

ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2012-2013

Thầy Lê Phê Đô

Thời gian: 90 phút

Câu 1.

Một hộp ban đầu chứa bốn viên bi đen và bốn viên bi trắng. Thí nghiệm sau được lặp lại vô hạn lần: một viên bi được lấy từ hộp; nếu bi màu trắng thì nó được đặt trả lại hộp, nếu khác nó được đặt ra ngoài.

- Hãy vẽ sơ đồ ngũ phân cho thí nghiệm này và gán nhãn các cành bằng xác suất chuyển. Gợi ý: hộp chỉ có thể ở 1 trong 5 trạng thái.
- Hãy tìm xác suất của các kết cục: www, bww, bbw, bbwwww.
- Hãy tìm xác suất để hộp không còn bi đen sau 5 lần lấy.
- Hãy tìm xác suất để hộp còn 2 bi đen sau n phép thử.

Câu 2.

Giả sử c là một hằng số, chứng minh các hệ thức:

- $\text{VAR}[c] = 0$
- $\text{Var}[X+c] = \text{VAR}[X]$
- $\text{VAR}[cX] = c^2\text{VAR}[X]$

Câu 3.

So sánh xấp xỉ Poisson với xác suất nhị thức với $k = 0, 1, 2, 3$ và

- $n = 10$ và $p = 0.1$
- $n = 20$ và $p = 0.05$
- $n = 100$ và $p = 0.01$

Câu 4.

Cho cặp biến ngẫu nhiên (X, Y) có hàm khối lượng xác suất đồng thời như sau:

		Y		
		2	3	4
X	-1	1/1 6	1/1 6	1/ 8
	2	1/6	1/6	1/ 6
	3	0	1/4	0

- Chứng tỏ rằng X và Y không độc lập.
- Cho bảng xác suất của các BNN U và V có cùng phân phối biên như X và Y, nhưng chúng độc lập.
- Lập ma trận hiệp phương sai $C(X, Y)$ của cặp BNN (X, Y)
- Tính $P_X(1/Y = 2)$; $P_Y(2/X = 1)$
- Tính $E(X/Y = 2)$ và $E(Y/X = 1)$

Câu 5. (Phương sai mẫu)

Cho X_1, \dots, X_n là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối mà kỳ vọng và phương sai chưa biết. Phương sai mẫu được định nghĩa như sau:

$$V_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - M_n)^2, \text{ trong đó } M_n \text{ là trung bình mẫu.}$$

- Chứng tỏ rằng $\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - M_n)^2 + n(M_n - \mu)^2$.
- Dùng kết quả phần a chứng minh rằng $E\left[k \sum_{j=1}^n (X_j - M_n)^2\right] = k(n-1)\sigma^2$.
- Dùng phần b chứng minh rằng $E[V_n^2] = \sigma^2$ bởi vậy V_n^2 là ước lượng không chệch cho phương sai.
- Tìm kỳ vọng của phương sai mẫu nếu như $n-1$ được thay bằng n . Chú ý rằng đây là một ước lượng chệch cho phương sai.