高级数理经济学
(概率基础回顾)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

October 15, 2023

可测空间 (measurable space)

称 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间若 Ω 为一个非空集合且 $\mathcal{F}$ 是 Ω 中的一个 σ-域 (σ-field). 也就是说, $\mathcal{F}$ 是 Ω 中的一些子集组成的集合且满足:

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{F}, \\ A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{F}, \\ A_i \in \mathcal{F} \qquad , i = 1, 2, \cdots \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

若 $\mathcal{F}$ 满足上述情况, 则任意 $A \in \mathcal{F}$ 被称为事件 (在实变函数中称为可测集).

概率测度 (probability measure)

映射 $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$ 被称为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 中的概率测度若成立:

(i) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$ 且 $\mathbb{P}(\Omega)=1$;

(ii) 对 $A_i\in\mathcal{F}$ 且 $A_i\cap A_j=\emptyset$, 这里 $i,j\geq 1, i\neq j$, 成立:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i).$$

此外, 若 $A\in\mathcal{F}$ 成立 $\mathbb{P}(A)=0$, 则称 A 为 $\mathbb{P}$ 零测集.

概率空间

称 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为概率空间. 称上述概率空间是完备的若 $\mathcal{F}$ 包含了所有 $\mathbb{P}$ 零测集的子集, 即:

$$A\in\mathcal{F},\quad \mathbb{P}(A)=0,\quad B\subset A\Rightarrow B\in\mathcal{F}.$$

以概率"1"成立

在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中, 若事件 $A \in \mathcal{F}$ 成立 $\mathbb{P}(A) = 1$, 则称 A 以概率"1"成立 (almost surely), 即:

$$\mathbb{P}(A) = 1, \quad \mathbb{P} - a.s.$$

Borel 集

假设 $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有开集所组成集合. 进一步, 设 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是包含 $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ 的最小 σ-域, 则称 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 为 Borel σ-域. 此时, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 为一个可测空间.

例-1

设 $\Omega = [0,1]$ 且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ 成立有:

$$\mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0,1] \equiv \{A \cap [0,1] | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

则 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间. 进一步, 假设 $\mathbb{P}$ 是一个区间 [0, 1] 上的 Lebesgue 测度, 则可知 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间. 令 $\mathcal{F}$ 为在 Lebesgue 测度下 $\mathcal{B}([0,1])$ 的完备化空间, 也就是说, $\mathcal{F}$ 是包含

$$\mathcal{B}([0,1]) \cup \{A \subset [0,1] | \exists B \in \mathcal{B}([0,1]), A \subset B, \mathbb{P}(B) = 0\}$$

最小的 σ-域. 事实上, $\mathcal{F} = \mathcal{L}([0,1])$ 为包含 $[0,1]$ 中的所有 Lebesgue 可测集全体的集合.

例-2

假设 Ω 为一个有限或者可列无限集, 或者称 Ω 为离散集. 取 $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, 则 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个可测空间. 若 $\mathbb{P}$ 为一个 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, 则 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个完备概率空间.

随机变量 (random variable)

取 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个概率空间. 映射:

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)^T : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

被称为 $\mathbb{R}^n$ 值的随机变量若成立:

$$\{\varepsilon \leq c\} \equiv \{\omega \in \Omega \big| \varepsilon_i(\omega) \leq c_i, 1 \leq i \leq n\} \in \mathcal{F}, \quad \forall c \equiv (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

上述定义也等价于:

$$\varepsilon^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

此外, 满足上述定义的 ε 也被称为 $\mathcal{F}$ 可测. 最后, 定义 $L^0_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 为包含所有随机变量 ($\mathcal{F}$-可测) 的集合.

假设 Ω 为一个非空集合且 $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为一个给定的映射. 定义 $\mathcal{F}^\xi$ 为一个最小的 σ-域使得 ξ 为 $\mathcal{F}^\xi$-可测映射. 则称 $\mathcal{F}^\xi$ 是一个由 ξ 生成的 σ-域, 即:

$$\mathcal{F}^\xi=\xi^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

例-3

(1) 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个可测空间且 $\mathcal{F}=2^\Omega$, 则 $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是一个随机变量.

(2) 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个可测空间且 $\mathcal{F}$ 是一个有限集. 则此时 $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是一个随机变量当且仅当 ξ 是一个分段常数映射. 特别地, 若 $\mathcal{F}=\{\Omega,\emptyset\}$, 则 $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是一个随机变量当且仅当 ξ 是一个常数映射.

分布函数 (distribution function)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间. 对任意的随机变量 $\xi \in L^0_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, 定义 $F^\xi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, 若其满足:

$$F^\xi(x) = \mathbb{P}(\{\xi \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

则称 F^ξ 为 ξ 的分布函数.

密度函数 (density function)

若 $x \to F^\xi$ 是一个在 Lebesgue 测度下 $\mathbb{R}^n$ 上的绝对连续函数, 即存在一个可积函数 $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ 成立:

$$F^\xi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \rho(y_1, \cdots, y_n) dy_1 \cdots dy_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

则称 $\rho(\cdot)$ 为随机变量 ξ 的密度函数.

数学期望 (mathematical expectation)

对任意随机变量 $\xi \in L^0_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$，定义其数学期望如下:

$$\mathbb{E}[\xi] \triangleq \int_\Omega \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} y dF^\xi(y) < +\infty.$$

范数

对任意的 $p \in [1,\infty)$，定义 $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$: 对所有的 $\xi \in L^0_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 且成立

$$\|\xi\|_p \triangleq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} = \left(\int_\Omega |\xi(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^p dF^\xi(y)\right)^{1/p} < +\infty.$$

进一步，定义 $L^\infty_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 为具有如下范数的集合:

$$\|\xi\|_\infty \triangleq \inf_{A\in\mathcal{F},\mathbb{P}(A)=0} \sup_{\omega\in\Omega\setminus A} |\xi(\omega)| = \mathrm{esssup}_{\omega\in\Omega}|\xi(\omega)| < \infty.$$

由此，对 $p \in [1,\infty)$，$\|\cdot\|_p$ 是一个范数且 $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 空间.

Hilbert 空间

$L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间若其具有如下内积:

$$\langle x,y\rangle=\int_\Omega \xi(\omega)^T\eta(\omega)d\mathbb{P}(\omega),\quad \forall\xi,\eta\in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

条件数学期望

设 $\xi\in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, 且设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-域. 则存在一个唯一的函数 $f\in L^1_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足:

$$\int_A \xi(\omega)d\mathbb{P}(\omega)=\int_A f(\omega)d\mathbb{P}(\omega),\quad \forall A\in\mathcal{G}.$$

此外, 称 f 为 ξ 在 $\mathcal{G}$ 上的条件数学期望, 记为 $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$, 即:

$$\int_A \xi(\omega)d\mathbb{P}(\omega)=\int_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}](\omega)d\mathbb{P}(\omega),\quad \forall A\in\mathcal{G}.$$

一些条件数学期望的性质

假设 $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ 为 σ-域且满足 $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$. 则有:

(i) 令 $\xi \in L^1_{\mathcal{G}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, 假设 $\eta, \zeta \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R})$ 且满足 $\eta \leq \zeta$, 则成立:

$$\mathbb{E}(\eta|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G}) \quad 和 \quad \mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \xi\mathbb{E}(\eta|\mathcal{G}).$$

特别地, $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$.

(ii) 取 $\xi \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 且与 $\mathcal{G}$ 独立, 即:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \forall A \in \mathcal{F}^{\xi}, \quad B \in \mathcal{G}.$$

则有:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\xi].$$

(iii) 对 $\forall \eta \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, 成立:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2) = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_1].$$

一些条件数学期望的性质

(iv) 若函数 $\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为一个凸函数且满足 $\phi(\xi) \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R})$, 则有:

$$\phi(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(\xi)|\mathcal{G}].$$

特别地, 对任意的 $p \geq 1$ 和 $\xi \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, 成立:

$$|\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]|^p \leq \mathbb{E}(|\xi|^p|\mathcal{G}).$$

(v) (Hölder) 设 $p,q \in (1,+\infty)$ 且成立: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 假设 $\xi \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R})$ 和 $\eta \in L^q_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R})$, 则有:

$$\mathbb{E}\left(|\xi\eta||\mathcal{G}\right) \leq \left(\mathbb{E}[|\xi|^p|\mathcal{G}]\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}[|\eta|^q|\mathcal{G}]\right)^{1/q}, \quad a.s.$$

(vi) (Minkowski) 取 $p \in [1,+\infty)$ 且有 $\xi,\eta \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R})$, 则成立:

$$\left(\mathbb{E}[|\xi+\eta|^p|\mathcal{G}]\right)^{1/p} \leq \left(\mathbb{E}[|\xi|^p|\mathcal{G}\right)^{1/p}+\left(\mathbb{E}[|\eta|^p|\mathcal{G}\right)^{1/p}.$$

域流 (filtration)

在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中, 定义 $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \big| t \in [0, T]\}$ 为一族 $\mathcal{F}$ 的子 σ-域. 若其满足:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

则称 $\mathbb{F}$ 为域流, 且 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 为一个含有域流的概率空间.

注-1

称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 满足通常条件 (usual condition), 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是完备的, $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 中所有的 $\mathbb{P}$-零集且 $\mathbb{F}$ 右连续, 即:

$$\mathcal{F}_{t+} \triangleq \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

随机过程 (stochastic process)

映射 $X:[0,T]\times\Omega\to\mathcal{R}^n$ 被称为随机过程若对给定的 $t\in[0,T]$, $\omega\to X(t,\omega)$ 是一个随机变量. 基于上述定义, 可知对任意 $\omega\in\Omega$, 映射 $t\to X(t,\omega)$ 被称为样本路径 (sample path). 此外,

(i) 称随机过程 $X(\cdot)$ 可测, 若满足 $(t,\omega)\to X(t,\omega)$ 是 $\mathcal{B}[0,T]\otimes\mathcal{F}$-可测;

(ii) 称随机过程 $X(\cdot)$ 为 $\mathbb{F}$-适定 (adapted), 若满足 $\forall t\in[0,T]$, $\omega\to X(t,\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测;

(iii) 称随机过程 $X(\cdot)$ 为 $\mathbb{F}$-循序可测 (progressively measurable), 若满足对所有 $s\in[0,T]$, $(s,\omega)\to X(s,\omega)$ 是 $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t$-可测;

(iv) 称随机过程 $X(\cdot)$ 在 $[0,T]$ 上 (左, 右) 连续, 若存在一个 $\mathbb{P}$-零集合 N, 对任意 $\omega\in\Omega\backslash N$, $t\to X(t,\omega)$(左, 右) 连续.

显然, 若 $X(\cdot)$ 为 $\mathbb{F}$-循序可测, 则其一定是可测和 $\mathbb{F}$-适定的, 反之不对.

修正 (modification)

称随机过程 $X(t,\omega)$ 有一个修正过程 $Y(t,\omega)$ 若:

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \big| X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1,$$

对给定的 $t \in [0,+\infty)$ 成立. 此外, 如果随机过程 $X(t,\omega)$ 是随机过程 $Y(t,\omega)$ 的一个修正, 则随机过程 X 和 Y 有相同的有限维分布函数族.

Chung-Doob-Meyer 定理

假设 $X(\cdot)$ 是可测且 $\mathbb{F}$-适定的随机过程. 则其存在一个 $\mathbb{F}$-循序可测的修正 (modification) $\bar{X}(\cdot)$, 即 $\bar{X}(\cdot)$ $\mathbb{F}$-循序可测且满足:

$$X(t) = \bar{X}(t), \quad a.s., \quad \forall t \in [0,T].$$

此外, 若 $X(\cdot)$ 满足左连续或右连续, 则 $X(\cdot)$ 本身满足 $\mathbb{F}$-循序可测.

停时 (stopping time)

称映射 $\tau:\Omega\to[0,+\infty]$ 为一个 $\mathbb{F}$-停时若其满足:

$$(\tau\leq t)\triangleq\{\omega\in\Omega\big|\tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t,\quad\forall t\geq 0.$$

此外, 对任意的 $\mathbb{F}$-停时 τ, 定义:

$$\mathcal{F}_\tau\triangleq\{A\in\mathcal{F}\big|A\cap(\tau\leq t)\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0\}.$$

Debut 定理

定义 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 为一个满足通常条件的带有域流的概率空间. 若 $X(\cdot)\mathbb{F}$-循序可测且 $G\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\tau\equiv\inf\{t\geq 0\big|X(t)\in G\}$$

是一个停时.

首次撞击时和逃逸时

设 $X(\cdot)$ 是一个 $\mathbb{F}$-适定且连续的随机过程. 定义 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集. 则可以定义随机过程 $X(\cdot)$ 关于集合 E 的首次撞击时 (first hitting time)$\sigma_E(\cdot)$ 为:

$$\sigma_E(\omega) \triangleq \inf\{t \geq 0 \big| X(t,\omega) \in E\},$$

此外, 可以定义随机过程 $X(\cdot)$ 关于集合 E 的首次逃逸时 (first exit time)$\tau_E(\cdot)$ 为:

$$\tau_E(\omega) \triangleq \inf\{t \geq 0 \big| X(t,\omega) \notin E\},$$

则可知 $\sigma_E(\cdot)$ 和 $\tau_E(\cdot)$ 均为 $\mathbb{F}$-停时.

鞅 (martingale)

称随机过程 $X:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是一个鞅若其是一个 $\mathbb{F}$-适定过程且对任意 $t\geq 0$ 满足:

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s]=X(s),\quad \mathbb{P}-a.s.,\ 0\leq s\leq t.$$

例-4

对任意 $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^n)(p\geq 1)$. 则可知 $M(t)=\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t](t\in[0,T])$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅.

Doob 定理

对 $p>1$, 设 $X(\cdot)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 值的右连续 $\mathbb{F}$-鞅且对任意 $t\geq 0$, $\mathbb{E}|X(t)|^p<\infty$. 则成立:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|^p\right)\leq\left(\frac{p}{1-p}\right)^p\mathbb{E}|X(T)|^p,\quad \forall T>0.$$

Brown 运动

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是一个带有域流 $\mathbb{F}$ 的概率空间. 称 $W(\cdot)$ 是一个标准 Brown 运动若其满足:

(i) $W(\cdot)$ 是一个 $\mathbb{F}$-适定的 $\mathbb{R}^d$ 值的连续过程;

(ii) 若成立 $\mathbb{P}(W(0)=0)=1$, 且对任意 $0 \le s \le t$ 成立:

$$\mathbb{E}[W(t)-W(s) \big| \mathcal{F}_s] = 0;$$

(iii) $W(t)-W(s) \sim N(0,(t-s)I)$. 这里, N 表示标准正态分布函数.

Brown 运动生成的最小 σ-域

对任意 $t>0$, 取 $s \in [0,t]$, 称:

$$\mathcal{F}_t^W \triangleq \sigma\{W(s), 0 \le s \le t\} \subseteq \mathcal{F}_t.$$

为 Brown 运动 $W(\cdot)$ 生成的最小 σ-域. 此外, 称 $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\ge 0}$ 及扩充的 $\mathbb{P}$-零测集所构成域流称为 Brown 运动 $W(\cdot)$ 生成的自然域流 (nature filtration).

Itô 积分

问题

怎么样找到一个合适定义，说明如下积分的结果是什么.

$$\int_0^T W dW = ?$$

Riemann 积分需要的一些定义

(i) 若 $\mathbb{P}$ 是 $[0, T]$ 区间上的一个划分，即 $\mathbb{P}$ 是 $[0, T]$ 区间上离散点集且满足:

$$\mathbb{P} := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}.$$

(ii) 划分 $\mathbb{P}$ 的最大间距为:

$$|\mathbb{P}| := \max_{0 \le k \le m-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

Riemann 积分需要的一些定义

(iii) 对固定的 $0 \le \lambda \le 1$ 和 $[0,T]$ 上的划分 $\mathbb{P}$, 定义凸组合:

$$\tau_k := (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}, \quad k = 0, \cdots, m-1.$$

(iv) (Riemann 和) 对划分 $\mathbb{P}$ 和 $0 \le \lambda \le 1$, 可以定义:

$$R = R(\mathbb{P}, \lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Itô 积分

二次变差 (Quadratic variation)

假设 $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ 且假设其上的一个划分为:

$$\mathbb{P}^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_m^n = b\}$$

且满足当 $n \to 0$ 时，有 $|\mathbb{P}^n| \to 0$. 则有:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \to b - a, \quad 当\ n \to \infty.$$

注-2

由上述结果可知:

$$dW \approx \sqrt{dt}.$$

Itô 积分

由上述结果可知，存在一个子列成立：

$$\sum_{k=0}^{m-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \to b - a. \quad a.s.$$

若找到一个 ω 使得该路径是一致 Hölder 连续 $(0 < \gamma < \frac{1}{2})$，则有：

$$b - a \leq K \lim_{n\to\infty} \sup |\mathbb{P}^n|^\gamma \sum_{k=0}^{m-1} |W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)|.$$

这里 K 为一个常数. 由于 $|\mathbb{P}^n| \to 0$，故可知 Brown 运动在该路径下一阶变分不存在 (无限变分)，即成立：

$$\sup_{\mathbb{P}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} |W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)| \right\} = +\infty.$$

Riemman 和的极限

若 $\mathbb{P}^n$ 是 $[0,T]$ 上的一个划分且 $0 \leq \lambda \leq 1$ 固定，定义:

$$R_n = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)).$$

则有:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T.$$

特别地，这里 Riemman 和 R_n 的极限依赖代表点:

$$\tau_k^n = (1-\lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$$

的选取，即 λ 的选取.

Itô 积分

注-3

特别地，若 $G(\cdot)$ 是一个循序可测的随机过程且满足：

$$\int_0^T G^2 dt < \infty.$$

此外，若 $t \to G(t,\omega)$ 是连续的，则有：

$$\sum_{k=0}^{m-1} G(t_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)) \to \int_0^T G dW.$$

Itô 积分

注-4

(i) 若取 $\lambda = 0$, 则可以得到 Itô 定义的随机积分:

$$\int_0^T W\,dW = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2}. \tag{Itô}$$

(ii) 若取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则可以得到 Stratonovich 定义的随机积分:

$$\int_0^T W\,dW = \frac{W^2(T)}{2}. \tag{Stratonovich}$$

首先，对 $T>0$，定义：

$$||f||_T \triangleq ||f||_{L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})}$$

此外，定义如下两个泛函空间：

(i)

$$\mathcal{M}^2[0,T] = \{X \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}) \Big| X\text{是一个右连续的}\mathbb{F}-\text{鞅}$$
$$\text{且成立}X(0)=0, \quad \mathbb{P}-a.s.\}.$$

若定义 $||X||_m = (\mathbb{E}[X(T)^2])^{1/2}$，则可知 $\mathcal{M}^2[0,T]$ 是一个 Hilbert 空间.

(ii)

$$\mathcal{M}^2_c[0,T] = \{X \in \mathcal{M}^2[0,T] \Big| t \to X(t)\text{连续}, \quad \mathbb{P}-a.s.\}.$$

可知，$\mathcal{M}^2_c[0,T]$ 是 $\mathcal{M}^2[0,T]$ 的闭子空间.

Itô 积分

此外，若 $W(\cdot)$ 是一个 $\mathcal{M}_c^2[0,T]$ 中的 Brown 运动，则有 $||W(T)||_T^2 = T$.

简单过程 (simple process)

若取 $f(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$. 对任意 $\epsilon > 0$，则可以构造一个由 $f(\cdot)$ 生成的简单过程 $f^\epsilon(\cdot)$ 如下所示：

$$f^\epsilon(t,\omega) = f_0^\epsilon(\omega) I_{\{t=0\}}(t) + \sum_{i\geq 0} f_i^\epsilon(\omega) I_{(t_i^\epsilon, t_{i+1}^\epsilon)}(t), \quad t \in [0,T],$$

这里 $0 = t_0^\epsilon < t_1^\epsilon < \cdots < t_i^\epsilon \leq T$. 此外，$f_i^\epsilon(\cdot)$ 为 $\mathcal{F}_{t_i^\epsilon}$-可测且满足：

$$||f(\cdot) - f^\epsilon(\cdot)||_T < \epsilon.$$

记所有简单过程构成的集合为 $\mathcal{L}_0[0,T]$.

简单过程的 Itô 积分

定义:

$$\mathbb{I}(f^{\epsilon})(t,\omega) \triangleq \sum_{i\geq 0} f_i^{\epsilon}(\omega)[W(t\wedge t_{i+1}^{\epsilon},\omega) - W(t\wedge t_i^{\epsilon},\omega)], \quad t\in[0,T].$$

此外, 可知算子 $\mathbb{I}:\mathcal{L}_0[0,T]\to\mathcal{M}_c^2[0,T]$ 是一个线性算子. 此外,

$$||\mathbb{I}(f^{\epsilon}-f^{\delta})||_m = ||f^{\epsilon}-f^{\delta}||_T \to 0, \quad \text{as } \epsilon,\delta\to 0.$$

也就是说, $\{\mathbb{I}(f^{\epsilon}),\epsilon>0\}$ 是一个在 $\mathcal{M}_c^2[0,T]$ 中的 Cauchy 序列. 注意到 $\mathcal{M}_c^2[0,T]$ 是一个闭子空间, 故其中任意 Cauchy 列必然收敛. 由此, 上述简单过程的 Itô 积分在 $\epsilon\to 0$ 时可以得到:

$$||\mathbb{I}(f^{\epsilon})-\mathbb{I}(f)||_m = 0, \quad \epsilon\to 0.$$

此外, 由于简单过程的分段点及分段函数值的选取与 f 独立 (依赖于 ϵ).

Itô 积分

Itô 积分

对于 $f(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$, 称 $\mathbb{I}(f)(\cdot)$ 为其对应的 Itô 积分, 即:

$$\int_0^t f(s)dW(s) \triangleq \mathbb{I}(f)(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

进一步, 对任意 $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ 及任意两个 $\mathbb{F}$-停时 σ 和 τ 满足 $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$, $\mathbb{P}$-a.s., 可以定义:

$$\int_\sigma^\tau f(s)dW(s) \triangleq \mathbb{I}(f)(\tau) - \mathbb{I}(f)(\sigma).$$

注记

关于 Itô 积分定义更加详细的论述可见:
Bernt, Oksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications(6th), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.

Itô 积分的性质-1

对任意 $f, g \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ 及任意两个 $\mathbb{F}$-停时 σ 和 τ 满足 $\sigma \le \tau$, $\mathbb{P}$-a.s., 则成立:

$$\mathbb{E}\left\{\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} f(r)dW(r)\bigg|\mathcal{F}_\sigma\right\} = 0,$$

且成立:

$$\mathbb{E}\left\{\left[\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} f(r)dW(r)\right]\left[\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} g(r)dW(r)\right]\bigg|\mathcal{F}_\sigma\right\} = \mathbb{E}\left\{\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} f(r)g(r)dr\bigg|\mathcal{F}_\sigma\right\}.$$

特别地, 对任意 $0 \le s < t \le T$, 上述两个等式任然成立.

Itô 积分的性质-2

对任意的 $\mathbb{F}$-停时 τ 和 $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$, 定义:

$$\tilde{f}(t) = f(t) I_{\{\tau \geq t\}},$$

则有:

$$\int_0^{t\wedge\tau} f(s)dW(s) = \int_0^t \tilde{f}(s)dW(s).$$

Itô 积分

鞅表示定理

假设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 是一个完备概率空间, $W(\cdot)$ 是一个一维的标准 Brown 运动且 $\mathbb{F}$ 为其生成的自然域流. 定义 $X(\cdot)\in\mathcal{M}_c^2[0,T]$, 则存在一个唯一的 $f(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ 使得:

$$X(t)=X(0)+\int_0^t f(s)dW(s),\quad t\in[0,T],\ a.s.$$

上式可以将 $f(\cdot)$ 视为 $X(\cdot)$ 的 ‘ 微分 ’.

Itô 过程

随机过程 $X(\cdot)$ 被称为 Itô 过程若其有如下形式:

$$X(t)=X(0)+\int_0^t b(s)ds+\int_0^t \sigma(s)dW(s),\quad t\in[0,T].$$

这里, $b(\cdot)\in L^0_{\mathbb{F}}(\Omega;L^1(0,T;\mathbb{R}^n))$ 且 $\sigma(\cdot)\in L^0_{\mathbb{F}}(\Omega;L^1(0,T;\mathbb{R}^{n\times d}))$.

Itô 积分

Itô 公式

设 $X(\cdot)$ 是一个 Itô 过程. 假设 $F(t,x):[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 关于 t 一阶导数连续且关于 x 二阶导数连续, 则对任意 $t>0$, 几乎处处成立:

$$\begin{aligned}F(t,X(t)) = F(0,X(0)) &+ \int_0^t [F_s(s,X(s)) + F_x(s,X(s))b(s)]ds \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(s)^T F_{xx}(s,X(s))\sigma(s)]ds + \int_0^t F_x(s,X(s))\sigma(s)dW(s)\end{aligned}$$

随机微分方程

对 $0\le S<T$, 考虑如下方程:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t), & t\in[S,T]; \\ X(s) = \xi. \end{cases} \tag{$\star$}$$

这里 ξ 是一个 $\mathcal{F}_S$-可测随机变量, $b(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 为给定映射. 上述方程被称为随机微分方程.

Itô 积分

随机微分方程的强解

连续随机过程 $X(\cdot)$ 被称为随机微分方程$(\star)$的强解, 若其满足:

(i) $X(\cdot)$ 为一个 $\mathcal{F}_t$-适定过程;

(ii) $\mathbb{P}(X(s)=\xi)=1$;

(iii)
$$\int_S^t [|b(r,X(r))| + |\sigma(r,X(r))|^2]dr < \infty, \quad \forall t \in [S,T],\ a.s.;$$

(iv)
$$X(t) = \xi + \underbrace{\int_S^t b(r,X(r))dr}_{\text{漂移项 (drift term)}} + \underbrace{\int_S^t \sigma(r,X(r))dW(r)}_{\text{扩散项 (diffusion term)}}, \quad \forall t \in [S,T],\ a.s.$$

Feynman-Kac 公式

随机微分方程 (SDE) 和偏微分方程 (PDE) 之间的关系，考虑如下定理:

Feynman-Kac 公式

假设 $V(\cdot)$ 是如下线性偏微分方程 Cauchy 问题的唯一经典解:

$$\begin{cases} V_t(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[V_{xx}(t,x)\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T\right] + V_x(t,x)b(t,x) \\ \qquad\qquad + c(t,x)V(t,x) + g(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

进一步，假设对任意 $(t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$，如下 SDE:

$$\begin{cases} dX(s) = b(s,X(s))ds + \sigma(s,X(s))dW(s), \quad s \in [t,T], \\ X(t) = x, \end{cases}$$

有唯一强解 $X(\cdot)$.

Feynman-Kac 公式

Feynman-Kac 公式 (接上)

此外, 强解 $X(\cdot)$ 满足:

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\int_t^s 2c(r,X(r))dr}\left|V_x(s,X(s))\sigma(s,X(s))\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \qquad (\spadesuit)$$

则偏微分方程的解 $V(\cdot)$ 有如下表达式:

$$V(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr} g(s,X(s))ds + e^{\int_t^T c(r,X(r))dr} h(X(T))\right].$$

Feynman-Kac 公式

证明: 对 $V(s,X(s))e^{\int_t^s c(r,X(r))dr}$ 使用 Itô 公式, 可得:

$$
\begin{aligned}
& V(T,X(T))e^{\int_t^T c(r,X(r))dr} - V(t,x) \\
= & \int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr} \{V_s(s,X(s)) + c(s,X(s))V(s,X(s)) \\
& + V_x(s,X(s))b(s,X(s)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}(s,X(s))\sigma(s,X(s))\sigma(s,X(s))^T]\}ds \\
& + \int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr} V_x(s,X(s))\sigma(s,X(s))dW(s) \\
= & - \int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr} g(s,X(s))ds \\
& + \int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr} V_x(s,X(s))\sigma(s,X(s))dW(s).
\end{aligned}
$$

Feynman-Kac 公式

由此可得:

$$V(t,x)=e^{\int_t^T c(r,X(r))dr}h(X(T))+\int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr}g(s,X(s))ds$$
$$-\int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr}V_x(s,X(s))\sigma(s,X(s))dW(s).$$

由条件(♠)可知:

$$V(t,x)=\mathbb{E}_t\left[e^{\int_t^T c(r,X(r))dr}h(X(T))+\int_t^T e^{\int_t^s c(r,X(r))dr}g(s,X(s))ds\Big|\mathcal{F}_t\right].$$

另一方面，由

$$X(s)=x+\int_t^s b(r,X(r))dr+\int_t^s \sigma(r,X(r))dW(r),\quad s\in[t,T].$$

可知，对确定的 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$，$X(s;t,x)$ 是一个 $\mathcal{F}_{t,s}$-可测随机变量.

Feynman-Kac 公式

又由于:

$$\mathcal{F}_{t,s} = \sigma\{W(r) - W(t) \big| r \in [t, s]\},$$

可知其与 $\mathcal{F}_t$ 独立, 进而可得上述 $\mathbb{E}_t$ 可以变为 $\mathbb{E}$.

特例-1

若取 $c(\cdot) = 0$, 可得如下 PDE:

$$\begin{cases} V_t(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[V_{xx}(t,x)\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T\right] + V_x(t,x)b(t,x) + g(t,x) = 0, \\ V(T,x) = h(x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

且其对应的期望为:

$$V(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T g(s, X(s))ds + h(X(T))\right].$$

特例-2

给定 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, 假设随机变量 $X(s;t,x)$ 的密度函数为 $p(\cdot)$, 则对函数 $h(\cdot)\in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, 其对应的期望为:

$$v(s;t,x,h(\cdot))=\mathbb{E}\left[h(X(s;t,x))\right]=\int_{\mathbb{R}^n}h(y)p(s,y;t,x)dy, \tag{E-1}$$

则根据 Feynman-Kac 公式, 取 $c(t,x)=0$, $g(t,x)=0$ 及 $T=s$, 可以得到 $v(t,x)=v(s;t,x,h(\cdot))$ 是如下方程的唯一解:

$$\begin{cases} v_t(t,x)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[v_{xx}(t,x)\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T\right]+v_x(t,x)b(t,x)=0, \\ v(s,x)=h(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ (t,x)\in[0,s)\times\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{E-2}$$

Feynman-Kac 公式

特例-2(接上)

将等式(E-1)带入偏微分方程(E-2)后可得:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\Big[p_t(s,y;t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[p_{xx}(s,y;t,x)\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T] \\ + p_x(s,y;t,x)b(t,x)\Big]\,dy = 0.$$

由于对任意 $h(\cdot) \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, 故成立:

$$\begin{cases} p_t(s,y;t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[p_{xx}(s,y;t,x)\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T] + p_x(s,y;t,x)b(t,x) = 0. \\ p(s,y;s,x) = \delta(y-x).\ s \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

上述方程被称为 Kolmogorov 倒向方程.