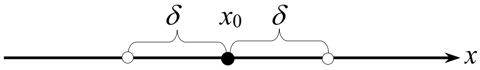
第一章　函数

《微积分》研究对象是函数，研究函数的变化规律、变化趋势．

§1.1　集合

集合：全体自然数集合记为 N；全体整数集合记为 Z；全体有理数集合记为 Q；全体实数集合记为 R；全体复数集合记为 C．集合有交、并、差、补等运算．
区间：分有限区间和无限区间．
邻域：数轴上与点 x_0 距离小于正数 δ 的点的全体称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $\delta(x_0)$ 或 $U_\delta(x_0)$．



数轴上的邻域 $\delta(x_0)$ 就是开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$．

$\delta(x_0)$ 去掉点 x_0 自身，称为 x_0 的 δ 去心邻域，即为 $\delta(x_0)\backslash\{x_0\}=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$，记为 $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$．
此外还有 x_0 的左 δ 邻域 $(x_0-\delta, x_0)$；x_0 的右 δ 邻域 $(x_0, x_0+\delta)$．
常量与变量：在整个计算过程中保持不变的量称为常量；在计算过程中会发生改变的量称为变量；
有的变量在某些计算步骤中保持不变，在另外的计算步骤中会发生改变，称之为参变量．

§1.2　函数

一．函数的定义

如 $y=x^2$，$y=\sin x$，$y=\lg x$ 都是函数．共同特点是：给出 x 的值，可得 y 的值．
定义 1.1　两个变量 x 和 y，当 x 在某实数集 D 中任取一个值时，根据对应规则 f，可得一个唯一确定的 y 值，则称 y 是 x 的一个函数，记为 $y=f(x)$．
又称 x 为自变量，y 为因变量，D 为定义域，所得 y 值的全体为值域 $Z=f(D)$．

当 x 在定义域内取值 x_0 时，对应的 y 值 y_0 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．

函数的两个基本要素：对应规则 f 与定义域 D．只有当两个函数的对应规则与定义域都相同时，它们才是同一个函数．如 $y=x^2$ 与 $s=t^2$ 是同一个函数；但 $y=x^2$ 与 $y=\dfrac{x^3}{x}$ 是不同的函数．
注意：若给出 x 的值所得 y 值有多个，称为多值函数．多值函数不是一个函数，而是由多个函数所构成．
由方程 $F(x, y)=0$ 确定的（多值）函数称为隐函数形式，相应由 $y=f(x)$ 确定的函数称为显函数形式．
对于隐函数，给出 x 的值，须通过解方程才能得到 y 的值．
由于方程的解不一定唯一，隐函数不一定是一个函数，而可能是由多个函数所构成的多值函数．

如 $x^2+y^2=1$，有 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，这不是一个函数，而是两个函数．

函数的表示方法
图示法：通过函数图形反映函数．如 $y=x^2$ 图形为抛物线，$y=\sin x$ 图形为波浪曲线．优点：直观．
表格法：列表反映 x 与 y 的对应关系．如中学的数学用表．优点：便于近似计算．
公式法：用解析表达式反映函数．如 $y=x^2$、$y=\sin x$ 等．优点：简便，便于分析讨论．
通常用公式法分析讨论函数，用图示法加深直观理解．
此外还有描述法，如“不超过 x 的最大整数”，记为 $[x]$．有 $[1.1]=1$；$[3.14]=3$；$[6]=6$；$[-1.5]=-2$．
注意：分段函数是由多个公式表达的一个函数．
例　购买某商品，买 1 公斤以下，5 元/公斤；买 1 公斤到 5 公斤之间，4.5 元/公斤；买 5 公斤以上，4 元/公斤．求购买量 x（公斤）与总金额 y（元）的关系．

解： $y=\begin{cases}5x, & 0<x<1\\ 4.5x, & 1\le x<5\\ 4x, & x\ge 5\end{cases}$ ，这是由三个公式表达的一个函数．

分段函数的特点：对于 x 的每一个取值，只能适用其中一个公式．

如 $x=0.5$ 时，$y=5\times0.5=2.5$；$x=2$ 时，$y=4.5\times2=9$；$x=10$ 时，$y=4\times10=40$．

定义域：当函数 $y=f(x)$ 没有指定定义域时，默认定义域是使得 $f(x)$ 有定义的 x 值的全体．

如 $y=x^2\quad(x>0)$ 的定义域是指定定义域 $(0,+\infty)$；而 $y=x^2$ 的定义域是默认定义域 $(-\infty,+\infty)$．

分式 $\dfrac{v}{u}$ 要求 $u\ne0$ ；平方根式 $\sqrt{u}$ 要求 $u\ge0$；对数 $\lg u$ 要求 $u>0$；$\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 要求 $-1\le x\le1$．

求定义域时，根据每一个有定义的要求解不等式，取交集．

例　求 $y=\dfrac{1}{\lg(1+x)}$ 的定义域．

解：$\begin{cases}\lg(1+x)\ne0\\ 1+x>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\ne0\\ x>-1\end{cases}$， 所以定义域为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$．

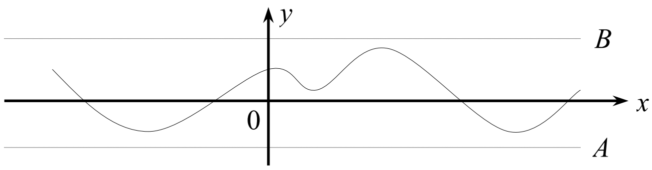
注：分段函数的定义域是 x 的各个取值范围的并集．

如 $y=\begin{cases}5x, & 0<x<1\\ 4.5x, & 1\le x<5\\ 4x, & x\ge5\end{cases}$ 的定义域为 $(0,1)\cup[1,5)\cup[5,+\infty)=(0,+\infty)$．

二．函数的几何特性

1． 有界性

如果函数 $f(x)$在实数区域 D 内满足 $A\le f(x)\le B$，则称 $y=f(x)$在 D 内有界，其中 A 为下界，B 为上界．如果 $y=f(x)$在其定义域内有界，则称之为有界函数．



如：$y=\sin x$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内满足 $-1\le\sin x\le1$，故 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，-1 为下界，1 为上界，且所有小于 -1 的数都为的下界，所有大于 1 的数都为 $y=\sin x$ 的上界，上下界都不是唯一的．有界时，称最大的下界为下确界，称最小的上界为上确界．

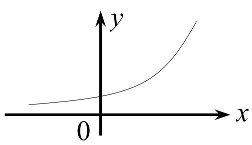
又如： $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $1<x<+\infty$ 内有 $0<\dfrac{1}{x}<1$，故 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,+\infty)$内有界，0 为下界，1 为上界．

$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $0<x<+\infty$ 内有 $0<\dfrac{1}{x}<+\infty$ ，故 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$内无界，有下界无上界．

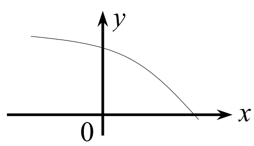
2． 单调性

在区间 (a,b) 内任给两点 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$，若 $f(x_1)<f(x_2)$成立，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加；若 $f(x_1)>f(x_2)$成立，称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少．

如果 $y=f(x)$ 在其定义域内单调增加（减少），则称 $y=f(x)$ 是单调增加（减少）函数．



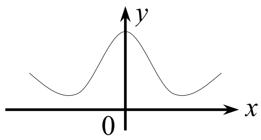
单调增加



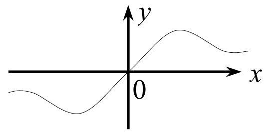
单调减少

3．奇偶性

如果 $f(-x)=f(x)$，则 $y=f(x)$是偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$，则 $y=f(x)$是奇函数．



偶函数



奇函数

4．周期性

如果有常数 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$成立，则称 $y=f(x)$为周期函数，T 为周期．

最常见的周期函数是三角函数．如 $y=\sin x$ 是周期函数，2π、4π、6π 等都是 $y=\sin x$ 的周期，2π 为其最小正周期．

例　狄立克莱函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$，讨论其周期性．

解：任取有理数 $r>0$，当 x 为有理数时，$x+r$ 仍为有理数，$D(x)=D(x+r)=1$；

当 x 为无理数时，$x+r$ 为无理数，$D(x)=D(x+r)=0$．

所以恒有 $D(x)=D(x+r)$成立．$D(x)$为周期函数，任何正有理数都是其周期，但没有最小正周期．

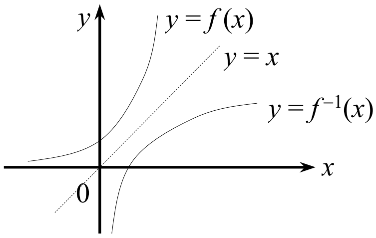
§1.3 反函数、复合函数

一．反函数

如果函数 $y=f(x)$ 中 x 与 y 是一一对应，即给出 y 的值，只有一个唯一确定的 x 值，则 x 也是 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称之为 $y=f(x)$的反函数．

其中 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，x 为因变量．但习惯上是以 x 为自变量，y 为因变量，故 $y=f(x)$反函数常改写为 $y=f^{-1}(x)$，称为 $y=f(x)$习惯上的反函数．而 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$定义上的反函数．

原来的函数 $y=f(x)$的定义域是反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域，原来的函数 $y=f(x)$的值是反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域，且 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$图形关于直线 $y=x$ 对称．



二．复合函数

定义 1.2　函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果存在某些 x 值所对应的 u 值使 $f(u)$有定义，则它们可构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，称 u 为中间变量，又称 $f(u)$为外函数，$\varphi(x)$为内函数．

如 $y=u^2$，$u=1-x$，复合成 $y=(1-x)^2$．

但 $y=\lg u$，$u=\cos x-1$，由于 $\cos x-1\le 0$，不能使得 $\lg u$ 有定义，因此不能复合．

重要的是掌握将复杂函数分解为简单函数复合的方法．首先是找外函数，一般是最前面的或者是括号外的函数符号构成外函数．

如：$y=\lg\sqrt{x}\ \Longrightarrow\ y=\lg u$，$u=\sqrt{x}$；　　$y=2^{\cos x}\Longrightarrow y=2^u$，$u=\cos x$；

$y=\sin(1+x)\Longrightarrow y=\sin u$，$u=1+x$；　　$y=\sin^2 x=(\sin x)^2\Longrightarrow y=u^2$，$u=\sin x$．

多重复合函数则由外向内逐层分解．

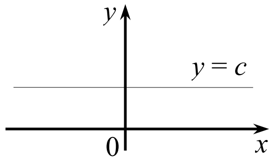
如：$y=2^{\sqrt{\sin x^2}}\ \Longrightarrow\ y=2^u,\ u=\sqrt{v},\ v=\sin w,\ w=x^2$．

§1.4　基本初等函数与初等函数

总结中学所学过的全部函数．复合函数分解时的最简单形式，称为基本初等函数，共 6 类．

一．基本初等函数

1．　常量函数：$y = c$ (c 为常数)．



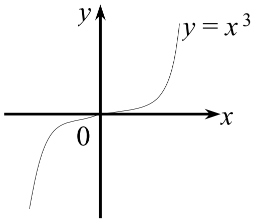
注意：区别常量函数和函数值．

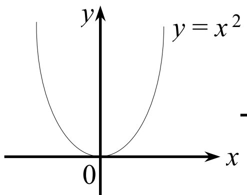
函数值：　如 $y = x^2$，当 $x = 2$ 时，$y = 4$（不是常量函数）；

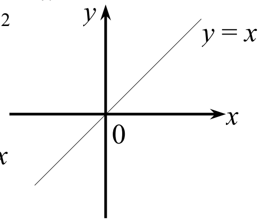
常量函数：如 $y = 4$，对任何 x 值，y 都等于 4．

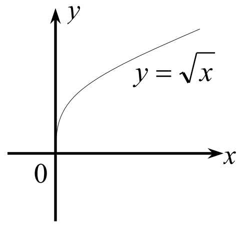
2．　幂函数：$y = x^{\mu}$　$(\mu \neq 0)$

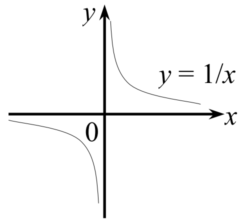
如 $y = x^3$，$y = x^2$，$y = x$，$y = \sqrt{x}$，$y = \dfrac{1}{x}$ 等．











幂函数的定义域：

当$\mu > 0$ 时，若 $\mu = \dfrac{p}{q}$ 为有理数（p 与 q 不可约），q 为奇数时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，

q 为偶数时，定义域为 $[0, +\infty)$，

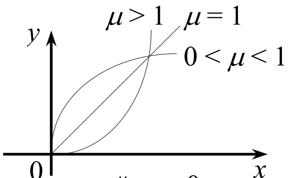
若μ 为无理数，定义域为 $[0, +\infty)$；

当$\mu < 0$ 时，若 $\mu = \dfrac{p}{q}$ 为有理数（p 与 q 不可约），q 为奇数时，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，

q 为偶数时，定义域为 $(0, +\infty)$，

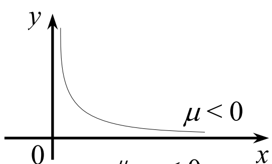
若μ 为无理数，定义域为 $(0, +\infty)$．

一般的幂函数 $y = x^{\mu}$ 总在 $(0, +\infty)$ 内有定义，考虑第一象限的图形，都要过点 $(1, 1)$．



$y = x^{\mu}, \mu > 0$

$(0, +\infty)$内单调增加



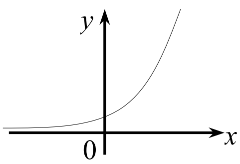
$y = x^{\mu}, \mu < 0$

$(0, +\infty)$内单调减少

3．　指数函数：$y = a^x$　$(a > 0，a \neq 1)$

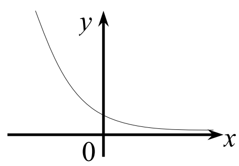
如 $y = 2^x$，$y = 10^x$，$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 等．

指数函数 $y = a^x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，其图形都要过点 $(0, 1)$．



$y = a^x, a > 1$

单调增加



$y = a^x, 0 < a < 1$

单调减少

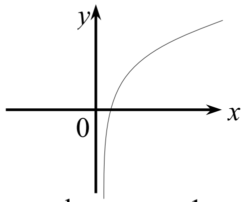
我们通常使用以 e 为底的指数函数，$y = e^x$　$(e \approx 2.71828)$．

4．对数函数：$y = \log_a x \quad (a > 0，a \neq 1)$.

如：$y = \lg x$，$y = \log_2 x$，$y = \log_{1/2} x$ 等.

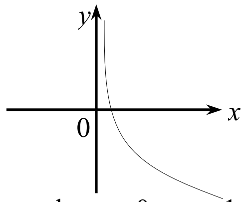
对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数.

对数函数 $y = \log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，其图形都要过点 $(1, 0)$.



$y = \log_a x, a > 1$

单调增加



$y = \log_a x, 0 < a < 1$

单调增加

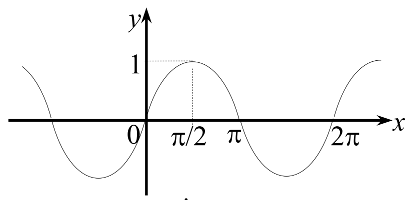
以后我们只用自然对数（即以 e 为底的对数），$y = \ln x = \log_e x$.

性质：（1）$\ln e^x = x$，$e^{\ln x} = x$；

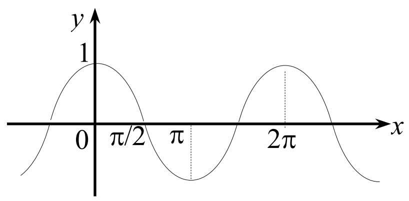
（2）$\ln xy = \ln x + \ln y$，$\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$，$\ln x^y = y \ln x$；

（3）换底公式：$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

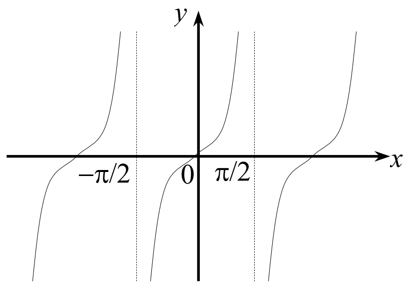
5．三角函数：$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$.



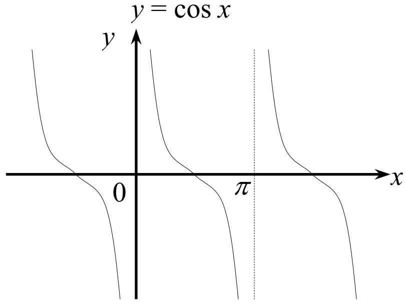
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



$y = \cot x$

性质：（1）倒数关系：$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$，$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$；

（2）商的关系：$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$；

（3）平方关系：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$，$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$；

（4）倍角公式：$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$，$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$；

（5）半角公式：$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{2}$，$\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos^2 x}{2}$；

（6）两角和差公式；和差化积公式；积化和差公式：

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$，$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$，

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$，$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$，

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]，\quad \cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]，$$

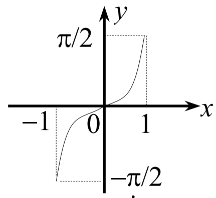
$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]，\quad \sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]，$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}，\quad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}，$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}，\quad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}，$$

以后三角函数只使用弧度（$\pi=180°$）.

6． 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

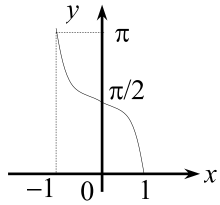


$y=\arcsin x$

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数.

$\arcsin x$ 定义域 $[-1, 1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

如 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$，（因 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$）；$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{\pi}{3}$，（因 $\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$）；$\arcsin 2$ 无定义.



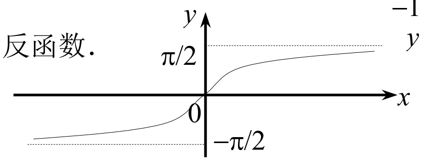
$y=\arccos x$

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$的反函数.

$\arccos x$ 定义域 $[-1, 1]$，值域 $[0, \pi]$.

如 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，（因 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$）；$\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$，（因 $\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$）.

反正切函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数.

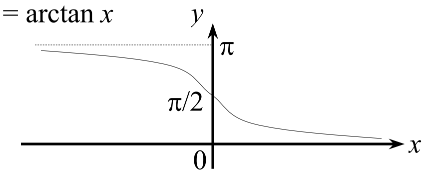


$y=\arctan x$

$\arctan x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$，值域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

反正切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x$，$x\in(0,\pi)$的反函数.

$\operatorname{arccot} x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$，值域 $(0, \pi)$.



$y=\operatorname{arccot} x$

注意：反三角函数符号应当看作一个整体，

$$如\ y=\arcsin\sqrt{x}\longrightarrow y=\arcsin u,\ u=\sqrt{x}.$$

二．初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的函数称为初等函数.

幂指函数，如 $y=x^x$.

注：幂函数 x^u，底为变量，指数为常量；指数函数 a^x，底为常量，指数为变量；

幂指函数 x^x，底与指数都是变量；

幂指函数是初等函数：$y=x^x$，即$y=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}\longrightarrow y=e^u$，$u=x\ln x$

例　判断下列函数是否基本初等函数．若不是，指出复合层次（其中 a 为常数）：

（1）$y=a^{x^a}\longrightarrow y=a^u$，$u=x^a$ 是复合函数；

（2）$y=a^{a^x}\longrightarrow y=a^u$，$u=a^x$ 是复合函数；

（3）$y=x^{a^a}$ 为基本初等函数；

（4）$y=x^{a^x}$ 为幂指函数，即 $y=x^{a^x}=e^{\ln x^{a^x}}=e^{a^x\ln x}\longrightarrow y=e^u$，$u=a^x\ln x$.

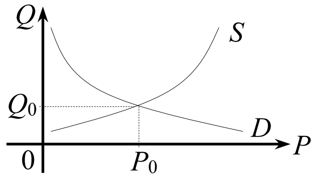
§1.5　经济学中常用的函数

一．需求函数与供给函数

1．需求函数：需求量 Q_d（因变量）关于价格 P（自变量）的函数，$Q_d=f(P)$．一般，当价格上涨时，需求量 Q_d 减少；当价格下降时，需求量 Q_d 增加；需求函数 $Q_d=f(P)$ 为单减函数．

2．供给函数：供给量 Q_s (因变量)关于价格 P（自变量）的函数，$Q_s=\varphi(P)$．当价格上涨时，供给量 Q_s 增加；当价格下降时，供给量 Q_s 减少；供给函数 $Q_s=\varphi(P)$ 为单增函数．

3．均衡状态：在同一坐标系下画出需求曲线 D 与供给曲线 S，设它们交于点 (P_0, Q_0)．



当价格 $P>P_0$ 时，$Q_s>Q_d$，商品供过于求，价格 P 将会下降．当价格 $P<P_0$ 时，$Q_s<Q_d$，商品供不应求，价格 P 将会上涨．因此，价格 P 将围绕 P_0 上下浮动，称 P_0 为均衡价格，Q_0 为均衡商品量．当价格 $P=P_0$ 时，$Q_s=Q_d=Q_0$，称之为均衡状态．

二．成本、收入、利润函数

1．成本函数：成本 C 关于产量 x 的函数，$C=C(x)=C_0+C_1(x)$，其中，C_0 为固定成本，即不进行生产也需要的成本；$C_1(x)$ 为可变成本，进行生产所增加的成本，有 $C_1(0)=0$．此外平均成本 $\overline{C}=\dfrac{C(x)}{x}$．这里产量 x 对应于供给量 Q_s．

2．收益函数：收益 R 关于销量 x 的函数，$R=R(x)=xP$，其中 P 为价格．这里销量 x 对应于需求量 Q_d．当产销平衡时（即均衡状态），产量、销量（供给量、需求量）统称为商品量．

3．利润函数：利润 L 关于商品量 x 的函数，$L=L(x)=R(x)-C(x)$．

函数关系的建立：

建立目标函数，关键是应明确因变量和自变量．

例　生产某商品，固定成本为 100，并且每增加一单位产量，成本增加 5 个单位．设这种商品的需求函数为 $Q=110-2P$，（Q 为需求量，P 为价格），问在产销平衡条件下，如何生产，利润最大？

解：目标函数：利润 L 关于商品量 Q 的函数．

$$L(Q)=R(Q)-C(Q),$$

$$C(Q)=C_0+C_1(Q)=100+5Q\ ,\ R(Q)=Q\,P=Q\,(55-0.5Q)=55Q-0.5Q^2\ ,$$

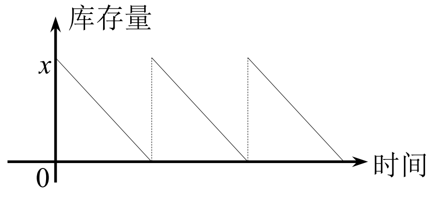
$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-100+50Q-0.5Q^2=1150-0.5(Q-50)^2,$$

当 $Q=50$ 时，利润 $L(Q)$ 最大，为 1240．

三．库存管理问题

例　已知市场对某厂产品年需求量为 a，且销量是均匀的．设企业分批生产，上一批卖完时，立即生产出下一批．每批生产准备费为 b 元，每单位产品每年的库存费为 c 元，求每批生产多少，总费用最小？

解：目标函数：总费用 y 关于每批产量 x 的函数．



年生产准备费：$b\cdot\dfrac{a}{x}$；

最大库存量：x；　平均库存量：$\dfrac{x}{2}$；

年库存费：$c\cdot\dfrac{x}{2}$．

$\therefore\ y=\dfrac{ab}{x}+\dfrac{cx}{2}$，当 $\dfrac{ab}{x}=\dfrac{cx}{2}$ 时，即 $x=\sqrt{\dfrac{2ab}{c}}$，总费用 y 最小，为 $2\sqrt{\dfrac{ab}{x}\cdot\dfrac{cx}{2}}=\sqrt{2abc}$．