最优控制复习整理

一、控制系统

1、控制系统的变量

状态变量：描述系统的状态，对系统发展起决定作用的变量，记作：$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$

控制变量：对系统起控制作用的变量，记作：$\boldsymbol{u}=\left(u_1,\cdots,u_p\right)^{\mathrm{T}}$

2、控制系统的描述

状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)$，即$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\\ \vdots\\ f_n\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\end{pmatrix}$

目标集：$M=\left\{\boldsymbol{x}(t_f)\middle|\boldsymbol{x}(t_f)\in\mathbb{R}^n,N_1\left(t_f,\boldsymbol{x}(t_f)\right)=0,N_2\left(t_f,\boldsymbol{x}(t_f)\right)\le 0\right\}$

容许控制集：$U=\{\boldsymbol{u}(t)|\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^p,\boldsymbol{u}(t)$是容许控制$\}$

性能指标：

Mayer 型：$J\big(\boldsymbol{u}(t)\big)=\Phi\left(t_f,\boldsymbol{x}(t_f)\right)$

Lagrange 型：$J\big(\boldsymbol{u}(t)\big)=\int_{t_0}^{t_f}F\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\mathrm{d}t$

Bolza 型：$J\big(\boldsymbol{u}(t)\big)=\Phi\left(t_f,\boldsymbol{x}(t_f)\right)+\int_{t_0}^{t_f}F\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\mathrm{d}t$

3、最优性

最优控制：最优控制问题有解时的$\boldsymbol{u}^*(t),t\in\left[t_0,t_f\right]$
最优轨线：最优控制问题有解时的$\boldsymbol{x}^*(t),t\in\left[t_0,t_f\right]$
最优性能指标：最优控制问题有解时的$J^*(\boldsymbol{u})=J\big(\boldsymbol{u}^*(\cdot)\big)$

二、泛函极值问题

1、泛函和宗量

泛函：$J:\Omega\to\mathbb{R},\boldsymbol{x}(t)\mapsto J\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$，其中$\Omega$是容许函数集，称$J$是定义在$\Omega$上的泛函
宗量：$\boldsymbol{x}(t)\in\Omega$

2、函数间的距离

定义：$\left|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{y}^{(k)}\right|=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

k阶距离：$d_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max\left\{\sup_{t\in[t_0,t_f]}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\sup_{t\in[t_0,t_f]}|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|,\cdots,\sup_{t\in[t_0,t_f]}\left|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{y}^{(k)}\right|\right\}$

3、极值

	条件	结果	极值	极值曲线
绝对（最）小/大	$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$	$J(\boldsymbol{x}^*)\le/\ge J(\boldsymbol{x})$	$J(\boldsymbol{x}^*)$[1]	$\boldsymbol{x}^*(t)$
强相对极小/大	$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*)<\varepsilon$			
弱相对极小/大	$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*)<\varepsilon$			

[1] 对于同一个Ω和ε，强极大值≥弱极大值；强极小值≤弱极小值

三、泛函中的变分

1、变分与增量

宗量的变分：$\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{x}(t)=\overline{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)$

泛函的增量：$\Delta J(\boldsymbol{x})=J(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})-J(\boldsymbol{x})$

泛函的变分：$\delta J(\boldsymbol{x})=L(\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{x})$，其中$L(\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{x})$是$\Delta J(\boldsymbol{x})$关于$\delta\boldsymbol{x}$的线性主部

2、泛函的连续性

若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*)<\delta$时，有$|J(\boldsymbol{x})-J(\boldsymbol{x}^*)|<\varepsilon$，则称泛函$J$在$\boldsymbol{x}^*$处是连续的

3、变分的求法

$$\delta J(\boldsymbol{x})=\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\boldsymbol{x}+\alpha\delta\boldsymbol{x})\Big|_{\alpha=0}$$

4、泛函极值的必要条件

如果可微泛函$J(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0(t)\in\Omega$上能取到极值，则$\delta J(\boldsymbol{x}_0)=0$

允许有角点$t=\hat{t}$时，要求$(F-F_{\dot{x}}\dot{x})|_{t=\hat{t}-0}=(F-F_{\dot{x}}\dot{x})|_{t=\hat{t}+0}, F_{\dot{x}}|_{t=\hat{t}-0}=F_{\dot{x}}|_{t=\hat{t}+0}$,

5、泛函极值的充分条件

如果二阶可微泛函$J(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0(t)\in\Omega$上满足欧拉方程边值问题，且沿$\boldsymbol{x}$，有$F_{\dot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}}>(<)0$，则$\boldsymbol{x}_0(t)$为$J(\boldsymbol{x})$的极小（大）值曲线

四、变分法求泛函极值

1、问题的基本分类

性能指标：	Lagrange 型：$J(\boldsymbol{x})=\int_{t_0}^{t_f}F(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}t$	Bolza 型：$J(\boldsymbol{x})=\Phi(t,\boldsymbol{x})\|_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}F(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}t$
终止时刻：	固定$t_f=t_f^*$；	自由$t_f\in\mathbb{R}$
终端约束：	约束$\boldsymbol{N}(t,\boldsymbol{x})\|_{t=t_f}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{x}\|_{t=t_f}=\boldsymbol{\varphi}\|_{t=t_f}$；	终端自由
条件约束：	约束$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{0}$；	无约束

2、泛函极值问题求解

1）得到（增广）泛函极值问题的 Euler 方程（组）、横截条件、边界条件

2）求解 Euler 方程（组）

3）将解带入横截条件和边界条件，确定任意常数

4）验证充分性

3、Euler 方程的变形

1）$F=F(t,x)$，$F_x=0$是函数方程，不是微分方程；

2）$F=P(t,x)+Q(t,x)\dot{x}$，$P_x-Q_t=0$是函数方程，不是微分方程；

3）$F=F(x,\dot{x})$，$F_x-F_{x\dot{x}}\dot{x}-F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}=0$，乘以$\dot{x}$得到$F-F_{\dot{x}}\dot{x}=C$；

4）$F=F(t,\dot{x})$，$F_{\dot{x}}=C$。

4、各种条件

[1]约束的转化

	Lagrange 型问题	Bolza 型问题
无约束问题	$J(\boldsymbol{x})=\int_{t_0}^{t_f}F(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}t$	$J(\boldsymbol{x})=\Phi(t,\boldsymbol{x})\|_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}F(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}t$
约束问题	$\tilde{J}(\boldsymbol{x})=\int_{t_0}^{t_f}[F(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})]\mathrm{d}t$	$\tilde{J}(\boldsymbol{x})=\Phi(t,\boldsymbol{x})\|_{t=t_f}+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(t,\boldsymbol{x})\|_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[F(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})]\mathrm{d}t$

[2]Lagrange 型问题

终止时间	固定	自由

终端值	终端已知	终端自由	终端自由	终端约束
Euler 方程组	$F_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}=\mathbf{0}$ $\boldsymbol{G}=\mathbf{0}$			
初始条件	$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$			
边界条件		$F_{\dot{x}}\vert_{t=t_f}=\mathbf{0}$		$\boldsymbol{x}_f=\boldsymbol{\varphi}(t_f)$
			$\left(F-F_{\dot{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}\right)\Big\vert_{t=t_f}=0$ （或$F\vert_{t=t_f}=0$）	$\left[F+F_{\dot{x}}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}-\dot{\boldsymbol{x}})\right]\Big\vert_{t=t_f}=0$
	（自由边界条件）		（横截条件）	

[3]Bolza 型问题

终止时间	固定		自由
终端值	终端已知	终端自由	终端自由
Euler 方程组	$F_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}=\mathbf{0}$ $\boldsymbol{G}=\mathbf{0}$		
初始条件	$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$		
边界条件		$F_{\dot{x}}\vert_{t=t_f}=-(\Phi+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}N)_x\vert_{t=t_f}$ $\boldsymbol{N}\vert_{t=t_f}=\mathbf{0}$	
			$[(\Phi+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}N)_t+(\Phi+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}N)_x^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}+F]\Big\vert_{t=t_f}=0$ （或$[(\Phi+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}N)_t-F_{\dot{x}}\dot{\boldsymbol{x}}+F]\Big\vert_{t=t_f}=0$）
	（自由边界条件）		（横截条件）

五、最优控制问题

1、最优控制问题的描述

性能指标：$J[u(t)]=\Phi\left(t_f,\boldsymbol{x}(t_f)\right)+\int_{t_0}^{t_f}F(t,\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}t$

状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=f(t,\boldsymbol{x},u)$

初始条件：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

边界约束：$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$ $\boldsymbol{N}\vert_{t=t_f}=0$ t_f自由

2、变分法

构造 Hamilton 函数：$H(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{\lambda})=F(t,\boldsymbol{x},u)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}f(t,\boldsymbol{x},u)$

得方程组：　状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=f(t,\boldsymbol{x},u)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}$

辅助方程：$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial x}$

控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u}=0$

初始条件：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

边界条件：$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$ $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=(\Phi+\boldsymbol{\mu}^{T}\boldsymbol{N})_x\vert_{t=t_f}$,$\boldsymbol{N}\vert_{t=t_f}=0$ $[(\Phi+\boldsymbol{\mu}^{T}\boldsymbol{N})_t+H]\vert_{t=t_f}=\mathbf{0}$

（特别地，有$H(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{\lambda})=H\left(t_f,\boldsymbol{x}(t_f),u(t_f),\lambda(t_f)\right)+\int_{t_f}^{t}\frac{\partial}{\partial s}H\left(s,\boldsymbol{x}(s),u(s),\boldsymbol{\lambda}(s)\right)\mathrm{d}s$）

3、极大值原理

构造 Hamilton 函数：$H(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{\lambda})=F(t,\boldsymbol{x},u)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}f(t,\boldsymbol{x},u)$

得方程组： 状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=f(t,\boldsymbol{x},u)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}$

辅助方程：$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$

控制方程：$H\left(t,\boldsymbol{x}^*(t),u^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t)\right)=\max\limits_{u\in U}H\left(t,\boldsymbol{x}^*(t),u(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t)\right)$

初始条件：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

边界条件：$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$ $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{N})_x|_{t=t_f},\boldsymbol{N}|_{t=t_f}=0$ $[(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{N})_t+H]|_{t=t_f}=\mathbf{0}$

4、线性时间最优控制

线性系统：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{n\times m}\boldsymbol{u}(t),U=[-1,1]^m$

性能指标：$J(\boldsymbol{u})=-\int_0^t 1\mathrm{d}s=-t$

最优控制：$J(\boldsymbol{u}^*)=\max\limits_{u\in U}J(\boldsymbol{u})$

保证线性时间最优控制的几个定理：

Alaogu 定理：$\boldsymbol{u}_n,u\in U,\mathrm{n}=1,2,\cdots$，则存在子列$u_{n_k}\xrightarrow{*}u$

Bang-Bang：若控制$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}}$满足$|u_k|=1,k=1,2,\cdots,m$

定理：对于已知初值的线性时间最优控制，一定存在一个 Bang-Bang 达到最优，且最优极点是 Bang-Bang 的

六、可控性和可观性

1、可控性

定义：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$，如果$\forall\boldsymbol{x}_0$，$\exists$分段连续$\boldsymbol{u}$，使$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}(t_0)=\mathbf{0}$，称系统在$t_0$可控

充要条件：$\exists T>0,\mathrm{s.t.}W_c(0,T)=\int_0^T \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}s}\mathrm{d}s$非奇异

矩阵$\boldsymbol{P}_c=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})$秩为$n$

2、可观性

定义：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$，如果$\forall\boldsymbol{u}$，$\exists\ \boldsymbol{y}(t)$，使$\boldsymbol{x}(0)$由$\boldsymbol{y}(t)$唯一确定，称系统可观

充要条件：$\exists T>0,\mathrm{s.t.}W_o(0,T)=\int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}s}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\mathrm{d}s$非奇异

矩阵$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\cdots,(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$或$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\\cdots\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{pmatrix}$秩为$n$

3、对偶原理

系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$和$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t)\\\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)\end{cases}$的可控可观子空间对偶。

七、离散系统

1、离散泛函的变分法

系统：$J[\boldsymbol{x}]=\Phi\big(\boldsymbol{x}(n)\big)+\sum_{k=0}^{n-1}F(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k+1),k)$

$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

变分法：$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k+1),k)}{\partial \boldsymbol{x}(k)}+\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(k-1),\boldsymbol{x}(k),k-1)}{\partial \boldsymbol{x}(k)}=0,k=1,2,\cdots,n-1$

$\left.\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(k-1),\boldsymbol{x}(k),k-1)}{\partial \boldsymbol{x}(k)}\right|_{k=n}=-\frac{\partial \Phi\big(\boldsymbol{x}(n)\big)}{\partial \boldsymbol{x}(n)}$

2、离散控制系统的变分法

系统：$J[\boldsymbol{x}]=\Phi\big(\boldsymbol{x}(n)\big)+\sum_{k=0}^{n-1}F(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k+1),k)$

$\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k),k=0,1,\cdots,n-1$

$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

极大值：令 Hamilton 函数$H_k=F(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k+1),k)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(k+1)\,f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k)$

状态方程：$\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k),k=0,1,\cdots,n-1$

辅助方程：$\boldsymbol{\lambda}(k)=\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{x}(k)},k=1,2,\cdots,n-1$

控制方程：$\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}(k)}=0,k=1,2,\cdots,n-1$

初始条件：$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

边界条件：$\boldsymbol{\lambda}(n)=\frac{\partial \Phi\big(\boldsymbol{x}(n)\big)}{\partial \boldsymbol{x}(n)}$

3、离散控制系统的极大值原理

系统：$J[\boldsymbol{x}]=\Phi\big(\boldsymbol{x}(n)\big)+\sum_{k=0}^{n-1}F(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k+1),k)$

$\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k),k=0,1,\cdots,n-1$

$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

极大值：令 Hamilton 函数$H_k=F(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k+1),k)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(k+1)\,f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k)$

状态方程：$\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k),k=0,1,\cdots,n-1$

辅助方程：$\boldsymbol{\lambda}(k)=\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{x}(k)},k=1,2,\cdots,n-1$

控制方程：$H\big(k,\boldsymbol{x}^*(k),u^*(k),\boldsymbol{\lambda}^*(k)\big)=\max\limits_{u\in U}H\big(k,\boldsymbol{x}^*(k),u(k),\boldsymbol{\lambda}^*(k)\big),k=1,2,\cdots,n-1$

初始条件：$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

边界条件：$\boldsymbol{\lambda}(n)=\frac{\partial \Phi\big(\boldsymbol{x}(n)\big)}{\partial \boldsymbol{x}(n)}$

八、线性二次型

1、常见的 LQ 问题

状态调节器：状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

性能指标：$J[\boldsymbol{u}]=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t$

输出调节器：状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$输出：$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)$

性能指标：$J[\boldsymbol{u}]=\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t$

跟踪系统：状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$

目标：$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0$，$\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)$

性能指标：$J[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[(\boldsymbol{y}-\widetilde{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}-\widetilde{\boldsymbol{y}}) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t$

$\boldsymbol{Q}$半正定，$\boldsymbol{R}$正定

2、时间状态调节器

时间状态调节器的最优控制为：$\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$

其中，$\boldsymbol{P}(t)$是 Riccati 问题$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{P}} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{P}(T) = -\boldsymbol{F}\end{cases}$的解

最优轨迹$\boldsymbol{x}^*(t)$是问题$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0\end{cases}$的解

反之，如果控制以$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$给出，则为最优调节器

最优性能指标为$J^*[\boldsymbol{x}(t_0), t_0] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$

$T = \infty$时，$\boldsymbol{P}$全部取代数矩阵，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}$

3、输出状态调节器

输出状态调节器的最优控制为：$\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$

其中，$\boldsymbol{P}(t)$是 Riccati 问题$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{P}} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{P}(T) = -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}(T)\end{cases}$的解

反之，如果控制以$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$给出，则为最优调节器

4、离散调节器

状态方程：$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)$，$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标：$J[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)]$

Hamilton 函数：$H(k) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(k+1)\big(\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)\big)$

辅助方程：$\boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = -\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(k+1), k = 1,2,\cdots,n-1$

控制方程：$\boldsymbol{u}^*(k) = \boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\lambda}(k+1), k = 1,2,\cdots,n-1$

初始条件：$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$

边界条件：$\boldsymbol{\lambda}(n) = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(n)$

假设$\boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}(k)$，则$\boldsymbol{u}^*(k) = \boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\,\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{x}(k+1)$

有$\boldsymbol{P}(k)$是 Riccati 差分方程$\begin{cases}\boldsymbol{P}(k) = -\boldsymbol{Q}(k) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{P}^{-1}(k+1) - \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)]\boldsymbol{A}(k) \\ \boldsymbol{P}(n) = -\boldsymbol{F}\end{cases}$的解