Chương 3

VÀNH ĐA THỨC

3.1. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + 14 \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ có bốn nghiệm phân biệt trong $\mathbb{Z}_{15}$.

3.2. Xác định các số thực a, b, c sao cho đa thức $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x + 2$ và chia cho $x^2 - 1$ thì dư x.

3.3. Cho $f \in \mathbb{R}[x]$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng nếu $(x - 1)|f(x^n)$ thì $(x^n - 1)|f(x^n)$.

b) Chứng minh rằng nếu $a \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(x - a)^m|f(x^n)$ thì $(x^n - a^n)^m|f(x^n)$.

c) Giả sử $(x^2 + x + 1)|f(x)$ và có $g, h \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $f(x) = g(x^3) + xh(x^3)$. Chứng minh rằng $(x - 1)|g(x)$ và $(x - 1)|h(x)$.

3.4. Cho F là một trường và K là một trường con của F. Chứng minh rằng với $f, g \in K[x]$, f là ước của g trong $K[x]$ khi và chỉ khi f là ước của g trong $F[x]$.

3.5. Chứng minh rằng trong vành $\mathbb{C}[x]$, $f(x)|g(x)$ khi và chỉ khi mọi nghiệm của $f(x)$ đều là nghiệm của $g(x)$ và mọi nghiệm bội cấp k của $f(x)$ đều là nghiệm bội cấp l với $l \geq k$ của $g(x)$.

3.6. Trong các trường hợp sau hãy chứng minh $f|g$ trong $\mathbb{Q}[x]$.

a) $f(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ và $g(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$.

b) $f(x) = x^2 - x + 1$ và $g(x) = (x - 1)^{n+2} + x^{2n+1}$.

c) $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$.
trong đó k, m, n là các số nguyên dương.

3.7. Tìm điều kiện của $k, m, n \in \mathbb{N}$ để $f|g$ trong $\mathbb{Q}[x]$ cho mỗi trường hợp sau:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = x^{2n} + x^n + 1$.

b) $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = (x + 1)^n + x^n + 1$.

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ và $g(x) = (x - 1)^n + x^n + 1$.

d) $f(x) = x^2 - x + 1$ và $g(x) = x^{3k} - x^{3m+1} + x^{3n+2}$.

3.8. * Với mỗi số nguyên dương k, đặt $f_k(x) = x^k - 1$ là đa thức với hệ số hữu tỉ. Chứng minh rằng với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$,

a) $f_m | f_n$ khi và chỉ khi $m|n$.

b) $(f_m, f_n) = f_d$ với $d = (m, n)$.

3.9. Cho F là trường $\mathbb{Q}$ hay trường $\mathbb{Z}_5$ và $f, g \in F[x]$. Tìm $h = (f, g)$; $k = [f, g]$ và $u, v \in F[x]$ thỏa $h = uf + vg$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ và $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

c) $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ và $g(x) = 4x^4 + x^2 + 3x + 1$.

3.10. Trong các trường hợp sau hãy tìm khai triển Taylor của đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ tại x_0. Xét xem x_0 là nghiệm bội cấp mấy của f và tìm các đạo hàm $f^{(i)}(x_0)$ với $1 \leq i \leq 6$.

a) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 16x + 12$ và $x_0 = 2$.

b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 9$ và $x_0 = 3$.

c) $f(x) = x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 15x^3 + 18x^2 - 20x + 8$ và $x_0 = 2$.

d) $f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ và $x_0 = 1/2$.

3.11. Trong các trường hợp sau hãy tìm tất cả các đa thức f thỏa điều kiện đã cho:

a) $f \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $f(2) = 4$; $f(3) = 6$; $f(4) = 8$.

b) $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ thỏa $f(\overline{2}) = \overline{1}$; $f(-\overline{1}) = \overline{3}$; $f(\overline{3}) = \overline{2}$.

c) $f \in \mathbb{Z}_{101}[x]$ thỏa $f(\overline{2}) = \overline{30}$; $f(\overline{5}) = \overline{21}$; $f(\overline{3}) = \overline{-13}$.

3.12. Cho F là một trường và $a, b \in F$; $a \neq 0$. Chứng minh rằng $f(x) \in F[x]$ bất khả qui khi và chỉ khi $f(ax + b)$ bất khả qui.

3.13. * Cho $a_1, ..., a_n$ là các số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng các đa thức sau bất khả qui trên $\mathbb{Q}$.

a) $f(x) = (x - a_1)...(x - a_n) - 1$.

b) $g(x) = (x - a_1)^2...(x - a_n)^2 + 1$.

3.14. Trong các trường hợp sau hãy phân tích f thành tích các đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Q}$, trên $\mathbb{R}$ và trên $\mathbb{C}$:

a) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 15x - 18$.

b) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 14x^2 - 18x - 36$.

c) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$.

d) $f(x) = 16x^6 - 36x^5 - 84x^4 + 99x^3 + 201x^2 + 45x - 25$.

e) $f(x) = 9x^6 - 30x^5 + 49x^4 - 28x^3 - 4x^2 + 16x + 4$.

f) $f(x) = -4x^6 - 23x^5 - 63x^4 - 85x^3 - 57x^2 - 8x - 16$.

3.15. Chứng minh rằng các đa thức sau bất khả qui trên $\mathbb{Q}$.

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 3$.

b) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

c) $x^{p-1} + ... + x + 1$ với p là số nguyên tố dương.

d) $5x^3 + 6x^2 + 5x + 25$.

e) $7x^3 + 6x^2 + 11x + 11$.

f) $x^3 - 3n^2x + n^3$ với n nguyên dương.

g) $3x^4 + 5x^3 - 4x + 1$.

h) $x^4 - 9x^3 + 6x - 1$.

i) $x^4 + 8x^3 + x^2 + 2x + 5$.

3.16. Giải các phương trình bậc 3 sau trong $\mathbb{C}$:

a) $4x^3 - 36x^2 + 84x - 20 = 0$.

b) $x^3 - x - 6 = 0$.

c) $x^3 + 18x + 15 = 0$.

d) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.

3.17. Chứng minh rằng nếu $x_1,\ x_2,\ x_3$ là các nghiệm phức của phương trình $x^3 + px + q = 0$ thì

$$(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

3.18. Giải các phương trình bậc 4 sau trong $\mathbb{C}$:

a) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$.

b) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

c) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$.

d) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$.

3.19. * Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên có $f(0)$ và $f(1)$ đều lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

3.20. Chứng minh rằng đa thức $x^4 + px^2 + q$ bất khả qui trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi các số $p^2 - 4q;\ 2\sqrt{q} - p$ không là bình phương của các số hữu tỉ.