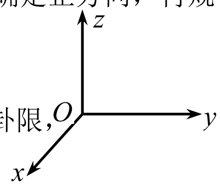
第八章　多元函数微分学

§8.1　预备知识

一．空间直角坐标系与空间的点

在空间中取定一点 O，过点 O 作三条相互垂直的直线 Ox、Oy、Oz，并按右手规则确定正方向，再规定单位长度，构成一个空间直角坐标系．



点 O 为原点，直线 Ox、Oy、Oz 分别称为横轴、纵轴、竖轴，

每两条轴所在平面称为坐标平面，xOy、yOz、zOx，三个坐标平面将空间分成八个卦限，

xoy 平面Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限上方分别为 1, 2, 3, 4 卦限，下方分别为 5, 6, 7, 8 卦限．

设 M 为空间中任一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，这三个平面与三个坐标轴的交点在各轴上的坐标分别为 x_0、y_0、z_0，则称 (x_0, y_0, z_0) 为点 M 在空间中的直角坐标，显然空间中的点与其直角坐标一一对应．如点 $(0, 0, 0)$ 为原点 O，点 $(x_0, y_0, 0)$ 在 xoy 平面上，点 $(-1, 1, -1)$ 在第 6 卦限．

空间任意两点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 间的距离为 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$，点 (x, y, z) 和原点 O $(0, 0, 0)$ 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．

二．空间曲面与方程

一般，满足方程 $z = f(x, y)$ 或 $F(x, y, z) = 0$ 的所有的点 (x, y, z) 在空间中构成一张曲面，常见的曲面有：

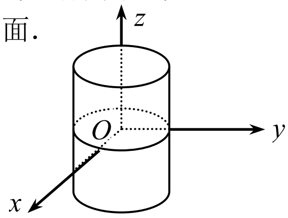
1．平面

方程 $ax + by + cz = d$ （a, b, c 不全为 0）表示空间中一个平面．如 $z = 1$ 表示平行于 xoy 平面且高为 1 的平面．

2．柱面

直线 L 沿曲线 C 平行移动而形成的曲面，称为柱面，其中直线 L 称为母线，曲线 C 称为准线．

如以平行于 z 轴的直线为母线，以 xoy 平面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 为准线的柱面是圆柱面．



该圆柱面的方程也是 $x^2 + y^2 = R^2$．

一般地，方程 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，

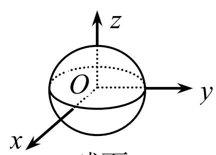
而方程 $F(y, z) = 0$ 和 $F(x, z) = 0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面．

3．二次曲面

方程 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z = c_0$ （a_{ij} 不全为 0），表示一个二次曲面．通过适当的坐标系旋转，可化为 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz = G$．

当 A, B, C 都不等于 0 时，通过坐标系平移，可化为 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$．

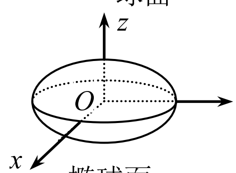
若 A, B, C 同号，此时 H 也与之同号．



球面

（1）$A = B = C$，即 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，这是以原点 O 为球心，R 为半径的球面．

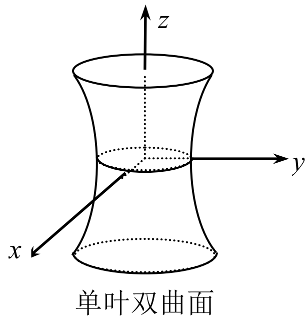
（2）A, B, C 不相等，即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，令 $z = 0$，有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，椭圆，



椭球面

令 $x = 0$，有 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，椭圆，令 $y = 0$，有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，椭圆．

若 A, B, C 异号，不妨设 A, B 为正，C 为负，



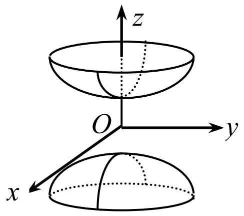
单叶双曲面

（3）$H > 0$，即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，令 $z = 0$，有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，椭圆，

令 $x = 0$，有 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，双曲线，令 $y = 0$，有 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，双曲线．

（4）$H<0$，即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$，令 $x=0$，有 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$，双曲线，

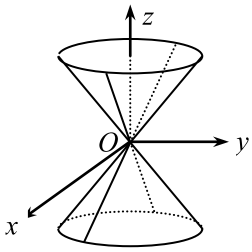
令 $y=0$，有 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$，双曲线，令 $z=z_0>c$，有 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z_0^2}{c^2}-1$，椭圆.



双叶双曲面

（5）$H=0$，即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$，令 $x=0$，有 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$，两条直线，

令 $y=0$，有 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$，两条直线，令 $z=z_0\neq 0$，有 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z_0^2}{c^2}$，椭圆.

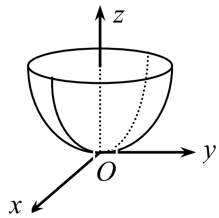


椭圆锥面

方程 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz=G$，
当 A, B, C 至少有一个为 0 时，不妨设 $C=0$，$F\neq 0$，通过坐标系平移可化为 $z=Ax^2+By^2$.

（6）A, B 同号，不妨设为正，即 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$，令 $x=0$，有 $z=\dfrac{y^2}{b^2}$，抛物线，

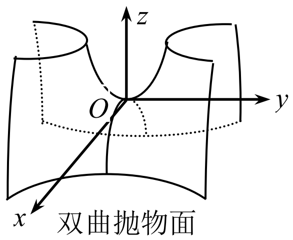
令 $y=0$，有 $z=\dfrac{x^2}{a^2}$，抛物线，令 $z=z_0>0$，有 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z_0$，椭圆.



椭圆抛物面

（7）A, B 异号，不妨设 $z=\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}$，令 $x=0$，有 $z=\dfrac{y^2}{b^2}$，抛物线，

令 $y=0$，有 $z=-\dfrac{x^2}{a^2}$，抛物线，令 $z=z_0\neq 0$，有 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=z_0$，双曲线.



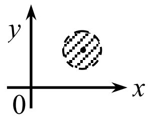
双曲抛物面
又称马鞍面

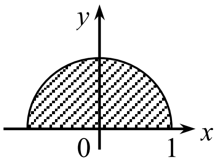
其它情形将是柱面.

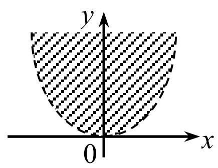
三．平面区域的概念

在 xoy 平面上与点 $P(x_0, y_0)$的距离小于正数δ的点的全体，称为点 P 的δ邻域，记为$\delta(P)$.

$$\delta(P)=\{(x,\ y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$







注：不含边界的开区域其边界画为虚线

如 $D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$，$D=\{(x, y)\,|\,y>x^2\}$.

对于平面区域 D 与点 P_0，若存在正数δ，使得$\delta(P_0)\subset D$，则称 P_0 为 D 的**内点**；

若存在正数δ，使得$\delta(P_0)\cap D=\varnothing$，则称 P_0 为 D 的**外点**；

若对任意的正数δ，都有$\delta(P_0)\not\subset D$ 且$\delta(P_0)\cap D\neq\varnothing$，则称 P_0 为 D 的**边界点**.

如果 D 中的点全是内点，则称 D 为**开集**；若开集 D 中的任意两点可由折线连接起来，则称 D 为**连通区域**，简称**开区域**、**区域**；区域 D 及其边界组成的集合，称为**闭区域**.

如果 D 中的点与原点的距离有界，即存在正数 M，对任意的$(x, y)\in D$，都有 $\sqrt{x^2+y^2}\le M$ 成立，则称 D 为**有界区域**；否则称 D 为**无界区域**.

如 $D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$为有界闭区域，$D=\{(x, y)\,|\,y>x^2\}$为无界开区域.

区域的标准表示形式：

竖直向上看“↑”，找出 D 横坐标最小值 a，最大值 b，小函数 $y=g(x)$，大函数 $y=f(x)$，

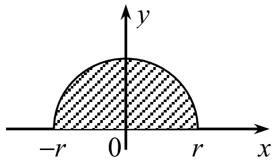
则 $D=\{(x, y)\,|\,a\le x\le b, g(x)\le y\le f(x)\}$，（根据区域的开闭确定是否取等号）

水平向右看“→”，找出 D 纵坐标最小值 c，最大值 d，小函数 $x=\psi(y)$，大函数 $x=\varphi(y)$，

则 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi(y)\le x\le\varphi(y)\}$，

注：$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$表示矩形区域.

如 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2,\ y\ge 0\}$，

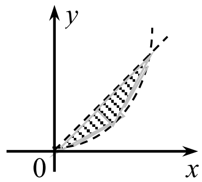


“↑”，$a=-r$，$b=r$，小函数 $y=0$，大函数 $y=\sqrt{r^2-x^2}$，

则 $D=\{(x,y)\mid -r\le x\le r,\ 0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\}$；

或“→”，$c=0$，$d=r$，小函数 $x=-\sqrt{r^2-y^2}$，大函数 $x=\sqrt{r^2-y^2}$，

则 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le r,\ -\sqrt{r^2-y^2}\le x\le\sqrt{r^2-y^2}\}$.



又如 D 是由 $y=x$ 与 $y=x^2$ 围成的开区域，

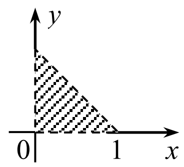
“↑”，$a=0$，$b=1$，小函数 $y=x^2$，大函数 $y=x$，则 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ x^2<y<x\}$.

§8.2　多元函数的概念

一．二元函数的定义

定义　若平面点集 D 内任一点(x,y)，根据对应规则 f，总有一个确定的 z 的值与之对应，则称 z 是(x,y)的二元函数，记为 $z=f(x,y)$．其中 x,y 称为自变量，z 称为因变量，D 为定义域.

类似可定义 3 元函数 $u=f(x,y,z)$，n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.



例　求 $z=\dfrac{\ln x+\ln y}{\sqrt{1-x-y}}$ 的定义域.

解：有 $x>0$，$y>0$，$x+y<1$，“↑”，$0<x<1$，$0<y<1-x$，则 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1-x\}$.

例　已知 $f(x,\ y)=\dfrac{x^3}{x+y}$，求 $f(2,1)$，$f(tx,ty)$.

解：$f(2,1)=\dfrac{8}{3}$，$f(tx,\ ty)=\dfrac{t^3x^3}{tx+ty}=t^2\dfrac{x^3}{x+y}=t^2f(x,\ y)$.

函数 $z=f(x,y)$，如果恒有 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$，则称 $f(x,y)$为 k 次齐次函数.

如 $f(x,\ y)=\dfrac{x^3}{x+y}$，有 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$，故 $f(x,\ y)=\dfrac{x^3}{x+y}$ 为 2 次齐次函数.

如 $f(x,y)=x^3-4x^2y+2y^3$，有 $f(x,y)=t^3f(x,y)$，故 $f(x,y)=x^3-4x^2y+2y^3$ 是 3 次齐次函数.

又如 $f(x,y)=x^3-4xy+2y^3$，有 $f(x,y)=t^3x^3-4t^2x^2y+2t^3y^3$，故 $f(x,y)=x^3-4x^2y+2y^3$ 不是 k 次齐次函数.

若一个多项式的每一项的次数都是 k 次，则该多项式是 k 次齐次函数.

又如 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，有 $f(tx,ty)=f(x,y)$，即 0 次齐次函数．若令 $t=\dfrac{1}{x}$，有 $f(x,\ y)=f(1,\ \dfrac{y}{x})=\varphi(\dfrac{y}{x})$.

二．二元函数的极限

定义　设函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的任一邻域内都有无穷多个点有定义，A 为某常数，如果点 $P(x,y)$以任何使 $f(x,y)$有定义的方式无限接近点 $P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$无限接近于常数 A，则称(x,y)趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,\ y)=A$.

注意：二元函数极限条件$(x,y)\to(x_0,y_0)$包括任何使 $f(x,y)$有定义的方式.

二元函数极限的计算与一元函数极限类似有四则运算极限法则、等价代换、重要极限.

例　求 $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,3)}(x^2-2y^2)$.

解：原式 $=2^2-2\cdot3^2=-14$.

例　求 $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$.

解：原式$=\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,0)}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot x=1\cdot2=2$.

例　求 $\lim\limits_{(x,\,y)\to(1,\,-1)}(1+x+y)^{\frac{1}{x^2-y^2}}$.

解：原式$=\lim\limits_{(x,\,y)\to(1,\,-1)}(1+x+y)^{\frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{x-y}}=e^{\frac{1}{2}}$.

例　求 $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

解：原式$=\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}x\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=0$.　（无穷小量乘有界变量仍为无穷小量）

但二元函数极限一般不能直接使用罗必塔法则.

例　讨论 $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

解：当(x,y)沿 x 轴方向趋于点$(0,0)$时，有 $y=0$，$x\to0$，$\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{x\cdot0}{x^2+0^2}=0\to0\quad(y=0,\ x\to0)$；

当(x,y)沿直线 $y=x$ 方向趋于点$(0,0)$时，有 $y=x\to0$，$\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}\ (y=x\to0)$.

$\therefore\ \lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

三．二元函数的连续性

定义　如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)$，则称$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处连续．否则称$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处间断.

与一元函数类似，二元函数间断也有三种情形：

（1）$f(x,y)$在(x_0,y_0)处无定义；

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,\ y)$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,\ y)$ 与 $f(x_0,y_0)$都存在，但不相等.

如 $f(x,\ y)=\dfrac{1}{y-x^2}$ 在曲线 $y=x^2$ 上无定义，故 $f(x,y)$在 $y=x^2$ 上每一点间断.

又如 $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，因 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ 不存在，故 $f(x, y)$在点$(0, 0)$处间断．

二元函数在区域 D 内连续的几何意义：二元函数图形在区域 D 内连成一张无孔、无裂缝的曲面．

与一元函数类似，也有闭区域上连续函数的性质：

（1）**有界性定理**：如果二元函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$在 D 上有界；

（2）**最值定理**：如果二元函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$在 D 上有最大、最小值；

（3）**介值定理**：如果二元函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$在 D 上可取得介于最大、最小值之间的一切实数；

（4）**零值定理**：如果二元函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续且在 D 中存在两点其函数值异号，则 $f(x, y)$在 D 内至少存在一点(x_0, y_0)，使得 $f(x_0, y_0) = 0$．

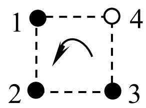
例　数学建模问题：正方形的凳子在地面上能放稳吗？

假设：（1）地面是一张连续的曲面，且坡度不大；

（2）凳子是合格的，即四条腿位置呈正方形，且长短一样；

（3）凳子四支脚都只有一个着地点．

分析：将凳子放到地上，至少有三支脚着地，分别编号 1、2、3，另一支脚编号 4．



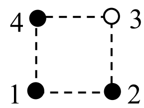
若 4 号脚着地，则凳子放稳；否则，凳子没有放稳．

设没有放稳，即相当于 4 号脚短了，不妨设离地高度为 h．

将凳子逆时针旋转 90°，若凳子是合格的，则 1、2、4 号脚着地，3 号脚离地．

若仍要求 1、2、3 号脚着地，则 4 号脚长了，必须“插入”地下，不妨设离地高度为 $-h_1$．

若地面连续，则在凳子旋转的过程中，4 号脚的离地高度由 h 连续地变到 $-h_1$．



根据零点存在定理知，在旋转的过程中至少存在一个零点，

即 1、2、3 号脚着地的同时，4 号脚也着地，凳子放稳了．

结论：合格的凳子在连续的地面上能放稳．

§8.3　偏导数

一．偏导数的概念与计算

一元函数 $y = f(x)$的导数 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$．

二元函数 $z = f(x, y)$，$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 称为 z 的全改变量；

若固定 y，变 x，$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ 称为 z 关于 x 的偏改变量；

若固定 x，变 y，$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 称为 z 关于 y 的偏改变量．

定义　二元函数 $z = f(x, y)$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}$ 称为 z 关于 x 的偏导数，记为 z_x' 或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$；

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}$ 称为 z 关于 y 的偏导数，记为 z_y' 或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

注意：求偏导数时应将另一个自变量看作常数．

例　$z = x^3 + 2x^2y - 4y^5$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+2\cdot 2x\cdot y-0=3x^2+4xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0+2x^2\cdot 1-4\cdot 5y^4=2x^2-20y^4$．

例　$z = y\sin\frac{x}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(\sin\frac{x}{y}\right)_x' = y\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \cos\frac{x}{y}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 1\cdot\sin\frac{x}{y} + y\cos\frac{x}{y}\cdot(-\frac{x}{y^2}) = \sin\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$.

例　$z = x^y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x$.

例　$z = (\cos y)^{x^2+y^2}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = (\cos y)^{x^2+y^2}\ln(\cos y)\cdot 2x$，

取对数 $\ln z = (x^2 + y^2)\ln(\cos y)$，两边关于 y 求偏导数，$\frac{1}{z}\cdot z_y' = 2y\ln(\cos y) + (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{\cos y}\cdot(-\sin y)$，

$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = (\cos y)^{x^2+y^2}[2y\ln(\cos y) - (x^2+y^2)\tan y]$.

偏导数可推广到一般多元函数，关于某自变量求偏导数时，应将其它自变量都看作常数.

如 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，求$\frac{\partial u}{\partial x_1}$时，应将 $x_2, \cdots, x_n$ 都看作常数.

例　$u = \sin(x^2y^3z^5)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x^2y^3z^5)\cdot 2xy^3z^5$，$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x^2y^3z^5)\cdot 3x^2y^2z^5$，$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos(x^2y^3z^5)\cdot 5x^2y^3z^4$.

例　$z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

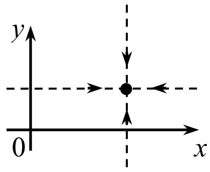
解：当$(x, y) \neq (0, 0)$时，$z = \frac{xy}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\cdot(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

当$(x, y) = (0, 0)$时，按定义求偏导数，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\ 0) - f(0,\ 0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0^2} - 0}{\Delta x} = 0$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{0^2+\Delta y^2} - 0}{\Delta y} = 0.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

注意：函数 $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0, 0)处不连续，但偏导数存在.



即二元函数偏导数存在不一定连续.（一元函数可导必连续）

几何意义：连续是在任何有定义的方向上连成一片，

偏导数存在是在平行于 x 轴、y 轴的两个方向上光滑无尖点.

在经济应用上，二元函数 $z=f(x,y)$的边际量就是偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，偏弹性数学公式就是 $\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$

二．高阶偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，再求偏导数，即得二阶偏导数.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，记为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 或 z''_{xx}；　　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，记为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 或 z''_{xy}；

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，记为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 或 z''_{yx}；　　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，记为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 或 z''_{yy}.

对二阶偏导数再求偏导数，可得三阶及更高阶偏导数．二元函数二阶偏导数有 4 个，n 阶偏导数有 2^n 个.

例　$z=x^3+3x^2y-4y^5$，求各个二阶偏导数.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6xy$，有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+6y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2-20y^4$，有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-80y^3$.

例　$z=x\ln(xy)$，求各个二阶偏导数.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1\cdot\ln(xy)+x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\ln(xy)+1$，有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{xy}\cdot x=\dfrac{1}{y}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot x=\dfrac{x}{y}$，有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x}{y^2}$.

如果二元函数 $z=f(x,y)$的二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 都连续时，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

一般地，只要相应的高阶混合偏导数都连续，求偏导数与自变量的次序无关，如 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

二元函数的 n 阶偏导数有 2^n 个，但在连续的条件下，只有 $n+1$ 个不同结果，

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2},\ \cdots,\ \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

例　$z=x^y$，求各个二阶偏导数．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$，有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)\cdot x^{y-2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y(\ln x)^2$．

高阶偏导数可推广到一般多元函数．

例　$u=\sin(xyz)$，求 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$．

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos(xyz)\cdot yz$，　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\sin(xyz)\cdot xyz^2+\cos(xyz)\cdot z$，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=-\cos(xyz)\cdot x^2y^2z^2-\sin(xyz)\cdot 2xyz-\sin(xyz)\cdot xyz+\cos(xyz)$$

$$=(1-x^2y^2z^2)\cos(xyz)-3xyz\sin(xyz).$$

§8.4　全微分

一．全微分的概念

二元函数 $z=f(x,y)$的全改变量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$，

如 $z=xy$，有$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=\underbrace{y\Delta x+x\Delta y}_{\Delta x,\Delta y\text{ 的线性部分}}+\underbrace{\Delta x\Delta y}_{\text{高次部分}}$，

如 $z=x^2+y^2$，有$\Delta z=(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-(x^2+y^2)=\underbrace{2x\Delta x+2y\Delta y}_{\Delta x,\Delta y\text{ 的线性部分}}+\underbrace{\Delta x^2+\Delta y^2}_{\text{高次部分}}$，

定义　若二元函数 $z=f(x,y)$的全改变量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\underbrace{A\Delta x+B\Delta y}_{\text{线性部分}}+\underbrace{o(\rho)}_{\text{高阶无穷小}}$，

其中 A,B 与$\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$o(\rho)$为 $\rho\to 0$ 时的高阶无穷小量．

则称 $z=f(x,y)$可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 为 $z=f(x,y)$的全微分，记为 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

当$|\Delta x|$、$|\Delta y|$ 很小时，高阶无穷小可忽略不计，有$\Delta z\approx dz=A\Delta x+B\Delta y$.

定理　可微必连续．

证明：若 $z=f(x,y)$可微，则$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，

当$(\Delta x,\Delta y)\to 0$ 时，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$，有$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\to 0$，

$\therefore\ \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$，即 $z=f(x,y)$连续．

定理　可微必然偏导数存在，且全微分 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$．

证明：若 $z=f(x,y)$可微，则$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，

固定 y，变 x，有$\Delta y=0$，$\rho=|\Delta x|$，即$\Delta_x z=A\Delta x+o(|\Delta x|)$，

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o(|\Delta x|)}{\Delta x})=A$；　同理，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=B$．

$\therefore z = f(x, y)$偏导数存在，且全微分 $dz = A\Delta x + B\Delta y = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

由于 $dx = 1\cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$，$dy = 0 \cdot \Delta x + 1\cdot \Delta y = \Delta y$，

所以，全微分公式 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

注意：偏导数存在不一定可微．可微的几何意义是在任何方向上光滑无尖点．

定理　偏导数存在且偏导数连续必可微．

证明：$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot \Delta x + \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}\cdot \Delta y$$

$$= \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,\, y+\Delta y)} \cdot \Delta x + o(\Delta x) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot \Delta y + o(\Delta y) = (\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha)\Delta x + o(\Delta x) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot \Delta y + o(\Delta y)$$

$= \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\rho)$，（其中$\alpha$ 是$\Delta y \to 0$ 时的无穷小量），　　$\therefore z = f(x, y)$可微．

$$\text{偏导数存在且偏导数连续} \Longrightarrow \text{可微} \begin{array}{l} \Longrightarrow \text{偏导数存在} \\ \Longrightarrow \text{连续} \end{array}$$

求全微分，应先求各个偏导数，再用全微分公式 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

例　$z = x \sin(xy)$，求 dz.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sin(xy) + x\cos(xy)\cdot y$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)\cdot x$ ，$\therefore dz = [\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + x^2\cos(xy)\, dy$.

例　$z = x^y$，求 dz.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ ，　　$\therefore dz = y\cdot x^{y-1}\, dx + x^y \ln x\, dy$.

全微分可推广到一般多元函数，如 $u = f(x, y, z)$，有 $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz$.

例　$u = x(y + \ln z)$，求 du.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \ln z$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{x}{z}$ ，　　$\therefore du = (y + \ln z)dx + xdy + \dfrac{x}{z}dz$.

二．全微分在近似计算中的应用

当$|\Delta x|$、$|\Delta y|$ 很小时，$\Delta z \approx dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

近似计算公式：$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y$.

例　求 $\sqrt{1.01^3 + 1.98^3}$ 的近似值.

解：设 $f(x,\ y)=\sqrt{x^3+y^3}$ ，有 $f'_x(x,\ y)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$ ， $f'_y(x,\ y)=\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$ ，

取 $x_0=1$，$\Delta x=0.01$，$y_0=2$，$\Delta y=-0.02$，

$$\therefore \sqrt{1.01^3+1.98^3}=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y$$

$$=\sqrt{1+8}+\frac{3\cdot 1}{2\sqrt{1+8}}\cdot 0.01+\frac{3\cdot 4}{2\sqrt{1+8}}\cdot(-0.02)=2.965\ .$$

§8.5　多元复合函数微分法

一元复合函数：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，有 $y'=f'(u)\varphi'(x)$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

二元复合函数：$z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，z——u,v——x,y，确定 z 是 x,y 的二元函数.

定理　设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，且 f,φ,ψ 都可微，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\ .$$

证明：∵f 可微，有 $\Delta z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)$ ， $\rho=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$ ， $o(\rho)$ 为 $\rho\to 0$ 时的高阶无穷小量.

固定 y，变 x，有 $\Delta_x z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v+o(\rho_x)$ ，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho_x)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\ ,$$

同理可证，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

多元复合函数微分法常用于求幂指函数和抽象函数的偏导数.

例　$z=(x^2-y^2)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $z=u^v$，$u=x^2-y^2$，$v=xy$，　z——u,v——x,y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot y=2x^2y\cdot(x^2-y^2)^{xy-1}+y\cdot(x^2-y^2)^{xy}\ln(x^2-y^2)\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\cdot u^{v-1}\cdot(-2y)+u^v\ln u\cdot x=-2xy^2\cdot(x^2-y^2)^{xy-1}+x\cdot(x^2-y^2)^{xy}\ln(x^2-y^2)\ .$$

例　$z=(\sin y)^{x^2+y^2}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $z=u^v$，$u=\sin y$，$v=x^2+y^2$，　z——u,v——x,y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot 0+u^v\ln u\cdot 2x=(\sin y)^{x^2+y^2}\ln(\sin y)\cdot 2x\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\cdot u^{v-1}\cdot\cos y+u^v\ln u\cdot 2y=(x^2+y^2)\cdot(\sin y)^{x^2+y^2-1}\cdot\cos y+(\sin y)^{x^2+y^2}\ln(\sin y)\cdot 2y\ .$$

例　$z=f(xy,\ \dfrac{x}{y})$，f可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设$z=f(u,v)$，$u=xy$，$v=x/y$，　z——u,v——x,y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_u(u,\ v)\cdot y+f'_v(u,\ v)\cdot\frac{1}{y}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f'_u(u,\ v)\cdot x+f'_v(u,\ v)\cdot(-\frac{x}{y^2})=f'_1\cdot x-f'_2\cdot\frac{x}{y^2}.$$

例　$z=f(x^2+y^2,x^y)$，f可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设$z=f(u,v)$，$u=x^2+y^2$，$v=x^y$，　z——u,v——x,y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot 2x+f'_2\cdot y\cdot x^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot 2y+f'_2\cdot x^y\ln x.$$

二元复合函数微分法可推广到一般多元复合函数．一般地，若中间变量有n个，则公式中就有n项．如$z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=h(x,y)$，且f,φ,ψ,h都可微，z——u,v,w——x,y，

则　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

例　$z=f(xy,x^2+y^2,x^3-y^3)$，f可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设$z=f(u,v,w)$，$u=xy$，$v=x^2+y^2$，$w=x^3-y^3$，　z——u,v,w——x,y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot 2x+f'_3\cdot 3x^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot x+f'_2\cdot 2y+f'_3\cdot(-3y^2).$$

例　$z=f(x,y,\varphi(x,y))$，f、φ可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设$z=f(x,y,w)$，$w=\varphi(x,y)$，　z——x,y,w——x,y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot 1+f'_2\cdot 0+f'_3\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f'_1+f'_3\cdot\varphi'_1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot 0+f'_2\cdot 1+f'_3\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=f'_2+f'_3\cdot\varphi'_2.$$

特殊情形：

1．　当中间变量只有一个时，　$z=f(u)$，$u=\varphi(x,y)$，且f,φ都可微，　z——u——x,y，

则公式$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$应改为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

注：一元函数应该是求导数，而不是偏导数.

如$z=f(xy)$，f可微，即$z=f(u)$，$u=xy$，z——u——x,y，有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(xy)\cdot y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(xy)\cdot x$.

例　$z=f(x^2,y^2)+g(x^2+y^2)$，f、g可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：f——u, v——x, y， g——w——x, y，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 2x + f_2' \cdot 0 + g'(x^2+y^2) \cdot 2x = f_1' \cdot 2x + g'(x^2+y^2) \cdot 2x ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1' \cdot 0 + f_2' \cdot 2y + g'(x^2+y^2) \cdot 2y = f_2' \cdot 2y + g'(x^2+y^2) \cdot 2y .$$

注意：（1）求多元复合函数偏导数时，应根据括号中逗号个数明确中间变量的个数.

（2）当括号中没有逗号时，即中间变量只有一个，导数应写为$f'(*)$，而不是f_1' 或f_2'，即不写下标，但括号中的中间变量一般不能省略.

例　$z = \arctan \frac{x}{y} + f(x^2+y^2)$，$f$可微，试证 $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证明：f——u——x, y，

$$\because \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} + f'(x^2+y^2) \cdot 2x = \frac{y}{x^2+y^2} + 2x \quad f'(x^2+y^2) ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-\frac{x}{y^2}) + f'(x^2+y^2) \cdot 2y = \frac{-x}{x^2+y^2} + 2y \quad f'(x^2+y^2) ,$$

$$\therefore y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} + 2xy \quad f'(x^2+y^2) - \frac{-x^2}{x^2+y^2} - 2xy \quad f'(x^2+y^2) = 1 .$$

2．　当只有一个自变量时，$z = f(u, v)$，$u = \varphi(x)$，$v = \psi(x)$，且f, φ, ψ 都可微，f——u, v——x，

则公式$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，应改为$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$，或$z' = \frac{\partial z}{\partial u}u' + \frac{\partial z}{\partial v}v'$，称为全导数公式.

如$y = f(x^2, \sin x)$，f可微，即$y = f(u, v)$，$u = x^2$，$v = \sin x$，f——u, v——x，有$y' = f_1' \cdot 2x + f_2' \cdot \cos x$.

如$z = f(x, y)$，$y = \varphi(x)$，f、φ 可微，f——x, y——x，有$\frac{dz}{dx} = f_1' \cdot \frac{dx}{dx} + f_2' \cdot \frac{dy}{dx} = f_1' + f_2' \cdot \varphi'(x)$，

例　$y = x^x$，求y'.

解：设$y = u^v$，$u = x$，$v = x$，f——u, v——x，则$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot 1 + u^v \ln u \cdot 1 = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.

幂指函数求导，可分别看作幂函数和指数函数求导，再相加.

如$y = x^x$，有$y' = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x$；

$y = (\sin x)^{\cos x}$，有$y' = \cos x \cdot (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\cos x} \ln(\sin x) \cdot (-\sin x)$.

多元复合函数的高阶偏导数，如$z = f(u, v)$，$u = \varphi(x, y)$，$v = \psi(x, y)$，且f, φ, ψ 都可微，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_2' \cdot \frac{\partial v}{\partial x} , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_1' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_2' \cdot \frac{\partial v}{\partial y} .$$

求高阶偏导数时，关键是对f_1'、f_2'也需要用多元复合函数微分公式.

如$f_1' = f_1'(u, v)$，有$\frac{\partial f_1'}{\partial x} = \frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_{11}'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_{12}'' \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$，类似$\frac{\partial f_2'}{\partial x} = f_{21}'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_{22}'' \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

例　$z = f(xy, y)$，f的二阶偏导数连续，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：$\because \frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot 0 = f_1' \cdot y$ ，$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1' \cdot x + f_2'$，

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f_1'}{\partial x}\cdot y=(f_{11}''\cdot y+f_{12}''\cdot 0)\cdot y=f_{11}''\cdot y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot y+f_1'\cdot 1=(f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot 1)\cdot y+f_1'=f_{11}''\cdot xy+f_{12}''\cdot y+f_1',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot x+\frac{\partial f_2'}{\partial y}=(f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot 1)\cdot x+(f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot 1)=f_{11}''\cdot x^2+f_{12}''\cdot 2x+f_{22}''.$$

例　$z=f(x^2+y^2, xy)$，f 的二阶偏导数连续，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot 2y+f_2'\cdot x$，

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f_1'}{\partial x}\cdot 2x+f_1'\cdot 2+\frac{\partial f_2'}{\partial x}\cdot y=(f_{11}''\cdot 2x+f_{12}''\cdot y)\cdot 2x+f_1'\cdot 2+(f_{21}''\cdot 2x+f_{22}''\cdot y)\cdot y$$

$$=f_{11}''\cdot 4x^2+f_{12}''\cdot 4xy+f_{22}''\cdot y^2+f_1'\cdot 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot 2x+\frac{\partial f_2'}{\partial y}\cdot y+f_2'\cdot 1=(f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot x)\cdot 2x+(f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot x)\cdot y+f_2'$$

$$=f_{11}''\cdot 4xy+f_{12}''\cdot 2(x^2+y^2)+f_{22}''\cdot xy+f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot 2y+f_1'\cdot 2+\frac{\partial f_2'}{\partial y}\cdot x=(f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot x)\cdot 2y+f_1'\cdot 2+(f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot x)\cdot x$$

$$=f_{11}''\cdot 4y^2+f_{12}''\cdot 4xy+f_{22}''\cdot x^2+f_1'\cdot 2.$$

§8.6　隐函数微分法

由二元方程 $F(x, y)=0$ 确定 y 是 x 的一元隐函数，求 y'.

方程两边关于 x 求导，有 $F_1'\cdot 1+F_2'\cdot\frac{dy}{dx}=0$，即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_1'}{F_2'}$. 可得隐函数求导公式：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$.

例　已知 $y=x^2\sin y+\cos(x^2+y^2)$确定 y 是 x 的隐函数，求 y'.

解：方法Ⅰ：方程两边关于 x 求导，可得：$y'=2x\sin y+x^2\cos y\cdot y'-\sin(x^2+y^2)\cdot(2x+2y\cdot y')$，

$[1-x^2\cos y+2y\sin(x^2+y^2)]\cdot y'=2x\sin y-2x\sin(x^2+y^2)$，

$$\therefore y'=\frac{2x\sin y-2x\sin(x^2+y^2)}{1-x^2\cos y+2y\sin(x^2+y^2)}.$$

方法Ⅱ：设 $F(x, y)=y-x^2\sin y-\cos(x^2+y^2)=0$，

有 $F_x'=-2x\sin y+\sin(x^2+y^2)\cdot 2x$，$F_y'=1-x^2\cos y+\sin(x^2+y^2)\cdot 2y$，

$$\therefore y'=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{2x\sin y-2x\sin(x^2+y^2)}{1-x^2\cos y+2y\sin(x^2+y^2)}.$$

例　已知 $y^x = x^y + y$ 确定 y 是 x 的隐函数，求 y'.

解：设 $F(x, y) = y^x - x^y - y = 0$，有 $F_x' = y^x \ln y - y \cdot x^{y-1}$，$F_y' = x \cdot y^{x-1} - x^y \ln x - 1$，

$$\therefore y' = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{y^x \ln x - y \cdot x^{y-1}}{x \cdot y^{x-1} - x^y \ln x - 1}.$$

隐函数求导公式可推广到多元隐函数，由三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定 z 是 x, y 的二元函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

方程两边关于 x 求偏导数，有 $F_1' \cdot 1 + F_2' \cdot 0 + F_3' \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$，故 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}$，同理，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}$.

即隐函数求导公式.

例　已知 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + \sin 3z$ 确定 z 是 x, y 的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - \sin 3z = 0$，有 $F_x' = 3x^2 - 3yz$，$F_y' = 3y^2 - 3xz$，$F_z' = 3z^2 - 3xy - 3\cos 3z$，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy - \cos 3z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{y^2 - xz}{z^2 - xy - \cos 3z}.$$

例　已知 $z^2 = \sin(xyz)$确定 z 是 x, y 的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x, y, z) = z^2 - \sin(xyz) = 0$，有 $F_x' = -\cos(xyz) \cdot yz$，$F_y' = -\cos(xyz) \cdot xz$，$F_z' = 2z - \cos(xyz) \cdot xy$，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{yz\cos(xyz)}{2z - xy\cos(xyz)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{xz\cos(xyz)}{2z - xy\cos(xyz)}.$$

例　设 $F(x, y, z) = 0$ 确定其中任一变量是另外两个变量的隐函数，且 F_x'、F_y'、F_z'都不等于零，求 $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}$，$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_x'}$，$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z'}{F_y'}$，　$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = (-\frac{F_x'}{F_z'}) \cdot (-\frac{F_y'}{F_x'}) \cdot (-\frac{F_z'}{F_y'}) = -1$.

注：偏导数符号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 必须看作一个整体，不能分开看作商，而导数符号 $\frac{dy}{dx}$ 可以分开看作微分 dy 与 dx 之商.

例　已知 $F(xyz, x^2 + y^2 - z^2) = 0$ 确定 z 是 x, y 的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $G(x, y, z) = F(xyz, x^2 + y^2 - z^2) = 0$，

有 $G_x' = F_1' \cdot yz + F_2' \cdot 2x$，$G_y' = F_1' \cdot xz + F_2' \cdot 2y$，$G_z' = F_1' \cdot xy + F_2' \cdot (-2z)$，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x'}{G_z'} = -\frac{yzF_1' + 2xF_2'}{xyF_1' - 2zF_2'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y'}{G_z'} = -\frac{xzF_1' + 2yF_2'}{xyF_1' - 2zF_2'}.$$

例　已知 $z = f(x, y)$，且 $y = y(x)$是由 $x^2 + y^2 = \sin y$ 确定得，求 $\frac{dz}{dx}$.

解：$\frac{dz}{dx} = f_1' \cdot \frac{dx}{dx} + f_2' \cdot \frac{dy}{dx} = f_1' + f_2' \cdot \frac{dy}{dx}$，设 $F(x, y) = x^2 + y^2 - \sin y = 0$，

有 $F_x'=2x$，$F_y'=2y-\cos y$，即 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{2x}{2y-\cos y}$， $\therefore \dfrac{dz}{dx}=f_1'-\dfrac{2x}{2y-\cos y}f_2'$.

例　已知 $y=f(x,u)$，$u=g(x,y)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：方法Ⅰ：$y=f(x,g(x,y))$，设 $F(x,y)=y-f(x,g(x,y))=0$，

则 $F_x'=0-[f_1'\cdot 1+f_2'\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}]=-(f_1'+f_2'\cdot g_1')$， $F_x'=1-[f_1'\cdot 0+f_2'\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}]=1-f_2'\cdot g_2'$，

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{f_1'+f_2'\cdot g_1'}{1-f_2'\cdot g_2'} .$$

方法Ⅱ：用全导数公式，

对于 $y=f(x,u)$，有 $\dfrac{dy}{dx}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot\dfrac{du}{dx}$；对于 $u=g(x,y)$，有 $\dfrac{du}{dx}=g_1'\cdot 1+g_2'\cdot\dfrac{dy}{dx}$，

则 $\dfrac{dy}{dx}=f_1'+f_2'\cdot(g_1'+g_2'\cdot\dfrac{dy}{dx})$，即 $(1-f_2'\cdot g_2')\dfrac{dy}{dx}=f_1'+f_2'\cdot g_1'$， $\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}=\dfrac{f_1'+f_2'\cdot g_1'}{1-f_2'\cdot g_2'}$.

隐函数的高阶偏导数．

例　已知 $2xy=z^2$ 确定 z 是 x,y 的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：设 $F(x,y,z)=2xy-z^2=0$，有 $F_x'=2y$，$F_y'=2x$，$F_z'=-2z$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{y}{z}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{x}{z}$，

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{y}{z}\right)_x'=-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{z^3}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{y}{z}\right)_y'=\frac{1\cdot z-y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=\frac{z-y\cdot\frac{x}{z}}{z^2}=\frac{z^2-xy}{z^3}=\frac{1}{2z}，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{x}{z}\right)_y'=-\frac{x}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{z^3} .$$

注意：在使用隐函数微分公式时，x,y,z 应同等对待．求 F_x' 时，把 z 看着常数．
而在二元函数的其它情形下，应把 z 看着 x,y 的函数．

例　已知 $\sin z=xyz$ 确定 z 是 x,y 的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：设 $F(x,y,z)=\sin z-xyz$，有 $F_x'=-xy$，$F_y'=-xz$，$F_z'=\cos z-xy$，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{yz}{\cos z-xy}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{xz}{\cos z-xy}$，

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{yz}{\cos z-xy}\right)_y'=\frac{(z+yz_y')\cdot(\cos z-xy)-yz\cdot(-\sin z\cdot z_y'-x)}{(\cos z-xy)^2}$$

$$=\frac{(z+y\cdot\frac{xz}{\cos z-xy})\cdot(\cos z-xy)+yz\sin z\cdot\frac{xz}{\cos z-xy}+xyz}{(\cos z-xy)^2}=\frac{z(\cos z-xy)^2+2xyz(\cos z-xy)+xyz^2\sin z}{(\cos z-xy)^3} .$$

§8.7　多元函数泰勒公式

一元函数泰勒级数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$；泰勒公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2+R_2(x)$，

二元函数泰勒公式：$f(x,y)=f(x_0,y_0)+[f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y]$

$$+\frac{1}{2}[f_{xx}''(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}''(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}''(x_0,y_0)\Delta y^2]+R_2(x,y).$$

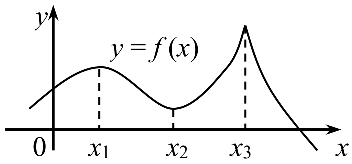
§8.8　二元函数的极值与条件极值

一．二元函数的极值

一元函数 $y=f(x)$的极值就是局部最值，如图中 $f(x_1)$、$f(x_3)$为 $f(x)$的极大值，$f(x_2)$为 $f(x)$的极小值.

极值定义：若 x_0 的某去心邻域内恒有 $f(x)>f(x_0)$，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值；

若 x_0 的某去心邻域内恒有 $f(x)<f(x_0)$，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值.



极值必要条件：若 x_0 为 $f(x)$的极值点，则 $f'(x_0)=0$ 或不存在.

极值充分条件：设 $f'(x_0)=0$，若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值；

若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值.

类似可分析二元函数极值.

定义　二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某去心邻域内，

如果恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$成立，则称 $f(x_0,y_0)$为 $f(x,y)$的极小值，(x_0,y_0)为极小值点；

如果恒有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$成立，则称 $f(x_0,y_0)$为 $f(x,y)$的极大值，(x_0,y_0)为极大值点.

极小值与极大值统称为极值，极小值点与极大值点统称为极值点.

定理　（极值存在的必要条件）　如果 $f(x_0,y_0)$为二元函数 $f(x,y)$的极值，

则两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$与 $f_y'(x_0,y_0)$都等于 0 或不存在.

证明：如果 $f(x_0,y_0)$为二元函数 $f(x,y)$的极值，则 $f(x_0,y_0)$也为一元函数 $f(x,y_0)$与 $f(x_0,y)$的极值，

根据一元函数极值的必要条件，即得定理结论.

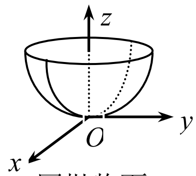
一般，若 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，则称$(x_0,y_0)$为二元函数 $f(x,y)$的驻点.

即二元函数的极值点必为驻点或尖点，但驻点或尖点不一定是极值点.

如圆抛物面 $z=x^2+y^2$，点(0, 0)为极小值点，

因 $z_x'=2x$，$z_y'=2y$，有 $z_x'|_{(0,0)}=0$，$z_y'|_{(0,0)}=0$，

故点(0, 0)为驻点.

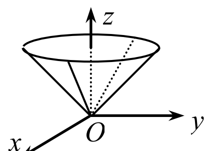


圆抛物面

如圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，点(0, 0)为极小值点，

因 $z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，有 $z_x'|_{(0,0)}$, $z_y'|_{(0,0)}$都不存在，

故点(0, 0)为尖点.

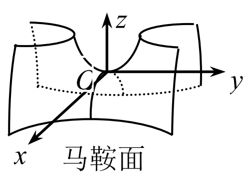


圆锥面

又如马鞍面 $z=y^2-x^2$，点(0, 0)不是极小值点，

因 $z_x'=-2x$，$z_y'=2y$，有 $z_x'|_{(0,0)}=0$，$z_y'|_{(0,0)}=0$，

故点(0, 0)为驻点，可称为鞍点.



马鞍面

定理　（极值存在的充分条件）二元函数 $z=f(x,y)$，设 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，且 f 的二阶偏导数连续.

令 $A=f_{xx}''(x_0,y_0),\ B=f_{xy}''(x_0,y_0),\ C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，且 $\Delta=B^2-AC$，

（1）若$\Delta<0$，则(x_0,y_0)是极值点，且 $A>0$ 时，极小；$A<0$ 时，极大；

（2）若$\Delta>0$，则(x_0,y_0)不是极值点，（称为鞍点）；

（3）若$\Delta=0$，此方法不能判定.

证明：由二元函数泰勒公式

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+[f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y]$$

$$+\frac{1}{2}[f_{xx}''(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}''(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}''(x_0,y_0)\Delta y^2]+R_2(x,y),$$

点(x_0, y_0)处，$f_x'(x_0, y_0)=f_y'(x_0, y_0)=0$，

则 $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}[A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y \ \ +C\Delta y^2]+R_2(x,y)$，

若判别式$\Delta=B^2-AC<0$，则在$(\Delta x, \Delta y)\neq(0, 0)$时，二次项 $A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$ 将不变号，

当 $A>0$ 时，二次项恒正，$f(x, y)>f(x_0, y_0)$，$f(x_0, y_0)$为极小值；
当 $A<0$ 时，二次项恒负，$f(x, y)<f(x_0, y_0)$，$f(x_0, y_0)$为极大值．

若判别式$\Delta=B^2-AC>0$，则二次项 $A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$ 将变号，$f(x_0, y_0)$不是极值．

若判别式$\Delta=B^2-AC=0$，需要用更高阶的偏导数来判定．

例　求$f(x, y)=x^3-x^2+4xy-y^2+7x-8y+5$ 的极值．

解：令 $f_x'=3x^2-2x+4y+7=0$，$f_y'=4x-2y-8=0$，

解得$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-3\\y=-10\end{cases}$，即驻点为 $(1, -2)$，$(-3, -10)$，

又 $f_{xx}''=6x-2$，$f_{xy}''=4$，$f_{yy}''=-2$，有$(f_{xy}'')^2-f_{xx}''f_{yy}''=16+2(6x-2)=12x+12$，
驻点 $(1, -2)$，判别式$\Delta=24>0$，故驻点 $(1, -2)$不是极值点，
$(-3, -10)$，判别式$\Delta=-24<0$，且 $A=-20<0$，故驻点 $(-3, -10)$是极大值点，
∴极大值为$f(-3, -10)=48$．

例　求$f(x, y)=xy^2-x^3-4y^2+12x+3$ 的极值．

解：令 $f_x'=y^2-3x^2+12=0$，$f_y'=2xy-8y=0$，

解得$\begin{cases}x=\pm2\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=\pm6\end{cases}$，即驻点为 $(2, 0)$，$(-2, 0)$，$(4, 6)$，$(4, -6)$，

又 $f_{xx}''=-6x$，$f_{xy}''=2y$，$f_{yy}''=2x-8$，有$(f_{xy}'')^2-f_{xx}''f_{yy}''=4y^2+6x(2x-8)$，
驻点 $(2, 0)$，判别式$\Delta=-48<0$，且 $A=-12<0$，故驻点 $(2, 0)$ 是极大值点，
$(-2, 0)$，判别式$\Delta=144<0$，故驻点 $(-2, 0)$ 不是极值点，
$(4, 6)$，判别式$\Delta=144<0$，故驻点 $(4, 6)$ 不是极值点，
$(4, -6)$，判别式$\Delta=144<0$，故驻点 $(4, -6)$ 不是极值点，
∴极大值为$f(2, 0)=19$．

二元函数的极值可推广到一般多元函数．

如三元函数 $u=f(x, y, z)$，令 $f_x'=0$，$f_y'=0$，$f_z'=0$，解得驻点(x_0, y_0, z_0)，再根据实际问题得出极值和最值．
（注：三元函数极值的充分条件更加复杂，这里就不对驻点加以判断）

二．二元函数条件极值

二元函数 $z=f(x, y)$在满足约束条件$\varphi(x, y)=0$ 下的极值，称为条件极值．

拉格朗日乘数法：设拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$，其中$\lambda$为拉格朗日乘数
当$\varphi(x, y)=0$ 时，$F(x, y, \lambda)=f(x, y)$，转化为求 $F(x, y, \lambda)$的极值．

令$\begin{cases}F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'=0\\F_y'=f_y'+\lambda\varphi_y'=0\\F_\lambda'=\varphi(x,\ y)=0\end{cases}$，解得驻点，根据实际问题说明极值．

例　某厂生产甲、乙两种产品，产量分别为 x 和 y 吨时，成本为 $C(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 100$（万元），已知两种产品的价格分别为 40 和 55（万元/吨），设产品都能售出，

（1）求两种产品各生产多少，利润最大？

（2）若要求总产量为 9 吨，各生产多少，利润最大？

解：目标函数：利润 $L = L(x, y)$（万元），

成本 $C(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 100$，　　收入 $R(x, y) = 40x + 55y$，

利润 $L(x, y) = R(x, y) - C(x, y) = 40x + 55y - x^2 - xy - 2y^2 - 100$，

（1）无条件极值，令 $L_x' = 40 - 2x - y = 0$，$L_y' = 55 - x - 4y = 0$，解得 $x = 15$，$y = 10$，即驻点 $(15, 10)$，

又 $L_{xx}'' = -2$，$L_{xy}'' = -1$，$L_{yy}'' = -4$，有$(f_{xy}'')^2 - f_{xx}'' f_{yy}'' = 1 - 8 = -7$，

驻点$(15, 10)$，$\Delta < 0$，且 $A = -2 < 0$，故 $(15, 10)$为极大值点，

∴生产甲 15 吨，乙 10 吨时，利润最大.

（2）条件极值，　约束条件 $x + y = 9$，　即$\varphi(x, y) = x + y - 9 = 0$，

设 $F(x, y, \lambda) = L(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 40x + 55y - x^2 - xy - 2y^2 - 100 + \lambda(x + y - 9)$，

令 $F_x' = 40 - 2x - y + \lambda = 0$，$F_y' = 55 - x - 4y + \lambda = 0$，$F_\lambda' = x + y - 9 = 0$，解得 $x = 3$，$y = 6$，

∴生产甲 3 吨，乙 6 吨时，利润最大.

例　已知某企业进行生产需要 A、B 两种原料，当原料用量分别为 x 和 y 吨时，产出量为$Q = 0.1\cdot\sqrt[3]{x^2 y}$（吨），设原料价格为 3 和 2（万元/吨），现在用 54 万元购买原料，问各购买多少，产出量最大？

解：目标函数：产出量 $Q = Q(x, y)$ 吨，其中原料用量 x 和 y（吨）为原料用量，有 $Q(x,\ y) = 0.1\cdot\sqrt[3]{x^2 y}$，

约束条件：$3x + 2y = 54$，　即$\varphi(x, y) = 3x + 2y - 54 = 0$，

设 $F(x, y, \lambda) = Q(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0.1\cdot\sqrt[3]{x^2 y} + \lambda(3x + 2y - 54)$，

令 $F_x' = 0.1\cdot\frac{1}{3}(x^2 y)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2xy + 3\lambda = 0$，$F_y' = 0.1\cdot\frac{1}{3}(x^2 y)^{-\frac{2}{3}}\cdot x^2 + 2\lambda = 0$，$F_\lambda' = 3x + 2y - 54 = 0$，

解得 $x = 12$，$y = 9$，　　∴购买 A 原料 12 吨，B 原料 9 吨时，产出量最大.

例　在抛物线 $y = x^2$ 上求一点，使该点与点$(3, 0)$的距离最短.

解：目标函数：距离 $d = d(x, y)$，其中 (x, y) 为所求点的坐标，　有 $d(x,\ y) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$，

约束条件：$y = x^2$，　即$\varphi(x, y) = y - x^2 = 0$，且由于 d 与 d^2 同时取得最小值，

设 $F(x, y, \lambda) = d^2(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = (x-3)^2 + y^2 + \lambda(y - x^2)$，

令 $F_x' = 2(x - 3) - 2\lambda x = 0$，$F_y' = 2y + \lambda = 0$，$F_\lambda' = y - x^2 = 0$，解得 $x = 1$，$y = 1$，

∴抛物线 $y = x^2$ 上点$(1, 1)$与点$(3, 0)$的距离最短.

注：目标函数可根据需要适当修改，只要保证修改前后同时取得最值即可.

三．二元函数最值

最值是函数在所给的整个范围内的最大值和最小值.

一元函数 $y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上的最值必在 $f(x)$的驻点、尖点或端点 a, b 处取得.

二元函数 $z = f(x, y)$在闭区域 D 上的最值必在 $f(x, y)$的驻点、尖点或区域 D 边界点处取得.

找出 $z = f(x, y)$在区域 D 内的驻点、尖点，并求出在 D 边界$\varphi(x, y) = 0$ 上的条件极值，相比较可得最值.

例　求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ 在圆 $x^2 + y^2 \le 4$ 上的最大值和最小值.

解：令 $f_x' = 2x - 2 = 0$，$f_y' = 4y = 0$，得驻点$(1, 0)$，且没有不可导的点，

边界 $x^2 + y^2 = 4$，即$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$，

设 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$，

令 $F_x' = 2x - 2 - 2\lambda x = 0$，$F_y' = 4y + 2\lambda y = 0$，$F_\lambda' = x^2 + y^2 - 4 = 0$，

解得$\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x=-1 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$，点$(2,0),\ (-2,0),\ (-1,\sqrt{3}),\ (-1,-\sqrt{3})$，

由于$f(1,0)=-1,\ f(2,0)=0,\ f(-2,0)=8,\ f(-1,\sqrt{3})=9,\ f(-1,-\sqrt{3})=9$，

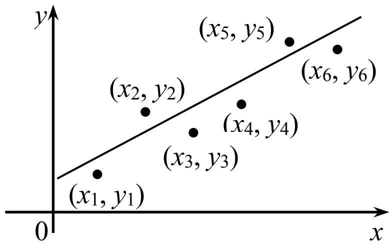
∴最小值为$f(1,0)=-1$，最大值为$f(-1,\pm\sqrt{3})=9$.

注：对于实际问题求最值，可根据实际意义判断.

四．最小二乘法

根据经验知某两个指标具有近似线性关系，需要找出二者线性关系的表达式．通过观测得一组数据：

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \text{L}\ ,\ (x_n,y_n)$$



描绘散点图，用直线$y=ax+b$近似表示x与y的关系.

在每一个点x_i处理论值ax_i+b与实际值y_i存在误差，$d_i=|ax_i+b-y_i|$.

确定a,b使得误差平方和$S=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$达到最小.

令$\dfrac{\partial S}{\partial a}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)\cdot x_i=0$，$\dfrac{\partial S}{\partial b}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)=0$，得：$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$，

解得$\begin{cases} a=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2} \\ b=\dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i) \end{cases}$.