西南财经大学本科期末考试试题册(A)

（2020－2021学年第2学期）

以下各项由命题教师填写：

课程名称： 概率论（理科）　　**命题教师：概率组**

适用对象（年级专业）**：全校**

使用试题的任课教师姓名：全校

试题说明：

1、考试类型：闭卷[✓]　开卷[ ]

2、本套试题共＿＿三＿道大题，共＿4＿＿页，完卷时间＿120＿＿分钟。

3、考试用品中除纸、笔、尺子外，可另带的用具有：

计算器[✓]　　字典[ ]　等

（请在下划线上填上具体数字或内容，所选[　　]内打钩）

考试时间（由制卷方填写）**：**

以下各项由学生填写：

任课教师：　　　　　　　　　**年级专业：**

学生姓名：　　　　　　　　　**学　　号：**

考生注意事项：1. 出示学生证（或身份证）和准考证于桌面左上角，以备查验。

2. 拿到试卷后清点并检查试卷页数，如有重页、页数不足、空白页及印刷模糊等举手向监考教师示意调换试卷。

3. 答题前先将试题册及答题纸上的任课教师、专业、年级、学号、姓名填写完整。

4. 所有答案均需填写在答题纸上，答在试题册上无效。

5. 考生不得携带任何通讯工具进入考场。

6. 考试结束后，将试题册、答题纸和草稿纸等下发材料上交监考教师，

不得带离考场。

7. 严格遵守考场纪律。

二. 随机变量函数的分布
已知X的分布 求Y=g(X)的分布
质量函数法 离散
分布函数法 连续
密度函数法 连续

三.

一．选择题：(共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 设 $P(A)=0.3,\quad P(A-B)=0.1$，则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=($　　　　$)$.

   A. 0.9　　　B. 0.8.　　　C. 0.7　　　D. 0.6

2. 一个班上有 30 名学生参加射击训练，每个学生独立射击，击中目标为止（即每个学生命中目标一次），假设每个学生单次射击的命中率均为 0.6，那么平均需要准备的子弹发数为 (　　　　).

   (几何分布)

   X_i 表示第 i 个学生所用子弹数

   子弹总数 $X=\sum_{i=1}^{30} X_i$

   $EX=\sum_{i=1}^{30} EX_i$　　$EX_i=\frac{1}{0.6}$

   A. 30　　　B. 40　　　C. 50　　　D. 60

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则当 σ 减小时，　$P(|X-\mu|>2\sigma)$　(　C　).

   A. 增大　　　B. 减小　　　C. 不变　　　D. 不确定

4. 若随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}, x\in\mathbb{R}$，则 $E(X^2)=($　　　　$)$.

   A.　1　　　B.　2　　　C.　3　　　D.　4

5. 随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从几何分布 $Ge(0.2)$,则 $P(X+Y=3)=($　$)$.

   X, Y 都有 … 发生　　$P(X=k)=(1-p)^k p$　　$0.8^3\times0.2^2=$　　$X+Y\sim(2,0.2)$

   A.　0.061　　　B.　0.062　　　C.　0.063　　　D.　0.064

6. 公交车到站的间隔时间(单位：分钟)是随机变量 $X\sim Exp(0.1)$ (指数分布)，假设公交车到站后的停留时间忽略不计。小明到达车站时发现上一辆公交车刚走 2 分钟，那么小明的平均候车时间为(　A　).

   $EY=10$

   和刚开始到身一样的

   A.　10 分钟　　　B.　5 分钟　　　C.　8 分钟　　　D.　6 分钟

7. 若随机变量 X 和 Y 满足：$E[XY]=E[X]\cdot E[Y]$，则 (　　　　).

   A. $Var(XY)=Var(X)\cdot Var(Y)$　　　B.　$Var(X-Y)=Var(X)-Var(Y)$

   C.　X 和 Y 相互独立　　　D.　X 和 Y 不相关

8. 设 $(X,Y)\sim N(u_1,u_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)=N(1,2,3,4,0)$，$\Phi(x)$ 表示标准正态的分布函数，则 $P(2X-Y>4)=($　　　　$)$.

   A.　$\Phi(-1)$　　　B.　$\Phi(1)$　　　C.　$\Phi(-2)$　　　D.　$\Phi(2)$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，且 $X_i\sim P(\lambda)$ (泊松分布)，$Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 则 $\mathrm{cov}(X_1-2X_2,Y)=($　　　　$)$.

   A.　$-\dfrac{\lambda}{n}$　　　B.　$\dfrac{\lambda}{n}$　　　C.　$-\dfrac{3\lambda}{n}$　　　D.　$\dfrac{3\lambda}{n}$

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布，且 $X_i \sim Exp(\lambda)$（指数分布），

$Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，则当 $n \to +\infty$ 时，$Y_n \xrightarrow{P}$ (　　).

A. $\dfrac{1}{\lambda^2}$　　　B. $\dfrac{2}{\lambda^2}$　　　C. $\dfrac{1}{\lambda}$　　　D. $\dfrac{2}{\lambda}$

二、计算题：(共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分)

1. 甲乙丙三个车间加工同样的零件，甲乙丙加工零件的次品率分别是：0.01，0.03，0.05， 三个车间加工的零件放在一起，甲乙丙加工零件的数量之比为 3：2：1.

结果：A 表示次品
原因：B_1 B_2 B_3 分别表示甲乙丙车间产品
$P(A|B_1)=0.01$　$P(A|B_2)=0.03$　$P(A|B_3)=0.05$
$P(B_1)=\frac{3}{6}$　$P(B_2)=\frac{2}{6}$　$P(B_3)=\frac{1}{6}$

（1） 求任取一个零件是次品的概率；(全概率公式)

（2） 如果取出的零件为次品，求它是由甲车间加工的概率.(贝叶斯公式)

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases} ax^2+x, & 0 \le x \le 0.5, \\ x, & 0.5 < x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

（1）求常数 a ；

（2）求 X 的分布函数 $F(x)$.　$F(x)=P\{X\le x\}$

3. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^2, & -1 \le x \le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

不常用. 分布函数法. 分段点 2, 3, 6

求：随机变量 $Y = X^2 + 2$ 的概率密度 $p_Y(y)$.

4. 有三项任务 A, B, C，其完成的时间分别为随机变量 $X \sim U(1,4)$ (区间(1, 4)上的连续型均匀分布)，$Y \sim b(10, 0.2)$（二项分布），$Z \sim Exp(\frac{1}{6})$ (指数分布)。小明采用如下方式选择其中一项任务完成：掷两颗骰子一次，若出现两个 6 点，则选择任务 A；若出现点数之和为 5，则选择任务 B；其它情况选择任务 C。求：小明完成任务的平均时间。

T 表示完成任务时间
U 表示所执行任务
$U=\begin{cases} 1 & 任务A \\ 2 & 任务B \\ 3 & 任务C \end{cases}$
$E(T) = E[E(T|U)]$

$E(T|U=1) = EX = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$
$E(T|U=2) = EY = np = 5$
$E(T|U=3) = EZ = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

$E(T\|U)$	$\frac{5}{2}$	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{31}{36}$

$ET = E[E(T|U)] =$

5. 设随机变量 X,Y 相互独立， $X \sim U(0,2)$ (区间(0, 2)上的连续型均匀分布)，$Y \sim Exp(2)$ (指数分布)。求： $Z = X - 2Y$ 的密度函数.

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}xy, & 0<x<y<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}.$$

求边际分布 条件分布

$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x|Y=y)\,dx$

$=\int_0^y x\,\frac{2x}{y^2}\,dx=\frac{2y}{3}$

$E(X|Y=1)=\frac{2}{3}$

求：（1）边际密度 $p_Y(y)$；

(1) $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx$

$0<y<2$

$p_Y(y)=\int_0^y \frac{1}{2}xy\,dx=\frac{y^3}{4}$

（2） $E[X \mid Y=1]$.

(2) $p_X(x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

$0<y<2$时，$p_X(x|Y=y)=\begin{cases}\frac{2x}{y^2} & 0<x<y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

7. 某银行网点附近住着 600 个储户，假设每个储户每月去该银行取 1 万元的概率为 0.6，且储户之间每月取钱相互独立。问：该银行每月应准备多少现金，才能以 99.9%的把握满足附近储户取款的需求。

(**附**'标准正态分布函数值'：$\Phi(2.0)=0.9772,\ \Phi(3.08)=0.999,\ \Phi(0.5)=0.6915$）

三、证明题：(共 1 个题，7 分)

已知随机变量序列 $\{X_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 独立同分布，且 $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $i=1,2,\cdots$.

随机变量 $N \sim P(\lambda)$ (泊松分布)，且独立于 X_i，$i=1,2,\cdots$， $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$.

$N \sim P(\lambda)$

$P\{N=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$

（1）求 N 的特征函数；

$\varphi_N(t)=E(e^{itN})=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda e^{it}}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

（2）利用特征函数证明： $Y \sim P(\lambda p)$.

$\varphi_Y(t)=E(e^{itY})=E(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j})=E[E(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}|N)]$

$E(e^{it\sum_{j=1}^{N}X_j}|N=n)=E(e^{it\sum_{j=1}^{n}X_j})=E(e^{itX_1}\cdot e^{itX_2}\cdots e^{itX_n})$

$=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$

X_j	0	1
P	$1-p$	p

$\varphi_{X_j}(t)=E(e^{itX_j})$