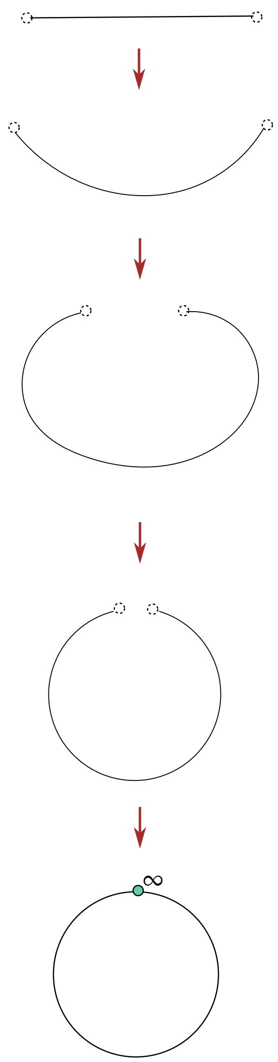
Bài giảng Tôpô

Huỳnh Quang Vũ

Phiên bản 30 tháng Tám, 2018



Đây là tập bài giảng phục vụ cho một chuỗi các buổi học giới thiệu về môn tôpô cho sinh viên tại Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh. Nó được viết để tác giả trình bày cho các sinh viên của mình. Tác giả không viết nó để nhắm đến với các giảng viên khác hay những người đọc tự học.

Khi viết các bài giảng này tác giả dự định rằng nhiều sự giải thích và thảo luận hơn sẽ được triển khai tại lớp. Bằng cách ưu tiên trình bày những vấn đề thiết yếu, tác giả hy vọng bài giảng sẽ phù hợp hơn để sử dụng trong lớp học. Một số chi tiết sẽ được để dành cho các bạn sinh viên tự hoàn chỉnh hoặc để thảo luận ở lớp.

Dấu ✓ trước một vấn đề nhằm lưu ý người đọc rằng vấn đề đó là điển hình, hoặc quan trọng (là một kết quả sẽ được dùng về sau). Các vấn đề được đánh dấu * là tương đối khó hơn.

Phiên bản mới nhất của tập bài giảng này được viết bằng tiếng Anh, cập nhật tại địa chỉ http://www.math.hcmus.edu.vn/∼hqvu/n.pdf, và file nguồn có ở http://www.math.hcmus.edu.vn/∼hqvu/n.zip.

Bản dịch tiếng Việt Phần Tôpô Đại cương này là của Lê Chiêu Hoàng Nguyên, tháng 10 năm 2018.

Địa chỉ: Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. Email: hqvu@hcmus.edu.vn

Mục lục

Giới thiệu . . . 1

I Tôpô đại cương **3**

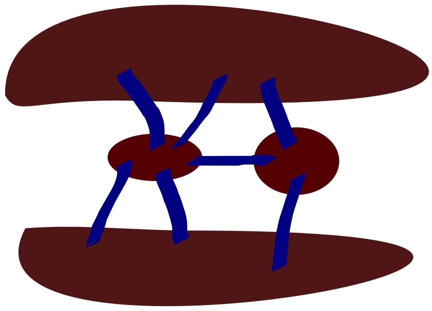
1 Tập hợp vô hạn . . . 5
2 Không gian tôpô . . . 13
3 Sự liên tục . . . 19
4 Sự liên thông . . . 25
5 Sự hội tụ . . . 33
6 Không gian compắc . . . 40
7 Tích của các không gian . . . 47
8 Hàm thực và các Không gian hàm . . . 54
9 Không gian thương . . . 61
Một số đề tài khác . . . 73

Gợi ý cho một số bài tập **75**

Tài liệu **78**

Giới thiệu

Tôpô (Topology) là một ngành toán học nghiên cứu về các hình dạng. Một tập hợp sẽ trở thành một không gian tôpô (topological space) nếu mỗi phần tử của nó được cho một lớp các lân cận (neighborhoods). Trên các không gian tôpô các phép toán phải liên tục, nghĩa là, mang các lân cận nhất định vào các lân cận. Một điều thú vị là ở đây lại không có khái niệm khoảng cách. Tôpô là một phần của Hình học mà ở đó không đề cập đến khoảng cách.



Hình 0.1: Có thể nào thực hiện được một chuyến đi kín sao cho mỗi cây cầu được băng qua đúng một lần duy nhất? Đây là bài toán "Bảy cây cầu ở Konigsberg", được nghiên cứu bởi Leonard Euler vào thế kỷ 18. Ta thấy rằng vấn đề này chẳng phụ thuộc gì đến kích thước của những cây cầu.

Đặc trưng của ngành Tôpô

Các phép toán trên các đối tượng tôpô được nới lỏng hơn so với trong hình học: bên cạnh việc di chuyển quen thuộc, tôpô còn cho phép thực hiện các động tác như kéo giãn hay uốn cong, vốn không được phép trong hình học. Ví dụ, trong Tôpô, mọi đường tròn - cho dù to nhỏ hay được đặt ở bất cứ đâu - đều như nhau. Mọi đường ellipse và đường tròn là như nhau. Tuy vậy, mặt khác, trong tôpô sự xé hay phá vỡ là không được phép: đường tròn vẫn khác đường thẳng. Các phép toán tôpô, dù linh hoạt hơn, vẫn gìn giữ một vài tính chất thiết yếu của các không gian.

Những đóng góp của ngành Tôpô

Tôpô cung cấp những khái niệm cơ bản cho toán học khi xuất hiện nhu cầu về khái niệm liên tục. Nó tập trung vào một số tính chất thiết yếu của các không gian, do đó được sử dụng trong việc nghiên cứu định tính. Nó có thể hữu dụng khi các metric hay tọa độ là không sẵn có, không tự nhiên, hoặc không cần thiết.

Tôpô thường không đứng một mình: có nhiều ngành như Tôpô đại số (Algebraic topology), Tôpô vi phân (Differential topology), Tôpô hình học (Geometric topology), Tôpô tổ hợp (Combinatorial topology), Tôpô lượng tử (Quantum topology), ... Tôpô không thường tự mình giải quyết các vấn đề, mà nó đóng góp một sự hiểu biết căn bản cùng những sự thiết lập và công cụ quan trọng. Tôpô đóng một vai trò nổi bật trong Hình học vi phân, Giải tích toàn cục, Hình học đại số, Vật lí lí thuyết...

Phần I Tôpô đại cương

1 Tập hợp vô hạn

Tôpô đại cương, hay còn gọi là tôpô tập điểm, nghiên cứu về những điều căn bản của lân cận, giới hạn, và sự liên tục – những khái niệm cơ bản được sử dụng xuyên suốt toàn bộ toán học. Trong Tôpô đại cương chúng ta thường làm việc với những sự thiết lập rất tổng quát. Nói riêng, ta thường đề cập đến những tập hợp vô hạn.

Ta sẽ không định nghĩa tập hợp là gì. Nói cách khác, ta sẽ làm việc trong khuôn khổ của "lí thuyết tập hợp ngây thơ", được đề xuất bởi Georg Cantor vào cuối thế kỷ 19. Những khái niệm quen thuộc như hội, giao, ánh xạ, tích Descartes của hai tập ... sẽ được sử dụng mà không nhắc lại định nghĩa. Ta cũng sẽ không quay lại định nghĩa của tập hợp các số tự nhiên và tập hợp các số thực.

Mặc dù vậy, chúng ta cần biết một số vấn đề nhất định trong lí thuyết tập hợp ngây thơ này.

Ví dụ (nghịch lí Russell). Xét tập hợp $S = \{x \mid x \notin x\}$ (là tập tất cả các tập hợp không là phần tử của chính nó). Ta không thể kết luận được rằng $S \in S$ hay không, vì trả lời có hoặc không đều dẫn tới mâu thuẫn. [1]

Các hệ tiên đề cho lí thuyết tập hợp đã được phát triển kể từ đó. Trong hệ tiên đề Von Neumann–Bernays–Godel, một khái niệm tổng quát hơn tập hợp, gọi là ***lớp*** (class), được sử dụng. Trong môn học này, chúng ta không phân biệt các khái niệm tập hợp, lớp, hay ***họ*** (collection), nhưng mỗi khi đề cập đến "tập các tập hợp", khái niệm ***họ*** sẽ thường được ưu tiên. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm ở [End77, p. 6], [Dug66, p. 32].

Họ được đánh chỉ số

Một ánh xạ $f : I \to A$, với I là một tập hợp và A là một họ, được gọi là một họ được đánh chỉ số . Ta thường viết $f_i = f(i)$, và ký hiệu họ f bằng $(f_i)_{i\in I}$ hoặc $\{f_i\}_{i\in I}$. Chú ý rằng có thể xảy ra $f_i = f_j$ khi $i \neq j$.

Ví dụ. Một dãy các phần tử trong tập hợp A là một họ các phần tử của A được đánh chỉ số bởi tập $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương, và thường được viết là $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

Quan hệ

Một ***quan hệ*** (relation) R trên tập hợp S là một tập con khác rỗng của tập hợp $S \times S$.

Khi $(a, b) \in R$, ta nói a quan hệ với b và thường viết $a \sim_R b$.

Một quan hệ được gọi là:

(a) phản xạ (reflexive) nếu $\forall a \in S, (a, a) \in R$.

(b) đối xứng (symmetric) nếu $\forall a, b \in S, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

(c) phản đối xứng (anti-symmetric) nếu $\forall a, b \in S, ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow a = b$.

(d) bắc cầu (transitive) nếu $\forall a, b, c \in S, ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R$.

Một ***quan hệ tương đương*** (equivalence relation) trên S là một quan hệ thỏa các tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

[1] Được tìm ra vào năm 1901 bởi Bertrand Russell. Một phiên bản nổi tiếng của nó là nghịch lí thợ cắt tóc: Trong một ngôi làng nọ có một anh thợ cắt tóc cho dân làng; công việc của anh ta là cắt tóc cho ai khi và chỉ khi người đó không tự cắt tóc cho mình. Xét nhóm gồm tất cả những người dân trong làng được anh thợ cắt tóc cho. Hỏi rằng bản thân anh thợ có thuộc nhóm này không?

Nếu R là một quan hệ tương đương trên S thì một ***lớp tương đương*** (equivalence class) được đại diện bởi $a \in S$ là tập hợp $[a] = \{b \in S \mid (a, b) \in R\}$. Hai lớp tương đương thì hoặc trùng nhau hoặc rời nhau, do đó tập S được phân hoạch thành một hội rời các lớp tương đương của nó.

Thứ tự

Một ***thứ tự*** (order) trên tập S là một quan hệ R trên S thỏa các tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Chú ý rằng hai phần tử a và b bất kỳ không nhất thiết so sánh được với nhau, nghĩa là, cặp (a, b) không nhất thiết thuộc R. Bởi lý do này một thứ tự thường được gọi là một thứ tự một phần.

Khi $(a, b) \in R$ ta thường viết $a \leq b$. Nếu $a \leq b$ và $a \neq b$, ta viết $a < b$.

Nếu mỗi hai phần tử bất kỳ của S đều so sánh được với nhau thì thứ tự được gọi là ***thứ tự toàn phần*** (total order) và $(S, \leq)$ được gọi là một ***tập hợp được sắp toàn phần*** (totally order set).

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{R}$ tất cả các số thực với thứ tự thông thường $\leq$ là một tập được sắp toàn phần.

Ví dụ. Cho tập hợp S. Ta ký hiệu ***họ tất cả các tập hợp con*** của S bởi $\mathcal{P}(S)$ hoặc 2^S. Với quan hệ bao hàm, $(2^S, \subseteq)$ là một tập được sắp một phần, và không được sắp toàn phần nếu S có hơn một phần tử.

Ví dụ. Cho $(S_1, \leq_1)$ và $(S_2, \leq_2)$ là hai tập hợp được sắp. Quan hệ $\leq$ sau đây là một thứ tự trên $S_1 \times S_2$: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ nếu $(a_1 <_1 a_2)$ hoặc $((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \leq_2 b_2))$. Đây được gọi là ***thứ tự từ điển*** (dictionary order).

Trong một tập hợp được sắp, ***phần tử nhỏ nhất*** (smallest element) là phần tử nhỏ hơn mọi phần tử khác. Một cách chính xác, với S là một tập được sắp, phần tử nhỏ nhất của S là phần tử $a \in S$ thỏa $a \leq b, \forall b \in S$. Phần tử nhỏ nhất, nếu tồn tại, là duy nhất.

Phần tử cực tiểu (minimal element) là phần tử không có phần tử nào nhỏ hơn. Chính xác hơn, một phần tử cực tiểu của S là phần tử $a \in S$ thỏa $\forall b \in S, b \leq a \Rightarrow b = a$. Có thể có nhiều hơn một phần tử cực tiểu.

Một ***chặn dưới*** (lower bound) của tập con của một tập được sắp thứ tự là một phần tử nhỏ hơn hoặc bằng mọi phần tử trong tập con đó. Một cách chính xác, nếu $A \subset S$ thì một chặn dưới của A trong S là một phần tử $a \in S$ sao cho $\forall b \in A, a \leq b$.

Các khái niệm phần tử lớn nhất, phần tử cực đại, và chặn trên được định nghĩa tương tự.

Sự tương đương tập hợp

Hai tập hợp được gọi là ***tương đương*** (set-equivalent) nếu có một song ánh từ một tập đến tập kia.

Một tập hợp được gọi là ***hữu hạn*** nếu tập đó hoặc rỗng hoặc tương đương với một tập con $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nào đó của tập $\mathbb{Z}^+$ tất cả các số nguyên dương. Một cách chính xác, tập hợp S là hữu hạn nếu $S = \emptyset$ hoặc tồn tại $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho S tương đương với tập $\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq N\}$.

Nếu một tập hợp là không hữu hạn, ta nói nó vô hạn.

Một tập hợp được gọi là ***vô hạn đếm được*** (countably infinite) nếu nó tương đương với $\mathbb{Z}^+$. Một tập được gọi là ***đếm được*** (countable) nếu nó hoặc hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.

Một cách trực quan, một tập vô hạn đếm được có thể được "đếm" bằng các số nguyên dương. Các phần tử của một tập như vậy có thể được đánh chỉ số bằng tập $\mathbb{Z}^+$ như một dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{Z}$ tất cả các số nguyên là đếm được. Ta có thể đếm, chẳng hạn, luân phiên số dương rồi số âm, bởi

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^+ &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ chẵn}, \\ \frac{1-n}{2}, & n \text{ lẻ}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ánh xạ ngược mang mỗi số nguyên dương thành một số chẵn, và mỗi số nguyên âm thành một số lẻ:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}^+ \\ m &\mapsto n = \begin{cases} 2m, & m > 0, \\ -2m+1, & m \le 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mệnh đề. *Tập con của một tập hợp đếm được thì đếm được.*

Chứng minh. Phát biểu trên tương đương với phát biểu rằng tập con của $\mathbb{Z}^+$ thì đếm được. Giả sử A là một tập con vô hạn của $\mathbb{Z}^+$. Gọi a_1 là số nhỏ nhất trong A. Bằng quy nạp, gọi a_n là số nhỏ nhất trong $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Khi đó $a_{n-1} < a_n$, và $B = \{a_n | \ n \in \mathbb{Z}^+\}$ là một tập con vô hạn đếm được của A.

Ta chứng tỏ rằng mọi phần tử m của A là một a_n với n nào đó, và do đó $B = A$.

Gọi $C = \{a_n \mid a_n \ge m\}$. Ta có $C \ne \emptyset$ do B vô hạn. Đặt $\min C = a_{n_0}$. Ở đây, lưu ý rằng ta đang sử dụng ***tính sắp tốt*** của tập tất cả các số nguyên dương: mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất. Ta có $a_{n_0} \ge m$. Hơn nữa, do $a_{n_0-1} < a_{n_0}$ nên $a_{n_0-1} \notin C$, nghĩa là $a_{n_0-1} < m$. Suy ra $m \in A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$. Vì $a_{n_0} = \min\left(A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}\right)$ nên ta phải có $a_{n_0} \le m$. Do đó $a_{n_0} = m$. □

Hệ quả. *Nếu tồn tại một đơn ánh từ tập S vào $\mathbb{Z}^+$ thì S đếm được.*

1.1 Mệnh đề. *Nếu tồn tại một toàn ánh từ $\mathbb{Z}^+$ tới một tập S thì S đếm được.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại một toàn ánh $\phi : \mathbb{Z}^+ \to S$. Với mỗi $s \in S$, tập $\phi^{-1}(s)$ là khác rỗng. Gọi $n_s = \min \phi^{-1}(s)$. Vì ánh xạ $s \mapsto n_s$ là một đơn ánh từ S tới $\mathbb{Z}^+$, nên S đếm được. □

Mệnh đề. *$\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ đếm được.*

Chứng minh. Ta có thể đánh chỉ số $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ bằng cách đếm dọc theo các đường chéo, chẳng hạn ta đề xuất một cách được minh họa bằng sơ đồ dưới đây:

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & \dots & \\
(4,1) & & &
\end{tikzcd}$$

Để chi tiết ta có thể dẫn ra một công thức tường minh cho phép đếm trên:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \\
&\quad (m,n) \mapsto (1+2+\cdots+((m+n-1)-1)) + m = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m.
\end{aligned}$$

Ta kiểm tra tính đơn ánh cho ánh xạ này. Đặt $k = m+n$. Giả sử $\frac{(k-2)(k-1)}{2} + m = \frac{(k'-2)(k'-1)}{2} + m'$. Nếu $k = k'$ thì phương trình nhất định sẽ dẫn đến $m = m'$ và $n = n'$. Nếu $k < k'$ thì

$$\begin{aligned}
\frac{(k-2)(k-1)}{2} + m &\leq \frac{(k-2)(k-1)}{2} + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2} < \\
&< \frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq \frac{(k'-2)(k'-1)}{2} + m',
\end{aligned}$$

mâu thuẫn. $\square$

1.2 Định lí. *Hội của một họ đếm được các tập đếm được thì đếm được.*

Chứng minh. Một họ như vậy có thể được đánh chỉ số $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ (nếu họ là hữu hạn thì ta có thể cho các A_i trùng nhau với mọi i từ một chỉ số nào đó trở đi). Các phần tử của mỗi tập A_i có thể được đánh chỉ số $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,j}, \dots$ (nếu A_i hữu hạn thì ta có thể cho các $a_{i,j}$ trùng nhau với mọi j từ một chỉ số nào đó trở đi). Cách đánh chỉ số trên định nghĩa một toàn ánh từ tập chỉ số $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tới hội $\bigcup_{i \in I} A_i$, cho bởi $(i,j) \mapsto a_{i,j}$. $\square$

Định lí. *Tập hợp $\mathbb{Q}$ tất cả các số hữu tỉ là đếm được.*

Chứng minh. Ta có thể chứng minh kết quả trên bằng cách viết $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$, sau đó sử dụng 1.2.

Một cách khác, quan sát rằng nếu ta viết mỗi số hữu tỉ dưới dạng $\frac{p}{q}$ với $q > 0$ và $\gcd(p,q) = 1$ thì ánh xạ $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$ từ $\mathbb{Q}$ vào $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là đơn ánh. $\square$

1.3 Định lí. *Tập hợp $\mathbb{R}$ tất cả các số thực là không đếm được.*

Chứng minh. Đây là *lí luận đường chéo của Cantor* (Cantor diagonal argument). Ta sử dụng tính chất rằng mọi số thực có thể được viết dưới dạng thập phân. Chú ý rằng có những số thực mà biểu diễn thập phân của chúng là không duy nhất, chẳng hạn $\frac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.4999\ldots$. (Xem 1.17 tham khảo thêm về chủ đề này.)

Giả sử tập tất các số thực trong đoạn $[0,1]$ là đếm được, và được đánh số như một dãy $\{a_i \mid i \in \mathbb{Z}^+\}$. Ta viết

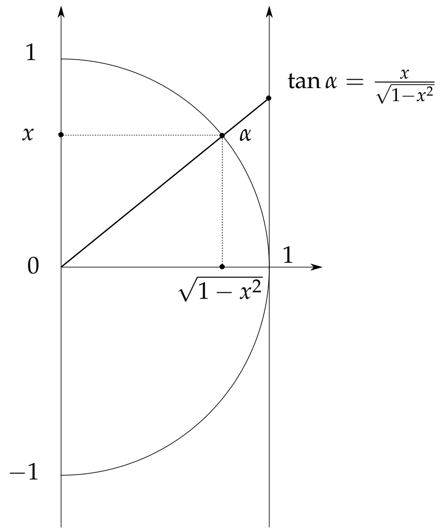
$$\begin{aligned} a_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ a_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ a_3 &= 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Chọn một số $b = 0.b_1b_2b_3\ldots$ sao cho $b_n \neq 0; 9$ và $b_n \neq a_{n,n}$. Ta có $b \neq a_n$ với mọi n. Do đó số b không nằm trong bảng trên, mâu thuẫn. □

Ví dụ. Hai đoạn $[a,b]$ và $[c,d]$ trên đường thẳng thực là tương đương. Một song ánh có thể được đề xuất là hàm tuyến tính $x \mapsto \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$. Tương tự, hai khoảng (a,b) và (c,d) là tương đương.

1.4 Ví dụ. Khoảng $(-1,1)$ tương đương với $\mathbb{R}$ thông qua một ánh xạ có liên hệ với hàm tan:

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$



1.5 Định lí. *Tập hợp khác rỗng thì không tương đương với tập tất cả các tập con của nó. Đặc biệt hơn, nếu $S \neq \emptyset$ thì không tồn tại toàn ánh nào từ S tới 2^S.*

Chú ý rằng tồn tại đơn ánh từ S vào 2^S, chẳng hạn $a \mapsto \{a\}$.

Chứng minh. Gọi ϕ là một ánh xạ bất kỳ từ S tới 2^S. Đặt $X = \{a \in S \mid a \notin \phi(a)\}$. Giả sử có $x \in S$ sao cho $\phi(x) = X$. Khi đó chân trị của phát biểu $x \in X$ (đúng hay sai) là không thể quyết định. Mâu thuẫn. Do đó không tồn tại $x \in S$ nào sao cho $\phi(x) = X$, nên ϕ không toàn ánh. □

Kết quả này nói lên rằng mọi tập hợp đều "nhỏ hơn" tập tất cả các tập con của nó. Vậy nên không tồn tại tập hợp nào "lớn hơn" mọi tập khác. Không tồn tại "tập vũ trụ", "tập chứa mọi thứ", hay "tập tất cả các tập".

Có một khái niệm về kích cỡ của tập hợp, được gọi là lực lượng (cardinality), tuy vậy ta không thảo luận nó ở đây.

Tiên đề chọn

Mệnh đề. *Các phát biểu sau là tương đương:*

(a) ***Tiên đề chọn:*** *Cho một họ các tập hợp khác rỗng, tồn tại một hàm xác định trên họ này, gọi là* ***hàm chọn****, liên kết mỗi tập hợp trong họ với một phần tử của tập hợp đó.*

(b) ***Bổ đề Zorn:*** *Nếu mọi tập con được sắp toàn phần của một tập được sắp thứ tự X đều có chặn trên thì X có phần tử cực đại.*

Thông thường bổ đề Zorn là một dạng tiện dụng của Tiên đề chọn.

Một cách trực quan, một hàm chọn sẽ chọn một phần tử từ mỗi tập hợp của họ được cho gồm các tập khác rỗng. Tiên đề chọn cho phép ta thực hiện vô hạn lần các phép chọn bất kì. [2] Tiên đề chọn cũng thường được sử dụng trong việc xây dựng các hàm, dãy, hoặc lưới, xem một ví dụ ở 5.5. One common application is the use of the product of an infinite family of sets – the Cartesian product, discussed below.

Tiên đề chọn rất cần thiết cho nhiều kết quả quan trọng trong toán học, chẳng hạn như định lí Tikhonov trong Tôpô, định lí Hahn-Banach và Banach-Alaoglu trong Giải tích hàm, sự tồn tại của tập không đo được Lebesgue trong Giải tích thực, ...

Có những trường hợp mà tiên đề này có thể không cần dùng đến. Ví dụ, trong chứng minh của 1.1 ta đã sử dụng tính sắp tốt của $\mathbb{Z}^+$ để thay thế. Xem thêm chẳng hạn ở [End77, p. 151] để có thêm thông tin về chủ đề này.

Tích Descartes

Cho $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp được đánh chỉ số bởi tập I. ***Tích Descarte***(Cartesian product) $\prod_{i\in I} A_i$ của họ được đánh chỉ số này được định nghĩa là họ tất cả các ánh xạ $a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ sao cho $a(i) \in A_i$ với mọi $i \in I$. Sự tồn tại của những ánh xạ như vậy là một hệ quả của Tiên đề chọn. Một phần tử a của $\prod_{i\in I} A_i$ thường được ký hiệu bởi $(a_i)_{i\in I}$, với $a_i = a(i) \in A_i$ là tọa độ ứng với chỉ số i, tương tự với trường hợp tích hữu hạn.

Bài tập

1.6. Cho f là một hàm. Chứng minh rằng:

(a) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$.

(b) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$. Nếu f là đơn ánh (1-1) thì dấu bằng xảy ra.

(c) $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$.

(d) $f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$.

1.7. Cho f là một hàm. Chứng minh rằng:

(a) $f(f^{-1}(A)) \subset A$. Nếu f là toàn ánh thì dấu bằng xảy ra.

(b) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Nếu f là đơn ánh thì dấu bằng xảy ra.

1.8. Chứng minh rằng nếu tập A là hữu hạn và tập B là đếm được thì $A \cup B$ tương đương với A.

1.9. Cho một chứng minh khác của 1.2, bằng cách kiểm tra rằng ánh xạ $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$ là đơn ánh.

[2] Bertrand Russell nói rằng việc chọn ra một chiếc giày từ mỗi đôi giày của một lô gồm vô hạn các đôi giày thì không cần đến Tiên đề chọn (vì trong mỗi đôi giày, do chiếc bên trái khác chiếc bên phải nên ta có thể định nghĩa phép chọn của mình), nhưng đối với một đôi bít tất, thường thì hai chiếc bít tất sẽ y như nhau, nên việc chọn một chiếc từ mỗi đôi bít tất trong một lô gồm vô hạn các đôi bít tất cần đến Tiên đề chọn.

1.10. ✓ Cho tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^n$ có các tọa độ đều là số hữu tỉ. Chứng tỏ rằng tập này đếm được.

1.11. Chứng minh rằng nếu A có n phần tử thì $|2^A| = 2^n$.

1.12. Chứng minh rằng tập tất cả các hàm $f : A \to \{0, 1\}$ tương đương với 2^A.

1.13. Một số thực α được gọi là một *số đại số* (algebraic number) nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng tập tất cả các số đại số là đếm được.

Một số thực không là một số đại số thì được gọi là một *số siêu việt* (transcendental number). Ta biết rằng π và e là các số siêu việt. Chứng minh rằng tập tất cả các số siêu việt là không đếm được.

1.14. Một tập hợp được gọi là *continuum* nếu nó tương đương với $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hội đếm được các tập continuum là một tập continuum.

1.15 (tập Cantor). Xóa đi khoảng mở $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ từ đoạn $[0, 1]$ trong tập số thực, ta được một không gian gồm có hai đoạn $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Tiếp tục, xóa đi các khoảng mở $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ và $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Tổng quát, trên mỗi đoạn còn lại sau mỗi lần xóa, ta lại xóa đi khoảng mở ở giữa có độ dài bằng $\frac{1}{3}$ đoạn đó. Tập Cantor là tập hợp các điểm còn lại. Nó có thể được mô tả là tập các số thực $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n = 0, 2$. Nói cách khác, đây là tập các số thực trong $[0, 1]$ có thể được viết trong cơ số 3 mà không cần dùng đến chữ số 1.

Chứng minh rằng tổng độ dài của các khoảng bị xóa đi bằng 1. Tập Cantor có đếm được không?

1.16 (Định lí Cantor–Schoeder–Bernstein). Ta sẽ chứng minh: Nếu A tương đương với một tập con của B và B tương đương với một tập con của A thì A và B tương đương với nhau ([KF75, p. 17], [End77, p. 148]).

Giả sử $f : A \mapsto B$ và $g : B \mapsto A$ là các đơn ánh. Đặt $A_0 = A$ và $B_0 = B$. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, đặt $B_{n+1} = f(A_n)$ và $A_{n+1} = g(B_n)$.

(a) Chứng minh rằng $A_{n+1} \subset A_n$ và $B_{n+1} \subset B_n$.

(b) Chứng minh A_{n+2} tương đương với A_n, và $A_n \setminus A_{n+1}$ tương đương với $A_{n+2} \setminus A_{n+3}$.

(c) Bằng cách viết

$$A = [(A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \cdots] \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$
$$A_1 = [(A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \cdots] \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

hãy chứng tỏ rằng A tương đương với A_1.

1.17. Chứng minh rằng mọi số thực có thể được viết trong cơ số d với bất kì $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 2$. Đặc biệt hơn, mọi số thực dương x có thể được viết thành

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots = a_0 + \frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d^2} + \frac{a_3}{d^3} + \cdots$$

với $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_0$, nếu $i \geq 1$ thì $0 \leq a_i \leq d - 1$. Tuy nhiên hai dạng trong cơ số d có thể biểu diễn cùng một số thực, như đã thấy ở 1.3. Điều này xảy ra chỉ khi xuất phát từ một chữ số nhất định, mọi chữ số của một dạng là 0 và của dạng kia là $d - 1$. (Kết quả này đã được sử dụng ở 1.3.)

1.18 ($\mathbb{R}^n$ tương đương với $\mathbb{R}$). Ở đây chúng ta chứng minh rằng $\mathbb{R}^2$ tương đương với $\mathbb{R}$, nói cách khác, một mặt phẳng là tương đương với một đường thẳng, hoặc tập $\mathbb{C}$ các số phức là tương đương với tập $\mathbb{R}$ các số thực. Hệ quả, $\mathbb{R}^n$ tương đương với $\mathbb{R}$.

Ta hãy xây dựng một ánh xạ từ $[0, 1) \times [0, 1)$ tới $[0, 1)$, như sau: cho một cặp số thực ở dạng thập phân $0.a_1a_2\ldots$ và $0.b_1b_2\ldots$ tương ứng với số thực $0.a_1b_1a_2b_2\ldots$. Vì 1.17, ta chỉ cho phép các biểu diễn thập phân mà trong đó không xảy ra việc chỉ có toàn chữ số 9 từ một chữ số nào đó trở đi. Kiểm tra tính đơn ánh của ánh xạ này.

1.19. Ta chứng minh rằng $2^{\mathbb{Z}^+}$ tương đương với $\mathbb{R}$.

(a) Chứng minh rằng $2^{\mathbb{Z}^+}$ tương đương với tập hợp tất cả các dãy các số nhị phân. Suy ra sự tồn tại của một đơn ánh từ $[0,1]$ vào $2^{\mathbb{N}}$.

(b) Xét ánh xạ $f : 2^{\mathbb{Z}^+} \to [0,2]$, với mỗi dãy nhị phân $a = a_1a_2a_3\cdots$, nếu từ một chữ số nhất định mà mọi chữ sống đều bằng 1 thì đặt $f(a) = 1.a_1a_2a_3\cdots$ ở dạng nhị phân, còn lại ta đặt $f(a) = 0.a_1a_2a_3\cdots$. Chứng minh rằng f là đơn ánh.

Một phát biểu nói rằng không tồn tại một tập hợp lớn hơn $\mathbb{Z}^+$ và nhỏ hơn $\mathbb{R}$ (nghĩa là, một tập hợp S sao cho có một đơn ánh từ $\mathbb{Z}^+$ vào S nhưng không có song ánh nào, và có một đơn ánh từ S vào $\mathbb{R}$ nhưng không có song ánh nào) được gọi là ***giả thuyết Continuum***.

1.20 (nguyên lí quy nạp siêu hạn). Một tập hợp S được gọi là ***được sắp tốt*** (well-ordered) nếu mọi tập con khác rỗng A của S đều có phần tử nhỏ nhất, i.e. $\exists a \in A,\ \forall b \in A,\ a \leq b$. Ví dụ, với thứ tự thông thường, $\mathbb{N}$ là được sắp tốt còn $\mathbb{R}$ thì không. Chú ý rằng một tập hợp được sắp tốt thì phải được sắp toàn phần. Dựa vào Tiên đề chọn, vào năm 1904, Ernst Zermelo đã chứng minh rằng mọi tập hợp đều có thể được sắp tốt.

Chứng minh sự mở rộng sau của nguyên lí quy nạp. Gọi A là một tập hợp được sắp tốt. Gọi $P(a)$ là một phát biểu mà chân trị của nó phụ thuộc vào $a \in A$. Giả sử rằng nếu $P(a)$ đúng với mọi $a < b$ thì $P(b)$ đúng. Khi đó $P(a)$ sẽ đúng với mọi $a \in A$. Đây gọi là ***nguyên lí quy nạp siêu hạn*** (transfinite induction principle).

2 Không gian tôpô

Khi bàn luận về sự phụ thuộc của một đối tượng với một đối tượng khác, ta thường quan tâm đến tính liên tục của sự phụ thuộc đó. Khái niệm này thường được hiểu, rằng đối tượng phụ thuộc sẽ bị giới hạn trong một tập được cho nếu đối tượng độc lập bị giới hạn trong một tập tương ứng nhất định. Các tập hợp xuất hiện trong thảo luận này được gọi là các tập mở. Một cách ngắn gọn, một tôpô là một hệ thống các tập mở. Tôpô là sự thiết lập cho cuộc luận bàn về sự liên tục.

Định nghĩa. Một ***tôpô*** (topology) trên tập hợp X là một họ τ các tập con của X thỏa mãn:

(a) Tập $\emptyset$ và tập X là các phần tử của τ.

(b) Một hội các phần tử của τ là một phần tử của τ.

(c) Một giao hữu hạn các phần tử của τ là một phần tử của τ.

Các phần tử của τ được gọi là các ***tập hợp mở*** (open set) , hay *tập mở* của X trong tôpô τ.

Tóm lại, một tôpô trên tập hợp X là một họ các tập con của X có bao gồm tập $\emptyset$ và X, và "đóng" dưới các phép hội (bất kỳ) và các phép giao hữu hạn.

Một tập hợp X cùng với một tôpô τ được gọi là một ***không gian tôpô*** (topological space), ký hiệu bởi(X,τ) hoặc X một mình nếu không cần thiết phải làm rõ tôpô đang được đề cập. Một phần tử của X thường được gọi là một ***điểm*** (point).

Một ***lân cận*** (neighborhood) của điểm $x \in X$ là một tập con của X chứa một tập mở chứa điểm x. Chú ý rằng một lân cận không nhất thiết phải mở.[3]

Ví dụ. Trên mọi tập X đều tồn tại ***tôpô hiển nhiên*** (trivial topology) $\{\emptyset, X\}$. Cũng như vậy với ***tôpô rời rạc*** (discrete topology) $\mathcal{P}(X)$ (mọi tập con của X đều mở). Vậy trên một tập hợp có thể tồn tại nhiều tôpô.

Chú ý rằng phát biểu "giao của hữu hạn các tập mở bất kỳ là mở" tương đương với phát biểu ""giao của hai tập mở bất kỳ là mở".

Không gian metric

Nhắc lại rằng, một cách ngắn gọn, một không gian metric là một tập hợp được trang bị thêm khoảng cách giữa mỗi hai điểm. Chính xác hơn, một không gian metric là một tập hợp X cùng với một ánh xạ $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$:

(a) $d(x,y) \geq 0$ (khoảng cách là không âm),

(b) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (khoảng cách bằng 0 khi và chỉ khi hai điểm trùng nhau),

(c) $d(x,y) = d(y,x)$ (khoảng cách có tính đối xứng),

(d) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (bất đẳng thức tam giác).

Một quả cầu là một tập hợp $B(x,r) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$ với $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Trong lí thuyết về không gian metric, một tập con U của X được gọi mà mở nếu với mọi x thuộc U, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(x,\epsilon)$ chứa trong U. Điều này tương đương với phát biểu, rằng một tập mở khác rỗng là một hội của các quả cầu.

[3] Lưu ý rằng không phải tác giả nào cũng sử dụng quy ước này. Ví dụ Kelley [Kel55] sử dụng nhưng Munkres [Mun00] lại yêu cầu rằng lân cận thì phải mở.

Để chứng tỏ đây thực sự là một tôpô, ta chỉ cần kiểm tra rằng giao của hai quả cầu là một hội của các quả cầu. Với $z \in B(x, r_x) \cap B(y, r_y)$, đặt $r_z = \min\{r_x - d(z, x),\ r_y - d(z, y)\}$. Khi đó quả cầu $B(z, r_z)$ sẽ nằm trong cả $B(x, r_x)$ lẫn $B(y, r_y)$.

Vậy, một cách chính tắc, một không gian metric là một không gian tôpô với tôpô được sinh bởi metric. ***Khi nói đến tôpô trên một không gian metric ta hiểu đó là tôpô này***.

Ví dụ (không gian định chuẩn). Nhắc lại rằng một ***không gian định chuẩn*** (normed space) là một không gian vectơ mà mỗi vectơ được trang bị thêm độ dài. Chính xác, một không gian định chuẩn là một tập hợp X cùng một cấu trúc không gian vectơ trên trường số thực, và một hàm số $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, gọi là một ***chuẩn*** (norm), thỏa mãn:

(a) $\|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (độ dài là không âm),

(b) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ for $c \in \mathbb{R}$ (độ dài tỉ lệ với vectơ),

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

Một cách chuẩn tắc, một không gian định chuẩn là một không gian metric với metric $d(x, y) = \|x - y\|$. Do đó một không gian định chuẩn là một không gian tôpô với tôpô được sinh bởi chuẩn.

Ví dụ (tôpô Euclid). Trong $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, chuẩn Euclid của một điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được cho bởi $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{1/2}$. Tôpô sinh bởi chuẩn này được gọi là ***tôpô Euclid*** (Euclidean topology) of $\mathbb{R}^n$.

Phần bù của một tập mở được gọi là ***tập hợp đóng*** (closed set), hay ***tập đóng***.

Mệnh đề (mô tả đối ngẫu của tôpô). *Trong một không gian tôpô X:*

(a) Hai tập con $\emptyset$ và X đều đóng.

(b) Một hội hữu hạn các tập đóng là tập đóng.

(c) Một giao (bất kỳ) các tập đóng là tập đóng.

Phần trong – Bao đóng – Biên

Cho X là một không gian tôpô và A là một tập con của X. Một điểm x thuộc X được gọi là:

- một ***điểm trong*** (interior point) của A trong X nếu tồn tại một tập mở của X chứa x và chứa trong A.
- một ***điểm dính*** (contact point) (or point of closure) của A trong X nếu mọi tập mở của X chứa x đều chứa một điểm của A.
- một ***điểm tụ*** (limit point) (or cluster point, or accumulation point) của A trong X nếu mọi tập mở của X chứa x đều chứa một điểm khác x của A. Dĩ nhiên mỗi điểm tụ đều là một điểm dính. Ta có thể thấy rằng một điểm dính của A nhưng không thuộc A là một điểm tụ của A.
- một ***điểm biên*** (boundary point) của A trong X nếu mọi tập mở của X chứa x đều chứa một điểm thuộc A và một điểm thuộc phần bù của A. Nói cách khác, một điểm biên của A là một điểm dính của cả A lẫn phần bù của A.

Với các khái niệm này, ta định nghĩa:

- Tập hợp tất cả các điểm trong của A trong X được gọi là ***phần trong*** (interior) của A trong X, kí hiệu bởi $\mathring{A}$ hoặc $\operatorname{int}(A)$.
- Tập hợp tất cả các điểm dính của A trong X được gọi là ***bao đóng*** (closure) của A trong X, kí hiệu bởi $\overline{A}$ hoặc $\operatorname{cl}(A)$.
- Tập hợp tất cả các điểm biên của A trong X được gọi là ***biên*** (boundary) của A trong X, kí hiệu bởi ∂A.

Ví dụ. Trên đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$, xét tập con $A = [0,1) \cup \{2\}$. Phần trong của nó là $\operatorname{int} A = (0,1)$, bao đóng là $\operatorname{cl} A = [0,1] \cup \{2\}$, biên là $\partial A = \{0,1,2\}$, và tập tất cả các điểm tụ là $[0,1]$.

Các cơ sở của một tôpô

Định nghĩa. Cho một tôpô, một họ các tập mở là một ***cơ sở*** (basis) của tôpô đó nếu mọi tập mở khác rỗng là hội của một số các phần tử thuộc họ đó.

Ngắn gọn hơn, gọi τ là một tôpô của X, khi đó một họ $B \subset \tau$ được gọi là một cơ sở của τ nếu với mọi $\emptyset \neq V \in \tau$ tồn tại $C \subset B$ sao cho $V = \bigcup_{O \in C} O$.

Do đó một cơ sở của tôpô là một tập con của tôpô đó và sinh ra được cả tôpô đó thông qua các phép hội. Xác định rõ một cơ sở là một cách hiệu quả hơn để cho một tôpô.

Ví dụ. Trong một không gian metric họ tất cả các quả cầu là một cơ sở của tôpô sinh bởi metric của không gian đó.

Ví dụ. Mặt phẳng Euclid có một cơ sở gồm tất cả các đĩa mở. Họ tất cả các hình chữ nhật mở cũng là một cơ sở của nó.

Định nghĩa. Một họ $S \subset \tau$ được gọi là một ***tiền cơ sở*** (subbasis) của tôpô τ nếu họ tất cả các giao của hữu hạn các phần tử thuộc S là một cơ sở của τ.

Rõ ràng một cơ sở của một tôpô cũng là một tiền cơ sở của tôpô đó. Nói ngắn gọn, cho một tôpô, một tiền cơ sở là một tập con của tôpô đó và sinh ra được cả tôpô đó thông qua các phép hội và các phép giao hữu hạn.

Ví dụ. Cho $X = \{1,2,3\}$. Tôpô $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$ có một cơ sở $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$ và một tiền cơ sở $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}$.

2.1 Ví dụ. Họ tất cả các tia mở, tức là, các tập có dạng (a,∞) và $(-\infty,a)$, là một tiền cơ sở của tôpô Euclid trên $\mathbb{R}$.

So sánh các tôpô

Định nghĩa. Gọi τ_1 và τ_2 là hai tôpô trên X. Nếu $\tau_1 \subset \tau_2$ ta nói rằng τ_2 ***mịn hơn*** (finer) (hoặc ***mạnh hơn***, ***lớn hơn***) τ_1 và τ_1 ***thô hơn*** (coarser) (hoặc ***yếu hơn***, ***nhỏ hơn***) τ_2.

Ví dụ. Trên một tập hợp, tôpô hiển nhiên là thô nhất và tôpô rời rạc là mịn nhất.

Sinh các tôpô

Giả sử rằng ta có một tập hợp và ta muốn một số tập con nhất định của tập hợp đó trở thành các tập mở, làm thế nào để tìm được một tôpô thỏa ý định đó?

Định lí. *Gọi S là một họ các tập con của X. Họ τ bao gồm $\emptyset$, X, và tất cả các hội của các giao hữu hạn các phần tử thuộc S là tôpô thô nhất trên X chứa S, được gọi là tôpô sinh bởi S. Một cách ngắn gọn, với $B = \{\bigcap_{O\in I} O \mid I \subset S, |I| < \infty\}$ thì tôpô sinh bởi S là $\tau = \{\bigcup_{U\in F} U \mid F \subset B\}$. Họ $S \cup \{X\}$ là một tiền cơ sở của tôpô này.*

Ghi chú. Trong một số giáo trình, để tránh việc thêm phần tử X vào S người ta yêu cầu hội của tất cả các phần tử của S phải bằng X.

Chứng minh. Rõ ràng mỗi tôpô chứa S thì phải chứa τ, do đó ta chỉ cần kiểm tra rằng τ là một tôpô. Trước hết ta kiểm tra τ đóng dưới phép hội. Cho $\sigma \subset \tau$, xét $\bigcup_{A\in\sigma} A$. Ta viết $\bigcup_{A\in\sigma} A = \bigcup_{A\in\sigma} \left(\bigcup_{U\in F_A} U\right)$, với $F_A \subset B$. Vì

$$\bigcup_{A\in\sigma}\left(\bigcup_{U\in F_A} U\right) = \bigcup_{U\in(\bigcup_{A\in\sigma} F_A)} U,$$

và vì $\bigcup_{A\in\sigma} F_A \subset B$, ta kết luận $\bigcup_{A\in\sigma} A \in \tau$.

Ta kiểm tra τ đóng dưới phép giao hai phần tử. Gọi $\bigcup_{U\in F} U$ và $\bigcup_{V\in G} V$ là hai phần tử của τ, với $F, G \subset B$. Ta có thể viết

$$(\bigcup_{U\in F} U) \cap (\bigcup_{V\in G} V) = \bigcup_{U\in F, V\in G} (U \cap V).$$

Đặt $J = \{U \cap V \mid U \in F, V \in G\}$. Khi đó $J \subset B$, nên ta có thể viết

$$(\bigcup_{U\in F} U) \cap (\bigcup_{V\in G} V) = \bigcup_{W\in J} W$$

và kết luận rằng $(\bigcup_{U\in F} U) \cap (\bigcup_{V\in G} V) \in \tau$. □

Từ định lí này, ta thấy rằng ***với một tập được cho, mỗi họ các tập con của nó đều sinh ra một tôpô.***

Ví dụ. Cho $X = \{1,2,3,4\}$. Tập hợp $\{\{1\},\{2,3\},\{3,4\}\}$ sinh ra tôpô

$$\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

Một cơ sở của tôpô này là $\{\{1\},\{3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$.

Ví dụ (tôpô thứ tự). Cho $(X, \leq)$ là một tập được sắp thứ tự toàn phần. Họ các tập con có dạng $\{\beta \in X \mid \beta < \alpha\}$ and $\{\beta \in X \mid \beta > \alpha\}$ sinh ra một tôpô trên X, gọi là ***tôpô thứ tự*** (ordering topology).

Ví dụ. Tôpô Euclid trên $\mathbb{R}$ là tôpô thứ tự ứng với thứ tự thông thường của các số thực. (Đây chỉ là một cách phát biểu khác của 2.1.)

Bài tập

2.2. Tập hợp $\{x \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ vừa đóng vừa mở trong $\mathbb{Q}$ dưới tôpô Euclid của $\mathbb{R}$.

2.3 (tôpô phần bù hữu hạn và tôpô phần bù đếm được). ✓ ***Tôpô phần bù hữu hạn*** (finite complement topology) trên X bao gồm tập rỗng và mọi tập con của X có phần bù hữu hạn. Kiểm tra rằng đây thực sự là một tôpô. Điều này có đúng nếu ta thay "hữu hạn" bằng "đếm được"? So sánh chúng với tôpô Euclid.

2.4. Cho tập hợp X và một điểm $p \in X$. Chứng minh rằng một họ bao gồm $\emptyset$ và tất cả các tập con của X chứa p là một tôpô trên X. Đây được gọi là ***tôpô điểm riêng*** (Particular Point Topology) trên X, kí hiệu bởi PPX_p. Mô tả các tập đóng trong không gian này.

2.5. (a) Phần trong của A trong X là tập con mở lớn nhất của X chứa trong A. Một tập con là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

(b) Bao đóng của A trong X là tập con đóng nhỏ nhất của X chứa A. Một tập con là đóng khi và chỉ khi nó chứa tất cả các điểm dính của nó.

2.6. Cho X là một không gian tôpô và $A \subset X$.

(a) Chứng minh $\overline{A}$ là hội rời của $\mathring{A}$ và ∂A.

(b) Chứng minh X là hội rời của $\mathring{A}$, ∂A, và $X \setminus \overline{A}$.

2.7. Trong không gian metric X, điểm $x \in X$ là một điểm tụ của tập con $A \subseteq X$ nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy trong $A \setminus \{x\}$ hội tụ về x. (Điều này không đúng đối với các không gian tôpô nói chung, xem 5.5.)

2.8. Tìm bao đóng, phần trong và biên của khoảng $[0,1)$ lần lượt dưới tôpô Euclid, tôpô rời rạc và tôpô hiển nhiên trên $\mathbb{R}$.

2.9. (a) Trong một không gian định chuẩn, chứng minh rằng biên của quả cầu $B(x,r)$ là mặt cầu $\{y \mid \|x-y\| = r\}$, và do đó quả cầu $B'(x,r) = \{y \mid \|x-y\| \leq r\}$ là bao đóng của $B(x,r)$.

(b) Trong một không gian metric, chứng minh rằng biên của quả cầu $B(x,r)$ là một tập con của mặt cầu $\{y \mid d(x,y) = r\}$. Quả cầu $B'(x,r) = \{y \mid d(x,y) \leq r\}$ có phải là bao đóng của $B(x,r)$?

2.10. Đặt $O_n = \{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k \geq n\}$. Kiểm tra rằng $\{\emptyset\} \cup \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ là một tôpô trên $\mathbb{Z}^+$. Tìm bao đóng của tập $\{5\}$, và của tập tất cả các số nguyên dương chẵn.

2.11. Chứng minh rằng mọi tập mở trong đường thẳng Euclid là một hội đếm được của các khoảng mở.

2.12. Trong trục số thực với tôpô Euclid, tập Cantor (xem 1.15) là đóng hay mở, hay một đáp án khác? Tìm biên và phần trong của tập Cantor (xem 2.12).

2.13. Chứng minh rằng giao của một họ các tôpô trên X là một tôpô trên X. Nếu S là một tập con của X, thì giao của tất cả các tôpô trên X chứa S là tôpô nhỏ nhất chứa S. Chứng minh rằng đây chính xác là tôpô sinh bởi S.

2.14. ✓ Một họ B các tập mở là một cơ sở nếu với mỗi điểm x và mỗi tập mở O chứa x có một U thuộc họ B sao cho U chứa x và U chứa trong O.

2.15. ✓ Chứng minh rằng hai cơ sở sinh ra cùng một tôpô nếu và chỉ nếu mỗi phần tử của cơ sở này là một hội của các phần tử của cơ sở kia.

2.16. Cho B mà một họ các tập con của X. Khi đó $B \cup \{X\}$ là cơ sở của một tôpô trên X nếu và chỉ nếu giao của hai phần tử thuộc B hoặc rỗng hoặc là hội của một số phần tử nào đó thuộc B. (Ở một vài giáo trình để tránh việc thêm phần tử X vào B người ta yêu cầu thêm rằng hội của tất cả phần tử thuộc B bằng X.)

2.17. Trong một không gian metric tập hợp tất cả các quả cầu có bán kính hữu tỉ là một cơ sở của tôpô (sinh bởi metric đó). Tập hợp tất cả các quả cầu có bán kính $\frac{1}{2^m}$, $m \geq 1$ là một cơ sở khác.

2.18 ($\mathbb{R}^n$ có một cơ sở đếm được). ✓ Tập hợp tất cả các quả cầu có bán kính hữu tỉ và có tâm với các tọa độ cũng đều hữu tỉ là một cơ sở của tôpô Euclid trên $\mathbb{R}^n$.

2.19. Gọi d_1 và d_2 là hai metric trên X. Nếu có $\alpha, \beta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$, $\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$ thì hai metric trên được gọi là tương đương. Chứng minh rằng hai metric tương đương sinh ra cùng một tôpô.

2.20. Cho (X, d) là một không gian metric.

(a) Đặt $d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Chứng minh rằng d_1 là một metric trên X và nó sinh ra cùng một tôpô với d. Metric d_1 có tương đương với d không?

(b) Đặt $d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Chứng minh rằng d_2 là một metric trên X và nó sinh ra cùng một tôpô với d. Metric d_2 có tương đương với d?

2.21 (mọi chuẩn trong $\mathbb{R}^n$ đều sinh ra tôpô Euclid). Trong $\mathbb{R}^n$ ta kí hiệu chuẩn Euclid bởi $\|\cdot\|_2$, và gọi $\|\cdot\|$ là một chuẩn bất kì.

(a) Kiểm tra rằng ánh xạ $x \mapsto \|x\|$ từ $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ tới $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ là liên tục.

(b) Gọi S^n là mặt cầu đơn vị dưới chuẩn Euclid. Chứng minh rằng hạn chế của ánh xạ trên lên S^n có giá trị lớn nhất β và giá trị nhỏ nhất α. Do đó $\alpha \le \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \le \beta$ với mọi $x \neq 0$.

(c) Suy ra rằng hai chuẩn bất kì trong $\mathbb{R}^n$ sinh ra các metric tương đương, vậy nên mọi chuẩn trong $\mathbb{R}^n$ đều sinh ra tôpô Euclid.

2.22. Tôpô Euclid trên $\mathbb{R}^2$ có giống với tôpô thứ tự trên $\mathbb{R}^2$ ứng với thứ tự từ điển? Nếu chúng không giống nhau thì có thể so sánh được với nhau không?

2.23 (đường thẳng Sorgenfrey). Họ tất cả các khoảng có dạng $[a, b)$ sinh một tôpô trên $\mathbb{R}$. Hỏi đó có phải là tôpô Euclid?

2.24. * Trên tập $\mathbb{Z}$ tất cả các số nguyên, xét các cấp số cộng

$$S_{a,b} = a + b\mathbb{Z},$$

với $a \in \mathbb{Z}$ và $b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Chứng minh rằng những tập này tạo thành cơ sở của một tôpô trên $\mathbb{Z}$.

(b) Với tôpô này, chứng minh rằng mỗi tập $S_{a,b}$ là đóng.

(c) Chứng minh nếu chỉ tồn tại hữu hạn các số nguyên tố thì $\{\pm 1\}$ là tập mở.

(d) Kết luận rằng ***có vô hạn các số nguyên tố***. (Lí luận này được đưa ra bởi Hillel Furstenberg vào năm 1955.)

3 Sự liên tục

Ánh xạ liên tục

Trước đây trong các không gian metric, một hàm f được gọi là liên tục tại x nếu $f(y)$ có thể ở gần $f(x)$ tùy ý miễn là y đủ gần x. Do đó, có thể thấy rằng sự liên tục chỉ cần đến khái niệm về lân cận. Thay vì các lân cận được cho thông qua khoảng cách, ta có thể định rõ một họ các tập con nào đó làm họ các lân cận.

Định nghĩa. Cho X và Y là các không gian tôpô. Ta nói ánh xạ $f : X \to Y$ là ***liên tục*** (continuous) ***tại điểm*** x thuộc X nếu với mỗi tập mở U của Y chứa $f(x)$, có một tập mở V của X chứa x sao cho $f(V)$ chứa trong U.

Rõ ràng trong định nghĩa trên ta có thể thay các tập mở bằng các lân cận.

Ta nói một ánh xạ là ***liên lục trên cả không gian***, hay ***liên tục***, nếu nó liên tục tại mọi điểm của không gian đó.

Định lí. *Một ánh xạ là liên tục nếu và chỉ nếu ảnh ngược của mỗi tập mở là một tập mở.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử $f : X \to Y$ là liên tục. Gọi U là một tập mở trong Y. Cho $x \in f^{-1}(U)$. Vì f liên tục tại x và U là một lân cận mở của $f(x)$, tồn tại một tập mở V_x chứa x sao cho V_x chứa trong $f^{-1}(U)$. Do đó $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$ là tập mở.

($\Leftarrow$) Giả sử ảnh ngược của mỗi tập mở là một tập mở. Cho $x \in X$ và U là một lân cận mở của $f(x)$. Khi đó $V = f^{-1}(U)$ là một tập mở chứa x, và $f(V)$ chứa trong U. Vậy f liên tục tại x. □

Ví dụ. Cho X và Y là các không gian tôpô.

(a) Ánh xạ đồng nhất, $\mathrm{id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$, là liên tục.

(b) Ánh xạ hằng, với một $a \in Y$ cho trước, $x \mapsto a$, là liên tục.

(c) Nếu Y có tôpô hiển nhiên thì mọi ánh xạ $f : X \to Y$ đều liên tục.

(d) Nếu X có tôpô rời rạc thì mọi ánh xạ $f : X \to Y$ đều liên tục.

Ví dụ (không gian metric). Cho (X, d_X) và (Y, d_Y) là các không gian metric. Nhắc lại rằng trong lí thuyết về các không gian metric, một ánh xạ $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ là liên tục tại $x \in X$ nếu và chỉ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, d_X(y, x) < \delta \implies d_Y(f(y), f(x)) < \epsilon.$$

Nói cách khác, với mọi quả cầu $B(f(x), \epsilon)$ có tâm tại $f(x)$, tồn tại một quả cầu $B(x, \delta)$ có tâm tại x sao cho f mang $B(x, \delta)$ vào $B(f(x), \epsilon)$. Rõ ràng định nghĩa này tương đương với định nghĩa của sự liên tục trong các không gian tôpô, với các tôpô được sinh bởi các metric tương ứng. Nói cách khác, nếu ta xem mỗi không gian metric như một không gian tôpô, với tôpô sinh bởi metric, thì sự liên tục trong không gian metric đó không có gì khác so với sự liên tục trong không gian tôpô tương ứng. Vì vậy *ta được thừa hưởng mọi kết quả liên quan đến sự liên tục trong các không gian metric*.

Tôpô sinh bởi các ánh xạ

Ta sẽ gặp nhiều trường hợp mà ở đó, với một ánh xạ cho trước, ta muốn xây dựng các cấu trúc để ánh xạ đó trở nên liên tục.

Ở một trường hợp, với (X, τ_X) là một không gian tôpô, Y là một tập hợp, và $f : X \to Y$ là một ánh xạ, ta muốn tìm một tôpô trên tập hợp Y sao cho f là liên tục. Rõ ràng tôpô τ_Y phải thỏa một yêu cầu là nếu $U \in \tau_Y$ thì $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Ta thấy tôpô hiển nhiên trên Y đáp ứng được, và là tôpô thô nhất thỏa yêu cầu đó. Mặt khác, họ $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \tau_X\}$ thực sự là một tôpô trên Y. Đây là tôpô mịn nhất thỏa yêu cầu.

Một trường hợp khác, với X là một tập hợp, (Y, τ_Y) là một không gian tôpô, và $f : X \to Y$ là một ánh xạ, ta muốn tìm một tôpô trên tập hợp X sao cho f là liên tục. Yêu cầu cho một tôpô τ_X như vậy là nếu $U \in \tau_Y$ thì $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Tôpô rời rạc trên X là tôpô mịn nhất thỏa mãn yêu cầu này. Mặt khác, họ $\tau_X = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y\}$ là tôpô thô nhất đáp ứng được yêu cầu. Hơn nữa, ta có thể thấy nếu họ S_Y sinh ra τ_Y thì τ_X sinh được bởi họ $\{f^{-1}(U) \mid U \in S_Y\}$.

Ví dụ. Trên tập hợp $\mathbb{R}$ với tôpô phần bù hữu hạn, mọi đa thức đều liên tục, nhưng một hàm lượng giác, chẳng hạn hàm sin, lại không liên tục.

Không gian con

Cho (X, τ) là một không gian tôpô và Y là một tập con của X. Ta muốn định nghĩa một tôpô trên Y sao cho nó có thể được xem, một cách tự nhiên, là "được thừa hưởng" từ X. Vậy mỗi tập mở của X chứa trong Y nên được xem là mở trong Y. Nếu một tập mở của X không chứa trong Y thì hạn chế của nó lên Y cũng nên được xem là mở trong Y. Ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng họ các hạn chế lên Y của các tập mở trong X là một tôpô trên Y.

Định nghĩa. Cho Y là một tập con của không gian tôpô X. ***Tôpô không gian con*** (subspace topology) trên Y, còn gọi là ***tôpô tương đối*** (relative topology) đối với X (hay ***cảm sinh bởi*** X), được định nghĩa là họ các hạn chế lên Y của các tập mở trong X, tức tập hợp $\{O \cap Y \mid O \in \tau\}$. Với tôpô này ta nói rằng Y là một ***không gian con*** (subspace) của X.

Nói tóm lại, nếu Y là một không con Y của X, thì một tập con của Y là mở trong Y khi và chỉ khi nó là hạn chế lên Y của một tập mở trong X.

Ghi chú. Với Y là một không gian con của X, nói chung một tập mở hoặc đóng trong Y không nhất thiết phải mở hoặc đóng trong X. Ví dụ, dưới tôpô Euclid của $\mathbb{R}$, tập hợp $[0, \frac{1}{2})$ là mở trong không gian con $[0, 1]$, nhưng lại không mở trong $\mathbb{R}$. Do đó, ***khi ta nói một tập là mở, ta cần phải biết ta đang đề cập đến tôpô nào***.

Mệnh đề. *Cho X là một không gian tôpô và $Y \subset X$. Tôpô không gian con trên Y là tôpô thô nhất trên Y sao cho ánh xạ chứa trong (hay ánh xạ nhúng) $i : Y \hookrightarrow X$, $x \mapsto x$ là liên tục. Nói cách khác, tôpô không gian con trên Y là tôpô sinh bởi ánh xạ chứa trong từ Y vào X.*

Chứng minh. Nếu O là một tập con của X thì $i^{-1}(O) = O \cap Y$. Do đó tôpô sinh bởi i là họ $\{O \cap Y \mid O \in \tau_X\}$, chính là tôpô không gian con của Y. □

Ví dụ (không gian con của một không gian metric). Khái niệm không gian tôpô con là tương thích với khái niệm trước đây về không gian metric con. Cho (X, d) là một không gian metric và $Y \subset X$. khi đó, như ta đã biết, Y là một không gian metric với metric được thừa hưởng từ X, tức là $d_Y = d_X|_{Y \times Y}$. Một quả cầu trong Y là một tập có dạng, với $a \in Y$, $r > 0$:

$$B_Y(a, r) = \{y \in Y \mid d(y, a) < r\} = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} \cap Y = B_X(a, r) \cap Y.$$

Mỗi tập mở A trong Y đều là hội của một họ các quả cầu trong Y, tức là

$$A = \bigcup_{i\in I,\ a_i\in Y} B_Y(a_i,r_i) = \bigcup_{i\in I}(B_X(a_i,r_i)\cap Y) = \left(\bigcup_{i\in I} B_X(a_i,r_i)\right)\cap Y,$$

nên A là giao của Y với một tập mở trong X. Ngược lại, nếu B mở trong X, thì với mỗi $x\in B$ tồn tại $r_x>0$ sao cho $B_X(x,r_x)\subset B$, nên

$$\begin{aligned} B\cap Y &= \left(\bigcup_{x\in B} B_X(x,r_x)\right)\cap Y = \left(\bigcup_{x\in B\cap Y} B_X(x,r_x)\right)\cap Y \\ &= \bigcup_{x\in B\cap Y}(B_X(x,r_x)\cap Y) = \bigcup_{x\in B\cap Y} B_Y(x,r_x). \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa $B\cap Y$ là một tập mở trong Y.

Ví dụ. Với $n\in\mathbb{Z}^+$ ta định nghĩa ***mặt cầu*** S^n là không gian con của không gian Euclid $\mathbb{R}^{n+1}$ cho bởi $\{(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$.

Phép đồng phôi

Một ánh xạ từ một không gian tôpô tới một không gian khác được gọi là một ***phép đồng phôi*** (homeomorphism) nếu nó là một đơn ánh, liên tục và ánh xạ ngược của nó cũng liên tục. Hai không gian được gọi là ***đồng phôi*** (homeomorphic) nếu tồn tại một phép đồng phôi giữa chúng. Đây là một mối quan hệ cơ bản giữa các không gian tôpô.

Dễ thấy rằng một phép đồng phôi mang mỗi tập mở thành tập mở, mỗi tập đóng thành tập đóng, xem 3.6.

Mệnh đề. *Mỗi phép đồng phôi giữa hai không gian cảm sinh một song ánh giữa hai tôpô.*

Chứng minh. Phép đồng phôi $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ cảm sinh ánh xạ

$$\begin{aligned} \tilde{f}:\tau_X &\to \tau_Y \\ O &\mapsto f(O), \end{aligned}$$

và ánh xạ này là song ánh. □

Đại loại, trong lĩnh vực tôpô, nếu hai không gian là đồng phôi thì chúng được xem là như nhau. Ví dụ, một "mặt cầu tôpô" sẽ có nghĩa là một không gian tôpô nào đó đồng phôi với một mặt cầu.

3.1 Ví dụ. Hai quả cầu bất kì trong một không gian định chuẩn là đồng phôi, thông qua các phép tịnh tiến (translation) và co dãn (dilation) (hay vị tự (scaling)).

Mỗi quả cầu trong một không gian định chuẩn đồng phôi với cả không gian đó. Ta có thể xét, chẳng hạn, một ánh xạ từ quả cầu đơn vị $B(0,1)$ lên cả không gian, với dạng $x\mapsto\varphi(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$, với φ là một song ánh từ $(0,1)$ lên $(0,\infty)$. Một ánh xạ φ như vậy đã được đề cập ở 1.4: ta có thể lấy $\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, hoặc $\varphi(t)=\frac{t}{1-t}$ chẳng hạn.

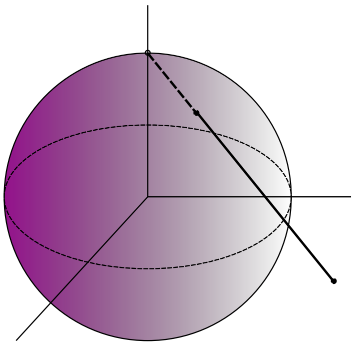
Một ***phép nhúng*** (embedding) (hay imbedding) từ một không gian tôpô X vào một không gian tôpô Y là một phép đồng phôi từ X tới một không gian con của Y, nghĩa là, một ánh xạ $f:X\to Y$ sao cho hạn chế $\tilde{f}:X\to f(X)$ là một phép đồng phôi. Nếu tồn tại một phép nhúng từ X vào Y thì ta nói X có thể nhúng được vào Y.

Ví dụ. Với tôpô không gian con ánh xạ chứa trong là một phép nhúng.

Ví dụ. Đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$ có thể nhúng được vào mặt phẳng Euclid $\mathbb{R}^2$ như một đường thẳng trên mặt phẳng đó.

Ví dụ. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục dưới tôpô Euclid. Khi đó $\mathbb{R}$ có thể nhúng được vào mặt phẳng như là đồ thị của f.

Ví dụ (phép chiếu nổi). không gian $S^n \setminus \{(0,0,\dots,0,1)\}$ đồng phôi với không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ thông qua ***phép chiếu nổi***(stereographic projection). Trên mặt cầu bỏ đi cực bắc



Hình 3.2: The stereographic projection.

$(0,0,\dots,0,1)$, cho ứng với mỗi điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ giao điểm của đường thẳng nối cực bắc và x với mặt phẳng chứa xích đạo. Từ việc giải một phương trình giao điểm ta có thể tìm được công thức cho phép chiếu này:

$$\begin{array}{rcl} S^n \setminus \{(0,0,\dots,0,1)\} & \to & \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & (y_1, y_2, \dots, y_n, 0) \end{array}$$

với $y_i = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}} x_i$. Ánh xạ ngược được cho bởi $x_i = \dfrac{2y_i}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}$, $1 \le i \le n$, và $x_{n+1} = \dfrac{-1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}$. Cả hai ánh xạ đều liên tục, do đó không gian Euclidean $\mathbb{R}^n$ có thể được nhúng vào mặt cầu n-chiều bỏ đi một điểm.

Bài tập

3.3. Nếu $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ liên tục thì $g \circ f$ liên tục.

3.4. Một ánh xạ là liên tục khi và chỉ khi ảnh ngược của một tập đóng là một tập đóng.

3.5. ✓ Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và S là một tiền cơ sở của tôpô trên Y. Chứng minh rằng f là liên tục khi và chỉ khi ảnh ngược của mỗi phần tử thuộc S là một tập mở trong X.

3.6. Ta gọi một ánh xạ là ***mở*** (open) khi nó mang mỗi tập mở thành một tập mở. Tương tự, một ánh xạ là ***đóng*** (closed) khi nó mang mỗi tập đóng thành một tập đóng. Chứng minh rằng một phép đồng phôi là một ánh xạ mở và cũng là một ánh xạ đóng.

3.7. Chứng minh rằng một song ánh liên tục là một phép đồng phôi khi và chỉ khi nó là một ánh xạ mở.

3.8. Chứng minh (X, PPX_p) và (X, PPX_q) (xem 2.4) là đồng phôi.

3.9. ✓ Cho X là một tập hợp và (Y, τ) là một không gian tôpô. Cho $f_i : X \to Y$, $i \in I$ là một họ các ánh xạ. Tìm tôpô thô nhất trên X sao cho mọi ánh xạ f_i, $i \in I$ đều liên tục.

Trong Giải tích hàm, cấu trúc này được sử dụng để xây dựng ***tôpô yếu*** (weak topology) trên một không gian định chuẩn. Nó là tôpô thô nhất sao cho, dưới nó, mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục dưới (tôpô sinh bởi) chuẩn vẫn còn liên tục. Tham khảo chẳng hạn ở [Con90].

3.10. Cho X là một không gian định chuẩn. Chứng minh rằng tôpô sinh bởi chuẩn chính là tôpô thô nhất trên X sao cho chuẩn (ánh xạ $x \mapsto \|x\|$) và các phép tịnh tiến (các ánh xạ dạng $x \mapsto x + a$) đều là các ánh xạ liên tục.

3.11. ✓ Kiểm tra lại công thức của phép chiếu nổi và nghịch đảo của nó, cho thấy phép chiếu nổi thực sự là một phép đồng phôi.

3.12. ✓ Cho Y là một không gian con của X. Chứng minh rằng một tập con của Y là đóng trong Y nếu và chỉ nếu nó là hạn chế lên Y của một tập đóng của X.

3.13. ✓ Giả sử X là một không gian tôpô và $Z \subset Y \subset X$. Khi đó tôpô tương đối của Z cảm sinh bởi Y trùng với tôpô tương đối của Z cảm sinh bởi X.

3.14. ✓ Cho hai không gian tôpô X, Y và ánh xạ $f : X \to Y$.

(a) Nếu Z là một không gian con của X, ta kí hiệu bởi $f|_Z$ hạn chế của f lên Z. Chứng minh rằng nếu f liên tục thì $f|_Z$ cũng liên tục.

(b) Gọi Z là một không gian chứa Y như là một không gian con. Xem f như một ánh xạ từ X tới Z, nghĩa là, xét $\tilde{f} : X \to Z$, $\tilde{f}(x) = f(x)$. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi $\tilde{f}$ liên tục.

3.15 (dán các hàm liên tục). ✓ Cho $X = A \cup B$ với A và B là hai tập con cùng đóng hoặc cùng mở trong X. Giả sử ánh xạ $f : X \to Y$ có cả $f|_A$ và $f|_B$ liên tục. Khi đó f cũng liên tục.

Một cách nói khác cho phát biểu trên như sau. Cho $g : A \to Y$ và $h : B \to Y$ liên tục và $g(x) = h(x)$ trên $A \cap B$. Định nghĩa $f : A \cup B \to Y$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in A \\ h(x), & x \in B. \end{cases}$$

Khi đó f liên tục.

Điều này có còn đúng không nếu tính cùng đóng hoặc cùng mở của A và B bị bỏ đi?

3.16. Trên mặt phẳng Euclid $\mathbb{R}^2$, chứng minh hai không gian con $(\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$ và $\{0\} \times [0,1]$ là đồng phôi.

3.17. Có đúng không nếu nói hai quả cầu bất kì trong một không gian metric là đồng phôi?

3.18. Hai không gian định chuẩn hữu hạn chiều có cùng số chiều thì đồng phôi.

3.19. Trong mặt phẳng Euclid đường êlip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ đồng phôi với một đường tròn.

3.20. Trong mặt phẳng Euclid, nửa mặt phẳng trên $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ đồng phôi với cả mặt phẳng.

3.21. Chứng minh rằng trong $\mathbb{R}^n$ các quả cầu ứng với các chuẩn khác nhau vẫn đồng phôi với nhau (xem 2.21). Nói riêng, một quả cầu Euclid n-chiều thì đồng phôi với một hình chữ nhật n-chiều.

3.22. ✓ Nếu $f : X \to Y$ là một phép đồng phôi và $Z \subset X$ thì $X \setminus Z$ và $Y \setminus f(Z)$ đồng phôi.

3.23. Trên mặt phẳng Euclid $\mathbb{R}^2$, chứng minh rằng:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ đồng phôi.

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (1,1)\}$ và $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0), (0,1)\}$ đồng phôi.

Bạn có thể tổng quát hóa kết quả này?

3.24. Chứng minh $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$ là đồng phôi dưới tôpô Euclid. Hơn nữa, chứng minh rằng hai không gian rời rạc có tập nền tương đương thì đồng phôi.

3.25. Trong các không gian sau, các không gian nào đồng phôi với nhau? $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, với tôpô Euclid, và $\mathbb{R}$ với tôpô phần bù hữu hạn.

3.26. Chứng minh rằng $\mathbb{R}$ với tôpô phần bù hữu hạn và $\mathbb{R}^2$ cũng với tôpô phần bù hữu hạn là đồng phôi.

3.27. Chứng minh rằng mọi phép đồng phôi từ S^{n-1} đến S^{n-1} đều có thể mở rộng được thành một phép đồng phôi từ đĩa đơn vị $D^n = B'(0,1)$ đến D^n.

3.28. Dưới tôpô Euclid ánh xạ $\varphi : [0, 2\pi) \to S^1$ cho bởi $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ là một song ánh nhưng không phải là một phép đồng phôi.

3.29. Một không gian được gọi là ***đồng nhất*** (homogeneous) nếu với mỗi hai điểm trên không gian đó, tồn tại một phép đồng phôi từ nó lên chính nó mang một điểm thành điểm còn lại.

(a) Chứng minh mặt cầu S^2 là đồng nhất.

(b) Chứng minh rằng tính đồng nhất là một ***tính chất tôpô***, nghĩa là nếu hai không gian là đồng phôi và có một không gian là đồng nhất thì không gian kia cũng đồng nhất.

3.30 (phép đẳng cự). * Một ***phép đẳng cự*** (isometry) (hay phép đẳng cấu metric, phép đẳng cấu hình học) từ một không gian metric X tới một không gian metric Y là một toàn ánh $f : X \to Y$ bảo toàn khoảng cách, tức $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Nếu tồn tại một phép đẳng cự như vậy thì X được gọi là ***đẳng cự*** (isometric) với Y.

(a) Chứng minh mỗi phép đẳng cự là một phép đồng phôi.

(b) Chứng minh đẳng cự là một quan hệ tương đương giữa các không gian metric.

(c) Chứng minh $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ và $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ là đẳng cự, nhưng chúng không đẳng cự với $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, mặc dù cả ba không gian này là đồng phôi (xem 2.21). (Đối với những số chiều lớn hơn có thể phải dùng đến định lí Mazur-Ulam.)

4 Sự liên thông

Một không gian tôpô được gọi là ***liên thông*** (connected) nếu nó không phải là hội của hai tập mở khác rỗng rời nhau.

Một cách tương đương, một không gian tôpô là liên thông khi và chỉ khi nó chỉ có các tập con vừa mở vừa đóng là tập rỗng và chính nó.

Ghi chú. Khi ta nói một tập con của một không gian tôpô là liên thông, thì có nghĩa rằng tập con đó dưới tôpô không gian con là một không gian liên thông.

Ví dụ. Không gian chỉ có một điểm là liên thông.

Ví dụ. Đường thẳng thực Euclid bỏ đi một điểm là không liên thông.

4.1 Mệnh đề. *Trong một không gian tôpô, nếu một họ các không gian con liên thông có phần giao khác rỗng thì hội của chúng là liên thông.*

Chứng minh. Xét một không gian tôpô và gọi F là một họ các không gian con có phần giao khác rỗng. Gọi A là hội của họ đó, $A = \bigcup_{D \in F} D$. Giả sử C là một tập con của A vừa mở vừa đóng trong A. Nếu $C \neq \emptyset$ thì có $D \in F$ sao cho $C \cap D \neq \emptyset$. Khi đó $C \cap D$ là một tập con của D và vừa mở vừa đóng trong D (ta đang sử dụng 3.13 ở đây). Do D liên thông và $C \cap D \neq \emptyset$, ta phải có $C \cap D = D$. Suy ra C chứa phần giao của F. Do đó $C \cap D \neq \emptyset$ với mọi $D \in F$. Lặp lại lí luận trên ta có C chứa mọi D trong F, vậy nên $C = A$. Ta kết luận A là liên thông. $\square$

Thành phần liên thông

Trong một không gian tôpô X, ta định nghĩa một quan hệ, theo đó hai điểm quan hệ với nhau nếu cả hai thuộc vào cùng một không gian con liên thông của X (lúc này ta nói hai điểm như vậy là liên thông). Đây là một quan hệ tương đương, bởi 4.1.

Mệnh đề. *Dưới quan hệ tương đương trên, lớp tương đương chứa điểm x là bằng với hội của tất cả các không gian con liên thông chứa điểm x đó. Vậy nên nó là không gian con liên thông lớn nhất chứa x.*

Chứng minh. Xét lớp tương đương $[x]$ đại diện bởi x. Theo định nghĩa, $y \in [x]$ khi và chỉ khi có một tập liên thông O_y chứa cả x lẫn y. Do $O_y \subset [x]$, ta có $[x] = \bigcup_{y \in [x]} O_y$. Bởi 4.1, ta kết luận $[a]$ là liên thông. $\square$

Dưới quan hệ tương đương trên, các lớp tương đương được gọi là các ***thành phần liên thông*** (connected component) của không gian. Do đó mọi không gian là một hội rời các thành phần liên thông của nó.

Mệnh đề (ảnh liên tục của một không gian liên thông thì liên thông). *Nếu $f : X \to Y$ liên tục và X liên thông thì $f(X)$ liên thông.*

Chứng minh. Giả sử $f(X)$ là hội của hai tập mở khác rỗng rời nhau U, V. Do $f : X \to f(X)$ liên tục (xem 3.14), nên $f^{-1}(U)$ và $f^{-1}(V)$ mở trong X, khác rỗng và rời nhau. Điều này mâu thuẫn với sự liên thông của X. $\square$

Định lí. *Nếu hai không gian là đồng phôi thì tồn tại một song ánh giữa các họ các thành phần liên thông của hai không gian.*

Chứng minh. Gọi $f : X \to Y$ là một phép đồng phôi. Đặt

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \{[x] \mid x \in X\} &\to \{[y] \mid y \in Y\}\\ [x] &\mapsto [f(x)].\end{aligned}$$

Ta kiểm tra $\tilde{f}$ được định nghĩa tốt. Giả sử $y \in [x]$. Do f liên tục, nên ảnh $f([x])$ liên thông. Do đó $f(y)$ và $f(x)$ thuộc cùng một không gian con liên thông $f([x])$, vậy nên $[f(y)] = [f(x)]$.

Ánh xạ $\tilde{f}$ có ánh xạ ngược

$$\begin{aligned}\widetilde{f^{-1}} : \{[y] \mid y \in Y\} &\to \{[x] \mid x \in X\}\\ [y] &\mapsto [f^{-1}(y)].\end{aligned}$$

Vậy ta có một song ánh giữa hai tập hợp. □

Từ kết quả trên ta nói rằng ***sự liên thông là một tính chất tôpô***. Ta cũng nói rằng ***số các thành phần liên thông là một bất biến tôpô***. Nếu hai không gian có số thành phần liên thông khác nhau thì chúng phải khác nhau (nghĩa là, không đồng phôi).

Ví dụ (đường thẳng không đồng phôi với mặt phẳng). Giả sử dưới tôpô Euclid $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^2$ là đồng phôi, thông qua phép đồng phôi f. Bỏ một điểm x bất kì của $\mathbb{R}$. Từ 3.22 ta có các không gian con $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ và $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(x)\}$ là đồng phôi. Nhưng $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ là không liên thông trong khi $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(x)\}$ lại có (xem 4.24), mâu thuẫn. Vậy $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^2$ không đồng phôi.

Ví dụ (đường tròn không đồng phôi với đường thẳng). Giả sử tồn tại một phép đồng phôi f từ đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$ tới đường tròn S^1. Lấy $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ đồng phôi với $S^1 \setminus \{f(x)\}$. Nhưng số thành phần liên thông của chúng là khác nhau, mâu thuẫn.

4.2 Mệnh đề. *Một không gian con liên thông cộng thêm một điểm tụ thì vẫn liên thông. Hệ quả là bao đóng của một không gian con liên thông thì liên thông, và mỗi thành phần liên thông đều đóng.*

Chứng minh. Gọi A là không gian con liên thông của một không gian X và $a \notin A$ là một điểm tụ của A, ta chứng minh $A \cup \{a\}$ liên thông. Giả sử $A \cup \{a\} = U \cup V$ với U và V là hai tập mở khác rỗng rời nhau của $A \cup \{a\}$. Giả sử $a \in U$. Khi đó $a \notin V$, nên $V \subset A$. Do a là một điểm tụ của A, nên $U \cap A$ khác rỗng. Ta có $U \cap A$ và V là hai tập mở của A, từ 3.13, khác rỗng và rời nhau, đồng thời $A = (U \cap A) \cup V$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết A là liên thông. □

Các tập liên thông trong đường thẳng thực Euclid

Định lí. *Một không gian con của đường thẳng thực Euclid là liên thông khi và chỉ khi nó là một khoảng.*

Chứng minh. Gọi A là một tập con liên thông của $\mathbb{R}$. Giả sử $x, y \in A$ và $x < y$. Nếu $x < z < y$ thì ta phải có $z \in A$, nếu không thì tập hợp $\{a \in A \mid a < z\} = \{a \in A \mid a \leq z\}$ sẽ vừa mở vừa đóng trong A. Do đó A chứa cả khoảng $[x, y]$.

Đặt $a = \inf A$ nếu A bị chặn dưới và $a = -\infty$ nếu không. Tương tự đặt $b = \sup A$ nếu A bị chặn trên và $b = \infty$ nếu không. Giả sử A chứa hơn một phần tử, lúc đó $a < b$. Tồn tại các dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ và $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ các phần tử của A sao cho $a < a_n < b_n < b$, $a_n \to a$ và $b_n \to b$. Từ lí luận mở đầu, $[a_n, b_n] \subset A$ với mọi n. Do đó $(a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset A \subset [a, b]$. Suy ra A bằng (a, b) hoặc $[a, b)$ hoặc $(a, b]$ hoặc $[a, b]$.

Ta chứng minh mọi khoảng đều liên thông. Sự đồng phôi cho phép ta chỉ cần quy về xét các khoảng $(0,1)$, $(0,1]$, và $[0,1]$. Do $[0,1]$ là bao đóng của $(0,1)$, và $(0,1] = (0,\frac{3}{4}) \cup [\frac{1}{2},1]$, chỉ cần chứng minh $(0,1)$ liên thông là đủ. Để tiện hơn, ta sẽ chứng minh $\mathbb{R}$ liên thông.

Giả sử $\mathbb{R}$ có một tập con thực sự C khác rỗng và vừa đóng vừa mở. Lấy $x \notin C$ và đặt $D = C \cap (-\infty, x) = C \cap (-\infty, x]$. Khi đó D vừa đóng vừa mở trong $\mathbb{R}$, và bị chặn trên.

Nếu $D \neq \emptyset$, xét $s = \sup D$. Vì D đóng và s là một điểm dính của D, nên $s \in D$. Vì D mở nên s phải nằm trong một khoảng mở chứa trong D. Nhưng nếu vậy thì lại có những điểm trong D lớn hơn s, mâu thuẫn.

Nếu $D = \emptyset$ ta đặt $E = C \cap (x, \infty)$, xét $t = \inf E$ và tiến hành một cách tương tự. □

Ví dụ. Do không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là hội của tất cả các đường thẳng đi qua tâm, nên nó liên thông.

Dưới đây trình bày một áp dụng đơn giản, một dạng của định lí đạt giá trị trung gian (Intermediate value theorem) (4.8):

Định lí (Định lí Borsuk–Ulam). *Với mọi hàm thực liên tục trên mặt cầu S^n, tồn tại những điểm đối xứng qua tâm (antipodal points) sao cho các giá trị của hàm tại những điểm đó là bằng nhau.* [4]

Chứng minh. Cho $f : S^n \to \mathbb{R}$ liên tục. Đặt $g(x) = f(x) - f(-x)$. Khi đó g liên tục và $g(-x) = -g(x)$. Do S^n liên thông (xem 4.7), ảnh $g(S^n)$ là một tập con liên thông của không gian Euclid $\mathbb{R}$, nên nó là một khoảng, chứa một khoảng giữa $g(x)$ và $g(-x) = -g(x)$. Do đó 0 thuộc tập giá trị của g, vậy nên có $x_0 \in S^n$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$. □

Sự liên thông đường

Sự liên thông đường (path-connectedness) là khái niệm trực quan hơn sự liên thông. Nói ngắn gọn, một không gian là liên thông đường nếu giữa hai điểm bất kì đều có một đường nối chúng.

Định nghĩa. Một ***đường đi*** (path) trong một không gian tôpô X từ điểm x tới điểm y là một ánh xạ liên tục $\alpha : [a,b] \to X$ với $\alpha(a) = x$ và $\alpha(b) = y$, và khoảng các số thực $[a,b]$ có tôpô Euclid. Không gian X được gọi là ***liên thông đường*** (path-connected) nếu với mỗi hai điểm x và y trong X tồn tại một đường đi trong X từ x tới y.

Ví dụ. Mọi không gian định chuẩn đều liên thông đường, và mọi không gian con lồi của chúng cũng vậy: hai điểm x và y bất kì được nối với nhau bởi đoạn thẳng $x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$.

Ví dụ. Trong một không gian định chuẩn, mặt cầu $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ là liên thông đường. Có thể chứng minh như sau. Nếu hai điểm x và y không đối diện nhau thì chúng có thể được nối với nhau bằng cung $\frac{x+t(y-x)}{\|x+t(y-x)\|}$, $t \in [0,1]$. Nếu x và y đối diện nhau thì ta có thể lấy thêm điểm z, sau đó hợp nối đường đi từ x tới z với đường đi từ z tới y.

Mọi điểm đều liên thông đường với chính nó, thông qua đường hằng.

Nếu α là một đường đi xác định trên $[a,b]$ thì tồn tại một đường đi β xác định trên $[0,1]$ có cùng ảnh (còn gọi là vết (traces) của các đường đi): ta chỉ cần nhờ đến phép đồng phôi tuyến tính $(1-t)a + tb$ từ $[0,1]$ tới $[a,b]$ và đặt $\beta(t) = \alpha((1-t)a + tb)$. Do đó để tiện lợi ta có thể giả sử tập nguồn của các đường đi là khoảng $[0,1]$.

[4] Trên bề mặt trái đất ở mọi thời điểm luôn có hai nơi đối nhau (qua tâm) có cùng nhiệt độ.

Nếu tồn tại một đường đi $\alpha : [0,1] \to X$ từ x tới y thì cũng tồn tại một đường đi từ y tới x, ví dụ $\beta : [0,1] \to X$, $\beta(t) = \alpha(1-t)$.

Nếu $\alpha : [0,1] \to X$ là một đường đi từ x tới y và $\beta : [0,1] \to X$ là một đường đi từ y tới z thì có một đường đi từ x tới z, chẳng hạn

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Đường đi này đi theo α nhưng với tốc độ gấp đôi, sau đó trong nửa khoảng thời gian đơn vị còn lại thì đi theo β cũng với tốc độ gấp đôi. Nó liên tục bởi 3.15. Còn có những "cách đi" khác. Chẳng hạn ta có thể xét $\beta_1 : [1,2] \to X$, $\beta_1(t) = \beta(t-1)$, sau đó xét $\gamma_1 : [0,2] \to X$, cho bởi

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \alpha(t), & 0 \le t \le 1, \\ \beta_1(t), & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

để đi từ x tới y rồi tới z.

Ta có ngay:

Mệnh đề. *Một quan hệ trong một không gian tôpô X theo đó một điểm x quan hệ với một điểm y nếu có một đường đi trong X từ x tới y là một quan hệ tương đương.*

Một lớp tương đương dưới quan hệ tương đương trên được gọi là một thành phần liên thông đường.

Định lí (liên thông đường $\Longrightarrow$ liên thông). *Mọi không gian liên thông đường đều liên thông.*

Chứng minh. Đây là một hệ quả của việc đường thẳng thực Euclid là liên thông. Cho X liên thông đường và $x, y \in X$. Có một đường đi từ x tới y. Ảnh của đường đi này là một không gian con liên thông của X. Điều này có nghĩa là mỗi điểm y đều thuộc vào thành phần liên thông chứa x. Do đó X chỉ có duy nhất một thành phần liên thông. □

Ở chiều ngược lại ta có:

4.3 Mệnh đề. *Nếu một không gian là liên thông và mọi điểm của nó đều có một lân cận liên thông đường thì không gian đó là liên thông đường.*

Chứng minh. Giả sử X liên thông và mọi điểm của X có một lân cận liên thông đường. Gọi C là một thành phần liên thông đường của X. Nếu $x \in X$ là một điểm dính của C thì có một lân cận liên thông đường U trong X của x sao cho $U \cap C \ne \emptyset$. Từ 4.20, ta có $U \cup C$ là liên thông đường, nên $U \cup C \subset C$, do đó $U \subset C$. Điều này cho thấy rằng mọi điểm dính của C là một điểm trong của C, nên C vừa đóng vừa mở trong X. Vì X liên thông, nên $C = X$. □

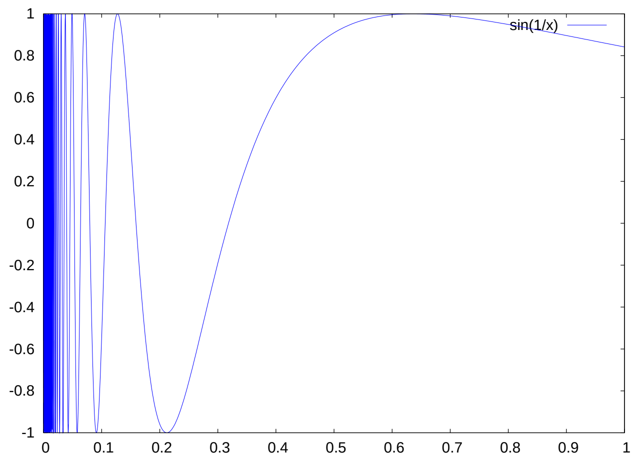
Một không gian tôpô được gọi là ***liên thông đường địa phương***(locally path-connected) nếu mọi lân cận của một điểm đều chứa một lân cận mở liên thông đường của điểm đó.

Ví dụ. Mọi tập mở trong một không gian định chuẩn đều liên thông đường địa phương.

Hệ quả. *Một không gian liên thông và liên thông đường địa phương thì liên thông đường.*

Đường cong sine

Bao đóng trong mặt phẳng Euclid của đồ thị hàm số $y = \sin\frac{1}{x}$, $x > 0$ thường được gọi là ***đường cong sine*** (Topologist's sine curve). Đây là ví dụ kinh điển về một không gian liên thông nhưng không liên thông đường.



Hình 4.4: Topologist's sine curve.

Kí hiệu $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ và $B = \{0\} \times [-1,1]$. Khi đó đường cong sine là $X = A \cup B$.

Mệnh đề (connected $\neq$ path-connected). *Đường cong sine liên thông nhưng không liên thông đường.*

Chứng minh. Bởi 4.9 tập hợp A là liên thông. Mỗi điểm thuộc B là một điểm tụ của A, nên bởi 4.2 ta có X liên thông.

Giả sử tồn tại một đường đi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$ từ gốc $(0,0)$ trên B tới một điểm trên A, ta chứng minh có một mâu thuẫn.

Gọi $t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$. Khi đó $x(t_0) = 0$, $t_0 < 1$, và $x(t) > 0$ với mọi $t > t_0$. Do đó t_0 là thời điểm mà đường đi γ ra khỏi B. Ta có thể thấy đường đi nhảy tức thì ngay khi nó rời khỏi B. Vậy ta sẽ chứng minh rằng $y(t)$ không thể liên tục tại t_0, bằng cách cho thấy với mỗi $\delta > 0$ tồn tại $t_1, t_2 \in (t_0, t_0 + \delta)$ sao cho $y(t_1) = 1$ và $y(t_2) = -1$.

Để tìm t_1, để ý rằng tập hợp $x([t_0, t_0 + \frac{\delta}{2}])$ là một khoảng $[0, x_0]$ với $x_0 > 0$. Tồn tại $x_1 \in (0, x_0)$ sao cho $\sin\frac{1}{x_1} = 1$: ta chỉ cần lấy $x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k2\pi}$ với k đủ lớn. Có $t_1 \in (t_0, t_0 + \frac{\delta}{2}]$ sao cho $x(t_1) = x_1$, lúc đó $y(t_1) = \sin\frac{1}{x(t_1)} = 1$. Ta tìm t_2 một cách tương tự. □

Bài tập

4.5. Nếu một không gian mà mỗi khi nó là hội của hai tập con khác rỗng rời nhau, ít nhất luôn có một tập con chứa một điểm dính của tập con còn lại, thì không gian đó là liên thông.

4.6. Đây là một cách chứng minh khác cho sự liên thông của các khoảng số thực. Giả sử A và B là các tập con khác rỗng, rời nhau của $(0,1)$, có hội là $(0,1)$. Gọi $a \in A$ và $b \in B$. Đặt $a_0 = a$, $b_0 = b$, và với mỗi $n \geq 1$ xét trung điểm của đoạn thẳng từ a_n tới b_n. Nếu $\frac{a_n + b_n}{2} \in A$ thì đặt $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ và $b_{n+1} = b_n$; nếu không thì đặt $a_{n+1} = a_n$ và $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Khi đó:

(a) Dãy $(a_n)_{n \geq 1}$ là một dãy Cauchy, nên hội tụ về một điểm c.

(b) Dãy $(b_n)_{n \geq 1}$ cũng hội tụ về c. Suy ra rằng $(0,1)$ là liên thông.

4.7. Tìm một vài cách để chứng minh rằng mặt cầu S^n là liên thông và liên thông đường.

4.8 (định lí đạt giá trị trung gian). Nếu X là một không gian liên thông và $f : X \to \mathbb{R}$ liên tục, ở đây $\mathbb{R}$ có tôpô Euclid, thì ảnh $f(X)$ là một khoảng.

Hệ quả sau là một định lí quen thuộc trong Calculus: Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục dưới tôpô Euclid. Nếu $f(a)$ và $f(b)$ có dấu đối nhau thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

4.9. ✓ Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục dưới tôpô Euclid thì đồ thị của nó là liên thông trong mặt phẳng Euclid. Hơn nữa, đồ thị của nó đồng phôi với $\mathbb{R}$.

4.10. Cho X là một không gian tôpô và A_i, $i \in I$ là các không gian con liên thông. Nếu $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ với mọi $i, j \in I$ thì $\bigcup_{i \in I} A_i$ liên thông.

4.11. Cho X là một không gian tôpô và A_i, $i \in \mathbb{Z}^+$ là các tập con liên thông. Nếu $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ với mọi $i \geq 1$ thì $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ liên thông.

4.12. Cho A là một không gian con của X với tôpô điểm riêng (X, PPX_p) (xem 2.4). Tìm các thành phần liên thông của A.

4.13. Cho X liên thông và $f : X \to Y$ liên tục. Nếu f là ánh xạ hằng địa phương trên X (nghĩa là mọi điểm đều có một lân cận sao cho trên đó f là một ánh xạ hằng) thì f là ánh xạ hằng trên X.

4.14. Cho X là một không gian tôpô. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là ***một ánh xạ rời rạc*** (discrete map) nếu Y có tôpô rời rạc và f là liên tục. Chứng minh rằng X là liên thông khi và chỉ khi mọi ánh xạ rời rạc trên X đều là ánh xạ hằng.

4.15. Mô tả các thành phần liên thông của $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Q}$ dưới tôpô Euclid.

4.16. Xem $\mathbb{Q}^2$ như là một không gian con của mặt phẳng Euclide. Mô tả các thành phần liên thông của nó.

4.17. Tìm các thành phần liên thông của tập Cantor (xem 2.12).

4.18. Chứng minh rằng nếu một không gian có hữu hạn các thành phần liên thông thì mỗi thành phần sẽ vừa mở vừa đóng. Điều này có còn đúng nếu có vô hạn các thành phần liên thông?

4.19. ✓ Giả sử không gian X có hữu hạn các thành phần liên thông. Chứng minh rằng một ánh xạ xác định trên X là liên tục khi và chỉ khi nó liên tục trên mỗi thành phần liên thông. Điều này có còn đúng nếu X có vô hạn các thành phần liên thông?

4.20. Trong một không gian, nếu một họ các không gian con liên thông đường có phần giao khác rỗng thì hội của chúng cũng liên thông đường.

4.21. Nếu $f : X \to Y$ liên tục và X liên thông đường thì $f(X)$ liên thông đường.

4.22. Thành phần liên thông đường chứa điểm x là hội của mọi không gian con liên thông đường chứa x, do đó là không gian con liên thông đường lớn nhất chứa x.

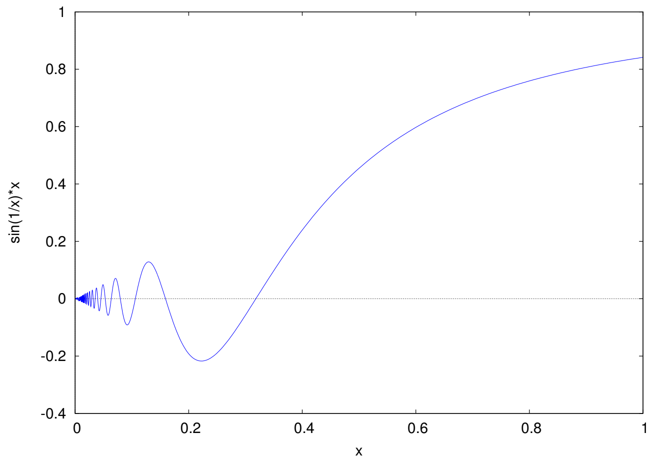
4.23. Nếu hai không gian là đồng phôi thì tồn tại một song ánh giữa các họ các thành phần liên thông đường của chúng. Nói riêng, nếu một không gian là liên thông đường thì không gian kia cũng liên thông đường.

4.24. Mặt phẳng bỏ đi một họ đếm được các điểm là liên thông đường dưới tôpô Euclid.

4.25. Không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ bỏ đi một họ đếm được các đường thẳng có liên thông không?

4.26. Một không gian tôpô là liên thông đường địa phương nếu và chỉ nếu họ tất cả các tập con mở liên thông đường là một cơ sở của tôpô đang xét.

4.27. Đặt $X = \{(x, x \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$, tức là, đồ thị của hàm số $x \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$ và thêm gốc tọa độ. Dưới tôpô Euclid của mặt phẳng, không gian X có liên thông hay liên thông đường không?



4.28. Đường cong sine không liên thông đường địa phương.

4.29. Tập hợp các ma trận vuông $n \times n$ với hệ số thực, kí hiệu bởi $M(n, \mathbb{R})$, một cách tự nhiên có thể được xem như một tập con của không gian Euclid $\mathbb{R}^{n^2}$, bằng cách coi các phần tử của một ma trận như các tọa độ, thông qua ánh xạ

$$(a_{i,j}) \longmapsto (a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{n-1,n}, a_{n,n}).$$

Nhóm trực giao (orthogonal group) $\mathrm{O}(n)$ được định nghĩa là nhóm các ma trận biểu diễn các ánh xạ tuyến tính trực giao trên $\mathbb{R}^n$, tức là, các phép biến đổi tuyến tính bảo toàn tích trong. Do đó

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | \ A \cdot A^T = I_n\}.$$

Nhóm trực giao đặc biệt(Special Orthogonal Group) $\mathrm{SO}(n)$ là nhóm con của $\mathrm{O}(n)$ gồm tất cả các ma trận trực giao có định thức bằng 1.

(a) Chứng minh rằng mọi phần tử của $\mathrm{SO}(2)$ có dạng

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Đây là một phép quay trên mặt phẳng quanh gốc tọa độ với gốc quay φ. Do đó $\mathrm{SO}(2)$ là nhóm các phép quay trên mặt phẳng quanh gốc tọa độ.

(b) Chứng minh $\mathrm{SO}(2)$ là liên thông đường.

(c) Có bao nhiêu thành phần liên thông trong $\mathrm{O}(2)$?

(d) * Người ta biết [F. Gantmacher, Theory of matrices, vol. 1, Chelsea, 1959, p. 285] rằng với mọi ma trận $A \in \mathrm{O}(n)$ tồn tại một ma trận $P \in \mathrm{O}(n)$ sao cho $A = PBP^{-1}$ với B là một ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} R(\varphi_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\varphi_k) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sử dụng điều này, chứng minh rằng $\mathrm{SO}(n)$ liên thông đường.

4.30. Phân loại các kí tự alphabet sai khác nhau các phép đồng phôi, nghĩa là, các kí tự nào dưới đây, xét như là các không gian con của mặt phẳng Euclid, là đồng phôi với nhau? Hãy cố gắng đưa ra những lí luận chuẩn xác.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Chú ý rằng kết quả phụ thuộc vào phông chữ ta dùng!

Tiếp theo hãy khảo sát thử bộ kí tự alphabet của tiếng Việt:

A Ă Â B C D Đ E Ê G H I K L M N O Ô Ơ P Q R S T U Ư V X Y

5 Sự hội tụ

Sự tách

Trong phần này ta tập trung khảo sát các tôpô dựa vào các tính chất tách.

Ví dụ, ta biết rằng mọi metric trên một tập hợp cảm sinh một tôpô trên tập hợp đó. Nếu một tôpô có thể được cảm sinh từ một metric, ta nói không gian tôpô đó là ***khả metric*** (hay ***metric hóa được***) (metrizable).

Ví dụ. Trên mọi tập X, tôpô rời rạc được sinh bởi metric sau:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Thật vậy, với mọi $x \in X$, tập hợp chỉ có một điểm $\{x\} = B(x,1)$ là tập mở, do đó mọi tập con của X đều mở. Mặt khác không có metric nào có thể sinh ra được tôpô hiển nhiên trên X nếu X có nhiều hơn một phần tử. Thật vậy, nếu X có hai phần tử x và y khác nhau thì quả cầu $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ là một tập con mở khác rỗng thực sự của X. Vậy tôpô hiển nhiên là không khả metric.

Định nghĩa (Các tiên đề tách). Ta định nghĩa các kiểu không gian tôpô như sau:

T_1 Một không gian tôpô được gọi là một T_1-không gian nếu với mỗi hai điểm $x \neq y$ có một tập mở chứa x mà không chứa y và một tập mở chứa y mà không chứa x.

T_2 Một không gian tôpô được gọi là một T_2-không gian hay ***Hausdorff*** nếu với mỗi hai điểm $x \neq y$ có các tập mở rời nhau U và V sao cho $x \in U$ và $y \in V$.

T_3 Một T_1-không gian được gọi là một T_3-không gian hay ***chính tắc*** (regular) nếu với mỗi điểm x và một tập đóng F không chứa x có các tập mở rời nhau U và V sao cho $x \in U$ và $F \subset V$.[5]

T_4 Một T_1-không gian được gọi là một T_4-không gian hay ***chuẩn tắc*** (normal) nếu với mỗi hai tập đóng rời nhau F và G có các tập mở rời nhau U và V sao cho $F \subset U$ và $G \subset V$.

Mệnh đề. *Một không gian là một T_1-không gian khi và chỉ khi mọi tập con chỉ chứa đúng một điểm đều là tập đóng.*

Chứng minh. Nếu một không gian X là T_1, cho $x \in X$, với mỗi $y \neq x$ có một tập mở U_y chứa y mà không chứa x. Ta có $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$. Nên $X \setminus \{x\}$ mở. Nếu mỗi điểm tạo nên một tập đóng, thì hai điểm $y \neq x$ có thể được tách ra bởi các tập mở $X \setminus \{x\}$ và $X \setminus \{y\}$. □

Mệnh đề ($T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$). *Nếu một không gian là T_i thì nó là T_{i-1}, với $2 \leq i \leq 4$.*

Chứng minh. Điều kiện T_1 được bao hàm trong T_3 và T_4 khẳng định rằng tập hợp chỉ chứa đúng một điểm là một trường hợp đặc biệt của tập đóng. □

Ví dụ. Mỗi không gian với tôpô rời rạc là chuẩn tắc.

Mọi không gian metric là một không gian Hausdorff. Nói cách khác, nếu một không gian không là Hausdorff thì nó không khả metric. Ta có một kết quả mạnh hơn:

[5]Ta bao hàm cả yêu cầu T_1 cho các không gian chính tắc và chuẩn tắc, như ở [Mun00]. Một số tác giả như Kelley [Kel55] không làm điều này.

Mệnh đề. *Mọi không gian metric đều chuẩn tắc.*

Chứng minh. Gọi (X, d) là một không gian metric. Với $x \in X$ và $A \subset X$ ta định nghĩa khoảng cách từ x tới A là $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$. Đây là một hàm liên tục ứng với x, xem 5.14.

Giả sử A và B là hai tập con đóng rời nhau của X. Đặt $U = \{x \mid d(x, A) < d(x, B)\}$ và $V = \{x \mid d(x, A) > d(x, B)\}$. Khi đó $A \subset U$, $B \subset V$ (sử dụng tính đóng của A và B, xem 5.14), $U \cap V = \emptyset$, và cả U và V đều mở. □

5.1 Ví dụ. Tập hợp tất cả các số thực dưới tôpô phần bù hữu hạn là T_1 nhưng không là T_2.

Có một số ví dụ về các không gian là T_2 nhưng không là T_3, và các T_3-không gian không là T_4, nhưng chúng khá khó, xem 5.13, 5.24, [Mun00, p. 197] và [SJ70].

5.2 Mệnh đề. *Một T_1-không gian là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu với mỗi tập đóng C và một tập mở U chứa C tồn tại một tập mở V sao cho $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Đại khái, điều này có nghĩa rằng trong một không gian chuẩn tắc, một tập đóng chứa trong một tập mở luôn có thể được mở rộng.

Chứng minh. Giả sử X là chuẩn tắc. Vì $X \setminus U$ đóng và rời nhau với C nên có một tập mở V chứa C và một tập mở W chứa $X \setminus U$ sao cho V và W rời nhau. Vậy $V \subset (X \setminus W)$, nên $\overline{V} \subset (X \setminus W) \subset U$.

Ở chiều ngược lại, cho hai tập đóng rời nhau F và G, đặt $U = X \setminus G$. Có một tập mở V chứa F sao cho $V \subset \overline{V} \subset U$. Khi đó hai tập mở V và $X \setminus \overline{V}$ tách F và G. □

Dãy

Nhắc lại rằng một dãy trong tập hợp X là một ánh xạ $\mathbb{Z}^+ \to X$, một họ được đánh chỉ số (một cách) đếm được các phần tử của X. Cho một dãy $x : \mathbb{Z}^+ \to X$, phần tử $x(n)$ thường được viết là x_n, và dãy thường được kí hiệu là $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hoặc $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

Khi X là một không gian metric, dãy được gọi là hội tụ về x nếu x_n có thể ở gần x tùy ý ta muốn, miễn là n đủ lớn, nghĩa là

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, n \geq N \implies d(x_n, x) < \epsilon.$$

Dễ thấy rằng phát biểu này tương đương với:

$$\forall U \text{ mở} \ni x, \exists N \in \mathbb{Z}^+, n \geq N \implies x_n \in U.$$

Định nghĩa này có thể được sử dụng trong các không gian tôpô.

Tuy nhiên, trong các không gian tôpô nói chung, ta cần đến một khái niệm tổng quát hơn dãy. Nói nôm na, các dãy (có đếm được các chỉ số) có thể không đủ để mô tả được các hệ lân cận tại một điểm. Tập chỉ số bất kì là cần thiết.

5.3 Ví dụ (dãy là không đủ để nói về sự hội tụ). Xét $\mathbb{R}$ với tôpô phần bù đếm được. Điểm 0 là một điểm dính của tập $(-\infty, 0)$, bởi mỗi tập mở chứa 0 có phần bù đếm được cho nên không thể rời tập không đếm được $(-\infty, 0)$. Gọi $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một dãy bất kì trong $(-\infty, 0)$. Tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ là một tập mở chứa 0 nhưng không chứa điểm nào của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Do đó dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ không thể hội tụ về 0. Vậy ta kết luận rằng trong không gian trên khái niệm điểm dính không thể được diễn tả bằng khái niệm dãy.

Lưới

Một ***tập được định hướng*** (directed set) là một tập được sắp thứ tự (một phần) sao cho với mỗi hai chỉ số luôn có một chỉ số lớn hơn hoặc bằng hai chỉ số đó. Bằng kí hiệu: $\forall i, j \in I, \exists k \in I, k \geq i \wedge k \geq j$.

Một ***lưới*** (net), còn được gọi là một dãy suy rộng (generalized sequence), trong một không gian là một ánh xạ từ một tập được định hướng đến không gian đó. Bằng kí hiệu, một lưới trong không gian X với tập chỉ số được định hướng I là một ánh xạ $x : I \to X$. Nó là một phần tử của tích Descartes $\prod_{i \in I} X$. Bằng cách viết $x_i = x(i)$ ta thường kí hiệu một lưới bởi $(x_i)_{i \in I}$ hoặc $\{x_i\}_{i \in I}$.

Ví dụ. Các lưới có tập chỉ số $I = \mathbb{Z}^+$ với thứ tự thông thường chính là các dãy.

Ví dụ. Gọi X là một không gian tôpô và $x \in X$. Gọi I là họ tất cả các lân cận mở của x. Định nghĩa một thứ tự trên I bởi $U \leq V \iff U \supset V$. Khi đó I trở thành một tập được định hướng.

Định nghĩa. Một lưới $(x_i)_{i \in I}$ được gọi là ***hội tụ***(convergent) tới $x \in X$ nếu với mọi lân cận U của x tồn tại một chỉ số $i \in I$ sao cho nếu $j \geq i$ thì x_j thuộc vào U. Điểm x được gọi là một ***giới hạn*** (limit)của lưới $(x_i)_{i \in I}$ và ta thường viết $x_i \to x$.

Ví dụ. Sự hội tụ của các lưới có tập chỉ số $I = \mathbb{Z}^+$ với thứ tự thông thường chính là sự hội tụ của các dãy.

Ví dụ. Cho $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ với tôpô $\{\emptyset, X, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3\}\}$. Lưới (x_3) hội tụ về x_1, x_2, x_3. Lưới (x_1, x_2) hội tụ về x_2.

Ví dụ. Nếu X có tôpô hiển nhiên thì mỗi lưới trong X sẽ hội tụ về mọi điểm trong X.

5.4 Mệnh đề. *Một không gian là Hausdorff khi và chỉ khi mỗi lưới chỉ có nhiều nhất một giới hạn.*

Chứng minh. Cho một không gian Hausdorff. Giả sử một lưới (x_i) hội tụ về hai giới hạn x và y khác nhau. Do không gian là Hausdorff, tồn tại hai lân cận mở rời nhau U và V lần lượt của x và y. Từ định nghĩa về sự hội tụ của một lưới, tồn tại $i \in I$ sao cho nếu $\gamma \geq i$ thì $x_\gamma \in U$, và $j \in I$ sao cho nếu $\gamma \geq j$ thì $x_\gamma \in U$. Do tồn tại $\gamma \in I$ sao cho $\gamma \geq i$ và $\gamma \geq j$, ta có điểm x_γ thuộc vào $U \cap V$, mâu thuẫn.

Giả sử một không gian không là Hausdorff, khi đó tồn tại hai điểm x và y không tách được bằng các tập mở. Xét tập chỉ số I với phần tử là các cặp (U, V) các lân cận mở lần lượt của x và y, có thứ tự $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2)$ nếu $U_1 \supset U_2$ và $V_1 \supset V_2$. Với thứ tự này tập chỉ số I là được định hướng. Do $U \cap V \neq \emptyset$, lấy $z_{(U,V)} \in U \cap V$. Khi đó lưới $\left(z_{(U,V)}\right)_{(U,V) \in I}$ hội tụ về cả x và y, mâu thuẫn với sự duy nhất của giới hạn. □

5.5 Mệnh đề. *Một điểm $x \in X$ là một điểm dính của tập con $A \subset X$ nếu và chỉ nếu tồn tại một lưới trong A hội tụ về x. Do đó một tập con là đóng khi và chỉ khi tập đó chứa mọi giới hạn của mỗi lưới nằm trong nó. Một tập con là mở khi và chỉ khi tập đó không chứa giới hạn nào của mỗi lưới nằm ngoài nó.*

Mệnh đề này cho phép ta mô tả các tôpô xét về mặt hội tụ. Với nó nhiều phát biểu về sự hội tụ trong các không gian metric có thể được chuyển qua các không gian tôpô, đơn giản bằng cách thay thế các dãy bởi các lưới.

Chứng minh. ($\Longleftarrow$) Giả sử có một lưới $(x_i)_{i\in I}$ trong A hội tụ về x. Gọi U là một lân cận mở của x. Tồn tại một $i \in I$ sao cho với $j \geq i$ ta có $x_j \in U$, nói riêng $x_i \in U \cap A$. Vậy x là một điểm dính của A.

($\Longrightarrow$) Giả sử x là một điểm dính của A. Xét tập được định hướng I gồm tất cả các lân cận mở của x với thứ tự (một phần) $U \leq V$ nếu $U \supset V$. Với mỗi lân cận mở U của x tồn tại một phần tử $x_U \in U \cap A$. Với mọi $V \geq U$ thì $x_V \in V \subset U$. Ta có $(x_U)_{U\in I}$ là một lưới trong A hội tụ về x. (Để ý sự xây dựng này của lưới $(x_U)_{U\in I}$ có liên quan tới Tiên đề chọn.) $\square$

Ghi chú. Khi nào các lưới có thể được thay thế bằng các dãy? Bằng cách khảo sát phép chứng minh trên, ta có thể thấy rằng thuật ngữ lưới có thể thay bằng dãy nếu có một họ đếm được F các lân cận của x sao cho mỗi lân cận của x chứa một phần tử của F. Trong trường hợp này điểm x được gọi là có một ***cơ sở lân cận*** (neighborhood basis) đếm được. Một không gian mà mọi điểm đều có tính chất này được gọi là một ***không gian đếm được thứ nhất*** (first countable space). Mỗi không gian metric là một không gian như vậy, bởi mỗi điểm có một cơ sở lân cận đếm được gồm, chẳng hạn, các quả cầu có bán kính hữu tỉ. Xem thêm 5.3.

5.6 Mệnh đề. *Cho τ_1 và τ_2 là hai tôpô trên X. Nếu sự hội tụ trong τ_1 kéo theo sự hội tụ trong τ_2 thì τ_1 mịn hơn τ_2. Bằng kí hiệu: nếu với mọi lưới (x_i) và mọi điểm x, $x_i \overset{\tau_1}{\to} x \implies x_i \overset{\tau_2}{\to} x$, thì $\tau_2 \subset \tau_1$. Hệ quả,* ***Nếu các sự hội tụ là như nhau thì các tôpô cũng như nhau****.*

Chứng minh. Nếu sự hội tụ trong τ_1 kéo theo sự hội tụ trong τ_2 thì các điểm dính trong τ_1 là các điểm dính trong τ_2. Vậy nên mỗi tập đóng trong τ_2 cũng sẽ đóng trong τ_1, và với các tập mở cũng như vậy. $\square$

Tương tự với trường hợp các không gian metric, ta có:

Định lí. *Một hàm f là liên tục tại x nếu và chỉ nếu với mọi lưới (x_i), $x_i \to x \implies f(x_i) \to f(x)$.*

Chứng minh. Đơn giản ta chỉ cần lặp lại phép chứng minh đã làm với các không gian metric.

($\Longrightarrow$) Giả sử f liên tục tại x. Gọi U là một lân cận của $f(x)$. Ta có $f^{-1}(U)$ là một lân cận của x trong X. Do (x_i) hội tụ về x, có một $i \in I$ sao cho với mọi $j \geq i$ ta có $x_j \in f^{-1}(U)$, tức $f(x_j) \in U$.

($\Longleftarrow$) Ta sẽ chứng minh rằng nếu U là một lân cận mở trong Y của $f(x)$ thì $f^{-1}(U)$ là một lân cận mở trong X của x. Giả sử ngược lại, điểm x không phải là một điểm trong của $f^{-1}(U)$, vậy thì nó là một điểm tụ của $X \setminus f^{-1}(U)$. Bởi 5.5, tồn tại một lưới (x_i) trong $X \setminus f^{-1}(U)$ hội tụ về x. Khi đó lưới $(f(x_i))$ trong $Y \setminus U$ hội tụ về $f(x) \in U$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết U mở trong Y. $\square$

Bài tập

5.7. Nếu một tập hữu hạn là một T_1-không gian thì tôpô trên nó là rời rạc.

5.8. Không gian (X, PPX_p) (xem 2.4) có Hausdorff không?

5.9. Chứng minh rằng trong một không gian Hausdorff ba điểm khác nhau có thể tách được bởi các tập mở. Bạn có thể mở rộng phát biểu này không?

5.10. Một T_1-không gian X là chính tắc nếu và chỉ nếu với mỗi điểm x và một tập mở U chứa x tồn tại một tập mở V sao cho $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

5.11. Chứng minh rằng mỗi không gian con của một không gian Hausdorff là Hausdorff.

5.12. Chứng minh rằng một không gian con đóng của một không gian chuẩn tắc là chuẩn tắc.

5.13 (T_2 nhưng không T_3). Chứng minh rằng tập hợp $\mathbb{R}$ với tôpô sinh bởi tất cả các tập con có dạng (a,b) và $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ là một không gian Hausdorff nhưng không chính tắc.

5.14 (hàm khoảng cách). Cho (X,d) là một không gian metric. Với $x \in X$ và $A \subset X$ ta định nghĩa khoảng cách từ x tới A là $d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$. Tổng quát hơn, với hai tập con A và B của X, định nghĩa $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Kiểm tra rằng $d(x,A)$ là một hàm liên tục đối với x.

(b) Kiểm tra rằng $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(c) Kiểm tra rằng $d(A,B) = \inf\{d(a,B) \mid a \in A\} = \inf\{d(A,b) \mid b \in B\}$.

(d) Khi nào thì $d(A,B) = 0$? Và d có phải là một metric?

5.15. Chứng minh rằng các tiên đề tách T_i, $1 \leq i \leq 4$, là các tính chất tôpô, nghĩa là, nếu một không gian X là T_i và đồng phôi với không gian Y, thì Y cũng là T_i.

5.16. Cho X là một không gian chuẩn tắc. Giả sử U_1 và U_2 là các tập mở trong X thỏa $U_1 \cup U_2 = X$. Chứng minh rằng có một tập mở V_1 sao cho $\overline{V_1} \subset U_1$ và $V_1 \cup U_2 = X$. (Điều này có nghĩa là với mỗi phủ của một không gian chuẩn tắc, ta có thể lấy được một phủ nhỏ hơn.)

5.17. * Cho X chuẩn tắc, và $f : X \to Y$ là một toàn ánh liên tục và đóng. Chứng minh rằng Y cũng là một không gian chuẩn tắc.

5.18. Cho $I = (0,\infty) \subset \mathbb{R}$. Với $i,j \in I$, định nghĩa $i \leq_I j$ nếu $i \geq_{\mathbb{R}} j$ (i nhỏ hơn hoặc bằng j với vai trò chỉ số nếu i lớn hơn hoặc bằng j với vai trò số thực). Trên $\mathbb{R}$ với tôpô Euclid, xét lưới $(x_i = i)_{i \in I}$. Lưới này có hội tụ không?

5.19. Trên $\mathbb{R}$ với tôpô phần bù hữu hạn và thứ tự thông thường của các số thực, xét lưới $(x_i = i)_{i \in \mathbb{R}}$. Hỏi lưới này hội tụ về đâu?

5.20. Khảo sát lại các vấn đề 2.19, 2.20 bằng cách sử dụng 5.6.

5.21. Gọi Y là một T_1-không gian, và $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục. Giả sử $A \subset X$ và $f(x) = c$ trên A, với c là một hằng số. Chứng minh $f(x) = c$ trên $\overline{A}$, bằng cách:

(a) sử dụng lưới.

(b) không sử dụng lưới.

5.22. ✓ Cho Y là một không gian Hausdorff và $f,g : X \to Y$ là các ánh xạ liên tục. Chứng minh tập hợp $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ đóng trong X, bằng cách:

(a) sử dụng lưới.

(b) không sử dụng lưới.

Như một hệ quả, chứng minh rằng nếu f và g bằng nhau trên một tập con ***trù mật***, hay dày đặc (dense) của X (là không gian con có bao đóng bằng X) thì chúng bằng nhau trên X.

5.23. * Cho $(A,\leq)$ là một tập được sắp tốt và không đếm được (xem 1.20). Phần tử nhỏ nhất của A được kí hiệu là 0. Nếu A không có phần tử lớn nhất thì ta thêm một phần tử vào A và định nghĩa đó là phần tử lớn nhất, kí hiệu bởi ∞. Với $a,b \in A$ kí hiệu $[a,b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$ và $[a,b) = \{x \in A \mid a \leq x < b\}$. Do đó ta có thể viết $A = [0,\infty]$.

Gọi Ω là phần tử nhỏ nhất của tập hợp $\{a \in A \mid [0,a] \text{ không đếm được}\}$ (tập hợp này khác rỗng vì nó chứa ∞).

(a) Chứng minh rằng $[0,\Omega)$ là không đếm được, và với mọi $a \in A$, $a < \Omega$ tập $[0,a]$ là đếm được.

(b) Xét $[0,\Omega]$ với tôpô thứ tự. Chứng minh Ω là một điểm tụ của $[0,\Omega]$.

(c) Chứng minh rằng mọi tập con đếm được của $[0,\Omega)$ là bị chặn trong $[0,\Omega)$, do đó một dãy trong $[0,\Omega)$ không thể hội tụ về Ω.

5.24 (không gian Niemytzki). * Gọi $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ là nửa mặt phẳng trên. Trang bị cho $\mathbb{H}$ tôpô sinh bởi các đĩa Euclid mở (tức các quả cầu mở) trong $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y > 0\}$, cùng các tập hợp có dạng $\{p\} \cup D$ với p là một điểm trên đường thẳng $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = 0\}$ và D là một đĩa mở trong K tiếp xúc với L tại p. Đây được gọi là ***không gian Niemytzki***.

(a) Kiểm tra rằng đây là một không gian tôpô.

(b) Mô tả tôpô không gian con trên L.

(c) Đâu là những tập đóng trong $\mathbb{H}$?

(d) Chứng minh $\mathbb{H}$ là Hausdorff.

(e) Chứng minh $\mathbb{H}$ regular.

(f) Chứng minh $\mathbb{H}$ không chuẩn tắc.

5.25 (lọc). * Một ***lọc*** (filter) trên một tập X là một họ F các tập con khác rỗng của X sao cho:

(a) Nếu $A, B \in F$ thì $A \cap B \in F$,

(b) Nếu $A \subset B$ và $A \in F$ thì $B \in F$.

Ví dụ, cho một điểm, họ tất cả các lân cận của điểm đó là một lọc.

Một lọc được gọi là hội tụ về một điểm nếu mỗi lân cận của điểm đó là một phần tử của lọc.

Một ***cơ sở lọc*** (filter-base) là một họ G các tập con khác rỗng của X sao cho nếu $A, B \in G$ thì có $C \in G$ thỏa $G \subset (A \cap B)$.

Nếu G là một cơ sở lọc trong X thì lọc được sinh bởi G được định nghĩa là họ tất cả các tập con của X có chứa một phần tử nào đó của G: $\{A \subset X \mid \exists B \in G, \ B \subset A\}$.

Ví dụ, trong một không gian metric, cho lọc gồm tất cả các lân cận của một điểm. Họ tất cả các quả cầu mở có tâm tại điểm đó là một cơ sở lọc cho lọc đó.

Một cơ sở lọc được gọi là hội tụ về một điểm nếu lọc sinh bởi nó hội tụ về điểm đó.

(a) Chứng minh rằng một cơ sở lọc hội tụ về x khi và chỉ khi mỗi lân cận của x chứa một phần tử của cơ sở lọc đó.

(b) Chứng minh rằng điểm $x \in X$ là điểm tụ của một tập con A của X nếu và chỉ nếu tồn tại một cơ sở lọc của X hội tụ về x với các phần tử là các tập con của $A \setminus \{x\}$.

(c) Chứng minh một ánh xạ $f : X \to Y$ là liên tục tại x nếu và chỉ nếu với mọi cơ sở lọc F hội tụ về x, cơ sở lọc $f(F)$ hội tụ về $f(x)$.

Lọc cho một cách khác để thay thế lưới trong việc mô tả sự hội tụ. Xem thêm ở [Dug66, p. 209], [Eng89, p. 49], [Kel55, p. 83].

5.26 (khoảng cách Hausdorff). Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập con bị chặn A và B của một không gian metric X được định nghĩa là $d_H(A,B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{y \in B} d(y,A)\}$. Chứng minh d_H là một metric trên tập tất cả các tập con đóng và bị chặn của X. (Tham khảo thêm ở [BBI01, ch. 7].)

5.27 (tích phân Riemann bằng lưới). * Ta định nghĩa một hình chữ nhật n-chiều là một tập con của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ có dạng $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ với $a_i < b_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Thể tích (volume) của một hình chữ nhật như vậy được định nghĩa là số $|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$. Một phân hoạch (partition) của khoảng $[a,b]$ là một tập con hữu hạn của $[a,b]$ chứa cả a lẫn b. Ta có thể dán nhãn cho các phần tử của một phân hoạch: $x_0, x_1, \ldots, x_m$, với $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$. Mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ là một khoảng con của $[a,b]$ tương ứng với phân hoạch đó. Một phân hoạch của hình chữ nhật $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ là một tích Descartes của các phân hoạch của $[a_i, b_i]$, nghĩa là nếu P_i là một phân hoạch của $[a_i, b_i]$ thì $P = \prod_{i=1}^n P_i$ là một phân hoạch của I. Một hình chữ nhật con tương ứng với phân hoạch P của một hình chữ nhật I là tích $\prod_{i=1}^n T_i$ với T_i là một khoảng con $[a_i, b_i]$ tương ứng với phân hoạch P_i. Gọi $\operatorname{Rec}(P)$ là tập tất cả các hình chữ nhật con tương ứng với phân hoạch P.

(a) Một sự lựa chọn các điểm mẫu (sample points) trên mỗi hình chữ nhật con tương ứng với P là một ánh xạ

$$\begin{aligned} x^* : \mathrm{Rec}(P) &\to \mathbb{R}^n \\ R &\mapsto x^*(R) \in R. \end{aligned}$$

Gọi $\mathrm{Par}(I)$ là tập tất cả các cặp (P, x^*) gồm một phân hoạch P và một ánh xạ x^* tương ứng với P. Trên $\mathrm{Par}(I)$ ta định nghĩa quan hệ sau:

$$(P, x^*) \leq (P', x'^*) \iff \left(P' \supsetneqq P\right) \vee \left((P, x^*) = (P', x'^*)\right).$$

Nó biểu diễn các quan hệ thô hơn và mịn hơn giữa các phân hoạch. Chứng minh đây là một quan hệ thứ tự trên $\mathrm{Par}(I)$.

(b) Nếu $P = \prod_{i=1}^n P_i$ và $P' = \prod_{i=1}^n P_i'$, đặt $P'' = \prod_{i=1}^n P_i''$ với $P_i'' = P_i \cup P_i'$. Chứng minh $(P, x^*) \leq (P'', x''^*)$ và $(P', x'^*) \leq (P'', x''^*)$. Suy ra rằng $(\mathrm{Par}(I), \leq)$ là một tập được định hướng.

(c) Với $(P, x^*) \in \mathrm{Par}(I)$, đặt

$$\mathrm{Rsum}(f, (P, x^*)) = \sum_{R \in \mathrm{Rec}(P)} (f(x^*(R))|R|,$$

là tổng Riemann tương ứng với (P, x^*). Chứng minh $(\mathrm{Rsum}(f, (P, x^*)))_{(P, x^*) \in \mathrm{Par}(I)}$ là một lưới trong $\mathbb{R}$.

(d) Ta nói rằng $f : I \to \mathbb{R}$ là khả tích Riemann nếu $\lim \mathrm{Rsum}(f, (P, x^*))$ tồn tại, và giới hạn đó được gọi là tích phân Riemann của f. Chứng minh tích phân Riemann, nếu tồn tại, là duy nhất.

(e) Với $(P, x^*) \in \mathrm{Par}(I)$, nếu f bị chặn, ta đặt

$$L(f, (P, x^*)) = \sum_{R \in \mathrm{Rec}(P)} (\inf_R f)|R|,$$

là một tổng dưới

$$U(f, (P, x^*)) = \sum_{R \in \mathrm{Rec}(P)} (\sup_R f)|R|$$

là một tổng trên. Hàm $f : I \to \mathbb{R}$ được gọi là khả tích Darboux nếu nó bị chặn và $\lim L(f, (P, x^*)) = \lim U(f, (P, x^*))$. Giới hạn đó được gọi là tích phân Darboux của f. Chứng minh một hàm là khả tích Darboux nếu và chỉ nếu nó khả tích Riemann, và hai tích phân này bằng nhau.

6 Không gian compắc

Một ***phủ*** (cover) của một tập hợp X là một họ các tập con của X có hội bằng X. Một tập con của một phủ mà cũng là một phủ được gọi là một ***phủ con*** (subcover). Một phủ được gọi là ***mở*** (open cover) nếu mỗi phần tử của nó là một tập con mở của X.

Định nghĩa. Một không gian là ***compắc*** (compact) nếu mọi phủ mở của nó có phủ con hữu hạn. Bằng kí hiệu: không gian (X, τ) là compắc nếu

$$\forall I \subset \tau, \bigcup_{O \in I} O = X \implies (\exists J \subset I, |J| < \infty, \bigcup_{O \in J} O = X).$$

Tính compắc là một khái niệm quan trọng và thông dụng trong toán học. Nó tạo điều kiện cho các xây dựng liên quan đến tính hữu hạn.

Ví dụ. Mọi không gian hữu hạn đều compắc. Mọi không gian mà tôpô của nó là hữu hạn (nghĩa là, không gian chỉ có hữu hạn các tập mở) thì compắc.

Ví dụ. Trên đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$ họ $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ là một phủ mở và nó không có phủ con hữu hạn nào. Vậy nên đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$ là không compắc.

Ghi chú. Gọi A là một không gian con của một không gian tôpô X. Gọi I là một phủ mở của A. Mỗi tập mở $O \in I$ của A là hạn chế của một tập mở U_O của X. Khi đó ta có một họ $\{U_O \mid O \in I\}$ các tập mở của X và hội của chúng chứa A. Mặt khác nếu ta có một họ I các tập mở của X mà hội của chúng chứa A thì họ $\{U \cap A \mid U \in I\}$ là một phủ mở của A. Do đó, để đơn giản hóa vấn đề kí hiệu, ta thường sử dụng thuật ngữ phủ mở của không gian con A của X với cả hai nghĩa: hoặc là một phủ mở của A, hoặc là một họ các tập con mở của không gian X mà hội của chúng chứa A.

Định lí (ảnh liên tục của không gian compắc thì compắc). *Nếu X là compắc và $f : X \to Y$ liên tục thì $f(X)$ compắc.*

Chứng minh. Gọi I là một phủ của $f(X)$ gồm các tập mở của Y (xem lưu ý trên). Ta có $\{f^{-1}(O) \mid O \in I\}$ là một phủ mở của X. Do X compắc nên có một phủ con hữu hạn, do đó có một tập con hữu hạn $J \subset I$ sao cho $\{f^{-1}(O) \mid O \in J\}$ phủ X. Suy ra $f^{-1}(\bigcup_{O \in J} O) = X$, tác động f vào cả hai vế ta được $\bigcup_{O \in J} O \supset f(X)$, vậy nên J là một phủ con của I. $\square$

Nói riêng, tính compắc được bảo toàn bởi các phép đồng phôi, do đó ta nói ***compắc là một tính chất tôpô***.

Mệnh đề. *Mọi không gian con đóng của một không gian compắc đều compắc.*

Chứng minh. Giả sử X compắc và $A \subset X$ đóng. Gọi I là một phủ mở của A gồm các tập mở của X. Bằng cách thêm tập mở $X \setminus A$ vào I ta được một phủ mở của X. Phủ mở này có một phủ con hữu hạn. Nếu phủ con này chứa $X \setminus A$ thì chỉ cần bỏ $X \setminus A$ đi, còn nếu không thì giữ nguyên, ta được phủ con cần tìm. $\square$

6.1 Mệnh đề. *Mọi không gian con compắc của một không gian Hausdorff đều đóng.*

Chứng minh. Cho A là một tập compắc trong một không gian Hausdorff X. Ta chứng minh $X \setminus A$ là mở.

Cho $x \in X \setminus A$. Với mỗi $a \in A$ có các tập mở rời nhau U_a chứa x và V_a chứa a. Họ $\{V_a \mid a \in A\}$ phủ A, do đó có một phủ con hữu hạn $\{V_{a_i} \mid 1 \le i \le n\}$. Đặt $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ và $V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Khi đó U là một lân cận mở của x và rời V, một lân cận của A. $\square$

Ví dụ. Chú ý rằng kết quả này không còn đúng khi xét với các không gian tôpô nói chung. Mỗi không gian con của $\mathbb{R}$ với tôpô phần bù hữu hạn đều compắc. (Không gian này không Hausdorff, xem 5.1.)

Đặc trưng các không gian compắc bởi các tập con đóng

Trong định nghĩa của không gian compắc, bằng cách viết các tập mở là phần bù của các tập đóng, ta có một phát biểu đối ngẫu: một không gian là compắc nếu mọi họ các tập con đóng có phần giao bằng rỗng đều có một họ con hữu hạn có phần giao cũng bằng rỗng. Một họ các tập con của một tập hợp được gọi là có ***tính giao hữu hạn*** nếu phần giao của mỗi họ con hữu hạn của nó đều khác rỗng. Ta có:

6.2 Mệnh đề. *Một không gian là compắc nếu và chỉ nếu mỗi họ các tập con đóng có tính giao hữu hạn đều có phần giao khác rỗng.*

Chứng minh. Gọi F là một họ các tập con của X, khi đó $\bigcap_{C\in F} C = \emptyset$ nếu và chỉ nếu $\bigcup_{C\in F}(X\setminus C) = X$. Họ F này không có tính giao hữu hạn khi và chỉ khi có một tập hữu hạn $I \subset F$ sao cho $\bigcap_{C\in I} C = \emptyset$, và vế sau lại tương đương với $\bigcup_{C\in I}(X\setminus C) = X$. Do đó, sự tồn tại của một họ các tập con đóng có tính giao hữu hạn và có phần giao bằng rỗng là tương đương với sự tồn tại của một họ các tập con mở phủ X và không có phủ con hữu hạn nào. $\square$

Các không gian metric compắc

Một không gian được gọi là ***compắc dãy*** (sequentially compact) nếu mỗi dãy trong nó có dãy con hội tụ.

6.3 Bổ đề (số Lebesgue). *Trong một không gian metric compắc dãy, với mỗi phủ mở, tồn tại một số $\epsilon > 0$ sao cho mỗi quả cầu có bán kính ϵ đều nằm trong một phần tử của phủ mở đó.*

Chứng minh. Gọi O là một phủ mở của một không gian metric compắc dãy X. Giả sử ngược lại, với mỗi số $\epsilon > 0$ tồn tại một quả cầu $B(x,\epsilon)$ không nằm trong bất kì phần tử nào của O. Lấy một dãy $B(x_n, 1/n)$ các quả cầu như vậy. Do X compắc dãy, dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về một x thuộc X. Tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(x,2\epsilon)$ chứa trong một phần tử U của O. Lấy k đủ lớn sao cho $n_k > 1/\epsilon$ và x_{n_k} nằm trong $B(x,\epsilon)$. Khi đó $B(x_{n_k}, 1/n_k) \subset B(x_{n_k},\epsilon) \subset B(x,2\epsilon) \subset U$, mâu thuẫn. $\square$

Trong các không gian tôpô nói chung, tính compắc và compắc dãy là hai khái niệm khác nhau, và không có khái niệm nào suy ra khái niệm nào. Tuy nhiên đối với các không gian metric, hai khái niệm này lại trùng nhau.

Định lí. *Một không gian metric là compắc khi và chỉ khi nó compắc dãy.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Cho X compắc và $(x_n)_n$ là một dãy trong X. Giả sử có một điểm $x \in X$ sao cho với mọi lân cận U_x của x và mọi số nguyên dương N, tồn tại $n > N$ sao cho x_n thuộc U_x. Lấy $x_{n_1} \in B(x,1)$, và với mỗi $k \geq 2$ lấy n_k sao cho $n_k > n_{k-1}$ và $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$. Khi đó $(x_{n_k})_k$ là một dãy con của $(x_n)_n$ hội tụ về x. Do đó, nếu dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không có dãy con hội tụ nào, thì với mỗi điểm $x \in X$, tồn tại một lân cận U_x của x và một số nguyên dương N_x, sao cho, nếu $n \geq N_x$ thì $x_n \notin U_x$. Do họ $\{U_x \mid x \in X\}$ phủ không gian compắc X nên nó có một phủ con hữu hạn $\{U_{x_k} \mid 1 \leq k \leq m\}$. Đặt $N = \max\{N_{x_k} \mid 1 \leq k \leq m\}$. Nếu $n \geq N$ thì $x_n \notin U_{x_k}$ với mọi k, nên $x_n \notin X$, mâu thuẫn.

($\Leftarrow$) Trước hết ta chứng minh với mỗi $\epsilon > 0$ không gian X có thể được phủ bởi một số hữu hạn các quả cầu có bán kính ϵ (tính chất này được gọi là ***tính bị chặn hoàn toàn*** (total boundedness) hay ***tiền-compắc*** (pre-compact)). Giả sử ngược lại. Lấy $x_1 \in X$, và một cách quy nạp, lấy $x_{n+1} \notin \bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i, \epsilon)$. Do $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$ khi $m \neq n$, nên dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ không thể có một dãy con hội tụ, mâu thuẫn.

Bây giờ gọi O là một phủ mở bất kì của X. Bởi 6.3 tồn tại một số Lebesgue ϵ tương ứng sao cho mỗi quả cầu có bán kính ϵ đều chứa trong một phần tử của O. Không gian X có thể được phủ bởi một số hữu hạn các quả cầu có bán kính ϵ, nên họ hữu hạn các phần tử O tương ứng cũng phủ được X. Vậy O có một phủ con hữu hạn. □

Định lí trên cho phép ta thừa hưởng mọi kết quả đã có trước đây về tính compắc trong các không gian metric. Ví dụ, nếu một không gian con của một không gian metric là compắc thì nó đóng và bị chặn, và một không gian con của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

Compắc hóa

Một ***compắc hóa*** (compactification) của một không gian X là một không gian compắc Y sao cho X đồng phôi với một không gian con trù mật của Y.

Ví dụ. Khoảng Euclid $[0, 1]$ là một compắc hóa của khoảng Euclid $[0, 1)$.

Ví dụ. Một compắc hóa của khoảng Euclid $(0, 1)$ là khoảng Euclid $[0, 1]$.

Ví dụ. Một compắc hóa của khoảng Euclid $(0, 1)$ là đường tròn S^1, bằng cách thêm chỉ một điểm, xem hình vẽ 6.4.

Ta thấy rằng trong một vài trường hợp có thể compắc hóa một không gian bằng cách thêm vào chỉ một điểm, thu được một ***compắc hóa một-điểm*** (one-point compactification). Bây giờ ta sẽ khảo sát thử coi liệu có thể làm được điều này trong trường hợp tổng quát. Hình vẽ 6.4 là một thí dụ cho xây dựng này.

Cho X là một không gian khác rỗng. Do tập $\mathcal{P}(X)$ gồm tất cả các tập con của X không thể chứa trong X (xem 1.5) nên có một phần tử của $\mathcal{P}(X)$ không thuộc X. Ta kí hiệu phần tử đó bởi ∞, và đặt $X^\infty = X \cup \{\infty\}$. Ta hãy xem thử coi một tôpô trên X^∞ phải như thế nào để X^∞ chứa X như một không gian con, và bản thân nó là compắc. Nếu một tôpô như vậy tồn tại, thì nếu một tập con mở U của X^∞ không chứa ∞, nó phải chứa trong X, do đó U là một tập con mở của X trong tôpô không gian con của X, tôpô này giống với tôpô vốn đã có của X. Nếu U chứa ∞ thì phần bù $X^\infty \setminus U$ của nó phải là một tập con đóng của X^∞, nên phải compắc, hơn nữa do $X^\infty \setminus U$ chứa trong X nên nó phải là một tập con đóng của X.

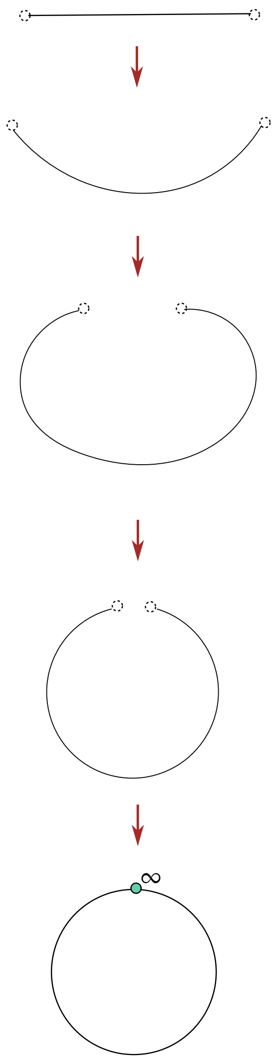
Định lí. *Họ gồm tất cả các tập con mở của X và các phần bù trong X^∞ của tất cả các tập con đóng compắc của X là tôpô mịn nhất trên X^∞ sao cho X^∞ là compắc và chứa X như là một không gian con. Nếu X không compắc thì X trù mật trong X^∞, và X^∞ được gọi là* ***compắc hóa Alexandroff*** *của X.*[6]

Chứng minh. Ta sẽ đi qua một vài bước.

(a) Kiểm tra rằng ta thực sự có một tôpô.

Gọi I là họ các tập con đóng compắc trong X. Khi đó $\bigcup_{C\in I}(X^\infty \setminus C) = X^\infty \setminus \bigcap_{C\in I} C$, với $\bigcap_{C\in I} C$ đóng và compắc.

[6]Được chứng minh đầu những năm 1920 bởi Pavel Sergeyevich Alexandrov. Alexandroff là một cách đánh vần khác cho tên ông.



Hình 6.4: Một compắc hóa một-điểm của khoảng Euclid $(0,1)$.

Nếu O mở trong X và C đóng compắc trong X thì $O \cup (X^\infty \setminus C) = X^\infty \setminus (C \setminus O)$, với $C \setminus O$ là một tập con đóng và compắc của X.

Ta cũng có $O \cap (X^\infty \setminus C) = O \cap (X \setminus C)$ mở trong X.

Nếu C_1 và C_2 đều đóng và compắc trong X thì $(X^\infty \setminus C_1) \cap (X^\infty \setminus C_2) = X^\infty \setminus (C_1 \cup C_2)$, với $C_1 \cup C_2$ đóng và compắc.

Vậy ta thực sự có một tôpô. Với tôpô này X là một không gian con của X^∞.

(b) Ta chứng minh rằng X^∞ là compắc. Gọi F là một phủ mở của X^∞. Khi đó một phần tử $O \in F$ sẽ phủ (chứa) ∞. Phần bù của O trong X^∞ là một tập đóng và compắc C trong X. Ta thấy $F \setminus \{O\}$ là một phủ mở của C, và phủ này có một phủ con hữu hạn. Phủ con hữu hạn này cùng với O tạo thành một phủ hữu hạn của X^∞.

(c) Do X không compắc và X^∞ compắc, nên X không thể đóng trong X^∞, vì vậy bao đóng của X trong X^∞ phải là X^∞.

□

Một không gian X được gọi là ***compắc địa phương*** (locally compact) nếu mọi điểm của nó có một lân cận compắc. Đối với các không gian Hausdorff, tính compắc địa phương có nghĩa là mọi lân cận của mỗi điểm đều chứa một lân cận compắc của điểm đó, xem 6.29.

Ví dụ. Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là compắc địa phương.

Mệnh đề. *Compắc hóa Alexandroff của một không gian Hausdorff compắc địa phương thì Hausdorff.*

Chứng minh. Giả sử không gian X là compắc địa phương và Hausdorff. Ta chứng tỏ rằng ∞ và $x \in X$ có thể được tách bằng các tập mở. Do X là compắc địa phương, tồn tại một tập compắc C chứa một lân cận mở O của x. Do X là Hausdorff, nên C đóng trong X. Nên $X^\infty \setminus C$ mở trong compắc hóa Alexandroff X^∞. Vậy O và $X^\infty \setminus C$ tách x và ∞. □

Sự cần thiết của giả thiết về tính compắc địa phương được thảo luận ở 6.28.

Mệnh đề. *Nếu X đồng phôi với Y thì một compắc hóa một-điểm Hausdorff của X đồng phôi với một compắc hóa một-điểm Hausdorff của Y.*

Nói riêng, compắc hóa một-điểm Hausdorff là duy nhất sai khác các phép đồng phôi. Bởi vậy ta có thể nói về ***compắc hóa một-điểm*** (bỏ đi chữ "một") của một không gian Hausdorff compắc địa phương.

Chứng minh. Giả sử $h : X \to Y$ là một phép đồng phôi. Cho $X \cup \{a\}$ và $Y \cup \{b\}$ là các compắc hóa một-điểm Hausdorff của X và Y. Cho $\tilde{h} : X \cup \{a\} \to Y \cup \{b\}$ được định nghĩa bởi $\tilde{h}(x) = h(x)$ nếu $x \neq a$ và $\tilde{h}(a) = b$. Ta chứng minh $\tilde{h}$ là một phép đồng phôi. Ta sẽ chứng minh tính liên tục của $\tilde{h}$. Tính liên tục của ánh xạ ngược được chứng minh tương tự, hoặc có thể được rút ra từ 6.11.

Gọi U là một tập con mở của $Y \cup \{b\}$. Nếu U không chứa b thì U mở trong Y, nên $h^{-1}(U)$ mở trong X, và do đó mở trong $X \cup \{a\}$. Nếu U chứa b thì $(Y \cup \{b\}) \setminus U$ đóng trong $Y \cup \{b\}$, một không gian compắc, nên $(Y \cup \{b\}) \setminus U = Y \setminus U$ compắc. Khi đó $\tilde{h}^{-1}((Y \cup \{b\}) \setminus U) = h^{-1}(Y \setminus U)$ là một không gian con compắc của X, và do đó compắc trong $X \cup \{a\}$. Vì $X \cup \{a\}$ là một không gian Hausdorff, nên $\tilde{h}^{-1}((Y \cup \{b\}) \setminus U)$ đóng trong $X \cup \{a\}$. Vậy $\tilde{h}^{-1}(U)$ phải mở trong $X \cup \{a\}$. □

Ví dụ. Đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$ đồng phôi với đường tròn S^1 bỏ đi một điểm. Đường tròn thì dĩ nhiên là một compắc hóa một-điểm Hausdorff của đường tròn bỏ đi một điểm. Vậy một compắc hóa một-điểm Hausdorff (nói riêng, compắc hóa Alexandroff) của đường thẳng Euclid là đồng phôi với đường tròn.

Ví dụ. Compắc hóa một-điểm của mặt phẳng Euclid $\mathbb{R}^2$ là mặt cầu S^2. Khi $\mathbb{R}^2$ được đồng nhất với mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thì compắc hóa S^2 của nó thường được gọi là ***mặt cầu Riemann***.

Bài tập

6.5. Nếu một không gian tôpô rời rạc là compắc thì nó hữu hạn.

6.6. Trong một không gian tôpô, hội của hữu hạn các không gian con compắc thì compắc.

6.7. Trong một không gian Hausdorff, giao của các không gian con compắc thì compắc.

6.8 (mở rộng của bổ đề Cantor trong Calculus). Chứng minh rằng nếu X compắc và $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \dots$ là một dãy giảm các tập đóng khác rỗng, thì $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$.

6.9 (định lí đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất). Nếu X là một không gian compắc và $f : X \to (\mathbb{R}, \text{Euclidean})$ liên tục thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

6.10 (liên tục đều). Một hàm f từ một không gian metric tới một không gian metric được gọi là liên tục đều (uniformly continuous) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $d(x, y) < \delta$ thì $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Chứng minh rằng một hàm liên tục từ một không gian metric compắc tới một không gian metric thì liên tục đều, bằng cách sử dụng phủ mở.

6.11. ✓ Nếu X là không gian compắc, Y là không gian Hausdorff, $f : X \to Y$ liên tục và là một song ánh, thì f là một phép đồng phôi.

6.12. Trong một không gian compắc mọi tập vô hạn đều có một điểm tụ.

6.13. Trong một không gian Hausdorff một điểm và một tập compắc rời điểm đó có thể tách được bởi các tập mở.

6.14. Trong một không gian chính tắc một tập đóng và một tập compắc rời nhau có thể tách được bởi các tập mở.

6.15. ✓ Trong một không gian Hausdorff hai tập compắc rời nhau có thể tách được bởi các tập mở.

6.16. ✓ Mọi không gian compắc Hausdorff đều chuẩn tắc.

6.17. Chứng minh 6.2.

6.18. Chứng minh sự tồn tại của số Lebesgue 6.3 bằng cách sử dụng phủ mở.

6.19. Tìm compắc hóa một-điểm của $(0, 1) \cup (2, 3)$ với tôpô Euclid. Hãy mô tả nó một cách cụ thể.

6.20. Một compắc hóa của khoảng Euclid $(0, 1)$ là đường cong sine $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ (xem 4.4).

6.21. Tìm compắc hóa một-điểm của $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ dưới tôpô Euclid.

6.22. Tìm compắc hóa một-điểm của $\mathbb{Z}^+$ dưới tôpô Euclid. Với $\mathbb{Z}$ thì thế nào?

6.23. Chứng minh rằng $\mathbb{Q}$ không compắc địa phương (dưới tôpô Euclid của $\mathbb{R}$). Compắc hóa Alexandroff của nó có Hausdorff không?

6.24. Tìm compắc hóa một điểm của quả cầu mở Euclid $B(0, 1)$. Tìm compắc hóa một điểm của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$.

6.25. Tìm compắc hóa một điểm của vành $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ dưới tôpô Euclid.

6.26. Định nghĩa một tôpô trên $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sao cho nó là một compắc hóa của đường thẳng Euclid $\mathbb{R}$.

6.27. Xét $\mathbb{R}$ với tôpô Euclid. Tìm một điều kiện cần và đủ để một hàm liên tục từ $\mathbb{R}$ tới $\mathbb{R}$ mở rộng được thành một hàm liên tục từ compắc hóa một-điểm $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tới $\mathbb{R}$.

6.28. Nếu có một tôpô trên tập hợp $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ sao cho nó compắc, Hausdorff, và chứa X như là một không gian con, thì X phải Hausdorff, compắc địa phương. Và chỉ tồn tại một tôpô như vậy – tôpô của compắc hóa Alexandroff.

6.29. Nếu để ý ta có thể thấy rằng khái niệm về tính compắc địa phương như đã được định nghĩa không hẳn là một tính chất địa phương. Một tính chất được gọi là địa phương nếu mọi lân cận của mỗi điểm đều chứa một lân cận thỏa tính chất đó (như trong trường hợp của tính liên thông địa phương và liên thông đường địa phương). Chứng minh rằng đối với các không gian Hausdorff, tính compắc địa phương thực sự là một tính chất địa phương, nghĩa là, mọi lân cận của mỗi điểm đều chứa một lân cận compắc của điểm đó.

6.30. Mỗi không gian Hausdorff compắc địa phương là một không gian chính tắc.

6.31. Trong một không gian Hausdorff compắc địa phương, nếu K compắc, U mở, và $K \subset U$, thì tồn tại một tập mở V sao cho $\overline{V}$ là compắc và $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. (So sánh với 5.2.)

6.32. * Một không gian là Hausdorff compắc địa phương nếu và chỉ nếu nó đồng phôi với một không gian con mở của một không gian compắc Hausdorff.

6.33. * Cho X là một không gian compắc Hausdorff. Gọi $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ là một dãy lồng nhau các tập con liên thông đóng của X. Chứng minh $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ là liên thông.

Phát biểu trên có đúng nếu liên thông được thay bởi liên thông đường?

7 Tích của các không gian

Tích của hữu hạn các không gian

Cho X và Y là hai không gian tôpô, và xét tích Descartes $X \times Y$. ***Tôpô tích*** (product topology) trên $X \times Y$ là tôpô được sinh bởi họ F các tập có dạng $U \times V$ với U là một tập mở của X và V là một tập mở của Y. Do giao của hai phần tử thuộc F cũng là một phần tử thuộc F, nên họ F là một cơ sở của tôpô tích trên. Do đó mỗi tập mở trong tôpô tích là một hội của các tích các tập mở trong X với các tập mở trong Y.

Ghi chú. Chú ý ***một lỗi thường thấy***: cho rằng một tập mở bất kì trong tôpô tích thì luôn có dạng $U \times V$.

Tôpô tích trên $\prod_{i=1}^n (X_i, \tau_i)$ được định nghĩa một cách tương tự, là tôpô sinh bởi họ $\{\prod_{i=1}^n U_i \mid U_i \in \tau_i\}$.

Mệnh đề. *Nếu mỗi b_i là một cơ sở của X_i thì $\{\prod_{i=1}^n U_i \mid U_i \in b_i\}$ là một cơ sở của tôpô tích trên $\prod_{i=1}^n X_i$.*

Chứng minh. Xét một phần tử trong cơ sở được định nghĩa ở trên của tôpô tích, có dạng $\prod_{i=1}^n V_i$ với $V_i \in \tau_i$. Mỗi V_i có thể được viết thành $V_i = \bigcup_{i_j \in I_i} U_{i_j}$, với $U_{i_j} \in b_i$. Khi đó

$$\prod_{i=1}^n V_i = \bigcup_{i_j \in I_i, 1 \le i \le n} \prod_{i=1}^n U_{i_j}.$$

Điều này chứng minh khẳng định của ta. □

Ví dụ (tôpô Euclid). Nhắc lại rằng $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ copies of } \mathbb{R}}$. Trang bị cho $\mathbb{R}$ tôpô Euclid, là tôpô sinh bởi các khoảng mở. Mỗi tập mở trong tôpô tích của $\mathbb{R}^n$ là một hội của các tích các khoảng mở. Do tích của các khoảng mở là một hình chữ nhật mở, và mỗi hình chữ nhật mở lại là hội của các quả cầu mở, và ngược lại..., nên ***tôpô tích trên $\mathbb{R}^n$ chính là tôpô Euclid***.

Tích của một họ bất kì các không gian

Định nghĩa. Cho $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ là một họ được đánh chỉ số các không gian tôpô. ***Tôpô tích*** trên tập hợp $\prod_{i \in I} X_i$ là tôpô được sinh bởi họ F gồm tất cả các tập có dạng $\prod_{i \in I} U_i$, với $U_i \in \tau_i$, và $U_i = X_i$ với hầu hết $i \in I$ ngoại trừ một số hữu hạn các phần tử của I. Bằng kí hiệu:

$$F = \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \tau_i, \exists J \subset I, |J| < \infty, \forall i \in I \setminus J, U_i = X_i\}.$$

Chú ý rằng họ F ở trên là một cơ sở của tôpô tích, bởi nó đóng dưới các phép giao hữu hạn. Họ con

$$\{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \tau_i, \exists j \in I, \forall i \in I \setminus \{j\}, U_i = X_i\}$$

của họ trên, tức họ gồm tất cả các tập có dạng $\prod_{i \in I} U_i$, với $U_i \in \tau_i$, và $U_i = X_i$ với mọi $i \in I$ trừ ra một phần tử duy nhất của I, là một tiền cơ sở của tôpô tích.

Nhắc lại rằng mỗi phần tử của tập hợp $\prod_{i \in I} X_i$ được viết dưới dạng $(x_i)_{i \in I}$ (xem Phần 1). Với $j \in I$, ***phép chiếu xuống tọa độ thứ j*** được định nghĩa là ánh xạ $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$, $p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$.

Định nghĩa của tôpô tích có thể được diễn giải như sau:

7.1 Định lí (tôpô tích là tôpô sao cho mọi phép chiếu đều liên tục). *Tôpô tích là tôpô thô nhất trên $\prod_{i\in I} X_i$ sao cho mọi phép chiếu p_i đều liên tục. Nói cách khác, tôpô tích là tôpô sinh bởi các phép chiếu.*

Kết quả này cũng có thể được dùng để làm định nghĩa của tôpô tích.

Chứng minh. Để ý rằng nếu $O_j \in X_j$ thì $p_j^{-1}(O_j) = \prod_{i\in I} U_i$ với $U_i = X_i$ với mọi i ngoại trừ j, và $U_j = O_j$. Tôpô sinh bởi tất cả các ánh xạ p_i chính là tôpô sinh bởi tất cả các tập có dạng $p_i^{-1}(O_i)$ với $O_i \in \tau_i$, xem 3.9. □

7.2 Định lí (một ánh xạ tới một không gian tích là liên tục khi và chỉ khi mỗi ánh xạ thành phần của nó là liên tục). *Ánh xạ $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ là liên tục khi và chỉ khi mỗi thành phần $f_i = p_i \circ f$ là liên tục.*

Chứng minh. Nếu $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ liên tục thì $p_i \circ f$ cũng liên tục vì p_i liên tục.

Mặt khác, giả sử rằng mỗi ánh xạ f_i là liên tục. Gọi $U = \prod_{i\in I} U_i$ với $U_i \in \tau_i$ và $\exists j \in I$ sao cho $U_i = X_i, \forall i \neq j$ là một phần tử thuộc tiền cơ sở của $\prod_{i\in I} X_i$. Khi đó

$$f^{-1}(U) = f_j^{-1}(U_j)$$

là một tập mở do f_j liên tục. Vậy f là ánh xạ liên tục. □

7.3 Định lí (hội tụ trong tôpô tích là hội tụ theo tọa độ). *Một lưới $n : J \to \prod_{i\in I} X_i$ là hội tụ khi và chỉ khi mọi hình chiếu $p_i \circ n$ của nó đều hội tụ.*

Chứng minh. ($\Leftarrow$) Giả sử mỗi lưới $p_i \circ n$ hội tụ về a_i, ta chứng minh n hội tụ về $a = (a_i)_{i\in I}$.

Mỗi lân cận của a chứa một tập mở có dạng $U = \prod_{i\in I} O_i$ với các O_i lần lượt là các tập mở của X_i và $O_i = X_i$ ngoại trừ $i \in K$, với K là một tập con hữu hạn của I.

Với mỗi $i \in K$, $p_i \circ n$ hội tụ về a_i, do đó có một chỉ số $j_i \in J$ sao cho với $j \geq j_i$ ta có $p_i(n(j)) \in O_i$. Lấy một chỉ số j_0 sao cho $j_0 \geq j_i$ với mọi $i \in K$. Khi đó với $j \geq j_0$ ta có $n(j) \in U$. □

Định lí Tikhonov

Định lí (định lí Tikhonov). *Tích của một họ bất kì các không gian compắc là compắc. Chính xác hơn, nếu X_i compắc với mọi $i \in I$ thì $\prod_{i\in I} X_i$ compắc.*[7]

Ví dụ. Cho khoảng $[0,1]$ với tôpô Euclid. Không gian $\prod_{i\in\mathbb{Z}^+}[0,1]$ được gọi là ***khối lập phương Hilbert*** . Không gian này compắc bởi định lý Tikhonov.

Các ứng dụng điển hình của định lí Tikhonov gồm có định lí Banach-Alaoglu trong Giải tích hàm, và compắc hóa Stone-Cech.

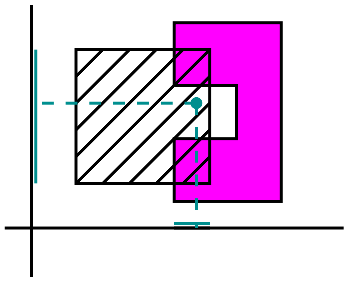
Phần chứng minh ta sẽ trình bày dưới đây là khá khó, tuy nhiên với trường hợp tích hữu hạn thì vấn đề sẽ dễ dàng hơn (7.19) và các kĩ thuật khác nhau có thể phù hợp với các trường hợp đặc biệt của định lí lày (7.24 và 7.8).

Chứng minh định lí Tikhonov. Cho X_i compắc với mọi $i \in I$. Ta sẽ chứng minh rằng $X = \prod_{i\in I} X_i$ compắc bằng cách cho thấy nếu một họ các tập con đóng của X có tính giao hữu hạn thì nó có phần giao khác rỗng (xem 6.2).[8]

[7]Được chứng minh bởi Andrei Nicolaievich Tikhonov vào khoảng năm 1926. Ông cũng chính là người định nghĩa tôpô tích. Tychonoff là một cách đánh vần khác cho tên ông.
[8]Một chứng minh dựa trên các phủ mở cũng khả thi, xem [Kel55, p. 143].

Gọi F là một họ các tập con đóng của X có tính giao hữu hạn. Ta sẽ chứng minh $\bigcap_{A \in F} A \neq \emptyset$.

Nhìn qua lí luận ở dưới ta có thể thấy rằng việc chứng minh cho định lí Tikhonov là không dễ. Xét họ các hình chiếu xuống tọa độ thứ i của các phần tử thuộc F, nếu ta lấy bao đóng của mỗi hình chiếu, ta sẽ có họ $\{\overline{p_i(A)}, A \in F\}$ các tập con đóng của X_i và họ này có tính giao hữu hạn. Do X_i compắc, nên họ này có phần giao khác rỗng. Từ đây ta có thể bị dẫn vào việc kết luận rằng F tự nó cũng phải có phần giao khác rỗng. Nhưng điều đó không đúng, xem hình vẽ.



Dưới đây ta sẽ cố vượt qua khó khăn này bằng cách mở rộng họ F.

(a) Ta chứng minh rằng tồn tại một họ $\tilde{F}$ tối đại gồm các tập con của X sao cho $\tilde{F}$ chứa F và vẫn có tính giao hữu hạn. Ở đây ta sẽ sử dụng bổ đề Zorn.[9]

Gọi K là họ gồm tất cả các họ G các tập con của X sao cho G chứa F và G có tính giao hữu hạn. Thứ tự trên K được định nghĩa bởi quan hệ bao hàm thông thường.

Bây giờ giả sử L là một họ được sắp thứ tự toàn phần của K. Đặt $H = \bigcup_{G \in L} G$. Ta sẽ chứng minh $H \in K$, do đó H là một chặn trên của L.

Rõ ràng H chứa F. Ta cần chứng minh H có tính giao hữu hạn. Giả sử $H_i \in H$, $1 \leq i \leq n$. Khi đó $H_i \in G_i$ với G_i nào đó thuộc L. Do L được sắp thứ tự toàn phần, tồn tại một số i_0, $1 \leq i_0 \leq n$ sao cho G_{i_0} chứa mọi G_i, $1 \leq i \leq n$. Nên $H_i \in G_{i_0}$ với mọi $1 \leq i \leq n$, và do G_{i_0} có tính giao hữu hạn, ta có $\bigcap_{i=1}^{n} H_i \neq \emptyset$.

(b) Do $\tilde{F}$ tối đại, nên nó phải đóng dưới các phép giao hữu hạn. Hơn nữa nếu một tập con của X có phần giao khác rỗng với mỗi phần tử của $\tilde{F}$ thì tập con đó cũng phải thuộc $\tilde{F}$.

(c) Do $\tilde{F}$ có tính giao hữu hạn, nên với mỗi $i \in I$ họ $\{p_i(A) \mid A \in \tilde{F}\}$ cũng có tính giao hữu hạn, suy ra họ $\{\overline{p_i(A)} \mid A \in \tilde{F}\}$ cũng vậy. Do X_i compắc, nên $\bigcap_{A \in \tilde{F}} \overline{p_i(A)}$ khác rỗng.

(d) Với $x_i \in \bigcap_{A \in \tilde{F}} \overline{p_i(A)}$ và $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}[\bigcap_{A \in \tilde{F}} \overline{p_i(A)}]$. Ta sẽ chứng minh $x \in \overline{A}$ với mọi $A \in \tilde{F}$, nói riêng $x \in A$ với mọi $A \in F$.

Ta cần chứng minh rằng mỗi lân cận của x đều có phần giao khác rỗng với mỗi $A \in \tilde{F}$. Và chỉ cần khảo sát các lân cận của x thuộc cơ sở của X là đủ, tức các tập có dạng $p_i^{-1}(O_i)$ với O_i là một lân cận mở của $x_i = p_i(x)$. Với mọi $A \in \tilde{F}$, do $x_i \in \overline{p_i(A)}$ nên ta có $O_i \cap p_i(A) \neq \emptyset$. Do đó $p_i^{-1}(O_i) \cap A \neq \emptyset$. Bởi tính tối đại của $\tilde{F}$ ta có $p_i^{-1}(O_i) \in \tilde{F}$, suy ra điều phải chứng minh.

□

[9] This is a routine step; it might be easier for the reader to carry it out instead of reading.

Compắc hóa Stone-Cech

Cho X là một không gian tôpô. Kí hiệu bởi $C(X)$ tập tất cả các hàm liên tục và bị chặn từ X tới $\mathbb{R}$ với $\mathbb{R}$ có tôpô Euclid. Bởi định lí Tikhonov không gian $\prod_{f\in C(X)}[\inf f, \sup f]$ là compắc. Định nghĩa

$$\begin{aligned} \Phi : X &\to \prod_{f\in C(X)} [\inf f, \sup f] \\ x &\mapsto (f(x))_{f\in C(X)}. \end{aligned}$$

Vậy với mỗi $x \in X$ và mỗi $f \in C(X)$, tọa độ thứ f của điểm $\Phi(x)$ là $\Phi(x)_f = f(x)$. Nói cách khác thành phần thứ f của Φ là f, tức $p_f \circ \Phi = f$, với p_f là phép chiếu xuống tọa độ thứ f.

Chú ý rằng bao đóng $\overline{\Phi(X)}$ là compắc. Với một số giả thiết được bổ sung thì ánh xạ Φ còn là một phép nhúng.

Một không gian được gọi là ***hoàn toàn chính tắc*** (completely regular) (còn gọi là $T_{3\frac{1}{2}}$-không gian) nếu nó là một T_1-không gian, và với mỗi điểm x cùng mỗi tập đóng A không chứa x, tồn tại một ánh xạ $f \in C(X)$ sao cho $f(x) = a$ và $f(A) = \{b\}$ với $a \neq b$. Vậy trong một không gian hoàn toàn chính tắc, mỗi điểm và mỗi tập đóng rời điểm đó có thể tách được bởi một hàm thực liên tục.

7.4 Định lí. *Nếu X là hoàn toàn chính tắc thì $\Phi : X \to \Phi(X)$ là một phép đồng phôi, tức Φ là một phép nhúng. Trong trường hợp này $\overline{\Phi(X)}$ được gọi là **compắc hóa Stone-Cech** của X. Nó là một không gian Hausdorff.*

Chứng minh. Ta sẽ đi qua một số bước.

(a) Φ là đơn ánh: Nếu $x \neq y$ thì do X là hoàn toàn chính tắc nên tồn tại $f \in C(X)$ sao cho $f(x) \neq f(y)$, do đó $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

(b) Φ liên tục: Do thành phần thứ f của Φ là f, một ánh xạ liên tục, nên kết luận được suy ra từ 7.2.

(c) Φ^{-1} liên tục: Ta chứng minh Φ mang mỗi tập mở thành một tập mở. Gọi U là một tập con mở của X và x thuộc U. Tồn tại một hàm $f \in C(X)$ tách x và $X \setminus U$. Nói riêng có một khoảng (a, b) chứa $f(x)$ sao cho $f^{-1}((a, b)) \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Ta có $f^{-1}((a, b)) = (p_f \circ \Phi)^{-1}((a, b)) = \Phi^{-1}(p_f^{-1}((a, b))) \subset U$. Tác động Φ vào cả hai vế, ta được $p_f^{-1}((a, b)) \cap \Phi(X) \subset \Phi(U)$. Do $p_f^{-1}((a, b)) \cap \Phi(X)$ là một tập mở trong $\Phi(X)$ và chứa $\Phi(x)$, nên $\Phi(x)$ là một điểm trong của $\Phi(U)$. Vậy $\Phi(U)$ là một tập mở.

Tính Hausdorff của $\overline{\Phi(X)}$ được suy ra từ tính Hausdorff của Y, bởi 7.16, và 5.11. □

Định lí. *Một hàm thực liên tục và bị chặn trên một không gian hoàn toàn chính tắc thì có một mở rộng duy nhất lên compắc hóa Stone-Cech của không gian đó.*

Một cách chính xác, nếu X là một không gian hoàn toàn chính tắc và $f \in C(X)$ thì tồn tại một hàm $\tilde{f} \in C(\overline{\Phi(X)})$ duy nhất sao cho $f = \tilde{f} \circ \Phi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f"'] & \overline{\Phi(X)} \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Chứng minh. Một mở rộng liên tục của f, nếu tồn tại, là duy nhất, bởi 5.22.

Do $p_f \circ \Phi = f$ nên rõ ràng phép chiếu p_f là sự lựa chọn cho $\tilde{f}$. □

Bài tập

7.5. Chú ý rằng, đối với tập hợp:

(a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subsetneq (A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$.

7.6. Kiểm tra rằng theo nghĩa tôpô (nghĩa là, sai khác nhau một phép đồng phôi):

(a) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Tổng quát hơn, phép lấy tích có tính kết hợp không? Nghĩa là, các đẳng thức $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$, và $(X \times Y) \times Z = X \times Y \times Z$ liệu có đúng?

7.7. Chứng minh rằng mặt cầu S^2 bỏ đi Cực Bắc và Cực Nam đồng phôi với mặt trụ "dài" vô hạn $S^1 \times \mathbb{R}$.

7.8. Cho (X_i, d_i), $1 \leq i \leq n$ là các không gian metric. Đặt $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$, định nghĩa

$$\delta_1(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$\delta_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Chứng minh δ_1 và δ_2 là các metric trên X sinh bởi tôpô tích.

7.9. Nếu với mỗi $i \in I$ không gian X_i đồng phôi với không gian Y_i thì $\prod_{i \in I} X_i$ đồng phôi với $\prod_{i \in I} Y_i$.

7.10. ✓ Chứng minh rằng một không gian X là Hausdorff khi và chỉ khi đường chéo $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ là đóng trong $X \times X$, bằng cách:

(a) sử dụng lưới,

(b) không sử dụng lưới.

7.11. Chứng minh rằng nếu không gian Y là Hausdorff và ánh xạ $f : X \to Y$ là liên tục thì ***đồ thị*** (graph) của f, tức tập hợp $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, là một tập đóng trong $X \times Y$, bằng cách:

(a) sử dụng lưới,

(b) không sử dụng lưới.

7.12. ✓ Chứng minh rằng đồ thị của một hàm liên tục thì đồng phôi với tập nguồn của hàm đó. Tức là, nếu $f : X \to Y$ liên tục, có đồ thị là $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$, thì $\operatorname{graph}(f)$ đồng phôi với X.

7.13. Chứng minh rằng mỗi phép chiếu p_i là một ánh xạ mở, tức mang mỗi tập mở thành một tập mở. Nó có là một ánh xạ đóng không?

7.14. ✓ Cho A_1 và A_2 là các không gian tôpô. Trên tập hợp $(A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\})$ xét tôpô sinh bởi các tập con có dạng $U \times \{1\}$ và $V \times \{2\}$ với U mở trong A_1 và V mở trong A_2. Chứng minh $A_1 \times \{1\}$ đồng phôi với A_1, và $A_2 \times \{2\}$ đồng phôi với A_2. Chú ý rằng $(A_1 \times \{1\}) \cap (A_2 \times \{2\}) = \emptyset$. Không gian $(A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\})$ được gọi là ***hội rời*** (disjoint union) của A_1 và A_2, và được kí hiệu bởi $A_1 \sqcup A_2$. Ta có thể sử dụng xây dựng này khi ta muốn, chẳng hạn, xét đến một không gian gồm hai đường tròn rời nhau.

Tổng quát hơn, cho một họ các không gian $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$. Hội rời của họ này là không gian $\bigcup_{i \in I}(X_i \times \{i\})$ với tôpô $\bigcup_{i \in I} \tau_i \times \{i\}$. Kiểm tra rằng đây thực sự là một tôpô.

7.15. ✓ Cố định một điểm $O = (O_i) \in \prod_{i \in I} X_i$. Định nghĩa ánh xạ chứa trong (inclusion) $f : X_i \to \prod_{i \in I} X_i$ bởi

$$x \mapsto f(x) \text{ với } f(x)_j = \begin{cases} O_j & \text{if } j \neq i \\ x & \text{if } j = i \end{cases}.$$

Chứng minh rằng f là một phép đồng phôi lên ảnh $\tilde{X}_i$ của nó (một nhúng của X_i). Do đó $\tilde{X}_i$ là một bản sao của X_i trong $\prod_{i \in I} X_i$. Các không gian $\tilde{X}_i$ có O là điểm chung. Điều này tương tự với hệ trục tọa độ Oxy trên $\mathbb{R}^2$.

7.16. ✓ Chứng minh rằng

(a) Nếu mỗi X_i, $i \in I$ là một không gian Hausdorff thì $\prod_{i \in I} X_i$ cũng là một không gian Hausdorff.

(b) Nếu $\prod_{i \in I} X_i$ là một không gian Hausdorff thì mỗi X_i cũng là một không gian Hausdorff.

7.17. Chứng minh rằng

(a) Nếu $\prod_{i \in I} X_i$ liên thông đường thì mỗi X_i cũng liên thông đường.

(b) Nếu mỗi X_i, $i \in I$ liên thông đường thì $\prod_{i \in I} X_i$ cũng liên thông đường.

7.18. ✓ Chứng minh rằng

(a) Nếu $\prod_{i \in I} X_i$ liên thông thì mỗi X_i liên thông.

(b) Nếu X và Y liên thông thì thì $X \times Y$ liên thông.

(c) * Nếu mỗi X_i, $i \in I$ liên thông thì $\prod_{i \in I} X_i$ liên thông.

7.19. Chứng minh rằng

(a) Nếu $\prod_{i \in I} X_i$ compắc thì mỗi X_i compắc.

(b) * Nếu X và Y compắc thì $X \times Y$ compắc (dĩ nhiên hãy tránh sử dụng định lí Tikhonov).

7.20. Gọi X là một không gian định chuẩn trên trường $\mathbb{F}$ bằng $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$. Kiểm tra rằng phép cộng $(x, y) \mapsto x + y$ là một ánh xạ liên tục từ không gian tích $X \times X$ tới X, và phép nhân với vô hướng $(c, x) \mapsto c \cdot x$ là một ánh xạ liên tục từ $\mathbb{F} \times X$ tới X. Đây là một ví dụ về ***không gian vectơ tôpô***, và là một trường hợp đặc biệt của các nhóm tôpô (xem 7.22).

7.21. Đặt $X = [0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0,1]$ với $[0,1] \subset \mathbb{R}$ được trang bị tôpô Euclid (khối lập phương Hilbert).

(a) Chứng minh X là tách được, tức nó chứa một tập con trù mật đếm được.

(b) Chứng minh X có một cơ sở đếm được.

(c) Chứng minh X là chuẩn tắc. (Do đó nó khả metric, bởi định lí khả metric Urysohn 9.45.)

(d) Với $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ và $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, đặt

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(x_n, y_n).$$

Chứng minh rằng đây là một metric, và metric này sinh ra được tôpô của X.

7.22. Tập tất cả các ma trận $n \times n$ với hệ số thực, kí hiệu bởi $M(n, \mathbb{R})$, một cách tự nhiên có thể được xem như là một tập con của không gian Euclid $\mathbb{R}^{n^2}$ bằng cách xem mỗi phần tử của ma trận như là một tọa độ, thông qua ánh xạ

$$(a_{i,j}) \longmapsto (a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{n-1,n}, a_{n,n}).$$

Gọi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ là tập tất cả các ma trận $n \times n$ khả nghịch với hệ số thực.

(a) Chứng minh rằng phép lấy tích hai ma trận là một ánh xạ liên tục trên $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(b) Chứng minh rằng phép lấy nghịch đảo của ma trận là một ánh xạ liên tục trên $GL(n,\mathbb{R})$.

(c) Một tập hợp có một cấu trúc nhóm và một tôpô sao cho các phép toán trong nhóm là liên tục được gọi là một ***nhóm tôpô*** (topological group). Chứng minh $GL(n,\mathbb{R})$ là một nhóm tôpô. Nó được gọi là ***Nhóm tuyến tính tổng quát*** (General linear group). [Tham khảo thêm về các nhóm tôpô ở S. Morris, Topology without tears, Phụ lục 5].

7.23 (tôpô Zariski). * Cho $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Một đa thức n biến trên $\mathbb{F}$ là một hàm từ $\mathbb{F}^n$ vào $\mathbb{F}$ sao cho nó là một tổng của hữu hạn các số hạng có dạng $ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$, với a, $x_i\in\mathbb{F}$ và $m_i\in\mathbb{N}$. Gọi P là tập tất cả các đa thức n trên $\mathbb{F}$.

Với $S\subset P$ ta định nghĩa $Z(S)$ là tập tất cả các nghiệm chung của tất cả các đa thức thuộc S, tức $Z(S)=\{x\in\mathbb{F}^n \mid \forall p\in S,\ p(x)=0\}$. Một tập như vậy được gọi là một ***tập đại số*** (algebraic set).

(a) Chứng minh rằng nếu ta định nghĩa một tập con của $\mathbb{F}^n$ là đóng nếu nó là đại số, thì ta được một tôpô trên $\mathbb{F}^n$, gọi là ***tôpô Zariski***.

(b) Chứng minh rằng tôpô Zariski trên $\mathbb{F}$ chính là tôpô phần bù hữu hạn.

(c) Chứng minh rằng nếu cả $\mathbb{F}$ và $\mathbb{F}^n$ đều có tôpô Zariski thì mọi đa thức trên $\mathbb{F}^n$ đều liên tục.

(d) Tôpô Zariski trên $\mathbb{F}^n$ có phải là tôpô tích?

Tôpô Zariski được sử dụng trong Hình học đại số.

7.24. Sử dụng đặc trưng của các tập con compắc trong các không gian Euclid, chứng minh định lí Tikhonov cho tích của một số hữu hạn các tập con compắc của các không gian Euclid.

7.25. Sử dụng đặc trưng của các không gian metric compắc dựa vào dãy, chứng minh định lí Tikhonov cho tích của một số hữu hạn các không gian metric compắc.

7.26. Mỗi không gian hoàn toàn chính tắc là một không gian chính tắc.

7.27. Chứng minh 7.4 bằng cách sử dụng lưới.

7.28. Một không gian là hoàn toàn chính tắc nếu và chỉ nếu nó đồng phôi với một không gian con của một không gian compắc Hausdorff. Hệ quả, nếu một không gian là Hausdorff compắc địa phương thì nó hoàn toàn chính tắc.

Từ 7.28 nếu một không gian có một compắc hóa Alexandroff là Hausdorff thì nó cũng có một compắc hóa Stone-Cech là Hausdorff. Với một nghĩa nào đó, với mỗi không gian không compắc, compắc hóa Alexandroff là compắc hóa Hausdorff "lớn nhất" của không gian đó, và compắc hóa Stone-Cech là compắc hóa Hausdorff "nhỏ nhất". Các thảo luận về chủ đề này có thể xem chẳng hạn ở [Mun00, p. 237].

8 Hàm thực và các Không gian hàm

Trong phần này tập hợp $\mathbb{R}$ được trang bị tôpô Euclid.

Bổ đề Urysohn

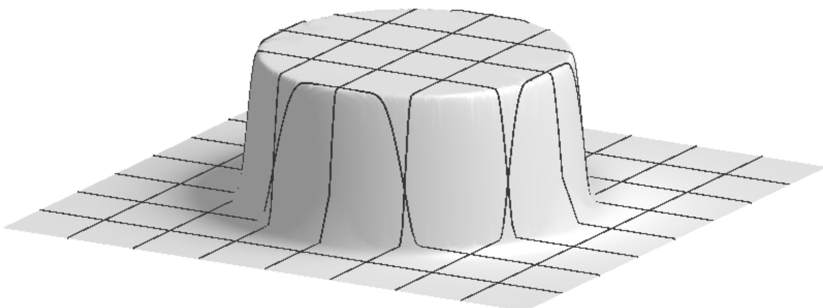
8.1 Định lí (bổ đề Urysohn). *Nếu X chuẩn tắc, F đóng, U mở, và $F \subset U \subset X$, thì tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \to [0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ trên F và $f(x) = 1$ trên $X \setminus U$.*

Một cách tương đương, nếu X chuẩn tắc, A và B là hai tập con đóng rời nhau của X, thì tồn tại một ánh xạ liên tục f từ X tới $[0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ trên A và $f(x) = 1$ trên B. Do đó trong một không gian chuẩn tắc hai tập con đóng rời nhau có thể tách được bởi một hàm thực liên tục.

Ví dụ. Với các không gian metric ta có thể lấy

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Nếu lấy $g = 1 - f$ thì ta được một hàm liên tục g từ X tới $[0,1]$ sao cho $g|_F = 1$ và $g|_{X \setminus U} = 0$. Đồ thị của g có thể được hình dung như một sự tiếp nối liên tục giữa một cao nguyên F có độ cao 1 với vùng đồng bằng ở phía ngoài U có độ cao 0.



Chứng minh. Chúng ta đi qua các bước sau:

(a) Xây dựng một họ các tập mở theo cách như sau (nhắc lại 5.2):

Đặt $U_1 = U$.

$n = 0$ $F \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

$n = 1$ $\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1$.

$n = 2$ $\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{2}{4}} = U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{2}{4}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_{\frac{4}{4}} = U_1$.

Một cách quy nạp,

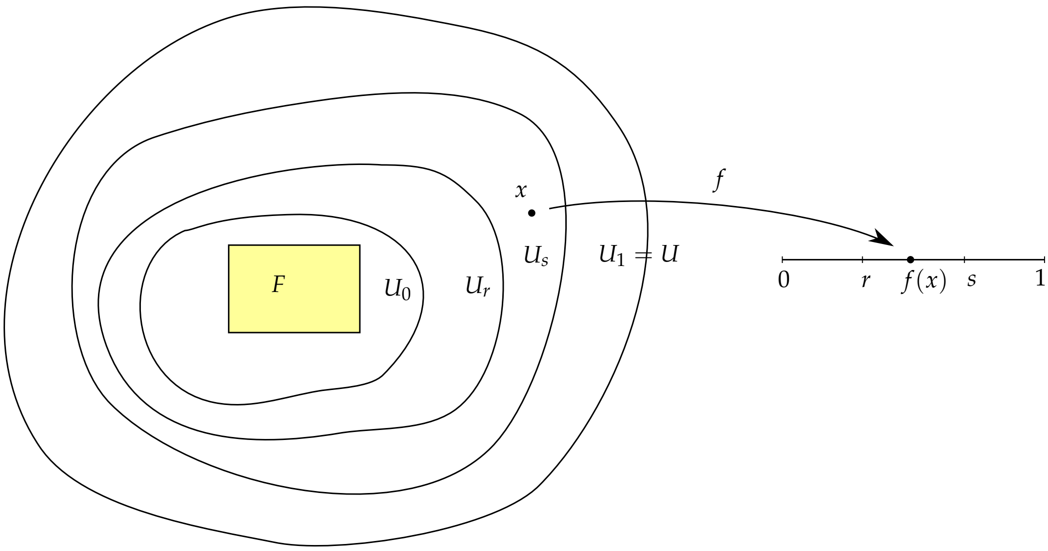
$$F \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{2^n}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2^n}}} \subset U_{\frac{2}{2^n}} \subset \overline{U_{\frac{2}{2^n}}} \subset U_{\frac{3}{2^n}} \subset \overline{U_{\frac{3}{2^n}}} \subset \cdots \subset$$
$$\subset U_{\frac{2^n-1}{2^n}} \subset \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{2^n}{2^n}} = U_1.$$

(b) Đặt $I = \{\frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N}; 0 \leq m \leq 2^n\}$. Ta có một họ các tập mở $\{U_r \mid r \in I\}$ với tính chất $r < s \Rightarrow \overline{U_r} \subset U_s$. Ta có thể kiểm tra rằng I trù mật trong $[0,1]$ (điều này thực sự giống với việc mọi số thực trong $[0,1]$ có thể được viết dưới dạng nhị phân, so sánh với 1.17).

(c) Định nghĩa $f : X \to [0,1]$, bởi

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in I \mid x \in U_r\} & \text{if } x \in U, \\ 1 & \text{if } x \notin U. \end{cases}$$

Theo cách này, nếu $x \in U_r$ thì $f(x) \leq r$, trong khi nếu $x \notin U_r$ thì $f(x) \geq r$. Nên $f(x)$ cho một "mức" của x trên thang từ 0 tới 1, trong khi U_r giống như một mức phụ của f.



Ta sẽ chứng minh f là một hàm liên tục, suy ra f chính là hàm ta đang tìm. Ta chỉ cần chứng tỏ các tập có dạng $\{x \mid f(x) < a\}$ và $\{x \mid f(x) > a\}$ đều là các tập mở là đủ.

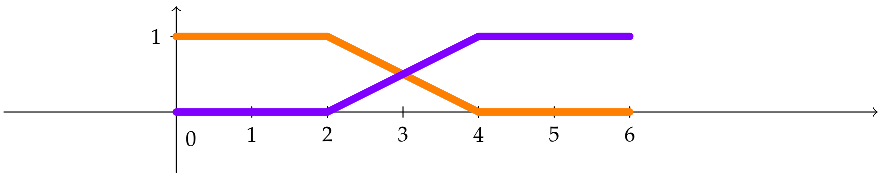
(d) Nếu $a \leq 1$ thì $f(x) < a$ khi và chỉ khi có $r \in I$ sao cho $r < a$ và $x \in U_r$. Vậy $\{x \mid f(x) < a\} = \{x \in U_r \mid r < a\} = \bigcup_{r<a} U_r$ là tập mở.

(e) Nếu $a < 1$ thì $f(x) > a$ khi và chỉ khi có $r \in I$ sao cho $r > a$ và $x \notin U_r$. Thật vậy, nếu $f(x) > a$ thì có $s > a$ sao cho $f(x) \geq s$, điều này lại suy ra rằng nếu $x \in U_r$ thì $r \geq s$, do đó với $a < r < s$ ta có $x \notin U_r$. Ở chiều ngược lại, nếu $r > a$ và $x \notin U_r$, thì $x \in U_s$ kéo theo $s \geq r$, do đó $f(x) \geq r > a$.
Vậy $\{x \mid f(x) > a\} = \{x \in X \setminus U_r \mid r > a\} = \bigcup_{r>a} X \setminus U_r$. Bây giờ ta chứng minh $\bigcup_{r>a} X \setminus U_r = \bigcup_{r>a} X \setminus \overline{U_r}$, suy ra rằng tập $\bigcup_{r>a} X \setminus U_r$ là mở. Thật vậy, nếu $r \in I$ và $r > a$ thì có $s \in I$ sao cho $r > s > a$. Khi đó $\overline{U_s} \subset U_r$, nên $X \setminus U_r \subset X \setminus \overline{U_s}$. Suy ra $\bigcup_{r>a} X \setminus U_r \subset \bigcup_{r>a} X \setminus \overline{U_r}$. Bao hàm thức ngược lại đúng, bởi $X \setminus U_r \supset X \setminus \overline{U_r}$.

$\square$

Phân hoạch đơn vị

Một ứng dụng quan trọng của bổ đề Urysohn là giúp chứng minh sự tồn tại của ***phân hoạch đơn vị*** (partition of unity). Một phân hoạch đơn vị là một họ các hàm thực không âm, mỗi hàm sẽ bằng không ở bên ngoài một tập mở cho trước, và tổng của các hàm đó là bằng 1 ở khắp nơi. Nói đại khái, một phân hoạch đơn vị là một hệ các trọng tương đối của mỗi tập mở tại mỗi điểm (để trọng tổng cộng tại mỗi điểm là 100%, tức là, 1). Hình 8.2 minh họa một trường hợp đơn giản.



Hình 8.2: Một phân hoạch đơn vị cho khoảng $[0,6]$ ứng với hai tập mở $[0,5)$ và $(1,6]$.

Với $f : X \to \mathbb{R}$, ***giá*** (support) của f, kí hiệu bởi $\operatorname{supp}(f)$, được định nghĩa là bao đóng của tập con $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

8.3 Định lí (phân hoạch đơn vị). *Cho X là một không gian chuẩn tắc. Giả sử X có một phủ mở hữu hạn O. Khi đó tồn tại một họ các ánh xạ liên tục $(f_U : X \to [0,1])_{U\in O}$ sao cho $supp(f_U) \subset U$ và với mỗi $x \in X$ ta có $\sum_{U\in O} f_U(x) = 1$.*

Chứng minh. Từ bài tập 5.16, có một phủ mở $(U''_U)_{U\in O}$ của X sao cho với mỗi $U \in O$ tồn tại một tập mở U'_U thỏa $U''_U \subset \overline{U''_U} \subset U'_U \subset \overline{U'_u} \subset U$. Bởi bổ đề Urysohn, tồn tại một ánh xạ liên tục $\varphi_U : X \to [0,1]$ sao cho $\varphi_U|_{U''_U} = 1$ và $\varphi_U|_{X\setminus U'_U} = 0$. Điều này kéo theo $\operatorname{supp}(\varphi_U) \subset \overline{U'_u} \subset U$. Với mỗi $x \in X$ có $U \in O$ sao cho U''_U chứa x, do đó $\varphi_U(x) = 1$. Đặt

$$f_U = \frac{\varphi_U}{\sum_{U\in O} \varphi_U}.$$

□

Phân hoạch đơn vị cho phép ta mở rộng một số tính chất địa phương thành các tính chất toàn cục, bằng cách "vá" các lân cận.

Tôpô compắc-mở

Cho X và Y là hai không gian tôpô. Ta nói một lưới $(f_i)_{i\in I}$ các hàm từ X tới Y là ***hội tụ theo từng điểm*** tới một hàm $f : X \to Y$ nếu với mỗi $x \in X$ lưới $(f_i(x))_{i\in I}$ hội tụ tới $f(x)$.

Bây giờ gọi Y là một không gian metric. Nhắc lại rằng một hàm $f : X \to Y$ được gọi là ***bị chặn*** nếu tập $f(X)$ các giá trị của f là một tập con bị chặn của Y. Ta xét tập $B(X,Y)$ tất cả các hàm bị chặn từ X tới Y. Ta có thể định nghĩa một metric trên $B(X,Y)$: với $f,g \in B(X,Y)$, đặt $d(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$. Tôpô sinh bởi metric này được gọi là ***tôpô của sự hội tụ đều***, thường được nghiên cứu trong Giải tích hàm. Nếu một lưới $(f_i)_{i\in I}$ hội tụ tới f trong không gian metric $B(X,Y)$ thì ta nói $(f_i)_{i\in I}$ hội tụ ***đều*** tới f.

Mệnh đề. *Giả sử $(f_i)_{i\in I}$ hội tụ đều tới f. Khi đó:*

(a) $(f_i)_{i\in I}$ hội tụ tới f theo từng điểm.

(b) Nếu các f_i liên tục thì f liên tục.

Chứng minh. Ta tiến hành giống với trường hợp các không gian metric. Ở đây ta viết ra chứng minh cho phần thứ hai. Giả sử rằng mỗi f_i liên tục. Cho $x \in X$, ta chứng minh f liên tục tại x. Điểm mấu chốt là bất đẳng thức sau:

$$d(f(x),f(y)) \leq d(f(x),f_i(x)) + d(f_i(x),f_i(y)) + d(f_i(y),f(y)).$$

Cho $\epsilon > 0$, cố định một $i \in I$ sao cho $d(f_i, f) < \epsilon$. Với i đó, có một lân cận U của x sao cho nếu $y \in U$ thì $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$. Bất đẳng thức trên suy ra rằng với mỗi $y \in U$ ta có $d(f(x), f(y)) < 3\epsilon$. □

Định nghĩa. Cho X và Y là hai không gian tôpô. Gọi $C(X,Y)$ là tập tất cả các hàm liên tục từ X tới Y. Tôpô sinh bởi tất cả các tập có dạng

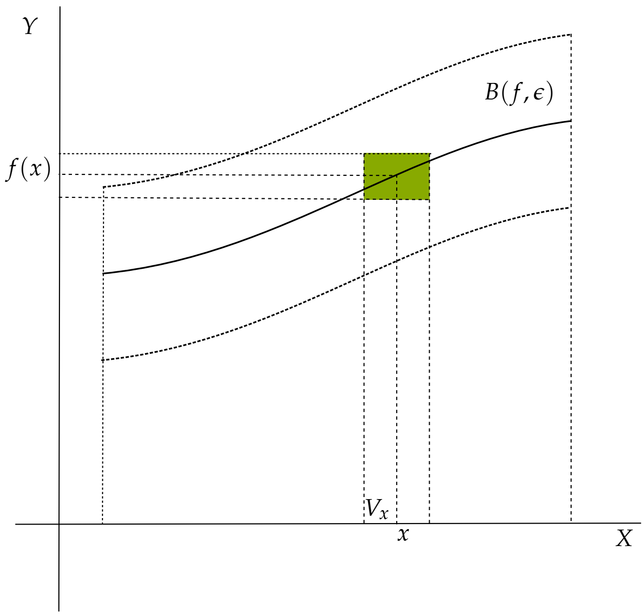
$$S(A,U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(A) \subset U\},$$

với $A \subset X$ compắc và $U \subset Y$ mở, được gọi là ***tôpô compắc-mở*** trên $C(X,Y)$.

Mệnh đề. *Nếu X là compắc và Y là một không gian metric thì trên $C(X,Y)$ tôpô compắc-mở sẽ giống với tôpô của sự hội tụ đều.*

Điều này nói lên rằng tôpô compắc-mở là một sự tổng quát hóa của tôpô hội tụ đều lên các không gian tôpô.

Chứng minh. Cho $f \in C(X,Y)$ và $\epsilon > 0$, ta chứng minh quả cầu $B(f,\epsilon) \subset C(X,Y)$ dưới metric-đều chứa một lân cận mở của f trong tôpô compắc-mở. Với mỗi $x \in X$ có một tập mở U_x chứa x sao cho $f(U_x) \subset B(f(x), \epsilon/3)$. Do X compắc, tồn tại hữu hạn các x_i, $1 \le i \le n$, sao cho $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supset X$ và $f(V_{x_i}) \subset B(f(x_i), \epsilon/3)$. Khi đó $f \in \bigcap_{i=1}^n S(\overline{V}_{x_i}, B(f(x_i), \epsilon/2))$. Nếu $g \in S(\overline{V}_{x_i}, B(f(x_i), \epsilon/2))$ thì $d(g(x), f(x)) \le d(g(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \epsilon$. Vậy $\bigcap_{i=1}^n S(\overline{V}_{x_i}, B(f(x_i), \epsilon/2)) \subset B(f,\epsilon)$.



Hình 8.4: Chú ý rằng $f \in S(A,U)$ có nghĩa là graph$(f|_A) \subset A \times U$.

Ở chiều ngược lại, ta cần chứng minh rằng mỗi lân cận mở của f trong tôpô compắc-mở đều chứa một quả cầu $B(f,\epsilon)$ trong metric-đều, xem hình vẽ 8.4. Ta chỉ cần xét đến các lân cận mở của f có dạng $S(A,U)$ là đủ. Với mỗi $x \in A$ có một quả cầu $B(f(x), \epsilon_x) \subset U$. Do $f(A)$ compắc, có một số hữu hạn các $x_i \in A$ và $\epsilon_i > 0$, $1 \le i \le n$, sao cho $B(f(x_i), \epsilon_i) \subset U$ và $\bigcup_{i=1}^n B(f(x_i), \epsilon_i/2) \supset f(A)$. Đặt $\epsilon = \min\{\epsilon_i/2 \mid 1 \le i \le n\}$. Giả sử $g \in B(f,\epsilon)$. Với mỗi $x \in A$, có một i sap cho $f(x) \in B(f(x_i), \epsilon_i/2)$. Khi đó

$$d(g(x), f(x_i)) \le d(g(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \epsilon + \frac{\epsilon_i}{2} \le \epsilon_i,$$

nên $g(x) \in U$. Vậy $g \in S(A, U)$. □

Định lí mở rộng Tiestze

Dưới đây là một ứng dụng khác của bổ đề Urysohn.

Định lí (Tiestze extension theorem). *Gọi X là một không gian chuẩn tắc. Cho F đóng trong X và $f : F \to \mathbb{R}$ liên tục. Khi đó tồn tại một ánh xạ liên tục $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho $g|_F = f$.*

Do đó ***trong một không gian chuẩn tắc, một hàm thực liên tục trên một không gian con đóng có thể được mở rộng một cách liên tục lên toàn bộ không gian***.

Chứng minh. Đầu tiên ta xét trường hợp f bị chặn.

(a) Trường hợp tổng quát có thể được rút về trường hợp khi $\inf_F f = 0$ và $\sup_F f = 1$. Ta chỉ cần chú ý đến trường hợp này.

(b) Bởi bổ đề Urysohn lemma, có một hàm liên tục $g_1 : X \to [0, \frac{1}{3}]$ sao cho

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in f^{-1}([0, \frac{1}{3}]) \\ \frac{1}{3} & \text{if } x \in f^{-1}([\frac{2}{3}, 1]). \end{cases}$$

Đặt $f_1 = f - g_1$. Khi đó $\sup_X g_1 = \frac{1}{3}$, $\sup_F f_1 = \frac{2}{3}$, và $\inf_F f_1 = 0$.

(c) Bằng cách quy nạp, một khi ta đã có hàm $f_n : F \to \mathbb{R}$ với một $n \geq 1$ nào đó, ta sẽ thu được một hàm $g_{n+1} : X \to [0, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n]$ sao cho

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in f_n^{-1}([0, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n]) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{if } x \in f_n^{-1}([\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \left(\frac{2}{3}\right)^n]). \end{cases}$$

Đặt $f_{n+1} = f_n - g_{n+1}$. Khi đó $\sup_X g_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\sup_F f_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, và $\inf_F f_{n+1} = 0$.

(d) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ hội tụ đều tới một hàm liên tục g.

(e) Do $f_n = f - \sum_{i=1}^{n} g_i$, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{n} g_n|_F$ hội tụ đều tới f. Nên $g|_F = f$.

(f) Để ý với xây dựng này, ta có $\inf_X g = 0$ và $\sup_X g = 1$.

Bây giờ ta xét trường hợp f không bị chặn.

(a) Giả sử rằng f không bị chặn dưới và cũng không bị chặn trên. Gọi h là một phép đồng phôi từ $(-\infty, \infty)$ lên $(0, 1)$. Khi đó miền giá trị của $f_1 = h \circ f$ là một tập con của $(0, 1)$, vì vậy nó có thể được mở rộng - như trong trường hợp trước - thành một hàm liên tục g_1 sao cho $\inf_{x \in X} g_1(x) = \inf_{x \in F} f_1(x) = 0$ và $\sup_{x \in X} g_1(x) = \sup_{x \in F} f_1(x) = 1$.

Nếu miền giá trị của g_1 không chứa cả 0 lẫn 1 thì $g = h^{-1} \circ g_1$ sẽ là hàm thỏa yêu cầu.

Xét trường hợp miền giá trị của g_1 có chứa 0 hoặc 1. Ta đặt $C = g_1^{-1}(\{0, 1\})$. Chú ý rằng $C \cap F = \emptyset$. Bởi bổ đề Urysohn, có một hàm liên tục $k : X \to [0, 1]$ sao cho $k|_C = 0$ và $k|_F = 1$. Đặt $g_2 = kg_1 + (1 - k)\frac{1}{2}$. Khi đó $g_2|_F = g_1|_F$ và miền giá trị của g_2 là một tập con của $(0, 1)$ ($g_2(x)$ là một tổ hợp lồi nào đó của $g_1(x)$ và $\frac{1}{2}$). Ta có $g = h^{-1} \circ g_2$ là hàm thỏa yêu cầu.

(b) Nếu f bị chặn dưới, thì tương tự với trường hợp trước, ta có thể sử dụng một phép đồng phôi $h : [a, \infty) \to [0, 1)$, và đặt $C = g_1^{-1}(\{1\})$.

Trường hợp f bị chặn trên cũng tương tự.

□

Bài tập

8.5. Chứng minh nếu một không gian là chuẩn tắc thì nó hoàn toàn chính tắc. Nên: chuẩn tắc ⇒ hoàn toàn chính tắc ⇒ chính tắc. Bằng kí hiệu: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.

8.6. Chứng minh phiên bản sau của bổ đề Urysohn, được phát biểu trong [Rud86]. Giả sử X là một không gian Hausdorff compắc địa phương, V mở trong X, $K \subset V$, và K compắc. Khi đó tồn tại một hàm liên tục $f : X \to [0, 1]$ sao cho $f(x) = 1$ với $x \in K$, và $\text{supp}(f) \subset V$.

8.7 (tôpô hội tụ theo từng điểm). Bây giờ ta xem mỗi hàm từ X tới Y như một phần tử của tập hợp $Y^X = \prod_{x \in X} Y$. Khi đó với mỗi $x \in X$, giá trị $f(x)$ là tọa độ thứ x của phần tử f.

(a) Cho $(f_i)_{i \in I}$ là một lưới các hàm từ X tới Y, tức một lưới các điểm trong Y^X. Chứng minh rằng $(f_i)_{i \in I}$ hội tụ theo từng điểm về một hàm $f : X \to Y$ khi và chỉ khi lưới các điểm $(f_i)_{i \in I}$ hội tụ về điểm f trong tôpô tích của Y^X.

(b) Định nghĩa ***tôpô hội tụ theo từng điểm*** (point-wise convergence topology) trên tập hợp Y^X các hàm từ X tới Y là tôpô sinh bởi các tập có dạng

$$S(x, U) = \{f \in Y^X \mid f(x) \in U\}$$

với $x \in X$ và $U \subset Y$ là tập mở. Chứng minh rằng tôpô hội tụ theo từng điểm chính là tôpô tích trên Y^X.

8.8. Cho X và Y là hai không gian tôpô. Gọi $C(X, Y)$ là tập tất cả các ánh xạ liên tục từ X tới Y. Chứng minh rằng nếu một lưới $(f_i)_{i \in I}$ hội tụ về f trong tôpô compắc-mở của $C(X, Y)$ thì nó hội tụ từng điểm về f.

8.9 (sự liên tục của các hàm hai biến). * Gọi Y, Z là các không gian tôpô và X là một không gian Hausdorff compắc địa phương. Nhắc lại rằng chưa chắc một ánh xạ trên một không gian tích sẽ liên tục khi nó liên tục theo từng biến. Chứng minh rằng một ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X \times Z &\to Y \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

là liên tục khi và chỉ khi ánh xạ

$$\begin{aligned} f_t : X &\to Y \\ x &\mapsto f_t(x) = f(x, t) \end{aligned}$$

liên tục với mỗi $t \in Z$, và ánh xạ

$$\begin{aligned} Z &\to C(X, Y) \\ t &\mapsto f_t \end{aligned}$$

liên tục với tôpô compắc-mở trên $C(X, Y)$.

8.10. Chứng minh rằng định lí mở rộng Tiestze kéo theo bổ đề Urysohn.

8.11. Định lí mở rộng Tiestze sẽ không đúng nếu thiếu điều kiện F là một tập đóng.

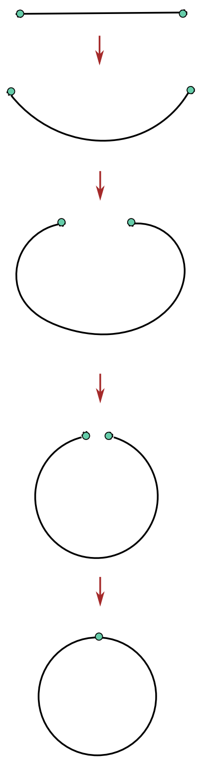
8.12. Chứng minh rằng định lí mở rộng Tiestze vẫn còn đúng đối với các ánh xạ có tập đích là không gian $\prod_{i\in I}\mathbb{R}$ với $\mathbb{R}$ có tôpô Euclid.

8.13. Cho X là một không gian chuẩn tắc và F là một tập con đóng của X. Khi đó mọi ánh xạ liên tục $f : F \to S^n$ đều có thể được mở rộng lên một tập mở chứa F.

9 Không gian thương

Ta tìm hiểu việc dán các không gian để tạo ra những không gian mới.

Ví dụ. Dán hai điểm mút của một đoạn thẳng lại với nhau ta được một đường tròn, xem hình vẽ 9.1.



Hình 9.1: Dán hai điểm mút của một đoạn thẳng lại với nhau thì được một đường tròn.

Về mặt toán học, dán các phần tử có nghĩa là đồng nhất chúng làm một. Nếu hai phần tử được đồng nhất làm một, có một quan hệ giữa chúng, và quan hệ đó nên phản xạ, đối xứng, và bắc cầu, nghĩa là, một quan hệ tương đương. Với một tập hợp X và một quan hệ tương đương $\sim$ trên X, việc dựng tập thương $X/\sim$ phản ánh chính xác ý niệm của chúng ta về động tác dán. Ánh xạ dán chính là ánh xạ thương mang mỗi phần tử thành lớp tương đương của nó, $p : X \to X/\sim, x \mapsto [x]$.

Ta muốn phép dán là một phép toán liên tục. Nghĩa là, với X là một không gian tôpô, ta muốn trang bị cho tập thương $X/\sim$ một tôpô sao cho ánh xạ dán là liên tục. Ta lấy tôpô mịn nhất thỏa điều đó, trong đó một tập con U của $X/\sim$ là mở khi và chỉ khi ảnh ngược $p^{-1}(U)$ là mở trong X (xem lại 3.9). Tập hợp $X/\sim$ cùng với tôpô này được gọi là ***không gian thương*** (quotient space) của X bởi quan hệ tương đương $\sim$.

Ví dụ. Một trường hợp đặc biệt, khi A là một không gian con của X, khi đó ta có một quan hệ tương đương này trên X: $x \sim x$ nếu $x \in X$, và $x \sim y$ nếu $x, y \in A$. Không gian thương $X/\sim$ thường được viết thành X/A, và ta có thể hình dung nó như một không gian có được từ X bằng cách co cả tập con A lại thành một điểm.

9.2 Mệnh đề. *Cho Y là một không gian tôpô. Một ánh xạ $f : X/\sim \to Y$ là liên tục khi và chỉ khi*

$f \circ p$ liên tục.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f\circ p"'] & X/\sim \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Chứng minh. Ánh xạ $f \circ p$ liên tục khi và chỉ khi với mỗi tập con mở U của Y, tập $(f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U))$ là mở trong X. Vế sau tương đương với việc $f^{-1}(U)$ mở với mọi U, tức là, f liên tục. □

Kết quả sau cung cấp cho chúng ta một công cụ để đồng nhất các không gian thương:

Định lí. *Cho X compắc và $\sim$ là một quan hệ tương đương trên X. Giả sử Y là Hausdorff, và $f : X \to Y$ là một toàn ánh liên tục. Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$ khi và chỉ khi $x_1 \sim x_2$. Khi đó f cảm sinh một đồng phôi từ $X/\sim$ lên Y.*

Chứng minh. Định nghĩa $h : X/\sim \to Y$ bởi $h([x]) = f(x)$. Ta có h là toàn ánh và đơn ánh, do đó là một song ánh.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Để ý rằng $f = h \circ p$ (trong trường hợp như vậy người ta thường nói biểu đồ trên là ***giao hoán*** (commutative), và ánh xạ f có thể được phân tích). Bởi 9.2 h là liên tục. Và do 6.11, h là một đồng phôi. □

Ví dụ. Dán hai điểm mút của một đoạn thẳng lại với nhau ta được một đường tròn, xem hình vẽ 9.1. Chính xác hơn, xét khoảng $[0,1]$ trên đường thẳng thực Euclid. Lấy quan hệ tương đương cực tiểu $\sim$ mà $0 \sim 1$, tức ta chỉ cần bổ sung thêm $\forall x \in (0,1), x \sim x$ để hoàn thành định nghĩa cho $\sim$ (xem 9.43 để tham khảo thêm về quan hệ tương đương cực tiểu). Không gian thương này thường được kí hiệu bởi $[0,1]/0 \sim 1$. Ta có $[0,1]/0 \sim 1$ đồng phôi với S^1 thông qua ánh xạ h trong biểu đồ sau:

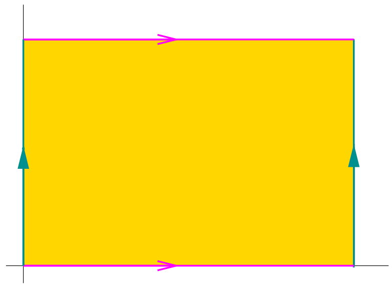
$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & {[0,1]/0\sim 1} \arrow[d, "h"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

Ở đây f là ánh xạ $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Ánh xạ f là liên tục, toàn ánh, và nó chỉ không đơn ánh tại $t = 0$ và $t = 1$. Do trong tập thương 0 với 1 được đồng nhất, nên trên tập thương đó ánh xạ cảm sinh h là một song ánh. Định lí trên cho phép ta kiểm tra rằng h thực sự là một đồng phôi.

Ví dụ. Dán một cặp cạnh đối diện nhau của một hình vuông thì được một mặt trụ. Cho $X = [0,1] \times [0,1]/\sim$ với $(0,t) \sim (1,t)$ với mọi $0 \le t \le 1$, khi đó X đồng phôi với mặt trụ $[0,1] \times S^1$. Phép đồng phôi đó được cảm sinh bởi ánh xạ $(s,t) \mapsto (s, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

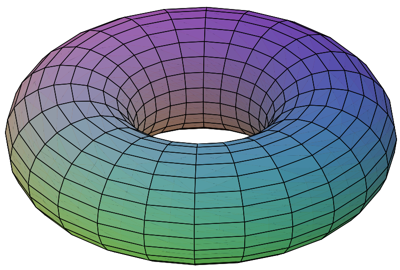
Hình 9.3: Không gian này đồng phôi với mặt trụ.

Ví dụ. Dán các cạnh đối diện nhau của một hình vuông thì được một mặt xuyến. ***Mặt xuyến*** (torus)[10] là không gian $[0,1] \times [0,1]/\sim$ với $(s,0) \sim (s,1)$ và $(0,t) \sim (1,t)$ với mọi $0 \leq s,t \leq 1$.



Hình 9.4: The torus.

Ta có thể dựng được một không gian con của $\mathbb{R}^3$ đồng phôi với T^2 như một mặt tròn xoay, bằng cách xoay một đường tròn quanh một đường thẳng không giao nó. Giả sử đường



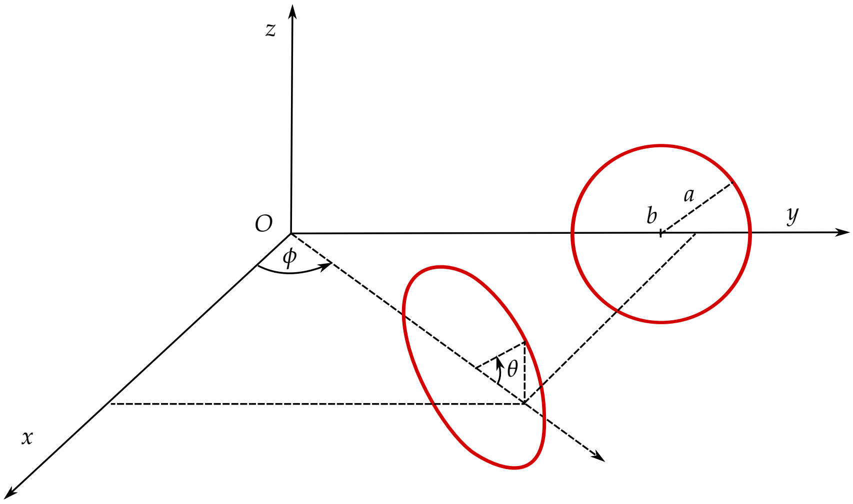
Hình 9.5: The torus embedded in $\mathbb{R}^3$.

tròn ở trên mặt phẳng Oyz, có tâm nằm trên trục y và trục quay là trục z. Gọi a là bán kính của đường tròn, b là khoảng cách từ tâm đường tròn tới O, $(a < b)$. Gọi S là mặt tròn xoay được dựng, khi đó phép nhúng h có thể được cho bởi

$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & T^2 \arrow[d, "h"] \\
& S
\end{tikzcd}$$

với $f(\phi,\theta) = ((b + a\cos\theta)\cos\phi, (b + a\cos\theta)\sin\phi, a\sin\theta)$.

[10]Dạng số nhiều của từ *torus* là *tori*.

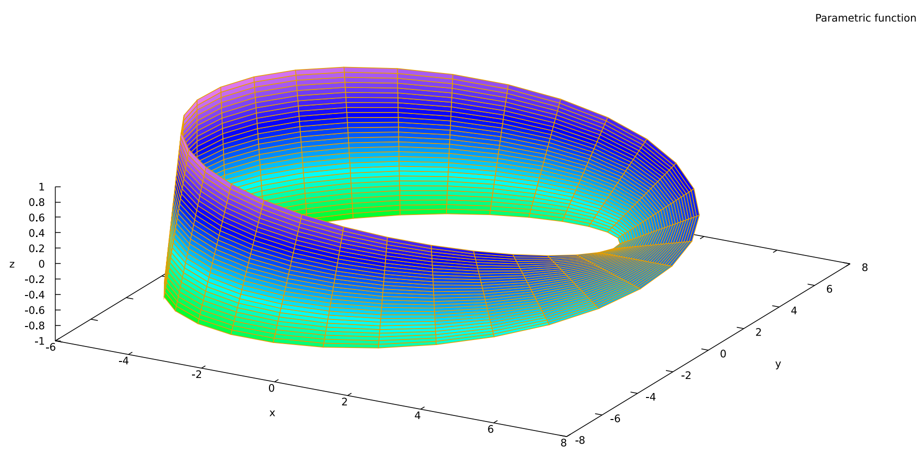


Hình 9.6: Phương trình cho mặt xuyến được nhúng này: $(x, y, z) = ((b + a\cos\theta)\cos\phi, (b + a\cos\theta)\sin\phi, a\sin\theta)$, hoặc $\left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2$.

Vậy mặt xuyến có thể nhúng được trong $\mathbb{R}^3$.

9.7 Ví dụ. Dán một cặp cạnh đối diện nhau, được định hướng ngược nhau, của một hình vuông thì được một ***dải Mobius*** (Mobius band[11]). Chính xác hơn, dải Mobius là $X = [0,1] \times [0,1]/\sim$ với $(0,t) \sim (1, 1-t)$ với mọi $0 \leq t \leq 1$.

Hình 9.8: Dải Mobius.



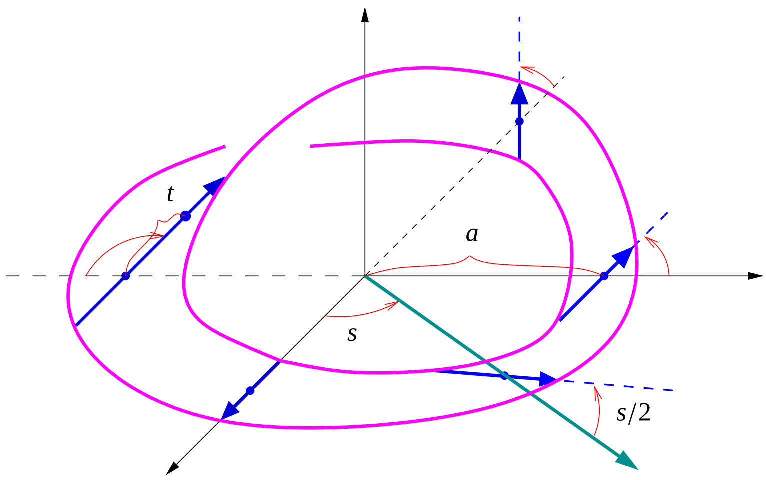
Hình 9.9: Dải Mobius được nhúng trong $\mathbb{R}^3$.

[11]Möbius hay Moebius là các cách đánh vần khác nhau cho tên riêng này.

Dải Mobius cũng có thể nhúng được trong $\mathbb{R}^3$. Nó đồng phôi với một không gian con của $\mathbb{R}^3$ thu được bằng cách xoay một đoạn thẳng quanh trục z đồng thời đảo lộn ngược nó. Phép nhúng có thể được chọn là cảm sinh của ánh xạ (xem hình vẽ 9.10)

$$(s,t) \mapsto ((a + t\cos(s/2))\cos s, (a + t\cos(s/2))\sin s, t\sin(s/2)),$$

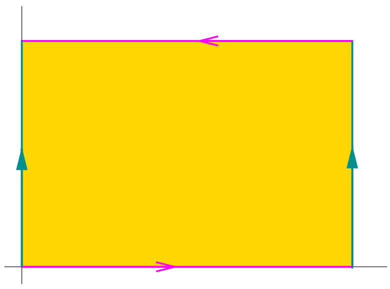
với $0 \le s \le 2\pi$ và $-1 \le t \le 1$.



Hình 9.10: Một phép nhúng nhúng dải Mobius vào $\mathbb{R}^3$.

Dải Mobius là một ví dụ nổi tiếng về một mặt ***không định hướng được*** (un-orientable). Nó cũng là mặt ***một phía*** (one-sided). Tham khảo chứng minh ở **??**.

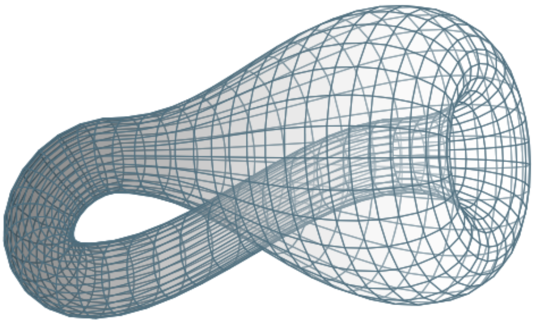
Ví dụ. Đồng nhất một cặp cạnh đối diện nhau của một hình vuông, và đồng nhất cặp cạnh - được định hướng ngược nhau - còn lại thì được một không gian tôpô gọi là ***chai Klein***. Chính xác hơn, nó là $[0,1] \times [0,1]/\sim$ với $(0,t) \sim (1,t)$ và $(s,0) \sim (1-s,1)$.



Hình 9.11: Chai Klein.

Người ta biết rằng chai Klein không thể nhúng được vào $\mathbb{R}^3$. Hình minh họa 9 không thể hiện một chai Klein được nhúng trong $\mathbb{R}^3$, mà thay vào đó chỉ là một chai Klein được nhúng chìm trong $\mathbb{R}^3$. Một ***phép nhúng chìm*** (immersion) là một phép nhúng địa phương. Nói ngắn gọn, ánh xạ $f : X \to Y$ là một phép nhúng chìm nếu mỗi điểm trong X có một lân cận U sao cho $f|_U : U \to f(U)$ là một đồng phôi. Một cách trực quan, một phép nhúng chìm cho phép xảy ra sự tự cắt (self-intersection).

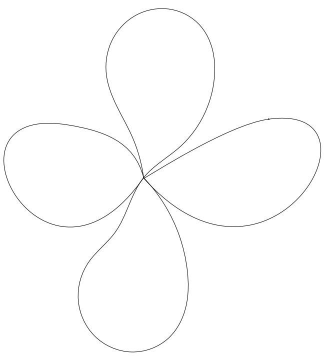
Ví dụ. Đồng nhất các mặt đối diện nhau của khối lập phương $[0,1]^3$ bởi $(x,y,0) \sim (x,y,1)$, $(x,0,z) \sim (x,1,z)$, $(0,y,z) \sim (1,y,z)$ ta nhận một không gian được gọi là ***hình xuyến ba-chiều***.



Hình 9.12: Chai Klein được nhúng chìm trong $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Đồng nhất các điểm đối diện nhau trên biên của một đĩa (chúng được gọi là ***các điểm xuyên tâm đối*** (antipodal points)) ta nhận một không gian tôpô được gọi là ***projective plane*** (mặt phẳng xạ ảnh) $\mathbb{R}P^2$. Mặt phẳng xạ ảnh thực không thể nhúng được vào $\mathbb{R}^3$, nhưng có thể nhúng được vào $\mathbb{R}^4$. Tổng quát hơn, đồng nhất các điểm biên đối diện nhau của D^n thì nhận được ***không gian xạ ảnh*** (projective space) $\mathbb{R}P^n$.

9.13 Ví dụ. Cho $(X_i)_{i\in I}$ là một họ các không gian cùng một họ các điểm $x_i \in X_i$. Hội rời của họ này (xem 7.14) được lấy thương với tất cả các điểm x_i được đồng nhất, tức là, $\bigsqcup_{i\in I} X_i/(x_i)_{i\in I}$, kí hiệu bởi $\vee_{i\in I}(X_i, x_i)$, được gọi là ***tổng chèn*** (wedge sum) của $(X_i)_{i\in I}$ ứng với họ các điểm $(x_i)_{i\in I}$.



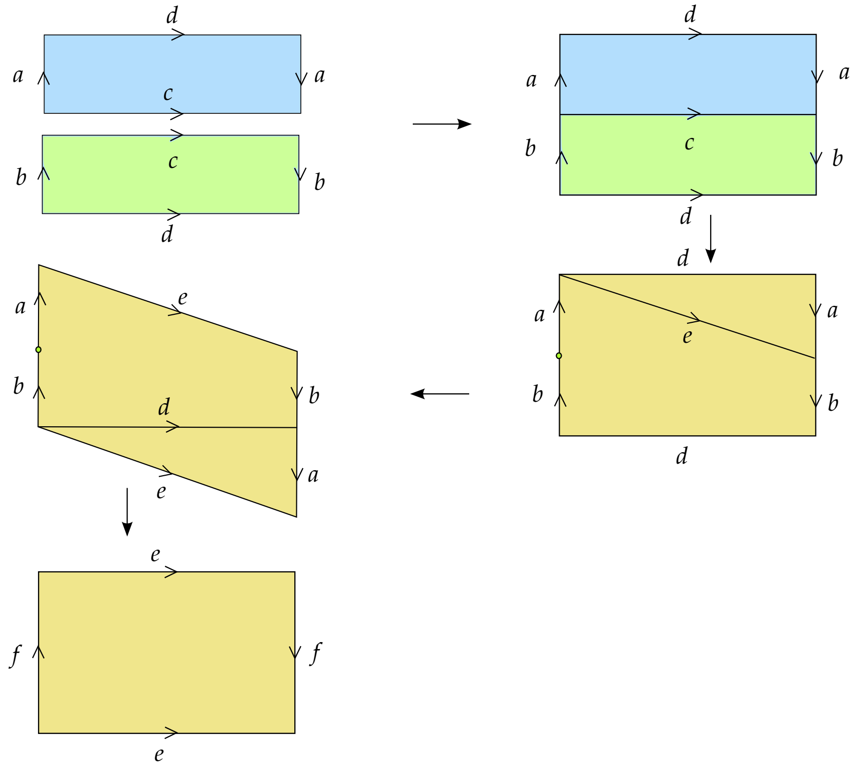
Hình 9.14: $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Ví dụ một tổng chèn của các đường tròn $S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1$ (tổng này không phụ thuộc vào cách chọn các điểm được đồng nhất) được gọi là một ***chùm các đường tròn*** (bouquet of circles). Xem 9.23.

Tôpô Cắt-và-dán

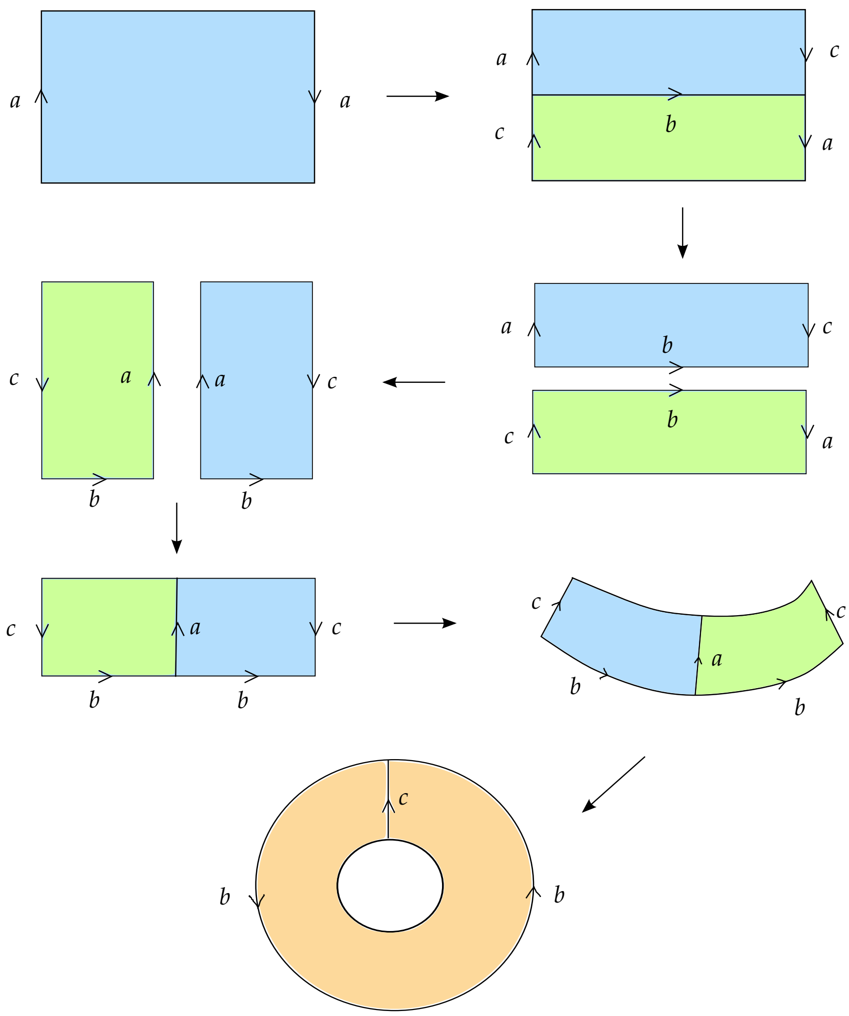
Ví dụ. Ta thấy rằng biên của một dải Mobius là một đường tròn. Dán hai dải Mobius dọc theo biên của chúng ta được chai Klein [12]. Xem hình vẽ 9.15. Quá trình này, nơi các phần của các không gian được cắt và dán, được gọi một cách thích đáng là "cắt và dán".

[12]Có một bài thơ vui (limerick - thơ hài hước 5 câu):
A mathematician named Klein
Thought the Mobius band was divine
Said he, "If you glue
The edges of two,
You'll get a weird bottle like mine."



Hình 9.15: Dán hai dải Mobius dọc theo biên của chúng thì được chai Klein.

Ví dụ. Dán một đĩa vào dải Mobius ta được mặt phẳng xạ ảnh. Nói cách khác, bỏ đi một đĩa từ mặt phẳng xạ ảnh thì được dải Mobius. Xem hình vẽ 9.16



Hình 9.16: Dán một đĩa vào dải Mobius thì được mặt phẳng xạ ảnh.

Bài tập

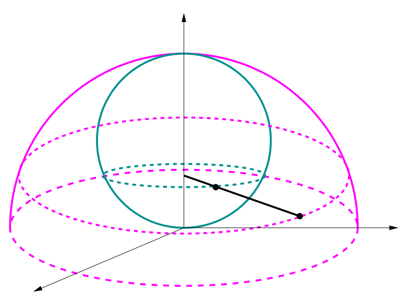
9.17. Mô tả không gian $[0,1]/0 \sim \frac{1}{2} \sim 1$.

9.18. Mô tả không gian là thương của mặt cầu S^2 với xích đạo S^1 của nó.

9.19. ✓ Chứng minh rằng mặt xuyến T^2 đồng phôi với $S^1 \times S^1$.

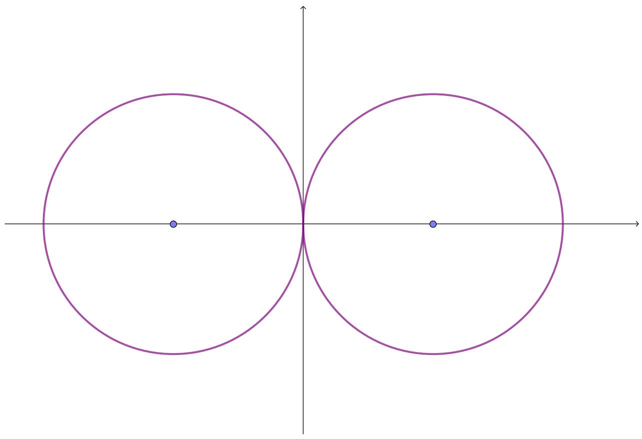
9.20. Chứng minh rằng mặt xuyến là đồng nhất.

9.21. Chứng minh rằng dán đường tròn biên của một đĩa lại với nhau thì được một mặt cầu, nghĩa là $D^2/\partial D^2$ đồng phôi với S^2.



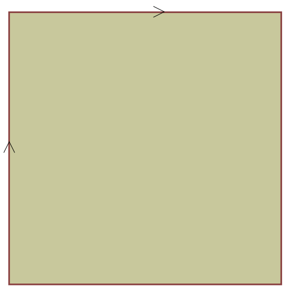
Hình 9.22: Một ánh xạ từ D^2 lên S^2 trở thành đơn ánh trên $D^2/\partial D^2$.

9.23. Chứng minh rằng $S^1 \vee S^1$ không phụ thuộc vào cách chọn hai điểm được đồng nhất với nhau, và nó đồng phôi với hình có dạng số 8, chính xác hơn, là tập con $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ của mặt phẳng Euclid.

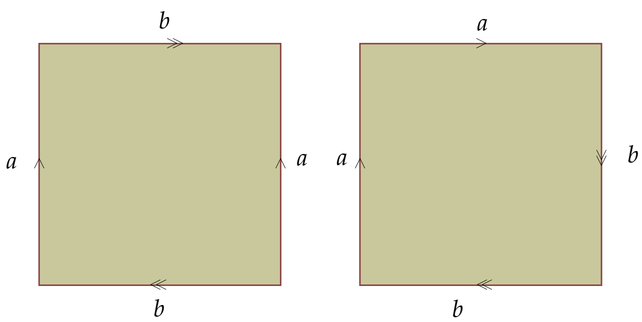


Hình 9.24: $S^1 \vee S^1$ đồng phôi với hình có dạng số 8.

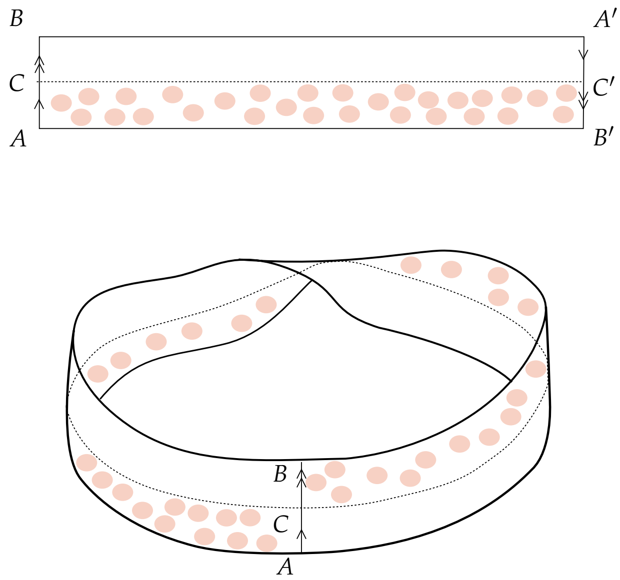
9.25. ✓ Chứng minh không gian dưới đây đồng phôi với dải Mobius.



9.26. ✓ Chứng minh rằng hai không gian sau là đồng phôi (một trong hai chính là chai Klein).

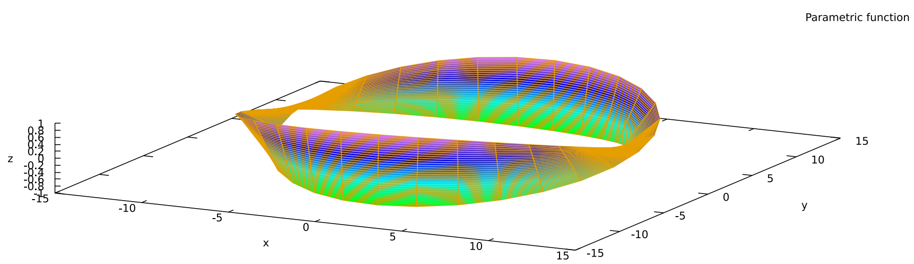


9.27. ✓ Bạn sẽ nhận được gì sau khi cắt một dải Mobius dọc theo đường tròn chính giữa của nó? Hãy thử làm một thí nghiệm xem sao! Về mặt toán học, cắt một tập con S từ một không gian X có nghĩa là bỏ đi S của X, và kết quả thu được là không gian con $X \setminus S$. Ở hình vẽ 9.27 đường tròn CC' bị bỏ đi.



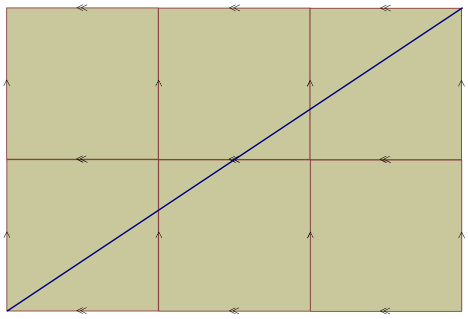
Hình 9.28: Cắt một dải Mobius dọc theo đường tròn chính giữa.

9.29. Để có một dải Mobius cầm nắm được trên tay ta có thể lấy một băng giấy hình chữ nhật dài dài một chút, xoắn một đầu (với một góc 180 độ), rồi dán với đầu còn lại. Sẽ ra sao nếu ta xoắn hai lần? Và nhiều lần? Hãy thử làm một thí nghiệm vật lí và một thí nghiệm bằng máy tính. Xem minh họa 9.30.

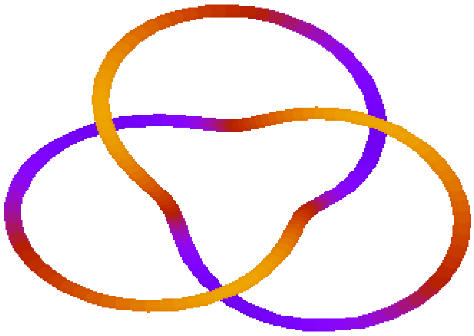


Hình 9.30: Một hình chữ nhật được xoắn hai lần rồi dán lại.

9.31. ✓ Theo dõi sự mô tả mặt xuyến như là không gian thương của một hình chữ nhật, đoạn thẳng với độ dốc $2/3$ trong hình chữ nhật, sau khi lấy thương, sẽ trở thành một đường cong đóng trên mặt xuyến. Nó đi vòng quanh mặt xuyến đó 2 lần theo một chiều và 3 lần theo chiều còn lại, xem hình vẽ 9.32. Từ đó không khó để tìm được một tham số hóa của một phép nhúng nhúng không gian này vào $\mathbb{R}^3$, chẳng hạn $((2+\cos(t/2))\cos(t/3), (2+\cos(t/2))\sin(t/3), \sin(t/2))$, $0 \le t \le 12\pi$, xem hình vẽ 9.31, và so sánh với 9.6. Từ các minh họa này ta có thể thấy tại sao không gian này thường được gọi là ***nút ba lá*** (trefoil knot).



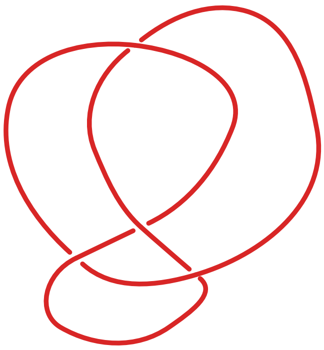
Hình 9.32: Nút ba lá trên mặt xuyến.



Hình 9.33: Nút ba lá trên $\mathbb{R}^3$.

Chứng minh rằng nút ba lá đồng phôi với đường tròn S^1.

9.34. Nói chung, ảnh của một đường cong đơn đóng trong một không gian Hausdorff X được gọi là một ***nút*** (knot) trong X. Do đó một nút là không gian con $\gamma([0,1])$ với $\gamma : [0,1] \to X$ là một ánh xạ liên tục thỏa $\gamma(0) = \gamma(1)$ và $\gamma|_{[0,1)}$ là đơn ánh. Chứng minh rằng mọi nút đều đồng phôi với đường tròn.



Hình 9.35: Một nút là ảnh của một đường cong đơn đóng.

9.36. Chứng minh rằng không gian xạ ảnh $\mathbb{R}P^1$ đồng phôi với S^1.

9.37. Compắc hóa một-điểm của dải Mobius mở (dải Mobius mà không có đường tròn biên) là không gian xạ ảnh $\mathbb{R}P^2$.

9.38. * Chứng minh rằng đồng nhất các điểm biên xuyên tâm đối của D^n thì tương đương với đồng nhất các điểm xuyên tâm đối của S^n. Nói cách khác, không gian xạ ảnh $\mathbb{R}P^n$ đồng phôi với $S^n/x \sim -x$.

9.39. Chứng minh rằng nếu X có một trong số các tính chất sau: liên thông, liên thông đường, Hausdorff, compắc, thì không gian thương $X/\sim$ cũng vậy.

9.40. Chứng minh rằng để không gian thương $X/\sim$ là một không gian Hausdorff, thì một điều kiện cần là mỗi lớp tương đương $[x]$ phải là một tập con đóng của X. Nó có là một điều kiện đủ không?

9.41. Trên không gian Euclid $\mathbb{R}$ ta định nghĩa $x \sim y$ nếu $x - y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $\mathbb{R}/\sim$ đồng phôi với S^1. Không gian $\mathbb{R}/\sim$ thường được mô tả là "$\mathbb{R}$ được lấy thương bởi tác động của nhóm $\mathbb{Z}$".

9.42. Trên không gian Euclid $\mathbb{R}^2$, ta định nghĩa $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ nếu $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $\mathbb{R}^2/\sim$ đồng phôi với mặt xuyến.

9.43. Cho một tập hợp X và một tập hợp $Y \subset X \times X$, chứng minh rằng tồn tại một quan hệ tương đương trên X sao cho nó chứa Y và chứa trong mọi quan hệ tương đương chứa Y, được gọi là ***quan hệ tương đương cực tiểu*** chứa Y.

Ví dụ, ta viết $[0,1]/0 \sim 1$ thì nó có nghĩa là thương của tập $[0,1]$ bởi quan hệ tương đương cực tiểu trên $[0,1]$ sao cho $0 \sim 1$. Ở trường hợp này ta thấy quan hệ tương đương đó rõ ràng là $\{(0,1), (1,0), (x,x) \mid x \in [0,1]\}$.

9.44. * Một câu hỏi có thể được đặt ra: Trong các không gian thương, nếu các phép đồng nhất được thực hiện theo từng bước chứ không phải đồng thời, thì kết quả thu được có khác đi không? Chính xác hơn, gọi R_1 và R_2 là hai quan hệ tương đương trên không gian X, và gọi R là quan hệ tương đương cực tiểu chứa $R_1 \cup R_2$. Trên không gian X/R_1 ta định nghĩa một quan hệ tương đương $\tilde{R}_2$ cảm sinh bởi R_2, cho bởi: $[x]_{R_1} \sim_{\tilde{R}_2} [y]_{R_1}$ nếu $(x \sim_{R_1 \cup R_2} y)$. Chứng minh ánh xạ

$$\begin{aligned} X/(R_1 \cup R_2) &\to (X/R_1)/\tilde{R}_2 \\ [x]_{R_1 \cup R_2} &\mapsto [[x]_{R_1}]_{\tilde{R}_2} \end{aligned}$$

là một phép đồng phôi. Do đó các kết quả thu được là như nhau.

Một số đề tài khác

Dưới đây là một số chủ đề để nghiên cứu thêm và một chỉ dẫn về tài liệu tham khảo.

Cách chứng minh định lí Tikhonov dựa vào lưới

Phép chứng minh ta sẽ nêu sơ lược dưới đây dựa trên một số phát triển xa hơn của lí thuyết về lưới và một đặc trưng của sự compắc dựa vào lưới.

Định nghĩa (lưới con). Cho I và I' là các tập được định hướng, và $h : I' \to I$ là một ánh xạ sao cho

$$\forall k \in I, \exists k' \in I', (i' \geq k' \Rightarrow h(i') \geq k).$$

Nếu $n : I \to X$ là một lưới thì $n \circ h$ được gọi là một ***lưới con*** (subnet) của n.

Khái niệm lưới con là một sự mở rộng của khái niệm dãy con. Nếu ta lấy các $n_i \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n_i < n_{i+1}$ thì (x_{n_i}) là một dãy con của (x_n). Ở trường hợp này ánh xạ $h : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ cho bởi $h(i) = n_i$ là một hàm tăng ngặt. Vậy một dãy con của một dãy là một lưới con của dãy đó. Mặt khác, một lưới con của một dãy không nhất thiết phải là một dãy con, bởi với một lưới con thì ánh xạ h chỉ được yêu cầu phải thỏa mãn $\lim_{i\to\infty} h(i) = \infty$.

Một lưới $(x_i)_{i\in I}$ được gọi là ***cuối cùng*** (eventually) trong $A \subset X$ nếu tồn tại $j \in I$ sao cho $i \geq j \Rightarrow x_i \in A$.

Lưới phổ dụng: Một lưới n trong X là ***phổ dụng*** (universal) nếu với mọi tập con A của X thì hoặc n là cuối cùng trong A hoặc n là cuối cùng trong $X \setminus A$.

Mệnh đề. *Nếu $f : X \to Y$ liên tục và n là một lưới phổ dụng trong X thì $f(n)$ là một lưới phổ dụng.*

Mệnh đề. *Các phát biểu dưới đây là tương đương:*

(a) X là compắc.

(b) Mọi lưới phổ dụng trong X đều hội tụ.

(c) Mỗi lưới trong X có một lưới con hội tụ.

Các chứng minh của hai mệnh đề trên có thể được tìm thấy ở [Bre93].

Bây giờ ta hoàn thành chứng minh của định lí Tikhonov.

Chứng minh của định lí Tikhonov. Cho $X = \prod_{i\in I} X_i$ với các X_i đều compắc. Giả sử $(x_j)_{j\in J}$ là một lưới phổ dụng trong X. Bởi 7.3 lưới (x_j) hội tụ khi và chỉ khi các hình chiếu $(p_i(x_j))$ là hội tụ với mọi i. Mà điều này là đúng do mỗi $(p_i(x_j))$ là một lưới phổ dụng trong tập compắc X_i. □

Sự khả metric

Dưới đây là một kết quả tiêu biểu:

9.45 Định lí (Định lí khả metric Urysohn). *Một không gian chính tắc có một cơ sở đếm được thì khả metric.*

Chứng minh của định lí này cần đến bổ đề Urysohn. Tham khảo thêm ở [Mun00, p. 243].

Tôpô yếu và tôpô yếu-sao

Trên một không gian vectơ tôpô, tôpô yếu (weak topology) là tôpô sinh bởi các phiếm hàm tuyến tính liên tục. Tôpô này đóng một vai trò quan trọng trong Giải tích hàm cùng các ứng dụng của nó. Tham khảo H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011, chương 3; và [Con90, ch. 5].

Đường cong lấp đầy không gian

Một kết quả có thể gây tò mò và ngạc nhiên:

Định lí. *Tồn tại một đường cong liên tục lấp đầy được một hình chữ nhật trên mặt phẳng. Chính xác hơn, tồn tại một toàn ánh liên tục từ khoảng* $[0,1]$ *lên hình vuông* $[0,1]^2$ *dưới tôpô Euclid.*

Chú ý rằng ánh xạ này không thể là đơn ánh, nói cách khác đường cong này không thể là đơn.

Một đường cong như vậy được gọi là ***đường cong Peano***. Nó có thể được xây dựng như là giới hạn của một quá trình lặp của các đường cong tuyến tính từng khúc. [Mun00, tr. 271].

Hướng dẫn đọc thêm

Quyển sách viết bởi Kelley [Kel55] vẫn là một tài liệu kinh điển và là một nguồn tham khảo chuẩn dù nó được xuất bản từ năm 1955. Nó có một lối trình bày khá trừu tượng, và không có hình vẽ nào!

Quyển sách của Munkres [Mun00] là một giáo trình chuẩn hiện nay, có lối thể hiện ít nhiều hiện đại hơn so với tài liệu của Kelley, với nhiều ví dụ, hình vẽ và các bài tập.

Quyển sách của Hocking và Young [HY61] có nhiều kết quả sâu và khó. Tài liệu này cùng hai tài liệu trên của Kelley và Munkres trình bày nhiều chủ đề chưa được thảo luận trong bài giảng của chúng ta.

Một giáo trình gần đây hơn viết bởi Roseman [Ros99] khảo sát chủ yếu trong $\mathbb{R}^n$ và khá cụ thể. Tài liệu mới hơn [AF08] giới thiệu nhiều áp dụng thú vị gần đây của tôpô.

Gợi ý cho một số bài tập

1.8 There exists an infinite countable subset of A.

1.14 $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n, n+1] = [1, \infty)$.

1.15 Use the idea of the Cantor diagonal argument in the proof of 1.3. In this case the issue of different presentations of same real numbers does not appear.

1.16 Use the injective map $g \circ f$.

1.19 For $A \subset \mathbb{Z}^+$, if $n \in A$ let $a_n = 1$, otherwise let $a_n = 0$. Consider the map $A \mapsto a = a_1 a_2 \cdots a_n \ldots$. Use 1.17 and 1.16.

1.20 Proof by contradiction.

2.19 Show that each ball in one metric contains a ball in the other metric with the same center.

3.16 Use 3.15 to construct a homeomorphism bringing $\{0\} \times [0,1]$ to $\{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]$, and $[0,1] \times \{0\}$ to $\{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$.

3.27 Let $f : \partial D^n \to \partial D^n$ be a homemomorphism. Consider $F : D^n \to D^n$, $F(x) = \|x\| f(\frac{x}{\|x\|})$ (radial extension).

3.28 Compare the subinterval $[1, 2\pi)$ and its image via φ.

4.17 Use the characterization of connected subspaces of the Euclidean line.

4.24 Let A be countable and $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. There is a line passing through x that does not intersect A (by an argument involving countability of sets).

4.30 Use 3.15 to modify each letter part by part. See 3.16. Use connectedness to distinguish spaces.

5.3 Let C be a countable subset of $[0, \Omega)$. The set $\bigcup_{c \in C}[0, c)$ is countable while the set $[0, \Omega)$ is uncountable. This implies C is bounded from above.

5.13 Consider the set of all irrational numbers.

6.8 This is a special case of 6.2.

6.10 Use Lebesgue's number.

6.13 See the proof of 6.1.

6.15 Use 6.13.

6.16 Use 6.15.

6.18 Let X be a compact không gian metric, and let I be an open cover of X. For each $x \in X$ there is an open set $U_x \in I$ containing x. There is a number $\epsilon_x > 0$ such that the ball $B(x, 2\epsilon_x)$ is contained in U_x. The collection $\{B(x, \epsilon_x) \mid x \in X\}$ is an open cover of X, therefore there is a finite subcover $\{B(x_i, \epsilon_i) \mid 1 \le i \le n\}$. Let $\epsilon = \min\{\epsilon_i \mid 1 \le i \le n\}$. Let $x \in X$ and consider $B(x, \epsilon)$. There is an i_0, $1 \le i_0 \le n$, such that $x \in B(x_{i_0}, \epsilon_{i_0})$. Then $B(x, \epsilon) \subset B(x_{i_0}, 2\epsilon_{i_0}) \subset U_{i_0}$.

6.19 A bouquet of circles.

6.22 Use 6.21.

6.29 Use 6.13

6.30 Use 6.29.

6.32 ($\Leftarrow$) Use 6.16 and 5.10.

6.33 Use 6.16 to show that if $Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ is not connected then there are two disjoint sets U and V which are open in X such that $Y \subset U \cup V$, $U \cap Y \neq \emptyset$, and $V \cap Y \neq \emptyset$. Show that if O is an open set of X containing Y then O contains X_n for some n, by using the nested sequence of closed sets $(X_n \setminus U)_n$ and 6.8. In the the case of path-connectedness, look at the Topologist's sine curve.

7.6 Look at their bases.

7.13 Only need to show that the projection of an element of the basis is open.

7.15 Use 7.2 to prove that the inclusion map is continuous.

7.16 Use 7.15.

7.17 Let (x_i) and (y_i) be in $\prod_{i \in I} X_i$. Let γ_i be a continuous path from x_i to y_i. Let $\gamma = (\gamma_i)$.

7.18 (b) Use 7.15. (c) Fix a point $x \in \prod_{i \in I} X_i$. Use (b) to show that the set A_x of points that differs from x at at most finitely many coordinates is connected. Furthermore A_x is dense in $\prod_{i \in I} X_i$.

7.19 Use 7.15. It is enough to prove for the case an open cover of $X \times Y$ by open sets of the form a product of an open set in X with an open set in Y. For each "slice" $\{x\} \times Y$ there is finite subcover $\{U_{x,i} \times V_{x,i} \mid 1 \leq i \leq n_x\}$. Take $U_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{x,i}$. The collection $\{U_x \mid x \in X\}$ covers X so there is a subcover $\{U_{x_j} \mid 1 \leq j \leq n\}$. The collection $\{U_{x_j,i} \times V_{x_j,i} \mid 1 \leq i \leq n_{x_j}, 1 \leq j \leq n\}$ is a finite subcover of $X \times Y$.

7.21 Use 6.16.

7.28 ($\Leftarrow$) Use 6.16 and the Urysohn lemma 8.1.

8.6 Use 6.30 and 6.14 and the proof of Urysohn lemma.

8.13 Use 8.12.

8.7 See 7.1 and 7.3.

8.9 Use 6.29. Use a technique similar to the one in 7.19.

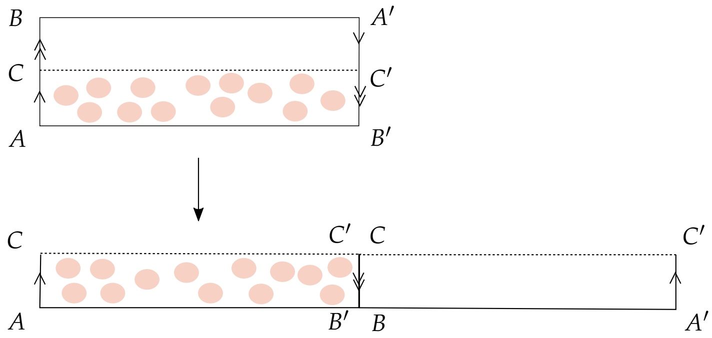
9.25 Cut the square by a suitable diagonal, then glue back the resulting two triangles at a different pair of edges.

9.26 Cut one of the two squares by a suitable diagonal, then glue a different pair of edges of the resulting two triangles.

9.27 To give a rigorous argument we can simply describe the figure below. The map from $X = ([0,1] \times [0,1]) \setminus \left([0,1] \times \{\frac{1}{2}\}\right)$ to $Y = [0,2] \times [0, \frac{1}{2})$ given by

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y), & y < \frac{1}{2}, \\ (x+1, 1-y), & y > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

is bijective and is continuous. The induced map to $Y/(0,y) \sim (2,y)$ is surjective and is continuous. Then its induced map on $X/(0,y) \sim (1,1-y)$ is bijective and is continuous, hence is a homeomorphism between $X/(0,y) \sim (1,1-y)$ and $Y/(0,y) \sim (2,y)$.



9.38 The idea is easy to be visualized in the cases $n = 1$ and $n = 2$. Let $S^+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_1 \geq 0\}$, the upper hemisphere. Let $S^0 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_1 = 0\}$, the equator. Let $f : S^n \to S^+$ be given by $f(x) = x$ if $x \in S^+$ and $f(x) = -x$ otherwise. Then the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "p\circ f"] & S^+ \arrow[d, "p"] \\
S^n/x \sim -x \arrow[r, "\tilde{f}"] & S^+/x \sim -x,\ x \in S^0
\end{tikzcd}$$

Then it is not difficult to show that $S^+/x \sim -x,\ x \in S^0$ is homeomorphic to $\mathbb{R}P^n = D^n/x \sim -x,\ x \in \partial D^n$.

9.44 Examine the following diagram, and use 9.2 to check that the maps are continuous.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & X/R_1 \arrow[r] \arrow[dl] & (X/R_1)/\tilde{R}_2 \arrow[dll, bend left] \\
X/(R_1 \cup R_2) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Tài liệu tham khảo

[AF08] Colin Adams and David Fransoza, *Introduction to topology: Pure and applied*, Prentice Hall, 2008.

[Ams83] M. A. Amstrong, *Basic topology*, Springer, 1983.

[BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov, *A course in metric geometry*, American Mathematical Society, 2001.

[Bre93] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer, 1993.

[Cai94] George L. Cain, *Introduction to general topology*, Addison-Wesley, 1994.

[Con90] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[Cro78] Fred H. Croom, *Basic concepts of algbraic topology*, Springer-Verlag, 1978.

[dC76] Manfredo do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[DFN85] Boris A. Dubrovin, Anatoly T. Fomenko, and Sergey P. Novikov, *Modern Geometry–Methods and Applications, Part II*, Springer-Verlag, 1985.

[DFN90] Boris A. Dubrovin, Anatoly T. Fomenko, and Sergey P. Novikov, *Modern Geometry–Methods and Applications, Part III*, Springer-Verlag, 1990.

[Duc05] Dương Minh Đức, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2005.

[Dug66] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[EH10] Herbert Edelsbrunner and John L Harer, *Computational topology: an introduction*, AMS, 2010.

[End77] Herbert B. Enderton, *Elements of set theory*, Academic Press, 1977.

[Eng89] Ryszard Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, 1989.

[Gal10] Joseph A. Gallian, *Contemporary abstract algebra*, Brooks/Cole, 2010.

[GP74] Victor Guillemin and Alan Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.

[Hat01] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001, available at `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`.

[Hir76] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, 1976.

[HS74] Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, 1974.

[Hun74] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

[HY61] John G. Hocking and Gail S. Young, *Topology*, Dover, 1961.

[J84] Klaus Jänich, *Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1984.

[Kel55] John L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, 1955.

[KF75] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover Publications Inc., 1975.

[KMM04] Tomasz Kaczynski, Konstantin Mischaikow, and Marian Mrozek, *Computational homology*, Springer, 2004.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997.

[Lee11] John M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, 2nd ed., Springer, 2011.

[Lee13] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2nd ed., Springer, 2013.

[Mas91] William S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer, 1991.

[Mil97] John Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

[Moi77] Edwin E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, 1977.

[MT01] Bojan Mohar and Carsten Thomassen, *Graphs on surfaces*, JHU Press, 2001.

[Mun84] James Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[Mun91] James Munkres, *Analysis on manifolds*, Addison-Wesley, 1991.

[Mun00] James Munkres, *Topology a first course*, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

[Ros99] Dennis Roseman, *Elementary topology*, Prentice-Hall, 1999.

[Rud86] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, 1986.

[Sas11] Anant R. Sastri, *Elements of Differential Topology*, CRC Press, 2011.

[SJ70] Lynn A. Steen and J. Arthur Seebach Jr., *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, 1970.

[Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, 1965.

[Spi99] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 2, Publish or Perish, 1999.

[Tu13] Loring W. Tu, *Introduction to manifolds*, Springer, 2nd ed., 2013.

[Vas01] V. A. Vassiliev, *Introduction to Topology*, American Mathematical Society, 2001.

[Vic94] James W. Vick, *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[VINK08] O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, and V. M. Kharlamov, *Elementary topology problem textbook*, preprint, 2008.

[Vugt3] Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng Giải tích 3*, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, `http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/gt3.pdf`.

Chỉ mục

2^S, 6
ánh xạ
  đóng, 22
  mở, 22
  rời rạc, 30
ánh xạ liên tục, 19
Định lí khả metric Urysohn, 73
đồ thị, 51
đồng nhất, 24
định lí Borsuk–Ulam, 27
định lí mở rộng Tiestze, 58
đường đi, 27
đường cong Peano, 74
đường cong lấp đầy không gian, 74
đường cong sine, 28
đường thẳng Sorgenfrey, 18
điểm
  dính, 14
  tụ, 14
  trong, 14

bất biến
  tôpô, 26
bổ đề Urysohn, 54
bổ đề Zorn, 10
bao đóng, 15
biên, 15
biểu đồ
  giao hoán, 62

cơ sở, 15
cơ sở lọc, 38
Cantor diagonal argument, 8
chùm đường tròn, 66
chai Klein, 65
chuẩn, 14
compắc
  địa phương, 43, 45
compắc hóa, 42
  Alexandroff, 42
  một điểm, 42
compắc hóa Stone-Cech, 50

dải Mobius, 64

giá, 56

hội rời, 51
hội tụ, 35
họ
  được đánh chỉ số, 5
họ tất cả tập con, 6

khối lập phương Hilbert, 48
không gian
  đếm được thứ nhất, 36
  đồng phôi, 21
  chính tắc, 33
  chuẩn tắc, 33
  Hausdorff, 33
  hoàn toàn chính tắc, 50
  không gian con, 20
  Niemytzki, 38
  thương, 61
không gian con
  trù mật, 37
không gian tôpô
  liên thông, 25
  thành phần liên thông, 25
không gian vectơ tôpô, 52
không gian xạ ảnh, 66
khả metric, 33
khoảng cách Hausdorff, 38

lân cận, 13
lọc, 38
lưới, 35
  phổ dụng, 73

mặt cầu, 21

mặt phẳng xạ ảnh, 66
mặt xuyến, 63
$\mathcal{P}(S)$, 6
metric
    tương đương, 17

nút, 71
    ba lá, 71
    hình-số-8, 71
nhóm tôpô, 53

phép đồng phôi, 21
phép đẳng cự, 24
phép chiếu nổi, 22
phép nhúng, 21
phép nhúng chìm, 65
phân hoạch đơn vị, 55, 56
phần trong, 15

quan hệ, 5
    tương đương, 5
    tương đương cực tiểu, 72

số Lebesgue, 41

tích Decartes, 10
tính bị chặn hoàn toàn, 42
tính giao hữu hạn, 41
tính sắp tốt, 7
tôpô
    compắc-mở, 57
    Euclid, 14
    hiển nhiên, 13
    không gian con, 20
    mịn hơn, 15
    phần bù hữu hạn, 16
    rời rạc, 13
    sinh bởi các tập con, 16
    tích, 47
    tương đối, 20
    thứ tự, 16
    thô hơn, 15
    Zariski, 53
tôpô hội tụ theo từng điểm, 56, 59
tập Cantor, 11
tập hợp
    đếm được, 7
    đóng, 14
    được định hướng, 35
    được sắp, 6
    được sắp tốt, 12
    mở, 13
    tương đương, 6
tổng chèn, 66
thứ tự
    chặn dưới, 6
    phần tử cực tiểu, 6
    phần tử nhỏ nhất, 6
    từ điển, 6
    toàn phần, 6
Tiên đề chọn, 10
tiên đề tách, 33
tiền cơ sở, 15
tiền-compắc, 42