Giải tích số cho phương trình vi phân

Phương pháp Euler và các mở rộng

1 Bài tập cơ bản

Bài tập 1. (a) **Sử dụng Công thức Taylor** để chứng minh rằng, với mọi $\gamma \geq -1$ và $m \geq 0$, ta có

$$0 \leq (1+\gamma)^m \leq \exp(m\gamma)\,.$$

(b) Cho $\gamma > -1$ và $M \geq 0$. Với $N \in \mathbb{N}$ cho trước, giả sử $\{e_n\}_{n=0}^{N}$ là dãy không âm thỏa

$$e_{n+1} \leq (1+\gamma)\, e_n + M \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Sử dụng câu (a), chứng minh rằng

$$e_n \leq \exp(n\gamma)\, e_0 + \frac{\exp(n\gamma) - 1}{\gamma} M \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Bài tập 2. Xét bài toán giá trị đầu sau đây

$$y'(t) = \lambda y(t) + (1-\lambda)\cos t - (1+\lambda)\sin t, \quad y(0) = 1. \tag{1}$$

Với $\lambda \in \mathbb{R}$ cho trước, hãy giải tìm nghiệm chính xác của bài toán trên. Nghiệm tìm được sẽ dùng để so sánh với các nghiệm xấp xỉ thu được từ các phương pháp số dưới đây.

2 Sự ổn định của các phương pháp số

Trong phần này, ta xét bài toán giá trị đầu sau đây

$$\delta'(t) = \lambda \delta(t)\,, \quad \delta(0) = 1, \tag{2}$$

với $\lambda \leq 0$.

Bài tập 3. Khảo sát sự ổn định của *Phương pháp Euler tổng quát* hay *Phương pháp θ-Euler*, tức là

$$Y_h(t_{n+1}) = Y_h(t_n) + h\left[(1-\theta)\, f(t_n, Y_h(t_n)) + f(t_{n+1}, Y_h(t_{n+1}))\right],$$

với $\theta \in [0, 1]$.

(a) Hãy viết công thức cụ thể của $Y_h(t_n)$ thu được từ Phương pháp θ-Euler khi áp dụng cho bài toán (2).

(b) Với giá trị nào của θ thì Phương pháp θ-Euler là *ổn định tuyệt đối*, tức là $\lim_{n\to\infty} Y_h(t_n) = 0$ với mọi giá trị $h > 0$.

(c) Trường hợp còn lại, tức là khi Phương pháp θ-Euler là *ổn định có điều kiện*, hãy xác định miền ổn định của phương pháp. Cụ thể, hãy xác định miền giá trị của h mà khi đó $\lim_{n\to\infty} Y_h(t_n) = 0$.

Bài tập 4. Khảo sát sự ổn định của *Phương pháp Euler cải tiến*

$$Y_h(t_{n+1}) = Y_h(t_n) + \frac{h}{2}\left[f(t_n, Y_h(t_n)) + f(t_{n+1}, Y_h(t_n) + hf(t_n, Y_h(t_n)))\right].$$

Có thể tham khảo các bước thực hiện trong Bài tập 3.

3 Sự hội tụ và đánh giá sai số của các phương pháp số

Bài tập 5. Xét bài toán giá trị đầu sau đây

$$y'(t) = y(t)\,, \quad y(0) = 1. \tag{3}$$

(a) Giải tìm nghiệm chính xác của bài toán trên.

(b) Chứng minh rằng phương pháp Euler áp dụng cho bài toán này có công thức tường minh như sau

$$Y_h(t_n) = (1+h)^{t_n/h} \qquad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Chứng minh rằng với mọi $\widehat{t} = t_n$ cố định, ta có

$$\lim_{h\to 0} Y_h\big(\widehat{t}\big) = e^{\widehat{t}}.$$

(d) Sử dụng công thức $a^b = e^{b\ln a}$ và $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$ để chứng minh rằng

$$y(t_n) - Y_h(t_n) = \frac{1}{2}ht_ne^{t_n} + \mathcal{O}\big(h^2\big) \qquad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}_0.$$

Điều này chỉ ra rằng khi h nhỏ thì sai số tỷ lệ với giá trị của h. Nhắc lại rằng ta sử dụng ký hiệu $y(\cdot)$ phân biệt nghiệm chính xác với nghiệm số $Y_h(\cdot)$.

Bài tập 6. Trình bày chi tiết đánh giá sai số của *Phương pháp Euler* áp dụng cho bài toán giá trị đầu

$$y'(t) = f(t, y(t))\,, \quad y(t_0) = y_0, \tag{4}$$

để giải tìm nghiệm xấp xỉ trên $[t_0, T_{\max}]$. Giả sử rằng

(i) Tồn tại $L > 0$ sao cho

$$|t(y) - t(z)| \leq L\,|y - z| \text{ với mọi } y, z \in \mathbb{R}.$$

(ii) $M_2 := \max_{t \in [t_0, T_{\max}]} |y''(t)| < +\infty.$

(iii) $Y_h(t_0) := y_0.$

Có thể tham khảo các bước sau đây.

(a) Với t cho trước, viết khai triển Taylor cấp 1 của y tại $t + h$ với $h > 0$.

(b) Chứng minh rằng, với mọi $n = 0, 1, \ldots, N-1$, ta có

$$y(t_{n+1}) - Y_h(t_{n+1}) = y(t_n) - Y_h(t_n) + h\,[f(t, y(t_n)) - f(t, Y_h(t_n))] + \frac{1}{2}h^2 y''(s_n)\,.$$

(c) Từ đây, sử dụng Bài tập 1 để chứng minh rằng

$$\max_{n=0,1,\cdots,N} |y(t_n) - Y_h(t_n)| = \mathcal{O}(h)\,,$$

tức là tồn tại một hằng số $C > 0$ không phụ thuộc vào h sao cho

$$\max_{n=0,1,\cdots,N} |y(t_n) - Y_h(t_n)| \leq Ch.$$

4 Thực hành lập trình

Bài tập 7. [MATLAB] So sánh sự ảnh hưởng của bước lưới $h > 0$ đối với phương pháp Euler. Xét bài toán giá trị đầu (1) và thực hiện các yêu cầu sau

(a) Sử dụng phương pháp Euler để giải nghiệm xấp xỉ của bài toán trong khoảng $[0, 10]$ với giá trị $\lambda \in \{\pm 1, \pm 5\}$ và $h \in \{0.5, 0.25, 0.125, 0.0625\}$.

(b) Ứng với mỗi giá trị của λ, vẽ trên cùng một đồ thị nghiệm chính xác của bài toán cùng với nghiệm xấp xỉ tìm được với các giá trị khác nhau của h.

(c) Tính sai số tương đối và sai số tuyệt đối của các kết quả trên. Ứng với mỗi giá trị của λ, vẽ trên cùng một đồ thị các sai số này.

Bài tập 8. [MATLAB] So sánh phương pháp Euler và các biến thể. Ta sẽ giải bài toán (1) với ba trường hợp tiêu biểu nhất của θ:

(i) $\theta = 0$: *Phương pháp Euler.*

(ii) $\theta = \frac{1}{2}$: *Phương pháp hình thang (Trapezoidal rule).*

(iii) $\theta = 1$: *Phương pháp Euler lùi (Backward Euler).*

Cụ thể

(a) Sử dụng ba giá trị của θ đã cho ở trên giải nghiệm xấp xỉ của bài toán trong khoảng $[0, 10]$ với giá trị $\lambda \in \{-1, -10, -50\}$ và $h \in \{0.5, 0.1, 0.01\}$.

(b) Ứng với mỗi giá trị của (λ, h), vẽ trên cùng một đồ thị nghiệm chính xác của bài toán cùng với nghiệm xấp xỉ tìm được với các phương pháp khác nhau.

(c) Tính sai số tương đối và sai số tuyệt đối của các kết quả trên. Ứng với mỗi giá trị của (λ, h), vẽ trên cùng một đồ thị các sai số này.

5 Bài tập nâng cao

Bài tập 9. Khảo sát sự ổn định của *Phương pháp trung điểm tổng quát*, được cho bởi công thức sau

$$Y_h(t_{n+1}) = Y_h(t_n) + hf\Big((1-\theta)\,t_n + \theta t_{n+1}, (1-\theta)\,Y_h(t_n) + \theta Y_h(t_{n+1})\Big),$$

với $\theta \in [0, 1]$. Có thể tham khảo các bước thực hiện trong Bài tập 3.

Bài tập 10. (Có thể bỏ qua Bài tập 5 nếu thực hiện bài tập này). Thực hiện các câu hỏi trong Bài tập 5 nhưng thay bài toán (3) bởi

$$y'(t) = cy(t)\,, \quad y(0) = 1,$$

với $c \neq 0$ là một hằng số cho trước.

Bài tập 11. (Có thể bỏ qua Bài tập 6 nếu thực hiện bài tập này). Trình bày chi tiết đánh giá sai số của *Phương pháp θ - Euler*, giả sử thêm rằng

$$M_3 := \max_{t \in [t_0, T_{\max}]} |y'''(t)| < +\infty.$$

Từ kết quả của bài tập này, có thể chỉ ra rằng vì sao lựa chọn $\theta = \frac{1}{2}$ có thể giúp cải thiện bậc hội tụ từ $\mathcal{O}(h)$ lên $\mathcal{O}(h^2)$. Lưu ý rằng trong trường hợp này ta cần thêm khai triển Taylor cấp 1 của y tại $t - h$ với $h > 0$.

Bài tập 12. [MATLAB] Thực hiện yêu cầu so sánh phương pháp Euler và các biến thể ứng với các giá trị khác nhau của θ giống như trong Bài tập 8 cho bài toán giá trị đầu sau đây

$$y'(t) = -y(t) + t^{0.01}\,(1.1 + t)\,, \quad y(0) = 0.$$

Ứng với mỗi bước lưới $h \in \{0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625\}$, vẽ các kết quả thu được. Biết rằng $y(t) = t^{1.1}$ là nghiệm chính xác của bài toán.