

基于样条函数的监测数据平滑算法与 Matlab 实现

杨海星¹, 黎 浩², 曹 净³(1. 中国建筑西南勘察设计研究院有限公司, 成都 610051;
2. 长春工程学院, 长春 130021; 3. 昆明理工大学, 昆明 650000)

摘 要:工程监测数据中总是不可避免地含有误差,若直接利用未经平滑处理的数据进行分析,这些误差将被放大,直接影响分析结果。首先依据一定的光顺准则和逼近准则建立泛函,将数据平滑问题转化为泛函求极值的问题;然后基于 B-样条函数,构造奇次光顺样条函数,建立方程组求解泛函极小值;最后给出该数据平滑的算法及其汇编程序,并通过一简单算例验证了该算法的可行性。

关键词:监测数据;误差;样条函数;数据平滑;Matlab 程序

中图分类号:TP39:O24

文献标志码:A

文章编号:1009-8984(2018)03-0092-06

0 引言

由于岩土体性质的复杂多变性,以及各种计算模型的局限性,仅依靠理论分析和经验估计很难预测工程结构和土体在施工过程中的变化。为了保证工程安全顺利地进行,在施工过程中开展严密的监测已经成为工程建设必不可少的重要环节^[1]。通过对监测数据的分析,可充分挖掘其蕴含的信息,实时掌握工程的动态,必要时可对原有方案进行调整以避免发生工程事故或降低工程造价。然而监测数据往往是借助测量仪器直接或间接获得的,这一过程中总会不可避免地产生测量误差,直接对该监测数据进行分析只可大概地了解工程的动态变化。若想从该监测数据中挖掘更多关于工程的信息,则需对监测数据进行更进一步的处理,如求导等。但因监测数据中含有误差,这些微小的误差在分析过程中将会被放大,甚至直接影响分析结果。为此,在利用监测数据进行进一步分析前需对其进行平滑处理,尽可能地将误差降低至最小。目前,数据平滑处理的方法有很多,如能量法^[2-4]、小波分解法^[5-6]、最小二乘法^[7-8]、选点修改法^[9]和节点弃除法^[10]等,这些方法虽计算速度快,但很难保证曲线的曲率均匀变化,平滑处理效果差,且有时会顾此失彼,即平滑后的曲线过于平滑而偏离原始数据,逼近效果

不好。

基于上述考虑,本文首先依据一定的光顺准则和逼近准则建立泛函,然后基于 B-样条函数,构造奇次光顺样条函数,建立方程组求解泛函极小值,所求泛函极小值即为光顺样条函数。

1 问题的数学描述

给定数据点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, N$), y_i 带有一定的误差,求一条关于这些数据点的拟合函数 $f(x)$,该拟合函数需具有一定的光滑性,并且能较好地逼近原数据。该问题的数学表示如下:假定在区间 $[a, b]$ 上存在一光滑函数 $f(x) \in W_2^q[a, b]$ ($f(x)$ 具有直到 q 阶的导数, $q-1$ 阶导数绝对连续, q 阶导数平方可积。满足上述条件的所有函数组成的空间记为 $W_2^q[a, b]$),它的光滑程度用 I_q 来估计:

$$I_q(f) = \int_a^b [f^{(q)}(x)]^2 dx, \quad (1)$$

上式称为光顺准则。在点 x_i ,函数 $f(x)$ 要逼近数组 y_i , ($i = 1, 2, \dots, N$),逼近程度可用 $E(f)$ 来估计:

$$E(f) = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2, \quad (2)$$

上式称为逼近准则。引入加权值 $\rho > 0$ 来对函数的光顺程度与逼近程度进行调节。则问题转化为在函数集 $f(x) \in W_2^q[a, b]$ 上研究泛函的极小化问题。

$$J(f) = I_q(f) + \rho E_q(f). \quad (3)$$

2 泛函极值的求解

定义:给定一个划分 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots <$

收稿日期:2018-05-04

作者简介:杨海星(1991-),男(汉),云南宣威,硕士

主要研究特殊地质条件下的边坡与基坑工程。

$x_N < x_{N+1} = b$, 如果在区间 $[a, b]$ 上定义的实值函数满足条件:

1) $s(x)$ 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}] (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 上是 $2q-1$ 次代数多项式;

2) $s(x)$ 在每个子区间 $[a, x_1]$ 与 $(b, x_1]$ 上是 $q-1$ 次代数多项式;

3) $s(x) \in C^{(2q-2)}[a, b], 1 \leq q \leq N$.

则 $s(x)$ 称为关于划分 Δ 的 $2q-1$ 次(奇次)自然样条函数。对于一个固定的分划 Δ , 满足定义中 1)、2)、3) 要求的奇次样条函数的全体所组成的空间记为 $S_q^0(\Delta)$, 其维数为 N 。

定理 如果函数 $\sigma(x) \in S_q^0(\Delta)$ 且满足条件

$$\sigma_\Delta + \rho^{-1}(-1)^q d(\sigma) = y, \quad (4)$$

则称 $\sigma(x)$ 为以 $\rho > 0$ 为权系数的 $2q-1$ 次光顺样条函数, 其中

$$\sigma_\Delta = (\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_N))^T,$$

$$d(\sigma) = (d_1(\sigma), d_2(\sigma), \dots, d_N(\sigma))^T,$$

$$d_i(\sigma) = \sigma^{(2q-1)}(x_i + 0) - \sigma^{(2q-1)}(x_i - 0), i = 1,$$

$2, \dots, N$,

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T.$$

对于任何实数 y_1, y_2, \dots, y_N , 能求出满足(4)的唯一函数 $\sigma(x) \in S_q^0(\Delta)$, 且 $\sigma(x)$ 使式(3)的泛函极值达到极小值^[11]。

3 奇次光顺样条的计算

给定数据点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$, 并给定以 x_i 为内节点的划分

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b,$$

给定 $\rho > 0$, 求 $\sigma(x) \in W_2^q[a, b]$ 使

$$I_q[\sigma] + \rho E[\sigma] = \min_{f \in W_2^q} \{I_q[f] + \rho E[f]\}, \quad (5)$$

这时光顺样条 $\sigma(x) \in S_q^0(\Delta)$ 满足条件

$$\sigma_\Delta + \rho^{-1}(-1)^q d(\sigma) = y. \quad (6)$$

现假定 $B_j(x) (j = 1, 2, \dots, N)$ 是空间 $S_q^0(\Delta)$ 的基底, 则光顺样条函数 $\sigma(x) \in S_q^0(\Delta)$ 可表示为

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^N c_j B_j(x), \quad (7)$$

其中 $c_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 为待定常数。又 $\sigma(x)$ 还可以表示为

$$\sigma(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j x^j + \sum_{i=1}^N d_i \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!}, \quad (8)$$

式中 $(x - x_i)_+^{2q-1}$ 为截幂函数, 其定义如下:

$$(x - x_i)_+^{2q-1} = \begin{cases} (x - x_i)^{2q-1} & x \geq x_i \\ 0 & x < x_i \end{cases}.$$

若把基底 $B_j(x)$ 也写为(8)的形式

$$B_j(x) = p_j(x) + \sum_{i=1}^N \beta_{i,j} \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!}, \quad (9)$$

其中 $p_j(x)$ 是 $q-1$ 次多项式, 则

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{j=1}^N c_j p_j(x) + \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=1}^N \beta_{i,j} \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} = \\ &= \sum_{j=1}^N c_j p_j(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j \beta_{i,j} \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} = \\ &= \sum_{j=1}^N c_j p_j(x) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_j \beta_{i,j} \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!}, \end{aligned}$$

由此可得到

$$d_i(\sigma) = \sum_{j=1}^N c_j \beta_{i,j}, \quad (10)$$

则方程组(6)可写为

$$\sum_{j=1}^N c_j B_j(x_i) + \rho^{-1}(-1)^q \sum_{j=1}^N c_j \beta_{i,j} = y_i \quad i = 1,$$

$2, \dots, N$.

将其写为矩阵的形式为

$$(B + \rho^{-1}E)c = y. \quad (11)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix} (b_{ij} = B_j(x_i)),$$

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1N} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{N1} & e_{N2} & \dots & e_{NN} \end{bmatrix} (e_{ij} = (-1)^q \beta_{ij}),$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T,$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T.$$

当 $N > 2q$ 时, 存在唯一的函数 $\sigma_\rho(x) \in W_2^q[a, b]$ 是问题(6)的解, 同时 $\sigma_\rho(x) \in S_q^0(\Delta)$ 。如果 $\sigma_\rho(x)$ 表示为式(7)的形式, 那么参数 $c_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 可由方程组 $(B + \rho^{-1}E)c = y$ 唯一确定。

3.1 β_{ij} 的确定

为了推导方便, 上文先将空间 $S_q^0(\Delta)$ 的基底假设为式(9)所示的形式, 这一过程中便引入了系数 β_{ij} 。而空间 $S_q^0(\Delta)$ 的基底还可表示为节点差商的形式, 即

当 $j = 1, 2, \dots, q$ 时

$$B_j(x) = Q_{1,q+j-1}^{2q-1}(x) =$$

$$\varphi_{2q-1}[x; x_1, \dots, x_{q+j}] =$$

$$\sum_{k=1}^{q+j} \frac{\varphi_{2q-1}(x, x_k)}{\omega_1'(x_k)} =$$

$$\sum_{k=1}^{q+j} \frac{(x_k - x)^{2q-1}}{\omega_1'(x_k)}, \quad (12)$$

其中 $\omega'_1 = \prod_{l=1}^{q+j} (x_k - x_l)$.

当 $j = q+1, q+2, \dots, N-q$ 时

$$\begin{aligned} B_j(x) &= N_{j-q, 2q}^{2q-1}(x) = \\ &= (x_{j+q} - x_{j-q}) \varphi_{2q-1}[x; x_{j-q}, \dots, x_{j+q}] = \\ &= (x_{j+q} - x_{j-q}) \sum_{k=j-q}^{q+j} \frac{\varphi_{2q-1}(x, x_k)}{\omega'_2(x_k)} = \\ &= (x_{j+q} - x_{j-q}) \sum_{k=j-q}^{q+j} \frac{(x_k - x)^{2q-1}}{\omega'_2(x_k)}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\omega'_2 = \prod_{l=j-1}^{q+j} (x_k - x_l)$.

当 $j = N-q+1, N-q+2, \dots, N$ 时

$$\begin{aligned} B_j(x) &= \tilde{Q}_{j-q, N-j+q}^{2q-1}(x) = \\ &= \varphi_{2q-1}[x_N - x; x_N - x_N, \dots, x_N - x_{j-q}] = \\ &= \sum_{k=j-q}^N \frac{\varphi_{2q-1}(x_N - x, x_N - x_k)}{\omega'_3(x_k)} = \\ &= \sum_{k=j-q}^N \frac{(x - x_k)^{2q-1}}{\omega'_3(x_k)}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\omega'_3 = \prod_{l=j-q}^N (x_l - x_k) = (-1)^{N+q-j} \prod_{\substack{l=j-q \\ l \neq k}}^N (x_k - x_l).$$

式(9)与式(12)~(14)所示基底形式为空间 $S_q^0(\Delta)$ 的基底的不同表达形式,故可通过对比分析这两种基底形式确定系数 $\beta_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$ 。具体如下:

1) 对于 $j = 1, 2, \dots, q, \beta_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$ 是函数 $\varphi_{2q-1}(x, y)$ 按节点 x_1, x_2, \dots, x_{q+j} 的 $q+j-1$ 阶差商表示式中 $\frac{(x_i - x)^{2q-1}}{(2q-1)!}$ 的系数,即

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{(2q-1)!}{\omega'_1(x_i)} & i = 1, \dots, q+j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}. \quad (15)$$

2) 对于 $j = q+1, q+2, \dots, N-q, \beta_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$ 是函数 $\varphi_{2q-1}(x, y)$ 按节点 $x_{j-q}, x_{j-q+1}, \dots, x_{q+j}$ 的 $2q$ 阶差商表示式中 $\frac{(x_i - x)^{2q-1}}{(2q-1)!}$ 的系数乘以 $(x_{j+q} - x_{j-q})$, 即

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{(2q-1)!}{\omega'_2(x_i)} (x_{j+q} - x_{j-q}) & i = j-q, \dots, q+j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}. \quad (16)$$

3) 对于 $j = N-q+1, N-q+2, \dots, N, \beta_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$ 是函数 $\varphi_{2q-1}(x, y)$ 按节点 $x_{j-q}, x_{j-q+1},$

\dots, x_N 的 $q+N-j$ 阶差商表示式中 $\frac{(x_i - x)^{2q-1}}{(2q-1)!}$ 的系数乘以 $(-1)^{q+N-j}$, 即

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{(2q-1)!}{\omega'_3(x_i)} (-1)^{q+N-j} & i = j-q, \dots, N \\ 0 & \text{其他} \end{cases}. \quad (17)$$

3.2 权因子 ρ 的确定

参数 ρ 可以调节逼近函数 $\sigma_\rho(x)$ 与数据之间的接近程度和逼近函数 $\sigma_\rho(x)$ 本身的“光滑”程度,所以它的选取至关重要。 ρ 选取过大会使 $\sigma_\rho(x)$ 过分依赖数据 y , 而须知 y 是有误差的。 ρ 选取过小又会产生一个基本不依赖于数据的过分光滑的样条,以致使变分为 0。为了得到合适的 ρ 值,Reinsch 曾暗示^[12],如果方差 σ^2 已知,那么可选取 ρ 使成立。

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\sigma_\rho(x_j) - y_j)^2 = \sigma^2. \quad (18)$$

参数 ρ 的取值可通过牛顿迭代法获得,具体如下:首先将式(18)改写为

$$\sum_{j=1}^N (\sigma_\rho(x_j) - y_j)^2 = N\sigma^2,$$

令式(18)左端为 $F(\rho)$, 将式(7)代入可得

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \sum_{i=1}^N (\sigma_\rho(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N G_j B_j(x_i) - y_i \right)^2 = \\ &= [Bc - y]^T [Bc - y] = [B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y]^T [B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y]. \end{aligned}$$

对 $F(\rho)$ 进行求导有:

$$\begin{aligned} \frac{dF(\rho)}{d\rho} &= \frac{d(B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y)^T (B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y)}{d\rho} = \\ &= \frac{d(B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y)}{d\rho} (B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y)^T + \\ &= \frac{d(B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y)}{d\rho} (B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y - y)^T. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{d(B(B + \rho^{-1}E)^{-1}y)}{d\rho} &= B \frac{d(B + \rho^{-1}E)^{-1}}{d\rho} y = \\ &= B(-1)(B + \rho^{-1}E)^{-1} \frac{d(B + \rho^{-1}E)}{d\rho} (B + \rho^{-1}E)^{-1} y = \\ &= B(B + \rho^{-1}E)^{-1} \rho^{-2} E (B + \rho^{-1}E)^{-1} y. \end{aligned}$$

整理可得:

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho} = 2(Bc - y)^T B A^{-1} \rho^{-2} E c,$$

式中 $A = B + \rho^{-1}E$ 。

利用牛顿迭代法可求出权因子 ρ , 其迭代关系式如下:

$$\rho = \rho - \frac{F(\rho) - N\sigma^2}{dF(\rho)/d\rho}. \quad (19)$$

4 光顺样条的算法及汇编程序

4.1 算法

对给定数据点,求光顺样条函数的步骤如下:

1) 给定 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ 、标准差 σ 以及初始值 ρ ;

2) 计算 $b_{ij} = B_j(x_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, 并组成矩阵 B ;

3) 由式 (15) ~ (17) 求出 β_{ij} , 并求出 $e_{ij} = (-1)^q \beta_{ij}$, 其中 $i, j = 1, 2, \dots, N$, 并组成矩阵 E ;

4) 计算 $A = B + \rho^{-1}E$, 形成矩阵 A ;

5) 求解方程组 $Ac = y$, 求出 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 。判断 $\sum_{j=1}^N (\sigma_\rho(x_j) - y_j)^2$ 是否小于 $N\sigma^2$, 若小于, 直接进行第 6) 步; 若大于, 则利用式 (19) 迭代计算出新的权因子 ρ , 返回至第 4) 步;

6) 求出光顺样条函数 $\sigma(x) = \sum_{j=1}^N c_j B_j(x)$ 。

4.2 汇编程序

利用 Matlab 软件中的文本文件编辑器, 创建了 5 个 M 文件 (1 个主文件, 4 个子文件), 通过主 M 文件中的 Matlab 指令完成对其他子 M 文件的调用, 最终完成算法的 Matlab 实现。各 M 文件的功能见表 1。

表 1 各 M 文件的功能

M 文件名称	功能
smoothdata. m	主文件, 用样条函数对含有误差的数据进行光顺 (平滑) 处理
BE. m	子文件, 计算形成矩阵 B, E
BR. m	子文件, 计算各基底在任意点 X 处的值
bjxj. m	子文件, 计算第 j 个基底在 x_i 节点处的值
betal. m	子文件, 计算第 j 个基函数的 $(2q-1)$ 阶导数在 x_i 节点处的跳跃量

各 M 文件的代码如下:

1) function [Y] = smoothdata(kk, x, y, s, deta)。% [Y] = smoothdata(kk, x, y, s, XX, deta), 各参数含义如下: kk 为平滑样条次数, $kk = 2q-1$, q 为正整数; x 为向量 $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$, 平滑数据点的横坐标值; y 为向量 $y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_N]$, 平滑数据点的纵坐标值; s 为给定的平滑程度控制值, 人为给定, 一般 $s = N\sigma^2$; w 为行向量 $w = [w_1,$

$w_2, w_3, \dots, w_N]$, w_i 表示第 i 个数据点 x_i 的权重, 若不赋值, 则取默认值 $w_i = 1$; Y 为向量 $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]$, 用于存储经平滑处理后的 y 值; N 为数据点的个数, 要求 $N \geq kk + 2$; rou 为光顺与逼近得权函数, 用牛顿迭代法求解; c 为列向量 $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]$, 为各基函数的系数;

% 程序部分

if nargin < 5; % 给定各个数据点的权重, 如果没有赋值, 则取默认值为 1

deta = ones(1, length(x));

end

detamax = max(deta);

w = detamax ./ deta;

rou = 1 * 10^(-10);

F = s + 1;

Stepp1 = 0;

[B, E] = BE(kk, x, w);

y = y';

while F > s

A = B + rou * (-1) * E;

c = A \ y;

m = B * c - y;

F = m' * m;

if F > s

invA = inv(A);

dFdr = 2 * rou * (-2) * m' * B * invA * E * c;

rou = rou - (F - s) / (dFdr);

else

break

end

end

% 计算平滑数据

BB = RB(kk, x, x);

Y = BB * c;

Y = Y';

2) function [B, E] = BE(kk, x, w)。% [B, E] = BE(kk, x, w), 各参数含义如下: B 为矩阵 B , 用于存储各基函数在各节点的值; E 为矩阵 E , 用于存储各基函数在各节点的 $(2q-1)$ 阶导数的跳跃量; kk 为奇次自然光顺样条函数的次数; x 为插值点列 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$; N 为插值点列的个数, $N \geq kk + 2$; $q, q = (kk + 1) / 2$

% 程序

%% 计算各基函数在各节点的值

q = (kk + 1) / 2;

```

N = length(x);
for i = 1 : 1 : N
    for j = 1 : 1 : q
        xx = x(1, 1 : q + j);
        B(i, j) = bjxi(kk, xx, x(i));
        if i <= q + j & i >= 1
            E(i, j) = w(i)^(-1) *
beta1(kk, xx, x(i));
        end
    end
    for j = q + 1 : 1 : N - q
        xx = x(1, j - q : 1 : j + q);
        B(i, j) = (x(j + q) - x(j -
q)) * bjxi(kk, xx, x(i));
        if i <= j + q & i >= j - q
            E(i, j) = w(i)^(-1) *
(x(j + q) - x(j - q)) * beta1(kk, xx, x(i));
        end
    end
    for j = N - q + 1 : 1 : N
        xx = x(N) - x(1, N : -1 : j - q);
        B(i, j) = bjxi(kk, xx, x(N) - x(i));
        if i <= N & i >= j - q
            E(i, j) = w(i)^(-1) * beta1(kk,
xx, x(N) - x(i));
        end
    end
    E = (-1)^q * E;
3) function [B] = RB(kk, x, X)。% [B] =
RB(kk, x, X); 各参数含义如下: B 用于存储各基函
数在 X 的值; kk 为奇次自然光顺样条函数的次数; x
为插值点列  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ ; N 为插值点列的个
数,  $N \geq kk + 2$ ;  $q = (kk + 1)/2$ ; X 为计算点的坐标
% 程序
q = (kk + 1)/2;
N = length(x);
n = length(X);
for i = 1 : 1 : n
    for j = 1 : 1 : q
        xx = x(1, 1 : q + j);
        B(i, j) = bjxi(kk, xx, X(i));
    end
    for j = q + 1 : 1 : N - q
        xx = x(1, j - q : 1 : j + q);

```

```

        B(i, j) = (x(j + q) - x(j -
q)) * bjxi(kk, xx, X(i));
    end
    for j = N - q + 1 : 1 : N
        xx = x(N) - x(1, N : -1 : j - q);
        B(i, j) = bjxi(kk, xx, x(N) - X(i));
    end
end
4) function [value] = bjxi(kk, xx, X)。
% [value] = bjxi(kk, xx, X), 各参数含义如下:
value 为计算第 j 个基第在 X 处的值; kk 为奇次自然
光顺样条函数的次数; x 为插值点列  $(x_1, x_2, x_3, \dots,
x_N)$ , X 为计算点处的坐标。
% 程序
n = length(xx);
value = zeros(1, length(X));
for i = 1 : 1 : length(X)
    XX = X(i);
    for k = 1 : 1 : n
        if (xx(k) - XX) > 0
            m = (xx(k) - XX)^(kk);
        else
            m = 0;
        end
        for l = 1 : 1 : n
            if l ~ = k
                m = m / (xx(k) - xx(l));
            end
        end
        value(i) = value(i) + m;
    end
end
5) function [beta] = beta1(kk, xx, X)。
% [beta] = beta1(kk, xx, X), 各参数含义如下: beta
为计算基函数的  $(2q - 1)$  阶导数在 X 处的跳跃量;
kk 为奇次自然光顺样条函数的次数; x 为插值点列
 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ ; X 为计算点处的坐标。
% 程序部分
n = length(xx);
m = factorial(kk);
for j = 1 : 1 : n
    if X ~ = xx(j)
        m = m / (X - xx(j));
    end
    beta = m;
end

```

5 实例验证

已知函数为 $y = 10\sin(\pi x/50)$, 并在该已知函数上加上一组随机数, 该随机数服从均匀分布 $U \sim (0, 1)$, 相当于在原函数上加最大函数值的 10% 的随机扰动。然后采用本文所提数据平滑法(五次样条函数平滑法)对该含噪音数据进行平滑处理, 将平滑结果与原数据进行比较。原始数据值与噪音值如图 1, 含噪音数据与平滑后的数据如图 2, 平滑数据的一阶导数(曲率)如图 3。通过图 2~3 可发现, 经过平滑处理后的数据能很大程度上消除噪音的影响, 可很好地逼近原始数据, 所得曲线具有较好的光滑性, 其曲率变化均匀。通过该算例证明了本文所提数据平滑算法的可行性。

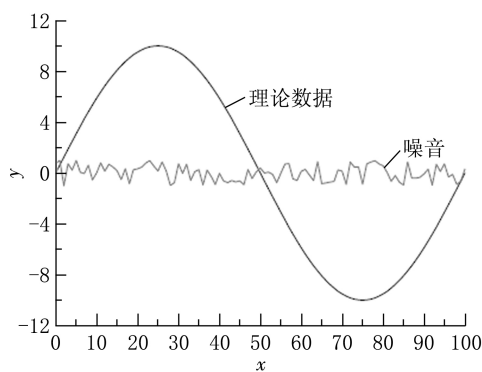


图 1 原始数据值与噪音值

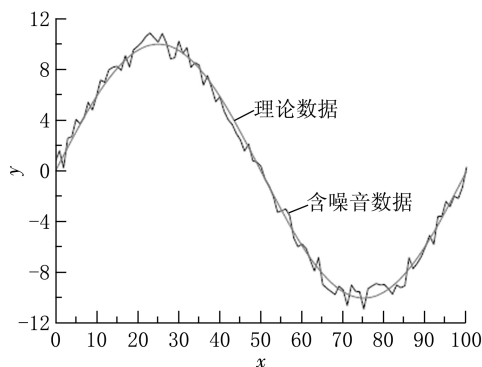


图 2 含噪音数据与平滑后的数据

6 结语

1) 工程监测数据中不可避免地含有误差, 在进行数据分析前需对原始数据进行平滑处理, 将误差对数据分析结果的影响降至最低。本文首先依据一定的光顺准则和逼近准则建立泛函, 将数据平滑问题转化为泛函求极值的问题, 然后基于 B-样条函数, 构造奇次光顺样条函数, 建立方程组求解泛函极小值, 所求泛函极小值即为光顺样条函数, 该函数既

有一定的光顺性, 又具有较好的逼近性能。

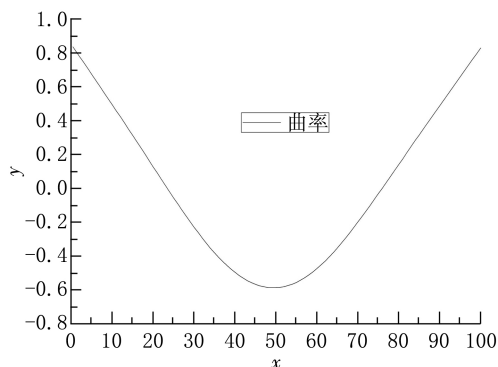


图 3 平滑曲线曲率

2) 依据光顺样条函数的求解过程, 给出数据平滑算法, 并利用 Matlab 汇编语言将算法程序化, 最后通过一实例验证了该数据平滑算法的可行性。

参考文献

- [1] 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会. 深基坑支护技术指南[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012.
- [2] 张龙飞, 檀结庆. 局部插值的 H-Bezier 曲线分段光顺拟合[J]. 合肥科技大学学报: 自然科学版, 2011, 34(10): 1570-1575.
- [3] 方永锋, 陈建军, 邱泽阳. T-Bézier 曲线能量法的光顺计算[J]. 计算机应用, 2015, 35(7): 2047-2050.
- [4] 章虎东. 基于局部能量的三次 B 样条曲线自动光顺算法[J]. 西安航空学院学报, 2016, 34(1): 79-81.
- [5] 吴福鸣, 潘日晶. 基于能量优化与非均匀 B 样条小波的曲面光顺[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(18): 176-185.
- [6] 张力宁, 张定华, 刘元朋, 等. 基于曲率图小波分解的平面曲线光顺方法[J]. 计算机应用研究, 2005, 22(11): 250-252.
- [7] 蔡山, 张浩, 陈洪辉, 等. 基于最小二乘法分段三次曲线拟合方法研究[J]. 科学技术与工程, 2007, 7(3): 352-355.
- [8] 唐良瑞, 王洪婷. 基于曲线拟合的电能质量去噪算法[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(11): 213-224.
- [9] Kjellander J A P. Smoothing of Cubic Parametric Splines[J]. Computer-Aided Design, 1983, 15(3): 175-179.
- [10] Farin G, Hoschek J, Kin M-S. Handbook of computer aided geometric design[M]. Amsterdam: North-Holland, 2002.
- [11] 程正兴. 数据拟合[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
- [12] Reinsch C H. Smoothing by spline functions[J]. Numer. Math., 1997, 10: 177-183.

(下转第 120 页)

一种方式,可以通过多种证明方法将结果解析。

参考文献

- [1] 梁海滨. 证明含有定积分的等式或不等式——基于大连市高等数学竞赛试题[J]. 北京印刷学院学报, 2016(23):71-72.
- [2] 凯歌. 浅谈《高等数学》的教学方法——以不等式的若干证明方法为例[J]. 内蒙古教育:职教版, 2016(3):79-80.
- [3] 李红春. 自然与技巧结合 初等与高等串联——一类和型轮换不等式的证法思考及应用[J]. 河北理科教学研究, 2013(2):1-2.
- [4] 贾延. 高等数学教学中定积分不等式的证明方法[J]. 宁波教育学院学报, 2018, 20(2):76-78.
- [5] 张二艳, 张永明. 柯西—许瓦兹不等式的证明方法及应

- 用[J]. 北京印刷学院学报, 2012, 20(02):71-73.
- [6] 刘兴元, 何宜军. Mathematica 软件的绘图功能在高等数学教学中应用示例[J]. 邵阳学院学报:自然科学版, 2008, 5(4):41-44.
- [7] 张二艳. Mathematica 软件在高等数学教学中的应用[J]. 北京印刷学院学报, 2006(2):77-80.
- [8] 孟赵玲, 叶侠娟. 证明函数不等式的六种方法[J]. 北京印刷学院学报, 2004(4):49-51.
- [9] 金杨, 朱烈洲. 网点形状参数化数学函数及 PostScript 语言描述方法[J]. 北京印刷学院学报, 2001(3):3-8.
- [10] 陈亚雄, 金澜. 一种基于分光测色的印刷油墨配色数学模型[J]. 北京印刷学院学报, 1998(2):21-25.
- [11] 唐仁献. Turan 不等式与 Forsy the 不等式的一个新证明[J]. 零陵师专学报, 1984(S1):1-5.

The Discussion on Applying Calculus to Prove Inequality in Higher Mathematics

HUO Nu—mei

(Fenyang Normal School, Lvliang University, Fenyang Shanxi 032200, China)

Abstract: There are many important and difficult problems in higher mathematics, among which inequality is a typical problem. Inequality proof is an important link in related higher mathematics tests, and occupies a certain score. Learning inequality proof can develop students' mathematical thinking, and cultivate students' careful logical thinking. The inequality proof has no fixed modes, and the method of solving problems is flexible and changeable with high requirements in skill and understanding. The monotonicity of function, the extreme value of function and the lagrange mean value theorem are applied to solve the inequality effectively. The calculus theorem of inequality is applied to prove the inequality by an example. The difference method has been taken to observe the efficiency of the problem solving method.

Key words: higher mathematics; calculus; inequality

(上接第 97 页)

The Data-smoothing Algorithms and Matlab Implementation Based On Monitoring Spline Function

YANG Hai—xing, et al.

(China Southwest Architectural Design and Research Institute Corp., LTD, Chengdu 610051, China)

Abstract: Monitoring data in engineering always inevitably contains errors. If using the monitoring data which without data smoothing treatment to do data analysis, the error will be magnified immensely and affect the analysis results directly. In this paper, firstly, a functional basis has been established based on certain smoothing criteria and approximation criteria. The data smoothing problems are transformed into functional problems. Then, the odd smoothing spline function is structured based on B-spline function to establish a system of equations to solve functional minimum value. At last, the data smoothing algorithm and its assembly program are given, and the feasibility of this algorithm has been verified through a simple calculating example.

Key words: monitoring data; errors; spline function; smoothing data; Matlab program