

数理统计第六章测验题

考试时间 2022 年 5 月 15 日, 答卷时间 120 分钟, 总分 100 分, 出题人-李绍文

1. (10 分) 总体 X 的密度函数为 $p(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{0 < x < 1}$, 求参数 θ 的矩估计和最大似然估计。

解: 因

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} dx = \frac{\theta}{\theta+1} x^{\theta+1} \Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1},$$

即 $\theta = \frac{E(X)}{1-E(X)}$, 用 \bar{X} 替换 $E(X)$, 故 θ 的矩估计 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ 。

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} I_{0 < x_i < 1} = \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1} I_{0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1}。$$

当 $0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ 时, 有

$$\ln L(\theta) = \ln \theta^n + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1} = n \ln \theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i。$$

令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0,$$

解得驻点

$$\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}。$$

并且

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0,$$

故 $\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$ 是最大值点, θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$ 。

2. (10 分) 总体 X 的密度函数为 $p(x; \lambda, \mu) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)} I_{x > \mu}$, $\lambda > 0$, 求 λ 与 μ 的最大似然估计。

解: 因似然函数

$$L(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda(x_i-\mu)} I_{x_i > \mu} = \lambda^n e^{-\lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right)} I_{x_1, x_2, \dots, x_n > \mu},$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > \mu$ 时,

$$\ln L(\lambda, \mu) = n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right),$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right) = 0,$$

解得

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i - n\mu} = \frac{1}{\bar{x} - \mu},$$

且显然 μ 越大, $\lambda^n e^{-\lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right)}$ 越大, 但只有 $x_1, x_2, \dots, x_n > \mu$ 时, 才有 $L(\lambda, \mu) > 0$, 即

$\mu = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_{(1)}$ 时, $L(\lambda, \mu)$ 才能达到最大, 故 μ 与 λ 的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = X_{(1)}, \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X} - \mu},$$

3. (10 分) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是样本, 确定常数 c 使得

$c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

解: 因

$$\begin{aligned} E[(X_{i+1} - X_i)^2] &= \text{Var}(X_{i+1} - X_i) + [E(X_{i+1} - X_i)]^2 \\ &= \text{Var}(X_{i+1}) + \text{Var}(X_i) + [E(X_{i+1}) - E(X_i)]^2 = 2\sigma^2, \end{aligned}$$

则

$$E \left[c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] = c \sum_{i=1}^{n-1} E[(X_{i+1} - X_i)^2] = c \cdot (n-1) \cdot 2\sigma^2 = 2c(n-1)\sigma^2,$$

故当 $c = \frac{1}{2(n-1)}$ 时, $E \left[c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] = \sigma^2$, 即 $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

4. (10 分) 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 问样本容量 n 取多大时才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度不大于 k 。

解: 已知 σ^2 , 估计 μ , 选取枢轴量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

置信区间为 $\left[\bar{X} \pm u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$, 长度为 $2u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

置信度 $1 - \alpha = 0.95$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$, 有置信区间的长度

$$2u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq k,$$

故 $\sqrt{n} \geq 3.92 \times \frac{\sigma}{k}$, 即 $n \geq \frac{15.3664\sigma^2}{k^2}$ 。

5. (10 分) 在一批货物中随机抽取 100 件, 发现有 20 件不合格品, 试求这批货物的不合格品率的置信水平为 95% 的置信区间。

解: 大样本, 估计概率 p , 选取枢轴量

$$U = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1),$$

近似置信区间为

$$\left[\bar{x} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right] = \left[0.2 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} \right] = [0.1216, 0.2784]。$$

6. (15 分) 验证概率 p 的共轭先验分布是贝塔分布。即进行 n 次独立重复试验, 记事件 A 的发生次数为 X 次。若在每次试验中事件 A 发生的概率 p 的先验分布是贝塔分布 $Be(a, b)$, $a, b > 0$ 且已知, 密度函数为

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} I_{0 < p < 1}, \text{ 证明概率 } p \text{ 的后验分布也是贝塔分布。}$$

解: 概率 p 的先验分布为贝塔分布 $Be(a, b)$, 密度函数为

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} I_{0 < p < 1},$$

设总体为每一次试验中事件 A 的发生次数, 总体服从两点分布 $b(1, p)$, 总体条件分布

$$p(x|p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x=0, 1,$$

样本条件分布

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n | p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n = 0, 1,$$

事件 A 的发生次数 $x = \sum_{i=1}^n x_i$, 有

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n | p) = p^x (1-p)^{n-x}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n = 0, 1。$$

分子为样本与参数联合分布

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \pi(p) p(x_1, x_2, \dots, x_n | p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{x+a-1} (1-p)^{n-x+b-1} I_{0 < p < 1}。$$

分母为样本边际分布

$$\begin{aligned} m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{x+a-1} (1-p)^{n-x+b-1} dp = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \beta(x+a, n-x+b) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(x+a)\Gamma(n-x+b)}{\Gamma(n+a+b)}。 \end{aligned}$$

参数 p 的后验分布

$$\pi(p | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{h(x_1, x_2, \dots, x_n, p)}{m(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n-x+b)} p^{x+a-1} (1-p)^{n-x+b-1} I_{0 < p < 1}，$$

这是贝塔分布 $Be(x+a, n-x+b)$ ，故贝塔分布是概率 p 的共轭先验分布族。

7. （15分）总体 X 服从伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ ，密度函数

$$p(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{x>0}, \quad \alpha, \lambda > 0, \quad \text{证明 } \frac{\bar{X}}{\alpha} \text{ 是 } g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \text{ 的有效估计, 从而也是}$$

UMVUE。

证明：无偏性：因 X 服从伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ ，有

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

则

$$E\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} EX = \frac{1}{\lambda}。$$

有效性：方差

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n\alpha^2} \text{Var}(X) = \frac{1}{n\alpha\lambda^2}。$$

参数 λ 的 Fisher 信息量：当 $x > 0$ 时，

$$\ln p(x; \alpha, \lambda) = \alpha \ln \lambda - \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha-1) \ln x - \lambda x，$$

$$\frac{\partial \ln p(x; \alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} - x，$$

$$I(\lambda) = E\left[\left(\frac{\partial \ln p(X; \alpha, \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\alpha}{\lambda} - X\right)^2\right] = \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}。$$

则 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)} = \frac{\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)^2}{n \cdot \frac{\alpha}{\lambda^2}} = \frac{1}{n\alpha\lambda^2} = \text{Var}\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right).$$

故 $\frac{\bar{X}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的有效估计, 从而也是 UMVUE。

8. (20 分) 总体 X 服从指数分布 $\text{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为样本。

(1) 参数 θ 的点估计 $\hat{\theta} = \bar{X}$, 由此猜测 $g(\theta) = \theta^2$ 的点估计为 \bar{X}^2 。判断 \bar{X}^2 是否 $g(\theta) = \theta^2$ 的无偏估计? 如果不是, 请修偏得到 \hat{g} , 使得 $E(\hat{g}) = \theta^2$, 并证明 \hat{g} 是 $g(\theta) = \theta^2$ 的 UMVUE;

(2) 求出 θ 的 Fisher 信息量 $I(\theta)$ 及 $g(\theta) = \theta^2$ 的 C-R 下界;

(3) 由 X 服从指数分布 $\text{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$, 可知 $\frac{2n\bar{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$, 且 $\chi^2(m)$ 的 k 阶原点矩

$$E(Y^k) = 2^k \left(\frac{m}{2} + k - 1\right) \left(\frac{m}{2} + k - 2\right) \cdots \left(\frac{m}{2} + 1\right) \frac{m}{2},$$

由此求出 $E(\bar{X}^4)$, 再求出 $\text{Var}(\hat{g})$, 并判断 \hat{g} 是否 $g(\theta) = \theta^2$ 的有效估计。

解: (1) 因

$$E(\bar{X}^2) = \text{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{1}{n} \text{Var}(X) + [E(X)]^2 = \frac{\theta^2}{n} + \theta^2 = \frac{n+1}{n} \theta^2 \neq \theta^2,$$

故 \bar{X}^2 不是 $g(\theta) = \theta^2$ 的无偏估计。而

$$E\left(\frac{n}{n+1} \bar{X}^2\right) = \theta^2,$$

令 $\hat{g} = \frac{n}{n+1} \bar{X}^2$, 有 $E(\hat{g}) = \theta^2$, 故 $\hat{g} = \frac{n}{n+1} \bar{X}^2$ 是 $g(\theta) = \theta^2$ 的无偏估计。

(2) 因 $E(\hat{g}) = \theta^2$, 且

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}} I_{x_1, x_2, \dots, x_n > 0},$$

$$\theta^n p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}} I_{x_1, x_2, \dots, x_n > 0},$$

则

$$\frac{\partial[\theta^n p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)]}{\partial \theta} = \frac{n\bar{x}}{\theta^2} e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}} I_{x_1, x_2, \dots, x_n > 0} = n\theta^{n-2} \bar{x} p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta),$$

令统计量 $T = \bar{X}$, $c = \theta^n$, $a = n\theta^{n-2}$, $b = 0$, 即 $\frac{\partial(cp)}{\partial \theta} = (a\bar{x} + b)p$, 可知根据 $E(\varphi) = 0$ 可得

到 $E(\varphi\bar{X}) = 0$ 。

取 $\tilde{\varphi} = \varphi\bar{X}$, 根据 $E(\varphi) = 0$ 可得到 $E(\tilde{\varphi}) = 0$, 再根据 $E(\tilde{\varphi}) = 0$ 及统计量 φ 的任意性, 可得到 $E(\tilde{\varphi}\bar{X}) = 0$, 即 $E(\varphi\bar{X}^2) = 0$ 。从而根据 $E(\varphi) = 0$ 可得到

$$E(\varphi\hat{g}) = E\left(\varphi \cdot \frac{n}{n+1} \bar{X}^2\right) = \frac{n}{n+1} E(\varphi\bar{X}^2) = 0,$$

故 \hat{g} 是 $g(\theta) = \theta^2$ 的 UMVUE。

(3) 因指数分布 $Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$ 的密度函数为

$$p(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{x>0},$$

则

$$\ln p(x; \theta) = -\ln \theta - \frac{x}{\theta}, \quad x > 0,$$

$$\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} = \frac{x - \theta}{\theta^2},$$

故

$$I(\theta) = E\left(\frac{X - \theta}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4} \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}。$$

且 $g(\theta) = \theta^2$ 的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)} = \frac{(2\theta)^2}{n \cdot \frac{1}{\theta^2}} = \frac{4\theta^4}{n}。$$

(4) 因 $E(\hat{g}) = \theta^2$, 且

$$\text{Var}(\hat{g}) = \text{Var}\left(\frac{n}{n+1} \bar{X}^2\right) = \frac{n^2}{(n+1)^2} \text{Var}(\bar{X}^2) = \frac{n^2}{(n+1)^2} [E(\bar{X}^4) - (E(\bar{X}^2))^2],$$

设 $Y = \frac{2n\bar{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$, 有

$$E(Y^2) = \frac{4n^2}{\theta^2} E(\bar{X}^2) = 4(n+1)n, \quad E(Y^4) = \frac{16n^4}{\theta^4} E(\bar{X}^4) = 16(n+3)(n+2)(n+1)n,$$

则

$$E(\bar{X}^2) = \frac{n+1}{n} \theta^2, \quad E(\bar{X}^4) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3} \theta^4,$$

可得

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{g}) &= \frac{n^2}{(n+1)^2} [E(\bar{X}^4) - (E(\bar{X}^2))^2] = \frac{n^2}{(n+1)^2} \left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3} \theta^4 - \frac{(n+1)^2}{n^2} \theta^4 \right] \\ &= \frac{4n+6}{n(n+1)} \theta^4 > \frac{4\theta^4}{n} = \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}, \end{aligned}$$

故 \hat{g} 不是 $g(\theta) = \theta^2$ 的有效估计。