习题 6.6

1. 某厂生产的化纤强度服从正态分布，长期以来其标准差稳定在σ = 0.85，现抽取了一个容量为 n = 25 的样本，测定其强度，算得平均值为$\bar{x}=2.25$，试求这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间.

解：已知σ^2，估计μ，选取枢轴量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信区间为$\left[\bar{X}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，$\bar{x}=2.25$，$\sigma=0.85$，$n=25$，

故μ 的 0.95 置信区间为$\left[\bar{x}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[2.25\pm1.96\times\dfrac{0.85}{\sqrt{25}}\right]=[1.9168, 2.5832]$.

2. 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，问样本容量 n 取多大时才能保证μ 的置信水平为 95%的置信区间的长度不大于 k.

解：已知σ^2，估计μ，选取枢轴量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信区间为$\left[\bar{X}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，长度为$2u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，有置信区间的长度$2u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le k$，

故$\sqrt{n}\ge3.92\times\dfrac{\sigma}{k}$，即$n\ge\dfrac{15.3664\sigma^2}{k^2}$.

3. 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是取自总体 X 的样本，已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.
(1) 求μ 的置信水平为 95%的置信区间；
(2) 求 X 的数学期望的置信水平为 95%的置信区间.

解：(1) 已知σ^2，估计μ，选取枢轴量$U=\dfrac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信区间为$\left[\bar{Y}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，$\sigma=1$，$n=4$，

$$\bar{y}=\frac{1}{4}(\ln0.50+\ln1.25+\ln0.80+\ln2.00)=0,$$

故μ 的 95%置信区间为$\left[\bar{y}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[0\pm1.96\times\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right]=[-0.98, 0.98]$；

(2) 因 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，有 $X=e^Y$，且 Y 的密度函数为 $p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$，

则
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2-2\mu y+\mu^2-2y}{2}}dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2-2(\mu+1)y+(\mu+1)^2-2\mu-1}{2}}dy=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}dy=e^{\mu+\frac{1}{2}},$$

故 $E(X)$ 的 95%置信区间为 $[e^{-0.98+0.5}, e^{0.98+0.5}]=[0.6188, 4.3929]$.

4. 用一个仪表测量某一物理量 9 次，得样本均值$\bar{x}=56.32$，样本标准差 $s=0.22$.
(1) 测量标准差σ 大小反映了测量仪表的精度，试求σ 的置信水平为 0.95 置信区间；
(2) 求该物理量真值的置信水平为 0.99 的置信区间.

解：（1）估计 σ^2，选取枢轴量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，置信区间为 $\left[\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$n=9$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=2.1797$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=17.5345$，

$s=0.22$，

故 σ^2 的 0.95 置信区间为 $\left[\dfrac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]=\left[\dfrac{8\times0.22^2}{17.5345},\ \dfrac{8\times0.22^2}{2.1797}\right]=[0.0221,\ 0.1776]$，

即 σ 的 0.95 置信区间为 $[\sqrt{0.0221},\ \sqrt{0.1776}]=[0.1486, 0.4215]$.

（2）未知 σ^2，估计 μ，选取枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，置信区间为 $\left[\overline{X}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.99$，$n=9$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.995}(8)=3.3554$，$\bar{x}=56.32$，$s=0.22$，

故 μ 的 0.99 置信区间为 $\left[\bar{x}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right]=\left[56.32\pm3.3554\times\dfrac{0.22}{\sqrt{9}}\right]=[56.0739,\ 56.5661]$.

5. 已知某种材料的抗压强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：

482　493　457　471　510　446　435　418　394　469

（1）求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%的置信区间；

（2）若已知 $\sigma=30$，求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%的置信区间；

（3）求 σ 的置信水平为 95%的置信区间.

解：（1）未知 σ^2，估计 μ，选取枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，置信区间为 $\left[\overline{X}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$n=10$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(9)=2.2622$，$\bar{x}=457.5$，$s=35.2176$，

故 μ 的 95%置信区间 $\left[\bar{x}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right]=\left[457.5\pm2.2622\times\dfrac{35.2176}{\sqrt{10}}\right]=[432.3064,\ 482.6936]$；

（2）已知 σ^2，估计 μ，选取枢轴量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信区间为 $\left[\overline{X}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，$\bar{x}=457.5$，$\sigma=30$，$n=10$，

故 μ 的 95%置信区间为 $\left[\bar{x}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[457.5\pm1.96\times\dfrac{30}{\sqrt{10}}\right]=[438.9058,\ 476.0942]$；

（3）估计 σ^2，选取枢轴量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，置信区间为 $\left[\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$n=10$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=2.7004$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=19.0228$，

$s=35.2176$，

故 σ^2 的 0.95 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]=\left[\frac{9\times35.2176^2}{19.0228},\ \frac{9\times35.2176^2}{2.7004}\right]=[586.7958,\ 4133.6469]，$$

即 σ 的 0.95 置信区间为$[\sqrt{586.7958},\ \sqrt{4133.6469}]=[24.2239, 64.2934]$.

6. 在一批货物中随机抽取 80 件，发现有 11 件不合格品，试求这批货物的不合格品率的置信水平为 0.90 的置信区间.

解：大样本，估计概率 p，选取枢轴量$U=\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

置信区间为$\dfrac{1}{1+u_{1-\alpha/2}^2\big/n}\left[\overline{X}+\dfrac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}+\dfrac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.90$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.95}=1.645$，$n=80$，$\bar{x}=\dfrac{11}{80}=0.1375$，

故 p 的 0.90 置信区间

$$\frac{1}{1+u_{1-\alpha/2}^2\big/n}\left[\bar{x}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{1+1.645^2/80}\left[0.1375+\frac{1.645^2}{160}\pm1.645\times\sqrt{\frac{0.1375\times0.8625}{80}+\frac{1.645^2}{4\times80^2}}\right]=[0.0859, 0.2128].$$

注：p 的 0.90 近似置信区间

$$\left[\bar{x}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right]=\left[0.1375\pm1.645\times\sqrt{\frac{0.1375\times0.8625}{80}}\right]=[0.0742, 0.2008]；$$

p 的 0.90 修正置信区间（修正频率 $\bar{x}^*=\dfrac{11+2}{80+4}=0.1548$）

$$\left[\bar{x}^*\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}^*(1-\bar{x}^*)}{n+4}}\right]=\left[0.1548\pm1.645\times\sqrt{\frac{0.1548\times0.8452}{84}}\right]=[0.0898, 0.2197].$$

7. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的样本，证明：λ 的近似 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2-\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2},\frac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2+\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2}\right].$$

证：总体 $X\sim P(\lambda)$，有 $n\overline{X}=X_1+\cdots+X_n\sim P(n\lambda)$，$E(\overline{X})=\lambda$，$\mathrm{Var}(\overline{X})=\dfrac{\lambda}{n}$，当 n 很大时，$\overline{X}\stackrel{\cdot}{\sim}N\left(\lambda,\dfrac{\lambda}{n}\right)$，

选取枢轴量$U=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，置信度为 $1-\alpha$，即 $P\left\{-u_{1-\alpha/2}\le\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\le u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$，

则 $-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}\le\overline{X}-\lambda\le u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$，即 $(\overline{X}-\lambda)^2\le u_{1-\alpha/2}^2\cdot\dfrac{\lambda}{n}$，$\lambda^2-\left(2\overline{X}+\dfrac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)\lambda+\overline{X}^2\le0$，

解得 $\dfrac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2-\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2}\le\lambda\le\dfrac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2+\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2}$，

置信区间为 $\left[\dfrac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2-\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2},\dfrac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2+\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2}\right]$.

8. 某商店某种商品的月销售量服从泊松分布，为合理进货，必须了解销售情况．现记录了该商店过去的一些销售量，数据如下：

月销售量	9	10	11	12	13	14	15	16
月份数	1	6	13	12	9	4	2	1

试求平均月销售量的置信水平为 0.95 的置信区间．

解：估计泊松分布的参数λ，由第 7 题的结论可知λ 的近似 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\pm\sqrt{\left(2\overline{X}+\frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-4\overline{X}^2}}{2}\right]=\left[\overline{X}+\frac{1}{2n}u_{1-\alpha/2}^2\pm\sqrt{\left(\overline{X}+\frac{1}{2n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-\overline{X}^2}\right],$$

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，$\bar{x}=11.9792$，$n=48$，

故λ 的 0.95 置信区间

$$\left[\bar{x}+\frac{1}{2n}u_{1-\alpha/2}^2\pm\sqrt{\left(\bar{x}+\frac{1}{2n}u_{1-\alpha/2}^2\right)^2-\bar{x}^2}\right]$$

$$=\left[11.9792+\frac{1.96^2}{2\times48}\pm\sqrt{\left(11.9792+\frac{1.96^2}{2\times48}\right)^2-11.9792^2}\right]=[11.0392,12.9992].$$

9. 设从总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1=10, n_2=15$ 的独立样本，可计算得 $\bar{x}=82,\ s_x^2=56.5,\ \bar{y}=76,\ s_y^2=52.4$.

（1）若已知 $\sigma_1^2=64,\ \sigma_2^2=49$，求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 95%的置信区间；

（2）若已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 95%的置信区间；

（3）若对 σ_1^2,σ_2^2 一无所知，求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 95%的近似置信区间；

（4）求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95%的置信区间．

解：（1）已知 σ_1^2,σ_2^2，估计$\mu_1-\mu_2$，选取枢轴量 $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$，

置信区间为$\left[\bar{X}-\bar{Y}\pm u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，$\bar{x}=82,\ \bar{y}=76,\ \sigma_1^2=64,\ \sigma_2^2=49$，$n_1=10$，$n_2=15$，

故$\mu_1-\mu_2$的 95%置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}\pm u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]=\left[82-76\pm1.96\times\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{49}{15}}\right]=[-0.0939,12.0939]；$$

（2）未知σ_1^2,σ_2^2，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，估计$\mu_1-\mu_2$，选取枢轴量$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

置信区间为$\left[\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$n_1=10$，$n_2=15$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.975}(23)=2.0687$，

$\bar{x}=82,\ s_x^2=56.5,\ \bar{y}=76,\ s_y^2=52.4$，有$s_w=\sqrt{\dfrac{9\times56.5+14\times52.4}{23}}=7.3488$，

故$\mu_1-\mu_2$的 95%置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]=\left[82-76\pm2.0687\times7.3488\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}\right]$$

$$=[-0.2063,\ 12.2063];$$

（3）未知σ_1^2,σ_2^2，估计$\mu_1-\mu_2$，

选取枢轴量$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}}\dot{\sim}\, t(l_0)$，$l_0$是最接近$l=\dfrac{\left(\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{S_x^4}{n_1^2(n_1-1)}+\dfrac{S_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}$的整数，

近似置信区间为$\mu_1-\mu_2\in\left[\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{1-\alpha/2}(l_0)\cdot\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}\right]$，

因$n_1=10$，$n_2=15$，$s_x^2=56.5,\ s_y^2=52.4$，有$l=\dfrac{\left(\dfrac{56.5}{10}+\dfrac{52.4}{15}\right)^2}{\dfrac{56.5^2}{10^2\times9}+\dfrac{52.4^2}{15^2\times14}}=18.9201$，即取$l_0=19$，

置信度为 $1-\alpha=0.95$，$t_{1-\alpha/2}(l_0)=t_{0.975}(19)=2.0930$，$\bar{x}=82,\ s_x^2=56.5,\ \bar{y}=76,\ s_y^2=52.4$，

故$\mu_1-\mu_2$的 95%置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{1-\alpha/2}(l_0)\cdot\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}\right]=\left[82-76\pm2.0930\times\sqrt{\frac{56.5}{10}+\frac{52.4}{15}}\right]=[-0.3288,12.3288]；$$

（4）估计方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$，选取枢轴量 $F=\dfrac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$，

置信区间为 $\left[\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$n_1=10$，$n_2=15$，$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(9,14)=3.21$，

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(9,14)=\frac{1}{F_{0.975}(14,9)}=\frac{1}{3.80},\quad s_x^2=56.5,\ s_y^2=52.4,$$

故 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 95%置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{0.975}(9,14)},\ \frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{0.025}(9,14)}\right]=\left[\frac{56.50}{52.4}\times\frac{1}{3.21},\ \frac{56.50}{52.4}\times3.80\right]=[0.3359,4.0973].$$

10．假设人体身高服从正态分布，今抽测甲、乙两地区 18 岁~25 岁女青年身高得数据如下：甲地区抽取 10 名，样本均值 1.64 m，样本标准差 0.2 m；乙地区抽取 10 名，样本均值 1.62 m，样本标准差 0.4 m.

（1）两正态总体方差比的置信水平为 95%的置信区间；

（2）两正态总体均值差的置信水平为 95%的置信区间.

解：（1）估计方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$，选取枢轴量 $F=\dfrac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$，

置信区间为 $\left[\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right]$，

置信度 $1-\alpha=0.95$，$n_1=10$，$n_2=10$，$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(9,9)=4.03$，

$s_x=0.2$，$s_y=0.4$，

故 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 95%置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{0.975}(9,9)},\ \frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{0.025}(9,9)}\right]=\left[\frac{0.2^2}{0.4^2}\times\frac{1}{4.03},\ \frac{0.2^2}{0.4^2}\times4.03\right]=[0.0620,1.0075];$$

（2）未知 σ_1^2,σ_2^2，估计 $\mu_1-\mu_2$，

选取枢轴量 $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}}\ \dot{\sim}\ t(l_0)$，$l_0$ 是最接近 $l=\dfrac{\left(\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{S_x^4}{n_1^2(n_1-1)}+\dfrac{S_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}$ 的整数，

近似置信区间为 $\mu_1-\mu_2\in\left[\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{1-\alpha/2}(l_0)\cdot\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}\right]$，

因 $n_1=10$，$n_2=10$，$s_x=0.2$，$s_y=0.4$，有 $l=\dfrac{\left(\dfrac{0.2^2}{10}+\dfrac{0.4^2}{10}\right)^2}{\dfrac{0.2^4}{10^2\times 9}+\dfrac{0.4^4}{10^2\times 9}}=13.2353$，即取 $l_0=13$，

置信度为 $1-\alpha=0.95$，$t_{1-\alpha/2}(l_0)=t_{0.975}(13)=2.1604$，$\bar{x}=1.64,\ s_x=0.2,\ \bar{y}=1.62,\ s_y=0.4$，

故$\mu_1-\mu_2$的 95%置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{1-\alpha/2}(l_0)\cdot\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}\right]=\left[1.64-1.62\pm 2.1604\times\sqrt{\frac{0.2^2}{10}+\frac{0.4^2}{10}}\right]=[-0.2855,0.3255].$$

11．设总体 X 的密度函数为 $\lambda e^{-\lambda x}I_{x>0}$，其中$\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,\cdots,X_n$ 为抽自此总体的简单随机样本，求λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解：总体 X 服从指数分布 $Exp(\lambda)$，有 $Y=2\lambda X\sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)=Ga\left(1,\frac{1}{2}\right)=\chi^2(2)$，$n\bar{Y}=Y_1+\cdots+Y_n\sim\chi^2(2n)$，

选取枢轴量 $\chi^2=2n\lambda\bar{X}\sim\chi^2(2n)$，置信度为 $1-\alpha$，即 $P\{\chi^2_{\alpha/2}(2n)\le 2n\lambda\bar{X}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)\}=1-\alpha$，

则 $\chi^2_{\alpha/2}(2n)\le 2n\lambda\bar{X}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$，即 $\dfrac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\bar{X}}\le\lambda\le\dfrac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\bar{X}}$，

故λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为$\left[\dfrac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\bar{X}},\dfrac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\bar{X}}\right]$.

12．设某电子产品的寿命服从指数分布，其密度函数为 $\lambda e^{-\lambda x}I_{x>0}$，现从此批产品中抽取容量为 9 的样本，测得寿命为（单位：千小时）

15，45，50，53，60，65，70，83，90，

求平均寿命 $1/\lambda$ 的置信水平为 0.9 的置信区间和置信上、下限.

解：估计指数分布的参数λ，由第 11 题的结论可知λ 的 $1-\alpha$ 置信区间为$\left[\dfrac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\bar{X}},\dfrac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\bar{X}}\right]$，

则平均寿命 $1/\lambda$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为$\left[\dfrac{2n\bar{X}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)},\dfrac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right]$，

单侧置信上、下限分别为$\dfrac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\alpha}(2n)}$、$\dfrac{2n\bar{X}}{\chi^2_{1-\alpha}(2n)}$，

置信度 $1-\alpha=0.9$，$n=9$，$\chi^2_{\alpha/2}(2n)=\chi^2_{0.05}(18)=9.3905$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)=\chi^2_{0.95}(18)=28.8693$，$\bar{x}=59$，

$\chi^2_{\alpha}(2n)=\chi^2_{0.1}(18)=10.8649$，$\chi^2_{1-\alpha}(2n)=\chi^2_{0.9}(18)=25.9894$，

故平均寿命 $1/\lambda$ 的 0.9 置信区间为

$$\left[\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)},\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right]=\left[\frac{2\times9\times59}{28.8693},\frac{2\times9\times59}{9.3905}\right]=[36.7865,113.0930]；$$

单侧置信上、下限分别为

$$\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{\alpha}(2n)}=\frac{2\times 9\times 59}{10.8649}=97.7460, \quad \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{1-\alpha}(2n)}=\frac{2\times 9\times 59}{10.8649}=40.8628.$$

13．设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}, \quad -\infty<x<+\infty, \quad -\infty<\theta<+\infty,$$

$X_1, \cdots, X_n$ 为抽自此总体的简单随机样本，求位置参数 θ 的置信水平近似为 1 − α 的置信区间．

解：总体 X 服从柯西分布，根据书上 P276 例 5.3.10 的结论可知，样本中位数 $m_{0.5}\sim N\left(\theta,\frac{\pi^2}{4n}\right)$，

选取枢轴量 $U=\frac{m_{0.5}-\theta}{\pi/(2\sqrt{n})}\ \dot{\sim}\ N(0,1)$，置信度为 1 − α，即 $P\left\{-u_{1-\alpha/2}\le\frac{m_{0.5}-\theta}{\pi/(2\sqrt{n})}\le u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$，

则 $-u_{1-\alpha/2}\le\frac{m_{0.5}-\theta}{\pi/(2\sqrt{n})}\le u_{1-\alpha/2}$，即 $m_{0.5}-u_{1-\alpha/2}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\le\theta\le m_{0.5}+u_{1-\alpha/2}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$，

故 θ 的置信水平为 1 − α 的近似置信区间为 $\left[m_{0.5}-u_{1-\alpha/2}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}, m_{0.5}+u_{1-\alpha/2}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right]$.

注：因柯西分布数学期望不存在，由样本均值构造枢轴量得到的置信区间不是一个好的估计，
总体 X 服从柯西分布 $Ch(1, \theta)$，根据书上习题 4.2 第 11 题的结论可知，柯西分布具有可加性，

则 $n\overline{X}=X_1+\cdots+X_n\sim Ch(n, n\theta)$，有 $Y=n\overline{X}-n\theta\sim Ch(n,0)$，其密度函数与分布函数分别为

$$p_Y(y)=\frac{n}{\pi(n^2+y^2)}, \quad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{n}{\pi(n^2+t^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{t}{n}\bigg|_{-\infty}^{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{n},$$

可得其 p 分位数 y_p 满足 $F_Y(y_p)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y_p}{n}=p$，即 $y_p=n\tan\left(\pi p-\frac{\pi}{2}\right)$，

选取枢轴量 $Y=n\overline{X}-n\theta\sim Ch(n,0)$，置信度为 1 − α，即 $P\{y_{\alpha/2}\le n\overline{X}-n\theta\le y_{1-\alpha/2}\}=1-\alpha$，

则 $y_{\alpha/2}=-n\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\le n\overline{X}-n\theta\le y_{1-\alpha/2}=n\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}$，即 $\overline{X}-\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\le\theta\le\overline{X}+\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}$，

故 θ 的置信水平为 1 − α 的置信区间为 $\left[\overline{X}-\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}, \overline{X}+\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right]$.

但是该置信区间长度 $2\tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}$ 与样本容量 n 无关，不会随 n 的增加而缩短，不是一个好的估计．

14．设 $X_1, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu, 16)$的简单随机样本，为使得 μ 的置信水平为 1 − α 的置信区间的长度不大于给定的 L，试问样本容量 n 至少要多少？

解：已知 σ^2，估计 μ，选取枢轴量 $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信区间为 $\left[\overline{X}\pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，长度为 $2u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，

因 $\sigma^2=16$，有 $2u_{1-\alpha/2}\frac{4}{\sqrt{n}}\le L$，

故 $\sqrt{n} \ge \dfrac{8u_{1-\alpha/2}}{L}$，即 $n \ge \dfrac{64u_{1-\alpha/2}^2}{L^2}$.

15．设 $X_1, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本．试证

$$[\overline{X}-(\mu+k\sigma)]\bigg/\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]^{1/2}$$

为枢轴量，其中 k 为已知常数.

证：因 $\dfrac{\overline{X}-(\mu+k\sigma)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]^{1/2}}=\dfrac{\overline{X}-(\mu+k\sigma)}{[(n-1)S^2]^{1/2}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S\sqrt{n-1}}-\dfrac{k\sigma}{[(n-1)S^2]^{1/2}}=\sqrt{n(n-1)}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}-\dfrac{k}{\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]^{1/2}}$，

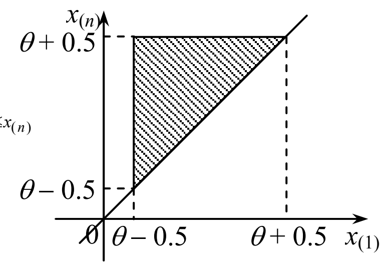
且 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，分布都与未知参数$\mu, \sigma^2$无关，

故$[\overline{X}-(\mu+k\sigma)]\bigg/\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]^{1/2}$ 的分布与未知参数μ, σ^2无关，即为枢轴量.

16．设 $X_1, \cdots, X_n$是来自 $U(\theta-1/2,\ \theta+1/2)$的样本，求$\theta$的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间（提示：证明 $\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\theta$ 为枢轴量，并求出对应的密度函数）.

证：因总体 X 的密度函数与分布函数分别为

$$p(x)=\mathrm{I}_{\theta-0.5<x<\theta+0.5},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta-0.5;\\ x-\theta+0.5, & \theta-0.5\le x<\theta+0.5;\\ 1, & x\ge\theta+0.5.\end{cases}$$



则$(X_{(1)}, X_{(n)})$的联合密度函数为

$$p_{1n}(x_{(1)}, x_{(n)})=n(n-1)[F(x_{(n)})-F(x_{(1)})]^{n-2}p(x_{(1)})p(x_{(n)})\cdot\mathrm{I}_{x_{(1)}\le x_{(n)}}$$

$$=n(n-1)(x_{(n)}-x_{(1)})^{n-2}\mathrm{I}_{\theta-0.5<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+0.5},$$

由卷积公式得 $U=X_{(1)}+X_{(n)}$的密度函数，

当 $2\theta-1<u<2\theta$ 时，

$$p_U(u)=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\frac{u}{2}}n(n-1)[(u-x_{(1)})-x_{(1)}]^{n-2}dx_{(1)}=-\frac{n}{2}(u-2x_{(1)})^{n-1}\Big|_{\theta-\frac{1}{2}}^{\frac{u}{2}}=\frac{n}{2}(u-2\theta+1)^{n-1},$$

当 $2\theta\le u<2\theta+1$ 时，

$$p_U(u)=\int_{u-\theta-\frac{1}{2}}^{\frac{u}{2}}n(n-1)[(u-x_{(1)})-x_{(1)}]^{n-2}dx_{(1)}=-\frac{n}{2}(u-2x_{(1)})^{n-1}\Big|_{u-\theta-\frac{1}{2}}^{\frac{u}{2}}=\frac{n}{2}(2\theta+1-u)^{n-1},$$

当 $u\le 2\theta-1$ 或 $u\ge 2\theta+1$ 时，$p_U(u)=0$，

令 $Y=\dfrac{U}{2}-\theta=\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\theta$，$Y$ 的密度函数与分布函数分别为

$$p_Y(y)=2p_U(2y+2\theta)=\begin{cases} n(1+2y)^{n-1}, & -0.5<y<0; \\ n(1-2y)^{n-1}, & 0\le y<0.5; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<-0.5; \\ \dfrac{1}{2}(1+2y)^n, & -0.5\le y<0; \\ 1-\dfrac{1}{2}(1-2y)^n, & 0\le y<0.5; \\ 1, & y\ge 0.5. \end{cases}$$

分布与未知参数θ无关，Y为枢轴量，

当$p<0.5$时，其p分位数y_p满足$F_Y(y_p)=\dfrac{1}{2}(1+2y_p)^n=p$，即$y_p=\dfrac{(2p)^{\frac{1}{n}}-1}{2}$，

当$p\ge 0.5$时，其p分位数y_p满足$F_Y(y_p)=1-\dfrac{1}{2}(1-2y_p)^n=p$，即$y_p=\dfrac{1-[2(1-p)]^{\frac{1}{n}}}{2}$，

选取枢轴量$Y=\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\theta$，置信度为$1-\alpha$，即$P\left\{y_{\alpha/2}\le\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\theta\le y_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$，

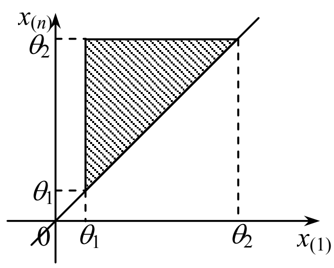
则$y_{\alpha/2}=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}{2}\le\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\theta\le y_{1-\alpha/2}=\dfrac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}$，即$\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\dfrac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}\le\theta\le\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}+\dfrac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}$，

故θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\dfrac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2},\ \dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}+\dfrac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}\right]$.

17．设$X_1,\cdots,X_n$为抽自均匀分布$U(\theta_1,\theta_2)$的简单随机样本，记$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$为其次序统计量．求：
（1）$\theta_2-\theta_1$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间；
（2）求$\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间．

解：因总体X的密度函数与分布函数分别为

$$p(x)=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\mathrm{I}_{\theta_1<x<\theta_2},\quad F(x)=\begin{cases} 0, & x<\theta_1; \\ \dfrac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1\le x<\theta_2; \\ 1, & x\ge\theta_2. \end{cases}$$



则$(X_{(1)}, X_{(n)})$的联合密度函数为

$$p_{1n}(x_{(1)},x_{(n)})=n(n-1)[F(x_{(n)})-F(x_{(1)})]^{n-2}p(x_{(1)})p(x_{(n)})\cdot\mathrm{I}_{x_{(1)}\le x_{(n)}}$$

$$=\frac{n(n-1)(x_{(n)}-x_{(1)})^{n-2}}{(\theta_2-\theta_1)^n}\mathrm{I}_{\theta_1<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta_2},$$

（1）由增补变量法得$U=X_{(n)}-X_{(1)}$的密度函数，
当$0<u<\theta_2-\theta_1$时，

$$p_U(u)=\int_{\theta_1}^{\theta_2-u}\frac{n(n-1)[(u+x_{(1)})-x_{(1)}]^{n-2}}{(\theta_2-\theta_1)^n}dx_{(1)}=\frac{n(n-1)u^{n-2}(\theta_2-\theta_1-u)}{(\theta_2-\theta_1)^n},$$

当$u\le 0$或$u\ge\theta_2-\theta_1$时，$p_U(u)=0$，

令$Y=\dfrac{U}{\theta_2-\theta_1}=\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}$，$Y$的密度函数与分布函数分别为

$$p_Y(y)=(\theta_2-\theta_1)p_U((\theta_2-\theta_1)y)=\begin{cases} n(n-1)y^{n-2}(1-y), & 0<y<1; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0; \\ ny^{n-1}-(n-1)y^n, & 0\le y<1; \\ 1, & y\ge 1. \end{cases}$$

可得 Y 服从贝塔分布 $Be(n-1, 2)$，其分布与未知参数 θ_1, θ_2 无关，Y 为枢轴量，

其 p 分位数 $y_p = Be_p(n-1, 2)$满足方程 $F_Y(y_p)=ny_p^{n-1}-(n-1)y_p^n=p$，

选取枢轴量 $Y=\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}$，置信度为 $1-\alpha$，即

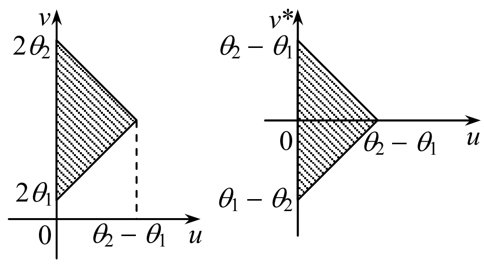
$$P\left\{Be_{\alpha/2}(n-1,2)\le\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}\le Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)\right\}=1-\alpha,$$

则 $Be_{\alpha/2}(n-1,2)\le\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}\le Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)$，即 $\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)}\le\theta_2-\theta_1\le\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{Be_{\alpha/2}(n-1,2)}$，

故$\theta_2-\theta_1$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为$\left[\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)},\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{Be_{\alpha/2}(n-1,2)}\right]$；

（2）由变量替换公式得$(U, V)=(X_{(n)}-X_{(1)}, X_{(n)}+X_{(1)})$的联合密度函数，有 $X_{(1)}=\dfrac{V-U}{2}, X_{(n)}=\dfrac{V+U}{2}$，

雅可比行列式为 $J=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}$，



根据$\theta_1<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta_2$，可得 $2\theta_1<v-u<v+u<2\theta_2$，即 $0<u<\theta_2-\theta_1$，$2\theta_1+u<v<2\theta_2-u$，有

$$p_{UV}(u,v)=p_{1n}\left(\frac{v-u}{2},\frac{v+u}{2}\right)\cdot|J|=\frac{n(n-1)u^{n-2}}{2(\theta_2-\theta_1)^n}\cdot \mathrm{I}_{0<u<\theta_2-\theta_1,\,2\theta_1+u<v<2\theta_2-u},$$

令 $V^*=V-(\theta_2+\theta_1)$，有$(U, V^*)$的联合密度函数为

$$p_{UV^*}(u,v^*)=p_{UV}(u,v^*+(\theta_2+\theta_1))=\frac{n(n-1)u^{n-2}}{2(\theta_2-\theta_1)^n}\cdot \mathrm{I}_{0<u<\theta_2-\theta_1,\,u-(\theta_2-\theta_1)<v<(\theta_2-\theta_1)-u},$$

由增补变量法得 $Z=\dfrac{V^*}{2U}=\dfrac{(X_{(n)}+X_{(1)})-(\theta_2+\theta_1)}{2(X_{(n)}-X_{(1)})}$ 的密度函数，

当 $z<0$ 时，$p_Z(z)=\displaystyle\int_0^{\frac{\theta_2-\theta_1}{1-2z}}\frac{n(n-1)u^{n-2}}{2(\theta_2-\theta_1)^n}\cdot 2u\cdot du=\left.\frac{(n-1)u^n}{(\theta_2-\theta_1)^n}\right|_0^{\frac{\theta_2-\theta_1}{1-2z}}=\frac{n-1}{(1-2z)^n}$，

当 $z\ge 0$ 时，$p_Z(z)=\displaystyle\int_0^{\frac{\theta_2-\theta_1}{1+2z}}\frac{n(n-1)u^{n-2}}{2(\theta_2-\theta_1)^n}\cdot 2u\cdot du=\left.\frac{(n-1)u^n}{(\theta_2-\theta_1)^n}\right|_0^{\frac{\theta_2-\theta_1}{1+2z}}=\frac{n-1}{(1+2z)^n}$，

则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1-2z)^{1-n}, & z<0;\\ 1-\dfrac{1}{2}(1+2z)^{1-n}, & z\ge 0.\end{cases}$$

分布与未知参数 θ_1,θ_2 无关，Z 为枢轴量，

当 $p<0.5$ 时，其 p 分位数 z_p 满足 $F_Z(z_p)=\dfrac{1}{2}(1-2z_p)^{1-n}=p$，即 $z_p=\dfrac{1-(2p)^{\frac{1}{1-n}}}{2}$，

当 $p\ge 0.5$ 时，其 p 分位数 z_p 满足 $F_Z(z_p)=1-\dfrac{1}{2}(1+2z_p)^{1-n}=p$，即 $z_p=\dfrac{[2(1-p)]^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}$，

选取枢轴量 $Z=\dfrac{(X_{(n)}+X_{(1)})-(\theta_2+\theta_1)}{2(X_{(n)}-X_{(1)})}$，置信度为 $1-\alpha$，即

$$P\left\{z_{\alpha/2}\le\frac{(X_{(n)}+X_{(1)})-(\theta_2+\theta_1)}{2(X_{(n)}-X_{(1)})}\le z_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

则 $z_{\alpha/2}=-\dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}\le\dfrac{(X_{(n)}+X_{(1)})-(\theta_2+\theta_1)}{2(X_{(n)}-X_{(1)})}\le z_{1-\alpha/2}=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}$，

即 $\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}(X_{(n)}-X_{(1)})\le\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\le\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}+\dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}(X_{(n)}-X_{(1)})$，

故 $\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

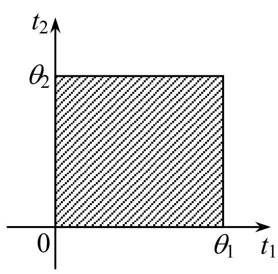
$$\left[\frac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}-\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}(X_{(n)}-X_{(1)}),\ \frac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}+\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}(X_{(n)}-X_{(1)})\right].$$

18．设 $X_1,\cdots,X_m$ i.i.d. $\sim U(0,\theta_1)$，$Y_1,\cdots,Y_n$ i.i.d. $\sim U(0,\theta_2)$，$\theta_1>0$，$\theta_2>0$ 皆未知，且两样本独立，求 $\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间（提示：令 $T_1=X_{(m)}$，$T_2=Y_{(n)}$，证明 $\dfrac{T_2}{T_1}\cdot\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ 的分布与 θ_1,θ_2 无关，并求出对应的密度函数）

证：令 $T_1=X_{(m)}$，$T_2=Y_{(n)}$，有 T_1 与 T_2 相互独立，其联合密度函数为

$$p(t_1,t_2)=p_m(t_1)p_n(t_2)=\frac{mt_1^{m-1}}{\theta_1^m}\mathrm{I}_{0<t_1<\theta_1}\cdot\frac{nt_2^{n-1}}{\theta_2^n}\mathrm{I}_{0<t_2<\theta_2}=\frac{mnt_1^{m-1}t_2^{n-1}}{\theta_1^m\theta_2^n}\mathrm{I}_{0<t_1<\theta_1,\,0<t_2<\theta_2},$$

由增补变量法得 $U=\dfrac{T_2}{T_1}$ 的密度函数，



当 $0<u<\dfrac{\theta_2}{\theta_1}$ 时，

$$p_U(u)=\int_0^{\theta_1}\frac{mnt_1^{m-1}(ut_1)^{n-1}}{\theta_1^m\theta_2^n}\cdot t_1\cdot dt_1=\frac{mnu^{n-1}}{\theta_1^m\theta_2^n}\cdot\frac{t_1^{m+n}}{m+n}\bigg|_0^{\theta_1}=\frac{mn}{m+n}u^{n-1}\cdot\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n,$$

当 $u\ge\frac{\theta_2}{\theta_1}$ 时，

$$p_U(u)=\int_0^{\frac{\theta_2}{u}}\frac{mnt_1^{m-1}(ut_1)^{n-1}}{\theta_1^m\theta_2^n}\cdot t_1\cdot dt_1=\frac{mnu^{n-1}}{\theta_1^m\theta_2^n}\cdot\frac{t_1^{m+n}}{m+n}\bigg|_0^{\frac{\theta_2}{u}}=\frac{mn}{m+n}u^{-m-1}\cdot\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^m,$$

当 $u\le 0$ 时，$p_U(u)=0$，

令 $Y=U\cdot\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{Y_{(n)}}{X_{(m)}}\cdot\frac{\theta_1}{\theta_2}$，$Y$ 的密度函数与分布函数分别为

$$p_Y(y)=\frac{\theta_2}{\theta_1}p_U\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}y\right)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{mn}{m+n}y^{n-1}, & 0<y<1;\\ \frac{mn}{m+n}y^{-m-1}, & y\ge 1.\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \frac{m}{m+n}y^n, & 0\le y<1;\\ 1-\frac{n}{m+n}y^{-m}, & y\ge 1.\end{cases}$$

分布与未知参数 θ_1,θ_2 无关，Y 为枢轴量，

当 $p<\frac{m}{m+n}$ 时，其 p 分位数 y_p 满足 $F_Y(y_p)=\frac{m}{m+n}y_p^n=p$，即 $y_p=\left[\frac{(m+n)p}{m}\right]^{\frac{1}{n}}$，

当 $p\ge\frac{m}{m+n}$ 时，其 p 分位数 y_p 满足 $F_Y(y_p)=1-\frac{n}{m+n}y_p^{-m}=p$，即 $z_p=\left[\frac{n}{(m+n)(1-p)}\right]^{\frac{1}{m}}$，

选取枢轴量 $Y=\frac{Y_{(n)}}{X_{(m)}}\cdot\frac{\theta_1}{\theta_2}$，置信度为 $1-\alpha$，即 $P\left\{y_{\alpha/2}\le\frac{Y_{(n)}}{X_{(m)}}\cdot\frac{\theta_1}{\theta_2}\le y_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$，

则 $y_{\alpha/2}=\left[\frac{(m+n)\alpha}{2m}\right]^{\frac{1}{n}}\le\frac{Y_{(n)}}{X_{(m)}}\cdot\frac{\theta_1}{\theta_2}\le y_{1-\alpha/2}=\left[\frac{2n}{(m+n)\alpha}\right]^{\frac{1}{m}}$，

即 $\frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}}\left[\frac{(m+n)\alpha}{2m}\right]^{\frac{1}{n}}\le\frac{\theta_1}{\theta_2}\le\frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}}\left[\frac{2n}{(m+n)\alpha}\right]^{\frac{1}{m}}$，

故 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}}\left[\frac{(m+n)\alpha}{2m}\right]^{\frac{1}{n}},\ \frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}}\left[\frac{2n}{(m+n)\alpha}\right]^{\frac{1}{m}}\right]$.

19．设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{I}_{x>\theta},\quad -\infty<\theta<\infty$$

$X_1,\cdots,X_n$ 为抽自此总体的简单随机样本．

（1）证明：$X_{(1)}-\theta$ 的分布与 θ 无关，并求出此分布；

（2）求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间．

解：（1）总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=[1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)}]\cdot \mathrm{I}_{x>\theta}\,,$$

则 $X_{(1)}$的密度函数为

$$p_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)=n\,\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}\,\mathrm{I}_{x>\theta}\,,$$

可得 $Y=X_{(1)}-\theta$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=p_1(y+\theta)=n\,\mathrm{e}^{-ny}\,\mathrm{I}_{y>0}\,,$$

故 $Y=X_{(1)}-\theta$ 的分布与 θ 无关，服从指数分布 $Exp(n)$；

（2）因 $Y=X_{(1)}-\theta$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=(1-\mathrm{e}^{-ny})\mathrm{I}_{y>0}\,,$$

其 p 分位数 y_p 满足 $F_Y(y_p)=1-\mathrm{e}^{-ny_p}=p$，即 $y_p=-\dfrac{1}{n}\ln(1-p)$，

选取枢轴量 $Y=X_{(1)}-\theta$，置信度为 $1-\alpha$，即 $P\{y_{\alpha/2}\le X_{(1)}-\theta\le y_{1-\alpha/2}\}=1-\alpha$，

则 $y_{\alpha/2}=-\dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\le X_{(1)}-\theta\le y_{1-\alpha/2}=-\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\alpha}{2}$，即 $X_{(1)}+\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\alpha}{2}\le\theta\le X_{(1)}+\dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$，

故 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[X_{(1)}+\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\alpha}{2},\,X_{(1)}+\dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.