数理经济学
(最优控制理论和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2022 年 04 月 23 日

Pontryagin 最大值原理回顾

简要回顾 Pontryagin 最大值原理中的主要部分:

简要回顾

- 状态方程:
$$\dot{x}^*(t) = \nabla_p H(x^*(t), p^*(t), \mu^*(t)); \tag{S}$$
- 伴随方程:
$$\dot{p}^*(t) = -\nabla_x H(x^*(t), p^*(t), \mu^*(t)); \tag{ADJ}$$
- 最大值原理:
$$H(x^*(t), p^*(t), \mu^*(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t), p^*(t), u), \quad 0 \le t \le T, \tag{M}$$
- 横截条件:
$$p^*(T) = \nabla g(x^*(T)). \tag{T}$$

Pontryagin 最大值原理的使用方法

第一步：构建 Hamilton 函数

$$H=\begin{cases} f(x,\mu)\cdot p+r(x,\mu), & \text{固定终值时间，终止值不固定问题;} \\ f(x,\mu)\cdot p+q\cdot r(x,\mu), & \text{固定终止值问题.} \end{cases}$$

此外，还要计算：

$$\nabla_x H=\left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right),\quad \nabla_p H=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial p_n}\right).$$

第二步：构建对应的方程和最大值原理

基于第一步的结果，构建对应的状态方程(S)，伴随方程(ADJ)，最大值原理(M)和横截条件(T).

Pontryagin 最大值原理的使用方法

第三步：使用最大值原理(M)

使用最大值原理(M)计算最优的 u(可以对 H 求关于 u 的一阶导来求极值)．进一步，将 u 表示为 $x^*(\cdot)$ 及 $p^*(\cdot)$ 的函数．

第四步：解方程组

最后，结合条件(T)，求解方程(S)和(ADJ)，进而得到最优解 $x^*(\cdot)$ 及 $p^*(\cdot)$.

我们重新考察 Ramsey 增长模型, 作为 Pontryagin 最大值原理的应用案例分析. 在其模型中:

- $x(t) \geq 0$ 表示经济体在 t 时刻的总资本且 x_0 表示初始资本;
- $c(t) \geq 0$ 表示在 t 时刻的消费;
- 关于资本 $x(t)$ 的受控系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) - c(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \end{cases} \tag{E-11-1}$$

这里, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, x_1 是资本在 T 时刻的值. 由此可知, 该模型为一个固定终止时间和终止值的控制问题.

该模型的目标函数为:

$$P[c(\cdot)] = \int_0^T \phi(c(t))dt \tag{E-11-2}$$

其中, $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 表示消费的效用函数且满足

$$\phi' > 0, \quad \phi'' < 0.$$

我们目标是累积效用最大化, 即:

$$P[c^*(\cdot)] = \max_{c(\cdot)} P[c(\cdot)].$$

第一步, 构建 Hamilton 函数

首先, 我们可以得到如下的 Hamilton 函数:

$$H(x,p,c) = (f(x) - c)p + \phi(c).$$

第二步, 构建对应的方程

- 伴随方程:
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -f'(x)p.$$
- 状态方程:
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(x) - c.$$

第二步, 构建对应的方程

- 最大值原理:

$$H(x^*(t), p^*(t), c^*(t)) = \max_{c \geq 0}\{(f(x(t)) - c)p(t) + \phi(c)\}$$

- 横截条件:

$$P(T) = 0.$$

第三步, 使用最大值原理

现在由最大值原理可以得到当 $c(t) = 0$ 或者 $\phi'(c(t)) = p(t)(c(t) > 0)$ 最大值原理成立.

第四步，求解对应方程

- 当 $c=0$ 时，状态方程和伴随方程可以直接积分获得;
- 当 $\phi'(c(t))=p(t)(c(t)>0)$ 时，此时伴随方程为:

$$\phi''(c)\dot{c}=\dot{p}=-f'(x)p=-f'(x)\phi'(c).$$

由此可以得到著名的 Keynes-Ramsey 消费法则:

$$\dot{c}=-\frac{\phi'(c)}{\phi''(c)}f'(x).$$

进而结合初值和终值，可以得到 x^* 和 p^*.

Pontryagin 最大值原理的证明

由于 Pontryagin 一般形式的最大值原理的证明过程非常复杂, 故我们只证明:

- 固定时间, 终值不固定的最大值原理;
- 终值固定, 时间不固定的最大值原理.

本节课的证明思路主要来自:
W. Fleming and R. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer, 1975.

Pontryagin 最大值原理的证明

线性伴随系统

考虑如下的带有初值的线性时变系统 (ODE):

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t), \quad 0 \le t \le T, \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

则其对应的伴随方程为:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -A^T(t)p(t), \quad 0 \le t \le T, \\ p(T) = p_0. \end{cases}$$

注意, 初值问题的伴随方程是终值问题 (倒向的).

Pontryagin 最大值原理的证明

现在来说明为什么称为伴随系统. 考虑如下微分:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(p\cdot y) &= \dot{p}\cdot y + p\cdot\dot{y}\\ &= -(A^T p)\cdot y + p\cdot(Ay)\\ &= -p\cdot(Ay) + p\cdot(Ay)\\ &= 0.\end{aligned}$$

这就说明映射: $t\to y(t)\cdot p(t)$ 是一个常数, 故成立 $y(T)\cdot p_0 = y_0\cdot p(0)$, 由此通过伴随系统我们得到原系统终值 $y(T)$ 的一个公式.

自由终值控制问题 (回顾)

受控方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{ODE}$$

目标泛函为:

$$P[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu \in \mathscr{U}} P[\mu(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot) \in \mathscr{U}} \int_0^T r(x(s), \mu(s)) ds + g(x(T)). \tag{P}$$

这里, $\mathscr{U} = \{\mu(\cdot) | \mu : [0, T] \to U, \mu \text{可测}\}$ 是一个容许控制集. 此外, 假设 $\mu^*(\cdot)$ 和 $x^*(\cdot)$ 分别为上述问题的最优容许控制函数和最优路径.

关于控制函数 μ^* 的变分

对 $\epsilon > 0$ 且定义控制函数 $\mu^*(t)$ 的变分为:

沿有对时间加扰动

$$\mu_\epsilon(t) = \mu^*(t) + \epsilon \underline{\beta(t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

这里 $\beta(t)$ 是一个恰当的函数. 此时, 对充分小的 $\epsilon > 0$, $\mu_\epsilon(t)$ 也是一个容许控制.

关于最优路径 x^* 的变分

对 x 加扰动

$$x_\epsilon(t) = x^*(t) + \epsilon \underline{y(t) + o(\epsilon)}, \quad 0 \le t \le T.$$

其中:

x_ϵ μ_ϵ

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \underline{\nabla_x f(x^*(t), \mu^*(t)}) y(t) + \underline{\nabla_\mu f}(x^*(t), \mu^*(t)) \beta(t), & 0 \le t \le T. \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{P-1}$$

一阶泰勒展开

Pontryagin 最大值原理的证明

关于目标泛函的变分

首先，由于 μ^* 使得目标泛函取到最大值且 $\epsilon > 0$，则此时一阶变分成立：

$$\frac{d}{d\epsilon}P[\mu_\epsilon(\cdot)]\Big|_{\epsilon=0} \leq 0.$$

具体而言：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}P[\mu_\epsilon(\cdot)]\Big|_{\epsilon=0} &= \int_0^T \nabla_x r(x^*(s),\mu^*(s))y(s) + \nabla_\mu r(x^*(s),\mu^*(s))\beta(s)ds \\ &+ \nabla g(x^*(T))\cdot y(T). \quad \text{常数}\end{aligned} \tag{P-2}$$

在上式(P-2)中，不仅有关于控制 μ 的变分 β，还有 x 的变分 y。我们希望通过构建伴随方程 p 使得上述变分只和 β 有关.

伴随方程

定义伴随方程如下所示:

$$
\begin{cases}
\dot{p}(t) = -\nabla_x f p - \nabla_x r, & 0 \le t \le T, \\
p(T) = \nabla g(x^*(T)).
\end{cases}
$$

取 $A(t) = \nabla_x f(x^*(t), \mu^*(t))$, 则此时成立:

$\dot{p}$ 表示一阶导数

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(p \cdot y) &= \dot{p} \cdot y + p \cdot \dot{y} \\
&= -(A^T p + \nabla_x r) \cdot y + p \cdot (Ay + \nabla_\mu f \beta) \\
&= -\nabla_x r \cdot y + p \cdot \nabla_\mu f \beta.
\end{aligned}
$$

Pontryagin 最大值原理的证明

伴随方程

由于 y(0)=0, 则可以得到:

$$\nabla g(x^*(T)) \cdot y = \int_0^T p \cdot \nabla_\mu f \beta - \nabla_x r \cdot y ds$$

将上式代入(P-2), 可以得到:

$$\int_0^T (p^*(s) \cdot \nabla_\mu f(x^*(s), \mu^*(s)) + \nabla_\mu r(x^*(s), \mu^*(s))\beta(s) ds \leq 0.$$

注意到上式中

$$(p^*(s) \cdot \nabla_\mu f(x^*(s), \mu^*(s)) + \nabla_\mu r(x^*(s), \mu^*(s)) = \nabla_\mu H(x^*, p^*, \mu^*).$$

伴随方程

由此可以得到:

$$\frac{d}{d\epsilon}P[\mu_\epsilon(\cdot)]\Big|_{\epsilon=0} = \nabla_\mu H(x^*,p^*,\mu^*)\beta \leq 0. \tag{P-3}$$

对 x^* 和 p^* 在 $t\in[0,T]$ 上都成立, 这就说明关于目标泛函的一阶变分等价于 Hamilton 函数关于 μ 的一阶导. 由此可知, 最优控制函数 $\mu^*(t)$ 的取值等价于变量 $u\in U$ 的取值. 最后. 由于 $\nabla_\mu H(x^*,p^*,\mu^*)\leq 0$, 可知 Hamilton 函数是关于 u 取最大值.

注记-11-1

上述变分方法的证明不是严谨的, 因为有可能会出现只有 $\beta=0$ 才能使(P-3)成立的情况, 尤其是当 U 是一些非常小的集合时.

Pontryagin 最大值原理的证明

示性函数

对给定的控制 $\mu(\cdot)$, 假设 $x(\cdot)$ 是下述受控系统的唯一解:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t)), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{ODE}$$

针状变分

对于固定的 $s > 0$ 和一个控制参数 $u \in U$. 取足够小的 $\epsilon > 0$ 使得 $0 < s - \epsilon < s$ 成立, 则可以定义如下针状变分 $\mu_\epsilon(\cdot)$ 为:

$$\mu_\epsilon(t) = \begin{cases} u, & \text{若 } s - \epsilon < t < s. \\ \mu^*(t), & \text{其它}. \end{cases}$$

Pontryagin 最大值原理的证明

则定义对应的针状受控系统 $x_\epsilon(\cdot)$ 为:

$$\begin{cases} \dot{x}_\epsilon(t) = f(x_\epsilon(t), \mu_\epsilon(t)), & t \geq 0, \\ x_\epsilon(0) = x_0. \end{cases} \tag{P-4}$$

引理-11-1

定义 $y_\epsilon(\cdot)$ 是如下初值问题的解:

$$\begin{cases} \dot{y}_\epsilon(t) = f(y_\epsilon(t), \mu^*(t)), & t \geq 0, \\ y_\epsilon(0) = x_0 + \epsilon y_0 + o(\epsilon). \end{cases}$$

则

$$y_\epsilon(t) = x^*(t) + \epsilon y(t) + o(\epsilon) \quad 当\ \epsilon \to 0,$$

在 $[0, +\infty)$ 的紧子集上对 t 一致成立.

引理-11-1(接上)

这里,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

其中, $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ 且:

$$A(t) = \nabla_x f(x^*(t), \mu^*(t)).$$

引理-11-2

$$x_\epsilon(t) = x^*(t) + \epsilon y(t) + o(\epsilon) \quad 当\ \epsilon \to 0,$$

在 $[0,+\infty)$ 的紧子集上对 t 一致成立，这里:

$$y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq s.$$

且

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t), & t \geq s, \\ y(s) = y_s, \end{cases}$$

其中,

$$y_s = f(x^*(s), u) - f(x^*(s), \mu^*(s)).$$

没有过程泛函的自由终值问题

假设受控系统满足(ODE)且对应的目标泛函为:

$$P[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot)\in\mathscr{U}} g(x(T)). \quad \text{这里 } r = 0.$$

这里, 上述问题对应的 Hamilton 函数为:

$$H(x,p,\mu) = f(x,\mu)\cdot p.$$

则此时需要找到 $p^*:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 使得:

$$\dot{p}^*(t) = -\nabla_x H(x^*(t),p^*(t),\mu^*(t)), \quad 0\leq t\leq T. \tag{P-5}$$

和

$$H(x^*(t),p^*(t),\mu^*(t)) = \max_{u\in U} H(x^*(t),p^*(t),u). \tag{P-6}$$

成立.

此时, 定义的乘子 $p:[0,T]\to R$ 为如下终值问题的唯一解:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -A^T(t)p(t), \quad 0 \le t \le T, \\ p(T) = \nabla g(x^*(T)). \end{cases} \tag{P-7}$$

这里, $A(t) = \nabla_x f(x^*(t), \mu^*(t))$.

引理-11-3

此时, 对于没有过程泛函的自由终值问题成立如下一阶变分:

$$\frac{d}{d\epsilon}P[\mu_\epsilon(\cdot)]\bigg|_{\epsilon=0} = p(s)\cdot[f(x^*(s),u) - f(x^*(s),\mu^*(s))].$$

这里, $p(\cdot)$ 为(P-7)的唯一解.

Pontryagin 最大值原理的证明

定理 1: 没有过程泛函的自由终值问题对应的 Pontryagin 最大值原理

存在一个函数 $p^*:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 满足伴随方程(P-5), 最大值原理(P-6)及对应的横截条件.

证明: 取乘子 $p^*(\cdot)$ 为(P-7)的唯一解, 则此时 $p^*(\cdot)$ 显然满足伴随方程(P-5)和对应的横截条件. 为了验证 $p^*(\cdot)$ 满足最大值原理(P-6), 对固定的 $0<s<T$ 和 $u\in U$, 由于映射 $\epsilon\to P[\mu_\epsilon(\cdot)]$ 在 $0\le\epsilon\le 1$ 上取得最大值的点为 $\epsilon=0$, 故从引理-11-3 可知:

$$\frac{d}{d\epsilon}P[\mu_\epsilon(\cdot)]\bigg|_{\epsilon=0}=p^*(s)\cdot[f(x^*(s),u)-f(x^*(s),\mu^*(s))]\le 0.$$

这就说明对 $0<s<T$ 和 $u\in U$ 成立:

$$\begin{aligned}H(x^*(t),p^*(t),u))&=f(x^*(s),u)\cdot p^*(s)\\&\le f(x^*(s),\mu^*(s))\cdot p^*(s)=H(x^*(t),p^*(t),\mu^*(t)).\end{aligned}$$

Pontryagin 最大值原理的证明

现在考虑目标泛函为:

$$P[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot)\in\mathscr{U}} \int_0^T r(x(s),\mu(s))ds + g(x(T)) \tag{$\tilde{P}$}$$

的最大值原理. 此时, 对应的 Hamilton 函数为:

$$H(x,p,\mu) = f(x,\mu)\cdot p + r(x,\mu).$$

此外, 定义 $x_{n+1}:[0,T]\to\mathbb{R}$ 满足:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1}(t) = r(x^*(t),\mu^*(t)), \quad 0\le t\le T, \\ x_{n+1}(0) = 0. \end{cases} \tag{P-8}$$

Pontryagin 最大值原理的证明

定义:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= (x(t), x_{n+1}(t)) = (x_1(t), \cdots, x_n(t), x_{n+1}(t)), \\
\bar{x}_0 &= (x_0^1, \cdots, x_0^n, 0), \\
\bar{f}(\bar{x}, \mu) &= (f(x, \mu), r(x, \mu)), \\
\bar{g}(\bar{x}) &= g(x) + x_{n+1}.
\end{aligned}
$$

此时, 由(ODE)和(P-8)可得:

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \mu^*(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\
\bar{x}(0) = \bar{x}_0.
\end{cases}
\tag{ODE^*}
$$

此时, 目标泛函$(\tilde{P})$变为:

$$
\bar{P}[\mu(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot) \in \mathscr{U}} \bar{g}(\bar{x}(T))
$$

由此，我们将原控制问题转化成了没有过程泛函的控制问题. 此时，由前面的定理 1 可知: 存在函数 $\bar{p}^*:[0,T]\to\mathbb{R}^{n+1}$ 满足如下 Hamilton 函数:

$$\bar{H}(\bar{x},\bar{p},u)=\bar{f}(\bar{x},u)\cdot\bar{p}.$$

且满足对应的伴随方程和横截条件 $\bar{p}^*(T)=\nabla\bar{g}(\bar{x}^*(T))$. 由于增广函数 $\bar{f}$ 中的最后一项，即第 $n+1$ 项和 x_{n+1} 无关，故有:

$$\dot{p}^{n+1,*}(t)=-\bar{H}_{x_{n+1}}=0.$$

又由于 $\bar{g}_{x_{n+1}}=1$，故可知:

$$p^{n+1,*}(t)=1.$$

Pontryagin 最大值原理的证明

最后，由于 $\bar{f}$ 的最后一项为 r，故成立：

$$\bar{H}(\bar{x},\bar{p},u) = f(x,u)\cdot p + r(x,u) = H(x,p,u).$$

由此可知：

$$p^*(t) = (p^{1,*}(t),\cdots,p^{n,*}(t))$$

为满足最大值原理的乘子函数.