**Nguyễn Thành Long**

Khoa Toán-tin học,
Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh

# GIẢI TÍCH 1A
# VI TÍCH PHÂN 1A

TP. Hồ Chí Minh 2021

# Mục lục


**Mục lục** **1**

**1 TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ** **3**
- 1.1 **Tập hợp** . . . 3
- 1.2 **Quan hệ trong một tập** . . . 5
- 1.3 **Ánh xạ** . . . 8
- 1.4 **Bài tập** . . . 11

**2 TẬP CÁC SỐ (THỰC, TỰ NHIÊN, NGUYÊN, HỮU TỈ, VÔ TỈ)** **13**
- 2.1 **Quan hệ thứ tự** . . . 13
- 2.2 **Chặn trên nhỏ nhất (sup) và chặn dưới lớn nhất (inf)** . . . 13
- 2.3 **Định nghĩa tập số thực** . . . 14
- 2.4 **Tập các số nguyên, tự nhiên, hữu tỉ, vô tỉ** . . . 16
- 2.5 **Bài tập bổ sung** . . . 21

**3 DÃY SỐ THỰC** **23**
- 3.1 **Các định nghĩa** . . . 23
- 3.2 **Các tính chất và các phép tính về giới hạn của dãy số hội tụ** . . . 24
- 3.3 **Dãy con, dãy Cauchy** . . . 28
- 3.4 **Dãy số tiến ra vô cùng** . . . 31
- 3.5 **Giới hạn trên (limsup) và giới hạn dưới (liminf)** . . . 32
- 3.6 **Bài tập bổ sung** . . . 39

**4 GIỚI HẠN HÀM SỐ** **41**
- 4.1 **Điểm tụ** . . . 41
- 4.2 **Giới hạn hàm số tại điểm tụ** . . . 42
- 4.3 **Giới hạn hàm số tại vô cùng** . . . 45
  - 4.3.1 **Giới hạn hàm số tại** $+\infty$. . . . 45
  - 4.3.2 **Giới hạn hàm số tại** $-\infty$. . . . 46
- 4.4 **Giới hạn vô cùng tại điểm tụ** . . . 49
  - 4.4.1 **Giới hạn vô cùng tại điểm tụ** . . . 49
  - 4.4.2 **Giới hạn vô cùng bên phải tại điểm tụ** . . . 49
  - 4.4.3 **Giới hạn vô cùng bên trái tại điểm tụ** . . . 49
- 4.5 **Giới hạn vô cùng tại vô cùng** . . . 50
  - 4.5.1 **Định nghĩa giới hạn vô cùng tại** $+\infty$. . . . 50
  - 4.5.2 **Định nghĩa giới hạn vô cùng tại** $-\infty$. . . . 50
- 4.6 **Tổng kết các loại giới hạn (15 loại)** . . . 51
- 4.7 **Một số hàm sơ cấp** . . . 51
- 4.8 **Bài tập bổ sung** . . . 52

**5 HÀM SỐ THỰC LIÊN TỤC** **55**
5.1 **Các định nghĩa** . . . . . 55
5.1.1 **Điểm tụ, điểm cô lập** . . . . . 55
5.1.2 **Hàm số liên tục tại một điểm** . . . . . 55
5.1.3 **Hàm số liên tục trong khoảng, trên đoạn, trên một tập** . . . . . 56
5.2 **Các phép toán trên các hàm số liên tục tại một điểm** . . . . . 56
5.3 **Điểm gián đoạn. Phân loại** . . . . . 56
5.4 **Tính liên tục của các hàm sơ cấp** . . . . . 57
5.5 **Tính chất của hàm liên tục trên một đoạn** . . . . . 58
5.6 **Hàm số liên tục đều** . . . . . 61
5.7 **Bài tập bổ sung** . . . . . 63

**6 ĐẠO HÀM** **69**
6.1 **Đạo hàm và các tính chất cơ bản của đạo hàm** . . . . . 69
6.2 **Đạo hàm cấp cao** . . . . . 78
6.3 **Công thức khai triển Taylor hữu hạn** . . . . . 79
6.4 **Công thức khai triển Maclaurin hữu hạn** . . . . . 81
6.5 **Ứng dụng của công thức Taylor để tính gần đúng** . . . . . 82
6.6 **Các ứng dụng của đạo hàm vào khảo sát hàm số** . . . . . 82
6.6.1 **Tính đơn điệu của hàm số** . . . . . 82
6.6.2 **Điều kiện đủ để hàm số cực trị** . . . . . 82
6.6.3 **Hàm lồi, điểm uốn** . . . . . 84
6.7 **Bài tập bổ sung** . . . . . 87

**7 TÍCH PHÂN RIEMANN** **105**
7.1 **Khái niệm và tính chất căn bản tích phân Riemann** . . . . . 105
7.2 **Các tính chất cơ bản của phép tính tích phân** . . . . . 110
7.3 **Tích phân suy rộng** . . . . . 112
7.4 **Bài tập bổ sung** . . . . . 118

**BÀI TẬP CHƯƠNG 1** **122**

**Tài liệu tham khảo** **123**

# Chương 1

# TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

## 1.1 Tập hợp

**A1.** Khái niệm tập hợp và phần tử, các ký hiệu, cách xác định.

+ *Tập hợp* và *phần tử* là khái niệm ban đầu không có định nghĩa, chỉ nêu ra các hình ảnh minh họa để diễn tả chúng.

Để chỉ $x$ *là một phần tử của tập hợp* $X$, ta viết $x \in X$, và đọc là $x$ *thuộc* $X$ hay $x$ *trong* $X$.

Để chỉ $x$ *không là một phần tử của tập hợp* $X$, ta viết $x \notin X$, và đọc là $x$ *không thuộc* $X$.

+ *Tập hợp trống* $\phi$ là tập hợp không chứa phần tử nào cả.

Về tên gọi, thay vì đọc là *tập hợp* ta có thể đọc gọn lại là *tập*.

Các ký hiệu thay câu nói:

$\forall$ Mọi, với mọi, với tất cả

$\exists$ Có, tồn tại,

$\nexists$ Không có, không tồn tại,

$\exists!$ Có duy nhất một, có một và chỉ một, tồn tại và duy nhất,

: (dấu hai chấm) đôi khi thay lời nói "sao cho".

**Ví dụ 1**:

$\forall x \in X$ thay vì nói "với mọi phần tử $x$ trong $X$ "

$\exists x \in X$ thay vì nói "có (tồn tại) một phần tử $x$ trong $X$ "

$\exists! x \in X$ thay vì nói "có (tồn tại) duy nhất một phần tử $x$ trong $X$ "

$\nexists x \in X$ thay vì nói "không có (không tồn tại) phần tử $x$ trong $X$ "

$\exists x \in X : x$ thỏa tính chất $P$ thay vì nói "có một phần tử $x$ trong $X$ sao cho $x$ thỏa tính chất $P$".

+ Xác định một tập.

Để xác định một tập $A$ ta có thể dùng các phương pháp sau:

(i) *Liệt kê* tất cả các phần tử của $A$,

(ii) *Nêu tính chất* của các phần tử của tập hợp $A$.

Một *mệnh đề toán học* chỉ lấy hai chân trị: *Đúng* hoặc *sai*, không xảy ra các trường hợp: vừa đúng vừa sai, vừa không đúng và vừa không sai.

Cho $X$ là một tập khác trống, $P(x)$ là mệnh đề toán học phụ thuộc vào $x \in X$.

$$A = \{x \in X : P(x) \text{ đúng}\}.$$

(iii) Dùng giản đồ để diễn tả tập $A$.

**A2. Tạm thời** chúng ta sử dụng các tập hợp thông dụng như dưới đây (các tập này sẽ xác định rõ sau khi xây dựng tập số thực ở phần sau)

- *Tập các số tự nhiên* (nguyên dương) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,

- *Tập các số nguyên* $\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$,

- *Tập các số hữu tỉ* $\mathbb{Q} = \{\dfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ và } n \in \mathbb{N}\}$,

- *Tập các số thực* $\mathbb{R}$,

- *Tập các số phức* $\mathbb{C} = \{x + iy : x$ và $y$ trong $\mathbb{R}\}$.

**A3. Các phép toán về tập**: Phần giao, phần hội, phần hiệu, phần bù của các tập.

**Định nghĩa 1**. Cho hai tập $A$ và $B$.

Ta nói $A$ *chứa trong* $B$ nếu mọi phần tử của $A$ đều thuộc $B$, khi đó ta nói $A$ là *tập con* của $B$ và ký hiệu $A \subset B$. Trong trường hợp này ta cũng có thể nói $B$ *chứa* $A$ hay $B$ *bao hàm* $A$, ký hiệu là $B \supset A$.

Ta nói $A$ *bằng* $B$ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, khi đó ta ký hiệu $A = B$.

Cho tập $X$ và $A$, $B$ là hai tập con của $X$.

Tập $\{x \in X : x \in A$ và $x \in B\}$, gọi là *phần giao của* $A$ *và* $B$ và ký hiệu là $A \cap B$.

Ta nói $A$ và $B$ *rời nhau* nếu $A \cap B = \phi$.

Tập $\{x \in X : x \in A$ hoặc $x \in B\}$, gọi là *phần hợp của* $A$ *và* $B$ và ký hiệu là $A \cup B$.

Tập $\{x \in X : x \in A$ và $x \notin B\}$ gọi là *phần hiệu của* $A$ *đối với* $B$ và ký hiệu là $A \setminus B$.

Nếu $B \subset A$, ta gọi $A \setminus B$ là *phần bù của* $B$ *trong* $A$.

Đặc biệt $X \setminus B = \{x \in X : x \notin B\}$ gọi là *phần bù của* $B$ *trong* $X$, có ký hiệu là $\complement_X B$ hay $B^c$.

**Ví dụ 1**: Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 3 = 0\}$.

$A \cap B$ là tập các nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ 2x^2 + x - 3 = 0. \end{cases}$

$A \cup B$ là tập các nghiệm của phương trình $(2x^2 + x - 3) \sin \pi x = 0$.

Cho tập $A$, ký hiệu là $P(A)$ là tập tất cả các tập con của $A$. Có nơi dùng ký hiệu $2^A$ để chỉ $P(A)$.

**Ví dụ 2**: (Xem như Bài tập). Cho $A$, $B$ và $C$ là ba tập con khác trống của tập $X$ sao cho $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng minh $A \subset C$.

**Ví dụ 3**: $A = \{1, a, b\}$, lúc đó $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{a\}, \{b\}, \{1, a\}, \{1, b\}, \{a, b\}, A\}$.

**Ví dụ 4**: $A = \{1, a, b, c\}$, lúc đó $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{1, a\}, \{1, b\}, \{1, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{1, a, b\}, \{1, a, c\}, \{1, b, c\}, \{a, b, c\}, A\}$.

**Định nghĩa 2**. Cho $A$ và $B$ là hai tập, *tích Descartes của hai tập* $A$ và $B$ là tập tất cả các cặp $(x, y)$ với $x \in A$ và $y \in B$ và ký hiệu nó là $A \times B$.

**Ví dụ 5**: $A = \{1, 2\}$ và $B = \{a, b, c\}$, khi đó

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Hình vẽ dưới đây minh họa các phần tử của hai tập $A \times B$ và $B \times A$

| | | |
|---|---|---|
| c | $(\mathbf{1}, \mathbf{c})$ | $(\mathbf{2}, \mathbf{c})$ |
| b | $(\mathbf{1}, \mathbf{b})$ | $(\mathbf{2}, \mathbf{b})$ |
| a | $(\mathbf{1}, \mathbf{a})$ | $(\mathbf{2}, \mathbf{a})$ |
| | 1 | 2 |

$A \times B$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | $(\mathbf{a}, \mathbf{2})$ | $(\mathbf{b}, \mathbf{2})$ | $(\mathbf{c}, \mathbf{2})$ |
| 1 | $(\mathbf{a}, \mathbf{1})$ | $(\mathbf{b}, \mathbf{1})$ | $(\mathbf{c}, \mathbf{1})$ |
| | a | b | c |

$B \times A$

Nếu $A = B$, ta thường ký hiệu $A \times A$ là $A^2$. Lúc đó $A^2$ là tập tất cả các cặp $(x, y)$ với $x \in A$ và $y \in A$. Ta cũng chú ý trong trường hợp này là $(x, y)$ có thể khác $(y, x)$, thí dụ như $A = \{1, 2, a\}$, khi đó

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, a), (2, 1), (2, 2), (2, a), (a, 1), (a, 2), (a, a)\},$$

mà phần tử $(1, 2)$ khác phần tử $(2, 1)$.

**A4. Giao, hội của họ các tập**.

**Định nghĩa 3**. Cho $I$ là tập $\neq \phi$. Nếu ứng với mỗi $i \in I$, ta có tập con $A_i \subset X$, khi đó ta nói là ta có *một họ các tập con của* $X$, ký hiệu họ này là $\{A_i\}_{i \in I}$ hoặc $\{A_i, i \in I\}$ hoặc $(A_i)_{i \in I}$ hoặc $(A_i, i \in I)$. Ta còn gọi $I$ là tập các chỉ số.

(i) Ta gọi <u>*phần giao của họ tập* $\{A_i\}_{i \in I}$</u> là một tập con của $X$, ký hiệu là $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ hoặc $\bigcap_{i \in I} A_i$ và được xác định bởi

$$\bigcap\nolimits_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \ \forall i \in I\}.$$

Điều này có nghĩa là $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow x \in A_i \quad \forall i \in I$.

(ii) Ta gọi *phần hội của họ tập $\{A_i\}_{i\in I}$* là một tập con của $X$, ký hiệu là $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ hoặc $\bigcup_{i\in I} A_i$ và được xác định bởi

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Điều này có nghĩa là $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i$.

Trường hợp $I = \mathbb{N}$, ta gọi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là *dãy các tập con của $X$*, (hoặc *họ đếm được các tập con của $X$*) ta viết $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ hoặc $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ để thay cho $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$, và viết $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ hoặc $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ để thay cho $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

**Ví dụ 6**: (Xem như Bài tập).

(i) $\complement_X \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \left(\complement_X A_i\right)$,

(ii) $\complement_X \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \left(\complement_X A_i\right)$.

**Chú ý**: có thể đổi ký hiệu như sau

(i) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$,

(ii) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.

*Giải Ví dụ 5* (i).

$$\begin{aligned} x \quad \in \quad & \complement_X \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow x \in X \text{ và } x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\ \Longleftrightarrow \quad & x \in X \text{ và } \exists i \in I : x \notin A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I : x \in X \text{ và } x \notin A_i \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists i \in I : x \in \complement_X A_i \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \left(\complement_X A_i\right). \end{aligned}$$

*Giải Ví dụ 5* (ii). Tương tự.

## 1.2 Quan hệ trong một tập

**Định nghĩa 4**. Cho một tập hợp $A$ khác trống. Ta nói rằng một *quan hệ trong $A$* là một tập con $\mathcal{R} \neq \phi$ của $A^2$. Ta viết $x\mathcal{R}y$ để chỉ $(x, y)$ là phần tử của $\mathcal{R}$, tức là $(x, y) \in \mathcal{R}$.

**Ví dụ 7**: Ví dụ về các quan hệ trong $A = \{1, 2, 3\}$, khi đó

$$A^2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}.$$

Xét các quan hệ trong $A$ như sau:

1/ $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A^2 : x < y\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$,

$$x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_1 \Longleftrightarrow x < y \ (\mathcal{R}_1 \text{ cũng ký hiệu là } <)$$

2/ $\bar{\mathcal{R}}_1 = \{(x, y) \in A^2 : x > y\} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$,

$$x\bar{\mathcal{R}}_1 y \Longleftrightarrow (x, y) \in \bar{\mathcal{R}}_1 \Longleftrightarrow x > y \ (\bar{\mathcal{R}}_1 \text{ cũng ký hiệu là } >)$$

3/ $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A^2 : x = y\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

$$x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_2 \Longleftrightarrow x = y \ (\mathcal{R}_2 \text{ cũng ký hiệu là } =)$$

4/ $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

$$x\mathcal{R}_3 y \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_3 \Longleftrightarrow x \leq y \ (\mathcal{R}_3 \text{ cũng ký hiệu là } \leq).$$

5/ $\bar{\mathcal{R}}_3 = \{(x, y) \in A^2 : x \geq y\} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

$$x\bar{\mathcal{R}}_3 y \Longleftrightarrow (x, y) \in \bar{\mathcal{R}}_3 \Longleftrightarrow x \geq y \ (\bar{\mathcal{R}}_3 \text{ cũng ký hiệu là } \geq).$$

Hình ảnh của các quan hệ $A^2$, $\mathcal{R}_1$, $\bar{\mathcal{R}}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\bar{\mathcal{R}}_3$ trong $A$ như sau

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ |
| 2 | $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{2})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{2})$ |
| 1 | $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ |
| | 1 | 2 | 3 |

$A^2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ | |
| 2 | $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ | | |
| 1 | | | |
| | 1 | 2 | 3 |

$\mathcal{R}_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | | | |
| 2 | | | $(\mathbf{3},\mathbf{2})$ |
| 1 | | $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ |
| | 1 | 2 | 3 |

$\bar{\mathcal{R}}_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | | | $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ |
| 2 | | $(\mathbf{2},\mathbf{2})$ | |
| 1 | $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ | | |
| | 1 | 2 | 3 |

$\mathcal{R}_2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ |
| 2 | $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{2})$ | |
| 1 | $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ | | |
| | 1 | 2 | 3 |

$\mathcal{R}_3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | | | $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ |
| 2 | | $(\mathbf{2},\mathbf{2})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{2})$ |
| 1 | $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ | $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ | $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ |
| | 1 | 2 | 3 |

$\bar{\mathcal{R}}_3$

**A6.** Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là *đối xứng* nếu " $\forall(x,y) \in A^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$"
[i.e. $\forall(x,y) \in A^2$, $(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$ ]
Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là *phản xạ* nếu " $x\mathcal{R}x \; \forall x \in A$ "
[i.e. $(x,x) \in \mathcal{R} \; \forall x \in A$ ]
Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là *phản đối xứng* nếu " $\forall(x,y) \in A^2$, $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}x$ thì $x = y$"
[i.e. $\forall(x,y) \in A^2$, $(x,y) \in \mathcal{R}$ và $(y,x) \in \mathcal{R} \Longrightarrow x = y$ ]
Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là *truyền* (bắc cầu) nếu " $\forall x,y,z \in A$, $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $x\mathcal{R}z$"
[i.e. $\forall x,y,z \in A$, $(x,y) \in \mathcal{R}$ và $(y,z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$ ]
Một quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là
(i) *Toàn phần* nếu " $\forall x,y \in A$, thì hoặc $x\mathcal{R}y$ hoặc $y\mathcal{R}x$"
(ii) *Quan hệ thứ tự* nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, phản đối xứng và truyền.
(iii) *Quan hệ thứ tự toàn phần* nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, phản đối xứng, truyền và toàn phần.
(iv) *Quan hệ tương đương* nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, đối xứng và truyền.

**Bổ túc về suy luận Toán học**

*Các suy luận liên quan* $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$.
Cho hai mệnh đề toán học $p$ và $q$.
**(i)** Mệnh đề toán học $p \wedge q$ (đọc là $p$ và $q$) chỉ đúng khi cả hai $p$ và $q$ cùng đúng:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| **Đ** | **Đ** | **Đ** |
| Đ | S | S |
| S | Đ | S |
| S | S | S |

**(ii)** Mệnh đề toán học $p \vee q$ (đọc là $p$ hay $q$) chỉ sai khi cả hai $p$ và $q$ cùng sai:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ |
| Đ | S | Đ |
| S | Đ | Đ |
| **S** | **S** | **S** |

**(iii)** Mệnh đề toán học $p \Longrightarrow q$ (đọc là $p$ suy ra $q$, $p$ dẫn đến $q$) chỉ sai khi $p$ đúng và $q$ sai:

| $p$ | $q$ | $p \Longrightarrow q$ |
|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ |
| **Đ** | **S** | **S** |
| S | Đ | Đ |
| S | S | Đ |

**(iv)** Mệnh đề toán học $p \Longleftrightarrow q$ (đọc là $p$ tương đương $q$) chỉ đúng khi cả hai $p$ và $q$ cùng đúng hoặc cùng sai:

| $p$ | $q$ | $p \Longleftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **Đ** | **Đ** | **Đ** |
| Đ | S | S |
| S | Đ | S |
| **S** | **S** | **Đ** |

**(v)** Mệnh đề toán học $\sim p$ (đọc là phủ định $p$) chỉ đúng khi $p$ sai:

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| **Đ** | **S** |
| **S** | **Đ** |

**Ví dụ 8**: (Xem như Bài tập).

(i) $\sim(\sim p) \equiv p$

(ii) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

(iii) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

(iv) $p \Longrightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$

(v) $\sim(p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$

(vi) $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$

*Giải Ví dụ 8.*

(i)

| $p$ | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ | Kết luận |
|---|---|---|---|
| **Đ** | S | **Đ** | $\sim(\sim p) \equiv p$ |
| **S** | Đ | **S** | |

Kết luận: $\sim(\sim p) \equiv p$

(ii)

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \vee (\sim q)$ | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | S | S | **S** | Đ | **S** |
| Đ | S | S | Đ | **Đ** | S | **Đ** |
| S | Đ | Đ | S | **Đ** | S | **Đ** |
| S | S | Đ | Đ | **Đ** | S | **Đ** |

Kết luận: $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

(iii)

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \wedge (\sim q)$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | S | S | **S** | Đ | **S** |
| Đ | S | S | Đ | **S** | Đ | **S** |
| S | Đ | Đ | S | **S** | Đ | **S** |
| S | S | Đ | Đ | **Đ** | S | **Đ** |

Kết luận: $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

(iv)

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $(\sim p) \vee q$ | $p \Longrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | S | **Đ** | **Đ** |
| Đ | S | S | **S** | **S** |
| S | Đ | Đ | **Đ** | **Đ** |
| S | S | Đ | **Đ** | **Đ** |

Kết luận: $(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p) \vee q$

(v)

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge (\sim q)$ | $p \Longrightarrow q$ | $\sim(p \Longrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | S | **S** | Đ | **S** |
| Đ | S | Đ | **Đ** | S | **Đ** |
| S | Đ | S | **S** | Đ | **S** |
| S | S | Đ | **S** | Đ | **S** |

Kết luận: $\sim(p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$

(vi)

| $p$ | $q$ | $p \Longrightarrow q$ | $q \Longrightarrow p$ | $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ | $p \Longleftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ | Đ | **Đ** | **Đ** |
| Đ | S | S | Đ | **S** | **S** |
| S | Đ | Đ | S | **S** | **S** |
| S | S | Đ | Đ | **Đ** | **Đ** |

Kết luận: $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p) \equiv (p \Longleftrightarrow q)$

**Cách viết một mệnh đề.**

Cho $X$ là một tập khác trống, $\phi \neq A \subset X$, $P(x)$ là mệnh đề toán học phụ thuộc vào $x \in A$.

**(i)** Xét mệnh đề (mđ1) $\equiv$ "$P(x)$ đúng với mọi $x \in A$ "
Ta viết mệnh đề phủ định của (mđ1) như sau:
Mệnh đề (mđ1) được viết lại như sau:
(mđ1) $\equiv$ "$\forall x \in X$, [ $x \in A \Longrightarrow P(x)$ đúng ] "
$\equiv$ "$\forall x \in X,\ p(x) \Longrightarrow q(x)$",
trong đó $p$ và $q$ là hai mệnh đề sau $p(x) \equiv$ " $x \in A$ " và $q(x) \equiv$ " $P(x)$ đúng ".
Theo bài tập trên thì $\tilde{}(p(x) \Longrightarrow q(x)) \equiv p(x) \wedge (\tilde{}q(x))$,
tức là, $\tilde{}$(mđ1) $\equiv$ "$\exists x \in X : \tilde{}[x \in A \Longrightarrow P(x)$ đúng]"
$\equiv \exists x \in X : (x \in A) \wedge \big(\tilde{}((P(x)$ đúng$)\big)$
$\equiv \exists x \in A$ và $P(x)$ sai

$$\boxed{\tilde{}[P(x) \text{ đúng } \forall x \in A] \equiv \exists x \in A \text{ và } P(x) \text{ sai}}$$

**(ii)** Xét mệnh đề (mđ2) $\equiv$ " tồn tại $x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng"

Mệnh đề (mđ2) được viết lại như sau:
(mđ2) $\equiv$ "$\exists x \in X$ : [ $x \in A \Longrightarrow P(x)$ đúng ] "
$\equiv$ "$\exists x \in X : [p(x) \Longrightarrow q(x)]$",
trong đó $p$ và $q$ là hai mệnh đề sau $p(x) \equiv$ " $x \in A$ " và $q(x) \equiv$ " $P(x)$ đúng ".
Khi đó, $\tilde{}$(mđ2) $\equiv$ "$\forall x \in X : \tilde{}[x \in A \Longrightarrow P(x)$ đúng]"
$\equiv \forall x \in X : (x \in A) \wedge \big(\tilde{}((P(x)$ đúng$)\big)$
$\equiv \forall x \in A$ và $P(x)$ sai $\equiv$ "$P(x)$ sai $\forall x \in A$"

$$\boxed{\tilde{}[\exists x \in A : P(x) \text{ đúng}] \equiv P(x) \text{ sai } \forall x \in A.}$$

Cho $X$ là một tập khác trống, $\phi \neq A,\ B \subset X$, $P(x, y)$ là mệnh đề toán học phụ thuộc vào $x \in A$, $y \in B$.

**(iii)** Xét mệnh đề (mđ3) $\equiv$ "$\forall x \in A,\ \exists y \in B : P(x, y)$ đúng"
Ta viết mệnh đề phủ định của (mđ3) như sau.

$$\begin{aligned}
&\tilde{}[\forall x \in A,\ \exists y \in B : P(x,y) \text{ đúng}]\\
&\equiv [\exists x \in A : \forall y \in B \Longrightarrow P(x,y) \text{ sai }] \equiv (\text{mđ3*})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv [\exists x \in A : P(x,y) \text{ sai } \forall y \in B].
\end{aligned}$$

Mệnh đề (mđ3*) được viết lại như sau:
(mđ3*) $\equiv$ "$\exists x \in A : \forall y$, [ $y \in B \Longrightarrow P(x, y)$ sai ] "
$\equiv$ "$\exists x \in A : \forall y$, [ $p(y) \Longrightarrow q(x, y)$ ] ",
trong đó $p(y)$ và $q(x, y)$ là hai mệnh đề sau $p(y) \equiv$ " $y \in B$ " và $q(x, y) \equiv$ " $P(x, y)$ sai ".
Khi đó, $\tilde{}$(mđ3*) $\equiv$ "$\forall x \in A : \exists y$, [ $y \in B$ và $P(x, y)$ đúng ]"
$\equiv \forall x \in A, \exists y \in B : P(x, y)$ đúng.
**(iv)** Xét mệnh đề (mđ4) $\equiv$ "$\exists x \in A : P(x, y)$ đúng $\forall y \in B$".
Tương tự, phủ định của (mđ4) như sau

$$\begin{aligned}
\tilde{}[\exists x \in A : P(x,y) \text{ đúng } \forall y \in B] &\equiv \tilde{}[\exists x \in A : \forall y \in B \Longrightarrow P(x,y) \text{ đúng}]\\
&\equiv [\forall x \in A,\ \exists y \in B : P(x,y) \text{ sai}].
\end{aligned}$$

## 1.3 Ánh xạ

**Định nghĩa 5**. Cho $X$ và $Y$ là hai tập khác trống. Giả sử với mọi $x \in X$ ta *xác định duy nhất một phần tử* $f(x) \in Y$, ta nói ta xác định được một *ánh xạ $f$ từ $X$ vào $Y$*. Lúc đó $X$ được gọi là *miền xác định của ánh xạ $f$*, (hoặc $X$ còn gọi là *tập đi*), $Y$ là *tập đến*, hoặc *tập giá trị* của $f$).

Ký hiệu $f : X \longrightarrow Y$ để chỉ $f$ là ánh xạ từ $X$ vào $Y$, và ký hiệu $x \longmapsto f(x)$ để chỉ cách xác định ánh xạ $f$, ta cũng viết lại như sau

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

**Định nghĩa 6**. Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$.

(i) Tập $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ gọi là *đồ thị* của $f$.

(ii) Cho $D$ là một tập con khác trống trong $X$. Tập $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ được gọi là *tập hợp ảnh của $D$ bởi $f$*.

Đặc biệt $D = X$, tập $f(X)$ gọi là *tập ảnh của $f$*, ký hiệu là $Im(f)$, vậy

$$Im(f) = f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Đặc biệt, nếu $D = \phi$, ta đặt $f(\phi) = \phi$.

(iii) Cho $E$ là một tập con khác trống trong $Y$. Tập $\{x \in X : f(x) \in E\}$ được gọi là *tập hợp ảnh ngược của $E$ bởi $f$*, ký hiệu là $f^{-1}(E)$, vậy

$$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}.$$

Đặc biệt, nếu $E = \phi$, ta đặt $f^{-1}(\phi) = \phi$.

(iv) Cho $D$ là một tập con khác trống trong $X$. Với mọi $x \in D$, ta đặt $g(x) = f(x)$, khi đó $g : D \longrightarrow Y$ và ta nói $g$ là *ánh xạ thu hẹp của ánh xạ $f$ trên $D$* và ký hiệu $g$ là $f|D$.

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x). \\ f|D : D &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto (f|D)(x) = f(x). \end{aligned}$$

**Ví dụ 9**: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Đặt $D_1 = (0, +\infty)$ và $D_2 = (-\infty, 0]$, ta có $(f|D_1)(x) = x, \forall x \in D_1$ và $(f|D_2)(x) = 0, \forall x \in D_2$.

**Định nghĩa 7**. Cho $X$, $Y$ và $Z$ là ba tập khác trống, $f : X \longrightarrow Y$ và $g : Y \longrightarrow Z$. Ta đặt $h(x) = g(f(x))$ với mọi $x \in X$. Khi đó $h : X \longrightarrow Z$ và được gọi là *ánh xạ hợp của $f$ và $g$* và được ký hiệu là $g \circ f$. Vậy $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ với mọi $x \in X$.

$$\begin{array}{ccccccc} & f & & g & & & \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & & \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) & = (g \circ f)(x) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

**Ví dụ 10**: Cho hai ánh xạ $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ như sau

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln^3 x, \ \forall x \in (0, +\infty), \\ g(x) &= 1 + \sin^2 x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Khi đó $g \circ f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + \sin^2 \left(\ln^3 x\right), \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Còn việc xác định $f \circ g$ như thế nào? Theo công thức

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

thì để cho $f(g(x))$ xác định thì $g(x)$ phải nằm trong miền xác định của $f$, tức là $g(x) > 0$ với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$, mà điều này luôn thỏa vì $g(x) = 1 + \sin^2 x \geq 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, do đó ta có $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln^3\left(1 + \sin^2 x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Ví dụ 11**: Cho hai ánh xạ $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ như sau

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x},\ \forall x \in [0, +\infty), \\ g(x) &= x - x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $g \circ f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - (f(x))^2 = \sqrt{x} - x,\ \forall x \in [0, +\infty).$$

Tuy nhiên, việc xác định $f \circ g$ thì cần chú ý $g(x)$ phải nằm trong miền xác định của ý, tức là $g(x) \geq 0$, mà điều này tương đương với $g(x) = x - x^2 \geq 0$, hay $0 \leq x \leq 1$. Do đó, ta có $f \circ g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - x^2},\ \forall x \in [0, 1].$$

**Định nghĩa 8**. Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$.

(i) Ta nói $f$ là một *đơn ánh* nếu

$$\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y,$$

hay diễn đạt bằng cách khác

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$

hoặc

$$\forall x, y \in X,\ \text{ta có } f(x) \neq f(y) \text{ khi } x \neq y.$$

Chú ý ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ *không đơn ánh* được diễn đạt bằng mệnh đề phủ định như sau

$$\tilde{}[\forall x, y \in X,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)],$$

hay tương đương với

$$\exists x, y \in X : x \neq y \text{ và } f(x) = f(y).$$

(ii) Ta nói $f$ là một *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$

hay diễn đạt bằng cách khác:

$$\begin{aligned} f(X) &= Y \\ &\Longleftrightarrow [f(X) \subset Y \text{ và } Y \subset f(X)] \Longleftrightarrow Y \subset f(X) \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Y \Longrightarrow y \in f(X)] \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Y \Longrightarrow (\exists x \in X : f(x) = y)] \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y]. \end{aligned}$$

(iii) Ta nói $f$ là một *song ánh* nếu $f$ đơn ánh và toàn ánh.

Cả 3 loại ánh xạ trên, ta có thể làm nó tương đương với các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \text{ toàn ánh} \Longleftrightarrow \forall y \in Y,\ \text{phương trình } f(x) = y \text{ có nghiệm trong } X; \\ f &: X \longrightarrow Y \text{ đơn ánh} \Longleftrightarrow \forall y \in Y,\ \text{phương trình } f(x) = y \text{ có nhiều nhất là một nghiệm trong } X; \\ f &: X \longrightarrow Y \text{ song ánh} \Longleftrightarrow \forall y \in Y,\ \text{phương trình } f(x) = y \text{ có duy nhất một nghiệm trong } X. \end{aligned}$$

**Định nghĩa 9**. Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một song ánh. Với mọi $y \in Y$ ta có duy nhất một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, ta đặt $g(y) = x$. Ta thấy rằng $g : Y \longrightarrow X$ có tính chất sau: $(g \circ f)(x) = x$ và $(f \circ g)(y) = y$, $\forall x \in X$ và $\forall y \in Y$. Ta nói $g$ là *ánh xạ ngược của* $f$ và ký hiệu là $f^{-1}$.

Vậy
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ và } (f \circ f^{-1})(y) = y,\ \forall x \in X \text{ và } \forall y \in Y.$$

Xét ánh xạ $I_X : X \to X$ cho bởi $(I_X)(x) = x$, $\forall x \in X$. Ta gọi $I_X$ là ánh xạ đồng nhất trên $X$. Khi đó, ta có
$$f^{-1} \circ f = I_X \text{ và } f \circ f^{-1} = I_Y.$$

## 1.4 Bài tập

**1**. Cho $A$, $B \subset X$ và $\neq \phi$. Chứng minh rằng:
(i) $X = A \cup (X \setminus A)$;
(ii) $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \cap B) = X$;
(iii) Nếu $X = A \cup B$ và $A \cap B = \phi$, thì $X = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ và $X \setminus A = B$, $X \setminus B = A$;

**2**. Cho $f(x) = x^2$. Chứng minh rằng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không toàn ánh, không đơn ánh.

**3**. Cho $f : X \longrightarrow Y$ và $A$, $B \subset X$. Chứng minh rằng:
(i) Nếu $A \subset B$, thì $f(A) \subset f(B)$;
(ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
(iv) Nếu $f$ đơn ánh thì $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
(v) Nếu $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $\forall A, B \subset X$ thì $f$ đơn ánh.

**4**. Tìm một song ánh từ $[0, 1]$ vào $(0, 1)$.

**5**. Tìm một song ánh từ $[0, 1]$ vào $[0, 1)$.

**6**. Cho $f : X \longrightarrow Y$ và $A$, $B \subset Y$. Chứng minh rằng:
(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

**7**. Cho $f : X \longrightarrow Y$ và $\{A_i\}_{i \in I}$, là họ các tập con của $X$. Chứng minh rằng:
(i) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;
(ii) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$;
(iii) Nếu $f$ đơn ánh thì $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

**8**. Cho $f : X \longrightarrow Y$ và $\{B_i\}_{i \in I}$, là họ các tập con của $Y$. Chứng minh rằng:
(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;
(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

**9**. Cho hai ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ và $g : Y \longrightarrow Z$. Chứng minh rằng:
(i) Nếu $f$, $g$ đơn ánh thì $g \circ f$ đơn ánh.
(ii) Nếu $f$, $g$ toàn ánh thì $g \circ f$ toàn ánh.
(iii) Nếu $f$, $g$ song ánh thì $g \circ f$ song ánh.
(iv) Nếu $f$, $g$ song ánh thì $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**10**. [Sẽ làm sau khi học xong chương tập số thực] Cho $a \in \mathbb{R}$ sao cho $|a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Chứng minh rằng $a = 0$.

**11**. [Sẽ làm sau khi học xong chương tập số thực] Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$.
(i) Chứng minh rằng $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$;
(ii) Xác định tập $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

**12**. [Sẽ làm sau khi học xong chương tập số thực] Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $A_n = (\frac{-1}{n^2}, \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{-1}{n^2} < x < \frac{1}{n}\}$. Chứng minh rằng

(i) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$; (ii) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1$.

# Chương 2

# TẬP CÁC SỐ (THỰC, TỰ NHIÊN, NGUYÊN, HỮU TỈ, VÔ TỈ)

## 2.1 Quan hệ thứ tự

**Định nghĩa 1**. Cho tập $A$ và từ đó có tập tích Descartes $A \times A = A^2 = \{(x, y) : x, y \in A\}$. Một tập con khác rỗng $\mathcal{R} \subset A \times A$ được gọi là một *quan hệ thứ tự* trên $A$, nếu

i) $\mathcal{R}$ *phản xạ*: $(x, x) \in \mathcal{R}$, $\forall x \in A$,

ii) $\mathcal{R}$ *truyền* (*bắc cầu*): $\forall x, y, z \in A$, $(x, y) \in \mathcal{R}$ và $(y, z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$,

iii) $\mathcal{R}$ *phản đối xứng*: $\forall x, y \in A$, $(x, y) \in \mathcal{R}$ và $(y, x) \in \mathcal{R} \Longrightarrow x = y$.

◦ Nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên $A$, ta dùng ký hiệu

$x \leq y$ thay cho $(x, y) \in \mathcal{R}$, đọc là *$x$ nhỏ hơn hay bằng $y$*.

$y \geq x$ thay cho $(x, y) \in \mathcal{R}$, đọc là *$y$ lớn hơn hay bằng $x$*.

$x < y$ thay cho "$(x, y) \in \mathcal{R}$ và $x \neq y$", đọc là *$x$ nhỏ hơn $y$*.

$y > x$ thay cho "$(x, y) \in \mathcal{R}$ và $x \neq y$", đọc là *$y$ lớn hơn $x$*.

Người ta cũng đồng nhất $\mathcal{R} \equiv \leq$ và viết $x \leq y$ thay cho $(x, y) \in \mathcal{R}$.

◦ Nếu $\forall x, y \in A$, ta có $x \leq y$ hay $x > y$ được nghiệm đúng thì ta nói $\mathcal{R}$ là một *quan hệ thứ tự toàn phần*, tập $A$ cũng được gọi là *tập thứ tự toàn phần*.

◦ Một tập $A$ được gọi là *tập thứ tự* nếu nó có một quan hệ thứ tự trên $A$.

◦ Nếu $a \in A$, sao cho $a \leq x$, $\forall x \in A$, thì ta nói $a$ là *phần tử nhỏ nhất* của $A$, ký hiệu $a = \min A$.

◦ Nếu $b \in A$, sao cho $x \leq b$, $\forall x \in A$, thì ta nói $b$ là *phần tử lớn nhất* của $A$, ký hiệu $b = \max A$.

## 2.2 Chặn trên nhỏ nhất (sup) và chặn dưới lớn nhất (inf)

**Định nghĩa 2**. Cho $A$ là một tập hợp thứ tự với quan hệ thứ tự "$\leq$" và cho $X \subset A$.

◦ Nếu $a \in X$, sao cho $a \leq x$, $\forall x \in X$, thì ta nói $a$ là *phần tử nhỏ nhất* của $X$, ký hiệu $a = \min X$.

◦ Nếu $b \in X$, sao cho $x \leq b$, $\forall x \in X$, thì ta nói $b$ là *phần tử lớn nhất* của $X$, ký hiệu $b = \max X$.

Ta nói:

◦ $X$ *bị chặn trên* nếu tồn tại $b \in A$ sao cho $x \leq b$, $\forall x \in X$, phần tử $b$ được gọi là một *chặn trên* của $X$.

◦ $X$ *bị chặn dưới* nếu tồn tại $a \in A$ sao cho $a \leq x$, $\forall x \in X$, phần tử $a$ được gọi là một *chặn dưới* của $X$.

◦ $X$ *bị chặn* nếu $X$ bị chặn trên và bị chặn dưới, tức là tồn tại $a$, $b \in A$ sao cho $a \leq x \leq b$, $\forall x \in X$.

◦ Cho $X \subset A$ bị chặn trên. Nếu tồn tại $\hat{b} \in A$ là một chặn trên của $X$ sao cho $\hat{b} \leq b$ với mọi chặn trên $b$ của $X$, thì ta nói $\hat{b}$ là *một chặn trên nhỏ nhất* của $X$, tức là,

$$\hat{b} = \min\{b \in A : b \text{ là chặn trên của } X\} = \min\{b \in A : x \leq b, \forall x \in X\}.$$

Ta có thể nghiệm lại rằng, nếu chặn trên nhỏ nhất của $X$ tồn tại thì chặn trên nhỏ nhất ấy là duy nhất.

Thật vậy, giả sử $\hat{b}_1$ và $\hat{b}_2$ là hai chặn trên nhỏ nhất của $X$, khi đó, do $\hat{b}_2$ là một chặn trên của $X$, ta có $\hat{b}_1 \leq \hat{b}_2$.

Mặt khác, do $\hat{b}_1$ là một chặn trên của $X$, ta có $\hat{b}_2 \leq \hat{b}_1$. Do tính phản đối xứng của quan hệ thứ tự $\leq$ ta có $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$.

Ta ký hiệu chặn trên nhỏ nhất của $X$ là $\hat{b} = \sup X$.

Tóm tắt đều nầy bởi: Nếu chặn trên nhỏ nhất của $X$ tồn tại thì

$$\sup X = \min\{b \in A : x \leq b,\ \forall x \in X\}.$$

∘ Cho $X \subset A$ bị chặn dưới. Nếu tồn tại $\hat{a} \in A$ là một chặn dưới của $X$ sao cho $a \leq \hat{a}$ với mọi chặn dưới $a$ của $X$, thì ta nói $\hat{a}$ là *một chặn dưới lớn nhất* của $X$, tức là,

$$\hat{a} = \max\{a \in A : a \text{ là chặn dưới của } X\} = \max\{a \in A : a \leq x, \forall x \in X\}.$$

Ta có thể nghiệm lại rằng (lý luận tương tự như trên), nếu chặn dưới lớn nhất của $X$ tồn tại thì chặn dưới lớn nhất ấy là duy nhất. Ta ký hiệu chặn dưới lớn nhất của $X$ là $\hat{a} = \inf X$.

Vậy, nếu chặn dưới lớn nhất của $X$ tồn tại thì

$$\inf X = \max\{a \in A : a \leq x,\ \forall x \in X\}.$$

## 2.3 Định nghĩa tập số thực

**Định nghĩa 3**. Cho tập $\mathbb{R} \neq \phi$ có một quan hệ thứ tự toàn phần "$\leq$", có trang bị hai ánh xạ $(+)$ (phép toán cộng) và $(\cdot)$ (phép toán nhân), như sau đây:

Ánh xạ $(+)$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto +(a, b) = a + b, \end{aligned}$$

mà ánh xạ $(+)$ này gọi là *phép toán cộng* $(+)$;

Ánh xạ $(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \cdot(a, b) = a \cdot b, \end{aligned}$$

mà ánh xạ $(\cdot)$ này gọi là *phép toán nhân* $(\cdot)$.

Một tập $\mathbb{R} \neq \phi$ được gọi là *tập các số thực* nếu $\mathbb{R}$ có một quan hệ thứ tự toàn phần "$\leq$", có trang bị hai phép toán cộng $(+)$ và nhân $(\cdot)$ như trên thỏa các tính chất sau:

(1) $a + b = b + a,\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$,

(2) $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$,

(3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$,

(4) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists(-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$,

(5) $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$,

(6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$,

(7) $\exists 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0 : 1 \cdot a = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$,

(8) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a^{-1} \cdot a = 1$,

(9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$,

(10) Quan hệ thứ tự toàn phần"$\leq$", có các tính chất sau:

*(i)* $\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0 \Longrightarrow a + b > 0$ và $a \cdot b > 0$,

*(ii)* $\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b \Longleftrightarrow b + (-a) > 0$,

*(iii)* Mọi tập con $\neq \phi$ và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, đều có chặn trên nhỏ nhất (có sup).

Đặt tên gọi và viết ký hiệu:

∘ Phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là *số thực.*

∘ Phần tử $a \cdot b$ của $\mathbb{R}$ nếu không sợ nhầm lẫn ta viết gọn lại là $ab$ (bỏ dấu chấm).

∘ Phần tử 0 trong (3) được gọi là *số không (zêrô).*

∘ Phần tử 1 trong (7) được gọi là *số một (phần tử đơn vị).*

∘ Phần tử $(-a)$ trong (4) ký hiệu lại là $-a$, và được gọi là *trừ* $a$, hay *số đối* của $a$.

∘ Phần tử $a^{-1}$ trong (8) được gọi là *nghịch đảo của* $a$, hay $a$ *nghịch đảo*, hay $a$ lũy thừa trừ một. Cũng có thể viết nó như là $a^{-1} = \frac{1}{a}$ được gọi là *một chia* $a$, hay là $a^{-1} = 1/a$ được gọi là *một trên* $a$.

Ta cũng có thể viết các ký hiệu gọn hơn như sau:

∘ Phần tử $a + (-b) = a - b$, đọc là $a$ *trừ* $b$.
∘ Phần tử $ab^{-1} = \frac{a}{b}$, đọc là $a$ *chia* $b$ hay $ab^{-1} = a/b$, đọc là $a$ *trên* $b$.
∘ $a > 0$ : ta nói $a$ là *số thực dương* (hay *số dương*),
∘ $a < 0$ : ta nói $a$ là *số thực âm* (hay *số âm*),
∘ $a \geq 0$ : ta nói $a$ là *số thực không âm* (hay *số không âm*),
∘ $a \leq 0$ : ta nói $a$ là *số thực không dương* (hay *số không dương*).

**Ví dụ 10**: (Xem như Bài tập).

(i) Phần tử 0 trong tiên đề (3) là duy nhất.
(ii) Phần tử đối của $a$ trong tiên đề (4) là duy nhất.
(iii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
(iv) $(-1) \cdot a = -a$.
(v) $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$.
(vi) $1 > 0$.
(vii) $a > 0 \Longrightarrow a^{-1} > 0$.
(viii) $a \leq b \Longrightarrow m \cdot a \leq m \cdot b, \forall m > 0$.

*Giải Ví dụ 10.*

(i) Giả sử có $0' \in \mathbb{R}$ sao cho $a + 0' = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Ta chứng minh rằng $0' = 0$.
Lấy $a = 0 \in \mathbb{R}$, ta có: $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$.
(ii) Giả sử có $a' \in \mathbb{R}$ sao cho $a + a' = 0$. Ta chứng minh rằng $a' = -a$.
$a' = a' + 0 = a' + (a + (-a)) = (a' + a) + (-a) = 0 + (-a) = (-a) = -a$.
(iii) $[a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$.
Vậy $(-a) \cdot b = 0$ là phần tử đối của $a \cdot b$, tức là $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
(iv) $[1 + (-1)] \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Longleftrightarrow 1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$
$\Longleftrightarrow a + (-1) \cdot a = 0$.
Vậy $(-1) \cdot a$ là phần tử đối của $a$, tức là $(-1) \cdot a = -a$.
(v) $(-1)\,[1 + (-1)] = 0 \Longleftrightarrow (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0$
$\Longleftrightarrow 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 0$
$\Longleftrightarrow (-1) + (-1) \cdot (-1) = 0$.
Vậy $(-1) \cdot (-1)$ là phần tử đối của $(-1)$, tức là $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$.
(vi) $a = 1 \neq 0$.
Nếu $1 < 0$, thì $(-1) = 0 + (-1) > 0$.
Theo tiên đề $(10, (i))$, ta có $1 = (-1) \cdot (-1) > 0$. Vô lý, vậy $1 > 0$.
(vii) $a > 0$.
Nếu $a^{-1} < 0$, thì $(-a^{-1}) = -a^{-1} > 0$
Theo tiên đề $(10, (i))$, ta có $-1 = -\left(a^{-1} \cdot a\right) = (-a^{-1}) \cdot a > 0$.
Suy ra $1 < 0$. Vô lý, vậy $a^{-1} > 0$.
(viii) $a \leq b \Longrightarrow m \cdot a \leq m \cdot b, \forall m > 0$.
$a = b$, $m > 0$ : Hiển nhiên $m \cdot a = m \cdot b \leq m \cdot b$.
Xét $a < b$, $m > 0$, ta có $b - a > 0$, $m > 0 \Longrightarrow m \cdot (b - a) > 0$
hay $m \cdot b + m \cdot (-a) > 0$
hay $m \cdot b - m \cdot a > 0$
hay $m \cdot b > m \cdot a$
hay $m \cdot a < m \cdot b$.

Vài ký hiệu về khoảng số thực. Cho $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ta định nghĩa

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ : đoạn $a, b$.
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ : khoảng $a, b$.
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ : nửa khoảng (phải) $a$, $b$.

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ : nửa khoảng (trái) $a$, $b$.
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ : tia.
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ : tia.
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ : tia.
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ : tia.
$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

**Định nghĩa 4**. Cho $x_0 \in (a, b)$, $\exists \varepsilon > 0 :\ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$. Khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ còn được gọi là *khoảng tâm* $x_0$ *bán kính* $\varepsilon$, hay còn được gọi là một $\varepsilon-$*lân cận* của $x_0$.

∘ *Trị số tuyệt đối* của $a \in \mathbb{R}$ là một số thực không âm xác định bởi:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{nếu } a \geq 0, \\ -a, & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

**Tính chất**:

$(i)$ $|a| \geq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$,
$(ii)$ $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$,
$(iii)$ $|ab| = |a|\,|b|\,,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}$,
$(iv)$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ \forall a,\, b \in \mathbb{R},\, b \neq 0$,
$(v)$ $|a + b| \leq |a| + |b|\,,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}$.

**Định lý 1**. *Cho $X \neq \phi$ là tập con bị chặn trên của $\mathbb{R}$. Khi đó:*

$$M = \sup X \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq M,\, \forall x \in X, \\ \forall \varepsilon > 0,\, \exists x \in X : x > M - \varepsilon. \end{cases}$$

**Định lý 2**. *Cho $X \neq \phi$ là tập con bị chặn dưới của $\mathbb{R}$. Khi đó:*

$$m = \inf X \Longleftrightarrow \begin{cases} m \leq x,\, \forall x \in X, \\ \forall \varepsilon > 0,\, \exists x \in X : x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

## 2.4 Tập các số nguyên, tự nhiên, hữu tỉ, vô tỉ

**Định nghĩa 5**. Tập $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, là tập con nhỏ nhất chứa 1 thỏa 4 tính chất sau

$(i)$ $a + b = b + a,\ \forall a,\ b \in \mathbb{Z}$,
$(ii)$ $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$,
$(iii)$ $\exists 0 \in \mathbb{Z} : a + 0 = a,\ \forall a \in \mathbb{Z}$,
$(iv)$ $\forall a \in \mathbb{Z},\ \exists(-a) \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0$,

được gọi là *tập các số nguyên*. Phần tử của $\mathbb{Z}$ được gọi là *số nguyên*.

**Định nghĩa 6**.

$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$ được gọi là *tập các số tự nhiên*. Phần tử của $\mathbb{N}$ được gọi là *số tự nhiên*.

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$ được gọi là *tập các số nguyên không âm*. Phần tử của $\mathbb{Z}_+$ được gọi là *số nguyên không âm*.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N}\}$ được gọi là *tập các số hữu tỉ*. Phần tử của $\mathbb{Q}$ được gọi là *số hữu tỉ*.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ được gọi là *tập các số vô tỉ*. Phần tử của $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ được gọi là *số vô tỉ*.

**Định lý 3**. *Tập $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}$, là tập con nhỏ nhất thỏa 2 tính chất sau*

$(i)$ $0 \in \mathbb{Z}_+$,
$(ii)$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{Z}_+$.

*Chứng minh Định lý 3.*

* Hiển nhiên $\mathbb{Z}_+$ thỏa 2 tính chất (i) và (ii).
* Giả sử $X \subset \mathbb{R}$ thỏa 2 tính chất (i) và (ii), ta sẽ chứng minh rằng $\mathbb{Z}_+ \subset X$.

Ta có: $0 \in X$, $0 + 1 = 1 \in X$, $1 + 1 \in X$, $(1 + 1) + 1 \in X, \cdots$

Tiếp tục quá trình nầy ta có: $n \in X \Longrightarrow n + 1 \in X$.

Gọi $X' = \{0, 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, \cdots\}$. Khi đó $X'$ là tập con nhỏ nhất thỏa 2 tính chất (i) và (ii), (vì $X'$ chứa trong mọi tập con của $\mathbb{R}$ thỏa 2 tính chất (i) và (ii)). Ta cần chứng minh rằng $X' = \mathbb{Z}_+$.

Đặt $Z' = X' \cup \{-n : n \in X'\}$. Ta có $Z' \subset \mathbb{Z}$ vì $X' \subset \mathbb{Z}_+$.

Vì $Z' \subset \mathbb{R}$ thỏa 4 tính chất trong định nghĩa của $\mathbb{Z}$ nên $\mathbb{Z} \subset Z'$. Vậy $\mathbb{Z} = Z'$ và cuối cùng ta có $X' = \mathbb{Z}_+$.

Chứng minh Định lý 3 hoàn tất. $\square$

**Chú ý**: $\mathbb{Z}_+ = X' = \{0, 1, \underbrace{1 + 1}_{\equiv 2}, \underbrace{(1 + 1) + 1}_{\equiv 2+1 \equiv 3}, \underbrace{((1 + 1) + 1) + 1}_{\equiv 3+1 \equiv 4}, \cdots\}$.

Về tên gọi:

| | |
|---|---|
| $0$ | số không |
| $0 + 1 = 1$ | số một |
| $1 + 1 = 2$ | số hai |
| $2 + 1 = 3$ | số ba |
| $2 + 1 = 3$ | số bốn |
| $4 + 1 = 5$ | số năm, $\cdots$ |

**Phép chứng minh qui nạp**.

Giả sử với mỗi $k \in \mathbb{Z}_+$ ta có mệnh đề toán học $P_k$. Đặt $A = \{k \in \mathbb{Z}_+ : P_k \text{ đúng}\}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P_k \text{ đúng } \forall k &\in \mathbb{Z}_+ \Longleftrightarrow A = \mathbb{Z}_+ \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & 0 \in A = \mathbb{Z}_+, \\ (ii) & \forall k \in A = \mathbb{Z}_+ \Longrightarrow k + 1 \in A = \mathbb{Z}_+. \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & P_0 \text{ đúng}, \\ (ii) & \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ P_k \text{ đúng } \Longrightarrow\ P_{k+1} \text{ đúng}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Phép chứng minh qui nạp dạng khác**.

Giả sử với mỗi $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq k_0$ ta có mệnh đề toán học $P_k$. Khi đó

$$P_k \text{ đúng } \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ k \geq k_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & P_{k_0} \text{ đúng}, \\ (ii) & \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ k \geq k_0,\ P_k \text{ đúng } \Longrightarrow\ P_{k+1} \text{ đúng}. \end{cases}$$

Áp dụng trường hợp cho các mệnh đề toán học $Q_k = P_{k+k_0}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Khi đó

$$P_k \text{ đúng } \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ k \geq k_0 \Longleftrightarrow Q_k \text{ đúng } \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

**Ví dụ 11**: (Xem như Bài tập). Chứng minh rằng

(i) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(1 + n)}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(1 + n)(2n + 1)}{4}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(1 + n)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Định lý 4**. *Ta có các tính chất sau*

1/ *Tính chất Archimède***:** $\forall x > 0,\ y > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$.

2/ *Tính trù mật của* $\mathbb{Q}$ *trong* $\mathbb{R}$ :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q} : x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$.

3/ *Tính trù mật của* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *trong* $\mathbb{R}$ :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$.

*Chứng minh Định lý 4.*

1/ *Chứng minh tính chất Archimède.* $\forall x > 0,\ y > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : nx > y.$

(j) Nếu $x > y$, thì $n = 1$, ta có $nx = x > y$.
(jj) Nếu $x \leq y$, thì ta sẽ chứng minh rằng:

$$\exists n \in \mathbb{N} : nx > y. \tag{*}$$

Giả sử điều (*) không đúng, i.e.

$$nx \leq y,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Đặt $A = \{n \in \mathbb{N} : nx \leq y\}$. Ta có $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$, vì $1 \in A$. Mặt khác $A$ bị chặn trên bởi $y \cdot x^{-1} = yx^{-1}$.
Theo tiên đề $(10, (iii))$, tồn tại $c = \sup A$.
Với $\varepsilon = \frac{1}{2} = 1 \cdot 2^{-1} > 0$, $\exists n_0 \in A : c - \frac{1}{2} < n_0 \leq c$.
Nếu $n_0 + 1 \in A$ thì $n_0 + 1 \leq \sup A = c$, do đó $c - \frac{1}{2} + 1 < n_0 + 1 \leq c$, mà điều này dẫn đến $c + \frac{1}{2} < c$. Vô lý, vậy $n_0 + 1 \notin A$, tức là $(n_0 + 1)\,x > y$. Điều này dẫn đến điều mâu thuẫn với (**). Vậy (*) đúng.

2/ *Chứng minh tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$*, tức là phải chứng minh

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{Q} : x - \varepsilon < q < x + \varepsilon.$$

(j) Giả sử $b > a > 1$, $b - a > 1$. Khi đó, ta sẽ chứng minh rằng:

$$\exists m \in \mathbb{N} : a < m < b. \tag{\#}$$

Giả sử điều (#) không đúng, i.e.

$$m \notin (a, b),\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{\#\#}$$

Đặt $A = \{m \in \mathbb{N} : m \notin (a, b)\}$. Ta có $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$, vì $\exists m \in \mathbb{N} : m > b$. Mặt khác $A$ bị dưới bởi 1.
Theo tiên đề $(10, (iii))$, tồn tại $d = \inf A$.
Với $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $\exists m_0 \in A : d \leq m_0 < d + \frac{1}{2}$.
Nếu $m_0 - 1 \in A$ thì $d = \inf A \leq m_0 - 1 < d + \frac{1}{2} - 1 = d - \frac{1}{2}$, mà điều này dẫn đến $d < d - \frac{1}{2}$. Vô lý, vậy $m_0 - 1 \notin A$, tức là $a < m_0 - 1 < b$. Điều này dẫn đến điều mâu thuẫn với (##). Vậy (#) đúng.

(jj) Giả sử $b > a > 0$, tồn tại $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n_1 a > 1$ và $n_2(b - a) > 1$. Đặt $n = \max\{n_1, n_2\}$, ta có

$$n \in \mathbb{N},\ na > 1,\ n(b - a) > 1.$$

Áp dụng trường hợp (j), ta có $m \in \mathbb{N} : na < m < nb$. Do đó $a < \frac{m}{n} < b$.

(jjj) Giả sử $a < b < 0$, khi đó $0 < -b < -a$. Áp dụng trường hợp (jj), ta có $q = \frac{m}{n}$ sao cho $-b < q = \frac{m}{n} < -a$.

(4j) Giả sử $a \leq 0 < b$, khi đó $a \leq 0 < \frac{b}{2} < b$. Áp dụng trường hợp (jj), ta có $q = \frac{m}{n}$ sao cho $a \leq 0 < \frac{b}{2} < q = \frac{m}{n} < b$.

(5j) Giả sử $a < 0 \leq b$, khi đó $a < \frac{a}{2} < 0 \leq b$. Áp dụng trường hợp (jjj), ta có $q = \frac{m}{n}$ sao cho $a < q = \frac{m}{n} < \frac{a}{2} < 0 \leq b$.

(6j) Giả sử $a < b$, từ các trường hợp (jj)-(5j) ta cũng suy ra rằng tồn tại $q = \frac{m}{n}$ sao cho $a < q = \frac{m}{n} < b$.

(7j) Giả sử $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$. Áp dụng trường hợp (6j) với $a = x - \varepsilon$, $b = x + \varepsilon$, ta có $q = \frac{m}{n}$ sao cho $a = x - \varepsilon < q < b = x + \varepsilon$.

Vậy, tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ được chứng minh. □

**Chú ý**: Ta có thể làm một chứng minh khác theo cách sau. Ta có

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{Z}_+} [n, n+1).$$

Cho $x \in \mathbb{R}_+$, ta có $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x < n_0 + 1$.

Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $m_0 \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{m_0} < \varepsilon$. Đặt $x_k = n_0 + \dfrac{k}{m_0} = \dfrac{m_0 n_0 + k}{m_0} \in \mathbb{Q}$, $k = 0, 1, \cdots, m_0$. Khi đó, $x \in [n_0, n_0 + 1) = \bigcup\nolimits_{k=1}^{m_0} [x_{k-1}, x_k)$, ta có $k \in \{1, 2, \cdots, m_0\}$ sao cho $x_{k-1} \leq x < x_k$.

Như vậy

$$|x_k - x| < |x_k - x_{k-1}| = \frac{1}{m_0} < \varepsilon.$$

Tương tự cho $x < 0$, ta có $-x > 0$, theo trường hợp trên, với $\varepsilon > 0$, ta có $\tilde{x}_k \in \mathbb{Q}$ sao cho $|\tilde{x}_k - (-x)| < \varepsilon$.

3/ *Chứng minh tính trù mật của* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *trong* $\mathbb{R}$, tức là phải chứng minh

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x - \varepsilon < r < x + \varepsilon.$$

Giả sử mệnh đề này không đúng, tức là $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0 : \nexists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$,
hay $\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b : \nexists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < r < a$,
hay $\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b : \forall r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Longrightarrow r \notin (a, b)$,
hay $\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b : \forall r \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow r \notin (a, b)$,
hay $\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b : (a, b) \subset \mathbb{Q}$.

Giả sử $a,\ b \in \mathbb{Q},\ a < b : (a, b) \subset \mathbb{Q}$ (nếu $a,\ b \notin \mathbb{Q}$, ta chọn 2 số hữu tỉ $a',\ b' \in \mathbb{Q} : a < a' < b' < b$)

Do $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \phi$, nên $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)] \neq \phi$. Mà $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)] = [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (-\infty, a)] \cup [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (b, +\infty)]$, nên $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)] \neq \phi$ tương đương với $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (-\infty, a) \neq \phi$ hay $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (b, +\infty) \neq \phi$.

Ta xét hai trường hợp:

(j) *Trường hợp* 1: $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (-\infty, a) \neq \phi$ : Đặt $A = \{r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : r < a\}$. Ta có $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và $A$ và bị chặn trên bởi $a$, do đó tồn tại $r_{\max} = \sup A$.

Chọn $m \in \mathbb{N} : m(b - a) > 1$. Với $\varepsilon = \dfrac{1}{m} > 0$, tồn tại $a_1 \in A : r_{\max} - \dfrac{1}{m} < a_1 \leq r_{\max}$.

Nếu $a_1 + \dfrac{1}{m} \in A$ thì $a_1 + \dfrac{1}{m} \leq r_{\max} < a_1 + \dfrac{1}{m}$. Điều này vô lý. Vậy $a_1 + \dfrac{1}{m} \notin A$, tức là $a_1 + \dfrac{1}{m} \geq a$. Do $a_1 + \dfrac{1}{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ và $a \in \mathbb{Q}$, nên $a_1 + \dfrac{1}{m} \neq a$. Vậy $a_1 + \dfrac{1}{m} > a$.

Mặt khác, do $a_1 \leq r_{\max} \leq a$, ta có $a < a_1 + \dfrac{1}{m} \leq a + \dfrac{1}{m} < b$. Vậy $a_1 + \dfrac{1}{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ và $a_1 + \dfrac{1}{m} \in (a, b)$. Vô lý vì $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a, b) = \phi$.

(jj) *Trường hợp* 2: $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (b, +\infty) \neq \phi$ : Đặt $B = \{r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : r > b\}$. Ta có $\phi \neq B \subset \mathbb{R}$ và $B$ và bị chặn dưới bởi $b$, do đó tồn tại $r_{\min} = \inf B$.

Chọn $m \in \mathbb{N} : m(b - a) > 1$. Với $\varepsilon = \dfrac{1}{m} > 0$, tồn tại $b_1 \in B : r_{\min} \leq b_1 < r_{\min} + \dfrac{1}{m}$.

Nếu $b_1 - \dfrac{1}{m} \in B$ thì $b_1 - \dfrac{1}{m} \geq r_{\min} > b_1 - \dfrac{1}{m}$. Điều này vô lý. Vậy $b_1 - \dfrac{1}{m} \notin B$, tức là $b_1 - \dfrac{1}{m} \leq b$. Do $b_1 - \dfrac{1}{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ và $b \in \mathbb{Q}$, nên $b_1 - \dfrac{1}{m} \neq b$. Vậy $b_1 - \dfrac{1}{m} < b$.

Mặt khác, do $b \leq r_{\min} \leq b_1$, ta có $a < b - \dfrac{1}{m} \leq b_1 - \dfrac{1}{m} < b$. Vậy $b_1 - \dfrac{1}{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ và $b_1 - \dfrac{1}{m} \in (a, b)$. Vô lý vì $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a, b) = \phi$.

Các vô lý này dẫn đến tính trù mật của $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ được chứng minh. $\square$

**Ví dụ 12**: (Xem như Bài tập). Cho $m > 0$ và $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và $A$ bị chặn trên. Đặt $mA = \{mx : x \in A\}$. Chứng minh $\sup(mA) = m \sup A$.

*Giải Ví dụ 12.* Đầu tiên, $A$ là tập con khác rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, nên tồn tại $\sup A$. Tương tự $\sup(mA)$ cũng tồn tại.

$\forall x \in A$, ta có, $mx \leq m \sup A$, do đó $\sup(mA) \leq m \sup A$.

Mặt khác, ta có, $x = \left(m^{-1}\right) mx \leq \left(m^{-1}\right) \sup(mA)$, $\forall x \in A$, ta suy ra rằng $\sup A \leq \left(m^{-1}\right) \sup(mA)$, hay $m \sup A \leq \sup(mA)$. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra đẳng thức $\sup(mA) = m \sup A$. $\square$

**Ví dụ 13**: (Xem như Bài tập). Cho $m > 0$ và $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và $A$ bị chặn dưới. Đặt $mA = \{mx : x \in A\}$. Chứng minh $\inf(mA) = m \inf A$.

*Giải Ví dụ 13.* Đầu tiên, $A$ là tập con khác rỗng và bị chặn dưới của $\mathbb{R}$, nên tồn tại $\inf A$. Tương tự $\inf(mA)$ cũng tồn tại.

$\forall x \in A$, ta có, $mx \geq m \inf A$, do đó $\inf(mA) \geq m \inf A$.

Mặt khác, ta có, $x = \left(m^{-1}\right) mx \geq \left(m^{-1}\right) \inf(mA)$, $\forall x \in A$, ta suy ra rằng $\inf A \geq \left(m^{-1}\right) \inf(mA)$, hay $m \inf A \geq \inf(mA)$. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra đẳng thức $\inf(mA) = m \inf A$. $\square$

**Ví dụ 13a**: (Xem như Bài tập). Cho hai tập con khác trống $A$ và $B$, bị chặn trong $\mathbb{R}$. Giả sử rằng $x \leq y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$.

Chứng minh $\sup A \leq \inf B$.

*Giải Ví dụ 13a.* $\forall x \in A$, ta có $x \leq y$, $\forall y \in B$. Do đó $x$ là một chặn dưới của $B$, suy ra $x \leq \inf B$. Mà điều này đúng với mọi $\forall x \in A$.

Do đó $\inf B$ là một chặn trên của $A$, Do đó $\sup A \leq \inf B$. $\square$

**Ví dụ 13b**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và $A$ bị chặn trên. Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh $B$ bị chặn dưới và $\sup A = -\inf B$.

**Ví dụ 13c**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và $A$ bị chặn dưới. Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh $B$ bị chặn trên và $\sup B = -\inf A$.

**Ví dụ 13d**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A$, $B \subset \mathbb{R}$ và $A$ và $B$ bị chặn trên. Chứng minh rằng $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

**Ví dụ 13e**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A$, $B \subset \mathbb{R}$ và $A$ và $B$ bị chặn dưới. Chứng minh rằng $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

**Ví dụ 13f**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ và $B$ bị chặn trên. Chứng minh rằng $\sup A \leq \sup B$.

**Ví dụ 13g**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ và $B$ bị chặn dưới. Chứng minh rằng $\inf A \geq \inf B$.

**Ví dụ 13h**: (Xem như Bài tập). Cho $m \in \mathbb{R}$ và $\phi \neq A, B \subset \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

(i) Nếu $A$ bị chặn trên thì $\sup\{mx : x \in A\} = m \sup A$, $\forall m > 0$.

(ii) Nếu $A$ bị chặn trên thì $\inf\{mx : x \in A\} = m \sup A$, $\forall m < 0$.
Đặc biệt: $\inf\{-x : x \in A\} = -\sup A$.

(iii) Nếu $A$ bị chặn dưới thì $\inf\{mx : x \in A\} = m \inf A$, $\forall m > 0$.

(iv) Nếu $A$ bị chặn dưới thì $\sup\{mx : x \in A\} = m \inf A$, $\forall m < 0$.
Đặc biệt: $\sup\{-x : x \in A\} = -\inf A$.

(v) Nếu $A$ bị chặn trên thì $\sup\{m + x : x \in A\} = m + \sup A$.

(vi) Nếu $A$ bị chặn dưới thì $\inf\{m + x : x \in A\} = m + \inf A$.

(vii) Nếu và $A$ và $B$ bị chặn trên thì $\sup\{x + y : (x, y) \in A \times B\} \leq \sup A + \sup B$.

(viii) Nếu và $A$ và $B$ bị chặn dưới thì $\inf\{x + y : (x, y) \in A \times B\} \geq \inf A + \inf B$.

**Ví dụ 13k**: (Xem như Bài tập). Cho $a \in (0, 1)$. Chứng minh rằng, $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : a^n < \varepsilon$.

**Ví dụ 13l**: (Xem như Bài tập). Cho $a > 1$. Chứng minh rằng, $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : a^n > M$.

*Hướng dẫn Ví dụ 13k.* $A = \{a^n : n \in \mathbb{N}\} \neq \phi$ và bị chặn dưới bởi 0. Đặt $m = \inf A$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, ta có $a^{n+1} \in A$, do đó $a^{n+1} \geq \inf A = m$.
Từ đó, suy ra $a^n \geq \dfrac{m}{a}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $m = \inf A \geq \dfrac{m}{a}$. Do $a \in (0, 1)$, ta suy ra $m = 0$.
Cho $\varepsilon > 0$, $\exists a^n \in A : a^n < m + \varepsilon = \varepsilon$.

*Hướng dẫn Ví dụ 13l.* Đặt $b = \dfrac{1}{a}$, ta có $b \in (0,1)$. Cho $M > 0$, với $\varepsilon = \dfrac{1}{M} > 0$, ta có $n \in \mathbb{N} : b^n < \varepsilon$. [Do Ví dụ 13k], hay $\dfrac{1}{a^n} = b^n < \varepsilon = \dfrac{1}{M}$, hay $a^n > M$.

**Định nghĩa 7**. Cho $A$ là một tập $\neq \phi$, ta nói

(i) *$A$ có $n$ phần tử* nếu có một song ánh $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to A$.
Khi đó ta nói tập $A$ *có hữu hạn phần tử*.

(ii) $A$ là một *tập vô hạn đếm được* (hoặc vắn tắt là *đếm được*) nếu có một song ánh $f : \mathbb{N} \to A$.

(iii) $A$ là một *tập quá lắm đếm được* nếu $A$ có hữu hạn phần tử hoặc vô hạn đếm được.

(iv) $A$ là một *tập vô hạn không đếm được* (hoặc vắn tắt là *không đếm được*) nếu $A$ không hữu hạn và không vô hạn đếm được.

**Chú ý**

(i) Tập $A$ hữu hạn

(ii) Tập $A$ vô hạn: $\begin{cases} \text{(j)} & \text{Tập } A \text{ vô hạn đếm được (đếm được)} \\ \text{(jj)} & \text{Tập } A \text{ vô hạn không đếm được (không đếm được)} \end{cases}$

(iii) Tập $A$ quá lắm đếm được nếu $A$ hữu hạn hoặc đếm được.

**Ví dụ 14**: (Xem như Bài tập). Chứng minh rằng họ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tất cả các tập con của $\mathbb{N}$ là một tập vô hạn không đếm được.

*Giải Ví dụ 14.* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ là vô hạn không đếm được $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không hữu hạn và $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không vô hạn đếm được.

Ta chia bài toán thành hai trường hợp để chứng minh:

*Trường hợp* 1: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không hữu hạn;
*Trường hợp* 2: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không vô hạn đếm được.

*Chứng minh trường hợp* 1: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không hữu hạn: Do $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \supset \{\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}, \cdots\} = A$ mà $A$ là tập không hữu hạn, do đó $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ cũng vậy.

*Chứng minh trường hợp* 2: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không vô hạn đếm được:

Giả sử có một song ánh $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. đặt $f(k) = A_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. ta có $f(\mathbb{N}) = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ta sẽ chứng minh rằng $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ không toàn ánh, nghĩa là:

$$\text{Tồn tại } C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : C \neq f(i),\ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Chọn $C = \{i \in \mathbb{N} : i \notin A_i\}$. Ta sẽ chứng minh (*) đúng. Giả sử (*) không đúng, tức là: $\exists i_0 \in \mathbb{N} : C = A_{i_0} = f(i_0)$.

Nếu $i_0 \in A_{i_0} = C$ thì $i_0 \notin A_{i_0}$ : Vô lý.
Nếu $i_0 \notin A_{i_0} = C$ thì $i_0 \in A_{i_0}$ : Vô lý.

Vậy (*) đúng, nghĩa là $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ không song ánh, mà điều này dẫn đến $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ không vô hạn đếm được.

Kết quả là $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ là một tập vô hạn không đếm được.

## 2.5 Bài tập bổ sung

**13**. Cho $A = \{a, b\}$. (i) Viết các phần tử của tập $P(A)$. (ii) Chứng minh rằng tập $P(A)$ hữu hạn:

**14**. Cho $x \in \mathbb{R}$, và $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Ta có $A \neq \phi$ và bị chặn trên bởi $x$, do đó tồn tại $c = \sup A$. Chứng minh rằng:

(i) $c \in \mathbb{Z}$ và $c \in A$.
(ii) $c \leq x < c + 1$.

*Hướng dẫn bài* 14: (i)

- Nếu $x \in \mathbb{Z}$, thì do $x \in \mathbb{Z}$, $x \leq x$, nên $x \in A$, vậy $x \leq c \leq x$. Suy ra $c = x \in \mathbb{Z}$, do đó $c \in A$.

- Nếu $x \notin \mathbb{Z} : x \neq n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Do đó $c = \sup A = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$. Ta chứng minh rằng $c \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, nếu $c \notin \mathbb{Z}$, thì với $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, $\exists n_0 \in A : c \geq n_0 > c - \dfrac{1}{2}$.

Ta khẳng định rằng $n_0 + 1 \notin A$, vì nếu ngược lại thì $n_0 + 1 \in A$, do đó $n_0 + 1 < c$, dẫn đến $n_0 + 1 < c < n_0 + \dfrac{1}{2}$. Mà điều này dẫn đến $n_0 + 1 < n_0 + \dfrac{1}{2}$ là điều vô lý. Vậy $n_0 + 1 \notin A$, tức là $n_0 + 1 \geq x$. Do $x \notin \mathbb{Z}$, nên $n_0 + 1 > x$. Từ đây suy ra $n_0 \geq x$. Như thế thì $c \leq x < n_0 \leq c$. Mà điều này dẫn đến vô lý. Vậy $c \in \mathbb{Z}$ và từ đó $c \in A$.

*Hướng dẫn bài* 14: (ii). Theo như (i) thì ta có:

- Nếu $x \in \mathbb{Z}$, thì $c = x$;

- Nếu $x \notin \mathbb{Z}$, thì do $c \in A$, ta có $c \in \mathbb{Z}$ và $c < x$, ta chứng minh rằng $x < c + 1$. Thật vậy, nếu $x \geq c + 1$, thì $x > c + 1$ (do $c + 1 \in \mathbb{Z}$), như vậy $c + 1 \in A$, sẽ dẫn đến $c + 1 \leq \sup A = c$. Mà điều này dẫn đến vô lý. Vậy $x < c + 1$.

**Chú thích.** Ta ký hiệu $c = [x]$ là phần nguyên của $x$.

Tóm lại $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} =$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng $x$. Số này có tính chất

(i) $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$; (là phần nguyên của $x$).

(ii) $\{x\} = x - [x] \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$; (là phần lẻ của $x$).

(iii) $\{x\} = x - [x] = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

# Chương 3

# DÃY SỐ THỰC

## 3.1 Các định nghĩa

**Định nghĩa 1**. *Dãy số thực* là một ánh xạ $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ta đặt $x_n = x(n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có thể dùng một trong các ký hiệu sau để chỉ dãy số thực $x$ :

$$\{x_n\},\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{x_n, n \in \mathbb{N}\},\ (x_n),\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (x_n, n \in \mathbb{N}).$$

**Ví dụ 1**. $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{\cos(n^3)}{n}\right\}$, $\{\cos(n^3)\}$, $\{n + 3n^3\}$, $\{\cos(n^3)\}$, là các dãy số thực.

**Ví dụ 2**. Đặt $x_1 = 1$, $x_n = 3x_{n-1} + 2$, $n = 2, 3, \cdots$ khi đó $\{x_n\}$ là một dãy số thực.

**Chú ý về việc xác định dãy.** Đôi khi người ta cho dãy bắt đầu từ số hạng nào đó trở đi, ví dụ $\{x_n\}$, $n = 10, 11, \cdots$ , hay ký hiệu nó là $\{x_n\}_{n\geq10}$ hay $\{x_{10}, x_{11}, x_{12}, \cdots\}, \cdots$ . Nếu hiểu đúng định nghĩa dãy số thực là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$ thì cách xác định $\{x_n\}_{n\geq10}$ như trên chưa thể gọi là dãy, vì các số hạng $x_1, x_2, \cdots , x_{10}$ chưa xác định. Tuy nhiên, nếu đặt $\tilde{x}_n = x_{n+10}$, $n = 1, 2, \cdots$ , khi đó ta xác định được một dãy số thực $\{\tilde{x}_n\}$. Như vậy theo thông lệ người ta vẫn nói $\{x_n\}_{n\geq10}$ là một dãy số thực theo nghĩa $\{\tilde{x}_n\}$ là dãy xác định từ các giá trị $x_{10}, x_{11}, x_{12}, \cdots$ .

**Ví dụ.** $x_n = \dfrac{3n}{(n-1)(n-2)}$, $n = 3, 4, \cdots$ . Như đã nói trên $\{x_n\}$ chưa được gọi là một dãy vì hai số hạng $x_1$, $x_2$ chưa xác định. Nếu $\tilde{x}_n = x_{n+2} = \dfrac{3(n+2)}{(n+1)n}$, $n = 1, 2, \cdots$ , khi đó $\{\tilde{x}_n\}$ là một dãy số thực $\{\tilde{x}_n\}$ được xác định được từ các số hạng $x_3, x_4, \cdots$ trở đi. Các khái niệm sau này (chẳng hạn như sự hội tụ, tính bị chặn,$\cdots$) không phụ thuộc vào một số hữu hạn các số hạng đầu tiên.

**Định nghĩa 2**. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Ta nói dãy $\{x_n\}$ là *hội tụ* nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho:
Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì số thực $a$ ở trên là duy nhất. Thật vậy, giả sử có hai số thực $a$, $a'$ thỏa mệnh đề (1), tức là, Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N$, $N' \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall n &\in \mathbb{N},\ n > N' \Longrightarrow \left|x_n - a'\right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

Nếu $a \neq a'$, ta chọn $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\,|a - a'| > 0$, ta có hai số $N$, $N' \in \mathbb{N}$ thỏa hai mệnh đề. Với $n > \max\{N, N'\}$, ta có từ (2) rằng

$$\left|a - a'\right| \leq |a - x_n| + \left|x_n - a'\right| < \varepsilon + \varepsilon = \left|a - a'\right|,$$

tức là $|a - a'| < |a - a'|$ . Điều này không thể xảy ra. Vậy $a = a'$.

Khi dãy $\{x_n\}$ hội tụ, số thực $a$ ở trên gọi là *giới hạn của dãy* $\{x_n\}$ và ký hiệu nó hoặc viết là

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} x_n, \\ \text{hay } a &= \lim x_n, \\ \text{hay } x_n &\to a \text{ khi } n\to\infty, \\ \text{hay } x_n &\to a. \end{aligned}$$

Dùng các ký hiệu logic ta có thể diễn đạt định nghĩa trên như sau:

$$x_n \to a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\in\mathbb{N},\ n>N \Longrightarrow |x_n-a|<\varepsilon.$$

Chú ý rằng, số $N$ tồn tại trên đây nói chung phụ thuộc vào $\varepsilon$, do đó ta có thể viết $N=N(\varepsilon)$. Hơn cũng không cần thiết $N$ phải là số tự nhiên. Thật vậy, nếu $N$ không là số tự nhiên, dùng tính chất Archimède ta sẽ thay nó bởi một số tự nhiên lớn hơn nó.

Theo đó, ta viết lại mệnh đề định nghĩa ở trên như sau

$$x_n \to a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N},\ n>N \Longrightarrow |x_n-a|<\varepsilon.$$

Ta nói dãy $\{x_n\}$ là *phân kỳ* nếu $\{x_n\}$ không hội tụ.

**Chú thích**.

(i) Từ định nghĩa ta cũng thấy rằng

$$\begin{aligned} x_n &\to a \Longleftrightarrow x_n-a\to 0, \\ |x_n| &\to 0 \Longleftrightarrow x_n\to 0. \end{aligned}$$

(ii) Với dãy hằng số: $x_n=C$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ta luôn có $x_n\to C$.

(iii) Từ định nghĩa ta cũng thấy rằng, tính chất hội tụ và giới hạn của một dãy số thực *không phụ thuộc vào một số hữu hạn các số hạng đầu tiên.* Để thấy rõ hơn, ta xét dãy số hội tụ $\{x_n\}$ như trên. Cho trước $q\in\mathbb{N}$, ta xét một dãy số thực mới $\{\tilde{x}_n\}$ được xác định bởi $\tilde{x}_n=x_{n+q}$, $n=1,2,\cdots$, khi đó ta có thể chứng minh được rằng dãy $\{\tilde{x}_n\}$ cũng hội tụ và có cùng giới hạn $a$ với dãy số thực $\{\tilde{x}_n\}$. Như vậy giới hạn $a$ này không phụ thuộc vào $q$, và cũng không phụ thuộc vào $q$ số hạng đầu tiên $x_1,x_2,\cdots,x_q$.

(iv) Nhận xét tương tự cho tính chất phân kỳ cũng vậy.

**Định nghĩa 2**. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Ta nói

(i) $\{x_n\}$ *bị chặn trên* nếu tập $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ bị chặn trên, i.e., $\exists M\in\mathbb{R}: x_n\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(ii) $\{x_n\}$ *bị chặn dưới* nếu tập $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ bị chặn dưới, i.e., $\exists m\in\mathbb{R}: x_n\ge m$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(iii) $\{x_n\}$ *bị chặn* nếu $\{x_n\}$ bị chặn trên và bị chặn dưới, i.e.,
$$\exists m,M\in\mathbb{R}: m\le x_n\le M,\ \forall n\in\mathbb{N},$$
hay tương đương với $\exists M\in\mathbb{R}: |x_n|\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(iv) $\{x_n\}$ là dãy *tăng* nếu $x_n<x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(v) $\{x_n\}$ là dãy *giảm* nếu $x_n>x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(vi) $\{x_n\}$ là dãy *không giảm* nếu $x_n\le x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(vii) $\{x_n\}$ là dãy *không tăng* nếu $x_n\ge x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(viii) Dãy $\{x_n\}$ thoả 1 trong 4 tính chất (iv)-(vii) được gọi là *dãy đơn điệu.*
Để phân biệt người ta còn gọi tên đi kèm chữ đơn điệu chẳng hạn như:
*đơn điệu tăng, đơn điệu giảm, đơn điệu không giảm, đơn điệu không tăng.*

**Chú thích**. Bốn định nghĩa (iv)-(vii) là 4 khái niệm khác nhau và độc lập, tức là phủ định một trong 4 định nghĩa (iv)-(vii) không phải là một trong ba định nghĩa còn lại. Ví dụ, *dãy không tăng* không có nghĩa là *không phải là dãy tăng.* Bởi vì dãy $\{x_n\}$ *không phải là dãy tăng* có nghĩa là: $\exists n_0\in\mathbb{N}: x_{n_0}\ge x_{n_0+1}$, trong khi đó để dãy $\{x_n\}$ *không tăng* thì bất đẳng thức $x_n\ge x_{n+1}$ phải đúng $\forall n\in\mathbb{N}$.

## 3.2 Các tính chất và các phép tính về giới hạn của dãy số hội tụ

**Định lý 1.** *Giả sử* $x_n\to a$.

(i) *Nếu* $a > M$, *thì* $\exists N \in \mathbb{N} : x_n > M, \forall n > N$;
(ii) *Nếu* $x_n > M, \forall n \in \mathbb{N}$, *thì* $a \geq M$;
(iii) *Nếu* $a < M$, *thì* $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < M, \forall n > N$;
(iv) *Nếu* $x_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$, *thì* $a \leq M$;
(v) $\{x_n\}$ *bị chặn.*

*Chứng minh Định lý 1.*

(i) Với $a > M$, chọn $\varepsilon$ sao cho $0 < \varepsilon < a - M$ thì $a - \varepsilon > M$. Với số $\varepsilon$ này thì

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Longrightarrow x_n > a - \varepsilon > M.$$

(ii) Giả sử ngược lại $a < M$. Khi đó theo (iii), thì $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < M, \forall n > N$. Đặc biệt với $n_0 = N+1$, ta có $x_{n_0} < M$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết (ii). Vậy (ii) đúng.

(iii) Chứng minh tương tự với (i).

(iv) Chứng minh tương tự với (ii).

(v) Chọn $\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < 1$, từ đó $|x_n| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|\} = M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Định lý 1 được chứng minh xong. $\square$

**Định lý 2.** *Cho hai dãy hội tụ* $x_n \to a$ *và* $y_n \to b$.

(i) *Nếu* $x_n < y_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, *thì* $a \leq b$.
(ii) *Nếu* $a < b$, *thì* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow x_n < y_n$.

*Chứng minh Định lý 2.*

(i) Giả sử ta có $a > b$. Lấy một số $M = \dfrac{a+b}{2}$ ta có $a > M > b$. Khi đó theo Định lý 1 (i), với $a > M$ ta có $N_1 \in \mathbb{N} : x_n > M, \forall n > N_1$.

Mặt khác, theo Định lý 1 (iii), với $b < M$ ta có $N_2 \in \mathbb{N} : y_n < M, \forall n > N_2$.

Chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ và $n_0 > \max\{N_1, N_2\}$, ta có $x_{n_0} > M > y_{n_0}$. Điều nầy mâu thuẫn với giả thiết (ii). Do đó $a \leq b$.

(ii) $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$, $N_1 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N_1$.

Vậy, $\forall n > N_1$, ta có $x_n < a + \varepsilon < a + \dfrac{b-a}{2} = b - \dfrac{b-a}{2} = b - \varepsilon < y_n$.

Định lý 2 được chứng minh xong. $\square$

**Định lý 3.** *Cho ba dãy* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ *sao cho*

(i) $x_n \leq y_n \leq z_n\ \forall n \in \mathbb{N}$,
(ii) $x_n \to a,\ z_n \to a$.

*Khi đó dãy* $\{y_n\}$ *cũng hội tụ và* $y_n \to a$.

*Chứng minh Định lý 3.* Do $x_n \to a$, $z_n \to a$, theo định nghĩa sự hội tụ, $\forall \varepsilon > 0$, ta có $N_1$, $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} \forall n &> N_1 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \\ \forall n &> N_2 \Longrightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Khi đó, $\forall n > \max\{N_1, N_2\} \Longrightarrow a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Longrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$. Vậy $y_n \to a$.

Định lý 3 được chứng minh xong. $\square$

**Định lý 4.** *Cho hai dãy hội tụ* $x_n \to a$ *và* $y_n \to b$. *Cho* $k \in \mathbb{R}$. *Khi đó, các dãy* $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{kx_n\}$, $\{|x_n|\}$ *cũng hội tụ và*

(i) $x_n + y_n \to a + b$;
(ii) $x_n y_n \to ab$;
(iii) $kx_n \to ka$;
(iv) $|x_n| \to |a|$;
(v) *Nếu* $b \neq 0$ *thì tồn tại* $N \in \mathbb{N} : y_n \neq 0, \forall n > N$ *và* $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$.

*Chứng minh Định lý 4.*
*Chứng minh* (i). Theo định nghĩa giới hạn, $\forall \varepsilon > 0$, ta có $N_1$, $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} \forall n &> N_1 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2, \\ \forall n &> N_2 \Longrightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Khi đó, $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ dẫn đến

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Vậy $x_n + y_n \to a + b$.
*Chứng minh* (ii). Ta có

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n (y_n - b) + b (x_n - a)| \\ &\leq |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a|. \end{aligned}$$

Do $\{x_n\}$ hội tụ, nên $\{x_n\}$ bị chặn, ta có $M > 0 : |x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Cho $\varepsilon > 0$, do $x_n \to a$, ta có $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n > N_1 \Longrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}.$$

Mặt khác, do $y_n \to b$, ta có $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n > N_2 \Longrightarrow |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1 + M)}.$$

Khi đó, $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ dẫn đến

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\leq |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2(1 + M)} + |b| \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)} \\ &= \left[ \frac{M}{1 + M} + \frac{|b|}{1 + |b|} \right] \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy $x_n y_n \to ab$.
*Chứng minh* (iii). Xét $y_n = k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $y_n \to k$. Khi đó theo (ii), thì $kx_n \to ka$.
*Chứng minh* (iv). Ta có

$$0 \leq ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| \to 0.$$

Do Định lý 3, ta có $|x_n| - |a| \to 0$, i.e., $|x_n| \to |a|$.

*Chứng minh* (v). Do $b \neq 0$ và $y_n \to b$, ta có $|y_n| \to |b| > \dfrac{|b|}{2} > 0$, do Định lý 1 (i), ta có $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}, \ \forall n > N_1.$$

Với mọi $n > N_1$, ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{b(x_n - a) + a(b - y_n)}{b y_n} \right| \\ &\leq \frac{1}{|y_n|} \left[ |x_n - a| + \frac{|a|}{|b|} |b - y_n| \right] \\ &\leq \frac{2}{|b|} \left[ |x_n - a| + \frac{|a|}{|b|} |b - y_n| \right] \\ &= \frac{2}{|b|} |x_n - a| + 2 \frac{|a|}{b^2} |b - y_n|. \end{aligned}$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, $x_n \to a$ và $y_n \to b$, tồn tại $N_2$, $N_3 \in \mathbb{N}$, sao cho

$$\begin{aligned} \forall n &> N_2 \Longrightarrow \frac{2}{|b|}|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall n &> N_3 \Longrightarrow |y_n - a| < \frac{b^2\varepsilon}{4(1+|a|)}. \end{aligned}$$

Khi đó, $\forall n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$ dẫn đến

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &\le \frac{2}{|b|}|x_n - a| + 2\frac{|a|}{b^2}|b - y_n| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{|a|}{b^2}\frac{b^2\varepsilon}{4(1+|a|)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Định lý 4 được chứng minh xong. □

**Định lý 5 (Tiêu chuẩn Weierstrass).** *Cho dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa một trong 4 điều kiện dưới đây:*

(i) $\{x_n\}$ *tăng và bị chặn trên;*
(ii) $\{x_n\}$ *không giảm và bị chặn trên;*
(iii) $\{x_n\}$ *giảm và bị chặn dưới;*
(iv) $\{x_n\}$ *không tăng và bị chặn dưới;*

*Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ.*

*Chứng minh Định lý 5.*

*Chứng minh* (i). Cho $\{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên. Khi đó tập $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \phi$ và bị chặn trên. Do đó, tồn tại $a = \sup A$. Ta sẽ chứng minh rằng $x_n \to a$.

Cho $\varepsilon > 0$, do $a = \sup A$, ta có $x_{n_0} \in A : x_{n_0} > a - \varepsilon$.

Với mọi $n > n_0$, do $\{x_n\}$ là dãy tăng ta có $x_n > x_{n_0}$, do đó ta suy ra

$$a - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \le a < a + \varepsilon,$$

điều này dẫn đến

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Vậy $x_n \to a$.

*Chứng minh* (ii): Một cách tương tự, chứng minh $x_n \to \sup A$.

*Chứng minh* (iii) và (iv): Một cách tương tự, chứng minh $x_n \to \inf A$.

Định lý 5 được chứng minh xong. □

**Chú thích**.

(i) Mọi dãy $\{x_n\}$ tăng (hoặc không giảm) và bị chặn trên thì hội tụ về $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

(ii) Mọi dãy $\{x_n\}$ giảm (hoặc không tăng) và bị chặn dưới thì hội tụ về $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

**Ví dụ 3**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và bị chặn trên. Chứng minh có một dãy $\{x_n\} \subset A$ hội tụ về $\sup A$.

*Giải Ví dụ 3.* Do $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và bị chặn trên, nên tồn tại $\sup A$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, lấy $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, ta có phần tử $x_n \in A$ (phụ thuộc vào $n$) sao cho $x_n > a - \dfrac{1}{n}$. Từ đây ta suy ra

$$a - \frac{1}{n} < x_n \le a < a + \frac{1}{n},$$

tức là $|x_n - a| < \dfrac{1}{n} \to 0$. Vậy $x_n \to a$.

**Ví dụ 4**: (Xem như Bài tập). Cho $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ và bị chặn dưới. Chứng minh có một dãy $\{x_n\} \subset A$ hội tụ về $\inf A$.

## 3.3 Dãy con, dãy Cauchy

**Định nghĩa 3**. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ và cho $\{n_k\} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là dãy tăng các số tự nhiên, tức là $n_k < n_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ánh xạ hợp $\{x_n\} \circ \{n_k\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ là một dãy số thực được xác định bởi $y_k = x_{n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dãy số thực $\{y_k\}$ được gọi là một *dãy con của dãy* $\{x_n\}$ *tương ứng với dãy* $\{n_k\}$. Dãy con $\{y_k\}$ được ký hiệu lại là $\{x_{n_k}\}$.

**Chú thích**.
(i) Bản thân $\{x_n\}$ cũng là dãy con của chính nó.
(ii) Dãy con của dãy con cũng là dãy con của dãy ban đầu, nghĩa là nếu $\{y_k\} = \{x_{n_k}\}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}$ và $\{z_j\} = \{y_{k_j}\}$ cũng là dãy con của $\{x_n\}$. Ta chú ý là $z_j = x_{n_{k_j}} = x_{q_j}$. Mà $q_j = n_{k_j}$ là dãy các số tự nhiên tăng, bởi vì $k_j < k_{j+1}$, dẫn đến $q_j = n_{k_j} < n_{k_{j+1}} = q_{j+1}$.

**Ví dụ 5**: Cho dãy số thực $\{x_n\}$, với $x_n = \dfrac{1}{n}$, xét hai dãy $\{y_k\}$ và $\{z_k\}$ như sau:

$$\begin{aligned} y_k &= x_{2k} = \frac{1}{2k}, \\ z_k &= x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ta có $\{y_k\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ tương ứng với dãy $n_k = 2k$, và $\{z_k\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ tương ứng với dãy $n_k = 2k - 1$.

**Định lý 6.** *Mọi dãy con của một dãy hội tụ thì cũng hội tụ và có cùng một giới hạn.*

*Chứng minh Định lý 6.* Cho $x_n \to a$ và $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $x_{n_k} \to a$.
Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$, do $x_n \to a$, ta có $N \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > N$.
Chú ý rằng $n_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ta chọn $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $k_0 > N$, khi đó $n_k \geq k > k_0 > N$, $\forall k > k_0$.
Do đó, ta suy ra $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, $\forall k > k_0$.
Vậy $x_{n_k} \to a$.
Định lý 6 được chứng minh xong. □

**Định nghĩa 4**. Cho dãy số thực $\{x_n\}$. Ta nói $\{x_n\}$ là *dãy Cauchy* nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n > N \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

**Định lý 7.** *Cho* $\{x_n\}$ *là một dãy số thực. Khi đó*

$$\{x_n\} \text{ hội tụ} \iff \{x_n\} \text{ là dãy Cauchy.}$$

*Chứng minh Định lý 7.*
*Chứng minh phần thuận* ($\Longrightarrow$): Cho $x_n \to a$, ta sẽ chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.
Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$, do $x_n \to a$, ta có $N \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N$.
Do đó, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$, ta có

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.
*Chứng minh phần đảo* ($\Longleftarrow$): Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Ta chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.
Dùng Ví dụ 6 dưới đây, ta chỉ cần chứng minh dãy $\{x_n\}$ chứa một dãy con hội tụ.
Trước hết chúng ta chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn.
Do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, với $\varepsilon = 1$, ta có $N \in \mathbb{N} : |x_m - x_n| < 1$, $\forall m, n > N$.
Suy ra

$$\begin{aligned} |x_m| &\leq |x_m - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \leq 1 + |x_{N+1}| \\ &\leq \max(1 + |x_{N+1}|,\ |x_1|,\ |x_2|, \cdots,\ |x_N|\} = M,\ \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dùng định lý Bolzano-Weierstrass (Sẽ chứng minh ở Định lý 8), ta có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ hội tụ về một giới hạn $a \in [-M, M]$.

Sử dụng Bài tập dưới đây ta có Định lý 7 được chứng minh xong. $\square$

**Ví dụ 6**: (Xem như Bài tập). Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy. Giả sử $\{x_n\}$ có một dãy con hội tụ về $a$. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về $a$.

*Giải Ví dụ 6.* Giả sử $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to a$. Ta sẽ chứng minh rằng $x_n \to a$.

Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$.

Do $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy, nên có $N \in \mathbb{N} : |x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall m, n > N$.

Do $x_{n_k} \to a$, ta có $k_0 > N : |x_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall k > k_0$.

Đặc biệt lấy một số tự nhiên $k_1 = k_0 + 1 > k_0$, ta có

$$\begin{aligned} \left|x_{n_{k_1}} - a\right| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ n_{k_1} &\geq k_1 > N. \end{aligned}$$

Với mọi $m > N$, ta suy ra

$$|x_m - a| \leq \left|x_m - x_{n_{k_1}}\right| + \left|x_{n_{k_1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $x_n \to a$.

Giải Ví dụ 6 giải xong. $\square$

**Ví dụ 7**: (Xem như Bài tập). Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m], \forall m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$.

(i) Đặt $a_{\max} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $b_{\min} = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} b_m$. Chứng minh rằng

$$[a_{\max}, b_{\min}] \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k].$$

(ii) Nếu thêm điều kiện $b_n - a_n \to 0$, hãy chứng minh rằng $a_{\max} = b_{\min}$.

*Giải Ví dụ 7.*

*Chứng minh* (i). Viết lại điều kiện

$$a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m, \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ m \leq n.$$

Lấy $m = 1$

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra:

$\{a_n\}$ là dãy (tăng) không giảm và bị chặn trên, do đó $a_n \to a_{\max} \equiv \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$,

$\{b_n\}$ là dãy (giảm) không tăng và bị chặn dưới, do đó $b_n \to b_{\min} \equiv \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

Cố định $m \in \mathbb{N}$, do $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m, \forall n \geq m$. Cho $n \to \infty$, ta thu được

$$a_m \leq a_{\max} \leq b_{\min} \leq b_m, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$[a_{\max}, b_{\min}] \subset [a_m, b_m], \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Vậy

$$[a_{\max}, b_{\min}] \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [a_m, b_m].$$

*Chứng minh* (ii). Từ các bất đẳng thức $a_m \leq a_{\max} \leq b_{\min} \leq b_m, \forall m \in \mathbb{N}$, ta suy ra

$$0 \leq b_{\min} - a_{\max} \leq b_m - a_m, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Cho $m \to \infty$, ta thu được $b_{\min} - a_{\max} = 0$, hay $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} b_m$.

**Ví dụ 8**: (Xem như Bài tập). Cho ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$ sao cho $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$.

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$;

(ii) $b_n - a_n \to 0$;

(iii) $a_n \le x_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ.

*Giải Ví dụ 8.* Theo Ví dụ 7, thì (i), (ii) dẫn đến $a_n \to a_{\max}$, $b_n \to b_{\min}$ và $a_{\max} = b_{\min}$.

Từ các điều kiện (iii), dẫn đến $x_n \to a_{\max} = b_{\min}$.

**Định lý 8 (Bolzano-Weierstrass).** *Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ và $\{x_n\}$ một dãy số thực sao cho $a \le x_n \le b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó có một dãy con của dãy $\{x_n\}$ hội tụ về $x \in [a, b]$.*

*Chứng minh Định lý 8.*

Chia đoạn $[a, b]$ thành hai đoạn bởi trung điểm $c = \dfrac{a+b}{2}$. Đặt

$$\begin{aligned} J_1^- &= \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a, c]\}, \\ J_1^+ &= \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [c, b]\}, \end{aligned}$$

ta thu được $J_1^- \cup J_1^+ = \mathbb{N}$.

Do $\mathbb{N}$ vô hạn phần tử nên một trong hai tập $J_1^-$, $J_1^+$ phải vô hạn phần tử, chẳng hạn như $J_1^+$ vô hạn phần tử. Chọn $n_1 \in J_1^+$.

Ta đặt lại $[a_1, b_1] = [c, b]$, và chia đoạn $[a_1, b_1]$ thành hai đoạn bởi trung điểm $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, như vậy

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv J_1^+ = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_1, b_1]\},\ x_{n_1} \in [a_1, b_1], \\ J_2^- &= \{n \in J_1 : x_n \in [a_1, c_1]\}, \\ J_2^+ &= \{n \in J_1 : x_n \in [c_1, b_1]\}, \end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} J_2^- \cup J_2^+ &= J_1, \\ b_1 - a_1 &= \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Do $J_1$ vô hạn phần tử nên một trong hai tập $J_2^-$, $J_2^+$ phải vô hạn phần tử, chẳng hạn như $J_2^+$ vô hạn phần tử. Chọn $n_2 \in J_2^+$, $n_2 > n_1$.

Ta đặt lại $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$, và chia đoạn $[a_2, b_2]$ thành hai đoạn bởi trung điểm $c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$, như vậy

$$\begin{aligned} J_2 &\equiv J_2^+ = \{n \in J_1 : x_n \in [a_2, b_2]\},\ x_{n_2} \in [a_2, b_2], \\ J_3^- &= \{n \in J_2 : x_n \in [a_2, c_2]\}, \\ J_3^+ &= \{n \in J_2 : x_n \in [c_2, b_2]\}, \end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} J_3^- \cup J_3^+ &= J_2, \\ b_2 - a_2 &= \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}. \end{aligned}$$

Do $J_2$ vô hạn phần tử nên một trong hai tập $J_3^-$, $J_3^+$ phải vô hạn phần tử, chẳng hạn như $J_3^+$ vô hạn phần tử. Chọn $n_3 \in J_3^+$, $n_3 > n_2$.

Ta đặt lại $[a_3, b_3] = [c_2, b_2]$, và chia đoạn $[a_3, b_3]$ thành hai đoạn bởi trung điểm $c_3 = \dfrac{a_3+b_3}{2}$, như vậy

$$\begin{aligned} J_3 &\equiv J_3^+ = \{n \in J_2 : x_n \in [a_3, b_3]\},\ x_{n_3} \in [a_3, b_3], \\ J_4^- &= \{n \in J_3 : x_n \in [a_3, c_3]\}, \\ J_4^+ &= \{n \in J_3 : x_n \in [c_3, b_3]\}, \end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} J_4^- \cup J_4^+ &= J_3, \\ b_3 - a_3 &= \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{2^3}, \end{aligned}$$

Do $J_3$ vô hạn phần tử nên một trong hai tập $J_4^-$, $J_4^+$ phải vô hạn phần tử, chẳng hạn như $J_4^+$ vô hạn phần tử. Chọn $n_4 \in J_4^+$, $n_4 > n_3$.

Ta đặt lại $[a_4, b_4] = [c_3, b_3]$, và chia đoạn $[a_3, b_3]$ thành hai đoạn bởi trung điểm $c_4 = \dfrac{a_4 + b_{43}}{2}$, như vậy

$$\begin{aligned} J_4 &\equiv J_4^+ = \{n \in J_3 : x_n \in [a_4, b_4]\},\ x_{n_4} \in [a_4, b_4], \\ J_5^- &= \{n \in J_4 : x_n \in [a_4, c_4]\}, \\ J_5^+ &= \{n \in J_4 : x_n \in [c_4, b_4]\}, \end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} J_5^- \cup J_5^+ &= J_4, \\ b_4 - a_4 &= \frac{b_3 - a_3}{2} = \frac{b-a}{2^4}. \end{aligned}$$

Tiếp tục quá trình trên ta chọn được tập con vô hạn $J_k \equiv \{n \in J_{k-1} : x_n \in [a_k, b_k]\}$, của $\mathbb{N}$, gồm những $n$ sao cho $x_n \in [a_k, b_k]$, với

$$\begin{aligned} J_k &\subset J_{k-1},\ [a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}], \\ b_k - a_k &= \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b-a}{2^k},\ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Chọn $n_k \in J_k$, ta có

$$\begin{aligned} x_{n_k} &\in [a_k, b_k] \subset [a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}], \\ b_k - a_k &= \frac{b-a}{2^k} \to 0,\ \text{khi } k \to \infty. \end{aligned}$$

Theo Ví dụ 8, ta thu được dãy $\{x_{n_k}\}$ hội tụ.
Định lý 8 được chứng minh xong. □

## 3.4 Dãy số tiến ra vô cùng

**Định nghĩa 5**. Ta nói dãy số thực $\{x_n\}$ *tiến ra* $+\infty$ nếu

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow x_n > A.$$

Khi dãy $\{x_n\}$ tiến ra $+\infty$, ta có thể nói *dãy* $\{x_n\}$ *có giới hạn* $+\infty$ và ta có thể viết một theo các cách sau

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= +\infty, \\ \text{hay } \lim x_n &= +\infty, \\ \text{hay} \quad x_n &\to +\infty \text{ khi } n \to \infty, \\ \text{hay} \quad x_n &\to +\infty. \end{aligned}$$

Định nghĩa tương tự cho giới hạn $-\infty$ cho dãy $\{x_n\}$ như sau
**Định nghĩa 6**. Ta nói dãy số thực $\{x_n\}$ *tiến ra* $-\infty$ nếu

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow x_n < A.$$

Khi dãy $\{x_n\}$ tiến ra $-\infty$, ta có thể nói *dãy* $\{x_n\}$ *có giới hạn* $-\infty$ và ta có thể viết một theo các cách sau

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= -\infty, \\ \text{hay } \lim x_n &= -\infty, \\ \text{hay } \quad x_n &\to -\infty \text{ khi } n \to \infty, \\ \text{hay } \quad x_n &\to -\infty. \end{aligned}$$

**Chú thích**.

(i) Chú ý rằng dãy $\{x_n\}$ với hai trường hợp $x_n \to +\infty$ và $x_n \to -\infty$ (không có giới hạn hữu hạn) được xếp vào loại *dãy phân kỳ* (*không hội tụ*).

(ii) Trong trường hợp dãy $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên, khi đó ta có $x_n \to +\infty$.

Thật vậy, do dãy $\{x_n\}$ không bị chặn trên, ta có

$$\forall M > 0,\ \exists n(M) \in \mathbb{N} : x_{n(M)} > M.$$

Do dãy $\{x_n\}$ tăng, nên, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > n(M) \Longrightarrow x_m > x_{n(M)} > M$.
Vậy, $x_n \to +\infty$.

(iii) Với chú ý là nếu dãy $\{x_n\}$ giảm và không bị chặn dưới, ta có $x_n \to -\infty$.

(iv) Các phép tính giới hạn của dãy cũng được mở rộng cho các phép tính với giới hạn vô cực như sau.

$$\begin{aligned} (+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty,\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty,\ (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty, \\ a\cdot(+\infty) &= +\infty,\ a\cdot(-\infty) = -\infty,\ (-a)\cdot(-\infty) = +\infty,\ (-a)\cdot(+\infty) = -\infty,\ a > 0; \\ \frac{a}{\pm\infty} &= 0,\ a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ngoài ra cũng có các dạng vô định (không xác định)

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^\infty,\ 0^0.$$

**Ví dụ 9**: (Xem như Bài tập). Cho dãy số thực $\{x_n\}$ không bị chặn trên. Chứng minh rằng tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to +\infty$.
**Ví dụ 10**: (Xem như Bài tập). Cho dãy số thực $\{x_n\}$ không bị chặn dưới. Chứng minh rằng tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to -\infty$.
*Giải Ví dụ 9.*

$$\begin{aligned} \{x_n\} \text{ bị chặn trên } &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : x_n \le k,\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ \{x_n\} \text{ không bị chặn trên } &\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N} : x_{n_k} > k. \end{aligned}$$

Từ đây ta thấy $x_{n_k} > k \to +\infty$, do đó $x_{n_k} \to +\infty$. Nhưng ở đây cần đòi hỏi $\{x_{n_k}\}$ phải là dãy con của $\{x_n\}$, tức là $n_k < n_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Do $\{x_n\}$ không bị chặn trên, nên với $k = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N} : x_{n_1} > 1$.
Do tập $A_1 = \{x_n : n > n_1\}$ không bị chặn trên, nên với $k = 2, \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > 2$.
Tiếp tục quá trình trên, tập $A_k = \{x_n : n > n_k\}$ không bị chặn trên,
nên với $k+1 \in \mathbb{N}, \exists n_{k+1} > n_k : x_{n_{k+1}} > k+1$.

## 3.5 Giới hạn trên (limsup) và giới hạn dưới (liminf)

**Định nghĩa giới hạn trên (limsup) và giới hạn dưới (liminf).**

Cho một dãy số thực $\{x_n\}$.

Đặt $A_n = \{x_k : k \geq n\}$, ta có dãy $\{A_n\}$ giảm dần các tập con khác trống của $\mathbb{N}$:

$$A_m \subset A_n \subset A_1, \ \forall m, \ n \in \mathbb{N}, \ m \geq n.$$

**Định nghĩa limsup.**

(i) Nếu $A_1$ không bị chặn trên (i.e. $\{x_n\}$ không bị chặn trên), ta đặt: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(ii) Nếu $A_1$ bị chặn trên (i.e. $\{x_n\}$ bị chặn trên), ta đặt $y_n = \sup A_n$, ta có $\{y_n\}$ là dãy giảm:

$$y_m \leq y_n \leq y_1, \ \forall m, \ n \in \mathbb{N}, \ m \geq n.$$

(ii1) Nếu $\{y_n\}$ không bị chặn dưới, khi đó $y_n \to -\infty$, ta đặt: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(ii2) Nếu $\{y_n\}$ bị chặn dưới, khi đó $\{y_n\}$ có giới hạn là $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\limits_{n\geq 1} y_n$, ta đặt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Chú thích 1**. Trường hợp (ii2) này, $\{y_n\}$ giảm và bị chặn dưới, ta có $y_n \to \inf\limits_{n\geq 1} y_n$ khi $n \to \infty$. Do đó, ta viết lại theo một cách như sau

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \inf_{n\geq 1} y_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right).$$

**Chú thích 2**. Cũng còn gọi tên là *giới hạn trên của dãy* $\{x_n\}$, và người ta có thể dùng thêm một ký hiệu khác $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ thay cho $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Định nghĩa liminf.**

(i) Nếu $A_1$ không bị chặn dưới (i.e. $\{x_n\}$ không bị chặn dưới), ta đặt: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(ii) Nếu $A_1$ bị chặn dưới (i.e. $\{x_n\}$ bị chặn dưới), ta đặt: $z_n = \inf A_n$, ta có $\{z_n\}$ là dãy tăng:

$$z_1 \leq z_n \leq z_m, \ \forall m, \ n \in \mathbb{N}, \ m \geq n.$$

(ii1) Nếu $\{z_n\}$ không bị chặn trên, khi đó $z_n \to +\infty$, ta đặt: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

(ii2) Nếu $\{z_n\}$ bị chặn trên, khi đó $\{z_n\}$ có giới hạn là $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \sup\limits_{n\geq 1} z_n$, ta đặt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

**Chú thích 3**. Trường hợp (ii2) này, $\{z_n\}$ tăng và bị chặn trên, ta có $z_n \to \sup\limits_{n\geq 1} z_n$ khi $n \to \infty$. Do đó, ta viết lại theo một cách như sau

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \sup_{n\geq 1} z_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right).$$

**Chú thích 4a**. Cũng còn gọi tên là *giới hạn dưới của dãy* $\{x_n\}$, và người ta có thể dùng thêm một ký hiệu khác $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ thay cho $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Tóm tắt Định nghĩa**.

$$y_n = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ \sup\limits_{k\geq n} x_k, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ bị chặn trên,} \end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ -\infty, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ bị chặn trên, } \{y_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\limits_{n\geq 1} y_n & \\ \qquad = \inf\limits_{n\geq 1}\left(\sup\limits_{k\geq n} x_k\right), & \text{nếu } \{x_n\} \text{ bị chặn trên, } \{y_n\} \text{ bị chặn dưới,} \end{cases}$$

$$z_n = \begin{cases} -\infty, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \\ \inf\limits_{k\geq n} x_k, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ bị chặn dưới,} \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \\ +\infty, & \text{nếu } \{x_n\} \text{ bị chặn dưới, } \{z_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \sup\limits_{n\geq 1} z_n & \\ \qquad = \sup\limits_{n\geq 1}\left(\inf\limits_{k\geq n} x_k\right), & \text{nếu } \{x_n\} \text{ bị chặn dưới, } \{z_n\} \text{ bị chặn trên.} \end{cases}$$

**Chú thích 4b**.
(i) Nếu $\{x_n\}$ không bị chặn trên, ta định nghĩa $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
(ii) Nếu $\{x_n\}$ không bị chặn dưới, ta định nghĩa $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**Chú thích 4c**. Nếu ta đặt

$$\begin{aligned} \sup_{k\geq n} x_k &= +\infty, \text{ nếu } \{x_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ \inf_{k\geq n} x_k &= -\infty, \text{ nếu } \{x_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \end{aligned}$$

khi đó không chia các trường hợp chúng ta có thể định nghĩa $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ bằng công thức

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right),$$

và $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ bằng công thức

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right).$$

**Ví dụ 11**: Cho $x_n = (-1)^n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.
*Giải Ví dụ 11.* Đặt

$$A_n = \{x_k : k \geq n\} = \{(-1)^k : k \geq n\} = \{-1, 1\}.$$

(i) Tính $\liminf x_n$. Ta có:
$A_1$ bị chặn dưới, ta đặt

$$z_n = \inf A_n = -1.$$

Do $\{z_n\}$ bị chặn trên, ta có

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = -1.$$

Ta thấy rằng dãy $\{x_n\}$ là phân kỳ nhưng vẫn có $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.
(ii) Tính $\limsup x_n$. Ta có $A_1$ bị chặn trên

$$y_n = \sup A_n = 1.$$

Do $\{y_n\}$ bị chặn dưới, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

Trong trường hợp này, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \neq -1 = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

**Ví dụ 12**: Cho $x_n = (-1)^n n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.
*Giải Ví dụ 12.* Đặt

$$A_n = \{x_k : k \geq n\} = \{(-1)^k k : k \geq n\},$$

ta có

$$A_1 = \{x_k : k \geq 1\} = \{(-1)^k k : k \geq 1\} \supset \{-2k - 1 : k \geq 1\}.$$

(i) Tính $\liminf x_n$. Ta có $A_1$ không bị chặn dưới, vậy $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(ii) Tính $\limsup x_n$. Ta có

$$A_1 = \{x_k : k \geq 1\} = \{(-1)^k k : k \geq 1\} \supset \{2k : k \geq n\}.$$

Do đó $A_1$ không bị chặn trên, vậy $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

**Ví dụ 13**: Cho $x_n = -n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.
*Giải Ví dụ 13.* Đặt

$$\begin{aligned} A_n &= \{x_k : k \geq n\} = \{-k : k \geq n\} \\ &= \{k \in \mathbb{Z} : k \leq -n\} \subset \{k : k \leq -1\} = A_1. \end{aligned}$$

(i) Tính $\limsup x_n$. Ta có $A_1$ bị chặn trên, $y_n = \sup A_n = -n$.
Do $\{y_n\}$ không bị chặn dưới, ta có $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(ii) Tính $\liminf x_n$. Ta có $A_1$ không bị chặn dưới, vậy $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**Ví dụ 14**: Cho $x_n = n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.
*Giải Ví dụ 14.* Đặt

$$\begin{aligned} A_n &= \{x_k : k \geq n\} = \{k : k \geq n\} \\ &\subset A_1 = \{x_k : k \geq 1\} = \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(i) Tính $\limsup x_n$. Ta có, $A_1$ không bị chặn trên, vậy $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(ii) Tính $\liminf x_n$. Ta có, $A_1$ bị chặn dưới, ta đặt $z_n = \inf A_n = n$.
Do $\{z_n\}$ không bị chặn trên, ta có $\liminf_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

**Ví dụ 15**: (Xem như Bài tập). Cho một dãy số thực $\{x_n\}$. Giả sử $\limsup_{n\to\infty} x_n$ và $\liminf_{n\to\infty} x_n$ đều là các số thực. Chứng minh $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

*Giải Ví dụ 15.*

$$\begin{aligned} A_n &= \{x_k : k \geq n\}, \\ A_m &\subset A_n \subset A_1,\ \forall m,\ n \in \mathbb{N},\ m \geq n. \end{aligned}$$

$$y_n = \sup A_n.$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (\sup A_n)$$

$$z_n = \inf A_n.$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (\inf A_n)$$

$$z_n = \inf A_n \leq x_n \leq \sup A_n = y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $z_n \to \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ và $y_n \to \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, ta có

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

**Ví dụ 16**: (Xem như Bài tập). Cho một dãy số thực $\{x_n\}$. Chứng minh rằng

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty} (-x_n).$$

*Giải Ví dụ 16.* Ta có

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &= \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \inf_{n\geq 1}\left(-\inf_{k\geq n}(-x_k)\right)\\ &= -\sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n}(-x_k)\right) = -\liminf_{n\to\infty}(-x_n).\end{aligned}$$

**Ví dụ 17**: (Xem như Bài tập). Cho một dãy số thực $\{x_n\}$. Giả sử $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $x_n \to a$.

**Ví dụ 18**: (Xem như Bài tập). Cho một dãy số thực $\{x_n\}$. Giả sử $x_n \to a$. Chứng minh rằng $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

*Giải Ví dụ 17.* Ta có

$$z_n = \inf_{k\geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k\geq n} x_k = y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $z_n \to \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và $y_n \to \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ta có $x_n \to a$.

*Giải Ví dụ 18.*

(i) Chứng minh $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Cho $\varepsilon > 0$, do $x_n \to a$ ta có $N \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

Do $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$, $\exists k_n(\varepsilon) \geq n : y_n - \varepsilon/2 < x_{k_n(\varepsilon)} \leq y_n$. Điều này dẫn đến

$$\left|x_{k_n(\varepsilon)} - y_n\right| < \varepsilon/2.$$

$\forall n > N$, ta có $k_n(\varepsilon) \geq n > N$, do đó

$$\left|x_{k_n(\varepsilon)} - a\right| < \varepsilon/2.$$

Vậy

$$|y_n - a| \leq \left|y_n - x_{k_n(\varepsilon)}\right| \leq \left|x_{k_n(\varepsilon)} - a\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Suy ra $y_n \to a$, tức là $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

(ii) Chứng minh $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Do $z_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$, $\exists q_n(\varepsilon) \geq n : z_n \leq x_{q_n(\varepsilon)} < z_n + \varepsilon/2$. Điều này dẫn đến

$$\left|x_{q_n(\varepsilon)} - z_n\right| < \varepsilon/2.$$

$\forall n > N$, ta có $q_n(\varepsilon) \geq n > N$, do đó

$$\left|x_{q_n(\varepsilon)} - a\right| < \varepsilon/2.$$

Vậy

$$|z_n - a| \leq \left|z_n - x_{q_n(\varepsilon)}\right| \leq \left|x_{q_n(\varepsilon)} - a\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Suy ra $z_n \to a$, tức là $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

**Ví dụ 19**: (Xem như Bài tập). Cho một dãy số thực $\{x_n\}$ bị chặn. Đặt $A = \{a \in \mathbb{R} : a$ là giới hạn của một dãy con của $\{x_n\}$ $\}$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &= \sup A \in A, \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &= \inf A \in A. \end{aligned}$$

*Giải Ví dụ 19.* Cho $a \in A = \{a \in \mathbb{R} : a$ là giới hạn của một dãy con của $\{x_n\}$ $\}$. Khi đó, ta có một dãy con $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_j} \to a$.

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le a \le \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Từ bất đẳng thức

$$z_{n_j} = \inf_{k\ge n_j} x_k \le x_{n_j} \le \sup_{k\ge n_j} x_k = y_{n_j},$$

kết hợp với sự hội tụ $z_n = \inf\limits_{k\ge n} x_k \to \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ và $y_n = \sup\limits_{k\ge n} x_k \to \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, ta suy ra $z_{n_j} = \inf\limits_{k\ge n_j} x_k \to \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ và $y_{n_j} = \sup\limits_{k\ge n_j} x_k \to \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, do đó ta có

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le a \le \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = M \in A$, và $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = m \in A$.

(i) *Chứng minh* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = M \in A$.

Ta có $M = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\ge 1} y_n = \inf\limits_{n\ge 1}\left(\sup\limits_{k\ge n} x_k\right)$.

Với mọi $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{j}$, ta có $n_j \in \mathbb{N} : M \le y_{n_j} < M + \frac{1}{j}$.

Với $y_{n_j} = \sup\limits_{k\ge n_j} x_k$, ta có $k_j \ge n_j$ sao cho $y_{n_j} - \frac{1}{j} < x_{k_j} \le y_{n_j}$.

Mà $x_{k_j} \le \sup\limits_{k\ge k_j} x_k = y_{k_j} \le y_{n_j}$, do đó

$$M - \frac{1}{j} \le y_{n_j} - \frac{1}{j} < x_{k_j} \le y_{n_j} < M + \frac{1}{j}$$

Ta suy ra $\left|x_{k_j} - M\right| < \frac{1}{j} \to 0$, vậy $x_{k_j} \to M$. nghĩa là $M \in A$ và $M = \max A$.

(ii) *Chứng minh* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = m \in A$.

Ta có $m = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\ge 1} z_n = \sup\limits_{n\ge 1}\left(\inf\limits_{k\ge n} x_k\right)$.

Với mọi $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{j}$, ta có $n_j \in \mathbb{N} : m - \frac{1}{j} < z_{n_j} \le m$.

Với $z_{n_j} = \inf\limits_{k\ge n_j} x_k$, ta có $k_j \ge n_j$ sao cho $z_{n_j} \le x_{k_j} < z_{n_j} + \frac{1}{j}$.

Mà $x_{k_j} \ge \inf\limits_{k\ge k_j} x_k = z_{k_j} \ge z_{n_j}$, do đó

$$m - \frac{1}{j} < z_{n_j} \le x_{k_j} < z_{n_j} + \frac{1}{j} \le z_{k_j} + \frac{1}{j} \le m + \frac{1}{j}$$

Ta suy ra $\left|x_{k_j} - m\right| < \frac{1}{j} \to 0$, vậy $x_{k_j} \to m$. nghĩa là $m \in A$ và $m = \min A$.

**Ví dụ 20**: (Xem như Bài tập). Cho một dãy số thực $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots 1, 2, 3, \cdots\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\}$.

(i) Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

(ii) Không cần chỉ ra dãy con cụ thể hãy chứng tỏ rằng tồn tại một dãy con hội tụ của $\{x_n\}$.

(iii) Chứng minh rằng có một dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ về $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(iv) Chứng minh rằng có một dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ về $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Giải Ví dụ 20.* Để hình dung ra dãy $\{x_n\}$ trên đây ta viết lại

$\{x_n\} = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots 1, 2, 3, \cdots\} = \{$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$, $x_7 = 1$, $x_8 = 2$, $x_9 = 3$, $x_{10} = 1$, $x_{11} = 2$, $x_{12} = 3$, $x_{13} = 1$, $x_{14} = 2$, $x_{15} = 3, \cdots$

hay viết lại

$x_{3n-2} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x_{3n-1} = 2$, $n \in \mathbb{N}$, $x_{3n} = 3$, $n \in \mathbb{N}$;

$r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = n - 3\times$phần nguyên của $\dfrac{n-1}{3}$.

$n = 1 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 1 - 3\left[\dfrac{0}{3}\right] = 1.$

$n = 2 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 2 - 3\left[\dfrac{1}{3}\right] = 2.$

$n = 3 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 3 - 3\left[\dfrac{2}{3}\right] = 3.$

$n = 4 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 4 - 3\left[\dfrac{3}{3}\right] = 1.$

$n = 5 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 5 - 3\left[\dfrac{4}{3}\right] = 2.$

$n = 6 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 6 - 3\left[\dfrac{5}{3}\right] = 3.$

$n = 7 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 7 - 3\left[\dfrac{6}{3}\right] = 1.$

$n = 8 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 8 - 3\left[\dfrac{7}{3}\right] = 2.$

$n = 9 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 9 - 3\left[\dfrac{8}{3}\right] = 3.$

$n = 3k-2 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 3k - 2 - 3\left[\dfrac{3k-3}{3}\right] = 1.$

$n = 3k-1 : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 3k - 1 - 3\left[\dfrac{3k-2}{3}\right] = 2.$

$n = 3k : r = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right] = 3k - 3\left[\dfrac{3k-1}{3}\right] = 3.$

Dãy trên viết lại thành một công thức như sau $x_n = n - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Dãy trên đây chỉ lấy 3 giá trị 1, 2, 3: $x_n \in \{1, 2, 3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $1 \le x_n \le 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi 3, do đó dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

(ii) Do định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con hội tụ của $\{x_n\}$.

(iii) Chỉ ra một dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ về $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(iv) Chỉ ra một dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ về $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ta lấy hai dãy con $x_{n_k} = x_{3k} = 3$, $x_{m_k} = x_{3k-2} = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Đây là hai dãy hằng do đó lần lượt hội tụ về 3 và 1. Ta kiểm tra lại $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 3$ và $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Ta có $1 \le x_n \le 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do đó $1 \le \liminf\limits_{n\to\infty} x_n < \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \le 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $A = \{a \in \mathbb{R} : a$ là giới hạn của một dãy con của $\{x_n\}$ $\}$. Khi đó $A \subset [1, 3]$. Mà $3 \in A$, $\max A \le 3 \le \max A$, vậy $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \max A = 3$.

Tương tự, $1 \in A$, $\min A \le 1 \le \min A$, vậy $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \min A = 1$.

**Chú thích**: Có thể tính $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ qua công thức $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\geq 1}\left(\sup\limits_{k\geq n} x_k\right)$.

Thật vậy, dễ thấy $\sup\limits_{k\geq n} x_k = \max\{1,2,3\} = 3$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\geq 1}\left(\sup\limits_{k\geq n} x_k\right) = 3$.

Tương tự, ta có $\inf\limits_{k\geq n} x_k = \min\{1,2,3\} = 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\geq 1}\left(\inf\limits_{k\geq n} x_k\right) = 1$.

## 3.6 Bài tập bổ sung

1. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ hội tụ về $a$.
   (i) Giả sử $x_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng $a\geq 0$ và $\sqrt{x_n}\to\sqrt{a}$.
   (ii) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x_n}\to\sqrt[3]{a}$.
   (iii) Cho $\alpha\in(0,1)$. Chứng minh rằng $|x_n|^\alpha\to|a|^\alpha$.
   (iv) Chứng minh rằng $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to a$.
   (v) Chứng minh rằng $\dfrac{x_1+\dfrac{x_1+x_2}{2}+\cdots+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}{n}\to a$.
   (vi) Giả sử $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ và $a>0$. Chứng minh rằng $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\to a$.

Hướng dẫn:
(i) Dùng bất đẳng thức $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leq\sqrt{|x-y|}$, $\forall x,y\geq 0$.
(ii) Dùng bất đẳng thức $\left||x|^{\alpha-1}x-|y|^{\alpha-1}y\right|\leq 2^{1-\alpha}|x-y|^\alpha$, $\forall x,y\geq 0$, $\forall\alpha\in(0,1)$.
(iii) Dùng bất đẳng thức $\left||x|^\alpha-|y|^\alpha\right|\leq|x-y|^\alpha$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $\forall\alpha\in(0,1)$.
(iv) Dùng bất đẳng thức $\left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|\leq\dfrac{\sum_{i=1}^n|x_i-a|}{n}$.
(v) Áp dụng kết quả (iv).
(vi) Dùng bất đẳng thức $\left|\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}-\ln a\right|\leq\dfrac{\sum_{i=1}^n|\ln x_i-\ln a|}{n}$.

2. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi công thức qui nạp
$$\begin{cases} x_1 = 1,\\ x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}-1,\ n=2,3,\cdots\end{cases}$$
Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi công thức qui nạp
$$\begin{cases} x_1 = 1,\\ x_n = \sqrt{x_{n-1}+2},\ n=2,3,\cdots\end{cases}$$
Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Cho $\phi\neq A\subset\mathbb{R}$ và bị chặn trên. Chứng minh rằng có một dãy $\{x_n\}\subset A$ sao cho $x_n\to\sup A$.

5. Cho $\phi\neq A\subset\mathbb{R}$ và bị chặn dưới. Chứng minh rằng có một dãy $\{x_n\}\subset A$ sao cho $x_n\to\inf A$.

6. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ tăng (hoặc không giảm) và không bị chặn trên. Chứng minh rằng $x_n\to+\infty$.

7. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ giảm (hoặc không tăng) và không bị chặn dưới. Chứng minh rằng $x_n\to-\infty$.

8. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ không bị chặn trên. Chứng minh rằng có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k}\to+\infty$.

9. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ không bị chặn dưới. Chứng minh rằng có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k}\to-\infty$.

10. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi công thức $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ phân kỳ và $x_n\to+\infty$.

11. Cho $x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ sao cho:
    (i) $\{x_n\}\subset\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}: x_n\to x$;
    (ii) $\{y_n\}\subset(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $\forall n\in\mathbb{N}: y_n\to x$.

12. Cho dãy số thực $\{x_n\}$. Giả sử $x_{2n} \to a$ và $x_{2n-1} \to a$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ về $a$.

13. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi công thức qui nạp

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_n = \dfrac{1 + x_{n-1}}{2}, \ n = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

14. Cho $a$, $p$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi công thức qui nạp

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_n = q \sin x_{n-1} + p, \ n = 2, 3, \cdots, \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ.

15. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa điều kiện $2\cos^2 x_n + \sin x_{n-1} + 4 = 0$, $n = 2, 3, \cdots$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ phân kỳ.

16. Cho $f : [a, b] \to [a, b]$ thỏa điều kiện, tồn tại hằng số $\alpha \in [0, 1)$ sao cho $|f(x) - f(y)| \le \alpha |x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$.

Cho $x_0 \in [a, b]$, xét dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi công thức qui nạp $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \cdots$.

Chứng minh rằng:

(i) $\{x_n\}$ hội tụ về một giới hạn $x_* \in [a, b]$.

(ii) $x_*$ là nghiệm duy nhất của phương trình $x_* = f(x_*)$.

(iii) $|x_n - x_*| \le \dfrac{b-a}{1-\alpha}\alpha^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

17. (Bài này sẽ làm trong chương hàm số liên tục). Cho $f : [a, b] \to [a, b]$ thỏa điều kiện $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$, $x \ne y$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x_* \in [a, b]$ sao cho $x_* = f(x_*)$.

# Chương 4

# GIỚI HẠN HÀM SỐ

## 4.1 Điểm tụ

**Định nghĩa 1**. Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$. Ta nói $a$ là một *điểm tụ* của $D$ nếu

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D \backslash \{a\}) \neq \phi, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Điều được diễn đạt như sau

$$((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \backslash \{a\}) \cap D \neq \phi, \ \forall \varepsilon > 0.$$

hay

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in D \text{ và } 0 < |x-a| < \varepsilon,$$

i.e., mọi khoảng tâm $a$ bán kính $\varepsilon$ chứa ít nhất một điểm của $D$ khác với $a$.

Tập hợp tất cả các điểm tụ của $D$ được ký hiệu là $D^*$.

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D \backslash \{a\}) &= ((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \backslash \{a\}) \cap D \\ &= [(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)] \cap D.\end{aligned}$$

**Chú ý rằng:**

- Điểm tụ của $D$ không nhất thiết thuộc $D$ (Xem ví dụ 3 dưới đây).
- Một điểm thuộc $D$ không nhất thiết là điểm tụ của $D$ (Xem ví dụ 5 dưới đây).

**Ví dụ 1**: (Xem như Bài tập). Chứng minh hai mệnh đề sau đây tương đương với nhau $a \in D^* \Longleftrightarrow a \in (D \backslash \{a\})^*$.

*Giải Ví dụ 1.* Đặt $D_1 = D \backslash \{a\}$. Ta chứng minh rằng $a \in D^* \Longleftrightarrow a \in D_1^*$.

(i) Giả sử $a \in D^*$. Ta chứng minh rằng $a \in D_1^*$, i.e.,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D_1 \backslash \{a\}) \neq \phi, \ \forall \varepsilon > 0 \ (*)$$

Mà $D_1 \backslash \{a\} = D \backslash \{a\}$, do đó (*) đúng.

(ii) Giả sử $a \in D_1^*$. Ta chứng minh rằng $a \in D^*$, i.e.,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D \backslash \{a\}) \neq \phi, \ \forall \varepsilon > 0 \ (**)$$

Tương tự, do $D_1 \backslash \{a\} = D \backslash \{a\}$, do đó (**) đúng.

**Ví dụ 2**: (Xem như Bài tập). Chứng minh rằng $a \in D^* \Longleftrightarrow$ Tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset D \backslash \{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \to a$.

*Giải Ví dụ 2.*

(i) Chứng minh $\Longrightarrow$: Giả sử $a \in D^*$. Lấy $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, ta có

$$(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap (D \backslash \{a\}) \neq \phi, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy tồn tại $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap (D \backslash \{a\})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, điều này dẫn tới $x_n \in D\backslash\{a\}$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tức là $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \to a$.

(ii) Chứng minh $\Longleftarrow$: Đảo lại, giả sử có một dãy $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \to a$. Ta chứng minh

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (D\backslash\{a\}) \neq \phi, \ \forall \varepsilon > 0 \ (**)$$

Cho $\varepsilon > 0$, do $x_n \to a$, ta có $n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_0} - a| < \varepsilon$. Vậy $x_{n_0} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (D\backslash\{a\})$, do đó $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (D\backslash\{a\}) \neq \phi$. $\square$

**Ví dụ 3**: (Xem như Bài tập). Cho $D = (0, 1)$ và $a = 0$. Chứng minh $a = 0$ là một điểm tụ của $D$.

**Ví dụ 4**: (Xem như Bài tập). Cho $D = [0, 1]$ và $a = 0$. Chứng minh $a = 0$ là một điểm tụ của $D$.

**Ví dụ 5**: (Xem như Bài tập). Cho $D = [0, 1] \cup \{2\}$ và $a = 2$. Chứng minh $a = 2$ không là một điểm tụ của $D$.

## 4.2 Giới hạn hàm số tại điểm tụ

**Định nghĩa 2**. Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$ *có giới hạn tại* $a$ nếu:
Tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D, \ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Điều được diễn đạt như sau

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (D\backslash\{a\}) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nếu $f$ có giới hạn tại $a$ thì số thực $L$ tồn tại ở trên là duy nhất.

Thật vậy, giả sử có hai số thực $L$, $L'$ thỏa mệnh đề trên. Nếu $L \neq L'$, ta chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - L'| > 0$, ta có hai số $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ :

$$\begin{aligned} \forall x &\in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap (D\backslash\{a\}) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \\ \forall x &\in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap (D\backslash\{a\}) \Longrightarrow \left|f(x) - L'\right| < \varepsilon, . \end{aligned}$$

Chọn $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, và $x_1 \in (a - \delta, a + \delta) \cap (D\backslash\{a\})$, ta có

$$\left|L - L'\right| \leq |L - f(x_1)| + \left|f(x_1) - L'\right| < \varepsilon + \varepsilon = \left|L - L'\right|,$$

tức là $|L - L'| < |L - L'|$. Điều này không thể xảy ra. Vậy $L = L'$.

Khi $f$ có giới hạn tại $a$, số thực $L$ ở trên gọi là *giới hạn tại a của hàm f* và ký hiệu nó hoặc viết là

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to a} f(x), \\ \text{hay } f(x) &\to L \text{ khi } x \to a. \end{aligned}$$

**Định nghĩa 3 (Định nghĩa tương đương giới hạn hàm theo ngôn ngữ dãy**).

**Định lý 1** (*Định nghĩa tương đương giới hạn hàm theo ngôn ngữ dãy*)**.** *Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$. Khi đó:*

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow \left[ \left( \begin{array}{l} \textit{Với mọi dãy } \{x_n\} \subset D\backslash\{a\}, \\ \textit{và } x_n \to a \end{array} \right) \Longrightarrow f(x_n) \to L \right].$$

*Chứng minh Định lý 1.*

*Chứng minh phần thuận* $\Longrightarrow$: Giả sử $L = \lim_{x \to a} f(x)$ và cho dãy $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$, và $x_n \to a$. Ta chứng minh rằng $f(x_n) \to L$.

Cho $\varepsilon > 0$, do $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$,

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D\backslash\{a\}) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Do $x_n \to a$,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \delta.$$

Ta suy ra

$$x_n \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D\backslash\{a\}),\ \forall n > N.$$

Điều này dẫn đến

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon,\ \forall n > N.$$

Vậy $f(x_n) \to L$.

*Chứng minh phần đảo* $\Longleftarrow$: Giả sử " Với mọi dãy $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$ và $x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to L$". Ta chứng minh rằng $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Nếu $L \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$, ta có $\varepsilon_0 > 0$ :

$$\forall\delta > 0, \exists x_\delta \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D\backslash\{a\}) \text{ và } |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, $\exists x_n \in (a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}) \cap (D\backslash\{a\})$ và $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$;

i.e., $\exists\{x_n\} \subset (D\backslash\{a\})$, $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, và $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$.

Điều này dẫn đến, ta có một dãy $\{x_n\} \subset (D\backslash\{a\})$, $x_n \to a$ và $f(x_n) \nrightarrow L$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết phần đảo. Vậy $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Định lý 1 được chứng minh xong. $\square$

**Định nghĩa 4. Định nghĩa giới hạn bên phải.**

Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$ sao cho $(a, a+\delta) \cap D \neq \phi$, $\forall\delta > 0$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$ *có giới hạn bên phải tại* $a$ nếu:

Tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Điều được diễn đạt như sau

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \cap D \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nếu $f$ có giới hạn bên phải tại $a$ thì số thực $L$ tồn tại ở trên là duy nhất (kiểm tra tương tự như trên). Số thực $L$ này gọi là *giới hạn bên phải tại* $x_0$ *của hàm* $f$ và ký hiệu nó hoặc viết là

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to a^+} f(x), \\ \text{hay } L &= \lim_{x\to a+0} f(x), \\ \text{hay } f(x) &\to L \text{ khi } x \to a^+. \end{aligned}$$

**Chú thích.** Do $(a-\delta, a+\delta) \cap [D \cap (a, +\infty)] = (a, a+\delta) \cap D$, nên điều kiện $(a, a+\delta) \cap D \neq \phi$, $\forall\delta > 0$ tương đương với $a$ là một *điểm tụ* của $D \cap (a, +\infty)$. Để chỉ $a$ là một điểm tụ của $D \cap (a, +\infty)$, ta viết $a \in D_+^*$. Như vậy khi định nghĩa $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ chúng ta đã qui ước rằng $a$ là một điểm tụ của $D \cap (a, +\infty)$ (tức là $a \in D_+^*$) mà không cần phải nhắc đến điều kiện của $a$.

**Định nghĩa 5. Định nghĩa giới hạn bên trái.**

Định nghĩa tương tự với $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$ sao cho $(a-\delta, a) \cap D \neq \phi$, $\forall\delta > 0$ (tức là $a$ là một *điểm tụ* của $D \cap (-\infty, a)$). Ta nói $f$ *có giới hạn bên trái tại* $a$ nếu:

Tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D,\ a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Điều được diễn đạt như sau

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \cap D \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nếu $f$ có giới hạn bên trái tại $a$ thì số thực $L$ tồn tại ở trên là duy nhất và gọi là *giới hạn bên trái tại a của hàm f* và ký hiệu nó hoặc viết là

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to a^-} f(x), \\ \text{hay } L &= \lim_{x\to a-0} f(x), \\ \text{hay } f(x) &\to L \text{ khi } x \to a^-. \end{aligned}$$

**Chú thích.** Nếu $a$ là một điểm tụ của $D \cap (-\infty, a)$, ta viết $a \in D^*_-$. Cũng giống như chú thích ở trên, khi định nghĩa $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ chúng ta đã qui ước rằng $a$ là một điểm tụ của $D \cap (-\infty, a)$ mà không cần phải nhắc đến điều kiện của $a$.

Tương tự như trên, các định lý sau cho Định nghĩa tương đương giới hạn bên phải, bên trái của hàm theo ngôn ngữ dãy.

**Định lý 2.** *Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $f : D \to \mathbb{R}$. Khi đó:*
(i) *Nếu a là một điểm tụ của $D \cap (a, +\infty)$ (tức là $a \in D^*_+$) ta có*

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x) \Longleftrightarrow \left[ \left( \begin{array}{l} \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n > a,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{và } x_n \to a \end{array} \right) \Longrightarrow f(x_n) \to L \right],$$

(ii) *Nếu a là một điểm tụ của $D \cap (-\infty, a)$ (tức là $a \in D^*_-$) ta có*

$$L = \lim_{x\to a^-} f(x) \Longleftrightarrow \left[ \left( \begin{array}{l} \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n < a,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{và } x_n \to a \end{array} \right) \Longrightarrow f(x_n) \to L \right].$$

*Chứng minh* (xem như bài tập).

**Định lý 3.** *Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*_+ \cap D^*_-$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$. Khi đó:*

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ tồn tại } \Longleftrightarrow \text{Cả hai } \lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ tồn tại và bằng nhau.}$$

*Khi đó*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

**Định lý 4.** *Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$. Khi đó:*

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ tồn tại } \Longleftrightarrow \left[ \left( \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ \forall x, x' \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \backslash \{a\}) \end{array} \right) \Longrightarrow \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon \right]$$

*Chứng minh Định lý 4.*
(i) *Chứng minh phần thuận* $\Longrightarrow$: Giả sử tồn tại $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại. Cho $\varepsilon > 0$, ta có $\delta > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \backslash \{a\}) \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó, $\forall x, x' \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \backslash \{a\})$, ta có

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } \left| f(x') - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Điều này dẫn tới

$$\left| f(x) - f(x') \right| \leq |f(x) - L| + \left| L - f(x') \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) *Chứng minh phần đảo* $\Longleftarrow$: Đảo lại, giả sử

$$\left(\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\\ \forall x,x'\in(a-\delta,a+\delta)\cap(D\backslash\{a\})\end{array}\right)\Longrightarrow\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ tồn tại.
Cho $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0:$

$$\forall x,x'\in(a-\delta_1,a+\delta_1)\cap(D\backslash\{a\})\Longrightarrow\left|f(x)-f(x')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.\ (*)$$

Cho $\{x_n\}\subset D\backslash\{a\}$, và $x_n\to a$. Ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $L$ và $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.
Do $\{x_n\}\subset D\backslash\{a\}$, và $x_n\to a$, ta có $N_1\in\mathbb{N}:$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n>N_1\Longrightarrow x_n\in(a-\delta_1,a+\delta_1)\cap(D\backslash\{a\}).$$

Do đó $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m,n>N_1$, ta có

$$x_m,\ x_n\in(a-\delta_1,a+\delta_1)\cap(D\backslash\{a\}),$$

mà điều này dẫn tới

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\ m,n>N_1\Longrightarrow|f(x_m)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\ (**)$$

Suy ra $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy, do đó $\{f(x_n)\}$ là dãy hội tụ về $L$.
Cố định $m=m_1>N_1$ và cho $n\to+\infty$ trong (**), ta có

$$x_{m_1}\in(a-\delta_1,a+\delta_1)\cap(D\backslash\{a\})\ \text{ và }\ |f(x_{m_1})-L|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó, $\forall x\in(a-\delta_1,a+\delta_1)\cap(D\backslash\{a\})$, ta có

$$|f(x)-L|<|f(x)-f(x_{m_1})|+|f(x_{m_1})-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$. Định lý 4 được chứng minh. □
Tương tự ta cũng có

**Định lý 5.** *Cho $\phi\ne D\subset\mathbb{R}$ và $f:D\to\mathbb{R}$. Khi đó:*
(i) *Nếu $a\in D_+^*$ ta có*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)\ \textit{tồn tại}\iff\left[\left(\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\\ \forall x,x'\in(a,a+\delta)\cap D\end{array}\right)\Longrightarrow\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon\right].$$

(ii) *Nếu $a\in D_-^*$ ta có*

$$\lim_{x\to a^-}f(x)\ \textit{tồn tại}\iff\left[\left(\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\\ \forall x,x'\in(a-\delta,a)\cap D\end{array}\right)\Longrightarrow\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon\right].$$

## 4.3 Giới hạn hàm số tại vô cùng

### 4.3.1 Giới hạn hàm số tại $+\infty$.

**Định nghĩa giới hạn tại** $+\infty$. Cho $\phi\ne D\subset\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\{x_n\}\subset D$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\to+\infty$. Cho $f:D\to\mathbb{R}$. Ta nói $f(x)$ *có giới hạn tại* $+\infty$, nếu: Tồn tại $L\in\mathbb{R}$ sao cho

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{R}:\forall x\in D,\ x>N\Longrightarrow|f(x)-L|<\varepsilon.$$

Nếu $f$ có giới hạn tại $+\infty$ thì số thực $L$ tồn tại ở trên là duy nhất (Kiểm tra lại như bài tập). Số thực $L$ ở trên gọi là *giới hạn tại* $+\infty$ *của hàm* $f$ và ký hiệu nó hoặc viết là

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to+\infty}f(x),\\ \text{hay } f(x)&\to L \text{ khi } x\to+\infty.\end{aligned}$$

### 4.3.2 Giới hạn hàm số tại $-\infty$.

**Định nghĩa giới hạn tại** $-\infty$. Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\{x_n\} \subset D$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to -\infty$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$.

Tương tự ta cũng nói $f(x)$ *có giới hạn tại* $-\infty$, nếu: Tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in D,\ x < N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nếu $f$ có giới hạn tại $-\infty$ thì số thực $L$ tồn tại ở trên là duy nhất (Kiểm tra lại như bài tập). Số thực $L$ ở trên gọi là *giới hạn tại* $-\infty$ *của hàm* $f$ và ký hiệu nó hoặc viết là

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to -\infty} f(x), \\ \text{hay } f(x) &\to L \text{ khi } x \to -\infty. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn hàm tại vô cùng theo ngôn ngữ dãy.

**Định lý 6.** *Với $D$ như trên phù hợp cho định nghĩa giới hạn hàm tại vô cùng và cho $f : D \to \mathbb{R}$, ta có*

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to +\infty} f(x) \Longleftrightarrow \left[ \begin{pmatrix} \text{Với mọi dãy } \{x_n\} \subset D, \\ \text{và } x_n \to +\infty \end{pmatrix} \Longrightarrow f(x_n) \to L \right]; \\ L &= \lim_{x \to -\infty} f(x) \Longleftrightarrow \left[ \begin{pmatrix} \text{Với mọi dãy } \{x_n\} \subset D, \\ \text{và } x_n \to -\infty \end{pmatrix} \Longrightarrow f(x_n) \to L \right]. \end{aligned}$$

*Chứng minh như bài tập.*

Tương tự ta cũng có định lý về sự tồn tại giới hạn hàm tại vô cùng

**Định lý 7.** *Với $D$ như trên phù hợp cho định nghĩa giới hạn hàm tại vô cùng và cho $f : D \to \mathbb{R}$, ta có*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ tồn tại} &\Longleftrightarrow \left[ \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : \\ \forall x, x' \in \mathbb{R},\ x, x' > N \end{pmatrix} \Longrightarrow \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon \right]; \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ tồn tại} &\Longleftrightarrow \left[ \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : \\ \forall x, x' \in \mathbb{R},\ x, x' < N \end{pmatrix} \Longrightarrow \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon \right]. \end{aligned}$$

*Chứng minh như bài tập.*

**Các phép tính về giới hạn hàm số**.

**Định lý 8.** *Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*$. Cho $f$, $g : D \to \mathbb{R}$. Giả sử $f$ và $g$ có giới hạn tại $a$ lần lượt là $L = \lim_{x \to a} f(x)$, và $m = \lim_{x \to a} g(x)$. Khi đó*

(i) *Nếu $f(x) > 0$, $\forall x \in D$ thì $L \geq 0$;*
(ii) *Nếu $L > 0$, thì $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$, $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (D \backslash \{a\})$;*
(iii) *Nếu $f(x) < g(x)$, $\forall x \in D$ thì $L \leq m$;*
(iv) *Nếu $L < m$, thì $\exists \delta > 0 : f(x) < g(x)$, $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (D \backslash \{a\})$;*
(v) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + m$;
(vi) $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = Lm$;
(vii) $\lim_{x \to a} c f(x) = cL$, $\forall c \in \mathbb{R}$;
(viii) *Nếu $m \neq 0$, thì* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{m}$.

**Định lý 9.** *Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*$. Cho ba hàm $f$, $g$, $h : D \to \mathbb{R}$ sao cho:*

(i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in D \backslash \{a\}$,
(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

*Khi đó, tồn tại $\lim_{x \to a} g(x)$ và $\lim_{x \to a} g(x) = L$.*

Các tính chất và các phép tính trên vẫn còn đúng cho các giới hạn bên phải, bên trái tại $a$.

**Định nghĩa 6**. Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$. Ta nói

(i) Hàm số $f$ *bị chặn trên* $D$ nếu tập $\{f(x) : x \in D\}$ bị chặn trên,
i.e., $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \le M, \forall x \in D$;

(ii) Hàm số $f$ *bị chặn dưới* nếu tập $\{f(x) : x \in D\}$ bị chặn dưới,
i.e., $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \ge m, \forall x \in D$;

(iii) Hàm số $f$ *bị chặn* nếu $f$ bị chặn trên và bị chặn dưới,
i.e., $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \le f(x) \le M, \forall x \in D$,
hay tương đương với $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \le M, \forall x \in D$;

**Định nghĩa 7**. Cho hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Ta nói

(i) $f$ là *hàm tăng trên* $(a, b)$ nếu $\forall x,\, x' \in (a, b),\ x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$;

(ii) $f$ là *hàm giảm trên* $(a, b)$ nếu $\forall x,\, x' \in (a, b),\ x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$;

(iii) $f$ là *hàm không giảm trên* $(a, b)$ nếu $\forall x,\, x' \in (a, b),\ x < x' \Longrightarrow f(x) \le f(x')$;

(iv) $f$ là *hàm không tăng trên* $(a, b)$ nếu $\forall x,\, x' \in (a, b),\ x < x' \Longrightarrow f(x) \ge f(x')$;

(v) Hàm $f$ thoả 1 trong 4 tính chất (iv)-(vii) được gọi là *hàm số đơn điệu.*

Để phân biệt người ta còn gọi tên đi kèm chữ đơn điệu chẳng hạn như: *đơn điệu tăng, đơn điệu giảm, đơn điệu không giảm, đơn điệu không tăng.*

Định nghĩa về hàm đơn điệu trên $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ thay cho $(a, b)$.

**Chú thích 2**. Cũng có một số gọi tên khác như sau:
Hàm tăng = tăng ngặt, đồng biến nghiêm cách;
Hàm giảm = giảm ngặt, nghịch biến nghiêm cách;
Hàm không giảm = đồng biến;
Hàm không tăng = nghịch biến.

**Chú thích 3**. Bốn định nghĩa (i)-(iv) là 4 khái niệm khác nhau và độc lập, tức là phủ định một trong 4 định nghĩa (i)-(iv) không phải là một trong ba định nghĩa còn lại. Ví dụ, *hàm không tăng trên* $(a, b)$ không có nghĩa là *không phải là hàm tăng trên* $(a, b)$. Bởi vì hàm $f$ *không phải là hàm tăng trên* $(a, b)$, có nghĩa là: $\exists x, x' \in (a, b)$, $x < x'$ và $f(x) \ge f(x')$, trong khi đó để dãy *hàm $f$ không tăng trên* $(a, b)$ thì bất đẳng thức $f(x) \ge f(x')$ phải đúng $\forall x,\, x' \in (a, b),\ x < x'$.

**Định lý 10.** *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Giả sử $f$ là hàm tăng (không giảm) trên $(a, b)$ bị chặn trên. Khi đó, tồn tại* $\lim\limits_{x \to b_-} f(x)$.

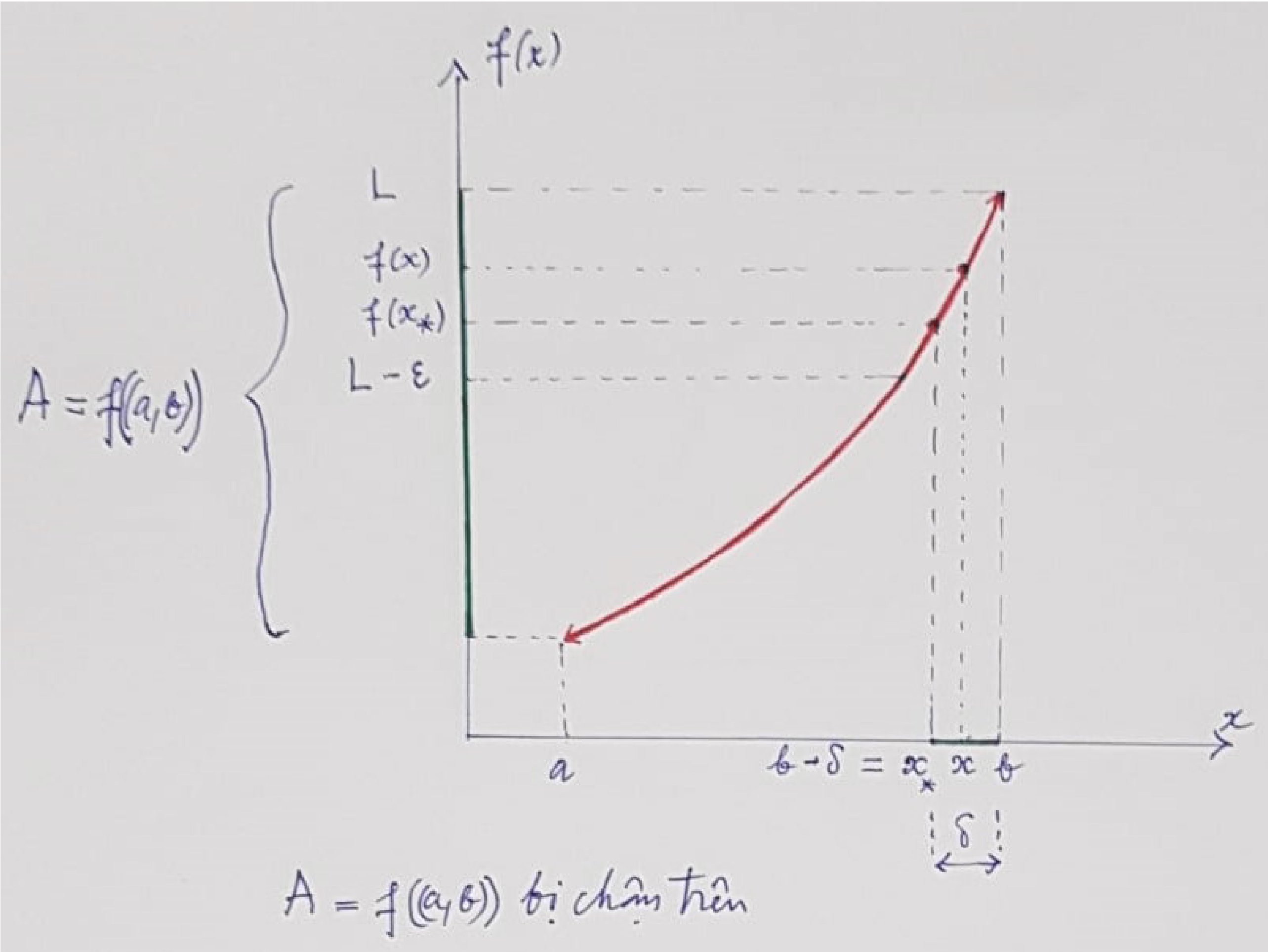
*Hơn nữa,* $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = \sup\{f(x) : a < x < b\}$.

*Chứng minh Định lý 10.* Do $f$ bị chặn trên, tập $\{f(x) : a < x < b\} \ne \phi$ và cũng bị chặn trên, do đó tồn tại $L = \sup\{f(x) : a < x < b\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = L$.

Cho $\varepsilon > 0$, do $L = \sup\{f(x) : a < x < b\}$, ta có $x_* \in (a, b) : f(x_*) > L - \varepsilon$.

Do $f$ là hàm tăng trên $(a, b)$, nên mọi $x \in (x_*, b)$ dẫn đến $L - \varepsilon < f(x_*) \le f(x) \le L < L + \varepsilon$, tức là $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = L$. $\square$




Chú ý $\delta = b - x_* > 0$, $b - \delta = x_* < x < b \Longrightarrow L - \varepsilon < f(x_*) \le f(x) \le L \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Tương tự ta cũng có

**Định lý 11.** *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Giả sử $f$ là hàm giảm (không tăng) trên $(a, b)$ bị chặn dưới. Khi đó, tồn tại* $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = \inf\{f(x) : a < x < b\}$.

*Chứng minh Định lý 11.* Do $f$ bị chặn dưới, tập $\{f(x) : a < x < b\} \ne \phi$ và cũng bị chặn dưới, do đó tồn tại $m = \inf\{f(x) : a < x < b\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = m$.

Cho $\varepsilon > 0$, do $m = \inf\{f(x) : a < x < b\}$, ta có $x_* \in (a, b) : f(x_*) < m + \varepsilon$.

Do $f$ là hàm giảm trên $(a, b)$, nên mọi $x \in (x_*, b)$ dẫn đến $m - \varepsilon < m \le f(x) \le f(x_*) < m + \varepsilon$, tức là $|f(x) - m| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = m$. $\square$

Tương tự, ta cũng có

**Định lý 12.** *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Giả sử $f$ là hàm tăng (không giảm) trên $(a, b)$ bị chặn dưới. Khi đó, tồn tại* $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$.

*Hơn nữa,* $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \inf\{f(x) : a < x < b\}$.

**Định lý 13.** *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Giả sử $f$ là hàm giảm (không tăng) trên $(a, b)$ bị chặn trên. Khi đó, tồn tại* $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$.

*Hơn nữa,* $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \sup\{f(x) : a < x < b\}$.

## 4.4 Giới hạn vô cùng tại điểm tụ

**Định nghĩa 8**. Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D^*$. Cho $f : D \to \mathbb{R}$.

### 4.4.1 Giới hạn vô cùng tại điểm tụ

(i) Ta nói $f(x)$ *tiến ra cộng vô cùng khi* $x \to a$ nếu:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn cộng vô cùng tại* $a$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ hay } f(x) \to +\infty \text{ khi } x \to a.$$

(ii) Ta nói $f(x)$ *tiến ra trừ vô cùng khi* $x \to a$ nếu:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn trừ vô cùng tại* $a$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \text{ hay } f(x) \to -\infty \text{ khi } x \to a.$$

### 4.4.2 Giới hạn vô cùng bên phải tại điểm tụ

(i) Ta nói $f(x)$ *tiến ra cộng vô cùng khi* $x \to a^+$ nếu:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < x-a < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn cộng vô cùng bên phải tại* $a$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \text{ hay } f(x) \to +\infty \text{ khi } x \to a^+.$$

(ii) Ta nói $f(x)$ *tiến ra trừ vô cùng khi* $x \to a^+$ nếu:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < x-a < \delta \Longrightarrow f(x) < A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn trừ vô cùng bên phải tại* $a$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \text{ hay } f(x) \to -\infty \text{ khi } x \to a^+.$$

### 4.4.3 Giới hạn vô cùng bên trái tại điểm tụ

(i) Ta nói $f(x)$ *tiến ra cộng vô cùng khi* $x \to a^-$ nếu:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < a-x < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn cộng vô cùng bên trái tại* $a$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \text{ hay } f(x) \to +\infty \text{ khi } x \to a^-.$$

(ii) Ta nói $f(x)$ *tiến ra trừ vô cùng khi* $x \to a^-$ nếu:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < a-x < \delta \Longrightarrow f(x) < A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn trừ vô cùng bên trái tại* $a$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, \text{ hay } f(x) \to -\infty \text{ khi } x \to a^-.$$

Tóm tắt lại 6 định nghĩa trên như sau:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= +\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 : \forall x\in D,\ 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow f(x)>A;\\
\lim_{x\to a} f(x) &= -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 : \forall x\in D,\ 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow f(x)<A;\\
\lim_{x\to a^+} f(x) &= +\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 : \forall x\in D,\ 0<x-a<\delta \Longrightarrow f(x)>A;\\
\lim_{x\to a^+} f(x) &= -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 : \forall x\in D,\ 0<x-a<\delta \Longrightarrow f(x)<A;\\
\lim_{x\to a^-} f(x) &= +\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 : \forall x\in D,\ 0<a-x<\delta \Longrightarrow f(x)>A;\\
\lim_{x\to a^-} f(x) &= -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 : \forall x\in D,\ 0<a-x<\delta \Longrightarrow f(x)<A.
\end{aligned}$$

## 4.5 Giới hạn vô cùng tại vô cùng

### 4.5.1 Định nghĩa giới hạn vô cùng tại $+\infty$.

Cho $\phi\neq D\subset\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\{x_n\}\subset D$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\to+\infty$.
(i) Ta nói $f(x)$ *tiến ra cộng vô cùng khi* $x\to+\infty$ nếu:

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x>N \Longrightarrow f(x)>A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn cộng vô cùng tại* $+\infty$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \text{hay } f(x)\to+\infty \text{ khi } x\to+\infty.$$

(ii) Ta nói $f(x)$ *tiến ra trừ vô cùng khi* $x\to+\infty$ nếu:

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x>N \Longrightarrow f(x)<A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn trừ vô cùng tại* $+\infty$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\ \text{hay } f(x)\to-\infty \text{ khi } x\to+\infty.$$

### 4.5.2 Định nghĩa giới hạn vô cùng tại $-\infty$.

Cho $\phi\neq D\subset\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\{x_n\}\subset D$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\to-\infty$.
(i) Ta nói $f(x)$ *tiến ra cộng vô cùng khi* $x\to-\infty$ nếu:

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x<N \Longrightarrow f(x)>A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn cộng vô cùng tại* $-\infty$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \text{hay } f(x)\to+\infty \text{ khi } x\to-\infty.$$

(ii) Ta nói $f(x)$ *tiến ra trừ vô cùng khi* $x\to-\infty$ nếu:

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x<N \Longrightarrow f(x)<A.$$

Ta còn nói $f(x)$ *có giới hạn trừ vô cùng tại* $-\infty$, và viết thành một trong các cách sau:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \text{hay } f(x)\to-\infty \text{ khi } x\to-\infty.$$

Tóm lại tắt 4 định nghĩa trên như sau:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x>N \Longrightarrow f(x)>A;\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x>N \Longrightarrow f(x)<A;\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x<N \Longrightarrow f(x)>A;\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in D,\ x<N \Longrightarrow f(x)<A.
\end{aligned}$$

**Chú thích**.

(i) Chú ý rằng giới hạn vô cùng của hàm $f$ tại điểm tụ, ở bên phải, bên trái của điểm tụ, tại vô cùng trên đây được xếp vào loại *hàm không tồn tại giới hạn* (*không có giới hạn* hoặc *không có giới hạn hữu hạn*).

(ii) Trong trường hợp hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là tăng (không giảm) và không bị chặn trên, khi đó ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Thật vậy, do hàm $f$ không bị chặn trên, ta có

$$\forall A > 0,\ \exists x_A \in [a, +\infty) : f(x_A) > A.$$

Do hàm $f$ tăng, nên, $\forall x > x_A \Longrightarrow f(x) > f(x_A) > A$.

Vậy, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Tương tự,

(iii) Nếu hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là giảm (không tăng) và không bị chặn dưới, thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(iv) Nếu hàm $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ là tăng (không giảm) và không bị chặn dưới, thì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(v) Nếu hàm $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ là giảm (không tăng) và không bị chặn trên, thì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

(vi) Tương tự như dãy số, các phép tính giới hạn của hàm số cũng được mở rộng cho các phép tính với giới hạn vô cực như sau.

$$\begin{aligned}
(+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty,\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty,\ (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty,\\
a\cdot(+\infty) &= +\infty,\ a\cdot(-\infty) = -\infty,\ (-a)\cdot(-\infty) = +\infty,\ (-a)\cdot(+\infty) = -\infty,\ a > 0;\\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0,\ a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra cũng có các dạng vô định (không xác định)

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^\infty,\ 0^0.$$

## 4.6 Tổng kết các loại giới hạn (15 loại)

$$\begin{array}{cccc}
\text{(i)} & \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}, & \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, & \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty,\\
\text{(ii)} & \lim\limits_{x\to a_+} f(x) = L \in \mathbb{R}, & \lim\limits_{x\to a_+} f(x) = +\infty, & \lim\limits_{x\to a_+} f(x) = -\infty,\\
\text{(iii)} & \lim\limits_{x\to a_-} f(x) = L \in \mathbb{R}, & \lim\limits_{x\to a_-} f(x) = +\infty, & \lim\limits_{x\to a_-} f(x) = -\infty,\\
\text{(iv)} & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}, & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\\
\text{(v)} & \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}, & \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, & \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.
\end{array}$$

## 4.7 Một số hàm sơ cấp

$$\begin{aligned}
&x^\alpha,\ (x \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in \mathbb{R},\ (x, \alpha) \neq (0, 0)),\\
&\sin x,\ \cos x,\ \mathrm{tg}\ x,\ \mathrm{cotg}\ x,\\
&e^x,\ \ln x,\\
&a^x,\ \log_a x,\ (0 < a \neq 1),\\
&\arcsin x,\ \arccos x,\ \mathrm{arctg}\ x,\ \mathrm{arccotg}\ x,\\
&chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\\
&thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\\
&\coth x = \frac{1}{thx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.
\end{aligned}$$

## 4.8 Bài tập bổ sung

1. Cho các ví dụ về tập con khác rỗng $A$ của $\mathbb{R}$ sao cho:

(i) Tồn tại $\sup A$ và $\max A$;

(ii) Tồn tại $\sup A$ và không tồn tại $\max A$;

(iii) Tồn tại $\inf A$ và $\min A$;

(iv) Tồn tại $\inf A$ và không tồn tại $\min A$.

2. Cho hai tập con khác rỗng $A$, $B$ của $\mathbb{R}$. Giả sử sup, inf, max, min của hai tập $A$ và $B$ tồn tại. Giả sử $A \subset B$.

Hãy so sánh các giá trị $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, $\sup B$, $\inf B$, $\max B$, $\min B$ với nhau.

*Hướng dẫn*: Biện luận trường hợp max, min tồn tại và không tồn tại.

(i) $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$ tồn tại: $\sup A = \max A$, $\inf A = \min A$, $\sup B = \max B$, $\inf B = \min B$.

$\max A \leq \max B$, $\min A \geq \min B$.

(ii) $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$ không tồn tại: $\sup A \leq \sup B$, $\inf A \geq \inf B$.

3. Cho hai tập con khác rỗng $A$, $B$ của $\mathbb{R}$ và $A \cap B \neq \phi$. Giả sử sup, inf, max, min của hai tập $A$ và $B$ tồn tại. Hãy cho các công thức $\sup A \cup B$, $\inf A \cup B$, $\max A \cup B$, $\min A \cup B$, $\sup A \cap B$, $\inf A \cap B$, $\max A \cap B$, $\min A \cap B$ liên hệ các giá trị $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, $\sup B$, $\inf B$, $\max B$, $\min B$.

*Hướng dẫn*: Biện luận trường hợp max, min tồn tại và không tồn tại.

(a) $A \cup B$

(i) $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$ tồn tại: $\max A \cup B = \max\{\max A, \max B\}$; $\min A \cup B = \min\{\min A, \min B\}$;

(ii) $\max A$, $\min A, \max B$, $\min B$ không tồn tại: $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$; $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$;

(iii) $\max A$ tồn tại, $\max B$ không tồn tại: $\sup A \cup B = \max\{\max A, \sup B\}$;

(iv) $\min A$ tồn tại, $\min B$ không tồn tại: $\inf A \cup B = \min\{\min A, \inf B\}$.

(b) $A \cap B$

(i) $\max A$, $\max B$ tồn tại: $\max(A \cap B) \leq \min\{\max A,\ \max B\}$.

Dấu bằng không luôn luôn đúng, bởi vì: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3)$, ta có $\max(A \cap B) = \max\{1\} = 1$, $\max A = 2$, $\max B = 3$, $\min\{\max A,\ \max B\} = \min\{2, 3\} = 2$.

(ii) $\max A$, $\max B$ không tồn tại: $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A,\ \sup B\}$.

(iii) $\max A$ tồn tại, $\max B$ không tồn tại: $\sup(A \cap B) \leq \min\{\max A,\ \sup B\}$.

(iv) $\min A$, $\min B$ tồn tại: $\min(A \cap B) \geq \max\{\min A,\ \min B\}$.

Dấu bằng không luôn luôn đúng, bởi vì: $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3)$, ta có $\min(A \cap B) = \min\{3\} = 3$, $\min A = 1$, $\min B = 2$, $\max\{\min A,\ \min B\} = \max\{1, 2\} = 2$.

(v) $\min A$, $\min B$ không tồn tại: $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A,\ \inf B\}$.

(v) $\min A$ tồn tại, $\min B$ không tồn tại: $\inf(A \cap B) \geq \max\{\min A,\ \inf B\}$.

4. Cho hai tập con khác rỗng $A$, $B$ của $\mathbb{R}$.

(i) Giả sử $A$ và $B$ bị chặn trên. Chứng minh $A \cup B$ cũng bị chặn trên.

(ii) Giả sử $A$ và $B$ bị chặn dưới. Chứng minh $A \cup B$ cũng bị chặn dưới.

(iii) Giả sử $A$ và $B$ bị chặn. Chứng minh $A \cup B$ cũng bị chặn.

5. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ và cho $N \in \mathbb{N}$. Đặt $A_N = \{x_n : n \geq N\}$. Chứng minh rằng:

(i) Nếu $A_N = \{x_n : n \geq N\}$ bị chặn trên thì dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên.

(ii) Nếu $A_N = \{x_n : n \geq N\}$ bị chặn dưới thì dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới.

(iii) Nếu $A_N = \{x_n : n \geq N\}$ bị chặn thì dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

6. Cho $f(x) = 3x + 7$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 10$.

7. Cho $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2_+} f(x) = +\infty$.

8. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 4x\right) = +\infty$.

9. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = +\infty$.

10. Cho $f(x) = \sin(1/x)$. Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

11. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$ tồn tại và tính $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$.

12. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2+x+1}$ tồn tại và tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2+x+1}$.

13. Cho $f(x)=\sin(x^2)$. Chứng minh rằng:
    (i) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
    (ii) Tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to \dfrac{1}{2}$.
    (iii) Không tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to 2$.

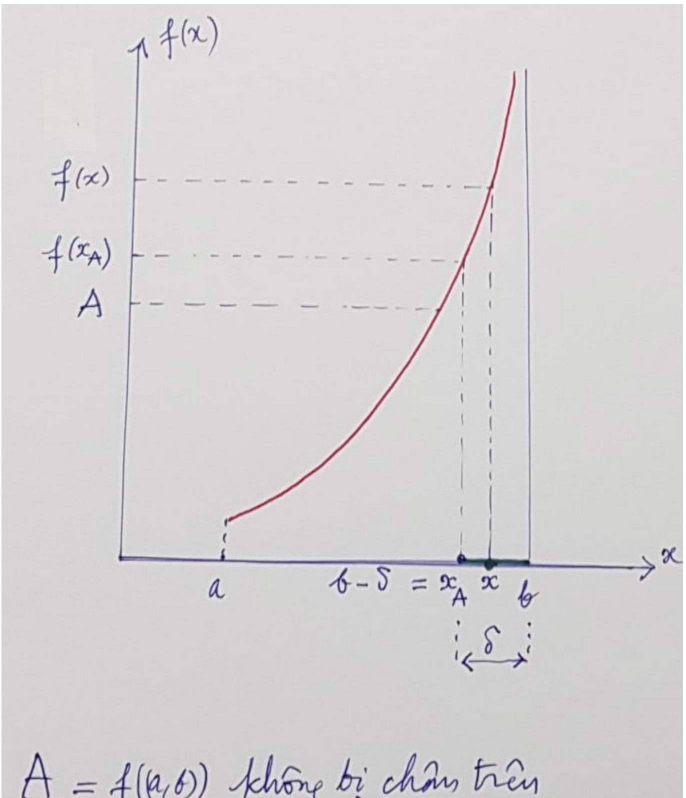
14. Cho $f(x)=\cos^2(x^3)$. Chứng minh rằng:
    (i) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
    (ii) Với mọi $L\in[0,1]$, tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to L$.
    (iii) Với mọi $L>1$, không tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to L$.

15. Cho $f(x)=x\sin(x)$. Chứng minh rằng:
    (i) Tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to 0$.
    (ii) Tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to+\infty$.
    (iii) Tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n\to+\infty$ và $f(x_n)\to-\infty$.

16. Cho $\phi\neq D\subset\mathbb{R}$ và $a\in D^*$. Cho $f:D\to\mathbb{R}$. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L>0$. Chứng minh rằng tồn tại $\delta>0$ sao cho $f(x)>0$, $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\cap(D\backslash\{a\})$.

17. Cho hàm $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ là tăng và không bị chặn trên. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to b_-} f(x)=+\infty$.

*Hướng dẫn bài* 17:
Tập $f([a,b))$ bị chặn trên của $\mathbb{R}\iff\exists A\in\mathbb{R}: f(x)\le A,\ \forall x\in[a,b)$.
Tập $f([a,b))$ không bị chặn trên của $\mathbb{R}\iff\forall A\in\mathbb{R},\exists x_A\in[a,b): f(x_A)>A$.
Cho $A\in\mathbb{R}$, do $f([a,b))$ không bị chặn trên, nên $\exists x_A\in[a,b): f(x_A)>A$.
Chọn $\delta=b-x_A>0$, khi đó, do $f$ là hàm tăng trên $[a,b)$, nên $f(x)>f(x_A)>A$. Vậy $\lim\limits_{x\to b_-} f(x)=+\infty$.




18. Cho hàm $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{x\to b_-}|f(x)|\neq+\infty$. Chứng minh rằng, tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}\subset[a,b)$ sao cho $x_n\to b$ và dãy $\{f(x_n)\}$ bị chặn.

19. Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là tăng và bị chặn trên. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sup f([a, +\infty))$.

20. Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là tăng và không bị chặn trên. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

21. Cho hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ không bị chặn trên sao cho $f([1, b])$ bị chặn trên với mọi $b > 1$. Chứng minh rằng tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to +\infty$.

22. Cho hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ không bị chặn trên. Chứng minh rằng:

(i) Tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to +\infty$;

hoặc

(ii) Tồn tại một dãy $\{x_n\}$ hội tụ sao cho $f(x_n) \to +\infty$.

23. Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là giảm và bị chặn dưới. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \inf f([a, +\infty))$.

24. Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là giảm và không bị chặn dưới. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

25. Cho hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ không bị chặn dưới sao cho $f([1, b])$ bị chặn dưới với mọi $b > 1$. Chứng minh rằng tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to -\infty$.

26. Cho hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ không bị chặn dưới. Chứng minh rằng:

(i) Tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to -\infty$;

hoặc

(ii) Tồn tại một dãy $\{x_n\}$ hội tụ sao cho $f(x_n) \to -\infty$.

27. Hãy cho ví dụ về một hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ không bị chặn trên sao cho không tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to +\infty$.

28. Hãy cho ví dụ về một hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ không bị chặn dưới sao cho không tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to -\infty$.

*Hướng dẫn bài* 19: Do $f([a, +\infty))$ là tập con $\neq \phi$ và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, nên tồn tại $L = \sup f([a, +\infty))$. Ta chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Cho $\varepsilon > 0$, do $L = \sup f([a, +\infty))$, tồn tại $x_\varepsilon \geq a$ sao cho $f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon$.

Do hàm $f$ tăng, nên $\forall x > x_\varepsilon$, ta có $L-\varepsilon < f(x_\varepsilon) < f(x) \leq L < L+\varepsilon$, điều này dẫn tới $|f(x) - L| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

*Hướng dẫn bài* 20: Do $f([a, +\infty))$ không bị chặn trên, nên $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists x_A \geq a : f(x_A) > A$.

Do hàm $f$ tăng, nên $\forall x > x_A$, ta có $f(x) > f(x_A) > A$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

*Hướng dẫn bài* 21: Do $f([1, +\infty))$ không bị chặn trên, nên tồn tại $x_1 \geq 1$ sao cho $f(x_1) > 1$.

Đặt $\tilde{x}_1 = \max\{2, x_1\}$ và do $f([1, \tilde{x}_1])$ bị chặn trên, nên tập $f([\tilde{x}_1, +\infty))$ không bị chặn trên, nên tồn tại $x_2 \geq \tilde{x}_1$ sao cho $f(x_2) > 2$.

Tiếp tục quá trình lý luận trên ta thu được dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_n \geq n$ và $f(x_n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $x_n \to +\infty$ và $f(x_n) \to +\infty$.

*Hướng dẫn bài* 22: Do $f([1, +\infty))$ không bị chặn trên, nên tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset [1, +\infty)$ sao cho $f(x_n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Nếu $\{x_n\}$ không bị chặn trên, nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to +\infty$. Mà $f(x_{n_k}) \geq n_k \geq k \to +\infty$. Vậy chọn $y_k = x_{n_k}$, ta có $y_k \to +\infty$ và $f(y_k) \to +\infty$.

(ii) Nếu $\{x_n\}$ bị chặn trên, khi đó $\{x_n\}$ bị chặn, theo Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to a$. Mà $f(x_{n_k}) \geq n_k \geq k \to +\infty$. Vậy chọn $\bar{y}_k = x_{n_k}$, ta có $\{\bar{y}_k\}$ hội tụ và $f(\bar{y}_k) \to +\infty$.

*Hướng dẫn bài* 23: Chứng minh tương tự bài 19.

*Hướng dẫn bài* 24: Chứng minh tương tự bài 20.

*Hướng dẫn bài* 25: Chứng minh tương tự bài 21.

*Hướng dẫn bài* 26: Chứng minh tương tự bài 22.

# Chương 5

# HÀM SỐ THỰC LIÊN TỤC

## 5.1 Các định nghĩa

### 5.1.1 Điểm tụ, điểm cô lập

**Định nghĩa điểm tụ**. Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$. Ta nói $a$ là một *điểm tụ* của $D$ nếu

$$(a-\delta, a+\delta) \cap (D \backslash \{a\}) \neq \phi,\ \forall \delta > 0.$$

**Định nghĩa điểm cô lập**. Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ được gọi là *điểm cô lập* của $D$ nếu

$$\exists \delta > 0 : (a-\delta, a+\delta) \cap (D \backslash \{a\}) = \phi.$$

### 5.1.2 Hàm số liên tục tại một điểm

**Định nghĩa 1.** Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ và $a \in D$.

Nếu $a$ là *điểm cô lập* của $D$. Ta nói $f$ *liên tục* tại $a$.
Nếu $a$ là *điểm tụ* của $D$. Ta nói $f$ *liên tục* tại $a \in D$ nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Trong trường hợp, $a \in D$ là điểm tụ của $D$. Ta cũng có

$$\begin{aligned} f \text{ liên tục tại } a \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ \ |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Với $a \in D$ sao cho $(a, a+\delta) \cap D \neq \phi$, $\forall \delta > 0$. Ta định nghĩa hàm $f$ liên tục bên phải tại $a$ như sau:

Ta nói $f$ *liên tục bên phải tại* $a \in D$ nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, tức là,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap [a, a+\delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Tương tự, với $a \in D$ sao cho $(a-\delta, a) \cap D \neq \phi$, $\forall \delta > 0$. Ta cũng có định nghĩa hàm $f$ liên tục bên trái tại $a$ như sau:

Ta nói $f$ *liên tục bên trái tại* $a \in D$ nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, tức là,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap (a-\delta, a] \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Hiển nhiên, điều kiện cần và đủ để hàm $f$ liên tục tại $a$ là $f$ liên tục bên phải và bên trái tại $a$.

$$f \text{ liên tục tại } a \Longleftrightarrow f \text{ liên tục bên phải tại } a \text{ và bên trái tại } a.$$

### 5.1.3 Hàm số liên tục trong khoảng, trên đoạn, trên một tập

**Định nghĩa 2.**

(i) Hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trong khoảng* $(a, b)$ nếu $f$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ nếu $f$ liên tục trong khoảng $(a, b)$ và liên tục bên phải tại $a$, liên tục bên trái tại $b$.

(iii) Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$, hàm $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trên tập* $D$ nếu $f$ liên tục tại mọi điểm $a \in D$, hay

$$\forall a \in D,\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

## 5.2 Các phép toán trên các hàm số liên tục tại một điểm

Áp dụng các phép toán đơn giản về các hàm số có giới hạn ta có một số kết quả sau đây:

**Định lý 1.** *Nếu hàm $f$ là liên tục tại điểm $a$ thì hàm $|f|$ cũng liên tục tại $a$.*

**Định lý 2.** *Nếu các hàm $f$ và $g$ liên tục tại điểm $a$ thì các hàm $f + g$, $fg$, $cf$ ($c$ là hằng số ) cũng liên tục tại $a$.*

*Ngoài ra, nếu $g(a) \neq 0$ thì hàm $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại $a$.*

**Định lý 3.** *Giả sử $D, E \subset \mathbb{R}$ và $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$. Nếu hàm $f$ liên tục tại điểm $a$ và $g$ liên tục tại điểm $b = f(a) \in E$, thì hàm hợp $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ cũng liên tục tại $a$.*

## 5.3 Điểm gián đoạn. Phân loại

**Định nghĩa 3.** Hàm $f$ được gọi là *gián đoạn* tại $a$ nếu $f$ không liên tục tại điểm $a$. Lúc đó $a$ *điểm gián đoạn* của $f$.

**Chú thích**. Nếu $f$ gián đoạn tại $a$ thì đồ thị của hàm $y = f(x)$ không liền tại điểm $M_0(a, f(a))$, mà bị ngắt quảng tại $M_0$.

Căn cứ vào định nghĩa ta thấy rằng hàm $f$ gián đoạn tại $a$ nếu gặp một trong các trường hợp sau:

i) Nếu tồn tại các giới hạn bên phải $f_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, giới hạn bên trái $f_-(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ và ba số thực $f(a)$, $f_+(a)$, $f_-(a)$ không đồng thời bằng nhau, thì ta nói $a$ là *điểm gián đoạn loại một.*

j) Nếu $f_+(a) = f_-(a) \neq f(a)$, thì ta nói $a$ là *điểm gián đoạn bỏ được.*

jj) Nếu $f_+(a) \neq f_-(a)$, thì ta nói $a$ là *điểm nhảy.* Hiệu số $f_+(a) - f_-(a)$ được gọi là *bước nhảy tại $a$* của hàm $f$.

ii) Điểm gián đoạn không thuộc loại một được gọi là *điểm gián đoạn loại hai.*

**Ví dụ**: Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ x - 1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Ta có: $f_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Vậy $x = 0$ là một điểm nhảy, với bước nhảy là $f(+0) - f(-0) = 2$.

**Ví dụ**: Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 2, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq f(0) = 2$, nên gián đoạn loại một tại $x = 0$. Hơn nữa, $x = 0$ là một điểm gián đoạn bỏ được.

Nếu xét hàm

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 1, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

thì $\tilde{f}$ sẽ liên tục tại $x = 0$. Như vậy bằng cách chỉnh sửa giá trị hàm tại $x = 0$, ta đã chỉnh sửa từ một hàm $f$ không liên tục tại $x = 0$ thành một hàm $\tilde{f}$ liên tục tại $x = 0$. Điều nầy giải thích từ "*bỏ được*" tính bất liên tục của hàm số.

**Ví dụ**: Hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ có điểm gián đoạn loại hai tại $x = 0$, vì $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

## 5.4 Tính liên tục của các hàm sơ cấp

Ta sẽ chỉ ra rằng các hàm sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của chúng.

1/ Đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

Vì hàm số $y = C =$ hằng và hàm số $y = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$$x \longmapsto ax^k = a\underbrace{xx\cdots x}_{k \text{ thừa số}}$$

trong đó $a$ là một số tực không đổi và $k$ là một số tự nhiên, liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm $P_n(x)$ là tổng hữu hạn các hàm thuộc dạng trên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm hữu tỉ $\dfrac{P}{Q}$, trong đó $P$ và $Q$ là các đa thức, liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ tại đó $Q(x) \neq 0$.

2/ Hàm mũ $y = a^x$ $(a > 0)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $a^x = a^{x_0}a^{x-x_0}$.

Khi $x \to x_0$ ta có $x - x_0 \to 0$ và $a^{x-x_0} \to 1$. Do đó $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Vậy hàm $y = a^x$ liên tục tại điểm $x_0$. Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} a^x &= +\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ với } a > 1, \\ \lim_{x\to+\infty} a^x &= 0 \text{ và } \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ với } 0 < a < 1. \end{aligned}$$

Tập các giá trị của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(0, +\infty)$.

3/ Hàm số Lôgarit $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ liên tục trên $(0, +\infty)$.(Xem mục 5.5)

Giả sử $x_0 > 0$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $\log_a x = \log_a x_0 + \log_a \dfrac{x}{x_0}$.

Khi $x \to x_0$ ta có $\dfrac{x}{x_0} \to 1$ và $\log_a \dfrac{x}{x_0} \to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Vậy hàm $y = \log_a x$ liên tục tại điểm $x_0$. Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \log_a x &= -\infty \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ nếu } a > 1, \\ \lim_{x\to 0^+} \log_a x &= +\infty \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ nếu } 0 < a < 1. \end{aligned}$$

4/ Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ liên tục trên $(0, +\infty)$. Vì $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ nên theo định lý về tính liên tục của hàm số hợp, hàm số lũy thừa liên tục trên $(0, +\infty)$.

5/ Các hàm số lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.

Thật vậy, Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

Vậy hàm số $y = \sin x$ liên tục tại điểm $x_0$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên theo định lý về tính liên tục của hàm số hợp, suy ra hàm số $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cũng theo tính chất hàm liên tục ta có hàm số $y = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ mà $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ tập các số nguyên.

Hàm số $y = \text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ mà $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6/ Người ta chứng minh được rằng các hàm lượng giác ngược liên tục trên tập xác định của chúng. Cụ thể là

- Hàm số $y = \arcsin x$ liên tục và tăng trên từ $[-1, 1]$ lên $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Hàm số $y = \arccos x$ liên tục và giảm trên từ $[-1, 1]$ lên $[0, \pi]$.
- Hàm số $y = arctgx$ liên tục và tăng trên từ $\mathbb{R}$ lên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Hàm số $y = \text{arccotg } x$ liên tục và giảm trên từ $\mathbb{R}$ lên $(0, \pi)$.

## 5.5 Tính chất của hàm liên tục trên một đoạn

**Định lý 4.** *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó*

(i) *$f$ bị chặn trên đoạn $[a, b]$, tức là $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$.*

(ii) *$f$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$, tức là*

$$\exists x_*,\ x^* \in [a, b] : f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a, b],$$

*nghĩa là $\exists x_*, x^* \in [a, b]$ :*

$$\begin{aligned} f(x_*) &= \min f([a, b]) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \\ f(x^*) &= \max f([a, b]) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

(iii) *Nếu $\min f([a, b]) \leq k \leq \max f([a, b])$, thì $\exists c \in [a, b]$ sao cho $k = f(c)$.*

(iv) *Nếu $f(a)f(b) < 0$, thì $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.* (xem hình ở dưới)

(v) *$f([a, b])$ là một đoạn trong $\mathbb{R}$, tức là $\exists c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d : f([a, b]) = [c, d]$.*

(vi) *Nếu $f$ là một song ánh từ $f : [a, b] \to f([a, b])$. Khi đó ánh xạ ngược $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ cũng liên tục trên đoạn $f([a, b])$.*

(vii) *Nếu $f$ tăng (tương ứng giảm) trên đoạn $[a, b]$. Khi đó $f$ là một song ánh từ $[a, b]$ lên $[f(a), f(b)]$ (tương ứng $[f(b), f(a)]$ ) và hàm số ngược $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ (tương ứng $f^{-1} :\ [f(b), f(a)] \to [a, b]$) của hàm $f$ là liên tục và tăng (tương ứng giảm).*

**Nhắc lại**:
Một hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là *tăng* (*giảm*) trên đoạn $[a, b]$, nếu

$$\forall x, x' \in [a, b],\ x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x') \text{ (tương ứng } f(x) > f(x')).$$

Một hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là *không giảm* (*không tăng*) trên đoạn $[a, b]$, nếu

$$\forall x, x' \in [a, b],\ x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x') \text{ (tương ứng } f(x) \geq f(x')).$$

*Chứng minh Định lý 4.*
*Chứng minh* (i). Giả sử $f$ không bị chặn trên đoạn $[a, b]$, tức là $\forall M > 0, \exists x_M \in [a, b] : |f(x_M)| > M$. Lấy $M = n \in \mathbb{N}$,

$$\exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dùng Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ và $x_0 \in [a, b]$ sao cho $x_{n_k} \to x_0$. Do tính liên tục của $f$ tại $x_0$, ta có $|f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$.
Từ bất đẳng thức

$$|f(x_{n_k})| \geq n_k,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

ta suy ra điều mâu thuẫn. Vậy $f$ bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Vậy (i) được chứng minh xong.

*Chứng minh* (ii). Ta có $\phi \neq f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ và bị chặn trên. Do đó tồn tại $M = \sup f([a, b]) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, lấy $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, do $M = \sup f([a, b])$,

$$\exists x_n \in [a, b] : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dùng Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ và $x^* \in [a, b]$ sao cho $x_{n_k} \to x^*$.
Do tính liên tục của $f$ tại $x^*$, ta có $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$.
Từ bất đẳng thức

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

cho $k \to +\infty$, ta có

$$M \leq f(x^*) \leq M.$$

Do đó

$$f(x^*) = M = \sup f([a, b]) = \max f([a, b]).$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $x_* \in [a, b]$ sao cho

$$f(x_*) = \inf f([a, b]) = \min f([a, b]).$$

Vậy (ii) được chứng minh xong.

*Chứng minh* (iii). Do (ii), ta có

$$\exists x_*, \ x^* \in [a, b] : f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a, b].$$

Nếu $f(x_*) = f(x^*)$, hiển nhiên (iii) đúng.
Giả sử $f(x_*) < f(x^*)$, ta có thể giả sử rằng $x_* < x^*$ (nếu không ta thay $f$ bởi $-f$).
Ta chỉ cần xét trường hợp $f(x_*) < k < f(x^*)$. Ta có $\phi \neq A = \{x \in [x_*, x^*] : f(x) \leq k\}$ và bị chặn trên. Do đó tồn tại $c = \sup A$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, lấy $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, do $c = \sup A$, ta có

$$\exists x_n \in A : c - \frac{1}{n} < x_n \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

hay

$$\exists x_n \in [x_*, x^*], \ f(x_n) \leq k : c - \frac{1}{n} < x_n \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó ta suy ra $x_n \to c \in [x_*, x^*]$, và do tính liên tục của $f$ tại $c$, ta có $f(c) \leq k$.

Nếu $c = x^*$, thì $f(c) = f(x^*) > k$ : Mâu thuẫn với $f(c) \leq k$. Vậy $c < x^*$.
Mặt khác, ta có $y_n = c + \dfrac{x^* - c}{n} \in [x_*, x^*]$ với $n$ đủ lớn. Hơn nữa $y_n > c$, dẫn đến $y_n \notin A$.
Do đó $f(y_n) > k$ và $y_n \to c$, dẫn đến $f(c) \geq k$.
Vậy $f(c) = k$.
Vậy (iii) được chứng minh xong.

*Chứng minh* (iv). Áp dụng (iii) với $\min f([a, b]) \leq f(a) < k = 0 < f(b) \leq \max f([a, b])$.
Vậy (iv) được chứng minh xong.

*Chứng minh* (v). Đặt $c = f(x_*) = \min f([a, b])$, $d = f(x^*) = \max f([a, b])$.
Ta có $f([a, b]) \subset [c, d]$.
Mặt khác, ta sẽ chứng minh rằng $[c, d] \subset f([a, b])$. Mà điều này ta sẽ áp dụng (iii).
Vậy (v) được chứng minh xong.

*Chứng minh* (vi). $g = f^{-1} : f([a, b]) = [c, d] \to [a, b]$ *cũng liên tục trên đoạn* $f([a, b]) = [c, d]$.

Cho $\{y_n\} \subset [c, d]$, $y_n \to y_0 \in [c, d]$. Ta chứng minh rằng $g(y_n) \to g(y_0)$. Giả sử $g(y_n) \nrightarrow g(y_0)$. Khi đó

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{y_{n_k}\} \subset \{y_n\} \text{ và } |g(y_{n_k}) - g(y_0)| \geq \varepsilon_0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Đặt $x_0 = g(y_0)$, $x_{n_k} = g(y_{n_k}) \in [a, b]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Ta có

$$f(x_0) = y_0, \ \ |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon_0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dùng Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con $\{x_{n_{k_m}}\} \subset \{x_{n_k}\}$ và $\hat{x} \in [a, b]$ sao cho $x_{n_{k_m}} \to \hat{x}$. Ta có $\hat{x} \neq x_0$, do $x_{n_{k_m}} \nrightarrow x_0$.

Do tính liên tục của $f$ tại $\hat{x}$, ta có $y_{n_{k_m}} = f(x_{n_{k_m}}) \to f(\hat{x})$. Ta có $f(\hat{x}) = y_0 = f(x_0)$. Do $f$ là một song ánh từ $f : [a, b] \to [c, d]$, ta có $\hat{x} = x_0$. Mâu thuẫn với $\hat{x} \neq x_0$.

Vậy (vi) được chứng minh xong.

*Chứng minh* (vii).

(vii) Nếu $f$ tăng trên đoạn $[a, b]$. Khi đó $f$ là một song ánh từ $[a, b]$ lên $[f(a), f(b)] = f([a, b])$. Áp dụng (vi), ta có $g = f^{-1} : f([a, b]) = [f(a), f(b)] \to [a, b]$ cũng liên tục trên đoạn $[f(a), f(b)]$. Ta chỉ cần kiểm tra $g = f^{-1}$ tăng trên đoạn $[f(a), f(b)]$.

Cho $y$, $y' \in [f(a), f(b)]$, $y < y'$, ta có $x = g(y) < x' = g(y')$. Thật vậy, Giả sử $x = g(y) \geq x' = g(y')$, do $f$ tăng, ta có

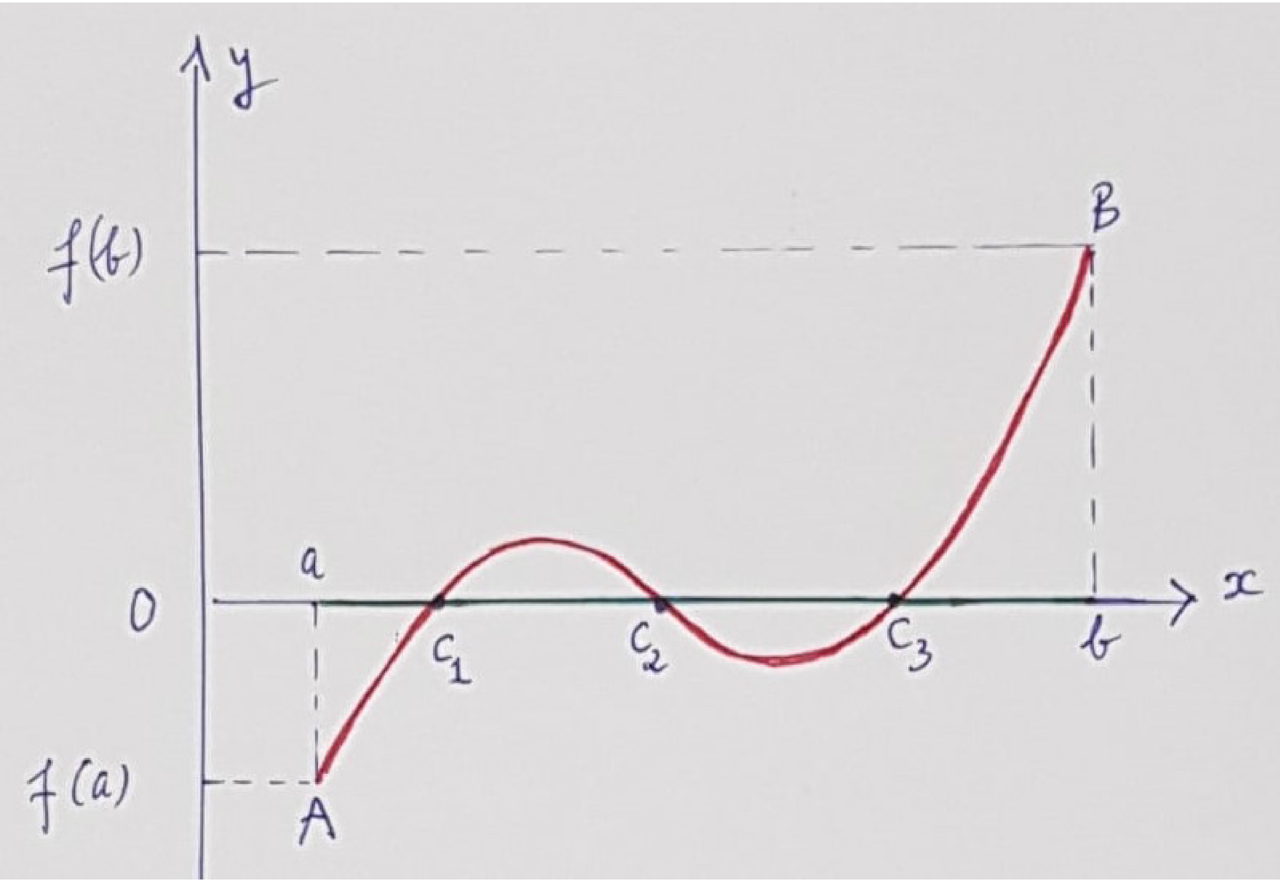
$$y = f(x) \geq f(x') = y'.$$

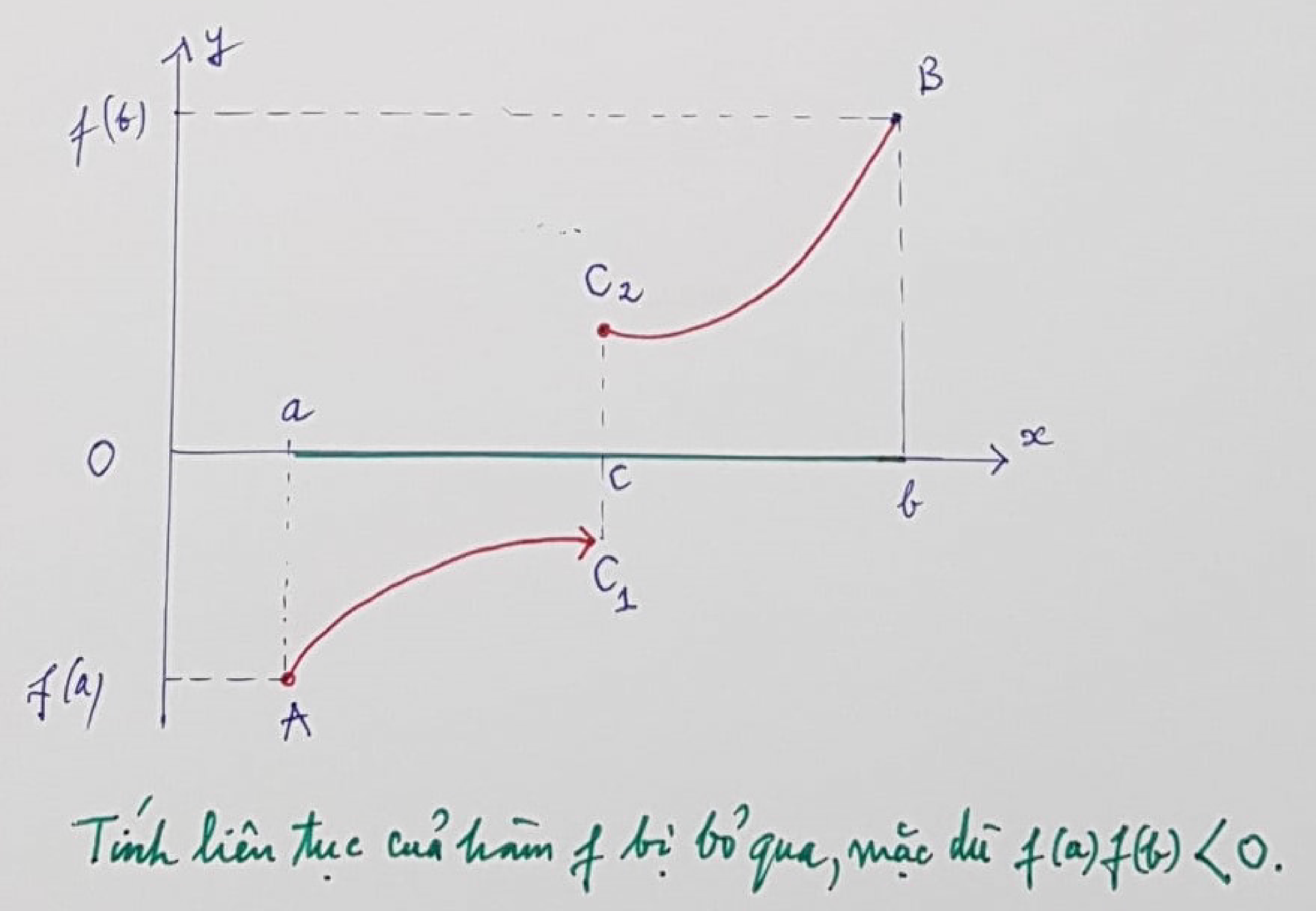
Mâu thuẫn với $y < y'$.

Chứng minh tương tự với $f$ là hàm giảm trên đoạn $[a, b]$.

Vậy (vii) được chứng minh xong.

Định lý 4 được chứng minh xong. □






## 5.6 Hàm số liên tục đều

**Định nghĩa 4.** Cho $\phi \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$ *liên tục đều trên* $D$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in D, \ \ |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

**Chú thích**:

1/ $f$ liên tục đều trên $D$ thì liên tục tại mọi điểm thuộc $D$. Ngược lại không đúng ví dụ hàm $f(x) = x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

2/ Ví dụ hàm $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục đều trên $\mathbb{R}_+$.

HD: Chứng minh bất đẳng thức $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$.

**Định lý 5.** *Cho* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$. *Khi đó* $f$ *liên tục đều trên* $[a, b]$.

*Chứng minh Định lý 5.* Ta chỉ chứng minh phần thuận.
Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $f$ không liên tục đều trên $[a, b]$. Khi đó

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0 : \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b], \ \ |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ và } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, lấy $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$,

$$\exists x_n, y_n \in [a, b], \ \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ và } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dùng Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ và $x_0 \in [a, b]$ sao cho $x_{n_k} \to x_0$.

Mặt khác, ta có

$$|y_{n_k} - x_0| \le |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0.$$

Do tính liên tục của $f$ tại $x_0$, ta có $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(x_0) - f(y_0)| = 0$.
Từ bất đẳng thức

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon_0, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

ta suy ra điều mâu thuẫn. Vậy $f$ liên tục đều trên $[a, b]$.
Định lý 5 được chứng minh xong. $\square$

**Ví dụ 1**: (Xem như Bài tập). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

*Giải Ví dụ 1.* Cho $\varepsilon > 0$. Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, ta có $N_1, \ N_2 > 0 :$

$$\begin{aligned} \forall x &< -N_1 \Longrightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall x &> N_2 \Longrightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Do $f$ liên tục đều trên đoạn $[-N_1 - 1, N_2 + 1]$, nên

$$\exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1], \ \ |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Chọn $\delta_1 = \min\{1, \delta\}$, và $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $|x - x'| < \delta_1$, ta phân biệt 5 trường hợp:

(i) $x, \, x' \in (-\infty, -N_1)$;
(ii) $x, \, x' \in (N_2, +\infty)$;
(iii) $x, \, x' \in [-N_1, N_2]$;
(iv) $x \in (-\infty, -N_1)$, $x' \in [-N_1, N_2]$;
(v) $x \in [-N_1, N_2]$, $x' \in (N_2, +\infty)$.

Do đó, nếu $|x - x'| < \delta_1$, ta có

(i) $x, \, x' \in (-\infty, -N_1) : \quad |f(x) - f(x')| \le |f(x)| + |f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(ii) $x, \, x' \in (N_2, +\infty) : \quad |f(x) - f(x')| \le |f(x)| + |f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(iii) $x, \, x' \in [-N_1, N_2] : \quad x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1] \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

(iv) $x \in (-\infty, -N_1), \, x' \in [-N_1, N_2] : \quad x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1] \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

(v) $x \in [-N_1, N_2], \, x' \in (N_2, +\infty) : \quad x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1] \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

Cả 5 trường hợp trên đều dẫn đến $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Vậy $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

**Ví dụ 2**: (Xem như Bài tập). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

*Giải Ví dụ 2.* Cho $\varepsilon > 0$. Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, ta có $N_1, \ N_2 > 0 :$

$$\begin{aligned} \forall x &< -N_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall x &> N_2 \Longrightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Do $f$ liên tục đều trên đoạn $[-N_1 - 1, N_2 + 1]$, nên

$$\exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1], \ \ |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Chọn $\delta_1 = \min\{1, \delta\}$, và $\forall x,\, x' \in \mathbb{R}$, $|x - x'| < \delta_1$, ta phân biệt 5 trường hợp:

(i) $x,\, x' \in (-\infty, -N_1)$;
(ii) $x,\, x' \in (N_2, +\infty)$;
(iii) $x,\, x' \in [-N_1, N_2]$;
(iv) $x \in (-\infty, -N_1)$, $x' \in [-N_1, N_2]$;
(v) $x \in [-N_1, N_2]$, $x' \in (N_2, +\infty)$.

Do đó, nếu $|x - x'| < \delta_1$, ta có

(i) $x,\, x' \in (-\infty, -N_1):\quad |f(x) - f(x')| \le |f(x) - L_1| + |L_1 - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(ii) $x,\, x' \in (N_2, +\infty):\quad |f(x) - f(x')| \le |f(x) - L_2| + |L_2 - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(iii) $x,\, x' \in [-N_1, N_2]:\quad x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1] \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

(iv) $x \in (-\infty, -N_1),\, x' \in [-N_1, N_2]:\quad x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1] \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

(v) $x \in [-N_1, N_2],\, x' \in (N_2, +\infty):\quad x, x' \in [-N_1 - 1, N_2 + 1] \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

Cả 5 trường hợp trên đều dẫn đến $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Vậy $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

## 5.7 Bài tập bổ sung

1. Cho $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng:
   (i) Mọi điểm thuộc $A$ đều là điểm tụ của $A$.
   (ii) $A$ không có điểm cô lập.

2. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ hội tụ về $a$. Xét dãy số $\{y_n\}$ như sau $y_n = x_{n+10}$, $n = 1, 2, \cdots$. Chứng minh rằng $y_n \to a$.

3. Cho ví dụ về hai dãy số thực $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ phân kỳ mà $\{x_n y_n\}$ hội tụ.

4. Cho ví dụ về hai dãy số thực $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ phân kỳ mà $\{x_n y_n\}$ phân kỳ.

5. Cho ví dụ về hai dãy số thực $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ $\{y_n\}$ phân kỳ và $\{x_n y_n\}$ hội tụ.

6. Cho ví dụ về hai dãy số thực $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ $\{y_n\}$ phân kỳ và $\{x_n y_n\}$ phân kỳ.

7. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng nếu $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ thì $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

8. Cho hai hàm $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ thì $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Cho $\phi \ne D \subset \mathbb{R}$ và $f : D \to \mathbb{R}$. Cho $a \in D$. Viết mệnh đề "$f$ không liên tục tại $a$".

10. Cho $\phi \ne D \subset \mathbb{R}$ và $f : D \to \mathbb{R}$. Cho $a \in D$. là điểm tụ của $D$. Giả sử $f$ liên tục tại $a$. Chứng minh rằng nếu $f(a) > 0$, thì tồn tại số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) > 0$, $\forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$.

11. Cho $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\sin(1/x), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Xét sự liên tục của hàm $f$.

12. Cho $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \\ x^4 - 15, & x \ge 2. \end{cases}$

Xét sự liên tục của hàm $f$.

13. Cho $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \ne 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$

Có tồn tại số thực $A$ sao cho $f$ liên tục tại $x = 0$?.

14. Xét sự liên tục của các hàm sau:

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \sin^2(1/x), & x \ne 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \cos^2(1/x), & x \le \pi, \\ 1 + (x-\pi)^2 \sin x, & \pi < x < 2\pi, \\ \sin^2(1/x), & x \ge 2\pi; \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

15. Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ sao cho $f(x) > x^2$, $\forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $m > 0$ sao cho $f(x) > x^2 + m$, $\forall x \in [a,b]$.

16. Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ sao cho $f(x) < x^3$, $\forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $M > 0$ sao cho $f(x) < x^3 - M$, $\forall x \in [a,b]$.

17. Cho hai hàm $f$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ sao cho $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $m > 0$ sao cho $f(x) > g(x) + m$, $\forall x \in [a,b]$.

18. Cho hai hàm $f$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ sao cho $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $M > 0$ sao cho $f(x) < g(x) - M$, $\forall x \in [a,b]$.

19. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

(i) $f(0) = 0$;

(ii) $f$ là hàm lẻ;

(iii) $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iv) $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(v) $f(x) = f(1)x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$;

(vi) Nếu $f$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(1)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

20. Cho $f : [a,b] \to [a,b]$ thỏa điều kiện $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, $\forall x, y \in [a,b]$, $x \ne y$.
Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x_* \in [a,b]$ sao cho $x_* = f(x_*)$.

21. Cho $f : [a,b] \to [a,b]$ liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại $x_* \in [a,b]$ sao cho $x_* = f(x_*)$.

22. Cho $f : [a,b] \to [a,b]$ liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a,b]$ sao cho $x_0 = (x_0 - a)(x_0 - b) + f(x_0)$.

23. Cho hai số thực dương $a$, $b$. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{a}{x^3+x-2} + \dfrac{b}{x^3+x^2+x+1} = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1,1)$. Nghiệm này có duy nhất không?

24. Cho $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

25. Cho $f(x) = \sin x$. Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

26. Cho $f(x) = x^3$. Chứng minh rằng $f$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

27. Cho $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ \cos(\pi x), & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$

Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

28. Cho $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

29. Cho hàm $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ liên tục đều trên $(0,1)$ và $\{x_n\} \subset (0,1)$ là một dãy Cauchy. Chứng minh rằng $\{f(x_n)\}$ là một dãy Cauchy.

30. Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Chứng minh rằng $\{f(x_n)\}$ là một dãy Cauchy.

31. Cho ví dụ về hàm $f$ liên tục đều trên $D \subset \mathbb{R}$ và $\{x_n\} \subset D$ không là một dãy Cauchy mà $\{f(x_n)\}$ là một dãy Cauchy.

32. Cho ví dụ về hai hàm $f$ và $g$ liên tục đều trên $D \subset \mathbb{R}$ mà $fg$ không liên tục đều trên $D$.

33. Hãy chỉ ra hai hàm $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f \ne 0$, $g \ne 0$ mà $fg \equiv 0$.

34. Hãy chỉ ra hai hàm $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

(i) $f$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$,

(ii) $g$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và không liên tục tại $x = 0$,

(iii) $fg$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

35. Hãy chỉ ra hai song ánh $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không song ánh.

36. Hãy chỉ ra hai đơn ánh $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không đơn ánh.

37. Hãy chỉ ra hai toàn ánh $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không toàn ánh.

38. Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\exists a, b > 0 : |f(x)| \leq a|x| + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

38a. Cho $f(x) = x \sin x$.

(i) Chứng minh rằng $\exists a, b > 0 : |f(x)| \leq a|x| + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

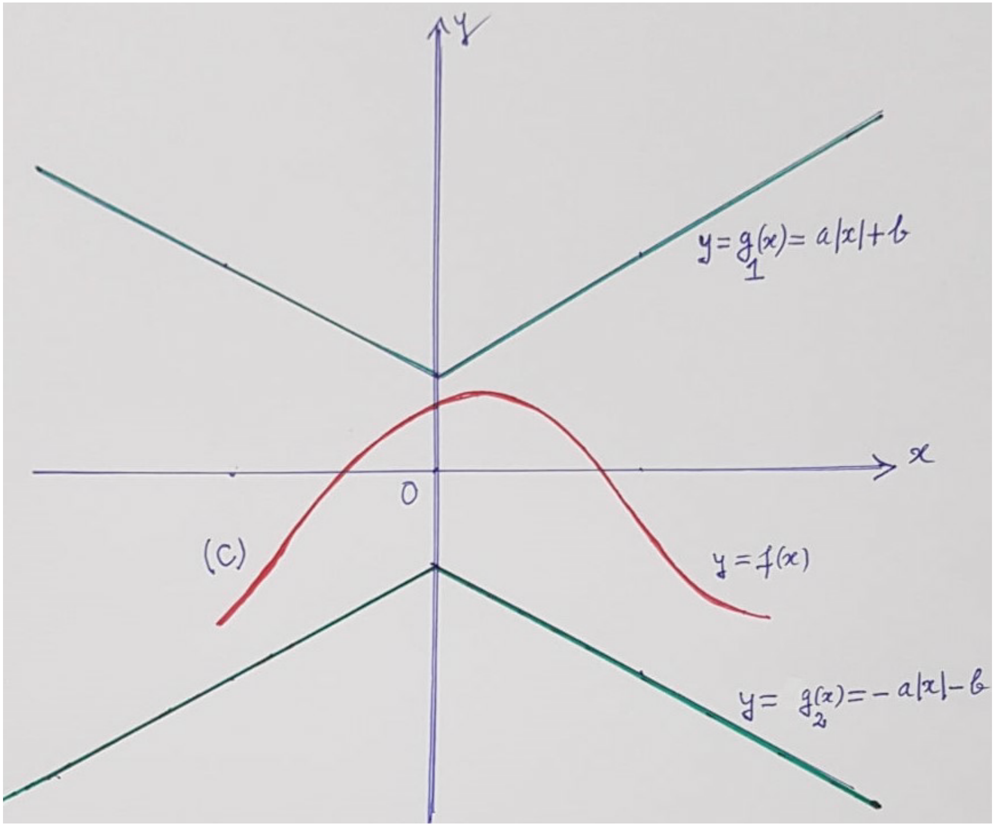
(ii) Chứng minh rằng $f$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

39. Cho $A \neq \phi$ và $g : A \to \mathbb{Q}$ là một đơn ánh. Chứng minh rằng $A$ là tập quá lắm đếm được.

40. Cho hàm $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ là tăng. Chứng minh rằng tập $A = \{x \in (0, 1) : f$ không liên tục tại $x$. Chứng minh rằng $A$ là tập quá lắm đếm được.

*Hướng dẫn bài 38*:

(i) Ý nghĩa hình học: Ta có $|f(x)| \leq a|x| + b, \forall x \in \mathbb{R} \iff -(a|x| + b) \leq f(x) \leq a|x| + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này nghĩa là đồ thị $(C)$ của hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}$ nằm dưới đồ thị của hàm $g_1(x) = a|x| + b$ và nằm trên đồ thị của hàm $g_2(x) = -a|x| - b$. Chi tiết hơn phần đồ thị $(C)$ ở phía phải của trục $Oy$ nằm giữa (bị kẹp) hai nửa đường thẳng $y = ax + b$, $y = -ax - b$; và phần đồ thị $(C)$ ở phía trái của trục $Oy$ nằm giữa (bị kẹp) hai nửa đường thẳng $y = -ax + b$, $y = ax - b$ (Xem hình)




Tuy nhiên với bài tập 38a sẽ cho thấy hàm số có đồ thị bị kẹp giữa hai đường thẳng như trên chưa chắc là hàm số liên tục đều.

(ii) Hướng dẫn chứng minh:

(j) Do $f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$, tồn tại $\delta > 0 : |f(x) - f(y)| < 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ và $|x - y| < \delta$.

Chọn $n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{n} < \delta$, ta cũng có $|f(x) - f(y)| < 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ và $|x - y| \leq \dfrac{1}{n}$.

(jj) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ và $|x - y| \leq 2$. Hãy chứng minh rằng $|f(x) - f(y)| < 2n$.

HD: Giả sử $x < y$, $x_i = x + i\left(\dfrac{y - x}{2n}\right)$, $i = 0, 1, \cdots, 2n$, ta có

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x_0) - f(x_{2n})| \\ &\leq |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{2n-1}) - f(x_{2n})| \leq 2n. \end{aligned}$$

(jjj) Chứng minh rằng $|f(x)| \leq 2nx + 2n + |f(0)|, \forall x > 0$.

HD: Đặt $N = [x]$ là số nguyên lớn nhất và $\leq x$ (là phần nguyên của $x$), $\{x\} = x - [x] = x - N$ là phần lẻ của $x$, $0 \leq \{x\} < 1$.

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |f(x) - f(N)| + |f(N) - f(N-1)| + \cdots + |f(1) - f(0)| + |f(0)| \\
&\leq 2n + 2n + \cdots + 2n + |f(0)| \\
&= (N+1)(2n) + |f(0)| \\
&\leq (x+1)(2n) + |f(0)| = 2n\,|x| + 2n + |f(0)|\,.
\end{aligned}$$

(4j) Chứng minh rằng $|f(x)| \leq 2nx + 2n + |f(0)|\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $x = 0$.
- Ta chỉ cần chứng minh với $x < 0$, $N_1 = [x] \leq -1$, $\{x\} = x - [x] = x - N_1 \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |f(x) - f(N_1)| + |f(N_1) - f(N_1+1)| + |f(N_1+1) - f(N_1+2)| + \cdots + |f(-1) - f(0)| + |f(0)| \\
&\leq 2n + 2n + \cdots + 2n + |f(0)| = (-N_1 + 1)(2n) + |f(0)| \\
&= (\{x\} - x + 1)(2n) + |f(0)| \\
&\leq (-x+1)(2n) + |f(0)| = (|x| + 1)(2n) + |f(0)| \\
&= 2n\,|x| + 2n + |f(0)|\,.
\end{aligned}$$

*Hướng dẫn bài 38a*:
(i) Chứng minh rằng $\exists a, b > 0 : |f(x)| \leq a\,|x| + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Dễ dàng $|f(x)| = |x \sin x| \leq |x| = a\,|x| + b,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a = 1,\ b = 0$.
(ii) Chứng minh rằng $f$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Ý tưởng chọn $x_n = y_n + \delta_n$, $y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\delta_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

$$\begin{aligned}
f(x_n) - f(y_n) &= (y_n + \delta_n)\sin(y_n + \delta_n) - y_n \sin y_n \\
&= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \delta_n\right)\cos\delta_n - \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(\cos\delta_n - 1) + \delta_n \cos\delta_n \\
&= -\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1 - \cos\delta_n) + \delta_n \cos\delta_n; \\
|f(x_n) - f(y_n)| &\geq \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1 - \cos\delta_n) - \delta_n \cos\delta_n \\
&\geq \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\delta_n^2 \left(\frac{1 - \cos\delta_n}{\delta_n^2}\right) - \delta_n \\
&= \frac{\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt[3]{n^2}} \left(\frac{1 - \cos\delta_n}{\delta_n^2}\right) - \delta_n \equiv z_n.
\end{aligned}$$

Mặt khác, $\dfrac{1 - \cos\delta_n}{\delta_n^2} \to \dfrac{1}{2}$, nên $z_n \to +\infty$, do đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $z_n \geq 1,\ \forall n \geq n_0$.
Cho $\delta > 0$, chọn $n_1 \in \mathbb{N} : \delta_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} < \delta,\ \forall n \geq n_1$.
Lấy $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, ta có $|x_n - y_n| = \delta_n < \delta$ và $|f(x_n) - f(y_n)| \geq z_n \geq 1$. Vậy $f$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.
*Hướng dẫn bài 39*:
Do $g : A \to \mathbb{Q}$ là một đơn ánh, ta có $g : A \to g(A)$ là một song ánh, ta có ánh xạ ngược $g^{-1} : g(A) \to A$ cũng song ánh
Ta có $g(A) \subset \mathbb{Q}$, nên $g(A)$ hữu hạn hoặc vô hạn đếm được (đếm được).
Nếu $g(A)$ hữu hạn thì $A = g^{-1}(g(A))$, cũng hữu hạn.
Nếu $g(A)$ đếm được thì $A = g^{-1}(g(A))$, cũng đếm được.
Vậy, $A$ là tập quá lắm đếm được.

*Hướng dẫn bài 40*:

(i) Cho $x \in (0,1)$.

- Tập $f((0,x)) = \{f(t) : 0 < t < x\} \neq \phi$ và bị chặn trên (bởi $f(x_1)$, với $x < x_1 < 1$). Do đó $\exists m(x) = \sup f((0,x))$.

- Tập $f((x,1)) = \{f(t) : x < t < 1\} \neq \phi$ và bị chặn dưới (bởi $f(x_2)$, với $0 < x_2 < x$). Do đó $\exists M(x) = \inf f((x,1))$.

Hãy chứng minh rằng

(ii) $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$;

(iii) $x \in A \Longleftrightarrow m(x) < M(x)$.

(iv) Với $x \in A$, chọn $g(x) \in \mathbb{Q} \cap (m(x), M(x))$ . Chứng minh rằng $g : A \to \mathbb{Q}$ là một đơn ánh, và suy ra $A$ là tập quá lắm đếm được.

*Hướng dẫn* (ii): Chứng minh $m(x) \leq f(x)$.

Giả sử $m(x) > f(x)$. Với $\varepsilon = m(x) - f(x)$, và do $m(x) = \sup f((0,x))$, nên $\exists x_* \in (0,x) : f(x_*) > m(x) - \varepsilon = f(x)$. Điều này mâu thuẫn vì $f$ là hàm tăng. Vậy $m(x) \leq f(x)$.

*Hướng dẫn* (ii): Chứng minh $f(x) \leq M(x)$.

Giả sử $f(x) > M(x)$. Với $\varepsilon = f(x) - M(x)$, và do $M(x) = \inf f((x,1))$, nên $\exists x_{**} \in (x,1) : f(x_{**}) < M(x) + \varepsilon = f(x)$. Điều này mâu thuẫn vì $f$ là hàm tăng. Vậy $f(x) \leq M(x)$.

*Hướng dẫn* (iii): Ta có $m(x) \leq M(x)$, $\forall x \in (0,1)$. Như vậy, hoặc là $m(x) = M(x)$ hoặc là $m(x) < M(x)$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$x \notin A \Longleftrightarrow m(x) = M(x).$$

Chứng minh (iii). Trước hết ta chứng minh rằng:

(a) $f_-(x) \equiv \lim\limits_{t \to x_-} f(t) = \sup f((0,x)) = m(x)$.

(b) $f_+(x) \equiv \lim\limits_{t \to x_+} f(t) = \inf f((x,1)) = M(x)$.

Chứng minh (a) Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in (0,x) : f(x_0) > \sup f((0,x)) - \varepsilon$.

$\forall t \in (x_0, x)$, do $f$ là hàm tăng, ta có $\sup f((0,x)) - \varepsilon < f(x_0) < f(t) \leq \sup f((0,x)) < \sup f((0,x)) + \varepsilon$, điều này dẫn tới $|f(t) - \sup f((0,x))| < \varepsilon$.

Vậy, $f_-(x) \equiv \lim\limits_{t \to x_-} f(t) = \sup f((0,x)) = m(x)$.

Chứng minh (b) cho $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{x}_0 \in (x,1) : f(\bar{x}_0) < \inf f((x,1)) + \varepsilon$.

$\forall t \in (x, \bar{x}_0)$, do $f$ là hàm tăng, ta có $\inf f((x,1)) - \varepsilon < \inf f((x,1)) \leq f(t) < f(\bar{x}_0) < \inf f((x,1)) + \varepsilon$, điều này dẫn tới $|f(t) - \inf f((x,1))| < \varepsilon$.

Vậy, $f_+(x) \equiv \lim\limits_{t \to x_+} f(t) = \inf f((x,1)) = M(x)$.

Chứng minh (iii)$\Longrightarrow$: Giả sử $f$ liên tục tại $x$, ta có $\lim\limits_{t \to x_+} f(t) = f(x)$ và $\lim\limits_{t \to x_-} f(t) = f(x)$, tức là $M(x) = f(x)$ và $m(x) = f(x)$. Điều này dẫn tới $M(x) = m(x)$.

Chứng minh (iii)$\Longleftarrow$: Giả sử $m(x) = M(x)$, ta có $m(x) = M(x) = f(x)$, từ đó $\lim\limits_{t \to x_+} f(t) = \lim\limits_{t \to x_-} f(t) = f(x)$. Vậy, $f$ liên tục tại $x$.

Chứng minh (iv). Cho $x \in A$, ta có $m(x) < M(x)$, ta suy ra $\mathbb{Q} \cap (m(x), M(x)) \neq \phi$. Tồn tại $g(x) \in \mathbb{Q} \cap (m(x), M(x))$ .

Ta có ánh xạ $g : A \to \mathbb{Q}$. Ta cần chứng minh $x, x' \in (0,1)$, $x < x' \Longrightarrow g(x) < g(x')$.

Giả sử $z = g(x) = g(x') \in \mathbb{Q} \cap (m(x), M(x)) \cap (m(x'), M(x')) \neq \phi$, khi đó $m(x) < z < M(x)$, $m(x') < z < M(x')$.

$$\lim_{t \to x'_-} f(t) = m(x') < z < M(x) = \lim_{t \to x_+} f(t)$$

Ta có, do $f$ là hàm tăng, ta có

$$\begin{aligned} x &< t < s < x', \\ f(x) &< f(t) < f(s) < f(x'). \end{aligned}$$

Cho $t \to x_+$, ta có

$$f(x) \leq \lim_{t \to x_+} f(t) \leq f(s) < f(x').$$

Cho $s \to x'_-$, ta có
$$f(x) \leq \lim_{t \to x_+} f(t) \leq \lim_{s \to x'_-} f(s) \leq f(x'),$$

Điều này dẫn tới $\lim_{t \to x_+} f(t) \leq \lim_{s \to x'_-} f(s)$, mà điều này mâu thuẫn vì $\lim_{t \to x'_-} f(t) < z < \lim_{t \to x_+} f(t)$.

Vậy $g(x) < g(x')$, do đó $g : A \to \mathbb{Q}$ là một đơn ánh. Theo Bài tập 39, ta có $A$ là tập quá lắm đếm được.

# Chương 6

# ĐẠO HÀM

## 6.1 Đạo hàm và các tính chất cơ bản của đạo hàm

**Định nghĩa 1.** Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và $x \in (a, b)$. Ta xét hàm số

$$\begin{aligned} \Phi : (a,b)\backslash\{x\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \Phi(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \end{aligned}$$

Khi đó, $x$ là điểm tụ của tập $(a,b)\backslash\{x\}$. Ta nói $f$ *có đạo hàm tại* $x$ nếu tồn tại $\lim\limits_{y\to x}\Phi(y) = L \in \mathbb{R}$ và số thực $L$ này được gọi là đạo hàm của $f$ tại $x$. Ta ký hiệu $L$ là $f'(x)$.

Như vậy

$$f'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cũng một cách khác để định nghĩa đạo hàm của $f$ tại $x$ như sau: Đặt $r = \min\{x - a, b - x\}$, ta có $r > 0$ và $(x - r, x + r) \subset (a, b)$. Khi đó, ta định nghĩa hàm

$$\begin{aligned} \Gamma : (-r,r)\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \Gamma(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $x + h \in (a, b)$, do đó $f(x + h)$ được xác định. Ta nói $f$ *có đạo hàm tại* $x$ nếu tồn tại $\lim\limits_{h\to 0}\Gamma(h) = L \in \mathbb{R}$ và số thực $L$ này cũng được gọi là đạo hàm của $f$ tại $x$. Như vậy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y\to x}\frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

**Định nghĩa 2.** Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và $x \in (a, b)$. Ta nói $f$ *khả vi tại* $x$ nếu tồn tại $A \in \mathbb{R}$ và một hàm $\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x + h) = f(x) + Ah + |h|\,\varphi(h),\ \forall h \in (-r, r),$$

trong đó, $r > 0$ đủ bé sao cho $(x - r, x + r) \subset (a, b)$ và $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$.

Biểu thức $Ah$ gọi là *vi phân của* $f$ *tại* $x$ ứng với $h$, ký hiệu nó là $df(x, h)$. Vậy

$$df(x, h) = Ah.$$

**Định lý 1.** *$f$ khả vi tại $x \Longleftrightarrow f$ có đạo hàm tại $x$.*
*Khi đó, $df(x, h) = f'(x)h$.*
*Chứng minh Định lý 1.*
*Chứng minh* $\Longrightarrow$. Giả sử $f$ khả vi tại $x$. Khi đó,

$$f(x + h) = f(x) + Ah + |h|\,\varphi(h),\ \forall h \in (-r, r),$$

với $\varphi(h)$ như trên. Ta có

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A + \frac{|h|}{h}\varphi(h), \ \forall h \in (-r,r)\backslash\{0\},$$

mà $\left|\frac{|h|}{h}\varphi(h)\right| = \varphi(h) \to 0$ khi $h \to 0$. Vậy $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to A$ khi $h \to 0$. Do đó $f$ có đạo hàm tại $x$ và $f'(x) = A$.

*Chứng minh* $\Longleftarrow$. Giả sử $f$ có đạo hàm tại $x$. Khi đó,

$$\tilde{\varphi}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \to 0, \text{ khi } h \to 0.$$

Khi đó,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\tilde{\varphi}(h) = f(x) + f'(x)h + |h|\,\varphi(h), \ \forall h \in (-r,r),$$

trong đó, $r > 0$ đủ bé sao cho $(x-r, x+r) \subset (a,b)$ và

$$\varphi(h) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(h), & h > 0, \\ 0, & h = 0, \\ -\tilde{\varphi}(h), & h < 0, \end{cases}$$

và $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = \lim_{h\to 0}\tilde{\varphi}(h) = 0$. Vậy $f$ khả vi tại $x$. Định lý 1 được chứng minh xong. $\square$

**Định lý 2.** *Nếu $f$ có đạo hàm tại $x$ thì hàm $f$ liên tục tại $x$.*

*Chứng minh Định lý 2.* Do $f$ có đạo hàm tại $x$ ta có

$$\tilde{\varphi}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \to 0, \text{ khi } h \to 0.$$

Do đó

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\tilde{\varphi}(h) \to 0, \text{ khi } h \to 0.$$

Vậy $f$ liên tục tại $x$. Định lý 2 được chứng minh xong. $\square$

**Chú thích**. Phần đảo không đúng, ví dụ hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$. Nhưng $f$ không có đạo hàm tại $x = 0$, bởi $\nexists f'(0)$.

**Ví dụ 1**: (Xem như Bài tập). Cho $f(x) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (hàm hằng). Ta có $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Định nghĩa 3.** Cho $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ và $x \in (a,b)$. Ta nói *$f$ có đạo hàm bên phải tại $x$* nếu tồn tại $\lim_{y\to x_+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = L_+ \in \mathbb{R}$ và số thực $L_+$ này được gọi là đạo hàm bên phải của $f$ tại $x$. Ta ký hiệu $L_+$ là $f'_+(x)$. Như vậy

$$f'_+(x) = \lim_{y\to x_+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0_+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tương tự Định nghĩa *$f$ có đạo hàm bên trái tại $x$* nếu tồn tại $\lim_{y\to x-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \in \mathbb{R}$ và ký hiệu đạo hàm bên trái của $f$ tại $x$ như sau

$$f'_-(x) = \lim_{y\to x_-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0_-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

**Định lý 3.**

$$f \text{ có đạo hàm tại } x \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } f \text{ có đạo hàm bên phải } f'_+(x) \text{ tại } x \\ \text{(ii) } f \text{ có đạo hàm bên trái } f'_-(x) \text{ tại } x \\ \text{(iii) } f'_+(x) = f'_-(x). \end{cases}$$

*Hơn nữa $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.*

**Ví dụ 2**. Tính đạo hàm của hàm số sau $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0, \\ x^3, & x \geq 0. \end{cases}$

*Giải.*
(i) Với $x<0: f(x) = x^2+1$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x<0$, với $f(x) = 2x$, $x<0$.
(ii) Với $x>0: f(x) = x^3$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x>0$, với $f(x) = 3x^2$, $x>0$.
(iii) Tại $x=0: f(0) = 0^3 = 0$.
$f_+(0) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} x^3 = 0 = f(0) : f$ liên tục bên phải tại $x=0$;
$f_-(0) = \lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} \left(x^2+1\right) = 1 \neq 0 = f(0) : f$ không liên tục bên trái tại $x=0$.
Vậy, $f$ không liên tục tại $x=0$, do đó theo Định lý 2 thì $f$ không có đạo hàm tại $x=0$.
Cuối cùng, ta có $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x<0, \\ 3x^2, & x>0, \end{cases}$ và $\nexists\ f'(0)$.

**Ví dụ 3**. Tính đạo hàm của hàm số sau $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x \leq 0, \\ x^3+x, & x>0. \end{cases}$

*Giải.*
(i) Với $x<0: f(x) = x^2+x$ có đạo hàm tại mọi $x<0$, với $f(x) = 2x+1$, $x<0$.
(ii) Với $x>0: f(x) = x^3+x$ có đạo hàm tại mọi $x>0$, với $f(x) = 3x^2+1$, $x>0$.
(iii) Tại $x=0: f(0) = 0^2+0 = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{x^3+x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \left(x^2+1\right) = 1 : f$ có đạo hàm bên phải tại $x=0$, và $f'_+(0) = 1$;
$\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{x^2+x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-} (x+1) = 1 : f$ có đạo hàm bên trái tại $x=0$, và $f'_-(0) = 1$;
Mà $f'_+(0) = f'_1(0) = 1$, nên có đạo hàm tại $x=0$, và $f'(0) = 1$.
Cuối cùng, $f$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và ta có $f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ 3x^2+1, & x>0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0, \\ 3x^2+1, & x>0. \end{cases}$

**Chú thích về ý nghĩa của đạo hàm**

(i) *Ý nghĩa cơ học của đạo hàm*: Vận tốc chuyển động của chất điểm.

(ii) *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*: Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong.

Xét đường cong $(L)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và một điểm cố định $M_0(x_0, f(x_0)) \in (L)$. Xét cát tuyến $M_0M$, với $M \in (L)$. Nếu khi điểm $M$ chạy trên đường cong $(L)$ tới điểm $M_0$ mà cát tuyến $M_0M$ tiến dần đến một vị trí giới hạn $M_0T$ thì đường thẳng $M_0T$ được gọi là *tiếp tuyến của đường* $(L)$ tại $M_0$. Vấn đề đặt ra là khi nào đường $(L)$ có tiếp tuyến tại $M_0$ và thì hệ số góc của tiếp tuyến ấy được tính như thế nào? Giả sử $M(x_0+h, f(x_0+h)) \in (L)$. Hệ số góc của cát tuyến $M_0M$ là

$$tg\beta = tg(Ox, M_0M) = \frac{y_M - y_{M_0}}{x_M - x_{M_0}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Bây giờ cho $h \to 0$, điểm $M$ chạy trên đường $(L)$ tới điểm $M_0$, lúc đó nếu tồn tại $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ thì $tg\beta$ ở vế trái cũng có cùng giới hạn $f'(x_0)$, do đó góc $\beta$ tiến tới một góc xác định $\alpha$, nghĩa là cát tuyến $M_0M$ dần đến một vị trí giới hạn $M_0T$ nghiêng với trục $Ox$ một góc $\alpha$. Vậy hệ số góc $tg\alpha$ của tiếp tuyến $M_0T$ nếu có chính là

$$tg\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

(như hình vẽ)

Suy ra ý nghĩa hình học của đạo hàm như sau:

Nếu hàm $f$ có đạo hàm tại $x_0$ thì đồ thị của hàm $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại $M_0(x_0, f(x_0))$ và hệ số góc của tiếp tuyến là

$$tg\alpha = f'(x_0).$$

Do đó phương trình của tiếp tuyến với đồ thị tại $M_0$ là

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

và nếu $f'(x_0) \neq 0$, phương trình của pháp tuyến với đồ thị tại $M_0$ (đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến với đồ thị tại $M_0$) là

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

**Định lý 4.** *Cho $f$, $g$ có đạo hàm tại $x$. Khi đó, các hàm $f + g$, $fg$ có đạo hàm tại $x$ và*

(i) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
(ii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
(iii) $(Cf)'(x) = Cf'(x)$, *với $C$ là hằng số thực.*
(iv) *Nếu $g(x) \neq 0$, thì $\frac{f}{g}$ cũng có đạo hàm tại $x$ và* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

*Chứng minh Định lý 4.*
*Chứng minh* (i).

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to f'(x) + g'(x)$$

khi $h \to 0$. Vậy (i) đúng.

*Chứng minh* (ii). Do $g$ có đạo hàm tại $x$ nên $g$ liên tục tại $x$, do đó $g(x + h) \to g(x)$ khi $h \to 0$. Do vậy

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

khi $h \to 0$. Do đó (ii) đúng.

*Chứng minh* (iii). Lấy $g(x) = C =$ hàm hằng, ta có $g'(x) = 0$. Áp dụng (ii), ta có (iii) đúng.

*Chứng minh* (iv). Trước hết, ta chứng minh rằng $\left(\frac{1}{g}\right)'$ có đạo hàm tại $x$ và $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.

Ta có

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = -\frac{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \to \frac{-g'(x)}{g^2(x)},$$

khi $h \to 0$. Vậy $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.

Áp dụng (ii), với tích hai hàm $f \cdot \frac{1}{g}$, ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(\frac{-g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Vậy (iv) đúng.

Định lý 4 được chứng minh xong. □

**Định lý 5.** *Cho $f : (a, b) \to (c, d)$ có đạo hàm tại $x \in (a, b)$ và $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm tại $y = f(x)$. Khi đó $g \circ f$ có đạo hàm tại $x$ và $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.*

*Chứng minh Định lý 5.* Chọn $R > 0$ đủ bé sao cho $(f(x) - R, f(x) + R) \subset (c, d)$. Xét hàm $\tilde{\varepsilon}$ : $(-R, R) \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$\tilde{\varepsilon}(k) = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} - g'(f(x)), & k \in (-R, R), k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Do $g$ có đạo hàm tại $f(x)$, nên $\tilde{\varepsilon}$ liên tục tại $k = 0$.

Mặt khác, do $f$ có đạo hàm tại $x$, nên $f$ liên tục tại $x$, và do $k = f(x+h) - f(x) \to 0$, khi $h \to 0$. Ta suy ra, tồn tại $r > 0$ sao cho $(x - r, x + r) \subset (a, b)$ và $k = f(x+h) - f(x) \in (-R, R)$, $\forall h \in (-r, r)$.

Hơn nữa, do $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, cho $h \to 0$, ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{h} \\ &= \left[g'(f(x)) + \tilde{\varepsilon}(k)\right] \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to g'(f(x)), \end{aligned}$$

do đó tồn tại $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$ và $= g'(f(x))f'(x)$, tức là $g \circ f$ có đạo hàm tại $x$ và $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Vậy Định lý 5 được chứng minh xong. $\square$

**Định lý 6.** (Định lý đạo hàm của ánh xạ ngược). *Cho $f : (a, b) \to (c, d)$ là một song ánh, liên tục trên $(a, b)$. Cho $f$ có đạo hàm tại $x \in (a, b)$ và $f'(x) \neq 0$.*

*Khi đó, hàm ngược $f^{-1}$ cũng có đạo hàm tại $y = f(x)$ và $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.*

*Chứng minh Định lý 6.* Ta có $x = (f^{-1})(y)$, $z = (f^{-1})(y + k)$, do đó $y = f(x)$, $y + k = f(z)$. Do $f^{-1}$ liên tục tại $y$, do đó $z = (f^{-1})(y + k) \to (f^{-1})(y) = x$, khi $k \to 0$, do đó

$$\frac{(f^{-1})(y+k) - (f^{-1})(y)}{k} = \frac{z - x}{f(z) - f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}} \to \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

khi $k \to 0$. Vậy Định lý 6 được chứng minh. $\square$

**Định nghĩa 4.** Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in (a, b)$. Ta nói

(i) *$f$ đạt cực tiểu tại $x_0$* nếu tồn tại một khoảng $J$, $x_0 \in J \subset (a, b) : f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in J$;
Ta còn nói $x_0$ là *điểm cực tiểu* của hàm $f$.

(ii) *$f$ đạt cực đại tại $x_0$* nếu tồn tại một khoảng $J$, $x_0 \in J \subset (a, b) : f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in J$;
Ta còn nói $x_0$ là *điểm cực đại* của hàm $f$.

Điểm cực tiểu và điểm cực đại gọi chung *điểm cực trị*.

**Định lý 7. (Định lý Fermat)** *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đạt cực trị tại $x_0 \in (a, b)$. Nếu $f$ có đạo hàm tại $x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.*

*Chứng minh Định lý 7.* Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đạt cực tiểu tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó, tồn tại một khoảng $J$, $x_0 \in J = (c, d) \subset (a, b)$ sao cho $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in J$.

Với $x_0 < x < d$ : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, do đó $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Với $c < x < x_0$ : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, do đó $f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Vậy $f'(x_0) = 0$.

Tương tự cho $f$ đạt cực đại.

Định lý 7 được chứng minh xong. $\square$

**Chú ý: (Định lý Fermat ở dạng khác).** Định lý Fermat cho một điều kiện cần để một hàm đạt cực trị được phát biểu theo một dạng khác như sau:

**Định lý Fermat.** *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đạt cực trị tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại $f'(x_0)$.*

**Ví dụ.** Hàm $f(x) = |x|$ đạt cực tiểu tại $x_0 = 0$, mà không tồn tại $f'(0)$.

**Định nghĩa 5.** Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$ *có đạo hàm trong khoảng* $(a, b)$ nếu $f$ có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng $(a, b)$.

**Định nghĩa 6.** Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$ *có đạo hàm trên đoạn* $[a, b]$ nếu $f$ có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$, có đạo hàm bên phải tại $a$ và bên trái tại $b$.

**Định lý 8.** **(Định lý Rolle)** *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$ sao cho $f(a) = f(b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

*Chứng minh Định lý 8.*
Trong trường hợp $f$ là hàm hằng. Khi đó $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Định lý luôn luôn đúng.
Xét trường hợp $f$ không là hàm hằng. Khi đó $\exists t \in (a, b) : f(t) \neq f(a) = f(b)$.
Do $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$, nên nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$, tức là

$$\exists c, d \in [a, b] : f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b].$$

nghĩa là $\exists c, d \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} f(c) &= \min f([a, b]) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \\ f(d) &= \max f([a, b]) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

Do $f$ không là hàm hằng, nên $f(c) < f(d)$ và $c \neq d$.
Nếu $c$ hoặc $d$ trong $(a, b)$ thì nhờ Định lý Fermat, ta có Định lý đúng.
Nếu $c$ và $d \notin (a, b)$ thì $c, d \in \{a, b\}$, mà $c \neq d$ nên $c = a$, $d = b$ hay $c = b$, $d = a$ mà điều này không xảy ra vì $f(a) = f(b)$ và $f(c) < f(d)$. Vậy ta có Định lý đúng.
Định lý 8 được chứng minh xong. $\square$

**Về ý nghĩa hình học của Định lý Rolle.** Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm thì $f'(c) = 0$, có nghĩa là tiếp tuyến của đồ thị tại $C(c, f(c))$ là song song với trục $Ox$ (nằm ngang). Như vậy, trên đồ thị của hàm $f$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$ sao cho $f(a) = f(b)$, đều có ít nhất một điểm $C(c, f(c))$ mà tại đó tiếp tuyến với đồ thị là song song với trục $Ox$ (như hình vẽ).

**Định lý 9** **(Định lý Lagrange, Định lý giá trị trung bình)** *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

*Chứng minh Định lý 9.* Xét hàm $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Ta có $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$ sao cho $h(a) = h(b) = 0$. Do đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$h'(c) = 0,$$

tức là

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

bởi vì $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Định lý 9 được chứng minh xong. $\square$

**Về ý nghĩa hình học của Định lý Lagrange.** Với $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, là hai điểm trên đồ thị cũng là hai đầu dây cung $AB$, công thức trong Định lý Lagrange được viết lại

$$\text{Hệ số góc của dây cung } AB = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Như vậy, trên đồ thị của hàm $f$ liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$, đều có ít nhất một điểm $C(c,f(c))$ mà tại đó tiếp tuyến với đồ thị là song song với dây cung $AB$ (như hình vẽ).

**Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy)** *Cho* $f$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và có đạo hàm trong khoảng* $(a,b)$ *sao cho* $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. *Khi đó, tồn tại* $c \in (a,b)$ *sao cho*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

*Chứng minh Định lý 10.*

Nếu $g(b)-g(a)=0$, thì dùng Định lý Rolle, ta có $c \in (a,b)$ sao cho $g'(c)=0$. Mâu thuẫn với điều $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Vậy $g(b)-g(a) \neq 0$.

Xét hàm $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Ta có $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$ sao cho $h(a)=h(b)=0$. Do đó, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$h'(c) = 0,$$

tức là

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0,$$

bởi vì $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$.

Định lý 10 được chứng minh xong. □

**Về ý nghĩa hình học của Định lý giá trị trung bình Cauchy.** Với $A_1(a,f(a))$, $B_1(b,f(b))$, là hai đầu dây cung $A_1B_1$ của đồ thị hàm $f$ và $A_2(a,g(a))$, $B_2(b,g(b))$, là hai đầu dây cung $A_2B_2$ của đồ thị hàm $g$ và công thức trong Định lý giá trị trung bình Cauchy được viết lại

$$\frac{\text{Hệ số góc của dây cung } A_1B_1}{\text{Hệ số góc của dây cung } A_2B_2} = \frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Như vậy, trên hai đồ thị của hàm $f$, $g$ liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$, đều có ít nhất hai điểm $C_1(c,f(c))$ và $C_2(c,g(c))$ lần lượt trên hai đồ thị (có cùng hoành độ $c$) mà hai tiếp tuyến với hai đồ thị tương ứng tại hai điểm $C_1(c,f(c))$ và $C_2(c,g(c))$ có tỉ số hai hệ số góc bằng tỉ số hai hệ số góc của hai dây cung tương ứng như công thức

$$\frac{\text{Hệ số góc của tiếp tuyến } C_1T_1}{\text{Hệ số góc của tiếp tuyến } C_2T_2} = \frac{\text{Hệ số góc của dây cung } A_1B_1}{\text{Hệ số góc của dây cung } A_2B_2}.$$

(như hình vẽ).

**Định lý 11 (Qui tắc L'Hopital)** *Cho* $f$, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm trong khoảng* $(a,b)$ *sao cho* $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, *trong đó*, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

*Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *và một trong hai trường hợp sau là đúng*:

(i) $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \lim\limits_{x\to a_+} g(x) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a_+} g(x) = -\infty$ hay $\lim\limits_{x\to a_+} g(x) = +\infty$;

*Khi đó, tồn tại* $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *và* $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Định lý vẫn đúng khi thay $a_+$ bởi $b_-$, $-\infty$, $+\infty$, $x_0 \in (a, b)$.

*Chứng minh Định lý 11.* Đặt $L = \lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**A1. Trường hợp**: $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$.

(i) Xét trường hợp: $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$, $-\infty < L < +\infty$.

Chọn $\varepsilon > 0$. Do $L = \lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, ta có $c \in (a, b)$, sao cho $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ta có $\forall x \in (a, c)$.

Với $x, y \in (a, c)$, $x < y$, theo Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy), ta có $t \in (x, y)$ sao cho

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Suy ra

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$, cho $x \to a_+$, ta có

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall y \in (a, c).$$

Vậy $\lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

(ii) Xét trường hợp: $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$, $L = +\infty$.

Cho $A \in \mathbb{R}$, chọn $r$, sao cho $A < r < L = +\infty$. Do $L = \lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} > r$, ta có $c \in (a, b)$, sao cho $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > r$, ta có $\forall x \in (a, c)$.

Với $x, y \in (a, c)$, $x < y$, theo Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy), ta có $t \in (x, y)$ sao cho

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} > r > A, \ \forall x, y \in (a, c), \ x < y.$$

Do $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$, cho $x \to a_+$, ta có

$$\frac{f(y)}{g(y)} \geq r > A, \ \forall y \in (a, c).$$

Vậy $\lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(iii) Xét trường hợp: $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$, $L = -\infty$.

Cho $A \in \mathbb{R}$, chọn $r$, sao cho $-\infty = L < r < A$. Do $L = \lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < r < A$, ta có $c \in (a, b)$, sao cho $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} < r$, ta có $\forall x \in (a, c)$.

Với $x, y \in (a, c)$, $x < y$, theo Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy), ta có $t \in (x, y)$ sao cho

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r < A, \ \forall x, y \in (a, c), \ x < y.$$

Do $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$, cho $x \to a_+$, ta có

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < A, \ \forall y \in (a, c).$$

Vậy $\lim\limits_{x\to a_+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

**A2. Trường hợp**: $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a_+}g(x)=+\infty$.

(i) Xét trường hợp: $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a_+}g(x)=+\infty$, $-\infty<L<+\infty$.

Chọn $\varepsilon>0$. Do $L=\lim\limits_{x\to a_+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, ta có $c\in(a,b)$, sao cho $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, ta có $\forall x\in(a,c)$.

Cho $y_0\in(a,c)$, do $\lim\limits_{x\to a_+}g(x)=+\infty$, ta có $c_1\in(a,y_0):g(x)>|g(y_0)|\,,\ \forall x\in(a,c_1)$.

Với $\forall x\in(a,c_1)$, theo Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy), ta có $t\in(x,y_0)$ sao cho

$$\frac{f(y_0)-f(x)}{g(y_0)-g(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)},$$

hay

$$\frac{g(x)-g(y_0)}{g(x)}\frac{f(y_0)-f(x)}{g(y_0)-g(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}\frac{g(x)-g(y_0)}{g(x)}.$$

hay

$$\frac{f(y_0)-f(x)}{-g(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}\left(1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right).$$

hay

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}\left(1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(y_0)}{g(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}+\left(1-\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)\frac{f(y_0)}{g(x)}.$$

hay

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| &\le \left|\frac{f'(t)}{g'(t)}-L\right|+\left|\left(1-\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)\frac{f(y_0)}{g(x)}\right|\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\left(1+L+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left|\frac{f(y_0)}{g(x)}\right|.\end{aligned}$$

Với $y_0\in(a,c)$, như trên, do $\lim\limits_{x\to a_+}\dfrac{f(y_0)}{g(x)}=0$, ta có $c_2\in(a,c_1):\left(1+L+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left|\dfrac{f(y_0)}{g(x)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall x\in(a,c_2)$.

Do đó, ta có

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ \forall x\in(a,c_2).$$

Vậy $\lim\limits_{x\to a_+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

(ii) Xét trường hợp: $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a_+}g(x)=+\infty$, $L=+\infty$.

Cho $A>0$, chọn $r$, sao cho $A<r<L=+\infty$. Do $L=\lim\limits_{x\to a_+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}>r$, ta có $c\in(a,b)$, sao cho $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}>2r$, ta có $\forall x\in(a,c)$.

Cho $y_0\in(a,c)$, do $\lim\limits_{x\to a_+}g(x)=+\infty$, ta có $c_1\in(a,y_0):g(x)>|g(y_0)|\,,\ \forall x\in(a,c_1)$.

Với $\forall x\in(a,c_1)$, theo Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy), ta có $t\in(x,y_0)$ sao cho

$$\frac{f(y_0)-f(x)}{g(y_0)-g(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)},$$

hay

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)}\left(1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(y_0)}{g(x)}\\ &> 2r\left(1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(y_0)}{g(x)}=2r+\frac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Với $y_0 \in (a,c)$, như trên, do $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)} = 0$, ta có $c_2 \in (a,c_1)$ : $\left|\dfrac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)}\right| < r$, $\forall x \in (a,c_2)$.

Do đó, ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 2r - \left|\frac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)}\right| > r > A,\ \forall x \in (a,c_2).$$

Vậy $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(iii) Xét trường hợp: $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a_+} g(x) = +\infty$, $L = -\infty$.

Cho $A > 0$, chọn $r$, sao cho $-\infty = L < r < -A$. Do $L = \lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, ta có $c \in (a,b)$, sao cho $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} < 2r$, ta có $\forall x \in (a,c)$.

Cho $y_0 \in (a,c)$, do $\lim\limits_{x\to a_+} g(x) = +\infty$, ta có $c_1 \in (a,y_0) : g(x) > |g(y_0)|\,,\ \forall x \in (a,c_1)$.

Với $\forall x \in (a,c_1)$, theo Định lý 10 (Định lý giá trị trung bình Cauchy), ta có $t \in (x,y_0)$ sao cho

$$\frac{f(y_0)-f(x)}{g(y_0)-g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

hay

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)}\left(1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(y_0)}{g(x)}\\ &< 2r\left(1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(y_0)}{g(x)} = 2r+\frac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Với $y_0 \in (a,c)$, như trên, do $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)} = 0$, ta có $c_2 \in (a,c_1)$ : $\left|\dfrac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)}\right| < |r|$, $\forall x \in (a,c_2)$.

Do đó, ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 2r + \left|\frac{f(y_0)-2rg(y_0)}{g(x)}\right| < 2r+|r| \le r < -A,\ \forall x \in (a,c_2).$$

Vậy $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Chứng minh tương tự chúng ta cũng chứng minh được cho các trường hợp sau

**A3. Trường hợp**: $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a_+} g(x) = -\infty$;

và các trường hợp khi thay $a_+$ bởi $b_-$, $-\infty$, $+\infty$, $x_0 \in (a,b)$.

Định lý 11 được chứng minh xong. □

## 6.2 Đạo hàm cấp cao

**Định nghĩa 7.** Cho $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$. Khi đó, hàm số

$$\begin{aligned} f' : (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f'(x)\end{aligned}$$

gọi là đạo hàm cấp một của $f$.

Nếu tồn tại $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{f'(y)-f'(x)}{y-x} = f''(x) \in \mathbb{R}$ thì ta nói $f$ có đạo hàm cấp hai tại $x$.

Giả sử $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a,b)$. Khi đó, hàm số

$$\begin{aligned} f'' : (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f''(x)\end{aligned}$$

gọi là đạo hàm cấp hai của $f$, tức là $f'' = (f')'$.

Định nghĩa tương tự:

$f''' = (f'')' =$ đạo hàm cấp ba của $f$,
$f^{(4)} = (f^{(3)})' =$ đạo hàm cấp ba của $f$,
$\vdots$
$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' =$ đạo hàm cấp $n$ của $f$.

Nếu hàm số $f^{(n)}$ (đạo hàm cấp $n$ của $f$) liên tục trong khoảng $(a, b)$, ta nói $f$ thuộc lớp $C^n$ trong khoảng $(a, b)$. Ta ký hiệu $f \in C^n(a, b)$.

Ta qui ước $f^{(0)} = f$.

**Ví dụ 4**. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \le 0, \\ x^3 + x, & x > 0. \end{cases}$

Theo ví dụ trên ta có $f$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và ta có

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 3x^2 + 1, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 0, \\ 3x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dễ dàng tính được $f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 6x, & x > 0. \end{cases}$

Ta kiểm tra lại không tồn tại $f''(0)$.

Thật vậy, tại $x = 0$, $f'(0) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{6x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0_+} \left(6 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ : $f'$ không tồn tại có đạo hàm bên phải tại $x = 0$, dẫn đến không tồn tại $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$.

## 6.3 Công thức khai triển Taylor hữu hạn

**Định lý 11** (**Công thức khai triển Taylor hữu hạn với phần dư Lagrange**). *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trong khoảng $(a, b)$. Khi đó, với mọi $x$, $x_0 \in (a, b)$, ta có $\theta \in (0, 1)$ sao cho*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

**Chú thích.**

(i) $\min\{x_0, x\} < c = x_0 + \theta(x - x_0) = \theta x + (1 - \theta)x_0 < \max\{x_0, x\}$.

(ii) Số hạng $R_n(x, x_0, f) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$ gọi là *phần dư Lagrange trong công thức khai triển Taylor hữu hạn*.

(iii) Đa thức $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ gọi là *đa thức Taylor*.

*Chứng minh Định lý 11.* Đặt $G(x) = (x - x_0)^{n+1}$ và $F(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, giả sử $x_0 < x$, áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy cho hai hàm $F$, $G$, trong khoảng $(x_0, x)$, ta có $x_1 \in (x_0, x)$ sao cho

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}.$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy cho hai hàm $F'$, $G'$, trong khoảng $(x_1, x)$, ta có $x_2 \in (x_0, x_1)$ sao cho

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1) - F'(x_0)}{G'(x_1) - G'(x_0)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)}.$$

Tiếp tục quá trình trên, vẫn áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy cho hai hàm $F^{(n)}$, $G^{(n)}$, trong khoảng $(x_0, x_n)$, ta có $x_{n+1} \in (x_0, x_n)$ sao cho

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)} = \frac{F^{(n)}(x_n) - F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(x_n) - G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Chú ý $x_{n+1} \in (x_0, x_n) \subset (x_0, x_{n-1}) \subset \cdots \subset (x_0, x)$, ta viết $x_{n+1} = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Định lý 11 được chứng minh xong. $\square$

**Định lý** 12 (**Công thức khai triển Taylor hữu hạn với phần dư Peano**). *Cho* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm đến cấp* $n - 1$ *trong khoảng* $(a, b)$*. Cho* $x_0 \in (a, b)$ *sao cho tồn tại* $f^{(n)}(x_0)$*. Khi đó ta có*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x), \text{ khi } (x - x_0) \text{ đủ bé,}$$

*với* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

**Chú thích.** Số hạng $R_n(x)$ gọi là *phần dư Peano trong công thức khai triển Taylor hữu hạn.* Ta còn viết $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ là *vô cùng bé bậc* $n$ khi $x \to x_0$.

Vậy, ta viết lại Công thức khai triển Taylor hữu hạn với phần dư Peano như sau

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right), \text{ khi } (x - x_0) \text{ đủ bé.}$$

*Chứng minh Định lý 12.* Đặt $R(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, ta có

$$\begin{aligned} R(x_0) &= R'(x_0) = R''(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0, \\ R^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

Do $f^{(n)}(x_0)$ tồn tại, nên $f^{(n-1)}$ khả vi tại $x_0$, do đó $R^{(n-1)}(x)$ cũng khả vi tại $x_0$, do đó

$$R^{(n-1)}(x) = R^{(n-1)}(x) - R^{(n-1)}(x_0) = (x - x_0)R^{(n)}(x_0) + o\left((x - x_0)\right) = o\left((x - x_0)\right).$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình Largrange cho hàm $R^{(n-2)}(x)$, ta có $x_2 \in (\min\{x, x_0\},\ \max\{x, x_0\})$, sao cho

$$\begin{aligned} R^{(n-2)}(x) &= R^{(n-2)}(x) - R^{(n-2)}(x_0) = (x - x_0)R^{(n-1)}(x_2) \\ &= (x - x_0)o\left((x_2 - x_0)\right) = o\left((x - x_0)^2\right), \end{aligned}$$

bởi vì khi $x \to x_0$, từ $x_2 \in (\min\{x, x_0\},\ \max\{x, x_0\})$, dẫn đến $x_2 \to x_0$ và do đó

$$\begin{aligned} \frac{|(x - x_0)o\left((x_2 - x_0)\right)|}{(x - x_0)^2} &= \left|\frac{o\left((x_2 - x_0)\right)}{x_2 - x_0}\right| \left|\frac{x_2 - x_0}{x - x_0}\right| \le \left|\frac{o\left((x_2 - x_0)\right)}{x_2 - x_0}\right| \to 0, \\ \text{khi } x &\to x_0, \end{aligned}$$

vậy

$$R^{(n-2)}(x) = o\left((x - x_0)^2\right), \text{ khi } x \to x_0.$$

Bằng qui nạp giả sử ta có

$$R^{(n-k)}(x) = o\left((x - x_0)^k\right), \text{ khi } x \to x_0.$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình Largrange cho hàm $R^{(n-k-1)}(x)$, ta có $x_{k+1} \in (\min\{x_k, x_0\},\ \max\{x_k, x_0\})$, sao cho

$$\begin{aligned} R^{(n-k-1)}(x) &= R^{(n-k-1)}(x) - R^{(n-k-1)}(x_0) = (x - x_0)R^{(n-k)}(x_{k+1}) \\ &= (x - x_0)o\left((x_{k+1} - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{k+1}\right), \text{ khi } x \to x_0. \end{aligned}$$

Với $k = n - 1$, ta có

$$R(x) = o\left((x - x_0)^n\right), \text{ khi } x \to x_0.$$

Định lý 12 được chứng minh xong. $\square$

**Chú thích về vô cùng bé.**
**Định nghĩa 8.**

(i) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, ta nói $f(x)$ là *vô cùng bé* (VCB) khi $x \to x_0$.

(ii) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ta nói $f(x)$ là *VCB cấp cao hơn VCB $g(x)$ khi $x \to x_0$*. Khi đó ta viết $f(x) = o\left(g(x)\right)$ khi $x \to x_0$.

- Nếu $f(x) = o\left((g(x))^n\right)$, khi $x \to x_0$, ta nói $f(x)$ là *VCB cấp $n$ so với VCB $g(x)$ khi $x \to x_0$*.

- Nếu $f(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$, khi $x \to x_0$, ta nói $f(x)$ là *VCB cấp $n$ so với VCB $(x - x_0)$ khi $x \to x_0$*.

## 6.4 Công thức khai triển Maclaurin hữu hạn

Nếu thay $x_0 = 0$ trong công thức khai triển Taylor hữu hạn ta thu được công thức khai triển Maclaurin hữu hạn sau

**Định lý 13** (**Công thức khai triển Maclaurin hữu hạn với phần dư Lagrange**). *Giả sử $0 \in (a, b)$, cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trong khoảng $(a, b)$. Khi đó, với mọi $x \in (a, b)$, ta có $\theta \in (0, 1)$ sao cho*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Số hạng $R_n(x, f) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ gọi là *phần dư Lagrange trong công thức khai triển Maclaurin.*

**Định lý 14** (**Công thức khai triển Maclaurin hữu hạn với phần dư Peano**). *Giả sử $0 \in (a, b)$, cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp $n - 1$ trong khoảng $(a, b)$ sao cho tồn tại $f^{(n)}(x_0)$. Khi đó ta có*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \text{ khi } x \to 0,$$

*trong đó* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0$.

Số hạng $R_n(x)$ gọi là *phần dư Peano trong công thức khai triển Maclaurin.* Ta còn viết $R_n(x) = o(x^n)$ và gọi nó là vô cùng bé bậc $n$ khi $x \to 0$.

Vậy, ta viết lại Công thức khai triển Maclaurin hữu hạn với phần dư Peano như sau

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \text{ khi } x \to 0.$$

**Chú thích**. Công thức khai triển Taylor hữu hạn ngoài các phần dư dạng Lagrange và dạng Peano, còn có *phần dư dạng tích phân* (Phần này sẽ đọc sau khi đọc chương tích phân):

**Định lý 15** (**Công thức khai triển Taylor hữu hạn với phần dư dạng tích phân**). *Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trong khoảng $(a, b)$. Khi đó, với mọi $x$, $x_0 \in (a, b)$, ta có*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x, x_0, f),$$

*trong đó số hạng*

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0, f) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\,d\theta \end{aligned}$$

gọi là *phần dư dạng tích phân trong công thức khai triển Taylor hữu hạn.*

**Định lý 16** (**Công thức khai triển Maclaurin hữu hạn với phần dư dạng tích phân**). *Giả sử* $0 \in (a,b)$, *cho* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm đến cấp* $n+1$ *trong khoảng* $(a,b)$. *Khi đó, với mọi* $x \in (a,b)$, *ta có*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x, f),$$

*trong đó số hạng*

$$R_n(x,f) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)\,d\theta,$$

gọi là *phần dư dạng tích phân trong công thức khai triển Maclaurin hữu hạn.*

## 6.5 Ứng dụng của công thức Taylor để tính gần đúng

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \text{ khi } (x-x_0) \text{ bé.}$$

Đặc biệt với $n = 1$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \text{ khi } (x-x_0) \text{ bé.}$$

## 6.6 Các ứng dụng của đạo hàm vào khảo sát hàm số

### 6.6.1 Tính đơn điệu của hàm số

**Định lý 17.** (Tính đơn điệu của hàm số). *Cho hàm số* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm trong khoảng* $(a,b)$. *Khi đó*

(i) $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b) \Longleftrightarrow f$ *là hàm hằng trên* $(a,b)$;
(ii) $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ *là hàm tăng trên* $(a,b)$;
(iii) $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ *là hàm giảm trên* $(a,b)$;
(iv) $f$ *là hàm không giảm trên* $(a,b) \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$;
(v) $f$ *là hàm không tăng trên* $(a,b) \Longleftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$.

*Chứng minh Định lý 17.* Sử dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange.

**Chú thích.** Phần đảo của (ii) và (iii) không đúng, ví dụ hàm $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ tăng trên $\mathbb{R}$, mà ta có $f'(0) = 0$.

### 6.6.2 Điều kiện đủ để hàm số cực trị

**Định lý 18.** (Điều kiện đủ để hàm số cực trị). *Cho hàm số* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $(a,b)$. *Cho* $x_0 \in (a,b)$ *sao cho* $f$ *có đạo hàm trong hai khoảng* $(a,x_0)$, $(x_0,b)$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $f'(x) < 0, \forall x \in (a,x_0)$ *và* $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0,b)$, *thì* $f$ *đạt cực tiểu tại* $x_0$;
(ii) *Nếu* $f'(x) > 0, \forall x \in (a,x_0)$ *và* $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0,b)$, *thì* $f$ *đạt cực đại tại* $x_0$.

*Chứng minh Định lý 18.* Sử dụng Định lý 17. □

**Chú thích.** Định lý 18 cho thấy rằng đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi $x$ vượt qua $x_0$ thì $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$.

Và, đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi $x$ vượt qua $x_0$ thì $f$ đạt cực đại tại $x_0$.

Có thể kiểm tra lại rằng thì $f$ không đạt cực trị tại $x_0$ nếu đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu khi $x$ vượt qua $x_0$, tức là $f'(x)f'(y) > 0$, $\forall (x,y) \in (x, x_0) \times (x_0, b)$.

**Định lý 19.** (Điều kiện đủ để hàm số cực trị). *Cho hàm số $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$. Giả sử $x_0 \in (a,b)$ sao cho $f'(x_0) = 0$.*

*Giả sử tồn tại $f''(x_0) \neq 0$. Khi đó $f$ đạt cực trị tại $x_0$.*

(i) *Nếu $f''(x_0) > 0$, thì $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$;*

(ii) *Nếu $f''(x_0) < 0$, thì $f$ đạt cực đại tại $x_0$.*

*Chứng minh Định lý 19.*

(i) $f''(x_0) > 0$. Sử dụng công thức khai triển Taylor hữu hạn với phần dư Peano với $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x) \\ &= (x - x_0)^2 \left[\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2}\right], \end{aligned}$$

với $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

Do $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{1}{2}f''(x_0) + \dfrac{R_2(x)}{(x - x_0)^2}\right] = \dfrac{1}{2}f''(x_0) > 0$, tồn tại $\delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ và $\dfrac{1}{2}f''(x_0) + \dfrac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Do đó, $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$.

(ii) $f''(x_0) < 0$. Lý luận tương tự, ta cũng có thì $f$ đạt cực đại tại $x_0$.

Định lý 19 được chứng minh xong. □

**Định lý 20.** (Điều kiện đủ để hàm số cực trị). *Cho hàm số $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp $n-1$ trong khoảng $(a,b)$.*

*Cho $x_0 \in (a,b)$ sao cho tồn tại $f^{(n)}(x_0)$ và thỏa $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(n)}(x_0)$.*

(i) *Nếu $n$ chẵn, thì $f$ đạt cực trị tại $x_0$ :* $\begin{cases} f \text{ đạt cực tiểu tại } x_0, & \text{nếu } f^{(n)}(x_0) > 0, \\ f \text{ đạt cực đại tại } x_0, & \text{nếu } f^{(n)}(x_0) < 0, \end{cases}$

(ii) *Nếu $n$ lẻ, thì $f$ không đạt cực trị tại $x_0$.*

*Chứng minh Định lý 20.*

Sử dụng công thức khai triển Taylor hữu hạn với phần dư Peano, ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x) \\ &= (x - x_0)^n \left[\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}\right], \end{aligned}$$

với $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

(i) Với $n$ chẵn, lý luận tương tự như trên với $n = 2$.

(ii) Với $n$ lẻ, số hạng $\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$ giữ một dấu nhất định (cùng dấu với $f^{(n)}(x_0)$ ) trong một khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ (ngoại trừ điểm $x_0$). Mà $(x - x_0)^n$ và $f(x) - f(x_0)$ cũng đổi dấu khi $x$ vượt qua $x_0$, do đó $f$ không đạt cực trị tại $x_0$.

Định lý 20 được chứng minh xong. □

### 6.6.3 Hàm lồi, điểm uốn

**Định nghĩa 9.** Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Ta nói

(i) $f$ là *hàm lồi trên khoảng* $(a, b)$ nếu
$[\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall \lambda \in [0, 1] \Longrightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)]$;

(ii) $f$ là *hàm lồi ngặt trên khoảng* $(a, b)$ nếu
$[\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in (0, 1) \Longrightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)]$;

(iii) $f$ là *hàm lõm trên khoảng* $(a, b)$ nếu $-f$ là hàm lồi trên khoảng $(a, b)$;

(iv) $f$ là *hàm lõm ngặt trên khoảng* $(a, b)$ nếu $-f$ là hàm lồi ngặt trên khoảng $(a, b)$;

(v) Đồ thị của hàm số lồi gọi là *đường cong lõm*;

(vi) Đồ thị của hàm số lõm gọi là *đường cong lồi.*

**Ý nghĩa hình học của hàm lồi**. Cho $f$ là hàm lồi trên khoảng $(a, b)$ và $(L)$ là đồ thị của nó. Xét hai điểm $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2)) \in (L)$, với $x_1 < x_2$.

Xét cát tuyến $M_1M_2$ là đường thẳng có phương trình

$$y = Y(x) = f(x_2) + \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right)(x - x_2).$$

Lấy $x_0 \in [x_1, x_2]$, ta có $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, với $\lambda = \dfrac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$. Khi đó, do $f$ là hàm lồi ta có

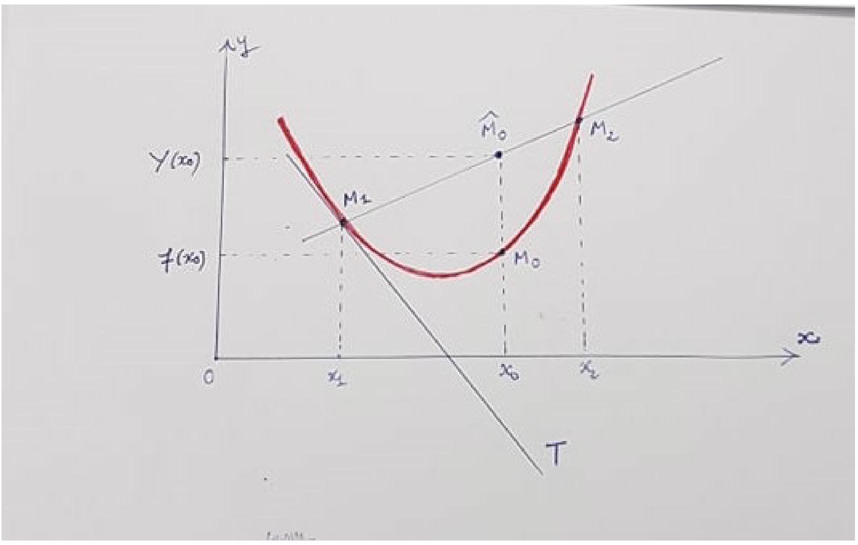
$$f(x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) &= f(x_2) + \lambda\left(f(x_1) - f(x_2)\right)\\
&= f(x_2) + \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}\left(f(x_1) - f(x_2)\right)\\
&= f(x_2) + \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right)(x_0 - x_2) = Y(x_0).
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x_0) \leq Y(x_0)$, do đó điểm $M_0(x_0, f(x_0)) \in (L)$ nằm phía dưới điểm $\hat{M}_0(x_0, Y(x_0)) \in M_1M_2$, tức là phần đồ thị $\overset{\frown}{M_1M_2}$ của $(L)$ với $x_1 \leq x \leq x_2$ luôn nằm phía dưới cát tuyến $M_1M_2$. Điều này có nghĩa là mọi dây cung đều nằm trên cung đồ thị mà nó chắn.

Mặt khác, giả sử $(L)$ là đồ thị của một hàm $f$ có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$. Ta cố định $M_1(x_1, f(x_1)) \in (L)$, cho $M_2(x_2, f(x_2)) \in (L)$, chạy trên đường cong $(L)$ tới điểm $M_1$, khi đó cát tuyến $M_1M_2$ tiến dần đến một vị trí giới hạn $M_1T$ là tiếp tuyến của đường $(L)$ tại $M_1$. Tiếp tuyến $M_1T$ này nằm phía dưới của đường $(L)$. Điều này có nghĩa là mọi tiếp tuyến của đồ thị $(L)$ đều nằm phía dưới $(L)$.



**Định lý 21.** *Cho hàm số* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *có đạo hàm đến cấp hai trong khoảng* $(a,b)$. *Khi đó,*

$$f \text{ là hàm lồi trên khoảng } (a,b) \Longleftrightarrow f''(x)\geq 0, \forall x\in(a,b).$$

*Chứng minh Định lý 21.*

*Chứng minh phần thuận* $\Longrightarrow$: Cho $f$ là hàm lồi trên khoảng $(a,b)$ ta có

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in(a,b),\ \forall\lambda\in[0,1]. \tag{*}$$

Xét $x_1<x_2$, $x\in[x_1,x_2]$, $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $\lambda=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}\in[0,1]$.

Từ (*), ta suy ra

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_1) &\leq (1-\lambda)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)=(1-\frac{x_2-x}{x_2-x_1})\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\\ &= \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left(f(x_2)-f(x_1)\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{a1}$$

Từ (*), ta cũng có

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_2) &\leq \lambda\left(f(x_1)-f(x_2)\right)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\\ &= \frac{x-x_2}{x_2-x_1}\left(f(x_2)-f(x_1)\right) \end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{a2}$$

Từ (a1) và (a2), ta có

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}. \tag{a3}$$

Trong (a3), ở vế trái cho $x\to x_1^+$, sau đó ở vế phải cho $x\to x_2^-$, ta thu được

$$f'(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2).$$

Do $f'$ không giảm trên $(a,b)$, theo Định lý 17 (iv), ta có $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b)$.

*Chứng minh phần đảo* $\Longleftarrow$: Giả sử $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b)$.

Cho $x_1<x_2$, $x\in(x_1,x_2)$, theo Định lý giá trị trung bình Largrange, tồn tại $c_1\in(x_1,x)$, $c_2\in(x,x_2)$ sao cho

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} &= f'(c_1),\\ \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} &= f'(c_2). \end{aligned}$$

Do $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b)$ nên $f'$ không giảm trên $(a,b)$, ta có $f'(c_1)\leq f'(c_2)$.

Do đó

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

Điều này đúng với mọi $x\in x\in(x_1,x_2)$. Với mọi $\lambda\in(0,1)$, lấy $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, ta có $\lambda=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$, $1-\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, thay vào bất đẳng thức này, sau khi biến đổi ta thu được

$$f(x)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

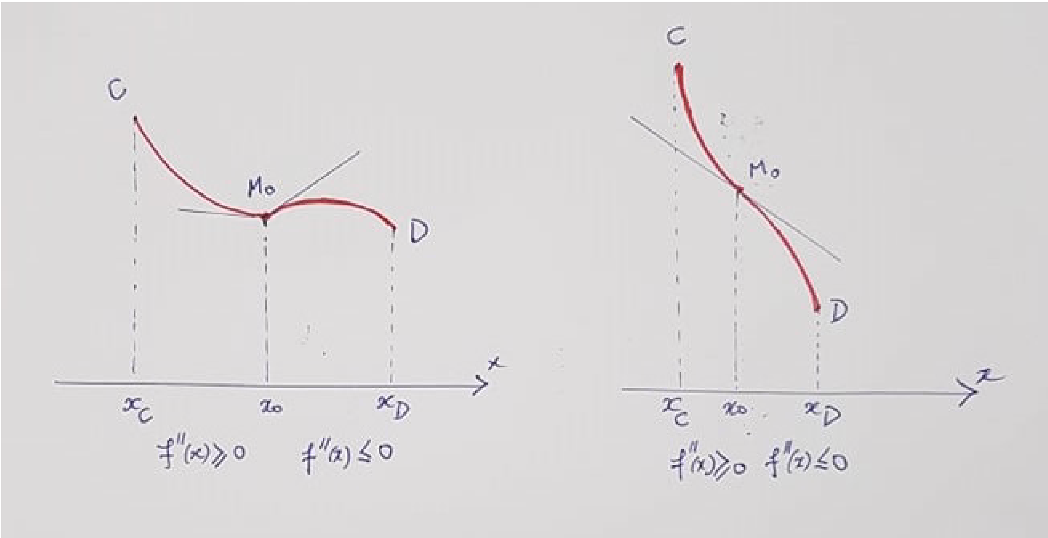
Định lý 21 được chứng minh xong. □

Tương tự, ta cũng có Định lý sau.

**Định lý 22.** *Cho hàm số* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm đến cấp hai trong khoảng* $(a, b)$. *Khi đó,*

$$f \text{ là hàm lõm trên khoảng } (a,b) \Longleftrightarrow f''(x) \le 0,\ \forall x \in (a, b).$$

**Định nghĩa 10.** Cho $(L)$ là đồ thị của hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và điểm $M_0(x_0, f(x_0)) \in (L)$. Giả sử có một cung $\overset{\frown}{CD}$ nằm trên $(L)$ với $x_C < x_0 < x_D$ mà $\overset{\frown}{CD}$ được chia thành hai cung $\overset{\frown}{CM_0}$, $\overset{\frown}{M_0D}$ sao cho một cung là đường cong lồi, một cung còn lại là đường cong lõm, khi đó ta nói $M_0(x_0, f(x_0))$ là *điểm uốn* của $(L)$.




**Định lý 23.** *Cho* $x_0 \in (a, b)$. *Cho hàm số* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $(a, b)$ *và có đạo hàm đến cấp hai trong hai khoảng* $(a, x_0)$, $(x_0, b)$.

*Giả sử rằng*

$$f''(x) < 0 < f''(y) \text{ hay } f''(x) > 0 > f''(y),\ \forall (x, y) \in (a, x_0) \times (x_0, b).$$

(*tức là* $f''(x)$ *đổi dấu khi* $x$ *vượt qua* $x_0$).

*Khi đó,* $M_0(x_0, f(x_0))$ *là điểm uốn của đồ thị của hàm số* $f$.

**Định lý 24.** *Cho hàm số* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm đến cấp hai trong hai khoảng* $(a, b)$. *Nếu* $x_0 \in (a, b)$ *là hoành độ điểm uốn thì* $f''(x_0) = 0$.

*Chứng minh Định lý 24.* Từ định nghĩa, giả sử $\overset{\frown}{CM_0}$ là đường cong lồi, $\overset{\frown}{M_0D}$ là đường cong lõm. Khi đó

$$f''(x) < 0 < f''(y),\ \forall (x, y) \in (x_C, x_0) \times (x_0, x_D).$$

Cho $x \to x_0^-$ và $y \to x_0^+$, khi đó $f''(x_0) \le 0 \le f''(x_0)$. Vậy $f''(x_0) = 0$. Định lý 23 được chứng minh xong. □

**Chú thích.** Cho $f$ là hàm lồi trên khoảng $(a, b)$. Khi đó, tập $C[f] = \{(x, y) : y \ge f(x),\ x \in (a, b)\}$. Khi đó, ta có $C[f]$ là tập lồi, nghĩa là, mọi đoạn thẳng nối hai điểm trong $C[f]$ cũng nằm trong $C[f]$.

Lấy $A(\alpha, y_A)$, $B(\beta, y_B) \in C[f]$, ta chứng minh đoạn thẳng $AB \subset C[f]$.

Thật vậy, cho $M(x, y) \in AB$, ta chứng minh rằng $y \ge f(x)$.

Do $\alpha \le x \le \beta$, ta có $x = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta$, $\lambda = \dfrac{\beta - x}{\beta - \alpha} \in [0, 1]$. Do $f$ là hàm lồi trên khoảng $(a, b)$, và $y_A \ge f(\alpha)$, $y_B \ge f(\beta)$, ta có

$$f(x) \le \lambda f(\alpha) + (1 - \lambda)f(\beta) \le \lambda y_A + (1 - \lambda)y_B.$$

Do $M(x, y) \in AB$, ta có $y = y_B + (x - x_B)\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = y_B + (x - \beta)\dfrac{y_A - y_B}{\alpha - \beta} = y_B + \lambda(y_A - y_B) = \lambda y_A + (1 - \lambda)y_B$.

Vậy $y \ge f(x)$, tức là $M(x, y) \in AB$. Điều này dẫn tới $AB \subset C[f]$. □

## 6.7 Bài tập bổ sung

**1.** Các bài tập bổ sung về phép tính giới hạn (Có thể chứng minh trực tiếp hoặc dùng qui tắc L'Hopital tùy bài)

**1.1. Hàm lũy thừa**

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty, \forall\alpha > 0;$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \forall n \in \mathbb{N};$

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 2n, & n \in \mathbb{N}, \\ -\infty, & \alpha = 2n+1, & n \in \mathbb{N}; \end{cases}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha = 0, \forall\alpha > 0;$

(v) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{-\alpha} = +\infty, \forall\alpha > 0;$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0_-} x^{-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 2n, & n \in \mathbb{N}, \\ -\infty, & \alpha = 2n+1, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

**1.2. Hàm mũ**.

**(i*)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty;$

**(ii*)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty,$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \forall\alpha > 0,$

(iiia) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty, \forall\alpha > 0, \forall\beta > 0;$

**(iv*)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0;$

**(v*)** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = 0;$

(vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0, \forall\alpha > 0;$

(via) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \forall\alpha > 0, \forall\beta > 0;$

**(vii*)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

*Hướng dẫn* (iii): Dùng **(ii*),** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^\alpha} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{x/\alpha}}{x/\alpha}\right)^\alpha = \dfrac{1}{\alpha^\alpha} \lim\limits_{y=x/\alpha\to+\infty} \left(\dfrac{e^y}{y}\right)^\alpha = +\infty.$

*Hướng dẫn* (iiia): Dùng **(ii*),** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{\beta x/\alpha}}{\beta x/\alpha}\right)^\alpha = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \lim\limits_{y=\beta x/\alpha\to+\infty} \left(\dfrac{e^y}{y}\right)^\alpha = +\infty.$

*Hướng dẫn* (vi): Dùng (iii)**,** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}} = 0.$

*Hướng dẫn* (via): Dùng (iiia)**,** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha}} = 0.$

**1.3. Hàm logarit**.

**(i*)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty;$

**(ii*)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0;$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \forall\alpha > 0;$

(iiia) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \forall\alpha > 0, \forall\beta > 0;$

**(iv*)** $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty;$

**(v*)** $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x = 0;$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha \ln x = 0, \forall\alpha > 0;$

(via) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha\,(-\ln x)^\beta = 0,\ \forall\alpha>0,\ \forall\beta>0;$

**(vii*)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

*Hướng dẫn* (iii): Dùng **(ii*),** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{y=x^\alpha\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y} = 0.$

*Hướng dẫn* (iiia): Dùng **(ii*),** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x^{\alpha/\beta}}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim\limits_{y=x^{\alpha/\beta}\to+\infty}\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)^\beta =$ 0.

*Hướng dẫn* (vi): Dùng **(v*),** $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha\ln x = \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha \ln x^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{y=x^\alpha\to 0_+} y\ln y = 0.$

*Hướng dẫn* (via): Dùng **(v*),** $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha\,(-\ln x)^\beta = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim\limits_{x\to 0_+}\left(-x^{\alpha/\beta}\ln x^{\alpha/\beta}\right)^\beta = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim\limits_{y=x^{\alpha/\beta}\to 0_+}(-y\ln y)^\beta$ 0.

**2**. Tính các đạo hàm của các hàm số sau

(i) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + x, & x<1,\\ x - 3(x-1)^2, & x\ge 1;\end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ x, & x\ge 1;\end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^3-2x, & x<1,\\ x^2-x-1, & 1\le x<2,\\ (x-2)^3+3x-5, & x\ge 2;\end{cases}$

(iv) $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha$ là hằng số thực;

(v) $f(x) = |x|^{\alpha-1}x$, $\alpha$ là hằng số thực;

(vi) $f(x) = |x|^\alpha \sin x$, $\alpha$ là hằng số thực;

(vii) $f(x) = |x|^{\alpha(x)}$, $\alpha$ là hàm số có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$, $\alpha(0)>1$, $\alpha(\pm1)>0$;

(viii) $f(x) = (u(x))^{v(x)}$, $u, v$ là hai hàm số có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$; sao cho $0<u(x)\ne 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(ix) $f(x) = |x|^3$, tính $f'(x)$, $f''(x)$ tại mọi $x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f'''(0)$ không tồn tại.

*Hướng dẫn Bài 2* (iv): $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha$ là hằng số thực.

(j) $\alpha>1$ :

$*$ $x>0$ : $f(x) = |x|^\alpha = x^\alpha$ có đạo hàm là $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha\,|x|^{\alpha-2}x$;

$*$ $x<0$ : $f(x) = |x|^\alpha = (-x)^\alpha$ có đạo hàm được tính theo công thức đạo hàm của hàm hợp là $f'(x) = \alpha(-x)^{\alpha-1}(-x)' = -\alpha(-x)^{\alpha-1} = \alpha\,|x|^{\alpha-2}x$;

$*$ $x=0$ : $f(0)=0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|^\alpha}{x}$, do đó $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = |x|^{\alpha-1}\to 0$, khi $x\to 0$. Vậy tồn tại $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$

Cuối cùng với $\alpha>1$ ta có

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha\,|x|^{\alpha-2}x, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(jj) $\alpha=1$ : $f'(x) = \begin{cases} -1, & x<0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ và không tồn tại $f'(0)$.

(jjj) $0<\alpha<1$ : $f'(x) = \alpha\,|x|^{\alpha-2}x$, $x\ne 0$, và không tồn tại $f'(0)$.

(jv) $\alpha=0$ : $f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ : $f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(v) $\alpha<0$ : Hàm $f$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đạo hàm tại mọi $x\ne 0$, và $f'(x) = \alpha\,|x|^{\alpha-2}x$, $\forall x\ne 0$.

*Hướng dẫn Bài 2* (v): $f(x) = |x|^{\alpha-1}x$, $\alpha$ là hằng số thực.

(j) $\alpha>1$ :

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha\,|x|^{\alpha-1}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(jj) $\alpha=1$ : $f(x)=x$, $f'(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(jjj) $0<\alpha<1$ : $f'(x) = \alpha\,|x|^{\alpha-1}$, $x\ne 0$, và không tồn tại $f'(0)$.

(jv) $\alpha = 0 : f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Hàm $f$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đạo hàm $f'(x) = 0$ tại mọi $x \neq 0$.

(v) $\alpha < 0$ : Hàm $f$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đạo hàm tại mọi $x \neq 0$, và $f'(x) = \alpha\,|x|^{\alpha-1}$, $\forall x \neq 0$.

*Hướng dẫn Bài 2* (vi): $f(x) = |x|^{\alpha} \sin x$, $\alpha$ là hằng số thực.

(j) $\alpha > 0$ :

$*$ $x > 0 : f(x) = |x|^{\alpha} \sin x = x^{\alpha} \sin x$ có đạo hàm là $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin x + x^{\alpha} \cos x = \alpha\,|x|^{\alpha-2} x \sin x + |x|^{\alpha} \cos x$;

$*$ $x < 0 : f(x) = |x|^{\alpha} \sin x = (-x)^{\alpha} \sin x$ có đạo hàm được tính theo công thức đạo hàm của hàm hợp là

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(-x)^{\alpha-1}(-x)' \sin x + (-x)^{\alpha} \cos x = -\alpha(-x)^{\alpha-1} \sin x + (-x)^{\alpha} \cos x \\ &= \alpha\,|x|^{\alpha-2} x \sin x + |x|^{\alpha} \cos x; \end{aligned}$$

$*$ $x = 0 : f(0) = 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|^{\alpha} \sin x}{x} = |x|^{\alpha} \dfrac{\sin x}{x} \to 0$, khi $x \to 0$. Vậy tồn tại $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Cuối cùng với $\alpha > 0$ ta có

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha\,|x|^{\alpha-2} x \sin x + |x|^{\alpha} \cos x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(jj) $\alpha = 0 : f'(x) = \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(jjj) $\alpha < 0 : f'(x) = \alpha\,|x|^{\alpha-2} x \sin x + |x|^{\alpha} \cos x$, $x \neq 0$. Cũng chú ý là f không xác định tại $x = 0$ và do đó không tồn tại $f'(0)$.

*Hướng dẫn Bài 2* (vii): $f(x) = |x|^{\alpha(x)}$, $\alpha$ là hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$, $\alpha(0) > 1$, $\alpha(\pm 1) > 0$.

Tại $0 \neq x \neq \pm 1$ :

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \alpha(x) \ln |x|, \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \alpha'(x) \ln |x| + \frac{\alpha(x)}{x}, \ 0 \neq x \neq \pm 1; \\ f'(x) &= |x|^{\alpha(x)} \left( \alpha'(x) \ln |x| + \frac{\alpha(x)}{x} \right), \ 0 \neq x \neq \pm 1; \end{aligned}$$

Tại $x = 1$ : Giả sử $\alpha(1) > 0$, $f(1) = 1$, xét $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{|x|^{\alpha(x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{\alpha(x) \ln|x|} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{\alpha(x) \ln x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{y = x-1 \to 0} \frac{e^{\alpha(1+y) \ln(1+y)} - 1}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha(1+y) \ln(1+y)} - 1}{\alpha(1+y) \ln(1+y)} \frac{\alpha(1+y) \ln(1+y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha(1+y) \ln(1+y)} - 1}{\alpha(1+y) \ln(1+y)} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \lim_{y\to 0} \alpha(1+y) = \alpha(1). \end{aligned}$$

Vậy $f'(1) = \alpha(1)$.

Tại $x=-1$ : Giả sử $\alpha(-1)>0,\ f(-1)=1$, xét $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to-1}\frac{|x|^{\alpha(x)}-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{\alpha(x)\ln|x|}-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{\alpha(x)\ln(-x)}-1}{x+1}\\
&= \lim_{y=x+1\to0}\frac{e^{\alpha(y-1)\ln(1-y)}-1}{y}\\
&= \lim_{y\to0}\frac{e^{\alpha(y-1)\ln(1-y)}-1}{\alpha(y-1)\ln(1-y)}\frac{\alpha(y-1)\ln(1-y)}{y}\\
&= \lim_{y\to0}\frac{e^{\alpha(y-1)\ln(1-y)}-1}{\alpha(y-1)\ln(1-y)}\lim_{y\to0}\frac{\ln(1-y)}{y}\lim_{y\to0}\alpha(y-1)=-\alpha(-1).
\end{aligned}$$

Vậy $f'(1)=-\alpha(-1)$.

Tại $x=0$ : Giả sử $\alpha(0)>1,\ f(0)=0$, xét $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^{\alpha(x)}}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0_+}\frac{|x|^{\alpha(x)}}{x}=\lim_{x\to0_+}e^{(\alpha(x)-1)\ln x}=0,\\
\lim_{x\to0_-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0_-}\frac{(-x)^{\alpha(x)}}{x}=\lim_{x\to0_-}e^{(\alpha(x)-1)\ln(-x)}=0,\\
f'(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} |x|^{\alpha(x)}\left(\alpha'(x)\ln|x|+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right), & 0\neq x\neq\pm1,\\ 0, & x=0,\\ \alpha(1), & x=1,\\ -\alpha(-1), & x=-1\end{cases}\\
&= \begin{cases} |x|^{\alpha(x)}\left(\alpha'(x)\ln|x|+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

*Hướng dẫn Bài 2* (viii):

$$\begin{aligned}
f(x) &= (u(x))^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.\\
x\overset{u}{\longmapsto}u(x)\overset{\ln u}{\longmapsto}\ln u(x) &: \text{có đạo hàm tại mọi } x\in\mathbb{R},\\
x &\longmapsto w(x)=v(x)\ln u(x): \text{có đạo hàm tại mọi } x\in\mathbb{R},\\
f'(x) &= w'(x)e^{w(x)}\\
&= \left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)(u(x))^{v(x)}.
\end{aligned}$$

*Hướng dẫn Bài 2* (ix): $f(x)=|x|^3$. $f'(x)=3|x|x,\ f''(x)=6|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}$. $(f'')'_+(0)=6\neq-6=(f'')'_-(0)$, do đó $f'''(0)$ không tồn tại.

**3**. Xét tính liên tục và tính khả vi của các hàm số sau

(i) $f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos(1/x), & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

**4**. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(i) Chứng minh rằng $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) Suy ra rằng $f$ có đạo hàm ở mọi cấp trong $\mathbb{R}$ (tức là có đạo hàm ở mọi cấp tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$).

**5**. Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và $x \in (a, b)$. Đặt $r = \min\{x - a, b - x\}$. Chứng minh rằng:

(i) $(x - r, x + r) \subset (a, b)$;

(ii) $f$ có đạo hàm tại $x$

$$\Longleftrightarrow \left[ \left[\forall \{h_n\} \subset (-r, r) \text{ và } h_n \to 0\right] \Longrightarrow \left\{ \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right\} \text{ hội tụ} \right];$$

(iii) $f$ có đạo hàm bên phải tại $x$

$$\Longleftrightarrow \left[ \left[\forall \{h_n\} \subset (0, b - x) \text{ và } h_n \to 0\right] \Longrightarrow \left\{ \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right\} \text{ hội tụ} \right];$$

(iv) $f$ có đạo hàm bên trái tại $x$

$$\Longleftrightarrow \left[ \left[\forall \{h_n\} \subset (a - x, 0) \text{ và } h_n \to 0\right] \Longrightarrow \left\{ \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right\} \text{ hội tụ} \right];$$

**6**. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

(i) Chứng minh rằng $f'(0)$ tồn tại và tính $f'(0)$;

(ii) Chứng minh rằng $f$ không liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$.

**7**. Cùng câu hỏi với Bài 6 với hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

(i) Chứng minh rằng $f'(0)$ tồn tại và tính $f'(0)$;

(ii) Chứng minh rằng $f$ không liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$.

**8**. Cho hàm số $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trong khoảng $(0, 1)$. Cho $x \in (0, 1)$ và một dãy số $\{x_n\} \subset (0, 1) \setminus \{x\}$ sao cho $f(x_n) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng, nếu $x_n \to x$, thì $f'(x) = 0$.

**9**. Cho hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và $x \in (a, b)$ sao cho tồn tại $f'(x)$. Cho hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset (a, b)$ sao cho:

(i) $x_n \to x$, $y_n \to x$;

(ii) $a < x_n < x < y_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x)$.

<u>*Hướng dẫn Bài **9***</u>: Đặt $\lambda_n = \dfrac{y_n - x}{y_n - x_n}$, $1 - \lambda_n = \dfrac{x - x_n}{y_n - x_n}$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) &= \frac{f(y_n) - f(x) + f(x) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \\
&= \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x_n} + \frac{f(x) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \\
&= \frac{y_n - x}{y_n - x_n} \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} + \frac{x - x_n}{y_n - x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \\
&= \lambda_n \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \\
&= \lambda_n \left[ \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x) \right] + (1 - \lambda_n) \left[ \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \right].
\end{aligned}$$

Do $\lambda_n$, $1 - \lambda_n \in (0, 1)$ và $\left[ \dfrac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x) \right] \to 0$, $\left[ \dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \right] \to 0$, nên

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \right| \\
\leq \; &\left| \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \right| \to 0, \text{ khi } n \to \infty.
\end{aligned}$$

**10.** Cho hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ và $x \in (a, b)$ sao cho tồn tại $f'(x)$. Cho hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset (a, b)$ sao cho:

(i) $x_n \to x$, $y_n \to x$;
(ii) $a < x < x_n < y_n < b$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
(iii) Dãy $\left\{\dfrac{y_n - x}{y_n - x_n}\right\}$ bị chặn.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x)$.

*Hướng dẫn Bài **10***: Đặt $\lambda_n = \dfrac{y_n - x}{y_n - x_n} > 1$, $1 - \lambda_n = \dfrac{x - x_n}{y_n - x_n} < 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) &= \frac{f(y_n) - f(x) + f(x) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \\
&= \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x_n} + \frac{f(x) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \\
&= \frac{y_n - x}{y_n - x_n}\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} + \frac{x - x_n}{y_n - x_n}\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \\
&= \lambda_n \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} + (1 - \lambda_n)\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \\
&= \lambda_n \left[\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x)\right] + (1 - \lambda_n)\left[\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x)\right].
\end{aligned}$$

Do $\{\lambda_n\}$, bị chặn, do đó cũng vậy $\{1 - \lambda_n\}$, ta có hằng số $C > 0$ sao cho:

$$|\lambda_n| + |1 - \lambda_n| \le C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mà $\left[\dfrac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x)\right] \to 0$, $\left[\dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x)\right] \to 0$, nên

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x)\right| \\
\le\ & C\left|\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x)\right| + C\left|\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x)\right| \to 0, \text{ khi } n \to \infty.
\end{aligned}$$

**11**. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(i) Tính $f'(0)$.
(ii) Cho hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ như sau $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $y_n = \dfrac{1}{2n\pi - \dfrac{\pi}{2}}$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \ne f'(0)$. Hãy cho một giải thích về điều này.

*Hướng dẫn Bài **11***:
sao cho:
(i) $\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = |x \sin(1/x)| \le |x| \to 0$, khi $x \to 0$. vậy tồn tại $f'(0)$ và $f'(0) = 0$.
(ii) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{y_n^2 \sin(1/y_n) - x_n^2 \sin(1/x_n)}{y_n - x_n} \\
&= \frac{-y_n^2}{y_n - x_n} = \frac{-2}{\pi}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{4n}} \to \frac{-2}{\pi} \ne 0 = f'(0).
\end{aligned}$$

Kết quả này cho một phản ví dụ mà điều kiện dãy $\left\{\dfrac{y_n - 0}{y_n - x_n}\right\}$ bị chặn bị bỏ qua.

Thật vậy

$$\frac{y_n - 0}{y_n - x_n} = \frac{\dfrac{1}{2n\pi - \dfrac{\pi}{2}}}{\dfrac{1}{2n\pi - \dfrac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{2n\pi}} = \frac{\dfrac{1}{2n - \dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2n - \dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{2n}} = 4n \to +\infty.$$

**12.** Cho hàm số $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$ sao cho $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.
Chứng minh rằng

(i) $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in (a,b)$;

(ii) $f(x) = f(\dfrac{a+b}{2})$, $\forall x \in (a,b)$.

*Hướng dẫn Bài **12***:
(i) Cho $a', b' \in (a,b)$, $a < a' < b' < b$, ta có $f$ liên tục trên $[a', b']$, có có đạo hàm trong khoảng $(a', b')$ và $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a', b')$.

$\forall x, y \in [a', b']$, dùng định lý Lagrange, tồn tại $\theta \in (0,1) : f(x) - f(y) = (x-y)f'(\theta y + (1-\theta)y) = 0$, vì $c = \theta y + (1-\theta)y \in (a', b')$.

Như vậy, mệnh đề $f(x) - f(y) = 0$, $\forall x, y \in [a', b']$ đúng với mọi $a', b' \in (a,b)$, sao cho $a < a' < b' < b$, ta suy ra, mệnh đề $f(x) - f(y) = 0$, $\forall x, y \in (a,b)$ đúng.

(ii) Suy ra từ (i) với $y = \dfrac{a+b}{2}$.

**13.** Cho hàm số $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$ sao cho $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.
Chứng minh rằng

(i) $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in [a,b]$;

(ii) $f(x) = f(a)$, $\forall x \in [a,b]$.

*Hướng dẫn Bài **13***: (i) Dùng định lý Lagrange cho hàm $f$ trên $[x,y]$, với $x, y \in [a,b]$.

**14**. Cho hàm số $f(x) = arctgx$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Tính $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Chứng minh rằng $arctgx + arctg(1/x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$;

(iii) Chứng minh rằng $arctgx + arctg(1/x) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\forall x < 0$.

*Hướng dẫn Bài 14*:
(i) Dùng $f'(x) = (arctg)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) $g(x) = arctg(1/x) = f(1/x)$, $g'(x) = f'(1/x)(1/x)' = \dfrac{1}{1+(1/x)^2}\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $\forall x \neq 0$.

(iii) $h(x) = arctgx + arctg(1/x)$, $x \neq 0$.

Cho $b > 1$, hàm $h$ có đạo hàm trong $(0,b)$ và $h'(x) = 0$, $\forall x \in (0,b)$, do đó $h$ là hàm hằng trong $(0,b)$, do đó $h(x) = h(1) = arctg1 + arctg1 = \dfrac{\pi}{2}$ $\forall x \in (0,b)$. Mà điều này đúng với mọi $b > 1$, do đó $h(x) = \dfrac{\pi}{2}$ $\forall x > 0$.

Do hàm là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$, nên ta có hàm $h$ cũng vậy, do đó $h(x) = \dfrac{-\pi}{2}$ $\forall x < 0$.

**15**. Cho hai hàm số $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho

(i) $f'(x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

(iii) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$.

Chứng minh rằng $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

*Hướng dẫn* **15**: Dùng hàm số $h(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$, và chứng minh $h'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**16.** Cho hai hàm số $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho

(i) $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

(iii) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$.

Chứng minh rằng $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

*Hướng dẫn*: Đặt $F(x) = e^{-x}\left(f(x) + g(x)\right)$, $G(x) = e^x\left(f(x) - g(x)\right)$, và chứng minh $F'(x) = G'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**16a**. Cho hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trên $[a, b]$ sao cho $f'_+(a) < f'_-(b)$. Chứng minh rằng, nếu $f'_+(a) < \lambda < f'_-(b)$, thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \lambda$.

*Hướng dẫn* **16a**: Đặt $c = \dfrac{a+b}{2}$, xét hai hàm số

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \begin{cases} a, & a \le t \le c, \\ 2t - b, & c \le t \le b; \end{cases} \\ \beta(t) &= \begin{cases} 2t - a, & a \le t \le c, \\ b, & c \le t \le b. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó, ta có $a \le \alpha(t) < \beta(t) \le b$, $\forall t \in (a, b)$. Xét hàm số $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ như sau

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}, & a < t < b, \\ f'_+(a), & x = a, \\ f'_-(b), & x = b. \end{cases}$$

Khi đó $g$ liên tục trên $[a, b]$. Thật vậy, do $g$ liên tục trong khoảng $(a, b)$, ta chỉ cần kiểm tra điều này bằng cách chứng minh $\lim\limits_{t \to a_+} g(t) = g(a) = f'_+(a)$ và $\lim\limits_{t \to b_-} g(t) = g(b) = f'_-(b)$.

Chú ý rằng, $\lim\limits_{t \to a_+} \beta(t) = a$, ta có

$$\lim_{t \to a_+} g(t) = \lim_{t \to a_+} \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} = \lim_{t \to a_+} \frac{f(\beta(t)) - f(a)}{\beta(t) - a} = f'_+(a) = g(a).$$

Tương tự, do $\lim\limits_{t \to b_-} \alpha(t) = b$, ta có

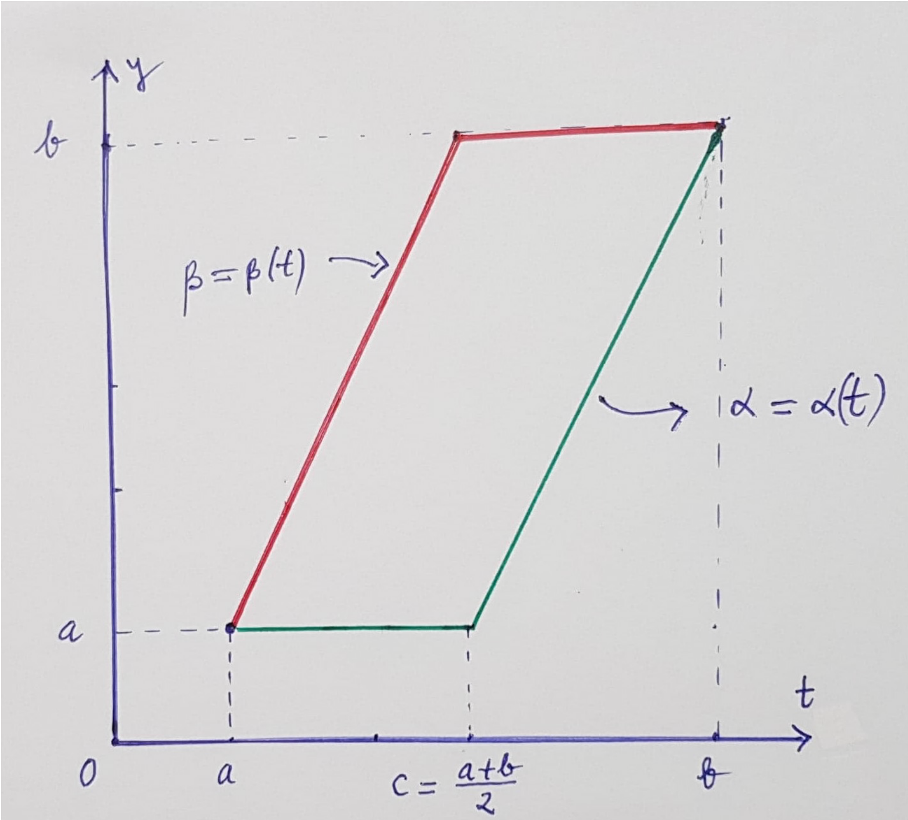
$$\lim_{t \to b_-} g(t) = \lim_{t \to b_-} \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} = \lim_{t \to b_-} \frac{f(b) - f(\alpha(t))}{b - \alpha(t)} = f'_-(b) = g(b).$$

Do Định lý giá trị trung gian, với $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và $g(a) < \lambda < g(b)$, thì tồn tại $t_0 \in (a, b)$ sao cho $g(t_0) = \lambda$.

Do Định lý giá trị trung bình Lagrange, với $f : [\alpha(t_0), \beta(t_0)] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[\alpha(t_0), \beta(t_0)]$ và có đạo hàm trong $(\alpha(t_0), \beta(t_0))$, khi đó tồn tại $c \in (\alpha(t_0), \beta(t_0))$ sao cho

$$\lambda = g(t_0) = \frac{f(\beta(t_0)) - f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0) - \alpha(t_0)} = f'(c).$$

Do $a \le \alpha(t_0) < c < \beta(t_0) \le b$, nên $a < c < b$.




**17**. Cho đa thức bậc $n$ với các hệ số thực $a_0, a_1, \cdots, a_n$ như sau $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, với $a_n \neq 0$. Giả sử $x_1, \cdots, x_k$ là $k$ nghiệm của đa thức $P_n(x)$, tức là $P_n(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \cdots, k$. Chứng minh rằng $k \le n$.

**18**. Cho hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f$ là hàm lồi trên khoảng $(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),\ \forall x_1, \cdots, x_n \in (a, b),\ \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Chú ý rằng $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in (a, b)$, $\forall x_1, \cdots, x_n \in (a, b)$, $\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

*Hướng dẫn Bài **18***:

(i) Phần đảo ($\Longleftarrow$): Chỉ cần lấy $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$.

(ii) Phần thuận ($\Longrightarrow$): Cho $x_1, \cdots, x_n \in (a, b)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Ta chứng minh rằng

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \quad (*)$$

Ta chứng minh (*) đúng bằng qui nạp theo $n$.

Hiển nhiên (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử (*) đúng với $n - 1$, ta có $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 - \lambda_n$.

Nếu $\lambda_n = 1$, thì $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, hiển nhiên (*) đúng.

Nếu $0 \le \lambda_n < 1$, thì $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 - \lambda_n > 0$, do đó $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} = 1$, theo giả thiết qui nạp, ta có

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} f(x_i). \quad (**)$$

Mặt khác, ta viết
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=(1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}x_i+\lambda_n x_n.$$
Do $f$ là hàm lồi trong khoảng $(a,b)$, sau đó dùng (**), ta có
$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}x_i+\lambda_n x_n\right)\\
&\le (1-\lambda_n)f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}x_i\right)+\lambda_n f(x_n)\\
&\le (1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}f(x_i)+\lambda_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$
Vậy phần thuận đúng.

**19**. Cho hàm số $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ liên tục trong $(a,b)$. Chứng minh rằng $f$ là hàm lồi trên khoảng $(a,b)$ khi và chỉ khi
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y\in(a,b).$$

*Hướng dẫn Bài **19***:

(i) Phần thuận ($\Longrightarrow$): hiển nhiên đúng do định nghĩa và không cần giả thiết về tính liên tục của hàm $f$.

(ii) Phần đảo ($\Longleftarrow$): Ta cần chứng minh rằng

(j) $f\left(\frac{1}{2^n}x+(1-\frac{1}{2^n})y\right)\le\frac{1}{2^n}f(x)+(1-\frac{1}{2^n})f(y)$, $\forall x,y\in(a,b)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(jj) $f\left(\frac{m}{2^n}x+(1-\frac{m}{2^n})y\right)\le\frac{m}{2^n}f(x)+(1-\frac{m}{2^n})f(y)$, $\forall x,y\in(a,b)$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $0\le m\le 2^n$.

(jjj) Chứng minh tập $A=\{\frac{m}{2^n}:n\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

(jv) Chứng minh $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, $\forall x,y\in(a,b)$, $\forall\lambda\in[0,1]$.

Hướng dẫn (j): Chứng minh bằng qui nạp theo $n$. Giả sử đúng với $n-1$. Chú ý rằng
$$\frac{1}{2^n}x+(1-\frac{1}{2^n})y=\frac{y+\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y}{2},$$
là trung bình cộng của hai số $y$ và $\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y$, do đó
$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2^n}x+(1-\frac{1}{2^n})y\right) &= f\left(\frac{y+\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y}{2}\right)\\
&\le \frac{f(y)+f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y\right)}{2}\\
&\le \frac{f(y)+\frac{1}{2^{n-1}}f(x)+(1-\frac{1}{2^{n-1}})f(y)}{2}\\
&= \frac{1}{2^n}f(x)+(1-\frac{1}{2^n})f(y).
\end{aligned}$$

Hướng dẫn (jj): Chứng minh bằng qui nạp theo $m$. Giả sử đúng với $m$. Chú ý rằng
$$\frac{m+1}{2^n}x+(1-\frac{m+1}{2^n})y=\frac{\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y+\frac{m}{2^{n-1}}x+(1-\frac{m}{2^{n-1}})y}{2},$$

là trung bình cộng của hai số $\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y$ và $\frac{m}{2^{n-1}}x+(1-\frac{m}{2^{n-1}})y$, do đó

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{m+1}{2^n}x+(1-\frac{m+1}{2^n})y\right) &= f\left(\frac{\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y+\frac{m}{2^{n-1}}x+(1-\frac{m}{2^{n-1}})y}{2}\right)\\
&\le \frac{f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x+(1-\frac{1}{2^{n-1}})y\right)+f\left(\frac{m}{2^{n-1}}x+(1-\frac{m}{2^{n-1}})y\right)}{2}\\
&\le \frac{\frac{1}{2^{n-1}}f(x)+(1-\frac{1}{2^{n-1}})f(y)+\frac{m}{2^{n-1}}f(x)+(1-\frac{m}{2^{n-1}})f(y)}{2}\\
&= \frac{m+1}{2^n}f(x)+(1-\frac{m+1}{2^n})f(y).
\end{aligned}$$

Hướng dẫn (jjj): Chứng minh tương tự như trong chứng minh tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$.

Ở đây có thể làm theo cách sau. Ta có $x\in\mathbb{R}_+=[0,+\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}[n,n+1)$, ta có $n_0\in\mathbb{Z}_+ : n_0\le x<n_0+1$.

Cho $\varepsilon>0$, tồn tại $m_0\in\mathbb{N} : \frac{1}{2^{m_0}}<\varepsilon$. Đặt $\lambda_k=n_0+\frac{k}{2^{m_0}}=\frac{k+n_02^{m_0}}{2^{m_0}}$, $k=1,2,\cdots,2^{m_0}$. Khi đó, $x\in[n_0,n_0+1)=\bigcup_{k=1}^{2^{m_0}}[\lambda_{k-1},\lambda_k)$, ta có $k\in\{1,2,\cdots,2^{m_0}\}$ sao cho $\lambda_{k-1}\le x<\lambda_k$.

Như vậy

$$|\lambda_k-x|<|\lambda_k-\lambda_{k-1}|=\frac{1}{2^{m_0}}<\varepsilon.$$

Tương tự cho $x<0$.

Hướng dẫn (jv): Cho $\lambda\in(0,1)$, do $A=\{\frac{m}{2^n}:\forall n,m\in\mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$, ta có dãy $\{\lambda_k=\frac{m_k}{2^{n_k}}\}\subset A$ so cho $\lambda_k\to\lambda$. Do $\lambda\in(0,1)$, ta có $k_0\in\mathbb{N}$ :

$$\lambda_k=\frac{m_k}{2^{n_k}}\in(0,1),\ \forall k\ge k_0.$$

Do liên tục trong $(a,b)$, từ bất đẳng thức

$$f\left(\lambda_kx+(1-\lambda_k)y\right)\le\lambda_kf(x)+(1-\lambda_k)f(y),\ \forall x,y\in(a,b),\ \forall k\ge k_0,$$

ta suy ra (jv) đúng.

**20**. Chứng minh rằng, $\forall p>1$, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p\le n^{p-1}\sum_{i=1}^n x_i^p,\ \forall x_1,\cdots,x_n\ge0.$$

*Hướng dẫn Bài **20***: Xét hàm $f(x)=x^p$, $x\ge0$, $p>1$.

**21**. Chứng minh rằng, $\forall p>1$, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)^p\le\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^p,\ \forall x_1,\cdots,x_n\ge0,\ \forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n\ge0,\ \sum_{i=1}^n\lambda_i=1.$$

*Hướng dẫn Bài **21***: Xét hàm $f(x)=x^p$, $x\ge0$, $p>1$.

**22**. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

(i) $x^\lambda y^{1-\lambda}\le\lambda x+(1-\lambda)y$, $\forall x,y>0$, $\forall\lambda\in[0,1]$.

(ii) $x^\alpha y^\beta z^\gamma\le\alpha x+\beta y+\gamma z$, $\forall x,y,z>0$, $\forall\alpha,\beta,\gamma\ge0\ge0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

(iii) $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\le\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$,

$\forall x_1,\cdots,x_n>0$, $\forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n\ge0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$.

(iv) $\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{\sin x + \sin y}{2},\ \forall x, y \in [0,\pi];$

(v) $\sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq \dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3},\ \forall x, y, z \in [0,\pi];$

(vi) $\sin(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \sin x + (1-\lambda)\sin y,\ \forall x, y \in [0,\pi],\ \forall \lambda \in [0,1];$

(vii) $\sin\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin x_i,$

$\forall x_1, \cdots, x_n \in [0,\pi],\ \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

(viii) $\sqrt{\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} \geq \dfrac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin y}}{2},\ \forall x, y \in (0,\pi);$

(ix) $\sqrt[3]{\sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)} \geq \dfrac{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\sin y} + \sqrt[3]{\sin z}}{3},\ \forall x, y, z \in (0,\pi);$

(x) $\sqrt[n]{\sin(\lambda x + (1-\lambda)y)} \geq \lambda \sqrt[n]{\sin x} + (1-\lambda)\sqrt[n]{\sin y},$
$\forall x, y \in (0,\pi),\ \forall \lambda \in [0,1], \forall n > 1;$

(xi) $\sin^p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin^p x_i,$

$\forall x_1, \cdots, x_n \in (0,\pi), \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \forall p \in (0,1).$

(xii) $\sqrt[m]{\sin\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)} \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sqrt[m]{\sin x_i},$

$\forall x_1, \cdots, x_n \in (0,\pi), \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \forall m > 1.$

(xiii) $(\sin x)^{\lambda} (\sin y)^{1-\lambda} \leq \sin(\lambda x + (1-\lambda)y), \forall x, y \in (0,\pi), \forall \lambda \in [0,1].$

(xiiii) $(\sin x_1)^{\lambda_1} (\sin x_2)^{\lambda_2} \cdots (\sin x_n)^{\lambda_n} \leq \sin\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right),$

$\forall x_1, \cdots, x_n \in (0,\pi), \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

*Hướng dẫn Bài **22***: (i)- (iii). Xét hàm $f(x) = -\ln x,\ x > 0;\ f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0,\ x \in [0,\pi].$
*Hướng dẫn Bài **22***: (iv)- (vii). Xét hàm $f(x) = -\sin x,\ x \in [0,\pi];\ f''(x) = \cos x \geq 0,\ x \in [0,\pi].$
*Hướng dẫn Bài **22***: (viii)- (xii). Xét hàm $f(x) = -\sin^p x,\ x \in (0,\pi),\ 0 < p < 1.$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin^p x,\ x \in [0,\pi],\ p \in (0,1).\\
f'(x) &= p\cos x \sin^{p-1} x,\\
f''(x) &= p\left[-\sin x \sin^{p-1} x + (p-1)\cos^2 x \sin^{p-2} x\right]\\
&= p\left[-\sin^p x + (p-1)\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{p-2} x\right]\\
&= p\left[p - 1 - p\sin^2 x\ \right]\sin^{p-2} x < 0,\ \forall x \in (0,\pi),\ \forall p \in (0,1).
\end{aligned}$$

*Hướng dẫn Bài **22***: (xiii)- (xiiii). Xét hàm $f(x) = \ln(\sin x),\ x \in (0,\pi);\ f''(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} < 0,\ x \in (0,\pi).$

$$\begin{aligned}
\ln\sin(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \lambda \ln\sin x + (1-\lambda)\ln\sin y = \ln \sin^{\lambda} x \sin^{1-\lambda} y;\\
(\sin x)^{\lambda} (\sin y)^{1-\lambda} &\leq \sin(\lambda x + (1-\lambda)y).
\end{aligned}$$

**23** (i) Chứng minh rằng $e^x = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$, khi $x \to 0.$

(ii) Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^4}$.

*Hướng dẫn Bài **23*** (i) Xét hàm $f(x)=e^x$, và $f^{(k)}(0)=1,\ \forall k=0,1,\cdots$.

*Hướng dẫn Bài **23*** (ii) $n=4: e^x=\sum\limits_{k=0}^{4}\dfrac{x^k}{k!}+o(x^4)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$,

$$\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^4}=\frac{1}{24}+\frac{o(x^4)}{x^4}\to\frac{1}{24},\ \text{khi } x\to 0.$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^4}=\frac{1}{24}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{24}.$$

Chú ý rằng, nếu dùng qui tắc L'Hopital thì

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{24x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{24}=\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

**24.** Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}}{x^4}$.

*Hướng dẫn Bài **24***: $n=4: e^x=\sum\limits_{k=0}^{4}\dfrac{x^k}{k!}+o(x^4)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$, do đó

$$\begin{aligned}e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12} &= \frac{x^4}{24}+o(x^4)+\frac{x^4}{12}\\ &= \frac{x^4}{8}+o(x^4)\\ \frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}}{x^4} &= \frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}\to\frac{1}{8},\ \text{khi } x\to 0.\\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}}{x^4} &= \frac{1}{8}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

**25.** Chứng minh rằng

(i) $\sin x=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2n})=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})$, khi $x\to 0$.

(ii) $\cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$, khi $x\to 0$.

(iii) $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{n}C_\alpha^k x^k+o(x^n)$

$=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+C_\alpha^n x^n+o(x^n)$, khi $x\to 0$,

trong đó $C_\alpha^k=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(iv) $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$, khi $x \to 0$.

(v) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$, khi $x \to 0$.

*Hướng dẫn Bài* ***25***:

(i) Xét hàm $f(x) = \sin x$, ta có

$f^{(k)}(x) = \sin(x + \dfrac{k\pi}{2})$, $\forall k = 0, 1, \cdots;$

$f^{(k)}(0) = \sin(\dfrac{k\pi}{2})$, $\forall k = 0, 1, \cdots;$

$f^{(2n)}(0) = \sin(n\pi) = 0$, $\forall n = 0, 1, \cdots;$

$f^{(2n+1)}(0) = \sin\Big((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big) = \cos n\pi = (-1)^n$, $\forall n = 0, 1, \cdots;$

$$\begin{aligned}\sin x = f(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{2n})\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2n}).\end{aligned}$$

(ii) Xét hàm $f(x) = \cos x$, ta có

$f^{(k)}(x) = -\sin\Big(x + (k-1)\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $\forall k = 0, 1, \cdots;$

$f^{(k)}(0) = -\sin\Big((k-1)\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $\forall k = 0, 1, \cdots;$

$f^{(2n+1)}(0) = -\sin(n\pi) = 0$, $\forall n = 0, 1, \cdots;$

$f^{(2n)}(0) = -\sin\Big((2n-1)\dfrac{\pi}{2}\Big) = -\sin\Big(n\pi - \dfrac{\pi}{2}\Big) = \cos n\pi = (-1)^n$, $\forall n = 0, 1, \cdots;$

$$\begin{aligned}\cos x = f(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{2n+1})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

(iii) Xét hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$, ta có

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \cdots,$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \cdots, \forall k = 1, 2, \cdots;$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)$, $\forall k = 1, 2, \cdots;$

$C_\alpha^k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$,

$(1+x)^\alpha = f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$.

Chú ý với $\alpha = n$, $f^{(n+1)} = 0$, do đó, $R_n(x, f) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$,

$$\begin{aligned}C_n^k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2.1}{k!(n-k)(n-k-1)\cdots 2.1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

Khi đó ta thu được công thức khai triển nhị thức Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

(iv) Với $\alpha = -1$, ta có

$$C_{-1}^k = \frac{-1(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} = \frac{-1(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k.$$

Vậy $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$, khi $x \to 0$.

Chú ý rằng, ta có công thức tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân công bội $q$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ nếu } q \neq 1.$$

Lấy $q = -x \neq 1$, ta có $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$, hay

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-x)^n}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n), \text{ khi } x \to 0.$$

(v) Xét hàm $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, ta có

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{-2.3}{(1+x)^4}, \cdots$,

$f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $\forall k = 1, 2, \cdots$;

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, $\forall k = 1, 2, \cdots$;

$\ln(1+x) = f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n)$.

**26.** Tính các giới hạn

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2} - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

*Hướng dẫn Bài* **26** (i): Khai triển Maclaurin các hàm $e^{-\frac{x^2}{2}}$ và $\cos x$ :

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{2}\frac{x^k}{k!} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),\\
e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),\\
e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)\\
&= \frac{x^4}{12} + o(x^4) - o(x^5) = \frac{x^4}{12} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4} = \frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4} \to \frac{1}{12}, \text{ khi } x \to 0.$$

*Hướng dẫn Bài* **26** (ii): Khai triển Maclaurin các hàm $\sqrt{1-x^2}$ và $e^{-\frac{x^2}{2}}$ :

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{1/2} &= 1 + C^1_{1/2}x + C^2_{1/2}x^2 + o(x^2),\\
C^1_{1/2} &= \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2},\ C^2_{1/2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{-1}{8}.\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),\\
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),\\
\sqrt{1-x^2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4),\\
e^x &= \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),\\
e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),\\
\sqrt{1-x^2} - e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right]\\
&= -\frac{1}{4}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

Do đó

$$\frac{\sqrt{1-x^2} - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{-1}{4} + \frac{o(x^4)}{x^4} \to \frac{-1}{4},\ \text{khi } x \to 0.$$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

*Hướng dẫn Bài* **26** (iii): Ta phân tích

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}\\
&= \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \frac{x - \sin x}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Do $\frac{\sin x}{x} \to 1$ khi $x \to 0$, nên ta chỉ cần tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. Khai triển Maclaurin hàm $\sin x$ :

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),\\
x - \sin x &= \frac{x^3}{3!} + o(x^4).
\end{aligned}
$$

Do đó

$$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3} \to \frac{1}{6},\ \text{khi } x \to 0.$$

Vậy

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\\
&= 2 \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

**27.** Tìm cực trị các hàm số sau

(i) $f(x) = x^3,\ \forall x \in [-1, 1]$;

(ii) $f(x) = x^3 + |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$;
(iii) $f(x) = x^{4/5}$, $\forall x \in [-1, 1]$;
(iv) $f(x) = \sin x + \cos x$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

*Hướng dẫn Bài* ***27***: Nếu hàm số đạt cực trị thì tại nơi đạt cực trị sẽ có đạo hàm triệt tiêu hoặc đạo hàm không tồn tại. Vậy ta sẽ tìm tập $A = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0 \text{ hay } \nexists f'(x)\}$ và kiểm tra những điểm trong $A$ có phải cực trị hay không.

*Hướng dẫn Bài* ***27*** (i): $f'(x) = 3x^2 \neq 0$, $\forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Vậy mọi điểm trong $(-1, 1) \setminus \{0\}$ không là điểm cực trị.

Tại $x = 0$, $f'(0) = f''(0) = 0 \neq 6 = f'''(0)$. Do $n = 3$ lẻ, nên $f$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

*Kết luận*: hàm số không có cực trị.

**Chú ý**: Ta có thể kết luận tại $x = 0$ hàm $f$ không đạt cực trị nhờ vào $f'(x) = 3x^2$ không thay đổi dấu khi $x$ vượt qua 0 từ âm sang dương.

*Hướng dẫn Bài* ***27*** (ii):

(j) $-1 < x < 0 : f(x) = x^3 - x$, do đó $f'(x) = 3x^2 - 1$, $\forall x \in (-1, 0)$;

$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 1 = 0, \\ -1 < x < 0 \end{cases} \iff x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = x_0$, mà $f'(x_0) = 0 \neq 6x_0 = f''(x_0) < 0$. Vậy $f$ đạt cực đại tại $x_0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

(jj) $0 < x < 1 : f(x) = x^3 + x$, do đó $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$, $\forall x \in (0, 1)$. Vậy $f$ không đạt cực trị trong $(0, 1)$.

(jjj) $x = 0 : f(0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \left(x^2 + 1\right) = 1$. Vậy $f'_+(0) = 1$.

$\displaystyle\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \left(x^2 - 1\right) = 1$. Vậy $f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$.

Do đó $\nexists f'(0)$.

Mà $f'(x) = 3x^2 - 1 < 0$, $\forall x \in (\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$, và $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in (0, 1)$.

Đạo hàm $f'(x)$ thay đổi dấu từ âm sang dương khi $x$ vượt qua 0. Vậy $f$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

*Kết luận*: Hàm số $f$ đạt cực trị tại hai chỗ: cực đại tại $x_0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ và cực tiểu tại $x = 0$.

*Hướng dẫn Bài* ***27*** (iii): $f'(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}} \neq 0$, $\forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Vậy mọi điểm trong $(-1, 1) \setminus \{0\}$ không là điểm cực trị.

Tại $x = 0 : f(0) = 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^{4/5}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} \to +\infty$, khi $x \to 0_+$, do đó $\nexists f'_+(0)$ và cũng vậy $\nexists f'(0)$.

Mặt khác, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} < 0$, $\forall x \in (-1, 0)$, và $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} > 0$, $\forall x \in (0, 1)$. Vậy $f$ tại đạt cực tiểu tại $x = 0$.

*Kết luận*: Hàm số $f$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

*Hướng dẫn Bài* ***27*** (iv): $f'(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$.

$\begin{cases} f'(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \\ x \in (-\pi, \pi) \end{cases} \iff \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ x \in (-\pi, \pi) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x \in (-\pi, \pi) \end{cases}$

$\iff x \in \left\{x_1 = \dfrac{-3\pi}{4},\ x_2 = \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

Mặt khác, $f''(x) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$x_1 = \dfrac{-3\pi}{4} : f'(x_1) = 0 \neq f''(x_1) = \sqrt{2} > 0$ : Vậy $f$ tại đạt cực tiểu tại $x_1 = \dfrac{-3\pi}{4}$.

$x_2 = \dfrac{\pi}{4} : f'(x_2) = 0 \neq f''(x_2) = -\sqrt{2} < 0$ : Vậy $f$ tại đạt cực đại tại $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

*Kết luận*: Hàm số $f$ đạt cực trị tại hai chỗ: cực tiểu tại $x_1 = \dfrac{-3\pi}{4}$ và cực đại tại $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

**28.** Tìm điểm uốn của đồ thị của các hàm số sau

(i) $f(x) = x^3 \ln x$, $x > 0$;

(ii) $f(x) = x^3 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$;
(iii) $f(x) = x^{3/7}$, $x \in \mathbb{R}$;
(iv) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

**29.** Tìm cực trị và điểm uốn của đồ thị của các hàm số sau
(i) $f(x) = \cos x$;
(ii) $f(x) = x^3 + 3|x|$, $-4 < x < 1$.

*Hướng dẫn Bài **29*** (i): Cực trị.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}; \\ f''(x_k) &= -\cos x_k = -\cos(k\pi) = (-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= 2n \text{ chẵn} : f'(x_{2n}) = 0 \neq f''(x_{2n}) = -1 < 0 : f \text{ đạt cực đại tại } x_{2n} = 2n\pi; \\ k &= 2n+1 \text{ lẻ} : f'(x_{2n+1}) = 0 \neq f''(x_{2n+1}) = 1 > 0 : f \text{ đạt cực tiểu tại } x_{2n+1} = (2n+1)\pi. \end{aligned}$$

Điểm uốn.

$$f''(x) = -\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \bar{x}_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$f''(x)$ đổi dấu khi vượt qua $\bar{x}_k$, do đó đồ thị của hàm $\cos x$ có các điểm uốn có hoành độ

$$\bar{x}_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*Hướng dẫn Bài **29*** (ii): Tính toán các đạo hàm

$$f(x) = x^3 + 3|x| = \begin{cases} x^3 - 3x, & -4 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^3 + 3x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$-4 < x < 0$, $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$;
$f''(x) = 6x$, $f'(-1) = 0 \neq f''(-1) = -6 < 0$. Vậy $f$ đạt cực đại tại $x = -1$;
$0 < x < 1$, $f(x) = x^3 + 3x$, $f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$; $f$ không đạt cực trị trong $(0, 1)$;
$x = 0 : f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0_+} \frac{x^3 + 3x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0_+} \left(x^2 + 3\right) = 3. \text{ Vậy } \exists f'_+(0) = 3; \\ \lim_{x\to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0_+} \frac{x^3 - 3x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0_-} \left(x^2 - 3\right) = -3. \text{ Vậy } \exists f'_-(0) = -3; \\ f'_+(0) &= 3 \neq -3 = f'_-(0). \text{ Vậy } \nexists f'(0). \end{aligned}$$

Mà $f'(x)$ thay đổi dấu từ âm sang dương khi $x$ vượt qua $x = 0$, bởi vì

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 - 1) < 0,\ \forall x \in (-1, 0), \\ f'(x) &= 3(x^2 + 1) > 0,\ \forall x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Vậy $f$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
Tính đạo hàm cấp hai. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 3(x^2 - 1), & -4 < x < 0, \\ 3(x^2 + 1), & 0 < x < 1, \end{cases} \\ \text{Tại } x &= 0,\ \nexists f'(0). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f''(x) &= \begin{cases} 6x, & -4 < x < 0, \\ 6x, & 0 < x < 1, \end{cases} \\ \text{Tại } x &= 0,\ \nexists f'(0),\ \nexists f''(0). \end{aligned}$$

Mà $f''(x)$ thay đổi dấu khi $x$ vượt qua $x = 0$, bởi vì $f''(x) = 6x$, $\forall x \neq 0$. Vậy đồ thị của hàm $f$ đi qua điểm uốn $O(0, 0)$.

# Chương 7

# TÍCH PHÂN RIEMANN

## 7.1 Khái niệm và tính chất căn bản tích phân Riemann

**Định nghĩa 1**. Cho $n+1$ số thực $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ sao cho $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ và $n$ số thực $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

Khi đó ta gọi $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n; \xi_1, \cdots, \xi_n\}$ là một *phân hoạch của đoạn* $[a,b]$ và đặt

$$|P| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) = \text{ độ mịn (chuẩn) của phân hoạch } P.$$

Đặt $\mathcal{P}([a,b])$ là tập hợp tất cả các phân hoạch của đoạn $[a,b]$.

**Định nghĩa 2**. Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a,b]$ và $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n; \xi_1, \cdots, \xi_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[a,b]$. Ta đặt

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\\
U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)(x_i - x_{i-1}),\\
L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)(x_i - x_{i-1}),
\end{aligned}$$

và lần lượt gọi các tổng số này là *tổng Riemann*, *tổng Riemann trên* và *tổng Riemann dưới* của $f$ tương ứng với phân hoạch $P$.

(Cũng chú ý rằng *tổng Riemann* của $f$ tương ứng với phân hoạch $P$ phụ thuộc vào các điểm $\xi_1, \cdots, \xi_n$, trong khi đó các *tổng Riemann trên* và *tổng Riemann dưới* của $f$ thì không phụ thuộc).

Ta nói hàm $f$ *khả tích Riemann* trên $[a,b]$ nếu tồn tại $I(f) \in \mathbb{R}$ sao cho $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

$$\forall P \in \mathcal{P}([a,b]),\ \ |P| < \delta \Longrightarrow |S(f,P) - I(f)| < \varepsilon.$$

Khi đó, ta ký hiệu $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ và gọi $I(f)$ là *tích phân Riemann* (vắn tắt gọi là *tích phân*) *của* $f$ *trên* $[a,b]$.

Ta cũng viết

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} S(f,P).$$

Ta cũng ký hiệu $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Nếu $a = b$, ta ký hiệu $\int_0^0 f(x)dx = 0.$

===========Chú ý===============

**Chú ý**: Một cách diễn đạt khác để đi đến định nghĩa tích phân Riemann như sau

**Định nghĩa 1a**. Một tập con hữu hạn $Q \subset [a, b]$ sao cho $a, b \in Q$ được gọi là một *phân hoạch của đoạn* $[a, b]$.

Cho $Q$ là một *phân hoạch của đoạn* $[a, b]$, ta có thể viết $Q$ như sau

$$\begin{aligned} Q &= \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \\ \text{với } a &\equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b. \end{aligned}$$

Như vậy phân hoạch $Q$ hình thành một phép chia đoạn $[a, b]$ thành một số hữu hạn các đoạn con

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \cdots,\ [x_{n-1}, x_n].$$

Khi đó phân hoạch $Q$ cũng hiểu là một phép chia đoạn $[a, b]$ thành một số hữu hạn các đoạn con như trên.

Với một phân hoạch $Q = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của đoạn $[a, b]$ như trên, ta định nghĩa

$$|Q| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) = \text{ \textit{độ mịn} (hay \textit{chuẩn}) \textit{của phân hoạch} } Q.$$

**Định nghĩa 2a**. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a, b]$ và $Q = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[a, b]$.

Với mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$, ta chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ và thiết lập tổng

$$S(f, Q, \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

và được gọi là *tổng Riemann* của $f$ tương ứng với phân hoạch $Q$ và cách chọn các điểm $\xi_i$ như trên.

Nếu tồn tại

$$\lim_{|Q| \to 0} S(f, Q, \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}) = \lim_{|Q| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = I$$

sao cho số thực $I$ *không phụ thuộc vào phân hoạch $Q$* và *không phụ thuộc vào cách chọn các điểm $\xi_i$* như trên, khi đó, ta nói *hàm $f$ khả tích Riemann trên $[a, b]$*. Ta ký hiệu số thực $I = \int_a^b f(x)dx$ và gọi $I$ là *tích phân Riemann* (vắn tắt gọi là *tích phân*) *của $f$ trên $[a, b]$*.

==========================

**Định lý 1.** *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục, khi đó $f$ khả tích Riemann trên $[a, b]$.*

*Chứng minh Định lý 1.*

Xét một phân hoạch đều $P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_{2^n};\ \xi_1, \cdots, \xi_{2^n}\}$, với $x_i = a + i\left(\dfrac{b-a}{2^n}\right)$, $i = 0, \cdots, 2^n$, và $\xi_i = x_i$, $i = 1, \cdots, 2^n$.

Khi đó, tổng Riemann của $f$ tương ứng với phân hoạch $P_n$ là

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i).$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\{S(f, P_n)\}$ là dãy Cauchy, và do đó nó hội tụ về số thực $I(f)$. Sau đó ta chứng minh rằng

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathcal{P}([a, b]),\ \ |P| < \delta \Longrightarrow |S(f, P) - I(f)| < \varepsilon.$$

(i) *Chứng minh $\{S(f, P_n)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.*

Cho $m > n$, xét

$$S(f, P_m) = \sum_{j=1}^{2^m} f(y_j)(y_j - y_{j-1}) = \frac{b-a}{2^m} \sum_{j=1}^{2^m} f(y_j),$$

trong đó $P_m = \{y_0, y_1, \cdots, y_{2^m}; y_1, \cdots, y_{2^m}\}$, với $y_j = a + j\left(\dfrac{b-a}{2^m}\right)$, $j = 0, \cdots, 2^m$.

Chú ý rằng $\{y_0, y_1, \cdots, y_{2^m-1}, y_{2^m}\} \subset \{x_0, x_1, \cdots, x_{2^n-1}, x_{2^n}\}$, bởi vì $x_i = a + i\left(\dfrac{b-a}{2^n}\right) = a + i2^{m-n}\left(\dfrac{b-a}{2^m}\right) = y_{i2^{m-n}}$.

$J_1 = \{j \in \mathbb{N} : x_0 < y_j \leq x_1\} = \{1, 2, \cdots, 2^{m-n}\} =$ có $2^{m-n}$ số,

$J_2 = \{j \in \mathbb{N} : x_1 < y_j \leq x_2\} = \{2^{m-n}+1,\ 2^{m-n}+2, \cdots,\ 2.2^{m-n}\} =$ có $2^{m-n}$ số,

$J_3 = \{j \in \mathbb{N} : x_2 < y_j \leq x_3\} = \{2.2^{m-n}+1,\ 2.2^{m-n}+2, \cdots,\ 3.2^{m-n}\} =$ có $2^{m-n}$ số,

$\vdots$

$J_i = \{j \in \mathbb{N} : x_{i-1} < y_j \leq x_i\} = \{(i-1)2^{m-n}+1,\ (i-1)2^{m-n}+2, \cdots,\ i2^{m-n}\} =$ có $2^{m-n}$ số,

$\vdots$

$J_{2^n} = \{j \in \mathbb{N} : x_{2^n-1} < y_j \leq x_{2^n}\} = \{(2^n-1)2^{m-n}+1,\ (2^n-1)2^{m-n}+2, \cdots,\ 2^m\} =$ có $2^{m-n}$ số.

Ta cũng chú ý rằng

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i &= \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq 2^m\},\\
\sum_{j\in J_i}(y_j - y_{j-1}) &= x_i - x_{i-1},\\
\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i}(y_j - y_{j-1}) &= b - a,\\
\sum_{j=1}^{2^m} &= \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i}.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta viết lại hai tổng Riemann ở trên của $f$ như sau

$$\begin{aligned}
S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i} f(x_i)(y_j - y_{j-1}),\\
S(f, P_m) &= \sum_{j=1}^{2^m} f(y_j)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i} f(y_j)(y_j - y_{j-1}).
\end{aligned}$$

Trừ hai tổng trên

$$S(f, P_n) - S(f, P_m) = \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i}\left[f(x_i) - f(y_j)\right](y_j - y_{j-1}),$$

và do đó

$$\begin{aligned}
|S(f, P_n) - S(f, P_m)| &= \left|\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i}\left[f(x_i) - f(y_j)\right](y_j - y_{j-1})\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i}\left|f(x_i) - f(y_j)\right|(y_j - y_{j-1})\\
&\leq \sup_{j\in J_i,\ 1\leq i\leq 2^n}\left|f(x_i) - f(y_j)\right|\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\in J_i}(y_j - y_{j-1})\\
&= (b-a)\sup_{j\in J_i,\ 1\leq i\leq 2^n}\left|f(x_i) - f(y_j)\right|.
\end{aligned}$$

Do $f$ liên tục trên $[a,b]$ nên $f$ liên tục đều trên $[a,b]$. Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ :

$$\forall x, y \in [a,b], \ \ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Nếu $m > n$, $|P_n| = \dfrac{b-a}{2^n} < \delta$, ta có $|x_i - y_j| < \delta$, $\forall j \in J_i$, $\forall i = 1, \cdots, 2^n$, do đó $|f(x_i) - f(y_j)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Từ đó

$$|S(f,P_n) - S(f,P_m)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

với mọi $m > n > n_0$, với $\dfrac{b-a}{2^{n_0}} < \delta$.

Như vậy $\{S(f,P_m)\}$ là dãy Cauchy, và do đó nó hội tụ về số thực $I(f)$. Sau đó chỉ cần chứng minh rằng $\lim\limits_{|P|\to 0} S(f,P) = I(f)$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathcal{P}([a,b]), \ \ |P| < \delta \Longrightarrow |S(f,P) - I(f)| < \varepsilon.$$

(ii) *Chứng minh* $\lim\limits_{|P|\to 0} S(f,P) = I(f)$.

Xét một phân hoạch $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n;\ \xi_1, \cdots, \xi_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[a,b]$ và tổng Riemann của $f$ tương ứng với phân hoạch $P$ là

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Xét phân hoạch $P_m$ như sau

$$P_m = \{y_0, y_1, \cdots, y_{2^m};\ y_1, \cdots, y_{2^m}\}, \text{ với } y_j = a + j\left(\frac{b-a}{2^m}\right), \ j = 0, \cdots, 2^m.$$

Ta tổ hợp phân hoạch $P$ với phân hoạch $P_m$ thành một phân hoạch mới như sau

$$R = \{z_0, z_1, \cdots, z_k;\ z_1, \cdots, z_k\},$$

với

$$\{z_1, \cdots, z_k\} = \{y_1, \cdots, y_{2^m}\} \cup \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

Tổng Riemann của $f$ tương ứng với phân hoạch $R$ là

$$S(f,R) = \sum_{i=1}^{k} f(z_i)(z_i - z_{i-1}).$$

Đặt $I_i = \{j : x_{i-1} < z_j \le x_i\} = \{j : [z_{j-1}, z_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\}$, ta có $\{1, 2, \cdots, k\} = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{j \in \mathbb{N} : [z_{j-1}, z_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\}$.

$$\begin{aligned}
S(f,R) &= \sum_{j=1}^{k} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]} [f(z_j) - f(\xi_i)]\,(z_j - z_{j-1}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]} f(\xi_i)(z_j - z_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]} [f(z_j) - f(\xi_i)]\,(z_j - z_{j-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]} [f(z_j) - f(\xi_i)]\,(z_j - z_{j-1}) + S(f,P).
\end{aligned}$$

Từ đó

$$S(f,R)-S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]}[f(z_j)-f(\xi_i)](z_j-z_{j-1}),$$

và

$$\begin{aligned}|S(f,R)-S(f,P)| &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i]}(z_j-z_{j-1})\\ &= (b-a)\sup_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i],\ i=1,\cdots,n}|f(z_j)-f(\xi_i)|\,.\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}|S(f,R)-S(f,P_m)| &\le \sum_{i=1}^{2^m}\sum_{[z_{j-1},z_j]\subset[y_{i-1},y_i]}(z_j-z_{j-1})\\ &= (b-a)\sup_{[z_{j-1},z_j]\subset[y_{i-1},y_i],\ i=1,\cdots,2^m}|f(z_j)-f(y_i)|\,.\end{aligned}$$

Do $f$ liên tục trên $[a,b]$ nên $f$ liên tục đều trên $[a,b]$. Cho $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta>0$ :

$$\forall x,y\in[a,b],\ \ |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Nếu $|P|<\delta$, ta có $|x_i-x_{i-1}|\le|P|<\delta$, $\forall i=1,\cdots,n$, do đó $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, $\forall x,y\in[x_{i-1},x_i]$, $\forall i=1,\cdots,n$.

Từ đó

$$\sup_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i],\ i=1,\cdots,n}|f(z_j)-f(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)},\ \text{nếu } |P|<\delta.$$

Nếu $|P_m|=\dfrac{b-a}{2^m}<\delta$, ta có $|y_i-y_{i-1}|\le|P_m|=\dfrac{b-a}{2^m}<\delta$, $\forall i=1,\cdots,2^m$, do đó $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, $\forall x,y\in[y_{i-1},y_i]$, $\forall i=1,\cdots,2^m$.

$$\sup_{[z_{j-1},z_j]\subset[y_{i-1},y_i],\ i=1,\cdots,2^m}|f(z_j)-f(y_i)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)},\ \text{nếu } \frac{b-a}{2^m}<\delta.$$

Vậy nếu $\dfrac{b-a}{2^m}<\delta$ và $|P|<\delta$, ta có

$$\begin{aligned}|S(f,R)-S(f,P)| &\le (b-a)\sup_{[z_{j-1},z_j]\subset[x_{i-1},x_i],\ i=1,\cdots,n}|f(z_j)-f(\xi_i)|\\ &\le (b-a)\frac{\varepsilon}{3(b-a)}=\frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}|S(f,R)-S(f,P_m)| &\le (b-a)\sup_{[z_{j-1},z_j]\subset[y_{i-1},y_i],\ i=1,\cdots,2^m}|f(z_j)-f(y_i)|\\ &\le (b-a)\frac{\varepsilon}{3(b-a)}=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Mặt khác do $S(f,P_m)\to I(f)$, nên tồn tại $m_0\in\mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{b-a}{2^{m_0}}<\delta$ và $|S(f,P_m)-I(f)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall m>m_0$.

Như vậy nếu $|P|<\delta$, ta có

$$\begin{aligned}|S(f,P)-I(f)| &\le |S(f,P)-S(f,R)|+|S(f,R)-S(f,P_m)|+|S(f,P_m)-I(f)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Định lý 1 được chứng minh xong. □

## 7.2 Các tính chất cơ bản của phép tính tích phân

**Định lý 2.** *Cho* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục,* $c \in (a,b)$*,* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$*. Khi đó*

(i) *Các hàm* $\alpha f + \beta g$*,* $|f|$ *khả tích trên* $[a,b]$*,*

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx,$

(iv) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$

(v) *Nếu* $f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a,b]$ *thì* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx,$

(vi) *Hàm* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt,\ \forall x \in [a,b]$*, liên tục trên đoạn* $[a,b]$ *và có đạo hàm trong khoảng* $(a,b)$ *và*

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x),\ \forall x \in (a,b), \\ F'_+(a) &= f(a),\ F'_-(b) = f(b), \end{aligned}$$

(vii) *Cho* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $[a,b]$*, có đạo hàm* $f'$ *liên tục trong khoảng* $(a,b)$ *, thì*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt,\ \forall x \in [a,b],$$

(viii) (*Công thức tích phân từng phần*) *Cho* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $[a,b]$*, có đạo hàm liên tục trong khoảng* $(a,b)$*, thì*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

*trong đó* $f(x)g(x)|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$*,*

(ix) (*Công thức đổi biến*) *Cho* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên đoạn* $[a,b]$ *và hàm* $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *liên tục trên đoạn* $[\alpha,\beta]$ *và có đạo hàm* $\varphi'$ *liên tục trong khoảng* $(\alpha,\beta)$*. Khi đó*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx,$$

(x) *Cho* $f : [a,b] \to f([a,b])$ *là một song ánh, liên tục trên* $[a,b]$*, có đạo hàm liên tục trong khoảng* $(a,b)$*. Khi đó*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = xf(x)|_a^b = bf(b) - af(a).$$

*Chứng minh Định lý 2.*

*Chứng minh* (i). Do các hàm $\alpha f + \beta g$, $|f|$ liên tục nên chúng khả tích trên $[a,b]$.

*Chứng minh* (ii), (iv), (v). $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, ta có

$$S(\alpha f + \beta g, P) = \alpha S(f,P) + \beta S(g,P),\ \ |S(f,P)| \le S(|f|\,, P),$$

và

$$S(f,P) \le S(g,P) \text{ nếu } f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b].$$

Cho $|P| \to 0$, ta có (ii), (iv), (v) đúng.

*Chứng minh* (iii). Xét $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n;\ \xi_1, \cdots, \xi_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[a,b]$ sao cho $c = x_{j_0} \in \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $\xi_i = x_i$.

Hai phân hoạch của hai đoạn $[a,c]$ và $[c,b]$ lần lượt là

$$P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{j_0};\ \xi_1, \cdots, \xi_n\},\ P_2 = \{x_{j_0}, x_{j_0+1}, \cdots, x_n;\ \xi_{j_0+1}, \cdots, \xi_n\}.$$

Các tổng Riemann của hàm $f$ tương ứng với hai phân hoạch $P_1$, $P_2$ là

$$S(f,P_1)=\sum_{i=1}^{j_0} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ S(f,P_2)=\sum_{i=j_0+1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Hơn nữa, ta còn có

$$S(f,P)=S(f,P_1)+S(f,P_2).$$

Qua giới hạn trong đẳng thức trên khi cho $Max\{|P_1|\,,|P_2|\}=|P|\to 0$, và với chú ý rằng do $f$ liên tục trên các đoạn $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$, ta có

$$S(f,P)\to\int_a^b f(x)dx,\ S(f,P_1)\to\int_a^c f(x)dx,\ S(f,P_2)\to\int_c^b f(x)dx,$$

và cuối cùng ta thu được (iii).

*Chứng minh* (vi). $\forall x,y\in[a,b]$, $x<y$, ta có

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f(t)dt\right|\le\int_x^y |f(t)|\,dt$$

Do $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, do đó nó bị chặn trên đoạn $[a,b]$, tức là tồn tại $M>0$, sao cho $|F(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Do đó ta có

$$|F(y)-F(x)|\le M\,|y-x|\,,\ \forall x,\ y\in[a,b].$$

Vậy hàm $F$ liên tục trên đoạn $[a,b]$.
$\forall x\in(a,b)$, và $\forall h>0$ đủ bé sao cho $x+h\in(a,b)$, ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt\right|\\ &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\\ &\le \sup_{x\le t\le x+h}|f(t)-f(x)|\,.\end{aligned}$$

Cho $\varepsilon>0$, do $f$ liên tục tại $x$, tồn tại $\delta>0$, $\delta<\min\{b-x,\ x-a\}$ sao cho

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall t\in(x-\delta,x+\delta).$$

Vậy nếu $0<h<\delta$, dẫn đến $[x,x+h]\subset(x-\delta,x+\delta)$, do đó

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\le\sup_{x\le t\le x+h}|f(t)-f(x)|\le\varepsilon.$$

Vậy tồn tại $\lim\limits_{h\to 0_+}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ và $=f(x)$. Điều này dẫn tới $F'_+(x)=f(x)$.
Tương tự, thực hiện lại lý luận trên với $h<0$, ta cũng có tồn tại $F'_-(x)=f(x)$.
Vậy $F$ có đạo hàm trong khoảng $(a,b)$ và $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$.
Tương tự, như trên ta cũng có $F'_+(a)=f(a)$, $F'_-(b)=f(b)$.
Vậy (vi) đúng.

*Chứng minh* (vii). Xét hàm số $g(x)=f(x)-f(a)-\displaystyle\int_a^x f'(t)dt$, $\forall x\in[a,b]$.
Theo (vi), $g$ có đạo hàm trên $[a,b]$, và

$$g'(x)=f'(x)-f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b),$$

do đó $g$ là hàm hằng trên $[a,b]$, vậy ta có

$$g(x) = g(a) = 0, \ \forall x \in [a,b],$$

tức là (vii) đúng.

*Chứng minh* (viii). Áp dụng (vii) với $F = fg$, ta có $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm $F'$ liên tục trong khoảng $(a,b)$, khi đó

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left[f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right] dx,$$

hay

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

tức là (viii) đúng.

*Chứng minh* (ix). Xét hàm số $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(y)dy$, $\forall x \in [a,b]$ và hàm $G(t) = F(\varphi(t)) = \displaystyle\int_a^{\varphi(t)} f(y)dy$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Ta có $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$. Ta có $G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$, có đạo hàm $G'$ liên tục trong khoảng $(\alpha, \beta)$, khi đó áp dụng (vii) với hàm $G(t)$, ta có

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta G'(t)dt,$$

mà

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta G'(t)dt &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \\
G(\beta) - G(\alpha) &= \int_a^{\varphi(\beta)} f(y)dy - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(y)dy = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy,
\end{aligned}$$

do đó (ix) đúng.

*Chứng minh* (x). Xét hàm số $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y)dy$, $\forall x \in [a,b]$. Ta có $F$ liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm $F'$ liên tục trong khoảng $(a,b)$, và

$$F'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))f'(x) = f(x) + xf'(x) = (xf(x))'.$$

Khi đó áp dụng (vii) với hàm $F(x)$, ta có

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b (xf(x))' \, dx = xf(x)|_a^b = bf(b) - af(a),$$

mà $F(a) = 0$, do đó (x) đúng.

Định lý 2 được chứng minh xong. □

## 7.3 Tích phân suy rộng

*Trường hợp* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

**Định nghĩa 3 (**Tích phân suy rộng loại 2, các cận hữu hạn) Cho $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện:

(i) $f$ khả tích trên mọi đoạn $[c,d] \subset (a,b)$,

(ii) Tồn tại số thực $I(f)$ sao cho $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ :

$$\forall(c,d) \in [(a,b)\cap(a,a+\delta)] \times [(a,b)\cap(b-\delta,b)] \Longrightarrow \left|\int_c^d f(x)dx - I(f)\right| < \varepsilon.$$

(Điều kiện (ii) có nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{c\to a_+,\ d\to b_-} \displaystyle\int_a^b f(x)dx = I(f) \in \mathbb{R}$).

Khi đó, ta gọi $I(f)$ *là tích phân suy rộng của* $f$ trên $(a,b)$ và ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

*Trường hợp* $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$; $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$.

**Định nghĩa 4 (**Tích phân suy rộng loại 1, có cận vô hạn) Cho $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện:

(i) $f$ khả tích trên mọi đoạn $[a,b] \subset [a,+\infty)$,

(ii) Tồn tại số thực $I(f)$ sao cho $\forall\varepsilon > 0, \exists B > a$ :

$$\forall b > B \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - I(f)\right| < \varepsilon.$$

(Điều kiện (ii) có nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{b\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)dx = I(f) \in \mathbb{R}$)

Khi đó, ta gọi $I(f)$ *là tích phân suy rộng của* $f$ trên tia $[a,+\infty)$ và ký hiệu là $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

*Trường hợp* $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$; $f : (-\infty,b] \to \mathbb{R}$.

**Định nghĩa 5 (**Tích phân suy rộng loại 1, có cận vô hạn) Cho $f : (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện:

(i) $f$ khả tích trên mọi đoạn $[a,b] \subset (-\infty,b]$,

(ii) Tồn tại số thực $I(f)$ sao cho $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A < b$ :

$$\forall a < A \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - I(f)\right| < \varepsilon.$$

(Điều kiện (ii) có nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{a\to-\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)dx = I(f) \in \mathbb{R}$)

Khi đó, ta gọi $I(f)$ *là tích phân suy rộng của* $f$ trên tia $(-\infty,b]$ và ký hiệu là $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Định nghĩa tương tự cho các tích phân suy rộng loại 2 cho các hàm xác định trên $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,c)\cup(c,b]$ và các tích phân suy rộng loại 1 cho các hàm xác định trên $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$.

**Định lý 3.** *Cho* $a$, $b \in \mathbb{R}$ *và giả sử* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *liên tục sao cho* $f((a,b))$ *bị chặn. Khi đó tồn tại tích phân suy rộng* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *của* $f$ *trên* $(a,b)$.

*Chứng minh Định lý 3.* Do $f((a,b))$ bị chặn, ta có $M > 0$ sao cho $|f(x)| \le M$, $\forall x \in (a,b)$. Cho hai dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset (a,b)$, sao cho $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$, $b_n \to b$.

$\forall m$, $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_{a_m}^{b_m} f(x)dx\right| &= \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_{a_m}^{b_n} f(x)dx + \int_{a_m}^{b_n} f(x)dx - \int_{a_m}^{b_m} f(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{a_n}^{a_m} f(x)dx + \int_{b_m}^{b_n} f(x)dx\right| \\
&\le \left|\int_{a_n}^{a_m} f(x)dx\right| + \left|\int_{b_m}^{b_n} f(x)dx\right| \\
&\le M\left(|a_m - a_n| + |b_m - b_n|\right) \to 0, \text{ khi } m,\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Do đó, $\left\{\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ nên nó hội tụ về số thực $L$.

Cho hai dãy bất kỳ $\{A_n\}$, $\{B_n\} \subset (a,b)$, sao cho $A_n < B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \to a$, $B_n \to b$. Ta sẽ chứng minh rằng $\displaystyle\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx \to L$, khi $n \to \infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right| &= \left|\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx - \int_{a_n}^{B_n} f(x)dx + \int_{a_n}^{B_n} f(x)dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{A_n}^{a_n} f(x)dx + \int_{b_n}^{B_n} f(x)dx\right| \\
&\leq \left|\int_{A_n}^{a_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{b_n}^{B_n} f(x)dx\right| \\
&\leq M\left(|A_n - a_n| + |B_n - b_n|\right) \to 0, \text{ khi } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx - L\right| &\leq \left|\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - L\right| \\
&\leq M\left(|A_n - a_n| + |B_n - b_n|\right) + \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - L\right| \to 0, \text{ khi } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Vậy $\displaystyle\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx \to L$, khi $n \to \infty$.

Định lý 3 được chứng minh xong. □

**Định nghĩa 6**. Cho $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$. Đặt $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_{i-1}, a_i)$. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ liên tục trên $A$ sao cho $f(A)$ bị chặn. Khi đó theo Định lý 3, tích phân suy rộng $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$ tồn tại và được gọi là *tích phân Riemann của $f$ trên* $(a,b)$ và được ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

**Định nghĩa 7 (**<u>*Định nghĩa khác*</u>, dùng các tổng Riemann trên và dưới). Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *bị chặn* trên đoạn $[a,b]$, ta đặt

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}, \\
U(f) &= \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b])\}.
\end{aligned}$$

Nếu $L(f) = U(f)$ ta nói hàm $f$ *khả tích Riemann* trên $[a,b]$ và ký hiệu $L(f) = U(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ và gọi $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ là *tích phân của $f$ trên* $[a,b]$.

**Định lý 4.** *Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, ta đặt*

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}, \\
U(f) &= \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b])\}.
\end{aligned}$$

*Khi đó $U(f) = L(f)$.*

*Chứng minh Định lý 4.* Dùng các bài tập bên dưới.

**Chú thích.** Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, ta có $L(f) = U(f) = I(f)$.
Do liên tục, ta có $L(f) = U(f)$. Ta chỉ cần chứng minh $I(f) = U(f)$.

Với phân hoạch $R = P \cup P_m$ như trên (trong chứng minh Định lý 1), nếu $\dfrac{b-a}{2^m} < \delta$ và $|P| < \delta$, ta có

$$\begin{aligned} |S(f,R) - S(f,P)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ |S(f,P_m) - I(f)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ |S(f,R) - S(f,P_m)| &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$L(f,P) \le L(f,R) \le S(f,R) \le U(f,R) \le U(f,P),$$

và

$$\begin{aligned} I(f) &< S(f,P_m) + \frac{\varepsilon}{3} < S(f,R) + \frac{2\varepsilon}{3} \le U(f,P) + \frac{2\varepsilon}{3}, \\ I(f) &> S(f,P_m) - \frac{\varepsilon}{3} > S(f,R) - \frac{2\varepsilon}{3} \ge L(f,P) - \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Ta suy ra

$$L(f,P) - \frac{2\varepsilon}{3} < I(f) < U(f,P) + \frac{2\varepsilon}{3}, \ \forall P \in \mathcal{P}([a,b]), \ |P| < \delta.$$

Từ bất đẳng thức vế phải

$$\begin{aligned} I(f) &\le \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b]), \ |P| < \delta\} + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\le \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b]) < \delta\} + \frac{2\varepsilon}{3} = U(f) + \frac{2\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức vế trái

$$\begin{aligned} I(f) &\ge \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b]), \ |P| < \delta\} - \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\ge \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} - \frac{2\varepsilon}{3} = L(f) - \frac{2\varepsilon}{3} = U(f) - \frac{2\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

Do đó

$$U(f) - \frac{2\varepsilon}{3} \le I(f) \le U(f) + \frac{2\varepsilon}{3}, \text{ hay } |U(f) - I(f)| \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Vậy $I(f) = U(f) = L(f)$.

Định lý 4 được chứng minh xong. $\square$

**Bài tập 1**: Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, và $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n; \ \xi_1, \cdots, \xi_n\}$, $Q = \{y_0, y_1, \cdots, y_m; \ \bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_m\}$ hai phân hoạch của đoạn $[a,b]$. Giả sử $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset \{y_0, y_1, \cdots, y_m]$. Chứng minh rằng $U(f,Q) \le U(f,P)$.

*Giải bài tập 1.* Đặt $I_i = \{j : x_{i-1} < y_j \le x_i\} = \{j : [y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\}$, ta có $\{1, 2, \cdots, m\} = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{j \in \mathbb{N} : [y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\}$.

Ta cũng chú ý rằng $\sum_{[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]} (y_j - y_{j-1}) = (x_i - x_{i-1})$. Từ đó

$$\begin{aligned} U(f,Q) &= \sum_{j=1}^{m} \sup_{y_{j-1} \le y \le y_j} f(y)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]} \sup_{y_{j-1} \le y \le y_j} f(y)(y_j - y_{j-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]} \sup_{x_{i-1} \le y \le x_i} f(y)(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1} \le y \le x_i} f(y) \sum_{[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]} (y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1} \le y \le x_i} f(y)(x_i - x_{i-1}) = U(f,P). \ \square \end{aligned}$$

**Bài tập 2**: Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, và $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n;\ \xi_1, \cdots, \xi_n\}$, $Q = \{y_0, y_1, \cdots, y_m;\ \bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_m\}$ hai phân hoạch của đoạn $[a,b]$.

Giả sử $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset \{y_0, y_1, \cdots, y_m\}$. Chứng minh rằng $L(f,P) \le L(f,Q)$.

*Giải bài tập 2.* Đặt

$$\begin{aligned}
L(f,Q) &= \sum_{j=1}^{m} \inf_{y_{j-1}\le y\le y_j} f(y)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]} \inf_{y_{j-1}\le y\le y_j} f(y)(y_j - y_{j-1}) \\
&\ge \sum_{i=1}^{n} \sum_{[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]} \inf_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y)(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y) \sum_{[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]} (y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y)(x_i - x_{i-1}) = L(f,P). \ \square
\end{aligned}$$

**Bài tập 3**: Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, và $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n,\ \xi_1, \cdots, \xi_n\}$, $Q = \{y_0, y_1, \cdots, y_m,\ \bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_m\}$ hai phân hoạch của đoạn $[a,b]$. Chứng minh rằng $L(f,P) \le U(f,Q)$.

*Giải bài tập 3.* Đặt $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \cdots, y_m\} = \{z_0, z_1, \cdots, z_k\}$.
Xét phân hoạch mới $R = \{z_0, z_1, \cdots, z_k\}$ ta có theo hai bài tập trên

$$L(f,P) \le L(f,R) \le U(f,R) \le U(f,Q). \ \square$$

**Bài tập 4**: Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, ta đặt

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}, \\
U(f) &= \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b])\}..
\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $L(f) \le U(f)$.

*Giải bài tập 4.* Ta có

$$L(f,P) \le U(f,Q),\ \forall P, Q \in \mathcal{P}([a,b]).$$

Cho $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, ta có

$$L(f,P) \le U(f,Q),\ \forall Q \in \mathcal{P}([a,b]).$$

Ta suy ra

$$L(f,P) \le \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b])\} = U(f).$$

Điều này đúng với mọi $P \in \mathcal{P}([a,b])$, ta suy ra

$$L(f) = \sup\{L(f,P) : L \in \mathcal{P}([a,b])\} \le U(f). \ \square$$

**Bài tập 5**: Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, ta đặt

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}, \\
U(f) &= \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b])\}.
\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $U(f) = L(f)$.

*Giải bài tập 5.* Ta xét một phân hoạch đều $P_n$ của đoạn $[a,b]$ như sau

$$P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \text{ với } x_i = a + i\frac{b-a}{n},\ i = 0, 1, \cdots, n.$$

Ta có

$$L(f,P_n) \le L(f) \le U(f) \le U(f,P_n).$$

Do đó

$$0 \le U(f) - L(f) \le U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[ \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \right] (x_i - x_{i-1}).$$

Do $f$ liên tục trên $[a,b]$ nên $f$ liên tục đều trên $[a,b]$. Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ :

$$\forall x, y \in [a,b], \ \ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nếu $|P_n| = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, ta có $|x_i - x_{i-1}| \le |P_n| = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, $\forall i = 1, \cdots, n$, do đó $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

Từ đó

$$\begin{aligned}
f(y) - \frac{\varepsilon}{b-a} &< f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, \cdots, n;\\
f(y) - \frac{\varepsilon}{b-a} &\le \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \le f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \forall y \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, \cdots, n;\\
\sup_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y) - \frac{\varepsilon}{b-a} &\le \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \le \sup_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \forall i = 1, \cdots, n;\\
0 &\le \sup_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \le \frac{\varepsilon}{b-a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\le U(f) - L(f) \le U(f,P_n) - L(f,P_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[ \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \right] (x_i - x_{i-1})\\
&\le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ta có $0 \le U(f) - L(f) \le \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Vậy $U(f) = L(f)$. $\square$

## 7.4 Bài tập bổ sung

**1**. Cho $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$.
(i) Chứng minh rằng $f$ khả tích Riemann trên $[0, 1]$,
(ii) Sử dụng phân hoạch đều hãy chứng tỏ rằng $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

**2**. Cho $f(x) = x^\alpha$, $0 \leq x \leq 1$, trong đó $\alpha = 2$ hay $\alpha = 3$.
(i) Chứng minh rằng $f$ khả tích Riemann trên $[0, 1]$,
(ii) Sử dụng phân hoạch đều hãy chứng tỏ rằng $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}$.

**3**. Cho $f$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng
(i) $fg$ khả tích trên $[a, b]$.
(ii) $\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)dx\right)^{1/2}$.

**4**. Cho $f$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng
(i) $\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^4 dx\right)^{1/4} \left(\int_a^b |g(x)|^{4/3} dx\right)^{3/4}$;
(ii) $\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p}$, $1 < p < \infty$;
(iii) $\min_{a \leq x \leq b} |g(x)| \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right) \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |g(x)| \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)$.

**5**. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng dãy $\left\{\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n}\right\}$ hội tụ và $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

*Hướng dẫn Bài **5***: $M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, ta có

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq M, \ \forall x \in [a, b], \\
\int_a^b |f(x)|^n dx &\leq \int_a^b M^n dx = (b - a)M^n, \\
\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} &\leq (b - a)^{1/n} M, \\
\text{hay } \left(\frac{1}{b - a}\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} &\leq M.
\end{aligned}$$

Để chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{1}{b - a}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n}\right\}$ hội tụ, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left\{\frac{1}{b - a}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n}\right\} \text{ là dãy không giảm.}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\int_a^b |F(x)G(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |F(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |G(x)|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p}$, với

$G(x) = 1$, $F(x) = |f(x)|^n$, $p = \dfrac{n+1}{n}$, ta có $p/(p-1) = n+1$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|^n\,dx &\le \left(\int_a^b (|f(x)|^n)^{\frac{n+1}{n}}\,dx\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_a^b 1^{n+1}dx\right)^{\frac{1}{n+1}}\\
&= \left(\int_a^b |f(x)|^{n+1}\,dx\right)^{\frac{n}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n+1}},\\
\text{hay } \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} &\le \left(\int_a^b |f(x)|^{n+1}\,dx\right)^{\frac{1}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n(n+1)}}\\
&= \left(\int_a^b |f(x)|^{n+1}\,dx\right)^{\frac{1}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n}} (b-a)^{\frac{-1}{n+1}}\\
\text{hay } \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} &\le \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^{n+1}\,dx\right)^{1/(n+1)}.
\end{aligned}$$

Vậy dãy $\left\{\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n}\right\}$ là dãy không giảm và bị chặn trên, do đó $\left\{\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n}\right\}$ hội tụ.

Mặt khác, do $(b-a)^{1/n} \to 1$, khi $n \to +\infty$, từ đẳng thức

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} = (b-a)^{1/n}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n},$$

chứng tỏ rằng dãy $\left\{\left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n}\right\}$ hội tụ. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \le M.$$

Cho $\varepsilon > 0$, do $M = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)| = \sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$, ta có $x_0 \in [a,b] : |f(x_0)| > M - \varepsilon$.

Nếu $x_0 \in (a,b)$, do tính liên tục của $f$ tại $x_0$, nên $\exists\delta > 0$, $\delta < \min\{x_0 - a, b - x_0\} : |f(x)| > M - \varepsilon$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \equiv (\alpha,\beta)$.

Nếu $x_0 = a$, do tính liên tục của $f$ bên phải tại $a$, nên $\exists\delta > 0$, $\delta < b - a : |f(x)| > M - \varepsilon$, $\forall x \in (a, a+\delta) \equiv (\alpha,\beta)$.

Nếu $x_0 = b$, do tính liên tục của $f$ bên trái tại $b$, nên $\exists\delta > 0$, $\delta < b - a : |f(x)| > M - \varepsilon$, $\forall x \in (b-\delta, b) \equiv (\alpha,\beta)$.

Trong các trường hợp trên, ta đều có một khoảng $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ sao cho $|f(x)| > M - \varepsilon$, $\forall x \in (\alpha,\beta)$, do đó

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|^n\,dx &\ge \int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n\,dx = (\beta-\alpha)(M-\varepsilon)^n,\\
\left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} &\ge (\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon).
\end{aligned}$$

Cho $n \to +\infty$, do $(\beta-\alpha)^{1/n} \to 1$, do dãy $\left\{\left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n}\right\}$ hội tụ, ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \ge (M-\varepsilon).$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có

$$M - \varepsilon \leq \lim_{n\to+\infty} \left( \int_a^b |f(x)|^n \, dx \right)^{1/n} \leq M.$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $\varepsilon > 0$, cho $\varepsilon \to 0_+$, ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( \int_a^b |f(x)|^n \, dx \right)^{1/n} = M$.

**6**. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Đặt $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng

(i) $F$ có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$;

(ii) Sử dụng hàm $F$ để tính đạo hàm của các hàm sau

(j) $F_1(x) = \int_a^{\beta(x)} f(x)dx$, trong đó $\beta : [a, b] \to [a, b]$ là hàm có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$;

(jj) $F_2(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)dx$, trong đó $\alpha$, $\beta$ : $[a, b] \to [a, b]$ là hai hàm có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$.

*Hướng dẫn Bài **6*** (i):

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x), \ a < x < b, \\ F'_+(a) &= f(a), \\ F'_-(b) &= f(b). \end{aligned}$$

*Hướng dẫn Bài **6*** (ii): $F_1(x) = \int_a^{\beta(x)} f(x)dx = F(\beta(x))$, $F_1'(x) = f(\beta(x))\beta'(x)$, $a < x < b$.

*Hướng dẫn Bài **6*** (iii): $F_2(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)dx = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$, $F_2'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$, $a < x < b$.

**7**. Cho $F(x) = \int_1^{x^2} \cos(t^2)dt$, $x \geq 1$. Chứng minh rằng

(i) $F$ có đạo hàm cấp 1 và cấp 2 tại mọi $x > 1$;

(ii) Tìm cực trị của hàm $F$;

(iii) Tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^{x^2} \cos(t^2)dt$.

*Hướng dẫn Bài **7*** (i), (ii):

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x\cos(x^4) = 0 \Longleftrightarrow x^4 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}_+ \Longleftrightarrow x = x_k = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}_+, \\ F''(x) &= 2\cos(x^4) - 8x^4\sin(x^4), \\ F''(x_k) &= -8x_k^4\sin(x_k^4) = -8x_k^4\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -8x_k^4\cos(k\pi) = 8x_k^4(-1)^{k-1}. \\ F'(x_k) &= 0 \neq F''(x_k) = 8x_k^4(-1)^{k-1} \\ k &= 2n \text{ chẵn} : F'(x_{2n}) = 0 \neq F''(x_{2n}) = -8x_{2n}^4 < 0 : \\ & \quad F \text{ đạt cực đại tại } x_{2n} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \ n \in \mathbb{Z}_+; \\ k &= 2n+1 \text{ chẵn} : F'(x_{2n+1}) = 0 \neq F''(x_{2n+1}) = 8x_{2n+1}^4 > 0 : \\ & \quad F \text{ đạt cực tiểu tại } x_{2n+1} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

*Hướng dẫn Bài* ***7*** (iii):

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{x^2} \cos(t^2)dt,\ x \geq 1. \\ s &= t^2,\ dt = \frac{ds}{2\sqrt{s}}, \\ F(x) &= \int_1^{x^2} \cos(t^2)dt = \int_1^{x^4} \cos s \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2}\int_1^{x^4} \cos s \frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{1}{2}\left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \sin s \Big|_1^{x^4} + \int_1^{x^4} \frac{1}{2s^{3/2}} \sin s ds \right] \\ &= \frac{\sin x^4}{2x^2} - \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{4}\int_1^{x^4} \frac{\sin s}{s^{3/2}} ds. \end{aligned}$$

Do $\dfrac{|\sin x^4|}{2x^2} \leq \dfrac{1}{2x^2} \to 0$ khi $x \to +\infty$, nên $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x^4}{2x^2} \to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^{x^4} \frac{\sin s}{s^{3/2}} ds$ tồn tại.

Ta sẽ sử dụng định lý sau

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) \text{ tồn tại } \iff \left[ \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : \\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > N \end{pmatrix} \implies |H(x) - H(y)| < \varepsilon \right].$$

Đặt $H(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \frac{\sin s}{s^{3/2}} ds$, với mọi $x$, $y > 1$, giả sử $x > y$, ta có

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &= \left| \int_{y^4}^{x^4} \frac{\sin s}{s^{3/2}} ds \right| \leq \int_{y^4}^{x^4} \frac{|\sin s|}{s^{3/2}} ds \leq \int_{y^4}^{x^4} \frac{1}{s^{3/2}} ds \\ &= -\frac{2}{\sqrt{s}}\Big|_{y^4}^{x^4} = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2} \leq \frac{2}{y^2}. \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon > 0$, Chọn $N : \dfrac{2}{N^2} < \varepsilon$. Khi đó, $\forall x, y > N \implies |H(x) - H(y)| < \varepsilon$.
Vậy tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = L \in \mathbb{R}$. Kết luận tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{L}{4}$.

# BÀI TẬP CHƯƠNG I

# Tài liệu tham khảo

[1] Bài giảng dựa trên các slides soạn theo quyển sách "Toán Giải Tích" của GS Dương Minh Đức, Nhà xuất bản Thống Kê 2005. Các slides này được để trên webpage https://sites.google.com/view/dmduc-giangday/ và được photocopy để sinh viên đọc trước khi nghe bài giảng.

[2] Dương Minh Đức, *Phương pháp mới học toán Đại học*, *Tập 1*, NXB Giáo dục, 2001.

[3] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1964.

[4] Jean Marie Monier, *Giải tích 2, 4*, bản dịch tiếng Việt bởi Đoàn Quỳnh, Lý Hoàng Tú, NXB Giáo dục, 2000.

[5] James Stewart, *Calculus*, Early Transcendentals, 7 th edition, Brooks Cole, 2018.