习题 3.5

1． 以 X 记某医院一天内诞生婴儿的个数，以 Y 记其中男婴的个数，设 X 与 Y 的联合分布列为

$$P\{X=n, Y=m\}=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},\quad m=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,2,\cdots$$

试求条件分布列 $P\{Y=m \mid X=n\}$。

解： 因 X 的边际分布列为

$$P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{n}P\{X=n, Y=m\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}$$

$$=\frac{e^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(7.14)^m(6.86)^{n-m}=\frac{e^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(7.14)^m(6.86)^{n-m}$$

$$=\frac{e^{-14}}{n!}(7.14+6.86)^n=\frac{14^n}{n!}e^{-14},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

故在给定 $X=n,\quad n=0,1,2,\cdots$ 的条件下，Y 的条件分布列为

$$P\{Y=m \mid X=n\}=\frac{P\{X=n, Y=m\}}{P\{X=n\}}=\frac{\dfrac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}}{\dfrac{14^n}{n!}e^{-14}}$$

$$=C_n^m\cdot\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\cdot\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m},\quad m=0,1,\cdots,n。$$

2． 一射手单发命中目标的概率为 $p\quad(0<p<1)$，射击进行到命中目标两次为止。设 X 表示第一次命中目标所需的射击次数，Y 为总共进行的射击次数，求 (X, Y) 的联合分布和条件分布。

解： (X, Y) 的联合分布为

$$P\{X=i, Y=j\}=p_{ij}=p^2(1-p)^{j-2},\quad i=1,2,\cdots;\ j=i+1,i+2,\cdots,$$

则 X 与 Y 的边际分布分别为

$$P\{X=i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=i+1}^{+\infty}p^2(1-p)^{j-2}=\frac{p^2(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{i-1},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2(1-p)^{j-2}=(j-1)p^2(1-p)^{j-2},\quad j=2,3,\cdots$$

故在给定 $Y=j,\quad j=2,3,\cdots$ 的条件下，X 的条件分布列为

$$P\{X=i \mid Y=j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{j-1},\quad i=1,2,\cdots,j-1。$$

在给定 $X=i,\quad i=1,2,\cdots$ 的条件下，Y 的条件分布列为

$$P\{Y=j \mid X=i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=p(1-p)^{j-i-1},\quad j=i+1,i+2,\cdots。$$

3． 已知 (X, Y) 的联合分布列如下：

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{8},\quad P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{4},\quad P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{2}。$$

试求：

（1）已知 $Y=i$ 的条件下，X 的条件分布列，$i=1,2$；

（2）X 与 Y 是否独立？

解：（1）因 Y 的边际分布列为

$$P\{Y=1\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},\quad P\{Y=2\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

故在给定 $Y=1$ 的条件下，X 的条件分布列为

$$P\{X=1\,|\,Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1}{2},\quad P\{X=2\,|\,Y=1\}=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1}{2}。$$

在给定 $Y=2$ 的条件下，X 的条件分布列为

$$P\{X=1\,|\,Y=2\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2\,|\,Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{2}{3}。$$

（2）因当 $Y=1$ 与 $Y=2$ 时，X 的条件分布列不同，即 X 的分布与 Y 有关，故 X 与 Y 不独立。

4． 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，试在以下情况下求 $P\{X=k\,|\,X+Y=m\}$：

（1）X 与 Y 都服从参数为 p 的几何分布；

（2）X 与 Y 都服从参数为 (n,p) 的二项分布。

解：（1）因 X 与 Y 相互独立，且分布列为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots;\quad P\{Y=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots;$$

则 $X+Y$ 的分布列为

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=1}^{m-1}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum_{k=1}^{m-1}p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{m-k-1}$$

$$=(m-1)p^2(1-p)^{m-2},\quad m=2,3,\cdots,$$

故在 $X+Y=m,\quad m=2,3,\cdots$ 的条件下，X 的条件分布列为

$$P\{X=k\,|\,X+Y=m\}=\frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$$

$$=\frac{p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{m-k-1}}{(m-1)p^2(1-p)^{m-2}}=\frac{1}{m-1},\quad k=1,2,\cdots,m-1。$$

（2）因 X 与 Y 相互独立，且分布列为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n;\quad P\{Y=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n;$$

则 $X+Y$ 的分布列为

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum_{k=0}^{m}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\cdot C_n^{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_n^k C_n^{m-k}\cdot p^m(1-p)^{2n-m}=C_{2n}^m p^m(1-p)^{2n-m},\quad m=0,1,2,\cdots,2n,$$

这里比较 $(1+x)^n(1+x)^n$ 与 $(1+x)^{2n}$ 中 x^m 的系数可得 $\sum\limits_{k=0}^{m}C_n^k C_n^{m-k}=C_{2n}^m$。故在 $X+Y=m,\quad m=0,1,2,\cdots,n$ 的

条件下，X 的条件分布列为

$$P\{X=k\,|\,X+Y=m\}=\frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$$

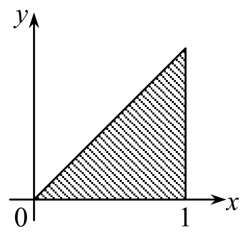
$$=\frac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\cdot C_n^{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}}{C_{2n}^m p^m(1-p)^{2n-m}}=\frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m},\quad k=l,l+1,\cdots,r,$$

其中 $l=\max\{0,m-n\}$，$r=\min\{m,n\}$。

5. 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求条件密度函数 $p(y\,|\,x)$。



解：支撑区域 $D:0<x<1,0<y<x$。当 $0<x<1$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2,$$

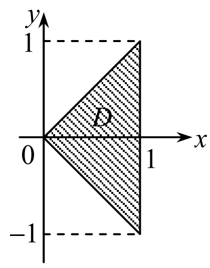
故当 $0<x<1$ 时，$p_X(x)>0$，条件密度函数

$$p_Y(y\,|\,X=x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

6. 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求条件密度函数 $p(x\,|\,y)$。



解：支撑区域 $D:-1<y<0,-y<x<1;\ 0<y<1,y<x<1$。

当 $-1<y<0$ 时，$p_Y(y)=\int_{-y}^1 1dx=1+y$，

当 $0<y<1$ 时，$p_Y(y)=\int_y^1 1dx=1-y$，

即

$$p_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

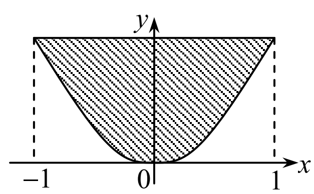
故当 $-1<y<1$ 时，$p_Y(y)>0$，条件密度函数

$$p_X(x\,|\,Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

7. 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求条件概率 $P\{Y\ge 0.75\,|\,X=0.5\}$。



解：支撑区域 $D:-1<x<1,\ x^2\le y\le 1$。当 $-1<x<1$ 时

$$p_X(x)=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}=\frac{21}{8}(x^2-x^6),\quad -1<x<1，$$

当$-1<x<1$时，$p_X(x)>0$，条件密度函数

$$p_Y(y\,|\,X=x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

即

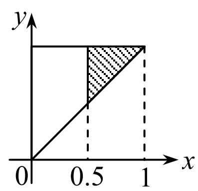
$$p_Y(y\,|\,X=0.5)=\begin{cases}\dfrac{2y}{0.9375}, & 0.25\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$P\{Y\ge 0.75\,|\,X=0.5\}=\int_{0.75}^{1}\frac{2y}{0.9375}dy=\frac{1}{0.9375}y^2\Big|_{0.75}^{1}=\frac{1}{0.9375}\times 0.4375=\frac{7}{15}。$$

8. 已知随机变量Y的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



在给定$Y=y$条件下，随机变量X的条件密度函数为

$$p(x\,|\,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求概率$P\{X>0.5\}$。

解：因(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_Y(y)p_X(x\,|\,Y=y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{1}dx\int_{x}^{1}15x^2ydy=\int_{0.5}^{1}dx\cdot\frac{15}{2}x^2y^2\Big|_{x}^{1}=\int_{0.5}^{1}\left(\frac{15}{2}x^2-\frac{15}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x^5\right)\Bigg|_{0.5}^{1}$$

$$=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{5}{16}-\frac{3}{64}\right)=\frac{47}{64}。$$

9. 设随机变量X服从$(1, 2)$上的均匀分布，在$X=x$的条件下，随机变量Y的条件分布是参数为x的指数分布，证明：XY服从参数为1的指数分布。

证明：因X密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在$X=x$的条件下，Y的条件密度函数为

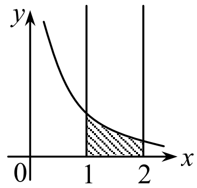
$$p_Y(y\,|\,X=x)=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^{-xy}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y\mid X=x)=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^{-xy}, & 1<x<2,\ y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对于 $Z=XY$，函数 $z=xy$ 对任意固定的 $x\neq 0$ 关于 y 严格单调，反函数 $y=h(x,z)=\dfrac{z}{x}$，偏导数 $h_z(x,z)=\dfrac{1}{x}$。则

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(x,\frac{z}{x}\right)\cdot\left|\frac{1}{x}\right|dx\,,$$



作曲线族 $xy=z$，得 z 的分段点为 0。

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$p_Z(z)=\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{-x\cdot\frac{z}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\int_1^2\mathrm{e}^{-z}\,dx=\mathrm{e}^{-z}\cdot x\Big|_1^2=\mathrm{e}^{-z}$，

即 $Z=XY$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

故 $Z=XY$ 服从参数为 1 的指数分布。

10．设二维离散随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0.01	0.01	0.01
1	0.01	0.02	0.03	0.02
2	0.03	0.04	0.05	0.04
3	0.05	0.05	0.05	0.06
4	0.07	0.06	0.05	0.06
5	0.09	0.08	0.06	0.05

试求 $E(X\mid Y=2)$ 和 $E(Y\mid X=0)$。

解：因

$$P\{Y=2\}=0.01+0.03+0.05+0.05+0.05+0.06=0.25\,,$$

则在给定 $Y=2$ 的条件下，X 的条件分布列为

$X\mid Y=2$	0	1	2	3	4	5
P	0.04	0.12	0.2	0.2	0.2	0.24

故

$$E(X\mid Y=2)=0\times 0.04+1\times 0.12+2\times 0.2+3\times 0.2+4\times 0.2+5\times 0.24=3.12\text{。}$$

又因

$$P\{X=0\}=0+0.01+0.01+0.01=0.03\,,$$

则在给定 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布列为

$Y\mid X=0$	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故

$$E(Y|X=0)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2\text{。}$$

11．设 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，试求 $E(X|X+Y=n)$。

解：因 X 与 Y 的分布列分别为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1},k=0,1,2,\cdots,\quad P\{Y=k\}=\frac{\lambda_2^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_2},k=0,1,2,\cdots,$$

则 $X+Y$ 的分布列为

$$P\{X+Y=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

在给定 $X+Y=n,\quad n=0,1,2,\cdots$ 的条件下， X 的条件分布列为

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=C_n^k\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n,$$

即在给定 $X+Y=n,\quad n=0,1,2,\cdots$ 的条件下， X 服从二项分布 $b\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$，故条件数学期望

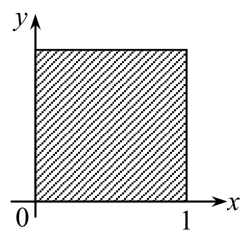
$$E(X|X+Y=n)=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\text{。}$$

12．设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x,y<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

试求 $E(X|Y=0.5)$。

解：支撑区域 $D:0<y<1,0<x<1$。当 $0<y<1$ 时，



$$p_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\bigg|_0^1=0.5+y,\quad 0<y<1,$$

则当 $0<y<1$ 时， $p_Y(y)>0$，条件密度函数

$$p_X(x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\frac{x+y}{0.5+y}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

即在给定 $Y=0.5$ 的条件下， X 的条件密度函数为

$$p_X(x|Y=0.5)=\begin{cases}x+0.5, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

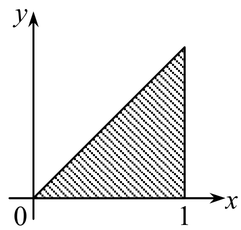
故

$$E(X\mid Y=0.5)=\int_0^1 x\cdot(x+0.5)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}。$$

13．设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试在 $0<y<1$ 时，求 $E(X\mid Y=y)$。



解： 支撑区域 $D:0<y<1, y<x<1$。当 $0<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_y^1 24(1-x)ydx=-12(1-x)^2y\Big|_y^1=12y(1-y)^2,\quad 0<y<1，$$

则当 $0<y<1$ 时，$p_Y(y)>0$，条件密度函数

$$p_X(x\mid Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}==\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2}, & y<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$E(X\mid Y=y)=\int_y^1 x\cdot\frac{2(1-x)}{(1-y)^2}dx=\frac{1}{(1-y)^2}\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_y^1=\frac{1}{(1-y)^2}\left[(1-y^2)-\frac{2}{3}(1-y^3)\right]$$

$$=\frac{1}{1-y}\cdot\left[(1+y)-\frac{2}{3}(1+y+y^2)\right]=\frac{1+y-2y^2}{3(1-y)}=\frac{1+2y}{3}。$$

14．设 $E(Y)$，$E[h(Y)]$ 存在，试证 $E(h(Y)\mid Y)=h(Y)$。

证明： 在 $Y=y$ 条件下，$h(Y)=h(y)$ 为常数，即 $E(h(Y)\mid Y=y)=h(y)$，故 $E(h(Y)\mid Y)=h(Y)$。

15．设以下所涉及的数学期望均存在，试证：

（1）$E(g(X)Y\mid X)=g(X)E(Y\mid X)$；

（2）$E(XY)=E(XE(Y\mid X))$；

（3）$\text{Cov}(X,E(Y\mid X))=\text{Cov}(X,Y)$。

证明：（1）在 $X=x$ 条件下，$g(X)=g(x)$ 为常数，则

$$E(g(X)Y\mid X=x)=E(g(x)Y\mid X=x)=g(x)E(Y\mid X=x)，$$

故

$$E(g(X)Y\mid X)=g(X)E(Y\mid X)。$$

（2）因 $E(XY\mid X)=XE(Y\mid X)$，根据重期望公式可得

$$E(XE(Y\mid X))=E[E(XY\mid X)]=E(XY)。$$

（3）根据重期望公式和第（2）小题结论可得

$$\text{Cov}(X,E(Y\mid X))=E(XE(Y\mid X))-E(X)E(E(Y\mid X))=E(XY)-E(X)E(Y)=\text{Cov}(X,Y)。$$

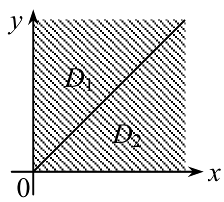
16．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，都服从参数为 λ 的指数分布。令

$$Z=\begin{cases}3X+1, & X\ge Y;\\ 6Y, & X<Y.\end{cases}$$

求 $E(Z)$。

解： 方法一：直接计算二维随机变量函数的数学期望。

因 X 与 Y 独立，且 X 与 Y 的密度函数分别为



$$p_X(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}, & x>0,\,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$E(Z)=\iint\limits_{D_1}6y\cdot\lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\,dxdy+\iint\limits_{D_2}(3x+1)\cdot\lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\,dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y}6y\cdot\lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\,dx+\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}(3x+1)\cdot\lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\cdot 6y\cdot[-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}]\Big|_0^{y}+\int_0^{+\infty}dx\cdot(3x+1)\cdot[-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}]\Big|_0^{x}$$

$$=\int_0^{+\infty}6y\cdot\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda y}-\mathrm{e}^{-2\lambda y})dy+\int_0^{+\infty}(3x+1)\cdot\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda x}-\mathrm{e}^{-2\lambda x})dx$$

$$=\int_0^{+\infty}6y\cdot d\left(-\mathrm{e}^{-\lambda y}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda y}\right)+\int_0^{+\infty}(3x+1)\cdot d\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)$$

$$=6y\left(-\mathrm{e}^{-\lambda y}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda y}\right)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda y}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda y}\right)\cdot 6dy$$

$$+(3x+1)\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)\cdot 3dx$$

$$=0-6\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}-\frac{1}{4\lambda}\mathrm{e}^{-2\lambda y}\right)\Big|_0^{+\infty}+0-\left(-1+\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}-\frac{1}{4\lambda}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=6\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4\lambda}\right)+\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4\lambda}\right)=\frac{1}{2}+\frac{27}{4\lambda}\text{。}$$

方法二：根据重期望公式。

因当 $X=x$ 时，Z 是 Y 的函数

$$Z=\begin{cases}3x+1, & Y\le x;\\ 6Y, & Y>x.\end{cases}$$

且 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则

$$E(Z\mid X=x)=\int_0^{x}(3x+1)\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,dy+\int_x^{+\infty}6y\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,dy=(3x+1)\cdot(-\mathrm{e}^{-\lambda y})\Big|_0^{x}+6\int_x^{+\infty}y\cdot d(-\mathrm{e}^{-\lambda y})$$

$$=(3x+1)\cdot(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})-6y\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\Big|_x^{+\infty}+6\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda y}\,dy$$

$$=(3x+1)\cdot(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})-0+6x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}-\frac{6}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}\Big|_x^{+\infty}$$

$$=(3x+1)\cdot(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})+6x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}+\frac{6}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}=3x+1+\left(3x+\frac{6}{\lambda}-1\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}，$$

可得

$$E(Z\,|\,X)=3X+1+\left(3X+\frac{6}{\lambda}-1\right)\mathrm{e}^{-\lambda X}，$$

故

$$E(Z)=E[E(Z\,|\,X)]=E\left[3X+1+\left(3X+\frac{6}{\lambda}-1\right)\mathrm{e}^{-\lambda X}\right]$$

$$=3E(X)+1+\int_0^{+\infty}\left(3x+\frac{6}{\lambda}-1\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{3}{\lambda}+1+\int_0^{+\infty}\left(3x+\frac{6}{\lambda}-1\right)\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-2\lambda x}\,dx$$

$$=\frac{3}{\lambda}+1+\int_0^{+\infty}\left(3x+\frac{6}{\lambda}-1\right)\cdot\frac{1}{2}d(-\mathrm{e}^{-2\lambda x})$$

$$=\frac{3}{\lambda}+1-\left(3x+\frac{6}{\lambda}-1\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\cdot 3dx$$

$$=\frac{3}{\lambda}+1-0+\left(\frac{6}{\lambda}-1\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{4\lambda}\mathrm{e}^{-2\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{\lambda}+1+\frac{3}{\lambda}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4\lambda}=\frac{1}{2}+\frac{27}{4\lambda}。$$

17．设随机变量 $X\sim N(\mu,1)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，令

$$I=\begin{cases}1, & Y<X;\\ 0, & X\le Y.\end{cases}$$

试证明：

（1）$E(I\,|\,X=x)=\Phi(x)$；

（2）$E(\Phi(X))=P\{Y<X\}$；

（3）$E(\Phi(X))=\Phi(\mu/\sqrt{2})$。

（提示：$X-Y$ 的分布是什么？）

证明：（1）记示性函数

$$I_{Y<x}=\begin{cases}1, & Y<x;\\ 0, & X\le x.\end{cases}$$

故

$$E(I\,|\,X=x)=E(I_{Y<x})=\int_{-\infty}^{+\infty}I_{y<x}\,p_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy=\Phi(x)。$$

（2）所求期望为

$$E(\Phi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)p_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}p_X(x)p_Y(y)dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}p(x,y)dydx=P\{Y<X\}。$$

（3）因 $X\sim N(\mu,1)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，有 $X-Y$ 服从正态分布，则

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=\mu, \quad \mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=2,$$

即 $X-Y\sim N(\mu,2)$，故

$$E(\Phi(X))=P\{Y<X\}=P\{X-Y>0\}=1-F_{X-Y}(0)=1-\Phi\left(\frac{0-\mu}{\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)。$$

18．设 $X_1,X_2,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且方差存在。随机变量 N 只取正整数值，$\mathrm{Var}(N)$ 存在，且 N 与 $\{X_n\}$ 独立。证明

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=\mathrm{Var}(N)[E(X_1)]^2+E(N)\,\mathrm{Var}(X_1)。$$

证明：因

$$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\mid N)]+\mathrm{Var}[E(Y\mid N)],$$

且

$$E(Y\mid N=n)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=nE(X_1),$$

即 $E(Y\mid N)=NE(X_1)$，而

$$\mathrm{Var}(Y\mid N=n)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=n\,\mathrm{Var}(X_1),$$

即 $\mathrm{Var}(Y\mid N)=N\,\mathrm{Var}(X_1)$，故

$$\mathrm{Var}(Y)=E[N\,\mathrm{Var}(X_1)]+\mathrm{Var}[NE(X_1)]=E(N)\,\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(N)[E(X_1)]^2。$$