Bổ sung cho môn học Nền tảng của Phép tính Vi tích phân

Huỳnh Quang Vũ

Bản ngày 10/11/2024

Địa chỉ: Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên ĐHQG-HCM. Email: hqvu@hcmus.edu.vn

Tóm tắt nội dung

Đây là bản ghi chép một số nội dung bổ sung cho môn học Nền tảng của Phép tính Vi tích phân. Đây là một môn học tự chọn trong chương trình cao học chuyên ngành Giáo dục Toán học, mà đa số người học là giáo viên trung học. Môn này từ năm 2020 tới nay được mở hai năm một lần.

Tài liệu này gồm những nội dung nhằm cùng với các phần tương ứng của *Giáo trình Vi tích phân 1* của Bộ môn Giải tích [BMGT1] đủ cho một trình bày suy diễn từ tập hợp số thực nội dung Vi tích phân trong chương trình trung học phổ thông 2018 [SGKT18].

Một số nội dung này ít khi được trình bày trong các tài liệu Vi tích phân và ít khi được thảo luận trong các môn học ở đại học, nhiều người học chưa có dịp nghiên cứu.

Tài liệu này được viết nhằm làm tài liệu học tập và tra cứu cho học viên cao học Giáo dục toán học, và một phần có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên đại học ngành toán cũng như những ai quan tâm.

Năm 2023 tôi tìm thấy tài liệu [Wu20] có mục tiêu và nội dung gần với tài liệu này.

Tài liệu này có trên trang web
https://sites.google.com/view/hqvu/teaching

Mục lục

1 Tập hợp số thực

1.1 Tóm tắt về xây dựng tập hợp số thực

Hiện nay hệ tiên đề cho toán học được sử dụng phổ biến là hệ tiên đề ZFC (Zermelo–Fraenkel–Choice axiom) của lý thuyết tập hợp. Sự tồn tại của tập hợp số tự nhiên là một phần của hệ tiên đề này [HJ99].

Tính chất dưới đây rút ra từ các tiên đề về số tự nhiên, dẫn tới nguyên lý quy nạp toán học:

Mệnh đề 1.1 (tính được sắp tốt của tập hợp số tự nhiên). *Mọi tập con không rỗng của tập hợp số tự nhiên đều có phần tử nhỏ nhất.*

Từ tập hợp số tự nhiên ta lần lượt xây dựng tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, rồi tập hợp số thực. Việc xây dựng khá công phu và dài [HJ99, MSM63]. Ở đây ta chỉ tóm tắt kết quả.

Một trường đại số (một tập hợp có phép cộng và phép nhân thỏa một số tính chất như giao hoán, kết hợp, phân phối, giống như tập hợp số hữu tỉ) được gọi là **được sắp thứ tự Archimedes** nếu với $a > 0$ và $b > 0$ có số tự nhiên n sao cho

$$na > b. \tag{1.2}$$

Một trường đại số được gọi là **đầy đủ** nếu mọi dãy Cauchy đều hội tụ.

Một trường đại số được sắp thứ tự Archimedes đầy đủ có thể thu được bằng cách đầy đủ hóa trường số hữu tỉ. Hai trường đại số được sắp thứ tự Archimedes đầy đủ bất kì là đẳng cấu, do đó sai khác đẳng cấu thì trường như thế là duy nhất. Những điều này được trình bày trong [Fic77] và [Rud76] (dùng nhát cắt Dedekind trên tập hợp số hữu tỉ), [HS65, tr. 46] và [MSM63] (dùng dãy Cauchy và đầy đủ hóa metric tập hợp số hữu tỉ).

Định nghĩa. *Tập hợp số thực là một trường đại số được sắp thứ tự Archimedes đầy đủ.*

Tính chất sau rút ra được từ và thực ra tương đương với tính đầy đủ của tập hợp số thực:

Mệnh đề (tính tồn tại chặn trên nhỏ nhất trong tập hợp số thực). *Mọi tập con không rỗng bị chặn trên của tập hợp các số thực đều có chặn trên nhỏ nhất.*

Chặn trên nhỏ nhất (còn được gọi là cận trên đúng) được kí hiệu là sup (supremum), chặn dưới lớn nhất (còn được gọi là cận dưới đúng) được kí hiệu là inf (infimum).

Việc tập hợp số thực là đầy đủ hóa của tập hợp số hữu tỉ cho:

Mệnh đề. *Tập hợp số hữu tỉ dày đặc (trù mật) trong tập hợp số thực.*

Như vậy giữa hai số thực khác nhau bất kì có một số hữu tỉ.

Ghi chú. Một số tài liệu Giải tích như [Lan97] trình bày theo thứ tự trước tiên thừa nhận sự tồn tại tập hợp số thực như là một trường đại số sắp thứ tự có tính chất chặn trên nhỏ nhất, sau đó định nghĩa tập hợp số tự nhiên là một tập con nhỏ nhất của tập hợp số thực chứa 0 thỏa nếu n là số tự nhiên thì $n + 1$ cũng là số tự nhiên. Cách tiếp cận này nhanh chóng cho những tính chất của số thực cần dùng trong Giải tích, nhưng có nhược điểm không theo thứ tự hình thành các khái niệm số này trong lịch sử, thiếu tính hiển nhiên, và khác với hệ tiên đề ZFC.

1.2 Vài tính chất của số thực

Trong tính được sắp thứ tự Archimedes (1.2), lần lượt lấy $a = 1$ và $b = 1$ ta được ngay:

Mệnh đề 1.3 (tính chất Archimedes). *Với mọi số thực cho trước, có số nguyên lớn hơn số thực đó.*

Với mọi số thực dương ϵ cho trước, có số nguyên dương n sao cho $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Ví dụ. Từ tính chất Archimedes ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Mệnh đề 1.4 (tồn tại phần nguyên). *Với mỗi số thực x, tồn tại duy nhất số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng x, gọi là phần nguyên của x, kí hiệu là $\lfloor x \rfloor$.*

Chứng minh. Nếu x là số nguyên thì $\lfloor x \rfloor = x$.

Giả sử $x \notin \mathbb{Z}$.

Xét $x > 0$. Đặt $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$. Theo tính chất Archimedes, Mệnh đề 1.3, tập A khác rỗng. Theo tính chất được sắp tốt của tập hợp các số tự nhiên, Mệnh đề 1.1, tồn tại số nguyên $\alpha = \min A$. Đặt $\lfloor x \rfloor = \alpha - 1$. Nếu $\lfloor x \rfloor > x$ thì $\alpha - 1 > x$, nên $\alpha - 1 \in A$, trái giả thiết $\alpha = \min A$, nên phải có $\lfloor x \rfloor \leq x$. Nếu có $\beta \in \mathbb{Z}$ sao cho $\lfloor x \rfloor < \beta < x$ thì $x \leq \alpha = \lfloor x \rfloor + 1 < \beta + 1 < x + 1$, do đó $0 < \beta - \alpha + 1 < 1$, mâu thuẫn. Vậy $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn x. Một hệ quả mà ta dùng trong phần tiếp theo là $\lfloor x \rfloor + 1 > x$.

Nếu $x \leq 0$ ta đặt $\lfloor x \rfloor = -\lfloor -x \rfloor - 1$. Ta có $\lfloor -x \rfloor + 1 > -x$, nên $-\lfloor -x \rfloor - 1 < -x$. Nếu có $\beta \in \mathbb{Z}$ sao cho $\lfloor x \rfloor < \beta < x$ thì $\lfloor x \rfloor = -\lfloor -x \rfloor - 1 < \beta < x$, do đó $-x < -\beta < \lfloor -x \rfloor + 1 < -x + 1$, dẫn tới $0 < -\beta + x < 1$, mâu thuẫn. Vậy $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn x. □

1.3 Số thập phân

Nhiều tài liệu toán phổ thông lấy "số thập phân" làm định nghĩa cho số thực, tuy nhiên không chứng minh được các tính chất của số thực ở các mục trước, do đó không phải là cách tiếp cận chặt chẽ. Mục này nhằm làm rõ là có thể rút ra được dạng thập phân từ các tính chất của số thực ở các mục trước.

"Số thập phân" chỉ là dãy chữ số biểu diễn số thực, chứ không phải là định nghĩa của số thực.

Định nghĩa. *Ta nói dãy chữ số $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, $a_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_n \leq 9$ biểu diễn số thực*

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots .$$

Ta viết $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, gọi là một **biểu diễn thập phân** *hay* **dạng thập phân** *của x.*

Khái niệm dạng thập phân dùng khái niệm chuỗi số của Vi tích phân. Các kiến thức cơ bản về chuỗi số, xem [BMGT1, Chương 6], giúp dễ dàng kiểm là chuỗi số của một dạng thập phân luôn hội tụ, tức là mỗi dạng thập phân biểu diễn một số thực duy nhất.

Ta tập trung vào số thực trong khoảng $(0, 1)$, vì với số thực lớn hơn 1 ta chỉ cần thêm dạng thập phân của một số tự nhiên, mà ta có thể thu được bằng thuật toán chia cho 10 như ở hệ (1.5) bên dưới chỉ khác là chỉ cần hữu hạn bước chia, còn với số thực âm ta chỉ thêm kí hiệu dấu $-$.

Trong chuỗi số có một bài toán cơ bản là mỗi dạng thập phân tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ, xem [BMGT1, Chương 6].

Mệnh đề (dạng thập phân của số hữu tỉ). *Mỗi số hữu tỉ đều có một biểu diễn thập phân. Hơn nữa dạng thập phân đó là hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.*

Chứng minh. Ta viết dạng thập phân theo thuật toán quen thuộc chia hai số nguyên. Để dễ theo dõi hơn người đọc có thể làm cho một trường hợp cụ thể, như $\frac{41}{333}$.

Cho số hữu tỉ $x = \frac{p}{q} \in (0,1)$, với $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $0 < p < q$. Ta làm thuật toán chia p cho q. Ở mỗi bước, tồn tại duy nhất $a_n \in \mathbb{Z}$, $0 \le a_n \le 9$, và $r_n \in \mathbb{Z}$, $0 \le r_n < q$, sao cho

$$\begin{aligned} r_1 &= p \\ 10r_1 &= a_1 q + r_2 \\ 10r_2 &= a_2 q + r_3 \\ &\vdots \\ 10r_{n-1} &= a_{n-1} q + r_n \\ 10r_n &= a_n q + r_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.5}$$

Cụ thể, $a_n = \left\lfloor \frac{10r_n}{q} \right\rfloor$.

Ở hệ (1.5), nhân phương trình chứa a_n với 10^{-n}, ta được

$$\begin{aligned} r_1 &= 10^{-1}a_1 q + 10^{-1} r_2 \\ 10^{-1} r_2 &= 10^{-2} a_2 q + 10^{-2} r_3 \\ 10^{-2} r_3 &= 10^{-3} a_3 q + 10^{-3} r_4 \\ &\vdots \\ 10^{-(n-2)} r_{n-1} &= 10^{-(n-1)} a_{n-1} q + 10^{-(n-1)} r_n \\ 10^{-(n-1)} r_n &= 10^{-n} a_n q + 10^{-n} r_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

cộng lại, ta được

$$r_1 = p = \left(10^{-1}a_1 + 10^{-2}a_2 + 10^{-3}a_3 + \cdots + 10^{-n}a_n\right) q + 10^{-n} r_{n+1}.$$

Vì $0 \le 10^{-n} r_{n+1} < 10^{-n} q$ nên $\lim_{n\to\infty} 10^{-n} r_{n+1} = 0$. Vậy

$$p = \left(10^{-1}a_1 + 10^{-2}a_2 + 10^{-3}a_3 + \cdots + 10^{-n}a_n + \cdots\right) q$$

tức là $\frac{p}{q} = 0{,}a_1a_2a_3\dots a_n\dots$.

Vì $\forall n, 0 \le r_n < q$, nên chỉ có hữu hạn giá trị cho r_n, nên tồn tại n để r_n lặp lại một giá trị trước đó, và khi đó thuật toán (1.5) lặp lại, và dạng thập phân phải tuần hoàn. Trường hợp riêng lặp lại với $r_n = 0$ cho dạng thập phân hữu hạn. □

Mệnh đề (dạng thập phân của số thực). *Mỗi số thực đều có một dạng thập phân. Số hữu tỉ là số thực có dạng thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.*

Chứng minh. Chứng minh này đơn giản là một thuật toán viết ra dạng thập phân của một số thực. Ta làm tương tự hệ (1.5) với $q = 1$. Để dễ theo dõi hơn người đọc có thể làm cho một trường hợp cụ thể, như 0,123456789.

Cho số thực $x \in (0, 1)$. Ở mỗi bước, tồn tại duy nhất $a_n \in \mathbb{Z}$, $0 \le a_n \le 9$, và $0 \le r_n < 1$, sao cho

$$\begin{aligned} r_1 &= x \\ 10r_1 &= a_1 + r_2 \\ 10r_2 &= a_2 + r_3 \\ &\vdots \\ 10r_{n-1} &= a_{n-1} + r_n \\ 10r_n &= a_n + r_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.6}$$

Cụ thể, $a_n = \lfloor 10r_n \rfloor$.

Ở hệ (1.6), nhân phương trình chứa a_n với 10^{-n}, ta được

$$\begin{aligned} r_1 &= 10^{-1}a_1 + 10^{-1}r_2 \\ 10^{-1}r_2 &= 10^{-2}a_2 + 10^{-2}r_3 \\ 10^{-2}r_3 &= 10^{-3}a_3 + 10^{-3}r_4 \\ &\vdots \\ 10^{-(n-2)}r_{n-1} &= 10^{-(n-1)}a_{n-1} + 10^{-(n-1)}r_n \\ 10^{-(n-1)}r_n &= 10^{-n}a_n + 10^{-n}r_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

cộng lại, ta được

$$r_1 = \left(10^{-1}a_1 + 10^{-2}a_2 + 10^{-3}a_3 + \cdots + 10^{-n}a_n\right) + 10^{-n}r_{n+1}.$$

Vì $0 \le 10^{-n}r_{n+1} < 10^{-n}$ nên $\lim_{n\to\infty} 10^{-n}r_{n+1} = 0$. Vậy

$$r_1 = 10^{-1}a_1 + 10^{-2}a_2 + 10^{-3}a_3 + \cdots + 10^{-n}a_n + \cdots$$

tức là $x = 0{,}a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$. $\square$

Với quy ước để tránh tình trạng như

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999\dots$$

thì dạng thập phân của mỗi số thực là duy nhất.

2 Bốn định lý lớn dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực

2.1 Định lý giá trị trung gian

Định lý 2.1 (Định lý giá trị trung gian). *Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.*

Chứng minh. Chứng minh sau dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực.

(a) Xét trường hợp $f(a) < f(b)$. Cho $f(a) < c < f(b)$. Đặt $D = \{x \in [a,b] \mid f(x) > c\}$. Vì $b \in D$ nên $D \neq \emptyset$. Vì $D \subset [a,b]$ nên D bị chặn dưới. Tính đầy đủ của tập hợp số thực khẳng định tồn tại số thực $x_0 = \inf D$. Ta chứng tỏ $f(x_0) = c$.

Ta chứng tỏ có dãy (x_n) trong D hội tụ về $\sup D$. Vì x_0 là chặn dưới nhỏ nhất của D, nên với bất kì số nguyên dương n nào thì số thực $x_0 + \frac{1}{n}$ không là chặn dưới của D, do đó có phần tử x_n của D sao cho $x_n < x_0 + \frac{1}{n}$. Mặt khác $x_n \in D$ nên $x_n \geq x_0$. Tính chất kẹp của giới hạn cho ta $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Vì $f(x_n) > c$ nên tính liên tục của f tại x_0 dẫn tới $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \geq c$.

Giả sử $f(x_0) > c$. Tồn tại số $\epsilon > 0$ sao cho $f(x_0) - \epsilon > c$. Vì f liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nên có $a < x_1 < x_0$ sao cho $f(x_1) > f(x_0) - \epsilon > c$, dẫn tới $x_1 \in D$. Nhưng $x_1 < x_0$, mâu thuẫn với x_0 là một chặn dưới của D. Vậy $f(x_0) = c$.

(b) Xét trường hợp $f(a) > f(b)$. Ta làm tương tự. Cho $f(a) > c > f(b)$. Đặt $D = \{x \in [a,b] \mid f(x) < c\}$. Vì $b \in D$ nên $D \neq \emptyset$. Vì $D \subset [a,b]$ nên D bị chặn dưới. Đặt $x_0 = \inf D$, ta chứng tỏ $f(x_0) = c$.

Có dãy (x_n) trong D hội tụ về x_0. Vì $f(x_n) < c$ nên tính liên tục của f tại x_0 dẫn tới $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \leq c$.

Giả sử $f(x_0) < c$. Tồn tại số $\epsilon > 0$ sao cho $f(x_0) + \epsilon > c$. Vì f liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nên có $a < x_1 < x_0$ sao cho $f(x_1) < f(x_0) + \epsilon < c$. Như thế $x_1 \in D$ nhưng $x_1 < x_0$, mâu thuẫn với x_0 là một chặn dưới của D. Vậy $f(x_0) = c$. $\square$

2.2 Định lý về tính compắc của đoạn số thực

Định lý 2.2 (đoạn số thực là compắc). *Mỗi dãy trong một đoạn số thực có một dãy con hội tụ trong đoạn đó.*

Đây cũng được gọi là Định lý Bolzano–Weierstrass.

Chứng minh. Có vài cách chứng minh, ở đây trình bày một chứng minh gần với trực quan, lần lượt chia đôi đoạn thẳng để trích ra một dãy con hội tụ.

Cho dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong đoạn $[a,b]$. Đặt $[a_1,b_1]=[a,b]$ và lấy $x_{n_1}=x_1$. Chia đôi đoạn $[a,b]$ thì phải có ít nhất một trong hai đoạn con có tính chất là có vô hạn chỉ số l sao cho x_l thuộc về đoạn con đó, gọi đoạn con đó là $[a_2,b_2]$, và lấy $n_2>n_1$ sao cho $x_{n_2}\in[a_2,b_2]$. Cứ như vậy, quy nạp, ta được với mỗi $k\in\mathbb{Z}^+$ một đoạn con $[a_k,b_k]$ là một nửa của đoạn $[a_{k-1},b_{k-1}]$, có vô hạn chỉ số l sao cho $x_l\in[a_k,b_k]$, do đó có $n_k>n_{k-1}$ sao cho $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$. Vậy ta được một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ mà $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$.

Vì $[a_k,b_k]\subset[a_{k-1},b_{k-1}]$ nên dãy $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy tăng, bị chặn trên, nên có $c=\sup\{a_k\mid k\in\mathbb{Z}^+\}$. Tính chất của sup dẫn tới ngay c là giới hạn của dãy $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$.

Vì độ dài của đoạn $[a_k,b_k]$ bằng $\frac{1}{2^{k-1}}$ độ dài đoạn $[a,b]$, nên $0\le b_k-a_k\le\frac{1}{2^{k-1}}(b-a)$, do đó tính chất kẹp của giới hạn dẫn tới cả dãy $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ lẫn dãy $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ đều phải hội tụ về c. □

2.3 Định lý tồn tại cực trị toàn cục

Định lý 2.3 (Định lý tồn tại cực trị toàn cục). *Hàm liên tục trên một đoạn thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Nói cách khác, nếu $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục thì tồn tại* $\max f$ *và* $\min f$.

Chứng minh. Định lý giá trị trung gian đã khẳng định tập giá trị của f trên $[a,b]$ đã là một khoảng số thực I (có thể không bị chặn). Bây giờ cần khẳng định khoảng I này là một đoạn, gồm cả hai đầu mút (do đó bị chặn). Hai đầu mút của I là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của f.

Có dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong I hội tụ về đầu mút bên trái c của I. Có $x_n\in[a,b]$ sao cho $f(x_n)=y_n$. Theo tính compắc của đoạn $[a,b]$, Định lý 2.2, dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về một điểm $x_0\in[a,b]$. Do f liên tục nên $f(x_{n_k})=y_{n_k}$ phải hội tụ về $f(x_0)$, dẫn tới $f(x_0)=c$. Vậy đầu mút bên trái của khoảng I là một số thực c thuộc I.

Tương tự cho đầu mút bên phải của I. □

2.4 Định lý về tính liên tục đều

Định lý 2.4 (liên tục trên một đoạn thì liên tục đều). *Nếu f liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì f* **liên tục đều** *trên đó, nghĩa là*

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in[a,b],\forall y\in[a,b],|x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

Định lý này được sử dụng để chứng minh tính khả tích của hàm liên tục, Định lý 3.2.

Chứng minh. Giả sử phản chứng, f không liên tục đều trên $[a,b]$, dẫn tới tồn tại

$\epsilon > 0$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì có $x_n \in [a,b], y_n \in [a,b]$ thỏa $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ mà $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

Theo Định lý 2.2, đoạn $[a,b]$ compắc, nên dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có một dãy con $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ hội tụ về một phần tử $x \in [a,b]$. Dãy tương ứng $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ có một dãy con $(y_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ hội tụ về một phần tử $y \in [a,b]$. Điều này dẫn tới $x = y$, chẳng hạn bằng cách viết

$$|x-y| \leq |x - x_{n_{k_l}}| + |x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}| + |y_{n_{k_l}} - y| < |x - x_{n_{k_l}}| + \frac{1}{n_{k_l}} + |y_{n_{k_l}} - y|$$

rồi cho $l \to \infty$ thì vế phải tiến về 0, nên $|x-y| = 0$.

Ta viết

$$|f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}})| \leq |f(x_{n_{k_l}}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_{k_l}})|$$

rồi cho $l \to \infty$ thì do f liên tục nên vế phải tiến về 0, khiến vế trái cũng tiến về 0, mâu thuẫn với giả thiết $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. □

Với các định lý trên thì nội dung giới hạn, liên tục, đạo hàm được trình bày suy diễn trong [BMGT1], trừ những phần liên quan tới hàm mũ và hàm lượng giác.

Bài tập 2.5. Hãy cho biết chương trình toán trung học có sử dụng các định lý lớn trên hay không, nếu có thì cụ thể ở đâu.

Bài tập 2.6 (giới hạn theo dãy). Cho điểm $x_0 \in (a,b)$ và hàm số f xác định trên (a,b).

Sách giáo khoa trung học [SGKT18, Toán 11, tập 1, tr. 72] định nghĩa cơ bản như sau:

> $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, thì $f(x_n) \to L$.

Giáo trình đại học [BMGT1, tr. 36] định nghĩa cơ bản như sau:

> $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ nếu $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Ta kiểm hai định nghĩa này là tương đương.

1. Giả sử $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ theo định nghĩa đại học. Cho dãy (x_n) với $x_n \in a,b) \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

2. Giả sử $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ theo định nghĩa trung học, nhưng không có $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ theo định nghĩa đại học. Chứng tỏ tồn tại $\epsilon > 0$ và tồn tại $x_n \in a,b) \setminus \{x_0\}$ sao cho $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ nhưng $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Từ đó hãy suy ra một mâu thuẫn.

3. Có thể có những lý do nào cho cách trình bày này ở trung học và cách trình bày này có những ưu điểm hay nhược điểm gì?

Bài tập 2.7. Cho $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ đơn ánh, liên tục.

1. Chứng minh rằng f là hàm đơn điệu. (Gợi ý: dùng Định lý giá trị trung gian.)

2. Chứng minh rằng ảnh của f là một khoảng (c,d) (có thể là $(-\infty,\infty)$).

3. Chứng minh rằng ánh xạ ngược $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ là liên tục

4. Áp dụng, chứng tỏ hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 2.8. Cho f và g là hàm liên tục và $f(x) \neq 0$ với mọi x. Chứng tỏ nếu $f^2(x) = g^2(x)$ với mọi x thì $f(x) = g(x)$ với mọi x hoặc $f(x) = -g(x)$ với mọi x.

Bài tập 2.9. Hãy cho biết chương trình toán trung học có sử dụng Định lý giá trị trung bình (cho đạo hàm) hay không, nếu có thì cụ thể ở đâu?

Bài tập 2.10 (cực trị). Sách giáo khoa trung học [SGK17, Giải tích 12, tr. 13] [SGKT18, Toán 12 tập 1, tr. 10] định nghĩa x_0 là một **điểm cực đại** của hàm số f xác định trên tập D nếu tồn tại khoảng (a, b) sao cho $x_0 \in (a, b) \subset D$ và $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$, $f(x) < f(x_0)$. Tương tự cho điểm cực tiểu. [1]

Sách giáo khoa trung học [SGK17, Giải tích 12, Định lí 1, tr. 14] [SGKT18, Toán 12 tập 1, tr. 11] phát biểu một điều kiện đủ cho cực trị như sau.

Cho f liên tục trên khoảng (a, b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$ thì:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0, b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0, b)$ thì x_0 là một điểm cực đại.

Ta xem liệu điều kiện đủ cho cực trị này cũng là điều kiện cần hay không.

1. Hãy phát biểu rõ ràng mệnh đề giả định về điều kiện cần.
2. Hãy khảo sát cực trị của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

   [Gelbaum & Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Dover, 1992, tr. 36].
3. Từ đó hãy thảo luận tính đúng đắn của mệnh đề giả định trên.

Bài tập 2.11 (Định lý giá trị trung gian cho đạo hàm). Cho f là một hàm khả vi trên đoạn $[a, b]$.

1. Giả sử $f'(a) < 0$ và $f'(b) > 0$, chứng minh rằng khi x đủ gần a thì $f(a) > f(x)$ và khi x đủ gần b thì $f(b) > f(x)$.
2. Với giả thiết của câu trên, chứng minh rằng có $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f'(x_0) = 0$.
3. Chứng minh Định lý Darboux: Nếu hàm f khả vi trên đoạn $[a, b]$ thì f' nhận mọi giá trị giữa $f'(a)$ và $f'(b)$. (Gợi ý: Giả sử K là một số nằm giữa $f'(a)$ và $f'(b)$, xét $g(x) = f(x) - Kx$.)

3 Tích phân

3.1 Định nghĩa tích phân

Một phép chia, hay một phân hoạch của một đoạn $[a, b]$ là một tập con hữu hạn của đoạn $[a, b]$ mà chứa cả a và b. Ta có thể đặt tên các phần tử của một phép chia là

[1] Chú ý định nghĩa điểm cực trị ở đại học [BMGT1, mục 4.1] có khác, cho phép xảy ra dấu =.

$x_0, x_1, \dots, x_m$ với $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$. Mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ là một đoạn con của đoạn $[a, b]$ tương ứng với phép chia.

Kí hiệu $H(P)$ là tập hợp tất cả các đoạn con ứng với phép chia P. Nếu R là một đoạn số thực thì kí hiệu $|R|$ là chiều dài đoạn này.

Cho I là một đoạn số thực, và $f : I \to \mathbb{R}$. Với một phép chia P của I, ta thành lập **tổng Riemann,** là tổng trên tất cả hình hộp con R của phép chia P của giá trị của f tại một điểm đại diện (còn gọi là điểm lấy mẫu) bất kì x_R trong R nhân với chiều dài của R:

$$\sum_{R \in H(P)} f(x_R)|R|.$$

Dùng kí hiệu cụ thể hơn, lấy điểm đại diện x_i^* trong đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, thì tổng Riemann được viết là

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Định nghĩa 3.1. *Ta nói hàm số f là* **khả tích** *trên đoạn I nếu có một số thực, gọi là* **tích phân** *của f trên I, kí hiệu là $\int_I f$, thỏa với mọi $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho, nếu chiều dài các cạnh của các đoạn con của P đều nhỏ hơn δ, thì mọi tổng Riemann ứng với P có khoảng cách tới $\int_I f$ nhỏ hơn ϵ.*

Nói vắn tắt, *tích phân là số thực sao cho tổng Riemann gần tùy ý tới số thực này khi chia miền xác định đủ nhỏ*.

3.2 Sự khả tích của hàm liên tục

Trong ý của tích phân, việc xấp xỉ dựa trên giả thiết nếu biến thay đổi ít thì giá trị của hàm thay đổi ít, tức là sự liên tục của hàm. Như vậy sự khả tích phụ thuộc chặt chẽ vào sự liên tục.

Định lý 3.2 (liên tục thì khả tích). *Một hàm thực trên một đoạn nếu liên tục thì khả tích.*

Đây là điều kiện đủ cho sự khả tích dùng trong toán trung học. Phần còn lại của mục này dành để chứng minh định lý này.

Khi khảo sát tính khả tích, có công cụ hiệu quả là tổng dưới và tổng trên.

Giả sử hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục. Gọi

$$L(f, P) = \sum_{R \in H(P)} (\min_R f)\,|R|$$

là **tổng dưới** ứng với P. Gọi

$$U(f, P) = \sum_{R \in H(P)} (\max_R f)\,|R|$$

là **tổng trên** ứng với P.

Chú ý do f liên tục nên f có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên mỗi đoạn số thực, nên sup và inf tồn tại, và thực ra là max và min, do đó tổng dưới và tổng trên là hai tổng Riemann.

Rõ ràng một tổng Riemann bất kì nằm giữa tổng dưới và tổng trên ứng với cùng phép chia.

Với P và P' là hai phép chia của cùng một đoạn, nếu $P \subset P'$ thì ta nói P' là mịn hơn P.

Bổ đề (chia mịn hơn thì tổng dưới tăng và tổng trên giảm). *Nếu phép chia P' là mịn hơn phép chia P thì $L(f, P) \le L(f, P') \le U(f, P') \le U(f, P)$.*

Chứng minh. Mỗi đoạn con R' của P' nằm trong một đoạn con R của P. Ta có $\min_{R'} f \ge \min_R f$. Vì thế

$$\begin{aligned}\sum_{R' \subset R, R' \in H(P')} (\min_{R'} f) |R'| &\ge \sum_{R' \subset R, R' \in H(P')} (\min_R f) |R'| \\ &= \min_R f \sum_{R' \subset R, R' \in H(P')} |R'| = (\min_R f) |R| .\end{aligned}$$

Lấy tổng hai vế của bất đẳng thức trên theo tất cả đoạn con R của P ta được $L(f, P') \ge L(f, P)$. Trường hợp sup tương tự. □

Bổ đề (tổng dưới nhỏ hơn hay bằng tổng trên). *Nếu P và P' là hai phép chia bất kì của cùng một đoạn thì $L(f, P) \le U(f, P')$.*

Chứng minh. Với hai phép chia P và P' bất kì thì luôn có một phép chia P'' mịn hơn cả P lẫn P', chẳng hạn có thể lấy $P'' = P \cup P'$. Khi đó $L(f, P) \le L(f, P'') \le U(f, P'') \le U(f, P')$. □

Một hệ quả là chặn trên nhỏ nhất của tập hợp tất cả các tổng dưới $\sup_P L(f, P)$ và chặn dưới lớn nhất của tập hợp tất cả các tổng trên $\inf_P U(f, P)$ tồn tại, và

$$\sup_P L(f, P) \le \inf_P U(f, P).$$

Chứng minh Định lý 3.2. Chứng minh chủ yếu dựa vào tính liên tục đều của của hàm.

Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên đoạn I. Theo Định lý 2.4, hàm f liên tục đều trên I, cho trước $\epsilon > 0$ có $\delta > 0$ sao cho $\|x - y\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \epsilon$.

Lấy một phép chia P của I sao cho chiều dài mỗi đoạn con là nhỏ hơn δ.

Với hai điểm x, y bất kì thuộc về một đoạn con R thì $f(x) - f(y) < \epsilon$. Suy ra $f(x) - \min_{y \in R} f(y) < \epsilon$, dẫn tới $\max_{x \in R} f(x) - \min_{y \in R} f(y) \le \epsilon$. Do đó

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_R (\max_R f - \min_R f) |R| \le \epsilon \sum_R |R| = \epsilon |I| .$$

Bất đẳng thức trên dẫn tới với mọi $\epsilon > 0$ thì $U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon\,|I|$, do đó $\inf_P U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon\,|I|$. Suy ra

$$\inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P) = \beta. \tag{3.3}$$

Giá trị β thỏa $L(f,P) \le \beta \le U(f,P)$ với mọi phép chia P.

Mặt khác tổng Riemann bất kì ứng với phép chia P cũng thỏa

$$L(f,P) \le \sum_{R\in H(P)} f(x_R)|R| \le U(f,P).$$

Dẫn tới

$$\left|\sum_{R\in H(P)} f(x_R)|R| - \beta\right| \le U(f,P) - L(f,P) \le \epsilon|I|.$$

Ta kết luận được f khả tích và tích phân của f đúng bằng β. □

Ghi chú. Trình bày tương tự có ở [Fic77], [Kha96, tr. 154, 155]. Vài tài liệu không dùng tổng dưới và tổng trên, thay vào đó xây dựng một dãy Cauchy các tổng Riemann để tìm tích phân, khó hơn.

Một số tài liệu Giải tích định nghĩa hàm có tích phân nếu $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$ và gọi giá trị chung đó là tích phân, tuy nhiên đó là tích phân Darboux. Tích phân Darboux trùng với tích phân Riemann, nhưng việc này ít khi được trình bày một cách tổng quát.

Bài tập 3.4. Cho hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$. Chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bằng nhau, với các điểm chia $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Lập tổng

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right].$$

Chứng tỏ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

3.3 Diện tích

Định nghĩa 3.5. *Cho hàm f liên tục và không âm trên đoạn $[a,b]$. "Hình thang cong" là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của f, trục x, đường thẳng $x = a$, đường thẳng $x = b$. "Diện tích của hình thang cong" cho bởi*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Trong các bộ SGK trung học [SGKT18], Định nghĩa 3.5 trên có bộ sách coi là định nghĩa, có bộ sách coi là định lý không chứng minh.

Khái niệm "diện tích của hình thang cong" chưa được định nghĩa trước trong chương trình toán trung học. Trước toán chỉ có khái niệm diện tích cho các hình đa giác, tức là những hình được bao bởi hội của những đoạn thẳng.

Riêng khái niệm diện tích hình tròn đã được biết trước trong toán trung học cơ sở, thì thực ra chỉ được định nghĩa bằng một công thức tính, chứ không được suy luận rút ra từ những điều được giả sử và biết trước đó về diện tích đa giác. Theo một cách hiểu phổ biến, diện tích hình tròn là giới hạn của diện tích đa giác đều nội tiếp khi số cạnh tăng ra vô cùng. Tổng quát, diện tính của hình cong có thể được hiểu là giới hạn của diện tích những hình đa giác nào đó. Cách tiếp cận này *cần phép tính giới hạn để nói về diện tích hình cong*.

Như vậy khái niệm diện tích hình cong không có trước khi học Vi tích phân, do đó Mệnh đề 3.5 không thể chứng minh được, không thể là một định lý, mà phải là một định nghĩa. Đây là cách tiếp cận trong [BMGT1].

Tiếp theo vì "diện tích giới hạn bởi hai đồ thị" cũng chưa có trước nên cũng phải coi đây là định nghĩa:

Định nghĩa 3.6. *Với f và g liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì "diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm f, hàm g, và hai đường $x = a$, $x = b$" là*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Tuy vậy, để thuyết phục sự phù hợp của khái niệm diện tích mới này, cần khảo sát việc nó chứa khái niệm diện tích của hình đa giác, và khảo sát những tính chất được chờ đợi của diện tích: tính cộng (diện tích của hội hai hình có phần trong giao nhau bằng rỗng phải bằng tổng diện tích hai hình), và tính không thay đổi qua phép dời hình, xem Bài tập 3.10.

3.3.1 Giả định có trước khái niệm diện tích của hình cong

Một khả năng khác là giả định có trước một lý thuyết chung về diện tích của những hình cong, có tính chất giống như diện tích của hình đa giác đã được sử dụng trong hình học phẳng từ trước, gồm tính cộng và tính không thay đổi qua phép dời hình.

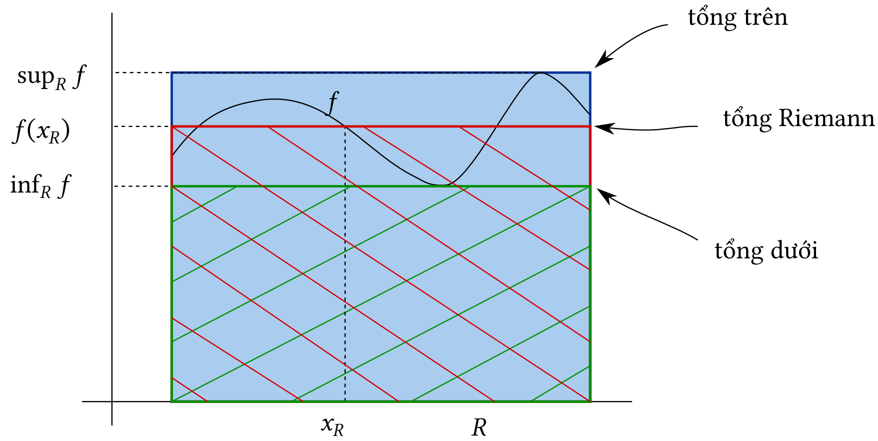
Khi đó Định nghĩa 3.5 được coi là một mệnh đề và có thể được chứng minh từ định nghĩa tích phân như sau.

Chứng minh Mệnh đề – Định nghĩa 3.5. Gọi S là diện tích của hình thang cong D. Giải thích theo diện tích, cho P là phép chia bất kì của đoạn $[a, b]$, thì $L(f, P)$ là tổng diện tích của một dãy các hình chữ nhật chứa trong D, và $U(f, P)$ là tổng diện tích của một dãy các hình chữ nhật mà hội lại chứa D, vì vậy theo tính cộng của diện tích ta phải có

$$L(f, P) \le S \le U(f, P).$$

Điều này dẫn tới

$$\sup_P L(f,P) \le S \le \inf_P U(f,P).$$



Hình 3.7: diện tích hình chữ nhật bên dưới đường cong ≤ diện tích bên dưới đường cong ≤ diện tích hình chữ nhật bên trên đường cong.

Vì f liên tục nên khả tích, và vì f khả tích nên từ (3.3),

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Suy ra phải có

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Tiếp theo Mệnh đề 3.6 được chứng minh bằng cách lấy diện tích hình thang cong bên trên trừ diện tích hình thang cong bên dưới, dùng tính cộng của diện tích.

Ghi chú. Xem xét kỹ thì lý luận này ngầm chứa giả định nhiều hơn về tính cộng: đồ thị của hàm liên tục trên một đoạn thì có diện tích không.

Một lý thuyết diện tích cho hình cong xây dựng từ tập hợp số thực được thực hiện ở tích phân hàm nhiều biến dành cho ngành toán như ở [VGt3]. Ở đó các Mệnh đề 3.5 và 3.6 cũng như các tính chất của diện tích được chứng minh.

3.4 Trình bày suy diễn tích phân và diện tích trong chương trình trung học

Với nhiều vấn đề nhận thấy ở trên, việc tìm trình bày suy diễn không mâu thuẫn không đi vòng tròn nội dung tích phân và diện tích phù hợp cho chương trình trung học là đáng quan tâm.

Dưới đây ta phác thảo trình tự cho hai phương án.

3.4.1 Phương án 1: Như tích phân trong chương trình đại học ngành khác toán

Đây là cách tiếp cận thường gặp trong các giáo trình Vi tích phân dành cho sinh viên các ngành khoa học kỹ thuật (vật lý, máy tính, kỹ thuật, công nghệ, ...), là cách tiếp cận trong [BMGT1]. Trình tự cơ bản như sau.

1. Giới thiệu ý niệm xấp xỉ diện tích hình thang cong bằng cách chia nhỏ đoạn xác định, xấp xỉ bằng cách hình chữ nhật, rồi cho số hình chữ nhật tăng ra vô cùng.
2. Định nghĩa tổng Riemann là tổng diện tích các hình chữ nhật dùng để xấp xỉ.
3. Định nghĩa tích phân là giới hạn của tổng Riemann. Cách trình bày giới hạn này có thể khác nhau tùy tài liệu. Có thể chia đều và lấy điểm mẫu là điểm giữa, rồi cho số hình chữ nhật con tiến ra vô cùng. Tổng quát hơn thì dùng ngôn ngữ δ–ϵ.
4. Phát biểu mà không chứng minh rằng mọi hàm liên tục đều có tích phân.
5. Dùng điều đó, chứng minh mọi hàm liên tục đều có nguyên hàm, là tích phân của hàm đó.
6. Rút ra công thức Newton–Leibniz cho hàm liên tục.
7. Diện tích hình thang cong và diện tích giữa hai đồ thị được định nghĩa bằng tích phân.

Ưu điểm:

- Truyền đạt được ý tưởng chính của tích phân là chia nhỏ, xấp xỉ, qua giới hạn.
- Liên kết được với ý nghĩa chung của tích phân là tính tổng, từ đó có nhiều ứng dụng.

Nhược điểm:

- Khái niệm diện tích được định nghĩa thường chưa được (chưa thể) khảo sát thêm để cho thấy tương thích với khái niệm diện tích đã có.
- Cần nhiều thời lượng hơn chương trình thường cho phép. Do đó có thể quá tải cho nhiều học sinh.

3.4.2 Phương án 2: Giả định sự tồn tại của "diện tích hình thang cong"

Đây một là cách trình bày suy diễn cho trung học. Trình tự cơ bản như sau.

1. Giả định sự tồn tại "diện tích hình thang cong" dưới đồ thị của hàm liên tục không âm bên trên một đoạn, giả định diện tích này thỏa mãn tính cộng.

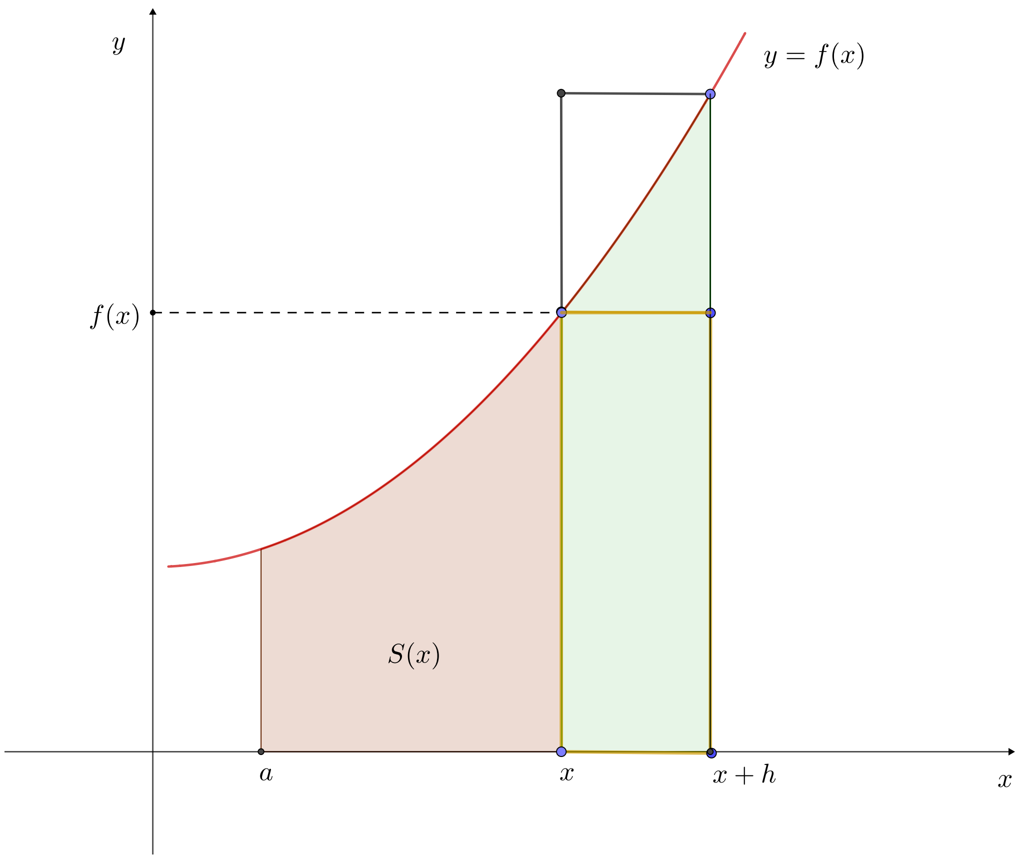
2. Chứng minh diện tích hình thang cong dưới đồ thị của hàm liên tục không âm f bên trên đoạn $[a, b]$ là một nguyên hàm của f.

   Đặt $S(x)$ bằng diện tích hình thang cong từ a tới x. Cho $h > 0$, thì $S(x+h) - S(x)$ bằng diện tích hình thang cong từ x tới $x+h$. Hình thang cong này chứa trong hình chữ nhật đáy là $[a, b]$ chiều cao là $\max_{[x,x+h]} f = f(x_{\max})$, và lại chứa hình chữ nhật đáy là $[a, b]$ chiều cao là $\min_{[x,x+h]} f = f(x_{\min})$, với hai số thực $x_{\min}$ và $x_{\max}$ nằm trong đoạn $[x, x+h]$ (xem Hình 3.7). Theo tính chất của diện tích (tính so sánh, hoặc tính cộng), thì các diện tích tương ứng thỏa

   $$\left(\min_{[x,x+h]} f\right) h \leq S(x+h) - S(x) \leq \left(\max_{[x,x+h]} f\right) h$$

   dẫn tới
   $$f(x_{\min}) \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq f(x_{\max}).$$

   Xem Hình 3.8.



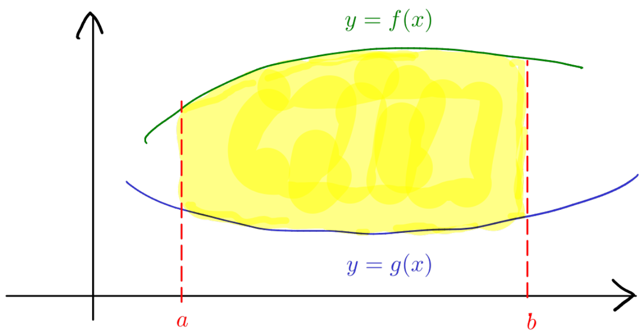
Hình 3.8: Diện tích hình thang cong là nguyên hàm.

Cho h tiến về 0, thì x_{min} và $x_{\max}$ tiến về x, và vì f liên tục, nên theo tính chất kẹp của giới hạn:
$$S'(x) = f(x).$$

3. Định nghĩa tích phân cho hàm liên tục bằng công thức Newton–Leibniz.

4. Liên hệ tích phân với diện tích. Vì diện tính hình thang cong là một nguyên hàm, nên tích phân cho diện tích hình thang cong.

5. Diện tích giữa hai đồ thị được rút ra. Diện tích giữa đồ thị của f và g bằng diện tích hình thang cong dưới đồ thị của f trừ diện tích hình thang cong dưới đồ thị của g (tính cộng của diện tích).



Ưu điểm:

- Việc giả định sự tồn tại của "diện tích hình thang cong" có thể phù hợp với trải nghiệm của số đông học sinh, có thể thuyết phục được số đông học sinh là "hiển nhiên", dễ tiếp thu cho số đông học sinh.
- Ngắn gọn, phù hợp với thời lượng của chương trình.

Nhược điểm:

- Không truyền đạt được ý tưởng chính của tích phân là chia nhỏ, xấp xỉ, qua giới hạn.
- Chỉ có ứng dụng là diện tích.

3.5 Thể tích

Định nghĩa 3.9. *Trong không gian cho một vật thể nằm trong phần không gian giữa hai mặt phẳng vuông góc trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì* **thể tích** *của vật thể được tính bằng công thức:*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Giống như phần diện tích ở Định nghĩa 3.5, với Định nghĩa 3.9 trên, có bộ SGK coi là định lý không chứng minh, có bộ SGK [SGKT18, lớp 12, tập 2] không nói rõ đó là định nghĩa hay định lý.

Tương tự phân tích về diện tích ở trên, khái niệm thể tích của hình cong chưa được đưa ra trước, nên về logic thì Mệnh đề 3.9 không thể chứng minh được, không thể là định lý. Cũng như đã thảo luận đối với diện tích, để thuyết phục, cần tìm hiểu xem định nghĩa này của thể tích hình cong có tính cộng và tính không đổi qua phép dời hình hay không.

Một khả năng nâng cao hơn là giả định có trước một lý thuyết chung về thể tích của những hình cong, có tính cộng và tính không thay đổi qua phép dời hình. Tuy nhiên từ giả định này để đi tới một chứng minh cho Định nghĩa 3.9 có nhiều việc phải làm.

Một lý thuyết thể tích cho hình cong xây dựng từ tập hợp số thực được thực hiện ở tích phân hàm nhiều biến dành cho ngành toán như ở [VGt3, mục 4]. Ở đó các tính chất của thể tích được chứng minh, và Định nghĩa 3.9 được rút ra từ công thức Fubini.

Ghi chú. Trong Định nghĩa 3.9, để ý nếu ta đẩy (tịnh tiến) mặt cắt tại x vuông góc với trục x thì diện tích mặt cắt $S(x)$ không đổi. Khi đó "vật thể" có hình dạng mà khó còn có thể hình dung trực quan là "có thể tích". Như vậy ta không ngạc nhiên là trong phát biểu chặt chẽ ở [VGt3, mục 4] có thêm giả thiết hình này có thể tích.

Liên quan thảo luận trên, chuẩn chương trình phổ thông Common Core Standards của Mỹ [2], tuy không có nội dung Vi tích phân, nhưng có đặc tả như sau về diện tích và thể tích:

> Đưa ra lý luận không chính thức cho các công thức chu vi hình tròn, diện tích hình tròn, thể tích hình trụ, hình tháp, hình nón, hình cầu và những hình khối khác. Dùng các lý luận phân chia, nguyên lý Cavalieri, và lý luận giới hạn không chính thức.

Có vài điểm đáng chú ý về đặc tả này:

- Nhận thức và truyền đạt rõ ràng rằng các công thức diện tích và thể tích của hình cong cần được giải thích, và các giải thích đó sử dụng phép tính giới hạn.
- Các lý luận không chính thức (chưa đủ chi tiết, chưa đủ chặt chẽ, nhưng phù hợp kinh nghiệm và trực quan) không những được chấp nhận mà còn được yêu cầu sử dụng.

Bài tập 3.10. Chứng minh rằng khái niệm diện tích của hình giữa hai đồ thị được cho ở Mệnh đề 3.6 thỏa các tính chất:

1. Cộng tính: Nếu f và g liên tục trên $[a,b]$ và $c \in (a,b)$ thì diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm f, hàm g, và hai đường $x = a$, $x = b$ bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm f, hàm g, và hai đường $x = a$, $x = c$ cộng với diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm f, hàm g, và hai đường $x = c$, $x = b$.

[2] `https://www.thecorestandards.org/Math/Content/HSG/GMD/`

2. Không đổi qua phép tịnh tiến: Xét một phép tịnh tiến của mặt phẳng theo vectơ $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, cho bởi ánh xạ $(x, y) \mapsto (x, y) + (c, d)$. Chứng tỏ diện tích không thay đổi qua phép tịnh tiến.

Bài tập 3.11 (Định lý giá trị trung bình cho tích phân). Cho f liên tục trên đoạn $[a, b]$.

1. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của f và M là giá trị lớn nhất của f. Chứng tỏ giá trị trung bình của f phải nằm giữa m và M, tức là

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

2. Giải thích vì sao phải có số $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Như vậy giá trị trung bình của một hàm liên tục trên một đoạn đạt được tại một điểm trong đoạn đó.

Bài tập 3.12. Áp dụng Định lý giá trị trung bình cho tích phân (Bài tập 3.11), hãy giải thích nếu f liên tục và không âm trên đoạn $[a, b]$ thì diện tích bên dưới đồ thị của f đúng bằng diện tích của hình chữ nhật đáy là đoạn $[a, b]$ và chiều cao tại một điểm nào đó trên đồ thị của f.

Bài tập 3.13. Dùng Bài tập 3.12, hãy đưa ra một chứng minh cho Định lý cơ bản của Vi tích phân.

Bài tập 3.14. Ta tìm hiểu quan hệ giữa Định lý giá trị trung bình cho tích phân (Bài tập 3.11) và Định lý giá trị trung bình Lagrange.

1. Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$. Đặt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Hãy áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange cho F để thu được Định lý giá trị trung bình cho tích phân cho f.

2. Ngược lại, giả sử f khả vi liên tục (tức có đạo hàm liên tục) trên đoạn $[a, b]$. Hãy áp dụng Định lý giá trị trung bình cho tích phân cho f' để thu được Định lý giá trị trung bình Lagrange cho f.

3. * Hãy tìm giải thích vì sao Định lý giá trị trung bình lại được gọi tên như vậy, tức là nó liên quan tới giá trị trung bình như thế nào?

Bài tập 3.15. Hãy trình bày Nguyên lý Cavalieri (có thể tham khảo chẳng hạn [VGt3, mục 4]). Hãy so sánh nguyên lý này với các công thức trong Mệnh đề 3.6 và Mệnh đề 3.9.

4 Xây dựng hàm mũ

Có vài cách tiếp cận: xây dựng từ mũ hữu tỉ rồi qua giới hạn, dùng chuỗi, hay dùng tích phân.

4.1 Xây dựng hàm mũ từ mũ hữu tỉ

Đây về cơ bản là trình tự trong sách giáo khoa (SGK) trung học [SGKT18, Lớp 11, tập 2, chương VI], ở đó SGK thừa nhận một số bước chính. Việc này có thể hiểu được, vì các bước này dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực. Ta tiến hành chi tiết và đầy đủ cách xây dựng này.

4.1.1 Xây dựng căn

Mệnh đề 4.1 (tồn tại căn). *Cho số nguyên $n \geq 2$, với mọi số thực dương a tồn tại duy nhất một số thực dương x sao cho $x^n = a$, kí hiệu là $x = \sqrt[n]{a}$.*

Chứng minh 1. Dùng hàm liên tục. Đặt $f(x) = x^n$, đây là một hàm liên tục. Ta có $f(0) = 0 < a$. Nếu $a < 1$ thì $f(1) = 1 > a$. Nếu $a \geq 1$ thì $f(a) = a^n \geq a$. Theo Định lý giá trị trung gian 2.1 phải có x sao cho $f(x) = a$.

Xét tính duy nhất. Nếu x và y là hai số dương cùng thỏa $x^n = y^n = a$ thì

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = 0$$

dẫn tới $x - y = 0$ do số hạng thứ hai là dương. □

Chứng minh 2. Ta trình bày một cách chứng minh khác, trực tiếp hơn, chỉ dùng các tính chất của số thực, không dùng hàm liên tục.

Đặt $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^n \leq a\}$. Vì $0 \in A$ nên $A \neq \emptyset$. Ta chứng tỏ A bị chặn trên. Nếu $a < 1$ thì $\forall y \in A, y \leq 1$. Nếu $a \geq 1$ thì $\forall y \in A, y \leq a$. Vì A bị chặn trên nên tồn tại $x = \sup A$. Ta chứng minh $x^n = a$.

Giả sử $x^n < a$. Ta chứng tỏ có thể chọn $h > 0$ đủ nhỏ để $x^n < (x+h)^n < a$, như thế $x + h \in A$, mâu thuẫn với việc x là một chặn trên của A. Như vậy cần tìm $h > 0$ sao cho

$$(x+h)^n - x^n < a - x^n = \epsilon.$$

Ta viết

$$(x+h)^n - x^n = h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right].$$

Vì $0 \in A$ nên $x \geq 0$. Trước hết chọn $h < 1$, thì

$$(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} < n(x+1)^{n-1}.$$

Sau đó chọn h sao cho $hn(x+1)^{n-1} < \epsilon$, tức $h < \frac{\epsilon}{n(x+1)^{n-1}}$.

Giả sử $x^n > a$. Suy ra $x > 0$. Ta chứng tỏ có thể chọn $h > 0$ đủ nhỏ để $x - h > 0$ và $x^n > (x-h)^n > a$, dẫn tới $x - h$ là một chặn trên của A, mâu thuẫn với việc x là chặn trên nhỏ nhất của A. Như vậy cần tìm $h > 0$ sao cho

$$x^n - (x-h)^n < x^n - a = \epsilon.$$

Ta viết

$$\begin{aligned} x^n-(x-h)^n &= h\left[(x-h)^{n-1}+(x-h)^{n-2}x+\cdots+(x-h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]. \\ &< h\left[nx^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Có thể chọn $h<\frac{\epsilon}{nx^{n-1}}$.

Cũng có thể viết chứng minh trên bằng cách dùng nhị thức Newton để khai triển $(x+h)^n$. □

4.1.2 Xây dựng mũ hữu tỉ

Định nghĩa 4.2 (mũ hữu tỉ). *Cho $a>0$. Với số hữu tỉ $\frac{m}{n}$, $n>1$, ta định nghĩa $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.*

Ta kiểm tra được dễ dàng mũ hữu tỉ có những tính chất số như mũ nguyên:

Mệnh đề 4.3. *Với $a>0, b>0$, thì*

1. *$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$, với $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}, n\geq 1$.*
2. *$(a^x)^y=a^{xy}$, với $x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}$.*
3. *$a^{x+y}=a^xa^y$, với $x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}$.*
4. *$a^xb^x=(ab)^x$, với $x\in\mathbb{Q}$.*
5. *Hàm mũ hữu tỉ, $f(x)=a^x$, với $x\in\mathbb{Q}$, là hàm tăng ngặt nếu $a>1$ và là hàm giảm ngặt nếu $a<1$.*
6. *Hàm lũy thừa hữu tỉ, với $\alpha\in\mathbb{Q}$, $f(x)=x^\alpha$, $x\in\mathbb{R}^+$, là hàm tăng ngặt.*

Chứng minh. Ta lần lượt kiểm tra các tính chất trên.

1. Ta có $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m=a^m$, vậy $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.
2. Viết $x=\frac{m}{n}$, $y=\frac{p}{q}$, ta cần chứng minh

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

Vậy ta xét

$$\begin{aligned} \left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} &= \left[\left(\sqrt[q]{a^{\frac{m}{n}}}\right)^p\right]^{nq} = \left[\left(\sqrt[q]{a^{\frac{m}{n}}}\right)^q\right]^{np} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{np} \\ &= \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^{mp} = a^{mp}. \end{aligned}$$

3. Ta cần chứng minh

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \left(a^{mq+np}\right)^{\frac{1}{nq}} = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}}.$$

Vậy ta xét

$$\left(a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}}\right)^{nq} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nq} \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{nq} = a^{\frac{m}{n}nq} a^{\frac{p}{q}nq} = a^{mq} a^{np} = a^{mq+np}.$$

4. Ta có $\left(\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n \left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n = a^m b^m = (ab)^m$. Vậy $\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m}$.

5. Ta có $a^x > a^y$ tương đương $a^{x-y} > 1$. Vậy ta kiểm tra rằng nếu $x \in \mathbb{Q}$ và $x > 0$ thì $a^x > 1 = a^0$. Viết $x = \frac{p}{q}$ với $q > 0$, ta có $a^x = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$. Nếu $\sqrt[q]{a} \le 1$ thì phải có $\left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a \le 1^q = 1$, mâu thuẫn, vậy $\sqrt[q]{a} > 1$, dẫn tới $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p > 1^p$.

6. Giả sử $0 < x < y$. Theo tính chất vừa trước, vì $\frac{y}{x} > 1$ và $a > 0$ nên $\left(\frac{y}{x}\right)^a > \left(\frac{y}{x}\right)^0 = 1$. Vậy $x^a < y^a$.

□

4.1.3 Xây dựng mũ thực

Định nghĩa 4.4 (mũ thực). *Cho $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, ta định nghĩa*

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \le x\}, & a \ge 1 \\ \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}, & a < 1. \end{cases}$$

Trước hết ta thấy trong trường hợp $x \in \mathbb{Q}$ thì định nghĩa này trùng với định nghĩa trước đó. Ta cần kiểm tra rằng đây là định nghĩa tốt, nghĩa là a^x được xác định. Thực vậy, xét $a \ge 1$. Với $r, s \in \mathbb{Q}$ và $s > x > r$ thì $a^s > a^r$, do đó tập hợp $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \le x\}$ bị chặn trên và có sup.

Mệnh đề 4.5. *Nếu dãy $(r_n)_n$ các số hữu tỉ hội tụ về số vô tỉ x thì dãy $(a^{r_n})_n$ hội tụ về a^x.*

Trong SGK trung học [SGKT18, Lớp 11, tập 2, chương VI], mệnh đề này được thừa nhận và lấy làm định nghĩa mũ vô tỉ.

Chứng minh. Ta xét $a > 1$. Trước hết ta chứng minh cho trường hợp dãy $(r_n)_n$ là hội tụ tăng. Theo tính chất của sup, cho trước $\epsilon > 0$, tồn tại số hữu tỉ $s < x$ (chú ý vì x là số vô tỉ nên $s \ne x$) để $0 < a^x - a^s < \epsilon$. Tồn tại p để khi $n \ge p$ thì $s < r_n < x$. Khi đó với $n \ge p$ thì $0 < a^x - a^{r_n} < a^x - a^s < \epsilon$. Vậy dãy $(a^{r_n})_n$ hội tụ về a^x.

Nếu dãy $(r_n)_n$ hội tụ giảm về x thì dãy $(-r_n)_n$ hội tụ tăng về $-x$, do đó theo phần vừa rồi thì dãy $(a^{-r_n})_n$ hội tụ về a^{-x}, do đó $a^{r_n} = \frac{1}{a^{-r_n}}$ hội tụ về $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Điều này cũng chứng tỏ rằng $a^x = \inf\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \ge x\}$.

Bây giờ xét dãy $(r_n)_n$ hội tụ bất kì về x. Cho $\epsilon > 0$, có số hữu tỉ $s_1 < x$ để $0 < a^x - a^{s_1} < \epsilon$ và có số hữu tỉ $s_2 > x$ để $0 < a^{s_2} - a^x < \epsilon$. Tồn tại p để khi $n \geq p$ thì $s_1 < r_n < s_2$. Khi đó với $n \geq p$ thì $0 < |a^x - a^{r_n}| < \epsilon$. Vậy dãy $(a^{r_n})_n$ hội tụ về a^x.

Trường hợp $a < 1$ tương tự. □

Mũ thực có những tính chất số học như mũ hữu tỉ ở Mệnh đề 4.3:

Mệnh đề 4.6. *Với mọi $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, thì*

1. $a^{x+y} = a^x a^y$,
2. $a^x b^x = (ab)^x$,
3. *hàm mũ $y = a^x$ là hàm tăng ngặt nếu $a > 1$ và là hàm giảm ngặt nếu $a < 1$,* [3]
4. *với $x > 0$ thì hàm lũy thừa x^a là hàm tăng ngặt.*

Chứng minh. Lấy dãy các số hữu tỉ $(x_n)_n$ và $(y_n)_n$ hội tụ lần lượt về x và y, trong trường hợp x hay y là số hữu tỉ thì ta lấy dãy hằng tương ứng. Ta có $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$ và $\lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^y$.

1. Ta có $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$. Cho $n \to \infty$ ta được tính chất.
2. Ta có $a^{x_n}b^{x_n} = (ab)^{x_n}$. Cho $n \to \infty$ ta được tính chất.
3. Giả sử $x < y$. Lấy số hữu tỉ r sao cho $x < r < y$. Với n đủ lớn ta có $x_n \leq x < r < y_n \leq y$.

   Giả sử $a > 1$. Ta có $a^{x_n} < a^r < a^{y_n} \leq a^y$. Qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được $a^x \leq a^r$ và $a^r < a^y$, vậy $a^x < a^y$.

   Giả sử $a < 1$. Ta có $a^{x_n} > a^r > a^{y_n} \geq a^y$. Qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được $a^x \geq a^r > a^y$.
4. Ta có $x^a < y^a$ tương đương với $\left(\frac{y}{x}\right)^a > 1$. Vì $\frac{y}{x} > 1$ và $a > 0$ nên theo tính chất vừa trước $\left(\frac{y}{x}\right)^a > \left(\frac{y}{x}\right)^0 = 1$.

□

Có thể đọc thêm ở [PTTT, tr. 23, 24].

4.1.4 Tính liên tục của hàm mũ và hàm log

Bổ đề 4.7. *Với $a > 0$ thì*

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = a^0 = 1.$$

[3] Chú ý khái niệm hàm tăng ở trung học [SGK17, Giải tích 12, Định lí 1, tr. 4] [SGKT18, Toán 12 tập 1, tr. 6] là khái niệm hàm tăng ngặt ở đại học [BMGT1, mục 4.2]. Khái niệm hàm tăng ở đại học cho phép xảy ra dấu =.

Chứng minh. Ta chỉ cần xét $a > 1$. Kết quả này thu được từ đánh giá sau:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n}(a-1).$$

Đánh giá này tương đương với

$$a < \left[1 + \frac{1}{n}(a-1)\right]^n,$$

là một ứng dụng của Bất đẳng thức Bernoulli. □

Mệnh đề 4.8. *Hàm mũ $y = a^x$ là hàm liên tục.*

Chứng minh. Cho trước $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} a^x - a^{x_0} = \lim_{x \to x_0} a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) = a^{x_0} \lim_{x \to x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right).$$

Như thế tính liên tục của hàm tại x_0 đưa về tính liên tục của hàm tại 0.

Xét $a > 1$. Cho $\epsilon > 0$. Do

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$$

nên với N đủ lớn ta có $0 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \epsilon$ và $-\epsilon < a^{-\frac{1}{N}} - 1 < 0$. Với $0 \le x < \frac{1}{N}$ thì

$$0 \le a^x - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \epsilon,$$

và với $-\frac{1}{N} < x \le 0$ thì

$$-\epsilon < a^{-\frac{1}{N}} - 1 < a^x - 1 \le 0.$$

Vậy với $|x| < \frac{1}{N}$ thì $|e^x - 1| < \epsilon$. Ta kết luận được $\lim_{x \to 0} e^x = 1 = e^0$. Vậy hàm $y = e^x$ liên tục tại 0 và do đó liên tục tại mọi điểm. □

Mệnh đề 4.9. *Nếu $a > 0$, $a \neq 1$, thì hàm mũ $y = a^x$ có hàm ngược xác định trên tập* $(0, \infty)$.

Chứng minh. Xét $a > 1$. Do Bất đẳng thức Bernoulli, $a^n = (1+(a-1))^n \ge 1+n(a-1)$, nên $\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$, dẫn tới $\lim_{n \to -\infty} a^n = 0$. Vì hàm mũ liên tục nên áp dụng Định lý giá trị trung gian ta được $y = a^x$ nhận mọi giá trị thuộc khoảng số thực $(0, \infty)$. Mặt khác hàm mũ là đơn điệu ngặt (Mệnh đề 4.6), nên là một song ánh từ $(-\infty, \infty)$ lên $(0, \infty)$ và có ánh xạ ngược.

Trường hợp $a < 1$ rút ra được từ trường hợp $a > 1$. □

Định nghĩa 4.10 (hàm log). *Nếu $a > 0$, $a \neq 1$, kí hiệu hàm ngược của hàm $y = a^x$ là $y = \log_a x$.*

Từ các tính chất số học của hàm mũ ở Mệnh đề 4.6 ta thu được ngay các tính chất số học của hàm log:

Mệnh đề 4.11. *Hàm* log *có các tính chất:*

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Chứng minh. Ta kiểm tính chất 3:

$$b^{(\log_b a)(\log_a x)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x.$$

Vậy $(\log_b a)(\log_a x) = \log_b x$. □

Mệnh đề 4.12. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Chứng minh. Ta có

$$\log_a(a^x)^y = y\log_a a^x = yx\log_a a = xy = \log_a a^{xy},$$

□

Mệnh đề 4.13. *Hàm* log *là hàm liên tục.*

Chứng minh. Xét $a > 1$. Ta chứng minh $\log_a$ liên tục tại $x_0 = a^{y_0} \in (0, \infty)$. Cho $\epsilon > 0$, đặt $a^{y_0-\epsilon} = x_1$ và $a^{y_0+\epsilon} = x_2$. Hàm mũ cơ số a tăng ngặt nên phải có $x_1 < x_0 < x_2$. Đặt $\delta = \min(x_0 - x_1, x_2 - x_0)$ thì $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dẫn tới $y \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$. Vậy $\log_a$ liên tục tại x_0. Tham khảo Bài tập 2.7.

Tương tự cho $a < 1$. □

4.1.5 Tính khả vi của hàm mũ và hàm log

Các phần tiếp theo, gồm định nghĩa số e, sự khả vi và công thức đạo hàm của hàm mũ, hàm logarit, hàm lũy thừa, có thể tiến hành theo trình tự như SGK [SGK17, bản nâng cao].

Mệnh đề (số e). *Giới hạn* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *tồn tại. Đặt*

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Ta cũng có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Chứng minh. Trước hết ta kiểm giới hạn của dãy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

tồn tại. Ta chứng tỏ đây là một dãy số thực tăng và bị chặn trên.

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho bộ gồm số 1 và n số $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ta được

$$\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} > \left(1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

tức là

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Vậy đây là một dãy tăng.

Khai triển nhị thức Newton,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3.\end{aligned}$$

Vậy dãy này bị chặn. Suy ra dãy có giới hạn, chính là chặn trên nhỏ nhất của tập giá trị của dãy,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n\in\mathbb{Z}^+\right\} = e.$$

Với $x>0$, lấy $n=\lfloor x\rfloor$ thì

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Vì

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e$$

và

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

nên theo tích chất kẹp

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Xét $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Thay x bởi $-x$, rồi lại thay x bởi $x+1$, ta viết

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)^x\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\left(\frac{x+1}{x}\right) = e.\end{aligned}$$

□

Hàm mũ cơ số e thường được kí hiệu là exp (exponential), tức là $\exp(x) = e^x$. Hàm log cơ số e thường được kí hiệu là ln, tức là $\ln x = \log_e x$.

Mệnh đề. *Hàm* exp *khả vi và có đạo hàm là chính nó* $\exp' = \exp$, *tức là* $(e^x)' = e^x$.

Chứng minh. Đặt $f(x) = e^x$, ta có

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) e^x.$$

Ta tính

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Đặt $u = e^h - 1$, thì $h = \ln(1 + u)$ và khi $h \to 0$ thì do f là hàm liên tục (Mệnh đề 4.8) nên $u \to e^0 - 1 = 0$. Suy ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1 + u)} = \frac{1}{\lim_{u\to 0} \ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}.$$

Bây giờ đặt $x = \frac{1}{u}$ ta được

$$\lim_{u\to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Do hàm ln liên tục (Mệnh đề 4.13) nên ta được $\lim_{u\to 0} \ln(1 + u)^{\frac{1}{u}} = \ln e = 1$. Vậy $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Trong các tài liệu như [PTTT, tr. 83] có những chứng minh khác cho mệnh đề này. □

Mệnh đề. *Hàm mũ khả vi và có đạo hàm là* $(a^x)' = a^x \ln a$.

Chứng minh. Ta tính được ngay đạo hàm của hàm mũ với cơ số a bất kì từ đạo hàm của exp và đạo hàm hàm hợp:

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

□

Mệnh đề 4.14. *Hàm* ln *khả vi và có đạo hàm là* $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Chứng minh. Xét

$$\ln' x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}.$$

Đặt $y = \ln x$, $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$. Ta viết

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Chú ý rằng cho tính tăng ngặt của hàm e^x nên nếu $\Delta y \neq 0$ thì $\Delta x \neq 0$. Ngoài ra do tính liên tục của hàm ln nên khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta y \to 0$. Dẫn tới

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{y+\Delta y} - e^y}{\Delta y}}$$
$$= \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

□

Mệnh đề. *Hàm* log *khả vi và có đạo hàm là* $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$.

Chứng minh. Ta rút ra ngay từ công thức $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. □

Mệnh đề (hàm lũy thừa). *Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. *Hàm lũy thừa* $y = x^\alpha$ *có các tính chất:*

1. *liên tục,*

2. *khả vi và có đạo hàm là* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Chứng minh. Vì $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ và exp và ln liên tục và khả vi nên x^α liên tục và khả vi theo x. Ta có

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha-1}\alpha.$$

□

4.2 Xây dựng hàm mũ bằng chuỗi

Đây là một cách tiếp cận có trong các tài liệu Giải tích trình độ chuyên ngành, tham khảo [Rud76, tr. 178]. Ở đây ta khảo sát vài bước chính.

Từ các tính chất số và vi phân được thừa nhận của hàm mũ, ta biết rằng chuỗi

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (tiêu chuẩn tỉ số) và hơn nữa giới hạn chính là e^x (đánh giá phần dư trong khai triển Maclaurin). Bây giờ ta lấy điều này để làm định nghĩa.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Định nghĩa. *Với mỗi số thực* x *thì*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Sau khi định nghĩa được $e^x = \exp(x)$ ta sẽ làm các việc sau:

1. Chứng tỏ exp có những tính chất số cần có của hàm mũ.

2. Chứng tỏ exp có hàm ngược. Hàm đó được định nghĩa là hàm ln.

3. Chứng tỏ các hàm này có những tính chất vi phân cần có.

4. Định nghĩa $a^x = e^{x \ln a}$ và $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Mệnh đề. *Từ định nghĩa của* exp *ta có:*

1. $\exp(0) = e^0 = 1$.

2. $e^1 = e$.

3. $\forall x > 0, e^x > 1$.

Mệnh đề 4.15. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Để chứng minh ta dùng một bổ đề.

Bổ đề. *Nếu chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *và chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *hội tụ tuyệt đối thì chuỗi* $\sum_n c_n$ *với* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *hội tụ và*
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Chứng minh. Ta viết được với $N \geq 2n$,
$$\left|\sum_{i=0}^{N} c_i - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)\right| = \left|\sum_{n<i,n<j,i+j\leq N} a_i b_j\right|. \tag{4.16}$$

Mặt khác ta chú ý rằng dãy
$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{n} |b_i|\right)\right)_n$$
hội tụ theo n về
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|\right),$$
nên với $\epsilon > 0$ cho trước thì với n đủ lớn ta có
$$\left|\left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{n} |b_i|\right)\right| < \epsilon,$$
dẫn tới với $N \geq 2n$ thì
$$\left|\left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{N} |b_i|\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{n} |b_i|\right)\right| = \sum_{n<i\leq N,n<j\leq N} |a_i b_j| < 2\epsilon, \tag{4.17}$$

So sánh với Phương trình (4.16) ta được

$$\left|\sum_{i=0}^{N} c_i - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)\right| < 2\epsilon.$$

Cũng vì

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)\right)_n$$

hội tụ theo n về

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right),$$

nên lấy n đủ lớn để

$$\left|\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)\right| < \epsilon$$

ta được

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{N} c_i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)\right| &\le \left|\sum_{i=0}^{N} c_i - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)\right| + \\ &\quad + \left|\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)\right| < 3\epsilon.\end{aligned}$$

Vậy dãy $\sum_{i=0}^{N} c_i$ hội tụ theo N về $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)$. □

Chứng minh Mệnh đề 4.15. Áp dụng bổ đề trên, ta viết

$$\begin{aligned}e^x e^y &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n! x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = e^{x+y}.\end{aligned}$$

□

Hệ quả. *Ta có*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0.$
2. $\exp$ *là hàm tăng ngặt.*
3. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$

Chứng minh. Ta có $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, do đó e^x và e^{-x} cùng dấu. Vì một trong hai số là số dương nên số còn lại cũng dương.

Nếu $x < y$ thì $\frac{e^y}{e^x} = e^{y-x} > 1$, do đó $e^y > e^x$.

Cho $M > 0$ bất kì. Với $x > M$ thì $e^x > 1 + x > M$. Vậy $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. Suy ra

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

□

Mệnh đề. $(e^x)' = e^x$.

Chứng minh. Ta xét

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Ta có $e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots$, dẫn tới

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots .$$

Ta đánh giá khi $|h| < 1$ thì

$$\left| \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots \right| \le |h| \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \right) < |h|\,(e-1) \xrightarrow{h\to 0} 0 .$$

Vậy

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

□

Sự tồn tại hàm ngược ln của hàm e^x có thể tiến hành như ở Mệnh đề 4.9.

Định nghĩa. *Với $a > 0$, $a \neq 1$ ta định nghĩa $a^x = e^{x \ln a}$ và $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Ta cũng định nghĩa $1^x = 1$.*

Mệnh đề. *Hàm $y = a^x$ có các tính chất:*

1. $a^{x+y} = a^x a^y$,
2. $(a^x)^y = a^{xy}$,
3. *liên tục,*
4. *khả vi và* $(a^x)' = a^x \ln a$.

Chứng minh. Ta viết chứng minh cho công thức $(a^x)^y = a^{xy}$. Ta có

$$(a^x)^y = \left(e^{x \ln a}\right)^y = e^{(x \ln a) y} = e^{(xy) \ln a} = a^{xy}.$$

Công thức đạo hàm của a^x tới từ công thức đạo hàm hàm hợp và công thức đạo hàm của e^x. □

4.3 Xây dựng hàm mũ bằng tích phân

Trong cách tiếp cận này ta định nghĩa làm ln trước bằng tích phân, sau đó mới định nghĩa hàm mũ exp như làm hàm ngược của hàm ln.

Định nghĩa. *Với* $x > 0$, *định nghĩa*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Định lý cơ bản của phép tính Vi tích phân [BMGT1] lập tức cho

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

Mệnh đề. *Tập giá trị của hàm* $\ln$ *là* $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Ta tìm $\lim_{x\to\infty} \ln x$. Ta có đánh giá

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\, dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \geq \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

Việc chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ phân kì ra vô cùng được biết rõ trong môn Vi tích phân. Mặc dù chứng minh điều này phổ biến dùng tích phân, nhưng có thể chứng minh được mà chỉ dùng đánh giá bất đẳng thức đơn giản:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &\geq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = \infty.\end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

Ta tìm $\lim_{x\to 0^+} \ln x$. Đổi biến $u = \frac{1}{t}$ trong tích phân ta được

$$\int_1^0 \frac{1}{t}\, dt = \int_1^\infty u\left(\frac{-1}{u^2}\right) du = -\infty.$$

Vậy $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Áp dụng Định lý giá trị trung gian cho ln, ta rút ra hàm ln nhận mọi giá trị trung gian trong khoảng $(-\infty, \infty)$. □

Vì có đạo hàm luôn dương nên ln là hàm tăng ngặt, do đó lý luận như ở Mệnh đề 4.9, tham khảo Bài tập 2.7, ln có hàm ngược, ta gọi là exp, có miền xác định là $\mathbb{R}$.

Định nghĩa. *Đặt* $e = \exp(1)$.

Viết $e^x = \exp(x)$.

Lý luận như ở Mệnh đề 4.14, suy ra exp khả vi, và với $y = \exp(x)$ thì

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln' y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp(x).$$

Mệnh đề. $e^x e^y = e^{x+y}$.

Chứng minh. Lấy đạo hàm

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x+y}}{e^x}\right) &= \frac{\left(\frac{d}{dx}e^{x+y}\right)e^x - e^{x+y}\frac{d}{dx}e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}e^x - e^{x+y}e^x}{(e^x)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Suy ra hàm $\frac{e^{x+y}}{e^x}$ là hàm hằng theo x, có hằng số C sao cho $\frac{e^{x+y}}{e^x} = C$. Lấy $x = 0$ được $C = e^y$. □

Định nghĩa. *Với $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, đặt $a^x = e^{x \ln a}$.*

Mệnh đề. *Ta có các tính chất:*

1. $\ln a^x = x \ln a$.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$.
3. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
4. $(e^x)^y = e^{xy}$.
5. $(a^x)^y = a^{xy}$.
6. $(ab)^x = a^x b^x$.

Chứng minh. Vắn tắt như sau.

1. $\ln a^x = \ln e^{x \ln a} = x \ln a$.
2. $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$.
3. $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} e^{\ln y} = xy$.
4. $(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx} = e^{xy}$.
5. $(a^x)^y = \left(e^{x \ln a}\right)^y = e^{xy \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^{xy} = a^{xy}$.
6. $\ln(a^x b^x) = \ln a^x + \ln b^x = x \ln a + x \ln b = x(\ln a + \ln b) = x \ln(ab) = \ln(ab)^x$.

□

Mệnh đề. *Hàm $y = a^x$ khả vi và có đạo hàm là $(a^x)' = a^x \ln a$.*

Chứng minh.

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \frac{d}{dx}\exp(x\ln a) = \exp'(x\ln a)\frac{d}{dx}(x\ln a)\\ &= \exp(x\ln a)\ln a = a^x\ln a.\end{aligned}$$

□

Ghi chú. Tổng kết lại, hóa ra cách xây dựng hàm mũ và hàm log bằng tích phân đơn giản và ngắn họn hơn cả trong ba cách xét ở đây. Nội dung tương tự có trong [Wu20, chapter 7].

Bài tập 4.18. Viết số hữu tỉ từ dạng thập phân thành phân số:

$$0{,}5123412341234\cdots = 0{,}5(1234).$$

Bài tập 4.19. Chứng minh trực tiếp (không rút ra như hệ quả của kết quả tổng quát hơn) rằng tồn tại duy nhất $\sqrt{2}$.

Bài tập 4.20. Chứng minh trực tiếp (không trích dẫn kết quả tổng quát hơn) rằng tồn tại $\sqrt[3]{2}$.

Bài tập 4.21. Chứng minh trực tiếp (không trích dẫn kết quả tổng quát hơn) rằng tồn tại $\ln 2$.

Bài tập 4.22. Viết ra một định nghĩa của 2^e từ phép tính nhân, phép lấy căn, và phép lấy giới hạn.

Bài tập 4.23. Chứng tỏ hàm mũ $f(x) = e^x$ là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân với điều kiện đầu

$$\begin{cases} f' &= f\\ f(0) &= 1.\end{cases}$$

(Gợi ý: xem đây là một phương trình vi phân tuyến tính.)

Bài tập 4.24. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

5 Xây dựng hàm lượng giác

Hàm lượng giác trong chương trình toán trung học được xây dựng dựa trên khái niệm “góc lượng giác” và “số đo góc lượng giác”, tóm tắt như sau [SGKT18, Toán 11, tập 1]:

> Cho hai tia Oa, Ob.
>
> - Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một góc lượng giác có tia đầu Oa, tia cuối Ob, kí hiệu (Oa, Ob).

- Khi tia Om quay một góc α ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α.

> Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này chọn điểm $A(1, 0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là đường tròn lượng giác.
>
> Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng α. Khi đó điểm M được gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.
>
> Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α. Khi đó tung độ y_M của M gọi là sin của α. Hoành độ x_M của M gọi là cos của α.

Các khái niệm "quay", "chiều", "chiều kim đồng hồ", "quét", "dừng", "góc" được miêu tả thông qua những "chuyển động" trên đường tròn, có lẽ được hình dung như những đối tượng vật lý, và được minh họa dựa vào trực quan hình vẽ. Chúng chưa được định nghĩa toán học.

Chương trình 2017 [SGK17, Đại số lớp 10, tr. 136, 137] dùng "chiều dài cung lượng giác" thay vì "số đo góc lượng giác". Tuy nhiên, vì khái niệm chiều dài đường cong phải dùng tới phép tính giới hạn, như thảo luận trong phần tích phân, nên chiều dài cung cùng các tính chất của chúng chưa được thiết lập chặt chẽ trước đó trong chương trình trung học.

Môn "lượng giác" (đo góc) ra đời từ khoảng thiên niên kỉ thứ nhất sau Công nguyên. Một số cơ sở của nó gồm những hiểu biết hình học như sự tỉ lệ và đồng dạng của tam giác còn được biết tới sớm hơn nữa. Trong khi đó môn Vi tích phân ra đời từ thế kỉ 17 và nỗ lực trình bày Vi tích phân một cách suy diễn và chặt chẽ bắt đầu vào khoảng đầu thế kỉ 19. Vì vậy ta không ngạc nhiên là có những vấn đề khi kết nối những kiến thức này với nhau.

5.1 Xây dựng hàm lượng giác từ chiều dài cung và tích phân

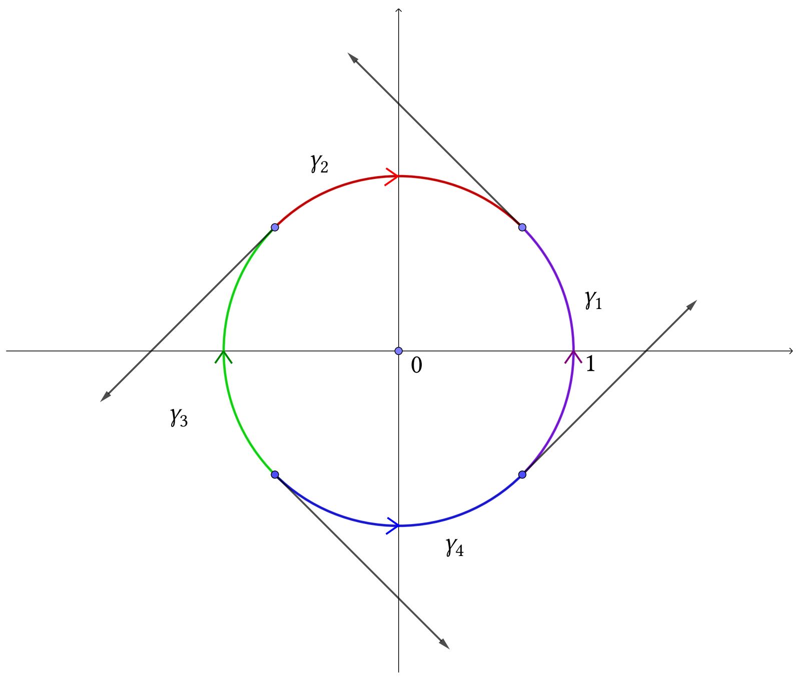
Trong cách tiếp cận này ta cố gắng bám sát và chính xác hóa SGK.

Đặt $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, đây là đường tròn đơn vị.

Đầu tiên ta xây dựng "chuyển động theo chiều dương trên đường tròn đơn vị". Ta đưa ra một ví dụ cụ thể cho một chuyển động như vậy (đây không nhất thiết là cách duy nhất).

Trước hết ta lấy 4 đường đi trên 4 cung của S^1:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(y) &= \left(\sqrt{1-y^2}, y\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_2(x) &= \left(x, \sqrt{1-x^2}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_3(y) &= \left(x, \sqrt{1-x^2}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_4(x) &= \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$



Tiếp theo ta nối 4 đường này thành một đường liên tục, bằng cách nối thông thường các đường đi, tịnh tiến thời gian và đảo chiều nếu cần, khởi đầu tại thời điểm 0 ở điểm $(1,0)$, cụ thể ta đặt

$$\gamma(t) = \begin{cases}
\gamma_1(t), & 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_2\left(-t + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right), & \frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 3\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_3\left(-t + 4\frac{\sqrt{2}}{2}\right), & 3\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 5\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_4\left(t - 6\frac{\sqrt{2}}{2}\right), & 5\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 7\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\gamma_1\left(t - 8\frac{\sqrt{2}}{2}\right), & 7\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 8\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{cases} \tag{5.2}$$

Đường γ thực ra là trơn, vì ta tính và kiểm trực tiếp được là các vectơ vận tốc của 4 đường khớp với nhau tại các điểm nối. Chẳng hạn $\gamma'_-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \gamma'_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\gamma'_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \gamma'_+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1,1)$. Đây là một chuyển động trơn một vòng theo chiều dương trên đường tròn đơn vị xuất phát và kết thúc tại điểm $(1,0)$.

Tiếp theo ta xây dựng một chuyển động theo chiều ngược lại. Một cách đơn giản là lấy đường

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma\left(8\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right), 0 \le t \le 8\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đây là một chuyển động trơn một vòng theo chiều âm trên đường tròn đơn vị.

Giờ ta mở rộng hai đường này, tức là mở rộng hai chuyển động, lên miền xác định $\mathbb{R}$, sao cho chúng tuần hoàn với chu kì $8\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta chia đường thẳng thực thành các đoạn có chiều dài $8\frac{\sqrt{2}}{2}$ với 0 là một điểm chia. Với mỗi $t \in \mathbb{R}$ tồn tại duy nhất $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $n8\frac{\sqrt{2}}{2} \le t < 8\frac{\sqrt{2}}{2} + n8\frac{\sqrt{2}}{2}$, cụ thể $n = \left\lfloor \frac{t}{8\frac{\sqrt{2}}{2}} \right\rfloor$. Đặt

$$\gamma(t) = \gamma\left(t - n8\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

và

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}\left(t - n8\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Như vậy đường γ và $\bar{\gamma}$ tuần hoàn với chu kì $8\frac{\sqrt{2}}{2}$, là hai chuyển động trơn theo một chiều cố định trên đường tròn đơn vị với miền xác định thời gian là $\mathbb{R}$. Đường γ và $\bar{\gamma}$ đóng vai trò của hai chuyển động theo chiều dương và theo chiều âm tạo nên "góc lượng giác" và "cung lượng giác".

Định nghĩa. *Đường γ và $\bar{\gamma}$ xác định trên mỗi đoạn số thực $[a, b]$ được gọi là một* **góc lượng giác** *hay một* **cung lượng giác***.*

Để tính chiều dài cung ta tiến hành theo những ý như trong tích phân đường ([VGt3]): chiều dài đường đi bằng tích phân của tốc độ theo thời gian.

Định nghĩa. **Số đo góc lượng giác** *cũng là* **chiều dài cung lượng giác** *của cung lượng giác theo chiều dương $\gamma(t)$, $a \le t \le b$, được cho bởi*

$$\alpha = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \tag{5.3}$$

và của cung lượng giác theo chiều âm $\bar{\gamma}(t)$, $a \le t \le b$, được cho bởi

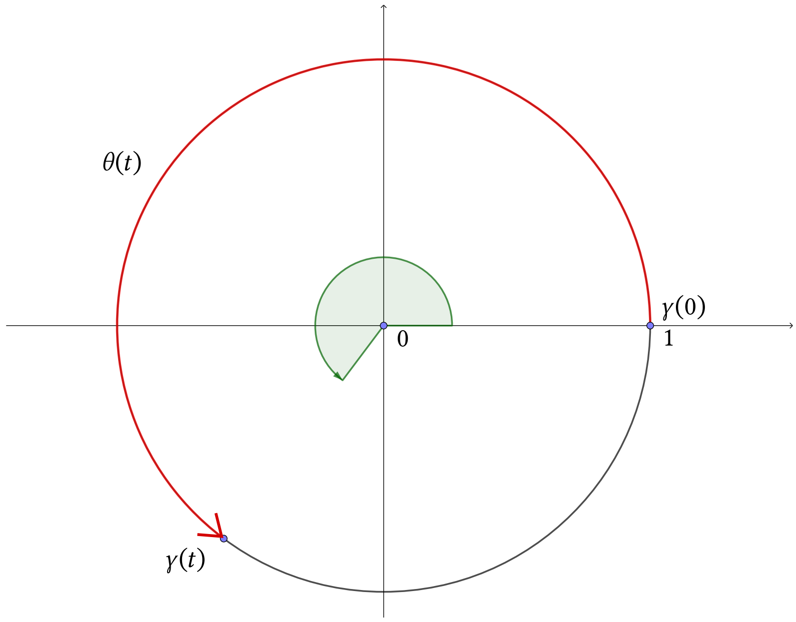
$$\alpha = -\int_a^b |\bar{\gamma}'(t)|\, dt. \tag{5.4}$$

Tiếp theo ta tìm điểm biểu diễn một góc lượng giác có số đo cho trước.

Đặt

$$\theta(t) = \int_0^t |\gamma'(u)|\, du \tag{5.5}$$

thì khi $t \ge 0$ đây là chiều dài cung lượng giác γ từ 0 (ứng với điểm $\gamma(0) = (1, 0)$) tới t (ứng với điểm $\gamma(t)$), xem Hình 5.6.



Hình 5.6: Cung lượng giác $\gamma(t)$, và chiều dài cung lượng giác $\theta(t)$.

Tương tự, đặt

$$\bar{\theta}(t) = -\int_0^t |\bar{\gamma}'(u)|\, du$$

thì khi $t \geq 0$ đây là chiều dài cung lượng giác $\bar{\gamma}$ từ 0 (ứng với điểm $\bar{\gamma}(0) = (1, 0)$) tới t (ứng với điểm $\bar{\gamma}(t)$).

Ta tính toán trực tiếp được $\theta'(t) = |\gamma'(t)| \geq 1$. Suy ra θ là một hàm tăng ngặt, trơn, có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Tương tự, $\bar{\theta}'(t) = -|\bar{\gamma}'(t)| \leq -1$, nên $\bar{\theta}$ là một hàm giảm ngặt, trơn, có tập giá trị là $\mathbb{R}$. (Bài tập 5.15.)

Tới đây, lý luận như khi xét hàm ngược ở các mệnh đề ở phần hàm mũ 4.9, 4.13, 4.14, và Bài tập 2.7, ta suy ra θ có hàm ngược trơn θ^{-1} và $\bar{\theta}$ có hàm ngược trơn $\bar{\theta}^{-1}$.

Với số đo góc lượng giác $\alpha \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ lần lượt là tọa độ x và tọa độ y của điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α, là điểm $\gamma(t)$ trong đó $t = \theta^{-1}(\alpha)$ nếu $\alpha \geq 0$ và là điểm $\bar{\gamma}(t)$ trong đó $t = \bar{\theta}^{-1}(\alpha)$ nếu $\alpha < 0$:

Định nghĩa (cos và sin). *Với* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \begin{cases} \gamma(\theta^{-1}(\alpha)), & \alpha \geq 0 \\ \bar{\gamma}(\bar{\theta}^{-1}(\alpha)), & \alpha < 0. \end{cases}$$

Ta có thể tiếp tục xét riêng trường hợp góc theo chiều dương và trường hợp góc theo chiều âm, nhưng bây giờ ta đưa ra một công thức chung, giúp trình bày ngắn hơn và tránh phải xét riêng tính liên tục và tính trơn tại 0.

Mệnh đề.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (\cos\alpha, \sin\alpha) = \gamma(\theta^{-1}(\alpha)). \tag{5.7}$$

Chứng minh. Với mỗi $t \in \mathbb{R}$ có $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $n8\frac{\sqrt{2}}{2} \le t < 8\frac{\sqrt{2}}{2} + n8\frac{\sqrt{2}}{2}$, từ đó

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}\left(t - n8\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \gamma\left(8\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(t - n8\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \gamma(-t).$$

Dùng $\bar{\gamma}'(t) = -\gamma'(-t)$ và dùng phép đổi biến $v = -u$ ta được

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(t) &= -\int_0^t |\bar{\gamma}'(u)|\,du = -\int_0^t |-\gamma'(-u)|\,du\\ &= -\int_0^{-t} |\gamma'(v)|\,d(-v) = \int_0^{-t} |\gamma'(u)|\,du\\ &= \theta(-t).\end{aligned}$$

Như vậy nếu $t = \bar{\theta}^{-1}(\alpha)$ thì $-t = \theta^{-1}(\alpha)$, nên $\bar{\gamma}(\bar{\theta}^{-1}(\alpha)) = \bar{\gamma}(-\theta^{-1}(\alpha)) = \gamma(\theta^{-1}(\alpha))$. □

Ta định nghĩa *2π là chiều dài của đường tròn đơn vị* tính bằng chuyển động γ đi đúng một vòng. Giá trị này là $\theta\left(8\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, và từ (5.2) và (5.1), đó chính là tổng chiều dài của bốn đường γ_i, $1 \le i \le 4$, vậy:

Định nghĩa (số π).

$$2\pi = \theta\left(8\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \int_0^{8\frac{\sqrt{2}}{2}} |\gamma'(t)|\,dt = 8\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Với các định nghĩa trên của cos, sin, π, bây giờ ta chứng minh chúng có các tính chất mong muốn.

Mệnh đề 5.8. *Các tính chất cơ bản của* sin *và* cos*:*

1. sin *và* cos *là các hàm số xác định trên* $\mathbb{R}$*, có giá trị trên* $[-1, 1]$.
2. $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
3. sin *và* cos *là các hàm tuần hoàn có chu kì là* 2π. [4]
4. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.
5. $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.

Chứng minh. Ta lần lượt xét các tính chất.

1. Ta đã có sin và cos là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
2. Do điểm $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ nằm trên đường tròn đơn vị nên $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

[4] Ta dùng thuật ngữ chu kì không yêu cầu đó là số nhỏ nhất giúp giá trị hàm lặp lại.

3. Vì γ là hàm có chu kì $8\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $|\gamma'|$ cũng có chu kì $8\frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ (5.5):

$$\begin{aligned}
\theta\left(t + 8\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \int_0^{t+8\frac{\sqrt{2}}{2}} |\gamma'(u)|\, du \\
&= \int_0^t |\gamma'(u)|\, du + \int_t^{t+8\frac{\sqrt{2}}{2}} |\gamma'(u)|\, du \\
&= \theta(t) + \int_0^{8\frac{\sqrt{2}}{2}} |\gamma'(u)|\, du \\
&= \theta(t) + \theta\left(8\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \theta(t) + 2\pi.
\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là số đo góc lượng giác cũng là chiều dài cung lượng giác tăng 2π sau mỗi vòng quay theo chiều dương của góc lượng giác γ. Lấy hàm ngược thì $\theta^{-1}(\alpha + 2\pi) = \theta^{-1}(\alpha) + 8\frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
(\cos(\alpha + 2\pi), \sin(\alpha + 2\pi)) &= \gamma(\theta^{-1}(\alpha + 2\pi)) \\
&= \gamma\left(\theta^{-1}(\alpha) + 8\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \gamma(\theta^{-1}(\alpha)) = (\cos\alpha, \sin\alpha).
\end{aligned}$$

4. Xét $\sin 0$. Vì $\theta(0) = 0$ nên $t(0) = 0$. Suy ra $\sin 0 = y(t(0)) = y(0)$, chính là tọa độ y của điểm $\gamma(0) = (1, 0)$, do đó bằng 0. Vậy $\sin 0 = 0$.

   Tương tự $\cos 0 = x(t(0)) = x(0)$, là tọa độ x của điểm $\gamma(0) = (1, 0)$, bằng 1. Vậy $\cos 0 = 1$.

5. Xét $\cos\frac{\pi}{4}$. Ta dự đoán cung lượng giác $\theta = \frac{\pi}{4}$ đạt được tại thời điểm $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Để kiểm ta có thể tính trực tiếp từ (5.5) và (5.2):

$$\begin{aligned}
\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

   Từ đó $\theta^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nên $(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = \gamma\left(\theta^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \gamma\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. Dùng đạo hàm của hàm hợp, ta viết,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}(\cos\alpha, \sin\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\gamma(\theta^{-1}(\alpha)) = \gamma'(\theta^{-1}(\alpha))(\theta^{-1})'(\alpha) \\
&= \gamma'(\theta^{-1}(\alpha))\frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(\alpha))} = \gamma'(\theta^{-1}(\alpha))\frac{1}{|\gamma'(\theta^{-1}(\alpha))|}.
\end{aligned}$$

   Đây chính là tiếp xúc đơn vị theo chiều dương của đường tròn đơn vị, xem

Hình 5.6. Tại điểm $(x, y) = (\gamma(\theta^{-1}(\alpha)) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ đó chính là vectơ $(-y, x) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

□

Mệnh đề 5.9 (công thức cộng).

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Chứng minh. Đặt

$$f(x) = \cos(x + y) - (\cos x \cos y - \sin x \sin y).$$

Tính trực tiếp đạo hàm theo x, ta được

$$f'(x) = -\sin(x + y) - (-\sin x \cos y - \cos x \sin y)$$

$$f''(x) = -\cos(x + y) - (-\cos x \cos y + \sin x \sin y).$$

Ta nhận thấy $f'' = -f$. Nhân hai vế với f' ta được

$$f''f' + f'f = 0,$$

suy ra

$$\left(f'^2 + f^2\right)' = 0,$$

do đó $f'^2 + f^2$ là hàm hằng. Do $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $\left(f_2'^2 + f_2^2\right)(0) = 0$, nên $f'^2 + f^2 = 0$. Vậy $f = 0$, và ta có công thức thứ nhất.

Chứng minh cho công thức thứ hai là tương tự, Bài tập 5.14. □

Ta rút ra các tính chất thường dùng khác [SGKT18, Toán 11, tập 2, tr. 17]:

Mệnh đề 5.10. *Các tính chất thường dùng:*

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
3. $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$.
4. $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$.
5. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.
6. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.
7. $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$.

8. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$.

Ta chứng minh hai tính chất đầu, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ và $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, các tính chất còn lại được để ở Bài tập 5.13.

Chứng minh bằng góc lượng giác. Ta làm tương tự lý luận của SGK [SGKT18, Toán 11, tập 1, tr. 17]. Do tính tuần hoàn với chu kì 2π của cos và sin nên ta chỉ cần xét trong một chu kì, $0 \le \alpha < 2\pi$. Ta xét trường hợp $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$, các trường hợp còn lại tương tự. Ta kiểm hai điểm $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ và $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ đối xứng qua trục x, nhưng không dùng hình học.

Trước hết ta kiểm dự đoán nếu $\theta(t) = \alpha$ thì $\theta(-t) = -\alpha$, tức là $t = \theta^{-1}(\alpha) = -\theta^{-1}(-\alpha)$. Ta viết với phép đổi biến $u = -v$,

$$-\alpha = -\int_0^t |\gamma'(u)|\,du = \int_0^{-t} |\gamma'(-v)|\,dv.$$

Vì $0 \le u \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $|\gamma'(u)| = |\gamma_1'(u)| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Vì $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le -t \le v \le 0$, nên $|\gamma'(v)| = |\gamma_1'(v)| = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = |\gamma'(u)| = |\gamma'(-v)|$. Ta được

$$-\alpha = -\int_0^t |\gamma'(u)|\,du = \int_0^{-t} |\gamma'(-v)|\,dv = \int_0^{-t} |\gamma'(v)|\,dv = \theta(-t).$$

Ta có $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \gamma_1(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$, trong khi

$$(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)) = \gamma(\theta^{-1}(-\alpha)) = \gamma(-\theta^{-1}(\alpha)) = \gamma(-t) = \gamma_1(-t) = (\sqrt{1-t^2}, -t),$$

đối xứng qua trục x. □

Chứng minh bằng công thức cộng. Áp dụng công thức cộng ở Mệnh đề 5.9 cho α và $-\alpha$ ta được

$$\cos(\alpha - \alpha) = \cos 0 = 1 = \cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha) \tag{5.11}$$

và

$$\sin(\alpha - \alpha) = \sin 0 = 0 = \sin\alpha\cos(-\alpha) + \cos\alpha\sin(-\alpha). \tag{5.12}$$

Nhân phương trình (5.11) với $\sin\alpha$ rồi thế (5.12) vào ta được

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin\alpha\cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin^2\alpha\sin(-\alpha)\\ &= -\cos^2\alpha\sin(-\alpha) - \sin^2\alpha\sin(-\alpha) = -\sin(-\alpha).\end{aligned}$$

Thế vào (5.12) ta được nếu $\sin\alpha \neq 0$ thì $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Nếu $\sin\alpha = 0$ thì (5.11) cho $\cos\alpha\cos(-\alpha) = 1$ nên $\cos\alpha$ và $\cos(-\alpha)$ cùng dấu và $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = 1$ hoặc $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = -1$.

Ta thấy chứng minh này không cần làm việc trực tiếp với cách xây dựng góc lượng giác. □

Mệnh đề (hàm lượng giác ngược). 1. *Trên* $[0, \pi]$ *thì* cos *là hàm giảm ngặt lên đoạn* $[-1, 1]$, *có hàm ngược gọi là* arccos.

2. *Trên* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *thì* sin *là hàm tăng ngặt lên đoạn* $[-1, 1]$, *có hàm ngược gọi là* arcsin.

Chứng minh. Với $\alpha \in [0, \pi]$, từ định nghĩa của π và từ tính đối xứng của γ, ta có $t = \theta^{-1}(\alpha) \in [0, 4\frac{\sqrt{2}}{2}]$. Ta có thể kiểm từ công thức định nghĩa điểm $\gamma(t)$ rằng tọa độ x của điểm này, tức $\cos\alpha$, giảm ngặt từ 1 xuống -1. Hoặc có thể kiểm rằng tọa độ y của điểm $\gamma(t)$, tức $\sin\alpha$, là dương với $t \in (0, 4\frac{\sqrt{2}}{2})$, nên với $\alpha \in (0, \pi)$ thì $\cos' \alpha = -\sin\alpha < 0$.

Tương tự, với $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì $t = \theta^{-1}(\alpha) \in [-2\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\frac{\sqrt{2}}{2}]$. Ta có thể kiểm rằng tọa độ y của điểm $\gamma(t)$ tăng ngặt từ -1 lên 1, hoặc có thể kiểm rằng tọa độ x của điểm $\gamma(t)$ là dương với $t \in (-2\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\frac{\sqrt{2}}{2})$, nên với $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ thì $\sin' \alpha = \cos\alpha > 0$. □

Ghi chú. Chương trình trung học phải thừa nhận tính liên tục của hàm lượng giác [SGKT18, Toán 11, tập 1, tr. 85], và để rút ra đạo hàm phải thừa nhận một kết quả trung gian về giới hạn [SGKT18, Toán 11, tập 2, tr. 44]. Các công thức thường dùng ở Mệnh đề 5.8, Mệnh đề 5.9, và Mệnh đề 5.10 được đưa ra sau những lý luận trên hình vẽ cho trường hợp cụ thể và sử dụng Hình học phẳng Euclid kết hợp với Hình học tọa độ. Để trình bày nội dung này một cách suy diễn thì trước hết phải trình bày được một cách suy diễn những nội dung liên quan của Hình học phẳng Euclid kết hợp với Hình học tọa độ. Tài liệu [Wu20] dành nhiều công sức cho việc này. Tuy nhiên các hệ tiên đề của Hình học phẳng Euclid nằm ngoài hệ suy diễn từ số thực.

Bài tập 5.13. Chứng minh các công thức ở Mệnh đề 5.10 (từ những kết quả đã được chứng minh).

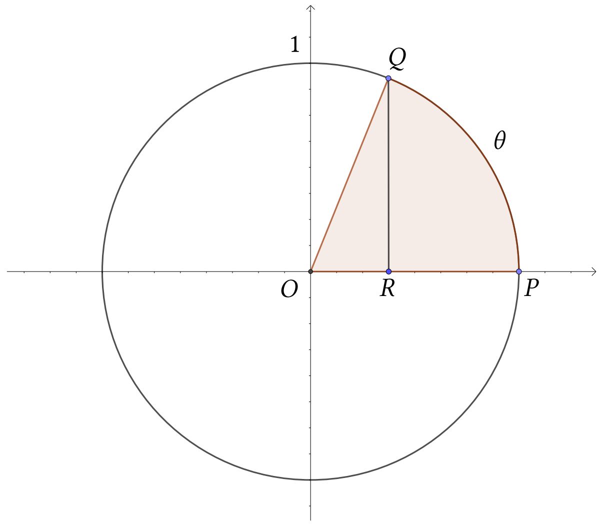
Bài tập 5.14. Chứng minh công thức cộng ở Mệnh đề 5.9:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Bài tập 5.15. Kiểm rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là trơn và $f' \geq c > 0$ trong đó c là một hằng số thực thì f là một song ánh lên $\mathbb{R}$.

5.2 Xây dựng hàm lượng giác từ diện tích và tích phân

Xét một điểm $Q = (x, y)$ trên đường tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ trên mặt phẳng xOy. Nếu θ là "chiều dài cung" từ điểm $P = (1, 0)$ tới điểm Q theo đường tròn thì ta dự đoán diện tích của hình quạt OPQ đúng bằng $\theta/2$. Từ đó ta sẽ dùng diện tích của hình quạt OPQ để định nghĩa θ, thay vì dùng chiều dài cung. Cách tiếp cận này được trình bày trong [Spi67].



Diện tích hình quạt OPQ được tính dựa trên tích phân như sau. Xét trường hợp $0 < x < 1$. Gọi R là hình chiếu của Q xuống trục Ox. Diện tích của hình quạt OPQ bằng diện tích của tam giác OQR cộng với diện tích của "hình thang cong" RQP, do đó được cho bởi

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Có thể kiểm được ngay là công thức này đúng với $-1 \leq x \leq 1$.

Ta dự đoán $\theta = 2A$, vậy ta định nghĩa

$$\theta = 2A(x).$$

Vì ta dự đoán

$$x = \cos\theta$$

nên ta hướng tới định nghĩa cos chính là hàm ngược $\theta \mapsto x$. Như thế hàm ta đang có $x \mapsto \theta = 2A(x)$, tức là hàm $\theta = 2A$, chính là hàm arccos. Vậy ta đưa ra định nghĩa

Định nghĩa 5.16. *Định nghĩa hàm* arccos*:*

$$\begin{aligned}\arccos : [-1,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \arccos x = \theta = 2A(x) = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Hàm cos *được định nghĩa là hàm ngược của hàm* arccos.

Ta kiểm tra đây là một định nghĩa tốt. Hàm $\theta = 2A(x)$ liên tục trên $[-1,1]$. Với $-1 < x < 1$ thì

$$2A'(x) = \left[\sqrt{1-x^2} + \frac{x(-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - 2\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0.$$

Vậy $2A(x)$ là hàm giảm ngặt, liên tục, và do đó là một song ánh từ [-1,1] lên một đoạn số thực. Miền giá trị của θ là từ 0 (khi $x = 1$) tới $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ (khi $x = -1$). Ta dự đoán giá trị cuối này chính là số π, và ta đưa ra định nghĩa số π:

Định nghĩa 5.17.

$$\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Ta có thể nhận ra π chính là diện tích của miền bao bởi hình tròn đơn vị.

Như vậy hàm cos có miền xác định là $[0,\pi]$ và có miền giá trị là $[-1,1]$, là một hàm liên tục.

Ví dụ 5.18. Từ định nghĩa, $\arccos 0 = 2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\arccos 1 = 2\int_1^1\sqrt{1-t^2}\,dt = 0$ nên $\cos 0 = 1$, $\arccos(-1) = 2\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$ nên $\cos\pi = -1$.

Ta định nghĩa hàm sin:

Định nghĩa 5.19. *Với $\theta \in [0,\pi]$ thì*

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

Như thế sin cũng là một hàm liên tục trên đoạn $[0,\pi]$.

Mệnh đề 5.20. *Với $\theta \in (0,\pi)$ thì*

$$\cos'\theta = -\sin\theta,$$
$$\sin'\theta = \cos\theta.$$

Chứng minh. Công thức đạo hàm hàm ngược của Vi tích phân đảm bảo cho ta rằng hàm ngược cos khả vi. Ta có

$$\theta = 2A(\cos\theta)$$

do đó lấy đạo hàm hai vế theo θ ta được

$$1 = 2A'(\cos\theta)\cos'\theta,$$

dẫn tới

$$\cos'\theta = \frac{1}{2A'(\cos\theta)} = -\sqrt{1-x^2}\Big|_{x=\cos\theta} = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sin\theta.$$

Bây giờ

$$\sin'\theta = \left(\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)' = \frac{-\cos\theta\cos'\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \cos\theta.$$

□

Ta mở rộng miền xác định cho cos như sau. Nếu $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ta định nghĩa $\cos\theta = -\cos(\theta-\pi)$. Nếu $\theta \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất số $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $\theta \in [k2\pi, (k+1)2\pi)$, và ta định nghĩa $\cos\theta = \cos(\theta - k2\pi)$. Tương tự, nếu $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ta định nghĩa

$\sin\theta = -\sin(\theta - \pi)$, nếu $\theta \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất số $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $\theta \in [k2\pi, (k+1)2\pi)$, và ta định nghĩa $\sin\theta = \sin(\theta - k2\pi)$.

Bây giờ ta khẳng định sin và cos có các tính chất cơ bản ở Mệnh đề 5.8.

Chứng minh Mệnh đề 5.8. Từ các định nghĩa và kết quả đã có ta lập tức rút ra các kết quả này, chỉ còn cần kiểm công thức đạo hàm ở hai giá trị 0 và π. Ta tính giới hạn, dùng phương pháp l'Hôpital của phép tính vi phân:

$$\cos'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - \cos 0)'}{(x-0)'} = \lim_{x\to 0} -\sin x = -\sin 0.$$

Tại π ta có thể làm tương tự. □

Tiếp theo ta có thể lặp lại Mệnh đề 5.9 và Mệnh đề 5.10.

Ghi chú. Trong toán chuyên ngành nâng cao hơn người ta có thể dùng các công cụ khác để xây dựng hàm lượng giác, như chuỗi.

Bài tập 5.21. Chứng tỏ $f = \cos$ và $g = \sin$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình vi phân với điều kiện đầu

$$\begin{cases} f' &= -g \\ g' &= f \\ f(0) &= 1 \\ g(0) &= 0. \end{cases}$$

(Gợi ý: tham khảo chứng minh của Mệnh đề 5.9).

Bài tập 5.22 (radian). Common Core State Standards là chuẩn đầu ra cốt lõi cho chương trình giáo dục phổ thông nước Mỹ. Về hàm lượng giác, chuẩn này chỉ yêu cầu về hàm lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông. Yêu cầu về chiều dài cung tròn là như sau [5]:

> Find arc lengths of sectors of circles: Derive using similarity the fact that the length of the arc intercepted by an angle is proportional to the radius, and define the radian measure of the angle as the constant of proportionality.
>
> Tìm chiều dài của cung tròn: Suy luận bằng sự đồng dạng sự thật là chiều dài của cung được chặn bởi một góc là tỉ lệ với bán kính [6], và định nghĩa số đo radian của một góc như là hằng số tỉ lệ.

Phần tương ứng trong chương trình của Việt Nam [SGK17, Đại số lớp 10, tr. 136, 137] ghi:

> Định nghĩa: Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad. Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $R\alpha$.

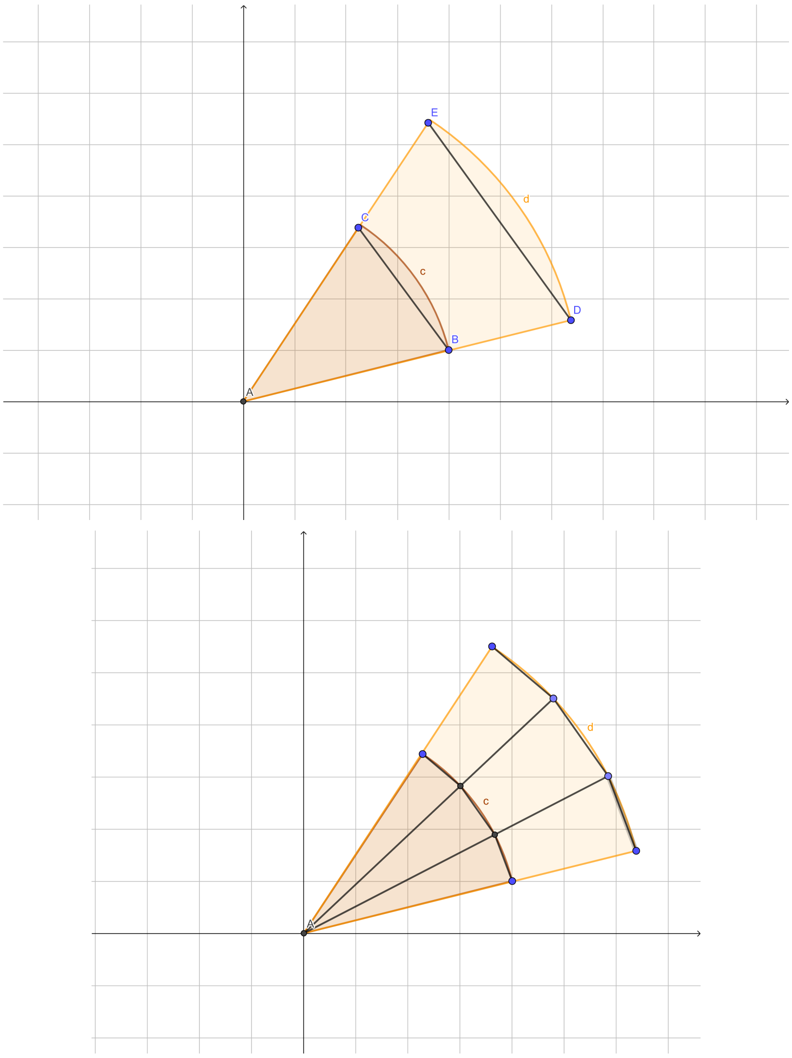
Chương trình 2018 [SGKT18, Toán 11, tr. 10] ghi:

> Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là góc có số đo 1 rad. Góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài αR.

1. Hãy giải thích cách tiếp cận của Common Core. Xem gợi ý ở Hình 5.23.

[5] `https://www.thecorestandards.org/Math/Content/HSG/C/`

[6] bán kính trong tiếng Anh là radius



Hình 5.23: Chiều dài cung tròn chắn bởi một góc tỉ lệ với bán kính, từ sự đồng dạng, rồi qua giới hạn.

2. Hãy so sánh với cách tiếp cận trong chương trình Việt Nam và nhận xét.

Tài liệu

[Apo69] Tom M. Apostol, *Calculus*, vol. 1, John Wiley and Sons, 1967.

[BMGT1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Vi tích phân 1*, `https://sites.google.com/view/math-hcmus-edu-vn-giaitich`

[Fic77] G. M. Fichtengôn, *Cơ sở Giải tích toán học*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977. Bản tiếng Anh: G. M. Fichtengolt's, *The fundamentals of Mathematical Analysis*, Pergamon Press, 1965.

[HS65] Edwin Hewitt, Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965.

[HJ99] Karen Hrbacek, Thomas Jech, *Introduction to set theory*, 3rd ed., Marcel Dekker, 1999.

[Kha96] Phan Quốc Khánh, *Phép tính Vi tích phân*, NXB Giáo dục, 1996.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate Analysis*, Springer, 2nd ed, 1997.

[MSM63] George D. Mostow, Joseph H. Sampson, Jean-Piere Meyer, *Fundamental structures of Algebra*, McGraw-Hill, 1963.

[PTTT] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích - hàm một biến*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2012.

[Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.

[Spi67] Michael Spivak, *Calculus*, Addison-Wesley, 1967.

[SGK17] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Sách giáo khoa toán trung học chương trình 2017*, NXB Giáo dục, 2017.

[SGKT18] *Sách giáo khoa toán trung học chương trình 2018, bộ Chân trời sáng tạo*, NXB Giáo dục, 2024.

[VGt3] Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng tích phân bội và Giải tích vectơ*, `https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`

[Wu20] Hung-Hsi Wu, *Pre-calculus, Calculus, and Beyond*, AMS, 2020. Một số tài liệu liên quan có ở `https://math.berkeley.edu/~wu/`