BÀI TẬP VI TÍCH PHÂN 2A

Bộ môn Giải Tích
Khoa Toán - Tin học
Trường Đại học Khoa học tự nhiên

Ngày 3 tháng 4 năm 2024

Mục lục

Chương 1

Chuỗi số

BUỔI SỐ 1

1.1 Lý thuyết

Sinh viên cần nắm được các định nghĩa:

1. Thế nào là chuỗi số và tổng riêng phần của chuỗi số?

2. Khi nào chuỗi số hội tụ, khi nào chuỗi số phân kỳ?

3. Định lý (Điều kiện cần của sự hội tụ) và Định lý (Điều kiện cần và đủ cuả sự hội tụ)

4. Thế nào là chuỗi số dương? Bao gồm: Định nghĩa, Định lý (Điều kiện cần và đủ để chuỗi số dương hội tụ), Tiêu chuẩn tích phân, Tiêu chuẩn so sánh (dạng bất đẳng thức), Tiêu chuẩn so sánh (dạng giới hạn), Tiêu chuẩn Cauchy, Tiêu chuẩn D'Alembert.

1.2 Bài tập

Bài tập 1.1. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ và $\sum_{i=m}^{\infty} u_i$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Khi chúng hội tụ xác định α sao cho $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \alpha + \sum_{i=m}^{\infty} u_i$.

Bài tập 1.2. Chứng minh rằng, nếu chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ hội tụ thì

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \left| \sum_{t=n}^{\infty} u_t \right| < \varepsilon.$$

Bài tập 1.3. Cho hai chuỗi số hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ có tổng lần lượt là a và b. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, với $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ cũng hội tụ và có tổng lần lượt là $a + b$ va αa.

Bài tập 1.4. Chứng minh rằng với $|x| < 1$ và $m \in \mathbb{N}$ thì ta có $\sum_{n=m}^{\infty} x^n = \dfrac{x^m}{(1-x)}$.

Bài tập 1.5. Xét tính hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n)}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1.5...(4n-3)}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(2n+1)2^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^3+n+9}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^3(n)}{n^4}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3...(2n-1)}{1.5...(4n-3)}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$

Gợi ý: tất cả chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

Bài tập 1.6. Tìm p để chuỗi số hội tụ

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p(n)}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^p(n)}$

Gợi ý: Xét 2 trường hợp $p < 0$ và $p > 0$.

Bài tập 1.7. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \lg \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ hội tụ.

Gợi ý: Chứng minh $S_n = u_1 + ... + u_n < \lg \dfrac{2(n+1)}{n+2} < \lg 2$.

Bài tập 1.8. Chứng minh rằng dãy tổng riêng phần của một chuỗi số dương là một dãy tăng.

Bài tập 1.9. (Định lý Albel hay Pringsheim) Nếu a_n là một dãy các số dương giảm và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Gợi ý: $na_{2n} \le a_n + a_{n+1} \le ... \le a_{2n} \le 0$ và $(2n+1)a_{2n+1} \le \dfrac{2n+1}{2n} 2na_{2n} \to 0$.

Bài tập 1.10. Cho $p, q, a > 0$. Khảo sát theo p, q sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p}{n^q + a}$.

Gợi ý: Dùng định lý chuỗi điều hòa.

BUỔI SỐ 2

1.3 Lý thuyết

Sinh viên cần nắm được

1. Định nghĩa chuỗi số có dấu bất kỳ, chuỗi đổi dấu, chuỗi đan dấu.

2. Định nghĩa hội tụ tuyệt đối. Định lý (hội tụ tuyệt đối thì hội tụ).

3. Tiêu chuẩn Cauchy, tiêu chuẩn D'Alembert, Tiêu chuẩn Leibniz, tiêu chuẩn Dirichlet.

4. Định nghĩa chuỗi hàm, Chuỗi lũy thừa, cách đánh giá sự hội tụ và quy tắc tìm bán kính hội tụ.

1.4 Bài tập

Bài tập 1.11. Xét tính hội tụ của cá chuỗi sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{(n+1)^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$

3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln}{\sqrt{n}}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}e^{-n}$

Bài tập 1.12. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+3)\cos 3n}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3-4\cos n}{\sqrt{n^3}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin n}{n^2}$

Bài tập 1.13. Chứng minh rằng nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ hội tụ thì $|\sum_{n=1}^{\infty}a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi mọi a_n cùng dấu.

Bài tập 1.14. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+a)^p}$, với $a>0$, hội tụ tuyệt đối khi $p>1$, hội tụ có điều kiện khi $0<p\leq 1$ và phân kỳ khi $p\leq 0$.

Bài tập 1.15. Tìm miền hội tụ của chuỗi và tính tổng chuỗi.

1) $\sum_{n=0}^{\infty}ax^{2n+1}$, với $(a\neq 0)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{(2+x)^n}$, với $(a\neq 0)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{nx}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n x$

Bài tập 1.16. * Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2(1+x^n)}$

1. Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[0,+\infty)$.

2. Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[-a,a]$ trong đó $0<a<1$.

3. Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[b,+\infty)$ trong đó $b>-1$.

4. Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $(-\infty,-c]$ trong đó $c>1$.

Bài tập 1.17. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n.\ln n}$

6. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

Bài tập 1.18. Chứng minh rằng $|x|<1$ thì

1. $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...$

2. $\frac{2}{(1-x)^3}=2+3.2x+4.3x^2+...+(n+2)(n+1)x^n+...$

Bài tập 1.19. Nếu $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, chứng minh rằng

$$\int_0^{\pi/2}f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Bài tập 1.20. Cho $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(\ln n)^2}$, với $-1\leq x\leq 1$. Tính $f'(x)$.

Chương 2

Không gian $\mathbb{R}^n$

2.1 Lý thuyết

Buổi 3

1. Không gian $\mathbb{R}^n$ (tập trung vào $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$), các tính chất của vectơ.
2. Chuẩn Euclide, khoảng cách, tích vô hướng.
3. Góc giữa hai vectơ, phép chiếu vuông góc, tích hữu hướng.
4. Phương trình đường thẳng, phương trình mặt phẳng.
5. Tập mở, tập đóng.

2.2 Chuẩn Euclide, khoảng cách, tích vô hướng

Chứng minh các kết quả trong slide.

Bài tập 2.1. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n$ ta có

i) $\|x\| \geq 0$.

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

Bài tập 2.2. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có

i) $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

Bài tập 2.3. Chứng minh rằng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

iii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Bài tập 2.4. Chứng minh rằng với mọi vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có

a) $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

b) $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

Bài tập 2.5. Chứng minh rằng với mọi vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$, nếu $\|y\| = 1$, thì

$$\|x\|^2 = (\langle x, y\rangle)^2 + \|x - (\langle x, y\rangle)\, y\|^2 .$$

2.3 Hình học trong $\mathbb{R}^n$

Bài tập 2.6. (Đẳng thức hình bình hành) Chứng minh rằng với mọi vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Hãy giải thích ý nghĩa hình học của đẳng thức trên.

Bài tập 2.7. (Công thức Pythagore) Chứng minh rằng với mọi vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$ thỏa $x \perp y$, tức là $\langle x, y\rangle = 0$, thì ta có

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Hãy giải thích ý nghĩa hình học của đẳng thức trên.

Bài tập 2.8. Chứng minh rằng với mọi vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$\left(x - \left(\left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right)\right) \perp y.$$

Bài tập 2.9. Chứng minh rằng với mọi vectơ $a, b \in \mathbb{R}^3$ ta có

a) $(a \times b) \perp a$ và $(a \times b) \perp b$.

b) $a \times b = -b \times a$.

Bài tập 2.10. Chứng minh rằng với mọi vectơ $a, b \in \mathbb{R}^3$ ta có

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (\langle a, b\rangle)^2 .$$

Bài tập 2.11. Chứng minh rằng với mọi vectơ $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ta có

a) $a \times b = b \times c = c \times a$ khi $a + b + c = 0$.

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$.

Bài tập 2.12. Chứng minh rằng với mọi vectơ $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ta có

a) $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle\, b - \langle a, b\rangle\, c$.

b) Sử dụng kết quả trên để chứng minh *Đẳng thức Jacobi*

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$

Bài tập 2.13. Viết phương trình đường thẳng

a) Đi qua điểm $(2, 0)$ với vectơ chỉ phương $(-1, 0)$.

b) Đi qua điểm $(0, -3)$ với vectơ chỉ phương $(2, 3)$.

c) Đi qua hai điểm $(1, 2)$ và $(3, 0)$.

d) Đi qua hai điểm $(-1,1)$ và $(1,2)$.

e) Đi qua điểm $(2,0,0,-3)$ với vectơ chỉ phương $(-1,0,2,3)$.

f) Đi qua hai điểm $(1,2,-1,1)$ và $(3,0,1,2)$.

Bài tập 2.14. Viết phương trình mặt phẳng

a) Đi qua ba điểm $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

b) Đi qua ba điểm $(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$.

c) Đi qua điểm $(2,1,3)$ và song song (có cùng pháp tuyến và không trùng) với mặt phẳng $-5x+2y-4z=3$.

Bài tập 2.15. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $ax+by+cz+d_1=0$ và $ax+by+cz+d_2=0$ là

$$D=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

2.4 Tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$

Bài tập 2.16. Tìm tất cả các điểm dính, điểm tụ của các tập được cho sau đây:

a) $A=(-\infty,1)$

b) $B=(-1,1)$

c) $C=(-2,2]$

d) $D=[-1,1]$

e) $E=(-5,2]\cup\{3\}$

f) $F=(-1,1]\times(0,2]$

g) $G=\{(x,y):\ -10\le x\le 10, 0<y\le 1\}$

h) $H=\big\{(x,y): y\ge 0, x\ge 0, x^2+y^2<1\big\}$

Bài tập 2.17. Chứng minh các tập sau đây là tập đóng hoặc tập mở:

a) $A=[-1,1]$

b) $B=(-1,1)$

c) $C=(-1,1)\times(-1,1)$

d) $D=[0,1]\times[0,1]$

e) $E=\big\{(x,y): x^2+y^2<2\big\}$

f) $F=\{(x,y): 0\le x\le 1, 3\le y\le 4\}$

g) $G=\big\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 5\big\}$

h) $H=\{(x,y): x>1, y>1\}$

i) $I=\big\{(x,y): 144-4x^2-9y^2>0\big\}$

j) $J=\big\{(x,y): x^2+y^2\ge 1\big\}$

Bài tập 2.18. Tìm các điểm trong, điểm biên. Kiểm tra xem các tập hợp được cho có là tập đóng hay không.

a) $A=\{(x,y): 0\le x\le 1, 2\le y\le 3\}$.

b) $B=\{(x,y): 2<x<4, 1<y<3\}$.

c) $C=\big\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4\big\}$.

d) $D=\big\{(x,y): 2\le x^2\le 5\big\}$.

e) $E=\big\{(x,y): y\le x^2\big\}$.

f) $F=\big\{(x,y): x+y\le x^2\big\}$.

g) $G=\big\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 5\big\}$.

h) $H=\big\{(x,y,z): 1\le x\le 2, y\le x^2\big\}$.

i) $I=\big\{(x,y): 3\le x\le 4, x\le y\le x^2\big\}$.

j) $J=\big\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, x+y\le z\le 4x\big\}$.

Chứng minh các kết quả trong giáo trình.

Bài tập 2.19. Chứng minh rằng quả cầu bỏ đi tâm $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}$ có tâm x là điểm tụ.

Bài tập 2.20. Chứng minh rằng quả cầu $B(x,\varepsilon)$ là tập mở.

Bài tập 2.21. Chứng minh rằng quả cầu đóng $B'(x,\varepsilon)$ và mặt cầu $S(x,\varepsilon)$ là các tập đóng.

Bài tập 2.22. Chứng minh rằng mặt cầu $S(x,\varepsilon)$ là biên của quả cầu $B(x,\varepsilon)$.

Bài tập 2.23. Chứng minh rằng tập $D=[0,1)$ không là tập mở cũng không là tập đóng.

Chương 3

Hàm số nhiều biến

3.1 Giới hạn của hàm số nhiều biến

Bài tập 3.1. Chứng minh các giới hạn được cho sau đây bằng định nghĩa (ε, δ) với chuẩn Euclide.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} \left(x^2+y^2-2x-2y-2\right) = 4$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(16x^2+16y^2+16x-8y-11\right) = 69$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},1\right)} \left(x^2+y^2-4x+6y-3\right) = \dfrac{9}{4}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(x^2+y^2-2x\right) = 0$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} \left(x^2+y^2-2xy\right) = 0$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left(x^2+y^2\right) = 1$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (xy) = 2$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left(2x^2+3y^2\right) = 3$

Bài tập 3.2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{2+3x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left(1+x^2y^2\right)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,5)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{1}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y\sin(x)}{x}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} x\cos\left(\frac{x-y}{4}\right)$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$

Bài tập 3.3. Các hàm số sau có giới hạn tại $(0,0)$ hay không?

a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y) = \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

e) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y}$

f) $f(x,y) = \frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

g) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h) $f(x,y) = \frac{3xy^2}{x^2+y^2}$

i) $f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$

j) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

k) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

l) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

Bài tập 3.4. Hãy khảo sát chung giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2},$$

với a và b là hai số thực không âm.

3.2 Tính liên tục của hàm số nhiều biến

Bài tập 3.5. Sử dụng định nghĩa (ε, δ) của tính liên tục để khảo sát sự liên tục của các hàm số tại các điểm được cho sau đây

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ tại $(2,1)$

b) $f(x,y) = 1 - x + y$ tại $(1,1)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Bài tập 3.6. Khảo sát tính liên tục bằng định nghĩa (ε, δ) với chuẩn Euclide cho các hàm được cho sau đây

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Bài tập 3.7. Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau đây

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^3\cos\left(\dfrac{x+y}{x^4+y^6}\right) & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,1) \end{cases}$

Bài tập 3.8. Xác định giá trị của a để các hàm số sau liên tục tại $(0,0)$

a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

Bài tập 3.9. Khảo sát sự liên tục của các hàm số sau

a) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Chương 4

Đạo hàm của hàm số nhiều biến

4.1 Đạo hàm riêng

Bài tập 4.1. Tìm các đạo hàm riêng cho các hàm sau, viết ∇f:

a) $f(x,y) = \sin(x \sin y)$

b) $f(x,y,z) = x^y$

c) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

d) $f(x,y,z) = x^2 e^{yz^2}$

Bài tập 4.2. Sử dụng định nghĩa đạo hàm riêng như là giới hạn để tính các đạo hàm riêng sau đây

a) $f(x,y) = xy^2 - x^3 y$

b) $f(x,y) = \frac{x}{x+y^2}$

Bài tập 4.3. Cho

$$f(x,y) = \int_x^y \sqrt{1+t^3}dt.$$

Tìm $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Bài tập 4.4. Sử dụng định nghĩa đạo hàm riêng như là giới hạn để tính các đạo hàm riêng tại điểm được chỉ rõ sau đây

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ tại $(x,y) = (0,0)$

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ tại $(x,y) = (0,0)$

Bài tập 4.5. Cho $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \quad \text{và} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$

Bài tập 4.6. Mô hình Holling trong Sinh học cho lượng con mồi bị ăn thịt P trong khoảng thời gian cho trước T theo số lượng con săn mồi x và thông số thời gian cần để bắt một con mồi y theo công thức

$$P(x,y) = \frac{aTx}{1+axy},$$

trong đó $a > 0$ là một hệ số không đổi.

a) Tính P_x. Giá trị của P_x là âm hay dương? Giải thích ý nghĩa của điều này.

b) Tính P_y. Giá trị của P_y là âm hay dương? Giải thích ý nghĩa của điều này.

4.2 Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính

Bài tập 4.7. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của hàm số đã cho tại điểm cho trước

a) $z = x^4 - y^2$ tại $(x, y) = (3, 2)$.

b) $z = x^2 y$ tại $(2, 1, 4)$.

c) $z = e^x \cos(y)$ tại $(0, 0, 1)$.

d) $z = \ln\left(x^2 + y^4 + 1\right)$ tại $(0, 0, 0)$.

Bài tập 4.8. Tìm xấp xỉ tuyến tính của các hàm sau đây

a) $f(x, y) = x^2 y^3$ gần điểm $(x, y) = (2, 1)$.

b) $f(x, y) = x^y + x e^y$ gần điểm $(x, y) = (1, 0)$.

Bài tập 4.9. Cho hàm số $f(x, y) = x - xy + y^2$.

a) Tìm xấp xỉ tuyến tính của f gần điểm $(x, y) = (5, 6)$.

b) Viết phương trình mặt phẳng tiêp xúc của đồ thị ở điểm $(x, y) = (5, 6)$.

c) Ước lượng giá trị của $f(5.1, 5.9)$.

Bài tập 4.10. Cho hàm số $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) Tìm xấp xỉ tuyến tính của f gần điểm $(x, y) = (3, 4)$.

b) Từ đó tính xấp xỉ giá trị của $\frac{1}{\sqrt{(2.99)^2+(4.01)^2}}$.

4.3 Đạo hàm riêng cấp cao

Bài tập 4.11. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $V(r, h) = \pi r^2 h$

b) $f(x, y) = e^{xy}$

c) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

d) $z(x, y) = x^y$

e) $z(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

f) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

g) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$

h) $f(x, y, z) = x^4 y^2 z^3$

Bài tập 4.12. Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm *điều hòa* hai biến nếu f thỏa phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra xem các hàm sau có phải là hàm điều hòa hai biến hay không

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

c) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

d) $f(x, y) = (e^y + e^{-y}) \sin(x)$

e) $f(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

f) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Bài tập 4.13. Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm *điều hòa* ba biến nếu f thỏa phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra xem các hàm sau có phải là hàm điều hòa ba biến hay không

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b) $f(x,y,z) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

d) $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$

Bài tập 4.14. Hãy kiểm tra rằng hàm $u(x,t) = e^{-ak^2t}\sin(kx)$, với a và k là các hằng số thực cho trước, thỏa *phương trình truyền nhiệt*

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t).$$

Bài tập 4.15. Hãy kiểm tra rằng hàm sau đây thỏa *phương trình truyền sóng*

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),$$

với a là một hằng số thực cho trước.

a) $u(x,t) = (x - at)^6 + (x + at)^6$.

b) $u(x,t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$.

c) $u(x,t) = \sin(kt)\sin(akt)$, trong đó k là một hằng số thực cho trước.

d) $u(x,t) = \frac{t}{a^2t^2 - x^2}$.

e) $u(x,t) = (2\cos(at) + 3\sin(at))\sin(x)$.

Bài tập 4.16. Hãy kiểm tra rằng hàm $u(x,t) = f(x + at) + g(x - at)$, với a là một hằng số thực, thỏa *phương trình truyền sóng*

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),$$

bằng hai cách.

a) Thế trực tiếp.

b) Đặt ẩn phụ

$$y = x + at \quad \text{và} \quad z = x - at.$$

Hãy so sánh kết quả với bài tập ở trên.

Bài tập 4.17. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của $f(x,y)$. Kiểm tra rằng hai đạo hàm hỗn hợp là bằng nhau, tức là $f_{xy} = f_{yx}$, với hàm f được cho bởi

a) $f(x,y) = x^3y$

b) $f(x,y) = 3e^{xy^3}$

c) $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^3\right)$

d) $f(x,y) = \ln(x + 2y)$

Bài tập 4.18. Mục đích của bài tập này là cho một ví dụ để cho thấy đạo hàm hỗn hợp f_{xy} và f_{yx} không phải luôn bằng nhau. Cụ thể, xét hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Tính $f_x(x,y), f_y(x,y)$ tại $(x,y) \neq (0,0)$ và $(x,y) = (0,0)$. Từ đó suy ra biểu thức của $f_x(0,y), f_y(x,0)$.

b) Dùng kết quả câu trên để tính $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ tại $(x,y) = (0,0)$ và $(x,y) \neq (0,0)$. Từ đó suy ra $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

c) Hãy kiểm tra xem giả thiết nào của định lý Clairaut-Schwarz bị vi phạm trong ví dụ này?

Bài tập 4.19. Sử dụng định lý Clairaut-Schwarz để chứng minh rằng nếu các đạo hàm riêng cấp ba của f liên tục thì

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}.$$

4.4 Đạo hàm theo hướng

Bài tập 4.20. Tìm đạo hàm theo hướng của hàm tại điểm đã cho theo hướng của vectơ đã cho. Lưu ý lấy vectơ đơn vị để chỉ hướng.

a) $f(x, y) = y\sqrt{x}$ tại điểm $(1, 2)$ theo hướng của vectơ $(2, 3)$.

b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ tại điểm $(-2, 2)$ theo hướng của vectơ $(1, -1)$.

c) $f(x, y) = ye^{x^2}$ tại điểm $(0, 1)$ theo hướng của vectơ $(1, 3)$.

d) $f(x, y) = 5x^2y^3$ tại điểm $(1, 1)$ theo hướng từ điểm $(1, 1)$ tới điểm $(3, 2)$.

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2y - y^3}$ tại điểm $(2, 1)$ theo hướng từ điểm $(2, 1)$ tới điểm $(1, 3)$.

f) $f(x, y) = x^4 - xy + y^3$ tại điểm $(1, 2)$ theo hướng tạo một góc $60°$ với trục x.

Bài tập 4.21. Xét hàm $f(x, y) = 1 + \ln(xy - 5)$

a) Tìm $\nabla f(x, y)$ tại điểm $A = (2, 3)$.

b) Tìm tuyến tính hóa (xấp xỉ tuyến tính) của f tại điểm A.

c) Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của f tại điểm A.

d) Tính tỉ lệ biến thiên của f tại A theo góc chỉ hướng $\theta = {}^{3\pi}/_{4}$. Theo hướng này thì giá trị của hàm f tăng hay giảm?

e) Từ A đi theo hướng nào thì giá trị của hàm f tăng nhanh nhất? Chú ý lấy vectơ đơn vị chỉ hướng.

Bài tập 4.22. a) Chứng minh rằng một hàm có khả vi f giảm nhanh nhất tại điểm x theo hướng ngược với vectơ gradient, nghĩa là theo hướng của $-\nabla f(x)$.

b) Sử dụng kết quả trên để tìm ra hướng mà hàm số $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ giảm nhanh nhất tại điểm $(2, -3)$.

Bài tập 4.23. Chứng minh rằng hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ liên tục và đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại tại điểm gốc tọa độ $(x, y) = (0, 0)$ nhưng đạo hàm theo hướng của tất cả các hướng còn lại thì không tồn tại.

Bài tập 4.24. Đặt hệ tọa độ trên một vùng trên mặt phẳng sao cho hướng trục x là hướng đông và hướng trục y là hướng bắc. Nhiệt độ tại một điểm có tọa độ (x, y) trong vùng được mô hình hóa bởi công thức $T(x, y) = 100e^{-2x^2+3y^2}$. Tại điểm có tọa độ $(1, 2)$:

a) Nếu đi về hướng đông thì nhiệt độ tăng hay giảm?

b) Nếu đi về hướng đông bắc thì nhiệt độ tăng hay giảm?

c) Nên đi theo hướng nào để nhiệt độ giảm nhanh nhất?

Bài tập 4.25. Giả sử ta đang đi trên một ngọn núi. Đặt hệ tọa độ mà trục x chỉ hướng Đông, trục y chỉ hướng Bắc, và trục z chỉ hướng vuông góc ra khỏi mặt đất. Độ cao của ngọn núi được cho bởi $z = 1000 - 2x^2 + 3xy - 5y^2$. Ta đang ở tại điểm ứng với $x = 1, y = 0$ trên núi.

a) Nếu ta đi theo hướng Nam thì sẽ đi lên cao hơn hay xuống thấp hơn?

b) Nếu ta đi theo hướng Tây-Bắc thì sẽ đi lên cao hơn hay xuống thấp hơn?

c) Muốn đi xuống nhanh nhất thì nên đi theo hướng nào?

4.5 Khả vi Fréchet

Bài tập 4.26. Khảo sát tính khả vi của ánh xạ $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = |x| + |y|.$$

Bài tập 4.27. Khảo sát tính khả vi của ánh xạ $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \max\{x,y\}.$$

Bài tập 4.28. Cho $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0$ tại mọi điểm x thì hàm f không phụ thuộc vào biến thứ nhất.

Bài tập 4.29. Cho $D \subseteq \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon -1 \le x \le 0, \frac{1}{2} \le |y| \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\right\}.$$

Xét hàm số $f\colon D \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x \le 0, y \le 0 \\ x^2 & \text{khi } x \le 0, y > 0 \\ 0 & \text{khi } x \ge 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ với mọi $(x,y) \in D$. Chú ý rằng f thay đổi theo y.

Bài tập 4.30. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

không khả vi tại $(0,0)$.

Bài tập 4.31. Chứng minh rằng hàm số $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ không khả vi tại $(0,0)$.

Bài tập 4.32. Chứng minh rằng hàm số $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa $|f(x)| \le \|x\|^2$ khả vi tại $(0,0,\ldots,0)$.

Bài tập 4.33. Cho g là hàm liên tục trên đường tròn đơn vị $\left\{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\| = 1\right\}$ thỏa $g(0,1) = g(1,0)$ và $g(-x) = -g(x)$. Xét hàm số $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| \, g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{khi } x \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } x = (0,0) \end{cases}.$$

a) Chứng minh rằng hàm số $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi đẳng thức $h(t) = f(tx)$ là hàm khả vi.

b) Chứng minh rằng f không khả vi tại $(0,0)$ trừ khi $g = 0$.

4.6 Hàm vectơ

Bài tập 4.34. a) Phác họa đường cong phẳng với phương trình vectơ cho trước.

b) Tìm $\overrightarrow{r}'(t)$.

c) Phác họa vectơ vị trí $\overrightarrow{r}(t)$ và vectơ tiếp tuyến $\overrightarrow{r}'(t)$ tại giá trị t cho trước.

- $\overrightarrow{r}(t) = \left(t-2, t^2+1\right), t = -1$
- $\overrightarrow{r}(t) = \left(e^t, e^{-t}\right), t = 0$
- $\overrightarrow{r}(t) = (\sin(t), 2\cos(t)), t = \pi/4$
- $\overrightarrow{r}(t) = (1+\cos(t), 2+\sin(t)), t = \pi/6$

Bài tập 4.35. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị $\overrightarrow{T}(t)$ tại giá trị của tham số t cho trước.

a) $\overrightarrow{r}(t) = \left(t^3+3t, t^2+1, 3t+4\right)$ tại $t = 1$

b) $\overrightarrow{r}(t) = \left(4\sqrt{t}, t^2, t\right)$ tại $t = 1$

c) $\overrightarrow{r}(t) = (\cos(t), 3t, 2\sin(2t))$ tại $t = 0$

d) $\overrightarrow{r}(t) = \left(\sin^2(t), \cos^2(t), \tan^2(t)\right)$ tại $\pi/4$

Bài tập 4.36. Viết phương trình tham số của tiếp tuyến của đường cong với phương trình tham số cho trước tại một điểm được chỉ rõ.

a) $x = 1+2\sqrt{t}, y = t^3 - t, z = t^3 + t$ tại $(3, 0, 2)$

b) $x = e^t, y = te^t, z = te^{t^2}$ tại $(1, 0, 0)$

c) $x = e^{-t}\cos(t), y = e^{-t}\sin(t), z = e^{-t}$ tại $(1, 0, 1)$

d) $x = \sqrt{t^2+3}, y = \ln\left(t^2+3\right), z = t$ tại $(2, \ln(4), 1)$

Bài tập 4.37. Đặt $\overrightarrow{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Hãy kiểm tra rằng

$$\nabla\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{r}\|}\right) = -\frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3}.$$

4.7 Ma trận Jacobi

Bài tập 4.38. Tìm ma trận Jacobi trong các trường hợp sau

a) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ với $u = 2x - 3y, v = -x + 2y$.

b) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ với $u = \frac{y}{\tan(x)}, v = \frac{y}{\sin(x)}, y > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c) $\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$ với $y_1 = x_1x_2x_3, y_2 = x_1^3x_3$.

d) $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y)}$ với $u = x\cos(y), v = x\sin(y), w = x^2$.

Bài tập 4.39. Tìm định thức của ma trận Jacobi trong các trường hợp sau

a) $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$ với $u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3$.

b) $\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$ với $u = xe^y\cos(z), v = xe^y\sin(y), w = xe^y$.

4.8 Đạo hàm hàm hợp, quy tắc xích

Bài tập 4.40. Tính đạo hàm bằng hai cách: thế trực tiếp và thông qua đạo hàm hàm hợp

a) $z = uv, u = x+y, v = x-y$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

b) $z = u^2+v^2, u = x^2y, v = xy^3$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

c) $z = \left(x^2+y^2\right)e^{\sqrt{x^2+y^2}}, x = uv, y = u - v$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

d) $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^4\right), x = 2s+3t, y = 5s-3t, g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$. Tìm $\frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial t}$.

Bài tập 4.41. Xét hàm số
$$f(x,y) = x^2y + e^{x^2+y}.$$

a) Tính $\nabla f(x,y)$.

b) Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Tìm giá trị gần đúng của $f(1,08; 0,93)$ bằng xấp xỉ tuyến tính tại $(1,1)$.

d) Cho $x(t) = t^2, y(t) = 1-t$. Đặt $g(t) = f(x(t), y(t))$. Dùng đạo hàm hàm hợp của hàm nhiều biến, tính $\frac{dg}{dt}(1)$.

Bài tập 4.42. Cho $z = f(x,y)$ với $x = s-t$ và $y = t-s$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{\partial z}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0$

b) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial z}{\partial t}$

Bài tập 4.43. Cho $z = f(x,y)$ với $x = r\cos(\theta)$ và $y = r\sin(\theta)$.

a) Tính $\frac{\partial z}{\partial r}$ và $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

b) Tính $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}$.

c) Chứng minh rằng
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

Bài tập 4.44. Một hàm số f có hai biến được gọi là *hàm thuần nhất cấp* $\alpha > 1$ nếu với mọi x, y, t ta có
$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

a) Kiểm tra rằng $f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ là hàm thuần nhất cấp 3.

Chứng minh rằng nếu f là hàm thuần nhất cấp α thì

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x,y)$.

c) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1) f(x,y)$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{n-1}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

Bài tập 4.45. Giả sử rằng phương trình $F(x,y,z) = 0$ được định nghĩa $z = f(x,y), y = g(x,z), x = f(y,z)$. Chứng minh rằng nếu F khả vi và F_x, F_y, và F_z đều khác không thì
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

Bài tập 4.46. Cho $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục. Xét hàm $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi
$$f(x,y) = \int_0^x g(t,0)\,dt + \int_0^y h(x,t)\,dt.$$

a) Chứng minh rằng

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(x, y).$$

b) Hàm f có thể xác định như thế nào để

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y).$$

c) Tìm hàm $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$.

Bài tập 4.47. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x, y)$ thỏa phương trình Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$ thì hàm số

$$\phi(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

cũng thỏa phương trình Laplace.

Bài tập 4.48. Nhiệt độ tại mỗi điểm (x, y) trên mặt phẳng được cho bởi $f(x, y) = 2x + 3y$. Một vậtđang chuyển động trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ theo phương trình $x = \cos(5t), y = \sin(5t)$. Hỏi nhiệt độ tại vị trí của vật tại thời điểm $t = 0$ đang tăng hay giảm?

a) Trả lời bằng cách thế công thức để tính trực tiếp đạo hàm của hàm một biến.

b) Trả lời bằng cách dùng công thức đạo hàm hàm hợp của hàm nhiều biến.

Bài tập 4.49. Điện thế V trong một mạch điện đơn giản đang giảm dần vì pin yếu đi theo thời gian. Điện trở R đang dần tăng lên do thiết bị bị nóng lên. Theo định luật Ohm, ta có $V = IR$. Hãy dùng đạo hàm hàm hợp để tìm xem cường độ dòng điện I đang thay đổi như thế nào khi $R = 400\Omega, I = 0,08\mathsf{A}$, $\frac{dV}{dt} = -0,01\mathsf{V}/s$, và $\frac{dR}{dt} = 0,03\Omega/s$.

4.9 Đạo hàm của hàm ẩn

Bài tập 4.50. Viết phương trình tiếp tuyến của đường đã cho tại điểm đã cho

a) $x^2 + y^2 = 4$ tại điểm $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

b) $x^2 - y^2 = 3$ tại điểm $(2, 1)$.

c) $x^2y + xy^2 = 2$ tại điểm $(1, 1)$.

d) $x^2 + y^2 + x^4y^4 = 1$ tại điểm $(1, 0)$.

Bài tập 4.51. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt đã cho tại điểm đã cho

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tại điểm $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

b) $x^2y + y^2z - z^2x = 1$ tại điểm $(1, 1, 0)$.

c) $3xy + z^2 = 4$ tại điểm $(1, 1, 1)$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 + x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4 - 9z = 21$ tại điểm $(1, 1, 2)$.

Bài tập 4.52. Cho x và y là các hàm ẩn theo t được xác định bở hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + e^x - t^2 - t & = 0 \\ yt^2 + y^2t - t + y & = 0 \end{cases}.$$

Xét hàm $z = e^x \cos(y)$. Tính $\frac{dz}{dt}$ tại $t = 0$.

Bài tập 4.53. Cho $F(x,y) = e^{x^2y^3} + 1 + y^3$ và $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho

$$F(a,b) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại khoảng $I \ni a$ và hàm $g \colon I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp $\mathcal{C}^1$ sao cho $g(a) = b$ và $F(x, g(x)) = 0$ với mọi $x \in I$.

4.10 Định lý ánh xạ ngược

Bài tập 4.54. Xét biến đổi

$$x = u - 2v, \quad y = 2u + v.$$

a) Viết công thức cho biến đổi đảo.

b) Tìm định thức ma trận Jacobi của cả hai phép biến đổi nêu trên.

Bài tập 4.55. Xét biến đổi

$$x = f(u,v), \quad y = g(u,v),$$

với

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng biến đổi đảo thỏa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Bài tập 4.56. Xét biến đổi

$$x = f(u,v,w), \quad y = g(u,v,w), \quad z = h(u,v,w),$$

với

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng biến đổi đảo thỏa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(w,u)}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Chương 5

Cực trị hàm nhiều biến

Bài tập 5.1. Khai triển Taylor đến cấp n của $f(x, y)$ quanh (a, b):

a) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y), n = 1, (a, b) = (0, 0)$.

b) $f(x, y) = e^x \cos(y), n = 2, (a, b) = (0, \pi)$.

c) $f(x, y) = \ln(xy), n = 3, (a, b) = (1, 1)$.

Bài tập 5.2. Khảo sát cực trị của các hàm số sau đây.

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$.

b) $f(x, y) = xy - x^2$.

c) $f(x, y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$.

d) $f(x, y) = x^3 - 6x^2 - 3y^2$.

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

f) $f(x, y) = 2x^3 - 24xy + 16y^3$.

g) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

h) $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$.

i) $f(x, y) = (y - 2)\ln(xy)$.

j) $f(x, y) = e^{xy}$.

Bài tập 5.3. Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau với các điều kiện ràng buộc được cho

a) $f(x, y) = x + y$ với $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d) $f(x, y, z) = 4\pi xyz$ với $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ và $a, b, c > 0$.

e) $f(x, y, z) = xyz$ với $x + y + z = 1$.

f) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ với $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Bài tập 5.4. Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên tập hợp được cho

a) $f(x, y) = x^2 + y$ trong hình vuông với các đỉnh $(\pm 1, \pm 1)$.

b) $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ trong miền $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

c) $f(x, y) = \left(x^2 + 3y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ trên mặt phẳng.

d) $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{-1}$ trong miền $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$.

e) $f(x,y) = x - x^2 + y^2$ trong miền $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$.

f) $f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ trong miền $y \ge 0$.

Bài tập 5.5. Hãy dùng phương pháp nhân tử Lagrange để chứng minh rằng trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. Cụ thể hơn, ta tìm giá trị lớn nhất của hàm $A(x,y) = xy$ dưới điệu kiện ràng buộc $x + y = c$, với $x, y \ge 0$ và c là hằng số.

Bài tập 5.6. Hãy dùng phương pháp nhân tử Lagrange để chứng minh rằng trong các hình hộp chữ nhật có cùng diện tích thì hình hộp vuông (hình hộp có các cạnh có cùng chiều dài) có thể tích lớn nhất. Cụ thể hơn, ta tìm giá trị lớn nhất của hàm $V(x,y,z) = xyz$ dưới điều kiện ràng buộc $2(xy + yz + zx) = c$, với $x, y, z \ge 0$ và c là hằng số.

Bài tập 5.7. Hãy dùng phương pháp nhân tử Lagrange để chứng minh *Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân* (Bất đẳng thức AM-GM). Cụ thể, ta thực hiện như sau:

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

dưới điều kiện ràng buộc $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm và c là một hằng số.

b) Khi nào thì đẳng thức xảy ra?

Bài tập 5.8. Ba alel (phiên bản thay thế của một gen) A, B, và O quyết định bốn nhóm máu A (AA hoặc AO), B (BB hoặc BO), O (OO) và AB. Định luật Hardy-Weinberg phát biểu rằng tỷ lệ cá thể trong một quần thể mang hai alel khác nhau là

$$P = 2(pq + qr + rp),$$

trong đó p, q, và r lần lượt là tỷ lệ của A, B, và O trong quần thể đó. Hãy sử dụng tính chất $p + q + r = 1$ để chứng minh rằng giá trị của P không bao giờ lớn hơn $\frac{2}{3}$. Điều này có nghĩa là tỷ lệ của những người mang ít nhất một alel khác nhau sẽ không bao giờ vượt quá $\frac{2}{3}$.

Phương pháp bình phương tối thiểu [2, Ví dụ 1.5.8], [4, 14.7:55]

Bài tập 5.9. Dùng phương pháp bình phương tối thiểu để tìm hồi quy tuyến tính cho bộ dữ liệu $\{(-1,3), (2,1), (4,3), (5,6)\}$.

Bài tập 5.10. Một mảnh kim loại phẳng có dạng hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$, được nung nóng theo thiết kế sao cho nhiệt độ tại điểm (x,y) là $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Hỏi trên mảnh kim loại ở đâu nóng nhất, ở đâu nguội nhất?

Bài tập 5.11. Tìm điểm trên mặt bầu dục $g(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$ mà tại đó nhiệt độ $T(x,y,z) = 750 + 5x - 2y + 9z$ là cao nhất.

Bài tập 5.12. Một công ty sản xuất hai loại điện thoại di động. Gọi x là số điện thoại loại 1 (đơn vị nghìn cái), và y là số điện thoại loại 2 (đơn vị nghìn cái). Doanh thu được mô hình hóa bởi hàm $R(x,y) = 3x + 2y$ (đơn vị tỉ đồng). Chi phí được mô hình hóa bằng hàm $C(x,y) = 3x^2 - 3xy + 4y^2$ (đơn vị tỉ đồng).

a) Hãy tính $C_x(3,4)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả.

b) Hãy tính doanh thu $R(x,y)$ nếu mỗi điện thoại loại 1 có giá bán 3 triệu đồng và mỗi điện thoại loại 2 có giá bán 2 triệu đồng.

c) Công ty nên sản xuất với sản lượng mỗi loại là bao nhiêu để được lợi nhuận tối đa?

Bài tập 5.13. Một công ty sản xuất hai mẫu xe gắn máy. Gọi x là số xe theo mẫu thứ nhất, y là số xe theo mẫu thứ hai (đơn vị là nghìn chiếc). Chi phí sản xuất được cho bởi hàm $C(x, y) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$ (đơn vị triệu đồng). Giá bán mỗi xe thuộc mẫu thứ nhất là 34 triệu đồng và giá bán mỗi xe thuộc mẫu thứ thứ hai là 52 triệu đồng.

a) Tìm công thức cho doanh thu và lợi nhuận.

b) Công ty nên sản xuất với sản lượng mỗi loại là bao nhiêu để có lợi nhuận lớn nhất?

Bài tập 5.14. Người ta gia công một bể chứa hình hộp chữ nhật để làm chứa một lượng chất lỏng cho trước. Bể chứa gồm mặt đáy và bốn mặt hông, không có mặt trên. Ước tính chi phí cho mỗi đơn vị diện tích của mặt đáy gấp 2 lần chi phí cho mỗi đơn vị diện tích của mặt hông. Hãy tìm kích thước bể để chi phí xây dựng là nhỏ nhất.

Tài liệu tham khảo

[1] **Bộ môn Giải tích**. *Giáo trình Vi tích phân 1*. Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2023.

[2] **Bộ môn Giải tích**. *Giáo trình Vi tích phân 2*. Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2023.

[3] **Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân**. *Giáo trình Giải tích 2*. NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2011.

[4] **James Stewart**. *Calculus*. Brooks/Cole, 2016