数理经济学
(变分原理和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2023 年 03 月 28 日

无限计划水平

研究动机

在之前讨论的问题中，时间区间都是有限的，即 $t \in [0, T]$. 然而，对于研究社会整体或者企业 (如：可口可乐公司) 的相关问题时，需要预期或假设其永久存在. 因此，需要假设 $T \to +\infty$，即时间区间变为 $[0, +\infty)$. 上述推广，使得模型更加广泛和更一般化. 但是，由于时间区间变为无穷大，故求解方法会变得更加复杂一些.

拟解决关键问题

- 目标泛函的收敛性问题 (由于此时目标泛函是一个反常积分).
- 相关的横截条件怎么得到.

无限计划水平

目标泛函的收敛性

由于此时目标泛函的形式为:

$$\int_0^{+\infty} L(t, y(t), y'(t))dt. \tag{6-T-1}$$

故需要讨论其收敛性.

注记-6-1

值得注意的是, 如果目标泛函(6-T-1)是发散的, 此时可能出现多个最优路径 $y^*(t)$, 使得目标泛函取到无穷大. 但是, 在发散情形下, 学者们也研究了怎么找到最优路径的方法 (本课程不涉及).

为了研究目标泛函(6-T-1)的收敛性问题, 我们首先讨论如下几个充分性条件.

条件 I

如果目标泛函(6-T-1)的被积函数 $L(t,y(t),y'(t))$ 在整个积分区间都是有限的, 即 $\exists M>0$ 使得 $|L(t,y(t),y'(t))|\leq M$ 对 $\forall t\in[0,+\infty)$ 成立. 此外, 如果存在某个点 $t_0\in[0,+\infty)$ 使得当 $t>t_0$ 时, 函数 $L(t,y(t),y'(t))=0$ 恒成立, 此时目标泛函(6-T-1)收敛.

注记-6-2

条件 I 本质上还是一个有限值函数在有限区间上的积分, 故收敛.

无限计划水平

条件 *II*

如果目标泛函(6-T-1)的被积函数 $L(t, y(t), y'(t))$ 具有如下形式:

$$L(t, y(t), y'(t)) = G(t, y(t), y'(t))e^{-\rho t}, \quad t \in [0, +\infty).$$

其中, $\rho > 0$ 且函数 $G(t, y(t), y'(t))$ 有界. 此时, 目标泛函(6-T-1)收敛.

注记-6-3

条件 ***II*** 的特点是被积函数具有折现部分 $e^{-\rho t}$, 这是经济学和金融学中目标泛函中常见的部分. $e^{-\rho t}$ 对目标泛函的收敛具有很强的影响. 由于函数 $G(t, y(t), y'(t))$ 有界, 故 $\exists \tilde{G} > 0$ 使得 $|G(t, y(t), y'(t))| \leq \tilde{G}$ 对 $\forall t \in [0, +\infty)$ 成立, 进而得到:

$$\int_0^{+\infty} G(t, y(t), y'(t))e^{-\rho t}dt \leq \int_0^{+\infty} \tilde{G}e^{-\rho t}dt = \frac{\tilde{G}}{\rho}. \tag{6-T-2}$$

注记-6-4

不等式(6-T-2)也是对目标泛函上界的一个估计. 在研究经济学问题时, 常常需要对最优值做估计. 此外, 上述不等式在研究最大值问题时, 可以看做是一个潜在的极大值 (不一定取得到该值).

无限计划水平

条件 III(一个错误条件)

若目标泛函(6-T-1)的被积函数 $L(t, y(t), y'(t))$ 在 $t \to +\infty$ 时, 成立 $L(t, y(t), y'(t)) \to 0$, 此时目标泛函收敛.

注记-6-5

条件 III 是错误的, 但是却经常被错误的用来判断目标泛函(6-T-1)的收敛性.

横截条件

提出原因

在之前的讨论中，我们研究了终值时间和终值状态都不确定的情形，借助横截条件得到了新的条件，从而确定最优路径．现在研究的无限计划水平的变分问题，由于不存在终止时间，故终止状态也不再具体，这就会导致变分问题缺少求解条件，故此时需要新的横截条件．

由之前的讨论可以知道，横截条件本质上是一阶变分的一部分，即：

$$\left[L - y' L_{y'}\right]|_{t=T} \triangle T + [L_{y'}]|_{t=T} \triangle y = 0. \qquad (6\text{-T-}3)$$

横截条件

在无限水平下，上式(6-T-3)的左边部分需变为:

无限水平下的横截条件

$$\lim_{t\to+\infty}\left[L-y'L_{y'}\right]=0.$$

(6-T-3)的右边部分可以写成如下情况:

自由终止状态下的横截条件

$$\lim_{t\to+\infty}L_{y'}=0.$$

横截条件

注记-6-6

尽管上述横截条件直觉上是合理的，但是它们的不是一直有效的，这些反例来自于最优控制理论 (后半学期的主要学习内容).

解决上述困境的方法是绕过横截条件，研究无限水平下的经济学问题. 即在经济学建模的过程中，根据经济学客观规律确定终止状态是什么情况，然后再求解.

由此，我们讨论如下自治问题，即经济学和金融学中最常见的问题形式.

自治问题

满足如下假设 (1)(3)(4) 或 (2)(3)(4) 的问题称为自治问题.

(1) 目标泛函中被积函数 L 中不含有时间 t, 即此时函数变为 $L(y, y')$.

(2) 目标泛函变为如下形式:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} F(y(t), y'(t))dt, \quad \rho > 0.$$

即带有贴现因子 $e^{-\rho t}$ 的目标泛函.

(3) 最优路径有稳态存在, 即:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_s, \quad \text{这里 } y_s \text{ 是一个常数.}$$

(4) 最优路径在无限远处具有光滑性要求, 即要求:

$$\lim_{t \to +\infty} y'(t) = \lim_{t \to +\infty} y''(t) = 0.$$

对于 (1) 中不含有 t 的形式, 由于比较简单, 故我们不再考察, 大家可以结合前面所讲的特殊形式研究其一阶条件. 我们这里着重研究 (2) 中的情况.

(2) 对应的 E-L 方程为

$$F_y = -\rho F_{y'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y''$$

且有如下边界条件:

$$y(0) = y_0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = y_s.$$

注记-6-7

在自治问题中，条件 (3) 替代了原来的横截条件. 条件 (3) 来源于经济学中的实际情况，故其可以看做是变分问题的额外条件. 因此，自治问题本质上是一种在无限水平下的特殊变分问题.

自治问题

例-6-1

考虑如下无限水平下的自治问题:

$$\min \int_0^{+\infty} e^{-rt}(x^2 + ax + bx' + c(x')^2)dt.$$

其中, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 和 $r > 0$ 都为常数. 初始条件为: $x(0) = x_0$.

经济学中常常假设企业的总投资 I_g 来源于两部分:

- 净投资 $I = \frac{dK}{dt}$, 这里 $K(t)$ 是企业的资本路径.
- 重置投资: $\delta K(t)$, 其中 δ 是资本的折旧率.

若投资计划总是可以顺利实现, 则有:

$$I_g(t) = \frac{dK(t)}{dt} + \delta K(t).$$

上式说明, 若找到了最优的资本路径 $K^*(t)$, 则可以求得企业的最优总投资路径 $I_g^*(t)$. 然而, 如果投资计划存在一些障碍, 则需要用其它的指标来根据 $K^*(t)$ 确定 $I_g^*(t)$. 由此, 我们研究经典的 Jorgenson 模型[1].

[1] Jorgenson, D W., Capital Theory and Investment Behavior, American Economic Review, 1963, pp.247-259.

Jorgenson 模型基于经典的新古典投资理论, 假设:

- 企业的生产函数为: $Q = Q(K(t), L(t))$, 这里 $K(t)$ 是资本, $L(t)$ 表示劳动. 且假设 $Q_K, Q_L > 0$ 且 $Q_{KK}, Q_{LL} < 0$ 成立, 且具有规模报酬不变性质.
- 企业的现金收入为 $P * Q(K, L)$, 这里 P 表示产品的价格.
- 企业的工资支出为 $W * L(t)$, 这里 W 表示货币工资率;
- 企业的在新资本上的支出为 $m * I_g(t)$, m 可以作为某种 " 机器"的价格.

因此, 企业的净收入为:

$$N[K(t), L(t)] = P * Q(K(t), L(t)) - W * L(t) - m * \left(\frac{dK(t)}{dt} + \delta K(t)\right).$$

由此，可以得到企业的净值的现值表述式:

$$N[K,L]=\int_0^{+\infty}N[K(t),L(t)]e^{-\rho t}dt. \tag{J-1}$$

企业的目标选择最优的 $K(t)$ 和 $L(t)$，使得它的净值 $N[K,L]$ 最大. 在(J-1)中，如要保证积分不发散，需要假设 K' 不能到无穷大 (why?). 此外，上述问题具有两个需要计算的最优路径 K 和 L，故需要建立 E-L 方程组求解.

E-L 方程组

$$Q_K = \frac{m(\delta+\rho)}{P}, \qquad Q_L = \frac{W}{P}. \tag{J-2}$$

注记-6-8

上述两个方程都不含有关于时间的导数, 这表明它们存在静态平衡的关系. 事实上, 方程组(J-2)表明了企业在任何时候, 都成立如下关系:

边际产出 = 实际边际成本

特殊解

如果将生产函数取为经典的 Cobb-Douglas 函数, 即:

$$Q(K,L) = K^{\alpha}L^{\beta}, \quad \text{其中}\alpha+\beta \neq 1.$$

则此时 E-L 方程组变为:

$$\alpha K(t)^{\alpha-1}L^{\beta}(t) = \frac{m(\delta+\rho)}{P}, \qquad \beta K^{\alpha}(t)L^{\beta-1}(t) = \frac{W}{P}.$$

由此可得

$$K^*(t) = \left[\frac{m(\delta+\rho)}{\alpha P}\right]^{(\beta-1)(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{W}{\beta P}\right)^{-\beta/(1-\alpha-\beta)} = \text{常数}.$$

$L^*(t)$ 的结构和 $K^*(t)$ 类似.

由于上述解 $K^*(t)$ 是一个常数，故如果初始值 k_0 和 $K^*(t)$ 不同，则上述问题无解. 为了解决这个问题, Jorgenson 采用了如下的灵活加速因子技术.

灵活加速因子 (flexible accelerator)

Jorgenson 使用的主要思想是减少目标资本 K^* 和实际资本 $K(t)$ 之间的差距，即:

$$I(t) = j[K^* - K(t)], \quad 0 < j < 1.$$

由此，可以将最优的投资路径设为:

$$K(t) = \frac{j * K^* - I(t)}{j}, \quad K(0) = k_0.$$

注记-6-8

上述灵活加速因子仅仅只对最优路径为常数这种情况适用，其它情况需要视情况而定.

Eisner-Strotz 模型

和前面的 Jorgenson 模型不一样, Eisner-Strotz 模型将净投资作为企业扩大规模的过程, 重点考察了净投资而忽略了重置资本.

- 假设企业对于资本路径 $K(t)$ 的利润率函数为 $\pi(K)$;
- 假设为了扩大规模, 企业需要支付调整成本 C, 且假设 C 和企业扩张速度 $K'(t)$ 正相关, 即假设 $C = C(K'(t))$ 为一个单增函数.

此时, 企业的目标是选取一个最优资本路径 $K^*(t)$ 使得总净现值最大, 即:

目标泛函

$$\max \Pi[K] = \int_0^{+\infty} \left[\pi(K(t)) - C(K'(t))\right] e^{-\rho t} dt. \tag{E-S-1}$$

初始条件为: $K(0) = k_0$.

Eisner-Strotz 模型

为了研究 Eisner-Strotz 模型，考虑如下特殊情况.

二次函数情形

- 假设函数 $\pi(K)$ 的形式为:

$$\pi(K) = \alpha K - \beta K^2, \quad \alpha > 0 \text{且} \beta > 0.$$

- 假设函数 $C(K')$ 的形式为:

$$C(K') = aK'^2 + bK', \quad a > 0 \text{且} b > 0.$$

由此，目标泛函(E-S-1)变为：

$$\Pi[K]=\int_0^{+\infty}\left[\alpha K-\beta K^2-aK'^2-bK'\right]e^{-\rho t}dt.$$

此时，其对应的 E-L 方程为：

$$K''-\rho K'-\frac{\beta}{a}K+\frac{\alpha-b\rho}{2a}=0. \tag{E-S-2}$$

由 ODE 的相关知识，可以得到上述方程(E-S-2)的通解为：

$$K^*(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \tilde{K}.$$

其中

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + \frac{4\beta}{a}}\right), \quad \tilde{K} = \frac{\alpha - b\rho}{2\beta}.$$

由此可以得出：$\lambda_1 > \rho > 0$ 且 $\lambda_2 < 0$. 由于特解 $\tilde{K}$ 代表跨期均衡水平，故一定为正，因此要求：

$$\alpha > b\rho.$$

为了求解参数 A_1 和 A_2, 需要考虑自治问题. 此时, 需要假设:

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \text{常数} \Rightarrow A_1 = 0.$$

再结合初值条件, 可以得到最优解为:

$$K^*(t) = (k_0 - \tilde{K})e^{\lambda_2 t} + \tilde{K}. \tag{E-S-3}$$

由此, 可以得到企业的最优投资路径为:

$$I^*(t) = K^{*'}(t) = \lambda_2(k_0 - \tilde{K})e^{\lambda_2 t}. \tag{E-S-4}$$

由(E-S-3)和(E-S-4)可以得到:

$$I^*(t) = K^{*'}(t) = \lambda_2(K^*(t) - \tilde{K}) = -\lambda_2(\tilde{K} - K^*(t)). \tag{E-S-5}$$

灵活加速因子

(E-S-5) 本质上是灵活加速因子机制，只是还需要设 $-\lambda_2 < 1$，即成立：

$$\frac{\beta}{a} < 1 + \rho.$$