Đại Học Khoa Học Tự Nhiên
Khoa Toán – Tin học
---oOo---

Đinh Ngọc Thanh – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Huy Tuấn

Giải Tích 2

Tp. Hồ Chí Minh – 2018

Lời Nói Đầu

Giáo trình Giải tích 2 trình bày nội dung môn học Tô pô Mê tric được giảng dạy trên 40 năm tại Khoa Toán-Tin ĐHKHTN. Môn này là môn cơ bản cho các sinh viên ngành Toán và Tin học và cũng là một trong các môn có trong nội dung thi cao học ngành Toán của trường ĐHKHTN Tp HCM.

Môn Tô pô Mê tric đã được giảng dạy bởi nhiều thế hệ giảng viên của Khoa như Đặng Đình Áng, Trần Thạnh, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân, Đặng Đức Trọng, Nguyễn Huy Tuấn… với nhiều sự thăng trầm qua thời gian. Ban đầu, nó là một môn riêng có tên Giải tích cơ sở. Sau đó khi chương trình đại học rút xuống 120 tín chỉ thì môn này được ghép vào môn Giải tích 2 và được giảng dạy cùng với phần vi phân hàm nhiều biến. Trong thời gian gần đây, do thiết kế chương trình liên thông với các khoa khác trong trường, môn này lại được tách riêng ra để dành cho các sinh viên có khuynh hướng muốn học nhiều về Toán.

Về nội dung, giáo trình này thừa kế các nội dung của giáo trình Nhập môn Giải tích (Đặng Đình Áng), Giải tích 2 (Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân). Chúng tôi trình bày về mê tric, khái niệm về tập mở, tập đóng, compact, liên thông, ánh xạ liên tục. Các khái niệm này là nền tảng cho các sinh viên Toán. Trong ngành Tin học, trong lĩnh cực phân loại (classification), phân chùm (clustering), các khái niệm về khoảng cách cũng được áp dụng rộng rãi. Trong giáo trình chúng tôi cũng trình bày các khái niệm cơ bản về không gian định chuẩn và các ánh xạ tuyến tính trên không gian định chuẩn . Các kiến thức này chuẩn bị cho các nội dung Giải tích hàm mà sinh viên sẽ học vào năm thứ hai. Với khái niệm về chuẩn, chúng tôi trình bày một sơ đồ chung cho việc khảo sát các chuỗi số, chuỗi hàm. Các loại chuỗi này được xem như chuỗi trên các không gian định chuẩn cụ thể.

Để cho sinh viên có thể tham khảo rộng hơn, chúng tôi cũng viết thêm một số chủ đề nâng cao. Các phần này được đánh dấu *. Ngoài ra, chúng tôi cũng thêm vào mỗi chương một phục lục hướng dẫn phương pháp giải một số loại bài tập. Chúng tôi hy vọng giáo trình sẽ giúp sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh có một tài liệu tham khảo hữu ích.

Tp HCM, những ngày cuối năm 2018

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương 1

KHÔNG GIAN MÊTRÍC, KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN, KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$

Trong chương này, chúng ta khảo sát các khái niệm căn bản về cấu trúc tôpô không gian định chuẩn, mà không gian $\mathbb{R}^n$ là một trường hợp cụ thể, bằng cách xét một cấu trúc tổng quát hơn, không gian mêtríc. Mọi không gian định chuẩn đều là một không gian mêtríc và ngược lại, các không gian mêtríc thông dụng là các tập con của một không gian định chuẩn. Trước hết, ta nhắc lại một số thuật ngữ và ký hiệu thông dụng.

Tập hợp có thể xác định bằng phương pháp liệt kê, chẳng hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ chỉ tập hợp mà các phần tử là $x_1, x_2, ..., x_n$; và $\{x\}$ là tập hợp chỉ có một phần tử là x; hoặc có thể được xác định bằng phương pháp trưng tính. Ký hiệu

$$\{x | P\}$$

chỉ tập hợp tất cả các phần tử x thỏa tính chất P. Tập hợp không có phần tử nào cả được gọi là *tập hợp rỗng*, ký hiệu $\varnothing$.

Ký hiệu $x \in A$ để chỉ x là một phần tử của A. Ngược lại, ta viết $x \notin A$. Nếu B là một *tập con* của A, nghĩa là nếu $x \in B$ thì $x \in A$, ta viết $B \subset A$. Tập hợp tất cả các tập con của A được gọi là *tập các phần* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$ hay 2^A. Nếu $B \subset A$ và $A \subset B$ thì $A = B$. Khi $B \subset A$ và $B \neq A$, ta nói B là một *tập con riêng* của A. Chú ý rằng $\varnothing \subset A$, với mọi tập hợp A. Các *tập hợp số* thường dùng bao gồm tập $\mathbb{N}$ các số nguyên tự nhiên (bắt đầu từ 1), tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên tương đối (số nguyên dương, âm và số 0), tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ (các số có thể biểu diễn thành tỷ số của hai số nguyên), tập $\mathbb{R}$ các số thực (bao gồm các số hữu tỷ và vô tỷ) và tập $\mathbb{C}$ các số phức.

Đường thẳng thực nới rộng $\overline{\mathbb{R}}$ bao gồm các số thực và hai ký hiệu ∞, $-\infty$, với quan hệ thứ tự nới rộng $-\infty < x < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, khoảng đóng (đoạn) $[a, b]$ và khoảng mở (khoảng) (a, b) xác định bởi

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}; \ (a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

Ta còn ký hiệu

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \text{ và } (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

Với tập con không rỗng A của $\mathbb{R}$, *chận trên nhỏ nhất* của A, nếu có, được ký hiệu là $\sup A$ và *chận dưới lớn nhất* của A, nếu có, là $\inf A$. Ta còn viết $\max A$ thay cho $\sup A$ khi $\sup A \in A$ và $\min A$ thay cho $\inf A$ khi $\inf A \in A$. Chú ý rằng với các tập con không rỗng A của đường thẳng thực nới rộng, $\sup A$ và $\inf A$ luôn luôn tồn tại trong $\overline{\mathbb{R}}$.

Với $A, B \subset X$, *phần hội*, *phần giao* và *phần hiệu* của A và B, lần lượt xác định bởi

$$A \bigcup B = \left\{ x \in X \middle| x \in A \vee x \in B \right\},$$

$$A \bigcap B = \left\{ x \in X \middle| x \in A \wedge x \in B \right\},$$

$$A \setminus B = \left\{ x \in X \middle| x \in A \wedge x \notin B \right\}.$$

Đặc biệt, $X \setminus A$ được gọi là *phần bù* của A trong X và còn được ký hiệu là A^c khi X được ngầm hiểu và không gây nhầm lẫn.

Ký hiệu $f : X \to Y$ để chỉ ánh xạ từ X vào Y, f gán mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử $f(x) \in Y$. Nếu $A \subset X$ và $B \subset Y$, *ảnh* của A qua f và *nghịch ảnh* của B qua f lần lượt cho bởi

$$f(A) = \left\{ f(x) \middle| x \in A \right\} = \left\{ y \in Y \middle| \exists x \in A, y = f(x) \right\},$$

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in X \middle| f(x) \in B \right\}.$$

Chú ý rằng $f^{-1}(B)$ có thể là tập rỗng, ngay cả khi $B \neq \varnothing$.

X gọi là *miền xác định* của f và $f(X)$ là *miền ảnh* của f.

Nếu $f(X) = Y$, f được gọi là *toàn ánh*. Ta còn nói f là ánh xạ từ X *lên* Y.

Ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$, với $y \in Y$. Nếu với mọi $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ chứa đúng một phần tử, f được gọi là một *đơn ánh* hay là *ánh xạ* $1-1$. Khi f là ánh xạ 1-1, ta định nghĩa *ánh xạ ngược* f^{-1} với miền xác định $f(X)$ và miền ảnh X như sau

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \ \forall x \in X, y \in f(X).$$

Với hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ và $A \subset X$, ta thường viết $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ thay cho $\sup f(A)$. Tương tự, $\inf\limits_{x \in A} f(x) \equiv \inf f(A)$.

Cho các ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$. *Ánh xạ hợp* $g \circ f: X \to Z$ xác định bởi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in X.$$

Với hai tập không rỗng I và X, một ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} f & : & I & \to & X \\ & & i & \mapsto & f(i) \equiv f_i \end{array}$$

còn được gọi là một *họ các phần tử của* X *có chỉ số trên* I, ký hiệu $f \equiv (f_i)_{i \in I}$, hay vắn tắt (f_i), khi tập các chỉ số I được ngầm hiểu và không thể nhầm lẫn.

Chẳng hạn, nếu X là tập các tập con của một tập hợp E, một họ các phần tử của X có chỉ số trên I còn được gọi là một họ các tập con của E. Với họ các tập con của E, $(A_i)_{i \in I}$, ta định nghĩa *phần hội* và *phần giao* của chúng,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Đặc biệt, khi $I = \mathbb{N}$, một họ các phần tử của X có chỉ số trên $\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} & \to & X \\ & & n & \mapsto & f(n) \equiv f_n \end{array}$$

được gọi là một *dãy* các phần tử của X. Khi đó, nếu

$$\begin{array}{cccc} n & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & k & \mapsto & n(k) \equiv n_k \end{array}$$

là một *dãy tăng ngặt* các số tự nhiên, nghĩa là $n_k < n_{k+1}$, với mọi $k \in \mathbb{N}$, thì dãy

$$\begin{array}{cccc} f \circ n & : & \mathbb{N} & \to & X \\ & & k & \mapsto & f(n(k)) \equiv f_{n_k} \end{array}$$

được gọi là một *dãy con* của dãy (f_n).

1. KHÔNG GIAN MÊTRÍC, KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN

Để khảo sát phép tính vi tích phân cho các hàm một biến $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ta dùng đại lượng $|x - y|$, với $x, y \in \mathbb{R}$, để chỉ khoảng cách giữa hai số thực x và y. Ta mở rộng khái niệm khoảng cách như sau:

1.1. Định nghĩa. Cho X là một tập không rỗng. Ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} d & : & X \times X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

được gọi là một *mêtríc* trên X nếu các tính chất sau được thỏa với mọi $x, y, z \in X$,

(i) $d(x,y) \geq 0$ và $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Tập X tương ứng với một mêtríc d được gọi là *không gian mêtríc* (X,d) hay vắn tắt là X khi mêtríc d được ngầm hiểu và không gây nhầm lẫn.

Tính chất (iii) còn được gọi là *bất đẳng thức tam giác* (dạng tổng). Từ đó, ta còn có bất đẳng thức tam giác dạng hiệu (bài tập 2),

$$|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y),$$

với mọi $x, y, a \in X$.

Ví dụ 1. Với $d(x,y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $(\mathbb{R}, d)$ là một không gian mêtríc. Mêtríc này được gọi là *mêtríc thông thường* trên $\mathbb{R}$, nghĩa là khi không có khẳng định nào khác, ta mặc nhiên dùng mêtríc này trên $\mathbb{R}$. ■

Trong ví dụ trên, mêtríc thông thường trên $\mathbb{R}$ được sinh ra từ hàm giá trị tuyệt đối, $x \mapsto |x|$, với

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{khi } x \geq 0, \\ -x, & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Tổng quát, ta có

1.2. Định nghĩa. Cho $(X, +, \cdot)$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$. Ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\| & : & X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

được gọi là một *chuẩn* trên X nếu các tính chất sau được thỏa với mọi $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

(i) $\|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Không gian vectơ $(X,+,\cdot)$ với chuẩn $\|\cdot\|$ được gọi là *không gian định chuẩn* $(X,+,\cdot,\|\cdot\|)$, hay vắn tắt là $(X,\|\cdot\|)$, hay vắn tắt hơn là X, khi các phép toán, hàm chuẩn được ngầm hiểu và không gây nhầm lẫn.

Với không gian định chuẩn $(X,\|\cdot\|)$, ánh xạ $d: X\times X \to \mathbb{R}$ xác định bởi $d(x,y)=\|x-y\|$ trở thành một mêtríc trên X (bài tập 1), gọi là *mêtríc sinh bởi chuẩn* trên X. Do đó, mọi không gian định chuẩn đều mặc nhiên là một không gian mêtríc với mêtríc sinh bởi chuẩn.

Tương tự như đối với không gian mêtríc, tính chất (iii) được gọi là *bất đẳng thức tam giác* (thứ nhất) và ta cũng có bất đẳng thức tam giác thứ hai (bài tập 2),

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|, \text{ với mọi } x, y\in X.$$

Ví dụ 2. a) $\mathbb{R}$ với các phép cộng và nhân thông thường là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ ($\dim\mathbb{R}=1$). Với hàm giá trị tuyệt đối $x\mapsto |x|$, do $|x|\ge 0$, $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$, $|\alpha x|=|\alpha||x|$, và $|x+y|\le|x|+|y|$, với mọi $\alpha, x, y\in\mathbb{R}$, nên $(\mathbb{R},|\cdot|)$ là không gian định chuẩn, chuẩn này gọi là *chuẩn thông thường* trên $\mathbb{R}$. Không gian mêtríc tương ứng chính là không gian cho trong ví dụ 1.

b) Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, không gian

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n): x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

với các phép toán

$$\begin{aligned}&(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),\\ &\alpha(x_1,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n),\end{aligned}$$

là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ ($\dim\mathbb{R}^n=n$). Với $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, các hàm số

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_2&=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},\\ \|\mathbf{x}\|_1&=|x_1|+\cdots+|x_n|,\\ \|\mathbf{x}\|_\infty&=\max_{i=1,\cdots,n}|x_i|,\end{aligned}$$

đều là các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ (bài tập 3), trong đó $\|\cdot\|_2$ được gọi là *chuẩn Euclide* trên $\mathbb{R}^n$ và là chuẩn thông thường, khi không có chỉ định nào khác. Chú ý rằng khi $n=1$, các chuẩn này đều trở thành chuẩn thông thường (hàm giá trị tuyệt đối) trên $\mathbb{R}$.

c)* Cho S là một tập không rỗng và $\mathsf{F}(S,\mathbb{R})$ là không gian các hàm số xác định trên S. Với $f,g \in \mathsf{F}(S,\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa $f+g, \alpha f \in \mathsf{F}(S,\mathbb{R})$ bởi

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x),\end{aligned}$$

với mỗi $x \in S$. Khi đó, với hai phép toán này, $\mathsf{F}(S,\mathbb{R})$ trở thành một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Bây giờ, xét không gian con $\mathsf{B}(S,\mathbb{R})$ các hàm số bị chặn, nghĩa là $f \in \mathsf{B}(S,\mathbb{R})$ khi $f(S)$ là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}$. Đặt

$$\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)| \text{ khi } f \in \mathsf{B}(S,\mathbb{R}).$$

Ta nhận được một chuẩn, gọi là *chuẩn sup*, trên $\mathsf{B}(S,\mathbb{R})$ (bài tập 4). Nói khác đi, $(\mathsf{B}(S,\mathbb{R}),\|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. ■

Để tổng quát hóa khái niệm về khoảng mở cũng như khoảng đóng trong $\mathbb{R}$, với $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, ta có thể viết

$$\begin{aligned}(a,b) &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x-\tfrac{a+b}{2}\right| < \tfrac{b-a}{2}\right\},\\ [a,b] &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x-\tfrac{a+b}{2}\right| \le \tfrac{b-a}{2}\right\},\end{aligned}$$

trong đó $\frac{a+b}{2}$ là điểm giữa (tâm) và $\frac{b-a}{2}$ là nửa chiều dài (bán kính) của (a,b) cũng như của $[a,b]$. Ta có

1.3. Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X,d), $a \in X$ và số thực $r>0$. Các tập

$$\begin{aligned}B(a;r) &= \{x \in X \mid d(x,a) < r\},\\ B'(a;r) &= \{x \in X \mid d(x,a) \le r\},\\ S(a;r) &= \{x \in X \mid d(x,a) = r\}\end{aligned}$$

lần lượt được gọi là *quả cầu mở, quả cầu đóng, mặt cầu tâm* a *bán kính* r.

Với định nghĩa nêu trên, ta có thể một số khái niệm về tôpô trên $\mathbb{R}$ qua các không gian mêtríc như sau.

1.4. Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X,d) và xét tập con $A \subset X$. Ta nói

(i) A là một *tập mở* (trong X) nếu ứng với mỗi $x \in A$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x;r) \subset A$.

(ii) A là một *tập đóng* (trong X) nếu phần bù của nó, $X \setminus A$, là một tập mở..

(iii) A là một tập *bị chặn* nếu tồn tại $a \in X$, $r > 0$, sao cho $A \subset B(a;r)$.

Do mọi quả cầu mở (trong X) đều là một tập con của X nên chính X là một tập mở (trong X). Ngoài ra, với $A = \varnothing$, không tồn tại $x \in A$ sao cho $B(x,r) \not\subset A$, với mọi $r > 0$, nên $\varnothing$ cũng là một tập mở (trong X). Do $X \setminus X = \varnothing$ và $X \setminus \varnothing = X$ nên ta suy ra rằng X và $\varnothing$ cũng là các tập đóng (trong X). Tóm lại, trong một không gian mêtríc (X,d) bất kỳ, tồn tại hai tập X và $\varnothing$ vừa đóng, vừa mở (trong X). Không gian mêtríc (X,d) chỉ có đúng hai tập vừa đóng vừa mở là X và $\varnothing$ được gọi là *không gian mêtríc liên thông*.

Ta có tính chất tổng quát sau cho các tập đóng, mở trong một không gian mêtríc.

1.5. Định lý. *Cho* (X,d) *là một không gian mêtríc và* $(A_i)_{i\in I}$ *là một họ không rỗng các tập con của* X. *Ta có*

(i) nếu các A_i *là tập mở thì* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *cũng là một tập mở.*

(ii) Nếu các A_i *là tập đóng thì* $\bigcap_{i\in I} A_i$ *cũng là một tập đóng.*

(iii) Nếu các A_i *là tập mở và* I *là tập hữu hạn thì* $\bigcap_{i\in I} A_i$ *cũng là một tập mở.*

(iv) Nếu các A_i *là tập đóng và* I *là tập hữu hạn thì* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *cũng là một tập đóng.*

Chứng minh. i) Với $x \in A \equiv \bigcup_{i\in I} A_i$, tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $x \in A_{i_0}$. Do A_{i_0} là một tập mở, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x;r) \subset A_{i_0} \subset A$. Do đó, A là một tập mở.

ii) Khi các A_i là tập đóng, do

$$X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)$$

là hội các tập mở nên là một tập mở. Suy ra $\bigcap_{i\in I} A_i$ là một tập đóng.

iii) Với $x \in B \equiv \bigcap_{i\in I} A_i$, ta có $x \in A_i$, với mọi $i \in I$. Do mỗi A_i là một tập mở nên tồn tại $r_i > 0$ sao cho . Vì I hữu hạn, $r = \min_{i\in I} r_i$ tồn tại và > 0. Khi đó, do

$$B(x;r) \subset B(x;r_i) \subset A_i,$$

với mọi $i \in I$, ta suy ra $B(x;r) \subset B$. Vậy B là một tập mở.

iv) Tương tự như ii). ■

Ngoài các tập X, $\varnothing$ là các tập vừa đóng vừa mở, ta còn có

1.6. Mệnh đề. *Trong một không gian mêtríc bất kỳ, mọi quả cầu mở đều là tập mở, mọi quả cầu đóng cũng như mặt cầu đều là các tập đóng.*

Chứng minh. Với mỗi $x \in B(a,r)$, chọn $\rho = r - d(x,a) > 0$. Khi đó, với mọi $y \in B(x,\rho)$, ta có

$$d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \rho + d(x,a) = r,$$

nên $y \in B(a,r)$. Do đó $B(x,\rho) \subset B(a,r)$. Vậy $B(a,r)$ là một tập mở.

Để chứng minh $B'(a,r)$ là một tập đóng, ta chứng tỏ $X \setminus B'(a,r)$ là một tập mở. Thật vậy, với mỗi $x \in X \setminus B'(a,r)$, chọn $\rho = d(x,a) - r > 0$. Với mọi $y \in B(x,\rho)$, ta có

$$d(y,a) \ge d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - \rho = r,$$

nên $y \in X \setminus B'(a,r)$. Từ đó suy ra $B(x,\rho) \subset X \setminus B'(a,r)$ và do đó $X \setminus B'(a,r)$ là một tập mở.

Bằng cách viết $S(x,r) = B'(x,r) \cap (X \setminus B(x,r))$, ta suy ra rằng mặt cầu đóng là phần giao của hai tập đóng nên cũng là một tập đóng. ■

Cho không gian mêtríc (X,d) và $A \subset X$. Phần tử $a \in X$ được gọi là một *điểm dính* của A nếu mọi quả cầu tâm a đều có chứa ít nhất một phần tử với A, nghĩa là

$$\forall r > 0,\ B(a;r) \cap A \ne \varnothing.$$

Tập các điểm dính của A được gọi là *phần dính* hay *bao đóng* của A, ký hiệu $\overline{A}$. Đặc biệt khi $\overline{A} = X$, ta nói rằng A *dầy đặc* (hay *trù mật*) trong X. Phần tử $a \in X$ được gọi là một *điểm trong* của A nếu tồn tại một quả, cầu tâm a chứa trong A, nghĩa là

$$\exists r > 0,\ B(a;r) \subset A.$$

Tập các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A, ký hiệu $\overset{o}{A}$ hay $\operatorname{int} A$.

Ví dụ 3. a) Với tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$ và với $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, phần trong của các khoảng $(a,b), (a,b], [a,b)$, và $[a,b]$ là khoảng mở (a,b) và phần dính của các khoảng $(a,b),(a,b],[a,b)$, và $[a,b]$ là khoảng đóng $[a,b]$. Ngoài ra, do mọi khoảng mở trong $\mathbb{R}$ đều chứa ít nhất một số hữu tỷ và một số vô tỷ nên ta suy ra rằng $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ là các tập con dầy đặc trong $\mathbb{R}$.

b) Tổng quát, trong không gian định chuẩn $(X,\|\cdot\|)$, bao đóng của quả cầu mở $B(x,r)$, với $x\in X, r>0$, là quả cầu đóng $B'(x,r)$. Ngược lại, phần trong của quả cầu đóng $B'(x,r)$ chính là quả cầu mở $B(x,r)$. Chú ý rằng điều này không đúng trong không gian mê tríc tổng quát (bài tập 5). ■

Ta được các kết quả sau cho phần dính cũng như phần trong của một tập con trong không gian mêtríc.

1.7. Định lý. *Cho không gian mêtríc* (X,d) *và* $A\subset X$. *Ta có*

(i) $\overline{A}$ *là một tập đóng và là tập đóng nhỏ nhất chứa* A.

(ii) $\overset{o}{A}$ *là một tập mở và là tập mở lớn nhất chứa trong* A.

Chứng minh. (i) Với $x\in X\setminus\overline{A}$, tồn tại $r>0$ sao cho
$$B(x;r)\cap A=\varnothing. \tag{1}$$

Điều này cho thấy $B(x;r)\subset X\setminus A$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $B(x;r)\subset X\setminus\overline{A}$ và do đó $X\setminus\overline{A}$ là một tập mở, nghĩa là $\overline{A}$ là một tập đóng.

Thật vậy, do quả cầu mở $B(x;r)$ là một tập mở nên với mỗi $y\in B(x;r)$, tồn tại $\rho>0$ sao cho $B(y;\rho)\subset B(x;r)$. Từ (1), ta được $B(y;\rho)\cap A=\varnothing$ và do đó $y\notin\overline{A}$, nghĩa là $y\in X\setminus\overline{A}$. Tóm lại, $B(x;r)\subset X\setminus\overline{A}$.

Để chứng minh tính nhỏ nhất của $\overline{A}$, ta chứng tỏ rằng nếu F là một tập đóng trong X chứa A, thì $\overline{A}\subset F$. Thật vậy, nếu $x\notin F$, nghĩa là $x\in X\setminus F$ thì do $X\setminus F$ là một tập mở, tồn tại $r>0$ sao cho $B(x;r)\subset X\setminus F$ và do đó $B(x;r)\cap F=\varnothing$. Ta suy ra rằng x không là một điểm dính của A, nghĩa là $x\notin\overline{A}$. Tóm lại, $\overline{A}\subset F$.

(ii) Với $x\in\overset{o}{A}$, tồn tại $r>0$ sao cho $B(x;r)\subset A$. Ta chứng tỏ rằng $B(x;r)\subset\overset{o}{A}$ và do đó, $\overset{o}{A}$ là một tập mở.

Tương tự phần i), do $B(x;r)$ là một tập mở nên với mỗi $y\in B(x;r)$, tồn tại $\rho>0$ sao cho $B(y;\rho)\subset B(x;r)\subset A$. Từ đó suy ra rằng y là một điểm trong của A, nghĩa là $y \in \overset{o}{A}$. Do đó, $B(x;r) \subset \overset{o}{A}$. Ta chứng minh tính lớn nhất của $\overset{o}{A}$ bằng cách chứng tỏ rằng nếu O là một mở chứa trong A thì $O \subset \overset{o}{A}$. Thật vậy, nếu $x \in O$, thì do O là tập mở, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x;r) \subset O \subset A$. Từ đó suy ra x là một điểm trong của A, $x \in \overset{o}{A}$. Tóm lại $O \subset \overset{o}{A}$. ■

Đối với tính chất bị chặn cho tập con của một không gian mêtríc, ta có

1.8. Mệnh đề. *Trong một không gian mêtríc* (X,d) *bất kỳ, ta có*

(i) Mọi tập hữu hạn đều là tập bị chặn, và

(ii) hội hữu hạn các tập bị chặn cũng là tập bị chặn.

Chứng minh. (i) Với $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ là một tập con hữu hạn của X, do $A \subset B(x_1, r)$, với $r = 1 + \max\{d(x_1, x_i) : i = 2, \cdots, n\}$, nên ta suy ra rằng A là tập bị chặn trong X.

(ii) Trước hết, với họ hữu hạn các quả cầu $B(x_i, r_i)$, $i = 1, \cdots, n$, ta có $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \subset B(x_1, r)$, trong đó $r = 1 + \max\{r_i + d(x_1, x_i) : i = 1, \cdots, n\}$. Do đó hội hữu hạn các quả cầu là tập bị chặn. Vì tập con của tập bị chặn cũng là tập bị chặn, ta suy ra rằng hội hữu hạn các tập bị chặn cũng là tập bị chặn. ■

Khác với tính chất đóng, mở, tính bị chặn phụ thuộc chặt chẽ vào mêtríc. Các mê tríc khác nhau trên cùng một tập hợp X có thể sinh ra cùng một lớp các tập mở (mà ta còn gọi là một tôpô trên X) và do đó, sinh ra cùng lớp các tập đóng, nhưng không nhất thiết sinh ra cùng lớp các tập bị chặn (bài tập 6).

2. DÃY TRONG KHÔNG GIAN MÊTRÍC

Nhắc lại rằng dãy các phần tử của tập không rỗng X là ánh xạ

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto x(n) \equiv x_n \end{aligned}$$

mà ta ký hiệu là $\mathbf{x} = (x_n)$ và ứng với mỗi một dãy tăng ngặt các số tự nhiên

$$\begin{aligned} \mathbf{n} : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto \mathbf{n}(k) \equiv n_k, \end{aligned}$$

nghĩa là $n_k < n_{k+1}$, với mọi $k \in \mathbb{N}$, thì dãy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{n} : \mathbb{N} &\to X \\ k &\mapsto \mathbf{x}(\mathbf{n}(k)) \equiv x_{n_k} \end{aligned}$$

được gọi là một *dãy con* của dãy (x_n), ký hiệu (x_{n_k}).

Ví dụ 4. a) Dãy các phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là *dãy số* (thực), chẳng hạn $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2n}\right)$, và $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ là các dãy số trong đó $\left(\frac{1}{2n}\right)$ là một dãy con của dãy $\left(\frac{1}{n}\right)$ và $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ là một dãy con của dãy $\left(\frac{1}{2n}\right)$ và cũng là một dãy con của dãy $\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Dãy các phần tử của $\mathsf{F}(S,\mathbb{R})$ được gọi là *dãy hàm*. Chẳng hạn với $S=[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$, các hàm số $f_n, g_n, h_n : [0,1]\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_n(x)=x^n,\quad g_n(x)=x^{2n},\quad h_n(x)=x^{2^n}\text{, với mỗi } x\in[0,1],$$

cho ta các dãy hàm, dãy các phần tử của $\mathsf{F}([0,1],\mathbb{R})$, là (f_n), (g_n), và (h_n), trong đó (g_n) là một dãy con của (f_n), (h_n) là một dãy con của (g_n) và cũng là một dãy con của (f_n). Chú ý rằng f_n, g_n, và h_n đều là các hàm bị chặn nên (f_n), (g_n), và (h_n) cũng là dãy các phần tử của $\mathsf{B}([0,1],\mathbb{R})$ mà ta còn gọi là *dãy các hàm bị chặn*. ■

2.1. Định nghĩa. Cho (x_n) là một dãy các phần tử của một không gian mêtríc (X,d). Ta nói

i) (x_n) là dãy *hội tụ* (trong X) nếu tồn tại $x\in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$, nghĩa là ứng với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $d(x_n,x)<\varepsilon$, với mọi $n\ge n_0$. Khi đó, phần tử x, nếu có, thì duy nhất (xem Mệnh đề 2.2) và được gọi là *giới hạn* của dãy (x_n), ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ta còn viết $x_n\to x$ khi $n\to\infty$.

ii) (x_n) là dãy *Cauchy* (trong X) nếu ứng với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $d(x_m,x_n)<\varepsilon$, với mọi $m,n\ge n_0$.

iii) (x_n) là dãy *bị chặn* (trong X) nếu ảnh của nó,

$$\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\},$$

là một tập con bị chặn của X.

Trực tiếp từ định nghĩa, ta có mọi dãy con của một dãy hội tụ (Cauchy, bị chặn) cũng là một dãy hội tụ (Cauchy, bị chặn). Hơn nữa, ta có sự tương quan giữa tính hội tụ, Cauchy, và bị chặn của một dãy như sau.

2.2. Mệnh đề. *Trong một không gian mêtríc bất kỳ, ta có*

(i) Mọi dãy hội tụ có giới hạn duy nhất,

(ii) mọi dãy hội tụ là dãy Cauchy, và

(iii) mọi dãy Cauchy là dãy bị chặn.

Chứng minh. (i) Xét dãy hội tụ (x_n) với $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có $0 \le d(x,y) \le d(x_n,x) + d(x_n,y)$. Cho $n \to \infty$ ta có $d(x,y) = 0$. Vậy $x = y$.

(ii) Xét dãy hội tụ (x_n) với $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ứng với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, với mọi $n \ge n_0$. Bấy giờ, với mọi $m, n \ge n_0$, ta được $d(x_m, x_n) \le d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$ và do đó (x_n) là một dãy Cauchy.

(iii) Với dãy Cauchy (x_n), tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_m, x_n) < 1$, với mọi $m, n \ge n_0$. Đặt $r = 1 + \max\{d(x_i, x_{n_0}) : i = 1, \cdots, n_0 - 1\}$. Ta có

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(x_{n_0}, r)$$

và do đó ta suy ra rằng (x_n) là dãy bị chặn. ■

Chú ý rằng chiều ngược lại trong phần (ii), (iii) của mệnh đề trên không đúng trong trường hợp tổng quát. Dãy bị chặn không nhất thiết là dãy Cauchy cũng như dãy Cauchy không nhất thiết là dãy hội tụ.

Ví dụ 5. a) Dãy $\left(\frac{1}{n}\right)$ hội tụ trong $\mathbb{R}$ với giới hạn là 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dãy (n^2) không là dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$ và do đó không là dãy Cauchy và cũng không là dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$.

b) Dãy $\left((-1)^n\right)$ là dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$ nhưng không là dãy Cauchy và do đó cũng không là dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$. Chú ý rằng các dãy con $\left((-1)^{2n}\right)$ và $\left((-1)^{2n+1}\right)$ là các dãy hội tụ với giới hạn lần lượt là 1 và -1. ■

2.3. Định nghĩa.

(i) Nếu mọi dãy Cauchy trong không gian mêtríc (X, d) đều là dãy hội tụ, ta nói (X, d) là một không gian mêtríc *đầy đủ*. Không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$ sao cho không gian mêtríc sinh bởi nó là đầy đủ được gọi là *không gian định chuẩn đầy đủ*, hay còn gọi là *không gian Banach*.

(ii) Nếu mọi dãy trong không gian mêtríc (X,d) đều có ít nhất một dãy con hội tụ (trong X), ta nói (X,d) là một *không gian compắc*.

Không gian Banach quan trọng đầu tiên chính là $\mathbb{R}$ (với mêtríc thông thường). Trước hết, ta có

2.4. Định lý Bolzano-Weierstrass. *Mọi dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$ đều có ít nhất một dãy con hội tụ trong $\mathbb{R}$ (đối với mêtríc thông thường).*

mà ta đưa ra một chứng minh dựa vào tính chất của dãy số đơn điệu. Nhắc lại rằng dãy số (x_n) được gọi là *đơn điệu tăng* nếu

$$x_n \leq x_{n+1}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N};$$

được gọi là *đơn điệu giảm* nếu

$$x_n \geq x_{n+1}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Một dãy số được gọi là *đơn điệu* khi nó là dãy đơn điệu tăng hay là dãy đơn điệu giảm. Chú ý rằng mọi dãy con của một dãy đơn điệu cũng là một dãy đơn điệu, mọi dãy đơn điệu tăng (x_n) đều bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $a \leq x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, và mọi dãy đơn điệu giảm (x_n) đều bị chặn trên, nghĩa là tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $x_n \leq b$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ta có các kết quả sau liên quan đến các dãy số đơn điệu.

2.5*. Mệnh đề. *Cho (x_n) là một dãy số đơn điệu. Ta có (x_n) hội tụ trong $\mathbb{R}$ (đối với mêtríc thông thường) nếu và chỉ nếu nó là dãy bị chặn.*

Chứng minh. Do mọi dãy hội tụ đều là dãy bị chặn nên ta chỉ cần chứng minh rằng mọi dãy số đơn điệu và bị chặn đều hội tụ. Xét trường hợp (x_n) là đơn điệu tăng và bị chặn. Đặt

$$x = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}.$$

Ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x$. Bấy giờ, với mọi $n \geq n_0$, do $x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x$, ta suy ra rằng $|x_n - x| < \varepsilon$, với mọi $n \geq n_0$, nghĩa là $x_n \to x$ khi $n \to \infty$. Tương tự, khi (x_n) đơn điệu giảm và bị chặn, ta có $x_n \to x = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ khi $n \to \infty$. ■

2.6*. Mệnh đề. *Mọi dãy số đều chứa ít nhất một dãy con đơn điệu.*

Chứng minh. Với dãy số (x_n), xét

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_m, \forall m \geq n\}.$$

Ta có hai khả năng cho A :

(i) A là một tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$: Ta xây dựng dãy con đơn điệu $\left(x_{n_k}\right)$ bằng quy nạp. Lấy $n_1 = 1 + \max A$ và với $n_1 < \cdots < n_k$ sao cho $x_{n_{i+1}} < x_{n_i}$, với $i = 1, \cdots, k-1$, do $n_k \notin A$ nên $A_k \equiv \left\{ m \in \mathbb{N} : m > n_k \wedge x_m < x_{n_k} \right\}$ là một tập con không rỗng của $\mathbb{N}$. Đặt $n_{k+1} = \min A_k$. Ta được $n_{k+1} > n_k$ và $x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$. Bấy giờ, $\left(x_{n_k}\right)$ là một dãy con đơn điệu giảm của $\left(x_n\right)$.

(ii) A là một tập con vô hạn của $\mathbb{N}$: Ta cũng xây dựng dãy con $\left(x_{n_k}\right)$ bằng quy nạp. Lấy $n_1 = \min A$ và với $n_1 < \cdots < n_k$ sao cho $x_{n_i} \le x_{n_{i+1}}$, với $i = 1, \cdots, k-1$, do A là tập vô hạn nên $A_k \equiv \left\{ m \in \mathbb{N} : m > n_k \wedge x_m \ge x_{n_k} \right\}$ là một tập con không rỗng của $\mathbb{N}$. Đặt $n_{k+1} = \min A_k$. Ta được $n_{k+1} > n_k$ và $x_{n_k} \le x_{n_{k+1}}$. Bấy giờ, $\left(x_{n_k}\right)$ là một dãy con đơn điệu tăng của $\left(x_n\right)$. ■

Kết hợp các kết quả trên, ta được

Chứng minh định lý Bolzano-Weierstrass. Xét dãy số đơn điệu và bị chặn $\left(x_n\right)$. Do mệnh đề 2.6, tồn tại dãy con đơn điệu $\left(x_{n_k}\right)$ của $\left(x_n\right)$. Do $\left(x_n\right)$ bị chặn nên $\left(x_{n_k}\right)$ cũng là dãy bị chặn và do đó là dãy hội tụ do mệnh đề 2.5. ■

và ta được

2.7. Định lý. $\mathbb{R}$ *, với mêtríc thông thường, là một không gian đầy đủ.*

Chứng minh. Với dãy Cauchy $\left(x_n\right)$ trong $\mathbb{R}$, do mệnh đề 2.2, nó là dãy bị chặn, và do định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con hội tụ $\left(x_{n_k}\right)$. Với $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ và với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon, \text{ với mọi } m, n \ge n_0.$$

Chú ý rằng $n_k \ge k$, với mọi $k \in \mathbb{N}$, nên với mọi $n \ge n_0$, ta được

$$\left|x_n - x\right| \le \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x\right| < \varepsilon + \left|x_{n_k} - x\right|, \text{ với mọi } k \ge n_0.$$

Cho $k \to \infty$, vì $\left|x_{n_k} - x\right| \to 0$ nên ta có

$$\left|x_n - x\right| \le \varepsilon, \text{ với mọi } n \ge n_0,$$

nghĩa là $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ và định lý được chứng minh. ■

Nhận xét 1. Chứng minh trên cho ta kết quả tổng quát sau (xem bài tập 8) : *mọi dãy Cauchy có một dãy con hội tụ cũng là dãy hội tụ*.

Từ tính đầy đủ của $\mathbb{R}$, ta có

2.8*. Định lý. *Không gian các hàm bị chặn xác định trên tập không rỗng* S, $B(S,\mathbb{R})$, *là không gian Banach với chuẩn sup,*

$$\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)|,\ f \in B(S,\mathbb{R}).$$

Chứng minh. Xét dãy Cauchy $(f_n) \subset B(S,\mathbb{R})$. Ứng với mỗi $x \in S$, ta được dãy số $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ và vì $|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|$, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$, ta suy ra rằng $(f_n(x))$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ nên là dãy hội tụ. Đặt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

và ta được ánh xạ $f : S \to \mathbb{R}$. Do dãy Cauchy thì bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\|f_n\| \le M, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Bất đẳng thức $|f_n(x)| \le \|f_n\| \le M$ thỏa với mọi $x \in S$ và $n \in \mathbb{N}$ nên bằng cách cho $n \to \infty$, ta được

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| \le M, \text{ với mọi } x \in S.$$

Nói cách khác, f là hàm bị chặn, nghĩa là $f \in B(S,\mathbb{R})$. Cũng từ tính Cauchy của (f_n), ứng với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon, \text{ với mọi } m, n \ge n_0.$$

Bất đẳng thức $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ thỏa với mọi $x \in S$ và $m, n \ge n_0$ nên bằng cách cho $m \to \infty$, ta được

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty}|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon, \text{ với mọi } x \in S \text{ và } n \ge n_0.$$

Từ đó suy ra

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, \text{ với mọi } n \ge n_0.$$

Điều này cho thấy (f_n) hội tụ về f (trong $B(S,\mathbb{R})$) và định lý được chứng minh. ■

Nhận xét 2. Ứng với mỗi $s \in S$, hàm số

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{khi } x = s, \\ 0, & \text{khi } x \neq s, \end{cases}$$

là hàm bị chặn trên S và $\{f_s : s \in S\}$ là một tập độc lập tuyến tính trong $\mathcal{B}(S,\mathbb{R})$. Do đó, khi S là tập vô hạn, $\mathcal{B}(S,\mathbb{R})$ là một không gian vectơ vô hạn chiều. Khi S là tập hữu hạn có n phần tử, chẳng hạn $S = \{1, 2, \cdots, n\}$, ta có thể đồng nhất $\mathcal{B}(S,\mathbb{R})$ với $\mathbb{R}^n$ và khi đó chuẩn sup trên $\mathcal{B}(S,\mathbb{R})$ trở thành chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ trên $\mathbb{R}^n$. Do định lý 2.8, ta suy ra $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ là một không gian Banach. ■

Ngoài ra, tính chất đóng của một tập con cũng như điểm dính của một tập con có thể đặc trưng bằng các dãy hội tụ như sau.

2.9. Mệnh đề. *Cho không gian mêtríc* (X, d) *và* $A \subset X$.

(i) $x \in \overline{A}$ *nếu và chỉ nếu tồn tại dãy* $(x_n) \subset A$ *sao cho* $x_n \to x$ *khi* $n \to \infty$.

(ii) A *là một tập đóng (trong* X*) nếu và chỉ nếu ứng với mọi dãy hội tụ* $(x_n) \subset A$*, ta có* $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Chứng minh. (i) Với $(x_n) \subset A$ và $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, ứng với mỗi $r > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, x) < r$, với mọi $n \geq n_0$. Suy ra $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$, với mọi $r > 0$, nghĩa là $x \in \overline{A}$. Ngược lại, khi x là một điểm dính của A, ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, do $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$ nên bằng cách chọn $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$,[1] ta được dãy $(x_n) \subset A$ sao cho $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, nên $x_n \to x$ khi $n \to \infty$.

(ii) Do định lý 1.7, A là một tập đóng nếu và chỉ nếu $A = \overline{A}$. Nói khác đi, mọi điểm dính của A đều nằm trong A. Mặt khác, do (i), mọi điểm dính của A đều phải là giới hạn của một dãy các phần tử của A và ngược lại. Do đó A là một tập đóng nếu và chỉ nếu mọi dãy các phần tử của A, nếu hội tụ (trong X), đều phải có giới hạn nằm trong A. ■

[1] Chính xác về mặt lôgíc, do $\left(B(x, \frac{1}{n}) \cap A\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ nên do tiên đề chọn, tồn tại ánh xạ $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to A$ sao cho $\mathbf{x}(n) \in B(x, \frac{1}{n})$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bấy giờ $\mathbf{x}$ chính là dãy các phần tử của A cần tìm.

3*. KHÔNG GIAN CON

Cho không gian mêtríc (X, d) và Y là một tập con không rỗng của X. Ánh xạ $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ xác định bởi $d_Y(x, y) = d(x, y)$, với mọi $x, y \in Y$,[2] là một mêtríc trên Y. Không gian mê tríc (Y, d_Y) được gọi là một *không gian con* của không gian (X, d). Tương tự, đối với không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$ và với mỗi không gian vectơ con Y của X, ánh xạ $\|\cdot\|_Y : Y \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\|x\|_Y = \|x\|$, với $x \in Y$, là một chuẩn trên Y. Không gian định chuẩn $(Y, \|\cdot\|_Y)$ được gọi là một không gian định chuẩn con của không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$.

Chú ý rằng, với $x \in Y \subset X$ và $r > 0$, ta có đẳng thức liên hệ giữa quả cầu tâm x, bán kính r, trong (Y, d_Y), ký hiệu $B_Y(x, r)$, và quả cầu tâm x, bán kính r, trong (X, d), ký hiệu $B_X(x, r) \equiv B(x, r)$,

$$B_Y(x, r) = Y \bigcap B(x, r). \tag{1}$$

Chú ý rằng (X, d) và (Y, d_Y) là hai không gian mêtríc khác nhau nên tính đóng/mở của một tập $A \subset Y \subset X$ cần được xác định rõ là trong không gian nào, nghĩa là A đóng/mở trong (X, d) (hay vắn tắt là trong X) hay trong (Y, d_Y) (hay vắn tắt là trong Y). Tương tự, với dãy $(x_n) \subset Y \subset X$, các khái niệm liên quan tới (x_n) cần được chỉ rõ là trong không gian nào. Cụ thể, đối với dãy (x_n) các phần tử của $Y \subset X$, ta có kết quả sau (bài tập 7).

3.1. Mệnh đề. *Cho không gian mêtríc* (X, d) *và* $(x_n) \subset Y \subset X$. *Ta có*

(i) (x_n) *là dãy Cauchy (dãy bị chặn) trong* Y *nếu và chỉ nếu nó là dãy Cauchy (dãy bị chặn) trong* X.

(ii) (x_n) *là dãy hội tụ trong* Y *nếu và chỉ nếu nó là dãy hội tụ trong* X *và* $\lim_{n\to\infty} x_n \in Y$.

Ví dụ 6. Dãy số $\left(\frac{1}{n}\right) \subset (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ là dãy hội tụ về $0 \in \mathbb{R}$ nhưng không là dãy hội tụ trong $(0, \infty)$ do $0 \notin (0, \infty)$. ■

[2] d_Y chính là ánh xạ thu hẹp trên $Y \times Y$ của d (xác định trên $X \times X$), ký hiệu $d_Y = d|_{Y \times Y}$.

Đối với tập đóng, mở trong không gian con $\left(Y, d_Y\right)$, ta có sự liên hệ sau với tập đóng/mở trong $\left(X, d\right)$.

3.2. Mệnh đề. *Cho không gian mêtríc* $\left(X, d\right)$ *và* $A \subset Y \subset X$. *Ta có*

(i) A *là một tập mở trong* Y *nếu và chỉ nếu tồn tại tập* V *mở trong* X *sao cho* $A = V \cap Y$.

(ii) A *là một tập đóng trong* Y *nếu và chỉ nếu tồn tại tập* F *đóng trong* X *sao cho* $A = F \cap Y$.

Chứng minh. (i) Khi A mở trong Y, nghĩa là ứng với mỗi $x \in A$, tồn tại $r_x > 0$, sao cho $B_Y\left(x; r_x\right) \subset A$. Đặt

$$V = \bigcup_{x \in A} B_X\left(x; r_x\right).$$

Do các quả cầu mở trong X là các tập mở (trong X), ta được V là một tập mở trong X. Ngoài ra, do sự liên hệ (1) giữa quả cầu trong X và trong Y, ta có

$$\begin{aligned} Y \cap V &= Y \cap \left(\cup_{x \in A} B_X\left(x; r_x\right)\right) = \bigcup_{x \in A} \left(Y \cap B_X\left(x; r_x\right)\right) \\ &= \bigcup_{x \in A} B_Y\left(x; r_x\right) = A. \end{aligned}$$

Ngược lại, với V mở trong X, để chứng minh $A = V \cap Y$ mở trong Y, ta xét $x \in A$ bất kỳ. Do $x \in V$ và V mở trong X, ta có $r > 0$ sao cho $B_X\left(x; r\right) \subset V$. Bấy giờ,

$$B_Y\left(x; r\right) = Y \cap B_X\left(x; r\right) \subset Y \cap V = A$$

và điều này chứng tỏ rằng A mở trong Y.

(ii) Với A đóng trong Y, nghĩa là $Y \setminus A$ mở trong Y, phần (i) cho tập V mở trong X sao cho

$$Y \setminus A = Y \cap V.$$

Bấy giờ, vì

$$A = Y \cap \left(X \setminus V\right)$$

nên với $F = X \setminus V$, ta được tập đóng (trong X) cần tìm.

Ngược lại, với $A = F \cap Y$, trong đó F là một tập đóng trong X, cũng do (i), $Y \setminus A = Y \cap \left(X \setminus F\right)$ là tập mở trong Y do $X \setminus F$ là tập mở trong X. ■

Chú ý. Với tập con $V \subset X$, người ta còn gọi $V \cap Y$ là *vết* của V lên Y. Với thuật ngữ này, định lý 3.2 có thể phát biểu lại là : *Tập con của* Y *là mở (đóng) trong* Y *nếu và chỉ nếu nó là vết của một mở (đóng) trong* X *lên* Y.

Ví dụ 7. a) Với $(0,1] \subset (0,\infty) \subset \mathbb{R}$, bằng cách viết $(0,1] = [-1,1] \cap (0,\infty)$ và do $[-1,1]$ là một tập đóng trong $\mathbb{R}$, ta suy ra rằng $(0,1]$ là một tập đóng trong $(0,\infty)$. Chú ý rằng $(0,1]$ không là một tập con đóng của $\mathbb{R}$.

b) Với mọi $A \subset Y \subset X$, đẳng thức $A = Y \cap A$ cho thấy rằng khi Y là một tập mở trong X, ta có A mở trong X nếu và chỉ nếu A mở trong Y. Tương tự, khi Y là một tập đóng trong X, ta có A đóng trong X nếu và chỉ nếu A đóng trong Y. ■

Đặc biệt, ta có

3.3. Định nghĩa. Xét không gian mêtríc (X,d) và $Y \subset X$.

(i) Nếu không gian con (Y,d_Y) là một không gian đầy đủ, ta nói Y là một *tập con đầy đủ* của X.

(ii) Nếu không gian con (Y,d_Y) là một không gian compắc, ta nói Y là một *tập con compắc* của X.

(iii) Nếu không gian con (Y,d_Y) là một không gian liên thông, ta nói Y là một *tập con liên thông* của X.

Ví dụ 8. (i) Do định lý Bolzano-Weierstrass, mọi dãy $(x_n) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, với $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, đều có một dãy con hội tụ (x_{n_k}) (trong $\mathbb{R}$). Mặt khác, do $[a,b]$ là một tập đóng (trong $\mathbb{R}$) nên giới hạn của dãy (x_{n_k}) phải nằm trong $[a,b]$. Nói khác đi, mọi dãy trong $[a,b]$ đều có một dãy con hội tụ (trong $[a,b]$). Do đó $[a,b]$ là một không gian (con) compắc của $\mathbb{R}$ và ta nói $[a,b]$ là một tập con compắc của $\mathbb{R}$.

(ii) Tập con không rỗng $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là một khoảng khi ứng với mọi $x,y \in A$, $x < y$, ta có $[x,y] \subset A$. Nếu A không là một khoảng trong $\mathbb{R}$, nghĩa là tồn tại $x,y \in A$, $x < y$, sao cho $[x,y] \not\subset A$, thì với $a \in [x,y] \setminus A$, các tập $(-\infty,a) \cap A$ và $(a,\infty) \cap A$ vừa đóng, vừa mở trong A, khác với $\varnothing$ và A. Vì vậy A không là tập con liên thông của $\mathbb{R}$. Nói khác đi, mọi tập con liên thông của $\mathbb{R}$ phải là một khoảng. Chú ý rằng chiều ngược lại cũng đúng (xem phần bài tập chương 2). ■

Ta có đặc trưng sau cho tập đầy đủ/compắc của một không gian mêtríc.

3.4. Định lý. *Cho* Y *là một tập con của không gian mêtríc* $(X;d)$. *Ta có*

(i) Nếu Y *là tập đầy đủ thì* Y *là tập đóng (trong* X*). Ngược lại, nếu* Y *là tập đóng (trong* X*) và* X *là không gian đầy đủ thì* Y *là tập đầy đủ.*

(ii) Nếu Y *là tập compắc thì* Y *là tập bị chặn và đầy đủ (và do đó là tập đóng). Ngược lại, nếu* Y *là tập đóng (trong* X*) và* X *là không gian compắc thì* Y *là tập compắc.*

Chứng minh. (i) Với $(x_n)\subset Y$ là một dãy hội tụ trong X có giới hạn $x\in X$, nó trở thành một dãy Cauchy trong X và do đó là dãy Cauchy trong Y. Do Y đầy đủ nên dãy này hội tụ về một giới hạn $y\in Y$. Khi đó, dãy (x_n) hội tụ (trong X) về các giới hạn x, y, nên từ tính duy nhất của giới hạn, ta suy ra $x=y\in A$. Mệnh đề 2.8 (ii) cho thấy Y là tập đóng.

Ngược lại, với dãy Cauchy $(x_n)\subset Y$, nó cũng là dãy Cauchy trong X và do X đầy đủ nên hội tụ về giới hạn $x\in X$. Mặt khác, do Y đóng, mệnh đề 2.8 (ii) cho $x\in Y$. Tóm lại, mọi dãy Cauchy trong Y đều hội tụ (trong Y) và như vậy Y đầy đủ.

(ii) Chú ý rằng, do hội hữu hạn những tập bị chặn là tập bị chặn nên khi Y không bị chặn, Y không chứa trong bất kỳ phần hội hữu hạn các quả cầu nào. Ta xây dựng một dãy (x_n) các phần tử của Y sao cho $d(x_n,x_m)\geq 1$, với mọi $m\neq n$, bằng quy nạp như sau : Chọn bất kỳ $x_1\in A$. Giả sử tồn tại $x_1,x_2,\ldots,x_n\in Y$ sao cho $d(x_i,x_j)\geq 1$, với mọi $i,j=1,2,\ldots,n$, $i\neq j$. Do nhận xét trên, Y không chứa trong phần hội các quả cầu $B(x_i,1)$, $i=1,2,\ldots,n$, nghĩa là $Y\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,1)\neq\varnothing$. Chọn

$$x_{n+1}\in Y\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,1)\right).$$

Ta nhận được dãy (x_n) các phần tử của Y thỏa $d(x_m,x_n)\geq 1$, với mọi $m,n\in\mathbb{N}$, $m\neq n$. Dãy này không là dãy Cauchy và mọi dãy con của nó cũng không là dãy Cauchy. Tóm lại, nó không có dãy con nào hội tụ. Vậy, nếu Y compắc thì Y bị chặn.

Để chứng minh tính đầy đủ của Y, ta xét một dãy Cauchy (x_n) (trong Y). Tính compắc của Y chứng tỏ sự tồn tại dãy con (x_{n_k}) hội tụ về một $x\in Y$. Do nhận xét 1, (x_n) là dãy Cauchy có một dãy con hội tụ nên cũng là dãy hội tụ (về x). Do vậy Y là tập đầy đủ và là tập đóng trong X.

Ngược lại khi Y là tập con đóng trong không gian mêtríc compắc X, xét dãy $(x_n) \subset Y \subset X$. Do tính compắc của X, tồn tại dãy con (x_{n_k}) hội tụ về một phần tử $x \in X$. Tính đóng của Y (trong X) cho thấy $x \in Y$. Tóm lại, mọi dãy các phần tử của Y có một dãy con hội tụ trong Y. Vậy Y compắc. ■

Nhận xét 3. Tổng quát, trong một không gian mêtríc bất kỳ, với dãy (x_n) sao cho tồn tại $\varepsilon > 0$, $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$, không là dãy Cauchy và mọi dãy con của nó cũng không là dãy Cauchy. Suy ra rằng (x_n) không có bất cứ một dãy con hội tụ nào. ■

Đặc biệt, trong $\mathbb{R}$, ta được

3.5. Hệ quả. *Một tập con của $\mathbb{R}$ là compắc nếu và chỉ nếu nó là tập đóng và bị chặn*.

Chứng minh. Do định lý 3.4 (ii), mọi tập compắc đều là tập đóng và bị chặn. Ngược lại, với tập đóng và bị chặn $A \subset \mathbb{R}$, tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sao cho $A \subset [a, b]$. Do định lý Bolzano-Weiertrass, $[a, b]$ là tập compắc và A là một tập con đóng trong $[a, b]$ nên A cũng là tập compắc. ■

4*. KHÔNG GIAN TÍCH

Với các không gian mêtríc $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_N, d_N)$, xét tập tích

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N) : x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, N\}$$

và xét ánh xạ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + \cdots + d_N^2(x_N, y_N)} \ ,$$

với $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_N) \in X$. Ta được một mêtríc d trên X (bài tập 9). Không gian mê tríc (X, d) được gọi là không gian mêtríc tích của các không gian mêtríc $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_N, d_N)$. Tương tự, với các không gian định chuẩn $(X_1, \|\cdot\|_1), (X_2, \|\cdot\|_2), \cdots, (X_N, \|\cdot\|_N)$, xét không gian vectơ $X = X_1 \times \cdots \times X_N$ cho bởi các phép toán

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_N + y_N),$$
$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_N),$$

với $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_N) \in X$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ánh xạ $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, xác định bởi

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2},$$

khi $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in X$, trở thành một chuẩn trên X (bài tập 10). Không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$ được gọi là không gian định chuẩn tích của các không gian định chuẩn $(X_1, \|\cdot\|_1), (X_2, \|\cdot\|_2), \cdots, (X_N, \|\cdot\|_N)$.

Ngoài ra, với tập tích $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ và với mỗi $i = 1, 2, \cdots, N$, ánh xạ $\pi_i : X \to X_i$ xác định bởi $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$, với $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in X$, được gọi là *phép chiếu* xuống thành phần thứ i của X. Bấy giờ, mỗi một dãy $(\mathbf{x}_n)$ các phần tử của X, ta nhận được các dãy $(\pi_i(\mathbf{x}_n))$ các phần tử của X_i, $i = 1, 2, \cdots, N$, gọi là các *dãy thành phần* của dãy $(\mathbf{x}_n)$. Ngược lại, xuất phát từ các dãy (x_n^i) các phần tử của X_i, $i = 1, 2, \cdots, N$, đặt $\mathbf{x}_n = (x_n^1, \cdots, x_n^N) \in X$. Ta được dãy $(\mathbf{x}_n)$ các phần tử của X, với $(\pi_i(\mathbf{x}_n)) \equiv (x_n^i)$, $i = 1, 2, \cdots, N$.

Nhận xét rằng, với $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in X$, $r > 0$, ta có

$$B_{X_1}\left(x_1, \tfrac{r}{\sqrt{N}}\right) \times \cdots \times B_{X_N}\left(x_N, \tfrac{r}{\sqrt{N}}\right) \subset B_X(\mathbf{x}, r) \subset B_{X_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{X_N}(x_N, r), \quad (1)$$

và với mọi dãy $(\mathbf{x}_n)$ các phần tử của X,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \Leftrightarrow \forall i = 1, \cdots, N, \lim_{n\to\infty} \pi_i(\mathbf{x}_n) = \pi_i(\mathbf{x}), \quad (2)$$

ta được

4.1. Mệnh đề. *Xét không gian mêtríc tích* (X, d) *của các không gian mê tríc* $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_N, d_N)$ *và xét* $A = A_1 \times \cdots \times A_N \subset X$, *với* $A_i \subset X_i$, $i = 1, \cdots, N$.

(i) Nếu mỗi một A_i *là một tập mở trong* X_i, $i = 1, \cdots, N$, *thì* A *là một tập mở trong* X.

(ii) Nếu mỗi một A_i *là một tập đóng trong* X_i, $i = 1, \cdots, N$, *thì* A *là một tập đóng trong* X.

Chứng minh. (i) Với $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in A$, ta có $x_i \in A_i$, với $i = 1, \cdots, N$, và vì mỗi A_i là một tập mở trong X_i nên tồn tại $r_i > 0$ sao cho $B_{X_i}(x_i, r_i) \subset A_i$, với mọi $i = 1, \cdots, N$. Với $r = \min_{i=1,\cdots,N} r_i > 0$, (1) cho ta

$$B_X(\mathbf{x}, r) \subset B_{X_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{X_N}(x_N, r) \subset A_1 \times \cdots \times A_N = A.$$

Do đó, A mở trong X.

(ii) Với dãy $(\mathbf{x}_n)$ các phần tử của A hội tụ về $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_N)\in X$. Với mỗi $i=1,\cdots,N$, $(\pi_i(\mathbf{x}_n))$ là dãy các phần tử của A_i hội tụ về $\pi_i(\mathbf{x})=x_i\in X_i$. Do A_i đóng trong X_i, ta suy ra $\pi_i(\mathbf{x})=x_i\in A_i$, với mọi $i=1,\cdots,N$, và do đó $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_N)\in A_1\times\cdots\times A_N=A$. Suy ra A đóng trong X. ■

Tổng quát hơn (2), ta có kết quả sau mà phần chứng minh được coi như bài tập (bài tập 11).

4.2. Mệnh đề. *Cho dãy* $(\mathbf{x}_n)$ *trong không gian tích* (X,d) *của các không gian mêtríc* $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_N,d_N)$. *Ta có* $(\mathbf{x}_n)$ *là dãy hội tụ (Cauchy, bị chận) trong* (X,d) *nếu và chỉ nếu các dãy thành phần* $(\pi_i(\mathbf{x}_n))$ *là dãy hội tụ (Cauchy, bị chận) trong* (X_i,d_i), $i=1,\cdots,N$.

Từ mệnh đề 4.2, ta được các kết quả sau.

4.3. Định lý. *Không gian tích* (X,d) *của các không gian mêtríc* $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_N,d_N)$ *là compắc nếu và chỉ nếu mỗi một không gian mêtríc* (X_i,d_i), $i=1,\cdots,N$*, là compắc.*

Chứng minh. Khi không gian tích (X,d) là compắc, với dãy $(x_n^i)\subset X_i$ và với các phần tử $a_j\in X_j$, $j\neq i$, xét dãy $(\mathbf{x}_n)\subset X$ sao cho $(\pi_i(\mathbf{x}_n))\equiv(x_n^i)$ và $\pi_j(\mathbf{x}_n)=a_j$, với mọi $j=1,\cdots,N, j\neq i$. Ứng với dãy con $(\mathbf{x}_{n_k})$ của $(\mathbf{x}_n)$ hội tụ trong X, ta có $(\pi_i(\mathbf{x}_{n_k}))\equiv(x_{n_k}^i)$ là dãy con của (x_n^i) hội tụ trong X_i. Do đó, mỗi không gian mêtríc (X_i,d_i) là một không gian compắc, $i=1,\cdots,N$.

Ngược lại, khi (X_i,d_i) là không gian compắc, $i=1,\cdots,N$, ta chứng minh rằng không gian tích (X,d) là compắc bằng quy nạp trên N như sau.

Khi $N=2$, xét dãy $(\mathbf{x}_n)\subset X_1\times X_2$. Do $(\pi_1(\mathbf{x}_n))\subset X_1$ và do X_1 compắc, ta có dãy con hội tụ $(\pi_1(\mathbf{x}_{n_k}))$ trong X_1 và do $(\pi_2(\mathbf{x}_{n_k}))\subset X_2$ và do X_2 compắc, ta được dãy con $\left(\pi_2\left(\mathbf{x}_{n_{k_j}}\right)\right)$ hội tụ trong X_2. Do $\left(\pi_i\left(\mathbf{x}_{n_{k_j}}\right)\right)$ hội tụ trong X_i, $i=1,2$, mệnh đề cho thấy $\left(\mathbf{x}_{n_{k_j}}\right)$ là dãy con của $(\mathbf{x}_n)$, hội tụ trong X. Suy ra rằng $X_1\times X_2$ là không gian mêtríc compắc.

Giả sử tích N không gian mêtríc compắc là một không gian com pắc. Xét không gian tích (X,d) của $N+1$ không gian compắc $(X_1,d_1),\cdots,(X_{N+1},d_{N+1})$. Do giả thuyết quy nạp, không gian tích (Y,δ) của N không gian compắc $(X_1,d_1),\cdots,(X_N,d_N)$ là một không gian compắc và bằng cách đồng nhất (X,d) như là tích của 2 không gian compắc (Y,δ) và (X_{N+1},d_{N+1}), chứng minh trên cho thấy (X,d) cũng là một không gian com pắc và định lý được chứng minh.■

4.4. Định lý. *(i) Không gian tích* (X,d) *của các không gian mêtríc* $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_N,d_N)$ *là đầy đủ nếu và chỉ nếu mỗi một không gian mêtríc* (X_i,d_i), $i=1,\cdots,N$, *là đầy đủ.*

(ii) Không gian định chuẩn tích $(X,\|\cdot\|)$ *của các không gian định chuẩn* $(X_1,\|\cdot\|_1),(X_2,\|\cdot\|_2),\cdots,(X_N,\|\cdot\|_N)$ *là một không gian Banach nếu và chỉ nếu mỗi một không gian định chuẩn* $(X_i,\|\cdot\|_i)$, $i=1,2,\cdots,N$, *là không gian Banach.*

Chứng minh. Rõ ràng (ii) là một trường hợp đặt biệt của (i). Khi X là không gian đầy đủ và $(x_n^i)\subset X_i$ là dãy Cauchy trong X_i, với $i=1,\cdots,N$. Xét dãy $(\mathbf{x}_n)\subset X$ sao cho $(\pi_i(\mathbf{x}_n))\equiv(x_n^i)$ và $\pi_j(\mathbf{x}_n)=a_j$, với mọi $j=1,\cdots,N, j\neq i$, như trong chứng minh định lý 4.3. Ta có $(\mathbf{x}_n)$ là dãy Cauchy trong X nên là dãy hội tụ trong X. Do mệnh đề 4.2, (x_n^i) là dãy hội tụ trong X_i. Suy ra rằng X_i, $i=1,\cdots,N$, là các không gian đầy đủ.

Ngược lại, khi X_i, $i=1,\cdots,N$, là các không gian đầy đủ và với $(\mathbf{x}_n)\subset X$ là dãy Cauchy, ta có $(\pi_i(\mathbf{x}_n))$, $i=1,\cdots,N$, là dãy Cauchy trong X_i đầy đủ nên là dãy hội tụ trong X_i. Cũng do mệnh đề 4.2, $(\mathbf{x}_n)$ hội tụ trong X. Vì vậy X là không gian đầy đủ. ■

Đặc biệt, $\mathbb{R}^n$, với chuẩn Euclide, chính là không gian định chuẩn tích của n không gian định chuẩn $\mathbb{R}$ với chuẩn thông thường (hàm giá trị tuyệt đối). Ta nhận được hệ quả sau mà phần chứng minh được xem như bài tập (bài tập 12).

4.5. Hệ quả. *(i)* $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, *với chuẩn Euclide, là các không gian đầy đủ.*

(ii) Các ô đóng $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, *trong đó* $a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $a_i\leq b_i$, *với mọi* $i=1,\cdots,n$, *là tập compắc trong* $\mathbb{R}^n$. *Do đó, tập con không rỗng* $A\subset\mathbb{R}^n$ *là tập compắc khi và chỉ khi nó là tập đóng và bị chặn.*

BÀI TẬP

1) Cho $(X,\|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. Chứng minh rằng ánh xạ $d: X\times X \to \mathbb{R}$, xác định bởi $d(x,y)=\|x-y\|$, là một mêtríc trên X.

2) a) Cho (X,d) là một không gian mêtríc. Chứng minh

$$|d(x,a)-d(y,a)| \le d(x,y), \text{ với mọi } x,y,a\in X.$$

b) Cho $(X,\|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. Chứng minh

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|, \text{ với mọi } x,y\in X.$$

3) Chứng minh rằng các hàm số

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1|+\cdots+|x_n|,$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n}|x_i|,$$

với $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, là các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$.

4) Chứng minh rằng không gian các hàm số bị chặn xác định trên một tập S không rỗng, $\mathsf{B}(S,\mathbb{R})$, là một không gian vectơ con của không gian vectơ các hàm số xác định trên S, $\mathsf{F}(S,\mathbb{R})$, và hàm số $\|\cdot\|: \mathsf{B}(S,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, xác định bởi

$$\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)|,$$

là một chuẩn trên $\mathsf{B}(S,\mathbb{R})$.

5) a) Cho không gian mêtríc (X,d), $a\in X$, $r>0$. Chứng minh rằng $\overline{B(a;r)}\subset B'(a;r)$, trong đó $B(a;r)$ và $B'(a;r)$ lần lượt là quả cầu mở và quả cầu đóng tâm a bán kính r.

b) Cho X là một tập hợp có ít nhất 2 phần tử. Chứng minh rằng $d: X\times X\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad x=y\\ 1 & \text{khi} \quad x\neq y\end{cases}$$

là một mêtríc trên X và trong không gian mêtríc (X,d), $\overline{B(a,1)} \neq B'(a,1)$, $\forall a \in X$.

c) Chứng minh rằng trong mọi không gian định chuẩn $(E,\|\cdot\|)$, ta có $\overline{B(a,r)} = B'(a,r)$ và $\operatorname{int}(B'(a,r)) = B(a,r)$, $\forall a \in E$, $\forall r > 0$.

6) Cho (X,d) là một không gian mêtríc. Xét ánh xạ $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\delta(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$.

a) Chứng minh δ là một mêtríc trên X và mọi tập con của X đều là tập bị chặn trong không gian mêtríc (X,δ).

b) Chứng minh rằng δ và d sinh ra cùng một tôpô trên E, nghĩa là mọi tập mở (đóng) trong không gian mêtríc (X,d) cũng là tập mở (đóng) trong không gian mêtríc (X,δ) và ngược lại.

7) Chứng minh mệnh đề 3.1.

8) Chứng minh rằng trong một không gian mêtríc bất kỳ, dãy Cauchy có một dãy con hội tụ cũng là dãy hội tụ.

9) Với các không gian mê tríc $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_N,d_N)$, xét tập tích

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N = \{(x_1,x_2,\cdots,x_N) : x_i \in X_i, i = 1,2,\cdots,N\}.$$

Chứng minh rằng các ánh xạ

$$\begin{aligned}
d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + \cdots + d_N^2(x_N,y_N)},\\
d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= d_1(x_1,y_1) + \cdots + d_N(x_N,y_N),\\
d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \max\{d_1(x_1,y_1),\cdots,d_N(x_N,y_N)\},
\end{aligned}$$

với $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_N), \mathbf{y} = (y_1,y_2,\cdots,y_N) \in X$, là các mêtríc trên X,

$$d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le N d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}), \text{ với mọi } \mathbf{x},\mathbf{y} \in X.$$

Suy ra rằng d_1, d_2, và d_∞ sinh ra cùng một tôpô trên X.

10) Với các không gian định chuẩn $(X_1,\|\cdot\|_1),(X_2,\|\cdot\|_2),\cdots,(X_N,\|\cdot\|_N)$, xét tập tích

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N = \{(x_1,x_2,\cdots,x_N) : x_i \in X_i, i = 1,2,\cdots,N\}.$$

Chứng minh rằng các ánh xạ

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \cdots + \|x_N\|_N^2},$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \|x_1\|_1 + \cdots + \|x_N\|_N,$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{\|x_1\|_1, \cdots, \|x_N\|_N\},$$

với $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in X$, là các chuẩn trên X,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le N\|\mathbf{x}\|_\infty, \text{ với mọi } \mathbf{x} \in X.$$

Suy ra rằng $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, và $\|\cdot\|_\infty$ sinh ra cùng một tôpô trên X.

11) Chứng minh mệnh đề 4.2.

12) Chứng minh hệ quả 4.5.

13) Cho (X,d) là một không gian mêtríc và cho dãy $(x_n) \subset X$. Chứng minh rằng giới hạn của dãy (x_n), nếu có, thì duy nhất, nghĩa là nếu tồn tại $x, y \in X$ sao cho ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) < \varepsilon$, $\forall n \ge n_1$, và $d(x_n, y) < \varepsilon$, $\forall n \ge n_2$, thì $x = y$.

14) Xét không gian mêtríc (X,d), với $X = \mathbb{R}$ và $d(x,y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, và $Y = (0,2]$. Khảo sát tính đóng / mở của $A = (0,1]$ trong không gian mêtríc (X,d) và trong không gian con (Y, d_Y) của (X,d). Khảo sát sự hội tụ của dãy $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X và trong Y.

15) Một không gian mêtríc (X,d) được gọi là *tiền compắc* khi ứng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại hữu hạn các phần tử của X, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, sao cho $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Tập con $A \subset X$ được gọi là *tiền compắc* khi không gian con (A, d_A) là tiền com pắc. Chứng minh

a) nếu (X,d) là không gian tiền compắc thì mọi tập con $A \subset X$ đều là tập tiền compắc.

b) nếu $A \subset X$ là tập tiền compắc thì $\overline{A}$ cũng là tập tiền compắc.

c) nếu (X,d) là không gian compắc thì nó cũng là không gian tiền compắc.

d) tập con của $\mathbb{R}^n$ là tiền compắc nếu và chỉ nếu nó là tập bị chặn.

16) Cho (X,d) là một không gian mêtríc. Đặt

$$\begin{array}{cccc} \delta & : & X\times X & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \end{array}$$

a) Chứng minh (X,δ) cũng là một không gian mêtríc.

b) Chứng minh rằng d và δ sinh ra cùng một tôpô trên X.

17) Cho (X,d) là một không gian mêtríc. Xét ánh xạ $\delta: E\times E \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\delta(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$.

a) Chứng minh δ là một mêtríc trên X.

b) Chứng minh rằng d và δ sinh ra cùng một tôpô trên X.

18) Cho (X,d) là một không gian mêtríc, $(G_i)_{i\in I}$ là một bao phủ mở của X, nghĩa là mỗi G_i là một tập mở và $X\subset\bigcup_{i\in I}G_i$. Ta nói số $\alpha>0$ là *số Lebesgue* của bao phủ $(G_i)_{i\in I}$ khi với mọi $A\subset X$, nếu $\operatorname{diam}(A)<\alpha$ thì tồn tại $i\in I$ sao cho $A\subset G_i$, trong đó $\operatorname{diam}(A)=\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$.

Chứng minh rằng trong một không gian mêtríc compắc, mọi bao phủ mở đều có số Lebesgue. Suy ra rằng một không gian mêtríc là compắc nếu và chỉ nếu mọi bao phủ mở của X đều có một bao phủ con hữu hạn.

19) Cho X là một không gian mêtríc, G là một tập mở trong X và $A\subset X$. Chứng minh rằng nếu $G\cap A=\varnothing$ thì $G\cap\overline{A}=\varnothing$.

20) Cho $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy giảm các tập con compắc không rỗng của một không gian mêtríc X. Chứng minh rằng $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}K_n$ cũng là một tập con compắc không rỗng của X.

21) Cho X là một không gian mêtríc sao cho mọi quả cầu đóng thì compắc. Chứng minh rằng X đầy đủ.

22) Trong $\mathbb{R}^2$, cho

$$d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\},$$

với mọi $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

a) Chứng minh rằng $(\mathbb{R}^2,d)$ là không gian metric đầy đủ.

b) Cho $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 2y\}$. Chứng minh D là tập compact trong $(\mathbb{R}^2,d)$.

23) Trong $\mathbb{R}^2$ cho tập

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y \le 1 \right\}.$$

Chứng minh D là tập đóng nhưng không compact.

24) Cho $X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục$\}$. Cho $f, g \in X$, ta định nghĩa

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Cho $A = \{ f \in X : f(1) = f(0) + 1 \}$. Chứng minh A là tập không đóng trong (X, d_1).

PHỤ LỤC:MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: CHỨNG MINH DÃY HỘI TỤ.

Để chứng minh dãy hội tụ, ta tính khoảng cách và chứng minh khoảng cách đó tiến về 0.

Ví dụ 1. Trong $C[a,b]$ cho các metric

$$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx,\ d_2(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

Cho $f_n(x)=\sqrt{n}x^n$. Chứng minh rằng

a) f_n hội tụ về $f=0$ trong $C([a,b],d_1)$.

b) f_n không hội tụ về $f=0$ trong $C([a,b],d_2)$.

Giải: a) Ta có

$$d_1(f_n,0)=\int_0^1 \left|\sqrt{n}x^n-0\right|dx=\int_0^1 \sqrt{n}x^n dx=\left.\frac{\sqrt{n}x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Vì $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\to 0$ khi $n\to\infty$ nên $d_1(f_n,0)\to 0$. Do đó, f_n hội tụ về $f=0$ trong $C([a,b],d_1)$.

b) Ta có

$$d_2(f_n,0)=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\sqrt{n}x^n-0\right|=\sup_{x\in[0,1]}\sqrt{n}x^n=\sqrt{n}.$$

Vì $\sqrt{n}\to\infty$ khi $n\to\infty$ nên f_n không hội tụ về $f=0$ trong $C([a,b],d_2)$.

Ví dụ 2. Cho X là tập hợp các hàm số thực liên tục trên $[0,1]$. Với $x,y\in X$, ta đặt

$$d_1(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt,\ d_2(x,y)=\max\{|x(t)-y(t)|: t\in[0,1]\}.$$

a) Chứng minh: Nếu $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ trong (X,d_2) thì $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ trong (X,d_1).

b) Cho $x_n(t)=t^n-t^{2n}$. Tính $d_1(0,x_n)$ và $d_2(0,x_n)$, từ đó suy ra rằng $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ trong (X,d_1), nhưng $(x_n)_n$ không hội tụ về 0 trong (X,d_2).

Giải : a) Ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X, d_2). Do

$$d_2(x,y) = \max\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1]\} \geq |x_n(t) - y_n(t)|, \forall t \in [0,1],$$

suy ra

$$\int_0^1 d_2(x_n, x)dt \geq \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|dt \geq 0.$$

Mặt khác, $\int_0^1 d_2(x_n, x)dt = d_2(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|dt \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó

$$d_1(x_n, x) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X, d_1).

b) Ta có

$$d_1(0, x_n) = \int_0^1 |x_n(t) - 0|dt = \int_0^1 |t^n - t^{2n}|dt = \int_0^1 (t^n - t^{2n})dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1},$$

và

$$d_2(0, x_n) = \max_{t\in[0,1]}\{|x_n(t) - 0|\} = \max_{t\in[0,1]}\{|x_n(t)|\} = \max_{t\in[0,1]}\{|t^n(1 - t^n)|\}.$$

Với $t \in [0,1]$, ta có $|t^n(1-t^n)| \leq \frac{(t^n + 1 - t^n)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi

$$t^n = 1 - t^n \Leftrightarrow t = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in [0,1].$$

Do đó, $d_2(0, x_n) = \frac{1}{2}$. Vậy, $(x_n)_n$ không hội tụ về 0 trong (X, d_2).

Ví dụ 3. Cho (X, d) là không gian metric. Với $x, y \in X$, ta đặt

a) $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

b) $d_2(x,y) = \arctan[d(x,y)]$, với $d_2(x,y) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) $d_3(x,y) = \ln[1 + d(x,y)]$.

Chứng minh: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong $(X,d) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X,d_i) với $i=1,2,3.$

Giải: Ở phần I, ta đã chứng minh $(X,d_1),(X,d_2),(X,d_3)$ là các không gian metric.

a) $(\Rightarrow)$ Ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X,d), tức là với mọi $\varepsilon > 0,$ ta có $N(\varepsilon)$ sao cho

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon).$$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t}{t+1}, \forall t \in [0,\infty),$$

ta có

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [0,\infty),$$

suy ra f đồng biến trên $[0,\infty),$ nên

$$d_1(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1+d(x_n, x)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \forall n > N(\varepsilon).$$

Ta cần chứng minh $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X,d_1), tức là cho $\varepsilon' > 0,$ tìm $N'(\varepsilon')$ sao cho

$$d_1(x_n, x) < \varepsilon', \forall n > N'(\varepsilon').$$

Chọn $\varepsilon = \varepsilon',$ ta có

$$d_1(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon', \forall n > N(\varepsilon).$$

Chọn $N'(\varepsilon') = N(\varepsilon)$, ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X,d_1).

$(\Leftarrow)$ Ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong (X,d_1), tức là với mọi $\varepsilon > 0,$ ta có $N(\varepsilon)$ sao cho

$$d_1(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon).$$

Ta có

$$d(x_n, x) = \frac{d_1(x_n, x)}{1-d_1(x_n, x)}, \text{ với } 0 \le d_1(x,y) < 1, \forall x, y \in X.$$

Xét hàm số

$$f(t)=\frac{t}{1-t},\forall t\in[0,1),$$

ta có

$$f'(t)=\frac{1}{(1-t)^2}>0,\forall t\in[0,1),$$

suy ra f đồng biến trên $[0,1)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon\in(0,1)$,

$$d(x_n,x)=\frac{d_1(x_n,x)}{1-d_1(x_n,x)}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\forall n>N(\varepsilon).$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ trong (X,d), tức là cho $\varepsilon'>0,$ tìm $N'(\varepsilon')$ sao cho

$$d(x_n,x)<\varepsilon',\forall n>N'(\varepsilon').$$

Ta chọn $\varepsilon\in(0,1)$ sao cho

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<\varepsilon'\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}-1>\frac{1}{\varepsilon'}\Leftrightarrow\varepsilon<\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}<1.$$

Chọn $\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$, chọn $N'(\varepsilon')=N(\varepsilon)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ trong (X,d).

b) $(\Rightarrow)$ Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ trong (X,d), tức là với mọi $\varepsilon>0,$ ta có $N(\varepsilon)$ sao cho

$$d(x_n,x)<\varepsilon,\forall n>N(\varepsilon).$$

Xét hàm số

$$f(t)=\arctan t,\forall t\in[0,\infty),$$

ta có

$$f'(t)=\frac{1}{1+t^2}>0,\forall t\in[0,\infty),$$

suy ra f đồng biến trên $[0,\infty)$, nên

$$d_2(x_n,x)=\arctan\left(d(x_n,x)\right)<\arctan\varepsilon,\forall n>N(\varepsilon).$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ trong (X,d_2), tức là cho $\varepsilon'>0,$ tìm $N'(\varepsilon')$ sao cho

$$d_2\left(x_n, x\right) < \varepsilon', \forall n > N'\left(\varepsilon'\right).$$

Ta chọn $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\arctan\left(\varepsilon\right) < \varepsilon' = \arctan\left(\tan\varepsilon'\right) \Leftrightarrow \varepsilon < \tan\varepsilon'.$$

Đặt $\varepsilon = \dfrac{\tan\varepsilon'}{2}$, ta có

$$\arctan\left(\varepsilon\right) = \arctan\left(\frac{\tan\varepsilon'}{2}\right) < \arctan\left(\tan\varepsilon'\right) = \varepsilon'.$$

Chọn $N'\left(\varepsilon'\right) = N\left(\varepsilon\right)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d_2\right)$.

$\left(\Leftarrow\right)$ Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d_2\right)$, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, ta có $N\left(\varepsilon\right)$ sao cho

$$d_2\left(x_n, x\right) < \varepsilon, \forall n > N\left(\varepsilon\right).$$

Ta có

$$d(x_n, x) = \tan\left[d_2\left(x_n, x\right)\right], \text{ với } 0 \le d_2(x, y) < \frac{\pi}{2}, \forall x, y \in X.$$

Xét hàm số

$$f(t) = \tan t, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

ta có

$$f'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} > 0, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

suy ra f đồng biến trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$,

$$d(x_n, x) = \tan\left[d_2(x_n, x)\right] < \tan\varepsilon, \forall n > N\left(\varepsilon\right).$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d\right)$, tức là cho $\varepsilon' > 0$, tìm $N'\left(\varepsilon'\right)$ sao cho

$$d\left(x_n, x\right) < \varepsilon', \forall n > N'\left(\varepsilon'\right).$$

Ta chọn $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\tan\varepsilon < \varepsilon' = \tan\left(\arctan\varepsilon'\right) \Leftrightarrow \varepsilon < \arctan\varepsilon'.$$

Đặt $\varepsilon = \arctan\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra

$$d\left(x_n, x\right) = \tan\left[d_2\left(x_n, x\right)\right] < \tan\varepsilon = \tan\left[\arctan\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right] < \varepsilon', \forall n > N'\left(\varepsilon'\right).$$

Chọn $N'\left(\varepsilon'\right) = N\left(\varepsilon\right)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d\right)$.

c) $\left(\Rightarrow\right)$ Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d\right)$, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, ta có $N\left(\varepsilon\right)$ sao cho

$$d\left(x_n, x\right) < \varepsilon, \forall n > N\left(\varepsilon\right).$$

Xét hàm số

$$f(t) = \ln(1+t), \forall t \in \left[0, \infty\right),$$

ta có

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} > 0, \forall t \in \left[0, \infty\right),$$

suy ra f đồng biến trên $\left[0, \infty\right)$, nên

$$d_3(x_n, x) = \ln\left[1 + d\left(x_n, x\right)\right] < \ln\left(1+\varepsilon\right), \forall n > N\left(\varepsilon\right).$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d_3\right)$, tức là cho $\varepsilon' > 0$, tìm $N'\left(\varepsilon'\right)$ sao cho

$$d_3\left(x_n, x\right) < \varepsilon', \forall n > N'\left(\varepsilon'\right).$$

Ta chọn $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\ln\left(1+\varepsilon\right) < \varepsilon' \Leftrightarrow 1+\varepsilon < \exp(\varepsilon') \Leftrightarrow \varepsilon < \exp(\varepsilon') - 1.$$

Chọn $\varepsilon = \exp(\varepsilon'/2) - 1$, suy ra

$$d_3\left(x_n, x\right) < \ln\left(1+\varepsilon\right) = \ln\left(1 + \exp(\varepsilon'/2) - 1\right) = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'.$$

Chọn $N'\left(\varepsilon'\right) = N\left(\varepsilon\right)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d_3\right)$.

$\left(\Leftarrow\right)$ Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d_3\right)$, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, ta có $N\left(\varepsilon\right)$ sao cho

$$d_3\left(x_n, x\right) < \varepsilon, \forall n > N\left(\varepsilon\right).$$

Ta có

$$d(x_n, x) = \exp\left(d_3\left(x_n, x\right)\right) < \exp\left(\varepsilon\right), \forall n > N\left(\varepsilon\right)$$, với $0 \le d_3(x, y), \forall x, y \in X.$

Xét hàm số

$$f(t) = e^t - 1, \forall t \in \left[0, \infty\right),$$

ta có

$$f'(t) = e^t > 0, \forall t \in \left[0, \infty\right),$$

suy ra f đồng biến trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0,$

$$d(x_n, x) = \exp\left(d_3\left(x_n, x\right)\right) < \exp\left(\varepsilon\right), \forall n > N\left(\varepsilon\right).$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d\right)$, tức là cho $\varepsilon' > 0,$ tìm $N'\left(\varepsilon'\right)$ sao cho

$$d\left(x_n, x\right) < \varepsilon', \forall n > N'\left(\varepsilon'\right).$$

Ta chọn $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\tan\varepsilon < \varepsilon' = \tan\left(\arctan\varepsilon'\right) \Leftrightarrow \varepsilon < \arctan\varepsilon'.$$

Đặt $\varepsilon = \arctan\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra

$$\exp\left(\varepsilon\right) < \varepsilon' \Leftrightarrow \exp\left(\varepsilon\right)^{\varepsilon} < \exp\left(\ln\varepsilon'\right) \Leftrightarrow \varepsilon < \ln\varepsilon'.$$

Chọn $\varepsilon = \frac{\ln\varepsilon'}{2}$, chọn $N'\left(\varepsilon'\right) = N\left(\varepsilon\right)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $\left(X, d\right)$.

Dạng 2: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TẬP ĐÓNG

Để chứng minh một tập A đóng trong không gian metric $\left(X, d\right)$, ta làm các bước sau

Bước 1: Lấy điểm dính a bất kỳ của A. Khi đó tồn tại dãy $\left(x_n\right)$ trong A hội tụ về a.

Bước 2: Bằng các kỹ thuật, chứng minh a thuộc A.

Ví dụ 1. Cho tập A như sau

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2018\right\}.$$

Chứng minh A là tập đóng trong mê tríc thông thường.

Giải: Cho $z=(x,y)$ là 1 điểm dính bất kỳ của A. Ta chứng minh $z\in A.$ Do z là điểm dính của A nên tồn tại dãy $z_n=\left(x_n,y_n\right)$ trong A sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d\left(z_n,z\right)=0.$$

Theo nguyên lí kẹp, ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ và } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy.$ Từ tính chất $x_n y_n = 2018,$ ta kết luận rằng $xy=2018.$ Do đó, $z\in A$. Vậy A là tập đóng.

Ví dụ 2. Cho $d:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ thỏa

$$d(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$$

Cho tập $A=\left\{x\in\mathbb{R} : x\le 0\right\}$. Chứng minh A là tập đóng trong $(\mathbb{R},d).$

Cách giải: Cho a là 1 điểm dính bất kỳ của A. Ta chứng minh $a\in A.$ Do a là điểm dính của A nên tồn tại dãy $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ trong A sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d\left(z_n,a\right)=0.$$

Do $z_n\in A$ nên $z_n\le 0.$ Từ

$$\lim_{n\to\infty} d\left(z_n,a\right)=\lim_{n\to\infty}\left|e^{z_n}-e^a\right|=0,$$

ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$ Do đó $a\le 0.$ Vậy $a\in A.$

Ví dụ 3. Cho $X=C\left[0,1\right]=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ liên tục}\right\}$. Cho $f,g\in X$, định nghĩa

$$d_\infty\left(f,g\right)=\sup_{t\in[0,1]}\left|f(t)-g(t)\right|.$$

Cho $A=\left\{f\in X: f(0)=1\right\}$. Chứng minh A là tập đóng trong $\left(X,d_\infty\right)$.

Cách giải: Lấy f là điểm dính của X. Khi đó tồn tại dãy $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ trong A sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty\left(f_n,f\right)=0.$$

Ta có

$$\left|f_n(0)-f(0)\right|\le d_\infty\left(f_n,f\right).$$

Cho $n \to \infty$, ta suy ra dãy $\{f_n(0)=1\}$ hội tụ về $f(0)$. Do giới hạn của dãy là duy nhất nên $f(0)=1$. Do đó $f \in A$. Suy ra, A là tập đóng trong (X, d_∞).

Ví dụ 4. Cho $X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$. Ta định nghĩa

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} t|f(t)-g(t)|, \forall f,g \in X.$$

a) Chứng minh d_∞ là metric trên X.

b) Cho $E = \{f \in X : f(1) = 1\}$. Chứng minh E là tập đóng trong (X, d_∞).

c) Cho dãy $f_n(t) = 1 - e^{-nt}$ và $f = 1$. Hỏi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ về f trong (X, d_∞) không?

Giải: a) SV tự làm.

b) Xét dãy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ bất kỳ hội tụ đến f trong (X, d_∞), nghĩa là

$$d_\infty(f_n, f) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Nhận xét rằng

$$0 \le |f_n(1) - f(1)| \le \sup_{t\in[0,1]} t|f_n(t) - f(t)| = d_\infty(f_n, f).$$

Từ đó, ta có $|f_n(1) - f(1)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hay $|1 - f(1)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, nên $1 = f(1)$. Vậy $f \in E$ hay E đóng trong (X, d_∞).

c) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{t\in[0,1]} t|f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[0,1]} te^{-nt} = (en)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Vậy, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về f trong (X, d_∞).

Dạng 3: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TẬP KHÔNG ĐÓNG

Để chứng minh một tập A không đóng trong không gian metric (X, d), ta làm như sau

Tìm điểm dính của A *và không thuộc* A*, nghĩa là tìm* a *không thuộc* A*, sao cho tồn tại dãy* (x_n) *trong* A *hội tụ về* a.

Ví dụ 3. Cho $X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục$\}$. Cho $f, g \in X$, ta định nghĩa

$$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|dt.$$

Cho $A=\{f\in X: f(0)=1\}$. Chứng minh A là tập không đóng trong (X,d_1).

Cách giải: Tìm điểm dính của A và không thuộc A. Chọn $f=0$ với $x\in[0,1]$. Lấy dãy

$$f_n(x)=(1-x)^n.$$

Khi đó $f_n(0)=1$. Vậy $f_n\in A.$ Ta có

$$d_1(f_n,f)=\int_0^1 |f(t)-0|dt=\frac{1}{n+1}\to 0,$$

suy ra f là điểm dính của A. Do $f=0$ nên f không thuộc A. Vậy A là tập không đóng. Từ đó, ta có thể có một nhận xét sau

"Tập A có thể đóng trong (X,d) nhưng không đóng trong (X,d') ".

Ví dụ 4. Cho $X=C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}$ liên tục$\}$. Cho $f,g\in X$, định nghĩa

$$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|dt.$$

Cho $A=\{f\in X: f(0)=f(1)\}$. Chứng minh A không đóng trong (X,d_1).

Cách giải: Tìm điểm dính của A và không thuộc A. Chọn $f(x)=x,\ x\in[0,1]$.

Lấy dãy

$$f_n(x)=x-x^n.$$

Khi đó, $f_n(0)=f_n(1)$ nên $f_n\in A.$ Ta có

$$d_1(f_n,f)=\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|dx=\frac{1}{n+1}\to 0,$$

suy ra f là điểm dính của A. Do $f=0$ nên f không thuộc A. Vậy A là tập không đóng.

Dạng 4: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TẬP MỞ

Cách 1: *Sử dụng quả cầu: Tìm $r>0$ sao cho $B(x,r)\subset D$.*
Cách 2: *Chứng minh rằng phần bù của D là tập đóng.*
Ví dụ. Cho $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>1\}$ và metric $(\mathbb{R}^2,d)$ với

$$d(u,v)=|u_1-v_1|+|u_2-v_2|,$$

trong đó $u=(u_1,v_1), v=(u_2,v_2)$. Chứng minh D mở.

Giải:

Cách 1: (Sử dụng quả cầu). Ta cần chứng minh D mở, tức là với mọi $u=(u_1,u_2)\in D$ thì u là điểm trong của D. Ta cần tìm r sao cho

$$B(u,r)\subset D.$$

Lấy $v=(v_1,v_2)\in B(u,r)$, ta chứng minh $v\in D$ hay $v_1+v_2>1$. Ta có

$$v=(v_1,v_2)\in B(u,r).$$

Suy ra $d(u,v)<r$, dẫn đến $|u_1-v_1|+|u_2-v_2|<r.$ Ta có nhận xét sau đây

$$|u_1-v_1|\ge v_1-u_1\ ,\ |u_2-v_2|\ge v_2-u_2.$$

Do đó, $r>v_1-u_1+v_2-u_2 \Leftrightarrow v_1+v_2<r+u_1+u_2$. Chọn

$$r=u_1+u_2-1>0,$$

ta có $v_1+v_2>0.$ Từ đó suy ra $v\in D.$ Vậy, D mở.

Cách 2: Ta cần chứng minh D mở, hay $E=\mathbb{R}^2\setminus D$ đóng. Ta có

$$E=\mathbb{R}^2\setminus D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\le 1\right\}.$$

Gọi $u=(x,y)$ là điểm dính của E, ta sẽ chứng minh $u\in E$. Vì $u=(x,y)$ là điểm dính của E nên $u_n=(x_n,y_n)$ hội tụ về $u=(x,y).$ Khi đó

$$d(u_n,u)=|x_n-x|+|y_n-y|\to 0.$$

Suy ra $x_n\to x, y_n\to y.$ Mà $x_n+y_n\le 1$ (do $u_n\in D$) nên $x+y\le 1,$ do đó $u\in D.$ Vậy E đóng hay D mở.

Dạng 5: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TẬP COMPACT-KHÔNG COMPACT

Để chứng minh tập D là compact trong không gian hữu hạn chiều, ta phải chứng minh D đóng và bị chặn.

Ví dụ 1. Trong $\mathbb{R}^2$ cho tập

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+3y^2\le 1\right\}.$$

Chứng minh D là tập compact.

Giải: Ta chứng minh tồn tại $r>0$ sao cho D chứa trong quả cầu $B(a,r)$, nghĩa là tìm $r>0$ sao cho nếu $2x^2+3y^2\le 1$ thì $x^2+y^2\le r.$ Thậy vậy, nếu $2x^2+3y^2\le 1,$ ta sẽ có

$$2x^2+2y^2\le 2x^2+3y^2\le 1.$$

Do vậy ta chọn $r=\frac{1}{2}.$ D là tập bị chặn trong $B\left(0,\frac{1}{2}\right).$

Tiếp theo, ta chứng minh D là tập đóng. Cho $z=(x,y)$ là 1 điểm dính bất kỳ của D, ta chứng minh $z\in D$. Do z là điểm dính của D nên tồn tại dãy $z_n=(x_n,y_n)$ trong D sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d\left(z_n,z\right)=0.$$

Theo nguyên lí kẹp, ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x \text{ và } \lim_{n\to\infty} y_n=y.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(2x_n^2+3y_n^2\right)=2x^2+3y^2.$$

Từ tính chất $2{x_n}^2+3{y_n}^2\le 1$, ta kết luận rằng $2x^2+3y^2\le 1.$ Do đó $z\in D$. Vậy D là tập đóng.

Để chứng minh tập không compact, ta kiểm tra xem, nếu tập đó không đóng thì nó sẽ không compact.

Ví dụ 2. Cho $X=C\left[0,1\right]=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ liên tục}\right\}$. Cho $f,g\in X$, định nghĩa

$$d_1\left(f,g\right)=\int_0^1\left|f(t)-g(t)\right|dt.$$

Cho $A=\left\{f\in X: f(0)=0\right\}$. Chứng minh A không compact trong (X,d_∞).

Giải: Ta chứng minh A không đóng (Tìm điểm dính của A và không thuộc A). Chọn $f(x)=1$ với $x\in[0,1].$ Lấy dãy

$$f_n(x)=1-(1-x)^n$$

Khi đó $f_n(0)=0.$ Vậy $f_n\in A.$ Ta có

$$d_1\left(f_n,f\right)=\int_0^1\left|f_n(x)-f(x)\right|dx=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

Suy ra f là điểm dính của A. Do $f(0)=1$ nên f không thuộc A. Vậy A là tập không đóng. Do đó, A không compact.

Để chứng minh tập không compact, nếu tập đó đóng và bị chặn thì ta nên chứng minh bằng phản chứng, nghĩa là xét một dãy nào đó. Khi đó tồn tại dãy con hội tụ, ta lý luận để tìm ra mâu thuẫn.

Ví dụ 3. Cho $d: X\times X \to \mathbb{R}$ thỏa $\forall x, y \in X$

$$d(x,y)=\begin{cases} 0, x=y \\ 1, x\neq y \end{cases}$$

Giả sử $X=\left\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Chứng minh X đóng, bị chặn nhưng không compact.

Giải: Dễ thấy rằng d là một metric trên X.

Đóng. Xét dãy $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ hội tụ về x trong $\mathbb{R}$. Tức là $\exists n_o \in \mathbb{N}$ sao cho

$$d(x_n, x) < \frac{1}{2}, \ \forall n \geq n_o.$$

Do $d(x_n, x)$ chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1, nên từ đó ta suy ra

$$d(x_n, x) = 0, \ \forall n \geq n_o.$$

Nghĩa là $x = x_n \in X$, $\forall n \geq n_o$. Vậy X đóng trong $\mathbb{R}$.

Bị chặn. Xét quả cầu mở $B(1,2)$. Khi đó $d(x,1) \geq 1 < 2, \forall x \in X$ nên

$$x \in B(1,2), \ \forall x \in X \Leftrightarrow X \subseteq B(1,2)$$

Vậy X bị chặn.

Không compact. Giả sử phản chứng, tức là X compact.

Xét dãy $\left\{y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi $y_n = n^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Do X compact nên tồn tại dãy con $\left\{y_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ về $y \in X$. Suy ra $\exists k_o \in \mathbb{N}$ sao cho

$$d(y_{n_k}, y) < \frac{1}{2}, \ \forall k \geq k_o.$$

Vì vậy, $d(y_{n_k}, y) = 0 \Leftrightarrow y_{n_k} = y$, $\forall k \geq k_o$. Điều này mâu thuẫn do $\left\{y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy giảm ngặt. Tóm lại, X không thể compact.

Dạng 6: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH DÃY CAUCHY - KHÔNG GIAN MÊ TRÍC ĐẦY ĐỦ - KHÔNG ĐẦY ĐỦ.

Để chứng minh dãy x_n là dãy Cauchy, ta làm như sau: Cho trước $\varepsilon > 0,$ ta tìm $A(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $n, m \geq A(\varepsilon)$ thì

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq \varepsilon.$$

Để chứng minh (X,d) là không gian mê tríc không đầy đủ, ta cần tìm một dãy Cauchy trong X nhưng không hội tụ trong (X,d) .

Ví dụ 1. Cho $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thỏa

$$d(x, y) = | e^x - e^y |.$$

Chứng minh $(\mathbb{R}, d)$ là không gian mê tríc không đầy đủ.

Giải: Cho dãy $x_n = -n.$ Ta chứng minh dãy này là dãy Cauchy nhưng không hội tụ trong $(\mathbb{R}, d).$ Nhận xét nếu $a > 0$ thì $e^{-a} < \frac{1}{a}.$ Cho trước $\varepsilon > 0,$ chọn $A(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. Khi đó với mọi $n, m \geq A(\varepsilon)$ thì

$$d\left(x_n, x_m\right) = \left|e^{-n} - e^{-m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tiếp theo, ta giả sử rằng dãy này hội tụ về a. Khi đó

$$\lim_{n \to \infty} d\left(x_n, a\right) = \lim_{n \to \infty} \left|e^{-n} - e^a\right| = 0.$$

Suy ra

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} = e^a = 0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy, dãy $x_n = -n$ Cauchy nhưng không hội tụ trong $(\mathbb{R}, d).$ Do đó, không gian metric trên không đầy đủ.

Ví dụ 2. Cho $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thỏa

$$d(x, y) = \left|\frac{x^2}{2 + x^2} - \frac{y^2}{2 + y^2}\right|.$$

a) Chứng minh d là 1 metric trên $\mathbb{R}$.

b) Cho dãy $x_n = \sqrt{n}.$ Chứng minh dãy này là dãy Cauchy.

c) Chứng minh không gian $(\mathbb{R}, d)$ không đầy đủ.

Giải: Chứng minh câu a tương đối dễ. SV tự làm.

b) Cho trước $\varepsilon > 0$. Chọn $A(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. Khi đó với mọi $n, m \geq A(\varepsilon)$ thì

$$d\left(x_n, x_m\right) = \left|\frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m}\right| = \left|\frac{n-m}{(1+n)(1+m)}\right| \leq \frac{|n-m|}{nm} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vậy, dãy $x_n = \sqrt{n}$ là dãy Cauchy.

c) Giả sử dãy $x_n = \sqrt{n}$ hội tụ về a. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, a\right) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{1+n} - \frac{a}{1+|a|}\right| = 0.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+|a|} = 1.$$

Do đó, $a = 1 + |a|$ (vô lý). Vậy dãy này không hội tụ, dẫn đến không gian metric trên không đầy đủ.

Ví dụ 3. Cho $X = C[0,1]$ là không gian các hàm số liên tục trên [0,1]. Cho $f, g \in X$ và

$$d_1\left(f, g\right) = \int_0^1 \left|f(t) - g(t)\right| dt.$$

Cho $f_n(x) = x^n$. Chứng minh $\left(f_n\right)$ là dãy Cauchy trong (X, d_∞).

Giải : Ta có nếu $n > m$ thì

$$d_1\left(f_n, f_m\right) = \int_0^1 \left|f_n(t) - f_m(t)\right| dt = \int_0^1 \left|t^n - t^m\right| dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}$$

Chọn $\varepsilon > 0$ và $M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. Nếu $n > m \geq M(\varepsilon)$ ta có

$$d_1\left(f_n, f_m\right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$$

Vậy $\left(f_n\right)$ là dãy Cauchy trong (X, d_∞).

Ví dụ 4. Cho ánh xạ $d : \square \times \square \to \square$ xác định như sau $\forall x, y \in \square$:

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

a) Chứng minh (R, d) là không gian metric.

b) Cho $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Hỏi dãy này có là dãy Cauchy trong (R, d) không ?

c) Chứng minh (R, d) không đầy đủ.

Giải: a) Ta chứng minh (R, d) là không gian metric. Xét d, ta có

$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y.$

$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| = |\arctan y - \arctan x| = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$d(x, z) = |\arctan x - \arctan z| \leq |\arctan x - \arctan y| + |\arctan y - \arctan z|$

$$= d(x, y) + d(y, z), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) $\forall m, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$d(x_m, x_n) = |\arctan x_m - \arctan x_n| \xrightarrow{m,n\to\infty} \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = 0.$$

Do đó, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy đối với metric d trên $\mathbb{R}$.

c) Giả sử (R, d) là không gian đầy đủ. Do (R, d) đầy đủ nên $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Lại có, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x) = |\arctan x_n - \arctan x| \xrightarrow{n\to\infty} \left|\frac{\pi}{2} - \arctan x\right|.$$

Kết hợp các giả thiết ta thu được $\frac{\pi}{2} = \arctan x$ (mâu thuẫn). Vậy, (R, d) không đầy đủ.

Chương 2

ÁNH XẠ LIÊN TỤC

Trong chương 1, ta đã khảo sát không gian mêtríc (X,d), trong đó $d(x,y)$ cho ta khoảng cách giữa hai phần tử $x, y \in X$. Từ đó, ta cũng đã khảo sát khái niệm giới hạn của dãy các phần tử của X, giới hạn của các ánh xạ $x : \mathbb{N} \to X$. Trong chương này, ta tiếp tục khai triển công cụ về "khoảng cách" nhằm khảo sát các ánh xạ giữa các không gian mêtríc.

Với một ánh xạ $f : X \to Y$ giữa hai không gian mêtríc, ta ký hiệu d_X để chỉ mêtríc xác định trên X và d_Y cho mêtríc trên Y. Tuy nhiên, trong những trường hợp không gây nhầm lẫn, ta viết vắn tắt là d thay cho cả d_X lẫn d_Y. Tương tự, với các tập con $D \subset X$ của không gian mêtríc (X,d), ta cũng dùng ký hiệu d để chỉ khoảng cách cho không gian con (A, d_A). Đặc biệt, với tập số thực $\mathbb{R}$ và không gian Euclide $\mathbb{R}^N$, ta mặc nhiên dùng các khoảng cách thông thường $d(x,y) = |x-y|$, với $x, y \in \mathbb{R}$, và khoảng cách Euclide,

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_N-y_N)^2},$$

với $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, khi không có chỉ định nào khác. Nhắc lại rằng, với khoảng cách Euclide, $\mathbb{R}^N$ chính là không gian mêtríc tích của N không gian mêtríc $\mathbb{R}$ với khoảng cách thông thường. Khi $Y = \mathbb{R}$ (hay $Y = \mathbb{R}^N$), ta thường gọi f là hàm số (hàm vectơ) xác định trên X. Hơn nữa, khi $X = \mathbb{R}$ (hay $X = \mathbb{R}^N$), f được gọi là hàm số (hay hàm vectơ) theo một biến (hay theo N biến).

1. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

Xét ánh xạ $f : X \to Y$ giữa hai không gian mêtríc (X, d_X) và (Y, d_Y).

1.1. Định nghĩa.

(i) Ta nói f *liên tục tại* $x \in X$ khi ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, ta tìm được $\delta > 0$ sao cho với mọi $y \in X$, nếu $d_X(y,x) < \delta$ thì $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

(ii) Ta nói f *liên tục trên* X khi f liên tục tại mọi phần tử của X.

Ví dụ 1. a) Với hàm số thực theo một biến số thực $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và với mêtríc thông thường trên $\mathbb{R}$ cũng như trên D, f liên tục tại $x \in D$ khi ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, ta tìm được $\delta > 0$ sao cho với mọi $y \in D$, nếu $|y - x| < \delta$ thì $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Nhắc lại rằng, các hàm số sơ cấp cơ bản trên $\mathbb{R}$ đều liên tục trên miền xác định của nó, bao gồm:

Hàm lũy thừa/căn thức : Hàm lũy thừa $f(x) = x^n$, với $n \in \mathbb{N}$, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm căn thức $f(x) = \sqrt[n]{x}$, với $n \in \mathbb{N}$, liên tục trên $[0, \infty)$ khi n là số chẵn, và liên tục trên $\mathbb{R}$ khi n là số lẻ.

Hàm mũ/lôgarít : Hàm mũ $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$, với $0 < a \neq 1$, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm lôgarít $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, với $0 < a \neq 1$, liên tục trên $(0, \infty)$.

Hàm lượng giác/lượng giác ngược : Các hàm $f(x) = \sin x$ và $f(x) = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm $f(x) = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Các hàm $f(x) = \arcsin x$ và $f(x) = \arccos x$ liên tục trên $[-1, 1]$ và hàm $f(x) = \arctan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Với không gian mêtríc tích $(X \times Y, d)$ của hai không gian mêtríc (X, d_X) và (Y, d_Y), xét các phép chiếu $\pi_1 : X \times Y \to X$ và $\pi_2 : X \times Y \to Y$ xác định bởi

$$\pi_1(x, y) = x \text{ và } \pi_2(x, y) = y, \text{ với mọi } (x, y) \in X \times Y.$$

Xuất phát từ các bất đẳng thức

$$d_X(\pi_1(x, y), \pi_1(z, t)) = d_X(x, z) \le d((x, y), (z, t)) = \sqrt{d_X^2(x, z) + d_Y^2(y, t)},$$
$$d_Y(\pi_2(x, y), \pi_2(z, t)) = d_Y(y, t) \le d((x, y), (z, t)) = \sqrt{d_X^2(x, z) + d_Y^2(y, t)},$$

thỏa với mọi $(x, y), (z, t) \in X \times Y$, ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, bằng cách chọn $\delta = \varepsilon > 0$, ta có, với mọi $(z, t) \in X \times Y$, nếu $d((x, y), (z, t)) < \delta$ thì $d_X(\pi_1(x, y), \pi_1(z, t)), d_Y(\pi_2(x, y), \pi_2(z, t)) < \varepsilon$. Do vậy, các ánh xạ π_1 và π_2 liên tục tại $(x, y) \in X \times Y$ bất kỳ. Do đó, chúng liên tục trên $X \times Y$.

Lập luận tương tự cho không gian mêtríc tích (X, d) của N không gian mêtríc $(X_1, d_1), \cdots, (X_N, d_N)$, với $X = X_1 \times \cdots \times X_N$. Xét phép chiếu xuống thành phần thứ i, $\pi_i : X \to X_i$, xác định bởi

$$\pi_i(\mathbf{x}) = x_i, \text{ với mọi } \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) \in X.$$

Từ bất đẳng thức

$$d_i(\pi_i(\mathbf{x}),\pi_i(\mathbf{y})) = d_i(x_i,y_i) \le d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_N^2(x_N,y_N)},$$

thỏa với mọi $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_N),\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_N)\in X$, ta suy ra rằng các phép chiếu π_i, $i=1,\cdots,N$, là các ánh xạ liên tục trên $X = X_1\times\cdots\times X_N$.

Đặt biệt, do $\mathbb{R}^N$ với mêtríc Euclide chính là tích của N không gian mêtríc $\mathbb{R}$ với mêtríc thông thường, mọi phép chiếu $\pi_i:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, xác định bởi $\pi_i(\mathbf{x})=x_i$, với $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^N$. ■

Dùng cấu trúc tôpô không gian mêtríc, ta có đặc trưng quan trong sau cho các ánh xạ liên tục.

1.2. Định lý. *Xét ánh xạ* $f:X\to Y$ *giữa các không gian mê tríc. Ta có*

(i) f *liên tục tại* $x\in X$ *nếu và chỉ nếu ứng với mọi dãy* $(x_n)\subset X$*, nếu* $x_n\to x$ *thì* $f(x_n)\to f(x)$.

(ii) f *liên tục trên* X *nếu và chỉ nếu* $f^{-1}(W)$ *là tập mở trong* X*, với mọi tập mở* W *trong* Y*, hay* $f^{-1}(G)$ *là tập đóng trong* X*, với mọi tập đóng* G *trong* Y.

Chứng minh. (i) Khi f liên tục tại $x\in X$, xét dãy $(x_n)\subset X$ sao cho $x_n\to x$. Ứng với $\varepsilon>0$, do f liên tục tại x, ta có $\delta>0$ sao cho

$$d(f(y),f(x))<\varepsilon, \text{ với mọi } y\in X \text{ thỏa điều kiện } d(y,x)<\delta.$$

Mặt khác, do $x_n\to x$, nên tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho

$$d(x_n,x)<\delta, \text{ với mọi } n\ge n_0.$$

Do đó, $d(f(x_n),f(x))<\varepsilon$, với mọi $n\ge n_0$. Vậy $f(x_n)\to f(x)$.

Ngược lại, nếu f không liên tục tại $x\in X$, nghĩa là tồn tại $\varepsilon>0$ sao cho với mỗi $\delta>0$, ta có $x_\delta\in X$ sao cho $d(x_\delta,x)<\delta$ và $d(f(x_\delta),f(x))\ge\varepsilon$. Đặt $x_n\equiv x_{1/n}$. Ta được dãy $(x_n)\subset X$ với $d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$ khi $n\to\infty$ cho thấy $x_n\to x$. Tuy nhiên, do $d(f(x_n),f(x))\ge\varepsilon$, với mọi $n\in\mathbb{N}$, cho thấy $f(x_n)\not\to f(x)$.

(ii) Trước hết, xuất phát từ đẳng thức $f^{-1}(Y\setminus G)=X\setminus f^{-1}(G)$, ta suy ra rằng nếu $f^{-1}(W)$ là tập mở trong X với mọi tập mở trong Y thì với tập đóng G trong Y, do $Y \setminus G$ mở trong Y nên đẳng thức trên cho thấy $X \setminus f^{-1}(G)$ mở trong X và do đó, $f^{-1}(G)$ đóng trong X. Tương tự nếu $f^{-1}(G)$ là tập đóng trong X với mọi tập đóng G trong Y, thì với mỗi tập mở W trong Y, đẳng thức $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$ cho thấy $X \setminus f^{-1}(W)$ là tập đóng trong X và do đó $f^{-1}(W)$ là tập mở trong X.

Bây giờ, khi f liên tục trên X, với tập mở W trong Y, ta sẽ chứng minh $V = f^{-1}(W)$ là một tập mở trong X. Thật vậy, với mỗi $x \in V$, do $f(x) \in W$ và vì W là tập mở nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(f(x), \varepsilon) \subset W$. Mặt khác, do f liên tục tại x, ta có $\delta > 0$ sao cho $f[B(x, \delta)] \subset B(f(x), \varepsilon)$. Suy ra (xem bài tập 1)

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}\{f[B(x,\delta)]\} \subset f^{-1}\{B(f(x),\varepsilon)\} \subset f^{-1}(W) = V.$$

Do đó, V là một tập mở. Ngược lại, khi $f^{-1}(W)$ là tập mở trong X, với mọi tập mở W trong Y, xét $x \in X$ bất kỳ. Ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, do $B(f(x), \varepsilon)$ là tập mở trong Y, ta có $f^{-1}[B(f(x), \varepsilon)]$ là tập mở trong X, chứa x. Do đó, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $B(x, \delta) \subset f^{-1}[B(f(x), \varepsilon)]$. Ta được

$$f[B(x,\delta)] \subset f\{f^{-1}[B(f(x),\varepsilon)]\} \subset B(f(x),\varepsilon),$$

và điều này cho thấy f liên tục tại $x \in X$ bất kỳ, nghĩa là f liên tục trên X. ■

Từ kết quả trên, ta dễ dàng khảo sát tính liên tục của ánh xạ hợp như sau.

1.3. Mệnh đề. *Cho các không gian mêtríc* (X, d_X), (Y, d_Y), *và* (Z, d_Z), *và các ánh xạ* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. *Xét ánh xạ hợp* $g \circ f : X \to Z$ *xác định bởi* $g \circ f(x) = g[f(x)]$, *với mọi* $x \in X$. *Ta có*

(i) Nếu f *liên tục tại* $x \in X$ *và* g *liên tục tại* $y = f(x) \in Y$ *thì* $g \circ f$ *liên tục tại* x.

(ii) Nếu f *liên tục trên* X *và* g *liên tục trên* Y *thì* $g \circ f$ *liên tục trên* X.

Chứng minh. (i) Với bất kỳ dãy $(x_n) \subset X$ sao cho $x_n \to x$. Do fg liên tục tại x, ta có $y_n = f(x_n) \to f(x) = y$ và do g liên tục tại y, ta được

$$g \circ f(x_n) = g[f(x_n)] = g(y_n) \to g(y) = g[f(x)] = g \circ f(x).$$

Do đó $g \circ f$ liên tục tại x.

(ii) suy ra từ (i). ■

Tương tự như đối với hàm một biến, ta có thể khảo sát khái niệm giới hạn cho các ánh xạ giựa các không gian mêtríc như sau.

1.4. Định nghĩa. Xét các không gian mêtríc (X, d_X), (Y, d_Y), ánh xạ $f: X \to Y$, $a \in X$, và $b \in Y$.

(i) a được gọi là một *điểm tụ*[1] của X, nếu $B(x,r) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, với mọi $r > 0$.

(ii) ta nói f có giới hạn tại điểm tụ $a \in X$ là b, ký hiệu

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

khi ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho, với mọi $x \in X$, nếu $0 < d(x,a) < \delta$ thì $d(f(x), b) < \varepsilon$.

Nhận xét 1. a) Ta có thể đặc trưng điểm tụ bằng dãy như sau : phần tử $a \in X$ là một điểm tụ của X khi và chỉ khi tồn tại dãy $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ sao cho $x_n \to a$ (bài tập 2). Phần tử của $a \in X$ không là điểm tụ của X được gọi là *điểm cô lập* của X. Khi đó, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a,r) = \{a\}$. Không gian mêtríc mà mọi phần tử của nó đều là điểm cô lập được gọi là *không gian rời rạc*, với ví dụ là $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$, với mêtríc thông thường từ $\mathbb{R}$.

b) Giới hạn b của ánh xạ f tại điểm tụ $a \in X$ không lệ thuộc vào ảnh của f tại a, $f(a)$. Do đó, khái niệm giới hạn có thể nới rộng cho các ánh xạ $f: D \subset X \to Y$ tại các điểm tụ của D. Cụ thể, $a \in X$ được gọi là một điểm tụ của D khi ứng với mỗi $r > 0$, $[B(x,r) \setminus \{x\}] \cap D \neq \emptyset$ và tương tự như trong a), $a \in X$ là một điểm tụ của D nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ sao cho $x_n \to a$. Chú ý rằng điểm tụ của D không nhất thiết phải nằm trong D. Đặc biệt, khi $D \subset \mathbb{R}$, ta nói ∞ (hay $-\infty$) là một điểm tụ của D khi tồn tại dãy $(x_n) \subset D$ sao cho $x_n \to \infty$ (hay $x_n \to -\infty$). Khi $D \subset \mathbb{R}^N$, ta nói ∞ là một điểm tụ của D khi tồn tại dãy $(\mathbf{x}_n) \subset D$ sao cho $\|\mathbf{x}_n\| \to \infty$.

c) Định nghĩa về giới hạn của f tại điểm tụ $a \in X$ tương tự như định nghĩa về tính liên tục của f tại a. Điều khác biệt duy nhất là điều kiện $d(f(x), b) < \varepsilon$ thỏa khi $0 < d(x,a) < \delta$ cho giới hạn, và điều kiện $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ thỏa khi $d(x,a) < \delta$. Do điều kiện $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ luôn luôn thỏa khi $x = a$. Do đó, ta có

[1] Còn gọi là điểm giới hạn (limit point).

f liên tục tại điểm tụ $a \in X$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Chú ý rằng f luôn luôn liên tục tại các điểm cô lập (bài tập 3). ■

Tương tự như khái niệm liên tục tại một điểm, ta có thể đặc trưng khái niệm giới hạn bằng dãy như sau mà phần chứng minh được coi như bài tập (bài tập 3).

1.5. Mệnh đề. *Xét ánh xạ* $f : X \to Y$ *giữa hai không gian mê tríc,* $a \in X$ *là một điểm tụ của* X, *và* $b \in Y$. *Ta có* $\lim\limits_{x \to a} = b$ *nếu và chỉ nếu, ứng với mọi dãy* $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$, *nếu* $x_n \to a$ *thì* $f(x_n) \to b$.

Nhận xét 2. Tiếp nối với nhận xét 1, kết hợp với mệnh đề trên, ta có thể đặc trưng giới hạn ánh xạ $f : D \to Y$ tại các điểm tụ a của D. Đặc biệt, khi $D \subset \mathbb{R}$, ta có thể đặc trưng giới hạn khi $x \to \pm\infty$, với điều kiện ∞ (hay $-\infty$) là các điểm tụ của D. Tương tự, khi $D \subset \mathbb{R}^N$ nhận ∞ làm điểm tụ, ta có thể đặc trưng giới hạn khi $\mathbf{x} \to \infty$ bằng dãy. Hơn nữa, khi $Y = \mathbb{R}$, ta có thể định nghĩa giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (hay $-\infty$) bằng dãy : với mọi dãy $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$, nếu $x_n \to a$, thì $f(x_n) \to \infty$ (hay $-\infty$). ■

Ví dụ 2. a) Do tất cả các hàm số sơ cấp cơ bản (xem ví dụ 1) đều liên tục trên miền xác định của nó. Ngoài ra, mọi điểm trong miền xác định D của các hàm số sơ cấp $f(x)$ đã nêu đều là điểm tụ của D, ta được $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\forall a \in D$. Ngoài ta, ta còn có các giới hạn quan trọng sau cho các hàm số sơ cấp cơ bản :

$\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$, với mọi $n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \infty$ khi n chẵn, và $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ khi n lẻ; $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$, với mọi $n \in \mathbb{N}$; và khi n lẻ, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$; và $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$; và $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

b) Để chứng tỏ giới hạn của f tại điểm tụ a không tồn tại, ta chỉ cần chỉ ra một dãy $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$, nhưng $(f(x_n))$ không là dãy hội tụ, hoặc chỉ ra hay dãy $(x_n), (y_n) \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ và $y_n \to a$, nhưng hai dãy $(f(x_n))$ và $(f(y_n))$ hội tụ về hai giới hạn khác nhau. Chẳng hạn, do các dãy $(2n\pi)$ và $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ cùng tiến về ∞ nhưng các dãy $(\sin 2n\pi)$ và $(\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))$ hội tụ về hai giới hạn khác nhau, lần lượt là 0 và 1. Ta nói hàm $f(x) = \sin x$ không có giới hạn tại ∞. Tương tự cho giới hạn tại $-\infty$ cũng như cho các hàm

$f(x) = \cos x$ và $f(x) = \tan x$. Tổng quát, các hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$ đều không có giới hạn tại $\pm\infty$ (bài tập 4).

c) Do các phép chiếu $\pi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, N$, đều là các hàm liên tục, ta có $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \pi_i(\mathbf{x}) = \pi_i(\mathbf{a})$, với mọi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Tuy nhiên $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty} \pi_i(\mathbf{x}) = \pi_i(\mathbf{a})$ không tồn tại. Chẳng hạn, với π_1 và $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, đặt $\mathbf{x}_n = (a_1, \cdots, a_N + n)$ và $\mathbf{y}_n = (a_1 + n, \cdots, a_N)$, ta được các dãy $(\mathbf{x}_n), (\mathbf{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$, $\|\mathbf{x}_n\|, \|\mathbf{y}_n\| \to \infty$ nhưng $\pi_1(\mathbf{x}_n) \to a_1$ và $\pi_1(\mathbf{y}_n) \to \infty$.

Hàm số $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ xác định trên $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ có giới hạn là 0 khi $(x, y) \to (0,0)$ do với mọi dãy $((x_n, y_n)) \subset D$, $(x_n, y_n) \to 0$ cho $x_n \to 0$ và $y_n \to 0$, và ta có

$$\left|f(x_n, y_n)\right| = \frac{|x_n y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Tuy nhiên, hàm số $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ có cùng miền xác định $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nhưng không có giới hạn khi $(x, y) \to (0,0)$ do tồn tại hai dãy $\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$, $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ trong D, cùng tiến về $(0,0)$, nhưng $f\left(0, \frac{1}{n}\right) \to 0$ và $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$ khi $n \to \infty$. ■

2. TÍNH CHẤT ÁNH XẠ LIÊN TỤC

Trong phần 1, ta đã khảo sát tính chất của các ánh xạ liên tục giữa các không gian mêtríc tổng quát và trong phần này, ta khảo sát tác động của ánh xạ liên tục trên các không gian (hay tập) compắc, đầy đủ, liên thông.

2.1. Định lý. *Xét ánh xạ liên tục $f : X \to Y$ giữa các không gian mêtríc, trong đó X là không gian mêtríc compắc. Ta có*

(i) $f(X)$ là tập con compắc của Y.

(ii) f liên tục đều trên X, nghĩa là ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có $\delta > 0$ sao cho $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, với mọi $x, y \in X$ thỏa điều kiện $d(x, y) < \delta$.

Chứng minh. (i) Với dãy $(y_n) \subset f(X)$, ta có dãy $(x_n) \subset X$ sao cho $f(x_n) = y_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do X compắc, ta có dãy con (x_{n_k}) hội tụ về $x \in X$. Xét dãy con (y_{n_k}) của dãy (y_n). Do f liên tục tại x, ta được $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(X)$. Vậy $f(X)$ là tập con compắc của Y.

(ii) Dùng phản chứng, giả sử f không liên tục đều trên X, nghĩa là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho ứng với mỗi $\delta > 0$, tồn tại $x_\delta, y_\delta \in X$ sao cho $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ nhưng $d(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, xét $\delta = \frac{1}{n}$, ta được $x_n, y_n \in X$ sao cho $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ và $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Dãy $((x_n, y_n)) \subset X \times X$ compắc nên tồn tại dãy con $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ hội tụ về $(x, y) \in X \times X$, nghĩa là $x_{n_k} \to x$ và $y_{n_k} \to y$ với $x, y \in X$. Do tính liên tục của d trên $X \times X$ (bài tập 5), ta suy ra

$$d(x, y) = \lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0,$$

suy ra $d(x, y) = 0$, nên $x = y$. Kết hợp tính liên tục của d trên $Y \times Y$ và của f tại $x = y$, ta lại có

$$0 = d(f(x), f(y)) = \lim_{k \to \infty} d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon > 0,$$

Vô lý. ■

Đặc biệt, đối với các hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ liên tục trên X compắc, ta có

2.2. Định lý. *Xét hàm số liên tục* $f : X \to \mathbb{R}$ *với* X *là không gian compắc. Ta có* f *là hàm bị chặn trên* X, *nghĩa là* $f(X)$ *là một tập con bị chặn của* $\mathbb{R}$. *Hơn nữa,* f *đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên* X, *nghĩa là tồn tại* $x_m, x_M \in X$ *sao cho*

$$f(x_m) = \min_{x \in X} f(x), \textit{ và } f(x_M) = \max_{x \in X} f(x).$$

Chứng minh. Do định lý 2.1, $f(X)$ là tập compắc nên là tập đóng và bị chặn. Do đó f bị chặn trên X, $m = \inf f(X)$ và $M = \sup f(X)$ tồn tại trong $\mathbb{R}$. Do định nghĩa sup/inf, tồn tại các dãy số $(y_n), (z_n) \subset f(X)$ sao cho $y_n \to m$ và $z_n \to M$. Vì $f(X)$ là tập đóng, nên $m, M \in f(X)$. Do đó, tồn tại $x_m, x_M \in X$ sao cho $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, và định lý được chứng minh. ■

Như một ứng dụng của kết quả này, ta có ví dụ đầu tiên về không gian liên thông sau.

2.3. Mệnh đề. *Với mọi* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b]$ *là một tập con liên thông của* $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Dùng phản chứng, giả sử $[a, b]$ không là tập con liên thông của $\mathbb{R}$, nghĩa là tồn tại tập con không rỗng $F \subset [a, b]$, vừa đóng vừa mở trong $[a, b]$, $F \neq [a, b]$. Khi đó $G = [a, b] \setminus F$ cũng là tập con không rỗng, vừa đóng vừa mở trong $[a,b]$. Vì F, G là các tập con đóng của tập compắc nên chúng cũng là tập compắc và do đó $F\times G$ là một không gian mêtríc compắc. Do hàm $f(x,y)=|x-y|$ liên tục trên không gian compắc , tồn tại $(x_m,y_m)\in F\times G$ sao cho

$$|x_m-y_m|=f(x_m,y_m)=\min_{(x,y)\in F\times G} f(x,y)=\min_{(x,y)\in F\times G}|x-y|.$$

Do $F\cap G=\varnothing$ nên $x_m\neq y_m$ và do đó $|x_m-y_m|>0$. Bấy giờ, với $c=\frac{1}{2}(x_m+y_m)\in[a,b]$, ta có $|c-y_m|=\frac{1}{2}|x_m-y_m|<\min_{(x,y)\in F\times G}|x-y|$ nên $c\notin F$. Tương tự, ta cũng có $c\notin G$. Vô lý, vì $F\cup G=[a,b]$. ■

Nhận xét 3. Từ trong chứng minh trên, ta suy ra rằng "*một không gian mêtríc X là không liên thông nếu và chỉ nếu X có thể viết thành hội hai tập mở không rỗng, rời nhau, hay có thể viết thành hội hai tập đóng không rỗng, rời nhau*". Đối với tập con không liên thông $D\subset X$, D có thể viết thành hội hai tập mở (hay đóng) trong D, không rỗng và rời nhau. Các tập mở (hay đóng) này không nhất thiết phải là tập mở (hay đóng) trong X. ■

Đối với không gian liên thông, ta có

2.4. Định lý. *Xét ánh xạ liên tục $f:X\to Y$, với X là một không gian liên thông. Ta có $f(X)$ là một tập con liên thông của Y.*

Chứng minh. Phản chứng. Giả sử $f(X)$ không là tập con liên thông của Y, nghĩa là $f(X)$ có thể viết thành hội hai tập mở trong $f(X)$, không rỗng, rời nhau. Do tập mở trong $f(X)$ là vết trên $f(X)$ của các mở trong Y, nên ta có các tập mở không rỗng V, W trong $f(X)$, $V\cap W=\varnothing$ và $V\cup W=f(X)$. Đặt $A=f^{-1}(V)$ và $B=f^{-1}(W)$. Do mở trong $f(X)$ là vết trên $f(X)$ của tập mở trong Y, tồn tại V_1,W_1 mở trong Y sao cho $V=V_1\cap f(X)$ và $W=W_1\cap f(X)$. Chú ý rằng $f^{-1}(V)=f^{-1}(V_1)$ và $f^{-1}(W)=f^{-1}(W_1)$ nên từ tính liên tục của f, ta suy ra A và B là các tập mở trong X. Ngoài ra,

$$A\cap B=f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)=f^{-1}(V\cap W)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing,$$

và

$$A\cup B=f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)=f^{-1}(V\cup W)=f^{-1}(f(X))=X,$$

và các điều này cho thấy X là không liên thông. Vô lý. ■

Do mọi tập con liên thông của $\mathbb{R}$ đều là một khoảng nên từ kết quả trên, ta được.

2.5. Mệnh đề. *(i) Cho hàm liên tục* $f : X \to \mathbb{R}$ *, với* X *là một không gian liên thông. Nếu có* $a, b \in X$ *sao cho* $f(a) < 0 < f(b)$ *thì tồn tại* $c \in X$ *sao cho* $f(c) = 0$.

(ii) Cho hàm liên tục $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *. Ta có* $f([a,b]) = [m,M]$*, trong đó* $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ *và* $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Chứng minh. (i) Do định lý 2.4, $f(X)$ là một tập con liên thông của $\mathbb{R}$ nên nó là một khoảng, chứa $f(a)$ và $f(b)$ nên nó phải chứa khoảng $[f(a), f(b)]$ và vì $f(a) < 0 < f(b)$ nên $0 \in f(X)$, nghĩa là tồn tại $c \in X$ sao cho $f(c) = 0$.

(ii) Vì $[a,b]$ compắc, do định lý 2.2, tồn tại $x_m, x_M \in [a,b]$ sao cho

$$f(x_m) = m \equiv \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ và } f(x_M) = M \equiv \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Hiển nhiên $f([a,b]) \subset [m,M]$. Ngoài ra, do (i), $f([a,b])$ là một khoảng và vì $m, M \in f([a,b])$, nên $f([a,b]) \subset [m,M]$ và mệnh đề được chứng minh. ■

Mệnh đề trên thường được dùng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Tuy nhiên việc kiểm chứng tính liên thông của một không gian (hay một tập) là không đơn giản. Tuy nhiên, ta có một khái niệm liên thông khác, đặc biệt hữu hiệu trong không gian Euclide nói riêng và không định chuẩn nói chung như sau.

2.6. Định nghĩa. Cho không gian mêtríc X và $D \subset X$.

(i) Một ánh xạ liên tục $x : [0,1] \to D$ với $x(0) = a$ và $x(1) = b$ được gọi là một *đường liên tục* trong D nối a và b.

(ii) D được gọi là một *tập liên thông đường* khi mọi phần tử $a, b \in D$ đều có thể nối bằng một đường liên tục trong D. Khi $D = X$ là tập liên thông đường, ta nói X là *không gian liên thông đường*.

Ví dụ 3. a) Cho $A \subset \mathbb{R}$ là một khoảng. Với mỗi $a, b \in A$, $a < b$, xét ánh xạ $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x(t) = tb + (1-t)a$. Do x là hàm liên tục, $x(0) = a$, $x(1) = b$, và $x([0,1]) = [a,b] \subset A$. Do đó, mọi phần tử $a, b \in A$ đều có thể nối bằng đường liên tục trong A. Do đó, mọi khoảng trong $\mathbb{R}$ đều là tập liên thông đường và $\mathbb{R}$ là không gian liên thông đường.

b) Tổng quát, xét không gian định chuẩn X. Tập con $D \subset X$ được gọi là *lồi* khi với mọi $a, b \in D$, $[a,b] \equiv \{tb + (1-t)x : 0 \le t \le 1\} \subset D$. Tương tự lập luận vừa dùng kết hợp với bài tập 5 b), ta được mọi tập con lồi của một không gian định chuẩn đều là tập liên thông đường và mọi không gian định chuẩn đều là không gian liên thông đường. ■

Ta có quan hệ giữa tính liên thông và liên thông đường như sau.

2.7. Mệnh đề. *Mọi không gian liên thông đường đều là không gian liên thông*.

Chứng minh. Với không gian liên thông đường (X, d), ta chứng minh rằng nó là không gian liên thông bằng phản chứng. Giả sử $X = V \bigcup W$ với V, W là hai tập mở không rỗng, rời nhau trong X. Lấy $a \in V$, $b \in W$ và gọi $x : [0,1] \to X$ là đường liên tục trong X, nối a và b. Ta có $A = x^{-1}(V)$ và $B = x^{-1}(W)$ là hai tập mở không rỗng, rời nhau trong $[0,1]$ và $A \bigcup B = [0,1]$. Mâu thuẫn với tính liên thông của $[0,1]$. ■

Nhận xét 3. Tồn tại không gian mêtríc liên thông nhưng không liên thông đường (bài tập 6), nghĩa là ta không có chiều ngược lại của mệnh đề trên. Nói khác đi, khái niệm liên thông đường là chặt hơn khái niệm liên thông. Đổi lại, khái niệm liên thông đường dễ kiểm chứng hơn. ■

Cần chú ý rằng ảnh liên tục của tập compắc, liên thông là các tập compắc, liên thông. Tuy nhiên, điều tương tự không đúng cho ảnh liên tục của tập đầy đủ. Chẳng hạn, hàm $f(x) = \arctan x$ liên tục trên không gian đầy đủ $\mathbb{R}$ nhưng có ảnh $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ không là tập đầy đủ trong $\mathbb{R}$.

3. KHÔNG GIAN CÁC ÁNH XẠ LIÊN TỤC

Trong chương 1, ta đã giới thiệu không gian vectơ $\mathsf{F}(S, \mathbb{R})$ các hàm số xác định trên tập không rỗng S cũng như không gian Banach $\mathsf{B}(S, \mathbb{R})$ các hàm bị chặn trên S, với chuẩn sup. Các không gian này có thể nới rộng một cách tự nhiên khi ta thay $\mathbb{R}$ bằng $\mathbb{R}^N$, hay tổng quát hơn, bằng một không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$, nghĩa là thay $\mathsf{F}(S, \mathbb{R})$ bằng không gian $\mathsf{F}(S, X)$ cách ánh xạ từ S vào không gian định chuẩn X. Trước hết, với $f, g \in \mathsf{F}(S, X)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa các phép toán $f + g, \alpha f \in \mathsf{F}(S, X)$ một cách tự nhiên bởi

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ và } (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ với mọi } x \in X.$$

Chú ý rằng các phép toán vế phải trong các đẳng thức trên chính là các phép toán trên không gian vectơ X.

Dễ dàng kiểm chứng rằng $\mathsf{F}(S, X)$, với các phép toán nêu trên, là một không gian vectơ. Để khảo sát cấu trúc của không gian các ánh xạ bị chặn,

$\mathsf{B}(S,X)$, tập các $f\in \mathsf{F}(S,X)$ sao cho $f(S)$ là một tập con bị chặn của X, nghĩa là tồn tại $M>0$ sao cho $\|f(x)\|\le M$, với mọi $x\in S$, ta cần kết quả sau

3.1. Mệnh đề. *Với mọi* $f,g\in \mathsf{B}(S,X)$ *và* $\alpha\in\mathbb{R}$, *ta có* $f+g,\alpha f\in \mathsf{B}(S,X)$. *Nói khác đi,* $\mathsf{B}(S,X)$ *là một không gian vectơ con của* $\mathsf{F}(S,X)$.

Chứng minh. Do định nghĩa, tồn tại $M_f, M_g>0$ sao cho $\|f(x)\|\le M_f$ và $\|g(x)\|\le M_g$, với mọi $x\in S$. Bấy giờ các bất đẳng thức

$$\|(f+g)(x)\|=\|f(x)+g(x)\|\le\|f(x)\|+\|g(x)\|\le M_f+M_g$$

và

$$\|(\alpha f)(x)\|=\|\alpha f(x)\|=|\alpha|\|f(x)\|\le|\alpha|M_f$$

cho $f+g,\alpha f\in \mathsf{B}(S,X)$. ■

Tương tự như trong $\mathsf{B}(S,\mathbb{R})$, với $f\in \mathsf{B}(S,X)$, đặt

$$\|f\|=\sup_{x\in S}\|f(x)\|.$$

Ta có

3.2. Mệnh đề. $(\mathsf{B}(S,X),\|\cdot\|)$ *là một không gian định chuẩn.*

Chứng minh. Hiển nhiên $\|f\|\ge 0$, với mọi $f\in \mathsf{B}(S,X)$ và khi $\|f\|=0$, ta được $\|f(x)\|=0$ và do đó $f(x)=0$, với mọi $x\in S$. Suy ra $f=0$ (phần tử trung hòa của phép cộng trong $\mathsf{B}(S,X)$).

Với $\alpha\in\mathbb{R}$ và $f\in \mathsf{B}(S,X)$, ta có

$$\|\alpha f\|=\sup_{x\in S}\|(\alpha f)(x)\|=\sup_{x\in S}\|\alpha f(x)\|=\sup_{x\in S}|\alpha|\|f(x)\|=|\alpha|\sup_{x\in S}\|f(x)\|=|\alpha|\|f\|$$

và với $f,g\in \mathsf{B}(S,X)$,

$$\|f+g\|=\sup_{x\in S}\|(f+g)(x)\|=\sup_{x\in S}\|f(x)+g(x)\|\le\sup_{x\in S}\|f(x)\|+\sup_{x\in S}\|g(x)\|=\|f\|+\|g\|.$$

Vậy $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathsf{B}(S,X)$. ■

Khi X là một không gian định chuẩn mà trường hợp đặc biệt là khi X là không gian Euclide, ta có

3.3*. Mệnh đề. $\left(\mathsf{B}(S,X),\|\cdot\|\right)$ *là một không gian Banach nếu và chỉ nếu* $\left(X,\|\cdot\|_X\right)$ *là một không gian Banach.*

Chứng minh. Khi $\left(\mathsf{B}(S,X),\|\cdot\|\right)$ là một không gian Banach, với mỗi dãy Cauchy $(x_n)\subset X$, ta xét các ánh xạ $f_n : S\to X$ xác định bởi $f_n(s)=x_n$, với mọi $s\in S$. Do $f_n(S)=\{x_n\}$ là tập bị chặn trong X, ta được dãy $(f_n)\subset \mathsf{B}(S,X)$. Ngoài ra, do

$$\|f_m-f_n\|=\sup_{s\in S}\|f_m(s)-f_n(s)\|_X=\|x_m-x_n\|_X, \text{ với mọi } m,n\in\mathbb{N},$$

ta suy ra rằng (f_n) là dãy Cauchy trong $\mathsf{B}(S,X)$. Do đó, tồn tại $f\in\mathsf{B}(S,X)$ sao cho $f_n\to f$ trong $\mathsf{B}(S,X)$, nghĩa là

$$\|f_n-f\|=\sup_{s\in S}\|f_n(s)-f(s)\|\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Với $s_0\in S$ cố định, đặt $x=f(s_0)\in X$, ta có

$$\|x_n-x\|_X=\|f_n(s_0)-f(s_0)\|_X\le\|f_n-f\|, \text{ với mọi } n\in\mathbb{N},$$

ta suy ra $x_n\to x$ (và $f(s)=x$, với mọi $s\in S$). Vậy X đầy đủ.

Ngược lại khi X đầy đủ, tương tự như chứng minh tính đầy đủ của $\mathsf{B}(S,\mathbb{R})$ (xem định lý 2.8, chương 1), ứng với dãy Cauchy (f_n) trong $\mathsf{B}(S,X)$ và với mỗi $s\in S$, bất đẳng thức $\|f_m(s)-f_n(s)\|_X\le\|f_m-f_n\|$ thỏa với mọi $m,n\in\mathbb{N}$ cho thấy $(f_n(s))$ là dãy Cauchy nên hội tụ trong X. Đặt $f(s)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(s)$. Ta được $f\in\mathsf{F}(S,X)$. Hơn nữa, do (f_n) là dãy bị chặn trong $\mathsf{B}(S,X)$, tồn tại $M>0$ sao cho $\|f_n\|\le M$, với mọi $n\in\mathbb{N}$. Khi đó, ứng với mỗi $s\in S$, bất đẳng thức $\|f_n(s)\|_X\le\|f_n\|\le M$ kết hợp với tính liên tục của hàm chuẩn $\|\cdot\|_X$ cho

$$\|f(x)\|_X=\left\|\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right\|_X=\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\|_X\le M$$

và do đó, $f\in\mathsf{B}(S,X)$. Để chứng minh $f_n\to f$ trong $\mathsf{B}(S,X)$, ta dùng tính Cauchy của (f_n). Với $\varepsilon>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$, với mọi $m,n\ge n_0$. Bất đẳng thức $\|f_n(s)-f_m(s)\|_X\le\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ thỏa với mọi $s\in S$ và

$m, n \geq n_0$. Lại do tính liên tục của hàm chuẩn, khi $m \to \infty$, ta được $\|f_n(s) - f(s)\|_X \leq \varepsilon$, với mọi $s \in S$ và $n \geq n_0$. Do vậy,

$$\|f_n - f\| = \sup_{s \in S} \|f_n(s) - f(s)\|_X \leq \varepsilon, \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Tóm lại, $f_n \to f$ trong $\mathsf{B}(S, X)$ và định lý được chứng minh. ■

Ngoài ra, khi S là một không gian mêtríc, ta có thể khảo sát tập con các ánh xạ liên tục từ S vào X, ký hiệu $\mathsf{C}(S, X)$, của không gian $\mathsf{F}(S, X)$. Ta có

3.4. Mệnh đề. $\mathsf{C}(S, X)$ *là một không gian vectơ con của* $\mathsf{F}(S, X)$.

Chứng minh. Với $f, g \in \mathsf{C}(S, X)$ và $\alpha \in \mathbb{K}$ bất kỳ, do các phép toán trên X đều liên tục nên với bất kỳ $s \in S$, $(s_n) \subset S$ sao cho $s_n \to s$, ta có $f(s_n) \to f(s)$ và $g(s_n) \to g(s)$ cho $(f+g)(s_n) = f(s_n) + g(s_n) \to f(s) + g(s) = (f+g)(s)$ và $(\alpha f)(s_n) = \alpha f(s_n) \to \alpha f(s) = (\alpha f)(s)$. Từ đó suy ra $f + g$, αf liên tục tại mọi $s \in S$, nghĩa là $f + g, \alpha f \in \mathsf{C}(S, X)$. ■

Hơn nữa, khi không gian mêtríc S là compắc, mọi ánh xạ liên tục trên S đều bị chặn (do ảnh của nó là tập compắc), ta suy ra $\mathsf{C}(S, X)$ cũng là không gian con của $\mathsf{B}(S, X)$, không gian các ánh xạ bị chặn từ S vào X. Ta được

3.5*. Định lý. *Khi* S *là một không gian mêtríc compắc và* X *là một không gian Banach, ta được* $\mathsf{C}(S, X)$ *là một không gian Banach với chuẩn sup,*

$$\|f\| = \sup_{s \in S} \|f(x)\|_X,$$

chuẩn thu hẹp trên $\mathsf{C}(S, X)$ *của* $\mathsf{B}(S, X)$.

Chứng minh. Do $\mathsf{B}(S, X)$ là một không gian Banach, với chuẩn sup, nên ta chỉ cần chứng tỏ rằng $\mathsf{C}(S, X)$ là tập đóng trong $\mathsf{B}(S, X)$. Thật vậy, xét dãy $(f_n) \subset \mathsf{C}(S, X)$ sao cho $f_n \to f \in \mathsf{B}(S, X)$. Ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|f_{n_0}(s) - f(s)\|_X \leq \|f_{n_0} - f\| < \varepsilon$, với mọi $s \in S$. Mặt khác, do f_{n_0} là ánh xạ liên tục đều trên S, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(t)\|_X < \varepsilon$, với mọi $s, t \in S$ thỏa $d(s, t) < \delta$. Kết hợp lại, ta được

$$\begin{aligned}\left\|f(s)-f(t)\right\|_X &\le \left\|f(s)-f_{n_0}(s)\right\|_X+\left\|f_{n_0}(s)-f_{n_0}(t)\right\|_X+\left\|f_{n_0}(t)-f(t)\right\|_X\\ &\le 2\left\|f-f_{n_0}\right\|+\left\|f_{n_0}(s)-f_{n_0}(t)\right\|_X<3\varepsilon,\end{aligned}$$

với mọi $s,t\in S$ thỏa $d(s,t)<\delta$. Suy ra f liên tục (đều) trên S, nghĩa là $f\in \mathsf{C}(S,X)$. Vậy $\mathsf{C}(S,X)$ là tập đóng trong không gian đầy đủ $\mathsf{B}(S,X)$ nên cũng là không gian đầy đủ. ■

Cuối cùng, khi S lại là một không gian định chuẩn, ta có thể xét một tập con khác của $\mathsf{F}(S,X)$, tập các ánh xạ tuyến tính từ S vào X, ký hiệu $L(S,X)$. Nhắc lại rằng, với X, Y là hai không gian vectơ, ánh xạ $L:X\to Y$ được gọi là tuyến tính khi với mọi $x,y\in X$ và $\alpha\in\mathbb{R}$, ta có

$$L(x+y)=L(x)+L(y) \text{ và } L(\alpha x)=\alpha L(x).$$

Khi đó, ta thường viết Lx thay vì $L(x)$, nếu không gây nhầm lẫn.

Với các ánh xạ tuyến tính $L_1,L_2:X\to Y$ và $a,b\in\mathbb{R}$, ta có, với mọi $x,y\in X$ và $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, vì

$$\begin{aligned}(aL_1+bL_2)(\alpha x+\beta y)&=(aL_1)(\alpha x+\beta y)+(bL_2)(\alpha x+\beta y)\\ &=\alpha(aL_1)(x)+\beta(aL_1)(y)+\alpha(bL_2)(x)+\beta(bL_2)(y)\\ &=\alpha aL_1(x)+\beta aL_1(y)+\alpha bL_2(x)+\beta bL_2(y)\\ &=\alpha(aL_1+bL_2)(x)+\beta(aL_1+bL_2)(y),\end{aligned}$$

nên aL_1+bL_2 cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nói khác đi, $L(X,Y)$ là một không gian con của $\mathsf{F}(X,Y)$. Tuy nhiên, khi L là một ánh xạ tuyến tính từ X vào Y, $\operatorname{Im}L\equiv L(X)$ là một không gian vectơ con của Y nên nó là tập không bị chặn, trừ trường hợp $L\equiv 0$. Điều này cho thấy $L(X,Y)\not\subset \mathsf{B}(X,Y)$. Để có thể xác định một chuẩn cho các ánh xạ tuyến tính, ta giới hạn khảo sát tập các ánh xạ tuyến tính liên tục giữa hai không gian định chuẩn X, Y, ký hiệu $\mathsf{L}(X,Y)$. Trước hết, ta cần đặc trưng sau cho phần tử của $\mathsf{L}(X,Y)$.

3.6. Mệnh đề. *Cho X,Y là các không gian định chuẩn và $L:X\to Y$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta có các phát biểu sau là tương đương*

(i) L liên tục trên X, nghĩa là $L\in\mathsf{L}(X,Y)$.

(ii) L liên tục tại 0 (phần tử trung hòa của X).

(iii) Tồn tại $M>0$ sao cho $\|Lx\|_Y\le M\|x\|_X$, với mọi $x\in X$.

Chứng minh. Hiển nhiên (ii) suy ra từ (i). Khi (iii), do tính tuyến tính của L, ta có, với mọi $x, y \in X$, $\|Lx - Ly\|_Y = \|L(x-y)\|_Y \le M\|x-y\|_X$, nên L liên tục (đều) trên X và do đó (i). Do vậy, ta chỉ cần chứng tỏ (ii) kéo theo (iii). Vì $L0 = 0$ nên ta chỉ cần chứng minh (iii) cho các $x \neq 0$. Do L liên tục tại 0 và $L0 = 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|Lx\|_Y \le 1$ khi $\|x\|_X \le \delta$. Bấy giờ, do $\left\|\frac{\delta}{\|x\|_X} x\right\|_X = \delta$, với mọi $x \in X \setminus \{0\}$, ta có

$$\left\|L\left(\frac{\delta}{\|x\|_X} x\right)\right\|_X = \frac{\delta}{\|x\|_X}\|Lx\|_X \le 1.$$

Suy ra (iii) thỏa, với $M = \frac{1}{\delta}$. ∎

Nhận xét 4. a) Phát biểu (iii) trong mệnh đề trên có thể thay bằng

tồn tại $M > 0$ *sao cho* $\|Lx\|_Y \le M$*, với mọi* $x \in X$ *thỏa* $\|x\|_X \le 1.$ (1)

Hiển nhiên (iii) cho (1). Ngược lại, khi (1) thỏa, với mọi $x \in X \setminus \{0\}$, ta có $\|x\|_X > 0$ và $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|_X = 1$ nên do (1), $\left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \le M$. Tuy nhiên, tính tuyến tính của L cho $L\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \frac{1}{\|x\|_X} Lx$ và do đó, ta có $\frac{1}{\|x\|_X}\|Lx\|_Y \le M$ hay $\|Lx\|_Y \le M\|x\|_X$.

b) Ánh xạ tuyến tính liên tục $L : X \to Y$ cũng không là ánh xạ bị chặn trên X, trừ trường hợp $L \equiv 0$. Tuy nhiên, (1) cho thấy ánh xạ thu hẹp của L trên quả cầu đơn vị đóng cũng như trên mọi tập con bị chặn của X đều là ánh xạ bị chặn. Do đó, người ta còn gọi L là ánh xạ tuyến tính bị chặn.

c) Khi $X = \mathbb{R}^M$, dùng cơ sở chính tắc $S = \{e_1, \cdots, e_M\}$ cho $\mathbb{R}^M$, với mọi $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_M) \in \mathbb{R}^M$, ta có $\mathbf{x} = x_1 e_1 + \cdots + x_M e_M$. Bấy giờ, với mọi ánh xạ tuyến tính $L : \mathbb{R}^M \to Y$, ta có

$$\begin{aligned}\|L\mathbf{x}\|_Y &= \|L(x_1e_1 + \cdots + x_Me_M)\|_Y = \|x_1Le_1 + \cdots + x_MLe_M\|_Y \\ &\le |x_1|\|Le_1\|_Y + \cdots + |x_M|\|Le_M\|_Y \le \left(\|Le_1\|_Y + \cdots + \|Le_M\|_Y\right)\|\mathbf{x}\|_X,\end{aligned}$$

do $|x_i| \le \|\mathbf{x}\|_X$, với mọi $i = 1, \cdots, M$. Điều này cho thấy mọi ánh xạ tuyến tính xác định trên một không gian Euclide vào một không gian định chuẩn đều là ánh xạ liên tục, nghĩa là $L(\mathbb{R}^M, Y) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^M, Y)$, với mọi không gian định chuẩn Y và $M \in \mathbb{N}$. ∎

Từ mệnh đề 3.6 và nhận xét b) nêu trên, ta có

3.7. Định nghĩa. Với ánh xạ tuyến tính liên tục L giữa hai không gian định chuẩn X, Y, $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, đặt

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Lx\|_Y . \tag{1}$$

Ta có

3.8. Mệnh đề. *Hàm* $L \mapsto \|L\|$ *cho bởi (1) là một chuẩn trên* $\mathsf{L}(X,Y)$. *Ngoài ra, ta còn có*

(i) $\|L\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y = \sup_{x \ne 0} \dfrac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} = \inf \left\{ M > 0 : \|Lx\|_Y \le M \|x\|_X , \forall x \in X \right\}$,

(ii) $\|Lx\|_Y \le \|L\| \|x\|_X$, $\forall x \in X$.

Chứng minh. Hiển nhiên $\|L\| \ge 0$. Khi $\|L\| = 0$, ta được $Lx = 0$, với mọi $\|x\|_X \le 1$. Bấy giờ, với $x \ne 0$ bất kỳ, do $\left\| \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = 1$, ta suy ra $0 = L\left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) = \frac{1}{\|x\|_X} Lx$ và do đó $L \equiv 0$. Với $L \in \mathsf{L}(X,Y)$, $\alpha \in \square$, ta có

$$\|\alpha L\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|(\alpha L)x\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} |\alpha| \|Lx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Lx\| = |\alpha| \|L\|,$$

và với $L_1, L_2 \in \mathsf{L}(X,Y)$,

$$\begin{aligned} \|L_1 + L_2\| &= \sup_{\|x\|_X \le 1} \|(L_1 + L_2)x\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|L_1 x + L_2 x\| \\ &\le \sup_{\|x\|_X \le 1} \|L_1 x\| + \sup_{\|x\|_X \le 1} \|L_2 x\| = \|L_1\| + \|L_2\|. \end{aligned}$$

Vậy, $L \mapsto \|L\|$ là một chuẩn trên $\mathsf{L}(X,Y)$.

Rõ ràng $\sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y \le \|L\|$. Ngược lại, với $\|x\|_X \le 1$ bất kỳ, vì $\left\| \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = 1$ nên $\sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y \ge \left\| L \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X} \|Lx\|_Y \ge \|Lx\|_Y$. Suy ra $\sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y \ge \|L\|$ và đẳng thứ thứ nhất trong (i) được chứng minh.

Tương tự, với $x \ne 0$ bất kỳ, ta có $\frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} = \left\| L \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \le \|L\|$, nên ta được $\sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \le \|L\|$. Ngược lại, với bất kỳ $0 < \|x\|_X \le 1$, $\|Lx\|_Y \le \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \le \sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X}$ cho ta $\|L\| \le \sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X}$ và đẳng thức thứ nhì trong (i) được chứng minh. Cuối cùng, đặt $A = \left\{ M > 0 : \|Lx\|_Y \le M \|x\|_X , \forall x \in X \right\}$. Do bất đẳng thức $\frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \le M$ thỏa, với mọi $M \in A$ và với mọi $x \ne 0$, ta suy ra $\|L\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \le M$ thỏa với mọi

$M \in A$. Điều này cho thấy $\|L\|$ là một chặn dưới của A. Suy ra $\|L\| \le \inf A$. Ngược lại, do $\|Lx\|_Y \le \|L\|$ khi $\|x\|_X \le 1$ nên với $x \ne 0$ bất kỳ, vì $\left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X \le 1$ nên ta được $\left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \le \|L\|$. Tóm lại $\|Lx\|_Y \le \|L\|\|x\|_X$, với mọi $x \in X$, và (ii) được chứng minh. Ngoài ra điều này còn cho thấy là $\|L\| \in A$. Do đó $\|L\| = \inf A = \min A$, và đẳng thức thứ ba trong (i) được chứng minh. ■

Hơn nữa, khi Y đầy đủ, ta được

3.9*. Định lý. *Khi* Y *là một không gian Banach, ta có* $\mathcal{L}(X, Y)$ *cũng là một không gian Banach.*

Chứng minh. Xét dãy Cauchy (L_n) trong $\mathcal{L}(X, Y)$. Bất đẳng thức

$$\|L_m x - L_n x\|_Y = \|(L_m - L_n)x\|_Y \le \|L_m - L_n\|\|x\|_X$$

thỏa với mọi $x \in X$ và $m, n \in \mathbb{N}$, cho thấy $(L_n x)$ là dãy Cauchy trong Y, với mỗi $x \in X$. Đặt $Lx = \lim\limits_{n\to\infty} L_n x$. Ta được $L \in \mathcal{F}(X, Y)$. Hơn nữa, với bất kỳ $x, y \in X$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tính liên tục của các phép toán trên Y cho ta

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} L_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty}(\alpha L_n x + \beta L_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} L_n x + \beta \lim_{n\to\infty} L_n y = \alpha L x + \beta L y, \end{aligned}$$

nghĩa là $L \in L(X, Y)$. Ngoài ra, do (L_n) là dãy bị chặn trong $\mathcal{L}(X, Y)$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\|L_n\| \le M$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó,

$$\|L_n x\|_Y \le \|L_n\|\|x\|_X \le M\|x\|_X, \text{ với mọi } x \in X \text{ và } n \in \mathbb{N}.$$

Với mỗi x cố định, cho $n \to \infty$ và do tính liên tục của hàm chuẩn trên Y, ta có

$$\|Lx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|L_n x\|_Y \le M\|x\|_X, \text{ với mọi } x \in X.$$

Suy ra L liên tục trên X, nghĩa là $L \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Cuối cùng, do tính Cauchy của (L_n), ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|L_n - L_m\| < \varepsilon$, với mọi $m, n \ge n_0$. Do đó, với mọi $\|x\|_X \le 1$, ta được

$$\|L_n x - L_m x\|_Y < \varepsilon, \text{ với mọi } m, n \ge n_0.$$

Cố định x và cho $m \to \infty$. Tính liên tục của hàm chuẩn cho ta

$$\|L_n x - Lx\|_Y = \lim_{m\to\infty}\|L_n x - L_m x\|_Y \le \varepsilon \text{, với mọi } \|x\|_X \le 1 \text{ và } n \ge n_0 .$$

Ta suy ra $\|L_n - L\| = \sup_{\|x\|_X \le 1}\|L_n x - Lx\|_Y \le \varepsilon$, với mọi $n \ge n_0$. Tóm lại, ta có $L_n \to L$ trong $\mathsf{L}(X,Y)$. Vậy $\mathsf{L}(X,Y)$ là không gian đầy đủ. ■

Nhận xét 5. Đối với không gian $\mathsf{L}(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$, bằng cách dùng các cơ sở chính tắc $S=\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_M\}$ và $T=\{\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_N\}$ lần lượt cho $\mathbb{R}^M$ và $\mathbb{R}^N$, mỗi một ánh xạ tuyến tính (liên tục) $L:\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ được đặc trưng (duy nhất) bởi một ma trận $A_L = (a_{ij})$ cấp $N\times M$ xác định bởi

$$L\mathbf{e}_i = a_{1i}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{Ni}\mathbf{f}_N \text{, với mỗi } i = 1,\cdots,M .$$

Hơn nữa, bằng cách đồng nhất các vectơ $\mathbf{z}=(z_1,\cdots,z_K)\in\mathbb{R}^K$, $K = M, N$ với ma trận cột (ma trận tọa độ của $\mathbf{z}$ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^K$),

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{pmatrix} \equiv \mathbf{z}^T ,$$

Ứng với mỗi $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_M)\in\mathbb{R}^M$, do $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_M\mathbf{e}_M$, ta được

$$\begin{aligned} L\mathbf{x} &= L(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_M\mathbf{e}_M) = x_1 L\mathbf{e}_1 + \cdots + x_M L\mathbf{e}_M \\ &= x_1(a_{11}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{N1}\mathbf{f}_N) + \cdots + x_M(a_{1M}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{NM}\mathbf{f}_N) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1M}x_M)\mathbf{f}_1 + \cdots + (a_{N1}x_1 + \cdots + a_{NM}x_M)\mathbf{f}_N , \end{aligned}$$

nghĩa là

$$(L\mathbf{x})^T = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1M}x_M \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \cdots + a_{NM}x_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} = A_L \cdot \mathbf{x}^T ,$$

hay vắn tắt hơn, ta viết $L\mathbf{x} = A_L\mathbf{x}$.

Hơn nữa, ánh xạ $L \to A_L$ này là một song ánh tuyến tính từ $\mathsf{L}(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$ lên không gian $\mathsf{M}_{N\times M}$ các ma trận cấp $N\times M$. Do đó, ta đồng nhất không gian $\mathsf{L}(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$ với không gian $\mathsf{M}_{N\times M}$. Bấy giờ chuẩn của ma trận $A\in\mathsf{M}_{N\times M}$ được định nghĩa bởi của ánh xạ tuyến tính $L\in\mathsf{L}(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$ sao cho $A_L = A$, nghĩa là $\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^M}\|A\cdot\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^N}$. ■

BÀI TẬP

1) Xét ánh xạ $f: X \to Y$, $A \subset X$, và $B \subset Y$. Chứng tỏ rằng

$$A \subset f^{-1}\left[f(A)\right] \text{ và } f\left[f^{-1}(B)\right] \subset B.$$

2) Cho hai không gian mêtríc (X, d_X), (Y, d_Y), ánh xạ $f: X \to Y$, $a \in X$, và $b \in Y$.

a) Chứng minh rằng a là một điểm tụ của X nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ sao cho $x_n \to a$.

b) Với điểm tụ $a \in X$, chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ nếu và chỉ nếu, với mọi dãy $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ cho ta $f(x_n) \to b$.

c) Chứng tỏ rằng giới hạn của f tại điểm tụ $a \in X$ là duy nhất, nghĩa là với $b, b' \in Y$ sao cho ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ để $d(f(x), b), d(f(x), b') < \varepsilon$, với mọi $x \in X$, $0 < d(x, a) < \delta$, ta phải có $b = b'$.

3) Xét ánh xạ $f: X \to Y$ giữa hai không gian mêtríc. Chứng tỏ rằng f luôn liên tục tại các điểm cô lập $x \in X$. Suy ra rằng nếu X là một không gian mêtríc rời rạc, mọi ánh xạ xác định trên X đều là ánh xạ liên tục.

4) Cho hàm số $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói f là *hàm tuần hoàn* khi tồn tại $T > 0$ sao cho với mọi $x \in D$, ta có

$$x + T \in D \text{ và } f(x+T) = f(x). \tag{1}$$

Giá trị $T > 0$ nhỏ nhất thỏa (1) với mọi $x \in D$, nếu có, được gọi là *chu kỳ* của hàm tuần hoàn f. Chứng tỏ rằng mọi hàm tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$ đều không có giới hạn tại $\pm\infty$.

5) a) Cho (X, d) là một không gian mêtríc. Chứng minh rằng ánh xạ $d: X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $X \times X$.

b) Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. Chứng minh rằng phép toán cộng $(x, y) \mapsto x + y$ là ánh xạ liên tục trên $X \times X$, phép toán nhân $(t, x) \mapsto tx$ là ánh xạ liên tục trên $\mathbb{R} \times X$ và hàm chuẩn $x \mapsto \|x\|$ là hàm số liên tục trên X. Suy ra rằng với mọi $a, b \in X$, $t \mapsto tb + (1-t)a$ là ánh xạ liên tục trên $\mathbb{R}$.

6) a) Cho A là một tập con liên thông trong một không gian mêtríc X và $A \subset B \subset \overline{A}$. Chứng minh rằng B cũng là tập liên thông.

b) Đặt $A = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) : 0 < x \le 1 \right\}$. Chứng minh rằng A là tập con liên thông trong $\mathbb{R}^2$, $\overline{A}$ là tập liên thông nhưng không là tập không liên thông đường trong $\mathbb{R}^2$.

7) a) Cho (X, d) là một không gian mêtríc và $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(x, y) = d(x, y)$. Chứng minh rằng

$$\left| \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \right| \le d(x, x_0) + d(y, y_0),\ \forall x, y, x_0, y_0 \in X.$$

Suy ra rằng φ là hàm liên tục trên $X \times X$.

b) Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn và $\varphi : E \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(x) = \|x\|$. Chứng minh rằng

$$\left| \varphi(x) - \varphi(y) \right| \le \|x - y\|,\ \forall x, y \in E.$$

Suy ra rằng φ là hàm liên tục trên E.

8) Cho X là một không gian mêtríc và A là một tập con không rỗng của X. Chứng minh rằng hàm đặc trưng χ_A của A xác định bởi

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad x \in A \\ 0 & \text{khi} \quad x \notin A \end{cases}$$

liên tục trên X nếu và chỉ nếu A vừa đóng vừa mở trong E.

9) Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y, A là một tập con của X và $a \in A$. Xét ánh xạ thu hẹp của f trên A, $f\big|_A : A \to Y$, xác định bởi $f\big|_A(x) = f(x),\ \forall x \in A$.

a) Chứng minh rằng nếu f liên tục tại $a \in A$ thì $f\big|_A$ cũng liên tục tại a.

b) Giả sử thêm rằng A là một tập con mở của X. Chứng minh rằng nếu $f\big|_A$ liên tục tại $a \in A$ thì f cũng liên tục tại a.

c) Cho ví dụ chứng tỏ rằng điều kiện A mở không thể bỏ được.

10) Cho A, B là hai tập con của một không gian mêtríc X, với $A \cup B = X$, và $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y.

i) Giả sử A, B là hai tập con mở của X. Chứng minh rằng nếu $f\big|_A$ và $f\big|_B$ là các ánh xạ liên tục thì f cũng là ánh xạ liên tục.

ii) Giả sử A, B là hai tập con đóng của X. Chứng minh rằng nếu $f\big|_A$ và $f\big|_B$ là các ánh xạ liên tục thì f cũng là ánh xạ liên tục.

11) 25. Cho E là một không gian mêtríc và $f: E \to E$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng tập các điểm bất động của f,

$$A = \{x \in E \mid f(x) = x\},$$

là một tập con đóng trong E.

12) Cho (X, d) là một không gian mêtríc và A là một tập con không rỗng của X. Xét ánh xạ $\varphi: X \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a),$$

với mọi $x \in X$. Chứng minh rằng

a) $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

b) $\varphi(x) = 0$ nếu và chỉ nếu $x \in \overline{A}$.

13) Cho (X, d) là một không gian mêtríc.

a) Giả sử A là một tập đóng trong X và $x \notin A$. Chứng minh rằng tồn tại các tập mở V và W sao cho $x \in V$, $A \subset W$ và $V \cap W = \varnothing$.

b) Giả sử A và B là các tập đóng trong E sao cho $A \cap B = \varnothing$. Chứng minh rằng tồn tại các tập mở V và W sao cho $A \subset V$, $B \subset W$ và $V \cap W = \varnothing$.

14) Cho f và g là hai ánh xạ liên tục từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y. Giả sử A là một tập con không rỗng của X sao cho $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \overline{A}$.

15) Cho X và Y là hai không gian mêtríc. Xét ánh xạ $f: X \to Y$. Chứng minh rằng f liên tục trên X nếu và chỉ nếu với mọi $A \subset X$, ta có $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

16) Cho X và Y là hai không gian mêtríc và f là một ánh xạ từ X vào Y sao cho $f|_K$ liên tục, với mọi tập compắc $K \subset X$. Chứng minh rằng f liên tục trên X.

17) Cho X là một không gian mêtríc compắc và Y là một không gian mêtríc. Xét A là một tập con đóng trong $X \times Y$. Chứng minh rằng $\pi_2(A)$ là một tập đóng trong Y, trong đó π_2 là phép chiếu từ $X \times Y$ lên Y.

18) Cho X, Y là hai không gian mêtríc và f là một ánh xạ từ X vào Y. Tập

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

được gọi là *đồ thị* của f.

a) Chứng minh rằng nếu f liên tục trên X thì đồ thị Γ của nó là tập đóng trong $X \times Y$.

b) Giả sử rằng Y là không gian compắc. Chứng minh rằng nếu đồ thị Γ của f là tập đóng trong $X \times Y$ thì f liên tục trên X.

19) Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng f có điểm bất động trong $[0,1]$, nghĩa là tồn tại $x \in [0,1]$ sao cho $f(x) = x$.

20) Cho X, Y là hai không gian mêtríc và f là một song ánh liên tục từ X vào Y. Chứng minh rằng nếu X compắc thì $f^{-1} : Y \to X$ liên tục.

21) Với $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ta gọi dao động của f tại x là

$$\omega(f, x) = \inf \left\{ \operatorname{diam} f(I) \middle| I \in \mathcal{I}(x) \right\},$$

với $\mathcal{I}(x)$ là tập tấc cả các khoảng mở chứa x. Chứng minh rằng

a) f liên tục tại x nếu và chỉ nếu $\omega(f, x) = 0$.

b) Với mọi $a > 0$, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega(f, x) \geq a \right\}$ là một tập đóng.

22) Cho A là một tập con dầy đặc trong không gian mêtríc X, nghĩa là $\overline{A} = X$, và f là một ánh xạ liên tục đều từ A vào một không gian mêtríc đầy đủ Y. Chứng minh rằng f có thể nới rộng một cách duy nhất thành một ánh xạ liên tục đều f^* từ X vào Y và nếu f là đẳng cự, nghĩa là $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y$, thì f^* cũng là đẳng cự.

PHỤ LỤC*: TÍNH CHUẨN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC

Phương Pháp: Để tìm $\|T\|$ với $T: X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính, ta có thể tìm một số $M > 0$ và chứng minh $\|T\| \le M$ và $\|T\| \ge M$. Khi đó $\|T\| = M$.

Chúng ta sử dụng các tính chất sau

a. Nếu $\|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in X$ thì $\|T\| \le M$.

b. Nếu có $x_0 \in X$ sao cho $\|Tx_0\| \ge N\|x_0\|$ thì $\|T\| \ge N$.

c. Nếu có dãy $(x_n), x_n \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n\| / \|x_n\| \ge N$ thì $\|T\| \ge N$.

Ví dụ 1. Chứng minh các toán tử tuyến tính sau liên tục và tính chuẩn của nó

a) $A: C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = \int\limits_0^1 x(s)ds.$

b) $A: C[-1,1] \to C[0,1]; Ax(t) = \int\limits_0^1 x(s)ds.$

c) $A: C[-1,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x(t).$

d) $A: C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = t^2 x(0).$

e) $A: C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x\left(t^2\right).$

f) $A: C^1[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x\left(t\right).$

g) $A: C^1[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x'\left(t\right).$

Giải:

a) $A: C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = \int\limits_0^1 x(s)ds.$

Chứng minh $A(x)$ là ánh xạ liên tục:Với $x \in C\left[0,1\right]$, ta có

$$\left|Ax(v) - Ax(u)\right| = \left|\int\limits_u^v x(s)ds\right| \le \left|\int\limits_u^v \|x\|ds\right| = \|x\|\left|u - v\right|,$$

nên $A(x)$ là hàm liên tuc đều. Vậy $A(x) \in C\left[0,1\right]$.

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1, x_2 \in C\left[0,1\right], \alpha \in \mathbb{R}, t \in \left[0,1\right]$, ta có

$$A\left(\alpha x_1(t)+\alpha x_2(t)\right)=\int_0^t\left[\alpha x_1(s)+x_2(s)\right]ds=\int_0^t \alpha x_1(s)ds+\int_0^t x_2(s)ds$$

$$=\alpha\int_0^t x_1(s)ds+\int_0^t x_2(s)ds=\alpha Ax_1(t)+Ax_2(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\|=\sup_{t\in[0,1]}|Ax(t)|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(s)ds\right|\le\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t|x(s)|ds=\int_0^1|x(s)|ds\le\int_0^1\|x\|ds=\|x\|.$$

Suy ra $\|Ax\|\le\|x\|,\forall x\in C[0,1].$ Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$:

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ta có $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}\le 1,\forall x\neq 0$ nên $\|A\|\le 1.$ Đồng thời

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ge\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|},\forall x_0\in C[0,1],x_0\neq 0.$$

Chọn $x_0(t)=1,\forall t\in[0,1],$ ta có

$$\|Ax_0\|=\sup_{t\in[0,1]}|Ax_0(t)|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(s)ds\right|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t ds\right|=\sup_{t\in[0,1]}t=1.$$

$$\|x_0\|=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|=1.$$

Suy ra $\|A\|\ge\dfrac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}=1.$ Vậy ta có $\|A\|=1.$

b) $A:C[-1,1]\to C[0,1];Ax(t)=\int_0^1 x(s)ds.$

Tương tự a), ta có $A(x)$ là ánh xạ liên tục.

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1,x_2\in C\left[-1,1\right],\alpha\in\mathbb{R},t\in\left[-1,1\right],$ ta có

$$A\left(\alpha x_1(t)+\alpha x_2(t)\right)=\int_0^t\left[\alpha x_1(s)+x_2(s)\right]ds=\int_0^t \alpha x_1(s)ds+\int_0^t x_2(s)ds$$

$$=\alpha\int_0^t x_1(s)ds+\int_0^t x_2(s)ds=\alpha Ax_1(t)+Ax_2(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\|=\sup_{t\in[0,1]}|Ax(t)|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(s)ds\right|\le\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t|x(s)|\,ds=\int_0^1|x(s)|\,ds\le\int_0^1\|x\|ds=\|x\|.$$

Suy ra $\|Ax\|\le\|x\|, \forall x\in C[0,1].$ Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$: Ta có

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\le 1.$$

Đồng thời

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ge\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}, \forall x_0\in C[-1,1], x_0\neq 0.$$

Chọn $x_0(t)=1, \forall t\in[-1,1],$ ta có

$$\|Ax_0\|=\sup_{t\in[0,1]}|Ax_0(t)|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(s)ds\right|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t ds\right|=\sup_{t\in[0,1]} t=1.$$

$$\|x_0\|=\sup_{t\in[-1,1]}|x_0(t)|=1.$$

Suy ra $\|A\|\ge\dfrac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}=1.$ Vậy ta có $\|A\|=1.$

c) $A: C[-1,1]\to C[0,1]; Ax(t)=x(t).$

Chứng minh $A(x)$ là ánh xạ liên tục: Với $x\in C\left[-1,1\right],$ ta có $Ax=x|_{[0,1]}$ nên $Ax\in C\left[0,1\right].$.

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1,x_2\in C\left[-1,1\right], \alpha\in\mathbb{R}, t\in\left[0,1\right],$ ta có

$$A\left(\alpha x_1(t)+\alpha x_2(t)\right)=\alpha x_1(t)+x_2(t)=\alpha Ax_1(t)+Ax_2(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ax(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \le \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)| = \|x\|.$$

Suy ra $\|Ax\| \le \|x\|, \forall x \in C[-1,1].$ Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$: Ta có

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le 1, \forall x \in C[-1,1].$$

Suy ra $\|A\| \le 1.$ Đồng thời

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}, \forall x_0 \in C[-1,1], x_0 \neq 0.$$

Chọn $x_0(t) = 1, \forall t \in [-1,1],$ ta có

$$\|Ax_0\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ax_0(t)| = 1$$

$$\|x_0\| = \sup_{t\in[0,1]} |x_0(t)| = 1.$$

Suy ra $\|A\| \ge \dfrac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = 1.$ Vậy ta có $\|A\| = 1.$

d) $A : C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = t^2 x(0).$

Chứng minh $A(x)$ là ánh xạ liên tục: Ta có $Ax(t) = t^2 x(0)$ liên tục trên $[0,1]$ nên $Ax \in C[0,1].$

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1, x_2 \in C[0,1], \alpha \in \mathbb{R}, t \in [0,1],$ ta có

$$A\left(\alpha x_1(t) + \alpha x_2(t)\right) = t^2\left(\alpha x_1(0) + x_2(0)\right) = \alpha Ax_1(t) + Ax_2(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ax(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|t^2 x(0)\right| \le |x(0)| \sup_{t\in[-1,1]} \left|t^2\right| = |x(0)| \le \|x\|.$$

Suy ra $\|Ax\| \le \|x\|, \forall x \in C[0,1].$ Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$: Ta có

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1.$$

Đồng thời

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}, \forall x_0 \in C[0,1], x_0 \neq 0.$$

Chọn $x_0(t) = \cos t, \forall t \in [0,1]$, ta có

$$\|Ax_0\| = \sup_{t \in [0,1]} |Ax_0(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |t^2 \cos 0| = \sup_{t \in [0,1]} |t^2| = 1.$$

$$\|x_0\| = \sup_{t \in [0,1]} |x_0(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |\cos t| = \cos 0 = 1.$$

Suy ra $\|A\| \geq \dfrac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = 1.$ Vậy ta có $\|A\| = 1.$

e) $A : C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x\left(t^2\right).$

Chứng minh $A(x)$ là ánh xạ liên tục: Đặt $u = t^2, u \in C[0,1]$, ta có $x(t^2) = x \circ u(t)$ là hàm hợp của hai hàm liên tục nên $x(t^2)$ là hàm liên tục trên $[0,1]$, hay $A(x) \in C[0,1]$.

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1, x_2 \in C\left[0,1\right], \alpha \in \mathbb{R}, t \in \left[0,1\right]$, ta có

$$A\left(\alpha x_1\left(t\right) + \alpha x_2\left(t\right)\right) = \alpha x_1\left(t^2\right) + x_2\left(t^2\right) = \alpha Ax_1\left(t\right) + Ax_2\left(t\right).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\| = \sup_{t \in [0,1]} |Ax(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t^2)| \leq \sup_{a \in [0,1]} |x(a)| = \|x\|.$$

Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$: Ta có

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1.$$

f) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x\left(t\right).$

Chứng minh $A(x)$ là ánh xạ liên tục: Vì $Ax = x$ nên ta có $A(x) \in C^1[0,1] \subset C\left[0,1\right].$

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1, x_2 \in C^1[0,1], \alpha \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$, ta có

$$A(\alpha x_1(t) + \alpha x_2(t)) = \alpha x_1(t) + x_2(t) = \alpha Ax_1(t) + Ax_2(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ax(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

$$\|x\|_{C^1} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)| \geq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|Ax\|.$$

Suy ra $\|Ax\| \leq \|x\|, \forall x \in C^1[0,1].$ Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$: Ta có

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1.$$

Đồng thời

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}, \forall x_0 \in C^1[0,1], x_0 \neq 0.$$

Chọn $x_0(t) = 1, \forall t \in [0,1]$, ta có

$$\|x_0\| = 1, \|Ax_0\| = 1.$$

Suy ra $\|A\| \geq \dfrac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = 1.$ Vậy ta có $\|A\| = 1.$

g) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x'(t).$

Chứng minh $A(x)$ là ánh xạ liên tục: Vì $x \in C^1[0,1]$ nên $Ax = x' \in C[0,1].$

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính: Với $x_1, x_2 \in C^1[0,1], \alpha \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$, ta có

$$A(\alpha x_1(t) + \alpha x_2(t)) = (\alpha x_1(t) + x_2(t))' = \alpha x_1'(t) + x_2'(t) = \alpha Ax_1(t) + Ax_2(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh A liên tục: Ta có

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ax(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)|.$$

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)| \geq \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)| = \|Ax\|.$$

Suy ra $\|Ax\| \le \|x\|, \forall x \in C^1[0,1]$. Vậy A là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Tính chuẩn $\|A\|$: Ta có

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le 1.$$

Đồng thời

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}, \forall x_0 \in C^1[0,1], x_0 \neq 0.$$

Ta xét dãy $x_n(t) = t^n, \forall t \in \left[0,1\right]$ với $n \ge 1$. Suy ra

$$\|x_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x_n{}'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|t^n\right| + \sup_{t\in[0,1]} \left|nt^{n-1}\right| = 1 + n.$$

$$\|Ax_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ax_n(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |x_n{}'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|nt^{n-1}\right| = n.$$

Suy ra

$$\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \frac{n}{1+n} = 1 - \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$ ta có $\|A\| \ge 1$. Vậy $\|A\| = 1$.

Ví dụ 2 Cho các ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3,)$. Trên $\mathbb{R}^n$ trang bị $\|.\|_p$. Chứng minh T là ánh xạ tuyến tinh, tìm $\|T\|$.

a) $T\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + x_2; p = 2.$

b) $T\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + x_2; p = 1.$

c) $T\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + x_2; p = \infty.$

d) $T\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 - 2x_2 + x_3; p = 2.$

e) $T\left(x_1, x_2, x_3\right) = 5x_1 + x_2 + 4x_3; p = 1.$

f) $T\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3; p = \infty.$

g) $T\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4; p = 2.$

Giải : Ta có ngay các kết quả sau:

a) $\|T\| = \left(2^2 + 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$

b) $\|T\| = \max\{|2|, |1|\} = 2.$

c) $\|T\| = |2| + |1| = 3.$

d) $\|T\| = \left(1^2 + (-2)^2 + 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}.$

e) $\|T\| = \max\{|5|, |1|, |4|\} = 5.$

f) $\|T\| = |2| + |3| + |4| = 9.$

g) $\|T\| = \left(1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 5^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{31}.$

Ví dụ 3. Chứng minh các phiếm hàm thuộc $\left(C[-1,1]\right)^* = L\left(C[-1,1], \mathbb{R}\right)$, tìm chuẩn của nó

a) $f(x) = \frac{1}{3}\left[x(1) + x(-1)\right].$

b) $f(x) = 2\left[x(1) - x(0)\right].$

c) $f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)\right], \varepsilon \in [-1,1] \setminus \{0\}.$

d) $f(x) = \int_0^1 x(t)dt.$

e) $f(x) = -x(0) + \int_{-1}^1 x(t)dt.$

f) $f(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt.$

Giải:

a) $f(x) = \frac{1}{3}\left[x(1) + x(-1)\right].$

Chứng minh $f(x)$ là ánh xạ tuyến tính: $\forall x, y \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x + \theta y) = \frac{1}{3}\left[(x + \theta y)(1) + (x + \theta y)(-1)\right] = \frac{1}{3}\left[x(1) + \theta y(1) + x(-1) + \theta y(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[x(1)+x(-1)\right]+\frac{1}{3}\theta\left[y(1)+y(-1)\right]=f(x)+\theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính.

Chứng minh $f(x)$ liên tục: Với mọi $x \in C[-1,1]$, ta có

$$\left|f(x)\right| \le \frac{1}{3}\left(\left|x(1)\right|+\left|x(-1)\right|\right) \le \frac{2}{3}\left(\sup_{t\in[-1,1]}\left|x(t)\right|\right) \le \frac{2}{3}\|x\|.$$

Nên $f(x)$ liên tục trên $C[-1,1]$. Vậy $\forall f(x) \in \left(C[-1,1]\right)^*$.

Tìm chuẩn $\|f\|$: Ta có $\|f(x)\| \le \frac{2}{3}\|x\|, \forall x \in C[-1,1]$ nên $\|f\| \le \frac{2}{3}$.

Chọn $x_0(t)=1, \forall t \in C[-1,1]$, suy ra $\|x_0\|=1$, $\|f(x_0)\|=\frac{2}{3}$.

Do đó $\|f\| \ge \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|}=\frac{2}{3}$. Ta suy ra $\|f\|=\frac{2}{3}$.

b) $f(x)=2\left[x(1)-x(0)\right]$.

Chứng minh $f(x)$ là ánh xạ tuyến tính: $\forall x, y \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x+\theta y)=2\left[(x+\theta y)(1)-(x+\theta y)(0)\right]=2\left[x(1)-x(0)+\theta\left(y(1)-y(0)\right)\right]$$

$$=2\left[x(1)-x(0)\right]+2\theta\left[y(1)-y(0)\right]=f(x)+\theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính.

Chứng minh $f(x)$ liên tục: Với mọi $x \in C[-1,1]$, ta có

$$\left|f(x)\right| \le 2\left(\left|x(1)\right|-\left|x(0)\right|\right) \le 2\left(\left|x(1)\right|+\left|x(0)\right|\right) \le 4\left(\sup_{t\in[-1,1]}\left|x(t)\right|\right) \le 4\|x\|.$$

Nên $f(x)$ liên tục trên $C[-1,1]$. Vậy $\forall f(x) \in \left(C[-1,1]\right)^*$.

Tìm chuẩn $\|f\|$:Ta có $\|f(x)\| \le 4\|x\|, \forall x \in C[-1,1]$ nên $\|f\| \le 4$.

Chọn $x_0(t)=2|t|-1, \forall t \in C[-1,1]$. Ta có

$$\|x_0\| = \sup_{t\in[-1,1]}\left|2|t|-1\right|=1,$$

Mà

$$\|f(x_0)\| = 2|x_0(1) - x_0(0)| = 4.$$

Do đó $\|f\| \geq \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 4$. Ta suy ra $\|f\| = 4$.

c) $f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)\right], \varepsilon \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

Chứng minh $f(x)$ là ánh xạ tuyến tính: $\forall x, y \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x+\theta y) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[(x+\theta y)(\varepsilon) + (x+\theta y)(-\varepsilon) - 2(x+\theta y)(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\left[\left(x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)\right) + \theta\left(y(\varepsilon) + y(-\varepsilon) - 2y(0)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\left[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)\right] + \frac{1}{2\varepsilon}\theta\left[y(\varepsilon) + y(-\varepsilon) - 2y(0)\right]$$

$$= f(x) + \theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính.

Chứng minh $f(x)$ liên tục: Với mọi $x \in C[-1,1]$, ta có

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}|x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left(|x(\varepsilon)| + |x(-\varepsilon)| + 2|x(0)|\right)$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon}\left(\sup_{t\in[-1,1]}|x(t)|\right) \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\|.$$

Nên $f(x)$ liên tục trên $C[-1,1]$. Vậy $f(x) \in \left(C[-1,1]\right)^*$.

Tìm chuẩn $\|f\|$:Ta có $\|f(x)\| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\|, \forall x \in C[-1,1]$ nên $\|f\| \leq \frac{2}{\varepsilon}$.

Chọn

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, [-1,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,1] \\ \frac{2}{\varepsilon}|t| - 1, (-\varepsilon,\varepsilon) \end{cases}$$

suy ra

$$\lim_{t\to-\varepsilon^-} x_0(t) = \lim_{t\to-\varepsilon^+} x_0(t) = \lim_{t\to\varepsilon^-} x_0(t) = \lim_{t\to\varepsilon^+} x_0(t) = 1,$$

Nên $x_0 \in C[-1,1]$. Mặt khác , ta có

$$\|x_0\| = \sup_{t\in[-1,1]} |x_0(t)| = 1,$$

và

$$\|f(x_0)\| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\left[x_0(\varepsilon) + x_0(-\varepsilon) - 2x_0(0)\right]\right| = \frac{2}{\varepsilon}.$$

Do đó $\|f\| \geq \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = \frac{2}{\varepsilon}$. Ta suy ra $\|f\| = \frac{2}{\varepsilon}$.

d) $f(x) = \int_0^1 x(t)dt.$

Chứng minh $f(x)$ là ánh xạ tuyến tính: $\forall x, y \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x+\theta y) = \int_0^1 (x+\theta y)(t)dt = \int_0^1 x(t)dt + \theta\int_0^1 y(t)dt = f(x) + \theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính.

Chứng minh $f(x)$ liên tục: Với mọi $x \in C[-1,1]$, ta có

$$|f(x)| \leq \left|\int_0^1 x(t)dt.\right| \leq \int_0^1 |x(t)|dt \leq \|x\|\int_0^1 dt \leq \|x\|.$$

Nên $f(x)$ liên tục trên $C[-1,1]$. Vậy $\forall f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Tìm chuẩn $\|f\|$:Ta có $\|f(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in C[-1,1]$ nên $\|f\| \leq 1$.

Chọn $x_0(t) = 1, \forall t \in C[-1,1]$, suy ra $\|x_0\| = 1$, $\|f(x_0)\| = 1$.

Do đó $\|f\| \geq \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1$. Ta suy ra $\|f\| = 1$.

e) $f(x) = -x(0) + \int_{-1}^1 x(t)dt.$

Chứng minh $f(x)$ là ánh xạ tuyến tính: $\forall x, y \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x+\theta y)=-(x+\theta y)(0)+\int_{-1}^{1}(x+\theta y)(t)dt$$

$$=-x(0)+\int_{-1}^{1}x(t)dt+\theta\left(-y(0)+\int_{-1}^{1}y(t)dt\right)=f(x)+\theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính.

Chứng minh $f(x)$ liên tục: Với mọi $x\in C[-1,1]$, ta có

$$|f(x)|\le\left|-x(0)+\int_{-1}^{1}x(t)dt\right|\le|x(0)|+\left|\int_{-1}^{1}x(t)dt\right|\le|x(0)|+\int_{-1}^{1}|x(t)|dt$$

$$\le\|x\|+\|x\|(1+1)=3\|x\|.$$

Nên $f(x)$ liên tục trên $C[-1,1]$. Vậy $\forall f(x)\in(C[-1,1])^{*}$.

Tìm chuẩn $\|f\|$:Ta có $\|f(x)\|\le3\|x\|,\forall x\in C[-1,1]$ nên $\|f\|\le3$.

Chọn

$$x_n(t)=\begin{cases}1,\left[-1,-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n},1\right]\\ 2n|t|-1,\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\end{cases}$$

suy ra

$$\lim_{t\to-\frac{1}{n}^{-}}x_n(t)=\lim_{t\to-\frac{1}{n}^{+}}x_n(t)=\lim_{t\to\frac{1}{n}^{-}}x_n(t)=\lim_{t\to\frac{1}{n}^{+}}x_n(t)=1,$$

Nên $x_n\in C[-1,1]$. Mặt khác , ta có

$$\|x_n\|=1,x_n(0)=-1,\forall n\in\mathbb{N}.$$

và

$$f(x_n)=-x_n(0)+\int_{-1}^{1}x_n(t)dt=1+\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}1dt+\int_{-\frac{1}{n}}^{0}(-2nt-1)dt+\int_{0}^{\frac{1}{n}}(2nt-1)dt+\int_{\frac{1}{n}}^{1}1dt$$

$$=1+\left(-\frac{1}{n}+1\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{2}{n}.$$

Suy ra $\left\|f\left(x_n\right)\right\|=\left|3-\frac{2}{n}\right|$. Khi $n\to\infty$ thì $\left\|f\left(x_n\right)\right\|\to 3$.

Do đó, $\|f\|\ge \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left\|f\left(x_0\right)\right\|}{\left\|x_0\right\|}=3$. Ta suy ra $\|f\|=3$.

f) $f\left(x\right)=\int\limits_{-1}^{0}x\left(t\right)dt-\int\limits_{0}^{1}x\left(t\right)dt.$

Chứng minh $f\left(x\right)$ là ánh xạ tuyến tính: $\forall x,y\in C\left[-1,1\right]$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, ta có

$$f\left(x+\theta y\right)=\int\limits_{-1}^{0}\left(x+\theta y\right)\left(t\right)dt-\int\limits_{0}^{1}\left(x+\theta y\right)\left(t\right)dt$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}x\left(t\right)dt-\int\limits_{0}^{1}x\left(t\right)dt+\theta\left(\int\limits_{-1}^{0}y\left(t\right)dt-\int\limits_{0}^{1}y\left(t\right)dt\right)$$

$$=f\left(x\right)+\theta f\left(y\right).$$

Suy ra $f\left(x\right)$ tuyến tính.

Chứng minh $f\left(x\right)$ liên tục:Với mọi $x\in C\left[-1,1\right]$, ta có

$$\left\|f\left(x\right)\right\|=\left|\int\limits_{-1}^{0}x\left(t\right)dt-\int\limits_{0}^{1}x\left(t\right)dt\right|\le\left|\int\limits_{-1}^{0}x\left(t\right)dt\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}x\left(t\right)dt\right|$$

$$\le\int\limits_{-1}^{0}\left|x\left(t\right)\right|dt+\int\limits_{0}^{1}\left|x\left(t\right)\right|dt\le\|x\|\int\limits_{-1}^{0}dt+\|x\|\int\limits_{0}^{1}dt=2\|x\|.$$

Nên $f\left(x\right)$ liên tục trên $C\left[-1,1\right]$. Vậy $\forall f\left(x\right)\in\left(C\left[-1,1\right]\right)^{*}$.

Tìm chuẩn $\|f\|$:Ta có $\left\|f\left(x\right)\right\|\le 2\|x\|,\forall x\in C\left[-1,1\right]$ nên $\|f\|\le 2$.

Chọn

$$x_n\left(t\right)=\begin{cases}1,\left[-1,-\frac{1}{n}\right]\\ -nt,\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\\ -1,\left[\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$$

suy ra

$$\lim_{t\to -\frac{1}{n}^-} x_n(t) = \lim_{t\to -\frac{1}{n}^+} x_n(t) = 1;\ \lim_{t\to \frac{1}{n}^-} x_n(t) = \lim_{t\to \frac{1}{n}^+} x_n(t) = -1,$$

nên $x_n \in C[-1,1]$. Mặt khác , ta có $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ và

$$f(x_n) = \int_{-1}^{0} x_n(t)dt - \int_{0}^{1} x_n(t)dt = \left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} x_n(t)dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{1} x_n(t)dt\right] - \left[\int_{-1}^{\frac{1}{n}} (-nt)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} (-1)dt\right]$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 1dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} -ntdt - \int_{0}^{\frac{1}{n}} (-nt)dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} (-1)dt = -\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Suy ra $\|f(x_n)\| = \left|2 - \frac{1}{n}\right|$. Khi $n \to \infty$ thì $\|f(x_n)\| \to 2$.

Do đó, $\|f\| \geq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 2$. Ta suy ra $\|f\| = 2$.

Chương 3

CHUỖI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Xét không gian vectơ $(X,+,\cdot)$ và $(a_i)_{i\in I}$ là một họ các phần tử của X với chỉ số trên I. Khi I là một tập hữu hạn và có n phần tử, nghĩa là tồn tại song ánh $k:\{1,2,\cdots,n\}\to I$, ta có thể xác định "tổng các phần tử" của $(a_i)_{i\in I}$, ký hiệu $\sum_{i\in I} a_i$, bởi

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{k_j}\ , \qquad (1)$$

trong đó, tổng vế phải được định nghĩa bằng quy nạp trên n cho dãy $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bất kỳ các phần tử của X như sau:

$$\sum_{j=1}^{1} b_j = b_1 \text{ và } \sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1}, \text{ với mọi } n\in\mathbb{N}\ .$$

Chú ý rằng (1) được hoàn toàn xác định[1] do vế phải không đổi khi ta thay song ánh k bằng một song ánh k' khác. Chính xác hơn, với bất kỳ hoán vị $\sigma:\{1,\cdots,n\}\to\{1,\cdots,n\}$, ta có $k'\equiv k\circ\sigma:\{1,2,\cdots,n\}\to I$ là một song ánh và do tính giao hoán, kết hợp của phép toán "cộng" trong X, ta được

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)}, \text{ với mọi } n\in\mathbb{N}\ ,$$

trong đó $b_j \equiv a_{k(j)}$ và $b_{\sigma(j)} \equiv a_{k(\sigma(j))} = a_{k'(j)}$, với họ hữu hạn $(a_i)_{i\in I}$ trong X.

Trong chương này, ta khảo sát khái niệm "tổng" tất cả các phần tử của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ ,$$

và ta gọi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hay vắn tắt $\sum a_n$, là một chuỗi trong X.

Trước hết, với mỗi $n\in\mathbb{N}$, tổng hữu hạn $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ được hoàn toàn xác định và được gọi là *tổng riêng phần thứ* n của chuỗi $\sum a_n$ và dãy (s_n) được gọi là *dãy các tổng riêng phần* của chuỗi $\sum a_n$.

---

[1] well-defined

1. CHUỖI HỘI TỤ

Khi X là một không gian định chuẩn, vì ta có thể khảo sát giới hạn dãy các tổng riêng phần của chuỗi các phần tử của X nên ta có định nghĩa sau.

1.1. Định nghĩa. Với (s_n) là dãy các tổng riêng phần của chuỗi $\sum a_n$ các phần tử của một không gian định chuẩn X. Khi (s_n) là dãy hội tụ và có giới hạn là $s \in X$, ta nói chuỗi $\sum a_n$ *hội tụ* và có *tổng* là s, ký hiệu

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Chuỗi không hội tụ (trong X) được gọi là *phân kỳ* (trong X).

Ví dụ 1. Với dãy số (dãy các phần tử của $\mathbb{R}$) $a_n = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \cdots$, ta có

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} n+1, & \text{khi } x = 1, \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{khi } x \neq 1. \end{cases}$$

Khi $|x| \geq 1$, (s_n) không hội tụ trong $\mathbb{R}$. Chính xác hơn, $s_n \to \infty$ khi $x \geq 1$ và khi $x \leq -1$, (s_n) có hai dãy con với giới hạn khác nhau. Do định nghĩa, chuỗi $\sum a_n \equiv \sum x^n$ phân kỳ.

Khi $|x| < 1$, $s_n \to \frac{1}{1-x}$ nên ta nói $\sum a_n \equiv \sum x^n$ hội tụ và có tổng là $\frac{1}{1-x}$. ■

Chuỗi số trong ví dụ trên được gọi là *chuỗi hình học* và nó đóng một vai trò đặc biệt trong việc khảo sát các chuỗi tổng quát nên để nhấn mạnh cũng như tiện tham chiếu sau này, ta phát biểu thành

1.2. Mệnh đề (chuỗi hình học). *Với* $x \in \mathbb{R}$*, chuỗi hình học* $\sum x^n$ *khi và chỉ khi* $|x| < 1$ *và với* $|x| < 1$*, ta có*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Đặc biệt, khi $\sum a_n$ là một chuỗi số dương, nghĩa là $a_n \geq 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì dãy tổng riêng phần (s_n) của nó là dãy đơn điệu tăng. Do dãy số đơn điệu hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy bị chặn, ta được kết quả sau.

1.3. Định lý. *(i) Chuỗi số dương* $\sum a_n$ *hội tụ nếu và chỉ nếu dãy tổng riêng phần* (s_n) *của nó bị chặn trên.*

(ii) (Tiêu chuẩn so sánh) Xét hai chuỗi số dương $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$, $0 \le a_n \le b_n$*, với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *. Nếu* $\sum b_n$ *hội tụ thì* $\sum a_n$ *hội tụ và do đó, nếu* $\sum a_n$ *phân kỳ thì* $\sum b_n$ *cũng phân kỳ.*

Chứng minh. (i) Do dãy tổng riêng phần (s_n) của chuỗi số dương $\sum a_n$ là dãy tăng nên nó hội tụ (s_n) và do đó $\sum a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu (s_n) bị chặn trên.

(ii) Gọi (s_n) và (t_n) lần lượt là dãy tổng riêng phần của chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Ta có $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = t_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, $\sum b_n$ hội tụ cho dãy (t_n) bị chặn trên. Suy ra (s_n) cũng bị chặn trên và do đó $\sum a_n$ hội tụ. ■

Nhận xét 1. a) Với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ các phần tử của một không gian định chuẩn và với $n_0 \in \mathbb{N}$, xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, với $b_n = a_{n+n_0}$, với $n \in \mathbb{N}$, mà ta còn viết lại là chuỗi $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$. Gọi (s_n) và (t_n) là dãy tổng riêng phần của $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ta có $s_n = t_n + \sum_{k=1}^{n_0} a_k$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, và điều này cho thấy các dãy (s_n) và (t_n) hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ. Do đó, các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Ta nói rằng một chuỗi là hội tụ hay phân kỳ không tùy thuộc vào hữu hạn số hạng ban đầu của nó.

b) Như là ứng dụng của a), phần (i) của định lý trên cũng đúng cho các chuỗi số $\sum a_n$ sao cho tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$, $a_n \ge 0$, với mọi $n \ge n_0$. Tương tự, phần (ii) cũng đúng cho các chuỗi số $\sum a_n$ và $\sum b_n$ sao cho tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 \le a_n \le b_n$, với mọi $n \ge n_0$. ■

Khi chuỗi $\sum a_n$ hội tụ trong X, nghĩa là tồn tại $s \in X$ sao cho $s_n \to s \in X$, ta cũng có $s_{n-1} \to s$ và vì $a_n = s_n - s_{n-1}$, kết hợp với tính liên tục của phép cộng, ta được

1.4. Mệnh đề. *Nếu chuỗi* $\sum a_n$ *hội tụ trong* X*, thì dãy* (a_n)*, gọi là dãy các số hạng tổng quát của chuỗi, hội tụ về* 0 *(phần tử trung hòa của phép cộng trong* X*).*

Nhận xét 2. Mệnh đề trên cho điều kiện cần để một chuỗi là hội tụ và nó cũng cho ta điều kiện đủ để một chuỗi là phân kỳ :

Nếu dãy các số hạng tổng quát của một chuỗi không hội tụ về phần tử trung hòa 0, chuỗi này là phân kỳ. Chẳng hạn, chuỗi hình học $\sum 1^n$ có dãy các tổng riêng phần không hội tụ về 0 và chuỗi $\sum (-1)^n$ có dãy các tổng riêng phần là dãy phân kỳ. Do đó các chuỗi này là các chuỗi số phân kỳ.

Chú ý rằng điều kiện $a_n \to 0$ không là điều kiện đủ. Chẳng hạn, chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$ là chuỗi số phân kỳ nhưng có số hạng tổng quát $\frac{1}{n} \to 0$ (xem phần 2). ■

Kết hợp với các phép toán trên X, với hai chuỗi các phần tử của X, $\sum a_n$ và $\sum b_n$, và với $\alpha \in \mathbb{K}$, ta có thể thành lập các chuỗi $\sum(a_n + b_n)$, $\sum(\alpha a_n)$ và ta có

1.5. Mệnh đề. *Xét các chuỗi* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *của một không gian định chuẩn* X *và xét* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Nếu* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *là các chuỗi hội tụ thì các chuỗi* $\sum(a_n + b_n)$, $\sum(\alpha a_n)$ *cũng hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, , \; \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, .$$

Chứng minh. Với $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, $s = \sum a_i$, và $t = \sum b_i$, ta có $s_n \to s$ và $t_n \to t$. Kết hợp các đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = s_n + t_n \text{ và } \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i = \alpha s_n$$

với tính liên tục của các phép toán trên X, ta được $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \to s + t$ và $\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) \to \alpha s$ khi $n \to \infty$ và mệnh đề được chứng minh. ■

Ngoài ra, kết hợp với hàm chuẩn trên X, ứng với mỗi chuỗi $\sum a_n$ các phần tử của X, ta được chuỗi số (dương) $\sum \|a_n\|$ và ta có

1.6. Định nghĩa. Xét chuỗi $\sum a_n$ các phần tử của không gian định chuẩn X. Ta nói $\sum a_n$ *hội tụ tuyệt đối* (hay hội tụ chuẩn trong X) khi $\sum \|a_n\|$ là chuỗi số hội tụ.

Ví dụ 2. a) Xét không gian $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ với chuẩn sup và xét chuỗi $\sum f_n$ các phần tử của $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ cho bởi $f_n(x) = x^n$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Do $\|f_n\| = \sup_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, với mọi n, và $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ là chuỗi (hình học) hội tụ, nên $\sum f_n$ hội tụ tuyệt đối trong $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) Xét không gian các ma trận vuông cấp n, M_n, mà ta đồng nhất với không gian $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ các toán tử tuyến tính (liên tục) trên $\mathbb{K}^n$ (xem nhận xét 5 của định lý 3.9, chương 2). Với $A, B \in M_n$ tương ứng với các toán tử tuyến tính $L_A, L_B \in \mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, nghĩa là $L_A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ và $L_B\mathbf{x} = B\mathbf{x}$, với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, do $\left(L_A \circ L_B\right)\mathbf{x} = L_A\left(L_B\mathbf{x}\right) = A\left(B\mathbf{x}\right) = \left(AB\right)\mathbf{x}$, ta suy ra ma trận tích $AB \in M_n$ tương ứng với toán tử tuyến tính $L_A \circ L_B \in \mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ và từ định nghĩa của chuẩn trên M_n, ta được

$$\left\|AB\right\|_{M_n} = \left\|L_A \circ L_B\right\|_{\mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)} \le \left\|L_A\right\|_{\mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)} \left\|L_B\right\|_{\mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)} = \left\|A\right\|_{M_n} \left\|B\right\|_{M_n}.$$

Do đó, với $A \in M_n$, $\left\|A\right\| < 1$, ta có chuỗi $\sum A^n$ các phần tử của M_n và do $\left\|A^n\right\| \le \left\|A\right\|^n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi $\left\|A\right\| < 1$, $\sum \left\|A\right\|^n$ là chuỗi hình học hội tụ và do tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi số dương, $\sum \left\|A^n\right\|$ cũng là chuỗi số hội tụ. Do vậy, $\sum A^n$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối trong không gian M_n các ma trận vuông cấp n. ■

Ta có sự liên hệ giữa chuỗi hội tụ tuyệt đối, chuỗi hội tụ và tính đầy đủ của X như sau.

1.7. Định lý. *Không gian định chuẩn X là một không gian Banach nếu và chỉ nếu mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối trong X đều là chuỗi hội tụ.*

Chứng minh. Khi X đầy đủ và $\sum \left\|x_n\right\|$ là chuỗi số hội tụ, dãy tổng riêng phần của nó, $\left(t_n\right)$, với $t_n = \sum_{k=1}^{n} \left\|x_k\right\|$, là dãy hội tụ nên là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Xét tổng riêng phần của chuỗi $\sum x_n$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Ta có, với mọi $n > m$,

$$\left\|s_n - s_m\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{n} \left\|x_k\right\| = \left\|t_n - t_m\right\|,$$

và điều này cho thấy $\left(s_n\right)$ là dãy Cauchy trong X đầy đủ nên hội tụ. Do đó, $\sum x_n$ là chuỗi hội tụ. Ngược lại, giả sử mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối trong X đều hội tụ. Xét dãy Cauchy $\left(x_n\right) \subset X$. Tồn tại dãy tăng ngặt các số tự nhiên $\left(n_k\right)$ sao cho $\left\|x_n - x_m\right\| < 2^{-k}$, với mọi $m, n \ge n_k$. Đặt $y_1 = x_{n_1}$, và $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, với $k > 1$. Ta có $\left\|y_j\right\| \le 2^{-j}$, với mọi $j > 1$, trong đó $\sum 2^{-j} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^j$ là chuỗi hình học hội tụ. Do tiêu chuẩn so sánh, $\sum \left\|y_j\right\|$ cũng hội tụ. Nói khác đi, $\sum y_j$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối, và do giả thuyết, nó là chuỗi hội tụ. Mặt khác, do $x_{n_k} = \sum_{j=1}^{k} y_j$ nên $\left(x_{n_k}\right)$ chính là dãy tổng riêng phần của chuỗi hội tụ $\sum y_j$ nên là dãy hội tụ. Dãy Cauchy $\left(x_n\right)$ có một dãy con hội tụ nên cũng là dãy hội tụ và do đó X là một không gian Banach. ■

Nhận xét 3. a) Khi X là một không gian Banach, ta có thể khảo sát tính hội tụ của một chuỗi các phần tử của X bằng cách khảo sát tính Cauchy của dãy tổng riêng phần của nó, hoặc do kết quả trên, ta khảo sát chuỗi số chuẩn các số hạng tổng quát của nó. Chính do phương pháp sau mà việc khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số, đặc biệt là các chuỗi số dương, mà ta sẽ dành riêng khảo sát trong phần 2, đóng một vai trò quan trọng trong việc khảo sát khảo sát chuỗi trong không gian Banach.

b) Hơn nữa, kết quả trên cho ta một công cụ khác để kiểm chứng một không gian định chuẩn là đầy đủ. Thay vì kiểm chứng rằng mọi dãy Cauchy đều hội tụ, ta chứng minh rằng mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

c) Khi X đầy đủ, một chuỗi hội tụ có thể không hội tụ tuyệt đối. Chuỗi thỏa điều kiện này được gọi là chuỗi hội tụ có điều kiện. Chẳng hạn (xem phần 2), chuỗi đan dấu $\sum(-1)^n / n$ là chuỗi số hội tụ có điều kiện. ■

2. CHUỖI SỐ

Như đã đề cập tới trong nhận xét 2, việc khảo sát các chuỗi số đóng một vai trò quan trọng trong việc khảo sát các chuỗi tổng quát trong không gian Banach. Nhắc lại rằng, đối với chuỗi số dương, ta có thể kiểm chứng sự hội tụ của nó bằng cách chứng minh rằng dãy tổng riêng phần của nó là bị chặn trên. Đặc biệt, ta có tiêu chuẩn so sánh dành cho các chuỗi số dương : nếu chuỗi các số hạng lớn hơn hội tụ thì chuỗi các số hạng nhỏ hơn cũng hội tụ. Do đó, ta trước hết khai thác cũng như triển khai các kết quả này trên các chuỗi số.

2.1. Mệnh đề. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Chứng minh. Nhắc lại rằng, do định nghĩa, ta có

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n .$$

Do đó, ta cần chứng minh rằng chuỗi số $\sum \frac{1}{n!}$ là hội tụ và có tổng là e. Do $\sum \frac{1}{n!}$ là một chuỗi số dương nên để chứng minh nó là chuỗi hội tụ, ta chỉ cần chứng minh rằng dãy tổng riêng phần của nó là bị chặn trên. Do công thức khai triển nhị thức, ta có

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \ge \sum_{k=0}^{m} C_n^k \left(\tfrac{1}{n}\right)^k, \text{ với mọi } n \ge m, \tag{1}$$

trong đó

$$C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to \frac{1}{k!}, \text{ khi } n\to\infty, \text{ với mọi } k = 0,1,\cdots,m .$$

Do đó, khi $n\to\infty$, (1) cho

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\le e\text{, với mọi } n\ge m,$$

và điều này cho thấy dãy tổng riêng phần của chuỗi $\sum\frac{1}{n!}$ bị chặn trên, bởi e. Do đó $\sum\frac{1}{n!}$ hội tụ và có tổng $\le e$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\le e$. Ngược lại, do

$$C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\le\frac{1}{k!},$$

với mọi $k=0,1,\cdots,n$, ta suy ra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\text{, với mọi } n\in\mathbb{N},$$

và khi $n\to\infty$, ta được $e\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ và mệnh đề được chứng minh. ■

Nhận xét 4. Mệnh đề trên cho phép ta xấp xỉ e bằng tổng (riêng phần) $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ với độ chính xác nhanh hơn nhiều so với việc xấp xỉ bằng dãy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Cụ thể, ta có đánh giá sau

$$0\le e-s_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}<\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}. \qquad (2)$$

Chẳng hạn, s_{10} xấp xỉ e với sai số bé hơn $\frac{1}{10!\cdot 10}<10^{-7}$. ■

Ngoài công dụng để kiểm soát sai số, đánh giá (2) còn cho ta kết quả lý thuyết về số e.

2.2. Định lý. *Số* e *là một số vô tỷ.*

Chứng minh. Dùng phản chứng, giả sử e là số hữu tỷ, nghĩa là $e=\frac{p}{q}$, với $p,q\in\mathbb{N}$. Do (2), ta có

$$0<q!\left(e-s_q\right)<\frac{1}{q}. \qquad (3)$$

Mặt khác, $q!e=(q-1)!p\in\mathbb{N}$ và

$$q!s_q=q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}=\sum_{k=0}^{q}(k+1)(k+2)\cdots q\in\mathbb{N},$$

Ta suy ra $q!\left(e-s_q\right)$ là một số nguyên nằm trong khoảng $(0,1)$. Vô lý. ■

Kết hợp với quan hệ thứ tự trên , ta có thể khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum a_n$ bằng chuỗi $\sum a_{n_k}$, trong đó (a_{n_k}) là một dãy con của (a_n) như sau

2.3. Định lý Cauchy. *Cho* (a_n) *là một dãy giảm các số dương. Ta có chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ nếu và chỉ nếu chuỗi*

$$\sum_{k=}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

hội tụ.

Chứng minh. Do $\sum a_n$ và $\sum 2^k a_{2^k}$ là các chuỗi số dương, sự hội tụ của chúng tương đương với tính bị chặn trên của các dãy tổng riêng phần (s_n) và (t_k),

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ và } t_k = \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j}, \text{ với mọi } n, k \in .$$

Khi $n < 2^k$, ta có

$$s_n \le \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} a_j = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} a_i \right) \le \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = t_k, \tag{4}$$

do $a_i \le a_{2^j}$, với mọi $i = 2^j, 2^j + 1, \cdots, 2^{j+1} - 1$. Bất đẳng thức (4) cho thấy khi $\sum 2^k a_{2^k}$ hội tụ, (t_k) bị chặn trên kéo theo (s_n) bị chặn trên nên $\sum a_n$ cũng hội tụ. Ngược lại, với $n > 2^k$, ta có

$$s_n \ge \sum_{j=0}^{2^k} a_j = a_1 + a_2 + \sum_{j=2}^{k} \left(\sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \right) \ge 2^{-1} a_1 + a_2 + \sum_{j=2}^{k} 2^{j-1} a_{2^j}$$

$$= \frac{1}{2} \left(a_1 + 2a_2 + \sum_{j=2}^{k} 2^j a_{2^j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = \frac{1}{2} t_k,$$

do $a_i \ge a_{2^j}$, với mọi $i = 2^{j-1} + 1, 2^{j-1} + 2, \cdots, 2^j$, và bất đẳng thức này cho thấy rằng khi $\sum a_n$ hội tụ, (s_n) bị chặn trên, kéo theo (t_k) bị chặn trên và do đó $\sum 2^k a_{2^k}$ hội tụ. ■

Từ kết quả này, ta được

2.4. Mệnh đề (chuỗi điều hòa). *Chuỗi* $\sum \frac{1}{n^p}$ *hội tụ nếu và chỉ nếu* $p > 1$.

Chứng minh. Khi $p \le 0$, dãy $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ không hội tụ về 0 nên chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ phân kỳ. Khi $p > 0$, dãy $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ thỏa điều kiện của định lý 2.3. Do đó chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ hội tụ hay phân kỳ tùy thuộc vào chuỗi

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^k \tag{5}$$

hội tụ hay phân kỳ. Mặt khác, chuỗi trong (5) là chuỗi hình học và nó hội tụ khi và chỉ khi $2^{1-p} < 1$, nghĩa là $p > 1$, và mệnh đề được chứng minh. ■

Kết hợp mệnh đề trên với tiêu chuẩn so sánh, ta có thể khảo sát sự hội tụ các chuỗi hữu tỷ hay vô tỷ.

Ví dụ 3. Xét chuỗi $\sum \frac{n}{n^3+1}$. Do $0 \le \frac{n}{n^3+1} \le \frac{1}{n^2}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, và $\sum \frac{1}{n^2}$ là chuỗi điều hòa hội tụ, ta suy ra $\sum \frac{n}{n^3+1}$ cũng là chuỗi hội tụ. Với chuỗi $\sum \frac{n}{n^2+1}$, ta có $\frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \ge 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ, tiêu chuẩn so sánh cho thấy $\sum \frac{n}{n^2+1}$ là chuỗi phân kỳ. ■

Trong ứng dụng, ta dùng kết quả sau, gọi là tiêu chuẩn so sánh dùng giới hạn, mà chứng minh được xem là bài tập (bài tập 2).

2.5. Mệnh đề. *Xét hai chuỗi số dương* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *sao cho dãy* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *xác định và có giới hạn* $\alpha \in [0, \infty]$. *Ta có*

(i) Nếu $0 < \alpha < \infty$ *thì hai chuỗi* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.*

(ii) Nếu $\alpha = 0$ *thì tính hội tụ của* $\sum b_n$ *cho ta tính hội tụ của* $\sum a_n$, *và do đó, tính phân kỳ của* $\sum a_n$ *kéo theo tính phân kỳ của* $\sum b_n$.

(iii) Nếu $\alpha = \infty$ *thì tính hội tụ của* $\sum a_n$ *cho ta tính hội tụ của* $\sum b_n$, *và do đó, tính phân kỳ của* $\sum b_n$ *kéo theo tính phân kỳ của* $\sum a_n$.

Ví dụ 4. Trở lại với các chuỗi trong ví dụ 3, bằng cách viết $\frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}$, ta có

$$\frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} \to 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n^2}$ cho thấy $\sum \frac{n}{n^3+1}$ là chuỗi hội tụ. Tương tự, bằng cách viết $\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$, ta suy ra

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Do đó sự phân kỳ của chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$ cho thấy $\sum \frac{n}{n^2+1}$ là chuỗi phân kỳ. ■

Các ví dụ trên cho thấy ta có thể khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ bằng cách dùng các tiêu chuẩn so sánh, kết hợp với lớp những chuỗi mà ta đã biết là hội tụ hay phân kỳ, chẳng hạn với lớp các chuỗi hình học, điều hòa. Lại dùng định lý 2.3, ta có thêm lớp các chuỗi phụ thuộc tham số mà tính hội tụ hay phân kỳ của nó được hoàn toàn xác định theo giá trị của tham số đó mà chứng minh được xem là bài tập (bài tập 3).

2.6. Mệnh đề. *Chuỗi*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 1$.

Ngoài ra, ta có hai tiêu chuẩn quan trọng để khảo sát sự hội tụ của một chuỗi số : tiêu chuẩn căn số của Cauchy và tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert như sau.

2.7. Định lý (Tiêu chuẩn căn số của Cauchy). *Với chuỗi số* $\sum a_n$, *xét* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Ta có*

(i) nếu $\alpha < 1$, $\sum a_n$ *là chuỗi hội tụ (tuyệt đối);*

(ii) nếu $\alpha > 1$, $\sum a_n$ *là chuỗi phân kỳ;*

(iii) nếu $\alpha = 1$*, tiêu chuẩn căn số không có kết luận tổng quát.*

Chứng minh. (i) Với $\alpha < \beta < 1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$, với mọi $n \geq n_0$. Từ đó suy ra $|a_n| \leq \beta^n$, với mọi $n \geq n_0$, và do $\sum \beta^n$ là chuỗi hình học hội tụ, tiêu chuẩn so sánh cho thấy $\sum |a_n|$ hội tụ và do đó $\sum a_n$ hội tụ (tuyệt đối).

(ii) Khi $\alpha > 1$, với dãy con $\{a_{n_k}\}$ sao cho $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha > 1$, tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_{n_k}| \geq 1$, với mọi $k \geq k_0$. Điều này cho thấy $a_n \not\to 0$ và do đó, chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

(iii) Hai chuỗi $\sum \frac{1}{n}$ và $\sum \frac{1}{n^2}$ đều có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ nhưng chuỗi thứ nhất phân kỳ còn chuỗi thứ nhì hội tụ. ■

2.8. Định lý (Tiêu chuẩn tỷ số của d'Alembert). *Chuỗi số* $\sum a_n$

(i) hội tụ (tuyệt đối) khi $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$,

(ii) phân kỳ khi tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$, *với mọi* $n \geq n_0$.

Chứng minh. (i) Với $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\beta<1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\beta$, với mọi $n \geq n_0$. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$|a_n| \leq |a_{n_0}|\beta^{n-n_0} \tag{6}$$

đúng với mọi $n \geq n_0$ bằng quy nạp trên n. Hiển nhiên (6) đúng khi $n = n_0$ và nếu (6) đúng với một $n \geq n_0$ thì do $|a_{n+1}| \leq \beta \leq |a_n|$, ta suy ra $|a_{n+1}| \leq |a_{n_0}|\beta^{(n+1)-n_0}$. Tóm lại (6) thỏa với mọi $n \geq n_0$.

Mặt khác, chuỗi $\sum |a_{n_0}|\beta^{n-n_0} = |a_{n_0}|\beta^{-n_0}\sum\beta^n$ hội tụ do $\sum\beta^n$ là chuỗi hình học hội tụ, tiêu chuẩn so sánh cho thấy $\sum|a_n|$ hội tụ và do đó $\sum a_n$ hội tụ (tuyệt đối).

(ii) Điều kiện $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$ cho thấy $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, với mọi $n \geq n_0$. Suuy ra $a_n \not\to 0$ và do đó $\sum a_n$ phân kỳ. ■

Nhận xét 5. a) Trường hợp thông dụng khi khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum a_n$ là khi $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (hay $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$) tồn tại. Bấy giờ, tiêu chuẩn căn số của Cauchy (hay tỷ số của d'Alembert) cho thấy

(i) chuỗi $\sum a_n$ hội tụ (tuyệt đối) khi $\alpha < 1$,

(ii) chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ khi $\alpha > 1$, và

(iii) không có kết luận cho chuỗi $\sum a_n$ khi $\alpha = 1$.

b) Tương tự như trong ví dụ nêu trong chứng minh của 2.7 (iii), đối với chuỗi $\sum a_n$, trong đó a_n là đa thức, hàm hữu tỷ hay vô tỷ theo n, cả tiêu chuẩn căn số cũng như tỷ số đều không cho kết luận tổng quát. Trường hợp này, các tiêu chuẩn so sánh (với chuỗi điều hòa) tỏ ra hiệu quả hơn.

c) Tiêu chuẩn tỷ số dựa trên việc khảo sát dãy tỷ số hai số hạng liên tiếp còn tiêu chuẩn căn số dựa trên dãy các căn bậc n của số hạng tổng quát nên tiêu chuẩn tỷ số thường dễ sử dụng hơn tiêu chuẩn căn số. Bù lại, tiêu chuẩn căn số mạnh hơn tiêu chuẩn tỷ số theo nghĩa là khi khảo sát một chuỗi, nếu tiêu chuẩn tỷ số cho kết luận là chuỗi hội tụ, thì tiêu chuẩn căn số cũng cho kết luận tương tự và ngược lại, nếu tiêu chuẩn căn số không cho kết luận, thì tiêu chuẩn tỷ số cũng không cho kết luận tương tự. Cụ thể, ta có kết quả sau (xem [W. Rudin]) :

Với dãy các số dương bất kỳ (c_n), ta có

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}. \quad ■$$

Ví dụ 5. Xét chuỗi $\sum a_n$, trong đó $a_{2k-1}=\frac{1}{2^k}$ và $a_{2k}=\frac{1}{3^k}$, với mọi $k\in\mathbb{N}$. Do $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^k\to 0$ và $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k\to\infty$ khi $k\to\infty$, ta suy ra

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0 \text{ và } \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty.$$

Do đó, tiêu chuẩn tỷ số không cho kết luận trên chuỗi $\sum a_n$. Ngược lại, do $\sqrt[2k]{a_{2k}}=\sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, với mọi k, và $\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}}=\sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $k\to\infty$, ta được

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do đó, với tiêu chuẩn căn số, ta kết luận $\sum a_n$ là chuỗi hội tụ. ■

Ngoài ra, ta có các tiêu chuẩn dành cho một số chuỗi số đặc biệt. Trước hết, chuỗi $\sum b_n$ được gọi là *đan dấu* khi $b_{n+1}\cdot b_n\le 0$, với mọi $n\in\mathbb{N}$. Nói cách khác, hai số hạng liên tiếp của chuỗi có dấu ngược nhau. Bằng cách đặt $a_n=|b_n|$, chuỗi đan dấu $\sum b_n$ có thể viết lại thành chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hay thành chuỗi $\sum(-1)^{n+1} a_n$ tùy thuộc vào số hạng đầu tiên $a_1\le 0$ hay $a_1\ge 0$. Ta có

2.9. Định lý (tiêu chuẩn Leibnitz). *Nếu (a_n) là dãy giảm các số dương hội tụ về 0, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ hội tụ và có tổng nằm trong đoạn $[a_1-a_2,a_1]$.*

Chứng minh. Với $s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$, các bất đẳng thức

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=a_{2n+1}-a_{2n}\le 0 \text{ và } s_{2n+2}-s_{2n}=a_{2n+1}-a_{2n+2}\ge 0,$$

thỏa với mọi $n\in\mathbb{N}$, cho thấy (s_{2n+1}) là dãy đơn điệu giảm và (s_{2n}) là dãy đơn điệu tăng. Hơn nữa, các bất đẳng thức

$$s_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k a_k=a_1+\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k a_k=a_1-\sum_{j=1}^{n}\left(a_{2j}-a_{2j+1}\right)\le a_1$$

và

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = a_1 - a_2 + \sum_{j=2}^{n} \left(a_{2j-1} - a_{2j}\right) \geq a_1 - a_2,$$

thỏa với mọi $n \in \mathbb{N}$, cho thấy (s_{2n+1}) và (s_{2n}) là các dãy bị chặn. Do đó, chúng là các dãy hội tụ. Mặt khác, do $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$, ta suy ra (s_{2n+1}) và (s_{2n}) có cùng một giới hạn, ký hiệu s. Từ đó suy ra (s_n) là dãy hội tụ và có giới hạn là s. Điều này có nghĩa là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ hội tụ và có tổng là s. Hơn nữa, do $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} \geq a_1 - a_2$ và $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} \leq a_1$, ta được $s \in [a_1 - a_2, a_1]$. ■

Nhận xét 6. Do $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = (-1)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ nên với cùng khi giả thuyết của định lý 2.9 thỏa, ta cũng suy ra sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ với tổng nằm trong đoạn $[-a_1, a_2 - a_1]$. Đặc biệt, với tổng s của một chuỗi đan dấu ($\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hay $(-1)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$), ta có $|s| \leq a_1$ và ta có thể dùng tính chất này để đánh giá sai số giữa s tổng riêng phần s_n bằng cách viết

$$s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ hay } s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k.$$

Điều này cho thấy $s - s_n$ là tổng của chuỗi đan dấu với số hạng đầu tiên (không kể dấu) là a_{n+1}. Do đó, ta được đánh giá

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad ■$$

Ví dụ 6. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi hội tụ với tổng s với đánh giá $|s - s_n| \leq \frac{1}{n}$ thỏa với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. ■

Tổng quát hơn, ta có

2.10. Định lý (tiêu chuẩn Dirichlet). *Nếu (a_n) là một dãy số dương, giảm, hội tụ về 0 và $\sum b_n$ là một chuỗi có dãy tổng riêng phần bị chặn, thì $\sum a_n b_n$ là chuỗi hội tụ.*

Chứng minh. Ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= t_1(a_1 - a_2) + t_2(a_2 - a_3) + \cdots + t_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + t_n a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} t_k (a_k - a_{k+1}) + t_n a_n, \end{aligned} \tag{7}$$

trong đó $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ là tổng riêng phần của chuỗi $\sum b_n$. Vì $\sum(a_n - a_{n+1})$ là chuỗi số dương hội tụ (có tổng là a_1) và tồn tại $M > 0$ sao cho $|t_n| \le M$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta suy ra $\sum t_n (a_n - a_{n+1})$ là chuỗi hội tụ (tuyệt đối) và $t_n a_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Điều này cho thấy vế phải của (7) là dãy hội tụ. Do vế trái của (7) chính là dãy tổng riêng phần của chuỗi $\sum a_n b_n$, ta suy ra rằng $\sum a_n b_n$ là chuỗi hội tụ và định lý được chứng minh. ■

Nhận xét 7. Với $b_n = (-1)^n$ hay $b_n = (-1)^{n+1}$ và t_n là dãy tổng riêng phần của chuỗi $\sum b_n$, ta có $t_n = \pm 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nói khác đi, chuỗi $\sum b_n$ có dãy tổng riêng phần bị chặn và do đó, tiêu chuẩn Leibnitz là một trường hợp đặc biệt của tiêu chuẩn Dirichlet. ■

Từ tiêu chuẩn Dirichlet, ta suy ra

2.11. Định lý (tiêu chuẩn Abel). *Nếu (a_n) là một dãy giảm các số dương và $\sum b_n$ là chuỗi hội tụ thì $\sum a_n b_n$ cũng là chuỗi hội tụ.*

Chứng minh. Với $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ta có $(a_n - a)$ là dãy giảm các số dương, hội tụ về 0. Mặt khác, chuỗi $\sum b_n$ hội tụ cho thấy dãy tổng riêng phần của nó là dãy hội tụ nên bị chặn. Do tiêu chuẩn Dirichlet, $\sum(a_n - a)b_n$ là chuỗi hội tụ. Do $\sum ab_n$ là chuỗi hội tụ ta suy ra $\sum a_n b_n = \sum(a_n - a)b_n + \sum ab_n$ hội tụ. ■

Nhận xét 8. Chú ý sự khác biệt trong tiêu chuẩn Dirichlet và tiêu chuẩn Abel. Tiêu chuẩn Dirichlet đòi hỏi dãy (a_n) giảm và hội tụ về 0 nhưng tiêu chuẩn Abel chỉ cần (a_n) là dãy giảm các số dương. Ngược lại, tiêu chuẩn Dirichlet chỉ cần chuỗi $\sum b_n$ có dãy tổng riêng phần bị chặn nhưng tiêu chuẩn Abel cần sự hội tụ của chuỗi này. ■

Đối với các chuỗi hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$, trong phần 1, ta chứng minh rằng chuỗi "tổng", $\sum(a_n + b_n)$, và chuỗi "tích với số thực $\alpha \in \mathbb{R}$", $\sum \alpha a_n$, cũng là các chuỗi hội tụ và ta có $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$, $\sum(\alpha a_n) = \alpha \sum a_n$. Chuỗi dạng $\sum a_n b_n$ khảo sát trong 2.10 và 2.11 không được gọi là "chuỗi tích" của các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$, mà ta có

2.12. Định nghĩa. Với hai chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ xác định bởi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \text{ với mỗi } n \in \mathbb{N},$$

được gọi là *chuỗi tích* của các chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Ví dụ 7. Với $x \in \mathbb{R}$ và các dãy số (a_n), (b_n), xét chuỗi tích của các chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Ta có, với $n = 0,1,2,\cdots$,

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k x^k)(b_{n-k}x^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})x^n = c_n x^n,$$

và ta được chuỗi tích là $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, với

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \qquad \blacksquare$$

Đối với chuỗi tích, ta có các kết quả sau (xem [W Rudin]) mà như ví dụ trên cho thấy, cho ta nhiều ứng dụng đối với các chuỗi dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mà ta gọi là chuỗi lũy thừa (xem phần 3).

2.13. Định lý. *Giả sử*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *là chuỗi hội tụ tuyệt đối,*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *và* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$*;*

(iii) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *với* $n = 0,1,2,\cdots$.

Ta có $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *chuỗi tích của các chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, *là chuỗi hội tụ và có tổng là* $A \cdot B$.

và

2.14. Định lý. *Nếu các chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, *và* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *là hội tụ và có tổng lần lượt là* A, B, *và* C, *trong đó* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *với mọi* $n = 0,1,2,\cdots$, *thì ta có* $C = AB$.

Ví dụ 8. Cho chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, với

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},\ n = 0,1,2,\cdots.$$

Xét chuỗi tích $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và chính nó. Ta có

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Do $(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$, ta suy ra

$$\left|c_n\right| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \ge 1, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N},$$

nên $c_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Suy ra $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ phân kỳ. Chú ý rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ chỉ là chuỗi hội tụ có điều kiện. ■

Cuối cùng, ta khảo sát khái niệm về chuỗi hoán vị của một chuỗi cho trước. Ta có

2.15. Định nghĩa. Xét dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ứng với mỗi song ánh $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, chuỗi số có số hạng tổng quát từ dãy $\left(a_{\sigma(n)}\right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

được gọi là một *chuỗi hoán vị* của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Như đã giới thiệu trong phần đầu chương và được khảo sát trong bài tập 1, ứng với dãy hữu hạn $(a_n)_{n=1,2,\cdots,N}$ trong một không gian định chuẩn tổng quát và ứng với mọi song ánh $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$, ta luôn có

$$\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

Đối với chuỗi số, tổng vô hạn các số thực, ta cũng nhận được kết quả tương tự như trên cho chuỗi số dương như sau.

2.16. Định lý. *Ứng với một chuỗi số dương hội tụ, mọi chuỗi hoán vị của nó cũng hội tụ và tất cả đều có chung một tổng.*

Chứng minh. Xét chuỗi số dương hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, có tổng là s, và xét một chuỗi hoán vị của nó, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Với (s_n) và (t_n) là dãy tổng riêng phần của hai chuỗi này,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ và } t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}, \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $s_n \le s$ và với $m = \max_{1\le k\le n} \sigma(k)$, ta có

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \le \sum_{k=1}^{m} a_k \le s .$$

Điều này cho thấy dãy tổng riêng phần của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ bị chặn trên bởi s nên nó là chuỗi hội tụ và có tổng $t = \lim_{n\to\infty} t_n \le s$. Ngược lại, với song ánh $\sigma^{-1}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ta được $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma^{-1}[\sigma(n)]}$ là một chuỗi hoán vị của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ nên lập luận trên cho ta $s\le t$ và định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 9. Xét chuỗi hội tụ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots, \tag{8}$$

và một chuỗi hoán vị của nó

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots, \tag{9}$$

trong đó hai số hạng dương được kế tiếp bởi một số hạng âm. Gọi s là tổng của chuỗi (8), ta có

$$s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Mặt khác, do

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0\text{, với mọi } k\ge 1,$$

Nên với dãy tổng riêng phần (t_n) của chuỗi hoán vị (9), ta có $t_3<t_6<t_9<\cdots$ và do đó,

$$\limsup_{n\to\infty}t_n>t_3=\frac{5}{6}.$$

Điều này cho thấy chuỗi hoán vị (9), nếu hội tụ, không có tổng là s. Chú ý rằng (8) không là chuỗi số dương. ■

Tổng quát hơn, ta có

2.17. Định lý Dirichlet. *Ứng với một chuỗi hội tụ tuyệt đối, mọi chuỗi hoán vị của nó cũng hội tụ tuyệt đối và tất cả đều có chung một tổng.*

Chứng minh. Gọi $\sum a_{\sigma(n)}$ là một chuỗi hoán vị của chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum a_n$. Do $\sum\left|a_{\sigma(n)}\right|$ là một chuỗi hoán vị của chuỗi hội tụ $\sum|a_n|$ nên, do định lý 2.16, nó là chuỗi hội tụ và do đó $\sum a_{\sigma(n)}$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối. Đặt

$$a_n^+=\max(a_n,0);\ a_n^-=\max(-a_n,0);$$

$$a_{\sigma(n)}^+=\max\left(a_{\sigma(n)},0\right);\text{ và }a_{\sigma(n)}^-=\max\left(-a_{\sigma(n)},0\right).$$

Vì $0 \le a_n^+, a_n^- \le |a_n|$ và $0 \le a_{\sigma(n)}^+, a_{\sigma(n)}^- \le |a_{\sigma(n)}|$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, nên do tiêu chuẩn so sánh, $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum a_{\sigma(n)}^+$, $\sum a_{\sigma(n)}^-$ là các chuỗi số (dương) hội tụ. Hơn nữa, các chuỗi $\sum a_{\sigma(n)}^+$, $\sum a_{\sigma(n)}^-$ lần lượt là một chuỗi hoán vị của $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, nên cũng do định lý 2.16, ta có

$$\sum a_{\sigma(n)}^+ = \sum a_n^+ \text{ và } \sum a_{\sigma(n)}^- = \sum a_n^-.$$

Cuối cùng, do các đẳng thức $a_n = a_n^+ - a_n^-$ và $a_{\sigma(n)} = a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma(n)}^-$ thỏa với mọi $n \in \mathbb{N}$, kết hợp với các kết quả trên, ta được

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_{\sigma(n)}^+ - \sum a_{\sigma(n)}^- = \sum a_{\sigma(n)},$$

và định lý được chứng minh. ■

Chú ý rằng chuỗi (8) trong ví dụ 9 nêu trên là chuỗi hội tụ nhưng không là chuỗi hội tụ tuyệt đối. Đối với những chuỗi như vậy, ta có kết quả sau (xem [W. Rudin].

2.18. Định lý Riemann. *Cho* $\sum a_n$ *là một chuỗi hội tụ có điều kiện, nghĩa là nó hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. Ứng với* $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$ *bất kỳ, tồn tại chuỗi hoán vị* $\sum a_{\sigma(n)}$ *với dãy tổng riêng phần* (t_n) *sao cho*

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = \alpha \textit{ và } \limsup_{n\to\infty} t_n = \beta.$$

Đặc biệt, với $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, định lý trên cho thấy sự tồn tại các chuỗi hoán vị $\sum a_{\sigma(n)}$ của chuỗi hội tụ có điều kiện $\sum a_n$ sao cho $\sum a_{\sigma(n)}$ không là chuỗi hội tụ, và với $-\infty \le \alpha = \beta \le \infty$, tồn tại các chuỗi hoán vị $\sum a_{\sigma(n)}$ là chuỗi hội tụ và có tổng bằng đúng α.

3*. DÃY VÀ CHUỖI HÀM

Trong chương trước, ta đã khảo sát một số không gian các hàm số như không gian định chuẩn các hàm bị chặn xác định trên một tập S không rỗng, $\mathcal{B}(S,\mathbb{R})$ và không gian định chuẩn các hàm liên tục xác định trên một không gian métríc compắc K, $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, với chuẩn sup. Với dãy (f_n) các phần tử của các không gian này, mà ta gọi chung là *dãy hàm*, ta có thể khảo sát tính hội tụ của dãy hàm này cũng như của chuỗi $\sum f_n$, mà ta gọi chung là *chuỗi hàm,* trong không gian hàm tương ứng.

Trong phần này, ta tạm thời bỏ qua các không gian nền của dãy cũng như chuỗi hàm và chỉ khảo sát các khái niệm hội tụ căn bản của dãy hàm cũng như chuỗi hàm và đồng thời khảo sát các tính chất của hàm giới hạn f của dãy hàm

(f_n) cũng như của hàm tổng của chuỗi hàm $\sum f_n$ từ những tính chất của các hàm f_n, $n \in \mathbb{N}$. Chẳng hạn, với chuỗi lũy thừa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ta có chuỗi hàm $\sum f_n$, với $f_n(x) = a_n x^n$, $n = 0,1,2,\cdots$. Chú ý rằng các f_n này xác định, liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng hàm giới hạn $f = \lim f_n$ cũng như hàm tổng $f = \sum f_n$, có thể chỉ xác định trên trên một tập con $D \subset \mathbb{R}$. Tuy nhiên, các hàm này vẫn có thể thừa hưởng các tính chất quan trọng, liên tục, khả vi, khả tích, từ các f_n.

Trong các phần trước, chúng ta đã gặp các giới hạn có dạng

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

hay chuỗi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right],$$

trong đó các số hạng của hãy hay chuỗi có chứa một tham số x. Hiển nhiên, kết quả của giới hạn hay chuỗi như vậy có thể thay đổi theo x. Hay nói cách khác, chúng là hàm số theo x. Chẳng hạn, hàm mũ $y = e^x$ có thể coi như là giới hạn của dãy

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

hay là tổng của một chuỗi số

$$e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3.1 SỰ HỘI TỤ ĐIỂM - HỘI TỤ ĐỀU

Cho $f_n : D \to \mathbb{R}$ là một dãy các hàm số. Ta có

3.1. Định nghĩa i) Dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gọi là *hội tụ điểm* trên D nếu với mọi $x \in D, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số hội tụ và khi đó hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ được gọi là *hàm giới hạn* (*điểm*) của dãy hàm $f_n(x)$.

ii) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ gọi là *hội tụ điểm* trên D nếu với mọi $x \in D$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ là một chuỗi hội tụ và khi đó hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ được gọi là *hàm tổng* (*điểm*) của chuỗi hàm $\sum f_n$.

Ví dụ 1 Chẳng hạn, xét hãy hàm (f_n) với $f_n(x) = x^n$. Ta có

i) (f_n) hội tụ điểm trên $(-1,1]$ về hàm f xác định bởi $f(x)=0$ khi $x\neq 1$ và $f(1)=1$.

ii) $\sum f_n$ hội tụ điểm trên $(-1,1]$ về hàm f xác định bởi $f(x)=\frac{1}{1-x}$. ■

Mục đích chính của việc khảo sát dãy hàm và chuỗi hàm là khảo sát tính chất của hàm giới hạn hay của hàm tổng từ tính chất của các hàm f_n. Chẳng hạn, nếu các f_n liên tục, khả vi hay khả tích thì hàm giới hạn hay hàm tổng f có liên tục, khả vi hay khả tích hay không và ta cần một khái niệm hội tụ khác mạnh hơn sự hội tụ điểm. Trước hết, với hai hàm $f,g:D\to\mathbb{R}$, đặt

$$d(f,g)=\sup_{x\in D}|f(x)-g(x)|\in[0,+\infty].$$

Ta có

3.2. Định nghĩa i) Dãy hàm (f_n) gọi là *hội tụ đều* về f trên D nếu

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, d(f_n,f)<\varepsilon.$$

ii) Chuỗi hàm $\sum f_n$ được gọi là *hội tụ đều* về f trên D nếu dãy hàm tổng riêng phần của nó $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ hội tụ đều về f trên D.

Do định nghĩa, $d(f_n,f)<\varepsilon$ kéo theo $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\forall x\in D$. Do đó, $f_n(x)\to f(x),\forall x\in D$. Từ đó, chúng ta có thể suy ra nếu (f_n) hội tụ đều về f thì (f_n) hội tụ từng điểm về f (chiều ngược lại không đúng). Ngược lại, lưu ý trong khái niệm hội tụ đều thì hàm f_n phải đủ gần hàm f tại mọi giá trị của nó. Điều này giải thích khái niệm *đều* theo biến x.

Giá trị $d(f,g)$ còn được gọi là *khoảng cách sup* giữa hai hàm số f và g và với các hàm $f,g,h:D\to\mathbb{R}$, ta có

i) $d(f,g)\geq 0$ và $d(f,g)=0\Leftrightarrow f=g$.

ii) $d(f,g)=d(g,f)$.

iii) $d(f,g)\leq d(f,h)+d(g,h)$.

Ví dụ 2: Với $f_n:(0,\frac{1}{2})\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f_n(x)=x^n$ thì $f_n(x)\to 0$ tại mọi $x\in(0,\frac{1}{2})$. Hơn nữa, với hàm giới hạn $f:(0,\frac{1}{2})\to\mathbb{R}, f(x)=0,\forall x\in(0,\frac{1}{2})$, ta có

$$d(f_n,f)=\sup_{0<x<\frac{1}{2}}|x^n|=\frac{1}{2^n}\to 0 \text{ khi } n\to\infty$$

nên f_n hội tụ đều về f.

Nhưng với $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n$, ta cũng có f_n hội tụ từng điểm về $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=0, \forall x\in(0,1)$ nhưng $d(f_n,f)=\sup\limits_{0<x<1} x^n=1, \forall n\in\mathbb{N}$, nên f_n không hội tụ đều về f.

Tương tự với chuỗi hàm $\sum f_n(x)$ với $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ và $x\in(0,1)$. ■

Đặc biệt, đối với chuỗi hàm, ta có tiêu chuẩn Weierstrass về sự hội tụ đều như sau:

3.3. Định lý. *Cho dãy hàm* $f_n:D\to\mathbb{R}$ *sao cho tồn tại dãy số* (a_n) *với* $|f_n(x)|\le a_n, \forall x\in D, n\in\mathbb{N}$. *Nếu chuỗi số* $\sum a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm* $\sum f_n(x)$ *hội tụ đều trên* D.

Chứng minh. Trước hết từ bất đẳng thức $|f_n(x)|\le a_n, \forall x\in D, n\in\mathbb{N}$, ta suy ra, với mỗi x, chuỗi $\sum f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối. Đặt $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Ứng với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k<\varepsilon$ và do đó

$$\sup_{x\in D}\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|\le\sum_{k=n}^{+\infty} a_k<\varepsilon$$

định lý đã được chứng minh. ■

Ví dụ 3: Chứng minh $\sum\frac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Giải. Ta có

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

và $\sum\frac{1}{n^2}$ hội tụ, suy ra $\sum\frac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

3.2 PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN VÀ DÃY, CHUỖI HÀM

Trong mục này, ta khảo sát sự liên hệ giữa tính liên tục, khả vi cũng như tính khả tích của các hàm f_n với hàm giới hạn $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ hay hàm tổng $\sum f_n$. Trước hết, ta có

3.4. Mệnh đề. *Cho* I *là khoảng trong* $\mathbb{R}$ *(đóng, mở, bị chặn hoặc không bị chặn). Cho* $f_n:I\to\mathbb{R}$ *là một dãy hàm. Ta có*

i) Nếu (f_n) *hội tụ đều trên* I *về* f *và* f_n *liên tục tại* $x_0\in I$, $\forall n$ *thì* f *là hàm liên tục tại* x_0, *ii) Nếu* (f_n) *hội tụ đều trên* I *về* f *và* f_n *liên tục trên* $I, \forall n$ *thì* f *là hàm liên tục trên* I*,*

iii) Nếu $\sum f_n$ *hội tụ đều trên* I *và có tổng là* f *và* f_n *liên tục tại* $x_0 \in I, \forall n$*, thì* f *là hàm liên tục tại* x_0*.*

iv) Nếu $\sum f_n$ *hội tụ đều trên* I *và có tổng là* f *và* f_n *liên tục trên* $I, \forall n$ *thì* f *là hàm liên tục trên* I*.*

Chứng minh. i) $\forall s \in [a,b]$, ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} |f(s)-f(x_0)| &\le |f(s)-f_n(s)|+|f_n(s)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \\ &\le 2d(f_n,f)+|f_n(s)-f_n(x_0)|, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Với $\varepsilon > 0$, chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(f_n,f) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \ge n_0$ và vì f_{n_0} liên tục tại x_0 nên

$$\exists \delta > 0, \forall s \in [a,b], |s-x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(s)-f_n(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

kết hợp với (7.1) đúng khi $n = n_0$, suy ra $|f(s)-f(x_0)| < \varepsilon$, nghĩa là, f liên tục tại x_0.

iii) Vì chuỗi $\sum f_n$ hội tụ đều và có tổng là f và do dãy hàm tổng riêng phần $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ liên tục tại x_0 và hội tụ đều về f nên theo i), f liên tục tại x_0.

ii) và iv) hiển nhiên. ■

Ví dụ 4: Đặt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Tính $\lim_{x\to 0} f(x)$ nếu có?

Giải. Xét $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ta có $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n2^n} = b_n, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \forall n,$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}$ suy ra $\sum b_n$ hội tụ. Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hội tụ đều về f trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Đồng thời $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ suy ra f liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, đặc biệt tại $x = 0$. Nên $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$ ■

3.5. Mệnh đề. *Cho* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *là một dãy các hàm khả tích. Ta có*

i) Nếu (f_n) *hội tụ đều về* f *trên* $[a,b]$ *thì* f *là hàm khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

ii) Nếu $\sum f_n$ *hội tụ đều về hàm tổng* f *trên* $[a,b]$ *thì* f *là hàm khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Chứng minh Đặt $a_n = d(f_n, f) = \sup_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)|$. Vì $f_n(x) - a_n \le f(x) \le f_n(x) + a_n$, với mọi $x \in [a,b]$. Do đó, với mọi phân hoạch $\sigma = (a_i)_{i=1,\cdots,n}$ của $[a,b]$, ta có:

$$\inf_{a_i\le x\le a_{i+1}} f_n(x) - a_n \le \inf_{a_i\le x\le a_{i+1}} f(x) \le \sup_{a_i\le x\le a_{i+1}} f(x) \le \sup_{a_i\le x\le a_{i+1}} f_n(x) + a_n.$$

Suy ra

$$L(f_n,\sigma) - a_n(b-a) \le L(f,\sigma) \le U(f,\sigma) \le U(f_n,\sigma) + a_n(b-a), \qquad (7.2)$$

nghĩa là

$$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) \le U(f_n,\sigma) - L(f_n,\sigma) + 2a_n(b-a), \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \in P.$$

Vì $a_n \to 0$ khi $n \to \infty$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ và vì f_{n_0} khả tích trên $[a,b]$ nên tồn tại phân hoạch $\sigma \in P$ sao cho

$$U(f_{n_0},\sigma) - L(f_{n_0},\sigma) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó, suy ra $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \varepsilon$. Vậy f là hàm khả tích và (10) cho

$$L(f_n,\sigma) - a_n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f_n,\sigma) + a_n(b-a), \forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma \in P,$$

và do đó

$$\sup_\sigma L(f_n,\sigma) - a_n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \inf_\sigma U(f_n,\sigma) + a_n(b-a), \forall n \in \mathbb{N},$$

mà

$$\sup L(f_n,\sigma) = \inf(f_n,\sigma) = \int_a^b f_n(x)dx$$

nên bất đẳng thức trên cho

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \le a_n(b-a) \to 0$$

khi $n \to \infty$. Vậy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Với $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ thì s_n là hàm khả tích và khi $\sum f_n$ hội tụ đều trên $[a,b]$ về hàm tổng f, s_n hội tụ đều trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\int_a^b f_k(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 5: Nếu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$. Chứng minh rằng

$$\int_0^\pi f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+3)^3}.$$

Giải. Ta có $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall x\in[0,\pi]$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều về f trên $[0,\pi]$. Đồng thời $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ khả tích trên $[0,\pi]$, suy ra

$$\int_0^\pi f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\pi\frac{\sin nx}{n^2}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+3)^3}. \qquad \blacksquare$$

3.6. Mệnh đề. *Cho* $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ *là một dãy các hàm thuộc lớp* C^1.

i) Nếu (f_n') *hội tụ đều trên* $[a,b]$ *và* $\exists x_0\in(a,b)$ *sao cho* $(f_n(x_0))$ *là dãy số hội tụ thì tồn tại hàm* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *khả vi trên* (a,b) *sao cho* (f_n) *hội tụ đều về* f *trên* $[a,b]$ *và* (f_n') *hội tụ đều về* f' *trên* (a,b).

ii) Nếu $\sum f_n'$ *hội tụ đều trên* $[a,b]$ *và* $\exists x_0\in(a,b)$ *sao cho* $\sum f_n(x_0)$ *là một chuỗi số hội tụ thì tồn tại hàm* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sao cho* $\sum f_n$ *hội tụ đều và có tổng là* f *và* $\sum f_n'$ *hội tụ đều và có tổng là* f'.

Chứng minh. i) Vì $f\in C^1$, ta có

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt. \tag{11}$$

Gọi g là hàm sao cho f_n' hội tụ đều về g trên (a,b) nên do mênh đề 2.2,

$$\int_{x_0}^x f_n'(t)dt \to \int_{x_0}^x g(t)dt$$

khi $n\to\infty$ và do đó $(f_n(x))$ là dãy hội tụ. Đặt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, do (11),

$$f(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \forall x \in [a,b], \tag{12}$$

với $\alpha = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Do mệnh đề 7.2.1, g là hàm liên tục trên $[a,b]$ nên (12) cho f là hàm khả vi trên (a,b) và $f'(x) = g(x), \forall x \in (a,b)$. Mặt khác, (11) và (12) cho

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(x_0) - \alpha| + \left|\int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))\,dt\right| \\ &\le |f_n(x_0) - \alpha| + (b-a)\,d(f_n', g), \forall x \in [a,b], \end{aligned}$$

suy ra

$$d(f_n, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - \alpha| + (b-a)\,d(f_n', g) \to 0$$

khi $n \to \infty$, nghĩa là (f_n) hội tụ đều về f trên $[a,b]$.

ii) $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ là một dãy các hàm thuộc lớp C^1 và s_n' hội tụ đều về g. Khi chuỗi $\sum f_k(x_0)$ hội tụ thì dãy $(s_n(x_0))$ hội tụ và do chứng minh trên, tồn tại hàm $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, khả vi trên (a,b) sao cho (s_n) hội tụ đều về f, nghĩa là $\sum f_n$ hội tụ đều về hàm tổng f, và (s_n') hội tụ đều về f', nghĩa là $\sum f_n'$ hội tụ đều về hàm tổng f. ■

Ví dụ 6: Đặt $f'f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$. Chứng minh $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Đặt $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$. Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ (vì $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ). Đồng thời $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$ hội tụ. Nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ hội tụ đều về f' trên $\mathbb{R}$, và $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. ■

3.3 CHUỖI LŨY THỪA

Một trong những tính chất quan trọng của các hàm sơ cấp cơ bản (như hàm mũ, logarit, sin, cosin) là chúng có thể biểu diễn bằng chuỗi có dạng $\sum a_n x^n$ với a_n là một dãy số. Một chuỗi như vậy được gọi là *chuỗi lũy thừa*. Ta có

3.7. Mệnh đề . *Nếu chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x = x_1 \in \mathbb{R}$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| \le |x_1|$.*

Chứng minh. Vì $a_n x_1^n \to 0$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $a_n x_1^n \le M, \forall n \in \mathbb{N}$. Bấy giờ, với $|x| \le |x_1|$, ta có

$$\left|a_n x^n\right|\left|a_n x_1^n\right|\cdot\left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^n \le M\left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì chuỗi lũy thừa $\sum\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ hội tụ nên $\sum a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối do tiêu chuẩn so sánh. ■

Từ mệnh đề 3.7, ta suy ra rằng đối với một chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$, chỉ có thể có một trong ba khả năng xảy ra sau:

i) $\sum a_n x^n$ chỉ hội tụ khi $x = 0$.

ii) $\sum a_n x^n$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

iii) Tồn tại $R > 0$ sao cho $\sum a_n x^n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) khi $|x| < R$ và phân kỳ khi $|x| > R$. Giá trị R được gọi là *bán kính hội tụ* của $\sum a_n x^n$.

Ta có

3.8. Định lý. *Xét chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \in [0, +\infty]$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha = +\infty$ *thì* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *chỉ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) khi* $x = 0$,

ii) Nếu $\alpha = 0$ *thì* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ (hội tụ tuyệt đối) với mọi* $x \in \mathbb{R}$,

iii) Nếu $0 < \alpha < +\infty$ *thì* $R = \frac{1}{\alpha}$ *là bán kính hội tụ của* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Chứng minh. Dùng tiêu chuẩn căn số của Cauchy, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha |x|, \forall x \in \mathbb{R}.$$ ■

Lưu ý 1: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum a_n (x - x_0)^n$, đặt $X = x - x_0$, ta cũng có kết quả tương tự.

i) Nếu $\alpha = +\infty$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ chỉ hội tụ khi $x = x_0$,

ii) Nếu $\alpha = 0$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$,

iii) Nếu $0 < \alpha < +\infty$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hội tụ khi $|x - x_0| < R$, phân kỳ khi $|x - x_0| > R$.

Lưu ý 2: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ tồn tại ($\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tồn tại) thì α trong định lý trên có thể tính bởi $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ($\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$).

Lưu ý 3: trong trường hợp tổng quát, ta không có kết luận gì về $\sum a_nx^n$ khi $|x|=R$ với R là bán kính hội tụ của $\sum a_nx^n$.

Ví dụ 8: Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^n$.

Giải. Ta có $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1, R=\frac{1}{\alpha}=1$.

* $|x+1|<1$ khi $-2<x<0$: chuỗi trên hội tụ

* $|x+1|>1$ khi $x<-2$ hay $0<x$: chuỗi trên phân kỳ

* $x+1=1$ khi $x=0$: chuỗi trên trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ do định lý Leibnitz.

* $x+1=-1$ khi $x=-2$: chuỗi trên trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi trên là $-2<x\le 0$. ■

3.9. Hệ quả. *Gọi* R *là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* $\sum a_nx^n$. *Ta có* $\sum a_nx^n$ *hội tụ đều trên mọi khoảng* $[-R',R']$ *với* $R'<R$.

Chứng minh. $\forall x\in[-R',R'], |a_nx^n|\le|a_n|(R')^n$ với mọi n và chuỗi số $\sum|a_n|(R')^n$ hội tụ. Suy ra $\sum a_nx^n$ hội tụ đều trên $[-R',R']$. ■

Đặc biệt, khi $\sum a_nx^n$ hội tụ tại mọi $x\in\mathbb{R}$, chuỗi hàm tương ứng hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a,b]$. Chẳng hạn, $\sum x^n$ hội tụ đều trên $[-a,a], 0<a<1$, và $\sum\frac{x^n}{n!}$ hội tụ đều trên mọi khoảng $[a,b]$.

Đặc biệt, xét chuỗi lũy thừa $\sum a_nx^n$ với bán kính hội tụ $0<R\le+\infty$, ta có $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ xác định trên $(-R,R)$.

3.10. Hệ quả. $f(x)$ *là hàm khả vi trên* $(-R,R)$ *và*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}. \tag{13}$$

Hơn nữa, với $-R<\alpha\le\beta<R$, *ta có*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\right). \tag{14}$$

Chứng minh. $\forall x\in(-R,R), \exists R'>0: -R<-R'<x<R'<R$, $\sum a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-R',R']$ và $\sum n a_n x^{n-1}$ hội tụ đều trên $[-R',R']$, ta nhận được (13). Khẳng định (14) là hiển nhiên. ■

Ví dụ 7: $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, ta suy ra $\left(e^x\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$ và

$$\int_a^b e^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right] = e^b - e^a.$$ ■

Cuối cùng, ta xét sự liên hệ giữa hàm số và chuỗi lũy thừa. Với hàm số f thuộc lớp C^{∞} trên một lân cận $(a-\eta, a+\eta), \eta>0$, của $a\in\mathbb{R}$. Do công thức Taylor, ta có

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_n h)$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + R_n(f,x),$$

với $0<\theta_n<1, \forall n\in\mathbb{N}$. Nếu $R_n \to 0$ khi $n\to\infty$, ta có

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n, |h|<\eta, \tag{15}$$

hoặc bằng cách viết $x = a+h$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, a-\eta<x<a+\eta. \tag{16}$$

Các chuỗi vế phải của (15) và (16) được gọi là các *chuỗi Taylor* và khi $a=0$, chuỗi vế phải của

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

được gọi là *chuỗi Maclaurin*.

Chẳng hạn, với $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$, ta có f thuộc lớp C^{∞} và $f^{(n)}(x)=e^x, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$. Ngoài ra, với $a=0$,

$$R_n(f,x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta_n x) = \frac{x^n}{n!}e^{\theta_n x}, 0<\theta_n<1.$$

Do đó, $\left|R_n(f,x)\right| \le e^{|x|}\frac{|x|^n}{n!} \to 0$ khi $n \to \infty$ và vì $f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ nên ta có khai triển hàm $f(x) = e^x$ bằng chuỗi Maclaurin như sau

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

và với $n = 1$, ta nhận được trở lại đẳng thức $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

3.4*. CHUỖI FOURIER

Trong phần 2, chúng ta đã khảo sát tính chất của hàm tổng $f(x) = \sum f_n(x)$ từ tính chất của các hàm f_n. Đặc biệt khi $f_n(x) = a_n x^n$, hàm $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ là một hàm khá tốt, chẳng hạn, có đạo hàm mọi cấp trên $(-R, R)$ với R là bán kính hội tụ của $\sum a_n x^n$ và hơn nữa các giá trị của f được xấp xỉ bằng các đa thức $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Trong mục này chúng ta sẽ khảo sát chuỗi lượng giác

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &+ (a_1\cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\end{aligned} \tag{17}$$

với a_0, a_n, b_n là các hằng số, $n \in \mathbb{N}$, và khảo sát sự liên hệ của nó với các hàm số.

3.11. Định nghĩa. Cho $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích. Chuỗi lượng giác (7.9) được gọi là *chuỗi Fourier* của hàm f khi các hệ số a_n, b_n được xác định bởi

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt, n \in \mathbb{N}.$$

và các hệ số này được gọi là các *hệ số Fourier*, hay các *hằng số Fourier*, của f.

Tính chất quan trọng nhất của chuỗi Fourier là khi hàm f thỏa một số điều kiện đơn giản trên $(-\pi, \pi)$ thì chuỗi Fourier của nó có tổng là $f(x)$ hay $\frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$ khi x nằm trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

Để tránh những điều kiện phức tạp, trong phần còn lại, ta giả sử f là hàm liên tục và đơn điệu trên khoảng $[-\pi, \pi]$. Ngoài ra, ta chấp nhận kết quả sau

3.12. Định lý (Tích phân Dirichlet)

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}f(0+),$$

và

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_a^b f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}dx=0,\ (0<a<b).$$

Từ định lý 3.12, ta có

3.13. Định lý. *Cho* $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ *liên tục và đơn điệu. Chuỗi Fourier của* f *hội tụ trên* $[-\pi,\pi]$ *và có tổng là* $f(x)$*, với* $-\pi<x<\pi$.

Chứng minh. Đặt $s_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$. Từ định nghĩa của $a_0,a_n,b_n\in\mathbb{R}$, ta suy ra

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[1+\sum_{k=1}^{n}2\cos k(t-x)\right]dt,$$

và từ đẳng thức

$$\sin\frac{2n+1}{n}\theta=\sin\frac{\theta}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{n}2\cos k\theta\right],$$

ta nhận được

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt.$$

Khi $-\pi<x<\pi$, thì

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{x}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt,$$

và với phép biến đổi $t-x=\mp2\alpha$,

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}}f(x-2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha.\tag{7.10}$$

Áp dụng định lý 3.12, ta được,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f\left(x-2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{2}\lim_{\alpha\to 0+} f\left(x-2\alpha\right) = \frac{\pi}{2}f\left(x\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f\left(x+2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{2}\lim_{\alpha\to 0+} f\left(x+2\alpha\right) = \frac{\pi}{2}f\left(x\right).$$

và do đó $\lim_{n\to\infty} s_n\left(x\right) = f\left(x\right)$. Tại $x = \pi$ ta có

$$\begin{aligned}
s_n\left(\pi\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\pi-2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\xi} f\left(\pi-2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi-\xi} f\left(\pi-2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\xi} f\left(\pi-2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi} f\left(-\pi+2\alpha\right)\frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha,
\end{aligned}$$

với $0 < \xi < \pi$. Lại do định lý 3.12, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(x\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(-\pi\right) + f\left(\pi\right)\right].$$

Trường hợp $x = \pi$ được khảo sát tương tự. ■

Ví dụ với hàm $f\left(x\right) = e^x$ trên khoảng $\left(-\pi, \pi\right)$, ta có,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right),$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos ntdt = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\frac{\left(-1\right)^n}{1+n^2},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin ntdt = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\frac{n\left(-1\right)^{n-1}}{1+n^2}.$$

Đặt $C = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}$. Ta có chuỗi Fourier của hàm $f\left(x\right) = e^x$ là

$$C\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^n\left[\frac{1}{1+n^2}\cos nx - \frac{n}{1+n^2}\sin nx\right]\right).$$

Chuỗi này có tổng là e^x khi $-\pi < x < \pi$ và là $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2}$ tại $x = \pm\pi$.

BÀI TẬP

3.1 Đặt $f_n\left(x\right) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$. Đặt $f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)$. Tìm $f\left(x\right)$. Chứng minh rằng f_n không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

3.2 Tìm miền hội tụ của chuỗi và tính tổng chuỗi đó?

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n+1}\ (a \neq 0)$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(2+x)^n}\ (a \neq 0)$ 4) $\sum_{k=0}^{+\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$

5) $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{kx}$ 6) $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln^k x$

3.3 Chứng minh $f_n(x) = nxe^{-nx}, x \geq 0$, hội tụ đều trên $[a, +\infty)$ với $a < 0$ nhưng không hội tụ đều trên $[0, a]$.

3.4 Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ hội tụ đều trên khoảng đóng bất kỳ không chứa $\pm 1, \pm 2, \cdots$.

3.5 Chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ hội tụ đều trên $[p, +\infty)$ nếu $p \geq 0$.

3.6 Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$.

a) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[0, \infty)$,

b) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[-a, a]$ trong đó $0 < a < 1$,

c) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[b, +\infty)$ trong đó $b > -1$,

d) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $(-\infty, -c]$, trong đó $c > 1$.

3.7 Nếu $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

3.8 Nếu $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ và $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, chứng minh rằng dãy hàm trên không hội tụ đều trên $[0,1]$ và $\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

3.9 Nếu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, trong đó $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$, tìm $\int_0^1 f(x)dx$ và $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. Dãy f_n có hội tụ đều về f trên $[0,1]$ không?

3.10 Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ thì

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 2 + 3\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + \cdots.$$

3.11 Cho $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(\ln n)^2}, -1 \le x \le 1$. Tính $f'(x)$ nếu có.

3.12 Cho $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, -1 \le x \le 1$. Tính $f'(x)$ nếu có.

3.13 Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{2^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} x^n$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n \cdot \ln n}$ 6) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

3.14 Cho $f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n, 0 \le x \le 1$. Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0. Tính $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

3.15 Cho (f_n) là một dãy hàm hội tụ đều về hàm f trên $D, x \in D'$. Giả sử $\lim_{t\to x} f_n(t) = a_n$ tồn tại với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng (a_n) là dãy hội tụ và

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3.16 (Định lý Dini) Cho (f_n) là một dãy hàm liên tục, hội tụ từng điểm về hàm số liên tục f trên $[a,b]$. Chứng tỏ rằng, nếu $f_n(x) \ge f_{n+1}(x), \forall x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$, thì (f_n) hội tụ đều trên $[a,b]$.

3.17 Cho $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2 sao cho $\Phi(x)=x$ khi $0\le x\le 1$ và $\Phi(x)=2-x$ khi $1\le x\le 2$. Đặt

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\Phi(4^n x).$$

Chứng tỏ rằng f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại mọi điểm.

3.18 Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên D. Chứng minh rằng (f_n+g_n) cũng hội tụ đều trên D. Hơn nữa, giả sử thêm rằng (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn. Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

3.19 Xét

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{khi } x<\frac{1}{n+1},\\ \sin^2\frac{\pi}{x}, & \text{khi } \frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n},\\ 0, & \text{khi } \frac{1}{n}<x.\end{cases}$$

Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều về một hàm liên tục.

3.20 Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ nhưng là chuỗi hàm hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a,b]$.

3.21 Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm $f(x)=x^2, g(x)=x,$ và $h(x)=|x|$ trên đoạn $[-\pi,\pi]$.

3.22 Chứng tỏ rằng hàm $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ liên tục trên miền $x>1$ và có đạo hàm mọi cấp trên miền này.

3.23 Chứng tỏ rằng hàm $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}$ xác định và thuộc lớp C^∞ trên miền $x>0$.

3.24 Với những giá trị nào của α thì

a) Dãy hàm $f_n(x)=n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ từng điểm trên $[0,1]$,

b) Dãy hàm $f_n(x)=n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

3.25 Cho $0 \le a_n \le 1, \forall n \ge 0$. Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $0 \le x < 1$ và có tổng $\le \frac{1}{1-x}$. Hơn nữa, nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ, chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $0 \le x \le 1$ và có tổng $\le \min\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \frac{1}{1-x}\right)$.

3.26 Cho chuỗi số dương hội tụ $\sum a_n$. Chứng minh rằng $\sum a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| \le 1$.

3.27 Chứng minh rằng

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, |x| < 1,$$

và

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k,$$

với $m > 0, m \notin \mathbb{N}, |x| < 1$.

3.28 Cho $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}; C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$, và $S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$. Chứng minh rằng

a) $E(x)E(y) = E(x+y)$,

b) $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$,

c) $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$,

d) $\left(C(x)\right)^2 + \left(S(x)\right)^2 = 1$.

3.29 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{x}{3^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

PHỤ LỤC: MỘT SỐ BÀI TẬP VỀ DÃY HÀM

+ Để chứng minh dãy hàm $f_n : A \to \mathbb{R}$ hội tụ đều về f trên tập A, ta chứng minh $d\left(f_n, f\right) = \sup\limits_{x \in A} | f_n(x) - f(x) |$ hội tụ về 0.

+ Để chứng minh dãy hàm f_n không hội tụ đều về f trên tập A, ta chứng minh $d\left(f_n, f\right) = \sup\limits_{x \in A} | f_n(x) - f(x) |$ không hội tụ về 0.

Muốn vậy ta chọn dãy $\{x_n\}$ trong A sao cho $f(x_n)$ và $f_n(x_n)$ dễ dàng tính và $| f_n(x_n) - f(x_n) |$ không tiến về 0.

Ngoài ra, ta có thể dùng dấu hiệu sau: nếu f_n liên tục trên A và f không liên tục trên A thì f_n cũng không hội tụ đều về f.

Ví dụ 1. Đặt $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ và $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Tìm $f(x)$. Chứng minh rằng f_n không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

Giải. Đầu tiên ta đi tìm $f(x)$. Ta có

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}},$$

nên

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Vậy, $f(x) = 0, \forall x^2 < 1, f(x) = \dfrac{1}{2}$ khi $x^2 = 1$ và $f(x) = 1, \forall x^2 > 1$. Tóm lại, hàm số f được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi} \quad |x| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{khi} \quad |x| = 1, \\ 1, & \text{khi} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Chứng minh f_n không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$:Lấy dãy số $\{x_n\}$ trong $(0,1)$ được xác định như sau

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[2n]{2}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có

$$f(x_n)=0 \text{ và } f_n(x_n)=f_n\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{2}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Do $d(f_n,f)$ không hội tụ về 0 nên $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Cho

$$f_n(x)=\frac{x\sqrt{n}}{2018+n^2x^4},\quad x\in[0,1],\quad n\in\mathbb{Z}^+.$$

a) Chứng minh dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ hội tụ từng điểm.

b) Chứng minh dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ không hội tụ đều.

Giải: Nếu $x=0$ thì

$$f_n(x)=0\to f=0.$$

Nếu $0<x\le 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{2018}{\sqrt{n}}+n\sqrt{n}x^3}=0.$$

Vây dãy hàm này hội tụ điểm về hàm $f=0.$ Lấy dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ trong $[0,1]$ được xác định như sau: $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ta có $f(x_n)=0$ và $f_n(x_n)=\frac{1}{2019}$.

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\ge|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{1}{2019}.$$

Vậy dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ không hội tụ đều.

Ví dụ 3. Chứng minh $f_n(x)=nxe^{-nx}, x\ge 0$ hội tụ đều trên $[a,+\infty)$ với $a>0$ nhưng không hội tụ đều trên $[0,a]$.

Giải. Chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a,+\infty)$:Đặt $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x).$ Ta thấy $f_n(0)=0,$ suy ra

$$f(0)=\lim_{n\to\infty} f_n(0).$$

Theo quy tắc L'Hopital, ta có

$$\lim_{y\to+\infty} yxe^{-yx} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(yx)'}{(e^{yx})'} = \lim_{y\to+\infty} \frac{x}{xe^{yx}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^{yx}} = 0.$$

Với $x > 0$, ta có

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx} = \lim_{y\to+\infty} yxe^{-yx} = 0.$$

Tóm lại, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \ge 0.$ Với $a > 0$ ta cần chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ về f trên $[a, +\infty).$ Ta có $f_n(x) = nxe^{-nx}, \forall x \ge a.$ Xét

$$f_n'(x) = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = (1-nx)e^{-nx} \le (1-na)e^{-nx}, \forall x \ge a.$$

Có $N \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $1 - Na < 0.$ Khi đó, với $n \ge N,$ ta có

$$f_n'(x) \le ne^{-nx}(1-na) < -, \forall x \ge a.$$

Suy ra, với $n \ge N$ thì f_n là hàm nghịch biến trên $[a, = \infty).$ Khi đó ta có

$$d\left(f_n\big|_{[a,+\infty)}, f\big|_{[a,+\infty)}\right) = \sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a).$$

Vậy, $\forall n > N, d(f_n, f) = f_n(a).$ Mà $f_n(a) \to 0$ (chứng minh trên) nên $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty).$

Chứng minh với $a > 0$ thì $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0, a].$ Lấy dãy $\{x_n\}$ trong $[0, a]$ xác định bởi

$$x_n = \frac{a}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta thấy

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{a}{n}\right) = n.\frac{a}{n}.e^{-n.\frac{a}{n}} = ae^{-a}.$$

Mà

$$d\left(f_n\big|_{[0,a]}, f\big|_{[0,a]}\right) = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} f_n(x) \ge f_n(x_n) = ae^{-a}.$$

Vậy $d\left(f_n\big|_{[0,a]}, f\big|_{[0,a]}\right)$ không hội tụ về 0 nên f_n không hội tụ đều về f trên $[0, a].$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2},$$

hội tụ đều trên khoảng đóng bất kỳ không chứa $\pm 1, \pm 2, \ldots$

Giải. Xét khoảng đóng $[a, b]$ không chứa $\pm 1, \pm 2, \ldots,$ có $C > 0$ sao cho $|x| < C, \forall x \in [a, b]$. Do $n^2 - n^{\frac{3}{2}} \to +\infty,$ có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 - n^{\frac{3}{2}} > C^2, \forall n \geq \mathbb{N}$. Ta có

$$\frac{|x|}{n^2 - x^2} - \frac{C}{n^2 - C^2} = \frac{\left(n^2 + |x|C\right)\left(|x| - C\right)}{\left(n^2 - x^2\right)\left(n^2 - C^2\right)} \leq 0, \forall x \in [a, b], n \geq N.$$

Khi đó

$$\left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \frac{2C}{n^2 - C^2} \leq \frac{2C}{n^{\frac{3}{2}}}, \forall x \in [a, b], n \geq N.$$

Ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2C}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ nên chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1 + x^n)}.$$

a) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[0, \infty)$.

b) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[-a, a]$, trong đó $0 < a < 1$.

c) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[b, \infty)$, trong đó $b > -1$.

d) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $(-\infty, -c]$ trong đó $c > 1$.

Giải. a) Với mọi $x \in [0, \infty)$, ta có

$$\frac{x^n}{n^2(1 + x^n)} < \frac{1}{n^2}.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1 + x^n)}$ hội tụ đều trên $[0, \infty)$.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\left|1 + x^n\right| \geq 1 - \left|x^n\right| = 1 - |x|^n \geq 1 - a^n > 0, \forall x \in [-a, a] \subset (-1, 1).$$

Do $a^n \to 0$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N, a^n < \frac{1}{2}$ hay $0 < \frac{a^n}{1-a^n} < 1.$ Do đó

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}\right| = \frac{|x|^n}{n^2|1+x^n|} \leq \frac{a^n}{n^2\left(1+a^n\right)} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in [-a,a], n \geq N.$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $[-a,a]$.

c) Đặt

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{n^2\left(1+x^n\right)}, S(x) = \sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{n^2\left(1+x^n\right)} \text{ với } x \in [b,\infty).$$

$S(x)$ hoàn toàn xác định theo câu a và câu b. Với một $\varepsilon > 0,$ theo câu a ta có một $L \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in[0,\infty)}|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq L,$$

hay nói cách khác

$$|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in [0,\infty), m \geq L. \quad (1)$$

Theo câu b ta có một $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in[b,0)}|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq M,$$

hay nói cách khác

$$|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in [b,0), m \geq M. \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra

$$\sup_{x\in[b,\infty)}|S_m(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall m \geq \max\{M,L\}.$$

d) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $|1+x^n| \geq |x^n| - 1 \geq c^n - 1 > 0.$ Do $c^n \to \infty$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N, c^n > 2$ nghĩa là $\frac{c^n}{c^n-1} < 2.$ Do đó

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}\right| = \frac{|x|^n}{n^2|1+x^n|} \le \frac{|x|^n}{n^2\left(|x|^n-1\right)} = \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{|x|^n-1}\right)$$

$$\le \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{c^n-1}\right) = \frac{c^n}{n^2\left(c^n-1\right)} \le \frac{2}{n^2}, \forall x \in \left(-\infty,-c\right], n \ge N.$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $\left(-\infty,-c\right]$.

Ví dụ 6. Giả sử

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Giải. Xét

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Ta có

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

và chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

hội tụ nên suy ra chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

hội tụ đều về hàm f trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Đồng thời

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{\sin nx}{n^3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Ví dụ 7. Nếu $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ và $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. Chứng minh rằng dãy hàm trên không hội tụ đều trên $[0,1]$ và

$$\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

Giải. Trước hết ta tính $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, ta xét hai trường hợp sau:

Với $x=0$ thì $f_n(0)=0, \forall n\in\mathbb{N}$, nên $f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0.$

Với $x>0$ thì theo quy tắc L'Hospital, ta có

$$\lim_{y\to\infty}y.x.e^{-yx^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{(yx)'}{(e^{yx})'}=\lim_{y\to\infty}\frac{x}{x^2e^{yx^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xe^{yx^2}}=0.$$

Do đó, ta có

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}f_n(x)\geq f_n(x_n)=\sqrt{n}e^{-1}\to\infty.$$

Suy ra $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$. Chứng minh

$$\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

Thật vậy, do $f\equiv 0$ nên

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

Mặt khác,

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\frac{-1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right).$$

Mà ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 8. Nếu $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ và $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$. Tìm $\int\limits_0^1 f(x)dx$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$. Dãy f_n có hội tụ đều về f trên $[0,1]$ không?

Giải. Tìm $\int\limits_0^1 f(x)dx$: Với $x=0$ thì $f_n(x)=0$ nên

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

Với $x\neq 0$ thì

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^4}=0.$$

Vậy $f(x)=0$. Vì $f\equiv 0$ nên

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$: Ta có

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{2nx}{1+n^2x^4}dx=\int_0^1\frac{d\left(nx^2\right)}{1+\left(nx^2\right)^2}=\arctan\left(nx^2\right)\Big|_0^1=\arctan n.$$

Vì $\arctan n\to\dfrac{\pi}{2}$, nên

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{\pi}{2}.$$

Dãy f_n không hội tụ đều về f trên $[0,1]$. Thật vậy, ta xét dãy $\{x_n\}: x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \forall n\in\mathbb{N}$. Khi đó rõ ràng $x_n\in[0,1]$ và

$$f_n\left(x_n\right)=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2n.\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+n^2.\dfrac{1}{n^2}}=\sqrt{n}\to\infty.$$

Do đó, ta có

$$d\left(f_n,f\right)=\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup_{x\in[0,1]}f_n(x)\ge f_n(x_n)=\sqrt{n}\to\infty.$$

Suy ra, Dãy f_n không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

Ví dụ 9. Cho

$$f_n(x)=\frac{x\sqrt{n}}{2019+nx^2+n^2x^4},\quad x\in[0,1],\quad n\in\mathbb{Z}^+.$$

a) Chứng minh dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ hội tụ từng điểm.

b) Chứng minh dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ không hội tụ đều.

Giải: Nếu $x=0$ thì

$$f_n(x)=0\to f=0.$$

Nếu $0<x\le 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{2019}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}x^2+n\sqrt{n}x^4}=0.$$

Vây dãy hàm này hội tụ điểm về hàm $f=0.$ Lấy dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ trong $[0,1]$ được xác định như sau: $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ta có $f(x_n)=0$ và $f_n(x_n)=\frac{1}{2021}$.

$$d\left(f_n,f\right)=\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right|\ge\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\frac{1}{2021}.$$

Vậy dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ không hội tụ đều.

Ví dụ 10. Cho $f_n(x)=\dfrac{nx}{\sqrt{1+n^3x^3}},\quad x\in[0,1],\quad n\in\mathbb{Z}^+.$

a) Chứng minh dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ hội tụ từng điểm.

b) Chứng minh dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ không hội tụ đều.

Giải: Nếu $x=0$ thì

$$f_n(x)=0\to f=0.$$

Nếu $0<x\le 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + nx^3}} = 0.$$

Vậy dãy hàm này hội tụ điểm về hàm $f = 0$. Lấy dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ trong $[0,1]$ được xác định như sau: $x_n = \frac{1}{2n}$. Ta có $f(x_n) = 0$ và $f_n(x_n) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ không hội tụ đều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đặng Đình Áng, *Nhập môn giải tích*, NXBGD, 1998.

[2] Wilfred Kaplan, *Advances calculus*, Addison-Wesley, 1993.

[3] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1971.

[4] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích hàm nhiều biến*, NXB ĐHQG Tp HCM, 2002.

[5] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình giải tích 2*, NXB ĐHQG Tp HCM, 2011.