TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH VÀ MỘT SỐ VÍ DỤ MÔN GIẢI TÍCH 2A HỌC KỲ 1 NĂM HỌC 2024 - 2025

1. Chứng minh $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}$

Cho E là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to [0,+\infty) \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

được gọi là một *chuẩn* trên E nếu thỏa 3 tính chất sau:

i) Phân biệt dương:

$$\begin{aligned} &\|x\| \geq 0, \forall x \in E, \\ &\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

ii) Chuẩn vectơ bội: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) Bất đẳng thức tam giác: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

Một không gian vectơ được trang bị một chuẩn được gọi là *một không gian định chuẩn* và được kí hiệu là $(E, \|\cdot\|)$.

Ví dụ 1. Cho $C([0,1])$ là không gian các hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục và $f \in C([0,1])$. Đặt

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 x \cdot |f(x)| \mathrm{d}x, \\ \|f\|_2 &= \sup_{x \in [0,1]} x \cdot |f(x)|. \end{aligned}$$

Chứng minh $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là các chuẩn trên $C([0,1])$.

2. Chứng minh (E, d) là không gian metric

Cho E là một tập hợp khác trống. Một *metric* trên E là một ánh xạ

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

thỏa các tính chất:

i) Phân biệt dương:

$$\begin{aligned} &d(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E \\ &d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

ii) Đối xứng:

$$d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x, y \in E$$

iii) Bất đẳng thức tam giác:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x, y, z \in E.$$

Ví dụ 2. Cho $E = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$. Đặt

$$\begin{array}{rccl} d: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \end{array}$$

Chứng minh $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$ là không gian metric.

Ví dụ 3. Cho ánh xạ $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$d(x,y) = \left| \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^2} \right|, \; x, y > 0.$$

Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric.

Ví dụ 4. Cho ánh xạ $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$d(x,y) = \left| \sqrt{x^2+1}e^{2x} - \sqrt{y^2+1}e^{2y} \right|.$$

Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric.

Ví dụ 5. Cho $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric. Xét $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$d_1(x,y) = |x-y| + d(x,y).$$

Chứng minh $(\mathbb{R}, d_1)$ là không gian metric.

3. Chứng minh a là điểm dính của A trong d

Cách 1 (dùng định nghĩa): Cho (E,d) là không gian mêtríc và $\varnothing \neq A \subset E$. Khi đó, a là *điểm dính* của A nếu: $\forall r > 0, B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.
Cách 2 (dùng mệnh đề): Cho (E,d) là không gian mêtríc, $\varnothing \neq A \subset E$ và $a \in E$. Muốn chứng minh a là điểm dính của A, ta tìm một dãy (x_n) thỏa

$$\begin{cases} (x_n) \subset A, \\ d(x_n, a) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{cases}$$

Ví dụ 6. Cho metric $d(x,y) = |x-y| - \sqrt{|x-y|}, \; x, y \in \mathbb{R}^+$ và $A = (0,1)$. Chứng minh $a = 0$ là điểm dính của A trong d.

4. Chứng minh A là tập đóng trong (E, d)

Cách 1 (dùng định nghĩa): Cho (E, d) là không gian mêtríc và $\varnothing \neq A \subset E$. Khi đó,

- a là *điểm dính* của A nếu: $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.
- A là *tập đóng* trong (E, d) nếu mọi điểm dính của A đều thuộc A.

Cách 2 (dùng định lý): Lấy a là điểm dính bất kỳ của A. Khi đó, tồn tại dãy $(x_n) \subset A$ sao cho $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} a$. Ta chứng minh $a \in A$.

Ví dụ 7. Cho $X = C([0,1]) = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ liên tục}\right\}$ và $f, g \in X$. Đặt metric

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Chứng minh $A = \{f \in X : f(0) = 1\}$ và $B = \{f \in X : f(0) = f(1)\}$ là hai tập đóng trong (X, d_∞).

Ví dụ 8. Cho $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2024\}$. Chứng minh A là tập đóng trong metric thông thường.

4. Chứng minh A là tập mở trong (E, d)

Cho (E, d) là không gian metric, $a \in E$ và $r > 0$ (r là số thực)
Cách 1 (dùng định nghĩa): Với mọi điểm bất kỳ $a \in E$, ta tìm $r > 0$ sao cho $B(a, r) \subset E$, trong đó $B(a, r) = \{x \in E,\ d(x, a) < r\}$.
Cách 2 (dùng định lý liên hệ giữa tập mở và tập đóng): Chứng minh $E \setminus A$ là tập đóng.

Ví dụ 9. Trong $\mathbb{R}^2$, cho metric

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Chứng minh $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 1\right\}$ mở trong $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 10. Trong $\mathbb{R}^2$, cho metric Euclide. Chứng minh $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\right\}$ mở trong $\mathbb{R}^2$.

5. Dãy hội tụ trong không gian metric

Cách 1 (dùng định nghĩa): Cho $a \in E$ và dãy $(x_n) \in (E, d)$. Ta nói (x_n) hội tụ về a trong (E, d) khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d(x_n, a) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Cách 2 (dùng mệnh đề): Cho $a \in E$ và dãy $(x_n) \in (E, d)$. Ta tính $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a)$.

- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ thì (x_n) hội tụ về a trong (E, d).
- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a) \neq 0$ thì (x_n) không hội tụ về a trong (E, d).

Ví dụ 11. Cho $E = C([0,1])$ là không gian các hàm liên tục trên $[0,1]$ và các metric

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x,$$
$$d_2(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Cho $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$ và $f = 0$. Chứng minh

a) f_n hội tụ về f trong (E, d_1).

b) f_n không hội tụ về f trong (E, d_2).

Ví dụ 12. Cho X là tập hợp các hàm liên tục trên $[0,1]$. Với $x, y \in X$, đặt

$$d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,\mathrm{d}t,$$
$$d_2(x,y) = \max\{|x(t) - y(t)| \ : \ t \in [0,1]\}\,.$$

a) Chứng minh rằng, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X, d_2) thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X, d_1).

b) Cho $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ và $x = 0$. Chứng minh x_n hội tụ về x trong (X, d_1) nhưng x_n không hội tụ về x trong (X, d_2).

Ví dụ 13. Cho $X = C([0,1])$. Với $f, g \in X$, đặt

$$D_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} t\,|f(t) - g(t)|\,.$$

a) Chứng minh D_∞ là metric trên X.

b) Cho $E = \{f \in X : \ f(1) = 1\}$. Chứng minh E là tập đóng trong (X, D_∞).

c) Cho $f_n(t) = 1 - e^{nt}$ và $f = 1$. Hỏi (f_n) có hội tụ về f trong (X, D_∞) không? Giải thích?

6. Dãy bị chặn - Dãy Cauchy

Cho (E, d) là không gian metric. Khi đó

- **Chứng minh dãy (x_n) là *dãy bị chặn* trong (E, d):**

  Tìm $a \in E$ và tìm $r > 0$ sao cho $x_n \in B(a, r), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- **Chứng minh dãy (x_n) là *dãy Cauchy* trong (E, d):**

  Cách 1 (dùng định nghĩa): Lấy bất kỳ $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_m, x_n) < 0,\ \forall m, n \geq N(\varepsilon)$.

  Cách 2 (dùng mệnh đề): Chứng minh $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Ví dụ 14. Cho $X = C([0,1])$. Với $f, g \in X$, đặt

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Cho $f_n(t) = t^n$. Chứng minh (f_n) là dãy Cauchy trong (x, d).

7. Không gian metric đầy đủ/không đầy đủ

- **Lưu ý:**

  Với (E, d) là không gian metric bất kì,

  $$\begin{gathered}\text{Hội tụ} \Rightarrow \text{Cauchy} \\ \text{Cauchy} \not\Rightarrow \text{Hội tụ}\end{gathered}$$

  Với (E, d) là không gian metric đầy đủ, hội tụ $\Leftrightarrow$ Cauchy.

- **Chứng minh (E, d) là không gian metric đầy đủ:**

  Bước 1: Chứng minh (E, d) là không gian metric.

  Bước 2: Cho (x_n) là dãy Cauchy, chứng minh (x_n) là dãy hội tụ trong (E, d).

- **Chứng minh (E, d) là không gian metric không đầy đủ:**

  Bước 1: Kiểm tra (E, d) có phải là không gian metric không?

  \- Nếu (E, d) không là không gian metric thì ta kết luận (E, d) không đầy đủ.

  \- Nếu (E, d) là không gian metric thì sang bước 2.

  Bước 2: Tìm (x_n) là dãy Cauchy nhưng không hội tụ trong (E, d).

Ví dụ 15. Cho ánh xạ $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$d(x,y) = \left| \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^2} \right|.$$

Hỏi $(\mathbb{R}, d)$ có là không gian metric đầy đủ không?

Ví dụ 16. Cho ánh xạ $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$d(x,y) = \left| \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^2} \right|.$$

a) Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric.

b) Cho $x_n = \sqrt{n}$. Chứng minh (x_n) là dãy Cauchy trong $(\mathbb{R}, d)$.

c) Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian metric không đầy đủ.

Ví dụ 17. Cho $d_1, d_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |\arctan x - \arctan y|, \\ d_2(x, y) &= \left| \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^y}{1+e^y} \right|, \\ d_3(x, y) &= \left| \left(x^2+1\right) e^x - \left(y^2+1\right) e^y \right| \end{aligned}$$

Chứng minh $(\mathbb{R}, d_1), (\mathbb{R}, d_2)$ và $(\mathbb{R}, d_3)$ là hai không gian metric không đầy đủ.

8. Chứng minh D là tập compact trong (E, d)

Bước 1: Kiểm tra E có là tập con của $\mathbb{R}^n$ không? Tức là, kiểm E có là không gian hữu hạn chiều không? Nếu có, làm bước 2-3. Nếu không, làm bước 4.
Bước 2: Chứng minh D là tập đóng.
Bước 3: Chứng minh D là tập bị chặn, tức là, tìm $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$, tìm $r > 0$ sao cho $D \subset B(a, r)$.
Bước 4: Cho dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Chứng minh tồn tại dãy con $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to u \in E$.

Ví dụ 18. Trong $\mathbb{R}^2$, cho metric

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| \ ; \ |x_2 - y_2|\},$$

với mọi $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Cho $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \le 1\right\}$. Chứng minh D là tập compact trong $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$.

Ví dụ 19. Trong $\mathbb{R}^2$, cho metric

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

với mọi $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Cho $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2y\right\}$. Chứng minh D là tập compact trong $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$.

9. Chứng minh D không là tập compact trong (E, d)

Cách 1: Chứng minh D không đóng hoặc không bị chặn.
Cách 2: Giả sử D là tập compact, chỉ ra tồn tại dãy $(u_n) \subset D$ sao cho $u_n \nrightarrow u \in D$.

Ví dụ 20. Cho $X = C([0, 1]) = \left\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ liên tục}\right\}$ và $f, g \in X$. Đặt metric

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt.$$

Cho $a = \{f \in X : f(0) = 0\}$. Chứng minh A không compact trong (X, d).