数理经济学
(变分原理和应用)

王鸣晖
wangmh@swufe.edu.cn
西南财经大学

2023 年 2 月 28 日

从一个例子谈起

模型假设

- 企业接到一个到时刻 T 交割 B 单位产品的订单；
- 设 $x(t)$ 代表 t 时刻为止的企业积累存货量，则有：

$$x(0) = 0, \quad x(T) = B;$$

- 存货量 $x(t)$ 的变化率为: $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- 企业在 t 时刻的生产成本为：

$$C(t) = c_1[x'(t)]^2 + c_2 x(t),$$

这里，$c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ 是两个常数。第一项总生产成本，即单位生产成本和生产水平的乘积，第二项是持有存货的库存成本。

从一个例子谈起 (接上)

模型目标

企业寻求最小化总成本并可以在规定时间内完成生产任务，即：

$$\min \int_0^T C(t)dt = \min \int_0^T c_1[x'(t)]^2 + c_2 x(t)dt,$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B.$$

上述问题本质上是寻找一个函数 $x(t)$ 使得目标成立，即找到每个时刻的最优累积存货量。

最简变分问题

上述问题本质上可以看做如下最简变分问题：

最简变分问题

$$\begin{aligned} \max \text{或} \min \quad & J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \\ \text{s.t.} \quad & x(t_0) = A, \qquad x(t_1) = Z. \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$t_0 < t_1 < +\infty$ 分别表示开始时刻和结束时刻。A 和 Z 为给定常数。

其中，$x(t)$ 为一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的函数，且 $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$，表示导数。在后续内容中，问题(1) 都表示求解最小值问题。

最简变分问题的基本特点

- 初始点 (initial point) 和终止点 (terminal point);
- 初始点到终止点的一组可行路径 (admissible paths);
- 初始路径对应的一组路径值 (path values); 表示着业绩指标 (如： 成本， 利润);
- 一个既定目标， 选择最优路径 (optimal path)， 使的路径值最大或者最小。

泛函

问题(1)中，把 $J(x)$ 称为泛函 (functional)。但本质上，$J(x)$ 表示的是 $J(x(t))$，省略了 t 这部分。这种写法是强调了路径值 J 的变化是由整个路径 x 的位置变化导致的 (即：路径 x 的变分)，而不是由 t 的变化导致的。并没有把 $J(x(t))$ 看成 t 的函数，即 t 的复合函数。

可变终点

在问题(1)中，初始点 t_0 和终止点 t_1 是固定的，且初始值 A 和终止值 Z 也是给定的。而实际的经济学问题中，很多问题是只知道初始点的情况，不知道终止点的情况。这类问题被叫做可变端点问题。一般有如下三类：

- 固定时间问题 (垂直终止线问题)；
- 水平终止线问题 (最优时间问题)；
- 终止曲线问题。

横截条件

由于上述可变终止问题都具有一个共同特征：可变终点最简变分问题比固定终点问题多了一个需要求解的问题，即投资者拥有的自由度比固定终止问题多了一个。为了确定最优路径，所以需要加一个条件：将最优路径和其它路径区分开，即加入横截条件(transversality condition)。

问题(1)解的定义

定义 (问题(1)解的定义)

假设 $t_0 < t_1$，且 $A, Z \in \mathbb{R}$ 为给定值。则称集合:

$$A(t_0, t_1) = \{x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R} | x(t)\text{连续且分段连续可微}, \\ x(t_0) = A, \quad x(t_1) = Z\},$$

为可行解集或容许解集。集合 $A(t_0, t_1)$ 中元素称为原问题(1)的可行解或容许解。

乘积泛函的定义

定义（乘积泛函）

若 $X(\cdot) \in A(t_0, t_1)$, 则称

$$I[X(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, X(t), \dot{X}(t))dt$$

为乘积泛函。其中:

$$L : [t_0, t_1] \times R \times R \to R,$$

为一个连续函数。

由此可知，问题(1)中的 $J(x)$ 为一个乘积泛函。

最简变分问题的主要任务

变分问题的主要任务是：

主要任务

找到最优的路径 $X(t)$，使得乘积泛函 $I[X(\cdot)]$ 取到最小值，即：

$$I[X^*(\cdot)] = \min_{X(\cdot)\in A(t_0,t_1)} I[X(\cdot)] \tag{2}$$

主要目标如下：

- $X^*(\cdot)$ 的存在性问题；
- $X^*(\cdot)$ 的数学性质；
- $X^*(\cdot)$ 的经济学意义及性质。

一阶变分条件

Euler-Lagrange 方程

Euler-Lagrange 方程是上述变分问题 (2) 的一个必要条件，其本质上是把求最优的 $X^*(\cdot)$ 转化成求解一个常微分方程 (ODE)。

定理

假设 $X^*(t) \in A(t_o, t_1)$ 是问题(2)的解，且 $X^*(t)$ 二阶连续可微。则 $X^*(t)$ 是如下非线性 ODE 的解：

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(t, X^*(t), \dot{X}^*(t))}{\partial z}\right) + \frac{\partial L(t, X^*(t), \dot{X}^*(t))}{\partial y} = 0. \qquad (3)$$

这里，$t_0 < t < t_1$。

一阶变分条件

定义

上述方程(3)被称为 Euler-Lagrange 方程 (下称为 E-L 方程)。

注

Euler-Lagrange 方程(3)也可写为如下形式:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{L}(\mathrm{t}, \mathrm{X}^*(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{X}}^*(\mathrm{t}))}{\partial \mathrm{z}}\right)' = \frac{\partial \mathrm{L}(\mathrm{t}, \mathrm{X}^*(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{X}}^*(\mathrm{t}))}{\partial \mathrm{y}}.$$

一阶变分条件

例 1

设:

$$I[X(\cdot)] = \int_a^b \frac{\dot{X}^2(t)}{2} - f(t) \cdot X(t)dt$$

这里，$f(t) : [a, b] \to R$ 是一个给定函数。求最小的 I。

解:

此时，$L(x, y, z) = \frac{z^2}{2} - f(x)y$; $\frac{\partial L}{\partial y} = -f(x)$; $\frac{\partial L}{\partial z} = z$。则带入 E-L 方程，可得:

$$X''(t) = -f(t).$$

一阶变分条件

Null Lagrangians

设 $L(x,y,z) = A(y)z$，$A(\cdot)$ 为一个二阶连续可微函数，则：

$$I[X(t)] = \int_a^b A(X(t))\dot{X}(t)dt.$$

解:

此时，对应的 E-L 方程为：

$$-\frac{dA(X(t))}{dt} + A'(X(t))\dot{X}(t) = 0$$

此时，对任意的 $X(t) : [a,b] \to R$，上述方程恒成立。

故称 $L(x,y,z) = A(y)z$ 为 Null Lagrangians，其在解决复杂的变分问题时，可作为一个重要工具。

一阶变分条件

对于一般的变分问题，求其对应的 E-L 方程，主要依靠如下三个步骤：

Step 1

对给定的 $L = L(x, y, z)$，求：

$$\frac{\partial L(x, y, z)}{\partial y} \text{和} \frac{\partial L(x, y, z)}{\partial z}.$$

一阶变分条件

Step 2

将 $x = t,\ y = X(t),\ z = \dot{X}(t)$ 带入上式，可得：

$$\frac{\partial L(t, X(t), \dot{X}(t))}{\partial y} \text{和} \frac{\partial L(t, X(t), \dot{X}(t))}{\partial z}.$$

Step 3

得到 E-L 方程:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(t, X^*(t), \dot{X}^*(t))}{\partial z}\right) + \frac{\partial L(t, X^*(t), \dot{X}^*(t))}{\partial y} = 0.$$

最后求解上述 ODE，再结合初始条件可以得到原变分问题的解。

一阶变分条件

一阶变分的原理，主要分为如下三步来阐述：

- 构建扰动 (perturbing) 曲线;
- 求导得到必要条件;
- 构建 E-L 方程;

例

例 1

给定泛函:

$$V[y]=\int_0^2(12ty+(y')^2)dt$$

其边界条件 $y(0)=0$ 及 $y(2)=8$, 求极值路径。

例 2

给定泛函:

$$V[y]=\int_1^5(3t+\sqrt{y'})dt$$

其边界条件 $y(1)=3$ 及 $y(5)=7$, 求极值路径。

例

例 3

给定泛函：

$$V[y] = \int_0^5 (t + y^2 + 3y')dt$$

其边界条件 $y(0) = 0$ 及 $y(5) = 3$，求极值路径。

例 4

给定泛函：

$$V[y] = \int_0^T y'dt$$

其边界条件 $y(0) = \alpha$ 及 $y(T) = \beta$，求极值路径。