数理经济学
(最优控制理论和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2023 年 04 月 25 日

Pontryagin 最大值原理的一种经济学解释

R. Dorfman 在其一篇论文中[1]指出，最大值原理的每一部分都可以被赋予简单而迷人的经济学解释，使得每一个条件都变得非常合理.

基本假设

- 假设某个企业希望它在时间区间 $[0, T]$ 上的利润最大化;
- 在任何时刻 $t \in [0, T]$ 上，这个公司的资本存量为 $k(t)$; 且假设这个公司从 0 时刻开始运营，初始资本为 $k(0) = k_0 > 0$;
- 对于给定的 $k(t)$，假设企业的经济决策函数为 $\mu(t)$，这里 $\mu(t)$ 可以表示广告预算或者存货政策等收入-支出方案;
- 企业在时刻 t 的资本存量增长速度为 $\dot{k}(t)$，其不仅受到政策 $\mu(t)$ 的影响，还受到资本存量 $k(t)$ 的影响，即成立:

$$\dot{k}(t) = f(t, k(t), \mu(t)).$$

[1] R. Dorfman, An Economic Interpretation of Optimal Control Theory, American Economic Review, 1969, pp.817-831.

基本假设

- 对于给定的 $k(t)$ 和 $\mu(t)$, 假设企业在 t 时刻的利润函数为: $\pi(t,k(t),\mu(t))$. 则此时该企业的在 $[0,T]$ 上的总利润为:

$$J(\mu(t)) = \int_0^T \pi(s,k(s),\mu(s))ds.$$

此时的问题为找到最优的控制 μ^* 使得:

$$J[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu\in\mathscr{U}} J[\mu(\cdot)]. \tag{E-12-1}$$

这里, $\mathscr{U}$ 是一个恰当控制集.

关于乘子 $p(\cdot)$

Hamilton 函数

此时, 上述最优控制问题对应的 Hamilton 函数为:

$$H(s,k(s),\mu(s),p(s)) = \pi(s,k(s),\mu(s)) + p(s)f(s,k(s),\mu(s)). \quad \text{(E-12-2)}$$

其中 $p(s)$ 为乘子.

在之前的讨论中, 我们知道 $p(t)$ 可以被视为 Lagrange 乘子, 且假设 $k^*(\cdot)$, $\mu^*(\cdot)$ 和 $p^*(\cdot)$ 为最优变量, 则(E-12-1)变为:

$$\begin{aligned} J[\mu^*(\cdot)] = & \int_0^T [H(s,k^*(s),\mu^*(s),p^*(s)) + k^*(s)\dot{p}^*(s)]ds \\ & - p^*(T)k^*(T) + p^*(0)k_0. \end{aligned}$$

此时，对总最优利润 $J[\mu^*(\cdot)]$ 求关于初始资本和终值资本的偏导，可得:

$$\frac{\partial J[\mu^*(\cdot)]}{\partial k_0} = p^*(0), \quad \frac{\partial J[\mu^*(\cdot)]}{\partial k(T)} = -p^*(T).$$

由此可知，乘子的初值 $p^*(0)$ 衡量了总最优利润对初始资本存量的敏感度，即如果增加额外的一个单位的初始资本，则总最优利润 $J[\mu^*(\cdot)]$ 将增加 $p^*(0)$. 因此，可以将 $p^*(0)$ 视为一单位初始资本的估算价值或影子价格[2].

另一方面，对于第二个偏导，可以理解为若想在终止时刻 T 时多保留一单位（少用一单位）资本存量，那么总利润必须减少 $p^*(T)$，在 $t = T$ 时，$p^*(T)$ 就是衡量一单位终值资本存量的影子价格. 综上可知，无论 $p^*(0)$ 还是 $p^*(T)$ 都可以视为最优总利润的影子价格. 一般地，可以将 $p^*(t)$ 视为在 t 时刻资本存量的影子价格.

[2] 在商业活动当中，影子价格是管理层愿意为获取额外一个单位的既定资源而多付出的最大价格. 例如，当一条生产线已经运转其最长工作时间，那么让这条生产线再多运行单位时间，其价格就是影子价格.

现在来考虑 Hamilton 函数的经济学意义，首先有：

$$H(s,k(s),\mu(s),p(s)) = \pi(s,k(s),\mu(s)) + p(s)f(s,k(s),\mu(s)). \quad \text{(E-12-2)}$$

在上述函数中：

- $\pi(s,k(s),\mu(s))$ 表示 s 时刻的利润，其本质上对应的是当前资本 $k(\cdot)$ 和当前政策 $\mu(\cdot)$ 下，企业的利润函数. 因此，可以将其理解为：对应于当前政策 $\mu(\cdot)$ 的当前利润效应.
- 由于 $\dot{k} = f(s,k(s),\mu(s))$，故 $f(s,k(s),\mu(s)$ 本质上是资本 $k(\cdot)$ 在政策 $\mu(\cdot)$ 下的变化速度. 当 f 乘以影子价格 $p(\cdot)$ 时，就可以视为对于政策 $\mu(\cdot)$ 的资本价值变化速度. 因此，可以被看作在政策 μ 下的未来利润效应，这是由于企业累积资本的目的在于产生未来利润.

关于 Hamilton 函数

总利润前景

然而, 对应于当前政策 $\mu(\cdot)$ 的当前利润效应和在政策 $\mu(\cdot)$ 下的未来利润效应本质上是相互竞争的: 如果某个政策 $\mu(\cdot)$ 偏向当前利润, 那么其通常导致未来利润减少. 由此, Hamilton 函数代表了在各种政策 $\mu(\cdot)$ 下, 企业的总利润前景, 其同时考虑了当前利润效应和未来利润效应.

最大值原理

最大值原理要求 Hamilton 函数关于 $\mu(\cdot)$ 最大化, 即在每个时间点上通过选择合适的 $\mu(\cdot)$ 使得总前景利润最大化. 由最大值原理可知:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial \pi}{\partial u} + p(s)\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u} = -p(s)\frac{\partial f}{\partial u}.$$

最大值原理 (接上)

在上式中:

- $\frac{\partial \pi}{\partial u}$ 表示政策 $\mu(\cdot)$ 引起的当前利润的增加边际;
- $-p(s)\frac{\partial f}{\partial u}$ 表示政策 $\mu(\cdot)$ 引起的未来利润的降低边际;
- 最大值原理表明最优的政策 $\mu^*(\cdot)$ 是使得当前利润的增加和未来利润的降低相等的政策.

关于方程

运动方程

关于 $k(\cdot)$ 的方程表示了企业的政策对资本变化速度 $\dot{k}(\cdot)$ 的影响方式.

伴随方程

伴随方程为:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\frac{\partial \pi}{\partial k} - p(t)\frac{\partial f}{\partial k}.$$

在上式两边同时乘以 -1, 则可以得到:

$$-\dot{p}(t) = \frac{\partial \pi}{\partial k} + p(t)\frac{\partial f}{\partial k}.$$

关于方程

伴随方程 (接上)

在上式中:

- 左侧部分, $-\dot{p}(t)$ 表示影子价格的下降速度;
- 右侧部分, $\frac{\partial \pi}{\partial k}$ 表示资本对当前利润的边际贡献;
- 右侧部分, $p(t)\frac{\partial f}{\partial k}$ 表示资本对提高资本价值的边际贡献;
- 则伴随方程要求资本的影子价格的降低速度等于资本对企业当前和未来利润的贡献速度.

关于横截条件

横截条件 (固定终止时间, 不固定终止值)

在终值状态自由时: 成立 $p(T)=0$, 即在终止时间 $t=T$ 时, 资本的影子价格降低为 0. 这是由于资本对企业的价值仅在于其产生利润的潜力. 具体而言, 在 $t=T$ 时, 剩下的任何资本存量对企业都不再具有经济价值, 这是因为在 T 时刻无法将这些资本投入使用. 因而, 当企业接近计划尾声时, 企业不应该积极地累积资本; 相反, 企业应该在时刻 T 之前尽可能地用尽它的资本.

横截条件 (固定终止值, 不固定终止时间)

在终止时间自由时: 成立 $H_{t=\tau}=0$. 这就是说在终止时间 τ 时, 当前与未来利润之和必定为 0. 即企业应该在充分利用了所有可能利润机会之后才实现最终值.

当前值的 Hamilton 函数

研究动机

在金融经济学问题中，目标泛函中的被积函数通常含有贴现因子 $e^{-\rho t}(\rho > 0)$，且其一般形式为：$r(t, y(t), \mu(t)) = G(t, y(t), \mu(t))e^{-\rho t}$. 因此，对应的最优控制问题为：

$$J[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot)\in\mathscr{U}} \int_0^T G(t, y(t), \mu(t))e^{-\rho t} dt$$

$$s.t. \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t), \mu(t)); \quad \text{以及适当边界条件.}$$

其中，$\mathscr{U}$ 为恰当的容许控制集. 此时，对应的 Hamilton 函数为：

$$H[t, y(t), p(t), \mu(t)] = G(t, y(t), \mu(t))e^{-\rho t} + p(t)f(t, y(t), \mu(t)). \quad \text{(E-12-3)}$$

为了研究带有贴现因子的 Hamilton 函数及对应的最大值原理，需要改进乘子 $p(\cdot)$ 的形式.

当前值的 Hamilton 函数

当前值的乘子

定义当前值的乘子如下:

$$m(t)=p(t)e^{\rho t}\Rightarrow p(t)=m(t)e^{-\rho t}.$$

其中, $p(\cdot)$ 为(E-12-3)中定义乘子.

则可以定义当前值的 Hamilton 函数.

当前值 Hamilton 函数

定义当前值 Hamilton 函数如下:

$$\begin{aligned} H_\epsilon[t,y(t),m(t),\mu(t)] &= H[t,y(t),p(t),\mu(t)]\cdot e^{\rho t} \\ &= G(t,y(t),\mu(t))+m(t)f(t,y(t),\mu(t)), \end{aligned}$$

记为 H_ϵ. 注意 $H=H_\epsilon e^{-\rho t}$.

对应的最大值原理

由于在 H_ϵ 中, 贴现因子 $e^{\rho t}$ 和控制 $\mu(\cdot)$ 无关. 故最大值原理对于 H_ϵ 并没有变化. 故此时对应的最大值原理为:

$$H_\epsilon[t, y^*(t), m^*(t), \mu^*(t)] = \max_{u \in U} H_\epsilon[t, y^*(t), m^*(t), u], \quad 0 \le t \le T.$$

关于 $y^*(\cdot)$ 的方程变为:

$$\dot{y}^* = \frac{\partial H}{\partial p} = f(t, y^*, \mu^*) = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial m} \Rightarrow \dot{y}^* = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial m}.$$

进一步, 由乘子 $m(\cdot)$ 的定义可知:

$$\dot{p}(t) = \dot{m}(t)e^{-\rho t} - \rho m(t)e^{-\rho t}.$$

由 H 的定义可知:

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial y} e^{-\rho t}.$$

因此可以得到关于 H_ϵ 和 $m(\cdot)$ 的伴随方程为:

$$\dot{m}(t) = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial y} + \rho m(t).$$

最后, 研究 H_ϵ 下的横截条件.

- 对终止时间固定, 终止值不固定的问题, 成立:

$$p(T) = 0 \Rightarrow m(t)e^{-\rho t}\Big|_{t=T} = 0 \Rightarrow m(T)e^{-\rho T} = 0.$$

- 对终止值固定, 终止时间不固定的问题, 成立:

$$H\big|_{t=T} = 0 \Rightarrow H_\epsilon \cdot e^{-\rho t}\Big|_{t=T} = 0 \Rightarrow H_\epsilon\big|_{t=T} \cdot e^{-\rho T} = 0.$$

自控问题

对于带有贴现因子 $e^{\rho t}$ 的最优控制问题，考虑如下的简化形式：

$$G=G(y(\cdot),\mu(\cdot)) \quad \text{和} \quad f=f(y(\cdot),\mu(\cdot)).$$

则此时对应的最优问题变为：

$$J[\mu^*(\cdot)]=\max_{\mu(\cdot)\in\mathscr{U}}\int_0^T G(y(t),\mu(t))e^{-\rho t}dt$$
$$s.t. \quad \dot{y}(t)=f(y(t),\mu(t)); \quad \text{以及适当边界条件.}$$

此时，上述控制问题对应的 Hamilton 函数为：

$$H_\epsilon[y(t),m(t),\mu(t)]=G(y(t),\mu(t))+m(t)\cdot f(y(t),\mu(t)).$$

且类似可得对应的最大值原理.

自控问题

上述问题对应的最大值原理与传统最大值原理的不同点为:

$$t \to H_\epsilon[y^*(t), m^*(t), \mu^*(t)] \quad \text{不再为一个常数.}$$

这是因为:

$$\begin{aligned}\frac{dH_\epsilon[y^*, m^*, \mu^*]}{dt} &= \frac{\partial H_\epsilon[y^*, m^*, \mu^*]}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H_\epsilon[y^*, m^*, \mu^*]}{\partial m}\dot{m} \\ &= \rho m \dot{y} \neq 0 (\rho \neq 0).\end{aligned}$$

Eisner-Strotz 模型再思考

考虑如下的目标泛函:

$$\max \int_0^T [\pi(k(t)) - C(\mu(t))]e^{-\rho t} dt.$$

其中, $\pi(\cdot)$ 为利润函数; $k(\cdot)$ 为资本存量函数; $C(\cdot)$ 为成本函数; $\mu(\cdot)$ 为控制函数, 表示净投资额度; 且受控方程为:

$$\dot{k} = \mu(t), \quad \text{以及恰当边界条件.}$$

此外, 利润函数 $\pi(\cdot)$ 和成本函数 $C(\cdot)$ 满足:

$$\pi''(k) < 0, \quad C'(\mu) > 0, \quad C''(\mu) > 0.$$

此时，可以得到如下 Hamilton 函数:

$$H[k(t),p(t),\mu(t)]=[\pi(k(t))-C(\mu(t))]e^{-\rho t}+p(t)\mu(t),\quad 0\leq t\leq T.$$

此时对应的最大值原理为:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}=-C'(\mu(t))\cdot e^{-\rho t}+p(t)=0,\quad (\text{最大值原理});$$

$$\dot{p}(t)=-\frac{\partial H}{\partial k}=-\pi'(k(t))\cdot e^{-\rho t},\quad (\text{伴随方程});$$

$$\dot{k}(t)=\frac{\partial H}{\partial p}=\mu(t),\quad (\text{运动方程}).$$

Eisner-Strotz 模型再思考 (接上)

若采用当前值的 Hamilton 函数, 则可以得到;

$$H_\epsilon[k(t),m(t),\mu(t)]=\pi(k(t))-C(\mu(t))+m(t)\mu(t),\quad 0\le t\le T.$$

其对应的最大值原理为:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_\epsilon}{\partial \mu}&=-C'(\mu(t))+m(t)=0,\quad (\text{最大值原理});\\
\dot m(t)&=-\frac{\partial H_\epsilon}{\partial k}=-\pi'(k(t))+\rho m(t),\quad (\text{伴随方程});\\
\dot k(t)&=\frac{\partial H_\epsilon}{\partial m}=\mu(t),\quad (\text{运动方程}).
\end{aligned}$$

由此可知, 上面的最大值原理更简便, 不含有贴现因子 $e^{-\rho t}$.

Eisner-Strotz 模型再思考 (接上)

由上述最大值原理可知，最优的控制函数 $\mu^*(\cdot)$ 满足：

$$m^*(t) = C'(\mu^*(t)) > 0 \Rightarrow \frac{dm^*(t)}{d\mu^*} = C''(\mu^*(t)) > 0.$$

这就表明 $m(t)$ 是关于 $\mu^*(t)$ 的单增函数，故可以得到反函数为：

$$\psi(\cdot) = C'^{-1}(\cdot) \Rightarrow \mu^*(t) = \psi(m^*(t)), \quad \psi'(\cdot) > 0.$$

将上式带入运动方程，则可以得到：

$$\dot{k}^*(t) = \psi(m^*(t)).$$

由此，可以得到最优的 $k^*(t)$ 和 $m^*(t)$，再根据边界条件和横截条件确定参数值，进而得到最优控制函数 $\mu^*(t)$.

充分性条件

最基本的充分性定理是由 Mangasarian 在 1966 年提出的[3]. 考察如下最优控制问题:

$$
\begin{aligned}
\max_{\mu\in\mathscr{U}} J[\mu(\cdot)] = \max_{\mu\in\mathscr{U}} & \int_0^T F(t,y(t),\mu(t))dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{y}(t) = f(t,y(t),\mu(t)). \\
& y(0) = y_0 (y_0 \text{ 给定, 且 } T \text{ 给定}).
\end{aligned}
\tag{P}
$$

Mangasarian 条件 (充分性条件)

上述问题对应的最大值原理是充分的, 若满足如下两个条件:

(1) 函数 F 及 f 都是可微的, 且关于变量 (y,μ) 是凹的;

(2) 在最优解中, 若 f 关于 y 或 μ 不是线性的, 则乘子 $p(t)\geq 0$ 对所有的 $t\in[0,T]$ 成立 (如果 f 关于 y 和 μ 都是线性的, 则 $p(t)$ 没有符号的限制).

[3] O. L. Mangasarian, Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems, SIAM Journal on Control, 4(1966), pp. 139-152.

另一个重要的充分性条件是由 K. J. Arrow 提出的[4]. 但其并没有证明. 此后, 证明由 M.I.Kamien 和 N.L.Schwartz 给出[5]. 首先考虑问题(P)对应的 Hamilton 函数为:

$$H(t,y(t),\mu(t),p(t)) = F(t,y(t),\mu(t)) + p(t)\cdot f(t,y(t),\mu(t)).$$

令 $u = U(t,y,p)$ 为下述问题的解:

$$\begin{aligned} H_0(t,y^*(t),p^*(t)) &= \max_u H(t,y^*(t),u,p^*(t)) \\ &= F(t,y^*(t),U(t,y^*,p^*)) + p(t)\cdot f(t,y(t),U(t,y^*,p^*)). \end{aligned}$$

此时, 称 H_0 为最大化的 Hamilton 函数.

[4]K.J.Arrow, Applications of Control Theory to Economic Growth, Mathematics of Decision Sciences, AMS, Providence, RI, 1968

[5]M.I.Kamien and N.L.Schwartz, Sufficient Conditions in Optimal Control Theory, Journal of Economic Theory, 1971(3), pp. 207-214.

Arrow 充分性定理

若对于给定的乘子 $p(t)(0 \leq t \leq T)$, $H_0(t,y,\mu)$ 是关于 y 的凹函数. 若存在 $y^*(t)$, $\mu^*(t)$ 和 $p^*(t)$ 满足问题(P)中的约束方程, 初值条件和余下剩余条件:

$$\mu^*(t) = U(t, y^*(t), p^*(t));$$

$$\dot{p}^*(t) = -(\frac{\partial F}{\partial y} + p^*(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y});$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + p^*(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0;$$

$$p^*(T) = 0.$$

则此时, $y^*(t)$ 和 $\mu^*(t)$ 最大化问题(P)中的目标泛函.

充分性条件

注记-12-1

当终止时间 T 固定时, Mangasarian 条件和 Arrow 充分性定理对所有类型的终止条件都适用.

注记-12-2

可以将 Arrow 充分性定理视为对 Mangasarian 条件的推广. 这是由于如果函数 F 和 f 都是关于 (y,μ) 的凹函数, 且 $p \geq 0$ 成立, 故 $H = F + p \cdot f$ 也是关于 (y,μ) 的凹函数, 进而可知最大 Hamilton 函数 H_0 也是关于 y 的凹函数. 反过来, 即使 F 和 f 关于 (y,μ) 都不为凹函数, 但 Hamilton 函数 H 依然可以为关于 y 的凹函数. 因此, Arrow 充分性定理的条件要求更弱.

Eisner-Strotz 模型的充分性

现在我们来讨论 Eisner-Strotz 模型对应的最大值原理是不是充分的. 首先, 讨论对应的 Mangasarian 条件.

Mangasarian 条件

首先, 可以发现函数 $f = \mu$ 关于 μ 为线性函数且为凹的. 为了验证 F 关于 $(k(\cdot), \mu(\cdot))$ 的凹性, 需求 $F = [\pi(k) - C(\mu)]e^{-\rho t}$ 的二阶导数:

$$F_{kk} = \pi''(k)e^{-\rho t} < 0, \quad F_{k\mu} = F_{\mu k} = 0, \quad F_{\mu\mu} = -C''(\mu)e^{-\rho t} < 0.$$

由此可知 F 关于 (k, μ) 严格凹. 由此, 验证了 Mangasarian 条件, 故原问题对应的最大值原理也是充分的.

Eisner-Strotz 模型的充分性

现在，讨论对应的 Arrow 充分性条件:

Arrow 充分性条件

由前面的讨论可知，最优控制函数为: $\mu^*(t) = \psi(m^*(t))$. 将其代入当前值的 Hamilton 函数，可得最大化 Hamilton 函数 H_ϵ^0 为:

$$H_\epsilon^0 = \pi(k) - C[\psi(m^*)] + m^*\psi(m^*).$$

又由于 $\frac{\partial H_\epsilon^0}{\partial k} = \pi'(k)$ 及 $\frac{\partial^2 H_\epsilon^0}{\partial k^2} = \pi''(k) < 0$. 可知最大化 Hamilton 函数 H_ϵ^0 关于 k 为严格凹的，这就说明 Arrow 充分性条件满足.