习题 2.4

1．一批产品中有 10%的不合格品，现从中任取 3 件，求其中至多有一件不合格品的概率。

解：设 X 表示取到的不合格品个数，有 X 服从二项分布 $b(3, 0.1)$，故所求概率为

$$P\{X \le 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0.9^3 + C_3^1 \times 0.1 \times 0.9^2 = 0.972\text{。}$$

2．一条自动化生产线上产品的一级品率为 0.8，现检查 5 件，求至少有 2 件一级品的概率。

解：设 X 表示检查到的一级品个数，有 X 服从二项分布 $b(5, 0.8)$，故所求概率为

$$P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.2^5 - C_5^1 \times 0.8 \times 0.2^4 = 0.99328\text{。}$$

3．某优秀射手命中 10 环的概率为 0.7，命中 9 环的概率为 0.3。试求该射手三次射击所得的环数不少于 29 环的概率。

解：设 X 表示三次射击所中的 10 环次数，有 X 服从二项分布 $b(3, 0.7)$，三次射击所得的环数不少于 29 环即 $X \ge 2$，故所求概率为

$$P\{X \ge 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3 + 0.7^3 = 0.784\text{。}$$

4．经验表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 20%。如今餐厅有 50 个座位，但预定给了 52 位顾客，问到时顾客来到餐厅而没有座位的概率是多少？

解：设 X 表示到时来到餐厅的顾客人数，有 X 服从二项分布 $b(52, 0.8)$，故所求概率为

$$P\{X \ge 51\} = P\{X = 51\} + P\{X = 52\} = C_{52}^{51} \times 0.8^{51} \times 0.2 + 0.8^{52} \approx 0.0001279\text{。}$$

5．设随机变量 $X \sim b(n, p)$，已知 $E(X) = 2.4$，$\mathrm{Var}(X) = 1.44$，求两个参数 n 与 p 各为多少？

解：因 $X \sim b(n, p)$，有 $E(X) = np = 2.4$，$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 1.44$，有

$$1 - p = \frac{1.44}{2.4} = 0.6,$$

故 $p = 0.4$，$n = \dfrac{2.4}{0.4} = 6$。

6．设随机变量 X 服从二项分布 $b(2, p)$，随机变量 Y 服从二项分布 $b(4, p)$。若 $P\{X \ge 1\} = 8/9$，试求 $P\{Y \ge 1\}$。

解：因 X 服从二项分布 $b(2, p)$，有

$$P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \frac{8}{9},$$

即 $p = \dfrac{2}{3}$，故

$$P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1-p)^4 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{80}{81}\text{。}$$

7．一批产品的不合格率为 0.02，现从中任取 40 件进行检查，若发现两件或两件以上不合格品就拒收这批产品。分别用以下方法求拒收的概率：

（1）用二项分布作精确计算；

（2）用泊松分布作近似计算。

解：设 X 表示发现的不合格品个数，有 X 服从二项分布 $b(40, 0.02)$，

（1）所求概率为

$$P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.98^{40} - C_{40}^1 \times 0.02 \times 0.98^{39} \approx 0.1905;$$

（2）因 $n = 40$ 较大，$p = 0.02$ 很小，取 $\lambda = np = 0.8$，有 $X \mathrel{\dot\sim} P(0.8)$，故查表可得所求概率为

$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\} \approx 1 - 0.809 = 0.191$。

8．设 X 服从泊松分布，且已知 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$，求 $P\{X=4\}$。

解：设 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，有 $\lambda > 0$，则

$$P\{X=1\} = \frac{\lambda^1}{1}e^{-\lambda} = P\{\lambda = 2\} = \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda},$$

得 $\lambda = \dfrac{\lambda^2}{2}$，即 $\lambda = 2$，故查表可得

$$P\{X=4\} = P\{X \leq 4\} - P\{X \leq 3\} = 0.947 - 0.857 = 0.090。$$

9．已知某商场一天来的顾客数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，而每个来到商场的顾客购物的概率为 p，证明：此商场一天内购物的顾客数服从参数为 λp 的泊松分布。

证明：设 Y 表示该商场一天内购买商品的顾客人数，Y 的全部可能取值为 $0, 1, 2, \cdots$，根据全概率公式可得

$$P\{Y=r\} = \sum_{k=r}^{\infty} P\{X=k\}P\{Y=r \mid X=k\} = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot C_k^r p^r (1-p)^{k-r}$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{k!}{r! \cdot (k-r)!} p^r (1-p)^{k-r} = \frac{p^r e^{-\lambda}}{r!} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k (1-p)^{k-r}}{(k-r)!} = \frac{p^r e^{-\lambda}}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+r}(1-p)^n}{n!}$$

$$= \frac{\lambda^r p^r e^{-\lambda}}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!} = \frac{(\lambda p)^r e^{-\lambda}}{r!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^r}{r!} e^{-\lambda p}, \quad r = 0, 1, 2, \cdots,$$

故 Y 服从参数为 λp 的泊松分布。

10．设一个人一年内患感冒的次数服从参数 $\lambda = 5$ 的泊松分布。现有某种预防感冒的药物对 75%的人有效（能将泊松分布的参数减少为 $\lambda = 3$），对另外的 25%的人不起作用。如果某人服用了此药，一年内患了两次感冒，那么该药对他（她）有效的可能性是多少？

解：设 X 表示他（她）一年内患感冒的次数，事件 A 表示该药对他（她）有效，若 A 发生，X 服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布；若 $\overline{A}$ 发生，X 服从参数 $\lambda = 5$ 的泊松分布，故

$$P(A \mid X=2) = \frac{P(A \cap "X=2")}{P\{X=2\}} = \frac{P(A)P\{X=2 \mid A\}}{P(A)P\{X=2 \mid A\} + P(\overline{A})P\{X=2 \mid \overline{A}\}}$$

$$= \frac{0.75 \times (0.423 - 0.199)}{0.75 \times (0.423 - 0.199) + 0.25 \times (0.125 - 0.040)} = \frac{0.168}{0.168 + 0.02125} \approx 0.8877。$$

11．有三个朋友去喝咖啡，他们决定用掷硬币的方式确定谁付账：每人掷一枚硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账；如果三个人掷出的结果是一样的，那么就重新掷，一直这样下去，直到确定了由谁来付账。求以下事件的概率：

（1）进行到了第 2 轮确定了由谁来付账；

（2）进行了 3 轮还没有确定付账人。

解：设 X 表示三个人投掷的轮数，p 表示每一轮三个人掷出的结果不一样的概率，有 $p = 1 - \dfrac{2}{2^3} = \dfrac{3}{4}$。

（1）第 2 轮确定了付账人的概率

$$P\{X=2\} = (1-p)p = \frac{3}{16}。$$

（2）3 轮还没有确定付账人的概率

$$P\{X>3\} = (1-p)^3 = \frac{1}{64}。$$

12．从一个装有 m 个白球、n 个黑球的袋子中返回地摸球，直到摸到白球时停止。试求取到黑球数的期望。

解：设 X 表示取到的黑球数，有 $X+1$ 服从参数为 $p=\dfrac{m}{m+n}$ 的几何分布，有 $E(X+1)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{m+n}{m}$，故

$$E(X)=\frac{m+n}{m}-1=\frac{n}{m}。$$

13．某种产品上的缺陷数 X 服从下列分布列：$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}$，$k=0,1,\cdots$，求此种产品上的平均缺陷数。

解：因 $X+1$ 服从参数为 $p=\dfrac{1}{2}$ 的几何分布 $Ge\left(\dfrac{1}{2}\right)$，有 $E(X+1)=\dfrac{1}{p}=2$，故 $E(X)=2-1=1$。

14．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le 1/2\}$ 出现的次数，试求 $P\{Y=2\}$。

解：因

$$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4},$$

有 Y 服从二项分布 $b\left(3,\dfrac{1}{4}\right)$，故

$$P\{Y=2\}=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}。$$

15．某产品的不合格品率为 0.1，每次随机抽取 10 件进行检查，若发现其中不合格品数多于 1，就去调整设备。若检验员每天检查 4 次，试问每天平均要调整几次设备。

解：设 X 表示所取 10 件中的不合格品数，有 X 服从二项分布 $b(10,0.1)$，则需要调整设备的概率为

$$P\{X\ge 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-0.9^{10}-\binom{10}{1}\times 0.1\times 0.9^9\approx 0.2639,$$

设 Y 表示每天调整设备的次数，有 Y 服从二项分布 $b(4,0.2639)$，故 $E(X)=4\times 0.2639=1.0556$，即每天平均要调整 1.0556 次设备。

16．一个系统由多个元件组成，各个元件是否正常工作是相互独立的，且各个元件正常工作的概率为 p。若在系统中至少有一半的元件正常工作，那么整个系统就有效。问 p 取何值时，5 个元件的系统比 3 个元件的系统更有可能有效？

解：设 X 表示 3 个元件的系统中正常工作的元件数，Y 表示 5 个元件的系统中正常工作的元件数，则 3 个元件的系统有效的概率为

$$P\{X\ge 2\}=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3p^2(1-p)+p^3=3p^2-2p^3,$$

且 5 个元件的系统有效的概率为

$$P\{Y\ge 3\}=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+C_5^5p^5=10p^3(1-p)^2+5p^4(1-p)+p^5$$

$$=10p^3-15p^4+6p^5,$$

要使得 $10p^3-15p^4+6p^5>3p^2-2p^3$，即

$$3p^2-12p^3+15p^4-6p^5<0,\quad 3p^2(1-p)^2(1-2p)<0,$$

故 $p>0.5$。

17．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，试证明

$$E(X^n)=\lambda E[(X+1)^{n-1}],$$

利用此结果计算 $E(X^3)$。

证明：因 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$，故

$$E(X^n)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^n\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-1}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)^{n-1}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)^{n-1}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda E[(X+1)^{n-1}];$$

$$E(X^3)=\lambda E[(X+1)^2]=\lambda E(X^2)+2\lambda E(X)+\lambda=\lambda^2E(X+1)+2\lambda E(X)+\lambda$$

$$=\lambda^2(\lambda+1)+2\lambda^2+\lambda=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda.$$

18．令 $X(n,p)$ 表示服从 $b(n,p)$ 的随机变量，试证明：

$P\{X(n,p)\le i\}=1-P\{X(n,1-p)\le n-i-1\}$。

证明：由二项分布的定义可得

$$P\{X(n,p)\le i\}=1-P\{X(n,p)\ge i+1\}=1-\sum_{k=i+1}^{n}P\{X(n,p)=k\}=1-\sum_{k=i+1}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=1-\sum_{m=0}^{n-i-1}C_n^{n-m}p^{n-m}(1-p)^m=1-\sum_{m=0}^{n-i-1}C_n^m(1-p)^m p^{n-m}$$

$$=1-P\{X(n,1-p)\le n-i-1\}.$$

19．设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，试证明：

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{-p\ln p}{1-p}.$$

证明：因 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$，则

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k},$$

设 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$，有 $f'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k-1}=\frac{1}{1-x}$，可得

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-u}du=-\ln(1-u)\Big|_0^x=-\ln(1-x),$$

故

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{p}{1-p}f(1-p)=\frac{-p\ln p}{1-p}.$$

20．设随机变量 $X \sim b(n, p)$，试证明：

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}\text{。}$$

证明：因 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，　$k=0,1,2,\cdots,n$，故

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k}=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{m=1}^{n+1}C_{n+1}^{m}p^m(1-p)^{n+1-m}$$

$$=\frac{1}{(n+1)p}\left[\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^{m}p^m(1-p)^{n+1-m}-p^0(1-p)^{n+1}\right]=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}\text{。}$$