2019—2020 学年第 1 学期

西南财经大学期末考试

试题答案及评分标准

（A 卷）

课 程 名 称： 概率论（理科）

授课专业年级： 全校

授课命题教师： 吴萌

命 题 时 间： 2019. 11

教务处制

一、选择题（每题分 3 分共 30 分）

CDBCA　BDBCB

二、解答题（每题 9 分共 63 分）

1、在你外出度假的时，你请邻居给你的病树浇树。如果没浇水的话，它死去的概率为 0.8.如果浇水的话，它死去的概率为 0.15.你有 90%的把握确定邻居记得浇水，试求：

（1）当你回来时，树还活着的概率；

（2）如果树死了，那么邻居忘记浇水的概率。

解：设A=树存活，B=浇水，则

(1) $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=0.85\times0.9+0.2\times0.1=0.785$ (5分)

(2) $P(\overline{B}|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})P(\overline{B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{0.8\times0.1}{0.215}=0.372$ (4分)

2、设随机变量 X 的概率密度函数为：

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ A-x, & 1<x\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试求：（1）常数 A.（2）X 的分布函数.（3）求 $Y=2X-1$的概率密度函数

解:

（1）$A=2$ (2 分)

（2）$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2 \\ 1, & 2\le x \end{cases}$$ (4 分)

（3）$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(y+1), & -1\le x\le 1,\\ 1-\frac{1}{4}(y+1), & 1\le x\le 3,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ （3分）

3、 设随机变量 X 与 Y 独立，其分布密度分别为：

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\;;\quad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）概率 $P(X+Y<1)$。

（2）$Z=2X+Y$ 的密度函数

解

（1）$P(X+Y<1)=\iint\limits_{x+y<1} p_X(x)p_Y(y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-y}dy=e^{-1}$ （3 分）

（2）$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z} p(x,y)dxdy$

$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$;

$0<z<2$时，$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\int_0^{z-2x} e^{-y}dydx=\frac{1}{2}(z-1+e^{-z})$;

$z\ge 2$时，$F_Z(z)=\int_0^1\int_0^{z-2x} e^{-y}dydx=1+\frac{1}{2}(1-e^2)e^{-z}$;

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \frac{1}{2}(z-1+e^{-z}) & 0<z<2\\ 1+\frac{1}{2}(1-e^2)e^{-z} & z\ge 2\end{cases}$ （4 分）

$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0<z<2\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z} & z\ge 2\end{cases}$ （2 分）

4、已知二维随机变量（X，Y）在单位圆上服从均匀分布

试分别讨论 X，Y 的相关性和独立性。

解：

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$p_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},. & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$同理p_Y(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

所以$p(x,y)\ne p_X(x)p_Y(x)$，X,Y不独立。 （4分）

$$E(XY)=\iint_{R^2}xyp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xydydx=0$$

$$E(X)=\iint_{R^2}xp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xdydx=0，同理E(Y)=0$$

所以$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$,

故X,Y不相关。

（5分）

5、设二维随机变量(X,Y)的分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.1	0.2	α
1	β	0.1	0.2

并且$P(X+Y=1)=0.4$,

(1) 求α,β的值； (2) 求$Cov(X,Y)$ (3) 判断事件$\{X=1\}$与事件$\{\max\{X,Y\}=1\}$是否独立，并说明理由.

解：(1) 由 $0.1+0.2+\alpha+\beta+0.1+0.2=1$得

$$\alpha+\beta=0.4$$

结合$P(X+Y=1)=0.4=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0.1+\alpha$ 得

$$\alpha=0.3,\beta=0.1$$

（2 分）

(2) X 的分布律为

X	-1	0	1
P	0.2	0.3	0.5

得$E(X) = 0.3$

Y 的分布律为

Y	0	1
P	0.6	0.4

得$E(Y) = 0.4$

XY 的分布律为

XY	-1	0	1
P	0.1	0.7	0.2

得$E(XY) = 0.1$

从而 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.02$ (6 分)

(3) 记 A,B 分别表示事件$\{X=1\}$，$\{\max\{X,Y\}=1\}$，则

$$P(A) = P(X = 1) = 0.5,$$

$$\begin{aligned}P(B) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + \\ &\quad P(X = 0, Y = 1) + P(X = -1, Y = 1) \\ &= 0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(AB) &= P(X = 1, \max\{X, Y\} = 1) \\ &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) \\ &= 0.5\end{aligned}$$

显然有$P(AB) \neq P(A)P(B)$，故事件 A,B 不独立

6、设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为:

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求 E(X|Y=0)

解：$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1\le y\le 0,\\ \int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ (3分)

由此得，当$-1<y<1$时

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1+y}, & 0\le -y\le x\le 1,\\ \frac{1}{1-y}, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ （3分）

$$p(x|y=0)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$E(X|Y=0)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x|y=0)=\frac{1}{2}$ (3分)

7、修理厂修理机器需两个阶段，第一阶段所需时间为指数分布，均值为 0.2 小时。第二阶段所需时间也是指数分布，并且与第一阶段独立，均值为 0.3 小时。现在修理工有 20 台机器需要修理，请利用中心极限定理计算他在 8 小时内完成修理任务的概率近似值。

附常用正态分布值：$\Phi(1.28)=0.8997,\Phi(1.24)=0.8925,\Phi(1.64)=0.9495,\Phi(1.65)=0.9505$
$\Phi(1.96)=0.9750,\Phi(2.0)=0.97725$

解：设X是修理一台机器所用的时间，则

$E(X)=0.5 \qquad D(X)=0.13$ (3分)

$P(\sum_{i=1}^{20}X_i<8)=P(\frac{\sum_{i=1}^{20}X_i-10}{\sqrt{2.6}}<\frac{8-10}{\sqrt{2.6}})\approx\Phi(-1.24)=0.1075$ (6分)

三、证明题（7 分）

设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，均服从$U(-1,1)$，请利用特征函数证明$\sqrt{\frac{3}{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$

依分布收敛于$N(0,1)$.

(提示：$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\circ(x^5)$)

证明：

X_i的特征函数$\varphi_{X_i}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$，（2分）

故$Y_n=\sqrt{\dfrac{3}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$的特征函数：

$$\varphi_{Y_n}(t)=\left(\frac{\sin\sqrt{\frac{3}{n}}t}{\sqrt{\frac{3}{n}}t}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{n}}t-\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{n}}t\right)^3}{3!}+\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{n}}t\right)^5}{5!}+\circ(\left(\sqrt{\frac{3}{n}}t\right)^5)}{\sqrt{\frac{3}{n}}t}\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Y_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^{-\frac{2n}{t^2}}\right\}^{-\frac{t^2}{2}}=e^{-\frac{t^2}{2}}$$ （3分）

而$e^{-\frac{t^2}{2}}$正是$N(0,1)$的分布特征函数，命题得证。（2分）