2016-2017 第一学期测试题及答案

任课教师：

专业：

姓名：

学号：

密　封　线

西南财经大学本科期末考试试卷A

课程名称：概率论（周三）

担任教师：黄文毅、马捷、吴萌、吴小丹

考试学期：2016 — 2017 学年第 1 学期

年级：

考试时间：2017年01月09日(09:00-11:00)

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分	阅卷人
成绩										

出题教师必填：1、考试类型：闭卷[√]　开卷[ ]

2、本套试题共 三 道大题，共 5 页，完卷时间 120 分钟。

3、考试用品中除纸、笔、尺子外，可另带的用具有：

计算器[ ]　字典[ ]　________ 等

（请在下划线上填上具体数字或内容，所选[ ]内打钩）

考生注意事项：1、出示学生证或身份证于桌面左上角，以备监考教师查验。

2、拿到试卷后清点并检查试卷页数，如有重页、页数不足、空白页及印刷模糊等举手向监考教师示意调换试卷。

3、做题前请先将专业、年级、学号、姓名填写完整。

4、考生不得携带任何通讯工具进入考场。

5、严格遵守考场纪律。

一、填空题(每题 2 分，共 20 分)

1. 有位同学去某校宿舍楼 A 看望他老乡，此楼只有编号 1～9 的九个寝室，但他到学生宿舍楼下时忘记了老乡寝室号码。学校管理规定：要求访问者说出两个寝室号码，其中有一个正确就能进入，否则不能进入。则此同学能进入此大楼的概率是________.

2. 设随机事件 A,B 互不相容，且 $P(A)=0.3$，$P(\overline{B})=0.6$，则 $P(B|\overline{A})=$________.

3. 设离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<1\\ 0.6, & 1\le x<5\\ 0.9, & 5\le x<6\\ 1, & x\ge 6\end{cases}$，则 $P(X>3)=$________.

4. 已知连续型随机变量的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a(x^3+1), & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，则常数 $a=$________.

5. 若 $X\sim U(0,5)$，关于 x 的方程 $x^2+2x+X-1=0$ 有实根的概率________.

6. 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P\{0<X<4\}=0.2$,则 $P\{X<0\}=$________.

7. 设随机变量 X与Y 相互独立，且 $X\sim\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$，$Y\sim\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$则 $P(X+Y=1)$ =________.

8. 设ξ表示 10 次独立重复试验中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.6，则ξ^2的数学期望 $E(\xi^2)$=________.

9. 设X与Y 相互独立同服从区间 (1,6)上的均匀分布，$P(\min(X,Y)\ge 3)=$________.

10. 掷一枚硬币10次，X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 X 和 Y 的相关系数是________.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 假设事件 A和B 满足 $P(A|B)=1$，则（　　　　）.

（A）A 是必然事件　　（B）B 是必然事件

（C）$A\cap B=\Phi$　　（D）$P(B)\le P(A)$

2. 设ξ是一个连续型变量，其概率密度为$\varphi(x)$，分布函数为$F(x)$，则对于任意 x 值有(　　)

（A）$P(\xi=x)=0$　　　　（B）$\varphi(x)\le 1$

（C）$P(\xi=x)=\varphi(x)$　　　　（D）$P(\xi=x)=F(x)$

3. 下列函数是随机变量密度函数的是(　　　).

(A) $f(x)=\begin{cases}\sin x-2, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　　　　(B) $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　　　　(D) $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4. $X\sim N(\mu,4^2), Y\sim N(\mu,5^2), p_1=P\{X\le\mu-4\}, p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则

(A) 对任意实数$\mu, p_1=p_2$　　　　(B) 对任意实数$\mu, p_1<p_2$

(C) 只对μ的个别值，才有$p_1=p_2$　　　　(D) 对任意实数μ，都有$p_1>p_2$

5. 若二维随机变量（X,Y）在区域$D=\{(x,y)/0<x<1,0<y<1\}$内服从均匀分布，则

$P(X\ge\frac{1}{2}|Y>X)=$（　　　）.

$(A)\ 1$　　　　$(B)\frac{1}{4}$　　　　$(C)\frac{1}{2}$　　　　$(D)\frac{1}{8}$

三、计算题（1-5 每题 9 分，6-7 每题 10 分）

1. 根据以往的考试结果分析，努力学习的学生中有 90%的可能考试及格，不努力学习的学生中有 90%的可能考试不及格．据调查，学生中有 90%的人是努力学习的，试问：

(1) 考试及格的学生中有多大可能是不努力学习的人？

(2) 考试不及格的学生中有多大可能是努力学习的人？

考试及格为A　不努力学习为B　$P(B|A)=\dfrac{P(BA)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\dfrac{10\%\times10\%}{10\%\times10\%+90\%\times90\%}=\dfrac{1}{1+81}=\dfrac{1}{82}$

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & 其它\end{cases}$，求 $Y=2-3X$ 的密度 $f_Y(y)$.

$h(y)$: $x=\frac{2-y}{3}$ $\quad h'(y)=-\frac{1}{3}$

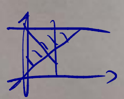
$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\quad y\in(2, 2-\frac{3}{2}\pi)$

$\cancel{\int_2^{2-\frac{3}{2}\pi} \sin(2-3x)\frac{1}{3}}$ $\qquad \frac{1}{3}\cdot\sin\frac{2-y}{3}$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1 \\ 0, & 其\ 他\end{cases}$，求

（1）X,Y 的边缘密度函数；（2）$P(X+Y\le 1)$；（3）X,Y 是否独立？

$x<y$



$P_X(x)=\int_x^1 6x\,dy=6x(1-x)$

$P_Y(y)=\int_0^y 6x\,dx=3y^2$

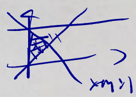
$p(x+y\le 1)$

$=\iint\limits_{x+y\le 1} 6x\,dx\,dy$

$\Rightarrow \int_0^1\int_0^y 6x\,dx\,dy$

$y<1$ $\quad =\int_0^1 3y^2\,dy$

$=1$



$x+y\ge 1$

$p(x,y)\neq P_X(x)P_Y(y)$

$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x} 6x\,dy\,dx$

$6x(1-x)-6x^2$

$6x-12x^2$

$(3x^2-4x^3)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

4. 设袋中有 4 只球，2 红，1 白，1 黑。从中任取 2 只，以 X 表示取出红球数，以 Y 表示取出白球数，$Z=|X-Y|$，

求（1）X 和 Z 的联合分布律，（2）（X，Z）的边缘分布律，（3）Cov（X，Z）.

$X=2 \quad Z=2 \quad \frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$

$X=1 \quad Y=1 \quad Z=0 \quad \frac{C_2^1}{C_4^2}=\frac{1}{3}$

$X=1 \quad Y=0 \quad Z=1 \quad \frac{C_2^1}{6}=\frac{1}{3}$

$X=0 \quad Y=1 \quad Z=1 \quad \frac{1}{6}$

Z	0	1	2
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

X	0	1	2
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

$Z \backslash X$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$Cov(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ$

$=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

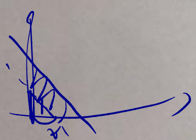
5. 设二维随机变量（X,Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & x,y\ge 0, x+y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

$4z^3$

$z\in(0,1)$



$x+y=z$

$y\in(0,z-x)$

$\int_0^z\int_0^{z-x} 24xy\,dy\,dx$

$12xy^2$

$\int_0^1 12x^3\,dx = 3x^4\Big|_0^1=3$

$\int_0^z 12x(z-x)^2\,dx$

$12x(x^2-2zx+z^2)dx$

$\int_0^z(12x^3-24zx^2+12z^2x)dx$

$=(3x^4-8zx^3+6z^2x^2)\Big|_0^z$

$=3z^4-8z^4+6z^4=z^4$

$(3x^4-12zx^2+z^2x)\Big|_0^z$

$=3z^4-12z^3+z^3=3z^4-11z^3$

$12z^3-33z^2$

6. 某商店按季节出售某种应时商品，每出售1公斤获利润100元，如到季末尚有剩余商品，则每公斤净亏损 60 元．又设该商店在季度内这种商品的出售量 X（单位：公斤）是一个随机变量，且 X 服从区间 $(1000,\ 2000)$ 上的均匀分布．为使商店所获利润的数学期望为最大，问该商店应进多少货？

Y

$$W=\begin{cases} 100x-60(Y-x)=160x-60Y & Y>x \\ 100x & Y<x \end{cases}$$

100x

1000

$$P(x)=\begin{cases} \frac{1}{1000} & 1000<x<2000 \\ 0 & \end{cases}$$

$E(W)=\int_{-\infty}^{+\infty} W p(x)\,dx=\cancel{\int_{1000}^{2000}\int_{1000}^{Y} 100x\cdot\frac{1}{1000}\,dx+\int_{Y}^{2000} (160x-60Y)\frac{1}{1000}}$

$\frac{1}{20}(Y^2-10^6)+$

7. 一公寓有200户住户，一户住户拥有汽车辆数 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

试用中心极限定理近似计算，至少要设多少车位，才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为0.95？（设：$\Phi(1.645)=0.95$，其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,\ 1)$ 的分布函数．）

n个车位　X_i 第i个住户需要的车位数

$E(X_i)=1.2$　$E(X_i^2)=0.6+1.2=1.8$　$Var(X_i)=1.8-1.2^2=0.36$

$P\left(\sum_{i=1}^{200} X_i \le n\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i-\sum_{i=1}^{200} E(X_i)}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{200} X_i\right)}}\le\frac{n-E}{\sqrt{Var}}\right)=\Phi\left(\frac{n-240}{\sqrt{72}}\right)\ge 0.95$

《概率论》期末试卷 A 答案

一 填空题 （每题 2 分，共 20 分）

（1）$\frac{2}{9}$ 0.22 （2）$\frac{4}{7}$ （3）0.4 （4）0.5 （5）0.4

（6）0.4 （7）0.42 （8）38.4 （9）$\frac{9}{25}$，0.36 （10）-1

二 选择题 （每题 3 分，共 15 分）

1D 2A 3B 4A 5B

三 解答题 （1-5 每题 9 分，6-7 每题 10 分）

1 解：设 $A=\{$被调查的学生是努力学习的$\}$，

$B=\{$被调查的学生考试及格$\}$.

由题设，有 $P(A)=0.9$，$P(\overline{A})=0.1$；$P(B|A)=0.9$，$P(\overline{B}|\overline{A})=0.9$. （1 分）

要求的概率为 $P(\overline{A}|B)$ 和 $P(A|\overline{B})$. 由 Bayes 公式，有

(1) $P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\dfrac{0.1\times(1-0.9)}{0.9\times0.9+0.1\times(1-0.9)}=0.012195$（4 分）$\frac{1}{82}$

(2) $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}=\dfrac{0.9\times(1-0.9)}{0.9\times(1-0.9)+0.1\times0.9}=0.5$ （4 分）

2 解 $f_Y(y)=f_X(\frac{2-y}{3})\cdot|-\frac{1}{3}|=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin(\frac{2-y}{3}) & 2-\frac{3\pi}{2}<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$ （9 分）

3 解: (1) 当 $0<x<1$ 时 $f_X(x)=\int_x^1 6xdy=6x(1-x)$ 故

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$ （2 分）

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y 6xdx=3y^2$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$ （2 分）

(2) $P(X+Y\le1)=\int_0^{1/2}6xdx\int_x^{1-x}dy=\int_0^{1/2}6x(1-2x)dx=\frac{1}{4}$ （3 分）

(3) $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 **X, Y** 不独立 （2 分）

4 解: $\boldsymbol{X=0,1,2}$, $\boldsymbol{Y=0,1}$, $\boldsymbol{Z=0,1,2}$.

$P\{X=0, Z=0\} = P\{X=0, Y=0\} = 0,$

$P\{X=0, Z=1\} = P\{X=0, Y=1\} = 1/6,$

$P\{X=0, Z=2\} = P\{\phi\} = 0,$

$P\{X=1, Z=0\} = P\{X=1, Y=1\} = 2/6,$

$P\{X=1, Z=1\} = P\{X=1, Y=0\} = 2/6,$

$P\{X=1, Z=2\} = P\{\phi\} = 0,$

$P\{X=2, Z=0\} = P\{\phi\} = 0,$

$P\{X=2, Z=1\} = P\{\phi\} = 0,$

$P\{X=2, Z=2\} = P\{X=2, Y=0\} = 1/6,$

X \ Z	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	0	1/6	0	1/6
1	2/6	2/6	0	4/6
2	0	0	1/6	1/6
$p_{i\cdot}$	2/6	3/6	1/6	1

Z \ X	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	

（6 分）

$Cov(X,Z) = EXZ - EXEZ = 1 - 1 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ （3 分）

5 解：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$ （2 分）

$0 < z < 1,\quad f_Z(z) = \int_0^z 24x(z-x)dx = 4z^3,$ （7 分）

$$f_Z(z)=\begin{cases}4z^3, 0<z<1,\\ 0, \text{ 其它}\end{cases}$$

6 解： 随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000} & 1000<x<2000\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ （2 分）

设该商店进货 s 公斤，Y 是该商店所得利润，则有

$$Y=H(X)=\begin{cases}100s & s\le X\\ 100X-60(s-X) & s>X\end{cases}$$ （2 分）

即

$$Y=H(X)=\begin{cases}100s & s\le X\\ 160X-60s & s>X\end{cases}$$

所以， $E(Y)=E[H(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)f_X(x)dx$ （2 分）

$$=\frac{1}{1000}\int_{1000}^{s}(160x-60s)dx+\frac{1}{1000}\int_{s}^{2000}100sdx$$

$$=\frac{1}{1000}(80s^2-80000000)-\frac{60}{1000}s(s-1000)+\frac{100}{1000}s(2000-s)$$ （2 分）

令：$g(s)=\dfrac{1}{1000}(80s^2-80000000)-\dfrac{60}{1000}s(s-1000)+\dfrac{100}{1000}s(2000-s)$

则 $g'(s)=\dfrac{80}{1000}\cdot 2s-\dfrac{60}{1000}\cdot 2s+60+200-\dfrac{100}{1000}\cdot 2s=260-\dfrac{4}{25}s$

令 $g'(s)=0$，得驻点 $s_0=1625$，并且可以判别 $s_0=1625$ 是函数 $g(s)$ 的最大值点，因此当该商店进货 $s_0=1625$ 公斤时，商店所得利润的数学期望为最大．（2 分）

7 解：

设需要的车位数为 n，X_i 表示第 i 个住户需要的车位数，$(X=1,\ 2,\ \cdots,\ 200)$．则随机变量 X_1，X_2，…，X_{200} 独立同分布，而且

$E(X_i)=0\times 0.1+1\times 0.6+2\times 0.3=1.2$，

（2 分）

$E(X_i^2)=0^2\times 0.1+1^2\times 0.6+2^2\times 0.3=1.8$，

于是有

$$D(X_i)=E\left(X_i^2\right)-\left(E(X_i)\right)^2=1.8-1.2^2=0.36.$$ （2 分）

由题意，得

$$P\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\le n\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200}X_i-E\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\right)}}\le\frac{n-E\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\right)}}\right)$$

$$=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200}X_i-E\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\right)}}\le\frac{n-200\times1.2}{\sqrt{200\times0.36}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{n-240}{\sqrt{72}}\right).$$ （4 分）

由题设，$\Phi\left(\frac{n-240}{\sqrt{72}}\right)\ge0.95$，因此得 $\frac{n-240}{\sqrt{72}}\ge1.645$，

所以有 $n\ge240+1.645\times\sqrt{72}=253.9583$. （2 分）

因此至少需要254个车位，才能满足题设要求.