数理经济学
(变分原理和应用)

王鸣晖

Sothwestern University of Finance and Economics

wangmh@swufe.edu.cn

March 7, 2023

特殊情形的 E-L 方程

有上述例子可知, E-L 方程会出现一些特殊情况, 主要有以下四类:

(i) $L = L(t, x')$, 即不含有 x;

(ii) $L = L(x, x')$, 即不含有 t;

(iii) $L = L(t, x)$, 即不含有 x';

(iv) $L = L(x')$, 即只含有 x';

我们将基于以上四种情形, 分别研究.

特殊情形 (i)

在这种情形下，乘积泛函 L 不含有 x，这就意味着:

$$L_x = 0 \Rightarrow \frac{dL_{x'}}{dt} = 0.$$

此时，E-L 方程为:

$$L_{x'} = C(\text{常数}) \xrightarrow{\text{若存在逆函数 } f} \text{则有: } x' = f(t, C).$$

进而上述方程的通解为:

$$x(t) = \int_0^t f(s, C)ds + D(\text{另一个常数}).$$

特殊情形 (i)

例 3-1

给定泛函:

$$V[y] = \int_0^1 (ty' + (y')^2)dt$$

其边界条件 $y(0) = y(1) = 1$, 求极值路径.

特殊情形 (ii)

在这种情形下，乘积泛函 L 不含有 t，这就意味着:

$$L_t = 0 \Rightarrow L_{tx'} = 0.$$

此时 E-L 方程可以简化为:

$$\boxed{L_{x'x'}x''(t) + L_{xx'}x'(t) - L_x = 0.}$$

在上式两边同时乘以 $x'(t)$，可得:

$$x'(t)L_{x'x'}x''(t) + x'(t)L_{xx'}x'(t) - x'(t)L_x = \frac{d(x'(t)L_{x'} - L)}{dt}.$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = x'(t) L_x$$

特殊情形 (ii)

此时, E-L 方程等价于如下形式:

$$\frac{d(x'(t)L_{x'} - L)}{dt} = 0 \Rightarrow x'(t)L_{x'} - L = C(\text{常数}). \qquad (*)$$

上述常微分方程(*)恰好也叫 Euler 方程. 如果存在函数 g, 则方程(*)可以写成如下形式:

$$x' = g(x', C)(\text{非线性常微分方程且通常可解}).$$

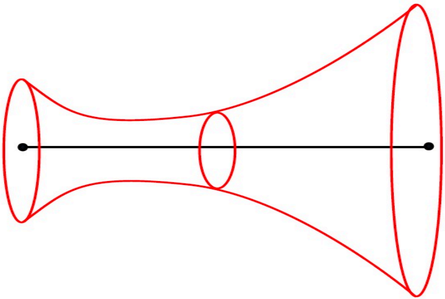
特殊情形 (ii)

例 3-2

给定泛函:

$$V[y] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

其边界条件 $y(a) = A$, $y(b) = B$, 求极值路径. 这里 $V[y]$ 表示过点 (a, A) 和 (b, B) 的一条曲线绕 X 轴旋转成的曲面的表面积.



特殊情形 (iii)

在这种情形下, 乘积泛函 L 不含有 x', 这就意味着:

$$L_{x'} = 0 \Rightarrow L_x = 0.$$

此时, 对应的 E-L 方程退化为:

$$L_x = 0.$$

上式中不含有 x', 故该方程可能不是一个常微分方程.

特殊情形 (iv)

在这种情形下，乘积泛函 L 只有 x'，这就意味着 E-L 方程变为：

$$L_{x'x'}x''(t) = 0 \Rightarrow x''(t) = 0 \text{ 或} L_{x'x'} = 0;$$

进而有

- 若 $x''(t) = 0$，则有 $x(t) = C_1 t + C_2$，即是一个直线族；
- 若 $L_{x'x'} = 0$. 此时，$L_{x'x'}$ 是一个仅关于 x' 的函数，故可根据 $L_{x'x'} = 0$ 得到如下形式的方程：

$$x'(t) = f(t) \text{ 进而得到} x(t).$$

在大多数情况下，$x(t)$ 具有线性结构，即 $x(t) = kt + c$，k 和 c 是两个常数.

特殊情形 (iv)

例 3-3

给定泛函:

$$V[y]=\int_0^T \sqrt{1+(y')^2}dt$$

其边界条件 $y(0)=A$, $y(T)=B$, 求极值路径.

经济学应用

例 3-4

企业寻求最小化总成本并可以在规定时间内完成生产任务，即:

$$\min \int_0^T C(t)dt = \min \int_0^T c_1[x'(t)]^2 + c_2 x(t)dt,$$

$$s.t. \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B, \quad x'(t) \geq 0.$$

此外，还要求 $c_1 > 0$ 且 $c_2 > 0$.

经济学应用

3-4 的解

例 3-4 对应的 E-L 方程为:

$$2c_1x''(t) = c_2. \tag{3-4}$$

则其解为:

$$x(t) = \frac{c_2t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T}, \quad 0 \le t \le T.$$

3-4 解的分析

由于要求 $x'(t) \geq 0$ 成立，故需要满足条件：

$$B \geq \frac{c_2 T^2}{4c_1}. \tag{*}$$

- 若条件(*)满足，则说明：相对应时间期限 T，需求 B 充分大，且相对于单位生产成本 c_1，单位存储成本 c_2 较小.
- 若条件(*)不满足，则说明：时间期限 T 过长，需求 B 较小，此时需要延期开工，直到时间期限足够小.

3-4 对应的 E-L 方程分析

在 E-L 方程(3-4)中，其右边项 c_2 表示单位产品的库存成本；左边项 $2c_1x''(t)$ 表示瞬时生产成本的变化率. 因此，为了最小化在时刻 T 交割 B 单位的成本，E-L 方程(3-4)表示生产成本的变化率和边际库存成本相等，即对生产速度的限制.

由于 E-L 方程(3-4)对 $\forall t \in [0, T]$ 均成立，故考虑如下积分:

$$\int_t^{t+\triangle t} 2c_1x''(s)ds = \int_t^{t+\triangle t} c_2 ds, \quad 0 < t < T. \tag{3-4A}$$

此时, 对积分方程(3-4A)化简可得:

$$2c_1[x'(t+\triangle t)-x'(t)]=c_2\triangle t \Rightarrow 2c_1x'(t)+c_2\triangle t=2c_1[x'(t+\triangle t)].$$

上述方程说明: 在 t 时刻生产一单位产品并持有额外时间 $\triangle t$ 的边际成本与 $t+\triangle t$ 时刻生产的边际成本相等. 这表明在例 3-4 中, 沿着最优生产路径, 生产计划的任何变化都不能减少生产成本.

经典 Evans 模型

Evans 模型是一个讨论垄断企业利润的经典经济学模型, 最早由 G C. Evans 在 1924 年提出[1].

基本假设

- 垄断企业生产一种产品, 其二次总成本函数 (不考虑存货) 为:

$$C(t) = \alpha Q^2(t) + \beta Q(t) + \gamma, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

  其中, $Q(t)$ 代表产量 (需求量); α, β, γ 为三个常数.

- 假设需求量不仅仅取决于价格 $P(t)$, 也取决于价格的变化率 $P'(t)$; 即:

$$Q(t) = a - bP(t) + hP'(t), \quad a > 0, b > 0 \text{且} h \neq 0.$$

  这里, a, b 和 h 均为常数.

[1] G C, Evans, The dynamics of monopoly, American Mathematical Monthly, 31(1924), pp. 77-83.

此时，企业的利润为:

$$
\begin{aligned}
\pi =& P(t)Q(t) - C(t) \\
=& P(t)(a - bP(t) + hP'(t)) - \alpha(a - bP(t) + hP'(t))^2 \\
& - \beta(a - bP(t) + hP'(t)) - \gamma.
\end{aligned}
$$

将上式展开, 合并同类项以后, 可以得到动态利润函数为:

$$
\begin{aligned}
\pi(P(t), P'(t)) = & -b(1+\alpha b)P^2(t) + (a + 2\alpha ab + \beta b)P(t) - \alpha h^2 (P'(t))^2 \\
& - h(2\alpha a + \beta)P'(t) + h(1 + 2\alpha b)P(t)P'(t) - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma)
\end{aligned}
$$

经典 Evans 模型

企业的目标是寻找价格 $P(t)$ 的一个最优路径, 使得在时间区间 $[0, T]$ 上的总利润 π 最大. 此时, 这个垄断企业的目标为:

问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \Pi[P(t)] = \int_0^T \pi(P(s), P'(s))ds \\
s.t. \quad & P(0) = P_0; \quad (P_0 \text{给定}) \\
& P(T) = P_T. \quad (T, P_T \text{给定})
\end{aligned} \tag{Q}
$$

该问题对应的是情形 (ii).

对 $\pi(P(t), P'(t))$ 求导可得:

$$\pi_P(t) = -2b(1+\alpha b)P(t) + h(1+2\alpha b)P'(t) + a + 2\alpha ab + \beta b;$$
$$\pi_{P'}(t) = -2\alpha h^2 P'(t) + h(1+2\alpha b)P(t) - h(2\alpha a + \beta);$$
$$\pi_{P'P'}(t) = -2\alpha h^2; \quad \pi_{PP'}(t) = h(1+2\alpha b); \quad \pi_{tP'}(t) = 0.$$

故可得 E-L 方程:

E-L 方程

$$P''(t) - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}P(t) = -\frac{a+2\alpha ab+\beta b}{2\alpha h^2}. \tag{E}$$

显然, 方程(E)是一个常系数非齐次二阶线性 ODE.

求解方程(E), 需先求解如下齐次 ODE:

$$P''(t) - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2} P(t) = 0. \tag{E^*}$$

则方程(E^*)的特征根方程为:

$$\lambda^2 - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2} = 0.$$

由此, 可以得到特征根为:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}}.$$

经典 Evans 模型

由此可知，方程(E^*)的通解为:

$$P^*(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{Sol}$$

则方程(E)的解为:

$$P(t) = P^*(t) + \bar{P}, \tag{Sol^*}$$

其中 $\bar{P}$ 是方程(E)的一个特解，其可以写为:

$$\bar{P} = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \alpha b)}.$$

再将边值条件 $P(0) = P_0$ 和 $P(T) = P_T$ 带入(Sol^*)中，可以得到:

$$C_1 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{2\lambda_1 T}}, \quad C_2 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{\lambda_2 T}}{1 - e^{2\lambda_2 T}}.$$

由此, 可以得到原问题(Q)的解为:

E-L 方程(E)的解:

$$P^*(t) = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{2\lambda_1 T}} e^{\lambda_1 t} + \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{\lambda_2 T}}{1 - e^{2\lambda_2 T}} e^{\lambda_2 t} + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \alpha b)}. \qquad (Sol^{**})$$

一些注记

注记 1

由于特解 $\bar{P}$ 是一个常数，故其不需要导数项 $P'(t)$ 的信息，即不需要价格变化率的信息. 这个特解 $\bar{P}$ 被称为古诺垄断价格 (Cournot monopoly price). 如果取 $T \to +\infty$, 则(Sol^{**})中，有 $C_1 = 0$ 且 $C_2 = P_0 - \bar{P}$. 此时，原问题解退化为:

$$P(t) = (P_0 - \bar{P})e^{\lambda_2 t} + \bar{P}.$$

注记 2

除非存在 $t_0 \in [0, T]$ 使得 $C_1 e^{\lambda_1 t_0} = C_2 e^{\lambda_2 t_0}$ 成立，否则价格路径 $P(t)$ 单调.