概率论理科习题课

经济数学-王鸣晖

1、全概率公式和 Bayes 公式的考点。

1、设某班有学生 100 人，在概率论课程学习过程中，按照学习态度可分为 A：学习很用功；B：学习较用功；C：学习不用功。这三类分别占总人数 20%，60%，20%。这三类学生概率论考试能及格的概率依次为 95%，70%，5%。试求： D:表示及格

（1）该班概率论考试的及格率；

（2） 如果某学生概率论考试没有通过，该学生是属学习不用功的概率。

$P(C|\bar{D})$

七、（10 分）已知甲厂生产了 50 个产品，其中有 10 个次品；乙厂生产了 200 个产品，其中有 20 个次品，现进行不放回产品质量检测，先随机地以 $\dfrac{1}{3}$ 的概率选择甲厂，以 $\dfrac{2}{3}$ 的概率选择乙厂，再从所确定的该厂产品中任取一个产品进行检测。

$P(乙|正) = \dfrac{P(正|乙)\cdot P(乙)}{P(正)} = \dfrac{\frac{9}{10}\times\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{9}{10}\times\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{8+18}{30}} = \dfrac{9}{13}$

（1）已知第一次取到的是正品，试求它是由乙厂生产的概率。

（2）试求当检测到甲厂最后一个产品时，乙厂还剩余 100 个产品的概率。（只给出表达式，不做计算）

三、（10 分）专家委员会由 5 名专家组成，委员会决策实行简单多数原则，每位专家独立作出判断，且每位专家做出正确判断的概率为 0.8，现就某事是否可行征询专家委员会的意见。

（1）试求专家委员会做出正确决策的概率

（2）已知专家委员会决策错误，试求是由其中 3 名专家做出错误判断的概率。

1、在你外出度假的时，你请邻居给你的病树浇树。如果没浇水的话，它死去的概率为 0.8.如果浇水的话，它死去的概率为 0.15.你有 90%的把握确定邻居记得浇水，试求:

(1) 当你回来时，树还活着的概率;

(2) 如果树死了，那么邻居忘记浇水的概率。

1. 某商场玻璃杯成箱出售，每箱 10 只。假设每箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.7，0.2 及 0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随机取一箱，顾客开箱任意查看 2 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯；否则退回。试求：

（1）顾客买下该箱玻璃杯的概率；

（2）在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率.

2、一维随机变量的分布及相关考点

3.设随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{x}, & x<0\\ A, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{3}e^{-(x-1)}, & x\ge 1\end{cases}$.

右边的函数

$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$

(1)求常数 A; (2)求 X 的分布函数 $F(x)$;(3)求 $P\{X>\dfrac{1}{3}\}$;

$\int_{-\infty}^{x} p(x)dx$

2、设随机变量 X 的概率密度函数为: $p(x)=\begin{cases}a\sin 3x & 0<x<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & 其他\end{cases}$

求(1)常数 a $\frac{1}{3}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)=1$

(2)随机变量 X 的分布函数 $F(x)$。

(3)如果对随机变量 X 进行 4 次独立重复观察,3 次落入区间($\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}$)中的概率。

2、设随机变量 X 的概率密度函数为:

$$p(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ A-x, & 1\le x\le 2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

试求:(1)常数 A .(2) X 的分布函数.(3)求 $Y=2X-1$ 的概率密度函数

三、(10 分)已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x, -\infty<x<+\infty$

(1)求常数 A,B 的值

(2)求 $P(0<X<1)$

(3)求解 X 的概率密度函数

3、二维随机变量的分布及相关考点

6、设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为:

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求 E(X|Y=0)

$p(y)$ $p(x|Y=0)$ $E(X|Y=0)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x|Y=0)$

6.设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid -y<x<y, 0<y<1\}$ 内服从二维均匀分布。

S_D

（1）求 (X,Y) 的联合密度函数;（2）边际密度函数 $p_X(x)$;（3）求 $E(Y|X=\frac{1}{2})$

$p(y|x=\frac{1}{2})=\frac{p(\frac{1}{2},y)}{p_X(\frac{1}{2})}$

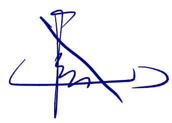
6、设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

，试求在 0<y<1 时，求 E(X|Y=y)

四、（10 分）已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}kxy, & x>0, y>0, x+y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



（1）求常数 k 的数值 24 $p(x,y)=\{24xy$

（2）求解 $p_X(x), p_Y(y)$，$p(x|Y=y)$ $x\in(0,1)$ $p_X(x)=\int_0^{1-x} 24xy\,dy$

（3）求条件数学期望 $E(X|Y=\frac{1}{2})$

4、随机变量函数分布的相关考点

4、设随机变量(X,Y)的联合密度函数为：$p(x,y)=\begin{cases}Ce^{-y}, & (0<x<1,0<y<+\infty)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

求（1）常数C

（2）概率$P(X+Y<1)$。

（3）$Z=2X+Y$的密度函数

4．设X与Y相互独立且均服从正态分布$X\sim N(0,2)$，$Y\sim N(0,1)$，令$Z=X-Y$.

(1)求随机变量Z的密度函数$p_Z(z)$；

（2 求$T=e^Z$的密度函数$p_T(t)$

五、（10 分）设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$p(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（1）求随机变量$Z=\dfrac{1}{2}(X+Y)$的概率密度函数

（2）求$P(Z\geq 2|Y\geq 1)$

3、 设随机变量X与Y独立，其分布密度分别为:

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases};\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）概率$P(X+Y<1)$。

(2) $Z=2X+Y$的密度函数

5、随机变量数值特征的考点

5、设二维随机变量(X,Y)的分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.1	0.2	α
1	β	0.1	0.2

并且 $P(X+Y=1)=0.4$，

(1) 求 α,β 的值； (2) 求 $Cov(X,Y)$ (3) 判断事件 $\{X=1\}$ 与事件 $\{\max\{X,Y\}=1\}$ 是否独立，并说明理由.

5.将一颗骰子独立抛掷 n 次，设 X 与 Y 分别是 2 点与 4 点出现的次数.

（1）求 X 的概率分布(要求写出具体概率分布）及 $E(X)$；

（2）求 $Cov(X,Y)$.

5、已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$且 X 与 Y 的相关系数

$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，

求（1）Z 的数学期望 EZ 和方差 DZ

（2）求X与Z的相关系数ρ_{XZ}。

六、（10 分）设随机变量 X与Y 相互独立，且 X与Y 都服从期望为1，方差为$\frac{1}{2}$的正态分布，令 $Z=|X-Y|$。

（1）求随机变量 Z 的期望 $E(Z)$

（2）求随机变量 Z 的方差 $Var(Z)$

6、中心极限定理的应用

7. 设某汽车销售点每天出售的汽车数服从参数为$\lambda=2$的泊松分布。（1）若一年中有 360 天在经营汽车销售，且每天出售的汽车数是相互独立的，求一年中售出 700 辆以上汽车的概率；（2）若要使一年售出 600 台汽车以上的概率达到 50%，问一年中至少要经营汽车销售多少天？

7、在有放回的摸球模型中，每次摸的黑球的概率为 0.2.试问，应至少摸球多少次才能保证黑球出现的频率在 0.18 及 0.22 之间的概率大于或等于 0.95？

附常用正态分布值：$\Phi(1.28)=0.8997, \Phi(1.29)=0.9015, \Phi(1.64)=0.9495, \Phi(1.65)=0.9505$
$\Phi(1.96)=0.9750, \Phi(2.0)=0.97725$

八、（10 分）设一批元件的合格品率为$\frac{1}{6}$，从中任意选择 6000 个。试求把误差限ε定为多少时，才能保证任取一个元件为合格品的频率与概率之差的绝对值不大于ε的概率为 0.99？此时，合格品数落在哪个范围内？　（$\Phi(2.58)=0.995$　　$\Phi(2.33)=0.99$）

7、修理厂修理机器需两个阶段，第一阶段所需时间为指数分布，均值为 0.2 小时。第二阶段所需时间也是指数分布，并且与第一阶段独立，均值为 0.3 小时。现在修理工有 20 台机器需要修理，请利用中心极限定理计算他在 8 小时内完成修理任务的概率近似值。

附常用正态分布值：$\Phi(1.28)=0.8997, \Phi(1.24)=0.8925, \Phi(1.64)=0.9495, \Phi(1.65)=0.9505$
$\Phi(1.96)=0.9750, \Phi(2.0)=0.97725$

8、证明题

四．证明题(6 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且 $X \sim N(1,1)$，$Y \sim N(2,5)$， 令 $Z = \frac{1}{3}(2X - Y)$ 试利用特征函数证明：$Z = \frac{1}{3}(2X - Y)$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$

四、证明题（7 分）

设随机变量 X 的分布律为 $P(X = k) = \frac{1}{n}, k = 0,1,\cdots,n-1$，Y 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，且 X,Y 相互独立。令 Z=X+Y，利用特征函数法证明 Z 服从 $[0,n]$ 上的均匀分布。

三、证明题（7 分）

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，均服从 $U(-1,1)$，请利用特征函数证明:

$\sqrt{\frac{3}{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依分布收敛于 $N(0,1)$.

(提示：$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$)

试证明事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$。

1． 设 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$，证明：$X + Y$ 与 $X - Y$ 不相关.

9、选择填空

由于选择填空较为灵活，故没有典型例题。主要考察：古典概率和排列组合，事件的加法，乘法运算；常用分布的性质，如可加性：二项分布，泊松分布，正太分布和伽马分布(考过)。期望，方差，协方差，相关系数的运算技巧。分布函数，密度函数的定义。独立性与相关性。常见分布的特征函数，两种收敛的定义和关系。