最小方差无偏估计补充题

1． 总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本。

（1）参数 λ 的点估计 $\hat{\lambda} = \overline{X}$，由此猜测 $g(\lambda) = \lambda^2$ 的点估计为 $\overline{X}^2$。判断 $\overline{X}^2$ 是否 $g(\lambda) = \lambda^2$ 的无偏估计？如果不是，请根据 $E(\overline{X}^2)$ 的结果及 $E(\overline{X}) = \lambda$ 修偏得到 $\hat{g}$，使得 $\hat{g}$ 是 $g(\lambda) = \lambda^2$ 的无偏估计，即 $E(\hat{g}) = \lambda^2$；

（2）写出样本联合密度函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)$，证明 $\hat{g}$ 是 $g(\lambda) = \lambda^2$ 的 UMVUE;

（3）求出 λ 的 Fisher 信息量 $I(\lambda)$ 及 $g(\lambda) = \lambda^2$ 的 C-R 下界;

（4）设 Y 服从泊松分布 $P(\theta)$，可知 $\mathrm{Var}(Y^2 - Y) = 4\theta^3 + 2\theta^2$，根据此结论以及泊松分布的可加性求出 $\mathrm{Var}(\hat{g})$，并判断 $\hat{g}$ 是否 $g(\lambda) = \lambda^2$ 的有效估计。

2． 总体 X 服从指数分布 $Exp\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本。

（1）参数 θ 的点估计 $\hat{\theta} = \overline{X}$，由此猜测 $g(\theta) = \theta^2$ 的点估计为 $\overline{X}^2$。判断 $\overline{X}^2$ 是否 $g(\theta) = \theta^2$ 的无偏估计？如果不是，请修偏得到 $\hat{g}$，使得 $E(\hat{g}) = \theta^2$；

（2）写出样本联合密度函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$，证明 $\hat{g}$ 是 $g(\theta) = \theta^2$ 的 UMVUE;

（3）求出 θ 的 Fisher 信息量 $I(\theta)$ 及 $g(\theta) = \theta^2$ 的 C-R 下界;

（4）由 X 服从指数分布 $Exp\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$，可知 $\dfrac{2n\overline{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$，且 $\chi^2(m)$ 的 k 阶原点矩

$$E(Y^k) = 2^k\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2},$$

由此求出 $E(\overline{X}^4)$，再求出 $\mathrm{Var}(\hat{g})$，并判断 $\hat{g}$ 是否 $g(\theta) = \theta^2$ 的有效估计。