

Ngày thứ nhất  
25 tháng 7 năm 2007

**Bài 1.** Cho trước các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Với mỗi  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) đặt

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

và đặt

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

a) Chứng minh rằng, với các số thực  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  tùy ý, ta có

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

b) Hãy chỉ ra rằng tồn tại các số thực  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  sao cho bất đẳng thức (\*) trở thành đẳng thức.

**Bài 2.** Xét năm điểm  $A, B, C, D$  và  $E$  sao cho  $ABCD$  là một hình bình hành và  $BCED$  là một tứ giác nội tiếp. Cho  $\ell$  là một đường thẳng đi qua  $A$ . Giả sử rằng  $\ell$  cắt miền trong của đoạn thẳng  $DC$  tại  $F$  và cắt đường thẳng  $BC$  tại  $G$ . Cũng giả sử rằng  $EF = EG = EC$ . Chứng minh rằng  $\ell$  là phân giác của góc  $\widehat{DAB}$ .

**Bài 3.** Trong một kỳ thi học sinh giỏi toán có một số thí sinh là bạn bè của nhau. Quan hệ bạn bè luôn là quan hệ hai chiều. Gọi một nhóm các thí sinh là *nhóm bạn bè* nếu như hai người bất kỳ trong nhóm này là bạn bè của nhau. (Một nhóm tùy ý ít hơn hai thí sinh cũng vẫn được coi là một nhóm bạn bè). Số lượng các thí sinh của một nhóm bạn bè được gọi là *cỡ* của nó.

Cho biết rằng, trong kỳ thi này, cỡ của một nhóm bạn bè có nhiều người nhất là một số chẵn. Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các thí sinh vào hai phòng sao cho cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng này cũng bằng cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng kia.

*Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút*

*Mỗi bài được 7 điểm*

Ngày thứ hai  
26 tháng 7 năm 2007

**Bài 4.** Trong tam giác  $ABC$ , đường phân giác của góc  $\widehat{BCA}$  cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác tại  $R$ , cắt đường trung trực của  $BC$  tại  $P$ , và đường trung trực của  $AC$  tại  $Q$ . Trung điểm của  $BC$  là  $K$  và trung điểm của  $AC$  là  $L$ . Chứng minh rằng tam giác  $RPK$  và tam giác  $RQL$  có diện tích bằng nhau.

**Bài 5.** Cho trước  $a$  và  $b$  là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu  $(4ab - 1)$  là ước số của  $(4a^2 - 1)^2$  thì  $a = b$ .

**Bài 6.** Cho  $n$  là một số nguyên dương. Xét

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

như là một tập hợp gồm  $(n + 1)^3 - 1$  điểm trong không gian 3-chiều. Hãy xác định số nhỏ nhất có thể các mặt phẳng mà hợp của chúng chứa tất cả các điểm của  $S$  nhưng không chứa điểm  $(0, 0, 0)$ .

*Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút  
Mỗi bài được 7 điểm*