数理经济学
(最优控制理论和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2022 年 04 月 18 日

对于函数 $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和函数 $X(t):[0,T]\to\mathbb{R}^n$, 考虑如下变分问题:

$$\min I[X(\cdot)]=\int_0^T L(X(t),\dot{X}(t))dt. \tag{E-10-1}$$

这里存在初值 $X(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$ 和终值 $X(T)=x_1\in\mathbb{R}^n$. 根据之前的结论, 若 $X^*(\cdot)$ 为上述问题(E-10-1)的解, 则其满足如下 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{X}}L(X^*(t),\dot{X}^*(t))]=\nabla_X L(X^*(t),\dot{X}^*(t)). \tag{E-10-2}$$

定义-10-1

对给定的 $X(t)$, 定义其对应的广义动量为:

$$P(t)=\nabla_{\dot{X}}L(X(t),\dot{X}(t)),\quad 0\le t\le T.$$

令 $\dot{X} = V$, 如果将 V 看成是 X 和 P 的函数, 即 $V = v(X, P)$, 且假设对所有的 $X, P \in \mathbb{R}^n$, 可以通过方程

$$P = \nabla_V L(X, V)$$

求解 V.

定义-10-2

定义 Hamilton 动态系统 $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为:

$$H(X, P) = P \cdot v(X, P) - L(X, v(X, P)).$$

Hamilton 系统

机器学习应用回归分析

定理-10-1(Hamilton 动力系统)

假设 $X(\cdot)$ 是 Euler-Lagrange 方程(E-10-2)的解，且定义其对应的广义动量函数 $P(\cdot)$. 则 $(X(\cdot), P(\cdot))$ 是如下 Hamilton 方程组的解:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \nabla_P H(X(t), P(t)) \\ \dot{P}(t) = -\nabla_X H(X(t), P(t)). \end{cases} \tag{E-10-3}$$

此外，映射 $t \to H(X(t), P(t))$ 是一个常数.

定理-10-1 的证明

根据 Hamilton 动力系统 $H(X,P)=P\cdot v(X,P)-L(X,v(X,P))$, 这里有 $V=v(X,P)$ 和 $P=\nabla_V L(X,V)$. 则此时有:

$$
\begin{aligned}
\nabla_X H(X,P) &= P\cdot\nabla_X V-\nabla_X L(X,v(X,P))-\nabla_V L(X,v(X,P))\cdot\nabla_X V\\
&= -\nabla_X L(X,v(X,P))
\end{aligned}
$$

这是由于 $P=\nabla_V L(X,V)$. 故 $P(t)=\nabla_V L(X(t),\dot{X}(t))$ 当且仅当 $\dot{X}(t)=v(X(t),P(t))$ 成立. 因此, 根据 E-L 方程, 可以得到:

$$
\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= \nabla_X L(X(t),\dot{X}(t))\\
&= \nabla_X L(X(t),v(X(t),P(t)))=-\nabla_X H(X(t),P(t)).
\end{aligned}
$$

定理-10-1 的证明 (接上)

另一方面:

$P = \nabla_V L$

$$\nabla_P H(X,P) = v(X,P) + P \cdot \nabla_P V - \nabla_V L \cdot \nabla_P V = v(X,P).$$

这是因为 $P = \nabla_V L(X, v(X,P))$. 这就导致:

$$\nabla_P H(X(t),P(t)) = v(X(t),P(t)).$$

但是

$$P(t) = \nabla_V L(X(t),\dot{X}(t)) \Rightarrow \dot{X}(t) = v(X(t),P(t)).$$

定理-10-1 的证明 (接上)

因此，可以得到:

$$\dot{X}(t) = \nabla_P H(X(t), P(t)).$$

最后，注意到:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(X(t),P(t)) &= \nabla_X H\cdot\dot{X}(t) + \nabla_P H\cdot\dot{P}(t)\\ &= \nabla_X H\cdot\nabla_P H + \nabla_P H\cdot(-\nabla_X H) = 0\end{aligned}$$

Hamilton 方程 对时间而言是常数

H 关于时间的导数是0

问题 1

问题 1: 终止时间固定, 终止值不固定问题

考虑如下终值时间固定的受控系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), \mu(t)), & 0 \le t \le T, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{E-10-4}$$

这里 $T > 0$. 对给定集合 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 有:

$$\mathscr{U} = \{\mu : [0, T] \to U | \mu(\cdot) \text{是分段连续函数}\}.$$

上述受控系统对应的目标函数为:

$$\mathcal{J}[\mu(\cdot)] = \int_0^T r(X(t), \mu(t))dt + g(X(T)). \tag{E-10-5}$$

这里, $r : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为两个给定函数.

问题 1

1. μ 能否找到
2. 计算能不能达

基本问题

找到最优的控制函数 $\mu^*(\cdot) \in \mathscr{U}$ 使得:

$$\mathcal{J}[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot)\in\mathscr{U}} \mathcal{J}[\mu(\cdot)] \tag{E-10-6}$$

为了得到上述最优控制问题的最大值原理, 我们首先定义如下的 Hamilton 函数:

定义-10-3

$$H(x,p,\mu) = f(x,\mu)\cdot p + r(x,\mu), \quad x,p \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in U.$$

Pontryagin 最大值原理

假设 $\mu^*(\cdot)$ 是问题(E-10-6)的最优控制函数，且 $X^*(\cdot)$ 是其对应的最优路径. 则此时存在一个函数

$$P^* : [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

使得:

$$\dot{X}^*(t) = \nabla_P H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)), \tag{E-10-7}$$

$$\dot{P}^*(t) = -\nabla_X H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)), \tag{E-10-8}$$

和

$$H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)) = \max_{u \in U} H(X^*(t), P^*(t), u), \quad 0 \le t \le T, \tag{E-10-9}$$

都成立.

Pontryagin 最大值原理

此外, 映射:

$$t \to H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t))\text{为常数}.$$

最后, 成立如下终值条件:

$$P^*(T) = \nabla g(X^*(T)). \tag{E-10-10}$$

注记-10-1

- 函数 $P^*(t)$ 被称为乘子 (costate).
- 方程(E-10-8)被称为伴随方程;
- 式(E-10-9)被称为最大值原理;
- 方程(E-10-10)被称为横截条件.

注记-10-2

更确切的说, 由常微分方程(E-10-4)可以得到:

$$\dot{X}_i^*(t) = H_{P_i}(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)) = f_i(X^*(t), \mu^*(t)), \quad \forall 1 \le i \le n.$$

此外, 由伴随方程(E-10-8)还可以得到:

$$\begin{aligned}\dot{P}_i^*(t) &= -H_{X_i}(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} P_j^*(t) f_{X_i}^j(X^*(t), \mu^*(t)) - r_{X_i}(X^*(t), \mu^*(t)).\end{aligned}$$

这与前面定义的 Hamilton 系统形式一致, 只是多了一个控制变量 $\mu(\cdot)$.

注记-10-3

最大值原理(E-10-9)本质上是将在无穷维函数空间 $\mathscr{U}$ 中找最优函数的问题转变为在有限维空 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 中找向量使得在任意时刻 $t \in [0, T]$, 泛函 H 最大.

问题 2

问题 2: 终止时间不固定, 终止值固定问题

考虑如下终值时间固定的受控系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), \mu(t)), & t \geq 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{E-10-11}$$

这里假设终止值 $X_1 \in \mathbb{R}^n$ 是给定的. 则此时对应的目标函数为:

$\tau := \inf\{ \}$

$$\mathcal{J}[\mu(\cdot)] = \int_0^{\tau} r(X(t), \mu(t))dt. \tag{E-10-12}$$

这里, $r : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ 为给定函数. $\tau = \tau[\mu(\cdot)] \leq +\infty$ 表示方程(E-10-11)的解 $X(\cdot)$ 第一次取得给定值 X_1 的时刻 (hitting time).

问题 2: 终止时间不固定, 终止值固定问题

此时, 对应的基本问题为找到合适的控制函数 $\mu^*(\cdot) \in \mathscr{U}$ 使得:

$$\mathcal{J}[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu(\cdot) \in \mathscr{U}} \mathcal{J}[\mu(\cdot)]. \tag{E-10-13}$$

此外, 定义其对应的 Hamilton 函数如定义-10-3.

问题 2 的 Pontryagin 最大值原理

Pontryagin 最大值原理

假设 $\mu^*(\cdot)$ 是问题(E-10-13)的最优控制函数，且 $X^*(\cdot)$ 是其对应的最优路径. 则此时存在一个函数

$$P^* : [0, \tau^*] \to \mathbb{R}^n$$

使得:

$$\dot{X}^*(t) = \nabla_P H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)), \tag{E-10-14}$$

$$\dot{P}^*(t) = -\nabla_X H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)), \tag{E-10-15}$$

和

无穷维 → 有限维

$$H(X^*(t), P^*(t), \underbrace{\mu^*(t)}_{\text{函数}}) = \max_{u \in U} H(X^*(t), P^*(t), u), \quad 0 \le t \le T, \tag{E-10-16}$$

一个数

都成立.

Pontryagin 最大值原理

此外, 还成立:

$$H(X^*(t), P^*(t), \mu^*(t)) = 0, \quad 0 \le t \le \tau^*.$$

这里 τ^* 表示最优路径 $X^*(\cdot)$ 第一次到达给定值 X_1 的时间.

注记-10-4

在一般情况下, 对于问题 2, 应该将 Hamilton 函数定义为如下形式:

$$H(x, p, q, \mu) = f(x, \mu) \cdot p + r(x, \mu) \cdot q.$$

且对应的最大值原理应该改为: 存在常数 $q \ge 0$ 和函数 $P^* : [0, \tau^*] \to \mathbb{R}^n$ 使得(E-10-14), (E-10-15)和(E-10-16)成立. 但是 $q > 0$ 时, 原问题等价于 $q = 1$ 的情况. 而若 $q = 0$, 则最大值原理不成立.

线性最优时间控制问题

假设 $U = [-1, 1]^n \in \mathbb{R}^n$, 考虑如下线性受控系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t) + N\mu(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

其对应的目标泛函为:

$$\mathcal{J}[\mu(\cdot)] = -\int_0^\tau dt = -\tau.$$

这里 τ 表示路径 $X(t)$ 第一次到达给定值 $X_1 = 0$ 的时刻.

Pontryagin 最大值原理的应用方法

线性最优时间控制问题

此时, $r=-1$, 上述问题对应的 Hamilton 函数为:

$$H(X,P,\mu)=f\cdot P+r=(MX+N\mu)\cdot P-1.$$

又由于 $U=[-1,1]^n\in\mathbb{R}^n$, 故说明上述问题是一个 Bang-Bang 控制问题. 故对于给定的 M 和 N 可以根据最大值原理求解.

Pontryagin 最大值原理的应用方法

最优生产消费问题

定义:

- $x(t)$ 表示 t 时刻经济体的产出;
- $\mu(t)$ 表示 t 时刻为了扩大生产而将产出进行再投资的比例. 且假设 $0 \le \mu(t) \le 1$, 即 $U = [0,1]$. 此时, 容许控制集为 $\mathscr{U} = \mathscr{U}[0,1]$.
- 这个经济体的产出被如下方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu(t)x(t), 0 \le t \le T. \\ x(0) = x_0 > 0. \end{cases}$$

- 目标为最大化累积消费, 即

$$\mathcal{J}[\mu^*(\cdot)] = \max_{\mu \in \mathscr{U}} \mathcal{J}[\mu(\cdot)] = \max_{\mu \in \mathscr{U}} \int_0^T (1 - \mu(t))x(t)dt.$$

构建最大值原理

首先，为了使用 Pontryagin 最大值原理，我们有:

$$f(x,\mu)=x\mu,\quad g=0,\quad r(x,\mu)=(1-\mu)x.$$

故对应的 Hamilton 函数为:

$$H(x,p,\mu)=f(x,\mu)p+r(x,\mu)=px\mu+(1-\mu)x=x+\mu x(p-1).$$

此时对应的方程为:

$$\dot{x}(t)=H_p=\mu(t)x(t). \tag{E-10-17}$$

对应的伴随方程为:

$$\dot{p}(t)=-H_x=-1-\mu(t)(p(t)-1). \tag{E-10-18}$$

构建最大值原理

此外，对应的横截条件为:

$$p(T) = \nabla g(x(T)) = 0. \tag{E-10-19}$$

最后，对应的最大值原理为:

$$H(x(t), p(t), \mu(t)) = \max_{u \in [0,1]} \{x(t) + ux(t)(p(t) - 1)\}. \tag{E-10-20}$$

使用最大值原理

根据(E-10-20)和 $x(t) > 0 (0 \leq t \leq T)$(为什么?), 可以知道最优的控制函数为:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & 若\ p(t) > 1, \\ 0, & 若\ p(t) \leq 1. \end{cases}$$

故如果知道乘子 $p(t)$ 的表达式, 则可以完全知道最优控制函数 $\mu^*(\cdot)$. 现在来求解 $p(\cdot)$, 由(E-10-18)和(E-10-19)可知:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -1 - \mu(t)(p(t) - 1), & 0 \leq t \leq T, \\ p(T) = 0. \end{cases} \tag{E-10-21}$$

由于终值条件 $p(T) = 0$, 我们由连续性知道 $p(t) \leq 1$ 当 t 接近 T 时. 故方程(E-10-21)此时退化为 $\dot{p}(t) = -1$, 即有解 $p(t) = T - t$, $T - 1 \leq t \leq T$.

最优生产消费问题

使用最大值原理

当 $t \le T-1$ 时，有 $\mu = 1$ 成立，故方程(E-10-21)变为:

$$\dot{p}(t) = -1 - (p(t) - 1) = -p(t), \quad 0 \le t \le T-1.$$

由于 $p(T-1) = 1$，可以得到上述方程的解为:

$$p(t) = e^{T-1-t} > 1, \quad 0 \le t \le T-1.$$

故由此得到最优的控制函数为:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \le t \le t^*, \\ 0, & \text{若 } t^* \le t \le T. \end{cases}$$

这里转换时刻为: $t^* = T-1$.