数理统计第七章测验题

考试时间 2023 年 6 月 4 日，答卷时间 120 分钟，总分 100 分，出题人-李绍文

1．（15 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，检验假设 $H_0: \mu = 6$ vs $H_1: \mu \neq 6$，拒绝域取为 $W = \{|\bar{x} - 6| \geq c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu = 4$ 处犯第二类错误的概率。

解：检验统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 6}{2/\sqrt{16}} = 2(\bar{X} - 6)\text{。}$$

拒绝域

$$W = P\{|U| \geq u_{0.975}\} = P\{|2(\bar{X} - 6)| \geq 1.96\} = P\{|\bar{X} - 6| \geq 0.98\},$$

则 $c = 0.98$。

当 $\mu = 4$ 时，

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 2(\bar{X} - 4) \sim N(0,1),$$

故

$$\beta = P\{|\bar{X} - 6| < 0.98 \,|\, \mu = 4\} = P\{1.02 < \bar{X} - 4 < 2.98 \,|\, \mu = 4\}$$

$$= P\{2.04 < U < 5.96 \,|\, \mu = 4\} = \Phi(5.96) - \Phi(2.04) = 0.0207\text{。}$$

2．（15 分）总体 X 的密度函数 $p(x;\theta) = \theta x^{-\theta-1} I_{x>1}, \quad (\theta > 0)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本。

（1）求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$。

（2）检验 $H_0: \theta = \theta_0$，求似然比 $\Lambda(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，判断其对数 $\ln\Lambda$ 与统计量 $\chi^2 = 2\theta_0 \ln(X_1 X_2 \cdots X_n)$ 是否存在函数关系。

解：（1）似然函数 $L(\theta) = \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\theta-1} I_{x_1, x_2, \cdots, x_n > 1}$，当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 1$ 时，

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta - (\theta+1)\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)\text{。}$$

令

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0,$$

得

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)}\text{。}$$

（2）似然比

$$\Lambda=\frac{L(\hat{\theta})}{L(\theta_0)}=\frac{\left(\dfrac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)}\right)^n(X_1X_2\cdots X_n)^{-\frac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)}-1}}{\theta_0^n(X_1X_2\cdots X_n)^{-\theta_0-1}}$$

$$=\left(\frac{n}{\theta_0\ln(X_1X_2\cdots X_n)}\right)^n(X_1X_2\cdots X_n)^{\theta_0-\frac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)}},$$

$$\ln\Lambda=n\ln n-n\ln[\theta_0\ln(X_1X_2\cdots X_n)]+\theta_0\ln(X_1X_2\cdots X_n)-n$$

$$=n\ln n-n\ln\frac{\chi^2}{2}+\frac{\chi^2}{2}-n\text{。}$$

可见$\ln\Lambda$与统计量$\chi^2=2\theta_0\ln(X_1X_2\cdots X_n)$存在函数关系。

3．（10 分）某袋装食品正常情况下每袋重量（克）服从$N(400,36)$，现抽取 25 袋测得平均重量为 396.4 克。问这种袋装食品是否重量不足？

解：单个正态总体，已知σ^2，检验μ，用U检验法。

假设$H_0:\mu\geq 400$ vs $H_1:\mu<400$。统计量$U=\dfrac{\bar{X}-400}{\sigma/\sqrt{n}}$。拒绝域$W=\{u\leq -1.64\}$。

因$\bar{x}=396.4$，$\sigma=6$，$n=25$，则检验统计量观测值

$$u=\frac{396.4-400}{6/\sqrt{25}}=-3\in W,$$

故拒绝H_0。可以认为这种袋装食品重量不够。并且左侧检验的p值

$$p=P\{U\leq -3\}=\Phi(-3)=1-0.9987=0.0013<\alpha=0.05\text{。}$$

4．（10 分）两批钢丝抗断强度都服从正态分布。从第一批中取 12 根，测得样本方差$s_x^2=10.1^2$；从第二批中取 16 根，测得样本方差$s_y^2=9.5^2$。试比较两批钢丝抗断力的方差是否有显著差异？

解：两个正态总体，检验方差，检验$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，用F检验法。

假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，统计量$F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$。$W=\{f\leq 0.30$ 或 $f\geq 3.01\}$。

因 $s_x^2 = 10.1^2$， $s_y^2 = 9.5^2$，则检验统计量观测值

$$f = \frac{10.1^2}{9.5^2} \approx 1.13 \notin W，$$

故接受 H_0。可以认为抗断力的方差没有显著差异。并且双侧检验的 p 值

$$p = 2P\{f \ge 1.13\} = 0.8 > \alpha = 0.05。$$

5. （10 分）设某种电子元件平均寿命服从指数分布。随机抽取 5 个元件，测得失效时间（小时）平均值为 $\bar{x} = 4423$。检验这种元件的平均寿命是否不小于 6000 小时。

解：总体服从指数分布，用 χ^2 检验法。

假设 $H_0: \theta \ge 6000$ vs $H_1: \theta < 6000$，统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\bar{X}}{6000}$，拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 3.94\}$。

因 $\bar{x} = 4462.6$， $n = 5$，则检验统计量观测值

$$\chi^2 = \frac{2 \times 5 \times 4423}{6000} = 7.37 \notin W，$$

故接受 H_0。可以认为平均寿命不小于 6000 小时。并且左侧检验的 p 值

$$p = P\{\chi^2 \le 7.37\} = 0.31 > \alpha = 0.05。$$

6. （10 分）掷一枚硬币 100 次，结果正面出现了 65 次，能否认为这枚硬币均匀？

解：比例 p 的假设检验，大样本场合。

假设 $H_0: p = 0.5$ vs $H_1: p \ne 0.5$，统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$，拒绝域 $W = \{|u| \ge 1.96\}$。

因 $\bar{x} = \dfrac{65}{100} = 0.65$， $n = 100$，则检验统计量观测值

$$u = \frac{0.65 - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.25}{100}}} = 3 \in W \text{ 或 } u = \frac{0.65 - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.65 \times 0.35}{100}}} = 3.145 \in W，$$

故拒绝 H_0。可以认为这枚硬币不均匀。双侧检验的 p 值

$$p = 2P\{U \ge 3\} = 0.0026 < \alpha = 0.05 \text{ 或 } p = 2P\{U \ge 3.145\} = 0.0016。$$

7. （15 分）某工厂生产的产品分成甲、乙、丙三个等级，通常情况下比例为 2:3:5。现随机抽取 100 件产品，三个等级的数量分别为 15, 36, 49。能否认为这批产品中各等级的数量比例保持在 2:3:5？

解：假设 $H_0: p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.3,\ p_3 = 0.5$，

统计量$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(2)$，拒绝域$W=\{\chi^2\ge\chi^2_{0.95}(2)\}=\{\chi^2\ge 5.9915\}$，

$$\chi^2=\frac{5^2}{20}+\frac{6^2}{30}+\frac{1^2}{50}=2.47\notin W，$$

故拒绝H_0。可以认为这枚骰子不均匀。并且右侧检验的p值

$$p=P\{\chi^2\ge 2.47\}=0.29>\alpha=0.05。$$

8．（15 分）为了了解学生的出国留学意愿，一次随机抽样调查的结果如下：

留学意愿 / 性别	是	不清楚	否	合计
男	8	19	23	50
女	12	21	17	50
合计	20	40	40	

检验性别与出国留学意愿是否存在显著关系？

解：列联表独立性检验，用χ^2检验法。

假设$H_0: p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，$i=1,2;\ j=1,2,3$，检验统计量$\chi^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}}\sim\chi^2(2)$，

右侧拒绝域$W=\{\chi^2\ge\chi^2_{0.95}(2)\}=\{\chi^2\ge 5.9915\}$，

$\chi^2=\frac{2^2}{10}+\frac{1^2}{20}+\frac{3^2}{20}+\frac{2^2}{10}+\frac{1^2}{20}+\frac{3^2}{20}=1.8\notin W$，$p=P\{\chi^2\ge 1.8\}=0.4$，可以认为性别与出国留学意愿不存在显著关系。