习题 7.6

说明：除非特别指出，以下检验的显著性水平均取为$\alpha = 0.05$．

1． 在某保险种类中，一次关于 2008 年的索赔数额（单位：元）的随机抽样为（按升序排列）：

4.632　4.728　5.052　5.064　5.484　6.972　7.596　9.480

14.760　15.012　18.720　21.240　22.836　52.788　67.200

已知 2007 年的索赔数额的中位数为 5063 元．是否 2008 年索赔的中位数比前一年有所变化？请用双侧符号检验方法检验，求检验的 p 值，并写出结论．

解：假设 H_0：$x_{0.5} = 5063$　vs　H_1：$x_{0.5} \ne 5063$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 15$，

$$有 \sum_{k=0}^{3} C_{15}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{15-k} = 0.0176 < 0.025 < \sum_{k=0}^{4} C_{15}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{15-k} = 0.0592，$$

$$\sum_{k=12}^{15} C_{15}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{15-k} = 0.0176 < 0.025 < \sum_{k=11}^{15} C_{15}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{15-k} = 0.0592，$$

双侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 3 或 S^+ \ge 12\}$，

因 $S^+ = 12 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{S^+ \ge 12\} = 0.0352 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为 2008 年索赔的中位数比前一年有所变化．

2． 1984 年一些国家每平方公里可开发水资源数据如下表所示（单位：万度/年）：

国家	苏联	巴西	美国	加拿大	扎伊尔	印度	哥伦比亚	日本	阿根廷	印度尼西亚	墨西哥
水资源	4.9	4.1	7.5	5.4	28.1	8.5	26.3	34.9	6.9	7.9	4.9
国家	瑞典	意大利	奥地利	南斯拉夫	挪威	瑞士	罗马尼亚	西德	英国	法国	西班牙
水资源	22.3	16.8	58.6	24.8	37.4	78.0	10.1	8.8	1.7	11.5	13.4

而当年中国的该项指标为 20 万度/年，请用符号检验方法检验：这 22 个国家每平方公里可开发的水资源的中位数不高于中国．求检验的 p 值，并写出结论．

解：假设 H_0：$x_{0.5} = 20$　vs　H_1：$x_{0.5} > 20$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 22$，

$$有 \sum_{k=16}^{22} C_{22}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{22-k} = 0.0262 < 0.05 < \sum_{k=15}^{22} C_{22}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{22-k} = 0.0669，$$

右侧拒绝域 $W = \{S^+ \ge 16\}$，

因 $S^+ = 8 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \ge 8\} = 0.9331 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这 22 个国家每平方公里可开发的水资源的中位数不高于中国．

3． 下面是亚洲十个国家 1996 年的每 1000 个新生儿中的死亡数（按从小到大的次序排列）：

国家	日本	以色列	韩国	斯里兰卡	中国	叙利亚	伊朗	印度	孟加拉国	巴基斯坦
新生儿死亡数	4	6	9	15	23	31	36	65	77	88

以 M 表示 1996 年 1000 个新生儿中的死亡数的中位数，试检验：H_0：$M \ge 34$　vs　H_1：$M < 34$．求检验的 p 值，并写出结论．

解：假设 H_0：$M \ge 34$　vs　H_1：$M < 34$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 10$，

$$有 \sum_{k=0}^{2} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0107 < 0.05 < \sum_{k=0}^{3} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0547，$$

左侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 2\}$，

因 $S^+ = 4 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \le 4\} = 0.3770 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为 1996 年 1000 个新生儿中的死亡数的中位数不低于 34.

4．某烟厂称其生产的每支香烟的尼古丁含量在 12 mg 以下．实验室测定的该烟厂的 12 支香烟的尼古丁含量（单位：mg）分别为

16.7　17.7　14.1　11.4　13.4　10.5　13.6　11.6　12.0　12.6　11.7　13.7

是否该烟厂所说的尼古丁含量比实际的要少？求检验的 p 值，并写出结论.

注：对于非正态总体，小样本场合不能用样本均值进行检验，下面用中位数进行检验.

解：假设 H_0：$x_{0.5} = 12$　vs　H_1：$x_{0.5} > 12$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 12$，

有 $\sum_{k=10}^{12} C_{12}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.0193 < 0.05 < \sum_{k=9}^{12} C_{12}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.0730$，

右侧拒绝域 $W = \{S^+ \ge 10\}$，

因 $S^+ = 8 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \ge 8\} = 0.1938 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为该烟厂所说的尼古丁含量不比实际的要少.

5．9 名学生到英语培训班学习，培训前后各进行了一次水平测验，成绩为

学生编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
入学前成绩 x_i	76	71	70	57	49	69	65	26	59
入学后成绩 y_i	81	85	70	52	52	63	83	33	62
$z_i = x_i - y_i$	−5	−14	0	5	−3	6	−18	−7	−3

（1）假设测验成绩服从正态分布，问学生的培训效果是否显著？

（2）不假定总体分布，采用符号检验方法检验学生的培训效果是否显著？

（3）采用符号秩和检验方法检验学生的培训效果是否显著．三种检验方法结论相同吗？

解：（1）如果测验成绩服从正态分布，采用配对 T 检验，

假设 H_0：$\mu_z = 0$　vs　H_1：$\mu_z < 0$，

未知 σ_z^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{Z}}{S_z / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，$n = 9$，$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(8) = 1.8595$，左侧拒绝域 $W = \{t \le -1.8595\}$，

因 $\bar{z} = -4.3333$，$s_z = 7.9373$，

则 $t = \dfrac{-4.3333}{7.9373/\sqrt{9}} = -1.6378 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{T \le -1.6378\} = 0.07 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为培训效果不显著；

（2）假设 H_0：$z_{0.5} = 0$　vs　H_1：$z_{0.5} < 0$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 9$，

有 $\sum_{k=0}^{1} C_9^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{9-k} = 0.0195 < 0.05 < \sum_{k=0}^{2} C_9^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{9-k} = 0.0898$，

左侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 1\}$，

因 $S^+ = 2 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \le 2\} = 0.0898 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为培训效果不显著；

（3）假设 H_0：$\theta = 0$　vs　H_1：$\theta < 0$，

选取统计量 $W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{z_i>0}$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 9$，$W_\alpha^+(n) = W_{0.05}^+(9) = 8$，左侧拒绝域 $W = \{W^+ \le 8\}$，

因 $W^+ = \sum_{i=1}^{9} R_i \cdot \mathrm{I}_{z_i>0} = R_4 + R_6 = 4.5 + 6 = 10.5 \notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为培训效果不显著；即三种检验方法结论相同.

6. 为了比较用来做鞋子后跟的两种材料的质量，选取了 15 个男子（他们的生活条件各不相同），每人穿着一双新鞋，其中一只是以材料 A 做后跟，另一只以材料 B 做后跟，其厚度均为 10 mm，过了一个月再测量厚度，得到数据如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
材料 A	6.6	7.0	8.3	8.2	5.2	9.3	7.9	8.5	7.8	7.5	6.1	8.9	6.1	9.4	9.1
材料 B	7.4	5.4	8.8	8.0	6.8	9.1	6.3	7.5	7.0	6.5	4.4	7.7	4.2	9.4	9.1

问是否可以认定以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿？

（1）设 $d_i = x_i - y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 15)$来自正态总体，结论是什么？

（2）采用符号秩和检验方法检验，结论是什么？

解：（1）如果测验成绩服从正态分布，采用配对 T 检验，

假设 H_0：$\mu_d = 0$ vs H_1：$\mu_d > 0$，

未知 σ_d^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，$n = 15$，$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(14) = 1.7613$，左侧拒绝域 $W = \{t \ge 1.7613\}$，

因 $\overline{d} = 0.5533$，$s_d = 1.0225$，

则 $t = \dfrac{0.5533}{1.0225/\sqrt{15}} = 2.0959 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{T \ge 2.0959\} = 0.0274 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿；

（2）假设 H_0：$\theta = 0$ vs H_1：$\theta > 0$，

选取统计量 $W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i>0}$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 15$，$W_{1-\alpha}^+(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - W_\alpha^+(n) = 120 - W_{0.05}^+(15) = 120 - 30 = 90$，

右侧拒绝域 $W = \{W^+ \ge 90\}$，

因 $W^+ = \sum_{i=1}^{15} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i>0} = R_2 + R_4 + R_6 + R_7 + R_8 + R_9 + R_{10} + R_{11} + R_{12} + R_{13}$

$= 12 + 3.5 + 3.5 + 12 + 8.5 + 6.5 + 8.5 + 14 + 10 + 15 = 93.5 \in W$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿.

7. 某饮料商用两种不同的配方推出了两种新的饮料，现抽取了 10 位消费者，让他们分别品尝两种饮料并加以评分，从不喜欢到喜欢，评分由 1 ~ 10，评分结果如下：

品尝者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 饮料	10	8	6	8	7	5	1	3	9	7
B 饮料	6	5	2	2	4	6	4	5	9	8

问两种饮料评分是否有显著差异？

（1）采用符号检验方法作检验；

（2）采用符号秩和检验方法作检验.

解：（1）假设 H_0：$d_{0.5} = 0$ vs H_1：$d_{0.5} \neq 0$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 10$，

$$有\sum_{k=0}^{1} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0107 < 0.025 < \sum_{k=0}^{2} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0547，$$

$$\sum_{k=9}^{10} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0107 < 0.025 < \sum_{k=8}^{10} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0547，$$

双侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 1$ 或 $S^+ \ge 9\}$，

因 $S^+ = 6 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{S^+ \ge 6\} = 0.7539 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两种饮料评分没有显著差异；

（2）假设 H_0：$\theta = 0$ vs H_1：$\theta \neq 0$，

$$选取统计量 W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i > 0}，$$

显著水平 $\alpha = 0.05$，$n = 10$，$W^+_{\alpha/2}(n) = W^+_{0.025}(10) = 8$，$W^+_{1-\alpha/2}(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - W^+_{\alpha/2}(n) = 55 - 8 = 47$，

双侧拒绝域 $W = \{W^+ \le 8$ 或 $W^+ \ge 47\}$，

$$因 W^+ = \sum_{i=1}^{10} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i > 0} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 8.5 + 6 + 8.5 + 10 + 6 = 39 \notin W，$$

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两种饮料评分没有显著差异.

8. 测试在有精神压力和没有精神压力时血压的差别，10 个志愿者进行了相应的试验．结果为（单位：毫米汞柱收缩压）：

无精神压力时	107	108	122	119	116	118	121	111	114	108
有精神压力时	127	119	123	113	125	132	121	131	116	124

该数据是否表明有精神压力下的血压有所增加？

解：采用符号秩和检验方法作检验，

假设 H_0：$\theta = 0$ vs H_1：$\theta < 0$，

$$选取统计量 W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i > 0}，$$

显著水平 $\alpha = 0.05$，$n = 10$，$W^+_{\alpha}(n) = W^+_{0.05}(10) = 10$，

左侧拒绝域 $W = \{W^+ \le 10\}$，

$$因 W^+ = \sum_{i=1}^{10} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i > 0} = R_4 = 4 \in W，$$

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为有精神压力下的血压有所增加.