习题 2.7

1．设 $X \sim U(a,b)$，对 $k=1,2,3,4$，求 $\mu_k = E(X^k)$ 与 $\nu_k = E[X-E(X)]^k$，进一步求此分布的偏度系数和峰度系数。

解： 因 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故

$$\mu_1 = E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3};$$

$$\mu_3 = E(X^3) = \int_a^b x^3 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_a^b = \frac{b^4-a^4}{4(b-a)} = \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4};$$

$$\mu_4 = E(X^4) = \int_a^b x^4 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_a^b = \frac{b^5-a^5}{5(b-a)} = \frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{5};$$

$$\nu_1 = E[X-E(X)] = 0;$$

$$\nu_2 = E[X-E(X)]^2 = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\bigg|_a^b = \frac{2\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\nu_3 = E[X-E(X)]^3 = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{4}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4\bigg|_a^b = 0;$$

$$\nu_4 = E[X-E(X)]^4 = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{5}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^5\bigg|_a^b = \frac{2\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^5}{5(b-a)} = \frac{(b-a)^4}{80};$$

偏度系数

$$\beta_S = \frac{\nu_3}{(\nu_2)^{3/2}} = 0;$$

峰度系数

$$\beta_K = \frac{\nu_4}{(\nu_2)^2} - 3 = \frac{12^2}{80} - 3 = -\frac{6}{5}.$$

2．设 $X \sim U(0,a)$，求此分布的变异系数。

解： 因 $X \sim U(0,a)$，有 $E(X) = \dfrac{a}{2}$， $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{a^2}{12}$，故变异系数

$$C_v(X)=\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{。}$$

3． 求以下分布的中位数：

（1）区间 (a,b) 上的均匀分布；

（2）正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$；

（3）对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$。

解：（1）因 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，则

$$0.5=P\{X\le x_{0.5}\}=\frac{x_{0.5}-a}{b-a},$$

故中位数

$$x_{0.5}=a+0.5(b-a)=\frac{a+b}{2};$$

（2）因 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则

$$0.5=P\{X\le x_{0.5}\}=F(x_{0.5})=\Phi\left(\frac{x_{0.5}-\mu}{\sigma}\right),$$

即 $\dfrac{x_{0.5}-\mu}{\sigma}=0$，故中位数 $x_{0.5}=\mu$；

（3）因 X 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，有 $\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则

$$0.5=P\{X\le x_{0.5}\}=P\{\ln X\le \ln x_{0.5}\}=F(\ln x_{0.5})=\Phi\left(\frac{\ln x_{0.5}-\mu}{\sigma}\right),$$

即 $\dfrac{\ln x_{0.5}-\mu}{\sigma}=0$，故中位数 $x_{0.5}=\mathrm{e}^{\mu}$。

4． 设 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，对 $k=1,2,3$，求 $\mu_k=E(X^k)$ 与 $\nu_k=E[X-E(X)]^k$。

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

由正则性知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx=1$，可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$，故

$$\mu_1=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\lambda};$$

$$\mu_2=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2};$$

$$\mu_3 = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3};$$

$$\nu_1 = E[X - E(X)] = 0;$$

$$\nu_2 = E[X - E(X)]^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2};$$

$$\nu_3 = E[X - E(X)]^3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} + 2\frac{\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{2\alpha}{\lambda^3}\text{。}$$

5． 设 $X \sim Exp(\lambda)$，对 $k = 1, 2, 3, 4$，求 $\mu_k = E(X^k)$ 与 $\nu_k = E[X - E(X)]^k$，进一步求此分布的变异系数、偏度系数和峰度系数。

解： 因 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

且 k 为正整数时，$\int_0^{+\infty} x^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\Gamma(k)}{\lambda^k} = \frac{(k-1)!}{\lambda^k}$，故

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda};$$

$$\mu_2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \cdot \frac{2!}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2};$$

$$\mu_3 = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \cdot \frac{3!}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^3};$$

$$\mu_4 = \int_0^{+\infty} x^4 \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \cdot \frac{4!}{\lambda^5} = \frac{24}{\lambda^4};$$

$$\nu_1 = E[X - E(X)] = 0;$$

$$\nu_2 = E[X - E(X)]^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$\nu_3 = E[X - E(X)]^3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda} + 2\frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3};$$

$$\nu_4 = E[X - E(X)]^4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\frac{6}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{\lambda} + 6\frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4};$$

变异系数

$$C_v(X) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{\nu_2}}{\mu_1} = 1;$$

偏度系数

$$\beta_S = \frac{\nu_3}{(\nu_2)^{3/2}} = 2;$$

峰度系数

$$\beta_K = \frac{\nu_4}{(\nu_2)^2} - 3 = 9 - 3 = 6\text{。}$$

6. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(10,9)$，试求 $x_{0.1}$ 和 $x_{0.9}$。

解：因

$$F(x_{0.1})=\Phi\left(\frac{x_{0.1}-10}{3}\right)=0.1,$$

得 $-\dfrac{x_{0.1}-10}{3}=1.2816$，故 $x_{0.1}=6.1552$；又因

$$F(x_{0.9})=\Phi\left(\frac{x_{0.9}-10}{3}\right)=0.9,$$

得 $\dfrac{x_{0.9}-10}{3}=1.2816$，故 $x_{0.9}=13.8448$。

（或查表可得 $-\dfrac{x_{0.1}-10}{3}=1.28$，故 $x_{0.1}=6.16$；$\dfrac{x_{0.9}-10}{3}=1.28$，故 $x_{0.9}=13.84$）

7. 设随机变量 X 服从双参数韦布尔分布，其分布函数为

$$F(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\},\quad x>0,$$

其中 $\eta>0, m>0$。试写出该分布的 p 分位数 x_p 的表达式，且求出当 $m=1.5, \eta=1000$ 时的 $x_{0.1}, x_{0.5}, x_{0.8}$ 的值。

解：因 $F(x_p)=1-\exp\left\{-\left(\dfrac{x_p}{\eta}\right)^m\right\}=p$，故 $x_p=\eta[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{m}}$。当 $m=1.5, \eta=1000$ 时，

$$x_{0.1}=1000(-\ln 0.9)^{\frac{1}{1.5}}\approx 223.0755;$$

$$x_{0.5}=1000(-\ln 0.5)^{\frac{1}{1.5}}\approx 783.2198;$$

$$x_{0.8}=1000(-\ln 0.2)^{\frac{1}{1.5}}\approx 1373.3550。$$

8. 自由度为 2 的 χ^2 分布的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0,$$

试求出其分布函数及分位数 $x_{0.1}, x_{0.5}, x_{0.8}$。

解：设 X 服从自由度为 2 的 χ^2 分布。分段点 $x=0$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=0$；

当 $x\geq 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}du=1-e^{-\frac{x}{2}}$；

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

因 $F(x_p)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x_p}{2}}=p$，有 $x_p=-2\ln(1-p)$，故

$$x_{0.1}=-2\ln 0.9\approx 0.2107\text{；}\ x_{0.5}=-2\ln 0.5\approx 1.3863\text{；}\ x_{0.8}=-2\ln 0.2\approx 3.2189\text{。}$$

9．设随机变量 X 的分布密度函数 $p(x)$ 关于 c 点是对称的，且 $E(X)$ 存在，试证

（1）这个对称点 c 既是均值又是中位数，即 $E(X)=x_{0.5}=c$；

（2）如果 $c=0$，则 $x_p=-x_{1-p}$。

证明：设 $f(x)=p(x+c)$，因 $p(x)$ 关于 c 点对称，有 $f(x)$ 为偶函数。

（1）因

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-c)p(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}cp(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}up(u+c)du+c=0+c=c\text{；}$$

又因 $p(x)$ 关于 c 点对称，有

$$F(c)=\int_{-\infty}^{c}p(x)dx=\int_{c}^{+\infty}p(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=0.5\text{，}$$

可得 $x_{0.5}=c$；故 $E(X)=x_{0.5}=c$。

（2）如果 $c=0$，有 $p(x)$ 为偶函数，则

$$p=F(x_p)=\int_{-\infty}^{x_p}p(x)dx=\int_{+\infty}^{-x_p}p(-u)\cdot(-du)=\int_{-x_p}^{+\infty}p(u)du=1-\int_{-\infty}^{-x_p}p(u)du=1-F(-x_p)\text{，}$$

可得 $F(-x_p)=1-p$，而 $F(x_{1-p})=1-p$，故 $x_p=-x_{1-p}$。

10．试证随机变量 X 的偏度系数与峰度系数对位移和改变比例尺是不变的，即对任意的实数 $a,b\ \ (b\neq 0)$，$Y=a+bX$ 与 X 有相同的偏度系数与峰度系数。

证明：因 $Y=a+bX$，有 $E(Y)=a+bE(X)$，可得

$$Y-E(Y)=a+bX-a-bE(X)=b[X-E(X)]\text{，}$$

则

$$\nu_k(Y)=E[Y-E(Y)]^k=E\{b^k[X-E(X)]^k\}=b^kE[X-E(X)]^k=b^k\nu_k(X)\text{，}$$

即

$$\nu_2(Y)=b^2\nu_2(X)\text{，}\ \nu_3(Y)=b^3\nu_3(X)\text{，}\ \nu_4(Y)=b^4\nu_4(X)\text{。}$$

故偏度系数

$$\beta_S(Y)=\frac{\nu_3(Y)}{[\nu_2(Y)]^{3/2}}=\frac{b^3\nu_3(X)}{[b^2\nu_2(X)]^{3/2}}=\frac{b^3\nu_3(X)}{b^3[\nu_2(X)]^{3/2}}=\frac{\nu_3(X)}{[\nu_2(X)]^{3/2}}=\beta_S(X)\text{；}$$

峰度系数

$$\beta_K(Y)=\frac{\nu_4(Y)}{[\nu_2(Y)]^2}-3=\frac{b^4\nu_4(X)}{[b^2\nu_2(X)]^2}-3=\frac{b^4\nu_4(X)}{b^4[\nu_2(X)]^2}-3=\frac{\nu_4(X)}{[\nu_2(X)]^2}-3=\beta_K(X)\text{。}$$

11．设某项维修时间 T（单位：分）服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$。

（1）求 p 分位数 t_p；

（2）若 $\mu=4.127$，求该分布的中位数；

（3）若 $\mu=4.127$，$\sigma=1.0364$，求完成 95%维修任务的时间。

解：（1）因 T 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，有 $\ln T$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则

$$p=P\{T\le t_p\}=P\{\ln T\le \ln t_p\}=\Phi\left(\frac{\ln t_p-\mu}{\sigma}\right),$$

即 $\dfrac{\ln t_p-\mu}{\sigma}=u_p$，$\ln t_p=\mu+\sigma\cdot u_p$，故 $t_p=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_p}$。

（2）中位数

$$t_{0.5}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.5}}=\mathrm{e}^{4.1271+0}\approx 62\,;$$

（3）0.95 分位数

$$t_{0.95}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.95}}=\mathrm{e}^{4.1271+1.0364\times 1.6449}\approx 341\,。$$

12．某种绝缘材料的使用寿命 T（单位：小时）服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$。若已知分位数 $t_{0.2}=5000$ 小时，$t_{0.8}=65000$ 小时，求 μ 和 σ。

解：因 T 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，有 $\ln T$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，由第 11 题可知 $t_p=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_p}$，则

$$t_{0.2}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.2}}=\mathrm{e}^{\mu-0.8416\sigma}=5000\,,\quad t_{0.8}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.8}}=\mathrm{e}^{\mu+0.8416\sigma}=65000\,,$$

可得

$$\mu-0.8416\sigma=\ln 5000=8.5172\,,\quad \mu+0.8416\sigma=\ln 65000=11.0821\,,$$

故 $\mu=9.7997$，$\sigma=1.5239$。

13．某厂决定按过去生产状况对月生产额最高的 5%的工人发放高产奖。已知过去每人每月生产额 X（单位：千克）服从正态分布 $N(4000,60^2)$，试问高产奖发放标准应把生产额定为多少？

解：因 X 服从正态分布 $N(4000,60^2)$，则

$$0.95=P\{X\le x_{0.95}\}=F(x_{0.95})=\Phi\left(\frac{x_{0.95}-4000}{60}\right),$$

即

$$\frac{x_{0.95}-4000}{60}=u_{0.95}=1.6449\,,$$

故高产奖发放标准应把生产额定为

$$x_{0.95}=4000+60\times 1.6449=4098.6940\text{ 千克。}$$