第六章　参数估计

习题 6.1

1．设 X_1, X_2, X_3 是取自某总体容量为 3 的样本，试证下列统计量都是该总体均值μ 的无偏估计，在方差存在时指出哪一个估计的有效性最差？

（1）$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$；　（2）$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$；　（3）$\hat{\mu}_3=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{2}{3}X_3$.

证：因 $E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{6}E(X_3)=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{6}\mu=\mu$，

$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{3}E(X_3)=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu$，

$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{6}E(X_1)+\frac{1}{6}E(X_2)+\frac{2}{3}E(X_3)=\frac{1}{6}\mu+\frac{1}{6}\mu+\frac{2}{3}\mu=\mu$，

故 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 都是总体均值μ 的无偏估计；

因 $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{1}{9}\mathrm{Var}(X_2)+\frac{1}{36}\mathrm{Var}(X_3)=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2=\frac{14}{36}\sigma^2$，

$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{9}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{1}{9}\mathrm{Var}(X_2)+\frac{1}{9}\mathrm{Var}(X_3)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2=\frac{1}{3}\sigma^2$，

$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{36}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{1}{36}\mathrm{Var}(X_2)+\frac{4}{9}\mathrm{Var}(X_3)=\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{4}{9}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2$，

故 $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2)<\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1)<\mathrm{Var}(\hat{\mu}_3)$，即 $\hat{\mu}_2$ 有效性最好，$\hat{\mu}_1$ 其次，$\hat{\mu}_3$ 最差.

2．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 $Exp(\lambda)$的样本，已知 $\overline{X}$ 为 $1/\lambda$的无偏估计，试说明$1/\overline{X}$ 是否为λ的无偏估计.

解：因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且都服从指数分布 $Exp(\lambda)$，即都服从伽玛分布 $Ga(1, \lambda)$，

由伽玛分布的可加性知 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从伽玛分布 $Ga(n, \lambda)$，密度函数为

$$p_Y(y)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{I}_{y>0},$$

则 $E\left(\frac{1}{\overline{X}}\right)=E\left(\frac{n}{Y}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{n}{y}\cdot\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda y}dy=\frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}y^{n-2}\mathrm{e}^{-\lambda y}dy=\frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}}=\frac{n}{n-1}\lambda$，

故$1/\overline{X}$ 不是λ的无偏估计.

3．设 $\hat{\theta}$ 是参数θ 的无偏估计，且有 $\mathrm{Var}(\hat{\theta})>0$，试证 $(\hat{\theta})^2$ 不是θ^2 的无偏估计.

证：因 $E(\hat{\theta})=\theta$，有 $E[(\hat{\theta})^2]=\mathrm{Var}(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})]^2=\mathrm{Var}(\hat{\theta})+\theta^2>\theta^2$，故 $(\hat{\theta})^2$ 不是θ^2 的无偏估计.

4．设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_n$ 是来自该总体的一个样本．试确定常数 c 使 $c\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为σ^2 的无偏估计.

解：因 $E[(X_{i+1}-X_i)^2]=\mathrm{Var}(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2=\mathrm{Var}(X_{i+1})+\mathrm{Var}(X_i)+[E(X_{i+1})-E(X_i)]^2=2\sigma^2$，

则 $E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1}-X_i)^2]=c\cdot(n-1)\cdot 2\sigma^2=2c(n-1)\sigma^2$，

故当 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$ 时，$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2$，即 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自下列总体中抽取的简单样本，

$$p(x;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\dfrac{1}{2}\le x\le\theta+\dfrac{1}{2};\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

证明样本均值 $\overline{X}$ 及 $\dfrac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$ 都是 θ 的无偏估计，问何者更有效？

证：因总体 $X\sim U\left(\theta-\dfrac{1}{2},\theta+\dfrac{1}{2}\right)$，有 $Y=X-\theta+\dfrac{1}{2}\sim U(0,1)$，

则 $\overline{X}=\overline{Y}+\theta-\dfrac{1}{2}$，$X_{(1)}=Y_{(1)}+\theta-\dfrac{1}{2}$，$X_{(n)}=Y_{(n)}+\theta-\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})=\dfrac{1}{2}(Y_{(1)}+Y_{(n)})+\theta-\dfrac{1}{2}$，

可得 $E(\overline{X})=E(\overline{Y})+\theta-\dfrac{1}{2}=E(Y)+\theta-\dfrac{1}{2}=\theta$，$\text{Var}(\overline{X})=\text{Var}(\overline{Y})=\dfrac{1}{n}\text{Var}(Y)=\dfrac{1}{12n}$，

因 Y 的密度函数与分布函数分别为

$$p_Y(y)=\text{I}_{0<y<1}，\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ y, & 0\le y<1;\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

有 $Y_{(1)}$ 与 $Y_{(n)}$ 的密度函数分别为

$$p_1(y)=n[1-F_Y(y)]^{n-1}p_Y(y)=n(1-y)^{n-1}\text{I}_{0<y<1}，\quad p_n(y)=n[F_Y(y)]^{n-1}p_Y(y)=ny^{n-1}\text{I}_{0<y<1}，$$

且 $(Y_{(1)}, Y_{(n)})$ 的联合密度函数为

$$p_{1n}(y_{(1)},y_{(n)})=n(n-1)[F_Y(y_{(n)})-F_Y(y_{(1)})]^{n-2}p_Y(y_{(1)})p_Y(y_{(n)})\text{I}_{y_{(1)}<y_{(n)}}$$

$$=n(n-1)(y_{(n)}-y_{(1)})^{n-2}\text{I}_{0<y_{(1)}<y_{(n)}<1}，$$

则 $E(Y_{(1)})=\int_0^1 y\cdot n(1-y)^{n-1}dy=n\cdot\dfrac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(2+n)}=\dfrac{1}{n+1}$，$E(Y_{(n)})=\int_0^1 y\cdot ny^{n-1}dy=\dfrac{n}{n+1}$，

$E(Y_{(1)}^2)=\int_0^1 y^2\cdot n(1-y)^{n-1}dy=n\cdot\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{\Gamma(3+n)}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$，$E(Y_{(n)}^2)=\int_0^1 y^2\cdot ny^{n-1}dy=\dfrac{n}{n+2}$，

$$E(Y_{(1)}Y_{(n)})=\int_0^1 dy_{(n)}\int_0^{y_{(n)}}y_{(1)}y_{(n)}\cdot n(n-1)(y_{(n)}-y_{(1)})^{n-2}dy_{(1)}=\int_0^1 dy_{(n)}\int_0^{y_{(n)}}y_{(1)}y_{(n)}\cdot n\cdot(-1)d(y_{(n)}-y_{(1)})^{n-1}$$

$$=\int_0^1 dy_{(n)}\left[-ny_{(1)}y_{(n)}(y_{(n)}-y_{(1)})^{n-1}\Big|_0^{y_{(n)}}+\int_0^{y_{(n)}}n(y_{(n)}-y_{(1)})^{n-1}\cdot y_{(n)}dy_{(1)}\right]$$

$$=\int_0^1 dy_{(n)}\left[-y_{(n)}\cdot(y_{(n)}-y_{(1)})^n\Big|_0^{y_{(n)}}\right]=\int_0^1 y_{(n)}^{n+1}dy_{(n)}=\frac{1}{n+2}y_{(n)}^{n+2}\Big|_0^1=\frac{1}{n+2}，$$

即 $\text{Var}(Y_{(1)})=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}-\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2=\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$，$\text{Var}(Y_{(n)})=\dfrac{n}{n+2}-\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$，

且 $\mathrm{Cov}(Y_{(1)}, Y_{(n)}) = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$

可得 $E\left[\dfrac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right] = \dfrac{1}{2}[E(Y_{(1)}) + E(Y_{(n)})] + \theta - \dfrac{1}{2} = \theta$，

$$\mathrm{Var}\left[\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right] = \frac{1}{4}[\mathrm{Var}(Y_{(1)}) + \mathrm{Var}(Y_{(n)}) + 2\,\mathrm{Cov}(Y_{(1)}, Y_{(n)})] = \frac{2n+2}{4(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

因 $E(\bar{X}) = \theta$， $E\left[\dfrac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right] = \theta$，

故 $\bar{X}$ 及 $\dfrac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 都是 θ 的无偏估计；

因当 $n > 1$ 时， $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \dfrac{1}{12n} > \mathrm{Var}\left[\dfrac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right] = \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$，

故 $\dfrac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 比样本均值 $\bar{X}$ 更有效.

6. 设 X_1, X_2, X_3 服从均匀分布 $U(0, \theta)$，试证 $\dfrac{4}{3}X_{(3)}$ 及 $4X_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量，哪个更有效？

解：因总体 X 的密度函数与分布函数分别为

$$p(x) = \frac{1}{\theta}\mathrm{I}_{0<x<\theta}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x < \theta; \\ 1, & x \ge \theta. \end{cases}$$

有 $X_{(1)}$ 与 $X_{(3)}$ 的密度函数分别为

$$p_1(x) = 3[1 - F(x)]^2 p(x) = \frac{3(\theta - x)^2}{\theta^3}\mathrm{I}_{0<x<\theta}, \quad p_3(x) = 3[F(x)]^2 p(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{I}_{0<x<\theta},$$

则 $E(X_{(1)}) = \displaystyle\int_0^\theta x \cdot \frac{3(\theta - x)^2}{\theta^3} dx = \frac{3}{\theta^3}\left(\theta^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2\theta \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^\theta = \frac{\theta}{4}$，

$$E(X_{(3)}) = \int_0^\theta x \cdot \frac{3x^2}{\theta^3} dy = \frac{3}{\theta^3} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^\theta = \frac{3\theta}{4},$$

$$E(X_{(1)}^2) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3(\theta - x)^2}{\theta^3} dx = \frac{3}{\theta^3}\left(\theta^2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2\theta \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^\theta = \frac{\theta^2}{10},$$

$$E(X_{(3)}^2) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3x^2}{\theta^3} dy = \frac{3}{\theta^3} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_0^\theta = \frac{3\theta^2}{5},$$

即 $\mathrm{Var}(X_{(1)}) = \dfrac{\theta^2}{10} - \left(\dfrac{\theta}{4}\right)^2 = \dfrac{3\theta^2}{80}$， $\mathrm{Var}(X_{(3)}) = \dfrac{3\theta^2}{5} - \left(\dfrac{3\theta}{4}\right)^2 = \dfrac{3\theta^2}{80}$，

因 $E(4X_{(1)}) = 4 \cdot \dfrac{\theta}{4} = \theta$， $E\left(\dfrac{4}{3}X_{(3)}\right) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3\theta}{4} = \theta$，

故 $4X_{(1)}$及 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 都是θ 的无偏估计；

因 $\text{Var}(4X_{(1)})=16\cdot\frac{3\theta^2}{80}=\frac{3\theta^2}{5}$， $\text{Var}\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)=\frac{16}{9}\cdot\frac{3\theta^2}{80}=\frac{\theta^2}{15}$，有 $\text{Var}(4X_{(1)})>\text{Var}\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)$，

故 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 比 $4X_{(1)}$更有效.

7. 设从均值为μ，方差为$\sigma^2>0$ 的总体中，分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本，$\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分别是这两个样本的均值. 试证，对于任意常数 a, b（$a+b=1$），$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是μ 的无偏估计，并确定常数 a, b 使 $\text{Var}(Y)$ 达到最小.

解：因 $E(Y)=aE(\overline{X}_1)+bE(\overline{X}_2)=a\mu+b\mu=(a+b)\mu=\mu$，

故 Y 是μ 的无偏估计；

因 $\text{Var}(Y)=a^2\,\text{Var}(\overline{X}_1)+b^2\,\text{Var}(\overline{X}_2)=a^2\cdot\frac{\sigma^2}{n_1}+(1-a)^2\cdot\frac{\sigma^2}{n_2}=\left(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}a^2-\frac{2}{n_2}a+\frac{1}{n_2}\right)\sigma^2$，

令 $\frac{d}{da}\text{Var}(Y)=\left(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\cdot 2a-\frac{2}{n_2}\right)\sigma^2=0$，得 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$， 且 $\frac{d^2}{d^2a}\text{Var}(Y)=\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\cdot 2\sigma^2>0$，

故当 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$， $b=1-a=\frac{n_2}{n_1+n_2}$ 时，$\text{Var}(Y)$ 达到最小 $\frac{1}{n_1+n_2}\sigma^2$.

8. 设总体 X 的均值为μ，方差为σ^2，$X_1, \cdots, X_n$ 是来自该总体的一个样本，$T(X_1, \cdots, X_n)$为μ 的任一线性无偏估计量. 证明：$\overline{X}$ 与 T 的相关系数为 $\sqrt{\text{Var}(\overline{X})/\text{Var}(T)}$.

证：因 $T(X_1, \cdots, X_n)$为μ 的任一线性无偏估计量，设 $T(X_1,\cdots,X_n)=\sum_{i=1}^n a_iX_i$，

则 $E(T)=\sum_{i=1}^n a_iE(X_i)=\mu\sum_{i=1}^n a_i=\mu$， 即 $\sum_{i=1}^n a_i=1$，

因 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，当 $i\neq j$ 时，有 $\text{Cov}(X_i, X_j)=0$，

则 $\text{Cov}(\overline{X},T)=\text{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n\text{Cov}\left(\frac{1}{n}X_i,a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{n}\text{Cov}(X_i,X_i)=\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^n a_i=\frac{\sigma^2}{n}$，

因 $\text{Var}(\overline{X})=\frac{1}{n}\text{Var}(X)=\frac{\sigma^2}{n}=\text{Cov}(\overline{X},T)$，

故 $\overline{X}$ 与 T 的相关系数为 $\text{Corr}(\overline{X},T)=\frac{\text{Cov}(\overline{X},T)}{\sqrt{\text{Var}(\overline{X})}\sqrt{\text{Var}(T)}}=\frac{\text{Var}(\overline{X})}{\sqrt{\text{Var}(\overline{X})}\sqrt{\text{Var}(T)}}=\sqrt{\frac{\text{Var}(\overline{X})}{\text{Var}(T)}}$.

9. 设有 k 台仪器，已知用第 i 台仪器测量时，测定值总体的标准差为σ_i（$i=1, \cdots, k$）. 用这些仪器独立地对某一物理量θ 各观察一次，分别得到 $X_1, \cdots, X_k$，设仪器都没有系统误差. 问 $a_1, \cdots, a_k$ 应取何值，方能使 $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^k a_iX_i$ 成为θ 的无偏估计，且方差达到最小？

解：因 $E(\hat{\theta})=E\left(\sum_{i=1}^{k}a_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{k}a_iE(x_i)=\sum_{i=1}^{k}a_i\theta=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\theta$，

则当 $\sum_{i=1}^{k}a_i=1$ 时，$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i$ 是 θ 的无偏估计，

因 $\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\,\mathrm{Var}(x_i)=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2$，

讨论在 $\sum_{i=1}^{k}a_i=1$ 时，$\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2$ 的条件极值，

设拉格朗日函数 $L(a_1,\cdots,a_k,\lambda)=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{k}a_i-1\right)$，

$$\text{令}\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial a_1}=2a_1\sigma_1^2+\lambda=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \dfrac{\partial L}{\partial a_k}=2a_k\sigma_k^2+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{k}a_i-1=0,\end{cases}$$

得 $\lambda=-\dfrac{2}{\sigma_1^{-2}+\cdots+\sigma_k^{-2}}$，$a_i=\dfrac{\sigma_i^{-2}}{\sigma_1^{-2}+\cdots+\sigma_k^{-2}}$，$i=1,\cdots,k$，

故当 $a_i=\dfrac{\sigma_i^{-2}}{\sigma_1^{-2}+\cdots+\sigma_k^{-2}}$，$i=1,\cdots,k$ 时，$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i$ 是 θ 的无偏估计，且方差达到最小.

10．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\theta, 1)$的样本，证明 $g(\theta)=|\theta|$ 没有无偏估计（提示：利用 $g(\theta)$在$\theta=0$ 处不可导）.

证：反证法：假设 $T=T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是 $g(\theta)=|\theta|$ 的任一无偏估计，

因 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是θ 的一个充分统计量，即在取定 $\bar{X}=x$ 条件下，样本条件分布与参数θ 无关，

则 $S=E(T\,|\,\bar{X})$ 与参数θ 无关，且 S 是关于 $\bar{X}$ 的函数，$E(S)=E[E(T\,|\,\bar{X})]=E(T)=g(\theta)=|\theta|$，

可得 $S=S(\bar{X})$ 是 $g(\theta)=|\theta|$ 的无偏估计，

因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\theta, 1)$的样本，由正态分布可加性知 $\bar{X}$ 服从正态分布 $N\left(\theta,\dfrac{1}{n}\right)$，

则 $E(S)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)\cdot\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{2}(x-\theta)^2}dx=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{2}\theta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}dx$，

因 $E(S)=|\theta|$，可知对任意的θ，反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|S(x)|\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}dx$ 收敛，

则由参数θ的任意性以及该反常积分在$-\infty$与$+\infty$两个方向的收敛性知$\int_{-\infty}^{+\infty}|S(x)|\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\cdot|\theta|\cdot|x|}dx$收敛，

因$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[S(x)\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}\right]=S(x)\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}\cdot\sqrt{n}x$，且$|y|\le e^{|y|}$，有$\left|e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}\cdot\sqrt{n}x\right|\le e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\cdot(|\theta|+1)\cdot|x|}$，

则由$\int_{-\infty}^{+\infty}|S(x)|\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\cdot(|\theta|+1)\cdot|x|}dx$的收敛性知$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[S(x)\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}\right]dx$一致收敛，

可得$E(S)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}\theta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)\cdot e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}x^2+\sqrt{n}\theta x}dx$关于参数$\theta$可导，与$E(S)=|\theta|$在$\theta=0$处不可导矛盾，

故$g(\theta)=|\theta|$没有无偏估计.

11．设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的样本，为了得到标准差σ的估计量，考虑统计量：

$$Y_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|,\quad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad n\ge 2,$$

$$Y_2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|X_i-X_j|,\quad n\ge 2,$$

求常数C_1与C_2，使得C_1Y_1与C_2Y_2都是σ的无偏估计.

解：设$Y\sim N(0,\theta^2)$，有

$$E[|Y|]=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{y^2}{2\cdot\theta^2}}dy=2\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}}dy=-2\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta,$$

因$X_i-\bar{X}$是独立正态变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的线性组合，

且$E(X_i-\bar{X})=E(X_i)-E(\bar{X})=\mu-\mu=0$，

$$\mathrm{Var}(X_i-\bar{X})=\mathrm{Var}(X_i)+\mathrm{Var}(\bar{X})-2\mathrm{Cov}(X_i,\bar{X})=\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2-2\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}X_i\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

则$X_i-\bar{X}\sim N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$，$E[|X_i-\bar{X}|]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma=\sqrt{\frac{2(n-1)}{n\pi}}\sigma$，

可得$E(C_1Y_1)=C_1E(Y_1)=C_1\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[|X_i-\bar{X}|]=C_1\cdot\frac{1}{n}\cdot n\cdot\sqrt{\frac{2(n-1)}{n\pi}}\sigma=C_1\sqrt{\frac{2(n-1)}{n\pi}}\sigma$，

故当$C_1=\sqrt{\frac{n\pi}{2(n-1)}}$时，$E[C_1Y_1]=\sigma$，$C_1Y_1$是$\sigma$的无偏估计；

当$i\ne j$时，X_i与X_j相互独立，都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，
有$E(X_i-X_j)=E(X_i)-E(X_j)=\mu-\mu=0$，$\mathrm{Var}(X_i-X_j)=\mathrm{Var}(X_i)+\mathrm{Var}(X_j)=\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2$，

则 $X_i - X_j \sim N(0, 2\sigma^2)$， $E[|X_i - X_j|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{2}\sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma$ ，

当 $i = j$ 时，$X_i - X_j = 0$，$E[|X_i - X_j|] = 0$，

可得 $E(C_2 Y_2) = C_2 E(Y_2) = C_2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E[|X_i - X_j|] = C_2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} \cdot (n^2 - n) \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma = C_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma$ ，

故当 $C_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 时，$E[C_2 Y_2] = \sigma$，$C_2 Y_2$ 是 σ 的无偏估计.