# 习题 2.2

1．设离散型随机变量 $X$ 的分布列为

| $X$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

试求 $E(X)$ 和 $E(3X+5)$。

**解**：所求期望为

$$E(X)=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2\text{；}$$

$$E(3X+5)=(-1)\times 0.4+5\times 0.3+11\times 0.3=4.4\text{。}$$

2．某服装店根据历年销售资料得知：一位顾客在商店中购买服装的件数 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.10 | 0.33 | 0.31 | 0.13 | 0.09 | 0.04 |

试求顾客在商店平均购买服装件数。

**解**：平均购买服装件数为

$$E(X)=0\times 0.10+1\times 0.33+2\times 0.31+3\times 0.13+4\times 0.09+5\times 0.04=1.9\text{。}$$

3．某地区一个月内发生重大交通事故数 $X$ 服从如下分布

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.301 | 0.362 | 0.216 | 0.087 | 0.026 | 0.006 | 0.002 |

试求该地区发生重大交通事故的月平均数。

**解**：月平均数

$$E(X)=0\times 0.301+1\times 0.362+2\times 0.216+3\times 0.087+4\times 0.026+5\times 0.006+6\times 0.002=1.201\text{。}$$

4．一海运货船的甲板上放着 20 个装有化学原料的圆桶，现已知其中有 5 桶被海水污染了。若从中随机抽取 8 桶，记 $X$ 为 8 桶中被污染的桶数，试求 $X$ 的分布列，并求 $E(X)$。

**解**：$X$ 的全部可能取值为 $0,1,2,3,4,5$，且

$$P\{X=0\}=\frac{C_{15}^8}{C_{20}^8}=\frac{6435}{125970}\approx 0.0511,\quad P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_{15}^7}{C_{20}^8}=\frac{32175}{125970}\approx 0.2554,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_5^2C_{15}^6}{C_{20}^8}=\frac{50050}{125970}\approx 0.3973,\quad P\{X=3\}=\frac{C_5^3C_{15}^5}{C_{20}^8}=\frac{30030}{125970}\approx 0.2384,$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_5^4C_{15}^4}{C_{20}^8}=\frac{6825}{125970}\approx 0.0542,\quad P\{X=5\}=\frac{C_5^5C_{15}^3}{C_{20}^8}=\frac{455}{125970}\approx 0.0036,$$

故 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.0511 | 0.2554 | 0.3973 | 0.2384 | 0.0542 | 0.0036 |

且

$$E(X)\approx 0\times 0.0511+1\times 0.2554+2\times 0.3973+3\times 0.2384+4\times 0.0542+5\times 0.0036=2\text{。}$$

5．用天平称某种物品的质量（砝码仅允许放在一个盘中），现有三组砝码：（甲）$1,2,2,5,10$（g）；（乙）$1,2,3,4,10$（g）；（丙）$1,1,2,5,10$（g），称重时只能使用一组砝码。问：当物品的质量为 1g、2g、…、10g 的概率是相同的，用哪一组砝码称重所用的平均砝码数最少？

**解**：设 $X,Y,Z$ 分别表示使用甲、乙、丙组砝码称重时需要的砝码个数，当物品的质量为 1g、2g、…、 10g 时，有

$$X = 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 1,$$

即 $P\{X=1\}=0.4$，$P\{X=2\}=0.4$，$P\{X=3\}=0.2$；

$$Y = 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1,$$

即 $P\{Y=1\}=0.5$，$P\{Y=2\}=0.3$，$P\{Y=3\}=0.2$；

$$Z = 1, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 4, 1,$$

即 $P\{Z=1\}=0.4$，$P\{Z=2\}=0.3$，$P\{Z=3\}=0.2$，$P\{Z=4\}=0.1$；

平均砝码数

$$E(X)=1\times0.4+2\times0.4+3\times0.2=1.8,$$

$$E(Y)=1\times0.5+2\times0.3+3\times0.2=1.7,$$

$$E(Z)=1\times0.4+2\times0.3+3\times0.2+4\times0.1=2,$$

故用乙组砝码称重所用的平均砝码数最少。

6． 假设有十只同种电器元件，其中有两只不合格品。装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是不合格品，则扔掉重新任取一只；如仍是不合格品，则扔掉再取一只，试求在取到合格品之前，已取出的不合格品只数的数学期望。

**解**：设 $X$ 表示在取到合格品之前已取出的不合格品只数，$X$ 的全部可能取值为 $0, 1, 2$，则

$$P\{X=0\}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\quad P\{X=1\}=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{45},\quad P\{X=2\}=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8}=\frac{1}{45},$$

故

$$E(X)=0\times\frac{4}{5}+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{9}。$$

7． 对一批产品进行检查，如查到第 $a$ 件全为合格品，就认为这批产品合格；若在前 $a$ 件中发现不合格品即停止检查，且认为这批产品不合格。设产品的数量很大，可以认为每次查到不合格品的概率都是 $p$。问每批产品平均要查多少件？

**解**：设 $X$ 表示检查一批产品要查的件数，$X$ 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, a-1, a$，则

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=2\}=(1-p)p,\quad \cdots,\quad P\{X=a-1\}=(1-p)^{a-2}p,\quad P\{X=a\}=(1-p)^{a-1},$$

即

$$E(X)=p+2(1-p)p+\cdots+(a-1)(1-p)^{a-2}p+a(1-p)^{a-1},$$

$$(1-p)E(X)=p(1-p)+2(1-p)^2p+\cdots+(a-2)(1-p)^{a-2}p+(a-1)(1-p)^{a-1}p+a(1-p)^a,$$

相减可得

$$pE(X)=p+(1-p)p+\cdots+(1-p)^{a-2}p+a(1-p)^{a-1}-(a-1)(1-p)^{a-1}p-a(1-p)^a$$

$$=\frac{p[1-(1-p)^{a-1}]}{1-(1-p)}+(1-p)^{a-1}[a-(a-1)p-a(1-p)]$$

$$=1-(1-p)^{a-1}+(1-p)^{a-1}p=1-(1-p)^a,$$

故 $E(X)=\dfrac{1-(1-p)^a}{p}$。

8． 某人参加“答题秀”，一共有问题 1 和问题 2 两个问题，他可以自行决定回答这两个问题的顺序。如果他先回答问题 $i$，那么只有回答正确，他才被允许回答另一题。如果他有 60%的把握答对问题 1，而答对问题 1 将获得 200 元奖励；有 80%的把握答对问题 2，而答对问题 2 将获得 100 元奖励。问他应该先

回答哪个问题，才能使获得奖励的期望值最大化？

**解**：设答对问题$i$记为事件$A_i$，记为他先回答问题$i$获得的奖励金额为$X_i$元，$i=1,2$，有$X_1$的全部可能取值为$0,200,300$，$X_2$的全部可能取值为$0,100,300$，且

$$P\{X_1=0\}=P(\overline{A}_1)=0.4\text{，}P\{X_1=200\}=P(A_1\overline{A}_2)=0.12\text{，}P\{X_1=300\}=P(A_1A_2)=0.48\text{，}$$

$$P\{X_2=0\}=P(\overline{A}_2)=0.2\text{，}P\{X_2=100\}=P(A_2\overline{A}_1)=0.32\text{，}P\{X_2=300\}=P(A_2A_1)=0.48\text{，}$$

则

$$E(X_1)=0\times0.4+200\times0.12+300\times0.48=168\text{，}$$

$$E(X_2)=0\times0.2+100\times0.32+300\times0.48=176\text{，}$$

故$E(X_1)<E(X_2)$，他应该先回答问题 2。

9． 某人想用 10000 元投资于某股票，该股票当前价格是 2 元/股，假设一年后该股票等可能的为 1 元/股和 4 元/股。而理财顾问给他的建议是：若期望一年后所拥有的股票市值达到最大，则现在就购买；若期望一年后所拥有股票数量达到最大，则一年以后购买。试问理财顾问的建议是否正确？为什么？

**解**：设$X$表示一年后该股票的价格，$X$的全部可能取值为 1, 4。若现在就购买股票所拥有的股票数量为 5000 股，一年后的股票市值为$5000X$元；若一年以后购买股票所拥有的股票数量为$\dfrac{10000}{X}$股，股票市值为 10000 元。因

$$E(5000X)=5000\times1\times0.5+5000\times4\times0.5=12500>10000\text{，}$$

故现在就购买股票，则一年后所拥有的股票市值的数学期望达到最大；

因

$$E\left(\frac{10000}{X}\right)=\frac{10000}{1}\times0.5+\frac{10000}{4}\times0.5=6250>5000\text{，}$$

故一年以后购买股票，则所拥有的股票数量的数学期望达到最大。

10．保险公司的某险种规定：如果某个事件$A$在一年内发生了，则保险公司应付给投保户金额$a$元，而事件$A$在一年内发生的概率为$p$。如果保险公司向投保户收取的保费为$ka$元，则问$k$为多少，才能使保险公司期望收益达到$a$的 10%？

**解**：设$X$表示保险公司的收益，$X$的全部可能取值为$ka, ka-a$，则

$$E(X)=ka\times(1-p)+(ka-a)\times p=(k-p)a=0.1a\text{，}$$

故$k=p+0.1$。

11．某厂推土机发生故障后的维修时间$T$是一个随机变量（单位：h），其密度函数为

$$p(t)=\begin{cases}0.02\,\mathrm{e}^{-0.02t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

试求平均维修时间。

**解**：平均维修时间

$$E(T)=\int_0^{+\infty}t\cdot0.02\,\mathrm{e}^{-0.02t}\,dt=\int_0^{+\infty}t(-d\,\mathrm{e}^{-0.02t})=-t\,\mathrm{e}^{-0.02t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-0.02t}\,dt=\frac{\mathrm{e}^{-0.02t}}{-0.02}\Bigg|_0^{+\infty}=50\text{。}$$

12．某新产品在未来市场上的占有率$X$是仅在区间$(0,1)$上取值的随机变量，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求平均市场占有率。

**解：**平均市场占有率

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 4(1-x)^3\,dx=\int_0^1(4x-12x^2+12x^3-4x^4)dx=\left(2x^2-4x^3+3x^4-\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}\text{。}$$

13．设随机变量 $X$ 的密度函数如下，试求 $E(2X+5)$。

$$p(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

**解：**所求期望为

$$E(2X+5)=\int_0^{+\infty}(2x+5)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}(2x+5)(-d\,\mathrm{e}^{-x})=-(2x+5)\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

$$=5-2\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=7\text{。}$$

14．设随机变量 $X$ 的分布函数如下，试求 $E(X)$。

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

**解：**因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 $X$ 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，有

当 $x<0$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$，

当 $0<x<1$ 时，$p(x)=F'(x)=0$，

当 $x>1$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}$，

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{2}dx+\int_1^{+\infty}x\cdot\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x\,\mathrm{e}^x\,dx+\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx\text{，}$$

因

$$\int_{-\infty}^{0}x\,\mathrm{e}^x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(\mathrm{e}^x)=x\cdot\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\,dx=0-\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}=-1\text{，}$$

$$\int_1^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx=-2\int_1^{+\infty}x\cdot d[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_1^{+\infty}+2\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx=2-4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_1^{+\infty}=6\text{，}$$

故

$$E(X)=\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{1}{4}\times 6=1\text{。}$$

15．设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

如果$E(X)=\dfrac{2}{3}$，求$a$和$b$。

**解**：由正则性得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^1(a+bx^2)dx=\left(ax+b\cdot\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1=a+\frac{b}{3}=1,$$

又

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^1 x(a+bx^2)dx=\left(a\cdot\frac{x^2}{2}+b\cdot\frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1=\frac{a}{2}+\frac{b}{4}=\frac{2}{3},$$

故$a=\dfrac{1}{3},\ b=2$。

16．某工程队完成某项工程的时间$X$（单位：月）是一个随机变量，它的分布列为

| $X$ | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

（1）试求该工程队完成此项工程的平均月数；

（2）设该工程队所获利润为$Y=50(13-X)$，单位为万元。试求该工程队的平均利润；

（3）若该工程队调整安排，完成该项工程的时间$X$（单位：月）的分布为

| $X$ | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.5 | 0.4 | 0.1 |

则其平均利润可增加多少？

**解**：（1）平均月数

$E(X)=10\times0.4+11\times0.3+12\times0.2+13\times0.1=11$。

（2）平均利润为

$E(Y)=E[50(13-X)]=150\times0.4+100\times0.3+50\times0.2+0\times0.1=100$（万元）。

（3）调整安排后，平均利润为

$E(Y)=E[50(13-X)]=150\times0.5+100\times0.4+50\times0.1=120$（万元），

故平均利润增加 20 万元。

17．设随机变量$X$的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对$X$独立重复观察 4 次，$Y$表示观察值大于$\pi/3$的次数，求$Y^2$的数学期望。

**解**：$Y$的全部可能取值为$0,1,2,3,4$，因

$$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

则

$$P\{Y=0\}=(1-p)^4=\frac{1}{16},\quad P\{Y=1\}=C_4^1p(1-p)^3=\frac{4}{16},\quad P\{Y=2\}=C_4^2p^2(1-p)^2=\frac{6}{16},$$

$$P\{Y=3\}=C_4^3p^3(1-p)=\frac{4}{16}，\quad P\{Y=4\}=p^4=\frac{1}{16}，$$

故

$$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{16}+1^2\times\frac{4}{16}+2^2\times\frac{6}{16}+3^2\times\frac{4}{16}+4^2\times\frac{1}{16}=\frac{80}{16}=5\text{。}$$

18．设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

试求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望。

**解**：所求期望为

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\int_0^2\frac{3}{8}dx=\frac{3}{4}\text{。}$$

19．设 $X$ 为仅取非负整数的离散随机变量，若其数学期望存在，证明

（1）$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X\ge k\}$；

（2）$\sum_{k=0}^{+\infty}kP\{X>k\}=\frac{1}{2}[E(X^2)-E(X)]$。

**证明**：（1）利用求和符号交换次序可得

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X\ge k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}nP\{X=n\}=E(X)\text{。}$$

（2）利用求和符号交换次序可得

$$\sum_{k=0}^{+\infty}kP\{X>k\}=\sum_{k=0}^{+\infty}k\sum_{n=k+1}^{+\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}kP\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}n(n-1)P\{X=n\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}n^2P\{X=n\}-\sum_{n=1}^{+\infty}nP\{X=n\}\right]=\frac{1}{2}[E(X^2)-E(X)]\text{。}$$

20．设连续随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)$，且数学期望存在，证明：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx-\int_{-\infty}^0F(x)dx\text{。}$$

**证明**：设 $X$ 的密度函数为 $p(x)$，有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}xp(x)dx+\int_{-\infty}^0xp(x)dx，$$

因

$$\int_0^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^xdy\right)p(x)dx=\int_0^{+\infty}dx\int_0^xp(x)dy=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{+\infty}dy\cdot F(x)\Big|_y^{+\infty}$$

$$=\int_0^{+\infty}[1-F(y)]dy=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx，$$

$$\int_{-\infty}^0xp(x)dx=\int_{-\infty}^0\left(-\int_x^0dy\right)p(x)dx=-\int_{-\infty}^0dx\int_x^0p(x)dy=-\int_{-\infty}^0dy\int_{-\infty}^yp(x)dx=-\int_{-\infty}^0dy\cdot F(x)\Big|_{-\infty}^y$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} F(y)dy = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx,$$

故 $E(X) = \int_{0}^{+\infty} [1 - F(x)]dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$ 。

21．设 $X$ 为非负连续随机变量，若 $E(X^n)$ 存在，试证明：

（1） $E(X) = \int_{0}^{+\infty} P\{X > x\}dx$ ；

（2） $E(X^n) = \int_{0}^{+\infty} nx^{n-1} P\{X > x\}dx$ 。

**证明：** 设 $X$ 的密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，当 $x < 0$ 时， $p(x) = 0$ 。

（1）利用二重积分交换次序可得

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{x} dy\right) p(x)dx = \int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{x} p(x)dy = \int_{0}^{+\infty} dy \int_{y}^{+\infty} p(x)dx = \int_{0}^{+\infty} dy \cdot F(x)\Big|_{y}^{+\infty}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} [1 - F(y)]dy = \int_{0}^{+\infty} P\{X > x\}dx 。$$

（2）利用二重积分交换次序可得

$$E(X^n) = \int_{0}^{+\infty} x^n p(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{x} ny^{n-1}dy\right) p(x)dx = \int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{x} ny^{n-1} p(x)dy = \int_{0}^{+\infty} dy \int_{y}^{+\infty} ny^{n-1} p(x)dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} dy \cdot ny^{n-1} F(x)\Big|_{y}^{+\infty} = \int_{0}^{+\infty} ny^{n-1} [1 - F(y)]dy = \int_{0}^{+\infty} nx^{n-1} P\{X > x\}dx 。$$