THI ONLINE: GIỚI HẠN HỮU HẠN – GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ - CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

CHUYÊN ĐỀ: GIỚI HẠN

MÔN: TOÁN LỚP 11

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN TUYENSINH247.COM

MỤC TIÊU

- Nắm vững các định nghĩa, định lí về giới hạn hữu hạn, giới hạn vô cực của hàm số.

- Biết và vận dụng thành thạo các phương pháp vào giải bài tập.

Bài 1 (ID:458665): Biết dãy số (u_n) thỏa mãn: $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n^3}\ \forall n$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Bài 2 (ID:458666): Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Bài 3 (ID:458667): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1-2n}{3n}$ b) $\lim \dfrac{n^2 - 4n\sqrt{n} + 2}{n^2}$ c) $\lim \dfrac{\pi^n + \left(-\sqrt{2}\right)^n}{4^n}$ d) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n}}{n^2}$

Bài 4 (ID:458672): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n^3 + n^2 + n + 3}{2 + n - 4n^3}$ b) $\lim \dfrac{-2n+3}{n^4 + 2n + 4}$

c) $\lim \dfrac{(n+2)^3(1-2n)^4}{(2n+3)^2(3-n)^5}$ d) $\lim \dfrac{n^4 + n + 1}{(2n+1)^2\left(1-2n^2\right)}$

Bài 5 (ID:458677): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 - n + 1}}{1-2n}$ b) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+1} + n}{2n^2 - 1}$ c) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{4n^2 - n + 1}}{3n+2}$ d) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt[3]{n^3 + n} + 2n}$

Bài 6 (ID:458682): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{3^n + 1}{2.3^n + 4^n}$ b) $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{4^n + 5^{n+1}}$ c) $\lim \dfrac{\left(3^{n+2}+1\right)\left(2^{3n}-2\right)}{\left(2^{2n}-1\right)\left(6^{n+1}+1\right)}$ d) $\lim \dfrac{2n+5}{n.3^n}$

Bài 7 (ID:458692): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{\cos 2n}{n+1}$ b) $\lim \frac{(-1)^n}{n^2+4}$ c) $\lim \frac{\sin n - \sqrt{3}\cos n + 2}{2n^2+1}$ d) $\lim \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{3^n}$

Bài 8 (ID:458687): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^{10}+n^5+3}{1-2n^3-n^5}$ b) $\lim \frac{1-2n^5+5n}{-3n^2-n+3}$ c) $\lim \frac{2^n+5^n}{4^n-3^n}$ d) $\lim \frac{\sqrt{n^2-n+1}+2n^2}{n+\sqrt{n^2+4}}$

Bài 9 (ID:458693): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(4n^5+n^3+2\right)$ b) $\lim\left(1+3n-n^4\right)$ c) $\lim\left(\sqrt{4n^4+5n^3-7}-2n^2\right)$

d) $\lim \sqrt[3]{2+n^3-n^6}$ e) $\lim\left(\sqrt[3]{-n^3+2n}-\sqrt{4n^2+n+3}\right)$

Bài 10 (ID:458699): Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n+1\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).n$

c) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}}$ d) $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3-n}-2n\right)$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN TUYENSINH247.COM

Bài 1 (TH):

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa:

+ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n| < \varepsilon,$ với $\varepsilon > 0$ bất kì bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

+ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - a\right) = 0$

Cách giải:

*) Chọn $\varepsilon = 0,01$

$|u_n - 1| < \dfrac{1}{n^3} < 0,001 = \dfrac{1}{1000}\quad \forall n > 10$

Như vậy nghĩa là $|u_n - 1| < 0,001$ kể từ số hạng thứ 11 trở đi.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\ \left(dpcm\right).$

Bài 2 (TH):

Phương pháp:

Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - 1\right) = 0$.

Cách giải:

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\ \left(dpcm\right).$

Bài 3 (TH):

Phương pháp:

a) Chia cả tử và mẫu cho n.

b) Chia cả tử và mẫu cho n^2.

c) Chia cả tử và mẫu cho 4^n.

d) Chia cả tử và mẫu cho n^2.

Cách giải:

a) $\lim \frac{1-2n}{3n} = \lim \frac{\frac{1}{n}-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

b) $\lim \frac{n^2-4n\sqrt{n}+2}{n^2} = \lim \frac{1-\frac{4}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n^2}}{1} = 1$.

c) $\lim \frac{\pi^n+\left(-\sqrt{2}\right)^n}{4^n} = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1} = 0$

d) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}}{n^2} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{1} = 0$

Bài 4 (TH):

Phương pháp:

a) Chia cả tử và mẫu cho n^3.

b) Chia cả tử và mẫu cho n^4.

c) Chia cả tử và mẫu cho n^7.

d) Chia cả tử và mẫu cho n^4.

Cách giải:

a) $\lim \frac{2n^3+n^2+n+3}{2+n-4n^3} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^2}-4} = -\frac{1}{2}$.

b) $\lim \frac{-2n+3}{n^4+2n+4} = \lim \frac{\frac{-2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{1+\frac{2}{n^3}+\frac{4}{n^4}} = 0$.

c) $\lim\frac{(n+2)^3(1-2n)^4}{(2n+3)^2(3-n)^5}=\lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}-2\right)^4}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}-1\right)^5}=\frac{16}{-4}=-4$

d) $\lim\frac{n^4+n+1}{(2n+1)^2(1-2n^2)}=\lim\frac{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n^2}-2\right)}=-\frac{1}{8}$

Bài 5 (VD):

Phương pháp:

a) Chia cả tử và mẫu cho n.

b) Chia cả tử và mẫu cho n^2.

c) Chia cả tử và mẫu cho n.

d) Chia cả tử và mẫu cho n.

Cách giải:

a) $\lim\frac{\sqrt{3n^2-n+1}}{1-2n}=\lim\frac{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}-2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{2n^2-1}=\frac{\frac{1}{n}\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{2-\frac{1}{n^2}}=0$.

c) $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2-n+1}}{3n+2}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$

d) $\lim\frac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt[3]{n^3+n}+2n}=\lim\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$

Bài 6 (VD):

Phương pháp:

a) Chia cả tử và mẫu cho 4^n.

b) Chia cả tử và mẫu cho 5^n.

c) Chia cả tử và mẫu cho 24^n.

d) Tách thành tổng.

Cách giải:

a) $\lim \dfrac{3^n+1}{2.3^n+4^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{2.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 1} = 0$.

b) $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{4^n + 5^{n+1}} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n - 2}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 5} = -\dfrac{2}{5}$.

c) $\lim \dfrac{\left(3^{n+2}+1\right)\left(2^{3n}-2\right)}{\left(2^{2n}-1\right)\left(6^{n+1}+1\right)} = \lim \dfrac{\left(9.3^n+1\right)\left(8^n-2\right)}{\left(4^n-1\right)\left(6.6^n+1\right)} = \lim \dfrac{\left(9+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)\left(1-\dfrac{2}{8^n}\right)}{\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)\left(6+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right)} = \dfrac{9.1}{1.6} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim \dfrac{2n+5}{n.3^n} = \lim \left(\dfrac{2}{3^n} + \dfrac{5}{n}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = 0$

Bài 7 (VD):

Phương pháp:

Sử dụng định lí kẹp.

Cách giải:

a) Ta có: $\left|\dfrac{\cos 2n}{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim \dfrac{\cos 2n}{n+1} = 0.$

b) Ta có: $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+4}\right| \le \dfrac{1}{n^2+4}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim \dfrac{1}{n^2+4} = 0$

$\Rightarrow \lim \dfrac{(-1)^n}{n^2+4} = 0.$

c) Ta có: $\left|\dfrac{\sin n - \sqrt{3}\cos n + 2}{2n^2+1}\right| \le \left|\dfrac{2+2}{2n^2+1}\right| \le \dfrac{4}{2n^2+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim \dfrac{4}{2n^2+1} = 0$

$\Rightarrow \lim \dfrac{\sin n - \sqrt{3}\cos n + 2}{2n^2+1} = 0.$

d) Ta có: $\left|\lim \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)}{3^n}\right| \le \dfrac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim \dfrac{1}{3^n} = 0$

$\Rightarrow \lim \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)}{3^n} = 0.$

Bài 8 (VD):

Phương pháp:

a) Chia cả tử và mẫu cho n^5 và xét dấu.

b) Chia cả tử và mẫu cho n^2 và xét dấu.

c) Chia cả tử và mẫu cho 4^n và xét dấu.

d) Chia cả tử và mẫu cho n và xét dấu.

Cách giải:

a) Chia cả tử và mẫu cho n^5 : $L = \lim \dfrac{2n^5+1+\dfrac{3}{n^5}}{\dfrac{1}{n^5}-\dfrac{2}{n^2}-1}$

Vì: $\begin{cases} \lim\left(2n^5+1+\dfrac{3}{n^5}\right) = +\infty \\ \lim\left(\dfrac{1}{n^5}-\dfrac{2}{n^2}-1\right) = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow L = -\infty$

b) Chia cả tử và mẫu cho n^2 : $L = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-2n^3+\dfrac{5}{n}}{-3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}$

Vì: $\begin{cases} \lim\left(\dfrac{1}{n^2}-2n^3+\dfrac{5}{n}\right)=-\infty \\ \lim\left(-3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)=-3<0 \end{cases} \Rightarrow L=+\infty$

c) Chia cả tử và mẫu cho 4^n: $L=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$

Vì: $\begin{cases} \lim\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right)=+\infty \\ \lim\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)=1>0 \end{cases} \Rightarrow L=+\infty$

d) Chia cả tử và mẫu cho n: $L=\lim\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2n}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}}$

Vì: $\begin{cases} \lim\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2n\right)=+\infty \\ \lim\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}\right)=1>0 \end{cases} \Rightarrow L=+\infty$

Bài 9 (VD):

Phương pháp:

a) Đặt nhân tử chung n^5 và xét dấu.

b) Đặt nhân tử chung n^4 và xét dấu.

c) Nhân liên hợp sau đó chia cả tử và mẫu cho n^2 và xét dấu.

d) Đặt nhân tử chung n^2 và xét dấu.

d) Đặt nhân tử chung $-n$ và xét dấu.

Cách giải:

a) $\lim\left(4n^5+n^3+2\right)=\lim\left[n^5\left(4+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}\right)\right]=+\infty$ vì:

$\lim n^5 = +\infty$; $\lim\left(4+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}\right)=4>0$

b) $\lim\left(1+3n-n^4\right)=\lim\left[n^4\left(\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{3}{n^3}-1\right)\right]=-\infty$ vì:

$\lim n^4 = +\infty$; $\lim\left(\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{3}{n^3}-1\right)=-1<0$

c) $L=\lim\left(\sqrt{4n^4+5n^3-7}-2n^2\right)=\lim\dfrac{4n^4+5n^3-7-4n^4}{\sqrt{4n^4+5n^3-7}+2n^2}=\lim\dfrac{5n^3-7}{\sqrt{4n^4+5n^3-7}+2n^2}$

Chia cả tử và mẫu cho n^2 : $L=\lim\dfrac{5n-\dfrac{7}{n^2}}{\sqrt{4+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^4}}+2}$

Vì: $\begin{cases}\lim\left(5n-\dfrac{7}{n^2}\right)=+\infty\\ \lim\left(\sqrt{4+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^4}}+2\right)=4>0\end{cases}\Rightarrow L=+\infty$

d) $\lim\sqrt[3]{2+n^3-n^6}=\lim\sqrt[3]{n^6\left(\dfrac{2}{n^6}+\dfrac{1}{n^3}-1\right)}=\lim n^2\sqrt[3]{\dfrac{2}{n^6}+\dfrac{1}{n^3}-1}=-\infty$

Vì $\lim n^2=+\infty$; $\lim\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{n^6}+\dfrac{1}{n^3}-1}\right)=-1<0$.

e) $\lim\left(\sqrt[3]{-n^3+2n}-\sqrt{4n^2+n+3}\right)=\lim\left(-n\sqrt[3]{-1+\dfrac{2}{n^2}}-n\sqrt{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}\right)$

$=\lim(-n)\left(\sqrt[3]{-1+\dfrac{2}{n^2}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}\right)=-\infty$.

Vì $\lim(-n)=-\infty$; $\lim\left(\sqrt[3]{-1+\dfrac{2}{n^2}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}\right)=3>0$.

Bài 10 (VD):

Phương pháp:

Nhân liên hợp.

Cách giải:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n+1\right)=\lim\dfrac{\left(n^2+3n\right)-\left(n-1\right)^2}{\sqrt{n^2+3n}+n-1}$

$=\lim\dfrac{n^2+3n-n^2+2n-1}{\sqrt{n^2+3n}+n-1}=\lim\dfrac{5n-1}{\sqrt{n^2+3n}+n-1}$

$=\lim\dfrac{5-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{5}{1+1}=\dfrac{5}{2}$

b) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).n=\lim\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.n$

$=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{n}}$

$=\lim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=+\infty$

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$; $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)=2>0$

c) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}}=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}}{n^2+2-n^2+1}$

$=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}}{3}=+\infty$

d) $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3-n}-2n\right)=\lim\dfrac{8n^3-n-8n^3}{\sqrt[3]{8n^3-n}^2+2n\sqrt[3]{8n^3-n}+4n^2}$

$=\lim\dfrac{-n}{\sqrt[3]{8n^3-n}^2+2n\sqrt[3]{8n^3-n}+4n^2}$

$=\lim\dfrac{-n}{n^2\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{n^2}}^2+2n^2\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{n^2}}+4n^2}$

$=\lim\dfrac{-1}{n\left(\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{n^2}}^2+2\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{n^2}}+4\right)}=0$

----------------HẾT----------------