数理经济学
(变分原理和应用)

王鸣晖

西南财经大学

数学学院

wangmh@swufe.edu.cn

2023 年 04 月 4 日

带约束问题

研究动机

在前面的课程中，我们讨论的最优变分问题都没有对目标路径进行约束. 然而，在实际的经济学问题中，最优路径往往有一些约束要求，以满足某些经济学中的常规假设 (如收入不为负，某些均衡条件等). 由此，需要研究带有约束的最优变分问题.

例-7-1

预期通货膨胀率 $\pi(t)$ 和实际通货膨胀率 $p(t)$ 都是某个经济学模型中的状态变量，则预期通货膨胀率具有如下约束条件:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = j(p(t) - \pi(t)), \quad 0 < j \leq 1.$$

带约束问题

常见四类约束问题

常见的约束主要有如下四类:

- 等式约束;
- 微分方程约束;
- 不等式约束;
- 积分约束 (等周约束).

主要方法

主要求解的方法为: Largange 乘子法 +E-L 方程.

带约束问题

等式约束

考虑如下带有等式约束的最优变分问题:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & V[Y] = \int_0^T L(t, Y, Y')dt \\
s.t. \quad & g^1(t, Y) = C_1; \\
& \vdots \qquad\qquad (\text{这里} C_1, \cdots, C_m \text{为常数}) \\
& g^m(t, Y) = C_m;
\end{aligned}
\tag{E-7-1}
$$

以及适当边界条件. 这里, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 且约束式子个数 $m < n$.

带约束问题

约束的正则性

此外，这 $m(m<n)$ 个约束条件满足独立性，即对 Y 中任意 m 个变量，有如下 m 阶 Jacobian 行列式:

$$|J|_{m\times m}=\left|\frac{\partial(g^1,\cdots,g^m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|\neq 0.$$

注记-7-1

在上述问题中，约束条件的个数 m 严格小于状态变量的个数 n. 若出现 $m=n$，则可以通过约束条件求出唯一的解 Y，使得最优路径问题没有意义. 故研究带有等式约束的最优变分问题，至少需要研究具有两个状态变量的问题，否则没有意义.

为了求解上述等式约束问题(E-7-1), 需要通过构建如下的 Largange 函数, 即:

$$
\begin{aligned}
F &= L(t,Y,Y') + \lambda_1(t)(C_1 - g^1(t,Y)) + \cdots + \lambda_m(t)(C_m - g^m(t,Y)) \\
&= L(t,Y,Y') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)(C_i - g^i(t,Y)).
\end{aligned} \tag{E-7-2}
$$

注记-7-2

函数(E-7-2)和多元微积分中的 Largange 函数有如下两点不同:

- Largange 乘子项被加到被积函数 L 上, 而不是目标泛函 $\int_0^T Ldt$ 上.
- Largange 乘子 λ_i 在这里不是一个常数, 而是关于 t 的一个函数 $\lambda_i(t)$.

等式约束问题

将新的被积函数(E-7-2)代入到原始问题(E-7-1)中，则得到新的目标泛函:

$$\mathscr{V}[Y] = \max \int_0^T F(t, Y, Y')dt. \tag{E-7-3}$$

注记-7-3

若 Y^* 为原问题(E-7-1)的解，则其必为上述问题(E-7-3)的解. 由此将原来带有等式约束的问题(E-7-1)转变为不带约束的问题(E-7-3). 然而，这样做的代价是必须将 m 个 Largange 乘子 $\lambda_i(t)(i = 1, \cdots, m)$ 作为状态变量求解.

由上述讨论可知，求解问题(E-7-1)等价于求解问题(E-7-3)．由此，可以得到问题(E-7-3)关于状态变量 y_i 的 E-L 方程组如下所示：

$$F_{y_j} = \frac{d}{dt} F_{y_j'}, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, \cdots, n. \tag{E-7-4}$$

此外，还需要关于 Largange 乘子 $\lambda_i(t)$ 的 E-L 方程组：

$$F_{\lambda_i} = \frac{d}{dt} F_{\lambda_i'}, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, \cdots, m. \tag{E-7-5}$$

将上述方程组(E-7-5)具体化可以得到：

$$L_{\lambda_i} = 0 \text{即} C_i - g^i = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, \cdots, m. \tag{E-7-6}$$

等式约束问题

注记-7-4

方程组(E-7-6)与原始约束条件相同.

注记-7-5

由于方程(E-7-4)中含有乘子 $\lambda_i(t)(i=1,\cdots,m)$, 故为求解最优路径 Y 还需要方程组(E-7-5). 由此, 求解原问题(E-7-1)需要求解 $n+m$ 个方程.

例-7-2

$$
\begin{aligned}
\min \int_0^T & \sqrt{1+x'^2+y'^2}dt \\
s.t. \qquad & g(t,x,y)=0; \\
& x(0)=x_0, \quad x(T)=x_T; \\
& y(0)=y_0, \quad y(T)=y_T.
\end{aligned}
$$

考虑如下带有等式约束的最优变分问题:

带有微分方程约束的变分问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & V[Y] = \int_0^T L(t, Y, Y')dt && \text{(E-7-7)} \\
s.t. \quad & g^1(t, Y, Y') = C_1; \\
& \quad \vdots \qquad\qquad (\text{这里} C_1, \cdots, C_m \text{为常数}) \\
& g^m(t, Y, Y') = C_m;
\end{aligned}
$$

以及适当边界条件. 这里, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 且 $Y' = (y_1', y_2', \cdots, y_n')$. 此外, 还要求约束个数小于状态变量个数, 即 $m < n$ 成立.

微分方程约束问题

约束的正则性

此外，这 $m(m<n)$ 个约束条件满足独立性，即对 Y 中任意 m 个变量，有如下 m 阶 Jacobian 行列式:

$$|J_1|_{m\times m} = \left|\frac{\partial(g^1,\cdots,g^m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right| \neq 0.$$

此外，还要满足:

$$|J_2|_{m\times m} = \left|\frac{\partial(g^1,\cdots,g^m)}{\partial(y_1',\cdots,y_m')}\right| \neq 0.$$

注记-7-6

上述问题的正则性比等式约束的正则性多要求了对 Y' 的限制.

微分方程约束问题

求解带有微分方程约束的变分问题(E-7-7)和求解带有等式约束的变分问题(E-7-1)一样, 主要分为如下步骤:

求解步骤:

(1) 构建 Largange 函数;

(2) 分别构建状态变量 Y 和乘子 $\lambda(t)$ 对应的 E-L 方程组;

(3) 求解 E-L 方程得到最优路径.

不等式约束问题

带有不等式约束的变分问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & V[Y] = \int_0^T L(t, Y, Y')dt \\
s.t. \quad & g^1(t, Y, Y') \le C_1; \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad (\text{这里} C_1, \cdots, C_m \text{为常数}) \\
& g^m(t, Y, Y') \le C_m;
\end{aligned}
\tag{E-7-8}
$$

以及适当边界条件. 这里, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 且 $Y' = (y_1', y_2', \cdots, y_n')$.

注记-7-7

带有不等式约束的变分问题不需要对约束条件施加额外的正则性条件.

求解带有不等式约束的变分问题(E-7-8), 可以先构建如下的 Largange 函数:

$$F = L(t, Y, Y') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)(C_i - g^i(t, Y, Y')). \tag{E-7-9}$$

然后基于 Largange 函数(E-7-9)得到关于状态变量 Y 的 E-L 方程:

$$F_{y_j} = \frac{d}{dt} F_{y_j'}, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, \cdots, n. \tag{E-7-10}$$

由于是不等式约束, 故不能直接对乘子 λ 推导 E-L 方程.

由此，为了研究不等式约束的变分问题，故需要如下的松弛条件，即:

$$\lambda_i(t)(C_i - g^i) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, \cdots, m. \qquad \text{(E-7-11)}$$

注记-7-8

松弛条件(E-7-11)有如下两个方面的含义:

- 当 Largange 乘子 $\lambda_i(t) \neq 0 (i = 1, \cdots, m)$ 时，则第 i 个约束以严格的等式约束满足;
- 当 Largange 乘子 $\lambda_i(t) = 0 (i = 1, \cdots, m)$ 时，则第 i 个约束以不等式约束满足.

由此可知，松弛条件(E-7-11)保证了原被积函数 L 和 Largange 函数(E-7-9)等价.

积分约束问题

带有积分约束的变分问题

$$\max \quad V[Y] = \int_0^T L(t, Y, Y')dt \tag{E-7-12}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \textstyle\int_0^T g^1(t, Y, Y')dt = K_1; \\ & \quad\vdots \qquad\qquad (\text{这里}K_1, \cdots, K_m\text{为常数}) \\ & \textstyle\int_0^T g^m(t, Y, Y')dt = K_m; \end{aligned}$$

以及适当边界条件. 这里, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 且 $Y' = (y_1', y_2', \cdots, y_n')$.

积分约束问题

关于变分问题(E-7-12)的三个必要说明:

注记-7-9

带有积分约束的变分问题(E-7-12)对应着一个经典的数学问题, 即: 给定曲线长度, 求它围绕成什么样的几何形状才可以使得面积最大. 由于这个数学问题中, 所有可能的几何形状都有相同的周长, 故这类积分约束问题又被称为等周约束问题.

注记-7-10

积分约束的变分问题(E-7-12)不需要施加额外的正则性条件.

注记-7-11

在积分约束的变分问题(E-7-12)中, 约束条件并没有像前面三类一样, 约束函数 Y 在某个点的取值, 而是约束其在整个区间 $[0, T]$ 上的积分. 因此, 该类约束没有路径依赖性, 比前面三类约束更间接.

积分约束问题

为了求解上述积分约束问题(E-7-12)，首先要定义函数:

$$\Gamma_i(t) = \int_0^t g^i(t, Y, Y')ds, \quad i = 1, \cdots, m.$$

由此，对 $i = 1, \cdots, m$，可以得到:

$$\Gamma_i(0) = \int_0^0 g^i(t, Y, Y')dt = 0 \quad 和 \quad \Gamma_i(T) = \int_0^T g^i(t, Y, Y')dt = K_i.$$

此外，可以发现:

$$\Gamma_i'(t) = g^i(t, Y, Y') \Rightarrow \int_0^T g^i(t, Y, Y')dt = \int_0^T \Gamma_i'(t)dt = K_i. \qquad \text{(E-7-13)}$$

这里，$i = 1, \cdots, m$.

积分约束问题

由上述式子(E-7-13)可知，变分问题(E-7-12)中的积分约束等价于如下微分方程约束:

$$g^i(t,Y,Y') - \Gamma_i'(t) = 0, \qquad i = 1,\cdots,m. \tag{E-7-14}$$

由此，我们将变分问题(E-7-12)转化为如下等价问题:

等价问题

$$\begin{aligned} \max \quad & V[Y] = \int_0^T L(t,Y,Y')dt \\ s.t. \quad & g^1(t,Y,Y') - \Gamma_1'(t) = 0; \\ & \vdots \\ & g^m(t,Y,Y') - \Gamma_m'(t) = 0; \end{aligned} \tag{E-7-15}$$

以及适当的边界条件.

积分约束问题

对于上述变分问题(E-7-15), 可以构建如下的 Largange 函数:

$$F(t,Y,Y') = L(t,Y,Y') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)[\Gamma_i'(t) - g^i(t,Y,Y')]$$

上述 Largange 函数中除了状态变量 Y 和乘子 λ 以外, 还需要考虑变量 Γ, 故 E-L 方程组变为如下三组:

- 关于状态变量 Y 的 E-L 方程组:

$$F_{y_j} = \frac{d}{dt} F_{y_j'}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

积分约束问题

- 关于函数 Γ 的 E-L 方程组:

$$F_{\Gamma_i} = \frac{d}{dt} F_{\Gamma_i'}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

- 关于乘子 λ 的 E-L 方程组:

$$F_{\lambda_i} = \frac{d}{dt} F_{\lambda_i'}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

然而, 由于 $F_{\Gamma_i'} = \lambda_i(t)$, 故可以将关于函数 Γ 的 E-L 方程组简化为:

$$-\frac{d}{dt}\lambda_i(t) = 0 \Rightarrow \lambda_i(t) = \text{常数}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

由此可知, 在等价问题(E-7-15)中, 乘子 $\lambda_i (i = 1, \cdots, m)$ 是常数, 故关于乘子 λ 的 E-L 方程组没有意义.

积分约束问题

结合上述讨论，将关于状态变量 Y 的 E-L 方程组具体化，可以得到：

$$L_{y_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i_{y_j} = \frac{d}{dt}\left(L_{y'_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i_{y'_j}\right), \quad j = 1, \cdots, n. \tag{E-7-16}$$

由此，我们得到了等价问题(E-7-15)的一阶必要条件.

积分约束问题

例-7-3

$$
\begin{aligned}
\max \quad & V[y] = \int_0^T y\,dt \\
s.t. \quad & \int_0^T \sqrt{1+y'^2}\,dt = k; \\
& y(0) = 0; y(T) = y_T.
\end{aligned}
$$