Chương 0

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

0.1. Cho P và Q là 2 mệnh đề:

P: “Bạn lái xe với tốc độ trên 65 km/h” Q: “Bạn bị phạt vì quá tốc độ cho phép”

Hãy viết các mệnh đề sau thành biểu thức logic.

a) Bạn không lái xe trên 65 km/h.

b) Bạn lái xe trên 65 km/h nhưng bạn không bị phạt vì quá tốc độ cho phép.

c) Bạn sẽ bị phạt vì quá tốc độ cho phép Nếu bạn lái xe trên 65 km/h.

d) Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 65 km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì quá tốc độ cho phép.

e) Lái xe với tốc độ trên 65 km/h là đủ để bị phạt vì quá tốc độ cho phép.

f) Bạn bị phạt vì quá tốc độ cho phép nhưng bạn không lái xe trên 65 km/h.

g) Mỗi lần bị phạt vì quá tốc độ cho phép là bạn đã lái xe trên 65 km/h.

0.2. Cho P, Q, R là những mệnh đề :

P: “Bạn bị cúm”

Q: “Bạn thi trượt kỳ thi cuối khóa”

R: “Bạn được lên lớp”

Hãy diễn đạt những mệnh đề theo ngôn ngữ thông thường.

a) $P \to Q$

b) $\overline{Q} \leftrightarrow R$

c) $Q \to \overline{R}$

d) $P \vee Q \vee R$

e) $(P \to \overline{R}) \vee (Q \to \overline{R})$

f) $(P \wedge Q) \vee (\overline{Q} \wedge R)$

0.3. Hãy lấy phủ định của các mệnh đề sau:

a) Ngọc học Toán mà không học Lịch sử

b) Dũng cùng An đi thi ngoại ngữ

c) Nếu Sơn thắng trận thì anh ấy được đi Paris

0.4. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau:

a) $(p \vee q) \to (r \vee \overline{p})$

b) $(p \vee q) \wedge \overline{r}$

c) $(p \to q) \vee (\overline{q} \to r)$

d) $(p \wedge q) \to (\overline{q} \vee r)$

0.5. Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:

a) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

b) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

c) $p \to (\overline{q} \to p)$

d) $p \to (p \to q)$

0.6. Chứng minh các dạng mệnh đề sau là hằng đúng hoặc hằng sai:

a) $(p \wedge q) \to (p \vee \bar{q} \vee r)$

b) $(r \wedge q) \to (\bar{p} \vee q)$

c) $[(p \to \bar{q}) \to q] \wedge \overline{p \to q}$

d) $(p \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{q} \to \bar{p}) \wedge (q \vee r)$

0.7. Trong các khẳng định sau, hãy chỉ ra các khẳng định đúng:

a) $q \Rightarrow p \to q$

b) $\overline{p \to q} \Rightarrow p$

c) $p \to (q \to r) \Rightarrow p \to r$

d) $(\bar{p} \to q) \vee (p \to \bar{q}) \Rightarrow p \wedge q$

0.8. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng

a) $(p \to \bar{q}) \to [(p \to r) \to \bar{q}] \Leftrightarrow q \to p$

b) $(p \to q) \vee [p \to (q \wedge r)] \Leftrightarrow p \to q$

c) $(\overline{p \wedge q} \vee r) \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (p \vee r)$

d) $(\bar{q} \to \bar{p}) \wedge p) \Leftrightarrow \overline{p \to \bar{q}}$

0.9. Cho $P(x)$ là câu "x học Toán rời rạc", không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các biểu thức logic sau thành câu thông thường:

a) $\forall x, P(x)$

b) $\exists x, P(x)$

c) $\forall x, \overline{P(x)}$

d) $\exists x, \overline{P(x)}$

0.10. Cho $P(x, y)$ là câu "x học môn y", với không gian của x là tập hợp sinh viên trong lớp, không gian của y là tập hợp các môn học. Hãy diễn đạt các mệnh đề sau thành câu thông thường

a) $\exists x \exists y\, P(x, y)$

b) $\exists x \forall y\, P(x, y)$

c) $\forall x \exists y\, P(x, y)$

d) $\exists y \forall x\, P(x, y)$

e) $\forall y \exists x\, P(x, y)$

f) $\forall x \forall y\, P(x, y)$

0.11. Hãy lấy phủ định của các mệnh đề sau:

a) Mọi tam giác đều có các góc bằng 60^0

b) Tất cả học sinh lớp Toán đi xem kịch và có ít nhất một học sinh của lớp Văn không đi xem xiếc

c) Nếu An đoạt chức vô địch thì tất cả các bạn trong lớp sẽ đến chúc mừng.

0.12. Viết dạng phủ định của A và xét chân trị của A (xét trực tiếp A hay xét gián tiếp $\overline{A}$ rồi suy ra A):

a) $A =$ "$\exists x \in \mathbb{R}, \sin x + 2x = 1$"

b) $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3\sin y > 0$"

c) $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, (x^2 \geq y^2) \to (x \geq y)$"

d) $A =$ "$\exists x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{N}, x^3 - 3y \neq 5t$"

0.13. Chứng minh qui nạp theo số nguyên n :

a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2, \;\; \forall n \geq 1$

b) $1.1! + 2.2! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1, \;\; \forall n \geq 1$

c) $n^2 < 2^n, \;\; \forall n \geq 5$ (để ý $(n+1)^2 < 2n^2, \forall n \geq 3$)

d) $4 \,|\, (6.7^n - 2.3^n), \;\; \forall n \geq 0$

0.14. Tìm số nguyên a sao cho

a) $a \equiv -15 \pmod{27}$ và $126 \leq a \leq 152$.

b) $a \equiv 24 \pmod{31}$ và $-85 \leq a \leq -55$.

c) $a \equiv 99 \pmod{41}$ và $100 \leq a \leq 140$.

d) $a \equiv 16 \pmod{42}$ và $201 \leq a \leq 242$.

0.15. Cho a, b là những số nguyên và $a \equiv 11 \pmod{19}$, $b \equiv 3 \pmod{19}$. Tìm số nguyên c với $0 \leq c \leq 18$ sao cho

a) $c \equiv 13a \pmod{19}$.

b) $c \equiv 8b \pmod{19}$.

c) $c \equiv a - b \pmod{19}$.

d) $c \equiv 7a + 3b \pmod{19}$.

e) $c \equiv 2a^2 + 3b^2 \pmod{19}$.

f) $c \equiv a^3 + 4b^3 \pmod{19}$.

0.16. Tìm $d = (m, n)$, $e = [m, n]$ theo 2 cách khác nhau (bằng thuật chia Eulide và phân tích ra thừa số nguyên tố), sau đó tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $d = am + bn$ nếu m và n có các giá trị sau đây:

a) 936 và 715

b) -675 và -459

c) 6234 và -3312

d) 87657 và -44441

e) -654321 và 123456

f) -148500 và -7114800

0.17. Cho $n = 2^{14}3^9 5^8 7^{10} 11^3 13^8 37^{10}$.

a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?

b) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho $2^3 3^4 5^7 11^2 37^2$?

c) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho $1\,166\,400\,000$?

0.18. Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm một $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho n có đúng k ước số dương.

0.19. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $\{1, 2, 3, 4\}$. Hãy xét $\mathcal{R}$ có những tính chất nào?

a) $\mathcal{R} = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

b) $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

c) $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

d) $\mathcal{R} = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

0.20. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên S. Hãy viết tập hợp $\mathcal{R}$, ma trận biểu diễn và xét các tính chất của $\mathcal{R}$ nếu

a) $S = \{0,1,2\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 0 \le y - x \le 1$.

b) $S = \{0,1,2\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3x + y \le 5$.

c) $S = \{0,1,2,3,4\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y \text{ hay } x + 2y = 4)$.

d) $S = \{0,1,2,3,4\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x+2) \mid y$.

0.21. Xét các tính chất của quan hệ $\mathcal{R}$ trên S nếu

a) $S = \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y^2$.

b) $S = \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y$ không chia hết x^2.

c) $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\forall (x,u), (y,v) \in S : (x,u)\mathcal{R}(y,v) \Leftrightarrow x \le y$.

d) $S = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \ne y$.

0.22. Kiểm chứng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên S rồi viết các lớp tương đương và tập thương tương ứng:

a) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 5x = y^2 + 5y$.

b) $S = \{-4, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 + 3y = y^3 + 3x$.

c) $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 21, 24, 25, 35, 42, 48\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2^k y$
(k phụ thuộc x và y).

0.23. Cho $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

a) Viết tập hợp $\mathcal{R}$ nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên S có 3 lớp tương đương là $\{a, d, f\}, \{c, e\}$ và $\{b\}$.

b) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương có số phần tử của các lớp lần lượt là $3, 2, 1$ (tương tự như quan hệ tương đương $\mathcal{R}$)?

c) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương?

0.24. Kiểm chứng $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên S. Hỏi $\mathcal{R}$ là thứ tự toàn phần hay bán phần? Tại sao? Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \mathcal{R})$ và tìm min, max và các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có):

a) $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

b) $S = \{2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

c) $S = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \,\vdots\, y$

d) $S = \{96, 768, 6, 48, 384, 3, 24\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = 2^k x$ (k phụ thuộc theo x và y)

0.25. Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \prec)$ rồi toàn phần hóa (sắp xếp topo) các thứ tự bán phần $\prec$ sau:

a) $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ với $d \prec a, b \prec e, g \prec e, h \prec f, i \prec e$ và $h \prec d$.

b) $S = \{1, 2, 4, 5, 12, 15, 20\}$ với $\prec$ là quan hệ $|$.

c) $S = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 16\}$ với $\prec$ là quan hệ $\vdots$.

d) S $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ với $\prec$ là quan hệ $|$.

0.26. Viết các phần tử sau dưới dạng chuẩn trong $\mathbb{Z}_n$ ($n = 25$ và 38) :

a) $\overline{\pm 95}$

b) $\overline{\pm 378}$

c) $\overline{\pm 68047}$

d) $\overline{\pm 815691}$

0.27. Làm các phép tính sau rồi viết kết quả dưới dạng chuẩn trong $\mathbb{Z}_n$ ($n = 28$ và 43) :

a) $\overline{52} \pm \overline{-94}$

b) $\overline{52} \cdot \overline{-94}$

c) $\overline{-341} \cdot \overline{926}$

d) $\overline{-7083} \pm \overline{-8646}$

e) $\overline{7083} \cdot \overline{8646}$

f) $\overline{9245}^2$

0.28. Trong $\mathbb{Z}_{26}$ và Z_{60}, hãy xác định tất các phần tử khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

0.29. Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ $f : X \to Y$ sau:

a) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $\forall x \in X$

b) $X = [-2, +\infty)$, $Y = (-20, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 6x - 3$, $\forall x \in X$

c) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4)$, $\forall x \in X$

d) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$, $\forall x \in X$

0.30. Xét hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x) = ax + b$ và $g(x) = 1 - x + x^2$. Giả sử $g_\circ f = f_\circ g$, hãy xác định a và b?

0.31. Xác định $u = g_\circ f$, $v = f_\circ g$ và $w = h_\circ g_\circ f$ (nếu có) khi $f : X \to Y$, $g : Z \to T$ và $h : U \to V$ trong đó

a) $X = Y = Z = T = U = V = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + x - 3$ và $h(x) = x^3 + 4\cos x$

b) $X = V = \mathbb{R}$, $Y = Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $T = U = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $g(x) = \dfrac{3x + 2}{1 - x}$ và $h(x) = \ln |x + 3|$

0.32. Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = x^2 - 3$ và $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Hãy tìm $f(A)$, $g(A)$, $f^{-1}(A)$ và $g^{-1}(A)$ với

a) $A = \{2, 3\}$

b) $A = \{-3, -2, 2, 3\}$

c) $A = (-3, 3)$

d) $A = (-3, 2]$

e) $A = [-7, 2]$

f) $A = (-4, -3] \cup [5, 6]$

0.33. Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

a) $h : [1, 2) \to [5, 7)$, $h(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$

b) $p : \mathbb{R} \to (-2, 3)$, $p(x) = \dfrac{9 - 2e^x}{e^x + 3}$

c) $q : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $q(x) = \dfrac{5 - 3x}{x - 1}$

d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$

Chương 1

NHÓM

1.1. Trong các trường hợp sau hãy xét xem cấu trúc $(G, *)$ có là nửa nhóm, vị nhóm hay nhóm không, và xét tính giao hoán của chúng. Trong trường hợp $(G, *)$ là nhóm, hãy mô tả tất cả các phần tử có cấp hữu hạn của nhóm này.

a) $G = \mathbb{Q} \setminus \{-6\}, x * y = 90xy + 540x + 540y + 3234$.

b) $G = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x * y = x^{\ln y}$.

c) $G = \mathbb{R}, x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, trong đó n là một số nguyên dương lẻ cho trước.

d) $G = \mathbb{R}, x * y = (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})^n$, trong đó n là một số nguyên dương lẻ cho trước.

e) $G = \mathbb{R}^+, x * y = ln(e^x + e^y - 1)$.

f) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, (x, y) * (z, t) = (x + yz, yt)$.

g) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, (x, y) * (z, t) = (xz - yt, xt + yz)$.

h) $G = \mathbf{R^2} \setminus \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}, (x, y) * (z, t) = (xz - yt, xt + yz)$.

1.2. a) Chứng minh rằng một nửa nhóm khác rỗng, hữu hạn là nhóm khi và chỉ khi phép toán tương ứng có tính giản ước. Chỉ ra rằng điều kiện hữu hạn không thể bỏ được.

b) Chứng minh rằng mọi tập con khác rỗng, hữu hạn, kín đối với phép toán tương ứng trong một nhóm đều là các nhóm con của nhóm đó.

1.3. Cho $(X, .)$ là một nửa nhóm khác rỗng. Với mỗi $a \in X$ ta đặt

$$aX = \{ax | x \in X\};$$

$$Xa = \{xa | x \in X\}.$$

Chứng minh các khẳng định sau là tương đương:

a) $(X, .)$ là nhóm;

b) Với mọi $a \in X$, $aX = Xa = X$.

1.4. Cho nhóm $(G, .)$ và $a \in G$. Trên G ta định nghĩa phép toán $*$ như sau: $\forall x, y \in G, x * y = xay$. Chứng minh rằng $(G, *)$ cũng là nhóm.

1.5. Cho G là một nhóm trong đó có duy nhất một phần tử a có cấp 2. Chứng minh rằng với mọi $x \in G,\ ax = xa$.

1.6. Cho G là một nhóm mà mọi phần tử khác e đều có cấp 2. Chứng minh G giao hoán.

1.7. Cho nhóm $(G, .)$. Trên G ta định nghĩa một quan hệ $\sim$ như sau:

$$\forall x, y \in G, x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in G, x = a^{-1}ya.$$

Chứng minh rằng

a) $\sim$ là quan hệ tương đương trên G;

b) $\sim$ là quan hệ thứ tự trên G khi và chỉ khi G giao hoán.

1.8. Cho nhóm $(G, .)$. Giả sử tồn tại ba số nguyên i liên tiếp sao cho với mọi $x, y \in G,\ (xy)^i = x^i y^i$. Chứng minh rằng G giao hoán.

1.9. Chứng minh rằng nếu $(G, .)$ là một nhóm giao hoán có đúng n phần tử khác nhau là $x_1, x_2, ..., x_n$ thì $(x_1x_2...x_n)^2 = e$.

1.10. Chứng minh rằng trong nhóm hoán vị S_n, nếu một hoán vị có cấp lẻ thì đó phải là một hoán vị chẵn. Xét chiều đảo.

1.11. Trong nhóm hoán vị S_{10}, xét các phép hoán vị

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2 = (1\ 3\ 4\ 7)(2\ 5)(1\ 2\ 4\ 3).$$

a) Viết σ_1 và σ_2 dưới dạng tích các chu trình rời nhau và dưới dạng tích các chuyển vị. Suy ra tính chẵn, lẻ và cấp của chúng.

b) Viết $\sigma_1\sigma_2; \sigma_2^2; \sigma_2^{-1}; \sigma_2^{-2}; \sigma_1^2\sigma_2; \sigma_1\sigma_2^2$ dưới dạng tích các chu trình rời nhau. Xét tính chẵn, lẻ và cấp của chúng.

c) Tìm $\sigma \in S_n$ thỏa $\sigma_1\sigma\sigma_2^{-2} = \sigma_1^3$.

1.12. Cho σ và τ là hai hoán vị rời nhau trong S_n. Chứng minh rằng $(\sigma\tau)^k = \sigma^k\tau^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

1.13. Cho một ví dụ chứng tỏ rằng lũy thừa của một chu trình không nhất thiết là một chu trình.

1.14. * Xét nhóm hoán vị S_n và σ là một k-chu trình. Chứng minh rằng với $l \in \mathbb{N}$, σ^l là k-chu trình khi và chỉ khi $(k, l) = 1$.

1.15. Chứng minh các khẳng định sau:

a) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x; y \in \mathbb{Q} \right\}$ là một nhóm con của nhóm $(M(2, \mathbb{Q}), +)$.

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x; y \in \mathbb{Q}; x^2 + y^2 > 0 \right\}$ là một nhóm con của nhóm $(GL(2, \mathbb{Q}), .)$.

c) $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ với $n \in \mathbb{N}$; $U = \{z \in \mathbb{C} | \ \exists k \in \mathbb{N}^*, z^k = 1\}$ và $T = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$ là các nhóm con của nhóm $(\mathbb{C}^*, .)$.

1.16. a) Chứng minh rằng H là một nhóm con của nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ khi và chỉ khi H có dạng $n\mathbb{Z}$ với $n \in \mathbb{N}$.

b) Cho $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z} \quad \text{và} \quad m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}.$$

1.17. Cho $(G, .)$ là một nhóm và H là một nhóm con của G. Chứng minh rằng với $x \in G$ các khẳng định sau là tương đương:

a) xH là nhóm con của G;

b) Hx là nhóm con của G;

c) $x \in H$.

1.18. Cho $(G, .)$ là một nhóm và H là một nhóm con của G. Chứng minh rằng với mỗi $x \in G$, tập hợp $x^{-1}Hx$ cũng là nhóm con của G (Ta gọi đây là các *nhóm con liên hợp* với H).

1.19. Cho nhóm $(G, .)$ và $a \in G$. Ta định nghĩa

1) *Tâm hóa tử* của a trong G là tập hợp

$$C(a) = \{x \in G | ax = xa\}.$$

2) *Tâm* của G là tập hợp

$$C(G) = \{x \in G | xy = yx, \forall y \in G\}.$$

Chứng minh rằng:

a) $C(G) \leq C(a) \leq G$;

b) $C(G) = \bigcap_{b \in G} C(b)$;

c) G giao hoán $\Leftrightarrow C(G) = G$.

d) Mọi nhóm con của $C(G)$ đều là nhóm con chuẩn tắc của G.

e) Tìm tâm của nhóm tuyến tính tổng quát $GL(n, \mathbb{R})$.

1.20. Cho H, K là các nhóm con của nhóm G. Chứng minh rằng $H \cup K$ là nhóm con của G khi và chỉ khi $H \subset K$ hay $K \subset H$.

1.21. Cho nhóm $(G, .)$. Với $A, B \subset G$, ta đặt

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\};$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

Chứng minh rằng với $A, B, C \subset G$:

a) $(AB)C = A(BC)$;

b) $(A^{-1})^{-1} = A$;

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

d) Với $A \neq \emptyset$ các khẳng định sau tương đương:

i) A là nhóm con của G;

ii) $AA = A$ và $A^{-1} = A$;

iii) $A^{-1}A = A$.

e) Nếu A, B là các nhóm con của G thì AB là nhóm con của G khi và chỉ khi $AB = BA$; hơn nữa khi đó $AB = A \vee B$, trong đó $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$.

1.22. Cho $(G, .)$ là một nhóm Abel và H là một nhóm con của G. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$H_n = \{x \in G | \ x^n \in H\}.$$

Chứng minh rằng với $m, n \in \mathbb{N}$ ta có

a) H_n là nhóm con của G, và H_n chứa H.

b) $H_m \cap H_n = H_d$, trong đó $d = (m, n)$. Suy ra điều kiện để $H_m \cap H_n = H$.

1.23. Cho $(G, .)$ là một nhóm Abel và H là một nhóm con của G. Đặt

$$K = \{x \in G | \ \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in H\}.$$

Chứng minh rằng

a) K là nhóm con chuẩn tắc của G, và K chứa H.

b) trong nhóm thương G/K không có phần tử nào có cấp hữu hạn lớn hơn 1.

1.24. Cho nhóm $(G, .)$ và H, K là hai nhóm con của G. Chứng minh rằng nếu H và K có chỉ số hữu hạn trong G thì nhóm con $H \cap K$ cũng có chỉ số hữu hạn trong G.

1.25. * Cho nhóm $(G, .)$ hữu hạn và H, K là hai nhóm con của G. Chứng minh rằng $|HK||H \cap K| = |H||K|$.

1.26. Chứng minh rằng trong nhóm hoán vị S_n, mọi k-chu trình đều có cấp k và cấp của tích các chu trình rời nhau bằng bội chung nhỏ nhất của các cấp của các chu trình nầy.

1.27. a) Hãy mô tả tất cả các phần tử có cấp 20 trong S_9.

b) Chứng minh rằng trong S_9 không tồn tại phần tử nào có cấp 18.

1.28. * Giả sử G là một nhóm con Abel có cấp 1111 trong S_{999}. Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{1, 2, ..., 999\}$ sao cho $\sigma(i) = i, \forall \sigma \in G$.

1.29. Tìm hai phần tử a, b của một nhóm G sao cho a, b đều có cấp hữu hạn nhưng ab lại có cấp vô hạn.

1.30. Cho nhóm $(G, .)$ và $a, b \in G$. Chứng minh rằng

a) Cấp của ab bằng cấp của ba.

b) Cấp của a^{-1} bằng cấp của a.

c) Giả sử $ab = ba$ và a có cấp r, b có cấp s, trong đó r, s nguyên tố cùng nhau; khi đó ab có cấp rs.

d) Giả sử $ab = ba$ và a có cấp r, b có cấp s, trong đó $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$; khi đó ab có cấp $[r, s]$.

1.31. Chứng minh rằng nếu G là một nhóm có hơn một phần tử và chỉ có hai nhóm con là $\{e\}$ và G thì G phải là nhóm cyclic cấp nguyên tố.

1.32. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để nhóm G chỉ có hữu hạn nhóm con là G hữu hạn.

1.33. Chứng minh:

a) Mọi nhóm cyclic đều giao hoán.

b) Mọi nhóm con của một nhóm cyclic cũng cyclic.

c) Ảnh đồng cấu của một nhóm cyclic cũng cyclic.

1.34. Cho nhóm cyclic $G = \langle x \rangle$ hữu hạn cấp n. Chứng minh rằng với $k, l \in \mathbb{Z}$ ta có

a) Cấp của x^k bằng n/d, trong đó $d = (n, k)$.

b) $\langle x^k \rangle = \langle x^l \rangle$ khi và chỉ khi $(n, k) = (n, l)$.

c) $G = \langle x^k \rangle$ khi và chỉ khi $(n, k) = 1$. Từ đó suy ra số các phần tử sinh của G.

d) Hãy mô tả tất cả các nhóm con của G.

1.35. Cho hai nhóm G_1 và G_2, trong đó mỗi nhóm có ít nhất hai phần tử. Chứng minh rằng nhóm $G_1 \times G_2$ cyclic khi và chỉ khi G_1 và G_2 là các nhóm cyclic hữu hạn có cấp nguyên tố cùng nhau.

1.36. Chỉ ra rằng quan hệ “chuẩn tắc" trên tập hợp các nhóm con không có tính bắc cầu.

1.37. Cho $(G, .)$ là một nhóm và H là một nhóm con của G. *Chuẩn hóa tử* của H trong G là tập con của G định bởi:

$$N_G(H) = \{x \in G |\ xH = Hx\}.$$

Chứng minh rằng

a) $N_G(H)$ là nhóm con của G.

b) H là nhóm con chuẩn tắc của $N_G(H)$.

c) H là nhóm con chuẩn tắc của G khi và chỉ khi $N_G(H) = G$.

d) $N_G(H)$ là nhóm con lớn nhất của G nhận H làm nhóm con chuẩn tắc.

1.38. Cho H, K là hai nhóm con của nhóm $(G, .)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu H chuẩn tắc trong G thì HK là nhóm con của G.

b) Nếu H, K đều chuẩn tắc trong G thì HK là nhóm con chuẩn tắc của G.

1.39. Cho H, K là hai nhóm con chuẩn tắc của nhóm $(G, .)$ thỏa $H \cap K = \{e\}$. Chứng minh rằng $xy = yx$ với mọi $x \in H,\ y \in K$.

1.40. Cho nhóm $(G, .)$ và $S \subset G$ thỏa $x^{-1}Sx \subset \langle S \rangle$ với mọi $x \in G$. Chứng minh $\langle S \rangle$ chuẩn tắc trong G.

1.41. Cho G là một nhóm hữu hạn và H là một nhóm con của G có chỉ số $[G : H] = 2$. Chứng minh H là một nhóm con chuẩn tắc của G. Hãy tổng quát hóa kết quả trên.

1.42. a) Cho nhóm G với tâm là $C(G)$. Chứng minh rằng nhóm thương $G/C(G)$ cyclic khi và chỉ khi G giao hoán.

b) Dùng kết quả câu a) để chứng minh rằng mọi nhóm hữu hạn cấp p^2 với p nguyên tố đều giao hoán.

1.43. Cho nhóm $(G, .)$. Ta gọi *hoán tử* của hai phần tử x và y trong G là phần tử $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Nhóm con của G sinh bởi tất cả các hoán tử của các phần tử trong G được gọi là *nhóm hoán tử* của G và được ký hiệu là $[G, G]$. Chứng minh rằng:

a) $[G, G]$ là nhóm con chuẩn tắc của G.

b) Với H là nhóm con chuẩn tắc của G, nhóm thương G/H giao hoán khi và chỉ khi $[G, G] \subset H$. Suy ra nhóm thương $G/[G, G]$ giao hoán.

1.44. Xét nhóm hoán vị S_4. Chứng minh rằng tập hợp

$$K = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

là nhóm con chuẩn tắc của G (Ta gọi K là nhóm Klein).

1.45. Chứng minh rằng:

a) Nhóm hoán vị S_n được sinh bởi các chuyển vị.

b) Nhóm thay phiên A_n là nhóm con chuẩn tắc của S_n và được sinh bởi các 3-chu trình.

c) Nếu H là một nhóm con chuẩn tắc của A_n và H có chứa ít nhất một 3-chu trình thì $H = A_n$.

1.46. Cho $(G, .)$ là một nhóm giao hoán. Chứng minh rằng ánh xạ $f : x \mapsto x^k$ với k là một số nguyên cho trước, là một đồng cấu nhóm. Hãy xác định $Kerf$.

1.47. Cho $(G, .)$ là một nhóm. Chứng minh rằng ánh xạ $x \mapsto x^{-1}$ là một tự đẳng cấu của nhóm G khi và chỉ khi G giao hoán.

1.48. Xét đồng cấu nhóm cộng $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

a) Imf có dạng $n\mathbb{Z}$ với $n \in \mathbb{N}$;

b) $Kerf = \{0\}$ hoặc $Kerf = \mathbb{Z}$;

c) Tìm tất cả các tự đồng cấu của nhóm cộng $\mathbb{Z}$.

1.49. Xét đồng cấu nhóm cộng $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

a) Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = nf(1/n)$.

b) Suy ra $f(1) = 0$ và f phải là đồng cấu tầm thường.

1.50. Hãy mô tả tất cả các tự đồng cấu $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$.

1.51. Cho G là một nhóm và $f : G \longrightarrow G$ là một ánh xạ xác định bởi $f(a) = a^{-1}, \forall a \in G$. Chứng minh rằng G abel khi và chỉ khi f là một đồng cấu.

1.52. Chứng minh rằng

a) Mọi nhóm cyclic hữu hạn cấp n đều đẳng cấu với nhóm $(\mathbb{Z}_n, +)$.

b) Mọi nhóm cyclic vô hạn đều dẳng cấu với nhóm $(\mathbb{Z}, +)$.

1.53. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất (sai khác một đẳng cấu) một nhóm hữu hạn cấp 8 sinh bởi hai phần tử a, b thoả hệ thức

$$a^4 = e, \quad ba = a^{-1}b, \quad a^2 = b^2.$$

Nhóm này được gọi là *nhóm Quaternion*.

Hướng dẫn: Chứng minh sự tồn tại của Nhóm bằng cách xét nhóm con của nhóm $GL(2, \mathbb{C})$ sinh bởi hai ma trận $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ và $b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

1.54. Chứng minh rằng mọi nhóm con của nhóm quaternion đều chuẩn tắc.

1.55. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại duy nhất (sai khác một đẳng cấu) một nhóm hữu hạn cấp $2n$ sinh bởi hai phần tử a, b thoả hệ thức

$$a^2 = e, \quad b^n = e, \quad ab = b^{-1}a.$$

Nhóm nầy được gọi là *nhóm nhị diện* D_n.

Hướng dẫn: Chứng minh sự tồn tại của Nhóm bằng cách xét nhóm con của nhóm $GL(2, \mathbb{C})$ sinh bởi hai ma trận $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $b = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, trong đó ζ là một căn nguyên thủy bậc n của 1.

1.56. Chứng minh rằng trong nhóm nhị diện D_n với $n \geq 3$ nhóm con $\langle b \rangle$ chuẩn tắc nhưng nhóm con $\langle a \rangle$ thì không.

1.57. a) Cho G là một nhóm hữu hạn có cấp $|G| \leq 5$. Chứng minh G giao hoán.

b) Cho G là một nhóm hữu hạn có cấp 6. Chứng minh rằng nếu G giao hoán thì G là nhóm cyclic đẳng cấu với $\mathbb{Z}_6$; nếu G không giao hoán thì G đẳng cấu với nhóm nhị diện D_3.

1.58. Chứng minh rằng:

a) $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.

b) Nhóm thương $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ đẳng cấu với nhóm nhân T gồm các số phức có môđun bằng 1.

1.59. Cho nhóm cyclic $G = \langle x \rangle$ hữu hạn cấp n.

a) Với $f : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu nhóm, đặt $y = f(x)$. Chứng minh $y^n = e$, nghĩa là, y có cấp là một ước số của n.

b) Chứng minh rằng tương ứng $f \mapsto f(x)$ là một song ánh giữa tập các đồng cấu nhóm từ G vào G' và tập các phần tử y của G' có cấp là ước số của n.

1.60. Chứng minh rằng với đồng cấu $f : G \longrightarrow G'$ từ một nhóm hữu hạn G vào một nhóm G', ta có:

a) Cấp của $x \in G$ chia hết cho cấp của $f(x)$.

b) Cấp của G chia hết cho cấp của Imf.

1.61. Chứng minh rằng nhóm G' là ảnh đồng cấu của một nhóm cyclic hữu hạn G khi và chỉ khi G' là nhóm cyclic hữu hạn có cấp chia hết cho cấp G.

1.62. Ký hiệu $\mathbb{C}^*$ là nhóm nhân các số phức khác 0. Chứng minh rằng nếu H là nhóm con có chỉ số hữu hạn trong $\mathbb{C}^*$ thì $H = \mathbb{C}^*$.

1.63. Cho G_1, G_2 là hai nhóm với các phần tử đơn vị lần lượt là e_1, e_2. Xét tích trực tiếp $G = G_1 \times G_2$ và các tập con $H_1 = G_1 \times \{e_2\}$ và $H_2 = \{e_1\} \times G_2$. Chứng minh rằng

a) Các phép chiếu $p_j : G \longrightarrow G_j$ định bởi $p_j(x_1, x_2) = x_j$ là các toàn cấu nhóm và $Kerp_1 = H_2$; $Kerp_2 = H_1$. Suy ra H_j là nhóm con chuẩn tắc của G $(j = 1, 2)$.

b) Các phép nhúng $i_1 : G_1 \longrightarrow G$ định bởi $i_1(x_1) = (x_1, e_2)$ và $i_2 : G_2 \longrightarrow G$ định bởi $i_2(x_2) = (e_1, x_2)$ là các đơn cấu nhóm và $Imi_1 = H_1; Imi_2 = H_2$.

c) $G/H_1 \simeq H_2$ và $G/H_2 \simeq H_1$.

d) $G = H_1 H_2$ và $H_1 \cap H_2 = \{(e_1, e_2)\}$.

Mở rộng kết quả trên cho tích trực tiếp $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$.

1.64. Cho nhóm $(G, .)$.

a) Chứng minh rằng tập hợp tất cả các tự đẳng cấu của G cùng với phép toán tích các ánh xạ là một nhóm. Ta ký hiệu nhóm nầy là $Aut(G)$.

b) Với mỗi $g \in G$, ánh xạ $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ là một tự đẳng cấu của G. Ta gọi đây là các *tự đẳng cấu trong* của G.

c) Gọi $Int(G)$ là tập tất cả các tự đẳng cấu trong của G. Chứng minh rằng $Int(G)$ là một nhóm con chuẩn tắc của $Aut(G)$.

d) Chứng minh $G/C(G) \simeq Int(G)$, trong đó $C(G)$ là tâm của G.

1.65. Cho f là một đẳng cấu từ nhóm $(G, .)$ đến nhóm $(G', .)$.

a) Chứng minh rằng tương ứng $H \mapsto f(H)$ là một song ánh giữa tập hợp các nhóm con của G và của G'.

b) Chứng minh rằng tương ứng $H \mapsto f(H)$ là một song ánh giữa tập hợp các nhóm con chuẩn tắc của G và của G'.

c) Giả sử H là một nhóm con chuẩn tắc của G. Chứng minh rằng tương ứng $xH \mapsto f(x)f(H)$ là một đẳng cấu từ nhóm thương G/H đến nhóm thương $G'/f(H)$.

1.66. Xét ánh xạ $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ định bởi $f(x) = nx$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ cho trước. Chứng minh rằng:

a) f là một đồng cấu nhóm cộng. Tìm Imf và $Kerf$.

b) f là một đẳng cấu nhóm cộng từ $\mathbb{Z}$ đến $n\mathbb{Z}$. Từ đó, hãy mô tả tất cả các nhóm con của nhóm $n\mathbb{Z}$.

c) Với $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq n\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

1.67. Cho $(G, .)$ là một nhóm hữu hạn cấp n. Chứng minh rằng ánh xạ $x \mapsto f_x$, trong đó f_x thuộc nhóm hoán vị $S(G)$ của G định bởi $f_x(y) = xy$ với mọi $y \in G$, là một đơn cấu từ nhóm G vào nhóm $S(G)$. Từ đó suy ra rằng mọi nhóm hữu hạn đều là nhóm con (sai khác một đẳng cấu) của các nhóm hoán vị.

1.68. Cho G, G' lần lượt là hai nhóm cyclic hữu hạn cấp m và n với các phần tử sinh lần lượt là x và y. Xét tương ứng $f : G \longrightarrow G'$ định bởi $f(x^k) = y^{kl}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, trong đó $l \in \mathbb{N}^*$ cho trước.

a) Chứng minh rằng f là một đồng cấu nhóm khi và chỉ khi ml chia hết cho n.

b) f là một đẳng cấu nhóm khi và chỉ khi $m = n$ và $(m, l) = 1$.

c) Áp dụng tìm tất cả các đồng cấu từ nhóm cyclic cấp 8 đến nhóm cyclic cấp 12 và từ nhóm cyclic cấp 12 đến nhóm cyclic cấp 8.

d) Áp dụng tìm tất cả các tự đẳng cấu của nhóm cyclic cấp 8.

1.69. a) Cho nhóm $(G, .)$ và $G_1, G_2, ..., G_n$ là các nhóm con chuẩn tắc của G thoả các điều kiện sau:

$$G = G_1G_2...G_n \quad \text{và} \quad G_i \cap (G_1...G_{i-1}G_{i+1}...G_n) = \{e\}, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Chứng minh rằng

i) Mọi phần tử $x \in G$ được viết duy nhất dưới dạng $x = x_1x_2...x_n$ trong đó $x_i \in G_i, \forall 1 \leq i \leq n$.

ii) G đẳng cấu với nhóm tích trực tiếp $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$.

Ta nói G là một *nội tích trực tiếp* của các nhóm con $G_i, 1 \leq i \leq n$.

b) Chứng minh rằng nếu nhóm $(G, .)$ đẳng cấu với tích trực tiếp của những nhóm con $H_i, 1 \leq i \leq n$ thì trong G sẽ tồn tại các nhóm con G_i đẳng cấu với H_i sao cho G là nội tích trực tiếp của các nhóm con $G_i, 1 \leq i \leq n$.

1.70. Chứng minh rằng mọi nhóm hữu hạn cấp p^2 với p nguyên tố hoặc đẳng cấu với nhóm $\mathbb{Z}_{p^2}$ hoặc đẳng cấu với nhóm $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Chương 2

VÀNH, MIỀN NGUYÊN, TRƯỜNG

2.1. Kiểm chứng các cấu trúc đại số sau có là vành; miền nguyên hay trường không:

a) $\mathcal{P}(X)$ với X là tập hợp khác rỗng, và hai phép toán tương ứng là Δ và $\cap$ (ở đây $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

b) $\mathbb{Q}$ với hai phép toán $x \top y = x + y - 1$ và $x \perp y = x + y - xy$.

c) $\mathbb{R}^+$ với hai phép toán $x \top y = xy$ và $x \perp y = x^{lny}$.

d) $\mathbb{R}$ với hai phép toán $x \top y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ và $x \perp y = xy$ (n là một số nguyên dương lẻ) .

e) $\mathbb{R}$ với hai phép toán $x \top y = (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})^n$ vài $x \perp y = xy$ (n là một số nguyên dương lẻ).

f) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbb{Z}$ với hai phép toán là phép cộng và nhân thông thường như trong $\mathbb{R}$.

g) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ với hai phép toán là phép cộng và nhân thông thường như trong $\mathbb{R}$.

h) $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ với hai phép toán là phép cộng và phép nhân ma trận thông thường.

i) Tập hợp A gồm tất cả các ma trận (tương ứng, ma trận chéo; ma trận tam giác trên; ma trận tam giác dưới; ma trận tam giác trên ngặt; ma trận tam giác dưới ngặt) vuông cấp $n \geq 2$ với hai phép toán là phép cộng và phép nhân ma trận thông thường.

j) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 6b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ với hai phép toán là phép cộng và phép nhân ma trận thông thường.

k) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ với hai phép toán định bởi $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$ và $(x, y)(z, t) = (xz - yt, xt + yz)$.

2.2. Giả sử vành R có duy nhất một phần tử đơn vị trái. Chứng minh R có đơn vị.

2.3. Giải các phương trình

a) $21\overline{x} + \overline{24} = \overline{101}$ trong $\mathbb{Z}_{103}$.

b) $68(\overline{x} + \overline{24}) = \overline{102}$ trong $\mathbb{Z}_{492}$.

c) $78\overline{x} - \overline{13} = \overline{35}$ trong $\mathbb{Z}_{666}$.

2.4. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa điều kiện trong mỗi trường hợp sau:

a) $27n - 18$ chia hết cho 133.

b) $92n + 18$ chia hết cho 100.

c) $95n - 15$ chia hết cho 335.

2.5. Cho R là một vành có tính chất sau:

$$x^2 = x \text{ với mọi } x \in R.$$

(Ta gọi R là *vành Bool*). Chứng minh rằng

a) $x = -x$ với mọi $x \in R$.

b) R là vành giao hoán.

c) Nếu R là vành không có ước của 0 và R có nhiều hơn một phần tử thì R là miền nguyên.

2.6. * Cho R là một vành có tính chất sau:

$$x^3 = x \text{ với mọi } x \in R.$$

Chứng minh rằng R là một vành giao hoán.

2.7. Cho R là một vành tùy ý.

a) Với $a \in R$, tập hợp $C(a) = \{x \in R | ax = xa\}$ được gọi là *tâm hoá tử của a*. Chứng minh rằng $C(a)$ là một vành con của R có chứa a.

b) Tập hợp $C(R) = \{x \in R | ax = xa, \forall a \in R\}$ được gọi là *tâm* của R. Chứng minh rằng $C(R)$ là một vành con giao hoán của R.

c) Tìm tâm của vành $M(n, \mathbb{R})$.

2.8. Cho R là một vành có đơn vị e và $x, y \in R$. Chứng minh rằng nếu $u = e + xy$ khả nghịch thì $e + yx$ cũng khả nghịch và $(e + yx)^{-1} = e - yu^{-1}x$.

2.9. Cho R là một vành có đơn vị e. Chứng minh rằng với I là một ideal của R ta có $I = R$ khi và chỉ khi I chứa đơn vị e. Kết qủa trên còn đúng cho các ideal trái, ideal phải hay các vành con của R hay không?

2.10. Cho R là một vành tùy ý, I và J là hai ideal của R. Đặt

$$I + J = \{x + y | \ x \in I, \ y \in J\}.$$

Chứng minh rằng $I + J$ là một ideal của R. Nếu R là vành các số nguyên và $I = m\mathbb{Z}$; $J = n\mathbb{Z}$ thì $I + J$ có dạng thế nào?

2.11. Cho R là một vành tùy ý, I và J là hai ideal của R. Đặt

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i |\ n \in \mathbb{N},\ x_i \in I,\ y_i \in J \right\}.$$

Chứng minh rằng IJ là một ideal của R. Nếu R là vành các số nguyên và $I = m\mathbb{Z}$; $J = n\mathbb{Z}$ thì IJ có dạng thế nào?

2.12. Cho R là một vành tùy ý và n là một số nguyên cho trước. Chứng minh rằng tập hợp

$$I = \{x \in R |\ nx = 0\}$$

là một ideal của R.

2.13. Cho R là một vành tùy ý và $a \in R$. Chứng minh rằng tập hợp

$$aR = \{ax |\ x \in R\}$$

là một ideal phải của R, và tập hợp

$$Ra = \{xa |\ x \in R\}$$

là một ideal trái của R. Suy ra nếu R giao hoán thì $aR = Ra$ là ideal của R; hơn nữa, nếu giả thiết thêm R có đơn vị thì đây chính là ideal chính sinh bởi a.

2.14. Cho R là một vành có đơn vị và $a \in R$. Chứng minh rằng

a) a khả nghịch phải khi và chỉ khi $aR = R$.

b) a khả nghịch trái khi và chỉ khi $Ra = R$.

c) a khả nghịch khi và chỉ khi $aR = Ra = R$.

2.15. a) Cho R là một vành giao hoán và $a \in R$. Chứng minh rằng tập hợp con

$$Ann(a) = \{x \in R | ax = 0\}$$

là một ideal của R.

b) Tìm $Ann(\overline{4})$ trong vành $\mathbb{Z}_{32}$.

2.16. Cho R là một vành tùy ý . Một phần tử $x \in R$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại một số n nguyên dương sao cho $x^n = 0$.

a) Chứng minh rằng nếu R có đơn vị là e và x lũy linh thì $e + x$ khả nghịch.

b) Giả sử R giao hoán, có đơn vị và $u \in R$ khả nghịch. Chứng minh rằng nếu x lũy linh thì $u + x$ khả nghịch.

c) Giả sử R giao hoán. Chứng minh rằng tập hợp $N(R)$ gồm tất cả các phần tử lũy linh của R là một ideal của R và trong vành thương $R/N(R)$ không có phần tử lũy linh nào khác không (Ta gọi $N(R)$ là *nil-căn* của R).

2.17. Xét R là một vành tùy ý và $\mathbb{Z}$ là vành các số nguyên. Trên tích Descartes $R \times \mathbb{Z}$ ta định nghĩa các phép toán như sau:

$$(x, m) + (y, n) = (x + y, m + n);$$

$$(x, m)(y, n) = (xy + my + nx, mn).$$

a) Chứng minh rằng $R \times \mathbb{Z}$ là một vành có đơn vị.

b) Chứng minh rằng ánh xạ $f : x \mapsto (x, 0)$ là một đơn cấu.

(Do các kết quả trên người ta nói rằng bao giờ cũng có thể nhúng một vành tùy ý vào một vành có đơn vị).

2.18. a) Chứng minh rằng mọi vành có đơn vị và có đúng p phần tử với p nguyên tố, đều đẳng cấu với vành $\mathbb{Z}_p$.

b) Khẳng định "Mọi vành có đơn vị và có đúng m phần tử với m nguyên dương đều đẳng cấu với $\mathbb{Z}_m$ " có đúng hay không?

2.19. Cho f là một tự đồng cấu của vành R. Chứng minh rằng tập hợp

$$I = \{x \in R | f(x) = x\}$$

là một vành con của R.

2.20. Cho R, S là hai vành. Xét tích Descartes $T = R \times S$ và các tập con $\overline{R} = R \times \{0\}$ và $\overline{S} = \{0\} \times S$. Trên T ta định nghĩa các phép toán như sau:

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t);$$

$$(x, y)(z, t) = (xz, yt).$$

Chứng minh rằng

a) T là một vành.

b) $\overline{R}$ và $\overline{S}$ lần lượt là các ideal của T đẳng cấu với R và S.

c) $\overline{R}$ và $\overline{S}$ là các ideal của T thỏa $\overline{R} \cap \overline{S} = \{(0, 0)\}$ và $\overline{R} + \overline{S} = T$.

d) Giả sử R, S là các vành có đơn vị. Hãy tìm các đơn vị của T, $\overline{R}$ và $\overline{S}$.

2.21. Cho R là một vành và $a \in R$. Chứng minh rằng:

a) Tập hợp E gồm tất cả các tự đồng cấu của nhóm cộng Abel R với các phép toán định bởi: Với mọi $f, g \in E$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{v} \quad (fg)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in R$$

là một vành.

b) Ánh xạ $h_a : x \mapsto ax$ là một tự đồng cấu của nhóm cộng Abel R.

c) Ánh xạ $h : b \mapsto h_b$ là một đồng cấu vành từ R đến E.

d) Tìm Ker$h$. Chứng tỏ h là đơn cấu nếu R có đơn vị.

2.22. Cho R là một miền nguyên và n là cấp (trong nhóm $(R, +)$) của phần tử đơn vị e. Chứng minh rằng

a) n là một số nguyên tố.

b) Mọi phần tử khác không của R đều có cấp n.

c) Với mỗi số nguyên m cho trước, tập hợp

$$mR = \{mx \mid x \in R\}$$

là một ideal của R thỏa

$$R/mR \simeq \begin{cases} R & \text{nếu } m \text{ là bội số của } n; \\ \{0\} & \text{nếu } m \text{ không là bội số của } n. \end{cases}$$

2.23. Trong trường các số phức $\mathbb{C}$ xét

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{và} \quad \mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

a) Chứng minh rằng $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ và $\mathbb{Q}(i)$ là các trường con của $\mathbb{C}$.

b) Chứng minh rằng $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ và $\mathbb{Q}(i)$ không đẳng cấu.

c) Tìm tất cả các trường con của $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; của $\mathbb{Q}(i)$.

d)* Chứng minh rằng tập hợp $A = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ là một trường con của $\mathbb{C}$.

2.24. Chứng minh rằng

a) $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ là một trường đẳng cấu với $\mathbb{Q}(i)$.

b) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ là một trường đẳng cấu với $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

2.25. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng các khẳng định sau tương đương:

a) $\mathbb{Z}_n$ là một miền nguyên;

b) $\mathbb{Z}_n$ là một trường;

c) n là một số nguyên tố.

2.26. Cho R là một vành giao hoán có đơn vị; I là một ideal của R và I khác R. Ta nói

i) I là *ideal tối đại* của R nếu chỉ có hai ideal chứa I là I và R.

ii) I là *ideal nguyên tố* của R nếu tính chất sau được thỏa: Với mọi $x, y \in R$, nếu $xy \in I$ thì $x \in I$ hay $y \in I$.

Chứng minh rằng

a) R/I là miền nguyên khi và chỉ khi I là ideal nguyên tố.

b) R/I là trường khi và chỉ khi I là ideal tối đại.

2.27. Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và R có hơn một phần tử. Chứng minh rằng các khẳng định sau tương đương:

a) R là một trường;

b) R chỉ có hai ideal là $\{0\}$ và R.

c) Mọi đồng cấu vành từ R vào một vành bất kỳ hoặc là đồng cấu 0 hoặc là đơn cấu.

2.28. Cho trường F với phần tử đơn vị là 1.

a) Chứng minh rằng với $x \in F$, ta có $x^2 = 1$ khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

b) Giả sử F có đúng p phần tử là $x_1, ..., x_{p-1}$ và $x_p = 0$. Chứng minh rằng $x_1 ... x_{p-1} = -1$ và $\forall x \in F^*, x^{p-1} = 1$.

c) Sử dụng kết quả b) để chứng minh rằng với mọi số nguyên tố dương p ta có (Định lý Wilson)

$$(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p) \quad \text{và} \quad k^p \equiv k \ (mod\ p), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2.29. Cho F là một trường với phần tử đơn vị e. Xét tập hợp

$$A = \{ne |\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Chứng minh rằng:

a) A là một vành con của F; hỏi A có là miền nguyên không?

b) $A \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{nếu } e \text{ có cấp vô hạn;} \\ \mathbb{Z}_p & \text{nếu } e \text{ có cấp } p. \end{cases}$

c) Nếu e có cấp p hữu hạn thì A là một trường.

2.30. Chứng minh rằng trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ không có trường con nào khác ngoài $\mathbb{Q}$.

2.31. Chứng minh rằng mọi trường đều có trường con bé nhất (theo quan hệ bao hàm) đẳng cấu hoặc với trường số hữu tỉ hoặc với trường $\mathbb{Z}_p$ với p nguyên tố.

2.32. Cho F là một trường và A là một vành con của F.

a) Chứng minh rằng nếu A có nhiều hơn một phần tử và A có đơn vị thì phần tử đơn vị của A trùng với phần tử đơn vị của F, và lúc đó A là một miền nguyên.

b) Giả sử A là một miền nguyên. Chứng minh rằng tập hợp

$$P = \{ab^{-1} |\ a, b \in A,\ b \neq 0\}$$

là một trường con của F và P là trường các thương của A.

c) Chứng minh rằng P là trường con bé nhất trong các trường con của F có chứa A.

2.33. Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các số hữu tỉ có dạng m/n, trong đó m, n là các số nguyên và n nguyên tố cùng nhau với p, là một miền nguyên. Tìm trường các thương của miền nguyên này.

2.34. Xét hàm φ-Euler.

a) Chứng minh rằng $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ với mọi p nguyên tố.

b) Xác định $\varphi(n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

2.35. Tìm tất cả các tự đồng cấu của các trường sau:

a) Trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

b) Trường $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

c) Trường $\mathbb{Q}(i)$.

d) Trường các số thực $\mathbb{R}$.

e) Trường các số phức $\mathbb{C}$ sao cho các tự đồng cấu đó thu hẹp trên $\mathbb{R}$ là ánh xạ đồng nhất.

2.36. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + 14 \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ có bốn nghiệm phân biệt trong $\mathbb{Z}_{15}$.

2.37. Xác định các số thực a, b, c sao cho đa thức $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x + 2$ và chia cho $x^2 - 1$ thì dư x.

2.38. Cho $f \in \mathbb{R}[x]$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng nếu $(x-1)|f(x^n)$ thì $(x^n - 1)|f(x^n)$.

b) Chứng minh rằng nếu $a \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(x-a)^m|f(x^n)$ thì $(x^n - a^n)^m|f(x^n)$.

c) Giả sử $(x^2 + x + 1)|f(x)$ và có $g, h \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $f(x) = g(x^3) + xh(x^3)$. Chứng minh rằng $(x-1)|g(x)$ và $(x-1)|h(x)$.

2.39. Cho F là một trường và K là một trường con của F. Chứng minh rằng với $f, g \in K[x]$, f là ước của g trong $K[x]$ khi và chỉ khi f là ước của g trong $F[x]$.

2.40. Chứng minh rằng trong vành $\mathbb{C}[x]$, $f(x)|g(x)$ khi và chỉ khi mọi nghiệm của $f(x)$ đều là nghiệm của $g(x)$ và mọi nghiệm bội cấp k của $f(x)$ đều là nghiệm bội cấp l với $l \geq k$ của $g(x)$.

2.41. Trong các trường hợp sau hãy chứng minh $f|g$ trong $\mathbb{Q}[x]$.

a) $f(x) = x(x+1)(2x+1)$ và $g(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$.

b) $f(x) = x^2 - x + 1$ và $g(x) = (x-1)^{n+2} + x^{2n+1}$.

c) $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$.
trong đó k, m, n là các số nguyên dương.

2.42. Tìm điều kiện của $k, m, n \in \mathbb{N}$ để $f|g$ trong $\mathbb{Q}[x]$ cho mỗi trường hợp sau:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = x^{2n} + x^n + 1$.

b) $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = (x+1)^n + x^n + 1$.

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ và $g(x) = (x-1)^n + x^n + 1$.

d) $f(x) = x^2 - x + 1$ và $g(x) = x^{3k} - x^{3m+1} + x^{3n+2}$.

2.43. * Với mỗi số nguyên dương k, đặt $f_k(x) = x^k - 1$ là đa thức với hệ số hữu tỉ. Chứng minh rằng với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$,

a) $f_m | f_n$ khi và chỉ khi $m|n$.

b) $(f_m, f_n) = f_d$ với $d = (m, n)$.

2.44. Cho F là trường $\mathbb{Q}$ hay trường $\mathbb{Z}_5$ và $f, g \in F[x]$. Tìm $h = (f, g)$; $k = [f, g]$ và $u, v \in F[x]$ thỏa $h = uf + vg$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ và $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

c) $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ và $g(x) = 4x^4 + x^2 + 3x + 1$.

2.45. Trong các trường hợp sau hãy tìm khai triển Taylor của đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ tại x_0. Xét xem x_0 là nghiệm bội cấp mấy của f và tìm các đạo hàm $f^{(i)}(x_0)$ với $1 \leq i \leq 6$.

a) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 16x + 12$ và $x_0 = 2$.

b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 9$ và $x_0 = 3$.

c) $f(x) = x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 15x^3 + 18x^2 - 20x + 8$ và $x_0 = 2$.

d) $f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ và $x_0 = 1/2$.

2.46. Trong các trường hợp sau hãy tìm tất cả các đa thức f thỏa điều kiện đã cho:

a) $f \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $f(2) = 4$; $f(3) = 6$; $f(4) = 8$.

b) $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ thỏa $f(\overline{2}) = \overline{1}$; $f(-\overline{1}) = \overline{3}$; $f(\overline{3}) = \overline{2}$.

c) $f \in \mathbb{Z}_{101}[x]$ thỏa $f(\overline{2}) = \overline{30}$; $f(\overline{5}) = \overline{21}$; $f(\overline{3}) = \overline{-13}$.

2.47. Cho F là một trường và $a, b \in F$; $a \neq 0$. Chứng minh rằng $f(x) \in F[x]$ bất khả qui khi và chỉ khi $f(ax + b)$ bất khả qui.

2.48. * Cho $a_1, ..., a_n$ là các số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng các đa thức sau bất khả qui trên $\mathbb{Q}$.

a) $f(x) = (x - a_1)...(x - a_n) - 1$.

b) $g(x) = (x - a_1)^2...(x - a_n)^2 + 1$.

2.49. Trong các trường hợp sau hãy phân tích f thành tích các đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Q}$, trên $\mathbb{R}$ và trên $\mathbb{C}$:

a) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 15x - 18$.

b) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 14x^2 - 18x - 36$.

c) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$.

d) $f(x) = 16x^6 - 36x^5 - 84x^4 + 99x^3 + 201x^2 + 45x - 25$.

e) $f(x) = 9x^6 - 30x^5 + 49x^4 - 28x^3 - 4x^2 + 16x + 4$.

f) $f(x) = -4x^6 - 23x^5 - 63x^4 - 85x^3 - 57x^2 - 8x - 16$.

2.50. Chứng minh rằng các đa thức sau bất khả qui trên $\mathbb{Q}$.

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 3$.

b) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

c) $x^{p-1} + ... + x + 1$ với p là số nguyên tố dương.

d) $5x^3 + 6x^2 + 5x + 25$.

e) $7x^3 + 6x^2 + 11x + 11$.

f) $x^3 - 3n^2x + n^3$ với n nguyên dương.

g) $3x^4 + 5x^3 - 4x + 1$.

h) $x^4 - 9x^3 + 6x - 1$.

i) $x^4 + 8x^3 + x^2 + 2x + 5$.

2.51. Giải các phương trình bậc 3 sau trong $\mathbb{C}$:

a) $4x^3 - 36x^2 + 84x - 20 = 0$.

b) $x^3 - x - 6 = 0$.

c) $x^3 + 18x + 15 = 0$.

d) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.

2.52. Chứng minh rằng nếu $x_1,\ x_2,\ x_3$ là các nghiệm phức của phương trình $x^3 + px + q = 0$ thì

$$(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

2.53. Giải các phương trình bậc 4 sau trong $\mathbb{C}$:

a) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$.

b) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

c) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$.

d) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$.

2.54. * Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên có $f(0)$ và $f(1)$ đều lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

2.55. Chứng minh rằng đa thức $x^4 + px^2 + q$ bất khả qui trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi các số $p^2 - 4q;\ 2\sqrt{q} - p$ không là bình phương của các số hữu tỉ.

2.56. Biểu thị các đa thức đối xứng sau đây qua các đa thức đối xứng cơ bản:

a) ${x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 - 3x_1x_2x_3$.

b) ${x_1}^2x_2 + x_1{x_2}^2 + x_1{x_3}^2 + {x_2}^2x_3 + x_2{x_3}^2$.

c) ${x_1}^4 + {x_2}^4 + {x_3}^4 - 2{x_1}^2{x_2}^2 - 2{x_2}^2{x_3}^2 - 2{x_3}^2{x_1}^2$.

d) ${x_1}^5{x_2}^2 + {x_1}^2{x_2}^5 + {x_1}^5{x_3}^2 + {x_1}^2{x_3}^5 + {x_2}^5{x_3}^2 + {x_2}^2{x_3}^5$.

e) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$.

f) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$.

g) $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$.

h) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

2.57. a) Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2x - 3 = 0.$$

b) Tính

$$ {x_1}^3x_2 + x_1{x_2}^3 + {x_2}^3x_3 + x_2{x_3}^3 + {x_3}^3x_1 + x_3{x_1}^3$$

trong đó x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình

$$x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0.$$

c) Giả sử x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình

$$x^3 + px + q = 0.$$

Tính

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}.$$

2.58. Cho phương trình

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Biểu thị các đa thức đối xứng sau đây qua các hệ số của phương trình đó.

a) $({x_1}^2 - x_2x_3)({x_2}^2 - x_3x_1)({x_3}^2 - x_1x_2)$.

b) $({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2)({x_2}^2 + x_2x_3 + {x_3}^2)({x_3}^2 + x_3x_1 + {x_1}^2)$.

2.59. Dùng đa thức đối xứng, giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = -8 \\ xyz = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 27 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$