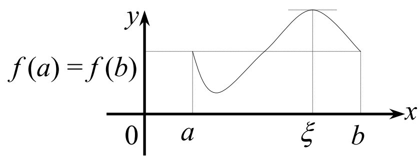
第四章　中值定理与导数的应用

§4.1　中值定理

一．罗尔定理

定理　设 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，$f(a) = f(b)$，

　　则至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得$f'(\xi) = 0$．



几何意义：若函数图形在 a, b 间连成一条光滑曲线，

且端点在同一水平线上，则至少存在一点切线平行于 x 轴．

证：因$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，根据最值定理知：$f(x)$在闭区间$[a, b]$上必存在最大值 M，最小值 m．

若 $M = m$，则$f(x) = m$ 为常量函数，$f'(x) = 0$，任取$\xi \in (a, b)$，都有$f'(\xi) = 0$，

若 $M \ne m$，则 M 和 m 中至少有一个不等于$f(a)$，不妨设 $m \ne f(a) = f(b)$，

即存在$\xi \in (a, b)$，使得$f(\xi) = m$．对任意的 $x \in (a, b)$，都有$f(x) \ge f(\xi) = m$，

因$f(x)$在开区间(a, b)内可导，$f'(\xi)$存在，则$f_-'(\xi)$ 与 $f_+'(\xi)$ 都存在而且相等，

当 $x < \xi$ 时，$\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0$，则 $f_-'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi^-}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0$，

当 $x > \xi$ 时，$\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$，则 $f_+'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi^+}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$，

则有$f_-'(\xi) = f_+'(\xi) = 0$，故$f'(\xi) = 0$．

注：不可导的点有间断点、尖点、竖直切点

间断点对于初等函数就是无定义的点，而尖点和竖直切点常见的有 $|x|$ 和 x^a $(0 < a < 1)$ 在点 $x = 0$ 处．

因 $0 < a < 1$，有 x^a 在点 $x = 0$ 处有定义，故连续，

而 $(x^a)' = a x^{a-1}$，其中 $a - 1 < 0$，在点 $x = 0$ 处$(x^a)' = a x^{a-1}$不存在，故 x^a 在点 $x = 0$ 处不可导．

如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在点 $x = 0$ 处为竖直切点，$y = \sqrt[3]{x^2}$ 在点 $x = 0$ 处为尖点．

又有 $y = |x^2 - 2x|$ 不可导的点有 $x^2 - 2x = 0$，即 $x = 0$，$x = 2$，

　　$y = \sqrt[3]{x - x^3}$ 不可导的点有 $x - x^3 = 0$，即 $x = -1$，$x = 0$，$x = 1$，

而 $y = \sqrt[3]{x^5 - 3x^4}$ 不可导的点只有 $x = 3$，此时 $y = x^{\frac{4}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}}$，$\dfrac{4}{3} > 1$，即 $x = 0$ 处可导．

例　判断以下哪个函数在$[-1, 1]$上满足罗尔定理条件：

（A）$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$；　（B）$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$；　（C）$f(x) = x^2 + x$；　（D）$f(x) = x^4 + x^2$．

解：（A）间断点 $x = 0 \in [-1, 1]$，$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 在$[-1, 1]$上不连续；

（B）尖点 $x = 0 \in (-1, 1)$，$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在$(-1, 1)$内不可导；

（C）$f(x) = x^2 + x$ 在$[-1, 1]$上连续，$(-1, 1)$内可导，但$f(-1) = 0 \ne f(1) = 2$；

（D）$f(x) = x^4 + x^2$ 在$[-1, 1]$上连续，$(-1, 1)$内可导，且$f(-1) = 2 = f(1)$．　　故选（D）．

例　验证函数$f(x) = x^3 - x$ 在$[-1, 0]$上满足罗尔定理条件，并求定理结论中的ξ．

解：因$f(x) = x^3 - x$ 在$[-1, 0]$上有定义，故连续；$f'(x) = 3x^2 - 1$ 在$(-1, 0)$内存在，故$f(x)$可导；

且$f(0) = 0 = f(1)$，故$f(x) = x^3 - x$ 在$[-1, 0]$上满足罗尔定理条件．

根据罗尔定理知：存在$\xi \in (-1, 0)$，使得$f'(\xi) = 0$，

因$f'(x) = 3x^2 - 1$，有$f'(\xi) = 3\xi^2 - 1 = 0$，得：$\xi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，因$\xi \in (-1, 0)$，故$\xi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

例　已知方程$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$有三个相异实根，试证：

（1）方程$3ax^2 + 2bx + c = 0$有两个相异实根；　（2）$b^2 > 3ac$.

证：设$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，且$f(x) = 0$的三个相异实根是$x_1, x_2, x_3$　$(x_1 < x_2 < x_3)$，

（1）因$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$在$[x_1, x_2]$，$[x_2, x_3]$上有定义，故连续；

而$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$在(x_1, x_2)，(x_2, x_3)内存在，故$f(x)$可导；且$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$；

根据罗尔定理知：存在$\xi_1 \in (x_1, x_2)$，$\xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得$f'(\xi_1) = 0$，$f'(\xi_2) = 0$，

故ξ_1, ξ_2是方程$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$的两个相异实根，得证.

（2）因二次方程$3ax^2 + 2bx + c = 0$有两个相异实根，则判别式$\Delta = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac > 0$，

故$b^2 > 3ac$.

一般，若$f(x)$连续且可导，方程$f(x) = 0$有k个相异实根，则方程$f'(x) = 0$至少有$k - 1$个相异实根.

反过来，若方程$f'(x) = 0$有$k - 1$个相异实根，则方程$f(x) = 0$最多有k个相异实根.

罗尔定理常用于讨论方程根的个数.

一般先用零值定理说明方程至少有多少个根，再用罗尔定理说明方程最多有多少个根.

例　试证：方程$2^x = x^2$恰有三个相异实根.

证：显然$x = 2$与$x = 4$是方程的两个根，设$f(x) = 2^x - x^2$，

因$f(x)$在$[-1, 0]$上连续，且$f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = -\dfrac{1}{2} < 0$，$f(0) = 2^0 - 0^2 = 1 > 0$，

故存在$\xi \in (-1, 0)$，使$f(\xi) = 0$，于是$x = \xi, 2, 4$是方程$2^x = x^2$的三个相异实根，

假设方程$2^x = x^2$还有另外的实根，即$f(x) = 2^x - x^2 = 0$至少有四个相异实根，

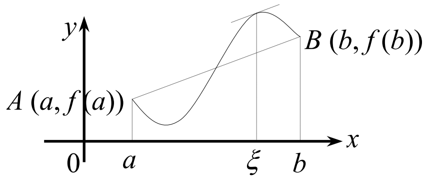
因$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续且可导，

故$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x = 0$至少有三个相异实根，$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2 = 0$至少有两个相异实根，

但$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2 = 0$只有一个实根$x = \log_2 \dfrac{2}{(\ln 2)^2}$，矛盾.

故方程$2^x = x^2$恰有三个相异实根$x = \xi, 2, 4$.

二．拉格朗日定理



定理　设$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，

则至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

注：当$f(a) = f(b)$时，就是罗尔定理，可见拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广.

曲线端点$A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$，连线AB的斜率为$k_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

几何意义：若函数图形在a, b间连成一条光滑曲线，则至少存在一点切线平行于连线AB.

证：曲线：$y = f(x)$，连线AB：$y = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$，

作辅助函数为曲线与连线之差：$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$，

显然$F(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，$F(a) = 0 = F(b)$，由罗尔定理知：

至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得$F'(\xi) = 0$，因$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$，故$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

例　判断函数$f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x}$在以下哪个区间上满足拉格朗日定理条件.

（A）$[-1, 1]$；　（B）$[0, 2]$；　（C）$[1, 3]$；　（D）$[2, 4]$.

解：函数 $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x}$ 的间断点为 $x=0$，尖点为 $x=3$，

因间断点 $x=0$ 不能在闭区间 $[a,b]$ 上，故否定（A）、（B）；尖点 $x=3$ 不能在开区间 (a,b) 内，故否定（D）.

故选（C）.

例　验证函数 $f(x)=x^3$ 在 $[1,2]$ 上满足拉格朗日定理条件，并求定理结论中的 ξ .

解：因 $f(x)=x^3$ 在 $[1,2]$ 上有定义，故连续；$f'(x)=3x^2$ 在 $(1,2)$ 内存在，故 $f(x)$ 可导；

故 $f(x)=x^3$ 在 $[1,2]$ 上满足拉格朗日定理条件.

根据拉格朗日定理知：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=7$，

又因 $f'(x)=3x^2$，有 $f'(\xi)=3\xi^2=7$，得 $\xi=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$，因 $\xi\in(1,2)$，故 $\xi=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

可利用拉格朗日定理证明不等式.

例　试证：对任何实数 x_1 和 x_2，都有 $|\arctan x_1-\arctan x_2|\le|x_1-x_2|$.

证：因函数 $f(x)=\arctan x$ 在端点为 x_1 与 x_2 的闭区间上连续，开区间内可导，

根据拉格朗日定理知：至少存在一点 ξ 在 x_1 与 x_2 之间，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，

即 $\arctan x_1-\arctan x_2=f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)=\dfrac{1}{1+\xi^2}(x_1-x_2)$，

故 $|\arctan x_1-\arctan x_2|=\dfrac{1}{1+\xi^2}|x_1-x_2|\le|x_1-x_2|$.

推论 1　对于 $x\in(a,b)$，$f'(x)\equiv0\Longleftrightarrow f(x)\equiv C$ 为常量函数.

证：必要性“$\Leftarrow$”，显然.

充分性“$\Rightarrow$”：对任意的 $x\in(a,b)$，$f'(x)=0$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导．取 $x_0\in(a,b)$，记 $f(x_0)=C$，

再任取 $x\in(a,b)$，$x\ne x_0$，则 $f(x)$ 在端点为 x_0 与 x 的闭区间上连续，开区间内可导，

根据拉格朗日定理知：至少存在一点 ξ 在 x_0 与 x 之间，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，

因 $f'(\xi)=0$，故 $f(x)-f(x_0)=0$，即 $f(x)=f(x_0)=C$，故 $f(x)\equiv C$.

例　试证：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\quad x\in[-1,1]$.

证：设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}})=0\quad x\in(-1,1)$，

根据推论 1 知：$f(x)\equiv C$，因 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，故 $C=\dfrac{\pi}{2}$，即 $f(x)\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad x\in(-1,1)$，

又因 $f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)=(-\dfrac{\pi}{2})+\pi=\dfrac{\pi}{2}$，$f(1)=\arcsin 1+\arccos 1=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}$，

故 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\quad x\in[-1,1]$.

推论 2　对于 $x\in(a,b)$，$f'(x)=g'(x)\Longleftrightarrow f(x)=g(x)+C$.

证：设 $F(x)=f(x)-g(x)$，

根据推论 1，$F'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv0\Longleftrightarrow F(x)=f(x)-g(x)\equiv C$，$x\in(a,b)$，

故 $f'(x)=g'(x)\Longleftrightarrow f(x)=g(x)+C$，$x\in(a,b)$.

拉格朗日定理推论 2 是第五章积分学的基础.

三．柯西中值定理

定理　设 $f(x)$、$g(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，$g'(x) \neq 0$，$x \in (a, b)$，

则至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

注：当 $g(x) = x$ 时，就是拉格朗日定理，可见柯西定理是拉格朗日定理的推广．

证：仿照拉格朗日定理的证明构造辅助函数：$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$，

显然 $F(x)$ 在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，$F(a) = 0 = F(b)$，由罗尔定理知：

至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，

因 $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$，故 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例　验证函数 $f(x) = x^3, g(x) = x^2$ 在$[0, 2]$上满足柯西定理条件，并求定理结论中的ξ .

解：因 $f(x) = x^3, g(x) = x^2$ 在$[0, 2]$上有定义，故连续；

且 $f'(x) = 3x^2, g'(x) = 2x$ 在$(0, 2)$内存在，故 $f(x)$, $g(x)$可导；$g'(x) = 2x \neq 0$，$x \in (0, 2)$.

故 $f(x) = x^3, g(x) = x^2$ 在$[0, 2]$上满足柯西定理条件．根据柯西定理知：

存在$\xi \in (0, 2)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \dfrac{8}{4} = 2$，有 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{3\xi^2}{2\xi} = \dfrac{3}{2}\xi = 2$，故 $\xi = \dfrac{4}{3}$.

引入辅助函数证明中值定理问题．

例　已知 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，开区间(a, b)内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，试证：

（1）至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$；

（2）对任何实数λ，至少存在一点$\eta \in (a, b)$，使得 $f'(\eta) = \lambda f(\eta)$.

证：（1）设 $F(x) = e^x f(x)$，有 $F(x)$在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，且 $F(a) = F(b) = 0$，

由罗尔定理知：至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，

因 $F'(x) = e^x[f'(x) + f(x)]$，故 $F'(\xi) = e^{\xi}[f'(\xi) + f(\xi)] = 0$，故 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

（2）设 $G(x) = e^{-\lambda x} f(x)$，有 $G(x)$在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，且 $G(a) = G(b) = 0$，

由罗尔定理知：至少存在一点$\eta \in (a, b)$，使得 $G'(\eta) = 0$，

因 $G'(x) = e^{-\lambda x}[f'(x) - \lambda f(x)]$，故 $G'(\eta) = e^{-\lambda\eta}[f'(\eta) - \lambda f(\eta)] = 0$，故 $f'(\eta) = \lambda f(\eta)$.

一般地，对于 $f'(\xi) + f(\xi)$，设 $F(x) = e^x f(x)$；对于 $f'(\xi) - f(\xi)$，设 $F(x) = e^{-x} f(x)$；

对于 $f'(\xi) + \lambda f(\xi)$，设 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$；

对于 $f'(\xi) f(\xi)$，设 $F(x) = f^2(x)$；对于 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$，设 $F(x) = \ln f(x)$；

对于$\xi f'(\xi) + f(\xi)$，设 $F(x) = x f(x)$；对于$\xi f'(\xi) + n f(\xi)$，设 $F(x) = x^n f(x)$.

例　已知 $f(x)$在闭区间$[0, 1]$上连续，开区间$(0, 1)$内可导，且 $f(1) = 0$，

试证：至少存在一点$\xi \in (0, 1)$，使得 $f'(\xi) = -\dfrac{1}{\xi} f(\xi)$.

证：即证明$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$，设 $F(x) = x f(x)$，有 $F(x)$在$[0, 1]$上连续，$(0, 1)$内可导，且 $F(0) = F(1) = 0$，

由罗尔定理知：至少存在一点$\xi \in (0, 1)$，使得 $F'(\xi) = 0$，

因 $F'(x) = x f'(x) + f(x)$，故$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$，故 $f'(\xi) = -\dfrac{1}{\xi} f(\xi)$.

例　设 $0 < a < b$，已知 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，开区间(a, b)内可导，试证：

（1）若 $f(a) = f(b) = 0$，则至少存在一点$\eta \in (a, b)$，使得 $f(\eta) - \eta f'(\eta) = 0$；

（2）至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$.

证：（1）设$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，有$F(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理知：至少存在一点$\eta\in(a,b)$，使得$F'(\eta)=0$，

因$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，故$F'(\eta)=\dfrac{\eta f'(\eta)-f(\eta)}{\eta^2}=0$，故$f(\eta)-\eta f'(\eta)=0$.

（2）设$G(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}\cdot\dfrac{1}{x}$，有$G(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导，

且$G(a)=f(b)-f(a)=G(b)$，由罗尔定理知：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$G'(\xi)=0$，

因$G'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}\cdot\dfrac{1}{x^2}$，

则$G'(\xi)=\dfrac{1}{\xi^2}\cdot[\xi f'(\xi)-f(\xi)+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}]=0$，故$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$.

§4.2 L'Hospital 法则

利用导数求极限．第二章对于分式极限中分子分母极限都是0的情形，是通过约分或等价无穷小代换处理的，但很多时候并不易于处理．本章利用导数专门处理这种情形．

一．$\dfrac{0}{0}$型未定式

定理 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且$f(x)$、$g(x)$在点$x_0$的某去心邻域内可导，

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$（后者存在或为∞），称之为 L'Hospital 法则.

证：定义$f(x_0)=g(x_0)=0$，有$f(x)$、$g(x)$在点x_0处连续，

对于x_0的去心邻域内的任意一点x，在点x_0与x之间应用 Cauchy 定理，

则在点x_0与x之间至少存在一点ξ，使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，

当$x\to x_0$时，$\xi\to x_0$，故$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\xi\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注：若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，且$f(x)$、$g(x)$可导，则同样有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$（后者存在或为∞）.

例 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^x}{x-2}$.

解：$\dfrac{0}{0}$型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2^x)'}{(x-2)'}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-2^x\ln 2}{1}=4-4\ln 2$.

例 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}\quad(n\neq 0)$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}$.

例　求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4x+1}}\cdot 4}{2x}=\frac{1}{6}$.

例　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$.

例　求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{4x^3-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{12x^2}=\frac{1}{2}$.

注意：每次使用 L'Hospital 法则求分式极限时，必须先判断，是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型才能使用.

例　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1-\cos x}$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\sin x}=\infty$.

例　求$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{-\frac{1}{x}}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1$.

二．$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，且$f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$（后者存在或为∞）.

注：若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，且$f(x)$、$g(x)$可导，同样有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$（后者存在或为∞）.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$.

解：$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，原式 $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1-\cos x}\cdot\sin x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{x}{\sin x}\cos x\right)=2$.

例　求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\quad(\varepsilon>0)$.

解：$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，原式 $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}=0$.

注：对任意小的正数 ε，当 x 充分大时，都有 $\ln x<x^{\varepsilon}$，当 $x\to+\infty$ 时，称 $\ln x$ 是最低阶（0 阶）的无穷大.

例　求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^4}$.

解：$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，原式 $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{4x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{12x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{24x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{24}=\infty$.

类似地，对任意的正数 n，都有 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$.

注：对任意大的正数 n，当 x 充分大时，都有 $e^x>x^n$，当 $x\to+\infty$ 时，称 e^x 是最高阶（∞ 阶）的无穷大.

使用 L'Hospital 法则求分式极限时，关键是其中的 0 或 ∞ 因子. 对于非 0 或 ∞ 的因子，最好分开考虑，而对于 0 或 ∞ 因子，可以利用等价代换简化运算.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x\cdot(x-\tan x)}{x\sin x\arctan x\cdot(e^x+\cos x+\sin^2 x)}$.

解：$\dfrac{0}{0}$ 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x\sin x\arctan x}\cdot\dfrac{\arccos x}{e^x+\cos x+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x}{e^x+\cos x+\sin^2 x}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}\cdot\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}.$$

三．其它形式的未定式

有 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^0，∞^0 型. 使用 L'Hospital 法则求极限时，分式形式是基本形式，其它形式的未定式应首先化为分式.

1．乘积形式 $\lim f(x)g(x)$，$0\cdot\infty$ 型

化乘为除成为分式，即化为 $\lim\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ 或 $\lim\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$，一般是将形式简单的取倒数放到分母，以求导方便为原则.

例　$\lim\limits_{x\to +\infty}x(\arctan x-\dfrac{\pi}{2})$.

解：$\infty\cdot 0$ 型，原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\arctan x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2}{1+x^2}=-1$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$.

解：$0\cdot\infty$ 型，原式 $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin x\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{\sin x}{x}\tan x\right)=0$.

2．乘积形式 $\lim[f(x)-g(x)]$，$\infty-\infty$ 型

分式之差则通分，根式之差则有理化，化为一个分式.

例　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

解：$\infty-\infty$ 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

例　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

解：$\infty-\infty$ 型，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=1$.

3．幂指形式 $\lim f(x)^{g(x)}$，1^∞，0^0，∞^0 型

取对数，化简，再化乘为除成为分式.

设 $y=f(x)^{g(x)}$，有 $\ln y=g(x)\ln f(x)$，则 $\lim\ln y=\lim\dfrac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\Lambda=A$，故 $\lim y=\lim f(x)^{g(x)}=e^A$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：1^∞ 型，设 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，有 $\ln y=\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x-\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

例　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.　（注：由第二章中介绍的重要极限知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$）

解：∞^0 型，设 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，有 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$,

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

例　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解：∞^0 型，设 $y=\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}$ ，有 $\ln y=\frac{1}{n}\ln n$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^0=1$.

例　求 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解：0^0 型，设 $y=(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ，有 $\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln(1-\cos x)$ ，

$$\text{则}\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sin x}=2,$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2$.

注意：使用 L’Hospital 法则求极限非常有效，但 L’Hospital 法则也有失效或不能得出有效结果的情形.

当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 振荡无极限时，L’Hospital 法则失效.

例　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解：$\frac{0}{0}$ 型，但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 振荡无极限，

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=0$ ，L’Hospital 法则失效.

有时 L’Hospital 法则虽然有效，但仍然不能得出有效结果.

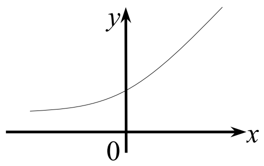
例　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

解：$\frac{\infty}{\infty}$ 型，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}\ln2+3^{x+1}\ln3}{2^x\ln2+3^x\ln3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}(\ln2)^2+3^{x+1}(\ln3)^2}{2^x(\ln2)^2+3^x(\ln3)^2}$ ，

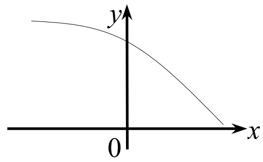
而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$.

§4.4 函数的单调性与极值

一．函数单调性判别法



单调增加
切线斜率为正，$f'(x)>0$



单调减少
切线斜率为负，$f'(x)<0$

定理 设 $f(x)$ 可导，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调减少.

证：任取两点 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$，因 $f(x)$ 可导，有 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，在 (x_1, x_2) 内可导，

由 Lagrange 定理，知存在 $\xi\in(x_1, x_2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，

若 $f'(x)>0$，则有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x)$ 单调增加；

若 $f'(x)<0$，则有 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x)$ 单调减少.

注：若 $f'(x)\ge 0$ 且仅在个别点 $f'(x)=0$，则仍然有 $f(x)$ 单调增加.

反过来，若 $f(x)$ 单调增加且可导，则 $f'(x)\ge 0$ 且仅在个别点 $f'(x)=0$.

例 判断 $f(x)=x-\arctan x$ 的单调性.

解：因 $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}\ge 0$，且仅在 $x=0$ 时，$f'(x)=0$，故 $f(x)$ 单调增加.

例 判断 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 的单调性.

解：因 $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加.

利用单调性证明不等式

若证明当 $x>x_0$ 时，$f(x)>0$，先判断初始值 $f(x_0)$，若 $f(x_0)=0$，则只需证明 $f(x)$ 单增，即 $f'(x)>0$.

例 试证：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$.

证：设 $f(x)=\ln(1+x)-x$，有 $f(0)=0$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，故 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$.

例 试证：当 $x>0$ 时，$\arctan x>x-\dfrac{x^3}{3}$.

证：设 $f(x)=\arctan x-x+\dfrac{x^3}{3}$，有 $f(0)=0$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1+x^2=\dfrac{x^4}{1+x^2}$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，故 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $\arctan x>x-\dfrac{x^3}{3}$.

例 试证：当 $x>0$ 时，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

证：设 $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$，有 $f(0)=0$，且 $f'(x)=e^x-1-x$，只需证 $f'(x)=e^x-1-x>0$，

有 $f'(0)=0$，且 $f''(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调增加，

则 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$ 单调增加，故 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

例 试证：当 $x>0$ 时，$\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$.

证：设 $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$，有 $f(0)=0$，且 $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$，只需证 $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}>0$，

有 $f'(0)=0$，且 $f''(x)=-\sin x+x$，只需证 $f''(x)=-\sin x+x>0$，有 $f''(0)=0$，且 $f'''(x)=-\cos x+1$，

当 $x>0$ 时，$f'''(x)\ge 0$，且仅在 $x=2k\pi$ （$k=1,2,\cdots$）时，$f'''(x)=0$，$f''(x)$ 单调增加，

则 $x>0$ 时，$f''(x)>f''(0)=0$，$f'(x)$ 单调增加，即 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$ 单调增加，

故 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$.

例　试证：当 $x>1$ 时，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x>\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

证：设 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$，有 $f(1)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}-\ln 2=\dfrac{\pi}{4}-\ln 2\approx 0.7854-0.6931=0.0923>0$，

且 $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1-x}{(1+x^2)(x^2+x)}$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，

故 $x>1$ 时，$f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\pi}{2}-\arctan x-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$，即 $\dfrac{\pi}{2}-\arctan x>\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

例　试证：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

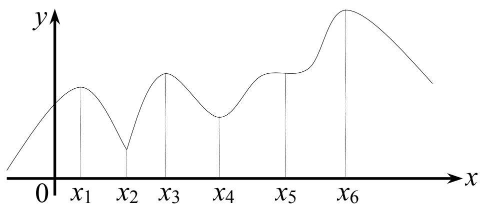
证：设 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，有 $f(0)=0$，且 $f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$，

当 $0<x<\arccos\dfrac{2}{\pi}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，$f(x)>f(0)=0$，

当 $\arccos\dfrac{2}{\pi}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，$f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，故 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

二．函数的极值

极值是局部的最值，相应的极值点是函数曲线单增部分与单减部分的分界点.



图中，点 x_1, x_3, x_6 是极大值点，点 x_2, x_4 是极小值点，点 x_5 是驻点，但不是极值点.

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义.

若 x_0 的某去心邻域内任意一点 x，都有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值，x_0 为极小值点，

若 x_0 的某去心邻域内任意一点 x，都有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值，x_0 为极大值点.

极小值与极大值统称为极值，极小值点与极大值点统称为极值点.

定理　（极值存在的必要条件）若 x_0 为 $f(x)$的极值点，且 $f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0)=0$.

证：不妨设 x_0 为 $f(x)$的极小值点，对于 x_0 的某去心邻域内任意一点 x，都有 $f(x)>f(x_0)$，

因 $f'(x_0)$存在，则 $f_-'(x_0)$ 与 $f_+'(x_0)$ 都存在而且相等，

当 $x<x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，则 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$，

当 $x>x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，则 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$，有 $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=0$，故 $f'(x_0)=0$.

一般称导数等于 0 的点为驻点．此定理表明极值点必为驻点或尖点．

但驻点或尖点不一定是极值点，如上图中的点 x_5 ．显然有如下定理的结论．

定理 （极值存在的一阶充分条件）设 $f(x)$ 在 x_0 处连续且在某去心邻域内可导，$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$不存在，

（1）若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，（左减右增），则 x_0 是 $f(x)$的极小值点；

（2）若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，（左增右减），则 x_0 是 $f(x)$的极大值点；

（3）若在点 x_0 两侧 $f'(x)$不变号，则 x_0 不是 $f(x)$的极值点．

求单调区间和极值的步骤：

（1）求函数 $f(x)$的定义域；

（2）求导数 $f'(x)$；

（3）令 $f'(x)=0$，求得定义域内的驻点，并找出定义域内导数不存在的点；

（4）列表，用所得点划分定义域，判断 $f'(x)$的符号与 $f(x)$的单调性；

（5）下结论．

例　讨论 $f(x)=x^3+x^2-x+5$ 的单调区间和极值．

解：定义域 $(-\infty,+\infty)$，且 $f'(x)=3x^2+2x-1$，令 $y'=0$，得 $x=-1$，$x=\dfrac{1}{3}$，且定义域内没有不可导的点，

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$	$\dfrac{1}{3}$	$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	极大，6	↘	极小，$\dfrac{130}{27}$	↗

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 内单调增加，在 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 内单调减少，

$f(-1)=6$ 为极大值，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{130}{27}$ 为极小值．

例　讨论 $f(x)=2x-3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间和极值．

解：定义域 $(-\infty,+\infty)$，且 $f'(x)=2-3\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=2-2x^{-\frac{1}{3}}$，令 $y'=0$，得 $x=1$，且 $x=0$ 处 $f'(x)$ 不存在，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	不存在	–	0	+
y	↗	极大，0	↘	极小，-1	↗

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$ 内单调增加，在 $(0,1)$ 内单调减少，$f(0)=0$ 为极大值，$f(1)=-1$ 为极小值．

例　讨论 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的单调区间和极值．

解：定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

令 $y'=0$，得 $x=1$，且定义域内没有不可导的点，

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	–	–	0	+
y	↘	↘	极小，e	↗

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 内单调减少，在 $(1,+\infty)$ 内单调增加，$f(1)=e$ 为极小值．

定理 （极值存在的二阶充分条件）设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，有

（1）若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

（2）若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

说明：若 $f''(x_0)>0$，有 $f'(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加，因 $f'(x_0)=0$，

则当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，左减右增，故 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

若 $f''(x_0)<0$，则 $f'(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调减少，可证 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

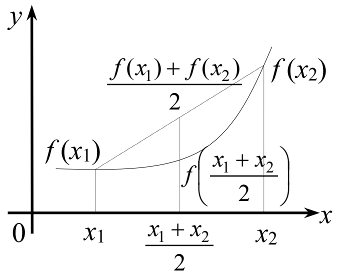
例　求 $f(x)=x^3+x^2-x+5$ 的极值.

解：因 $f'(x)=3x^2+2x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，$x=\dfrac{1}{3}$，且 $f''(x)=6x+2$，

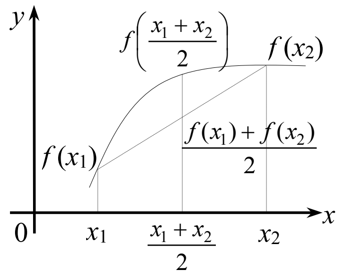
有 $f''(-1)=-4<0$，$f''\left(\dfrac{1}{3}\right)=4>0$，故 $f(-1)=6$ 为极大值，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{130}{27}$ 为极小值.

§4.5　函数的凸性与拐点

研究函数曲线的弯曲方向



两点间的曲线总在连线下方，下凸
切线斜率单调增加，$f''(x)>0$



两点间的曲线总在连线上方，上凸
切线斜率单调减少，$f''(x)<0$

定义　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，对 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2，

若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内下凸；

若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内上凸.

定理　设 $f(x)$ 二阶可导，若 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 下凸；若 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 上凸.

证：任取两点 x_1,x_2 （$x_1<x_2$），因 $f(x)$ 二阶可导，

有 $f(x)$ 在 $\left[x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$ 与 $\left[\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$ 上连续，在 $\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ 内可导，

根据 Lagrange 定理，知存在 $\xi_1\in\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，$\xi_2\in\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$，

使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\dfrac{x_1+x_2}{2}-x_1}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_2)-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\dfrac{x_1+x_2}{2}}$，

即 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)=\dfrac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_1)$，$f(x_2)-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_2)$，

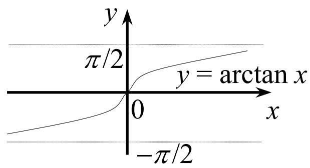
若 $f''(x)>0$，有 $f'(x)$ 单调增加，$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，

则 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)=\dfrac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_1)<\dfrac{x_2-x_1}{2}f'(\xi_2)=f(x_2)-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，

故 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，$f(x)$ 在 (a,b) 内下凸；

若 $f''(x)<0$，有 $f'(x)$ 单调减少，$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$，

可证 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，$f(x)$ 在 (a,b) 内上凸



例　讨论函数 $f(x)=\arctan x$ 的凸性.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，

当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 下凸；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 上凸.

定义　连续曲线的上凸部分与下凸部分的分界点 $(x_0,f(x_0))$ 称为曲线的拐点.

如点 $(0,0)$ 是曲线 $f(x)=\arctan x$ 的拐点.

定理　设 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点且 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x_0)=0$.

此定理表明拐点必为 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点.

例　讨论 $f(x)=x^2+2\ln x+3$ 的凸性与拐点.

解：定义域 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}$，$f''(x)=2-\dfrac{2}{x^2}$，

令 $f''(x)=0$，得 $x=1$，$x=-1$（不在定义域内，舍去），且定义域内没有二阶导数不存在的点.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	拐点，4	$\cup$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内上凸，在 $(1,+\infty)$ 内下凸，点$(1,4)$为拐点.

例　讨论 $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-4)$ 的凸性与拐点.

解：定义域 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=(x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}})'=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$f''(x)=\dfrac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\dfrac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x+2)$，

令 $f''(x)=0$，得 $x=-2$，且 $x=0$ 处 $f''(x)$ 不存在，

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	$\cup$	拐点，$6\sqrt[3]{2}$	$\cap$	拐点，0	$\cup$

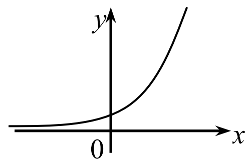
故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$ 内下凸，在$(-2,0)$ 内上凸，点 $(-2,6\sqrt[3]{2})$，$(0,0)$ 为拐点.

补充：渐近线与函数作图

一．渐近线

渐近线的概念：如果曲线 $y=f(x)$ 上的一动点 M，沿曲线无限远离原点时，该动点 M 与某条直线 L 的距离趋近于零，则称该直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线. 如中学所学的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，以直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 为两条斜渐近线. 按渐近线的方向，分成三类：水平、铅垂、斜渐近线.

1．水平渐近线

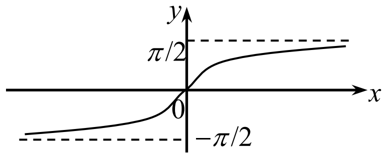


$y=e^{x}$

曲线 $y=f(x)$ 上动点 M 沿曲线无限远离原点时，与直线 $y=c$ 的距离趋近于零.
可得动点 M 的纵坐标趋于 c，横坐标趋于∞.

定义　如果 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=c$，则称直线 $y=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

注：这里 $x\to\pm\infty$ 表示 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的任一个.



$y=\arctan x$

如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2$，则 $y=2$ 是曲线 $y=\dfrac{2x}{x-1}$ 的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$，则 $y=0$ 是曲线 $y=e^{x}$ 的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，则 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 都是曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

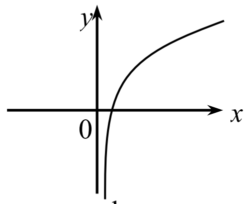
注：函数的水平渐近线最多有两条，正负无穷大方向各一条.

2．铅垂渐近线

曲线 $y=f(x)$ 上动点 M 沿曲线无限远离原点时，与直线 $x=b$ 的距离趋近于零.
可得动点 M 的横坐标趋于 b，纵坐标趋于∞.

定义　如果 $\lim\limits_{x\to b^{\pm}} f(x)=\infty$，则称直线 $x=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅垂渐近线.

注：这里 $x\to b^{\pm}$ 表示 $x\to b^{+}$ 或 $x\to b^{-}$ 的任一个.



$y=\ln x$

如 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，则 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的铅垂渐近线；

$\lim\limits_{x\to0^{+}}\ln x=\infty$，则 $x=0$ 是曲线 $y=\ln x$ 的铅垂渐近线；

$\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，则 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad n=0,\pm1,\pm2,\Lambda$ 都是 $y=\tan x$ 的铅垂渐近线.

注：函数的铅垂渐近线可以有无穷多条，在函数值趋于无穷大的点处有铅垂渐近线.

例　求 $y=\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}$ 的渐近线.

解：水平渐近线：因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}=0$，即 $y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}$ 的水平渐近线；

铅垂渐近线：讨论 x 趋于 $0, 1, 2$ 处的极限，

因 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x(x-2)}=-2$，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}=\infty$，

即 $x=0$ 与 $x=2$ 都是曲线 $y=\dfrac{x^{2}-1}{x(x-1)(x-2)}$ 的铅垂渐近线.

3．斜渐近线

曲线 $y=f(x)$ 上动点 M 沿曲线无限远离原点时，与直线 $y=ax+b\quad(a\neq0)$的距离趋近于零.

定义　如果 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax-b]=0\quad(a\neq0)$，则称直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

此时有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)-ax-b}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{f(x)}{x}-a-\dfrac{b}{x}]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}-a=0$，

得：$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}\neq 0$，且$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$．

例　求$y=\dfrac{3x^2+1}{x-2}$的斜渐近线．

解：因$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2-2x}=3\neq 0$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{3x^2+1}{x-2}-3x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+6x}{x-2}=6$，

故$y=3x+6$是曲线$y=\dfrac{3x^2+1}{x-2}$的斜渐近线．

例　求双曲线$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1\quad(m,n>0)$的斜渐近线．

解：改写为显函数形式$y=\pm\dfrac{n}{m}\sqrt{x^2-m^2}$，讨论$y=\dfrac{n}{m}\sqrt{x^2-m^2}$的斜渐近线，

因$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-m^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n}{m}\cdot\sqrt{1-\dfrac{m^2}{x^2}}=\dfrac{n}{m}\neq 0$，

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{m}[\sqrt{x^2-m^2}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{m}\cdot\frac{-m^2}{\sqrt{x^2-m^2}+x}=0,$$

故$y=\dfrac{n}{m}x$是其正无穷大方向的斜渐近线；

又因$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-m^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{n}{m}\cdot\sqrt{1-\dfrac{m^2}{x^2}}\right]=-\dfrac{n}{m}\neq 0$，

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}\frac{n}{m}[\sqrt{x^2-m^2}+x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{n}{m}\cdot\frac{-m^2}{\sqrt{x^2-m^2}-x}=0,$$

故$y=-\dfrac{n}{m}x$是其负无穷大方向的斜渐近线．类似可得$y=-\dfrac{n}{m}\sqrt{x^2-m^2}$的斜渐近线也是$y=\pm\dfrac{n}{m}x$．

注：函数的斜渐近线也最多有两条，正负无穷大方向各一条．由于$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=c$时，必有$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，故在正（或负）无穷大同一方向上，水平渐近线与斜渐近线也只能有其一．

例　求$y=|x|+\dfrac{x^2}{x-1}$的全部渐近线．

解：水平渐近线：因$\lim\limits_{x\to+\infty}[|x|+\dfrac{x^2}{x-1}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x}{x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[|x|+\dfrac{x^2}{x-1}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$，

故$y=1$是其水平渐近线；

铅垂渐近线：讨论x趋于1处的极限，因$\lim\limits_{x\to 1}[|x|+\dfrac{x^2}{x-1}]=\infty$，故$x=1$是其铅垂渐近线；

斜渐近线：在负无穷大方向已有水平渐近线，只需讨论正无穷大方向有无斜渐近线，

因$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[1+\dfrac{x}{x-1}]=2\neq 0$，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x+\dfrac{x^2}{x-1}-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$，

故$y=2x+1$是其斜渐近线．

二．函数作图

作函数图形的步骤：

（1）求函数的定义域，并判断函数的对称性；

（2）求导数，判断函数的单调性与极值；

（3）求二阶导数，判断函数的凸性与拐点；

（4）求出渐近线；

（5）找出一些特殊点（如极值点，拐点，与坐标轴的交点等）.

例　作出函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的图形.

解：定义域 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，

因 $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，令 $y'=0$，得 $x=1$，且定义域内没有不可导的点，

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	↘	极小，e	↗

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$，$(0, 1)$ 内单调减少，在 $(1, +\infty)$ 内单调增加，$f(1)=e$ 为极小值，

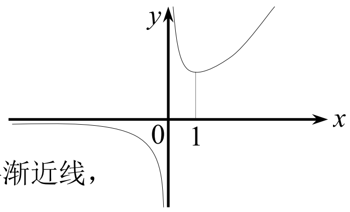
又因 $f''(x)=\dfrac{xe^x\cdot x^2-(x-1)e^x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$，令 $y''=0$，无解，

x	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内上凸，在 $(1, +\infty)$ 内下凸，

渐近线：水平，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$，即 $x=0$ 是水平渐近线，

铅直，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{x}=\infty$，即 $y=0$ 是铅直渐近线，



斜，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$，即没有斜渐近线，

特殊点：极小值点 $(1, e)$，点 $(-1, -e^{-1})$，作图.

§4.6　函数的最值及其在经济分析中的应用

一．函数的最值

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，根据最值定理，知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必存在最大值与最小值.

注：极值不是最值，而最值也不一定是极值.

类似于 Rolle 定理的证明，可以得到：如果最值不在区间端点处取得，且最值点处可导，则最值点处的导数等于 0，即最值必在区间端点、驻点、尖点处取得.

求函数的最值时，先求出驻点，找出尖点，再比较驻点、尖点、端点处的函数值.

例　求函数 $y=x^3-9x^2+15x+5$ 在 $[0, 10]$ 上的最值.

解：因 $y'=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$，令 $y'=0$，得 $x=1$，$x=5$，且定义域内没有不可导的点，

比较 $f(1)=12$，$f(5)=-20$，$f(0)=5$，$f(10)=255$，故最小值为 $f(5)=-20$，最大值为 $f(10)=255$.

例　求函数 $y=x^{\frac{2}{3}}(2x-5)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最值.

解：因 $y'=(2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}})'=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$，令 $y'=0$，得 $x=1$，且 $x=0$ 时函数不可导，

比较 $f(1)=-3$，$f(0)=0$，$f(-1)=-7$，$f(2)=-2^{\frac{2}{3}}$，故最小值为 $f(-1)=-7$，最大值为 $f(0)=0$.

特殊情形：

（1）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，

若 $f(x)$ 单调增加，则 $f(a)$ 为最小值，$f(b)$ 为最大值，

若 $f(x)$ 单调减少，则 $f(a)$ 为最大值，$f(b)$ 为最小值；

（2）函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在唯一驻点，且没有尖点，（唯一驻点问题），

若该驻点为极大值点，则取得最大值，若该驻点为极小值点，则取得最小值.

二．最值在经济分析中的应用

经济学中常用的函数：

需求函数：需求量 Q_d 关于价格 P 的函数，$Q_d=f(P)$．一般，需求函数 $Q_d=f(P)$ 为单减函数.

供给函数：供给量 Q_s 关于价格 P 的函数，$Q_s=\varphi(P)$．一般，供给函数 $Q_s=\varphi(P)$ 为单增函数.

均衡状态：需求曲线 D 与供给曲线 S 交于点 (P_0,Q_0)，均衡状态下，$Q_s=Q_d=Q_0$，Q_0 为均衡商品量.

成本函数：成本 C 关于产量 x 的函数，$C(x)=C_0+C_1(x)$，其中 C_0 为固定成本，$C_1(x)$ 为可变成本，

此外平均成本 $\overline{C}=\frac{C(x)}{x}$.

收益函数：收益 R 关于销量 x 的函数，$R=R(x)=xP$，其中 P 为价格.

当产销平衡时（即均衡状态），产量、销量（供给量、需求量）统称为商品量.

利润函数：利润 L 关于商品量 x 的函数，$L=L(x)=R(x)-C(x)$.

求解最值应用问题的步骤：

（1）建立目标函数，明确函数的因变量和自变量；

（2）求导数；

（3）令导数等于 0，解得驻点（往往是唯一驻点问题）；

（4）验证是否极值点；

（5）下结论.

例　已知生产某产品固定成本为 10，边际成本为 $2x+0.1x^2$（x 为产量），求产量为多少时平均成本最低？

解：目标函数：平均成本函数 $\overline{C}=\overline{C}(x)$，$x$ 为产量，有成本函数为 $C(x)=C_0+C_1(x)=10+2x+0.1x^2$，

则 $\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{10+2x+0.1x^2}{x}=\frac{10}{x}+2+0.1x$，$x\in(0,+\infty)$，有 $\overline{C}'(x)=-\frac{10}{x^2}+0.1$，

令 $\overline{C}'(x)=0$，得 $x=10$，$x=-10$（舍去），且 $\overline{C}''(x)=\frac{20}{x^3}$，$\overline{C}''(10)=0.02>0$，即 $x=10$ 为极小值点，

唯一驻点问题，故产量为 10 时，平均成本最低，最低平均成本为 $\overline{C}(10)=4$.

例　已知生产某产品的固定成本为 100，每生产一单位产品，成本增加 5 个单位．且该产品的需求函数为 $Q=110-2P$ （Q 为需求量，P 为价格），问产销平衡条件下，生产多少利润最大？

解：目标函数：利润函数 $L=L(Q)$，Q 为商品量，有 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$，

因成本 $C(Q)=C_0+C_1(Q)=100+5Q$，收益 $R(Q)=PQ=(55-0.5Q)Q=55Q-0.5Q^2$，

则 $L(Q)=50Q-0.5Q^2-100$，有 $L'(Q)=50-Q$，令 $L'(Q)=0$，得 $Q=50$，又因 $L''(Q)=-1<0$，

即 $Q=50$ 为极大值点，唯一驻点问题，故生产 50 单位时，利润最大，最大利润为 $L(50)=1150$.