习题 1.2

1． 对于组合数C_n^r，证明：

（1）$C_n^r = C_n^{n-r}$；

（2）$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$；

（3）$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$；

（4）$C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$；

（5）$C_a^0 C_b^n + C_a^1 C_b^{n-1} + \cdots + C_a^n C_b^0 = C_{a+b}^n$， $n = \min\{a, b\}$；

（6）$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$。

证明：（1）由组合数定义可得

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r。$$

（2）由组合数定义可得

$$C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}[r+(n-r)] = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r。$$

（3）由二项式展开定理，知

$$C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n = (1+x)^n，$$

令 $x=1$，得

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n。$$

（4）对

$$C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n = (1+x)^n$$

两边关于x求导，可得

$$C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}，$$

令 $x=1$，得

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}。$$

（5）因

$$(1+x)^a = C_a^0 + C_a^1 x + \cdots + C_a^a x^a，\quad (1+x)^b = C_b^0 + C_b^1 x + \cdots + C_b^b x^b，$$

两式相乘，其中x^n的系数为$C_a^0 C_b^n + C_a^1 C_b^{n-1} + \cdots + C_a^n C_b^0$；另一方面

$$(1+x)^a (1+x)^b = (1+x)^{a+b} = C_{a+b}^0 + C_{a+b}^1 x + \cdots + C_{a+b}^{a+b} x^{a+b}，$$

其中 x^n 的系数为 C_{a+b}^n，即

$$C_a^0 C_b^n + C_a^1 C_b^{n-1} + \cdots + C_a^n C_b^0 = C_{a+b}^n, \quad n = \min\{a, b\}。$$

（6）在（5）小题结论中，取 $a = b = n$，有

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \cdots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n，$$

再由（1）小题结论，知 $C_n^r = C_n^{n-r}$，即

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n。$$

2． 抛三枚硬币，求至少出现一个正面的概率。

解：样本点总数 $n = 2^3 = 8$。事件“至少出现一个正面”的对立事件为“三个都是反面”，其所含样本点个数为 1，即事件“至少出现一个正面”所含样本点个数为 $k = 7$，故所求概率为

$$P(A) = \frac{7}{8}。$$

3． 任取两个正整数，求它们的和为偶数的概率。

解：将所有正整数看作两个类“偶数”、“奇数”，样本点总数 $n = 2^2 = 4$。事件“两个都是偶数”所含样本点个数为 1，事件“两个都是奇数”所含样本点个数也为 1，即事件“它们的和为偶数”所含样本点个数 $k = 2$，故所求概率为

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}。$$

4． 掷两枚骰子，求下列事件的概率：

（1）点数之和为 6；

（2）点数之和不超过 6；

（3）至少有一个 6 点。

解：样本点总数 $n = 6^2 = 36$。

（1）事件 A_1 表示点数之和为 6，样本点有 $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$，即个数 $k_1 = 5$，故所求概率为

$$P(A_1) = \frac{5}{36}。$$

（2）事件 A_2 表示点数之和不超过 6，样本点有

$$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)，$$

即个数 $k_2 = 15$，故所求概率为

$$P(A_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}。$$

（3）事件 A_3 表示至少有一个 6 点，样本点有

$$(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)，$$

即个数 $k_3 = 11$，故所求概率为

$$P(A_3) = \frac{11}{36}。$$

5． 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一颗骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q。

解： 样本点总数 $n=6^2=36$。事件 A_1 表示该方程有实根，即 $B^2-4C\ge 0$，样本点有

$$(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),$$

即个数 $k_1=19$，故

$$p=\frac{19}{36}。$$

事件 A_2 表示该方程有重根，即 $B^2-4C=0$，样本点有 $(2,1),(4,4)$，即个数 $k_2=2$，故

$$q=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}。$$

6． 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：
（1）全是黑桃；
（2）同花；
（3）没有两张同一花色；
（4）同色。

解： 样本点总数 $n=C_{52}^4=270725$。

（1）事件 A_1 表示全是黑桃，所含样本点个数 $k_1=C_{13}^4=715$，故所求概率为

$$P(A_1)=\frac{715}{270725}\approx 0.0026。$$

（2）事件 A_2 表示同花，所含样本点个数 $k_2=4\times C_{13}^4=2860$，故所求概率为

$$P(A_2)=\frac{2860}{270725}\approx 0.0106。$$

（3）事件 A_3 表示没有两张同一花色，所含样本点个数 $k_3=13\times 13\times 13\times 13=28561$，故所求概率为

$$P(A_3)=\frac{28561}{270725}\approx 0.1055。$$

（4）事件 A_4 表示同色，所含样本点个数 $k_4=2\times C_{26}^4=29900$，故所求概率为

$$P(A_4)=\frac{29900}{270725}\approx 0.1104。$$

7． 设 9 件产品中有 2 件不合格品。从中不返回地任取 2 个，求取出的 2 个中全是合格品、仅有一个合格品和没有合格品的概率各为多少？

解： 样本点总数 $n=C_9^2=36$。事件 A_1 表示全是合格品，所含样本点个数 $k_1=C_7^2=21$，故所求概率为

$$P(A_1)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}。$$

事件 A_2 表示仅有一个合格品，所含样本点个数 $k_2=C_7^1C_2^1=14$，故所求概率为

$$P(A_2)=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}。$$

事件 A_3 表示没有合格品，所含样本点个数 $k_3=C_2^2=1$，故所求概率为

$$P(A_3)=\frac{1}{36}。$$

8． 口袋中有 7 个白球、3 个黑球，从中任取两个，求取到的两个球颜色相同的概率。

解：样本点总数 $n=C_{10}^2=45$。事件 A 表示两个球颜色相同，所含样本点个数 $k=C_7^2+C_3^2=24$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}。$$

9． 甲口袋有 5 个白球、3 个黑球，乙口袋有 4 个白球、6 个黑球。从两个口袋中各任取一球，求取到的两个球颜色相同的概率。

解：样本点总数 $n=8\times10=80$。事件 A 表示两个球颜色相同，所含样本点个数 $k=5\times4+3\times6=38$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{38}{80}=\frac{19}{40}。$$

10．从 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 中任取 2 个，问其中一个小于 $k\quad(1<k<n)$，另一个大于 k 的概率是多少？

解：样本点总数 $N=C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$。事件 A 表示其中一个小于 k，另一个大于 k，所含样本点个数 $K=(k-1)(n-k)$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}。$$

11．口袋中有 10 个球，分别标有号码 1 到 10，现从中不返回地任取 4 个，记下取出球的号码，试求：

（1）最小号码为 5 的概率；

（2）最大号码为 5 的概率。

解：样本点总数 $n=C_{10}^4=210$。

（1）事件 A_1 表示最小号码为 5，所含样本点个数 $k_1=C_5^3=10$，故所求概率为

$$P(A_1)=\frac{10}{210}=\frac{1}{21}。$$

（2）事件 A_2 表示最大号码为 5，所含样本点个数 $k_2=C_4^3=4$，故所求概率为

$$P(A_2)=\frac{4}{210}=\frac{2}{105}。$$

12．掷三颗骰子，求以下事件的概率：

（1）所得的最大点数小于等于 5；

（2）所得的最大点数等于 5。

解：样本点总数 $n=6^3=216$。

（1）事件 A_1 表示所得的最大点数小于等于 5，所含样本点个数 $k_1=5^3=125$，故所求概率为

$$P(A_1)=\frac{125}{216}。$$

（2）事件 A_2 表示所得的最大点数等于 5，所含样本点个数 $k_2 = 5^3 - 4^3 = 61$，故所求概率为

$$P(A_2) = \frac{61}{216}。$$

13．把 10 本书任意地放在书架上，求其中指定的四本书放在一起的概率。

解： 样本点总数 $n = 10!$。事件 A 表示其中指定的四本书放在一起，所含样本点个数 $k = 4! \times 7!$，故所求概率为

$$P(A) = \frac{4! \times 7!}{10!} = \frac{1}{30}。$$

14． n 个人随机地围一圆桌而坐，求甲乙两人相邻而坐的概率。

解： 样本点总数 $N = (n-1)!$。事件 A 表示甲乙两人相邻而坐，所含样本点个数 $k = 2! \times (n-2)!$，故所求概率为

$$P(A) = \frac{2! \times (n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}。$$

15．同时掷 5 枚骰子，观察点数，试证明：

（1） $P\{每枚都不一样\} = 0.0926$；

（2） $P\{一对\} = 0.4630$；

（3） $P\{两对\} = 0.2315$；

（4） $P\{三枚一样\} = 0.1543$；（此题题意应为“三枚一样且另两枚不一样”）

（5） $P\{四枚一样\} = 0.0193$；

（6） $P\{五枚一样\} = 0.0008$。

解： 样本点总数 $n = 6^5 = 7776$。

（1）事件“每枚都不一样”所含样本点个数 $k_1 = A_6^5 = 720$，故

$$P\{每枚都不一样\} = \frac{720}{7776} \approx 0.0926。$$

（2）事件“一对”所含样本点个数 $k_2 = A_6^1 \cdot C_5^2 \cdot A_5^3 = 3600$，故

$$P\{一对\} = \frac{3600}{7776} \approx 0.4630。$$

（3）事件“两对”所含样本点个数 $k_3 = C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot A_4^1 = 1800$，故

$$P\{两对\} = \frac{1800}{7776} \approx 0.2315。$$

（4）事件“三枚一样且另两枚不一样”所含样本点个数 $k_4 = A_6^1 \cdot C_5^3 \cdot A_5^2 = 1200$，故

$$P\{三枚一样且另两枚不一样\} = \frac{1200}{7776} \approx 0.1543。$$

（5）事件“四枚一样”所含样本点个数 $k_5 = A_6^1 \cdot C_5^4 \cdot A_5^1 = 150$，故

$$P\{四枚一样\} = \frac{150}{7776} \approx 0.0193 \text{。}$$

（6）事件“五枚一样”所含样本点个数 $k_6 = A_6^1 \cdot C_5^5 = 6$，故

$$P\{五枚一样\} = \frac{6}{7776} \approx 0.0008 \text{。}$$

16．一个人把六根草紧握在手中，仅露出它们的头和尾。然后随机地把六个头两两相接，六个尾也两两相接。求放开手后六根草恰巧连成一个环的概率。

解：在同一种六个头两两相接情况下，只需考虑六个尾两两相接的样本点个数：先任意取一个尾有 5 种连接方法，剩下四个尾，再任意取一个尾有 3 种连接方法，最后再把剩下的两个尾连接，即 $n = 5 \times 3 = 15$ 。事件 A 表示放开手后六根草恰巧连成一个环，所含样本点个数：先任意取一个尾，除了对应的头相接的那一个尾之外，有 4 种连接方法，再考虑其对应的头相接的那一个尾，有 2 种连接方法，最后再把剩下的两个尾连接，即 $n = 4 \times 2 = 8$ ，故所求概率为

$$P(A) = \frac{8}{15} \text{。}$$

17．把 n 个“0”与 n 个“1”随机地排列，求没有两个“1”连在一起的概率。

解：样本点总数 $N = C_{2n}^n$ 。事件 A 表示没有两个“1”连在一起，所含样本点个数 $K = C_{n+1}^n = n+1$ ，故所求概率为

$$P(A) = \frac{n+1}{C_{2n}^n} = \frac{n! \cdot (n+1)!}{(2n)!} \text{。}$$

18．设 10 件产品中有 2 件不合格品，从中任取 4 件，设其中不合格品数为 X ，求 X 的概率分布。

解：样本点总数 $n = C_{10}^4 = 210$ 。事件 $X = 0$ 所含样本点个数 $k_0 = C_8^4 C_2^0 = 70$ ，故所求概率为

$$P\{X = 0\} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3} \text{。}$$

事件 $X = 1$ 所含样本点个数 $k_1 = C_8^3 C_2^1 = 112$ ，故所求概率为

$$P\{X = 1\} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15} \text{。}$$

事件 $X = 2$ 所含样本点个数 $k_2 = C_8^2 C_2^2 = 28$ ，故所求概率为

$$P\{X = 2\} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15} \text{。}$$

19．n 个男孩，m 个女孩（$m \le n+1$）随机地排成一排，试求任意两个女孩都不相邻的概率。

解：样本点总数 $N = C_{n+m}^m$ 。事件 A 表示任意两个女孩都不相邻，所含样本点个数 $K = C_{n+1}^m$，故所求概率为

$$P(A) = \frac{C_{n+1}^m}{C_{n+m}^m} \text{。}$$

20．将 3 个球随机放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数 X 的概率分布。

解：样本点总数 $n = 4^3 = 64$ 。事件 $X = 1$ 所含样本点个数 $k_1 = A_4^3 = 24$ ，故所求概率为

$$P\{X=1\}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}。$$

事件 $X=2$ 所含样本点个数 $k_2=A_4^1C_3^2A_3^1=36$，故所求概率为

$$P\{X=2\}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}。$$

事件 $X=3$ 所含样本点个数 $k_3=A_4^1=4$，故所求概率为

$$P\{X=3\}=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}。$$

21．将 12 只球随意地放入 3 个盒子中，试求第一个盒子中有 3 只球的概率。

解：样本点总数 $n=3^{12}$。事件 A 表示第一个盒子中有 3 只球，所含样本点个数 $k=C_{12}^3\times 2^9$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{12}^3\times 2^9}{3^{12}}\approx 0.2120。$$

22．将 n 个完全相同的球（这时也称球是不可辨的）随机地放入 N 个盒子中，试求：

（1）某个指定的盒子中恰好有 k 个球的概率；

（2）恰好有 m 个空盒的概率；

（3）某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率。

解：样本点总数为 N 取 n 次的重复组合，即样本点总数 $M=C_{N+n-1}^n$。

（1）事件 A_1 表示某个指定的盒子中恰好有 k 个球，所含样本点个数为 $N-1$ 取 $n-k$ 次的重复组合，即 $K_1=C_{(N-1)+(n-k)-1}^{n-k}=C_{N+n-k-2}^{n-k}$，故所求概率为

$$P(A_1)=\frac{C_{N+n-k-2}^{n-k}}{C_{N+n-1}^n}。$$

（2）事件 A_2 表示恰好有 m 个空盒，所含样本点个数可分两步考虑：首先 N 选 m 次的组合，选出 m 个空盒，而其余 $N-m$ 个盒中每一个都分别至少有一个球，其次剩下的 $n-(N-m)$ 个球任意放入这 $N-m$ 个盒中，即 $N-m$ 取 $n-(N-m)$ 次的重复组合，则 $K_2=C_N^mC_{n-1}^{n-(N-m)}$，故所求概率为

$$P(A_2)=\frac{C_N^mC_{n-1}^{n-(N-m)}}{C_{N+n-1}^n}。$$

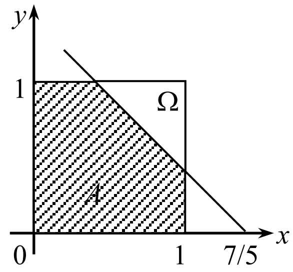
（3）事件 A_3 表示某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球，所含样本点个数为 m 取 j 次的重复组合乘以 $N-m$ 取 $n-j$ 次的重复组合，则 $K_3=C_{m+j-1}^jC_{(N-m)+(n-j)-1}^{n-j}$，故所求概率为

$$P(A_3)=\frac{C_{m+j-1}^jC_{(N-m)+(n-j)-1}^{n-j}}{C_{N+n-1}^n}。$$

23．在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求事件“两数之和小于 $7/5$”的概率。

解：设这两个数分别为 x 和 y，有样本空间 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1\}$，得 $m(\Omega)=1$。事件 A 表示

两数之和小于 $7/5$，有 $A=\{(x,y)\,|\,0<x<1, 0<y<1, x+y<7/5\}$，得



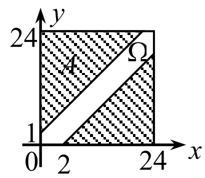
$$m(A)=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{41}{50},$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{41}{50}。$$

24．甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的。如果甲船的停泊时间是一小时，乙船的停泊时间是两小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少？

解：设甲乙两艘轮船到达码头的时间分别为 x 和 y 小时，有 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 24, 0\le y\le 24\}$，得 $m(\Omega)=24^2=576$。事件 A 表示它们中任何一艘都不需要等候码头空出，若甲先到，有 $x+1<y$；若乙先到，有 $y+2<x$；即 $A=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 24, 0\le y\le 24, x+1<y$ 或 $y+2<x\}$，得



$$m(A)=\frac{1}{2}\times 23^2+\frac{1}{2}\times 22^2=\frac{1013}{2},$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1013}{1152}。$$

25．在平面上画有间隔为 d 的等距平行线，向平面任意投掷一个边长为 a,b,c（均小于 d）的三角形，求三角形与平行线相交的概率。

解：设事件 A,B,C 分别表示边长为 a,b,c 三条边与平行线相交，事件 E 表示三角形与平行线相交。由于三角形与平行线相交时，将至少有两条边与平行线相交，即 $E=AB\cup AC\cup BC$，则由三个事件的加法公式得

$$P(E)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC),$$

因 ABC 表示三条边都与平行线相交，有 $P(ABC)=0$，则

$$P(E)=P(AB)+P(AC)+P(BC)。$$

由于三角形与平行线相交时，将至少有两条边与平行线相交，有

$$A=AB\cup AC,\quad B=AB\cup BC,\quad C=AC\cup BC,$$

则

$$P(A)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)=P(AB)+P(AC)$$
$$P(B)=P(AB)+P(BC),$$
$$P(C)=P(AC)+P(BC),$$

可得

$$P(A)+P(B)+P(C)=[P(AB)+P(AC)]+[P(AB)+P(BC)]+[P(AC)+P(BC)]$$
$$=2[P(AB)+P(AC)+P(BC)],$$

根据蒲丰投针问题知

$$P(A)=\frac{2a}{\pi d},\quad P(B)=\frac{2b}{\pi d},\quad P(C)=\frac{2c}{\pi d},$$

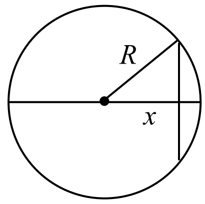
故

$$P(E)=P(AB)+P(AC)+P(BC)=\frac{1}{2}[P(A)+P(B)+P(C)]=\frac{a+b+c}{\pi d}。$$

26．在半径为 R 的圆内画平行弦，如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能

的，即交点在直径上一个区间内的可能性与这区间的长度成比例，求任意画弦的长度大于 R 的概率。

解：设弦与垂直于弦的直径的交点与圆心的距离为 x，有 $\Omega=\{x\,|\,0\le x<R\}$，得 $m(\Omega)=R$。事件 A 表示弦的长度大于 R，有



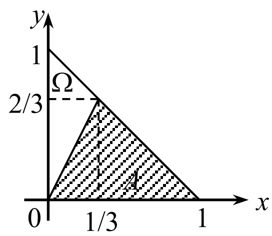
$$R^2-x^2>\left(\frac{R}{2}\right)^2，即 x^2<\frac{3}{4}R^2，$$

即 $A=\left\{x\,|\,0\le x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right\}$，得 $m(A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

27．设一个质点落在 xOy 平面上由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的三角形内，而落在这三角形内各点处的可能性相等，即落在这三角形内任何区域上的概率与区域的面积成正比，试求此质点还满足 $y<2x$ 的概率是多少？

解：样本空间 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1,0<x+y<1\}$，得 $m(\Omega)=\dfrac{1}{2}$。事件 A 表示满足 $y<2x$，有 $A=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1,0<x+y<1,y<2x\}$，得



$$m(A)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}，$$

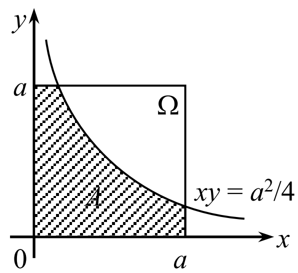
故所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{2}{3}。$$

28．设 $a>0$，有任意两数 x,y，且 $0<x<a$，$0<y<a$，试求 $xy<a^2/4$ 的概率。

解：样本空间 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<a,0<y<a\}$，得 $m(\Omega)=a^2$。事件 A 表示 $xy<a^2/4$，有

$$A=\{(x,y)\,|\,0<x<a,0<y<a,xy<a^2/4\}，$$



即

$$m(A)=a^2-\int_{\frac{a}{4}}^{a}\left(a-\frac{a^2}{4x}\right)dx=a^2-\left(ax-\frac{a^2}{4}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{a}{4}}^{a}=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\ln4，$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln4\approx0{,}5966。$$

29．用主观方法确定：大学生中戴眼镜的概率是多少？

（自己通过调查，作出主观判断）

30．用主观方法确定：学生中考试作弊的概率是多少？

（自己通过调查，作出主观判断）