第五章　不定积分

§5.1 不定积分的概念与性质

一．原函数与不定积分

1．原函数

原函数与导数的相对应.

如 $(x^2)' = 2x$，即 x^2 的导数为 $2x$，x^2 是 $2x$ 的一个原函数；

如 $(\sin x)' = \cos x$，即 $\sin x$ 的导数为 $\cos x$，$\cos x$ 的一个原函数为 $\sin x$.

定义 5.1　若 $F'(x) = f(x)$,　$x \in (a, b)$，则称 $F(x)$是 $f(x)$ 在(a, b)内的一个原函数.

例　求 x^a 的一个原函数.（$a \neq -1$）

解：由于$(x^{a+1})' = (a+1)x^a$，当 $a \neq -1$ 时，有 $\left(\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a$，故 x^a 的一个原函数是 $\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$.

例　求 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数.

解：由于 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，即 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $x > 0$ 时的一个原函数，

又 $[\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = \dfrac{1}{x}$，即 $\ln(-x)$是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $x < 0$ 时的一个原函数，

故 $\ln|x|$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数.

注意到$(x^2)' = 2x$，同时$(x^2 + 1)' = 2x$，$(x^2 + C)' = 2x$，即 x^2、$x^2 + 1$、$x^2 + C$ 都是 $2x$ 的原函数.
显然原函数不是唯一的.

定理　若 $f(x)$在区间 I 上连续，则 $f(x)$在区间 I 上必存在原函数.

定理　若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则有 $F(x) + C$ 是 $f(x)$的全体原函数.

证明：若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，即 $F'(x) = f(x)$，有$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x)$，

则 $F(x) + C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

设 $G(x)$是 $f(x)$的任意一个原函数，即 $G'(x) = f(x)$，有$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0$，

由拉格朗日中值定理推论 2 知：$G(x) - F(x) = C$，即 $G(x) = F(x) + C$.

2．不定积分

定义 5.2　$f(x)$的全体原函数称为 $f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$.

其中$\int$为积分号，$f(x)$为被积函数，dx 指明积分变量.

显然，若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则$\int f(x)dx = F(x) + C$.

如$\int 2xdx = x^2 + C$；$\int \cos xdx = \sin x + C$；$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

例　求$\int a^x dx$　($a > 0$, $a \neq 1$).

解：由于 $(a^x)' = a^x \ln a$，有 $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$，

故$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

特别是 $a = e$ 时，$\int e^x dx = e^x + C$.

例　求$\int \sin x dx$.

解：由于$(\cos x)' = -\sin x$，有$(-\cos x)' = \sin x$，故$\int \sin x dx = -\cos x + C$.

3．不定积分的几何意义

导数的几何意义是切线斜率，原函数的几何意义是由切线斜率推知原曲线，称之为积分曲线．由于原函数不是唯一的，即同一切线斜率对应的积分曲线有无穷多条，称之为积分曲线族．

例　求过点 $(2, 3)$ 且切线斜率为 $2x$ 的曲线．

解：由于$\int 2x dx = x^2 + C$，即曲线为$y = x^2 + C$，且有$3 = 2^2 + C$，故$C = -1$，　即得到：$y = x^2 - 1$.

二．不定积分的性质

性质 1　微分与积分互为逆运算．

$$[\int f(x)dx]' = f(x), \quad \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

性质 2　和差的积分等于积分的和差．

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

证明：$[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx]' = [\int f(x)dx]' \pm [\int g(x)dx]' = f(x) \pm g(x)$，

故$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \ (+C)$.

性质 3　常数因子可移到积分号外．

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad (a \neq 0).$$

证明：$(a\int f(x)dx)' = a(\int f(x)dx)' = af(x)$，故$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ (+C)$.

三．基本积分公式

根据导数的基本公式，可得基本积分公式．

（1）$\int 0 dx = C$；

（2）$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1)$，特别是$\int 1 dx = x + C$，$\int k dx = kx + C$，$\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + C$ 等；

（3）$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$；

（4）$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0,\ a \neq 1)$，特别是$\int e^x dx = e^x + C$；

（5）$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + C, \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$，

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C, \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$；

（6）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int \dfrac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C$.

能直接根据基本积分公式求得积分的被积函数，称为基本积分函数．

基本积分函数有：

k，x^{μ} 与 x^{-1}，a^x 与 e^x，$\sin x$ 与 $\cos x$，$\sec^2 x$ 与 $\csc^2 x$，$\sec x\tan x$ 与 $\csc x\cot x$，$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 与 $\dfrac{1}{1+x^2}$.

对应的原函数是：

kx，$\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 与 $\ln|x|$，$\dfrac{a^x}{\ln a}$ 与 e^x，$-\cos x$ 与 $\sin x$，$\tan x$ 与 $-\cot x$，$\sec x$ 与 $-\csc x$，$\arcsin x$ 与 $\arctan x$.

直接积分法：将被积函数化为基本积分函数的和差及常数倍，再积分.

1．一般尽量化乘除为加减.

例　$\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$.

解：原式$\displaystyle=\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-3x+3x^{\frac{1}{2}}-1}{x}dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-3+3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1})dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x-6x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C$.

例　$\displaystyle\int(2^x+e^x)^2dx$.

解：原式$\displaystyle=\int(4^x+2\cdot2^xe^x+e^{2x})dx=\int[4^x+2(2e)^x+(e^2)^x]dx$

$$=\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{(2e)^x}{\ln 2e}+\frac{(e^2)^x}{2\ln e}+C=\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{2^xe^x}{1+\ln 2}+\frac{e^{2x}}{2}+C .$$

2．降低次数

例　$\displaystyle\int\sin^2\frac{x}{2}dx$.

解：原式$\displaystyle=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$.

例　$\displaystyle\int\frac{x^6}{1+x^2}dx$.

$$\begin{array}{r|l} & x^4-x^2+1 \\ \hline x^2+1 & x^6 \\ & x^6+x^4 \\ \hline & -x^4 \\ & -x^4-x^2 \\ \hline & x^2 \\ & x^2+1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

解：有理分式当分子次数 ≥ 分母次数的时候，称为假分式.
利用多项式除法化为真分式.

原式$\displaystyle=\int(x^4-x^2+1-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x-\arctan x+C$.

3．尽量简化分母．当分母为两项乘积的时候，一般把分子写成两项和或差，再拆开为两个分式.

例　$\displaystyle\int\frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$.

解：原式$\displaystyle=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})dx=-x^{-1}-\arctan x+C=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$.

例　$\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}dx$.

解：原式$\displaystyle=\int\frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{(x^2+1)+2x}{x(x^2+1)}dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1})dx=\ln|x|+2\arctan x+C$.

例 $\int \frac{1}{x(x+2)}dx$.

解：原式$=\int \frac{\frac{1}{2}[(x+2)-x]}{x(x+2)}dx=\frac{1}{2}\int [\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}]dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$.

例 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

解：原式$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int (\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x})dx=\int (\sec^2 x+\csc^2 x)dx=\tan x-\cot x+C$.

例 $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$.

解：原式$=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int (\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x})dx=\int (\sec^2 x-\sec x\tan x)dx=\tan x-\sec x+C$.

§5.2 换元积分法

由复合函数求导法得换元积分法．设 $F'(u)=f(u)$，有 $\{F[\varphi(x)]\}'=F'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

换元积分公式：$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$.

凑微分 $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$，有 $\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C$．令 $u=\varphi(x)$，即 $\int f(u)du=F(u)+C$.

一． 换元积分法，又称凑微分法．常用凑微分公式：

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b),\quad xdx=\frac{1}{2}d(x^2),\quad x^n dx=\frac{1}{n+1}d(x^{n+1}),\quad \frac{1}{x}dx=d\ln|x|,$$

$$e^x dx=de^x,\quad \sin xdx=-d\cos x,\quad \cos xdx=d\sin x,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 xdx=d\tan x,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d\arcsin x,\quad \frac{1}{1+x^2}dx=d\arctan x.$$

1．线性函数凑微分

$\int f(ax+b)dx$，$f(u)$可直接积分，

原式$=\int f(ax+b)\cdot\frac{1}{a}d(ax+b)=\frac{1}{a}\int f(u)du=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

当被积函数式可直接积分的函数，与线性函数 $ax+b$ 复合时，则 dx 凑微分成为 $\frac{1}{a}d(ax+b)$.

例 $\int (2x+3)^{100}dx$.

解：u^{100}， $u=2x+3$，原式$=\int (2x+3)^{100}\cdot\frac{1}{2}d(2x+3)=\frac{1}{2}\int u^{100}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{101}}{101}+C=\frac{1}{202}(2x+3)^{101}+C$.

例 $\int \sqrt{5-3x}dx$.

解：$u^{\frac{1}{2}}$， $u=5x-3$，原式$=\int (5-3x)^{\frac{1}{2}}\cdot-\frac{1}{3}d(5-3x)=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}(5-3x)^{\frac{3}{2}}+C$.

例 $\int \frac{1}{5x+2}dx$.

解：$\frac{1}{u}$， $u=5x+2$，原式$=\int \frac{1}{5x+2}\cdot\frac{1}{5}d(5x+2)=\frac{1}{5}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{5}\ln|u|+C=\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C$.

例 $\int \cos(4-3x)dx$.

解：原式$=\int \cos(4-3x)\cdot\frac{1}{-3}d(4-3x)=-\frac{1}{3}\sin(4-3x)+C$.

例 $\int \frac{1}{4+x^2}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\cdot 2d\frac{x}{2}=\frac{2}{4}\arctan\frac{x}{2}+C=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$.

一般地，有$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

例 $\int \frac{1}{4-x^2}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{(2+x)(2-x)}dx=\int\frac{\frac{1}{4}[(2-x)+(2+x)]}{(2-x)(2+x)}dx=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x})dx=\frac{1}{4}[\int\frac{1}{2+x}dx+\int\frac{1}{2-x}dx]$

$$=\frac{1}{4}[\int\frac{1}{2+x}d(2+x)+\int\frac{1}{2-x}(-1)d(2-x)]=\frac{1}{4}[\ln|2+x|-\ln|2-x|]+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C .$$

一般地，有$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

被积函数为分式时，若分母为二次多项式，应对分母分解因式或配方.

例 $\int \frac{1}{2x^2-3x+1}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{(2x-1)(x-1)}dx=\int\frac{(2x-1)-2(x-1)}{(2x-1)(x-1)}dx=\int(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1})dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{2}{2x-1}dx$

$$=\int\frac{1}{x-1}d(x-1)-\int\frac{1}{2x-1}d(2x-1)=\ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|+C .$$

例 $\int \frac{1}{4x^2+4x+10}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{4x^2+4x+1+9}dx=\int\frac{1}{(2x+1)^2+9}dx=\int\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{(2x+1)^2}{9}+1}dx=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2+1}\cdot\frac{3}{2}d\left(\frac{2x+1}{3}\right)$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{6}\arctan u+C=\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C .$$

2．其它凑微分：

换元积分公式：$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$，

当被积函数为两部分乘积，且其中一部分是另一部分中某式的导数，则将导数部分与 dx 凑微分.

常见的有：

x^2 与 x，x^n 与 x^{n-1}，$\ln x$ 与 $1/x$，$\sin x$ 与 $\cos x$，$\sec^2 x$ 与 $\tan x$，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 与 $\arcsin x$，$\frac{1}{1+x^2}$ 与 $\arctan x$.

例 $\int \frac{1}{x\ln x}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\int \frac{1}{\ln x}d\ln x=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C$.

例 $\int x^2\sin x^3 dx$.

解：原式$=\int \sin x^3\cdot x^2 dx=\int \sin x^3\cdot\frac{1}{3}dx^3=\frac{1}{3}\int \sin u du=-\frac{1}{3}\cos x^3+C$.

例 $\int x\cdot 2^{x^2}dx$.

解：原式$=\int 2^{x^2}\cdot xdx=\int 2^{x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2=\frac{1}{2}\int 2^u du=\frac{2^u}{2\ln 2}+C=\frac{2^{x^2}}{2\ln 2}+C$.

例 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解：原式$=\int \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int \cos\sqrt{x}\cdot 2d\sqrt{x}=2\sin\sqrt{x}+C$.

例 $\int \cos x\cdot 2^{\sin x}dx$.

解：原式$=\int 2^{\sin x}\cdot\cos xdx=\int 2^{\sin x}\cdot d\sin x=\frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$.

例 $\int \frac{x}{1+x^2}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{1+x^2}xdx=\int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(x^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

例 $\int x(3x^2-2)^{10}dx$.

解：原式$=\int (3x^2-2)^{10}\cdot xdx=\int (3x^2-2)^{10}\cdot\frac{1}{2}dx^2=\int (3x^2-2)^{10}\cdot\frac{1}{6}d(3x^2-2)$

$=\frac{1}{6}\int u^{10}du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^{11}}{11}+C=\frac{1}{66}(3x^2-2)^{11}+C$.

例 $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}dx$.

解：原式$=\int \sqrt{\arccos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int (\arccos x)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)d\arccos x=-\frac{2}{3}(\arccos x)^{\frac{3}{2}}+C$.

例 $\int \frac{e^x-\sin x+5}{e^x+\cos x+5x-7}dx$.

解：原式=$\int \frac{1}{e^x+\cos x+5x-7}\cdot(e^x-\sin x+5)dx=\int \frac{1}{e^x+\cos x+5x-7}\cdot d(e^x+\cos x+5x-7)$

$=\ln|e^x+\cos x+5x-7|+C$.

例 $\int \frac{1}{1+e^x}dx$.

解：原式=$\int \frac{1}{(1+e^x)e^x}e^x dx=\int \frac{1}{e^x(e^x+1)}de^x=\int \frac{1}{u(1+u)}du=\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u})du=\ln u-\ln(u+1)+C$

$=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C=x-\ln(e^x+1)+C.$

例 $\int \frac{1}{x(x^7-1)}dx$.

解：原式=$\int \frac{1}{x^7(x^7-1)}x^6 dx=\int \frac{1}{x^7(x^7-1)}\cdot\frac{1}{7}dx^7=\frac{1}{7}\int \frac{1}{u(u-1)}du=\frac{1}{7}\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u})du$

$=\frac{1}{7}\left[\ln|u-1|-\ln|u|\right]+C=\frac{1}{7}\left[\ln|x^7-1|-\ln|x^7|\right]+C=\frac{1}{7}\ln|x^7-1|-\ln|x|+C$.

例 $\int \tan x dx$.

解：原式=$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{1}{\cos x}\cdot\sin x dx=\int \frac{1}{\cos x}(-d\cos x)=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C$.

所以$\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+C,\quad \int \cot x dx=\ln|\sin x|+C$.

例 $\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx$.

解：原式=$\int \frac{1}{2-(1-\sin^2 x)}\cos x dx=\int \frac{1}{1+\sin^2 x}d\sin x=\arctan(\sin x)+C$.

例 $\int \cos^3 x dx$.

解：原式=$\int \cos^2 x\cdot\cos x dx=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=\int(1-u^2)du=u-\frac{1}{3}u^3+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

当被积函数是 $\sin x$、$\cos x$ 的奇数次幂时，则拆出一个 $\sin x$ 或 $\cos x$ 与 dx 的凑微分，

如$\int \sin^2 x\cos^3 x dx,\quad \int \sin^5 x\cos^4 x dx;\quad \int \sin^5 x\cos^3 x dx$ 等.

例 $\int \sec x dx$.

解：原式=$\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x dx=\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot d\sin x=\int \frac{1}{1-u^2}du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right|+C=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$.

公式：$\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C,\quad \int \csc x dx=-\ln|\csc x+\cot x|+C$（或$\ln|\csc x-\cot x|+C$）.

当被积函数为 $\sin x$、$\cos x$ 的偶次多项式，用倍角公式降低次数，

例　$\int \sin^2 x \cos^2 xdx$.

解：原式$=\int \frac{1}{4}\sin^2 x2xdx = \int \frac{1}{8}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\int \cos 4x \cdot \frac{1}{4}d4x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

当被积函数中分母是 $\sin x$、$\cos x$ 的偶数次幂时，用 $\frac{1}{\sin^2 x}$ 或 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 与 dx 凑微分.

例　$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

解：原式$= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{1+\sec^2 x} \cdot \sec^2 xdx = \int \frac{1}{2+\tan^2 x} \cdot \sec^2 xdx = \int \frac{1}{\tan^2 x + 2} \cdot d\tan x$

$$= \int \frac{1}{u^2+2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} = C .$$

例　$\int \frac{1}{2-\sin x}dx$.

解：原式$= \int \frac{2+\sin x}{4-\sin^2 x}dx = \int \frac{2}{4-\sin^2 x}dx + \int \frac{\sin x}{4-\sin^2 x}dx = \int \frac{2}{4\csc^2 x - 1} \cdot \csc^2 xdx + \int \frac{1}{3+\cos^2 x} \cdot \sin xdx$

$$= \int \frac{2}{4\cot^2 x + 3} \cdot (-d\cot x) + \int \frac{1}{3+\cos^2 x} \cdot (-d\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cot x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}} + C .$$

二．　第二换元积分法：

换元积分公式：$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$ ，

若被积函数 $f(x)$ 中有复杂成分，可通过换元 $x=\varphi(t)$ 可将 $f(x)$ 化简且 $\varphi(t)$ 形式简单，则可化简换元.

1．被积函数中含一次函数根式 $\sqrt[n]{ax=b}$

一般直接令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ ，即 $x=\frac{t^n-b}{a}$ ，且有 $dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt$.

例　$\int \frac{1}{3+2\sqrt[3]{x-1}}dx$.

解：令 $t=\sqrt[3]{x-1}$ 即 $x=t^3+1$, 　$dx=3t^2dt$

原式$= \int \frac{1}{3+2t} \cdot 3t^2dt = \int \frac{3t^2}{2t+3}dt = \int \left(\frac{3}{2}t - \frac{9}{4} + \frac{27/4}{2t+3}\right)dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{9}{4}t + \frac{27}{4}\int \frac{1}{2t+3} \cdot \frac{1}{2}d(2t+3)$

$$= \frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{27}{8}\ln|2t-3| + C = \frac{3}{4}(x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{4}(x-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{27}{8}\ln|2\sqrt[3]{x-1}+3| + C .$$

例　$\int x\sqrt{5-3x}dx$.

解：令 $t=\sqrt{5-3x}$, 　$x=\frac{5-t^2}{3}$, 　$dx=\frac{-2t}{3}dt$

原式$=\int \frac{5-t^2}{3}\cdot t\cdot\frac{-2t}{3}dt=\frac{2}{9}\int(t^4-5t^2)dt=\frac{2}{9}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{2}{9}\cdot 5\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{45}(5-3x)^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{27}(5-3x)^{\frac{3}{2}}+C$.

例　$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}dx$.

解：令 $t=\sqrt{x}$，　$x=t^2$，　$dx=2tdt$

原式$=\int\frac{1}{t+t^3}\cdot 2tdt=\int\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C$.

例　$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

解：令 $t=\sqrt[6]{x}$，　$x=t^6$，　$dx=6t^5dt$

原式$=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt=\int\frac{6t^3}{t+1}dt=\int\left(6t^2-6t+6+\frac{-6}{t+1}\right)dt=6\cdot\frac{t^3}{3}-6\cdot\frac{t^2}{2}+6t-6\ln|t+1|+C$

$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$.

2．若被积函数含二次函数平方根式，用三角变换．一般

$\sqrt{a^2-x^2}\longrightarrow$令 $x=a\sin t$；　　$\sqrt{a^2+x^2}\longrightarrow$令 $x=a\tan t$；　　$\sqrt{x^2-a^2}\longrightarrow$令 $x=a\sec t$.

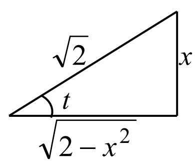
例　$\int\sqrt{2-x^2}dx$.

解：令 $x=\sqrt{2}\sin t$，$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；　$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-2\sin^2 t}=\sqrt{2\cos^2 t}=\sqrt{2}\cos t$；　$dx=\sqrt{2}\cos t\cdot dt$

原式$=\int\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos tdt=\int 2\cos^2 tdt=\int(1+\cos 2t)dt=t+\int\cos 2t\cdot\frac{1}{2}d2t$

$=t+\frac{1}{2}\sin 2t+C=t+\sin t\cos t+C$.

$\because$ $x=\sqrt{2}\sin t$，　$\sin t=\frac{x}{\sqrt{2}}$，　$t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$，　$\cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$，



$\therefore$原式$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+C$.

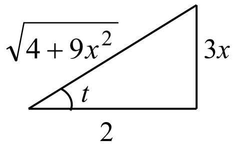
一般地，有$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

例　$\int\frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}dx$.

解：令 $3x=2\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，　$x=\frac{2}{3}\tan t$，

有 $\sqrt{4+9x^2}=\sqrt{4+4\tan^2 t}=\sqrt{4\sec^2 t}=2\sec t$，　$dx=\frac{2}{3}\sec^2 tdt$，

原式$=\int \frac{1}{2\sec t}\cdot\frac{2}{3}\sec^2 t dt=\frac{1}{3}\int \sec t dt=\frac{1}{3}\ln|\sec t+\tan t|+C$，



$\because\ 3x=2\tan t\longrightarrow \tan t=\frac{3x}{2}$，有 $\sec t=\sqrt{1+(\frac{3x}{2})^2}=\frac{\sqrt{4+9x^2}}{2}$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4+9x^2}}{2}+\frac{3x}{2}\right|+C=\frac{1}{3}\ln|\sqrt{4+9x^2}+3x|+C',\qquad C'=C-\frac{1}{3}\ln 2$.

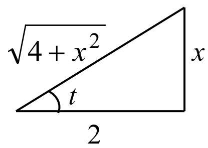
一般地，有 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|\sqrt{x^2\pm a^2}+x|+C$.

例　$\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}}dx$.

解：令 $x=2\tan t$，$(4+x^2)^{3/2}=(4+4\tan^2 t)^{3/2}=(4\sec^2 t)^{3/2}=8\sec^3 t$，$dx=2\sec^2 t dt$，

原式$=\int \frac{1}{8\sec^3 t}\cdot 2\sec^2 t dt=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec t}dt=\frac{1}{4}\int \cos t dt=\frac{1}{4}\sin t+C$，

$\because\ x=2\tan t\to \tan t=\frac{x}{2}$，有 $\sin t=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$，



$\therefore$ 原式$=\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$.

一般二次函数平方根式，应先配方.

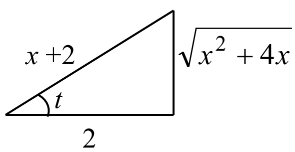
例　$\int \frac{1}{(x^2+4x)^{3/2}}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{(x^2+4x+4-4)^{3/2}}dx=\int \frac{1}{[(x+2)^2-4]^{3/2}}dx$，令 $x+2=2\sec t\to x=2\sec t-2$，

有 $[(x+2)^2-4]^{3/2}=[4\sec^2 t-4]^{3/2}=8\tan^3 t$，$dx=2\sec t\tan t dt$，

原式 $=\int \frac{1}{8\tan^3 t}\cdot 2\sec t\tan t dt=\frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\frac{1}{4}\int \csc t\cot t dt=-\frac{1}{4}\csc t+C=-\frac{1}{4\sin t}+C$.

$\because\ x+2=2\sec t\longrightarrow \sec t=\frac{x+2}{2}$，$\cos t=\frac{2}{x+2}$，有 $\sin t=\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x+2}$，



$\therefore$ 原式$=-\frac{x+2}{4\sqrt{x^2+4x}}+C$.

注意：一般只有二次函数平方根式才用三角变换，而二次函数立方根式等则不能用.

例　$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

解：原式$=\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\cdot xdx=\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2}dx^2=\int\frac{u}{\sqrt[3]{1-u}}\cdot\frac{1}{2}du$，令 $t=\sqrt[3]{1-u}$， $u=1-t^3$， $du=-3t^2dt$，

原式$=\int\frac{1-t^3}{t}\cdot\frac{1}{2}(-3t^2)dt=\frac{3}{2}\int(t^4-t)dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{3}{10}(1-x^2)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}+C$．

3．其它化简换元，只要令 $x=\varphi(t)$，可将被积函数 $f(x)$化简且$\varphi(t)$形式简单，都可用第二换元法.

如$\int f(\tan x)dx$， 令$t=\tan x$， 即$x=\arctan t$， $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$；

$\int f(e^x)dx$， 令$t=e^x$， 即$x=\ln t$， $dx=\frac{1}{t}dt$．

如含 $\arcsin x$，$\arccos x$ 也可化简换元

例 $\int\tan^4 xdx$．

解：令 $t=\tan x$， $x=\arctan t$， $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$，

原式$=\int t^4\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int(t^2-1+\frac{1}{1+t^2})dt=\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$．

例 $\int\frac{\sqrt{\arccos\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}dx$．

解：令 $t=\arccos\sqrt{x}$， $\sqrt{x}=\cos t\to x=\cos^2 t$， $dx=2\cos t\cdot(-\sin t)dt$，

原式$=\int\frac{\sqrt{t}}{\cos t\cdot\sin t}\cdot(-2\cos t\sin t)dt=-2\int\sqrt{t}dt=-2\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{4}{3}(\arccos\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+C$．

§5.3　分部积分法

由乘积的求导法，得分部积分法

$(uv)'=u'v+uv'$， $uv'=(uv)'-u'v$， 得$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$

分部积分法公式：$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ 或 $\int udv=uv-\int vdu$

特点：交换被积函数中求导位置．当被积函数为两部分乘积．且一部分可求导化简，另一部分原函数简单，则可用分部积分．

如 $\int x\cos xdx$， 设 $u=x$，$dv=\cos x\,dx$，有 $du=dx$，$v=\sin x$，

则 $\int x\cos xdx=\int udv=\int xd\sin x=uv-\int vdu=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$．

1． 被积函数为整式与 e^x（或 $\sin x$、$\cos x$）的乘积

$\int f(x)e^xdx$; $\int f(x)\sin xdx$, $\int f(x)\cos xdx$

设 $u=f(x)$，$dv=e^x dx$（或 $\sin x\,dx$、$\cos x\,dx$），再分部积分，交换微分位置.

例 $\int(2x+1)e^xdx$．

解：令 $u=2x+1$, $dv=e^xdx$, 有$du=2dx$, $v=e^x$，

原式=$\int(2x+1)de^x=(2x+1)e^x-\int e^x\cdot 2dx=(2x+1)e^x-2e^x+C=(2x-1)e^x+C$.

例 $\int x\sin 2xdx$.

解：设$u=x,\ dv=\sin 2xdx$, 有$du=dx,\ dv=-\frac{1}{2}\cos 2x$

原式=$\int x(-\frac{1}{2}d\cos 2x)=x\cdot(-\frac{1}{2}\cos 2x)-\int(-\frac{1}{2}\cos 2x)dx=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\cdot\frac{1}{2}d2x$

$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

例 $\int x^2\sin xdx$.

解：设$u=x^2,\ dv=\sin xdx$, 有$du=2xdx,\ v=-\cos x$

原式=$\int x^2(-d\cos x)=-x^2\cos x-\int(-\cos x)\cdot 2xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx$

$=-x^2\cos x+2\int xd\sin x=-x^2\cos x+2(x\sin x-\int\sin xdx)=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$.

例 $\int(x^2-x+1)e^xdx$.

解：设$u=x^2-x+1,\ dv=e^xdx$, 有$du=(2x-1)dx,\ v=e^x$，

原式=$\int(x^2-x+1)de^x=(x^2-x+1)e^x-\int e^x\cdot(2x-1)dx=(x^2-x+1)e^x-\int(2x-1)de^x$

$=(x^2-x+1)e^x-(2x-1)e^x+\int e^x\cdot 2dx=(x^2-x+1)e^x-(2x-1)e^x+2e^x+C=(x^2-3x+4)e^x+C$.

对于这种类型，当指数或正余弦部分是复合函数时，如 $e^{g(x)}$，或 $\sin g(x)$、$\cos g(x)$，一般应先将 dx 凑成 $dg(x)$，再将 dv 设为 $e^{g(x)}dg(x)$，或 $\sin g(x)dg(x)$、$\cos g(x)dg(x)$；或者是换元，设 $t=g(x)$.

例 $\int x^3e^{x^2}dx$.

解：原式=$\int x^2e^{x^2}\cdot xdx=\int x^2e^{x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$，设$u=x^2$，$dv=e^{x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$， 有$du=dx^2$，$v=\frac{1}{2}e^{x^2}$，

原式=$\int x^2\cdot\frac{1}{2}de^{x^2}=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\int\frac{1}{2}e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

例 $\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^3}dx$.

解：设$t=\frac{1}{x}$， 有$x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，

原式=$\int t^3\sin t\cdot(-\frac{1}{t^2})dt=-\int t\sin tdt=-\int t(-d\cos t)=\int t\cdot d\cos t=t\cos t-\int\cos tdt$

$=t\cos t-\sin t+C=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+C$.

2．被积函数中含 $\ln x$、$\arctan x$ 时，

$\int f(x)\ln xdx$，$\int f(x)\arctan xdx$

设 $u=\ln x$ 或 $\arctan x$，$dv=f(x)dx$，再分部积分，交换微分位置.

例 $\int x\ln xdx$.

解：设 $u=\ln x,\ dv=xdx,\quad$ 有 $du=\dfrac{1}{x}dx,\ v=\dfrac{x^2}{2}$，

原式=$\int \ln xd(\dfrac{x^2}{2})=\ln x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$.

例 $\int \ln xdx$.

解：设 $u=\ln x,\ dv=dx,\quad$ 有 $du=\dfrac{1}{x}dx,\ v=x$

原式=$x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C$.

例 $\int \arctan xdx$.

解：设 $u=\arctan x,\ dv=dx,\quad$ 有 $du=\dfrac{1}{1+x^2},\ v=x$，

原式=$x\arctan x-\int x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx=x\arctan x-\int\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{2}dx^2=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

例 $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

解：设 $u=\arctan\sqrt{x},\ dv=dx,\quad$ 有 $du=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx,\ v=x+1$，

原式=$\int \arctan\sqrt{x}\cdot d(x+1)=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\int(x+1)\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

注意：根据 dv 求 v 时，为了下一步计算方便，可加减一个常数.

例 $\int x\arctan xdx$.

解：设 $u=\arctan x,\ dv=xdx,\quad$ 有 $du=\dfrac{1}{x^2+1}dx,\ v=\dfrac{x^2+1}{2}$，

原式=$\int \arctan xd\dfrac{x^2+1}{2}=\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x-\int\dfrac{x^2+1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}dx=\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x-\dfrac{x}{2}+C$.

例 $\int x\ln(x+1)dx$.

解：设 $u=\ln(x+1),\ dv=xdx,\quad$ 有 $du=\dfrac{1}{x+1}dx,\ v=\dfrac{x^2-1}{2}$，

原式=$\int \ln(x+1)d\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\int\dfrac{x^2-1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}dx=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}\int(x-1)dx$

$=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+C$.

总结：有两种典型情况：

1. $\int f(x)e^xdx,\ \int f(x)\sin xdx,\ \int f(x)\cos xdx,\quad$ 设 $u=f(x),\quad$ 且 $dv=e^xdx,\ dv=\sin xdx,\ dv=\cos xdx$；

2．$\int f(x)\ln xdx,\ \int f(x)\arctan xdx,$ 设$u=\ln x,\ u=\arctan x,$ 且$dv=f(x)dx$.

其它可用分部积分化简的情况：只要被积函数的两部分，一部分可求导化简，另一部分为简单函数的导数，可将需要求导数化简部分设为 u，另一部分与 dx 一起设为 dv.

例 $\int \sin x\ln\sin xdx$.

解：设$u=\ln\sin x,\ dv=\sin xdx,$ 有$du=\dfrac{1}{\sin x}\cos xdx,\ v=-\cos x$ ，

原式$=\int \ln\sin x\cdot(-d\cos x)=-\cos x\cdot\ln\sin x+\int\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=-\cos x\ln\sin x+\int\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}dx$

$$=-\cos x\ln\sin x+\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx=-\cos x\ln\sin x+\int(\csc x-\sin x)dx$$
$$=-\cos x\ln\sin x+\ln|\csc x-\cot x|+\cos x+C.$$

例 $\int xf''(x)dx$.

解：设 $u=x$，$dv=f''(x)$，有 $du=dx$，$v=f'(x)$，

原式$=\int xdf'(x)=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C$.

例 已知$\int f(x)dx=\dfrac{\ln x}{x}+C,$ 求$\int xf'(x)dx$.

解：设$u=x,\ dv=f'(x)dx,$ 有$du=dx,\ v=f(x)$ ，原式$=\int x\cdot df(x)=x\cdot f(x)-\int f(x)dx$.

$\because \int f(x)dx=\dfrac{\ln x}{x}+C$ ，有 $f(x)=(\dfrac{\ln x}{x})'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ，

$\therefore$原式$=\dfrac{1-\ln x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}-C=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}+C_1$.

例 已知$f^2(x)$的一个原函数是$\dfrac{\sin x}{x}$， 求$\int xf(x)f'(x)dx$.

解：设$u=x,\ dv=f(x)f'(x)dx,$ 有$du=dx,\ v=\dfrac{1}{2}[f(x)]^2$，原式$=\int x\cdot\dfrac{1}{2}df^2(x)=\dfrac{1}{2}xf^2(x)-\int\dfrac{1}{2}f^2(x)dx$ ，

$\because f^2(x)$的原函数是$\dfrac{\sin x}{x}$， 则$\int f^2(x)dx=\dfrac{\sin x}{x}+C,\ f^2(x)=(\dfrac{\sin x}{x})'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ，

$\therefore$ 原式$=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\dfrac{\sin x}{2x}-C=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sin x}{x}+C$.

例 $\int\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解：设$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\quad dv=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$ ，

有 $du=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ，

且 $v=\int\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx,$ 令$x=\tan t,\ dx=\sec^2 tdt$ ，

则 $v=\int \frac{1}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 tdt=\int\cos tdt=\sin t(+C)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(+C)$，即 $du=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,\ v=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

原式 $=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

分部积分法还可以产生循环积分：当被积函数为两部分乘积，且两部分的原函数与导函数形式类似，则可利用分部积分产生循环，而解出积分.

例 $\int e^x\sin xdx$.

解：设 $u=e^x$，$dv=\sin xdx$，有 $du=e^xdx$，$v=-\cos x$，

原式 $=\int e^x(-d\cos x)=-e^x\cos x+\int\cos xe^xdx=-e^x\cos x+\int e^xd\sin x$，

$\because\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int\sin x\cdot e^xdx$ 即 $2\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x+C$，

$\therefore\int e^x\sin xdx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C_1$.

例 $\int\sec^3 xdx$.

解：方法一：原式 $=\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\cos xdx=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)^2}d\sin x=\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$，

再利用有理函数积分.

方法二：原式 $=\int\sec x\cdot\sec^2xdx$，设 $u=\sec x,\ dv=\sec^2 xdx$，有 $du=\sec x\tan xdx,\ v=\tan x$，

则 $\int\sec^3 xdx=\int\sec xd\tan x=\sec x\tan x-\int\tan x\cdot\sec x\tan xdx=\sec x\tan x-\int\sec x\tan^2 xdx$

$$=\sec x\tan x-\int(\sec^3 x-\sec x)dx=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx,$$

即 $2\int\sec^3 xdx=\sec x\tan x+\int\sec xdx=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|+C$，

$\therefore\int\sec^3 xdx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C_1$.

此外，当被积函数为两项之和，且这两项可通过分部积分联系，也可用分部积分求解.

例 $\int e^x\cdot\frac{1-x}{x^2}dx$.

解：原式 $=\int e^x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x\cdot\frac{1}{x^2}dx-\int e^x\cdot\frac{1}{x}dx$，

讨论 $\int e^x\cdot\frac{1}{x^2}dx$，令 $u=e^x,\ dv=\frac{1}{x^2}dx$，有 $du=e^xdx,\ v=-\frac{1}{x}$，

则 $\int e^x\cdot\frac{1}{x^2}dx=\int e^xd(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\cdot e^x+\int\frac{1}{x}\cdot e^xdx$，

$\therefore$ 原式$=\int e^x \cdot \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}\cdot e^x dx = -\frac{1}{x}e^x + C$.

例　$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}dx$.

解：原式$=\int \frac{1}{\ln x}dx - \int \frac{1}{\ln^2 x}dx$，有$\int \frac{1}{\ln x}dx = \frac{1}{\ln x}x - \int x d\frac{1}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} - \int x\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{\ln^2 x}dx$，

$\therefore$ 原式$=\int \frac{1}{\ln x}dx - \int \frac{1}{\ln^2 x}dx = \frac{x}{\ln x} + C$.

此外，某些积分可通过递推公式给出.

例　求$I_n = \int x^n e^x dx$的递推公式.

解：设$u = x^n$，$dv = e^x dx$，　有$du = nx^{n-1}dx$，$v = e^x$，

故$I_n = \int x^n de^x = x^n e^x - \int e^x \cdot nx^{n-1}dx = x^n e^x - nI_{n-1}$.

有$I_0 = e^x + C$，　$I_1 = xe^x - I_0 = xe^x - e^x + C$，　$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$，依此类推.

例　求$I_n = \int \sin^n x dx$的递推公式.

解：$I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx$，令$u = \sin^{n-1} x$，$dv = \sin x dx$，　有$du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x dx$，$v = -\cos x$，

则$I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot (-d\cos x) = -\sin^{n-1} x\cos x + \int \cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x dx$

$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int(\sin^{n-2} x - \sin^n x)dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$，

故$nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}$，　即$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

有$I_0 = x + C$，　$I_1 = -\cos x + C$，　$I_2 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}I_0 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + C$，

$I_3 = -\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x + \frac{2}{3}I_1 = -\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$，依此类推.

类似有$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

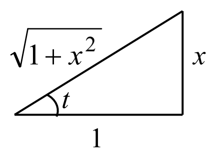
例　求$\Delta_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$的递推公式.

解：方法一：令$x = \tan t$，　有$dx = \sec^2 t dt$，

即　$\Delta_n = \int \frac{1}{\sec^{2n} t}\cdot \sec^2 t dt = \int \cos^{2n-2} t dt$　　(设$I_k = \int \cos^k x dx$)

$= I_{2n-2} = \frac{1}{2n-2}\cos^{2n-3} t\sin t + \frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4} = \frac{1}{2n-2}\cos^{2n-3} t\sin t + \frac{2n-3}{2n-2}\Delta_{n-1}$，

$\because \tan t = x$，有$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，



故 $\Delta_n = \dfrac{1}{2n-2} \cdot \dfrac{x}{(1+x^2)^{n-2}} + \dfrac{2n-3}{2n-2}\Delta_{n-1}, \qquad (n>1)$.

有 $\Delta_1 = \arctan x, \quad \Delta_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\Delta_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$ ，以此类推.

方法二：$\Delta_n = \int \dfrac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx = \int \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}dx = \Delta_{n-1} - \int x \cdot \dfrac{x}{(1+x^2)^n}dx$,

令 $u = x,\ dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}dx,\quad$ 有 $du = dx,\ v = \int \dfrac{x}{(1+x^2)^n}dx = -\dfrac{1}{2n-2} \cdot \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}(+C)$,

故 $\Delta_n = \Delta_{n-1} + \dfrac{1}{2n-2} \cdot \dfrac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \dfrac{1}{2n-2} \cdot \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$

$$= \Delta_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\Delta_{n-1} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\Delta_{n-1}.$$

§5.4　有理函数积分

有理函数 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，其中 $P(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \Lambda + p_n,\quad Q(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \Lambda + q_m$，其中 $p_0 \neq 0$，$q_0 \neq 0$，且 $P(x)$与 $Q(x)$没有公因式.

当分子次数 n 大于等于分母次数 m 时，称为假分式，否则称为真分式．对于假分式，首先用多项式除法化为多项式与真分式之和.

一．真分式的分解

先将分母 $Q(x)$分解因式，必可分解为一些一次因式$(x - a_i)$与二次因式$(x^2 + b_ix + c_i)$的乘积 $(b_i^2 < 4c_i)$，即 $Q(x) = d(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\Lambda\ (x-a_s)^{k_s}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}\Lambda\ (x^2+b_tx+c_t)^{l_t}$.

例　将 $Q(x) = (x^4-1)^2(x^4+1)$ 分解因式

解：$Q(x) = [(x-1)(x+1)(x^2+1)]^2(x^4+2x^2+1-2x^2) = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2[(x^2+1)^2-2x^2]$

$$= (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

再进一步将真分式 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ 分解为部分分式.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \Lambda + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \Lambda\ \Lambda + \frac{A_{s1}}{x-a_s} + \frac{A_{s2}}{(x-a_s)^2} + \Lambda + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)^{k_s}}$$

$$+ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \Lambda + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} + \Lambda\ \Lambda + \frac{B_{t1}x+C_{t1}}{x^2+b_tx+c_t} + \Lambda + \frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_t}}.$$

注意：（1）分母 $Q(x)$中一次因式对应的部分分式分子为常数，二次因式对应的部分分式分子为一次函数；

（2）若 $Q(x)$中的因式为 k 次幂，则对应的部分分式的分母中有该因式的 1 次、2 次、⋯、k 次幂.

如$\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^3(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$的部分分式形式为

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}+\frac{A_4}{(x-2)^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}+\frac{B_3x+C_3}{x^2+x+1}$$，最后再确定待定系数.

例　将$\dfrac{x-2}{x^4-1}$分解为部分分式.

解：原式$=\dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，两边同乘以公分母$(x-1)(x+1)(x^2+1)$，

则 $x-2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)$　　（*）

$=Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D$

$=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$

有 $A+B+C=0$，$A-B+D=0$，$A+B-C=1$，$A-B-D=-2$，

解得 $A=-\dfrac{1}{4}$，$B=\dfrac{3}{4}$，$C=-\dfrac{1}{2}$，$D=1$，故 $\dfrac{x-2}{x^4-1}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\dfrac{\frac{3}{4}}{x+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}x+1}{x^2+1}$.

或将 x 取具体值求出待定系数，特别是将 x 取为分母 $Q(x)$一次因式的根，可得对应部分分式的分子.

在（*）式中取 $x=1$，有$-1=4A$，得 $A=-\dfrac{1}{4}$；取 $x=-1$，有$-3=-4B$，得 $B=\dfrac{3}{4}$；

再取 $x=0$，有$-2=A-B-D$，得 $D=1$；取 $x=2$，有 $0=15A+5B+3(2C+D)$，得 $C=-\dfrac{1}{2}$.

例　将$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}$分解为部分分式.

解：原式$=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-2}$，两边同乘以公分母$(x-1)^2(x-2)$，

则$x^2+1=A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2$，

取 $x=1$，有 $2=-B$，得 $B=-2$；取 $x=2$，得 $C=5$；取 $x=0$，有 $1=2A-2B+C$，得 $A=-4$.

故$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{-4}{x-1}+\dfrac{-2}{(x-1)^2}+\dfrac{5}{x-2}$.

二．部分分式的积分，真分式分解为部分分式有以下 4 种形式：

（1）$\dfrac{A}{x-a}$；

（2）$\dfrac{A}{(x-a)^k}\quad(k>1)$；

（3）$\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}\quad(b^2<4c)$；

（4）$\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}\quad(b^2<4c,\quad k>1)$.

部分分式的积分：

（1）$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$；

（2）$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$；

（3）$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+b)-\frac{Bb}{2}+C}{x^2+bx+c}dx = \frac{B}{2}\ln|x^2+bx+c|+(C-\frac{Bb}{2})\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx$，

对于$\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx$，再配方，用公式$\int \frac{1}{u^2+a^2}du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$；

（4）$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+b)-\frac{Bb}{2}+C}{(x^2+bx+c)^k}dx = \frac{B}{2}\cdot\frac{(x^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1}+(C-\frac{Bb}{2})\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx$，

对于$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx$，再配方，用递推公式$\Delta_n = \int \frac{1}{(u^2+a^2)^k}du$．

例　$\int \frac{2x^3+1}{x^3+x^2-x-1}dx$．

解：$\frac{2x^3+1}{x^3+x^2-x-1} = 2+\frac{-2x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1} = 2+\frac{-2x^2+2x+3}{(x+1)^2(x-1)} = 2+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，

则$-2x^2+2x+3 = A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$，

取$x=1$，有$3=4C$，得$C=\frac{3}{4}$；取$x=-1$，有$-1=-2B$，得$B=\frac{1}{2}$；取$x=0$，有$3=-A-B+C$，得$A=-\frac{11}{4}$．

原式=$\int \left(2+\frac{-\frac{11}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{x-1}\right)dx = 2x-\frac{11}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{4}\ln|x-1|+C$．

例　$\int \frac{1}{x^3-1}dx$．

解：$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，有$1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$，

取$x=1$，得$A=\frac{1}{3}$；取$x=0$，有$1=A-C$，得$C=-\frac{2}{3}$；取$x=-1$，有$1=A+2B-2C$，得$B=-\frac{1}{3}$．

原式=$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-1|+\int \frac{-\frac{1}{6}(2x+1)+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx$

$= \frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x}{\sqrt{3}}+C.$$

例 $\int\frac{1}{x^4-1}dx$.

解：$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$，

有 $1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)$，

取 $x=1$，有 $1=4A$，得 $A=\frac{1}{4}$；取 $x=-1$，有 $1=-4B$，得 $B=-\frac{1}{4}$；取 $x=0$，有 $1=A-B-D$，得 $D=-\frac{1}{2}$；

取 $x=2$，有 $1=15A+5B+6C+3D$，得 $C=0$.

原式$=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

一般，对于有理函数积分一般应首先考虑是否有其它方法（如分开为有导数关系的两部分乘积等），没有其它方法时，才采用分解为部分分式的方法.

例 $\int\frac{1}{x(x^{100}+1)^2}dx$.

解：原式$=\int\frac{1}{x^{100}(x^{100}+1)^2}\cdot x^{99}dx=\int\frac{1}{x^{100}(x^{100}+1)^2}\cdot\frac{1}{100}d(x^{100})=\frac{1}{100}\int\frac{1}{t(t+1)^2}dt$

$$=\frac{1}{100}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1}{t+1}+\frac{-1}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{100}[\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}]+C$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{100}\ln(x^{100}+1)+\frac{1}{100(x^{100}+1)}+C.$$

例 $\int\frac{1}{x^5(x^8+1)}dx$.

解：原式$=\int\frac{1}{x^8(x^8+1)}\cdot x^3dx=\int\frac{1}{x^8(x^8+1)}\cdot\frac{1}{4}d(x^4)=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^2(t^2+1)}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$$=\frac{1}{4}(-\frac{1}{t}-\arctan t)+C=-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{4}\arctan x^4+C.$$

例 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解：原式$=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}-2+2}d(x-\frac{1}{x})=\int\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}d(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$.