数理经济学
(最优控制理论和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2023 年 05 月 9 日

无限水平问题

研究动机

在研究变分问题时, 研究过终止时间 $T = +\infty$ 情况下的最优变分问题.

- 在数学上, 最优控制问题做为变分问题的发展, 故也需要研究终止时间 $T = +\infty$ 情况下的最优控制问题.
- 在经济学上, 需要研究各种终生时间 (lifetime) 问题.

由此, 考虑无限时间水平的最优控制问题也是重要的.

为了求解无限时间水平的最优变分问题, 需要给出对应的横截条件. 由此, 为了求解无限时间水平的最优控制问题, 也需要给出对应的横截条件.

无限水平问题

在 Pontryagin 等人的研究中[1], 对于无限时间水平的最优控制问题, 考虑了如下的一种自控问题, 其中无限远的边界条件被定义为:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_\infty. \quad (\text{这里 } y_\infty \text{ 给定}) \tag{E-13-1}$$

即他们规定无限时间水平伴随着固定的终止状态. 在上述假设下, Pontryagin 证明了最大值原理. 此外, 若控制问题是上述自控问题, 则最优控制问题对应的横截条件变为:

$$\lim_{t\to+\infty} H = 0.$$

一般情况下, 可以变为:

$$H = 0 \text{对所有的 } t \in [0, +\infty) \text{ 成立.}$$

[1] L.S. Pontryagin, et al., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York, 1962, pp. 189-191.

变分观点

首先把目标泛函和状态变量的运动方程合成为如下的等价目标泛函:

$$\mathscr{V} = \int_0^T H(t, y(t), \mu(t), p(t))dt - \int_0^T p(t)\dot{y}(t)dt. \tag{E-13-2}$$

其中 H 为 Hamilton 函数且 $p(t)$ 为乘子, 上述式子可由 Hamilton 函数得到. 对(E-13-2)中的第二个积分进行分部积分可得:

$$\mathscr{V} = \int_0^T [H(t, y(t), \mu(t), p(t)) + \dot{p}(t)y(t)]dt - p(T)y_T + p(0)y_0. \tag{E-13-3}$$

其中, $p(0)$ 和 $p(T)$ 分别对应乘子 $p(t)$ 的初值和终值, y_0 和 y_T 分别对应状态变量 $y(t)$ 的初值和终值.

变分

考虑控制变量 $\mu(\cdot)$ 的变分为:

$$\mu(t) = \mu^*(t) + \epsilon p(t).$$

且对应的状态变量 $y(\cdot)$ 的变分为:

$$y(t) = y^*(t) + \epsilon q(t).$$

类似地, 对于终止时间 T 和终止值 y_T 的变分为:

$$T = T^* + \epsilon \Delta T, \qquad y_T = y_T^* + \epsilon \Delta y_T.$$

无限水平问题

由此可以得到(E-13-3)对应的一阶变分为:

一阶变分

$$\frac{d\mathscr{V}}{d\epsilon} = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{p} \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial \mu} p(t) \right] dt + H_{t=T} \Delta T - p(T) \Delta y_T = 0.$$

将上式推广到无限时间水平时,可以得到:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{p} \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial \mu} p(t) \right] dt = 0.$$

且还成立:

$$\lim_{T \to +\infty} H_{t=T} \Delta T = 0. \tag{E-13-4}$$

$$\lim_{T \to +\infty} p(T) \Delta y_T = 0. \tag{E-13-5}$$

由(E-13-4)可以得到在无限时间水平下，最优控制问题对应的横截条件.

横截条件

在无限时间水平下，$\Delta T \neq 0$. 由此，对应的横截条件为:

$$\lim_{t \to +\infty} H = 0. \tag{E-13-6}$$

此外，这个条件对状态变量 $y(\cdot)$ 的终止值是否给定无关. 另一方面，当 y_T 自由时，对应的横截条件为:

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 0. \tag{E-13-7}$$

上述条件的完整证明和应用是由 Michel 完成的[2].

[2] P. Michel, On the transversality condition in infinite horizon optimal problems, Econometrica, 1982, pp.975-985.

无限水平问题

横截条件的经济学解释

回忆 Dorfman 的假设:

- 状态变量 $y(\cdot)$ 代表企业的资本存量;
- 控制变量 $\mu(\cdot)$ 代表企业的决策;
- 目标泛函中的被积函数表示 t 时刻的利润函数.

由此, 可以知道 Hamilton 函数表示的是企业在决策 $\mu(\cdot)$ 下的总利润 (当前利润 + 未来利润). 当 $t \to +\infty$ 时, $H \to 0$ 说明企业应该保证在 $t \to +\infty$ 时, 所有的利润机会都会被充分利用. 这说明不管企业的终止状态固定与否, 企业都应该把利润机会充分用尽, 以获取最大利润.

横截条件的经济学解释

另一方面，在(E-13-4)中：

- 假设终止状态 y_T 是固定的，由于有

$$\lim_{t\to\infty} y_T = y_\infty$$

  成立，故有 $\Delta y_T = 0$. 此时，无论 $p(t)$ 取何值，(E-13-5)都成立；
- 假设终止状态 y_T 是自由可变的，在 $T \to +\infty$ 时，不再成立 $\Delta y_T = 0$. 故要使(E-13-5)成立，需要对应的横截条件(E-13-7)成立. 而乘子 $p(t)$ 表示影子价格，故横截条件(E-13-7)说明在 $t \to \infty$ 时，影子价格为 0. 条件(E-13-7)是否真的为横截条件，受到了很多的质疑. 通过讨论下面的例子，将进一步说明.

Halkin 的例子

考虑 Halkin 构造的例子[3].

Halkin 的自控问题

$$J[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot)\in[0,1]} \int_0^{\infty} (1 - y(t))\mu(t)dt$$
$$s.t. \quad \dot{y}(t) = (1 - y(t))\mu(t);$$
$$y(0) = 0.$$

由于目标泛函中的被积函数与 $y(\cdot)$ 对应的运动方程相同，故目标泛函可以改写成：

$$\int_0^{\infty} \dot{y}(t)dt = \lim_{t\to\infty} y(t) - y(0) = \lim_{t\to\infty} y(t).$$

故此时目标泛函的值为状态变量的终止状态. 由此，求上述目标泛函的最大值等价于求状态变量 $y(\cdot)$ 的上界.

[3] H. Halkin, Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons, Econometrica, 1974, pp.267-272.

Halkin 的例子

为求得状态变量 $y(\cdot)$ 的上界，首先要找到 $y(\cdot)$ 的路径，由此可得 $y(\cdot)$ 的运动方程为:

$$\dot{y}(t)+\mu(t)\cdot y(t)=\mu(t).$$

其对应的解为:

$$y(t)=-e^{-\int_0^t \mu(s)ds}+1.$$

由于 $\mu(t)\in[0,1]$，故函数 $e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$ 的取值范围为 $(0,1]$，故 $y(t)$ 的取值范围为 $[0,1)$. 此时，对任何控制 $\mu(t)$，若只要当 $t\to\infty$ 时，成立 $\int_0^t \mu(s)ds\to+\infty$，从而使得 $e^{-\int_0^t \mu(s)ds}\to 0$，进而得到 $y(t)\to 1$. 此时可以得到目标泛函最大，且不存在唯一的最优控制. Halkin 构造的最优控制为:

$$\mu^*(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1];\\ 1, & t\in(1,+\infty).\end{cases}$$

由于 $\int_1^\infty 1dt$ 发散，从而使得 $\lim_{t\to\infty} y(t)=1$ 最大.

Halkin 的例子

正如 Arrow 和 Kurz 指出，在上述模型中，对所有的 t 取 $\mu^*(t) = u_0(0 \le u_0 \le 1)$，其中 u_0 是 $[0,1]$ 中的一个点，也可满足上述目标泛函最大．另一方面，此时对应的 Hamilton 函数为：

$$H = (1-y)\mu + p(1-y)\mu = (1+p)(1-y)\mu.$$

由 $\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$ 可得 $(1+p)(1-y) = 0$ 或 $1+p=0$，这是由于 $y(\cdot) < 1$．故成立 $p^*(t) = -1$．这与横截条件(E-13-7)矛盾．然而，这是不对的．这是因为若上述问题的最大泛函存在，那么极限

$$\lim_{t\to\infty} y(t)$$

必然存在，故并不对应 y_T 自由的情形．此时，对应的横截条件应该为：

$$\lim_{t\to\infty} H = 0.$$

Halkin 的例子

另一方面，由于 Hamilton 函数关于 μ 为线性的．因此，为使得 Hamilton 函数最大，$\mu^*(t)$ 的取值仅能到边界（可视为 Bang-Bang 控制），即 $\mu^*(t) = 0$ 或 $\mu^*(t) = 1$．然而，若取 $\mu^*(t) = 0$，则有 $\dot{y} = 0$，从而使得 y 不可能增长．故取最优控制为：对 $\forall t \in [0, \infty)$，成立：

$$\mu^*(t) = 1.$$

由此可得对应的伴随方程为：

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = (1 + p(t)) \cdot \mu^*(t) = 1 + p(t).$$

此外，对应的运动方程为：

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = (1 - y(t)) \cdot \mu^*(t) = 1 - y(t).$$

Halkin 的例子

此时, 上述两个方程的通解为:

$$p(t) = Ae^t - 1; (A \text{ 为常数})$$
$$y(t) = Be^{-t} + 1. (B \text{ 为常数})$$

又由于初始条件 $y(0) = 0$, 故有 $B = -1$, 故 $y(t)$ 的定解为:

$$y(t) = 1 - e^{-t} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = 1.$$

故 $y(\cdot)$ 满足之前的分析. 现在的问题是确定常数 A. 现在考虑横截条件:

$$\lim_{t \to +\infty} H = 0 \Rightarrow p(t) = -1, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

这就说明 $A = 0$.

注记-13-1

虽然通过最大值原理和横截条件(E-13-6)得到的最优控制函数和 Arrow 和 Kurz 构建的最优控制函数不一样, 但 $p^*(t) = -1$ 与 Arrow 和 Kurz 得到的结果一样. 故由此说明横截条件(E-13-7)并不适用于 Halkin 的例子.

Ramsey 模型考察了跨期资源配置问题，并使用变分法求解了模型. 在后面的发展中，经济学家将这个问题重新改建成了最优控制问题. 这种新的架构被称为新古典最优增长理论 (the newclassical theory of optimal growth), 且其主要在以下两个方面对 Ramsey 模型进行了扩展:

- 劳动力被假设以外生的固定增长率 $n > 0$ 增长 (在 Ramsey 模型中，$n = 0$);
- 社会效用被假设以固定速率 $\rho > 0$ 进行时间贴现 (在 Ramsey 模型中，$\rho = 0$).

这个新模型由 D. Cass 构建[4].

[4] D. Cass, Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation, Review of Economic Studies, 1965, pp.233-240.

新古典最优增长理论

首先，假设新古典生产函数为:$Y = Y(K, L)$，其中 K 表示资本，L 表示劳动，且产出函数 Y 具有下列特点:

- 规模报酬不变;
- 边际产品为正;
- 每种投入物的报酬递减.
- 平均劳动产出和资本与劳动之比分别为:

$$y = \frac{Y}{L}(\text{平均劳动产出}), \quad k = \frac{K}{L}(\text{资本与劳动之比}).$$

- 由此可将生产函数表示为:

$$y = \phi(k), \quad \text{其中 } \phi'(k) > 0,\ \phi''(k) < 0,\ \text{对所有 } k > 0.$$

- 另外，还规定:

$$\lim_{k \to 0} \phi'(k) = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \phi'(k) = 0.$$

新古典最优增长理论

假设总产出 Y 要么配置给消费 C, 要么配置给总资产 I_g. 因此, 净投资可以表示为:

$$\dot{K} = Y - C - \delta K. \quad (\delta \text{ 表示折旧率})$$

将上式通除以 L, 并且定义人均消费为 $c = \frac{C}{L}$, 则有:

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{Y}{L} - \frac{C}{L} - \delta\frac{K}{L} = \phi(k) - c - \delta k. \tag{E-13-8}$$

在上式中, 左侧是关于 K 的导数, 右侧是关于 k 的函数, 为了统一, 考虑

$$\begin{aligned}\dot{K} = \frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt}(kL) = k\frac{dL}{dt} + L\frac{dk}{dt} \\ &= L\dot{k} + kLn \quad \left(\text{这里取 } n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\right) \\ &= L(kn + \dot{k}).\end{aligned}$$

将上述结果代入(E-13-8)中，整理可得:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k.$$

这个方程描述了资本劳动比率 k 如何随着时间变化而变化，是新古典增长理论的基本微分方程. 另一方面，假设社会效用函数 $U(c)$ 对所有 $c > 0$ 成立:

$$U'(c) > 0, \quad U''(c) < 0, \quad \text{且} \quad \lim_{c \to 0} = \infty, \quad \lim_{c \to \infty} = 0.$$

由于劳动力以速率 n 增长，Cass 认为任何时点的社会效用在加总之前应该先用人口进行加权，故当贴现率为 $\rho > 0$ 时，目标泛函形式为:

$$\int_0^{\infty} U(c(t))L(t)e^{-\rho t}dt = L_0 \int_0^{\infty} U(c(t))e^{-(\rho - n)t}dt.$$

这里 L_0 是方程 $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$ 对应的初值.

为了保证上述目标泛函的收敛性, Cass 规定 $\rho - n > 0$. 故可令 $r = \rho - n$, 又由于 L_0 为常数, 故可令 $L_0 = 1$. 由此, 上述目标泛函可以简化为如下简单形式:

$$\int_0^\infty U(c(t))e^{-rt}dt. \tag{E-13-9}$$

由此, 最优增长问题为:

$$\begin{aligned} J[c^*(\cdot)] = &\max_{c(t)\in[0,\phi(k(t))]} \int_0^\infty U(c(t))e^{-rt}dt \\ s.t. \quad &\dot{k}(t) = \phi(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t) \\ &k(0) = k_0. \end{aligned}$$

由此，对应的 Hamilton 函数为:

$$H = U(c)e^{-rt} + p[\phi(k) - c - (n+\delta)k]$$

根据最大值原理，为了求解最大值，考虑:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-rt} - p = 0 \Rightarrow U'(c) = pe^{rt}.$$

上式说明达到最优时，人均消费的边际效用 $U'(c)$ 应该等于资本的影子价格 p 的累积. 由于

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c^2} = U''(c)e^{rt} < 0. \quad (\text{边际效用递减})$$

由此可知 H 关于 c 的确被最大化而不是最小化.

现在考虑如下伴随方程:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -p[\phi'(k) - (n + \delta)].$$

及对应的运动方程:

$$\dot{k} = \frac{\partial H}{\partial p} = \phi(k) - c - (n + \delta)k.$$

由于目标泛函中具有折现因子 e^{-rt}, 故可以考虑当前值 Hamilton 函数进行求解.

当前值 Hamilton 函数

定义当前值 Hamilton 函数为:

$$H_\epsilon = U(c) + m[\phi(k) - c - (n+\delta)k]$$

此时由对应的最大值原理可知:

$$\frac{\partial H_\epsilon}{\partial c} = U'(c) - m = 0 \Rightarrow m = U'(c).$$

又由于

$$\frac{\partial^2 H_\epsilon}{\partial c^2} = U''(c) < 0. \quad (\text{边际效用递减})$$

故可知此时确实取得了 H_ϵ 关于 c 的最大值.

则在当前 Hamilton 函数 H_ϵ 下考察如下运动方程:

$$\dot{k} = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial m} = \phi(k) - c - (n+\delta)k.$$

此时, 当前值乘子 m 对应的伴随方程为:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial k} + rm \\ &= -m[\phi'(k) - (n+\delta)] + rm \\ &= -m[\phi'(k) - (n+\delta+r)].\end{aligned}$$

如假设最优的消费为 c^*, 则由前面的讨论可知:

$$p^* = U'(c^*)e^{-rt}.$$

由于当 $t \to \infty$ 时, $U'(c^*)$ 存在, 故成立:

$$\lim_{t\to+\infty} p^* = 0$$

此时, Cass 的模型满足横截条件(E-13-7).

另一方面，对于 Hamilton 函数的最优解为:

$$H^* = U(c^*)e^{-rt} + p^*[\phi(k^*) - c^* - (n+\delta)k^*].$$

由于当 $t \to \infty$ 时，$U(c^*)$ 有限，故此时指数项 $U(c^*)e^{-rt}$ 趋于 0. 此外，由上面的讨论知，$t \to \infty$ 时，p^* 趋于 0. 而又有:

$$\dot{k}^* = \phi(k^*) - c^* - (n+\delta)k^*$$

故当 $\dot{k}^*$ 有界时，有:

$$\lim_{t \to +\infty} H^* = 0.$$

此时成立横截条件(E-13-6).

内生技术

Romer[5]在 1990 年研究了企业的内生技术的问题，其假设企业的知识由两部分组成：

- 技术人力资本：它具有"竞用性"，即当一个企业用了，另一个企业便无法使用．由于技术人力资本是竞用的，故投资于技术人力资本，仅会使个人得到回报．
- 技术资本：这类资本不具备"竞用性"，因为某个企业的使用并不影响其它企业的应用．技术资本的非竞用性意味着知识外溢．技术的发明人无法完全获得该技术的所有收益，故产生了外部性，进而使得个人在技术进步上的努力小于社会最优水平．

Romer 假设技术人力资本固定且不具备弹性，并用 S 表示技术人力资本，其中 S_0 表示技术人力资本的固定总和．由于技术人力可以被用来生产最终商品 Y，或用来改进技术 A，故有：

$$S_Y + S_A = S_0.$$

[5]Paul M. Romer, Endogenous Technical Change, Journal of Political Economic, 1990(5), pp. 71-102.

内生技术

此外, Romer 还假设技术 A 不固定, 它可以通过使用 S_A 进行研发活动及使用现有技术技术 A 进行创造:

$$\dot{A} = \sigma S_A A \Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = \sigma S_A.$$

其中, σ 为研发活动参数. 若 $\sigma > 0$ 和 $S_A > 0$ 成立, 那么说明 $\frac{\dot{A}}{A} > 0$, 即表示技术可以无限增长. 进一步, 假设在最终产品 Y 的生产过程中, 资本 K 和非技术劳动力 L 作为生产要素和人力资本 S_A 和技术 A 一起进入生产过程.

Romer 还假设 Y 的生产过程分为若干步骤. 故可以把技术视为由一系列资本" 因子" 组成, 即 $(x_1, x_2, \cdots)$, 其中包括还没有发明的技术. 此外, 若对于 $i \geq A$, 可以令 $x_i = 0$, 则 A 可以表示当前技术.

内生技术

进一步, Romer 假设最终产品的生产函数是 Cobb-Douglas 函数类型:

$$Y = S_Y^\alpha L_0^\beta (x_1^{1-\alpha-\beta} + x_2^{1-\alpha-\beta} + \cdots).$$

其中, L_0 表示非技术劳动力, 是一个固定且无弹性的量. 然后, 令因子指标 i 变为连续变量, 故生产函数变为:

$$Y = S_Y^\alpha L_0^\beta \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di. \tag{R-1}$$

由积分中值定理可知: 存在 $\bar{x}$ 使得:

$$\int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di = \bar{x}^{1-\alpha-\beta} \int_0^A di = A\bar{x}^{1-\alpha-\beta}.$$

故(R-1)可以简化为:

$$Y = S_Y^\alpha L_0^\beta A\bar{x}^{1-\alpha-\beta}. \tag{R-2}$$

内生技术

此外, Romer 假设为了生产一单位任何类型的技术" 因子", 需要投入 γ 单位资本, 即:

$$K = \gamma A\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{K}{\gamma A}.$$

将其代入(R-2)中, 可以得到:

$$Y = S_Y^\alpha L_0^\beta A(\frac{K}{\gamma A})^{1-\alpha-\beta} = (S_Y A)^\alpha (L_0 A)^\beta K^{1-\alpha-\beta}\gamma^{\alpha+\beta-1}. \tag{R-3}$$

在上式中, $(S_Y A)$ 表示技术可增大人力资本; $(L_0 A)$ 表示技术可以增加劳动. 此外, 上式说明技术是内生引入的而不是外生施加的. 最后, 考虑企业消费为 C, 并假设最终商品的最终产出为 Y, 根据新古典经济学假设, 可假设资本存量的方程为:

$$\dot{K} = Y - C = \gamma^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}(S_0 - S_A)^\alpha L_0^\beta K^{1-\alpha-\beta} - C. \tag{R-4}$$

内生技术

技术方程

假设 C 和 S_A 为控制变量，将 A 和 K 作为状态变量，考虑常数弹性效用函数，则有如下最优控制问题.

最优控制问题

由此得到最优控制问题为:

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^\infty \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \\
&s.t. \quad \dot{A} = \sigma S_A A; \\
&\qquad \dot{K} = \gamma^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} (S_0 - S_A)^\alpha L_0^\beta K^{1-\alpha-\beta} - C; \\
&\qquad A(0) = A_0, K(0) = K_0.
\end{aligned}
$$

其中 $0 < \theta < 1$. 为了方便起见，定义:

$$\Delta = \gamma^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} (S_0 - S_A)^\alpha L_0^\beta K^{1-\alpha-\beta}.$$

为了求解上述最优控制问题, 考虑如下当前值的 Hamilton 函数:

$$H_\epsilon = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + p_A(\sigma S_A A) + p_K(\Delta - C).$$

其中, p_A 和 p_K 分别表示 A 和 K 对应的影子价格 (乘子). 由此有如下运动方程:

$$\frac{\partial H_\epsilon}{\partial C} = C^{-\theta} - p_K = 0 \Rightarrow p_K = C^{-\theta}.$$

$$\frac{\partial H_\epsilon}{\partial S_A} = p_A \sigma A - p_K \alpha (S_0 - S_A)^{-1} \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{p_A \sigma A}{p_K \alpha}(S_0 - S_A).$$

此外，对应的伴随方程为:

$$\dot{p}_A = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial A} + \rho p_A = -p_A \sigma A - \frac{p_A}{A}(\alpha + \beta)\Delta + \rho p_A.$$

$$\dot{p}_K = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} + \rho p_K = -\frac{p_K}{K}(1 - \alpha - \beta)\Delta + \rho p_K.$$

故 Romer 得到了上述四个方程，通过求解上述四个方程，就可以得到最优消费 C^* 和技术研发活动资本 S_A^*，使得累积消费效用最大.