习题 3.4

1． 掷一颗均匀的骰子 2 次，其最小点数记为 X，求 $E(X)$。

解：方法一：直接求二维随机变量函数的期望。

设 X_1, X_2 分别表示第一次、第二次掷出的点数，有 $X = \min\{X_1, X_2\}$，则

$$E(X) = E(\min\{X_1, X_2\}) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\min\{i, j\}\cdot\frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i} j\cdot\frac{1}{36} + \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=i+1}^{6} i\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\frac{i(i+1)}{2} + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i(6-i) = \frac{1}{72}\sum_{i=1}^{6}(13i - i^2) = \frac{91}{36}。$$

方法二：先求其分布，再求期望。

因 X 的全部可能取值为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$，其分布列为

$$P\{X=1\} = \frac{6^2-5^2}{6^2} = \frac{11}{36}，\quad P\{X=2\} = \frac{5^2-4^2}{6^2} = \frac{9}{36}，\quad P\{X=3\} = \frac{4^2-3^2}{6^2} = \frac{7}{36}，$$

$$P\{X=4\} = \frac{3^2-2^2}{6^2} = \frac{5}{36}，\quad P\{X=5\} = \frac{2^2-1}{6^2} = \frac{3}{36}，\quad P\{X=6\} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}，$$

故

$$E(X) = 1\times\frac{11}{36} + 2\times\frac{9}{36} + 3\times\frac{7}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{1}{36} = \frac{91}{36}。$$

2． 求掷 n 颗骰子出现点数之和的数学期望与方差。

解：设 X_i 表示第 i 颗骰子出现的点数，且 X_i 的分布列为

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

则

$$E(X_i) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}，$$

$$E(X_i^2) = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2\times\frac{1}{6} = \frac{91}{6}，$$

可得

$$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}，$$

又设 X 表示 n 颗骰子出现点数之和，有 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，故

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{7}{2}n，\quad \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{35}{12}n。$$

3． 从数字 $0, 1, \cdots, n$ 中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望。

解：方法一：直接求二维随机变量函数的期望。

设 X_1, X_2 分别表示第一次、第二次取出的数字，则

$$E(|X_1-X_2|)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}|i-j|\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(i-j)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n}(i^2+i)=\frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\frac{n+2}{3}。$$

方法二：先求其分布，再求期望。

设 X 表示所取的两个数字之差的绝对值，有 X 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, n$ ，其分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{n+1-k}{C_{n+1}^2}=\frac{2(n+1-k)}{n(n+1)},\quad k=1, 2, \cdots, n,$$

故

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(n+1-k)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}[(n+1)k-k^2]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left[(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]=(n+1)-\frac{1}{3}(2n+1)=\frac{n+2}{3}。$$

4． 设在区间 $(0,1)$ 上随机地取 n 个点，求相距最远的两点之间的距离的数学期望。

解：设 X_i 表示所取的第 i 个点，有 X_i 都服从均匀分布 $U(0,1)$ ，密度函数和分布函数分别为

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

又设 $X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ ， $X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ ，则相距最远的两点之间的距离为 $R=X_{(n)}-X_{(1)}$ 。

因 $X_{(1)}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-(1-x)^n, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

$$p_1(x)=F_1'(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$E(X_{(1)})=\int_0^1 x\cdot n(1-x)^{n-1}dx=\int_0^1 x\cdot d[-(1-x)^n]=-x(1-x)^n\Big|_0^1+\int_0^1(1-x)^n dx$$

$$=-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{n+1}。$$

又因 $X_{(n)}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_n(x)=[F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^n, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

$$p_n(x)=F_n'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

则

$$E(X_{(n)})=\int_0^1 x\cdot nx^{n-1}dx=\int_0^1 nx^n dx=n\cdot\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{n}{n+1}。$$

故相距最远的两点之间的距离的数学期望

$$E(R)=E(X_{(n)})-E(X_{(1)})=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}。$$

5． 盒中有 n 个不同的球，其上分别写有数字 $1,2,\cdots,n$。每次随机抽出一个，记下其号码，放回去再抽。直到抽到有两个不同数字为止。求平均抽球次数。

解：设 X 表示抽球次数，有 X 的全部可能取值为 $2,3,\cdots$，其分布列为

$$P\{X=k\}=\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n},\quad k=2,3,\cdots,$$

则

$$E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\cdot\frac{n-1}{n}=(n-1)\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1},$$

因当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{k=2}^{+\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=2}^{+\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2},$$

故平均抽球次数

$$E(X)=(n-1)\cdot\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{2n-1}{n-1}。$$

6． 设随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.1	0.15
1	0.25	0.2
2	0.15	0.15

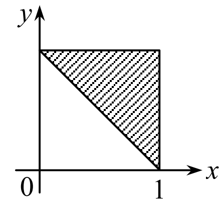
试求 $Z=\sin\left[\frac{\pi}{2}(X+Y)\right]$ 的数学期望。

解：所求期望为

$$E(Z)=0.1\times\sin 0+0.15\times\sin\frac{\pi}{2}+0.25\times\sin\frac{\pi}{2}+0.2\times\sin\pi+0.15\times\sin\pi+0.15\times\sin\frac{3\pi}{2}=0.25。$$

7. 随机变量 (X,Y) 服从以点 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上的均匀分布，试求 $E(X+Y)$ 和 $\mathrm{Var}(X+Y)$。

解： 因 (X,Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

其中区域 D 为以点 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域，故

$$E(X+Y)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)\cdot 2dy=\int_0^1 dx\cdot (x+y)^2\Big|_{1-x}^1=\int_0^1 (x^2+2x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3},$$

$$E[(X+Y)^2]=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)^2\cdot 2dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{2}{3}(x+y)^3\Big|_{1-x}^1=\int_0^1\frac{2}{3}(x^3+3x^2+3x)dx=\frac{11}{6},$$

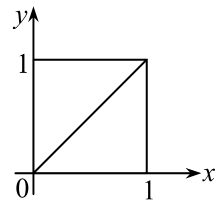
故

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\frac{11}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{18}。$$

8. 设 X,Y 均为 $(0,1)$ 上独立的均匀随机变量，试证：

$$E(|X-Y|^\alpha)=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\quad \alpha>0。$$

证明： 因 (X,Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$E(|X-Y|^\alpha)=\int_0^1 dx\int_0^1 |x-y|^\alpha\cdot 1dy=2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)^\alpha dy=2\int_0^1 dx\cdot\frac{-1}{\alpha+1}(x-y)^{\alpha+1}\Big|_0^x$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}dx=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}。$$

9. 设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量，且

$$P\{X=i\}=\frac{1}{m},\quad i=1,2,\cdots,m。$$

试证：

$$E(X-Y)=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}。$$

注：此题有误，$E(X-Y)$ 必等于 0，应改为 $E(|X-Y|)$。

证明： 所求期望为

$$E(|X-Y|)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m|i-j|\cdot\frac{1}{m^2}=\frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)=\frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^m\frac{1}{2}i(i-1)=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^m(i^2-i)$$

$$=\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right]=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{6}m(m+1)[(2m+1)-3]=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}。$$

10. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 $E(X)=\mu$，$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，试求 $E(X-Y)^2$。

解： 所求期望为

$$E(X-Y)^2 = \mathrm{Var}(X-Y) + [E(X-Y)]^2 = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + [E(X) - E(Y)]^2 = 2\sigma^2 。$$

11．设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} x(1+3y^2)/4, & 0 < x < 2, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $E(Y/X)$。

解： 所求期望为

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^2 dx \int_0^1 \frac{y}{x} \cdot \frac{x(1+3y^2)}{4} dy = \int_0^2 dx \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}y^4\right)\Bigg|_0^1 = \int_0^2 \frac{5}{16} dx = \frac{5}{8} 。$$

12．设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是独立同分布的随机变量，其共同密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$ 的密度函数、数学期望和方差。

解： 因 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 的共同分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u) du = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

则 $Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y) = [F(y)]^5 = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ y^{10}, & 0 \le y < 1; \\ 1, & y \ge 1. \end{cases}$$

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 10y^9, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

数学期望

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot 10y^9 dy = \frac{10}{11} y^{11}\Big|_0^1 = \frac{10}{11},$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 \cdot 10y^9 dy = \frac{10}{12} y^{12}\Big|_0^1 = \frac{10}{12},$$

方差

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{10}{12} - \left(\frac{10}{11}\right)^2 = \frac{10}{1452} = \frac{5}{726} 。$$

13．系统由 n 个部件组成。记 X_i 为第 i 个部件能持续工作的时间，如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 $X_i \sim Exp(\lambda)$，试在以下情况下求系统持续工作的平均时间：

（1）如果有一个部件停止工作，系统就不工作了；

（2）如果至少有一个部件在工作，系统就工作。

解：因 $X_i \sim Exp(\lambda)$，可得 X_i 的密度函数和分布函数分别为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

又设 Y 表示系统持续工作的时间。

（1）$Y=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，可得 Y 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y)=1-[1-F(y)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-n\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}n\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

即 $Y\sim Exp(n\lambda)$，故 $E(Y)=\dfrac{1}{n\lambda}$。

（2）$Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，可得 Y 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y)=[F(y)]^n=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^n, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}n\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^{n-1}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_0^{+\infty} y\cdot n\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^{n-1}dy,$$

令 $t=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$，有 $y=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-t)$，$dy=\dfrac{1}{\lambda(1-t)}dt$，且 $y=0$ 时，$t=0$；$y\to+\infty$ 时，$t\to 1$，故

$$E(Y)=\int_0^1\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-t)\right]\cdot n\lambda(1-t)t^{n-1}\cdot\frac{1}{\lambda(1-t)}dt=-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 nt^{n-1}\ln(1-t)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\ln(1-t)d(1-t^n)$$

$$=\frac{1}{\lambda}(1-t^n)\ln(1-t)\Big|_0^1-\frac{1}{\lambda}\int_0^1(1-t^n)\cdot\left(-\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1(1+t+\cdots+t^{n-1})dt$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^n}{n}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)。$$

14．设 X, Y 独立同分布，都服从正态分布 $N(0,1)$，求 $E[\max\{X, Y\}]$。

解：方法一：先求最小值的分布函数，再求其数学期望。

因 X, Y 独立且密度函数和分布函数都分别是标准正态分布 $N(0,1)$ 的密度函数 $\varphi(x)$ 和分布函数 $\Phi(x)$，则 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F(z)=[\Phi(z)]^2$，密度函数为 $p(z)=F'(z)=2\Phi(z)\varphi(z)$，故

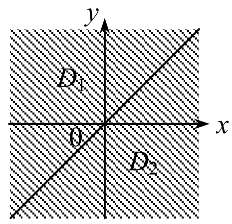
$$E[\max\{X,Y\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot 2\Phi(z)\varphi(z)dz=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot 2\Phi(z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)\cdot(-1)d\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Phi(z)\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\varphi(z)dz=0+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2}dz=\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{。}$$

方法二：直接求最小值函数的期望。

因 (X,Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad -\infty<x,\,y<+\infty\,,$$

故

$$E[\max\{X,Y\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}p(x,y)dxdy=\iint_{D_1}y\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint_{D_2}x\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=2\iint_{D_1}y\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot(-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_x^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{。}$$

15．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从 $(0,\theta)$ 上的均匀分布，记

$$Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\,,\quad Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\,,$$

试求 $E(Y)$ 和 $E(Z)$ 。

解：因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且密度函数和分布函数分别是

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta;\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n\,,$$

则 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y)=[F(y)]^n=\begin{cases}0, & y<0;\\ \dfrac{y^n}{\theta^n}, & 0\le y<\theta;\\ 1, & y\ge\theta.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$E(Y)=\int_0^{\theta}y\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\theta}=\frac{n}{n+1}\theta\text{。}$$

又 $Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}0, & z<0;\\ 1-\dfrac{(\theta-z)^n}{\theta^n}, & 0\le z<\theta;\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}$$

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{n(\theta-z)^{n-1}}{\theta^n}, & 0<z<\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$E(Z)=\int_0^\theta z\cdot\frac{n(\theta-z)^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta z\cdot d[-(\theta-z)^n]=-\frac{1}{\theta^n}\cdot z(\theta-z)^n\Big|_0^\theta+\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta(\theta-z)^n dz$$

$$=0+\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{-(\theta-z)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^\theta=\frac{1}{n+1}\theta\text{。}$$

16．设随机变量 U 服从 $(-2, 2)$ 上的均匀分布，定义 X 和 Y 如下：

$$X=\begin{cases}-1, & \text{若}U<-1;\\ 1, & \text{若}U\ge-1.\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & \text{若}U<1;\\ 1, & \text{若}U\ge1.\end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(X+Y)$。

解：方法一：先求 $X+Y$ 的分布。

因 $X+Y$ 的全部可能取值为 $-2, 0, 2$，且

$$P\{X+Y=-2\}=P\{U<-1, U<1\}=P\{U<-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X+Y=0\}=P\{U\ge-1, U<1\}=P\{-1\le U<1\}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X+Y=2\}=P\{U\ge-1, U\ge1\}=P\{U\ge1\}=\frac{1}{4},$$

则

$$E(X+Y)=(-2)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0$$

$$E(X+Y)^2=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=2,$$

故

$$\mathrm{Var}(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=2\text{。}$$

方法二：用方差的性质。

因 X 和 Y 的全部可能取值都是 $-1, 1$，且

$$P\{X=-1, Y=-1\}=P\{U<-1\}=\frac{1}{4},\quad P\{X=-1, Y=1\}=P\{U<-1, U\ge1\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P\{X=1, Y=-1\}=P\{-1\le U<1\}=\frac{1}{2},\quad P\{X=1, Y=1\}=P\{U\ge1\}=\frac{1}{4},$$

则

$$E(X)=(-1)\times\left(\frac{1}{4}+0\right)+1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad E(Y)=(-1)\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+1\times\left(0+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$E(X^2)=(-1)^2\times\left(\frac{1}{4}+0\right)+1^2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=1，\quad E(Y^2)=(-1)^2\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+1^2\times\left(0+\frac{1}{4}\right)=1，$$

$$E(XY)=1\times\frac{1}{4}+(-1)\times 0+(-1)\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=0，$$

可得

$$\mathrm{Var}(X)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}，\quad \mathrm{Var}(X)=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}，\quad \mathrm{Cov}(X,Y)=0-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}，$$

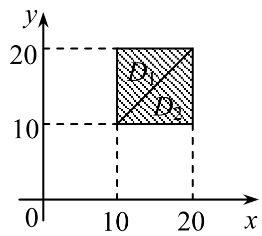
故

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{4}=2。$$

17．一商店经销某种商品，每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $(10,20)$ 上的均匀分布。商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，则可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元。试求此商店经销该种商品每周的平均利润。

解：二维随机变量 (X,Y) 服从二维均匀分布，联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & 10<x<20,10<y<20;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



设 Z 表示此商店经销该种商品每周所得利润，

当 $X\le Y$ 时，$Z=1000X+500(Y-X)=500X+500Y$，

当 $X>Y$ 时，$Z=1000Y$，

即

$$Z=g(X,Y)=\begin{cases}500X+500Y, & X\le Y;\\ 1000Y, & X>Y.\end{cases}$$

故

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)p(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D_1}(500x+500y)\frac{1}{100}dxdy+\iint_{D_2}1000y\cdot\frac{1}{100}dxdy=\int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}(5x+5y)dy+\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}10ydy$$

$$=\int_{10}^{20}dx\cdot(5xy+\frac{5}{2}y^2)\Big|_x^{20}+\int_{10}^{20}dx\cdot 5y^2)\Big|_{10}^{x}=\int_{10}^{20}(100x+1000-\frac{15}{2}x^2)dx+\int_{10}^{20}(5x^2-500)dx$$

$$=(50x^2+1000x-\frac{5}{2}x^3)\Big|_{10}^{20}+(\frac{5}{3}x^3-500x)\Big|_{10}^{20}=\frac{42500}{3}。$$

18．设随机变量 X 与 Y 独立，都服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$，试证 $E[\max\{X,Y\}]=a+\dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$。

证明：根据第 14 题结论。因 $\dfrac{X-a}{\sigma}$ 与 $\dfrac{Y-a}{\sigma}$ 独立同分布，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则

$$E\left[\max\left\{\frac{X-a}{\sigma},\frac{Y-a}{\sigma}\right\}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}，$$

故

$$E[\max\{X,Y\}]=E\left[a+\sigma\max\left\{\frac{X-a}{\sigma},\frac{Y-a}{\sigma}\right\}\right]=a+\sigma E\left[\max\left\{\frac{X-a}{\sigma},\frac{Y-a}{\sigma}\right\}\right]=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}。$$

19．设二维随机变量(X, Y)的联合分布列为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

试求X^2与Y^2的协方差。

解：因

$$E(X^2) = 0^2 \times (0.07 + 0.18 + 0.15) + 1^2 \times (0.08 + 0.32 + 0.20) = 0.6\text{，}$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \times (0.07 + 0.08) + 0^2 \times (0.18 + 0.32) + 1^2 \times (0.15 + 0.20) = 0.5\text{，}$$

$$E(X^2Y^2) = 0 \times 0.07 + 0 \times 0.18 + 0 \times 0.15 + 1 \times 0.08 + 0 \times 0.32 + 1 \times 0.20 = 0.28\text{，}$$

故

$$\text{Cov}(X^2, Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = 0.28 - 0.6 \times 0.5 = -0.02\text{。}$$

20．把一颗骰子独立地掷n次，求 1 点出现次数与 6 点出现次数的协方差及相关系数。

解：设X与Y分别表示 1 点出现次数与 6 点出现次数，又设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次掷出1点;} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次没有掷出1点.} \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次掷出6点;} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次没有掷出6点.} \end{cases}$$

则$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$也相互独立，而(X_i, Y_i)的联合分布列为

$X_i \backslash Y_i$	0	1
0	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0

则

$$E(X_i) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{，}\quad E(Y_i) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{，}$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \times \frac{5}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{，}\quad E(Y_i^2) = 0^2 \times \frac{5}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{，}$$

$$E(X_iY_i) = 0 \times \frac{4}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times 0 = 0\text{，}$$

可得

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}\text{，}\quad \text{Var}(Y_i) = E(Y_i^2) - [E(Y_i)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}\text{，}$$

$$\text{Cov}(X_i, Y_i) = E(X_iY_i) - E(X_i)E(Y_i) = 0 - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{36}\text{，}$$

因$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$，且当$i \neq j$时，X_i与Y_j相互独立，故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)=-\frac{n}{36}\text{。}$$

又因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 也相互独立，则

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{5n}{36}，\quad \mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i)=\frac{5n}{36}，$$

故

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{-\frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}\sqrt{\frac{5n}{36}}}=-\frac{1}{5}\text{。}$$

21．掷一颗骰子两次，求其点数之和与点数之差的协方差。

解： 设 X_1, X_2 分别表示第一、二颗骰子出现的点数，有 $E(X_1)=E(X_2)$，$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)$，故

$$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2)=\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}(X_2,X_1)-\mathrm{Cov}(X_1,X_2)-\mathrm{Cov}(X_2,X_2)$$

$$=\mathrm{Var}(X_1)-\mathrm{Var}(X_2)=0\text{。}$$

22．某箱装 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件。现从中随机取一件，定义三个随机变量 X_1, X_2, X_3 如下

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\quad i=1,2,3，$$

试求随机变量 X_1 和 X_2 的相关系数 $\mathrm{Corr}(X_1, X_2)$。

解： 因

$$P\{X_1=0, X_2=0\}=P\{\text{抽到三等品}\}=\frac{10}{100}=0.1，$$

$$P\{X_1=0, X_2=1\}=P\{\text{抽到二等品}\}=\frac{10}{100}=0.1，$$

$$P\{X_1=1, X_2=0\}=P\{\text{抽到一等品}\}=\frac{80}{100}=0.8，$$

$$P\{X_1=1, X_2=1\}=P(\varnothing)=0，$$

则 X_1 和 X_2 的联合分布为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

因

$$E(X_1)=0\times(0.1+0.1)+1\times(0.8+0)=0.8，\quad E(X_2)=0\times(0.1+0.8)+1\times(0.1+0)=0.1，$$

$$E(X_1^2)=0^2\times(0.1+0.1)+1^2\times(0.8+0)=0.8\,,\quad E(X_2^2)=0^2\times(0.1+0.8)+1^2\times(0.1+0)=0.1\,,$$

$$E(X_1X_2)=0\times0.1+0\times0.1+0\times0.8+1\times0=0\,,$$

则

$$\operatorname{Var}(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=0.8-0.8^2=0.16\,,\quad \operatorname{Var}(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=0.09\,,$$

$$\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=0-0.8\times0.1=-0.08\,,$$

故

$$\operatorname{Corr}(X_1,X_2)=\frac{\operatorname{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(X_2)}}=\frac{-0.08}{0.4\times0.3}=-\frac{2}{3}\text{。}$$

23．将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面朝上和反面朝上的次数，试求 X 和 Y 的协方差及相关系数。

解： 根据相关系数的性质。因 $Y=n-X$，即 X 与 Y 线性负相关，故 $\operatorname{Corr}(X,Y)=-1$。又因 X 和 Y 都服从二项分布 $b(n,0.5)$，有 $E(X)=E(Y)=0.5n$， $\operatorname{Var}(X)=\operatorname{Var}(Y)=0.25n$，故

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}\cdot\operatorname{Corr}(X,Y)=\sqrt{0.25n}\cdot\sqrt{0.25n}\cdot(-1)=-0.25n\text{。}$$

24．设随机变量 X 和 Y 独立同服从参数为 λ 的泊松分布，令 $U=2X+Y$， $V=2X-Y$，求 U 和 V 的相关系数 $\operatorname{Corr}(U,V)$。

解： 因 X 和 Y 独立同服从泊松分布 $P(\lambda)$，有 $E(X)=E(Y)=\lambda$， $\operatorname{Var}(X)=\operatorname{Var}(Y)=\lambda$，则

$$E(U)=E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=3\lambda\,,\quad E(V)=E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)=\lambda\,,$$
$$\operatorname{Var}(U)=\operatorname{Var}(2X+Y)=4\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)=5\lambda\,,$$
$$\operatorname{Var}(V)=\operatorname{Var}(2X-Y)=4\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)=5\lambda\,,$$
$$\operatorname{Cov}(U,V)=\operatorname{Cov}(2X+Y,2X-Y)=4\operatorname{Cov}(X,X)-\operatorname{Cov}(Y,Y)=4\operatorname{Var}(X)-\operatorname{Var}(Y)=3\lambda\,,$$

故

$$\operatorname{Corr}(U,V)=\frac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(V)}}=\frac{3\lambda}{\sqrt{5\lambda}\cdot\sqrt{5\lambda}}=\frac{3}{5}\text{。}$$

25．在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定各人带的礼物都不相同。晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件，试求抽中自己礼物的人数 X 的均值与方差。

解： 设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个人抽到自己的礼物;}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个人抽到其他人的礼物.}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n\,,$$

有

$$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}\,,\quad P\{X_i=0\}=\frac{n-1}{n}\,,$$

则

$$E(X_i)=0\times\frac{n-1}{n}+1\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\,,\quad E(X_i^2)=0^2\times\frac{n-1}{n}+1^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\,,$$

$$\operatorname{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{n-1}{n^2}\text{。}$$

因当 $i\neq j$ 时，(X_i,X_j) 的联合分布列为

X_i \ X_j	0	1
0	$\dfrac{(n-1)(n-2)+1}{n(n-1)}$	$\dfrac{n-2}{n(n-1)}$
1	$\dfrac{n-2}{n(n-1)}$	$\dfrac{1}{n(n-1)}$

则

$$E(X_iX_j)=0\times\frac{(n-1)(n-2)+1}{n(n-1)}+0\times\frac{n-2}{n(n-1)}+0\times\frac{n-2}{n(n-1)}+1\times\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)},$$

可得

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2(n-1)}。$$

因抽中自己礼物的人数 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，故

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=1,$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=n\times\frac{n-1}{n^2}+n(n-1)\times\frac{1}{n^2(n-1)}=1。$$

26．设随机变量 X 和 Y 数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而它们的相关系数为 -0.5，试根据切比雪夫不等式，估计 $P\{|X+Y|\ge 6\}$ 的上限。

解：因

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y)&=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\,\mathrm{Corr}(X,Y)\\&=1+4+2\times1\times2\times(-0.5)=3,\end{aligned}$$

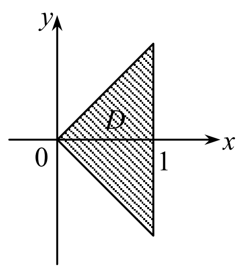
则

$$P\{|X+Y|\ge 6\}=P\{|(X+Y)-E(X+Y)|\ge 6\}\le\frac{\mathrm{Var}(X+Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},$$

故 $P\{|X+Y|\ge 6\}$ 的上限为 $\dfrac{1}{12}$。

27．设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1;\\0, & 其他.\end{cases}$$



求 $E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$。

解：因

$$E(X)=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}x\cdot1dy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3},\quad E(Y)=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}y\cdot1dy=\int_0^1dx\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{-x}^{x}=0,$$

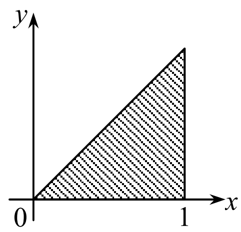
$$E(XY)=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xy\cdot1dy=\int_0^1dx\cdot\frac{1}{2}xy^2\Big|_{-x}^{x}=0,$$

故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0。$$

28．设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



求X与Y的相关系数。

解：因

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 3x dy=\int_0^1 3x^3 dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x y\cdot 3x dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{3}{2}xy^2\Big|_0^x=\int_0^1\frac{3}{2}x^3 dx=\frac{3}{8}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{8},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^x x^2\cdot 3x dy=\int_0^1 3x^4 dx=\frac{3}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{3}{5},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^x y^2\cdot 3x dy=\int_0^1 dx\cdot xy^3\Big|_0^x=\int_0^1 x^4 dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 3x dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{3}{2}x^2y^2\Big|_0^x=\int_0^1\frac{3}{2}x^4 dx=\frac{3}{10}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{10},$$

则

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80},\quad \mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{19}{320},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160},$$

故

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\frac{3}{160}}{\sqrt{\frac{3}{80}}\sqrt{\frac{19}{320}}}=\sqrt{\frac{3}{19}}。$$

29．已知随机变量X与Y的相关系数为ρ，求$X_1=aX+b$与$Y_1=cY+d$的相关系数，其中a,b,c,d均为非零正常数。

解：因

$$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X),\quad \mathrm{Var}(Y_1)=\mathrm{Var}(cY+d)=c^2\,\mathrm{Var}(Y),$$

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)=\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=\mathrm{Cov}(aX,cY)=ac\,\mathrm{Cov}(X,Y),$$

故

$$\mathrm{Corr}(X_1,Y_1)=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)}}=\frac{ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{a^2\,\mathrm{Var}(X)}\sqrt{c^2\,\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{ac}{|ac|}\rho。$$

因a,c均为非零正常数，故$\mathrm{Corr}(X_1,Y_1)=\rho$。

30．设X_1与X_2独立同分布，其共同分布为$Exp(\lambda)$。试求$Y_1=4X_1-3X_2$与$Y_2=3X_1+X_2$的相关系数。

解：因X_1与X_2独立同分布，有$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)$，$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$，则

$$\mathrm{Var}(Y_1)=\mathrm{Var}(4X_1-3X_2)=\mathrm{Var}(4X_1)+\mathrm{Var}(-3X_2)=16\,\mathrm{Var}(X_1)+9\,\mathrm{Var}(X_2)=25\,\mathrm{Var}(X_1),$$

$$\mathrm{Var}(Y_2)=\mathrm{Var}(3X_1+X_2)=\mathrm{Var}(3X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=9\,\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=10\,\mathrm{Var}(X_1)\text{，}$$

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=\mathrm{Cov}(4X_1-3X_2,3X_1+X_2)=\mathrm{Cov}(4X_1,3X_1)-\mathrm{Cov}(3X_2,X_2)$$

$$=12\,\mathrm{Cov}(X_1,X_1)-3\,\mathrm{Cov}(X_2,X_2)=12\,\mathrm{Var}(X_1)-3\,\mathrm{Var}(X_2)=9\,\mathrm{Var}(X_1)\text{，}$$

故

$$\mathrm{Corr}(Y_1,Y_2)=\frac{\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y_2)}}=\frac{9\,\mathrm{Var}(X_1)}{\sqrt{25\,\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{10\,\mathrm{Var}(X_1)}}=\frac{9}{5\sqrt{10}}\text{。}$$

31．设 X_1 与 X_2 独立同分布，其共同分布为 $N(\mu,\sigma^2)$。试求 $Y=aX_1+bX_2$ 与 $Z=aX_1-bX_2$ 的相关系数，其中 a 与 b 为非零常数。

解：因 X_1 与 X_2 独立同分布，有 $\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\sigma^2$，$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$，则

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(aX_1+bX_2)=\mathrm{Var}(aX_1)+\mathrm{Var}(bX_2)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)+b^2\,\mathrm{Var}(X_2)=(a^2+b^2)\sigma^2\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(aX_1-bX_2)=\mathrm{Var}(aX_1)+\mathrm{Var}(-bX_2)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)+b^2\,\mathrm{Var}(X_2)=(a^2+b^2)\sigma^2\text{，}$$

$$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(aX_1+bX_2,aX_1-bX_2)=\mathrm{Cov}(aX_1,aX_1)-\mathrm{Cov}(bX_2,bX_2)$$

$$=a^2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_1)-b^2\,\mathrm{Cov}(X_2,X_2)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)-b^2\,\mathrm{Var}(X_2)=(a^2-b^2)\sigma^2\text{，}$$

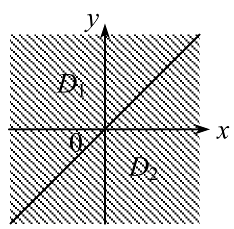
故

$$\mathrm{Corr}(Y,Z)=\frac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}}=\frac{(a^2-b^2)\sigma^2}{\sqrt{(a^2+b^2)\sigma^2}\sqrt{(a^2+b^2)\sigma^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\text{。}$$

32．设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,1,1,\rho)$。

（1）求 $E[\max\{X,Y\}]$；

（2）求 $X-Y$ 与 XY 的协方差及相关系数。



解：（1）方法一：直接计算。

因 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\text{，}\quad -\infty<x,y<+\infty\text{，}$$

则

$$E[\max\{X,Y\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}p(x,y)dxdy=\iint_{D_1}yp(x,y)dxdy+\iint_{D_2}xp(x,y)dxdy$$

$$=2\iint_{D_1}y\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+\rho^2y^2+(1-\rho^2)y^2}{2(1-\rho^2)}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}dx\,,$$

令 $u=x-\rho y$，有 $x=u+\rho y$， $dx=du$，且当 $x\to-\infty$ 时， $u\to-\infty$；当 $x=y$ 时， $u=(1-\rho)y$，故

$$E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{(1-\rho)y}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\right]dy$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{(1-\rho)y}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\right]\cdot(-1)d\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{(1-\rho)y}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)^2y^2}{2(1-\rho^2)}}\cdot(1-\rho)dy\right]$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot(1-\rho)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}-\frac{(1-\rho)y^2}{2(1+\rho)}}dy=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{1+\rho}}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{1+\rho}}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\rho}\,d\frac{y}{\sqrt{1+\rho}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\cdot\sqrt{1+\rho}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\,。$$

方法二：利用二维正态分布的性质。

因 $\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$，且 $E(X)=E(Y)=0$，则

$$E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{2}E(X+Y+|X-Y|)=\frac{1}{2}[E(X)+E(Y)+E(|X-Y|)]=\frac{1}{2}E(|X-Y|)\,,$$

因 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,1,1,\rho)$，有 $E(X)=E(Y)=0$， $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$， $\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$，可得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\,\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho\,,$$

又因 $X-Y$ 服从正态分布，且

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0\,,\quad \mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=2-2\rho\,,$$

即 $Z=X-Y$ 服从正态分布 $N(0,2-2\rho)$，密度函数为

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}\,,$$

故

$$E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{2}E(|X-Y|)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\int_{0}^{+\infty}z\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}\cdot[-(2-2\rho)]\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}\cdot(2-2\rho)=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\,。$$

（2）因 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}},\quad -\infty<x,y<+\infty,$$

则由对称性知

$$E(X^2Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy^2\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy=E(XY^2),$$

且 $E(X)=E(Y)=0$，故

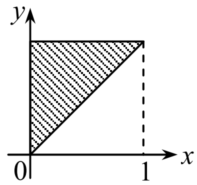
$$\mathrm{Cov}(X-Y,XY)=E[(X-Y)XY]-E(X-Y)E(XY)$$

$$=[E(X^2Y)-E(XY^2)]-[E(X)-E(Y)]E(XY)=0$$

$$\mathrm{Corr}(X-Y,XY)=\frac{\mathrm{Cov}(X-Y,XY)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X-Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(XY)}}=0。$$

33．设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<x<y<1\}$ 上的均匀分布，求 X 与 Y 的协方差及相关系数。

解：因 (X,Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$E(X)=\int_0^1dx\int_x^1x\cdot 2dy=\int_0^1 2x(1-x)dx=\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

$$E(Y)=\int_0^1dx\int_x^1y\cdot 2dy=\int_0^1dx\cdot y^2\Big|_x^1=\int_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$E(X^2)=\int_0^1dx\int_x^1x^2\cdot 2dy=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1dx\int_x^1y^2\cdot 2dy=\int_0^1dx\cdot\frac{2}{3}y^3\Big|_x^1=\int_0^1\frac{2}{3}(1-x^3)dx=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=\int_0^1dx\int_x^1xy\cdot 2dy=\int_0^1dx\cdot xy^2\Big|_x^1=\int_0^1(x-x^3)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

可得

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18},\quad \mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18},$$

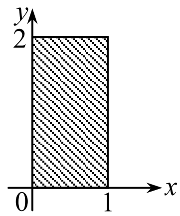
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36},$$

故

$$\operatorname{Corr}(X,Y)=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}\text{。}$$

34．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}\left(x^2+\dfrac{xy}{2}\right), & 0<x<1, 0<y<2;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$



求 X 与 Y 的协方差及相关系数。

解：因

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^2 x\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{6}{7}x^3y+\frac{3}{14}x^2y^2\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{3}{7}x^4+\frac{2}{7}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^2 y\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{3}{7}x^2y^2+\frac{1}{7}xy^3\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^2+\frac{8}{7}x\right)dx$$

$$=\left(\frac{4}{7}x^3+\frac{4}{7}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{8}{7},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{6}{7}x^4y+\frac{3}{14}x^3y^2\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^4+\frac{6}{7}x^3\right)dx$$

$$=\left(\frac{12}{35}x^5+\frac{3}{14}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{12}{35}+\frac{3}{14}=\frac{39}{70},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{2}{7}x^2y^3+\frac{3}{28}xy^4\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1\left(\frac{16}{7}x^2+\frac{12}{7}x\right)dx$$

$$=\left(\frac{16}{21}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{16}{21}+\frac{6}{7}=\frac{34}{21},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{3}{7}x^3y^2+\frac{1}{7}x^2y^3\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{8}{7}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{3}{7}x^4+\frac{8}{21}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{7}+\frac{8}{21}=\frac{17}{21},$$

则

$$\operatorname{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490},$$

$$\operatorname{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147},$$

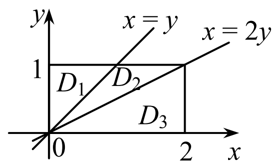
$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$$

故

$$\operatorname{Corr}(X,Y)=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}=\frac{-\frac{1}{147}}{\sqrt{\frac{23}{490}}\sqrt{\frac{46}{147}}}=-\frac{\sqrt{5}}{23\sqrt{3}}。$$

35．设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}1, & X>Y;\\ 0, & X\le Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X>2Y;\\ 0, & X\le 2Y.\end{cases}$$



求 U 和 V 的相关系数。

解：因

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y, X\le 2Y\}=P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{S_{D_1}}{S_G}=\frac{0.5}{2}=0.25,$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y, X>2Y\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y, X\le 2Y\}=P\{(X,Y)\in D_2\}=\frac{S_{D_2}}{S_G}=\frac{0.5}{2}=0.25,$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y, X>2Y\}=P\{(X,Y)\in D_3\}=\frac{S_{D_3}}{S_G}=\frac{1}{2}=0.5,$$

则

$$E(U)=0\times(0.25+0)+1\times(0.25+0.5)=0.75,\quad E(V)=0\times(0.25+0.25)+1\times(0+0.5)=0.5,$$

$$E(U^2)=0^2\times(0.25+0)+1^2\times(0.25+0.5)=0.75,$$

$$E(V^2)=0^2\times(0.25+0.25)+1^2\times(0+0.5)=0.5,$$

$$E(UV)=0\times0.25+0\times0+0\times0.25+1\times0.5=0.5,$$

有

$$\operatorname{Var}(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=0.75-0.75^2=0.1875,$$

$$\operatorname{Var}(V)=E(V^2)-[E(V)]^2=0.5-0.5^2=0.25,$$

$$\operatorname{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=0.5-0.75\times0.5=0.125,$$

故

$$\operatorname{Corr}(U,V)=\frac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(V)}}=\frac{0.125}{0.25\sqrt{3}\times0.5}=\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

36．设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数如下，试求 (X,Y) 的协方差矩阵。

（1）$p_1(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（2） $p_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}, & 0<x<2, 0<y<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解：（1）因

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^1 x\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot 2x^2y^3\Big|_0^1=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^1 y\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{6}{4}xy^4\Big|_0^1=\int_0^1\frac{3}{2}xdx=\frac{3}{4}x^2\Big|_0^1=\frac{3}{4},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot 2x^3y^3\Big|_0^1=\int_0^1 2x^3dx=\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 y^2\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{6}{5}xy^5\Big|_0^1=\int_0^1\frac{6}{5}xdx=\frac{3}{5}x^2\Big|_0^1=\frac{3}{5},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{6}{4}x^2y^4\Big|_0^1=\int_0^1\frac{3}{2}x^2dx=\frac{1}{2}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

有

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18},\quad \mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=0,$$

故协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{18} & 0\\ 0 & \dfrac{3}{80}\end{pmatrix}。$$

（2）因

$$E(X)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{8}x^2y+\frac{1}{16}xy^2\right)\Bigg|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right)dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6},$$

$$E(Y)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{16}xy^2+\frac{1}{24}y^3\right)\Bigg|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6},$$

$$E(X^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{8}x^3y+\frac{1}{16}x^2y^2\right)\Bigg|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)dx=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$

$$E(Y^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{24}xy^3+\frac{1}{32}y^4\right)\Bigg|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3},$$

$$E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{16}x^2y^2+\frac{1}{24}xy^3\right)\Bigg|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x\right)dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3},$$

有

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36},\quad \mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

故协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}。$$

37．设 a 为区间 $(0,1)$ 上的一个定点，随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，以 Y 表示点 X 到 a 的距离。问 a 为何值时 X 与 Y 不相关。

解： 因 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，有 $E(X)=\frac{1}{2}$ 且 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_0^1|x-a|\cdot 1dx=\int_0^a(a-x)dx+\int_a^1(x-a)dx=-\frac{1}{2}(a-x)^2\Big|_0^a+\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^1=\frac{1}{2}-a+a^2,$$

$$E(XY)=\int_0^1 x|x-a|\cdot 1dx=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right)\Big|_a^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^3,$$

可得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^3\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a+a^2\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3,$$

令

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3=\frac{1}{12}(2a-1)(2a^2-2a+1)=0,$$

可得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4}$。因 a 为区间 $(0,1)$ 上的一个定点，故当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即 X 与 Y 不相关。

38．设随机向量 (X_1,X_2,X_3) 满足条件

$$aX_1+bX_2+cX_3=0,$$

$$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=d,$$

$$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\mathrm{Var}(X_3)=\sigma^2,$$

其中 a,b,c,d,σ^2 均为常数，求相关系数 $\rho_{12},\rho_{23},\rho_{31}$。

注：此题条件有误，应更正为“其中 a,b,c,σ^2 均为非零常数，d 为常数”。

解： 因 $cX_3=-aX_1-bX_2$，有 $\mathrm{Var}(cX_3)=\mathrm{Var}(-aX_1-bX_2)$，则

$$c^2 \operatorname{Var}(X_3) = a^2 \operatorname{Var}(X_1) + b^2 \operatorname{Var}(X_2) + 2ab \operatorname{Cov}(X_1, X_2)\text{。}$$

因 $\operatorname{Var}(X_1) = \operatorname{Var}(X_2) = \operatorname{Var}(X_3) = \sigma^2$， $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \sigma^2 \rho_{12}$，且 a, b, c, σ^2 均为非零常数，故

$$\rho_{12} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab},$$

同理可得

$$\rho_{23} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}, \quad \rho_{31} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}\text{。}$$

此外，因 $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$，且 $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = d$，则

$$E(aX_1 + bX_2 + cX_3) = aE(X_1) + bE(X_2) + cE(X_3) = (a + b + c)d = 0,$$

如果 $d \neq 0$，有 $a + b + c = 0$，即 $c = -a - b$，故

$$\rho_{12} = \frac{(-a-b)^2 - a^2 - b^2}{2ab} = 1,$$

同理可得 $\rho_{23} = 1$， $\rho_{31} = 1$。

39．设随机向量 X 与 Y 都只能取两个值，试证： X 与 Y 的独立性与不相关性是等价的。

证明：因独立必然不相关，只需证明若 X 与 Y 不相关可推出 X 与 Y 相互独立。

设 X 与 Y 不相关，且 X 只能取两个值 a 与 b， Y 只能取两个值 c 与 d，有 $a \neq b$， $c \neq d$，令

$$X^* = \frac{X - a}{b - a}, \quad Y^* = \frac{Y - c}{d - c},$$

有 X^* 与 Y^* 只能取两个值 0 与 1，且

$$\operatorname{Cov}(X^*, Y^*) = \operatorname{Cov}\left(\frac{X - a}{b - a}, \frac{Y - c}{d - c}\right) = \frac{\operatorname{Cov}(X - a, Y - c)}{(b - a)(d - c)} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{(b - a)(d - c)} = 0\text{。}$$

设二维随机变量 (X^*, Y^*) 的分布列为

X^* \ Y^*	0	1	$p_{i\cdot}$
0	p_{11}	p_{12}	$p_{1\cdot}$
1	p_{21}	p_{22}	$p_{2\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	

则

$$\operatorname{Cov}(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = p_{22} - p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = 0,$$

即 $p_{22} = p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 2}$，有

$$p_{12} = p_{\cdot 2} - p_{22} = p_{\cdot 2} - p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = (1 - p_{2\cdot}) p_{\cdot 2} = p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 2},$$

$$p_{21} = p_{2\cdot} - p_{22} = p_{2\cdot} - p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = p_{2\cdot}(1 - p_{\cdot 2}) = p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 1},$$

$$p_{11} = p_{1\cdot} - p_{12} = p_{1\cdot} - p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = p_{1\cdot}(1 - p_{\cdot 2}) = p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1},$$

故 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$， $i,j=1,2$，即 X 与 Y 独立，得证。

40．设随机变量 X 服从区间 $(-0.5,0.5)$ 上的均匀分布， $Y=\cos X$，则 X 与 Y 有函数关系。试证： X 与 Y 不相关，即 X 与 Y 无线性关系。

证明：因 X 服从区间 $(-0.5,0.5)$ 上的均匀分布，有 $E(X)=0$ 且 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1, & -0.5<x<0.5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_{-0.5}^{0.5}\cos x\cdot 1dx=\sin x\Big|_{-0.5}^{0.5}=\sin 0.5-\sin(-0.5)=2\sin 0.5,$$

又因 $x\cos x$ 为奇函数，有

$$E(XY)=\int_{-0.5}^{0.5}x\cos x\cdot 1dx=0,$$

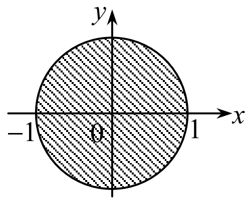
故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times 2\sin 0.5=0,$$

即 X 与 Y 不相关， X 与 Y 无线性关系。

41．设二维随机变量 (X,Y) 服从单位圆内的均匀分布，其联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1;\\ 0, & x^2+y^2\ge 1.\end{cases}$$



试证 X 与 Y 不独立且 X 与 Y 不相关。

证明：支撑区域 $D:-1<x<1,-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}$ 。当 $-1<x<1$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\quad -1<x<1,$$

又支撑区域 $D:-1<y<1,-\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2}$ 。当 $-1<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\quad -1<y<1,$$

因 $p(x,y)\ne p_X(x)p_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

因

$$E(X)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=-\frac{2}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=0,$$

$$E(Y)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}y\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}dx\cdot\frac{y^2}{2\pi}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}dx\cdot\frac{xy^2}{2\pi}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

则

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times 0=0,$$

故 X 与 Y 不相关。

42．设随机向量 (X_1,X_2,X_3) 的相关系数分别为 $\rho_{12},\rho_{23},\rho_{31}$， 证明 $\rho_{12}^2+\rho_{23}^2+\rho_{31}^2\le 1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}$。

证明： 设 $\text{Var}(X_i)=\sigma_i^2$， $i=1,2,3$，有

$$\text{Cov}(X_i,X_j)=\sqrt{\text{Var}(X_i)}\sqrt{\text{Var}(X_j)}\,\text{Corr}(X_i,X_j)=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij},\quad i,j=1,2,3;\quad i\neq j\text{。}$$

对任意实数 c_1,c_2,c_3，都有 $\text{Var}(c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3)\geq 0$，即

$$c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+c_3^2\sigma_3^2+2c_1c_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}+2c_2c_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23}++2c_3c_1\sigma_3\sigma_1\rho_{31}\geq 0\text{，}$$

$$(c_1\sigma_1,\ c_2\sigma_2,\ c_3\sigma_3)\begin{pmatrix}1&\rho_{12}&\rho_{31}\\ \rho_{12}&1&\rho_{23}\\ \rho_{31}&\rho_{23}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\sigma_1\\ c_2\sigma_2\\ c_3\sigma_3\end{pmatrix}\geq 0\text{。}$$

根据二次型理论及 c_1,c_2,c_3 的任意性，可知三维随机向量 (X_1,X_2,X_3) 的相关系数矩阵

$$\begin{pmatrix}1&\rho_{12}&\rho_{31}\\ \rho_{12}&1&\rho_{23}\\ \rho_{31}&\rho_{23}&1\end{pmatrix}$$

为半正定矩阵，故

$$\begin{vmatrix}1&\rho_{12}&\rho_{31}\\ \rho_{12}&1&\rho_{23}\\ \rho_{31}&\rho_{23}&1\end{vmatrix}=1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{31}^2\geq 0\text{，}$$

即

$$\rho_{12}^2+\rho_{23}^2+\rho_{31}^2\leq 1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}\text{。}$$

43．设随机向量 (X_1,X_2,X_3) 的相关系数分别为 $\rho_{12},\rho_{23},\rho_{31}$，且

$$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=0\text{，}\ \text{Var}(X_1)=\text{Var}(X_2)=\text{Var}(X_3)=\sigma^2\text{，}$$

令

$$Y_1=X_1+X_2\text{，}\ Y_2=X_2+X_3\text{，}\ Y_3=X_3+X_1\text{，}$$

证明：Y_1,Y_2,Y_3 两两不相关的充要条件为 $\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{31}=-1$。

证明： 充分性，设 $\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{31}=-1$。

因 $\text{Var}(X_1)=\text{Var}(X_2)=\text{Var}(X_3)=\sigma^2$，有

$$\text{Cov}(X_i,X_j)=\sqrt{\text{Var}(X_i)}\sqrt{\text{Var}(X_j)}\,\text{Corr}(X_i,X_j)=\sigma^2\rho_{ij},\quad i,j=1,2,3;\quad i\neq j\text{，}$$

则

$$\text{Cov}(Y_1,Y_2)=\text{Cov}(X_1+X_2,X_2+X_3)$$

$$=\text{Cov}(X_1,X_2)+\text{Cov}(X_1,X_3)+\text{Cov}(X_2,X_2)+\text{Cov}(X_2,X_3)$$

$$=\sigma^2\rho_{12}+\sigma^2\rho_{31}+\sigma^2+\sigma^2\rho_{23}=\sigma^2(\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{31}+1)=0,$$

同理可证$\mathrm{Cov}(Y_2,Y_3)=0$，$\mathrm{Cov}(Y_3,Y_1)=0$，故Y_1,Y_2,Y_3两两不相关。

必要性，设Y_1,Y_2,Y_3两两不相关。

因$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=0$，且

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=\sigma^2(\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{31}+1),$$

故$\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{31}=-1$。

44．设$X\sim N(0,1)$，Y各以0.5的概率取值±1，且假定X与Y相互独立。令$Z=X\cdot Y$，证明：

（1）$Z\sim N(0,1)$；

（2）X与Z不相关，但不独立。

证明：（1）$Z=X\cdot Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{XY\le z\}=P\{Y=-1,X\cdot(-1)\le z\}+P\{Y=1,X\cdot 1\le z\}$$

$$=P\{Y=-1\}P\{X\ge -z\}+P\{Y=1\}P\{X\le z\}=\frac{1}{2}[1-\Phi(-z)]+\frac{1}{2}\Phi(z)=\Phi(z),$$

故$Z\sim N(0,1)$。

（2）因$X\sim N(0,1)$，Y各以0.5的概率取值±1，$Z=XY\sim N(0,1)$，有

$$E(X)=0,\quad E(Y)=0,\quad E(Z)=0,\quad E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=0,$$

故$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=0$，即$X$与$Z$不相关。

根据(X,Z)的联合分布函数分析独立性，因

$$F_{XZ}(x,z)=P\{X\le x,XY\le z\}=P\{X\le x,X\le z,Y=1\}+P\{X\le x,X\ge -z,Y=-1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X\le x,X\le z\}+\frac{1}{2}P\{X\le x,X\ge -z\},$$

当$x=z<0$时，有

$$F_{XZ}(x,x)=\frac{1}{2}P\{X\le x\}+0=\frac{1}{2}\Phi(x)。$$

但此时$F_X(x)F_Z(x)=[\Phi(x)]^2$，故$F_{XZ}(x,x)\ne F_X(x)F_Z(x)$，即$X$与$Z$不独立。

45．设随机变量X有密度函数$p(x)$，且密度函数$p(x)$是偶函数，假定$E(|X|^3)<+\infty$。证明X与$Y=X^2$不相关，但不独立。

证明：因$p(x)$是偶函数，有$xp(x)$与$x^3p(x)$都是奇函数，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=0,\quad E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3p(x)dx=0,$$

故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X^3)-E(X)E(X^2)=0-0\times E(X^2)=0,$$

即X与$Y=X^2$不相关。

因(X, Y)的联合分布函数

$$F_{XY}(x, y) = P\{X \le x, X^2 \le y\},$$

当$y = x^2, x > 0$时，

$$F_{XY}(x, x^2) = P\{X \le x, X^2 \le x^2\} = P\{-x \le X \le x\} = F_X(x) - F_X(-x),$$

但

$$F_X(x)F_Y(x^2) = F_X(x)P\{X^2 \le x^2\} = F_X(x)P\{-x \le X \le x\} = F_X(x)[F_X(x) - F_X(-x)],$$

故当$y = x^2, x > 0$且$F_X(x) < 1$时，$F_{XY}(x, x^2) \ne F_X(x)F_Y(x^2)$，即$X$与$Y = X^2$不独立。

46．设二维随机向量(X, Y)服从二维正态分布，且$E(X) = E(Y) = 0$，$E(XY) < 0$，证明：对任意正常数a, b有$P\{X \ge a, Y \ge b\} \le P\{X \ge a\}P\{Y \ge b\}$。

证明：设(X, Y)服从二维正态分布$N(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则$(X, Y)$的联合密度函数为

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

因$E(X) = E(Y) = 0$，$E(XY) < 0$，则

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{E(XY)}{\sigma_1\sigma_2} < 0,$$

当$x > 0, y > 0$时，有

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]} \le \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}},$$

即对任意正常数a, b有

$$P\{X \ge a, Y \ge b\} = \int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} p(x, y)dy \le \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}} dx \cdot \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}} dy,$$

令$u = \frac{x}{\sqrt{1-\rho^2}}$，$v = \frac{y}{\sqrt{1-\rho^2}}$，有$dx = \sqrt{1-\rho^2}du$，$dy = \sqrt{1-\rho^2}dv$。当$x = a$时，$u = \frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}$，当$x \to +\infty$时，$u \to +\infty$；且当$y = b$时，$v = \frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}$，当$y \to +\infty$时，$v \to +\infty$；则

$$P\{X \ge a, Y \ge b\} \le \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} \sqrt{1-\rho^2}du \cdot \int_{\frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} \sqrt{1-\rho^2}dv$$

$$= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \int_{\frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv,$$

又因X服从正态分布$N(0, \sigma_1^2)$，Y服从正态分布$N(0, \sigma_2^2)$，则

$$P\{X\ge a\}P\{Y\ge b\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\int_b^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du\cdot\int_b^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}}dv\,,$$

故

$$P\{X\ge a,Y\ge b\}\le\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du\cdot\int_{\frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}}dv\le\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du\cdot\int_b^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}}dv$$

$$\le\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du\cdot\int_b^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}}dv=P\{X\ge a\}P\{Y\ge b\}\text{。}$$

47．设随机向量 (X,Y) 满足 $E(X)=E(Y)=0$， $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$， $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho$，证明：

$$E[\max\{X^2,Y^2\}]\le 1+\sqrt{1-\rho^2}\text{。}$$

证明：因 $E(X)=E(Y)=0$， $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$， $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho$，则

$$E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=1,\quad E(Y^2)=\mathrm{Var}(Y)+[E(Y)]^2=1\,,$$

$$E(XY)=\mathrm{Cov}(X,Y)+E(X)E(Y)=\rho\,,$$

因

$$\max\{X^2,Y^2\}=\frac{1}{2}\left[X^2+Y^2+|X^2-Y^2|\right],$$

则

$$E[\max\{X^2,Y^2\}]=\frac{1}{2}\left[E(X^2)+E(Y^2)+E(|X^2-Y^2|)\right]=1+\frac{1}{2}E(|X^2-Y^2|)\,,$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式有 $E(UV)=\sqrt{E(U^2)E(V^2)}$，则

$$E[\max\{X^2,Y^2\}]=1+\frac{1}{2}E(|X^2-Y^2|)=1+\frac{1}{2}E(|X+Y|\cdot|X-Y|)$$

$$\le 1+\frac{1}{2}\sqrt{E(|X+Y|^2)E(|X-Y|^2)}\,,$$

因

$$E(|X+Y|^2)=E(X^2+Y^2+2XY)=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)=2+2\rho\,,$$

$$E(|X-Y|^2)=E(X^2+Y^2-2XY)=E(X^2)+E(Y^2)-2E(XY)=2-2\rho\,,$$

故

$$E[\max\{X^2,Y^2\}]\le 1+\frac{1}{2}\sqrt{(2+2\rho)(2-2\rho)}=1+\sqrt{1-\rho^2}\text{。}$$

48．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中任意两个的相关系数都是 ρ，试证： $\rho\ge-\dfrac{1}{n-1}$。

证明：设 $X_i^*=\dfrac{X_i-E(X_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}}$， $i=1,2,\cdots,n$，有 $\mathrm{Var}(X_i^*)=1$， $i=1,2,\cdots,n$，且

$$\mathrm{Cov}(X_i^*, X_j^*) = \mathrm{Cov}\left(\frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}}, \frac{X_j - E(X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}}\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}} = \rho, \quad 1 \le i < j \le n,$$

因

$$0 \le \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i^*) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}(X_i^*, X_j^*) = n + 2\times\frac{n(n-1)}{2}\rho = n[1+(n-1)\rho],$$

故 $\rho \ge -\dfrac{1}{n-1}$。