Giải tích số cho phương trình vi phân

1 Phương pháp số nhiều bước cho bài toán giá trị đầu

Lưu ý, trong phần này, để đơn giản, ta sẽ ký hiệu nghiệm xấp xỉ bởi $\{Y_n\}_{n=1}^N$. Hơn nữa, do cách tính giá trị của f ta sẽ sử dụng ký hiệu $\{f_n \coloneqq f(t_n, Y_n)\}_{n=1}^N$. Có thể so sánh với phương pháp Runge-Kutta khi ta phải sử dụng nhiều bước tính toán của hàm f hơn mà không chỉ liên quan đến $f(t_n, Y_n)$.

Xét bài toán giá trị đầu

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Trong môn học chủ yếu ta tập trung vào các phương pháp số một bước (*one-step method*), tức là các phương pháp số tính Y_{n+1} chỉ dựa trên một bước phía trước Y_n. Các phương pháp số nhiều bước (*multi-step method*) tính Y_{n+1} dựa trên s bước đã có ở trước, tức là dựa trên $Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_{n+1-s}$.

Trong phần này, ta xét các phương pháp nhiều bước dạng tuyến tính, tức là các phương pháp dạng

$$\sum_{j=0}^{s} a_j Y_{n+1-j} = h \sum_{j=0}^{s} b_j f_{n+1-j}, \tag{2}$$

với $a_0 \coloneqq 1$. Để ý rằng các phương pháp dạng hiện ứng với $b_0 = 0$ còn khi $b_0 \neq 0$ ta thu được các phương pháp dạng ẩn.

Tham khảo thêm cách xây dựng phương pháp trong [1, Chương 6], [2, Chương 4], [3, Chương 3], và [4, Phần 6.11]. Đối với phần tính ổn định, có thể xem trong [1, Chương 7] và [3, Phần 3.6].

1.1 Yêu cầu chung

Sinh viên cần thực hiện tối thiểu các phần sau. Phần nâng cao [Bonus] là không bắt buộc, dành cho điểm cộng.

1) Trình bày chi tiết cách xây dựng phương pháp số được đề xuất.

2) Đưa ra sai số chặt cụt trong từng trường hợp.

3) Khảo sát sự ổn định và tìm miền ổn định của các phương pháp số được đề xuất.

4) [MATLAB] *Đối với yêu cầu này, sinh viên hoàn thành ít nhất 50% số bài tập. Phần còn lại được tính vào* [BONUS] .

(a) Thực hành tìm nghiệm xấp xỉ cho các bài toán giá trị đầu sử dụng các phương pháp được nêu.

(b) Tương tự như các bài tập trước, ứng với mỗi giá trị của h hoặc (λ, h) cho trước, vẽ trên cùng một đồ thị nghiệm chính xác và các nghiệm xấp xỉ tìm được

(c) Ứng với mỗi giá trị của h hoặc (λ, h) cho trước, vẽ sai số tuyệt đối tương ứng.

Sau đây là các bài toán và giá trị đầu sẽ xem xét, cùng với nghiệm chính xác được ký hiệu bằng $y_{\mathsf{exact}}(t)$. Miền nghiệm cần giải và các tham số cần thiết sẽ được liệt kê ở ngay sau.

(i)

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda\left(y(t) - t\right), \quad y(0) = 1, \\ y_{\mathsf{exact}}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda x} + x + \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

với $t \in [0, 4]\,, \quad \lambda \in \{\pm 1\}\,, \quad h \in \{0.5, 0.1\}$.

(ii)

$$\begin{aligned} y'(t) &= 1 + \left(y(t) - t\right)^2, \quad y(2) = 1, \\ y_{\mathsf{exact}}(t) &= t + \frac{1}{1-t}, \end{aligned}$$

với $t \in [2, 3]\,, \quad h \in \{0.5, 0.1\}$.

(iii)

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t) + (1-\lambda)\cos t - (1+\lambda)\sin t, \quad y(0) = 1, \\ y_{\mathsf{exact}}(t) &= \cos t + \sin t, \end{aligned}$$

với $t \in [0, 10]\,, \quad \lambda \in \{-1, -10, -50\}\,, \quad h \in \{0.5, 0.25, 0.1, 0.01\}$.

(iv)

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t) + \frac{1}{1+t^2} - \lambda \arctan(t)\,, \quad y(0) = 1, \\ y_{\mathsf{exact}}(t) &= \arctan(t)\,, \end{aligned}$$

với $t \in [0, 10]\,, \quad \lambda \in \{-1, -10, -50\}\,, \quad h \in \{0.5, 0.1, 0.001\}$.

(v)

$$y'(t) = -y(t) + t^{0.01}(1.1 + t), \quad y(0) = 0,$$
$$y_{\mathsf{exact}}(t) = t^{1.1},$$

với $t \in [0, 5]$, $\quad h \in \{0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625\}$.

(vi)

$$y'(t) = -e^{-t}y(t), \quad y(0) = 1,$$
$$y_{\mathsf{exact}}(t) = e^{e^{-t}-1},$$

với $t \in [0, 10]$, $\quad h \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$.

5) [BONUS] Đưa ra đánh giá sai số cho các phương pháp được đề xuất.

1.2 Các chủ đề cụ thể

1.2.1 Phương pháp Adams-Bashforth

Phương pháp Adams-Bashforth cho trường hợp sử dụng lần lượt 2, 3, và 4 bước có dạng sau

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}[3f_n - f_{n-1}], \tag{2AB}$$
$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}[23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}], \tag{3AB}$$
$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]. \tag{4AB}$$

Để ý rằng đây là các phương pháp dạng hiện. Hơn nữa, chúng là các mở rộng của phương pháp Euler ứng với trường hợp 1 bước

$$Y_{n+1} = Y_n + hf_n. \tag{Euler}$$

- Các kết quả lý thuyết như là trình bày cách xây dựng thuật toán, kết quả về tính ổn định, đánh giá sai số, ta chỉ trình bày cho (2AB) và (3AB).
- Phần thực hành [MATLAB] tìm nghiệm xấp xỉ cho các bài toán giá trị đầu được liệt kê ở trên, ta sử dụng các phương pháp (Euler), (2AB), (3AB), và (4AB).

1.2.2 Phương pháp Adams-Moulton

Phương pháp Adams-Moulton cho trường hợp sử dụng 2 và 3 bước có dạng sau

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}\left[5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}\right], \tag{2AM}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}\left[9f_{n+1} + 12f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right]. \tag{3AM}$$

Để ý rằng đây là các phương pháp dạng ẩn. Hơn nữa, Phương pháp Adams-Moulton 2 bước sử dụng thông tin của f tại 3 điểm thay vì 2 so với trường hợp Adams-Bashforth 2 bước. Trường hợp chỉ sử dụng 1 bước, việc sử dụng thông tin của f tại 1 và 2 điểm cho ta lần lượt phương pháp Euler lùi và phương pháp hình thang

$$Y_{n+1} = Y_n + hf_{n+1}, \tag{B-Euler}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f_{n+1} + f_n\right]. \tag{Trapezoidal}$$

- Các kết quả lý thuyết như là trình bày cách xây dựng thuật toán, kết quả về tính ổn định, đánh giá sai số, ta chỉ trình bày cho (2AM) và (3AM).
- Phần thực hành [MATLAB] tìm nghiệm xấp xỉ cho các bài toán giá trị đầu được liệt kê ở trên, sử dụng các phương pháp (B-Euler), (Trapezoidal), (2AM), (3AM).

1.2.3 Sử dụng công thức sai phân lùi

Đây là một trường hợp đặc biệt của công thức (2) ứng với $b_0 \neq 0$ còn $b_1 = b_2 = \cdots = b_j = 0$. Do đó, đây là một phương pháp dạng hiện nhưng chỉ sử dụng thông tin của f tại duy nhất 1 điểm. Trường hợp $s = 2$ và $s = 3$ ta có công thức như sau

$$Y_{n+1} = \frac{1}{3}\left[4Y_n - Y_{n-1} + 2hf_{n+1}\right], \tag{BDF2}$$

$$Y_{n+1} = \frac{1}{11}\left[18Y_n - 9Y_{n-1} + 2Y_{n-2} + 6hf_{n+1}\right], \tag{BDF3}$$

$$Y_{n+1} = \frac{1}{25}\left[48Y_n - 36Y_{n-1} + 16Y_{n-2} - 3Y_{n-3} + 12hf_{n+1}\right]. \tag{BDF4}$$

- Các kết quả lý thuyết như là trình bày cách xây dựng thuật toán, kết quả về tính ổn định, đánh giá sai số, ta chỉ trình bày cho (BDF2) và (BDF3).
- [MATLAB] Thực hành tìm nghiệm xấp xỉ cho các bài toán giá trị đầu được liệt kê ở trên, sử dụng các phương pháp (B-Euler), (BDF2), (BDF3), và (BDF4).

2 Phương pháp số cho hệ phương trình vi phân

Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)), \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)), \end{cases} \tag{3}$$

với điều kiện đầu

$$\begin{cases} y_1(t_0) &= y_{0,1}, \\ y_2(t_0) &= y_{0,2}, \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= y_{0,n}. \end{cases} \tag{4}$$

Bằng cách đặt

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \end{pmatrix} \text{ và } \boldsymbol{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ \vdots \\ y_{0,n} \end{pmatrix},$$

thì hệ phương trình (3) có thể viết lại dưới dạng

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0. \tag{5}$$

Điều này giúp ta liên tưởng đến dạng bài toán giá trị đầu mà ta đã học (1). Ta có thể dựa vào ý tưởng của các phương pháp số đã được học để giải bài toán (1) để xây dựng các phương pháp số để giải hệ phương trình vi phân. Xem thêm [1, Chương 3] và [4, Phần 6.7]. Đối với tính ổn định, có thể tham khảo trong [4, Phần 6.8].

2.1 Yêu cầu chung

Đối với các chủ đề trong phần này, Sinh viên cần thực hiện tối thiểu các phần sau. Phần nâng cao [BONUS] là không bắt buộc, dành cho điểm cộng.

1) Viết công thức cụ thể cho các phương pháp số được đề xuất khi áp dụng cho hệ phương trình vi phân sau đây

$$\begin{cases} x'(t) &= -4x(t) - 2y(t) + e^t, \\ y'(t) &= 3x(t) + y(t). \end{cases}$$

2) Khảo sát sự ổn định và tìm miền ổn định của các phương pháp số được đề xuất.

3) [MATLAB] *Đối với yêu cầu này, sinh viên hoàn thành ít nhất* 50% *số bài tập. Phần còn lại được tính vào* [BONUS] .

Thực hành tìm nghiệm xấp xỉ cho các bài toán giá trị đầu sau sử dụng các phương pháp được nêu cho trường hợp $n = 2$ hoặc $n = 3$, tức là $\boldsymbol{y}(t) = \big(x(t)\,, y(t)\big)^\top$ hoặc $\boldsymbol{y}(t) = \big(x(t)\,, y(t)\,, z(t)\big)^\top$.

(i) Tương tự như các bài tập trước, ứng với mỗi giá trị của h cho trước, vẽ trên cùng một đồ thị nghiệm xấp xỉ, nghiệm chính xác và vẽ sai số tuyệt đối tương ứng.

(ii) Lưu ý rằng trong trường hợp này có thể coi như $\boldsymbol{y}(t)$ là một quỹ đạo theo biến thời gian t, vì thế ta có thể vẽ lần lượt các cặp giá trị của $(t, x(t))$, $(t, y(t))$, và $(t, z(t))$ trong trường hợp $n = 3$. Ngoài ra trong trường hợp $n = 2$ có thể vẽ thêm quỹ đạo của $x(t)\,, y(t)$.

(iii) Sai số được tính tại mỗi thời điểm $t = t_n$ lần lượt cho từng thành phần giá trị của x, y, và z cho trường hợp $n = 3$, tức là, $|x(t_n) - X_n|\,, |y(t_n) - Y_n|$, và $|z(t_n) - Z_n|$. Ngoài ra, ta tính thêm một sai số chung theo công thức $\|\boldsymbol{y}(t_n) - \boldsymbol{Y}_n\|$.

Sau đây là các bài toán và giá trị đầu sẽ xem xét, cùng với nghiệm chính xác được ký hiệu bằng $\boldsymbol{y}_{\mathsf{exact}}(t)$. Trường hợp không có nghiệm chính xác nhưng có thể sử dụng các lệnh có sẵn trong MATLAB như `ode45` để làm nghiệm tham khảo. Miền nghiệm cần giải và các tham số cần thiết sẽ được liệt kê ở ngay sau.

(a) Hệ phương trình (5) trong trường hợp $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)$ với

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nghiệm chính xác của hệ trên là $\boldsymbol{y}_{\mathsf{exact}}(t) = 4e^{-t}\left(\sin t, \cos t\right)^\top$. Giải tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trên $[0, 1]$, với $h \in \{0.2, 0.1\}$.

(b) Hệ phương trình (5) trong trường hợp $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t)$ với

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 2 \\ -2e^{-t} + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nghiệm chính xác của hệ trên là $\boldsymbol{y}(t) = \left(e^{-t}, 1\right)^\top$. Giải tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trên $[0, 10]$, với $h \in \{0.1, 0.05, 0.025\}$.

(c)

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - 2y(t) + 4\cos(t) - 2\sin(t)\,, \\ y'(t) &= 3x(t) - 4y(t) + 5\cos(t) - 5\sin(t)\,, \end{cases} \qquad \text{với} \qquad \begin{cases} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của hệ trên là $\boldsymbol{y}(t) = \big(\cos(t) + \sin(t)\,, 2\cos(t)\big)^\top$. Giải tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trên $[0, 10]$, với $h \in \{0.1, 0.05\}$.

(d)
$$\begin{cases} x'(t) &= y(t)\,z(t)\,, \\ y'(t) &= -x(t)\,z(t)\,, \\ z'(t) &= -\frac{1}{2}x(t)\,y(t)\,, \end{cases} \qquad \text{với} \qquad \begin{cases} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ z(0) &= 1. \end{cases}$$

Giải tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trên $[0, 2]$, với $h \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$.

4) [MATLAB] Trong phần này ta so sánh sự ảnh hưởng của điều kiện đầu với nghiệm của bài toán. Có thể sử dụng lệnh có sẵn trong MATLAB như `ode45` để làm nghiệm tham khảo, nhưng không cần tính sai số cụ thể trong phần này, chỉ cần vẽ $(t, x(t))$, $(t, y(t))$, và $(t, z(t))$ trong trường hợp $n = 3$..

(a) Xét *Mô hình Lotka–Volterra* cho trường hợp cụ thể sau

$$\begin{cases} x'(t) &= 4x(t)\left(1 - \dfrac{1}{2}y(t)\right), \\ y'(t) &= 3y(t)\left(\dfrac{1}{3}x(t) - 1\right), \end{cases}$$

Giải tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trên $[0, 4]$, với $h \in \{0.001, 0.0005\}$ sử dụng các điều kiện đầu vào khác nhau lần lượt được cho sau đây

$$\begin{cases} x(0) &= 3, \\ y(0) &= 5, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x(0) &= 3, \\ y(0) &= 1, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x(0) &= 3, \\ y(0) &= 1.5, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x(0) &= 3, \\ y(0) &= 1.9. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)\left(1 - x(t) - \dfrac{1}{2}y(t) - \dfrac{1}{2}z(t)\right), \\ y'(t) &= x(t)\left(1 - \dfrac{1}{2}x(t) - y(t) - \dfrac{1}{2}z(t)\right), \\ z'(t) &= x(t)\left(1 - \dfrac{1}{2}x(t) - \dfrac{1}{2}y(t) - z(t)\right), \end{cases}$$

Giải tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trên $[0, 10]$, với $h \in \{0.1\}$ sử dụng các điều kiện đầu vào khác nhau lần lượt được cho sau đây

$$\begin{cases} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0.1, \\ z(0) &= 0.1, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x(0) &= 0.1, \\ y(0) &= 1, \\ z(0) &= 0.1, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x(0) &= 0.1, \\ y(0) &= 0.1, \\ z(0) &= 1. \end{cases}$$

5) [Bonus] Đưa ra đánh giá sai số cho các phương pháp được đề xuất.

2.2 Các chủ đề cụ thể

2.2.1 Phương pháp Euler và phương pháp hình thang cho hệ phương trình vi phân

Ta có thể mở rộng phương pháp Euler và phương pháp hình thang đã học cho hệ phương trình vi phân (5) như sau

$$\boldsymbol{Y}_{n+1} = \boldsymbol{Y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{Y}_n)\,, \tag{Euler}$$

$$\boldsymbol{Y}_{n+1} = \boldsymbol{Y}_n + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{Y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{Y}_{n+1})\right]. \tag{Trapezoidal}$$

2.2.2 Phương pháp Euler lùi và phương pháp Euler cải tiến cho hệ phương trình vi phân

Tương tự, ta cũng có thể mở rộng phương pháp Euler lùi và phương pháp Euler cải tiến đã học cho trường hợp hệ phương trình vi phân như sau

$$\boldsymbol{Y}_{n+1} = \boldsymbol{Y}_n + h\boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{Y}_{n+1})\,, \tag{B-Euler}$$

$$\boldsymbol{Y}_{n+1} = \boldsymbol{Y}_n + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{Y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{Y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{Y}_n))\right]. \tag{I-Euler}$$

2.2.3 Phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân

Đối với Phương pháp Runge-Kutta, ta có thể xét trường hợp bậc 4 sau đây

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_{n,1} &= \boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{Y}_n)\,, \\ \boldsymbol{k}_{n,2} &= \boldsymbol{f}\left(t_n + \dfrac{h}{2}, \boldsymbol{Y}_n + \dfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_{n,1}\right), \\ \boldsymbol{k}_{n,3} &= \boldsymbol{f}\left(t_n + \dfrac{h}{2}, \boldsymbol{Y}_n + \dfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_{n,2}\right), \\ \boldsymbol{k}_{n,4} &= \boldsymbol{f}(t_n + h, \boldsymbol{Y}_n + h\boldsymbol{k}_{n,3})\,, \\ \boldsymbol{Y}_{n+1} &= \boldsymbol{Y}_n + \dfrac{1}{6}h\left[\boldsymbol{k}_{n,1} + 2\boldsymbol{k}_{n,2} + 2\boldsymbol{k}_{n,3} + \boldsymbol{k}_{n,4}\right]. \end{cases} \tag{4RK}$$

3 Phương pháp số cho phương trình vi phân bậc cao

Như đã biết, việc giải một phương trình vi phân bậc n

$$y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t)\,, y'(t)\,, y''(t)\,, \cdots, y^{(n-1)}(t)\big)\,, \tag{6}$$

với n điều kiện đầu

$$y(t_0) = \xi_1, \quad y'(t_0) = \xi_2, \quad y''(t_0) = \xi_3, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \xi_n, \tag{7}$$

có thể quy về việc giải hệ n phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt

$$y_1(t) = y(t)\,, \quad y_2(t) = y'(t)\,, \quad \cdots, \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t)\,.$$

Lúc này, phương trình (6) với điều kiện đầu (7) có thể viết lại dưới dạng hệ n phương trình vi phân cấp 1 như sau

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t)\,, \\ y_2'(t) &= y_3(t)\,, \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f(t, y_1(t)\,, y_2(t)\,, \cdots, y_n(t))\,, \end{cases} \tag{8}$$

với điều kiện đầu

$$\begin{cases} y_1(t_0) &= \xi_1, \\ y_2(t_0) &= \xi_2, \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= \xi_n. \end{cases} \tag{9}$$

3.1 Yêu cầu chung

1) Xét phương trình vi phân cấp 2 với điều kiện đầu sau

$$\begin{aligned} &ay''(t) + by'(t) + cy(t) = r(t)\,, \\ &y(0) = A, \quad y'(0) = B. \end{aligned}$$

Viết lại phương trình trên dưới dạng hệ phương trình vi phân cấp 1 với điều kiện đầu tương ứng, từ đó viết cụ thể công thức có được từ các phương pháp số cho trường hợp này.

2) Khảo sát tính ổn định của các phương pháp số được đề xuất.

3) *Đối với yêu cầu này, sinh viên hoàn thành ít nhất* 50% *sô bài tập. Phần còn lại được tính vào* [Bonus] .

Viết lại các phương trình vi phân cấp cao sau đây thành hệ phương trình vi phân cấp 1 với điều kiện đầu tương ứng.

(a)

$$\begin{aligned} &y''(t) + 9.81\sin(t) = 0, \\ &y(0) = \pi/4, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 40\cos(t)\,,\\
&y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t - t,\\
&y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = -4\sin(t)\,,\\
&y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 4y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 10t + 8,\\
&y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 3.
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
&2y^{(4)}(t) + 10y''(t) + 8y(t) = 0,\\
&y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 0.
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
&y^{(4)}(t) + 5y''(t) + 4y(t) = 37\cos(3t)\,,\\
&y(0) = {}^{117}/_{40}, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -{}^{533}/_{40}, \quad y'''(0) = -9.
\end{aligned}
$$

4) *Đối với yêu cầu này, sinh viên hoàn thành ít nhất 50% số bài tập. Phần còn lại được tính vào* [Bonus] .

Từ nghiệm chính xác của phương trình, tìm nghiệm chính xác của hệ phương trình tương ứng.

(a) $y_{\text{exact}}(t) = 9.81\sin(t) - 9.81t + {}^{\pi}/_{4}$

(b) $y_{\text{exact}}(t) = 3\cos(t) + \sin(t) + e^{-2t}\sin(3t)$.

(c) $y_{\text{exact}}(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$.

(d) $y_{\text{exact}}(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

(e) $y_{\mathsf{exact}}(t) = e^{-t} + t^2$.

(f) $y_{\mathsf{exact}}(t) = 5\cos(t) - 2\cos(2t)$.

(g) $y_{\mathsf{exact}}(t) = \sin(t) + \cos(t) + \sin(2t) + \cos(2t) + \frac{37}{40}\cos(3t)$.

5) [MATLAB] *Đối với yêu cầu này, sinh viên hoàn thành ít nhất* 50% *số bài tập. Phần còn lại được tính vào* [Bonus] .

Áp dụng các phương pháp số để giải các hệ phương trình thu được trên $[0, 10]$ với $h \in \{0.1, 0.05\}$.

(i) Trong phần này, chỉ cần vẽ đồ thị $(t, y(t))$, $(t, y'(t))$, và $(y(t), y'(t))$ nếu có.

(ii) Tương tự, vẽ sai số của $y(t), y'(t)$, và $y''(t)$ nếu có.

(iii) Đưa ra đánh giá sai số cho các phương pháp được đề xuất. [Bonus]

3.2 Các chủ đề cụ thể

Do hệ (8) và (9) là một trường hợp đặc biệt của (5), ta có thể sử dụng các phương pháp số được đề xuất để giải hệ phương trình. Cụ thể ta có thể tham khảo ba của đề dưới đây.

3.2.1 Phương pháp Euler và phương pháp hình thang cho hệ phương trình vi phân

3.2.2 Phương pháp Euler lùi và phương pháp Euler cải tiến cho hệ phương trình vi phân

3.2.3 Phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân

Tài liệu

[1] **Kendall Atkinson, Weimin Han, David Stewart (2009):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons. `https://homepage.math.uiowa.edu/~atkinson/papers/NAODE_Book.pdf`

[2] **John S. Butler (2021):** *Numerical Methods for Differential Equations with Python.* `https://johnsbutler.netlify.app/files/Teaching/Numerical_Analysis_for_Differential_Equations.pdf`

[3] **Endre Süli (2022):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations.* `https://people.maths.ox.ac.uk/suli/nsodes.pdf`

[4] **C. Vuik, F. J. Vermolen, M. B. van Gijzen, T. Vuik (2023):** *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* TU Delft OPEN Publishing. `https://doi.org/10.5074/t.2023.001`