bộ 3 vectơ $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ cho ra $\det(u, v, w)$, chính là thể tích có hướng của hình bình hành sinh bởi u, v và w. Kí hiệu dV chính là $dxdydz$:

$$dV = dxdydz.$$

■

Tổng quát hơn, tại mỗi $p \in \mathbb{R}^n$ thì $dx_1dx_2 \cdots dx_n(p) = \det$, và đó chính là dạng thể tích dV trên $\mathbb{R}^n$:

$$dV = dx_1dx_2 \cdots dx_n.$$

Ta định nghĩamột dạng vi phân bậc k bất kì trên $\mathbb{R}^n$ là một tổng hữu hạn của những dạng $f dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$.

Ví dụ. Một dạng bậc 2 trên $\mathbb{R}^3$ có công thức $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, trong đó P, Q, R là các hàm trơn trên $\mathbb{R}^3$. ■

Ở đây chúng ta chưa bàn tới dạng vi phân nội tại trên các đường, mặt, hay tổng quát hơn những tập con "k-chiều" trong $\mathbb{R}^n$, vì vậy ta chưa có cơ hội giải thích các dạng ds, dS, ...

Tích phân của dạng vi phân

Theo định nghĩa ở trên một dạng vi phân bậc n trên $\mathbb{R}^n$ là một tổng của hữu hạn những dạng $f dx_1dx_2 \cdots dx_n$. Rất đơn giản, ta định nghĩa tích phân của dạng $f dx_1dx_2 \cdots dx_n$ trên tập con D của $\mathbb{R}^n$ chính là tích phân bội của hàm f trên D.

Định nghĩa trên được dùng cho những tập con D "n-chiều" trong $\mathbb{R}^n$. Nếu tập con D này có số chiều $k < n$ (ví dụ như đường, mặt trong $\mathbb{R}^n$) thì cần có một định nghĩa khác dành riêng cho số chiều k. Như ta đã thấy qua tích phân đường và tích phân mặt, một định nghĩa như vậy sẽ dùng tới việc "kéo lui" một dạng trên D về một dạng k-chiều trên $\mathbb{R}^k$, rồi lấy tích phân.

Đạo hàm của dạng vi phân

Phép tính này có tính tuyến tính, được xác định bởi công thức:

$$\begin{aligned} d(f dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}) &= (df) dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Như vậy đạo hàm của một dạng bậc k là một dạng bậc $(k+1)$.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^2$ xét dạng $w = Pdx + Qdy$. Ta có

$$dw = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

■

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^3$ xét dạng $w = Pdx + Qdy + Rdz$. Ta có

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Chú ý các thành phần của dw chính là các thành phần của $\operatorname{curl}(P, Q, R)$. ■

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^3$ xét dạng $w = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. Ta có

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) dydz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) dzdx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \end{aligned}$$

Thành phần của dạng dw chính là $\operatorname{div}(P, Q, R)$. ■

Tương ứng giữa hàm và dạng	
hàm thực f	dạng bậc không f
trường (P, Q, R)	dạng bậc một $Pdx + Qdy + Rdz$
trường bảo toàn	dạng bậc một mà là đạo hàm của một dạng bậc không
trường $\operatorname{curl}(P, Q, R)$	dạng bậc hai $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$
hàm $\operatorname{div}(P, Q, R)$	dạng bậc ba $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$

Sự thống nhất giữa các công thức Newton–Leibniz, Green, Stokes và Gauss–Ostrogradsky

Ta có thể nhận thấy một sự thống nhất của các công thức này: tích phân của một đối tượng hàm w trên biên ∂M của một đối tượng hình học M thì bằng với tích phân của một đối tượng hàm mới dw liên quan tới đạo hàm của đối tượng hàm w ban đầu trên đối tượng hình học M ban đầu. Tất cả được chứa trong công thức Stokes tổng quát:

$$\boxed{\int_{\partial M} w = \int_M dw.}$$

- Công thức Newton–Leibniz ứng với trường hợp w là dạng bậc không f và M là một tập con 1-chiều của $\mathbb{R}$ (đoạn thẳng).
- Công thức Green ứng với trường hợp w là dạng bậc một $Pdx + Qdy$ và M là một tập con 2-chiều của $\mathbb{R}^2$.
- Công thức Stokes ứng với trường hợp w là dạng bậc một $Pdx+Qdy+Rdz$ và M là một tập con 2-chiều của $\mathbb{R}^3$ (mặt).
- Công thức Gauss–Ostrogradsky ứng với trường hợp w là dạng bậc hai $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ và M là một tập con 3-chiều của $\mathbb{R}^3$ (khối).

Trình bày chặt chẽ và phát triển tổng quát hóa cho nhiều chiều nội dung của giải tích vectơ được nghiên cứu trong lĩnh vực đa tạp vi phân, tổng quát hóa của đường và mặt, và dạng vi phân, tổng quát hóa của trường vectơ, có thể tìm hiểu ở [Spi65], [Mun91], [Sja06], [VSt].

Một tiếp cận khác của vấn đề độ đo và tích phân trên các tập con của không gian Euclid được khảo sát trong lý thuyết độ đo hình học [Mor00].

Bài tập

15.5. Một biến đổi trực giao là một phép biến đổi tuyến tính biểu diễn bởi một ma trận trực giao, tức là có dạng $f(x) = A \cdot x$ trong đó A là một ma trận trực giao (xem Bài tập 5.41).

Chứng minh rằng một biến đổi trực giao của $\mathbb{R}^3$ bảo toàn độ lớn của tích có hướng của hai vectơ.

15.6. Chứng minh rằng diện tích mặt không thay đổi qua một phép dời hình.

15.7 (công thức Green nhiều chiều). Đây là những hệ quả của công thức Stokes 15.4. Với cùng các giả thiết về Ω, ta viết pháp tuyến đơn vị $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$. Chứng minh các công thức sau (xem các bài tập 10.27 và 13.11):

(a) $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, dS$. Giả sử hàm thực f thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$.

(b) $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial\Omega} f g \nu_i\, dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx$. Giả sử f và g thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$.

(c) $\int_\Omega \Delta f\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS$. Giả sử f thuộc lớp $C^2(\overline{\Omega})$. Ta viết $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$, đạo hàm của f theo hướng ν. Nhắc lại toán tử Laplace Δ được cho bởi $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

(d) $\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \nu}\, dS - \int_\Omega f \Delta g\, dx$. Giả sử f và g thuộc lớp $C^2(\overline{\Omega})$.

(e) $\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS$.

15.8 (diện tích mặt cầu nhiều chiều). * Gọi $S^n(R)$ là mặt cầu n-chiều tâm tại 0 với bán kính R, biên của quả cầu $B'^{(n+1)}(R)$ tâm 0 bán kính R. Hãy dùng công thức Stokes nhiều chiều 15.4 để tính diện tích (nói cách khác, thể tích n-chiều) của $S^n(R)$.

Gợi ý cho một số bài tập

1.29 Chẳng hạn xét hàm $f(x) = x$ trên đoạn [0,1] với phép chia đều với điểm đại diện là điểm giữa, cùng với một cách chọn điểm đại diện khác.

2.15 Do 2.3 ta kiểm mỗi mặt của một hình hộp n-chiều có thể tích không trong $\mathbb{R}^n$ là đủ. Mỗi mặt của hình hộp là một tập hợp D các điểm có dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ với $a_j \le x_j \le b_j$ khi $j \ne i$, và $x_i = c$ với $c = a_i$ hoặc $c = b_i$. Lấy hình hộp R phủ D có chiều dài cạnh ở chiều thứ i đủ nhỏ, chẳng hạn R gồm các điểm có dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ với $a_j \le x_j \le b_j$ khi $j \ne i$ và $c \le x_i \le c + \delta$.

3.32 Có thể xét trước cho hình hộp. Một cách là dùng tiểu chuẩn khả tích 1.13, chú ý tính chất với $A \subset \mathbb{R}$ thì $\sup |A| - \inf |A| \le \sup A - \inf A$. Một cách khác, với giả thiết D là tập có thể tích, dùng tiêu chuẩn khả tích 7.8, chú ý nếu f liên tục ở điểm nào thì $|f|$ cũng liên tục ở điểm đó.

3.33 Dùng 3.12.

3.34 Dùng tính chất hàm liên tục dương tại một điểm thì phải lớn hơn một số dương trong một lân cận của điểm đó.

3.35 Xét $D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

3.36 Dùng định nghĩa thể tích không và định nghĩa thể tích.

4.30 Giả sử phương của mặt cắt là phương của một trục tọa độ. Trường hợp tổng quát có thể dùng một phép xoay và dùng 5.42.

4.35 Dùng công thức Fubini hai lần, chú ý cách áp dụng để điều kiện áp dụng được thỏa.

4.36 Để xét tính có thể tích dễ dàng hơn có thể xét hình lăng trụ đứng trước (một hình lăng trụ nghiêng có thể được biến thành một hình lăng trụ đứng bằng cách dùng một biến đổi tuyến tính của cả không gian mang $\vec{v}$ thành vectơ $(\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$ trên trục đứng). Dùng phương pháp cắt lớp.

4.38 (b) Dùng ý ở bài 3.34.

5.23 Nửa trên của mặt elip là đồ thị của hàm $z = f(x, y) = \sqrt{(4 - x^2 - 2y^2)/3}$ với (x, y) thuộc về hình elip $x^2 + 2y^2 \le 4$. Vì elip có diện tích và hàm f liên tục, nên hàm f khả tích, và đồ thị của f có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự nửa dưới của mặt cũng có thể tích không, do đó elíp có thể tích không, nên khối elíp có thể tích.

5.24 Dùng máy tính vẽ hình. Biến đổi phương trình về dạng tổng bình phương. Đổi biến $u = x - y + 1, v = \sqrt{2}y$.

5.25 Dùng máy tính vẽ hình. Chú ý rằng miền D đối xứng qua trục Oy. Có thể được kết quả mà không cần tính trực tiếp tích phân. Để giải thích chính xác có thể dùng phép đổi biến $x \mapsto -x$.

5.35 Để xét tính có thể tích dễ dàng hơn có thể xét hình chóp cân trước (một hình chóp đáy là hình tròn có thể được biến thành một hình chóp cân bằng cách dùng một biến đổi tuyến tính của cả không gian). Biên của đáy có thể được phủ bởi hữu hạn hình chữ nhật hai chiều có tổng diện tích nhỏ tùy ý. Biên của khối nón gồm đáy và những điểm được chứa trong các hình nón với đỉnh là A và đáy là các hình chữ nhật trên.

5.41 Tích trong và độ lớn của vectơ liên hệ với nhau, chẳng hạn bởi công thức $x \cdot y = -\frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$. Có thể tham khảo [Mun91, tr. 173], [Vhh]. Để chứng tỏ tính tuyến tính của T, kiểm $T(x) \cdot a_i = x_i$, dẫn tới $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$.

5.45 Để chứng tỏ diện tích tam giác sinh bởi hai cạnh bằng nửa diện tích hình bình hành sinh bởi hai cạnh này, Có thể dùng tính bất biến của diện tích qua một phép dời hình 5.42, cụ thể hơn trong trường hợp này gồm một phép tịnh tiến và một phép đối xứng qua gốc tọa độ.

6.5 Đổi đơn vị giá sang triệu đồng/km^2.

6.7 Có thể thêm các giả thiết toán, như D có diện tích, hay D mở.

6.13 Tính $P((X,Y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 30, 0 \le y \le 30, |x-y| \ge 10\}$. Hàm mật độ xác suất của cặp biến (X,Y) là $1/30^2$.

7.13 Giả sử $x \in [0,1]$ là một số vô tỉ và $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy các số hữu tỉ hội tụ về x. Nếu dãy $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không tiến ra vô cùng thì sẽ có một số thực M và một dãy con $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho $q_{n_k} < M$ với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. Dãy $(p_{n_k}/q_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ chỉ gồm hữu hạn giá trị.

7.14 Tập hợp các số hữu tỉ là đếm được. Sử dụng một phép đếm và xây dựng chuỗi số dương có tổng bé tùy ý.

8.15 Dùng khung Frenet của đường. Giả sử với mọi s thì $D_{\gamma(s)} \subset B(\gamma(s), \frac{1}{k(s)})$, với $k(s) = |T'(s)| > 0$ là độ cong của đường γ tại $\gamma(s)$. Dùng bài 6.8. Có thể đọc thêm ở [R. Osserman, *Mathematics of the Gateway Arc*, Notices of the AMS, vol. 57, no. 2, 2010, p. 225].

8.22 Tính trơn dẫn tới đường có tính Lipschitz, tức là đường $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ thỏa có số M sao cho $\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \le M|s-t|$ với mọi $s,t \in [a,b]$. Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con bằng nhau. Phần đường $\gamma(t)$ với $t \in [t_i, t_{i+1}]$ chứa trong một hình vuông tâm tại $\gamma(t_i)$ với chiều dài cạnh $2M(b-a)/n$. Định lý đường cong Jordan trong Tôpô nói rằng một đường liên tục, đơn, đóng trong mặt phẳng là biên của một miền liên thông bị chặn. Do đó một đường đi trơn, đơn, đóng thì bao một miền có diện tích.

9.14 $g \approx \frac{MG}{R^2}$ trong đó R là bán kính Quả đất. $C \approx mgR$.

9.15 Tính liên thông được thảo luận trong các tài liệu môn Tôpô, chẳng hạn [Vto].

9.16 Xem kĩ thuật ở phần chứng minh của 8.7.

10.19 Dùng công thức Green cho miền không đơn giản.

10.28 Dùng Bài tập 10.14.

10.30 Dùng tính liên thông của D và kĩ thuật ở Bài tập 3.34.

10.32 Tham khảo Bài tập 9.15. Trên tập con mở của $\mathbb{R}^n$ thì tính liên thông và tính liên thông đường là trùng nhau, xem chẳng hạn [Vto].

10.34 Có thể tham khảo [BMGT].

10.35 Dùng kĩ thuật ở Bài tập 3.34.

11.25 Mặt nón cân là một mặt tròn xoay. Diện tích bằng $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$.

11.28 Dùng tính đối xứng. Tương tự Bài tập 5.25.

14.3 Tương tự Bài tập 10.35.

15.5 Dùng tính chất với ma trận A thì $\langle A \cdot x, A \cdot y\rangle = \langle A^T \cdot A \cdot x, y\rangle$.

15.6 Dùng bài 15.5. Tham khảo chứng minh của Mệnh đề 11.7.

15.8 Tham khảo Bài tập 13.1.

 GỢI Ý CHO MỘT SỐ BÀI TẬP

Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính

Phần này chỉ dẫn sơ lược các phần mềm tính toán trên máy tính phục vụ cho môn học Giải tích 3A. Tài liệu hướng dẫn chi tiết hơn một số lệnh và ví dụ có ở trang web: `https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

GeoGebra Miễn phí, có phiên bản cho web, cho máy tính, cho điện thoại, dễ sử dụng để vẽ hình: `https://www.geogebra.org`
Kho tài nguyên có nhiều minh họa: `https://www.geogebra.org/math`

Matlab Đang được dùng phổ biến trong giảng dạy và nghiên cứu:
`https://www.mathworks.com`
Tài liệu hướng dẫn cho Matlab có ở phần Help của chương trình. Hướng dẫn cho Phép tính vi tích phân:
`https://www.mathworks.com/help/symbolic/calculus.html`
Hướng dẫn vẽ hình:
`https://www.mathworks.com/help/symbolic/graphics.html`

Octave Miễn phí và phần lớn tương thích với Matlab:
`https://octave.org`
Có thể chạy trên web không cần cài đặt trên máy tính:
`https://cocalc.com/features/octave`
Hướng dẫn gói tính toán kí hiệu:
`https://wiki.octave.org/Symbolic_package`

Maxima Miễn phí, kích thước tương đối nhỏ, có giao diện thực đơn dễ dùng:
`http://maxima.sourceforge.net`
Nên cài giao diện wxmaxima. Tài liệu hướng dẫn chủ yếu là phần Giúp đỡ (Help) của chương trình.

Wolfram Alpha Miễn phí trên web ở `https://www.wolframalpha.com`

Tài liệu tham khảo

[Ang97] Đặng Đình Áng, *Lý thuyết tích phân*, NXB Giáo Dục, 1997.

[Apo69] Tom M. Apostol, *Calculus*, vol. 2, John Wiley and Sons, 1969.

[Arn89] Vladimir I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., Springer, 1989.

[Buc78] Greighton Buck, *Advanced calculus*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1978.

[BMGT] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Vi tích phân 1 và 2*, Khoa Toán - Tin học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên ĐHQG-HCM, `https://sites.google.com/view/math-hcmus-edu-vn-giaitich`

[Duc06] Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải Tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

[Euclid] Euclid, *Cơ sở của hình học*, NXB Tri Thức, 2022.

[Eva97] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 1997.

[Fey64] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Mathew Sands, *The Feynman's lectures in Physics*, vol. 2, Addison-Wesley, 1964.

[Fol01] Gerald B. Folland, *Advanced Calculus*, Pearson, 2001.

[GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[Fic77] G. M. Fichtengôn, *Cơ sở Giải tích toán học*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977. Bản tiếng Anh: G. M. Fichtengolt's, *The fundamentals of Mathematical Analysis*, Pergamon Press, 1965.

[Kap02] Wilfred Kaplan, *Advanced calculus*, 5th ed., Addison-Wesley, 2002.

[Kel29] Oliver Dimon Kellogg, *Foundations of potential theory*, Springer, 1929.

[Khu10] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải, *Giải tích toán học*, tập 2, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997.

[LDP02] Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển, Tạ Duy Phượng, *Giải tích các hàm nhiều biến*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[Mor00] Frank Morgan, *Geometric measure theory: A beginner's guide*, Academic Press, 2000.

[MT03] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, *Vector calculus*, Freeman, 2003.

[Mun91] James Munkres, *Analysis on manifolds*, Addison-Wesley, 1991.

[Mun00] James Munkres, *Topology a first course*, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

[PTT02] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích - hàm nhiều biến*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2002.

[Ros20] Sheldon Ross, *A first course in Probability*, 10th ed., Pearson, 2020.

[Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.

[Rud86] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, 1986.

[SGKPT] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Sách giáo khoa các môn toán lớp 1 tới lớp 12 chương trình 2017*, NXB Giáo dục.

[Sja06] Reyer Sjamaar, *Manifolds and differential forms*, Cornell University, 2006.

[Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, 1965.

[Spi94] Michael Spivak, *Calculus*, 3rd ed., Publish or Perish, 1994.

[SS05] Elias M. Stein and Rami Sharkachi, *Real Analysis*, Princeton University Press, 2005.

[Ste16] James Stewart, *Calculus: Early transcendentals*, 8th ed., Brooks/Cole, 2016. Có bản dịch tiếng Việt cho lần xuất bản thứ 7, NXB Hồng Đức 2016.

[SH16] Gilbert Strang, Edwin "Jed" Herman, *Calculus*, OpenStax, 2016, Vol 3,
`https://openstax.org/details/books/calculus-volume-3`

[TPTT02] Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, *Giải tích hàm một biến*, NXB Giáo dục, 2002.

[TTQ11] Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình Giải tích 2*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2011.

[TTV] Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng Giải tích hàm*,
`https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

[VSt] Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng Dạng vi phân và Công thức Stokes*,
`https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

[Vto] Huỳnh Quang Vũ, *Lecture notes on Topology*,
`https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

[Vhh] Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng Hình học vi phân của đường và mặt*,
`https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

[Vnt] Huỳnh Quang Vũ, *Bổ sung cho môn Nền tảng của phép tính Vi tích phân*,
`https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

[YF20] Hugh D. Young, Roger A. Freedman, *University physics with modern physics*, 15th ed., Pearson, 2020.

[Zor04] Vladimir A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer, 2004.

Chỉ mục

bổ đề Poincaré, 144, 176

chiếu vuông góc, 120
chiều dài của đường đi, 117
curl, 171
có độ đo không, 99
công thức Fubini, 41
Công thức Gauss–Ostrogradsky, 178
Công thức Green, 139
công thức Green, 148, 151, 184, 199
công thức Newton–Leibniz, 131
công thức Pappus, 95
Công thức Phân tán (Divergence), 178
công thức Stokes, 174, 195, 199
    dạng tham số, 171
công thức tích phân từng phần, 151
công thức đổi biến, 62

div, 148, 178
dòng, 152
dạng vi phân, 195

Định lý cơ bản của tích phân đường, 131
đa tạp trơn, 195
đường chính quy từng khúc, 178
đường cong, 124
    hướng tiếp tuyến, 127
    định hướng, 124
đường đi, 116
    chính quy, 123
    cùng định hướng, 124
    liên tục, 116
    trái định hướng, 124
    vết, 116
    đóng, 116
    đơn, 116
đạo hàm, 60
đạo hàm Fréchet, 60
đạo hàm theo hướng, 61, 151
định hướng tương thích của biên, 173
định luật Faraday, 189
định lý hàm ngược, 62
độ cong, 129
độ đo Lebesgue, 109
động năng, 134

giá trị chính quy, 137
giá trị trung bình, 83

hàm Gamma, 94
hàm mật độ, 83
hàm mật độ xác suất, 85
hàm thế, 131
hàm điều hòa, 152, 184
hàm đo được Lebesgue, 109
hàm đặc trưng, 29
hình hộp, 7
    con, 9
    thể tích, 8
hầu khắp, 100
hầu như khắp nơi, 100
hệ con săn mồi–con mồi, 152

khoảng, 5
khả tích, 28
khả tích Darboux, 14
khả tích Riemann, 10
khả vi liên tục, 59
khả vi từng khúc, 119

khối chóp, 78
khối lăng trụ, 57
khối nón, 78
khối đơn giản với biên trơn từng mảnh, 178
khối ống, 129

ma trận Jacobi, 59
miền, 28
miền hình sao, 144
miền đơn giản, 45, 48
miền đơn liên, 147
mặt, 155
    biên, 173
    chính quy, 162
    diện tích, 157
    hướng lên, 163
    vết, 155
    đơn, 162
    định hướng, 163
mặt cong, 163

phân hoạch, 8
phép chia, 8
    khoảng con, 8
    mịn hơn, 12
phép dời hình, 80
phép đổi biến, 61
phương pháp cắt lớp, 39

quy tắc bàn tay phải, 155, 163

tham số hóa, 156
thông lượng, 148, 159
thế năng, 134
thể tích, 29
toán tử Laplace, 151
trơn, 59
    đường đi, 116
trường
    bảo toàn, 131
    gradient, 131
tích phân, 28
tích phân Darboux, 14
tích phân Lebesgue, 110
tích phân lặp, 39
tích phân mặt
    loại hai, 160
    loại một, 158
tích phân Riemann, 10
tích phân từng phần, 199
tích phân đường
    loại hai, 120
    loại một, 118
    độc lập với đường đi, 131
tập
    có thể tích không, 23
tập mức, 137
tọa độ cầu, 70
tọa độ trụ, 68
tổng dưới, 12
tổng Riemann, 9
tổng trên, 12

vectơ
    tích có hướng, 154
vectơ gradient, 59
vectơ pháp tuyến, 154
vectơ pháp tuyến ngoài, 147
vectơ pháp tuyến đơn vị, 168
vi đồng phôi, 61
    bảo toàn định hướng, 63
    đảo ngược định hướng, 63