B 卷

一．选择题：（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 将 3 个不同的球随机放入 4 个不同的杯中，有一个杯子放入 2 个球的概率是（　　）。

（A）$\dfrac{C_3^2 \cdot C_4^2}{4^3}$　　（B）$\dfrac{C_3^2 \cdot A_4^2}{4^3}$　　（C）$\dfrac{C_3^2 \cdot C_4^2}{3^4}$　　（D）$\dfrac{C_3^2 \cdot A_4^2}{3^4}$

分析：古典概型，排列组合问题。

解：样本点总数：每个球有 4 种选择，4 取 3 次，$n = 4^3$。所求事件样本点个数：从 3 个球中选 2 个，C_3^2；从 4 个杯子中有顺序地选 2 个，A_4^2。（第一个杯子放 2 个球，第二个杯子放 1 个球）。故概率为$\dfrac{C_3^2 \cdot A_4^2}{4^3}$。

选（B）。

2. 设事件 A, B, C 相互独立，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$，则 $P(AC \mid A \cup B) =$（　　）。

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

分析：事件的关系与运算，条件概率。

解：

$$P(AC \mid A \cup B) = \frac{P(AC(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(AC)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)P(C)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}。$$

选（D）。

3. 设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x + \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < \dfrac{1}{2}; \\ 1, & x \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

则 $F(x)$（　　）。

（A）是随机变量 X 的分布函数　　（B）不是随机变量 X 的分布函数

（C）是离散随机变量 X 的分布函数（D）是连续随机变量 X 的分布函数

分析：分布函数基本性质，离散、连续随机变量的分布函数的特点。

解：分布函数的基本性质：单调性、正则性、右连续性。这里的$F(x)$满足这三个条件。但并非离散随机变量分布函数的阶梯型，也非连续。随机变量分布函数的连续函数。只有（A）正确。

选（A）。

4. 设$p(x)$是随机变量的概率密度函数，则其必须满足的性质是（　　）。

（A）单调不减函数　　（B）连续函数

（C）非负函数　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty} p(x)=1$

分析：概率密度函数基本性质。

解：概率密度函数的基本性质：非负性，正则性。只有（C）正确。

选（C）。

5. 随机变量X的概率密度函数$p(x)$满足$p(1-x)=p(1+x)$且$\int_0^2 p(x)dx=0.6$，则$P\{X<0\}=$（　　）。

（A）0.2　　（B）0.3　　（C）0.4　　（D）0.5

分析：由已知条件知$p(x)$关于$x=1$对称，再结合概率密度函数的正则性。

解：因$p(x)$关于$x=1$对称，可知

$$\int_{-\infty}^1 p(x)dx=0.5 \text{ 且 } \int_0^1 p(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 p(x)dx=0.3,$$

故

$$P\{X<0\}=\int_{-\infty}^0 p(x)dx=\int_{-\infty}^1 p(x)dx-\int_0^1 p(x)dx=0.5-0.3=0.2。$$

选（A）。

6. 设X,Y相互独立，且均服从$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|\le 1\}$（　　）。

（A）与μ无关，而与σ^2有关　　（B）与μ有关，而与σ^2无关

（C）与μ,σ^2都有关　　（D）与μ,σ^2都无关

分析：确定正态分布的参数，再标准化。

解：由题意知$X-Y$服从正态分布，且

$$E(X-Y)=EX-EY=0，\quad \mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=2\sigma^2,$$

可知$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，即$\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，故

$$P\{|X-Y|\le 1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1。$$

选（A）。

7. 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　　）。

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$　　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$

分析：相关系数等于 1，X,Y 正线性相关，再由它们的期望与方差确定线性函数的系数。

解：因相关系数 $\rho_{XY}=1$，知 X,Y 正线性相关，排除选项（A）与（C）。又因 $X\sim N(0,1)$，若 $P\{Y=2X-1\}=1$，有

$$EY=2EX-1=-1,\quad \mathrm{Var}(Y)=4\,\mathrm{Var}(X)=4,$$

可知 $Y\sim N(-1,4)$，与 $Y\sim N(1,4)$ 矛盾，排除选项（B）。若 $P\{Y=2X+1\}=1$，有

$$EY=2EX+1=1,\quad \mathrm{Var}(Y)=4\,\mathrm{Var}(X)=4,$$

可知 $Y\sim N(1,4)$。

选（D）。

8. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立且均服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布 $P(3)$，令 $Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$，则 $E(Y^2)=$（　　）。

（A）1　　（B）9　　（C）10　　（D）6

分析：根据期望方差的性质直接可得。

解：因 $X_i\sim P(3)$，有 $E(X_i)=3,\quad \mathrm{Var}(X_i)=3,\quad i=1,2,3$，则

$$EY=\frac{1}{3}(EX_1+EX_2+EX_3)=3,$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{9}[\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\mathrm{Var}(X_3)]=1,$$

故

$$E(Y^2)=\mathrm{Var}(Y)+(EY)^2=1+3^2=10。$$

选（C）。

9. 设随机变量 $X\sim b\left(9,\frac{1}{3}\right)$（二项分布），$Y\sim Ge\left(\frac{1}{2}\right)$（几何分布），且 X,Y

相互独立，则根据切比雪夫不等式有 $P\{Y-2<X<Y+4\}$（　　）。

（A）$\leq\frac{1}{9}$　　（B）$\geq\frac{5}{9}$　　（C）$\geq\frac{8}{9}$　　（D）$\leq\frac{4}{9}$

分析：根据题中概率的形式，对 $X-Y$ 应用切比雪夫不等式。

解：因 $X\sim b\left(9,\frac{1}{3}\right)$，$Y\sim Ge\left(\frac{1}{2}\right)$，有

$$EX=np=3,\quad EY=\frac{1}{p}=2,\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=2,\quad \mathrm{Var}(Y)=\frac{1-p}{p^2}=2\text{。}$$

又因 X,Y 相互独立，则

$$E(X-Y)=EX-EY=1,\quad \mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=4\text{。}$$

根据切比雪夫不等式可得，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-Y-1|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{4}{\varepsilon^2}\text{。}$$

故

$$P\{Y-2<X<Y+4\}=P\{-2<X-Y<4\}=P\{|X-Y-1|<3\}\geq 1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\text{。}$$

选（B）。

10. 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且均服从参数为 2 的指数分布，则当 $n\to+\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于（　　）。

（A）2　　（B）1　　（C）0.25　　（D）0.5

分析：辛钦大数定律：独立同分布条件下，平均值依概率收敛于数学期望。

解：由题意可知 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 独立同分布，其平均值 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于数学期望 $E(X_i^2)$。

$$E(X_i^2)=\mathrm{Var}(X_i)+(EX_i)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=0.5\text{。}$$

选（D）。

二．计算题：（共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

1. 飞机坠落在 A,B,C 三个区域之一，营救部门判断其概率分别为 $0.7,0.2,0.1$；

用直升机搜救这些区域，若有残骸，被发现的概率分别为 $0.3, 0.4, 0.5$。若已用直升机搜索过 A 区域及 B 区域，没有发现残骸，在这种情况下，计算飞机坠落在 C 区域的概率。

分析：一个结果可在多种原因下发生，结果发生了问原因，用贝叶斯公式。

解：结果：设 D 表示直升机在 A 区域及 B 区域没有发现残骸；原因：设 A, B, C 分别表示飞机坠落在 A, B, C 区域。有

$$P(A)=0.7，\quad P(B)=0.2，\quad P(C)=0.1，$$

$$P(D|A)=1-0.3=0.7，\quad P(D|B)=1-0.4=0.6，\quad P(D|C)=1。$$

根据贝叶斯公式可得

$$P(C|D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D|C)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$=\frac{0.1\times1}{0.7\times0.7+0.2\times0.6+0.1\times1}=0.1408。$$

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}Ax, & 0<x<1;\\ \dfrac{A}{x}, & 1\le x<e;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）常数 A；

（2）X 的分布函数 $F(x)$；

（3）$P\left\{\dfrac{1}{2}\le X<5\right\}$。

分析：利用密度函数正则性求待定系数，求分布函数应按 x 分段计算概率，求概率这里可用分布函数值之差。

解：（1）正则性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^1 Axdx+\int_1^e\frac{A}{x}dx=\frac{Ax^2}{2}\bigg|_0^1+A\ln x|_1^e=\frac{A}{2}+A=\frac{3A}{2}=1，$$

故 $A=\dfrac{2}{3}$。

（2）x 的分段点为 $0, 1, e$。当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $0\le x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_0^x\frac{2}{3}udu=\frac{u^2}{3}\bigg|_0^x=\frac{x^2}{3}。$$

当$1\le x<e$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_0^1\frac{2}{3}udu+\int_1^x\frac{2}{3u}du=\frac{u^2}{3}\bigg|_0^1+\frac{2}{3}\ln u\bigg|_1^x=\frac{1+2\ln x}{3}。$$

当$x\ge e$时，$F(x)=1$。故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{3}, & 0\le x<1;\\ \dfrac{1+2\ln x}{3}, & 1\le x<e;\\ 1, & x\ge e.\end{cases}$$

（3）

$$P\left\{\frac{1}{2}\le X<5\right\}=F(5)-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}。$$

3. 在区间$(0,2)$随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为X，较长的一段长度记为Y。令$Z=\dfrac{Y}{X}$，求：

（1）X的概率密度函数；

（2）Z的概率密度函数；

（3）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$。

分析：第（1）小题可由题意直接写出。第（2）小题随机变量函数的分布，函数严格单减，用密度函数法。第（3）小题随机变量函数的期望。

解：（1）由题意知X服从区间$(0,1)$上的均匀分布$U(0,1)$，可知X的概率密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）因$Y=2-X$，有$Z=\dfrac{2-X}{X}$。函数$z=\dfrac{2-x}{x}$严格单调减少，反函数为$x=h(z)=\dfrac{2}{z+1}$，$h'(z)=-\dfrac{2}{(z+1)^2}$。当$x\to 0$时，$z\to+\infty$；当$x=1$时，$z=1$，则

$$p_Z(z)=p_X[h(z)]\cdot|h'(z)|=1\cdot\left|-\frac{2}{(z+1)^2}\right|=\frac{2}{(z+1)^2},\quad 1<z<+\infty,$$

故 Z 的概率密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z>1;\\ 0, & z\le 1.\end{cases}$$

（3）

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\frac{x}{2-x}\cdot 1dx=\int_0^1\left(\frac{2}{2-x}-1\right)dx$$

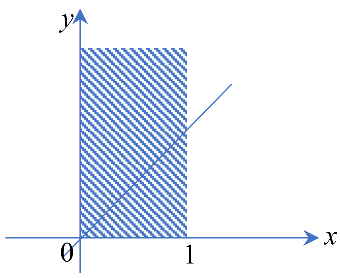
$$=(-2\ln|2-x|-x)\Big|_0^1=2\ln 2-1\text{。}$$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim U(0,1)$（均匀分布），Y 服从参数为 1 的指数分布。求：（1）概率 $P\{X>Y\}$；（2）$Z=X+Y$ 的密度函数。

分析：根据边际分布及独立性得到联合分布，再用二重积分求概率，用密度函数法计算二维随机变量函数的分布。

解：因 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim Exp(1)$，有

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$



且 X 和 Y 相互独立，则

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,\ y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

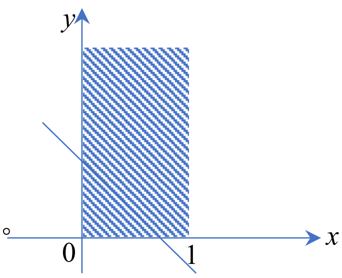
（1）

$$P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_0^x e^{-y}dy=\int_0^1dx\cdot(-e^{-y})\Big|_0^x=\int_0^1(1-e^{-x})dx=(x+e^{-x})\Big|_0^1=e^{-1}\text{。}$$

（2）作曲线簇 $x+y=z$，z 的分段点为 0, 1。

对于 $Z=X+Y$，因函数 $z=x+y$ 关于 x 严格单减，增补变量 $W=Y$，由函数 $z=x+y, w=y$，得到反函数 $x=z-w, y=w$。雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x_z & x_w\\ y_z & y_w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,$$



则

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\cdot|J|dy=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)dy\text{。}$$

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$；当 $0<z<1$ 时，

$$p_Z(z)=\int_0^z e^{-y}dy=-e^{-y}\big|_0^z=1-e^{-z};$$

当 $z\geq 1$ 时，

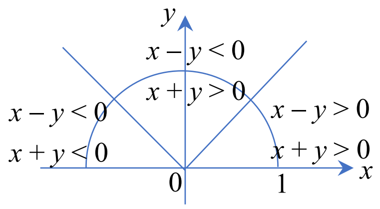
$$p_Z(z)=\int_{z-1}^z e^{-y}dy=-e^{-y}\big|_{z-1}^z=e^{1-z}-e^{-z};$$

故

$$p_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1;\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\geq 1;\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$

5. 二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 服从均匀分布，且

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0;\\ 0, & X-Y\leq 0.\end{cases}\qquad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0;\\ 0, & X+Y\leq 0.\end{cases}$$



求：（1）二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的联合分布列；

（2）Z_1 与 Z_2 的相关系数。

分析：二维均匀分布利用面积之比计算 Z_1 与 Z_2 取值的四种组合的概率，得到联合分布列，再计算相关系数。

解：（1）(X,Y) 服从二维均匀分布，求概率用面积之比，有

$$P\{Z_1=0,Z_2=0\}=P\{X-Y\leq 0,X+Y\leq 0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{X-Y\leq 0,X+Y>0\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{X-Y>0,X+Y\leq 0\}=0,$$

$$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{X-Y>0,X+Y>0\}=\frac{1}{4},$$

故 (Z_1,Z_2) 的联合分布列为

Z_1 \ Z_2	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

（2）因

$$E(Z_1)=0+0+1\times0+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}，\quad E(Z_2)=0+0+1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$E(Z_1^2)=0+0+1^2\times0+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}，\quad E(Z_2^2)=0+0+1^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$E(Z_1Z_2)=0+0+0+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

可得

$$\mathrm{Var}(Z_1)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16}，\quad \mathrm{Var}(Z_2)=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16},$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{16},$$

故 Z_1 与 Z_2 的相关系数为

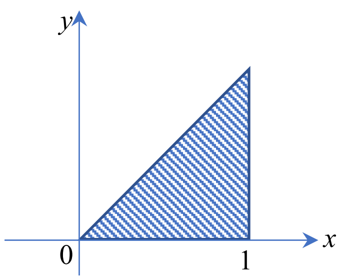
$$\mathrm{Corr}(Z_1,Z_2)=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Z_2)}}=\frac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{3}{16}}}=\frac{1}{3}。$$

6. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：（1）$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=y\right\}$；（2）$E\left(X\middle|Y=\frac{1}{2}\right)$。

分析：先求边际密度 $p_Y(y)$，条件密度 $p_X(x\,|\,Y=y)$，再求条件概率和条件数学期望 $E(X\,|\,Y=y)$。



解：（1）边际密度

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx。$$

当 $0<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\frac{3(1-y^2)}{2}，\quad 0<y<1。$$

而条件密度

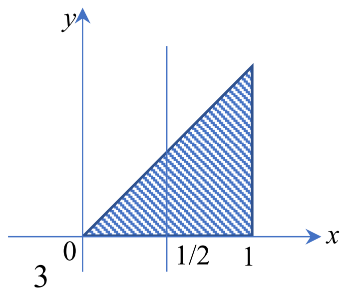
$$p_X(x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)},$$

则当$0<y<1$时，$p_Y(y)>0$，此时

$$p_X(x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=y\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}p_X(x|Y=y)dx,$$



当$0<y<\dfrac{1}{2}$时，

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=y\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{1-y^2}dx=\left.\frac{x^2}{1-y^2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{4(1-y^2)},$$

当$\dfrac{1}{2}\le y<1$时，

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=y\right\}=\int_{y}^{1}\frac{2x}{1-y^2}dx=\left.\frac{x^2}{1-y^2}\right|_{y}^{1}=1,$$

故

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=y\right\}=\begin{cases}\dfrac{3}{4(1-y^2)}, & 0<y<\dfrac{1}{2};\\ 1, & \dfrac{1}{2}\le y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x|Y=y)dx=\int_{y}^{1}x\cdot\frac{2x}{1-y^2}dx=\frac{2}{1-y^2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{y}=\frac{2(1-y^3)}{3(1-y^2)}\text{。}$$

故

$$E\left(X\middle|Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{9}\text{。}$$

7. 甲乙两个剧场竞争 1000 名观众，假定每个观众等可能的选择甲乙剧场，且观众之间的选择是相互独立的。问甲剧场应该设多少个座位才能以小于 1%的概率保证不因座位缺少而失去观众？

分析：二项分布，数量大，根据中心极限定理，用正态分布处理。

解：设 X 表示甲剧场观众人数，有 X 服从二项分布 $b(1000, 0.5)$。二项分布，$n=1000$ 很大，用中心极限定理。因

$$EX = np = 500, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 250,$$

可知

$$\frac{X-500}{\sqrt{250}} \dot{\sim} N(0,1)。$$

又设甲剧场设有 a 个座位，有 $P\{X \le a\} > 0.99$。可得

$$P\{X \le a\} = P\left\{\frac{X-500}{\sqrt{250}} \le \frac{a-500}{\sqrt{250}}\right\} = \Phi\left(\frac{a-500}{\sqrt{250}}\right) > 0.99,$$

即

$$\frac{a-500}{\sqrt{250}} > 2.33,$$

$$a > 536.84,$$

故甲剧场至少应设有 537 个座位。

三．证明题：（共 1 个题，7 分）

已知随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从标准正态分布，请利用特征函数证明：$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 也服从标准正态分布。

分析：直接利用特征函数的性质验证。

证明：因 X_i 服从标准正态分布，其特征函数为 $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\varphi_{X_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdots\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$= \left[e^{-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}}\right]^n = \left[e^{-\frac{t^2}{2n}}\right]^n = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

这正是标准正态分布 $N(0,1)$ 的特征函数，可知 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 也服从标准正态分布。