数理经济学
(变分原理和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2022 年 04 月 11 日

Ramsey 模型

Ramsey 模型[1]是变分方法在经济学中的最早应用之一, 其论文主要回答了社会的最优储蓄问题. 这篇论文的优点:

- 对现在经济学研究热点之一的最优经济增长问题产生了巨大的影响;
- 这篇论文也包含了变分法的相关方法和技巧.

因此, 我们将该论文作为变分法这个部分的总结.

[1] F R. Ramsey, A mathematical theory of saving, The Economic Journal, 38(1928), pp. 543-559.

核心问题

Ramsey 模型的核心问题是:跨期资源配置, 即任何时刻的国民产出分配问题:

- 分配多少给当前消费以产生当前效用;
- 分配多少用于储蓄 (和投资) 以提高未来生产和消费从而产生未来效用.

Ramsey 模型

Ramsey 模型的基本假设如下:

- 生产函数 $Q = Q(K, L)$ 是一个关于资本 K 和劳动 L 齐次的二元函数 (新古典主义);
- 经济体是一个连续的且永续的, 即 $t \in (0, +\infty)$;
- 不存在折旧且生产技术不会进步;
- 封闭经济 (不存在政府干预) 且人口不变.

在 Ramsey 模型中, 国民收入只能用来消费或者储蓄, 但储蓄总导致投资和资本的积累, 故有:

$$Q(K(t), L(t)) = \frac{dK}{dt} + C(t). \tag{R-1}$$

在(R-1)中, $C(t)$ 表示消费. 此外, Ramsey 还假设存在如下两类效用函数:

- $U(C(t))$ 表示消费对社会福利贡献的效用函数, 且假设 $U''(C) \leq 0$, 即关于消费的边际效用递减, 此时 U 是一个凹函数;
- $V(L(t))$ 表示为了维持生产, 社会必须忍受的劳动负效用, 且假设 $V''(L) \geq 0$, 边际效用非递减, 此时 V 是一个凸函数.

Ramsey 模型

因此，此时的净社会效用为:

$$U(C(t)) - V(L(t)), \quad t > 0.$$

目标函数

经济计划者的问题是使得当前和未来的社会净效用最大化:

$$\max \int_0^{+\infty} [U(C(t)) - V(L(t))] dt. \tag{R-2}$$

在(R-2)中，目标函数并没有折现因子，且其为一个广义积分，故目标函数的收敛问题是值得探讨的.

收敛性问题

Ramsey 使用如下目标泛函替换(R-2)，以解决收敛性问题.

$$\min \int_0^{+\infty} [B - U(C(t)) + V(L(t))] dt. \tag{R-3}$$

其中，B 表示幸福 (Bliss) 水平，是 Ramsey 假定的一个量，表示净效用可以到达的最大值. 直觉上，一个最优的方案是社会的净效用应该会达到或渐近到幸福水平 B，即当 $t \to +\infty$ 时，(R-3)的被积函数部分趋于 0.

注记-R-1

用目标函数(R-2)替换目标函数(R-3)的方法被称为 “ Ramsey”方法. 但是, 严格来说, “ Ramsey”方法并没有完全解决收敛性的问题, 如果 V 的函数性质不好, 则目标函数还是会发散.

尽管 Ramsey 并没有真正的解决收敛性问题, 我们仍然假设目标泛函(R-3)是收敛的.

Ramsey 模型

设 $F = B - U(C(t)) + V(L(t))$ 其中 $C(t) = Q(K(t), L(t)) - K'(t)$, 则有关于劳动 L 的导数:

$$F_L = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial L} + V'(L) = -U'(C)Q_L + V'(L);$$
$$F_{L'} = 0.$$

此外, 关于资本 K 的导数为:

$$F_K = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K} = -U'(C)Q_K;$$
$$F_{K'} = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K'} = U'(C).$$

由上述导数可以得到如下的 E-L 方程组:

关于 L 的 E-L 方程

$$F_L = \frac{d}{dt}(F_{L'}) \Rightarrow V'(L) = U'(C)Q_L \tag{R-4}$$

关于 K 的 E-L 方程

$$F_K = \frac{d}{dt}(F_{K'}) \Rightarrow \frac{dU'(C)}{dt} = -U'(C)Q_K \tag{R-5}$$

注记-R-2

方程(R-4)表示在每个时间点上，劳动的负边际效用等于消费的边际效用与劳动的边际产出的乘积.

注记-R-3

方程(R-5)表示在每个时间点上，边际消费的变化率等于资本边际产出的负数.

关于方程(R-5), 可以表示成如下形式:

$$U'(C(t)) = A\exp\left\{-\int_0^t Q_K(K(s),L(s))ds\right\}.$$

其中, A 是个常数, 由初值条件决定. 只要给出 U 和 Q 的具体形式, 则上述方程可进一步求解.

例-R-1

如 $U(C) = \tilde{U} - \frac{1}{b}C^{-b}$, 其中 $\tilde{U} > 0$ 和 $b > 0$ 为两个常数.
此外, 投入产出函数 $Q = wL + rK$, 其中 $w > 0$ 表示工资水平, $r > 0$ 表示利率.

关于方程(R-4), 注意到 F 中不含有 t, 故其为特殊的 E-L 方程, 即 $F - K'F_{K'} =$ 常数. 此时, 方程(R-4)等价于:

$$B - U(C) + V(L) - K'U'(C) = \text{常数}. \tag{R-6}$$

因此, 只要确定好常数, 方程(R-6)就可解.
为了找到常数, Ramsey 考虑到如下两个模型假设:

(i) $t \to +\infty$ 时, 社会净效用 $U(C) - V(L)$ 会趋于幸福水平 B;
(ii) 这个常数对所有的 t 及极限 $t \to +\infty$ 都要成立.
(iii) 消费边际效用趋于 0, 即

$$\lim_{t \to +\infty} U'(C(t)) = 0.$$

由假设 (i),(ii) 和 (iii) 可知, 常数必须取 0. 由此, (R-6)变为:

$$K^{*'} = \frac{B - U(C(t)) + V(L(t))}{U'(C)}. \tag{R-7}$$

(R-7)被称为 Ramsey 法则. 它表示资本的最优积累速率在任何时候必须等于净效用和幸福水平 B 的缺口与消费边际效用的比值.

注记-R-4

在表面上(R-7)与生产函数 Q 没有关系, 故 Ramsey 认为生产函数只会影响幸福水平 B. 这个结论是不正确的, 由(R-5)可知, $U'(C)$ 和 Q_K 有非常大的关系, 故(R-7)的分母和生产函数有很大的关系.

由于 Ramsey 模型不是自治问题，故其可以得到对应的横截条件:

横截条件

关于 L 的横截条件为:

$$\lim_{t\to+\infty} F - L'F_{L'} = 0.$$

此外，关于 K 的横截条件为:

$$\lim_{t\to+\infty} F - K'F_{K'} = 0.$$

由于 $F_{L'} = 0$，故由关于 L 的横截条件可知: $F \to 0(t \to +\infty)$. 这意味着净效用必定会趋于幸福水平. 而关于关于 K 的横截条件刚好是(R-6)的左边部分，故可得(R-6)中常数为 0. 由于隐含有净效用最后一定收敛到幸福水平 B，故不需要另外一个横截条件.

二阶条件

为了研究 Ramsey 模型的二阶条件，我们先将 Ramsey 模型进行简化，即考虑将劳动投入 L 固定不变，从而将投入产出函数简化为一维函数 $Q(K)$. 此时，Ramsey 模型变为一个单状态变量的模型且只需求解一个 E-L 方程，则原来的 E-L 方程变为：

$$\frac{dU'(C)}{dt} = -U'(C)Q_K \Rightarrow -U'(C)Q'(K) = \frac{dU'(C)}{dt}. \tag{R-8}$$

此时，简化情形下，可以得到：

$$K' = Q(K) - C. \tag{R-9}$$

若已知效用函数 U 和投入产出函数 Q 的具体形式，则可联立方程(R-8)和(R-9)求解最优资本路径 K^*.

二阶条件

充分性条件的补充 (无限时间水平状态)

在有限时间时, 可变终值时间的充分性条件为:

$$[L_{y'}(y-y')]_{t=T} \leq 0.$$

由此, 在无限水平时, 只需要满足:

$$\lim_{t\to+\infty}[L_{y'}(y-y')] \leq 0. \tag{R-10}$$

二阶条件

由新古典主义，可以假设：

$$U'(C) \geq 0, \quad U''(C) < 0, \quad Q'(K) > 0, \quad Q''(K) < 0.$$

此时，可以得到：

$$F_K = -U'(C)Q'(K), \quad F_{K'} = U'(C).$$

对应的二阶导数为：

$$\begin{cases} F_{KK} = -U''(C)[Q'(K)]^2 - U'(C)Q''(K), \\ F_{KK'} = F_{K'K} = U''(C)Q'(K), \\ F_{K'K'} = -U''(C). \end{cases}$$

二阶条件

由此可知:

$$\begin{pmatrix} F_{KK} & F_{KK'} \\ F_{K'K} & F_{K'K'} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} F_{KK} & F_{KK'} \\ F_{K'K} & F_{K'K'} \end{vmatrix} = U''(C)U'(C)Q''(K) \geq 0.$$

此时, 只能得到被积函数 F 的二阶导矩阵是一个半正定矩阵, 故无法断言 F 严格凸, 充分性无法保证. 但是, 此时 F 是凸函数. 由于是无限时间水平的模型. 故还需要验证(R-10). 遗憾的是极限:

$$\lim_{t\to+\infty} [U'(C)(K-K^*)] \quad \text{无法判断其值.} \tag{R-11}$$

这是由于无法判断 $K-K^*(t\to+\infty)$ 趋于有界值或发散.

注记-R-5

由于假设生产函数的边际 $Q'(K)>0$ 成立, 故生产函数 $Q(K)$ 无限增长, 由此资本路径 K 在经济学意义上不存在上界. 因此, $K-K^*(t\to+\infty)$ 可能发散.

二阶条件

注记-R-6

若假设存在资本饱和，即成立:

$$\lim_{t\to+\infty} K = \tilde{K}, \quad \text{即资本存在最大点 } \tilde{K}\text{，不会无限增加.}$$

此外，还假设存在消费饱和，即存在在某个饱和点 $\tilde{C}$，使得:

$$\lim_{t\to+\infty} U'(C(t)) = U'(\tilde{C}) = 0, \quad \text{即消费在饱和点之后，停止增加.}$$

在上述假设下，可知 $K - K^*$ 有界，极限(R-11)存在且等于 0，进而可以保证目标泛函 $\int_0^\infty [B - U(C)]dt$ 取得最小值.

二阶条件

Legendre 条件

$F_{K'K'} = -U''(C) > 0$, 可以说明其取到极小值 (必要不充分).

Weierstrass 条件

由于 Weierstrass 条件针对的是有限时间的变分问题, 且较难验证, 故在此不考虑该条件.

一个约束

在前面的讨论中，我们仅将目标函数 F 看做是资本 K 和劳动 L 的函数，而忽略了消费 C. 这是由于存在关系：

$$C = Q(K, L) - K',$$

从而将消费 C 替换掉了. 但是，为了体现消费 C 的重要性，我们将消费 C 视为和资本 K 及劳动 L 同地位的变量，则有如下约束：

$$G(C, L, K, K') = Q(K, L) - K' - C = 0. \tag{R-12}$$

将约束条件(R-12)添加进 Ramsey 模型后，则得到如下伴随外在约束的 Ramsey 模型.

伴随外在约束的 Ramsey 模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^{+\infty} [B - U(C(t)) + V(L(t))]dt. \\ s.t. \quad & G(C, L, K, K') = 0; \end{aligned} \tag{R-13}$$

以及适当的边界条件.

为了求解上述带有约束的 Ramsey 模型，我们考虑构建如下的 Lagrange 函数:

$$\mathcal{F} = B - U(C(t)) + V(L(t)) + \lambda(t)[-Q(K(t), L(t)) + K'(t) + C(t)]. \tag{R-14}$$

则对(R-14)中三个变量 (C, L, K) 和乘子 λ 求导可以得到如下 E-L 方程组:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_C - \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_{C'}) = -U'(C) + \lambda = 0; \\ \mathcal{F}_L - \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_{L'}) = V'(L) - \lambda Q_L = 0; \\ \mathcal{F}_K - \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_{K'}) = -\lambda Q_K - \frac{d\lambda}{dt} = 0; \\ \mathcal{F}_\lambda - \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_{\lambda'}) = -Q(K, L) + K' + C = 0. \end{cases} \tag{R-15}$$

整理可知，方程组(R-15)和方程组(R-4)-(R-5)等价. 由此说明，消费在上述模型中是一个可以被资本和劳动代替的变量.

Cass 和 Koopmans 对经典的 Ramsey 模型进行了推广, 构建了最简单的, 基于基准情形 (忽略市场所有的不完美性) 的无限期的宏观经济学模型. 该模型讲述了这样一个经济, 即:

Ramsey-Cass-Koopmans 模型

- 具有竞争性的厂商租赁资本, 雇佣劳动来进行生产并销售产品.
- 数量固定不变的家庭具有无限生命, 家庭提供劳动, 持有资本并进行消费和储蓄.
- 假定生产技术, 厂商和家庭三个状态变量, 分析家庭和厂商的行为, 研究消费和资本的最优路径.
- 最后, 考虑政府购买对经济的影响.

详见: David Romer, Advanced Macroeconomics, 5th Edition, Mc-Graw Hill, 2019. 第二章.