Về bài thi Giữa kỳ 25%

Ngày thi:	thứ Năm, ngày 28 / 11 / 2024, lúc 09 : 00 sáng
Phòng thi:	xem trên trang web của trường
Thời lượng:	60 phút
Nội dung:	Chương 1 (tích phân trên hình hộp) đến Chương 5 (công thức đổi biến).

Sinh viên được mang một tài liệu viết tay trên một tờ giấy A4.

Công thức đổi biến

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 12 tháng 11 năm 2024

Dẫn nhập

Ta tính diện tích của hình tròn tâm O bán kính R bằng cách tính tích phân:

$$I = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = R\sin t$ thì $\mathrm{d}x = R\cos t\,\mathrm{d}t$, và $x = 0$ tương ứng $t = 0$, $x = R$ tương ứng $t = \frac{\pi}{2}$. Khi đó, tích phân trở thành:

$$I = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))\,\mathrm{d}t = 2R^2 \left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$

Trong chương này, ta khảo sát phương pháp đổi biến cho tích phân bội. Một cách cụ thể, với tích phân $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$, nếu *đổi biến* $x = \varphi(u)$ thì tích phân sẽ thay đổi như thế nào?

Nhắc lại: Vi phân trong $\mathbb{R}^n$

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ và x là *điểm trong* của D. Các vectơ tạo thành cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Đạo hàm riêng của $f : D \to \mathbb{R}$ theo biến thứ i tại x được định nghĩa là số thực

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

Đây chính là đạo hàm một biến của hàm f khi xem f chỉ là hàm theo biến x_i, là tỉ lệ, hay tốc độ thay đổi của giá trị của hàm so với giá trị của biến thứ i tại điểm x.

Tổng quát hơn, xét hàm $f : D \to \mathbb{R}^m$. Nếu tất cả các đạo hàm riêng của các thành phần của f tồn tại và liên tục tại x thì ta nói hàm f khả vi liên tục (continuously differentiable) hay trơn (smooth) tại x.

Ma trận các đạo hàm riêng của f tại x được gọi là ma trận Jacobi của f tại x:

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Ví dụ: Khi $m = 1$, ma trận Jacobi $J_f(x)$ chính là vectơ gradient

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Nếu có một ánh xạ tuyến tính $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho có một quả cầu $B(x, \epsilon) \subset D$ và một hàm $r : B(x, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ thỏa mãn:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + r(h), \quad \forall h \in B(x, \epsilon)$$

và $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, thì ánh xạ $f'(x)$ (còn được ký hiệu $\mathrm{d}f(x)$) được gọi là đạo hàm (Fréchet) của f tại x.

Như vậy, giá trị của hàm có thể được xấp xỉ tuyến tính bằng đạo hàm:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)(h).$$

Điều kiện này cho phép ta kết luận nếu f khả vi tại x thì liên tục tại x.

Nếu f khả vi tại x, thì ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ có thể được biểu diễn trong cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ bởi ma trận Jacobi $J_f(x)$:

$$f'(x)(h) = J_f(x) \cdot h,$$

trong đó phép nhân $\cdot$ ở vế phải là phép nhân ma trận. Ta cũng có:

$$\det f'(x) = \det J_f(x).$$

Ví dụ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 1$. Ta xét hàm $f'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi

$$f'(x)(h) = 2xh.$$

Với mọi $h \in \mathbb{R}$, ta có:

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)(h) = (x+h)^2 + 1 - x^2 - 1 - 2xh = h^2,$$

và $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

Do đó, $f'(x) = 2x$ là đạo hàm của f tại x. $\square$

Ví dụ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y$. Ta xét hàm $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi

$$f'(x, y)(h, k) = (2x, 1) \cdot (h, k) = 2xh + k.$$

Với mọi $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$\begin{aligned} r(h, k) &= f(x + h, y + k) - f(x, y) - f'(x, y)(h, k) \\ &= (x + h)^2 + y + k - x^2 - y - 2xh - k \\ &= h^2, \end{aligned}$$

và

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Do đó, $f'(x, y) = (2x, 1)$ là đạo hàm của f tại (x, y). $\square$

Ví dụ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y) = (x^2, 2xy, y^3)$. Ta xét hàm $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ định nghĩa bởi

$$f'(x, y)(h, k) = J_f(x, y) \cdot (h, k) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2x \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Do đó, $J_f(x, y)$ là đạo hàm của f tại (x, y); đây là một ánh xạ tuyến tính. $\square$

Nếu v là một vectơ đơn vị (tức là $\|v\| = 1$) thì ta suy ra

$$f'(x)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = J_f(x) \cdot v,$$

nên $f'(x)(v)$ là đạo hàm theo hướng v của f tại x, đo tỉ lệ thay đổi của f theo hướng v tại x.

Cho $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ lần lượt là tập con mở của $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$, và $\mathbb{R}^p$. Cho $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ và $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ có đạo hàm. Khi đó, ta có công thức đạo hàm của hàm hợp (Quy tắc móc xích):

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Sử dụng ký hiệu ma trận, ta có:

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

Phép đổi biến

Cho A và B là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là một phép vi đồng phôi (diffeomorphism) hay một phép vi phôi, hay một phép đổi biến nếu f là song ánh, khả vi liên tục, và ánh xạ ngược f^{-1} cũng khả vi liên tục.

Ví dụ: Phép tịnh tiến trong $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + a$ là một phép đổi biến.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh: *nếu f là một phép vi đồng phôi thì ta có:*

$$J_{f^{-1}}(y) = \left(J_f(x)\right)^{-1},$$

với $y = f(x)$.

Thật vậy, đặt $y = f(x)$ và giả sử f là một phép vi đồng phôi trên một tập mở. Như vậy, ta có

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

với mọi x. Lấy đạo hàm hai vế và sử dụng Quy tắc móc xích, ta được

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},$$

với $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ đồng nhất (nghĩa là $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(h) = h$). Ta cũng có thể viết

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \circ f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}. \tag{*}$$

Tương tự, ta có:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y,$$

nên

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) \circ \left(f^{-1}\right)'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},$$

hoặc ta cũng có thể viết

$$f'(x) \circ \left(f^{-1}\right)'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}. \tag{**}$$

Từ (*) và (**) ta kết luận được $\left(f^{-1}\right)'(y)$ là ánh xạ ngược của $f'(x)$, nên

$$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}.$$

Điều này có nghĩa rằng ma trận Jacobi của ánh xạ ngược tại y chính là nghịch đảo của ma trận Jacobi của ánh xạ ban đầu tại x. $\square$

Ta đã chứng minh: f là một phép vi đồng phôi $\Rightarrow J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$. Chiều ngược lại thì sao?

Nhắc lại: Định lý hàm ngược

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ *mở và* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *khả vi liên tục tại* x*. Nếu* $f'(x)$ *khả nghịch thì* x *có một lân cận mà trên đó* f *là một vi đồng phôi.*

Nói cách khác, nếu $\det(J_f(x)) \neq 0$ thì có một lân cận mở $\mathcal{U}$ của x và một lân cận mở $\mathcal{V}$ của $f(x)$ sao cho $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ là song ánh và $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ là khả vi liên tục.

Hệ quả:

Giả sử $\mathcal{U}$ *và* $\mathcal{V}$ *là các tập mở của* $\mathbb{R}^n$*, và* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *là một song ánh khả vi liên tục. Nếu* $\det J_f$ *luôn khác không, thì* f *là một vi đồng phôi.*

Hệ quả này cho thấy ta có thể kiểm tra tính vi đồng phôi mà không cần phải đi tìm đạo hàm của ánh xạ ngược.

Ví dụ

Với $D := \{(x,y) \,|\, x > 0$ *và* $y > 0\}$, *đặt* $f : D \to \mathbb{R}^2$ *xác định bởi*

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^3, x^2 - y^3\right).$$

Hỏi f *có là một phép vi đồng phôi hay không?*

Ta tính định thức của ma trận Jacobi:

$$\det J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix} = -6xy^2 - 6xy^2 = -12xy^2 \neq 0$$

với mọi $(x,y) \in D$. Điều này nghĩa là f là vi đồng phôi trên D.

Hỏi: Nếu $D = \{(x,y) \,|\, y > 0\}$ (nửa trên mặt phẳng Oxy), thì f có phải là vi đồng phôi không?

Không, vì f *không là song ánh, tức là* $f(x,y) = f(-x,y)$.

Công thức đổi biến cho vi phân và tích phân

Định lý (Công thức đổi biến)

Công thức đổi biến

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|\det \varphi'|$$

được thỏa dưới những giả thiết: A là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một phép đổi biến từ A lên $\varphi(A)$, A và $\varphi(A)$ có thể tích, f và $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ khả tích.

Cách nhớ như trong trường hợp một chiều

Đặt $x = \varphi(u)$, thì

$$\mathrm{d}x = |\det \varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Nếu

$$x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{U}$$

thì

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(u))|\det \varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Để tính toán, ta nhớ rằng:

$$\det \varphi' = \det J_\varphi.$$

Nếu viết $x = x(u)$ và $\frac{\partial x}{\partial u} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$ thì có thể viết một cách hình thức:

$$\mathrm{d}x = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u.$$

Dấu giá trị tuyệt đối có thể bỏ đi nếu ta biết dấu của $\det \varphi'$.

- Nếu $\det \varphi'$ luôn dương thì φ được gọi là một phép đổi biến bảo toàn định hướng.
- Nếu $\det \varphi'$ luôn âm thì φ được gọi là một phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Trong trường hợp nhiều chiều, đổi biến hay được dùng để làm cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ

- Trong $\mathbb{R}$, đặt $x = \varphi(t) = \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì $-1 < x < 1$.

Khi đó, ta có $\varphi'(t) = \cos t > 0$, nên φ là một phép đổi biến bảo toàn định hướng.

- Trong $\mathbb{R}^2$, đặt $(x, y) = \varphi(r, t) = (r\cos t, r\sin t)$ với $r > 0$ và $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó, ta có

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r > 0,$$

nên φ là một phép đổi biến bảo toàn định hướng. $\square$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^2$, đặt $(x, y) = \varphi(r, t) = (r \sin t, r \cos t)$ với $r > 0$ và $t \in (0, 2\pi)$.

Khi đó, ta có

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin t & r \cos t \\ \cos t & -r \sin t \end{pmatrix} = -r \sin^2 t - r \cos^2 t = -r < 0,$$

nên φ là một phép đổi biến đảo ngược định hướng. $\square$

Ví dụ: Đổi biến một chiều

Cho $x = \varphi(t)$ với $a \leq t \leq b$, hàm φ liên tục và $\varphi : (a, b) \to \varphi((a, b))$ là một vi đồng phôi.

Cho f khả tích trên $\varphi([a, b])$. Ta có công thức đổi biến

$$\int_{\varphi((a,b))} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Do φ là một vi đồng phôi nên là song ánh. Do đó, $\varphi'(t) \neq 0\ \forall t \in (a, b)$, nên

$$\varphi'(t) > 0,\ \forall t \in (a, b) \quad \text{hoặc} \quad \varphi'(t) < 0,\ \forall t \in (a, b).$$

Vì vậy, φ là hàm tăng hoặc giảm trên $[a, b]$.

Nếu $\varphi' > 0$, tức là hàm tăng, thì $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$.

Vì thêm bớt một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân, nên ta có thể chuyển đổi tích phân trên khoảng mở và tích phân trên khoảng đóng. Ta có:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{[a,b]} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{(\varphi(a),\varphi(b))} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nếu $\varphi' < 0$, tức là hàm giảm, thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ và

$$|\varphi'(t)| = -\varphi'(t).$$

Ta tính tích phân:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{(\varphi(b),\varphi(a))} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có công thức đổi biến trong $\mathbb{R}$ là:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Đổi biến hai chiều

Với phép đổi biến $(u, v) \mapsto (x, y)$ người ta thường dùng ký hiệu

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Nếu phép đổi biến $(u, v) \mapsto (x, y)$ mang tập A thành tập B thì

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

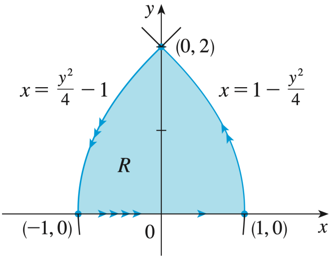
Như vậy, ta có thể viết

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Vì $J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$ với $y = f(x)$, nên

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

Ví dụ



Sử dụng phép đổi biến

$$x = u^2 - v^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv$$

để tính tích phân

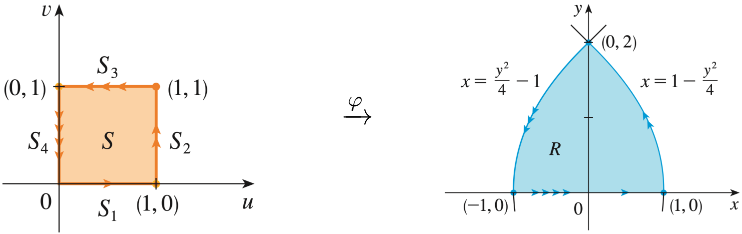
$$\iint_R y \, \mathrm{d}A,$$

với R *là miền được bao bởi trục* x *và parabola* $y^2 = 4 - 4x, \quad y^2 = 4 + 4x, \quad y \geq 0.$

- Nếu không sử dụng phép đổi biến, thì ta tính tích phân:

$$\iint\limits_R y \, \mathrm{d}A = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{1-\frac{y^2}{4}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \left(2y - \frac{y^3}{2} \right) \mathrm{d}y = 2.$$

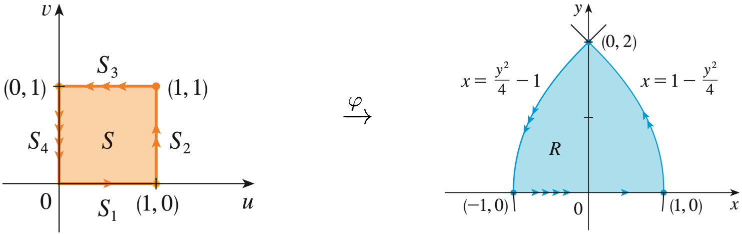
• Khi sử dụng phép đổi biến $x = u^2 - v^2$ và $y = 2uv$, trước hết ta chứng minh rằng hình vuông $S = [0, 1] \times [0, 1]$ trở thành miền R dưới phép đổi biến φ, nghĩa là $R = \varphi(S)$.



Thật vậy, ta thấy $\varphi(\partial S) = \partial R$. Một cách cụ thể, trên cạnh S_1 với $v = 0$ và $0 \le u \le 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = u^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 0.$$

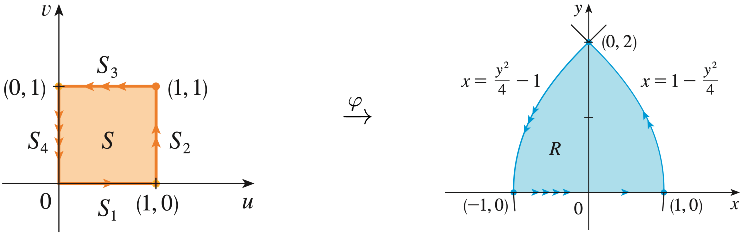
Vì $0 \le x \le 1$, nên $\varphi(S_1)$ trở thành trục x với $0 \le x \le 1$.



Trên cạnh S_2 với $u = 1$ và $0 \leq v \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = 1 - v^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 2v.$$

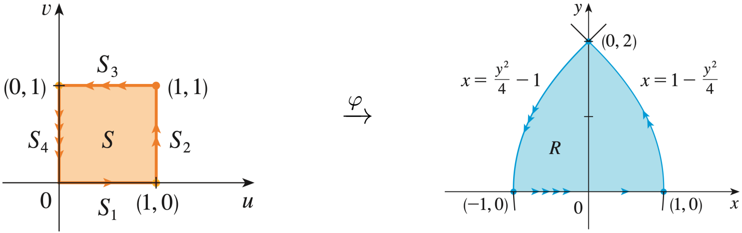
Thay $v = \frac{y}{2}$ vào phương trình của x, ta được $x = 1 - \frac{y^2}{4}$. Do đó, $\varphi(S_2)$ trở thành đường $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ với $0 \leq x \leq 1$.



Trên cạnh S_3 với $v = 1$ và $0 \leq u \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = u^2 - 1 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 2u.$$

Thay $u = \frac{y}{2}$ vào phương trình của x, ta được $x = \frac{y^2}{4} - 1$. Do đó, $\varphi(S_3)$ trở thành đường $x = \frac{y^2}{4} - 1$ với $-1 \leq x \leq 0$.



Trên cạnh S_4 với $u = 0$ và $0 \leq v \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = -v^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 0.$$

Vì $0 \leq v \leq 1$, nên $\varphi(S_4)$ trở thành trục x với $-1 \leq x \leq 0$.

Tiếp theo, ta tính ma trận Jacobi:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

nếu $u \neq 0$ và $v \neq 0$. Điều này cho thấy φ là một phép đổi biến.

Tích phân đã cho là:

$$\begin{aligned} \iint\limits_R y \,\mathrm{d}A &= \iint\limits_S 2uv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \,\mathrm{d}A \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2uv(4u^2 + 4v^2) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ví dụ: Diện tích của hình ellipse

Một hình ellipse D trong mặt phẳng là tập hợp các điểm thỏa

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1,$$

trong đó $a, b > 0$. Tính diện tích của miền D.

Sử dụng phép đổi biến:

$$u = \frac{x-x_0}{a}, \qquad v = \frac{y-y_0}{b},$$

phương trình hình ellipse trở thành hình tròn $u^2 + v^2 \leq 1$.

Đây chẳng qua là một phép tịnh tiến tâm hình ellipse về gốc tọa độ rồi hợp với một phép co giãn (vị tự) trục tọa độ biến hình ellipse thành hình tròn.

Ta tính
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab > 0,$$
nên đây là một phép đổi biến. Ta cũng có $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Do đó, diện tích hình ellipse là:
$$|D| = \iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{u^2+v^2\leq 1} 1\cdot ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = ab \iint_{u^2+v^2\leq 1} 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = ab\pi,$$
vì diện tích hình tròn tâm O bán kính 1 là π. $\square$

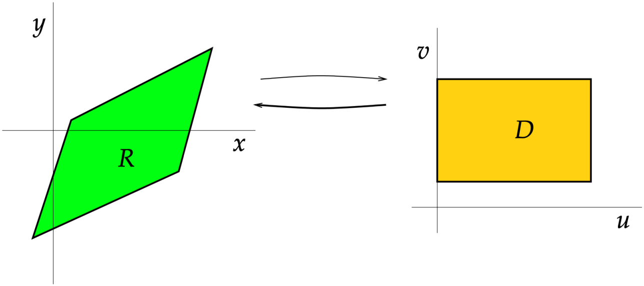
Ví dụ

Tính

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,\mathrm{d}A,$$

trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, *và* $3x-y=8$.

Đặt $u=x-2y$ và $v=3x-y$. Như vậy, hình bình hành R trở thành hình chữ nhật D với các cạnh: $u=0$, $u=4$, $v=1$, $v=8$, nghĩa là $D=[0,4]\times[1,8]$ trong mặt phẳng (u,v).



Ta tính ma trận Jacobi:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0,$$

nên ánh xạ $(x,y) \to (u,v)$ là một phép đổi biến từ phần trong của D sang phần trong của R.

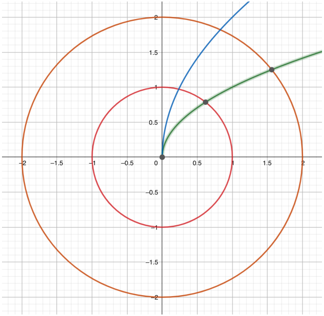
Biên của D và R không ảnh hưởng đến tích phân vì chúng có diện tích không và ta đang lấy tích phân hàm liên tục.

Vì $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{5}$, nên công thức đổi biến cho

$$\begin{aligned}\iint\limits_R \frac{x-2y}{3x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \frac{u}{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^4\int_1^8 \frac{u}{v}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{8}{5}\ln 8. \qquad \square\end{aligned}$$

Ví dụ

Cho miền phẳng D trong góc phần tư thứ nhất bị chặn bởi đồ thị của $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$. Tính tích phân $\iint_D \frac{2x^2+y^2}{xy}\,\mathrm{d}A$ bằng cách dùng phép đổi biến $u = \frac{y}{\sqrt{x}}$ và $v = x^2 + y^2$.



Với $u = \frac{y}{\sqrt{x}}$ và $v = x^2 + y^2$ thì miền D trở thành:

$$R = \{(u, v) \,|\, 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 4\}.$$

Ta tính

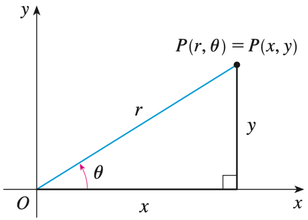
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} -\frac{y}{2x^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{x}} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = -\frac{2x^2 + y^2}{x^{3/2}}.$$

Vì $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{x^{3/2}}{2x^2+y^2}$, nên công thức đổi biến cho

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{2x^2+y^2}{xy}\,\mathrm{d}A(x,y) &= \iint_R \frac{2x^2+y^2}{xy}\cdot\frac{x^{3/2}}{2x^2+y^2}\,\mathrm{d}A(u,v)\\ &= \iint_R \frac{\sqrt{x}}{y}\,\mathrm{d}A(u,v)\\ &= \int_1^4\int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \ln 8.\end{aligned}$$

$\square$

Nhắc lại: Tọa độ cực (polar coordinate system)



Một điểm $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ có thể được miêu tả bằng hai số thực (r, θ), với

- r là khoảng cách từ O tới P; và
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ là góc từ vectơ $\langle 1, 0 \rangle$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OP}$.

Do đó, $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tuy nhiên, tại một điểm trên tia Ox thì $\theta = 0$ hay $\theta = 2\pi$. Mặt khác, tại gốc tọa độ O thì $r = 0$ còn θ có thể là bất kỳ giá trị nào.

Do đó, $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ không là song ánh và không liên tục trên Ox.

Ta hạn chế miền xác định là $\mathbb{R}^2$ bỏ đi tia Ox. Khi đó, ánh xạ ngược từ tọa độ cực sang tọa độ Euclid là:

$$\begin{aligned}(0,\infty)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0)\,|\,x\geq 0\}\\ (r,\theta) &\mapsto (x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

Ta cũng có mối liên hệ $r=\sqrt{x^2+y^2}$ và $\tan\theta=\frac{y}{x}$.