补充题参考答案：

1．一公司班车载有 20 位员工自公司开出，中途有 10 个车站可以下车。在每一个车站若无人下车便不停车。设每位员工等可能地在各个车站下车并设各人是否下车相互独立，求停车次数的期望与方差。

解：设 X 表示停车次数，引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{第 } i \text{ 个车站无人下车；}\\ 1, & \text{第 } i \text{ 个车站无人下车.}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,10)\text{，}$$

则 $X=\sum_{i=1}^{10}X_i$，有

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le 10}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\text{。}$$

因每一位员工在第 i 个车站下车的概率为 0.1，不下车的概率为 0.9，则 20 人都不在第 i 个车站下车的概率为 0.9^{20}，即 $P\{X_i=0\}=0.9^{20}$，$P\{X_i=1\}=1-0.9^{20}$，可得

$$E(X_i)=1-0.9^{20}\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=0.9^{20}(1-0.9^{20})\text{。}$$

故

$$E(X)=10\times(1-0.9^{20})\text{。}$$

又因每一位员工在第 i,j 两个车站之一下车的概率为 0.2，都不下车的概率为 0.8，则 20 人都不在第 i,j 两个车站下车的概率为 0.8^{20}，即 (X_i,X_j) 的概率分布为

X_i \ X_j	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.8^{20}	$0.9^{20}-0.8^{20}$	0.9^{20}
1	$0.9^{20}-0.8^{20}$	$1-2\times0.9^{20}+0.8^{20}$	$1-0.9^{20}$
$p_{\cdot j}$	0.9^{20}	$1-0.9^{20}$	

可得

$$E(X_iX_j)=0+1\times(1-2\times0.9^{20}+0.8^{20})=1-2\times0.9^{20}+0.8^{20}\text{，}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=(1-2\times0.9^{20}+0.8^{20})-(1-0.9^{20})(1-0.9^{20})=0.8^{20}-0.9^{40}\text{，}$$

故

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{10}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le 10}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$=10\times(0.9^{20}-0.9^{40})+90\times(0.8^{20}-0.9^{40})=10\times0.9^{20}+90\times0.8^{20}-100\times0.9^{40}\text{。}$$

2．掷一枚骰子 5 次，出现了 X 种不同的点数，求 X 的期望与方差。

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{第}\, i\, \text{点没有出现；}\\ 1, & \text{第}\, i\, \text{点出现.}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,6)\text{，}$$

则 $X=\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，有

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{6}X_i\right)=\sum_{i=1}^{6}E(X_i)\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{6}X_i\right)=\sum_{i=1}^{6}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le 6}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\text{。}$$

因每一次投掷第 i 点出现的概率为 $\frac{1}{6}$，不出现的概率为 $\frac{5}{6}$，则 5 次投掷第 i 点都不出现的概率为 $\left(\frac{5}{6}\right)^5$，即 $P\{X_i=0\}=\left(\frac{5}{6}\right)^5$，$P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$，可得

$$E(X_i)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=\left(\frac{5}{6}\right)^5\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\right]\text{。}$$

故

$$E(X)=6\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\right]\text{。}$$

又因每一次投掷第 i, j 两点至少出现一点的概率为 $\frac{2}{6}$，都不出现的概率为 $\frac{4}{6}$，则 5 次投掷第 i, j 两点都不出现的概率为 $\left(\frac{4}{6}\right)^5$，即 (X_i, X_j) 的概率分布为

$X_i \backslash X_j$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\left(\frac{4}{6}\right)^5$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5-\left(\frac{4}{6}\right)^5$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$
1	$\left(\frac{5}{6}\right)^5-\left(\frac{4}{6}\right)^5$	$1-2\times\left(\frac{5}{6}\right)^5+\left(\frac{4}{6}\right)^5$	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$
$p_{\cdot j}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$	

可得

$$E(X_iX_j)=0+1\times\left[1-2\times\left(\frac{5}{6}\right)^5+\left(\frac{4}{6}\right)^5\right]=1-2\times\left(\frac{5}{6}\right)^5+\left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \left[1 - 2\times\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \left(\frac{4}{6}\right)^5\right] - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5\right]\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5\right] = \left(\frac{4}{6}\right)^5 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10},$$

故

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{6} \operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le 6} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 6\times\left[\left(\frac{5}{6}\right)^5 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right] + 30\times\left[\left(\frac{4}{6}\right)^5 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right] = 6\times\left(\frac{5}{6}\right)^5 + 30\times\left(\frac{4}{6}\right)^5 - 36\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10}。$$