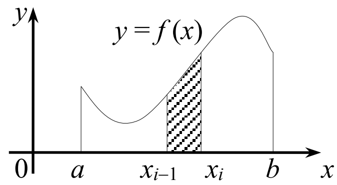
第六章 定积分

§6.1 定积分的概念



一．引例

1． 曲边梯形的面积

由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的图形称为曲边梯形．

为了求得该曲边梯形的面积，将区间 $[a, b]$ 分成若干小段：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，

在每一小段 $[x_{i-1}, x_i]$ 内对应的小曲边梯形面积近似为 $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$， $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，

整个曲边梯形的面积为 $S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

显然，小区间长度越短，近似程度越高．可见：$S=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$， 其中 $\|\Delta\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$．

2． 变速直线运动物体的运动距离

已知变速直线运动物体的运动速度为 $v=v(t)$，求在时间 $[a, b]$ 内物体的运动距离．

将区间 $[a, b]$ 分成若干小段：$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，

在每一小段 $[t_{i-1}, t_i]$ 内近似看作匀速运动，物体的运动距离近似为

$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i$， $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$，$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$，

总的运动距离为 $s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$，

显然，小区间长度越短，近似程度越高．可见：$s=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$，其中 $\|\Delta\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$．

以上两例都得到：函数值与自变量改变量乘积之和的极限．

二．定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的有界函数，将区间 $[a, b]$ 分成若干小段：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，

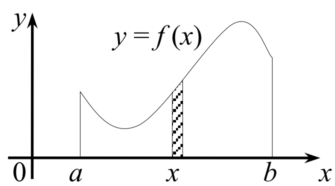
任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，作和式：$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，再取极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_n=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i，其中 \|\Delta\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}.$$

若此极限存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，此极限称为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$，

其中称 $f(x)$ 为被积函数，x 为积分变量，$[a, b]$ 为积分区间，a, b 分别为积分下限、上限．

对此积分式可理解为：



$f(x)$ 为高，dx 为微小宽度，$f(x)dx$ 为窄条面积，$\int_a^b$ 为从 a 到 b 无限求和．

注意：（1）定积分与积分变量无关，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$．

（2）在定积分定义中要求 $a<b$，

如果 $a>b$，则规定 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；如果 $a=b$，则规定 $\int_a^a f(x)dx=0$，

即上下限交换，积分值反号；上下限相等，积分值等于零．

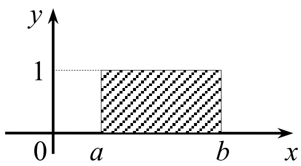
（3）函数可积的条件：

如果$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

如果$f(x)$在区间$[a, b]$上无界，则$f(x)$在区间$[a, b]$上不可积.

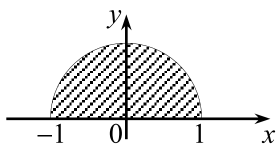
三．定积分的几何意义

由引例知：定积分的几何意义是曲边梯形的面积.



例　求$\int_a^b 1dx$.

解：由$y = 1$，$x = a$，$x = b$及x轴围成的矩形，$\therefore \int_a^b 1dx = b - a$.



例　求$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

解：由$y = \sqrt{1-x^2}$，$x = -1$，$x = 1$及x轴围成的上半圆，$\therefore \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

例　求$\int_0^1 x^2 dx$.

解：由定义求此积分．将区间[0, 1]作n等分：$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$.

在每一小段$[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$内对应的小曲边梯形面积近似为 $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$，　$\xi_i \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$，

取$\xi_i = \frac{i}{n}$，即$\Delta S_i \approx (\frac{i}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{i^2}{n^3}$，求和：$\sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$，

再取极限：$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$.

以后计算时为$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

§6.2　定积分的基本性质

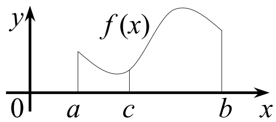
以下假设所涉及的函数都是可积的.

性质 1　常数因子可移到积分号外，即$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

证：左端$= \lim_{\|\Delta\|} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\|\Delta\|} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i =$右端.

性质 2　和差的积分等于积分的和差，即$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

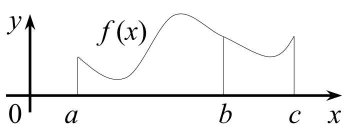
证：左端$= \lim_{\|\Delta\|} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \lim_{\|\Delta\|} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\|\Delta\|} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i =$右端.



性质 3　（区间可加性）$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

根据几何意义加以说明.

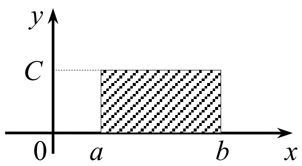
先设$a < c < b$，显然成立.



再设$a < b < c$，有$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

类似，不论a, b, c的大小关系怎样，上式都成立.

性质 4　常数的积分等于该常数乘以区间长度，即 $\int_a^b C dx = C(b-a)$.



根据几何意义加以说明．由 $y = C$，$x = a$，$x = b$ 及 x 轴围成的矩形，

故 $\int_a^b C dx = C(b-a)$.

性质 5　（保号性）在区间 $[a, b]$ 内，若恒有 $f(x) \ge 0$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

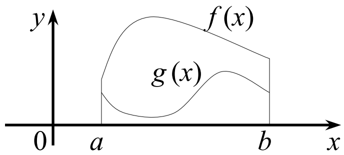
证：因 $f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$，故 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$.

注：若在 $[a, b]$ 内，$f(x)$ 连续，且恒有 $f(x) \ge 0$，但 $f(x)$ 不恒为 0，则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

性质 6　（单调性）在区间 $[a, b]$ 内，若恒有 $f(x) \ge g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

证：几何意义显然成立．设 $F(x) = f(x) - g(x)$，在 $[a, b]$ 内，$F(x) \ge 0$，

由保号性知 $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0$ ．得证．



注：若在 $[a, b]$ 内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 连续，且恒有 $f(x) \ge g(x)$，但 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

可利用性质 4 比较积分的大小．

例　比较以下每组积分的大小（≤ 或 ≥）.

（1）$\int_0^1 e^x dx$ 与 $\int_0^1 e^{x^2} dx$；　（2）$\int_1^2 e^x dx$ 与 $\int_1^2 e^{x^2} dx$；　（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

解：（1）$x \in [0, 1]$，有 $x \le x^2$，$e^x \le e^{x^2}$，$\therefore \int_0^1 e^x dx \le \int_0^1 e^{x^2} dx$；

（2）$x \in [1, 2]$，有 $x \ge x^2$，$e^x \ge e^{x^2}$，$\therefore \int_1^2 e^x dx \ge \int_1^2 e^{x^2} dx$；

（3）$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $x \in [0, \pi]$，有 $x \ge \sin x$，$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

推论　若 $a < b$，则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)| dx$.

证：因 $f(x) \le |f(x)|$，有 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)| dx$；又因 $-f(x) \le |f(x)|$，有 $-\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)| dx$．得证.

例　设在区间 $[a, b]$ 内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 连续，试证 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$.

证：对任何实数 t，都有 $\int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx \ge 0$，

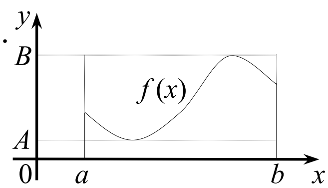
即 $\int_a^b [f^2(x) + 2tf(x)g(x) + t^2 g^2(x)]dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + t^2 \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$，

则判别式 $\Delta = \left[2\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \le 0$．得证.

性质 7　在区间 $[a, b]$ 上，若恒有 $A \le f(x) \le B$，则 $A(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le B(b-a)$.

证明：因 $A \le f(x) \le B$，根据性质 4，

则 $\int_a^b A dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b B dx$，即 $A(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le B(b-a)$，得证.

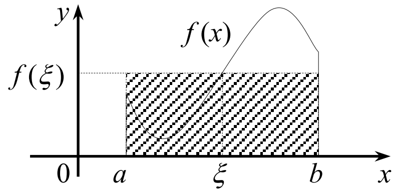


性质 8 （积分中值定理）设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则至少存在一点$\xi \in [a, b]$，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

证明：∵$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，根据最值定理知：$f(x)$在区间$[a, b]$上必存在最大值 M 与最小值 m，

由性质 6 知$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$，即$m \le \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ ，根据介值定理知：

至少存在一点$\xi \in [a, b]$，使得$f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，得证.



这里称$f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的平均值.

§6.3 微积分基本定理

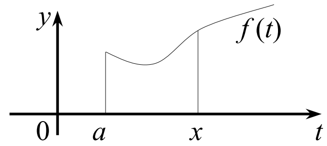
一．变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系

设变速直线运动质点的位置函数为$s = s(t)$，则其速度函数为$v(t) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$，即速度函数 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 的导数，而位置函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的原函数.

另一方面，设速度函数为 $v = v(t)$，则在 $[a, b]$ 时间段内运动路程$\Delta s = \lim\limits_{\|\Delta\|}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt$ ，而在 $[a, b]$ 时间段内 $\Delta s = s(b) - s(a)$，即$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$.

二．原函数存在定理

为了从变化的角度研究定积分，引入$\int_a^x f(t)dt$ ，将随上限 x 而改变，它是上限 x 的函数，称为积分上限函数，记为$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.



定理（原函数存在定理）若$f(x)$在$[a, b]$上连续，则$\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$.

即$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$是$f(x)$的一个原函数.

证明：$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$，其中$\xi$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间，

$$\therefore \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x) .$$

由定理知：$(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$， 如$(\int_1^x \ln t dt)' = \ln x$ ，$(\int_2^x \sqrt{1+t}dt)' = \sqrt{1+x}$ ；

又如$(\int_x^1 \arctan t dt)' = (-\int_1^x \arctan t dt)' = -\arctan x$.

例 求$(\int_1^{x^2} \sin t dt)'_x$.

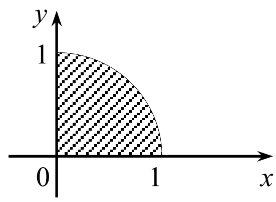
解：原式$= \Phi'(u)\cdot(x^2)' = \sin u \cdot 2x = 2x\sin x^2$.

一般地，$(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)'_x = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ ，$(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt)'_x = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) - f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$.

例 求$(\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{1}{1+t^2}dt)'_x$.

解：原式$= \dfrac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2 - \dfrac{1}{1+x^4}\cdot 2x$.

例　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x \ln t dt}{(x-1)^2}$.



解：原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\int_1^x \ln t dt)'}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$.

例　设 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1-t^2}dt$ ，求 $F(x)$在区间[0, 1]上的最值.

解：$\because F'(x)=(\int_0^x\sqrt{1-t^2}dt)'=\sqrt{1-x^2}\ge0$ ，即 $F(x)$单增，

$\therefore F(x)$ 在区间[0, 1]上的最小值为 $F(0)=\int_0^0\sqrt{1-t^2}dt=0$ ，最大值为 $F(1)=\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt=\dfrac{\pi}{4}$.

三．Newton-Leibniz 公式

定理（牛顿–莱布尼兹公式）若 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，$F(x)$是 $f(x)$的任一原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) .$$

证明：$\because \Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$的一个原函数，有$\Phi'(x)=f(x)=F'(x)$，

根据拉格朗日定理推论 2 知：$\Phi(x)=F(x)+C$

取 $x=a$，得 $\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0=F(a)+C$ ，即 $C=-F(a)$，$\therefore\Phi(x)=F(x)-F(a)$.

再取 $x=b$，得 $\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ ，得证.

如 $\int_0^1 x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{1^3}{3}-\dfrac{0^3}{3}=\dfrac{1}{3}$ ；　$\int_1^e\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$ ；

例　$\int_1^{\sqrt3}\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$.

解：原式 $=\int_1^{\sqrt3}(1-\dfrac{1}{1+x^2})dx=(x-\arctan x)\Big|_1^{\sqrt3}=(\sqrt3-\dfrac{\pi}{3})-(1-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt3-1-\dfrac{\pi}{12}$.

例　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 tdt$.

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sin tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)(-d\cos t)=(-\cos t+\dfrac{\cos^3 t}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0-(-1+\dfrac{1}{3})=\dfrac{2}{3}$.

注意：定积分与不定积分的区别，

（1）计算结果，定积分是一个数，不加 C；不定积分是一族函数，应加任意常数 C.

（2）定积分与积分变量无关，$\int_0^1 x^2dx=\int_0^1 t^2dt$ ；不定积分与积分变量有关，$\int x^2dx\ne\int t^2dt$.

例　$\int_1^4|x-2|dx$.

解：分段点 $x=2$，当 $x<2$ 时，$|x-2|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|x-2|=x-2$，

原式 $=\int_1^2(2-x)dx+\int_2^4(x-2)dx=(2x-\dfrac{x^2}{2})\Big|_1^2+(\dfrac{x^2}{2}-2x)\Big|_2^4=(4-2)-(2-\dfrac{1}{2})+(8-8)-(2-4)=\dfrac{5}{2}$.

分段函数应从分段点处分段积分.

例　$\int_0^x |t-1|\,dt$.

解：分段点 $t=1$，当 $x\le 1$ 时，$\int_0^x |t-1|\,dt=\int_0^x (1-t)dt=\left(t-\dfrac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=x-\dfrac{x^2}{2}$，

当 $x>1$ 时，$\int_0^x |t-1|\,dt=\int_0^1 (1-t)dt+\int_1^x (t-1)dt=\left(t-\dfrac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\dfrac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_1^x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2}{2}-x+1$，

故 $\int_0^x |t-1|\,dt=\begin{cases} x-\dfrac{x^2}{2}, & x\le 1, \\ \dfrac{x^2}{2}-x+1, & x>1. \end{cases}$

例　$\int_{-2}^{2} \max\{x,\ x^2\}dx$.

解：分段点 $x=0,1$，

原式 $=\int_{-2}^{0} \max\{x,\ x^2\}dx+\int_0^1 \max\{x,\ x^2\}dx+\int_1^2 \max\{x,\ x^2\}dx=\int_{-2}^{0} x^2dx+\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1+\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2=(0+\frac{8}{3})+(\frac{1}{2}-0)+(\frac{8}{3}-\frac{1}{3})=\frac{11}{2}.$$

例　已知 $f(x)=x^3+x^2\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$ 与 $\int_0^2 f(x)dx$.

解：设数 $A=\int_0^1 f(x)dx$，有 $f(x)=x^3+Ax^2$，

则 $A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^3+Ax^2)dx=(\dfrac{x^4}{4}+A\dfrac{x^3}{3})\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{A}{3}$，移项，得：$\dfrac{2A}{3}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore A=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{3}{8}$，有 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{8}x^2$，且 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3+\dfrac{3}{8}x^2)dx=(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{8})\Bigg|_0^2=5$.

根据 $f(x)$ 与其积分的关系式，可产生循环积分.

注意：使用牛顿-莱布尼兹公式时，要求被积函数在积分区间上连续；否则，必须在间断点处分段积分.

如 $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{x^2}dx\ne -\dfrac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1}=-1-1=-2$，错在 $\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处间断. 应等于 $\int_{-1}^{0} \dfrac{1}{x^2}dx+\int_0^1 \dfrac{1}{x^2}dx$.

§6.4　定积分的换元积分法

不定积分　$\int f(x)dx \overset{x=\varphi(t)\,,\,dx=\varphi'(t)dt}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$，

定积分　$\int_a^b f(x)dx \underset{\alpha=\varphi^{-1}(a),\ \beta=\varphi^{-1}(b)}{\overset{x=\varphi(t)\,,\,dx=\varphi'(t)dt}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$，

关键是定积分换元法应换元换限.

例　$\int_0^7 \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx$.

解：令 $t=\sqrt[3]{1+x}$，有 $x=t^3-1$，$dx=3t^2\,dt$，且 $x=0$ 时，$t=1$；$x=7$ 时，$t=2$.

$$原式=\int_1^2\frac{1}{1+t}\cdot 3t^2dt=\int_1^2(3t-3+\frac{3}{1+t})dt=(\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|1+t|)\Big|_1^2=\frac{3}{2}+3\ln\frac{3}{2}.$$

例 $\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$.

解：令 $t=\sqrt{5-4x}$，有 $x=\frac{5-t^2}{4}$，$dx=\frac{-2t}{4}dt$，且 $x=-1$ 时，$t=3$；$x=1$ 时，$t=1$.

$$原式=\int_3^1\frac{\frac{5-t^2}{4}}{t}\cdot\frac{-2t}{4}dt=\int_3^1\frac{t^2-5}{8}dt=(\frac{t^3}{24}-\frac{5}{8}t)\Big|_3^1=(\frac{1}{24}-\frac{5}{8})-(\frac{27}{24}-\frac{15}{8})=\frac{1}{6}.$$

例 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解：令 $x=\tan t$，有 $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=(\sec^2t)^{\frac{3}{2}}=\sec^3t$，$dx=\sec^2t\,dt$，且 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$；$x=\sqrt{3}$ 时，$t=\frac{\pi}{3}$.

$$原式=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sec^3t}\cdot\sec^2t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt=\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

注意：定积分换元法，使用新变量时才应换元换限，否则不换限.

如 $\int_1^e\frac{1}{x(1+\ln^2x)}dx=\int_1^e\frac{1}{1+\ln^2x}d\ln x=\arctan(\ln x)\Big|_1^e=\frac{\pi}{4}$，

或 $\int_1^e\frac{1}{x(1+\ln^2x)}dx=\int_1^e\frac{1}{1+\ln^2x}d\ln x=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

当被积函数具有某些对称性时，也可用定积分换元法处理.

例 设 $f(x)$ 是连续函数，试证：

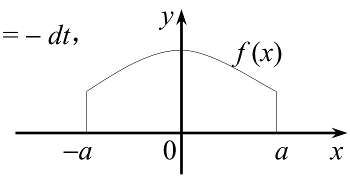
（1）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^af(x)dx=2\int_0^af(x)dx$；（2）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^af(x)dx=0$；

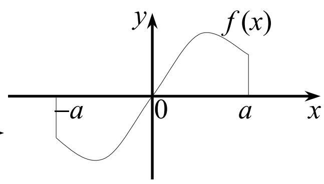
证明：$\int_{-a}^af(x)dx=\int_{-a}^0f(x)dx+\int_0^af(x)dx$，

对称性：$f(x)=\pm f(-x)$，令 $x=-t$，有 $dx=-dt$，

且 $x=-a$ 时，$t=a$； $x=0$ 时，$t=0$.

$\int_{-a}^0f(x)dx=\int_a^0f(-t)(-dt)=\int_0^af(-t)dt$





（1）若 $f(x)$ 是偶函数，有 $f(x)=f(-x)$，

则 $\int_{-a}^0f(x)dx=\int_0^af(-t)dt=\int_0^af(t)dt$，故 $\int_{-a}^af(x)dx=\int_0^af(t)dt+\int_0^af(x)dx=2\int_0^af(x)dx$；

（2）若 $f(x)$ 是奇函数，有 $f(x)=-f(-x)$，

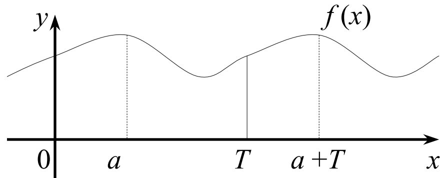
则 $\int_{-a}^0f(x)dx=\int_0^af(-t)dt=-\int_0^af(t)dt$，故 $\int_{-a}^af(x)dx=-\int_0^af(t)dt+\int_0^af(x)dx=0$.

即连续的偶函数在对称区间上的积分等于单边的二倍，连续的奇函数在对称区间上的积分等于零.

如$\int_{-2}^{2}\dfrac{\sin x}{x^2+\cos^2 x}dx=0$（连续的奇函数），但$\int_{-2}^{2}\dfrac{\sin x}{x^2+\sin^2 x}dx$就不等于 0（被积函数不连续）.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^{1}+0=\frac{\pi}{2}.$$

例　设$f(x)$是连续的周期函数，周期为 T，试证：对任意实数 a，都有$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

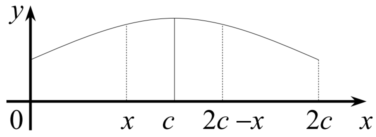


证明：$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$，

令 $x=u+T$，有 $dx=du$，

且 $x=T$ 时，$u=0$；$x=a+T$ 时，$u=a$.

$\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(u+T)du=\int_0^a f(u)du$，$\therefore\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_0^a f(u)du=\int_0^T f(x)dx$.



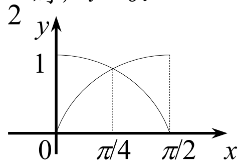
一般应根据被积函数中的对应关系作相应的换元处理.

如被积函数关于 $x=c$ 对称，则可通过令 $x=2c-t$ 换元处理；

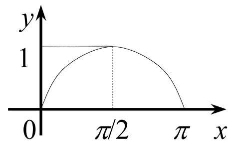
也可令 $x=t+c$ 换元，使得对称轴移到 y 轴，利用函数奇偶性处理.

例　设 f 是连续函数，试证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$.

证明：对称性：关于$x=\dfrac{\pi}{4}$对称，令$x=\dfrac{\pi}{2}-t$，有 $dx=-dt$，且 $x=0$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$；$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$t=0$.



$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)](-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt，得证.$$



如求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$，有$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\dfrac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx]=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\dfrac{\pi}{4}$.

根据对称性，还可产生循环积分.

例　设 f 是连续函数，试证：$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$. 并利用此结论计算$\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx$.

证明：对称性：关于$x=\dfrac{\pi}{2}$对称，令 $x=\pi-t$，有 $dx=-dt$，且当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$.

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-dt)=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt.$$

移项，得 $2\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt$，得证.

$$\therefore\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}(-d\cos x)=\frac{\pi}{2}[-\arctan(\cos x)]\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

§6.5　定积分的分部积分法

不定积分 $\int udv=uv-\int vdu$，　定积分　$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$，关键是乘积项 uv 也应带上下限.

例　$\int_0^1 x^2e^x dx$.

解：原式$=\int_0^1 x^2de^x=x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\cdot 2xdx=(e-0)-\int_0^1 2xd(e^x)=e-2xe^x\Big|_0^1+\int_0^1 e^x\cdot 2dx=e-2e+2e^x\Big|_0^1$

$=-e+(2e-2)=e-2$.

例　$\int_1^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$.

解：原式$=\int_1^{\sqrt{3}}\arctan x d\frac{x^2+1}{2}=\frac{x^2+1}{2}\arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})-\frac{x}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

例　已知$f(x)$是连续函数，且$f(1)=3$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，求$\int_0^1 xf'(x)dx$.

解：原式$=\int_0^1 xdf(x)=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx=2$.

例　$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx$.

解：原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\cdot\sec^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xd\tan x=\sec x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\sec x\tan xdx$

$=(\sqrt{2}-0)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x(\sec^2 x-1)dx=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx$.

移项，得：$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx=\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\sqrt{2}+\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$，

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

定积分可在三种情况下产生循环积分：

（1）根据$f(x)$与其积分的关系式；（2）根据被积函数的对称性换元；（3）分部积分.

补充：含参变量的积分

形式为$\int_a^b f(x,\ t)dt$的积分称为含参变量的积分，其中 x 为参变量，t 为积分变量.

关键是分清楚参变量与积分变量．参变量在积分时应看作常量.

如$\int_0^1(x^2+t^2)dt=(x^2t+\frac{t^3}{3})\Big|_0^1=x^2+\frac{1}{3}$.

可见含参变量积分值随参变量而改变，是参变量的函数，$F(x)=\int_a^b f(x,\ t)dt$.

例　已知$F(x)=\int_0^x xf(t)dt$，且f连续，求$F'(x)$.

解：$\because F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，$\therefore F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$.

例　已知$f(x)$是连续的偶函数，$F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$，证明$F(x)$也是偶函数，并求$F'(x)$.

解：$\because F(-x)=\int_0^{-x}(-x-t)f(t)dt$，令 $t=-u$，有 $dt=-du$，且 $t=0$ 时，$u=0$；$t=-x$ 时，$u=x$.

$\therefore F(-x)=\int_0^x(-x+u)f(-u)(-du)=\int_0^x(x-u)f(-u)du=\int_0^x(x-u)f(u)du=F(x)$，得证.

$\because F(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$，$\therefore F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$.

例　已知$F(x)=\int_0^1 tf(x+t)dt$，且f连续，求$F'(x)$.

解：令 $u=x+t$，由 $du=dt$，且 $t=0$ 时，$u=x$； $t=1$ 时，$u=1+x$.

$$F(x)=\int_x^{1+x}(u-x)f(u)du=\int_x^{1+x}uf(u)du-x\int_x^{1+x}f(u)du,$$

$$\therefore F'(x)=[(1+x)f(1+x)-xf(x)]-\int_x^{1+x}f(u)du-x[f(1+x)-f(x)]=f(1+x)-\int_x^{1+x}f(u)du.$$

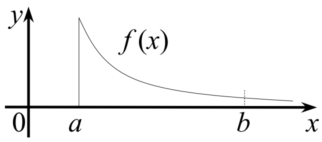
§6.6 广义积分

常义积分反映的是封闭图形的面积，广义积分反映的是开放图形的面积.

一．无穷限积分

如图，函数 $y=f(x)\quad(a\le x<+\infty)$，$x=a$ 及 x 轴围成的开放图形．任取 $b>a$，作直线 $x=b$.

由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形，其面积为 $\int_a^b f(x)dx$，再令 $b\to+\infty$，得：$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.



定义 设函数 $f(x)$在 $[a,+\infty)$ 上连续，记 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$，

则称之为函数 $f(x)$在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分（无穷限积分）.

若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，称无穷限积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；否则，称为发散.

类似，设函数 $f(x)$在 $(-\infty,b]$ 上连续，可定义无穷限积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$；

设函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，可定义 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx$，

当且仅当右端两个广义积分都收敛时，称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

例 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 的敛散性.

解：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}+1)=1$，即 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

例 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\sin xdx$ 的敛散性.

解：$\int_1^{+\infty}\sin xdx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\sin xdx=\lim\limits_{b\to+\infty}(-\cos x)\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(-\cos b+\cos 1)$ 不存在，即 $\int_1^{+\infty}\sin xdx$ 发散.

为了书写方便，计算广义积分时，可仿照牛顿-莱布尼兹公式处理：

设 $f(x)$连续，且 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则可记 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$，其余类似.

如 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=(-\frac{1}{x})\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x})-(-1)=1$， $\int_{-\infty}^1 e^x dx=e^x\Big|_{-\infty}^1=e-\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=e$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi.$$

例 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\quad(p>0)$ 的敛散性.

解：若 $p\ne1$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}$，

当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-p+1}=0$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$ 收敛；

当 $0<p<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-p+1}=\infty$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\infty$ 发散；

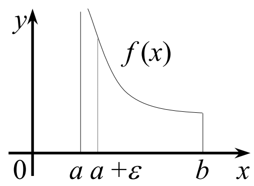
当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|x|-\ln 1=\infty$ 发散.

$\therefore$ 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$，当 $p>1$ 时收敛，当 $0<p\le 1$ 时发散.

二．瑕积分

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上某点无界，则称该点为瑕点，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 为瑕积分.

如图，$f(x)$ 在 a 点无界，由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的开放图形．任取 $\varepsilon>0$，作直线 $x=a+\varepsilon$．由 $f(x)$，$x=a+\varepsilon$，$x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形，其面积为 $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$．再令 $\varepsilon\to0^+$，得：$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$．



定义 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，记 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$，则称之为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分（瑕积分）.

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 存在，称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；否则，称为发散.

类似，若 b 为瑕点，可定义瑕积分 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$；

若 $c\in(a, b)$ 为瑕点，可定义 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$，

当且仅当右端两个瑕积分都收敛时，称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

注意：瑕积分与常义积分在形式上是相同的，关键是看积分区间上有无瑕点.

例　讨论瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=0$，$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon})=2$，即瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

例　讨论瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2 xdx$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=\frac{\pi}{2}$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2 xdx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(\sec^2 x-1)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)]=\infty$，

即瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2 xdx$ 发散.

例　讨论瑕积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=0$，$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$，因 $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(-\frac{1}{x})\Big|_\varepsilon^1=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(-1+\frac{1}{\varepsilon})=\infty$，

$\therefore$ 瑕积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$ 的发散.

为了书写方便，计算瑕积分时，可仿照牛顿-莱布尼兹公式处理，

设 $f(x)$在$[a, b]$上除瑕点外连续，$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，

如 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$，其余类似.

如 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$，瑕点 $x=1$，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{1^-} = \lim\limits_{x\to 1^-}\arcsin x - 0 = \frac{\pi}{2}$；

$\int_0^1 \ln x dx$，瑕点 $x=0$，$\int_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_{0^+}^{1} = (-1) - \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x - x) = -1$.

例　讨论瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$　（$a<b, p>0$）的敛散性.

解：瑕点 $x=a$，若 $p\neq 1$，则 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{a^+}^{b} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \lim\limits_{x\to a^+}\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}$，

当 $0<p<1$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-p} = 0$，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ 收敛；

当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-p} = \infty$，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \infty$ 发散；

当 $p=1$ 时，$\int_a^b \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|\Big|_{a^+}^{b} = \ln|b-a| - \lim\limits_{x\to a^+}\ln|x-a| = \infty$ 发散.

∴广义积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$，当 $0<p<1$ 时收敛；当 $p\geq 1$ 时发散.

三．两个重要的广义积分

1．Γ 函数

定义　含参变量的广义积分 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 是关于参变量 s 的函数，称为 Γ 函数.

可以证明

（1）$\Gamma(s)$是无穷限积分，当 $s<1$ 时，$\Gamma(s)$还是以 0 为瑕点的瑕积分；

（2）当 $s>0$ 时，$\Gamma(s)$收敛；当 $s\leq 0$ 时，$\Gamma(s)$发散；

（3）令 $x=t^2$，可得Γ 函数的另一表示形式 $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}e^{-t^2}dt$. 特别是 $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Γ 函数的重要性质

（1）递推公式：当 $s>0$ 时，$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

证明：$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s d(-e^{-x}) = -x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot sx^{s-1}dx = -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^s}{e^x} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s)$.

由于 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-x}) - (-1) = 1$，

当 $s=n$ 为正整数时，有：$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!$.

由此可见，可将Γ 函数看作阶乘在正实数范围的推广.

利用 Γ 函数的递推性质，对任何正实数 $s>0$，可将 $\Gamma(s)$化为计算$\Gamma(r)$（$0<r\leq 1$）.

如$\Gamma(3.6) = 2.6\times\Gamma(2.6) = 2.6\times 1.6\times\Gamma(1.6) = 2.6\times 1.6\times 0.6\times\Gamma(0.6) = 2.496\times\Gamma(0.6)$.

（2）余元公式：当 $0<s<1$ 时，$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(s\pi)}$.

特别是，取 $s=\dfrac{1}{2}$ 时，有 $[\Gamma(\dfrac{1}{2})]^2=\pi$ ，即 $\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

2． * β 函数

定义　含参变量的积分 $\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 是关于参变量 p,q 的函数，称为 β 函数.

可以证明

（1）当 $p<1$ 时，$\beta(p,q)$是以 0 为瑕点的瑕积分；当 $q<1$ 时，$\beta(p,q)$是以 1 为瑕点的瑕积分；

（2）当 $p>0$ 且 $q>0$ 时，$\beta(p,q)$收敛；当 $p\le 0$ 或 $q\le 0$ 时，$\beta(p,q)$发散；

（3）令 $x=\sin^2 t$，可得β 函数的另一表示形式：$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$.

β 函数的重要性质

（1）对 p,q 具有对称性：$\beta(p,q)=\beta(q,p)$.

只需令 $x=1-t$ 换元处理即可.

（2）递推公式：当 $p>0$ 且 $q>0$ 时，$\beta(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\beta(p,q)$ ，$\beta(p,q+1)=\dfrac{q}{p+q}\beta(p,q)$.

证明：$\beta(p+1,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 x^p[-\dfrac{1}{q}d(1-x)^q]=-\dfrac{1}{q}x^p(1-x)^q\Big|_0^1+\dfrac{1}{q}\int_0^1(1-x)^q\cdot px^{p-1}dx$

$$=0+\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(1-x)dx=\frac{p}{q}\beta(p,q)-\frac{p}{q}\beta(p+1,q),$$

移项，得：$\dfrac{p+q}{q}\beta(p+1,q)=\dfrac{p}{q}\beta(p,q)$ ，故 $\beta(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\beta(p,q)$.

类似可证：$\beta(p,q+1)=\dfrac{q}{p+q}\beta(p,q)$.

（3）β 函数与 Γ 函数的关系：$\beta(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

四．* 广义积分的敛散性判别法

不计算广义积分的值，直接判断其敛散性.

1． 无穷限积分的敛散性判别法

定理　设 $f(x)\ge 0$ 且连续，则无穷限积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是 $\int_a^x f(t)dt$ 有上界.

由于 $f(x)\ge 0$，故 $\int_a^x f(t)dt$ 随 x 的增加而单增，根据极限存在准则 II：单调有界数列必有极限，知定理成立.

定理　（比较判别法）设 $0\le f(x)\le g(x)$且都连续，

若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 也发散.

（大的收敛，则小的收敛；小的发散，则大的发散）

定理 （比较判别法极限形式）设$f(x), g(x)\geq 0$且都连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，有

（1）若$0<A<+\infty$，即$f(x)\sim Ag(x)$，（$x\to+\infty$），则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$敛散性相同；

（2）若$A=0$，则相当于$f(x)\leq g(x)$的情形；

（3）若$A=+\infty$，则相当于$f(x)\geq g(x)$的情形.

特别是，取$g(x)=\dfrac{1}{x^p}$，可得：

定理 （极限判别法）设$f(x)\geq 0$且连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1/x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=A$，有

（1）若$0<A<+\infty$，即$f(x)\sim\dfrac{A}{x^p}$ $(x\to+\infty)$，则$p>1$时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；$p\leq 1$时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散；

（2）若$A=0$，则$p>1$时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；

（3）若$A=+\infty$，则$p\leq 1$时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

关键是找p，一般$p=$ 分母的次数 − 分子的次数.

例 判断广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x+1}}$的敛散性.

解：$\because\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4+x+1}}$为正且连续，$p=\dfrac{4}{3}>1$， $\therefore\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x+1}}$收敛.

例 判断广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x}(x+2)}dx$的敛散性.

解：$\because\dfrac{x+1}{\sqrt{x}(x+2)}$为正且连续，$p=\dfrac{1}{2}<1$， $\therefore\int_1^{+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x}(x+2)}dx$发散.

例 判断$\int_1^{+\infty}x\sin\dfrac{1}{x^2}dx$的敛散性.

解：$\because x\sin\dfrac{1}{x^2}$为正且连续，当$x\to+\infty$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x^2}\sim\dfrac{1}{x}$，$p=1$， $\therefore\int_1^{+\infty}x\sin\dfrac{1}{x^2}dx$发散.

2. 瑕积分的敛散性判别法

类似有比较判别法及其极限形式，只需极限形式中极限条件作相应改变.

若$f(x)$在$(a,b]$上连续，且a为瑕点，将$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^b\dfrac{1}{(x-a)^r}dx$比较，

定理 （极限判别法）$f(x)$在$(a,b]$上连续且为正，a为瑕点，$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{1/(x-a)^r}=\lim\limits_{x\to a+}(x-a)^r f(x)=A$，

（1）若$0<A<+\infty$，即$f(x)\sim\dfrac{A}{(x-a)^r}$ $(x\to a^+)$，则$r<1$时，$\int_a^b f(x)dx$收敛；$r\geq 1$时，$\int_a^b f(x)dx$发散；

（2）若 $A=0$，则 $r<1$ 时，瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

（3）若 $A=+\infty$ ，则 $r\geq 1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

注：对于上限 b 为瑕点的瑕积分，应将 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^r}dx$ 比较.

关键是找 r，若 a 为瑕点，则 r 等于分母与分子中所含因式$(x-a)$的次数之差，
若 b 为瑕点，则 r 等于分母与分子中所含因式$(b-x)$的次数之差.

例　判断 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=1$，在 $(1,2]$ 上 $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ 为正且连续，$x\to 1^+$ 时，$\sqrt{x^4-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\sim 2\sqrt{x-1}$，

因 $r=\frac{1}{2}<1$，故收敛.

例　判断 $\int_0^2 \frac{1}{x^2-7x+10}dx$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=2$，在 $[0,2)$ 上 $\frac{1}{x^2-7x+10}$ 为正且连续，$x\to 2^-$ 时，$x^2-7x+10=(2-x)(5-x)\sim 3(2-x)$，

因 $r=1$，故发散.

例　判断 $\int_1^2 \frac{1}{\ln^2 x}dx$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=1$，在 $(1,2]$ 上 $\frac{1}{\ln^2 x}$ 为正且连续，$x\to 1^+$ 时，$\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim(x-1)$，即 $\frac{1}{\ln^2 x}\sim\frac{1}{(x-1)^2}$，

因 $r=2$，故发散.

例　试证Γ 函数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ 在 $s>0$ 时收敛.

证明：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ ，在$(0,+\infty)$上 $x^{s-1}e^{-x}$ 为正且连续.

对于 $\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ ，因 $x^{s-1}e^{-x}=\frac{x^{s-1}}{e^x}$ ，$p=+\infty>1$，故收敛.

对于 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ ，瑕点 $x=0$（$s<1$）. $x\to 0^+$ ，$x^{s-1}e^{-x}\sim x^{s-1}$，当 $s>0$ 时，$r=1-s<1$，故收敛.

$\therefore \Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx\ \ (s>0)$ 收敛.

注：判断次数时，当 $x\to\infty$ 时，e^x 看作∞次，$\ln x$ 看作 0 次.

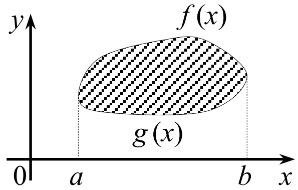
§6.7　定积分的几何应用

一. 微元法基本思想

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可理解为：$f(x)$为高，dx 为微小宽度，$f(x)dx$ 为窄条面积，$\int_a^b$ 为从 a 到 b 无限求和.

一般来说，一个总量 A 经过无限细分成为 dA，则称 dA 为微元.

二．平面图形的面积



如图，求平面上一个一般的封闭图形面积．可以看作是两个曲边梯形面积之差：

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx,$$

可以理解为：$f(x)-g(x)$为高度差，dx 为宽度，$[f(x)-g(x)]dx$ 为窄条面积，$\int_a^b$ 为从 a 到 b 无限求和．

关键是找出 $a, b, f(x), g(x)$．

求平面图形面积的步骤：

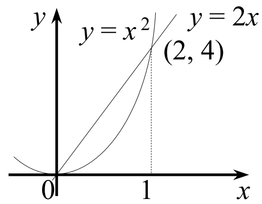
（1）作图，作出所给平面图形，并求出各条曲线间的交点；

（2）观察，找出横坐标的最小值 a 与最大值 b；

在$[a, b]$间竖直向上运动"↑"，找出小函数 $y=g(x)$，大函数 $y=f(x)$，

进入区域处为小函数，出区域处为大函数；

（3）计算，$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$．

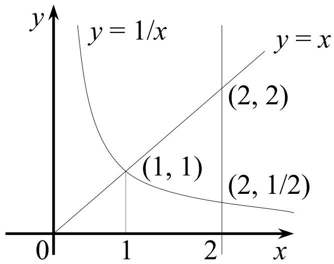


例　求由 $y=x^2$ 与 $y=2x$ 围成的图形面积．

解：作图，交点(0, 0)与(2, 4)．

观察，"↑"横坐标最小值 $a=0$，最大值 $b=1$，小函数 $y=x^2$，大函数 $y=x$，

$$\therefore S=\int_0^1(x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{6}.$$

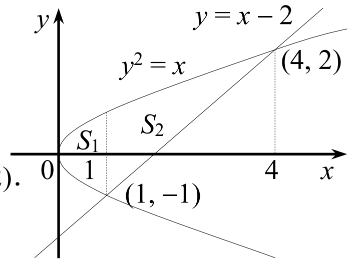


例　求由 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=x$ 与 $x=2$ 围成的图形面积．

解：作图，交点(1, 1)、$(2, \dfrac{1}{2})$与(2, 2)．

观察，"↑"横坐标最小值 $a=1$，最大值 $b=2$，小函数 $y=\dfrac{1}{x}$，大函数 $y=x$，

$$\therefore S=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln|x|\right)\Bigg|_1^2=(2-\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-\ln 1\right)=\frac{3}{2}-\ln 2.$$



例　求由 $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 围成的图形面积．

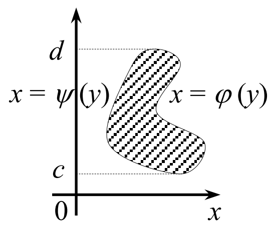
解：作图，$\begin{cases}y^2=x\\y=x-2\end{cases}\Longrightarrow y=y^2-2\Longrightarrow y=-1$ 或 $y=2$，交点$(1,-1)$与$(4, 2)$．

观察，"↑"横坐标最小值 $a=0$，最大值 $b=4$，但小函数分段，

S_1：$0<x<1$，小函数 $y=-\sqrt{x}$，大函数 $y=\sqrt{x}$；S_2：$1<x<4$，小函数 $y=x-2$，大函数 $y=\sqrt{x}$．

$$\therefore S=S_1+S_2=\int_0^1[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]dx+\int_1^4[\sqrt{x}-(x-2)]dx=2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^4$$

$$=\left(\frac{4}{3}-0\right)+\left(\frac{16}{3}-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{9}{2}.$$



求平面图形面积也可改变观察方向，步骤：

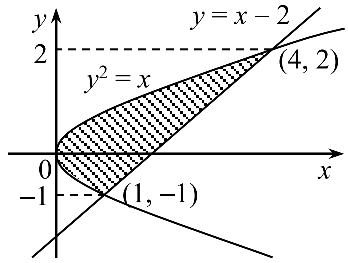
（1）作图，作出所给平面图形，并求出各条曲线间的交点；

（2）观察，找出纵坐标的最小值 c 与最大值 d；

在$[c, d]$间水平向右运动"→"，找出小函数 $x=\psi(y)$，大函数 $x=\varphi(y)$，

进为小，出为大；

（3）计算，$S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy$.



注意：水平观察时，大、小函数应以 y 为自变量.

如上例中的图形面积，改为水平观察进行计算.

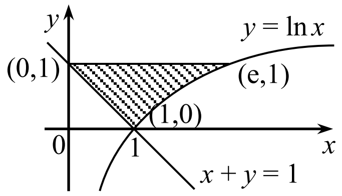
解：作图，

观察，“→”纵坐标最小值 $c=-1$，最大值 $d=2$，

小函数 $x=y^2$，大函数 $x=y+2$，

$$\therefore S=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=(2+4-\frac{8}{3})-(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3})=\frac{9}{2}.$$

例　求由 $y=\ln x$，$x+y=1$ 及 $y=1$ 围成的图形面积.



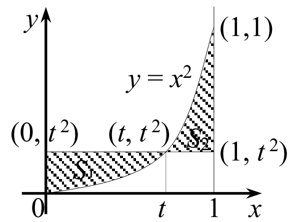
解：作图，交点$(0, 1)$，$(1, 0)$与$(e, 1)$.

观察，“→”纵坐标最小值 $c=0$，最大值 $d=1$，

小函数 $x=1-y$，大函数 $x=e^y$，

$$\therefore S=\int_0^1[e^y-(1-y)]dy=(e^y-y+\frac{y^2}{2})\Bigg|_0^1=(e-1+\frac{1}{2})-1=e-\frac{3}{2}.$$

例　如图，求由 $y=x^2$，$y=t^2$（$0<t<1$），$x=1$ 及 y 轴围成的图形面积之和 $S(t)=S_1+S_2$，并求 t 为何值时，$S(t)$最小？



解：作图，交点$(0, 0)$，$(1, 1)$，$(0, t^2)$，(t, t^2)，$(1, t^2)$.

S_1：“↑” $a_1=0$，$b_1=t$，小 $y=x^2$，大 $y=t^2$，

S_2：“↑” $a_2=t$，$b_2=1$，小 $y=t^2$，大 $y=x^2$，

$$\text{则 } S=S_1+S_2=\int_0^t(t^2-x^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dt=(t^2x-\frac{x^3}{3})\Bigg|_0^t+(\frac{x^3}{3}-t^2x)\Bigg|_t^1$$

$$=\frac{2}{3}t^3-0+(\frac{1}{3}-t^2)-(-\frac{2}{3}t^3)=\frac{1}{3}-t^2+\frac{4}{3}t^3,\quad（0<t<1），$$

$\because S'(t)=-2t+4t^2$，令 $S'(t)=0$，得 $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=0$（舍去），

因 $S''(t)=-2+8t$，$S''(\frac{1}{2})=2>0$，故当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$S(t)$取得极小值，并且是唯一驻点问题，

$\therefore$ 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$S(t)$最小.

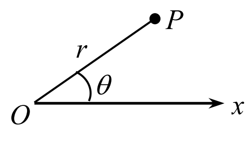
参数方程函数的平面图形面积公式：

$$\text{参数方程函数}\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta\text{，则 } S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

极坐标下的平面图形面积公式：

1.　极坐标系与极坐标

平面上任一点可用二元有序数组表示，直角坐标系下用(x,y)表示，其中 x 为横坐标，y 为纵坐标. 此外还有极坐标系. 以距离和方向确定点的位置.



以平面上点 O 出发的射线 Ox 为极轴，点 O 称为极点，建立极坐标系. 平面上任一点 P，点 O 与 P 的距离 $r=|OP|$称为点 P 的极径，

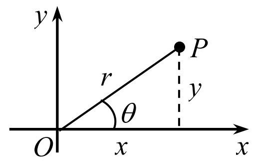
极轴 Ox 逆时针旋转到 OP 的角度θ 称为幅角.

这样二元有序数组(r,θ)在极坐标系下可以确定点 P（其中 $r\ge 0$），称(r,θ)为点 P 的极坐标.

注意：同一个点 P 可对应于多个极坐标，如(r,θ)与$(r,\theta+2\pi)$表示同一个点.

2． 极坐标与直角坐标的关系

一般以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且单位长度相同．设平面上的点 P，直角坐标为 (x, y)，极坐标为 (r, θ)，有



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}，及 \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

3． 极坐标系下常见曲线的方程

通常在直角坐标系下用 x, y 表示的方程，根据 x, y 与 r, θ 的关系，转换为由 r, θ 表示的形式．

如圆 $x^2 + y^2 = a^2$，有 $r^2 = a^2$，即 $r = a$；

圆 $x^2 + (y-a)^2 = a^2$，有 $x^2 + y^2 = 2ay$，$r^2 = 2ar\sin\theta$，即 $r = 2a\sin\theta$；

直线 $y = kx$，有 $r\cos\theta = kr\sin\theta$，即 $\tan\theta = k$；（注：方程 $\theta =$ 常数，表示从原点 O 出发的射线）

直线 $x = c$，有 $r\cos\theta = c$，即 $r = c\sec\theta$．

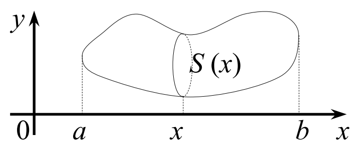
注：圆的方程在极坐标系下比较简单，在处理圆区域的二重积分时通常采用极坐标．

4． 极坐标系下的面积元素

三．立体的体积

1． 已知横截面积的立体体积

如图，位于 $[a, b]$ 间的立体，用垂直于 x 轴的平面截该立体．



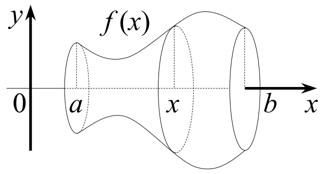
设横截面积为 $S(x)$，则该立体体积为 $V = \int_a^b S(x)dx$．

可理解为：$S(x)$为横截面积，dx 为厚度，$S(x)dx$ 为薄片体积，$\int_a^b$ 为从 a 到 b 无限求和．

2． 旋转体体积

平面图形绕某条直线旋转一周所得立体称为旋转体．

如图，曲线 $y = f(x)$，$x = a$，$x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转所得旋转体．用垂直于 x 轴的平面截该旋转体，



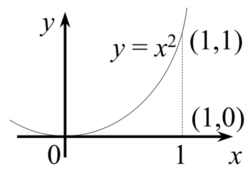
横截面是半径为 $f(x)$的圆．横截面积为 $\pi f^2(x)$，则该旋转体体积为 $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$．

对于一个一般图形绕 x 轴旋转所得旋转体，竖直向上观察“↑”：找出横坐标的最小值 a，最大值 b，小函数 $y = g(x)$，大函数 $y = f(x)$．

则该旋转体体积为 $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx - \pi\int_a^b g^2(x)dx = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$．

类似，对于一个一般图形绕 y 轴旋转所得旋转体，水平向右观察“→”：找出纵坐标的最小值 c，纵坐标的最大值 d，小函数 $x = \psi(y)$，大函数 $x = \varphi(y)$，则体积为 $V_y = \pi\int_c^d [\varphi^2(y) - \psi^2(y)]dy$．

注意：用公式 $\pi\int_a^b f^2(x)dx$ 计算旋转体体积时，绕 x 轴旋转应竖直向上观察，绕 y 轴旋转应水平向右观察．



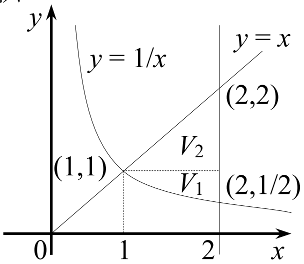
例 求由 $y = x^2$，$x = 1$ 及 x 轴围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得旋转体体积．

解：作图，交点(0, 0)，(1, 0)与(1, 1)．

绕 x 轴，“↑”：$a = 0$，$b = 1$，小 $y = 0$，大 $y = x^2$，$\therefore V_x = \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \left.\dfrac{x^5}{5}\right|_0^1 = \dfrac{\pi}{5}$．

绕 y 轴，“$\rightarrow$”：$c=0$，$d=1$，小 $x=\sqrt{y}$，大 $x=1$，$\therefore V_y=\pi\int_0^1[1^2-(\sqrt{y})^2]dy=\pi(y-\dfrac{y^2}{2})\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}$．

例　求由 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=x$ 与 $x=2$ 围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得旋转体体积．



解：作图，交点(1, 1)、(2, $\dfrac{1}{2}$)与(2, 2)．

绕 x 轴，“$\uparrow$”：$a=1$，$b=2$，小 $y=\dfrac{1}{x}$，大 $y=x$，

$$\therefore V_x=\pi\int_1^2[x^2-(\frac{1}{x})^2]dx=\pi(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x})\Big|_1^2=\pi[(\frac{8}{3}+\frac{1}{2})-(\frac{1}{3}+1)]=\frac{11}{6}\pi.$$

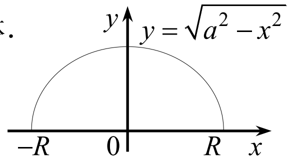
绕 y 轴，“$\rightarrow$”：小函数分段，V_1：$\dfrac{1}{2}<y<1$，小 $x=\dfrac{1}{y}$，大 $x=2$；V_2：$1<y<2$，小 $x=y$，大 $x=2$．

$$\therefore V_y=V_1+V_2=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1[2^2-(\frac{1}{y})^2]dy+\pi\int_1^2(2^2-y^2)dy=\pi(4y+\frac{1}{y})\Big|_{\frac{1}{2}}^1+\pi(4y-\frac{y^3}{3})\Big|_1^2$$

$$=\pi[(4+1)-(2+2)]+\pi[(8-\frac{8}{3})-(4-\frac{1}{3})]=\frac{8}{3}\pi.$$

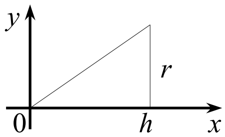
例　试证：（1）半径为 R 的球体体积等于 $\dfrac{4}{3}\pi R^3$；（2）底面半径为 r，高为 h 的圆锥体体积等于 $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$．

证明：（1）半径为 R 的球体可看作是半圆 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体．



“$\uparrow$”：$a=-R$，$b=R$，$f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$，

$$\therefore V_{球}=\pi\int_{-R}^R(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^R=\pi[\frac{2}{3}R^3-(-\frac{2}{3}R^3)]=\frac{4}{3}\pi R^3.$$



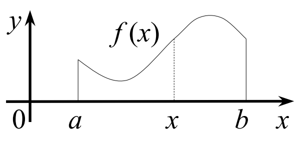
（2）所给圆锥体可看作是直线段 $y=\dfrac{r}{h}x\ \ (0\le x\le h)$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体．

“$\uparrow$”：$a=0$，$b=h$，$f(x)=\dfrac{r}{h}x$，

$$\therefore V_{锥}=\pi\int_0^h(\frac{r}{h}x)^2dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

计算旋转体体积的另一公式：

如图，由曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转所得旋转体，图中位于 x 处的竖直直线绕 y 轴旋转，形成一个圆柱面，该圆柱面的面积为 $2\pi xf(x)$，则旋转体体积为 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$．



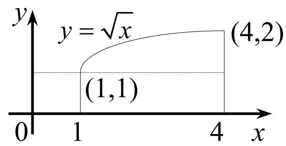
对于一个一般的封闭图形绕 y 轴旋转所得旋转体，
“$\uparrow$”：找出横坐标的最小值 a，最大值 b，找出小函数 $y=g(x)$，大函数 $y=f(x)$．
则该旋转体体积为 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx-2\pi\int_a^b xg(x)dx=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx$．

类似可得，封闭图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积 $V_x=2\pi\int_c^d y[\varphi(y)-\psi(y)]dy$，其中 c, d 分别为纵坐标的最小值、最大值，而 $x=\psi(y)$，$x=\varphi(y)$分别为水平向右观察的小函数、大函数．

注意：用公式 $2\pi\int_a^b xf(x)dx$ 计算旋转体体积时，绕 y 轴旋转应竖直向上观察，绕 x 轴旋转应水平向右观察.

例　求由 $y=\sqrt{x}$ $(1\le x\le 4)$，$x=1$，$x=4$ 及 x 轴围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得旋转体体积.

解：作图，交点(1, 1)与(4, 2).



绕 x 轴，“↑”：$a=1$，$b=4$，$f(x)=\sqrt{x}$，

$$\therefore V_x=\pi\int_1^4(\sqrt{x})^2dx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_1^4=\pi(8-\frac{1}{2})=\frac{15}{2}\pi\ .$$

绕 y 轴：方法一，“→”，分段，V_1：$0\le y\le 1$，小 $x=1$，大 $x=4$，V_2：$1\le y\le 2$，小 $x=y^2$，大 $x=4$，

$$\therefore V_y=\pi\int_0^1(4^2-1^2)dy+\pi\int_1^2(4^2-y^4)dy=\pi\cdot 15y\bigg|_0^1+\pi(16y-\frac{y^5}{5})\bigg|_1^2$$

$$=15\pi+\pi[(32-\frac{32}{5})-(16-\frac{1}{5})]=\frac{124}{5}\pi\ .$$

方法二，$a=1$，$b=4$，$f(x)=\sqrt{x}$，$\therefore V_y=2\pi\int_1^4 x\sqrt{x}dx=2\pi\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\bigg|_1^4=\frac{4}{5}\pi(32-1)=\frac{124}{5}\pi$.

§6.8　定积分在经济学中的应用

一．已知边际函数，求总量

如已知边际成本为 $C'(x)$，其中 x 为产量，则当产量由 a 增加到 b 时，总成本的增量为

$$\Delta C=C(b)-C(a)=\int_a^b C'(x)dx\ .$$

且总成本函数为 $C(x)=C_0+C_1(x)=C_0+\int_0^x C'(t)dt$.（其中 C_0 为固定成本）

例　已知生产某产品固定成本为 10，边际成本为 $2x+5$（其中 x 为产量），求产量由 5 增加到 10 时总成本的增量，并求总成本函数.

解：成本的增量 $\Delta C=\int_5^{10}(2x+5)dx=(x^2+5x)\Big|_5^{10}=150-50=100$；

总成本函数 $C(x)=10+\int_0^x(2t+5)dt=10+(t^2+5t)\Big|_0^x=10+x^2+5x$.

二．收益流的现值与将来值

连续复利：现有资金 A_0 万元，银行年利率 r．若一年结算一次，t 年末资金总额为 $A_0(1+r)^t$；若一年结算 n 次，t 年末资金总额为 $A_0(1+\frac{r}{n})^{nt}$；当 $n\to\infty$ 时为连续复利，t 年末资金总额为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_0(1+\frac{r}{n})^{nt}=A_0e^{rt}$.

资金折现：预计 t 年末将取得收入 A 万元，银行年利率 r，并按连续复利计算，将这笔未来的收入折算为目前的价值为 Ae^{-rt}.

资金将来值：预计 t 年末将取得收入 A 万元，银行年利率 r，并按连续复利计算，折现为 Ae^{-rt}，则 T 年末的将来值为 $Ae^{-rt}\cdot e^{rT}=Ae^{r(T-t)}$.

收益流：如果从时间 a 到 b 内每一时刻都将取得收益，时刻 t 的瞬时收益率为 $A(t)$，称为收益流.

收益流的折现微元为 $A(t)dt\cdot e^{-rt}$，在时间 $[a, b]$ 内总折现值 $=\int_a^b A(t)e^{-rt}dt$；

可理解为：Adt 为时间 dt 内的收入，$Ae^{-rt}dt$ 为该收入的折现值，$\int_a^b$ 为从 a 到 b 无限求和.

收益流的将来值微元为 $A(t)dt\cdot e^{r(T-t)}$，在时间 $[a,b]$ 内总将来值 $=\int_a^b A(t)e^{r(T-t)}dt$.

例　现有一个项目需投资 100 万元，预计投资后 20 年内都将获得收益，每年将收入 7 万元，已知银行年利率 $r=0.05$，按连续复利计算，问该项目是否值得投资？

分析：将每年的收入折现，比较收入的总折现值与投资额.

解：$A=6$，$r=0.05$，$a=0$，$b=20$，

总折现值 $=\int_0^{20} 7e^{-0.05t}dt=\dfrac{7}{-0.05}e^{-0.05t}\Big|_0^{20}=140(1-e^{-1})\approx 88.50<100$，故该项目不值得投资.

如果这里 r 不按银行利率计算，而是取某值 r_0 使得总折现值 $\int_0^k Ae^{-r_0t}dt$ 等于投资额，则称 r_0 为投资回报率.

如上例中，每年收入 10 万元，该项目又是否值得投资？并求投资回报率.

解：$A=10$，$r=0.05$，$a=0$，$b=20$，

总折现值 $=\int_0^{20} 10e^{-0.05t}dt=\dfrac{10}{-0.05}e^{-0.05t}\Big|_0^{20}=200(1-e^{-1})\approx 126.42>100$，故该项目值得投资；

设总折现值 $=\int_0^{20} 10e^{-r_0t}dt=\dfrac{10}{-r_0}e^{-0.05t}\Big|_0^{20}=\dfrac{10}{r_0}(1-e^{-20r_0})=100$，得 $r_0\approx 0.08$ 为投资回报率.