高级数理经济学
(随机控制简介)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2023 年 11 月 5 日

实际例子

最优消费-投资问题

考虑一个完备的金融市场, 其中有 $n+1$ 个可以连续交易的资产, 即存在一个无风险的资产 (债券) 和 n 个风险资产 (股票). 进一步, 假设上述无风险资产的价格过程为 $P_0(\cdot)$ 且其它 n 个风险资产的价格过程为 $P_i(\cdot)$, 即:

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, \\ dP_i(t) = b_i(t)P_i(t)dt + P_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)dW_j(t), \\ P_i(0) = p_i, \quad i = 0,1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

这里 $r(\cdot)$ 表示利率, $b_i(\cdot)$ 和 $\sigma_{ij}(\cdot)$ 分别表示风险资产的收益率和波动率. $W(\cdot) = (W_1(\cdot),\cdots,W_d(\cdot))$ 是一个定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 的 d-维标准 Brown 运动, 这里 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 是 Brown 运动 $W(\cdot)$ 生成的自然域流. 此外, 定义 $b(\cdot) = (b_1(\cdot),\cdots,b_n(\cdot))^T$ 和 $\sigma(\cdot) = (\sigma_{ij}(\cdot))_{n\times d}$.

实际例子

最优消费-投资问题 (接上)

假设投资者的初始财富为 $x\in\mathbb{R}$, 其在上述金融市场中进行投资, 故其财富过程 $X(\cdot)$ 满足如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dX(t)=\{r(t)X(t)+\langle b(t)-r(t)I,\pi(t)\rangle-c(t)\}dt+\langle\pi(t),\sigma(t)dW(t)\rangle, \\ X(0)=x,\ t\in[0,T]. \end{cases}$$

这里, $\pi(\cdot)=(\pi_1(\cdot),\cdots,\pi_n(\cdot))^T$ 被称为策略. $c(\cdot)$ 表示投资者的消费, $I=(1,1,\cdots,1)^T\in\mathbb{R}^n$. 最后, 投资者希望调整 $(\pi(\cdot),c(\cdot))$ 最大化如下回报函数:

$$J(\pi(\cdot),c(\cdot))=\mathbb{E}\left[h(X(T))+\int_0^T g(t,c(t))dt\right]$$

这里 $g(t,c(t))$ 为投资者的效用函数, $h(x)$ 为其最终效用回报. 此外他们均满足严格单增性且为凹函数.

实际例子

最优消费-投资问题 (接上)

此外, 上述问题可能还有如下可行约束:

(i) 破产约束: $X(t) \geq \nu > 0$ 对任意 $t \in [0,T]$, a.s. 这里 ν 为某个风险度.

(ii) 卖空约束: 如果市场不容许卖空, 则有:

$$\pi_i(t) \geq 0, \quad X(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \geq 0, \ \forall t \in [0,T], \ a.s.$$

(iii) 生存消费约束: 投资者需要最低消费 δ 满足生存需求, 即:

$$c(t) \geq \delta > 0, \quad t \in [0,T].$$

传染病问题

假设一个群体的总人口数为 $N \in \mathbb{R}$ 为一个常数, 其由如下三部分组成:

(i) 在 t 时刻, 尚未被感染的易感人群: $S(t)$;

(ii) 在 t 时刻, 已经感染人群: $I(t)$;

(iii) 在 t 时刻, 康复人群: $R(t)$.

此外还满足: $N = S(t) + I(t) + R(t)$. 则可以建立经典的 SIR 传染病模型:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta I(t)S(t)dt, \\ dI(t) = [\beta I(t)S(t) - \gamma I(t)]dt, \\ dR(t) = \gamma I(t)dt. \end{cases}$$

其中, $\beta I(t)S(t)$ 表示新增感染者, $\beta > 0$ 表示感染率, γ 表示康复率.

实际例子

传染病问题 (接上)

现在，考虑具有随机影响的 SIR 模型，即:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta I(t)S(t)dt - \sigma I(t)S(t)dW(t), \\ dI(t) = [\beta I(t)S(t) - \gamma I(t)]dt + \sigma I(t)S(t)dW(t), \\ dR(t) = \gamma I(t)dt. \end{cases} \qquad (\star)$$

实际例子

传染病问题 (接上)

在上述方程$(\star)$中添加控制过程 $\mu(\cdot)$, 则带控制的随机微分方程组如下:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta I(t)S(t)dt - \sigma I(t)S(t)dW(t), \\ dI(t) = \{\beta I(t)S(t) - [\gamma + \mu(t)]I(t)\}dt + \sigma I(t)S(t)dW(t), \\ dR(t) = [\gamma + \mu(t)]I(t)dt. \end{cases}$$

这里 $\mu(\cdot)$ 表示治疗率. 添加治疗工作后, 会显著影响康复率. 目标函数一般为治疗率 $\mu(\cdot)$ 的支出函数, 即:

$$\min \int_0^T C(\mu(s))ds + H(\mu(T)).$$

控制问题的一般化模型

假设四元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 为一个带有域流的完备概率空间，且 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 是由标准 Brown 运动生成自然域流. 考虑如下带有控制过程的随机微分方程:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), \mu(t))dt + \sigma(t, X(t), \mu(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{$\dagger$}$$

这里 $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为给定函数且 U 为一个度量空间. 在上述方程($\dagger$)中:

(i) $X(\cdot)$ 被称为状态过程 (State Process);

(ii) $\mu(\cdot)$ 被称为控制过程 (Control Process) 且其属于集合:

$$\mathcal{U} = \{\mu : [0, T] \to U \big| \mu(\cdot)\text{是一个}\mathbb{F} - \text{循序可测过程}\};$$

(iii) 此外, 方程($\dagger$)被称为状态方程 (State equation).

控制问题的一般化模型

假设上述随机微分方程 (SDE)(†)有唯一强解，则可以考虑如下的成本泛函 (cost functional):

$$J(\mu(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X(t), \mu(t))dt + h(X(T))\right].$$

主要问题

对任意给定的 $x \in \mathbb{R}^n$，找到合适的 $\bar{\mu} \in \mathcal{U}[0,T]$ 使得:

$$J(\bar{\mu}(\cdot)) = \inf_{\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[0,T]} J(\mu(\cdot)). \tag{‡}$$

开环控制 (Open-loop control)

任意 $\bar{\mu}(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ 满足上式(‡)被称为开环最优控制，相应的状态过程 $\bar{X}(\cdot)$ 被称为开环最优状态过程. 此外，$(\bar{X}(\cdot), \bar{\mu}(\cdot))$ 被称为开环最优控制对.

最优控制问题的常见分类

线性二次 (Linear-quadratic(LQ)) 问题

考虑如下状态方程:

$$\begin{cases} dX(t) = [A(t)X(t) + B(t)\mu(t)]dt + [C(t)X(t) + D(t)\mu(t)]dW(t), \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{LQ}$$

及对应的成本泛函:

$$J(\mu(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle Q(t)X(t), X(t)\rangle + \langle R(t)\mu(t), \mu(t)\rangle)\, dt + \langle HX(t), X(t)\rangle\right].$$

这里 $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot), Q(\cdot), R(\cdot)$ 均为恰当的有界矩阵函数且 H 是一个确定矩阵. 状态方程(LQ)是线性方程且成本泛函是关于 $(X(\cdot), \mu(\cdot))$ 的二次函数. 此外, 取 $U \subseteq \mathbb{R}^m$, 要求 $\mathcal{U}[0,T]$ 中元素 $\mu(\cdot)$ 满足二次可积条件.

最优控制问题的常见分类

线性凸 (Linear-convex(LC)) 问题

若状态方程满足上式(LQ), 且对应的成本泛函为:

$$J(\mu(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \big(q(t,X(t)) + \rho(t,\mu(t))\big)\,dt + h(X(T))\right].$$

这里, $x \to q(t,x)$, $\mu \to \rho(t,\mu)$ 和 $x \to h(x)$ 是凸函数, 其它假设同 (LQ) 问题假设一致.

线性半凸 (Linear-semiconvex) 问题

若在线性凸问题中: $x \to q(t,x) + K|x|^2$, $\mu \to \rho(t,\mu) + K|\mu|^2$ 和 $x \to h(x) + K|x|^2$ 是凸函数, 这里 $K \geq 0$ 是一个常数. 其它假设同 (LC) 问题假设一致.

最优控制问题的常见分类

仿射二次问题 (Affine-quadratic(AQ))

假设状态方程满足如下形式:

$$\begin{cases} dX(t) = [A(t,X(t)) + B(t,X(t))\mu(t)]dt \\ \qquad\qquad + [C(t,X(t)) + D(t,X(t))\mu(t)]dW(t), \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{AQ}$$

这里, 状态方程(AQ)中, 漂移项和扩散项均为仿射函数. 此外, 对应的成本泛函为:

$$J(\mu(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T (q(t,X(t)) + \langle R(t,X(t))\mu(t), \mu(t)\rangle)dt + h(X(T))\right].$$

这里目标泛函中的被积部分是二次函数. 此外, 取 $U \subseteq \mathbb{R}^m$, 要求 $\mathcal{U}[0,T]$ 中元素 $\mu(\cdot)$ 满足二次可积条件.

假设 $\mathcal{T}[0,T]$ 为取值在 $[0,T]$ 上的 $\mathbb{F}$-停时集合. 对任意的停时 $\tau \in \mathcal{T}[0,T]$, 可以设 $\mathcal{X}_\tau = L^p_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 为 τ 时刻前的随机变量集合.

容许初始集 (admissible initial set)

定义容许初始集 $\mathcal{D}$ 为:

$$\mathcal{D} = \left\{ (\tau,\xi) \middle| \tau \in \mathcal{T}[0,T],\ \xi \in \mathcal{X}_\tau \right\}.$$

容许控制集 (admissible control set)

设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个紧集且成立 $0 \in U$. 则可以定义容许控制集为:

$$\mathcal{U}[\tau,T] = \{\mu : [\tau,T] \to U \big| \mu(\cdot) \text{是一个} \mathbb{F} - \text{循序可测过程}\}.$$

对任意初值 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$, 考虑如下状态方程:

$$\begin{cases} dX(s)=b(s,X(s),\mu(s))ds+\sigma(s,X(s),\mu(s))dW(s), & s\in[\tau,T], \\ X(\tau)=\xi. \end{cases} \tag{E-1}$$

此外, 定义成本泛函为:

$$J(\tau,\xi;\mu(\cdot))=\mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^T g(s,X(s),\mu(s))ds+h(X(T))\right],$$

这里 $\mathbb{E}_\tau[\cdot]:=\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_\tau]$.

假设 (H1)

定义:

(i) $b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$; $\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^{n\times d}$;

(ii) $g:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$; $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

均为连续函数. 则存在一个常数 $L>0$ 和一个系数函数 $\rho:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得:

$$
\begin{aligned}
&|b(t,x,\mu)-b(t',x',\mu')|+|\sigma(t,x,\mu)-\sigma(t',x',\mu')|\\
&+|g(t,x,\mu)-g(t',x',\mu')|+|h(x)-h(x')|\\
&\le L|x-x'|+\rho(|t-t'|+|u-u'|),
\end{aligned}
$$

这里, (t,x,μ) 及 (t',x',μ') 均属于 $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U$.

动态规划方法和 HJB 方程

假设上述假设 (H1) 成立，则对于任意 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$ 和 $\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]$，状态方程(E-1)存在唯一解 $X(\cdot)=X(\cdot;\tau,\xi,\mu(\cdot))$ 使得对所有 $(\tau,\xi),(\tau,\xi')\in\mathcal{D}$ 和 $\tau'\in\mathcal{T}[\tau,T]$，成立：

$$\mathbb{E}_\tau\left[\sup_{s\in[\tau,T]}|X(s;\tau,\xi,\mu(\cdot))|^p\right]\leq K\mathbb{E}_\tau(1+|\xi|^p),$$

$$\mathbb{E}_\tau\left[\sup_{s\in[\tau,T]}|X(s;\tau,\xi,\mu(\cdot))-X(s;\tau,\xi',\mu'(\cdot))|^p\right]$$
$$\leq K\mathbb{E}_\tau\left[|\xi-\xi'|^p+\left(\int_\tau^T\rho(\mu(s),\mu'(s))^2ds\right)^{\frac{p}{2}}\right],$$

$$\mathbb{E}_\tau\left[\sup_{s\in[\tau,\tau']}|X(s;\tau,\xi,\mu(\cdot))-\xi|^p\right]\leq K(1+|\xi|^p)\mathbb{E}_\tau(\tau'-\tau)^{\frac{p}{2}}.$$

主要问题 (P)

对任意给定的 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$, 找到一个 $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]$, 使得:

$$J(\tau,\xi;\bar{\mu}(\cdot))=\operatorname*{ess\,inf}_{\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]} J(\tau,\xi;\mu(\cdot))=\mathbb{V}(\tau,\xi). \tag{P}$$

这里 $\mathbb{V}:\mathcal{D}\times\Omega\to\mathbb{R}$ 是上述问题(P)的值函数 (value function).

本质下确界 (essential infimum(essinf))

取 $\tau \in \mathcal{T}[0,T]$ 固定且定义 $\mathbb{J} \subseteq L^0_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega,\mathbb{R})$. 随机变量 $\bar{\mathcal{J}} \in L^0_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega,\mathbb{R})$ 被称为 $\mathbb{J}$ 的本质下确界若其满足:

$$\bar{\mathcal{J}}(\omega) \leq \mathcal{J}(\omega), \quad a.s. \quad \omega \in \Omega, \quad \forall \mathcal{J} \in \mathbb{J}.$$

进一步, 若 $\hat{\mathcal{J}} \in L^0_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega,\mathbb{R})$ 成立:

$$\hat{\mathcal{J}}(\omega) \leq \mathcal{J}(\omega), \quad a.s. \quad \omega \in \Omega, \quad \forall \mathcal{J} \in \mathbb{J}.$$

则有:

$$\hat{\mathcal{J}}(\omega) \leq \bar{\mathcal{J}}(\omega), \quad a.s. \quad \omega \in \Omega.$$

由此可以定义:

$$\bar{\mathcal{J}} = \operatorname{essinf} \mathbb{J}.$$

动态规划方法和 HJB 方程

对任意给定 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$, 定义:

$$\mathbb{J}(\tau,\xi)=\{J(\tau,\xi;\mu(\cdot))\big|\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]\}\subseteq L^0_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega,\mathbb{R}). \qquad \text{(Q)}$$

问题

上述集合(Q)的本质下确界一定存在吗？

引理

对任意 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$, 存在一个序列 $\mu_k(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]$ 使得:

$$J(\tau,\xi;\mu_k(\cdot))(\omega)\to\operatorname*{ess\,inf}_{\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]}J(\tau,\xi;\mu_k(\cdot))=\mathbb{V}(\tau,\xi),\quad a.s.$$

上述引理说明了泛函 $J(\tau,\xi;\mu(\cdot))$ 本质下确界的存在性, 但并没有说明达到下确界的最优控制的存在性, 即本质下确界可能并不可达.

动态规划方法和 HJB 方程

值函数的性质

对任意 $(\tau,\xi),(\tau,\tilde{\xi})\in\mathcal{D}$, 成立:

$$\begin{cases} |\mathbb{V}(\tau,\xi)|\le K(1+|\xi|), \\ |\mathbb{V}(\tau,\xi)-\mathbb{V}(\tau,\tilde{\xi})|\le K|\xi-\tilde{\xi}|. \end{cases}$$

Bellman 动态最优原理

对任意 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$ 和 $\bar{\tau}\in\mathcal{T}[\tau,T]$, 则下式成立:

$$\mathbb{V}(\tau,\xi)=\inf_{\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,\bar{\tau}]}\mathbb{E}_\tau\left\{\int_\tau^{\bar{\tau}} g(s,X(s),\mu(s))ds+\mathbb{V}(\bar{\tau},X(\bar{\tau}))\right\}. \tag{E-2}$$

这里 $X(\cdot)$ 是关于控制 $\mu(\cdot)$ 的状态过程且 (τ,ξ) 是初值对.

证明: 假设 $(\tau,\xi)\in\mathcal{D}$ 给定. 对任意 $\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]$, 则根据值函数的定义可知:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\tau,\xi) \le J(\tau,\xi;\mu(\cdot)) &= \mathbb{E}_\tau\bigg[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X(s),\mu(s))ds \\
&\quad + \int_{\bar\tau}^{T} g(s,X(s),\mu(s))ds + h(X(T))\bigg] \\
&= \mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X(s),\mu(s))ds + J(\bar\tau,X(\bar\tau);\mu(\cdot)|_{[\bar\tau,T]})\right].
\end{aligned}
$$

取 $\mu(\cdot)|_{[\bar\tau,T]}\in\mathcal{U}[\bar\tau,T]$ 使得泛函 $J(\cdot)$ 取得下确界, 则有:

$$
\mathbb{V}(\tau,\xi) \le \mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X(s),\mu(s))ds + \mathbb{V}(\bar\tau,X(\bar\tau))\right].
$$

因此成立:

$$\mathbb{V}(\tau,\xi) \le \inf_{\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,\bar\tau]} \mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X(s),\mu(s))ds + \mathbb{V}(\bar\tau,X(\bar\tau))\right].$$

进一步, 对任意 $\epsilon>0$, 存在一个 $\mu^\epsilon(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,T]$ 使得:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}(\tau,\xi)+\epsilon > J(\tau,\xi;\mu^\epsilon(\cdot)) \quad \text{(下确界的性质)}\\
&=\mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X^\epsilon(s),\mu^\epsilon(s))ds + \int_{\bar\tau}^{T} g(s,X^\epsilon(s),\mu^\epsilon(s))ds + h(X^\epsilon(T))\right]\\
&=\mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X^\epsilon(s),\mu^\epsilon(s))ds + J(\bar\tau,X^\epsilon(\bar\tau);\mu^\epsilon(\cdot)|_{[\bar\tau,T]})\right]\\
&\ge \mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X^\epsilon(s),\mu^\epsilon(s))ds + \mathbb{V}(\bar\tau,X^\epsilon(\bar\tau))\right]\\
&\ge \inf_{\mu(\cdot)\in\mathcal{U}[\tau,\bar\tau]} \mathbb{E}_\tau\left[\int_\tau^{\bar\tau} g(s,X(s),\mu(s))ds + \mathbb{V}(\bar\tau,X(\bar\tau))\right].
\end{aligned}$$

定义 $V(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{V}(\cdot,\cdot)$ 在 $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 上的限制:

$$V(t,x)=\mathbb{V}(t,x),\quad \forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

显然, $V:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to L^0_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R})$.

定理

取 $t\in[0,T)$. 则对任意 $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, 成立:

$$\mathbb{V}(t,\xi)(\omega)=V(t,\xi(\omega)),\quad a.s.$$

注记

上述定理只是说明函数的形式在几乎处处条件下相同.

动态规划方法和 HJB 方程

Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程

假设 $\mathbb{V}(\cdot,\cdot)$ 的限制 $V(\cdot,\cdot)$ 是一个确定函数. 此外, 假设 $V_t(\cdot,\cdot), V_x(\cdot,\cdot)$ 及 $V_{xx}(\cdot,\cdot)$. 则 $V(\cdot,\cdot)$ 是如下 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程的解:

$$\begin{cases} V_t + H(t,x,V_x,V_{xx}) = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{HJB}$$

这里:

$$H(t,x,p^T,P) = \inf_{\mu \in U} \mathbb{H}(t,x,\mu,p^T,P),$$

$$\mathbb{H}(t,x,\mu,p^T,P) = p^T b(t,x,\mu) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[P\sigma(t,x,\mu)\sigma(t,x,\mu)^T] + g(t,x,\mu), \quad (t,x,\mu,p,P) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n.$$

动态规划方法和 HJB 方程

证明: 假设 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 给定, 对任意 $\mu\in U$, 考虑常数控制 $\mu(\cdot)=\mu$, 则根据 Bellman 动态最优原理:

$$
\begin{aligned}
0\leq&\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\epsilon}g(s,X(s),\mu)ds+V(t+\epsilon,X(t+\epsilon))-V(t,x)\right]\\
=&\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\epsilon}\Big(g(s,X(s),\mu)+V_s(s,X(s))+V_x(s,X(s))b(s,X(s),\mu)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(V_{xx}(s,X(s))\sigma(s,X(s),\mu)\sigma(s,X(s),\mu))^T\Big)\,ds\right].
\end{aligned}
$$

取期望, 两边除以 ϵ, 再取 $\epsilon\to0$, 可以得到:

$$0\leq g(t,x,\mu)+V_t(t,x)+V_x(t,x)b(t,x,\mu)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}(t,x)\sigma(t,x,\mu)\sigma(t,x,\mu)^T].$$

由此可得:

$$V_t+\inf_{\mu\in U}\mathbb{H}(t,x,\mu,V_x,V_{xx})\geq0.$$

进一步，取任意 $\delta,\epsilon>0$，则存在一个 $\mu^{\delta,\epsilon}\in\mathcal{U}[t,T]$ 成立:

$$\delta_\epsilon > \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\epsilon} g(s,X^{\delta,\epsilon}(s),\mu^{\delta,\epsilon}(s))ds + V(t+\epsilon,X^{\delta,\epsilon}(t+\epsilon)) - V(t,x)\right]$$

$$= \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\epsilon}\left(g(s,X^{\delta,\epsilon}(s),\mu^{\delta,\epsilon}(s))\right.\right.$$

$$+ V_s(s,X^{\delta,\epsilon}(s)) + V_x(s,X^{\delta,\epsilon}(s))b(s,X^{\delta,\epsilon}(s),\mu^{\delta,\epsilon}(s))$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}(s,X^{\delta,\epsilon}(s))\sigma(s,X^{\delta,\epsilon}(s),\mu^{\delta,\epsilon}(s))\sigma(s,X^{\delta,\epsilon}(s),\mu^{\delta,\epsilon}(s))^T]\right)ds\right]$$

$$\geq \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\epsilon} V_s(s,X^{\delta,\epsilon}(s))\right.$$

$$\left.+\inf_{\mu\in U}\mathbb{H}(s,X^{\delta,\epsilon}(s),\mu,V_x(s,X^{\delta,\epsilon}(s)),V_{xx}(s,X^{\delta,\epsilon}(s)))\right]ds.$$

$$\geq \epsilon\left[V_t(t,x)+\inf_{\mu\in U}\mathbb{H}(t,x,\mu,V_x(t,x),V_{xx}(t,x))\right] - K\mathbb{E}_t\int_t^{t+\epsilon}|X^{\delta,\epsilon}(s)-x|ds.$$

现在两边同时除以 $\epsilon > 0$ 且取 $\epsilon \to 0$, 可得:

$$\delta \geq V_t(t,x) + \inf_{\mu \in U} \mathbb{H}(t,x,\mu,V_x(t,x),V_{xx}(t,x)).$$

由于 $\delta > 0$ 的任意性, 故可得方程(HJB).

验证性定理 (Verification Theorem)

假设 $V(\cdot,\cdot)$ 是 HJB 方程(HJB)的经典解且定义函数:

$$\Phi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \to U,$$

满足:

$$\mathbb{H}(t,x,\Phi(t,x,V_x,V_{xx}),V_x,V_{xx}) = \inf_{\mu\in U} \mathbb{H}(t,x,\mu,V_x,V_{xx}).$$

此外, 控制函数

$$\mu(t) = \Phi(t,X(t),V_x(t,X(t)),V_{xx}(t,X(t))), \quad t\in[0,T]. \tag{control}$$

使得状态方程有唯一解. 则由公式(control)定义的控制函数 $\mu(\cdot)$ 是最优控制.

证明: 给定 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 且假设 $\mu(\cdot)$ 由定理中公式(control)确定. 定义 $X(\cdot)=X(\cdot;t,x,\mu(\cdot))$, 则根据 Itô 公式, 成立:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_t[h(X(T))]-V(t,x)=\mathbb{E}_t[V(T,X(T))]-V(t,x)\\
&=\mathbb{E}_t\int_t^T\Big(V_s(s,X(s))+V_x(s,X(s))b(s,X(s),\mu(s))\\
&\qquad+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}(s,X(s))\sigma(s,X(s),\mu(s))\sigma(s,X(s),\mu(s))^T]\Big)\,ds\\
&=\mathbb{E}_t\int_t^T g(s,X(s),\mu(s))ds.
\end{aligned}
$$

由此可得:

$$V(t,x)=J(t,x;\mu(\cdot)).$$

注记 (i)

假设状态方程中不存在控制变量，即:

$$b(t,x,\mu)=b(t,x),\quad \sigma(t,x,\mu)=\sigma(t,x),\quad g(t,x,\mu)=g(t,x).$$

则上述验证性定理退化为 $c(\cdot,\cdot)=0$ 时的 Feynman-Kac 公式，即上述验证性定理是 Feynman-Kac 公式的一般化结果.

注记 (ii)

在 HJB 方程中，需要 $V:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，即值函数 $\mathbb{V}(\cdot,\cdot)$ 的限制 $V(\cdot,\cdot)$ 是一个确定函数. 但这并不是一件容易的事情.

应用实例

Merton 问题

假设一个金融市场有一个无风险资产 (债券) 和一个风险资产 (股票), 其对应的资产过程分别为:

$$\begin{cases} dS_0(t) = rS_0(t)dt, & (\text{无风险资产}) \\ dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). & (\text{风险资产}) \end{cases} \tag{M-1}$$

由此可得投资者在这个市场中的财富过程 $X(\cdot)$ 满足:

$$\begin{cases} dX(s) = [rX(s) + (\mu - r)\pi(s)]ds + \sigma\pi(s)dW(s), & s \in [t,T]; \\ dX(t) = x. \end{cases} \tag{M-2}$$

这里 $x > 0$ 为初始财富且 $\pi(t)$ 是 t 时刻分配到风险资产的比例.

进一步, 为了刻画交易策略 $\pi(\cdot)$ 的效果, 考虑如下成本函数:

$$J(t,x;\pi(\cdot)) = \mathbb{E}[h(X(T))]. \tag{M-3}$$

这里要求函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个凹函数.

主要问题

对任意给定的 $(t,x)\in[0,T)\times(0,+\infty)$, 找到最优控制 $\bar{\pi}(\cdot)$ 使得:

$$J(t,x;\bar{\pi}(\cdot)) = \sup_{\pi(\cdot)} J(t,x;\pi(\cdot)) = V(t,x). \tag{M-4}$$

现在用动态规划原理求解上述问题.

Merton 问题 (接上)

首先，定义:

$$
\begin{aligned}
H(t,x,p,P,\pi) &= \frac{1}{2}P\sigma^2\pi^2 + p[rx + (\mu - r)\pi] \\
&= \frac{P\sigma^2}{2}\left(\pi^2 + \frac{2p(\mu - r)}{P\sigma^2}\pi\right) + prx \\
&= \frac{P\sigma^2}{2}\left(\pi + \frac{p(\mu - r)}{P\sigma^2}\right)^2 - \frac{p^2(\mu - r)^2}{2P\sigma^2} + prx.
\end{aligned}
$$

则对应的 HJB 方程为:

$$
\begin{cases}
V_t(t,x) - \frac{\theta^2 V_x(t,x)^2}{2V_{xx}(t,x)} + rxV_x(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty). \\
V(T,x) = h(x), \quad x \in [0,+\infty), \\
V(t,0) = 0, \quad t \in [0,T], \\
V_{xx}(t,x) < 0. \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty).
\end{cases}
\tag{M-5}
$$

在(M-5)中, $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ 被称为风险溢价 (risk premium). 如果 $V(\cdot,\cdot)$ 是上述 HJB 方程(M-5)的经典解, 则最优控制为:

$$\bar{\pi}(t) = -\frac{(\mu - r)V_x(t, X(t))}{\sigma^2 V_{xx}(t, X(t))}, \qquad t \in [0, T].$$

现在根据 $h(x)$ 的具体形式进行讨论求解

幂效用函数

$$h(x) = \frac{x^\beta}{\beta}, \quad x \geq 0, \quad \beta < 1.$$

Merton 问题 (幂效用函数)

在幂效用函数情形下, 假设 HJB 方程的解(M-5)有如下形式:

$$V(t,x) = \phi(t)x^{\beta}. \tag{M-6}$$

将表达式(M-6)代入 HJB 方程(M-5)中, 可得:

$$\begin{aligned}
0 &= V_t(t,x) - -\frac{\theta^2 V_x(t,x)^2}{2V_{xx}(t,x)} + rxV_x(t,x) \\
&= \phi'(t)x^{\beta} - \frac{\theta^2}{2}\frac{\phi^2(t)\beta^2 x^{2(\beta-1)}}{\phi(t)\beta(\beta-1)x^{\beta-2}} + rx\phi(t)\beta x^{\beta-1} \\
&= \left[\phi'(t)\left(\frac{\theta^2\beta}{2(1-\beta)} + r\beta\right)\phi(t)\right]x^{\beta}.
\end{aligned}$$

Merton 问题 (幂效用函数)

由此，可得 $\phi(t)$ 满足下述线性方程:

$$\begin{cases} \phi'(t) + \left(\frac{\theta^2\beta}{2(1-\beta)} + r\beta\right)\phi(t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ \phi(T) = \frac{1}{\beta}. \end{cases}$$

由此可得:

$$\phi(t) = \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\beta}, \quad \lambda = \frac{\theta^2\beta}{2(1-\beta)} + r\beta.$$

且有:

$$V(t,x) = \phi(t)x^\beta = \frac{e^{\lambda(T-t)}x^\beta}{\beta}.$$

最后，可以得到:

$$\bar{\pi}(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\beta)}X(t), \quad t \in [0,T].$$

指数效用函数

$$h(x) = -e^{-\beta x}$$

则此时对应的 HJB 方程为:

$$\begin{cases} V_t(t,x) - \frac{\theta^2 V_x(t,x)^2}{2V_{xx}(t,x)} + rxV_x(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty). \\ V(T,x) = -e^{-\beta x}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ V_{xx}(t,x) < 0. \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{M-7}$$

在指数效用函数情形下, 假设上述 HJB 方程(M-7)的解有如下形式:

$$V(t,x) = \phi(t) e^{-\Phi(t) x}. \tag{M-8}$$

Merton 问题 (指数效用)

将表达式(M-8)代入 HJB 方程(M-7)中，可得:

$$
\begin{aligned}
0 &= V_t(t,x) - -\frac{\theta^2 V_x(t,x)^2}{2V_{xx}(t,x)} + rxV_x(t,x) \\
&= -\phi'(t)e^{-\Phi(t)x} + \phi(t)\Phi'(t)xe^{-\Phi(t)x} \\
&\quad - \frac{\theta^2}{2}\frac{\phi^2(t)\Phi(t)^2 e^{-2\Phi(t)x}}{\phi(t)\Phi(t)^2 e^{-\Phi(t)x}} + rx\phi(t)\phi(t)e^{-\Phi(t)x} \\
&= -\left[\phi'(t) + \frac{\theta^2}{2}\phi(t)\right]e^{-\Phi(t)x} + [\Phi'(t) + r\Phi(t)]\phi(t)xe^{-\Phi(t)x}.
\end{aligned}
$$

由此可得如下常微分方程组:

$$
\begin{cases}
\phi'(t) = -\frac{\theta^2}{2}\phi(t), & \phi(T) = 1; \\
\Phi'(t) = -r\Phi(t), & \Phi(T) = \beta.
\end{cases}
$$

Merton 问题 (指数效用)

由此可得:

$$\phi(t) = e^{\frac{\theta^2}{2}(T-t)}; \quad \Phi(t) = e^{r(T-t)}\beta, \quad t \in [0, T].$$

这就可以得到:

$$V(t,x) = -e^{\frac{\theta^2}{2}(T-t) - e^{r(T-t)}\beta x}, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

在此情形下, 有:

$$\bar{\pi}(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2 \beta} e^{-r(T-t)}.$$

Merton 问题 (对数效用)

对数效用函数

$$h(x) = \ln x.$$

则此时对应的 HJB 方程为:

$$\begin{cases} V_t(t,x) - \frac{\theta^2 V_x(t,x)^2}{2V_{xx}(t,x)} + rxV_x(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty). \\ V(T,x) = \ln x, \quad x \in (0,+\infty), \\ V(t,0) = -\infty, \quad t \in [0,T], \\ V_{xx}(t,x) < 0. \quad (t,x) \in [0,T] \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{M-9}$$

在指数效用函数情形下, 假设上述 HJB 方程(M-9)的解有如下形式:

$$V(t,x) = \phi(t) + \ln x. \tag{M-10}$$

Merton 问题 (对数效用)

此时, 可以得到:

$$0 = V_t(t,x) - -\frac{\theta^2 V_x(t,x)^2}{2V_{xx}(t,x)} + rxV_x(t,x) = \phi'(t) + \frac{\theta^2}{2} + r.$$

由此可得:

$$\phi(t) = \left(\frac{\theta^2}{2} + r\right)(T-t).$$

故可知:

$$V(t,x) = \left(\frac{\theta^2}{2} + r\right)(T-t) + \ln x, \quad (t,x) \in [0,T] \times (0,\infty).$$

此外, 可以得到最优控制为:

$$\bar{\pi}(t) = \frac{(\mu - r)X(t)}{\sigma^2}, \quad t \in [0,T].$$

最优生产消费问题

假设某公司的资产 $K(t)$ 在 t 时刻服从如下随机微分方程:

$$dK(t) = K(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + I(t)dt.$$

这里 $I(t)$ 表示投资率 (Investment rate), $S(t)$ 表示资产的单位价格. 另一方面, 这个公司的负债 $L(t)$ 受利率 r, 在 t 时刻的消费 $C(t)$ 和在 t 时刻的生产率 $P(t)$ 影响, 其对应的方程为:

$$dL(t) = rL(t)dt - \frac{K(t)}{S(t)}dP(t) + (I(t) + C(t))dt.$$

若假设 $Y(t) = \ln S(t)$, 则有:

$$dY(t) = \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)dt + \sigma_1 dW^1(t); \qquad \text{(P-1)}$$

$$dP(t) = bdt + \sigma_2 dW^2(t).$$

最优生产消费问题

在上述表达式中, (W^1, W^2) 为一个定义在带域流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_{t\geq 0}), \mathbb{P})$ 上的二维 Brownian 运动. 此外, 参数 μ, b, σ_1 和 σ_2 均为常数且 $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. 此时可知, 该公司的净资产为:

$$X(t) = K(t) - L(t).$$

且还有如下约束:

$$K(t) \geq 0, \quad C(t) \geq 0, \quad X(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

定义 $k(t) = \frac{K(t)}{X(t)}$ 和 $c(t) = \frac{C(t)}{X(t)}$ 分别为投资和消费的控制变量, 则可以得到如下带控的净资产方程:

$$\begin{aligned} dX(t) =& X(t)[k(t)(\mu - r + be^{-Y(t)}) + (r - c(t))]dt \\ & + k(t)X(t)\sigma_1 dW^1(t) + k(t)X(t)e^{-Y(t)}\sigma_2 dW^2(t). \end{aligned} \tag{P-2}$$

最优生产消费问题

对给定的折现因子 $\beta > 0$, 考虑如下幂效用函数:

$$U(C) = \frac{C^\gamma}{\gamma}, \quad C > 0, \quad 0 < \gamma < 1.$$

现在定义 $\mathcal{A}(x,y)$ 为取值在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 上的循序可测过程 (k,c) 的集合并且满足:

$$\int_0^T k^2(t)dt + \int_0^T c^2(t)dt < \infty, \ a.s., \quad \forall T > 0,$$

$$E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(c(t)X_t^{x,y})dt\right] < \infty.$$

这里, $X^{x,y}, Y^y$ 分别是随机微分方程(P-2)和(P-1)在初值 (x,y) 情形下的解.

此时，公司想要找到最优的投资和消费，使得公司的净资产效用最大化，即：

$$v(x,y)=\sup_{(k,c)\in\mathcal{A}(x,y)} E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}U(c(t)X_t^{x,y})dt\right]. \qquad \text{(P-3)}$$

此时，对应的 HJB 方程为：

$$\beta v-\left(\mu-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}-rx\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\sup_{c\geq 0}\left[U(cx)-cx\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$
$$-\sup_{k\geq 0}\left[k(\mu-r+be^{-y})x\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}k^2x^2(\sigma_1^2+e^{-2y}\sigma_2^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+kx\sigma_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right]=0. \qquad \text{(P-4)}$$

假设 $X^{x,y}$ 的形式为：

$$X^{x,y}=X\exp(Z(y)).$$

这里 $Z(y)$ 是一个关于 (k,c) 和 Y^y 的指数随机过程.

现在，假设上述 HJB 方程(P-4)的形式为：

$$v(x,y)=\frac{x^\gamma}{\gamma}\exp(\phi(y)). \tag{P-5}$$

将(P-5)带入 HJB 方程(P-4)，可以得到如下常微分方程：

$$\begin{aligned}&\beta-\gamma r-\frac{\sigma_1^2}{2}(\phi_{yy}+\phi_y^2)-\left(\mu-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\phi_y\\&-\sup_{c\geq 0}[c^\gamma e^{-\phi}-c\gamma]-\gamma\sup_{k\geq 0}G(y,\phi_y,k)=0.\end{aligned} \tag{P-6}$$

这里，

$$G(y,p,k)=-\frac{k^2}{2}(1-\gamma)(\sigma_1^2+\sigma_2^2e^{-2y})+k(\mu-r+be^{-y}+\sigma_1^2p).$$

由方程(P-6)可得:

$$\tilde{k}(y) = \frac{be^{-y} + \mu - r + \sigma_1^2 \phi_y}{(1-\gamma)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 e^{-2y})}.$$

$$\tilde{c}(y) = \exp(\frac{\phi(y)}{\gamma - 1}).$$

由于 $G(y,p,0) = 0$, 可以得到对于 $\phi'(y)$ 的任意极限点 y, 即使得 $\phi''(y) = 0$, 成立:

$$0 \le \beta - \gamma r - \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\phi_y(y) - \frac{\sigma_1^2}{2}\phi_y^2(y) - (1-\gamma)\exp(\frac{\gamma\phi(y)}{\gamma - 1}).$$

在上式中由于 ϕ 为有界函数, 故可得 ϕ_y 也是有界函数.

由于 ϕ 和 ϕ_y 都是有界函数，这就说明 $\tilde{k}(y), \tilde{c}(y)$ 及 $e^{-y}\tilde{k}$ 均为关于 y 的有界函数. 故可知存在一个足够大的常数 $M > 0$ 使得:

$$\mathbb{E}[|\tilde{X}_t^{x,y}|^2] \leq x^2 \exp(Mt), \quad \forall t > 0.$$

这里, $\tilde{X}_t^{x,y}$ 表示在控制对 $(\tilde{k}(Y_t^y), \tilde{c}(Y_t^y))$ 在 $t \geq 0$ 时, 状态方程(P-2)的解. 故可知 $(\tilde{k}(Y_t^y), \tilde{c}(Y_t^y)) \in \mathcal{A}(x, y)$ 且有:

$$E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(\tilde{c}(Y_t^y) X_t^{x,y}) dt\right] < \infty. \tag{P-7}$$

此外, 由于 ϕ 为有界函数, 故函数 $\tilde{c}(y)$ 可以被一个正的常数控制住下界. 即存在常数 $B > 0$ 使得:

$$0 \leq e^{-\beta T} v(\tilde{X}_T^{x,y}, Y_T^y) \leq B e^{-\beta T} U(\tilde{c}(Y_T^y) X_T^{x,y}).$$

现在假设 $F(t,X(t),Y(t))=e^{-\beta t}v(X(t),Y(t))$. 则有:

$$\begin{aligned}
dF(t,\tilde{X}^{x,y}(t),\tilde{Y}^{y}(t)) &= -\beta v(\tilde{X}^{x,y}(t),\tilde{Y}^{y}(t))e^{-\beta t}\\
&+\frac{\partial v}{\partial x}(d\tilde{X}^{x,y}(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(d\tilde{X}^{x,y}(t))^2+\frac{\partial v}{\partial y}(d\tilde{Y}^{y}(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(d\tilde{Y}^{y}(t))^2\\
&+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}(d\tilde{Y}^{y}(t)\cdot d\tilde{X}^{x,y}(t)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=-\beta v(\tilde{X}^{x,y}(t),\tilde{Y}^{y}(t))+\left\{\frac{\partial v}{\partial x}[k(\mu-r+be^{-\tilde{Y}^{y}(t)})+(r-c)]\tilde{X}^{x,y}(t)\right.\\
&\left.+\left(\mu-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}k^2\tilde{X}^{x,y}(t)^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2e^{-2\tilde{Y}^{y}(t)})+\frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+k\tilde{X}^{x,y}(t)\sigma_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right\}dt\\
&+\left[\sigma_1 k\tilde{X}^{x,y}(t)\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_1\frac{\partial v}{\partial y}\right]dW^1(t)+k\sigma_2\tilde{X}^{x,y}(t)e^{-\tilde{Y}^{y}(t)}\frac{\partial v}{\partial x}dW^2(t).
\end{aligned}$$

最优生产消费问题

在上述表达式两边同时进行 0 到 T 的积分，再取在 $\tilde{X}^{x,y}(0)=x,\tilde{Y}^{y}(0)=y$ 处的条件数学期望，可得:

$$
\begin{aligned}
E_{x,y}[e^{-\beta T}v(\tilde{X}^{x,y}(t),\tilde{Y}^{y}(t))] &= v(x,y)-E_{x,y}\left[\int_0^T \beta v(\tilde{X}^{x,y}(t),\tilde{Y}^{y}(t))\right]dt \\
&+E_{x,y}\left[\int_0^T \frac{\partial v}{\partial x}[k(\mu-r+be^{-\tilde{Y}^{y}(t)})+(r-c)]\tilde{X}^{x,y}(t)\right]dt \\
&+E_{x,y}\left[\int_0^T \left(\mu-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}k^2\tilde{X}^{x,y}(t)^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2e^{-2\tilde{Y}^{y}(t)})\right]dt \\
&+E_{x,y}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+k\tilde{X}^{x,y}(t)\sigma_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right]dt \\
&+E_{x,y}\left[\int_0^T \left(\sigma_1 k\tilde{X}^{x,y}(t)\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_1\frac{\partial v}{\partial y}\right)dW^1(t)\right] \\
&+E_{x,y}\left[\int_0^T \left(k\sigma_2\tilde{X}^{x,y}(t)e^{-\tilde{Y}^{y}(t)}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dW^2(t)\right].
\end{aligned}
$$

现在说明如下两个期望满足

$$E_{x,y}\left[\int_0^T\left(\sigma_1 k\tilde{X}^{x,y}(t)\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_1\frac{\partial v}{\partial y}\right)dW^1(t)\right]=0$$

$$E_{x,y}\left[\int_0^T\left(k\sigma_2\tilde{X}^{x,y}(t)e^{-\tilde{Y}^y(t)}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dW^2(t)\right]=0.$$

结合(P-5), 可以得到:

$$\begin{aligned}&E_{x,y}\left[\int_0^T\left(\sigma_1 k(\tilde{X}^{x,y}(t))^\gamma+\sigma_1\frac{(\tilde{X}^{x,y}(t))^\gamma}{\gamma}\exp(\phi(\tilde{Y}^y(t)))\phi'(\tilde{Y}^y(t))\right)dW^1(t)\right]=0\\&E_{x,y}\left[\int_0^T\left(k\sigma_2\tilde{X}^{x,y}(t)e^{-\tilde{Y}^y(t)}(\tilde{X}^{x,y}(t))^\gamma\right)dW^2(t)\right]=0.\end{aligned}\tag{P-8}$$

由于 $\phi(\cdot)$ 和 $\phi_y(\cdot)$ 都是有界函数且 $\tilde{k}(y),\tilde{c}(y)$ 及 $e^{-y}\tilde{k}$ 均为关于 y 的有界函数.

由此可得(P-8)中成立:

$$\sigma_1 k(\tilde{X}^{x,y}(t))^\gamma + \sigma_1 \frac{(\tilde{X}^{x,y}(t))^\gamma}{\gamma} \exp(\phi(\tilde{Y}^y(t)))\phi'(\tilde{Y}^y(t)) \text{ 有界.}$$

$$k\sigma_2 \tilde{X}^{x,y}(t) e^{-\tilde{Y}^y(t)} (\tilde{X}^{x,y}(t))^\gamma dW^2(t) \text{ 有界.}$$

故可得(P-8)成立. 再结合 HJB 方程(P-4), 可得:

$$v(x,y) \geq E_{x,y}\left[e^{-\beta T} v(\tilde{X}^{x,y}(t), \tilde{Y}^y(t)) + \int_0^T e^{-\beta t} U(\tilde{c}(Y_t^y) X_t^{x,y}) dt\right]. \tag{P-9}$$

再结合(P-7), 可以得到:

$$\lim_{T\to\infty} E_{x,y}[e^{-\beta T} v(\tilde{X}_T^{x,y}, Y_T^y)] = 0.$$

故在(P-9)中，令 $T \to +\infty$，可得:

$$v(x,y) \geq E_{x,y}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} U(\tilde{c}(Y_t^y) X_t^{x,y}) dt\right].$$

这就说明了此时的 $v(\cdot)$ 为最优值函数且控制对 $(\tilde{k}(Y_t^y), \tilde{c}(Y_t^y))$ 为最优控制.