# 第三章　导数与微分

## §3.1　导数的概念

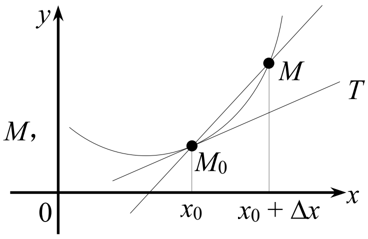
一．导数概念的引出

1．　变速直线运动的瞬时速度

设某质点沿一条直线作变速运动，运动路程 $s$ 与运动时间 $t$ 的函数关系为 $s = s(t)$，讨论速度 $v$ 与时间 $t$ 的函数关系．

在 $t_0$ 时刻，运动路程为 $s(t_0)$，在 $t_0 + \Delta t$ 时刻，运动路程为 $s(t_0 + \Delta t)$，即从 $t_0$ 到 $t_0 + \Delta t$ 的 $\Delta t$ 时间内，该质点运动了 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$，平均速度为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$．令 $\Delta t \to 0$，可得 $t_0$ 时刻的瞬时速度为 $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$，即函数增量与自变量增量的比值极限．

2．　曲线的切线问题




讨论函数曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率．

在曲线上点 $M_0$ 附近任取一点 $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$，作曲线的割线 $M_0M$，

则割线 $M_0M$ 的斜率为 $k_{M_0M} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

令点 $M$ 沿曲线趋于点 $M_0$，割线 $M_0M$ 的极限位置就是切线 $M_0T$，而点 $M \to M_0$ 就是 $\Delta x \to 0$，

故点 $M_0$ 处切线斜率为 $k = \lim\limits_{M\to M_0} k_{M_0M} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，即函数增量与自变量增量的比值极限．

二．导数的定义

以上两个不同的问题，最后都需要考虑函数增量与自变量增量的比值极限，引入导数的定义．

**定义**　设函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内有定义，如果函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 与自变量增量 $\Delta x$ 的比值极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称之为 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数，记为 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，$f'(x_0)$ 或

$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$，并称 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导；反之，若该极限不存在，则称 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处不可导．

导数定义的其它形式：

若令 $h = \Delta x$，有 $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

若令 $x = x_0 + \Delta x$，有 $\Delta x \to 0$ 时，$x \to x_0$，有 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$．

导数定义式的推广：

若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{a\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{a\Delta x}\cdot a = af'(x_0)$，

且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+b\Delta x)-f(x_0+a\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(x_0+b\Delta x)-f(x_0)]-[f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)]}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+b\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = bf'(x_0) - af'(x_0) = (b-a)f'(x_0)$，

如若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -f'(x_0)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0)$．

单侧导数：

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称之为 $y=f(x)$在点 $x_0$ 处的左导数，记为$f_-'(x_0)$；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称之为 $y=f(x)$在点 $x_0$ 处的右导数，记为$f_+'(x_0)$.

显然$f(x)$在点 $x_0$ 处可导的充分必要条件是$f(x)$在点 $x_0$ 处左、右导数都存在而且相等.

导函数：

若函数 $y=f(x)$在开区间 $(a, b)$ 内每一点都可导，则称$f(x)$在开区间 $(a, b)$ 内可导；若$f(x)$在 $(a, b)$ 内可导，且$f_+'(a)$与$f_-'(b)$都存在，则称$f(x)$在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

若函数 $y=f(x)$在某区间上可导，对该区间上每一个 $x$ 值，都有一个确定的导数值$f'(x)$与之对应，这就构成一个新的函数，称之为$f(x)$的导函数，记为$y'$，$\dfrac{dy}{dx}$，$f'(x)$或$\dfrac{df(x)}{dx}$，将导数定义式中的 $x_0$ 换成 $x$，即得导函数的定义 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，导函数也简称为导数.

三．利用导数定义求导

例　常量函数 $y=C$，求 $y'$.

解：因$\Delta y=C-C=0$，故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$，即常量导数 $(C)'=0$.

例　幂函数 $y=x^n$ （$n$ 为正整数），求 $y'$.

解：因 $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\Lambda+C_n^{n-1}x(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n-x^n$

$$=nx^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\Lambda+C_n^{n-1}x(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n,$$

故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\Delta x+\Lambda+C_n^{n-1}x(\Delta x)^{n-2}+(\Delta x)^{n-1}]=nx^{n-1}$，即 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

特别是$(x^2)'=2x$，$(x)'=1$.

例　$y=\sqrt{x}$，求 $y'$.

解：因 $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\dfrac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$，故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，即 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

例　$y=\dfrac{1}{x}$，求 $y'$.

解：因 $\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$，故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x^2}$，即 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

可以证明：对任何实数$\mu$，都有 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$.

例　对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0, a\neq 1$），求 $y'$.

解：因 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$，

故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\log_a e$，即 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

特别是 $a=e$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例　指数函数 $y=a^x$　($a>0, a\neq 1$)，求 $y'$.

解：因$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$，当$\Delta x\to 0$ 时，$a^{\Delta x}-1=e^{\Delta x\ln a}-1\sim\Delta x\ln a$，

故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x\cdot\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$，即 $(a^x)'=a^x\ln a$.

特别是 $a=e$ 时，$(e^x)'=e^x$.

例　正弦函数 $y=\sin x$，求 $y'$.

解：因 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}=2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$，

故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x$，即 $(\sin x)'=\cos x$.

例　余弦函数 $y=\cos x$，求 $y'$.

解：因 $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\dfrac{x+\Delta x+x}{2}\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}=-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$，

故 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=-\sin x$，即 $(\cos x)'=-\sin x$.

至此，已推导出常量函数、幂函数、对数函数、指数函数以及正余弦函数的导函数.

四．导数的意义

导数的实际意义是变化速度.

导数的几何意义就是函数曲线的切线斜率，根据函数曲线的切点坐标 $(x_0, f(x_0))$与切线斜率$f'(x_0)$，由直线的点斜式方程可写出切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. 此外，函数曲线的法线是过切点并垂直于切线的直线，即法线斜率为$-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，相应法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

例　求曲线 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的切线方程与法线方程.

解：在 $x=2$ 处切点为 $(2, 4)$，又因 $y'=2x$，切线斜率为 $y'|_{x=2}=4$，法线斜率为$-\dfrac{1}{y'|_{x=2}}=-\dfrac{1}{4}$，

故切线方程为 $y-4=4(x-2)$，即 $y=4x-4$；法线方程为 $y-4=-\dfrac{1}{4}(x-2)$，即 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{2}$.

注：当导数$f'(x_0)=\infty$ 时，即切线斜率为$\infty$，此时切线为竖直切线 $x=x_0$.

五．可导与连续的关系

函数 $y=f(x)$ 连续，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$；函数 $y=f(x)$ 可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在.

**定理**　可导必连续，但连续不一定可导.

证：设 $y=f(x)$ 可导，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$，即 $y=f(x)$ 连续.

而 $y=f(x)$ 连续时，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，分式极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为$\dfrac{0}{0}$ 型，但极限不一定存在.

如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处有 $|0|=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，故 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续；但 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-|0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-|0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，故 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

又如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处有 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0=\sqrt[3]{0}$，故 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处连续；但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$，故 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处有不可导.

函数连续的几何意义是函数图形连成一条不断开的曲线；函数可导的几何意义是函数曲线光滑无尖点和竖直切点.

例　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 2,\\ \dfrac{x^2}{2}+2, & x>2,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x=0,1,2$ 处的连续性和可导性.

解：在 $x=0$ 处，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0，\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty，$$

故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导；

在 $x=1$ 处，$f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$，有 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，

故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续也不可导；

在 $x=2$ 处，$f(2)=4$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}2x=4$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2}{2}+2\right)=4$，有 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-4}{x-2}=2，f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{2}=2，$$

故 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续且可导.

讨论分段函数在分段点处的可导性，一般应先讨论其连续性，若不连续，则必不可导；若连续，则再进一步讨论其可导性.

例　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 1,\\ x^2+ax+b, & x>1,\end{cases}$ 问 $a,b$ 取何值时，函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导？

解：函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，必在 $x=1$ 处连续，

因 $f(1)=e$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}e^x=e$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+ax+b)=1+a+b$，则 $1+a+b=e$，

又因 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}e\cdot\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=e$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2+ax+b)-(1+a+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1+a)=2+a$，则 $2+a=e$，

故 $a=e-2$，$b=1$.

## §3.2 求导法则

为了解决初等函数求导问题，将给出四则运算求导法则，复合函数求导法则以及所有基本初等函数的导数公式.

一．四则运算求导法则

**定理** 和差的导数等于导数的和差，即 $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

证：设 $y = u \pm v$，有$\Delta y = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$，

则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$，故 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$.

例 设 $y = x^3 + x^2 - x + 7$，求 $y'$.

解：$y' = (x^3)' + (x^2)' - (x)' + (7)' = 3x^2 + 2x - 1$.

例 设 $y = \sin x - \cos x + \ln x - \ln \pi$，求 $y'$.

解：$y' = (\sin x)' - (\cos x)' + (\ln x)' - (\ln \pi)' = \cos x - (-\sin x) + \dfrac{1}{x} - 0 = \cos x + \sin x + \dfrac{1}{x}$.

**定理** 乘积的导数等于交叉求导之和，即 $(uv)' = u'v + uv'$.

证：设 $y = uv$，有$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$，

则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$，

故 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = u'v + uv' + u' \cdot 0 = u'v + uv'$.

**推论** 常数因子可移到导数符号外，即 $(Cu)' = Cu'$.

证：$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 + Cu' = Cu'$.

**推论** $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$，$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'$.

证：$(uvw)' = u'vw + u(vw)' = u'vw + uv'w + uvw'$，依此类推.

例 设 $y = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 4$，求 $y'$.

解：$y' = 5(x^3)' - 3(x^2)' + 7(x)' - (4)' = 15x^2 - 6x + 7$.

例 设 $y = e^x \sin x$，求 $y'$.

解：$y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$.

例 设 $y = \sqrt{x} \ln x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = (\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x} (\ln x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$.

例 设 $y = x^2 \cos x \ln x$，求 $y'$.

解：$y' = (x^2)' \cos x \ln x + x^2 (\cos x)' \ln x + x^2 \cos x (\ln x)' = 2x \cos x \ln x + x^2 (-\sin x) \ln x + x^2 \cos x \cdot \dfrac{1}{x}$

$= 2x \cos x \ln x - x^2 \sin x \ln x + x \cos x$.

**定理** 商的导数等于交叉求导之差除以分母的平方，即 $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

证：设 $y = \dfrac{u}{v}$，有 $\Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{uv + \Delta u \cdot v - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \dfrac{\Delta u \cdot v - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$，则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$，

故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v)} = \dfrac{u'v - uv'}{v(v + 0)} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

**推论** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

证：在商的导数中，令 $u=1$ 即得.

例 设 $y=\dfrac{\sin x}{x}$，求 $y'$.

解：$y' = \dfrac{(\sin x)'\cdot x - \sin x\cdot x'}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

例 设 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sqrt{x})'\cdot\ln x - \sqrt{x}\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x - \sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}\ln^2 x}$.

例 正切函数 $y=\tan x$，求 $y'$.

解：$y' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$，即 $(\tan x)' = \sec^2 x$.

同理 $(\cot x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\cdot\sin x - \cos x\cdot(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$，即 $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

例 正割函数 $y=\sec x$，求 $y'$.

解：$y' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{-(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = \tan x\sec x$，即 $(\sec x)' = \tan x\sec x$.

同理 $(\csc x)' = \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = \dfrac{-(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\sin x} = -\cot x\csc x$，即 $(\csc x)' = -\cot x\csc x$.

二．反函数求导法则

**定理** 设函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 在变量 $y$ 的取值区间 $I_y$ 上可导，且 $g'(y)\neq 0$，则函数 $y=f(x)$ 在变量 $x$ 相应的取值区间 $I_x$ 上可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$，即函数的导数与其反函数的导数互为倒数.

证：因 $x=g(y)$ 在 $I_y$ 上可导必连续，有$\Delta y\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，

又因 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$，且 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = g'(y)\neq 0$，故 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \dfrac{1}{g'(y)}$.

例 反正弦函数 $y=\arcsin x$，求 $y'$.

解：因 $y=\arcsin x$ 的反函数为 $x=\sin y \quad y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，且 $(\sin y)'=\cos y$ 在 $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内不等于 0，

相应在 $x\in(-1,1)$ 内，$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理，$y=\arccos x$ 的反函数为 $x=\cos y \quad y\in[0,\pi]$，且 $(\cos y)' = -\sin y$ 在 $y\in(0,\pi)$ 内不等于 0，

相应在 $x\in(-1,1)$ 内，$(\arccos x)'=\dfrac{1}{(\cos y)'}=\dfrac{1}{-\sin y}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

例　反正切函数 $y=\arctan x$，求 $y'$.

解：因 $y=\arctan x$ 的反函数为 $x=\tan y\quad y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $(\tan y)'=\sec^2 y\ne 0$，

故 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{(\tan y)'}=\dfrac{1}{\sec^2 y}=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$ .

同理，$y=\operatorname{arccot} x$ 的反函数为 $x=\cot y\quad y\in(0,\pi)$，且 $(\cot y)'=-\csc^2 y\ne 0$，

故 $(\operatorname{arccot} x)'=\dfrac{1}{(\cot y)'}=\dfrac{1}{-\csc^2 y}=-\dfrac{1}{1+\cot^2 y}=-\dfrac{1}{1+x^2}$ .

三．复合函数求导法则

**定理**　设函数 $u=\varphi(x)$ 在变量 $x$ 的取值区间 $I_x$ 上可导，函数 $y=f(u)$ 在变量 $u$ 相应的取值区间 $I_u$ 上可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $I_x$ 上可导，且 $\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ .

证：因 $u=\varphi(x)$ 在 $I_x$ 上可导必连续，有 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，

又因 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$，故 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ .

使用复合函数求导法则应当注意求导时的自变量，变量 $y$ 关于 $x$ 的导数与 $y$ 关于 $u$ 的导数不同.

例　幂函数 $y=x^{\mu}$，求 $y'$.

解：因 $y=e^{\ln x^{\mu}}=e^{\mu\ln x}$，故 $y'=(e^{\mu\ln x})'=(e^u)'\cdot(\mu\ln x)'=e^u\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{x}=x^{\mu}\cdot\dfrac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}$，即 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$.

例　$y=\ln|x|$，求 $y'$.

解：当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，有 $y'=\dfrac{1}{x}$；当 $x<0$ 时，$y=\ln(-x)$，有 $y'=(\ln u)'\cdot(-x)'=\dfrac{1}{u}\cdot(-1)=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}$，

故 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ .

至此，已得到关于初等函数的全部求导公式与求导法则：

1．常量函数，$(C)'=0$；

2．幂函数，$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，特别是 $(x^2)'=2x$，$(x)'=1$，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$；

3．指数函数，$(a^x)'=a^x\ln a$，特别是 $(e^x)'=e^x$；

4．对数函数，$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，特别是 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$；

5．三角函数，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\cot x)'=-\csc^2 x$，
$(\sec x)'=\tan x\sec x$，$(\csc x)'=-\cot x\csc x$；

6．反三角函数，$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$；

7．四则运算，$(u\pm v)'=u'\pm v'$，$(uv)'=u'v+uv'$，$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$，特别是 $(Cu)'=Cu'$，$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$；

8．复合函数，$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$．

例　$y=(2x+1)^{10}$，求 $y'$．

解：$y'=(u^{10})'\cdot(2x+1)'=10u^9\cdot(2+0)=20(2x+1)^9$．

熟悉之后，可以不引入中间变量 $u$．如$[(2x+1)^{10}]'=10(2x+1)^9\cdot(2x+1)'=10(2x+1)^9\cdot 2=20(2x+1)^9$．

例　$y=5^{\sin x}$，求 $y'$．

解：$(5^{\sin x})'=5^{\sin x}\ln 5\cdot(\sin x)'=5^{\sin x}\ln 5\cdot\cos x$．

例　$y=\sqrt{x^2+1}$，求 $y'$．

解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$．

例　$y=\ln\arctan x$，求 $y'$．

解：$y'=\dfrac{1}{\arctan x}\cdot(\arctan x)'=\dfrac{1}{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$．

例　$y=\arcsin\sqrt{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$．

例　$y=\sin^2 x+\sin x^2$，求 $y'$．

解：$y'=2\sin x\cdot(\sin x)'+\cos x^2\cdot(x^2)'=2\sin x\cos x+2x\cos x^2$．

多重复合函数求导时，应先对最外层函数求导，再乘上去掉最外层后的导数，由外向内逐层展开．

例　$y=\arctan\sqrt{1-x^2}$，求 $y'$．

解：$y'=\dfrac{1}{1+1-x^2}\cdot(\sqrt{1-x^2})'=\dfrac{1}{2-x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=\dfrac{1}{2-x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\dfrac{x}{(x^2-2)\sqrt{1-x^2}}$．

例　$y=2^{\tan^2\frac{\ln x}{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．

解：
$$\frac{dy}{dx}=2^{\tan^2\frac{\ln x}{x}}\ln 2\cdot\left(\tan^2\frac{\ln x}{x}\right)'=2^{\tan^2\frac{\ln x}{x}}\ln 2\cdot 2\tan\frac{\ln x}{x}\cdot\left(\tan\frac{\ln x}{x}\right)'$$
$$=2^{\tan^2\frac{\ln x}{x}}\ln 2\cdot 2\tan\frac{\ln x}{x}\cdot\sec^2\frac{\ln x}{x}\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=2^{\tan^2\frac{\ln x}{x}}\ln 2\cdot 2\tan\frac{\ln x}{x}\sec^2\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}$$
$$=2^{\tan^2\frac{\ln x}{x}}\ln 2\cdot 2\tan\frac{\ln x}{x}\sec^2\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

例　$y=\sin^2\ln^3 x^5$，求 $y'$．

解：$y'=2\sin\ln^3 x^5\cdot(\sin\ln^3 x^5)'=2\sin\ln^3 x^5\cos\ln^3 x^5\cdot(\ln^3 x^5)'=\sin(2\ln^3 x^5)\cdot 3\ln^2 x^5\cdot(\ln x^5)'$
$$=\sin(2\ln^3 x^5)\cdot 3\ln^2 x^5\cdot\frac{1}{x^5}\cdot(x^5)'=\sin(2\ln^3 x^5)\cdot 3\ln^2 x^5\cdot\frac{1}{x^5}\cdot 5x^4=\frac{15}{x}\sin(2\ln^3 x^5)\cdot\ln^2 x^5.$$

幂指函数应先化为一般初等函数，再求导．

例　$y = x^x$，求 $y'$.

解：因 $y = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$，故 $y' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x\cdot[x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'] = x^x(\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$.

例　$y = (\sin x)^{\cos x}$，求 $y'$.

解：因 $y = e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\cos x\cdot\ln\sin x}$，

故 $y' = e^{\cos x\cdot\ln\sin x}\cdot(\cos x\cdot\ln\sin x)' = (\sin x)^{\cos x}\cdot[(\cos x)'\cdot\ln\sin x + \cos x\cdot(\ln\sin x)']$

$$= (\sin x)^{\cos x}\cdot[-\sin x\cdot\ln\sin x + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'] = (\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

抽象函数求导，应区别$\{f[g(x)]\}'$ 与$f'[g(x)]$，有$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]\cdot g'(x)$．最后结果中只能有$f'[g(x)]$的形式，而不能有$\{f[g(x)]\}'$ 的形式.

例　$y = f^2(\sin x)$，且$f$可导，求 $y'$.

解：$y' = [f^2(\sin x)]' = 2f(\sin x)\cdot[f(\sin x)]' = 2f(\sin x)\cdot f'(\sin x)\cdot(\sin x)' = 2f(\sin x)f'(\sin x)\cdot\cos x$.

例　$y = f(\ln x) + \ln f(x)$，且$f$可导，求 $y'$.

解：$y' = [f(\ln x)]' + [\ln f(x)]' = f'(\ln x)\cdot(\ln x)' + \dfrac{1}{f(x)}\cdot[f(x)]' = f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$.

例　试证：可导的偶函数的导数是奇函数，可导的奇函数的导数是偶函数.

证：设函数$f(x)$ 可导且是偶函数，$g(x)$ 可导且是奇函数，即$f(-x) = f(x)$，$g(-x) = -g(x)$，

则$[f(-x)]' = [f(x)]'$，有$f'(-x)\cdot(-1) = f'(x)$，即 $-f'(-x) = f'(x)$，故$f'(x)$ 是奇函数；

又$[g(-x)]' = -[g(x)]'$，有 $g'(-x)\cdot(-1) = -g'(x)$，即 $g'(-x) = g'(x)$，故 $g'(x)$ 是偶函数.

分段函数在分段点处的导数应按定义求导.

例　$f(x) = \begin{cases} x + x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求$f'(x)$.

解：当 $x\neq 0$ 时，$f(x) = x + x^2\sin\dfrac{1}{x}$，

有 $f'(x) = x' + (x^2)'\sin\dfrac{1}{x} + x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)' = 1 + 2x\sin\dfrac{1}{x} + x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = 1 + 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$，

当 $x = 0$ 时，函数显然连续，并且有 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 1$，

故 $f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

## §3.3　高阶导数

函数 $y = f(x)$的导函数 $y' = f'(x)$仍然是关于 $x$ 的函数，可以再关于 $x$ 求导数，导数的导数 $(y')'$ 称为二阶导数，记为 $y''$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$f''(x)$或$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

例　$y = \ln x$，求 $y''$.

解：$y' = \dfrac{1}{x}$，$y'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

例　$y=\arcsin x$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)'=-\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot(-2x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

例　$y=f(\sin x)$，且 $f$ 二阶可导，求 $y''$.

解：$y'=f'(\sin x)\cdot(\sin x)'=f'(\sin x)\cdot\cos x$，

$y''=[f'(\sin x)]'\cdot\cos x+f'(\sin x)\cdot(\cos x)'=f''(\sin x)\cdot(\sin x)'\cdot\cos x+f'(\sin x)\cdot(-\sin x)$

$=f''(\sin x)\cdot\cos^2 x-f'(\sin x)\cdot\sin x$.

二阶导数再关于 $x$ 求导数，$(y'')'$ 称为三阶导数，记为 $y'''$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}$，$f'''(x)$或$\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$. 依此类推，可有 4 阶，5 阶，…，$n$ 阶导数，分别记为 $y^{(4)},y^{(5)},\cdots,y^{(n)}$ 或 $\dfrac{d^4y}{dx^4}$，$\dfrac{d^5y}{dx^5}$，…，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数，相应，导数 $y'$ 又称为一阶导数，函数 $y=f(x)$ 自身有时也记为 $y^{(0)}$ （0 阶导数）.

例　$y=\arctan x$，求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]'=\frac{(-2)(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}.$$

求高阶导数时，一般应先求一阶导数，再求二阶，逐阶求导，直至得到所要求的高阶导数. 而对于一般的 $n$ 阶导数，则需要根据所求得一些高阶导数总结规律，得出一般性结论.

例　$y=a^x$，求 $y^{(n)}$.

解：$y'=a^x\ln a$，$y''=(a^x\ln a)'=(a^x)'\ln a=a^x(\ln a)^2$，$y'''=[a^x(\ln a)^2]'=(a^x)'(\ln a)^2=a^x(\ln a)^3$，

一般地，$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.

例　$y=\dfrac{1}{x+a}$，求 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{(x+a)^2}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-[(x+a)^{-2}]'=2(x+a)^{-3}$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}=2[(x+a)^{-3}]'=-6(x+a)^{-4}$，

$\dfrac{d^4y}{dx^4}=-6[(x+a)^{-4}]'=24(x+a)^{-5}$，一般地，$\dfrac{d^ny}{dx^n}=(-1)^n\cdot n!\cdot(x+a)^{-n-1}=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$.

例　$y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解：$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，$y'''=-\cos x$，$y^{(4)}=\sin x$，

一般地，$y^{(n)}=\begin{cases}\sin x, & n=4k,\\ \cos x, & n=4k+1,\\ -\sin x, & n=4k+2,\\ -\cos x, & n=4k+3,\end{cases}\quad k=0,1,2,\Lambda$ .

或 $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$，$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$， $y''' = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$，

$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 2\pi)$，一般地， $y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ .

例 $y = x^m$ （$m$ 为正整数），求 $y^{(n)}$.

解：$y' = m x^{m-1}$，$y'' = m(m-1) x^{m-2}$，$y''' = m(m-1)(m-2) x^{m-3}$，

一般地，$y^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1) x^{m-n}$，有 $y^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\Lambda\ (m-n+1)x^{m-n}, & n < m, \\ m! & n = m, \\ 0 & n > m. \end{cases}$

对于 $m$ 次多项式 $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$，有$[P(x)]^{(m)} = m!$，而 $n > m$ 时，$[P(x)]^{(n)} = 0$.

例 $y = x(2x+3)^3(3x^2-5)^2$，求 $y^{(8)}$，$y^{(9)}$.

解：因 $y = 72x^8 + a_1 x^7 + \cdots + a_8$，故 $y^{(8)} = 72 \times 8!$，$y^{(9)} = 0$.

关于函数运算的 $n$ 阶导数，有如下定理：

**定理** 设 $u$ 和 $v$ 均有 $n$ 阶导数，则

（1）$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$；

（2）$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \Lambda + \dfrac{n(n-1)\Lambda\ (n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \Lambda + uv^{(n)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} .$$

证：（1）设 $y = u \pm v$，有 $y' = u' \pm v'$，$y'' = (u' \pm v')' = u'' \pm v''$，依此类推，$y^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$；

（2）设 $y = uv$，有 $y' = u'v + uv'$，$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$，

且 $y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$，依此类推，得证.

例 $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$，求 $y^{(n)}$.

解：设 $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3}$，有 $1 = A(x+3) + B(x-1)$，$\begin{cases} A + B = 0, \\ 3A - B = 1, \end{cases}$ 得 $A = \dfrac{1}{4}, B = -\dfrac{1}{4}$，

则 $y = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+3}$，故 $y^{(n)} = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{x+3}\right)^{(n)} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$ .

例 $y = \dfrac{e^x}{x+1}$，求 $y^{(n)}$.

解：因 $(e^x)^{(k)} = e^x$，$\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(k)} = \dfrac{(-1)^k\cdot k!}{(x+1)^{k+1}}$，

故 $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot e^x\,\dfrac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1)\Lambda\ (n-k+1)\dfrac{e^x}{(x+1)^{k+1}}$ .

例 $y = x^2 \sin 2x$，求 $y^{(n)}$.

解：因 $(x^2)' = 2x$，$(x^2)'' = 2$，当 $k \ge 3$ 时，$(x^2)^{(k)} = 0$，

且 $(\sin 2x)' = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})$，$(\sin 2x)'' = -4\sin 2x = 4\sin(2x + \pi)$，

一般地，$(\sin 2x)^{(k)} = 2^k \sin(2x + \frac{k\pi}{2})$，

故 $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\sin 2x)^{(n-k)}(x^2)^{(k)}=\sum_{k=0}^{2}C_n^k\cdot 2^{n-k}\sin[2x+\frac{(n-k)\pi}{2}](x^2)^{(k)}$

$=2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2})\cdot x^2+n\cdot 2^{n-1}\sin[2x+\frac{(n-1)\pi}{2}]\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^{n-2}\sin[2x+\frac{(n-2)\pi}{2}]\cdot 2$

$=2^n x^2\sin(2x+\frac{n\pi}{2})+n\cdot 2^n x\sin[2x+\frac{(n-1)\pi}{2}]+n(n-1)\cdot 2^{n-2}\sin[2x+\frac{(n-2)\pi}{2}]$.

## §3.4　隐函数及参数方程函数的导数

一．隐函数求导法

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 $y$ 关于 $x$ 的函数，称为隐函数．隐函数 $F(x,y)=0$ 求 $y'$ 时，在方程两边关于自变量 $x$ 求导，求导时应将含 $y$ 的式子看作关于 $x$ 的复合函数，最后再通过方程解出 $y'$，需要注意的是在隐函数的导数 $y'$的表达式中可以含有自变量 $x$ 和因变量 $y$.

例　已知 $x^2+y^2=a^2$ 确定 $y$ 是关于 $x$ 的隐函数，求 $y'$.

解：方程两边关于 $x$ 求导，得 $(x^2)'+(y^2)'=(a^2)'$，即 $2x+2y\cdot y'=0$，故 $y'=-\frac{x}{y}$.

例　已知 $x^2\sin y+y\cos xy=e^y$ 确定 $y$ 是关于 $x$ 的隐函数，求 $y'$.

解：方程两边关于 $x$ 求导，得 $2x\sin y+x^2\cos y\cdot y'+y'\cdot\cos xy+y(-\sin xy)\cdot(y+xy')=e^y\cdot y'$，

则 $x^2\cos y\cdot y'+y'\cdot\cos xy-y\sin xy\cdot xy'-e^y\cdot y'=-2x\sin y+y\sin xy\cdot y$，

故 $y'=\dfrac{-2x\sin y+y^2\sin xy}{x^2\cos y+\cos xy-xy\sin xy-e^y}$.

例　已知 $e^{xy}+xe^y-y^2\sin(x-1)=2$ 确定 $y$ 是关于 $x$ 的隐函数，求 $y'|_{x=1}$，并求函数曲线在 $x=1$ 处的切线.

解：方程两边关于 $x$ 求导，得 $e^{xy}\cdot(y+xy')+1\cdot e^y+xe^y\cdot y'-2y\cdot y'\cdot\sin(x-1)-y^2\cos(x-1)=0$，

则 $[xe^{xy}+xe^y-2y\sin(x-1)]y'=-ye^{xy}-e^y+y^2\cos(x-1)$，即 $y'=\dfrac{-ye^{xy}-e^y+y^2\cos(x-1)}{xe^{xy}+xe^y-2y\sin(x-1)}$，

当 $x=1$ 时，有 $e^y+e^y-0=2$，即 $e^y=1$，得 $y=0$，

故 $y'|_{x=1}=\dfrac{0-1+0}{1+1-0}=-\dfrac{1}{2}$，切线方程为 $y-0=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

隐函数的高阶导数

例　已知 $x^2+y^2=a^2$ 确定 $y$ 是关于 $x$ 的隐函数，求 $y''$.

解：方程两边关于 $x$ 求导，得 $(x^2)'+(y^2)'=(a^2)'$，即 $2x+2y\cdot y'=0$，有 $y'=-\frac{x}{y}$.

故 $y''=-\dfrac{y-xy'}{y^2}=-\dfrac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\dfrac{y^2+x^2}{y^3}=-\dfrac{a^2}{y^3}$.

例　已知 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定 $y$ 是关于 $x$ 的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：方程两边关于 $x$ 求导，得 $\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)'$，

有 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{y'\cdot x-y\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2y\cdot y')$，即 $\dfrac{xy'-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$，有 $xy'-y=x+yy'$，

则 $(x-y)\,y'=x+y$，得 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$，

故 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)'=\dfrac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\dfrac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\dfrac{2x\cdot\dfrac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}=\dfrac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$.

取对数求导法：

若所需求导的函数是多个因式的乘除式，利用取对数化乘除为加减后再求导，可简化运算．只是取对数后将显函数化成了隐函数．

例　$y=\sqrt{\dfrac{e^x(2-x)}{(x+3)(x^2+1)}}$，求 $y'$.

解：多个因式的乘除式，先取对数化乘除为加减，

则 $\ln|y|=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{e^x(2-x)}{(x+3)(x^2+1)}\right|=\dfrac{1}{2}[x+\ln|2-x|-\ln|x+3|-\ln|x^2+1|]$，

方程两边关于 $x$ 求导，得 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{2}[1+\dfrac{1}{2-x}(2-x)'-\dfrac{1}{x+3}(x+3)'-\dfrac{1}{x^2+1}(x^2+1)']$，

故 $y'=\dfrac{y}{2}[1+\dfrac{1}{2-x}\cdot(-1)-\dfrac{1}{x+3}\cdot 1-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x]=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{e^x(2-x)}{(x+3)(x^2+1)}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

幂指函数也可以用取对数求导法．

例　$y=(\sin x)^{\cos x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：幂指函数，取对数，得 $\ln y=\ln(\sin x)^{\cos x}=\cos x\ln(\sin x)$，

方程两边关于 $x$ 求导，得 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=(\cos x)'\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=-\sin x\cdot\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$，

故 $y'=y\cdot\left(-\sin x\cdot\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$.

例　已知 $x^y=y^x$ 确定 $y$ 是关于 $x$ 的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：幂指函数，取对数，得 $y\ln x=x\ln y$，

方程两边关于 $x$ 求导，得 $y'\cdot\ln x+y\cdot\dfrac{1}{x}=\ln y+x\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'$，即 $\left(\ln x-\dfrac{x}{y}\right)y'=\ln y-\dfrac{y}{x}$，

故 $y'=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$.

二．参数方程函数求导法

由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$所确定的 $y$ 关于 $x$ 的函数，称为参数方程函数．当$\varphi(t)$与$\psi(t)$都可导且$\varphi'(t)\neq 0$时，则有 $y$ 关于 $x$ 的导数存在，$y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$．

证：因$\varphi(t)$可导必连续，有$\Delta t\to 0$时，$\Delta x\to 0$，

又因$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$，故$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$．

进一步，当$\varphi(t)$与$\psi(t)$都二阶可导且$\varphi'(t)\neq 0$时，则$y''=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$．

例　椭圆的参数方程为$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$与$\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a^2}\csc^3 t$．

## §3.5　微分

一．微分的概念

进一步讨论函数增量，如$y=x^2$，有$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$，即$\Delta x$的一次项 $+\Delta x$ 的高次项，当$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx 2x\Delta x$.

又如$y=x^3$，有$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+[3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]$，同样是$\Delta x$的一次项 $+\Delta x$ 的高次项，且当$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx 3x^2\Delta x$.

**定义**　设函数$y=f(x)$在点 $x$ 处的函数增量$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $A$ 与$\Delta x$无关，$A\,\Delta x$是$\Delta x$一次项，$o(\Delta x)$是$\Delta x\to 0$时的高阶无穷小量，则称$y=f(x)$可微，并称$A\,\Delta x$是$y=f(x)$的微分，记为 $dy$，即 $dy=A\,\Delta x$.

当$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx dy=A\,\Delta x$.

**定理**　函数$y=f(x)$可微的充分必要条件是$y=f(x)$可导，且$dy=f'(x)\,\Delta x$.

证：设函数$y=f(x)$可微，有$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x)$，

则$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+0=A$，故$y=f(x)$可导；

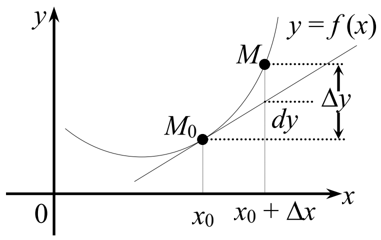
设函数$y=f(x)$可导，有$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，其中$\alpha$是$\Delta x\to 0$时的无穷小量，

即$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha\Delta x=f'(x)\,\Delta x+o(\Delta x)$，故$y=f(x)$可微，且$dy=f'(x)\,\Delta x$.

自变量的微分$dx=(x)'\,\Delta x=\Delta x$，微分计算公式一般写为$dy=f'(x)\,dx$．两边同除以 $dx$，就有$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$．导数$\dfrac{dy}{dx}$可以看作是函数微分与自变量微分之商，导数又可称为微商．

二．微分的几何意义

作函数曲线 $y=f(x)$，函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 在图形上表现为曲线上两点的纵坐标之差；而导数 $f'(x)$ 表示切线斜率，则微分 $dy=f'(x)\,\Delta x$ 在图形上表现为切线上的纵坐标之差．




即微分的几何意义为切线上的纵坐标增量，当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$ 反映在切点附近可用切线近似代替曲线．

三．微分的计算

对于可微函数 $y=f(x)$，只需求出导数 $y'=f'(x)$，再利用公式 $dy=f'(x)\,dx$，得到函数 $y=f(x)$ 的微分．如 $y=\sin x$，有微分 $dy=(\sin x)'dx=\cos x\,dx$；又如 $y=\ln(x^2+1)$，有微分 $dy=[\ln(x^2+1)]'dx=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$．

根据导数公式，可得相应的微分公式．

1．基本初等函数的微分公式

（1）常量函数，$dC=0$；

（2）幂函数，$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\,dx$，特别是 $d(x^2)=2x\,dx$，$d(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$，$d\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}dx$；

（3）指数函数，$d(a^x)=a^x\ln a\,dx$，特别是 $d(e^x)=e^x\,dx$；

（4）对数函数，$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$，特别是 $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$，$d(\ln|x|)=\dfrac{1}{x}dx$；

（5）三角函数，$d(\sin x)=\cos x\,dx$，$d(\cos x)=-\sin x\,dx$，$d(\tan x)=\sec^2 x\,dx$，$d(\cot x)=-\csc^2 x\,dx$，
$d(\sec x)=\tan x\sec x\,dx$，$d(\csc x)=-\cot x\csc x\,dx$；

（6）反三角函数，$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，

$$d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx.$$

2．四则运算的微分法则

$$d(u\pm v)=du\pm dv,\quad d(uv)=v\,du+u\,dv,\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$，特别是 $d(Cu)=C\,du$，$d\left(\dfrac{1}{v}\right)=\dfrac{-dv}{v^2}$．

3．复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 均可微，有 $y'=f'(u)\varphi'(x)$，$dy=f'(u)\varphi'(x)\,dx$，而 $du=\varphi'(x)\,dx$，

则 $dy=f'(u)\,du$，此式不论 $u$ 为自变量还是中间变量都成立，称之为一阶微分的形式不变性．

例　$y=\sin^2(\ln x)$，求 $dy$．

解：因 $y'=2\sin(\ln x)\cdot[\sin(\ln x)]'=2\sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x)\cdot(\ln x)'=\sin(2\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$，故 $dy=\dfrac{\sin(2\ln x)}{x}dx$．

或：$dy=2\sin(\ln x)\cdot d[\sin(\ln x)]=2\sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x)\cdot d(\ln x)=\sin(2\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx$．

隐函数的微分

例　$2xy-\sin(x^2+y^2)=1$，求 $dy$．

解：方程两边关于 $x$ 求导，得 $2y+2xy'-\cos(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy')=0$，

则 $[x-y\cos(x^2+y^2)]\,y'=-y+x\cos(x^2+y^2)$，

故 $y'=\dfrac{-y+x\cos(x^2+y^2)}{x-y\cos(x^2+y^2)}$，$dy=\dfrac{-y+x\cos(x^2+y^2)}{x-y\cos(x^2+y^2)}dx$．

或：方程两边微分，得 $2y\,dx+2x\,dy-\cos(x^2+y^2)\cdot(2x\,dx+2y\,dy)=0$，

则 $[x-y\cos(x^2+y^2)]\,dy=[-y+x\cos(x^2+y^2)]\,dx$，故 $dy=\dfrac{-y+x\cos(x^2+y^2)}{x-y\cos(x^2+y^2)}dx$ .

注：隐函数方程两边关于 $x$ 求导时，对于自变量 $x$ 与因变量 $y$ 处理方式不同；

而隐函数方程两边微分时，对于自变量 $x$ 与因变量 $y$ 处理方式却相同.

抽象函数的微分

如 $y=f(\sin x)$，且 $f$ 可微，则 $dy=[f(\sin x)]'dx=f'(\sin x)\,d(\sin x)=f'(\sin x)\cdot\cos x\,dx$.

参数方程函数的微分与导数

如 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $\varphi,\psi$ 可微，且 $\varphi'(t)\neq 0$，有 $dy=\psi'(t)\,dt$，$dx=\varphi'(t)\,dt$，故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ .

求微分与凑微分

函数 $y=f(x)$， $$df(x)\underset{\text{凑微分}}{\overset{\text{求微分}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}f'(x)\,dx$$

如 $d(ax+b)=(ax+b)'\,dx=a\,dx$，有 $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)\quad(a\neq 0)$，又 $d(x^2)=2x\,dx$，有 $xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2)$ .

常用的凑微分公式

$dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)\quad(a\neq 0)$，$xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2)$，$x^{\mu}dx=\dfrac{1}{\mu+1}d(x^{\mu+1})\quad(\mu\neq -1)$，$x^{-1}dx=\dfrac{1}{x}dx=d(\ln x)$，

$e^x dx=d(e^x)$，$\sin x\,dx=-d(\cos x)$，$\cos x\,dx=d(\sin x)$.

四．微分在近似计算中的应用

若函数 $y=f(x)$ 可微，故当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$，即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\,\Delta x$，

可得近似计算公式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x$，令 $x=x_0+\Delta x$，又可得 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$.

计算函数值 $f(x)$ 时，若不易直接计算，可在点 $x$ 附近选取点 $x_0$，使 $f(x_0)$ 易于计算，再利用近似计算公式.

例　求 $\sqrt{10}$ 的近似值.

解：设 $f(x)=\sqrt{x}$ ，有 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ，取 $x_0=9$，有 $f(9)=3$， $f'(9)=\dfrac{1}{6}$ ，

故 $\sqrt{10}=f(9)+f'(9)\cdot(10-9)=3+\dfrac{1}{6}\cdot 1\approx 3.1667$ .

或：取 $x_0=10.24$，有 $f(10.24)=3.2$， $f'(10.24)=\dfrac{1}{6.4}$ ，

故 $\sqrt{10}=f(10.24)+f'(10.24)\cdot(10-10.24)=3.2+\dfrac{1}{6.4}\times(-0.24)=3.1625$ .

注：实际上 $\sqrt{10}=3.1623$ ，一般 $x_0$ 越接近 10，近似计算结果越精确.

## §3.6　导数在经济分析中的意义

一．边际分析

经济学中的边际函数就是数学中的导数.

因函数 $y=f(x)$ 可导时，点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ，当 $|\Delta x|$ 很小时， $f'(x_0)\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ，

故当 $\Delta x=1$ 时，$f'(x_0)\approx\Delta y$.

注：边际函数在数学中的意义是导数，在经济学中的意义是自变量改变一个单位时，函数的增量.

如“西方经济学”中边际成本是指生产最后一单位产量时所增加的成本．

| 产量 | 成本 | 边际成本 |
|---|---|---|
| 99 | 300 | — |
| 100 | 302.7 | $302.7-300=2.7$ |
| 101 | 305.3 | $305.3-302.7=2.6$ |
| 102 | 307.6 | $307.6-305.3=2.3$ |
| 103 | 310 | $310-307.6=2.4$ |

例　成本函数 $C(x)=10+4\sqrt{x}+3x$，求：（1）边际成本函数；（2）产量为 100 时，每增加一单位产量，成本如何变化？

解：（1）边际成本函数为 $C'(x)=0+4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3$；

（2）当产量 $x=100$ 时，$C'(100)=3.2$，即产量为 100 时，每增加一单位产量，成本将增加 3.2．

例　需求函数为 $Q=100-2P$ （$Q$ 为需求量，单位：百件，$P$ 为价格，单位：万元/百件）．求：（1）边际收益函数（收益关于销量的导数）；（2）销量为 3 千件时，每多销售 200 件，收益如何变化？

解：（1）收益函数 $R(Q)=QP=Q\left(50-\dfrac{1}{2}Q\right)=50Q-\dfrac{1}{2}Q^2$，边际收益函数 $R'(Q)=50-Q$；

（2）销量为 3 千件，即 $Q=30$（百件），$R'(30)=20$，每多销售 2 百件，收益将增加 20 万元．

二．弹性分析

绝对变化与相对变化

变量 $x$ 由 1 变到 2，增量 $\Delta x=1$；由 100 变到 101，仍然是增量 $\Delta x=1$．但前者的变化显得更大．

相对增量 $\dfrac{\Delta x}{x}$

变量 $x$ 由 1 变到 2，相对增量 $\dfrac{\Delta x}{x}=\dfrac{1}{1}=100\%$；由 100 变到 101，相对增量 $\dfrac{\Delta x}{x}=\dfrac{1}{100}=1\%$．相对增量又称变化幅度，常用百分数表示．

函数与自变量增量的比值极限为导数；函数与自变量相对增量的比值极限为相对导数，即弹性．

**定义**　设函数 $y=f(x)$ 可微，$y=f(x)$ 的函数相对增量 $\dfrac{\Delta y}{y}$ 与自变量相对增量 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 的比值极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$ 称为函数 $f(x)$ 的弹性函数，记为 $\dfrac{Ey}{Ex}$．

弹性函数 $\dfrac{Ey}{Ex}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{x}{y}=y'\cdot\dfrac{x}{y}$．

又因 $\dfrac{Ey}{Ex}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$，当 $|\Delta x|$ 很小时，$\dfrac{Ey}{Ex}\approx\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$，故当 $\dfrac{\Delta x}{x}=1\%$ 时，$\dfrac{\Delta y}{y}\approx\left(\dfrac{Ey}{Ex}\right)\%$．

注：弹性函数在数学中的意义是相对导数 $\dfrac{Ey}{Ex}=y'\cdot\dfrac{x}{y}$，在经济学中的意义是自变量改变 1% 时，函数改变的百分点．

例　$y=x^a$，求 $\frac{Ey}{Ex}$.

解：$\frac{Ey}{Ex}=y'\frac{x}{y}=ax^{a-1}\cdot\frac{x}{x^a}=a$. 幂函数称为不变弹性函数.

例　$y=e^{\lambda x}$，求 $\frac{Ey}{Ex}$.

解：$\frac{Ey}{Ex}=y'\frac{x}{y}=e^{\lambda x}\cdot\lambda\cdot\frac{x}{e^{\lambda x}}=\lambda x$.

例　$y=ax+b$，求 $\frac{Ey}{Ex}$.

解：$\frac{Ey}{Ex}=y'\frac{x}{y}=a\cdot\frac{x}{ax+b}=\frac{ax}{ax+b}$.

例　设需求函数为 $Q=80-2P$（$Q$ 为需求量，$P$ 为价格），求：（1）需求量对价格的弹性；（2）价格为 15 时，价格上涨 1%，需求如何变化？（3）价格为 15 时，价格上涨一个单位，收益如何变化？价格上涨 1%，收益变化百分之几？

解：（1）$\frac{EQ}{EP}=Q'(P)\frac{P}{Q}=(-2)\cdot\frac{P}{80-2P}=\frac{-2P}{80-2P}$；

（2）价格 $P=15$ 时，$\left.\frac{EQ}{EP}\right|_{P=15}=\frac{-30}{50}=-0.6$，即价格上涨 1%，需求将下降 0.6%；

（3）收益 $R(P)=PQ=80P-2P^2$，有 $R'(P)=80-4P$，
故价格 $P=15$ 时，$R'(15)=20$，即价格上涨一个单位，收益将增加 20 单位，

又因 $\frac{ER}{EP}=R'(P)\frac{P}{Q}=(80-4P)\cdot\frac{P}{80P-2P^2}=\frac{80-4P}{80-2P}$，

故价格 $P=15$ 时，$\left.\frac{ER}{EP}\right|_{P=15}=\frac{20}{50}=0.4$，即价格上涨 1%，收益将增加 0.4%.