Giải tích số cho phương trình vi phân

Lê Ánh Hạ   Nguyễn Đăng Khoa

Mục tiêu môn học

- Cung cấp các phương pháp số để giải phương trình vi phân.
- Áp dụng các phương pháp số để tìm nghiệm xấp xỉ.
- Đánh giá sự hội tụ và sai số của các phương pháp.
- Lập trình biểu diễn nghiệm trên máy tính bằng Python, Matlab.

Tài liệu môn học

- **Kendall Atkinson, Weimin Han, David Stewart (2009):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons.
- **John S. Butler (2021):** *Numerical Methods for Differential Equations with Python*.
- **Qingkai Kong, Timmy Siauw, Alexandre Bayen (2020):** *Python Programming and Numerical Methods*, Academic Press.
- **Endre Süli (2022):** *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*.

1. Bài toán giá trị đầu
   - Giới thiệu bài toán giá trị đầu
   - Sự tồn tại và duy nhất nghiệm
   - Tính ổn định của bài toán giá trị đầu
   - Trường hướng

2. Phương pháp Euler
   - Công thức Taylor
   - Sử dụng phương pháp số để giải tìm nghiệm xấp xỉ
   - Giới thiệu về Phương pháp Euler
   - Các loại sai số
   - Tính nhất quán và hội tụ của phương pháp số
   - Đánh giá sai số của Phương pháp Euler

Ví dụ mở đầu

Ví dụ 1.1

Xét phương trình vi phân

$$y'(t) = g(t) \tag{1.1}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.1) có dạng

$$y(t) = \int g(t)\,dt + c.$$

Hằng số c được xác định thông qua điều kiện giá trị đầu

$$y(t_0) = y_0.$$

Ví dụ 1.2

Cụ thể hóa ví dụ trên với $g(t) = t^2$, ta có phương trình

$$y'(t) = t^2.$$

Tích phân hai vế, ta thu được

$$y(t) = \frac{t^3}{3} + c.$$

Ví dụ 1.2

Cụ thể hóa ví dụ trên với $g(t) = t^2$, ta có phương trình

$$y'(t) = t^2.$$

Tích phân hai vế, ta thu được

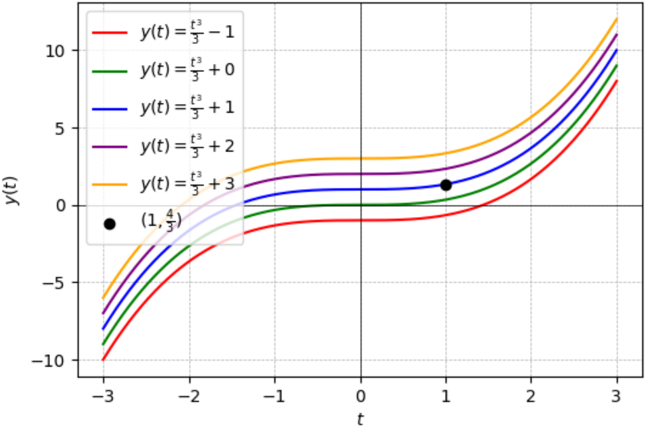
$$y(t) = \frac{t^3}{3} + c.$$

Nếu ta biết rằng $y(1) = \frac{4}{3}$, thì khi đó ta giải phương trình để tìm c

$$\frac{4}{3} = \frac{1^3}{3} + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Vậy nghiệm cụ thể của phương trình là

$$y(t) = \frac{t^3}{3} + 1.$$


$y(t) = \frac{t^3}{3} - 1$
$y(t) = \frac{t^3}{3} + 0$
$y(t) = \frac{t^3}{3} + 1$
$y(t) = \frac{t^3}{3} + 2$
$y(t) = \frac{t^3}{3} + 3$
$(1, \frac{4}{3})$
10
5
0
−5
−10
−3
−2
−1
0
1
2
3
t
$y(t)$

Xét phương trình vi phân tổng quát:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.2}$$

Để xác định nghiệm cụ thể, ta cần điều kiện đầu như sau:

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.3}$$

Bài toán (1.2) với điều kiện (1.3) được gọi là bài toán giá trị đầu (*Initial Value Problems*).

Định nghĩa 1.1 (Bài toán giá trị đầu)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{IVP}$$

Ví dụ 1.3

Xét phương trình vi phân:

$$y'(t) = \lambda y(t) + g(t). \tag{1.4}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$y(t) = e^{\lambda t}\left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda s} g(s)\, ds\right). \tag{1.5}$$

Thay $t = t_0$ vào (1.5), ta được:

$$y_0 = e^{\lambda t_0} \left(c + \int_{t_0}^{t_0} e^{-\lambda s} g(s)\, ds \right).$$

Suy ra hằng số c:

$$c = y_0 e^{-\lambda t_0}.$$

Thay vào nghiệm tổng quát, ta có công thức nghiệm theo y_0:

$$y(t) = e^{\lambda t} \left(y_0 e^{-\lambda t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda s} g(s)\, ds \right).$$

Ví dụ 1.4

Xét phương trình vi phân:

$$y'(t) = \lambda y(t) + e^{-t}, \quad y(0) = 1.$$

Giải

Với $\lambda \neq -1$, ta có nghiệm riêng:

$$y(t) = e^{\lambda t}\left(1 + \frac{1 - e^{-(\lambda+1)t}}{\lambda + 1}\right).$$

Với $\lambda = -1$, ta có nghiệm riêng:

$$y(t) = e^{-t}(1 + t).$$

Nhiều trường hợp của $f(t, y(t))$ ta không thể tìm được công thức tường minh.

Ví dụ 1.5

Xét phương trình vi phân:

$$y'(t) = e^{-ty^4(t)}.$$

Trong trường hợp này, ta không thể tìm được công thức nghiệm tường minh.

Nhiều trường hợp dù có được công thức tường minh của nghiệm, sử dụng các phương pháp số để biểu diễn nghiệm.

Ví dụ 1.6

Xét phương trình vi phân:

$$y'(t) = 2ty(t) + 1, \quad t > 0, \quad y(0) = 1.$$

Nghiệm riêng của phương trình là:

$$y(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}.$$

Giả thiết 1.1

1. *Hàm số $f(\cdot,\cdot)$ liên tục trên miền hình chữ nhật*

$$\mathsf{R} = \{(t,y) : t_0 \le t \le T_{\max}, |y - y_0| \le y_M\},$$

trong đó $T_{\max} > t_0$ và $y_M > 0$ là các hằng số.

2. *Hàm số $f(\cdot,\cdot)$ bị chặn trên miền hình chữ nhật*

$$M_0 := \max\{|f(t,y)| : (t,y) \in \mathsf{R}\} \tag{1.6}$$

và hơn nữa $M_0 (T_{\max} - t_0) \le y_M$.

3. *Tồn tại một hằng số $M_1 > 0$ sao cho*

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le M_1 |y - z|, \tag{1.7}$$

với mọi (t,y) và (t,z) nằm trong hình chữ nhật R.

Định lý 1.1 (Picard)

Giả sử rằng Giả thiết 1.1 được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại duy nhất một hàm $y(t)$ khả vi liên tục trên đoạn $[t_0, T_{\max}]$ thỏa mãn (IVP).

Phép lặp Picard

- Ý tưởng của chứng minh là xét dãy hàm $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, được xác định đệ quy theo *Phép lặp Picard* (*Picard Iteration*):

$$y_0(t) \equiv y_0, \tag{1.8}$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0(\tau))\, d\tau,$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}(\tau))\, d\tau, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{1.9}$$

Phép lặp Picard

- Ta chứng minh rằng, dưới điều kiện của định lý, dãy $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ hội tụ đều trên đoạn $[t_0, T_{\max}]$ tới một hàm y thỏa mãn

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.10}$$

- Khi đó, y là một hàm khả vi liên tục trên $[t_0, T_{\max}]$ và là nghiệm của phương trình vi phân với điều kiện ban đầu (IVP).
- Tính duy nhất của nghiệm suy ra từ điều kiện Lipschitz.

Khi giải bài toán giá trị ban đầu (IVP), ta giả sử nghiệm $y(t)$ được tìm trên đoạn hữu hạn $t_0 \leq t \leq T_{\max}$.
Khi đó, có thể đưa ra kết quả về tính ổn định như sau.

Cho trước ε có giá trị gần với 0. Thay đổi nhỏ giá trị ban đầu y_0 thành $y_0 + \varepsilon$, dẫn đến nghiệm mới $y_\varepsilon(t)$, với:

$$y'(t) = f(t, y_\varepsilon(t)), \quad t_0 \leq t \leq T_{\max}, \tag{1.11}$$

$$y_\varepsilon(t_0) = y_0 + \varepsilon. \tag{1.12}$$

Ta có thể chứng minh rằng với mọi giá trị ε nhỏ, nghiệm $y(t)$ và $y_\varepsilon(t)$ tồn tại trên khoảng $[t_0, T_{\max}]$, và thỏa mãn:

$$\|y_\varepsilon - y\|_\infty := \max_{t_0 \le t \le T_{\max}} |y_\varepsilon(t) - y(t)| \le c\,|\varepsilon|\,, \tag{1.13}$$

với $c > 0$ độc lập với ε.

Điều này có nghĩa là sự thay đổi nhỏ trong giá trị ban đầu y_0 sẽ chỉ dẫn đến những thay đổi nhỏ trong nghiệm $y(t)$, thể hiện tính ổn định của bài toán giá trị đầu.

Ví dụ 1.7

- Xét bài toán

$$y'(t) = -y(t) + 1, \quad 0 \le t \le T_{\max}, \tag{1.14}$$
$$y(0) = 1. \tag{1.15}$$

Nghiệm chính xác của bài toán là

$$y(t) \equiv 1.$$

- Bài toán nhiễu tương ứng

$$y'_{\varepsilon}(t) = -y_{\varepsilon}(t) + 1, \quad 0 \le t \le T_{\max}, \tag{1.16}$$
$$y_{\varepsilon}(0) = 1 + \varepsilon. \tag{1.17}$$

Nghiệm của bài toán nhiễu là:

$$y_{\varepsilon}(t) = 1 + \varepsilon e^{-t}.$$

Đối với sai số, ta có:

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = \varepsilon e^{-t},$$

suy ra

$$\|y_\varepsilon - y\|_\infty := \max_{t_0 \le t \le T_{\max}} |y_\varepsilon(t) - y(t)| \le |\varepsilon|.$$

Điều này chứng tỏ bài toán (1.14)-(1.15) là ổn định.

- Hầu như tất cả các bài toán giá trị ban đầu (IVP) đều ổn định theo nghĩa được chỉ ra trong (1.13).
- Điều này chỉ phản ánh một phần tác động của những nhiễu nhỏ trong giá trị ban đầu y_0.

- Nếu sai số cực đại $\|y_\varepsilon - y\|_\infty$ trong (1.13) không lớn hơn nhiều so với ε, thì ta nói rằng bài toán giá trị ban đầu (IVP) là *điều kiện tốt* (well-conditioned).
- Ngược lại, khi $\|y_\varepsilon - y\|_\infty$ lớn hơn nhiều so với ε [tức là hằng số nhỏ nhất có thể c trong đánh giá (1.13) lớn], thì bài toán giá trị ban đầu (IVP) được coi là *điều kiện xấu* (ill-conditioned).

Việc cố gắng giải số một bài toán như vậy thường dẫn đến sai số lớn trong nghiệm tính toán được.

Trong thực tế, có một lớp các bài toán từ điều kiện tốt đến điều kiện xấu, và mức độ của điều kiện xấu ảnh hưởng đến độ chính xác có thể đạt được khi tìm nghiệm y bằng phương pháp số, bất kể phương pháp số được sử dụng là gì.

Ví dụ 1.8

- Xét bài toán

$$y'(t) = \lambda(y(t) - 1), \quad 0 \le t \le T_{\max}, \tag{1.18}$$
$$y(0) = 1. \tag{1.19}$$

Nghiệm chính xác của bài toán là

$$y(t) \equiv 1.$$

- Bài toán nhiễu tương ứng

$$y_\varepsilon'(t) = \lambda(y_\varepsilon(t) - 1), \quad 0 \le t \le T_{\max}, \tag{1.20}$$
$$y_\varepsilon(0) = 1 + \varepsilon. \tag{1.21}$$

Nghiệm của bài toán nhiễu là:

$$y_\varepsilon(t) = 1 + \varepsilon e^{\lambda t}, \quad 0 \le t \le T_{\max}.$$

Đối với sai số, ta có:

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = \varepsilon e^{\lambda t}.$$

Do đó:

$$\|y_\varepsilon - y\|_\infty := \max_{t_0 \le t \le T_{\max}} |y_\varepsilon(t) - y(t)| = \begin{cases} |\varepsilon|, & \lambda \le 0, \\ |\varepsilon| e^{\lambda T_{\max}}, & \lambda \ge 0. \end{cases}$$

- Khi $\lambda < 0$, sai số $|y(t) - y_\varepsilon(t)|$ giảm theo t. Do đó, bài toán (1.18) - (1.19) có điều kiện tốt khi $\lambda \le 0$.
- Ngược lại, khi $\lambda > 0$, sai số tăng theo t. Nếu $\lambda T_{\max}$ đủ lớn (ví dụ $\lambda T_{\max} \ge 10$), sai số tại $t = T_{\max}$ là đáng kể. Điều này cho thấy bài toán (1.18) - (1.19) trở nên kém điều kiện hơn khi λ tăng.

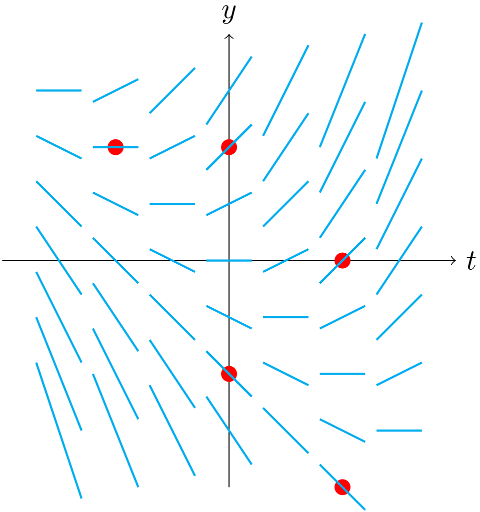
- Trường hướng là một công cụ hữu ích để hiểu hình dáng nghiệm của một phương trình vi phân.
- Đồ thị nghiệm của phương trình

$$y' = f(t, y)$$

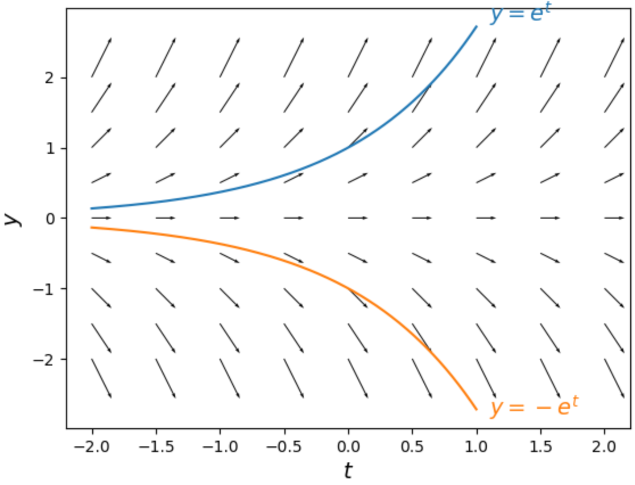
  thỏa tính chất tại mỗi điểm (t, y) trên đường cong nghiệm có độ dốc là $f(t, y)$.
- Các độ dốc này có thể được biểu diễn trực quan thông qua các sơ đồ trường hướng.

Xét phương trình $y' = t + y$.

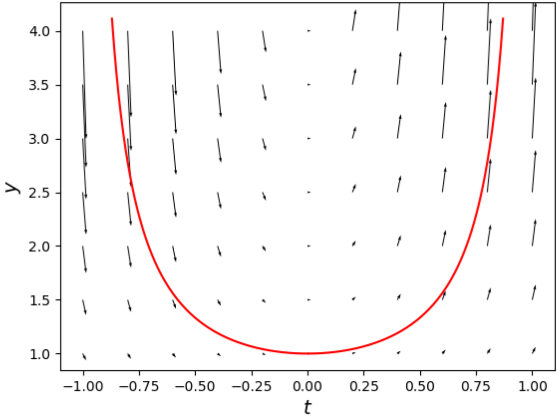
- $(0, 1) : y' = 0 + 1 = 1 \rightarrow$ đường tiếp tuyến có độ dốc 1.
- $(1, 0) : y' = 1 + 0 = 1 \rightarrow$ độ dốc cũng là 1.
- $(-1, 1) : y' = -1 + 1 = 0 \rightarrow$ đoạn tiếp tuyến nằm ngang.
- $(0, -1) : y' = 0 + (-1) = -1 \rightarrow$ đường tiếp tuyến có độ dốc -1.
- $(1, -2) : y' = 1 + (-2) = -1 \rightarrow$ đường tiếp tuyến có độ dốc -1.



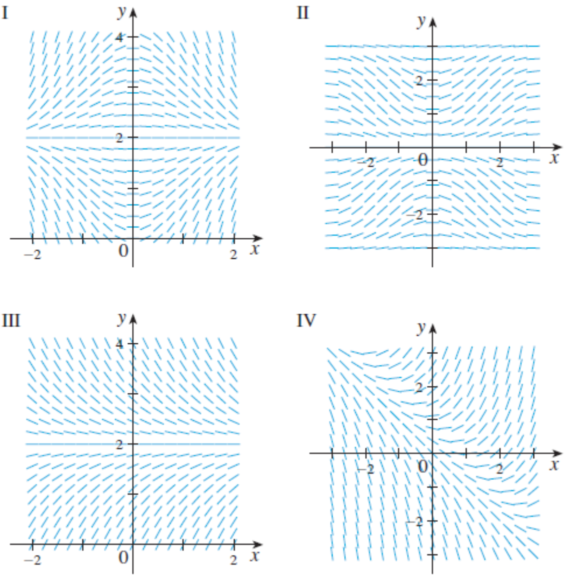
Hình 1.1: Ví dụ về trường hướng của phương trình $y' = t + y$



Hình 1.2: Trường hướng của phương trình $y' = y$ và các nghiệm tương ứng $y = \pm e^t$.



Hình 1.3: Trường hướng của phương trình $y' = 2ty^2$ và nghiệm tương ứng $y = \frac{1}{1-t^2}$. Lưu ý rằng với các giá trị y lớn, các mũi tên trong sơ đồ trường hướng gần như thẳng đứng. Điều này gợi ý rằng nghiệm của phương trình có thể chỉ tồn tại trong một khoảng bị chặn trên trục t.



Hình 1.4: $(a) y' = 2 - y \quad (b) y' = x(2-y) \quad (c) y' = x + y - 1 \quad (d) y' = \sin x \sin y.$

Công thức Taylor biểu diễn một hàm $y\left(t\right)$ dưới dạng tổng của các đạo hàm tại một điểm nhất định.

- Công thức Taylor giúp xấp xỉ hàm số bằng đa thức.
- Đóng vai trò quan trọng trong các phương pháp số.

Định lý 2.1 (Định lý giá trị trung bình)

Nếu $y(t)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *và khả vi trên* (a, b)*, thì tồn tại một điểm* $c \in (a, b)$ *sao cho:*

$$y(b) - y(a) = y'(c)(b - a). \tag{2.1}$$

Định lý này rất quan trọng trong giải tích số, giúp đánh giá sai số trong các xấp xỉ.

Giá trị cụ thể của c trong (2.1) thường khó xác định.

Định nghĩa 2.1 (Đa thức Taylor)

Đa thức Taylor bậc n của $y(t)$ quanh điểm s được định nghĩa là:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k. \tag{2.2}$$

Ví dụ 2.1 (Trường hợp $n = 1$)

Với $n = 1$, đa thức Taylor là:

$$P_1(t) = y(s) + y'(s)(t - s).$$

Đây là xấp xỉ tuyến tính của $y(t)$, được sử dụng trong phương pháp Euler.

Ví dụ 2.2 (Trường hợp $n = 2$)

Với $n = 2$, đa thức Taylor là:

$$P_2(t) = y(s) + y'(s)(t - s) + \frac{y''(s)}{2}(t - s)^2.$$

Đây là xấp xỉ bậc hai của $y(t)$, mang lại độ chính xác cao hơn so với trường hợp tuyến tính.

Định lý 2.2 (Xấp xỉ Taylor của y quanh điểm s)

Giả sử rằng hàm số $y(t)$ có đạo hàm liên tục bậc $n+1$ trong một khoảng $[a,b]$ chứa s. Khi đó, hàm số $y(t)$ có thể được xấp xỉ bằng đa thức Taylor bậc n:

$$y(t) = P_n(t) + R_n(t)\,. \tag{2.3}$$

Trong đó

- *Đa thức Taylor bậc n, $P_n(t)$, được xác định dựa trên các đạo hàm của $y(t)$ như trong* (2.2).
- *Phần dư $R_n(t)$ thỏa mãn một biểu thức hoặc một đánh giá nhất định.*

Hai công thức của phần dư $R_n(t)$

Phần dư $R_n(t)$ có thể được biểu diễn bằng hai cách:

1. **Dạng Lagrange**:

$$R_n(t) = \frac{y^{(n+1)}(c_t)}{(n+1)!}(t-s)^{n+1}, \qquad \text{với } c_t \text{ nằm giữa } t \text{ và } s.$$

2. **Dạng Cauchy**:

$$R_n(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-u)^n \, y^{(n+1)}(u)\, du.$$

Để áp dụng định lý Taylor, ta cần chọn một số tự nhiên n cụ thể. Khi đó, ta có thể xấp xỉ $y(t+h)$ bằng khai triển Taylor quanh t.

Thông thường, ta chọn $h > 0$ và tương đối nhỏ.

Ví dụ 2.3 (Trường hợp $n = 1$)

Khi $n = 1$, áp dụng định lý Taylor ta có:

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + R_1(t).$$

Cụ thể ta có công thức:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = y'(t) + \frac{1}{2}hy''(c).$$

Ví dụ 2.4 (Trường hợp $n = 2$)

Khi $n = 2$, áp dụng định lý Taylor cho y tại $t + h$ ta có:

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + R_2(t).$$

Tương tự, xét khai triển Taylor tại $t - h$:

$$y(t-h) = y(t) - hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + R_2(t).$$

Cộng hai phương trình trên:

$$y(t+h) + y(t-h) = 2y(t) + h^2 y''(t) + R_2(t).$$

Suy ra công thức xấp xỉ đạo hàm bậc hai:

$$y''(t) \approx \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}.$$

Bài toán giá trị đầu

Xét bài toán giá trị đầu

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t_0 \le t \le T_{\max}, \quad y(t_0) = y_0. \tag{IVP}$$

Tập hợp nút rời rạc

Chúng ta xét tập hợp các điểm rời rạc:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N := T_{\max}, \tag{2.4}$$

trong đó mỗi t_n là một điểm trên trục thời gian.

Phương pháp Euler xấp xỉ nghiệm tại các điểm rời rạc dựa trên giá trị của đạo hàm.

Cách chọn t_n

Để cho đơn giản, các điểm t_n thường được chọn cách đều với bước lưới $h > 0$:

$$t_n = t_0 + nh, \qquad \text{với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{2.5}$$

Một cách giải thích khác, ta chia $[t_0, T_{\max}]$ thành N đoạn bằng nhau với độ dài mỗi đoạn là

$$h = \frac{T_{\max} - t_0}{N}. \tag{2.6}$$

Bước lưới h quyết định độ chính xác của phương pháp.

Ký hiệu nghiệm chính xác của bài toán

Chúng ta sử dụng các ký hiệu sau cho nghiệm chính xác của bài toán

$$y\left(t\right)=y_{\text{exact}}\left(t\right),\qquad \text{với mọi } t_0\le t\le T_{\max}. \tag{2.7}$$

Ký hiệu nghiệm xấp xỉ tại các nút

Chúng ta sử dụng các ký hiệu sau cho nghiệm gần đúng tại các nút:

$$Y\left(t_n\right)=Y_h\left(t_n\right)=Y_n,\qquad \text{với mọi } n=0,1,2,\ldots,N. \tag{2.8}$$

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân tiến

Để xây dựng Phương pháp Euler, ta xét cách xấp xỉ đạo hàm sử dụng công thức sai phân tiến:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}. \tag{2.9}$$

Thay $t = t_n$ vào công thức (2.9), ta được:

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}.$$

Sử dụng phương trình $y'(t) = f(t, y(t))$, ta viết lại công thức trên thành

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)). \tag{2.10}$$

Định nghĩa Phương pháp Euler

Phương pháp Euler

Phương pháp Euler được định nghĩa bằng cách tính chính xác theo công thức (2.10):

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n), \qquad \text{với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{2.11}$$

Thông thường, ta chọn $Y_0 = y_0$ hoặc một xấp xỉ gần với nó $Y_0 \approx y_0$.

Phương pháp Euler là một trong những phương pháp một bước (*one-step methods*) đơn giản nhất để giải bài toán điều kiện đầu.

Ví dụ 2.5

Xét bài toán giá trị đầu:

$$y'(t) = -y(t), \quad y(0) = 1. \tag{2.12}$$

Chúng ta áp dụng phương pháp Euler để xấp xỉ nghiệm.

Nghiệm chính xác của bài toán là:

$$y(t) = e^{-t}. \tag{2.13}$$

Ta sẽ so sánh nghiệm này với kết quả từ phương pháp Euler.

Giải

- Sử dụng phương pháp Euler, ta có công thức:

$$Y_h(t_{n+1}) = Y_h(t_n) + h(-Y_h(t_n)) = (1-h)Y_h(t_n), \tag{2.14}$$

  với $Y_0 = 1$ và $t_n = nh$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$.
- Với bước lưới h, ta tính ra các giá trị gần đúng.

Để minh họa quá trình trên, ta tính $Y_h(t_1)$ và $Y_h(t_2)$ với $h = 0.1$

$$Y_{0.1}(t_1) = (1-h)Y_{0.1}(t_0) = 0.9,$$
$$Y_{0.1}(t_2) = (1-h)Y_{0.1}(t_1) = 0.81.$$

t	$y_{\text{exact}}(t)$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
0.0	1	1	1	1
1.0	e^{-1}			
2.0	e^{-2}			
3.0	e^{-3}			
4.0	e^{-4}			
5.0	e^{-5}			

Bảng 2.1: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp Euler với các bước lưới $h = 0.2, 0.1, 0.05$ trong Ví dụ 2.5.

Ví dụ 2.6

Xét bài toán giá trị đầu:

$$y'(t) = \frac{y(t) + t^2 - 2}{t+1}, \quad y(0) = 2.$$

Nghiệm chính xác của bài toán là:

$$y(t) = t^2 + 2t + 2 - 2(t+1)\ln(t+1).$$

Sử dụng phương pháp Euler, ta có công thức:

$$Y_h(t_{n+1}) = Y_h(t_n) + \frac{h\left(Y_h(t_n) + t_n^2 - 2\right)}{t_n + 1},$$

với $y_0 = 2$ và $t_n = nh$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$.

t	$y_{\text{exact}}(t)$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
0.0	1	1	1	1
1.0	e^{-1}			
2.0	e^{-2}			
3.0	e^{-3}			
4.0	e^{-4}			
5.0	e^{-5}			

Bảng 2.2: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp Euler với các bước lưới $h = 0.2, 0.1, 0.05$ trong Ví dụ 2.6.

Định nghĩa 2.2 (Sai số tuyệt đối/Sai số tương đối)

Giả sử $\widetilde{x}$ là một xấp xỉ của x.

- *Sai số tuyệt đối* được định nghĩa là giá trị
$$|x-\widetilde{x}|.$$
- *Sai số tương đối* được định nghĩa là giá trị
$$\frac{|x-\widetilde{x}|}{|x|},$$
với $x \neq 0$.

Ví dụ 2.7

x	$\widetilde{x}$	Sai số tuyệt đối	Sai số tương đối
0.3000×10^1	0.3100×10^1	0.100	$\frac{0.100}{3.000} \approx 0.0333$
0.3000×10^{-3}	0.3100×10^{-3}	0.0000100	$\frac{0.0000100}{0.0003000} \approx 0.0333$
0.3000×10^4	0.3100×10^4	100	$\frac{100}{3000} \approx 0.0333$

Ví dụ trên cho thấy rằng, dù với các sai số tuyệt đối rất khác nhau, vẫn có thể xuất hiện cùng một sai số tương đối, 0.0333.

Sai số tuyệt đối có thể gây hiểu nhầm, trong khi sai số tương đối có ý nghĩa hơn vì nó tính đến độ lớn của giá trị.

Trở lại Ví dụ 2.5. Sai số tuyệt đối được tính bằng hiệu giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ trong trường hợp $h = 0.1$

$$\begin{aligned} \left|e^{-0.1} - Y_h(0.1)\right| &\approx 0.004837, \\ \left|e^{-0.2} - Y_h(0.2)\right| &\approx 0.008731. \end{aligned}$$

Trong khi đó, sai số tương đối được tính như sau

$$\begin{aligned} \frac{\left|e^{-0.1} - Y_h(0.1)\right|}{\left|e^{-0.1}\right|} &\approx 0.005346, \\ \frac{\left|e^{-0.2} - Y_h(0.2)\right|}{\left|e^{-0.2}\right|} &\approx 0.010664. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.8

t	$h = 0.2$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	Err	RE	Err	RE	Err	RE
1.0						
2.0						
3.0						
4.0						
5.0						

Bảng 2.3: So sánh sai số tuyệt đối Err và sai số tương đối RE cho nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp Euler với các bước lưới $h = 0.2, 0.1, 0.05$ trong Ví dụ 2.5.

Ví dụ 2.9

t	$h = 0.2$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	Err	RE	Err	RE	Err	RE
1.0						
2.0						
3.0						
4.0						
5.0						

Bảng 2.4: So sánh sai số tuyệt đối Err và sai số tương đối RE cho nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp Euler với các bước lưới $h = 0.2, 0.1, 0.05$ trong Ví dụ 2.6.

Định nghĩa 2.3 (Sai số chặt cụt)

Sai số chặt cụt (truncation error) là phần sai số nảy sinh khi một quá trình vô hạn (chẳng hạn như một đại lượng được định nghĩa thông qua chuỗi số) được xấp xỉ bằng một công thức hữu hạn.

Ví dụ 2.10

Khi sử dụng Công thức (2.15) để xấp xỉ hàm số $y(t)$ bằng đa thức Taylor bậc n, thì phần dư $R_n(t)$ chính là sai số chặt cụt của xấp xỉ này.

$$T_n = y(t) - P_n(t) = R_n(t)\,. \tag{2.15}$$

Định nghĩa 2.4 (Tính nhất quán)

Một phương pháp số được gọi là *nhất quán* (consistency) với phương trình vi phân mà nó xấp xỉ nếu sai số chặt cụt T_n tiến đến 0 khi $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{0\le n\le N}|T_n|\right) = 0, \tag{2.16}$$

hay

$$\max_{0\le n\le N}|T_n| \to 0 \text{ khi } h \to 0. \tag{2.17}$$

Định nghĩa 2.5 (Hội tụ)

Một phương pháp một bước được gọi là *hội tụ* (convergence) nếu nghiệm xấp xỉ $Y_h(t_n)$ tiến gần đến nghiệm thực sự $y(t_n)$ khi $h \to 0$. Cụ thể

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{0\leq n\leq N}\left|y(t_n) - Y_h(t_n)\right|\right) = 0, \tag{2.18}$$

hay

$$\max_{0\leq n\leq N}\left|y(t_n) - Y_h(t_n)\right| \to 0 \text{ khi } h \to 0. \tag{2.19}$$

Định nghĩa 2.6 (Bậc hội tụ)

Phương pháp số hội tụ với bậc p nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ không phụ thuộc vào h và n sao cho

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - Y_h(t_n)| \leq Ch^p. \tag{2.20}$$

Dĩ nhiên, bậc hội tụ càng cao thì phương pháp càng hội tụ nhanh.

Mục đích việc phân tích sai số của phương pháp số là để

- Hiểu cách nó hoạt động.
- Có thể dự đoán sai số khi sử dụng.
- Thậm chí có thể tìm ra cách để tăng tốc độ hội tụ của nó.

Việc có thể làm được điều này đối với phương pháp Euler cũng sẽ giúp ta dễ dàng trả lời các câu hỏi tương tự cho các phương pháp số khác hiệu quả hơn.

Phân tích sai số của phương pháp Euler

Giả sử Bài toán giá trị ban đầu (IVP):

- Có nghiệm duy nhất $y(t)$ trên đoạn $t_0 \leq t \leq T_{\max}$.
- Có $y''(t)$ bị chặn trên đoạn này

$$\left\|y''\right\|_{\infty} = \max_{t_0 \leq t \leq T_{\max}} \left|y''(t)\right| < \infty.$$

Ta bắt đầu bằng cách áp dụng công thức Taylor để xấp xỉ $y\left(t_{n+1}\right)$:

$$y\left(t_{n+1}\right)=y\left(t_n\right)+hy'\left(t_n\right)+\frac{1}{2}h^2y''\left(s_n\right), \quad t_n \le s_n \le t_{n+1}.$$

Bởi vì $y'\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right)$, ta có

$$y\left(t_{n+1}\right)=y\left(t_n\right)+hf\left(t_n,y\left(t_n\right)\right)+\frac{1}{2}h^2y''\left(s_n\right). \tag{2.21}$$

Sai số chặt cụt

Đại lượng

$$\mathsf{TE}_{n+1} := \frac{1}{2} h^2 y''(s_n) \tag{2.22}$$

chính là *sai số chặt cụt* (truncation error) cho phương pháp Euler, thể hiện sai số khi xấp xỉ

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)).$$

Để phân tích sai số trong phương pháp Euler, ta xét

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n), \tag{2.23}$$

Xét hiệu (2.23) − (2.21), ta thu được

$$y(t_{n+1}) - Y_{n+1} = y(t_n) - Y_n + h\left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, Y_n)\right] + \frac{1}{2}h^2 y''(s_n). \tag{2.24}$$

Sai số lan truyền

Đại lượng

$$\mathrm{PE}_{n+1} := y(t_n) - Y_n + h\left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, Y_n)\right]. \tag{2.25}$$

được gọi là *sai số lan truyền* (propagated error) của phương pháp.

Sai số tại Y_{n+1} gồm hai phần:

- **Sai số chặt cụt** TE_{n+1}, được sinh ra tại t_{n+1}.
- **Sai số lan truyền** PE_{n+1}, được sinh ra do sai số tính toán tại các bước tính toán trước đó $t_n, t_{n-1}, \cdots, t_1, t_0$.

Tóm lại, với ký hiệu *sai số*

$$\mathrm{E}_n = y(t_n) - Y_n \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{2.26}$$

Khi đó

$$\mathrm{E}_n = \mathrm{TE}_n + \mathrm{PE}_n \text{ với mọi } n = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.27}$$

Phần sai số lan truyền có thể được đơn giản hóa bằng cách áp dụng Định lý giá trị trung bình

$$f\left(t_n, y\left(t_n\right)\right) - f\left(t_n, Y_n\right) = \frac{\partial f\left(t_n, \zeta_n\right)}{\partial y}\left[y\left(t_n\right) - Y_n\right], \tag{2.28}$$

với ζ_n nằm giữa $y\left(t_n\right)$ và Y_n.

Khi này, ta dùng (2.28) để viết lại (2.24) thành

$$\mathsf{E}_{n+1} = \left[1 + h\frac{\partial f\left(t_n, \zeta_n\right)}{\partial y}\right]\mathsf{E}_n + \frac{1}{2}h^2 y''\left(s_n\right). \tag{2.29}$$

Ví dụ 2.11

Xét bài toán sau và giải nó bằng phương pháp Euler:

$$y'(t) = 2t, \quad y(0) = 0. \tag{2.30}$$

Nghiệm chính xác của bài toán là $y(t) = t^2$. Dựa vào công thức sai số (2.29), ta có:

$$\mathsf{E}_{n+1} = \mathsf{E}_n + h^2, \quad e_0 = 0.$$

Giả sử giá trị ban đầu là $y_0 = y(0)$, khi đó, bằng quy nạp ta suy ra:

$$\mathsf{E}_n = nh^2, \quad n \geqq 0.$$

Do $nh = t_n$, ta có:

$$\mathsf{E}_n = ht_n. \tag{2.31}$$

- Với mỗi t_n cố định, sai số tại t_n tỉ lệ với h.
- Sai số chặt cụt có độ lớn $\mathcal{O}\left(h^2\right)$, nhưng tổng hợp các sai số này dẫn đến sai số tổng thể tỉ lệ với h.

Bài tập 2.1

Sử dụng Công thức Taylor để chứng minh rằng, với mọi $t \geq -1$ và $m \geq 0$, ta có

$$0 \leq (1+t)^m \leq e^{mt}. \tag{2.32}$$

Giả thiết 2.1

Giả sử

1. *Hàm số* $f(t, y)$ *liên tục trên đoạn* $t_0 \leq t \leq T_{\max}$ *với* $-\infty < y < \infty$.
2. *Tồn tại một hằng số* $M_1 > 0$ *sao cho*

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|, \qquad (2.33)$$

   với mọi $t_0 \leq t \leq T_{\max}$ *và* $-\infty < y_1, y_2 < \infty$.
3. *Nghiệm* $y(t)$ *của* (IVP) *có đạo hàm bậc hai liên tục trên* $[t_0, T_{\max}]$.

Định lý 2.3

Giả sử Giả thiết 2.1 được thỏa mãn. Khi đó, nghiệm xấp xỉ $y_h(t_n) = Y_n$ *(với* $n = 0, 1, 2, \ldots, N$*) từ phương pháp Euler thoả mãn:*

$$\max_{0\le n\le N} |y(t_n) - y_h(t_n)| \le e^{(T_{\max}-t_0)M} |\mathsf{E}_0| + \frac{1}{2M}\left(e^{(T_{\max}-t_0)M} - 1\right) \|y''\|_\infty h, \tag{2.34}$$

trong đó

$$\mathsf{E}_0 := y_0 - Y_0, \tag{2.35}$$

$$\|y''\|_\infty := \max_{t_0\le t\le T_{\max}} |y''(t)| < \infty. \tag{2.36}$$

Chứng minh Định lý 2.3

Chứng minh

Cố định $n = 0, 1, \ldots, N-1$.
Nhắc lại rằng, theo (2.24), ta có

$$\mathsf{E}_{n+1} = \mathsf{TE}_{n+1} + \mathsf{PE}_{n+1}, \tag{2.37}$$

trong đó

$$\mathsf{TE}_{n+1} = \frac{1}{2} h^2 y''(s_n),$$
$$\mathsf{PE}_{n+1} = \mathsf{E}_n + h\left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, Y_n)\right].$$

Chứng minh Định lý 2.3

Đánh giá sai số chặt cụt TE_{n+1}

Ta có

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{TE}_{n+1}\right| &= \left|\frac{1}{2}h^2 y''\left(s_n\right)\right| \\ &\le \frac{1}{2}h^2 \max_{t_0 \le t \le T_{\max}} \left|y''\left(t\right)\right| = \frac{1}{2}h^2 \left\|y''\right\|_\infty . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Chứng minh Định lý 2.3

Đánh giá sai số lan truyền PE_{n+1}

Sử dụng điều kiện Lipschitz (2.33), ta có

$$|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, Y_n)| \leq M\,|y(t_n) - Y_n| = M\mathsf{E}_n.$$

Từ đây, suy ra

$$\begin{aligned} |\mathsf{PE}_{n+1}| &\leq |\mathsf{E}_n| + h\,|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, Y_n)| \\ &\leq (1 + Mh)\,|\mathsf{E}_n|. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Chứng minh Định lý 2.3

Đánh giá sai số E_{n+1}

Kết hợp (2.38) và (2.39), ta được đánh giá sai số như sau

$$|\mathsf{E}_{n+1}| \leq (1 + Mh)\,|\mathsf{E}_n| + \frac{1}{2}h^2 \left\|y''\right\|_\infty,$$

với mọi $n = 0, 1, \ldots, N-1$.
Từ đây, ta thu được

$$\begin{aligned} |\mathsf{E}_n| &\leq (1 + Mh)^n\,|\mathsf{E}_0| \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2 \left\|y''\right\|_\infty \left[(1 + Mh)^{n-1} + \cdots + (1 + Mh) + 1\right]. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Thu gọn đại lượng

Sử dụng công thức

$$(1+Mh)^{n-1}+\cdots+(1+Mh)+1=\frac{(1+Mh)^n-1}{Mh}.$$

Ta viết lại (2.40) thành

$$|\mathsf{E}_n| \le (1+Mh)^n\,|\mathsf{E}_0| + \frac{1}{2M}\left((1+Mh)^n-1\right)\left\|y''\right\|_\infty h. \tag{2.41}$$

Hơn nữa, áp dụng (2.32) và định nghĩa t_n

$$(1+Mh)^n \le e^{nMh} = e^{(t_n-t_0)M} \le e^{(T_{\max}-t_0)M}.$$

Ta được bất đẳng thức cần chứng minh (2.34).

Định lý 2.4

Giả sử Giả thiết 2.1 được thỏa mãn. Nếu thêm giả thiết

$$\left|y_0 - y_h\left(t_0\right)\right| \leq C_0 h, \tag{2.42}$$

với một hằng số $C_0 \geq 0$ *(chẳng hạn* $Y_0 = y_0$ *thì* $C_0 = 0$*), thì tồn tại một hằng số* $C > 0$ *để*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left|y\left(t_n\right) - y_h\left(t_n\right)\right| \leq Ch. \tag{2.43}$$

Cụ thể

$$C := C_0 e^{\left(T_{\max} - t_0\right) M} + \frac{1}{2} \left\|y''\right\|_\infty \frac{e^{\left(T_{\max} - t_0\right) M} - 1}{M} \tag{2.44}$$

- Đánh giá sai số trong Định lý 2.3 và Định lý 2.4 đúng với một lớp rộng của các bài toán giá trị ban đầu.
- Tuy nhiên, nó thường đưa ra một ước lượng không chặt chẽ cho sai số, do sự xuất hiện của hàm mũ $e^{(T_{\max}-t_0)M}$.
- Trong một số trường hợp nhất định, ta có thể cải thiện kết quả.

Chẳng hạn, giả sử rằng

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \le 0 \quad \text{và} \quad K := \sup\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| < \infty. \tag{2.45}$$

Hơn nữa, h được chọn đủ nhỏ để

$$0 < h \le \frac{2}{K}. \tag{2.46}$$

Khi đó, ta có thể thu được đánh giá sai số

$$\max_{0\le n\le N} |y(t_n) - y_h(t_n)| \le |\mathsf{E}_0| + \frac{1}{2}(T_{\max} - t_0)\left\|y''\right\|_\infty h. \tag{2.47}$$

Để ý rằng đại lượng $T_{\max} - t_0$ trong trường hợp này xuất hiện trực tiếp, không còn nằm trong hàm mũ.

Để chứng minh (2.47), nhắc lại rằng theo (2.29), ta có

$$\mathsf{E}_{n+1} = \left[1 + h\frac{\partial f\left(t_n, \zeta_n\right)}{\partial y}\right]\mathsf{E}_n + \frac{1}{2}h^2 y''\left(s_n\right).$$

Sử dụng (2.45) và cách chọn của h,

$$1 \geq 1 + h\frac{\partial f\left(t_n, \zeta_n\right)}{\partial y} \geq 1 - hK \geq -1. \tag{2.48}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{E}_{n+1}\right| &\leq \left|1 + h\frac{\partial f\left(t_n, \zeta_n\right)}{\partial y}\right|\left|\mathsf{E}_n\right| + \frac{1}{2}\left|y''\left(s_n\right)\right| h^2\\ &\leq \left|\mathsf{E}_n\right| + \frac{1}{2}\left\|y''\right\|_\infty h^2.\end{aligned}$$

Áp dụng định nghĩa của t_n từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.12

Xét tiếp ví dụ Ví dụ 2.5

$$y'(t) = -y(t), \quad y(0) = 1. \tag{2.49}$$

Xét trên $[0,5]$, theo Định lý 2.4, ta có

$$\max_{0\le n\le N} |y(t_n) - y_h(t_n)| \le \frac{1}{2}\left(e^5 - 1\right) h.$$

Hơn nữa, vì (2.45) và (2.48) thỏa nên ta có một đánh giá tốt hơn như sau

$$\max_{0\le n\le N} |y(t_n) - y_h(t_n)| \le \frac{5}{2} h.$$