习题 3.2

1. 设二维离散随机变量 (X,Y) 的可能值为

$$(0,0),(-1,1),(-1,2),(1,0),$$

且取这些值的概率依次为 $1/6, 1/3, 1/12, 5/12$，试求 X 与 Y 各自的边际分布列。

解：因 X 的全部可能值为 $-1,0,1$，且

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12},\quad P\{X=0\}=\frac{1}{6},\quad P\{X=1\}=\frac{5}{12},$$

故 X 的边际分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

因 Y 的全部可能值为 $0,1,2$，且

$$P\{X=0\}=\frac{1}{6}+\frac{5}{12}=\frac{7}{12},\quad P\{X=1\}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2\}=\frac{1}{12},$$

故 Y 的边际分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

试求 X 与 Y 各自的边际分布函数。

解：对于 X，分段点 $x=0$。

当 $x\le 0$ 时，$F(x,y)=0$，$F_X(x)=F(x,+\infty)=0$，

当 $x>0$ 时，$F(x,y)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}$，$y>0$，

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}[1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}]=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x},$$

故

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

对于 Y，分段点 $y=0$。

当 $y\le 0$ 时，$F(x,y)=0$，$F_Y(y)=F(+\infty,y)=0$，

当 $y>0$ 时，$F(x,y)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}$，$x>0$，

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}[1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}]=1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y},$$

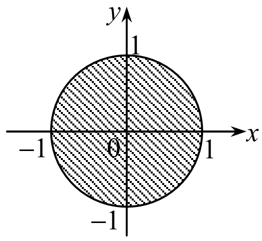
故

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

3． 试求以下二维均匀分布的边际分布：

$$p(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

解： 支撑区域 $D:-1<x<1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$ 。当 $-1<x<1$ 时，



$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},$$

故

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域 $D:-1<y<1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}$ 。当 $-1<y<1$ 时，

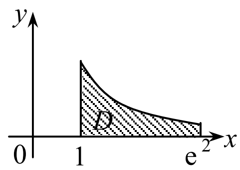
$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},$$

故

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

4． 设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=\mathrm{e}^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，试求 X 的边际密度函数。

解： 因平面区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}=2$，则 (X,Y) 的联合密度函数为



$$p(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

支撑区域 $D:1<x<\mathrm{e}^2, 0<y<\dfrac{1}{x}$ 。当 $1<x<\mathrm{e}^2$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x},$$

故

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 1<x<\mathrm{e}^2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

5． 求以下给出的 (X,Y) 的联合密度函数的边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$：

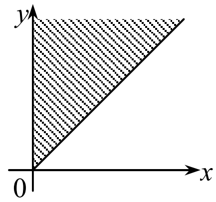
（1） $p_1(x, y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2） $p_2(x, y)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}(x^2+y), & 0<y<1-x^2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（3）$p_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

解：（1）支撑区域 $D_1=\{(x,y)\,|\,0<x<y\}:0<x<+\infty,\ x<y<+\infty$。当 $x>0$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x,y)dy=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,dy=-\mathrm{e}^{-y}\Big|_x^{+\infty}=\mathrm{e}^{-x},$$



故

$$p_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

又支撑区域 $D_1:0<y<+\infty,\ -\infty<x<y$。当 $y>0$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x,y)dx=\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}\,dx=y\,\mathrm{e}^{-y},$$

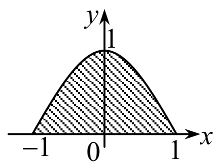
故

$$p_Y(y)=\begin{cases}y\,\mathrm{e}^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（2）支撑区域 $D_2=\{(x,y)\,|\,0<y<1-x^2\}:-1<x<1,\ 0<y<1-x^2$。当 $-1<x<1$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_2(x,y)dy=\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)dy=\frac{5}{4}(x^2y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{1-x^2}=\frac{5}{8}(1-x^4),$$

故



$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{8}(1-x^4), & -1<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域 $D_2:0<y<1,\ -\sqrt{1-y}<x<\sqrt{1-y}$。当 $0<y<1$ 时，

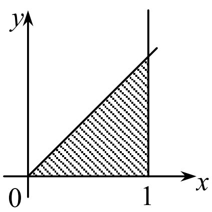
$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_2(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}(x^2+y)dx=\frac{5}{4}(\frac{1}{3}x^3+xy)\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}=\frac{5}{6}(1+2y)\sqrt{1-y},$$

故

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{5}{6}(1+2y)\sqrt{1-y}, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（3）支撑区域 $D_3=\{(x,y)\,|\,0<y<x<1\}:0<x<1,\ 0<y<x$。当 $0<x<1$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_3(x,y)dy=\int_0^{x}\frac{1}{x}dy=x\cdot\frac{1}{x}=1,$$



故

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域 $D_3:0<y<1,\ y<x<1$。当 $0<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_3(x,y)dx=\int_y^1\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_y^1=\ln 1-\ln y=-\ln y，$$

故

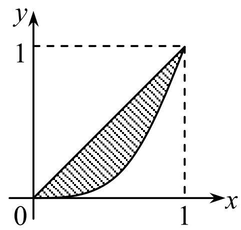
$$p_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

6．设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}6, & 0<x^2<y<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求边际密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$。

解：支撑区域$D:0<x<1,x^2<y<x$。当$0<x<1$时，



$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2)，$$

故

$$p_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域$D:0<y<1,y<x<\sqrt{y}$。当$0<y<1$时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)，$$

故

$$p_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

7．试验证：以下给出的两个不同的联合密度函数，它们有相同的边际密度函数。

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}(0.5+x)(0.5+y), & 0\le x\le 1,0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

证明：支撑区域$D:0<x<1,0<y<1$。当$0<x<1$时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=(xy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=x+0.5，$$

$$g_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dy=\int_0^1(0.5+x)(0.5+y)dy=(0.5+x)\cdot\frac{1}{2}(0.5+y)^2\Big|_0^1=x+0.5，$$

则

$$p_X(x)=g_X(x)=\begin{cases}x+0.5, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

支撑区域$D:0<y<1,0<x<1$。当$0<y<1$时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_0^1(x+y)dx=(\frac{1}{2}x^2+xy)\Big|_0^1=y+0.5,$$

$$g_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dx=\int_0^1(0.5+x)(0.5+y)dx=\frac{1}{2}(0.5+x)^2\cdot(0.5+y)\Big|_0^1=y+0.5,$$

则

$$p_Y(y)=g_Y(y)=\begin{cases}y+0.5, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故它们有相同的边际密度函数。

8．设随机变量 X 和 Y 独立同分布，且

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2,$$

试求 $P\{X=Y\}$。

解： (X,Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	-1	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

故

$$P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}。$$

9．甲、乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，试求 $P\{X\le Y\}$。

解： 因 X 和 Y 的全部可能取值都为 $0,1,2$，且

$$P\{X=0\}=0.8^2=0.64,\quad P\{X=1\}=C_2^1\times0.2\times0.8=0.32,\quad P\{X=2\}=0.2^2=0.04,$$

$$P\{Y=0\}=0.5^2=0.25,\quad P\{X=1\}=C_2^1\times0.5\times0.5=0.5,\quad P\{X=2\}=0.5^2=0.25,$$

则 (X,Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0.16	0.32	0.16	0.64
1	0.08	0.16	0.08	0.32
2	0.01	0.02	0.01	0.04
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	

故

$$P\{X\le Y\}=1-P\{X>Y\}=1-P\{X=1,Y=0\}-P\{X=2,Y=0\}-P\{X=2,Y=1\}=0.89。$$

10．设随机变量 X 和 Y 相互独立，其联合分布列为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	$1/9$	c
x_2	$1/9$	b	$1/3$

试求联合分布列中的 a,b,c。

解：因

$$p_{1\cdot}=a+\frac{1}{9}+c,\quad p_{2\cdot}=\frac{1}{9}+b+\frac{1}{3}=b+\frac{4}{9},\quad p_{\cdot 1}=a+\frac{1}{9},\quad p_{\cdot 2}=\frac{1}{9}+b,\quad p_{\cdot 3}=\frac{1}{3}+c,$$

根据独立性，知

$$p_{22}=b=p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 2}=\left(b+\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{9}+b\right)=b^2+\frac{5}{9}b+\frac{4}{81},$$

可得

$$b^2-\frac{4}{9}b+\frac{4}{81}=\left(b-\frac{2}{9}\right)^2=0,$$

故 $b=\frac{2}{9}$；再根据独立性，知

$$p_{21}=\frac{1}{9}=p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 1}=\left(b+\frac{4}{9}\right)\left(a+\frac{1}{9}\right)=\frac{6}{9}\left(a+\frac{1}{9}\right),$$

故 $a=\frac{1}{18}$； 由正则性，知

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}p_{ij}=a+\frac{1}{9}+c+\frac{1}{9}+b+\frac{1}{3}=a+b+c+\frac{5}{9}=1,$$

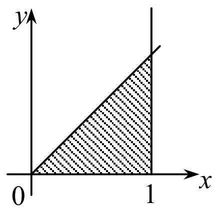
可得 $a+b+c=\frac{4}{9}$，故 $c=\frac{4}{9}-a-b=\frac{1}{6}$。

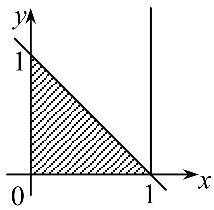
11．设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim Exp(1)$。试求：

（1）X 与 Y 的联合密度函数；（2）$P\{Y\le X\}$；（3）$P\{X+Y\le 1\}$。

解：（1）因 X 与 Y 相互独立，且边际密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$





故 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1,\ y>0;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（2）所求概率为

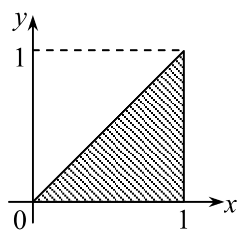
$$P\{Y\le X\}=\int_0^1 dx\int_0^x \mathrm{e}^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^x=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-x})dx=(x+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=1+\mathrm{e}^{-1}-1=\mathrm{e}^{-1}。$$

（3）所求概率为

$$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^{1-x}=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{x-1})dx=(x-\mathrm{e}^{x-1})\Big|_0^1=\mathrm{e}^{-1}。$$

12．设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$



试求：（1）边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$；（2）X 与 Y 是否独立。

解：（1）支撑区域 $D:0<x<1,0<y<x$。当 $0<x<1$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2,$$

故

$$p_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域 $D:0<y<1, y<x<1$。当 $0<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\frac{3}{2}(1-y^2),$$

故

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）因

$$p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\frac{9}{2}x^2(1-y^2), & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

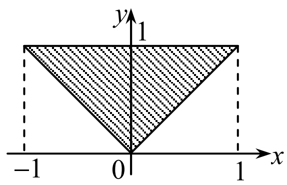
即 $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

13．设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |x|<y, 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求：（1）边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$；（2）X 与 Y 是否独立。

解：（1）支撑区域 $D:-1<x<0, -x<y<1;\ 0<x<1, x<y<1$。



当 $-1<x<0$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-x}^1 1dy=1+x$，

当 $0<x<1$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_x^1 1dy=1-x$，

故

$$p_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0;\\ 1-x, & 0\le x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域 $D:0<y<1, -y<x<y$。当 $0<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-y}^{y}1dx=2y,$$

故

$$p_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）因

$$p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}2y(1+x), & -1<x<0, 0<y<1;\\ 2y(1-x), & 0\le x<1, 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

即 $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

14．设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数如下，试问 X 与 Y 是否相互独立？

（1）$p(x,y)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（2）$p(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$，$-\infty<x,\ y<+\infty$。

（3）$p(x,y)=\begin{cases} 2, & 0<x<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（4）$p(x,y)=\begin{cases} 24xy, & 0<x<1, 0<y<1, 0<x+y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（5）$p(x,y)=\begin{cases} 12xy(1-x), & 0<x<1, 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（6）$p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

解：（1）因 $x>0, y>0$ 是广义矩形区域，$x\mathrm{e}^{-(x+y)}=x\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-y}$ 可分离变量，故 X 与 Y 相互独立。

（2）因 $-\infty<x,\ y<+\infty$ 是广义矩形区域，$\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ 可分离变量，故 X 与 Y 相互独立。

（3）因 $0<x<y<1$ 不是矩形区域，故 X 与 Y 不独立。

（4）因 $0<x<1, 0<y<1, 0<x+y<1$ 不是矩形区域，故 X 与 Y 不独立。

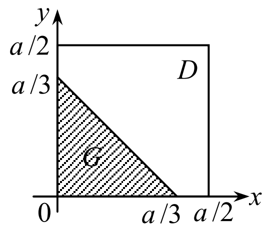
（5）因 $0<x<1, 0<y<1$ 是矩形区域，$12xy(1-x)=12x(1-x)\cdot y$ 可分离变量，故 X 与 Y 相互独立。

（6）因 $x^2<y<1$ 不是矩形区域，故 X 与 Y 不独立。

15．在长为 a 的线段的中点的两边随机地各取一点，求两点间的距离小于 $a/3$ 的概率。

解：设 X 和 Y 分别表示这两个点与线段中点的距离，有 X 和 Y 相互独立且都服从 $[0, a/2]$ 的均匀分布，则 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}, & 0<x<\dfrac{a}{2}, 0<y<\dfrac{a}{2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



故所求概率为

$$P\left\{X+Y<\frac{a}{3}\right\}=\frac{S_G}{S_D}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{2}{9}。$$

16．设二维随机变量 (X,Y) 服从区域

$$D=\{(x,y): a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$$

上的均匀分布，试证 X 与 Y 相互独立。

证明：因 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b, c\le y\le d;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

支撑区域 $D: a\le x\le b, c\le y\le d$ 。当 $a\le x\le b$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{b-a},$$

则

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又支撑区域 $D: c\le y\le d, a\le x\le b$ 。当 $c\le y\le d$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_a^b\frac{1}{(b-a)(d-c)}dx=\frac{1}{d-c},$$

则

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c\le y\le d;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立。

17．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量。证明

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n},\quad k\le n 。$$

证明：因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，由对称性知 $\dfrac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}$， $i=1,2,\cdots,n$ 同分布，且满足 $0<\dfrac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}<1$，可得 $E\left(\dfrac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\right)$ 存在，且

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_2}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\cdots=E\left(\frac{X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right),$$

因

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)+E\left(\frac{X_2}{X_1+\cdots+X_n}\right)+\cdots+E\left(\frac{X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)=1,$$

则

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_2}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\cdots=E\left(\frac{X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{1}{n},$$

故

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n},\quad k\le n 。$$