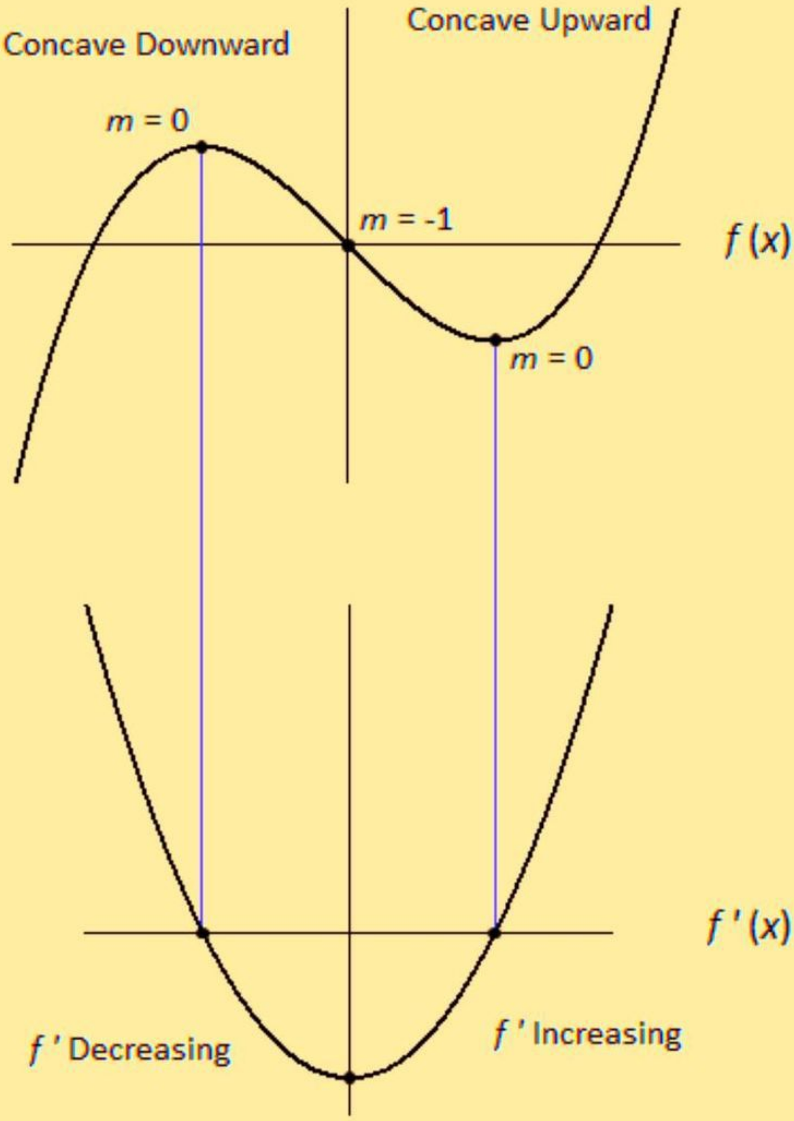
Khoa Toán Tin học
Trường Đại học KHTN
Đại học quốc gia TPHCM

ĐÁP ÁN GIẢI TÍCH
VI TÍCH PHÂN A1



University of Science
Room F08-09, 227 Nguyen Van Cu
Street, District 5, Ho Chi Minh City,
Vietnam
Phone :(028)73089899

LỜI MỞ ĐẦU

Bộ đề kèm lời giải này được thực hiện vì nhu cầu muốn các bạn sinh viên có nguồn tham khảo cách tư duy trong việc giải các câu trong đề thi các năm của môn giải tích A1 và vi tích phân A1. Các đề được thu thập từ đề thi các năm của khoa Toán – Tin học, trường Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh. Trong lúc thực hiện sẽ có thể có sai sót trong cách suy luận và xuất hiện các lỗi đánh máy, xin các bạn đọc bỏ qua cho.

Mọi góp ý về đề thi và lời giải xin gửi về email dpthienphu@gmail.com

Chúc các bạn có được lợi ích khi xem xét các phần trong bộ đề kèm lời giải này.

Chúng tôi hi vọng nhận được phản hồi tích cực từ các bạn.

Để ủng hộ cho công việc sản xuất các sản phẩm học tập trong tương lai, các bạn có thể ủng hộ cho chúng tôi thông qua các hình thức sau:

1) **Ngân hàng**:
   - Ngân hàng Tiên Phong (TP Bank)
   - Số tài khoản: 0347 1177 301
   - Tên: DONG PHUC THIEN PHU
2) **Ví điện tử Momo**: 0903.052.809

Trân trọng!

MỤC LỤC

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2006 – 2007

THỜI GIAN: 120 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải 6 trong 7 câu sau:

Câu 1: Cho A và B là các tập con khác trống của $[0;\ +\infty)$. Giả sử A và B bị chặn trên.
Đặt $C = \{x^2y : x \in A;\ y \in B\}$. Chứng minh C bị chặn trên.

Câu 2: Giải phương trình $x^3 + \sin\left(x^{1/7} + \sin 8x\right) = 1$.

Câu 3: Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Đặt $c_n = x_n y_n$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $\{c_n\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 4: Đặt $a_n = \sin\left({n\pi}/{2}\right)$ với mọi số nguyên dương n. Tính $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)$ khác không với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

Câu 6: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(t) \geq 0$ với mọi t trong $\mathbb{R}$. Đặt

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)dt, \qquad \forall x \in [1;\ 2]$$

Cho x và y trong $[1;\ 2]$ sao cho $x \leq y$. Hỏi $g(x) \leq g(y)$ đúng hay sai?

Câu 7: Đặt $A = \{2^{-2};\ 3^{-3};\ \cdots;\ n^{-n};\ \cdots\}$. Xác định A^* (A^* là tập hợp tất cả các điểm tụ của A).

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2007 – 2008

THỜI GIAN: 120 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải 5 trong 6 câu sau:

Câu 1: Cho A và B là các tập con khác trống của $(-\infty;\ 0)$. Giả sử với mọi x trong A có một y trong B sao cho $x \leq y$. Hỏi $\sup A \leq \sup B$ đúng hay sai?

Câu 2: Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy cùng hội tụ về a trong $\mathbb{R}$. Đặt $c_{2k} = x_{2k}$ và $c_{2k+1} = y_{2k+1}$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{c_n\}$ có là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 3: Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$. Hỏi A có bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ hay không, và nếu đặt $b = \sup A$, thì b có bằng $\sqrt{5}$ hay không?

Câu 4: Cho a là một số thực và $\{x_n\}$ là một dãy trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ là một số thực b.

Đặt $c_n = a + x_n$. Tính $\liminf\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(0) > 0$. Hỏi có một số thực dương a sao cho $f|_{[-a;\,a]}$ là một hàm số đơn điệu tăng hay không?

Câu 6: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(0) = g(0)$ và

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x g(t)dt, \qquad \forall x \in (1;\ +\infty)$$

Hỏi $f(x) = g(x)$ với mọi x trong $(1;\ +\infty)$ đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2008 – 2009

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho A; B; C và D là các tập con của một tập X. Giả sử $A \cap B = C \cap D = \emptyset$.
Hỏi $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$ đúng hay sai?

Câu 2: Cho A là một tập con của một tập X và b là một phần tử trong $X \setminus A$. Giả sử A có n phần tử $(n \geq 1)$. Hỏi tập $A \cup \{b\}$ có $n+1$ phần tử đúng hay sai?

Câu 3: Cho f là một ánh xạ từ một tập X vào một tập Y. Cho C và D là hai tập con của Y. Hỏi $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ đúng hay sai?

Câu 4: Cho A và B là hai tập hợp khác trống. Giả sử A có m và B có n phần tử và $m < n$. Hỏi có một toàn ánh f từ A vào B hay không?

Câu 5: Cho A và B là hai tập con bị chặn trong $\mathbb{R}$ sao cho $A \cap B$ khác trống. Hỏi $\inf A \leq \sup B$ đúng hay sai?

Câu 6: Phủ định mệnh đề: Với mọi số thực M có một số nguyên dương N sao cho $x_n \geq M$ với mọi $n > N$.

Câu 7: Cho a_1; a_2; ...; a_n là n số thực. Hỏi ta có bất đẳng thức sau hay không

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Câu 8: Cho a_1; a_2; $\cdots$; a_n là n số thực. Hỏi tập $\{a_1; a_2; \cdots; a_n\}$ có bị chặn trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 9: Cho A_1; A_2; $\cdots$; A_n là n tập hợp bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi tập đẳng thức sau đúng hay sai

$$\inf A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \inf\{\inf A_1; \inf A_2; \cdots; \inf A_n\}$$

Câu 10: Cho A là một tập hợp con bị chặn trong $\mathbb{R}$. Giả sử A chứa khoảng mở $(\inf A; \sup A)$. Hỏi A có là một khoảng hay không?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2008 – 2009

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ là một số thực a. Đặt $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Hỏi $a = \inf A$ đúng hay sai?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Hỏi tập $f\big((a;\ b)\big)$ là một khoảng mở đúng hay sai?

Câu 3: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử có $x;\ y$ và z trong $(a;\ b)$ sao cho $x < y < z$ và $f(y) < \min\{f(x);\ f(z)\}$. Hỏi có c trong $(a;\ b)$ sao cho $f'(c) = 0$ đúng hay sai?

Câu 4: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử

$$\int_c^d f(t)dt \leq 0, \qquad \forall c;\ d \in (a;\ b), \qquad c < d$$

Hỏi $f(x) \leq 0$ với mọi x trong $(a;\ b)$ đúng hay sai?

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Đặt

$$g(x) = \max\{0;\ f(x)\}, \qquad \forall x \in (a;\ b)$$

Hỏi g khả vi trên $(a;\ b)$ đúng hay sai?

Câu 6: Phủ định mệnh đề sau: Có một số thực dương M sao cho với mọi số thực dương α có x và y trong $[0;\ 1]$ để cho $|x-y| \leq \alpha$ và $|f(x) - f(y)| \geq M$.

Câu 7: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{3n} a_n$ có hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 8: Hỏi dãy $\left\{\left(1 + {}^{1}/_{n^2}\right)^{{}^{1}/_{n^2}}\right\}$ có hội tụ hay không?

Câu 9: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử tập $\{f'(x) : x \in (a;\ b)\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ có và bằng một số thực hay không?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2009 – 2010

THỜI GIAN: 60 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho A là tập hợp khác trống và f là một ánh xạ từ A vào A. Đặt $g(x) = f\big(f(x)\big)$ với mọi x trong A. Hỏi g có là một ánh xạ hay không? Hỏi $g(A) \subset f(A)$ đúng hay sai?

Câu 2: Cho A và B là hai tập hợp khác trống. Giả sử A và B cùng có n phần tử. Hỏi có một song ánh từ A và B hay không?

Câu 3: Cho f là một ánh xạ từ một tập X vào một tập Y. Cho C và D là hai tập con của Y.
Hỏi $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ đúng hay sai?

Câu 4: Phủ định mệnh đề sau: Với mọi số thực dương ε, có một số nguyên dương N sao cho

$$|f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n > N$$

Câu 5: Cho $x_n = \sin {}^{n\pi}/_{2}$. Tính $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Câu 6: Cho B là một tập con khác trống và bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$. Hỏi có một dãy $\{y_m\}$ trong B sao cho $\lim\limits_{m\to+\infty} y_m = \inf B$ hay không?

Câu 7: Cho $f(x) = x + \cos x + \sin 6x^2$ với mọi số thực x. Hỏi phương trình $f(x) = 2009$ có nghiệm hay không?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2009 – 2010

THỜI GIAN: 90 PHÚT

(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực sao cho dãy $\{x_n^{2009}\}$ hội tụ. Hỏi dãy $\{x_n\}$ có hội tụ hay không?

Câu 2: Hỏi bất đẳng thức sau đúng hay sai?

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \cos(x^9)\, dx$$

Câu 3: Phủ định mệnh đề sau: Với mọi số thực dương ε, có một số nguyên dương N sao cho

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n > m > N$$

Câu 4: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực bị chặn, và $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con hội tụ của $\{x_n\}$. Hỏi bất đẳng thức sau đúng hay sai?

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \le \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên khoảng $(0;\ 12)$. Giả sử $f(4) < f(6)$ và $f(8) < f(6)$. Hỏi phương trình $f'(t) = 0$ có giải được trên khoảng $(0;\ 12)$ hay không?

Câu 6: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(c;\ d)$. Cho $[a;\ b]$ là một khoảng đóng chứa trong $(c;\ d)$. Hỏi $f([a;\ b])$ có bị chặn dưới hay không?

Câu 7: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Hỏi "$\{x_n\}$ hội tụ" có tương đương với "$\{|x_n|\}$ hội tụ" hay không?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2010 – 2011

THỜI GIAN: 60 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho $a_1; \cdots; a_n$ là n số thực. Hỏi có hay không một số nguyên i trong $\{1; \cdots; n\}$ sao cho:

$$a_k \le a_i, \qquad \forall k \in \{1; \cdots; n\}$$

Câu 2: Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp X vào một tập hợp Y. Giả sử $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ với mọi tập con A và B của X có tính chất $A \cap B = \emptyset$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

Câu 3: Phủ định mệnh đề sau: Với mọi số thực dương ε, có một số nguyên dương N sao cho:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

Câu 4: Cho một số thực a, và cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ. Đặt $y_n = a + x_n$. Hỏi $\{y_n\}$ có hội tụ hay không?

Câu 5: Cho A là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}$. Giả sử B bị chặn trên nếu B là một tập con khác rỗng và hữu hạn chứa trong A. Hỏi A có bị chặn trên hay không?

Câu 6: Cho B là một tập con khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Đặt $A \coloneqq \{xy \mid x;\ y \in B\}$. Hỏi A có bị chặn trên hay không?

Câu 7: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Đặt $y_n = x_n^2$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi hai mệnh đề sau đây có tương đương hay không?

(i) $\{x_n\}$ hội tụ.

(ii) $\{y_n\}$ hội tụ.

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2010 – 2011

THỜI GIAN: 90 PHÚT

(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo, nhưng không được dùng máy tính cá nhân PC, Laptop)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho n là một số nguyên ≥ 5 và $f(x) = \sqrt{x}$ với mọi x trong $(0;\ +\infty)$. Hỏi công thức sau đây đúng hay sai:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) x^{n-\frac{1}{2}}}$$

Câu 2: Tính giới hạn của dãy số sau

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$$

Câu 3: Trình bày bằng tiếng Việt một thí dụ có trong sách "Calculus: concepts and contexts" của James Stewart về thực tiễn của một trong ba bài toán 93, 95 và 97 (trong slides bài giảng).

Câu 4: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực bị chặn. Hỏi khẳng định sau đúng hay sai?

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \text{ là số thực}$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực bị chặn. Hỏi tập $\{f(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$ có bị chặn dưới hay không?

Câu 6: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(c;\ d)$. Cho $[a;\ b]$ là một khoảng đóng chứa trong $(c;\ d)$, và t trong $[a;\ b]$ sao cho $f(t) = \max f([a;\ b])$. Hỏi $f'(t)$ có bằng 0 hay không?

Câu 7: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực dương. Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2010}$ hội tụ. Hỏi chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2011}$ có hội tụ hay không?

Câu 8: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a;\ b]$. Đặt

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad \forall x \in (a;\ b)$$

Giả sử g nghịch biến trên khoảng $(a;\ b)$. Hỏi "$f(s) \leq 0$ với mọi s trong $(a;\ b)$" đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2011 – 2012

THỜI GIAN: 60 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho $A_1; \cdots; A_n; B_1; \cdots; B_n$ là $2n$ tập con của một tập hợp X. Giả sử $A_i \subset B_i$ với mọi $i = 1; \cdots; n$. Hỏi kết luận sau đây đúng hay sai?

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

Câu 2: Cho $A \coloneqq \{y \in (0; +\infty) \mid y^3 < 5\}$. Hỏi A có bị chặn trên hay không? (**lưu ý, ta chưa chứng minh sự tồn tại của $\sqrt[3]{5}$**).

Câu 3: Cho $\{x_{1;n}\}; \{x_{2;n}\}; \cdots; \{x_{k;n}\}$ là k dãy số thực hội tụ lần lượt về $a_1; a_2; \cdots; a_k$. Hỏi kết luận sau đây đúng hay sai?

$$\lim_{n\to+\infty} \left(x_{1;n} x_{2;n} \cdots x_{k;n}\right) = a_1 a_2 \cdots a_k$$

Câu 4: Cho một dãy số thực $\{x_n\}$, và hai số thực a và b. Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ về a và b. Hỏi a có bằng b hay không?

Câu 5: Cho một dãy số thực $\{x_n\}$, $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$, và $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$ là một dãy con của $\{x_{n_k}\}$. Hỏi $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$ có là một dãy con của $\{x_n\}$ hay không?

Câu 6: Đặt $A \coloneqq \{y \in (0; +\infty) \mid y^2 < 5\}$ và $B \coloneqq \{z \in (0; +\infty) \mid z^2 > 5\}$. Hỏi "$\sup(A) \leq \inf(B)$" đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2011 – 2012

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, f và g là hai hàm số liên tục đều trên A. Giả sử $f(A)$ và $g(A)$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi $f \cdot g$ có liên tục đều trên A hay không?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử $f'(s) \neq 0$ với mọi s trong $(a;\ b)$. Hỏi f có đơn ánh trên $(a;\ b)$ hay không?

Câu 3: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$, và c trong $(a;\ b)$. Giả sử $f'(c) = 0$. Hỏi $f(c)$ có là cực tiểu hoặc cực đại của $f\big((a;\ b)\big)$ hay không?

Câu 4: Đặt $x_n = (n^3 + 1)^{n^{-1}}$. Hỏi $\{x_n\}$ có hội tụ hay không?

Câu 5: Với mọi số nguyên n, cho một hàm số f_n liên tục trên $[0;\ 1]$. Giả sử

$$f_m(x) \leq f_{m-1}(x) \leq 2012, \qquad \forall x \in [0;\ 1], \qquad m \in \mathbb{N}$$

Đặt $a_n = \int_0^1 f_n dx$ với mọi số nguyên n. Hỏi $\{a_n\}$ có hội tụ hay không?

Câu 6: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, a trong $A^* \cap A$, và f là một hàm số thực trên A. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong A sao cho x_n hội tụ về a và $a < x_n$ với mọi số nguyên n. Giả sử giới hạn bên phải tại a của f là $f(a)$. Hỏi kết luận nào trong hai kết luận sau đúng:

(i) $\{f(x_n)\}$ có giới hạn là $f(a)$.

(ii) f liên tục tại a.

Câu 7: Cho $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của một dãy số thực $\{x_n\}$. Giả sử $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a, và $b = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ là một số thực. Hỏi kết luận sau đúng hay sai: $b \leq a$.

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2012 – 2013

THỜI GIAN: 60 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho f là một song ánh từ tập hợp A vào tập hợp B. Cho g là một ánh xạ ngược của f. Hỏi g có là một ánh xạ toàn ánh hay không?

Câu 2: Cho f là một ánh xạ từ tập hợp A vào tập hợp B. Hỏi các mệnh đề sau đây có tương đương với nhau hay không?

(a) Giả sử $f(D) \cap f(E) = \emptyset$ với mọi tập con D và E trong A và $D \cap E = \emptyset$.

(b) f là một đơn ánh.

Câu 3: Cho A là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}$, và f là một ánh xạ từ A vào A. Giả sử có một số thực dương C sao cho:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Đặt:

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{(n \text{ lần})}$$

Hỏi điều sau đây đúng hay sai?

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq C^n|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Câu 4: Cho $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{m_k}\}$ là hai dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$. Đặt $l_k := n_k + m_k$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{x_{l_k}\}$ có là một dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$ hay không?

Câu 5: Cho A là một tập khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Cho α là một chặn trên của A. Giả sử có một dãy số $\{x_n\}$ hội tụ về α và $x_n \in A$ với mọi số nguyên n. Hỏi α có là $\sup(A)$ hay không?

Câu 6: Phủ định mệnh đề sau:

$$\text{“}\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N} \text{ sao cho } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n \geq N\text{”}$$

Câu 7: Cho hai dãy số thực $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ lần lượt hội tụ về a và b. Giả sử $x_n < y_n$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $a < b$ đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2012 – 2013

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho f là một hàm số thực khả vi trên khoảng mở $(1;\ 6)$. Giả sử $f(2) < f(5)$. Hỏi có một c trong khoảng $(1;\ 6)$ sao cho $f'(c) \neq 0$ hay không?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$, và c trong $(a;\ b)$. Giả sử $f'(c) \neq 0$. Hỏi có một khoảng $(\alpha;\ \beta)$ sao cho $c \in (\alpha;\ \beta) \subset (a;\ b)$ và $f(c) \neq f(x)$ với mọi x trong $(\alpha;\ \beta)\backslash\{c\}$ hay không?

Câu 3: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử x_n ở trong khoảng $[2012;\ 2013]$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ có là một số thực hay không?

Câu 4: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A, và B là một tập con của A. Giả sử:

(i) Với mỗi x trong A, có một dãy $\{x_n\}$ sao cho x_n thuộc B với mọi số nguyên dương n và $\{x_n\}$ hội tụ về x.

(ii) $f(z) = 1$ với mọi z trong B.

Hỏi $f(x)$ có bằng 1 với mọi x trong A hay không?

Câu 5: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Đặt u là hàm hợp nối $g \circ f$ của f và g. Hỏi u có liên tục đều trên $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 6: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, b là một điểm trong $\mathbb{R}$. Hỏi hai điều sau đây có tương đương hay không?

(i) Có một dãy số thực $\{x_n\}$ trong $A \setminus \{b\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về b.

(ii) b là một điểm tụ của A.

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2013 – 2014

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, và $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$. Hỏi $\{x_{n_k}\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 2: Cho A là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}$, và f là một ánh xạ từ A vào A. Giả sử f là một toàn ánh. Đặt:

$$f^n \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{(n \text{ lần})}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hỏi f^n có toàn ánh với mọi n trong $\mathbb{N}$ hay không?

Câu 3: Cho $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{m_k}\}$ là hai dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$. Đặt $l_k \coloneqq n_k \cdot m_k$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{x_{l_k}\}$ có là một dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$ hay không?

Câu 4: Cho A và B là hai tập khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\sup(A) \leq \sup(B)$. Hỏi kết luận sau đây đúng hay sai:

$$x \leq y, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall y \in B$$

Câu 5: Phủ định mệnh đề sau:

$$\text{“}\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n \geq N \text{ và } |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\text{”}$$

Câu 6: Cho A và B là hay tập khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\sup(A) \leq \sup(B)$. Đặt:

$$E \coloneqq \{xy \mid x \in A;\ y \in B\}$$

Hỏi E có bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 7: Cho a là một số thực. Giả sử $a > c$ với mọi số thực dương c. Hỏi $a \geq 0$ đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2013 – 2014

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[1;\ 3]$. Hỏi $f([1;\ 3])$ có bị chặn dưới hay không?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[0;\ 1]$ và $\{x_n\}$ là một dãy số thực trong $[0;\ 1]$. Hỏi có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho dãy $\{f(x_{n_k})\}$ hội tụ hay không?

Câu 3: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(x) = 0$ với mọi số vô tỉ x. Hỏi $f(t)$ có bằng 0 với mọi số thực t hay không?

Câu 4: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a;\ c]$ và khả vi trên khoảng mở $(a;\ c)$, và c trong $(a;\ b)$. Giả sử $f(a) = 2013$ và $f'(x) = 0$ với mọi x trong $(a;\ c)$. Hỏi $f(t) = 2013$ với mọi t trong $(a;\ c)$ hay không?

Câu 5: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[0;\ 1]$. Giả sử

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

Hỏi $f(t) \leq g(t)$ với mọi t trong $[0;\ 1]$ đúng hay sai?

Câu 6: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[a;\ b]$. Giả sử $f(t) \in [0;\ 1]$ với mọi t trong $[0;\ 1]$. Hỏi

$$\int_0^1 f^3(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$$

đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2014 – 2015

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho P_k là các mệnh đề Toán học, $k \in \mathbb{N}$. Giả sử P_k đúng thì P_{k+1} đúng với mọi k trong $\mathbb{N}$. Hỏi P_k có đúng với mọi k trong $\mathbb{N}$ hay không?

Câu 2: Cho A_k và B_i là các tập con bị chặn trong $\mathbb{R}$, $k = 1; \cdots; K$ và $i \in \mathbb{N}$. Hỏi:

$$\bigcup_{k=1}^{K} A_k \text{ và } \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$$

có bị chặn trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 3: Hỏi $\sqrt{6}$ có là một số hữu tỷ hay không?

Câu 4: Cho A là một tập khác rỗng trong $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy trong A. Cho f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$. Hỏi $\{f(x_n)\}$ có là một dãy số thực hay không?

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ và cho g là một hàm số thực liên tục trên $[1;\ 2]$ sao cho $f(1) = g(1)$. Đặt:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ g(x), & \text{nếu } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Hỏi h có liên tục tại 1 hay không?

Câu 6: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và a là một số thực. Giả sử $\{x_n\}$ không hội tụ về a. Hỏi có hay không một số ε dương và một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho:

$$|x_{n_k} - a| \ge \varepsilon, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2014 – 2015

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho f là một hàm số thực khả vi trên khoảng mở $A = (1;\ 3)$. Hỏi các khẳng định dưới đây đúng hay sai

(a) Nếu $f'(A)$ bị chặn thì f liên tục đều trên $(1;\ 3)$.

(b) Nếu f liên tục đều trên $(1;\ 3)$ thì $f'(A)$ bị chặn.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Hỏi có hay không một số thực M sao cho

$$|f(x) - f(0)| \le M|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 3: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f'(x) \neq 0$ với x trong $\mathbb{R}$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

Câu 4: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(0) \ge 0$ và $f'(x) \ge 0$ với mọi x trong $(0;\ +\infty)$. Hỏi khẳng định sau đây đúng hay sai: $f(x) \ge 0$ với mọi x trong $(0;\ +\infty)$?

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[1;\ 2]$. Giả sử $f(t) \ge 3$ với mọi t trong $[1;\ 2]$. Hỏi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

$$\int_1^2 f(x)dx \ge 3$$

Câu 6: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[3;\ 4]$. Giả sử $f(t) \neq 2$ với mọi t trong $[3;\ 4]$. Hỏi

$$\int_3^4 f(x)dx \neq 2$$

đúng hay sai?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2015 – 2016

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho $a_1; \cdots; a_n$ và $b_1; \cdots; b_n$ là $2n$ số thực. Giả sử $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$. Hỏi có hay không một j trong $\{1; \cdots; n\}$ sao cho $a_j < b_j$?

Câu 2: Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là các dãy lần lượt hội tụ về a và b trong $\mathbb{R}$. Giả sử $a_n < b_n$ với mọi số nguyên n. Hỏi các kết luận sau đây đúng hay sai.

(i) $a \le b$.

(ii) $a < b$.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{khi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ f(0) + 1, & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Hỏi g có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 4: Có hay không một hàm số thực đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ nhưng không liên tục?

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\{f(x_n)\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$?

Câu 6: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực âm sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Hỏi các kết luận sau đúng hay sai.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ hội tụ.

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2015 – 2016

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên làm càng nhiều càng tốt, điểm 10 dành cho một số sinh viên làm đúng nhiều câu hỏi. Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải các câu sau:

Câu 1: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\{x_n\}$ có là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực trên khoảng $(-1;\ 1)$. Giả sử f có giới hạn tại 0. Hỏi $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ có xác định hay không?

Câu 3: Cho f và g là hai hàm số thực trên $\mathbb{R}$. Giả sử $g \circ f$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Hỏi các kết luận sau đây đúng hay sai

(i) f khả vi trên $\mathbb{R}$.

(ii) g khả vi trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho f là một hàm số thực đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Giả sử f khả vi trên $\mathbb{R}$. Hỏi kết luận sau đúng hay sai: $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$. Hỏi kết luận sau đúng hay sai:

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2016 – 2017

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên chọn 4 câu trong 5 câu hỏi sau.

Câu 1: Với mọi số nguyên n, cho A_n và B_n là các tập khác trống sao cho $A_n \subset B_n$.

Hỏi $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ đúng hay sai?

Câu 2: Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về 2 trong $\mathbb{R}$. Hỏi có hay không một số nguyên N sao cho $1 < x_n$ với mọi $n \geq N$?

Câu 3: Cho $k \in \{1; \cdots; N\}$ và $\{x_{k;\,n}\}_n$ là các dãy hội tụ về a_k trong $\mathbb{R}$. Đặt $y_n = x_{1;\,n} + \cdots + x_{N;\,n}$ và $b = a_1 + \cdots + a_N$. Hỏi $\{y_n\}$ có hội tụ về b hay không?

Câu 4: Cho a là một số thực và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử mọi dãy con $\{x_{n_m}\}$ của $\{x_n\}$ đều có một dãy con $\{x_{n_{m_k}}\}$ hội tụ về a. Hỏi $\{x_n\}$ có hội tụ về a?

Câu 5: Với mọi số nguyên n, cho f_n là một hàm số thực trên $[0;\ 1]$. Phủ định mệnh đề sau: "Với mọi số thực dương ε, có một thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \varepsilon$ với mọi số nguyên dương m, với mọi $x;\ y$ trong $[0;\ 1]$, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$".

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2016 – 2017

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên chọn 4 câu trong 5 câu hỏi sau.

Câu 1: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ về a trong $\mathbb{R}$. Giả sử $a \notin B = \{x_n : n \in N\}$. Hỏi a có là một điểm tụ của B?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $(0;\ 3)$. Hỏi f có liên tục đều trên $[1;\ 2]$?

Câu 3: Cho f và g là hai hàm số thực trên $\mathbb{R}$. Giả sử fg khả vi trên $\mathbb{R}$. Hỏi f và g khả vi hay không trên $\mathbb{R}$?

Câu 4: Cho f là một song ánh từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ và đơn điệu giảm trên $(a;\ b)$. Đặt g là ánh xạ ngược của f. Hỏi g có đơn điệu giảm trên $(c;\ d)$?

Câu 5: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$$

Hỏi kết luận sau đúng hay sai: $f(t) \le g(t)$ với mọi $t \in [0;\ 1]$?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2017 – 2018

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên chọn 4 câu trong 5 câu hỏi sau.

Câu 1: Cho A là một tập con khác trống. Đặt P là mệnh đề "Với mọi số dương ε, có một tập hữu hạn phần tử B chứa trong A sao cho A chứa trong $\bigcup_{x\in B}(x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)$". Viết P ra dạng cơ bản và phủ định P.

Câu 2: Có hay không một dãy số thực $\{x_n\}$ có các tính chất sau:

(i) $\{x_n\}$ là một dãy không hội tụ.

(ii) có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ.

Câu 3: Cho $c \in (0;\ 1)$ và $x_n = c^n n$ với mọi số nguyên n. Hỏi $\{x_n\}$ có hội tụ về một số thực hay không?

Câu 4: Cho $a < b;\ c < d;\ e \in (a;\ b)$ và f là một hàm số liên tục từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$. Hỏi có hay không một số dương η sao cho $f([e;\ e+\eta])$ chứa trong $(c;\ d)$?

Câu 5: Cho $a < b;\ c < d$, f là một ánh xạ từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ và g là một ánh xạ từ $(c;\ d)$ vào $\mathbb{R}$. Giả sử $(g \circ f)(a;\ b)$ bị chặn. Hỏi $g(c;\ d)$ có bị chặn hay không?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2017 – 2018

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Sinh viên chọn 4 câu trong 5 câu hỏi sau.

Câu 1: Cho $a < b$, f là một ánh xạ khả vi từ $(a;\ b)$ vào $\mathbb{R}$, $c < d$ sao cho $a < c < d < b$. Hỏi $f\big((c;\ d)\big)$ có bị chặn trên?

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $(-1;\ 1)$. Hỏi $\lim\limits_{s\to 0} f(s) = f(0)$ đúng hay sai?

Câu 3: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Hỏi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{2017}$ hội tụ hay không?

Câu 4: Cho f và g là hai hàm số thực khả vi trên $(-1;\ 1)$. Giả sử $f(0) = g(0)$ và $f'(t) \le g'(t)$ với mọi $t \in (-1;\ 1)$. Hỏi $f(s) \le g(s)$ với mọi $s \in (0;\ 1)$ đúng hay sai?

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ sao cho $f(s) \le 1$ với mọi $s \in [0;\ 1]$. Hỏi kết luận sau đúng hay sai:

$$\int_0^1 f(x)dx \le 1$$

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2018 – 2019

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Sinh viên phải kiểm chứng cẩn thận các câu trả lời)

Sinh viên chọn 3 câu trong 4 câu hỏi sau.

Câu 1: Phủ định mệnh đề sau:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall x \in A, \qquad \exists N(x;\ \varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ sao cho}$$
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad n > m > N(x;\ \varepsilon)$$

Câu 2: Cho f là một song ánh từ tập hợp A vào tập hợp B, và g là ánh xạ ngược f^{-1}. Hỏi g có là một đơn ánh từ tập hợp B vào tập hợp A hay không?

Câu 3: Cho $a_1;\ \cdots;\ a_n$ là n số thực sao cho $a_1 \cdots a_n = 0$. Hỏi có một $j \in \{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho $a_j = 0$ hay không?

Câu 4: Cho $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$f(x) = \sqrt{1 + x} + \operatorname{arctg}(1 + \sin x)$$

Xác định miền xác định của f, và f có liên tục trên đó không?

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2018 – 2019

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Sinh viên phải kiểm chứng cẩn thận các câu trả lời)

Sinh viên chọn 3 câu trong 4 câu hỏi sau.

Câu 1: Tính

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $(0;\ 1)$. Giả sử

$$|f'(x)| \leq x, \qquad \forall x \in (0;\ 1)$$

Hỏi f có liên tục đều trên $(0;\ 1)$ hay không?

Câu 3: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Đặt $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Hỏi dãy số $\{b_n\}$ có hội tụ hay không?

Câu 4: Cho f là một hàm số liên tục từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ và g là một hàm số thực khả vi trên $(-1;\ 1)$. Hỏi kết quả sau có đúng hay không

$$\lim_{y\to x} g\big(f(y)\big) = g\big(f(x)\big), \qquad \forall x \in (a;\ b)$$

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2019 – 2020

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Sinh viên phải kiểm chứng cẩn thận các câu trả lời)

Sinh viên chọn 4 câu trong 5 câu hỏi sau.

Câu 1: Cho $A;\ B$ và C là các tập hợp con của tập X. Phủ định mệnh đề sau: "(x thuộc A) hoặc (x thuộc B và x thuộc C)". Hỏi $X \setminus [A \cup (B \cap C)] = (X \setminus A) \cap [(X \setminus B) \cup (X \setminus C)]$ đúng hay sai?

Câu 2: Cho n là một số nguyên dương. Hỏi tập hợp các tập con của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$ có đúng 2^n phần tử hay không?

Câu 3: Cho f là một hàm số thực trên $(a;\ b)$, liên tục tại $x \in (a;\ b)$ và $f(x) > 0$. Hỏi có một số dương δ sao cho $f(y) > 0$ với mọi $y \in (a;\ b)$ và $|y - x| < \delta$ hay không?

Câu 4: Cho A và B là hai tập khác trống và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Đặt $C = \{xy : x \in A;\ y \in B\}$. Hỏi C có bị chặn trên hay không?

Câu 5: Tính

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2019 – 2020

THỜI GIAN: 90 PHÚT
(Sinh viên phải kiểm chứng cẩn thận các câu trả lời)

Sinh viên chọn 4 câu trong 5 câu hỏi sau.

Câu 1: Cho $a;\ b$ và c là ba số thực sao cho $a < b < c$. Cho f là một hàm số thực trên $[a;\ c]$. Giả sử $f|_{[a;\,b]}$ liên tục trên $[a;\ b]$ và $f|_{[b;\,c]}$ liên tục trên $[b;\ c]$. Hỏi f có liên tục trên $[a;\ c]$ hay không?

Câu 2: Cho $f(x) = \left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + x^2}\right)^2\right]^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi f có khả vi trên $\mathbb{R}$ hay không? Nếu có tính f'.

Câu 3: Cho

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

Hỏi chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ có hội tụ hay không?

Câu 4: Cho f là một hàm số thực trên $(a;\ b)$, khả vi tại $x \in (a;\ b)$ và $f'(x) > 0$. Hỏi có một số dương δ sao cho $f(y) \neq f(x)$ với mọi $y \in (a;\ b)$ và $0 < |y - x| < \delta$ hay không?

Câu 5: Cho f là một hàm số thực có đạo hàm bậc hai f'' trên $(a;\ b)$. Hỏi f có liên tục trên $(a;\ b)$ hay không?

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2020 – 2021

THỜI GIAN: 90 PHÚT

Sinh viên được chọn 3 trong 4 câu của cùng một đề. Đề A (câu 1 đến 4) hoặc đề B (câu 5 đến 8).

ĐỀ A

Câu 1: Cho $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ và ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ -\dfrac{x-1}{2}, & \text{nếu } x \text{ lẻ} \end{cases}$$

(a) Chứng minh f là một song ánh, từ đó kết luận $\mathbb{Z}$ là tập đếm được.

(b) Giả sử có một đơn ánh $g : A \to \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tập A là quá lắm đếm được.

Câu 2: Cho dãy số thực $\{x_n\}$ như sau

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}, \qquad n = 1;\ 2;\ \cdots$$

và một dãy $\{y_n\}$ thỏa

$$y_n^2 \leq 2x_n y_n + 3x_n^4, \qquad n = 1;\ 2;\ \cdots$$

Chứng minh rằng:

(a) Dãy $\{x_n\}$ bị chặn và không đơn điệu.

(b) Dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

(c) Dãy $\{y_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Câu 3: Cho $f : (0;\ 1) \to \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu giảm trong $(0;\ 1)$. Đặt $A = \{f(x) : 0 < x < 1\}$. Chứng minh rằng:

(a) Nếu f bị chặn trên thì tồn tại $L = \sup A$ và $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = L$.

(b) Nếu f không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$.

Câu 4: Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng f liên tục tại $x = 0$.

(b) Chứng minh rằng f không liên tục tại mọi $x \neq 0$.

ĐỀ B

Câu 5: Cho hai tập hợp khác rỗng $X;\ Y$.

(a) Phát biểu các định nghĩa: ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh và song ánh từ X vào Y.

(b) Cho ánh xạ $f : X \to Y$ sao cho tồn tại một ánh xạ $g : Y \to X$ thỏa điều kiện $g(f(x)) = x$ với mọi $x \in X$. Chứng minh rằng f là đơn ánh.

Câu 6: Cho tập hợp

$$A = \left\{\frac{2n+1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}\right\}$$

(a) Chứng minh rằng A là tập bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hãy tìm $\sup A$; $\inf A$; $\max A$; $\min A$.

(b) Cho $B \subset \mathbb{R}$ khác rỗng và bị chặn trên. Chứng tỏ rằng $A \cup B$ là một tập bị chặn trên và $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A;\ \sup B\}$.

Câu 7:

(a) Hãy định nghĩa dãy số thực $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn.

(b) Phát biểu Định lý về sự tồn tại dãy con hội tụ của một dãy số thực $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn.

(c) Xét dãy số thực $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ 9;\ 1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ 9;\ 1;\ 2;\ 3\cdots\}$. Tìm một dãy con của nó hội tụ về $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Câu 8: Cho hàm số

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Tìm miền xác định A của hàm f. Chứng minh rằng $a = 0$ là điểm tụ của A.

(b) Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2020 – 2021

THỜI GIAN: 90 PHÚT

Sinh viên được chọn 3 trong 4 câu của cùng một đề. Đề A (câu 1 đến 4) hoặc đề B (câu 5 đến 8).

ĐỀ A

Câu 1: Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - |x|, \qquad -2 < x < 2$$

(a) Tính các đạo hàm cấp một và cấp hai của f.

(b) Tìm cực trị và điểm uốn của đồ thị cho hàm f.

Câu 2: Cho hàm số

$$f(x) = \ln x, \qquad x > 0$$

(a) Dùng Định lý giá trị trung bình Lagrange cho hàm f, hãy chứng minh các bất đẳng thức

$$\frac{x-y}{x} \le \ln x - \ln y \le \frac{x-y}{y}, \qquad \forall x;\ y \text{ với } x > y > 0$$

(b) Kiểm tra lại f là hàm lồi trên $(0;\ +\infty)$ và chứng minh bất đẳng thức

$$x^{\lambda}y^{1-\lambda} \le \lambda x + (1-\lambda)y, \qquad \text{với mọi } x;\ y > 0, \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

Câu 3: Cho hàm

$$f(x) = x^3, \qquad 0 \le x \le 1$$

(a) Chứng minh rằng f khả tích Riemann trên $[0;\ 1]$.

(b) Sử dụng công thức

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

để chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

Câu 4: Cho hàm số

$$f(x) = \int_0^{x^3} \sin(t^3)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Chứng minh rằng f có các đạo hàm cấp một và cấp hai tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f'(x);\ f''(x)$.

(b) Tìm cực trị của hàm f.

ĐỀ B

Câu 5: Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức $f(x) = x|x|$. Chứng minh rằng f là hàm khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 6: Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ x^2 + 3, & x > 1 \end{cases}$$

Xét tính liên tục và khả vi của hàm f tại $x_0 = 1$.

Câu 7: Cho hàm số

$$f(x) = x^2, \qquad \text{với } 0 \le x \le 1$$

(a) Kiểm tra tính khả tích Riemann của hàm f trên $[0;\ 1]$.

(b) Sử dụng đẳng thức

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad \text{với mọi } N \in \mathbb{N}$$

để chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Câu 8: Cho hàm số

$$F(x) = \int_1^{e^x} \left(\frac{t^{2020}}{1 + (\sin(t))^2}\right) dt, \qquad \text{với } x \ge 1$$

(a) Chứng minh rằng hàm F khả tích Riemann trên đoạn $[2;\ 3]$.

(b) Chứng minh rằng hàm F khả vi tại mọi $x > 1$.

(c) Hãy tính $F'(2)$.

Đề thi cuối kỳ giải tích A1 2021 – 2022

THỜI GIAN: 90 PHÚT

Sinh viên chỉ được chọn Đề A hay Đề B làm bài, chỉ cần chọn 3 câu trong 4 câu, viết câu trả lời sau mỗi câu hỏi, khi chuyển câu thì sang trang mới.

ĐỀ A

Câu 1: Cho A là tập con của $\mathbb{R}$ chứa số 4 sao cho A bị chặn trên và $A_1 = \{x \in A : x > 4\}$ khác rỗng. Ta đặt $A_2 = \{x \in A : x \leq 4\}$.

(a) Chứng minh rằng $\max A_2 = 4 < \sup A_1$

(b) Chứng minh rằng $\sup A_1 = \sup A$.

Câu 2: Dùng định nghĩa $\varepsilon - N$ để chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1$$

Câu 3: Xét dãy số $\{a_n\}$ được cho bởi

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Tìm $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ bằng định nghĩa.

(b) Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Câu 4: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \in [0;\ 2) \\ 4, & x \in [2;\ 3] \end{cases}$$

(a) Dùng định nghĩa $\varepsilon - \delta$ để chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} f(x) = 4$$

(b) Dùng định nghĩa $\varepsilon - \delta$ để chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

ĐỀ B

Câu 1: Cho A là tập con của $\mathbb{R}$ chứa số 1 sao cho A bị chặn dưới và $A_1 = \{x \in A : x < 1\}$ khác rỗng. Ta đặt $A_2 = \{x \in A : x \geq 1\}$.

(a) Chứng minh rằng $\inf A_1 < 1 = \min A_2$.

(b) Chứng minh rằng $\inf A_1 = \inf A$.

Câu 2: Cho dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$x_n^2 - \frac{2}{n}x_n \leq \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Chứng minh rằng

$$\frac{1-\sqrt{n+1}}{n} \leq x_n \leq \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $f : (0;\ 1) \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ đối với mọi dãy $\{x_n\} \subset (0;\ 1)$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

(b) Nếu $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq +\infty$, thì tồn tại dãy $\{x_n\} \subset (0;\ 1)$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ và dãy $\{f(x_n)\}$ bị chặn trên.

Câu 4: Cho hàm số $f: [0;\ 2] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0;\ 1) \\ -x \quad , & x \in [1;\ 2] \end{cases}$$

(a) Xét sự liên tục của hàm số f.

(b) Chứng minh rằng $f(0)\cdot f(2) < 0$ và không có $x \in (0;\ 2)$ sao cho $f(x) = 0$. Hãy cho một sự giải thích về điều này.

Đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2021 – 2022

THỜI GIAN: 90 PHÚT

Sinh viên chỉ được chọn Đề A hay Đề B làm bài, chỉ cần chọn 3 câu trong 4 câu, viết câu trả lời sau mỗi câu hỏi, khi chuyển câu thì sang trang mới.

ĐỀ A

Câu 1: Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Khảo sát sự khả vi của f trên miền xác định của nó.

Câu 2: Cho hàm số $f : (a;\ b) \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in (a;\ b)$ sao cho

$$|f'(x)| < \frac{1}{2021}$$

Chứng minh rằng tồn tại một số dương r sao cho

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2021}|y - x|$$

với mọi $y \in (a;\ b)$, $|y - x| < r$.

Câu 3: Cho hàm số $f : [0;\ 2] \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [0;\ 1] \\ \dfrac{1}{3}, & x \in (1;\ 2] \end{cases}$$

(a) Hãy vẽ đồ thị hàm số này.

(b) Hãy chứng minh rằng hàm f khả tích Riemann trên $[0;\ 2]$.

Câu 4: Cho $f : [1;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ có một nguyên hàm là hàm $F(x)$ thỏa mãn tính chất

$$1 \leq F(x) \leq \frac{x^{2021} + 2021}{x^{2021}}, \qquad \forall x \geq 1$$

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

ĐỀ B

Câu 1: Với mỗi $M > 0$, xét hàm số $f_M : [0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ như sau

$$f_M(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq M \\ M^2, & x > M \end{cases}$$

(a) Vẽ đồ thị hàm số f_M và tính đạo hàm của f_M.

(b) Chứng minh rằng $|f_M(x) - f_M(y)| \leq 2M|x - y|,\ \forall x;\ y \geq 0$.

(c) Chứng minh rằng $\forall x \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists M_0 > 0 : \forall M > M_0 \Rightarrow |f_M(x) - x^2| < \varepsilon$.

Câu 2: Tìm cực trị và điểm uốn của hàm số $f(x) = x^7 - 7|x|$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^2 + x,\ x \in [0;\ 1]$.

(a) Tính các tổng Reimann $S(f;\ P)$, tổng Riemann trên $U(f;\ P)$, tổng Riemann dưới $L(f;\ P)$, của hàm số f tương ứng với phân hoạch

$$P = \left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1;\ \xi_1 = \frac{1}{4},\ \xi_2 = \frac{1}{2},\ \xi_3 = 1\right\}$$

(b) Tính tổng Riemann $S(f;\ P_n)$ của hàm số f tương ứng với phân hoạch đều

$$P_n = \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n\}$$

trong đó $x_i = \dfrac{i}{n}, \qquad i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ \xi_i = \dfrac{i}{n}, \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$

(c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f;\ P_n)$ và cho một sự giải thích rằng

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;\ P_n) = \int_0^1 f(x)dx$$

Câu 4: Cho hàm số

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1 - t^4}}, \qquad x \in [0;\ 1)$$

(a) Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$.

(b) Chứng minh rằng hàm F không có cực trị.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH-VI TÍCH PHÂN A1

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2006 – 2007

Câu 1: Cho A và B là các tập con khác trống của $[0;\ \infty)$. Giả sử A và B bị chặn trên. Đặt $C = \{x^2y : x \in A;\ y \in B\}$. Chứng minh C bị chặn trên.

Hướng dẫn:

Vì A bị chặn trên, nên ta có

$$\begin{aligned} &0 \le x \ \le \sup A \quad, \qquad \forall x \in A \\ \Rightarrow\ &0 \le x^2 \le (\sup A)^2, \qquad \forall x \in A \end{aligned}$$

Ta cũng có B bị chặn trên, vì vậy ta có

$$y \le \sup B\,, \qquad \forall y \in B$$

Vì vậy với $c = x^2y,\ \forall x \in A;\ y \in B$

$$\begin{aligned} &x^2y \le (\sup A)^2 \sup B\,, \qquad \forall x \in A;\ y \in B \\ \Rightarrow\ &c \quad \le (\sup A)^2 \sup B\,, \qquad \forall c \in C \end{aligned}$$

Suy ra C bị chặn trên.

Câu 2: Giải phương trình $x^3 + \sin\left(x^{1/7} + \sin 8x\right) = 1$.

Hướng dẫn:

Đặt $f(x) = x^3 + \sin\left(x^{\frac{1}{7}} + \sin 8x\right) - 1$. Với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ ta có

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[x^3 + \sin\left(x^{\frac{1}{7}} + \sin 8x\right) - 1\right] = x_0^3 + \sin\left(x_0^{\frac{1}{7}} + \sin 8x_0\right) - 1 = f(x_0)$$

Vậy f là hàm số liên tục.

Ta nhận thấy

$$f(0) = -1 < 0;\ f(1) = \sin(1 + \sin 8) > 0$$

Vì $f(0)\cdot f(1) < 0$ vậy nên trong đoạn $[0;\ 1]$ luôn tồn tại ít nhất 1 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Câu 3: Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Đặt $c_n = x_ny_n$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $\{c_n\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Với $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên ta có

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \qquad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

Với $\{y_n\}$ là dãy Cauchy nên ta có

$\forall \varepsilon' > 0, \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|y_n - y_m| < \varepsilon', \qquad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Ta chứng minh $\{c_n\}$ là dãy Cauchy, tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $T(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|c_n - c_m| < \varepsilon'', \qquad \forall n > m > T(\varepsilon'')$$

Ta có

$$\begin{aligned} |c_n - c_m| = |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |x_n y_n - x_m y_n| + |x_m y_n - x_m y_m| \\ &= |y_n||x_n - x_m| + |x_m||y_n - y_m| \\ &< |y_n|\varepsilon + |x_m|\varepsilon' \end{aligned}$$

Chọn $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon''}{2|y_n|}$; $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon''}{2|x_m|}$ và $T(\varepsilon'') = \min\{N(\varepsilon);\ M(\varepsilon')\}$.

Vậy $\{c_n\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

Câu 4: Đặt $a_n = \sin\left({}^{n\pi}/_{2}\right)$ với mọi số nguyên dương n. Tính $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hướng dẫn:

Đặt

$$A_n = \left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \geq n\right\}$$

Vì

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \leq 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho nên với

$$b_n = \sup A_n = 1$$

Vậy

$$\limsup_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)$ khác không với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử f không phải một đơn ánh. Khi đó tồn tại $x < y$, $\forall x;\ y \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = f(y)$.

Áp dụng định lý Lagrange, $\exists c \in (x;\ y)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy f là một đơn ánh.

Câu 6: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(t) \geq 0$ với mọi t trong $\mathbb{R}$. Đặt

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)dt, \qquad \forall x \in [1;\ 2]$$

Cho x và y trong $[1;\ 2]$ sao cho $x \leq y$. Hỏi $g(x) \leq g(y)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Ta thấy rằng

$$g(y) - g(x) = \int_0^{2y} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt = \int_{2x}^{2y} f(t)dt$$

Với $f(t) \geq 0$ và $x \leq y$. Ta có

$$\begin{array}{llll} f(t) & \geq 0 \quad , & \forall t \in [2x;\ 2y], & \forall x;\ y \in [1;\ 2] \\ \Rightarrow \displaystyle\int_{2x}^{2y} f(t)dt & \geq \displaystyle\int_{2x}^{2y} 0dt = 0, & \forall t \in [2x;\ 2y], & \forall x;\ y \in [1;\ 2] \\ \Rightarrow g(y) - g(x) \geq 0 & \quad , & \forall t \in [2x;\ 2y], & \forall x;\ y \in [1;\ 2] \\ \Rightarrow g(y) & \geq g(x) \quad , & \forall t \in [2x;\ 2y], & \forall x;\ y \in [1;\ 2] \end{array}$$

Câu 7: Đặt $A = \{2^{-2};\ 3^{-3};\ \cdots;\ n^{-n};\ \cdots\}$. Xác định A^* (A^* là tập hợp tất cả các điểm tụ của A).

Hướng dẫn:

Chọn $x \in A^*$. Giả sử $x \neq 0$. Khi đó chia 2 trường hợp

Trường hợp 1: $x < 0$

Chọn $\delta = \dfrac{1}{2}|x|$. Ta có

$$(x - \delta;\ x + \delta) \cap (A \backslash \{x\}) = \emptyset$$

Do đó x không phải điểm tụ.

Trường hợp 2: $x > 0$

Nếu $x \in A$ thì sẽ tồn tại N_0 sao cho $x = N_0^{-N_0}$.

Với $N_0 = 2$. Chọn $\delta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^3}\right)$. Ta có

$$(x - \delta;\ x + \delta) \cap (A \backslash \{x\}) = \emptyset$$

Với $N_0 \neq 2$. Chọn $\delta = \dfrac{1}{2}\min\left(-\dfrac{1}{(N_0+1)^{N_0+1}} + \dfrac{1}{N_0^{N_0}};\ \dfrac{1}{(N_0-1)^{N_0-1}} - \dfrac{1}{N_0^{N_0}}\right)$. Ta có

$$(x - \delta;\ x + \delta) \cap (A \backslash \{x\}) = \emptyset$$

Nếu $x \in (0;\ +\infty) \backslash A$. Đặt $x_n = n^{-n}$. Tồn tại N sao cho

$$\left[\begin{array}{ll} x_{n+1} < x_n < \cdots < x_N < x < x_{N-1} < \cdots & (1) \\ x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0 & (2) \end{array}\right.$$

Với (1), ta chọn $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{|x - x_N|;\ |x - x_{N-1}|\}$, ta có

$$(x - \delta;\ x + \delta) \cap (A \backslash \{x\}) = \emptyset$$

Với (2), ta chọn $\delta = \frac{1}{2}|x - x_1|$, ta có

$$(x - \delta;\ x + \delta) \cap (A \backslash \{x\}) = \emptyset$$

Hơn nữa do $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-n} = 0$ và $n^{-n} \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ đó ta kết luận $A^* = \{0\}$.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2007 – 2008

Câu 1: Cho A và B là các tập con khác trống của $(-\infty;\ 0)$. Giả sử với mọi x trong A có một y trong B sao cho $x \leq y$. Hỏi $\sup A \leq \sup B$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Với một $y \in B$ ta có

$$x \leq y, \qquad \forall x \in A$$

Mà

$$z \leq \sup B\,, \qquad \forall z \in B$$

Nên suy ra

$$\begin{aligned} & x \leq y \leq \sup B\,, && \forall x \in A \\ \Rightarrow\ & x \qquad \leq \sup B\,, && \forall x \in A \\ \Rightarrow\ & \sup A \leq \sup B \end{aligned}$$

Câu 2: Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy cùng hội tụ về a trong $\mathbb{R}$. Đặt $c_{2k} = x_{2k}$ và $c_{2k+1} = y_{2k+1}$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{c_n\}$ có là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ hội tụ về a trong $\mathbb{R}$ nên ta có

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - a| < \varepsilon, \qquad \forall k > N(\varepsilon)$$

Do $\{y_n\}$ hội tụ về a trong $\mathbb{R}$ nên ta có

$\forall \varepsilon' > 0, \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|y_k - a| < \varepsilon', \qquad \forall k > M(\varepsilon')$$

Ta viết lại định nghĩa c_n như sau

$$c_n = \begin{cases} x_n, & n = 2k \\ y_n, & n = 2k+1 \end{cases}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ta cần chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ trong $\mathbb{R}$ tức là

$\forall \varepsilon'' > 0$, tìm $T(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|c_n - a| < \varepsilon'', \qquad \forall n > T(\varepsilon'')$$

Ta có

$$|c_n - a| = \begin{cases} |x_n - a|, & n = 2k \quad (1) \\ |y_n - a|, & n = 2k+1\ (2) \end{cases}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Với (1) ta có

$$\begin{aligned} & |c_n - a| = |c_{2k} - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon, && \forall k \ \ > N(\varepsilon) \\ \Rightarrow\ & |c_n - a| = |c_{2k} - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon, && \forall 2k > 2N(\varepsilon) \\ \Rightarrow\ & |c_n - a| = |c_{2k} - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon, && \forall n \ \ > 2N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Với (2) ta có

$$\begin{aligned}
&|c_n - a| = |c_{2k+1} - a| = |y_{2k+1} - a| < \varepsilon', && \forall k && > M(\varepsilon')\\
\Rightarrow\ &|c_n - a| = |c_{2k+1} - a| = |y_{2k+1} - a| < \varepsilon', && \forall 2k && > 2M(\varepsilon')\\
\Rightarrow\ &|c_n - a| = |c_{2k+1} - a| = |y_{2k+1} - a| < \varepsilon', && \forall 2k+1 && > 2M(\varepsilon')+1\\
\Rightarrow\ &|c_n - a| = |c_{2k+1} - a| = |y_{2k+1} - a| < \varepsilon', && \forall n && > 2M(\varepsilon')+1
\end{aligned}$$

Chọn $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$; $T(\varepsilon'') = \max\{2N(\varepsilon);\ 2M(\varepsilon') + 1\}$.

Vậy $\{c_n\}$ là dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Câu 3: Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$. Hỏi A có bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ hay không, và nếu đặt $b = \sup A$, thì b có bằng $\sqrt{5}$ hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử A không bị chặn trên. Suy ra tồn tại $y \in A$ sao cho $y \geq 3$.

Vậy nên $y^2 \geq 9$, suy ra $y \notin A$ (vô lý).

Vậy suy ra A bị chặn trên.

Ta có

$$\begin{aligned}
& x^2 < 5\ , && \forall x \in A\\
\Rightarrow\ & -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, && \forall x \in A\\
\Rightarrow\ & x < \sqrt{5}, && \forall x \in A
\end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{5}$ là một chặn trên của A.

Ta giả sử a là một chặn trên của A sao cho $a = \sup A$ nên

$$\begin{cases} x \leq a\ , & \forall x \in A\\ a < \sqrt{5} \end{cases}$$

Ta chọn $y = a + \dfrac{\sqrt{5} - a}{2} = \dfrac{a + \sqrt{5}}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{a+\sqrt{5}}{2} < \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\\
\Rightarrow\ & \left(\frac{a+\sqrt{5}}{2}\right)^2 < 5\\
\Rightarrow\ & y^2 < 5
\end{aligned}$$

Vậy $y \in A$. Mà ta dễ dàng thấy

$$\begin{aligned}
& \frac{a+\sqrt{5}}{2} > \frac{a+a}{2} = a\\
\Rightarrow\ & y > a \qquad \text{(vô lý)}
\end{aligned}$$

Vậy suy ra $\sup A = \sqrt{5}$.

Câu 4: Cho a là một số thực và $\{x_n\}$ là một dãy trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ là một số thực b.
Đặt $c_n = a + x_n$. Tính $\liminf\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Hướng dẫn:

Ta cần chứng minh

$$\inf c_n = \inf(c + x_n) = \inf c + \inf x_n = c + \inf x_n$$

Chứng minh $\inf c_n \geq c + \inf x_n$

Ta có

$$\begin{aligned}
& x_n && \geq \inf x_n \quad , && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & c + x_n && \geq c + \inf x_n, && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & \inf(c + x_n) && \geq c + \inf x_n, && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & \inf c_n && \geq c + \inf x_n, && \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Chứng minh $\inf c_n \leq c + \inf x_n$

Ta có

$$\begin{aligned}
& x_n + c && \geq \inf(c + x_n) \quad , && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & x_n && \geq \inf(c + x_n) - c, && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & \inf x_n && \geq \inf(c + x_n) - c, && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & c + \inf x_n && \geq \inf(c + x_n) \quad , && \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & c + \inf x_n && \geq \inf c_n \quad , && \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Vậy suy ra $\inf c_n = c + \inf x_n$.

Ta có

$$\liminf_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{m\geq n} c_m\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(c + \inf_{m\geq n} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} c + \lim_{n\to+\infty}\inf_{m\geq n} x_n = c + \liminf_{n\to+\infty} x_n = c + b$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(0) > 0$. Hỏi có một số thực dương a sao cho $f|_{[-a;\,a]}$ là một hàm số đơn điệu tăng hay không?

Hướng dẫn:

Đặt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

Với $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x+h}\right) + (x+h) - \left[x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2 + 2hx + h^2)\sin\left(\dfrac{1}{x+h}\right) - x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2x^2 \cos\left(\dfrac{2x+h}{2x(x+h)}\right)\sin\left(-\dfrac{h}{2x(x+h)}\right)}{h} + 2x\sin\left(\frac{1}{x+h}\right) + h\sin\left(\frac{1}{x+h}\right) + 1\right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{2x^2}{2x(x+h)}\cos\left(\frac{2x+h}{2x(x+h)}\right)\sin\left(-\frac{h}{2x(x+h)}\right)}{-\frac{h}{2x(x+h)}} + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

$$= -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

Với $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)+h-0}{h} = \lim_{h\to 0}\left[h\sin\left(\frac{1}{h}\right)+1\right] = 1$$

Vậy suy ra

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1, & x \neq 0 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , & x = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) &= \qquad 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\ f''\left(\frac{1}{2k\pi}\right) &= -4k\pi, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Mà

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2k\pi} = 0$$

Vậy không tồn tại $a > 0$ sao cho $f|_{[-a;\, a]}$ là hàm tăng.

Câu 6: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(0) = g(0)$ và

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x g(t)dt, \qquad \forall x \in (1;\, +\infty)$$

Hỏi $f(x) = g(x)$ với mọi x trong $(1;\, +\infty)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Đặt

$$h(x) = \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)dt$$

Ta có

$$\begin{aligned} & h(x) &&= 0 \quad , && \forall x \in (1;\, +\infty) \\ \Rightarrow\ & h'(x) &&= 0 \quad , && \forall x \in (1;\, +\infty) \\ \Rightarrow\ & f(x) - g(x) &&= 0 \quad , && \forall x \in (1;\, +\infty) \\ \Rightarrow\ & f(x) &&= g(x), && \forall x \in (1;\, +\infty) \end{aligned}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2008 – 2009

Câu 1: Cho A; B; C và D là các tập con của một tập X. Giả sử $A \cap B = C \cap D = \emptyset$. Hỏi $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Chọn $A = D = \emptyset$ và $B = C \neq \emptyset$. Ta có

$$A \cap B = C \cap D = \emptyset$$

Mà ta có

$$(A \cup C) \cap (B \cup D) = C \cap B = C \neq \emptyset$$

Vậy $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$ sai.

Câu 2: Cho A là một tập con của một tập X và b là một phần tử trong $X \setminus A$. Giả sử A có n phần tử $(n \geq 1)$. Hỏi tập $A \cup \{b\}$ có $n+1$ phần tử đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Vì A có n phần tử nên tồn tại ánh xạ song ánh $f : A \to \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$.

Ta xét ánh xạ

$$\begin{aligned} g : A \cup \{b\} &\to \{1;\ 2;\ \cdots;\ n;\ n+1\} \\ x \quad &\mapsto \quad g(x) \end{aligned}$$

xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ n+1, & x = b \end{cases}$$

Ta thấy $f(x) \neq n+1$. Vì vậy g là một song ánh.

Suy ra $A \cup \{b\}$ có $n+1$ phần tử.

Câu 3: Cho f là một ánh xạ từ một tập X vào một tập Y. Cho C và D là hai tập con của Y. Hỏi $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

<u>Chứng minh $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$</u>:

Với $x \in f^{-1}(C \setminus D) \Rightarrow f(x) \in C \setminus D$.

$\Rightarrow f(x) \in C$ và $f(x) \notin D$.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ và $x \notin f^{-1}(D)$.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Vậy $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ (1).

<u>Chứng minh $f^{-1}(C \setminus D) \supset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$</u>:

Với $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ và $x \notin f^{-1}(D)$.

$\Rightarrow f(x) \in C$ và $f(x) \notin D$.

$\Rightarrow f(x) \in C \setminus D$.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \setminus D)$.

Vậy $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \setminus D)$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

Câu 4: Cho A và B là hai tập hợp khác trống. Giả sử A có m và B có n phần tử và $m < n$. Hỏi có một toàn ánh f từ A vào B hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử f là toàn ánh từ A vào B thì $f(A) = B$ suy ra $|f(A)| = |B| = n$.

Xét trường hợp A đơn ánh

$$\forall x_1;\ x_2 \in A \text{ sao cho } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Vậy nên $|f(A)| = m$ (1).

Xét trường hợp A không đơn ánh

$$\exists x_1;\ x_2 \in A \text{ sao cho } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Vậy nên $|f(A)| < m$ (2).

Từ (1); (2) $\Rightarrow |f(A)| \leq m$. Ta có

$$|f(A)| \leq m < n$$

Vậy không thể $|f(A)| = n$. Suy ra không tồn tại f toàn ánh từ A vào B.

Câu 5: Cho A và B là hai tập con bị chặn trong $\mathbb{R}$ sao cho $A \cap B$ khác trống. Hỏi $\inf A \leq \sup B$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Với $x \in A \cap B$ hay $x \in A$ và $x \in B$. Với $x \in A$ thì ta có

$$x \geq \inf A$$

Mà vì $x \in B$ nên ta có

$$x \leq \sup B$$

Vậy nên suy ra

$$\inf A \leq \sup B$$

Câu 6: Phủ định mệnh đề: Với mọi số thực M có một số nguyên dương N sao cho $x_n \geq M$ với mọi $n > N$.

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu mệnh đề

$$\forall M \in \mathbb{R}, \qquad \exists N \in \mathbb{N} \text{ sao cho } x_n \geq M, \qquad \forall n \in (N;\ +\infty)$$

Phủ định mệnh đề

$$\exists M \in \mathbb{R}, \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \in (N;\ +\infty) \text{ sao cho } x_n < M$$

Câu 7: Cho $a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_n$ là n số thực. Hỏi ta có bất đẳng thức sau hay không
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Chứng minh quy nạp

Với $n = 1$. Ta có
$$|a_1| \le |a_1|\ \text{(hiển nhiên)}$$

Giả sử với $n = k$ đúng tức là
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$$

Ta chứng minh $n = k + 1$ đúng tức là chứng minh
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

Thật vậy ta có thể chứng minh
$$|a + b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \le \sqrt{a^2 + 2|ab| + b^2} = \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b|$$

Ta đặt $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k;\ b = a_{k+1}$. Vậy ta có
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}|$$

Mà ta có
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$$

Vậy nên
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

Vậy ta suy ra
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Cách 2: Chứng minh phản chứng

Giả sử $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

Chọn $a_i = (-1)^i,\ i \in \overline{1;\ n}$. Vậy ta có
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| = |(-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n| = \begin{cases} 0, & n \text{ chẵn} \\ 1, & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Ta cũng có
$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = |(-1)^1| + |(-1)^2| + \cdots + |(-1)^n| = n$$

Vậy ta thấy
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\ \text{(vô lý)}$$

Suy ra $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

Câu 8: Cho $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ là n số thực. Hỏi tập $\{a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n\}$ có bị chặn trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Đặt

$$M=\sum_{i=1}^{n}|a_i|\ \text{ hoặc } M=\max_{i\in\overline{1;\,n}}|a_i|$$

Ta nhận thấy

$$|a_i|\le M,\qquad \forall i\in\overline{1;\,n}$$

Vậy nên tập $\{a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$.

Câu 9: Cho $A_1;\ A_2;\ \cdots;\ A_n$ là n tập hợp bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi tập đẳng thức sau đúng hay sai

$$\inf A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_n\}$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Chứng minh quy nạp

Với $n=1$. Ta có

$$\inf A_1=\inf\{\inf A_1\}$$

Giả sử với $n=k$ đúng tức là

$$\inf(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_k\}$$

Ta chứng minh $n=k+1$ đúng tức chứng minh

$$\inf(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup A_{k+1})=\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_k\,;\ \inf A_{k+1}\}$$

Ta xét tập $A;\ B$ thì

$$\begin{aligned}
&x\ge\inf(A\cup B) &&,\ \forall x\in A\cup B\\
\Rightarrow\ &x\ge\inf(A\cup B) &&,\ \forall x\in A \text{ hoặc } x\in B\\
\Rightarrow\ &\inf A\ge\inf(A\cup B)\ \vee\ \inf B\ge\inf(A\cup B)\\
\Rightarrow\ &\inf\{\inf A\,;\ \inf B\}\ge\inf(A\cup B) && (1)
\end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned}
&x\ge\inf A\ \vee\ x\ge\inf B &&,\quad \forall x\in A\cup B\\
\Rightarrow\ &A\cup B\ge\inf A\ \vee\ A\cup B\ge\inf B\\
\Rightarrow\ &A\cup B\ge\inf\{\inf A\,;\ \inf B\}\\
\Rightarrow\ &\inf(A\cup B)\ge\inf\{\inf A\,;\ \inf B\} && (2)
\end{aligned}$$

Vậy từ $(1);\ (2)\Rightarrow\inf(A\cup B)=\inf\{\inf A\,;\ \inf B\}$

Đặt $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k; B=A_{k+1}$. Vậy ta có

$$\inf(A\cup B)=\inf(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup A_{k+1})=\inf\{\inf(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)\,;\ \inf A_{k+1}\}$$

Mà ta có

$$\inf(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_k\}$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}\inf(A \cup B) &= \inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) \\ &= \inf\{\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)\,;\ \inf A_{k+1}\} \\ &= \inf\{\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_k\};\ \inf A_{k+1}\}\end{aligned}$$

Ta chứng minh thêm $\inf\{\inf\{\inf A\,; \inf B\};\ \inf C\} = \inf\{\inf A\,;\ \inf B\,;\ \inf C\}$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\inf A \leq \inf B \leq \inf C$. Ta có

$$\inf\{\inf\{\inf A\,; \inf B\};\ \inf C\} = \inf\{\inf A\,;\ \inf B\,;\ \inf C\} = \inf A$$

Vậy nên $\inf\{\inf\{\inf A\,; \inf B\};\ \inf C\} = \inf\{\inf A\,;\ \inf B\,;\ \inf C\}$.

Từ đó ta có kết luận

$$\begin{aligned}\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) &= \inf\{\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)\,;\ \inf A_{k+1}\} \\ &= \inf\{\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_k\};\ \inf A_{k+1}\} \\ &= \inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_k\,;\ \inf A_{k+1}\}\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_n\}$

Cách 1: Chứng minh phản chứng

Giả sử $\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \neq \inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_n\}$.

Đặt $A_i = [i;\ i+1]$ với $i \in \overline{1;\ n}$ nên $\inf A_i = i$. Ta nhận thấy

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = [1;\ n+1]$$

Vậy

$$\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$$

Mà ta có

$$\inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_n\} = 1$$

Vậy

$$\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \neq \inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_n\}\ \text{(vô lý)}$$

Suy ra $\inf(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \inf\{\inf A_1\,;\ \inf A_2\,;\ \cdots;\ \inf A_n\}$.

Câu 10: Cho A là một tập hợp con bị chặn trong $\mathbb{R}$. Giả sử A chứa khoảng mở $(\inf A\,;\ \sup A)$. Hỏi A có là một khoảng hay không?

Hướng dẫn:

Với $(\inf A\,;\ \sup A) \subset A$. Cho nên $\forall x \in (\inf A\,;\ \sup A)$ thì $x \in A$.

Cho $y \in A$ sao cho $y \notin (\inf A\,;\ \sup A)$. Hay ta có

$$y \leq \inf A \ \vee\ y \geq \sup A$$

Mà theo định nghĩa thì

$$\begin{aligned} x \leq \sup A\,, &\qquad \forall x \in A \\ x \geq \inf A\ \ , &\qquad \forall x \in A\end{aligned}$$

Vậy nên các giá trị y gồm $\inf A\,, \sup A$. Vậy ta thấy tập $A = [\inf A\,;\ \sup A]$.

Vậy nên ta kết luận A là một khoảng.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2008 – 2009

Câu 1: Cho dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ là một số thực a. Đặt $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Hỏi $a = \inf A$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Xét $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Ta có

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{m\geq n} x_m\right) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 = a$$

Mà ta có

$$\inf A = \inf\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 0 \neq a$$

Vậy $a = \inf A$ sai.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Hỏi tập $f\big((a;\ b)\big)$ là một khoảng mở đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Xét $f(x) = x^2$ với $(a;\ b) = (-1;\ 1)$. Ta có

$$f\big((-1;\ 1)\big) = [0;\ 1)$$

Vậy $f\big((a;\ b)\big)$ không là một khoảng mở.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử có $x;\ y$ và z trong $(a;\ b)$ sao cho $x < y < z$ và $f(y) < \min\{f(x);\ f(z)\}$. Hỏi có c trong $(a;\ b)$ sao cho $f'(c) = 0$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Giả sử $f(x) < f(z)$ suy ra tồn tại $x^* \in (y;\ z)$ sao cho $f(x^*) = f(x)$.

Áp dụng định lý Lagrange, $\exists c \in (x;\ x^*)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} = 0$$

Câu 4: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử

$$\int_c^d f(t)dt \leq 0, \qquad \forall c;\ d \in (a;\ b), \qquad c < d$$

Hỏi $f(x) \leq 0$ với mọi x trong $(a;\ b)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Giả sử $\exists y \in (a;\ b)$ sao cho $f(y) > 0$. Do tính liên tục, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x) \geq \frac{1}{2}f(y) > 0, \qquad \forall x \in (y - \varepsilon;\ y + \varepsilon)$$

Khi đó

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(t)dt \geq \frac{1}{2} f(y) \cdot 2\varepsilon = f(y)\varepsilon > 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy $f(x) \leq 0,\ \forall x \in (a;\ b)$.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Đặt

$$g(x) = \max\{0;\ f(x)\}, \qquad \forall x \in (a;\ b)$$

Hỏi g khả vi trên $(a;\ b)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Xét $f(x) = x,\ (a;\ b) = (-1;\ 1)$, ta thấy

$$\begin{aligned} g : (-1;\ 1) &\to \qquad \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1;\ 0) \\ x, & x \in [0;\ 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$

Vậy

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Suy ra g không liên tục trên $(-1;\ 1)$ nên g không khả vi trên $(-1;\ 1)$.

Câu 6: Phủ định mệnh đề sau: Có một số thực dương M sao cho với mọi số thực dương α có x và y trong $[0;\ 1]$ để cho $|x - y| \leq \alpha$ và $|f(x) - f(y)| \geq M$.

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\exists M \in (0;\ +\infty)$ sao cho $\forall \alpha \in (0;\ +\infty)$, $\quad \exists x, y \in [0;\ 1]$ để cho $|x - y| \leq \alpha$ và $|f(x) - f(y)| \geq M$

Phủ định mệnh đề

$\forall M \in (0;\ +\infty)$ sao cho $\exists \alpha \in (0;\ +\infty)$, $\quad \forall x, y \in [0;\ 1]$ để cho $|x - y| > \alpha$ hoặc $|f(x) - f(y)| < M$

Câu 7: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{3n} a_n$ có hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^{3n} a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{3n} a_n \text{ hội tụ } (\text{hội tụ tuyệt đối} \to \text{hội tụ})$$

Câu 8: Hỏi dãy $\left\{\left(1+{}^{1}/_{n^2}\right)^{1/n^2}\right\}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Ta xét

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2}\overset{\text{L'hospital}}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)'}{(n^2)'}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\dfrac{2}{n^3+n}}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n^4+n^2}=0$$

Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=e^0=1$$

Vậy dãy $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\}$ hội tụ về 1.

Câu 9: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử tập $\{f'(x) : x\in(a;\ b)\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ có và bằng một số thực hay không?

Hướng dẫn:

Do tập $\{f'(x) : x\in(a;\ b)\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$ tức là tồn tại số thực dương M sao cho

$$|f'(x)|\le M,\qquad \forall x\in(a;\ b)$$

Ta chứng minh minh $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ là số thực tức là

Cho $\varepsilon>0$ tìm $\delta(\varepsilon)>0$ sao cho

$$|f(x)-L|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(a;\ b),|x-a|<\delta(\varepsilon)$$

Thật vậy theo định lý Lagrange thì tồn tại điểm $c\in(a;\ x)$ sao cho

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

Vậy chọn $L=f(a)$ thì suy ra

$$|f(x)-f(a)|=|f'(c)||x-a|\le M|x-a|<M\cdot\delta(\varepsilon)$$

Chọn $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$$M\cdot\delta(\varepsilon)<\varepsilon$$
$$\Rightarrow\delta(\varepsilon)\quad<\frac{\varepsilon}{M}$$

Vậy suy ra $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ là số thực $f(a)$.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2009 – 2010

Câu 1: Cho A là tập hợp khác trống và f là một ánh xạ từ A vào A. Đặt $g(x) = f\big(f(x)\big)$ với mọi x trong A. Hỏi g có là một ánh xạ hay không? Hỏi $g(A) \subset f(A)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Do $f : A \to A$ là một ánh xạ nên ta thấy g là ánh xạ hợp $A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f} A$

Ta có

$$\begin{aligned} & f(A) && \subset A \\ \Rightarrow\ & f\big(f(A)\big) && \subset f(A) \\ \Rightarrow\ & g(A) && \subset f(A) \end{aligned}$$

Câu 2: Cho A và B là hai tập hợp khác trống. Giả sử A và B cùng có n phần tử. Hỏi có một song ánh từ A và B hay không?

Hướng dẫn:

Do A có n phần tử nên tồn tại song ánh $f : A \to \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$

Do B có n phần tử nên tồn tại song ánh $g : \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\} \to B$

Đặt $h(x) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

Với $\forall x_1;\ x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

Vậy h là một đơn ánh từ A vào B. (1)

Ta có

$$f(A) = \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$$

Mà

$$g(\{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}) = B$$

Nên

$$\begin{aligned} & g\big(f(A)\big) && = B \\ \Rightarrow\ & h(A) && = B \end{aligned}$$

Vậy h là một toàn ánh từ A vào B. (2)

Từ $(1);\ (2) \Rightarrow h$ là song ánh từ A vào B.

Câu 3: Cho f là một ánh xạ từ một tập X vào một tập Y. Cho C và D là hai tập con của Y.
Hỏi $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Chứng minh $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$:

Với $x \in f^{-1}(C \setminus D) \Rightarrow f(x) \in C \setminus D$.

$\Rightarrow f(x) \in C$ và $f(x) \notin D$.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ và $x \notin f^{-1}(D)$.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Vậy $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ (1).

Chứng minh $f^{-1}(C \setminus D) \supset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$:

Với $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ và $x \notin f^{-1}(D)$.

$\Rightarrow f(x) \in C$ và $f(x) \notin D$.

$\Rightarrow f(x) \in C \setminus D$.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \setminus D)$.

Vậy $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \setminus D)$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

Câu 4: Phủ định mệnh đề sau: Với mọi số thực dương ε, có một số nguyên dương N sao cho

$$|f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n > N$$

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n \in (N;\ +\infty)$$

Phủ định mệnh đề

$$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists x \in A, \qquad \exists n \in (N;\ +\infty) \text{ sao cho } |f(x)| \geq \varepsilon$$

Câu 5: Cho $x_n = \sin {}^{n\pi}/_{2}$. Tính $\limsup\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Hướng dẫn:

Đặt

$$A_n = \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \geq n \right\}$$

Vì

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \leq 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho nên với

$$b_n = \sup A_n = 1$$

Vậy

$$\limsup_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$$

Câu 6: Cho B là một tập con khác trống và bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$. Hỏi có một dãy $\{y_m\}$ trong B sao cho $\lim_{m\to+\infty} y_m = \inf B$ hay không?

Hướng dẫn:

Do B có chặn dưới nên tồn tại $\inf B$. $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in B$, ta đặt $\{y_m\}$ sao cho

$$y_1 > y_2 > \cdots > y_n > \cdots$$

Do $y_i \in B, \forall i \in \mathbb{N}$. Vì vậy

$$y_i > \inf B\,, \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

Suy ra

$$\lim_{m\to+\infty} y_m = \inf B$$

Câu 7: Cho $f(x) = x + \cos x + \sin 6x^2$ với mọi số thực x. Hỏi phương trình $f(x) = 2009$ có nghiệm hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $g(x) = x + \cos x + \sin 6x^2 - 2009$

Ta nhận thấy

$$g(2008) \approx -1.875 < 0;\ g(2010) \approx 1.055 > 0$$

Vậy trong đoạn $[2008;\ 2010]$ luôn tồn tại ít nhất 1 nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2009 – 2010

Câu 1: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực sao cho dãy $\{x_n^{2009}\}$ hội tụ. Hỏi dãy $\{x_n\}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Dãy $\{x_n^{2009}\}$ hội tụ tức là

$\forall \varepsilon' > 0, \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n^{2009} - c| < \varepsilon' \qquad , \qquad \forall n > M(\varepsilon')$$

$$\Rightarrow \left|x_n - \sqrt[2009]{c}\right| \left|\sum_{i=0}^{2008} x_n^i \sqrt[2009]{c^{2008-i}}\right| < \varepsilon', \qquad \forall n > M(\varepsilon')$$

$$\Rightarrow \left|x_n - \sqrt[2009]{c}\right| < \frac{\varepsilon'}{\left|\sum_{i=0}^{2008} x_n^i \sqrt[2009]{c^{2008-i}}\right|}, \qquad \forall n > M(\varepsilon')$$

Đặt $a = \sqrt[2009]{c}$; $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{\left|\sum_{i=0}^{2008} x_n^i \sqrt[2009]{c^{2008-i}}\right|}$; $N(\varepsilon) = M(\varepsilon')$

Vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ về $\sqrt[2009]{c}$.

Câu 2: Hỏi bất đẳng thức sau đúng hay sai?

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \cos(x^9)\, dx$$

Hướng dẫn:

Cho $f(x) = \cos(x^9)$. Do $\cos(x^9)$ liên tục trong $[0;\ 1]$ nên ta có

$$\int_0^1 \cos(x^9)\, dx = f(c^9)(1-0) = \cos(c^9), \qquad c \in [0;\ 1]$$

Mà ta có

$$\cos(c^9) \geq \cos(1) > \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức đúng.

Câu 3: Phủ định mệnh đề sau: Với mọi số thực dương ε, có một số nguyên dương N sao cho

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n > m > N$$

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n > m > N$$

Phủ định mệnh đề

$$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists x \in A, \qquad \exists n > m > N \text{ sao cho } |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon$$

Câu 4: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực bị chặn, và $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con hội tụ của $\{x_n\}$. Hỏi bất đẳng thức sau đúng hay sai?

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

Hướng dẫn:

Đặt $s = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$. Do $\{x_{n_k}\}$ hội tụ nên đặt $t = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Dùng phản chứng ta giả sử $t > s$

Cho $\varepsilon = \dfrac{t-s}{2}$.

Với $t - \varepsilon > s$, chọn $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} x_n &< t - \varepsilon, && \forall n \geq k \\ \Rightarrow t - x_n &> \varepsilon \quad , && \forall n \geq k \\ \Rightarrow |x_n - t| &> \varepsilon \quad , && \forall n \geq k \end{aligned}$$

Vậy $\{x_n\}$ không hội tụ về t. Nên không tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về t (mâu thuẫn)

Vậy

$$\begin{aligned} t &\leq s \\ \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} &\leq \limsup_{n\to+\infty} x_n \end{aligned}$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực khả vi trên khoảng $(0;\ 12)$. Giả sử $f(4) < f(6)$ và $f(8) < f(6)$. Hỏi phương trình $f'(t) = 0$ có giải được trên khoảng $(0;\ 12)$ hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử $f(4) > f(8)$ suy ra tồn tại $x^* \in (6;\ 8)$ sao cho $f(x^*) = f(4)$.

Áp dụng định lý Lagrange, $\exists c \in (4;\ x^*)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(x^*) - f(4)}{x^* - 4} = 0$$

Vậy $f'(t) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0;\ 12)$.

Câu 6: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(c;\ d)$. Cho $[a;\ b]$ là một khoảng đóng chứa trong $(c;\ d)$. Hỏi $f([a;\ b])$ có bị chặn dưới hay không?

Hướng dẫn:

Cho $\{x_n\}$ là dãy hội tụ về x trong $[a;\ b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$.

Giả sử $f([a;\ b])$ không bị chặn. Vì vậy tồn tại $x_n \in [a;\ b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$.

Do $\{x_n\}$ nằm trong khoảng đóng $[a;\ b]$ nên theo định lý Bolzano-Weierstrass nên ta có tồn tại $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to x$. Do $x_{n_k} \in [a;\ b]$ nên $x \in [a;\ b]$.

Với f khả vi trên $[a;\ b]$ nên f liên tục trên $[a;\ b]$. Ta có

$$f(x_{n_k}) \to f(x)$$

Mà

$$f\left(x_{n_k}\right) > n_k \geq k, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ (\text{mâu thuẫn})$$

Vậy suy ra $f([a;\ b])$ bị chặn. Cho nên $f([a;\ b])$ bị chặn dưới

Câu 7: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Hỏi "$\{x_n\}$ hội tụ" có tương đương với "$\{|x_n|\}$ hội tụ" hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $x_n = (-1)^n$. Ta có dãy $\{x_n\}$ không hội tụ nhưng dãy $\{|x_n|\}$ hội tụ.

Vậy hai mệnh đề trên không tương đương.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2010 – 2011

Câu 1: Cho $a_1;\ \cdots;\ a_n$ là n số thực. Hỏi có hay không một số nguyên i trong $\{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho:

$$a_k \le a_i, \qquad \forall k \in \{1;\ \cdots;\ n\}$$

Hướng dẫn:

Phản chứng ta có

$\forall i \in \{1;\ \cdots;\ n\}$; $\exists k \in \{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho $a_k > a_i$

Chọn $k = i$. Suy ra

$$a_i > a_i\ (\text{mâu thuẫn})$$

Vì vậy luôn có một số nguyên i trong $\{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho

$$a_k \le a_i, \qquad \forall k \in \{1;\ \cdots;\ n\}$$

Câu 2: Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp X vào một tập hợp Y. Giả sử $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ với mọi tập con A và B của X có tính chất $A \cap B = \emptyset$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

Hướng dẫn:

Do $A \cap B = \emptyset$ nên $\forall x_1 \in A, x_2 \in B$ thì $x_1 \neq x_2$. Mà ta có

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset$$

Nên

$$f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \forall x_1 \in A, x_2 \in B$$

Vậy f là đơn ánh.

Câu 3: Phủ định mệnh đề sau: Với mọi số thực dương ε, có một số nguyên dương N sao cho:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n \in (N;\ +\infty)$$

Phủ định mệnh đề

$$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \in (N;\ +\infty) \text{ sao cho } |x_n - a| \ge \varepsilon$$

Câu 4: Cho một số thực a, và cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ. Đặt $y_n = a + x_n$. Hỏi $\{y_n\}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \varepsilon, \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|y_n - y| < \varepsilon', \qquad \forall n > M(\varepsilon')$$

Ta có

$$|y_n - y| = |a + x_n - y| = |x_n - x + a - y + x| \leq |x_n - x| + |a - y + x| < \varepsilon + |a - y + x|$$

Chọn $y = a + x;\ \varepsilon = \varepsilon';\ M(\varepsilon') = N(\varepsilon)$

Vậy $\{y_n\}$ hội tụ về $a + x$.

Câu 5: Cho A là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}$. Giả sử B bị chặn trên nếu B là một tập con khác rỗng và hữu hạn chứa trong A. Hỏi A có bị chặn trên hay không?

Hướng dẫn:

Gọi $B = \{1;\ 2;\ \cdots;\ 10\};\ A = \mathbb{N}$. Ta có

$$B \subset A \text{ và } \sup B = 10$$

Nhưng A không bị chặn trên.

Câu 6: Cho B là một tập con khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Đặt $A \coloneqq \{xy \mid x;\ y \in B\}$. Hỏi A có bị chặn trên hay không?

Hướng dẫn:

Cho $B = (-\infty;\ a)$ với $a > 0$. Ta có

$$A = (-\infty;\ +\infty)$$

Suy ra A không bị chặn trên.

Câu 7: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Đặt $y_n = x_n^2$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi hai mệnh đề sau đây có tương đương hay không?
(i) $\{x_n\}$ hội tụ.
(ii) $\{y_n\}$ hội tụ.

Hướng dẫn:

Cho $x_n = (-1)^n;\ y_n = x_n^2 = 1$. Ta có $\{y_n\}$ hội tụ về 1 nhưng $\{x_n\}$ không hội tụ.

Vì vậy 2 mệnh đề không tương đương.

Câu 1: Cho n là một số nguyên ≥ 5 và $f(x) = \sqrt{x}$ với mọi x trong $(0;\ +\infty)$. Hỏi công thức sau đây đúng hay sai:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)x^{n-\frac{1}{2}}}$$

Hướng dẫn:

Với $n = 5$. Ta có

$$f^{(5)}(x) = (-1)^6\frac{105}{32x^{5-\frac{1}{2}}}$$

Vậy công thức trên sai.

Câu 2: Tính giới hạn của dãy số sau

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$$

Hướng dẫn:

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{3n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

Xét

$$\lim_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{3n}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{3n}\right)'}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}}{-\dfrac{1}{3n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{6n}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{1+\frac{2}{n}} = 6$$

Vậy nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^6$$

Câu 3: Trình bày bằng tiếng Việt một thí dụ có trong sách “Calculus: concepts and contexts” của James Stewart về thực tiễn của một trong ba bài toán 93, 95 và 97 (trong slides bài giảng).

Hướng dẫn:

A telephone company wants to estimate the number of new residential phone lines that it will need t install during the upcoming month. At the begining of January the company had 100 000 subscribers, each of whome had 1, 2 phone lines, on average. The company estimated that its subcribership was increasing at the rate of 1000 monthly. By polling its existing subcribers, the company found that each intended to install an average of 0.01 new phone lines by the end of January. Estimate the number of new lines the company will have to install in January by calculating the rate of increase of lines at the begining of the month.

Một công ty điện thoại muốn ước lượng số lượng đường dây điện thoại cố định mới mà họ cần lắp đặt trong tháng sắp tới. Vào đầu tháng 1, công ty có 100 000 thuê bao, trung bình mỗi người có 1, 2 đường dây điện thoại. Công ty ước tính rằng lượng thuê bao sẽ tăng với tốc độ 1000 người hàng tháng. Bằng cách khảo sát các thuê bao hiện có của mình, công ty nhận thấy rằng mỗi người dự định lắp đặt trung bình 0.01 đường dây điện thoại mới vào cuối tháng 1. Ước tính số đường đây mới mà công ty sẽ phải lắp đặt trong tháng 1 bằng cách tính tỷ lệ tăng của số đường đây vào đầu tháng.

Câu 4: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực bị chặn. Hỏi khẳng định sau đúng hay sai?

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \text{ là số thực}$$

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ bị chặn nên $\{x_n\}$ bị chặn trên, vì vậy

$$\begin{aligned} x_m &\le A, \qquad A \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \sup_{m\ge n} x_m &= A \end{aligned}$$

Vậy nên

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{m\ge n} a_m = \lim_{n\to+\infty} A = A$$

là số thực.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực bị chặn. Hỏi tập $\{f(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$ có bị chặn dưới hay không?

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|x_n| \le M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Giả sử $\{f(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$ không bị chặn. Vì vậy tồn tại x_m sao cho $|f(x_m)| > m$.

Do $\{x_n\}$ bị chặn nên theo định lý Bolzano-Weierstrass nên ta có tồn tại $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to x$.

Với f liên tục nên ta có

$$f\left(x_{n_k}\right) \to f(x)$$

Mà

$$f\left(x_{n_k}\right) > n_k \ge k, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \text{ (vô lý)}$$

Vậy suy ra $\{f(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$ bị chặn. Cho nên $\{f(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$ bị chặn dưới.

Câu 6: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(c;\ d)$. Cho $[a;\ b]$ là một khoảng đóng chứa trong $(c;\ d)$, và t trong $[a;\ b]$ sao cho $f(t) = \max f([a;\ b])$. Hỏi $f'(t)$ có bằng 0 hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $f(x) = x$ khả vi trên khoảng mở $(-2;\ 2)$. Cho $[-1;\ 1]$ là khoảng đóng chứa trong $(-2;\ 2)$. Ta có

$$f(1) = \max f([-1;\ 1])$$

Nhưng ta có

$$f'(t) = 1 \neq 0$$

Vậy $f'(t)$ không bằng 0.

Câu 7: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực dương. Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2010}$ hội tụ. Hỏi chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2011}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2010}$ hội tụ. Vì vậy tồn tại $c \in (0;\ 1)$ và có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} &\left|\frac{x_{n+1}^{2010}}{x_n^{2010}}\right| < c \qquad , && \forall n \geq N \\ \Rightarrow &\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < c^{\frac{1}{2010}} \qquad , && \forall n \geq N \\ \Rightarrow &\left|\frac{x_{n+1}^{2011}}{x_n^{2011}}\right| < c^{\frac{2011}{2010}} < c, && \forall n \geq N \end{aligned}$$

Vậy nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2011}$ hội tụ.

Câu 8: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a;\ b]$. Đặt

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt\,, \qquad \forall x \in (a;\ b)$$

Giả sử g nghịch biến trên khoảng $(a;\ b)$. Hỏi "$f(s) \leq 0$ với mọi s trong $(a;\ b)$" đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Vì g nghịch biến trên khoảng $(a;\ b)$ nên ta có

$$\begin{aligned} &g'(x) && \leq 0, && \forall x \in (a;\ b) \\ \Rightarrow &\left(\int_a^x f(t)dt\right)' && \leq 0, && \forall x \in (a;\ b) \\ \Rightarrow &f(x) && \leq 0, && \forall x \in (a;\ b) \end{aligned}$$

Vậy nên mệnh đề trên đúng.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2011 – 2012

Câu 1: Cho $A_1;\ \cdots;\ A_n;\ B_1;\ \cdots;\ B_n$ là $2n$ tập con của một tập hợp X. Giả sử $A_i \subset B_i$ với mọi $i = 1;\ \cdots;\ n$. Hỏi kết luận sau đây đúng hay sai?

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned} A_i &\subset B_i \quad, &&\forall i = 1;\ \cdots;\ n \\ \Rightarrow A_i &\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i, &&\forall i = 1;\ \cdots;\ n \\ \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i &\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i \end{aligned}$$

Câu 2: Cho $A \coloneqq \{y \in (0;\ +\infty) \mid y^3 < 5\}$. Hỏi A có bị chặn trên hay không? (**lưu ý, ta chưa chứng minh sự tồn tại của $\sqrt[3]{5}$**).

Hướng dẫn:

Giả sử A không bị chặn trên. Suy ra tồn tại $z \in A$ và $z > 2$, ta có

$$z^3 = 8 > 5$$
$$\Rightarrow z \notin A \text{ (vô lý)}$$

Vậy nên A bị chặn trên.

Câu 3: Cho $\{x_{1;\,n}\};\ \{x_{2;\,n}\};\ \cdots;\ \{x_{k;\,n}\}$ là k dãy số thực hội tụ lần lượt về $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_k$. Hỏi kết luận sau đây đúng hay sai?

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x_{1;\,n}x_{2;\,n}\cdots x_{k;\,n}\right) = a_1a_2\cdots a_k$$

Hướng dẫn:

Xét $\{x_{i;\,n}\},\ i \in \overline{1;\ k}$ hội tụ về a_i tức là

$\forall \varepsilon_i > 0, \exists N_i(\varepsilon_i) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|x_{i;\,n} - a_i\right| < \varepsilon_i, \qquad \forall n \geq N_i(\varepsilon_i)$$

Đặt $x_n = x_{1;\,n}x_{2;\,n}\cdots x_{k;\,n}$ và $a = a_1a_2\cdots a_k$, ta chứng minh rằng

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Ta có

$$\begin{aligned}|x_n - a| &= |x_{1;\,n}x_{2;\,n}\cdots x_{k;\,n} - a_1a_2\cdots a_k| \\ &= \left|(x_{1;\,n} - a_1)x_{2;\,n}\cdots x_{k;\,n} + \sum_{i=2}^{k}(x_{i;\,n} - a_i)\prod_{t=i+1}^{k} x_{t;\,n}\prod_{h=1}^{i} a_h\right| \\ &\le |x_{1;\,n} - a_1|\prod_{t=2}^{k}|x_{t;\,n}| + \sum_{i=2}^{k}|x_{i;\,n} - a_i|\prod_{t=i+1}^{k}|x_{t;\,n}|\prod_{h=1}^{i}|a_h| \\ &< \varepsilon_1\prod_{t=2}^{k}|x_{t;\,n}| + \sum_{i=2}^{k}\varepsilon_i\prod_{t=i+1}^{k}|x_{t;\,n}|\prod_{h=1}^{i}|a_h| < \varepsilon\end{aligned}$$

Chọn $N(\varepsilon) = \max\limits_{i\in\overline{1;\,k}}\{N_i(\varepsilon_i)\}$. Vậy ta có

$$\lim_{n\to+\infty}(x_{1;\,n}x_{2;\,n}\cdots x_{k;\,n}) = a_1a_2\cdots a_k$$

Câu 4: Cho một dãy số thực $\{x_n\}$, và hai số thực a và b. Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ về a và b. Hỏi a có bằng b hay không?

Hướng dẫn:

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - b| < \varepsilon', \qquad \forall n > M(\varepsilon')$$

Ta có

$$|a - b| = |x_n - a + b - x_n| \le |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon'$$

Vậy nên $a = b$.

Câu 5: Cho một dãy số thực $\{x_n\}$, $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$, và $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$ là một dãy con của $\{x_{n_k}\}$. Hỏi $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$ có là một dãy con của $\{x_n\}$ hay không?

Hướng dẫn:

Với $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$ là một dãy con của $\{x_{n_k}\}$ nên $n_{k_l} \ge n_k$.

Ta có $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$ nên $n_k \ge n$.

Vậy nên suy ra $n_{k_l} \ge n$.

Suy ra $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$.

Câu 6: Đặt $A \coloneqq \{y \in (0;\ +\infty) \mid y^2 < 5\}$ và $B \coloneqq \{z \in (0;\ +\infty) \mid z^2 > 5\}$. Hỏi "$\sup(A) \leq \inf(B)$" đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned} y^2 &< 5\ , && \forall y \in A \\ \Rightarrow y &< \sqrt{5}, && \forall y \in A \end{aligned}$$

Vậy $\sup(A) = \sqrt{5}$

Ta có

$$\begin{aligned} z^2 &> 5\ , && \forall z \in B \\ \Rightarrow z &> \sqrt{5}, && \forall z \in B \end{aligned}$$

Vậy $\inf(B) = \sqrt{5}$

Vậy nên $\sup(A) = \inf(B)\ (1)$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} y^2 &< 5 < z^2 &&, \forall y \in A;\ z \in B \\ \Rightarrow y^2 &< z^2 &&, \forall y \in A;\ z \in B \\ \Rightarrow y &< z &&, \forall y \in A;\ z \in B \\ \Rightarrow \sup(A) &< z &&, \forall z \in B \\ \Rightarrow \sup(A) &< \inf(B)\ (2) \end{aligned}$$

Từ $(1);\ (2) \Rightarrow \sup(A) \leq \inf(B)$

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2011 – 2012

Câu 1: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, f và g là hai hàm số liên tục đều trên A. Giả sử $f(A)$ và $g(A)$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi $f \cdot g$ có liên tục đều trên A hay không?

Hướng dẫn:

Vì $f(A);\ g(A)$ bị chặn trong $\mathbb{R}$ nên $\exists M;\ N > 0$ sao cho

$$|f(x)| \le M;\ |g(x)| \le N, \qquad \forall x \in A$$

Vì f và g là hai hàm số liên tục đều trên A nên

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in A, |y - x| < \delta(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon', \qquad \forall y \in A, |y - x| < \eta(\varepsilon')$$

Ta cần chứng minh $f \cdot g$ liên tục đều trên A tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\gamma(\varepsilon'') > 0$ sao cho

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| < \varepsilon'', \qquad \forall y \in A, |y - x| < \gamma(\varepsilon'')$$

Ta có

$$\begin{aligned} |f(y)g(y) - f(x)g(x)| &= |f(y)g(y) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(x)g(x)| \\ &= \big|\big(f(y) - f(x)\big)g(y) + \big(g(y) - g(x)\big)f(x)\big| \\ &\le |f(y) - f(x)||g(y)| + |g(y) - g(x)||f(x)| < \varepsilon M + \varepsilon' N < \varepsilon'' \end{aligned}$$

Chọn $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon''}{2M};\ \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon''}{2N};\ \gamma(\varepsilon'') = \min\{\delta(\varepsilon);\ \eta(\varepsilon')\}$.

Vậy $f \cdot g$ liên tục đều trên A.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$. Giả sử $f'(s) \neq 0$ với mọi s trong $(a;\ b)$. Hỏi f có đơn ánh trên $(a;\ b)$ hay không?

Hướng dẫn:

Áp dụng định lý giá trị trung bình Lagrange, ta có với mọi $x;\ y \in (a;\ b)$ sao cho $x \neq y$.

Giả sử $x < y$ thì $\exists c \in (x;\ y)$ sao cho

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Mà $f'(c) \neq 0$ và $y - x > 0$ vì vậy

$$f(y) - f(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow f(y) \neq f(x)$$

Vậy suy ra f đơn ánh trên $(a;\ b)$.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$, và c trong $(a;\ b)$. Giả sử $f'(c) = 0$. Hỏi $f(c)$ có là cực tiểu hoặc cực đại của $f\big((a;\ b)\big)$ hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $f(x) = x^3;\ (a;\ b) = (-1;\ 1)$. Ta có

$$f'(0) = 0$$

Nhưng ta thấy

$$f(0) > f(y), \qquad \forall y \in (-1;\ 0)$$

và

$$f(0) < f(y), \qquad \forall y \in (0;\ 1)$$

Vì vậy $f(0)$ không phải là cực tiểu hay cực đại của $f\big((-1;\ 1)\big)$.

Câu 4: Đặt $x_n = (n^3+1)^{n^{-1}}$. Hỏi $\{x_n\}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3+1)^{n^{-1}} = \lim_{n\to+\infty}(n^3+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n^3+1)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n^3+1)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(n^3+1)}$$

Xét

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(n^3+1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n^3+1)}{n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln(n^3+1))'}{n'}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{3n^2}{n^3+1}}{1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^3+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Vì vậy $e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(n^3+1)} = e^0 = 1$. Nên suy ra $\{x_n\}$ hội tụ về 1.

Câu 5: Với mọi số nguyên n, cho một hàm số f_n liên tục trên $[0;\ 1]$. Giả sử

$$f_m(x) \le f_{m-1}(x) \le 2012, \qquad \forall x \in [0;\ 1], \qquad m \in \mathbb{N}$$

Đặt $a_n = \int_0^1 f_n dx$ với mọi số nguyên n. Hỏi $\{a_n\}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $f_n(x) = -n$. Ta có

$$a_n = \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 (-n)dx = -nx\Big|_0^1 = -n$$

Mà ta có

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$$

Vậy $\{a_n\}$ không hội tụ.

Câu 6: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, a trong $A^* \cap A$, và f là một hàm số thực trên A. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong A sao cho x_n hội tụ về a và $a < x_n$ với mọi số nguyên n. Giả sử giới hạn bên phải tại a của f là $f(a)$. Hỏi kết luận nào trong hai kết luận sau đúng:
(i) $\{f(x_n)\}$ có giới hạn là $f(a)$.
(ii) f liên tục tại a.

Hướng dẫn:

(i)

Ta có giới hạn phải của f tại a là $f(a)$ nên ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in A, \qquad y - a < \delta(\varepsilon)$$

Với x_n hội tụ về a và $x_n > a$ với mọi số nguyên n nên ta có

Cho $\varepsilon' > 0$, có $N(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x_n - a < \varepsilon', \qquad \forall n \geq N(\varepsilon')$$

Chứng minh $f(x_n)$ có giới hạn là $f(a)$ tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\eta(\varepsilon'') > 0$ sao cho

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon'', \qquad \forall x_n \in A, \qquad x_n - a < \eta(\varepsilon'')$$

Với y theo $\delta(\varepsilon)$ nên ta xem $y = y_\delta$. Vậy ta viết lại

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y_\delta) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \forall y_\delta \in A, \qquad y_\delta - a < \delta(\varepsilon)$$

Ta chọn $y_\delta = x_n$; $\eta(\varepsilon'') = \varepsilon' = \delta(\varepsilon)$; $\varepsilon'' = \varepsilon$. Vậy nên $\{f(x_n)\}$ có giới hạn là $f(a)$

(ii)

Ta xét hàm sau: Trên $\mathbb{R}$ ta lấy

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ 0 \quad , & x < 0 \end{cases}$$

Thì ta có

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

Nhưng ta thấy f không liên tục tại 0.

Câu 7: Cho $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của một dãy số thực $\{x_n\}$. Giả sử $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a, và $b = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ là một số thực. Hỏi kết luận sau đúng hay sai: $b \leq a$.

Hướng dẫn:

Ta có $b = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$; $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Dùng phản chứng ta giả sử $b > a$

Cho $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.

Với $a + \varepsilon < b$, chọn $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} & x_n && > a + \varepsilon, && \forall n \geq k \\ \Rightarrow\ & x_n - a && > \varepsilon \quad , && \forall n \geq k \\ \Rightarrow\ & |x_n - a| && > \varepsilon \quad , && \forall n \geq k \end{aligned}$$

Vậy $\{x_n\}$ không hội tụ về a. Nên không tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a (mâu thuẫn)

Vậy

$$\begin{aligned} & b && \leq a \\ \Rightarrow\ & \liminf_{n \to +\infty} x_n && \leq \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \end{aligned}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2012 – 2013

Câu 1: Cho f là một song ánh từ tập hợp A vào tập hợp B. Cho g là một ánh xạ ngược của f. Hỏi g có là một ánh xạ toàn ánh hay không?

Hướng dẫn:

Với f là một toàn ánh từ A vào B nên

$$\forall x \in A, \qquad \exists y \in B \text{ sao cho } y = f(x)$$

Với g là ánh xạ ngược của f hay $g = f^{-1}$, ta có

$$g(y) = f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

Vậy nên

$$\forall x \in A, \qquad \exists y \in B \text{ sao cho } f^{-1}(y) = x$$

Vậy nên $g = f^{-1}$ là một toàn ánh.

Câu 2: Cho f là một ánh xạ từ tập hợp A vào tập hợp B. Hỏi các mệnh đề sau đây có tương đương với nhau hay không?
(a) Giả sử $f(D) \cap f(E) = \emptyset$ với mọi tập con D và E trong A và $D \cap E = \emptyset$.
(b) f là một đơn ánh.

Hướng dẫn:

Chứng minh (a) ⇒ (b):

Cho $x \in D;\ y \in E$. Ta có

$$\begin{aligned} &D \cap E = \emptyset \\ &\Rightarrow x \neq y \qquad , \qquad \forall x \in D;\ y \in E \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &f(D) \cap f(E) = \emptyset \\ &\Rightarrow f(x) \neq f(y) \qquad , \qquad \forall x \in D;\ y \in E \end{aligned}$$

Vậy nên f là đơn ánh.

Chứng minh (b) ⇒ (a):

Với f là một đơn ánh. Ta có

$$\forall x_1;\ x_2 \in A \text{ sao cho } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Chọn $x_1 \in D;\ x_2 \in E$. Vậy

$$D \cap E = \emptyset$$

và

$$f(D) \cap f(E) = \emptyset$$

Vậy nên

$$f(D) \cap f(E) = \emptyset \text{ với mọi tập con } D \text{ và } E \text{ trong } A \text{ và } D \cap E = \emptyset$$

Vậy hai mệnh đề trên tương đương với nhau.

Câu 3: Cho A là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}$, và f là một ánh xạ từ A vào A. Giả sử có một số thực dương C sao cho:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Đặt:

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{(n \text{ lần})}$$

Hỏi điều sau đây đúng hay sai?

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq C^n|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hướng dẫn:

Với $n = 1$, ta có

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Giả sử $n = k$ đúng tức là

$$|f^k(x) - f^k(y)| \leq C^k|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Chứng minh $n = k + 1$ đúng tức là chứng minh

$$|f^{k+1}(x) - f^{k+1}(y)| \leq C^{k+1}|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Thật vậy ta có

$$|f^{k+1}(x) - f^{k+1}(y)| = \left|f^k\big(f(x)\big) - f^k\big(f(y)\big)\right| \leq C^k|f(x) - f(y)| \leq C^{k+1}|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Vậy nên ta suy ra $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq C^n|x - y|, \qquad \forall x;\ y \in A$$

Câu 4: Cho $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{m_k}\}$ là hai dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$. Đặt $l_k := n_k + m_k$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{x_{l_k}\}$ có là một dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$ hay không?

Hướng dẫn:

Do $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{m_k}\}$ là hai dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$ nên ta có

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} k \leq n_k = f(k) \\ k \leq m_k = g(k) \end{cases}$$

Ta có

$$l_k = n_k + m_k \geq k + k \geq k$$

Vậy nên $\{x_{l_k}\}$ là một dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$.

Câu 5: Cho A là một tập khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Cho α là một chặn trên của A. Giả sử có một dãy số $\{x_n\}$ hội tụ về α và $x_n \in A$ với mọi số nguyên n. Hỏi α có là $\sup(A)$ hay không?

Hướng dẫn:

Với α là một chặn trên của A nên

$$x_n \leq \alpha, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Do $\{x_n\}$ là dãy hội tụ nên $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, vì vậy nên

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \qquad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

Giả sử $x_m \le x_n$

Với $\{x_n\}$ là dãy hội tụ, ta có

$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned}
&|x_n - \alpha| < \varepsilon' &&, && \forall n > M(\varepsilon')\\
\Rightarrow &-\varepsilon' < x_n - \alpha < \varepsilon', && && \forall n > M(\varepsilon')\\
\Rightarrow &-\varepsilon' < x_n - \alpha &&, && \forall n > M(\varepsilon')\\
\Rightarrow &\alpha - \varepsilon' < x_n &&, && \forall n > M(\varepsilon')
\end{aligned}$$

Giả sử α không phải $\sup A$ nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x_m \le \alpha - \varepsilon'$$

Vậy nên, ta có

$$\begin{cases} x_m \le \alpha - \varepsilon' < x_n \\ x_m \le x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = \alpha - \varepsilon' \\ x_n > \alpha - \varepsilon' \end{cases} \text{(vô lý)}$$

Vậy nên suy ra $\alpha = \sup A$.

Câu 6: Phủ định mệnh đề sau:

"$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \ge N$"

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall n \in [N;\ +\infty)$$

Phủ định mệnh đề

$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists x \in A, \quad \exists n \in [N;\ +\infty)$ sao cho $|f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon$

Câu 7: Cho hai dãy số thực $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ lần lượt hội tụ về a và b. Giả sử $x_n < y_n$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $a < b$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Đặt

$$x_n = \frac{1}{n^2 + 1};\ y_n = \frac{1}{n}$$

Ta có

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 = a;\ \lim_{n \to +\infty} y_n = 0 = b$$

Vậy nên $a < b$ là sai.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2012 – 2013

Câu 1: Cho f là một hàm số thực khả vi trên khoảng mở $(1;\ 6)$. Giả sử $f(2) < f(5)$. Hỏi có một c trong khoảng $(1;\ 6)$ sao cho $f'(c) \neq 0$ hay không?

Hướng dẫn:

Do f khả vi trên khoảng mở $(1;\ 6)$ nên suy ra f liên tục trên khoảng đóng $[1;\ 6]$.
Có một $c \in [2;\ 5] \subset (1;\ 6)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(5) - f(2) &= f'(c)(5-2) \\ \Rightarrow f'(c) &= \frac{f(5)-f(2)}{3} \end{aligned}$$

Vì $f(2) < f(5)$ nên suy ra $f'(c) > 0$
Vì thế $f'(c) \neq 0$.
Vậy có một c trong khoảng $(1;\ 6)$ sao cho $f'(c) \neq 0$.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở $(a;\ b)$, và c trong $(a;\ b)$.
Giả sử $f'(c) \neq 0$. Hỏi có một khoảng $(\alpha;\ \beta)$ sao cho $c \in (\alpha;\ \beta) \subset (a;\ b)$ và $f(c) \neq f(x)$ với mọi x trong $(\alpha;\ \beta)\backslash\{c\}$ hay không?

Hướng dẫn:

Có một $c \in (\alpha;\ \beta) \subset (a;\ b)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= f'(c)(x-\alpha), && \forall x \in (\alpha;\ \beta)\backslash\{c\} \\ \Rightarrow f'(c) &= \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, && \forall x \in (\alpha;\ \beta)\backslash\{c\} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f'(c) \neq 0 \\ \begin{cases} \alpha < x < \beta \\ x \neq c \end{cases} \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \neq 0, \qquad \forall x \in (\alpha;\ \beta)\backslash\{c\} \\ &\Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq f(\alpha) \\ x \neq \alpha \end{cases} \\ &\Rightarrow f \text{ đơn ánh} \end{aligned}$$

Vậy nên $f(x) \neq f(c)$ với mọi x trong $(\alpha;\ \beta)\backslash\{c\}$.

Câu 3: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử x_n ở trong khoảng $[2012;\ 2013]$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ có là một số thực hay không?

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned} &x_n \le 2013, && \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ &\sup_{m\ge n} x_n \le 2013, && \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ &\lim_{n\to+\infty} \sup_{m\ge n} x_n \le \lim_{n\to+\infty} 2013, && \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ &\limsup_{n\to+\infty} x_n \le 2013, && \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Vậy nên $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ là một số thực.

Câu 4: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A, và B là một tập con của A. Giả sử:
(i) Với mỗi x trong A, có một dãy $\{x_n\}$ sao cho x_n thuộc B với mọi số nguyên dương n và $\{x_n\}$ hội tụ về x.
(ii) $f(z) = 1$ với mọi z trong B.
Hỏi $f(x)$ có bằng 1 với mọi x trong A hay không?

Hướng dẫn:

Đặt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Ta luôn có $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ thì tồn tại $x_n \in \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$

Nhưng ta thấy

$$f(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

Vậy nên $f(x)$ không bằng 1 với mọi x trong A.

Câu 5: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Đặt u là hàm hợp nối $g \circ f$ của f và g. Hỏi u có liên tục đều trên $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

f là hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$ nên ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta(\varepsilon).$$

g là hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$ nên ta có

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$|g(z) - g(t)| < \varepsilon', \qquad \forall t \in \mathbb{R}, |z - t| < \eta(\varepsilon')$$

Với $u = g \circ f$, chứng minh u là hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$ tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\gamma(\varepsilon'') > 0$ sao cho

$$|u(s) - u(h)| < \varepsilon'', \qquad \forall h \in \mathbb{R}, |s - h| < \gamma(\varepsilon'')$$

Thật vậy ra có

$$|g(z) - g(t)| < \varepsilon', \qquad \forall t \in \mathbb{R}, |z - t| < \eta(\varepsilon')$$

Đặt $z = f(s)$; $t = f(h)$. Vậy ta có

$$\left|g\big(f(s)\big) - g\big(f(h)\big)\right| < \varepsilon', \qquad \forall f(h) \in \mathbb{R}, |f(s) - f(h)| < \eta(\varepsilon')$$

Chọn $\eta(\varepsilon') = \varepsilon$; $\gamma(\varepsilon'') = \eta(\varepsilon')$; $s = z$; $t = h$; $\varepsilon'' = \varepsilon'$. Vậy ta có

$$|u(s) - u(h)| < \varepsilon'', \qquad \forall h \in \mathbb{R}, |z - t| < \eta(\varepsilon')$$

Câu 6: Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$, b là một điểm trong $\mathbb{R}$. Hỏi hai điều sau đây có tương đương hay không?
(i) Có một dãy số thực $\{x_n\}$ trong $A \setminus \{b\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về b.
(ii) b là một điểm tụ của A.

Hướng dẫn:

Có một dãy số thực $\{x_n\}$ trong $A \setminus \{b\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về b ta có
Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Với b là một điểm tụ của A ta có
Cho $\delta > 0$, có $y \in A$ sao cho

$$0 < |y - b| < \delta$$

Có y phụ thuộc vào δ. Nên ta có thể viết lại

Cho $\delta > 0$, có $y_\delta \in A$ sao cho

$$0 < |y_\delta - b| < \delta$$

Chọn $y_\delta = x_n$; $\delta = \varepsilon$

Vậy ta thấy (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2013 – 2014

Câu 1: Cho $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, và $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$. Hỏi $\{x_{n_k}\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Cho $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ nên ta có
Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \qquad \forall m > n > N(\varepsilon)$$

Chứng minh $\{x_{n_k}\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ tức là
Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$|x_{n_k} - x_{n_l}| < \varepsilon', \qquad \forall k > l > M(\varepsilon')$$

Thật vậy do $\{x_{n_k}\}$ là dãy con của $\{x_n\}$ nên

$$k \geq n_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

và $\{x_{n_l}\}$ là dãy con của $\{x_n\}$ nên

$$l \geq n_l, \qquad \forall l \in \mathbb{N}$$

Vậy nên $n_k > n_l$.

Chọn $M(\varepsilon') = N(\varepsilon)$; $\varepsilon' = \varepsilon$. Ta suy ra $\{x_{n_k}\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$

Câu 2: Cho A là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}$, và f là một ánh xạ từ A vào A. Giả sử f là một toàn ánh. Đặt:

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{(n \text{ lần})}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hỏi f^n có toàn ánh với mọi n trong $\mathbb{N}$ hay không?

Hướng dẫn:

Với $n = 1$ ta có f là toàn ánh

$$\forall s \in A, \qquad \exists t \in A \text{ sao cho } f(s) = t$$

Giả sử $n = k$ đúng hay f^k là toàn ánh tức là

$$\forall u \in A, \qquad \exists v \in A \text{ sao cho } f^k(u) = v$$

Chứng minh $n = k + 1$ đúng hay f^{k+1} là toàn ánh tức là chứng minh

$$\forall x \in A, \qquad \exists y \in A \text{ sao cho } f^{k+1}(x) = y$$

Thật vậy ta có

$$f^{k+1}(x) = f^k\big(f(x)\big)$$

Do f là toàn ánh nên ta chọn $x = s$ nên

$$f(x) = f(s) = t$$

Do f^k là toàn ánh vì vậy chọn $t = u$. Suy ra

$$f^k\big(f(x)\big) = f^k(t) = f^k(u) = v$$

Chọn $v = y$. Suy ra điều cần chứng minh.

Vậy f^n là toàn ánh với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Câu 3: Cho $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{m_k}\}$ là hai dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$. Đặt $l_k \coloneqq n_k \cdot m_k$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{x_{l_k}\}$ có là một dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$ hay không?

Hướng dẫn:

Do $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{m_k}\}$ là hai dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$ nên ta có

$$\begin{cases} n_k \geq k, & \forall k \in \mathbb{N} \\ m_k \geq k, & \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Với $l_k \coloneqq n_k \cdot m_k$ nên ta có

$$l_k \coloneqq n_k \cdot m_k \geq k^2 \geq k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Vậy $\{x_{l_k}\}$ có là một dãy con của dãy số thực $\{x_n\}$

Câu 4: Cho A và B là hai tập khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\sup(A) \leq \sup(B)$. Hỏi kết luận sau đây đúng hay sai:

$$x \leq y, \qquad \forall x \in A, \qquad \forall y \in B$$

Hướng dẫn:

Ta chọn 2 tập $A;\ B$ sao cho $A \cap B \neq \emptyset$. Ví dụ đặt

$$A = (0;\ 2);\ B(1;\ 3)$$

Ta có

$$\sup A = 2 \leq 3 = \sup B$$

Nhưng ta chọn $x = 1.5 \in A$ và chọn $y = 1.2 \in B$ ta thấy

$$x > y$$

Vậy nên kết luận trên sai.

Câu 5: Phủ định mệnh đề sau:

"$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$ và $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$"

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n \geq N \text{ và } |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Phủ định mệnh đề

$$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n < N \text{ hoặc } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Câu 6: Cho A và B là hay tập khác rỗng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\sup(A) \leq \sup(B)$. Đặt:

$$E \coloneqq \{xy \mid x \in A;\ y \in B\}$$

Hỏi E có bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Chọn tập $A = (-\infty;\ a);\ B = (-\infty;\ b)$ sao cho $a \leq b$. Vậy ta có

$$\sup A = a \leq b = \sup B$$

Ta thấy nếu $x \to -\infty$; $y \to -\infty$ thì $xy \to +\infty$.

Vì vậy E không bị chặn trên.

Câu 7: Cho a là một số thực. Giả sử $a > c$ với mọi số thực dương c. Hỏi $a \geq 0$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Phản chứng, ta giả sử $a < 0$. Thật vậy ta có

$$a > c$$

mà

$$c > 0$$

Dẫn tới mâu thuẫn

$$0 > a > c > 0$$

Vậy nên $a \geq 0$.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2013 – 2014

Câu 1: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[1;\ 3]$. Hỏi $f([1;\ 3])$ có bị chặn dưới hay không?

Hướng dẫn:

Cho $\{x_n\}$ là dãy hội tụ về x trong $[1;\ 3]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$.

Giả sử $f([1;\ 3])$ không bị chặn. Vì vậy tồn tại $x_n \in [1;\ 3]$ sao cho $|f(x_n)| > n$.

Do $\{x_n\}$ nằm trong khoảng đóng $[1;\ 3]$ nên theo định lý Bolzano-Weierstrass ta có tồn tại $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to x$. Do $x_{n_k} \in [1;\ 3]$ nên $x \in [1;\ 3]$.

Với f khả vi trên $[1;\ 3]$ nên f liên tục trên $[1;\ 3]$. Ta có

$$f(x_{n_k}) \to f(x)$$

Mà

$$f(x_{n_k}) > n_k \geq k, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \text{ (vô lý)}$$

Vậy suy ra $f([1;\ 3])$ bị chặn. Cho nên $f([1;\ 3])$ bị chặn dưới.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[0;\ 1]$ và $\{x_n\}$ là một dãy số thực trong $[0;\ 1]$. Hỏi có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho dãy $\{f(x_{n_k})\}$ hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ là dãy số thực trong khoảng đóng $[0;\ 1]$. Nên theo định lý Bolzano-Weierstrass ta có tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về x trong $[0;\ 1]$.

Do f là hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ nên suy ra $f(x_{n_k})$ hội tụ về $f(x)$.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(x) = 0$ với mọi số vô tỉ x. Hỏi $f(t)$ có bằng 0 với mọi số thực t hay không?

Hướng dẫn:

Ta có với x là 1 số hữu tỷ thì có 1 dãy vô tỷ $\{x_n\}$ hội tụ về x.

Tương tự với y là 1 số vô tỷ thì có 1 dãy hữu tỷ $\{y_n\}$ hội tụ về y.

Theo tính chất trù mật của $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ ta có

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \exists p;\ q \in \mathbb{Q}, \qquad \exists r;\ s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho

$$x - \varepsilon < p < x < q < x + \varepsilon$$
$$y - \varepsilon < r < y < s < y + \varepsilon$$

Nếu x là số hữu tỷ thì luôn tồn tại 1 dãy vô tỷ $\{x_n\}$ hội tụ về x trong khoảng

$$\left(x - \frac{1}{n};\ x + \frac{1}{n}\right)$$

Ta giả sử $f(t) \neq 0$ với mọi $t \in \mathbb{Q}$. Do t là 1 số hữu tỷ nên tồn tại dãy số vô tỷ $\{t_n\}$ sao cho $t_n \to t$.

Vì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có $f(t_n) \to f(t)$. Mà ta có

$$f(t_n) = 0, \qquad \forall t_n \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Vậy nên

$$f(t) = 0 \text{ (vô lý)}$$

Từ đó suy ra $f(t) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{Q}$ mà $f(t) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nên $f(t) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Câu 4: Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a;\ c]$ và khả vi trên khoảng mở $(a;\ c)$, và c trong $(a;\ b)$. Giả sử $f(a) = 2013$ và $f'(x) = 0$ với mọi x trong $(a;\ c)$.
Hỏi $f(t) = 2013$ với mọi t trong $(a;\ c)$ hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử tồn tại t trong $(a;\ c)$ sao cho $f(t) \neq 2013$.

Áp dụng định lý giá trị trung bình ta có do f là một hàm số thực liên tục trên $[a;\ c]$ và khả vi trên $(a;\ c)$ nên tồn tại $d \in (a;\ c)$ sao cho

$$f(a) - f(c) = f'(d)(a - c)$$

Do $f'(x) = 0$ với mọi x trong $(a;\ c)$ nên $f'(d) = 0$. Vì vậy suy ra

$$f(c) = f(a) = 2013$$

Xét khoảng $(a;\ t)$ với t trong $(a;\ c)$. Do f là một hàm số thực liên tục trên $[a;\ c]$ và khả vi trên $(a;\ c)$ nên f cũng là một hàm số thực liên tục trên $[a;\ t]$ và khả vi trên $(a;\ t)$. Theo định lý giá trị trung bình ta có tồn tại $e \in (a;\ t)$ sao cho

$$f(a) - f(t) = f'(e)(a - t)$$

Do $f'(x) = 0$ với mọi x trong $(a;\ c)$ nên $f'(e) = 0$. Vì vậy suy ra

$$f(t) = f(a) = 2013 \text{ (vô lý)}$$

Vì vậy suy ra $f(t) = 2013$ với mọi t trong $(a;\ c)$.

Câu 5: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[0;\ 1]$. Giả sử

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

Hỏi $f(t) \leq g(t)$ với mọi t trong $[0;\ 1]$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Chọn $f(x) = x^2$ và $g(x) = \frac{1}{2}$. Ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} = \int_0^1 g(x)dx$$

Chọn $x = \frac{3}{4}$. Ta có

$$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0.525 > \frac{1}{2} = g\left(\frac{3}{4}\right)$$

Vậy nên kết luận trên sai.

Câu 6: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[a;\ b]$. Giả sử $f(t) \in [0;\ 1]$ với mọi t trong $[0;\ 1]$. Hỏi

$$\int_0^1 f^3(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$$

đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Ta có $f(t) \in [0;\ 1]$ vậy nên

$$\begin{cases} f(t) \leq \quad 1 \\ f(t) \geq -1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) - 1 \leq 0 \\ f(t) + 1 \geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (f(t) - 1)(f(t) + 1) \leq 0$$
$$\Rightarrow f^2(t) - 1 \leq 0$$
$$\Rightarrow f(t)(f^2(t) - 1) \leq 0$$
$$\Rightarrow f^3(t) - f(t) \leq 0$$
$$\Rightarrow f^3(t) \leq f(t)$$

Do $f^3(t) \leq f(t)$ với mọi t nên

$$\int_0^1 f^3(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2014 – 2015

Câu 1: Cho P_k là các mệnh đề Toán học, $k \in \mathbb{N}$. Giả sử P_k đúng thì P_{k+1} đúng với mọi k trong $\mathbb{N}$. Hỏi P_k có đúng với mọi k trong $\mathbb{N}$ hay không?

Hướng dẫn:

Cho mệnh đề P_k là mệnh đề toán học "$k = k + 1$"

Giả sử $n = k$ đúng hay P_k đúng. Ta kiểm tra $n = k + 1$ đúng, thật vậy ta có

$$k + 1 = k + 1 + 1$$
$$\Rightarrow k + 1 = k + 2$$

Tuy nhiên, xét $n = 1$ thì P_1 là $1 = 2$. Mệnh đề toán học này sai.

Vì vậy P_k không đúng với mọi k trong $\mathbb{N}$.

Câu 2: Cho A_k và B_i là các tập con bị chặn trong $\mathbb{R}$, $k = 1; \cdots; K$ và $i \in \mathbb{N}$. Hỏi:

$$\bigcup_{k=1}^{K} A_k \text{ và } \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$$

có bị chặn trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Xét A_k là tập con bị chặn trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại $a_k;\ b_k \in \mathbb{R}$ sao cho

$$a_k \le A_k \le b_k, \qquad \forall x \in A_k$$

Đặt $a = \min\{a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_K\}$ và $b = \max\{b_1;\ b_2;\ \cdots;\ b_K\}$. Khi đó ta có

$$a \le x \le b, \qquad \forall x \in A_k, \qquad k = 1; \cdots; K$$
$$\Rightarrow a \le y \le b, \qquad \forall y \in \bigcup_{k=1}^{K} A_k$$

Vậy nên $\bigcup_{k=1}^{K} A_k$ bị chặn trong $\mathbb{R}$.

Chọn $B_i = \{i\},\ i \in \mathbb{N}$. Ta có B_i bị chặn với mọi $i \in \mathbb{N}$. Nhưng ta có

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\} = \mathbb{N}$$

Vậy nên ta thấy rằng $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ không bị chặn trong $\mathbb{R}$.

Câu 3: Hỏi $\sqrt{6}$ có là một số hữu tỷ hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử $\sqrt{6}$ là số hữu tỷ nên tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}$ và $\text{UCLN}(m;\ n) = 1$ sao cho

$$\sqrt{6} = \frac{m}{n}$$
$$\Rightarrow m^2 = 6n^2$$

Vậy nên m^2 chia hết cho 2. Ta giả sử nếu m không chia hết cho 2 vì vậy đặt $m = 2k + 1$ với mọi k trong $\mathbb{N}$. Ta có

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \nmid 2 \text{ (vô lý)}$$

Vậy nên m phải chia hết cho 2. Vậy nên đặt $m = 2k$ với mọi k trong $\mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned} m^2 &= 6n^2 \\ \Rightarrow 4k^2 &= 6n^2 \\ \Rightarrow 2k^2 &= 3n^2 \end{aligned}$$

Vậy nên $3n^2$ chia hết cho 2, do 2 và 3 là 2 số nguyên tố cùng nhau nên suy ra n^2 chia hết cho 2. Chứng minh tương tự suy ra n chia hết cho 2.

Ta thấy cả $m;\ n$ đều chia hết cho 2 nên suy ra $UC(m;\ n) = 2$ (vô lý)

Vì vậy suy ra $\sqrt{6}$ không phải số hữu tỷ.

Câu 4: Cho A là một tập khác rỗng trong $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy trong A. Cho f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$. Hỏi $\{f(x_n)\}$ có là một dãy số thực hay không?

Hướng dẫn:

Ta có $\{x_n\}$ là một dãy trong A tức là có 1 ánh xạ g sao cho

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to A \\ n &\mapsto x_n = g(n) \end{aligned}$$

Xét $f(x_n)$ là một ánh xạ sao cho

$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbb{R} \\ x_n &\mapsto y = f(x_n) \end{aligned}$$

Thật vậy ta thấy rằng $f(x_n) = f\big(g(n)\big) = (f \circ g)(n)$. Mà ta thấy rằng hàm hợp $f \circ g$ là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$. Vì vậy $\{f(x_n)\}$ có là một dãy số thực.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ và cho g là một hàm số thực liên tục trên $[1;\ 2]$ sao cho $f(1) = g(1)$. Đặt:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ g(x), & \text{nếu } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Hỏi h có liên tục tại 1 hay không?

Hướng dẫn:

Với f liên tục tại 1 nên ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(1;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [0;\ 1], |x - 1| < \delta(1;\ \varepsilon)$$

Với g liên tục tại 1 nên ta có

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(1;\ \varepsilon') > 0$ sao cho

$$|g(y) - g(1)| < \varepsilon', \qquad \forall y \in [1;\ 2], |y - 1| < \eta(1;\ \varepsilon')$$

Ta chứng minh h liên tục tại 1 tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\gamma(1;\ \varepsilon'') > 0$ sao cho

$$|h(z) - h(1)| < \varepsilon'', \qquad \forall z \in [0;\ 2], |z - 1| < \gamma(1;\ \varepsilon'')$$

Vì $h(1) = f(1) = g(1)$, nên ta phân tích như sau:

$$|h(z) - h(1)| = \begin{cases} |h(z) - h(1)|, & z \in [0;\ 1] \\ |h(z) - h(1)|, & z \in [1;\ 2] \end{cases} = \begin{cases} |f(z) - f(1)|, & z \in [0;\ 1] \\ |g(z) - g(1)|, & z \in [1;\ 2] \end{cases}$$

Ta chọn $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$; $\gamma(1;\ \varepsilon'') = \min\{\delta(1;\ \varepsilon);\ \eta(1;\ \varepsilon')\}$. Vậy ta suy ra h liên tục tại 1.

Câu 6: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và a là một số thực. Giả sử $\{x_n\}$ không hội tụ về a. Hỏi có hay không một số ε dương và một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho:

$$\left|x_{n_k} - a\right| \geq \varepsilon, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Hướng dẫn:

Nếu $\{x_n\}$ hội tụ về a tức là

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N$$

Vậy nên $\{x_n\}$ không hội tụ về a tức là

$\exists \varepsilon > 0, \forall N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \exists n_{N(\varepsilon)} \geq N(\varepsilon)$ sao cho

$$|x_n - a| \geq \varepsilon$$

Ta xây dựng 1 dãy con tăng nghiêm cách như sau

Với $N(\varepsilon) = 1$, tồn tại $n_1 \geq 1$ sao cho $\left|x_{n_1} - a\right| \geq \varepsilon$

Với $N(\varepsilon) = n_1 + 1$, tồn tại $n_2 \geq n_1 + 1$ sao cho $\left|x_{n_2} - a\right| \geq \varepsilon$

…

Với $N(\varepsilon) = n_k + 1$, tồn tại $n_{k+1} \geq n_k + 1$ sao cho $\left|x_{n_{k+1}} - a\right| \geq \varepsilon$

…

Vậy dãy vừa được xây dựng là 1 dãy con với chỉ số tăng nghiêm cách, vậy dãy con thỏa yêu cầu đề bài.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2014 – 2015

Câu 1: Cho f là một hàm số thực khả vi trên khoảng mở $A = (1;\ 3)$. Hỏi các khẳng định dưới đây đúng hay sai

(a) Nếu $f'(A)$ bị chặn thì f liên tục đều trên $(1;\ 3)$.

(b) Nếu f liên tục đều trên $(1;\ 3)$ thì $f'(A)$ bị chặn.

Hướng dẫn:

(a)

Với $f'(A)$ bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|f'(x)| < M,\ \forall x \in A$

Ta cần chứng minh f liên tục đều tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in A, |y - x| < \delta(\varepsilon)$$

Theo định lý giá trị trung bình, với mỗi $x;\ y \in A$, giả sử $x < y$ thì tồn tại $c \in [x;\ y]$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| = |f'(c)||x - y|$$

Do $f'(A)$ bị chặn nên

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \le M|x - y| \le M\delta(\varepsilon)$$

Ta chọn $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$. Từ đó suy ra f liên tục đều trên $(1;\ 3)$.

(b)

Đặt $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ta chứng minh f liên tục đều trên $(1;\ 3)$ tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in A, |y - x| < \delta(\varepsilon)$$

Ta có

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1}\right| = \frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}\right|} \le \frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x+y-2}\right|} \le \frac{|x-y|}{\left|\sqrt{|x-y|}\right|} \le \sqrt{|x-y|}$$
$$\le \sqrt{\delta(\varepsilon)}$$

Ta chọn $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0$. Từ đó suy ra f liên tục đều trên $(1;\ 3)$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Ta thấy rằng

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Vậy nên $f'(x)$ không bị chặn dưới nên không bị chặn.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Hỏi có hay không một số thực M sao cho
$$|f(x)-f(0)| \le M|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Hướng dẫn:

Chọn $f(x)=\sqrt{|x|}$. Ta chứng minh f là một hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$ tức là

Cho $\varepsilon>0$, tìm $\delta(\varepsilon)>0$ sao cho
$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon, \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y-x|<\delta(\varepsilon)$$

Thật vậy ta có
$$|f(y)-f(x)|=\left|\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|}\right|=\frac{\big||y|-|x|\big|}{\sqrt{|y|}+\sqrt{|x|}} \le \frac{\big||y|-|x|\big|}{\sqrt{|y|+|x|}} \le \frac{\big||y|-|x|\big|}{\sqrt{\big||y|-|x|\big|}}=\sqrt{\big||y|-|x|\big|} \le \sqrt{|y-x|}$$

Chọn $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^2$. Vậy f là một hàm số thực liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Giờ ta chứng minh không tồn tại M. Phản chứng, ta giả sử tồn tại M thỏa
$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(0)| \le M|x|, && \forall x \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow\ &\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}\right| \le M|x|, && \forall x \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow\ &\sqrt{|x|} \le M|x|\quad, && \forall x \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow\ &1 \le M\sqrt{|x|}\quad, && \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Cho $x \to 0$, ta có điều vô lý.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f'(x) \ne 0$ với x trong $\mathbb{R}$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

Hướng dẫn:

Với $x;\ y \in \mathbb{R}$ mà $f(x)=f(y)$. Theo định lý trung bình, không mất tính tổng quát giả sử $x \le y$ thì tồn tại $c \in [x;\ y]$ sao cho
$$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$$

Vì $f(x)=f(y)$ nên ta có
$$0=f'(c)(x-y)$$

Do $f'(c) \ne 0$, do đó suy ra $x=y$. Vì vậy f là đơn ánh.

Câu 4: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(0) \ge 0$ và $f'(x) \ge 0$ với mọi x trong $(0;\ +\infty)$. Hỏi khẳng định sau đây đúng hay sai: $f(x) \ge 0$ với mọi x trong $(0;\ +\infty)$?

Hướng dẫn:

Với mọi x trong $(0;\ +\infty)$, theo định lý giá trị trung bình ta có tồn tại $c \in [0;\ x]$ sao cho
$$\begin{aligned}
&f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)\\
\Rightarrow\ &f(x) \qquad\quad = f(0)+f'(c)x
\end{aligned}$$

Vì $f'(c) \ge 0,\ x>0,\ f(0) \ge 0$ nên
$$f(x) \ge 0, \qquad \forall x \in (0;\ +\infty)$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[1;\ 2]$. Giả sử $f(t) \geq 3$ với mọi t trong $[1;\ 2]$. Hỏi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

$$\int_1^2 f(x)dx \geq 3$$

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned} f(t) &\geq 3 \quad , \quad \forall t \in [1;\ 2] \\ \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx &\geq \int_1^2 3dx \\ \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx &\geq 3 \Big|_1^2 \\ \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx &\geq 3 \end{aligned}$$

Câu 6: Cho f là một hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[3;\ 4]$. Giả sử $f(t) \neq 2$ với mọi t trong $[3;\ 4]$. Hỏi

$$\int_3^4 f(x)dx \neq 2$$

đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Vì f là hàm số thực liên tục trên khoảng đóng $[3;\ 4]$, nếu tồn tại $u, v \in [3;\ 4]$ sao cho $f(u) < 2$ và $f(v) > 2$, không mất tính tổng quát giả sử $u \leq v$ thì sẽ tồn tại $c \in (u;\ v) \subset [3;\ 4]$ sao cho $f(c) = 2$, vô lý.

Vì vậy $f(x) > 2$ với mọi $x \in [3;\ 4]$ hoặc $f(x) < 2$ với mọi $x \in [3;\ 4]$.

Không mất tính tổng quát ta xét $f(x) > 2$ với mọi $x \in [3;\ 4]$

Vì $f(3.5) > 2$ nên tồn tại ε sao cho $f(3.5) \geq 2 + \varepsilon$.

Do f là hàm liên tục tại 3.5 nên ta có

Cho $\frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta(3.5;\ \varepsilon) \in (0;\ 0.5)$ sao cho

$$|f(y) - f(3.5)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall y : |y - 3.5| < \delta(3.5;\ \varepsilon)$$

Bỏ dấu tuyệt đối ta có

$$\forall y \in \big(3.5 - \delta(3.5;\ \varepsilon);\ 3.5 - \delta(3.5;\ \varepsilon)\big) : f(y) > f(3.5) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Mà do $f(3.5) \geq 2 + \varepsilon$ nên

$$\forall y \in \big(3.5 - \delta(3.5;\ \varepsilon);\ 3.5 - \delta(3.5;\ \varepsilon)\big) : f(y) > 2 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = 2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_3^4 f(t)dt &= \int_3^{3.5-\delta(3.5;\,\varepsilon)} f(t)dt + \int_{3.5-\delta(3.5;\,\varepsilon)}^{3.5+\delta(3.5;\,\varepsilon)} f(t)dt + \int_{3.5+\delta(3.5;\,\varepsilon)}^{4} f(t)dt \\ &\geq \int_3^{3.5-\delta(3.5;\,\varepsilon)} 2dt + \int_{3.5-\delta(3.5;\,\varepsilon)}^{3.5+\delta(3.5;\,\varepsilon)} \left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)dt + \int_{3.5+\delta(3.5;\,\varepsilon)}^{4} 2dt \\ &= 2\big(0.5-\delta(3.5;\ \varepsilon)\big) + \left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)2\delta(3.5;\ \varepsilon) + 2\big(0.5-\delta(3.5;\ \varepsilon)\big) \\ &= 2+\varepsilon\delta(3.5;\ \varepsilon) > 2\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_3^4 f(t)dt > 2$$

Tương tự với $f(x) < 2$. Từ đó suy ra kết luận

$$\int_3^4 f(t)dt \neq 2$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2015 – 2016

Câu 1: Cho $a_1; \cdots; a_n$ và $b_1; \cdots; b_n$ là $2n$ số thực. Giả sử $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$. Hỏi có hay không một j trong $\{1; \cdots; n\}$ sao cho $a_j < b_j$?

Hướng dẫn:

Phủ định mệnh đề ta có với mọi $j \in \{1; \cdots; n\}$ sao cho $a_j \geq b_j$.

Ta giả sử phủ định mệnh đề đúng. Vậy thì

$$a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n \text{ (vô lý)}$$

Vậy nên suy ra phủ định mệnh đề sai. Tức là tồn tại $j \in \{1; \cdots; n\}$ sao cho $a_j < b_j$.

Câu 2: Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là các dãy lần lượt hội tụ về a và b trong $\mathbb{R}$. Giả sử $a_n < b_n$ với mọi số nguyên n. Hỏi các kết luận sau đây đúng hay sai.
(i) $a \leq b$.
(ii) $a < b$.

Hướng dẫn:

(i)

Ta có

$$\begin{aligned} & a_n && < b_n \quad , && \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ & a_n - b_n && < 0 \quad , && \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ & a_n - a - b_n + b && < b - a, && \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Do a_n hội tụ về a nên ta có

Cho $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < \varepsilon, && \forall n > N(\varepsilon) \\ \Rightarrow -\varepsilon < \ & a_n - a < \varepsilon, && \forall n > N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Do b_n hội tụ về b nên ta có

Cho $\varepsilon' > 0$, $\exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} & |b - b_n| < \varepsilon', && \forall n > M(\varepsilon') \\ \Rightarrow -\varepsilon' < \ & b - b_n < \varepsilon', && \forall n > M(\varepsilon') \end{aligned}$$

Vậy suy ra

$$b - a > (a_n - a) + (b - b_n) > -\varepsilon - \varepsilon', \qquad \forall n > \max\{N(\varepsilon); M(\varepsilon')\}$$

Giả sử $b - a = c < 0$. Chọn $\varepsilon = \varepsilon' = -\dfrac{c}{2}$

Ta sẽ có

$$b - a > -\varepsilon - \varepsilon' = c \text{ (vô lý)}$$

Vậy suy ra

$$\begin{aligned} & b - a \geq 0 \\ \Rightarrow\ & b \quad\ \ \geq a \end{aligned}$$

(ii)

Ta chọn $a_n = -\frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{n}$. Ta thấy rằng $a_n < b_n$ nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Vậy nên kết luận trên không đúng.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{khi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ f(0) + 1, & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Hỏi g có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ta có

$$g(x) = f(x)$$

Mà do f liên tục trên $\mathbb{R}$, vậy nên f liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Suy ra g liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Ta chọn dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{1}{n}$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vì $x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ nên $g(x_n) = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0) \text{ (do } f \text{ liên tục)}$$

Mà ta có $f(0) \neq f(0) + 1 = g(0)$. Vậy nên

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) \neq g(0)$$

Vậy nên g không liên tục tại 0.

Câu 4: Có hay không một hàm số thực đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ nhưng không liên tục?

Hướng dẫn:

Chọn

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

Ta thấy rằng f là một hàm đơn điệu tăng.

Ta chọn dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{1}{n}$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vì $x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ nên $f(x_n) = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 2 \text{ (do } f \text{ liên tục)}$$

Mà ta có $f(0) = 1 \neq 2$. Vậy nên

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(0)$$

Vậy nên f không liên tục tại 0.

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\{f(x_n)\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy nên bị chặn. Mà theo định lý Bolzano-Weierstrass thì tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về x trong $\mathbb{R}$. Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên suy ra $\{x_n\}$ hội tụ về x trong $\mathbb{R}$.

Mà f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ vì vậy khi $x_n \to x$ thì $f(x_n) \to f(x)$. Suy ra $\{f(x_n)\}$ là dãy hội tụ. Mà mọi dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ đều là dãy Cauchy, suy ra $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

Câu 6: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực âm sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Hỏi các kết luận sau đúng hay sai.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ hội tụ.

Hướng dẫn:

Xét $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ tồn tại và hữu hạn.

(i)

Xét $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$

Do $\{a_n\}$ là một dãy số thực âm, vì vậy $|a_k| = -a_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Vì vậy ta có

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} (-a_k) = -\sum_{k=1}^{n} a_k = -S_n$$

Vậy suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty} (-S_n) = -\lim_{n\to+\infty} S_n$$

Vậy nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

(ii)

Do X_n hội tụ nên tồn tại $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ hay ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|X_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Ta cần chứng minh $|a_n|$ hội tụ về 0 tức là

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\big||a_k| - 0\big| < \varepsilon', \qquad \forall k \geq M(\varepsilon')$$

Thật vậy ta có

$$\big||a_k| - 0\big| = \big||a_k|\big| = |X_k - X_{k-1}|$$

Ta có X_n là một dãy hội tụ, vì vậy X_n cũng là một dãy Cauchy, vì vậy

Cho $\varepsilon'' > 0$, có $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|X_m - X_n| < \varepsilon'', \qquad \forall m > n \geq K(\varepsilon'')$$

Ta chọn $\varepsilon'' = \varepsilon';\ m = k;\ n = k-1;\ M(\varepsilon') = K(\varepsilon'')$. Vậy suy ra $|a_n|$ hội tụ về 0.

(iii)

Do $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn tỷ số

$\forall c \in (0;\ 1), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c \quad , \qquad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^2 < c^2 \quad , \qquad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}\right| < c^2 < c, \qquad \forall n \geq N$$

Vậy suy ra $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ hội tụ.

Câu 1: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$. Hỏi $\{x_n\}$ có là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

Hướng dẫn:

Ta đặt $x_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $f(x_n) = c$ với $c \in \mathbb{R}$.

Ta thấy rằng

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} c = c$$

Vậy $\{f(x_n)\}$ là dãy hội tụ. Nhưng $\{x_n\}$ không phải dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực trên khoảng $(-1;\ 1)$. Giả sử f có giới hạn tại 0. Hỏi $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ có xác định hay không?

Hướng dẫn:

Do f có giới hạn tại 0. Đặt $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \alpha$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \delta(\varepsilon)$$

Với $x \to 0^+$ suy ra $\forall \varepsilon'$ sao cho $0 < x < \varepsilon'$, khi đó ta chọn $\varepsilon' = \delta(\varepsilon)$ thì ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < x < \delta(\varepsilon)$$

Vậy suy ra $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ xác định.

Câu 3: Cho f và g là hai hàm số thực trên $\mathbb{R}$. Giả sử $g \circ f$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Hỏi các kết luận sau đây đúng hay sai
(i) f khả vi trên $\mathbb{R}$.
(ii) g khả vi trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

(i)

Đặt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

và

$$g(x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Vậy ta có $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = c$. Rõ ràng $g \circ f$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng vì f không liên tục nên f không khả vi trên $\mathbb{R}$.

(ii)

Xét hàm $g(x) = |x|$ và $f(x) = x^2$. Rõ ràng $g \circ f$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng ta có

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} &= \quad 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} &= -1 \end{aligned}$$

Như vậy g không khả vi tại 0.

Câu 4: Cho f là một hàm số thực đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Giả sử f khả vi trên $\mathbb{R}$. Hỏi kết luận sau đúng hay sai: $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Vì f khả vi trên $\mathbb{R}$ nên giới hạn sau luôn tồn tại và hữu hạn với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Như vậy ta sẽ có

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì f đơn điệu tăng nên với mọi $h > 0$ thì $f(x+h) \geq f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$. Hỏi kết luận sau đúng hay sai:

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hướng dẫn:

Do f là hàm đơn điệu tăng, vì vậy ta có

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n+1), \qquad \forall x \in [n;\ n+1]$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f(n)dx \quad &\leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n+1)dx \\ \Rightarrow f(n)(n+1-n) &\leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n+1)(n+1-n) \\ \Rightarrow f(n) \qquad &\leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n+1) \end{aligned}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2016 – 2017

Câu 1: Với mọi số nguyên n, cho A_n và B_n là các tập khác trống sao cho $A_n \subset B_n$.

Hỏi $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Đặt $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\,;\ B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

Lấy $x \in A$, nên tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in A_k$.

Với $x \in A_k$ mà do $A_k \subset B_k$ nên $x \in B_k$.

Do $x \in B_k$ mà $B_k \subset B$ nên $x \in B$. Vậy suy ra $A \subset B$ hay là

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Câu 2: Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về 2 trong $\mathbb{R}$. Hỏi có hay không một số nguyên N sao cho $1 < x_n$ với mọi $n \geq N$?

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ hội tụ về 2 trong $\mathbb{R}$ nên

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} & |x_n - 2| < \varepsilon, && \forall n \geq N(\varepsilon) \\ \Rightarrow\ & -\varepsilon < x_n - 2 < \varepsilon, && \forall n \geq N(\varepsilon) \\ \Rightarrow\ & -\varepsilon + 2 < x_n < \varepsilon + 2, && \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Lấy $\varepsilon = 1$, ta được

$$1 < x_n < 3, \qquad \forall n \geq N(1)$$

Chọn $N = N(1)$ là số nguyên cần tìm.

Câu 3: Cho $k \in \{1;\ \cdots;\ N\}$ và $\{x_{k;\,n}\}_n$ là các dãy hội tụ về a_k trong $\mathbb{R}$. Đặt $y_n = x_{1;\,n} + \cdots + x_{N;\,n}$ và $b = a_1 + \cdots + a_N$. Hỏi $\{y_n\}$ có hội tụ về b hay không?

Hướng dẫn:

Với $k = 1$, ta có y_n hội tụ về b hay $\{x_{1;\,n}\}$ hội tụ về a_1 tức là

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$A = |x_{1;\,n} - a_1| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Giả sử $k = h$ với $h < N$ đúng tức là ta có

Cho $\varepsilon' > 0$, có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$B = \left|(x_{1;\,n} + \cdots + x_{h;\,n}) - (a_1 + \cdots + a_h)\right| < \varepsilon', \qquad \forall n \geq M(\varepsilon')$$

Ta chứng minh $k = h + 1$ đúng tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$C = \left|\left(x_{1;\,n} + \cdots + x_{h;\,n} + x_{h+1;\,n}\right) - (a_1 + \cdots + a_h + a_{h+1})\right| < \varepsilon'', \qquad \forall n \geq K(\varepsilon'')$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned} C &= \left|\left(x_{1;\,n} + \cdots + x_{h;\,n}\right) - (a_1 + \cdots + a_h) + x_{h+1;\,n} - a_{h+1}\right| \\ &\leq \left|\left(x_{1;\,n} + \cdots + x_{h;\,n}\right) - (a_1 + \cdots + a_h)\right| + \left|x_{h+1;\,n} - a_{h+1}\right| \\ &< \varepsilon' + \varepsilon \end{aligned}$$

Chọn $\varepsilon' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon''}{2}$; $K(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon);\ M(\varepsilon')\}$.

Vậy suy ra y_n hội tụ về b với mọi $k \in \{1;\ \cdots;\ N\}$

Câu 4: Cho a là một số thực và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử mọi dãy con $\left\{x_{n_m}\right\}$ của $\{x_n\}$ đều có một dãy con $\left\{x_{n_{m_k}}\right\}$ hội tụ về a. Hỏi $\{x_n\}$ có hội tụ về a?

Hướng dẫn:

Giả sử $\{x_n\}$ không hội tụ về a, tức là

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ sao cho } |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Ta sẽ chọn một dãy con $\left\{x_{n_m}\right\}$ như sau

Lấy $N(\varepsilon) = 1$, ta được

$$\exists n \geq 1 \text{ sao cho } |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Như vậy ta có thể lấy $n_1 \in \mathbb{N}$ thỏa

$$\left|x_{n_1} - a\right| \geq \varepsilon$$

Giả sử ta đã chọn được n_m với $m \in \mathbb{N}$. Lấy $N(\varepsilon) = n_m + 1$, ta được

$$\exists n \geq n_m + 1 \text{ sao cho } |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Như vậy, ta có thể lấy $n_{m+1} \in \mathbb{N}$ thỏa

$$\left|x_{n_{m+1}} - a\right| \geq \varepsilon, \qquad n_{m+1} \geq n_m + 1 > n_m$$

Xây dựng theo cách này ta sẽ được một dãy $\{x_m\} \subset \mathbb{N}$ thỏa $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Như vậy $\left\{x_{n_m}\right\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$, đồng thời ta cũng có $\left|x_{n_m} - a\right| \geq \varepsilon$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Do đó, nếu $\left\{x_{n_{m_k}}\right\}$ là một dãy con bất kỳ của $\left\{x_{n_m}\right\}$ thì ta cũng có $\left|x_{n_{m_k}} - a\right| \geq \varepsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ tức là $\left\{x_{n_{m_k}}\right\}$ không thể hội tụ về a.

Điều này vô lý vì $\left\{x_{n_{m_k}}\right\}$ hội tụ về a. Từ đó suy ra $\{x_n\}$ hội tụ về a.

Câu 5: Với mọi số nguyên n, cho f_n là một hàm số thực trên $[0;\ 1]$. Phủ định mệnh đề sau: "Với mọi số thực dương ε, có một thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \varepsilon$ với mọi số nguyên dương m, với mọi $x;\ y$ trong $[0;\ 1]$, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$".

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists \delta(\varepsilon) \in (0;\ +\infty)$ sao cho

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq \varepsilon, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad \forall (x;\ y) \in \{(u;\ v) \in [0;\ 1], |u - v| < \delta(\varepsilon)\}$$

Phủ định mệnh đề

$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \forall \delta(\varepsilon) \in (0;\ +\infty), \exists m \in \mathbb{N}, \forall (x;\ y) \in \{(u;\ v) \in [0;\ 1], |u - v| < \delta(\varepsilon)\}$ sao cho

$$|f_m(x) - f_m(y)| > \varepsilon$$

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2016 – 2017

Câu 1: Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ về a trong $\mathbb{R}$. Giả sử $a \notin B = \{x_n : n \in N\}$. Hỏi a có là một điểm tụ của B?

Hướng dẫn:

Do $\{x_n\}$ hội tụ về a nên

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Chứng minh a là một điểm tụ của B tức là

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $x \in B \backslash \{a\} = B$ (do $a \notin B$) sao cho

$$|x - a| < \varepsilon'$$

Chọn $\varepsilon = \varepsilon'$, ta được

Cho $\varepsilon' > 0$, có $N(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon', \qquad \forall n \geq N(\varepsilon')$$

Như vậy, ta có

$$\left|x_{N(\varepsilon')} - a\right| < \varepsilon'$$

Do $x_{N(\varepsilon')} \in B$ nên ta chọn $x = x_{N(\varepsilon')}$. Vậy suy ra a là điểm tụ của B

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $(0;\ 3)$. Hỏi f có liên tục đều trên $[1;\ 2]$?

Hướng dẫn:

Do f là hàm số thực khả vi trên $(0;\ 3)$ nên suy ra f liên tục trên $[1;\ 2]$.

Mà do $[1;\ 2] \subset (0;\ 3)$ nên suy ra f liên tục trên $[1;\ 2]$.

Do f liên tục trên khoảng đóng $[1;\ 2]$ nên suy ra f liên tục đều trên $[1;\ 2]$.

Câu 3: Cho f và g là hai hàm số thực trên $\mathbb{R}$. Giả sử fg khả vi trên $\mathbb{R}$. Hỏi f và g khả vi hay không trên $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn:

Chọn $f(x) = x^2;\ g(x) = \dfrac{1}{x}$. Ta có

$$(fg)(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy fg khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng g không liên tục trên $\mathbb{R}$ nên g không khả vi trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho f là một song ánh từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ và đơn điệu giảm trên $(a;\ b)$. Đặt g là ánh xạ ngược của f. Hỏi g có đơn điệu giảm trên $(c;\ d)$?

Hướng dẫn:

Với mọi $x;\ y \in (c;\ d)$ thỏa $x < y$, ta cần chứng minh $g(x) > g(y)$.

Đặt $u = g(x);\ v = g(y)$. Do g là ánh xạ ngược của f nên ta có

$$f(u) = f\big(g(x)\big) = x;\ f(v) = f\big(g(y)\big) = y$$

Do $x < y$ nên $f(u) < f(v)$. Do f là đơn điệu giảm nên từ đây suy ra $u > v$ hay $g(x) > g(y)$

Câu 5: Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$$

Hỏi kết luận sau đúng hay sai: $f(t) \le g(t)$ với mọi $t \in [0;\ 1]$?

Hướng dẫn:

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{3};\ g(x) = x$. Khi đó ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3} \le \frac{1}{2} = \int_0^1 xdx = \int_0^1 g(x)dx$$

Vậy f và g thỏa yêu cầu đề bài nhưng $f(0) > g(0)$, Vậy kết luận trên là sai.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2017 – 2018

Câu 1: Cho A là một tập con khác trống. Đặt P là mệnh đề "Với mọi số dương ε, có một tập hữu hạn phần tử B chứa trong A sao cho A chứa trong $\bigcup_{x\in B}(x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)$". Viết P ra dạng cơ bản và phủ định P.

Hướng dẫn:

Đặt $D = \{C \subset A : C \text{ có hữu hạn phần tử}\}$; $Q_{\varepsilon;\,B} : A \subset \displaystyle\bigcup_{x\in B}(x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)$

Ta viết lại P dưới dạng cơ bản

$P : \forall\varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists B \subset D$ sao cho $Q_{\varepsilon;\,B}$ đúng

Phủ định mệnh đề

$\sim P : \exists\varepsilon \in (0;\ +\infty), \forall B \subset D$ sao cho $\sim Q_{\varepsilon;\,B}$ sai

Ta viết lại dạng tường minh

$\sim P :$ Có một số dương ε, với mọi tập hữu hạn phần tử B chứa trong A thì $A \not\subset \displaystyle\bigcup_{x\in B}(x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)$

Câu 2: Có hay không một dãy số thực $\{x_n\}$ có các tính chất sau:
(i) $\{x_n\}$ là một dãy không hội tụ.
(ii) có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ.

Hướng dẫn:

Ta xét dãy $x_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dãy này không hội tụ.

Khi đó $\{x_n\}$ có hai dãy con $\{x_{2k}\}$ và $\{x_{2k+1}\}$ lần lượt hội tụ về 1 và -1.

Vậy ta suy ra được có dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3: Cho $c \in (0;\ 1)$ và $x_n = c^n n$ với mọi số nguyên n. Hỏi $\{x_n\}$ có hội tụ về một số thực hay không?

Hướng dẫn:

Ta đặt

$$\begin{aligned} f(x) &= xc^x, && \forall x \in (0;\ +\infty)\\ g(x) &= \ln f(x) = \ln xc^x = \ln x + x\ln c = x\left(\frac{\ln x}{x} + \ln c\right), && \forall x \in (0;\ +\infty) \end{aligned}$$

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

và $\ln c < 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \ln c\right) &= \ln c < 0\\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} + \ln c\right) &= -\infty \end{aligned}$$

Vì vậy nên

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} c^n n = 0$$

Câu 4: Cho $a < b;\ c < d;\ e \in (a;\ b)$ và f là một hàm số liên tục từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$. Hỏi có hay không một số dương η sao cho $f([e;\ e+\eta])$ chứa trong $(c;\ d)$?

Hướng dẫn:

Ta chọn $0 < \eta < \dfrac{b-e}{2}$ nên suy ra $[e;\ e+\eta] \subset (a;\ b)$

Vì f là hàm liên tục từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ nên $f\big((a;\ b)\big) \subset (c;\ d)$

Vậy nên ta suy ra

$$f([e;\ e+\eta]) \subset f\big((a;\ b)\big) \subset (c;\ d)$$

Câu 5: Cho $a < b;\ c < d$, f là một ánh xạ từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ và g là một ánh xạ từ $(c;\ d)$ vào $\mathbb{R}$. Giả sử $(g\circ f)(a;\ b)$ bị chặn. Hỏi $g(c;\ d)$ có bị chặn hay không?

Hướng dẫn:

Chọn $a = c = -1;\ b = d = 1;\ f(x) = 0, \forall x \in (-1;\ 1)$ và $g(x) = \dfrac{1}{1-x}, \forall x \in (-1;\ 1)$

Ta thấy rằng $(g\circ f)(x) = 1$ bị chặn. Nhưng với $x \to 1^-$ thì

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

Syu ra $g(-1;\ 1)$ không bị chặn trên nên không bị chặn.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2017 – 2018

Câu 1: Cho $a < b$, f là một ánh xạ khả vi từ $(a;\ b)$ vào $\mathbb{R}$, $c < d$ sao cho $a < c < d < b$. Hỏi $f\big((c;\ d)\big)$ có bị chặn trên?

Hướng dẫn:

Do f là một ánh xạ khả vi từ $(a;\ b)$ vào $\mathbb{R}$ nên với mọi $x_0 \in (a;\ b)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mà ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0)\end{aligned}$$

Vì vậy nên f liên tục trên $(a;\ b)$.

Do $[c;\ d] \subset (a;\ b)$ nên f cũng liên tục từ $[c;\ d]$ vào $\mathbb{R}$.

Cho $\{x_n\}$ là dãy hội tụ về x trong $[c;\ d]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$.

Giả sử $f([a;\ b])$ không bị chặn. Vì vậy tồn tại $x_n \in [a;\ b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$.

Do $\{x_n\}$ nằm trong khoảng đóng $[c;\ d]$ nên theo định lý Bolzano-Weierstrass nên ta có tồn tại $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to x$. Do $x_{n_k} \in [c;\ d]$ nên $x \in [c;\ d]$.

Do f liên tục từ $[c;\ d]$ vào $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f\left(x_{n_k}\right) \to f(x)$$

Mà

$$f\left(x_{n_k}\right) > n_k \geq k, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \text{ (vô lý)}$$

Vậy suy ra $f([c;\ d])$ bị chặn. Cho nên $f([c;\ d])$ bị chặn trên.

Mà do $(c;\ d) \subset [c;\ d]$ nên $f\big((c;\ d)\big) \subset f([c;\ d])$. Do $f([c;\ d])$ bị chặn trên nên suy ra $f\big((c;\ d)\big)$ bị chặn trên.

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $(-1;\ 1)$. Hỏi $\lim\limits_{s \to 0} f(s) = f(0)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Do f là một ánh xạ khả vi từ $(-1;\ 1)$ vào $\mathbb{R}$ nên với mọi $x_0 \in (-1;\ 1)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mà ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0} f(x_0)+\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= f(x_0)+0\cdot f'(x_0)=f(x_0)\end{aligned}$$

Vì vậy nên f liên tục tại mọi điểm trên $(-1;\ 1)$.

Vậy suy ra f liên tục tại 0 hay

$$\lim_{s\to 0} f(s) = f(0)$$

Câu 3: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Hỏi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{2017}$ hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Do $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn tỷ số

$\forall c \in (0;\ 1), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} &\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c, && \forall n \geq N\\ \Rightarrow &\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{2017} < c^{2017}, && \forall n \geq N\\ \Rightarrow &\left|\frac{a_{n+1}^{2017}}{a_n^{2017}}\right| < c^{2017} < c, && \forall n \geq N\end{aligned}$$

Vậy suy ra $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{2017}$ hội tụ.

Câu 4: Cho f và g là hai hàm số thực khả vi trên $(-1;\ 1)$. Giả sử $f(0)=g(0)$ và $f'(t)\leq g'(t)$ với mọi $t\in(-1;\ 1)$. Hỏi $f(s)\leq g(s)$ với mọi $s\in(0;\ 1)$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Ta đặt $h(x) = f(x) - g(x)$ với mọi $x \in (-1;\ 1)$.

Với $s \in (0;\ 1)$ thì theo định lý giá trị trung gian tồn tại giá trị $y \in (0;\ s)$ sao cho

$$\begin{aligned} &h(s)-h(0) &&= h'(y)(s-0)\\ \Rightarrow\ &f(s)-g(s)-\big(f(0)-g(0)\big) &&= \big(f'(y)-g'(y)\big)s\\ \Rightarrow\ &f(s)-g(s) &&= \big(f'(y)-g'(y)\big)s\end{aligned}$$

Mà do $f'(t)\leq g'(t)$ với mọi $t\in(-1;\ 1)$ nên suy ra $f'(y)-g'(y)\leq 0$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &f(s)-g(s)\leq 0\\ \Rightarrow\ &f(s)\leq g(s)\end{aligned}$$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[0;\ 1]$ sao cho $f(s) \leq 1$ với mọi $s \in [0;\ 1]$. Hỏi kết luận sau đúng hay sai:

$$\int_0^1 f(x)dx \leq 1$$

Hướng dẫn:

Đặt $g(s) = 1$ với mọi $s \in [0;\ 1]$. Từ giả thiết

$$f(s) \leq g(s), \qquad \forall s \in [0;\ 1]$$

Suy ra là

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 1dx = 1(1-0) = 1$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2018 – 2019

Câu 1: Phủ định mệnh đề sau:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in A, \quad \exists N(x;\ \varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ sao cho}$$
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n > m > N(x;\ \varepsilon)$$

Hướng dẫn:

Ta viết lại dưới dạng ký hiệu

$\forall \varepsilon \in (0;\ +\infty), \exists N(x;\ \varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad \forall n > m > N(x;\ \varepsilon)$$

Phủ định mệnh đề

$$\exists \varepsilon \in (0;\ +\infty), \quad \forall N(x;\ \varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \exists x \in A, \quad \exists n > m > N(x;\ \varepsilon) \text{ sao cho } |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon$$

Câu 2: Cho f là một song ánh từ tập hợp A vào tập hợp B, và g là ánh xạ ngược f^{-1}. Hỏi g có là một đơn ánh từ tập hợp B vào tập hợp A hay không?

Hướng dẫn:

Do f là song ánh nên với mỗi $y_1;\ y_2 \in B$ thì tồn tại duy nhất $x_1;\ x_2 \in A$ sao cho

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Giả sử $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ với mọi $y_1;\ y_2 \in B$ thì ta có được

$$\begin{aligned} & f^{-1}(y_1) && = f^{-1}(y_2) \\ \Rightarrow\ & f^{-1}(f(x_1)) && = f^{-1}(f(x_2)) \\ \Rightarrow\ & x_1 && = x_2 \end{aligned}$$

Vậy từ đó suy ra g là đơn ánh từ B vào A.

Câu 3: Cho $a_1;\ \cdots;\ a_n$ là n số thực sao cho $a_1 \cdots a_n = 0$. Hỏi có một $j \in \{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho $a_j = 0$ hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử $\forall j \in \{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho $a_j \neq 0$ thì ta có

$$0 = a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0 \cdot 0 \cdots 0 = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy suy ra có một $j \in \{1;\ \cdots;\ n\}$ sao cho

$$a_j = 0$$

Câu 4: Cho $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$f(x) = \sqrt{1 + x} + \operatorname{arctg}(1 + \sin x)$$

Xác định miền xác định của f, và f có liên tục trên đó không?

Hướng dẫn:

Hàm số $f(x)$ xác định khi

$$\begin{aligned} & 1 + x && \geq 0 \\ \Rightarrow\ & x && \geq -1 \end{aligned}$$

Vậy nên tập xác định $D = [-1;\ +\infty)$.

Ta đặt $f(x) = g(x) + h(x)$ với $g(x) = \sqrt{1+x};\ h(x) = \operatorname{arctg}(1 + \sin x)$.

Ta chứng minh g liên tục tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in D, |x - y| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Thật vậy ta có

$$|g(x) - g(y)| = \left|\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}}\right| \le \frac{\delta(x;\ \varepsilon)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \le \frac{\delta(x;\ \varepsilon)}{\sqrt{1+x}}$$

Đặt $\delta(x;\ \varepsilon) = \varepsilon\sqrt{1+x}$. Từ đó suy ra g liên tục.

Ta chứng minh h liên tục tức là

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $\eta(x;\ \varepsilon') > 0$ sao cho

$$|h(x) - h(y)| < \varepsilon', \qquad \forall y \in D, |x - y| < \eta(x;\ \varepsilon')$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| = |\operatorname{arctg}(1 + \sin x) - \operatorname{arctg}(1 + \sin y)| &\le \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x - \sin y}{1 + (1 + \sin x)(1 + \sin y)}\right)\right| \\ &\le \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{|\sin x - \sin y|}{1 + (1 + \sin x)(1 + \sin y)}\right)\right| \le \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{|x - y|}{1 + (1 + \sin x)(1 + \sin y)}\right)\right| \\ &\le |\operatorname{arctg}(|x - y|)| \le \operatorname{arctg}\big(\eta(x;\ \varepsilon')\big)\end{aligned}$$

Đặt $\eta(x;\ \varepsilon') = \tan(\varepsilon)$. Từ đó suy ra h liên tục.

Từ đó suy ra f liên tục vì là tổng của hai hàm liên tục.

Câu 1: Tính

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Hướng dẫn:

Đặt

$$A_n = \left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k : k \geq n\right\}$$

Vì

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \qquad \forall k \geq n$$

Cho nên với

$$b_n = \inf A_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Vậy

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\end{aligned}$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Vậy nên

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e$$

Câu 2: Cho f là một hàm số thực khả vi trên $(0;\ 1)$. Giả sử

$$|f'(x)| \leq x, \qquad \forall x \in (0;\ 1)$$

Hỏi f có liên tục đều trên $(0;\ 1)$ hay không?

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned}&|f'(x)| \leq x, && \forall x \in (0;\ 1) \\ \Rightarrow\ &|f'(x)| \leq 1, && \forall x \in (0;\ 1)\end{aligned}$$

Ta chứng minh f liên tục đều trên $(0;\ 1)$ tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in (0;\ 1), |y - x| < \delta(\varepsilon)$$

Thật vậy, theo định lý Lagrange thì giả sử $x < y$, tồn tại điểm $c \in (x;\ y) \subset (0;\ 1)$ sao cho

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Vậy suy ra

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||y - x| < |y - x| < \delta(\varepsilon)$$

Chọn $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Từ đó suy ra f liên tục đều trên $(0;\ 1)$

Câu 3: Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Đặt $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Hỏi dãy số $\{b_n\}$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, tồn tại $\alpha = \lim_{n\to+\infty} A_n$ hay ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|A_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Ta cần chứng minh a_n hội tụ về 0 tức là

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_k - 0| < \varepsilon', \qquad \forall k \geq M(\varepsilon')$$

Thật vậy ta có

$$|a_k - 0| = |a_k| = |A_k - A_{k-1}|$$

Ta có A_n là một dãy hội tụ, vì vậy A_n cũng là một dãy Cauchy, vì vậy

Cho $\varepsilon'' > 0$, có $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|A_m - A_n| < \varepsilon'', \qquad \forall m > n \geq K(\varepsilon'')$$

Ta chọn $\varepsilon'' = \varepsilon';\ m = k;\ n = k - 1;\ M(\varepsilon') = K(\varepsilon'')$. Vậy suy ra a_n hội tụ về 0.

Vì $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, khi đó

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} + \lim_{n\to+\infty} a_{n+2} = 0$$

Vậy ta suy ra $\{b_n\}$ là dãy hội tụ về 0.

Câu 4: Cho f là một hàm số liên tục từ $(a;\ b)$ vào $(c;\ d)$ và g là một hàm số thực khả vi trên $(-1;\ 1)$. Hỏi kết quả sau có đúng hay không

$$\lim_{y\to x} g\big(f(y)\big) = g\big(f(x)\big), \qquad \forall x \in (a;\ b)$$

Hướng dẫn:

Chọn $a = c = -1;\ b = d = 1;\ f(x) = x - 1;\ g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ nên ta có

$$\lim_{y\to 0} g\big(f(y)\big) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{f(y)+1} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{y^2-1}+1} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2-1}{y^2} = \lim_{y\to 0}\left(1-\frac{1}{y^2}\right) = -\infty$$

Vậy nên giá trị của $g\big(f(0)\big)$ không xác định nên ta suy ra kết quả trên là sai.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2019 – 2020

Câu 1: Cho A; B và C là các tập hợp con của tập X. Phủ định mệnh đề sau: "(x thuộc A) hoặc (x thuộc B và x thuộc C)". Hỏi $X \setminus [A \cup (B \cap C)] = (X \setminus A) \cap [(X \setminus B) \cup (X \setminus C)]$ đúng hay sai?

Hướng dẫn:

Phủ định mệnh đề

"(x không thuộc A) và (x không thuộc B hoặc x thuộc C)"

Ta có $X\setminus[A \cup (B \cap C)]$ tức là

$$\begin{aligned}
& x \in X \setminus [A \cup (B \cap C)] && , \quad \forall x \in X \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x \notin A \\ x \notin (B \cap C) \end{cases} && , \quad \forall x \in X \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x \notin A \\ \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ x \notin C \end{array}\right. \end{cases} && , \quad \forall x \in X \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x \in X \setminus A \\ \left[\begin{array}{l} x \in X \setminus B \\ x \in X \setminus C \end{array}\right. \end{cases} && , \quad \forall x \in X \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x \in X \setminus A \\ x \in (X \setminus B) \cup (X \setminus C) \end{cases} && , \quad \forall x \in X \\
\Leftrightarrow & \ x \in (X \setminus A) \cap [(X \setminus B) \cup (X \setminus C)], && \quad \forall x \in X
\end{aligned}$$

Vậy nên suy ra $X \setminus [A \cup (B \cap C)] = (X \setminus A) \cap [(X \setminus B) \cup (X \setminus C)]$

Câu 2: Cho n là một số nguyên dương. Hỏi tập hợp các tập con của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$ có đúng 2^n phần tử hay không?

Hướng dẫn:

Với $n = 1$, ta có $\{1\}$ có đúng 2^1 tập hợp con

Giả sử $n = k$ đúng tức là $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k\}$ có đúng 2^k phần tử

Ta chứng minh $n = k + 1$ đúng tức là $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k + 1\}$ có đúng 2^{k+1} phần tử

Thật vậy ta có mọi phần tử của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k\}$ đều thuộc $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k + 1\}$. Vì vậy $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k + 1\}$ có 2^h tập hợp con.

Do $k + 1 \notin \{1;\ 2;\ \cdots;\ k\}$ nên $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k\} \cap \{k + 1\} = \emptyset$. Ta thêm vào các tập con của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k\}$ phần tử $k + 1$ thì ta sẽ có 2^k tập hợp con nữa của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k + 1\}$.

Vậy số tập hợp con của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k + 1\}$ là

$$2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì tập hợp các tập con của $\{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$ có đúng 2^n phần tử.

Câu 3: Cho f là một hàm số thực trên $(a;\ b)$, liên tục tại $x \in (a;\ b)$ và $f(x) > 0$. Hỏi có một số dương δ sao cho $f(y) > 0$ với mọi $y \in (a;\ b)$ và $|y - x| < \delta$ hay không?

Hướng dẫn:

Với f liên tục tại $x \in (a;\ b)$ nên

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in (a;\ b), |y - x| < \eta(x;\ \varepsilon)$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| < \varepsilon \\ \Rightarrow -\varepsilon & < f(y) - f(x) < \varepsilon \\ \Rightarrow -\varepsilon + f(x) & < f(y) < \varepsilon + f(x) \end{aligned}$$

Chọn $\varepsilon = \dfrac{f(x)}{2};\ \delta = \eta(x;\ \varepsilon)$ thì ta có

$$0 < \frac{f(x)}{2} = -\frac{f(x)}{2} + f(x) < f(y)$$

Câu 4: Cho A và B là hai tập khác trống và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Đặt $C = \{xy : x \in A;\ y \in B\}$. Hỏi C có bị chặn trên hay không?

Hướng dẫn:

Chọn tập $A = (-\infty;\ a);\ B = (-\infty;\ b)$ với mọi $a;\ b \in \mathbb{R}$ thì ta có

$$\sup A = a;\ \sup B = b$$

Ta thấy nếu $x \to -\infty;\ y \to -\infty$ thì $xy \to +\infty$.

Vì vậy C không bị chặn trên.

Câu 5: Tính

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Hướng dẫn:

Đặt

$$A_n = \left\{ \frac{\sin \frac{1}{k}}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} : k \geq n \right\}$$

Vì

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \leq \frac{\frac{1}{k}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho nên với

$$b_n = \sup A_n = \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} b_n \quad &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&\overset{\text{L'hospital}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)'}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)'} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\dfrac{-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1
\end{aligned}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2019 – 2020

Câu 1: Cho $a;\ b$ và c là ba số thực sao cho $a < b < c$. Cho f là một hàm số thực trên $[a;\ c]$. Giả sử $f|_{[a;\ b]}$ liên tục trên $[a;\ b]$ và $f|_{[b;\ c]}$ liên tục trên $[b;\ c]$. Hỏi f có liên tục trên $[a;\ c]$ hay không?

Hướng dẫn:

Đặt $g = f|_{[a;\ b]}$, vì g liên tục trên $[a;\ b]$ nên ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in [a;\ b], |y - x| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Đặt $h = f|_{[b;\ c]}$, vì h liên tục trên $[b;\ c]$ nên ta có

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(t;\ \varepsilon') > 0$ sao cho

$$|h(z) - h(t)| < \varepsilon', \qquad \forall z \in [b;\ c], |z - t| < \eta(t;\ \varepsilon')$$

Ta chứng minh f liên tục trên $[a;\ c]$ tức là

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\gamma(u;\ \varepsilon'') > 0$ sao cho

$$|f(v) - f(u)| < \varepsilon'', \qquad \forall v \in [a;\ c], |v - u| < \gamma(u;\ \varepsilon'')$$

Thật vậy ta thấy với mọi $p \in [a;\ b)$ và với mọi $q \in (b;\ c]$ thì f liên tục. Ta xét tại điểm b ta nhận thấy

$$f(b) = g(b) = h(b)$$

Nên ta có

$$|f(v) - f(b)| = \begin{cases} |f(v) - f(b)|, & \forall v \in [a;\ b] \\ |f(v) - f(b)|, & \forall v \in [b;\ c] \end{cases} = \begin{cases} |g(v) - g(b)|, & \forall v \in [a;\ b] \\ |h(v) - h(b)|, & \forall v \in [b;\ c] \end{cases}$$

Ta chọn $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$; $\gamma(b;\ \varepsilon'') = \min\{\delta(b;\ \varepsilon);\ \eta(b;\ \varepsilon')\}$. Vậy ta suy ra f liên tục tại b.

Từ đó suy ra f liên tục tại mọi điểm trên $[a;\ c]$.

Câu 2: Cho $f(x) = \left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + x^2}\right)^2\right]^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi f có khả vi trên $\mathbb{R}$ hay không? Nếu có tính f'.

Hướng dẫn:

Ta đặt $A = \left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + (x + h)^2}\right)^2\right]^2 + \left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + (x + h)^2}\right)^2\right]\left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + x^2}\right)^2\right] + \left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + x^2}\right)^2\right]^2$

Ta có

$$\lim_{h \to 0} A = 3\left[1 + \left(2 + \sqrt{1 + x^2}\right)^2\right]^2$$

Ta đặt $B = 4 + \sqrt{1 + (x + h)^2} + \sqrt{1 + x^2}$

Ta có

$$\lim_{h \to 0} B = 4 + 2\sqrt{1 + x^2}$$

Ta đặt $C = \sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2}$

Ta có

$$\lim_{h\to 0} C = 2\sqrt{1+x^2}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[1+\left(2+\sqrt{1+(x+h)^2}\right)^2\right]^3-\left[1+\left(2+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right]^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(2+\sqrt{1+(x+h)^2}\right)^2-\left(2+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right]A}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}\right)AB}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)^2-x^2}{C}AB}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}\right)AB}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)AB}{hC} = \lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)AB}{C}\\
&= \frac{3x\left[1+\left(2+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right]^2\left(4+2\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Vậy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3x\left[1+\left(2+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right]^2\left(4+2\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Câu 3: Cho

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

Hỏi chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ có hội tụ hay không?

Hướng dẫn:

Ta có

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Thật vậy ta có với mọi $x \le y$ với $x;\ y \in \mathbb{N}$ thì

$$\sqrt{x} \le \sqrt{y}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Vậy nên suy ra $|a_n|$ là hàm đơn điệu giảm. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Vậy $|a_n|$ hội tụ về 0. Ta có

$$a_m \cdot a_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{m+1}} = -\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \le 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Vậy theo tiêu chuẩn Leibnitz ta suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ có hội tụ.

Câu 4: Cho f là một hàm số thực trên $(a;\ b)$, khả vi tại $x \in (a;\ b)$ và $f'(x) > 0$. Hỏi có một số dương δ sao cho $f(y) \neq f(x)$ với mọi $y \in (a;\ b)$ và $0 < |y - x| < \delta$ hay không?

Hướng dẫn:

Với $|y - x| > 0$ thì $y - x \neq 0$ hay $x \neq y$.

Theo định lý giá trị trung bình thì có một $c \in (x;\ y) \subset (a;\ b)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \\ \Rightarrow f'(c) &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} & f'(c) > 0 \\ \Rightarrow & \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \\ \Rightarrow & f(x) \neq f(y) \\ \Rightarrow & f \text{ đơn ánh} \end{aligned}$$

Vậy nên luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \neq f(y)$ với mọi $x;\ y \in (a;\ b)$ sao cho $x \neq y$

Câu 5: Cho f là một hàm số thực có đạo hàm bậc hai f'' trên $(a;\ b)$. Hỏi f có liên tục trên $(a;\ b)$ hay không?

Hướng dẫn:

Do f có đạo hàm bậc hai $f''(a;\ b)$ nên f khả vi cấp 2 tại mọi điểm $x_0 \in (a;\ b)$ tức là

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

Ta có

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

Nên

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}\right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{1}{2}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Vậy từ đây suy ra f khả vi bậc nhất trên $(a;\ b)$. Ta lại có

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nên

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\\ &= f(x_0) + \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\\ &= f(x_0) + 0\cdot f'(x_0) = f(x_0)\end{aligned}$$

Từ đây suy ra f liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a;\ b)$ hay f liên tục trên $(a;\ b)$.

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2020 – 2021

ĐỀ A

Câu 1: Cho $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ và ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ -\dfrac{x-1}{2}, & \text{nếu } x \text{ lẻ} \end{cases}$$

(a) Chứng minh f là một song ánh, từ đó kết luận $\mathbb{Z}$ là tập đếm được.
(b) Giả sử có một đơn ánh $g : A \to \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tập A là quá lắm đếm được.

Hướng dẫn:

(a)

Xét tính đơn ánh:

Giả sử f không đơn ánh tức là tồn tại $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ thỏa $x_1 \neq x_2$ và $f(x_1) = f(x_2)$. Xét ba trường hợp sau:

TH1: x_1 và x_2 cùng chẵn. Khi đó ta có

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (vô lý)}$$

TH2: x_1 và x_2 cùng lẻ. Khi đó ta có

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -\frac{x_1 - 1}{2} = -\frac{x_2 - 1}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (vô lý)}$$

TH3: Không mất tính tổng quát, giả sử x_1 chẵn và x_2 lẻ. Khi đó

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = -\frac{x_2 - 1}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \text{ (vô lý)}$$

Vậy f đơn ánh.

Xét tính toàn ánh:

Với $y \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\begin{aligned} &\text{Nếu } y > 0, \text{ ta đặt } x = 2y \quad\quad \text{vậy } f(x) = y \\ &\text{Nếu } y < 0, \text{ ta đặt } x = 1 - 2y \text{ vậy } f(x) = y \\ &\text{Nếu } y = 0, \text{ ta đặt } x = 1 \quad\quad\;\; \text{vậy } f(x) = y \end{aligned}$$

Vậy f toàn ánh và đơn ánh nên suy ra f song ánh và do đó $\mathbb{Z}$ là tập đếm được.

(b)

TH1: Xét A hữu hạn thì A sẽ quá lắm đếm được.

TH2: Xét A vô hạn:

Theo câu a thì có một đơn ánh $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ vậy có một đơn ánh $h = f^{-1} \circ g : A \to \mathbb{N}$. Ta cần chứng minh có một đơn ánh $k: \mathbb{N} \to A$ như sau:

Vì A có vô hạn phần tử nên $A \neq \emptyset$. Ta chọn 1 phần tử $a_1 \notin A$. Vì $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ nên $\exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.
Tương tự vậy, ta có $B = \{a_1; \cdots; a_n; \cdots\} \subseteq A$.

Xét $k: \mathbb{N} \to A$ với $k(n) = x_n$. Thì k đơn ánh.

Vậy theo định lý Schroeder-Berstein thì tồn tại song ánh $l: A \to \mathbb{N}$ tức là A đếm được nên A quá lắm đếm được.

Câu 2: Cho dãy số thực $\{x_n\}$ như sau

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}, \qquad n = 1;\ 2;\ \cdots$$

và một dãy $\{y_n\}$ thỏa

$$y_n^2 \le 2x_n y_n + 3x_n^4, \qquad n = 1;\ 2;\ \cdots$$

Chứng minh rằng:

(a) Dãy $\{x_n\}$ bị chặn và không đơn điệu.

(b) Dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

(c) Dãy $\{y_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$|x_n| = \left|\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right| \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \le 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy $\{x_n\}$ bị chặn. Ta cũng có

$$x_1 = 0 < x_2 = \frac{3}{4} > x_3 = -\frac{2}{9}$$

Vậy $\{x_n\}$ không đơn điệu.

(b)

Ta có

$$0 \le |x_n| \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Ta nhận thấy

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0$$

Vì vậy theo định lý kẹp, ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ về 0.

(c)

Ta có

$$y_n^2 \le 2x_n y_n + 3x_n^4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$2x_n y_n \le \frac{1}{2}y_n^2 + 2x_n^2$$

Vì vậy ta có

$$\begin{aligned} & y_n^2 \le 2x_n y_n + 3x_n^4 \\ \Rightarrow\ & y_n^2 \le \frac{1}{2}y_n^2 + 2x_n^2 + 3x_n^4 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2}y_n^2 \le 2x_n^2 + 3x_n^4 \\ \Rightarrow\ & y_n^2 \le 4x_n^2 + 6x_n^4 \end{aligned}$$

Ta có

$$0 \le |y_n| \le \sqrt{4x_n^2 + 6x_n^4}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ nên ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4x_n^2 + 6x_n^4} = 0$$

Vì vậy theo định lý kẹp, ta suy ra $\{y_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

Vậy $\{y_n\}$ hội tụ về 0.

Câu 3: Cho $f : (0;\ 1) \to \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu giảm trong $(0;\ 1)$. Đặt $A = \{f(x) : 0 < x < 1\}$. Chứng minh rằng:
(a) Nếu f bị chặn trên thì tồn tại $L = \sup A$ và $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = L$.
(b) Nếu f không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$.

Hướng dẫn:

(a)

Nếu f bị chặn trên, vậy tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho

$$L = \sup A$$

Ta chứng minh $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = L$ tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \qquad \forall x \in (0;\ 1), x - 0 < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Thật vậy do $L = \sup A$, ta có

$$\begin{aligned} & 0 < L - f(x) < \varepsilon \\ \Rightarrow\ & L - \varepsilon < f(x) < L \end{aligned}$$

Tồn tại $x(\varepsilon) \in (0;\ 1)$ sao cho

$$f\big(x(\varepsilon)\big) = L - \varepsilon$$

Do f là hàm đơn điệu giảm nên

$$f\big(x(\varepsilon)\big) < f(x) \Rightarrow x < x(\varepsilon)$$

Chọn $\delta = x(\varepsilon)$. Vậy suy ra $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = L$.

(b)

Nếu f không bị chặn trên tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) \geq \varepsilon, \qquad \forall x \in (0;\ 1), \qquad x < \delta$$

Do f là hàm đơn điệu giảm nên

$$x < \delta \Rightarrow f(x) > f(\delta)$$

Chọn $\varepsilon = f(\delta)$. Vậy suy ra

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$$

Câu 4: Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng f liên tục tại $x = 0$.

(b) Chứng minh rằng f không liên tục tại mọi $x \neq 0$.

Hướng dẫn:

(a)

f liên tục tại $x = 0$ tức là

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon, \qquad \forall x, |x| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Thật vậy do $0 \in \mathbb{Q}$ ta có

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0^3| = |f(x)| \leq |x^3| < \varepsilon$$

Chọn $\delta(x;\ \varepsilon)$ sao cho

$$|x^3| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$$

Chọn $\delta(x;\ \varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Vậy f liên tục tại $x = 0$.

(b)

Giả sử tồn tại $x \neq 0$ sao cho f liên tục tức tồn tại $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$ và $\{y_n\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \neq 0$$

Suy ra

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = f(x_0)$$

Thật vậy ta có

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n^3 = x_0^3 \neq 0$$
$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0 \neq \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

Vậy suy ra f không liên tục tại mọi $x \neq 0$.

Câu 5: Cho hai tập hợp khác rỗng X; Y.
(a) Phát biểu các định nghĩa: ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh và song ánh từ X vào Y.
(b) Cho ánh xạ $f : X \to Y$ sao cho tồn tại một ánh xạ $g : Y \to X$ thỏa điều kiện $g\big(f(x)\big) = x$ với mọi $x \in X$. Chứng minh rằng f là đơn ánh.

Hướng dẫn:

(a)

Định nghĩa ánh xạ: Cho A và B là hai tập hợp khác trống và D là một tập con khác trống trong A. Giả sử với mọi x trong D ta định nghĩa được một phần tử $f(x)$ trong B, ta nói ta xác định được một ánh xạ f từ D vào B.

Định nghĩa đơn ánh: Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một đơn ánh nếu và chỉ nếu $f(a) \neq f(b)$ khi $a \neq b$.

Định nghĩa toàn ánh: Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một toàn ánh nếu và chỉ nếu $f(X) = Y$,

Định nghĩa song ánh: Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một song ánh nếu và chỉ nếu f đơn ánh và toàn ánh.

(b)

Giả sử f không đơn ánh tức là $\exists x_1; x_2 \in X$ thỏa $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) = f(x_2)$.

Vì $f(x_1) = f(x_2)$ nên suy ra

$$x_1 = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = x_2 \text{ (vô lý)}$$

Vậy suy ra f đơn ánh.

Câu 6: Cho tập hợp

$$A = \left\{\frac{2n+1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}\right\}$$

(a) Chứng minh rằng A là tập bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hãy tìm $\sup A$; $\inf A$; $\max A$; $\min A$.
(b) Cho $B \subset \mathbb{R}$ khác rỗng và bị chặn trên. Chứng tỏ rằng $A \cup B$ là một tập bị chặn trên và $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A; \sup B\}$.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$\frac{3}{2} \leq \frac{2n+1}{n+1} < 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy A bị chặn.

Vì $\frac{3}{2} \in A$ nên

$$\min A = \inf A = \frac{3}{2}$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} A = 2$ nên $\sup A = 2$. Giả sử tồn tại $\max A$ tức là tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{2n_0+1}{n_0+1} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2 \text{ (vô lý)}$$

Suy ra không tồn tại $\max A$.

(b)

Do $x \in A \cup B$ nên $x \in A$ hoặc $x \in B$. Mà do A và B đều là tập bị chặn trên nên suy ra $A \cup B$ cũng bị chặn trên.

Xét $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A\,;\ \sup B\}$:

Cho $x \in A \cup B$. Vậy

$$x \in A \text{ hoặc } x \in B$$

Suy ra

$$x \leq \sup A \text{ hoặc } x \leq \sup B$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} & x \leq \max\{\sup A\,;\ \sup B\} \qquad , \qquad \forall x \in A \cup B \\ \Rightarrow\ & \sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A\,;\ \sup B\} \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét $\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A\,;\ \sup B\}$:

Ta có

$$\begin{aligned} & x \leq \sup(A \cup B), \qquad \forall x \in A \cup B \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x \leq \sup(A \cup B), & \forall x \in A \\ x \leq \sup(A \cup B), & \forall x \in B \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sup A \leq \sup(A \cup B) \\ \sup B \leq \sup(A \cup B) \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & \max\{\sup A\,;\ \sup B\} \leq \sup(A \cup B)\ \ (2) \end{aligned}$$

Từ $(1);\ (2) \Rightarrow \sup(A \cup B) = \max\{sup\, A\,;\ sup\, B\}$

Câu 7:
(a) Hãy định nghĩa dãy số thực $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn.
(b) Phát biểu Định lý về sự tồn tại dãy con hội tụ của một dãy số thực $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn.
(c) Xét dãy số thực $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ 9;\ 1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ 9;\ 1;\ 2;\ 3\cdots\}$. Tìm một dãy con của nó hội tụ về $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Hướng dẫn:

(a)

Tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|x_n| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b)

Định lý Bolzano-Weierstrass: Cho a và b là hai số thực và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử $a < b$ và $x_n \in [a;\ b]$ với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$. Lúc đó có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho hội tụ về x trong $[a;\ b]$.

(c)

Ta có

$$x_n \le 9, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cho nên với

$$\sup\{x_n\} = 9$$

Vậy

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} 9 = 9$$

Gọi $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy con của $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa

$$x_{n_k} = 9, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ta chọn

$$n_k = f(n) = 9n$$

Vậy ta có

$$\lim_{n\to+\infty} x_{9n} = 9 = \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

Câu 8: Cho hàm số

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Tìm miền xác định A của hàm f. Chứng minh rằng $a = 0$ là điểm tụ của A.
(b) Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

Hướng dẫn:

(a)

Hàm số xác định khi

$$x \neq 0$$

Vậy tập xác định $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Chứng minh $a = 0$ là điểm tụ của A tức là

Với mọi $\delta > 0$, tìm $y \in A$ sao cho

$$|y - 0| < \delta$$

Ta chọn

$$y = \frac{\delta}{2} \in A$$

Vậy $a = 0$ là điểm tụ của A.

(b)

Xét hai dãy

$$x_n = \frac{1}{n2\pi};\ y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

Nhưng ta nhận thấy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n2\pi}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin(n2\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Vậy ta nhận thấy

$$\lim_{x_n\to 0} f(x_n) \neq \lim_{y_n\to 0} f(y_n)$$

Suy ra không tồn tại $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2020 – 2021

ĐỀ A

Câu 1: Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - |x|, \qquad -2 < x < 2$$

(a) Tính các đạo hàm cấp một và cấp hai của f.

(b) Tìm cực trị và điểm uốn của đồ thị cho hàm f.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x, & 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 + x, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Xét đạo hàm cấp một

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}(x+h)^3 - (x+h) - \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)}{h}, & 0 < x < 2 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}(x+h)^3 + (x+h) - \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)}{h}, & -2 < x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}(x+h-x)[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] - h}{h}, & 0 < x < 2 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}(x+h-x)[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] + h}{h}, & -2 < x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}h[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] - h}{h}, & 0 < x < 2 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}h[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] + h}{h}, & -2 < x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \left\{\frac{1}{3}[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] - 1\right\}, & 0 < x < 2 \\ \lim\limits_{h \to 0} \left\{\frac{1}{3}[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] + 1\right\}, & -2 < x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x^2 - 1, & 0 < x < 2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Xét đạo hàm cấp hai

$$
\begin{aligned}
f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} &= \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-1-(x^2-1)}{h}, & 0<x<2 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}, & -2<x<0 \end{cases} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}, \qquad x\in(-2;\ 2)\setminus\{0\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}, \qquad x\in(-2;\ 2)\setminus\{0\} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h), \qquad x\in(-2;\ 2)\setminus\{0\} \\
&= 2x, \qquad x\in(-2;\ 2)\setminus\{0\}
\end{aligned}
$$

(b)

Xét

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Rightarrow & \begin{cases} x^2-1=0, & 0\le x<2 \\ x^2+1=0, & -2<x<0\ (\text{vn}) \end{cases} \\
\Rightarrow & x = 1
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
& f''(x) = 0 \\
\Rightarrow & x \quad = 0
\end{aligned}
$$

Bảng biến thiên

x	-2		0		1		2
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{14}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

Vậy hàm số có hai cực trị là $x=0$ và $x=1$. Hàm số có một điểm uốn là $(0;\ 0)$.

Câu 2: Cho hàm số

$$f(x) = \ln x, \qquad x>0$$

(a) Dùng Định lý giá trị trung bình Lagrange cho hàm f, hãy chứng minh các bất đẳng thức

$$\frac{x-y}{x} \le \ln x - \ln y \le \frac{x-y}{y}, \qquad \forall x;\ y \text{ với } x>y>0$$

(b) Kiểm tra lại f là hàm lồi trên $(0;\ +\infty)$ và chứng minh bất đẳng thức

$$x^{\lambda}y^{1-\lambda} \le \lambda x + (1-\lambda)y, \qquad \text{với mọi } x;\ y>0, \qquad 0\le\lambda\le 1$$

Hướng dẫn:

(a)

Với $f(x)=\ln x$, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$\forall x;\ y > 0$, sao cho $x > y$, tồn tại $\theta \in [0;\ 1]$ sao cho

$$\ln x - \ln y = f(x) - f(y) = f'(\theta x + (1-\theta)y)(x-y) = \frac{x-y}{\theta x + (1-\theta)y}\ (1)$$

Ta có

$$y \leq \theta x + (1-\theta)y \leq x, \qquad \forall \theta \in [0;\ 1]\ (2)$$

Ta cũng có

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\theta x + (1-\theta)y} \leq \frac{1}{y}$$

Kết hợp với $(1);\ (2) \Rightarrow \dfrac{x-y}{x} \leq \ln x - \ln y \leq \dfrac{x-y}{y}$

(b)

Ta có

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad \forall x > 0$$

Vậy f là hàm lồi. Vì f là hàm lồi nên với $\lambda \in [0;\ 1]$, áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$\begin{aligned} & f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ \Rightarrow\ & \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y \\ \Rightarrow\ & \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \ln x^\lambda + \ln y^{1-\lambda} \\ \Rightarrow\ & \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \ln x^\lambda y^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Mũ e hai vế, suy ra

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda)y, \qquad \forall x;\ y > 0, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Câu 3: Cho hàm

$$f(x) = x^3, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

(a) Chứng minh rằng f khả tích Riemann trên $[0;\ 1]$.

(b) Sử dụng công thức

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

để chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

Hướng dẫn:

(a)

Với $x_0 \in [0;\ 1]$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3 = f(x_0)$$

Vậy f liên tục trên $[0;\ 1]$. Từ đó suy ra f khả tích Reimann.

(b)

Chia $[0;\ 1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi $n+1$ điểm.

$$x_k = \frac{k-1}{n}, \qquad k \in \overline{1;\ n+1}$$

Ta có

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy theo tổng Riemann ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4n^4} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Câu 4: Cho hàm số

$$f(x) = \int_0^{x^3} \sin(t^3)\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Chứng minh rằng f có các đạo hàm cấp một và cấp hai tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f'(x);\ f''(x)$.
(b) Tìm cực trị của hàm f.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có $g(t) = \sin(t^3)$ là hàm liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $f(x) = \int_0^{x^3} \sin(t^3)\, dt$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ liên tục hay $f(x)$ khả tích Riemann trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3)' \sin((x^3)^3) = 3x^2 \sin(x^9) \\
f''(x) &= 6x \sin(x^9) + 3x^2 \cdot 9x^8 \cos(x^9) \\
&= 6x \sin(x^9) + 27x^{10} \cos(x^9)
\end{aligned}$$

(b)

Xét

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0 \\
&\Rightarrow 3x^2 \sin(x^9) = 0 \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 \quad\quad = 0 \\ \sin(x^9) = 0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \quad = 0 \\ x^9 = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[9]{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow x = \sqrt[9]{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Với $k = 0$ hay $x = 0$, cho $\varepsilon > 0$ ta có

$$f'(-\varepsilon) < 0 \text{ và } f'(\varepsilon) > 0 \text{ nên } f \text{ có cực trị tại } x = 0\ (1)$$

Với $x = \sqrt[9]{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ta có

$$f''\left(\sqrt[9]{k\pi}\right) = 6\sqrt[9]{k\pi}\sin(k\pi) + 27\sqrt[9]{k\pi}^{10}\cos(k\pi) = 27\sqrt[9]{k\pi}^{10} \neq 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Vậy f có cực trị tại $x = \sqrt[9]{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ (2)$

Từ $(1);\ (2) \Rightarrow f$ có cực trị tại $x = \sqrt[9]{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

Câu 5: Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức $f(x) = x|x|$. Chứng minh rằng f là hàm khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Với $x \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, & x > 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}, & x > 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}, & x > 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x-x-h)(x+x+h)}{h}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h}, & x > 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h(2x+h)}{h}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} (2x+h), & x > 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} -(2x+h), & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy f khả vi tại $x \neq 0$. (1)

Với $x = 0$, ta có

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} -h = 0$$

Vậy $f'(0) = 0$ (2)

Từ (1); $(2) \Rightarrow f$ khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 6: Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x^2 + 3, & x > 1 \end{cases}$$

Xét tính liên tục và khả vi của hàm f tại $x_0 = 1$.

Hướng dẫn:

Tại $x_0 = 1$, ta có

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \cdot 1 = 2$$

Vậy $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$ nên f không liên tục tại $x_0 = 1$. Từ đó suy ra f không khả vi tại $x_0 = 1$

Câu 7: Cho hàm số

$$f(x) = x^2, \qquad \text{với } 0 \leq x \leq 1$$

(a) Kiểm tra tính khả tích Riemann của hàm f trên $[0;\ 1]$.

(b) Sử dụng đẳng thức

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad \text{với mọi } N \in \mathbb{N}$$

để chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Hướng dẫn:

(a)

Với $x_0 \in [0;\ 1]$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0)$$

Vậy f liên tục trên $[0;\ 1]$. Từ đó suy ra f khả tích Reimann.

(b)

Chia $[0;\ 1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi $N + 1$ điểm.

$$x_k = \frac{k-1}{N}, \qquad k \in \overline{1;\ N+1}$$

Ta có

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

Vậy theo tổng Riemann ta có

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} f(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^2\cdot\frac{1}{N} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N}k^2$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3} = \lim_{N\to+\infty}\frac{N^3\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right)}{6N^3}$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right)}{6} = \frac{1}{3}$$

Câu 8: Cho hàm số

$$F(x) = \int_1^{e^x}\left(\frac{t^{2020}}{1+(\sin(t))^2}\right)dt, \qquad \text{với } x \geq 1$$

(a) Chứng minh rằng hàm F khả tích Riemann trên đoạn $[2;\ 3]$.
(b) Chứng minh rằng hàm F khả vi tại mọi $x > 1$.
(c) Hãy tính $F'(2)$.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có $g(t) = \dfrac{t^{2020}}{1+(\sin(t))^2}$ liên tục với mọi $t \geq 1$ *nên* $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x}\left(\frac{t^{2020}}{1+(\sin(t))^2}\right)dt$, với mọi $x \geq 1$ là hàm liên tục trên $[1;\ +\infty)$ nên F cũng khả tích Riemann trên đoạn $[2;\ 3]$.

(b)

Ta có $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x}\left(\frac{t^{2020}}{1+(\sin(t))^2}\right)dt$, với mọi $x \geq 1$ nên F là hàm khả vi trên $(1;+\infty)$

(c)

Ta có

$$F'(x) = (e^x)'\frac{(e^x)^{2020}}{1+(\sin(e^x))^2} = \frac{e^{2021x}}{1+\sin^2(e^x)}$$

Vậy

$$F'(2) = \frac{e^{2021\cdot 2}}{1+\sin^2(e^2)} = \frac{e^{4042}}{1+\sin^2(e^2)}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ giải tích A1 2021 – 2022

ĐỀ A

Câu 1: Cho A là tập con của $\mathbb{R}$ chứa số 4 sao cho A bị chặn trên và $A_1 = \{x \in A : x > 4\}$ khác rỗng. Ta đặt $A_2 = \{x \in A : x \leq 4\}$.
(a) Chứng minh rằng $\max A_2 = 4 < \sup A_1$
(b) Chứng minh rằng $\sup A_1 = \sup A$.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$x \leq 4, \qquad \forall x \in A_2$$

Mà do $4 \in A_2$ nên

$$\max A_2 = 4$$

Do $A_1 \subset A$ mà A bị chặn trên. Vì vậy A_1 bị chặn trên. Mà ta có

$$x > 4, \qquad \forall x \in A_1$$
$$\Rightarrow \sup A_1 > 4$$

Vậy $\max A_2 = 4 < \sup A_1$.

(b)

Ta có

$$x \leq \sup A_1, \qquad \forall x \in A_1$$

Mà do $A_1 \subset A$ nên $x \in A$. Vậy nên

$$x \leq \sup A_1, \qquad \forall x \in A$$

Vậy suy ra $\sup A_1$ là chặn trên của A nên

$$\sup A \leq \sup A_1 \ \ (1)$$

Mà do $A_1 \subset A$ nên ta suy ra

$$\sup A_1 \leq \sup A \ \ (2)$$

Từ $(1); \ (2) \Rightarrow \sup A_1 = \sup A$.

Câu 2: Dùng định nghĩa $\varepsilon - N$ để chứng minh rằng

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1$$

Hướng dẫn:

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Thật vậy ta có

$$\left|\frac{n+1}{n+2}-1\right| = \left|-\frac{1}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N(\varepsilon)}$$

Chọn $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\frac{1}{N(\varepsilon)} \le \varepsilon$$
$$\Rightarrow N(\varepsilon) \ge \frac{1}{\varepsilon}$$

Vậy ta chọn $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Suy ra $\frac{n+1}{n+2}$ hội tụ về 1 hay

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1$$

Câu 3: Xét dãy số $\{a_n\}$ được cho bởi

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Tìm $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ bằng định nghĩa.

(b) Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Hướng dẫn:

(a)

Đặt

$$A_n = \left\{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \ge n\right\}$$

Vì

$$-1 \le \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \le 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho nên với

$$\begin{aligned} b_n &= \sup A_n = \ \ 1 \\ c_n &= \inf A_n \ = -1 \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} 1 \ \ = \ \ 1 \\ \liminf_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1 \end{aligned}$$

(b)

Do

$$\limsup_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \ne \liminf_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Câu 4: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \in [0;\ 2) \\ 4, & x \in [2;\ 3] \end{cases}$$

(a) Dùng định nghĩa $\varepsilon - \delta$ để chứng minh rằng

$$\lim_{x \to \frac{5}{2}} f(x) = 4$$

(b) Dùng định nghĩa $\varepsilon - \delta$ để chứng minh rằng

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Hướng dẫn:

(a)

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - 4| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [2;\ 3], \left|x - \frac{5}{2}\right| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Thật vậy ta có

$$|f(x) - 4| = |4 - 4| = 0 < \left|x - \frac{5}{2}\right| < \delta(x;\ \varepsilon), \qquad \forall x \in [2;\ 3]$$

Chọn $\delta(x;\ \varepsilon)$ sao cho $\delta(x;\ \varepsilon) < \varepsilon$ nên $\delta(x;\ \varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vậy

$$\lim_{x \to \frac{5}{2}} f(x) = 4$$

(b)

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(x;\ \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - 4| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [0;\ 3], |x - 2| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Với $x \in [0;\ 2)$, ta có

$$|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Chọn $\delta(x;\ \varepsilon)$ sao cho $\delta(x;\ \varepsilon) < \varepsilon$ nên $\delta(x;\ \varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ (1).

Với $x \in [2;\ 3]$, ta có

$$|f(x) - 4| = |4 - 4| = 0 < |x - 2| < \delta(x;\ \varepsilon)$$

Chọn $\delta(x;\ \varepsilon)$ sao cho $\delta(x;\ \varepsilon) < \varepsilon$ nên $\delta(x;\ \varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ (2).

Từ $(1);\ (2) \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

ĐỀ B

Câu 1: Cho A là tập con của $\mathbb{R}$ chứa số 1 sao cho A bị chặn dưới và $A_1 = \{x \in A : x < 1\}$ khác rỗng. Ta đặt $A_2 = \{x \in A : x \geq 1\}$.
(a) Chứng minh rằng $\inf A_1 < 1 = \min A_2$.
(b) Chứng minh rằng $\inf A_1 = \inf A$.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$x \geq 1, \qquad \forall x \in A_2$$

Mà do $1 \in A_2$ nên

$$\min A_2 = 4$$

Do $A_1 \subset A$ mà A bị chặn dưới. Vì vậy A_1 bị chặn dưới. Mà ta có

$$\begin{aligned} x \quad &< 4, \qquad \forall x \in A_1 \\ \Rightarrow \inf A_1 &< 4 \end{aligned}$$

Vậy $\inf A_1 < 1 = \min A_2$.

(b)

Ta có

$$x \geq \inf A_1, \qquad \forall x \in A_1$$

Mà do $A_1 \subset A$ nên $x \in A$. Vậy nên

$$x \geq \inf A_1, \qquad \forall x \in A$$

Vậy suy ra $\inf A_1$ là chặn dưới của A nên

$$\inf A \geq \inf A_1 \;\; (1)$$

Mà do $A_1 \subset A$ nên ta suy ra

$$\inf A_1 \geq \inf A \;\; (2)$$

Từ $(1); \ (2) \Rightarrow \inf A_1 = \inf A$.

Câu 2: Cho dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$x_n^2 - \frac{2}{n}x_n \le \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Chứng minh rằng

$$\frac{1-\sqrt{n+1}}{n} \le x_n \le \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$\begin{aligned}
&x_n^2 - \frac{2}{n}x_n \le \frac{1}{n} &&, \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
\Rightarrow\ &x_n^2 - \frac{2}{n}x_n + \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} &&, \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
\Rightarrow\ &\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 \le \frac{n+1}{n^2} &&, \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
\Rightarrow\ &-\frac{\sqrt{n+1}}{n} \le x - \frac{1}{n} \le \frac{\sqrt{n+1}}{n} &&, \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
\Rightarrow\ &\frac{1-\sqrt{n+1}}{n} \le x \le \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}, && \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

(b)

Ta có

$$\frac{1-\sqrt{n+1}}{n} \le x_n \le \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}$$

Ta nhận thấy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\sqrt{n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) = 0$$

Vì vậy theo định lý kẹp, ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$

Câu 3: Cho hàm số $f:(0;\ 1)\to\mathbb{R}$. Chứng minh rằng
(a) Nếu $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$, thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$ đối với mọi dãy $\{x_n\}\subset(0;\ 1)$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$.
(b) Nếu $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq+\infty$, thì tồn tại dãy $\{x_n\}\subset(0;\ 1)$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$ và dãy $\{f(x_n)\}$ bị chặn trên.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ tức là

Cho $\varepsilon>0$, có $\delta(x;\ \varepsilon)>0$ sao cho

$$f(x)\geq\varepsilon,\qquad \forall x\in(0;\ 1), 1-x<\delta(x;\ \varepsilon)$$

Cho dãy $\{x_n\}\subset(0;\ 1)$ sao cho x_n hội tụ về 1.

Với mọi ε', có $N(\varepsilon')\in\mathbb{N}$ sao cho

$$1-x_n<\varepsilon',\qquad \forall n\geq\ N(\varepsilon')$$

Ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$ tức là

Cho $\varepsilon''>0$, tìm $M(\varepsilon'')\in\mathbb{N}$ sao cho

$$f(x_n)\geq\varepsilon'',\qquad \forall n\geq M(\varepsilon'')$$

Chọn $M(\varepsilon'')=N(\varepsilon')$, $\delta(x;\ \varepsilon)=\varepsilon'$, $\varepsilon=\varepsilon''$. Vậy suy ra điều phải chứng minh.

(b)

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq+\infty$ tức là tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a$. Điều đó có nghĩa là

Cho $\varepsilon>0$, có $\delta(x;\ \varepsilon)>0$ sao cho

$$|f(x)-a|\leq\varepsilon,\qquad \forall x\in(0;\ 1), 1-x<\delta(x;\ \varepsilon)$$

Vì vậy sẽ tồn tại một dãy $\{x_n\}\subset(0;\ 1)$ sao cho x_n hội tụ về 1 hay là

Với mọi ε', có $N(\varepsilon')\in\mathbb{N}$ sao cho

$$1-x_n<\varepsilon',\qquad \forall n\geq\ N(\varepsilon')$$

Ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=a$ tức là

Có $\varepsilon''>0$, tìm $M(\varepsilon'')\in\mathbb{N}$ sao cho

$$|f(x_n)-a|\leq\varepsilon'',\qquad \forall n\geq M(\varepsilon'')$$

Chọn $M(\varepsilon'')=(\varepsilon')$, $\varepsilon'=\delta(x;\ \varepsilon)$, $\varepsilon=\varepsilon''$. Ta cũng nhận thấy

$$\begin{aligned}&|f(x_n)-a|\leq\varepsilon''\\ \Rightarrow\ & f(x_n)-a\ \leq\varepsilon''\\ \Rightarrow\ & f(x_n)\qquad\ \leq\varepsilon''+a\end{aligned}$$

Vậy $\{f(x_n)\}$ bị chặn trên.

Câu 4: Cho hàm số $f: [0;\ 2] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [0;\ 1) \\ -x \quad , & x \in [1;\ 2] \end{cases}$$

(a) Xét sự liên tục của hàm số f.

(b) Chứng minh rằng $f(0) \cdot f(2) < 0$ và không có $x \in (0;\ 2)$ sao cho $f(x) = 0$. Hãy cho một sự giải thích về điều này.

Hướng dẫn:

(a)

Với $x_0 \in [0;\ 1)$ ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + 1) = x_0^2 + 1 = f(x_0)$$

Vậy f liên tục trên $[0;\ 1)$.

Với $x \in (1;\ 2)$ ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (-x) = -x_0 = f(x_0)$$

Vậy f liên tục trên $(1;\ 2)$.

Xét $x_0 = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (-x) = -1 \end{aligned}$$

Vậy f không liên tục tại $x_0 = 1$.

(b)

Ta thấy

$$\begin{cases} f(0) = \quad 1 \\ f(2) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0$$

Ta cũng nhận thấy

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \forall x \in [0;\ 1) \\ f(x) < 0, & \forall x \in [1;\ 2] \end{cases}$$

và do $f(x)$ không liên tục tại 1 nên không có $x \in (0;\ 2)$ sao cho $f(x) = 0$.

Lời giải đề thi cuối kỳ vi tích phân A1 2021 – 2022

ĐỀ A

Câu 1: Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Khảo sát sự khả vi của f trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h}, & x < 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 + 1 - (x^3+1)}{h}, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}, & x < 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h}, & x < 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3x^2 + 3xh + h)}{h}, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} (2x+h), & x < 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h), & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Vậy f khả vi tại mọi điểm $x_0 \neq 0$ (1).

Xét $x_0 = 0$, ta có

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

Vậy

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0) = 0 \ (2)$$

Từ (1); $(2) \Rightarrow f$ khả vi tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f:(a;\ b) \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in (a;\ b)$ sao cho

$$|f'(x)| < \frac{1}{2021}$$

Chứng minh rằng tồn tại một số dương r sao cho

$$|f(y) - f(x)| \le \frac{1}{2021}|y - x|$$

với mọi $y \in (a;\ b), |y - x| < r$.

Hướng dẫn:

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $r > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall y \in (a;\ b), |y - x| < r$$

Theo định lý Lagrange thì giả sử $x < y$, tồn tại điểm $c \in (x;\ y) \subset (a;\ b)$ sao cho

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Vậy suy ra

$$|f(y) - f(x)| \le |f'(c)||y - x| < \frac{1}{2021}|y - x| < \frac{1}{2021}r$$

Chọn r sao cho

$$\begin{aligned} \frac{1}{2021}r &< \varepsilon \\ \Rightarrow r &< 2021\varepsilon \end{aligned}$$

Chọn $r = \dfrac{2021\varepsilon}{2}$.

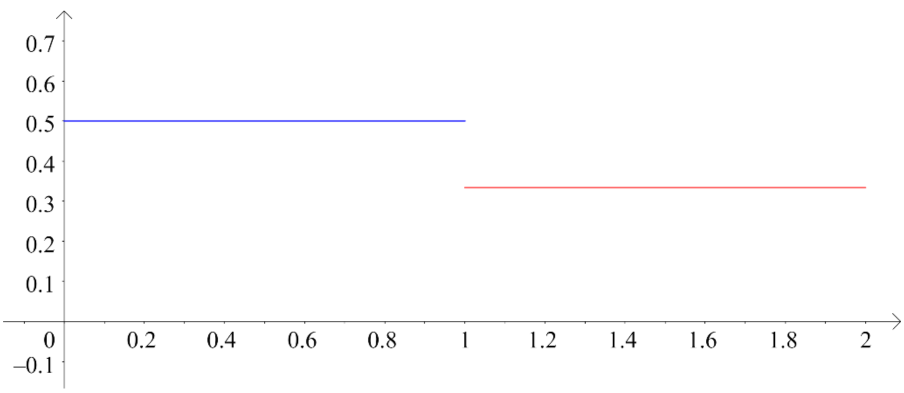
Câu 3: Cho hàm số $f: [0;\ 2] \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [0;\ 1] \\ \dfrac{1}{3}, & x \in (1;\ 2] \end{cases}$$

(a) Hãy vẽ đồ thị hàm số này.
(b) Hãy chứng minh rằng hàm f khả tích Riemann trên $[0;\ 2]$.

Hướng dẫn:

(a)



(b)

Ta chọn phân hoạch P bằng cách chia $[0;\ 2]$ thành $n+1$ khoảng sao cho

$$x_i = \frac{2i}{n}, \qquad i \in \overline{0;\ n}$$

Tồn tại khoảng $[x_{i-1};\ x_i]$ sao cho $1 \in [x_{i-1};\ x_i]$. Ta có

$$\begin{aligned} |\inf U(f;\ P) - \sup L(f;\ P)| &= \left|\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1})\right| = \frac{1}{6}|x_i - x_{i-1}| \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n}\right] = \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

Vậy suy ra f khả tích Riemann trên $[0;\ 2]$

Câu 4: Cho $f: [1;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ có một nguyên hàm là hàm $F(x)$ thỏa mãn tính chất

$$1 \le F(x) \le \frac{x^{2021} + 2021}{x^{2021}}, \qquad \forall x \ge 1$$

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \sin(t^3)\, dt$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên f là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \sin((x^3)^3) = 3x^2 \sin(x^9) \\ f''(x) &= 6x\sin(x^9) + 3x^2 \cdot 9x^8 \cos(x^9) \\ &= 6x\sin(x^9) + 27x^{10}\cos(x^9) \end{aligned}$$

(b)

Xét

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & 3x^2 \sin(x^9) = 0 \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x^2 = 0 \\ \sin(x^9) = 0 \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^9 = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[9]{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & x = \sqrt[9]{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Với $k = 0$ hay $x = 0$, cho $\varepsilon > 0$ ta có

$$f'(-\varepsilon) < 0 \text{ và } f'(\varepsilon) > 0 \text{ nên } f \text{ có cực trị tại } x = 0\ (1)$$

Với $x = \sqrt[9]{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ta có

$$f''\left(\sqrt[9]{k\pi}\right) = 6\sqrt[9]{k\pi}\sin(k\pi) + 27\sqrt[9]{k\pi}^{10}\cos(k\pi) = 27\sqrt[9]{k\pi}^{10} \ne 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Vậy f có cực trị tại $x = \sqrt[9]{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ (2)$

Từ $(1);\ (2) \Rightarrow f$ có cực trị tại $x = \sqrt[9]{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

ĐỀ B

Câu 1: Với mỗi $M > 0$, xét hàm số $f_M : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ như sau

$$f_M(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le M \\ M^2, & x > M \end{cases}$$

(a) Vẽ đồ thị hàm số f_M và tính đạo hàm của f_M.

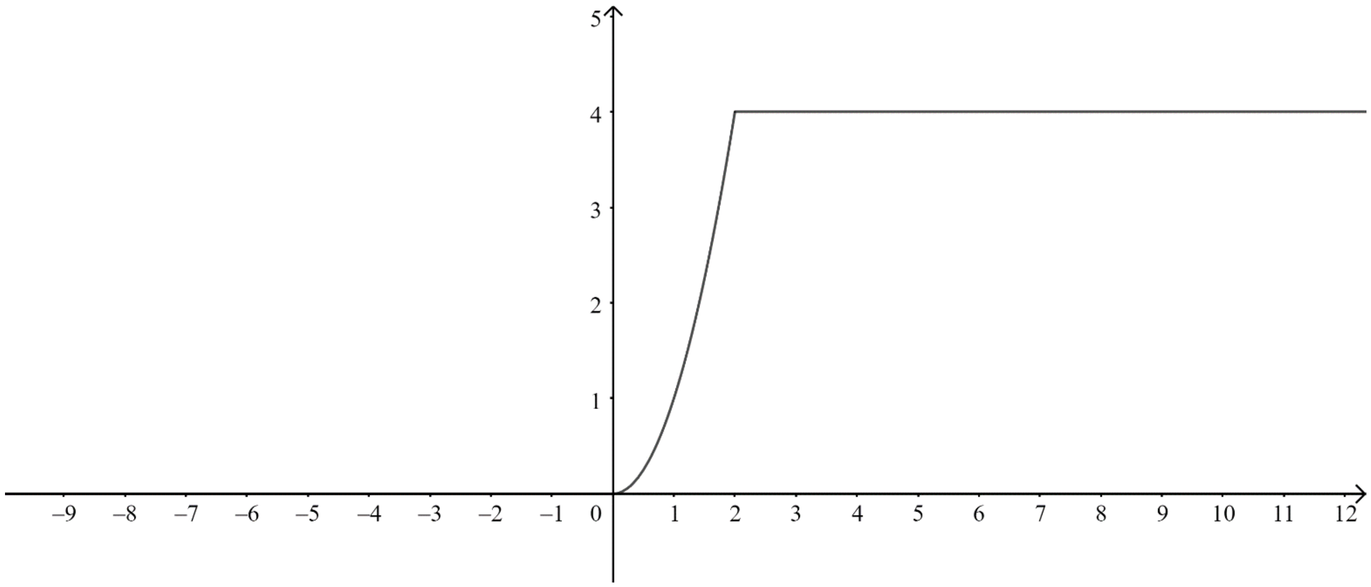
(b) Chứng minh rằng $|f_M(x) - f_M(y)| \le 2M|x - y|,\ \forall x;\ y \ge 0$.

(c) Chứng minh rằng $\forall x \ge 0, \forall \varepsilon > 0, \exists M_0 > 0 : \forall M > M_0 \Rightarrow |f_M(x) - x^2| < \varepsilon$.

Hướng dẫn:

(a)

Đồ thị hàm số



Với $x \ne M$, ta có

$$f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, & 0 \le x < M \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, & x > M \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}, & 0 \le x < M \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{M^2 - M^2}{h}, & x > M \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}, & 0 \le x < M \\ \lim\limits_{h\to 0} 0, & x > M \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h}, & 0 \le x < M \\ 0, & x > M \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} (2x+h), & 0 \le x < M \\ 0, & x > M \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x, & 0 \le x < M \\ 0, & x > M \end{cases}$$

(b)

$$|f_M(x) - f_M(y)| \le 2M|x - y|, \qquad \forall x;\ y \ge 0$$

TH1: $0 \le x;\ y \le M$, ta có

$$|f_M(x) - f_M(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y|$$

Mà

$$\begin{cases} x \le M \\ y \le M \end{cases} \Rightarrow x + y \le 2M \Rightarrow |x + y| \le 2M$$

Vậy nên

$$|f_M(x) - f_M(y)| = |x + y||x - y| \le 2M|x - y|$$

TH2: $x;\ y > M$, ta có

$$|f_M(x) - f_M(y)| = |M^2 - M^2| = 0 \le 2M|x - y|$$

TH3: không mất tính tổng quát, xét $0 \le x \le M < y$

$$|f_M(x) - f_M(y)| = |x^2 - M^2| = |x - M||x + M| = |M - x||x + M|$$

Ta có

$$x \le M \Rightarrow x + M \le 2M$$

Ta cũng có

$$M - x \le y - x \Rightarrow |M - x| \le |y - x| = |x - y|$$

Vậy nên

$$|f_M(x) - f_M(y)| = |M - x||x + M| \le 2M|x - y|$$

Từ đó suy ra

$$|f_M(x) - f_M(y)| \le 2M|x - y|, \qquad \forall x;\ y \ge 0$$

(c)

Ta thấy

$$|f_M(x) - x^2| = \begin{cases} |x^2 - x^2|, & 0 \le x \le M \\ |M^2 - x^2|, & x > M \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le M \\ |M^2 - x^2|, & x > M \end{cases}$$

Vậy ta chọn M_0 sao cho $M_0 > x$. Ta chọn

$$M_0 = x + 1$$

Khi đó ta thấy $M > M_0 > x$ nên suy ra

$$|f_M(x) - x^2| = 0 < \varepsilon$$

Câu 2: Tìm cực trị và điểm uốn của hàm số $f(x) = x^7 - 7|x|$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^7 - 7x, & x \ge 0 \\ x^7 + 7x, & x < 0 \end{cases}$$

Xét đạo hàm cấp một

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^7-7(x+h)-(x^7-7x)}{h}, & x>0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^7+7(x+h)-(x^7+7x)}{h}, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h-x)\sum_{k=0}^{6}(x+h)^{6-k}x^k-7h}{h}, & x>0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h-x)\sum_{k=0}^{6}(x+h)^{6-k}x^k+7h}{h}, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sum_{k=0}^{6}(x+h)^{6-k}x^k-7h}{h}, & x>0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sum_{k=0}^{6}(x+h)^{6-k}x^k+7h}{h}, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\left[\sum_{k=0}^{6}(x+h)^{6-k}x^k-7\right], & x>0\\ \lim\limits_{h\to 0}\left[\sum_{k=0}^{6}(x+h)^{6-k}x^k-7\right], & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}7x^6-7, & x>0\\ 7x^6+7, & x<0\end{cases}$$

Xét đạo hàm cấp hai

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7(x+h)^6-7-(7x^6-7)}{h}, & x>0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7(x+h)^6+7-(7x^6+7)}{h}, & x>0\end{cases}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{7(x+h-x)\sum_{k=0}^{5}(x+h)^{5-k}x^k}{h},\qquad x\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{7h\sum_{k=0}^{5}(x+h)^{5-k}x^k}{h},\qquad x\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}7\sum_{k=0}^{5}(x+h)^{5-k}x^k,\qquad x\neq 0$$

$$=42x^5,\qquad x\neq 0$$

Xét

$$\begin{aligned}&f'(x)=0\\ \Rightarrow&\begin{cases}7x^6-7=0, & x>0\\ 7x^6+7=0, & -x<0\ (\text{vn})\end{cases}\\ \Rightarrow\ &x=1\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}f''(x)&=0\\ \Rightarrow x\quad&=0\end{aligned}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	
			0				$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-6		

Vậy hàm số có hai cực trị là $x = 0$ và $x = 1$. Hàm số có một điểm uốn là $(0;\ 0)$.Vậy ta có

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^2 + x,\ x \in [0;\ 1]$.

(a) Tính các tổng Reimann $S(f;\ P)$, tổng Riemann trên $U(f;\ P)$, tổng Riemann dưới $L(f;\ P)$, của hàm số f tương ứng với phân hoạch

$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1;\ \xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{1}{2}, \xi_3 = 1\right\}$$

(b) Tính tổng Riemann $S(f;\ P_n)$ của hàm số f tương ứng với phân hoạch đều

$$P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$$

trong đó $x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n;\ \xi_i = \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

(c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f;\ P_n)$ và cho một sự giải thích rằng

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;\ P_n) = \int_0^1 f(x)dx$$

Hướng dẫn:

(a)

Ta có

$$\begin{aligned} S(f;\ P) &= \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \\ &= (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + (x_3 - x_2)f(\xi_3) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0\right)\cdot\frac{5}{16} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot 2 \\ &= \frac{81}{64} \end{aligned}$$

Do $f'(x) = 2x + 1$ là hàm tăng trên đoạn $[0;\ 1]$. Nên ta có

$$\begin{aligned} U(f;\ P) &= \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1};\ x_i]} f(x) \\ &= (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + (x_3 - x_2)f(x_3) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0\right)\cdot\frac{5}{16} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot 2 = \frac{81}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f;\ P) &= \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x\in[x_{i-1};\ x_i]} f(x) \\ &= (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0\right)\cdot 0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{16} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{29}{64} \end{aligned}$$

(b)

Ta có

$$\begin{aligned} S(f;\ P_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i^2}{n^2}+\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \end{aligned}$$

Ta xét

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} S(f;\ P_n) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n(n+1)}{2n}\right] \\ &= \frac{(n+1)(5n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

(c)

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;\ P_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(5n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{5}{6}$$

Khi khoảng chia phân hoạch càng nhỏ thì ta nhận thấy tổng Riemann là diện tích của hình giới hạn bởi $x \in [0;\ 1]$ và $f(x) = x^2 + x$ hay ta nói

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;\ P_n) = \int_0^1 f(x)dx$$

Câu 4: Cho hàm số

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^4}}, \qquad x \in [0;\ 1)$$

(a) Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$.

(b) Chứng minh rằng hàm F không có cực trị.

Hướng dẫn:

(a)

Ta có $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-t^4}}$ liên tục trên $[0;\ 1)$ nên tồn tại $c \in [0;\ x]$ với $x \in [0;\ 1)$ sao cho

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^4}} = g(c)(x-0) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-c^4}}$$

Vậy ta có

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1-c^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-c^4}}$$

Suy ra tồn tại $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$.

(b)

Ta có

$$F'(x) = x' \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} < 0, \qquad \forall x > 1$$

Vậy F không có cực trị,