第二章　随机变量及其分布

习题 2.1

1．　口袋中有 5 个球，编号为$1, 2, 3, 4, 5$。从中任取 3 只，以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码。

（1）试求 X 的分布列；

（2）写出 X 的分布函数，并作图。

解：（1）X 的全部可能取值为$3, 4, 5$，且

$$P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}=0.1，\ P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}=0.3，\ P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=0.6，$$

故 X 的分布列为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

（2）因分布函数$F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为$x=3, 4, 5$。

当$x<3$时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

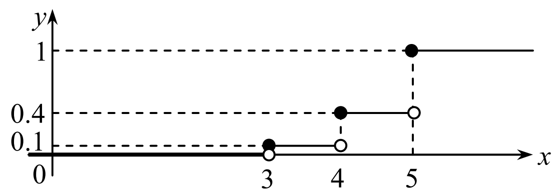
当$3\le x<4$时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}=0.1$，

当$4\le x<5$时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}=0.1+0.3=0.4$，

当$x\ge 5$时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}=0.1+0.3+0.6=1$，

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3;\\ 0.1, & 3\le x<4;\\ 0.4, & 4\le x<5;\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$



2．　一颗骰子抛两次，求以下随机变量的分布列：

（1）X 表示两次所得的最小点数；

（2）Y 表示两次所得的点数之差的绝对值。

解：（1）X 的全部可能取值为$1, 2, 3, 4, 5, 6$，且

$$P\{X=1\}=\frac{6^2-5^2}{6^2}=\frac{11}{36}，\ P\{X=2\}=\frac{5^2-4^2}{6^2}=\frac{9}{36}，\ P\{X=3\}=\frac{4^2-3^2}{6^2}=\frac{7}{36}，$$

$$P\{X=4\}=\frac{3^2-2^2}{6^2}=\frac{5}{36}，\ P\{X=5\}=\frac{2^2-1}{6^2}=\frac{3}{36}，\ P\{X=6\}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}，$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

（2）Y 的全部可能取值为$0, 1, 2, 3, 4, 5$，且

$$P\{Y=0\}=\frac{6}{6^2}=\frac{6}{36}，\ P\{Y=1\}=\frac{5\times 2}{6^2}=\frac{10}{36}，\ P\{Y=2\}=\frac{4\times 2}{6^2}=\frac{8}{36}，$$

$$P\{Y=3\}=\frac{3\times 2}{6^2}=\frac{6}{36}，\ P\{Y=4\}=\frac{2\times 2}{6^2}=\frac{4}{36}，\ P\{Y=5\}=\frac{1\times 2}{6^2}=\frac{2}{36}，$$

故 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

3． 口袋中有 7 个白球、3 个黑球。

（1）每次从中任取一个不放回，求首次取出白球的取球次数 X 的概率分布列；

（2）如果取出的是黑球则不放回，而另外放入一个白球，此时 X 的概率分布列如何。

解：（1） X 的全部可能取值为$1,2,3,4$，且

$$P\{X=1\}=\frac{7}{10}，\ P\{X=2\}=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$P\{X=3\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}，\ P\{X=4\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120},$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

（2） X 的全部可能取值仍为$1,2,3,4$，且

$$P\{X=1\}=\frac{7}{10}=0.7，\ P\{X=2\}=\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}=0.24,$$

$$P\{X=3\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}=0.054，\ P\{X=4\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{10}{10}=0.006,$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	0.7	0.24	0.054	0.006

4． 有 3 个盒子，第一个盒子装有 1 个白球、4 个黑球；第二个盒子装有 2 个白球、3 个黑球；第三个盒子装有 3 个白球、2 个黑球。现任取一个盒子，从中任取 3 个球。以 X 表示所取到的白球数。

（1）试求 X 的概率分布列；

（2）取到的白球数不少于 2 个的概率是多少？

解：设 A_1,A_2,A_3 分别表示取到第一个、第二个、第三个盒子。

（1） X 的全部可能取值为 $0,1,2,3$，且

$$P\{X=0\}=P(A_1)P\{X=0\mid A_1\}+P(A_2)P\{X=0\mid A_2\}+P(A_3)P\{X=0\mid A_3\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{C_4^3}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^3}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times0=\frac{4}{30}+\frac{1}{30}+0=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=1\}=P(A_1)P\{X=1\mid A_1\}+P(A_2)P\{X=1\mid A_2\}+P(A_3)P\{X=1\mid A_3\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{6}{30}+\frac{6}{30}+\frac{3}{30}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=2\}=P(A_1)P\{X=2\mid A_1\}+P(A_2)P\{X=2\mid A_2\}+P(A_3)P\{X=2\mid A_3\}$$

$$=\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=0+\frac{3}{30}+\frac{6}{30}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=3\}=P(A_1)P\{X=3\,|\,A_1\}+P(A_2)P\{X=3\,|\,A_2\}+P(A_3)P\{X=3\,|\,A_3\}$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^3}{C_5^3}=0+0+\frac{1}{30}=\frac{1}{30},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

（2）所求概率为

$$P\{X\geq 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}。$$

5．掷一颗骰子 4 次，求点数 6 出现的次数的概率分布。

解： 设 X 表示点数 6 出现的次数，有 X 的全部可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4$，且试验次数 $n=4$，每次掷骰子点数 6 出现的概率 $p=\frac{1}{6}$，则

$$P\{X=0\}=C_4^0\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296},\quad P\{X=1\}=C_4^1\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{500}{1296},$$

$$P\{X=2\}=C_4^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{150}{1296},\quad P\{X=3\}=C_4^3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{20}{1296},$$

$$P\{X=4\}=C_4^4\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

6．从一副 52 张的扑克牌中任取 5 张，求其中黑桃张数的概率分布。

解： 设 X 表示黑桃张数，有 X 的全部可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$，则

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^0C_{39}^5}{C_{52}^5}=\frac{575757}{2598960}\approx 0.2215,\quad P\{X=1\}=\frac{C_{13}^1C_{39}^4}{C_{52}^5}=\frac{1069263}{2598960}\approx 0.4114,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_{13}^2C_{39}^3}{C_{52}^5}=\frac{712842}{2598960}\approx 0.2743,\quad P\{X=3\}=\frac{C_{13}^3C_{39}^2}{C_{52}^5}=\frac{211926}{2598960}\approx 0.0815,$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_{13}^4C_{39}^1}{C_{52}^5}=\frac{27885}{2598960}\approx 0.0107,\quad P\{X=5\}=\frac{C_{13}^5C_{39}^0}{C_{52}^5}=\frac{1287}{2598960}\approx 0.0005,$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.2215	0.4114	0.2743	0.0815	0.0107	0.0005

7．一批产品共有 100 件，其中 10 件是不合格品。根据验收规则，从中任取 5 件产品进行质量检验，假如 5 件中无不合格品，则这批产品被接受，否则就要重新对这批产品逐个检验。

（1）试求 5 件产品中不合格品数 X 的分布列；

（2）需要对这批产品进行逐个检验的概率是多少？

解：（1）这 5 件产品中不合格品数 X 的全部可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$，则

$$P\{X=0\}=\frac{C_{10}^0 C_{90}^5}{C_{100}^5}=\frac{43949268}{75287520}\approx 0.583752,\quad P\{X=1\}=\frac{C_{10}^1 C_{90}^4}{C_{100}^5}=\frac{25551900}{75287520}\approx 0.339391,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_{10}^2 C_{90}^3}{C_{100}^5}=\frac{5286600}{75287520}\approx 0.070219,\quad P\{X=3\}=\frac{C_{10}^3 C_{90}^2}{C_{100}^5}=\frac{480600}{75287520}\approx 0.006384,$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_{10}^4 C_{90}^1}{C_{100}^5}=\frac{18900}{75287520}\approx 0.000251,\quad P\{X=5\}=\frac{C_{10}^5 C_{90}^0}{C_{100}^5}=\frac{252}{75287520}\approx 0.000003,$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.583752	0.339391	0.070219	0.006384	0.000251	0.000003

（2）所求概率为

$$P\{X>0\}=1-P\{X=0\}\approx 1-0.583752=0.416248。$$

8． 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1;\\ \frac{1}{3}, & 1\le x<3;\\ \frac{1}{2}, & 3\le x<6;\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$$

试求 X 的概率分布列及 $P\{X<3\}$，$P\{X\le 3\}$，$P\{X>1\}$，$P\{X\ge 1\}$。

解：X 的全部可能取值为其分布函数 $F(x)$ 的分段点 $0, 1, 3, 6$，且

$$P\{X=0\}=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4},\quad P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad P\{X=6\}=F(6)-F(6-0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

且

$$P\{X<3\}=F(3-0)=\frac{1}{3},$$

$$P\{X\le 3\}=F(3)=\frac{1}{2},$$

$$P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=1-F(1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$P\{X\ge 1\}=1-P\{X<1\}=1-F(1-0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}。$$

9． 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \ln x, & 1\le x<\mathrm{e};\\ 1, & x\ge \mathrm{e}.\end{cases}$$

试求 $P\{X<2\}$，$P\{0<X\le 3\}$，$P\{2<X<2.5\}$。

解：所求概率为

$P\{X<2\}=F(2-0)=\ln 2$，

$P\{0<X\le 3\}=F(3)-F(0)=1-0=1$，

$P\{2<X<2.5\}=F(2.5-0)-F(2)=\ln 2.5-\ln 2=\ln 1.25$。

10．若 $P\{X\ge x_1\}=1-\alpha$，$P\{X\le x_2\}=1-\beta$，其中 $x_1<x_2$，试求 $P\{x_1<X<x_2\}$。

注：此题有误，应改为"试求 $P\{x_1\le X\le x_2\}$"。

解：所求概率为

$$\begin{aligned}P\{x_1\le X\le x_2\}&=P\{X\le x_2\}-P\{X<x_1\}=P\{X\le x_2\}+P\{X\ge x_1\}-1\\&=1-\beta+1-\alpha-1=1-\alpha-\beta。\end{aligned}$$

11．从 $1, 2, 3, 4, 5$ 五个数字中任取三个，按大小排列记为 $x_1<x_2<x_3$，令 $X=x_2$，试求

（1）X 的分布函数；

（2）$P\{X<2\}$ 及 $P\{X>4\}$。

解：（1）X 的全部可能取值为 $2, 3, 4$，且

$$P\{X=2\}=\frac{1\times 3}{C_5^3}=\frac{3}{10}=0.3，\quad P\{X=3\}=\frac{2\times 2}{C_5^3}=\frac{4}{10}=0.4，\quad P\{X=4\}=\frac{3\times 1}{C_5^3}=\frac{3}{10}=0.3，$$

分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=2, 3, 4$。

当 $x<2$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $2\le x<3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=2\}=0.3$，

当 $3\le x<4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=0.3+0.4=0.7$，

当 $x\ge 4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$，

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ 0.3, & 2\le x<3;\\ 0.7, & 3\le x<4;\\ 1, & x\ge 4;\end{cases}$$

（2）所求概率为

$P\{X<2\}=P(\varnothing)=0$，$P\{X>4\}=P(\varnothing)=0$。

12．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 X 的分布函数。

解：分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=-1, 0, 1$，

当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $-1 \le x < 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_{-1}^{x} [1-(-u)]du$

$$= \left(u + \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{x} = x + \frac{x^2}{2} - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2},$$

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_{-1}^{0} [1-(-u)]du + \int_{0}^{x} (1-u)du$

$$= \left(u + \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(u - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{x} = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 0 = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2},$$

当 $x \ge 1$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\Omega) = 1$，

故 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}, & -1 \le x < 0; \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

13．如果 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1; \\ 2 - x, & 1 \le x < 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $P\{X \le 1.5\}$。

解：所求概率为

$$P\{X \le 1.5\} = \int_{-\infty}^{1.5} p(x)dx = \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{1.5} (2-x)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{1.5} = \frac{1}{2} - 0 + \left(3 - \frac{1.5^2}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{7}{8}。$$

14．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} A\cos x, & |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

试求

（1）系数 A；

（2）X 落在区间 $(0, \pi/4)$ 内的概率。

解：（1）由密度函数正则性知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos xdx = A\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = A\sin\frac{\pi}{2} - A\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2A = 1,$$

故 $A = \dfrac{1}{2}$。

（2）所求概率为

$$P\left\{0<X<\frac{\pi}{4}\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}-0=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{。}$$

15．设连续随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Ax^2, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求

（1）系数 A；

（2）X 落在区间 $(0.3, 0.7)$ 内的概率；

（3）X 的密度函数。

解：（1）由连续随机变量分布函数的连续性知

$$1=F(1)=F(1-0)=\lim_{x\to 1^-}F(x)=A\cdot 1^2=A，$$

故 $A=1$。

（2）所求概率为

$$P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4\text{。}$$

（3）密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，有 $p(x)=F'(x)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$F(x)=x^2$，有 $p(x)=F'(x)=2x$，

当 $x>1$ 时，$F(x)=1$，有 $p(x)=F'(x)=0$，

故 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

16．学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，单位为小时。它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}cx^2+x, & 0\le x\le 0.5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）确定常数 c；

（2）写出 X 的分布函数；

（3）试求在 20min 内完成一道作业的概率；

（4）试求 10min 以上完成一道作业的概率。

解：（1）由密度函数正则性知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{0.5}(cx^2+x)dx=\left(c\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.5}=\frac{c}{24}+\frac{1}{8}=1，$$

故 $c=21$。

（2）分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=0, 0.5$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $0 \le x < 0.5$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_{0}^{x} (21u^2 + u)du = \left(7u^3 + \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^x = 7x^3 + \frac{x^2}{2}$，

当 $x \ge 0.5$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\Omega) = 1$，

故 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 7x^3 + \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < 0.5; \\ 1, & x \ge 0.5; \end{cases}$$

（3）所求概率为

$$P\left\{X \le \frac{20}{60} = \frac{1}{3}\right\} = F\left(\frac{1}{3}\right) = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27} + \frac{1}{18} = \frac{17}{54}\text{。}$$

（4）所求概率为

$$P\left\{X \ge \frac{10}{60} = \frac{1}{6}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - 7 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1 - \frac{7}{216} - \frac{1}{72} = \frac{103}{108}\text{。}$$

17．某加油站每周补给一次油。如果这个加油站每周的销售量（单位：千升）为一随机变量，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 0.05\left(1 - \dfrac{x}{100}\right)^4, & 0 < x < 100; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试问该油站的储油罐需要多大，才能把一周内断油的概率控制在 5%以下？

解：设这个加油站每周的销售量为 X 千升，储油罐的储油量为 a 千升，有 $P\{X > a\} \le 0.05$，则

$$P\{X > a\} = \int_{a}^{+\infty} p(x)dx = \int_{a}^{100} 0.05\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4 dx = -\left(1 - \frac{x}{100}\right)^5\Big|_a^{100} = \left(1 - \frac{a}{100}\right)^5 \le 0.05,$$

故

$$a \ge 100(1 - \sqrt[5]{0.05}) \approx 45.0720\text{。}$$

18．设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

已知事件 $A = \{X > a\}$ 和 $B = \{Y > a\}$ 独立，且 $P(A \cup B) = 3/4$，求常数 a。

解：由于事件 A 和 B 独立，且显然有 $P(A) = P(B)$，则

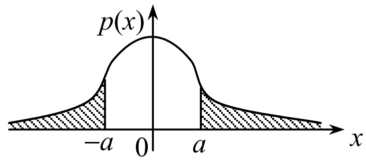
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 2P(A) - [P(A)]^2 = \frac{3}{4},$$

可得 $P(A) = \frac{1}{2}$ 或 $P(A) = \frac{3}{2}$（舍去）。显然 $0 < a < 2$，有

$$P(A) = P\{X > a\} = \int_a^2 \frac{3}{8}x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{8}x^3\Big|_a^2 = 1 - \frac{a^3}{8} = \frac{1}{2},$$

故 $a = \sqrt[3]{4}$。

19．设连续随机变量 X 的密度函数 $p(x)$ 是一个偶函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数，求证对任意实数 $a>0$，有



（1） $F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)dx$；

（2） $P\{|X|<a\}=2F(a)-1$；

（3） $P\{|X|>a\}=2[1-F(a)]$。

证明：（1）因 $p(x)$ 为偶函数，有

$$\int_{-\infty}^{-a} p(x)dx=\int_a^{+\infty} p(x)dx\text{，}\quad \int_{-\infty}^{0} p(x)dx=0.5\text{，}$$

则

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a} p(x)dx=\int_{-\infty}^{0} p(x)dx+\int_0^a p(x)dx=0.5+\int_0^a p(x)dx\text{，}$$

故

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} p(x)dx=\int_a^{+\infty} p(x)dx=1-\int_{-\infty}^{a} p(x)dx=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)dx\text{。}$$

（2）所求概率为

$$P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}=F(a)-F(-a)=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1\text{。}$$

（3）所求概率为

$$P\{|X|>a\}=2P\{X>a\}=2[1-P\{X\le a\}]=2[1-F(a)]\text{。}$$