1 Bài tập tuần 7 - Bonus

Bài tập 1. Tìm nghiệm xấp xỉ với bậc hội tụ bằng 2 của phương trình vi phân cấp hai với điều kiện biên hỗn hợp sau

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \alpha_1, y'(b) = \beta_1 \end{cases}$$

Lời giải. Trước hết, ta xây dựng công thức xấp xỉ đạo hàm cấp hai tại một điểm bằng sai phân lùi với bậc hội tụ là 2. Áp dụng công thức khai triển Taylor quanh điểm x_i, ta có

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \tag{1}$$
$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_i) - \frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(\bar{\xi}) \tag{2}$$
$$f(x_{i-3}) = f(x_i) - 3hf'(x_i) + \frac{(3h)^2}{2!}f''(x_i) - \frac{(3h)^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(\widehat{\xi}) \tag{3}$$

trong đó $\xi \in (x_{i-1}, x_i), \bar{\xi} \in (x_{i-2}, x_i), \widehat{\xi} \in (x_{i-3}, x_i)$

Ta lấy $\alpha(1) + \beta(2) + \gamma(3)$ và thu được

$$\begin{aligned} \alpha f(x_{i-1}) + \beta f(x_{i-2}) + \gamma f(x_{i-3}) &= (\alpha+\beta+\gamma)f(x_i) - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)hf'(x_i) \\ &+ \frac{1}{2!}(\alpha + 4\beta + 9\gamma)h^2 f''(x_i) - \frac{1}{3!}(\alpha + 8\beta + 27\gamma)h^3 f^{(3)}(x_i) \\ &+ \frac{1}{4!}h^4(\alpha f^{(4)}(\xi) + 16\beta f^{(4)}(\bar{\xi}) + 81\gamma f^{(4)}(\widehat{\xi})) \end{aligned}$$

và để bậc hội tụ bằng 2, ta cần

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 8\beta + 27\gamma = 0 \end{cases}$$

Chọn $\alpha = -5$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\beta + 3\gamma = 5 \\ 8\beta + 27\gamma = 5 \end{cases}$$

và thu được $\beta = 4, \gamma = -1$. Từ đây, ta thu được

$$-5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}) = -2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4(-5f^{(4)}(\xi) + 64f^{(4)}(\bar{\xi}) - 81f^{(4)}(\widehat{\xi}))$$

dẫn đến

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} - \frac{1}{4!}h^2(-5f^{(4)}(\xi) + 64f^{(4)}(\bar{\xi}) - 81f^{(4)}(\widehat{\xi}))$$

Giả sử tồn tại $C > 0$ sao cho $u^{(4)}(\xi)$ bị chặn trên (x_{i-3}, x_i), ta suy ra

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Quay trở lại bài toán, ta chia đoạn $[a, b]$ thành $N+1$ đoạn đều nhau với độ dài mỗi đoạn $h = \dfrac{b-a}{N+1}$, ta có $N + 2$ điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < ... < x_N = x_0 + Nh < x_{N+1} = b$$

Với $i = 1$, ta có

$$y''(x_1) + p(x_1)y'(x_1) + y(x_1) = r(x_1)$$

dẫn đến

$$\frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{h^2} + p(x_1)\frac{y(x_2) - y(x_0)}{2h} + q(x_1)y(x_1) + \mathcal{O}(h^2) = r(x_1)$$

và do đó

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2}{h^2} + q(x_1)\right) y(x_1) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_1)}{h}\right) y(x_2) + \mathcal{O}(h^2) &= r(x_1) - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_1)}{2h}\right) y(x_0) \\ &= r(x_1) - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_1)}{2h}\right) \alpha_1\end{aligned}$$

Với $2 \le i \le N$, ta có:

$$y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = r(x_i)$$

dẫn đến

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x_i)y(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = r(x_i)$$

và do đó

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\right) y(x_{i-1}) + \left(-\frac{2}{h^2} + q(x_i)\right) y(x_i) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\right) y(x_{i+1}) + \mathcal{O}(h^2) = r(x_i)$$

Cuối cùng, với $i = N + 1$, ta có

$$y''(x_{N+1}) + p(x_{N+1})y'(x_{N+1}) + q(x_{N+1})y(x_{N+1}) = r(x_{N+1})$$

và sử dụng sai phân lùi bậc hai để xấp xỉ đạo hàm cấp hai với bậc hội tụ bằng 2, ta thu được

$$\frac{-y(x_{N-2})+4y(x_{N-1})-5y(x_N)+2y(x_{N+1})}{h^2}+p(x_{N+1})\beta_1+q(x_{N+1})y(x_{N+1})+\mathcal{O}(h^2)=r(x_{N+1})$$

dẫn đến

$$-\frac{1}{h^2}y(x_{N-2})+\frac{4}{h^2}y(x_{N-1})-\frac{5}{h^2}y(x_N)+\left(\frac{2}{h^2}+q(x_{N+1})\right)y(x_{N+1})+\mathcal{O}(h^2)=r(x_{N+1})-\beta p(x_{N+1})$$

Tiếp theo, ta đặt $y(x_i)\approx y_i, i\in\{1,2,...,N+1\}$ với $\{y_i\}_{1\le i\le N+1}$ thỏa:

- $i=1$: $\left(-\frac{2}{h^2}+q(x_1)\right)y_1+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{p(x_1)}{h}\right)y_2=r(x_1)-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{p(x_1)}{2h}\right)\alpha_1$
- $2\le i\le N$: $\left(\frac{1}{h^2}-\frac{p(x_i)}{2h}\right)y_{i-1}+\left(-\frac{2}{h^2}+q(x_i)\right)y_i+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{p(x_i)}{2h}\right)y_{i+1}=r(x_i)$
- $i=N+1$: $-\frac{1}{h^2}y_{N-2}+\frac{4}{h^2}y_{N-1}-\frac{5}{h^2}y_N+\left(\frac{2}{h^2}+q(x_{N+1})\right)y_{N+1}=r(x_{N+1})-\beta p(x_{N+1})$ ■

Từ đây, ta thu được hệ phương trình tuyến tính

$$A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_{N+1}\end{pmatrix}=B$$

với A là ma trận vuông cấp $N+1$ và B là ma trận có cỡ $(N+1)\times 1$ trong đó B định bởi

- $i=1: B(1,1)=r(x_1)-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{p(x_1)}{2h}\right)\alpha_1$
- $2\le i\le N: B(i,1)=r(x_i)$
- $i=N+1: B(N+1,1)=r(x_{N+1})-\beta p(x_{N+1})$

và A định bởi

- hàng $1: A(1,1)=\frac{-2}{h^2}+q(x_1), A(1,2)=\frac{1}{h^2}+\frac{p(x_1)}{h}$ và $A(1,j)=0,\forall 3\le j\le N+1$
- hàng $i(2\le i\le N)$: $A(i,i-1)=\frac{1}{h^2}-\frac{p(x_i)}{2h}, A(i,i)=\frac{-2}{h^2}+q(x_i), A(i,i+1)=\frac{1}{h^2}+\frac{p(x_i)}{2h}$ và các cột khác bằng 0.
- hàng $N+1: A(N+1,N-2)=-\frac{1}{h^2}, A(N+1,N-1)=\frac{4}{h^2}, A(N+1,N)=-\frac{5}{h^2}, A(N+1,N+1)=\frac{2}{h^2}+q(x_{N+1})$ và các cột khác bằng 0.

Ví dụ 1: Giải bài toán phương trình vi phân cấp 2 với các điều kiện đầu để tìm ra nghiệm xấp xỉ rồi so sánh nghiệm xấp xỉ với nghiệm chính xác

$$\begin{cases} y'' + (x+1)y' - 2y = (1-x^2)e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = -1, \quad y'(1) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

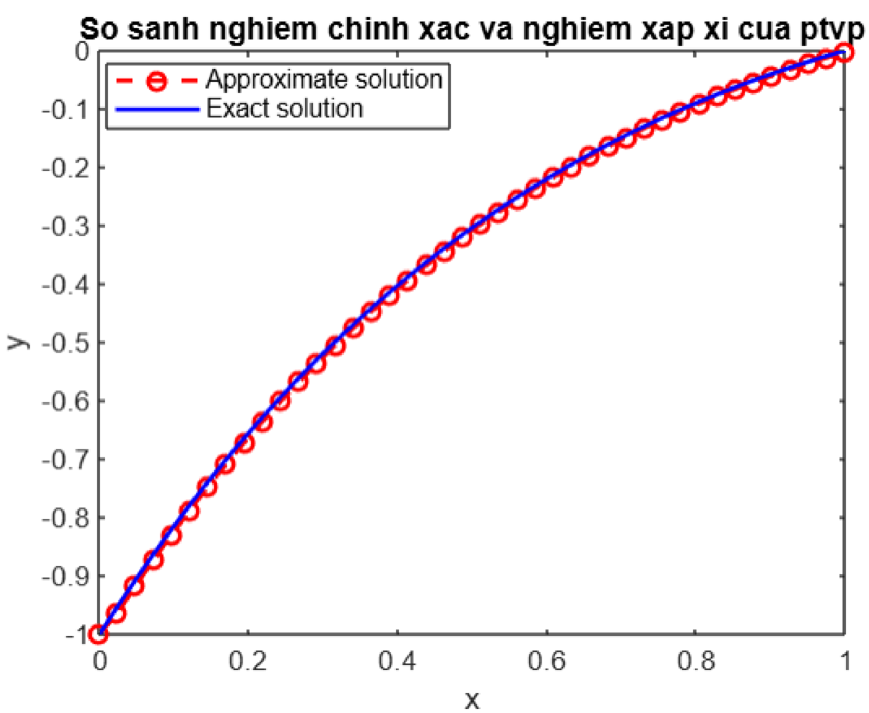
Lời giải. Ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân cấp 2 trên bằng cách chia đoạn $[0,1]$ thành $N+1$ khoảng chia đều nhau với độ dài mỗi khoảng là $h = \dfrac{1}{N+1}$ rồi sử dụng phương pháp xấp xỉ đạo hàm cấp 1 và cấp 2 tại các điểm trên lưới. Sau đó, ta so sánh nghiệm xấp xỉ với nghiệm chính xác của phương trinh là $y = (x-1)e^{-x}$

Từ các phân tích trên, ta sử dụng Matlab để mô tả nghiệm xấp xỉ và so sánh với nghiệm chính xác của bài toán:

```
clc
clear all
format long
%nhap cac thong so ban dau
a = input('Nhap gia tri a: ');
b = input('Nhap gia tri b: ');
N = input('Nhap gia tri N: ');
h = (b-a)/(N+1);
alpha = input('Nhap gia tri cua y(a) = ');
beta = input('Nhap gia tri cua y^(1)(b) = ');
%nhap cac ham so p, q, r
p_str = input('Nhap ham so p(x): ','s');
p = str2func(['@(x)', p_str]);
q_str = input('Nhap ham so q(x): ','s');
q = str2func(['@(x)', q_str]);
r_str = input('Nhap ham so r(x): ','s');
r = str2func(['@(x)', r_str]);
%nhap ma tran A
x = (a+h):h:b;
A = zeros(N + 1, N + 1);
A(1,1) = -2/h^2 + q(x(1));
A(1,2) = 1/h^2 + p(x(1))/h;
for i = 2:N
    A(i,i-1) = 1/h^2 - p(x(i))/(2*h);
    A(i,i) = -2/h^2 + q(x(i));
    A(i,i+1) = 1/h^2 + p(x(i))/(2*h);
end
A(N+1, N-2) = -1/h^2;
A(N+1, N-1) = 4/h^2;
A(N+1,N) = -5/h^2;
A(N+1,N+1) = 2/h^2 + q(x(N+1));
%nhap ma tran B
B = zeros(N+1,1);
B(1,1) = r(x(1)) - (1/h^2 - p(x(1))/(2*h))*alpha;
for i = 2:N
    B(i,1) = r(x(i));
```

```
end
B(N+1,1) = r(x(N+1)) - beta*p(x(N+1));
%giai he phuong trinh tuyen tinh
y = A \ B;
X = [a, x];
Y(1) = alpha;
for i = 2:(N+2)
  Y(i) = y(i-1);
end
Ye = (X - 1).*exp(-X);
plot(X,Y,'o--r',X,Ye,'-b','Linewidth',1.5);
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('Approximate solution', 'Exact solution')
title('So sanh nghiem chinh xac va nghiem xap xi cua ptvp')
```

và khi nhập $N = 40$ cùng các thông số khác, ta thu được đồ thị và ta thấy rằng nghiệm xấp xỉ rất

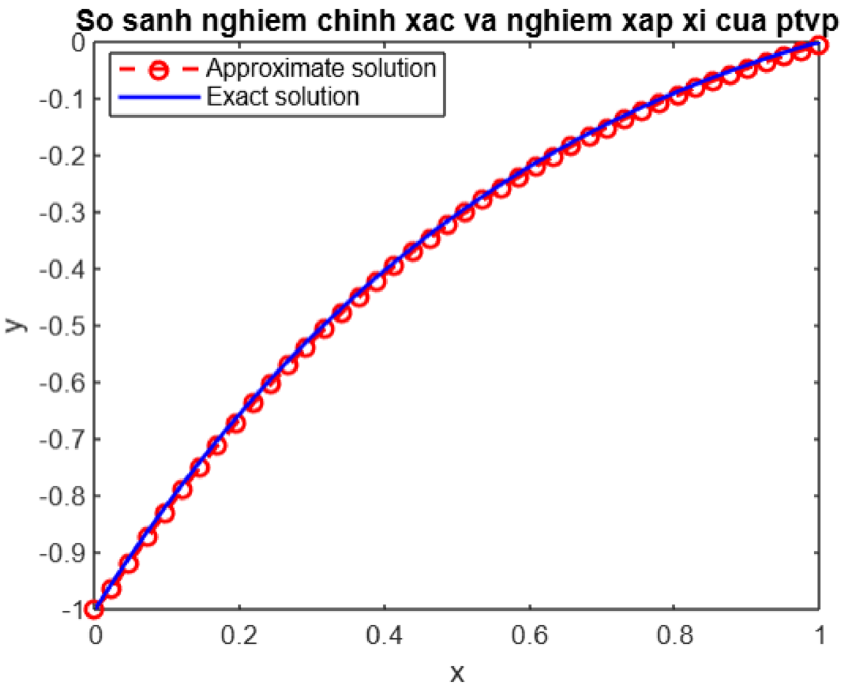


gần với nghiệm chính xác. ∎

Ví dụ 2: Giải bài toán phương trình vi phân cấp 2 với các điều kiện đầu để tìm ra nghiệm xấp xỉ rồi so sánh nghiệm xấp xỉ với nghiệm chính xác

$$\begin{cases} y'' + e^x y' - xy = e^{-x}(-x^2 + 2x - 3) - x - 3, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = -1, \quad y'(1) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

Lời giải. Ta có nghiệm chính xác của phương trình trên là $(x-1)e^{-x}$ nên tiếp tục sử dụng đoạn code Matlab trong Ví dụ 1 để mô tả nghiệm xấp xỉ và so sánh với nghiệm chính xác của bài toán. Ta nhập $N = 40$ cùng các thông số khác để thu được đồ thị sau



và thấy rằng nghiệm xấp xỉ rất gần với nghiệm chính xác ∎