数理经济学
(最优控制理论和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2022 年 05 月 16 日

含有约束的最优控制问题主要分为如下两种情况:

两类约束

- 第一类: 控制变量出现在约束中, 状态变量可能出现也可能不出现在约束中;
- 第二类: 控制变量不出现在约束中, 约束仅仅影响状态变量.

与变分法的情形一样, 在最优控制理论中, 这类问题的处理方法是 Lagrange 方法. 在本节课中, 我们主要讨论 $[0,T]$ 上的约束.

带有控制变量的约束

等式约束问题

假设最优控制问题中只具有两个控制变量，即 u_1 和 u_2，且其满足：

$$g(t, y, u_1, u_2) = c.$$

我们将函数 g 称为约束函数，常数 c 被称为约束常数. 则此时最优控制问题为：

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T F(t, y, u_1, u_2) dt \\
&s.t. \quad \dot{y}(t) = f(t, y, u_1, u_2); \\
&\qquad\qquad g(t, y, u_1, u_2) = c, \quad \text{以及合适的边界条件.}
\end{aligned} \tag{E-14-1}$$

这是一个最简单的带有等式约束的最优控制问题.

带有控制变量的约束

此时, 上述问题(E-14-1)对应的 Hamilton 函数为:

$$H(t,y,u_1,u_2,p) = F(t,y,u_1,u_2) + p\cdot f(t,y,u_1,u_2), \quad t\in[0,T]. \tag{E-14-2}$$

在这里, Hamilton 函数(E-14-2)的最大化受制于约束条件 $g(t,y,u_1,u_2)=c$, 由此构建如下的 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= H(t,y,u_1,u_2,p) + \theta(t)[c-g(t,y,u_1,u_2)] \\ &= F(t,y,u_1,u_2) + p\cdot f(t,y,u_1,u_2) + \theta(t)[c-g(t,y,u_1,u_2)].\end{aligned} \tag{E-14-3}$$

这里, Lagrange 乘子 $\theta(t)$ 是关于时间 t 的函数. 此时, 为求得 Lagrange 函数 $\mathscr{L}$ 的最大值, 需要:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u_j} - \theta\frac{\partial g}{\partial u_j} = 0, \quad t\in[0,T], \quad j=1,2. \tag{E-14-4}$$

带有控制变量的约束

同时, 为了保证约束总是起作用, 还需要:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = c - g(t, y, u_1, u_2) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{E-14-5}$$

因此, (E-14-4)和(E-14-5)一同构成了函数 $\mathscr{L}$ 最大化的一阶条件 (内部). 其余的最大值条件还包括:

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (y \text{ 的运动方程})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \theta \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (\text{伴随方程})$$

和恰当的横截条件. 正是由于变量 y 影响控制区域, 故在确定乘子 p 的路径时, 伴随方程具有约束部分的信息.

带有控制变量的约束

当约束变为: $g(t,y,u_1,u_2) \le c$ 时, 此时约束条件变为不等式约束.

不等式约束问题

考虑如下带有不等式约束的最优控制问题:

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)dt \\
&s.t. \quad \dot{y}(t) = f(t,y,u_1,u_2); \\
&\qquad\quad g^1(t,y,u_1,u_2) \le c_1, \\
&\qquad\quad g^2(t,y,u_1,u_2) \le c_2, \quad \text{以及合适的边界条件.}
\end{aligned} \tag{E-14-6}
$$

此时, 由于约束是不等式的情形, 故无法直接构建对应的 Lagrange 函数进行求解.

带有控制变量的约束

为了求解带有不等式约束的最优控制问题，需要考虑约束规范[1]. 下面的四个条件之一都满足约束规范:

(1) 所有约束函数 g^i 关于控制变量 u_j 都是凹的; (在上面的问题中, g^i 关于 (u_1, u_2) 为凹函数, $i = 1, 2$.)

(2) 所有约束函数 g^i 关于控制变量 u_j 都是线性的-这是 (1) 的特殊情形; (在上面的问题中, g^i 关于 (u_1, u_2) 为线性的函数, $i = 1, 2$.)

(3) 所有约束函数 g^i 关于控制变量 u_j 都是凸的. 另外, 在控制域 U 中存在一点 $u_0 \in U$, 使得在 u_0 处, 对所有 $g^i < c_i$ 成立; (这条件说明约束集内部非空.)

(4) 函数 g^i 满足秩条件: 取等式形式成立的条件, 取其 Jacobian 矩阵, 即 $[\partial g^i / \partial u_j]$, 则该矩阵的秩等于等式形式成立的约束条件的个数.

若要求解带有不等式约束的最优控制问题, 不等式约束 $g^i \leq c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 必须满足上述四个约束规范之一.

[1]K.J, Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa, Constraint Qualifications in Nonlinear Programming, Naval Research Logistics Quarterly, 1961.

带有控制变量的约束

假设不等式约束满足上述四个约束规范之一，则此时(E-14-6)对应的Lagrange 函数为:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= F(t,y,u_1,u_2)+p(t)f(t,y,u_1,u_2)+\theta_1(t)[c_1-g^1(t,y,u_1,u_2)]\\ &+\theta_2(t)[c_2-g^2(t,y,u_1,u_2)].\end{aligned}$$

去掉自变量，上式可简写为:

$$\mathscr{L} = F+pf+\theta_1(c_1-g^1)+\theta_2(c_2-g^2).$$

则为使得 $\mathscr{L}$ 取得最大值，则对应的一阶条件（内部）为:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j}=0;\\ &\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_i}=c_i-g^i\geq 0,\quad \theta_i\geq 0\text{且}\theta_i\cdot\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_i}=0,(i=1,2;j=1,2).\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{E-14-7}$$

带有控制变量的约束

上述一阶条件(E-14-7)称为松弛条件，保证了原来不等式约束成立．若问题中要求 $u_j \geq 0$，则需要把条件 $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = 0$ 替换为:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} \leq 0, \quad u_j \geq 0 \text{且} u_j \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = 0.$$

此外，其它方程为:

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p} (y \text{ 的运动方程})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}. \quad (\text{伴随方程})$$

和恰当的横截条件．

带有控制变量的约束

与变分问题对应的约束一样，最优控制问题也有带有积分约束的问题.

等周长约束

考虑只含有一个状态变量，一个控制变量和一个积分约束的问题:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T F(t,y,u)dt; \\ &s.t. \quad \dot{y}(t) = f(t,y,u); \\ &\int_0^T G(t,y,u)dt = k, \quad k \text{ 为给定常数}; \\ &y(0) = y_0, \quad \text{以及合适的边界条件}. \end{aligned} \tag{E-14-8}$$

和变分法求解这类问题的思路一样，定义一个新的状态变量 $\Gamma(t)$:

$$\Gamma(t) = -\int_0^t G(s,y,u)ds \Rightarrow \dot{\Gamma}(t) = -G(t,y,u).$$

此外, $\Gamma(t)$ 对应的初值和终值分别为:

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(s,y,u)ds = 0, \quad \Gamma(T) = -\int_0^T G(s,y,u)ds = -k.$$

故此时可以将问题(E-14-8)变为:

等周长约束

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T F(t,y,u)dt; \\
&s.t. \quad \dot{y}(t) = f(t,y,u); \\
&\qquad \dot{\Gamma}(t) = -G(t,y,u); \\
&\qquad \Gamma(0) = 0, \Gamma(T) = -k, \quad k \text{ 为给定常数}; \\
&\qquad y(0) = y_0, \quad \text{以及合适的边界条件}.
\end{aligned} \tag{E-14-9}$$

带有控制变量的约束

此时，问题(E-14-12)对应的 Hamilton 函数为:

$$H = F(t,y,u) + pf(t,y,u) - \mu G(t,y,u).$$

则根据最大值原理可得下列条件:

$$\begin{aligned}
&\max_u H \quad \text{对于 } t \in [0,T];\\
&\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad (y \text{ 的运动方程})\\
&\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad (\text{伴随方程})\\
&\dot{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial \mu}; \quad (\Gamma \text{ 的运动方程})\\
&\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma} \Rightarrow \dot{\mu} = 0 \Rightarrow \mu(t) = \text{常数}; \quad (\mu \text{ 的运动方程})\\
&p(T) = 0. \quad (\text{横截条件})
\end{aligned} \tag{E-14-10}$$

带有控制变量的约束

不等式积分约束问题

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T F(t,y,u)dt; \\ &s.t. \qquad \dot{y}(t) = f(t,y,u); \\ &\qquad \int_0^T G(t,y,u)dt \leq k, \quad k \text{ 为给定常数;} \\ &\qquad y(0) = y_0, \quad \text{以及合适的边界条件.} \end{aligned} \tag{E-14-11}$$

同上，定义一个新状态变量 $\Gamma(t)$ 为:

$$\Gamma(t) = -\int_0^t G(s,y,u)ds \Rightarrow \dot{\Gamma}(t) = -G(t,y,u).$$

此外，$\Gamma(t)$ 对应的初值和终值分别为:

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(s,y,u)ds = 0, \quad \Gamma(T) = -\int_0^T G(s,y,u)ds \geq -k.$$

带有控制变量的约束

不等式积分约束问题

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T F(t,y,u)dt; \\
&s.t. \qquad \dot{y}(t) = f(t,y,u); \\
&\qquad \dot{\Gamma}(t) = -G(t,y,u); \\
&\qquad \Gamma(0) = 0, \Gamma(T) \geq -k, \quad k \text{ 为给定常数}; \\
&\qquad y(0) = y_0, \quad \text{以及合适的边界条件}.
\end{aligned}
\tag{E-14-12}
$$

此时，问题(E-14-12)对应的 Hamilton 函数为：

$$H = F(t,y,u) + pf(t,y,u) - \mu G(t,y,u).$$

带有控制变量的约束

如果满足约束规范条件，则根据最大值原理可得下列条件:

$$
\begin{aligned}
&\max_u H \quad 对于\ t \in [0,T];\\
&\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad (y\ 的运动方程)\\
&\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad (伴随方程)\\
&\dot{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial \mu}; \quad (\Gamma\ 的运动方程)\\
&\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma} \Rightarrow \dot{\mu} = 0 \Rightarrow \mu(t) = 常数; \quad (\mu\ 的运动方程)\\
&p(T) = 0; \quad (y\ 的横截条件)\\
&\mu(T) \geq 0, \quad \Gamma(T) + k \geq 0 且 \mu(T) \cdot [\Gamma(T) + k] = 0. \quad (\Gamma\ 的横截条件)
\end{aligned}
\tag{E-14-13}
$$

带有控制变量的约束

例-14-1

$$\max \int_0^T -1 dt;$$

$$s.t. \quad \dot{y}(t) = y(t) + \mu(t);$$

$$y(0) = 5, \quad y(T) = 11, \quad T \text{ 自由};$$

$$\mu(t) \in [-1, 1].$$

注意，这里 $\mu(t) \in [-1,1]$ 相当于 $-1 \leq \mu(t) \leq 1$，故此相当于关于 $\mu(\cdot)$ 的约束。此外，这里满足约束规范中的 (2)。故此时上述问题对应的 Lagrange 函数为：

$$\mathscr{L} = -1 + p(y + \mu) + \theta_1(\mu + 1) + \theta_2(1 - \mu).$$

带有控制变量的约束

由于 $\mathscr{L}$ 关于 μ 为线性的，故由最大值原理可得:

$$\mu^*(t) = \operatorname{sgn}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mu} = \operatorname{sgn}(p+\theta_1-\theta_2), \quad t\in[0,T];$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_1} = \mu+1\geq 0, \quad \theta_1\geq 0, \quad \theta_1\cdot(\mu+1)=0;$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_2} = 1-\mu\geq 0, \quad \theta_2\geq 0, \quad \theta_2\cdot(1-\mu)=0;$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p} = y+\mu;$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = -p.$$

则此时最优控制为 Bang-Bang 控制，即:

$$\mu^*=1, \quad \text{若} p>0; \qquad \mu^*=-1, \quad \text{若} p<0.$$

带有控制变量的约束

- 故若 $p+\theta_1-\theta_2>0$，故有 $\mu^*=1$，这意味着 $\mu^*+1=2>0$，这就意味着 $\theta_1=0$；因此，$p+\theta_1-\theta_2>0$ 意味着 $p-\theta_2>0$.
- 故若 $p+\theta_1-\theta_2<0$，故有 $\mu^*=-1$，这意味着 $1-\mu^*>0$，这就意味着 $\theta_2=0$. 因此，$p+\theta_1-\theta_2<0$ 意味着 $p+\theta_1<0$.

带有控制变量的约束

回忆最优控制问题对应的充分性条件为:

充分性条件

最大值原理条件对于目标泛函的全局最大化是充分的, 若:

- 对于 $t \in [0,T]$, $\mathscr{L}$ 关于 (y,u) 为凹函数;
- 对于 $t \in [0,T]$, 对于给定的 p, H^0 关于 y 为凹函数.

在研究带有约束的最优控制问题时, Hamilton 函数的最大化 H^0 受制于约束函数, 故需要将充分性条件进行推广. 由于有:

$$H = F + pf - \mu G \quad \text{和} \quad \mathscr{L} = H + \theta[c - g].$$

带有控制变量的约束

由此，可以得到充分性条件为：

充分性条件

对所有的 $t \in [0, T]$ 成立，若下列条件同时成立，则充分性条件成立.

- F 关于 (y, μ) 为凹函数;
- pf 关于 (y, μ) 为凹函数;
- μG 关于 (y, μ) 为凸函数;
- θg 关于 (y, μ) 为凸函数;