第十章　微分方程

本章讨论一元函数 $y=f(x)$，其中 y 是 x 的函数．

§10.1　微分方程的基本概念

例　求一条曲线，其切线斜率等于 $2x$，且过点(1, 2)．

解：切线斜率就是导数，即 $y'=2x$，且 $y|_{x=1}=2$．

这里 $y'=2x$ 是含未知函数导数的方程．

例　求一个函数，其导数等于它自身．

解：即 $y'=y$．

一．微分方程的定义

定义　含未知函数导数或微分的方程，称为微分方程．若方程中未知函数是一元函数，则称之为常微分方程（Ordinary Differential Equation——ODE）；若方程中未知函数是多元函数，则称之为偏微分方程（Partial Differential Equation——PDE）．

如 $y'=2x$，$y'=y$，$y''+y=0$，$y'''+y'y=x$ 等都是常微分方程；

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 等都是偏微分方程．

这里只讨论常微分方程，其一般形式为 $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$．

定义　微分方程中所含未知函数导数的最高阶数，称为微分方程的阶．

如 $y'=2x$，$y'=y$ 为一阶微分方程，

$(y')^3+(y')^2+5y'+2y=0$ 为一阶微分方程，

$y^{(3)}+y^{(2)}+5y'+2y=0$ 为三阶微分方程，

$y''=(\sin x)'''$为二阶微分方程，

$(xy')'=xy''+y$ 为一阶微分方程，

$(xy)'=y+xy'$不是微分方程．

注意：微分方程的阶数与次数无关；应先化简在判断阶数．

如果微分方程中所含未知函数及其各阶导数都是一次，则称之为线性微分方程，形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=f(x).$$

二．微分方程的解

定义　使微分方程成为恒等式的函数，称为微分方程的解．

如 $y'=2x$，有 $y=x^2$，$y=x^2+1$，$y=x^2+C$ 都是其解；$y'=y$，有 $y=e^x$，$y=0$ 是其解．

例　试证 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是二阶微分方程 $y''+y=0$ 的解．（C_1, C_2 是任意常数）

证明：$\because y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$，$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x$，　　$\therefore$ 左端 $=y''+y=0=$ 右端，得证．

定义　若微分方程的解中所含独立任意常数的个数等于方程的阶，则称此解为微分方程的通解．

若解中不含任意常数，则称此解为微分方程的特解．

如 $y=x^2+C$ 是 $y'=2x$ 的通解；$y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是 $y''+y=0$ 的通解；

而 $y=x^2$，$y=x^2+1$ 是 $y'=2x$ 的特解；$y=e^x$，$y=0$ 是 $y'=y$ 的特解．

注意：$y=C_1\cos x+\sin x$，$y=(C_1+C_2)\cos x+\sin x$ 不是 $y''+y=0$ 的通解．

对于微分方程的通解，在一定的条件下，可确定 C 的值，而得到特解，所给的条件称为初始条件．

如 $y'=2x$，$y|_{x=1}=2$，这里 $y|_{x=1}=2$ 为初始条件．

一般，一阶微分方程的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$，

二阶微分方程的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$，$y'|_{x=x_0}=y_1$，

n 阶微分方程的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$，$y'|_{x=x_0}=y_1$，L ，$y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}$．

§10.2　一阶微分方程

一般形式为 $y' = f(x, y)$或 $F(x, y, y') = 0$，分别为显式、隐式.

一．可分离变量的一阶微分方程

形式为 $y' = f(x)g(y)$ 的方程称为可分离变量的微分方程. 特点是变量 x 与 y 的函数可完全分开相乘除.

将导数写成微商　$\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$，

分离变量　$\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$，

两边积分　$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.

例　求解 $y' = y$.

解：一阶，可分离变量，

$$\frac{dy}{dx} = y，\quad \frac{dy}{y} = dx，\quad \int \frac{dy}{y} = \int dx + C，\quad \ln|y| = x + C，\quad |y| = e^{x+C} = e^C e^x，$$

$\therefore y = C_1 e^x$，（$C_1 = \pm e^C$ ）.

例　求解 $y' = \dfrac{1-x}{1+y}$.

解：一阶，可分离变量，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{1+y}，\quad (1+y)dy = (1-x)dx，\quad \int (1+y)dy = \int (1-x)dx + C，$$

$\therefore\ y + \dfrac{y^2}{2} = x - \dfrac{x^2}{2} + C$.

例　求解 $y' = e^{x+y}$，且 $y|_{x=0} = -\ln 2$.

解：一阶，可分离变量，

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y，\quad e^{-y}dy = e^x dx，\quad \int e^{-y}dy = \int e^x dx + C，\quad -e^{-y} = e^x + C，$$

$\because y|_{x=0} = -\ln 2$，　　即 $-e^{\ln 2} = e^0 + C$，　$C = -3$，

$\therefore -e^{-y} = e^x - 3$.

例　求解$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$.

解：一阶，可分离变量，

$$x(y^2+1)dx = -y(x^2-1)dy，\quad \frac{x}{x^2-1}dx = -\frac{y}{y^2+1}dy，\quad \int \frac{x}{x^2-1}dx = -\int \frac{y}{y^2+1}dy + \frac{1}{2}\ln|C|，$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| = -\frac{1}{2}\ln|y^2+1| + \frac{1}{2}\ln|C|，\quad \ln|(x^2-1)(y^2+1)| = \ln|C|，$$

$\therefore (x^2-1)(y^2+1) = C$.

二．齐次微分方程

形式为 $y' = \varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程，称为齐次微分方程. 特点是函数为 x 与 y 的零次齐次函数.

注：若 $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$，则称 $f(x, y)$为零次齐次函数.

先换元　　令 $u = \dfrac{y}{x}$，有 $y = xu$，$y' = u + xu'$，

代入原方程　$u+xu'=\varphi(u)$，可分离变量，

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u\,,\qquad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}\,,\qquad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C\,.$$

例　求解 $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

解：一阶，零次齐次，

令 $u=\dfrac{y}{x}$，有 $y=xu$，$y'=u+xu'$，

$$u+xu'=u+\frac{1}{u}\,,\qquad x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\,,\qquad udu=\frac{dx}{x}\,,\qquad \int udu=\int\frac{dx}{x}+C\,,\qquad \frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C\,,$$

$\therefore\ \dfrac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$.

例　求解 $y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$，且 $y|_{x=1}=e$.

解：一阶，零次齐次，分子分母同除以 x^2，$y'=\dfrac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}-1}$，

令 $u=\dfrac{y}{x}$，有 $y=xu$，$y'=u+xu'$，

$$u+xu'=\frac{u^2}{u-1}\,,\qquad x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}-u=\frac{u}{u-1}\,,\qquad \frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}\,,\qquad \int(1-\frac{1}{u})du=\int\frac{dx}{x}+C\,,$$

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C,\qquad \frac{y}{x}-\ln|\frac{y}{x}|=\ln|x|+C\,,\qquad \frac{y}{x}-\ln|y|=C\,,$$

$\because y|_{x=1}=e$，　　即 $e-\ln e=C$，　$C=e-1$，

$\therefore\ \dfrac{y}{x}-\ln|y|=e-1$.

注意：当分子、分母同为 m 次齐次函数，则函数为零次齐次函数，

此时分子、分母同除以 x^m，可化为标准形式.

三．线性微分方程

形式为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的方程，称为一阶线性微分方程．特点是 y' 与 y 都是一次．

当 $q(x)\equiv 0$ 时，$y'+p(x)y=0$ 称为一阶线性齐次微分方程；

当 $q(x)\neq 0$ 时，$y'+p(x)y=q(x)$ 称为一阶线性非齐次微分方程．

先解齐次，$y'+p(x)y=0$，可分离变量，

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y\,,\qquad \frac{dy}{y}=-p(x)dx\,,\qquad \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+C\,,$$

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+C\,,\qquad |y|=e^{-\int p(x)dx+C}=e^{-\int p(x)dx}e^{C}\,,$$

$\therefore\ y=C_1e^{-\int p(x)dx}$，（$C_1=\pm e^C$）.

再解非齐次，$y'+p(x)y=q(x)$，用常数变异法，

令 $y=u(x)e^{-\int p(x)dx}$，代入非齐次方程 $y'+p(x)y=q(x)$，

有 $u'(x)e^{-\int p(x)dx}+u(x)e^{-\int p(x)dx}\cdot[-p(x)]+p(x)\cdot u(x)e^{-\int p(x)dx}=u'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$，

$u'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$，　即 $u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$，

一阶线性微分方程的求解公式：$y=[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]e^{-\int p(x)dx}$.

改写为 $ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$，

关键式 $P(x)=e^{\int p(x)dx}$，即公式为 $yP(x)=\int q(x)P(x)dx+C$ 或 $y=\dfrac{1}{P(x)}[\int q(x)P(x)dx+C]$.

例　求解 $y'+\dfrac{y}{x}=\ln x$.

解：一阶线性，$p(x)=\dfrac{1}{x}$，$q(x)=\ln x$，有 $e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$，

则 $yx=\int\ln x\cdot xdx+C=\int\ln x\cdot d\dfrac{x^2}{2}+C=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx+C=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$，

$\therefore$ $y=\dfrac{x}{2}\ln x-\dfrac{x}{4}+\dfrac{C}{x}$.

注意：使用一阶线性微分方程求解公式，积分时，不加任意常数 C，对数也不用绝对值.

例　求解 $xy'-2y=2x^4$，且 $y|_{x=1}=0$.

解：一阶线性，$y'-\dfrac{2}{x}y=x$，$p(x)=-\dfrac{2}{x}$，$q(x)=2x^3$，有 $e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\dfrac{1}{x^2}$，

则 $y\cdot\dfrac{1}{x^2}=\int 2x^3\cdot\dfrac{1}{x^2}dx+C=x^2+C$，　$y=x^4+Cx^2$，

$\because y|_{x=1}=0$，　即 $0=1+C$，　$C=-1$，

$\therefore y=x^4-x^2$.

例　求解 $(1+x^2)y'=xy+\sqrt{1+x^2}$.

解：一阶线性，$y'-\dfrac{x}{1+x^2}y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$，$q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

有 $e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}=e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

则 $y\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\int\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx+C=\arctan x+C$，

$\therefore$ $y=(\arctan x+C)\sqrt{1+x^2}$.

此外还有关于 x 的一阶线性微分方程，$\dfrac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)$，

特点是 dx 与 x 都是一次，此时将 x 看作 y 的函数求解.

例　求解 $y'=\dfrac{y}{y^3+x}$.

解：一阶，关于 x 线性，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y^3+x}$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y^3+x}{y}$，即 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=y^2$，

$p(y)=-\dfrac{1}{y}$，$q(y)=y^2$，有 $e^{\int p(y)dy}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=\dfrac{1}{y}$，

则 $x\cdot\dfrac{1}{y}=\int y^2\cdot\dfrac{1}{y}dy+C=\dfrac{y^2}{2}+C$，

$\therefore x=\dfrac{y^3}{2}+Cy$.

例　求解 $y'=\dfrac{y^2}{x+2xy-y^2}$.

解：一阶，关于 x 线性，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x+2xy-y^2}$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+2xy-y^2}{y^2}$，即 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{(1+2y)}{y^2}x=-1$，

$p(y)=-\dfrac{1+2y}{y^2}$，$q(y)=-1$，有 $e^{\int p(y)dy}=e^{-\int\frac{1+2y}{y^2}dy}=e^{\frac{1}{y}-2\ln y}=e^{\frac{1}{y}}\cdot\dfrac{1}{y^2}$，

则 $x\cdot e^{\frac{1}{y}}\cdot\dfrac{1}{y^2}=\int(-1)e^{\frac{1}{y}}\cdot\dfrac{1}{y^2}dy+C=e^{\frac{1}{y}}+C$，

$\therefore x=y^2+Cy^2e^{-\frac{1}{y}}$.

贝努里方程：$y'+p(x)y=q(x)y^n$，（$n\neq 0, 1$），　有 $y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$，

令 $z=y^{1-n}$，有 $z'=(1-n)y^{-n}y'$，

方程化为 $\dfrac{1}{1-n}z'+p(x)z=q(x)$，化为关于 z 的一阶线性微分方程.

例　求解 $y'=xy+x^3y^2$.

解：一阶，$n=2$ 的贝努里方程，$y'-xy=x^3y^2$，$\dfrac{1}{y^2}y'-x\dfrac{1}{y}=x^3$，即 $-\left(\dfrac{1}{y}\right)'-x\dfrac{1}{y}=x^3$，

令 $z=\dfrac{1}{y}$，有 $z'+xz=-x^3$，关于 z 的一阶线性，$p(x)=x$，$q(x)=-x^3$，有 $e^{\int p(x)dx}=e^{\int xdx}=e^{\frac{x^2}{2}}$，

则 $ze^{\frac{x^2}{2}}=\int(-x^3)e^{\frac{x^2}{2}}dx+C=\int(-x^2)de^{\frac{x^2}{2}}+C=-x^2e^{\frac{x^2}{2}}+\int e^{\frac{x^2}{2}}dx^2+C=-x^2e^{\frac{x^2}{2}}+2e^{\frac{x^2}{2}}+C$，

$\therefore z=\dfrac{1}{y}=-x^2+2+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

§10.3　高阶微分方程

二阶微分方程一般形式为 $y''=f(x,y,y')$或 $F(x,y,y',y'')=0$.

n 阶微分方程一般形式为 $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$ 或 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$.

一．可降阶的高阶微分方程

1． 可以直接积分的微分方程

形式为 $y^{(n)}=f(x)$的方程，可以直接 n 次积分求解．

一般，若$[F(x)]^{(n)}=f(x)$，则方程的通解为 $y=F(x)+C_1x^{n-1}+\cdots+C_{n-1}x+C_n$.

例　求解 $y'''=\dfrac{1}{x^2}$.

解：$y''=\int\frac{1}{x^2}dx+C_1=-\frac{1}{x}+C_1$，　$y'=\int(-\frac{1}{x}+C_1)dx+C_2=-\ln|x|+C_1x+C_2$，

$$\therefore\ y=\int(-\ln|x|+C_1x+C_2)dx+C_3=-(x\ln|x|-x)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

2． 不显含未知函数 y 的二阶微分方程

形式为 $y''=f(x,y')$的方程，可以将 y'看作新的未知函数，而降为一阶．

设 $y'=z(x)$，有 $y''=z'$，原方程化为一阶微分方程 $z'=f(x,z)$，

若解得 $z=\varphi(x,C_1)$，即 $y'=\varphi(x,C_1)$，故 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

例　求解 $xy''+y'=x^3$.

解：设 $y'=z(x)$，有 $y''=z'$，原方程化为 $xz'+z=x^3$，即 $z'+\frac{1}{x}z=x^2$，一阶线性，

$$p(x)=\frac{1}{x},\ q(x)=x^2，有\ e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x,$$

则 $zx=\int x^2\cdot xdx+C_1=\frac{x^4}{4}+C_1$，　即 $y'=z=\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}$，

$$\therefore\ y=\int(\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x})dx+C_2=\frac{x^4}{16}+C_1\ln|x|+C_2.$$

3． 不显含自变量 x 的二阶微分方程

形式为 $y''=f(y,y')$的方程，可以将 y 看作自变量，y'看作新的未知函数，而降为一阶．设 $y'=z(y)$，有 $y''=z'(y)\cdot y'=z'z$，原方程化为一阶微分方程 $z'z=f(y,z)$.

若解得 $z=\varphi(y,C_1)$，即 $y'=\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$，$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$，故 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$.

例　求解 $yy''=2(y')^2$.

解：设 $y'=z(y)$，有 $y''=z'y'=z'z$，原方程化为 $y\cdot z'z=2z^2$，即 $y\frac{dz}{dy}=2z$，可分离变量，

$$\frac{dz}{z}=\frac{2dy}{y},\quad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{2dy}{y}+\ln C_1,\quad \ln z=2\ln y+\ln C_1=\ln C_1y^2,$$

则 $z=C_1y^2$，　即 $y'=\frac{dy}{dx}=C_1y^2$，　$\frac{dy}{y^2}=C_1dx$，　$\int\frac{dy}{y^2}=\int C_1dx+C_2$，

$$\therefore -\frac{1}{y}=C_1x+C_2,\quad y=-\frac{1}{C_1x+C_2}.$$

二．二阶常系数线性微分方程

形式为 $y'' + ay' + by = f(x)$的方程，称为二阶常系数线性微分方程.

特点是 y''、y'、y 都是一次，且系数 a、b 为常数.

当 $f(x) \equiv 0$ 时，$y'' + ay' + by = 0$ 称为二阶常系数线性齐次微分方程；

当 $f(x) \neq 0$ 时，$y'' + ay' + by = f(x)$ 称为二阶常系数线性非齐次微分方程.

1． 二阶常系数线性齐次微分方程

先解齐次，$y'' + ay' + by = 0$

定理 若函数 y_1、y_2 都是 $y'' + ay' + by = 0$ 的解，则其线性组合 $y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是 $y'' + ay' + by = 0$ 的解.

证明：函数 y_1、y_2 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的解，即 $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$，$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$，

则 $y^{*\prime\prime} + ay^{*\prime} + by^* = (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + a(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + b(C_1 y_1 + C_2 y_2)$

$= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) = 0$，得证.

定理 若函数 y_1、y_2 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个线性无关的特解（即 $y_1 \neq ky_2$），则线性组合 $y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解.

根据此定理，只需找到 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个线性无关解 y_1、y_2，即可求出其通解 $y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

找这种函数，其导数和二阶导数与它自身形式类似．取 $y = e^{\lambda x}$，有 $y' = \lambda e^{\lambda x}$，$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

代入方程 $y'' + ay' + by = 0$ 得：$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$，　即得$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

称$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 为 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程，特征方程$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的根称为特征根.

设λ 是特征方程$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的特征根，则 $y = e^{\lambda x}$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的特解.

（1）特征方程$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 有两个相异实根λ_1、λ_2

则 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$，$y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个线性无关的特解，

$y^* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解.

例　求解 $y'' + 5y' + 6y = 0$.

解：特征方程$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$，特征根$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$，　∴通解为 $y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

例　求解 $y'' - y = 0$.

解：特征方程$\lambda^2 - 1 = 0$，特征根$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，　∴通解为 $y^* = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$.

例　求解 $y'' - 3y' = 0$.

解：特征方程$\lambda^2 - 3\lambda = 0$，特征根$\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 0$，　∴通解为 $y^* = C_1 e^{3x} + C_2$.

注意：特征根 0 对应的特解是常数.

（2）特征方程$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 有唯一实根λ_0，

则 $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的一个特解，可以证明 $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ 是另一个特解，

$y^* = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解.

例　求解 $y'' + 4y' + 4y = 0$.

解：特征方程$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$，特征根$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$，　∴通解为 $y^* = (C_1 + C_2 x)\,e^{-2x}$.

（3）特征方程$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 有两个共轭虚根$\lambda = \alpha \pm \beta i$，　（$i^2 = -1$）

可以证明 $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$，$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个线性无关的特解，

$y^* = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)\,e^{\alpha x}$ 是 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解.

注：特征根为共轭虚根时，实部对应指数函数，虚部对应正余弦函数.

例　求解 $y'' + 9y' + 13y = 0$.

解：特征方程$\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$，即 $(\lambda + 3)^2 + 4 = 0$，特征根$\lambda = -3 \pm 2i$，

∴通解为 $y^* = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)\,e^{-3x}$.

例　求解 $y'' + y = 0$.

解：特征方程$\lambda^2 + 1 = 0$，特征根$\lambda = \pm i$，　∴通解为 $y^* = C_1\cos x + C_2\sin x$.

此方法可推广到更高阶的常系数线性齐次微分方程.

例　求解 $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.

解：特征方程$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$，特征根$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 2$，$\lambda_4 = -2$，

　　∴通解为 $y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

例　求解 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

解：特征方程$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$，特征根$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$，　∴通解为 $y^* = (C_1 + C_2x + C_3 x^2) e^{-x}$.

2.　二阶常系数线性非齐次微分方程

　　再解非齐次，$y'' + ay' + by = f(x)$

定理　如果 $\tilde{y}$ 是 $y'' + ay' + by = f(x)$的一个特解，y^*是 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解，

　　则 $\tilde{y} + y^*$ 是 $y'' + ay' + by = f(x)$的通解.

证明：∵ $\tilde{y}'' + a\tilde{y}' + b\tilde{y} = f(x)$，$y^{*\prime\prime} + ay^{*\prime} + by^* = 0$，

　　则 $(\tilde{y} + y^*)'' + a(\tilde{y} + y^*)' + b(\tilde{y} + y^*) = (\tilde{y}'' + a\tilde{y}' + b\tilde{y}) + (y^{*\prime\prime} + ay^{*\prime} + by^*) = f(x)$，

　　即 $\tilde{y} + y^*$ 是 $y'' + ay' + by = f(x)$的解，且 y^*中含两个独立的任意常数，

　　∴ $\tilde{y} + y^*$ 是 $y'' + ay' + by = f(x)$的通解.

求出 $y'' + ay' + by = f(x)$的一个特解 $\tilde{y}$ 及 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个特解 y_1、y_2，可得通解为 $\tilde{y} + C_1y_1 + C_2y_2$.

一般，$\tilde{y}$ 与 $f(x)$有类似的形式，用待定系数法可求得 $\tilde{y}$.

（1）若 $f(x) = e^{rx}$，则取 $\tilde{y} = Ax^k e^{rx}$，A 为待定系数，

　　当 r 不是特征根、是单根或重根时，k 分别取 0、1、2.

例　求解 $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$.

解：特征方程$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$，特征根$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，　有 $y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$，

　　∵$f(x) = e^{2x}$，$r = 2$ 不是特征根，取 $\tilde{y} = Ae^{2x}$，代入原方程，

　　有 $\tilde{y}'' + 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = 4Ae^{2x} + 3\cdot 2Ae^{2x} + 2\cdot Ae^{2x} = 12Ae^{2x} = e^{2x}$，即 $A = \dfrac{1}{12}$，$\tilde{y} = \dfrac{1}{12}e^{2x}$，

　　∴通解为 $\tilde{y} + y^* = \dfrac{1}{12}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

例　求解 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

解：特征方程$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$，特征根$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，　有 $y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$，

　　∵$f(x) = e^{2x}$，$r = 2$ 是单根，取 $\tilde{y} = Axe^{2x}$，有 $\tilde{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$，$\tilde{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$，

　　代入原方程，$\tilde{y}'' - 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = (4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 3(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 2Axe^{2x} = Ae^{2x} = e^{2x}$，

　　即 $A = 1$，$\tilde{y} = xe^{2x}$，

　　∴通解为 $\tilde{y} + y^* = xe^{2x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

例　求解 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

解：特征方程$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$，特征根$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，　有 $y^* = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$，

　　∵$f(x) = e^{2x}$，$r = 2$ 是重根，取 $\tilde{y} = Ax^2e^{2x}$，

　　有 $\tilde{y}' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}$，$\tilde{y}'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}$，代入原方程，

$$\widetilde{y}''-4\widetilde{y}'+4\widetilde{y}=(2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x})-4(2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x})+4Ax^2e^{2x}=2Ae^{2x}=e^{2x},$$

即 $A=\dfrac{1}{2}$，$\widetilde{y}=\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$，

∴通解为 $\widetilde{y}+y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}+(C_1+C_2x)e^{2x}$.

（2）若 $f(x)=P_m(x)$为 m 次多项式，则取 $\widetilde{y}=x^kQ_m(x)$，其中 $Q_m(x)$为 m 次多项式，

当 $r=0$ 不是特征根、是单根或重根时，k 分别取 0、1、2.

例　求解 $y''+y'-2y=x+1$.

解：特征方程$\lambda^2+\lambda-2=0$，特征根$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，　有 $y^*=C_1e^x+C_2e^{-2x}$，

∵$f(x)=x+1$，$r=0$ 不是特征根，取 $\widetilde{y}=Ax+B$，代入原方程，

有 $\widetilde{y}''+\widetilde{y}'-2\widetilde{y}=0+A-2(Ax+B)=-2Ax+(A-2B)=x+1$，即 $A=-\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{3}{4}$，$\widetilde{y}=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$，

∴通解为 $\widetilde{y}+y^*=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}+C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

例　求解 $y''+3y'=2x-1$.

解：特征方程$\lambda^2+3\lambda=0$，特征根$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=0$，　有 $y^*=C_1e^{-3x}+C_2$，

∵$f(x)=2x-1$，$r=0$ 是单根，取 $\widetilde{y}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$，代入原方程，

有 $\widetilde{y}''+3\widetilde{y}'=2A+3(2Ax+B)=6Ax+(2A+3B)=2x-1$，即 $A=\dfrac{1}{3}$，$B=-\dfrac{5}{9}$，$\widetilde{y}=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5}{9}x$，

∴通解为 $\widetilde{y}+y^*=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5}{9}x+C_1e^{-3x}+C_2$.

（3）若 $f(x)=\cos\beta x$ 或 $\sin\beta x$，则取 $\widetilde{y}=x^k(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$，

当 $r=\pm\beta i$ 不是特征根、是单根时，k 分别取 0、1.

（4）若 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$，则取 $\widetilde{y}=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$，

当 $r=\alpha\pm\beta i$ 不是特征根、是单根或重根时，k 分别取 0、1、2.

§10.4　微分方程的应用

一．人口模型

例　某地区每年人口出生率为 m，死亡率为 n，且人口的迁入与迁出平衡，初始时刻（$t=0$）人口数为 y_0，求人口数 y 与时间 t 的关系.

解：人口增长率为 $m-n$，在Δt 时间内，人口增长数为$\Delta y=(m-n)y\Delta t$，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=(m-n)y$，

取极限 $\dfrac{dy}{dt}=(m-n)y$，可分离变量，有 $\dfrac{dy}{y}=(m-n)dt$，　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int(m-n)dt+C$，

$\ln y=(m-n)t+\ln C$，　$y=Ce^{(m-n)t}$，　因 $t=0$ 时，$y=y_0$，　有 $y_0=C$，

∴$y=y_0e^{(m-n)t}$. 即人口呈几何增长.

二．弹性问题——已知弹性求原函数

弹性计算公式 $y'\dfrac{x}{y}$，

例　已知需求量 Q 对价格 p 的弹性为 $-p\ln2$，且最大需求量（价格为 0 时的需求量）为 1000，求需求函数.

解：目标函数：　需求量 $Q = Q(p)$，其中 p 为价格，

弹性 $\dfrac{dQ}{dp}\cdot\dfrac{p}{Q} = -p\ln 2$，可分离变量，　有 $\dfrac{dQ}{Q} = -\ln 2\cdot dp$，　$\displaystyle\int\frac{dQ}{Q} = -\int\ln 2\cdot dp + C$，

$\ln Q = -p\ln 2 + \ln C$，　$Q = Ce^{-p\ln 2} = C\cdot 2^{-p}$，　因 $t = 0$ 时，$Q = 1000$，　有 $1000 = C$，

$\therefore Q = 1000\cdot 2^{-p}$.

三．积分方程——含未知函数的原函数或积分的方程

对于积分方程，一般是通过求导化为微分方程处理.

例　已知 $\displaystyle\int_1^x tf(t)dt = x^2 f(x) - x^4$，求 $f(x)$.

解：两边关于 x 求导，得：$xf(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 4x^3$，　即 $x^2 f'(x) + xf(x) = 4x^3$，

设 $y = f(x)$，　有 $y' + \dfrac{y}{x} = 4x$，　一阶线性，$p(x) = \dfrac{1}{x}$，$q(x) = 4x$，关键式 $e^{\int p(x)dx} = e^{\int\frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$，

则 $y = \dfrac{1}{x}[\displaystyle\int 4x\cdot xdx + C] = \dfrac{1}{x}[\dfrac{4x^3}{3} + C] = \dfrac{4x^2}{3} + \dfrac{C}{x}$，即 $y = f(x) = \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{C}{x}$，

当 $x = 1$ 时，$0 = f(1) - 1$，有 $f(1) = 1$，即 $1 = \dfrac{4}{3} + C$，$C = -\dfrac{1}{3}$，　$\therefore f(x) = \dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{1}{3x}$.

四．辅助函数的设定——中值定理证明题中所需辅助函数

一般根据所证结论，建立微分方程求解，将解写成 $g(x, y) = C$ 的形式，

则辅助函数设为 $F(x) = g(x, f(x))$.

例　已知 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，开区间(a, b)内可导，$0 < a < b$，且 $f(a) = f(b) = 0$，试证：对任何实数 λ，至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得$\xi f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

分析：设 $y = f(x)$，考虑微分方程 $xy' = \lambda y$，可分离变量，有 $x\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$，即 $\dfrac{dy}{y} = \lambda\dfrac{dx}{x}$，$\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \lambda\int\frac{dx}{x} + \ln C$，

得 $\ln y = \lambda\ln x + \ln C = \ln Cx^{\lambda}$，　$y = f(x) = Cx^{\lambda}$，　有 $x^{-\lambda}f(x) = C$.

证明：设辅助函数为 $F(x) = x^{-\lambda}f(x)$，　$F(x)$在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，且 $F(a) = 0 = F(b)$，

由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，

而 $F'(\xi) = \xi^{-\lambda}f'(\xi) - \lambda\cdot\xi^{-\lambda-1}f(\xi) = \xi^{-\lambda-1}[\xi f'(\xi) - \lambda f(\xi)] = 0$，

$\therefore \xi f'(\xi) - \lambda f(\xi) = 0$，得证.

例　已知 $f(x)$在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，试证：至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$.

分析：设 $y = f(x)$，考虑微分方程 $y' = \dfrac{y - f(a)}{b - x}$，可分离变量，有 $\dfrac{dy}{y - f(a)} = \dfrac{dx}{b - x}$，

即 $\displaystyle\int\frac{dy}{y - f(a)} = \int\frac{dx}{b - x} + \ln C$，得 $\ln[y - f(a)] = -\ln(b - x) + \ln C = \ln\dfrac{C}{b - x}$，有 $(b - x)[y - f(a)] = C$.

证明：设辅助函数为 $F(x) = (b - x)[f(x) - f(a)]$，$F(x)$在$[a, b]$上连续，$(a, b)$内可导，且 $F(a) = 0 = F(b)$，

由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，

而 $F'(\xi) = -[f(\xi) - f(a)] + (b - x)f'(\xi) = 0$，　$\therefore f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$，得证.