第四章　大数定律与中心极限定理

习题 4.1

1．如果 $X_n \xrightarrow{P} X$，且 $X_n \xrightarrow{P} Y$。试证：$P\{X=Y\}=1$。

$\{X_n\}$依概率收敛于X

注：此题原题有误，“$Y_n \xrightarrow{P} Y$”应改为“$X_n \xrightarrow{P} Y$”。此题结论表明同一随机变量序列依概率收敛的极限在几乎处处意义下是唯一的。

证明：因

$$|X-Y|=|-(X_n-X)+(X_n-Y)|\le|X_n-X|+|X_n-Y|,$$

对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\{|X-Y|\ge\varepsilon\}\subset\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{|X_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$0\le P\{|X-Y|\ge\varepsilon\}\le P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|X_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}。$$

又因 $X_n \xrightarrow{P} X$，且 $X_n \xrightarrow{P} Y$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}=0，\quad \lim_{n\to+\infty}P\left\{|X_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}=0,$$

由夹逼准则可知 $P\{|X-Y|\ge\varepsilon\}=0$，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{k}$，有

$$P\left\{|X-Y|\ge\frac{1}{k}\right\}=0,$$

根据概率的连续性可得

$$P\{X=Y\}=P\left\{\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left\{|X-Y|<\frac{1}{k}\right\}\right\}=\lim_{k\to+\infty}P\left\{|X-Y|<\frac{1}{k}\right\}=1-\lim_{k\to+\infty}P\left\{|X-Y|\ge\frac{1}{k}\right\}=1。$$

2．如果 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$。试证：

（1）$X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$；

（2）$X_nY_n \xrightarrow{P} XY$。

证明：（1）因

$$|(X_n\pm Y_n)-(X\pm Y)|=|(X_n-X)\pm(Y_n-Y)|\le|X_n-X|+|Y_n-Y|,$$

对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\{|(X_n+Y_n)-(X+Y)|\ge\varepsilon\}\subset\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{|Y_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$0 \le P\{|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \ge \varepsilon\} \le P\left\{|X_n - X| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

又因 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{|X_n - X| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left\{|Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0,$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \ge \varepsilon\} = 0,$$

即 $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$。

（2）因

$$|X_nY_n - XY| = |(X_n - X)Y_n + X(Y_n - Y)| \le |X_n - X| \cdot |Y_n| + |X| \cdot |Y_n - Y|,$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\{|X_nY_n - XY| \ge \varepsilon\} \subset \left\{|X_n - X| \cdot |Y_n| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X| \cdot |Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}。$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$0 \le P\{|X_nY_n - XY| \ge \varepsilon\} \le P\left\{|X_n - X| \cdot |Y_n| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|X| \cdot |Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

对任意的 $h > 0$，存在 $M_1 > 0$，使得 $P\{|X| \ge M_1\} < \frac{h}{2}$，且有

$$\left\{|X| \cdot |Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{|X| \ge M_1\} \cup \left\{|Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2M_1}\right\},$$

因 $Y_n \xrightarrow{P} Y$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{|Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2M_1}\right\} = 0,$$

存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，$P\left\{|Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2M_1}\right\} < \frac{h}{2}$，由概率的单调性和半可加性可得

$$P\left\{|X| \cdot |Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le P\{|X| \ge M_1\} + P\left\{|Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2M_1}\right\} < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X| \cdot |Y_n - Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0。$$

对任意的$h>0$，存在$M_2>0$，使得$P\{|Y|\geq M_2\}<\dfrac{h}{4}$。因

$$|Y_n|=|(Y_n-Y)+Y|\leq|Y_n-Y|+|Y|,$$

有

$$\{|Y_n|\geq M_2+1\}\subset\{|Y_n-Y|\geq 1\}\cup\{|Y|\geq M_2\},$$

因$Y_n\xrightarrow{P}Y$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|Y_n-Y|\geq 1\}=0,$$

存在正整数N_2，当$n>N_2$时，$P\{|Y_n-Y|\geq 1\}<\dfrac{h}{4}$，由概率的单调性和半可加性可得

$$P\{|Y_n|\geq M_2+1\}\leq P\{|Y_n-Y|\geq 1\}+\{|Y|\geq M_2\}<\frac{h}{4}+\frac{h}{4}=\frac{h}{2},$$

又因

$$\left\{|X_n-X|\cdot|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\subset\left\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right\}\cup\{|Y_n|\geq M_2+1\},$$

且$X_n\xrightarrow{P}X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right\}=0,$$

存在正整数N_3，当$n>N_3$时，$P\left\{|X_n-X|\geq\dfrac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right\}<\dfrac{h}{2}$，当$n>\max\{N_2,N_3\}$时，由概率的单调性和半可加性可得

$$P\left\{|X_n-X|\cdot|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leq P\left\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right\}+P\{|Y_n|\geq M_2+1\}<\frac{h}{2}+\frac{h}{2}=h,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{|X_n-X|\cdot|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}=0,$$

由夹逼准则知

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|X_nY_n-XY|\geq\varepsilon\}=0,$$

故$X_nY_n\xrightarrow{P}XY$。

3． 如果$X_n\xrightarrow{P}X$，$g(x)$是直线上的连续函数，试证：$g(X_n)\xrightarrow{P}g(X)$。

证明：对任意的$h>0$，存在正整数M，使得$P\{|X|\geq M\}<\dfrac{h}{4}$。因$X_n\xrightarrow{P}X$，有$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_n-X|\geq 1\}=0$，存在正整数$N_1$，当$n>N_1$时，$P\{|X_n-X|\geq 1\}<\dfrac{h}{4}$。因

$$|X_n|=|(X_n-X)+X|\le|X_n-X|+|X|,$$

有

$$\{|X_n|\ge M+1\}\subset\{|X_n-X|\ge 1\}\cup\{|X|\ge M\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$P\{|X_n|\ge M+1\}\le P\{|X_n-X|\ge 1\}+P\{|X|\ge M\}<\frac{h}{4}+\frac{h}{4}=\frac{h}{2}。$$

因 $g(x)$ 是直线上的连续函数，有 $g(x)$ 在闭区间 $[-M-1, M+1]$ 上连续，必一致连续。对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x|\le M+1, |y|\le M+1$ 且 $|x-y|<\delta$ 时，有 $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$。又因 $X_n\xrightarrow{P}X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|X_n-X|\ge\delta\}=0,$$

存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，$P\{|X_n-X|\ge\delta\}<\dfrac{h}{4}$。

$$\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon\}\subset\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon, |X_n|\le M+1, |X|\le M+1\}$$

$$\cup\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon, |X_n|>M+1\text{ 或 }|X|>M+1\}$$

$$\subset\{|X_n-X|\ge\delta\}\cup\{|X_n|\ge M+1\}\cup\{|X|\ge M\}$$

当 $n>\max\{N_1, N_2\}$ 时，由概率的单调性和半可加性可得

$$0\le P\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon\}\le P\{|X_n-X|\ge\delta\}+P\{|X_n|\ge M+1\}+P\{|X|\ge M\}<h,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon\}=0,$$

即 $g(X_n)\xrightarrow{P}g(X)$。

4． 如果 $X_n\xrightarrow{P}a$，则对任意常数 c，有 $cX_n\xrightarrow{P}ca$。

证明：当 $c=0$ 时，有 $cX_n=0$，$ca=0$，显然 $cX_n\xrightarrow{P}ca$。

当 $c\ne0$ 时，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{|X_n-a|\ge\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|cX_n-ca|\ge\varepsilon\}=0,$$

即 $cX_n\xrightarrow{P}ca$。

5． 试证：$X_n\xrightarrow{P}X$ 的充要条件为：$n\to+\infty$ 时，有 $E\left(\dfrac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)\to0$。

证明：以连续随机变量为例进行证明，设 $Y=X_n-X$ 的密度函数为 $p(y)$。

必要性：设 $X_n \xrightarrow{P} X$，对任意的 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} = 0,$$

对 $\dfrac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} < \dfrac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$，则

$$E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{1+|y|} p(y)dy = \int_{|y|<\varepsilon} \frac{|y|}{1+|y|} p(y)dy + \int_{|y|\ge\varepsilon} \frac{|y|}{1+|y|} p(y)dy$$

$$\le \int_{|y|<\varepsilon} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} p(y)dy + \int_{|y|\ge\varepsilon} p(y)dy = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} + P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\}$$

$$< \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} = \varepsilon,$$

故 $n \to +\infty$ 时，有 $E\left(\dfrac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \to 0$。

充分性：设 $n \to +\infty$ 时，有 $E\left(\dfrac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \to 0$，因

$$P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} = \int_{|y|\ge\varepsilon} p(y)dy = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_{|y|\ge\varepsilon} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} p(y)dy \le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_{|y|\ge\varepsilon} \frac{|y|}{1+|y|} p(y)dy$$

$$\le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{1+|y|} p(y)dy = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right),$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} = 0,$$

即 $X_n \xrightarrow{P} X$。

6. 设 $D(x)$ 为退化分布：

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

试问下列分布函数列的极限函数是否仍是分布函数？（其中 $n = 1, 2, \cdots$）

（1）$\{D(x+n)\}$；

（2）$\{D(x+1/n)\}$；

（3）$\{D(x-1/n)\}$。

解：（1）对任意实数 x，当 $n > -x$ 时，有 $x+n > 0$，$D(x+n) = 1$，即

$$\lim_{n\to+\infty} D(x+n) = 1,$$

则 $\{D(x+n)\}$ 的极限函数是常量函数 $f(x) = 1$，有 $f(-\infty) = 1$，故 $\{D(x+n)\}$ 的极限函数不是分布函数。

（2）若 $x < 0$，当 $n > -\dfrac{1}{x}$ 时，有 $x + \dfrac{1}{n} < 0$，$D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = 0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(x+\frac{1}{n}\right)=0,$$

若 $x\ge 0$，有 $x+\dfrac{1}{n}>0$， $D\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=1$，有

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(x+\frac{1}{n}\right)=1,$$ $x+\frac{1}{n}$

即

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(x+\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\ge 0.\end{cases}$$

这是在 0 点处单点分布的分布函数，满足分布函数的基本性质，故 $\left\{D\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 的极限函数是分布函数。

（3）若 $x\le 0$，有 $x-\dfrac{1}{n}<0$， $D\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(x-\frac{1}{n}\right)=0,$$

若 $x>0$，当 $n>\dfrac{1}{x}$ 时，有 $x-\dfrac{1}{n}>0$， $D\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=1$，有

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(x-\frac{1}{n}\right)=1,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(x-\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

该函数在 $x=0$ 处不是右连续，故 $\left\{D\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 的极限函数不是分布函数。

7． 设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于连续的分布函数 $F(x)$，试证： $\{F_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于分布函数 $F(x)$。

证明：因 $F(x)$ 为连续的分布函数，有 $F(-\infty)=0$， $F(+\infty)=1$，对任意的 $\varepsilon>0$，取正整数 $k>\dfrac{2}{\varepsilon}$，存在 $k-1$ 个点 $x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}$，使得 $F(x_i)=\dfrac{i}{k},\quad i=1,2,\cdots,k-1$，并记 $x_0=-\infty$， $x_k=+\infty$，可得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots,k-1,k。$$

因 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$，且 $F(x)$ 连续，有 $\{F_n(x)\}$ 在每一点处都收敛于 $F(x)$，则存在正整数 N，

当 $n>N$ 时，

$$|F_n(x_i)-F(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots,k-1,$$

且显然有 $|F_n(x_0)-F(x_0)|=0<\frac{\varepsilon}{2}$，$|F_n(x_k)-F(x_k)|=0<\frac{\varepsilon}{2}$。对任意实数 x，必存在 $j\quad(1\le j\le k)$，使得 $x_{j-1}\le x<x_j$，因

$$F(x_{j-1})-\frac{\varepsilon}{2}<F_n(x_{j-1})\le F_n(x)\le F_n(x_j)<F(x_j)+\frac{\varepsilon}{2},$$

则

$$F_n(x)-F(x)>F(x_{j-1})-\frac{\varepsilon}{2}-F(x)\ge F(x_{j-1})-F(x_j)-\frac{\varepsilon}{2}>-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=-\varepsilon,$$

$$F_n(x)-F(x)<F(x_j)+\frac{\varepsilon}{2}-F(x)\le F(x_j)-F(x_{j-1})+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon$，故 $\{F_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于分布函数 $F(x)$。

8． 如果 $X_n\xrightarrow{L}X$，且数列 $a_n\to a$，$b_n\to b$。试证：$a_nX_n+b_n\xrightarrow{L}aX+b$。

证明：设 y_0 是 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $h>0$，当 $|y-y_0|<h$ 时，

$$|F_{aX+b}(y)-F_{aX+b}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}。$$

又设 y 是 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点，因

$$F_{aX+b}(y)=P\{aX+b\le y\}=P\left\{X\le\frac{y-b}{a}\right\}=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

有 $x=\dfrac{y-b}{a}$ 是 $F_X(x)$ 的连续点。因 $X_n\xrightarrow{L}X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x),$$

存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，$|F_{X_n}(x)-F_X(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，即 $|F_{aX_n+b}(y)-F_{aX+b}(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$。当 $n>N_1$ 且 $|y-y_0|<h$ 时，有

$$|F_{aX_n+b}(y)-F_{aX+b}(y_0)|\le|F_{aX_n+b}(y)-F_{aX+b}(y)|+|F_{aX+b}(y)-F_{aX+b}(y_0)|=\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}。$$

因 X 的分布函数 $F_X(x)$ 满足 $F_X(-\infty)=0$，$F_X(+\infty)=1$，$F_X(x)$ 单调不减且几乎处处连续，则存在 M，使得 $F_X(x)$ 在 $x=\pm M$ 处连续，且 $F_X(-M)<\frac{\varepsilon}{4}$，$F_X(M)>1-\frac{\varepsilon}{4}$。因 $X_n\xrightarrow{L}X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(-M)=F_X(-M)<\frac{\varepsilon}{4},\quad\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(M)=F_X(M)>1-\frac{\varepsilon}{4},$$

则存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，$F_{X_n}(-M)<\frac{\varepsilon}{4}$，$F_{X_n}(M)>1-\frac{\varepsilon}{4}$，可得

$$P\{|X_n|>M\}=F_{X_n}(-M)+1-F_{X_n}(M)<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

因数列$a_n\to a$，$b_n\to b$，存在正整数N_3，当$n>N_3$时，$|a_n-a|<\frac{h}{4M}$，$|b_n-b|<\frac{h}{4}$，有

$$|(a_nX_n+b_n)-(aX_n+b)|=|(a_n-a)X_n+(b_n-b)|\le|a_n-a|\cdot|X_n|+|b_n-b|<\frac{h}{4M}|X_n|+\frac{h}{4},$$

可得

$$\left\{|(a_nX_n+b_n)-(aX_n+b)|>\frac{h}{2}\right\}\subset\left\{\frac{h}{4M}\cdot|X_n|+\frac{h}{4}>\frac{h}{2}\right\}=\{|X_n|>M\},$$

当$n>\max\{N_2,N_3\}$时，由概率的单调性和半可加性可得

$$P\left\{|(a_nX_n+b_n)-(aX_n+b)|>\frac{h}{2}\right\}\le P\{|X_n|>M\}<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

因

$$\{a_nX_n+b_n\le y_0\}\subset\left\{aX_n+b\le y_0+\frac{h}{2}\right\}\cup\left\{(aX_n+b)-(a_nX_n+b_n)>\frac{h}{2}\right\},$$

$$\left\{aX_n+b\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\subset\{a_nX_n+b_n\le y_0\}\cup\left\{(a_nX_n+b_n)-(aX_n+b)>\frac{h}{2}\right\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$F_{a_nX_n+b_n}(y_0)=P\{a_nX_n+b_n\le y_0\}\le P\left\{aX_n+b\le y_0+\frac{h}{2}\right\}+P\left\{(aX_n+b)-(a_nX_n+b_n)>\frac{h}{2}\right\}$$

$$<F_{aX_n+b}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$F_{aX_n+b}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)=P\left\{aX_n+b\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\le P\{a_nX_n+b_n\le y_0\}+P\left\{(a_nX_n+b_n)-(aX_n+b)>\frac{h}{2}\right\}$$

$$<F_{a_nX_n+b_n}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$F_{aX_n+b}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{a_nX_n+b_n}(y_0)<F_{aX_n+b}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

前面已证，当$n>N_1$且$|y-y_0|<h$时，有

$$F_{aX+b}(y_0)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{aX_n+b}(y)<F_{aX+b}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

在区间$\left(y_0+\frac{h}{2},y_0+h\right)$取$F_{aX+b}(y)$的任一连续点$y_1$，显然满足$|y_1-y_0|<h$，当$n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$时，

$$F_{a_nX_n+b_n}(y_0)<F_{aX_n+b}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\le F_{aX_n+b}(y_1)+\frac{\varepsilon}{2}<F_{aX+b}(y_0)+\varepsilon\text{，}$$

在区间$\left(y_0-h, y_0-\frac{h}{2}\right)$取$F_{aX+b}(y)$的任一连续点$y_2$，显然满足$|y_2-y_0|<h$，当$n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$时，

$$F_{a_nX_n+b_n}(y_0)>F_{aX_n+b}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\ge F_{aX_n+b}(y_2)-\frac{\varepsilon}{2}>F_{aX+b}(y_0)-\varepsilon\text{，}$$

即对于$F_{aX+b}(y)$的任一连续点y_0，当$n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$时，

$$|F_{a_nX_n+b_n}(y_0)-F_{aX+b}(y_0)|<\varepsilon\text{，}$$

故$F_{a_nX_n+b_n}(y)\xrightarrow{W}F_{aX+b}(y)$，$a_nX_n+b_n\xrightarrow{L}aX+b$。

9． 如果$X_n\xrightarrow{L}X$，$Y_n\xrightarrow{P}a$，试证：$X_n+Y_n\xrightarrow{L}X+a$。

证明：设y_0是$F_{X+a}(y)$的任一连续点，对任意的$\varepsilon>0$，存在$h>0$，当$|y-y_0|<h$时，

$$|F_{X+a}(y)-F_{X+a}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}\text{。}$$

又设y是$F_{X+a}(y)$的任一连续点，因

$$F_{X+a}(y)=P\{X+a\le y\}=P\{X\le y-a\}=F_X(y-a)\text{，}$$

有$x=y-a$是$F_X(x)$的连续点。因$X_n\xrightarrow{L}X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)\text{，}$$

存在正整数N_1，当$n>N_1$时，$|F_{X_n}(x)-F_X(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，即$|F_{X_n+a}(y)-F_{X+a}(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$。当$n>N_1$且$|y-y_0|<h$时，有

$$|F_{X_n+a}(y)-F_{X+a}(y_0)|\le|F_{X_n+a}(y)-F_{X+a}(y)|+|F_{X+a}(y)-F_{X+a}(y_0)|=\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

因$Y_n\xrightarrow{P}a$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}=0\text{，}$$

存在正整数N_2，当$n>N_2$时，$P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2}$。因

$$\{X_n+Y_n\le y_0\}\subset\left\{X_n+a\le y_0+\frac{h}{2}\right\}\cup\left\{Y_n-a<-\frac{h}{2}\right\}\text{，}$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$F_{X_n+Y_n}(y_0)=P\{X_n+Y_n\le y_0\}\le P\left\{X_n+a\le y_0+\frac{h}{2}\right\}+P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n+a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2};$$

又因

$$\left\{X_n+a\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\subset\{X_n+Y_n\le y_0\}\cup\left\{Y_n-a>\frac{h}{2}\right\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$F_{X_n+a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)=P\left\{X_n+a\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\le P\{X_n+Y_n\le y_0\}+P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n+Y_n}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

可得

$$F_{X_n+a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{X_n+Y_n}(y_0)<F_{X_n+a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

因当 $n>N_1$ 且 $|y-y_0|<h$ 时，

$$F_{X+a}(y_0)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{X_n+a}(y)<F_{X+a}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

则在区间 $\left(y_0+\dfrac{h}{2},y_0+h\right)$ 内取 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点 y_1，满足 $|y_1-y_0|<h$，当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$F_{X_n+Y_n}(y_0)<F_{X_n+a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\le F_{X_n+a}(y_1)+\frac{\varepsilon}{2}<F_{X+a}(y_0)+\varepsilon,$$

在区间 $\left(y_0-h,y_0-\dfrac{h}{2}\right)$ 内取 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点 y_2，满足 $|y_2-y_0|<h$，当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$F_{X_n+Y_n}(y_0)>F_{X_n+a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\ge F_{X_n+a}(y_2)-\frac{\varepsilon}{2}>F_{X+a}(y_0)-\varepsilon,$$

即对于 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点 y_0，当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$|F_{X_n+Y_n}(y_0)-F_{X+a}(y_0)|<\varepsilon,$$

故 $F_{X_n+Y_n}(y)\xrightarrow{W}F_{X+a}(y)$， $X_n+Y_n\xrightarrow{L}X+a$ 。

10．如果 $X_n\xrightarrow{L}X$ ， $Y_n\xrightarrow{P}0$ ，试证： $X_nY_n\xrightarrow{P}0$ 。

证明：因 X 的分布函数 $F_X(x)$ 满足 $F_X(-\infty)=0$ ， $F_X(+\infty)=1$ ， $F_X(x)$ 单调不减且几乎处处连续，则对任意的 $h>0$ ，存在 $M>0$ ，使得 $F_X(x)$ 在 $x=\pm M$ 处连续，且 $F_X(M)>1-\dfrac{h}{4}$ ， $F_X(-M)<\dfrac{h}{4}$ 。因 $X_n\xrightarrow{L}X$ ，有

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(M)=F_X(M)>1-\frac{h}{4},\quad \lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(-M)=F_X(-M)<\frac{h}{4},$$

则存在正整数N_1，当$n>N_1$时，$F_{X_n}(M)>1-\frac{h}{4}$，$F_{X_n}(-M)<\frac{h}{4}$，可得

$$P\{|X_n|>M\}=F_{X_n}(-M)+1-F_{X_n}(M)<\frac{h}{2}。$$

因$Y_n\xrightarrow{P}0$，对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}=0，$$

则存在正整数N_2，当$n>N_2$时，$P\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}<\frac{h}{2}$。因

$$\{|X_nY_n|>\varepsilon\}\subset\{|X_n|>M\}\cup\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}，$$

当$n>\max\{N_1,N_2\}$时，由概率的单调性和半可加性可得

$$P\{|X_nY_n|>\varepsilon\}\le P\{|X_n|>M\}+P\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}<h，$$

故$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_nY_n|>\varepsilon\}=0$，即$X_nY_n\xrightarrow{P}0$。

11．如果$X_n\xrightarrow{L}X$，$Y_n\xrightarrow{P}a$，且$Y_n\neq0$，常数$a\neq0$，试证：$\frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{L}\frac{X}{a}$。

证明：设y_0是$F_{X/a}(y)$的任一连续点，则对任意的$\varepsilon>0$，存在$h>0$，当$|y-y_0|<h$时，有

$$|F_{X/a}(y)-F_{X/a}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}。$$

又设y是满足$|y-y_0|<h$的$F_{X/a}(y)$的任一连续点，因

$$F_{X/a}(y)=P\left\{\frac{X}{a}\le y\right\}=P\{X\le ay\}=F_X(ay)，$$

有$x=ay$是$F_X(x)$的连续点。因$X_n\xrightarrow{L}X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)，$$

则存在正整数N_1，当$n>N_1$时，$|F_{X_n}(x)-F_X(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，即$|F_{X_n/a}(y)-F_{X/a}(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$。当$n>N_1$且$|y-y_0|<h$时，有

$$|F_{X_n/a}(y)-F_{X/a}(y_0)|\le|F_{X_n/a}(y)-F_{X/a}(y)|+|F_{X/a}(y)-F_{X/a}(y_0)|=\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}。$$

因X的分布函数$F_X(x)$满足$F_X(-\infty)=0$，$F_X(+\infty)=1$，$F_X(x)$单调不减且几乎处处连续，则存在

$M>0$，使得 $F_X(x)$ 在 $x=\pm M$ 处连续，且 $F_X(M)>1-\dfrac{\varepsilon}{12}$，$F_X(-M)<\dfrac{\varepsilon}{12}$。因 $X_n \xrightarrow{L} X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(M)=F_X(M)>1-\frac{\varepsilon}{12},\quad \lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(-M)=F_X(-M)<\frac{\varepsilon}{12},$$

则存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，$F_{X_n}(M)>1-\dfrac{\varepsilon}{12}$，$F_{X_n}(-M)<\dfrac{\varepsilon}{12}$，可得

$$P\{|X_n|>M\}=F_{X_n}(-M)+1-F_{X_n}(M)<\frac{\varepsilon}{6}。$$

因 $Y_n \xrightarrow{P} a\neq 0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}=0,$$

则存在正整数 N_3，当 $n>N_3$ 时，$P\left\{|Y_n-a|>\dfrac{|a|}{2}\right\}<\dfrac{\varepsilon}{6}$ 且 $P\left\{|Y_n-a|>\dfrac{a^2h}{4M}\right\}<\dfrac{\varepsilon}{6}$，有 $P\left\{|Y_n|<\dfrac{|a|}{2}\right\}<\dfrac{\varepsilon}{6}$。

因 $\left|\dfrac{X_n}{Y_n}-\dfrac{X_n}{a}\right|=\left|\dfrac{X_n(a-Y_n)}{aY_n}\right|=\dfrac{|X_n|\cdot|Y_n-a|}{|a|\cdot|Y_n|}$，可得

$$\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}\subset\{|X_n|>M\}\cup\left\{|Y_n|<\frac{|a|}{2}\right\}\cup\left\{|Y_n-a|>\frac{a^2h}{4M}\right\},$$

当 $n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$ 时，由概率的单调性和半可加性可得

$$P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}\le P\{|X_n|>M\}+P\left\{|Y_n|<\frac{|a|}{2}\right\}+P\left\{|Y_n-a|>\frac{a^2h}{4M}\right\}<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{2}。$$

因

$$\left\{\frac{X_n}{Y_n}\le y_0\right\}\subset\left\{\frac{X_n}{a}\le y_0+\frac{h}{2}\right\}\cup\left\{\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}<-\frac{h}{2}\right\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$F_{X_n/Y_n}(y_0)=P\left\{\frac{X_n}{Y_n}\le y_0\right\}\le P\left\{\frac{X_n}{a}\le y_0+\frac{h}{2}\right\}+P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n/a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

又因

$$\left\{\frac{X_n}{a}\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\subset\left\{\frac{X_n}{Y_n}\le y_0\right\}\cup\left\{\frac{X_n}{a}-\frac{X_n}{Y_n}<-\frac{h}{2}\right\},$$

由概率的单调性和半可加性可得

$$F_{X_n/a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)=P\left\{\frac{X_n}{a}\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\le P\left\{\frac{X_n}{Y_n}\le y_0\right\}+P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n/Y_n}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

可得

$$F_{X_n/a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{X_n/Y_n}(y_0)<F_{X_n/a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

因当$n > N_1$且$|y - y_0| < h$时，

$$F_{X/a}(y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{X_n/a}(y) < F_{X/a}(y_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

则在区间$\left(y_0 + \frac{h}{2}, y_0 + h\right)$内取$F_{X/a}(y)$的任一连续点$y_1$，满足$|y_1 - y_0| < h$，当$n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$时，有

$$F_{X_n/Y_n}(y_0) < F_{X_n/a}\left(y_0 + \frac{h}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \le F_{X_n/a}(y_1) + \frac{\varepsilon}{2} < F_{X/a}(y_0) + \varepsilon,$$

在区间$\left(y_0 - h, y_0 - \frac{h}{2}\right)$内取$F_{X/a}(y)$的任一连续点$y_2$，满足$|y_2 - y_0| < h$，当$n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$时，有

$$F_{X_n/Y_n}(y_0) > F_{X_n/a}\left(y_0 - \frac{h}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \ge F_{X_n/a}(y_2) - \frac{\varepsilon}{2} > F_{X/a}(y_0) - \varepsilon,$$

即对于$F_{X/a}(y)$的任一连续点y_0，当$n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$时，有

$$|F_{X_n/Y_n}(y_0) - F_{X/a}(y_0)| < \varepsilon,$$

故$F_{X_n/Y_n}(y) \xrightarrow{W} F_{X/a}(y)$，$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{L} \frac{X}{a}$。

12．设随机变量X_n服从柯西分布，其密度函数为

$$p_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty。$$

试证：$X_n \xrightarrow{P} 0$。

证明：对任意的$\varepsilon > 0$，

$$P\{|X_n| < \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)} dx = \frac{1}{\pi}\arctan(nx)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\arctan(n\varepsilon),$$

则

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - 0| < \varepsilon\} = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\arctan(n\varepsilon) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1,$$

故$X_n \xrightarrow{P} 0$。

13．设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}, & 0 < x < \beta; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

其中常数$\beta > 0$，令$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，试证：$Y_n \xrightarrow{P} \beta$。

证明：对任意的$\varepsilon > 0$，

$$P\{|Y_n-\beta|<\varepsilon\}=P\{\beta-\varepsilon<Y_n<\beta+\varepsilon\}=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>\beta-\varepsilon\}$$

$$=1-P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le\beta-\varepsilon\}$$

$$=1-P\{X_1\le\beta-\varepsilon\}P\{X_2\le\beta-\varepsilon\}\cdots P\{X_n\le\beta-\varepsilon\}=1-\left(\frac{\beta-\varepsilon}{\beta}\right)^n,$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|Y_n-\beta|<\varepsilon\}=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{\beta-\varepsilon}{\beta}\right)^n\right]=1,$$

故 $Y_n\xrightarrow{P}\beta$。

14．设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-a)}, & x\ge a;\\ 0, & x<a.\end{cases}$$

其中 $Y_n=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，试证：$Y_n\xrightarrow{P}a$。

证明：对任意的 $\varepsilon>0$，

$$P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=P\{a-\varepsilon<Y_n<a+\varepsilon\}=P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}<a+\varepsilon\}$$

$$=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\ge a+\varepsilon\}$$

$$=1-P\{X_1\ge a+\varepsilon\}P\{X_2\ge a+\varepsilon\}\cdots P\{X_n\ge a+\varepsilon\}$$

$$=1-\left(\int_{a+\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-a)}\,dx\right)^n=1-\left(-\mathrm{e}^{-(x-a)}\Big|_{a+\varepsilon}^{+\infty}\right)^n=1-\mathrm{e}^{-n\varepsilon},$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=\lim_{n\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-n\varepsilon})=1,$$

故 $Y_n\xrightarrow{P}a$。

15．设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 $X_i\sim N(0,1)$。令 $Y_n=\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}$，试证明：$Y_n\xrightarrow{P}c$，其中 c 为常数，并求出 c。

证明：设 $Z_n=\ln Y_n=\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln X_i$，因 $X_i\sim N(0,1)$，则

$$E(\ln X_i)=\int_0^1\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

$$E(\ln^2 X_i)=\int_0^1\ln^2 x dx=(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_0^1=2,$$

$$\mathrm{Var}(\ln X_i)=E(\ln^2 X_i)-[E(\ln X_i)]^2=1,$$

可得

$$E(Z_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=-1,\quad \mathrm{Var}(Z_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(\ln X_i)=\frac{1}{n},$$

由切比雪夫不等式，可得对任意的$\varepsilon>0$，

$$P\{|Z_n-E(Z_n)|\ge\varepsilon\}\le\frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{n\varepsilon^2},$$

则

$$0\le\lim_{n\to+\infty}P\{|Z_n-E(Z_n)|\ge\varepsilon\}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon^2}=0,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|Z_n-E(Z_n)|\ge\varepsilon\}=0,\quad Z_n\xrightarrow{P}E(Z_n)=-1,$$

因$Y_n=\mathrm{e}^{Z_n}$且函数e^x是连续函数，根据第 3 题结论，可得$Y_n=\mathrm{e}^{Z_n}\xrightarrow{P}\mathrm{e}^{-1}$，故$Y_n\xrightarrow{P}c$，其中$c=\mathrm{e}^{-1}$为常数。

16．设分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于分布函数$F(x)$，且$F_n(x)$和$F(x)$都是连续、严格单调函数，又设ξ服从$(0,1)$上的均匀分布，试证：$F_n^{-1}(\xi)\xrightarrow{P}F^{-1}(\xi)$。

证明：因$F(x)$为连续的分布函数，有$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，则对任意的$h>0$，存在$M>0$，使得

$$F(M)>1-\frac{h}{2},\quad F(-M)<\frac{h}{2}。$$

又因$F(x)$连续、严格单调，有$F^{-1}(y)$也连续、严格单调，可得$F^{-1}(y)$在闭区间$[F(-M-1),F(M+1)]$上一致连续，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$y,y^*\in[F(-M-1),F(M+1)]$且$|y-y^*|<\delta$时，

$$|F^{-1}(y)-F^{-1}(y^*)|<\varepsilon。$$

设y^*是$[F(-M),F(M)]$中任一点，记$x^*=F^{-1}(y^*)$，有$x^*\in[-M,M]$。不妨设$0<\varepsilon<1$，则对任意的$\bar{x}$，若满足$|\bar{x}-x^*|\ge\varepsilon$，就有$|F(\bar{x})-y^*|\ge\delta$。

根据第 7 题结论知，$\{F_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于分布函数$F(x)$，则对$\delta>0$和任意实数x，总存在正整数N，当$n>N$时，都有$|F_n(x)-F(x)|<\delta$。因当$n>N$时，$|F_n(\bar{x})-F(\bar{x})|<\delta$且$|F(\bar{x})-y^*|\ge\delta$，有$F_n(\bar{x})\ne y^*$，即$\bar{x}\ne F_n^{-1}(y^*)$，则对任意的$0<\varepsilon<1$，当$n>N$时，$F_n^{-1}(y^*)$满足

$$|F_n^{-1}(y^*)-x^*|=|F_n^{-1}(y^*)-F^{-1}(y^*)|<\varepsilon,$$

因y^*是$[F(-M),F(M)]$中任一点，则对任意的$0<\varepsilon<1$，当$n>N$时，

$$P\{|F_n^{-1}(\xi)-F^{-1}(\xi)|<\varepsilon\}\ge P\{\xi\in[F(-M),F(M)]\}>1-h,$$

由h的任意性可知

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|F_n^{-1}(\xi)-F^{-1}(\xi)|<\varepsilon\}=1,$$

故 $F_n^{-1}(\xi)\xrightarrow{P}F^{-1}(\xi)$。

17．设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，数学期望、方差均存在，且 $E(X_n)=\mu$，试证：

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cdot X_k\xrightarrow{P}\mu 。$$

证明：令 $Y_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cdot X_k$，并设 $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$，因

$$E(Y_n)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\mu=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\mu=\mu,$$

$$\mathrm{Var}(Y_n)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\sigma^2=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2=\frac{4n+2}{3n(n+1)}\sigma^2,$$

则由切比雪夫不等式可得，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$1\ge P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{\varepsilon^2}=1-\frac{4n+2}{3n(n+1)\varepsilon^2}\sigma^2,$$

因

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{4n+2}{3n(n+1)\varepsilon^2}\sigma^2\right]=1,$$

由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}=1$，故

$$Y_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cdot X_k\xrightarrow{P}\mu 。$$

18．设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，数学期望、方差均存在，且

$$E(X_n)=0,\quad \mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2 。$$

试证：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}\sigma^2 。$$

注：此题与第 19 题应放在习题 4.3 中，需用到 4.3 节介绍的辛钦大数定律。

证明：因随机变量序列 $\{X_n^2\}$ 独立同分布，且 $E(X_n^2)=\mathrm{Var}(X_n)+[E(X_n)]^2=\sigma^2$ 存在，故 $\{X_n^2\}$ 满足辛钦大数定律条件，$\{X_n^2\}$ 服从大数定律，即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}\sigma^2 。$$

19．设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$ 存在，令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\text{，}\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\text{。}$$

试证：

$$S_n^2\xrightarrow{P}\sigma^2\text{。}$$

证明：因

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{X}+n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\text{，}$$

设 $E(X_n)=\mu$，$\{X_n\}$ 满足辛钦大数定律条件，$\{X_n\}$ 服从大数定律，即

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}\mu\text{，}$$

则根据第 2 题第（2）小问的结论知，$\overline{X}^2\xrightarrow{P}\mu^2$。

因随机变量序列 $\{X_n^2\}$ 独立同分布，且 $E(X_n^2)=\mathrm{Var}(X_n)+[E(X_n)]^2=\sigma^2+\mu^2$ 存在，则 $\{X_n^2\}$ 满足辛钦大数定律条件，$\{X_n^2\}$ 服从大数定律，即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}\sigma^2+\mu^2$。故根据第 2 题第（1）小问的结论知，

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\xrightarrow{P}(\sigma^2+\mu^2)-\mu^2=\sigma^2\text{。}$$

20．将 n 个编号为 1 至 n 的球放入 n 个编号为 1 至 n 的盒子中，每个盒子只能放一个球，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{编号为}i\text{的球放入编号为}i\text{的盒子;}\\ 0, & \text{反之.}\end{cases}$$

且 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，试证明：

$$\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{P}0\text{。}$$

证明：因 $P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}$，$P\{X_i=0\}=1-\frac{1}{n}$，且 $i\neq j$ 时，

$$P\{X_iX_j=1\}=\frac{1}{n(n-1)}\text{，}\quad P\{X_iX_j=0\}=1-\frac{1}{n(n-1)}\text{，}$$

则 $E(X_i)=\frac{1}{n}$，$\mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$，且 $i\neq j$ 时，

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}\text{，}\quad \mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}\text{，}$$

有

$$E(S_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=1\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(S_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=1-\frac{1}{n}+n(n-1)\cdot\frac{1}{n^2(n-1)}=1,$$

可得

$$E\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]=\frac{1}{n}[E(S_n)-E(S_n)]=0,\quad \mathrm{Var}\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n)=\frac{1}{n^2},$$

由切比雪夫不等式，可得对任意的$\varepsilon>0$，

$$P\left\{\left|\frac{S_n-E(S_n)}{n}-E\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]=\frac{1}{n^2\varepsilon^2},$$

则

$$0\le\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{S_n-E(S_n)}{n}-E\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]\right|\ge\varepsilon\right\}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon^2}=0,$$

故$\dfrac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{P}0$。