# 最小方差无偏估计补充题

1． 总体$X$服从泊松分布$P(\lambda)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$为样本。

（1）参数$\lambda$的点估计$\hat{\lambda}=\bar{X}$，由此猜测$g(\lambda)=\lambda^2$的点估计为$\bar{X}^2$。判断$\bar{X}^2$是否$g(\lambda)=\lambda^2$的无偏估计？如果不是，请根据$E(\bar{X}^2)$的结果及$E(\bar{X})=\lambda$修偏得到$\hat{g}$，使得$\hat{g}$是$g(\lambda)=\lambda^2$的无偏估计，即$E(\hat{g})=\lambda^2$。

（2）写出样本联合密度函数$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)$，证明$\hat{g}$是$g(\lambda)=\lambda^2$的 UMVUE。

（3）求出$\lambda$的 Fisher 信息量$I(\lambda)$及$g(\lambda)=\lambda^2$的 C-R 下界。

（4）设$Y$服从泊松分布$P(\theta)$，可知$\mathrm{Var}(Y^2-Y)=4\theta^3+2\theta^2$，根据此结论以及泊松分布的可加性求出$\mathrm{Var}(\hat{g})$，并判断$\hat{g}$是否$g(\lambda)=\lambda^2$的有效估计。

**解：**（1）因

$$E(\bar{X}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\frac{\lambda}{n}+\lambda^2\neq\lambda^2,$$

故$\bar{X}^2$不是$g(\lambda)=\lambda^2$的无偏估计。而

$$E\left(\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n}\right)=E(\bar{X}^2)-\frac{1}{n}E(\bar{X})=\frac{\lambda}{n}+\lambda^2-\frac{\lambda}{n}=\lambda^2,$$

令$\hat{g}=\bar{X}^2-\dfrac{\bar{X}}{n}$，有$E(\hat{g})=\lambda^2$，故$\hat{g}=\bar{X}^2-\dfrac{\bar{X}}{n}$是$g(\lambda)=\lambda^2$的无偏估计。

（2）因$E(\hat{g})=\lambda^2$，且

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda},\quad x_1, x_2, \cdots, x_n=0,1,2,\cdots,$$

$$e^{n\lambda}p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)=\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{x_1!x_2!\cdots x_n!},\quad x_1, x_2, \cdots, x_n=0,1,2,\cdots,$$

则

$$\frac{\partial[e^{n\lambda}p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)]}{\partial\lambda}=\frac{n\bar{x}\lambda^{n\bar{x}-1}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}=\frac{n\bar{x}}{\lambda}e^{n\lambda}p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda),$$

令统计量$T=\bar{X}$，$c=e^{n\lambda}$，$a=\dfrac{ne^{n\lambda}}{\lambda}$，$b=0$，即$\dfrac{\partial(cp)}{\partial\lambda}=(a\bar{x}+b)p$，可知根据$E(\varphi)=0$可得到$E(\varphi\bar{X})=0$。

取$\tilde{\varphi}=\varphi\bar{X}$，根据$E(\varphi)=0$可得到$E(\tilde{\varphi})=0$，再根据$E(\tilde{\varphi})=0$及统计量$\varphi$的任意性，可得到$E(\tilde{\varphi}\bar{X})=0$，即$E(\varphi\bar{X}^2)=0$。从而根据$E(\varphi)=0$可得到

$$E(\varphi\hat{g})=E\left[\varphi\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}\bar{X}\right)\right]=E(\varphi\bar{X}^2)-\frac{1}{n}E(\varphi\bar{X})=0$$

故 $\hat{g}$ 是 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的 UMVUE。

（3）因泊松分布 $P(\lambda)$ 的质量函数为

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots,$$

则

$$\ln p(x;\lambda)=x\ln\lambda-\lambda-\ln(x!),\quad x=0,1,2,\cdots,$$

$$\frac{\partial\ln p(x;\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{x}{\lambda}-1=\frac{x-\lambda}{\lambda},$$

故

$$I(\lambda)=E\left[\frac{\partial\ln p(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right]^2=E\left(\frac{X-\lambda}{\lambda}\right)^2=\frac{E(X-\lambda)^2}{\lambda^2}=\frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2}=\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}。$$

且 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)}=\frac{(2\lambda)^2}{n\cdot\frac{1}{\lambda}}=\frac{4\lambda^3}{n}。$$

（4）因 $E(\hat{g})=\lambda^2$，并根据泊松分布的可加性可知

$$Y=n\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i\sim P(n\lambda),$$

则

$$\mathrm{Var}(Y^2-Y)=\mathrm{Var}(n^2\bar{X}^2-n\bar{X})=4n^3\lambda^3+2n^2\lambda^2,$$

$$\mathrm{Var}(\hat{g})=\mathrm{Var}\left(\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n}\right)=\frac{4n^3\lambda^3+2n^2\lambda^2}{n^4}=\frac{4n\lambda^3+2\lambda^2}{n^2}>\frac{4\lambda^3}{n}=\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)},$$

故 $\hat{g}$ 不是 $g(\lambda)=\lambda^2$ 的有效估计。

2． 总体 $X$ 服从指数分布 $Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本。

（1）参数 $\theta$ 的点估计 $\hat{\theta}=\bar{X}$，由此猜测 $g(\theta)=\theta^2$ 的点估计为 $\bar{X}^2$。判断 $\bar{X}^2$ 是否 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计？如果不是，请修偏得到 $\hat{g}$，使得 $\hat{g}$ 是 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计，即 $E(\hat{g})=\theta^2$。

（2）写出样本联合密度函数 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$，证明 $\hat{g}$ 是 $g(\theta)=\theta^2$ 的 UMVUE。

（3）求出 $\theta$ 的 Fisher 信息量 $I(\theta)$ 及 $g(\theta)=\theta^2$ 的 C-R 下界。

（4）由 $X$ 服从指数分布 $Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$，可知 $\frac{2n\bar{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$，且 $Y\sim\chi^2(m)$ 的 $k$ 阶原点矩

$$E(Y^k)=2^k\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2},$$

由此求出 $E(\bar{X}^4)$，再求出 $\mathrm{Var}(\hat{g})$，并判断 $\hat{g}$ 是否 $g(\theta)=\theta^2$ 的有效估计。

**解：**（1）因

$$E(\bar{X}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\frac{\theta^2}{n}+\theta^2=\frac{n+1}{n}\theta^2\neq\theta^2,$$

故 $\bar{X}^2$ 不是 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计。而

$$E\left(\frac{n}{n+1}\bar{X}^2\right)=\theta^2,$$

令 $\hat{g}=\frac{n}{n+1}\bar{X}^2$，有 $E(\hat{g})=\theta^2$，故 $\hat{g}=\frac{n}{n+1}\bar{X}^2$ 是 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计。

（2）因 $E(\hat{g})=\theta^2$，且

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}}I_{x_1,x_2,\cdots,x_n>0},$$

$$\theta^n p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}}I_{x_1,x_2,\cdots,x_n>0},$$

则

$$\frac{\partial[\theta^n p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)]}{\partial\theta}=\frac{n\bar{x}}{\theta^2}e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}}I_{x_1,x_2,\cdots,x_n>0}=n\theta^{n-2}\bar{x}p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta),$$

令统计量 $T=\bar{X}$，$c=\theta^n$，$a=n\theta^{n-2}$，$b=0$，即 $\frac{\partial(cp)}{\partial\theta}=(a\bar{x}+b)p$，可知根据 $E(\varphi)=0$ 可得到 $E(\varphi\bar{X})=0$。

取 $\tilde{\varphi}=\varphi\bar{X}$，根据 $E(\varphi)=0$ 可得到 $E(\tilde{\varphi})=0$，再根据 $E(\tilde{\varphi})=0$ 及统计量 $\varphi$ 的任意性，可得到 $E(\tilde{\varphi}\bar{X})=0$，

即 $E(\varphi\bar{X}^2)=0$。从而根据 $E(\varphi)=0$ 可得到

$$E(\varphi\hat{g})=E\left(\varphi\cdot\frac{n}{n+1}\bar{X}^2\right)=\frac{n}{n+1}E(\varphi\bar{X}^2)=0$$

故 $\hat{g}$ 是 $g(\theta)=\theta^2$ 的 UMVUE。

（3）因指数分布 $Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$ 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}I_{x>0},$$

则

$$\ln p(x;\theta)=-\ln\theta-\frac{x}{\theta},\quad x>0,$$

$$\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}=-\frac{1}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}=\frac{x-\theta}{\theta^2},$$

故

$$I(\theta)=E\left(\frac{X-\theta}{\theta^2}\right)^2=\frac{1}{\theta^4}\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\theta^2}。$$

且 $g(\theta)=\theta^2$ 的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}=\frac{(2\theta)^2}{n\cdot\frac{1}{\theta^2}}=\frac{4\theta^4}{n}。$$

（4）因 $E(\hat{g})=\theta^2$，且

$$\mathrm{Var}(\hat{g})=\mathrm{Var}\left(\frac{n}{n+1}\bar{X}^2\right)=\frac{n^2}{(n+1)^2}\mathrm{Var}(\bar{X}^2)=\frac{n^2}{(n+1)^2}[E(\bar{X}^4)-(E(\bar{X}^2))^2],$$

设 $Y=\dfrac{2n\bar{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$，有

$$E(Y^2)=\frac{4n^2}{\theta^2}E(\bar{X}^2)=4(n+1)n,\quad E(Y^4)=\frac{16n^4}{\theta^4}E(\bar{X}^4)=16(n+3)(n+2)(n+1)n,$$

则

$$E(\bar{X}^2)=\frac{n+1}{n}\theta^2,\quad E(\bar{X}^4)=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3}\theta^4,$$

可得

$$\mathrm{Var}(\hat{g})=\frac{n^2}{(n+1)^2}[E(\bar{X}^4)-(E(\bar{X}^2))^2]=\frac{n^2}{(n+1)^2}\left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3}\theta^4-\frac{(n+1)^2}{n^2}\theta^4\right]$$

$$=\frac{4n+6}{n(n+1)}\theta^4>\frac{4\theta^4}{n}=\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)},$$

故 $\hat{g}$ 不是 $g(\theta)=\theta^2$ 的有效估计。