A 卷

一．选择题：（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 $P(A)=0.3$， $P(A-B)=0.1$，则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$（　　　）。

（A）0.9　　　　（B）0.8　　　　（C）0.7　　　　（D）0.6

分析：事件的关系与运算，对偶律。

解：因 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，可得

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.3-0.1=0.2，$$

故

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.8。$$

选（B）。

2. 一个班上有 30 名学生参加射击训练，每个学生独立射击，击中目标为止（即每个学生命中目标一次），假设每个学生单次射击的命中率均为 0.6，那么平均需要准备的子弹发数为（　　　）。

（A）30　　　　（B）40　　　　（C）50　　　　（D）60

分析：几何分布及其数学期望。

解：设 X 表示全部学生所用总子弹数， X_i 表示其中第 i 名学生所用子弹数，

$i=1,2,\cdots,30$，有 $X=\sum_{i=1}^{30}X_i$，从而 $EX=\sum_{i=1}^{30}EX_i$。因 X_i 服从几何分布 $Ge(0.6)$，有

$EX_i=\dfrac{1}{0.6}$， 故

$$EX=30\times\frac{1}{0.6}=50。$$

选（C）。

注：如果记不住几何分布，也可以直接计算 EX_i。

设 X 表示全部学生所用总子弹数， X_i 表示其中第 i 名学生所用子弹数，

$i=1,2,\cdots,30$， 有 $X=\sum_{i=1}^{30}X_i$， 从而 $EX=\sum_{i=1}^{30}EX_i$ 。因 X_i 的值域为正整数 $1,2,\cdots$，

分布列为

$$P\{X_i=k\}=0.4^{k-1}\times0.6,\quad k=1,2,\cdots。$$

则

$$EX_i=\sum_{k=1}^{+\infty}k\times0.4^{k-1}\times0.6。$$

幂级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1),$$

从而

$$EX_i=f(0.4)\times 0.6=\frac{1}{0.6^2}\times 0.6=\frac{1}{0.6},$$

故

$$EX=30\times\frac{1}{0.6}=50。$$

选（C）。

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则当 σ 减小时，概率 $P\{|X-\mu|>2\sigma\}$（　　）。

（A）增大　　（B）减小　　（C）不变　　（D）不确定

分析：正态分布求概率一般首先标准化。正态分布求概率一般不要积分计算。

解：标准化。因，有 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，则

$$P\{|X-\mu|>2\sigma\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|>2\right\}=2P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}>2\right\}=2[1-\Phi(2)]。$$

这与 σ 无关。

选（C）。

4. 若随机变量的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}},\quad x\in R$，则 $E(X^2)=$（　　）。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

分析：与正态分布密度函数比较，确定参数。

解：正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R。$$

比较可得 $\mu=0$，$\sigma^2=2$，故

$$E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+(EX)^2=\sigma^2+\mu^2=2。$$

选（B）。

5. 随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从几何分布 $Ge(0.2)$，则 $P\{X+Y=3\}=$（　　）。

（A）0.061　　（B）0.062　　（C）0.063　　（D）0.064

分析：利用几何分布的分布列直接计算。

解：因

$$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=0.8^{k-1}\times 0.2,\quad k=1,2,\cdots。$$

故

$$P\{X+Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}+P\{X=2\}P\{Y=1\}$$

$$=0.2\times0.8^1\times0.2+0.8^1\times0.2\times0.2=0.064\text{。}$$

选（D）。

6. 公交车到站的间隔时间（单位：分钟）是随机变量 $X\sim Exp(0.1)$（指数分布）。假设公交车到站后的停留时间忽略不计。小明到达车站时发现上一辆公交车刚走 2 分钟，那么小明的平均候车时间为（　　）。

（A）10 分钟　　（B）5 分钟　　（C）8 分钟　　（D）0.064

分析：利用指数分布的无记忆性。

解：指数分布具有无记忆性。在过了一段时间公交车未到的条件下，继续等候的情况与公交车刚走就开始等候的情况是相同的。因 $EX=10$，故平均候车时间为 10 分钟。

选（A）。

注：此题不能认为小明的候车时间为 $T=X-2$，从而得到平均候车时间为 8 分钟。这是因为小明的候车时间是在 $X>2$ 的条件下，才有 $T=X-2$，这是有条件的，不能简单地求期望。

比如此题若改为“小明到达车站时发现上一辆公交车已经走了 12 分钟”，那么小明的平均候车时间显然就不能是 $10-12=-2$ 分钟。

7. 若随机变量 X 和 Y 满足：$E(XY)=EX\cdot EY$，则（　　）。

（A）$\mathrm{Var}(XY)=\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)$　　（B）$\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)$

（C）X 和 Y 相互独立　　（D）X 和 Y 不相关

分析：不相关的定义及协方差计算公式。

解：因 $E(XY)=EX\cdot EY$，即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，故 X 和 Y 不相关。

选（D）。

$$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=0.8^{k-1}\times0.2,\quad k=1,2,\cdots\text{。}$$

8. 设 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(1,2,3,4,0)$，$\Phi(x)$ 是标准正态的分布函数。则 $P\{2X-Y>4\}=$（　　）。

（A）$\Phi(-1)$　　（B）$\Phi(1)$　　（C）$\Phi(-2)$　　（D）$\Phi(2)$

分析：利用二维正态分布的结论：二维正态变量的线性组合仍为正态变量。

解：因 (X,Y) 服从二维正态分布，可知 $2X-Y$ 服从正态分布。又因

$$E(2X-Y)=2EX-EY=2\mu_1-\mu_2=0,$$

$$\mathrm{Var}(2X-Y)=4\,\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-4\,\mathrm{Cov}(X,Y)=4\sigma_1^2+\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_2\rho=16,$$

则 $2X-Y\sim N(0,16)$，即 $\dfrac{2X-Y}{4}\sim N(0,1)$，故

$$P\{2X-Y>4\}=P\left\{\frac{2X-Y}{4}>1\right\}=1-\Phi(1)=\Phi(-1)。$$

选（A）。

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，且 $X_i\sim P(\lambda)$（泊松分布），$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $\mathrm{Cov}(X_1-2X_2,Y)=$（　　）。

（A）$-\dfrac{\lambda}{n}$　　（B）$\dfrac{\lambda}{n}$　　（C）$-\dfrac{3\lambda}{n}$　　（D）$\dfrac{3\lambda}{n}$

分析：利用协方差的性质及相互独立随机变量的协方差等于 0。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1-2X_2,Y)&=\mathrm{Cov}(X_1,Y)-2\,\mathrm{Cov}(X_2,Y)\\&=\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)-2\,\mathrm{Cov}\left(X_2,\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\\&=\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{X_1}{n}\right)-2\,\mathrm{Cov}\left(X_2,\frac{X_2}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)-\frac{2}{n}\mathrm{Cov}(X_2,X_2)\\&=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1)-\frac{2}{n}\mathrm{Var}(X_2)=\frac{1}{n}\lambda-\frac{2}{n}\lambda=-\frac{\lambda}{n}。\end{aligned}$$

选（A）。

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，且 $X_i\sim Exp(\lambda)$（指数分布），$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则当 $n\to+\infty$，$Y_n\xrightarrow{P}$（　　）。

（A）$\dfrac{1}{\lambda^2}$　　（B）$\dfrac{2}{\lambda^2}$　　（C）$\dfrac{1}{\lambda}$　　（D）$\dfrac{2}{\lambda}$

分析：辛钦大数定律：独立同分布条件下，平均值依概率收敛于数学期望。

解：由题意可知 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 独立同分布，其平均值 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于数学期望 $E(X_i^2)$。

$$E(X_i^2)=\mathrm{Var}(X_i)+(EX_i)^2=\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}\text{。}$$

选（B）。

二．计算题：（共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

1. 甲、乙、丙三个车间加工同样的零件，甲、乙、丙加工零件的次品率分别是 0.01，0.03，0.05，三个车间加工的零件放在一起，甲乙丙加工零件的数量之比为$3:2:1$。

（1）求任取一个零件是次品的概率；

（2）如果取出的零件为次品，求它是由甲车间加工的概率。

分析：第（1）小题求结果用全概率公式，第（2）小题结果发生了问原因用贝叶斯公式。

解：结果：设 A 表示取到次品；原因：设 B_1,B_2,B_3 分别表示取到甲、乙、丙车间产品。有

$$P(B_1)=0.01,\quad P(B_2)=0.03,\quad P(B_3)=0.05,$$

$$P(A\,|\,B_1)=\frac{3}{6},\quad P(A\,|\,B_2)=\frac{2}{6},\quad P(A\,|\,B_3)=\frac{1}{6}\text{。}$$

（1）全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A\,|\,B_1)+P(B_2)P(A\,|\,B_2)+P(B_3)P(A\,|\,B_3)$$

$$=0.01\times\frac{3}{6}+0.03\times\frac{2}{6}+0.05\times\frac{1}{6}=\frac{7}{300}\text{。}$$

（2）贝叶斯公式

$$P(B_1\,|\,A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A\,|\,B_1)}{P(A)}=\frac{0.01\times\frac{3}{6}}{\frac{7}{300}}=\frac{3}{14}\text{。}$$

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}ax^2+x, & 0\le x\le 0.5;\\ x, & 0.5<x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求常数 a；

（2）求 X 的分布函数 $F(x)$。

分析：利用密度函数正则性求待定系数，求分布函数应按 x 分段计算概率。

解：（1）正则性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{0.5}(ax^2+x)dx+\int_{0.5}^{1}xdx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.5}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0.5}^{1}=\frac{a}{24}+\frac{1}{2}=1,$$

故 $a=12$。

（2） x 的分段点为 0, 0.5, 1。当 $x<0$ 时， $F(x)=0$；当 $0\le x<0.5$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{0}^{x}(12u^2+u)du=\left(4u^3+\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=4x^3+\frac{x^2}{2}。$$

当 $0.5\le x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{0}^{0.5}(12u^2+u)du+\int_{0.5}^{x}udu=\frac{1+x^2}{2}。$$

当 $x\ge 1$ 时， $F(x)=1$。故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 4x^3+\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<0.5;\\ \dfrac{1+x^2}{2}, & 0.5\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

3. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^2, & -1\le x\le 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2+2$ 的概率密度 $p_Y(y)$。

分析：函数不是严格单调，用分布函数法。

解： y 的分段点为 2, 3, 6。当 $y<2$ 时， $F_Y(y)=0$；当 $2\le y<3$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X^2+2\le y\}=P\{-\sqrt{y-2}\le X\le\sqrt{y-2}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}}\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{9}x^3\Bigg|_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}}=\frac{2}{9}(y-2)\sqrt{y-2}。$$

当 $3\le y<6$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X^2+2\le y\}=P\{-\sqrt{y-2}\le X\le\sqrt{y-2}\}$$

$$=\int_{-1}^{\sqrt{y-2}}\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{9}x^3\Bigg|_{-1}^{\sqrt{y-2}}=\frac{1}{9}(y-2)\sqrt{y-2}+\frac{1}{9}。$$

当 $y\ge 6$ 时， $F_Y(y)=1$。故

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<2;\\ \dfrac{2}{9}(y-2)\sqrt{y-2}, & 2\le y<3;\\ \dfrac{1}{9}(y-2)\sqrt{y-2}+\dfrac{1}{9}, & 3\le x<6;\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$$

分布函数 $F_Y(y)$ 连续，Y 是连续随机变量，Y 的概率密度为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sqrt{y-2}, & 2<y<3;\\ \dfrac{1}{6}\sqrt{y-2}, & 3\le x<6;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

4. 有三项任务 A, B, C，其完成的时间分别为随机变量 $X\sim U(1,4)$（区间 $(1,4)$ 上的连续型均匀分布），$Y\sim b(10,0.2)$（二项分布），$Z\sim Exp\left(\dfrac{1}{6}\right)$（指数分布）。小明采用如下方式选择其中一项任务完成：掷两颗骰子一次，若出现两个 6 点，则选择任务 A；若出现点数之和为 5，则选择任务 B；其它情况选择任务 C。求：小明完成任务的平均时间。

分析：此题从直观上容易看出结论，但要数学上严谨，就需要用重期望公式

解：设 T 表示完成任务的时间，U 表示所选的任务。

$$U=\begin{cases}1, & \text{选择任务}A;\\ 2, & \text{选择任务}B;\\ 3, & \text{选择任务}C.\end{cases}$$

有

$$P\{U=1\}=\frac{1}{36},\quad P\{U=2\}=\frac{4}{36},\quad P\{U=3\}=\frac{31}{36}。$$

根据重期望公式，$E(T)=E[E(T\,|\,U)]$，有

$$E(T\,|\,U=1)=EX=\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2},$$

$$E(T\,|\,U=2)=EY=np=2,$$

$$E(T\,|\,U=3)=EZ=\frac{1}{\lambda}=6,$$

可得

$E(T\mid U)$	$\frac{5}{2}$	2	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{31}{36}$

故

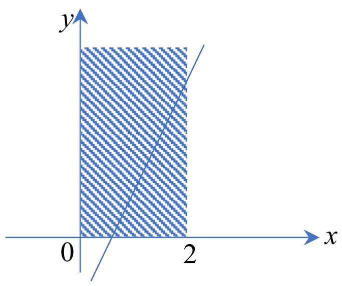
$$E(T)=E[E(T\mid U)]=\frac{5}{2}\times\frac{1}{36}+2\times\frac{4}{36}+6\times\frac{31}{36}=\frac{131}{24}\text{。}$$

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim U(0,2)$（区间 $(0,2)$ 上的连续型均匀分布），$Y\sim Exp(2)$（指数分布）。求：$Z=X-2Y$ 的密度函数。

分析：根据边际分布及独立性得到联合分布，再用密度函数法计算二维随机变量函数的分布。

解：因 $X\sim U(0,2)$，$Y\sim Exp(2)$，有

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$



且 X 和 Y 相互独立，则

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0<x<2,\ y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

作支撑区域平面图以及曲线簇 $x-2y=z$。当 z 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变动时，曲线簇 $x-2y=z$ 从 xOy 平面的左上方向右下方变动。z 的分段点为 $0, 2$。

对于 $Z=X-2Y$，因函数 $z=x-2y$ 关于 x 严格单减，增补变量 $W=Y$，由函数 $z=x-2y,\ w=y$，得到反函数 $x=z+2w,\ y=w$。雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x_z & x_w\\ y_z & y_w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\text{，}$$

则

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+2y,y)\cdot|J|\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+2y,y)dy\text{。}$$

当 $z<0$ 时，

$$p_Z(z)=\int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{2-z}{2}}e^{-2y}dy=-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_{-\frac{z}{2}}^{\frac{2-z}{2}}=\frac{e^z-e^{z-2}}{2}\text{；}$$

当 $0\le z<2$ 时，

$$p_Z(z)=\int_0^{\frac{2-z}{2}} e^{-2y}dy=-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_0^{\frac{2-z}{2}}=\frac{1-e^{z-2}}{2};$$

当$z\geq 2$时，$p_Z(z)=0$。故

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z-e^{z-2}}{2}, & z<0;\\ \dfrac{1-e^{z-2}}{2}, & 0\leq z<2;\\ 0, & z\geq 2.\end{cases}$$

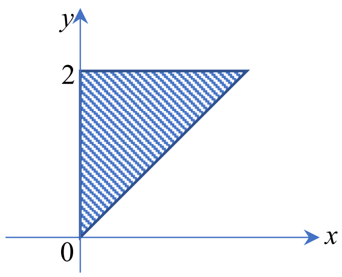
6. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}xy, & 0<x<y<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）边际密度$p_Y(y)$；

（2）$E(X\,|\,Y=1)$。

分析：先求边际密度$p_Y(y)$，条件密度$p_X(x\,|\,Y=y)$，再求条件数学期望$E(X\,|\,Y=y)$。



解：（1）边际密度

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx。$$

当$0<y<2$时，

$$p_Y(y)=\int_0^y\frac{1}{2}xydx=\frac{1}{4}x^2y\Big|_0^y=\frac{y^3}{4},$$

故

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{4}, & 0<y<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）条件密度

$$p_X(x\,|\,Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}。$$

当$0<y<2$时，$p_Y(y)>0$，此时

$$p_X(x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0<x<y;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

则当$0<y<2$时，

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x|Y=y)dx=\int_0^y x\cdot\frac{2x}{y^2}dx=\frac{2}{y^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^y=\frac{2y}{3}。$$

故

$$E(X|Y=1)=\frac{2}{3}。$$

7. 某银行网点附近住着 600 个储户，假设每个储户每月去该银行取 1 万元的概率为 0.6，且储户之间每月取钱相互独立。问：该银行每月应准备多少现金，才能以 99.9%的把握满足附近储户取款的需求。

分析：二项分布，数量大，根据中心极限定理，用正态分布处理。

解：设 X 表示取款储户个数，有 X 服从二项分布 $b(600,0.6)$。二项分布，$n=600$ 很大，用中心极限定理。因

$$EX=np=360,\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=144,$$

可知

$$\frac{X-360}{12}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)。$$

又设银行每月准备 a 万元现金，有 $P\{X\le a\}=0.999$。可得

$$P\{X\le a\}=P\left\{\frac{X-360}{12}\le\frac{a-360}{12}\right\}=\Phi\left(\frac{a-360}{12}\right)=0.999,$$

即

$$\frac{a-360}{12}=3.08,$$

$$a=396.96,$$

故银行每月应准备 396.96 万元现金。

三．证明题：（共 1 个题，7 分）

已知随机变量序列$\{X_i,\quad i=1,2,\cdots\}$独立同分布，且

X_i	0	1
P	$1-p$	p

$i=1,2,\cdots$

随机变量 $N\sim P(\lambda)$（泊松分布），且独立于 X_i， $i=1,2,\cdots$。$Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$。

（1）求 N 的特征函数；

（2）利用特征函数证明：$Y\sim P(\lambda p)$。

分析：第（1）小题直接计算特征函数。第（2）小题是随机个独立随机变量和，需要利用重期望公式，先讨论随机个数取定时的条件期望，然后再求该条件期望的期望。

解：（1）N 的分布列为

$$P\{N=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

则 N 的特征函数为

$$\varphi_N(t)=E(e^{itN})=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{itk}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda e^{it}}\cdot e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}。$$

（2）Y 的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=E(e^{itY})=E\left(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}\right)=E\left[E\left(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}\middle|N\right)\right]。$$

因

$$E\left(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}\middle|N=n\right)=E\left(e^{it\sum_{j=1}^{n}X_j}\right)=E(e^{itX_1})E(e^{itX_2})\cdots E(e^{itX_n}),$$

且

$$E(e^{itX_j})=e^{it\cdot 0}\cdot(1-p)+e^{it\cdot 1}\cdot p=1-p+pe^{it},$$

则

$$E\left(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}\middle|N=n\right)=(1-p+pe^{it})^n,$$

即

$$E\left(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}\middle|N\right)=(1-p+pe^{it})^N。$$

故 Y 的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=E[(1-p+pe^{it})^N]=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p+pe^{it})^k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p+pe^{it})]^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(1-p+pe^{it})}\cdot e^{-\lambda}=e^{-\lambda p+\lambda pe^{it}}=e^{\lambda p(e^{it}-1)},$$

这正是泊松分布 $P(\lambda p)$ 的特征函数，可知 $Y\sim P(\lambda p)$。