第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件及其运算

1.1.1.　随机现象（Chance Phenomenon）

现实生活中有确定现象（Deterministic Phenomenon）和随机现象，概率论的研究对象是随机现象。如：

（1）掷一枚硬币，出现正面或反面；

（2）掷一枚骰子出现的点数；

（3）一场足球比赛的进球数；

（4）电子元件的使用寿命，等等。

每次试验有多种不同结果，在一次试验中出现哪种结果完全是偶然的，称这种试验结果不确定的现象为随机现象。随机现象在一次试验中出现的结果完全是偶然的，但在多次重复试验中具有统计规律性（Statistical Regularity）。

如掷一枚硬币是否正面朝上完全是偶然的，掷 100 次硬币可以预测正面朝上大约 50 次；一场足球比赛是否进球是随机的，100 场足球比赛 $0:0$ 的场次将大约是 8 场。

概率论研究随机现象的统计规律性。

如果一个试验满足：

（1）试验的可能结果不止一个，但知道所有可能结果；

（2）试验之前不能确定出现哪种结果；

（3）可以在相同条件下重复试验；

则称之为随机试验（Random Test），简称试验。

1.1.2.　样本空间（Sample Spaces）

以集合论为理论基础讨论随机现象。试验中每一个基本结果称为一个样本点（Sample Point），全体样本点作为元素而构成的集合称为样本空间，记为Ω。如

（1）掷一枚骰子，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；

（2）掷一枚硬币，$\Omega=\{$ 正面，反面 $\}$；

（3）一场足球比赛的进球数，$\Omega=\{0,1,2,3,\Lambda\}$；

（4）电子元件使用寿命，$\Omega=\{x\,|\,x\geq 0\}=[0,+\infty)$。

样本点是有限个（Finite）时，称有限样本空间，如（1）、（2）；样本点是可列无限个（Countable Infinite）时，称可列样本空间，如（3），（可列无限个：即无限个，但可逐个排成一列）；样本点是不可列无限个（Uncountable Infinite）时，称不可列样本空间，如（4）。

有限与可列样本空间统称为离散型（Discrete）样本空间，其特点是样本点与数轴上一些单个的点一一对应。

1.1.3.　随机事件（Random Event）

随机试验的某些结果称为随机事件，简称事件，常用大写字母 A, B, C 等表示。

如掷一枚骰子，观察出现的点数，即为随机试验。以 A 表示“点数大于 3”，B 表示“点数不是 3”，C 表示“点数为奇数”，显然 A, B, C 都是随机事件。

此外，为了便于讨论，定义两个极端情况：

必定要发生的事件，称为必然事件（Certain Event），记为；肯定不会发生的事件，称为不可能事件（Impossible Event），记为$\varnothing$。如掷一枚骰子，“出现的点数小于 7”是必然事件；“出现的点数为负数”是不可能事件。

注：从直观意义上，必然事件与不可能事件并不是随机的，只是为了方便讨论而引入。

一个事件就是样本空间中的一个子集。如掷一枚骰子，事件 A 表示点数大于 3，则 $A=\{4,5,6\}$；事件 B 表示点数不是 3，则 $B=\{1,2,4,5,6\}$。

一次试验中，若出现的样本点ω在事件A中，即$\omega \in A$，则称事件A发生（Occur）；若出现的样本点ω不在事件A中，即$\omega \notin A$，则称事件A不发生。

如掷一枚骰子，A表示“点数大于 3”，C 表示“点数为奇数”。若掷出 4 点，$4 \in A = \{4, 5, 6\}$，即 “点数大于 3”发生了；$4 \notin C = \{1, 3, 5\}$，即“点数为奇数”没有发生。

样本空间Ω自身作为事件，出现的任何样本点ω，都有$\omega \in \Omega$，即Ω为必然事件；空集$\varnothing$作为事件，出现的任何样本点ω，都有$\omega \notin \varnothing$，即$\varnothing$为不可能事件。

1.1.4. 随机变量（Random Variable）

为了用函数研究随机事件，需要用数反映事件，将随机试验的样本点用数表示出来，就是随机变量。随机试验的样本点有些是定量的：如掷骰子掷出的点数，灯泡使用寿命的小时数。有些是定性的：如掷硬币正面或反面，检查产品合格或不合格。

对于定性的结果也可以规定其数量性质：如掷硬币，正面记为 1，反面记为 0；检查产品，合格记为 1，不合格记为 0。

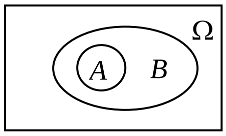
随机试验中，可将每一个样本点ω都对应于一个实数$X(\omega)$，称为随机变量，常用X, Y, Z等表示。这样随机事件就可以用随机变量的一个关系式表示。

通常一个随机事件可用三种方法表示：描述法、集合、随机变量。

如掷一枚骰子，用描述法，A表示“点数大于 3”；用集合，$A = \{4, 5, 6\}$；用随机变量，$X > 3$。

1.1.5. 事件间的关系

以集合论为基础反映随机事件。集合的关系与运算可用于随机事件。关键是集合论中的数学语言用关于事件的日常用语描述。



一．包含（Include）

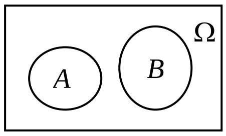
$A \subset B$，有$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$，即$A$发生$\Rightarrow B$发生。

若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A含于B，记为$A \subset B$。

如掷一枚骰子，A表示“点数大于 3”，B表示“点数不是 3”。而“点数大于 3”必有“点数不是 3”，即$A = \{4, 5, 6\} \subset B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$。

二．相等（Equal）

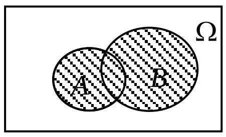
$A = B$，若$A \subset B$且$B \subset A$，则称事件A等于B，记为$A = B$。



三．互不相容（Mutual Exclusive）

若事件A与B不可能同时发生，则称事件A与B互不相容（或互斥）。

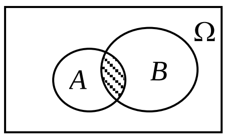
1.1.6. 事件间的运算



一．事件的并（和）（Union of Events）

$A \bigcup B$，有$\omega \in A$或$\omega \in B$，即A发生或B发生。

“事件A或B至少有一个发生”作为事件称为A与B的并，记为$A \bigcup B$（或$A + B$）。



二．事件的交（积）（Intersection of Events）

$A \bigcap B$，有$\omega \in A$且$\omega \in B$，即A发生且B发生。

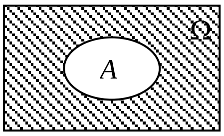
“事件A与B都发生”作为事件称为A与B的交（积），记为AB（或$A \bigcap B$）。以后A与B的交一般记为AB。若事件A与B互不相容，即$AB = \varnothing$。

事件的并与交可以推广到多个甚至可列个事件：

“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少一个发生”称为$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的并，记为$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$或$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$；

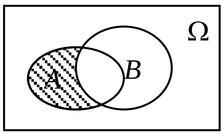
“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$都要发生”称为$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的交，记为$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$或$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$。

三．对立事件（Complementary Events）



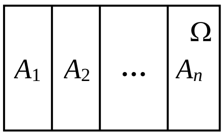
$\overline{A}$，若事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 B 是 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$。

四．事件的差 （Difference of Events）



$A-B$，有 $\omega\in A$ 但 $\omega\notin B$，即 A 发生但 B 不发生。
“事件 A 发生但事件 B 不发生”作为事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。
注：显然有 $A-B=A-AB=A\overline{B}$。

分割（Segmentation）：如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割或一个完备事件组。



显然，任一事件 A 与其对立事件 $\overline{A}$ 为样本空间 Ω 的一个分割。

五．事件的运算规律

（1）交换律（Commutative Law），$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

（2）结合律（Associative Law），$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

（3）分配律（Distributive Law），$(A\cup B)C=AC\cup BC$，$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$；

（4）对偶律（Duality Law），$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

证明：（1）、（2）、（3）显然成立。

（4）$A\cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生，$\overline{A\cup B}$ 表示 A 与 B 都不会发生，即 $\overline{A}\,\overline{B}$；$AB$ 表示 A 与 B 都要发生，$\overline{AB}$ 表示 A 与 B 至少有一个不发生，即 $\overline{A}\cup\overline{B}$。

例 设 A、B 为任意两个事件，则 $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=$________。

解：由并对交的分配律，得：

$$(A+B)(A+\overline{B})=A+B\overline{B}=A,$$

$$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}+B\overline{B}=\overline{A},$$

故

$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing。$$

应掌握将集合术语描述为日常语言，以及将日常语言表示为集合术语。

例 某射手向一目标射击三次，A 表示三次中至少命中一次，B 表示三次中至少命中两次，C 表示第一次命中了，D 表示第三次没命中，指出 $\overline{A},\overline{B},A-B,A-C,BC,BD$ 表示的事件。

解：所表示的事件为

$\overline{A}$ 表示三次都没命中；
$\overline{B}$ 表示三次中最多命中一次；
$A-B$ 表示三次中恰好命中一次；
AC 表示第一次没命中且后两次至少命中一次；
BC 表示第一次命中且后两次至少命中一次；
BD 表示前两次都命中且第三次没命中。

例　从一批产品中不放回抽取三件，A_i 表示第 i 件是合格品，将下列事件表示为集合：

（1）至少抽到一件合格品；
（2）至少抽到两件合格品；
（3）后两件是不合格品；
（4）第一件与第三件情况相同。

解：（1）$A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

（2）$A_1A_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3 \cup A_1A_2A_3$。

（3）$\bar{A}_2\bar{A}_3$。

（4）$A_1A_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_3$。

1.1.7.　事件域（Field of Events）

由样本空间 Ω 中某些子集作为元素构成的集合，称为 Ω 上的一个集合类，记为 $\mathscr{F}$。通常，希望在一个集合类 $\mathscr{F}$ 中的集合能进行并、交以及对立运算，即希望 $\mathscr{F}$ 对于并、交以及对立运算封闭。

定义　设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个集合类，如果满足

（1）$\Omega \in \mathscr{F}$；
（2）若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\bar{A} \in \mathscr{F}$；
（3）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$，则可列并 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数（Sigma-algebra），也称为 Ω 上的一个事件域。

事件域的实际意义就是在实际问题中所关心的样本空间中的那部分子集（事件），即样本空间 Ω 上的事件域 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素（Ω 的一个子集）就是事件。需要注意的是每一个事件都是样本空间 Ω 的一个子集，但样本空间 Ω 的每一个子集并不一定都是一个事件，只有当它是事件域 $\mathscr{F}$ 中的一个元素时才是一个事件。

从定义上看，显然 $\{\varnothing, \Omega\}$ 是 Ω 上最简单的 σ 代数，并且 Ω 中全部子集构成的集合类也是 Ω 上的一个 σ 代数。这两个 σ 代数称为 Ω 上平凡的 σ 代数。

性质　设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数，若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，则满足

（1）$\varnothing \in \mathscr{F}$；

（2）有限并 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$，$n \geq 1$；

（3）有限交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$，$n \geq 1$；

（4）可列交 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{F}$；

（5）差运算 $A_1 - A_2 \in \mathscr{F}$。

证明作为习题。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是 Ω 中的子集，则称以子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为元素的 Ω 上的最小 σ 代数为由子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 生成的 σ 代数，记为 $\sigma(A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots)$。直观上，就是由 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 经过最多可列次并与交，以及对立运算所得的全体子集构成的集合类。

如 A 是 Ω 中的一个非空真子集，则由 A 生成的 σ 代数 $\sigma(A) = \{\varnothing, \Omega, A, \bar{A}\}$，共有 4 个元素。

又如 A, B 是 Ω 中的两个非空真子集，它们相容且没有包含关系，则由 A, B 生成的 σ 代数

$$\sigma(A, B) = \{\varnothing, \Omega, A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cup B, \bar{A} \cup \bar{B}, AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}, AB \cup \bar{A}\bar{B}, A\bar{B} \cup \bar{A}B\},$$

共有 16 个元素。可以看作由 4 个基本元素 $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ 通过并集构成。

一般地，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 Ω 中的 n 个非空真子集，且其中任何一个子集都与其它 $n-1$ 个子集得到的基本元素相容且没有包含关系，则由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 生成的 σ 代数共有 2^{2^n} 个元素。如由三个非空真子集 A, B, C 生成的 σ 代数共有 $2^8 = 256$ 个元素。

设 Ω 为实数集 R，以所有开区间为元素生成的 R 上最小 σ 代数，称为波雷尔（Borel）σ 代数，记为 $\mathscr{B}$。域 $\mathscr{B}$ 中每个元素称为一个 Borel 集，或称为 Borel 可测集。根据 σ 代数的性质可知

- 所有单点集都是 Borel 可测集，因 $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$。
- 所有有限区间都是 Borel 可测集，因所有有限区间都可由开区间与单点集的并得到。
- 所有无限区间都是 Borel 可测集，因所有无限区间都可由一系列区间的并得到。
- 实数集 R 中的所有有限集、可列集、开集、闭集都是 Borel 可测集。
- “长度”作为开区间的共有属性可推广到一般的 Borel 可测集，即“测度（Measure）”。

§1.2　概率的定义及其确定方法

在概率论发展的历史上，根据不同的概率问题曾提出过不同的概率定义：古典定义、几何定义、频率定义、主观定义。直到 1933 年，才给出了适合一切随机现象的概率公理化定义。公理化定义是抛开概率的具体意义，从数学的抽象理论上给出的定义。

1.2.0.　排列与组合公式

一．排列（Permutation/Arrangement）

从 n 个不同元素中任选 r 个有顺序地排成一列，排列的方法总数，称为 n 选 r 的排列数，记为 A_n^r。

分步完成：选第 1 个元素，n 种选法；第 2 个元素，$n-1$ 种选法；⋯，选第 r 个元素，$n-r+1$ 种选法。故 $A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$。特别地 $r=n$ 时，$A_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$，称为 n 的全排列。

二．组合（Combination）

从 n 个不同元素中任选 r 个不分顺序地组成一组，组合的总数，称为 n 选 r 的组合数，记为 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$。

为了求 C_n^r，将 n 选 r 的排列分两步进行：第一步，n 选 r 组合，有 C_n^r 种方法；第二步，将这 r 个元素作全排列，有 $A_r^r = r!$ 种方法。这样 $A_n^r = C_n^r \cdot r!$，故 $C_n^r = \dfrac{A_n^r}{r!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$。

注：排列、重复排列要考虑顺序，组合不考虑顺序；当问题中有限制条件时，一般先考虑限制条件。

例　求没有重复数字的四位偶数的个数。

解：考虑顺序，用排列。约束条件：首位不是零，个位是偶数。

若首位偶数，即 $A_4^1 A_4^1 A_8^2$；首位奇数，即 $A_5^1 A_5^1 A_8^2$；故共有 $A_4^1 A_4^1 A_8^2 + A_5^1 A_5^1 A_8^2 = 2296$ 个。

例　某公司有 20 名职工，其中 5 名女性，求：

（1）任选 3 人出差，有多少种方法？

（2）若要求 3 人中男性多于女性，又有多少种方法？

解：（1）20 选 3 组合，$C_{20}^3 = 1140$。

（2）2 男 1 女，$C_{15}^2 C_5^1 = 525$，3 男，$C_{15}^3 = 455$，共有 $C_{15}^2 C_5^1 + C_{15}^3 = 980$ 种方法。

注：错误作法 $C_{15}^2 C_{18}^1 = 1890$。

三．重复排列（Repeated Permutation）

从 n 个不同元素中，可重复地取 r 个元素作排列，称为 n 取 r 次的重复排列。

分步：第 1 个元素，n 种取法；第 2 个元素，n 种取法；⋯；第 r 个元素，仍为 n 种取法。故共有 n^r 种取法。

重复排列关键是分清底数 n 与次数 r。

例　（1）6 名求职者安排到 4 家单位中任一家应聘，共有多少种方法？

（2）6 名学生竞选班委（班长、学习委员、体育委员、生活委员），可以兼任，有多少种方法？

解：（1）每名求职者有 4 种方法，4 取 6 次，$n=4, r=6$，即有 4^6 种方法。

（2）可以兼任，每个班委都有 6 种选法，6 取 4 次，即有 6^4 种方法。

注：一般，其中每一个元素可以被重选的是底数 n，不能被重选的是次数 r。

四．重复组合*（Repeated Combination）

从 n 个不同元素中，可重复地取 r 个元素不分顺序地作组合，称为 n 取 r 次的重复组合。

重复组合中每一个不同组合完全取决于每一个元素被取出的次数，将每一个元素对应于一个盒子，每一个元素被取出多少次，就看作对应的盒子放入多少个球，并将每个球都记为 0，每两个盒子用一个隔板隔开，并将每个隔板都记为 1。这样 n 取 r 次的重复组合中每一个组合就对应于由 r 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的一个字符串，这样的字符串共有 C_{n+r-1}^{r} 个，即 n 取 r 次重复组合的计算公式：C_{n+r-1}^{r}。

例 用扑克牌算“24 点”，共有多少中组合方式？

解：这是 10 取 4 次的重复组合。$C_{10+4-1}^{4}=C_{13}^{4}=715$。

1.2.1. 确定概率的古典方法

一般地，若一个随机试验满足

（1）样本空间 Ω 含有限个样本点 $\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，

（2）每个样本点出现的可能性相同，

则称之为古典概型（Classical Probability Model），这是一种等可能概型（Equal Likelihood Model）。

古典概型中，若样本点总数为 n，事件 A 中所含样本点个数为 k_A，则事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{k_A}{n}$。这称为概率的古典定义。

事实上，n 个样本点，又具有等可能性，即每个样本点发生的概率为 $\dfrac{1}{n}$。事件 A 中含 k_A 个样本点，即发生的概率为 $\dfrac{k_A}{n}$。实际问题中计算概率时通常要用到排列组合。

例 一袋中有 5 个红球、4 个白球、3 个黑球，不放回地抽取 3 个球。求以下事件的概率：

（1）全为红球；

（2）2 个红球 1 个白球；

（3）三球都不同色；

（4）前两个同色第三个不同色。

解：（1）—（3）小题，可以不考虑顺序，用组合。样本点总数为 12 选 3 组合，$n=C_{12}^{3}=220$。

（1）事件 $A_1=$“全为红球”所含样本点个数为 5 选 3 组合，即 $k_1=C_5^3=10$，故 $P(A_1)=\dfrac{10}{220}$。

（2）事件 $A_2=$“2 个红球 1 个白球”所含样本点个数为 $k_2=C_5^2C_4^1=40$，故 $P(A_2)=\dfrac{40}{220}$。

（3）事件 $A_3=$“三个球不同色”所含样本点个数为 $k_3=C_5^1C_4^1C_3^1=60$，故 $P(A_3)=\dfrac{60}{220}$。

而（4）小题，要考虑顺序，用排列，样本点总数为 12 选 3 排列，$n=A_{12}^{3}=1320$。

（4）事件 $A_4=$“前两个同色第三个不同色”所含样本点个数为 $k_4=A_5^2\cdot A_7^1+A_4^2\cdot A_8^1+A_3^2\cdot A_9^1=290$，故 $P(A_4)=\dfrac{290}{1320}$。

例 上例中若改为有放回抽球，又如何？

解：样本点总数为 12 取 3 次重复排列，$n=12^3=1728$，有顺序。

（1）事件 $A_1=$“全为红球”所含样本点个数为 5 取 3 次重复排列，$k_1=5^3=125$，故 $P(A_1)=\dfrac{125}{1728}$。

（2）事件 $A_2=$“2 个红球 1 个白球”所含样本点个数为 $k_2=C_3^2\times5^2\times4^1=300$，故 $P(A_2)=\dfrac{300}{1728}$。

注：两个红球已有顺序，但白球与红球间无顺序，须给红球或白球选位置。

（3）事件 $A_3=$“三个球不同色”所含样本点个数为 $k_3=5^1\times4^1\times3^1\times A_3^3=360$，故 $P(A_3)=\dfrac{360}{1728}$。

（4）事件 $A_4=$“前两个同色第三个不同色”所含样本点个数为 $k_4=5^2\times7^1+4^2\times8^1+3^2\times9^1=384$，

故 $P(A_4)=\dfrac{384}{1728}$。

注：古典概型求概率时，分子分母应该同时考虑顺序或同时不考虑顺序。考虑顺序用排列或重复排列，不考虑顺序用组合。

例 （生日问题）求 n 个人中至少有两人生日在同一天的概率，并问 n 为多少时，此概率约为 0.5。（不考虑 2 月 29 日且 $2\le n\le365$）

解：样本点总数为 365 取 n 次重复排列，即 $N=365^n$，有顺序。

事件 $\overline{A}=$“n 个人生日互不相同”中所含样本点个数为 365 选 n 排列，即 $K_{\overline{A}}=A_{365}^n$，故所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{A_{365}^n}{365^n};$$

计算可得：$n=23$ 时，$P(A)\approx0.5$。

n	10	20	23	30	40	50	60	100
$P(A)$	0.1169	0.4114	0.5073	0.7063	0.8912	0.9704	0.9941	0.9999997

1.2.2. 确定概率的几何方法

几何方法就是利用图形直观化求事件的概率。一般地，若一个随机试验满足

（1）样本空间 Ω 是直线上某个有限区间，或者平面上、空间中某个有限区域，

（2）每个样本点出现的可能性相同，

则称之为几何概型（Geometric Probability Model），这也是一种等可能概型。

几何概型中，样本空间 Ω 含有无限多个样本点，但其测度（长度、面积或体积）是有限的。若样本空间 Ω 测度为 $m(\Omega)$，事件 A 测度为 $m(A)$，则事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$。这称为概率的几何定义。

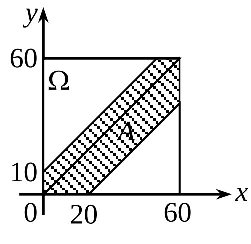
例 现有两艘船驶向同一码头，都将在中午 12 点至下午 1 点之间到达，这一小时内每一时刻到达都是等可能的，且它们何时到达互不影响。已知甲船将在码头停靠 10 分钟后离开，乙船将在码头停靠 20 分钟后离开。且后到的船必须在先到的船离开后才能停靠。求后到的船需要等候才能停靠的概率。

解：设甲、乙两船分别在 12 点的第 x、第 y 分钟到达该码头。

样本空间 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le60,0\le y\le60\}$。

若甲船先到，乙船需等候，有 $x<y<x+10$；

若乙船先到，甲船需等候，有 $y<x<y+20$；



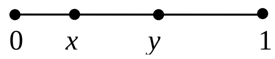
则 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le60,0\le y\le60,x<y<x+10$ 或 $y<x<y+20\}$，可得

$$m(\Omega)=60^2=3600,\quad m(A)=60^2-\frac{1}{2}\times50^2-\frac{1}{2}\times40^2=1550,$$

故有船需等候的概率

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1550}{3600}\approx0.43。$$

例　在一条长为 1 的直线段上随机地放入两点，这两点将直线段分成三段，求这三段能构成一个三角形的概率。

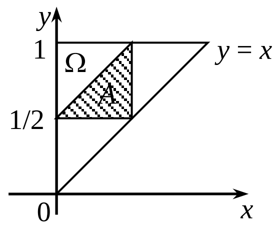


解：设 x, y 分别表示这两点与某端点的距离，且 $0 \le x \le y \le 1$。

样本空间 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le y \le 1\}$。

这三段能构成一个三角形，即每一段的长度不超过 $\dfrac{1}{2}$，有

$$0 < x < \frac{1}{2},\quad 0 < y - x < \frac{1}{2},\quad 0 < 1 - y < \frac{1}{2},$$



则 $A = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 < x < \dfrac{1}{2},\quad 0 < y - x < \dfrac{1}{2},\quad 0 < 1 - y < \dfrac{1}{2} \right\}$，可得

$$m(\Omega) = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2},\quad m(A) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8},$$

故这三段能构成一个三角形的概率

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4} = 0.25。$$

1.2.3.　确定概率的频率方法

随机事件在大量的重复试验中具有统计规律性。设事件 A 在 n 次试验中发生了 $n(A)$ 次，称 $n(A)$ 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数，并且称

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$$

为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率（Frequency）。

在大量重复试验中事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 将稳定在某数 p 附近，称该数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，此结果称为概率的频率定义。

如 2002、2006、2010、2014、2018 年五届世界杯足球比赛，共进行了 320 场比赛。

进球数	2002	2006	2010	2014	2018	合计	频率	理论值
0	4	7	7	7	1	26	0.0813	0.082
1	14	13	17	12	15	71	0.2219	0.205
2	21	18	13	8	17	77	0.2406	0.257
3	10	12	14	20	19	75	0.2344	0.214
4	8	10	7	9	5	39	0.1219	0.133
5	4	2	5	4	2	17	0.0531	0.067
6	1	2	0	2	2	7	0.0219	0.028
7	1	0	1	1	3	6	0.0188	0.010
≥ 8	1	0	0	1	0	2	0.0063	0.004

可以看出，频率与参数 $\lambda = 2.5$ 的泊松分布的概率值很接近。

又如科学家皮尔逊掷一枚硬币 24000 次，出现正面 12012 次，频率为 $f_n(A) = \dfrac{12012}{24000} = 0.5005$。这与掷一枚硬币出现正面的概率 0.5 很接近。

注：在试验中，频率 $f_n(A)$ 不是确定的，与所作具体试验有关；而概率 $P(A)$ 是确定的，与所作具体试验无关。

1.2.4. 确定概率的主观方法

对于某些不能在相同条件下进行重复试验的随机事件，往往只能根据专业知识和实际调查，对其概率作出主观判断。

统计界的贝叶斯学派认为：一个事件的概率是人们根据经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念。这称为概率的主观定义（Subjective Definition）。

1.2.5. 概率的公理化定义（Axiomatic Definition）

前面给出的各种概率定义都存在局限性，古典定义、几何定义仅适用于特殊的概率模型；频率定义、主观定义又缺乏精确的数学刻画。公理化定义是抛开概率的具体意义，从数学的抽象理论上给出的定义，它适合一切随机现象，并抓住了概率的本质特征。

定义 设Ω为样本空间，$\mathscr{F}$ 是Ω上的一个事件域，对于每一个事件$A\in\mathscr{F}$，都赋予一个实数$P(A)$，即P是由一个事件域$\mathscr{F}$ 到实数集的映射，$P:\mathscr{F}\to R$。若满足：

（1）非负性（Nonnegativity），$P(A)\ge 0$；

（2）正则性（Regularity），$P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性（Countable Additivity），若可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)\text{。}$$

则称$P(A)$是事件A的概率，称$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间。

概率的公理化定义刻画了概率的本质特征。概率P是由事件域$\mathscr{F}$ 到实数集R上并满足三条公理的映射，$P:\mathscr{F}\to R$，$A\to P(A)$，即概率就是事件域$\mathscr{F}$ 上的满足非负性、正则性、可列可加性的一个函数。

§1.3　概率的性质

抛开概率的实际意义，只是根据概率的三条公理：非负性、正则性、可列可加性，推导出概率所具有的一些常用性质。

性质　不可能事件概率为 0，$P(\varnothing)=0$。

证明：取一列不可能事件$\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing,\cdots$，它们显然两两互不相容，且$\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots$。由可列可加性可知，$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$，即$P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots=0$，故$P(\varnothing)=0$。

1.3.1.　概率的可加性（Additivity）

概率的可列可加性公理表明可加性适用于可列个互不相容事件的并，下面的性质说明可加性也适用于有限个互不相容事件的并。

性质（有限可加性）若有限个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容，则$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$。

证明：取$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，有$A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\cdots,\varnothing,\cdots$两两互不相容。由可列可加性可知，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)。$$

如两个事件A与B互不相容，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

性质　对任一事件A，有$P(A)=1-P(\overline{A})$。

证明：因A与$\overline{A}$互不相容且$A\cup\overline{A}=\Omega$，故

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1,$$

即$P(A)=1-P(\overline{A})$。

例　掷一枚硬币 5 次，求至少出现一次正面的概率。

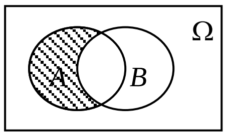
解：样本点总数$n=2^5=32$。事件$\overline{A}=$“5 次全都出现反面”中所含样本点个数为$k_{\overline{A}}=1$，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}。$$

1.3.2.　概率的单调性（Monotonicity）

性质　若$A\supset B$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$。

证明：因$A\supset B$，有$A=(A-B)\cup B$且显然$A-B$与B互不相容，故



$$P(A)=P((A-B)\cup B)=P(A-B)+P(B),$$

即$P(A-B)=P(A)-P(B)$。

推论（单调性）若$A\supset B$，则$P(A)\ge P(B)$。

性质　对任意两个事件A与B，有$P(A-B)=P(A)-P(AB)$。

证明：因$A-B=A-AB$且$A\supset AB$，故

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)。$$

1.3.3.　概率的加法公式（Additive Formula）

性质（加法公式）对任意两个事件 A 与 B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

证明：由概率的可加性及单调性，可得

$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(AB)。$$

例　在 1 到 200 的整数中任取一个，试求该数能被 6 或 8 整除的概率。

解：设 A 表示能被 6 整除，B 表示能被 8 整除，则 $A\cup B$ 表示能被 6 或 8 整除。

样本点总数 $n=200$，且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，且

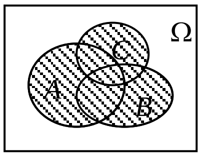
事件 A：连续的每 6 个数仅有 1 个数能被 6 整除，$200\div 6=33$ 余 2，$k_A=33$，$P(A)=\dfrac{33}{200}$；

事件 B：连续的每 8 个数仅有 1 个数能被 8 整除，$200\div 8=25$，$k_B=25$，$P(B)=\dfrac{25}{200}$；

事件 AB：既能被 6 又能被 8 整除，即能被 24 整除，$200\div 24=8$ 余 8，$k_{AB}=8$，$P(AB)=\dfrac{8}{200}$。

故

$$P(A\cup B)=\frac{33}{200}+\frac{25}{200}-\frac{8}{200}=\frac{1}{4}。$$



加法公式还可推广到多个事件：对于三个事件 A, B, C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)。$$

这是因为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)。$$

用数学归纳法可以证明更一般的加法公式：

性质（加法公式）对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)。$$

证明：当 $n=2$ 时，结论显然成立。

设对于 $n-1$，结论成立，则对于 n，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)+P(A_n)-P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_iA_n\right),$$

再分别对 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)$ 与 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_iA_n\right)$ 用 $n-1$ 时的归纳假设展开，整理后可得结论成立。

例　n 个同学每人写一张卡片，混在一起，然后再每人从中抽取一张，问至少有一人取到自己的卡片的概率是多少？当 $n\to\infty$ 时，此概率极限是多少？

解：设 A_i 表示第 i 个同学取到自己的卡片，$i=1, 2, \cdots, n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\text{。}$$

因 $P(A_i)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$，$P(A_iA_j)=\dfrac{(n-2)!}{n!}=\dfrac{1}{n(n-1)}$，$P(A_iA_jA_k)=\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$，…，故

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=n\cdot\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\text{。}$$

因 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$，故当 $n\to\infty$ 时，$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\to 1-e^{-1}$。

推论（半可加性）对任意两个事件 A, B，有 $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$。对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$。

证明：对任意两个事件 A, B，显然有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le P(A)+P(B)\text{，}$$

再用数学归纳法容易证明对任意 n 个事件，结论也成立。

1.3.4.　概率的连续性（Continuity）

定义　设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数，

（1）对 $\mathscr{F}$ 中任一单调不减序列 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 为 $\{A_n\}$ 的极限事件，记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$。

（2）对 $\mathscr{F}$ 中任一单调不增序列 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 为 $\{A_n\}$ 的极限事件，记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$。

定义　设 Ω 上的一个 σ 代数 $\mathscr{F}$，定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个函数 P，

（1）若对 $\mathscr{F}$ 中任一单调不减序列 $\{A_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A_n)=P(\lim\limits_{n\to+\infty}A_n)$，则称函数 P 是下连续的；

（2）若对 $\mathscr{F}$ 中任一单调不增序列 $\{A_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A_n)=P(\lim\limits_{n\to+\infty}A_n)$，则称函数 P 是上连续的。

性质（概率的连续性）若函数 P 是 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的概率，则 P 既是下连续的，又是上连续的。

证明：先证 P 是下连续的，设 $\{A_n\}$ 是一个单调不减事件序列，则

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i-A_{i-1})\text{，}$$

其中令 $A_0=\varnothing$。因 $A_1-A_0, A_2-A_1, \cdots, A_n-A_{n-1}, \cdots$ 两两互不相容，故

$$P(\lim_{n\to+\infty}A_n)=P\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i-A_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i-A_{i-1})=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)-P(A_{i-1})]=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)\text{。}$$

再证 P 是上连续的，设 $\{A_n\}$ 是一个单调不增事件序列，有 $\{\overline{A}_n\}$ 是一个单调不减事件序列，故

$$P(\lim_{n\to+\infty} A_n)=P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=1-P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bar{A}_n\right)=1-P(\lim_{n\to+\infty}\bar{A}_n)=1-\lim_{n\to+\infty}P(\bar{A}_n)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)\text{。}$$

性质　设σ代数$\mathscr{F}$上的函数P满足非负性、正则性，则P具有可列可加性的充分必要条件是P具有有限可加性和下连续性。

证明：必要性：若P具有可列可加性，即P为$\mathscr{F}$上的概率，故根据概率的性质可知概率P具有有限可加性和连续性；

充分性：若P具有有限可加性和下连续性，对于任意可列个两两互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，记

$F_n=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，有

$$\lim_{n\to+\infty} F_n=\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\text{，}$$

因P具有下连续性，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=P(\lim_{n\to+\infty} F_n)=\lim_{n\to+\infty}P(F_n)\text{，}$$

且P具有有限可加性，有

$$P(F_n)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\text{，}$$

故

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=P(\lim_{n\to+\infty} F_n)=\lim_{n\to+\infty}P(F_n)=\lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)\text{，}$$

事实上，根据概率的传统上的几个定义（频率定义、古典定义、几何定义、主观定义），只能从直观上得出概率具有有限可加性和连续性的结论，这条性质保证了概率公理化定义的合理性。

§1.4　条件概率

1.4.1.　条件概率（Conditional Probability）

在一定附加条件下求概率，称为条件概率。描述为“在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率”，记为 $P(A|B)$。

例　某厂有甲、乙、丙三个车间。现有的 100 件产品中，有 40 件为甲车间生产，且这 40 件中有 30 件是合格品。从中任选一件，求：

（1）选到的是甲车间合格品的概率；

（2）已知选到的是甲车间产品，求它是合格品的概率。

解：设 A 表示“选到合格品”，B 表示“选到甲车间产品”。

（1）$P(AB)=\dfrac{30}{100}$。

（2）此时，样本空间只考虑甲车间的 40 件产品，$P(A|B)=\dfrac{30}{40}$。

例　某班有 50 名学生，其中男生 30 人，女生 20 人，男生中有 12 名四川学生，女生中有 9 名四川学生。任选 1 人，求：

（1）选到四川男生的概率；

（2）已知选到的是四川学生，求是男生的概率。

解：设 A 表示“选到男生”，B 表示“选到四川学生”。

（1）$P(AB)=\dfrac{12}{50}$。

（2）只考虑四川学生，$P(A|B)=\dfrac{12}{21}$。

可见：概率 $P(A)$ 在整个样本空间 Ω 中考虑；条件概率 $P(A|B)$ 在缩减样本空间 B 中考虑。设 B 中所含样本点个数为 k_B；B 中属于 A 的样本点数即为 k_{AB}；样本点总数为 n。则

$$P(A|B)=\frac{k_{AB}}{k_B}=\frac{k_{AB}/n}{k_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}。$$

定义　若 $P(B)>0$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。

注：可以验证条件概率满足概率的三条公理，即条件概率也是一种概率。

例　掷三枚硬币，已知其中有一枚出现反面，求至少有一枚出现正面的概率。

解：设 A 表示“至少有一枚出现正面”，B 表示“至少有一枚出现反面”，B 的对立事件 $\overline{B}$ 表示“三枚全为正面”，有 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{7}{8}$，且 AB 的对立事件 $\overline{AB}$ 表示“三枚全为正面或全为反面”，有 $P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-\dfrac{2}{2^3}=\dfrac{6}{8}$，故

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{6/8}{7/8}=\frac{6}{7}。$$

例　现有的 10 件产品中合格品有 7 件。从中任取两件，发现其中至少有一件合格品，求另一件也是合格品的概率。

解：设 B 表示“至少有一件合格品”，A 表示“两件都是合格品”。因

$$P(B)=\frac{C_7^1C_3^1+C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{42}{45}，\quad P(AB)=P(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}，$$

故

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{21/45}{42/45}=0.5\text{。}$$

1.4.2. 乘法公式（Multiplication Formula）

因 $P(B)>0$ 时，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$；$P(A)>0$ 时，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，故 $P(A)P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)\text{。}$$

即事件积的概率等于一个事件的概率与另一事件条件概率之积。

例 有一个问题，甲先答，甲答对的概率为 0.6。若甲答错，再由乙答，乙答对的概率为 0.7。求该问题被答对的概率。

解： 设 A 表示“甲答对”，B 表示“乙答对”，有 $P(A)=0.6$，$P(B|\bar{A})=0.7$，故所求概率为

$$P(A\cup\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.6+0.4\times0.7=0.88\text{。}$$

例 袋中有 10 个红球，5 个白球，从中任取一球，再放回，并加入 10 个与之同色的球。再从袋中取出一球，求以下事件的概率：（1）两次都是红球；（2）第一次白球第二次红球。

解： 设 A、B 分别表示“第一、二次取得红球”，

（1）若第一次红球，则第二次 20 红 5 白，可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{10}{15}\times\frac{20}{25}=\frac{8}{15}\text{。}$$

（2）若第一次白球，则第二次 10 红 15 白，可得

$$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{5}{15}\times\frac{10}{25}=\frac{2}{15}\text{。}$$

1.4.3. 全概率公式（Total Probability Formula）

例 某厂有甲、乙、丙三个车间，其产量分别占总产量的 35%、40%、25%；合格品率分别为 80%、90%、60%。则该厂产品合格品率为多少？

解： 设 A 表示“合格品”，B_1、B_2、B_3 分别表示“甲、乙、丙三个车间生产的产品”，有

$$P(B_1)=0.35\text{，}\ P(B_2)=0.4\text{，}\ P(B_3)=0.25\text{；}$$

$$P(A|B_1)=0.8\text{，}\ P(A|B_2)=0.9\text{，}\ P(A|B_3)=0.6\text{，}$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=0.35\times0.8+0.4\times0.9+0.25\times0.6=0.79\text{。}\end{aligned}$$

定理 若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个分割，A 为任一随机事件，$P(B_i)>0,\quad i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)\text{。}$$

证明： 由概率的可加性及条件概率乘法公式，可得

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)\text{。}$$

全概率公式用于：一个结果可在多种原因下发生，根据原因求结果。

例 一袋中有 10 个红球，5 个白球，从中任取一球，放回，并放进与之同色 10 个球，再从中取出一球，求第二次取得白球的概率。

解： 结果：设 A 表示“第二次取得白球”，原因：设 B_1 、 B_2 分别表示“第一次取得红球、白球”，故

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{10}{15}\times\frac{20}{25}+\frac{5}{15}\times\frac{10}{25}=\frac{1}{3}\text{。}$$

例 两箱产品，甲箱中有 8 件正品、2 件次品，乙箱中有 4 件正品、没有次品，从甲箱中任取两件放入乙箱，然后再从乙箱中任取一件，求从乙箱取得次品的概率。

解： 结果：设 A 表示“从乙箱取得次品”，原因：设 B_0 、 B_1 、 B_2 分别表示“从甲箱中取得 2 件正品、1 件正品 1 件次品、2 件次品”，故

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}\times 0+\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}\times\frac{1}{6}+\frac{C_2^2}{C_{10}^2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{15}\text{。}$$

例 现有 n 支考签，其中 m 支难签。甲、乙、丙三人依次不放回地抽签，分别求每个人抽到难签的概率。

解： 设 A 、 B 、 C 分别“表示甲、乙、丙抽到难签”。

对于甲，显然有 $P(A)=\dfrac{m}{n}$；

对于乙，结果：B，原因： $A,\overline{A}$ ，有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m}{n}\text{；}$$

对于丙，结果：C，原因： $AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B}$ ，有

$$P(C)=P(AB)P(C|AB)+P(A\overline{B})P(C|A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C|\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})P(C|\overline{A}\overline{B})$$

$$=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m-2}{n-2}+\frac{m}{n}\cdot\frac{n-m}{n-1}\cdot\frac{m-1}{n-2}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}\cdot\frac{m-1}{n-2}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m-1}{n-1}\cdot\frac{m}{n-2}=\frac{m}{n}\text{。}$$

由此可见，通常的抽签问题中概率与先后次序无关。

1.4.4. 贝叶斯公式（Bayes Formula）

定理 若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个分割， A 为任一随机事件， $P(B_i)>0,\quad i=1,2,\cdots,n$ ， $P(A)>0$ ，则

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}\text{。}$$

证明： 根据条件概率的定义，并运用乘法公式和全概率公式可得：

$$P(B_k|A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}=\frac{\overset{\text{乘法公式}}{P(B_k)P(A|B_k)}}{\underset{\text{全概率公式}}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}}\text{。}$$

贝叶斯公式用于：一个结果可在多种原因下发生，已知结果发生了，找原因。

例 一袋中有 10 个乒乓球，其中恰有 2 个新球，从中任取 3 个球，使用完后放回，然后再从中取出一球，（1）求第二次取得新球的概率；（2）若第二次取得新球，求第一次所取 3 个都是旧球的概率。

解：结果：设 A 表示“第二次取得新球”，原因：设 B_0、B_1、B_2 分别表示“第一次取得 3 个旧球、2 个旧球 1 个新球、1 个旧球 2 个新球”。

（1）由全概率公式：

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}\times\frac{2}{10}+\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}\times\frac{1}{10}+\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}\times 0=0.0933+0.0467+0=0.14\text{。}$$

（2）由贝叶斯公式：

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.0933}{0.14}=\frac{2}{3}\text{。}$$

例　现有 10 支枪，其中有 3 支校验过，已知校验过的枪试射命中率可达 0.8，未校验过的枪试射命中率只有 0.1，现从中任取一支枪试射，结果命中了，求取得的是校验过的枪的概率。

解：结果：设 A 表示“试射命中”，原因：设 B_1、B_2 分别表示“枪是校验过的、未校验过的”，故由贝叶斯公式可得

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}=\frac{\frac{3}{10}\times 0.8}{\frac{3}{10}\times 0.8+\frac{7}{10}\times 0.1}=\frac{24}{31}\approx 0.774\text{。}$$

§1.5 独立性

1.5.1. 两个事件的独立性（Independence）

一般情况下 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 不相等，即 B 发生对 A 发生的概率有一定影响。但在特殊情况下，B 发生对 A 发生的概率没有影响，即 $P(A|B)=P(A)$。

例 10 件产品中有 8 件合格品、2 件不合格品，随机抽取一件，不放回，再抽取第二件，求：

（1）在第一件为合格品的条件下，第二件也为合格品的概率；

（2）第二件为合格品的概率。

解：结果：设 A 表示“第二件为合格品”，原因：设 B、$\bar{B}$ 分别表示“第一件为合格品、不合格品”。

（1）$P(A|B)=\dfrac{7}{9}$。

（2）由全概率公式，可得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{10}。$$

可见 $P(A|B)\neq P(A)$，不放回抽取时，第一次对第二次有影响。

例 上例中若改为有放回抽取，又如何？

解：所设 A、B、$\bar{B}$ 同上例。

（1）$P(A|B)=\dfrac{8}{10}$。

（2）由全概率公式，可得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{8}{10}。$$

可见 $P(A|B)=P(A)$，有放回抽取时，第一次对第二次没有影响。

若事件 B 对事件 A 的发生没有影响，即 $P(A|B)=P(A)$，此时有 $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$

定义 若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立。

事件 A 与 B 相互独立的实际意义是 A 与 B 互不影响。

结论 若 A 与 B 相互独立，则 $P(A)>0$ 时，$P(B)=P(B|A)$；$P(B)>0$ 时，$P(A)=P(A|B)$。

定理 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都分别相互独立。

证明：因

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\bar{B}),$$

故 A 与 $\bar{B}$ 相互独立；类似可证 $\bar{A}$ 与 B 相互独立；又因

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\bar{A})P(\bar{B}),$$

故 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

例 两批产品中合格品率分别为 0.9、0.8，从两批产品中独立地各取一件，求：

（1）两件都是合格品的概率；

（2）至少有一件是合格品的概率。

解：设 A、B 分别表示“从两批产品中取得合格品”，A 与 B 相互独立。

（1）所求概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.9\times0.8=0.72。$$

（2）所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.9+0.8-0.72=0.98。$$

例 甲袋中有 7 个红球、3 个白球，乙袋中有 6 个红球、4 个白球，从甲、乙两袋中各自随机地取两个球，问所取的 4 个球恰为两红两白的概率。

解： 设 A_0、A_1、A_2 分别表示"从甲袋中取得两白球、一红一白、两红球"；B_0、B_1、B_2 分别表示"从乙袋中取得两白球、一红一白、两红球"，有 A_i 与 B_j 相互独立（$i=0,1,2;\ j=0,1,2$），故

$$P(A_0B_2\cup A_1B_1\cup A_2B_0)=P(A_0B_2)+P(A_1B_1)+P(A_2B_0)=P(A_0)P(B_2)+P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_0)$$

$$=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\times\frac{C_6^2}{C_{10}^2}+\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}\times\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}+\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\times\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{675}{2025}=\frac{1}{3}。$$

注： 独立与互不相容不同。若 A 与 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$；若 A 与 B 互不相容，则 $AB=\varnothing$，即 $P(AB)=0$。如果 A 与 B 相互独立，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，那么 A 与 B 必相容。

1.5.2.　多个事件的相互独立性（Mutual Independence）

定义　若三个事件 A、B、C 满足：

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B) & ①\\ P(AC)=P(A)P(C) & ②\\ P(BC)=P(B)P(C) & ③\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) & ④\end{cases}$$

则称 A、B、C 相互独立。

注： 相互独立的四个条件缺一不可。

若只满足条件①、②、③，则称 A、B、C 两两独立（Pairwise Independence）。但两两独立不一定相互独立。

例　袋中有 1 个红球，1 个白球，1 个黑球及 1 个红白黑三色球，从袋中任取一球，分别以 A、B、C 表示所取的球有红、白、黑色。讨论事件 A、B、C 的独立关系。

解： 显然有 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=P(B)=P(C)$。因

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B),\quad P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C),\quad P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C),$$

故 A、B、C 两两独立；

但 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$，故 A、B、C 不是相互独立。

与两个事件相互独立的性质类似，三个事件相互独立也有关于对立事件的类似性质。

性质　若三个事件相互独立，则其中一部分事件换成其对立事件后也相互独立。

例　现有三台机床，它们正常工作的概率分别为 0.9、0.8、0.85，且它们是否正常工作互不影响，求：

（1）三台机床都正常工作的概率；

（2）三台机床中至少有一台正常工作的概率。

解： 设 A、B、C 分别表示每一台机床正常工作，有 A、B、C 相互独立。

（1）三台机床都正常工作，即 ABC，所求概率为

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.9\times0.8\times0.85=0.612;$$

（2）三台机床中至少有一台正常工作的对立事件为三台机床都不正常工作，即 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，所求概率为

$$1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-0.1\times0.2\times0.15=0.997。$$

例　甲、乙、丙三人同时向一目标射击，命中率分别为 0.6、0.55、0.7，他们是否命中互不影响，求三人中恰好有一人命中的概率。

解：设 A、B、C 分别表示甲、乙、丙三人命中目标，有 A、B、C 相互独立。所求概率为

$$P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$$

$$=0.6\times0.45\times0.3+0.4\times0.55\times0.3+0.4\times0.45\times0.7=0.273\text{。}$$

例 已知 A、B、C 相互独立，则以下结论错误的有（　　）。

① A 与 BC 相互独立，　② $A\cup B$ 与 C 相互独立，

③ AB 与 AC 相互独立，　④ A、B、C 两两独立。

答：选③，因 AB 与 AC 都与 A 有关，它们相互有影响。

类似可给出 n 个事件的独立性定义。

定义 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对其中任意 k 个不同的事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$（$2\le k\le n$）都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\text{，}$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

可见 n 个事件相互独立共需要 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个条件。

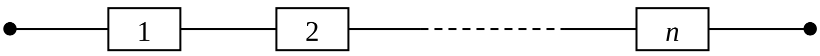
性质 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 k（$2\le k\le n$）个不同的事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ 都相互独立。

与两个事件相互独立的性质类似，n 个事件相互独立也有关于对立事件的类似性质。

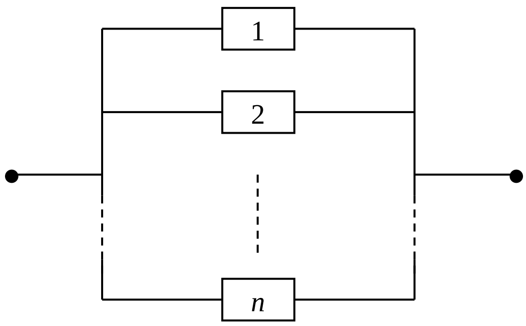
性质 若 n 个事件相互独立，则其中一部分事件换成其对立事件后也相互独立。

可靠性问题：元件可靠性，即单独一个元件能正常工作的概率；系统可靠性，即多个元件构成的系统能正常工作的概率。

串联系统：由多个独立元件串联而成的系统，当所有元件都正常工作时系统才正常工作；



并联系统：由多个独立元件并联而成的系统，当任一元件正常工作时系统就能正常工作。



设 A_i 表示“第 i 个元件正常工作”，记 $P(A_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。则串联系统的可靠性为

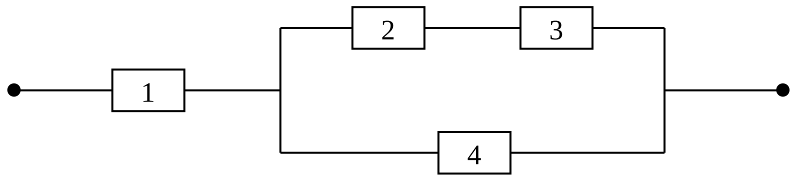
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=p_1p_2\cdots p_n\text{，}$$

并联系统的可靠性为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)\text{。}$$

当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=p$ 时，串联系统的可靠性为 p^n，并联系统的可靠性为 $1-(1-p)^n$。随着元件个数 n 的增加，串联系统的可靠性越来越小，而并联系统的可靠性越来越大。

例　由 4 个独立元件组成的系统如图，每一个元件的可靠性都是 p，求该系统的可靠性。



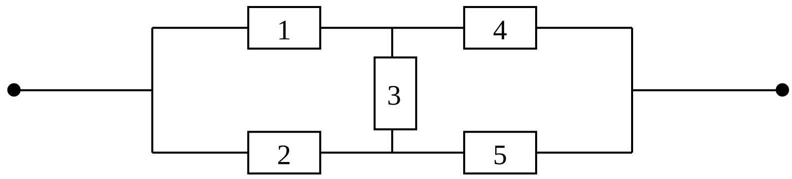
解：设 A_i 表示"第 i 个元件正常工作"，有 $P(A_i)=p,\quad i=1,2,3,4$，系统正常工作为事件

$$A_1(A_2A_3\cup A_4)=A_1A_2A_3\cup A_1A_4，$$

故系统可靠性为

$$P(A_1A_2A_3\cup A_1A_4)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)=p^3+p^2-p^4。$$

例　由 5 个独立元件组成的系统如图，每一个元件的可靠性都是 p，求该系统的可靠性。



解：设 A_i 表示"第 i 个元件正常工作"，有 $P(A_i)=p,\quad i=1,2,3,4,5$，系统正常工作为事件

$$[A_3(A_1\cup A_2)(A_4\cup A_5)]\cup[\bar{A}_3(A_1A_4\cup A_2A_5)]，$$

故系统可靠性为

$$P(A_3(A_1\cup A_2)(A_4\cup A_5))+P(\bar{A}_3(A_1A_4\cup A_2A_5))=p(2p-p^2)^2+(1-p)(2p^2-p^4)$$

$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5。$$

1.5.3.　试验的独立性

定义　设有两个试验 E_1 和 E_2，如果试验 E_1 的任一结果与 E_2 的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立。类似，对于 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，如果 E_1 的任一结果、E_2 的任一结果、…、E_n 的任一结果都是相互独立的事件，则称这 n 个试验相互独立。n 个相同的且相互独立的试验，称为 n 重独立重复试验（Independent Repeated Tests）。

某些试验中，只考虑是与非两种结果：如掷硬币，考虑正面与反面朝上；掷骰子，考虑出现 1 点或不出现 1 点。在一次试验中，只考虑事件 A 是否发生（即 A 或 $\bar{A}$），则称为一次伯努利试验（Bernoulli Test）。如果在相同条件下独立地作 n 次伯努利试验，则称为 n 重伯努利试验。一般地，若满足以下三个条件：

（1）每次试验两种结果，A 与 $\bar{A}$；
（2）每次试验相互独立；
（3）每次试验概率 $P(A)=p$ 不变。

则称之为伯努利概型（Bernoulli Probability Model）。

定理　（伯努利定理）在伯努利概型中，设 $P(A)=p$，则 n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n，$$

其中 X 表示"n 次试验中事件 A 的发生次数"。

证明： 分三步讨论：

（1）事件 A 发生 k 次， p^k ；

（2）事件 $\overline{A}$ 发生 $n-k$ 次，$(1-p)^{n-k}$ ；

（3）从 n 次中选 k 次，作为 A 发生次数的位置， C_n^k ；

故概率为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 。

例 现有 4 台机床，每台机床一小时内平均工作 20 分钟，且是否工作相互独立，求同一时刻恰有一台机床工作的概率及至少有一台机床工作的概率。

解： 将每一台机床是否工作看作一次试验，工作 A 与不工作 $\overline{A}$ ；独立；概率 $P(A)=p=\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$ 不变。这是伯努利概型， $n=4$ ， $p=\dfrac{1}{3}$ ，且 X 表示“工作的机床台数”，故恰有一台机床工作的概率为

$$P\{X=1\}=C_4^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81};$$

至少有一台机床工作的概率为

$$P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{65}{81}。$$

例 现有 5 个单项选择题，每题 4 个答案，选对一题得 1 分，选错不得分。某同学随机地任选答案，求该同学得 0 分，得 1 分的概率。若得 3 分以上算及格，求该同学及格的概率。

解： 将该同学每作一题看作一次试验，选对 A 与选错 $\overline{A}$ ；独立；概率 $P(A)=p=\dfrac{1}{4}$ 不变。这是伯努利概型， $n=5$ ， $p=\dfrac{1}{4}$ 。且 X 表示“选对的题数”，故得 0 分的概率为

$$P\{X=0\}=\left(\frac{3}{4}\right)^5=0.2373;$$

得 1 分的概率为

$$P\{X=1\}=C_5^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4=0.3955;$$

及格的概率为

$$P\{X\ge 3\}=C_5^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+C_5^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^5=0.1035。$$

例 上例中，若改为 10 个单项选择题，得 6 分以上算及格，又如何？

解： 伯努利概型， $n=10$ ， $p=\dfrac{1}{4}$ 。且 X 表示“选对的题数”，故得 0 分的概率为

$$P\{X=0\}=\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0.0563;$$

得 1 分的概率为

$$P\{X=1\}=C_{10}^{1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{9}=0.1877\text{；}$$

及格的概率为

$$P\{X\ge 6\}=C_{10}^{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{4}+C_{10}^{7}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=0.0197\text{。}$$

例 甲、乙、丙三人同时向一目标射击，每人击中目标的概率都是 0.4，且每人是否击中相互独立。假设只有一人击中时，目标被摧毁的概率为 0.2；两人击中时，目标被摧毁的概率为 0.6；而三人都击中时，目标一定被摧毁。现在如果发现目标已被摧毁，求它是被三人同时击中的概率。

解：结果：设 B 表示“目标被摧毁”，原因：设 A_0、A_1、A_2、A_3 分别表示“无人、1 人、2 人、3 人击中目标”，故

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}\text{，}$$

其中 $P(B|A_0)=0$，$P(B|A_1)=0.2$，$P(B|A_2)=0.6$，$P(B|A_3)=1$，且将每人是否射中目标看作一次试验，射中 A 与没射中 $\overline{A}$；独立；$P(A)=p=0.4$ 不变；这是伯努利概型，$n=3$，$p=0.4$，则

$$P(A_0)=0.6^3=0.216\text{，}$$

$$P(A_1)=C_3^1\times 0.4^1\times 0.6^2=0.432\text{，}$$

$$P(A_2)=C_3^2\times 0.4^2\times 0.6^1=0.288\text{，}$$

$$P(A_3)=0.4^3=0.064\text{，}$$

故所求概率为

$$P(A_3|B)=\frac{0.064\times 1}{0.216\times 0+0.432\times 0.2+0.288\times 0.6+0.064\times 1}=\frac{0.064}{0.3232}\approx 0.1980\text{。}$$