CHỦ ĐỀ 7: BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER VÀ ỨNG DỤNG

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Dưới đây tôi trình bày bất đẳng thức Holder cho 3 dãy số mỗi dãy gồm 3 số dương.

Cho a, b, c, x, y, z, m, n, p là các số thực dương ta có

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge\left(axm+byn+czp\right)^3.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}$$
$$\ge\frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{n^3}{m^3+n^3+p^3}$$
$$\ge\frac{3byn}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$
$$\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{p^3}{m^3+n^3+p^3}$$
$$\ge\frac{3czp}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1. Cho a,b,c là các số thực dương ta có

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\left(abc+1\right).$$

Lời giải

Nhận xét. Với $a=b=c$ bất đẳng thức trở thành

$$2\left(a^2+1\right)^3\ge\left(a^3+1\right)\left(a+1\right)^3\Leftrightarrow\left(a-1\right)^4\left(a^2+a+1\right)\ge0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy ta có

$$2\left(a^2+1\right)^3 \ge (a+1)^3\left(a^3+1\right)$$

$$2\left(b^2+1\right)^3 \ge (b+1)^3\left(b^3+1\right)$$

$$2\left(c^2+1\right)^3 \ge (c+1)^3\left(c^3+1\right)$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$8\left(a^2+1\right)^3\left(b^2+1\right)^3\left(c^2+1\right)^3 \ge (a+1)^3(b+1)^3(c+1)^3\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right) \ge (1+abc)^3$.

Đây chính là bất đẳng thức Holder. Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \ge \sqrt{3}.$$

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+b\left(2c^2+2a^2-b^2\right)+c\left(2a^2+2b^2-c^2\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge (a+b+c)^3 \Rightarrow P^2 \ge \frac{(a+b+c)^3}{S}$.

Vậy ta chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^3}{S} \ge 3$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \ge 3\left[a\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+b\left(2c^2+2a^2-b^2\right)+c\left(2a^2+2b^2-c^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+6abc \ge 4\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]$$

Chú ý $a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 3. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \ge 3$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a\left(b+c-a\right)+b\left(c+a-b\right)+c\left(a+b-c\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\geq\left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\left(a+b+c\right)^3\geq 9S$

$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)^3\geq 9\left[2\left(ab+bc+ca\right)-3\right]$.

Đặt $x=a+b+c,\left(x\in\left[\sqrt{3};3\right]\right)$ ta có $2\left(ab+bc+ca\right)=x^2-3$ ta cần chứng minh

$$x^3\geq 9\left(x^2-6\right)\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(x^2-6x-18\right)\geq 0,\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right].$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b+c+7}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a+7}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b+7}}\geq 1$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a\left(b+c+7\right)+b\left(c+a+7\right)+c\left(a+b+7\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\geq\left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\left(a+b+c\right)^3\geq S$

$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)^3\geq 2\left(ab+bc+ca\right)+7\left(a+b+c\right)$.

Ta có $ab+bc+ca\leq\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$.

Vậy ta chứng minh $\left(a+b+c\right)^3\geq\dfrac{2}{3}\left(a+b+c\right)^2+7\left(a+b+c\right)$

$$\Leftrightarrow 3\left(a+b+c\right)^2-2\left(a+b+c\right)-21\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\left(a+b+c-3\right)\left[3\left(a+b+c\right)+7\right]\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Cho x,y,z là độ dài 3 cạnh một tam giác.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{x+y-z}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+z-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{z+x-y}}\geq\dfrac{x+y+z}{\sqrt{xyz}}$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=x^3\left(y+z-x\right)+y^3\left(z+x-y\right)+z^3\left(x+y-z\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge \left(x+y+z\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{\left(x+y+z\right)^3}{S} \ge \left(\dfrac{x+y+z}{\sqrt{xyz}}\right)^2$

$\Leftrightarrow xyz\left(x+y+z\right) \ge x^3\left(y+z-x\right)+y^3\left(z+x-y\right)+z^3\left(x+y-z\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+xyz\left(x+y+z\right) \ge xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng(xem thêm chủ đề biến đổi tương đương).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge 2$.

Lời giải

Nhận xét. Bất đẳng thức trên đã được chứng minh đơn giản bằng bất đẳng thức AM – GM dưới đây ta tiếp cận bài toán theo bất đẳng thức Holder.

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a^2\left(b+c\right)+b^2\left(c+a\right)+c^2\left(a+b\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge \left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\left(a+b+c\right)^3 \ge 4S$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc \ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$

$3abc \ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có 1 số bằng 0 và 2 số còn lại bằng nhau.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=a+b+c$.

Chứng minh rằng $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le ab+bc+ca$.

Lời giải

Ta có

$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow 2\left(ab+bc+ca-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\right)=a^4+b^4+c^4-a^2-b^2-c^2$

Vậy ta chứng minh $a^4+b^4+c^4 \ge a^2+b^2+c^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(a+b+c\right)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge a^2+b^2+c^2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a^5}{a^3+2bc}}+\sqrt{\dfrac{b^5}{b^3+2ca}}+\sqrt{\dfrac{c^5}{c^3+2ab}}\ge\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a\left(a^3+2bc\right)+b\left(b^3+2ca\right)+c\left(c^3+2ab\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P^2S\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3=27$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a\left(a^3+2bc\right)+b\left(b^3+2ca\right)+c\left(c^3+2ab\right)\le 9$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+6abc\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 3abc$$

Bất đẳng thức cuối đúng bởi vì theo AM – GM ta có

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\sqrt{3a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=3abc.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Bài 3. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2+7}}+\dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2+7}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+7}}\ge 1$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a}{1+b+bc}}+\sqrt{\dfrac{b}{1+c+ca}}+\sqrt{\dfrac{c}{1+a+ab}}\ge\sqrt{3}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh rằng

$$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\ge(a+b+c)^3.$$

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=xy+yz+zx$.

Chứng minh rằng $(x+y+z)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\ge 27$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge 3\sqrt[4]{\dfrac{x^4+y^4+z^4}{3}}$.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\ge\left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right).$$

Bài 11. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\ge\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Bài 12. Cho *a,b,c* là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{(1+a)^3}+\dfrac{1}{(1+b)^3}+\dfrac{1}{(1+c)^3}\ge\dfrac{3}{4(1+abc)}$.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\ge 1.$$

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$9\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)\left(c^4+1\right)\ge 8\left(a^2b^2c^2+abc+1\right)^2.$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge 4(a+b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{3(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{(b+c)^3}+\frac{b}{(a+c)^3}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{27}{8(a+b+c)^2}.$$

Bài 17. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}}\ge 1.$$

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{(b+c)^2+5c^2}}+\frac{b}{\sqrt{(c+a)^2+5a^2}}+\frac{c}{\sqrt{(a+b)^2+5b^2}}\ge 1.$$

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $abc\left(\sqrt[3]{6a+\frac{1}{c}}+\sqrt[3]{6b+\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{6c+\frac{1}{b}}\right)\le 1.$

Bài 20. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4.$$

Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\ge 1.$

Bài 21. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}\le 2(a+b+c)$.

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$4abc\left[\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}\right]+1\ge\frac{13}{4}(ab+bc+ca).$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2=(1+1+1)\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 2. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(a+b+c)^3=1$.

Mặt khác $S=2(ab+bc+ca)\le\frac{2}{3}(a+b+c)^2=\frac{2}{3}\Rightarrow P\ge\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 3. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(a+b+c)^3$

Vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\ge S$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo AM – GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(b^2+c^2+7\right)+b\left(c^2+a^2+7\right)+c\left(a^2+b^2+7\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(a+b+c)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\ge S$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge 7(a+b+c)+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge 7(a+b+c)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge 7(a+b+c)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a(1+b+bc)+b(1+c+ca)+c(1+a+ab).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3\ge 3(3+ab+bc+ca+3abc)$

$$\Leftrightarrow\sum a^2+3\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)+6(abc)^{\frac{2}{3}}\ge 9+3(ab+bc+ca)+9abc.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\ge 2(ab+bc+ca)$.

Vậy ta cần chứng minh $ab+bc+ca+6(abc)^{\frac{2}{3}} \ge 9abc$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$$ab+bc+ca+6(abc)^{\frac{2}{3}} \ge 9(abc)^{\frac{2}{3}} \ge 9abc \text{ vì } abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=3, b=c=0$ và các hoán vị.

Bài 6. Chú ý $a^5-a^2+3-\left(a^3+2\right)=(a-1)^2(a+1)\left(a^2+a+1\right) \ge 0$.

Thiết lập tương tự và ta chứng minh

$$\left(a^3+1+1\right)\left(1+b^3+1\right)\left(1+1+c^3\right) \ge (a+b+c)^3.$$

Đây chính là bất đẳng thức Holder.

Bài 7. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \ge (x+y+z)^3.$$

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{(x+y+z)^4}{x^2+y^2+z^2} \ge 27$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^4 \ge 27(x+y+z)(x+y+z-2)$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3+54 \ge 27(x+y+z)$

$\Leftrightarrow (x+y+z-3)^2(x+y+z+6) \ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 8. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \ge (a+b+c)^3 = 27.$$

Vậy ta cần chứng minh $27 \ge (ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM

$$(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right) \le \left(\frac{2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 = 27.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge \left(x^2+y^2+z^2\right)^3$.

Ta cần chứng minh

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} \ge 9\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 \ge 3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\sqrt{3\left(x^4+y^4+z^4\right)}$$

Đặt $a=x^2+y^2+z^2, b=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \Rightarrow x^4+y^4+z^4=a^2-2b$.

Bất đẳng thức trở thành $a^3 \ge 3b\sqrt{3\left(a^2-2b\right)}$

$$\Leftrightarrow a^6-27a^2b+54b^3 \ge 0 \Leftrightarrow \left(a^2-3b\right)^2\left(a^2+6b\right) \ge 0.$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài tập tương tự

Chứng minh x,y,z là các số thực dương thoả mãn $x^4+y^4+z^4=3$ ta có

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \ge 3.$$

Bài 10. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+b^3\right) \ge \left(1+ab^2\right)^3$$

$$\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\left(1+c^3\right) \ge \left(1+bc^2\right)^3 .$$

$$\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)\left(1+a^3\right) \ge \left(1+ca^2\right)^3$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 11. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(1+1+1)(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right) \ge (a+b+c)^3$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \ge \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 12. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1+abc}{(1+a)^3}+\frac{1+abc}{(1+b)^3}+\frac{1+abc}{(1+c)^3} \ge \frac{3}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta được:

$$\left(1+abc\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq\left(1+a\right)^3\Rightarrow\frac{1+abc}{\left(1+a\right)^3}\geq\frac{bc}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}.$$

Tương tự: $\frac{1+abc}{\left(1+b\right)^3}\geq\frac{ac}{\left(b+a\right)\left(b+c\right)};\frac{1+abc}{\left(1+c\right)^3}\geq\frac{ab}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và cần chứng minh

$$\frac{bc}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}+\frac{ac}{\left(b+a\right)\left(b+c\right)}+\frac{ab}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}\geq\frac{3}{4}.$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\geq\frac{3}{4}\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right).$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\geq 6abc.$$

Bất đẳng thức cuối theo AM-GM.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 13. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(a+2b\right)+b\left(b+2c\right)+c\left(c+2a\right)=\left(a+b+c\right)^2=1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.P.S\geq\left(a+b+c\right)^4\Leftrightarrow P^3\geq 1\Leftrightarrow P\geq 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 14. Với $a=b=c$ bất đẳng thức trở thành

$$9\left(a^4+1\right)^3\geq 8\left(a^6+a^3+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^3\geq 8\left(a^3+\frac{1}{a^3}+1\right)^2.$$

Đặt $x=a+\frac{1}{a},\left(x\geq 2\right)$ bất đẳng thức trở thành

$$9\left(x^2-2\right)^3\geq 8\left(x^3-3x+1\right)^2\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2\left(x\left(x^3-8\right)+4\left(x^3-5\right)+6x^2\right)\geq 0.$$

Bất đẳng thức luôn đúng với $x\geq 2$.

Áp dụng ta có $9\left(a^4+1\right)^3\geq 8\left(a^6+a^3+1\right)^2$

$$9\left(b^4+1\right)^3\geq 8\left(b^6+b^3+1\right)^2$$

$$9\left(c^4+1\right)^3\geq 8\left(c^6+c^3+1\right)^2$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$9^3\left(a^4+1\right)^3\left(b^4+1\right)^3\left(c^4+1\right)^3 \ge 8^3\left(a^6+a^3+1\right)^2\left(b^6+b^3+1\right)^2\left(c^6+c^3+1\right)^2.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(a^6+a^3+1\right)\left(b^6+b^3+1\right)\left(c^6+c^3+1\right) \ge \left(a^2b^2c^2+abc+1\right)^3.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=c\left(a+b\right)^2+b\left(c+a\right)^2+a\left(b+c\right)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge \left(a+b+b+c+c+a\right)^3 = 8\left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{8\left(a+b+c\right)^3}{a\left(b+c\right)^2+b\left(c+a\right)^2+c\left(a+b\right)^2} \ge \frac{16\left(a+b+c\right)^3}{3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \ge 2\left[a\left(b+c\right)^2+b\left(c+a\right)^2+c\left(a+b\right)^2\right].$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right) \ge 9abc$$

Luôn đúng theo AM – GM.

Bài 16. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a+b+c$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P.S.S \ge \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^3 \ge \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow P \ge \frac{27}{8\left(a+b+c\right)^2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 17. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$\begin{aligned} S &= 8ab\left(4a+4b+c\right)+8bc\left(4b+4c+a\right)+8ca\left(4c+4a+b\right) \\ &= 32\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-72abc \end{aligned}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P.P.S \ge \left(a+b+b+c+c+a\right)^3 = 8\left(a+b+c\right)^3.$$

Vậy ta chứng minh $8\left(a+b+c\right)^3 \ge S$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 8\left(a+b+c\right)^3 \ge 32\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-72abc \\ &\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)^3+9abc \ge 4\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right) \end{aligned}.$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 18. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$S = a\left[(b+c)^2 + 5c^2\right] + b\left[(c+a)^2 + 5a^2\right] + c\left[(a+b)^2 + 5b^2\right]$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P^2.S \ge (a+b+c)^3$.

Vậy ta cần chứng minh

$(a+b+c)^3 \ge a\left[(b+c)^2 + 5c^2\right] + b\left[(c+a)^2 + 5a^2\right] + c\left[(a+b)^2 + 5b^2\right]$

$\Leftrightarrow a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 19. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\sqrt[3]{6a+\frac{1}{c}} + \sqrt[3]{6b+\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{6c+\frac{1}{b}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}(6ab+1)} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}(6bc+1)} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}(6ca+1)}$$

$$\le \sqrt[3]{3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(6ab+1+6bc+1+6ca+1)} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \le \frac{1}{abc}$$

Vì theo AM – GM ta có $abc \le \sqrt{\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 20. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3} + \frac{b}{a^3+b^2+c^3} + \frac{c}{a^3+b^3+c^2}$$

$$= \frac{a^2}{a^3+ab^3+ac^3} + \frac{b^2}{a^3b+b^3+bc^3} + \frac{c^2}{ca^3+cb^3+c^3}$$

$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)}.$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{a^4+b^4+c^4+ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)} = \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Ta chứng minh $a+b+c \ge a^3+b^3+c^3$.

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(a^4+b^4+c^4\right)^2 \ge \left(a^3+b^3+c^3\right)^3$$

Đúng theo bất đẳng thức Holder.

Bài 21. ọi P là biểu thức vế trái sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P^3=\left(\sqrt[3]{\frac{7a^2b+1}{a^2}.a.a}+\sqrt[3]{\frac{7b^2c+1}{b^2}.b.b}+\sqrt[3]{\frac{7c^2a+1}{c^2}.c.c}\right)^3$$

$$\le\left(\frac{7a^2b+1}{a^2}+\frac{7b^2c+1}{b^2}+\frac{7c^2a+1}{c^2}\right)(a+b+c)^2=8(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 22. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}\ge\frac{(a+b+c)^3}{\left(a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)\right)^2}=\frac{1}{(t+1)^2}.$$

Với $t=a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$.

Đặt $p=a+b+c=1;q=ab+bc+ca=\frac{p^2-t}{2}=\frac{1-t}{2};r=abc$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Schur bậc ba ta có

$abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$\Rightarrow abc\ge(1-2a)(1-2b)(1-2c)\Rightarrow 9r+1-4q\ge 0\Leftrightarrow r\ge\frac{4q-1}{9}=\frac{1-2t}{9}\cdot$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4.\frac{1-2t}{9}.\frac{1}{(t+1)^2}+1\ge\frac{13}{8}(1-t)\Leftrightarrow(3t-1)\left(39t^2+76t+13\right)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

CHỦ ĐỀ 8: KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Bất đẳng thức Chebyshev với hai dãy đơn điệu cùng chiều

Nếu có $\begin{cases}a_1\ge a_2\ge...\ge a_n\\ b_1\ge b_2\ge...\ge b_n\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1\le a_2\le...\le a_n\\ b_1\le b_2\le...\le b_n\end{cases}$ thì ta có

$n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)\ge(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a_1=a_2=...=a_n\\ b_1=b_2=...=b_n\end{cases}$.

Chứng minh. Ta có đẳng thức

