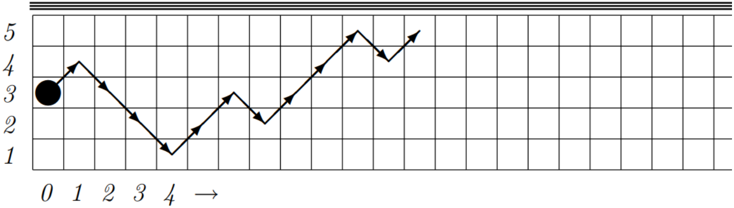
Quá trình ngẫu nhiên
Chương 1: Xích Markov rời rạc

Hoàng Văn Hà
University of Science, VNU - HCM
hvha@hcmus.edu.vn

Bước ngẫu nhiên (Random walks)

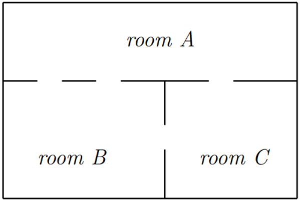
Một người say đi bộ trên vỉa hè có bề rộng bằng 5 viên gạch. Mỗi lần bước đi, anh ta có thể bước một bước theo 1 ô gạch về phía trước, hoặc một bước sang trái hoặc sang phải với xác suất bằng nhau. Ngoại lệ: khi ở vị trí 5 thì anh ta chỉ có thể đi về 4 (tường), khi ở vị trí 1 và đi sang phải thì quá trình kết thúc (người say đi ra khỏi vỉa hè).



Về trung bình, người này sẽ đi bộ được bao xa? Xác suất để người say này đi về tới nhà khi nhà của anh ta cách K bước là bao nhiêu?

Huấn luyện chuột

Một con chuột được huấn luyện sống trong một ngôi nhà như hình vẽ. Chuông reo theo những khoảng thời gian đều đặn, và con chuột được huấn luyện để chạy qua phòng khác mỗi khi chuông reo. Khi đổi phòng, nó có khả năng như nhau để đi qua bất kỳ cánh cửa nào trong phòng mà nó đang ở. Hỏi con chuột sẽ ở khoảng xấp xỉ bao nhiêu phần đời của mình tại mỗi căn phòng?



Sòng bạc công bằng

Giả sử bạn quyết định tham gia một trò chơi roulette, bắt đầu với số vốn là C_0 đồng. Ở mỗi ván chơi, bạn đặt cược 10 đồng. Bạn sẽ mất số tiền này nếu roulette cho ra số chẵn, và bạn sẽ nhận được gấp đôi số tiền cược (tức là 20 đồng) nếu roulette cho ra số lẻ. Giả sử roulette là công bằng, tức là xác suất ra số chẵn và số lẻ đều bằng $1/2$. Xác suất để bạn trắng tay khi rời khỏi sòng bạc là bao nhiêu?

- **Virus đột biến**
  Một loại virus có thể tồn tại ở N chủng khác nhau. Ở mỗi thế hệ, virus đột biến với xác suất $\alpha \in (0, 1)$ sang một chủng khác một cách ngẫu nhiên. Câu hỏi: xác suất để chủng virus ở thế hệ thứ n giống với chủng ở thế hệ thứ 0 là bao nhiêu?

- **Mô hình động lực học quần thể đơn giản**
  Hãy xét một quần thể gồm N cá thể thuộc hai loại, A và a.
  "Sinh": tại mỗi bước, ta chọn ngẫu nhiên một cá thể và thêm vào một cá thể mới cùng loại.
  "Tử": sau đó ta chọn ngẫu nhiên một cá thể và loại bỏ nó. Xác suất để có i cá thể thuộc loại a tại bước n là bao nhiêu? (lưu ý: trong khoảng giữa "sinh" và "tử" thì có $N + 1$ cá thể).

Xếp hạng website

Để xác định mức độ liên quan của một trang web cụ thể, Google sử dụng thuật toán dựa trên truy vấn tìm kiếm của người dùng. Xếp hạng các trang web do Google tạo ra được định nghĩa thông qua thuật toán "người lướt ngẫu nhiên" (quá trình ngẫu nhiên, xích Markov!). Ta giới thiệu một số kí hiệu sau:

$$N = \text{ số trang web}, \quad L_i = \text{các liên kết đi từ trang } i, \quad L_i \subseteq \{1, \ldots, N\}$$

Một người duyệt web ngẫu nhiên đi từ một trang i đến một trang mới j với các xác suất:

$$\text{với xác suất } q: \quad \text{chọn ngẫu nhiên một trang từ } \{1, \ldots, N\}$$

$$\text{với xác suất } 1-q: \quad \text{chọn ngẫu nhiên một trong các liên kết trong } L_i$$

Điều này tương đương với:

$$j \in L_i: \quad \text{Prob}("i \to j") = \frac{1-q}{|L_i|} + \frac{q}{N}, \qquad j \notin L_i: \quad \text{Prob}("i \to j") = \frac{q}{N}.$$

Xếp hạng website

Lưu ý: tổng các xác suất bằng 1:

$$\sum_{j=1}^{N} \text{Prob}("i \to j") = \sum_{j \in L_i} \text{Prob}("i \to j") + \sum_{j \notin L_i} \text{Prob}("i \to j")$$

$$= \sum_{j \in L_i} \left(\frac{1-q}{|L_i|} + \frac{q}{N} \right) + \sum_{j \notin L_i} \frac{q}{N}$$

$$= |L_i| \left(\frac{1-q}{|L_i|} + \frac{q}{N} \right) + (N - |L_i|) \frac{q}{N}$$

$$= 1 - q + q = 1$$

Hãy tính xấp xỉ tỉ lệ f_i số lần một trang sẽ được ghé thăm khi quá trình trên được lặp lại một số lần rất lớn. Khi đó f_i sẽ xác định xếp hạng của Google cho trang i. Ta có thể dự đoán f_i không? Làm thế nào để tăng xếp hạng trang web của mình?

Ứng dụng của quá trình ngẫu nhiên

- Vật lý: cơ học lượng tử, chất rắn/lỏng/khí ở nhiệt độ khác không, khuếch tán...
- Sinh học: các phân tử tương tác, chuyển động tế bào, mô hình con mồi–kẻ săn mồi...
- Y học: dịch tễ học, chuyển đổi gen, động lực học quần thể...
- Thương mại: thị trường chứng khoán & tỷ giá hối đoái, rủi ro bảo hiểm, định giá phái sinh...
- Xã hội học: hành vi bầy đàn, giao thông, động lực dư luận...
- Khoa học máy tính: lưu lượng internet, thuật toán tìm kiếm...
- Giải trí: cờ bạc, cá cược...

Định nghĩa tổng quát của Quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Gọi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *là một không gian xác suất và* $(I, \mathcal{I})$ *là một không gian được trang bị một* σ*-đại số, gọi là không gian trạng thái (state-space). Một quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên thực* $(X_t)_{t \in T}$*, được xác định trên* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *với giá trị trong* $(I, \mathcal{I})$*.*

Tập T *biểu diễn thời gian. Do đó, biến ngẫu nhiên* X_t *ứng với trạng thái của hiện tượng tại thời điểm* t*.*
Nếu tập T *là:*

- đếm được (countable set), *quá trình ngẫu nhiên được gọi là rời rạc; ví dụ* $T = \mathbb{N}$ *hoặc bất kỳ tập hữu hạn nào.*
- liên tục (continuous), *quá trình ngẫu nhiên được gọi là liên tục; ví dụ* $T = \mathbb{R}^+$, $[0, t_0]$ *hoặc bất kỳ tập con nào của* $\mathbb{R}^+$.

Định nghĩa tổng quát của Quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa 2

Gọi $(X_t)_{t\in T}$ *là một quá trình ngẫu nhiên được xác định trên một không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *với giá trị trong* $(I, \mathcal{I})$, *và gọi* $\omega \in \Omega$ *là một biến cố sơ cấp. Quỹ đạo (trajectory/sample path) của quá trình ứng với* ω *là ánh xạ*

$$\begin{aligned} T &\to I, \\ t &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Trong trường hợp quá trình ngẫu nhiên rời rạc, tức là $T = \mathbb{N}$, *quỹ đạo ứng với* ω *là ánh xạ*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to I, \\ n &\mapsto X_n(\omega). \end{aligned}$$

Định nghĩa tổng quát của Quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa 2

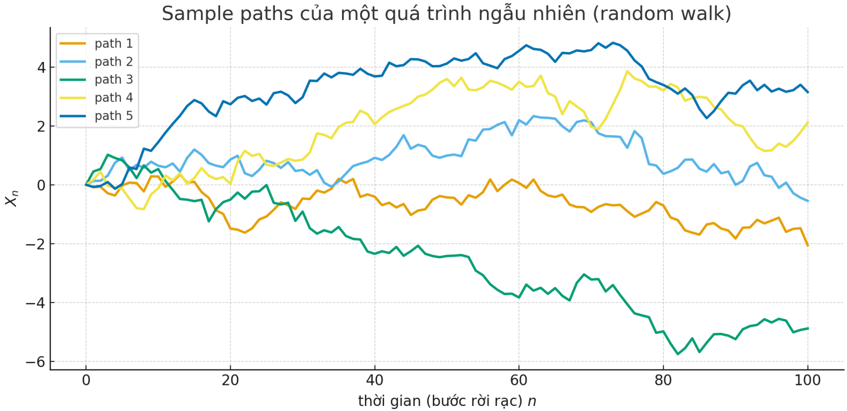
Gọi $(X_t)_{t\in T}$ là một quá trình ngẫu nhiên được xác định trên một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ với giá trị trong $(I, \mathcal{I})$, và gọi $\omega \in \Omega$ là một biến cố sơ cấp. Quỹ đạo (trajectory/sample path) của quá trình ứng với ω là ánh xạ

$$\begin{aligned} T &\to I, \\ t &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Trong trường hợp quá trình ngẫu nhiên rời rạc, tức là $T = \mathbb{N}$, quỹ đạo ứng với ω là ánh xạ

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to I, \\ n &\mapsto X_n(\omega). \end{aligned}$$

Quỹ đạo của một quá trình ngẫu nhiên là một hàm cụ thể của thời gian, thu được bằng cách cố định một kết quả ω, biểu diễn diễn tiến thực sự của quá trình trong một lần quan sát.


Sample paths của một quá trình ngẫu nhiên (random walk)
path 1
path 2
path 3
path 4
path 5
X_n
4
2
0
−2
−4
−6
0
20
40
60
80
100
thời gian (bước rời rạc) n

Khái niệm và các ký hiệu

- Gọi I là một tập đếm được, $I = \{i, j, k, \ldots\}$. Mỗi $i \in I$ được gọi là một **trạng thái (state)** và I được gọi là **không gian trạng thái (state-space)**.

Khái niệm và các ký hiệu

- Gọi I là một tập đếm được, $I = \{i, j, k, \ldots\}$. Mỗi $i \in I$ được gọi là một **trạng thái (state)** và I được gọi là **không gian trạng thái (state-space)**.
- Xét *không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ta sẽ khảo sát một dãy các biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, \ldots$ (nhận giá trị trong I)

Khái niệm và các ký hiệu

- Gọi I là một tập đếm được, $I = \{i, j, k, \ldots\}$. Mỗi $i \in I$ được gọi là một **trạng thái (state)** và I được gọi là **không gian trạng thái (state-space)**.
- Xét *không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ta sẽ khảo sát một dãy các biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, \ldots$ (nhận giá trị trong I)
- Một vector hàng $\lambda = (\lambda_i : i \in I)$ được gọi là **một độ đo (measure)** nếu $\lambda_i \geq 0$ với mọi i. Nếu $\sum_i \lambda_i = 1$ thì đó là một **phân phối (distribution)** hay độ đo xác suất. Ta bắt đầu với một *phân phối ban đầu* (initial distribution) trên I, xác định bởi $\{\lambda_i : i \in I\}$ sao cho $0 \leq \lambda_i \leq 1$ với mọi i và $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Khái niệm và các ký hiệu

- Gọi I là một tập đếm được, $I = \{i, j, k, \dots\}$. Mỗi $i \in I$ được gọi là một **trạng thái (state)** và I được gọi là **không gian trạng thái (state-space)**.
- Xét *không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ta sẽ khảo sát một dãy các biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, \dots$ (nhận giá trị trong I)
- Một vector hàng $\lambda = (\lambda_i : i \in I)$ được gọi là **một độ đo (measure)** nếu $\lambda_i \geq 0$ với mọi i. Nếu $\sum_i \lambda_i = 1$ thì đó là một **phân phối (distribution)** hay độ đo xác suất. Ta bắt đầu với một *phân phối ban đầu* (initial distribution) trên I, xác định bởi $\{\lambda_i : i \in I\}$ sao cho $0 \leq \lambda_i \leq 1$ với mọi i và $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.
- Trường hợp đặc biệt, ta bắt đầu tại trạng thái i với xác suất bằng 1, được ký hiệu là $\lambda = \delta_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

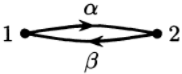
Khái niệm và các ký hiệu

- Gọi I là một tập đếm được, $I = \{i, j, k, \ldots\}$. Mỗi $i \in I$ được gọi là một **trạng thái (state)** và I được gọi là **không gian trạng thái (state-space)**.
- Xét *không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ta sẽ khảo sát một dãy các biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, \ldots$ (nhận giá trị trong I)
- Một vector hàng $\lambda = (\lambda_i : i \in I)$ được gọi là **một độ đo (measure)** nếu $\lambda_i \geq 0$ với mọi i. Nếu $\sum_i \lambda_i = 1$ thì đó là một **phân phối (distribution)** hay độ đo xác suất. Ta bắt đầu với một *phân phối ban đầu* (initial distribution) trên I, xác định bởi $\{\lambda_i : i \in I\}$ sao cho $0 \leq \lambda_i \leq 1$ với mọi i và $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.
- Trường hợp đặc biệt, ta bắt đầu tại trạng thái i với xác suất bằng 1, được ký hiệu là $\lambda = \delta_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.
- Ta cũng có một **ma trận chuyển (transition matrix)** $P = (p_{ij} : i, j \in I)$ với $p_{ij} \geq 0$ với mọi i, j, với p_{ij} là xác suất chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j.

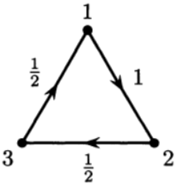
Khái niệm và các ký hiệu

- P là một **ma trận ngẫu nhiên (stochastic matrix)**, nghĩa là $p_{ij} \geq 0$ với mọi $i, j \in I$ và $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$ (tức là mỗi hàng của P là một phân phối xác suất trên I).

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Định nghĩa Xích Markov

Định nghĩa 3

Dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n \geq 0}$ được gọi là một xích Markov (Markov chain) với phân phối ban đầu λ và ma trận chuyển P nếu với mọi $n \geq 0$ và $i_0, \ldots, i_{n+1} \in I$, ta có

(i) $P(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$;

(ii) $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$.

Ta ký hiệu ngắn gọn $(X_n)_{n \geq 0}$ là Markov(λ, P). Các xác suất $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$ được gọi là các *xác suất chuyển (transition probabilities)*

Định nghĩa Xích Markov

Định nghĩa 3

Dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ được gọi là một xích Markov (Markov chain) với phân phối ban đầu λ và ma trận chuyển P nếu với mọi $n \geq 0$ và $i_0, \dots, i_{n+1} \in I$, ta có

(i) $P(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$;

(ii) $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$.

Ta ký hiệu ngắn gọn $(X_n)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P). Các xác suất $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$ được gọi là các *xác suất chuyển (transition probabilities)*

Xích Markov là quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc, có tính chất *"memoryless"*. Điều này có nghĩa là ta chỉ cần biết trạng thái hiện tại (tại thời điểm $n-1$) là đủ để xác định xác suất của trạng thái kế tiếp (tại thời điểm n). Toàn bộ thông tin về các trạng thái quá khứ đều đã được chứa trong trạng thái hiện tại.

Xích Markov thuần nhất (Homogeneous Markov Chains)

Định nghĩa 4

Một Xích Markov được gọi là thuần nhất (homogeneous) nếu và chỉ nếu các xác suất chuyển độc lập với thời gian, tức là,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

đúng với mọi thời điểm n. Cụ thể, ta có

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_2 = j | X_1 = i) = P(X_3 = j | X_2 = i) = \cdots$$

Xích Markov thuần nhất (Homogeneous Markov Chains)

Định nghĩa 4

Một Xích Markov được gọi là thuần nhất (homogeneous) nếu và chỉ nếu các xác suất chuyển độc lập với thời gian, tức là,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

đúng với mọi thời điểm n. Cụ thể, ta có

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_2 = j | X_1 = i) = P(X_3 = j | X_2 = i) = \cdots$$

Kể từ đây về sau, các xích Markov được khảo sát mặc định là xích Markov thuần nhất nếu như không có chú ý gì khác.

Để xác định dãy $(X_n)_{n\geq 0}$ có phải là một xích Markov, ta cần kiểm tra các điều kiện (i) và (ii) của Định nghĩa 3. Một cách kiểm tra khác là dùng định lý sau:

Định lý 1

$(X_n)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P) nếu và chỉ nếu với mọi $n \geq 0$ và $i_0, \ldots, i_n \in I$,

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Xác suất chuyển (Transition probabilities)

Các xác suất chuyển

$$p_{i,j} \;=\; P\left(X_n = j \,\middle|\, X_{n-1} = i\right)$$

xác định *Xích Markov*. *Ma trận chuyển* (transition matrix) mô tả toàn bộ các xác suất chuyển:

$$P \;=\; (p_{i,j}) \;=\; \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Xác suất chuyển (Transition probabilities)

Nếu xích Markov có r trạng thái, $I = \{1, 2, \ldots, r\}$ thì ma trận chuyển P là ma trận vuông có dạng

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix}.$$

Chú ý ràng $p_{ij} \geq 0$ và $\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1 \ \forall\, i$.

Ví dụ về ma trận chuyển

Xét một Xích Markov với $r = 3$ trạng thái, mô tả tình trạng thời tiết hằng ngày:

$$1 = \text{Nắng}, \qquad 2 = \text{Nhiều mây}, \qquad 3 = \text{Mưa}.$$

Các xác suất chuyển được giả sử như sau:

- Nếu hôm nay là **Nắng** ($i = 1$): $p_{11} = 0.6, \quad p_{12} = 0.3, \quad p_{13} = 0.1.$
- Nếu hôm nay là **Nhiều mây** ($i = 2$): $p_{21} = 0.2, \quad p_{22} = 0.5, \quad p_{23} = 0.3.$
- Nếu hôm nay là **Mưa** ($i = 3$): $p_{31} = 0.2, \quad p_{32} = 0.4, \quad p_{33} = 0.4.$

Khi đó, *ma trận chuyển* của Xích Markov là

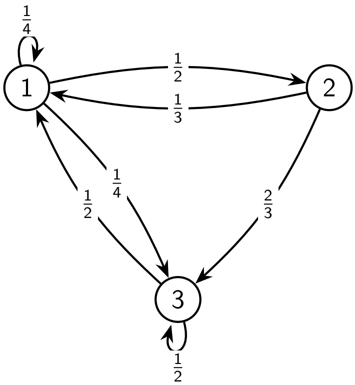
$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Sơ đồ chuyển trạng thái

Để mô tả trực quan một xích Markov, ta dùng *sơ đồ chuyển trạng thái (state transition diagram)*. Ví dụ, xét một xích Markov với ba trạng thái có thể xảy ra $1, 2, 3$ và ma trận chuyển sau:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Hình bên dưới mô tả sơ đồ chuyển trạng thái của xích Markov này.



Ví dụ 1

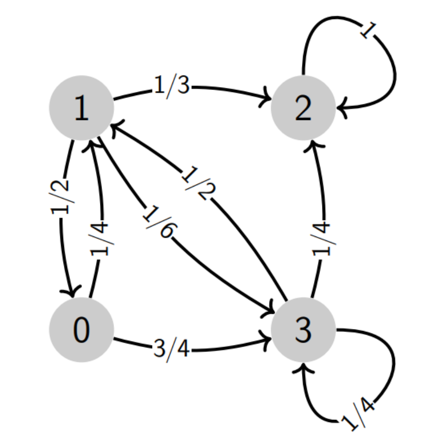
Xét Xích Markov với ma trận chuyển

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. *Tính* $P\big(X_4 = 3 \mid X_3 = 2\big)$.
2. *Tính* $P\big(X_3 = 1 \mid X_2 = 1\big)$.
3. *Biết* $P\big(X_0 = 1\big) = \frac{1}{3}$, *tính* $P\big(X_0 = 1, X_1 = 2\big)$.
4. *Biết* $P\big(X_0 = 1\big) = \frac{1}{3}$, *tính* $P\big(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3\big)$.

Ví dụ 2

Cho xích Markov có sơ đồ chuyển trạng thái như sau:



Hãy tìm ma trận chuyển của xích Markov này.

Phân phối xác suất trạng thái

- Xét A là một biến cố. Ta kí hiệu $P_i(A) = P(A|X_0 = i)$, ví dụ: $P_i(X_j = j) = p_{ij}$.
- Xét một *Xích Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$, trong đó $X_n \in I = \{1, 2, \ldots, r\}$ (để đơn giản, ta giả sử xích Markov có hữu hạn r trạng thái). Giả sử ta biết phân phối ban đầu λ của X_0, cụ thể

$$\lambda := \lambda^{(0)} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r] = \begin{bmatrix} P(X_0 = 1) & P(X_0 = 2) & \cdots & P(X_0 = r) \end{bmatrix}.$$

- **Câu hỏi:** làm thế nào để tìm phân phối xác suất của X_1, X_2, ...?

Phân phối xác suất trạng thái

- Với bất kỳ $j \in I$, sử dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{r} P(X_0 = i)P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{ij}.$$

- Kí hiệu $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ là phân phối của xích Markov tại thời điểm $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lambda^{(n)} = \begin{bmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \cdots & P(X_n = r) \end{bmatrix}.$$

- Ta có thể biểu diễn $\lambda^{(1)}$ dưới dạng ma trận như sau

$$\lambda^{(1)} = \lambda P,$$

với P là ma trận xác suất chuyển trạng thái. Tương tự, ta có thể biểu diễn

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} P = \lambda P^2.$$

- Tổng quát, ta có

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} P, \qquad \text{với } n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\lambda^{(n)} = \lambda P^n, \qquad \text{với } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ví dụ 3

Đôi khi người ta cho rằng cách dự đoán thời tiết ngày mai tốt nhất là đoán rằng nó sẽ giống hệt hôm nay. Giả sử điều này đúng với xác suất 75% (bất kể hôm nay là mưa hay nắng), khi đó việc thay đổi thời tiết có thể được mô hình hoá bằng một Xích Markov với không gian trạng thái $I = \{s_1, s_2\}$, *trong đó* $s_1 =$ *"mưa",* $s_2 =$ *"nắng". Ma trận chuyển là*

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Giả sử tại thời điểm $n = 0$ *(thứ Hai) thời tiết là mưa, tức* $X_0 = s_1$.

1. *Vẽ sơ đồ chuyển trạng thái (state transition diagram) cho Xích Markov này.*
2. *Tính xác suất để thời tiết là vào ngày thứ Năm trong tuần là nắng.*

Ma trận chuyển sau n bước

- Xét một xích Markov $(X_n)_{n \geq 0}$, trong đó $X_n \in I$. Nếu $X_0 = i$ thì $X_1 = j$ với xác suất p_{ij}. Nói cách khác, p_{ij} cho ta xác suất đi từ trạng thái i sang trạng thái j sau 1 bước.

Ma trận chuyển sau n bước

- Xét một xích Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, trong đó $X_n \in I$. Nếu $X_0 = i$ thì $X_1 = j$ với xác suất p_{ij}. Nói cách khác, p_{ij} cho ta xác suất đi từ trạng thái i sang trạng thái j sau 1 bước.
- Giả sử ta quan tâm đến xác suất đi từ i sang j sau 2 bước, tức là

$$p_{ij}^{(2)} = P\big(X_2 = j \,\big|\, X_0 = i\big).$$

Ma trận chuyển sau n bước

- Xét một xích Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, trong đó $X_n \in I$. Nếu $X_0 = i$ thì $X_1 = j$ với xác suất p_{ij}. Nói cách khác, p_{ij} cho ta xác suất đi từ trạng thái i sang trạng thái j sau 1 bước.
- Giả sử ta quan tâm đến xác suất đi từ i sang j sau 2 bước, tức là

$$p_{ij}^{(2)} = P\big(X_2 = j \,\big|\, X_0 = i\big).$$

- Sử dụng công thức xác suất toàn phần, ta có với bất kỳ $j \in I$,

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} &= P\big(X_2 = j \,\big|\, X_0 = i\big) \\
&= \sum_{k\in I} P\big(X_2 = j \,\big|\, X_1 = k,\ X_0 = i\big)\ P\big(X_1 = k \,\big|\, X_0 = i\big) \\
&= \sum_{k\in I} P\big(X_2 = j \,\big|\, X_1 = k\big)\ P\big(X_1 = k \,\big|\, X_0 = i\big) \qquad \text{(tính chất Markov)} \\
&= \sum_{k\in I} p_{kj}\, p_{ik} = \sum_{k\in I} p_{ik}\, p_{kj}.
\end{aligned}$$

Ma trận chuyển sau n bước

- Xét một xích Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, trong đó $X_n \in I$. Nếu $X_0 = i$ thì $X_1 = j$ với xác suất p_{ij}. Nói cách khác, p_{ij} cho ta xác suất đi từ trạng thái i sang trạng thái j sau 1 bước.
- Giả sử ta quan tâm đến xác suất đi từ i sang j sau 2 bước, tức là

$$p_{ij}^{(2)} = P\big(X_2 = j \,\big|\, X_0 = i\big).$$

- Sử dụng công thức xác suất toàn phần, ta có với bất kỳ $j \in I$,

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} &= P\big(X_2 = j \,\big|\, X_0 = i\big) \\
&= \sum_{k\in I} P\big(X_2 = j \,\big|\, X_1 = k,\ X_0 = i\big)\ P\big(X_1 = k \,\big|\, X_0 = i\big) \\
&= \sum_{k\in I} P\big(X_2 = j \,\big|\, X_1 = k\big)\ P\big(X_1 = k \,\big|\, X_0 = i\big) \qquad \text{(tính chất Markov)} \\
&= \sum_{k\in I} p_{kj}\, p_{ik} = \sum_{k\in I} p_{ik}\, p_{kj}\,.
\end{aligned}$$

- Tóm lại,

$$\boxed{p_{ij}^{(2)} = P\big(X_2 = j \,\big|\, X_0 = i\big) = \sum_{k\in I} p_{ik}\, p_{kj}\,.}$$

Ma trận chuyển sau n bước

- Để đến trạng thái j sau *hai* bước xuất phát từ i, ta phải đi qua một trạng thái trung gian k. Xác suất của sự kiện "$i \to k \to j$" là $p_{ik}\, p_{kj}$. Lấy tổng trên mọi trạng thái trung gian $k \in I$, ta được

$$p_{ij}^{(2)} = P\big(X_2 = j \mid X_0 = i\big) = \sum_{k \in I} p_{ik}\, p_{kj}.$$

- Tương ứng, *ma trận chuyển hai bước* được định nghĩa bởi

$$P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & \cdots & p_{1r}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & \cdots & p_{2r}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}^{(2)} & p_{r2}^{(2)} & \cdots & p_{rr}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \text{trong đó } \; p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}\, p_{kj}.$$

Do đó, $P^{(2)} = P^2$.

Ma trận chuyển sau n bước

- Một cách tổng quát, ta định nghĩa xác suất chuyển sau n bước $p_{ij}^{(n)}$ là

$$p_{ij}^{(n)} = P_i(X_n = j) = P(X_n = j | X_0 = i), \quad \text{với } n = 0, 1, 2, \ldots$$

và *ma trận chuyển n bước* $P^{(n)}$ là

$$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1r}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2r}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}^{(n)} & p_{r2}^{(n)} & \cdots & p_{rr}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Phương trình Chapman - Kolmogorov

- Gọi m, n là các số nguyên dương và giả sử $X_0 = i$. Để đến trạng thái j sau $m+n$ bước, sau m bước xích sẽ ở một trạng thái trung gian k. Lấy tổng trên mọi trạng thái trung gian $k \in I$, ta được

$$p_{ij}^{(m+n)} = P\big(X_{m+n} = j \,\big|\, X_0 = i\big) = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)}\, p_{kj}^{(n)}.$$

  Phương trình trên được gọi là phương trình **phương trình Chapman–Kolmogorov**.

- Suy ra với ma trận,

$$P^{(m+n)} \;=\; P^{(m)}\, P^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P^{(n)} = P^{\,n} \;\text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots}.$$

  Ngoài ra, $P^{(0)} = I_r$ (ma trận đơn vị), tương ứng $p_{ij}^{(0)} = \mathbb{1}_{\{i=j\}}$.

$P^{(n)}$ cho xích Markov 2 trạng thái

Ví dụ 4

Giả sử một người có thể ở một trong 2 trạng thái: "khỏe mạnh" hoặc "bệnh". Gọi $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov mô tả trạng thái của người này ở thời điểm n

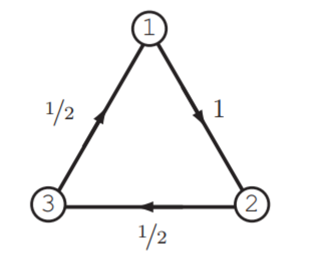
$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu "khỏe mạnh"} \\ 0 & \text{nếu "bệnh"} \end{cases}.$$

Định nghĩa $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = \alpha$ và $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = \beta$. Hãy xác định ma trận chuyển P và tính $P^{(n)}$.

$P^{(n)}$ cho xích Markov 3 trạng thái

Ví dụ 5

Xét xích Markov có sơ đồ chuyển trạng thái như sau:



Xác định ma trận chuyển P và tính $P^{(n)}$.

Phương pháp tổng quát xác định $p_{ij}^{(n)}$

Ta có thể tìm công thức cho xác suất chuyển n bước $p_{ij}^{(n)}$ của một *Xích Markov* với r trạng thái (với mọi i, j) theo các bước sau:

1. Tính các *giá trị riêng* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ của ma trận chuyển P bằng cách giải *phương trình đặc trưng*.
2. Nếu các giá trị riêng là *phân biệt*, thì $p_{ij}^{(n)}$ có dạng

$$p_{ij}^{(n)} = a_1\lambda_1^n + \cdots + a_r\lambda_r^n,$$

   với một số hằng số $a_1, \ldots, a_r$ (phụ thuộc vào i và j).
3. Vì nghiệm của đa thức có hệ số thực, các giá trị riêng phức sẽ xuất hiện theo *cặp liên hợp*; khi đó biểu thức tốt nhất được viết bằng *sin* và *cos*. Cụ thể, với trị riêng có dạng $\lambda_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, dùng biểu diễn $r^n\left(a_1 cos(n\varphi) + a_2\sin(n\varphi)\right)$.

Bài tập

1.1) Chứng tỏ rằng nếu P là một ma trận ngẫu nhiên (stochastic matrix) thì $P^n, \forall n \geq 1$ cũng là một ma trận ngẫu nhiên.

1.2) Chứng tỏ rằng nếu P là một ma trận ngẫu nhiên thì P luôn có 1 trị riêng $\lambda = 1$.

1.3) *(Norris, 1.1.2)* Giả sử rằng $(X_n)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P). Nếu $Y_n = X_{kn}$, chứng tỏ rằng $(Y_n)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P^k).

1.4) *(Norris, 1.1.4)* Một con bọ chét nhảy ngẫu nhiên trên *các đỉnh của một tam giác*; mỗi lần nhảy, nó chọn một trong **hai đỉnh còn lại** với xác suất bằng nhau. Hãy tìm xác suất để sau n bước nhảy, bọ chét quay trở lại đúng nơi xuất phát. Một con bọ chét thứ hai cũng nhảy trên các đỉnh của tam giác, nhưng con này có khả năng nhảy *theo chiều kim đồng hồ* gấp **hai lần** so với *ngược chiều kim đồng hồ*. Xác suất để sau n bước nhảy con bọ chét thứ hai quay lại vị trí ban đầu là bao nhiêu? (*Gợi ý:* $e^{\pm i\pi/6} = \sqrt{3}/2 \pm i/2$.)

Bài tập

1.5) *(Norris, 1.1.7)* Xét một Xích Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ trên tập trạng thái $\{1,2,3\}$ với ma trận chuyển

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $P(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$ trong từng trường hợp sau:

(a) $p = \frac{1}{16}$,
(b) $p = \frac{1}{6}$,
(c) $p = \frac{1}{12}$.

Bài tập

1.6) **(Bước ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}$)** Xét một dãy biến ngẫu nhiên $(Y_n)_{n\geq 1}$ nhận giá trị trong $\mathbb{Z}$, độc lập và cùng phân phối (i.i.d.). Cho Y_0 là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbb{Z}$, độc lập với $(Y_n)_{n\geq 1}$. Đặt

$$\begin{cases} X_0 = Y_0, \\ X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} Y_i, \qquad \forall\, n \geq 0. \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng $(X_n)_{n\geq 0}$ là một *xích Markov*.

Bây giờ giả sử Y_1 nhận các giá trị trong $\{-1, 1\}$ với phân phối

$$P(Y_1 = 1) = p, \qquad P(Y_1 = -1) = 1 - p,$$

trong đó $0 < p < 1$.

2. Cho *ma trận chuyển* (các xác suất chuyển p_{ij}) và vẽ *sơ đồ trạng thái* của xích Markov này.

Bài tập

1.7) Xét một dãy biến ngẫu nhiên $(Y_n)_{n\geq 1}$ nhận giá trị trong E, *độc lập và cùng phân phối* (i.i.d.), và Y_0 là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong E, độc lập với $(Y_n)_{n\geq 1}$. Đặt

$$\begin{cases} X_0 = Y_0, \\ X_{n+1} = \phi\big(X_n,\ Y_{n+1}\big), \qquad \forall\, n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó $\phi : E \times E \to E$. Chứng minh rằng $(X_n)_{n\geq 0}$ là một *xích Markov*.

1.8) Hai người chơi A và B có vốn ban đầu lần lượt là a và b đồng, với $a, b > 0$. Họ chơi trò may rủi như sau: mỗi ván đặt cược 1 đồng; các ván độc lập và ở mỗi ván người chơi A thắng với xác suất p (thua với xác suất $1-p$), trong đó $0 < p < 1$. Trò chơi tiếp tục cho đến khi một trong hai người chơi hết tiền.

Yêu cầu.

1. Mô hình hoá *tài sản của người chơi A* bằng một quá trình ngẫu nhiên.
2. Chứng minh rằng quá trình thu được là một *xích Markov*.
3. Tìm *ma trận chuyển* của xích Markov này và vẽ *sơ đồ trạng thái* tương ứng.