习题 2.3

1． 设随机变量 X 满足 $E(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$，已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，试求 λ。

解：因 $E(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$，有

$$E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2,$$

则

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=\lambda^2-2\lambda+2=1,$$

故 $(\lambda-1)^2=0$，即 $\lambda=1$。

2． 假设有 10 只同种电器元件，其中有两只不合格品。装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是不合格品，则扔掉重新任取一只；如仍是不合格品，则扔掉再取一只，试求在取到合格品之前，已取出的不合格品数的方差。

解：设 X 表示在取到合格品之前已取出的不合格品只数，X 的全部可能取值为 $0, 1, 2$，则

$$P\{X=0\}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\quad P\{X=1\}=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{45},\quad P\{X=2\}=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8}=\frac{1}{45},$$

得

$$E(X)=0\times\frac{4}{5}+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{9},\quad E(X^2)=0^2\times\frac{4}{5}+1^2\times\frac{8}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15},$$

故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4}{15}-\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{88}{405}。$$

3． 已知 $E(X)=-2$，$E(X^2)=5$，求 $\mathrm{Var}(1-3X)$。

解：因

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=5-(-2)^2=1,$$

故

$$\mathrm{Var}(1-3X)=(-3)^2\,\mathrm{Var}(X)=9\times1=9。$$

4． 设 $P\{X=0\}=1-P\{X=1\}$，如果 $E(X)=3\,\mathrm{Var}(X)$，求 $P\{X=0\}$。

解：因 $P\{X=0\}+P\{X=1\}=1$，有 X 的全部可能取值为 $0, 1$。设 $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p$，则

$$E(X)=p,\quad \mathrm{Var}(X)=p-p^2。$$

因 $E(X)=3\,\mathrm{Var}(X)$，有 $p=3(p-p^2)$，$2p-3p^2=0$，即 $p=\dfrac{2}{3}$ 或 $p=0$，故 $P\{X=0\}=1-p=\dfrac{1}{3}$ 或 1。

5． 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}, & x<0;\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\[2mm] 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge1.\end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(X)$。

解：因分布函数$F(x)$是连续函数，有X为连续型，密度函数$p(x)=F'(x)$，有

当$x<0$时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$，

当$0<x<1$时，$p(x)=F'(x)=0$，

当$x>1$时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}$，

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x\,\mathrm{e}^x\,dx+\frac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx,$$

因

$$\int_{-\infty}^{0}x\,\mathrm{e}^x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(\mathrm{e}^x)=x\cdot\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\,dx=0-\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}=-1,$$

$$\int_{1}^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x\cdot d[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2-4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}=6,$$

可得$E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{4}\times 6=1$，且

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x^2\,\mathrm{e}^x\,dx+\frac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$$

因

$$\int_{-\infty}^{0}x^2\,\mathrm{e}^x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot d(\mathrm{e}^x)=x^2\cdot\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\cdot 2xdx=0-2\int_{-\infty}^{0}x\,\mathrm{e}^x\,dx=2,$$

$$\int_{1}^{+\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot d[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\cdot 2xdx$$

$$=2+4\int_{1}^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2+4\times 6=26,$$

可得$E(X^2)=\dfrac{1}{2}\times 2+\dfrac{1}{4}\times 26=\dfrac{15}{2}$，故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{15}{2}-1^2=\frac{13}{2}。$$

6． 设随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x\le 0;\\ 1-x, & 0<x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求$\mathrm{Var}(3X+2)$。

解：因

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{6},$$

则 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}$，故

$$\mathrm{Var}(3X+2)=9\,\mathrm{Var}(X)=9\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}\text{。}$$

7. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}ax+bx^2, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

如果已知 $E(X)=0.5$，试计算 $\mathrm{Var}(X)$。

解：由正则性得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^1(ax+bx^2)dx=\left(a\cdot\frac{x^2}{2}+b\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=1\text{，}$$

又

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^1x(ax+bx^2)dx=\left(a\cdot\frac{x^3}{3}+b\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}=0.5\text{，}$$

则 $a=6$，$b=-6$，因

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_0^1x^2(6x-6x^2)dx=\left(6\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{6}{4}-\frac{6}{5}=0.3\text{，}$$

故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.3-0.5^2=0.05\text{。}$$

8. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-x^2},\quad x>0\text{，}$$

试求 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$。

解：因密度函数

$$p(x)=F'(x)=2x\,\mathrm{e}^{-x^2},\quad x>0\text{，}$$

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}xd(-\mathrm{e}^{-x^2})=-x\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{；}$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}x^2d(-\mathrm{e}^{-x^2})=-x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot2xdx=0-\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=1\text{，}$$

故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=1-\frac{\pi}{4}\text{。}$$

9. 试证：对任意的常数 $c\neq E(X)$，有 $\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2<E(X-c)^2$。

证明：由期望的性质可得

$$E(X-c)^2=E(X^2-2cX+c^2)=E(X^2)-2cE(X)+c^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2+[E(X)]^2-2cE(X)+c^2=\mathrm{Var}(X)+[E(X)-c]^2>\mathrm{Var}(X)\text{。}$$

10．设随机变量 X 仅在区间 $[a,b]$ 上取值，试证 $a \le E(X) \le b$， $\mathrm{Var}(X) \le \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$。

证明：因 $X \ge a$，有 $X-a \ge 0$，得

$$E(X-a)=E(X)-a \ge 0,$$

即 $E(X) \ge a$；又因 $X \le b$，同理可得 $E(X) \le b$，故 $a \le E(X) \le b$。

因 $a \le X \le b$，有 $-\dfrac{b-a}{2} \le X-\dfrac{a+b}{2} \le \dfrac{b-a}{2}$，得 $\left(X-\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$，则

$$E\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]=E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \le 0,$$

即 $E\left(X-\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$，故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2 \le E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

11．设随机变量 X 取值 $x_1 \le \cdots \le x_n$ 的概率分别是 $p_1,\cdots,p_n$， $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k=1$。证明 $\mathrm{Var}(X) \le \left(\dfrac{x_n-x_1}{2}\right)^2$。

证明：因 $x_1 \le X \le x_n$，有 $-\dfrac{x_n-x_1}{2} \le X-\dfrac{x_1+x_n}{2} \le \dfrac{x_n-x_1}{2}$，得 $\left(X-\dfrac{x_1+x_n}{2}\right)^2 \le \left(\dfrac{x_n-x_1}{2}\right)^2$，故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2 \le E\left(X-\frac{x_1+x_n}{2}\right)^2 \le E\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)^2=\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)^2。$$

12．设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数，且 $E(g(X))$ 存在，证明：对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{X>\varepsilon\} \le \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}。$$

注：此题应要求 $g(\varepsilon) \ne 0$。

证明：以连续型随机变量为例加以证明，设连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$。因 $g(x)$ 为非负不减函数，当 $x>\varepsilon$ 时，有 $g(x) \ge g(\varepsilon)>0$，即 $\dfrac{g(x)}{g(\varepsilon)} \ge 1$，故

$$P\{X>\varepsilon\}=\int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx \le \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} p(x)dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} p(x)dx=E\left(\frac{g(X)}{g(\varepsilon)}\right)=\frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}。$$

13．设 X 为非负随机变量， $a>0$。若 $E(\mathrm{e}^{aX})$ 存在，证明：对任意的 $x>0$，有 $P\{X \ge x\} \le \dfrac{E(\mathrm{e}^{aX})}{\mathrm{e}^{ax}}$。

证明：以连续型随机变量为例加以证明，设连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$，故

$$P\{X \ge x\}=\int_{x}^{+\infty} p(u)du \le \int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{au}}{\mathrm{e}^{ax}} p(u)du \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{au}}{\mathrm{e}^{ax}} p(u)du=E\left(\frac{\mathrm{e}^{aX}}{\mathrm{e}^{ax}}\right)=\frac{E(\mathrm{e}^{aX})}{\mathrm{e}^{ax}}。$$

14．已知正常成人男性每升血液中的白细胞数平均是 7.3×10^9，标准差是 0.7×10^9。试利用切比雪夫不等式估计每升血液中的白细胞数在 5.2×10^9 至 9.4×10^9 之间的概率的下界。

解：设 X 表示每升血液中的白细胞数，有 $E(X)=7.3\times10^9$， $\mathrm{Var}(X)=(0.7\times10^9)^2=0.49\times10^{18}$，则

$$P\{5.2\times10^9\le X\le 9.4\times10^9\}=P\{-2.1\times10^9\le X-7.3\times10^9\le 2.1\times10^9\}$$

$$=P\{|X-E(X)|\le 2.1\times10^9\}\ge 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{(2.1\times10^9)^2}=1-\frac{0.49\times10^{18}}{4.41\times10^{18}}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

故所求概率的下界为 $\frac{8}{9}$。