习题 2.6

1．已知离散随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

试求 $Y = X^2$ 与 $Z = |X|$ 的分布列。

解：因 X 的全部可能取值为 $-2, -1, 0, 1, 3$，则 $Y = X^2$ 的全部可能取值为 $4, 1, 0, 1, 9$，$Z = |X|$ 的全部可能取值为 $2, 1, 0, 1, 3$，故 $Y = X^2$ 的分布列为

Y	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

且 $Z = |X|$ 的分布列为

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

2．已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < +\infty 。$$

试求随机变量 $Y = g(X)$ 的概率分布，其中

$$g(x) = \begin{cases} -1, & 当 x < 0; \\ 1, & 当 x \ge 0. \end{cases}$$

解：因 $Y = g(X)$ 的全部可能取值为 $-1, 1$，有

$$P\{Y = -1\} = P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{2x} + 1} d(e^x) = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x) \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{2}{\pi}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y = 1\} = 1 - P\{Y = -1\} = \frac{1}{2},$$

故 $Y = g(X)$ 的概率分布列为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3．设随机变量 X 服从 $(-1, 2)$ 上的均匀分布，记

$$Y = \begin{cases} 1, & X \ge 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$$

试求 Y 的分布列。

解：因 Y 的全部可能取值为 $-1, 1$，有

$$P\{Y = -1\} = P\{X < 0\} = \frac{0 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}, \quad P(Y = 1\} = 1 - P\{Y = -1\} = \frac{2}{3},$$

故 Y 的分布列为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

4. 设 $X \sim U(0,1)$，试求 $1-X$ 的分布。

解： 因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $Y=1-X$，有 $y=1-x$ 严格单减，反函数为 $x=h(y)=1-y$，导数 $h'(y)=-1$，且当 $0<x<1$ 时，有 $0<y<1$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot|-1|=1,\quad 0<y<1,$$

故 $Y=1-X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

5. 设随机变量 X 服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布，求随机变量 $Y=\cos X$ 的密度函数 $p_Y(y)$。

解： 因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由函数 $y=\cos x,\quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 的值域得分段点 $y=0,1$。

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{\cos X\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{\cos X\le y\}=P\left\{-\dfrac{\pi}{2}<X\le -\arccos y\right\}+P\left\{\arccos y\le X<\dfrac{\pi}{2}\right\}$

$$=\frac{2\left(\dfrac{\pi}{2}-\arccos y\right)}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}\arccos y;$$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{\cos X\le y\}=P(\Omega)=1$；

可知 $F_Y(y)$ 连续，Y 是连续随机变量，故 $Y=\cos X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

6. 设圆的直径服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，求圆的面积的密度函数。

解： 设 X 表示圆的直径，Y 表示圆的面积，有 $Y=\dfrac{1}{4}\pi X^2$，因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因 $y=\frac{1}{4}\pi x^2$, $0<x<1$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=2\sqrt{\frac{y}{\pi}}$，导数 $h'(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}}$，且当 $0<x<1$ 时，有 $0<y<\frac{\pi}{4}$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi y}}=\frac{1}{\sqrt{\pi y}},\quad 0<y<\frac{\pi}{4},$$

故圆的面积 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\frac{\pi}{4};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

7． 设随机变量 X 服从区间 $(1, 2)$ 上的均匀分布，试求 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的密度函数。

解： 因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因 $y=\mathrm{e}^{2x}$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\frac{1}{2}\ln y$，导数 $h'(y)=\frac{1}{2y}$，且当 $1<x<2$ 时，有 $\mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot\frac{1}{2y}=\frac{1}{2y},\quad \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4,$$

故 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

8． 设随机变量 X 服从区间 $(0, 2)$ 上的均匀分布，（1）求 $Y=X^2$ 的密度函数；（2）$P\{Y>2\}$。

解： 因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）因 $y=x^2$, $0<x<2$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\sqrt{y}$，导数 $h'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$，且当 $0<x<2$ 时，有 $0<y<4$，可得

$$p_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{4\sqrt{y}},\quad 0<y<4,$$

故 $Y=X^2$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）所求概率为

$$P\{Y<2\}=P\{X<\sqrt{2}\}=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

9．设随机变量 X 服从区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布，求：

（1）$P\left\{|X|>\frac{1}{2}\right\}$；

（2）$Y=|X|$ 的密度函数。

解：（1）所求概率为

$$P\left\{|X|>\frac{1}{2}\right\}=\frac{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)\right]+\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\,;$$

（2）因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由函数 $y=|x|$ 的值域得分段点 $y=0$，由 X 的分布得分段点 $y=1$。

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\frac{y-(-y)}{1-(-1)}=y$；

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P(\Omega)=1$；

可知 $F_Y(y)$ 连续，Y 是连续随机变量，故 $Y=|X|$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

10．设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，试求以下 Y 的密度函数

（1）$Y=-2\ln X$；（2）$Y=3X+1$；（3）$Y=\mathrm{e}^X$；（4）$Y=|\ln X|$。

解： X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）对于 $Y=-2\ln X$，有 $y=-2\ln x$ 严格单减，反函数为 $x=h(y)=\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，导数 $h'(y)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，且当 $0<x<1$ 时，有 $y>0$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot\left|-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\right|=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}},\ y>0,$$

故 $Y=-2\ln X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（2）对于 $Y=3X+1$，有 $y=3x+1$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\dfrac{y-1}{3}$，导数 $h'(y)=\dfrac{1}{3}$，且当 $0<x<1$ 时，有 $1<y<4$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3},\quad 1<y<4,$$

故 $Y=3X+1$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 1<y<4;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（3）对于 $Y=\mathrm{e}^X$，有 $y=\mathrm{e}^x$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\ln y$，导数 $h'(y)=\dfrac{1}{y}$，且当 $0<x<1$ 时，有 $1<y<\mathrm{e}$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y},\quad 1<y<\mathrm{e},$$

故 $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e};\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（4）对于 $Y=|\ln X|$，当 $0<x<1$ 时，有 $y=|\ln x|=-\ln x$ 严格单减，反函数为 $x=\ln y=\mathrm{e}^{-y}$，导数 $h'(y)=-\mathrm{e}^{-y}$，当 $0<x<1$ 时，有 $y>0$，可得

$$p_Y(y)=1\cdot\left|-\mathrm{e}^{-y}\right|=\mathrm{e}^{-y},\quad y>0,$$

故 $Y=|\ln X|$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

11．设随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求下列随机变量的分布：（1）$Y_1=3X$；（2）$Y_2=3-X$；（3）$Y_3=X^2$。

解：（1）对于 $Y_1=3X$，有 $y=3x$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\dfrac{y}{3}$，导数 $h'(y)=\dfrac{1}{3}$，当 $-1<x<1$ 时，有 $-3<y<3$，可得

$$p_1(y)=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{y^2}{18},\quad -3<y<3,$$

故 $Y_1=3X$ 的密度函数为

$$p_1(y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{18}, & -3<y<3;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）对于 $Y_2=3-X$，有 $y=3-x$ 严格单减，反函数为 $x=h(y)=3-y$，导数 $h'(y)=-1$，且当 $-1<x<1$ 时，有 $2<y<4$，可得

$$p_2(y)=\frac{3}{2}(3-y)^2\cdot|-1|=\frac{3}{2}(3-y)^2,\quad 2<y<4,$$

故 $Y_2=3-X$ 的密度函数为

$$p_2(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(3-y)^2, & 2<y<4;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（3）由函数 $y=x^2$ 的值域得分段点 $y=0$，由 X 的分布得分段点 $y=1$。

当 $y<0$ 时，$F_3(y)=P\{X^2\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_3(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{3}{2}x^2dx=\frac{1}{2}x^3\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=y^{\frac{3}{2}}$；

当 $y\ge1$ 时，$F_3(y)=P\{X^2\le y\}=P(\Omega)=1$；

可知 $F_3(y)$ 连续，Y_3 是连续随机变量，故 $Y_3=X^2$ 的密度函数为

$$p_3(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

12．设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求 $Y=X^2$ 的分布。

解： X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

且由函数 $y=x^2$ 的值域得分段点 $y=0$。

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $y\ge0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$，

可知 $F_Y(y)$ 连续，Y 是连续随机变量，因当 $y>0$ 时，密度函数

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}},$$

故 $Y=X^2$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & y>0;\\ 0, & y\le0.\end{cases}$$

13．设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $Y = \mathrm{e}^X$ 的数学期望与方差。

解：因 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

则

$$E(\mathrm{e}^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2 x}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2-2(\mu+\sigma^2)x+(\mu+\sigma^2)^2-2\mu\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}} dx = \mathrm{e}^{\frac{2\mu\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx,$$

因 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}$ 是正态分布 $N(\mu+\sigma^2, \sigma^2)$ 密度函数，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx = 1,$$

故 $E(Y) = E(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$；又因

$$E(\mathrm{e}^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-4\sigma^2 x}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2-2(\mu+2\sigma^2)x+(\mu+2\sigma^2)^2-4\mu\sigma^2-4\sigma^4}{2\sigma^2}} dx = \mathrm{e}^{\frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx,$$

且 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}$ 是正态分布 $N(\mu+2\sigma^2, \sigma^2)$ 密度函数，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx = 1,$$

则 $E(Y^2) = E(\mathrm{e}^{2X}) = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$，故

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)。$$

14．设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$，试求以下 Y 的密度函数

（1）$Y = |X|$；（2）$Y = 2X^2 + 1$。

解：（1）由函数 $y = |x|$ 的值域得分段点 $y = 0$。

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P\{|X| \le y\} = P(\varnothing) = 0$；

当 $y \ge 0$ 时，$F_Y(y) = P\{|X| \le y\} = P\{-y \le X \le y\} = \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1$；

可知 $F_Y(y)$ 连续，Y 是连续随机变量，因当 $y > 0$ 时，密度函数

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=2\varphi(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},$$

故 $Y=|X|$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（2）由函数 $y=2x^2+1$ 的值域得分段点 $y=1$。

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{2X^2+1\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{2X^2+1\le y\}=P\left\{-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right\}=2\Phi\left(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)-1$，

可知 $F_Y(y)$ 连续，Y 是连续随机变量，因当 $y>1$ 时，密度函数

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=2\varphi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2(y-1)}}=\frac{1}{\sqrt{2(y-1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}},$$

故 $Y=2X^2+1$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1;\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

15．设随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & \text{若 } x>0;\\ 0, & \text{若 } x\le 0.\end{cases}$$

试求以下 Y 的密度函数

（1）$Y=2X+1$；　（2）$Y=\mathrm{e}^X$；　（3）$Y=X^2$。

解：（1）对于 $Y=2X+1$，有 $y=2x+1$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\dfrac{y-1}{2}$，导数 $h'(y)=\dfrac{1}{2}$，且当 $x>0$ 时，有 $y>1$，可得

$$p_Y(y)=\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}},\quad y>1,$$

故 $Y=2X+1$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}, & y>1;\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

（2）对于 $Y=\mathrm{e}^X$，有 $y=\mathrm{e}^x$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\ln y$，导数 $h'(y)=\dfrac{1}{y}$，且当 $x>0$ 时，有 $y>1$，可得

$$p_Y(y)=\mathrm{e}^{-\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2},\quad y>1,$$

故 $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1;\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

（3）对于$Y=X^2$，有$y=x^2,\quad x>0$严格单调增加，反函数为$x=h(y)=\sqrt{y}$，导数$h'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，且当$x>0$时，有$y>0$，可得

$$p_Y(y)=\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}},\quad y>0,$$

故$Y=X^2$的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

16．设随机变量X服从参数为 2 的指数分布。试证$Y_1=\mathrm{e}^{-2X}$和$Y_2=1-\mathrm{e}^{-2X}$都服从区间$(0,1)$上的均匀分布。

解：X的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}2\,\mathrm{e}^{-2x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

对于$Y_1=\mathrm{e}^{-2X}$，有$y=\mathrm{e}^{-2x}$严格单减，反函数为$x=h(y)=-\dfrac{1}{2}\ln y$，导数$h'(y)=-\dfrac{1}{2y}$，且当$x>0$时，有$0<y<1$，可得

$$p_1(y)=2\,\mathrm{e}^{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln y\right)}\cdot\left|-\frac{1}{2y}\right|=2y\cdot\frac{1}{2y}=1,\quad 0<y<1,$$

故$Y_1=\mathrm{e}^{-2X}$的密度函数为

$$p_1(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即Y_1服从区间$(0,1)$上的均匀分布。

对于$Y_2=1-\mathrm{e}^{-2X}$，有$y=1-\mathrm{e}^{-2x}$严格单增，反函数为$x=h(y)=-\dfrac{1}{2}\ln(1-y)$，导数$h'(y)=\dfrac{1}{2(1-y)}$，且当$x>0$时，有$0<y<1$，可得

$$p_2(y)=2\,\mathrm{e}^{-2\cdot\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}\cdot\left|\frac{1}{2(1-y)}\right|=2(1-y)\cdot\frac{1}{2(1-y)}=1,\quad 0<y<1,$$

故$Y_2=1-\mathrm{e}^{-2X}$的密度函数为

$$p_2(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即 Y_2 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布。

17．设 $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$，试证 $Y=\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$。

证明：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

因 $y=\ln x$ 严格单增，反函数为 $x=h(y)=\mathrm{e}^y$，导数 $h'(y)=\mathrm{e}^y$，且当 $x>0$ 时，有 $-\infty<y<+\infty$，可得

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^y\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln \mathrm{e}^y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot \mathrm{e}^y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

故 $Y=\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$。

18．设 $Y \sim LN(5,0.12^2)$，试求 $P\{Y<188.7\}$。

解：因 $Y \sim LN(5,0.12^2)$，由第 17 题的结论知 $X=\ln Y \sim N(5,0.12^2)$，故

$$P\{Y<188.7\}=P\{\ln Y<\ln 188.7=5.24\}=\Phi\left(\frac{5.24-5}{0.12}\right)=\Phi(2)=0.9772。$$