思考题：

设总体 X 的概率分布为

$$P\{X=0\}=p_0, P\{X=1\}=p_1, P\{X=2\}=p_2,$$

其中 $p_i>0$ 且 $p_0+p_1+p_2=1$。求样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合质量函数。

进一步，设总体 X 的概率分布为

$$P\{X=a_1\}=p_1, P\{X=a_2\}=p_2, \cdots, P\{X=a_m\}=p_m,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 互不相同，$p_i>0$ 且 $p_1+p_2+\cdots+p_m=1$。又样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合质量函数又如何呢？请都用两种方法给出结论。

解： 方法一：三点分布

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)=p_0^{n_0} p_1^{n_1} p_2^{n_2},$$

其中 n_0, n_1, n_2 分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中取 $0,1,2$ 的样品个数。

多点分布

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)=p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m},$$

其中 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中取 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的样品个数。

方法二

三点分布总体 X 的质量函数为

$$p(x)=p_0^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)} p_1^{-x(x-2)} p_2^{\frac{1}{2}x(x-1)}, \quad x=0,1,2,$$

故样本联合质量函数为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} p_0^{\frac{1}{2}(x_i-1)(x_i-2)} p_2^{-x_i(x_i-2)} p_3^{\frac{1}{2}x_i(x_i-1)}=p_0^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)(x_i-2)} p_2^{-\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-2)} p_3^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-1)}。$$

多点分布总体的质量函数为

$$p(x)=p_1^{\frac{(x-a_2)\cdots(x-a_m)}{(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_m)}} p_2^{\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_m)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_m)}} \cdots p_m^{\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{m-1})}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\cdots(a_m-a_{m-1})}}=\prod_{j=1}^{m} p_j^{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\frac{x-a_k}{a_j-a_k}},$$

故样本联合质量函数为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)=p_1^{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_2)\cdots(x_i-a_m)}{(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_m)}} p_2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_1)(x_i-a_3)\cdots(x_i-a_m)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_m)}} \cdots p_m^{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_1)(x_i-a_2)\cdots(x_i-a_{m-1})}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\cdots(a_m-a_{m-1})}}=\prod_{j=1}^{m} p_j^{\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\frac{x_i-a_k}{a_j-a_k}}。$$