习题 1.3

1． 设事件 A 和 B 互不相容，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，求以下事件的概率：

（1） A 与 B 中至少有一个发生；

（2） A 和 B 都发生；

（3） A 发生但 B 不发生。

解：（1）所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.3+0.5=0.8。$$

（2）因 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0$。

（3）所求概率为

$$P(A-B)=P(A)=0.3。$$

2． 设 $P(AB)=0$，则下列说法哪些是正确的？

（1） A 和 B 不相容；

（2） A 和 B 相容；

（3） AB 是不可能事件；

（4） AB 不一定是不可能事件；

（5） $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$；

（6） $P(A-B)=P(A)$。

解：（1）错误，若 $P(AB)=0$，不一定有 $AB=\varnothing$，则 A 和 B 可能相容也可能不相容。

（2）错误，若 $P(AB)=0$，不一定有 $AB=\varnothing$，则 A 和 B 可能相容也可能不相容。

（3）错误，若 $P(AB)=0$，不一定有 $AB=\varnothing$，即 AB 不一定是不可能事件。

（4）正确，若 $P(AB)=0$，不一定有 $AB=\varnothing$，即 AB 不一定是不可能事件。

（5）错误，当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，只要 A 和 B 不相容，就有 $P(AB)=0$。

（6）正确，因

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)。$$

3． 一批产品分一、二、三级，其中一级品是二级品的三倍，三级品是二级品的一半，从这批产品中随机地抽取一个，试求取到二级品的概率。

解：设 A,B,C 分别表示取到一、二、三级品，有

$$P(A)+P(B)+P(C)=1，\quad P(A)=3P(B)，\quad P(C)=\frac{1}{2}P(B)，$$

则

$$3P(B)+P(B)+\frac{1}{2}P(B)=\frac{9}{2}P(B)=1，$$

即取到二级品的概率 $P(B)=\dfrac{2}{9}$。

4． 从 $0,1,2,\cdots,9$ 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

（1） $A_1=\{三个数字中不含0和5\}$；

（2） $A_2=\{三个数字中不含0或5\}$；

（3） $A_3=\{三个数字中含0但不含5\}$。

解：样本点总数 $n=C_{10}^3=120$。

（1）事件 A_1 所含样本点个数 $k_1=C_8^3=56$，故

$$P(A_1)=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}。$$

（2）事件 $\overline{A}_2$ 表示三个数字中含 0 和 5，所含样本点个数 $k_{\overline{A}_2}=C_8^1=8$，故

$$P(A_2)=1-\frac{8}{120}=\frac{14}{15}。$$

（3）事件 A_3 所含样本点个数 $k_3=C_8^2=28$，故

$$P(A_3)=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}。$$

5．某城市中共发行 3 种报纸 A,B,C。在这城市的居民中有 25%订阅 A 报、20%订阅 B 报、15%订阅 C 报，10%同时订阅 A 报 B 报、8%同时订阅 A 报 C 报、5%同时订阅 B 报 C 报、3%同时订阅 A,B,C 报。求以下事件的概率：

（1）只订阅 A 报；

（2）只订阅一种报纸的；

（3）至少订阅一种报纸的；

（4）不订阅任何一种报纸的。

解：设 A,B,C 分别表示订阅报纸 A,B,C，则

$P(A)=0.25$，$P(B)=0.20$，$P(C)=0.15$，

$P(AB)=0.10$，$P(AC)=0.08$，$P(BC)=0.05$，$P(ABC)=0.03$。

（1）所求概率为

$$P(A\overline{B}\overline{C})=P(A(\overline{B\cup C}))=P(A)-P(AB\cup AC)=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=0.25-0.10-0.08+0.03=0.10。$$

（2）因

$$P(\overline{A}B\overline{C})=P(B(\overline{A\cup C}))=P(B)-P(AB\cup BC)=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=0.20-0.10-0.05+0.03=0.08。$$

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(C(\overline{A\cup B}))=P(C)-P(AC\cup BC)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=0.15-0.08-0.05+0.03=0.05。$$

故

$$P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=0.10+0.08+0.05=0.23。$$

（3）所求概率为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=0.25+0.20+0.15-0.10-0.08-0.05+0.03=0.40。$$

（4）所求概率为

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.40=0.60。$$

6．某工厂一个班组共有男工 9 人、女工 5 人，现要选出 3 个代表，问选的 3 个代表中至少有 1 个女工的概率是多少？

解：样本点总数 $n=C_{14}^3=364$。事件 $\overline{A}$ 表示选的 3 个代表中没有女工，所含样本点个数 $k_{\overline{A}}=C_9^3=84$，故所求概率为

$$P(A)=1-\frac{84}{364}=\frac{10}{13}。$$

7．一赌徒认为掷一颗骰子 4 次至少出现一次 6 点与掷两颗骰子 24 次至少出现一次双 6 点的机会是相等的，你认为如何？

解：因“掷一颗骰子 4 次”的样本点总数 $n_1=6^4=1296$。事件 $\overline{A}_1$ 表示没有出现 6 点，所含样本点个数为 $k_{\overline{A}_1}=5^4=625$，则

$$P(A_1)=1-\frac{625}{1296}\approx 0.5177。$$

因“掷两颗骰子 24 次”的样本点总数 $n_2=(6^2)^{24}=36^{24}$。事件 $\overline{A}_2$ 表示没有出现双 6 点，所含样本点个数为 $k_{\overline{A}_2}=(6^2-1)^{24}=35^{24}$，则

$$P(A_2)=1-\frac{35^{24}}{36^{24}}\approx 0.4914。$$

故掷一颗骰子 4 次至少出现一次 6 点的机会比掷两颗骰子 24 次至少出现一次双 6 点的机会更大。

8．从数字 $1,2,\cdots,9$ 中可重复地任取 n 次，求 n 次所取数字的乘积能被 10 整除的概率。

解：样本点总数 $N=9^n$。因事件 A 表示所取数字的乘积能被 10 整除，就是事件“至少取到一次数字 5 并且至少取到一次偶数”，则事件 $\overline{A}$ 表示没有取到数字 5 或没有取到偶数；设事件 B 表示没有取到数字 5，C 表示没有取到偶数，则事件 B 所含样本点个数为 $K_B=8^n$，事件 C 所含样本点个数为 $K_C=5^n$，且事件 BC 表示没有取到数字 5 和偶数，所含样本点个数为 $K_{BC}=4^n$，故

$$P(A)=1-P(B\cup C)=1-P(B)-P(C)+P(BC)=1-\frac{8^n}{9^n}-\frac{5^n}{9^n}+\frac{4^n}{9^n}=\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}。$$

9．口袋中有 $n-1$ 个黑球和 1 个白球，每次从口袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球。问第 k 次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解：样本点总数 $N=n^k$，事件 A 表示第 k 次摸球时摸到黑球，则事件 $\overline{A}$ 表示第 k 次摸到白球，此时前 $k-1$ 次摸球时都必须是摸到黑球，则 $\overline{A}$ 中所含样本点个数 $K_{\overline{A}}=(n-1)^{k-1}$，故所求概率为

$$P(A)=1-\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}。$$

10．若 $P(A)=1$，证明：对任一事件 B，有 $P(AB)=P(B)$。

证明：根据概率的单调性可知

$$0\le P(B)-P(AB)=P(B-A)=P(\overline{A}B)\le P(\overline{A})=1-P(A)=0，$$

故 $P(AB)=P(B)$。

11．掷 $2n+1$ 次硬币，求出现的正面数多于反面数的概率。

解：设 A 表示出现的正面数多于反面数，因掷奇数次硬币，出现的正面数与反面数不可能相等，事件 $\overline{A}$ 表示出现的反面数多于正面数，由于掷一枚硬币出现正面与出现反面的可能性相同，则“出现的正面数多于反面数”与“出现的反面数多于正面数”的可能性相同，可得

$$P(A)=P(\overline{A})，\quad P(A)+P(\overline{A})=1，$$

故 $P(A)=0.5$。

12．有三个人，每个人都以同样的概率$1/5$被分配到5个房间中的任一间中，试求：

（1）三个人都分配到同一个房间的概率；

（2）三个人分配到不同房间的概率。

解：样本点总数$n=5^3=125$。

（1）事件A_1表示三个人都分配到同一个房间，所含样本点个数为$k_1=5$，故所求概率为

$$P(A_1)=\frac{5}{125}=\frac{1}{25}。$$

（2）事件A_2表示三个人分配到不同房间，所含样本点个数为$k_2=A_5^3=60$，故所求概率为

$$P(A_2)=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}。$$

13．一间宿舍住有5位同学，求他们之中至少有2个人生日在同一个月份的概率。

解：首先假设一个人的生日在每一个月份的可能性相同，样本点总数$n=12^5$。事件$\overline{A}$表示每个人生日都在不同月份，所含样本点个数为$k_{\overline{A}}=A_{12}^5$，故所求概率为

$$P(A)=1-\frac{A_{12}^5}{12^5}=\frac{89}{144}\approx 0.6181。$$

14．某班n个战士各有1支归个人保管使用的枪，这些枪的外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，每人随机地取了1支枪，求至少有1人拿到自己的枪的概率。

解：设A_i表示第i个战士拿到自己的枪，$i=1,2,\cdots,n$，有$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示至少有1人拿到自己的枪，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),$$

因$P(A_i)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$，$P(A_iA_j)=\dfrac{(n-2)!}{n!}=\dfrac{1}{n(n-1)}$，$P(A_iA_jA_k)=\dfrac{(n-3)!}{n!}=\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$，…，故

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=n\cdot\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}。$$

15．设A,B是两事件，且$P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，问：

（1）在什么条件下$P(AB)$取到最大值，最大值是多少？

（2）在什么条件下$P(AB)$取到最小值，最小值是多少？

解：（1）因

$$P(AB)\le\min\{P(A),P(B)\}=P(A)=0.6,$$

故当$P(AB)=P(A)$时，$P(AB)$取到最大值0.6。

（2）因

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1=0.6+0.8-1=0.4,$$

故当$P(A\cup B)=1$时，$P(AB)$取到最小值0.4。

注：若$A\subset B$，有$AB=A$，可得$P(AB)=P(A)$，但反过来不成立，由$P(AB)=P(A)$，不能得出$A\subset B$；若$A\cup B=\Omega$，可得$P(A\cup B)=1$，但反过来不成立，由$P(A\cup B)=1$，不能得出$A\cup B=\Omega$。

16．已知事件 A, B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\cap\bar{B})$，记 $P(A)=p$，试求 $P(B)$。

解： 因

$$P(AB)=P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

故

$$P(B)=1-P(A)=1-p。$$

17．已知 $P(A)=0.7$， $P(A-B)=0.4$，试求 $P(\overline{AB})$。

解： 因 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，有

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.4=0.3,$$

故

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7。$$

18．设 $P(A)=\alpha$， $P(B)=1-\alpha$，试证 $P(AB)=P(\bar{A}\cap\bar{B})$。

证明： 根据概率的加法公式，可得

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$=1-\alpha-(1-\alpha)+P(AB)=P(AB)。$$

19．对任意的事件 A, B, C，证明：

（1） $P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A)$；

（2） $P(AB)+P(AC)+P(BC)\ge P(A)+P(B)+P(C)-1$。

证明：（1）因 $P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$，且 $(AB\cup AC)\subset A$， $ABC\subset BC$，有

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)=P(AB\cup AC)+P(ABC)-P(BC)\le P(AB\cup AC)\le P(A)。$$

（2）因

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

故

$$P(AB)+P(AC)+P(BC)=P(A)+P(B)+P(C)+P(ABC)-P(A\cup B\cup C)$$

$$\ge P(A)+P(B)+P(C)+P(ABC)-1\ge P(A)+P(B)+P(C)-1。$$

20．设 A, B, C 为三个事件，且 $P(A)=a$， $P(B)=2a$， $P(C)=3a$， $P(AB)=P(AC)=P(BC)=b$，证明： $a\le 1/4$， $b\le 1/4$。

证明： 因

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=5a-b, \quad a=P(A)\ge P(AB)=b,$$

则

$$1\ge P(B\cup C)=5a-b\ge 4a,$$

故 $a\le 1/4$ 且 $b\le a\le 1/4$。

21．设事件 A, B, C 的概率都是 $1/2$，且 $P(ABC)=P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$，证明：

$$2P(ABC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-1/2。$$

证明：因

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)，$$

故

$$2P(ABC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)+1-P(A)-P(B)-P(C)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-1/2。$$

22．证明：

（1）$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$；

（2）$P(A_1A_2\cdots A_n)\ge P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$。

证明：（1）因 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，故

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1。$$

（2）用数学归纳法证明此结论，当 $n=2$ 时，由（1）小题知结论成立。设当 $n=k$ 时，结论成立，即

$$P(A_1A_2\cdots A_k)\ge P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)-(k-1)，$$

则

$$P(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})\ge P(A_1A_2\cdots A_k)+P(A_{k+1})-1\ge P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)-(k-1)+P(A_{k+1})-1$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)+P(A_{k+1})-k，$$

即当 $n=k+1$ 时，结论成立，故由数学归纳法知

$$P(A_1A_2\cdots A_n)\ge P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)。$$

23．证明：$|P(AB)-P(A)P(B)|\le\frac{1}{4}$。

证明：方法一，因

$$P(AB)-P(A)P(B)=P(AB)-P(A)[P(AB)+P(\overline{A}B)]=P(AB)[1-P(A)]-P(A)P(\overline{A}B)，$$

$$0\le P(AB)[1-P(A)]\le P(A)[1-P(A)]=P(A)-[P(A)]^2=\frac{1}{4}-\left[P(A)-\frac{1}{2}\right]^2\le\frac{1}{4}，$$

$$0\le P(A)P(\overline{A}B)\le P(A)P(\overline{A})=P(A)[1-P(A)]\le\frac{1}{4}，$$

故

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\le\max\{P(AB)[1-P(A)],P(A)P(\overline{A}B)\}\le\frac{1}{4}。$$

方法二，因 $P(A)\ge P(AB)$ 且 $P(B)\ge P(AB)$，则

$$P(AB)-P(A)P(B)\le P(AB)-P(AB)P(AB)=\frac{1}{4}-\left[P(AB)-\frac{1}{2}\right]^2\le\frac{1}{4}，$$

同理，有

$$P(A\overline{B})-P(A)P(\overline{B})\le P(A\overline{B})-P(A\overline{B})P(A\overline{B})=\frac{1}{4}-\left[P(A\overline{B})-\frac{1}{2}\right]^2\le\frac{1}{4}。$$

又因

$$P(A\bar{B})-P(A)P(\bar{B})=P(A)-P(AB)-P(A)[1-P(B)]=-P(AB)+P(A)P(B),$$

故

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\le\frac{1}{4}。$$

方法三，设$P(AB)=x_1$， $P(A\bar{B})=x_2$， $P(\bar{A}B)=x_3$，有$x_1,x_2,x_3\ge 0$且$x_1+x_2+x_3=P(A\cup B)\le 1$。记

$$P(AB)-P(A)P(B)=x_1-(x_1+x_2)(x_1+x_3)=f(x_1,x_2,x_3)。$$

考虑$f(x_1,x_2,x_3)=x_1-(x_1+x_2)(x_1+x_3)$满足$x_1,x_2,x_3\ge 0$且$x_1+x_2+x_3\le 1$的极值。令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=1-(x_1+x_3)-(x_1+x_2)=0;\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-(x_1+x_3)=0;\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}=-(x_1+x_2)=0.\end{cases}$$

方程无解，即$f(x_1,x_2,x_3)$没有驻点，其最大值与最小值只能在区域边界$x_1,x_2,x_3=0$或$x_1+x_2+x_3=1$上取得。因此考虑$f(x_1,x_2,x_3)$在满足边界条件下的条件极值。

当$x_1=0$时， $f(0,x_2,x_3)=-x_2x_3$， $x_2,x_3\ge 0$且$x_2+x_3\le 1$。因

$$0\le x_2x_3\le\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2\le\frac{1}{4},$$

可知$-\dfrac{1}{4}\le f(0,x_2,x_3)=-x_2x_3\le 0$。

当$x_2=0$时， $f(x_1,0,x_3)=x_1-x_1(x_1+x_3)$， $x_1,x_3\ge 0$且$x_1+x_3\le 1$。因

$$0\le x_1-x_1(x_1+x_3)\le x_1-x_1^2\le\frac{1}{4}-\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4},$$

可知$0\le f(x_1,0,x_3)=x_1-x_1(x_1+x_3)\le\dfrac{1}{4}$。

当$x_3=0$时， $f(x_1,x_2,0)=x_1-(x_1+x_2)x_1$， $x_1,x_2\ge 0$且$x_1+x_2\le 1$。因

$$0\le x_1-(x_1+x_2)x_1\le x_1-x_1^2\le\frac{1}{4}-\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4},$$

可知$0\le f(x_1,x_2,0)=x_1-(x_1+x_2)x_1\le\dfrac{1}{4}$。

当$x_1+x_2+x_3=1$时，有

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - (x_1 + x_2)(1 - x_2) = x_1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2 + x_2^2 = -x_2(1 - x_1 - x_2),$$

因

$$0 \le x_2(1 - x_1 - x_2) \le x_2(1 - x_2) = \frac{1}{4} - \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4},$$

可知当$x_1 + x_2 + x_3 = 1$时，$0 \le f(x_1, x_2, x_3) \le \frac{1}{4}$。

综上所述，$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$满足$x_1, x_2, x_3 \ge 0$且$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$的最小值为$-\frac{1}{4}$，最大值为$\frac{1}{4}$，即

$$|P(AB) - P(A)P(B)| = |f(x_1, x_2, x_3)| \le \frac{1}{4}。$$