习题 1.5

1． 三人独立地破译一个密码，他们能单独译出的概率分别为$1/5, 1/4, 1/3$，求此密码被译出的概率。

解： 设A, B, C分别表示第一、第二、第三人能单独译出，有A, B, C相互独立，即$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$相互独立，故所求概率为

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{5}。$$

2． 有甲乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.9，在两批种子中各任取一粒，求：

（1）两粒种子都能发芽的概率；

（2）至少有一粒种子能发芽的概率；

（3）恰好有一粒种子能发芽的概率。

解： 设A, B分别表示甲批、乙批的种子能发芽，有A, B相互独立。

（1）所求概率为

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72。$$

（2）所求概率为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8 + 0.9 - 0.72 = 0.98。$$

（3）所求概率为

$$P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9 = 0.26。$$

3． 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.8 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲射中的概率。

解： 设A, B分别表示甲、乙射击命中目标，有A, B相互独立，故所求概率为

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{0.8}{0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7} = \frac{0.8}{0.94} \approx 0.8511。$$

4． 设电路由A, B, C三个元件组成，若元件A, B, C发生故障的概率分别是$0.3, 0.2, 0.2$，且各元件独立工作，试在以下情况下，求此电路发生故障的概率：

（1）A, B, C三个元件串联；

（2）A, B, C三个元件并联；

（3）元件A与两个并联的元件B及C串联而成。

解： 设A, B, C分别表示元件A, B, C发生故障，有A, B, C相互独立。

（1）所求概率为

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - 0.7 \times 0.8 \times 0.8 = 0.552。$$

（2）所求概率为

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.012。$$

（3）所求概率为

$$P(A \cup BC) = P(A) + P(BC) - P(ABC) = 0.3 + 0.2 \times 0.2 - 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.328。$$

5． 在一小时内甲、乙、丙三台机床需维修的概率分别是 0.9、0.8 和 0.85，求一小时内

（1）没有一台机床需要维修的概率；

（2）至少有一台机床不需要维修的概率；

（3）至多只有一台机床需要维修的概率。

解： 设A, B, C分别表示甲、乙、丙三台机床不需要维修，有A, B, C相互独立。

（1）所求概率为

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.1\times0.2\times0.15=0.003$。

（2）所求概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388\text{。}$$

（3）所求概率为

$$P(ABC\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)=P(ABC)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$

$$=0.1\times0.2\times0.15+0.1\times0.2\times0.85+0.1\times0.8\times0.15+0.9\times0.2\times0.15=0.059\text{。}$$

6．设 A_1,A_2,A_3 相互独立，且 $P(A_i)=2/3,\quad i=1,2,3$。试求 A_1,A_2,A_3 中

（1）至少出现一个的概率；

（2）恰好出现一个的概率；

（3）最多出现一个的概率。

解：（1）所求概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{26}{27}\text{。}$$

（2）所求概率为

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\text{。}$$

（3）所求概率为

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{27}\text{。}$$

7．若事件 A 与 B 相互独立且互不相容，试求 $\min\{P(A),P(B)\}$。

解：因事件 A 与 B 相互独立且互不相容，有

$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AB)=P(\varnothing)=0$，

则 $P(A)P(B)=0$，即 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$，故 $\min\{P(A),P(B)\}=0$。

8．假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.9$，在以下情况下求 $P(B)$：

（1）A,B 不相容；

（2）A,B 独立；

（3）$A\subset B$。

解：（1）因 A,B 不相容，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，故

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.9-0.4=0.5\text{。}$$

（2）因 A,B 独立，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$，故

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.9-0.4}{1-0.4}=\frac{5}{6}\approx0.8333\text{。}$$

（3）因 $A\subset B$，有

$P(B)=P(A\cup B)=0.9$。

9． 设 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\varnothing$。

（1）如果 $P(A)=P(B)=P(C)=x$，试求 x 的最大值；

（2）如果 $P(A)=P(B)=P(C)<1/2$，且 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，求 $P(A)$。

解：（1）因 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\varnothing$，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=3x-3x^2,$$

又因

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2x-x^2,$$

且 $(A\cup B\cup C)\supset(A\cup B)$，即 $3x-3x^2\ge 2x-x^2$，有 $x\ge 2x^2$，故 $x\le 0.5$。

再进一步说明 x 能取到 0.5。取 $P(A)=P(B)=0.5$，A,B 相互独立，$C=A\bar{B}\cup\bar{A}B$，则 $ABC=\varnothing$，且

$$P(C)=P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=0.5\times0.5+0.5\times0.5=0.5,$$

$$P(AC)=P(A\bar{B})=0.5\times0.5=0.25=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=P(\bar{A}B)=0.5\times0.5=0.25=P(B)P(C),$$

即 $P(A)=P(B)=P(C)=0.5$，A,B,C 两两独立且 $ABC=\varnothing$。可见 x 能取到 0.5，故 x 的最大值等于 0.5。

注：可以举例说明 x 能取到 0.5。掷两次硬币，设 A 表示第一次出现正面，B 表示第二次出现正面，C 表示恰好出现一次正面，有 $P(A)=P(B)=P(C)=0.5$，$ABC=\varnothing$。显然有 A,B 独立；AC 表示第一次出现正面，第二次反面，有 $P(AC)=0.25=P(A)P(C)$，即 A,C 独立；BC 表示第一次出现反面，第二次正面，有 $P(BC)=0.25=P(B)P(C)$，即 B,C 独立。可见 A,B,C 两两独立。

（2）设 $P(A)=P(B)=P(C)=x$，根据第（1）小题知 $P(A\cup B\cup C)=3x-3x^2$，则

$$3x-3x^2=\frac{9}{16},$$

$$x^2-x+\frac{3}{16}=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0,$$

得 $x=\dfrac{1}{4}$ 或 $x=\dfrac{3}{4}$，但 $x<\dfrac{1}{2}$，故 $P(A)=x=\dfrac{1}{4}$。

10．事件 A,B 独立，两个事件仅 A 发生的概率或仅 B 发生的概率都是 $1/4$，求 $P(A)$ 及 $P(B)$。

解：因 A,B 独立，且 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=\dfrac{1}{4}$，有

$$P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]=P(\bar{A}B)=[1-P(A)]P(B)=\frac{1}{4},$$

则 $P(A)=P(B)$，得 $P(A)[1-P(A)]=\dfrac{1}{4}$，即

$$[P(A)]^2-P(A)+\frac{1}{4}=\left[P(A)-\frac{1}{2}\right]^2=0,$$

故 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ 。

11．一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率为 $p_i=1/(i+1),\quad i=1,2,3$ ，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，求 $P\{X\le 2\}$ 。

解：设 A_i 表示第 i 个零件是不合格品，$i=1,2,3$ ，有 A_1,A_2,A_3 相互独立，故

$$P\{X\le 2\}=1-P\{X=3\}=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\text{。}$$

12．每门高射炮击中飞机的概率为 0.3，独立同时射击时，要以 99%的把握击中飞机，需要几门高射炮？

解：设 X_n 表示 n 门高射炮击中飞机的次数，且每门高射炮击中飞机的概率为 $p=0.3$ ，则至少命中一次的概率为

$$P\{X_n\ge 1\}=1-P\{X_n=0\}=1-(1-0.3)^n=1-0.7^n\ge 0.99\text{，}$$

故

$$n\ge\frac{\ln 0.01}{\ln 0.7}\approx 12.9114\text{，}$$

即需要 13 门高射炮就能以 99%的把握击中飞机。

13．投掷一枚骰子，问需要投掷多少次，才能保证至少有一次出现点数为 6 的概率大于 $1/2$ ？

解：设 X_n 表示投掷 n 次骰子出现点数为 6 的次数，且每次投掷骰子出现点数为 6 的概率 $p=\dfrac{1}{6}$ ，则至少有一次出现点数为 6 的概率为

$$P\{X_n\ge 1\}=1-P\{X_n=0\}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{1}{2}\text{，}$$

故

$$n>\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{5}{6}}\approx 3.8018\text{，}$$

即需要投掷 4 次，才能保证至少有一次出现点数为 6 的概率大于 $1/2$ 。

14．一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $80/81$ ，试求该射手进行一次射击的命中率。

解：设 X 表示该射手四次射击的命中次数，且射手进行一次射击的命中率为 p ，则至少命中一次的概率为

$$P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-p)^4=\frac{80}{81}\text{，}$$

即 $(1-p)^4=\dfrac{1}{81}$ ，故射手进行一次射击的命中率为 $p=\dfrac{2}{3}$ 。

15．每次射击命中率为 0.2，试求：射击多少次才能使至少击中一次的概率不小于 0.9?

解：设 X_n 表示 n 次射击的命中次数，且每次射击命中率为 $p=0.2$ ，则至少命中一次的概率为

$$P\{X_n\ge 1\}=1-P\{X_n=0\}=1-(1-0.2)^n=1-0.8^n\ge 0.9\text{，}$$

故

$$n \ge \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.3189,$$

即射击至少 11 次才能使至少击中一次的概率不小于 0.9。

16．设猎人在猎物 100 米处对猎物打第一枪，命中猎物的概率为 0.5。若第一枪未命中，则猎人继续打第二枪，此时猎物与猎人已相距 150 米。若第二枪仍未命中，则猎人继续打第三枪，此时猎物与猎人已相距 200 米。若第三枪仍未命中，则猎物逃逸。假如该猎人命中猎物的概率与距离成反比，试求该猎物被击中的概率。

解：设 A_i 表示第 i 枪命中猎物，$i = 1, 2, 3$，有 A_1, A_2, A_3 相互独立，则

$$P(A_1) = 0.5,\quad P(A_2) = \frac{100}{150} P(A_1) = \frac{1}{3},\quad P(A_3) = \frac{100}{200} P(A_1) = \frac{1}{4},$$

故所求概率为

$$P(A_1 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 A_2) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}。$$

17．某血库急需 AB 型血，要从身体合格的献血者中获得，根据经验，每百名身体合格的献血者中只有 2 名是 AB 型血的；

（1）求在 20 名身体合格的献血者中至少有一人是 AB 型血的概率；

（2）若要以 95%的把握至少能获得一份 AB 型血，需要多少位身体合格的献血者。

解：设 X_n 表示 n 名身体合格的献血者中 AB 型血的人数，且每名献血者是 AB 型血的概率为 $p = 0.02$。

（1）所求概率为

$$P\{X_{20} \ge 1\} = 1 - P\{X_{20} = 0\} = 1 - (1 - 0.02)^{20} = 1 - 0.98^{20} \approx 0.3324。$$

（2）因

$$P\{X_n \ge 1\} = 1 - P\{X_n = 0\} = 1 - (1 - p)^n = 1 - 0.98^n \ge 0.95,$$

故

$$n \ge \frac{\ln 0.05}{\ln 0.98} \approx 148.2837,$$

即需要 149 位献血者才能以 95%的把握至少能获得一份 AB 型血。

18．一个人的血型为 A, B, AB, O 型的概率分别为 0.37, 0.21, 0.08, 0.34。现任意挑选四个人，试求：

（1）此四人的血型全不相同的概率；

（2）此四人的血型全部相同的概率。

解：（1）所求概率为

$$P(A_1) = 4! \times 0.37 \times 0.21 \times 0.08 \times 0.34 \approx 0.0507。$$

（2）所求概率为

$$P(A_2) = 0.37^4 + 0.21^4 + 0.08^4 + 0.34^4 \approx 0.0341。$$

19．甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4。比赛可采用三局两胜制或五局三胜制，问哪一种比赛制度对甲更有利？

解：三局两胜制，甲 $2:0$ 胜乙的概率为 $0.6^2 = 0.36$，甲 $2:1$ 胜乙的概率为 $2 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.288$，则三局两胜制时，甲获胜的概率为

$$P(A_1) = 0.36 + 0.288 = 0.648。$$

五局三胜制，甲 $3:0$ 胜乙的概率为 $0.6^3=0.216$，甲 $3:1$ 胜乙的概率为 $3\times 0.6^3\times 0.4=0.2592$，且甲 $3:2$ 胜乙的概率为 $C_4^2\times 0.6^3\times 0.4^2=0.20736$，则五局三胜制时，甲获胜的概率为

$$P(A_2)=0.216+0.2592+0.20736=0.68256。$$

故 $P(A_1)<P(A_2)$，五局三胜制对甲更有利。

20．甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人连胜两场为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是 $1/2$，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。

解：设每局比赛中，甲胜乙、乙胜甲、甲胜丙、丙胜甲、乙胜丙、丙胜乙分别记为 $A_b, B_a, A_c, C_a, B_c, C_b$，则甲得冠军的情况有两类：

① A_bA_c， $A_bC_aB_cA_bA_c$， $A_bC_aB_cA_bC_aB_cA_bA_c$， $\cdots$， $\underbrace{A_bC_aB_c\cdots A_bC_aB_c}_{\text{重复 }k\text{ 次}A_bC_aB_c}A_bA_c$， $\cdots$，

② $B_aC_bA_cA_b$， $B_aC_bA_cB_aC_bA_cA_b$， $B_aC_bA_cB_aC_bA_cB_aC_bA_cA_b$， $\cdots$， $\underbrace{B_aC_bA_c\cdots B_aC_bA_c}_{\text{重复 }k\text{ 次}B_aC_bA_c}A_b$， $\cdots$，

故甲得冠军的概率为

$$P(A)=(0.5^2+0.5^5+\cdots+0.5^{3k+2}+\cdots)+(0.5^4+0.5^7+\cdots+0.5^{3k+4}+\cdots)=\frac{0.5^2}{1-0.5^3}+\frac{0.5^4}{1-0.5^3}=\frac{5}{14}。$$

由对称性知乙得冠军的概率 $P(B)=P(A)=\dfrac{5}{14}$。

而丙得冠军的情况也有两类：

① $A_bC_aC_b$， $A_bC_aB_cA_bC_aC_b$， $A_bC_aB_cA_bC_aB_cA_bC_aC_b$， $\cdots$， $\underbrace{A_bC_aB_c\cdots A_bC_aB_c}_{\text{重复 }k\text{ 次}A_bC_aB_c}A_bC_aC_b$， $\cdots$，

② $B_aC_bC_a$， $B_aC_bA_cB_aC_bC_a$， $B_aC_bA_cB_aC_bA_cB_aC_bC_a$， $\cdots$， $\underbrace{B_aC_bA_c\cdots B_aC_bA_c}_{\text{重复 }k\text{ 次}B_aC_bA_c}B_aC_bC_a$， $\cdots$，

故丙得冠军的概率为

$$P(C)=(0.5^3+0.5^6+\cdots+0.5^{3k+3}+\cdots)+(0.5^3+0.5^6+\cdots+0.5^{3k+3}+\cdots)=2\times\frac{0.5^3}{1-0.5^3}=\frac{2}{7}。$$

21．甲、乙两个赌徒在每一局获胜的概率都是 $1/2$。两人约定谁先赢得一定的局数就获得全部赌本。但赌博在中途被打断了，请问在以下各种情况下，应如何合理分配赌本：

（1）甲、乙两个赌徒都各需赢 k 局才能获胜；

（2）甲赌徒还需赢 2 局才能获胜，乙赌徒还需赢 3 局才能获胜；

（3）甲赌徒还需赢 n 局才能获胜，乙赌徒还需赢 m 局才能获胜。

解：记每一局中甲赢的概率为 $p=0.5$，假设赌博继续下去，按甲、乙最终获胜的概率分配赌本。

（1）由对称性知，甲、乙获胜的概率相等，则 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$，故甲、乙应各得赌本的一半。

（2）因甲获胜的概率为

$$P(A_2)=p^2+2(1-p)p^2+3(1-p)^2p^2=0.5^2+2\times 0.5^3+3\times 0.5^4=0.6875，$$

则乙获胜的概率

$$P(B_2)=1-P(A_2)=0.3125，$$

故甲应得赌本的 68.75%，乙应得赌本的 31.25%。

（3）因甲获胜的概率为

$$P(A_3)=p^n+C_n^1(1-p)p^n+C_{n+1}^2(1-p)^2p^n+\cdots+C_{n+m-2}^{m-1}(1-p)^{m-1}p^n$$

$$=0.5^n+C_n^1\cdot 0.5^{n+1}+C_{n+1}^2\cdot 0.5^{n+2}+\cdots+C_{n+m-2}^{m-1}\cdot 0.5^{n+m-1},$$

则乙获胜的概率为

$$P(B_3)=1-P(A_3)=1-(0.5^n+C_n^1\cdot 0.5^{n+1}+C_{n+1}^2\cdot 0.5^{n+2}+\cdots+C_{n+m-2}^{m-1}\cdot 0.5^{n+m-1}),$$

故甲应得赌本的比例为

$$0.5^n+C_n^1\cdot 0.5^{n+1}+C_{n+1}^2\cdot 0.5^{n+2}+\cdots+C_{n+m-2}^{m-1}\cdot 0.5^{n+m-1},$$

乙应得赌本的比例为

$$1-(0.5^n+C_n^1\cdot 0.5^{n+1}+C_{n+1}^2\cdot 0.5^{n+2}+\cdots+C_{n+m-2}^{m-1}\cdot 0.5^{n+m-1})。$$

22．一辆重型货车去边远山区送货。修理工告诉司机，由于车上六个轮胎都是旧的，前面两个轮胎损坏的概率都是 0.1，后面四个轮胎损坏的概率都是 0.2。你能告诉司机，此车在途中因轮胎损坏而发生故障的概率是多少吗？

解：设 X 与 Y 分别表示在途中损坏的前胎个数与后胎个数，A 与 B 分别表示至少有一个前胎与后胎损坏，且每个前胎损坏的概率为 $p_1=0.1$，每个后胎损坏的概率为 $p_2=0.2$，A 与 B 相互独立，则

$$P(A)=P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-0.1)^2=1-0.9^2=0.19,$$

$$P(B)=P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-0.2)^4=1-0.8^4=0.5904,$$

故此车在途中因轮胎损坏而发生故障的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.19+0.5904-0.19\times 0.5904\approx 0.6682。$$

23．设 $0<P(B)<1$，试证事件 A 与 B 独立的充要条件是 $P(A\,|\,B)=P(A\,|\,\overline{B})$。

证明：必要性，若事件 A 与 B 独立，则

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A),\quad P(A\,|\,\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)$$

故 $P(A\,|\,B)=P(A\,|\,\overline{B})$。

充分性，若 $P(A\,|\,B)=P(A\,|\,\overline{B})$，有

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A\,|\,\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)},$$

即

$$P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B),$$

故 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A 与 B 独立。

24．设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A\,|\,B)+P(\overline{A}\,|\,\overline{B})=1$，试证 A 与 B 独立。

证明：因

$$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{P(AB)[1-P(B)]+P(B)[1-P(A)-P(B)+P(AB)]}{P(B)[1-P(B)]}$$

$$=\frac{P(AB)+P(B)-P(A)P(B)-P(B)^2}{P(B)-P(B)^2}=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(B)-P(B)^2}+1$$

因 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则

$$\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(B)-P(B)^2}=0,$$

故 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A 与 B 独立。

25．若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，如果 A,B 相互独立，试证 A,B 相容。

证明：因 A,B 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)P(B)>0,$$

故 $AB\neq\varnothing$，即 A,B 相容。