ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

Đề thi Đại số đại cương.

Bộ đề này được thực hiện dựa trên chương trình hợp tác giữa tổ chức EXP và Toantin.org, cả hai đều thuộc khoa Toán – Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp.HCM.

CHUYÊN SAN EXP	Diễn Đàn Sinh Viên Khoa Toán-Tin Học ĐH Khoa Học Tự Nhiên TP.HCM ToAnTin.ORG
Tổ chức EXP	**Toantin.org**

Mọi góp ý về đề thi xin gửi về email:

thienquocdongphuc@gmail.com

Cảm ơn các bạn.

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2005 – 2006

Câu 1: Cho $f: G \to G'$ và $g: G' \to G$ là đồng cấu nhóm. Đặt:

$$H = \{x \in G | f(x) = g(x)\}$$

Chứng minh H là nhóm con của G.

Câu 2: Cho $(G; \cdot)$ Là một nhóm; $H = \langle x \rangle$ là nhóm con cyclic của G và H chuẩn tắc trong G.

a) Chứng minh rằng $(x^{-1} \cdot y \cdot x)^k = (x^{-1} \cdot y^k \cdot x)$ với mọi $x;\ y \in G$ và mọi $k \in \mathbb{Z}$.

b) Chứng minh rằng nhóm con cyclic $K = \langle x^k \rangle$ chuẩn tắc trong G với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Giải phương trình sau trong $\mathbb{Z}_{130}$:

$$\overline{63}\bar{x} + \overline{45} = \overline{36}$$

Câu 4: Chứng minh rằng đa thức sau bất khả qui trên $\mathbb{Q}$:

$$f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 7$$

Câu 5: Cho R là vành có hơn một phần tử sao cho với mỗi phần tử x khác 0 của R tồn tại duy nhất phần tử y của R để $x \cdot y \cdot x = x$. Chứng minh rằng R không có ước của 0.

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2007 – 2008

Câu 1: Với mỗi $x;\ y$ thuộc $\mathbb{R}$, đặt:

$$x * y := \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 2\right)^3$$

a) Chứng minh $(\mathbb{R}; *)$ là một nhóm giao hoán.

b) Xác định tất cả các phần tử có cấp hữu hạn của $(\mathbb{R}; *)$.

Câu 2: Trong vành $R = M(2;\ \mathbb{R})$, xét:

$$I := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a;\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Chứng minh I là vành con của R.

b) I có là ideal của R không? I có là ideal phải/trái của R không?

Câu 3: Xác định tất cả các số tự nhiên n sao cho đa thức $f(x) = x^{2n} + x^{n+1} + x - 1$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - x + 1$ trong $\mathbb{Q}[x]$.

Câu 4: Cho đa thức với hệ số nguyên:

$$f(x) = x^5 + x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 42x + 8$$

a) Chứng minh $f(x)$ có duy nhất một nghiệm hữu tỉ x_0.

b) Đặt $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$. Viết khai triển Taylor của $g(x)$ tại $x_1 = 2$.

c) Phân tích $f(x)$ thành tích các đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Q}$.

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2009 – 2010

Câu 1: Chứng minh rằng:

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 2y & x \end{bmatrix} \middle| x;\ y \in \mathbb{Q};\ x^2 + y^2 > 0 \right\}$$

là một nhóm con của nhóm $(GL(2;\ \mathbb{Q});\ .)$.

Câu 2: Xét đồng cấu nhóm cộng $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$

a) Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $f(1) = nf(1/n)$.

b) Suy ra $f(1) = 0$ và f là đồng cấu tầm thường.

Câu 3: Giải phương trình $\overline{78}x - \overline{13} = \overline{35}$ trong $\mathbb{Z}_{666}$.

Câu 4: Tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức sau trên trường $\mathbb{Q}$

$$f(x) := 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$$
$$g(x) := 2x^3 - x^2 - 5x + 4$$

Câu 5: Trong trường số phức $\mathbb{C}$ xét các trường con:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} | a;\ b \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Q}(i) := \{a + bi | a;\ b \in \mathbb{Q}\}$$

Chứng minh rằng $\mathbb{Q}(i)$ và $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ không đẳng cấu với nhau.

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2010 – 2011

ĐỀ THI GIỮA KÌ

Câu 1: Cho $G = \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$. Định nghĩa phép toán trên G bởi $x * y := x^{\ln(y)}$ với mọi $x;\ y \in G$. Chứng minh G là nhóm giao hoán.

Câu 2: Trong nhóm hoán vị S_9; xét các phần tử sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 4 & 1 & 8 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix};\ \tau = (1\quad 3)(4\quad 7\quad 8)(1\quad 3\quad 5\quad 9)$$

a) Viết σ và τ dưới dạng tích các chu trình rời nhau và dưới dạng tích các chuyển vị.

b) Tính cấp của các phần tử $\sigma\tau$; $\sigma^{-1}\tau$ và $\tau\sigma^2$.

Câu 3: Chứng minh rằng nhóm thương $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ đẳng cấu với nhóm nhân U các số phức có module bằng 1.

Câu 4: Cho $G = S_3$ là nhóm hoán vị bậc 3 với phần tử đơn vị là e. Đặt:

$$H := \{e;\ (1\quad 2\quad 3);\ (1\quad 3\quad 2)\}$$

a) Chứng minh H là nhóm con chuẩn tắc của G.

b) Tìm nhóm thương G/H.

c) G/H có giao hoán không? Vì sao?

ĐỀ THI CUỐI KÌ

Câu 1: Cho nhóm $(G;\cdot)$ và $a \in G$. Trên G ta định nghĩa phép toán $*$ như sau:

$$x * y = x \cdot a \cdot y, \qquad \forall x;\ y \in G$$

Chứng minh $(G;*)$ cũng là nhóm.

Câu 2: Giải phương trình $95\bar{x} - \overline{13} = \bar{2}$ trong $\mathbb{Z}_{335}$.

Câu 3: Tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức sau trên trường $\mathbb{Q}$.

$$f(x) := x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$$
$$g(x) := x^4 + 2x^3 + x + 2$$

Câu 4: Chứng minh rằng hai trường sau là đẳng cấu:

$$F := \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \middle| a;\ b \in \mathbb{Q}\right\}$$
$$\mathbb{Q}\sqrt{2} := \left\{a + b\sqrt{2} \middle| a;\ b \in \mathbb{Q}\right\}$$

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2011 – 2012

ĐỀ THI GIỮA KÌ (CHÍNH QUY)

Câu 1: Cho n là một số nguyên dương lẻ. Với mỗi $x; y \in \mathbb{R}$; đặt:

$$x * y := \sqrt[n]{x^n + y^n + 2^n}$$

a) Chứng minh $(R; *)$ là một nhóm giao hoán.

b) Trong $(\mathbb{R}; *)$; tìm tất cả các phần tử có cấp là ước số của 8.

Câu 2: Liệt kê tất cả các phần tử sinh của nhóm $\mathbb{Z}_{18}$.

Câu 3: Cho G là một nhóm Abel. Chứng minh rằng tập hợp H gồm tất cả các phần tử có cấp hữu hạn của G là một nhóm con của G.

ĐỀ THI GIỮA KÌ (CỬ NHÂN TÀI NĂNG)

Câu 1: Cho $G = \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$. Định nghĩa phép toán trên G bởi $x * y := x^{\ln(y)}$ với mọi $x;\ y \in G$. Chứng minh G là nhóm giao hoán.

Câu 2: Xét nhóm hoán vị S_8.

a) Tính cấp của phần tử $\sigma = (1 \quad 3 \quad 4)(2 \quad 3 \quad 5 \quad 7)(1 \quad 8 \quad 4 \quad 6)$

b) Tồn tại hay không một phần tử cấp 14 trong S_8? Nếu tồn tại phần tử như vậy thì đó là hoán vị chẵn hay hoán vị lẻ.

c) Cùng một câu hỏi như câu b) đối với những phần tử cấp 15.

Câu 3: Chứng minh rằng nhóm cộng $\mathbb{Z}_n$ có đúng n tự đồng cấu.

Câu 4: Chứng minh rằng nếu G là một nhóm có không quá 5 phần tử thì G là nhóm giao hoán.

ĐỀ THI CUỐI KÌ

Câu 1: Cho $G = \langle x \rangle$ là nhóm nhân cyclic cấp n và k là một số nguyên dương.

a) Chứng minh $\langle x^k \rangle = \langle x^{(n;\, k)} \rangle$; trong đó $(n;\ k)$ là ước số chung lớn nhất của n và k.

b) Giả sử k là một ước số của n. Chứng minh rằng x^k có cấp n/k và trong G tồn tại duy nhất một nhóm con cấp k.

Câu 2: Trong vành các ma trận vuông cấp 2 với hệ số thực $R = M(2;\ \mathbb{R})$; cho

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a;\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Chứng minh I là một vành con của R.

b) I có là ideal của R không? I có là ideal phải/trái của R không?

Câu 3:

a) Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ định bởi $f(\bar{x}) = 9\bar{x}$ là môt đẳng cấu vành và liệt kê các phần tử của $\mathrm{im}(f)$; $\ker(f)$.

b) Xét vành $\mathbb{Z}_n$ các số nguyên đồng dư modulo n. Tìm điều kiện của $k \in \mathbb{N}$ sao cho ánh xạ $f: \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ định bởi $f(\bar{x}) = k\bar{x}$ là một đồng cấu vành.

Câu 4: Cho đa thức với hệ số nguyên:

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 6x + 1$$

a) Viết khai triển Taylor của $f(x)$ tại $x_0 = -1$.

b) Khảo sát tính bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ của $f(x)$.

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2012 – 2013

Câu 1: Cho G là tập các số thực dương khác 1. Đặt
$$x * y := y^{-\ln(x)}, \qquad \forall x;\ y \in G$$
a) Chứng minh rằng $(G; *)$ là một nhóm giao hoán.
b) Tìm tất cả các phần tử có cấp hữu hạn của nhóm G.

Câu 2: Cho
$$R := \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle|\ a;\ b;\ c;\ d \in \mathbb{Q} \right\}$$
$$I := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle|\ b;\ c;\ d \in \mathbb{Q} \right\}$$
Chứng minh rằng:
a) R là một vành con của vành ma trận $M_3(\mathbb{Q})$.
b) I là một ideal của R nhưng không là ideal của $M_3(\mathbb{Q})$.
c) $R/I \cong \mathbb{Q}$.

Câu 3: Giải các phương trình sau:
a) $23\overline{x} - \overline{45} = \overline{75}$ trong $\mathbb{Z}_{100}$.
b) $46\overline{x} - \overline{90} = \overline{150}$ trong $\mathbb{Z}_{200}$.

Câu 4: Cho đa thức với hệ số nguyên:
$$f(x) = x^5 + 8x^4 + 22x^3 + 22x^2 - x + 4$$
a) Viết khai triển Taylor của $f(x)$ tại $x_0 = -1$.
b) $f(x)$ có bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ hay không? Vì sao?

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2013 – 2014

Câu 1: Cho G là tập các số thực khác -2. Với mỗi $x;\ y \in G$, đặt:

$$x * y := 2x + 2y + xy + 2$$

Chứng minh:

a) $*$ là một phép toán trên G.

b) $(G; *)$ là một nhóm giao hoán.

c) Tìm tất cả các phần tử có cấp 2 trong nhóm $(G; *)$.

Câu 2: Xét nhóm hoán vị S_5 và $A = \{(1\quad 2);\ (3\quad 4\quad 5)\} \subset S_5$.

a) Liệt kê các phần tử của nhóm con $H = \langle A \rangle$ và xác định cấp của H.

b) H có chuẩn tắc trong S_5 không? Vì sao?

Câu 3: Xét trường số thực $\mathbb{R}$ và vành tích trực tiếp:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x;\ y) | x;\ y \in \mathbb{R}\}$$

Đặt:

$$I := \{(x;\ y) | x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{Q}\}$$

$$J := \{(x;\ 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

a) Chứng minh I là một vành con nhưng không là ideal của $\mathbb{R}^2$.

b) Chứng minh J là một ideal của $\mathbb{R}^2$.

c) Tìm tất cả các ideal của $\mathbb{R}^2$.

Câu 4: Trong $\mathbb{Q}[x]$, cho đa thức hệ số nguyên:

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 11x + 4$$

a) Viết khai triển Taylor của $f(x)$ tại $x_0 = -2$.

b) $f(x)$ có bất khả qui trên $\mathbb{Q}$ không? Vì sao?

c) Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $g(x) \in \mathbb{Q}[1];\ 1 \le \deg(g) \le 3$ sao cho $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

ĐỀ THI ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG 2014 – 2015

Câu 1: Cho n là một số nguyên dương và phép toán $*$ trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực định bởi:

$$x * y := \sqrt[n]{x^n + y^n + 2^n}$$

a) Chứng minh phép toán $*$ giao hoán và kết hợp trên $\mathbb{R}$.

b) Xác định n để $(\mathbb{R}; *)$ là một nhóm.

Câu 2: Cho nhóm cộng $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ và n là một số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng phần tử $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$ có cấp n trong G.

b) Chứng minh rằng trong G tồn tại duy nhất một nhóm con cylic cấp n.

Câu 3: Xét vành $\mathbb{Z}_{10}$ và ánh xạ $f: \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ định bởi $f(\bar{a}) = 6\bar{a}$.

a) Chứng minh f là một đồng cấu vành.

b) Chứng minh $\mathrm{im}(f) = \langle \bar{2} \rangle$ và $\ker(f) = \langle \bar{5} \rangle$.

Câu 4: Cho đa thức với hệ số nguyên:

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 14x^2 + 14x - 20$$

a) Viết khai triển Taylor của $f(x)$ tại $x_0 = 2$.

b) Phân tích $f(x)$ thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.