Chương I

Khai triển Taylor trong công thức ~~Lad~~ Lagrange

Giả sử cho $f \in C^n([a,b])$, tồn tại ~~to~~ đạo hàm đến cấp n, hay tồn tại f^{n-1} trên $[a,b]$, thì cho bất kỳ điểm ~~x và x_0~~ $x, x_0 \in [a,b]$, tồn tại 1 điểm ~~x~~ ξ phụ thuộc vào x và $\xi \in [x, x_0)$

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

trong đó:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

Nhắc lại kiến thức

i) $C(\Omega)$ tập các hàm liên tục trên Ω

ii) $C^1(\Omega)$ tập các hàm $f: \Omega \to \mathbb{R}$ thoả f' liên tục trên Ω

iii) $C^n(\Omega)$ tập các hàm $f: \Omega \to \mathbb{R}$ thoả $f^{(n)}$ liên tục trên Ω

Định nghĩa về Big - Notation

Cho hàm $f(x)$ được gọi là "Big O" (\mathcal O) của $g(x)$ khi $x \to a$ ta viết:

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ khi $x \to a$ hoặc $f = \mathcal{O}(g)$

* định nghĩa là: nếu tồn tại $\delta > 0$ và $c > 0$ thoả

$|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ cho $|x-a| < \delta$

? sao cho ?

*enlivo

Khai triển Taylor liên hệ với Big-O

Ví dụ: $x - x_0 = h > 0$

$x = x_0 + h$

$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi_x)$

với $\xi_x \in (x_0, x)$

nếu f'' bị chặn thì $\exists \hat{c} > 0$ thoả $|f''(\xi_x)| \leq \hat{c}$.

Khi đó, ta viết:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + O(h^2) \text{ khi } h \to 0.$$

Điều này hàm số thêm rằng

i) Khi $h \to 0 \Rightarrow O(h^2) \to 0$

ii) $O(h^n)$ tiến về 0 nhanh hơn $O(h^m)$ khi $h \to 0$ và $n > m$.

Các tính chất của Big-Notation

Để clm.. i) Cho d là hằng số:

$d\,O(g(x)) = O(g(x))$ khi $x \to a$.

ii) $O(g_1(x)) + O(g_2(x)) = O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$ khi $x \to a$.

iii) $O(g_1(x))O(g_2(x)) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$

iv) Khi $x \to 0$, $x^p = O(x^q)$ với $p \geq q$.

Ví dụ: Khi $x \to 0$

$f(x) = 2x + x^2 + x^3 = O(x^3) + O(x^3) + O(x^3)$

$= 3O(x^3) = O(x^3)$

Định nghĩa về little notation

Hàm f là "litte-o" của g khi $x \to a$

$f(x) = o(g(x))$ khi $x \to a$ nếu nó thoả:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ví dụ: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$

Khi $x \to 0$ thì $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$

$$x^3 = o(x^2)$$

Ví dụ:

Khai triển Taylor

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(\xi)$ với $\xi \in (x_{\cancel{1}}, x_0)$

Giả sử f'' bị chặn

Khi đó, $h \to 0$

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2)$

~~Bim~~ $= f(x) + hf'(x) + \cancel{8}\, o(h^\alpha)$

Ta đi tìm α

$$f(h) = \frac{1}{2} f''(\xi)\, h^2$$

mà $f(h) = o(g(h))$

do đó: $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)\, h^2}{h^\alpha} = 0$

Ta chọn $\alpha = 1$

Định nghĩa Θ - notation

$f = \Theta(g)$ khi $x \to a$ nếu tồn tại $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$, $\delta > 0$ thoả:

$c_1|g(x)| \leq f(x) \leq c_2|g(x)|$ cho $|x - a| < \delta$

Nói cách khác:

$$f = \Theta(g) \Leftrightarrow \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f). \end{cases}$$

Định nghĩa về tiệm cận:

$f \sim g$ khi $x \to a$

f là tiệm cận đến g khi $x \to a$ nếu nó thoả

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Ví dụ: Khai triển Taylor

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(\xi)$$

với $\xi \in (x, x_0)$

Khi $h \to 0$, $f''(x) \neq 0$

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \Theta(h^2)$$

$$f(h) = \frac{1}{2} f''(\xi) \; h^2$$

$$g(h) = h^2.$$

Khi $h \to 0$, $f''(x)$ có thể bằng 0.

$$f = \Theta(g(h))$$

Ta cm $f = \Theta(g)$.

Ta cần tìm $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ và $\delta > 0$ thoả

$$c_1 |g| \leq |f| \leq c_2 |g|$$

$$\Leftrightarrow c_1 h^2 \leq \frac{1}{2} |f''(\xi)| h^2 \leq c_2 h^2.$$

$$\Leftrightarrow c_2 \geq |f''(\xi)| \text{ với } \delta = 1$$

Một số chuẩn thông dụng.

Day

Date

$\mathbb{R}$: $\|.\| = |\ |$

$\mathbb{R}^n$: $\|.\|_2$ euclid $= \sqrt{\sum |x_i|^2}$

$[a, b]$: $\|.\| = \left[\int_a^b |x_1 - x_2|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$

$$f(x+h) \sim f(x) + hf'(x).$$

§ $\boxed{\text{Định nghĩa về sai số}}$

Cho f_e giá trị hoặc hàm chính xác

f_a : giá trị hoặc hàm xấp xỉ.

Khi đó, sai số tuyệt đối định bởi giá trị.

$\|f_a - f_e\|$,

~~sai~~ sai số tương đối định bởi:

$$\frac{\|f_a - f_e\|}{\|f_e\|}$$

sai số chặt ~~cắt~~ cụt định bởi

giá trị $E_n(x)$ trong khai triển Taylor

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) h^{n+1}.$$

Tuần 3:

VD: Cho $f(x) = \ln x$ với $x \in [1,2]$. Tính xấp xỉ $\ln(1,5)$ bằng đa thức bậc n ~~số~~, xác định n sao cho $|\ln(1,5) - P_n(1,5)| < 10^{-8}$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{df^2}{d^2x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{df^k}{d^kx} = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}$$

với $k \in \mathbb{N}$

Với $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$

Ta có:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

$$= f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

$$= f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[(-1)^{k-1}(k-1)!\, c^{-k}\right](x-c)^k$$

$$= f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(-1)^{k-1} c^{-k}(x-c)^k$$

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - c)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[(-1)^n n!\, \xi^{-(n+1)}\right](x-c)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} (-1)^n \xi^{-(n+1)} (x-c)^{n+1}.$$

Cho $c = 1$, $x = 1{,}5$; $\xi \in (1; 1{,}5)$

$$E_n(1{,}5) = \frac{(-1)^n}{n+1} \xi^{-(n+1)} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |E_n(1{,}5)| \leqslant \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(2\xi)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-8}$$

$n \geqslant 22$. Vậy $\ln(1{,}5) = P^{c=1}_{n=22}(1{,}5) + E^{c=1}_{n=22}(1{,}5)$.

Bài tập tuần 3: $\Rightarrow \ln(1{,}5) \approx P^{c=1}_{n=22}(1{,}5)$

1) Xét hàm $f(x) = \cos x$

$\cos(0{,}01) \approx P_2(0{,}01)$

$\cos(0{,}01) \approx P_3(0{,}01)$

Tính ~~xa~~ sai số tuyệt đối, tương đối, chặn trên nhỏ nhất của sai số chặt cụt. Đồng thời, dùng ~~matlbo~~ mathlab để vẽ đồ thị P_2, P_3. (Sai số đến 8 chữ số thập phân) ~~(sai số chặt cụt nhỏ hơn 10^{-10})~~

Tính $\cos x \sim P_n(x)$ với sai số chặt cụt nhỏ hơn 10^{-10}

Vẽ P_n tìm được và so sánh với $f(x)$ bằng ~~mathlad~~ matlab.

Ví dụ: $x_0 - h \quad x_0 \quad x_0 + h$. $h \in (0,1)$.

Ta có các giá trị $u(x_0 - h)$, $u(x_0)$ ~~*~~, $u(x_0+h)$.
Ta tính giá trị xấp xỉ $u'(x_0)$

$$u(x_0+h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2!}u''(x_0) + \dots + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_x)$$

$$\dots + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(\xi_x), \; \xi_x \in (x_0, x_0+h). \quad (1)$$

$$\Rightarrow u'(x_0) = \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} - \frac{u''(x_0)}{2!}h - \dots$$

$$\dots - \frac{u^{(3)}(\xi_{x_0})}{3!}h^2$$

$$\Rightarrow u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}.$$

$f_e = u'(x_0)$ giá trị chính xác

$f_h = \dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$ là giá trị xấp xỉ.

$$|f_e - f_h| \leq \frac{|u''(x_0)|}{2!}h + \frac{|u^{(3)}(\xi_{x_0})|}{3!}h^2.$$

Giả sử $|u''(x_0)|$, $|u^{(3)}(\xi_{x_0})|$ bị chặn trên

~~Ta chọn tg~~

Khi đó, ta chọn

$|f_e - f_h| \leq c\,h$

Do $\dfrac{|u''(x_0)|h}{2} + \dfrac{|u^{(3)}(\xi_{x_0})|h^2}{3!} \leq h \underbrace{\left(\dfrac{|u''(x_0)|}{2} + \dfrac{|u^{(3)}(\xi_x)|}{3}\right)}_{c}$.

$$\Rightarrow u'(x_0) = \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} - \frac{u''(x_0)h}{2}$$

$$\dots - \frac{u^{(3)}(\xi_{x_0})h^2}{3!} \Rightarrow \cancel{f_h \to f_e}.$$

$$\Rightarrow f_h - f_e = \underbrace{\frac{u''(x_0)h}{2}}_{D} + \underbrace{\frac{u^{(3)}(\xi_{x_0})\, h^2}{3!}}_{O(h^2)}$$

Ở đây ta viết:

$$f_h - f_e = Dh + O(h^2)$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) - \cdots$$

$$\cdots - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\bar{\xi}_{x_0})$$

$$\bar{\xi}_{x_0} \in (x_0 - h, x_0) \qquad (2)$$

$$(1) - (2) = u(x_0 + h) - u(x_0 - h)$$

$$= 2hu'(x_0) + \frac{2}{3!}h^3 u^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}\left(u^{(4)}(\xi_{x_0}) - \cdots \right.$$

$$\left.\cdots u^{(4)}(\bar{\xi}_{x_0})\right)$$

$$\Rightarrow u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}u^{(3)}(x_0) - \cdots$$

$$\frac{h^3}{2.4!}\left[u^{(4)}(\xi_{x_0}) - u^{(4)}(\bar{\xi}_{x_0})\right]$$

$$f_e = u'(x_0)$$

$$f_h = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h}$$

$$\Rightarrow |f_e - f_h| \leq h^2\left[\frac{|u^{(3)}(x_0)|}{3!} + \frac{h|u^{(4)}(\xi_{x_0})|}{2.4!} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{h|u^{(4)}(\bar{\xi}_{x_0})|}{2.4!}\right]$$

Giả sử $|u^{(3)}(x_0)|$, $|u^{(4)}(\xi_{x_0})|$, $|u^{(4)}(\bar{\xi}_{x_0})|$ bị chặn trên.

Với $h \in (0, 1)$

$\rightarrow |f_e - \overline{f_h}| \leq c h^2$. Ta gọi bậc hội tụ $= 2$.

Ví dụ: $f(x) = \sin x$

Xấp xỉ $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Đầu tiên chọn $h = 0,4$.

$f(\frac{\pi}{2} - 0,4) = \sin(\frac{\pi}{2} - 0,4) = 0,921060994$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$f(\frac{\pi}{2} + 0,4) = \sin(\frac{\pi}{4} + 0,4) = 0,921060994$

$$f_h = \frac{f(\frac{\pi}{2} + 0,4) - f(\frac{\pi}{4})}{0,4} = -0,19734752$$

$$\overline{f_h} = \frac{f(\frac{\pi}{2} + 0,4) - f(\frac{\pi}{2} - 0,4)}{2.0,4} = \cancel{-0,1973475} \; 0$$

$|f_h - f_e| = 0,19734753$

$|\overline{f_h} - f_e| = 0$

Bài tập về nhà:

$f(x) = \ln(x)$

$h = 0,2$; ~~0,~~ $h = 0,1$. Tính sai số tương đối, tuyệt đối.

$$f(1,5) \approx \frac{f(1,5 + h) - f(1,5)}{h}$$

$$f(1,5) \approx \frac{f(1,5 + h) - f(1,5 - h)}{2h}$$

Giả sử, chúng ta có $\longrightarrow$ bậc hội tụ

$f_h - f = Dh^n - O(h^{n+1}) \Rightarrow |f_h - f| \le c.h^n$

Làm sao ta tính được n từ f_h, $f_{h/2}$ và f?

Trường hợp 1:

Giả sử chúng ta có giá trị f chính xác

$f_h - f = Dh^n + O(h^{n+1})$

$\Rightarrow |f_h - f| = |Dh^n(1 + O(h))|$

$\uparrow_{0} \in R$

do $Dh^n . O(h) = O(h^{n+1})$

$\Rightarrow \log_2 |f_h - f| = \log_2 |Dh^n| + \log_2 |1 + O(h)|$

$= \log_2 |D| + n\log_2 h + \underbrace{\log_2 |1 + O(h)|}_{O(h)}$

* Ta chứng minh $\log_2 |1 + O(h)| = O(h)$, $h \to 0$

$g = O(h)$

$\exists \delta > 0, c > 0$ thoả $|g| < c|h|$, $\forall |h| < \delta$

$\log(1 + g) \le \log(1 + |g|) \le \log(1 + c|h|)$

với $\forall |h| < \delta$.

$(\log(1 + x) \le x \quad \forall x \ge 0)$

$\Rightarrow \log(1 + c|h|) \le c|h|$ với $|h| < \delta$

$\Rightarrow \log(1 + O(h)) \le c|h|$. $\forall h \mid |h| < \delta$

$\Rightarrow \log(1 + O(h)) = O(h)$

$\log|f_h - f| = \log_2|D| + n\log|h| + O(h)$

4 Xấp xỉ đạo hàm

Ta cần tính đạo hàm phù hợp cho 1 hàm số đi qua các điểm rời rạc. Tức là tính $u'(x)$ dựa trên các điểm ~~$u_1(x)$~~ $u_1, u_2, \ldots u_n$ đã biết.

Khai triển Taylor

$$u(x) = u(x_i) + u'(x_i)(x - x_i) + \ldots + \frac{u^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_i)^4 \quad h^4$$

Với $\xi_x \in (x, x_i)$

Chọn $x = x_{i+1}$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)h + \ldots + \frac{u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}})}{4!}h^4$$

$$\Rightarrow u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - \left[\frac{h\,u''(x_i)}{2} + \frac{h^2}{3!}u'''(x_i) + \ldots + \frac{h^3 u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}})}{4!}\right]$$

Giả sử x_i có 1 hằng số $c > 0$ thỏa $|u''(x_i)|$, $|u^{(3)}(x_i)|$, $|u^{(4)}(\xi_x)| < c$. Vậy ta có

$$-\left[\frac{h\,u''(x_i)}{2} + \frac{h^2}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^3 u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}})}{4!}\right] = O(h)$$

Do đó: $$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + O(h)$$

$$\Rightarrow u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$$

(CT sai phân tiến forward-divided difference)

Trường hợp 2: không có nghiệm chính xác. Chúng ta tính được giá trị xấp xỉ f_h, $f(h/2)$, $f(h/4)$

$$f_h - f = Dh^n + O(h^{n+1})$$

$$f_{h/2} - f = D\left(\frac{h}{2}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$f_{h/4} - f = D\left(\frac{h}{4}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\frac{f_h - f_{h/2}}{f_{h/2} - f_{h/4}} = \frac{f_h - f + f - f_{h/2}}{f_{h/2} - f + f - f_{h/4}}$$

$$= \frac{Dh^n + O(h^{n+1}) - D\left(\frac{h}{2}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right)}{D\left(\frac{h}{2}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right) - D\left(\frac{h}{4}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

$$= \frac{Dh^n - D\left(\frac{h}{2}\right)^n + O(h^{n+1})}{D\left(\frac{h}{2}\right)^n - D\left(\frac{h}{4}\right)^n + O(h^{n+1})}$$

$$= \frac{h^n D\left[1 - 2^{-n} + O(h)\right]}{h^n D\left[2^{-n} - 2^{-2n} + O(h)\right]} = \frac{1 - 2^{-n} + O(h)}{2^{-n} - 2^{-2n} + O(h)} = 2^n + O(h)$$

$$\log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = \log_2(2^n + O(h)) = n + O(h)$$

Giờ ta xét $x = x_i + 1$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{3} u'''(x_i)$$

$$+ \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}})$$

$$\Rightarrow u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + \left[\frac{u''(x_i) h}{2} - \frac{u^{(3)}(x_i) h^2}{3!} \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{h^3 u^{(4)}(\xi_{x_i+1})}{4!} \right] \quad (**)$$

Giả sử $\exists c > 0$ thoả $|u''(x_i)|, |u^{(3)}(x_i)|, |u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}})| < C$

Ta có $\left[\frac{h u''(x_i)}{2} - \frac{h^2 u''(x_i)}{3!} + \frac{h^3 u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}})}{4!} \right] = O(h)$

Do đó ta có $u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + O(h)$

$$\Rightarrow u'(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}.$$

(Cl sai phân lùi) - Backward-divided difference)

$(*) - (**) = u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})$.

$$= u'(x_i)(2h) + \frac{2h^3}{3!} u'''(x_i) + \cancel{\dots + \frac{h^4}{4!}}$$

$$+ \frac{h^4}{4!} \left[u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}}) - u^{(4)}(\xi_{x_{i-1}}) \right].$$

$$\Rightarrow u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

$$-\underbrace{\left[\frac{h^2 u^{(3)}(x_i)}{3!} + \frac{h^3}{24} u^{(4)}(\xi_{x_{i+1}}) - u^{(4)}(\xi_{i-1})\right]}_{O(h^2)}$$

VD: $u(x) = \sin(x)$ $u'(x) = \cos(x)$

$u'(0) = ?$

Sai phân tiến $u'(0) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$ $x_{i+1} = x_i + h$

$spt_h = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = 0,973545$

$spt_{h/2} = \cancel{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}} = 0,99334665$

$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}$

$spt_{h/4} = 0,99833417$

Bậc hội tụ spt $= \log_2 \left| \frac{spt_h - \sin 0}{spt_{h/2} - u'(0)} \right|$

Day

Date

Tuần 5 (25/3) Nhắc lại tính bậc hội tụ.

TH1: Có nghiệm chính xác f_e

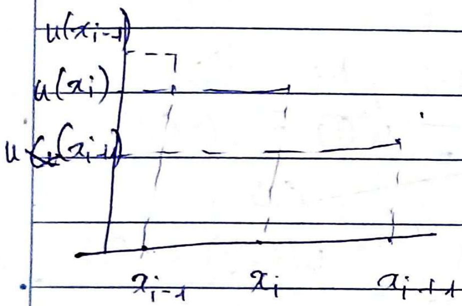
$$f_h - f_e = Dh^n + O(h^{n+1})$$

$$f_{h/2} - f_e = D\left(\frac{h}{2}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\log_2 \frac{|f_h - f_e|}{|f_{h/2} - f_e|} = n + O(h) \qquad (1.3)$$

TH2: Không có nghiệm chính xác f_e.

$$\log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = n + O(h) \qquad (1.4)$$



Ta có các giá trị $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$, $u(x_{i+1})$.
Ta cần xấp xỉ $u'(x_i)$ dựa trên giá trị $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$, $u(x_{i+1})$ đã biết.

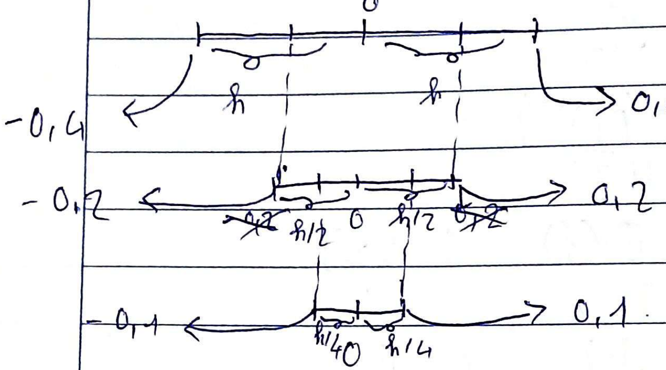
Ta xác định:

$$u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}}_{\text{sai phân tiến}} + O(h) \leftarrow \text{bậc hội tụ} = 1$$

$$u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}}_{\text{sai phân lùi}} + O(h) \leftarrow \text{bậc hội tụ} = 1$$

$$u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{h}}_{\text{sai phân trung tâm}} + O(h^2) \leftarrow \text{bậc hội tụ} = 2.$$

VD: $u(x) = \sin x$, tính xấp xỉ $u'(0)$



$f_e(0) = u'(0) = \cos(0) = 1$

$u(0) = 0$; $u(0,1) = 0,0998$

$u(-0,1) = -0,0998$; $u(0,2) = 0,19867$

$u(-0,2) = -0,1997$; $u(0,4) = 0,3894$

$u(-0,4) = -0,3894$;

Trước hết, ta xấp xỉ theo sai phân tiến:

$$f_h(0) = \frac{u(0+h) - u(0)}{h} = \frac{u(0,4) - u(0)}{0,4} = 0,9735$$

~~Tiếp theo, ta xấp xỉ theo sai phân lùi:~~

$$\cancel{f_h(0) = \frac{u(0) - u(0-h)}{h} = \frac{u(0) - u(-0,4)}{0,4} =}$$

$$f_{h/2}(0) = \frac{u\left(0 + \frac{h}{2}\right) - u(0)}{h/2} = \frac{u(0,2) - u(0)}{0,2} = 0,9935$$

$$f_{h/4}(0) = \frac{u\left(0 + \frac{h}{4}\right) - u(0)}{h/4} = \frac{u(0,1) - u(0)}{0,1} = 0,998$$

Theo đó ta xác định bậc hội tụ theo ~~(1.3)~~ nghiệm chính xác (1.3):

$$O(h) + n = \log_2 \left| \frac{f_h(0) - f(0)}{f_{h/2}(0) - f(0)} \right| = \cancel{\log_2 \left| \frac{u_h(0) - u(0)}{u_{h/2}(0) - u(0)} \right|}$$

$$= -0,0293.$$

Tương tự bậc hội tụ theo nghiệm xấp xỉ (1.4):

$$O(h) + n = \log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = 2,152$$

Tiếp theo, ta xấp xỉ theo sai phân lùi:

$$f_h(0) = \frac{u(0) - u(0-h)}{h} = \frac{u(0) - u(-0,4)}{h} = 0,9735$$

Date . . .

$$f_{h/2}(0) = \frac{u(0) - u(0-h/2)}{h/2} = \frac{u(0) - u(-0,2)}{0,2} = 0,9935$$

$$f_{h/4}(0) = \frac{u(0) - u(0-h/4)}{h/4} = \frac{u(0) - u(\cancel{0}-0,1)}{0,1} = 0,998$$

9998. Như vậy ta tính bậc hội tụ lần lượt theo nghiệm
19887 chính xác và nghiệm xấp xỉ (tương ứng 1.3, 1.4):
3894 $$n + O(h) = \log_2 \frac{|f_h - f_e|}{|f_{h/2} - f_e|} = -0,0293$$

$$n + O(h) = \log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = 2,152.$$

Cuối cùng, ta xấp xỉ theo sai phân trung tâm:

$$f_h(0) = \frac{u(0+h) - u(0-h)}{2h} = \frac{u(0,4) - u(\cancel{0,4}-0,4)}{\cancel{2h}\ 0,8}$$

$$= 0,9735$$

$$f_{h/2}(0) = \frac{u(0,2) - u(-0,2)}{0,4} = 0,9985$$

$$f_{h/4}(0) = \frac{u(0,1) - u(-0,1)}{0,2} = 0,998$$

.3):

Ta cũng quan ~~tâm~~ tâm đến việc tính $u(x_{i-2})$ nên và vì không có giá trị $u'(x_{i-1})$ không ~~theo~~ thể dùng sai phân trung tâm. Ta kỳ vọng dùng sai phân tiến với mức độ xấp xỉ cao hơn, bậc hội bằng 2 chẳng ~~x~~ hạn. Do đó, giờ đây ta xây dựng công thức sai phân tiến với bậc hội tụ bằng 2.

Ta khai triển ~~ta~~ Taylor cho u như ~~x~~ sau:

$$u(x_i) = u(x_{i-1}) + h\,u'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2}u''(x_{i-1}) + \dots \quad (1)$$

$$\dots + \frac{h^3}{3!}u'''(x_{i-1}) + \frac{h^4}{4!}u''''(\xi), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i).$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_{i-1}) + 2h\,u'(x_{i-1}) + \frac{(2h)^2}{2}u''(x_{i-1}) + \dots \quad (2)$$

$$\dots + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x_{i-1}) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(\xi)$$

với $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

Giờ đây ta thực hiện:

$$\alpha u(x_i) + \beta u(x_{i+1}) = (\alpha+\beta)u(x_{i-1}) + \dots$$

$$\dots + (\alpha + 2\beta)h^* u'(x_{i-1}) + (\alpha + 4\beta)\frac{h^2}{2}u''(x_{i-1}) + \dots$$

$$\dots + (\alpha + 8\beta)\frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_{i-1}) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^4}{4!}[\alpha u^{(4)}(\xi) + 16\beta u^{(4)}(\xi)] \quad (1.5)$$

Ta thấy rằng nếu chỉ rút ~~x~~ $u'(x_{i-1})$ theo (1.5) thì bậc hội tụ vẫn sẽ bằng 1, nguyên nhân là do hạng tử ~~tu~~ thứ 3 $(\alpha + 4\beta)\frac{h^2}{2}u''(x_{i-1})$.

Do đó, để tăng bậc hội tụ, ta cho α, β sao cho $\alpha + 4\beta = 0$. Chẳng hạn $\alpha = 4$, $\beta = -1$. Khi đó, 1.5 sẽ trở thành:

$$4u(x_i) - u(x_{i+1}) = 3u(x_{i-1}) + 2hu'(x_{i-1}) - \dots$$

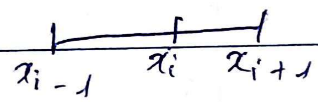
$$\dots - \frac{4}{3!}h^3 u^{(3)}(x_{i-1}) + \frac{h^4}{4!}\left[4u^{(4)}(\xi) - 16u^{(4)}(\bar{\xi})\right] \quad (1.6)$$

Từ đây ta rút $u'(x_{i-1})$ từ 1.6:

$$u'(x_{i-1}) = \frac{1}{2h}\left[-3u(x_{i-1}) + 4u(x_i) - u(x_{i+1})\right] + \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{2h^2}{3!}u^{(3)}(x_{i-1}) - \frac{h^3}{2.4!}\left[4u^{(4)}(\xi) - 16u^{(4)}(\bar{\xi})\right]}_{O(h^2)}$$

Giờ đây ta quan tâm đến $u(x_{i+1})$. Tương tự, ta chỉ có thể dùng sai phân lùi. Do đó, ta ~~đưa~~ cũng xây dựng tương tự để có bậc hội tụ bằng 2.



Từ khai triển Taylor, ta thu được:

$$u(x_i) = u(x_{i+1}) \cancel{+} - hu'(x_{i+1}) + \frac{h^2}{2}u''(x_{i+1}) + \dots$$

$$\dots \cancel{+} - \frac{h^3}{3!}u'''(x_{i+1}) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi) \quad (1.7)$$

với $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

$$u(x_{i-1}) = u(x_{i+1}) \cancel{+} - 2hu'(x_{i+1}) + \frac{(2h)^2}{2}u''(x_{i+1}) + \dots$$

$$\dots \cancel{+} - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x_{i+1}) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(\bar{\xi}) \quad (1.8)$$

với $\bar{\xi} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

Tương tự, ta ~~thử~~ đặt α và β và khai triển phương trình:

sau nhân ... nhân α vào 1.8, β vào ... rồi cộng cả 2 lại

Giờ đây ta muốn tính xấp xỉ đạo hàm cấp 2

Bằng khai triển Taylor, ta có:

$$u(x_{i+1}) = \cancel{x}\, u(x_i) + u'(x_i)h + u''(x_i)\frac{h^2}{2} + \dots \quad (1.8)$$

$$\dots + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + u^{(4)}(\xi)\frac{h^4}{4!}$$

với $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\bar{\xi}) \quad (1.9)$$

với $\bar{\xi} \in (x_{i-1}, x_i)$.

~~Tương~~ tự ta cộng 1.8 và 1.9 lại, ta được

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^4}{4!}\left[u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\bar{\xi})\right]$$

Rút $u''(x_i)$ ta được:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \dots$$

$$\dots - \underbrace{\frac{h^2}{4!}\left[u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\bar{\xi})\right]}_{O(h^2)}$$

Giải ~~sai~~?

Tuần 5

Nhắc lại tính bậc hội tụ

TH1: Có nghiệm chính xác f_e

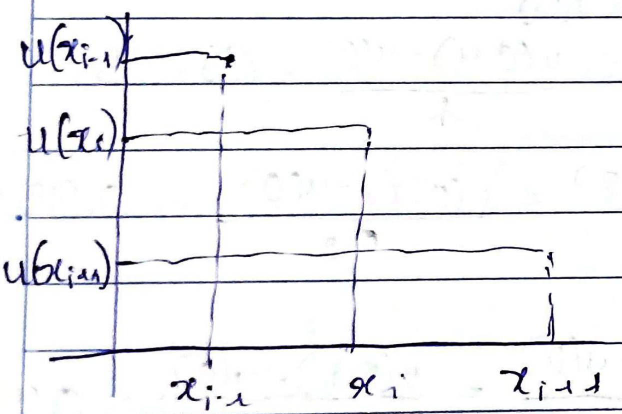
$$f_h - f_e = Dh^n + O(h^{n+1})$$

$$f_{h/2} - f_e = D\left(\frac{h}{2}\right)^n + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right) \quad (1.$$

$$\log_2 \frac{|f_h - f_e|}{|f_{h/2} - f_e|} = n + O(h) \quad (1.3)$$

TH2: Không có nghiệm chính xác f_e.

$$\log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = n + O(h) \quad (1.4)$$



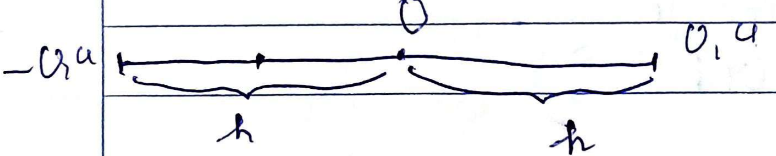
Ta có các giá trị: $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$, $u(x_{i+1})$, ta cần xấp xỉ $u'(x_i)$ dựa trên giá trị $u(x_{i-1})$ $u(x_i)$ $u(x_{i+1})$ đã biết

Ta xác định $u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}}_{\text{sai phân tiến}} + \underbrace{O(h)}_{\text{bậc hội tụ} = 1}$

$$u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}}_{\text{sai phân lùi}} + \underbrace{O(h)}_{\text{bậc hội tụ} = 1}$$

$$u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1})}{h}}_{\text{sai phân}} + \underbrace{O(h^2)}_{\text{bậc hội tụ} = 2}$$

VD: $u(x) = \sin x$ Tính xấp xỉ $u'(0)$

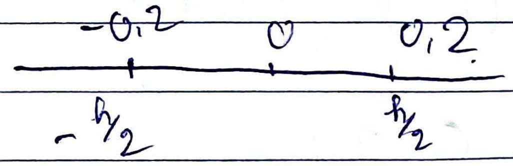


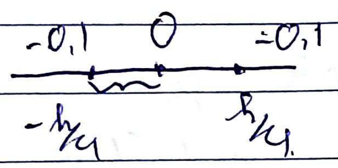
$f_e(0) = u'(0) = \cos(0) = 1$

$u(-0,1) = -0,0998$ $u(0,2)$

$u(-0,2) = -0,1997$

$u(-0,4) = -0,3894$





Ta xấp xỉ theo sai phân tiến

$$f_h(0) = \frac{u(0+h)-u(0)}{h} = \frac{u(0,4)-u(0)}{h} = 0,9735$$

$$f_{h/2}(0) = \frac{u(0+h/2)-u(0)}{h/2} = \frac{u(0,2)-u(0)}{0,2} = 0,9980$$

$$f_{h/4}(0) = \frac{u(0+h/4)-u(0)}{h/4} = \frac{u(0,1)-u(0)}{0,1} = 0,998$$

Theo đó, ta xác định bậc hội tụ theo nghiệm chính

$$O(h)+n = \log_2 \left|\frac{f_h(0)-f(0)}{f_{h/2}(0)-f(0)}\right| = -0,0293$$

Bậc hội tụ theo ng. xấp xỉ (1.4)

$$O(h)+n = \log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = 2,152$$

Tiếp theo xấp xỉ theo sai phân lùi

$$f_h(0) = \frac{u(0)-u(0-h)}{h} = 0,9735$$

Date

$$f_{h/2}(0) = \frac{u(0) - u(0 - h/2)}{h/2} = \frac{u(0) - u(-0,2)}{0,2} = 0,9935$$

$$f_{h/4}(0) = \frac{u(0) - u(0 - h/4)}{h/4} = \frac{u(0) - u(-0,1)}{0,1} = 0,998$$

Ta tính bậc hội tụ lần lượt theo nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ:

$$n + O(h) = \log_2 \frac{|f_h - f_e|}{|f_{h/2} - f_e|} = -0,0293$$

$$n + O(h) = \log_2 \frac{|f_h - f_{h/2}|}{|f_{h/2} - f_{h/4}|} = 2,152$$

Cuối cùng, ta xấp xỉ sai phân trung tâm

$$f_h(0) = \frac{u(0+h) - u(0-h)}{2h} = \frac{u(0,4) - u(-0,4)}{0,8}$$

$$= 0,9735.$$

$$f_{h/2}(0) = \frac{u(0,2) - u(-0,2)}{0,4} = 0,9935$$

$$f_{h/4}(0) = \frac{u(0,1) - u(-0,1)}{0,2} = 0,998.$$

Ta cũng quan tâm đến việc tính $u'(x_{i-1})$ và vì không có giá trị $u(x_{i-2})$ nên không thể dùng sai phân trung tâm. Ta kỳ vọng dùng sai phân tiến với mức độ xấp xỉ cao hơn (bậc hội tụ bằng 2 chẳng hạn). Do đó, người ta xây dựng công thức sai phân tiến với bậc hội tụ bằng hai

$$u(x_i) = u(x_{i-1}) + h u'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2} u''(x_{i-1}) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_{i-1})$$

$$+ \frac{h^4}{4!} u''''(\xi) \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_{i-1}) + 2h u'(x_{i-1}) + \frac{(2h)^2}{2!} u''(x_{i-1})$$

$$+ \frac{(2h)^3}{3!} u'''(x_{i-1}) + \frac{(2h)^4}{4!} u''''(\xi) \quad \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Ta thực hiện

$$\alpha u(x_i) + \beta u(x_{i+1}) = (\alpha+\beta) u(x_{i-1}) + (\alpha+2\beta) h u'(x_{i-1})$$

$$+ (\alpha+4\beta)\frac{h^2}{2} u''(x_{i-1}) + (\alpha+8\beta)\frac{h^3}{3!} u'''(x_{i-1})$$

$$+ (\alpha + \cancel{16\beta})\frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i)$$

(1.5) $$+ 16\beta \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\overline{\xi}) \quad \overline{\xi} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Nếu chỉ rút $u'(x_{i-1})$ theo (1.5) thì bậc hội tụ vẫn bằng 1 nguyên nhân do hạng tử thứ 3 là $(\alpha+4\beta)\frac{h^2}{2}u''(x_{i-1})$. Để tăng bậc hội tụ, ta cho α, β sao cho $\alpha + 4\beta = 0$. $\alpha = 4, \beta = -1$ thì (1.5) thì

$$4u(x_i) - u(x_{i+1}) = 3u(x_{i-1}) + 2hu'(x_{i-1})$$

(1.6) $$- \frac{4}{3!} h^3 u^{(3)}(x_{i-1}) + \frac{h^4}{4!}\left[4u^{(4)}(\xi) - 16u^{(4)}(\overline{\xi})\right]$$

Từ đây rút $u'(x_{i-1})$ từ (1.6)

$$u'(x_{i-1}) = \frac{1}{2h}\left[-3u(x_{i-1}) + 4u(x_i) - u(x_{i+1})\right]$$

$O(h^2)$ $$+ \frac{2h^2}{3!} u'''(x_{i-1}) - \frac{h^3}{2.4!}\left[4u^{(4)}(\xi) - 16u''''(\overline{\xi})\right]$$

Còn $u(x_{i+1})$. Tương tự, ta có thể dùng sai phân lùi

Do đó, ta xây dựng tương tự

Từ khai triển Taylor, ta thu được

$$u(x_i) = u(x_{i+1}) - h u'(x_{i+1}) + \frac{h^2}{2} u''(x_{i+1})$$

$$- \frac{h^3}{3!} u'''(x_{i+1}) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi) \quad (1.7)$$

với $\xi \in (x_i, x_{i+1})$.

$$u(x_{i-1}) = u(x_{i+1}) - 2h u'(x_{i+1}) + \frac{(2h)^2}{2} u''(x_{i+1})$$

$$- \frac{(2h)^3}{3!} u'''(x_{i+1}) + \frac{(2h)^4}{4!} u^{(4)}(\xi) \quad (1.8)$$

với $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

Tương tự, ta đặt α và β và khai triển

$$\alpha u(x_i) + \beta u(x_{i-1}) = (\alpha + \beta) u(x_{i+1})$$
$$- (\alpha + 2\beta) h u'(x_{i+1}) + \left(\frac{1}{2}\alpha + 2\beta\right) h^2 u(x_{i+1})$$

$$- (\alpha + 8\beta) \frac{h^3}{3!} u'''(x_{i+1}) + \dots$$

Chọn α, β sao cho $\frac{1}{2}\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases}$

$$4u(x_i) - u(x_{i-1}) = 3u(x_{i+1}) - 2h u'(x_{i+1})$$
$$+ 4 \frac{h^3}{3!} u'''(x_{i+1}) + \dots$$

$$\Rightarrow u'(x_{i+1}) = \frac{3u(x_{i+1}) - 4u(x_i) - u(x_{i-1})}{2h} + \underbrace{\frac{2h^2}{3!} u'''(x_{i+1}) + \dots}_{O(h^2)}$$

Giờ đây ta sẽ xấp xỉ đạo hàm cấp 2 bằng Taylor.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)h + u''(x_i)\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i)$$

1.8 $$+ u^{(4)}(\xi)\frac{h^4}{4!} \qquad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i)$$

1.9 $$+ \frac{h^4}{4!}u''''(\bar{\xi}) \qquad \bar{\xi} \in (x_{i-1}, x_i)$$

Cộng 1.9 và 1.8 ta được

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i)$$

$$+ \frac{h^4}{4!}\left[u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\bar{\xi})\right]$$

Rút $$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

$$\underbrace{- \frac{h^2}{4!}\frac{\left[u^{(4)}(\xi) + u''''(\bar{\xi})\right]}{1}}_{O(h^2)}$$

Tuần 6 (1/4)

Ứng dụng xấp xỉ đạo hàm

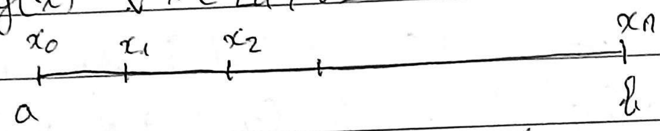
1) Tính xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

VD: $\begin{cases} y'(x) = 2x - y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Ta cần tính ra nghiệm ~~thu~~ xấp xỉ nghiệm chính xác sau: $y(x) = \cancel{x}\, e^{-x} + 2x - 2$

Trên $[a, b]$, * ~~mục~~ tiêu của ta nghiệm chính xác $y(x)\ \forall x \in [a, b]$



$x_i = a + ih$ với $h = \dfrac{b-a}{n}$

Tìm giá trị $\{y(x_i)\}_{i=\overline{0,n}}$ lưu ý $y(x_0) = y_0$

Do $y'(x) = f(x, y(x))$ với $x \in (a, b)$

* Từ bài toán trên vô hạn điểm, ta chuyển về bài toán trên các điểm x_i.

Tìm $y(x_i)$

Ta có: $y'(x_i) = f(x, y(x_i))$.

Áp dụng ct sai phân tiến.

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h)$$

Do đó: $$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = f(x_0, \overbrace{y(x_0)}^{y_0})$$

$$y(x_1) - y_0 + O(h^2) = h f(x_0, y_0)$$

Ta đặt y_1 giá trị xấp xỉ của $y(x_1)$, thoả:

$$y_1 = \underbrace{y_0 + h f(x_0, y_0)}_{\text{tính được}}$$

⇒ tính được y_1

Mối quan hệ giữa $y(x_1)$ và giá trị xấp xỉ của nó là y_1:

$$y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + O(h^2)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow y(x_1) - y_1 = O(h^2)$$

$$y'(x_1) = f(x_1, y(x_1))$$

Ta có:

$$y'(x_1) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{h} + O(h)$$

$$\Rightarrow y(x_2) - y_1 + O(h^2) = hf(x_1, \underbrace{y(x_1)}_{y_1 + O(h^2)}).$$

Ta đặt y_2 là giá trị xấp xỉ của $y(x_2)$ thoả:

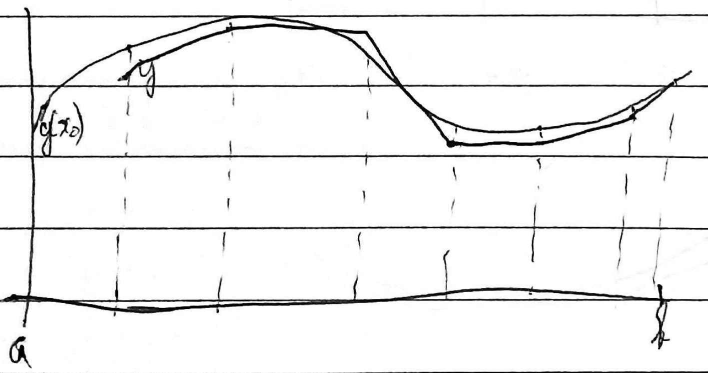
$$y_2 - y_1 = hf(x_1, \cancel{x}\, y_1)$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Ta ký hiệu: $Y_h = (y_i)_{i=\overline{0,n}}$ là giá trị xấp xỉ

$Y_e = (y(x_i))_{i=\overline{0,n}}$ là giá trị chính xác.



$$\| Y_h - Y_e \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - y(x_i)|^2}$$

$$\| y_h - y \| = \left(\int_a^b |y_h(x) - y(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

VD: $\begin{cases} y'(x) = 2x - y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$ (nghiệm chính xác: $y(x) = e^{-x} + 2x - 2$

$f(x, y(x)) = 2x - y(x)$

$N = 10$, $h = \dfrac{1}{10}$

$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$

$\Rightarrow y_1 = -1 + h(2.0 + 1) = -0,9$

$y(x_1) = e^{-x_1} + 2x_1 - 2$

$= -0,89516258$ với $x_1 = 0,1$

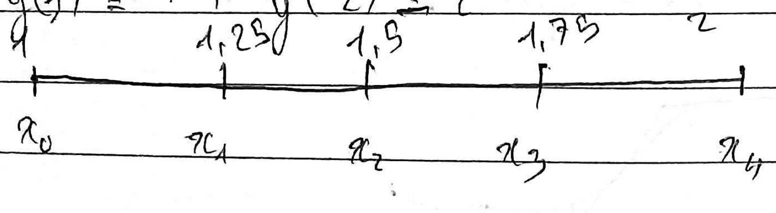
$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = -0,9 + 0,1(2.0,1 + 0,9)$

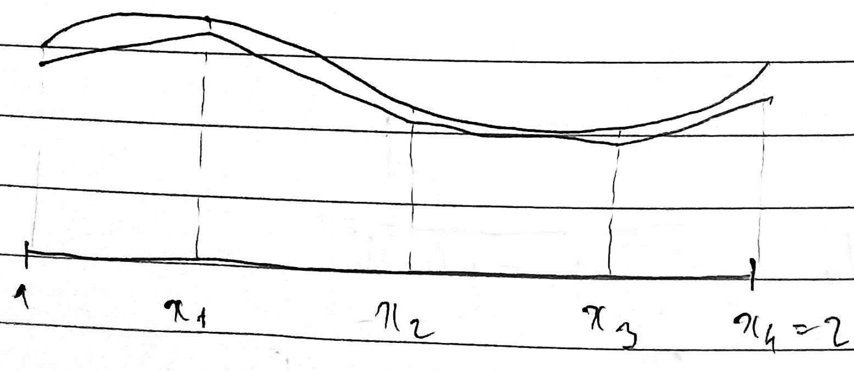
$= -0,79$

$y(x_2) = e^{-x_2} + 2x_2 - 2 = -0,78126925$

Tìm nghiệm xấp xỉ ptvp cấp 2.

$$\begin{cases} y''(x) + \left(\dfrac{2}{x}\right) y'(x) - \left(\dfrac{2}{x^2}\right) y(x) = \dfrac{\sin(\ln x)}{x^2} \quad x \in (1,2) \\ y(1) = 1,\ y(2) = 2 \end{cases}$$





$x_1 \in (1,2)$

$$y''(x_1) + \left(\frac{2}{x_1}\right) y'(x_1) - \frac{2}{(x_1^2)} y(x_1) = \frac{\sin(\ln(x_1))}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow y''(x_1) + 1{,}6\, y'(x_1) - 1{,}28\, y(x_1) = \frac{\sin(\ln(1{,}25))}{1{,}25^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{h^2} + O(h^2)\right] + \cdots$$

$$\cdots + 1{,}6\left[\frac{y(x_2) - y(x_0)}{2h} + O(h^2)\right] - 1{,}28\, y\, \cancel{y}(x_1) = f_1.$$

$$\Rightarrow y(x_2)\left[\frac{1}{h^2} + \frac{1{,}6}{2h}\right] - y(x_1)\left[\frac{-2}{h^2} - 1{,}28\right] + \cdots$$

$$\cdots + y(x_0)\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1{,}6}{2h}\right] + O(h^2) = f_1.$$

$$\Rightarrow 19{,}2\, y_2 - 33{,}28\, y_1 = -12{,}65837035 + O(h^2).$$

$* \; x \cancel{\;} = x_2 = 1{,}5$

$$y''(x_2) + \left(\frac{2}{x_2}\right) y'(x_2) - \left(\frac{2}{x_2^2}\right) y(x_2) = \frac{\sin(\ln(x_2))}{x_2^2}$$

$$\Rightarrow y''(x_2) + \frac{4}{3} y'(x_2) - \frac{8}{9} y(x_2) = \frac{\sin(\ln(1{,}5))}{1{,}5}$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_3) - 2y(x_2) + y(x_1)}{h^2} + O(h^2) + \cdots = f_2.$$

$$\cdots + \frac{4}{3}\left[\frac{y(x_3) - y(x_1)}{2h} + O(h^2)\right] - \frac{8}{9} y(x_2) = f_2.$$

$$\Rightarrow y(x_3)\left[\frac{1}{h^2} + \frac{4}{6h}\right] + y(x_1)\left[\frac{-2}{h^2} - \frac{8}{9}\right] + \cdots$$

$$\cdots + y(x_1)\left[\frac{1}{h^2} - \frac{4}{6h}\right] + O(h^2) = f_2$$

$$\Rightarrow \frac{56}{3} y(x_3) - \frac{296}{9} y(x_2) + \frac{40}{3} y(x_1) + O(h^2) = \dots$$

$$\dots = 0{,}17530942.$$

$x = x_3 = 1{,}75.$

$$y''(x_3) + \left(\frac{2}{x_3}\right) y'(x_3) - \frac{2}{x_3^2} y(x_3) = \frac{\sin(\ln x_3)}{x_3^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y(x_4) - 2y(x_3) + y(x_2)}{h^2} + O(h^2)\right) + \frac{8}{7}\left(\frac{y(x_4) - f(x_2)}{2h} + O(h^2)\right) + \dots$$

$$\dots - \frac{32}{49} y(x_3) = 0{,}17334225$$

$$\Rightarrow y(x_4)\left(\frac{1}{h^2} + \frac{4}{7h}\right) = y(x_3)\left(\frac{2}{h^2} - \frac{32}{49}\right) + O(h^2) + \dots$$

$$\dots + y(x_2)\left(\frac{1}{h^2} - \frac{4}{7h}\right) = 0{,}17334225$$

Tuần 7.(8/4)

9.1)

Vì đa thức P_2 nội suy f tại x_i, $i = 0, 1, 2, n$

Với $x_i = a + ih$ nên ta được:

$$\begin{cases} P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x \\ P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2(x_1) = f(x_1) \\ P_2(x_2) = f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix} = 0$$

$$P_2'(x) = a_1 + 2a_2 x$$
$$P_2''(x) = 2a_2$$

$$f(x_1 + h) = f(a + h + h) = f(x_2) = P_2(x_2)$$
$$f(x_1 - h) = f(a + h - h) = f(x_0) = P_2(x_0)$$

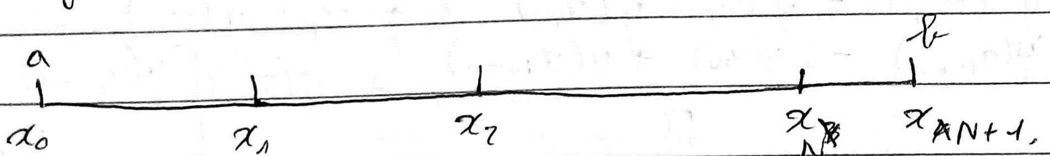
$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1 + h)}{h^2} = \frac{P_2(x_2) - P_2(x_0)}{h^2}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \dots$$
$$\dots + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$a_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$
$$= \frac{f(x_0)}{2h^2} - \frac{f(x_1)}{h^2} + \frac{f(x_2)}{2h^2} = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2}.$$

Phương trình vi phân cấp 2 tổng quát

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), & x \in (a, b) \\ y(a) = \alpha_1, \quad y(b) = \alpha_2 \end{cases}$$



$$h = \frac{b - a}{N + 1}$$

$y(x_0) = \alpha_1$, ~~x~~ $y(x_{N+1}) = \alpha_2$.

Bài toán là $y(x_i) = ?$ $i = \cancel{0, N+1}$ $\overline{1, N}$

Đầu tiên, xét $i = 1$.

$$y''(x_1) + p(x_1)\, y'(x_1) + q(x_1)\, y(x_1) = r(x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{h^2} + p(x_1)\left[\frac{y(x_2) - y(x_0)}{2h}\right] + \dots$$

$$\dots + q(x_1)\, y(x_1) + O(h^2) = r(x_1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-2}{h^2} + q(x_1)\right) y(x_1) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_1)}{2h}\right) y(x_2) + O(h^2) + \dots$$

$$\dots = r(x_1) - \left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_1)}{2h}\right] y(x_0)$$

Giờ ta xét $i \in [2, N-1]$:

$$y''(x_i) + p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y(x_i) = r(x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + \dots$$

$$\dots + q(x_i)\, y(x_i) + O(h^2) = r(x_i)$$

$$\Rightarrow y(x_{i-1})\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\right] + y(x_i)\left[\frac{-2}{h^2} + q(x_i)\right] + \dots$$

$$\dots + y(x_{i+1})\left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\right] + O(h^2) = r(x_i)$$

Cuối cùng khi $i = N$.

$$y''(x_N) + p(x_N)\, y'(x_N) + q(x_N)\, y(x_N) = r(x_N)$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_{N+1}) - 2y(x_N) + y(x_{N-1})}{h^2} + p(x_N)\left[\frac{y(x_{N+1}) - y(x_{N-1})}{2h}\right] + \dots$$

$$\dots + q(x_N)\, y(x_N) + O(h^2) = r(x_N).$$

$$\Rightarrow y(x_{N-1})\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_N)}{2h}\right] + y(x_N)\left[\frac{-2}{h^2} + q(x_N)\right]$$

$$+ O(h^2) = r(x_N) - \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_N)}{2h}\right] y(x_{N+1})$$

Ta đặt $y(x_i) \approx y_i$, $i = \overline{1,N}$ với $\{y_i\}_{i=\overline{1,N}}$ thoả:

$$\underbrace{\left[-\frac{2}{h^2} + q(x_i)\right]}_{A_{11}} y_1 + \underbrace{\left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\right]}_{A_{12}} y_2 = \dots$$

$$\dots = \underbrace{r(x_1) - \left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_1)}{2h}\right]\alpha_1}_{B_1}$$

Đồng thời với $2 \le i \le N-1$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\right]}_{A_{i,i-1}} y_{i-1} + \underbrace{\left[-\frac{2}{h^2} + q(x_i)\right]}_{A_{i,i}} y_i + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\right]}_{A_{i,i+1}} y_{i+1} = r(x_i)$$

và

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_N)}{2h}\right] y_{N-1} + \left[-\frac{2}{h^2} + q(x_N)\right] y_N = \dots$$

$$\dots = r(x_N) - \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_N)}{2h}\right]\alpha_2.$$

Từ đây, ta xây dựng các ma trận dựa trên các phương trình trên:

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = B \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

$$A_{11} = -\frac{2}{h^2} + q(x_1), \quad A_{12} = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}$$

với $A_{i,i-1} = \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p(x_i)}{2h}$, $A_{i,i} = \dfrac{-2}{h^2} + q(x_i)$,

$$A_{i,i+1} = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_2)}{2h}$$

$B_1 = r(x_1) - \left[\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p(x_1)}{2h}\right]\alpha$, $B_i = r(x_i)$ $i = \overline{2, N-1}$

$$B_N = r(x_N) - \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_N)}{2h}\right]\alpha_2.$$

MATLAB code

input: a, b, α_1, α_2, N

function: r, q, p

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \quad x_0 = a,$$

$$x_i = x_0 + i.h, \quad x_{N+1} = b, \quad A = \text{space}(N,N)$$

$$A(1,1) = \frac{-2}{h^2} + q(x(1))$$

$$A(1,2) = \frac{1}{h^2} + p(x(1))$$

$$A(i,i-1) = \frac{1}{h^2} - \frac{p(x(i))}{2h}$$

$$A(i,i) = -\frac{2}{h^2} + q(x(i))$$

$$A(i,i+1) = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x(i))}{2h}.$$

Bài tập về nhà, viết chương trình thực hiện thuật toán trên bằng MATLAB. hạn 5h chiều mai (9/4) Ex 13.1 (bắt buộc)

$$A(N,N-1) = \frac{1}{h^2} - \cancel{p(x}\,\frac{p(x(N))}{2h}$$

$$A(N,N) = \frac{-2}{h^2} + q(x(N))$$

$$B(1) = r(x(1)) - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x(1))}{2h}\right)\alpha_1$$

$$B(N) = r(x(N)) - \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x(N))}{2h}\right]\alpha_2$$

$$B(i) = r(x(i))$$

$U = A \setminus B$

$Y = [\alpha_1 ; U_j \ \alpha_2]$ trên $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^{N+2}$

11h (9/4) ~~Hết~~ Btvn. Hết bài toán (không bắt buộc)

$$\begin{cases} y'' + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = r(x) & x \in (a, b) \\ y(a) = \alpha_1 \\ y'(b) = \alpha_2 \end{cases}$$

bậc hội tụ = 2.