

Bài tập nộp 2 - Lý thuyết Xác suất

Hạn chót nộp bài: 24h ngày 11 tháng 02 năm 2025 (đến hết ngày 11/02/2025)

Note:

- Danh sách bài tập gồm 12 bài.
- Có hai cách trình bày:
 - cách 1: các bạn viết tay rồi chụp ảnh (hoặc scan) bài làm;
 - cách 2: (không bắt buộc) các bạn soạn thảo bài làm bằng LaTeX.

sau đó nộp file theo link google form sẽ được gửi kèm trong email vào ngày 10/02/2025.

- Các bạn nộp file bài làm với tên có dạng: "DDXS_23TTH2B_MSSV_HọTên_Baitap2".

Bài 1. Cho biến ngẫu nhiên X với $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Chứng minh $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Bài 2. Cho b.n.n. X có phân phối nhị thức $\text{binom}(n; p)$ với hàm mật độ (với $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$)

$$f_Y(y) = \begin{cases} C_n^x \times p^x \times (1-p)^{n-x} & , \text{ nếu } x = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0 & , \text{ nếu khác ;} \end{cases}$$

Tính kỳ vọng và phương sai của X theo n và p .

Bài 3. Cho b.n.n. Y có phân phối mũ $\text{Exp}(\beta)$ với hàm mật độ (với $\beta > 0$)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta \times e^{-\beta y} & , \text{ nếu } y \geq 0; \\ 0 & , \text{ nếu } y < 0; \end{cases}$$

Tính kỳ vọng và phương sai của Y theo β .

Bài 4. Biến ngẫu nhiên X gọi là có phân phối Poisson $\text{Pois}(\lambda)$ (với $\lambda > 0$) nếu X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^x}{x!} & \text{nếu } x \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbb{N}; \end{cases}$$

- Tìm hàm sinh moment $M_X(t)$ của X .
- Tính kỳ vọng và phương sai của X .
- Chứng tỏ rằng nếu X, Y độc lập, $X \sim \text{Pois}(\lambda_X)$ và $Y \sim \text{Pois}(\lambda_Y)$ (với $\lambda_X, \lambda_Y > 0$) thì $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda_X + \lambda_Y)$.

Bài 5. B.n.n. X gọi là có phân phối Chi-bình phương $\chi^2(m)$ (với $m > 0$) nếu X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{nếu } x > 0; \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0; \end{cases}$$

- (a) Tìm hàm sinh moment $M_X(t)$ của X .
- (b) Tính kỳ vọng và phương sai của X .
- (c) Chứng tỏ rằng nếu X, Y độc lập, $X \sim \chi^2(m_X)$ và $Y \sim \chi^2(m_Y)$ (với $m_X, m_Y > 0$) thì $X + Y \sim \chi^2(m_X + m_Y)$.

Bài 6. (a) Giả sử xúc xắc I là một xúc xắc cân đối. Đặt X là số chấm thu được khi tung xúc xắc I.

Tính kỳ vọng (trung bình) $\mathbb{E}(X)$.

- (b) Tung thêm xúc xắc cân đối II độc lập với xúc xắc I. Gọi Y là số chấm thu được khi tung xúc xắc II. Chứng minh $\mathbb{E}(X + Y | Y) = Y + \frac{7}{2}$.

Bài 7. Cho Y_1, Y_2, Y_3 là các b.n.n. độc lập có cùng phân phối $\text{Pois}(\lambda)$ (với $\lambda > 0$).

Tính theo λ và Y_1 các biểu thức sau

$$\mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + Y_3 | Y_1) \quad \text{và} \quad \mathbb{E}(Y_1 + 2Y_2 - Y_3 | Y_1)$$

Bài 8. Cho biến ngẫu nhiên $X \sim \mathcal{N}(3, 25)$.

- (a) Tính hoặc suy ra $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$ và $\mathbb{E}(X^2)$. (b) Tính: $\mathbb{P}(X \leq 6)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ và $\mathbb{P}(-2 < X \leq 8)$.

Bài 9. Qua thu thập dữ liệu về việc chuyển phát bưu phẩm ở Pháp, người ta thấy rằng tỷ lệ bưu phẩm bị chuyển nhầm địa chỉ là 0.05%. Một lô hàng gồm 450000 bưu phẩm cần chuyển phát. Giả sử trong quá trình chuyển phát, khả năng mỗi bưu phẩm bị chuyển nhầm địa chỉ là độc lập với nhau.

- (a) Khả năng để có ít nhất 15 bưu phẩm bị chuyển nhầm địa chỉ là bao nhiêu?
- (b) Tính xác suất để có không quá 150 bưu phẩm bị chuyển nhầm địa chỉ.

(Hint: áp dụng định lý giới hạn trung tâm, cụ thể, xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn hoặc phân phối Poisson)

Bài 10. Tại trạm thu phát sóng, một thiết bị truyền tín hiệu sử dụng một transistor có tuổi thọ tuân theo phân phối mũ có trung bình là 12 giờ. Cho biết khi transistor đang sử dụng bị hỏng sẽ lập tức được thay bởi một transistor mới khác. Biết rằng trong kho có tất cả 200 transistor. Tính xác suất để tín hiệu được truyền qua thiết bị này ít nhất 750 giờ.

Bài 11. Cho $X_j, j = 1, 2, \dots$ là i.i.d. và $X_j \sim \mathcal{N}(-2, 16)$. Tính

- (a) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$; (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{3n}^2}$.
- (c) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_m)^2 (X_1 + X_2 + \dots + X_{3m})}{(X_1 + X_2 + \dots + X_{2m})^4}$;

Bài 12. Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ f_X .

- (a) Với F_X là hàm phân phối tích lũy của X . Tìm hàm phân phối tích lũy F_Y của $Y = X^2$ theo F_X . Từ đó suy ra hàm mật độ f_Y của Y theo hàm f_X .
- (b) Áp dụng: với $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, tìm hàm mật độ của $Y = X^2$.

--- Hết ---