数理经济学
(最优控制理论和应用)

王鸣晖

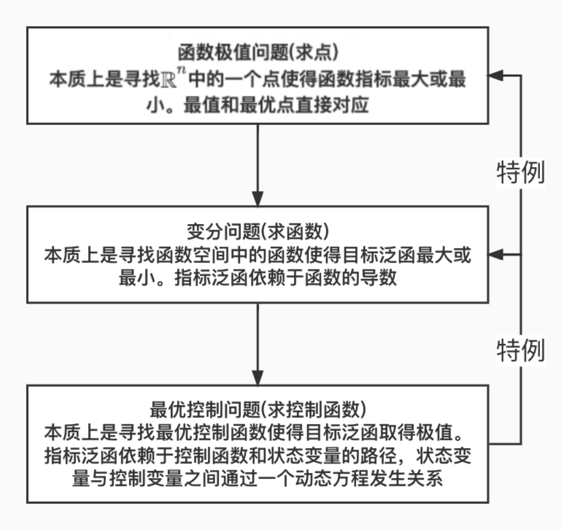
西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2022 年 04 月 11 日

引子



函数极值问题(求点)
本质上是寻找$\mathbb{R}^n$中的一个点使得函数指标最大或最小。最值和最优点直接对应
变分问题(求函数)
本质上是寻找函数空间中的函数使得目标泛函最大或最小。指标泛函依赖于函数的导数
最优控制问题(求控制函数)
本质上是寻找最优控制函数使得目标泛函取得极值。指标泛函依赖于控制函数和状态变量的路径，状态变量与控制变量之间通过一个动态方程发生关系
特例
特例

最优控制的例子

为了解释什么是最优控制问题，我们先从一个经济学的例子讲起，即一个工厂的生产消费问题．我们假设:

- $X(t)$ 表示工厂在 t 时刻的产出．工厂将产出所得一部分用于消费，一部分用于再投资;
- $\alpha(t)$ 表示工厂在 t 时刻的再投资比例，且有 $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ 成立．
- 该工厂的生产能力和再投资比例有关，且可以用如下常微分方程描述:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = k\alpha(t)X(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{E-9-1}$$

其中，$k > 0$ 表示再投资的转化比例．

最优控制的例子

- 工厂希望最大化其产出的累积消费部分，即最大化：

$$P(t, X(t)) = \max_{\alpha(t)} \int_0^T (1 - \alpha(t))X(t)dt. \tag{E-9-2}$$

问题的解

在问题(E-9-2)中，工厂的最优再投资比例为：

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t^*, \\ 0. & t^* < t < T. \end{cases}$$

其中，t^* 是一个转换时间且 $0 \le t^* \le T$，也是解的一部分．此外，若 $|k| \neq 0$，可以得到 $t^* = T - \frac{1}{k}(k > 0)$ 或 $t^* = T + \frac{1}{k}(k < 0)$.

在上例子, 方程(E-9-1)被称为状态方程, 其一般形式为:

状态方程

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t), \mu(t)), \quad t \in [0, T]. \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{E-9-3}$$

在方程(E-9-3)中:

- $X(t)$ 是状态变量且取值于 $\mathbb{R}^n$;
- $\mu(t)$ 是控制变量且取值于某个度量空间 U;
- 映射 $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ 给定;
- x_0 是初值.

最优控制问题

容许控制集

若控制变量 $\mu(t)$ 满足:

$$\mu(t):[0,T]\to U \quad \text{为可测函数},$$

则称 $\mu(t)$ 为一个容许控制 (Admissible Control). 此外, 称所有容许控制组成的集合:

$$\mathscr{U}[0,T]=\{\mu:[0,T]\to U|\mu(\cdot)\text{可测}\}$$

为容许控制集, 简记为 $\mathscr{U}$.

响应

注意到，只要给定一个容许控制 $\mu^*(t)$ 和初始值 x_0, 若在一定条件下可知状态方程(E-9-3)有唯一的解:

$$X^*(t) = X(t, \mu^*(t), x_0).$$

此时，称 $X^*(t)$ 为关于初值 x_0 在容许控制 $\mu^*(t)$ 下的响应.

指标泛函 (Payoffs Functional)

由例(E-9-1)-(E-9-2)可知，最优控制研究的目标泛函为如下形式:

$$J[\mu(t)]=\int_0^T r(X(t),\mu(t))dt+g(X(T)). \tag{E-9-4}$$

其中:

- $X(t)$ 是状态方程(E-9-3)关于控制变量 $\mu(t)$ 的解;
- 映射 $r:\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$ 给定，被称为过程泛函 (Running Payoff);
- 映射 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 给定，被称为终端泛函 (Terminal Payoff);
- 终值时间 $T>0$ 为一个确定常数.

最优控制问题

基本问题

最优控制拟解决的关键问题是：从容许控制集 $\mathscr{U}$ 中找到最优的容许控制 $\mu^*(\cdot)$，使得指标泛函(E-9-4)取得最大（最小），即：

$$J[\mu^*(\cdot)] \geq J[\mu(\cdot)], \quad \forall \mu(\cdot) \in \mathscr{U}.$$

此时，满足上式的 $\mu^*(\cdot)$ 称为最优控制函数. 由此可知，最优控制理论拟主要研究以下问题：

- 最优控制函数 $\mu^*(\cdot)$ 的存在性问题;
- 如何用数学描述最优控制;
- 如何构建最优控制函数和最优状态轨线.

登月器落地问题

考虑一个准备在月球上软着陆的航天器，假设:

- 航天器在时刻 t 的高度: $h(t)$;
- 航天器在时刻 t 的速度: $\dot{h}(t)$;
- 航天器在时刻 t 的质量 (燃料消耗会改变质量): $m(t)$;
- 航天器在时刻 t 的反推进力为 $\mu(t)$. 且可以假设 $\alpha \leq \mu(t) \leq \beta$.
- 月球的引力常数为 g.

基于上述假设，通过 Newton 第二定律可知:

$$m(t)\ddot{h}(t) = -m(t)g + \mu(t)$$

登月器落地问题

由此可知，登月器的着陆过程可以由以下 ODE 方程组描述:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -g + \dfrac{\mu(t)}{m(t)}, \\ \dot{h}(t) = v(t), \\ \dot{m}(t) = -k\mu(t). \end{cases} \Rightarrow \dot{X}(t) = f(X(t), \mu(t)),$$

其中，$X(t) = (v(t), h(t), m(t))$. 航天局的目标是整个着陆过程使用的燃料最少，即:

$$P[\mu(\cdot)] = m(0) - m(\tau) \quad \text{最小}.$$

这里，τ 是航天器的着陆时间，即 $h(\tau) = v(\tau) = 0$. 此外，$h(t) \geq 0$ 且 $m(t) \geq 0$.

登月器落地问题

在上述问题中,

- $X(t)$ 是状态变量;
- $\mu(t)$ 是控制变量, 且容许控制集为:

$$\mathcal{U} = \{\mu : [0, \tau] \to [\alpha, \beta] | \mu \text{可测}\}.$$

- $P[\mu(\cdot)]$ 目标泛函, 只含有终端泛函. 此外, 由状态方程可知:

$$\mu = -\frac{\dot{m}}{k} \Rightarrow P[\mu(\cdot)] = -\int_0^\tau \mu(s)ds.$$

故也等价于一个只含有过程泛函的情形.

能控性与能达性

自治系统

不含有控制函数的系统称为自治系统.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t)), \quad t \in [0, +\infty). \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{E-9-5}$$

受控系统

状态方程(E-9-3)也被称为受控系统 (方程):

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t), \mu(t)), \quad t \in [0, +\infty). \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{E-9-6}$$

这里, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为初值, $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$. $\mu : [0, +\infty) \to U$ 是一个控制.

能控性与能达性

能控性 (Controllability)

对一个初值点 $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 和一个在时刻 t_1 给定的目标 $X(t_1) \in \mathbb{R}^n$, 若存在一个控制函数 $\mu(\cdot)$ 在时刻 $t_1 \geq t_0$, 使得:

存在不一定实现

$$X(t_1, \mu(\cdot), x_0) = X(t_1).$$

则称状态 (t_0, x_0) 可控. 如果对所有的系统初值, 都存在一个控制函数 $\mu(\cdot)$, 使得在时刻 t_1, 系统状态都为给定目标 $X(t_1)$, 即所有状态可控, 那么称此系统是能控的 (Controllable). 如果空间中任意非零状态都是能控的, 则称这个系统在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控.

能控性与能达性

注记-9-1

能控性强调的是：指定了某时刻 $t_1(t_1 \geq t_0)$ 的终值 $X(t_1)$, 初始时刻 t_0 取任何值 x_0 都存在控制函数 $\mu(\cdot)$ 使得 $X(t_0)$ 可以转移到 $X(t_1)$. 即，为了消除扰动对系统的干扰，我们希望系统在控制的作用下始终能最终到达目标，不管初值受到多大的扰动而发生变化.

注记-9-2

在研究系统能控性时，控制函数 $\mu(\cdot)$ 的并不是唯一的，并且这里没有指定形式和满足的约束 (不要求是容许的)，这就说明从初值到终值的路径并不是唯一的，如何找到满足某个指标泛函的最优 $\mu(\cdot)$，就是最优控制研究的问题.

能控性与能达性

能达性 (Reachability)

如果存在一个控制函数 $\mu(\cdot)$, 可以在时间区间 $[t_0, t_1]$ 内, 将一个给定的初值 $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 转移到终值 $X(t_1) \in \mathbb{R}^n$, 那么称终值 $X(t_1)$ 能达. 如果对给定系统初值, 都存在控制函数 $\mu(\cdot)$, 使系统可以到达任意的终值状态 $X(t_1) \in \mathbb{R}^n$, 即所有状态能达, 那么称此系统是能达的 (Reachable). 如果空间中任意非零状态都是能达的, 则称这个系统在 $[t_0, t_1]$ 上完全能达.

注记-9-3

比较能达性和能控性的定义, 可以发现:

- 能达性强调的是: 确定系统起点, 探讨系统终值的取值范围;
- 能控性强调的是: 确定系统终点, 探讨系统能否从任意的起点出发到达指定终点.

由此可见, 能控性与能达性讨论的方向是“反”的, 即: 能达性关心终值, 能控性关心初值.

为了进一步的研究受控系统的能控性与能达性，我们首先考虑以下最简单的线性时不变受控系统.

线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + B\mu(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{E-9-7}$$

这里，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. 此外，假设 U 有如下形式：

$$U = \mathbb{R}^m.$$

m维，控制能控制的

线性系统的解

为了求解上述时不变系统(E-9-7)，首先考虑如下齐次时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t), & t \in [t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{E-9-8}$$

定义函数

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

显然可知，$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ 且 $\Phi^T(t) = e^{A^T t}$.

线性齐次方程的解

由此，上述齐次线性系统(E-9-8)的解为:

$$y(t) = y_0 \cdot \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0), \quad t \geq t_0. \tag{E-9-9}$$

线性系统的解

由齐次方程的解(E-9-9), 根据常数变异公式, 可以得到非齐次方程(E-9-7)的解如下所示:

线性方程(E-9-7)的解:

$$y(t) = y_0 \cdot \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B\mu(s)ds, \quad t \geq t_0. \qquad \text{(E-9-10)}$$

基于上述解的形式, 我们讨论线性时不变系统(E-9-7)的能控性.

线性系统的能控性

定理 9-1(Gramian 矩阵判断法)

系统(E-9-7)在 $[t_0, t_1]$ 上的完全能控性等价于如下 Gramian 矩阵

$$W[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)B[\Phi^{-1}(s)B]^T ds \tag{E-9-11}$$

是可逆的.

证明纲要

(1) 证明系统(E-9-7)在 $[t_0, t_1]$ 上的完全能控性问题有如下必要性命题(正则性):
满秩矩阵
若 $\eta^T \Phi^{-1}(s)B = 0$ 对任意 $s \in [t_0, t_1]$ 成立, 则一定有 $\eta = 0$ 成立.

(2) 由步骤 (1) 中的命题来证明 Gramian 矩阵(E-9-11)是可逆的.

(3) 最后, 由 Gramian 矩阵(E-9-11)可逆性来证明系统(E-9-7)在 $[t_0, t_1]$ 上的能控性.

步骤 (1) 的证明

证明步骤 (1) 采用反证法, 即假设命题不正确. 假设存在 $\eta \neq 0$ 使得:

$$\eta^T \Phi^{-1}(s) B = 0, \quad s \in [t_0, t_1].$$

此时, 对任意在区间 $[t_0, t_1]$ 上的控制函数, 在线性系统的解(E-9-10)两边同时乘以 $\eta^T \Phi^{-1}(t_1)$ 并取 $t = t_1$, 可以得到:

$$\eta^T \Phi^{-1}(t_1) y(t_1) = \eta^T \Phi^{-1}(t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \eta^T \Phi^{-1}(s) B \mu(s) ds.$$

由于上式第二项是 0, 故有:

$\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(t)$

$$\eta^T \Phi^{-1}(t_1) y(t_1) = \eta^T \Phi^{-1}(t_0) y_0 = 常数.$$

$\eta^T \Phi^{-1}(s) B = 0 \Rightarrow \eta = 0$

步骤 (1) 的证明 (接上)

这就说明对任意的初值 (t_0, y_0), 系统在 t_1 时刻只能达到平面 $\eta^T\Phi^{-1}(t_1)y(t_1) = C$ 上 (C 为常数). 这就说明系统此时不是 $[t_0, t_1]$ 上完全能控的.

步骤 (2) 的证明

再次使用反证法, 即假设 Gramian 矩阵 $W[t_0, t_1]$ 不可逆, 则存在 $\eta \neq 0$, 使得

$$0 = W[t_0, t_1]\eta = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)B[\Phi^{-1}(s)B]^T \eta ds.$$

在上式两边同时乘以 η^T, 则有:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left| [\Phi^{-1}(s)B]^T \eta \right|^2 ds = 0.$$

步骤 (2) 的证明 (接上)

由此可以得到:

$$\eta^T \Phi^{-1}(s) B = 0, \quad s \in [t_0, t_1].$$

这就与步骤 (1) 中的必要性命题矛盾.

步骤 (3) 的证明 (充分性)

对于任意的初值 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 和终值 $y_1 \in \mathbb{R}^n$, 取控制函数为:

$$\mu(t) = [\Phi^{-1}(t) B]^T \eta, \quad t \in [t_0, t_1].$$

其中 η 为待定向量. 将上述控制函数 $\mu(t)$ 代入系统的解(E-9-10)中.

步骤 (3) 的证明 (接上)

我们的目标是找到合适的 η, 使得系统的解(E-9-10)在控制函数 $\mu(t)$ 的作用下, 在 t_1 时刻的取值为 y_1, 即:

$$y_1 = y_0 \cdot \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)BB^T[\Phi^{-1}(s)]^T\eta ds.$$

而上式又可以写为:

$$y_1 = y_0 \cdot \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) + \Phi(t_1)W[t_0,t_1]\eta.$$

反解上式, 可得:

$$\eta = W[t_0,t_1]^{-1}[\Phi^{-1}(t_1)y_1 - \Phi^{-1}(t_0)y_0].$$

故当 $W[t_0,t_1]$ 可逆时, 对任意的初值 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 总可以构造出控制函数使其取到终值 $y_1 \in \mathbb{R}^n$.

注记-9-4

步骤 (1) 的命题本质上和线性时不变系统的完全能控性等价.

注记-9-5

Gramian 矩阵判断法对如下时变线性系统同样适用.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)\mu(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{E-9-12}$$

其中, $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

线性系统的能控性

为了进一步研究线性时不变系统(E-9-7)的能控性问题，我们需要如下定义:

完全能控

称线性时不变系统(E-9-7)是完全能控的，如果对任何 $0 \le t_0 < t_1 < +\infty$，系统都是在 $[t_0, t_1]$ 上是完全能控的.

能控性矩阵

定义线性时不变系统(E-9-7)的能控性矩阵 G 为:

$$G = G(A, B) = \underbrace{[B, AB, \cdots, A^{n-1}B]}_{\text{为} n\times(mn)\text{的矩阵}}.$$

由此，可以得到经典的代数判断依据.

定理 9-2(Kalman 秩条件) Kalman 滤波

若 $rank(G) = n$，则此时线性时不变系统(E-9-7)完全能控.

定理 9-3(PBH(Popov-Belevitch-Hautus) 条件)

对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$，若 $rank(B, \lambda I - A) = n$ 成立，则此时线性时不变系统(E-9-7)完全能控.

线性系统的能控性

为了证明定理 9-2, 我们需要如下的引理:

Hamilton-Cayley 定理

如果 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵, 定义:

$$P_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k.$$

⇒ 不满秩 线性相关

为 A 的特征多项式, 则有 $P_A(A)=0$, 即:

$$P_A(A)=\sum_{k=0}^{n}a_kA^k=0.$$

定理 9-2 的证明 (必要性)

使用反证法. 若假设 Kalman 秩条件不成立, 则存在 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 且 $\eta \neq 0$, 使得:

$$\eta^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{E-9-13}$$

由 Hamilton-Cayley 定理可知, 对所有的 $k \geq 0$, (E-9-13)都成立. 因此, 可以得到:

$$\eta^T e^{At} B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \eta^T A^k B}{k!} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

这就与系统在 $[t_0, t_1]$ 上的完全能控性矛盾.

线性系统的能控性

定理 9-2 的证明 (充分性)

反过来, 若系统完全能控, 则对任意的 $0 < t_0 \leq t_1 < +\infty$, 系统在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控. 继续使用反证法. 若假设系统在 $[t_0, t_1]$ 上不完全能控, 则存在 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 且 $\eta \neq 0$, 使得:

$$\eta^T W[t_0, t_1]\eta = 0 \Rightarrow \eta^T e^{A(t_0 - t)} B = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

对上述函数求关于 t 的导数并取 $t = t_0$, 可以得到:

$$\eta^T [B, AB, \cdots, A^{n-1} B] = 0.$$

这与 Kalman 秩条件矛盾.

定理 9-3 的证明 (必要性)

使用反证法证明. 若 PBH 条件不成立, 则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及 $\eta \neq 0$ 使得:

$$\eta^T B = 0, \quad \eta^T A = \lambda \eta^T.$$

进而有:

$$\eta^T A^k B = \lambda^k \eta^T B = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

这与 Kalman 秩条件矛盾.

定理 9-3 的证明 (充分性)

假设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 为矩阵 A 的全部特征值 (复), 则存在可逆矩阵 P 使得 A 有如下 Jordan 标准型:

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_l \end{pmatrix} P^{-1}, \quad B = P \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_l \end{pmatrix}.$$

其中,

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}, \quad 1 \leq k \leq l.$$

定理 9-3 的证明 (接上)

且还有 $n_1+n_2+\cdots+n_l=n$ 成立. 由此可得 PBH 条件成立 $\Longleftrightarrow$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有:

$$rank(B_k,\lambda_k I-A_k)=n_k,\quad 1\le k\le l.$$

这就是说, 对 $1\le k\le l$ 成立:

$$rank\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & B_k^1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & B_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & B_k^{n_k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_k^{n_k} \end{pmatrix}_{n_k\times(n_k+m)} = n_k$$

其中,

$$B_k^T=((B_k^1)^T,\cdots,(B_k^{n_k})^T)^T,\quad (B_k^i)^T\in\mathbb{R}^m,\quad 1\le i\le n_k,\quad 1\le k\le l.$$

定理 9-3 的证明 (接上)

因此, 必有

$$B_k^{n_k} \neq 0, \quad 1 \le k \le l.$$

记 $\tilde{A}_k = A_k - \lambda_k I_{n_k}$, 由二项展开, 可以得到: 对任意 $j \ge 1$, $\tilde{A}_k^j B_k$ 是 $B_k, A_k B_k, \cdots, A_k^j B_k$ 的线性组合, 进而可以得到: 对任意 $j \ge 1$, $A_k^j B_k$ 是 $B_k, \tilde{A}_k B_k, \cdots, \tilde{A}_k^j B_k$ 的线性组合. 从而有:

$$rank(B_k, A_k B_k, \cdots, A_k^{n_k - 1} B_k) = rank(B_k, \tilde{A}_k B_k, \cdots, \tilde{A}_k^{n_k - 1} B_k) = n_k.$$

对任意 $1 \le k \le l$ 成立, 由此可得 Kalman 秩条件.

例-9-1

假设两家企业在同一种产品的销售上进行竞争，商品的价格函数 $P(t)$ 满足如下方程:

$$\dot{P}(t) = -Y_1(t) - Y_2(t),$$

其中 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 分别表示第一家企业和第二家企业的产出函数且其满足如下方程:

$$\dot{Y}_i(t) = -\alpha_i Y_i(t) + \beta_i \mu_i(t), \quad i = 1, 2.$$

这里，$\mu_i(t)$ 表示第 i 个企业的净投资，企业通过调整净投资来控制生产力水平. 此外，α_i 表示第 i 个企业的能力衰减率，β_i 表示第 i 个企业的投入转化率.

例-9-1

由此可知，令 $X=(P,Y_1,Y_2)$，$\mu(t)=(\mu_1(t),\mu_2(2))$，则上述经济学模型可以用以下线性方程组描述：

$$\dot{X}=AX(t)+B\mu(t),$$

其中：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix};$$

例-9-1

考虑上述线性系统的 Kalman 秩条件，可以得到其对应的能控性矩阵为:

$$G(A,B)=[B,AB,A^2B]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 \\ \beta_1 & 0 & -\alpha_1\beta_1 & 0 & \alpha_1^2\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & -\alpha_2\beta_2 & 0 & \alpha_2^2\beta_2 \end{pmatrix}.$$

显然，如果 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 均不为 0，上述矩阵满秩. 由此，可以知道线性系统完全能控.

例-9-1

此外, 还可由以下 Matlab 代码得到秩条件.

```
A=[0,-1,-1;0,-alpha_1,0;0,0,-alpha_2];
B=[0,0;beta_1,0;0,beta_2];
S=size(B);
n=S(1);
C=cell(1,n);
for i=1:n
    C{1,i}=A^(i-1)*B;
end
D=cell2mat(C);
R=rank(D);
```

如取: $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,1)$ 和 $(\beta_1,\beta_2)=(1,1)$. 此时, 可得到上述线性系统的 Kalman 秩为 3, 是完全能控的.

讨论线性系统的能达性，我们首先定义线性时不变系统(E-9-7)的能达集(Reachable set)．对于 $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$，定义:

$$\mathscr{R}(T; t_0, y_0) = \{y(T; y_0, \mu(\cdot)) | \mu(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T]\}, \quad \forall T \geq t_0. \qquad \text{(E-9-14)}$$

其中，$\mathscr{U}[0, T]$ 是 $[0, T]$ 上的容许集．我们将 $\mathscr{R}(T; t_0, y_0)$ 简记为 $\mathscr{R}(T)$．

定理 9-4

设 $U \subseteq \mathbb{R}$ 非空，则 $\mathscr{R}(T)$ 是凸集．

定理 9-5

设 $U \subseteq \mathbb{R}$ 是非空紧集，则 $\mathscr{R}(T)$ 是凸紧集．

注记-9-6

定理 9-5 告诉我们所有线性系统的轨线组成的集合是一个紧凸集，如果目标泛函是关于 $y(T; y_0, \mu(\cdot))$ 是一个连续泛函（可以弱化到下半连续），则可以得到最优控制的存在性. 对于更一般的非线性系统，证明最优控制的存在性，也是基于上述思路，即先证明能达集的紧凸性，再证明目标泛函的下半连续性，则由 Filippov 定理，可以得到最优控制的存在性.

注记-9-7

对于时不变线性系统，其系统的能达性 $\Longleftrightarrow$ 能控性. 但是对于一般的系统，这两个性质不等价.

考虑如下线性系统: $X(t)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=MX(t), & t\in[0,+\infty),\\ X(0)=x_0.\end{cases}\tag{E-9-15}$$

这里, $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 为初值. 此外, 假设存在如下线性方程:

$$Y(t)=NX(t),\quad t\in[0,+\infty).\tag{E-9-16}$$

微分方程 → 神经网络

这里, $N\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 由此, $Y(t)\in\mathbb{R}^m$.

能观性

如果由 $Y(t)$ 在 $[0,t]$ 上的信息可以得到初值 x_0, 则称方程(E-9-15)和方程(E-9-16)组成的系统为能观的.

能观性（推论）

如果方程(E-9-15)和方程(E-9-16)组成的系统能观, 则对于解 $X_1(\cdot)$ 和 $X_2(\cdot)$, 在 $[0,T]$ 上成立 $NX_1(t)=NX_2(t)$ 可以得到 $X_1(0)=X_2(0)$.

例-9-2

考虑以下两种极端的情况:

- 若有 $N=0$, 则显然此时系统不能观;
- 若 $m=n$ 且 N 可逆, 则有 $X(t)=N^{-1}Y(t)$, 此时系统能观.

线性系统的能观性

定理-9-6(能观性和能控性)

若系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t), \\ Y(t) = NX(t), \quad t \in [0, +\infty). \end{cases} \tag{E-9-17}$$

是能观的当且仅当系统:

$$\dot{Z}(t) = M^T Z(t) + N^T \mu(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad U = \mathbb{R}^m \tag{E-9-18}$$

是能控的.

注记-9-9

上述定理表示: 线性系统的能观性和能控性是对偶性质.

定理-9-6 的证明

使用反证法. 假设系统(E-9-17)不能观, 则存在点 $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}^n$, 使得:

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = MX_1(t), & X_1(0) = x_1; \\ \dot{X}_2(t) = MX_2(t), & X_2(0) = x_2. \end{cases} \tag{E-9-19}$$

但此时对所有的 $t \geq 0$ 成立: $Y(t) = NX_1(t) = NX_2(t)$. 定义:

$$X(t) = X_1(t) - X_2(t), \quad x_0 = x_1 - x_2.$$

则有:

$$\dot{X}(t) = MX(t), \quad X(0) = x_0 \neq 0.$$

但此时成立:

$$NX(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

定理-9-6 的证明 (接上)

此时, 上述方程的解为:

$$X(t) = e^{tM}x_0 \Rightarrow Ne^{tM}x_0 = 0, \quad t \geq 0. \tag{E-9-20}$$

有(E-9-20)可知, 取 $t=0$ 可以得到 $Nx_0 = 0$. 在(E-9-20)中求 k 阶导且取 $t=0$, 可以得到:

$$NM^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

因此, 成立:

$$(x_0)^T(M^k)^T N^T = 0 \Rightarrow (x_0)^T(M^T)^k N^T = 0$$

定理-9-6 的证明 (接上)

由此可知:

$$(x_0)^T[N^T, M^T N^T, \ldots, (M^T)^{n-1} N^T] = 0.$$

由于 $x_0 \neq 0$, 可以得到

$$rank[N^T, M^T N^T, \ldots, (M^T)^{n-1} N^T] < n.$$

这与 Kalman 秩条件矛盾, 故线性系统(E-9-18)不能控. 这就说明(E-9-18)的能控性可以得到系统(E-9-17)的能观性.

定理-9-6 的证明 (接上)

反过来, 继续使用反证法. 假设线性系统(E-9-18)是不能控的, 则有:

$$rank[N^T, M^T N^T, \ldots, (M^T)^{n-1} N^T] < n.$$

此时, 存在 $x_0 \neq 0$ 使得:

$$(x_0)^T [N^T, M^T N^T, \ldots, (M^T)^{n-1} N^T] = 0.$$

这就说明, 对 $k = 0, 1, \ldots, n-1$, 成立 $NM^k x_0 = 0$. 此时由 Cayley-Hamilton 定理可知, 存在常数 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, 成立:

$$M^n = -\beta_{n-1} M^{n-1} - \cdots - \beta_0 I \Rightarrow NM^n x_0 = 0.$$

进而可以得到: $NM^k x_0 = 0$ 对 $k = 0, 1, 2, \cdots$. 均成立.

定理-9-6 的证明（接上）

由此可知:

$$X(t)=e^{Mt}x_0=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kM^k}{k!}x_0\Rightarrow NX(t)=N\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kM^k}{k!}x_0=0.$$

这就说明线性系统(E-9-17)不能观，这就产生了矛盾．故完成了证明．

Bang-Bang 控制函数

控制函数 $\mu(\cdot) \in \mathscr{U}$ 称为 Bang-Bang 控制函数, 如果 $\mu(t) = (\mu_1(t), \cdots, \mu_m(t))$ 中任意分量都为 $|\mu_i(t)| = 1(i = 1, 2, \ldots, m)$, 对所有 $t \geq 0$ 都成立.

Bang-Bang 控制原则

令 $t > 0$ 且假设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 对于线性系统:

$$\dot{X}(t) = MX(t) + N\mu(t).$$

存在 Bang-Bang 控制函数 $\mu(\cdot)$ 使得在时刻 t 可以得到 $X(t) = 0$ 成立.