习题 3.3

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0.05	0.15	0.20
1	0.07	0.11	0.22
2	0.04	0.07	0.09

试分别求 $U=\max\{X, Y\}$ 和 $V=\min\{X, Y\}$ 的分布列。

解： 因

$$P\{U=1\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=1\}=0.05+0.07=0.12,$$

$$\begin{aligned}P\{U=2\}&=P\{X=0, Y=2\}+P\{X=1, Y=2\}+P\{X=2, Y=1\}+P\{X=2, Y=2\}\\&=0.15+0.11+0.04+0.07=0.37,\end{aligned}$$

$$P\{U=3\}=P\{X=0, Y=3\}+P\{X=1, Y=3\}+P\{X=2, Y=3\}=0.20+0.22+0.09=0.51,$$

故 $U=\max\{X, Y\}$ 的分布列为

U	1	2	3
P	0.12	0.37	0.51

因

$$P\{V=0\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=0, Y=2\}+P\{X=0, Y=3\}=0.05+0.15+0.20=0.40,$$

$$\begin{aligned}P\{V=1\}&=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=2\}+P\{X=1, Y=3\}+P\{X=2, Y=1\}\\&=0.07+0.11+0.22+0.04=0.44,\end{aligned}$$

$$P\{V=2\}=P\{X=2, Y=2\}+P\{X=2, Y=3\}=0.07+0.09=0.16,$$

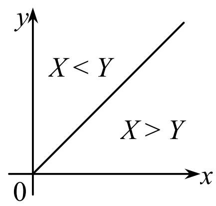
故 $V=\min\{X, Y\}$ 的分布列为

V	0	1	2
P	0.40	0.44	0.16

2. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 $X \sim Exp(\lambda)$，$Y \sim Exp(\mu)$。如果定义随机变量 Z 如下

$$Z=\begin{cases}1, & \text{当} X \le Y;\\ 0, & \text{当} X > Y.\end{cases}$$

求 Z 的分布列。



解： 因 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mu\,\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}, & x>0, y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$P\{Z=1\}=P\{X \le Y\}=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}\lambda\mu\,\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}\,dy=\int_0^{+\infty}dx\cdot(-\lambda)\,\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}\Big|_x^{+\infty}$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\,dx=-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

故 Z 的分布列为

Z	0	1
P	$\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

3. 设随机变量 X 和 Y 的分布列分别为

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Y	0	1
P	$1/2$	$1/2$

已知 $P\{XY=0\}=1$，试求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布列。

解：因 $P\{XY=0\}=1$，有 $P\{XY\neq 0\}=0$，即

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0,$$

则 (X,Y) 的分布列为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1			$1/4$
0			$1/2$
1			$1/4$
$p_{\cdot j}$	$1/2$	$1/2$	

$\longrightarrow$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	0	$1/2$	$1/2$
1	$1/4$	0	$1/4$
$p_{\cdot j}$	$1/2$	$1/2$	

因

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4},$$

故 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布列为

Z	0	1
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

4. 设随机变量 X、Y 独立同分布，在以下情况下求随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布列。

（1） X 服从 $p=0.5$ 的 $(0-1)$ 分布；

（2） X 服从几何分布，即 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$。

解：（1） (X,Y) 的分布列为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.25	0.5
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5	

因

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0.25,$$
$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=0.75,$$

故 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布列为

Z	0	1
P	0.25	0.75

（2）因

$$P\{X \le k\} = \sum_{i=1}^{k} P\{X = i\} = \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} p = \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} p = 1-(1-p)^k ,$$

则

$$P\{Z \le k\} = P\{X \le k, Y \le k\} = P\{X \le k\}P\{Y \le k\} = [1-(1-p)^k]^2 ,$$

$$P\{Z = k\} = P\{Z \le k\} - P\{Z \le k-1\} = [1-(1-p)^k]^2 - [1-(1-p)^{k-1}]^2$$

$$= [1-(1-p)^k - 1 + (1-p)^{k-1}][1-(1-p)^k + 1 - (1-p)^{k-1}]$$

$$= (1-p)^{k-1} p \cdot [2-(1-p)^k - (1-p)^{k-1}], \quad k = 1, 2, \cdots 。$$

故 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布列为

$$P\{Z = k\} = (1-p)^{k-1} p \cdot [2-(1-p)^k - (1-p)^{k-1}], \quad k = 1, 2, \cdots 。$$

5． 设 X 和 Y 为两个随机变量，且

$$P\{X \ge 0, Y \ge 0\} = \frac{3}{7}, \quad P\{X \ge 0\} = P\{Y \ge 0\} = \frac{4}{7},$$

试求 $P\{\max\{X, Y\} \ge 0\}$ 。

解：设 A 表示事件“ $X \ge 0$ ”，B 表示事件“ $Y \ge 0$ ”，有

$$P(AB) = \frac{3}{7}, \quad P(A) = P(B) = \frac{4}{7},$$

故

$$P\{\max\{X,Y\} \ge 0\} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7} 。$$

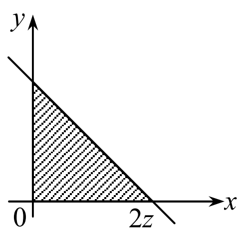
6． 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数：（1） $Z = (X+Y)/2$；（2） $Z = Y - X$ 。

解：方法一：分布函数法。

（1）对于 $Z = \dfrac{X+Y}{2}$ ，作曲线簇 $\dfrac{x+y}{2} = z$ ，得 z 的分段点为 0。



当 $z < 0$ 时， $F_Z(z) = 0$ ，

当 $z \ge 0$ 时， $F_Z(z) = \int_0^{2z} dx \int_0^{2z-x} e^{-(x+y)} dy = \int_0^{2z} dx \cdot [-e^{-(x+y)}]\Big|_0^{2z-x}$

$$= \int_0^{2z} (-e^{-2z} + e^{-x}) dx = (-e^{-2z} x - e^{-x})\Big|_0^{2z} = 1-(2z+1)e^{-2z} ,$$

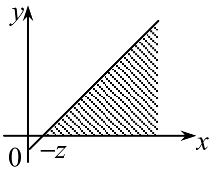
可知 $F_Z(z)$ 连续， Z 是连续随机变量，故 $Z = \dfrac{X+Y}{2}$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 4z e^{-2z}, & z > 0; \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

（2）对于 $Z = Y - X$ ，作曲线簇 $y - x = z$ ，得 z 的分段点为 0。

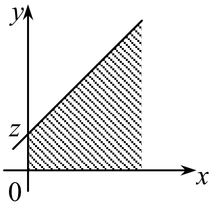
当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\int_{-z}^{+\infty}dx\int_0^{x+z}\mathrm{e}^{-(x+y)}dy=\int_{-z}^{+\infty}dx\cdot[-\mathrm{e}^{-(x+y)}]\Big|_0^{x+z}=\int_{-z}^{+\infty}[-\mathrm{e}^{-(2x+z)}+\mathrm{e}^{-x}]dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(2x+z)}-\mathrm{e}^{-x}\right]\Bigg|_{-z}^{+\infty}=-\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{z}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z},$$



当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=\int_{0}^{+\infty}dx\int_0^{x+z}\mathrm{e}^{-(x+y)}dy=\int_{0}^{+\infty}dx\cdot[-\mathrm{e}^{-(x+y)}]\Big|_0^{x+z}=\int_{0}^{+\infty}[-\mathrm{e}^{-(2x+z)}+\mathrm{e}^{-x}]dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(2x+z)}-\mathrm{e}^{-x}\right]\Bigg|_{0}^{+\infty}=-\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}-1\right]=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z},$$

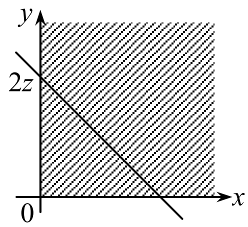


可知 $F_Z(z)$ 连续，Z 是连续随机变量，故 $Z=Y-X$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0;\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 0.\end{cases}$$

方法二：密度函数法。

（1）对于 $Z=\dfrac{X+Y}{2}$，函数 $z=\dfrac{x+y}{2}$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单增，反函数 $x=h(z,y)=2z-y$，偏导数 $h_z(z,y)=2$。则



$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(h(z,y),y)\cdot|h_z(z,y)|\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}2p(2z-y,y)dy。$$

作曲线簇 $\dfrac{x+y}{2}=z$，得 z 的分段点为 0，

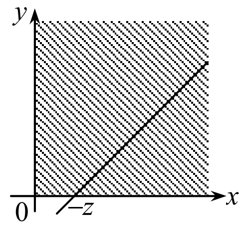
当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$p_Z(z)=\int_0^{2z}2\mathrm{e}^{-2z}dy=4z\mathrm{e}^{-2z}$，

故 $Z=\dfrac{X+Y}{2}$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}4z\mathrm{e}^{-2z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

（2）对于 $Z=Y-X$，函数 $z=y-x$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单减，反函数 $x=h(z,y)=y-z$，偏导数 $h_z(z,y)=-1$。则

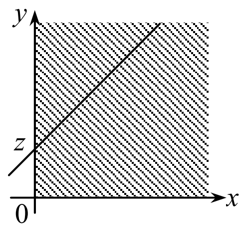


$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(h(z,y),y)\cdot|h_z(z,y)|\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y-z,y)dy。$$

作曲线簇 $y-x=z$，得 z 的分段点为 0，

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y+z}dy=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y+z}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}$，

当 $z>0$ 时，$p_Z(z)=\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y+z}dy=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y+z}\Big|_z^{+\infty}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}$，



故 $Z=Y-X$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z>0.\end{cases}$$

7. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

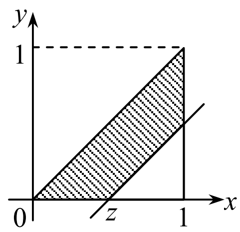
$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求 $Z=X-Y$ 的密度函数。

解：方法一：分布函数法。

对于 $Z=X-Y$，作曲线簇 $x-y=z$，得 z 的分段点为 $0,1$。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，



当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^x 3xdy+\int_z^1 dx\int_{x-z}^x 3xdy=\int_0^z 3x^2dx+\int_z^1 3xzdx$

$$=x^3\Big|_0^z+\frac{3}{2}x^2z\Big|_z^1=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3,$$

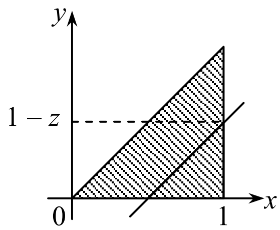
当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$，

可知 $F_Z(z)$ 连续，Z 是连续随机变量，故 $Z=X-Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

方法二：密度函数法。

对于 $Z=X-Y$，函数 $z=x-y$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单增，反函数 $x=h(z,y)=z+y$，偏导数 $h_z(z,y)=1$。则



$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(h(z,y),y)\cdot|h_z(z,y)|dy=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+y,y)dy。$$

作曲线簇 $x-y=z$，得 z 的分段点为 $0,1$，

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 1$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $0<z<1$ 时，$p_Z(z)=\int_0^{1-z}3(z+y)dy=\frac{3}{2}(z+y)^2\Big|_0^{1-z}=\frac{3}{2}(1-z^2)$，

故 $Z=X-Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

8. 某种商品一周的需要量是一个随机变量，其密度函数为

$$p_1(t)=\begin{cases}t\,\mathrm{e}^{-t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

设各周的需要量是相互独立的，试求

（1）两周需要量的密度函数 $p_2(x)$；（2）三周需要量的密度函数 $p_3(x)$。

解：方法一：根据独立伽玛变量之和仍为伽玛变量。

设T_i表示该种商品第i周的需要量，因T_i的密度函数为

$$p_1(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(2)}t^{2-1}\,\mathrm{e}^{-t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

可知T_i服从伽玛分布$Ga(2,1)$。

（1）两周需要量为T_1+T_2，因T_1与T_2相互独立且都服从伽玛分布$Ga(2,1)$，由伽玛分布可加性可知T_1+T_2服从伽玛分布$Ga(4,1)$，$p_2(x)=\dfrac{1}{\Gamma(4)}x^{4-1}\,\mathrm{e}^{-x},\quad x>0$，即密度函数为

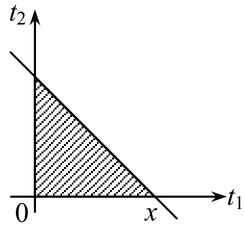
$$p_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（2）三周需要量为$T_1+T_2+T_3$，因T_1,T_2,T_3相互独立且都服从伽玛分布$Ga(2,1)$，由伽玛分布可加性可知$T_1+T_2+T_3$服从伽玛分布$Ga(6,1)$，$p_2(x)=\dfrac{1}{\Gamma(6)}x^{6-1}\,\mathrm{e}^{-x},\quad x>0$，即密度函数为

$$p_3(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{120}x^5\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

方法二：分布函数法。

（1）两周需要量为$X_2=T_1+T_2$，作曲线簇$t_1+t_2=x$，得x的分段点为0。



当$x<0$时，$F_2(x)=0$，

当$x\ge 0$时，$F_2(x)=\int_0^x dt_1\int_0^{x-t_1} t_1\,\mathrm{e}^{-t_1}\cdot t_2\,\mathrm{e}^{-t_2}\,dt_2=\int_0^x dt_1\cdot t_1\,\mathrm{e}^{-t_1}(-t_2\,\mathrm{e}^{-t_2}-\mathrm{e}^{-t_2})\Big|_0^{x-t_1}$

$$=\int_0^x[(t_1^2-xt_1-t_1)\,\mathrm{e}^{-x}+t_1\,\mathrm{e}^{-t_1}]dt_1=\left[\left(\frac{1}{3}t_1^3-\frac{1}{2}t_1^2x-\frac{1}{2}t_1^2\right)\mathrm{e}^{-x}-t_1\,\mathrm{e}^{-t_1}-\mathrm{e}^{-t_1}\right]_0^x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}-(-1)=1-\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x},$$

可知$F_2(x)$连续，X_2是连续随机变量，故$X_2=T_1+T_2$的密度函数为

$$p_2(x)=F_2'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（2）三周需要量为$X_3=T_1+T_2+T_3=X_2+T_3$，作曲线簇$x_2+t_3=x$，得x的分段点为0。

当$x<0$时，$F_2(x)=0$，

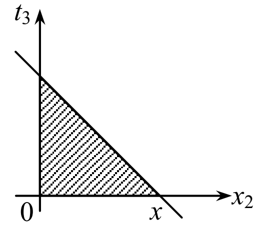
当$x\ge 0$时，$F_3(x)=\int_0^x dx_2\int_0^{x-x_2}\frac{1}{6}x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}\cdot t_3\,\mathrm{e}^{-t_3}\,dt_3=\int_0^x dx_2\cdot\frac{1}{6}x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}(-t_3\,\mathrm{e}^{-t_3}-\mathrm{e}^{-t_3})\Big|_0^{x-x_2}$

$$=\frac{1}{6}\int_0^x[(x_2^4-x_2^3x-x_2^3)\,\mathrm{e}^{-x}+x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}]dx_2$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{5}x_2^5-\frac{1}{4}x_2^4x-\frac{1}{4}x_2^4\right)\mathrm{e}^{-x}-x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}-3x_2^2\,\mathrm{e}^{-x_2}-6x_2\,\mathrm{e}^{-x_2}-6\,\mathrm{e}^{-x_2}\right]\Bigg|_0^x$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^5-\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}-(-1)$$

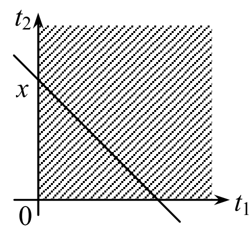
$$=1-\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{24}x^4\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{120}x^5\,\mathrm{e}^{-x}\text{，}$$



可知$F_3(x)$连续，X_3是连续随机变量，故$X_3=T_1+T_2+T_3=X_2+T_3$的密度函数为

$$p_3(x)=F_3'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{120}x^5\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

方法三：密度函数法（卷积公式）。



（1）两周需要量为$X_2=T_1+T_2$，且T_1与T_2相互独立，卷积公式

$$p_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{T_1}(x-t_2)p_{T_2}(t_2)dt_2\text{。}$$

作曲线簇$t_1+t_2=x$，得x的分段点为 0。

当$x\le 0$时，$p_2(x)=0$，

当$x>0$时，$p_2(x)=\int_0^x(x-t_2)\,\mathrm{e}^{-(x-t_2)}\cdot t_2\,\mathrm{e}^{-t_2}\,dt_2=\int_0^x(xt_2-t_2^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dt_2$

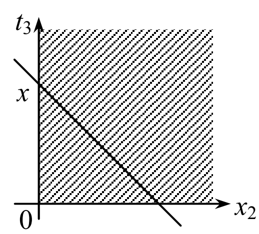
$$=\left(\frac{1}{2}t_2^2x-\frac{1}{3}t_2^3\right)\mathrm{e}^{-x}\Bigg|_0^x=\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}\text{，}$$

故$X_2=T_1+T_2$的密度函数为

$$p_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（2）三周需要量为$X_3=T_1+T_2+T_3=X_2+T_3$，且$X_2=T_1+T_2$与T_3相互独立，卷积公式

$$p_3(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X_2}(x-t_3)p_{T_3}(t_3)dt_3\text{。}$$



作曲线簇$x_2+t_3=x$，得x的分段点为 0。

当$x\le 0$时，$p_3(x)=0$，

当$x>0$时，$p_3(x)=\int_0^x\frac{1}{6}(x-t_3)^3\,\mathrm{e}^{-(x-t_3)}\,t_3\,\mathrm{e}^{-t_3}\,dt_3=\int_0^x\frac{1}{6}(x^3t_3-3x^2t_3^2+3xt_3^3-t_3^4)\,\mathrm{e}^{-x}\,dt_3$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}t_3^2x^3-t_3^3x^2+\frac{3}{4}t_3^4x-\frac{1}{5}t_3^5\right)\mathrm{e}^{-x}\Bigg|_0^x=\frac{1}{120}x^5\,\mathrm{e}^{-x}\text{，}$$

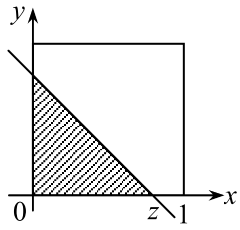
故 $X_3 = T_1 + T_2 + T_3 = X_2 + T_3$ 的密度函数为

$$p_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{120} x^5 \mathrm{e}^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，试在以下情况下求 $Z = X + Y$ 的密度函数：

（1） $X \sim U(0,1)$， $Y \sim U(0,1)$； （2） $X \sim U(0,1)$， $Y \sim Exp(1)$ 。

解：方法一：分布函数法。



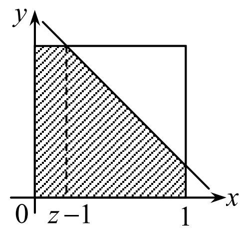
（1）作曲线簇 $x + y = z$ ，得 z 的分段点为 $0, 1, 2$ 。

当 $z < 0$ 时， $F_Z(z) = 0$ ，

当 $0 \le z < 1$ 时， $F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 1 dy = \int_0^z (z - x) dx = \left(zx - \dfrac{1}{2} x^2 \right)\Big|_0^z = \dfrac{1}{2} z^2$ ，

当 $1 \le z < 2$ 时，$F_Z(z) = \int_0^{z-1} dx \int_0^1 1 dy + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} 1 dy = \int_0^{z-1} 1 dx + \int_{z-1}^1 (z - x) dx = z - 1 - \dfrac{1}{2} (z - x)^2 \Big|_{z-1}^1$

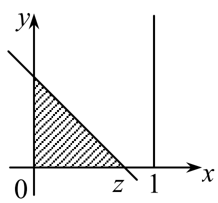
$$= z - 1 - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{2} = 2z - \frac{1}{2} z^2 - 1,$$

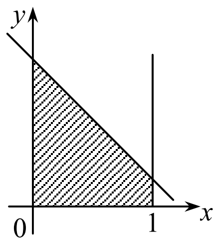


当 $z \ge 2$ 时， $F_Z(z) = 1$ ，

可知 $F_Z(z)$ 连续， Z 是连续随机变量，故 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z < 1; \\ 2 - z, & 1 \le z < 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$





（2）作曲线簇 $x + y = z$ ，得 z 的分段点为 $0, 1$ 。

当 $z < 0$ 时， $F_Z(z) = 0$ ，

当 $0 \le z < 1$ 时， $F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \mathrm{e}^{-y} dy = \int_0^z dx \cdot (-\mathrm{e}^{-y}) \Big|_0^{z-x} = \int_0^z (1 - \mathrm{e}^{-z+x}) dx$

$$= (x - \mathrm{e}^{-z+x}) \Big|_0^z = z - 1 + \mathrm{e}^{-z},$$

当 $z \ge 1$ 时， $F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_0^{z-x} \mathrm{e}^{-y} dy = \int_0^1 dx \cdot (-\mathrm{e}^{-y}) \Big|_0^{z-x} = \int_0^1 (1 - \mathrm{e}^{-z+x}) dx$

$$= (x - \mathrm{e}^{-z+x}) \Big|_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{1-z} + \mathrm{e}^{-z},$$

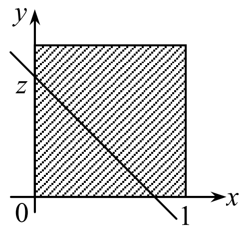
可知 $F_Z(z)$ 连续， Z 是连续随机变量，故 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-z}, & 0 \le z < 1; \\ (\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-z}, & z \ge 1; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

方法二：密度函数法（卷积公式）。

因 $Z = X + Y$ ，且 X 与 Y 相互独立，卷积公式

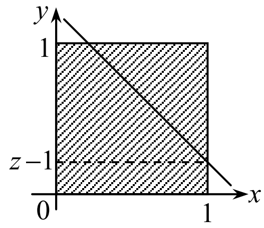
$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy\text{。}$$



（1）作曲线簇 $x+y=z$，得 z 的分段点为 $0,1,2$。

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时，$p_Z(z)=0$，

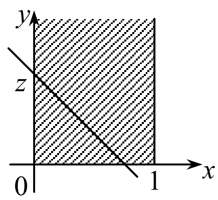
当 $0<z<1$ 时，$p_Z(z)=\int_0^z 1dy=z$，



当 $1\le z<2$ 时，$p_Z(z)=\int_{z-1}^1 1dy=2-z$，

故 $Z=X+Y$ 的密度函数为

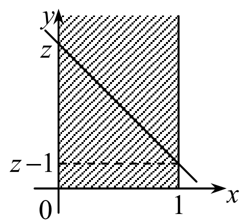
$$p_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1;\\ 2-z, & 1\le z<2;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



（2）作曲线簇 $x+y=z$，得 z 的分段点为 $0,1$。

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $0<z<1$ 时，$p_Z(z)=\int_0^z \mathrm{e}^{-y}\,dy=(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^z=1-\mathrm{e}^{-z}$，



当 $z\ge 1$ 时，$p_Z(z)=\int_{z-1}^z \mathrm{e}^{-y}\,dy=(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{z-1}^z=-\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{e}^{-z+1}=(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}$，

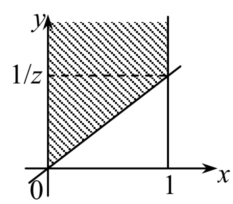
故 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1;\\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 1;\\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

10．设随机变量 X 与 Y 相互独立，试在以下情况下求 $Z=X/Y$ 的密度函数：

（1）$X\sim U(0,1)$，$Y\sim Exp(1)$；　（2）$X\sim Exp(\lambda_1)$，$Y\sim Exp(\lambda_2)$。

解：方法一：分布函数法。



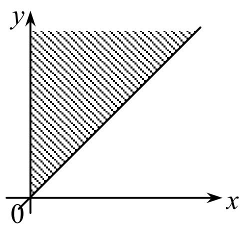
（1）作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，即直线簇 $y=\dfrac{x}{z}$，得 z 的分段点为 0。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{z}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{\frac{x}{z}}^{+\infty}=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{z}}\,dx=z(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}})$，

可知 $F_Z(z)$ 连续，Z 是连续随机变量，故 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}, & z>0;\\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$



（2）作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，即直线簇 $y=\dfrac{x}{z}$，得 z 的分段点为 0。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $z \ge 0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^{+\infty}dx\int_{\frac{x}{z}}^{+\infty}\lambda_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\cdot\lambda_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\,dy=\int_0^{+\infty}dx\cdot\lambda_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\cdot(-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y})\Big|_{\frac{x}{z}}^{+\infty}$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_2 x}{z}}\,dx=\int_0^{+\infty}\lambda_1\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{z})x}\,dx=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\dfrac{\lambda_2}{z}}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{z})x}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\lambda_1 z}{\lambda_1 z+\lambda_2},$$

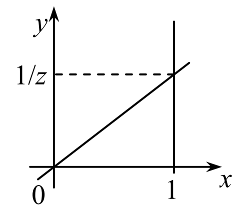
可知 $F_Z(z)$ 连续，Z 是连续随机变量，故 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z+\lambda_2)^2}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

方法二：密度函数法。

对于 $Z=\dfrac{X}{Y}$，函数 $z=\dfrac{x}{y}$ 对任意固定的 $y\ne 0$ 关于 x 严格单调，反函数 $x=h(z,y)=yz$，偏导数 $h_z(z,y)=y$。则

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(zy,y)\cdot|y|\,dy。$$



（1）作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，即直线簇 $y=\dfrac{x}{z}$，得 z 的分段点为 0。

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$p_Z(z)=\int_0^{\frac{1}{z}}\mathrm{e}^{-y}\cdot y\,dy=-(y+1)\,\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{\frac{1}{z}}=-\left(\dfrac{1}{z}+1\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}+1=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}$，

故 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为

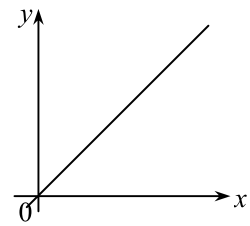
$$p_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

（2）作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，即直线簇 $y=\dfrac{x}{z}$，得 z 的分段点为 0。

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$p_Z(z)=\int_0^{+\infty}\lambda_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 zy}\cdot\lambda_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\cdot y\,dy=-\lambda_1\lambda_2\left[\dfrac{y}{\lambda_1 z+\lambda_2}+\dfrac{1}{(\lambda_1 z+\lambda_2)^2}\right]\mathrm{e}^{-(\lambda_1 z+\lambda_2)y}\Bigg|_0^{+\infty}$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z+\lambda_2)^2},$$



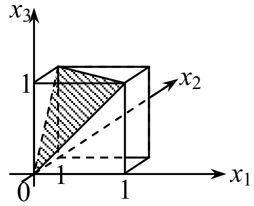
故 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z+\lambda_2)^2}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

11．设 X_1, X_2, X_3 为相互独立的随机变量，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，求三者中最大者大于其他两

者之和的概率。

解：设 A_i 分别表示 X_i 大于其他两者之和，$i=1,2,3$。显然 A_1, A_2, A_3 两两互不相容，且由对称性可知 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)$，则



$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=3P(A_3)=3P(X_3>X_1+X_2)。$$

因 X_1, X_2, X_3 相互独立且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，则由几何概型知

$$P\{X_3>X_1+X_2\}=\frac{\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{6},$$

故

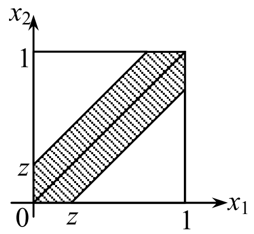
$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=3P\{X_3>X_1+X_2\}=\frac{1}{2}。$$

12．设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求 $Z=\max\{X_1, X_2\}-\min\{X_1, X_2\}$ 的分布。

解：分布函数法。二维随机变量 (X_1, X_2) 的联合密度函数为



$$p(x_1,x_2)=\begin{cases}4x_1x_2, & 0<x_1<1, 0<x_2<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因 $Z=\max\{X_1, X_2\}-\min\{X_1, X_2\}=|X_1-X_2|$，作曲线簇 $|x_1-x_2|=z$，得 z 的分段点为 $0,1$。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=1-2\int_z^1 dx_1\int_0^{x_1-z}4x_1x_2dx_2=1-2\int_z^1 dx_1\cdot 2x_1x_2^2\Big|_0^{x_1-z}$

$$=1-4\int_z^1(x_1^3-2zx_1^2+z^2x_1)dx_1=1-4\left(\frac{x_1^4}{4}-\frac{2zx_1^3}{3}+\frac{z^2x_1^2}{2}\right)\Bigg|_z^1$$

$$=1-4\left(\frac{1}{4}-\frac{2z}{3}+\frac{z^2}{2}\right)+4\left(\frac{z^4}{4}-\frac{2z^4}{3}+\frac{z^4}{2}\right)=\frac{8z}{3}-2z^2+\frac{z^4}{3},$$

当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$，

可知 $F_Z(z)$ 连续，Z 是连续随机变量，故 $Z=\max\{X_1, X_2\}-\min\{X_1, X_2\}=|X_1-X_2|$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{8}{3}-4z+\frac{4z^3}{3}, & 0<z<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

13．设某一个设备装有 3 个同类的电器元件，元件工作相互独立，且工作时间都服从参数为 λ 的指数分布。当 3 个元件都正常工作时，设备才正常工作。试求设备正常工作时间 T 的概率分布。

解：设 T_i 表示第 i 个元件正常工作，有 T_i 服从指数分布 $Exp(\lambda)$，分布函数为

$$F_i(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}\quad i=1,2,3\,,$$

则设备正常工作时间 $T=\min\{T_1,T_2,T_3\}$，分布函数和密度函数分别为

$$F_T(t)=1-[1-F_1(t)][1-F_2(t)][1-F_3(t)]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

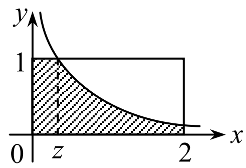
$$p_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}3\lambda\,\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

故设备正常工作时间 $T=\min\{T_1,T_2,T_3\}$ 服从参数为 3λ 的指数分布。

14．设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，试求边长分别为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的密度函数。

解：二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



方法一：分布函数法。

矩形面积 $Z=XY$，作曲线族 $xy=z$，得 z 的分段点为 $0, 2$。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

$$\text{当 } 0\le z<2 \text{ 时，}\ F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^1\frac{1}{2}dy+\int_z^2 dx\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}dy=\int_0^z\frac{1}{2}dx+\int_z^2\frac{z}{2x}dx$$

$$=\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\ln x\Big|_z^2=\frac{z}{2}+\frac{z}{2}(\ln 2-\ln z)\,,$$

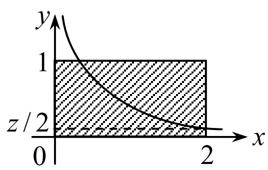
当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

可知 $F_Z(z)$ 连续，Z 是连续随机变量，故矩形面积 $Z=XY$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{z}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

方法二：密度函数法。

矩形面积 $Z=XY$，函数 $z=xy$ 对任意固定的 $y\ne 0$ 关于 x 严格单调，反函数 $x=h(z,y)=\dfrac{z}{y}$，偏导数 $h_z(z,y)=\dfrac{1}{y}$。则



$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(\frac{z}{y},y\right)\cdot\left|\frac{1}{y}\right|dy\,,$$

作曲线族 $xy=z$，得 z 的分段点为 $0,2$。

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $0<z<2$ 时，$p_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}\frac{1}{2y}dy=\frac{1}{2}\ln y\big|_{\frac{z}{2}}^{1}=0-\frac{1}{2}\ln\frac{z}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{z}$，

故矩形面积 $Z=XY$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{2}{z}, & 0<z<2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

15．设二维随机变量 (X,Y) 服从圆心在原点的单位圆内的均匀分布，求极坐标

$$R=\sqrt{X^2+Y^2},\quad \theta=\arctan(Y/X),$$

的联合密度函数。

注：此题有误，对于极坐标，不是 $\theta=\arctan(Y/X)$，应改为 $\tan\theta=Y/X$，$0\le\theta<2\pi$。

解： 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0\le x^2+y^2<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因二元函数组 $r=\sqrt{x^2+y^2},\tan\theta=\frac{y}{x}$，反函数 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

且当 $x^2+y^2<1$ 时，有 $0\le r<1, 0\le\theta<2\pi$，故 (R,θ) 的联合密度函数为

$$p_{R\theta}(r,\theta)=p_{XY}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot|r|=\begin{cases}\frac{r}{\pi}, & 0\le r<1,0\le\theta<2\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

16．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（1）求 $U=X+Y$ 与 $V=X/(X+Y)$ 的联合密度函数 $p_{UV}(u,v)$；

（2）以上的 U 与 V 独立吗？

解： 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）因二元函数组 $u=x+y, v=\frac{x}{x+y}$，反函数 $x=uv, y=u(1-v)$，雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u,$$

且当 $x>0,y>0$ 时，有 $u>0, 0<v<1$，故 (U,V) 的联合密度函数为

$$p_{UV}(u,v)=p_{XY}(uv,u(1-v))\cdot|(-u)|=\begin{cases}u\,\mathrm{e}^{-u}, & u>0,0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）支撑区域 $D=\{(u,v)\,|\,u>0,0<v<1\}:0<u<+\infty,0<v<1$。当 $0<u<+\infty$ 时，

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)dv=\int_0^1 u\,\mathrm{e}^{-u}\,dv=u\,\mathrm{e}^{-u},\quad u>0。$$

又支撑区域 $D:0<v<1,0<u<+\infty$。当 $0<v<1$ 时，

$$p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)du=\int_0^{+\infty}u\,\mathrm{e}^{-u}\,du=\Gamma(2)=1,\quad 0<v<1。$$

可见 $p_{UV}(u,v)=p_U(u)p_V(v)$，故 U 与 V 相互独立。

17．设 X,Y 独立同分布，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，试证：$U=X^2+Y^2$ 与 $V=X/Y$ 相互独立。

证明：二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

因二元函数组 $u=x^2+y^2,v=\dfrac{x}{y}$，在 $y>0$ 条件下，反函数 $x=\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u},y=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}$，雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & \dfrac{1}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & -\dfrac{v}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2(1+v^2)},$$

且 $-\infty<x<+\infty,0<y<+\infty$ 时，有 $0<u<+\infty,-\infty<v<+\infty$，则

$$p_{UV}^{(1)}(u,v)=p_{XY}\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u},\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\right)\cdot\left|-\frac{1}{2(1+v^2)}\right|=\frac{1}{4\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}},\quad u>0;$$

因二元函数组 $u=x^2+y^2,v=\dfrac{x}{y}$，在 $y<0$ 条件下，反函数 $x=-\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u},y=-\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}$，雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & -\dfrac{1}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & \dfrac{v}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2(1+v^2)},$$

且 $-\infty<x<+\infty,-\infty<y<0$ 时，有 $0<u<+\infty,-\infty<v<+\infty$，则

$$p_{UV}^{(2)}(u,v)=p_{XY}\left(-\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u},-\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\right)\cdot\left|-\frac{1}{2(1+v^2)}\right|=\frac{1}{4\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}},\quad u>0。$$

故 (U,V) 的联合密度函数为

$$p_{UV}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi(1+v^2)}e^{-\frac{u}{2}}, & u>0;\\ 0, & u\le 0.\end{cases}$$

支撑区域 $D=\{(u,v)\,|\,u>0\}:0<u<+\infty,-\infty<v<+\infty$。当 $0<u<+\infty$ 时，

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi(1+v^2)}e^{-\frac{u}{2}}dv=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u}{2}}\cdot\arctan v\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}},\quad u>0\text{。}$$

又支撑区域 $D:-\infty<v<+\infty,0<u<+\infty$。当 $-\infty<v<+\infty$ 时，

$$p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)du=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi(1+v^2)}e^{-\frac{u}{2}}du=-\frac{1}{\pi(1+v^2)}e^{-\frac{u}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\pi(1+v^2)}\text{。}$$

可见 $p_{UV}(u,v)=p_U(u)p_V(v)$，故 U 与 V 相互独立。

18．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$。试证 $U=X+Y$ 与 $V=X/(X+Y)$ 相互独立，且 $V\sim Be(\alpha_1,\alpha_2)$。

证明： 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}e^{-\lambda(x+y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因二元函数组 $u=x+y,v=\dfrac{x}{x+y}$，反函数 $x=uv,y=u(1-v)$，雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u\,,$$

且当 $x>0,y>0$ 时，有 $u>0,0<v<1$，故 (U,V) 的联合密度函数为

$$p_{UV}(u,v)=p_{XY}(uv,u(1-v))\cdot|(-u)|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(uv)^{\alpha_1-1}[u(1-v)]^{\alpha_2-1}e^{-\lambda u}\cdot|-u|, & u>0,0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda u}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}, & u>0,0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

支撑区域 $D=\{(u,v)\,|\,u>0,0<v<1\}:0<u<+\infty,0<v<1$。当 $0<u<+\infty$ 时，

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)dv=\int_0^1\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda u}\cdot v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}dv$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda u}\int_0^1 v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}dv$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda u},\quad u>0\text{。}$$

又支撑区域 $D: 0<v<1, 0<u<+\infty$ 。当 $0<v<1$ 时，

$$p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)du=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}du$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}\cdot\int_0^{+\infty}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda u}du$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1},\quad 0<v<1\text{。}$$

则

$$p_V(v)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\cdot v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}, & 0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $V\sim Be(\alpha_1,\alpha_2)$，且 $p_{UV}(u,v)=p_U(u)p_V(v)$，故 U 与 V 相互独立。

19．设随机变量 U_1 与 U_2 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，试证明：

（1）$Z_1=-2\ln U_1\sim Exp(1/2)$，$Z_2=2\pi U_2\sim U(0,2\pi)$；

（2）$X=\sqrt{Z_1}\cos Z_2$ 和 $Y=\sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态随机变量。

证明：（1）对于 $Z_1=-2\ln U_1$，有 $z_1=-2\ln u_1$ 严格单减，反函数 $u_1=h(z_1)=\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}$，导数 $h'(z_1)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}$，且当 $0<u_1<1$ 时，有 $z_1>0$，可得

$$p_{Z_1}(z_1)=1\cdot\left|-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}},\quad z_1>0,$$

则 $Z_1=-2\ln U_1$ 的密度函数为

$$p_{Z_1}(z_1)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}, & z_1>0;\\ 0, & z_1\le 0.\end{cases}$$

故 $Z_1=-2\ln U_1\sim Exp(1/2)$ 。

对于 $Z_2=2\pi U_2$，有 $z_2=2\pi u_2$ 严格单增，反函数 $u_2=h(z_2)=\frac{z_2}{2\pi}$，导数 $h'(z_2)=\frac{1}{2\pi}$，且当 $0<u_2<1$ 时，有 $0<z_2<2\pi$，可得

$$p_{Z_2}(z_2)=1\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\right|=\frac{1}{2\pi},\quad 0<z_2<2\pi,$$

则 $Z_2 = 2\pi U_2$ 的密度函数为

$$p_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 < z_2 < 2\pi; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $Z_2 = 2\pi U_2 \sim U(0, 2\pi)$。

（2）因 U_1 与 U_2 相互独立，有 $Z_1 = -2\ln U_1$ 与 $Z_2 = 2\pi U_2$ 相互独立，二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的联合密度函数为

$$p_{Z_1Z_2}(z_1, z_2) = p_{Z_1}(z_1)p_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}, & z_1 > 0, 0 < z_2 < 2\pi; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因二元函数组 $x = \sqrt{z_1}\cos z_2, y = \sqrt{z_1}\sin z_2$，反函数 $z_1 = x^2 + y^2, \tan z_2 = \dfrac{y}{x}$, $(0 < z_2 < 2\pi)$，雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = 2,$$

且当 $z_1 > 0, 0 < z_2 < 2\pi$ 时，有 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$，故 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x, y) = p_{Z_1Z_2}(x^2 + y^2, \arctan\frac{y}{x})\cdot|2| = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

即 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0, 1, 1, 0)$，相关系数 $\rho = 0$，故 $X = \sqrt{Z_1}\cos Z_2$ 和 $Y = \sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态随机变量。

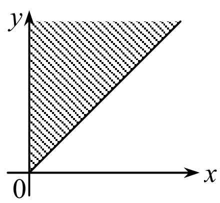
20．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$，试证：

$$P\{X_i = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}。$$

证明：因 $X_j \sim Exp(\lambda_j)$，密度函数和分布函数分别为

$$p_j(x) = \begin{cases} \lambda_j\mathrm{e}^{-\lambda_j x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \quad F_j(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_j x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, n。$$

设 $Y_i = \min\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n\}$，则 Y_i 的分布函数和密度函数分别为



$$F_{Y_i}(y) = 1 - [1 - F_1(y)]\cdots[1 - F_{i-1}(y)][1 - F_{i+1}(y)]\cdots[1 - F_n(y)]$$

$$= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)y}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

$$p_{Y_i}(y)=F_{Y_i}'(y)=\begin{cases}(\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_n)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_n)y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

故

$$P\{X_i=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\}=P\{X_i\le Y_i\}$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}\lambda_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i x}\cdot(\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_n)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_n)y}\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\cdot\lambda_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i x}\cdot[-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_n)y}]\Big|_x^{+\infty}=\int_0^{+\infty}\lambda_i\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}\,dx$$

$$=-\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}。$$

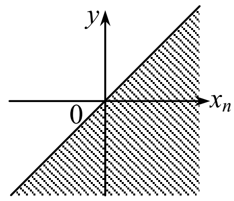
21．设连续随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，试证：

$$P\{X_n>\max\{X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\}\}=\frac{1}{n}。$$

证明：设 X_i 的密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，又设 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\}$，则 Y 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y)=[F(y)]^{n-1},$$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=(n-1)[F(y)]^{n-2}\cdot p(y),$$



故

$$P\{X_n>\max\{X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\}\}=P\{X_n>Y\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}p(x)p_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot p(x)F_Y(y)\Big|_{-\infty}^{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)F_Y(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)[F(x)]^{n-1}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[F(x)]^{n-1}dF(x)=\frac{1}{n}[F(x)]^n\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{n}。$$