Giải tích số cho phương trình vi phân

Lê Ánh Hạ   Nguyễn Đăng Khoa

Mục tiêu môn học

- Cung cấp các phương pháp số để giải phương trình vi phân.
- Áp dụng các phương pháp số để tìm nghiệm xấp xỉ.
- Đánh giá sự hội tụ và sai số của các phương pháp.
- Lập trình biểu diễn nghiệm trên máy tính bằng Python, Matlab.

Tài liệu môn học

- **Kendall Atkinson, Weimin Han, David Stewart (2009):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons.
- **John S. Butler (2021):** *Numerical Methods for Differential Equations with Python*.
- **Qingkai Kong, Timmy Siauw, Alexandre Bayen (2020):** *Python Programming and Numerical Methods*, Academic Press.
- **Endre Süli (2022):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*.

1. Các biến thể của phương pháp Euler
   - Tính ổn định của phương pháp số
   - Phương pháp Euler lùi
   - Phương pháp Euler tổng quát
   - Phương pháp dựa trên Quy tắc Hình thang

Xét bài toán tổng quát

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Câu hỏi ổn định cho bài toán này quá phức tạp.

Thay vào đó, ta xét tính ổn định của phương pháp số cho bài toán mô hình đơn giản hơn sau:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t) + g(t), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Giả sử $y(t)$ là nghiệm của phương trình (1.2), và $y_\epsilon(t)$ là nghiệm với dữ liệu ban đầu bị nhiễu $y_0 + \epsilon$:

$$y_\epsilon'(t) = \lambda y_\epsilon(t) + g(t), \qquad y_\epsilon(0) = y_0 + \epsilon.$$

Đặt $\delta_\epsilon(t)$ là sự sai khác của hai nghiệm trên:

$$\delta_\epsilon(t) = y_\epsilon(t) - y(t).$$

Bằng cách trừ phương trình (1.2) từ phương trình của $y_\epsilon(t)$, ta thu được:

$$\delta_\epsilon'(t) = \lambda \delta_\epsilon(t), \qquad \delta_\epsilon(0) = \epsilon.$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$\delta_\epsilon(t) = \epsilon e^{\lambda t}.$$

Xét hàm ${}^{\delta_\epsilon(t)}/_{\epsilon}$ thay vì $\delta_\epsilon\left(t\right)$, ta thu được bài toán mô hình sau đây, thường được sử dụng để kiểm tra sự hiệu quả của các phương pháp số:

$$\begin{aligned} &\delta'\left(t\right) = \lambda\delta\left(t\right), && t > 0, \\ &\delta\left(0\right) = 1. && \end{aligned} \tag{1.3}$$

Trong phần tiếp theo, khi ta đề cập đến bài toán mô hình (1.3), ta luôn giả sử rằng hằng số $\lambda < 0$. Nghiệm chính xác của bài toán (1.3) là:

$$\delta\left(t\right) = e^{\lambda t}, \tag{1.4}$$

mà nghiệm này giảm theo hàm mũ khi $t \to \infty$ vì tham số λ ta đang xét nhận giá trị âm.

Tính chất ổn định mà ta mong muốn đối với một phương pháp số là khi áp dụng nó cho (1.3), nghiệm số thỏa mãn

$$\delta_h(t_n) \to 0 \quad \text{khi} \quad t_n \to \infty \tag{1.5}$$

với mọi lựa chọn của bước h. Tập hợp các giá trị $h\lambda$ mà tại đó $\delta_h(t_n) \to 0$ khi $n \to \infty$, được gọi là *vùng ổn định tuyệt đối* của phương pháp số. Việc sử dụng $h\lambda$ xuất hiện một cách tự nhiên từ phương pháp số, như ta sẽ thấy.

Xét phương pháp Euler áp dụng cho bài toán mẫu (1.3). Ta có

$$D_{n+1} = D_n + h\lambda D_n = (1 + h\lambda)\, D_n, \quad n \geq 0, \quad D_0 = 1.$$

Bằng lập luận quy nạp, ta chứng minh được

$$D_n = (1 + h\lambda)^n\,, \quad n \geq 0. \tag{1.6}$$

Với một điểm nút cố định $\bar{t} := t_n = nh$, khi $n \to \infty$, ta có

$$D_n = \left(1 + \frac{\lambda \bar{t}}{n}\right)^n \to e^{\lambda \bar{t}}.$$

Giới hạn này thu được bằng cách sử dụng quy tắc L'Hopital. Điều này xác nhận tính hội tụ của phương pháp Euler. Ta nhấn mạnh rằng đây là một tính chất tiệm cận theo nghĩa nó đúng khi $h \to 0$.

Từ công thức (1.6), ta thấy rằng $D_n \to 0$ khi $n \to \infty$ khi và chỉ khi

$$|1 + h\lambda| < 1.$$

Với λ là số thực âm, điều kiện trở thành

$$-2 < h\lambda < 0. \tag{4.7}$$

Điều này dẫn đến một khoảng điều kiện cho h mà ta có thể áp dụng phương pháp Euler, cụ thể là $0 < h < -2/\lambda$.

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân lùi

Giờ ta xét cách xấp xỉ đạo hàm sử dụng công thức sai phân lùi:

$$y'(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}. \tag{1.7}$$

Với $n \geq 1$, thay $t = t_n$ vào công thức (1.7), ta được:

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h}.$$

Sử dụng phương trình $y'(t) = f(t, y(t))$, ta viết lại công thức trên thành

$$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + hf(t_n, y(t_n)). \tag{1.8}$$

Phương pháp Euler lùi

Phương pháp Euler lùi

Phương pháp Euler lùi được định nghĩa bằng cách tính chính xác theo công thức (1.8):

$$Y_{n+1} = Y_n + hf\left(t_{n+1}, Y_{n+1}\right), \qquad \text{với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{1.9}$$

Như mọi khi, ta chọn $Y_0 = y_0$ hoặc một xấp xỉ gần với nó $Y_0 \approx y_0$.

Để phân biệt, từ đây khi nhắc đến phương pháp Euler thông thường đã xét đầu tiên, ta sẽ gọi là *phương pháp Euler tiến*.

Đầu tiên, ta cũng thử với trường hợp bài toán mô hình (1.3)

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= \lambda\delta(t), \qquad\qquad t > 0, \\ \delta(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + h\lambda D_{n+1}, \\ D_{n+1} &= (1 - h\lambda)^{-1} D_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Sử dụng điều này cùng với $y(0) = 1$, ta thu được

$$D_n = (1 - h\lambda)^{-n}. \tag{1.10}$$

Với bất kỳ bước $h > 0$, ta có $|1 - h\lambda| > 1$ do đó $D_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Điểm khác biệt chính giữa hai phương pháp là đối với phương pháp Euler lùi, tại mỗi bước thời gian, ta cần giải phương trình

$$Y_{n+1} = Y_n + hf\left(t_{n+1}, Y_{n+1}\right) \tag{1.11}$$

đối với Y_{n+1}.

Định nghĩa 1.1

1. Các phương pháp trong đó Y_{n+1} phải được tìm bằng cách giải bài toán tìm nghiệm được gọi là *phương pháp ẩn (implicit method)*, vì Y_{n+1} được xác định thông qua việc giải một phương trình.
2. Ngược lại, các phương pháp cho Y_{n+1} trực tiếp được gọi là *phương pháp tường minh (explicit method)*.

Phương pháp Euler tiến là phương pháp tường minh, trong khi *phương pháp Euler lùi* là phương pháp ẩn.

Phương pháp Euler tổng quát (phương pháp θ)

Cho $Y_0 = y_0$ hoặc một xấp xỉ gần với nó $Y_0 \approx y_0$. Với tham số $\theta \in [0, 1]$, phương pháp Euler tổng quát được định nghĩa bằng cách tính:

$$Y_{n+1} = Y_n + h\left[(1-\theta) f(t_n, Y_n) + \theta f(t_{n+1}, Y_{n+1})\right]. \tag{1.12}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.
Phương pháp này dựa vào một tham số $\theta \in [0, 1]$ nên đôi khi còn được gọi là phương pháp θ.

Phương pháp Euler tiến và *Euler lùi* là trường hợp đặc biệt của *phương pháp Euler tổng quát* lần lượt tương ứng với giá trị $\theta = 0$ và $\theta = 1$.

Sai số của phương pháp Euler tổng quát

Bằng các kỹ thuật tương tự, ta có đánh giá sai số như sau

$$\max_{0\le n\le N} |\mathsf{E}_n| \le |\mathsf{E}_0| \exp\left(\frac{(T_{\max}-t_0)\,L}{1-\theta Lh}\right) + \frac{h}{L}\left\{\left|\frac{1}{2}-\theta\right| M_2 + \frac{1}{3}hM_3\right\}\left[\exp\left(\frac{(T_{\max}-t_0)\,L}{1-\theta Lh}\right)-1\right],$$

với $M_2 := \max_{t\in[t_0,T_{\max}]} |y''(t)|$ và $M_3 := \max_{t\in[t_0,T_{\max}]} |y'''(t)|$.

Chú ý rằng, khi $|\mathsf{E}_0|$, tức là khi $Y_0 = y_0$, với cách chọn

$$\theta = \frac{1}{2}$$

thì ta có bậc hội tụ của sai số là bậc 2, tức là $\max_{0\le n\le N} |\mathsf{E}_n| = \mathcal{O}\left(h^2\right)$.

Phương pháp Hình thang

Trường hợp $\theta = 1/2$ ở trên có công thức cụ thể là

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(t_n, Y_n\right) + f\left(t_{n+1}, Y_{n+1}\right)\right]. \tag{1.13}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Phương pháp trên còn được gọi là *Phương pháp Hình thang* vì nó dựa trên việc xấp xỉ tích phân bằng *Quy tắc hình thang*.

Xây dựng phương pháp số bằng xấp xỉ tích phân

Bằng cách lấy tích phân phương trình $y'(t) = f(t, y(t))$ trên đoạn $[t_n, t_{n+1}]$, ta thu được

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.14}$$

Từ đây, ta có một cách giải thích khác cho việc xây dựng các phương pháp số: thông qua việc xấp xỉ tích phân

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

Chẳng hạn

- Phương pháp Euler có được bằng cách sử dụng giá trị hàm số tại điểm biên trái để xấp xỉ tích phân

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\tau, y\left(\tau\right)\right) d\tau &\approx f\left(t_n, f\left(t_n\right)\right)\left(t_{n+1} - t_n\right)\\ &= hf\left(t_n, f\left(t_n\right)\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

- Phương pháp Euler lùi có được bằng cách sử dụng giá trị hàm số tại điểm biên trái để xấp xỉ tích phân

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\tau, y\left(\tau\right)\right) d\tau &\approx f\left(t_{n+1}, f\left(t_{n+1}\right)\right)\left(t_{n+1} - t_n\right)\\ &= hf\left(t_{n+1}, f\left(t_{n+1}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Với việc xấp xỉ tích phân sử dụng *Quy tắc hình thang*

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\tau, y\left(\tau\right)\right) d\tau \approx \frac{h}{2}\left(f\left(t_n, f\left(t_n\right)\right) + f\left(t_{n+1}, f\left(t_{n+1}\right)\right)\right) \qquad (1.17)$$

ta thu được công thức (1.13).