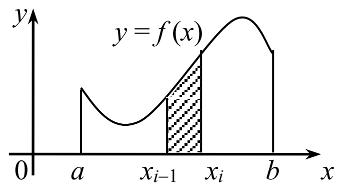
第九章　二重积分

§9.1　二重积分的概念

一元函数定积分是讨论曲边梯形的面积，由曲线 $y=f(x), x=a, x=b$ 及 x 轴围成的图形，
将$[a,b]$分成若干小段，$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，

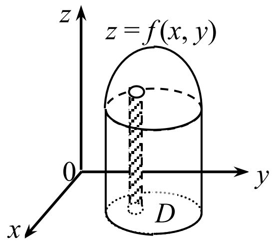


每一小段内对应的小曲边梯形面积为 $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$，

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，

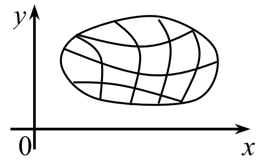
整个曲边梯形的面积为 $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

小区间划分越细，近似程度越高，有 $S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记为 $\int_a^b f(x)dx$.



二重积分是讨论曲顶柱体体积，
以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，以 xoy 平面上区域 D 为底，
以区域 D 的边界为准线、平行于 z 轴的直线为母线的柱面为侧形成的立体.

将区域 D 划分为若干小块，$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，



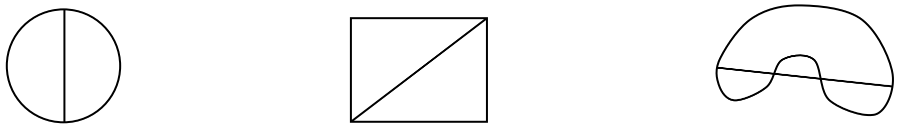
每一小块内对应的小柱体体积为 $\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

其中 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$，$\Delta\sigma_i$ 是 ΔD_i 的面积，

整个曲顶柱体的体积为 $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

小区域划分越细，近似程度越高，有 $V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，其中 d 为所有小区域直径的最大值.

在一个区域中任意两点距离的最大值称为该区域的直径.



一．二重积分的定义

定义　设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 划分为若干小块，$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，作和式

$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，其中 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$，$\Delta\sigma_i$ 是 ΔD_i 的面积. 如果极限 $\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称之为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$. 其中 $f(x,y)$ 为被积函数，D 为积分区域，$d\sigma$ 为面积元素.

可理解为：$f(x,y)$ 为高，$d\sigma$ 为面积元素，$f(x,y)d\sigma$ 为细柱体积，$\iint\limits_D$ 为在区域 D 内无限求和.

注：（1）若 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，则在 D 内可积；

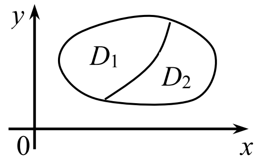
（2）当 $f(x,y)\ge 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示曲顶柱体体积，当 $f(x,y)\le 0$ 时，表示该体积的负值.

二．二重积分的性质

性质 1　常数因子可提到积分号外，即 $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

性质 2　和差的积分等于积分的和差，即 $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

性质 1 与性质 2 反映了二重积分的线性性质．

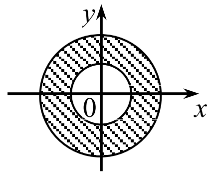


性质 3　二重积分可分块积分．

若区域 D 分为两块 D_1 与 D_2，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$.

几何意义上，就是整个曲顶柱体体积等于分开的两个小曲顶柱体体积之和．

性质 4　被积函数为 1 的二重积分等于积分区域的面积，即 $\iint\limits_D 1d\sigma = S_D$，其中 S_D 为区域 D 的面积．



几何意义上，高为 1 的柱体体积等于底面积．

如 $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} 1d\sigma = 3\pi$.

性质 5　如果在区域 D 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

几何意义上，就是高度越低，体积越小．

例　比较二重积分的大小：$I_1 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3 = \iint\limits_D \cos[(x^2+y^2)^2]d\sigma$，

其中 D 为圆 $x^2+y^2\le 1$ 内．

解：$x^2+y^2\le 1$ 时，有 $1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge x^2+y^2\ge (x^2+y^2)^2\ge 0$，而 $\cos u$ 在 $u\in[0,1]$ 上是单调减少函数，

则 $\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\cos(x^2+y^2)\le\cos[(x^2+y^2)^2]$，故 $I_1\le I_2\le I_3$.

性质 6　如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最小值为 m，最大值为 M，则 $mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$.

证明：由于 $m\le f(x,y)\le M$，根据性质 5 知 $\iint\limits_D md\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D Md\sigma$，

再根据性质 4 可得 $mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$.

利用性质 6 可估计二重积分的值．

性质 7　（二重积分中值定理）如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma .$$

证明：由于 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，根据最值定理知 $f(x,y)$ 在区域 D 上存在最小值 m 和最大值 M，

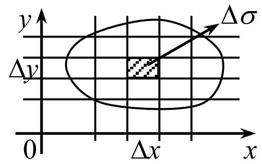
根据性质 6 知 $mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$，即 $m\le \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M$，

再根据介值定理知存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta) = \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

一般称 $f(\xi,\eta) = \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的平均值．

§9.2　直角坐标系下计算二重积分

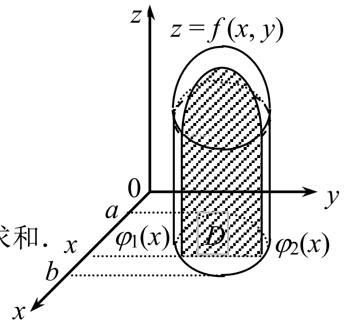
直角坐标系下的面积元素



用垂直于 x 轴、y 轴的直线簇划分区域 D，有$\Delta\sigma = \Delta x\Delta y$.

令 $d\to 0$，则面积元素 $d\sigma = dxdy$，直角坐标系下二重积分可记为$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

直角坐标系下化二重积分为二次积分



设区域$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$，

用垂直于 x 轴的平面截该柱体，横截面积为 $S(x)$，则体积$V=\int_a^b S(x)dx$，

理解为：$S(x)$为面积，dx 为厚度，$S(x)dx$ 为薄片体积，$\int_a^b$ 为从 a 到 b 无限求和.

又 $S(x)$为曲边梯形，下限为$\varphi_1(x)$，上限为$\varphi_2(x)$，曲边为 $z = f(x, y)$，

有 $S(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$，即$V=\int_a^b[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy]dx$. 记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$.

类似，设区域$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$，有$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$.

计算二重积分的步骤：

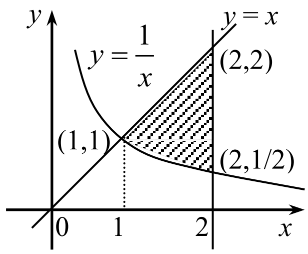
（1）作图，作出区域 D 平面图，并求出各条曲线间的交点；

（2）观察，"↑"找出横坐标的最小值 a 与最大值 b，找出小函数 $y = \varphi_1(x)$，大函数 $y = \varphi_2(x)$，

或"→"找出纵坐标的最小值 c 与最大值 d，找出小函数 $x = \psi_1(y)$，大函数 $x = \psi_2(y)$，

进为小，出为大，即 $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$或$\{(x, y) \mid c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$；

（3）计算，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ 或$\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$.

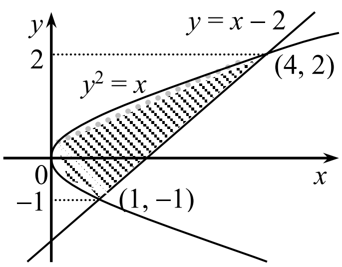


例　计算$\iint\limits_D x^2 y\,d\sigma$，区域 D 由 $y=\dfrac{1}{x}$，$y = x$，$x = 2$ 围成.

解：作图，交点(1, 1)、$(2,\ \dfrac{1}{2})$与(2, 2).

观察，"↑" $a = 1$，$b = 2$，小 $y=\dfrac{1}{x}$，大 $y = x$，即$D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\dfrac{1}{x}\le y\le x\}$，

$$\therefore 原式=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} x^2 y\,dy=\int_1^2 dx\cdot x^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_{\frac{1}{x}}^{x}=\int_1^2\frac{1}{2}(x^4-1)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}-x\right)\Bigg|_1^2=\frac{13}{5}.$$



例　计算$\iint\limits_D xy\,d\sigma$，区域 D 由 $y^2 = x$，$y = x - 2$ 围成.

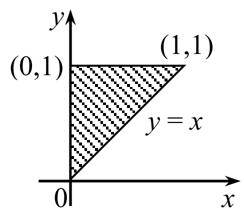
解：作图，$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x-2 \end{cases} \Longrightarrow y = y^2 - 2 \Longrightarrow y = -1$ 或 $y = 2$，交点(1, −1)与(4, 2).

观察，"→" $c = -1$，$d = 2$，小 $x = y^2$，大 $x = y + 2$，即$D=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 2, y^2\le x\le y+2\}$，

$$\therefore 原式=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xy\,dx=\int_{-1}^2 dy\cdot y\left.\frac{x^2}{2}\right|_{y^2}^{y+2}=\int_{-1}^2\left(\frac{y^3}{2}+2y^2+2y-\frac{y^5}{2}\right)dx=\left(\frac{y^4}{8}+\frac{2y^3}{3}+y^2-\frac{y^6}{12}\right)\Bigg|_{-1}^2$$

$$=\left(2+\frac{16}{3}+4-\frac{64}{12}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{12}\right)=\frac{45}{8}.$$

例　计算 $\iint\limits_D y^2e^{xy}d\sigma$，区域 D 由 $y=x$，$y=1$ 及 y 轴围成.



解：作图，交点(0, 0)、(0, 1)与(1, 1).

观察，“↑” $a=0$，$b=1$，小 $y=x$，大 $y=1$，即 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dx\int_x^1 y^2e^{xy}dy=?$，计算太复杂.

改为“→” $c=0$，$d=1$，小 $x=0$，大 $x=y$，即 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$，

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dy\int_0^y y^2e^{xy}dx=\int_0^1 dy\cdot y^2\cdot\frac{1}{y}e^{xy}\Big|_0^y=\int_0^1(ye^{y^2}-y)dy=(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{y^2}{2})\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e}{2}-1$.

注意：二重积分化二次积分应根据积分区域和积分的难易程度选择观察方向.

当积分区域 D 为规范的矩形区域时，$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$，

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$.

例　计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 4,\ 0\le y\le 2\}$.

解：原式 $=\int_1^4 dx\int_0^2(x^2+y^2)dy=\int_1^4 dx\cdot(x^2y+\frac{y^3}{3})\Big|_0^2=\int_1^4(2x^2+\frac{8}{3})dx=(\frac{2x^3}{3}+\frac{8x}{3})\Big|_1^4=(\frac{128}{3}+\frac{32}{3})-(\frac{2}{3}+\frac{8}{3})=50$.

例　计算 $\iint\limits_D x^y d\sigma$，区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 1\le y\le e-1\}$.

解：原式 $=\int_0^1 dx\int_1^{e-1}x^y dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{x^y}{\ln x}\Big|_1^{e-1}=\int_0^1\frac{x^{e-1}-x}{\ln x}dx=?$，无法直接计算.

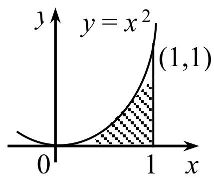
改为：原式 $=\int_1^{e-1}dy\int_0^1 x^y dx=\int_1^{e-1}dy\cdot\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1=\int_1^{e-1}\frac{1}{y+1}dx=\ln|y+1|\,\Big|_1^{e-1}=\ln e-\ln 2=1-\ln 2$.

注：对于某些难以直接计算的定积分，这里提供了一种特殊方法，即可利用二重积分进行计算.

例　设 $f(x,y)=x+y+xy\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，区域 D 由 $y=x^2$，$x=1$ 与 x 轴围成．求 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

解：设 $A=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，$A$ 为常数，有 $f(x,y)=x+y+Axy$，则 $A=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D(x+y+Axy)d\sigma$.

作图，交点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$，



观察，“↑” $a=0$，$b=1$，小 $y=0$，大 $y=x^2$，即 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$，

则 $A=\iint\limits_D(x+y+Axy)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x+y+Axy)dy=\int_0^1 dx\cdot(xy+\frac{y^2}{2}+Ax\frac{y^2}{2})\Big|_0^{x^2}$

$=\int_0^1(x^3+\frac{x^4}{2}+A\frac{x^5}{2})dx=(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}+A\frac{x^6}{12})\Big|_0^1=\frac{7}{20}+\frac{A}{12}$，

$\therefore\ \frac{11}{12}A=\frac{7}{20}$，　$A=\frac{21}{55}$.

交换积分次序

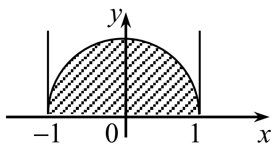
当积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$ 为规范的矩形区域时，有 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$，

即直接交换次序.

但当积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ 为一般区域时不能直接交换次序，而应该改变观察方向，得 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$，有 $\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$.

注：$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\ne\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_a^b f(x,y)\,dx$.

交换积分次序的关键是根据原二次积分作出积分区域 D，再改变观察方向，化为新的二次积分.

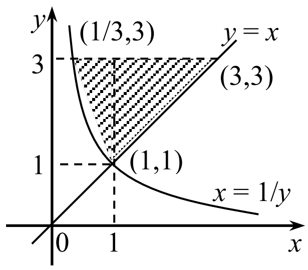


例　交换积分次序 $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

解：作图，作 $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$ ，

观察，改为"→" $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$，

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.



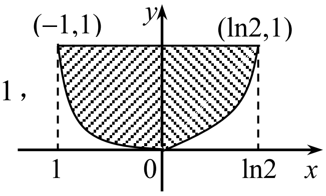
例　交换积分次序 $\int_1^3 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx$.

解：作图，作 $y=1,\ y=3,\ x=\dfrac{1}{y},\ x=y$ ，

观察，改为"↑"，应分段，

$D_1=\{(x,y)\mid\dfrac{1}{3}\le x\le 1,\dfrac{1}{x}\le y\le 3\}$， $D_2=\{(x,y)\mid 1\le x\le 3, x\le y\le 3\}$，

$\therefore$ 原式 $=\int_{\frac{1}{3}}^1 dx\int_{\frac{1}{x}}^3 f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_x^3 f(x,y)dy$.



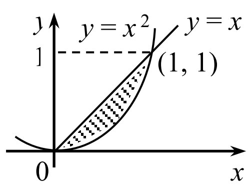
例　交换积分次序 $\int_{-1}^0 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dx+\int_0^{\ln 2} dx\int_{e^x-1}^1 f(x,y)dx$.

解：作图，作 $x=-1,\ x=0,\ y=x^2,\ y=1$，又作 $x=0,\ x=\ln 2,\ y=e^x-1,\ y=1$，

观察，改为"→" $D_1\cup D_2=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,-\sqrt{y}\le x\le\ln(y+1)\}$，

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\ln(y+1)} f(x,y)dx$.

例　计算 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\dfrac{\sin x}{x}dx$.



解：无法直接积分，须交换积分次序，

作图，作 $y=0,\ y=1,\ x=y,\ x=\sqrt{y}$ ，

观察，改为"↑" $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$，

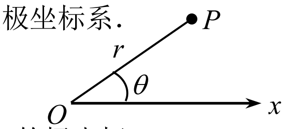
$$\therefore \text{原式}=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{\sin x}{x}y\Big|_{x^2}^{x}=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx=\int_0^1\sin x dx-\int_0^1 x(-d\cos x)$$

$$=-\cos x\Big|_0^1+x\cos x\Big|_0^1-\int_0^1\cos x dx=-\cos 1+\cos 0+\cos 1-0-\sin x\Big|_0^1=1-\sin 1 .$$

§9.4 极坐标系下计算二重积分

1． 极坐标系与极坐标

平面上任一点可用二元有序数组表示，直角坐标系下用 (x,y) 表示，其中 x 为横坐标，y 为纵坐标．此外还有极坐标系．以平面上点 O 出发的射线 Ox 为极轴，点 O 称为极点，建立极坐标系．



平面上任一点 P，点 O 与 P 的距离 $r=|OP|$ 称为点 P 的极径，

极轴 Ox 逆时针旋转到 OP 的角度 θ 称为幅角．

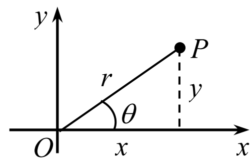
这样二元有序数组 (r,θ) 在极坐标系下可以确定点 P（其中 $r\geq 0$），称 (r,θ) 为点 P 的极坐标．

注意：同一个点 P 可对应于多个极坐标，如 (r,θ) 与 $(r,\theta+2\pi)$ 表示同一个点．

2． 极坐标与直角坐标的关系

一般以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且单位长度相同．

设平面上的点 P，直角坐标为 (x,y)，极坐标为 (r,θ)，有



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}，及 \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

3． 极坐标系下常见曲线的方程

通常在直角坐标系下用 x,y 表示的方程，根据 x,y 与 r,θ 的关系，转换为由 r,θ 表示的形式．

如圆 $x^2+y^2=a^2$，有 $r^2=a^2$，即 $r=a$；

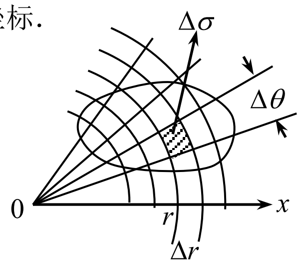
圆 $x^2+(y-a)^2=a^2$，有 $x^2+y^2=2ay$，$r^2=2ar\sin\theta$，即 $r=2a\sin\theta$；

直线 $y=kx$，有 $r\cos\theta=kr\sin\theta$，即 $\tan\theta=k$；（注：方程 $\theta=$ 常数，表示从原点 O 出发的射线）

直线 $x=c$，有 $r\cos\theta=c$，即 $r=c\sec\theta$．

注：圆的方程在极坐标系下比较简单，在处理圆区域的二重积分时通常采用极坐标．

4． 极坐标系下的面积元素



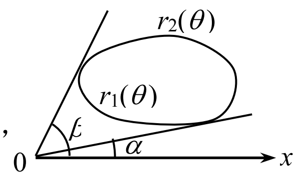
用从极点出发的射线簇和以极点为圆心的一系列同心圆划分区域 D，

有 $\Delta\sigma=\dfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta-\dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta=r\Delta r\Delta\theta+\dfrac{1}{2}\Delta r^2\Delta\theta$，

令 $d\to 0$，$\Delta r^2\Delta\theta$ 为比 $\Delta r\Delta\theta$ 更高阶的无穷小，则面积元素 $d\sigma=rdrd\theta$．

极坐标系下的二重积分可记为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$．

5． 极坐标系下化二重积分为二次积分



步骤：（1）作图，作出区域 D 平面图，并求出各条曲线间的交点；

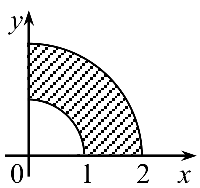
（2）观察，从极点向外看“ ”，找最小角 α 与最大角 β，通常在切线处，

找小函数 $r=r_1(\theta)$，大函数 $r=r_2(\theta)$，进为小，出为大，

即 $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leq\theta\leq\beta, r_1(\theta)\leq r\leq r_2(\theta)\}$；

（3）计算，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$．

注意：这里的大小函数必须是以极坐标表示的方程，且 r 作为因变量，θ 作为自变量．



例 计算 $\iint\limits_D xyd\sigma$，区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}$．

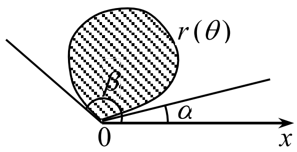
解：作图，区域 D 为圆环的一部分，采用极坐标．

观察，“ ” 最小角 $\alpha=0$，最大角 $\beta=\dfrac{\pi}{2}$，小 $x^2+y^2=1$，即 $r=1$，大 $x^2+y^2=4$，即 $r=2$，

则 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 1\le r\le 2\}$，

$$\therefore 原式=\iint\limits_D r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r^3\sin\theta\cos\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\frac{r^4}{4}\bigg|_1^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{15}{8}\sin 2\theta d\theta$$

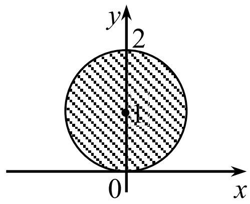
$$=\frac{15}{8}\cdot(-\frac{1}{2}\cos 2\theta)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15}{8}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=\frac{15}{8}.$$



两种特殊情形：

（1）极点在区域 D 边界上，此时小函数应为 $r=0$，

二次积分应为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.



例　计算 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，区域为圆 $x^2+y^2=2y$ 的内部.

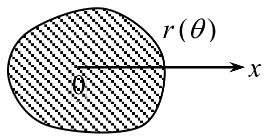
解：作图，区域 D 为圆，采用极坐标.

观察，“ ” 最小角 $\alpha=0$，最大角 $\beta=\pi$，小 $r=0$，大 $x^2+y^2=2y$，有 $r^2=2r\sin\theta$，即 $r=2\sin\theta$，

则 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le 2\sin\theta\}$，

$$\therefore 原式=\iint\limits_D r\cdot rdrd\theta=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr=\int_0^\pi d\theta\cdot\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2\sin\theta}=\int_0^\pi\frac{8}{3}\sin^3\theta d\theta=\frac{8}{3}\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)\cdot(-d\cos\theta)$$

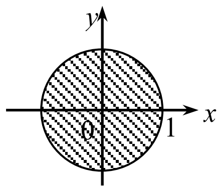
$$=\frac{8}{3}\cdot(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3})\bigg|_0^\pi=\frac{8}{3}\cdot[(1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3})]=\frac{32}{9}.$$



（2）极点在区域 D 的内部，此时幅角可绕原点一周，

取最小角 $\alpha=0$，最大角 $\beta=2\pi$，且小函数应为 $r=0$，

二次积分应为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.



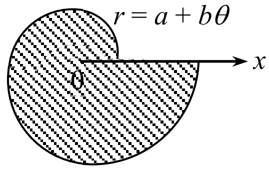
例　计算 $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma$，区域为圆 $x^2+y^2=1$ 的内部.

解：作图，区域 D 为圆，采用极坐标.

观察，“ ” $\alpha=0$，$\beta=2\pi$，小 $r=0$，大 $x^2+y^2=1$，即 $r=1$，则 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1\}$，

$$\therefore 原式=\iint\limits_D\sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot rdr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}dr^2=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot(-\frac{1}{3})\cdot(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=\frac{1}{3}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$



例　求螺线 $r=a+b\theta,\quad(a>0,b>0)$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 范围内所围成的图形面积.

解：根据二重积分性质 4，知平面图形面积 $S_D=\iint\limits_D 1d\sigma$.

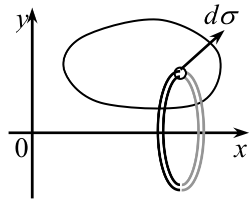
作图，采用极坐标.

观察，“ ” $\alpha=0$，$\beta=2\pi$，小 $r=0$，大 $r=a+b\theta$，则 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a+b\theta\}$，

$$\therefore \text{原式} = \iint_D 1\cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a+b\theta} r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a+b\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a^2 + 2ab\theta + b^2\theta^2) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(a^2\theta + ab\theta^2 + b^2\frac{\theta^3}{3})\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(a^2\cdot 2\pi + ab\cdot 4\pi^2 + b^2\frac{8\pi^3}{3}) = \pi a^2 + 2\pi^2 ab + \frac{4}{3}\pi^3 b^2 .$$

补充：利用二重积分求旋转体体积



平面区域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体（设区域 D 在 x 轴上方），面积元素 $d\sigma$ 旋转所得体积元素为 $dV_x = 2\pi y d\sigma$ ，故 $V_x = 2\pi\iint_D y d\sigma$.

“↑” $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$，

则 $V_x = 2\pi\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} y dy = \pi\int_a^b dx \cdot y^2\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \pi\int_a^b [\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)] dx$ ；

“→” $D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$，

则 $V_x = 2\pi\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} y dx = 2\pi\int_c^d dy \cdot y \cdot x\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} = 2\pi\int_c^d y[\psi_2(y) - \psi_1(y)] dy$ ；

上面两个结果就是在第六章所给的两个旋转体体积公式.

极坐标系下“➣” $D = \{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$，

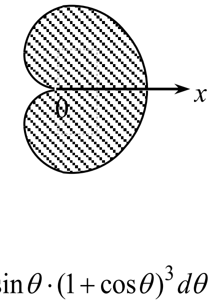
则 $V_x = 2\pi\iint_D r\sin\theta \cdot r dr d\theta = 2\pi\int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r^2 \sin\theta dr = 2\pi\int_\alpha^\beta d\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta [r_2^3(\theta) - r_1^3(\theta)]\sin\theta d\theta$.

类似，平面区域 D 绕 y 轴旋转所得旋转体（设区域 D 在 y 轴右方），面积元素 $d\sigma$ 旋转所得体积元素为 $dV_y = 2\pi x d\sigma$ ，故 $V_y = 2\pi\iint_D x d\sigma$. 三种观察方式下计算公式为

“↑” $V_y = 2\pi\int_a^b x[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx$ ；“→” $V_y = \pi\int_c^d [\psi_2^2(y) - \psi_1^2(y)] dy$ ；“➣” $V_y = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta [r_2^3(\theta) - r_1^3(\theta)]\cos\theta d\theta$.

更一般地，平面区域 D 绕直线 $Ax + By + C = 0$ 旋转所得旋转体（设区域 D 在直线的同一侧），面积元素 $d\sigma$ 旋转所得体积元素为 $dV_{旋} = 2\pi\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} d\sigma$ ，故 $V_{旋} = 2\pi\iint_D \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} d\sigma$.

例　求心脏线 $r = 1 + \cos\theta$ 围成的图形绕极轴旋转所得旋转体体积.



解：作图，只需考虑极轴上方的一半，$V_x = 2\pi\iint_D y d\sigma$ ，

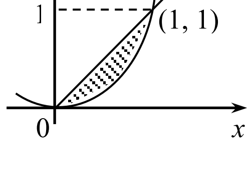
观察，“➣” $\alpha = 0$，$\beta = \pi$ ，小 $r = 0$，大 $r = 1 + \cos\theta$ ，

则 $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 1 + \cos\theta\}$ ，

$$\therefore \text{原式} = 2\pi\iint_D r\sin\theta \cdot r dr d\theta = 2\pi\int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r^2 \sin\theta dr = 2\pi\int_0^\pi d\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{1+\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \sin\theta \cdot (1 + \cos\theta)^3 d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (1 + \cos\theta)^3 \cdot (-d\cos\theta) = \frac{2\pi}{3}\cdot[-\frac{(1 + \cos\theta)^4}{4}]\Bigg|_0^\pi = \frac{2\pi}{3}\cdot(0 + 4) = \frac{8\pi}{3} .$$

例　求由 $y = x^2$ 与 $y = x$ 围成的图形绕直线 $y = x$ 旋转所得旋转体体积.



解：作图，$V_{旋} = 2\pi\iint_D \frac{|x - y|}{\sqrt{2}} d\sigma = \sqrt{2}\pi\left|\iint_D (x - y) d\sigma\right|$ ，

观察，“↑” $x=0$，$y=1$，小 $y=x^2$，大 $y=x$，

$$\therefore V_{旋}=\sqrt{2}\pi\left|\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x-y)dy\right|=\sqrt{2}\pi\left|\int_0^1 dx\cdot(xy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_{x^2}^{x}\right|=\sqrt{2}\pi\left|\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{2})dx\right|=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}\ .$$

§9.3　二重积分的换元法

一元函数定积分 $\int_a^b f(x)dx$，若令 $x=\varphi(t)$，有 $dx=\varphi'(t)dt$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$.

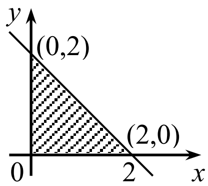
二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，若令 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，有 $dxdy=|J|dudv$，其中

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$，称为雅可比行列式，（注：二阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$）

则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\cdot|J|dudv$.

如直角坐标与极坐标的转换是 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，

有 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}-\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\cdot r\cos\theta-(-r\sin\theta)\cdot\sin\theta=r$，故 $dxdy=|J|drd\theta=rdrd\theta$.

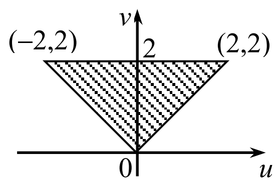


例　计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$，区域 D 由 x 轴，y 轴及 $x+y=2$ 围成.

解：作图，交点 $(0,0),\ (2,0),\ (0,2)$，但此题的被积函数无论关于 x 或 y 积分都难以计算，

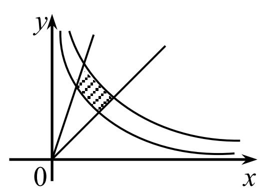
采用变量替换，令 $u=y-x,\ v=y+x$，有 $x=\frac{1}{2}(-u+v),\ y=\frac{1}{2}(u+v)$，

则 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，得 $dxdy=|J|dudv=\frac{1}{2}dudv$，



且 x 轴（$y=0$）即 $u+v=0$，y 轴（$x=0$）即 $u-v=0$，$x+y=2$ 即 $v=2$，
作图，在 u 与 v 的直角坐标系下作图，交点 $(0,0),\ (-2,2),\ (2,2)$，
观察，“→” $c=0$，$d=2$，小 $u=-v$，大 $u=v$，
则 $D=\{(u,v)\,|\,0\le v\le 2,-v\le u\le v\}$，

$$\therefore 原式=\iint\limits_D e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\cdot ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}=\frac{1}{2}\int_0^2 v(e-e^{-1})dv=\frac{1}{2}(e-e^{-1})\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_0^2=e-e^{-1}\ .$$



例　计算 $\iint\limits_D xy^3dxdy$，区域 D 由 $xy=1$，$xy=2$，$y=x$ 及 $y=3x$ 围成.

解：作图，无论向上还是向右观察都需要分段，较复杂，

由于区域 D 满足 $1\le xy\le 2,\ 1\le\frac{y}{x}\le 3$，取 $u=xy,\ v=\frac{y}{x}$，

则区域 D 满足 $1\le u\le 2,\ 1\le v\le 3$，在 u 与 v 的直角坐标系下是一个规范的矩形区域.

令 $u=xy,\ v=\frac{y}{x}$，有 $x=\sqrt{\frac{u}{v}},\ y=\sqrt{uv}$，

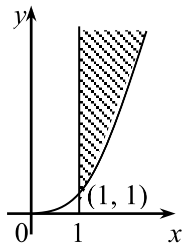
则 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}-(-\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}})\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2v}$，得 $dxdy=|J|dudv=\frac{1}{2v}dudv$，

$$\therefore \text{原式} = \iint\limits_D \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot (\sqrt{uv})^3 \cdot \frac{1}{2v} dudv = \int_1^2 du \int_1^3 \frac{u^2}{2} dv = \int_1^2 du \cdot \frac{u^2}{2} v\Big|_1^3 = \int_1^2 u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

§9.5　广义二重积分

广义二重积分与一般的广义积分类似，可分为无穷区域二重积分和瑕点二重积分．

这里只介绍无穷区域二重积分．设区域 D 是一个无界区域，且 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续．令有界区域 $G \subset D$，且令 $G \to D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{G\to D} \iint\limits_G f(x,y)d\sigma$．



广义二重积分可化为包含广义积分的二次积分进行计算．

例　计算 $\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2} dxdy$，区域 $D = \{(x,y) \mid x \ge 1, y \ge x^2\}$．

解：作图，交点 $(1,1)$，

观察，“↑” $a = 1$，$b = +\infty$，小 $y = x^2$，大 $y = +\infty$，则 $D = \{(x,y) \mid 1 \le x < +\infty, x^2 \le y < +\infty\}$，

$$\therefore \text{原式} = \int_1^{+\infty} dx \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2} dy = \int_1^{+\infty} dx \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{1+(\frac{y}{x^2})^2} \cdot x^2 d\frac{y}{x^2} = \int_1^{+\infty} dx \cdot \frac{1}{x^2} \arctan \frac{y}{x^2}\Big|_{x^2}^{+\infty}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) dx = \frac{\pi}{4} \cdot (-\frac{1}{x})\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

例　计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$．

解：考虑二重积分 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} d\sigma$，其中 D 为整个 xoy 平面，

直角坐标系下观察，“↑” $D = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$，

故 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = I^2$；

极坐标系下观察，“　” $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r < +\infty\}$，

$$\text{则} \iint\limits_D e^{-x^2-y^2} d\sigma = \iint\limits_D e^{-r^2} \cdot rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot rdr = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot (-\frac{1}{2} e^{-r^2})\Big|_0^{+\infty} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = \pi,$$

故 $I^2 = \pi$，且显然 $I > 0$，

$\therefore I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$．

例　设 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，试证 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$．

解：令 $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$，有 $x = \sqrt{2}\sigma t + \mu$，$dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$，且 $x \to -\infty$ 时，$t \to -\infty$；$x \to +\infty$ 时，$t \to +\infty$，

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$