第七章　无穷级数

这一章研究无穷多个数的和，如$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\Lambda+\frac{1}{2^n}+\Lambda$ 。

§7.1　级数的概念和性质

一．级数的概念

无穷多个数的和 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为无穷级数，简记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中 u_n 称为级数的通项。

如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+L+\frac{1}{2^n}+L$ ；　　$\sum_{n=1}^{\infty}n^2=1+4+9+L+n^2+L$ 。

根据级数的一般形式写出其简写形式：

一般地，式中某一部分若为等差数列，则写为 $a_1+(n-1)d$，（a_1 为首项，d 为公差）；若为等比数列，则写为 a_1q^{n-1}，（a_1 为首项，q 为公比）；若正负项交替出现，则乘上$(-1)^{n-1}$或$(-1)^n$。

如$\frac{1}{5}+\frac{2}{8}+\frac{4}{11}+\frac{8}{14}+L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2^{n-1}}{5+3(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n+2}$ 。

又如$\frac{5\cdot 2}{1}-\frac{9\cdot 6}{1\cdot 3}+\frac{13\cdot 18}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{17\cdot 54}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[5+4(n-1)]\cdot 2\cdot 3^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5L\ (2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)\cdot 2\cdot 3^{n-1}}{(2n-1)!!}$ 。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+L+u_n+L$ 的前 n 项的和 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，称为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和。

即有 $S_1=u_1, S_2=u_1+u_2, \cdots, S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n, \cdots\cdots$，数列$\{S_n\}$称为级数的部分和数列。

定义　级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$，如果极限$\lim_{n\to\infty}S_n=S$存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为该级数的和；否则称级数发散。

注意：通项 u_n，仅为一项；部分和 S_n，为 n 项的和，$u_1+u_2+\cdots+u_n$；

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，为无穷多项的和，$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$。

如判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$的敛散性，若收敛，求其收敛和。

$\because$部分和$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+L+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛。

又如判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2$的敛散性，若收敛，求其收敛和。

$\because$部分和$S_n=1+4+L+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\infty$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2$发散。

例　讨论等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 的敛散性，若收敛，求其收敛和。$(a \neq 0)$

解：$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$，　$(q \neq 1)$

当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，收敛；

当 $|q| > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，发散；

当 $q = 1$ 时，$S_n = a + a + \cdots + a = na$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，发散；

当 $q = -1$ 时，$S_n = a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a = \begin{cases} a, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，发散。

结论：等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$，当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geq 1$ 时发散。

例　讨论级数 $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \dfrac{1}{10\cdot 13} + \cdots$ 的敛散性，若收敛，求其收敛和。

解：简写形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{[1+3(n-1)][4+3(n-1)]} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$，

有 $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}) + \cdots + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3n+1}$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$，级数收敛。

例　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\dfrac{1}{n})$ 的敛散性，若收敛，求其收敛和。

解：$S_n = \ln 2 + \ln\dfrac{3}{2} + \cdots + \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(n+1)$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，级数发散。

二．级数的基本性质

性质 1　若 $c \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 同敛散，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$。即常数因子可移到级数号外。

证明：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的部分和分别为 S_n、T_n，

则 $T_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} T_n = c\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$。

性质 2　收敛的条件下，和差的级数等于级数的和差，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 。

证明：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n、S_n'、T_n ，

则 $T_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = S_n + S_n'$，

$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_n'$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 。

注：一个运算若满足（1）常数因子可移到运算号外；（2）和差的运算等于运算的和差；则称此运算具有线性性质。如极限、微分、积分、级数等运算都具有线性性质。

性质 3　级数增加或去掉前面有限项，其敛散性不变。

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ 部分和为 S_n ，不妨设去掉前两项：$u_3+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=3}^{\infty}u_n$ ，

则其部分和为 $T_n = u_3 + u_4 + \cdots + u_{n+2} = S_{n+2} - u_1 - u_2$ ，

$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+2}-u_1-u_2=\lim_{n\to\infty}S_n-u_1-u_2$，故敛散性不变，但收敛和改变。

若通项 u_n 满足某条件时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。性质 3 表明即使 u_n 的前面有限项不满足此条件，只需从某项以后满足，同样能保证级数收敛。

性质 4　若级数收敛，则加括号后仍然收敛，且收敛和不变。

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的部分和为 S_n ，且 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$

不妨设每两项加括号：$(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$，

其部分和 $T_n = (u_1 + u_2) + (u_1 + u_2) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n}) = S_{2n}$ ，

$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$，即若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛。

但性质 4 的逆命题不成立：若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=T$ 存在，但如果 S_n 的奇数项极限 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$ 不存在或不收敛于 T，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

事实上，$\{T_n\}$ 只是 $\{S_n\}$ 的一个子数列。原数列收敛，则子数列收敛；但子数列收敛时，原数列不一定收敛。

如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$ 发散，但加括号后 $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$ 收敛。

性质 5　（级数收敛的必要条件）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 。

证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为S_n，且$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，

$\because u_n=(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n)-(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})=S_n-S_{n-1}$，

$\therefore \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$。

性质 5 常用于判断级数发散。若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

例　判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$的敛散性。

解：$\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2^0}=1\neq 0$，　　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$发散。

但性质 5 的逆命题不成立。

如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$，其部分和$S_n=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)\to\infty,\ (n\to\infty)$，

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$发散，但$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$。

§7.2　正项级数的敛散性

一．正项级数的概念

若通项$u_n\geq 0$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，其部分和$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=S_{n-1}+u_n\geq S_{n-1}$。

性质 1　正项级数的部分和数列单调增加。

根据极限存在的准则Ⅱ：单调有界数列必有极限，得：

性质 2　正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是其部分和数列$\{S_n\}$有界。

二．正项级数的敛散性判别法

定理　（比较判别法）　两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n\leq cv_n$　（常数$c>0$），

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

即大的收敛，则小的收敛；小的发散，则大的发散。

证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别为S_n、T_n，因$u_n\leq v_n$，有$0\leq S_n\leq T_n$，

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，即T_n有界，则S_n有界，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；　（2）类似可证。

例　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+1}$ 的敛散性。

解：$\because \dfrac{1}{3^n+1}<\dfrac{1}{3^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 为公比 $q=\dfrac{1}{3}<1$ 的等比级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛（大），$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+1}$ 收敛。

例　判断调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性。

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{16}+\cdots$，

取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{16}+\cdots$，有 $\dfrac{1}{n}\geq v_n$，

加括号：$1+\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8})+(\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{16})+\cdots=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots$，发散，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散（小），$\therefore$调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

例　讨论 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性。

解：当 $p\leq 1$ 时，$\dfrac{1}{n^p}\geq\dfrac{1}{n}$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，　　$\therefore p\leq 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散。

当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{6^p}+\dfrac{1}{7^p}+\dfrac{1}{8^p}+\cdots+\dfrac{1}{15^p}+\cdots$

取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{8^p}+\cdots+\dfrac{1}{8^p}+\cdots$，有 $\dfrac{1}{n^p}\leq v_n$，

加括号：$1+(\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{2^p})+(\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p})+(\dfrac{1}{8^p}+\cdots+\dfrac{1}{8^p})+\cdots=1+\dfrac{1}{2^{p-1}}+\dfrac{1}{4^{p-1}}+\dfrac{1}{8^{p-1}}+\cdots$，

这是公比 $q=\dfrac{1}{2^{p-1}}<1$ 的等比级数，收敛，其部分和数列有界，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和数列也有界，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛（大），$\therefore p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛。

结论：p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散。

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

例　判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$的敛散性。

解：$\because \dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛（大），　　$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$收敛。

例　判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$的敛散性。

解：$\because \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}>\dfrac{1}{n}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散（小），　　$\therefore \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$发散。

例　判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$的敛散性。

解：$\because \dfrac{n}{n^2+1}\geq\dfrac{n}{n^2+n^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散（小），　　$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$发散。

定理　（比较判别法的极限形式）　两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$，

（1）若$0<k<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散；（2）若$k=0$，相当于$u_n\leq v_n$；（3）若$k=+\infty$，相当于$u_n\geq v_n$。

证明：（1）$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k>0$，对任意的$\varepsilon>0$，总存在正整数$N$，当$n>N$时，使$k-\varepsilon<\dfrac{u_n}{v_n}<k+\varepsilon$成立，

由于$0<k<+\infty$，取足够小的正数ε，使得$k-\varepsilon>0$，有$(k-\varepsilon)v_n<u_n<(k+\varepsilon)v_n$，

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由$(k-\varepsilon)v_n<u_n$知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，由$u_n<(k+\varepsilon)v_n$知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

（2）、（3）容易证明。

推论　两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若$n\to\infty$时，$u_n\sim kv_n$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散。

例　判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n^2}$的敛散性。

解：$\because n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n^2}\to 0$，$n\sin\dfrac{1}{n^2}\sim n\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，　　$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n^2}$发散。

例　判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\tan\dfrac{\pi}{3^n}$的敛散性。

解：$\because n\to\infty$时，$\dfrac{\pi}{3^n}\to 0$，$2^n\tan\dfrac{\pi}{3^n}\sim 2^n\cdot\dfrac{\pi}{3^n}=\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛，　　$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\tan\dfrac{\pi}{3^n}$收敛。

例　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散的另一证明。

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$，其部分和 $S_n=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)\to\infty,\ (n\to\infty)$，

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散，因 $n\to\infty$ 时，$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$，　$\therefore$ 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

比较次数法： 当级数的通项 u_n 的分子分母中只含整式或根式时，记 $p=$ 分母次数 $-$ 分子次数，

则当 $n\to\infty$ 时，$u_n\sim\frac{k}{n^p}$，故 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；$p\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$，有 $p=2-1=1$，即 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ 发散。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$，有 $p=\frac{3}{2}>1$，即 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{3/2}}$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$ 收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-4n-3}}{4n^3-2n^2+7n+5}$，有 $p=3-1=2>1$，即 $n\to\infty$ 时，$u_n\sim\frac{1}{4n^2}$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

定理　（达朗贝尔比值判别法）　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，相邻两项的比值极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，

（1）若 $l<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；（2）若 $l>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；（3）若 $l=1$，则此方法不能判定。

证明：$\because\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，使 $l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon$ 成立，

（1）$l<1$，取足够小的正数 ε，使得 $l+\varepsilon<1$，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon<1$，

即 $u_{n+1}<(l+\varepsilon)u_n<(l+\varepsilon)^2u_{n-1}<\cdots<(l+\varepsilon)^{n-N}\cdot u_{N+1}$，

$\because\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^{n-N}\cdot u_{N+1}$ 是公比 $q=1+\varepsilon<1$ 的等比级数，收敛（大），　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

（2）类似可证。

例　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 的敛散性。

解：$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}=1\cdot\frac{1}{2}<1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛。

例　判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\cdot(2n)!}{10^n\cdot(n^2+1)}$的敛散性。

解：$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2(n+1)+1}\cdot[2(n+1)]!}{10^{n+1}\cdot[(n+1)^2+1]}\cdot\frac{10^n\cdot(n^2+1)}{\sqrt{2n+1}\cdot(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{10^n}{10^{n+1}}\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}$

$=\lim_{n\to\infty}1\cdot(2n+2)(2n+1)\cdot\frac{1}{10}\cdot 1=\infty>1$，　　　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\cdot(2n)!}{10^n\cdot(n^2+1)}$发散。

例　判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n^{100}\cdot n!}$的敛散性。

解：$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{100}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{n^{100}\cdot n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{(n+1)^{100}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}1\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$，　　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n^{100}\cdot n!}$发散。

比值判别法的步骤：

（1）$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$，先写出$u_{n+1}$，再乘上$\frac{1}{u_n}$；

（2）调整为对应比值；

（3）通项u_n中，整式、根式的对应比值极限等于1，指数a^n的对应比值为$\frac{a^{n+1}}{a^n}=a$，

阶乘$n!$的对应比值为$\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$，幂指n^n的对应比值为$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=(n+1)(1+\frac{1}{n})^n\sim(n+1)e$。

如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$，有$l=\frac{1}{2}<1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\cdot(2n)!}{10^n\cdot(n^2+1)}$，有$l=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(2n+2)(2n+1)}{10\cdot 1}=\infty>1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\cdot(2n)!}{10^n\cdot(n^2+1)}$发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n^{100}\cdot n!}$，有$l=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e}{1\cdot(n+1)}=e>1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n^{100}\cdot n!}$发散。

又如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\cdot n^n\cdot(n^2-n+1)}{3^n\cdot n^3\cdot n!\cdot\sqrt[3]{n^2+1}}$，有$l=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)e\cdot 1}{3\cdot 1\cdot(n+1)\cdot 1}=\frac{e}{3}<1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\cdot n^n\cdot(n^2-n+1)}{3^n\cdot n^3\cdot n!\cdot\sqrt[3]{n^2+1}}$收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3-2n+5}$，有$l=1$，比值法不能判定。用比较次数法，$p=3-1=2>1$，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3-2n+5}$收敛。

当u_n中只含整式或根式时，用比较次数法；当u_n中含指数a^n、阶乘$n!$、幂指n^n形式时，用比值判别法。

定理 7.5 （柯西根值判别法） 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，通项的根值极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，

（1）若$l<1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；（2）若$l>1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；（3）若$l=1$，则此方法不能判定。

证明：$\because\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，对任意的$\varepsilon>0$，总存在正整数$N$，当$n>N$时，使$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon$成立，

（1）$l<1$，取足够小的正数ε，使得$l+\varepsilon<1$，有$u_n<(l+\varepsilon)^n$，

$\because\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^n$是公比$q=1+\varepsilon<1$的等比级数，收敛（大），　　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（2）类似可证。

例　判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$的敛散性。

解：$\because l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n+1}=\dfrac{2}{3}<1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$收敛。

例　判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)^n}{n^{100}\cdot 100^n}$的敛散性。

解：$\because l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{(\sqrt[n]{n})^{100}\cdot 100}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{1\cdot 100}=\infty>1$，　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)^n}{n^{100}\cdot 100^n}$发散。

注：可以证明$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

根值判别法的步骤：

（1）$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$；

（2）将通项u_n中每一部分分别开n次方；

（3）通项u_n中，整式、根式的根值极限等于 1，指数a^n的根值为$\sqrt[n]{a^n}=a$，幂指n^n的根值为$\sqrt[n]{n^n}=n$。

注意：阶乘形式不能用根值判别法。

总结：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$敛散性判别法，

当通项u_n中只含整式、根式时，用比较次数法：记$p=$ 分母次数 − 分子次数，
　　有$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散。

当通项u_n中含指数a^n、阶乘$n!$、幂指n^n形式时，用比值或根值判别法：$l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$或$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，

　　$l<1$时收敛；$l>1$时发散。　　（根值法专用于幂指形式不能用于阶乘）

当通项u_n中含三角函数、对数时，先用等价代换或放缩法去掉三角函数或对数后再处理。
　　等价代换：$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$等；
　　放缩法：$|\sin x|\le 1$，$|\cos x|\le 1$，$n^0<\ln n<n^{\varepsilon}$（$\varepsilon>0$, n充分大时）等，

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}=0$。（注：可将 ln$n$ 近似地看作 0 次）

一般，sin0, cos0, ln1 型用等价代换，sin∞, cos ∞, ln∞ 型用放缩法。

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\tan\dfrac{1}{2^n}$，有 $n\to\infty$ 时，$n^2\tan\dfrac{1}{2^n}\sim\dfrac{n^2}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$，比值法：$l=\dfrac{1}{2}<1$，收敛，故原级数收敛。

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$，有 $n\to\infty$ 时，$\ln\dfrac{n+1}{n-1}=\ln(1+\dfrac{2}{n-1})\sim\dfrac{2}{n-1}$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2}{n-1}$，比较次数，$p=1$，发散，

故原级数发散。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$，有 $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2\le\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛（大），故原级数收敛。

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$，对任意的 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，$\ln n<n^{\varepsilon}$，$\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}>\dfrac{1}{n^{0.5+\varepsilon}}$，取 $\varepsilon\le\dfrac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{0.5+\varepsilon}}$ 发散（小），

故原级数发散。

为了弥补比值与根值法在 $l=1$ 时不能判定级数敛散性的不足，还有以下三种判定方法。

柯西积分判别法：设 $f(x)$在 $[1,+\infty)$ 内连续、大于 0 且单调下降，$u_n=f(n)$，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 敛散性一致。

证明：∵$f(x)$单调下降，当 $x\in[n,n+1]$时，$u_{n+1}\le f(x)\le u_n$，$u_{n+1}\le\int_n^{n+1}f(x)dx\le u_n$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)dx=\int_1^{+\infty}f(x)dx\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，得证。

例　判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 的敛散性。

解：由于 $\dfrac{1}{x\ln x}$ 与 $\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ 都在 $[2,+\infty)$ 内连续、大于 0 且单调下降，且

$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{\ln x}d\ln x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=\infty$，$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{\ln^2 x}d\ln x=-\dfrac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 2}$，

故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛。

拉阿贝判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\lambda$，则 $\lambda>1$ 时收敛，$\lambda<1$ 时发散。

高斯判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$（$\lambda,\mu$ 为常数，$\varepsilon>0$，且 θ_n 为有界变量），

（1）当 $\lambda>1$ 时收敛，（2）当 $\lambda<1$ 时发散，（3）当 $\lambda=1$ 时，若 $\mu>1$，级数收敛；若 $\mu\le1$，级数发散。

§7.3　任意项级数

本节讨论的级数中各项可正可负。

一．交错级数敛散性判别法

定义　正负项交替出现的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$，$(u_n > 0)$ 称为交错级数。

定理　（莱布尼兹判别法）设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n > 0)$ 满足条件：（1）$u_n \geq u_{n+1}$；（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

即 u_n 单调下降且趋于零，则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛。

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 部分和中的偶数项 $S_{2k} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k}$，

$S_{2k+2} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} = S_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq S_{2k}$，

故$\{S_{2k}\}$单调增加。因 $0 \leq S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} \leq u_1$，故$\{S_{2k}\}$有界。

根据极限存在准则 II，知：极限 $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$ 存在。

由于 $S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1}$，则 $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} u_{2k+1} = S + 0 = S$，

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛。

例　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的敛散性。

解：交错，$u_n = \frac{1}{n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ 且 $u_n = \frac{1}{n}$ 单调下降，　$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛。

例　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ 的敛散性。

解：交错，$u_n = \frac{n}{2n-1}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$，　$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ 发散。

例　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+100}$ 的敛散性。

解：交错，$u_n = \frac{n}{n^2+100}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+100} = 0$，设 $f(x) = \frac{x}{x^2+100}$，有 $f'(x) = \frac{100-x^2}{(x^2+100)^2}$，

当 $x > 10$ 时，$f'(x) < 0$，即 $n > 10$ 时，$u_n = \frac{n}{n^2+100}$ 单调下降，　$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+100}$ 收敛。

交错级数敛散性判别法：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$，

当 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 且 u_n 单调下降时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛；当 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 发散。

二．一般任意项级数的敛散性判别法

对于一般的任意项级数，可转化为正项级数进行判定其收敛。

定理 任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明：不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + \cdots$，（$a_n \geq 0$），

保留正项，负项记为 0，得：$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = a_1 + 0 + 0 + a_4 + a_5 + 0 + 0 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|+u_n}{2}$，

正项记为 0，负项反号，得：$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = 0 + a_2 + a_3 + 0 + 0 + a_6 + a_7 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|-u_n}{2}$，

绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots$，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都是正项级数，且 $v_n \leq |u_n|$，$w_n \leq |u_n|$，

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛（大），则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛。 ∴级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2^n}$ 的敛散性。

解：$\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是公比 $q=\frac{1}{2}$ 的等比级数，收敛， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2^n}$ 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性。

解：$\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$，有 $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛（大），故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 收敛。

定义 如果绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

如果绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

例　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的敛散性，若收敛，并指出是绝对收敛还是条件收敛？

解：交错，$u_n=\frac{1}{n^2}$ 或 $u_n=\frac{1}{n}$，都有 u_n 单调下降且趋于 0，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 都收敛。

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，正项，$p=2>1$，收敛，　$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛。

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，正项，$p=1$，发散，　$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛。

需要指出：比值与根值判别法都可用于判定任意项级数敛散性。

即任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l$，则 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；$l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证明：当 $l<1$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

当 $l>1$ 时，有 n 很大时，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，即 $|u_{n+1}|>|u_n|$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

对于根值判别法，可类似说明。

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{100}}{2^n}$，有 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{100}}=\frac{1}{2}<1$，绝对收敛。

注意：比较判别法及其极限形式不能用于任意项级数。即放缩法、等价代换、比较次数法不能使用。

如 $n\to\infty$ 时，$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛。

注：若任意项级数条件收敛，级数各项经过重新排序，可改变其收敛和。

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2$，

除以 2，得：$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$，

相加，可得：$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$，

后者是第一个级数的重新排列。

一般地，若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，c 为任给常数，则总能经过重新排序构成一个新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，使之收敛于 c。

事实上，任意项级数条件收敛，则其仅保留正项的级数与仅保留负项的级数都发散到 ∞。不妨设 $c>0$，总可以先取若干正项，使得部分和大于 c；再添上若干负项，又使得部分和小于 c；按照此方法，分别轮流取正项、负项，就可得一个收敛于 c 的重新排序的新级数。

§7.5　幂级数

当级数的通项是函数 $u_n(x)$时，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是函数项级数，其中 x 为参变量。级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 根据 x 的不同取值可能收敛可能发散，所有收敛点的集合称为收敛域或收敛区间；收敛时其收敛和随 x 而改变，是 x 的函数，称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数，记为 $S(x)$。

如 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ ，当$|x| < 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 收敛于 $\frac{1}{1-x}$ ，当$|x| \geq 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 发散，

即函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 收敛区间是 $x \in (-1, 1)$，其和函数是 $S(x) = \frac{1}{1-x} \ (-1 < x < 1)$ 。

注意：幂级数的和函数必须注明收敛区间。

一．幂级数

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$

的函数项级数分别称为 x 或 $x - x_0$ 的幂级数。其中 a_n 为系数，0 或 x_0 为中心点。

讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的敛散性，用比值判别法，$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x|$，记 $l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$，

当 $l \cdot |x| < 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；当 $l \cdot |x| > 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。

结论： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$，记 $R = \begin{cases} 1/l, & 0 < l < +\infty \\ +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \end{cases}$ ，称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径。

当$|x| < R$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；当$|x| > R$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散；当$|x| = R$ 时，需另行判定。

因此，收敛区间为$-R, R$ 之间的区间，而区间的开闭根据端点 $x = \pm R$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的敛散性确定。

例　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛半径和收敛区间。

解：$\because a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$ ，$l = \frac{1}{2}$，收敛半径 $R = 2$。端点 $x = 2$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，正项，$p = 1$，发散，

端点 $x = -2$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ，交错，$\frac{1}{n}$ 单减且趋于 0，收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛区间为$[-2, 2)$ 。

例　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径和收敛区间。

解：$\because a_n=\frac{1}{n!}$， $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，收敛半径 $R=+\infty$ ， $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$。

例　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^n x^n$ 的收敛半径和收敛区间。

解：$\because a_n=n^n$， $l=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)e=\infty$，收敛半径 $R=0$ ，仅在 $x=0$ 处收敛，$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^n x^n$ 的收敛域为点$\{0\}$。

注：也可根据根值判别法求 l， $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$。

例　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n x^n$ 的收敛半径和收敛区间。

解：$\because a_n=\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$， $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}$，收敛半径 $R=3$，

端点 $x=3$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$，发散，

端点 $x=-3$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\neq 0$，发散，

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n x^n$ 的收敛区间为$(-3,3)$。

求幂级数的收敛半径、收敛区间步骤：

（1）求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$，

（2）收敛半径 $R=\begin{cases}1/l, & 0<l<+\infty\\ +\infty, & l=0\\ 0, & l=+\infty\end{cases}$ ，即 $-R<x<R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，

（3）判断端点 $x=\pm R$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的敛散性，并指出收敛区间。

例　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$ 的收敛区间。

解：令 $t=2x-1$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$， $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$， $l_t=\frac{1}{5}$，t 的收敛半径 $R_t=5$，

端点 $t=5$ 即 $x=3$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，正项，$p=\frac{1}{2}<1$，发散，

端点 $t=-5$ 即 $x=-2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，交错，$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调下降且趋于 0，收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$ 的收敛区间为 $x\in[-2,\ 3)$。

例　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n}$ 的收敛区间。

解：与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n+1)\cdot 2^n}$ 的敛散性一致。令 $t=x^2$，即讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^n}{(2n+1)\cdot 2^n}$，有 $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^n}$，

故 $l_t=\frac{1}{2}$，t 的收敛半径 $R_t=2$，端点 $t=2$ 即 $x=\pm\sqrt{2}$。

端点 $x=\sqrt{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n+1)\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，交错，$\frac{1}{2n+1}$ 单调下降且趋于 0，收敛，

端点 $x=-\sqrt{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n+1)\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n}$ 的收敛区间为 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

二．幂级数的性质

性质 1 （可加性）两个幂级数可在其收敛区间的交集内逐项求和差：$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$。

性质 2 （连续性）幂级数的和函数在其收敛区间内连续。

性质 3 （可导性）幂级数可在其收敛的开区间内逐项求导：$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$。

性质 4 （可积性）幂级数可在其收敛的开区间内逐项积分：$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$。

注：幂级数求导或积分后，收敛半径不变，但端点的敛散性可能发生改变。
可利用幂级数的求导积分性质求幂级数的和函数。

例　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数。

解：$a_n=\frac{1}{n}$，$l=1$，收敛半径 $R=1$，端点 $x=-1$ 处收敛，$x=1$ 处发散，故收敛区间为 $x\in[-1,\ 1)$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，有 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^n)'}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\quad x\in(-1,1)$，

$\therefore S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=0-\ln(1-t)\big|_0^x=-\ln(1-x)$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\quad x\in[-1,1)$。

取 $x=-1$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$，即$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2$ 。

可利用幂级数的和函数求数项级数的和。

如求级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和，可以先求$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 或类似的幂级数的和函数，就可得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S(1)$ 。

例　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数。

解：$a_n=n$，$l=1$，收敛半径 $R=1$，端点 $x=-1$ 处发散，$x=1$ 处发散，故收敛区间为 $x\in(-1, 1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ ，有$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ ，$\int_0^x\frac{S(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad x\in(-1,1)$，

求导，$\frac{S(x)}{x}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，　　$\therefore S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\quad x\in(-1,1)$ 。

§7.6　函数的幂级数展开

将一般的函数 $f(x)$展开为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 。

一．泰勒级数与泰勒公式

设函数 $f(x)$有任意阶导数，且 $f(x)$可以展开为幂级数：

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$，令 $x=0$，得 $f(0)=a_0$ ，

求导：$f'(x)=\quad a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots$，令 $x=0$，得 $f'(0)=a_1$ ，

$f''(x)=\quad 2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots$，令 $x=0$，得 $f''(0)=2a_2$ ，

$f'''(x)=\quad 6a_3+24a_4x+\cdots$，令 $x=0$，得 $f'''(0)=6a_3$ ，

一般地，$f^{(n)}(0)=n!a_n$ ，故 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 。

定义　设函数 $f(x)$有任意阶导数，称$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$ 为函数 $f(x)$在 $x=0$ 处的泰勒级数（马克劳林级数）。一般地，称$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的泰勒级数。

需要考虑的是函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ，其和函数是否就是函数 $f(x)$?

根据拉格朗日中值定理知，如果函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内可导，则在 x_0 与 x 之间至少存在一点ξ ，使得 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$。更一般地有：

定理　（泰勒中值定理）　如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内任一点 x，在 x_0 与 x 之间至少存在一点ξ ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为余项。此公式称为泰勒公式。

当 $n=0$ 时，有 $f(x)=f(x_0)+R_0(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$，这就是拉格朗日中值定理。

中心点 $x_0=0$ 时，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，称为马克劳林公式。

定理　函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有任意阶导数，当 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 时，$f(x)$ 的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛，其和函数就是函数 $f(x)$。

二．函数的幂级数展开

1． 直接展开法

步骤：（1）求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数 $f^{(n)}(0)$；（2）求其泰勒级数的收敛区间；（3）讨论余项 $R_n(x)$。

例　求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。

解：$f(0)=1$，因 $f'(x)=e^x$，有 $f'(0)=1$，一般地，$f^{(n)}(x)=e^x$，有 $f^{(n)}(0)=1$，

故 e^x 在 $x=0$ 处泰勒级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，收敛区间 $x\in(-\infty,+\infty)$，（讨论余项略）

$$\therefore e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

例　求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。

解：$f(0)=0$，因 $f'(x)=\cos x$，有 $f'(0)=1$；$f''(x)=-\sin x$，有 $f''(0)=0$；$f'''(x)=-\cos x$，有 $f'''(0)=-1$；

$f^{(4)}(x)=\sin x$，有 $f'(0)=0$；

一般地，$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0,\ n=2k\\(-1)^k,\ n=2k+1\end{cases}$，

故 $\sin x$ 在 $x=0$ 处泰勒级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$，收敛区间 $x\in(-\infty,+\infty)$，（讨论余项略）

$$\therefore \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

求导：$\cos x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$。

泰勒级数丰富了等价代换的公式：

如 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$，

右端取一项，即 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$；取两项，即 $x\to0$ 时，$\sin x-x\sim-\dfrac{x^3}{6}$。

又如 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$，

右端取两项，即 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；取三项，即 $x\to0$ 时，$\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}\sim\dfrac{x^4}{24}$。

例　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\cdot(\cos x-1+\dfrac{x^2}{2})}{(x-\sin x)(e^x-1-x)}$。

解：$x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}\sim\dfrac{x^4}{24}$，$x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6}$，$e^x-1-x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\therefore$原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^4}{24}}{\dfrac{x^3}{6}\cdot\dfrac{x^2}{2}}=\dfrac{1}{2}$。

例　求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。

解：$f(0)=1$，因 $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$，有 $f'(0)=\alpha$；$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$，有 $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$；

一般地，$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$。

故 $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$，收敛区间一般是 $x\in(-1,1)$，（讨论余项略）

$$\therefore (1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots,\quad x\in(-1,1)。$$

当 $\alpha=n$ 为正整数时，就是二项式定理，故这是二项式定理的推广。

并且 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots$，　$x\in(-1,1)$，　$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$，　$x\in(-1,1)$。

称函数 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$(1+x)^{\alpha}$，$\dfrac{1}{1+x}$，$\dfrac{1}{1-x}$ 为直接展开函数。

2．间接展开法

将需要展开的函数化为直接展开函数的和差、变量替换、求导、积分等，而间接展开。

例　将 $f(x)=xe^{-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。

解：$\because e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$　$x\in(-\infty,+\infty)$，有 $e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$，$-x^2\in(-\infty,+\infty)$ 即 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$\therefore xe^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1}\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

例　将 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开为 x 的幂级数。

解：$\because \dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$　$x\in(-1,1)$，积分得：$\ln(1+x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$　$x\in(-1,1]$；

且 $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$　$x\in(-1,1)$，积分得：$\arctan x=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$　$x\in[-1,1]$。

例　将 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数。

解：$\because \dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$　$x\in(-1,1)$，　$\therefore \dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$，$\dfrac{x}{2}\in(-1,1)$ 即 $x\in(-2,2)$。

例　将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ 展开为 x 的幂级数。

解：$\because f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{\frac{1}{3}[(x+2)-(x-1)]}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}-\dfrac{\frac{1}{3}}{x+2}$，

且 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad x\in(-1,1)$，有 $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$，

$\therefore \dfrac{1}{x^2+x-2}=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]x^n$，$x\in(-1,1)\cap(-2,2)$ 即 $x\in(-1,1)$。

例　将 $f(x)=(x-1)\,e^x$ 展开为 x 的幂级数。

解：$\because e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$，有 $xe^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{(k-1)!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$，

$\therefore (x-1)e^x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}\right]x^n \quad x\in(-\infty,+\infty)$。

例　将 $f(x)=\ln x$ 展开为 $x-2$ 的幂级数。

解：$\because \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2+(x-2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$，$\dfrac{x-2}{2}\in(-1,1)$ 即 $x\in(0,4)$，

积分得：$\int_2^x\dfrac{1}{t}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_2^x(t-2)^n dt$，即 $\ln x=\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}(x-2)^{n+1} \quad x\in(0,4]$。

注：对幂级数作定积分时，下限应取为中心点。
可利用幂级数求高阶导数值，

例　函数 $f(x)=e^{x^2}$，求 $f^{(100)}(0)$ 和 $f^{(101)}(0)$。

解：$\because e^{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n} \quad x\in(-\infty,+\infty)$，与其泰勒级数比较 $e^{x^2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$，

比较两者的 x^{100} 与 x^{101} 的系数，得：$\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}=\dfrac{1}{50!}$，$\dfrac{f^{(101)}(0)}{101!}=0$，

$\therefore f^{(100)}(0)=\dfrac{100!}{50!}$，$f^{(101)}(0)=0$。