补充题参考答案

1．一矿工被困在有三个通道的矿井里。沿第一个通道，走 3 小时可到达安全区；沿第二个通道，走 5 小时又回到原处；沿第三个通道，走 7 小时又回到原处。假定此矿工总是等可能地在三个通道中选择一个，试求他到达安全区所用时间的期望与方差。

解：设该矿工需要 X 小时到达安全区，X 的分布很复杂。又设 Y 表示矿工选择的门的编号，Y 的分布很简单，其分布列为

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

随机变量 X 由 Y 所确定，根据重期望公式和条件方差公式先计算 $E(X\mid Y)$ 和 $\operatorname{Var}(X\mid Y)$。

$$E(X\mid Y=1)=3,\quad E(X\mid Y=2)=5+EX,\quad E(X\mid Y=3)=7+EX,$$

$$\operatorname{Var}(X\mid Y=1)=0,\quad \operatorname{Var}(X\mid Y=2)=\operatorname{Var}(X),\quad \operatorname{Var}(X\mid Y=3)=\operatorname{Var}(X),$$

则

$E(X\mid Y)$	3	$5+EX$	$7+EX$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\operatorname{Var}(X\mid Y)$	0	$\operatorname{Var}(X)$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

故

$$EX=E[E(X\mid Y)]=3\times\frac{1}{3}+(5+EX)\times\frac{1}{3}+(7+EX)\times\frac{1}{3}=5+\frac{2}{3}EX,$$

可得

$$\frac{1}{3}EX=5,\quad EX=15。$$

此时

$E(X\mid Y)$	3	20	22
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X)&=E[\operatorname{Var}(X\mid Y)]+\operatorname{Var}[E(X\mid Y)]\\&=0\times\frac{1}{3}+\operatorname{Var}(X)\times\frac{2}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+20^2\times\frac{1}{3}+22^2\times\frac{1}{3}-15^2\\&=\frac{2}{3}\operatorname{Var}(X)+\frac{218}{3},\end{aligned}$$

可得

$$\frac{1}{3}\operatorname{Var}(X)=\frac{218}{3},\quad \operatorname{Var}(X)=218。$$

2．“飞行棋”游戏中，掷一枚骰子，如果出现的点数不超过 4，则棋子按掷出点数行相应步数；如果出现的点数为 5 或 6，则棋子按掷出点数行相应步数外，获得再掷一次骰子的机会，根据出现的点数同上处理。求在一轮中平均可行步数 X 的期望与方差。

解：设 Y 表示掷出的点数，其分布列为

Y	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

随机变量 X 由 Y 所确定，根据重期望公式和条件方差公式先计算 $E(X\mid Y)$ 和 $\mathrm{Var}(X\mid Y)$。

$E(X\mid Y=1)=1$，$E(X\mid Y=2)=2$，$E(X\mid Y=3)=3$，$E(X\mid Y=4)=4$，

$E(X\mid Y=5)=5+EX$，$E(X\mid Y=6)=6+EX$，

$\mathrm{Var}(X\mid Y=1)=\mathrm{Var}(X\mid Y=2)=\mathrm{Var}(X\mid Y=3)=\mathrm{Var}(X\mid Y=4)=0$，

$\mathrm{Var}(X\mid Y=5)=\mathrm{Var}(X\mid Y=6)=\mathrm{Var}(X)$，

则

$E(X\mid Y)$	1	2	3	4	$5+EX$	$6+EX$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

，

$\mathrm{Var}(X\mid Y)$	0	$\mathrm{Var}(X)$
P	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

故

$$EX=E[E(X\mid Y)]=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+(5+EX)\times\frac{1}{6}+(6+EX)\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}+\frac{1}{3}EX,$$

可得

$$\frac{2}{3}EX=\frac{7}{2},\quad EX=\frac{21}{4}。$$

此时

$E(X\mid Y)$	1	2	3	4	$\frac{41}{4}$	$\frac{45}{4}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

，

故

$$\mathrm{Var}(X)=E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}[E(X\mid Y)]$$

$$=0\times\frac{2}{3}+\mathrm{Var}(X)\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+\left(\frac{41}{4}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(\frac{45}{4}\right)^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{21}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Var}(X)+\frac{385}{24},$$

可得

$$\frac{2}{3}\mathrm{Var}(X)=\frac{385}{24},\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{385}{16}。$$

3．设 Y 服从指数分布 $Exp(0.5)$，而 X 服从区间 $(0,Y)$ 上的均匀分布，求 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$。

解：在 $Y=y$ 条件下，X 服从区间 $(0,y)$ 上的均匀分布，则

$$E(X\mid Y=y)=\frac{y}{2},\quad \mathrm{Var}(X\mid Y=y)=\frac{y^2}{12}，即 E(X\mid Y)=\frac{Y}{2},\quad \mathrm{Var}(X\mid Y)=\frac{Y^2}{12}。$$

因 Y 服从指数分布 $Exp(0.5)$，有

$$E(Y)=\frac{1}{0.5}=2\text{，}\quad \mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{0.5^2}=4\text{，}$$

故

$$E(X)=E[E(X\mid Y)]=E\left(\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{2}E(Y)=1\text{；}$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}[E(X\mid Y)]$$

$$=E\left(\frac{Y^2}{12}\right)+\mathrm{Var}\left(\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{12}[\mathrm{Var}(Y)+(EX)^2]+\frac{1}{4}\mathrm{Var}(Y)=\frac{8}{12}+1=\frac{5}{3}\text{。}$$

4．二维随机变量 (X,Y) ，$E(X\mid Y)=h(Y)$ 是 X 关于 Y 的条件数学期望，对应于方差的定义 $\mathrm{Var}(X)=E[(X-EX)^2]$，记 $\mathrm{Var}(X\mid Y)=E[(X-E(X\mid Y))^2\mid Y]$，并称之为 X 关于 Y 的条件方差。证明：

（1）$\mathrm{Var}(X\mid Y)=E(X^2\mid Y)-[E(X\mid Y)]^2$；

（2）对任意的可测函数 g，都有 $\mathrm{Var}(X\mid Y)\le E[(X-g(Y))^2\mid Y]$。

证明：（1）记 $E(X\mid Y)=h(Y)$，则

$$\mathrm{Var}(X\mid Y)=E[(X-h(Y))^2\mid Y]=E[(X^2-2X\cdot h(Y)+h(Y)^2)\mid Y]$$

$$=E(X^2\mid Y)-E[2X\cdot h(Y)\mid Y]+E[h(Y)^2\mid Y]$$

$$=E(X^2\mid Y)-2h(Y)E(X\mid Y)+h(Y)^2$$

$$=E(X^2\mid Y)-[E(X\mid Y)]^2\text{。}$$

（2）因

$$E[(X-g(Y))^2\mid Y]-\mathrm{Var}(X\mid Y)=E[(X^2-2X\cdot g(Y)+g(Y)^2)\mid Y]-E(X^2\mid Y)+[E(X\mid Y)]^2$$

$$=E(X^2\mid Y)-E[2X\cdot g(Y)\mid Y]+E[g(Y)^2\mid Y]-E(X^2\mid Y)+[E(X\mid Y)]^2$$

$$=E(X^2\mid Y)-2g(Y)E(X\mid Y)+g(Y)^2-E(X^2\mid Y)+[E(X\mid Y)]^2$$

$$=[E(X\mid Y)]^2-2g(Y)E(X\mid Y)+g(Y)^2$$

$$=[E(X\mid Y)-g(Y)]^2\ge 0\text{，}$$

故

$$\mathrm{Var}(X\mid Y)\le E[(X-g(Y))^2\mid Y]\text{。}$$