习题 1.4

1. 某班级学生的考试成绩数学不及格的占 8%，语文不及格的占 5%，这两门课都不及格的占 2%。

（1）已知一学生数学不及格，他语文也不及格的概率是多少？

（2）已知一学生语文不及格，他数学也不及格的概率是多少？

解：设 A 表示数学不及格，B 表示语文不及格，有 $P(A)=0.08$，$P(B)=0.05$，$P(AB)=0.02$。

（1）所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.02}{0.08}=0.25\text{。}$$

（2）所求概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.02}{0.05}=0.4\text{。}$$

2. 设一批产品中一、二、三等品各占 60%, 35%, 5%。从中任意取出一件，结果不是三等品，求取到的是一等品的概率。

解：设 A, B, C 分别表示取出一、二、三等品，有 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.35$，$P(C)=0.05$，故所求概率为

$$P(A\mid \bar{C})=\frac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(A)}{1-P(C)}=\frac{0.6}{1-0.05}=\frac{12}{19}\text{。}$$

3. 掷两颗骰子，以 A 记事件“两颗点数之和为 10”，以 B 记事件“第一颗点数小于第二颗点数”，试求条件概率 $P(A\mid B)$ 和 $P(B\mid A)$。

解：样本点总数 $n=6^2=36$。事件 A 中的样本点有 $(4,6),(5,5),(6,4)$，即个数 $k_A=3$，有 $P(A)=\dfrac{3}{36}$。事件 B 中所含样本点个数 $k_B=5+4+3+2+1+0=15$，有 $P(B)=\dfrac{15}{36}$。事件 AB 中的样本点有 $(4,6)$，即个数 $k_{AB}=1$，有 $P(AB)=\dfrac{1}{36}$。故

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/36}{15/36}=\frac{1}{15}\text{，}\quad P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/36}{3/36}=\frac{1}{3}\text{。}$$

4. 以某种动物由出生活到 10 岁的概率为 0.8，而活到 15 岁的概率为 0.5，问现年为 10 岁的这种动物能活到 15 岁的概率是多少？

解：设 A, B 分别表示这种动物能活到 10 岁, 15 岁，有 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.5$，故所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.5}{0.8}=0.625\text{。}$$

5. 设 10 件产品中有 3 件不合格品，从中任取两件，已知其中一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率。

解：设事件 A 表示其中一件是不合格品，事件 B 表示两件都是不合格品，有 $AB=B$，样本点总数 $n=C_{10}^2=45$。事件 A 中所含样本点个数 $k_A=C_3^1C_7^1+C_3^2=24$，得 $P(A)=\dfrac{24}{45}$。事件 $AB=B$ 中所含样本点个数 $k_B=C_3^2=3$，得 $P(AB)=P(B)=\dfrac{3}{45}$。故所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/45}{24/45}=0.125。$$

6． 设n件产品中有m件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是合格品，求另一件也是合格品的概率。

解： 设事件A表示两件中至少有一件是合格品，事件B表示两件都是合格品，有$AB=B$，样本点总数$N=C_n^2$。事件A中所含样本点个数$K_A=C_m^1C_{n-m}^1+C_{n-m}^2$，得

$$P(A)=\frac{C_m^1C_{n-m}^1+C_{n-m}^2}{C_n^2}=\frac{2m(n-m)+(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}=\frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}。$$

事件$AB=B$中所含样本点个数$K_B=C_{n-m}^2$，得

$$P(AB)=P(B)=\frac{C_{n-m}^2}{C_n^2}=\frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}。$$

故所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{n-m-1}{n+m-1}。$$

7． 掷一颗骰子两次，以x, y分别表示先后掷出的点数，记$A=\{(x, y)|x+y<10\}$，$B=\{(x, y)|x>y\}$，求$P(B|A)$，$P(A|B)$。

解： 样本点总数$n=6^2=36$。事件A中所含样本点个数$k_A=6+6+6+5+4+3=30$，有$P(A)=\frac{30}{36}$。事件B中所含样本点个数$k_B=0+1+2+3+4+5=15$，有$P(B)=\frac{15}{36}$。事件AB中所含样本点个数$k_{AB}=0+1+2+3+4+3=13$，有$P(AB)=\frac{13}{36}$。故

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{13/36}{30/36}=\frac{13}{30}，\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{13/36}{15/36}=\frac{13}{15}。$$

8． 已知$P(A)=1/3$，$P(B|A)=1/4$，$P(A|B)=1/6$，求$P(A\cup B)$。

解： 因

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}，\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/6}=\frac{1}{2}，$$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}。$$

9． 已知$P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求$P(B|A\cup\overline{B})$。

解： 因

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(A\overline{B})=1-0.3-0.5=0.2，$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=1-P(\overline{A})+1-P(B)-P(A\overline{B})=1-0.3+1-0.4-0.5=0.8，$$

故

$$P(B\mid A\cup\bar{B})=\frac{P(B\cap(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25\text{。}$$

10．设 A,B 为两事件，$P(A)=P(B)=1/3$，$P(A\mid B)=1/6$，求 $P(\bar{A}\mid\bar{B})$。

解： 因

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{11}{18},$$

则

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18},$$

故

$$P(\bar{A}\mid\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{1-P(B)}=\frac{7/18}{2/3}=\frac{7}{12}\text{。}$$

11．口袋中有 1 个白球，1 个黑球。从中任取 1 个，若取出白球，则试验停止；若取出黑球，则把取出的黑球放回的同时，再加入 1 个黑球，如此下去，直到取出的是白球为止，试求下列事件的概率。

（1）取到第 n 次，试验没有结束；

（2）取到第 n 次，试验恰好结束。

解： 设 A_k 表示第 k 次取出的是黑球，$k=1,2,\cdots$。

（1）所求概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\text{。}$$

（2）所求概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(\bar{A}_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\text{。}$$

12．一盒晶体管有 8 只合格品，2 只不合格品。从中不返回地一只一只取出，试求第二次取出的是合格品的概率。

解： 设 A 表示第二次取出的是合格品，B_1,B_2 分别表示第一次取出的是合格品、不合格品，故

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{72}{90}=0.8\text{。}$$

13．甲口袋有 a 个白球、b 个黑球，乙口袋有 n 个白球、m 个黑球。

（1）从甲口袋任取 1 个球放入乙口袋，然后再从乙口袋任取 1 个球。试求最后从乙口袋取出的是白球的概率；

（2）从甲口袋任取 2 个球放入乙口袋，然后再从乙口袋任取 1 个球。试求最后从乙口袋取出的是白球的概率。

解：（1）设 A 表示从乙口袋取出的是白球，B_1,B_2 分别表示从甲口袋取出的是白球、黑球，故

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{n+1}{n+m+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{n}{n+m+1}=\frac{a(n+1)+bn}{(a+b)(n+m+1)}\text{。}$$

（2）设 A 表示从乙口袋取出的是白球，B_0, B_1, B_2 分别表示从甲口袋取出的是 2 个白球、1 个白球 1 个黑球、2 个黑球，故所求概率为

$$P(A)=P(B_0)P(A\mid B_0)+P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$$

$$=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{n+2}{n+m+2}+\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{n+1}{n+m+2}+\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{n}{n+m+2}$$

$$=\frac{a(a-1)(n+2)+2ab(n+1)+b(b-1)n}{(a+b)(a+b-1)(n+m+2)}\text{。}$$

14．有 n 个口袋，每个口袋中均有 a 个白球、b 个黑球。从第一个口袋中任取一球放入第二个口袋，再从第二个口袋中任取一球放入第三个口袋，如此下去，从第 $n-1$ 个口袋中任取一球放入第 n 个口袋，最后再从第 n 个口袋中任取一球，求此时取到的是白球的概率。

解：设 A_k 表示从第 k 个口袋取出的是白球，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k\mid A_{k-1})+P(\overline{A}_{k-1})P(A_k\mid \overline{A}_{k-1})=P(A_{k-1})\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+[1-P(A_{k-1})]\cdot\frac{a}{a+b+1}$$

$$=\frac{a}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}P(A_{k-1})\text{。}$$

方法一，递推可得

$$P(A_n)=\frac{a}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}P(A_{n-1})=\frac{a}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}\left[\frac{a}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}P(A_{n-2})\right]$$

$$=\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{(a+b+1)^2}+\frac{1}{(a+b+1)^2}P(A_{n-2})$$

$$=\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{(a+b+1)^2}+\frac{a}{(a+b+1)^3}+\frac{1}{(a+b+1)^3}P(A_{n-3})$$

$$=\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{(a+b+1)^2}+\cdots+\frac{a}{(a+b+1)^{n-1}}+\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}P(A_1)$$

$$=\frac{\frac{a}{a+b+1}\left[1-\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\right]}{1-\frac{1}{a+b+1}}+\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\cdot\frac{a}{a+b}$$

$$=\frac{a}{a+b}\left[1-\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\right]+\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+b}\text{。}$$

方法二，设 $P(A_k)-x=\dfrac{1}{a+b+1}[P(A_{k-1})-x]$，有

$$P(A_k)=x+\frac{1}{a+b+1}P(A_{k-1})-\frac{x}{a+b+1}=\frac{(a+b)x}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}P(A_{k-1})=\frac{a}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}P(A_{k-1})\text{，}$$

可得 $x=\dfrac{a}{a+b}$，则

$$P(A_n)-\frac{a}{a+b}=\frac{1}{a+b+1}\left[P(A_{n-1})-\frac{a}{a+b}\right]=\frac{1}{(a+b+1)^2}\left[P(A_{n-2})-\frac{a}{a+b}\right]$$

$$=\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\left[P(A_1)-\frac{a}{a+b}\right]=\frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\left[\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a+b}\right]=0，$$

故 $P(A_n)=\frac{a}{a+b}$。

15．钥匙掉了，掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上的概率分别是 50%、30%和 20%，而掉在上述三处地方被找到的概率分别是 0.8、0.3 和 0.1。试求找到钥匙的概率。

解：设 A 表示找到钥匙，B_1, B_2, B_3 分别表示钥匙掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上，故所求概率为

$$P(A)=P(B_1)P(A\,|\,B_1)+P(B_2)P(A\,|\,B_2)+P(B_3)P(A\,|\,B_3)=0.5\times0.8+0.3\times0.3+0.2\times0.1=0.51。$$

16．两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.03，第二台出现不合格品的概率是 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍。

（1）求任取一个零件是合格品的概率；

（2）如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

解：设 A 表示取出的是合格品，B_1, B_2 分别表示取出的是第一台、第二台车床加工的零件。

（1）所求概率为

$$P(A)=P(B_1)P(A\,|\,B_1)+P(B_2)P(A\,|\,B_2)=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.94=0.96。$$

（2）所求概率为

$$P(B_2\,|\,\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B_2)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B_2)P(\bar{A}\,|\,B_2)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=0.5。$$

17．有两箱零件，第一箱装 50 件，其中 20 件是一等品；第二箱装 30 件，其中 18 件是一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后任取两个零件，试求

（1）第一次取出的零件是一等品的概率；

（2）在第一次取出的是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的概率。

解：设 A_1, A_2 分别表示第一次、第二次取出的是一等品，B_1, B_2 分别表示挑出第一箱、第二箱。

（1）所求概率为

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1\,|\,B_1)+P(B_2)P(A_1\,|\,B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=0.5。$$

（2）因

$$P(A_1A_2)=P(B_1)P(A_1A_2\,|\,B_1)+P(B_2)P(A_1A_2\,|\,B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{50}\times\frac{19}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}=\frac{3601}{14210}，$$

故所求概率为

$$P(A_2\,|\,A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{3601/14210}{0.5}=\frac{3601}{7105}=0.5068。$$

18．学生在做一道有 4 个选项的单项选择题时，如果他不知道问题的正确答案时，就作随机猜测。现从卷面上看题是答对了，试在以下情况下求学生确实知道正确答案的概率。

（1）学生知道正确答案和胡乱猜测的概率都是$1/2$；

（2）学生知道正确答案的概率是 0.2。

解： 设 A 表示题答对了，B_1, B_2 分别表示学生知道正确答案、胡乱猜测。

（1）因 $P(B_1)=0.5$，$P(B_2)=0.5$，故所求概率为

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)}=\frac{0.5\times 1}{0.5\times 1+0.5\times 0.25}=0.8。$$

（2）因 $P(B_1)=0.2$，$P(B_2)=0.8$，故所求概率为

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)}=\frac{0.2\times 1}{0.2\times 1+0.8\times 0.25}=0.5。$$

19．已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，今从男女比例为 22∶21 的人群中随机地挑选一人，发现恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解： 设 A 表示此人是色盲患者，B_1, B_2 分别表示此人是男性、女性，故所求概率为

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)}=\frac{\frac{22}{43}\times 0.05}{\frac{22}{43}\times 0.05+\frac{21}{43}\times 0.0025}=0.9544。$$

20．口袋中有一个球，不知它的颜色是黑的还是白的。现再往口袋中放入一个白球，然后再从口袋中任意取出一个，发现取出的是白球，试问口袋中原来那个球是白球的可能性为多少？

解： 设 A 表示取出的是白球，B_1, B_2 分别表示原来那个球是白球、黑球，故所求概率为

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)}=\frac{0.5\times 1}{0.5\times 1+0.5\times 0.5}=\frac{2}{3}。$$

21．将 n 根绳子的 $2n$ 个头任意两两相接，求恰好结成 n 个圈的概率。

解： 样本点总数为 $N=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1=(2n-1)!!$，事件 A 表示恰好结成 n 个圈，所含样本点个数 $K=1$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{1}{(2n-1)!!}。$$

22．m 个人相互传球，球从甲手中开始传出，每次传球时，传球者等可能地把球传给其余 $m-1$ 个人中的任何一个。求第 n 次传球时仍由甲传出的概率。

解： 设 A_k 表示第 k 次传球时由甲传出，$k=1, 2, \cdots, n, \cdots$，有 $P(A_1)=1$，则

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k \mid A_{k-1})+P(\bar{A}_{k-1})P(A_k \mid \bar{A}_{k-1})=0+[1-P(A_{k-1})]\cdot\frac{1}{m-1}=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m-1}P(A_{k-1}),$$

设 $P(A_k)-x=-\frac{1}{m-1}[P(A_{k-1})-x]$，有

$$P(A_k)=x-\frac{1}{m-1}P(A_{k-1})+\frac{x}{m-1}=\frac{mx}{m-1}-\frac{1}{m-1}P(A_{k-1})=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m-1}P(A_{k-1}),$$

可得 $x=\frac{1}{m}$，则

$$P(A_n)-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m-1}\left[P(A_{n-1})-\frac{1}{m}\right]=\left(-\frac{1}{m-1}\right)^2\left[P(A_{n-2})-\frac{1}{m}\right]=\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1}\left[P(A_1)-\frac{1}{m}\right]$$

$$=\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1}\frac{m-1}{m}=-\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-2},$$

故 $P(A_n)=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-2}$。

23．甲、乙两人轮流掷一颗骰子，甲先掷。每当某人掷出 1 点时，则交给对方掷，否则此人继续掷，试求第 n 次由甲掷的概率。

解：设 A_k 表示第 k 次由甲掷骰子，$k=1,2,\cdots,n,\cdots$，有 $P(A_1)=1$，则

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k\mid A_{k-1})+P(\overline{A}_{k-1})P(A_k\mid \overline{A}_{k-1})=P(A_{k-1})\cdot\frac{5}{6}+[1-P(A_{k-1})]\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P(A_{k-1}),$$

设 $P(A_k)-x=\frac{2}{3}[P(A_{k-1})-x]$，有

$$P(A_k)=x+\frac{2}{3}P(A_{k-1})-\frac{2x}{3}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}P(A_{k-1})=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P(A_{k-1}),$$

可得 $x=\frac{1}{2}$，则

$$P(A_n)-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left[P(A_{n-1})-\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left[P(A_{n-2})-\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left[P(A_1)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

故 $P(A_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$。

24．甲口袋有 1 个黑球、2 个白球，乙口袋有 3 个白球。每次从两口袋中各任取一球，交换后放入另一口袋。求交换 n 次后，黑球仍在甲口袋中的概率。

解：设 A_k 表示交换 k 次后黑球在甲口袋中，$k=1,2,\cdots,n,\cdots$，有 $P(A_0)=1$，则

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k\mid A_{k-1})+P(\overline{A}_{k-1})P(A_k\mid \overline{A}_{k-1})=P(A_{k-1})\cdot\frac{2}{3}+[1-P(A_{k-1})]\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}P(A_{k-1}),$$

设 $P(A_k)-x=\frac{1}{3}[P(A_{k-1})-x]$，有

$$P(A_k)=x+\frac{1}{3}P(A_{k-1})-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}P(A_{k-1})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}P(A_{k-1}),$$

可得 $x=\frac{1}{2}$，则

$$P(A_n)-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left[P(A_{n-1})-\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left[P(A_{n-2})-\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left[P(A_0)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n},$$

故 $P(A_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$。

25．假设只考虑天气的两种情况：有雨或无雨。若已知今天的天气情况，明天天气保持不变的概率为

p，变的概率为$1-p$。设第一天无雨，试求第n天也无雨的概率。

解： 设A_k表示第k天也无雨，$k=1,2,\cdots,n,\cdots$，有$P(A_1)=1$，则

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k\mid A_{k-1})+P(\overline{A}_{k-1})P(A_k\mid \overline{A}_{k-1})=P(A_{k-1})\cdot p+[1-P(A_{k-1})]\cdot(1-p)$$

$$=1-p+(2p-1)P(A_{k-1}),$$

设$P(A_k)-x=(2p-1)[P(A_{k-1})-x]$，有

$$P(A_k)=x+(2p-1)P(A_{k-1})-(2p-1)x=(2-2p)x+(2p-1)P(A_{k-1})=1-p+(2p-1)P(A_{k-1}),$$

可得$x=\dfrac{1}{2}$，则

$$P(A_n)-\frac{1}{2}=(2p-1)\left[P(A_{n-1})-\frac{1}{2}\right]=(2p-1)^2\left[P(A_{n-2})-\frac{1}{2}\right]=(2p-1)^{n-1}\left[P(A_1)-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(2p-1)^{n-1},$$

故$P(A_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot(2p-1)^{n-1}$。

26．设罐中有b个黑球、r个红球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，再加入c（$c>0$）个同色的球。试证：第k次取到黑球的概率为$b/(b+r)$，$k=1,2,\cdots$。

证明： 设$A_k(x,y)$表示罐中有x个黑球、y个红球时，第k次取到黑球，$k=1,2,\cdots$。

用数学归纳法证明对任意的正整数k都有$P(A_k(x,y))=\dfrac{x}{x+y}$。当$k=1$时，$P(A_1(b,r))=\dfrac{b}{b+r}$，结论成立。设对于$k-1$，结论成立，即$P(A_{k-1}(x,y))=\dfrac{x}{x+y}$。对于$k$，有

$$P(A_k(b,r))=P(A_1(b,r))P(A_k(b,r)\mid A_1(b,r))+P(\overline{A}_1(b,r))P(A_k(b,r)\mid \overline{A}_1(b,r))$$

$$=P(A_1(b,r))P(A_{k-1}(b+c,r))+P(\overline{A}_1(b,r))P(A_{k-1}(b,r+c))$$

$$=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}+\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r+c}=\frac{b(b+c)+br}{(b+r)(b+c+r)}=\frac{b}{b+r},$$

故对于k，结论成立。

可得罐中有b个黑球、r个红球时，第k次取到黑球的概率为$P(A_k(b,r))=\dfrac{b}{b+r}$，$k=1,2,\cdots$。

27．口袋中a个白球，b个黑球和n个红球，现从中一个一个不返回地取球。试证白球比黑球出现得早的概率为$a/(a+b)$，与n无关。

证明： 设A_n表示口袋中有n个红球时白球比黑球出现得早，$n=0,1,2,\cdots$。

用数学归纳法证明 $P(A_n)=\dfrac{a}{a+b}$。当 $n=0$ 时，第一次就摸到黑球的概率 $P(A_0)=\dfrac{a}{a+b}$，结论成立。设对于 $n-1$，结论成立，即 $P(A_{n-1})=\dfrac{a}{a+b}$，对于 n，考虑 A_n，设 B_1,B_2,B_3 分别表示第一次取球时取到白球、黑球、红球，有 $P(A_n\mid B_3)=P(A_{n-1})$，则

$$P(A_n)=P(B_1)P(A_n\mid B_1)+P(B_2)P(A_n\mid B_2)+P(B_3)P(A_n\mid B_3)=P(B_1)\cdot 1+P(B_2)\cdot 0+P(B_3)P(A_{n-1})$$

$$=\frac{a}{a+b+n}+0+\frac{n}{a+b+n}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a(a+b)+an}{(a+b+n)(a+b)}=\frac{a}{a+b},$$

故对于 n，结论成立。

可得白球比黑球出现得早的概率为 $P(A_n)=\dfrac{a}{a+b}$，与 n 无关。

28．设 $P(A)>0$，试证 $P(B\mid A)\ge 1-\dfrac{P(\bar{B})}{P(A)}$。

证明：由条件概率定义可得

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\bar{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}\ge 1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}。$$

29．若事件 A 与 B 互不相容，且 $P(\bar{B})\ne 0$，证明：$P(A\mid\bar{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$。

证明：因事件 A 与 B 互不相容，有 $A\subset\bar{B}$，故

$$P(A\mid\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)}{1-P(B)}。$$

30．设 A,B 为任意两个事件，且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则成立 $P(A)\le P(A\mid B)$。

证明：由条件概率定义可得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\ge P(A)。$$

31．若 $P(A\mid B)>P(A\mid\bar{B})$，试证 $P(B\mid A)>P(B\mid\bar{A})$。

证明：因

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A\mid\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)},$$

即

$$P(AB)[1-P(B)]>P(B)[P(A)-P(AB)],$$
$$P(AB)-P(AB)P(B)>P(B)P(A)-P(B)P(AB),$$

则

$$P(AB)>P(A)P(B),$$

得

$$P(AB)[1-P(A)]>P(A)[P(B)-P(AB)],$$

故

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}>\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=P(B\mid\overline{A})。$$

32．设 $P(A)=p$，$P(B)=1-\varepsilon$，证明：$\dfrac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}\le P(A\mid B)\le\dfrac{p}{1-\varepsilon}$。

证明：因

$$P(AB)\le P(A)=p,$$

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1=p+1-\varepsilon-1=p-\varepsilon,$$

即 $p-\varepsilon\le P(AB)\le p$。因

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{1-\varepsilon},$$

故

$$\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}\le P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{1-\varepsilon}\le\frac{p}{1-\varepsilon}。$$

33．若 $P(A\mid B)=1$，证明：$P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$。

证明：因

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1,$$

即 $P(AB)=P(B)$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A),$$

可得

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-P(A\cup B)=P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\overline{B}),$$

故

$$P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=1。$$