1、设 $X_1,X_2,\cdots,{}_n$ 是来自总体 X 的样本，X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & |x|<\theta \\ 0, & 其它\end{cases}.$$

其中 $\theta>0$ 末知。

21年贸大 计算题第1题第（3）问

(1) 分布族 $\{f(x;\theta),\theta>0\}$ 是否是指数型分布族？(2 分)

(2) 求参数 θ 的充分统计量．并说明理由。(2 分)

(3) 判断上述充分统计量是否为完备统计量，并说明理由。(2 分)

第（3）问原计算过程：

(3) 令 $T=y_{(n)}$

$$f(t;\theta)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}I(0,\theta)$$

对任给 $\varphi(t)$，若 $E[\varphi(t)]=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(t;\theta)\,d\theta=0$$

即 $\int_0^\theta \varphi(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,d\theta=0$

$\Rightarrow P_\theta\{\varphi(t)=0\}=1$

$T=y_{(n)}=\max\{|X_1|,|X_2|,\ldots|X_n|\}$ 为 θ 的完备统计量

【补充说明】对 $P_\theta(\varphi(t)=0)=1$ 的说明不够详细。详细过程见下：

(3)

$$令\ T=y_{(n)}$$

$$f(t;\theta)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}I(0,\theta)$$

对任意 $\varphi(t)$，若 $E[\varphi(t)]=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t;\theta) dt = 0$$

去掉不为 0 的系数，则有

$$\int_{0}^{\theta} \varphi(t) t^{n-1} dt = 0$$

两边对θ求导得

$$\varphi(\theta)\theta^{n-1} = 0$$

因为$\theta > 0$且$n \geq 1$,立马得到$\varphi(\theta) = 0$，即

$$P_\theta(\varphi(t) = 0) = 1$$

得证T为完备统计量.