第十一章　差分方程

微分方程讨论连续型函数：$y = y(x)$，其中自变量 x 的取值范围是实数区间.

差分方程讨论离散型函数：$y_t = y(t)$，其中自变量 t 只取整数$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$.

§11.1　差分方程的基本概念

一．差分的概念

连续型函数 $y = y(x)$的导数 $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$，

离散型函数 $y_t = y(t)$类似定义：取$\Delta t = 1$ 为最小变化单位，$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$，称为差分.
离散型函数的差分类似于连续型函数的导数和微分.

定义　离散型函数 y_t，$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$，称为差分.

$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$，称为二阶差分.

$\Delta^3 y_t = \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t = (y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1}) - (y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t) = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$，称为三阶差分.
类似可定义更高阶的差分．一般，n 阶差分中函数 y 下标的最大差为 n.

差分的性质：$\Delta(u_t \pm v_t) = \Delta u_t \pm \Delta v_t$，$\Delta(u_t v_t) = u_{t+1}\Delta v_t + v_t \Delta u_t$，$\Delta \dfrac{u_t}{v_t} = \dfrac{v_t\Delta u_t - u_t\Delta v_t}{v_t v_{t+1}}$.

证明：如$\Delta(u_t v_t) = u_{t+1} v_{t+1} - u_t v_t = (u_{t+1} v_{t+1} - u_{t+1} v_t) + (u_{t+1} v_t - u_t v_t) = u_{t+1}\Delta v_t + v_t\Delta u_t$.

常见函数的差分：

常数 $y_t = C$，　　有$\Delta y_t = C - C = 0$；

幂函数 $y_t = t^n$，　有$\Delta y_t = (t+1)^n - t^n = n t^{n-1} + C_n^2 t^{n-2} + \cdots + 1$，

如 $y_t = t^2$，有$\Delta y_t = 2t + 1$，　如 $y_t = t^3$，有$\Delta y_t = 3t^2 + 3t + 1$；

指数函数 $y_t = a^t$，有$\Delta y_t = a^{t+1} - a^t = a^t(a-1)$.

二．差分方程的概念

定义　含未知离散型函数差分的方程称为差分方程.
这是因为差分表现为函数 y 不同下标的函数值之差.

定义　含未知离散型函数至少两个不同下标的函数值的方程称为差分方程．方程中未知函数下标的最大差称为差分方程的阶.

如 $y_{t+2} + 3y_{t+1} = 0$ 为一阶差分方程；　　$y_{t+1} - 2y_t + t\,y_{t-2} = t^2$ 为三阶差分方程.

三．差分方程的解

定义　使差分方程成为恒等式的离散型函数称为差分方程的解．若方程的解中所含独立任意常数的个数等于方程的阶，则称此解为方程的通解．若方程的解中不含任意常数，则称此解为方程的特解.
对于差分方程的通解，在一定的条件下，可确定 C 的值，而得到特解．所给的条件称为初始条件.
一般，一阶差分方程的初始条件为 $y_0 = a_0$，

二阶微分方程的初始条件为 $y_0 = a_0$，$y_1 = a_1$，

n 阶微分方程的初始条件为 $y_0 = a_0$，$y_1 = a_1$，$\cdots$，$y_{n-1} = a_{n-1}$.

§11.2　一阶常系数线性差分方程

形式为 $y_{t+1} - ay_t = f(t)$ 的方程，称为一阶常系数线性差分方程.

特点是 y_{t+1}、y_t 都是一次，且系数 a 为非零常数.

当 $f(t) \equiv 0$ 时，$y_{t+1} - ay_t = 0$ 称为一阶常系数线性齐次差分方程；
当 $f(t) \neq 0$ 时，$y_{t+1} - ay_t = f(t)$ 称为一阶常系数线性非齐次差分方程.

一．一阶常系数线性齐次差分方程

形式：$y_{t+1} - ay_t = 0$，（$a \neq 0$）.

即 $y_{t+1} = ay_t$，有 $y_t = ay_{t-1} = a^2 y_{t-2} = \cdots = a^t y_0$，记 $y_0 = C$．通解为 $y_t = C a^t$.

二．一阶常系数线性非齐次差分方程

形式：$y_{t+1}-ay_t=f(t)$，（$a\neq 0$）.

可以证明：如果 $\widetilde{y}_t$ 是 $y_{t+1}-ay_t=f(t)$的一个特解，y_t*是 $y_{t+1}-ay_t=0$ 的通解，

则 $\widetilde{y}_t+y_t{}^*$是 $y_{t+1}-ay_t=f(t)$的通解.

一般，$\widetilde{y}_t$ 与 $f(t)$有类似的形式，用待定系数法可求得 $\widetilde{y}_t$.

（1）若 $f(t)=d^t$，则当 $d\neq a$ 时，取 $\widetilde{y}_t=A\cdot d^t$；当 $d=a$ 时，取 $\widetilde{y}_t=Atd^t$，A 为待定系数.

例　求解 $y_{t+1}+2y_t=3^t$.

解：因 $a=-2$，故 $y_t{}^*=C(-2)^t$.　又因 $d=3\neq a$，取 $\widetilde{y}_t=A\cdot 3^t$，代入原方程，

则 $A\cdot 3^{t+1}+2A\cdot 3^t=5A\cdot 3^t=3^t$，有 $A=\dfrac{1}{5}$，$\widetilde{y}_t=\dfrac{1}{5}\cdot 3^t$，∴通解为 $\widetilde{y}_t+y_t{}^*=\dfrac{1}{5}\cdot 3^t+C(-2)^t$.

例　求解 $y_{t+1}-3y_t=3^t$.

解：因 $a=3$，故 $y_t{}^*=C\cdot 3^t$.　又因 $d=3=a$，取 $\widetilde{y}_t=At3^t$，代入原方程，

则 $A(t+1)3^{t+1}-3At3^t=3A\cdot 3^t=3^t$，有 $A=\dfrac{1}{3}$，$\widetilde{y}_t=\dfrac{1}{3}t3^t$，∴通解为 $\widetilde{y}_t+y_t{}^*=\dfrac{1}{3}t3^t+C\cdot 3^t$.

（2）若 $f(t)=P_m(t)$为 m 次多项式，

则当 $1\neq a$ 时，取 $\widetilde{y}_t=Q_m(t)$；当 $1=a$ 时，取 $\widetilde{y}_t=tQ_m(t)$，其中 $Q_m(t)$为 m 次多项式.

例　求解 $y_{t+1}-y_t=2t-1$.

解：因 $a=1$，故 $y^*=C$.　又因 $1=a$，取 $\widetilde{y}_t=t(At+B)=At^2+Bt$，代入原方程，

则 $A(t+1)^2+B(t+1)-At^2-Bt=2At+A+B=2t-1$，有 $A=1$，$B=-2$，

∴ $\widetilde{y}_t=t^2-2t$，通解为 $\widetilde{y}_t+y_t{}^*=t^2-2t+C$.

§11.3　二阶常系数线性差分方程

形式为 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$ 的方程称为二阶常系数线性差分方程.

特点是 y_{t+2}、y_{t+1}、y_t 都是一次，且系数 a、b（$b\neq 0$）为常数.

当 $f(t)\equiv 0$ 时，$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 称为二阶常系数线性齐次差分方程；

当 $f(t)\neq 0$ 时，$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$ 称为二阶常系数线性非齐次差分方程.

一．二阶常系数线性齐次差分方程

形式：$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$，（$b\neq 0$）.

定理　如果函数 $y_{1,t}$、$y_{2,t}$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的两个线性无关特解（即 $y_{1,t}\neq ky_{2,t}$），

则 $y_t{}^*=C_1y_{1,t}+C_2y_{2,t}$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的通解.

可见，只需找到 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的两个线性无关解 $y_{1,t}$、$y_{2,t}$，即可求出其通解 $y_t{}^*=C_1y_{1,t}+C_2y_{2,t}$.

取 $y_t=\lambda^t$，代入方程 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$，得：$(\lambda^2+a\lambda+b)\lambda^t=0$，　即得 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，

称 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 为 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的特征方程，特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的根为特征根.

设 λ 是特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的特征根，则 $y_t=\lambda^t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的特解.

（1）特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 有两个相异实根 λ_1、λ_2，

则 $y_{1,t}=\lambda_1{}^t$，$y_{2,t}=\lambda_2{}^t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的两个线性无关的特解，

$y_t{}^*=C_1\lambda_1{}^t+C_2\lambda_2{}^t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的通解.

例　求解 $y_{t+2}+5y_{t+1}+6y_t=0$.

解：特征方程 $\lambda^2+5\lambda+6=0$，特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$，　∴通解为 $y_t^*=C_1(-2)^t+C_2(-3)^t$.

例　求解 $y_{t+2}-y_t=0$.

解：特征方程 $\lambda^2-1=0$，特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，　∴通解为 $y_t^*=C_1(-1)^t+C_2$.

例　数列 0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…，求该数列的通项公式 y_n .

并证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{y_{n+1}}\approx 0.618$（黄金分割数）.

证明：因 $y_{n+2}=y_{n+1}+y_n$，且 $y_0=0$，$y_1=1$．特征方程 $\lambda^2=\lambda+1$，特征根 $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，

故通解为 $y_n=C_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+C_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

∵$y_0=0=C_1+C_2$，$y_1=1=C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，有 $C_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$C_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

∴数列的通项公式为 $y_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{y_{n+1}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

（2）特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 有唯一实根 λ_0，

则 $y_{1,t}=\lambda_0^t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的一个特解，可以证明 $y_{2,t}=t\lambda_0^t$ 是另一个特解，

$y_t^*=C_1\lambda_0^t+C_2t\lambda_0^t=(C_1+C_2t)\lambda_0^t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的通解.

例　求解 $y_{t+2}+4y_{t+1}+4y_t=0$.

解：特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，　∴通解为 $y_t^*=(C_1+C_2t)(-2)^t$.

（3）特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 有两个共轭虚根 $\lambda=r(\cos\theta\pm i\sin\theta)$，

可以证明 $y_{1,t}=r^t\cos\theta t$，$y_{2,t}=r^t\sin\theta t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的两个线性无关的特解，

$y_t^*=r^t(C_1\cos\theta t+C_2\sin\theta t)$是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的通解.

注：特征根为共轭虚根时，复数的模对应指数函数，幅角对应正余弦函数.

二．二阶常系数线性非齐次差分方程

形式：$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$，($b\neq 0$).

可以证明：如果 $\widetilde{y}_t$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$的一个特解，$y_t^*$是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0$ 的通解，

则 $\widetilde{y}_t+y_t^*$ 是 $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$的通解.

一般，$\widetilde{y}_t$ 与 $f(t)$有类似的形式，用待定系数法可求得 $\widetilde{y}_t$.

（1）若 $f(t)=d^t$，则取 $\widetilde{y}_t=At^kd^t$，A 为待定系数，当 d 不是特征根、是单根或重根时，k 分别取 0、1、2.

（2）若 $f(t)=P_m(t)$为 m 次多项式，则取 $\widetilde{y}_t=t^kQ_m(t)$，其中 $Q_m(t)$为 m 次多项式，

当 1 不是特征根、是单根或重根时，k 分别取 0、1、2.

（3）若 $f(t)=\cos\theta t$ 或 $\sin\theta t$，则取 $\widetilde{y}_t=t^k(A\cos\theta t+B\sin\theta t)$，

当 $r=\pm\theta i$ 不是特征根、是单根时，k 分别取 0、1.

（4）若 $f(t)=P_m(t)d^t\cos\beta t$ 或 $P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$，则取 $\widetilde{y}_t=t^kQ_m(t)d^t(A\cos\theta t+B\sin\theta t)$，

当 $r=d(\cos\theta\pm i\sin\theta)$不是特征根、是单根或重根时，$k$ 分别取 0、1、2.