第七章　假设检验

习题 7.1

1．设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，考虑如下假设检验问题

$\mathrm{H_0}$：$\mu = 2$　vs　$\mathrm{H_1}$：$\mu = 3$，

若检验由拒绝域为 $W = \{\bar{x} \ge 2.6\}$ 确定．

（1）当 $n = 20$ 时求检验犯两类错误的概率；

（2）如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \le 0.01$，n 最小应取多少？

（3）证明：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha \to 0$，$\beta \to 0$．

解：（1）犯第一类错误的概率为

$$\alpha = P\{\bar{X} \in W \mid H_0\} = P\{\bar{X} \ge 2.6 \mid \mu = 2\} = P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \ge \frac{2.6 - 2}{1/\sqrt{20}} = 2.68\right\} = 1 - \Phi(2.68) = 0.0037,$$

犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\{\bar{X} \notin W \mid H_1\} = P\{\bar{X} < 2.6 \mid \mu = 3\} = P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} < \frac{2.6 - 3}{1/\sqrt{20}} = -1.79\right\} = \Phi(-1.79) = 0.0367;$$

（2）因 $\beta = P\{\bar{X} < 2.6 \mid \mu = 3\} = P\left\{\dfrac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} < \dfrac{2.6 - 3}{1/\sqrt{n}} = -0.4\sqrt{n}\right\} = \Phi(-0.4\sqrt{n}) \le 0.01$，

则 $\Phi(0.4\sqrt{n}) \ge 0.99$，$0.4\sqrt{n} \ge 2.33$，$n \ge 33.93$，故 n 至少为 34；

（3）$\alpha = P\{\bar{X} \ge 2.6 \mid \mu = 2\} = P\left\{\dfrac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \ge \dfrac{2.6 - 2}{1/\sqrt{n}} = 0.6\sqrt{n}\right\} = 1 - \Phi(0.6\sqrt{n}) \to 0 \quad (n \to \infty)$，

$$\beta = P\{\bar{X} < 2.6 \mid \mu = 3\} = P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} < \frac{2.6 - 3}{1/\sqrt{n}} = -0.4\sqrt{n}\right\} = \Phi(-0.4\sqrt{n}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

2．设 $X_1, \cdots, X_{10}$ 是来自 0-1 总体 $b(1, p)$ 的样本，考虑如下检验问题

$\mathrm{H_0}$：$p = 0.2$　vs　$\mathrm{H_1}$：$p = 0.4$，

取拒绝域为 $W = \{\bar{x} \ge 0.5\}$，求该检验犯两类错误的概率．

解：因 $X \sim b(1, p)$，有 $\sum\limits_{i=1}^{10} X_i = 10\bar{X} \sim b(10, p)$，

则 $\alpha = P\{\bar{X} \in W \mid H_0\} = P\{\bar{X} \ge 0.5 \mid p = 0.2\} = P\{10\bar{X} \ge 5 \mid p = 0.2\} = \sum\limits_{k=5}^{10} C_{10}^k \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{10-k} = 0.0328$，

$$\beta = P\{\bar{X} \notin W \mid H_1\} = P\{\bar{X} < 0.5 \mid p = 0.4\} = P\{10\bar{X} < 5 \mid p = 0.4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{10}^k \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{10-k} = 0.6331.$$

3．设 $X_1, \cdots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，考虑检验问题

$\mathrm{H_0}$：$\mu = 6$　vs　$\mathrm{H_1}$：$\mu \ne 6$，

拒绝域取为 $W = \{|\bar{x} - 6| \ge c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率．

解：因 $\alpha = P\{\overline{X} \in W \mid H_0\} = P\{|\overline{X}-6| \ge c \mid \mu = 6\} = P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{16}}\right| \ge \dfrac{c}{2/\sqrt{16}} = 2c\right\} = 2[1-\Phi(2c)] = 0.05$，

则 $\Phi(2c) = 0.975$，$2c = 1.96$，故 $c = 0.98$；

故 $\beta = P\{\overline{X} \notin W \mid H_1\} = P\{|\overline{X}-6| < 0.98 \mid \mu = 6.5\} = P\{-1.48 < \overline{X}-6.5 < 0.48 \mid \mu = 6.5\}$

$$= P\left\{-2.96 < \frac{\overline{X}-6.5}{2/\sqrt{16}} < 0.96\right\} = \Phi(0.96) - \Phi(-2.96) = 0.83 .$$

4．设总体为均匀分布 $U(0, \theta)$，$X_1, \cdots, X_n$ 是样本，考虑检验问题

H$_0$：$\theta \ge 3$ vs H$_1$：$\theta < 3$，

拒绝域取为 $W = \{\bar{x}_{(n)} \le 2.5\}$，求检验犯第一类错误的最大值 α，若要使得该最大值 α 不超过 0.05，n 至少应取多大？

解：因均匀分布最大顺序统计量 $X_{(n)}$ 的密度函数为 $p_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} \mathrm{I}_{0<x<\theta}$，

则 $\alpha = P\{\overline{X} \in W \mid H_0\} = P\{X_{(n)} \le 2.5 \mid \theta = 3\} = \displaystyle\int_0^{2.5} \frac{nx^{n-1}}{3^n} dx = \left.\frac{x^n}{3^n}\right|_0^{2.5} = \frac{2.5^n}{3^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$，

要使得 $\alpha \le 0.05$，即 $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \le 0.05$，$n \ge \dfrac{\ln 0.05}{\ln(5/6)} = 16.43$，

故 n 至少为 17.

5．在假设检验问题中，若检验结果是接受原假设，则检验可能犯哪一类错误？若检验结果是拒绝原假设，则又有可能犯哪一类错误？

答：若检验结果是接受原假设，当原假设为真时，是正确的决策，未犯错误；

当原假设不真时，则犯了第二类错误.

若检验结果是拒绝原假设，当原假设为真时，则犯了第一类错误；

当原假设不真时，是正确的决策，未犯错误.

6．设 $X_1, \cdots, X_{20}$ 是来自 0-1 总体 $b(1, p)$ 的样本，考虑如下检验问题

H$_0$：$p = 0.2$ vs H$_1$：$p \ne 0.2$，

取拒绝域为 $W = \left\{\sum\limits_{i=1}^{20} x_i \ge 7 \text{或} \sum\limits_{i=1}^{20} x_i \le 1\right\}$，

（1）求 $p = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1$ 的势并由此画出势函数的图；

（2）求在 $p = 0.05$ 时犯第二类错误的概率.

解：（1）因 $X \sim b(1, p)$，有 $\sum\limits_{i=1}^{20} X_i \sim b(20, p)$，势函数 $g(p) = P\left\{\sum\limits_{i=1}^{20} X_i \in W \middle| p\right\} = 1 - \sum\limits_{k=2}^{6} \dbinom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$，

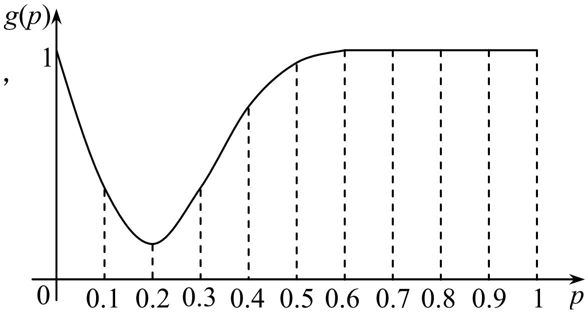
故 $g(0) = 1 - \sum\limits_{k=2}^{6} \dbinom{20}{k} \times 0^k \times 1^{20-k} = 1$，$g(0.1) = 1 - \sum\limits_{k=2}^{6} \dbinom{20}{k} \times 0.1^k \times 0.9^{20-k} = 0.3941$，

$g(0.2) = 1 - \sum\limits_{k=2}^{6} \dbinom{20}{k} \times 0.2^k \times 0.8^{20-k} = 0.1559$，$g(0.3) = 1 - \sum\limits_{k=2}^{6} \dbinom{20}{k} \times 0.3^k \times 0.7^{20-k} = 0.3996$，

$$g(0.4)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.4^k\times 0.6^{20-k}=0.7505\text{，}\quad g(0.5)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.5^k\times 0.5^{20-k}=0.9424\text{，}$$

$$g(0.6)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.6^k\times 0.4^{20-k}=0.9935\text{，}\quad g(0.7)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.7^k\times 0.3^{20-k}=0.9997\text{，}$$

$$g(0.8)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.8^k\times 0.2^{20-k}=0.999998\text{，}$$



$$g(0.9)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.9^k\times 0.1^{20-k}\approx 1\text{，}$$

$$g(1)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 1^k\times 0^{20-k}=1\text{；}$$

（2）在 $p=0.05$ 时犯第二类错误的概率

$$\beta=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i\notin W\mid p=0.05\right\}=\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times 0.05^k\times 0.95^{20-k}=0.2641\,.$$

7． 设一个单一观测的样本取自密度函数为 $p(x)$的总体，对 $p(x)$考虑统计假设：

H_0：$p_0(x)=I_{0<x<1}$ vs H_1：$p_1(x)=2x\,I_{0<x<1}$.

若其拒绝域的形式为 $W=\{x: x\ge c\}$，试确定一个 c，使得犯第一类，第二类错误的概率满足$\alpha+2\beta$ 为最小，并求其最小值.

解：当 $0<c<1$ 时，$\alpha=P\{X\in W\mid H_0\}=P\{X\ge c\mid X\sim p_0(x)\}=1-c$，

且 $\beta=P\{X\notin W\mid H_1\}=P\{X<c\mid X\sim p_1(x)\}=\int_0^c 2x\,dx=c^2$，

则 $\alpha+2\beta=1-c+2c^2=\dfrac{7}{8}+2\left(\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}c+c^2\right)=\dfrac{7}{8}+2\left(\dfrac{1}{4}-c\right)^2$，

故当 $c=\dfrac{1}{4}$ 时，$\alpha+2\beta$ 为最小，其最小值为 $\dfrac{7}{8}$.

8． 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{30}$ 为取自柏松分布 $P(\lambda)$的随机样本.

（1）试给出单侧假设检验问题 H_0：$\lambda\le 0.1$ vs H_1：$\lambda>0.1$ 的显著水平$\alpha=0.05$ 的检验；

（2）求此检验的势函数$\beta(\lambda)$在$\lambda=0.05, 0.2, 0.3, \cdots, 0.9$ 时的值，并据此画出$\beta(\lambda)$的图像.

解：（1）因 $n\overline{X}=X_1+X_2+\cdots+X_{30}\sim P(30\lambda)$，

假设 H_0：$\lambda\le 0.1$ vs H_1：$\lambda>0.1$，

统计量 $n\overline{X}\sim P(30\lambda)$，

当 H_0 成立时，设 $n\overline{X}\sim P(3)$，其 p 分位数 $P_p(3)$ 满足 $\displaystyle\sum_{k=0}^{P_p(3)-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}<p\le\sum_{k=0}^{P_p(3)}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$

显著水平$\alpha=0.05$，可得 $P_{1-\alpha}(3)=P_{0.95}(3)=6$，右侧拒绝域 $W=\{n\bar{x}\ge 7\}$；

（2）因 $\beta(\lambda)=P\{n\overline{X}\in W\mid\lambda\}=P\{n\overline{X}\ge 7\mid\lambda\}=1-\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}$，

故 $\beta(0.05)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{1.5^k}{k!}\mathrm{e}^{-1.5}=0.0001$， $\beta(0.2)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{6^k}{k!}\mathrm{e}^{-6}=0.3937$，

$\beta(0.3)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{9^k}{k!}\mathrm{e}^{-9}=0.7932$， $\beta(0.4)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{12^k}{k!}\mathrm{e}^{-12}=0.9542$，

$\beta(0.5)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{15^k}{k!}\mathrm{e}^{-15}=0.9924$， $\beta(0.6)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{18^k}{k!}\mathrm{e}^{-18}=0.9990$，

$\beta(0.7)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{21^k}{k!}\mathrm{e}^{-21}=0.9999$，

$\beta(0.8)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{24^k}{k!}\mathrm{e}^{-24}\approx 1$，

$\beta(0.9)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{27^k}{k!}\mathrm{e}^{-27}\approx 1$．