CƠ BẢN VỀ MAPLE

Maple là một hệ thống tính toán kết hợp giữa tính toán hình thức là các tính toán số chính xác và xấp xỉ. Đây là một công cụ mạnh và hết sức hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán tính toán trong Đại số tuyến tính. Trong hệ thống thư viện khổng lồ của Maple, về Đại số tuyến tính, có hai gói lệnh chính: LinearAlgbera và linalg. Tuy nhiên gói lệnh linalg cũ hơn và được coi như lỗi thời. Do vậy trong phần minh hoạ tính toán của môn Đại số A2, chúng tôi sẽ sử dụng gói lệnh LinearAlgebra. Người đọc có thể tham khảo thêm gói lệnh linalg. Mỗi gói lệnh chứa nhiều hàm, để gọi gói_lệnh nào đó ta sử dụng > with(gói_lệnh)

```
> with(LinearAlgebra);
```

Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE, CharacteristicMatrix,. . . . . . , VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip

Chú ý:

1. Các lệnh của Maple mặc định được gõ sau dấu > .
2. Nếu một dòng lệnh quá dài thì chúng ta có thể xuống dòng bằng cách dùng dấu \.
3. Kết qủa của một lệnh có thể được gán cho nhiều biến.

```
> (a,b,c):=1,2,3 ;
```

4. Truy xuất kết quả vừa được tính toán dùng ký tự %.

Véc tơ và Ma trận

Để khởi tạo một véc tơ hay một ma trận ta sử dụng các cách sau:

```
> with(LinearAlgebra):
> Vector([1,2,3]);        #dấu , là xuống dòng mới
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> u:=<1,2,3>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
>Vector[row]([1,2,3]),      <1|2|3>;        #dấu | là tạo cột mới
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> M := Matrix([[a, b, c], [d, e, f]]);
```

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

```
> «a|b|c>,<d|e|f»;
```

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

```
> Row(M,2), M(2,..);
```

$$\begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$$

```
> Column(M,3),M(..,3)
```

$$\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

```
>x:=<1,2,3>: Matrix([x,x]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>x := [1, 2, 3]: N:=Matrix([x, x]);
```

$$N := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>N[1,3];
```

Các phép toán trên ma trận

Cho $A, B, C, \ldots$ là các ma trận. Khi đó

- Dimension(A): chiều của véc tơ hoặc ma trận A
- RowDimension(A),ColumnDimension(A): số dòng và số cột của ma trận A
- Rank(A): hạng của ma trận A
- Transpose(A): Tìm ma trận chuyển vị của ma trận A.
- MatrixVectorMultiply(A,x), A.x: nhận ma trận A với véc tơ x.
- MatrixMatrixMultiply(A,B), A.B: nhân ma trận A với ma trận B
- Determinant(A): định thức của ma trận A
- MatrixInverse(A), A^ (-1): ma trận nghịch đảo của A
- Transpose(A): ma trận chuyển vị của A
- Trace(A): vết của ma trận A.

Các hàm hữu dụng cơ bản trong LinearAlgebra

- LinearSolve(A,b): giải hệ phương trình ma trận A.X=B
- Diagonal(A): đường chéo chính của A
- ZeroMatrix(n): ma trận không cấp n
- IdentityMatrix(n): ma trận đơn vị cấp n
- ConstantMatrix(c,n): ma trận hằng cấp n gồm toàn các phần tử c
- DiagonalMatrix(list): tạo ma trận đường chéo từ chuỗi list
- f:=x->xˆ 2: tạo hàm f(x)=xˆ 2
- RandomMatrix(m,n): tạo ma trận ngẫu nhiên có m dòng và n cột.

Các hàm dùng trong Đại số A1

1. GaussianElimination(A): Đưa ma trận AA về dạng bậc thang
2. ReducedRowEchelonForm(A), RREF(A): đưa ma trận A về dạng bậc thang rút gọn
3. NullSpace(A): tìm cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thần nhất liên kết với A
4. RowSpace(A), ColumnSpace(A): cơ sở cho không gian dòng và không gian cột
5. Basis(S), SumBasis(S1,S2), IntersectionBasis(S1,S2): cơ cở, cơ sở của không gian tổng, cơ sở của không gian giao. Trong đó S,S1,S2 là tập sinh của các không gian.

Chương 1. SỰ CHÉO HOÁ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Các hàm được dùng trong chương Sự chéo hoá:

- Eigenvalues(A): Liệt kê các trị riêng của A.
- Eigenvectors(A): Tập trị riêng và tập các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A.
- CharacteristicPolynomial(A,'x'): Tính đa thức đặc trưng của A theo biến x.
- MatrixPower(A,n): Luỹ thừa A^n.
- rsolve: giải hệ phương trình theo công thức truy hồi.
- dsolve: giải hệ phương trình vi phân.

1.1 Trị riêng và Véc tơ riêng

Ví dụ 1. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3)$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này.

Giải.

Cách 1:

```
>A := < <3|-2|0>,<-2|3|0>,<0|0|5> >
```

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>M := MatrixAdd(A, -lambda . IdentityMatrix(3))
```

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

```
>P := Determinant(M)        #Đa thức đặc trưng của ma trận
```

$$-\lambda^3 + 11\,\lambda^2 - 35\,\lambda + 25$$

```
>x := solve(P = 0)      #Trị riêng của ma trận là:
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
>E1 := eval(M, lambda = x[1])      #Không gian con riêng ứng với λ = 1
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>u1 := NullSpace(E1)      #Cơ sở của không gian con riêng E(1)
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>E2 := eval(M, lambda = x[2])      #Không gian con riêng ứng với λ = 5
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>u2 := NullSpace(E2)      #Cơ sở của không gian con riêng E(5)
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>B := {op(u1), op(u2)}      #Hệ véc tơ riêng độc lập tuyến tính:
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Cách 2:

```
>A := < <3|-2|0>,<-2|3|0>,<0|0|5> >
```

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

>L, V := Eigenvectors(A):

$$L, V := \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>L #Trị riêng của ma trận là:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

>V #Hệ véc tơ riêng độc lập tuyến tính là các véc tơ cột:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Chéo hoá ma trận

Ví dụ 2. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, -6x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

Hỏi f có chéo hoá được không?.

Giải.

>A:=< <4|1|-1>,<-6,-1,2>,<2|1|1> >

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

>L, V := Eigenvectors(A)

$$L, V := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>L #Trị riêng của ma trận là:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

>V #Hệ véc tơ riêng độc lập tuyến tính là các véc tơ cột:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>Rank(V)

$$2$$

#Do $Rank(V) = 2 < 3$ nên V không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ do đó ma trận A không chéo hoá được

Ví dụ 3. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3)$$

Hỏi f có chéo hoá được không?.

Giải.

>A:=< <4|2|-1>,<-6|-4|3>,<-6|-6|5> >

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

>L, V := Eigenvectors(A)

$$L, V := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/3 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>L #Trị riêng của ma trận là:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

>V #Hệ véc tơ riêng độc lập tuyến tính là các véc tơ cột:

$$\begin{bmatrix} -1/3 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>Rank(V)

$$3$$

#Do $Rank(V) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ nên V là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ do đó ma trận A chéo hoá được

1.3 Một số ứng dụng của chéo hoá ma trận

1.3.1 Luỹ thừa ma trận

Ví dụ 4. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1//2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n.

Giải.

```
>A:=< <1,-1>,<2,4 > >
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>L, V := Eigenvectors(A)
```

$$L, V := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>C := DiagonalMatrix(L)        #Ma trận chéo đồng dạng với A:
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>Cn := MatrixPower(C, n)        #Luỹ thừa n của ma trận chéo
```

$$\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

```
>An := MatrixInverse(V) . Cn . V        #Tính A^n từ công thức chéo hoá:
```

$$\begin{bmatrix} -3^n + 2\,2^n & 2^n - 3^n \\ -2\,2^n + 2\,3^n & 2\,3^n - 2^n \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Bằng Maple chúng ta có thể tính luỹ thừa ma trận chỉ bằng một hàm duy nhất:

```
>A:=< <1,-1>,<2,4 > >
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>An:=MatrixPower(A, n)
```

$$\begin{bmatrix} -3^n + 2^{1+n} & 2^n - 3^n \\ -2^{1+n} + 2\,3^n & 2\,3^n - 2^n \end{bmatrix}$$

1.3.2 Dãy số thoả công thức truy hồi

Ví dụ 5. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thoả các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = & u_n - v_n \\ v_{n+1} = & 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Giải.

```
>An          #Ở Ví dụ 4, ta đã tính được A^n
```

$$\begin{bmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -3^n + 2^n \\ 2\,3^n - 2^{n+1} & 2\,3^n - 2^n \end{bmatrix}$$

```
>X:=An.x
```

$$\begin{bmatrix} -3\,3^n + 2\,2^{n+1} + 2^n \\ 6\,3^n - 2\,2^{n+1} - 2^n \end{bmatrix}$$

```
>X[1]          #Công thức tổng quát của dãy u_n
```

$$-3\,3^n + 2\,2^{n+1} + 2^n$$

```
>X[2]          #Công thức tổng quát của dãy v_n
```

$$6\,3^n - 2\,2^{n+1} - 2^n$$

Lưu ý: Bằng Maple chúng ta có thể tìm u_n và v_n ngắn gọn bằng hàm rsolve như sau:

```
>eq1 := u(n+1) = u(n)-v(n)
```

$$u(n+1) = u(n) - v(n)$$

```
>eq2 := v(n+1) = 2u(n)+4v(n)
```

$$v(n+1) = 2\,u(n) + 4\,v(n)$$

```
>rsolve({eq1, eq2, u(0) = 2, v(0) = 1}, u(k), v(k))
```

$$\{u(k) = 5\,2^k - 3\,3^k, v(k) = -5\,2^k + 6\,3^k\}$$

Lưu ý: Có thể dùng hàm simplify để đơn giản hoá các kết trên.

1.3.3 Giải hpt vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x - y; \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + 4y. \end{cases}$

```
>A:=< <1,-1>,<2,4 > >
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>L, V := Eigenvectors(A)
```

$$L, V := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>x1 := C1*exp(L[1]*t)
```

$$C1\, e^{3t}$$

```
>y1 := C2*exp(L[2]*t)
```

$$C2\, e^{2t}$$

```
>X1 := <x1, y1>
```

$$\begin{bmatrix} C1\, e^{3t} \\ C2\, e^{2t} \end{bmatrix}$$

```
>X := MatrixVectorMultiply(V, X1)
```

$$\begin{bmatrix} -1/2\, C1\, e^{3t} - C2\, e^{2t} \\ C1\, e^{3t} + C2\, e^{2t} \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Bằng Maple chúng ta có thể tìm $x(t)$ và $y(t)$ ngắn gọn bằng hàm dsolve như sau:

```
>eqs := diff(x(t), t) = x(t)-y(t), diff(y(t), t) = 2*x(t)+4*y(t)
```

$$\left\{\frac{d}{dt}x(t) = x(t) - y(t), \frac{d}{dt}y(t) = 2\,x(t) + 4\,y(t)\right\}$$

```
>dsolve(eqs)
```

$$\{x(t) = \_C1\, e^{3t} + \_C2\, e^{2t}, y(t) = -2\,\_C1\, e^{3t} - \_C2\, e^{2t}\}$$

▷ Bài tập thực hành

Lưu ý: Không sử dụng các hàm trong gói lệnh **linalg** và **LinearAlgebra**.

Xem ma trận như là mảng hai chiều, hãy viết chương trình để:

Bài 1. Kiểm tra một ma trận có chéo hoá được không? Nếu được tìm dạng chéo và ma trận làm chéo.

- Tên hàm: **MatrixDiagonalization**
- Input: Ma trận A
- Ouput: Nếu A không chéo hoá được, xuất: "Ma trận A không chéo hoá được". Ngược lại, xuất ra dạng chéo và ma trận làm chéo.

```
> A:=< <4|2|-1>,<-6,-4,3>,<-6|-6|5> >:
> MatrixDiagonalization(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/3 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>B:=< <4|1|-1>,<-6,-1,2>,<2|1|1> >:
> MatrixDiagonalization(B);
```

"Ma trận B không chéo hoá được"

Bài 2. Luỹ thừa ma trận sử dụng phương pháp chéo hoá và hàm **MatrixDiagonalization** đã viết ở trên.

- Tên hàm: **PowerOfMatrix**
- Input: Ma trận A, số nguyên n.
- Ouput: Kiểm tra tính chéo hoá của A. Nếu A chéo hoá được xuất luỹ thừa A^n, nếu A không chéo hoá được xuất: "Không thực hiện luỹ thừa được bằng phương pháp chéo hoá".

```
> A:=< <4|2|-1>,<-6|-4|3>,<-6|-6|5> >:
> PowerOfMatrix(A,3);
```

$$\begin{bmatrix} 22 & 14 & -7 \\ -42 & -34 & 21 \\ -42 & -42 & 29 \end{bmatrix}$$

```
> B:=< <4|1|-1>,<-6,-1,2>,<2|1|1> >:
> PowerOfMatrix(B,3);
```

"Không thực hiện luỹ thừa được bằng phương pháp chéo hoá"

Bài 3. Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng bằng phương pháp chéo hoá.

- Tên hàm: **SLDEsolve**
- Input: Ma trận A liên kết với hệ phương trình vi phân tuyến tính cần giải.
- Ouput: Kiểm tra tính chéo hoá của A. Nếu A chéo hoá được xuất ra kết quả của hệ phương trình vi phân, nếu A không chéo hoá được xuất: "Không giải được bằng phương pháp chéo hoá".

```
> A:=< <4|2|-1>,<-6|-4|3>,<-6|-6|5> >:
> SLDEsolve(A);
```

$$\left\{x(t) = \_C1\, e^{t} + \_C2\, e^{2t}, y(t) = -3\,\_C1\, e^{t} - \_C2\, e^{2t}, z(t) = -3\,\_C1\, e^{t}\right\}$$

```
> B:=< <4|1|-1>,<-6,-1,2>,<2|1|1> >:
> SLDEsolve(B,3);
```

"Không giải được bằng phương pháp chéo hoá"

Phần II. Bài tập

1.1 Tìm đa thức đặc trưng của các ma trận sau đây:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2 Tìm trị riêng, cơ sở của không gian con riêng của các ma trận sau đây trên trường só thực $\mathbb{R}$. Ma trận nào trong số đó chéo hóa được? Trong trường hợp ma trận chéo hóa được hãy tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo nó.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Chứng minh rằng các toán tử sau đây không chéo hóa được trên $\mathbb{R}$:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, với

$f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 3x_2 + 2x_3, -5x_1 - 2x_2 - 2x_3, -3x_1 - 2x_2)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, với

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + 2x_2, x_3 - 2x_4, x_3 + 4x_4)$.

1.4 Chứng minh rằng các toán tử sau đây chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ và tìm cơ sở trong đó toán tử có dạng chéo:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, với

$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 3x_3, 3x_1 + 5x_2 + 3x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, với

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$

1.5 Toán tử sau đây có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ không? Trong trường hợp chéo hóa được hãy tìm một cơ sơ mà trong đó toán tử có dạng chéo:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, với

$f(x_1, x_2, x_3) =$

$$(-9x_1 - 8x_2 - 16x_3, 4x_1 + 3x_2 + 8x_3, 4x_1 + 4x_2 + 7x_3).$$

1.6 Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

a) A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ không?

b) A có chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ không?

1.7 Tìm điều kiện đối với a, b, c để ma trận sau đây chéo hóa được trên $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8 Cho A là ma trận vuông cấp 2 trên trường số phức $\mathbb{C}$ thỏa $A^2 = 0$. Chứng minh rằng nếu $A \neq 0$ thì A đồng dạng trên $\mathbb{C}$ với ma trận $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.9 Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp 2 trên trường số phức $\mathbb{C}$ thì A đồng dạng trên $\mathbb{C}$ với một ma trận thuộc một trong hai dạng sau:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

1.10 Cho A là ma trận vuông cấp hai trên trường số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu A là ma trận đối xứng (nghĩa là $A^t = A$) thì A chéo hóa được trên $\mathbb{R}$.

1.11 Cho V là không gian vectơ các hàm thực liên tục và T là một toán tử tuyến tính trên V được định nghĩa bởi

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng T không có trị riêng.

1.12 Xét $M_2(\mathbb{R})$ như một không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$ và $A \in M_2(\mathbb{R})$. Gọi $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ là một ánh xạ được định nghĩa bởi

$$T(X) = AX, \forall X \in M_2(\mathbb{R}).$$

Hỏi A và T có cùng tập hợp các trị riêng hay không?

1.13 Ký hiệu $K_n[t]$ là không gian vectơ gồm các đa thức của $K[t]$ có bậc $\leq n$. Cho toán tử tuyến tính

$$f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t],$$

được xác định như sau:

$$f(Q) = (2t+1)Q - (t^2-1)Q', \forall Q \in \mathbb{R}_2[t].$$

Hãy tính $f^n(t)$.

1.14 Cho V là không gian vectơ thực gồm tất cả các ma trận thực cấp 2 có vết bằng 0.

a) Tìm một cơ sở và số chiều của V.

b) Cho $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $f : V \longrightarrow V$ được định nghĩa bởi $f(X) = XB - BX, \forall X \in V$. Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong không gian V và tính $f^n(A)$, với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

1.15 Giả sử Fibonacii xây dựng dãy số của mình với $F_0 = 1, F_1 = 3$ và $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \forall k \geq 0$. Hãy tính các số Fibonacii mới và chứng minh rằng tỉ số F_{k+1}/F_k cũng dần tới "tỉ lệ vàng".

1.16 Hãy tìm điều kiện đối với các số thực a, b, c sao cho ma trận sau đây chéo hóa được:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.17 Cho $\mathbb{R}$ là trường số thực và $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi công thức

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + 3x_2, -2x_1 + x_2 + 2x_3),$$

đối với mọi phần tử $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Chứng minh rằng toán tử f chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ và tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận biểu diễn toán tử f trong cơ sở đó là một ma trận chéo.

b) Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, chứng minh rằng tồn tại một toán tử $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sao cho $g^n = f$.

1.18 Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng A chéo hóa được. Tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo A.

b) Đặt $B = \dfrac{1}{4}A$. Hãy tính $B^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

c) Cho các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}, (v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ được xác định theo qui tắc sau: $u_0 = 2, v_0 = 1$ và đối với mọi $n \geq 1$

$$u_n = \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-1}; v_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{4}v_{n-1}.$$

Hãy tính u_n và v_n như các hàm số của n. Tìm giới hạn của u_n và v_n khi n tiến tới ∞.

1.19 Tìm nghiệm phức của hệ phương trình vi phân sau đây:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$$

1.20 Tìm nghiệm thực của hệ phương trình vi phân sau đây:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + y + z. \end{cases}$$

Chương 2. DẠNG CHÍNH TẮC JORDAN

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Các hàm được dùng trong chương Dạng chính tắc Jordan:

- MinimalPolynomial(A,x): Đa thức tối tiểu của A theo biến x.
- CharacteristicPolynomial(A,x): Đa thức đặc trưng của A theo biến x.
- JordanForm(A): Dạng chính tắc Jordan của A.
- factor(expr): nhân tử hoá biểu thức expr.
- expand(expr): khai triển biểu thức expr.

2.1 Sự tam giác hoá

Ví dụ 1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hỏi A có tam giác hoá được trên $\mathbb{R}$ không? Nếu được hãy tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận tam giác.

```
>restart: with(LinearAlgebra):
>A:=< <-4|0|-2>,<0|1|0>,<5|1|3> >
```

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>P := CharacteristicPolynomial(A, lambda)
```

$$\lambda^3 - 3\,\lambda + 2$$

```
>x := solve(P = 0)
```

$$x := -2, 1, 1$$

```
>T:=< <-2|a|b>,<0|1|c>,<0|0|1> >
```

$$\begin{bmatrix} -2 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>NullSpace(A-x[1]*IdentityMatrix(3))

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

>u1 := %[1]

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

>E2 := <A-x[2]*IdentityMatrix(3)| a*u1>

$$\begin{bmatrix}-5 & 0 & -2 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\\5 & 1 & 2 & a\end{bmatrix}$$

>GaussianElimination(E2)

$$\begin{bmatrix}-5 & 0 & -2 & -a\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

>a:=0: >u2 := LinearSolve(E2(.., 1 .. 3), E2(.., 4), free = 's')

$$\begin{bmatrix}s_1\\0\\-5/2\,s_1\end{bmatrix}$$

>u2 := eval(u2, s[1] = -2)

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\5\end{bmatrix}$$

>E3 := <A-x[3]*IdentityMatrix(3)| b*u1+c*u2>

$$\begin{bmatrix}-5 & 0 & -2 & -b-2\,c\\0 & 0 & 0 & 0\\5 & 1 & 2 & b+5\,c\end{bmatrix}$$

>GaussianElimination(E3)

$$\begin{bmatrix}-5 & 0 & -2 & -b-2\,c\\0 & 1 & 0 & 3\,c\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

```
>b,c:=0,1:
>u3 := LinearSolve(E3(.., 1 .. 3), E3(.. , 4), free = 's')
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>u3 := eval(u3, s[1] = 0)
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>T
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>P:=<u1|u2|u3>
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>MatrixInverse(P) . A . P = T
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Đa thức triệt tiêu. Đa thức tối tiểu

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng Maple để kiểm chứng các kết quả lý thuyết

```
>A:=< <3|-1|0>,<0|2|0>,<1|-1|2> >
```

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>p := factor(CharacteristicPolynomial(A, lambda))
```

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

```
>m := factor(MinimalPolynomial(A, lambda))
```

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

```
>divide(p,m)
```

true

```
>P := unapply(expand(p), lambda)
```

$$\lambda \mapsto \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

```
>P(A)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>M := unapply(expand(m), lambda)
```

$$\lambda \mapsto \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

```
>M(A)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Dạng tam giác khối

Ví dụ 3. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn toán tử $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$. Tìm một sơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^4$ để $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận dạng tam giác khối.

```
>A := Matrix([[1, -1, 2, 2], [0, 0, 1, -1], [1, -1, 1, 0], [1, -1, 1, 0]])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>p := factor(CharacteristicPolynomial(A, x))
```

$$x^2 (x+1)(x-3)$$

```
>x := solve(p = 0)
```

$$x := -1, 3, 0, 0$$

```
>T := Matrix([[-1, 0, 0, 0], [0, 3, 0, 0], [0, 0, 0, a], [0, 0, 0, 0]])
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>NullSpace(A-x[1]*IdentityMatrix(4))
```

$$\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

```
>u1 := %[1]
```

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

```
>NullSpace(A-x[2]*IdentityMatrix(4))
```

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

```
>u2 := %[1]
```

$$\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

```
>NullSpace(A-x[3]*IdentityMatrix(4))
```

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

```
>u3 := %[1]
```

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

```
>E := <A-x[4]*IdentityMatrix(4)| a*u3>
```

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 2 & a\\0 & 0 & 1 & -1 & a\\1 & -1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

>GaussianElimination(E)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>a:=1:

>u4 := LinearSolve(E(.., 1 .. 4), E(.. , 5), free = 's')

$$\begin{bmatrix} s_2 - 1 \\ s_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>u4 := eval(u4, s[2] = 1)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>T

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>P:=<u1|u2|u3|u4>

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>MatrixInverse(P) . A . P = T

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Dạng chính tắc Jordan

Ví dụ 4. Cho ma trận $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận Jordan.

```
>A := Matrix([[2, -1, -2, 2], [-1, 4, 4, -3], [2, -1, -1, 2], [0, -1, -2, 4]])
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>p := factor(CharacteristicPolynomial(A, lambda))
```

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$$

```
>x := solve(p = 0)
```

$$x := 3, 2, 2, 2$$

```
>m := factor(MinimalPolynomial(A, lambda))
```

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$$

```
>4-Rank(A-x[1]*IdentityMatrix(4))
```

$$1$$

```
>4-Rank(A-x[2]*IdentityMatrix(4))
```

$$1$$

```
>T := Matrix([[3, 0, 0, 0], [0, 2, 1, 0], [0, 0, 2, 1], [0, 0, 0, 2]])
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>NullSpace(A-x[1]*IdentityMatrix(4))
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>u1 := %[1]
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>NullSpace(A-x[2]*IdentityMatrix(4))
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>u2 := %[1]
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>B := A-x[2]*IdentityMatrix(4)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>u3 := LinearSolve(B^2, 0*u1, free = 't')
```

$$\begin{bmatrix} t_4 \\ -t_3 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}$$

```
>u4 := LinearSolve(B^3, 0*u1, free = 'w')
```

$$\begin{bmatrix} -w_2 - w_3 + w_4 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

```
>w[2] := 0; w[3] := 1; w[4] := 0
```

>u4

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>u3 := MatrixVectorMultiply(B, u4)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

>P:=<u1|u2|u3|u4>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & 0 \\ 3/2 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

>MatrixInverse(P) . A . P = T

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Bằng Maple chúng ta có thể giải ngắn gọn bằng hàm JordanForm như sau:

>A := Matrix([[2, -1, -2, 2], [-1, 4, 4, -3], [2, -1, -1, 2], [0, -1, -2, 4]])

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

>T, P := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$T, P := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>T
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>P
```

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

▷ Bài tập thực hành

Lưu ý: Không sử dụng các hàm trong gói lệnh **linalg** và **LinearAlgebra**.

Xem ma trận như là mảng hai chiều, hãy viết chương trình để:

Bài 1. Kiểm tra một ma trận có tam giác hoá được không? Nếu được tìm ma trận tam giác đồng dạng và ma trận khả nghịch thực hiện việc tam giác hoá đó.

- Tên hàm: **MatrixTriangularization**
- Input: Ma trận A
- Ouput: Nếu A không tam giác hoá được, xuất: "Ma trận A không tam giác hoá được". Ngược lại, xuất ra dạng tam giác đồng dạng và ma trận thực hiện việc tam giác hoá.

```
>restart: with(LinearAlgebra):
>A:=< <-4|0|-2>,<0|1|0>,<5|1|3> >
```

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>MatrixTriangularization(A);
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>B:=< <2|1|2>,<0,1,0>,<-2|-3|3> >:
>MatrixTriangularization(B);
```

"Ma trận B không tam giác hoá được"

Bài 2. Viết hàm đưa một ma trận vuông về dạng tam giác khối đồng dạng.

- Tên hàm: **MatrixBlockTriangularization**

- Input: Ma trận A
- Ouput: Nếu A không đưa được về dạng tam giác khối, xuất: "Ma trận A không đưa được về dạng tam giác khối". Ngược lại, xuất ra dạng tam giác khối đồng dạng và ma trận thực hiện việc tam giác khối hoá.

```
>restart: with(LinearAlgebra):
>A:=< <-4|0|-2>,<0|1|0>,<5|1|3> >
```

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>MatrixBlockTriangularization(A);
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>B:=< <2|1|2>,<0,1,0>,<-2|-3|3> >:
>MatrixTriangularization(B);
```

"Ma trận B không tam giác khối hoá được"

Phần II. Bài tập

2.1 Đối với mỗi ma trận dưới đây hãy đưa về dạng tam giác và chỉ rõ ma trận khả nghịch P làm tam giác hóa nó:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2 Giải hệ phương trình vi phân $\dfrac{dX}{dt} = AX$, với A là ma trận trong Bài 2.4.

2.3 Tìm đa thức tối tiểu của các ma trận trong Bài 2.4.

2.4 Giả sử toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm đa thức tối tiểu của f và phân tích $\mathbb{R}^3$ thành tổng trực tiếp của các không gian đặc trưng.

2.5 Tìm dạng chính tắc Jordan của các ma trận

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix};\ b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix};$$

$$c)A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix};\ \ d)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6 Cho V là không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{R}$ và f là toán tử tuyến tính trên V. Giả sử có $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f^k = 0$. Chứng minh$f^n = 0$.

2.7 Tìm một ma trận vuông A cấp 3 có đa thức tối tiểu $P_A(t) = t^2$.

2.8 Giả sử toán tử $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tính đa thức tối tiểu của f. Từ đó rút ra kết luận gì về tính chéo hóa của toán tử f?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho trong đó ma trận biểu diễn của f có dạng chính tắc Jordan. Từ đó hãy chỉ ra một cơ sở cho mỗi không gian đặc trưng của f.

2.9 Tìm đa thức tối tiểu của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$. Ma trận A có chéo hóa được trên trường số thực $\mathbb{R}$ hay không?

2.10 Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tính A^n đối với mọi số nguyên dương n.

2.11 Tìm ma trận B sao cho B chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ và $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.12 Cùng một câu hỏi như trong Bài 6.9 cho các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. b) $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

2.13 Cho ma trận

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm đa thức đặc trưng của A.

b) Hãy tìm một ma trận Jordan A' đồng dạng với A và chỉ rõ ma trận khả nghịch P thỏa mãn $A' = P^{-1}AP$.

c) Áp dụng Câu b) để tính A^n, với n là một số nguyên dương bất kỳ.

Chương 3. KHÔNG GIAN EUCLID

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

3.1 Tích vô hướng. Chuẩn. Góc giữa hai véc tơ.

Để khởi tạo một vectơ ta sử dụng các hàm sau

- Vector(list_of_elements): trong đó list_of_elements là danh sách các phần tử có dạng $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
- Vector(n, element): Tạo ra vectơ n chiều với các phần tử có giá trị là element.
- RandVector(n): Tạo ngẫu nhiên một vectơ n chiều với các thành phần có giá trị nguyên thuộc $[-99, 99]$.

Ngoài ra,

- v[i]: Xác định thành phần thứ i của vectơ v.

```
> u := Vector([1, 2, -1, 2]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> v := Vector(4, 2);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> RandVector(4);    #Kết quả ngẫu nhiên
```

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 69 \\ 99 \\ 29 \end{bmatrix}$$

```
> u[3];
```

$$-1$$

3.1.1 Tích vô hướng

Đối với tích vô hướng trong không gian Euclid, gói lệnh LinearAlgebra chỉ chứa hàm tính tích vô hướng chính tắc DotProduct. Đối với các tích vô hướng khác, người dùng có thể tự định nghĩa. Tham khảo các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Thực hiện tính toán các tích vô hướng theo các yêu cầu sau:

a) Cho $u = (1, 2, 3), v = (-1, -2, -3)$. Tính tích vô hướng chính tắc của u và v.

b) Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, định nghĩa

$$\langle u, v\rangle := u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5x_2y_2$$

Tính $\langle(2, 3), (-1, 2)\rangle$.

c) Với các đa thức $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, ta định nghĩa

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Tính tích vô hướng của $2x^2 + x$ và $x + 1$.

```
> DotProduct([1, 2, 3], [-1, -2, -3])
                                   −14
> InnerProduct1:=(u,v)->u[1]*v[1]+2u[1]*v[2]+2u[2]*v[1]+5u[2]*v[2]:
> u := Vector([2, 3]): v := Vector([-1, 2]):
> InnerProduct1(u,v)
                                   30
> InnerProduct2:=(P,Q)->int(P*Q,x=0..1):
> P:=2x^2+x:Q:=x+1:
> InnerProduct2(P,Q)
                                   2
```

3.1.2 Chuẩn (độ dài)

Đối với chuẩn (độ dài) của một véc tơ, gói lệnh LinearAlgebra cung cấp 2 hàm: Norm và VectorNorm với các thông số để tính toán dựa trên các chuẩn phổ biến như chuẩn 1, chuẩn 2, chuẩn max...

Để tìm chuẩn của một véc tơ theo một chuẩn cụ thể nào đó, người dùng có thể định nghĩa hàm chuẩn như các ví dụ sau:

Ví dụ 2. Thực hiện tính toán chuẩn của các véc tơ theo các yêu cầu sau:

a) Cho $u = (1, 2, 3)$. Tính độ dài của u theo tích vô hướng chính tắc.

b) Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, định nghĩa

$$\langle u, v\rangle := u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5x_2y_2$$

Tính độ dài của véc tơ $u = (2, 3)$.

c) Với các đa thức $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, ta định nghĩa

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Tính độ dài của véc tơ $P(x) = 2x^2 + x$.

Lưu ý: Ở ví dụ này chúng ta sẽ sử dụng các tính vô hướng ở **Ví dụ 1.**

```
> NormOfVector:=(x,InnerProduct)->sqrt(InnerProduct(x,x)):
> NormOfVector([1,2,3],DotProduct)
```

$$\sqrt{14}$$

```
> NormOfVector([2,3],InnerProduct1)
```

$$\sqrt{73}$$

```
> NormOfVector(P,InnerProduct2)
```

$$\frac{4\sqrt{30}}{15}$$

3.1.3 Góc giữa hai véc tơ

Cho V là không gian Euclid và $u, v \in V$. Góc giữa hai véc tơ u và v là $\theta \in [0, \pi]$ thoả

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

LinearAlgebra cung cấp hàm VectorAngle để tính góc giữa 2 véc tơ theo tích vô hướng chính tắc. Người dùng có thể tự viết hàm tính góc dựa trên tích vô hướng có trước như sau:

Ví dụ 3. Thực hiện tính toán các tích vô hướng theo các yêu cầu sau:

a) Cho $u = (1, 2, 3), v = (-1, -2, -3)$. Tính góc của u và v theo tích vô hướng chính tắc.

b) Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, định nghĩa

$$\langle u, v\rangle := u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5x_2y_2$$

Tính góc của $u = (2, 3), v = (-1, 2)$.

c) Với các đa thức $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, ta định nghĩa

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Tính góc của $2x^2 + x$ và $x + 1$.

Lưu ý: Ở ví dụ này chúng ta sẽ sử dụng các tính vô hướng ở **Ví dụ 1** và chuẩn ở **Ví dụ 2.**

```
> VectorAngle([1, 2, 3], [-1, -2, -3])
```

$$\pi$$

```
> AngleOfVectors:=(u,v,InnerProduct)->evalf(arccos(\
InnerProduct(u,v)/(NormOfVector(u,InnerProduct)*NormOfVector(v,InnerProduct)))):
> AngleOfVectors([2, 3], [-1, 2], InnerProduct1)
```

$$0.2292319339$$

```
> AngleOfVectors(P, Q, InnerProduct2)
```

$$0.4591682147$$

```
> convert(%, degrees)
```

$$26.30840078\ degrees$$

3.2 Sự trực giao

Ví dụ 4. Cho $V = \mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc và W sinh bởi

$$\{u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (2, 3, -2, 1), u_3 = (4, 7, 0, 3)\}$$

Tìm $W^\perp$.

```
> A := Matrix([[1, 2, 1, 1], [2, 3, -2, 1], [4, 7, 0, 3]])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> LinearSolve(A, Vector(3, 0), free = 's')
```

$$\begin{bmatrix} -s_2 + 3\,s_3 \\ s_2 \\ s_3 \\ -s_2 - 4\,s_3 \end{bmatrix}$$

```
> NullSpace(A)
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3.3 Cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn

Ví dụ 5. Cho $V = \mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc; véc tơ $u = (1, 2, 0, 3)$ và không gian W sinh bởi

$$\{u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (2, 3, -2, 1), u_3 = (4, 7, 0, 3)\}$$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W?

b) Tìm hình chiếu trực giao của u lên W?

c) Tìm khoảng cách từ u tới W?

```
> S := [Vector([1, 1, 0, 0]), Vector([1, 0, -1, 1]), Vector([0, 1, 1, 1])]:
```

```
> GramSchmidt(S)
```

$$\left[\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right]$$

```
> GramSchmidt(S, normalized)
```

$$\left[\begin{bmatrix}1/2\sqrt{2}\\1/2\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/10\sqrt{10}\\-1/10\sqrt{10}\\-1/5\sqrt{10}\\1/5\sqrt{10}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/15\sqrt{15}\\1/15\sqrt{15}\\2/15\sqrt{15}\\1/5\sqrt{15}\end{bmatrix}\right]$$

```
> u := Vector([1, 2, 0, 3]):
> pu:=(u . B[1])*B[1]+(u . B[2])*B[2]+(u . B[3])*B[3]
```

$$\begin{bmatrix}4/3\\5/3\\1/3\\3\end{bmatrix}$$

```
> P := ProjectionMatrix(S)
```

$$\begin{bmatrix}2/3 & 1/3 & -1/3 & 0\\1/3 & 2/3 & 1/3 & 0\\-1/3 & 1/3 & 2/3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
> MatrixVectorMultiply(P, Vector([1, 2, 0, 3]))
```

$$\begin{bmatrix}4/3\\5/3\\1/3\\3\end{bmatrix}$$

```
> VectorNorm(u-pu,2)
```

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

▷ Bài tập thực hành

Bài 1. Viết hàm tính ma trận biểu diễn tích vô hướng InnerProduct theo cơ sở B.

- Tên hàm: **MatrixRepresentationOfInnerProduct**
- Input: Tích vô hướng InnerProduct và cơ sở B.

- Ouput: Ma trận biểu diễn của tích vô hướng InnerProduct theo cơ sở B.

Phần II. Bài tập

3.1 Với giá trị nào của $\lambda \in \mathbb{R}$ các ánh xạ dưới đây xác định tích vô hướng trong không gian $\mathbb{R}^3$:

a) $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$.

b) $\langle u, v\rangle = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$.

3.2 Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc. Chứng minh rằng với mọi $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \leq n\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big).$$

3.3 Cho không gian vectơ $M_n(\mathbb{R})$ gồm các ma trận vuông cấp n trên trường số thực $\mathbb{R}$.

a) Với $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, hãy tính vết $Tr(AA^\top)$ theo a_{ij}. Qua đó hãy chứng minh rằng $|Tr(A)| \leq \sqrt{nTr(AA^\top)}$.

b) Chứng minh rằng ánh xạ $(A, B) \mapsto Tr(AB^\top)$ xác định một tích vô hướng trong không gian $M_n(\mathbb{R})$.

3.4 Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc.

a) Cho P là mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi phương trình $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ và π là phép chiếu trực giao từ $\mathbb{R}^3$ xuống P. Hãy viết ma trận biểu diễn π theo cơ sở chính tắc.

b) Cho các vectơ $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 0)$ và $u_3 = (1, 1, 1)$. Chứng minh rằng $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Xét xem $\mathcal{B}$ có phải là cơ sở trực chuẩn không. Nếu $\mathcal{B}$ không phải là cơ sở trực chuẩn thì hãy sử dụng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt để xây dựng từ $\mathcal{B}$ một cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$.

c) Cho các vectơ $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 2)$ và $v_3 = (1, 1, 1)$. Hãy tìm số chiều và một cơ sở trực chuẩn cho không gian con sinh bởi các vectơ v_1, v_2, v_3.

3.5 Với $n \geq 0$, xét tích phân suy rộng

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-\dfrac{u^2}{2}}\, dx.$$

a) Chứng minh rằng tích phân này luôn hội tụ và $I_{2k+1} = 0, \forall k \geq 0$.

b) Chứng minh công thức truy hồi

$$I_n = (n-1)I_{n-2}, \forall n \geq 2.$$

Áp dụng để tính I_{2k}.

c) Định nghĩa ánh xạ

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}[u] \times \mathbb{R}[u] \longrightarrow \mathbb{R}$$

như sau:

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[u], \langle P, Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{u^2}{2}} P(u)Q(u)dx.$$

Chứng minh rằng ánh xạ nói trên là một tích vô hướng.

d) Xét không gian con $\mathbb{R}_2[u]$ của $\mathbb{R}[u]$. Hãy tính khoảng cách từ u^3 đến $\mathbb{R}_2[u]$.

3.6 Xét ánh xạ $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi:

$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4$
$+2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3.$

a) Chứng minh rằng ánh xạ này là một tích vô hướng trong $\mathbb{R}^4$.

b) Viết ma trận biểu diễn tích vô hướng này theo cơ sở chính tắc.

c) Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ xác định bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ \qquad\qquad x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở của $W^\perp$.

3.7 Trong không gian Euclide với tích vô hướng chính tắc cho các vectơ $u_1 = (2, 1, -2, 4), u_2 = (-2, 1, -1, -6), u_3 = (-2, 3, -4, -8)$. Gọi $W = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh ra bởi các vectơ u_1, u_2, u_3 và $W^\perp$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$ trực giao với W.

a) Tìm một cơ sở cho mỗi không gian con W và $W^\perp$.

b) Cho $u = (5, 5, -3, 1) \in \mathbb{R}^4$. Tìm hình chiếu trực giao $pr_W(u)$ của u xuống W và khoảng cách $d(u, W)$ từ u đến W.

3.8 Cho $A \in O(n, \mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu $\det A = 1$ thì mỗi phần tử a_{ij} của A đều bằng phần bù đại số của nó.

3.9 Cho f là một phép biến đổi trực giao trong không gian Euclid V.

a) Chứng minh rằng $Ker(f - Id_V) = Im(f - Id_V)^\perp$.

b) Chứng minh rằng, nếu $(f - Id_V)^2 = 0$ thì $f = Id_V$.

3.10 Xây dựng một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ từ các vectơ riêng của toán tử $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.11 Toán tử $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận theo cơ sở chính tắc là

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy chứng minh rằng f là toán tử trực giao trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc.

Chương 4. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH - DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

"Đang soạn....."

Phần II. Bài tập

4.1 Đưa các dạng toàn phương thực Q sau đây về dạng chính tắc. Chỉ ra cơ sở Q-chính tắc và phép biến đổi toạ độ không suy biến tương ứng. Xác định tập hợp $Q(\mathbb{R}^3)$:

a) $Q(u) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

b) $Q(u) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$

c) $Q(u) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$

d) $Q(u) = 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - 6x_2x_3$

e) $Q(u) = 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$

trong đó $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

4.2 Đưa các dạng toàn phương thực Q sau đây về dạng chính tắc trực giao. Chỉ ra cơ sở Q-chính tắc trực giao và phép biến đổi toạ độ trực giao tương ứng. Xác định tập hợp $Q(\mathbb{R}^3)$:

a) $Q(u) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

b) $Q(u) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

c) $Q(u) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

d) $Q(u) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

e) $Q(u) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

trong đó $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

4.3 Xác định tham số thực m để dạng toàn phương thực Q sau đây xác định dương:

a) $Q(u) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2mx_1x_2 + 2x_1x_3$

b) $Q(u) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2mx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

c) $Q(u) = 5x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

d) $Q(u) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2mx_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

e) $Q(u) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2mx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

trong đó $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

4.4 Cho Q là một dạng toàn phương trên không gian vectơ thực hữu hạn chiều V.

a) Giả sử $Q(u) \neq 0$ với mọi $u \in V \setminus \{0\}$. Chứng minh rằng Q hoặc xác định dương hoặc xác định âm.

b) Giả sử Q không suy biến và tồn tại $u \in V \setminus \{0\}$ sao cho $Q(u) = 0$. Chứng minh $Q(V \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$.

c) Giả sử Q suy biến. Chứng minh rằng tồn tại $u \in V \setminus \{0\}$ sao cho $Q(u) = 0$. Cho ví dụ để thấy rằng trong trường hợp này $Q(V \setminus \{0\})$ có thể bằng $\mathbb{R}$, có thể khác $\mathbb{R}$.

4.5 Cho Q là dạng toàn phương thực định bởi

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz.$$

Tìm tất cả các không gian con W của $\mathbb{R}^3$ có $\dim W = 2$ và $Q(u) > 0$ với mọi $u \in W \setminus \{0\}$.

4.6 Cho Q là một dạng toàn phương xác định dương trên không gian vectơ thực hữu hạn chiều V và f là dạng cực của Q. Chứng minh rằng với mọi $u, v \in V$ ta có

a) $|f(u, v)| \leq \sqrt{Q(u)Q(v)}$;

b) $\sqrt{Q(u + v)} \leq \sqrt{Q(u)} + \sqrt{Q(v)}$.

4.7 Chứng minh rằng một dạng toàn phương thực là xác định dương khi và chỉ khi ma trận A của nó (trong một cơ sở nào đó) được biểu diễn dưới dạng $A = C^\top C$ với C là một ma trận thực khả nghịch.

4.8 Cho Q_1 và Q_2 là hai dạng toàn phương thực, trong đó một trong hai dạng là xác định dương. Chứng minh rằng có thể đưa đồng thời Q_1 và Q_2 về dạng chính tắc (tức là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ sao cho các ma trận của Q_1 và Q_2 theo cơ sở này đều là ma trận chéo). Chỉ ra rằng giả thiết xác định dương không thể bỏ được.

4.9 Cho Q là một dạng toàn phương thực có biểu thức toạ độ theo cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ có dạng

$$Q(u) = f_1^2 + \cdots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \cdots - f_{s+t}^2$$

với $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, trong đó $f_1, \ldots, f_r$ là các dạng tuyến tính thực của các biến $x_1, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng Q có chỉ số dương quán tính không vượt quá s và chỉ số âm quán tính không vượt quá t.

4.10 Cho Q_1 và Q_2 là hai dạng toàn phương trên V. Ta nói $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ đưa Q_1 về Q_2 nếu $Q_2(u) = Q_1(\varphi(u))$ với mọi $u \in V$. Nếu tồn tại một phép biến đổi tuyến tính không suy biến trên V đưa Q_1 về Q_2 thì ta nói Q_1 và Q_2 *tương đương*. Chứng minh rằng

a) Hai dạng toàn phương là tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng dạng chính tắc.

b) Hai dạng toàn phương thực là tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng các chỉ số quán tính.

4.11 Cho Q_1 và Q_2 là hai dạng toàn phương thực. Chứng minh rằng nếu từ mỗi dạng này có thể đưa về dạng kia bằng một phép biến đổi tuyến tính (có thể suy biến) thì Q_1 và Q_2 tương đương.