数理经济学
(变分原理和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

March 13, 2023

E-L 方程的推广

当给定的问题含有 $n>1$ 个状态变量时，泛函变为:

多变量情形

$$V[Y]=\int_0^T L(t,Y,Y')dt, \quad Y(0)=A, \quad Y(T)=B,$$

其中，$Y(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))$ 和 $Y'(t)=(y_1'(t),y_2'(t),\cdots,y_n'(t))$ 表示关于 t 的向量值函数.

$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$ 是初值，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$ 是终止值.

由于对于单个变量 y_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, 其对应的 E-L 方程为:

$$L_{y_k} = \frac{d}{dt}(L_{y'_k}), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

由此, 可知对于向量值情况 Y, 其对应的必要条件为:

E-L 方程组

$$\begin{aligned} L_{y_1} &= \frac{d}{dt}(L_{y'_1}), \quad t \in [0, T]; \\ L_{y_2} &= \frac{d}{dt}(L_{y'_2}), \quad t \in [0, T]; \\ &\vdots \\ L_{y_n} &= \frac{d}{dt}(L_{y'_n}), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

由此, 得到最优解 $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*)$.

例 4-1

找到目标泛函

$$V[y,z]=\int_0^T (y+z+y'^2+z'^2)dt$$

的极值路径.

E-L 方程的推广

当给定的问题中含有更高阶的导数时:

高阶导情形

$$V[y]=\int_0^T L(t,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})dt.$$

上述泛函中不仅含有一阶条件 y', 还含有更高阶的条件. 故初值和终值不仅是关于 y 的, 还应该有关于 y',y'' 直到 $y^{(n-1)}$ 的, 共有 $2n$ 个边界条件.

求解方法

这类问题的求解方法和 n 维的变分问题求解方法类似, 即将高阶导看成其它变量, 然后构造 E-L 方程组, 再得到最优解.

例 4-2

给定目标泛函

$$V[y]=\int_0^T (ty^2+yy'+y''^2)dt$$

及其边界条件 $y(0)=A, y(T)=B$, $y'(0)=\alpha, y'(T)=\beta$, 求其极值路径.

可变端点问题

可变终止点问题

$$\begin{aligned} \max \quad & V[y] = \int_0^T L(t, y, y')ds \\ s.t. \quad & y(0) = A; \quad (A\text{给定}) \\ & y(T) = y_T. \quad (T, y_T\text{自由}) \end{aligned} \tag{Q-4-1}$$

这个问题与之前研究的问题不同之处在于终止时间 T 和终止状态 y_T 是自由的. 但是为了满足经济学解释, 需要假设 $T > 0$.

一般横截条件

为了求解上述问题(Q-4-1), 需要推导一般横截条件. 主要分为如下四步:

第一步

假设 T^* 表示最优终止时间, 则类似于 E-L 方程的推导过程, 可以假设临近 T^* 的 T 值为:

$$T(\epsilon) = T^* + \epsilon \triangle T \Rightarrow \frac{dT(\epsilon)}{d\epsilon} = \triangle T.$$

其中, $\triangle T$ 代表 T 的微小变化, ϵ 代表一个很小的数. 同时, 考虑路径极值 $y^*(t)$ 的扰动值:

$$y(t) = y^*(t) + \epsilon p(t),$$

其中, $p(0) = 0$. 然而, 由于终值条件是自由的, 故无法表示关于 $p(T)$ 的条件.

一般横截条件

第一步

则此时可以得到最优问题为:

$$V(\epsilon) = \int_0^{T(\epsilon)} L[s, y^*(s) + \epsilon p(s), y^{*'}(s) + \epsilon p'(s)]ds. \tag{E-4-1}$$

即函数 V 关于变量 ϵ 的极值在 $\epsilon = 0$ 时取得.

一般横截条件

第二步

对定积分(E-4-1)关于变量 ϵ 求导可得:

$$\frac{dV(\epsilon)}{d\epsilon}=\int_0^{T(\epsilon)}\frac{\partial L}{\partial \epsilon}ds+L\left[T(\epsilon),y(T(\epsilon)),y'(T(\epsilon)\right]\frac{dT(\epsilon)}{d\epsilon}. \tag{E-4-2}$$

在上式中，积分部分对应的就是原来的 E-L 方程. 由于 $p(0)=0$ 但 $p(T)\neq 0$, 故(E-4-2)中的积分部分变为:

$$\int_0^{T(\epsilon)}\frac{\partial L}{\partial \epsilon}ds=\int_0^{T(\epsilon)}p(t)\left[L_y-\frac{dL_{y'}}{dt}\right]ds+L_{y'}\Big|_{t=T(\epsilon)}p(T(\epsilon)). \tag{E-4-3}$$

此外，(E-4-2)中的非积分项可以写为:

$$L\left[T(\epsilon),y(T(\epsilon)),y'(T(\epsilon)\right]\frac{dT(\epsilon)}{d\epsilon}=L\Big|_{t=T(\epsilon)}\triangle T. \tag{E-4-4}$$

一般横截条件

第二步

将(E-4-3)和(E-4-4)带入到(E-4-2)中，并且令 $\left.\frac{dV(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=0$，可以得到如下新条件：

$$\int_0^{T^*} p(t)\left[L_y-\frac{dL_{y'}}{dt}\right]ds+\left.L_{y'}\right|_{t=T^*}p(T^*)+\left.L\right|_{t=T^*}\triangle T=0. \qquad \text{(E-4-5)}$$

这里，$p(t)$, $p(T^*)$ 是需要消去的量. 但是无法假设这两项会相互抵消，所以需要将这些项全部设定为零. 由此，为了满足(E-4-5)，需要将三项全部设定为零.

注记 4-1

(E-4-5)中第一项为 0 时，就得到了 E-L 方程. 这说明在可变端点问题中，E-L 方程是个必要条件. 其余两项仅涉及自由时间 T. 故需要在(E-4-5)后两项中寻找横截条件.

首先，为了去掉 $p(T^*)$ 项，我们需要研究一下终值 y_{T^*} 的扰动 $\triangle y_{T^*}$.

第二步

由于 $\triangle y_T$ 可以表述为：

$$\triangle y_{T^*} = y(T^* + \triangle T) - y^*(T^*), \tag{E-4-6}$$

这里由于 ϵ 已经消去，故在上式中设 $y(t) = y^*(t) + p(t)$.
此时，可以得到：

$$y(T^* + \triangle T) = y^{*'}(T^*)\triangle T + y^*(T^*) + p(T^*). \tag{E-4-7}$$

第二步

将(E-4-7)代入(E-4-6)可得:

$$\triangle y_{T^*} = y^{*'}(T^*)\triangle T + p(T^*) \Rightarrow p(T^*) = \triangle y_{T^*} - y^{*'}(T^*)\triangle T. \qquad \text{(E-4-8)}$$

将(E-4-8)代入(E-4-5)可以得到:

$$\int_0^{T^*} p(t)\left[L_y - \frac{dL_{y'}}{dt}\right] ds + L_{y'}\Big|_{t=T^*} \triangle y_{T^*} + \left(L - y^{*'}(T^*)L_{y'}\right)\Big|_{t=T^*} \triangle T = 0. \qquad \text{(E-4-9)}$$

一般横截条件

第三步

由(E-4-9)可以得到如下必要条件:

$$\int_0^{T^*} p(t)\left[L_y - \frac{dL_{y'}}{dt}\right] ds = 0; \quad \text{(E-L 方程)} \tag{C-1}$$

$$L_{y'}\Big|_{t=T^*} \triangle y_{T^*} + (L - y^{*'}(T^*)L_{y'})\Big|_{t=T^*} \triangle T = 0. \quad \text{(横截条件)} \tag{C-2}$$

注记 4-2

横截条件(C-2)的作用是取代缺失的终值条件. 但是, 终值问题有很多种, 故可根据实际问题将横截条件(C-2)化简.

特殊横截条件

固定时间水平问题

固定时间水平问题也称为垂直终止线问题，即终值时间点 T 固定，终止值 y_T 不固定．故此时成立：

$$\triangle T = 0.$$

由此，(C-2) 中的第二项为 0，横截条件(C-2)此时需要对任意的 $\triangle y_{T^*}$ 成立，故有：

$$L_{y'}\Big|_{t=T^*}\triangle y_{T^*} = 0 \Rightarrow L_{y'}\Big|_{t=T^*} = 0.$$

这样就得到了自然边界条件 (natural boundary condition)：

$$L_{y'}\Big|_{t=T^*} = 0. \tag{C-3}$$

横截条件(C-3)的经济学解释

首先，给出如下假设：

- 设 $L(t, y(t), y'(t))$ 表示某个企业的利润函数；
- $y(t)$ 表示资本存量；
- $y'(t)$ 表示净投资.

基于上述假设，单位资本带给企业的估算价值或称为影子价值 (shadow value) 可以用 $L_{y'}$ 来衡量.

(C-3)的含义

条件 $L_{y'}\Big|_{t=T^*} = 0$ 相当于告知企业在终值时间不要留下任何终止资本，即企业为了在时间区间 $[0, T]$ 上获得最大利润，企业应该在 T 时刻用光它积累的所有资本 (资本全部转化为利润).

特殊横截条件

例 4-3

$$\begin{aligned}
\min \quad & V[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y'(s))^2}ds \\
s.t. \quad & y(a)= A; \quad (a, A\text{给定}) \\
& y(b)= B. \quad (b\text{给定}, B\text{自由})
\end{aligned}$$

特殊横截条件

固定端点问题

固定端点问题也称为水平终止线问题，即终值值 y_T 固定，终止时间 T 不固定. 故此时成立:

$$\triangle y_T = 0.$$

由此，(C-2)中的第一项为 0，横截条件(C-2)此时需要对任意的 $\triangle T$ 成立，故有:

$$(L - y^{*'}(T^*)L_{y'})\Big|_{t=T^*} \triangle T = 0 \Rightarrow (L - y^{*'}(T^*)L_{y'})\Big|_{t=T^*} = 0.$$

这样就得到了横截条件:

$$\left(L - y^{*'}(T^*)L_{y'}\right)\Big|_{t=T^*} = 0. \tag{C-4}$$

特殊横截条件

条件(C-4)的经济学解释

基于上述关于条件(C-3)解释的假设, $L(t, y(t), y'(t)) - y^{*'}(T^*)L_{y'}$ 可以理解为投资决策 (即选择合适的 y'(t)) 对总利润的影响. 由此可知, 条件(C-4)表示企业应该选择一个合适的时刻 T, 使得投资决策和投资在时刻 T 不再产生任何总利润, 即所有获得利润的机会都应该在终值时刻被充分利用.

特殊横截条件

例 4-4

求泛函极值

$$V[x]=\int_0^T[c_1(x'(t))^2+c_2x(t)]dt$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x(0)=0; \\ & x(T)=B. \quad (B\text{给定},T\text{自由}) \end{aligned}$$

其中 c_1 和 c_2 是两个常数.

特殊横截条件

终值曲线条件

在这类问题中，假设终止值是和终止时间 T 相关的一个函数 $\phi(T)$，即 $y_T = \phi(T)$ 此时，$\triangle T$ 与 $\triangle y_T$ 都不为 0. 因此，(C-2) 中的任何一项都不为 0，从而无法消去.

解决方案

通过添加微小的扰动 $\triangle T$，终止曲线变为:

$$\triangle y_T = \phi' \triangle T.$$

将上式带入(C-2)，可以得到:

$$\left\{ L_{y'}\Big|_{t=T^*} \phi'(T^*) + \left(L - {y^*}'(T^*) L_{y'}\right)\Big|_{t=T^*} \right\} \triangle T = 0$$

特殊横截条件

解决方案 (接上)

由于 $\triangle T$ 是任意的，故此时有对应的横截条件:

$$L_{y'}\Big|_{t=T^*}\phi'(T^*)+(L-y^{*'}(T^*)L_{y'})\Big|_{t=T^*}=0. \qquad \text{(C-5)}$$

注记 4-3

由于横截条件(C-5)中含有函数 $\phi(t)$ 的一阶导项，故需要原问题中 $\phi(t)$ 的一阶导数存在. 由此可知，横截条件(C-5)的存在性依赖于函数 $\phi(t)$ 的光滑程度.

特殊横截条件

例 4-5

求泛函极值

$$\begin{aligned} \min \quad & V[x] = \int_0^T \sqrt{1+x'^2}dt \\ s.t. \quad & x(0)= 1; \\ & x(T)= 2-T. \end{aligned}$$

特殊横截条件

终值曲线条件的一般情况(隐函数情形)

$$\begin{aligned} \min \quad & V[y] = \int_0^T L(t, y(t), y'(t))dt \\ s.t. \quad & y(0) = A; \quad A\text{已知} \\ & Q(T, y(T)) = 0. \quad T \text{ 和 } y(T) \text{ 自由且无法分离.} \end{aligned}$$

这里 $Q(\cdot,\cdot)$ 是一个二元函数且一阶偏导都存在.

特殊横截条件

解决方案

对函数 $Q(T,x(T))$ 的微分为:

$$\frac{\partial Q}{\partial T}\triangle T+\frac{\partial Q}{\partial y_T}\triangle y_T=0\Rightarrow\frac{\frac{\partial Q}{\partial T}}{\frac{\partial Q}{\partial y_T}}=-\frac{\triangle y_T}{\triangle T}. \tag{E-4-10}$$

将(E-4-10)代入到(C-2)中,可以得到:

$$\left.\frac{L-y'L_{y'}}{L_{y'}}\right|_{t=T^*}=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial T}}{\frac{\partial Q}{\partial y_T}}=-\frac{Q_T}{Q_{y_T}}. \tag{E-4-11}$$

故此时有横截条件:

$$L-L_{y'}\left(y'+\frac{Q_T}{Q_{y_T}}\right)\Big|_{t=T^*}=0. \tag{C-5*}$$

求解思路

对三类自由终止值和自由终止时间的问题求解，一般基于如下步骤:

(1) 建立 E-L 方程，求解得到通解;

(2) 根据自由终值问题的种类构建对应横截条件;

(3) 结合横截条件和初值，确定通解中的参数，得到极值路径;

(4) 将极值路径代入到对应的终值条件中，求解自由终值或自由终值时间.