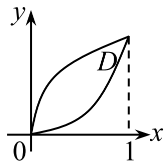
补充题参考答案

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\le Y;\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

（1）写出 (X,Y) 的概率密度；

（2）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（3）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$。

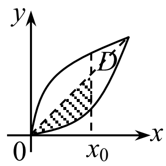


解：（1）区域 D 的面积

$$S_D=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3},$$

故 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

（2）因 U 为离散随机变量，X 为连续随机变量，则 U 与 X 相互独立当且仅当对任意实数 u 与 x 都成立 $P\{U=u,X\le x\}=P\{U=u\}P\{X\le x\}$，取 $u=0, x=x_0\in(0,1)$，有



$$P\{U=0,X\le x_0\}=P\{X>Y,X\le x_0\}=\int_0^{x_0}dx\int_{x^2}^{x}3dy=\int_0^{x_0}3(x-x^2)dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}x^2-x^3\right)\Big|_0^{x_0}=\frac{3}{2}x_0^2-x_0^3,$$

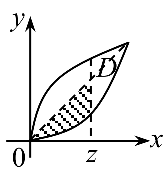
$$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}3dy=\int_0^1 3(x-x^2)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$P\{X\le x_0\}=\int_0^{x_0}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=\int_0^{x_0}3(\sqrt{x}-x^2)dx=(2x^{\frac{3}{2}}-x^3)\Big|_0^{x_0}=2x_0^{\frac{3}{2}}-x_0^3,$$

一般地，$P\{U=0\}P\{X\le x_0\}=x_0^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x_0^3\ne\frac{3}{2}x_0^2-x_0^3=P\{U=0,X\le x_0\}$，故 U 与 X 不是相互独立。

（3）因

$$F(z)=P\{U+X\le z\}=P\{U=0,X\le z\}+P\{U=1,X\le z-1\}$$
$$=P\{X>Y,X\le z\}+P\{X\le Y,X\le z-1\},$$

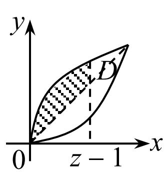


对于 $P\{X>Y,X\le z\}$，可知 z 的分段点为 0、1。

当 $z<0$ 时，$P\{X>Y,X\le z\}=0$；

当 $0\le z<1$ 时，$P\{X>Y,X\le z\}=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3dy=\frac{3}{2}z^2-z^3$；

当 $z\ge1$ 时，$P\{X>Y,X\le z\}=\frac{1}{2}$。



对于 $P\{X\le Y,X\le z-1\}$，可知 z 的分段点为 1、2。

当 $z<1$ 时，$P\{X\le Y,X\le z-1\}=0$；

当 $1\le z<2$ 时，$P\{X\le Y,X\le z-1\}=\int_0^{z-1}dx\int_{x}^{\sqrt{x}}3dy=2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$；

当 $z\ge2$ 时，$P\{X\le Y,X\le z-1\}=\frac{1}{2}$。

故

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1;\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$