

数理统计第五章测验题

考试时间 2023 年 4 月 9 日, 答卷时间 120 分钟, 总分 100 分, 出题人-李绍文

1. (10 分) 设总体 X 的分布列为

$$P\{X = -1\} = \frac{1-\theta}{2}, \quad P\{X = 0\} = \frac{1}{2}, \quad P\{X = 1\} = \frac{\theta}{2},$$

且 X_1, X_2, \dots, X_n 是样本, 用两种方法给出样本联合质量函数。

2. (10 分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是样本, $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 分别是最小与最大顺序统计量, 求 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 密度函数 $p_1(x)$ 与 $p_n(x)$ 以及 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 的联合密度函数, 并问 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 是否独立?

3. (10 分) 设总体 X 的 2 阶矩存在, X_1, X_2, \dots, X_n 是样本, 求 $X_i - \bar{X}$ 与 $X_j - \bar{X}$ ($i \neq j$) 的相关系数。

4. (10 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 相互独立且都服从 $N(0, 0.2^2)$, 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{16} X_i^2 > 1\right\}$ 。

5. (15 分) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 问 $\xi = \frac{2(X_1^2 + X_2^2)}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$ 是否服从 F 分布。若是, 自由度是多少? 若不是, 构造一个服从 F 分布的随机变量 Y , 指出 Y 的自由度, 并将 ξ 表示为 Y 的函数。

6. (15 分) 设总体 $X \sim N(-0.5, 4)$, 且 X_1, X_2, \dots, X_{16} 为样本, 求 $P\{\bar{X} > 0\}$, $P\{S^2 > 6\}$ 。

7. (15 分) 设总体 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(3, 4)$ 且相互独立, X_1, X_2, \dots, X_{10} 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_5 分别为 X 与 Y 的样本, 求 $P\{\bar{X} > \bar{Y}\}$, $P\{3S_x^2 > S_y^2\}$ 。

8. (15 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 求 (μ, σ^2) 的一个充分统计量。并问 (\bar{X}, S^2) 是否 (μ, σ^2) 的一个充分统计量, 为什么?

附录: $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$, $\chi_{0.9}^2(15) = 22.5$, $\chi_{0.95}^2(15) = 25$,

$f_{0.95}(9, 4) = 6$, $f_{0.9}(9, 4) = 4$