TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ

Học kì I Năm học 2024–2025

MÃ LƯU TRỮ
(do Phòng KT-ĐBCL ghi)

Tên học phần:	**Giải tích 3A**	**Mã HP:**	**MTH00014**
Thời gian làm bài:	60 phút	Ngày thi: 28/11/2024	
Họ và tên sinh viên:		MSSV:	

Ghi chú: Sinh viên **được phép** sử dụng tài liệu tự viết trên 1 tờ giấy khổ A4, **được phép** sử dụng các máy tính bỏ túi được cho phép trong kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông.

Câu 1 (2,5 điểm)**.** Cho tích phân

$$a = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt[4]{x^5+1}\, dx \right) dy.$$

(a) Tìm miền $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho
$$a = \iint_D \sqrt[4]{x^5+1}\, dx dy.$$

(b) Tính a.

Câu 2 (2,5 điểm)**.** Gọi E là khối bao bởi hai mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$ trong $\mathbb{R}^3$.

(a) Vẽ khối E.

(b) Tính thể tích của khối E.

Câu 3 (5 điểm)**.** Cho D là một tập con đóng, bị chặn, có thể tích của $\mathbb{R}^n$, và cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục. Giá trị trung bình của hàm f được định nghĩa là số thực $\frac{1}{|D|}\int_D f$.

(a) Giải thích vì sao tồn tại giá trị trung bình của f.

(b) Cho D là khối tứ diện với các đỉnh $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$. Cho hàm mật độ khối lượng của khối là $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y$. Hãy tính mật độ khối lượng trung bình của khối.

(c) Gọi $f_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất và $f_{\max}$ là giá trị lớn nhất của f trên D. Chứng tỏ giá trị trung bình của hàm phải nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm, tức là
$$f_{\min} \le \frac{1}{|D|}\int_D f \le f_{\max}.$$

(d) (thưởng, 1 điểm) Chứng tỏ rằng nếu D là một hình hộp, thì giá trị trung bình của hàm đạt được tại một điểm nào đó, tức là có $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = \frac{1}{|D|}\int_D f$.

——————— Hết ———————

Người ra đề/MSCB: Huỳnh Quang Vũ/0259 . . . . **Người duyệt đề:** . . . .

Chữ ký: . . . . **Chữ ký:** . . . .

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ

Học phần: MTH00014 Giải tích 3A

Ngày thi: 28/11/2024

Câu 1 (2,5 điểm)**.** Tính tích phân
$a = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt[4]{x^5+1}\,dx\right) dy.$

(a) Viết $a = \iint_D \sqrt[4]{x^5+1}\,dxdy$, với $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, \sqrt[3]{y} \le x \le 1\}$. (0,5 điểm)

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^3\}$ (1 điểm). Giải thích bằng hình vẽ hoặc biến đổi tương đương. Tính

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \sqrt[4]{x^5+1}\,dy\right) dx \text{ (0,5 điểm)} \\ &= \int_0^1 x^3\sqrt[4]{x^5+1}\,dx \text{ (0,5 điểm)} \\ &\approx 0{,}27 \text{ (không tính điểm).} \end{aligned}$$

Câu 2 (2,5 điểm)**.** Tính thể tích của khối bao bởi hai mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.

(a) Vẽ khối E (0,5 điểm).

(b) Giao của hai mặt là tập điểm (x,y,z) thỏa $z = 1$ và $x^2 + y^2 = 1$ (0,5 điểm). Gọi D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ trong $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |E| &= \iint_D \left[(2-x^2-y^2) - (x^2+y^2)\right] dxdy \text{ (0,5 điểm. Vẫn cho điểm phần tiếp theo nếu thiết lập sai.)} \\ &= \iint_D \left[2 - 2x^2 - 2y^2\right] dxdy \\ &= \iint_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi} (2-2r^2)r\,drd\theta \text{ (0,5 điểm)} \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2-2r^2)r\,d\theta\right) dr \\ &= 2\pi\frac{1}{2} = \pi. \text{ (0,5 điểm)} \end{aligned}$$

Câu 3 (5 điểm)**.**

(a) Hàm liên tục trên tập đóng bị chặn thì bị chặn (0,5 điểm). Hàm liên tục và bị chặn trên tập có thể tích thì khả tích (Định lý 3.7) (0,5 điểm).

(b) Viết phương trình mặt phẳng $z = 2 - 2x - y$ (0,5 điểm). Miêu tả D là $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2-2x, 0 \le z \le 2 - 2x - y$ (0,5 điểm). Tính

$$\begin{aligned} \iiint_D y\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{2-2x-y} y\,dz\right) dy\right) dx \text{ (0,5 điểm)} \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} y(2-2x-y)\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)(2-2x)^2 - \frac{1}{3}(2-2x)^3\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^3\,dx = \frac{1}{3}. \text{ (0,5 điểm)} \end{aligned}$$

Thể tích khối D là $|D| = \frac{2}{3}$ (thể tích hình chóp $|D| = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{1}{3} \times 2$, hoặc tính tích phân như trên) (1 điểm). Vậy giá trị trung bình là $1/2$.

(c) Vì $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ nên

$$\int_D f_{\min} \le \int_D f \le \int_D f_{\max} \text{ (0,5 điểm)}$$

dẫn tới

$$f_{\min}|D| = f_{\min} \int_D 1 = \int_D f_{\min} \le \int_D f \le \int_D f_{\max} = f_{\max} \int_D 1 = f_{\max}|D|. \text{ (0,5 điểm)}$$

(d) $f_{\min} = f(x_{\min})$, $f_{\max} = f(x_{\max})$. Đặt $\gamma(t) = (1-t)x_{\min} + tx_{\max}$, $t \in [0,1]$, đây là đoạn thẳng từ điểm $x_{\min}$ tới điểm $x_{\max}$ nằm hoàn toàn trong hình hộp D. Hàm $t \mapsto f(\gamma(t))$ liên tục theo t và $f(\gamma(0)) = f_{\min}$, $f(\gamma(1)) = f_{\max}$. Theo Định lý giá trị trung gian có $t_0 \in [0,1]$ sao cho $f(\gamma(t_0)) = \frac{1}{|D|} \int_D f$. Lấy $x_0 = \gamma(t_0)$. (Chỉ cho trọn 1 điểm. Xem thêm Giáo trình Giải tích 2 năm 2011, trang 34–36.)