ÔN TẬP GIẢI TÍCH 2A
HỌC KỲ 1 - NĂM HỌC 2024-2025

Bài 1. Cho ánh xạ $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$d(x,y) = \left| \sqrt{x^2+1}e^{2x} - \sqrt{y^2+1}e^{2y} \right|.$$

a) Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric.

b) Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric không đầy đủ.

Bài 2. Trong $\mathbb{R}^2$, cho

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

với $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$.

a) Chứng minh rằng $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$ là không gian metric đầy đủ.

b) Cho

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq u + v + e^{-u^2-v^2} \right\}.$$

Chứng minh D là tập compact trong $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$.

Bài 3. Cho $C([0,1])$ là không gian các hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục. Cho $f \in C([0,1])$. Đặt:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 x \cdot |f(x)| \mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in [0,1]} x \cdot |f(x)|.$$

a) Chứng minh $\| \cdot \|_1$ và $\| \cdot \|_2$ là các chuẩn trên $C([0,1])$.

b) Cho $T : (C([0,1]), \| \cdot \|_2) \to (C([0,1]), \| \cdot \|_1)$ thỏa $T(f) = f$., Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính và liên tục.

c) Cho $f_n(x) = ne^{-nx}$. Tính $\|f_n\|_1$ và $\|f_n\|_2$.

d) Hỏi f_n có hội tụ về 0 khi $n \to +\infty$ trong $(C([0,1]), \| \cdot \|_1)$ không? Giải thích?

e) Hỏi f_n có hội tụ về 0 khi $n \to +\infty$ trong $(C([0,1]), \| \cdot \|_2)$ không? Giải thích?

Bài 4. Cho dãy hàm $\{f_n\}$ thỏa

$$f_n(x) = \frac{1+3nx}{4+2nx}.$$

a) Chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ điểm và hội tụ đều trên $[1;\infty)$.

b) Chứng minh $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $[0;1]$.

Bài 5. Cho dãy hàm xác định bởi

$$f_n(x) = \frac{nx}{2020 + n^2x^2}, \quad x \in [0;1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ từng điểm.

b) Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đều.

Bài 6. Ký hiệu $C[0;1]$ là tập hợp tất cả các hàm số thực liên tục trên $[0;1]$. Cho ánh xạ $f : C[0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x(1), \quad x \in C[0;1].$$

Chứng minh rằng f không liên tục trên không gian metric $(C[0;1];d)$ với d được cho bởi

$$d(x;y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\mathrm{d}t, \quad x, y \in C[0;1].$$