2. 随机变量 X 和 Y 独立均服从 $N(0,1), Z=\min(X,Y)$，则 $Z^2 \sim \chi^2(1)$ 。

【考点】概率论

【原解析】这道题考得容易想复杂，就按最原始的想法，若$Z^2 \sim \chi^2(1)$，则$Z \sim N(0,1)$,

但显然$F_Z(z)=P(\min(X,Y) \leq z)=1-\left(1-\Phi(z)\right)^2$,Z不服从标准正态分布。

【答案】×

【勘定】

$$Z=\min\{X,Y\}=\begin{cases}X, & X<Y\\ Y, & X\geqslant Y.\end{cases}$$

$$Z^2=\begin{cases}X^2, X<Y\\ Y^2, X\geqslant Y\end{cases}$$

$$P\{X<Y\}=P(X\geqslant Y)=\frac{1}{2}$$

① $z>0$

注意
$$\begin{aligned} P\{Z^2 \leq z\} &= P\{Z^2 \leq z \mid X<Y\}\cdot P\{X<Y\}+P\{Z^2 \leq z \mid X\geqslant Y\}P\{X\geqslant Y\} \\ &= P(X^2 \leq z)P\{X<Y\}+P(Y^2 \leq z)P\{X\geqslant Y\} \\ &= P(X^2 \leq z)\frac{1}{2}+P(Y^2 \leq z)\cdot\frac{1}{2} \end{aligned}$$

已知 $X \backsim N(0,1), Y \sim N(0,1), X \perp\!\!\!\perp Y$.
故设 $H \sim N(0,1)$ 使得 H,X,Y 相互独立

则原式 $=P(H^2 \leqslant z)\cdot\frac{1}{2}+P(H^2 \leqslant z)\cdot\frac{1}{2}=P(H^2 \leqslant z)=\chi^2(1)$

② $z \leq 0$

时 $P(Z^2 \leq z)=0$

综上， $Z^2 \backsim \chi^2(1)$

坤学长QQ/VX:1078636332