习题 6.4

1．设总体概率函数是 $p(x;\theta)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是其样本，$T=T(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的充分统计量，则对 $g(\theta)$ 的任一估计 $\hat{g}$，令 $\tilde{g}=E(\hat{g}\,|\,T)$，证明：$\text{MSE}(\tilde{g})\le\text{MSE}(\hat{g})$。这说明，在均方误差准则下，人们只需要考虑基于充分估计量的估计。

解：因 $\tilde{g}=E(\hat{g}\,|\,T)$，由 Rao-Blackwell 定理知 $\tilde{g}$ 是统计量且 $E(\tilde{g})=E(\hat{g})$，$\text{Var}(\tilde{g})\le\text{Var}(\hat{g})$，故

$$\text{MSE}(\tilde{g})=\text{Var}(\tilde{g})+[E(\tilde{g})-g(\theta)]^2\le\text{Var}(\hat{g})+[E(\hat{g})-g(\theta)]^2=\text{MSE}(\hat{g})\text{。}$$

2．设 T_1,T_2 分别是 θ_1,θ_2 的 UMVUE，证明：对任意的（非零）常数 a,b，aT_1+bT_2 是 $a\theta_1+b\theta_2$ 的 UMVUE。

证明：因 T_1,T_2 分别是 θ_1,θ_2 的 UMVUE，可得 $E(T_1)=\theta_1,E(T_2)=\theta_2$，且对满足 $E(\varphi)=0,\text{Var}(\varphi)<+\infty$ 的任意统计量 $\varphi=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都有 $\text{Cov}(T_1,\varphi)=\text{Cov}(T_2,\varphi)=0$，则

$$E(aT_1+bT_2)=aE(T_1)+bE(T_2)=a\theta_1+b\theta_2\text{，}$$

$$\text{Cov}(aT_1+bT_2,\varphi)=a\text{Cov}(T_1,\varphi)+b\text{Cov}(T_2,\varphi)=0\text{，}$$

故 aT_1+bT_2 是 $a\theta_1+b\theta_2$ 的 UMVUE。

3．设 T 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE，$\hat{g}$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，证明，若 $\text{Var}(\hat{g})<+\infty$，则 $\text{Cov}(T,\hat{g})>0$。

证明：因 $\hat{g}$ 和 T 都是 $g(\theta)$ 的无偏估计，有 $E(\hat{g})=E(T)=\theta$，即 $E(\hat{g}-T)=0$。又因 T 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE，有 $\text{Cov}(T,\hat{g}-T)=0$，即 $\text{Cov}(T,\hat{g})-\text{Cov}(T,T)=0$。统计量 T 作为 $g(\theta)$ 的 UMVUE，不可能是常数，故

$$\text{Cov}(T,\hat{g})=\text{Cov}(T,T)=\text{Var}(T)>0\text{。}$$

4．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为样本，证明，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 分别为 μ,σ^2 的 UMVUE。

证明：无偏性：因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，有 $E(\bar{X})=E(X)=\mu$，即 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计。

正交性：样本联合密度函数为

$$p=p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\text{，}$$

可得

$$\frac{\partial p}{\partial\mu}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\cdot\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)\cdot(-1)\right]=p\cdot\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\frac{n\bar{x}-n\mu}{\sigma^2}p\text{，}$$

取 $T=\bar{X}$，$a=\dfrac{n}{\sigma^2}$，$b=-\dfrac{n\mu}{\sigma^2}$，有 $\dfrac{\partial p}{\partial \mu}=(at+b)p$，由正交性引理知对于方差有界的统计量 φ 可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E(\varphi\bar{X})=0$。故 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 μ 的 UMVUE。

无偏性：因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，有 $E(S^2)=\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，即 S^2 是 σ^2 的无偏估计。

正交性：样本联合密度函数为

$$p=p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

有 $\sigma^n p=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，可得

$$\frac{\partial(\sigma^n p)}{\partial(\sigma^2)}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\cdot\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\sigma^n p\cdot\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\frac{1}{2}\sigma^{n-4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot p,$$

取 $T=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，$a=\dfrac{1}{2}\sigma^{n-4}$，$b=0$，$c=\sigma^n$，有 $\dfrac{\partial(cp)}{\partial\mu}=(at+b)p$，由正交性引理知对于方差有界的统计量 φ 可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E\left[\varphi\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=0$，从而

$$E\left[\varphi\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}X_i+n\mu^2\right)\right]=E\left(\varphi\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-2n\mu E(\varphi\bar{X})+2n\mu^2E(\varphi)=0,$$

前面已证可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E(\varphi\bar{X})=0$，这样可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E\left(\varphi\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=0$。

再根据可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E(\varphi\bar{X})=0$，由于统计量 φ 的任意性，令 $\varphi^*=\varphi\bar{X}$，φ^* 仍为统计量，可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E(\varphi\bar{X})=E(\varphi^*)=0$，再由 $E(\varphi^*)=0$ 推出 $E(\varphi^*\bar{X})=E(\varphi\bar{X}^2)=0$。从而可由 $E(\varphi)=0$ 推出

$$E(\varphi S^2)=E\left[\varphi\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\right]=\frac{1}{n-1}E\left(\varphi\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\frac{n}{n-1}E(\varphi\bar{X}^2)=0,$$

故 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 为 σ^2 的 UMVUE。

5．设总体的概率函数为 $p(x;\theta)$，满足定义 6.4.2 的条件，若二阶导数 $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}p(x;\theta)$ 对一切的 $\theta\in\Theta$ 存在，证明费希尔信息量 $I(\theta)=-E\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]$。

证明：因

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p=\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta},\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)=-\frac{1}{p^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}=-\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2},$$

则

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=-E\left[\frac{1}{p(X;\theta)}\cdot\frac{\partial p(X;\theta)}{\partial\theta}\right]^2+E\left[\frac{1}{p(X;\theta)}\cdot\frac{\partial^2 p(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right]。$$

因

$$E\left[\frac{1}{p(X;\theta)}\cdot\frac{\partial p(X;\theta)}{\partial\theta}\right]^2=E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X;\theta)\right]^2=I(\theta),$$

$$E\left[\frac{1}{p(X;\theta)}\cdot\frac{\partial^2 p(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p(x;\theta)}\cdot\frac{\partial^2 p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot p(x;\theta)dx=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x;\theta)dx=0,$$

故

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=-I(\theta)。$$

6．设总体密度函数为 $p(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}$，$0<x<1,\theta>0$，$X_1,\cdots,X_n$ 是样本。

（1）求 $g(\theta)=1/\theta$ 的最大似然估计；

（2）求 $g(\theta)$ 的有效估计。

解：（1）似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}I_{0<x_i<1}=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}I_{0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1}。$$

当 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$ 时，有 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)$。令

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=n\cdot\frac{1}{\theta}+\ln(x_1x_2\cdots x_n)=0,$$

可得

$$\theta=-\frac{n}{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i},$$

这是唯一驻点。又因

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta^2}<0,$$

最大值点，故 θ 的最大似然估计为 $\hat\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$，从而 $g(\theta)=1/\theta$ 的最大似然估计为 $\hat g=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$。

（2）无偏性：因

$$E(\ln X)=\int_0^1\ln x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1\ln x\cdot d(x^\theta)=x^\theta\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x^\theta\cdot\frac{1}{x}dx=0-\frac{1}{\theta}x^\theta\Big|_0^1=-\frac{1}{\theta},$$

可得

$$E(\hat g)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=-\frac{1}{n}\cdot n\cdot\left(-\frac{1}{\theta}\right)=\frac{1}{\theta}=g(\theta),$$

即 $\hat g$ 是 $g(\theta)=1/\theta$ 的无偏估计。

有效性：又因

$$E(\ln X)^2=\int_0^1(\ln x)^2\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1(\ln x)^2\cdot d(x^\theta)=x^\theta(\ln x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 x^\theta\cdot\frac{2\ln x}{x}dx=0-\frac{2}{\theta}E(\ln X)=\frac{2}{\theta^2},$$

则

$$\mathrm{Var}(\ln X)=E(\ln X)^2-[E(\ln X)]^2=\frac{2}{\theta^2}-\left(-\frac{1}{\theta}\right)^2=\frac{1}{\theta^2},$$

可得

$$\mathrm{Var}(\hat{g})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(\ln X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{1}{\theta^2}=\frac{1}{n\theta^2}。$$

因 $p(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{0<x<1}$，当 $0<x<1$ 时，

$$\ln p(x;\theta)=\ln\theta+(\theta-1)\ln x,$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{1}{\theta}+\ln x,\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)=-\frac{1}{\theta^2},$$

即 Fisher 信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=\frac{1}{\theta^2}。$$

可得 $g(\theta)=1/\theta$ 无偏估计方差的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}=\frac{\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2}{n\cdot\frac{1}{\theta^2}}=\frac{1}{n\theta^2}=\mathrm{Var}(\hat{g}),$$

故 $\hat{g}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln X_i$ 是 $g(\theta)=1/\theta$ 的有效估计。

7．设总体密度函数为 $p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}},\quad x>0,\theta>0$，求 θ 的费希尔信息量 $I(\theta)$。

解：因 $p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}}I_{x>0}$，当 $x>0$ 时，$\ln p(x;\theta)=\ln 2+\ln\theta-\frac{\theta}{x^2}-3\ln x$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)=-\frac{1}{\theta^2},$$

故 Fisher 信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=\frac{1}{\theta^2}。$$

8．设总体密度函数为 $p(x;\theta)=\theta c^\theta x^{-(\theta+1)},\quad x>c,c>0$ 已知, $\theta>0$，求 θ 的费希尔信息量 $I(\theta)$。

解：因 $p(x;\theta)=\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}I_{x>0}$，当 $x>0$ 时，$\ln p(x;\theta)=\ln\theta+\theta\ln c-(\theta+1)\ln x$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{1}{\theta}+\ln c-\ln x,\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)=-\frac{1}{\theta^2},$$

故 Fisher 信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=\frac{1}{\theta^2}\text{。}$$

9．设总体分布列为 $P\{X=x\}=(x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2},\quad x=2,3,\cdots;0<\theta<1$，求 θ 的费希尔信息量 $I(\theta)$。

解：因 $p(x;\theta)=(x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2},\quad x=2,3,\cdots$，有 $\ln p(x;\theta)=\ln(x-1)+2\ln\theta+(x-2)\ln(1-\theta)$，则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{2}{\theta}-\frac{x-2}{1-\theta}，\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)=-\frac{2}{\theta^2}-\frac{x-2}{(1-\theta)^2}，$$

则 Fisher 信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=-\frac{2}{\theta^2}-\frac{E(X)-2}{(1-\theta)^2}\text{。}$$

因

$$E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}=\theta^2\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2}\bigg|_{x=1-\theta}=\theta^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=2}^{+\infty}x^k\bigg|_{x=1-\theta}=\theta^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\bigg|_{x=1-\theta}$$

$$=\theta^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)\bigg|_{x=1-\theta}=\theta^2\frac{2}{(1-x)^3}\bigg|_{x=1-\theta}=\frac{2}{\theta}，$$

故

$$I(\theta)=-\frac{2}{\theta^2}-\frac{1}{(1-\theta)^2}\left(\frac{2}{\theta}-2\right)=\frac{2}{\theta^2(1-\theta)}\text{。}$$

10．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $Ga(\alpha,\lambda)$ 的样本，$\alpha>0$ 已知，试证明，$\bar{X}/\alpha$ 是 $g(\lambda)=1/\lambda$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

证明：无偏性：因总体 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，有 $E(X)=\dfrac{\alpha}{\lambda}$，则

$$E\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}E(X)=\frac{1}{\lambda}=g(\lambda)，$$

即 $\dfrac{\bar{X}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 的无偏估计。

有效性：因总体 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，有 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$，则

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n\alpha^2}\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{n\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{\lambda^2}=\frac{1}{n\alpha\lambda^2}\text{。}$$

因总体密度函数 $p(x;\lambda)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{x>0}$，当 $x>0$ 时，

$$\ln p(x;\lambda)=\alpha\ln\lambda-\ln\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\ln x-\lambda x，$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln p(x;\lambda)=\frac{\alpha}{\lambda}-x\,,\quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln p(x;\lambda)=-\frac{\alpha}{\lambda^2}\,,$$

即 Fisher 信息量为

$$I(\lambda)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln p(X;\lambda)\right]=\frac{\alpha}{\lambda^2}\text{。}$$

可得 $g(\lambda)=1/\lambda$ 无偏估计方差的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)}=\frac{\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)^2}{n\cdot\frac{\alpha}{\lambda^2}}=\frac{1}{n\alpha\lambda^2}=\mathrm{Var}\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right),$$

故 $\frac{\bar{X}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

11．设 $X_1,\cdots,X_m$ i.i.d. $\sim N(a,\sigma^2)$，$Y_1,\cdots,Y_n$ i.i.d. $\sim N(a,2\sigma^2)$，求 a 和 σ^2 的 UMVUE。

解：先求参数 a 和 σ^2 的最大似然估计，修偏，再证明无偏性和有效性。

因样本 $X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n$ 的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=p(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;a,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{(y_j-a)^2}{4\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2})^{m+2n}\cdot(\sqrt{\pi})^{m+n}\cdot\sigma^{m+n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{m+2n}{2}\ln 2-\frac{m+n}{2}\ln\pi-\frac{m+n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right],$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial a}=-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left[-\sum_{i=1}^{m}2(x_i-a)-0.5\sum_{j=1}^{n}2(y_j-a)\right]=\dfrac{1}{\sigma^2}[(m\bar{x}-ma)+0.5(n\bar{y}-na)]=0;\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial(\sigma^2)}=-\dfrac{m+n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]=0.\end{cases}$$

解得

$$a=\frac{m\bar{x}+0.5n\bar{y}}{m+0.5n},$$

$$\sigma^2=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2-2am\bar{x}+ma^2+0.5\sum_{j=1}^{n}y_j^2-an\bar{y}+0.5na^2\right)$$

$$=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}x_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}y_j^2-2a(m\bar{x}+0.5n\bar{y})+a^2(m+0.5n)\right],$$

可得最大似然估计

$$\hat{a}=\frac{m\bar{X}+0.5n\bar{Y}}{m+0.5n},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-2\hat{a}(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})+(m+0.5n)\hat{a}^2\right]$$

$$=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-\frac{(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})^2}{m+0.5n}\right]。$$

因 $X_i\sim N(a,\sigma^2)$，$Y_j\sim N(a,2\sigma^2)$，有

$$E(\bar{X})=E(X)=a\text{，}\quad \mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{m}\mathrm{Var}(X)=\frac{\sigma^2}{m}\text{，}\quad E(\bar{Y})=E(Y)=a\text{，}\quad \mathrm{Var}(\bar{Y})=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(Y)=\frac{2\sigma^2}{n}\text{，}$$

则

$$E(\hat{a})=\frac{mE(\bar{X})+0.5nE(\bar{Y})}{m+0.5n}=\frac{ma+0.5na}{m+0.5n}=a\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{a})=\frac{m^2\,\mathrm{Var}(\bar{X})+0.25n^2\,\mathrm{Var}(\bar{Y})}{(m+0.5n)^2}=\frac{m^2\cdot\dfrac{\sigma^2}{m}+0.25n^2\cdot\dfrac{2\sigma^2}{n}}{(m+0.5n)^2}=\frac{m\sigma^2+0.5n\sigma^2}{(m+0.5n)^2}=\frac{\sigma^2}{m+0.5n}\text{，}$$

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}E(X_i^2)+0.5\sum_{j=1}^{n}E(Y_j^2)-(m+0.5n)E(\hat{a}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{m+n}\left[m(\sigma^2+a^2)+0.5n(2\sigma^2+a^2)-(m+0.5n)\left(\frac{\sigma^2}{m+0.5n}+a^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m+n}(m\sigma^2+n\sigma^2-\sigma^2)=\frac{m+n-1}{m+n}\sigma^2\text{，}$$

可见 $\hat{a}$ 是 a 的无偏估计，但 $\hat{\sigma}^2$ 不是 σ^2 的无偏估计，修偏得

$$E\left(\frac{m+n}{m+n-1}\hat{\sigma}^2\right)=\sigma^2\text{，}$$

即

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{m+n}{m+n-1}\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n-1}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-\frac{(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})^2}{m+0.5n}\right]$$

是 σ^2 的无偏估计。

无偏性：$\hat{a}=\dfrac{m\bar{X}+0.5n\bar{Y}}{m+0.5n}$ 是 a 的无偏估计。

正交性：样本联合密度函数为

$$p=p(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;a,\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2})^{m+2n}\cdot(\sqrt{\pi})^{m+n}\cdot\sigma^{m+n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]}\text{，}$$

可得

$$\frac{\partial p}{\partial a}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{m+2n}\cdot(\sqrt{\pi})^{m+n}\cdot\sigma^{m+n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]}\cdot\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}2(x_i-a)+0.5\sum_{j=1}^{n}2(y_j-a)\right]$$

$$=p\cdot\frac{1}{\sigma^2}(m\bar{x}-ma+0.5n\bar{y}-0.5na)=\frac{m+0.5n}{\sigma^2}(\hat{a}-a)\cdot p\text{，}$$

令 $T=\hat{a}=\dfrac{m\bar{X}+0.5n\bar{Y}}{m+0.5n}$，$a^*=\dfrac{m+0.5n}{\sigma^2}$，$b=-\dfrac{m+0.5n}{\sigma^2}a$，$c=1$，即 $\dfrac{\partial p}{\partial a}=(a^*t+b)p$，由正交性引理知

对于方差有界的统计量φ可由$E(\varphi)=0$推出$E(\varphi\hat{a})=0$，故$\hat{a}=\dfrac{m\bar{X}+0.5n\bar{Y}}{m+0.5n}$为$a$的UMVUE。

无偏性：$\tilde{\sigma}^2=\dfrac{1}{m+n-1}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-\dfrac{(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})^2}{m+0.5n}\right]$是$\sigma^2$的无偏估计。

正交性：样本联合密度函数为

$$p=p(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;a,\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2})^{m+2n}\cdot(\sqrt{\pi})^{m+n}\cdot\sigma^{m+n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]},$$

有$\sigma^{m+n}p=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^{m+2n}\cdot(\sqrt{\pi})^{m+n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]}$，可得

$$\frac{\partial(\sigma^{m+n}p)}{\partial(\sigma^2)}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{m+2n}\cdot(\sqrt{\pi})^{m+n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]}\cdot\frac{1}{2\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+0.5\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sigma^{m+n-4}\left[\sum_{i=1}^{m}x_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}y_j^2-2a(m\bar{x}+0.5n\bar{y})+a^2(m+0.5n)\right]\cdot p,$$

令$T=\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-2a(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})$，$a^*=\dfrac{1}{2}\sigma^{m+n-4}$，$b=\dfrac{1}{2}\sigma^{m+n-4}a^2(m+0.5n)$，$c=\sigma^{m+n}$，即$\dfrac{\partial(cp)}{\partial a}=(a^*t+b)p$，由正交性引理知对于方差有界的统计量$\varphi$可由$E(\varphi)=0$推出$E(\varphi T)=0$，从而

$$E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-2a(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})\right)\right]=E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2\right)\right]-2a(m+0.5n)E(\varphi\hat{a})=0,$$

因可由$E(\varphi)=0$推出$E(\varphi\hat{a})=0$，这样可由$E(\varphi)=0$推出$E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2\right)\right]=0$。

再根据可由$E(\varphi)=0$推出$E(\varphi\hat{a})=0$，由于统计量φ的任意性，令$\varphi^*=\varphi\hat{a}$，φ^*仍为统计量，可由$E(\varphi)=0$推出$E(\varphi\hat{a})=E(\varphi^*)=0$，再由$E(\varphi^*)=0$推出$E(\varphi^*\hat{a})=E(\varphi\hat{a}^2)=0$。从而可由$E(\varphi)=0$推出

$$E(\varphi\tilde{\sigma}^2)=E\left[\varphi\frac{1}{m+n-1}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-\frac{(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})^2}{m+0.5n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m+n-1}E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-(m+0.5n)\hat{a}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m+n-1}E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2\right)\right]-\frac{m+0.5n}{m+n-1}E(\varphi\hat{a}^2)=0,$$

故$\tilde{\sigma}^2=\dfrac{1}{m+n-1}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i^2+0.5\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-\dfrac{(m\bar{X}+0.5n\bar{Y})^2}{m+0.5n}\right]$为$\sigma^2$的UMVUE。

12．设$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d.$\sim N(\mu,1)$，求μ^2的UMVUE。证明此UMVUE达不到C-R不等式的下界，即

它不是有效估计。

解：先求参数 μ^2 的最大似然估计，再修偏，再证明无偏性和有效性。

因期望 μ 的最大似然估计为 $\bar{X}$，可知 μ^2 的最大似然估计为 $\bar{X}^2$ 。因

$$E(\bar{X}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\frac{1}{n}+\mu^2\neq\mu^2,$$

可见，$\bar{X}^2$ 不是 μ^2 的无偏估计，修偏得 $E\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}\right)=\mu^2$，即 $\tilde{\mu}^2=\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ 是 μ^2 的无偏估计。

无偏性：$\tilde{\mu}^2=\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ 是 μ^2 的无偏估计。

正交性：样本联合密度函数为

$$p=p(x_1,\cdots,x_n;\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

可得

$$\frac{\partial p}{\partial\mu}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\cdot\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)\cdot(-1)\right]=p\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)=(n\bar{x}-n\mu)p,$$

令 $T=\bar{X}$， $a=n$， $b=-n\mu$， $c=1$，即 $\frac{\partial p}{\partial\mu}=(a\bar{x}+b)p$，由正交性引理知对于方差有界的统计量 φ 可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E(\varphi\bar{X})=0$ 。由于统计量 φ 的任意性，令 $\varphi^*=\varphi\bar{X}$， φ^* 仍为统计量，可由 $E(\varphi)=0$ 推出 $E(\varphi\bar{X})=E(\varphi^*)=0$，再由 $E(\varphi^*)=0$ 推出 $E(\varphi^*\bar{X})=E(\varphi\bar{X}^2)=0$ 。从而

$$E\left[\varphi\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}\right)\right]=E(\varphi\bar{X}^2)-\frac{1}{n}E(\varphi)=0,$$

故 $\tilde{\mu}^2=\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ 是 μ^2 的 UMVUE。

因 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\right)$，有

$$E(\bar{X})=\mu,\quad Var(\bar{X})=E[(\bar{X}-\mu)^2]=\frac{1}{n},\quad E[(\bar{X}-\mu)^3]=0,\quad E[(\bar{X}-\mu)^4]=\frac{3}{n^2},$$

则

$$\begin{aligned}E(\bar{X}^4)&=E[(\bar{X}-\mu+\mu)^4]=E[(\bar{X}-\mu)^4]+4\mu E[(\bar{X}-\mu)^3]+6\mu^2E[(\bar{X}-\mu)^2]+4\mu^3E(\bar{X}-\mu)+\mu^4\\&=\frac{3}{n^2}+\frac{6\mu^2}{n}+\mu^4,\end{aligned}$$

可得

$$\mathrm{Var}(\tilde{\mu}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X}^2)=E(\bar{X}^4)-[E(\bar{X}^2)]^2=\frac{3}{n^2}+\frac{6\mu^2}{n}+\mu^4-\left(\frac{1}{n}+\mu^2\right)^2=\frac{2}{n^2}+\frac{4\mu^2}{n}\text{。}$$

因总体密度函数 $p(x;\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$，有

$$\ln p(x;\mu)=-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{(x-\mu)^2}{2},$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln p(x;\mu)=x-\mu, \quad \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln p(x;\mu)=-1,$$

即 Fisher 信息量为

$$I(\mu)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln p(X;\mu)\right]=1,$$

可得 $g(\mu)=\mu^2$ 无偏估计方差的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\mu)]^2}{nI(\mu)}=\frac{(2\mu)^2}{n}=\frac{4\mu^2}{n}<\mathrm{Var}(\tilde{\mu}^2)=\frac{2}{n^2}+\frac{4\mu^2}{n},$$

故 $\tilde{\mu}^2=\overline{X}^2-\frac{1}{n}$ 不是 μ^2 的有效估计。

13．对泊松分布 $P(\theta)$。

（1）求 $I\left(\frac{1}{\theta}\right)$；

（2）找一个函数 $g(\cdot)$，使 $g(\theta)$ 的费希尔信息与 θ 无关。

解：（1）因总体概率函数为 $p(x;\theta)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}, \quad x=0,1,2,\cdots$，有

$$\ln p(x;\theta)=x\ln\theta-\theta-\ln x!, \quad x=0,1,2,\cdots$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{x}{\theta}-1, \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)=-\frac{x}{\theta^2},$$

即 Fisher 信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=-E\left(-\frac{X}{\theta^2}\right)=\frac{E(X)}{\theta^2}=\frac{\theta}{\theta^2}=\frac{1}{\theta}。$$

因

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial g(\theta)^2}\ln p(X;\theta)\cdot\left(\frac{dg(\theta)}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial g(\theta)^2}\ln p(X;\theta)\right]\cdot[g'(\theta)]^2=I[g(\theta)]\cdot[g'(\theta)]^2,$$

即 $I[g(\theta)]=\frac{I(\theta)}{[g'(\theta)]^2}$，故

$$I\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{I(\theta)}{\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)'\right]^2}=\frac{\frac{1}{\theta}}{\left[-\frac{1}{\theta^2}\right]^2}=\theta^3$$

。

（2）要使得 $I[g(\theta)]=c$ 为常数与 θ 无关，则

$$I[g(\theta)]=\frac{I(\theta)}{[g'(\theta)]^2}=\frac{1}{\theta[g'(\theta)]^2}=c,$$

即 $g'(\theta)=\frac{1}{\sqrt{c\theta}}$，可得 $g(\theta)=\frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{c}}$。取 $g(\theta)=\sqrt{\theta}$，有 $g'(\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\theta}}$，则

$$I[g(\theta)]=\frac{I(\theta)}{[g'(\theta)]^2}=\frac{\frac{1}{\theta}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)^2}=4,$$

故 $I[g(\theta)]$ 与 θ 无关。

14．设 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布变量，$0<\theta<1$，

$$P\{X_1=-1\}=\frac{1-\theta}{2},\quad P\{X_1=0\}=\frac{1}{2},\quad P\{X_1=1\}=\frac{\theta}{2}。$$

（1）求 θ 的 MLE $\hat{\theta}_1$，并问 $\hat{\theta}_1$ 是否无偏的；

（2）求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2$；

（3）计算 θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界。

解：（1）根据多点分布样本联合质量函数的两种表达式分别求出 θ 的 MLE $\hat{\theta}_1$。

方法一：设 $X_1,\cdots,X_n$ 中取值 $-1,0,1$ 分别有 n_{-1},n_0,n_1 次，有 $n_{-1}+n_0+n_1=n$，则似然函数

$$L(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n_{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{n_1}=\frac{(1-\theta)^{n_{-1}}\theta^{n_1}}{2^n},$$

有

$$\ln L(\theta)=n_{-1}\ln(1-\theta)+n_1\ln\theta-n\ln 2,$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=n_{-1}\cdot\frac{-1}{1-\theta}+n_1\cdot\frac{1}{\theta}=0,$$

可得 $\theta=\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}$，故 θ 的 MLE $\hat{\theta}_1=\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}$。

方法二：总体 X 概率函数为

$$p(x;\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{x(x-1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+1)(x-1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{x(x+1)}{2}}=\frac{1}{2}(1-\theta)^{\frac{x^2-x}{2}}\theta^{\frac{x^2+x}{2}},\quad x=-1,0,1,$$

则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{2}(1-\theta)^{\frac{x_i^2-x_i}{2}}\theta^{\frac{x_i^2+x_i}{2}}=\frac{1}{2^n}(1-\theta)^{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n x_i\right)}\theta^{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i=1}^n x_i\right)},\quad x_1,x_2,\cdots,x_n=-1,0,1,$$

有

$$\ln L(\theta)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-\theta)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\theta-n\ln 2,$$

令

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\frac{-1}{1-\theta}+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\frac{1}{\theta}=0,$$

可得$\theta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\dfrac{1}{2}$，故$\theta$的 MLE $\hat{\theta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}+\dfrac{1}{2}$。

注：因X_i全部可能取值为$-1,0,1$，有$\sum_{i=1}^{n}X_i^2=n_1+n_{-1}$，$\sum_{i=1}^{n}X_i=n_1-n_{-1}$，即以上两个结果一致。

因

$$E(\hat{\theta}_1)=E\left(\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}\right)=E\left[E\left(\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}\middle|n_{-1}+n_1\right)\right],$$

且

$$P\{X=1\,|\,X=-1\text{或}X=1\}=\frac{P\{X=1\}}{P\{X=-1\text{或}X=1\}}=\frac{\frac{\theta}{2}}{\frac{1-\theta}{2}+\frac{\theta}{2}}=\theta,$$

则在$n_{-1}+n_1=m$的条件下，n_1服从二项分布$b(m,\theta)$，有$E(n_1\,|\,n_{-1}+n_1=m)=m\theta$，可得

$$E\left(\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}\middle|n_{-1}+n_1=m\right)=\frac{1}{m}E(n_1\,|\,n_{-1}+n_1=m)=\theta,$$

即$E\left(\dfrac{n_1}{n_{-1}+n_1}\middle|n_{-1}+n_1\right)=\theta$，故

$$E(\hat{\theta}_1)=E\left(\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}\right)=E\left[E\left(\frac{n_1}{n_{-1}+n_1}\middle|n_{-1}+n_1\right)\right]=E(\theta)=\theta,$$

即$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计。

（2）因

$$E(X)=(-1)\times\frac{1-\theta}{2}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{\theta}{2}=\theta-\frac{1}{2},$$

即$\theta=E(X)+\dfrac{1}{2}$，故θ的矩估计$\hat{\theta}_2=\bar{X}+\dfrac{1}{2}$

（3）因总体X概率函数为

$$p(x;\theta)=\frac{1}{2}(1-\theta)^{\frac{x^2-x}{2}}\theta^{\frac{x^2+x}{2}},\quad x=-1,0,1,$$

有

$$\ln p(x;\theta)=\frac{x^2-x}{2}\ln(1-\theta)+\frac{x^2+x}{2}\ln\theta-\ln 2,$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{x^2-x}{2}\cdot\frac{-1}{1-\theta}+\frac{x^2+x}{2}\cdot\frac{1}{\theta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)=\frac{x^2-x}{2}\cdot\frac{-1}{(1-\theta)^2}-\frac{x^2+x}{2}\cdot\frac{1}{\theta^2}=-\frac{(1-2\theta+2\theta^2)x^2+(1-2\theta)x}{2\theta^2(1-\theta)^2},$$

可得费希尔信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right]=\frac{(1-2\theta+2\theta^2)E(X^2)+(1-2\theta)E(X)}{2\theta^2(1-\theta)^2}。$$

因

$$E(X)=(-1)\times\frac{1-\theta}{2}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{\theta}{2}=\theta-\frac{1}{2},\quad E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1-\theta}{2}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2},$$

则

$$I(\theta)=\frac{(1-2\theta+2\theta^2)\cdot\frac{1}{2}+(1-2\theta)\cdot\left(\theta-\frac{1}{2}\right)}{2\theta^2(1-\theta)^2}=\frac{\theta-\theta^2}{2\theta^2(1-\theta)^2}=\frac{1}{2\theta(1-\theta)},$$

故 θ 无偏估计方差的 C-R 下界为 $\dfrac{1}{nI(\theta)}=\dfrac{2\theta(1-\theta)}{n}$。

15．设总体 $X\sim Exp(1/\theta)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是样本，θ 的矩估计和最大似然估计都是 $\bar{X}$，它也是 θ 的相合估计和无偏估计，试证明在均方误差准则下存在优于 $\bar{X}$ 的估计（提示：考虑 $\hat{\theta}_a=a\bar{X}$，找均方误差最小者）。

证明：因 $X\sim Exp(1/\theta)$，有 $E(X)=\theta$，$\operatorname{Var}(X)=\theta^2$，且 $\hat{\theta}_a=a\bar{X}$，有

$$E(\hat{\theta}_a)=aE(\bar{X})=aE(X)=a\theta,\quad \operatorname{Var}(\hat{\theta}_a)=a^2\operatorname{Var}(\bar{X})=\frac{a^2}{n}\operatorname{Var}(X)=\frac{a^2\theta^2}{n},$$

则

$$MSE_\theta(\bar{X})=\frac{\theta^2}{n}+(\theta-\theta)^2=\frac{\theta^2}{n},$$

$$MSE_\theta(\hat{\theta}_a)=\frac{a^2\theta^2}{n}+(a\theta-\theta)^2=\left(\frac{a^2}{n}+a^2-2a+1\right)\theta^2=\left(\frac{n+1}{n}a^2-2a+1\right)\theta^2,$$

可得当 $a=\dfrac{n}{n+1}$ 时，$\hat{\theta}_a=\dfrac{n}{n+1}\bar{X}$ 的均方误差 $MSE_\theta(\hat{\theta}_a)=\dfrac{\theta^2}{n+1}$ 小于 $\bar{X}$ 的均方误差 $MSE_\theta(\bar{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$，即在均方误差标准下作为 θ 的估计量 $\hat{\theta}_a=\dfrac{n}{n+1}\bar{X}$ 优于 $\bar{X}$。