

Tuần 6 (1/4)

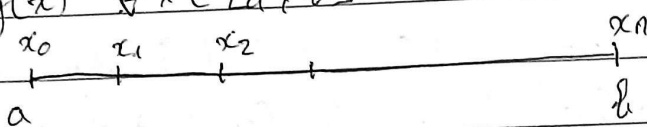
Ứng dụng xấp xỉ đạo hàm  
 1) Giải xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Vd: 
$$\begin{cases} y'(x) = 2x - y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Ba cần tìm ra nghiệm của xấp xỉ nghiệm chính xác sau:  $y(x) = e^{-x} + 2x - 2$

Trên  $[a, b]$ , \* mục tiêu của ta nghiệm chính xác  $y(x) \forall x \in [a, b]$



$$x_i = a + ih \quad \text{với } h = \frac{b-a}{n}$$

Tìm giá trị  $\{y(x_i)\}_{i=0}^n$  biết  $y(x_0) = y_0$

Do  $y'(x) = f(x, y(x))$  với  $x \in (a, b)$

\* Khi bài toán trở về hạn điểm, ta chuyển về bài toán trên các điểm  $x_i$ .

Tìm  $y(x_i)$

Ba có:  $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ .

Ứng dụng ct sai phân tiến.

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h)$$

Do đó: 
$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = f(x_0, y(x_0))$$

$$y(x_1) - y_0 + O(h^2) = h f(x_0, y_0)$$

Ba đặt  $y_1$  giá trị xấp xỉ của  $y(x_1)$ , thỏa:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

định được.

$\Rightarrow$  tính được  $y_1$

Mối quan hệ giữa  $y(x_1)$  và giá trị xấp xỉ của nó là  $y_1$ .

$$y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + O(h^2)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow y(x_1) - y_1 = O(h^2)$$

$$y'(x_1) = f(x_1, y(x_1))$$

Có có:

$$y'(x_1) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{h} + O(h)$$

$$\Rightarrow y(x_2) - y_1 + O(h^2) = h f(x_1, y(x_1))$$

Có đặt  $y_2$  là giá trị xấp xỉ của  $y(x_2)$  thỏa:

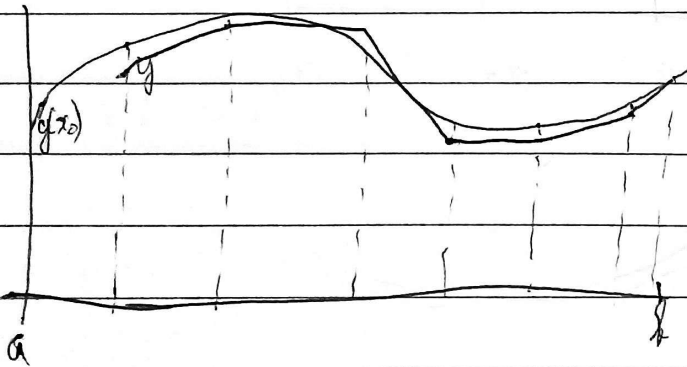
$$y_2 - y_1 = hf(x_1, y_1)$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Có dãy hàm:  $Y_h = (y_i)_{i=0, \dots, n}$  là giá trị xấp xỉ

$Y_e = (y(x_i))_{i=0, \dots, n}$  là giá trị chính xác.



$$\|Y_h - Y_e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - y(x_i)|^2}$$

$$\|y_h - y\| = \left( \int_a^b |y_h(x) - y(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

VD:  $\begin{cases} y'(x) = 2x - y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$  ( nghiệm chính xác:  $y(x) = e^{-x} + 2x - 2$  )

$f(x, y(x)) = 2x - y(x)$



$N = 10 \text{ *}, h = \frac{1}{10}$

$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$

$\Rightarrow y_1 = -1 + h(2 \cdot 0 + 1) = -0,9$

$y(x_1) = e^{-x_1} + 2x_1 - 2$

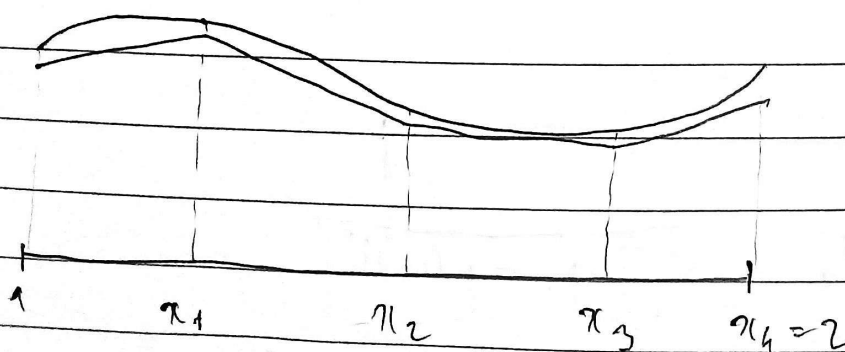
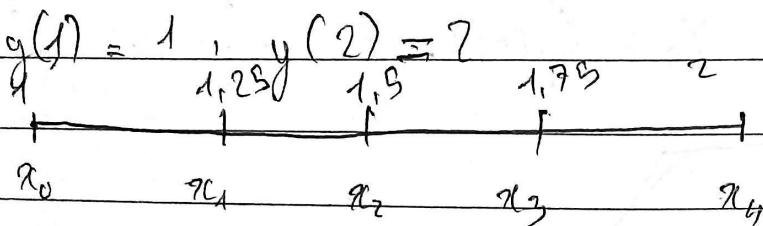
$= -0,89516258 \text{ với } x_1 = 0,1$

$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = -0,9 + 0,1(2 \cdot 0,1 + 0,9) = -0,79$

$y(x_2) = e^{-x_2} + 2x_2 - 2 = -0,78126925$

Tìm nghiệm xấp xỉ ptvp cấp 2.

$\begin{cases} y''(x) + \left(\frac{2}{x}\right) y'(x) - \left(\frac{2}{x^2}\right) y(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x^2} \quad x \in [1, 2] \\ y(1) = 1, y(2) = 2 \end{cases}$



$$x_1 \in (1,2)$$

$$y''(x_1) + \left(\frac{2}{x_1}\right) y'(x_1) - \frac{2}{(x_1)^2} y(x_1) = \frac{\sin(\ln(x_1))}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow y''(x_1) + 1,6 y'(x_1) - 1,28 y(x_1) = \frac{\sin(\ln(1,25))}{1,25^2}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{h^2} + O(h^2) \right] + \dots$$

$$+ 1,6 \left[ \frac{y(x_2) - y(x_0)}{2h} + O(h^2) \right] - 1,28 y(x_1) = f_1$$

$$\Rightarrow y(x_2) \left[ \frac{1}{h^2} + \frac{1,6}{2h} \right] - y(x_1) \left[ \frac{-2}{h^2} - 1,28 \right] + \dots$$

$$+ y(x_0) \left[ \frac{1}{h^2} - \frac{1,6}{2h} \right] + O(h^2) = f_1$$

$$\Rightarrow 19,2 y_2 - 33,28 y_1 = -12,65837035 + O(h^2)$$

$$* x_2 = x_2 = 1,5$$

$$y''(x_2) + \left(\frac{2}{x_2}\right) y'(x_2) - \left(\frac{2}{x_2^2}\right) y(x_2) = \frac{\sin(\ln(x_2))}{x_2^2}$$

$$\Rightarrow y''(x_2) + \frac{4}{3} y'(x_2) - \frac{8}{9} y(x_2) = \frac{\sin(\ln(1,5))}{1,5}$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_3) - 2y(x_2) + y(x_1)}{h^2} + O(h^2) + \dots = f_2$$

$$+ \frac{4}{3} \left[ \frac{y(x_3) - y(x_1)}{2h} + O(h^2) \right] - \frac{8}{9} y(x_2) = f_2$$

$$\Rightarrow y(x_3) \left[ \frac{1}{h^2} + \frac{4}{6h} \right] + y(x_1) \left[ \frac{-2}{h^2} - \frac{8}{9} \right] + \dots$$

$$+ y(x_2) \left[ \frac{1}{h^2} - \frac{4}{6h} \right] + O(h^2) = f_2$$

$$\Rightarrow \frac{56}{3} y(x_3) - \frac{296}{9} y(x_2) + \frac{40}{3} y(x_1) + O(h^2) =$$

$$= 0,17830942$$

$$x = x_3 = 1,75$$

$$y''(x_3) + \left(\frac{2}{x_3}\right) y'(x_3) - \frac{2}{x_3^2} y(x_3) = \frac{\sin(\ln x_3)}{x_3^3}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{y(x_4) - 2y(x_3) + y(x_2)}{h^2} + O(h^2) \right) + \frac{8}{7} \left( \frac{y(x_4) - f(x_3)}{2h} + O(h^2) \right) + \dots$$

$$\dots - \frac{32}{49} y(x_3) = 0,17334225$$

$$\Rightarrow y(x_4) \left( \frac{1}{h^2} + \frac{4}{7h} \right) = y(x_3) \left( \frac{2}{h^2} - \frac{32}{49} \right) + O(h^2) + \dots$$

$$\dots + y(x_2) \left( \frac{1}{h^2} - \frac{4}{7h} \right) = 0,17334225$$