数理统计第六章测验题

考试时间2023年5月14日，答卷时间120分钟，总分100分，出题人-李绍文

1．（10 分）设总体X的密度函数$p(x;\lambda,\theta)=\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}I_{x>\theta}$，其中$\lambda>0$与$\theta$为参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，求参数$\lambda,\theta$的最大似然估计。

2．（10 分）设总体X期望为μ，方差为σ^2，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的样本。若$Y=c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$是总体方差$\sigma^2$的无偏估计，求常数$c$。

3．（10 分）某厂产品重量X（克）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，标准差$\sigma=20$克。问：

（1）样本容量n取多大时，才能保证μ的95%置信区间长度不超过10；

（2）抽取容量为100的样本，样本均值$\bar{x}=972$克，求μ的95%置信区间。

4．（10 分）设A、B两台机床生产的金属部件重量（克）各自服从正态分布。分别抽取8件和9件产品，测量后经计算得$\bar{x}=145$，$s_1^2=6^2$，$\bar{y}=130$，$s_2^2=7^2$，求：

（1）总体方差相等时，均值差$\mu_1-\mu_2$的95%置信区间；

（2）方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的95%置信区间。

5．（10 分）设事件A在一次试验中发生的概率为p。进行146次独立重复试验，事件A发生了58次，求概率p的95%置信区间。

6．（15 分）设总体X服从泊松分布$P(\lambda)$，参数λ的先验分布是指数分布$Exp(\theta)$，θ已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，求λ的贝叶斯估计$\hat{\lambda}_B$。

（伽玛函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ \ (\alpha>0)$，伽玛分布$Ga(\alpha,\theta)$密度函数为$p(x)=\dfrac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\theta x}I_{x>0}$，期望为$\dfrac{\alpha}{\theta}$，方差为$\dfrac{\alpha}{\theta^2}$。）

7. （15 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自伽玛分布 $Ga(\alpha,\theta)$ 的样本，已知 $\alpha > 0$，试证明，$\dfrac{\bar{X}}{\alpha}$ 是 $g(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

8. （20 分）总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本。

（1）参数 λ 的点估计 $\hat{\lambda}=\bar{X}$，由此猜测 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的点估计为 $\bar{X}^2$。判断 $\bar{X}^2$ 是否 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的无偏估计？如果不是，请根据 $E(\bar{X}^2)$ 的结果及 $E(\bar{X})=\lambda$ 修偏得到 $\hat{g}$，使得 $\hat{g}$ 是 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的无偏估计，即 $E(\hat{g})=\lambda^2$；

（2）写出样本联合密度函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)$，证明 $\hat{g}$ 是 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的 UMVUE；

（3）求出 λ 的 Fisher 信息量 $I(\lambda)$ 及 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的 C-R 下界；

（4）设 Y 服从泊松分布 $P(\theta)$，可知 $\mathrm{Var}(Y^2-Y)=4\theta^3+2\theta^2$，根据此结论以及泊松分布的可加性求出 $\mathrm{Var}(\hat{g})$，并判断 $\hat{g}$ 是否 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的有效估计。

附录：$\Phi(1.96)=0.975$，$f_{0.975}(7,8)=4.53$，$f_{0.975}(8,7)=4.9$