Giải tích số cho phương trình vi phân

Lê Ánh Hạ   Nguyễn Đăng Khoa

Mục tiêu môn học

- Cung cấp các phương pháp số để giải phương trình vi phân.
- Áp dụng các phương pháp số để tìm nghiệm xấp xỉ.
- Đánh giá sự hội tụ và sai số của các phương pháp.
- Lập trình biểu diễn nghiệm trên máy tính bằng Python, Matlab.

Tài liệu môn học

- **Kendall Atkinson, Weimin Han, David Stewart (2009):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons.
- **John S. Butler (2021):** *Numerical Methods for Differential Equations with Python.*
- **Qingkai Kong, Timmy Siauw, Alexandre Bayen (2020):** *Python Programming and Numerical Methods*, Academic Press.
- **Endre Süli (2022):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations.*

1. Các biến thể của phương pháp Euler
    - Tính ổn định của phương pháp số
    - Phương pháp Euler lùi
    - Phương pháp Euler tổng quát
    - Phương pháp dựa trên Quy tắc Hình thang
    - Phương pháp dạng hiện một bước tổng quát

2. Phương pháp Runge-Kutta
    - Phương pháp Taylor
    - Phương pháp Runge-Kutta hiện
    - Phương pháp Runge-Kutta ẩn

Xét bài toán tổng quát

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t))\,, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Câu hỏi ổn định cho bài toán này quá phức tạp.

Thay vào đó, ta xét tính ổn định của phương pháp số cho bài toán mô hình đơn giản hơn sau:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t) + g(t)\,, \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Giả sử $y(t)$ là nghiệm của phương trình (1.2), và $y_\epsilon(t)$ là nghiệm với dữ liệu ban đầu bị nhiễu $y_0 + \epsilon$:

$$y'_\epsilon(t) = \lambda y_\epsilon(t) + g(t)\,, \qquad y_\epsilon(0) = y_0 + \epsilon.$$

Đặt $\delta_\epsilon(t)$ là sự sai khác của hai nghiệm trên:

$$\delta_\epsilon(t) = y_\epsilon(t) - y(t)\,.$$

Bằng cách trừ phương trình (1.2) từ phương trình của $y_\epsilon(t)$, ta thu được:

$$\delta'_\epsilon(t) = \lambda\delta_\epsilon(t)\,, \qquad \delta_\epsilon(0) = \epsilon.$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$\delta_\epsilon(t) = \epsilon e^{\lambda t}.$$

Xét hàm ${}^{\delta(t)}/_{\epsilon}$ thay vì $\delta_\epsilon(t)$, ta thu được bài toán mô hình sau đây, thường được sử dụng để kiểm tra sự hiệu quả của các phương pháp số:

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= \lambda\delta(t)\,, && t > 0, \\ \delta(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Trong phần tiếp theo, khi ta đề cập đến bài toán mô hình (1.3), ta luôn giả sử rằng hằng số $\lambda < 0$. Nghiệm chính xác của bài toán (1.3) là:

$$\delta(t) = e^{\lambda t}, \tag{1.4}$$

mà nghiệm này giảm theo hàm mũ khi $t \to \infty$ vì tham số λ ta đang xét nhận giá trị âm.

Tính chất ổn định mà ta mong muốn đối với một phương pháp số là khi áp dụng nó cho (1.3), nghiệm số thỏa mãn

$$\delta_h(t_n) \to 0 \quad \text{khi} \quad t_n \to \infty \tag{1.5}$$

với mọi lựa chọn của bước h.

Tập hợp các giá trị $h\lambda$ mà tại đó $\delta_h(t_n) \to 0$ khi $n \to \infty$, được gọi là *vùng ổn định tuyệt đối* của phương pháp số. Việc sử dụng $h\lambda$ xuất hiện một cách tự nhiên từ phương pháp số, như ta sẽ thấy.

Xét phương pháp Euler áp dụng cho bài toán mẫu (1.3). Ta có

$$D_{n+1} = D_n + h\lambda D_n = (1 + h\lambda)\, D_n, \quad n \geq 0, \quad D_0 = 1.$$

Bằng lập luận quy nạp, ta chứng minh được

$$D_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n \geq 0. \tag{1.6}$$

Với một điểm nút cố định $\bar{t} := t_n = nh$, khi $n \to \infty$, ta có

$$D_n = \left(1 + \frac{\lambda \bar{t}}{n}\right)^n \to e^{\lambda \bar{t}}.$$

Giới hạn này thu được bằng cách sử dụng quy tắc L'Hopital. Điều này xác nhận tính hội tụ của phương pháp Euler. Ta nhấn mạnh rằng đây là một tính chất tiệm cận theo nghĩa nó đúng khi $h \to 0$.

Từ công thức (1.6), ta thấy rằng $D_n \to 0$ khi $n \to \infty$ khi và chỉ khi

$$|1 + h\lambda| < 1.$$

Với λ là số thực âm, điều kiện trở thành

$$-2 < h\lambda < 0. \tag{4.7}$$

Điều này dẫn đến một khoảng điều kiện cho h mà ta có thể áp dụng phương pháp Euler, cụ thể là $0 < h < -2/\lambda$.

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân lùi

Giờ ta xét cách xấp xỉ đạo hàm sử dụng công thức sai phân lùi:

$$y'(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}. \tag{1.7}$$

Với $n \geq 1$, thay $t = t_n$ vào công thức (1.7), ta được:

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h}.$$

Sử dụng phương trình $y'(t) = f(t, y(t))$, ta viết lại công thức trên thành

$$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + hf(t_n, y(t_n)). \tag{1.8}$$

Phương pháp Euler lùi

Phương pháp Euler lùi

Phương pháp Euler lùi được định nghĩa bằng cách tính chính xác theo công thức (1.8):

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_{n+1}, Y_{n+1}), \qquad \text{với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{1.9}$$

Như mọi khi, ta chọn $Y_0 = y_0$ hoặc một xấp xỉ gần với nó $Y_0 \approx y_0$.

Để phân biệt, từ đây khi nhắc đến phương pháp Euler thông thường đã xét đầu tiên, ta sẽ gọi là *phương pháp Euler tiến*.

Đầu tiên, ta cũng thử với trường hợp bài toán mô hình (1.3)

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= \lambda\delta(t)\,, & t > 0, \\ \delta(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + h\lambda D_{n+1}, \\ D_{n+1} &= (1 - h\lambda)^{-1} D_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Sử dụng điều này cùng với $y(0) = 1$, ta thu được

$$D_n = (1 - h\lambda)^{-n}\,. \tag{1.10}$$

Với bất kỳ bước $h > 0$, ta có $|1 - h\lambda| > 1$ do đó $D_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Điểm khác biệt chính giữa hai phương pháp là đối với phương pháp Euler lùi, tại mỗi bước thời gian, ta cần giải phương trình

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) \tag{1.11}$$

đối với Y_{n+1}.

Định nghĩa 1.1

1. Các phương pháp trong đó Y_{n+1} phải được tìm bằng cách giải bài toán tìm nghiệm được gọi là *phương pháp ẩn (implicit method)*, vì Y_{n+1} được xác định thông qua việc giải một phương trình.
2. Ngược lại, các phương pháp cho Y_{n+1} trực tiếp được gọi là *phương pháp tường minh (explicit method)*.

Phương pháp Euler tiến là phương pháp tường minh, trong khi *phương pháp Euler lùi* là phương pháp ẩn.

Phương pháp Euler tổng quát (phương pháp θ)

Cho $Y_0 = y_0$ hoặc một xấp xỉ gần với nó $Y_0 \approx y_0$. Với tham số $\theta \in [0, 1]$, phương pháp Euler tổng quát được định nghĩa bằng cách tính:

$$Y_{n+1} = Y_n + h\left[(1-\theta)\, f(t_n, Y_n) + \theta f(t_{n+1}, Y_{n+1})\right]. \tag{1.12}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.
Phương pháp này dựa vào một tham số $\theta \in [0, 1]$ nên đôi khi còn được gọi là phương pháp θ.

Phương pháp Euler tiến và *Euler lùi* là trường hợp đặc biệt của *phương pháp Euler tổng quát* lần lượt tương ứng với giá trị $\theta = 0$ và $\theta = 1$.

Sai số của phương pháp Euler tổng quát

Bằng các kỹ thuật tương tự, ta có đánh giá sai số như sau

$$\max_{0\le n\le N} |\mathsf{E}_n| \le |\mathsf{E}_0| \exp\left(\frac{(T_{\max}-t_0)\,L}{1-\theta L h}\right) + \frac{h}{L}\left\{\left|\frac{1}{2}-\theta\right| M_2 + \frac{1}{3} h M_3\right\}\left[\exp\left(\frac{(T_{\max}-t_0)\,L}{1-\theta L h}\right)-1\right],$$

với $M_2 := \max_{t\in[t_0,T_{\max}]} |y''(t)|$ và $M_3 := \max_{t\in[t_0,T_{\max}]} |y'''(t)|$.

Chú ý rằng, khi $|\mathsf{E}_0|$, tức là khi $Y_0 = y_0$, với cách chọn

$$\theta = \frac{1}{2}$$

thì ta có bậc hội tụ của sai số là bậc 2, tức là $\max_{0\le n\le N} |\mathsf{E}_n| = \mathcal{O}\left(h^2\right)$.

Phương pháp Hình thang

Phương pháp Hình thang

Trường hợp $\theta = 1/2$ ở trên có công thức cụ thể là

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_{n+1})\right]. \tag{1.13}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Phương pháp trên còn được gọi là *Phương pháp Hình thang* vì nó dựa trên việc xấp xỉ tích phân bằng *Quy tắc hình thang*.

Xây dựng phương pháp số bằng xấp xỉ tích phân

Bằng cách lấy tích phân phương trình $y'(t) = f(t, y(t))$ trên đoạn $[t_n, t_{n+1}]$, ta thu được

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.14}$$

Từ đây, ta có một cách giải thích khác cho việc xây dựng các phương pháp số: thông qua việc xấp xỉ tích phân

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

Chẳng hạn

- Phương pháp Euler có được bằng cách sử dụng giá trị hàm số tại điểm biên trái để xấp xỉ tích phân

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau &\approx f(t_n, y(t_n))\,(t_{n+1} - t_n) \\ &= hf(t_n, y(t_n))\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

- Phương pháp Euler lùi có được bằng cách sử dụng giá trị hàm số tại điểm biên trái để xấp xỉ tích phân

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau &\approx f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\,(t_{n+1} - t_n) \\ &= hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Với việc xấp xỉ tích phân sử dụng *Quy tắc hình thang*

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \approx \frac{h}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right] \tag{1.17}$$

ta thu được công thức (1.13).

Tường minh hóa phương pháp Euler lùi

Nhắc lại rằng, một hạn chế của phương pháp Euler lùi so với phương pháp Euler tiến, tại mỗi bước thời gian, ta cần giải phương trình

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) \tag{1.18}$$

đối với Y_{n+1}.

Trên lý thuyết, có thể sử dụng các phương pháp lặp để xấp xỉ phương trình phi tuyến tổng quát dạng

$$Z = g(Z)\,.$$

Cụ thể, có thể sử dụng

- Phương pháp lặp để tìm điểm bất động
- Phương pháp Newton
- $\ldots$

Dạng bài toán dưới dạng điểm bất động gợi ý phép lặp để tìm nghiệm bài toán như sau, thông thường, được gọi là một *vòng lặp con*.

Vòng lặp con để giải tìm Y_{n+1}

Với $Y_{n+1}^{(0)}$ là một ước lượng đủ gần Y_{n+1}, ta thực hiện phép lặp sau

$$Y_{n+1}^{(k+1)} = Y_{n+1}^{(k)} + hf\left(t_{n+1}, Y_{n+1}^{(k)}\right) \text{ với } k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{1.19}$$

Cách chọn $Y_{n+1}^{(0)}$

Thông thường, có thể chọn $Y_{n+1}^{(0)}$ dựa trên Phương pháp Euler, tức là

$$Y_{n+1}^{(0)} = Y_n + hf(t_{n+1}, Y_n) . \tag{1.20}$$

- Việc sử dụng vòng lặp con đôi khi tốn nhiều thời gian nếu muốn giải chính xác.
- Bước lưới h cần được chọn đủ nhỏ sao cho

$$\left| h \frac{\partial}{\partial y} f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \right| < 1$$

với một lựa chọn $Y_{n+1}^{(0)}$ đủ gần Y_{n+1}.

Mặt khác, trong nhiều trường hợp thực tế, chỉ cần thực hiện một bước lặp là đủ.

Nếu chỉ sử dụng một bước trong vòng lặp con, ta có thể viết cụ thể các bước thành

$$\overline{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n), \tag{1.21}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + hf\left(t_{n+1}, \overline{Y}_{n+1}\right). \tag{1.22}$$

Để đơn giản, ta có thể viết gọn lại chỉ sử dụng duy nhất dãy Y_n

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_{n+1}, Y_n + hf(t_{n+1}, Y_n)). \tag{1.23}$$

- Bậc hội tụ của phương pháp là $\mathcal{O}(h)$, giống với bậc hội tụ của phương pháp Euler lùi.
- Mặt khác, phương pháp trên là một phương pháp tường minh.
- Tuy nhiên, nó không còn là một phương pháp ổn định tuyệt đối.

Tường minh hóa Phương pháp hình thang

Nhắc lại Phương pháp hình thang dựa theo công thức (1.13)

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_{n+1})\right]. \tag{1.24}$$

Sử dụng ý tưởng ở trên, ta có thể xây dựng được phương pháp sau

Phương pháp Euler cải tiến (Phương pháp Heun)

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n))\right]. \tag{1.25}$$

- Bậc hội tụ của phương pháp là $\mathcal{O}(h^2)$, giống với bậc hội tụ của phương pháp Hình thang.
- Mặt khác, phương pháp trên là một phương pháp tường minh.
- Tuy nhiên, nó không còn là một phương pháp ổn định tuyệt đối.

Phương pháp Taylor

Trên lý thuyết, ta có thể xây dựng một phương pháp xấp xỉ bậc p dựa vào công thức Taylor

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)\,h + \frac{1}{2}y''(t)\,h^2 + \cdots + \frac{1}{p!}y^{(p)}(t)\,h^p + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right). \tag{2.1}$$

Phương pháp Taylor

Vì $y'(t) = f(t, y(t))$ nên theo quy tắc móc xích

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t))\, y'(t) \\ &= [f_t + f_y f]\,(t, y(t)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tương tự, ta có thể tính được

$$\begin{aligned} y'''(t) &= \left[f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y f_t + f_y^2 f\right](t, y(t)) \\ &\vdots \\ y^{(p)}(t) &= \cdots \end{aligned}$$

Phương pháp Taylor

- Bậc hội tụ có thể lên đến bậc p tùy ý.
- Số lượng biểu thức tương ứng của đạo hàm cấp p tăng nhanh chóng khi p tăng.
- Mỗi bài toán cụ thể đòi hỏi tính toán các công thức tương ứng của $f_t, f_y, \ldots$ hoặc các xấp xỉ tương ứng dẫn đến chi phí tính toán cao.

Ví dụ 2.1

Chẳng hạn, để xây dựng phương pháp xấp xỉ bậc 2, ta có thể dựa vào công thức sau

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)\,h + \frac{1}{2}y''(t)\,h^2 + \mathcal{O}\left(h^3\right). \qquad (2.3)$$

Kết hợp (2.3) và (2.2), ta có thể xây dựng công thức sau

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t, Y_n) + \frac{1}{2}h^2\left(f_t(t, Y_n) + f_y(t, Y_n)\,f(t, Y_n)\right)$$

Phương pháp Runge-Kutta hiện

Phương pháp Runge-Kutta hiện sử dụng s bước tổng quát

$$\begin{aligned}
Z_{n,1} &= Y_n, \\
Z_{n,2} &= Y_n + ha_{2,1}f(t_n, Z_{n,1}), \\
Z_{n,3} &= Y_n + h\left[a_{3,1}f(t_n, Z_{n,1}) + a_{3,2}f(t_n + c_2h, Z_{n,2})\right], \\
&\vdots \\
Z_{n,s} &= Y_n + h\left[a_{s,1}f(t_n, Z_{n,1}) + a_{s,2}f(t_n + c_2h, Z_{n,2}) + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + a_{s,s-1}f(t_n + c_{s-1}h, Z_{n,s-1})\right], && (2.4) \\
Y_{n+1} &= Y_n + h\left[b_1f(t_n, Z_{n,1}) + b_2f(t_n + c_2h, Z_{n,2}) + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + b_{s-1}f(t_n + c_{s-1}h, Z_{n,s-1}) + b_sf(t_n + c_sh, Z_{n,s})\right]. && (2.5)
\end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta hiện

$$Z_{n,i} = Y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t_n + c_j h, Z_{n,j}), \quad i = 1, \cdots, s, \tag{2.6}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j h, Z_{n,j}). \tag{2.7}$$

Bảng Butcher

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s-1} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
\end{array} \tag{2.8}$$

Phương pháp Runge-Kutta hiện

Một cách viết khác của phương pháp Runge-Kutta, so sánh với bảng Butcher

$$k_{n,1} = f(t_n, Y_n)\,, \tag{2.9}$$

$$k_{n,i} = f\left(t_n + c_i h, Y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}k_{n,j}\right), \quad i = 2, \cdots, s, \tag{2.10}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_{n,j}. \tag{2.11}$$

Bảng Butcher

Với

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

ta có thể viết gọn Bảng Butcher lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array} \tag{2.12}$$

Thông thường, các phương pháp Runge-Kutta phải thỏa

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{b}^\top \mathbf{e} = 1. \tag{2.14}$$

Phương pháp Runge-Kutta hiện

Ví dụ 2.2

Phương pháp Euler cải tiến

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n))\right]$$

hay

$$\begin{aligned} Z_{n,1} &= Y_n \\ Z_{n,2} &= Y_n + hf(t_n, Z_{n,1}) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Z_{n,1}) + f(t_n + h, Z_{n,2})\right] \end{aligned}$$

là một trường hợp đặc biệt của Phương pháp Runge-Kutta hiện ứng với bảng Butcher sau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Phương pháp Runge-Kutta hiện

Ví dụ 2.3

Một ví dụ khác ứng với trường hợp $s = 2$ với bảng Butcher như sau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

sẽ tương ứng phép lặp sau đây

$$Y_{n+1} = Y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2} f(t_n, Y_n)\right).$$

Ví dụ 2.4

Một ví dụ phổ biến cho trường hợp $s = 4$ ứng với bảng Butcher sau

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

ta có

$$\begin{aligned}
Z_{n,1} &= Y_n, \\
Z_{n,2} &= Y_n + \tfrac{1}{2} h f(t_n, Z_{n,1}), \\
Z_{n,3} &= Y_n + \tfrac{1}{2} h f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, Z_{n,2}\right), \\
Z_{n,4} &= Y_n + h f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, Z_{n,3}\right), \\
Y_{n+1} &= Y_n + \tfrac{1}{6} h \Big[f(t_n, Z_{n,1}) + 2 f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, Z_{n,2}\right) \\
&\qquad + 2 f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, Z_{n,3}\right) + f(t_n + h, Z_{n,4}) \Big].
\end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta hiện

Ta cũng có thể viết lại phương pháp trên như sau

$$\begin{aligned}
k_{n,1} &= f(t_n, Y_n)\,, \\
k_{n,2} &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, Y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n,1}\right), \\
k_{n,3} &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, Y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n,2}\right), \\
k_{n,4} &= f(t_n + h, Y_n + hk_{n,3})\,, \\
Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6}\left(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}\right).
\end{aligned}$$

Phương pháp một bước dạng hiện tổng quát

Phương pháp một bước dạng hiện tổng quát

Với $Y_0 = y_0$ hoặc một xấp xỉ gần với nó $Y_0 \approx y_0$. Ta tính

$$Y_{n+1} = Y_n + h\Phi(t_n, Y_n, h), \quad \text{với mọi } n = 0, 1, 2, \cdots, N-1. \tag{2.15}$$

Ví dụ 2.5

1. Phương pháp Euler

$$\Phi(t_n, Y_n, h) = f(t_n, Y_n).$$

2. Phương pháp Euler cải tiến (Phương pháp Heun)

$$\Phi(t_n, Y_n, h) = \frac{1}{2}\left[f(t_n, Y_n) + f(t_n + h, Y_n + hf(t_n, Y_n))\right].$$

Phương pháp Runge-Kutta ẩn

$$Z_{n,i} = Y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(t_n + c_j h, Z_{n,j}), \qquad i = 1, \cdots, s, \tag{2.16}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j h, Z_{n,j}). \tag{2.17}$$

Bảng Butcher

$$\begin{array}{c|cccccc} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s} \\ c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2,s} \\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,s-1} & a_{3,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s-1} & a_{s,s} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

hoặc

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array}$$

Phương pháp Runge-Kutta ẩn

Ví dụ 2.6

Phương pháp hình thang

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_{n+1})\right],$$

là một trường hợp cụ thể của Phương pháp Runge-Kutta ẩn ứng với bảng Butcher sau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$