ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐẶNG ĐỨC TRỌNG – ĐINH NGỌC THANH – PHẠM HOÀNG QUÂN

Giáo trình GIẢI TÍCH 2

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

Đặng Đức Trọng – Đinh Ngọc Thanh – Phạm Hoàng Quân

Giáo trình
GIẢI TÍCH 2

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2011

GT.02.T(V)
ĐHQG.HCM-11

84-2011/CXB/424-04

T.GT.278-11(T)

Th TCM
Nguyễn Đức Thắng

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình "Giải tích 2" được biên soạn dành cho sinh viên trong giai đoạn đào tạo cơ bản. Tuy nhiên, nó cũng có thể sử dụng như một tài liệu tham khảo cho sinh viên một số nhóm ngành khác, cho các học viên cao học và các cán bộ nghiên cứu trong các khối khoa học Toán Lý và Kỹ thuật.

Giáo trình được chia thành bảy chương. Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản trong không gian mêtríc. Chương 2 khảo sát ánh xạ liên tục, tập compắc, tập liên thông đường. Chương 3 đề cập đến không gian mêtríc đầy đủ và không gian Banach. Chương 4 xét vi phân hàm nhiều biến. Chương 5 trình bày công thức Taylor, hàm vectơ, hàm ẩn, hàm ngược, cực trị của hàm nhiều biến. Chuỗi trong không gian Banach được khảo sát trong chương 6. Và cuối cùng, một số kiến thức về dãy hàm và chuỗi hàm được trình bày trong chương 7.

Trong quá trình biên soạn, vì nhiều lý do khách quan và chủ quan, giáo trình không thể không có những thiếu sót nhất định. Vì vậy, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp để giáo trình được hoàn thiện thêm.

Tp. Hồ Chí Minh, 12/2007

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương 1

KHÔNG GIAN MÊTRÍC

§1 KHÔNG GIAN MÊTRÍC

1.1 Định nghĩa mêtríc Cho E là một tập hợp khác trống. Một *mêtríc* trên E là một ánh xạ

$$\delta : E \times E \to \mathbb{R}$$

thỏa các tính chất

(i) Phân biệt dương: $\delta(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E$

$\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) Đối xứng: $\delta(x,y) = \delta(y,x) \quad \forall x, y \in E$

(iii) Bất đẳng thức tam giác: $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y) \quad \forall x, y, z \in E$

1.2 Định nghĩa không gian mêtríc Một *không gian mêtríc* là một cặp (E, δ), trong đó E là tập hợp khác trống và δ là một mêtríc trên E. Không gian mêtríc (E, δ) thường được viết là E với δ được hiểu ngầm khi không bị nhầm lẫn.

1.3 Mệnh đề về $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ là tập hợp các bộ $x = (x_1, ...x_n)$, là một không gian mêtríc với các mêtríc sau

i) $\rho_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$

(gọi là mêtríc Euclide hay mêtríc thông thường)

ii) $\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad p \geq 1$

iii) $\rho_\infty(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$

trong đó $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

*** Lưu ý:**

- Trong $\mathbb{R}$ ba mêtríc này là trị tuyệt đối $\rho(x,y) = |x - y|$.

- Trong $\mathbb{R}^n$ nếu không nói tới một mêtríc cụ thể nào khác, thì xem như mêtríc trên đó là mêtríc Euclide hay mêtríc thông thường.

1.4 Ta nói một ma trận $m \times n$ là một bảng số m hàng, n cột

Mệnh đề. Tập hợp $M_{m\times n}$ các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$$

hoặc vắn tắt $A = (a_{ij})$ là không gian mêtríc với các khoảng cách

i) $\rho_p(A,B) = \left(\sum_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}} |a_{ij} - b_{ij}|^p\right)^{1/p}, p \geq 1$

ii) $\rho_\infty(A,B) = \max_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}} |a_{ij} - b_{ij}|$.

1.5 Ta ký hiệu tập hợp $C[a,b]$ gồm các hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$. $C[a,b]$ là không gian mêtríc với

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Định nghĩa. f_n hội tụ đều về f trên $[a,b]$, ký hiệu $f_n \rightrightarrows f$ trên $[a,b]$, nếu $d(f_n, f) \to 0$ khi $n \to \infty$.

1.6 Định nghĩa mêtríc cảm sinh. Cho $\emptyset \neq A \subset E, (E, \delta)$ là không gian mêtríc. Trên A, đặt

$$\delta_A : A \times A \to \mathbb{R}$$
$$\delta_A(x, y) = \delta(x, y) \qquad \forall x, y \in A$$

Thì δ_A là một mêtríc trên A. Mêtríc này là *mêtríc cảm sinh* của (E, δ) trên A. Không gian (A, δ_A) gọi là không gian *mêtríc con* của (E, δ).

1.7 Tích các không gian mêtríc

Định nghĩa. Cho $(E_1, \delta_1), (E_2, \delta_2), ..., (E_m, \delta_m)$ là m không gian mêtríc. Xét tập hợp tích

$$E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_m = \{(u_1, u_2, ..., u_m) \ : \ u_i \in E_i, \forall i \in \overline{1, m}\}.$$

E là không gian mêtríc với mêtríc

$$\delta(u, v) = \sqrt{\delta_1^2(u_1, v_1) + \delta_2^2(u_2, v_2) + ... + \delta_m^2(u_m, v_m)}$$

trong đó $u = (u_1, u_2, ..., u_m), v = (v_1, v_2, ..., v_m)$.

§2 KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN

2.1 Định nghĩa không gian vectơ

Cho $(V, +, .)$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, nghĩa là trên V, ta có hai phép toán trong

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (v, w) &\mapsto v + w \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} . : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (k, v) &\mapsto kv \end{aligned}$$

sao cho tồn tại vectơ $0 \in V$ và ứng với mỗi vectơ $u \in V$, tồn tại duy nhất vectơ ký hiệu là $-u \in V$ sao cho

i) $u + v = v + u$,

ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$,

iii) $u + 0 = u$,

iv) $u + (-u) = 0$,

v) $(hk).u = h.(k.u)$,

vi) $(h + k)u = hu + ku$,

vii) $h(u + v) = hu + hv$,

viii) $1.u = u$

với mọi vectơ $u, v, w \in V$ và với mọi số thực $h, k \in \mathbb{R}$.

2.2 Định nghĩa chuẩn. Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} \|.\| : V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \|v\| \end{aligned}$$

được gọi là một *chuẩn* trên V nếu thỏa ba tính chất sau

i) Phân biệt dương: $\|v\| \geq 0$ và $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

ii) Chuẩn vectơ bội: $\|kv\| = |k|.\|v\|$,

iii) Bất đẳng thức tam giác: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

với mọi vectơ $u, v \in V$ và với mọi số thực $k \in \mathbb{R}$.

Một không gian vectơ được trang bị một chuẩn được gọi là một *không gian định chuẩn*.

2.3 Ví dụ.

i) $\mathbb{R}$ là không gian định chuẩn với chuẩn là

$$\begin{aligned} |.|:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto |x|, \end{aligned}$$

ii) $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ là không gian định chuẩn với chuẩn là

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (x_1,...,x_n) &\mapsto (|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{1/p}, p\ge 1 \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (x_1,...,x_n) &\mapsto \max_{i=\overline{1,n}}|x_i|. \end{aligned}$$

Ta ký hiệu $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ gọi là *tích vô hướng* trong $\mathbb{R}^n$.

Định lý. *Tích vô hướng thỏa các tính chất*

1) $\langle x,x\rangle \ge 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3) $\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle$

4) $|\langle x,y\rangle| \le ||x||_2||y||_2$ *với mọi* $x,y,z\in\mathbb{R}^n,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Chứng minh. Hiển nhiên. ■

iii) Tập hợp các ma trận m hàng, n cột $M_{m\times n}$ là một không gian véctơ với hai phép toán $+,\cdot$ như sau

$\cdot(a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})$

$\cdot k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

và là không gian định chuẩn với

$$||(a_{ij})||_p = \left(\sum_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}} |a_{ij}|^p\right)^{1/p}$$

hoặc

$$||(a_{ij})||_\infty = \max_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}} |a_{ij}|$$

* Chú ý rằng với không gian định chuẩn V, ánh xạ

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto d(u, v), \end{aligned}$$

xác định bởi $d(u, v) = \|u - v\|$, là một *mêtric* trên V.

2.4 Không gian định chuẩn tích

Cho $V_1, ..., V_n$ là n không gian định chuẩn. Xét tập hợp tích

$$V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n = \{(u_1, u_2, ..., u_n) \ : \ u_i \in V_i, \forall i \in \overline{1, n}\}$$

với các phép toán

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, ..., u_n + v_n), \\ ku &= (ku_1, ..., ku_n), \end{aligned}$$

khi $u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n) \in V$ và $k \in \mathbb{R}$.

Ta có $(V, +, .)$ trở thành một không gian vectơ. Ngoài ra, ánh xạ

$$\begin{aligned} \|.\| : V &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\| \end{aligned}$$

xác định bởi

$$\|u\| = (\|u_1\|^2 + ... + \|u_n\|^2)^{1/2}$$

là một chuẩn trên V.

V với các phép toán và chuẩn nêu trên được gọi là ***không gian định chuẩn tích*** của các không gian định chuẩn $V_1, \dots, V_n$.

Ví dụ của không gian định chuẩn tích chính là không gian $\mathbb{R}^n$. Nó chính là không gian định chuẩn tích của n không gian định chuẩn $\mathbb{R}$. Hơn nữa, $\mathbb{R}^{m+n}$ cũng là không gian định chuẩn tích của các không gian định chuẩn $\mathbb{R}^m$ và $\mathbb{R}^n$.

§3 HỘI TỤ

Một trong những tính chất căn bản của không gian định chuẩn nói riêng và không gian mêtric nói chung là ta có thể đặc trưng tập đóng, các điểm dính và điểm tụ bằng dãy. Trước hết, với không gian mêtríc (E, δ) và $\emptyset \neq D \subset E$, một ánh xạ

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to D \\ n &\mapsto u(n) \equiv u_n \end{aligned}$$

được gọi là một *dãy* các phần tử của D, ký hiệu $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hay vắn tắt là (u_n). Ta có

3.1 Định nghĩa dãy hội tụ. Dãy (u_n) được gọi là *hội tụ* trong D nếu tồn tại $u_0 \in D$ sao cho $\delta(u_n, u_0) \to 0$ khi $n \to \infty$, nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \delta(u_n, u_0) < \varepsilon.$$

Ký hiệu

$$u_0 = \lim_{n \to \infty} u_n.$$

3.2 Định lý duy nhất của giới hạn. *Nếu dãy (u_n) có giới hạn thì giới hạn là duy nhất.*

Chứng minh.

Giả sử $u_0, v_0 \in E, u_0 \neq v_0$ là hai giới hạn của (u_n).

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta(u_0, v_0)$.

Vì $u_n \to u_0$ nên tồn tại $n_1 \geq 1$ sao cho

$$\delta(u_n, u_0) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

và $u_n \to v_0$ nên tồn tại $n_2 \geq 1$ sao cho

$$\delta(u_n, v_0) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2.$$

Lấy $n_0 = max(n_1, n_2), \forall n \geq n_0$, ta có

$$\delta(u_0, v_0) \leq \delta(u_n, u_0) + \delta(u_n, v_0) < 2\varepsilon = \delta(u_0, v_0).$$

Suy ra vô lý nên $u_0 = v_0$.

Định lý đã được chứng minh. ■

3.3 Định lý giới hạn trong không gian mêtríc tích. *Cho $\{x(n)\}$ là một dãy trong không gian mêtríc (E, δ) với (E, δ) là không gian mêtríc tích của $(E_1, \delta_1), (E_2, \delta_2), ..., (E_m, \delta_m)$. Thì $\{x(n)\}$ hội tụ về x trong E nếu và chỉ nếu*

$$x_i(n) \to x_i \qquad \forall i \in (\overline{1, m})$$

với $x(n) = (x_1(n), x_2(n), ..., x_m(n))$ và $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$.

Chứng minh. Giả sử $x(n) \to x$. Ta chứng minh $x_i(n) \to x_i$.

Cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại một $n_0 \geq 1$ sao cho

$$\delta(x(n), x) < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Nhưng $\delta_i(x_i(n), x_i) \leq \delta(x(n), x)$, $\quad i = 1, 2, ..., m$. Do đó

$$\delta_i(x_i(n), x_i) < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Vậy $x_i(n) \to x_i$, $\quad i = 1, 2, ..., m$.

Đảo lại, giả sử $x_i(n) \to x_i \quad \forall i = 1, 2, ..., m$. Ta chứng minh $x(n) \to x$.

Cho $\varepsilon > 0$. $\forall i = 1, 2, ..., m$, vì $x_i(n) \to x_i$ nên có $n_i \geq 1$ sao cho

$$\delta_i(x_i(n), x_i) < \frac{\varepsilon}{m} \qquad \forall n \geq n_i$$

Lấy $n_0 = max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ thì

$$\delta(x(n), x) \leq \delta_1(x_1(n), x_1) + \delta_2(x_2(n), x_2) + ... + \delta_m(x_m(n), x_m) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Do đó,

$$\delta(x(n), x) < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Vậy $x(n) \to x$ và mệnh đề được chứng minh. ■

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^2$, tìm giới hạn của

a) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$,

b) $y_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$.

§4 ĐIỂM DÍNH, BAO ĐÓNG, PHẦN TRONG

Cho (E, δ) là không gian mêtríc, $u \in E$ và $r > 0$, các tập

$$\begin{aligned} B(u; r) &= \{v \in E : \delta(u, v) < r\} \\ B'(u; r) &= \{v \in E : \delta(u, v) \leq r\} \\ S(u; r) &= \{v \in E : \delta(u, v) = r\} \end{aligned}$$

lần lượt được gọi là *quả cầu mở, quả cầu đóng* và *mặt cầu tâm u, bán kính r*.

4.1 Định nghĩa. Cho (E, δ) là một không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$ và $u \in E$. Ta nói

i) u là một *điểm dính* của D nếu mọi quả cầu tâm u đều chứa ít nhất một phần tử của D, nghĩa là

$$\forall r > 0, B(u; r) \cap D \neq \emptyset,$$

ii) u là điểm trong của D nếu tồn tại quả cầu tâm u chứa trong D, nghĩa là $\exists r > 0, B(u, r) \subset D$.

Tập tất cả các điểm dính của D được gọi là *bao đóng* của D, ký hiệu $\overline{D}$.

Tập tất cả các điểm trong được gọi là *phần trong* của D, ký hiệu $\overset{o}{D}$.

Tính chất: $D \subset \overline{D}, \overset{o}{D} \subset D$.

4.2 Phân loại điểm dính. Có ba loại điểm dính

i) u là một *điểm tụ* của D nếu mọi quả cầu tâm u đều chứa ít nhất một phần tử của D khác u, nghĩa là

$$\forall r > 0, (B(u; r) \setminus \{u\}) \cap D \neq \emptyset$$

Tập tất cả các điểm tụ của D được ký hiệu D'.

ii) u là một *điểm cô lập* của D nếu $u \in D \setminus D'$, nghĩa là $\exists r > 0, B(u, r) \cap D = \{u\}$.

iii) u được gọi là một *điểm biên* của D khi nó vừa là điểm dính của D, vừa là điểm dính của $E \setminus D$. Tập các điểm biên của D ký hiệu là ∂D.

Ví dụ 1: Trong $\mathbb{R}$, cho $A = (0, 1] \cup \{2\}$. Tìm điểm dính của A, điểm tụ của A, điểm biên của A, điểm trong của A, điểm cô lập của A?

Ví dụ 2: Trong $\mathbb{R}$, cho tập A bị chặn. Thì $\sup A$, $\inf A$ là điểm dính

ppcm 1 tập đóng:
C1: lấy x là điểm dính của A, cm $x \in A$
$\Leftrightarrow (x_n) \in A, x_n \to x$ thì $x \in A$
C2: cm $X \setminus A$ là tập mở

của A.

Lưu ý: Trong $\mathbb{R}^k$, $x_n = (x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$, $x = (x_1, \dots x_k)$

$x_n \to x \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n_1} \xrightarrow{n \to \infty} x_1 \\ \dots \\ x_{n_k} \xrightarrow{n \to \infty} x_k \end{cases}$

Tính chất. Cho không gian mêtríc E và $D \subset E$, ta có

a) $\partial D = \overline{D} \cap \overline{E \setminus D}$,

b) $\overline{D} = D \cup D' = D \cup \partial D = \overset{o}{D} \cup \partial D$.

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa. ■

4.3 Mệnh đề. *Cho* (E, δ) *là một không gian mêtríc,* $\emptyset \neq D \subset E$ *và* $u \in E$. *Khi đó*

u là một điểm dính của D nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy $(u_n) \subset D$ hội tụ về u.

cm 1 tập mở:
C1: cm mọi $x \in A$ đều là điểm trong
$\exists r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset A$.
C2: cm X/A đóng

Chứng minh

$\Rightarrow$/ $\forall n, B\left(u, \frac{1}{n}\right) \cap D \neq \emptyset$. Chọn $u_n \in B\left(u, \frac{1}{n}\right)$.

Ta có $\delta(u_n, u) < \frac{1}{n}$ suy ra $u_n \to u$.

$\Leftarrow$/ $\forall r > 0, \exists n_r, \forall n \geq n_r, \delta(u_n, u) < r$ thì $\delta(u_{n_r}, u) < r$ nên $u_{n_r} \in D \cap B(u, r)$.

Vậy u là điểm dính. ■

§5 TẬP MỞ, TẬP ĐÓNG VÀ TẬP BỊ CHẶN TRONG KHÔNG GIAN MÊTRÍC

5.1 Định nghĩa. Cho D là một tập con của không gian mêtríc (E, δ). Ta nói

i) D là một *tập mở* trong E nếu mọi điểm của D đều là điểm trong, nghĩa là $D = \overset{o}{D}$,

ii) D là một *tập đóng* trong E nếu mọi điểm dính của nó thuộc D, nghĩa là $D = \overline{D}$,

iii) D là một tập *bị chặn* nếu nó chứa trong một quả cầu, nghĩa là tồn tại $u \in E$ và $r > 0$ sao cho $D \subset B(u;r)$. Ta định nghĩa đường kính của tập D là $diamD = \sup\limits_{x,y \in D} \delta(x,y)$.

Chú ý: $\emptyset, E$ vừa mở, vừa đóng.

5.2 Mệnh đề.

Tập A bị chặn trên và đóng trên $\mathbb{R}$ thì $supA \in A$.

Tập A bị chặn dưới và đóng trên $\mathbb{R}$ thì $infA \in A$.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}$, (a,b) là tập mở, là tập bị chặn, không là tập đóng. $(-\infty,a),(b,+\infty)$ mở, $[a,b],(-\infty,a],[b,+\infty)$ đóng.

Do định nghĩa, quả cầu mở là tập mở, quả cầu đóng và mặt cầu là các tập đóng. Ngoài ra, trực tiếp từ định nghĩa và mệnh đề 4.3, ta còn có tính chất sau

Tính chất. *Cho E là một không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$. D là một tập đóng nếu và chỉ nếu mọi dãy trong D, nếu hội tụ trong E thì giới hạn của nó phải nằm trong D.*

5.3 Định lý liên hệ giữa tập mở và tập đóng. *Cho không gian mêtríc (E,δ). Tập $D \subset E$ là tập đóng khi và chỉ khi tập $E \setminus D$ mở (phần bù của tập đóng là tập mở và ngược lại).*

Chứng minh.

$\Leftarrow$/ Sử dụng phản chứng. Giả sử D không đóng, suy ra $\exists u$ là điểm dính của D nhưng $u \in E \setminus D$, kết hợp $E \setminus D$ mở, tồn tại $B(u,r) : u \in B(u,r) \subset E \setminus D$.

Suy ra $D \cap B(u,r) = \emptyset$. Vậy u không là điểm dính, vô lý. Nên D đóng.

cm 1 dãy hàm $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ hội tụ đều tới $f : \Omega \to \mathbb{R}$
ta cm: $d(f_n, f) = \sup\limits_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\Rightarrow$/ Giả sử $E \setminus D$ không mở. Nên tồn tại $x \in E \setminus D$ và $\forall r > 0, B(x,r) \not\subset E \setminus D$. Ta suy ra $B(x,r) \cap D \neq \emptyset \ \ \forall r > 0$.

Vậy x là điểm dính của D. Vì D đóng, ta có $x \in D$, vô lý. ■

5.4 Mệnh đề.

i) Hội của một họ bất kỳ các tập mở trong E là một tập mở,

ii) Giao của một họ hữu hạn các tập mở trong E là một tập mở,

iii) Hội của một họ hữu hạn các tập đóng trong E là một tập đóng, và

iv) Giao của một họ bất kỳ các tập đóng trong E là một tập đóng.

cm 1 dãy hàm $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

Chứng minh.

- $d(f_n, f) \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$
- $\exists x_n \in \Omega$ sao cho $|f_n(x_n) - f(x_n)| \overset{n \to \infty}{\not\to} 0$
$(d(f_n, f) \geq |f(x_n) - f(x_n)| \not\to 0)$

i) hiển nhiên.

ii) Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp U, V là 2 tập mở.

$\forall x \in U \cap V$, thì $\exists r_1, r_2 > 0$ sao cho

$$\begin{cases} x \in B(x, r_1) \subset U \\ x \in B(x, r_2) \subset V \end{cases}$$

Chọn $r = min(r_1, r_2) > 0$ thì $x \in B(x,r) \subset U \cap V$.

Vậy $U \cap V$ mở.

iii) Gọi F, G là 2 tập đóng, ta có $E \setminus F$, $E \setminus G$ là tập mở.

Nên $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$ là tập mở.

Vậy $F \cup G$ là tập đóng. ■

Mệnh đề về tập bị chặn.

5.5 Mệnh đề. *Cho (E, δ) là một không gian mêtric, $x_0 \in E$. Với mỗi $A \subset E$, A bị chặn ta đều tìm được $r > 0$ sao cho $A \subset B(x_0, r)$.*

Chứng minh. Dành cho sinh viên như là bài tập.

5.6 Mệnh đề. *Cho* (E, δ) *là một không gian mêtríc,*

i) Tập con của một tập bị chặn là bị chặn.

ii) Hội hữu hạn các tập bị chặn là bị chặn.

Chứng minh. i) Hiển nhiên.

ii) Giả sử $\forall i = \overline{1,p}, A_i$ là tập bị chặn. Lấy $x_0 \in E$, theo mệnh đề 5.4.1 $\forall i = \overline{1,p}, \exists r_i > 0 : A_i \subset B(x_0, r_i)$. Đặt $r = r_1 + ... + r_p$, suy ra $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i \subset B(x_0, r)$. Vậy $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ bị chặn. ■

5.7 Mệnh đề. *Cho E là không gian định chuẩn, với chuẩn* $||.||$. *Tập* $A \subset E$ *bị chặn khi và chỉ khi* $\exists M > 0$ *sao cho* $||x|| \leq M \quad \forall x \in A$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức tam giác cho chiều thuận. Chiều đảo hiển nhiên. ■

5.8 Mệnh đề. *Cho* $E = E_1 \times ... \times E_n$ *là tích các không gian định chuẩn* $(E_i, ||.||_i)$. *Tập* $A \subset E$ *bị chặn khi và chỉ khi tồn tại* $M > 0$ *sao cho* $||x_i||_i \leq M$ *với mọi* $x \in A$, $x = (x_1, ..., x_n)$.

Chứng minh. Xem như bài tập.

Bài tập Chương 1

1.1 Chứng minh rằng mọi khoảng mở trong $\mathbb{R}$ đều chứa một số vô tỷ. Từ đó suy ra

(i) Nếu x là một số vô tỷ thì có dãy số hữu tỷ $\{x_n\}$ hội tụ về x;

(ii) Nếu x là một số hữu tỷ thì có dãy số vô tỷ $\{x_n\}$ hội tụ về x.

Hướng dẫn: Với a, b là các số thực sao cho $a < b$ thì có một số hữu tỷ x sao cho

$$a - \sqrt{2} < x < b - \sqrt{2}$$

và do đó số vô tỷ $x + \sqrt{2}$ thỏa $a < x + \sqrt{2} < b$.

Nếu x là số vô tỷ, lấy x_n là số hữu tỷ nằm trong khoảng $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$, còn nếu x là số hữu tỷ, lấy x_n là số vô tỷ nằm trong khoảng $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$.

1.2 Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số thực, chứng minh rằng

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

là tập đóng trong $\mathbb{R}$ và không có tập mở nào chứa trong A.

Hướng dẫn: Chứng minh $\mathbb{R} \setminus A$ mở và dùng tính chất mọi khoảng mở chứa vô hạn không đếm được phần tử.

1.3 Cho (E, δ) là một không gian mêtríc và $A \subset E$. Chứng minh rằng

(i) $\overline{A} = A \cup A'$, với A' là tập hợp các điểm tụ của A;

(ii) $\overline{A}$ là tập đóng trong E và là tập đóng nhỏ nhất trong E chứa A;

(iii) $\overset{\circ}{A}$ là tập mở trong E và là tập mở lớn nhất trong E chứa trong A;

(iv) $\partial A = \partial(E \setminus A), \partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ và $E = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (E \setminus A)^{\circ}$;

(v) ∂A là tập đóng trong E và A đóng nếu và chỉ nếu $\partial A \subset A$.

Hướng dẫn:

(i) Dùng định nghĩa

(ii) Lấy dãy $\{x_n\} \subset \overline{A}$ sao cho $x_n \to x$. Do $x_n \in \overline{A}$ nên có $y_n \in A$ sao cho $\delta(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Suy ra $y_n \to x$ và do đó $x \in \overline{A}$.

Giả sử $A \subset B$ với B đóng. Ta chứng minh $\overline{A} \subset B$. Lấy $x \in \overline{A}$ thì có dãy $\{x_n\} \subset A$ hội tụ về x. Thì $\{x_n\} \subset B$ và vì B đóng nên ta có $x \in B$.

(iii) Lấy $x \in \overset{\circ}{A}$ thì theo định nghĩa có $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset A$. Vì $B(x, r)$ là tập mở nên suy ra $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$.

Giả sử $B \subset A$ với B là tập mở. Ta chứng minh $B \subset \overset{\circ}{A}$. Lấy $x \in B$ thì do B mở nên có $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset B$. Suy ra $B(x, r) \subset A$ và do $B(x, r)$ là tập mở nên $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$.

(iv) Dùng định nghĩa.

(v) Dùng (iv) và dùng tính chất A đóng nếu và chỉ nếu $A' \subset A$.

1.4 Cho (E, δ) là một không gian mêtríc và ta định nghĩa

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to [0, +\infty) \\ d(x, y) &= \frac{\delta(x, y)}{1 + \delta(x, y)} \end{aligned}$$

Chứng minh (E, d) là không gian mêtríc.

1.5 Cho E là tập hợp khác trống và $\delta : E \times E \to \mathbb{R}$ thỏa các tính chất

(i) $\delta(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E$

$\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(y, z) \quad \forall x, y, z \in E$

Chứng minh rằng δ là một mêtríc trên E.

1.6 Cho $(E_i, \delta_i)(i = 1, 2, ..., n)$ là n không gian mêtríc.

(i) Đặt

$$\begin{aligned} d : E_1 \times E_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(x, y) &= min\{1, \delta_1(x, y)\} \end{aligned}$$

Chứng minh rằng d là một mêtríc trên E_1.

(ii) Đặt $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ và $d_i : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, với

$$d_1(X, Y) = \sqrt{\delta_1^2(x_1, y_1) + \delta_2^2(x_2, y_2) + ... + \delta_n^2(x_n, y_n)}$$

$$d_2(X, Y) = max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), ..., \delta_n(x_n, y_n)\}$$

$$d_3(X, Y) = \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) + ... + \delta_n(x_n, y_n)$$

với $X = (x_1, x_2, ..., x_n), Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Chứng minh rằng $(E, d_i), i = 1, 2, 3$ là không gian mêtríc.

1.7 (i) Cho (X, δ) là một không gian mêtríc. Chứng minh rằng $\overline{B(a, r)} \subset B'(a, r)$ với $\overline{B(a, r)}$ là bao đóng của $B(a, r)$.

(ii) Cho X là một tập hợp có ít nhất hai phần tử. Xét mêtríc $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ với

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq y \\ 0 & \text{nếu } x = y \end{cases}$$

Chứng minh $\overline{B(a, 1)} \neq B'(a, 1) \quad \forall a \in X$.

(iii) Lấy $X = \mathbb{R}^n$ với mêtríc

$$\delta(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Chứng minh rằng $\overline{B(a,r)} = B'(a,r) \ \forall a \in \mathbb{R}^n$.

Hướng dẫn:

(iii) Chỉ cần chứng minh $B'(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. Lấy $x \in B'(a,r)$. Nếu $\delta(x,a) < r$ thì $x \in B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$, còn nếu $\delta(x,a) = r$ thì dãy $\{x_n\} \subset B(a,r)$ với

$$x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$$

hội tụ về x. Do đó $x \in \overline{B(a,r)}$.

1.8 Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian mêtríc (E,δ). Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu các dãy $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}, \{x_{3n}\}$ hội tụ.

Hướng dẫn: Giả sử các dãy $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}, \{x_{3n}\}$ hội tụ. Để chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ, ta chỉ cần chứng minh hai dãy $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{2n+1}\}$ có cùng giới hạn. Xét các dãy $\{x_{6n}\}$ và $\{x_{6n+3}\}$. Dãy $\{x_{6n}\}$ là dãy con của hai dãy $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{3n}\}$, do đó hai dãy $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{3n}\}$ có giới hạn bằng nhau. Tương tự, dãy $\{x_{6n+3}\}$ là dãy con của hai dãy $\{x_{2n+1}\}$ và $\{x_{3n}\}$ nên các dãy $\{x_{2n+1}\}, \{x_{3n}\}$ có cùng giới hạn.

1.9 Cho (E,δ) là một không gian mêtríc. Chứng minh rằng

(i) Nếu $x, y \in E$ và $x \neq y$ thì có các tập mở V_x và V_y sao cho $x \in V_x, y \in V_y$ và $V_x \cap V_y = \emptyset$.

(ii) Tập hợp gồm một phần tử của E là tập đóng trong E và do đó tập hợp gồm hữu hạn các phần tử trong E là tập đóng trong E.

(iii) Nếu $diam A < r$ thì với mọi $x \in A$, ta có $A \subset B(x, 2r)$.

1.10 Cho dãy hàm $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$ xác định trên $\mathbb{R}$. Chứng tỏ rằng (f_m) hội tụ từng điểm về hàm Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ khi $x \in \mathbb{Q}$ và $f(x) = 0$ khi $x \notin \mathbb{Q}$.

1.11 Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên D. Chứng minh rằng $(f_n + g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Hơn nữa, giả sử thêm rằng (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn. Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

1.12 Xét dãy hàm

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ đều về một hàm f và $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ tại mọi $x \neq 0$. Khảo sát trường hợp $x = 0$.

1.13 Chứng tỏ rằng dãy hàm $f_n(x) = nx(1-x)^n$ hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$.

1.14 Tìm các điểm trong, điểm biên và xét xem các tập hợp được cho có là tập đóng hay không

a) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$

b) $(2,4) \times (1,3)$

c) $\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

d) $\{(x,y) : 2 \leq x^2 \leq 5\}$

e) $\{(x,y) : y \leq x^2\}$

f) $\{(x,y) : x + y \leq x^2\}$

g) $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 5\}$

h) $\{(x,y,z) : 1 \leq x \leq 2, y \leq z^2\}$

i) $\{(x,y) : a \leq x \leq b, x \leq y \leq x^2\}$

j) $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq z \leq 4x\}$.

Chương 2

ÁNH XẠ LIÊN TỤC, TẬP COMPẮC, TẬP LIÊN THÔNG ĐƯỜNG

§1 ÁNH XẠ LIÊN TỤC

1.1 Định nghĩa. Cho (E, δ_E) và (F, δ_F) là hai không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$ và xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : D &\to F \\ u &\mapsto f(u). \end{aligned}$$

i) Với $u_0 \in E$ là một điểm tụ của D, $w_0 \in F$, ta nói $f(u)$ *tiến về* w_0 *khi* u *tiến về* u_0, ký hiệu

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = w_0,$$

nếu ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\delta_F(f(u), w_0) < \varepsilon,$$

với mọi $u \in D$ sao cho $0 < \delta_E(u, u_0) < \delta$.

ii) f được gọi là *liên tục tại* $u \in D$ nếu ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\delta_F(f(u), f(v)) < \varepsilon,$$

với mọi $v \in D$ sao cho $\delta_E(u, v) < \delta$.

f được gọi là *liên tục trên* D khi nó liên tục tại mọi điểm của D.

tính chất $f: X \to Y$

$1)\ f^{-1}(Y) = X$

$2)\ f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

$3)\ f^{-1}\left(\bigcap_{i=I} B_i\right) = \bigcap_{i=I} f^{-1}(B_i)$

$4)\ f^{-1}(A/B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Bằng ký hiệu tập hợp, ta có thể viết

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, f((B(u_0;\delta)\setminus\{u_0\})\cap D) \subset B(w_0;\varepsilon)$$

và f liên tục tại $u \in D$ nếu và chỉ nếu

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, f(B(u;\delta)\cap D) \subset B(f(u);\varepsilon).$$

1.2 Định lý. *Cho (E,δ_E) và (F,δ_F) là hai không gian mêtríc. Cho $f : E \to F$, f liên tục trên E. Nếu*

a) U là tập mở trong F thì $f^{-1}(U)$ mở trong E

b) V là tập đóng trong F thì $f^{-1}(V)$ đóng trong E

Ví dụ 1.1

i) Trong mọi không gian mêtríc (E,δ), hàm $\delta(u,v)$ liên tục trên $E\times E$.

ii) Trong mọi không gian định chuẩn V, các hàm chuẩn $u \mapsto \|u\|$, các phép toán $(u,v)\mapsto u+v$, $(k,u)\mapsto ku$ và hàm khoảng cách $(u,v)\mapsto d(u,v)$ đều là các ánh xạ liên tục.

iii) Khi $V = V_1\times ...\times V_n$ là không gian định chuẩn tích, các phép chiếu

$$\begin{aligned} pr_i : V &\to V_i \\ u &\mapsto u_i, \end{aligned}$$

trong đó $u = (u_1, ..., u_i, ..., u_n) \in V, 1 \le i \le n$, cũng là các ánh xạ liên tục.

Trực tiếp từ định nghĩa, ta có sự liên hệ giữa hai khái niệm về giới hạn và liên tục tại một điểm như sau

1.3 Mệnh đề. *Cho E, F là hai không gian mêtríc, $\emptyset \ne D \subset E$ và $f : D \to F$. Ta có f liên tục tại $u \in D'\cap D$ nếu và chỉ nếu $\lim_{v\to u} f(v) = f(u)$,*

Chứng minh. Hiển nhiên. ■

Chú ý rằng khi u là một *điểm cô lập* của D, mọi ánh xạ xác định trên D đều liên tục tại u.

Ngoài ra, ta có thể đặc trưng giới hạn cũng như tính liên tục bằng dãy như sau

1.4 Mệnh đề. *Cho $(E,\delta),(F,\delta')$ là hai không gian mêtric, $\emptyset \neq D \subset E$ và $f : D \to F$.*

i) Với $u \in D'$, ta có $\lim\limits_{v\to u} f(v) = w \in F$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy $(u_n) \subset D \setminus \{u\}$ hội tụ về u, ta có $(f(u_n))$ hội tụ về w,

ii) f liên tục tại $u \in D$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy $(u_n) \subset D$ hội tụ về u, ta có $(f(u_n))$ hội tụ về $f(u)$.

Chứng minh

ii) Giả sử f liên tục tại u và $u_n \to u$. Ta chứng minh $f(u_n) \to f(u)$.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì f liên tục tại u nên có $\eta > 0$ sao cho với $v \in E$

$$\delta(v,u) < \eta \Rightarrow \delta'(f(v), f(u)) < \varepsilon.$$

Vì $u_n \to u$ nên với $\eta > 0$ này, tồn tại $n_0 \geq 1$ sao cho

$$\delta(u_n, u) < \eta \qquad \forall n \geq n_0.$$

Suy ra

$$\delta'(f(u_n), f(u)) < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Vậy $f(u_n) \to f(u)$.

Đảo lại, giả sử với mọi dãy $\{u_n\}$ trong E, $u_n \to u$ dẫn đến $f(u_n) \to f(u)$. Ta chứng minh f liên tục tại u.

Giả sử f không liên tục tại u. Thì tồn tại một $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\eta > 0$, có một $u_\eta \in E$ thỏa

$$\delta(u_\eta, u) < \eta \text{ và } \delta'(f(u_\eta), f(u)) \geq \varepsilon.$$

Vậy với $\eta = \frac{1}{n}$ thì có $u_n \in E$ sao cho

$$\delta(u_n, u) < \frac{1}{n} \text{ và } \delta'(f(u_n), f(u)) \geq \varepsilon.$$

Từ đó suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ về u và dãy $\{f(u_n)\}$ không hội tụ về $f(u)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ f liên tục tại u. Mệnh đề được chứng minh.

i) Tương tự. ■

Ví dụ 1.2 i) Cho hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

* Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}^2$

Xét điểm $(x_0, y_0) \in D \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Với mọi dãy (x_n, y_n) trong D hội tụ về $(x_0, y_0) \in D$, ta có $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ và do đó

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \to \frac{x_0 y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0).$$

Suy ra f liên tục tại điểm (x_0, y_0) bất kỳ của D. Nói khác đi, f liên tục trên D.

* Với điểm $(0,0)$, ta có $(0,0)$ là một điểm tụ của D (tồn tại dãy (x_n, y_n) trong D, hội tụ về $(0,0)$, chẳng hạn lấy $x_n = y_n = \frac{1}{n}$) và với mọi dãy (x_n, y_n) trong D hội tụ về $(0,0)$, ta có $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ và vì

$$|f(x_n, y_n)| = \left|\frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2}\right| \leq |x_n| \to 0,$$

ta suy ra $f(x_n, y_n) \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Vậy, f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

ii) Cho hàm số $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Chứng minh f không có giới hạn tại $(0,0)$.

Các dãy $u_n = (0, \frac{1}{n})$ và $v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ trong D, cùng hội tụ về $(0,0)$ và $f(u_n) = 0$ và $f(v_n) = \frac{1}{2}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(v_n),$$

và ta kết luận rằng f không có giới hạn tại điểm $(0,0)$.

Ta cũng có các kết quả sau, từ những khảo sát trong phần 6 chương 2

1.5 Mệnh đề. *Cho E là không gian mêtríc. Cho $f, g : D \subset E \to \mathbb{R}$ và x^0 là một điểm tụ của D. Giả sử $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x^0} g(x)$ tồn tại. Ta có*

i) Các hàm $x \mapsto f(x).g(x)$, $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, xác định trên D và có giới hạn tại x^0 với

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x^0}(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha \lim_{x\to x^0} f(x) + \beta \lim_{x\to x^0} g(x),\\
\lim_{x\to x^0}(f(x)g(x)) &= \lim_{x\to x^0} f(x) \times \lim_{x\to x^0} g(x).
\end{aligned}$$

ii) Nếu $g(x) \neq 0, \forall x \in D$ và $\lim\limits_{x\to x^0} g(x) \neq 0$, thì hàm $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ xác định trên D và có giới hạn tại x^0 với

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x^0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x^0} g(x)}.$$

1.6 Mệnh đề. *Cho E là không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$ và $f, g : D \to \mathbb{R}$. Nếu f, g liên tục tại $u \in D$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì*

i) $f \pm g$ liên tục tại u

ii) $\alpha.f$ liên tục tại u

iii) $f.g$ liên tục tại u

iv) Nếu $g(u) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại u.

Chứng minh. Hiển nhiên. ■

Tổng quát mệnh đề 1.5 và 1.6, ta có

1.7 Mệnh đề. *Cho (E, δ) là không gian mêtríc, cho $D \subset E$ và x_0 là một điểm tụ của D. Cho F là không gian định chuẩn. Cho $f, g : D \subset E \to F$.*

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ tồn tại. Ta có

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x).$$

1.8 Mệnh đề. *Cho (E, δ) là không gian mêtríc, cho $D \subset E$, F là không gian định chuẩn và $f, g : D \to F$. Nếu f, g liên tục tại $u \in D$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì*

i) $f \pm g$ liên tục tại u,

ii) αf liên tục tại u.

1.9 Mệnh đề. *Cho $(E, \delta_1), (F, \delta_2), (G, \delta_3)$ là các không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$, $\emptyset \neq D_1 \subset F$. Xét các ánh xạ $f : D \to F$ và $g : D_1 \to G$ sao cho $f(D) \subset D_1$.*

i) Nếu f liên tục tại $u \in D$ và g liên tục tại $v = f(u) \in D_1$ thì $g \circ f : D \to G$, xác định bởi

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)),$$

liên tục tại u,

ii) Nếu f liên tục trên D và g liên tục trên D_1 thì $g \circ f : D \to G$ liên tục trên D.

Chứng minh.

i) Cho $\varepsilon > 0$. g liên tục tại $v = f(u)$, tồn tại ε_1 sao cho với $v' \in D_1$

$$\delta_2(v', v) < \varepsilon_1 \Rightarrow \delta_3(g(v'), g(v)) < \varepsilon.$$

Vì f liên tục tại u, tồn tại $\eta > 0$ sao cho với $u' \in D$

$$\begin{aligned} \delta_1(u', u) < \eta \quad &\Rightarrow \quad \delta_2(f(u'), f(u)) < \varepsilon_1 \\ &\Rightarrow \quad \delta_3(g(f(u')), g(f(u))) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy $g \circ f$ liên tục tại u.

ii) Hiển nhiên. ■

1.10 Mệnh đề. *Cho $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, x^0 là một điểm tụ của D.*

i) Tính bảo toàn bất đẳng thức: Nếu $f \leq g$ trên D, nghĩa là $f(x) \leq g(x)$, với mọi $x \in D$, thì

$$\lim_{x \to x^0} f(x) \leq \lim_{x \to x^0} g(x).$$

khi các giới hạn ở hai vế bất đẳng thức tồn tại.

ii) Tính chất sandwich: Nếu $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, với mọi $x \in D$, và nếu $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = \lim\limits_{x \to x^0} g(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x^0} h(x)$ tồn tại và bằng L.

Ví dụ 1.3: i) Trở lại với các hàm trong ví dụ 2, do các phép chiếu $(x, y) \mapsto x$ và $(x, y) \mapsto y$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên các hàm $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto xy^2$ và $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và do đó các hàm $(x, y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ và $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ii) Nếu $x \mapsto f(x)$ là hàm nhiều biến xác định trên $D \subset \mathbb{R}^n$ và φ là hàm một biến xác định và liên tục trên một miền con của $\mathbb{R}$ chứa $\overline{f(D)}$ thì $x \mapsto \varphi(f(x))$ xác định trên D và khi f có giới hạn tại x^0, ta có (xem [1])

$$\lim_{x \to x^0} \varphi(f(x)) = \varphi\left(\lim_{x \to x^0} f(x)\right)$$

Đặc biệt, khi f liên tục trên D thì hàm $\varphi \circ f : x \mapsto \varphi(f(x))$ cũng liên tục trên D. Chẳng hạn, với hàm $t \mapsto \sin t$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, và với chứng minh tương tự như trong i), ta suy ra hàm

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x^3 . \sin xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

liên tục trên $D \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ngoài ra, từ bất đẳng thức

$$|f(x,y)| \leq |x| \to 0,$$

khi $(x,y) \to (0,0)$, ta suy ra

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0.$$

1.11 Mệnh đề. *Cho các không gian mêtríc $(E,d), F$, trong đó F là không gian mêtríc tích của các không gian mêtríc $(F_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n$, một ánh xạ*

$$\begin{aligned} f : D \subset E &\to F \\ u &\mapsto f(u) \end{aligned}$$

được hoàn toàn xác định bằng n ánh xạ thành phần

$$\begin{aligned} f_i : D &\to F_i \\ u &\mapsto f_i(u), \end{aligned}$$

với $1 \leq i \leq n$*, sao cho* $f(u) = (f_1(u), ..., f_n(u)), \forall u \in D$.

Ta có điều kiện cần và đủ để f *liên tục tại* u *là* f_i, $1 \leq i \leq n$ *liên tục tại* u.

Chứng minh

Chú ý: trong F xác định một mêtríc, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in F$,

$$\delta(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, y_i)\right)^{1/2}$$

$$\delta(f(u), f(v)) = (\delta_1^2(f_1(u), f_1(v)) + ... + \delta_n^2(f_n(u), f_n(v)))^{1/2}$$

Bằng cách sử dụng định nghĩa của ánh xạ liên tục, ta có điều phải chứng minh. ■

1.12 Không gian các ánh xạ liên tục.

Cho $(E, \delta_E), (F, \delta_F)$ là các không gian mêtríc.

Tập hợp các ánh xạ liên tục $f : E \to F$ gọi là $C(E, F)$.

Nếu $F = \mathbb{R}$ thì ta ký hiệu là $C(E)$.

Tập hợp các ánh xạ liên tục $f : E \to F$ bị chặn gọi là $C_B(E, F)$.

Định lý. $C_B(E, F)$ *là một không gian mêtríc với khoảng cách* $d(f, g) = \sup_{u \in E} \delta_F(f(u), g(u))$. *Nếu* F *là không gian định chuẩn với chuẩn* $||.||_F$ *thì* $C_B(E, F)$ *là không gian định chuẩn với chuẩn* $||f|| = \sup_{u \in E} ||f(u)||_F$.

Chứng minh. Xem như bài tập.

§2 KHÔNG GIAN MÊTRÍC COMPẮC

2.1 Định nghĩa. Cho (E, δ) là một không gian mêtríc. Ta nói E compắc nếu mọi dãy (u_n) trong E đều chứa một dãy con $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ về một $x \in E$.

Cho (E, δ) là một không gian mêtríc và $\emptyset \neq D \subset E$. D được gọi là *compắc* nếu mọi dãy (u_n) các phần tử của D đều có một dãy con $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ (về một phần tử của D).

Nhắc lại rằng, dãy $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ được gọi là một *dãy con* của dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ khi dãy $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy tăng ngặt các số nguyên, nghĩa là $n_k \in \mathbb{N}$ và $n_{k+1} > n_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Từ điều này, ta có $n_k \geq k \quad \forall k \geq 1$.

Tính chất

i) Nếu D là một tập con compắc của không gian mêtríc (E, δ) thì D là một tập đóng và bị chặn.

ii) Nếu D là một tập con đóng của một tập compắc A thì D là tập compắc.

Chứng minh.

i) Giả sử $(x_n) \subset D, x_n \to x$. Vì D compắc nên có dãy con (x_{n_k}) và $y \in D$ sao cho $x_{n_k} \to y$. Vì $x_n \to x$ nên $x_{n_k} \to x$. Do tính duy nhất của giới hạn suy ra $x = y \in D$.

Vậy D là tập đóng trong (E, δ).

Tiếp theo ta chứng minh nếu D là tập con compắc của E thì D bị chặn, nghĩa là D chứa trong một quả cầu. Thật vậy, giả sử D không bị chặn, nghĩa là D không chứa trong bất kỳ một quả cầu nào. Lấy $x_1 \in D$ thì quả cầu $B(x_1, 1)$ không chứa D, do đó có $x_2 \in D$ sao cho

$$\delta(x_2, x_1) \geq 1$$

Giả sử ta đã chọn được $x_1, x_2, ..., x_n \in D$ sao cho

$$\delta(x_i, x_j) \geq 1 \qquad \forall i, j = 1, 2, ..., n \qquad i \neq j.$$

Đặt $r_n = 1 + max\{\delta(x_i, x_1)/i = 1, ..., n\}$. Quả cầu mở $B(x_1, r_n)$không

tiền compact nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 1 số quả cầu mở bkính ε sao cho $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) = X$.

chứa D nên có $x_{n+1} \in D$ sao cho

$$\delta(x_{n+1}, x_1) \geq r_n.$$

Do đó, với mỗi $1 \leq i \leq n$ ta có

$$\begin{aligned}\delta(x_{n+1}, x_i) &\geq \delta(x_{n+1}, x_1) - \delta(x_1, x_i)\\ &\geq r_n - \delta(x_1, x_i) \geq 1 + \delta(x_i, x_1) - \delta(x_1, x_i) = 1\end{aligned}$$

Vậy ta có dãy $(x_n) \subset D$ thỏa $\delta(x_n, x_m) \geq 1 \quad \forall m, n \geq 1, m \neq n$.

Do đó, (x_n) không thể có bất kỳ dãy con hội tụ nào.

Suy ra D không compắc, vô lý.

Vậy D bị chặn.

ii) Với mọi dãy $\{x_n\} \subset D$. Thì $\{x_n\} \subset A$ và do A compắc nên có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về $x \in A$. Nhưng vì $\{x_{n_k}\} \subset D$ và D là tập đóng nên $x \in D$. Vậy D là tập compắc. ■

Do định lý Bolzano-Weierstrass, khoảng đóng $[a, b]$ là tập compắc trong $\mathbb{R}$ và do đó, mọi tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ cũng là tập compắc. Tính chất này cũng đúng cho $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, ta có

2.2 Mệnh đề. *(về tính compắc của không gian tích) Cho E là không gian mêtríc tích của hai không gian mêtríc $E_i, i = 1, 2$. Ta có E compắc nếu và chỉ nếu E_1 và E_2 compắc.*

Chứng minh. Giả sử E_1 và E_2 compắc, ta chứng minh E compắc. Lấy $\{x(n)\}$ là một dãy trong E với $x(n) = (x_1(n), x_2(n))$.

Dãy $\{x_1(n)\} \subset E_1$ sẽ chứa một dãy con $\{x_1(n_k)\}$ hội tụ về $x_1 \in E_1$.

Vì xét dãy $\{x_2(n_k)\} \subset E_2$. Dãy này cũng chứa dãy con $\{x_2(n_{k_i})\}$ hội tụ về $x_2 \in F_2$. Vì $\{x_1(n_{k_i})\}$ là dãy con của dãy $\{x_1(n_k)\}$ hội tụ về x_1 nên $\{x_1(n_{k_i})\}$ cũng hội tụ về x_1.

Do đó, $\{x(n)\}$ có dãy con là $\{x(n_{k_i})\}$ với

$$x(n_{k_i}) = (x_1(n_{k_i}), x_2(n_{k_i}))$$

hội tụ trong E về $x(x_1, x_2)$.

Vậy E compắc.

Đảo lại, cho E compắc, ta chứng minh E_1 compắc (chứng minh E_2 compắc tương tự). Cho $\{x_1(n)\}$ là một dãy trong E_1. Lấy $a_2 \in E_2$ thì dãy $\{x(n)\}$ với $x(n) = (x_1(n), a_2)$ là dãy trong E. Vì E compắc nên có dãy con $\{x(n_k)\}$ hội tụ về $x \in E$, trong đó

$$x(n_k) = (x_1(n_k), a_2), x = (x_1, x_2)$$

Vậy dãy $\{x_1(n_k)\}$ hội tụ về $x_1 \in E_1$. Vậy E_1 compắc và mệnh đề được chứng minh. ■

Từ kết quả này và bằng phương pháp quy nạp, ta suy ra rằng mọi ô P trong $\mathbb{R}^n$,

$$P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

đều là tập compắc. Vì mọi tập bị chặn đều chứa trong một ô, ta suy ra

2.3 Mệnh đề (tiêu chuẩn compắc trong $\mathbb{R}^n$). *Một tập con của $\mathbb{R}^n$ là tập compắc nếu và chỉ nếu nó là một tập đóng và bị chặn.*

Chứng minh.

⇒/ hiển nhiên.

⇐/ Khi D bị chặn thì D chứa trong một ô $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Đồng thời P compắc và D đóng thì D compắc. ■

Tương tự như tính chất của hàm một biến xác định và liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, ta có

2.4 Định nghĩa liên tục đều Cho $(E, \delta), (F, \delta')$ là hai không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$ và xét ánh xạ $f : D \to F$. Ta nói, f liên tục đều trên D nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $u, v \in D$ sao cho $\delta(u, v) < \delta$ thì

$$\delta'(f(u), f(v)) < \varepsilon.$$

2.5 Mệnh đề. *Cho $(E, \delta), (F, \delta')$ là hai không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset E$ và xét ánh xạ $f : D \to F$. Nếu f liên tục trên D và D là tập compắc thì*

i) $f(D) = \{f(u) | u \in D\}$ là tập compắc.

ii) f liên tục đều trên D.

Chứng minh.

i) Lấy (y_n) là dãy trong $f(D), \exists (x_n) \subset D, f(x_n) = y_n$. Vì D compắc nên tồn tại dãy con (x_{n_k}) của (x_n) và $x \in D$ sao cho $x_{n_k} \to x$.

Vì f liên tục trên D nên $f(x_{n_k}) \to f(x) \in D$.

Vậy (y_n) có dãy con $f(x_{n_k})$ hội tụ về $f(x) \in D$. Nên $f(D)$ là tập compắc.

ii) Giả sử f không liên tục đều trên D. Thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\eta > 0$, có $x_\eta, y_\eta \in D$ thỏa

$$\delta(x_\eta, y_\eta) < \eta \text{ và } \delta'(f(x_\eta), f(y_\eta)) \geq \varepsilon.$$

Lấy $\eta = \frac{1}{n}, n \geq 1$ thì ta có dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset D \times D$ thỏa

$$\delta(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ và } \delta'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Vì $D \times D$ compắc nên có dãy con $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ hội tụ về $(x, y) \in D \times D$, nghĩa là $x_{n_k} \to x$ và $y_{n_k} \to y$.

$\{U_i\}_{i\in I}$ của K đều có một phủ con hữu hạn.
$(\exists\, i_1, \dots, i_n \in I$ sao cho $\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \supset K)$

Cho $k \to \infty$ trong bất đẳng thức

$$0 \leq \delta(x, y) \leq \delta(x, x_{n_k}) + \delta(x_{n_k}, y_{n_k}) + \delta(y_{n_k}, y)$$

thì do vế phải tiến về 0 nên ta suy ra $\delta(x, y) = 0$ hay $x = y$.

Do tính liên tục của f và $x = y$ nên ta có $f(x_{n_k}) \to f(x)$ và $f(y_{n_k}) \to f(x)$.

Cho $k \to \infty$ trong bất đẳng thức

$$\varepsilon \leq \delta'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})),$$

ta có

$$\varepsilon \leq \delta'(f(x), f(x)) = 0.$$

Vô lý. Vậy f liên tục đều trên D. ■

2.6 Mệnh đề. *Cho (E, δ) là một không gian mêtríc, $\emptyset \neq D \subset V$ và $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Nếu D là tập compắc, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D, nghĩa là tồn tại $u_0, u_1 \in D$ sao cho*

$$\begin{aligned} f(u_0) &= \min_{v\in D} f(v), \\ f(u_1) &= \max_{v\in D} f(v). \end{aligned}$$

Chứng minh. $f(D)$ compắc do mệnh đề trên. Do đó $K = f(D)$ là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$.

Đặt $b = supK$. Với mỗi $n \geq 1$, do định nghĩa của cận trên, tồn tại $b_n \in K$ sao cho

$$b - \frac{1}{n} < b_n \leq b$$

Suy ra có dãy $\{b_n\} \subset K$ thỏa

$$|b_n - b| < \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Do đó, dãy $\{b_n\}$ hội tụ về b. Nhưng $\{b_n\} \subset K$ và K đóng nên $b \in K$. Vì $b \in K$ và $K = f(D)$ nên có $x_0 \in E$ sao cho $f(x_0) = b$. Vậy f đạt giá trị lớn nhất trên D.

Tương tự, ta chứng minh được f đạt giá trị nhỏ nhất trên D. Mệnh đề được chứng minh. ■

2.7 Mệnh đề. *Nếu K là tập compắc trong không gian mêtríc E thì $C(K) = C_B(K)$, nghĩa là mọi hàm liên tục đều bị chặn. Vậy nếu K compắc thì $C(K)$ là không gian định chuẩn với chuẩn*

$$||f|| = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Chứng minh

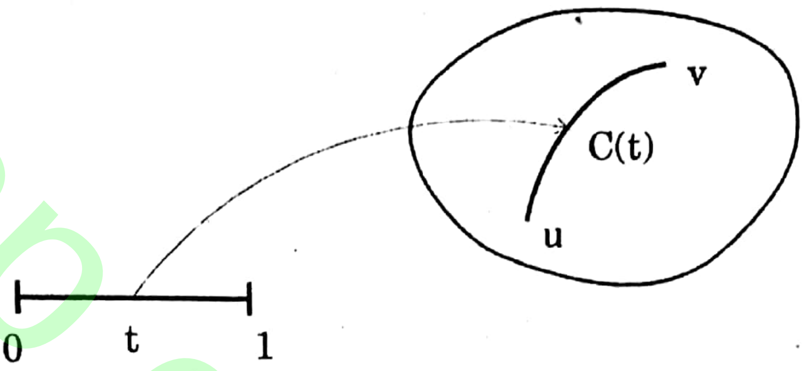
Từ định lý 1.11 chương 2 và mệnh đề 2.6 ta nhận được kết quả này. ■

§3 LIÊN THÔNG ĐƯỜNG

Bây giờ, với D là một tập con không rỗng trong một không gian mêtríc (E, δ). Một *đường* trong D là một ánh xạ từ $[0, 1]$ vào D. Khi $u, v \in D$ và đường $C : [0, 1] \to D$ là một ánh xạ liên tục sao cho $C(0) = u$ và $C(1) = v$, ta nói C là *đường liên tục nối u và v trong D.*

3.1 Định nghĩa

Một tập con không rỗng D của một không gian mêtríc (E, δ) được gọi là *liên thông đường* khi mọi cặp điểm của D đều có thể nối với nhau bằng một đường liên tục, nghĩa là ứng với mỗi $u, v \in D$, tồn tại ánh xạ liên tục $C : [0,1] \to D$ sao cho $C(0) = u$ và $C(1) = v$.



Chẳng hạn mọi quả cầu trong một không gian mêtríc đều là tập liên thông. Tổng quát hơn, với một tập con không rỗng D của một không gian mêtríc (E, δ), D được gọi là một tập *lồi* nếu *đoạn* nối hai điểm của D nằm hoàn toàn trong D, nghĩa là ứng với mọi $u, v \in D$, đoạn $\overline{uv}$ xác định bởi

$$\overline{uv} = \{tu + (1-t)v | 0 \leq t \leq 1\}$$

là một tập con của D. Hiển nhiên là mọi quả cầu đều là tập lồi. Đối với tập lồi D và với $u, v \in D$, ánh xạ

$$\begin{array}{rcl} C : [0,1] & \to & D \\ t & \mapsto & tv + (1-t)u, \end{array}$$

xác định một đường liên tục nối u và v trong D. Do đó, mọi tập lồi đều là tập liên thông đường.

3.2 Mệnh đề. *Với D là một tập con không rỗng, liên thông đường của một không gian định chuẩn U và $f : D \to V$ là một ánh xạ liên tục từ D vào không gian mêtríc (E, δ). Thì $f(D)$ là tập liên thông đường.*

Chứng minh. Nếu $C : [0,1] \to D$ là một đường liên tục nối u và v trong D thì $f \circ C : [0,1] \to f(D)$ là một đường liên tục nối $f(u)$ và $f(v)$ trong $f(D)$. Vậy $f(D)$ liên thông đường. ■

Hệ quả. *Cho D là một tập con liên thông đường của một không gian mêtríc (E, δ) và $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Nếu tồn tại $u, v \in D$ sao cho $f(u).f(v) < 0$, thì có $x \in D$ sao cho $f(x) = 0$.*

Chứng minh.

Lấy $C : [0,1] \to D$ liên tục nối u và v, nghĩa là

$$\begin{cases} C(0) = u \\ C(1) = v \end{cases}$$

Bấy giờ hàm

$$\begin{aligned} f \circ C : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(C(t)) \end{aligned}$$

có tính chất

$$(f \circ C(0)).(f \circ C(1)) = f(u).f(v) < 0$$

nên tồn tại $t_0 \in (0,1)$ sao cho

$$f \circ C(t_0) = 0.$$

Điểm $x = C(t_0) \in D$ chính là điểm cần tìm. ■

Bài tập Chương 2

2.1 Cho E là một không gian mêtríc và A là tập con khác trống của E. Chứng minh rằng *hàm đặc trưng* χ_A của A xác định là

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$$

liên tục trên E nếu và chỉ nếu A là tập vừa đóng vừa mở trong E.

2.2 Cho $f : E \to F$ là một ánh xạ từ không gian mêtríc E vào không gian mêtríc F và A là một tập mở trong E. Chứng minh rằng $f|_A$ liên tục tại $x \in A$ nếu và chỉ nếu f liên tục tại x. Hơn nữa, chứng tỏ rằng điều kiện A là tập mở không thể bỏ được.

Hướng dẫn: Nếu f liên tục tại $x \in A$ thì hiển nhiên $f|_A$ cũng liên tục tại x. Đảo lại, giả sử $f|_A$ liên tục tại $x \in A$. Do A là tập mở và $x \in A$ nên có $r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset A$.

Lấy $\{x_n\}$ là dãy trong E hội tụ về x thì $x_n \in B(x,r) \subset A$ với n đủ lớn. Do đó, $x_n \in A$ với n đủ lớn và $x_n \to x$ trong A. Do $f|_A$ liên tục tại x nên suy ra $(f|_A)(x_n) \to f|_A(x)$, nghĩa là $f(x_n) \to f(x)$.

Lấy $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ và $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ thì f liên tục trên $\mathbb{Q}$ nhưng không liên tục trên $\mathbb{R}$.

2.3 Cho E là một không gian mêtríc và $f : E \to E$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng tập hợp các điểm bất động của f

$$A = \{x \in E / f(x) = x\}$$

là một tập đóng trong E.

2.4 Cho f và g là các hàm số liên tục trên không gian mêtríc E. Chứng minh rằng các hàm số $sup(f, g)$ và $inf(f, g)$ liên tục. Suy ra các hàm số f^+ và f^- cũng liên tục.

Hướng dẫn: Sử dụng các đẳng thức

$$\begin{aligned} sup(f,g) &= \frac{f+g+|f-g|}{2} \\ inf(f,g) &= \frac{f+g-|f-g|}{2} \\ f^+ &= sup(f,0) \\ f^- &= inf(f,0) \end{aligned}$$

2.5 Cho f và g là hai ánh xạ liên tục từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y. Giả sử A là tập con khác trống của X sao cho $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \overline{A}$.

2.6 Cho X và Y là hai không gian mêtríc và f là một ánh xạ từ X vào Y sao cho $f|_K$ liên tục với mọi tập compắc $K \subset X$. Chứng minh f liên tục trên X.

Hướng dẫn: Lấy $\{x_n\}$ là dãy trong X, hội tụ về $x \in X$. Chứng minh rằng $K = \{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ là tập compắc. Vì $f|_K$ liên tục trên K nên $(f|_K)(x_n) \to (f|_K)(x)$, do đó $f(x_n) \to f(x)$.

2.7 Cho f là một ánh xạ liên tục từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y. Gọi $\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y/x \in X\}$ là đồ thị của f. Chứng minh rằng đồ thị của f là tập đóng trong $X \times Y$.

2.8 Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ và f liên tục. Chứng minh rằng f có điểm bất động trong $[0,1]$, nghĩa là có $x \in [0,1]$ sao cho $f(x) = x$.

2.9 Cho (E, δ_E) và (F, δ_F) là các không gian mêtríc và f là một ánh xạ từ E vào F. Biết rằng

f là một *đồng phôi* nghĩa là f là song ánh, f liên tục và f^{-1} liên tục. Chứng minh rằng:

(i) E compắc nếu và chỉ nếu F compắc

(ii) E liên thông đường nếu và chỉ nếu F liên thông đường

2.10 Cho E và F là hai không gian mêtríc và f là một song ánh liên tục từ E vào F. Chứng minh rằng nếu E compắc thì f là một đồng phôi.

Hướng dẫn: Xét $f^{-1} : F \to E$. Với A đóng trong E thì A compắc và do f liên tục nên $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ compắc và do đó đóng trong F.

2.11 Tìm các giới hạn

Tính đầy đủ: Cho (X, d), dãy $\{x_n\} \subset X$ gọi là dãy Cauchy nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ sao cho $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m > n_\varepsilon$

Tính chất: $\{x_n\}$ hội tụ thì Cauchy.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{2+3x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln(1+x^2y^2)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,5)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{1}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} x\cos\frac{x-y}{4}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

2.12 Các hàm số sau có giới hạn tại $(0,0)$ không?

a) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

b) $-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

d) $\frac{x-y}{x+y}$

e) $\frac{x^2}{x^2-y}$

f) $\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

g) $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h) $\frac{3xy^2}{x^2+y^2}$

i) $\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$

j) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$

k) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

l) $\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

2.13 Cho $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $D_1 \subset D$. Chứng minh rằng hàm $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_1(x) = f(x)$ với mọi $x \in D_1$ cũng là hàm liên tục (f_1 được gọi là *hàm thu hẹp* của f trên D_1).

2.14 Cho f, g là hai hàm xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và U là một tập mở chứa trong D. Chứng minh rằng nếu f liên tục tại mọi điểm của U và $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in U$ thì g liên tục tại mọi điểm của U.

2.15 Cho hàm liên tục $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

(i) Nếu D là một tập mở thì với mọi $k \in \mathbb{R}$,

$\{(x,y)|f(x,y) < k\}$ là một tập mở.

(ii) Nếu D là một tập đóng thì với mọi $k \in \mathbb{R}$, các tập hợp $\{(x,y)|f(x,y) = k\}$ và $\{(x,y)|f(x,y) \leq k\}$ là các tập đóng.

2.16 Tìm $f(0,0)$ để f liên tục tại $(0,0)$

a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

2.17 Xét sự liên tục của các hàm số

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{x^2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2.18 Kiểm tra tính compắc của các tập sau trong $\mathbb{R}^2$

a) $\{(x,y)/2x^2+3y^2 \leq 1\}$

b) $\{(x,y)/2x^2+3y^2 < 1\}$

c) $\{(x,y)/2x^2+3y \leq 1\}$

cm A đóng: lấy u là điểm dính của A, tức là $\exists \{u_i\} \subset A$ hội tụ về u, cm u∈
cm A đầy đủ: lấy $\{u_i\} \subset A$ là dãy Cauchy, dãy này hội tụ về $u \in A$.

Chương 3

KHÔNG GIAN MÊTRÍC ĐẦY ĐỦ VÀ KHÔNG GIAN BANACH

§1 KHÔNG GIAN MÊTRÍC ĐẦY ĐỦ

1.1 Định nghĩa. Cho (E, δ) là một không gian mêtríc và (u_n) là một dãy các phần tử của E. Ta nói (u_n) là một dãy *Cauchy* nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, \delta(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

Tính chất

i) Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.

ii) Rõ ràng là dãy hội tụ cũng như Cauchy đều là dãy bị chặn.

Chứng minh

i) Giả sử $u_n \to u$. Với $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \delta(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$ thì

$$\delta(u_n, u_m) \leq \delta(u_n, u) + \delta(u_m, u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy (u_n) là dãy Cauchy.

ii) Giả sử (u_n) là dãy Cauchy. Với $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0$ ta có

$$\delta(u_n, u_m) < 1.$$

Chọn $m = n_0$, suy ra $\delta(u_n, u_{n_0}) < 1 \quad \forall n \geq n_0$.

Tập đầy đủ: cho (X,d), $A \subset X$. A gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong A đều có giới hạn trong A

Nên $\delta(u_n, u_{n_0}) < M \quad \forall n$ trong đó $M = max\{1, \delta(u_1, u_{n_0}), ..., \delta(u_{n_0-1}, u_{n_0})\}$.

Vậy (u_n) bị chặn. ■

A đầy đủ trong X $\Rightarrow$ A là tập đóng trong X
với (X,d) là không gian mêtric

Định nghĩa. Không gian mêtríc (E, δ) gọi là không gian mêtríc đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong E đều là dãy hội tụ.

Ví dụ 1.1: Không gian vectơ $E = C([0,1]) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục $\}$ với phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với một số thông thường với chuẩn $||x|| = \int_0^1 |x(t)|dt$

A đóng trong X $\Rightarrow$ A đầy đủ
với (X,d) là không gian mêtric đầy đủ.

1) Chứng minh E là không gian định chuẩn.

2) Đặt

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ 2nt + (1-n) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \le t < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong E nhưng $\{x_n\}$ không hội tụ trong E. (Điều này chứng tỏ dãy Cauchy chưa chắc là dãy hội tụ).

1.2 Mệnh đề. *Cho E là không gian mêtríc tích của các không gian mêtríc đầy đủ $(E_1, \delta_1), ..., (E_m, \delta_m)$. Ta có E là một không gian mêtríc đầy đủ.*

Chứng minh. Nhắc lại, mêtríc trên E là

$$\delta(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \delta_i^2(x_i, y_i)}$$

trong đó

$$x = (x_1, ..., x_m) \in E$$

$$y = (y_1, ..., y_m) \in E$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ liên tục} \\ f_n \rightrightarrows f \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ liên tục}$$

Giả sử $\{x(n)\}$ là dãy Cauchy trong E với

$$x(n) = (x_1(n), ..., x_m(n)).$$

hàm liên tục trên tập compắc thì liên tục đều.

Vì $\delta_i(x_i(n), x_i(p)) \leq \delta(x(n), x(p)) \quad \forall n, p \geq 1$.

Vì $\{x(n)\}$ Cauchy, suy ra $\{x_i(n)\}, \forall i$ là dãy Cauchy trong E_i đầy đủ, nên $x_i(n) \to x_i \in E_i$.

Vậy $x(n) \to (x_1, ..., x_m) \in E$.

Vậy E là không gian mêtríc đầy đủ. ■

1.3 ℝ là không gian mêtríc đầy đủ

Mệnh đề. *Mọi dãy trong ℝ đều có ít nhất một dãy con đơn điệu.*

Chứng minh. Với dãy (x_n), xét

$$A = \{n \in \mathbb{N} | \forall m > n, x_m \geq x_n\}.$$

Ta có hai trường hợp:

i) A có vô số phần tử: định nghĩa dãy (n_k) bằng quy nạp như sau

$$\begin{cases} n_1 = minA \\ n_{k+1} = minA \setminus \{n_1, ..., n_k\} \end{cases}$$

thì (n_k) là dãy tăng ngặt các số nguyên và $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}$.

ii) $A = \emptyset$ hay có hữu hạn phần tử: khi đó tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \geq n_1, \exists m > n, x_m < x_n.$$

Đặt $n_{k+1} = min\{m \in \mathbb{N} | m > n_k$ và $x_m < x_{n_k}\}$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là dãy tăng ngặt các số nguyên và $x_{n_k} > x_{n_{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}$. ■

Nhắc lại

Định lý Bolzano - Weierstrass. *Mọi dãy trong ℝ bị chặn đều có ít nhất một dãy con hội tụ.*

Định lý. *ℝ là không gian mêtríc đầy đủ.*

Chứng minh. Nếu (x_n) là một dãy Cauchy thì nó bị chặn. Nên do định lý Bolzano - Weierstrass, tồn tại dãy con $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$ khi $k \to \infty$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, ta có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon, \forall n, k \geq n_0.$$

Bằng cách viết

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon + |x_{n_k} - x|,$$

với mọi $k \geq n_0$ và cho $k \to \infty$, ta nhận được

$$|x_n - x| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Vậy (x_n) là dãy hội tụ.

Vậy $\mathbb{R}$ là không gian mêtríc đầy đủ. ■

1.4 Hệ quả. *$\mathbb{R}^n$ là một không gian mêtríc đầy đủ.*

Chứng minh. Do mệnh đề 1.2 và $\mathbb{R}$ là một không gian mêtríc đầy đủ nên $\mathbb{R}^n$ là không gian mêtríc đầy đủ. ■

1.5 Định nghĩa. Với $\emptyset \neq D \subset E, (E, \delta)$ là không gian mêtríc, nếu mọi dãy Cauchy trong D đều là dãy hội tụ (trong D) thì D là tập đầy đủ.

Mệnh đề

$\emptyset \neq D \subset E, (E, \delta)$ là không gian mêtríc

i) Nếu D đầy đủ thì D là tập đóng.

ii) Nếu (E, δ) là không gian mêtríc đầy đủ và D đóng thì D là tập hợp đầy đủ.

Chứng minh.

i) Lấy $\{x_n\}$ là một dãy trong D sao cho $x_n \to x$ trong E (nghĩa là $\delta(x_n, x) \to 0$). Ta chứng minh $x \in D$.

Thật vậy, ta có

$$\delta_D(x_m, x_n) = \delta(x_m, x_n) \le \delta(x_m, x) + \delta(x, x_n) \qquad \forall m, n \ge 1.$$

Vế phải của bất đẳng thức trên tiến về 0 khi $m, n \to \infty$. Do đó

$$\delta_D(x_m, x_n) \to 0$$

khi $m, n \to \infty$ hay nói cách khác, dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (D, δ_D).

Vì (D, δ_D) là không gian mêtríc đầy đủ nên có $y \in D$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về y trong (D, δ_D), nghĩa là

$$\delta_D(x_n, y) \to 0$$

hay $\delta(x_n, y) \to 0$.

Cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức

$$\delta(x, y) \le \delta(x, x_n) + \delta(x_n, y)$$

ta suy ra $\delta(x, y) = 0$ hay $x = y$. Vì $y \in D$ nên $x \in D$.

Vậy D đóng trong E. Mệnh đề được chứng minh.

ii) Với mọi dãy (x_n) Cauchy trong $D \Rightarrow \delta(x_n, x_m) = \delta_D(x_n, x_m)$ khi $x_n, x_m \in D$.

Nên (x_n) là dãy Cauchy trong (E, δ), do (E, δ) đầy đủ nên $x_n \to x \in E$.

Do D đóng nên $x \in D$.

Vậy D là tập đầy đủ. ■

Ví dụ 1.2: Chứng minh $[a, b]$ là tập đầy đủ trong $\mathbb{R}$.

§2 KHÔNG GIAN BANACH

2.1 Định nghĩa. E là không gian định chuẩn với chuẩn $\|\cdot\|$, chuẩn này sinh ra một mêtríc δ trên E với

$$\delta(x,y) = \|x-y\|.$$

Ta nói không gian định chuẩn là đầy đủ nếu không gian mêtríc tương ứng sinh ra bởi chuẩn là đầy đủ. Không gian định chuẩn đầy đủ gọi là không gian Banach. Ta sẽ nêu một vài trường hợp.

2.2 Tính chất.

i) $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach.

ii) Cho S là không gian mêtríc compắc và gọi $E = C(S)$ là không gian các hàm số thực liên tục trên S. Với $x \in E$, đặt $\|x\| = \sup\limits_{t\in S}|x(t)|$. Thì $(E, \|\cdot\|)$ là không gian Banach.

iii) Gọi $E = C^1([a,b])$ là không gian định chuẩn các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ với chuẩn

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)| + \sup_{t\in[a,b]}|x'(t)|, x \in E.$$

Thì E là không gian Banach.

Chứng minh.

i) Đã chứng minh trong chương 3, 1.4.

ii) Ta sẽ chứng minh E đầy đủ. Gọi $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong E, nghĩa là

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{t\in[a,b]}|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$$

khi $n, m \to \infty$. Ta chứng minh có $x \in E$ sao cho $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Với mỗi $t \in S$, $\{x_n(t)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ vì

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le \|x_n - x_m\| \to 0$$

khi $n, m \to \infty$.

Vì $\mathbb{R}$ đầy đủ nên suy ra với mỗi $t \in S$, có $x(t) \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|x_n(t) - x(t)| \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Vậy ta có một hàm số thực x trên S xác định như sau

$$\begin{aligned} x : S &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t). \end{aligned}$$

Ta chứng minh $x \in E$ và $x_n \to x$ trong E. Thật vậy, với mỗi $t \in S$, ta có

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\le |x_n(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x(t)| \\ &\le \|x_n - x_m\| + |x_m(t) - x(t)|. \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon > 0$, do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong E nên có một $n_0 \ge 1$ sao cho

$$\|x_n - x_m\| \le \varepsilon \qquad \forall m, n \ge n_0.$$

Do đó,

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon + |x_m(t) - x(t)| \qquad \forall m, n \ge n_0.$$

Cố định $n \ge n_0$ và cho $m \to \infty$ trong bất đẳng thức trên thì do $x_m(t) \to x(t)$ nên suy ra

$$|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon \qquad \forall t \in S.$$

Vậy chọn $n = n_0$, ta có

$$\begin{aligned}|x(s) - x(t)| &\leq |x(s) - x_{n_0}(s)| + |x_{n_0}(s) - x_{n_0}(t)| + |x_{n_0}(t) - x(t)| \\ &\leq 2\varepsilon + |x_{n_0}(s) - x_{n_0}(t)|.\end{aligned}$$

Vì x_{n_0} liên tục tại $t \in S, \exists \delta > 0 : |t - s| < \delta$ thì $|x_{n_0}(t) - x_{n_0}(s)| < \varepsilon$, cho nên

$$|x(s) - s(t)| < 3\varepsilon.$$

Suy ra x liên tục tại $t \in S$, vậy $x \in E$.

Từ $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in S, \forall n \geq n_0$ ta cũng có

$$\|x_n - x\| = \sup_{t\in S} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Vậy $x_n \to x$ trong E và ii) được chứng minh.

iii) Cho $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong E, nghĩa là

$$\sup_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x_n'(t) - x_m'(t)| \to 0$$

khi $m, n \to \infty$.

Thì $\{x_n\}$ và $\{x_n'\}$ là các dãy Cauchy trong $C([a,b])$ với chuẩn sup. Do $C([a,b])$ đầy đủ nên có các hàm số x, y liên tục trên $[a,b]$ sao cho

$$\sup_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$$
$$\sup_{t\in[a,b]} |x_n'(t) - y(t)| \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Do x_n có đạo hàm liên tục nên ta có biểu diễn

$$x_n(t) = x_n(a) + \int_a^t x_n'(s)ds \qquad \forall t \in [a,b].$$

Xét

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^t x_n'(s)ds - \int_a^t y(s)ds\right| &\le \int_a^t \left|x_n'(s) - y(s)\right| ds \\
&\le \int_a^t \sup_{s\in[a,b]} \left|x_n'(s) - y(s)\right| ds \\
&\le \sup_{s\in[a,b]} \left|x_n'(s) - y(s)\right| \int_a^t ds \\
&\le \sup_{s\in[a,b]} \left|x_n'(s) - y(s)\right| (b-a).
\end{aligned}
$$

Vậy nếu $n \to \infty$, ta có

$$\int_a^t x_n'(s)ds \to \int_a^t y(s)ds.$$

Cho $n \to \infty$ trong $x_n(t) = x_n(a) + \int_a^t x_n'(s)ds$, ta được

$$x(t) = x(a) + \int_a^t y(s)ds.$$

Ta suy ra x có đạo hàm trên $[a,b]$ và

$$x'(t) = y(t) \qquad \forall t \in [a,b].$$

Do y là hàm liên tục và $x' = y$ nên x' cũng là hàm liên tục. Vậy $x \in C^1([a,b])$.

Hơn nữa, vì $x'(t) = y(t) \quad \forall t \in [a,b]$, nên

$$\sup_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$$

$$\sup_{t\in[a,b]} |x_n'(t) - x'(t)| \to 0.$$

Do đó, $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$ và iii) được chứng minh. ■

§3 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC

Ta nói ánh xạ

$$\begin{aligned} T : U &\to V \\ u &\mapsto Tu, \end{aligned}$$

$$Tx = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) \quad \text{với } Tx = (T(e_1) \ldots T(e_k)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_k \end{pmatrix}$$

là tuyến tính nếu $T(hu + kv) = hTu + kTv$, với mọi $u, v \in U, h, k \in \mathbb{R}$.

3.1 Mệnh đề.

1) Với mỗi $a \in \mathbb{R}^n$, ta đặt $T_a(x) = < a, x >$ trong đó $< a, x > = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ với $a = (a_1, \ldots, a_n), x = (x_1, \ldots, x_n)$ thì $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là ánh xạ tuyến tính.

2) Với mỗi ma trận $A \in M_{m \times n}$, ký hiệu A_i là hàng thứ i của ma trận. Đặt $T_A(x) = A.x = (< A_1, x >, .., < A_m, x >)$ thì $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh. Xem như bài tập. ■

3.2 Định lý.

i) Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tuyến tính thì tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Tx = < a, x > \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính thì tồn tại duy nhất $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Tx = Ax = (< A_1, x >, \ldots, < A_m, x >) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

với A là ma trận chuyển vị của ma trận tạo bởi $(A_1, \ldots, A_m)$.

Chứng minh.

i) $\forall i = \overline{1,n}$, đặt $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, số 1 nằm ở vị trí thứ i, số 0 nằm ở tất cả các vị trí còn lại.

$\forall i = \overline{1,n}$, đặt $Te_i = a_i$ và $a = (a_1, ..., a_n)$.

Ta có $Tx = T(x_1, ..., x_n) = T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Te_i = < a, x >$.

Bây giờ giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Tx = < a, x > \text{ và } Tx = < b, x > \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Suy ra

$$< a - b, x > = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$< a - b, e_i > = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

và

$$< a - b, e_i > = a_i - b_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

Vậy $a = b$.

Vậy tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Tx = < a, x > \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Đặt $Tx = (T_1 x, ..., T_m x)$.

Do T tuyến tính, dễ dàng suy ra $T_1, ..., T_m$ tuyến tính.

Nên tồn tại $A_1, ..., A_m \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$T_i x = < A_i, x > \quad \forall i = \overline{1,m}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Suy ra $Tx = Ax = (< A_1, x >, ..., < A_m, x >) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Bây giờ giả sử tồn tại $B_1, ..., B_m \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Tx = (< B_1, x >, ..., < B_m, x >).$$

Thì $(< A_1 - B_1, x >, ..., < A_m - B_m, x >) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Do mệnh đề 3.1, ta có $A_i = B_i \quad \forall i = \overline{1, m}$.

8/5/2019
TCM

Vậy ii) đã được chứng minh. ■

3.3 Mệnh đề. (về ánh xạ tuyến tính liên tục) *Cho U, V là các không gian định chuẩn, và $T : U \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta có các điều sau tương đương với nhau*

i) T là ánh xạ liên tục trên U,

ii) T liên tục tại $0 \in U$,

iii) Tồn tại $C > 0$ sao cho $\|Tx\| \leq C\|x\|$, với mọi $x \in U$.

Chứng minh

i) $\Rightarrow$ ii) hiển nhiên.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Giả sử T liên tục tại 0. Lấy $\varepsilon = 1$, ta có một $\eta > 0$ sao cho $\|x\| \leq \eta$ dẫn tới

$$\|Tx\| = \|Tx - T0\| \leq 1.$$

Lấy $y \in E, y \neq 0$ và đặt $x = \eta \frac{y}{\|y\|}$ thì vì $\|x\| = \eta$ nên

$$\|Tx\| \leq 1.$$

Nhưng

$$\|Tx\| = \|T\left(\eta \frac{y}{\|y\|}\right)\| = \frac{\eta}{\|y\|}\|Ty\|.$$

Đ/n: Cho $T: X \to Y$ là axtt. Đặt: $\|T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$

gọi là chuẩn của toán tử T.

Do đó,

$$||Ty|| \leq \frac{1}{\eta}||y||.$$

Nếu $y = 0$ thì bất đẳng thức trên vẫn đúng (dấu "=" xảy ra). Vậy T bị chặn.

iii) $\Rightarrow$ i)

T liên tục (thực ra là liên tục đều) vì

$$||Tx - Ty|| = ||T(x - y)|| \leq C||x - y|| \qquad \forall x, y \in E.$$

Mệnh đề được chứng minh. ■

3.4 Định lý. *Mọi ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ đều liên tục.*

Chứng minh. Theo định lý 3.2, tồn tại duy nhất $A_1, ..., A_m \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Tx = (< A_1, x >, ..., < A_m, x >) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Trên $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ ứng với chuẩn Euclide, ta có

$$\begin{aligned} ||Tx||_{\mathbb{R}^m} &= \left(\sum_{i=1}^m < A_i, x >^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^m ||A_i||^2_{\mathbb{R}^n}||x||^2_{\mathbb{R}^n}\right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^m ||A_i||^2_{\mathbb{R}^n}\right)^{1/2} ||x||_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Vậy T là ánh xạ liên tục.

Định lý đã được chứng minh. ■

3.5 Không gian định chuẩn $\mathcal{L}(U, V)$

Khi đó, không gian vectơ các ánh xạ tuyến tính liên tục từ U vào V

với phép

$$+ : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall f, g \in \mathcal{L}(U,V)$$
$$. : (\alpha f)(x) = \alpha . f(x) \qquad \forall f \in \mathcal{L}(U,V), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

ký hiệu $\mathcal{L}(U,V)$, trở thành một không gian định chuẩn với

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_V}{\|x\|_U}.$$

Trường hợp $V = \mathbb{R}$, ta ký hiệu $\mathcal{L}(U,\mathbb{R}) = U^*$ gọi là không gian đối ngẫu của U.

Trường hợp $V = U$, ta ký hiệu $\mathcal{L}(U,U) = \mathcal{L}(U)$.

§4 CHUẨN TƯƠNG ĐƯƠNG

Định nghĩa. Xét hai hàm chuẩn $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ trên cùng một không gian vectơ V. Ta nói hai chuẩn này là *tương đương* nếu tồn tại $\alpha, \beta > 0$ sao cho

$$\alpha\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta\|u\|_1,$$

với mọi $u \in V$.

Chẳng hạn, với các hàm chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ sau

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}, \\
\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\
\|x\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,
\end{aligned}$$

trong đó $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, bất đẳng thức

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n.\|x\|_\infty$$

chứng tỏ rằng các chuẩn này là tương đương với nhau[1].

Khi $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ là hai chuẩn tương đương trên cùng một không gian vectơ V, ta nhận được hai không gian định chuẩn $(V, \|.\|_1)$ và $(V, \|.\|_2)$ nhưng các khái niệm về tôpô trên hai không gian này đồng nhất với nhau, nghĩa là

i) Một tập con D của V là mở (đóng, đầy đủ, compắc, liên thông) trong $(V, \|.\|_1)$ nếu và chỉ nếu nó mở (đóng, đầy đủ, compắc, liên thông) trong $(V, \|.\|_2)$,

ii) Một dãy (u_n) các phần tử của V là dãy hội tụ (Cauchy, bị chặn) đối với không gian định chuẩn $(V, \|.\|_1)$ nếu và chỉ nếu nó là dãy hội tụ (Cauchy, bị chặn) đối với không gian định chuẩn $(V, \|.\|_2)$,

iii) Các khái niệm giới hạn cũng như liên tục của ánh xạ $f : D \subset V \to W$ xác định trên một tập con không rỗng của V và có giá trị trong một không gian định chuẩn W là tương đương khi ta coi V là không gian định chuẩn với chuẩn $\|.\|_1$ hay chuẩn $\|.\|_2$.

Ngoài ra, với hai không gian định chuẩn $(V_1, \|.\|_1)$ và $(V_2, \|.\|_2)$, nếu tồn tại song ánh tuyến tính

$$\begin{aligned} \varphi : V_1 &\to V_2 \\ u &\mapsto \varphi(u) \end{aligned}$$

giữ nguyên chuẩn, nghĩa là

$$\|\varphi(u)\|_2 = \|u\|_1,$$

với mọi $u \in V_1$, ta nói φ là một phép *đẳng cấu đẳng cự* giữa V_1 và V_2 và khi đó ta đồng nhất hai không gian định chuẩn $(V_1, \|.\|_1)$ và $(V_2, \|.\|_2)$ bằng cách đồng nhất phần tử $u \in V_1$ với phần tử $\varphi(u) \in V_2$.

[1] Thực ra, người ta chứng minh được rằng mọi chuẩn trên $\mathbb{R}^n$, hay tổng quát hơn là trên các không gian vectơ hữu hạn chiều, đều tương đương với nhau.

Bài tập Chương 3

3.1 Cho X là một không gian mêtríc sao cho mọi quả cầu đóng thì compắc. Chứng minh rằng X đầy đủ.

Hướng dẫn: Lấy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X thì $\{x_n\}$ bị chặn và do đó $\{x_n\}$ chứa trong quả cầu đóng nào đó. Do quả cầu này là compắc nên $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ là $\{x_{n_k}\}$. Giả sử $\{x_{n_k}\} \to x$. Thì $x_n \to x$.

3.2 Cho f là một ánh xạ liên tục đều từ không gian mêtríc (X, δ_X) vào không gian mêtríc (Y, δ_Y). Chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X thì $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy trong Y.

3.3 Cho (E, δ_E) và (F, δ_F) là các không gian mêtríc và f là một song ánh từ E vào F. Cho f là đồng phôi, nghĩa là f và f^{-1} liên tục trên E và F. Nếu E đầy đủ thì F có đầy đủ không?

Hướng dẫn: $\mathbb{R}$ và $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ đồng phôi với nhau qua phép đồng phôi $x \mapsto arctgx$ nhưng $\mathbb{R}$ đầy đủ còn $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ không đầy đủ.

3.4 Cho f là một đẳng cự từ không gian mêtríc (E, δ_E) vào không gian mêtríc (F, δ_F) nghĩa là $\delta_F(f(x), f(y)) = \delta_E(x, y)$. Chứng minh rằng nếu E đầy đủ thì $f(E)$ cũng đầy đủ.

3.5 Chứng minh rằng không gian mêtríc $X \times Y$ đầy đủ nếu và chỉ nếu X và Y là các không gian mêtríc đầy đủ.

Hướng dẫn. Để chứng minh X đầy đủ, lấy $y \in Y$, với mọi dãy $\{x_n\}$ Cauchy trong X, chứng minh $\{(x_n, y)\}$ Cauchy trong $X \times Y$ và do đó hội tụ về (x, y). Suy ra $x_n \to x$. Vậy X đầy đủ.

3.6 Giả sử $\{p_n\}, \{q_n\}$ là hai dãy Cauchy trong không gian mêtríc (X, δ). Chứng minh rằng $\{\delta(p_n, q_n)\}$ hội tụ.

3.7 Chứng minh rằng các tóan tử tuyến tính sau liên tục và tính chuẩn của nó

a) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$

b) $A : C[-1,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$

c) $A : C[-1,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t)$

d) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = t^2x(0)$

e) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t^2)$

f) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t)$

g) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x'(t)$

3.8 Cho các ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,3,4)$. Trên $\mathbb{R}^n$ trang bị $\|.\|_p$. Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính, tìm $\|T\|$.

a) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2;\quad p = 2$

b) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2;\quad p = 1$

c) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2;\quad p = \infty$

d) $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3;\quad p = 2$

e) $T(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + x_2 + 4x_3;\quad p = 1$

f) $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3;\quad p = \infty$

g) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4;\quad p = 2$

3.9 Chứng minh rằng các phiếm hàm thuộc $(C[-1,1])^* = \mathcal{L}(C[-1,1], \mathbb{R})$, tìm chuẩn của nó

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}[x(1) + x(-1)]$

b) $f(x) = 2[x(1) - x(0)]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)], \quad \varepsilon \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

d) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)dt$

e) $f(x) = -x(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 x(t)dt$

f) $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt$

Chương 4

VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

§1 ĐẠO HÀM RIÊNG

Trong suốt phần này, miền xác định $D \subset \mathbb{R}^n$ của hàm nhiều biến được giả định là miền mở, nghĩa là mọi điểm $x \in D$ đều là điểm trong của D. Khi đó, với mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, đặt

$$D_1 = \{t \in \mathbb{R}/(t, x_2, ..., x_n) \in D\}.$$

Ta có D_1 là một tập mở trong $\mathbb{R}$, nghĩa là với mọi $t \in D_1$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall s \in \mathbb{R}, |s - t| < \delta \Rightarrow s \in D_1$ (xem như bài tập). Tương tự, ta cũng có các tập con mở $D_2, D_3, ..., D_n$ của $\mathbb{R}$.

Với hàm nhiều biến $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, xét hàm $f_1 : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_1(t) = f(t, x_2, ..., x_n)$. Đạo hàm của f_1 tại $x_1 \in D_1$, nếu có, được gọi là *đạo hàm riêng* của f theo biến thứ nhất tại điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ký hiệu $D_1 f(x)$ hay $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$. Cụ thể, từ định nghĩa của đạo hàm một biến, ta có

1.1 Định nghĩa. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$. Giới hạn

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h_1},$$

nếu có, được gọi là *đạo hàm riêng theo biến thứ nhất* của f tại x, ký hiệu $D_1 f(x)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ hay $f_{x_1}(x)$. Trong một số tài liệu ta thấy có ký hiệu $f'_{x_1}(x), f'_1(x)$.

ĐK Cauchy: $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ hội tụ khi và chỉ khi
Với mọi $\varepsilon > 0$, ta tìm được $N(\varepsilon)$ sao cho $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \ \forall m > n > N$

Tương tự cho các đạo hàm riêng theo biến thứ $i, i = \overline{2, n}$, của f tại x, ký hiệu $D_i f(x)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Khi f có đạo hàm riêng theo tất cả các biến tại x, *gradient* của f tại x, ký hiệu grad $f(x)$ (hay vắn tắt $\nabla f(x)$) là vectơ

$$\nabla f(x) = (D_1 f(x), D_2 f(x), ..., D_n f(x))$$

Chú ý rằng nếu cố định $x_2, ..., x_n$.và đặt

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

thì $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ nếu có chính là $\varphi'(x_1)$. Tương tự cho $\frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Ví dụ 1.1 Cho $f(x, y) = x^2 y$. Muốn tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ta xem y như hằng số và biến x, ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$. Tương tự, ta có $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$.

Ví dụ 1.2 Xét hàm $f : D \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Tính $\nabla f(0, 1)$.

Tại điểm $(0, 1)$, ta có $D_1 = \{t \in \mathbb{R} : (t, 1) \in D\} = \mathbb{R}$ và $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_1(t) = f(t, 1) = \frac{t}{t^2 + 1}.$$

Do đó,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = f_1'(0) = 1.$$

Tương tự, $D_2 = \{t \in \mathbb{R} : (0, t) \in D\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_2(t) = f(0, t) = 0.$$

Do đó,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = f_2'(1) = 0.$$

Từ đó, suy ra

$$\nabla f(0,1) = (1,0).$$

Từ tính chất của đạo hàm hàm một biến, ta có

1.2 Mệnh đề. *Cho* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Nếu f, g *có đạo hàm riêng theo mọi biến tại* $x \in D$, *thì*

$$\nabla(f+g)(x) = \nabla f(x) + \nabla g(x),$$
$$\nabla(fg)(x) = g(x).\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x).$$

Hơn nữa, nếu $g(x) \neq 0$ *và hàm* $\dfrac{f}{g}$ *xác định trên một lân cận của* x, *thì nó có đạo hàm riêng theo mọi biến tại* x *và*

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}\left(g(x).\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)\right).$$

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ tính chất hàm một biến.

Chú ý : Nếu f, g có đạo hàm riêng theo mọi biến tại x và $g(x) \neq 0$ thì chưa chắc $\dfrac{f}{g}$ xác định trên một lân cận của x. Chẳng hạn, với hàm

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2} & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

thì $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = 0$ nhưng do $\varphi\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên hàm $\dfrac{1}{\varphi}$ không xác định trên một lân cận của $(0,0)$.

Tuy nhiên, chú ý rằng nếu f, g có đạo hàm riêng theo biến thứ i tại $x = (x_1, \ldots, x_n)$ và $g(x) \neq 0$ thì hàm

$$\Psi : t \mapsto \frac{f}{g}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

xác định trên một lân cận của x_i (trong $\mathbb{R}$) và khi đó, ta có đẳng thức

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(x) = \Psi'(x_i) = \frac{1}{g^2(x)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).g(x) - f(x).\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right).$$

§2 ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

Tổng quát, với $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là một vectơ khác vectơ không của $\mathbb{R}^n$, tập

$$D_a = \{t \in \mathbb{R} | x + ta \in D\}$$

là một tập mở của $\mathbb{R}$ chứa điểm 0. Đạo hàm hàm

$$\begin{aligned} f_a : D_a &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x+ta) \end{aligned}$$

tại điểm 0, nếu có, được gọi là *đạo hàm theo hướng* a của f tại x, ký hiệu $D_a f(x)$. Cụ thể, ta có

2.1 Định nghĩa. Xét hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và vectơ $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ khác vectơ không. Giới hạn

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + ta_1, ..., x_n + ta_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t},$$

nếu có, được gọi là *đạo hàm theo hướng* a của f tại x, ký hiệu $D_a f(x)$.

Trong nhiều tài liệu, người ta thêm yêu cầu $|a| = 1$.

Tóm lại: Đặt $f_a(t) = f(x + ta)$, ta có $D_a f(x) = f_a'(0)$. (nếu có)

Như vậy, đạo hàm theo biến thứ i của f tại x chính là đạo hàm theo hướng $\vec{e_i}$ tại x, trong đó $\vec{e_i}$ là vectơ thứ i trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Nhắc lại rằng $\vec{e_i}$ là vectơ mà mọi thành phần đều bằng không trừ thành phần thứ i bằng 1.

Ví dụ 2.1 Cho $f(x, y) = x^3y + y$, vectơ $\vec{a} = (1, -2)$. Tính đạo hàm của f theo hướng $\vec{a}$ tại $(0, 1)$.

Giải. Đặt $x = (0, 1)$, $f_a(t) = f(x + ta) = f(t, 1 - 2t) = t^3(1 - 2t) + 1 - 2t$

$$f'_a(t) = 3t^2(1 - 2t) - 2t^3 - 2.$$

Suy ra

$$D_a f(0, 1) = f'_a(0) = -2.$$

Hoàn toàn tương tự như mệnh đề 2.2, ta có

2.4. Mệnh đề. *Cho $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \in D$ và a là vectơ khác vectơ không trong $\mathbb{R}^n$. Nếu f, g có đạo hàm theo hướng a tại x thì $f + g, fg$ cũng có đạo hàm theo hướng a tại x và*

$$\begin{aligned} D_a(f + g)(x) &= D_a f(x) + D_a g(x), \\ D_a(fg)(x) &= g(x) D_a f(x) + f(x) D_a g(x). \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu $g(x) \neq 0$ và $\frac{f}{g}$ xác định trên một lân cận của x thì $\frac{f}{g}$ có đạo hàm theo hướng a tại x và

$$D_a\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}\left(g(x) D_a f(x) - f(x) D_a g(x)\right).$$

Ví dụ 2.2 Xét hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

và $a = (a_1, a_2), a_1^2 + a_2^2 > 0$. Để khảo sát đạo hàm theo hướng a tại $(0, 0)$, ta xét $f_a : D_a \to \mathbb{R}$, với $D_a = \{t \in \mathbb{R} : ta = (ta_1, ta_2) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}$, xác định bởi

$$f_a(t) = f(ta)$$

Vì

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

nên ta suy ra rằng $D_a f(0,0)$ chỉ tồn tại khi $a = (a_1, 0)$, với $a_1 \neq 0$, hay $a = (0, a_2)$, với $a_2 \neq 0$, và khi đó

$$D_{(a_1,0)} f(0,0) = D_{(0,a_2)} f(0,0) = 0.$$

Lưu ý rằng f có đạo hàm riêng theo các biến tại điểm $(0,0)$ nhưng không có đạo hàm theo hướng a tại điểm $(0,0)$ khi a không cùng phương với các trục tọa độ. Mặt khác, do ví dụ 2, f lại là hàm không liên tục tại điểm $(0,0)$. Do đó, ta cần một khái niệm mạnh hơn khái niệm đạo hàm riêng như sau

§3. VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

3.1 Định nghĩa. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $x \in D$. f được gọi là *(Fréchet) khả vi* tại x nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\|\varepsilon(h)$$

với $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Chú ý rằng ứng với mỗi ánh xạ tuyến tính $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất vectơ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sao cho (xem chương 3, định lý 3.2)

$$Lh = \alpha h = \alpha_1 h_1 + ... + \alpha_n h_n.$$

với mọi $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$. Vectơ α là *vectơ biểu diễn ánh xạ tuyến tính L*.

Ánh xạ tuyến tính L nêu trên, nếu có, thì duy nhất và được gọi là *đạo hàm (Fréchet)* của f tại x, ký hiệu $f'(x)$.

Mệnh đề sau cho thấy khái niệm khả vi Fréchet mạnh hơn khái niệm đạo hàm riêng cũng như đạo hàm theo hướng

3.2 Mệnh đề. *Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in D$ thì f có đạo hàm riêng theo mọi biến tại $x \in D$ và*

$$f'(x).h = h_1.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + h_n.\frac{\partial f}{\partial x_n}(x).$$

với mọi $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Hơn nữa, với mọi vectơ $a = (a_1, \dots, a_n)$ khác vectơ không trong $\mathbb{R}^n$, f có đạo hàm theo hướng a tại x và

$$\begin{aligned} D_a f(x) &= a_1.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n.\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ &= a.\nabla f(x). \end{aligned}$$

Nếu ký hiệu $h = dx$ thì $f'(x).h$ được ký hiệu là $df = f'(x)dx$.

Chứng minh :

Với $h = (h_1, 0, \dots, 0)$ và $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ là vectơ biểu diễn ánh xạ tuyến tính $f'(x)$, ta có

$$f(x_1 + h_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 h_1 + |h_1|.\varepsilon(h_1, 0, \dots, 0)$$

với $\lim\limits_{h_1 \to 0} \varepsilon(h_1, 0, \dots, 0) = 0$.

Do đó

$$\frac{f(x_1 + h_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_1} = \alpha_1 + \frac{|h_1|}{h_1}.\varepsilon(h_1, 0, \dots, 0) \to \alpha_1$$

khi $h_1 \to 0$.

Vậy f có đạo hàm riêng theo biến thứ nhất tại x và $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \alpha_1$.

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha_i, i = \overline{2, n}$.

Tổng quát, ta có

$$\begin{aligned} f(x+ta)-f(x) &= f(x_1+ta_1,...,x_n+ta_n)-f(x_1,...,x_n) \\ &= L(ta)+\|ta\|.\varepsilon(ta) \\ &= t(a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n)+|t|.\|a\|\varepsilon(ta) \end{aligned}$$

với $\lim_{t\to 0}\varepsilon(ta)=0$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{f(x+ta)-f(x)}{t} &= a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n+\frac{|t|}{t}.\|a\|.\varepsilon(ta) \\ &\to a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n \end{aligned}$$

khi $t\to 0$ và do đó

$$D_af(x)=a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n=a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+...+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=a.\nabla f(x) \quad \blacksquare$$

Chú ý rằng nếu f khả vi Fréchet tại x thì vectơ biểu diễn ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ chính là vectơ gradient $\nabla f(x)$ và khi đó, ta có

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-h.\nabla f(x)}{\|h\|}\to 0$$

khi $h\to 0$.

Ví dụ 3.1 Hàm

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

có khả vi Fréchet tại điểm $(0,0)$?

Giải theo ví dụ 2.2, f không có đạo hàm theo hướng $a=(1,1)$ nên ta kết luận f không khả vi Fréchet tại điểm $(0,0)$.

Ví dụ 3.2 Hàm

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

có khả vi Fréchet tại điểm $(0,0)$?

Giải

Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

Tương tự

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ và

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= \frac{f(h,k)-f(0,0)-(h,k).\nabla f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Vì

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{3/2}},$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta suy ra $\varepsilon(h,k)\not\to 0$ khi $(h,k)\to(0,0)$ và do đó, f cũng không Fréchet khả vi tại $(0,0)$.

Ví dụ 3.3 Cho $f(x,y) = x + 2y$ có khả vi Fréchet tại $(1,0)$?

Giải. $\nabla f(1,0) = (1,2)$

Xét

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= \frac{f(1+h,k)-f(1,0)-\nabla f(1,0)(h,k)}{||(h,k)||}\\ &= \frac{1+h+2k-1-(h+2k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\end{aligned}$$

Suy ra $\varepsilon(h,k)\to 0$ khi $(h,k)\to(0,0)$.

Vậy f khả vi Fréchet tại $(1,0)$ và $f'(1,0)(h,k) = h+2k$.

Hơn nữa, ta còn có sự liên hệ giữa tính khả vi Fréchet và tính liên tục sau

3.3 Định lý. *Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi Fréchet tại $x \in D$ thì f liên tục tại x.*

Chứng minh : Do tính khả vi của f tại x, ta có, với $y = x + h \in D$,

$$f(y) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(y_n - x_n) + \|y - x\|.\varepsilon(y - x),$$

trong đó $y = (y_1, \ldots, y_n), x = (x_1, \ldots, x_n)$ và $\lim\limits_{y \to x} \varepsilon(y - x) = 0$.

Đặt $M = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)^2}$. Bất đẳng thức

$$\|f(y) - f(x)\| \leq (M + \varepsilon(y - x))\|y - x\|$$

cho thấy $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$ và do đó, f liên tục tại x. ■

Ví dụ 3.4 Hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

có khả vi Fréchet tại (0,0) không?

Giải.

f không liên tục tại $(0, 0)$ nên không Fréchet khả vi tại $(0, 0)$.

Ví dụ 3.5 Chú ý rằng, hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

liên tục tại $(0, 0)$, có đạo hàm theo mọi hướng $a \neq \vec{0}$, với $D_a f(0, 0) = 0$, nhưng cũng là hàm không Fréchet khả vi tại $(0, 0)$.

Tuy nhiên, ta có một điều kiện đủ cho tính khả vi Fréchet như sau

3.4 Mệnh đề. *Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của D. Nếu tất cả các đạo hàm riêng này đều liên tục tại điểm $x \in D$ thì f khả vi tại x.*

Chứng minh : Để đơn giản ký hiệu, ta chứng minh cho trường hợp $n = 2$. Trường hợp $n > 2$ được chứng minh tương tự và dành cho độc giả.

Với $x = (x_1, x_2) \in D$ và với $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + \\ &\quad + f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2). \qquad (1) \end{aligned}$$

Vì f có đạo hàm riêng theo các biến trên D nên tồn tại $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) = h_1 . \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2)$$

và

$$f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = h_2 . \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 h_2)$$

Do đó, (1) được viết lại thành

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) &= h_1 . \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \\ &\quad + h_2 . \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \|(h_1, h_2)\| \varepsilon(h_1, h_2) \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} \varepsilon(h_1, h_2) &= \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) \\ &\quad + \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) \end{aligned}$$

Từ tính liên tục của $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ tại điểm (x_1, x_2), ta suy ra

$$\begin{aligned}|\varepsilon(h_1,h_2)| &\le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right| \\ &\quad + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right| \to 0\end{aligned}$$

khi $\|(h_1, h_2)\| \to 0$ và định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 3.6 Trong ví dụ 3.3, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$ trên $\mathbb{R}^2$ và liên tục tại $(1,0)$. Suy ra f khả vi Fréchet tại $(1,0)$.

Ví dụ 3.7 Hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

có đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

và

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Bất đẳng thức

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

cho tính liên tục của $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ tại $(0,0)$.

Tương tự, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục tại $(0,0)$ và do đó, f Fréchet khả vi tại $(0,0)$.

Thực ra, trong ví dụ trên, mọi đạo hàm riêng của f đều là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên f khả vi Fréchet tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$.

Hàm xác định trên miền mở D, có đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của D và tất cả các đạo hàm riêng này đều là hàm liên tục trên D được gọi là hàm *thuộc lớp* C^1 *trên* D, ký hiệu $f \in C^1(D)$. Hiển nhiên hàm thuộc lớp C^1 trên D thì khả vi Fréchet tại mọi điểm của D.

3.5 Định lý (Đạo hàm riêng của hàm số hợp)

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và hàm số khả vi

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Cho V là tập mở trong $\mathbb{R}^3$ và hai hàm số $x, y \in C^1(V)$

$$\begin{aligned} x : V &\to \mathbb{R} \\ (t,s,r) &\mapsto x(t,s,r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y : V &\to \mathbb{R} \\ (t,s,r) &\mapsto y(t,s,r) \end{aligned}$$

Nếu $f(x,y) = f(x(t,s,r), y(t,s,r)) = g(t,s,r)$ thì

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Chứng minh.

Ta có

$$\alpha = \frac{f[x(t',s,r), y(t',s,r)] - f[x(t,s,r), y(t,s,r)]}{t' - t}$$

Vì $x, y \in C^1$ nên

$$x(t',s,r) - x(t,s,r) = (t' - t)M$$

với $M = \frac{\partial x}{\partial t}(\bar{t}, s, r), \bar{t} = t + \bar{\theta}(t' - t);\ 0 \leq \bar{\theta} \leq 1.$

$$y(t', s, r) - y(t, s, r) = (t' - t)N$$

với $N = \frac{\partial y}{\partial t}(\bar{\bar{t}}, s, r), \bar{\bar{t}} = t + \bar{\bar{\theta}}(t' - t);\ 0 \leq \bar{\bar{\theta}} \leq 1.$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\alpha(t' - t) &= f[x(t, s, r) + (t' - t)M, y(t, s, r) + (t' - t)N] \\
&\quad - f[x(t, s, r), y(t, s, r)] \\
&= (t' - t)[\nabla f(x(t, s, r), y(t, s, r))](M, N) \\
&\quad + |t' - t|\sqrt{M^2 + N^2}\varepsilon((t' - t)M, (t' - t)N),
\end{aligned}$$

nên

$$\alpha = \nabla f(x(t, s, r), y(t, s, r))(M, N) + \frac{|t' - t|}{t' - t}\sqrt{M^2 + N^2}\varepsilon((t' - t)M, (t' - t)N).$$

Cho $t' \to t$, với chú ý do $x, y \in C^1$ nên

$$M \to \frac{\partial x}{\partial t}(t, s, r), N \to \frac{\partial y}{\partial t}(t, s, r), \varepsilon((t' - t)M, (t' - t)N) \to 0,$$

vì thế

$$\alpha \to \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s, r), y(t, s, r)).\frac{\partial x}{\partial t}(t, s, r) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t, s, r), y(t, s, r)).\frac{\partial y}{\partial t}(t, s, r).$$

Vậy ta có $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$. ■

Hoàn toàn tương tự ta có kết quả tổng quát sau

3.6 Định lý.

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và hàm số khả vi

$$\begin{aligned}
f : U &\to \mathbb{R} \\
(x_1, ..., x_n) &\mapsto f(x_1, ..., x_n)
\end{aligned}$$

Cho V là tập mở trong $\mathbb{R}^m$ và các hàm số $x_1, ..., x_n \in C^1(V)$

$$\begin{aligned} x_k : V &\to \mathbb{R} \\ (t_1, ..., t_m) &\mapsto x_k(t_1, ..., t_m). \end{aligned}$$

Ta có $f(x_1, ..., x_n) = g(t_1, ..., t_m)$.

Ta có $\dfrac{\partial g}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x(t_1, ..., t_m)).\dfrac{\partial x_k}{\partial t_j}(t_1, ..., t_m)$, *trong đó* $x = (x_1, ..., x_n)$.

Ví dụ.

(i) Nếu $x = x(t, s), y = y(t, s)$, thì hàm $g(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$. Tính $\dfrac{\partial g}{\partial t}, \dfrac{\partial g}{\partial s}$.

Ta có

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}.$$

(ii) Nếu f là hàm theo (x, y, z) với x, y, z phụ thuộc vào t, s

$$x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$$

thì hàm $g(t, s) = f(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$. Tính $\dfrac{\partial g}{\partial t}, \dfrac{\partial g}{\partial s}$.

Ta có

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial s}$$

(iii) Cho $G(t, s) = F(x, y)$ với

$$x = t + s, y = t - s$$

Tính đạo hàm riêng của G theo đạo hàm riêng của F.

Ta có

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

và vì

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (t+s)'_t = 1, \frac{\partial y}{\partial t} = (t-s)'_t = 1,$$

ta suy ra

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

(iv) Cho $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, G(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Tìm $\frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta}$.

Ta có

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

và vì

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

nên ta nhận được

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial y}.\sin\theta \\
\frac{\partial G}{\partial \theta} &= -r\frac{\partial F}{\partial x}.\sin\theta + r\frac{\partial F}{\partial y}.\cos\theta
\end{aligned}$$

(v) Nếu f là hàm theo (x, y, z) với x, y, z phụ thuộc vào t. Ta có $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Tính $g'(t)$.

§4 ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của D. Khi đó, đạo hàm riêng theo các biến của các hàm

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

với $i = \overline{1, n}$ tại điểm $x \in D$, nếu có, được gọi là các *đạo hàm riêng cấp 2* của f tại điểm x, ký hiệu

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \text{ hoặc } f_{x_i x_j}$$

với $i, j = \overline{1, n}$. Tương tự, nếu f có các đạo hàm riêng cấp hai tại mọi điểm của D thì đạo hàm riêng theo các biến của các đạo hàm riêng cấp hai này gọi là các *đạo hàm riêng cấp 3* của f, ký hiệu

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}, \text{ hoặc } f_{x_i x_j x_k}$$

$i, j, k = \overline{1, n}$.

Trước hết, ta có kết quả liên quan đến thứ tự lấy đạo hàm theo các biến như sau

4.1. Định lý. *Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên D thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

trên D, với mọi $i, j = \overline{1, n}$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $n = 2, i = 1, j = 2$. Khi đó $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp hai $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ và

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ liên tục trên D. Với $x = (x_1, x_2) \in D$ bất kỳ, lập biểu thức

$$A = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2). \qquad (2)$$

Hàm $\Phi(t) = f(t, x_2 + h_2) - f(t, x_2)$ khả vi trên một lân cận của $x_1 \in \mathbb{R}$ và do định lý giá trị trung bình, (2) được viết lại thành

$$A = \Phi(x_1 + h_1) - \Phi(x_1) = h_1.\Phi'(x_1 + \theta_1 h_1)$$

với $0 < \theta_1 < 1$.

Mặt khác, do định nghĩa của đạo hàm riêng, ta có

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2)$$

và lại do định lý giá trị trung bình,

$$\begin{aligned} \Phi'(x_1 + \theta_1 h_1) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2) \\ &= h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2) \end{aligned}$$

với $0 < \theta_2 < 1$ và do đó

$$A = h_1.h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2) \qquad (3)$$

Tương tự, với hàm $\Psi(t) = f(x_1 + h_1, t) - f(x_1, t)$, ta tìm được $\theta_1', \theta_2' \in (0, 1)$ sao cho

$$\begin{aligned} A &= \Psi(x_2 + h_2) - \Psi(x_2) = h_2.\Psi'(x_2 + \theta_2' h_2) \\ &= h_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2' h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2' h_2)\right] \\ &= h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 + \theta_1' h_1, x_2 + \theta_2' h_2) \qquad (4) \end{aligned}$$

So sánh (3) và (4), ta suy ra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 + \theta_1' h_1, x_2 + \theta_2' h_2). \qquad (5)$$

Vì $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ liên tục trên D nên khi $(h_1, h_2) \to (0,0)$, (5) cho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$$

và định lý được chứng minh. ■

Ví dụ: Cho $f(x,y) = x^2 y + x$. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của f.

Giải

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Tổng quát, với $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và α là một ánh xạ từ $\{1, 2, ..., k\}$ vào $\{1, 2, ..., n\}$ thì

$$x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k)}}(x)$$

là một *đạo hàm riêng cấp* k của f và các đạo hàm riêng theo các biến của nó, nếu có, được gọi là *đạo hàm riêng cấp* $k+1$ của f, ký hiệu

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k)}}\right)(x) \equiv \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_i \partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k)}}(x).$$

Ứng với một đạo hàm riêng cấp k của f, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k)}}$, và với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, đặt $\overline{\alpha_i}$ là số phần tử của

$$\{j \in \overline{1,k} | \alpha(j) = i\},$$

thì $\overline{\alpha_i}$ chỉ số lần lấy đạo hàm riêng theo biến thứ i xuất hiện trong $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k)}}$.

Chẳng hạn với hàm f theo ba biến x_1, x_2, x_3 thì đạo hàm riêng cấp 4 của f, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_3}$, cho $\overline{\alpha_1} = 2, \overline{\alpha_2} = 1, \overline{\alpha_3} = 1$, nghĩa là trong đạo hàm riêng cấp cao này, biến thứ nhất xuất hiện 2 lần và hai biến còn lại, mỗi biến 1 lần. Ta có

4.2. Định lý. *Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm thuộc lớp C^k, nghĩa là f có các đạo hàm riêng đến cấp k và các đạo hàm riêng này đều liên tục trên D. Ta có*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(1)} \dots \partial x_{\alpha(k)}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha'(1)} \dots \partial x_{\alpha'(k)}} \tag{6}$$

trên D nếu $\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha'_i}, \forall i = \overline{1,n}$, nghĩa là số lần lấy đạo hàm riêng theo từng biến của hai vế là như nhau.

Chứng minh. Quy nạp trên k. Định lý 4.1 cho thấy (6) đúng khi $k = 2$. Khi f thuộc lớp C^{k+1} thì hiển nhiên f thuộc lớp C^k. Giả sử (6) đúng với mọi $\alpha, \alpha' : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$ sao cho $\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha'_i}, \forall i = \overline{1,n}$. Xét trường hợp $\alpha, \alpha' : \{1, ..., k+1\} \to \{1, ..., n\}$ sao cho $\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha'_i}, \forall i = \overline{1,n}$. Ta có

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha(1)} \dots \partial x_{\alpha(k+1)}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha(1)}} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(2)} \dots \partial x_{\alpha(k+1)}} \right)(x)$$

và

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha'(1)} \dots \partial x_{\alpha'(k+1)}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha'(1)}} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha'(2)} \dots \partial x_{\alpha'(k+1)}} \right)(x)$$

Do đó, nếu $\alpha(1) = \alpha'(1)$ thì vì

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(2)} \dots \partial x_{\alpha(k+1)}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha'(2)} \dots \partial x_{\alpha'(k+1)}}$$

trên D do giả thuyết quy nạp, ta được

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha(1)} \dots \partial x_{\alpha(k+1)}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha'(1)} \dots \partial x_{\alpha'(k+1)}}$$

trên D. Khi $\alpha(1) = i, \alpha'(1) = j$ với $i \neq j$. Vì $\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha'_i}$ và $\overline{\alpha_j} = \overline{\alpha'_j}$ nên, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\alpha(2) = j$ và $\alpha'(2) = i$. Bằng cách viết

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k+1)}}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{\alpha(3)} \ldots \partial x_{\alpha(k+1)}}\right)(x) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha'(1)} \ldots \partial x_{\alpha'(k+1)}}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{\alpha'(3)} \ldots \partial x_{\alpha'(k+1)}}\right)(x) \quad (8)$$

và lưu ý rằng, do giả thuyết quy nạp,

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{\alpha(3)} \ldots \partial x_{\alpha(k+1)}} = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{\alpha'(3)} \ldots \partial x_{\alpha'(k+1)}}$$

trên D và là hàm thuộc lớp C^2 trên D. Định lý 4.1, kết hợp với (7)-(8) cho

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k+1)}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{\alpha'(1)} \ldots \partial x_{\alpha'(k+1)}}$$

trên D và định lý được chứng minh. ■

Với các điều kiện của định lý 4.2, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha(1)} \ldots \partial x_{\alpha(k)}}(x) &= \frac{\partial^k f}{\underbrace{\partial x_1 \ldots \partial x_1}_{\overline{\alpha_1} \text{ lần}} \ldots \underbrace{\partial x_n \ldots \partial x_n}_{\overline{\alpha_n} \text{ lần}}} \\ &\equiv \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\overline{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{\overline{\alpha_n}}}(x).\end{aligned}$$

nghĩa là, một đạo hàm riêng cấp k của hàm f thuộc lớp C^k chỉ phụ thuộc vào số lần lấy đạo hàm riêng theo từng biến và các đạo hàm riêng này được biểu diễn bằng các bộ thứ tự các số nguyên $\geq 0, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sao cho $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$ trong đó α_i chỉ số lần lấy đạo hàm riêng theo biến thứ i và khi đó đạo hàm riêng cấp k này được viết lại thành $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$ hay vắn tắt là $D_\alpha f(x)$.

Bài tập Chương 4

4.1 Tìm các đạo hàm riêng cho các hàm sau, viết ∇f

a) $f(x, y, z) = x^y$

b) $f(x, y) = x^y$

c) $f(x, y) = \sin(x \sin y)$

d) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

4.2 Cho $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Tìm đạo hàm riêng của

a) $f(x, y) = \int_a^{x+y^2} g(t)dt$

b) $f(x, y) = \int_y^x g(t)dt$

c) $f(x, y) = \int_a^{xy} g(t)dt$

d) $f(x, y) = \int_a^{\sin xy} g(t)dt$

e) $f(x, y) = \int_x^{\int_b^y g(s)ds} g(t)dt$

4.3 Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$.

4.4 Tính df cho các hàm sau

a) $f(x, y) = xy^3$

b) $f(x, y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

4.5 Tìm đạo hàm riêng của f theo s và t bằng cách dùng đạo hàm hàm hợp

a) $f(x,y,z) = x^2 + 4xyz, x = t+s, y = 3t-s, z = t^2$

b) $f(x,y) = x^3\sin(xy), x = t\cos s, y = t\sin s$

4.6 Cho $u = f(v,w)$ với $v = x-y, w = y-x$. Chứng minh

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

4.7 Cho $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = f(x,y)$. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

4.8 Cho

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

với θ là một hằng số. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

với $f(u,v) = g(x,y)$

4.9 Cho $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1), p = (x,y,z)$. Cho f khả vi, chứng minh

a) $D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p), \quad D_j f(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

b) $D_{\lambda a} f(p) = \lambda D_a f(p)$ với $a = (a_1, a_2, a_3)$ là một vectơ bất kỳ.

4.10 Tính các đạo hàm riêng cấp hai của f và kiểm tra rằng hai đạo hàm hỗn hợp $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ là bằng nhau, với hàm $f(x,y)$ cho bởi

a) $x^3 y$

b) $3e^{xy^3}$

c) $\sin(x^2 + y^3)$

4.11 Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm ba biến $f(x, y, z)$ với hàm này là

a) $\sin(xyz)$

b) $x^4y^2z^3$

4.12 Hàm f được gọi là hàm *điều hòa* hai biến nếu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra rằng các hàm sau là hàm điều hòa

a) $x^2 - y^2$

b) $arctg\frac{y}{x}$

c) $\ln(x^2 + y^2)$

d) $(e^y + e^{-y})\sin x$

e) $\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

f) $\frac{x}{x^2+y^2}$

4.13 Hàm f gọi là hàm điều hòa ba biến nếu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra xem các hàm sau có là hàm điều hòa hay không

a) $x^2 + y^2 - 2z^2$

b) $\ln(x^2 + y^2 + z^2)$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

d) $e^{3x+4y}\cos(5z)$

4.14 Mục đích của bài tập này là cho một ví dụ để cho thấy đạo hàm hỗn hợp f_{xy}, f_{yx} không phải luôn luôn bằng nhau. Cho

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Tính $f_x(x,y), f_y(x,y)$ tại $(x,y) = (0,0)$ và tại $(x,y) \neq (0,0)$. Suy ra biểu thức của $f_x(0,y), f_y(x,0)$.

b) Dùng câu a) để tính $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ với $(x,y) \neq (0,0)$ và tính $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$. Từ đó suy ra $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

c) Giả thiết nào của định lý 4.1, chương 4 bị vi phạm trong ví dụ này? Chứng minh khẳng định của bạn.

4.15 Cho

a) $u = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$. Chứng minh

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

b) $u = x^3F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Chứng minh $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$.

c) $z = yf(x^2 - y^2)$. Chứng minh $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{y}$.

d) $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$. Chứng minh $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

e) $u = f(r)$ với $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2.$$

4.16 Nếu $u = f(r)$ với $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Chứng minh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}.$$

4.17 Cho hàm $F(x,y)$. Giả sử $x = f(u,v), y = g(u,v)$ và $G(u,v) = F(f(u,v), g(u,v))$. Chứng minh rằng ta có

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$$

 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

với $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial v}, \dfrac{\partial f}{\partial v} = -\dfrac{\partial g}{\partial u}$ với: đạo hàm cấp 2 liên tục

4.18 Cho hàm F có 2 biến x, y. Ta nói F là *hàm thuần nhất* cấp $\alpha > 1$ nếu

$$F(tu, tv) = t^\alpha F(u, v)$$

với mọi u, v, t.

Chứng minh rằng nếu F là thuần nhất cấp α thì

a) $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha F(x, y)$

b) $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)F(x, y)$

4.19 Cho F là hàm thuần nhất cấp hai. Đặt $u = r^m F(x, y)$ với $r^2 = x^2 + y^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + m(m+4)r^{m-2}F$$

4.20 Khảo sát tính khả vi của ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = |x_1| + |x_2|.$$

4.21 Khảo sát tính khả vi của ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \max_{i=1,2} x_i.$$

4.22 Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0$ tại mọi x thì f không lệ thuộc vào biến thứ nhất.

4.23 Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (0 \le x \le 1 \text{ và } -1 \le y \le 1) \text{ hay } (-1 \le x < 0 \text{ và } \frac{1}{2} \le |y| \le 1).$$

Xét $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } y > 0, x \le 0 \\ 0 & \text{khi } x \ge 0 \\ -x^2 & \text{khi } y \le 0, x \le 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, với mọi $(x, y) \in D$. Chú ý rằng f thay đổi theo y.

4.24 Cho g là hàm liên tục trên đường tròn đơn vị $\{x \in \mathbb{R}^2 |\ \|x\| = 1\}$ và $g(0, 1) = g(1, 0) = 0, g(-x) = -g(x)$. Xét $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{khi} \quad x \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad x = (0,0) \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng hàm $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi đẳng thức $h(t) = f(tx)$ (trong đó $x \in \mathbb{R}^2$) là hàm khả vi.

b. Chứng minh rằng f không khả vi tại $(0, 0)$ trừ khi $g = 0$.

4.25 Chứng minh rằng hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{khi} \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

không khả vi tại $(0, 0)$.

4.26 Chứng minh rằng hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ không khả vi tại $(0, 0)$.

4.27 Chứng minh rằng hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sao cho $|f(x)| \leq \|x\|^2$ khả vi tại $(0, 0, ..., 0)$.

4.28 Cho $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Tìm f', với

a. $f(x, y) = \int_a^{x+y} g(t)dt$.

b. $f(x, y) = \int_a^{xy} g(t)dt$.

c. $f(x, y, z) = \int_{xy}^{\sin(x \sin(y \sin z))} g(t)dt$.

4.29 Biểu diễn các đạo hàm riêng của f qua các đạo hàm của các hàm g và h, nếu

a. $f(x, y) = g(x)h(y)$.

b. $f(x, y) = g(x)^{h(y)}$.

c. $f(x, y) = g(x)$.

d. $f(x, y) = g(y)$.

e. $f(x, y) = g(x + y)$.

4.30 Cho $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục. Xét hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0)dt + \int_0^y g_2(x, t)dt.$$

a. Chứng minh rằng

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g_2(x, y).$$

b. f có thể xác định thế nào để

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g_1(x, y).$$

c. Tìm hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$.

4.31 Chứng tỏ rằng hàm

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{(n-2)/2}}$$

thỏa phương trình

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

4.32 Chứng tỏ rằng mọi hàm có dạng

$$u(x, y, z) = \frac{f(t + r)}{r} + \frac{g(t - r)}{r},$$

trong đó $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, đều thỏa phương trình

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}.$$

4.33 Chứng tỏ rằng nếu $f(x, y)$ thỏa phương trình Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$, thì hàm

$$\phi(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

cũng thỏa phương trình Laplace.

4.34 Cho $f(x, y, z) = g(r)$, trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a. Tính $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

b. Chứng tỏ rằng nếu $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$, thì $f(x, y, z) = \dfrac{a}{r} + b$, trong đó a, b là các hằng số.

4.35 Cho $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(r)$, trong đó $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

a. Tính $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + ... + f_{x_nx_n}$.

b. Giải phương trình $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + ... + f_{x_nx_n} = 0$.

Công thức Taylor hàm $f(x,y)$ trong lân cận điểm (x_0,y_0) đến

Chương 5 cấp n:

$$f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^i f(x_0,y_0) + R_n$$

với: $R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$, $\theta \in (0,1)$ khi $(h,k) \to (0,0)$ thì $R_{n+1} \to 0$

CÔNG THỨC TAYLOR - HÀM ẨN HÀM NGƯỢC - CỰC TRỊ

§1 CÔNG THỨC TAYLOR

Xét hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thuộc lớp $C^k, x, y \in D$ sao cho đoạn thẳng $[x,y]$ nối x và y chứa trong D, trong đó

$$[x,y] = \{tx + (1-t)y | 0 \le t \le 1\}.$$

Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $y + t(x-y) = tx + (1-t)y \in D$ với mọi $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Để xây dựng công thức Taylor cho f, ta xét hàm

$$\begin{aligned} g : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(y + t(x-y)) \end{aligned}$$

và ta có bổ đề sau

1.1 Bổ đề. *g là hàm thuộc lớp C^k trên $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ và với mọi $m = \overline{1,k}$, ta có*

$$g^{(m)}(t) = m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(tx + (1-t)y), \qquad (1)$$

trong đó $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$ và $(x-y)^\alpha = (x_1-y_1)^{\alpha_1}...(x_n-y_n)^{\alpha_n}$ khi $x = (x_1, ..., x_n)$ và $y = (y_1, ..., y_n)$.

Chứng minh: Quy nạp trên m. Khi $m = 1$, do $f \in C^k$, f khả vi trên D

$$f(x_0+h)=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^i+R_m$$
với:
$$R_m=\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^{m+1}f(x_0+\theta h)$$
và $R_n\longrightarrow 0$ khi $\|h\|\longrightarrow 0$

nên

$$\begin{aligned}g(t+h)-g(t) &= f(y+(t+h)(x-y))-f(y+t(x-y))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(y+t(x-y))h(x_i-y_i)+\|h(x-y)\|\varepsilon(h(x-y))\end{aligned}$$

với $\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(k)=0$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(y+t(x-y))(x_i-y_i)+\frac{|h|}{h}\|x-y\|\varepsilon(h(x-y))\\ &\to \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(y+t(x-y))(x_i-y_i)\\ &= \sum_{|\alpha|=1}D_\alpha f(y+t(x-y))\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}$$

khi $h\to 0$. Do đó g khả vi tại t và (1) thỏa với $m=1$. Khi đó, vế phải của (1) là hàm liên tục theo t nên ta suy ra g thuộc lớp C^1.

Giả sử với $1\le m<k$,

$$g^{(m)}(t)=m!\sum_{|\alpha|=m}\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}D_\alpha f(y+t(x-y)),$$

với mọi $t\in(-\varepsilon,1+\varepsilon)$. Do f thuộc lớp C^k nên các hàm $z\mapsto D_\alpha f(z)$ đều thuộc lớp C^1 trên D và do chứng minh trên, hàm

$$t\mapsto D_\alpha f(y+t(x-y))\equiv g_\alpha(t)$$

thuộc lớp C^1 và có đạo hàm là

$$g'_\alpha(t)=\sum_{i=1}^{n}D_i(D_\alpha f)(y+t(x-y))(x_i-y_i)$$

Từ đó suy ra $t\mapsto g^{(m)}(t)$ thuộc lớp C^1 do đó g thuộc lớp C^{m+1},

$$\begin{aligned}g^{(m+1)}(t) &= m!\sum_{|\alpha|=m}\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\sum_{i=1}^{n}D_i(D_\alpha f)(y+t(x-y))(x_i-y_i)\\ &= m!\sum_{|\alpha|=m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-y)^\alpha.(x_i-y_i)}{\alpha!}D_i(D_\alpha f)(y+t(x-y)) \qquad (2)\end{aligned}$$

Đặt $A_m = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n | \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\}$ và với mỗi $i = \overline{1, n}$ xét

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : A_m & \to & A_{m+1} \\ \alpha & \mapsto & \varphi_i(\alpha) \end{array}$$

sao cho nếu $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ thì $\varphi_i(\alpha) = (\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ với

$$\alpha'_j = \begin{cases} \alpha_j & j \neq i \\ \alpha_i + 1 & j = i \end{cases}.$$

Ta có φ_i là đơn ánh, $\varphi_i(A_m) = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \alpha_1 + ... + \alpha_n = m + 1$ và $\alpha_i \neq 0\}$ và $D_i(D_\alpha f) = D_{\varphi_i(\alpha)} f$ trên D. (2) được viết lại thành

$$\begin{aligned} g^{(m+1)}(t) &= m! \sum_{|\alpha|=m} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-y)^{\varphi_i(\alpha)}}{\frac{\varphi_i(\alpha)!}{\alpha_i+1}} D_{\varphi_i(\alpha)} f(y + t(x-y)) \\ &= (m+1)! \sum_{|\beta|=m+1} \frac{(x-y)^\beta}{\beta!} D_\beta f(y + t(x-y)) \end{aligned}$$

và bổ đề được chứng minh.

Ta được công thức Taylor cho hàm nhiều biến như sau

1.2 Định lý. *Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp $C^{k+1}, k \geq 1$. Nếu $x, y \in D$ sao cho $[x, y] \subset D$, tồn tại $0 < \theta < 1$ sao cho*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha(f(y + \theta(x-y))) \end{aligned}$$

Chứng minh. Đặt $g(t) = f(y + t(x-y)), -\varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ sao cho $y + t(x-y) \in D$ với mọi $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Ta có g thuộc lớp C^{k+1} trên $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ và

$$g(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{k!} \quad \text{với } \theta \in (0,1). \tag{3}$$

Do bổ đề 1.1,

$$g^{(i)}(t) = i! \sum_{|\alpha|=i} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y + t(x-y)).$$

Do đó

$$\frac{g^{(i)}(0)}{i!} = \sum_{|\alpha|=i} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y).$$

Vậy từ (3) ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|=i} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y + \theta(x-y)) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D_\alpha f(y + \theta(x-y)), \end{aligned}$$

và định lý được chứng minh. ■

Chú ý: Khai triển trên được gọi là khai triển Taylor tới cấp k của f.

Ví dụ: Viết khai triển Taylor của $f(x,y) = \sin x \sin y$ xung quanh điểm $(0,0)$ cấp $n = 2$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] \\ &+ \frac{1}{2!} f_{xxy}(\theta x, \theta y)x^2 y + \frac{1}{2!} f_{yyx}(\theta x, \theta y)y^2 x \\ &+ \frac{1}{3!} f_{xxx}(\theta x, \theta y)x^3 + \frac{1}{3!} f_{yyy}(\theta x, \theta y)y^3 \end{aligned}$$

$f_x(x,y) = \cos x \sin y, \quad f_y(x,y) = \sin x \cos y,$

$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \cos x \cos y,$

$f_{xx}(x,y) = -\sin x \sin y, f_{yy}(x,y) = -\sin x \sin y$

$f_{xxy} = -\sin x \cos y, f_{yyx} = -\cos x \sin y, f_{xxx} = -\cos x \sin y, f_{yyy} = -\sin x \cos y$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy - \frac{1}{2}(\sin\theta x \cos\theta y)x^2y - \frac{1}{2}(\cos\theta x \sin\theta y)y^2x \\ &\quad -\frac{1}{6}(\cos\theta x \sin\theta y)x^3 - \frac{1}{6}(\sin\theta x \cos\theta y)y^3 \\ &= xy - \frac{1}{6}(\sin\theta x \cos\theta y)(y^3 + 3x^2y) - \frac{1}{6}(\cos\theta x \sin\theta y)(x^3 + 3xy^2) \end{aligned}$$

§2 VI PHÂN HÀM ẨN

Nếu $F(x,y)$ là một hàm theo hai biến x, y, thì phương trình

$$F(x,y) = 0 \tag{4}$$

cho ta một hệ thức liên lạc giữa x, y và khi đó nó có thể xác định y như là một hay nhiều hàm theo x. Chẳng hạn nếu $F(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$, thì

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ hay } y = -\sqrt{1-x^2}.$$

Hai hàm này cùng xác định trên $[-1,1]$ và được gọi là các *hàm ẩn* xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Tương tự, phương trình

$$F(x_1, ..., x_n, y) = 0 \tag{5}$$

có thể xác định một hay nhiều hàm ẩn y theo các biến $x_1, ..., x_n$.

Trong phần này, với (4) hay tổng quát là (5) cho trước, ta đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại của hàm ẩn và sự liên hệ giữa vi phân của hàm ẩn này với vi phân của F.

Trước hết, với (4), ta có

2.1 Định lý (hàm ẩn một chiều). *Cho $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp C^1, $(x_0, y_0) \in D$ và $F(x_0, y_0) = 0$.*

Nếu $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ thì tồn tại hình chữ nhật $(a, b) \times (c, d) \subset D$ chứa (x_0, y_0) sao cho với mỗi $x \in (a, b)$, phương trình $F(x, y) = 0$ có đúng một nghiệm $y \in (c, d)$ ký hiệu là $f(x)$.

Ta nhận được hàm ẩn $y = f(x)$ xác định trên lân cận (a, b) của x_0 và có giá trị trong lân cận (c, d) của y_0, $y_0 = f(x_0)$, $F(x, f(x)) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$ và

$$y' = f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

với mọi $x \in (a, b)$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Do tính khả vi liên tục của F, tồn tại lân cận $[a_1, b_1] \times [c, d]$ của (x_0, y_0) sao cho $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ trên lân cận này. Hàm $y \mapsto F(x_0, y)$ tăng ngặt trên $[c, d]$ và $F(x_0, y_0) = 0$ với $c < y_0 < d$ nên $F(x_0, c) < 0$ và $F(x_0, d) > 0$.

Các hàm $x \mapsto F(x, c)$ và $x \mapsto F(x, d)$ là các hàm liên tục trên $[a_1, b_1]$, $F(x_0, c) < 0$ và $F(x_0, d) > 0$ nên tồn tại $a_1 \leq a < x_0 < b \leq b_1$ sao cho $F(x, c) < 0$ và $F(x, d) > 0$, với mọi $x \in [a, b]$.

Bây giờ, với mỗi $x \in [a, b]$, hàm $y \mapsto F(x, y)$ là hàm liên tục, tăng ngặt trên $[c, d]$ và $F(x, c) < 0, F(x, d) > 0$ nên tồn tại duy nhất $y \in [c, d]$, ký hiệu là $f(x)$, sao cho $F(x, y) = 0$.

Để chứng tỏ sự liên tục của f tại $x \in (a, b)$, xét lân cận $[a, b] \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$ của (x, y), với $y = f(x)$, sao cho $[y - \varepsilon, y + \varepsilon] \subset [c, d]$. Vì $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ trên lân cận này nên do chứng minh trên, tồn tại lân cận $[x - \delta, x + \delta]$ của x, chứa trong $[a, b]$, sao cho phương trình $F(x, y) = 0$ xác định hàm ẩn $g : [x-\delta, x+\delta] \to [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$, $F(x, g(x)) = 0$. Do tính tồn tại duy nhất của hàm ẩn f xác định trên lân cận $[a,b] \times [c,d]$ của (x_0, y_0), ta suy ra $g(t) = f(t)$, $\forall t \in [x-\delta, x+\delta]$ và do đó, ta có $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ khi $|t-x| \leq \delta$, nghĩa là f liên tục tại x.

Cuối cùng, để chứng minh tính khả vi của f, ta chú ý rằng F là hàm khả vi trên D. Do đó, với $x \in (a,b)$ và h đủ nhỏ sao cho $x+h \in (a,b)$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))[f(x+h) - f(x)] \\ &\quad + \sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2}.\varepsilon(h, f(x+h) - f(x)), \end{aligned}$$

với $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h, f(x+h) - f(x)) = 0$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \\ &\quad - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \times \frac{\sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2}}{h} \times \\ &\quad \times \varepsilon(h, f(x+h) - f(x)) \\ &\to -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \end{aligned}$$

khi $h \to 0$ và do đó

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Do F thuộc lớp C^1 và f là hàm liên tục, ta suy ra f' là hàm liên tục và do đó f thuộc lớp C^1.

Ví dụ 9. Với hàm $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, ta có $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3(x^2 - y)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3(y^2 - x)$. Do đó, tại các điểm (x,y) sao cho $y^2 \neq x$, phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn $y = f(x)$ trong một lân cận của x và

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = \frac{-3(x^2-y)}{3(y^2-x)} = \frac{x^2-y}{x-y^2}.$$

Định lý 2.1 được tổng quát hóa thành

2.2 Định lý (hàm ẩn nhiều chiều). *Cho $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp C^1, $(x^0, y_0) \in D$, với $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, và $F(x^0, y_0) = 0$.*

Nếu $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y_0) \neq 0$ thì tồn tại lân cận Ω của x^0 và khoảng (c, d) chứa $y_0, \Omega \times (c, d) \subset D$ sao cho với mỗi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, phương trình $F(x, y) = 0$ có đúng một nghiệm $y \in (c, d)$, ký hiệu là $f(x)$.

Ta nhận được hàm ẩn $y = f(x)$ xác định trên lân cận Ω của x^0 trong $\mathbb{R}^n$ và có giá trị trong lân cận (c, d) của y_0, $y_0 = f(x^0)$, $F(x, f(x)) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$ và

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \tag{6}$$

với mọi $x \in \Omega, i = \overline{1, n}$.

Phần chứng minh sự tồn tại duy nhất hàm ẩn f trên lân cận $\Omega \times (c, d)$ của (x^0, y_0) được chứng minh tương tự như chứng minh định lý 2.1, trong đó các lân cận của x, hay x_0 trong $\mathbb{R}$ được thay bằng các lân cận của x, hay x^0 trong $\mathbb{R}^n$.

Biểu thức (6) có thể nhận được bằng cách áp dụng định lý 2.1, trong đó ta cố định các biến x_j với $j \neq i$ của hàm F. Khi đó F coi như hàm theo hai biến x_i và y.

Áp dụng định lý hàm ẩn trên, ta có thể chứng minh được các kết quả sau liên quan đến việc giải hệ phương trình sau (với ẩn số u, v)

$$F(x, y, z, u, v) = 0; \quad G(x, y, z, u, v) = 0 \tag{7}$$

2.3 Định lý. *Cho U là một tập mở chứa $P_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ trong không gian năm chiều với các tọa độ x, y, z, u, v. Giả sử rằng các hàm $F, G : U \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp C^1 thỏa*

$$F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0; \quad G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$$

và

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \neq 0$$

với

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Thì tồn tại một ô trong U xác định bởi

i) $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b, |z - z_0| < c$

ii) $|u - u_0| < \alpha, |v - v_0| < \beta$

sao cho các khẳng định sau là đúng

1. Với (x, y, z) thỏa (i), tồn tại duy nhất một cặp (u, v) thỏa (7). Ta ký hiệu $u = f(x, y, z), v = g(x, y, z)$

2. Hàm f, g liên tục trên hình hộp $P \subset \mathbb{R}^3$ thỏa (i)

3. Hàm f, g khả vi liên tục và

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

với $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

Ghi chú: Xét hai hàm ẩn xác định bởi hai phương trình

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= c \\ G(x,y,u,v) &= d \end{aligned}$$

trong đó u, v là hàm theo x, y, nghĩa là $u = u(x, y), v = v(x, y)$ ta có thể tìm đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ bằng cách lấy đạo hàm hai phương trình đã cho theo x và sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

và ta nhận được hệ phương trình với hai ẩn số $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial F}{\partial x} \\
\frac{\partial G}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial G}{\partial x}
\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

Thông thường ta đặt

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

$$\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}$$

$$\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

Khi đó ta có thể viết lại

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\end{aligned}$$

với $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\end{aligned}$$

Ví dụ

(i) Cho z là hàm của x, y thỏa

$$\frac{x^2}{16} + y^2 + z^2 = 3$$

với $z(4,-1) = 1$. Tìm $z_x(4,-1)$.

Giải

Đặt $F = \dfrac{x^2}{16} + y^2 + z^2 - 3$, $F((4,-1),1) = 0$, $F_z(4,-1,1) = 2 \neq 0$.

Suy ra tồn tại lân cận $\Omega \supset \{(4,-1)\}$ và $(c,d) \ni 1$ sao cho $z = z(x,y)$ thỏa $\forall (x,y) \in \Omega$ và thỏa $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + z^2 = 3$.

Đạo hàm hai vế đẳng thức theo x ta có

$$\frac{x}{8} + 2zz_x = 0$$

Vậy

$$z_x(x,y) = -\frac{x}{16z(x,y)}$$

với $(x,y) = (4,-1)$ ta có $z(4,-1) = 1$. Vậy

$$z_x(4,-1) = -\frac{4}{16.1} = -\frac{1}{4}$$

(ii) Cho u, v là hàm của x, y thỏa $u > 0, 0 \leq v < 2\pi$ và

$$\begin{aligned} u\cos v - x &= 0 \\ u\sin v - y &= 0 \end{aligned}$$

Tìm $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$. Khi $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, chứng minh $u(x,y) = 1, v(x,y) = \frac{\pi}{4}$. Dựa vào đó tính $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Giải

Kiểm tra các điều kiện của định lý 2.3, suy ra tồn tại các hàm $u = u(x,y), v = v(x,y)$ xác định trên lân cận $\Omega \ni \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Đạo hàm theo x đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} u_x\cos v - uv_x\sin v &= 1 \\ u_x\sin v + uv_x\cos v &= 0 \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -u\sin v \\ 0 & u\cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1}{u}.u\cos v = \cos v \\ v_x &= \frac{\begin{vmatrix} \cos v & 1 \\ \sin v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sin v}{u}$$

Khi $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ta có

$$1 = x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2$$

Với $u > 0$ ta có $u = 1$. Thế vào hai phương trình của đề bài ta có: $\cos v = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin v = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $v = \frac{\pi}{4}$. Tóm lại

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1, v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ta suy ra

$$u_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$v_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$

ĐKcần: giả sử f khả vi tại x_0 và hàm số có cực trị địa phương tại x_0. Khi đó $\nabla f(x_0) = 0$

§3 CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

Tương tự như đối với hàm một biến, người ta có thể ứng dụng phép tính vi phân để khảo sát bài toán tìm giá trị lớn nhất cũng như nhỏ nhất của hàm nhiều biến. Trước hết ta có

3.1 Định nghĩa. Cho f là hàm nhiều biến xác định trên một miền $D \subset \mathbb{R}^n$ và $x^0 \in D$.

f được gọi là đạt *cực đại địa phương* tại x^0 nếu tồn tại lân cận Ω chứa trong D của x^0 sao cho $f(x) \le f(x^0)$ với mọi $x \in \Omega$.

Tương tự, f được gọi là đạt *cực tiểu địa phương* tại x^0 nếu tồn tại lân cận Ω chứa trong D của x^0 sao cho $f(x) \ge f(x^0)$ với mọi $x \in \Omega$.

f được gọi là đạt *cực trị địa phương* tại x^0 khi nó đạt cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương tại x^0.

Chú ý rằng khi $x = (x_1, ..., x_n), x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in D \subset \mathbb{R}^n$ thì với mỗi $i = \overline{1, n}$, hàm $t \mapsto f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, ..., x_n^0)$ là hàm một biến xác định trên $D_i = \{t \in \mathbb{R} : (x_1^0, ..., t, ..., x_n^0) \in D\}$ và đạt cực trị địa phương tại $t = x_i^0$ khi f đạt cực trị địa phương tại x^0. Do đó, ta có

3.2 Mệnh đề. *Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm riêng theo các biến trên D. Điều kiện cần để f đạt cực trị địa phương tại $x^0 \in D$ là*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \forall i = \overline{1, n} \tag{8}$$

Đẳng thức (8) có thể viết lại dưới dạng vectơ là

$$\nabla f(x^0) = 0$$

và điểm x^0 được gọi là một điểm dừng của f.

Dễ dàng thấy, ngay cả khi f chỉ là hàm theo một biến, không nhất thiết f đạt cực trị địa phương tại các điểm dừng của nó. Tuy nhiên, cũng giống như trường hợp hàm một biến, người ta có thể dùng các đạo hàm cấp 2 để xây dựng một điều kiện đủ cho các cực trị tại các điểm dừng.

Với hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 và điểm dừng $x \in D$, ta có $\nabla f(x) = 0$ và do công thức Taylor,

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j + \|h\|^2 \varepsilon(h), \tag{9}$$

thỏa với h đủ nhỏ và $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Đặt

$$\varphi(h, k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j.$$

Ta có

$$\varphi(h,k) = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$\equiv {}^t h.H_f(x).k,$$

trong đó ${}^t h$ để chỉ ma trận chuyển vị của ma trận cột h và $H_f(x)$ còn được gọi là *ma trận Hesse* của f tại x.

Do đó φ là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ xác định bởi ma trận $H_f(x)$. Chú ý rằng, do định lý 3.1, $H_f(x)$ là một ma trận đối xứng. Ta có

3.3 Định lý.

i) Nếu φ là dạng toàn phương xác định dương, nghĩa là

$$\varphi(h,h) > 0, \forall h \neq 0,$$

thì f đạt cực tiểu địa phương tại x,

ii) Nếu φ là dạng toàn phương xác định âm, nghĩa là

$$\varphi(h,h) < 0, \forall h \neq 0,$$

thì f đạt cực đại địa phương tại x,

iii) Nếu tồn tại $h, k \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\varphi(h,h) > 0$ và $\varphi(k,k) < 0$ thì x không là cực trị địa phương của f.

Chứng minh. Khi $\varphi(h,h) > 0, \forall h \neq 0$, đặt $\lambda = \frac{1}{2}\inf_{\|h\|=1} \varphi(h,h)$ do tính compắc của mặt cầu $S = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$, $\exists h_0 \in S$ sao cho $\lambda = \frac{1}{2}\varphi(h_0,h_0) > 0$. Với $h \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, xét $k = \frac{h}{\|h\|}$ ta có $\|k\| = 1$, do đó

$$\varphi(k,k) \geq 2\lambda$$

$$\Rightarrow \varphi(h,h) \geq 2\lambda \|h\|^2$$

và do đó (9) cho

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(h,h)+\|h\|^2\varepsilon(h) \\ &\geq (\lambda+\varepsilon(h))\|h\|^2 > 0 \end{aligned}$$

khi h đủ nhỏ và do đó, f đạt cực tiểu địa phương tại x.

Trường hợp $\varphi(h,h) < 0, \forall h \neq 0$ được chứng minh tương tự.

Khi $\varphi(h,h) > 0$ và $\varphi(k,k) < 0$, hàm $g_1(t) = f(x+th)$ và $g_2(t) = f(x+tk)$ thuộc lớp C^2 trên một lân cận của $0 \in \mathbb{R}$, $g_1'(0) = g_2'(0) = 0$, $g_1''(0) > 0$ và $g_2''(0) < 0$ nên 0 là điểm cực tiểu địa phương của g_1 và là điểm cực đại địa phương của g_2. Suy ra x không là cực trị địa phương của f. ■

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^2 - 12y^2 + 4y^3 + 3y^4$

Bước 1: $\nabla f(x,y) = (2x, 12(y^3+y^2-2y))$

Vậy $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \vee y = 1 \vee y = -2 \end{cases}$

Bước 2:

$$\begin{aligned} &f_{xx} = 2 \\ &f_{xy} = f_{yx} = 0 \\ &f_{yy} = 12(3y^2+2y-2) \end{aligned}$$

Nên với $h = (h_1, h_2)$, $\varphi(h,h) = f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2$

* Tại $(0,1)$

$$\varphi(h,h) = 2h_1^2 + 36h_2^2 > 0 \quad \forall h \neq (0,0).$$

Vậy f đạt cực tiểu tại $(0,1)$.

* Tại $(0,-2)$

$$\varphi(h,h) = 2h_1^2 + 72h_2^2 > 0.$$

Vậy f đạt cực tiểu tại $(0,-2)$.

* Tại $(0,0)$

$$\varphi(h,h) = 2h_1^2 - 24h_2^2.$$

Khi $h = (1,0), \varphi(h,h) > 0$

$h = (0,1), \varphi(h,h) < 0$

Vậy f không đạt cực trị tại $(0,0)$.

Định lý: Cho $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$
Cho $x_0 \in \mathbb{R}^k$
* f khả vi và liên tục trong 1 lân cận của x_0
* $\det J_f(x_0) \neq 0$,
Khi đó tồn tại 2 tập mở $U, V \subset \mathbb{R}^k$ sao cho
* $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$
* $f : U \to V$ là song ánh
* $f^{-1} : V \to U$ liên tục và
$J_{f^{-1}}[f(x_0)] = [J_f(x_0)]^{-1}$

Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm khả vi f trên một miền $D \subset \mathbb{R}^n$, nếu ta có dấu hiệu cho thấy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f đạt được trong miền D và f có hữu hạn các điểm dừng $x^0, x^1, ..., x^k \in D$, thì rõ ràng là giá trị lớn nhất cũng như nhỏ nhất của f trên D chính là giá trị lớn nhất cũng như nhỏ nhất của f tại các điểm dừng của nó trong D, nghĩa là

$$\begin{aligned} \max_{x \in D} f(x) &= \max(f(x^0), f(x^1), ..., f(x^k)), \text{ và} \\ \min_{x \in D} f(x) &= \min(f(x^0), f(x^1), ..., f(x^k)). \end{aligned}$$

Khi D không là một mở của $\mathbb{R}^n$, chẳng hạn khi D là biên của một miền trong $\mathbb{R}^n$, do không xét được tính khả vi của f trên D nên ta không thể dùng mệnh đề 3.2. Tuy nhiên nếu ta có phương trình xác định D, chẳng hạn

$$D = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \Phi(x_1, ..., x_n) = 0\},$$

với hàm khả vi $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, và f là hàm xác định trên một mở chứa D. Khi đó, cực trị của f trên D còn được gọi là *cực trị có điều kiện* và ta có

5.4. Định lý. *Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp C^1 và $\Gamma \subset D$ xác định bởi phương trình*

$$\Gamma : g(x_1, ..., x_n) = 0,$$

với $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp C^1.

Định lý: * giả sử f khả vi liên tục trong lân cận (x_0, y_0)
* $f(x_0, y_0) = 0$
* $\det \dfrac{\partial(f_1, ..., f_k)}{\partial(x_1, ..., x_k)}(x_0, y_0) \neq 0$
Khi đó tồn tại tập $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$
Sao cho: * U mở, V mở * $y_0 \in U$, $x_0 \in V$
* tồn tại duy nhất $g : U \to V$ $g(y_0) = x_0$ và $f(g(y), y) = f(x_0, y_0)$ $\forall y \in U$.

Nếu f đạt cực trị trên Γ, tại $x^0 \in \Gamma$ và $\nabla g(x^0) \neq 0$ thì tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\nabla f(x^0) + \lambda \nabla g(x^0) = 0.$$

Hơn nữa việc tìm cực trị của f trên Γ chính là tìm cực trị của $f + \lambda g$.

Chứng minh. Do định lý hàm ẩn và không mất tính tổng quát, ta có lân cận U của x^0 sao cho $\Gamma \cap U$ là đồ thị của hàm số

$$(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto \varphi(x_1, ..., x_{n-1})$$

sao cho $x_n^0 = \varphi(x_1^0, ..., x_{n-1}^0)$. Rõ ràng hàm

$$(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto f(x_1, ..., x_{n-1}, \varphi(x_1, ..., x_{n-1}))$$

đạt cực trị địa phương tại $(x_1^0, ..., x_{n-1}^0)$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, \cdots, , x_n^0).\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) & = & 0 \\ \cdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, \cdots, , x_n^0).\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) & = & 0 \end{cases} \tag{10}$$

Mặt khác, do định lý hàm ẩn, vì

$$(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto g(x_1, ..., x_{n-1}, \varphi(x_1, ..., x_{n-1}))$$

là hàm hằng trên lân cận của $(x_1^0, ..., x_{n-1}^0)$, ta suy ra

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1^0, \cdots, , x_n^0).\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) & = & 0 \\ \cdots & & \\ \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1^0, \cdots, , x_n^0).\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) & = & 0 \end{cases} \tag{11}$$

Từ (10) và (11), ta suy ra sự tồn tại λ sao cho

$$\nabla f(x^0) + \lambda \nabla g(x^0) = 0$$

Hơn nữa $f(x^0+h)-f(x^0)=f(x^0+h)+\lambda g(x^0+h)-f(x^0)-\lambda g(x^0)$, và định lý được chứng minh. ■

Ví dụ: Tìm cực đại, cực tiểu của $f(x,y,z)=x+y-z$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Giải.

Đặt $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \phi=f+\lambda g$

* Ta giải

$$\begin{cases}\nabla f+\lambda\nabla g=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1,1,-1)+\lambda(2x,2y,2z)=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1,1,-1)+\lambda(2x,2y,2z)=0\\ \frac{3}{4\lambda^2}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ z=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}(a)\quad\vee\begin{cases}\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ z=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}(b)$$

$$\phi_{xx}=2\lambda,\phi_{yx}=0,\phi_{zx}=0$$
$$\phi_{xy}=0,\phi_{yy}=2\lambda,\phi_{zy}=0$$
$$\phi_{xz}=0,\phi_{yz}=0,\phi_{zz}=2\lambda$$

ma trận Hesse

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2\lambda&0&0\\0&2\lambda&0\\0&0&2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\varphi(h,k)={}^th.H_f.k$$

với $h=(h_1,h_2,h_3)\neq(0,0,0)$, ta có

$$\varphi(h,h)=2\lambda(h_1^2+h_2^2+h_3^2)$$

* Với (a), $\varphi(h,h) > 0$

Nên f đạt cực tiểu tại $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ và $f_{CT} = -\sqrt{3}$

* Với (b), $\varphi(h,h) < 0$

Nên f đạt cực đại tại $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ và $f_{CD} = \sqrt{3}$.

Chú ý: Bài toán trên có thể giải như sau

* Ta tìm được điểm dừng cho bởi (a) và (b)

* Do $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ là tập đóng và bị chặn nên là tập compắc. Vì thế f đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$$

Do $-\sqrt{3} < \sqrt{3}$ nên f đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{3}$ và giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{3}$. Suy ra f đạt cực đại tại $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, cực tiểu tại $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Trường hợp đặc biệt, khi D là một miền mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ có biên ∂D xác định bởi

$$\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g(x) = 0\},$$

trong đó, g là hàm thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^n$ (hay trên một mở chứa D trong $\mathbb{R}^n$).

Khi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp C^1 trên tập mở Ω chứa $\overline{D}$ thì vì f là hàm liên tục trên tập compắc $\overline{D}$ nên f đạt giá trị lớn nhất $f(x^0)$ và nhỏ nhất $f(x^1)$ trên $\overline{D}$.

Nếu $x^i, i = 0,1$ nằm trong D, x^i phải là điểm dừng của f. Nếu $x^i, i = 0,1$ nằm trong ∂D, x^i phải là cực trị của f với ràng buộc g. Do đó, ta có thể tìm giá trị lớn nhất cũng như giá trị nhỏ nhất của f trên $\overline{D}$ bằng cách

i) Tìm tất cả các điểm dừng $a^i, i = \overline{1, h}$ của f trong D,

ii) Tìm tất cả các cực trị $a^i, i = \overline{h+1, k}$ của f trên ∂D.

Khi đó

$$\begin{aligned}
\max_{x \in \overline{D}} f(x) &= \max_{1 \le i \le k} f(a^i), \\
\min_{x \in \overline{D}} f(x) &= \min_{1 \le i \le k} f(a^i).
\end{aligned}$$

§4 HÀM VECTƠ

Trong phần này, ta khảo sát phép tính vi phân hàm vectơ

$$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

với D là một miền không rỗng trong $\mathbb{R}^m$.

Bằng cách viết

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)),$$

với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, ta nhận được các *hàm thành phần*

$$\begin{aligned}
f_i : D \subset \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f_i(x),
\end{aligned}$$

$1 \le i \le n$ và hàm vectơ f được hoàn toàn xác định bằng các hàm thành phần, $f_i, 1 \le i \le n$, và ta viết $f = (f_1, ..., f_n)$.

Đặc biệt, khi $m = n$, f được gọi là *trường vectơ* và thường được biểu diễn bằng các vectơ có điểm gốc là x.

4.1 SỰ LIÊN TỤC

Do $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$ là không gian định chuẩn nên ta có được các kết quả tổng quát về giới hạn cũng như liên tục khảo sát trong phần §1, chương

2. Nhắc lại rằng, với ký hiệu $\|.\|$ chỉ hàm chuẩn cho cả $\mathbb{R}^m$ lẫn $\mathbb{R}^n$ khi không nhầm lẫn, ta có

4.1.1 Định nghĩa. Xét hàm vectơ $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

i) f được gọi là *liên tục* tại $x^0 \in D$ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - x^0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x^0)\| < \varepsilon$$

và f được gọi là *liên tục trên* D khi f liên tục tại mọi điểm của D.

ii) Khi x^0 là một điểm tụ của D, ta nói f có giới hạn là $\alpha \in \mathbb{R}^n$ khi x tiến về x^0, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = \alpha$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \backslash \{x^0\}, \|x - x^0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \alpha\| < \varepsilon.$$

Với $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$, $f(x^0) = (f_1(x^0), ..., f_n(x^0))$ và $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, dùng các bất đẳng thức

$$|f_i(x) - f_i(x^0)| \leq \|f(x) - f(x^0)\| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f_k(x^0)|, \text{ và}$$

$$|f_i(x) - \alpha_i| \leq \|f(x) - \alpha\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \alpha_i|,$$

với mọi $i = \overline{1, n}$, ta suy ra

4.1.2 Mệnh đề. *Cho* $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *với* $f = (f_1, ..., f_n)$ *và* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. *Ta có*

i) f liên tục tại $x^0 \in D$ nếu và chỉ nếu f_i liên tục tại x^0, với mọi $i = \overline{1, n}$. Suy ra rằng, f liên tục trên D nếu và chỉ nếu f_i liên tục trên D, với mọi $i = \overline{1, n}$.

ii) $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = \alpha$ *nếu và chỉ nếu* $\lim\limits_{x \to x^0} f_i(x) = \alpha_i$, *với mọi* $i = \overline{1, n}$.

Ví dụ: $f(x, y) = (x, x^2 y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ vì $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = x^2 y$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Và ta có các hệ quả sau

4.1.3 Hệ quả. *Cho $f, g : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ và $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ với $f = (f_1, ..., f_n), g = (g_1, ..., g_n)$, ta có*

i) Nếu f, g, h liên tục tại $x^0 \in D$ thì $af + bg, hf$ liên tục tại $x^0 \in D$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra nếu f, g, h liên tục trên D thì $af + bg, hf$ liên tục trên D với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu x^0 là một điểm tụ của D, f, g, h có giới hạn tại x^0 thì với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ có giới hạn tại x^0 và

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x^0}(af(x) + bg(x)) &= a. \lim_{x \to x^0} f(x) + b. \lim_{x \to x^0} g(x),\\ \lim_{x \to x^0} h(x)f(x) &= \lim_{x \to x^0} h(x) \lim_{x \to x^0} f(x).\end{aligned}$$

Tóm lại, đối với hàm vectơ

$$F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

xác định bởi các hàm thành phần

$$f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

với $1 \le i \le n$ sao cho $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)), \forall x \in D$, việc khảo sát giới hạn cũng như liên tục của F được quy về việc khảo sát giới hạn cũng như liên tục của các hàm thành phần $f_i, 1 \le i \le n$.

4.2 ĐẠO HÀM FRÉCHET

Do các không gian $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$ là các không gian Banach và đặc biệt nó còn là các không gian Banach tích nên trong mục này, chúng ta khảo sát phép tính vi phân cho ánh xạ giữa các không gian Banach và chỉ thêm những tính chất riêng của hàm vectơ nhiều biến.

Cho E, F là các không gian Banach, U là một tập con mở không rỗng của E và xét ánh xạ $f : U \to F$. Ký hiệu $\|.\|$ dùng chung cho chuẩn trên E cũng như F nếu không gây nhầm lẫn. Ta có

4.2.1 Định nghĩa. Ánh xạ f được gọi là *Fréchet khả vi* tại $x \in U$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $L \in \mathcal{L}(E, F)$ sao cho

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\|\varepsilon(h) \tag{12}$$

với ε xác định trên $\{h \in E|\ x+h \in U\}$, có giá trị trong F sao cho $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Chú ý rằng, do U là một tập mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x;r) \subset U$, nghĩa là, $x + h \in U$ khi $\|h\| < r$.

Khi f Fréchet-khả vi tại $x \in U$, ánh xạ tuyến tính L là duy nhất. Thật vậy, giả sử tồn tại $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + L_1h + \|h\|\varepsilon_1(h) \\ f(x+h) &= f(x) + L_2h + \|h\|\varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

với $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ xác định khi $\|h\| < r$ và $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_i(h) = 0$, với $i = 1, 2$.

Ta sẽ chứng minh $L_1 = L_2$. Thật vậy, với $v \in E$ bất kỳ, $x + tv \in U$ khi $t > 0$ đủ nhỏ và với $h = tv$, ta có

$$L_1(tv) + \|tv\|\varepsilon_1(tv) = L_2(tv) + \|tv\|\varepsilon_2(tv)$$

Do đó,

$$(L_1 - L_2)v = \|v\|\left(\varepsilon_2(tv) - \varepsilon_1(tv)\right), \tag{13}$$

với mọi $v \in E$ và $t > 0$ đủ nhỏ.

Cho $t \to 0, \|v\|\|\varepsilon_2(tv) - \varepsilon_1(tv)\| \to 0$ và do đó, $L_1v = L_2v, \forall v \in E$.

Do sự tồn tại duy nhất của $L \in \mathcal{L}(E, F)$, ta gọi L là *đạo hàm (Fréchet)* của f tại x, ký hiệu $f'(x)$ hay $Df(x)$.

Ngoài ra, khi cho $h \to 0$, vế phải của (12) tiến về $f(x)$. Ta được

4.2.2 Mệnh đề. *Nếu $f : U \subset E \to F$ Fréchet khả vi tại $x \in U$, thì f liên tục tại x.*

Khi f Fréchet khả vi tại mọi điểm của U, ta nhận được *ánh xạ đạo hàm*

$$\begin{aligned} f' : U &\to \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

và do $\mathcal{L}(E, F)$ lại là một không gian Banach nên ta có thể khảo sát giới hạn, tính liên tục cũng như tính khả vi của f'. Đặc biệt, nếu f' là ánh xạ liên tục, ta nói f *thuộc lớp* C^1 trên U.

Chẳng hạn, với hàm nhiều biến $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định trên tập mở D, nếu f Fréchet khả vi tại $x \in D$, thì do chương 3,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n + \|h\|\varepsilon(h),$$

trong đó $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon(h)$ xác định khi $\|h\| < r$ và $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Rõ ràng ánh xạ

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$. Do đó, $f'(x) = L$. Chú ý rằng ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính L chính là ma trận (hàng)

$$J_f(x) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Ma trận này được gọi là ma trận Jacobi của (hàm vô hướng) f và khi coi ma trận này như là một vectơ thì nó chính là vectơ gradient của f tại x, $\nabla f(x)$.

Hơn nữa, bất đẳng thức

$$\max_{1\le i\le n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \le \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(R^n,R)} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2\right)^{1/2}$$

cho thấy $f' : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liên tục nếu và chỉ nếu các hàm đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ là các hàm liên tục.

Nói cách khác,

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1, theo nghĩa là hàm đạo hàm (Fréchet) $f' : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liên tục, nếu và chỉ nếu đạo hàm riêng theo các biến của f tồn tại và là các hàm liên tục.

Xét trường hợp F là không gian Banach tích, $F = F_1 \times F_2$. Một ánh xạ $f : U \to F$ được hoàn toàn xác định bởi các *ánh xạ thành phần* $f_i : U \to F_i, i = 1, 2$, sao cho

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \forall x \in U.$$

Ta có

4.2.3 Mệnh đề. *Ánh xạ f Fréchet khả vi tại $x \in U \subset E$ nếu và chỉ nếu các ánh xạ thành phần $f_i, i = 1, 2$, Fréchet khả vi tại x và khi đó,*

$$f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x)).$$

Hơn nữa, f thuộc lớp C^1 trên U nếu và chỉ nếu các $f_i, i = 1, 2$, thuộc lớp C^1 trên U.

Chứng minh. Do đẳng thức

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\|\varepsilon(h)$$

thỏa nếu và chỉ nếu

$$f_i(x+h) = f_i(x) + L_i h + \|h\|\varepsilon_i(h)$$

thỏa với $i = 1, 2$, trong đó f_i; L_i và ε_i, với $i = 1, 2$, lần lượt là các hàm thành phần của f, L và ε.

Mệnh đề được chứng minh vì

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \varepsilon_i(h) = 0, i = 1, 2.$$

Tổng quát, nếu F là không gian Banach tích, $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, ta có

4.2.4 Mệnh đề. *Ánh xạ $f : U \subset E \to F$ Fréchet khả vi tại $x \in U$ nếu và chỉ nếu các ánh xạ thành phần $f_i, i = \overline{1, n}$, Fréchet khả vi tại x và khi đó,*

$$f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x)).$$

Hơn nữa, f thuộc lớp C^1 trên U nếu và chỉ nếu các $f_i, i = \overline{1, n}$ thuộc lớp C^1 trên U.

Đặc biệt, đối với hàm vectơ nhiều biến, nghĩa là $E = \mathbb{R}^m, F = \mathbb{R}^n$, hàm $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được xác định bởi n hàm thành phần $f_i : D \to \mathbb{R}$ và do mệnh đề 2.4, f Fréchet khả vi tại x nếu và chỉ nếu các hàm thành phần $f_i, i = \overline{1, n}$, Fréchet khả vi tại x. Khi đó, mọi hàm thành phần đều có đạo hàm riêng theo các biến và

$$f_i(x + h) = f_i(x) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(x)h_m + \|h\|\varepsilon_i(h),$$

với $i = \overline{1, n}$. Suy ra

$$\begin{pmatrix} f_1(x+h) \\ f_2(x+h) \\ \dots \\ f_n(x+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} +$$

$$+\|h\|. \begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_2(h) \\ \dots \\ \varepsilon_n(h) \end{pmatrix}$$

và do đó

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\|.\varepsilon(h)$$

với các hàm thành phần của ε là $\varepsilon_i, i = \overline{1,n}$ và $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \dots \\ \nabla f_n \end{pmatrix}$$

và ma trận này được gọi là *ma trận Jacobi* của (hàm véctơ) f tại x, ký hiệu $J_f(x)$.

Ví dụ

(i) Xét hàm tọa độ cực trong $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta) &= r\cos\theta \\ f_2(r, \theta) &= r\sin\theta \end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned} J_f(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Xét hàm tọa độ cầu trong $\mathbb{R}^3$

$$f : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$$

xác định bởi

$$f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi),$$

ta có

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(iii) Xét hàm tọa độ trụ trong $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f : (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{aligned}$$

ta có

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kết hợp với phép tính vi phân hàm nhiều biến cho các hệ quả sau

4.2.5 Hệ quả. *Xét hàm $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ với các hàm thành phần $f_i : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$. Ta có f thuộc lớp C^1 trên D nếu và chỉ nếu các hàm thành phần $f_i, i = \overline{1,n}$, đều thuộc lớp C^1 trên D, nghĩa là các hàm thành phần $f_i, i = \overline{1,n}$ có đạo hàm riêng liên tục trên D theo tất cả các biến.*

Trở lại với các ánh xạ khả vi giữa các không gian Banach, ta có các tính chất sau

4.2.6 Định lý. *Cho E, F, G là các không gian Banach, U và V lần lượt là các tập con mở không rỗng của E và F. Nếu $f : U \to F$ Fréchet khả vi tại $x \in U$, $g : V \to G$ khả vi tại $y = f(x) \in V$ và $f(U) \subset V$ thì $g \circ f : U \to G$ khả vi tại x và*

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x).$$

Chứng minh. Do tính khả vi của f tại $x \in U$ và của g tại $y = f(x) \in V$, ta có, với $h \in E, k \in F$ có chuẩn đủ nhỏ,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \|h\|\varepsilon_1(h), \tag{15}$$

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \|k\|\varepsilon_2(k), \tag{16}$$

trong đó $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ và $\lim\limits_{k\to 0} \varepsilon_2(k) = 0$.

Với $y = f(x)$ và $y + k = f(x+h)$, (15) và (16) cho

$$\begin{aligned} g\circ f(x+h) - g\circ f(x) &= g'(f(x))(f(x+h) - f(x)) + \\ &\quad + \|f(x+h) - f(x)\|.\varepsilon_2(f(x+h) - f(x)) \\ &= g'(f(x))\circ f'(x)h + \|h\|.\varepsilon(h), \end{aligned}$$

với

$$\varepsilon(h) = g'(f(x)).\varepsilon_1(h) + \frac{1}{\|h\|}\|f(x+h) - f(x)\|\varepsilon_2(f(x+h) - f(x))$$

Chú ý rằng

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \|f'(x)\| + \|\varepsilon_1(h)\|$$

nên từ tính liên tục của f tại x và của $g'(f(x))$ tại 0, ta suy ra

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Vậy $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x)$ và định lý được chứng minh.

Đặc biệt khi $g \equiv L \in \mathcal{L}(F, G)$, nghĩa là g là ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian Banach F vào không gian Banach G, từ định nghĩa, ta có L Fréchet khả vi tại mọi điểm của F và

$$L'(x) = L, \forall x \in E.$$

Kết hợp với Mệnh đề 4.2.6, ta có hệ quả sau

4.2.7 Hệ quả. *Cho E, F, G là các không gian Banach, U là tập con mở không rỗng của E và $f : U \to F$ là ánh xạ Fréchet khả vi tại $x \in U$. Nếu L là ánh xạ tuyến tính liên tục từ F vào G thì $L \circ f : U \to G$ Fréchet khả vi tại x và*

$$(L \circ f)'(x) = L \circ f'(x).$$

Đặc biệt, với $a, b \in \mathbb{R}$, ánh xạ

$$\begin{aligned} L : F \times F &\to F \\ (x, y) &\mapsto ax + by \end{aligned}$$

tuyến tính liên tục trên $F \times F$. Do đó, ta có

4.2.8 Hệ quả. *Cho E, F là các không gian Banach, U là tập con mở không rỗng của E. Nếu $f, g : U \to F$ Fréchet khả vi tại $x \in U$ thì với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ Fréchet khả vi tại x và*

$$(af + bg)'(x) = a.f'(x) + b.g'(x).$$

Chứng minh. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : U &\to F \times F \\ x &\mapsto (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Do mệnh đề 4.2.3, φ Fréchet khả vi tại $x \in U$, $\varphi'(x) = (f'(x), g'(x))$ và do Hệ quả 4.2.7, $(L \circ \varphi)(x) \equiv af(x) + bg(x)$ khả vi tại x và

$$(af + bg)'(x) = (L \circ \varphi)'(x) = L \circ \varphi'(x) = a.f'(x) + b.g'(x).\blacksquare$$

4.2.9 Hệ quả. *Cho $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ là hai tập mở. Nếu $f : U \to V$ khả vi tại $x \in U$ và $g : V \to \mathbb{R}^k$ khả vi tại $f(x) \in V$ thì*

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)).J_f(x)$$

với phép nhân ở vế phải là phép nhân ma trận.

§5 HÀM NGƯỢC

5.1 Bổ đề.

Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$ là hình hộp và $f : A \to \mathbb{R}^n$ với $f = (f^1, f^2, ..., f^n)$, khả vi liên tục. Nếu tồn tại một số M sao cho $|D_j f^i(x)| \leq M$ đối với mọi điểm trong x của A thì

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|$$

đối với mọi $x, y \in A$, trong đó $\|.\|$ là chuẩn Euclid trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} f^i(y) - f^i(x) &= \sum_{j=1}^{n} [f^i(y^1, ..., y^j, x^{j+1}, ..., x^n) \\ &\quad - f^i(y^1, ..., y^{j-1}, x^j, ..., x^n)]. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý về giá trị trung bình ta được

$$f^i(y^1, ..., y^j, x^{j+1}, ..., x^n) - f^i(y^1, ..., y^{j-1}, x^j, ..., x^n)$$
$$= |y^j - x^j|.D_j f^i(z_{ij}) \text{ với } z_{ij} \text{ nào đấy.}$$

Vì vậy

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |y^i - x^j| M \leq nM\|y - x\|.$$

Nên

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f^i(y) - f^i(x)| \leq n^2 M \|y - x\|. \blacksquare$$

5.2 Định lý về hàm ngược. *Ta giả sử rằng $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục trong một tập mở nào đấy chứa a và $detJ_f(a) \neq 0$. Khi đó tồn tại một tập mở V chứa a và tập mở W chứa $f(a)$ sao cho ánh xạ $f : V \to W$ có ánh xạ ngược liên tục $f^{-1} : W \to V$ khả vi đối với mọi $y \in W$ và thỏa mãn hệ thức*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

và

$$J_{f^{-1}}(y) = \left(J_f(f^{-1}(y))\right)^{-1}.$$

Chứng minh. Giả sử λ là ánh xạ tuyến tính $Df(a)$. Ánh xạ đó là không suy biến vì $detJ_f(a) \neq 0$. Nhưng $D(\lambda^{-1} \circ f)(a) = D(\lambda^{-1})(f(a)).Df(a) = \lambda^{-1}.\ Df(a)$ là ánh xạ tuyến tính đồng nhất. Nếu định lý đúng đối với $\lambda^{-1} \circ f$, thì nó rõ ràng cũng đúng đối với f. Vì vậy ta có thể ngay từ đầu xem rằng λ là ánh xạ đồng nhất. Nếu khi đó $f(a+h) = f(a)$ thì

$$\frac{||f(a+h) - f(a) - \lambda(h)||}{||h||} = \frac{||h||}{||h||} = 1.$$

Nhưng

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - \lambda(h)||}{||h||} = \lim_{h \to 0} ||\varepsilon(h)|| = 0$$

Điều đó nói lên rằng đẳng thức $f(x) = f(a)$ không thể nghiệm đúng đối với các giá trị của x gần a tùy ý mà không bằng a. Vì vậy tồn tại một hình hộp đóng U chứa a như là một điểm trong và sao cho

$$f(x) \neq f(a) \text{ nếu } x \in U \text{ và } x \neq a. \tag{17}$$

Vì f khả vi liên tục trong một tập mở chứa a nên ta cũng có thể xem rằng

$$detJ_f(x) \neq 0 \text{ đối với mọi } x \in U \tag{18}$$

và

$$||D_j f^i(x) - D_j f^i(a)|| < \frac{1}{2n^2} \text{ đối với mọi } i, j \text{ và } x \in U. \quad (19)$$

Ta chú ý rằng từ (19) và từ bổ đề 5.1 áp dụng vào $g(x) = f(x) - x$ ta tìm được $||f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)|| \le \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$ đối với bất kỳ $x_1, x_2 \in U$. Vì

$$\begin{aligned} ||x_1 - x_2|| - ||f(x_1) - f(x_2)|| &\le ||f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)|| \\ &\le \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| \end{aligned}$$

thì ta được

$$||x_1 - x_2|| \le 2||f(x_1) - f(x_2)|| \text{ đối với mọi } x_1, x_2 \in U. \quad (20)$$

Đồng thời do (17), f biến ∂U thành một tập compắc không chứa $f(a)$.

Vì vậy tồn tại một số $d > 0$ sao cho $||f(a) - f(x)|| \ge d$ với mọi $x \in \partial U$. Giả sử $W = \{y : ||y - f(a)|| < d/2\}$. Nếu $y \in W$ và $x \in \partial U$ thì

$$||y - f(a)|| < ||y - f(x)||. \quad (21)$$

Ta chứng minh rằng đối với bất kỳ $y \in W$ tồn tại một điểm x duy nhất ở trong U sao cho $f(x) = y$. Muốn vậy ta hãy xét hàm $g : U \to \mathbb{R}$ xác định bởi đẳng thức

$$g(x) = ||y - f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} (y^i - f^i(x))^2.$$

Hàm đó liên tục và vì vậy đạt giá trị nhỏ nhất trên U. Nếu $x \in \partial U$ thì $g(a) < g(x)$ do (21). Nên g không đạt giá trị nhỏ nhất trên ∂U. Suy ra tồn tại một điểm x ở trong U sao cho $D_j g(x) = 0$ đối với mọi j tức là

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y^i - f^i(x)) D_j f^i(x) = 0 \text{ đối với mọi } j.$$

Nhưng dựa vào $detJ_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$ ma trận $D_j f^i(x)$ có định thức khác không. Vì vậy ta phải có $y^i - f^i(x) = 0$ với mọi i tức là $y = f(x)$. Vậy ta đã chứng minh x tồn tại sao cho $y = f(x)$. Sự duy nhất suy ra ngay từ (20).

Ta ký hiệu V là giao của phần trong của U với $f^{-1}(W)$. Ta đã chứng minh rằng hàm $f : V \to W$ có hàm ngược $f^{-1} : W \to V$. Bây giờ (20) có thể viết lại dưới dạng

$$||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|| \leq 2||y_1 - y_2|| \text{ đối với mọi } y_1, y_2 \in W. \tag{22}$$

Điều đó chứng minh rằng f^{-1} liên tục.

Ta chỉ còn phải chứng minh rằng f^{-1} khả vi. Giả sử $\mu = Df(x)$. Ta chứng minh rằng f^{-1} cũng khả vi tại điểm $y = f(x)$ va có đạo hàm là μ^{-1}. Với mọi $x_1 \in V$ ta có $f(x_1) = f(x) + \mu((x_1 - x) + ||x_1 - x||\varepsilon(x_1 - x)$, trong đó

$$\lim_{x_1 \to x} \varepsilon(x_1 - x) = 0$$

Vì vậy

$$\mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + \mu^{-1}(||x_1 - x||\varepsilon(x_1 - x)).$$

Vì mỗi $y_1 \in W$ có dạng $f(x_1)$, trong đó $x_1 \in V$ nên đẳng thức cuối có thể viết như sau

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}(||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||.\varepsilon(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))) \tag{23}$$

Ta có do (22) và f^{-1} liên tục

$$\frac{||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||.||\varepsilon(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))||}{||y_1 - y||} \leq 2||\varepsilon(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|| \to 0$$

khi $y_1 \to y$.

Do μ^{-1} tuyến tính liên tục nên $\frac{1}{||y_1 - y||}\mu^{-1}(||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||.||\varepsilon(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))||) \to 0$ khi $y_1 \to y$.

Từ (23) suy ra $(f^{-1})'(y) = \mu^{-1}(x) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$. ■

Ví dụ: Cho

$$\begin{cases} u = f(x,y) = x\cos y \\ v = g(x,y) = x\sin y \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại hàm ngược $(x,y) = h(u,v)$ trong lân cận nào đó của điểm $(x_0, y_0) = (2,0)$. Tính $J_h(u_0, v_0)$, với (u_0, v_0) ứng với (x_0, y_0).

Giải

Ta có

$$J_{f,g}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y_0 & -x_0 \sin y_0 \\ \sin y_0 & x_0 \cos y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det J_{f,g}(x_0,y_0) = 2 \neq 0$$

Suy ra tồn tại hàm ngược $(x,y) = h(u,v)$ trong lân cận U nào đó của $(2,0)$ và

$$\begin{aligned} J_h(u_0,v_0) &= (J_{f,g}(x_0,y_0))^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.3 Định lý hàm ẩn (dạng véctơ).

Giả sử rằng $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ khả vi liên tục trong một tập mở nào đó chứa (a,b) và $f(a,b) = 0$. Giả sử M là $m \times n$-ma trận

$$(D_{n+j}f^i(a)) \qquad 1 \leq i,j \leq m.$$

Khi đó nếu $detM \neq 0$ *thì tồn tại một tập mở* $A \subset \mathbb{R}^n$ *chứa* a *và một tập mở* $B \subset \mathbb{R}^m$ *chứa* b *với tính chất sau đây: đối với bất kỳ* $x \in A$ *sẽ có duy nhất* $g(x) \in B$ *sao cho* $f(x, g(x)) = 0$. *Trong đó hàm* $g : A \to B$ *là khả vi.*

Chứng minh. Ta xác định $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ bởi đẳng thức $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Khi đó $detJ_F(a, b) = detM \neq 0$. Do định lý 5.2 tồn tại một tập mở $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ chứa điểm $F(a, b) = (a, 0)$ và một tập mở trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ chứa điểm (a, b) mà tập này có thể xem là có dạng $A \times B$, sao cho hàm $F : A \times B \to W$ có hàm ngược khả vi $h : W \to A \times B$. Rõ ràng h có dạng $h(x, y) = (x, k(x, y))$, trong đó k là một hàm khả vi nào đó (vì F có dạng như vậy). Giả sử $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ là hàm xác định bởi đẳng thức $p(x, y) = y$. Khi đó $p \circ F = f$. Vì vậy $f(x, k(x, y)) = f \circ h(x, y) = (p \circ F) \circ h(x, y) = p \circ (F \circ h)(x, y) = p(x, y) = y$.

Như vậy $f(x, k(x, 0)) = 0$, tức là có thể đặt $g(x) = k(x, 0)$. ∎

§6 TRƯỜNG VECTƠ

6.1. Định nghĩa. Cho D là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}^n$.

i) Một *trường vectơ* trên D là một ánh xạ

$$\begin{aligned} F : D &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(x), \end{aligned}$$

liên kết mỗi điểm x của D với vectơ $F(x)$.

ii) Một *trường vô hướng* trên D là một ánh xạ

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

liên kết mỗi điểm x của D với số thực $f(x)$.

Tiếp theo, ta khảo sát một số trường quan trọng trong $\mathbb{R}^n$.

6.2. Trường Gradient.

Xét hàm khả vi

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, ..., x_n), \end{array}$$

ta định nghĩa *trường vectơ gradient* của f trên D như sau

$$grad\ f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n)\right)$$

Nói khác đi, ứng với mỗi điểm $M \in D$, ta liên kết với một vectơ mà thành phần là các đạo hàm riêng của f tại M.

Bằng cách xem

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

như là một vectơ trong $\mathbb{R}^n$, gradient của f được ký hiệu như là tích của "số thực" f với "vectơ" ∇,

$$grad\ f \equiv \nabla . f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

và các tính chất căn bản của trường gradient được viết lại là

$$\begin{array}{rcl} \nabla(f+g) & = & \nabla f + \nabla g \\ \nabla(kf) & = & k\nabla f \\ \nabla(fg) & = & f\nabla g + g\nabla f, \end{array}$$

với mọi hàm khả vi f, g trên D và $k \in \mathbb{R}$.

6.3. Divergence của trường vectơ.

Bây giờ xét trường vectơ $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi các hàm thành phần $u_1, ..., u_n : D \to \mathbb{R}$. Khi u là hàm khả vi, các hàm thành phần của nó có đạo hàm riêng cấp 1 tại mọi điểm của D và ta có ma trận Jacobi của u tại $x \in D$ là ma trận vuông cấp n :

$$J_u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận này được gọi là *divergence* của u, ký hiệu $div\ u(x)$,

$$div\ u(x) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x)$$

Với ký hiệu của "vectơ" ∇, $div\ u$ chính là tích vô hướng của "vectơ" ∇ với "vectơ" u,

$$div\ u \equiv \nabla . u \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$$

Giá trị của $div\, u(x)$ cũng không phụ thuộc vào hệ tọa độ được chọn. Ngoài ra, đại lượng $div\ u(x)$ còn có nhiều ý nghĩa vật lý. Trong cơ học chất lỏng, nó đánh giá độ thay đổi mật độ tại một điểm. Cụ thể, với $u(x, y, z, t)$ chỉ vectơ vận tốc của dòng chất lỏng và $\rho(x, y, z, t)$ chỉ mật độ của chất lỏng tại điểm (x, y, z) vào thời điểm t, ta có $v = \rho u$ là vectơ có divergence thỏa phương trình

$$div\ v = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

mà người ta còn gọi là *phương trình liên tục* của cơ học chất lỏng. Khi chất lỏng không nén được, nghĩa là hàm mật độ ρ là hằng, ta nhận được phương trình đơn giản hơn,

$$div\ v = 0.$$

Trong lý thuyết trường điện từ, divergence của trường điện E thỏa phương trình

$$div\, E = 4\pi\rho,$$

trong đó, ρ chỉ mật độ điện tích. Do đó, khi không có nguồn điện tích, ta được

$$div\, E = 0.$$

6.4. Curl của trường vectơ.

Với trường vectơ $u : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thuộc lớp C^1 xác định bởi các hàm thành phần $u_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, ta định nghĩa

$$curl\, u(x) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x)\right).$$

Bằng ký hiệu của "vectơ" ∇, ta có thể biểu diễn *curl u* như là tích hữu hướng của hai vectơ ∇ và u, $\nabla \times u$, và bằng ký hiệu định thức ma trận khai triển theo hàng 1, ta có

$$curl\, u = \nabla \times u = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

trong đó, $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Trường vectơ *curl u* còn được ký hiệu là *rot u* và cũng độc lập với hệ tọa độ được chọn và có ý nghĩa quan trọng trong cơ học chất lỏng cũng như trong lý thuyết trường điện từ. Trường *curl* có thể dùng để đánh giá độ xoáy của chất lỏng và điều kiện

$$curl\, u = 0$$

cho trường vận tốc u để chỉ *dòng chảy không xoáy*. Tương tự,

$$curl E = 0$$

cho trường điện E thỏa khi chỉ tồn tại lực điện từ.

Ta có các tính chất liên quan đến trường *curl* sau

$$\begin{aligned} curl\,(u+v) &= curl\,u + curl\,v \\ curl\,(fu) &= f.curl\,u + grad\,f \times u. \end{aligned}$$

Ngoài ra, ta có một số tính chất liên quan giữa các trường khảo sát bên trên sau

Curl của gradient. Với $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, ta có

$$curl\,gradf = 0.$$

Hệ thức này được gợi ý từ đẳng thức $curl\ grad\ f = \nabla \times (\nabla f)$ và với một số điều kiện thích hợp, ta có chiều ngược lại quan trọng sau

Nếu $curl\ u = 0$ thì tồn tại f sao cho $u = grad\ f$.

Trường vectơ u thỏa $curl\ u = 0$ được gọi là *không xoáy*.

Divergence của curl. Với $u : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thuộc lớp C^2, ta có

$$div\,curl\,u = 0$$

Hệ thức này được gợi ý từ đẳng thức $div\ curl\ u = \nabla.(\nabla \times u)$ và với một số điều kiện thích hợp, ta có chiều ngược lại quan trọng sau

Nếu $div\ u = 0$ thì tồn tại v sao cho $u = curl\ v$.

Trường vectơ u thỏa $div\ u = 0$ được gọi là trường *solenoidal*.

Divergence của tích hữu hướng

$$div\ (u \times v) = v.curl\ u - u.curl\ v.$$

Divergence của gradient. Với $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, ta có

$$div\,grad\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \qquad \textbf{(24)}$$

Vế phải của (24) được gọi là *Laplacian* của f, ký hiệu Δf, hay $\nabla^2 f$ (do *div grad* $f = \nabla.(\nabla f)$. Hàm f thuộc lớp C^2 sao cho $\Delta f = 0$ được gọi là ***hàm điều hòa*** và phương trình

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

được gọi là *phương trình Laplace.*

15/05/2019 TCM

Bài tập Chương 5

5.1 Cho $z = f(x, y)$ với $f(0,0) = 0$. Tìm $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ nếu $x + y + z - \sin xyz = 0$

5.2 Cho $u = f(x, y), v = g(x, y)$ thỏa $f(0,1) = 1, g(0,1) = -1$ và

$$u^3 + xv - y = 0$$

$$v^3 + yu - x = 0$$

Tìm $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1), \frac{\partial u}{\partial y}(0,1), \frac{\partial v}{\partial x}(0,1), \frac{\partial v}{\partial y}(0,1)$.

5.3 Tìm Jacobian trong các trường hợp sau

a) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ với $u = \frac{y}{tgx}, v = \frac{y}{\sin x}, y > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ với $u = 2x - 3y, v = -x + 2y$

5.4 Các phương trình sau có thể đổi thành dạng $z = f(x, y)$ tại gần các điểm (x_0, y_0, z_0) không? Tính $z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)$ nếu có biểu diễn thành dạng $z = f(x, y)$

a) $x + y + z - \sin xyz = 0; (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

b) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz; (1, -1, 0)$

c) $x^2 + 2xy + z^2 - yz = 1; (0, 0, 1)$

5.5 Cho u, v là trường vô hướng, xác định trên $D \subset \mathbb{R}^n$ và trường vectơ $F : D \to \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng

a) $\nabla.(uF) = F.\nabla u + u\nabla.F$

b) $\nabla.(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u.\nabla v$

5.6 Trường tĩnh điện tạo bởi một đơn vị điện tích dương đặt tại gốc O

là

$$E = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{OP}$$

với $\overrightarrow{OP} = (x, y, z), r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Chứng tỏ $divE = 0, rotE = 0$.

5.7 a) Nếu $F = a \times \overrightarrow{OP}$ với a là vectơ hằng thì $divF = 0$.

a) Với $k = (0, 0, 1)$, đặt $V = k \times \overrightarrow{OP}$. Tìm $divV$.

5.8 Cho E, F là hai trường vectơ, u là trường vô hướng xác định trên $D \subset \mathbb{R}^3$. Chứng minh

a) $\nabla \times (\nabla u) = 0$

b) $\nabla.(\nabla \times F) = 0$

c) $\nabla \times (uF) = u(\nabla \times F) - F \times \nabla u$

d) $\nabla.(E \times F) = F.(\nabla \times E) - E.(\nabla \times F)$

5.9 Tìm $\nabla \times F$ nếu F là

a) $2xzi + 2yz^2j + (x^2 + 2y^2z - 1)k$

b) $axi + bj + czk$

c) (y, z, x)

d) $\frac{xi+yj}{x^2+y^2}$

5.10 Cho a, b là hai vectơ hằng, $\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = R$

a) $F = a \times \overrightarrow{OP}$, chứng minh rằng $\nabla \times F = 2a$

b) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F = \Phi(r)R, r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Chứng minh rằng $\nabla \times F = 0$

c) Cho $E = R - a, F = R - b$. Chứng minh rằng

$$div(E \times F) = 0, \nabla \times (E \times F) = 2(b - a), \nabla(E.F) = E + F$$

d) Chứng minh rằng $\nabla.[(a.R)a] = 1, \nabla.[(a \times R) \times R] = 2$

e) Chứng minh rằng $\nabla \times [(a.R)a] = 0, \nabla \times [(a \times R) \times a] = 0$

5.11 Khảo sát cực trị của các hàm f với $f(x, y)$ là

(a) $x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$

(b) $xy - x^2$

(c) $x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$

(d) $x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$

(e) $x^3 - 6x^2 - 3y^2$

(f) $x^3 + y^3 - 6xy$

(g) $2x^3 - 24xy + 16y^3$

(h) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

(i) $x^2 - e^{y^2}$

(j) $(y - 2)\ln xy$

(k) e^{xy}

5.12 Tìm cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm với các ràng buộc được cho

a. $x + y$ với $x^2 + y^2 = 1$.

b. $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ trên mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c. $x + 2y + 3z$ trên $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d. $4\pi xyz$ với $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$.

e. xyz với $x + y + z = 1$.

f. $(x + y + z)^2$ với $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

5.13 Chứng minh rằng tồn tại khoảng cách ngắn nhất từ một điểm đến một mặt (hay một đường) và tìm khoảng cách đó trong các trường hợp sau

a. $(3,0)$ đến $y = x^2$.

b. $(0,0,0)$ đến $x + 2y + 2z = 3$.

c. $(2,1,-2)$ đến $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d. $(0,0,0)$ đến $xyz^2 = 2$.

5.14 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau trên tập hợp được cho

a. $x^2 + y$ trong hình vuông với các đỉnh $(\pm 1, \pm 1)$.

b. $x^3y^2(1 - x - y)$ trong miền $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

c. $(x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ trên mặt phẳng.

d. $(x^2 + y^2)^{-1}$ trong miền $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$.

e. $x - x^2 + y^2$ trong miền $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

f. $\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ trong miền $y \geq 0$.

5.15 Chứng minh rằng hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mà $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sẽ không phụ thuộc biến thứ hai và nếu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ thì f là hằng số.

5.16 Cho $A = \{(x,y) | x < 0 \text{ hay } x \geq 0 \text{ và } y \neq 0\}$.

a. Chứng minh rằng nếu hàm $f : A \to \mathbb{R}$ thỏa $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ thì f là hằng số.

b. Tìm hàm $f : A \to \mathbb{R}$ sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ nhưng f lại phụ thuộc vào biến thứ hai.

5.17 Cho x và y là các hàm ẩn theo t xác định bởi phương trình

$$x^3 + e^x - t^2 - t = 0, \quad yt^2 + y^2t - t + y = 0,$$

và xét hàm $z = e^x \cos y$. Tính $\dfrac{dz}{dt}$ tại $t = 0$.

5.18 Khai triển Taylor đến cấp n của $f(x, y)$ quanh (a, b)

a. $f(x, y) = \sin x \cos y$, $n = 1$, $(a, b) = (0, 0)$

b. $f(x, y) = e^x \cos y$, $n = 3$, $(a, b) = (0, \pi)$

c. $f(x, y) = \ln(xy)$, $n = 3$, $(a, b) = (1, 1)$

5.19 Cho $F(x, y) = e^{x^2y^3} + 1 + y^3$ và $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho

$$F(a, b) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại khoảng $I \ni a$ và hàm $g : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho $g(a) = b$ và $F(x, g(x)) = 0$, với mọi $x \in I$.

5.20 Xét biến đổi

$$x = u - 2v, \quad y = 2u + v,$$

a. Viết công thức cho biến đổi đảo.

b. Tính Jacobi của hai phép biến đổi nêu trên.

5.21 Xét biến đổi

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v),$$

với Jacobi $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Chứng minh rằng biến đổi đảo thỏa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

5.22 Xét biến đổi

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

với Jacobi $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. Chứng minh rằng biến đổi đảo thỏa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(w,u)}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)},$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Chương 6

CHUỖI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Với một dãy hữu hạn số thực $(a_i)_{1\leq i\leq n}$, tổng tất cả các số hạng của nó, $a_1 + a_2 + ... + a_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ đã được xác định và khảo sát trong §3, chương 1. Tổng quát hóa, xét dãy (vô hạn) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong không gian Banach X ta sẽ tìm cách định nghĩa tổng tất cả các số hạng của nó,

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

và ta gọi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, hay vắn tắt $\sum a_n$, là một *chuỗi*, đọc là chuỗi a_n.

§1. CHUỖI HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN BANACH X

Cho dãy $\{a_n\}$ trong không gian Banach $(X, ||.||_X)$. Với chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, đặt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}$. Ta gọi s_n là *tổng riêng phần* (thứ n) của chuỗi $\sum a_n$. Đặc biệt nếu $X = \mathbb{R}, ||x||_X = |x|$, thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gọi là *chuỗi số*.

1.1 Định nghĩa. Nếu dãy tổng riêng phần (s_n) hội tụ trong X, ta có $\sum a_n$ hội tụ và giá trị $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ được gọi là *tổng* của chuỗi $\sum a_n$, ký hiệu $s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Ngược lại, nếu (s_n) không hội tụ, ta nói $\sum a_n$ phân kỳ.

Do định nghĩa, một chuỗi hội tụ hay không hội tụ tùy thuộc vào dãy các tổng riêng phần của nó hội tụ hay không và tổng của một chuỗi, nếu có, chính là giới hạn của dãy tổng riêng phần của nó.

Ví dụ 1: (trong $X = C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$). Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ trong $C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ với chuẩn sup.

Giải

Đặt $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

$$\begin{aligned}\left\| s_n - \frac{1}{1-x} \right\| &= \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \\ &\leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Suy ra $\left\| s_n - \frac{1}{1-x} \right\| \to 0$, nên $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ trong $C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.

Ví dụ 2: (trong $X = C([0,1])$). Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ phân kỳ trong $C[0,1]$ với chuẩn sup.

Giải

Tương tự ví dụ trên

$$\|s_n\| = 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1 \to \infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Nên $\sum x^n$ phân kỳ trong $C[0,1]$.

1.2 Mệnh đề. *Nếu $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (trong X).*

Chứng minh. Do $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ hội tụ suy ra (s_n) là dãy Cauchy. Cho nên

$$\|a_n\|_X = \|s_n - s_{n-1}\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Mệnh đề đã được chứng minh. ■

* Phát biểu lại kết quả cho chuỗi số?

Từ mệnh đề 1.2, ta suy ra rằng nếu dãy (a_n) phân kỳ hay hội tụ về một giới hạn $\neq 0$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

Ví dụ 3: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} 1^n$ phân kỳ vì $((-1)^n)$ là dãy phân kỳ và (1^n) là dãy hội tụ về $1 \neq 0$.

Ví dụ 4: Giải lại Ví dụ 2. Ta có $\|x^n\| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1 \not\to 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

1.3 Mệnh đề (chuỗi hình học). *Xét* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, x \in \mathbb{R}$, *ta có*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ hội tụ trong } \mathbb{R} \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Chứng minh. Ta có

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1, \end{cases}$$

và (s_n) hội tụ $\Leftrightarrow |x| < 1$.

Trong chứng minh trên, khi $|x| < 1$, ta có $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ và do đó, ta còn có $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ khi $|x| < 1$. ■

Trực tiếp từ định nghĩa, ta suy ra rằng nếu $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là hai chuỗi hội tụ thì các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) \equiv (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots,$$

và

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n \equiv \alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots,$$

là các chuỗi hội tụ và

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \end{aligned}$$

Do tính chất của không gian Banach X, (s_n) là dãy hội tụ nếu và chỉ nếu nó là dãy Cauchy và ta nhận được,

1.4 Mệnh đề (tiêu chuẩn Cauchy). *Cho không gian Banach* $(X, ||.||_X)$, $\sum a_n$ *hội tụ trong* X *nếu và chỉ nếu* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *là dãy Cauchy trong* X, *nghĩa là với mọi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\left\|\sum_{k=n}^{m} a_k\right\|_X < \varepsilon$ *với mọi* $m \geq n \geq n_0$.

* Phát biểu lại kết quả cho chuỗi số?

1.5 Mệnh đề (tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass).

Cho $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{a_n\} \subset X$, *nếu*

1) $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \alpha_n$ *hội tụ trong* $\mathbb{R}$

2) $||a_n||_X \leq \alpha_n \quad \forall n \geq n_0$

thì $\sum a_n$ *hội tụ trong* X.

Chứng minh. Đặt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ và $t_n = \sum_{k=1}^{n} ||\alpha_k||_X$ là các tổng riêng phần của các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum ||a_n||_X$. Với $n_0 \leq n \leq m$, ta có

$$||s_m - s_n||_X = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||a_k||_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k = t_m - t_n,$$

nên khi (t_n) hội tụ trong $\mathbb{R}$ thì (t_n) là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, (s_n) là dãy Cauchy trong không gian Banach X nên cũng hội tụ. ■

* Phát biểu lại kết quả cho chuỗi số?

Ví dụ 5: Chứng minh $\sum 3^{-n} \sin\frac{n\pi}{4}$ hội tụ.

Giải.

Ta có $\left|3^{-n} \sin\frac{n\pi}{4}\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \forall n$ và $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ (chuỗi hình học). Suy ra $\sum 3^{-n} \sin\frac{n\pi}{4}$ hội tụ.

Trong $\mathbb{R}$, khi $\sum |a_n|$ hội tụ, ta còn nói $\sum a_n$ là chuỗi *hội tụ tuyệt đối*. Lưu ý rằng, giống như trường hợp tích phân suy rộng loại 1, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, trong đó $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ chưa chắc dẫn đến $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ, ta cũng có các chuỗi hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. Chẳng hạn, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ nhưng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (xem định lý 2.5 và định lý 3.6). Chuỗi hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối còn được gọi là chuỗi *hội tụ có điều kiện*.

Lưu ý: chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Đối với chuỗi số dương $\sum a_n, a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, dãy các tổng riêng phần (s_n) của nó là một dãy tăng và do đó sự hội tụ hay phân kỳ của (s_n), và cũng là của $\sum a_n$, sẽ được kiểm chứng dễ dàng hơn. Lưu ý rằng hữu hạn giá trị ban đầu của a_n không ảnh hưởng tới sự hội tụ hay phân kỳ của $\sum a_n$. Do đó, thực chất ta chỉ cần điều kiện $a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ thay cho điều kiện $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Trước hết từ tính chất của dãy đơn điệu của dãy tổng riêng phần, ta có

2.1 Mệnh đề. *Cho $\sum a_n$ là một chuỗi số dương. Ta có $\sum a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu dãy tổng riêng phần (s_n) của nó bị chặn (trên) nghĩa là*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M.$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Vì $(1 + \frac{1}{n})^n \uparrow e$ khi $n \to \infty$, ta có $\forall n \geq m$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{1}{n^k},$$

với $C_n^k \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to \frac{1}{k!}$ khi $n \to +\infty, \forall k = 0, 1, \dots, n$. Do đó, cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên, ta được

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq e, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Điều đó có nghĩa là chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ có dãy các tổng riêng phần bị chặn nên hội tụ và do bất đẳng thức trên, ta có

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq e.$$

Ngược lại, ta lại có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

và cho $n \to \infty$, ta có

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Ngoài ra với hai chuỗi số dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$ sao cho $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ta suy ra $s_n \leq t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ trong đó

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Từ đó, kết hợp với mệnh đề 2.1, ta nhận được

2.2 Mệnh đề (tiêu chuẩn so sánh 1) *Xét hai chuỗi số dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$ với $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. Ta có,*

i) Nếu $\sum b_n$ hội tụ thì $\sum a_n$ hội tụ,

ii) Nếu $\sum a_n$ phân kỳ thì $\sum b_n$ phân kỳ.

Chứng minh. Hiển nhiên. ■

2.3 Mệnh đề (tiêu chuẩn so sánh 2). *Xét hai chuỗi số dương* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *với* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty]$.

i) $0 < \alpha < +\infty$*: hai chuỗi* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

ii) $\alpha = 0$

Nếu $\sum b_n$ *hội tụ thì* $\sum a_n$ *hội tụ*

Nếu $\sum a_n$ *phân kỳ thì* $\sum b_n$ *phân kỳ.*

iii) $\alpha = +\infty$

Nếu $\sum b_n$ *phân kỳ thì* $\sum a_n$ *phân kỳ*

Nếu $\sum a_n$ *hội tụ thì* $\sum b_n$ *hội tụ.*

Chứng minh

i) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ nên tồn tại $n_0, \forall n \geq n_0$ ta có $\dfrac{a_n}{b_n} < 2\alpha$.

Suy ra $a_n < 2\alpha b_n \quad \forall n \geq n_0$.

Từ tiêu chuẩn so sánh 1, ta có điều phải chứng minh.

ii), iii) Dành cho sinh viên. ■

Ví dụ 7: Xét tính hội tụ của

a) $\sum \dfrac{n+1}{2^n}$

b) $\sum \dfrac{3^n + n}{2^n + 1}$

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{1}{\sqrt{2}^n}} = 0$ và $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ hội tụ.

Suy ra $\sum \dfrac{n+1}{2^n}$ hội tụ.

b) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3^n+n}{2^n+1}}{(3/2)^n} = 1$ và $\sum \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ phân kỳ.

Suy ra $\sum \dfrac{3^n+n}{2^n+1}$ phân kỳ.

2.4 Định lý. (tiêu chuẩn tích phân của Cauchy) *Xét hàm liên tục $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Giả sử f là hàm dương và giảm. Ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ và tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Chứng minh.

Ta có

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(k)dx = f(k) \quad \forall k \geq 1$$

và

$$\int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k) \quad \forall k \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &\leq f(1) + \int\limits_1^2 f(x)dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^n f(x)dx \\ &= f(1) + \int\limits_1^n f(x)dx \end{aligned} \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int\limits_1^2 f(x)dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)dx = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \tag{26}$$

Nếu $\sum f(n)$ phân kỳ, kết hợp (25) ta có $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Nếu $\sum f(n)$ hội tụ, kết hợp (26) ta có $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Vậy định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 8: Xét tính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n - 1)}$.

Giải

Khi $n \geq 3, n(\ln n - 1) > 0$.

Đặt $f(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, f giảm trên $[3, +\infty)$.

Xét $I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx$, đặt $u = \ln x - 1$ thì $I = \int_{\ln 3 - 1}^{+\infty} \frac{du}{u}$ phân kỳ.

Suy ra $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n - 1)}$ phân kỳ. Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n - 1)}$ phân kỳ.

2.5 Định lý (chuỗi điều hòa). *Chuỗi* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ *hội tụ nếu và chỉ nếu* $p > 1$.

Chứng minh.

Nếu $p \leq 0$ thì $\frac{1}{n^p} \not\to 0$ suy ra $\sum \frac{1}{n^p}$ phân kỳ.

Nếu $p > 0$, vì $\frac{1}{n^p} > 0 \quad \forall n \geq 1$. Đặt $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p > 1$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Ví dụ 9: Tìm p để $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{n^p + 1}$ hội tụ.

Giải

* $p \leq 0$: $\frac{n^2 + 5n + 1}{n^p + 1} \not\to 0 \Rightarrow \sum \frac{n^2 + 5n + 1}{n^p + 1}$ phân kỳ.

* $p > 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+5n+1}{n^p+1}}{\frac{n^2}{n^p}} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{n^p + 1}$ hội tụ khi $\sum \frac{1}{n^{p-2}}$ hội tụ, nghĩa là $p > 3$.

Vậy $p > 3$.

Hơn nữa, ta có thêm hai tiêu chuẩn quan trọng sau

2.6 Định lý (tiêu chuẩn tỷ số) *Xét chuỗi số dương* $\sum a_n$, *với* $r = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

i) Nếu $R < 1$ *thì* $\sum a_n$ *hội tụ,*

ii) Nếu $r > 1$ *thì* $\sum a_n$ *phân kỳ,*

iii) Nếu $r \leq 1 \leq R$ *thì không có kết luận về sự hội tụ của* $\sum a_n$

Chứng minh.

i) Do $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nên chọn $q : R < q < 1, \exists n_0$, $\forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$.

Suy ra $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} < \frac{a_n}{q^n} \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \quad \forall n \geq n_0$,

do đó $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n \quad \forall n \geq n_0$,

kết hợp với $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} q^n$ hội tụ ta có $\sum a_n$ hội tụ.

ii) Do $r = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n \geq n_0$ nghĩa là $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq n_0$. $(a_n)_{n\geq n_0}$ là dãy tăng và $a_n > 0 \quad \forall n \geq n_0 + 1$, nên không thể hội tụ về 0. Do đó $\sum a_n$ phân kỳ.

iii) Xét hai chuỗi $\sum n^{-1}, \sum n^{-2}$. Trong cả 2 trường hợp $r = R = 1$, nhưng $\sum n^{-1}$ phân kỳ và $\sum n^{-2}$ hội tụ. ■

Từ đây ta có tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert

2.7 Hệ quả (tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert). *Xét chuỗi số dương* $\sum a_n$ *với* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ *thì* $\sum a_n$ *hội tụ,*

ii) Nếu $\alpha > 1$ *thì* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ 10: Xét tính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p (p > 0)$.

Giải

Đặt $a_n = p^n n^p$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$

Trường hợp 1: Nếu p > 1 suy ra $\sum p^n n^p$ phân kỳ

Trường hợp 2: Nếu p < 1 suy ra $\sum p^n n^p$ hội tụ

Trường hợp 3: Nếu p = 1 suy ra $\sum p^n n^p = \sum n$ phân kỳ

2.8 Định lý (tiêu chuẩn căn số). *Xét chuỗi số dương $\sum a_n$ với $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

ii) Nếu $\alpha > 1$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

iii) Nếu $\alpha = 1$ thì không có kết luận về tính hội tụ của $\sum a_n$.

Chứng minh. i) Với $\alpha < \beta < 1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt[n]{a_n} < \beta, \forall n \geq n_0$, nghĩa là $a_n < \beta^n, \forall n \geq n_0$. Vì chuỗi $\sum \beta^n$ hội tụ nên $\sum a_n$ hội tụ do tiêu chuẩn so sánh.

ii) Tồn tại dãy con (a_{n_k}) của (a_n) sao cho $|a_{n_k}| > 1$ với k đủ lớn. Suy ra $a_n \not\to 0$. Vậy $\sum a_n$ phân kỳ.

iii) Xét hai chuỗi $\sum n^{-1}, \sum n^{-2}$. Trong cả hai trường hợp $\alpha = 1$ nhưng $\sum n^{-1}$ phân kỳ và $\sum n^{-2}$ hội tụ. ■

Từ đây ta có tiêu chuẩn căn số của Cauchy

2.9 Hệ quả. *Xét chuỗi số dương $\sum a_n$ với $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

ii) Nếu $\alpha > 1$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

iii) Nếu $\alpha = 1$ thì không có kết luận về tính hội tụ của $\sum a_n$.

Ví dụ 11: Xét tính hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^n n^p \quad (p > 0)$

Sinh viên tự giải.

Chú ý rằng, với mọi dãy số dương (a_n), nếu dãy $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ hội tụ thì dãy $(\sqrt[n]{a_n})$ cũng hội tụ và có cùng giới hạn. Điều này cho thấy tiêu chuẩn căn số của Cauchy "mạnh" hơn tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert.

Hơn nữa, các chuỗi số dương còn có một số tính chất đặc biệt. Trước hết với chuỗi số bất kỳ $\sum a_n$, chuỗi nhận được bằng cách hoán vị các số hạng a_n được gọi là một *chuỗi hoán vị* của $\sum a_n$. Chính xác hơn, với một song ánh bất kỳ

$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto k(n), \end{aligned}$$

thì dãy $(a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gọi là một *dãy hoán vị* của (a_n) và chuỗi $\sum a_{k(n)}$ gọi là một *chuỗi hoán vị* của $\sum a_n$.

Lưu ý rằng các khái niệm về dãy hoán vị và dãy con của một dãy số (a_n) là các khái niệm độc lập nhau.

Ta có

2.10 Định lý Dirichlet. *Nếu một chuỗi số dương hội tụ thì mọi chuỗi hoán vị của nó cũng hội tụ và tất cả đều có chung một tổng.*

Chứng minh. Xét chuỗi $\sum a_n$ với $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \uparrow s = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và một hoán vị của nó $\sum a_{k(n)}$ với tổng riêng phần $t_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k(i)}$. Với $m = \max\limits_{1 \le i \le n} k(i)$, ta có $t_n \le \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = s_m \le s$. Vì (t_n) là dãy bị chặn nên ta suy ra $\sum a_{k(n)}$

hội tụ và có tổng là $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \le s$. Ngược lại, vì $\sum a_n$ là một chuỗi hoán vị của $\sum a_{k(n)}$ nên lập luận trên cũng cho $s = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{k(n)}$ và định lý được chứng minh. ∎

Với hai chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ xác định bởi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}$$

được gọi là *chuỗi số tích* của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ và

2.11 Định lý. *Nếu hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là a và b thì chuỗi số tích của chúng hội tụ và có tổng là $a.b$.*

Chứng minh. $A = \{a_m b_n | m, n \in \mathbb{N}\}$ thì với mọi dãy hữu hạn $(d_i)_{i=1,\ldots,p}$ các phần tử của A, với $d_i = a_{m(i)} b_{n(i)}$, thì với $m_0 = \max\limits_{1\le i\le p} m(i), n_0 = \max\limits_{1\le i\le p} n(i)$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} d_i &= \sum_{i=1}^{p} a_{m(i)} b_{n(i)} \le \sum_{i=1}^{p}\left[a_{m(i)}.\sum_{k=0}^{n_0} b_k\right] \\ &\le \sum_{i=1}^{p} b.a_{m(i)} \le b.\sum_{k=0}^{m_0} a_k \le a.b.\end{aligned}$$

Vậy $\sum\limits_{m,n} a_m b_n$ hội tụ[2]. ∎

§3. CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

Để xét sự hội tụ của chuỗi bất kỳ $\sum a_n$, trong đó a_n có thể là số dương hoặc âm, ta có các tiêu chuẩn tổng quát như tiêu chuẩn Cauchy và tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối khảo sát trong mục §1. Đặc biệt, bằng cách kết hợp tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối với các kết quả cho chuỗi số dương trong mục §2, ta lần lượt có các kết quả sau

[2]Xem bài tập 6.33 chương VI này

3.1 Định lý (tiêu chuẩn tỷ số)

Đặt $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$: *Chuỗi* $\sum a_n$ *hội tụ (tuyệt đối),*

ii) Nếu $\beta > 1$: *Chuỗi* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

3.2 Hệ quả

Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$: *Chuỗi* $\sum a_n$ *hội tụ (tuyệt đối),*

ii) Nếu $\alpha > 1$: *Chuỗi* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

3.3 Định lý (tiêu chuẩn căn số). *Đặt* $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$: *chuỗi* $\sum a_n$ *hội tụ (tuyệt đối)*

ii) Nếu $\alpha > 1$: *chuỗi* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

3.4 Hệ quả (tiêu chuẩn căn số của Cauchy). *Đặt* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$: *Chuỗi* $\sum a_n$ *hội tụ (tuyệt đối),*

ii) Nếu $\alpha > 1$: *Chuỗi* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

3.5 Định lý Dirichlet. *Nếu chuỗi* $\sum a_n$ *hội tụ tuyệt đối thì mọi chuỗi hoán vị của nó cũng hội tụ tuyệt đối và tất cả đều có chung một tổng.*

Chứng minh. Lấy $\sum a'_n$ là một chuỗi hoán vị của $\sum a_n$ thì $\sum |a'_n|$ là một chuỗi hoán vị của $\sum |a_n|$ nên hội tụ và do đó $\sum a'_n$ hội tụ tuyệt đối. Ngoài ra, đặt

$$\begin{aligned} a_n^+ &= max(a_n, 0), \qquad a_n^- = max(-a_n, 0),\\ (a')_n^+ &= max(a'_n, 0), \qquad (a'_n)^- = max(-a'_n, 0). \end{aligned}$$

Vì $0 \le a_n^+, a_n^- \le |a_n|$ và $0 \le (a'_n)^+, (a'_n)^- \le |a'_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ nên do tiêu chuẩn so sánh, $\sum a_n^+, \sum a_n^-, \sum (a_n')^+$ và $\sum (a_n')^-$ là các chuỗi (dương) hội tụ và cũng do định lý 2.10, $\sum a_n^+ = \sum (a_n')^+; \sum a_n^- = \sum (a_n')^-$ và do đó

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum (a_n')^+ - \sum (a_n')^- \blacksquare$$

Lưu ý rằng điều kiện hội tụ tuyệt đối là quan trọng. Chúng ta có thể chứng minh được rằng nếu $\sum a_n$ là chuỗi hội tụ có điều kiện thì các chuỗi hoán vị của nó có thể có tổng là bất kỳ số thực nới rộng nào[3].

Cho (a_n) là một dãy số dương, các chuỗi số

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

và

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

gọi là các *chuỗi đan dấu.* Rõ ràng là hai chuỗi nêu trên hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ và khi chúng hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Ta có tiêu chuẩn dành cho chuỗi đan dấu như sau

3.6 Định lý Leibnitz. *Nếu (a_n) là dãy số dương, giảm và hội tụ về 0 thì chuỗi đan dấu $\sum (-1)^{n+1} a_n$ hội tụ và có tổng nằm trong khoảng $a_1 - a_2$ và a_1.*

Chứng minh. Đặt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ thì vì $s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} \le 0$ và $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \ge 0$ nên ta suy ra (s_{2n+1}) là dãy giảm và (s_{2n}) là dãy tăng. Ta có $s_{2n+1} \ge a_1 - a_2$, $s_{2n} \le a_1$. Suy ra (s_{2n+1}) và (s_{2n}) hội tụ. Hơn nữa $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên ta suy ra (s_{2n}) và (s_{2n+1}) hội tụ và có cùng một giới hạn, chẳng hạn là s, và do đó $s_n \to s$ với $a_1 - a_2 = s_2 \le s \le s_1 = a_1$. $\blacksquare$

[3]Xem bài tập 6.35 chương VI này

Ví dụ 12: Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

Giải

Đặt $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

Đặt $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, do $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0 \quad \forall x \geq 1$, suy ra f giảm trên $[1, +\infty)$ nên $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$.

Vậy (a_n) là dãy giảm và $a_n \to 0$. Nên $\sum(-1)^{n+1}a_n$ hội tụ.

Tổng quát hơn, ta có tiêu chuẩn sau cho chuỗi có dấu bất kỳ.

3.7 Định lý (tiêu chuẩn Dirichlet). *Nếu (a_n) là một dãy dương, giảm, hội tụ về 0 và nếu chuỗi $\sum b_n$ có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum a_n b_n$ hội tụ.*

Chứng minh. Bằng cách viết

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\ &= t_1(a_1 - a_2) + t_2(a_2 - a_3) + \ldots + t_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + t_n a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} t_k(a_k - a_{k+1}) + t_n a_n, \end{aligned} \tag{27}$$

trong đó $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Vì $\sum(a_n - a_{n+1})$ là chuỗi dương hội tụ (có tổng là a_1) và tồn tại $M > 0$ sao cho $|t_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta suy ra chuỗi $\sum t_n(a_n - a_{n-1})$ hội tụ tuyệt đối và $t_n a_n \to 0$ và do đó vế phải (27) hội tụ. Vì vế trái chính là tổng riêng phần của chuỗi $\sum a_n b_n$ nên định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 13: Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sqrt{2n+1}}$ hội tụ $\forall x$.

Giải

Đặt $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $b_n = \sin(2n+1)x$

Đặt $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Ta có

$$
\begin{aligned}
&2\sin x.\sin x = 1 - \cos 2x\\
&2\sin x.\sin 3x = \cos 2x - \cos 4x\\
&\ldots\\
&2\sin x.\sin(2n+1)x = \cos 2nx - \cos(2n+2)x
\end{aligned}
$$

Suy ra $2\sin x.t_n = 1 - \cos(2n+2)x$

Trường hợp 1: $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\sum \frac{\sin(2n+1)x}{\sqrt{2n+1}} = \sum 0$ nên hội tụ.

Trường hợp 2: $x \neq k\pi (\forall k \in \mathbb{Z})$

$$|t_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\frac{1-\cos(2n+2)x}{2\sin x}\right| \leq \frac{1}{\sin x} \forall n,$$

kết hợp (a_n) giảm, $a_n \to 0$ thì chuỗi trên hội tụ.

* Chú ý: sinh viên tự giải lại ví dụ 11.

3.7 Định lý (tiêu chuẩn Abel). *Nếu (a_n) là một dãy giảm, bị chặn dưới (hoặc tăng bị chặn trên) và $\sum b_n$ là chuỗi hội tụ thì chuỗi $\sum a_n b_n$ hội tụ.*

Chứng minh. Nếu (a_n) giảm và bị chặn dưới, với $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ thì vì $(a_n - a)$ là dãy dương giảm hội tụ về 0 nên do tiêu chuẩn Dirichlet $\sum (a_n - a)b_n$ hội tụ. Mà $\sum ab_n = a\sum b_n$ cũng hội tụ nên ta kết luận $\sum a_n b_n$ hội tụ.

Nếu (a_n) tăng và bị chặn trên thì $(-a_n)$ giảm và bị chặn dưới, suy ra $\sum(-a_n)b_n$ hội tụ do chứng minh trên, nên $\sum a_n b_n$ hội tụ. ■

Lưu ý rằng trong tiêu chuẩn Abel, dãy (a_n) không nhất thiết phải hội tụ về 0 còn trong tiêu chuẩn Dirichlet, chuỗi $\sum b_n$ không nhất thiết phải hội tụ.

Ví dụ 14: Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\cos\frac{\pi}{n}$ hội tụ.

Giải

Ta có

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1} \text{ hội tụ do dấu hiệu Leibnitz.} \tag{28}$$

Đồng thời $\cos x$ giảm trên $[0,\pi]$ và $\pi \geq \frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{n+1} > 0$ nên $\cos\frac{\pi}{n} \leq \cos\frac{\pi}{n+1}$.

$$\text{Vậy } \cos\frac{\pi}{n} \text{ là dãy tăng và bị chặn trên bởi } 1 \tag{29}$$

Từ (28) và (29) suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\cos\frac{\pi}{n}$ hội tụ.

Bài tập Chương 6

6.1 Chứng minh rằng các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Khi chúng cùng hội tụ, xác định α sao cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \alpha + \sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n$.

6.2 Chứng tỏ rằng, nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ thì

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right| < \varepsilon.$$

6.3 Cho hai chuỗi số hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$ có tổng lần lượt là a và b. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum (a_n + b_n)$ và $\sum \alpha a_n$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, cũng hội tụ và có tổng lần lượt là $a + b$ và αa.

6.4 Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và dãy tăng ngặt các số nguyên (n_k) sao cho $n_1 = 1$. Đặt $b_k = \sum\limits_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i = a_{n_k} + a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}-1}$. Chứng minh rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ và có tổng là a thì $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ cũng hội tụ và có tổng là a.

Hướng dẫn: Dãy các tổng riêng phần của $\sum b_k$ là một dãy con của dãy các tổng riêng phần của $\sum a_n$.

6.5 Chứng minh rằng với $|x| < 1$ và $m \in \mathbb{N}$, ta có $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} x^n = \frac{x^m}{1-x}$.

6.6 Dãy số (a_n) được gọi là một *cấp số cộng* khi tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{n+1} = a_n + \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó α được gọi là *công sai* của cấp số cộng (a_n). Chứng minh rằng nếu (a_n) là một cấp số cộng thì $\sum a_n$ phân kỳ trừ khi dãy (a_n) gồm toàn các số 0.

Dãy số (a_n) được gọi là một *cấp số nhân* khi tồn tại $q \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{n+1} = a_n \times q, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó q được gọi là *công bội* của cấp số nhân

(a_n). Chứng minh rằng nếu (a_n) là một cấp số nhân có công bội là q thì $\sum a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu $|q| < 1$ và khi đó $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$.

6.7 Xét tính hội tụ của các chuỗi sau

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1.5...(4k-3)}$

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{(2k+1)2^k}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n!}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$

8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$

9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n^4}$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3...(2n-1)}{1.5...(4n-3)}$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$

6.8 Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \lg \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ hội tụ

Hướng dẫn: Chứng minh $S_n = u_1 + ... + u_n < \lg \dfrac{2(n+1)}{n+2} < \lg 2$

6.9 Tìm p sao cho

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^p n}$ hội tụ

6.10 Xét tính hội tụ của các chuỗi sau

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{(n+1)^2}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \dfrac{n+1}{n}$

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n n}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n} . e^{-n}$

6.11 Cho (a_n) là một dãy các chữ số thập phân, nghĩa là $a_n \in \{0, 1, ..., 9\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ luôn luôn hội tụ và có tổng là x thỏa điều kiện $0 \le x \le 1$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng $x = 1$ nếu và chỉ nếu $a_n = 9, \forall n \in \mathbb{N}$.

6.12 Cho (a_n) và (b_n) là hai dãy các chữ số thập phân sao cho $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

i) $a_{n_0} \neq 0$ và $a_n = 0, \forall n > n_0$.

ii) $b_n = a_n, \forall n < n_0, b_{n_0} = a_{n_0} - 1$ và $b_n = 9, \forall n > n_0$.

Chứng tỏ rằng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$.

6.13 Cho $0 \le x < 1$. Chứng tỏ rằng tồn tại dãy các chữ số thập phân (x_n) sao cho

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{10^k}$$

(ta còn gọi cách viết $0, x_1 x_2 x_3 ...$ là một biểu diễn thập phân của x)

6.14 Cho $0 \le x < 1$. Chứng minh rằng x là một số hữu tỷ nếu và chỉ nếu x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn, nghĩa là tồn tại dãy

$(x_n) \subset \{0, 1, ..., 9\}$ sao cho tồn tại $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n+k} = x_n, \forall n \geq n_0$ và $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.

6.15 Chứng tỏ $0, 1010010001000010...$, trong đó số chữ số 0 giữa hai số 1 liên tiếp tăng thêm 1 sau mỗi lần xuất hiện, biểu diễn một số vô tỷ.

6.16 Chứng tỏ $0, x_1x_2x_3...$, trong đó $x_n = 1$ nếu n là số nguyên tố và $x_n = 0$ khi n không là số nguyên tố, biểu diễn một số vô tỷ.

Hướng dẫn: Nếu $n_0, n_0 + k, n_0 + 2k$ là các số nguyên tố thì vô lý vì $n_0 + n_0k$ không là số nguyên tố.

6.17 Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a+nb}$ phân kỳ.

6.18 Chứng minh rằng dãy tổng riêng phần của một chuỗi số dương là một dãy tăng.

6.19 Cho $(a_i)_{i\in I}$ là một họ không rỗng các số ≥ 0. Xét A là tập hợp các tổng hữu hạn các phần tử của $(a_i)_i \in I$, nghĩa là

$$A = \{a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_n} | \{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I\}.$$

Chứng minh rằng nếu $supA < \infty$ thì tập các chỉ số $i \in I$ sao cho $a_i \neq 0$ là tập quá lắm đếm được. Khi đó, ta đặt $\sum\limits_{i\in I} a_i = supA$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng khi I đếm được, nghĩa là có song ánh

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\to I \\ n &\mapsto i_n, \end{aligned}$$

thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{i_n}$ hội tụ và có tổng cũng là $supA$.

Hướng dẫn: Đặt $I_n = \left\{i \in I | a_i > \frac{1}{n}\right\}$ thì I_n hữu hạn và $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

6.20 Cho $(a_i)_{i\in I}$ là một họ không rỗng các số ≥ 0 với tổng $\sum\limits_{i\in I} a_i < \infty$ và $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một *phân hoạch* của I, nghĩa là $I_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}; I_m \cap I_n = \emptyset$

khi $m \neq n$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{i \in I_n} a_i$ hội tụ và có tổng là $\sum\limits_{i \in I} a_i$.

6.21 Xét hai chuỗi số dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Chứng minh,

a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $\lim\inf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

6.22 Cho $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \ldots$$

là chuỗi hội tụ, trong đó $u_{2n} = b^n$ và $u_{2n-1} = a^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Thử dùng tiêu chuẩn căn số của Cauchy và tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert.

6.23 Chứng minh rằng các hằng số α trong tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert và tiêu chuẩn căn số của Cauchy có thể lần lượt thay bằng $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ và $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

6.24 (Định lý Albel hay Pringsheim) Nếu (a_n) là một dãy các số dương giảm và $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Hướng dẫn: $na_{2n} \leq a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n} \to 0$ và $(2n+1)a_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} 2na_{2n} \to 0$.

6.25 Cho $p, q, a > 0$. Khảo sát theo p, q sự hội tụ của chuỗi $\sum \frac{n^p}{n^q + a}$.

6.26 Cho (a_n) là một dãy các số dương, giảm và $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum k^n a_{k^n}$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

6.27 Xét chuỗi số dương $\sum a_n$. Chứng minh rằng nếu $\sum a_n$ hội tụ thì các chuỗi $\sum a_n^2, \sum \frac{a_n}{1+a_n}$ và $\sum \frac{a_n}{n}$ cũng hội tụ.

Hướng dẫn: $a_n^2 \leq a_n$ khi n đủ lớn; $\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$ và $\frac{a_n}{n} \leq (a_n^2 + \frac{1}{n^2})$.

6.28 Chứng minh rằng nếu $\sum |a_n|$ hội tụ thì $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi mọi a_n là cùng dấu.

6.29 Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$, với $a > 0$, hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$ và phân kỳ khi $p \leq 0$.

6.30 Chứng minh rằng các chuỗi $\sum \cos n\theta$ và $\sum \sin n\theta$ có dãy tổng riêng phần bị chặn trừ trường hợp θ là bội số của 2π trong chuỗi thứ nhất.

6.31 Xét $\sum \frac{\cos n\theta}{n^p}$ và $\sum \frac{\sin n\theta}{n^p}$. Chứng tỏ rằng, tổng quát các chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$ và phân kỳ khi $p < 0$. Khảo sát theo θ các trường hợp ngoại lệ.

6.32 Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum \frac{a_n}{n^p}$ hội tụ hay có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ khi $q > p$.

6.33

1) Chứng minh rằng nếu $A_n \to A$ và $B_n \to B$ khi $n \to \infty$ thì

$$D_n = \frac{A_1B_n + A_2B_{n-1} + \ldots + A_nB_1}{n} \to AB.$$

Hơn nữa, nếu $(A_n), (B_n)$ là các dãy dương giảm thì (D_n) cũng dương giảm.

2) Chứng minh rằng với $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$, $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, thì $C_n = a_1B_n + a_2B_{n-1} + \ldots + a_nB_1 = b_1A_n + b_2A_{n-1} + \ldots + b_nA_1$
và $C_1 + C_2 + \ldots + C_n = A_1B_n + A_2B_{n-1} + \ldots + A_nB_1$.

Suy ra rằng nếu $\sum a_n, \sum b_n$ hội tụ và có tổng là A, B thì

$$\frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{n} \to AB$$

3) (Định lý Abel về chuỗi tích) Cho $\sum c_n$ là chuỗi tích của hai chuỗi hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Nếu $\sum c_n$ hội tụ thì,

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right).$$

6.34 Cho $\sum a_n, \sum b_n$ với $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1) Chứng minh rằng chuỗi tích $\sum c_n$ với số hạng tổng quát

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

2) Khảo sát sự hội tụ của $\sum c_n$.

Hướng dẫn: $\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \dfrac{n+2}{2}$.

6.35 Cho chuỗi $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện. Chứng tỏ rằng với mọi $a \in \overline{\mathbb{R}}$, có một chuỗi hoán vị $\sum a_{n(i)}$ của $\sum a_n$ sao cho $\sum a_{n(i)}$ hội tụ và có tổng là a.

Chương 7

DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM

Trong các phần trước, chúng ta đã gặp các giới hạn có dạng

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

hay chuỗi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)],$$

trong đó các số hạng của dãy hay chuỗi có chứa một tham số x. Hiển nhiên, kết quả của giới hạn hay chuỗi như vậy có thể thay đổi theo x. Hay nói cách khác, chúng là hàm số theo x. Chẳng hạn, hàm mũ $y = e^x$ có thể coi như là giới hạn của dãy

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

hay là tổng của một chuỗi số

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

§1. SỰ HỘI TỤ ĐIỂM - HỘI TỤ ĐỀU

Cho $f_n : D \to \mathbb{R}$ là một dãy các hàm số. Ta có

1.1 Định nghĩa

i) Dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gọi là *hội tụ điểm* trên D nếu với mọi $x \in D$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số hội tụ và khi đó hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ được gọi là *hàm giới hạn (điểm)* của dãy hàm (f_n).

ii) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ gọi là *hội tụ điểm* trên D nếu với mọi $x \in D$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ là một chuỗi hội tụ và khi đó hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ được gọi là *hàm tổng (điểm)* của chuỗi hàm $\sum f_n$.

Ví dụ 1

Chẳng hạn, xét dãy hàm (f_n) với $f_n(x) = x^n$. Ta có

i) (f_n) hội tụ điểm trên $(-1, 1]$ về hàm f xác định bởi $f(x) = 0$ khi $x \neq 1$ và $f(1) = 1$.

ii) $\sum f_n$ hội tụ điểm trên $(-1, 1)$ về hàm f xác định bởi $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Mục đích chính của việc khảo sát dãy hàm và chuỗi hàm là khảo sát tính chất của hàm giới hạn hay của hàm tổng từ tính chất của các hàm f_n. Chẳng hạn, nếu các f_n liên tục, khả vi hay khả tích thì hàm giới hạn hay hàm tổng f có liên tục, khả vi hay khả tích hay không và ta cần một khái niệm hội tụ khác mạnh hơn sự hội tụ điểm. Trước hết, với hai hàm $f, g : D \to \mathbb{R}$, đặt

$$d(f, g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| \in [0, +\infty]$$

ta có

1.2 Định nghĩa

i) Dãy hàm (f_n) gọi là *hội tụ đều* về f trên D nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(f_n, f) < \varepsilon.$$

ii) Chuỗi hàm $\sum f_n$ được gọi là *hội tụ đều* về f trên D nếu dãy hàm tổng riêng phần của nó $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ hội tụ đều về f trên D.

Do định nghĩa, $d(f_n, f) < \varepsilon$ kéo theo $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$. Do đó, $f_n(x) \to f(x), \forall x \in D$. Từ đó, chúng ta có thể suy ra nếu (f_n) hội tụ đều về f thì (f_n) hội tụ từng điểm về f (chiều ngược lại không đúng). Ngược lại, lưu ý rằng trong khái niệm hội tụ đều thì hàm f_n phải đủ gần hàm f tại mọi giá trị của nó. Điều này giải thích khái niệm *đều* theo biến x.

Giá trị $d(f,g)$ còn được gọi là *khoảng cách sup* giữa hai hàm số f và g và với các hàm $f,g,h : D \to \mathbb{R}$, ta có

i) $d(f,g) \geq 0$ và $d(f,g) = 0 \leftrightarrow f = g$,

ii) $d(f,g) = d(g,f)$,

iii) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.

Ví dụ 2: với $f_n : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_n(x) = x^n$ thì $f_n(x) \to 0$ tại mọi $x \in (0, \frac{1}{2})$. Hơn nữa, với hàm giới hạn $f : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}, f(x) = 0, \forall x \in (0, \frac{1}{2})$, ta có

$$d(f_n, f) = \sup_{0<x<\frac{1}{2}} |x^n| = \frac{1}{2^n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

nên f_n hội tụ đều về f.

Nhưng với $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$, ta cũng có f_n hội tụ từng điểm về $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 0, \forall x \in (0,1)$ nhưng $d(f_n, f) = \sup\limits_{0<x<1} x^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ nên f_n không hội tụ đều về f.

Tương tự với chuỗi hàm $\sum f_n(x)$ với $x \in (0, \frac{1}{2})$ và $x \in (0,1)$.

Đặc biệt, đối với chuỗi hàm, ta có tiêu chuẩn Weierstrass về sự hội tụ đều như sau:

1.3 Định lý. *Cho dãy hàm $f_n : D \to \mathbb{R}$ sao cho tồn tại dãy số (a_n) với $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in D, n \in \mathbb{N}$. Nếu chuỗi số $\sum a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm $\sum f_n(x)$ hội tụ đều trên D.*

Chứng minh. Trước hết từ bất đẳng thức $|f_n(x)| \le a_n, \forall x \in D, n \in \mathbb{N}$, ta suy ra, với mỗi x, chuỗi $\sum f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối. Đặt $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k < \varepsilon$ và do đó

$$\sup_{x\in D}\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{+\infty} a_k < \varepsilon,$$

định lý đã được chứng minh. ■

Ví dụ 3: Chứng minh $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Giải

Ta có

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall n, \forall x \in \mathbb{R}$$

và $\sum \frac{1}{n^2}$ hội tụ, suy ra $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

§2. PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN VÀ DÃY, CHUỖI HÀM

Trong mục này, ta khảo sát sự liên hệ giữa tính liên tục, khả vi cũng như tính khả tích của các hàm f_n với hàm giới hạn $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ hay hàm tổng $\sum f_n$. Trước hết, ta có

2.1 Mệnh đề. *Cho I là khoảng trong $\mathbb{R}$ (đóng, mở, bị chặn hoặc không bị chặn). Cho $f_n : I \to \mathbb{R}$ là một dãy hàm. Ta có*

i) Nếu (f_n) hội tụ đều trên I về f và f_n liên tục tại $x_0 \in I$, $\forall n$ thì f là hàm liên tục tại x_0,

ii) Nếu (f_n) hội tụ đều trên I về f và f_n liên tục trên I, $\forall n$ thì f là hàm liên tục trên I,

iii) Nếu $\sum f_n$ hội tụ đều trên I và có tổng là f và f_n liên tục tại $x_0 \in I$, $\forall n$, thì f là hàm liên tục tại x_0.

iv) Nếu $\sum f_n$ hội tụ đều trên I và có tổng là f và f_n liên tục trên I, $\forall n$, thì f là hàm liên tục trên I.

Chứng minh

i) $\forall s \in [a,b]$, ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} |f(s)-f(x_0)| &\leq |f(s)-f_n(s)|+|f_n(s)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \\ &\leq 2d(f_n,f)+|f_n(s)-f_n(x_0)|, \forall n \in \mathbb{N} \qquad (30) \end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$, chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(f_n,f) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq n_0$ và vì f_{n_0} liên tục tại x_0 nên

$$\exists \delta > 0, \forall s \in [a,b], |s-x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(s)-f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

kết hợp với (30) đúng khi $n = n_0$, suy ra $|f(s)-f(x_0)| < \varepsilon$, nghĩa là, f liên tục tại x_0.

iii) Vì chuỗi $\sum f_n$ hội tụ đều và có tổng là f và do dãy hàm tổng riêng phần $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ liên tục tại x_0 và hội tụ đều về f nên theo i), f liên tục tại x_0.

ii) và iv) hiển nhiên. ■

Ví dụ 4: Đặt $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nếu có?

Giải

Xét $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ta có $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n2^n} = b_n \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\forall n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}$ suy ra $\sum b_n$ hội tụ.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \rightrightarrows f$ trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Đồng thời $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ suy ra f liên tục trên

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, đặc biệt tại $x = 0$. Nên $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

2.2 Mệnh đề. *Cho $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một dãy các hàm khả tích. Ta có*

i) Nếu (f_n) hội tụ đều về f trên $[a, b]$ thì f là hàm khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

ii) Nếu $\sum f_n$ hội tụ đều về hàm tổng f trên $[a, b]$ thì f là hàm khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Chứng minh. Đặt $a_n = d(f_n, f) = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$. Vì

$$f_n(x) - a_n \leq f(x) \leq f_n(x) + a_n \text{ với mọi } x \in [a, b]$$

Do đó, với mọi phân hoạch $\sigma = (a_i)_{i=1,\ldots,n}$ của $[a, b]$, ta có

$$\begin{aligned} \inf_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} f_n(x) - a_n &\leq \inf_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} f(x) \\ &\leq \sup_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} f(x) \\ &\leq \sup_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} f_n(x) + a_n \end{aligned}$$

Suy ra

$$L(f_n, \sigma) - a_n(b - a) \leq L(f, \sigma) \leq U(f, \sigma) \leq U(f_n, \sigma) + a_n(b - a), \qquad \textbf{(31)}$$

nghĩa là

$$U(f, \sigma) - L(f, \sigma) \leq U(f_n, \sigma) - L(f_n, \sigma) + 2a_n(b - a), \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathcal{P}.$$

Vì $a_n \to 0$ khi $n \to \infty$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ và vì f_{n_0} khả tích trên $[a,b]$ nên tồn tại phân hoạch $\sigma \in \mathcal{P}$ sao cho $U(f_{n_0},\sigma) - L(f_{n_0},\sigma) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Từ đó, suy ra $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \varepsilon$.

Vậy f là hàm khả tích và (31) cho

$$L(f_n,\sigma) - a_n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f_n,\sigma) + a_n(b-a), \forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma \in \mathcal{P},$$

và do đó

$$\sup_\sigma L(f_n,\sigma) - a_n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \inf_\sigma U(f_n,\sigma) + a_n(b-a), \forall n \in \mathbb{N},$$

mà $\sup L(f_n,\sigma) = \inf U(f_n,\sigma) = \int_a^b f_n(x)dx$ nên bất đẳng thức trên cho

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le a_n(b-a) \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Vậy $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Với $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ thì s_n là hàm khả tích và khi $\sum f_n$ hội tụ đều trên $[a,b]$ về hàm tổng f, s_n hội tụ đều trên $[a,b]$ và

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)dx. \blacksquare\end{aligned}$$

Ví dụ 5: Nếu $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$. Chứng minh rằng $\int\limits_0^\pi f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2}{(2k+1)^3}$.

Giải

Ta có $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in [0,\pi]$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều về f trên $[0,\pi]$.

Đồng thời $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ khả tích trên $[0,\pi]$, suy ra

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^2} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^3}. \end{aligned}$$

2.3 Mệnh đề. *Cho $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ là một dãy các hàm thuộc lớp C^1.*

i) Nếu (f_n') hội tụ đều trên $[a,b]$ và $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho $(f_n(x_0))$ là dãy số hội tụ thì tồn tại hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả vi trên (a,b) sao cho (f_n) hội tụ đều về f trên $[a,b]$ và (f_n') hội tụ đều về f' trên (a,b).

ii) Nếu $\sum f_n'$ hội tụ đều trên $[a,b]$ và $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho $\sum f_n(x_0)$ là một chuỗi số hội tụ thì tồn tại hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sao cho $\sum f_n$ hội tụ đều và có tổng là f và $\sum f_n'$ hội tụ đều và có tổng là f'.

Chứng minh

i) Vì $f \in C^1$, ta có

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt. \tag{32}$$

Gọi g là hàm sao cho (f_n') hội tụ đều về g trên (a,b) nên do mệnh đề 2.2, $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ khi $n \to \infty$ và do đó $(f_n(x))$ là dãy hội tụ. Đặt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, do (32),

$$f(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} g(t)dt, \forall x \in [a,b], \tag{33}$$

với $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

Do mệnh đề 2.1, g là hàm liên tục trên $[a,b]$ nên (33) cho f là hàm khả vi trên (a,b) và $f'(x) = g(x), \forall x \in (a,b)$. Mặt khác, (32) và (33) cho

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + \left|\int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))dt\right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + (b-a)d(f_n', g), \forall x \in [a,b], \end{aligned}$$

suy ra

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - \alpha| + (b-a)d(f_n', g) \to 0$$

khi $n \to \infty$, nghĩa là (f_n) hội tụ đều về f trên $[a,b]$.

ii) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ là một dãy các hàm thuộc lớp C^1 và s_n' hội tụ đều về g. Khi chuỗi $\sum f_k(x_0)$ hội tụ thì dãy $(s_n(x_0))$ hội tụ và do chứng minh trên, tồn tại hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, khả vi trên (a,b) sao cho (s_n) hội tụ đều về f, nghĩa là $\sum f_n$ hội tụ đều về hàm tổng f, và (s_n') hội tụ đều về f', nghĩa là $\sum f_n'$ hội tụ đều về hàm tổng f'. ■

Ví dụ 6: Đặt $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$. Chứng minh $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

Đặt $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$.

Ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ (vì $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ).

Đồng thời $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$ hội tụ. Nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3} \rightrightarrows f$ trên $\mathbb{R}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2} \rightrightarrows f'$ trên $\mathbb{R}$, và $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

§3. CHUỖI LŨY THỪA

Một trong những tính chất quan trọng của các hàm sơ cấp cơ bản (như hàm mũ, logarit, sin và cosin) là chúng có thể biểu diễn bằng chuỗi có dạng $\sum a_n x^n$ với (a_n) là một dãy số. Một chuỗi như vậy được gọi là *chuỗi lũy thừa*. Ta có

3.1 Mệnh đề. *Nếu chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x = x_1 \in \mathbb{R}$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| < |x_1|$.*

Chứng minh. Vì $a_n x_1^n \to 0$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|a_n x_1^n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$. Bấy giờ, với $|x| < |x_1|$, ta có

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| . \left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^n \le M \left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì chuỗi lũy thừa $\sum \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ hội tụ nên $\sum a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối do tiêu chuẩn so sánh. ∎

Từ mệnh đề 3.1, ta suy ra rằng đối với một chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$, chỉ có thể có một trong ba khả năng xảy ra sau:

i) $\sum a_n x^n$ chỉ hội tụ khi $x = 0$,

ii) $\sum a_n x^n$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$,

iii) Tồn tại $R > 0$ sao cho $\sum a_n x^n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) khi $|x| < R$ và phân kỳ khi $|x| > R$. Giá trị R được gọi là *bán kính hội tụ* của $\sum a_n x^n$.

Ta có

3.2 Định lý. *Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \in [0, +\infty]$. Ta có*

i) Nếu $\alpha = +\infty$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chỉ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) khi $x = 0$,

ii) Nếu $\alpha = 0$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) với mọi $x \in \mathbb{R}$,

iii) Nếu $0 < \alpha < +\infty$ thì $R = \frac{1}{\alpha}$ là bán kính hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Chứng minh. Dùng tiêu chuẩn căn số của Cauchy, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha.|x|, \forall x \in \mathbb{R}.\blacksquare$$

Lưu ý 1: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, đặt $X = x - x_0$, ta cũng có kết quả tương tự.

i) Nếu $\alpha = +\infty$ thì $\sum a_n(x-x_0)^n$ chỉ hội tụ khi $x = x_0$

ii) Nếu $\alpha = 0$ thì $\sum a_n(x-x_0)^n$ hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) Nếu $0 < \alpha < +\infty$ thì $\sum a_n(x-x_0)^n$ hội tụ khi $|x-x_0| < R$ phân kỳ khi $|x-x_0| > R$.

Lưu ý 2: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ tồn tại $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ tồn tại}\right)$ thì α trong định lý trên có thể tính bởi $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\left(\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$

Lưu ý 3: trong trường hợp tổng quát, ta không có kết luận gì về $\sum a_n x^n$ khi $|x| = R$ với R là bán kính hội tụ của $\sum a_n x^n$.

Ví dụ 8: Tìm miền hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}(x+1)^n$.

Giải. Ta có $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, R = \dfrac{1}{\alpha} = 1$.

* $|x+1| < 1$ khi $-2 < x < 0$: chuỗi trên hội tụ.

* $|x+1| > 1$ khi $x < -2$ hay $0 < x$: chuỗi trên phân kỳ.

* $x + 1 = 1$ khi $x = 0$: chuỗi trên trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ do định lý Leibnitz.

* $x + 1 = -1$ khi $x = -2$: chuỗi trên trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi trên là $-2 < x \leq 0$.

3.3 Hệ quả. *Gọi R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$. Ta có $\sum a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi khoảng $[-R', R']$ với $R' < R$.*

Chứng minh. $\forall x \in [-R', R'], |a_n x^n| \leq |a_n|(R')^n$ với mọi n và chuỗi số $\sum |a_n|(R')^n$ hội tụ. Suy ra $\sum a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-R', R']$. ■

Đặc biệt, khi $\sum a_n x^n$ hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$, chuỗi hàm tương ứng hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$.

Chẳng hạn, $\sum x^n$ hội tụ đều trên $[-a, a], 0 < a < 1$ và $\sum \frac{x^n}{n!}$ hội tụ đều trên mọi khoảng $[a, b]$.

Đặc biệt, xét chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ với bán kính hội tụ $0 < R \leq +\infty$, ta có $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ xác định trên $(-R, R)$.

3.4 Hệ quả. *$f(x)$ là hàm khả vi trên $(-R, R)$ và*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{34}$$

Hơn nữa, với $-R < \alpha \leq \beta < R$, ta có

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}). \tag{35}$$

Chứng minh

$\forall x \in (-R, R), \exists R' > 0 : -R < -R' < x < R' < R, \sum a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-R', R']$ và $\sum n a_n x^{n-1}$ hội tụ đều trên $[-R', R']$, ta nhận được (34).

Khẳng định (35) là hiển nhiên. ■

Ví dụ 7: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, ta suy ra $(e^x)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$ và $\int_a^b e^x dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}[b^{n+1} - a^{n+1}] = e^b - e^a$.

Cuối cùng, ta xét sự liên hệ giữa hàm số và chuỗi lũy thừa. Với hàm số f thuộc lớp C^∞ trên một lân cận $(a - \eta, a + \eta), \eta > 0$ của $a \in \mathbb{R}$.

Do công thức Taylor, ta có

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_n h) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + R_n(f,x), \end{aligned}$$

với $0 < \theta_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Nếu $R_n \to 0$ khi $n \to \infty$, ta có

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n, |h| < \eta, \tag{36}$$

hoặc bằng cách viết $x = a + h$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, a - \eta < x < a + \eta \tag{37}$$

Các chuỗi vế phải của (36) và (37) được gọi là các *chuỗi Taylor* và khi $a = 0$, chuỗi vế phải của

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

được gọi là *chuỗi Maclaurin*.

Chẳng hạn, với $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, ta có f thuộc lớp $\mathbb{C}^\infty$ và $f^{(n)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, với $a = 0$,

$$R_n(f,x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta_n x) = \frac{x^n}{n!}e^{\theta_n x}, 0 < \theta_n < 1.$$

Do đó, $|R_n(f,x)| \leq e^{|x|}.\frac{|x|^n}{n!} \to 0$ khi $n \to \infty$ và vì $f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ nên ta có khai triển hàm $f(x) = e^x$ bằng chuỗi Maclaurin như sau

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

và với $x = 1$, ta nhận được trở lại đẳng thức $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ trong ví dụ của chương 6, mệnh đề 2.1.

§4 CHUỖI FOURIER

Trong phần §2, chúng ta đã khảo sát tính chất của hàm tổng $f(x) = \sum f_n(x)$ từ tính chất của các hàm f_n. Đặc biệt khi $f_n(x) = a_n x^n$, hàm $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là một hàm khá tốt, chẳng hạn, có đạo hàm mọi cấp trên $(-R, R)$ với R là bán kính hội tụ của $\sum a_n x^n$ và hơn nữa các giá trị của f được xấp xỉ bằng các đa thức $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Trong mục này chúng ta sẽ khảo sát chuỗi lượng giác

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \end{aligned} \tag{38}$$

với a_0, a_n, b_n là các hằng số, $n \in \mathbb{N}$, và khảo sát sự liên hệ của nó với các hàm số.

4.1 Định nghĩa. Cho $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích. Chuỗi lượng giác (38) được gọi là *chuỗi Fourier* của f khi các hệ số a_n, b_n được xác định bởi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \text{ và} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

và các hệ số này còn được gọi là các *hệ số Fourier*, hay các *hằng số Fourier*, của f.

Tính chất quan trọng nhất của chuỗi Fourier là khi hàm f thỏa một số điều kiện đơn giản trên $(-\pi, \pi)$ thì chuỗi Fourier của nó có tổng là $f(x)$ hay $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ khi x nằm trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

Để tránh những điều kiện phức tạp, trong phần còn lại, ta giả sử f là hàm liên tục và đơn điệu trên khoảng $[-\pi, \pi]$. Ngoài ra, ta chấp nhận kết quả sau

4.2 Định lý (Tích phân Dirichlet)

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}f(0+),$$

và

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_a^b f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}dx = 0, \quad (0 < a < b).$$

Từ định lý 4.2, ta có

4.3 Định lý. *Cho $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ liên tục và đơn điệu. Chuỗi Fourier của f hội tụ trên $[-\pi, \pi]$ và có tổng là $f(x)$, với $-\pi < x < \pi$.*

Chứng minh. Đặt $s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$. Từ định nghĩa của $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, ta suy ra

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos k(t-x)\right]dt,$$

và từ đẳng thức

$$\sin\frac{2n+1}{n}\theta = \sin\frac{\theta}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{n}2\cos k\theta\right],$$

ta nhận được

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt.$$

Khi $-\pi < x < \pi$, thì

$$\begin{aligned} s_n(x) = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt + \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt, \end{aligned}$$

và với phép biến đổi $t - x = \mp 2\alpha$,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha. \end{aligned} \tag{39}$$

Áp dụng định lý 4.2, ta được,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha &= \frac{\pi}{2}\lim_{\alpha\to 0+} f(x-2\alpha) = \frac{\pi}{2}f(x) \\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha &= \frac{\pi}{2}\lim_{\alpha\to 0+} f(x+2\alpha) = \frac{\pi}{2}f(x) \end{aligned}$$

và do đó $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

Tại $x = \pi$, (39) cho,

$$\begin{aligned} s_n(\pi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\pi-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\xi} f(\pi-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\xi}^{\pi} f(\pi-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\xi} f(\pi-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi} f(-\pi+2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha, \end{aligned}$$

với $0 < \xi < \pi$.

Lại do định lý 4.2, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi) + f(\pi)).$$

Trường hợp $x = -\pi$ được khảo sát tương tự. ■

Ví dụ với hàm $f(x) = e^x$ trên khoảng $(-\pi, \pi)$, ta có,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi}), \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt dt = \frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi})\frac{(-1)^n}{1+n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt dt = \frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi})\frac{n(-1)^{n-1}}{1+n^2}. \end{aligned}$$

Đặt $C = \dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}$. Ta có chuỗi Fourier của hàm $f(x) = e^x$ là

$$C\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{1+n^2}\cos nx - \frac{n}{1+n^2}\sin nx\right]\right).$$

Chuỗi này có tổng là e^x khi $-\pi < x < \pi$ và là $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \dfrac{e^{-\pi}+e^\pi}{2}$ tại $x = \pm\pi$.

Bài tập Chương 7

7.1 Đặt $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$. Đặt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Tìm $f(x)$. Chứng minh rằng f_n không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

7.2 Tìm miền hội tụ của chuỗi và tính tổng chuỗi đó?

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ax^{2n+1} \quad (a \neq 0)$

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^k}$

3) $\sum \dfrac{a}{(2+x)^n} \quad (a \neq 0)$

4) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 3\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^k$

5) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{kx}$

6) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln^k x$

7.3 Chứng minh $f_n(x) = nxe^{-nx}, x \geq 0$ hội tụ đều trên $[a, +\infty)$ với $a > 0$, nhưng không hội tụ đều trên $[0, a]$.

7.4 Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ hội tụ đều trên khoảng đóng bất kỳ không chứa $\pm 1, \pm 2, \ldots$

7.5 Chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ hội tụ đều trên $[p, +\infty)$ nếu $p \geq 1$.

7.6 Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2(1+x^n)}$

a) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[0, +\infty)$

b) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[-a, a]$ trong đó $0 < a < 1$

c) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[b, +\infty)$ trong đó

$b > -1$

d) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $(-\infty, -c]$ trong đó $c > 1$

7.7 Nếu $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, chứng minh rằng $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

7.8 Nếu $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ và $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, chứng minh rằng dãy hàm trên không hội tụ đều trên $[0,1]$ và $\int\limits_0^1 f(x)dx \neq \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$

7.9 Nếu $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, trong đó $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$, tìm $\int\limits_0^1 f(x)dx$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$. Dãy f_n có hội tụ đều về f trên $[0,1]$ không?

7.10 Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ thì

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$
$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 3.2x + 4.3x^2 + \dots + (n+2)(n+1)x^n + \dots$$

7.11 Cho $f(x) = \sum \dfrac{x^n}{n^2(\ln n)^2}$, $\quad -1 \leq x \leq 1$. Tính $f'(x)$ nếu có

7.12 Cho $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, $\quad -1 < x < 1$. Tính $f'(x)$ nếu có

7.13 Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \sin\dfrac{n\pi}{2}\right)^n \dfrac{x^n}{2^n}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^n$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} x^n$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n.3^n.\ln n}$

6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n.5^n}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(x-5)^n}{n.3^n}$

7.14 Cho $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n, 0 \le x \le 1$. Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$

7.15 Cho (f_n) là một dãy hàm hội tụ đều về hàm f trên $D, x \in D'$. Giả sử $\lim\limits_{t\to x} f_n(t) = a_n$ tồn tại với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng (a_n) là dãy hội tụ và

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

7.16 (Định lý Dini) Cho (f_n) là một dãy hàm liên tục, hội tụ từng điểm về hàm số liên tục f trên $[a,b]$. Chứng tỏ rằng, nếu $f_n(x) \ge f_{n+1}(x), \forall x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$, thì (f_n) hội tụ đều trên $[a,b]$.

7.17 Cho $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2 sao cho $\Phi(x) = x$ khi $0 \le x \le 1$ và $\Phi(x) = 2 - x$ khi $1 \le x \le 2$.

Đặt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \Phi(4^n x).$$

Chứng tỏ rằng f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại mọi điểm.

7.18 Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên D. Chứng minh rằng $(f_n + g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Hơn nữa, giả sử thêm rằng (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn. Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

7.19 Xét

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{khi } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{khi } \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều về một hàm liên tục.

7.20 Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ nhưng là chuỗi hàm hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$.

7.21 Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm $f(x) = x^2, g(x) = x$ và $h(x) = |x|$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

7.22 Chứng tỏ rằng hàm $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ liên tục trên miền $x > 1$ và có đạo hàm mọi cấp trên miền này.

7.23 Chứng tỏ rằng hàm $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ xác định và thuộc lớp C^∞ trên miền $x > 0$.

7.24 Với những giá trị nào của α thì

a) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ từng điểm trên $[0, 1]$,

b) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ đều trên $[0, 1]$.

7.25 Cho $0 \le a_n \le 1, \forall n \ge 0$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $0 \le x < 1$ và có tổng $\le \dfrac{1}{1-x}$.

Hơn nữa, nếu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ, chứng minh rằng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $0 \le x \le 1$ và có tổng $\le min\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n, \dfrac{1}{1-x}\right)$.

7.26 Cho chuỗi số dương hội tụ $\sum a_n$. Chứng minh rằng $\sum a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leq 1$.

7.27 Chứng minh rằng

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1,$$

và

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} x^k,$$

với $m > 0, m \notin \mathbb{N}, |x| < 1$.

7.28 Cho $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$, và $S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}...$
Chứng minh rằng

a) $E(x)E(y) = E(x+y)$,

b) $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$,

c) $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$,

d) $(C(x))^2 + (S(x))^2 = 1$.

7.29 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n . \sin \frac{x}{3^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đặng Đình Áng, *Nhập môn giải tích*, NXBGD, 1998.

2. Đặng Đình Áng, *Lý thuyết tích phân*, NXBGD, 1997.

3. Đặng Đình Áng, Chu Đức Khánh và Đinh Ngọc Thanh, *Vi tích phân hàm nhiều biến*, Tp. HCM, 2000.

4. Wilfred Kaplan, *Advanced calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1993.

5. Nguyễn Duy Tiến, *Giáo trình giải tích*, Hà Nội, 1999.

6. Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

7. Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích hàm nhiều biến*, NXB Đại học Quốc gia Tp.HCM, 2002.

GIÁO TRÌNH

GIẢI TÍCH 2

Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
KP 6, P. Linh Trung, Q. Thủ Đức, TPHCM
Số 3 Công trường Quốc tế, Q.3, TPHCM
ĐT: 38239172, 38239170
Fax: 38239172; Email: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

***

Chịu trách nhiệm xuất bản
TS HUỲNH BÁ LÂN

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm về tác quyền
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN – ĐHQG TPHCM

Biên tập
QUỐC AN

Sửa bản in
THÙY DƯƠNG

Trình bày bìa
LÊ NGUYỄN

In tái bản 500 cuốn, khổ 16 x 24 cm. Số đăng ký KHXB: 84-20011/CXB/424-04/ĐHQGTPHCM. Quyết định xuất bản số 254/QĐ-ĐHQGTPHCM/TB ngày 25/3/2011 của Nhà xuất bản ĐHQGTPHCM.

In tại xưởng in Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2011.

SÁCH TRỢ GIÁ
DÀNH CHO SV ĐHQG TP HCM
Giá : 15.000đ