# 习题 4.2

1．设离散随机变量 $X$ 的分布列如下，试求 $X$ 的特征函数。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

**解：** 特征函数

$$\varphi(t)=e^{it\cdot 0}\times 0.4+e^{it\cdot 1}\times 0.3+e^{it\cdot 2}\times 0.2+e^{it\cdot 3}\times 0.1=0.4+0.3e^{it}+0.2e^{2it}+0.1e^{3it}\text{。}$$

2．设离散随机变量 $X$ 服从几何分布 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$。试求 $X$ 的特征函数。并以此求 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$。

**解：** 特征函数

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}e^{itk}\cdot(1-p)^{k-1}p=pe^{it}\sum_{k=1}^{+\infty}[e^{it}(1-p)]^{k-1}=\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}};$$

因

$$\varphi'(t)=\frac{pe^{it}\cdot i\cdot[1-(1-p)e^{it}]-pe^{it}\cdot[-(1-p)e^{it}\cdot i]}{[1-(1-p)e^{it}]^2}=\frac{ipe^{it}}{[1-(1-p)e^{it}]^2},$$

$$\varphi''(t)=ipe^{it}\cdot i\cdot[1-(1-p)e^{it}]^{-2}-2ipe^{it}[1-(1-p)e^{it}]^{-3}\cdot[-(1-p)e^{it}\cdot i]=\frac{-pe^{it}[1+(1-p)e^{it}]}{[1-(1-p)e^{it}]^3},$$

则

$$\varphi'(0)=\frac{ip}{p^2}=\frac{i}{p}=iE(X),\quad \varphi''(0)=\frac{-p(2-p)}{p^3}=-\frac{2-p}{p^2}=i^2E(X^2),$$

可得 $E(X)=\dfrac{1}{p}$， $E(X^2)=\dfrac{2-p}{p^2}$，故

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{2-p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1-p}{p^2}\text{。}$$

3．设离散随机变量 $X$ 服从巴斯卡分布

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots,$$

试求 $X$ 的特征函数。

**解：** 特征函数

$$\varphi(t)=\sum_{k=r}^{+\infty}e^{itk}\cdot C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}=\frac{p^re^{itr}}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{+\infty}(k-1)\cdots(k-r+1)(1-p)^{k-r}e^{it(k-r)}$$

$$=\frac{(pe^{it})^r}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{+\infty}(k-1)\cdots(k-r+1)x^{k-r}\Big|_{x=(1-p)e^{it}}=\frac{(pe^{it})^r}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{d^{r-1}(x^{k-1})}{dx^{r-1}}\Bigg|_{x=(1-p)e^{it}}$$

$$=\frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k-1}\right)\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}=\frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}$$

$$=\frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\cdot\frac{(r-1)!}{(1-x)^r}\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}=\frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^r}=\left[\frac{p\,\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}\right]^r。$$

4． 求下列分布函数的特征函数，并由特征函数求其数学期望和方差。

（1） $F_1(x)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-a|t|}\,dt,\quad (a>0)$；

（2） $F_2(x)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{t^2+a^2}\,dt,\quad (a>0)$ 。

**解**：（1）因密度函数 $p_1(x)=F_1'(x)=\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-a|x|}$，故

$$\varphi_1(t)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\mathrm{e}^{-a|x|}\,dx=\frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(it+a)x}\,dx+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{(it-a)x}\,dx\right]=\frac{a}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(it+a)x}}{it+a}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{\mathrm{e}^{(it-a)x}}{it-a}\Bigg|_{0}^{+\infty}\right]$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{it+a}-\frac{1}{it-a}\right)=\frac{a^2}{t^2+a^2}。$$

因

$$\varphi_1'(t)=-\frac{a^2}{(t^2+a^2)^2}\cdot 2t=-\frac{2a^2t}{(t^2+a^2)^2},$$

$$\varphi_1''(t)=-\frac{2a^2\cdot(t^2+a^2)^2-2a^2t\cdot 2(t^2+a^2)\cdot 2t}{(t^2+a^2)^4}=\frac{6a^2t^2-2a^4}{(t^2+a^2)^3},$$

则

$$\varphi_1'(0)=0=iE(X),\quad \varphi_1''(0)=\frac{-2a^4}{a^6}=-\frac{2}{a^2}=i^2E(X^2),$$

可得 $E(X)=0$， $E(X^2)=\frac{2}{a^2}$，故

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{2}{a^2}-0^2=\frac{2}{a^2}。$$

（2）因密度函数 $p_2(x)=F_2'(x)=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}$，则

$$\varphi_2(t)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\,dx,$$

由第（1）小题的结论知

$$\varphi_1(t)=\frac{a^2}{t^2+a^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\,p_1(x)dx,$$

根据逆转公式，可得

$$p_1(x)=\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-a|x|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\,\varphi_1(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\cdot\frac{a^2}{t^2+a^2}\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ity}\cdot\frac{1}{t^2+a^2}\,dt=\frac{2\pi}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-a|-y|}=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|y|},$$

故

$$\varphi_2(t)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|t|}=\mathrm{e}^{-a|t|};$$

因

$$\varphi_2'(t)=\begin{cases}a\,\mathrm{e}^{at}, & t<0;\\ -a\,\mathrm{e}^{-at}, & t>0.\end{cases}$$

有 $\varphi_2'(0-0)=a\neq\varphi_2'(0+0)=-a$，即 $\varphi_2'(0)$ 不存在，故 $E(X)$ 不存在， $\mathrm{Var}(X)$ 也不存在。

5．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试用特征函数的方法求 $X$ 的 3 阶及 4 阶中心矩。

**解：**因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，有 $Y=X-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，且 $Y$ 的特征函数是 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，则

$$\varphi'(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(-\sigma^2t)=-\sigma^2t\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

$$\varphi''(t)=-\sigma^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}+\sigma^4t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=(\sigma^4t^2-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

$$\varphi'''(t)=2\sigma^4t\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}+(\sigma^4t^2-\sigma^2)\cdot(-\sigma^2t)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=(3\sigma^4t-\sigma^6t^3)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

$$\varphi^{(4)}(t)=(3\sigma^4-3\sigma^6t^2)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}+(3\sigma^4t-\sigma^6t^3)\cdot(-\sigma^2t)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=(3\sigma^4-6\sigma^6t^2+\sigma^8t^4)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

则

$$\varphi'''(0)=0=i^3E(Y^3),\quad \varphi^{(4)}(0)=3\sigma^4=i^4E(Y^4),$$

可得

$$E[X-E(X)]^3=E(Y^3)=0,\quad E[X-E(X)]^4=E(Y^4)=3\sigma^4。$$

6．试用特征函数的方法证明二项分布的可加性：若 $X\sim b(n,p)$， $Y\sim b(m,p)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，则 $X+Y\sim b(n+m,p)$。

**证明：**因 $X\sim b(n,p)$， $Y\sim b(m,p)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，有 $X$ 与 $Y$ 的特征函数分别为

$$\varphi_X(t)=(p\,\mathrm{e}^{it}+1-p)^n,\quad \varphi_Y(t)=(p\,\mathrm{e}^{it}+1-p)^m,$$

则 $X+Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(p\,\mathrm{e}^{it}+1-p)^{n+m},$$

这是二项分布 $b(n+m,p)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim b(n+m,p)$。

7．试用特征函数的方法证明泊松分布的可加性：若 $X\sim P(\lambda_1)$， $Y\sim P(\lambda_2)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，则

$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

**证明：**因 $X\sim P(\lambda_1)$， $Y\sim P(\lambda_2)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，有 $X$ 与 $Y$ 的特征函数分别为

$$\varphi_X(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^{it}-1)},\quad \varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2(\mathrm{e}^{it}-1)},$$

则 $X+Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(\mathrm{e}^{it}-1)},$$

这是泊松分布 $P(\lambda_1+\lambda_2)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$ 。

8． 试用特征函数的方法证明伽马分布的可加性：若 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，则

$$X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)\text{。}$$

**证明：**因 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$， $Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，有 $X$ 与 $Y$ 的特征函数分别为

$$\varphi_X(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha_1}，\ \varphi_Y(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha_2}，$$

则 $X+Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}，$$

这是伽马分布 $Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$。

9． 试用特征函数的方法证明 $\chi^2$ 分布的可加性：若 $X\sim\chi^2(n)$， $Y\sim\chi^2(m)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，则

$$X+Y\sim\chi^2(n+m)\text{。}$$

**证明：**因 $X\sim\chi^2(n)$， $Y\sim\chi^2(m)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，有 $X$ 与 $Y$ 的特征函数分别为

$$\varphi_X(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}，\ \varphi_Y(t)=(1-2it)^{-\frac{m}{2}}，$$

则 $X+Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(1-2it)^{-\frac{n+m}{2}}，$$

这是 $\chi^2$ 分布 $\chi^2(n+m)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$。

10．设 $X_i$ 独立同分布，且 $X_i\sim Exp(\lambda),\quad i=1,2,\cdots,n$。试用特征函数的方法证明：

$$Y_n=\sum_{i=1}^n X_i\sim Ga(n,\lambda)\text{。}$$

**证明：**因 $X_i\sim Exp(\lambda),\quad i=1,2,\cdots,n$，且 $X_i$ 相互独立，有 $X_i$ 的特征函数为

$$\varphi_{X_i}(t)=\frac{\lambda}{\lambda-it}=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}，$$

则 $Y_n=\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=\prod_{i=1}^n\varphi_{X_i}(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-n}，$$

这是伽马分布 $Ga(n, \lambda)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $Y_n \sim Ga(n, \lambda)$ 。

11．设连续随机变量 $X$ 的密度函数如下：

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2}, \quad -\infty < x < +\infty ,$$

其中参数 $\lambda > 0$ ， $-\infty < \mu < +\infty$ ，常记为 $X \sim Ch(\lambda, \mu)$ 。

（1）试证 $X$ 的特征函数为 $\exp\{i\mu t - \lambda |t|\}$ ，且利用此结果证明柯西分布的可加性；

（2）当 $\mu = 0, \lambda = 1$ 时，记 $Y = X$ ，试证 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ ，但是 $X$ 与 $Y$ 不独立；

（3）若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且服从同一柯西分布，试证：$\dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 与 $X_1$ 同分布。

**证明：**（1）根据第 4 题第（2）小题的结论知：若 $X^*$ 的密度函数为

$$p^*(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} ,$$

即 $X^* \sim Ch(\lambda, 0)$ ，则 $X^*$ 的特征函数为 $\varphi^*(t) = \mathrm{e}^{-\lambda |t|}$ ，且 $X = X^* + \mu$ 的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2} ,$$

故 $X = X^* + \mu$ 的特征函数为

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{i\mu t}\, \varphi^*(t) = \mathrm{e}^{i\mu t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda |t|} = \mathrm{e}^{i\mu t - \lambda |t|} 。$$

若 $X_1 \sim Ch(\lambda_1, \mu_1)$ ， $X_2 \sim Ch(\lambda_2, \mu_2)$ ，且相互独立，有 $X_1$ 与 $X_2$ 的特征函数分别为

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{i\mu_1 t - \lambda_1 |t|}, \quad \varphi_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{i\mu_2 t - \lambda_2 |t|} ,$$

则 $X_1 + X_2$ 的特征函数为

$$\varphi_{X_1 + X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{i(\mu_1 + \mu_2)t - (\lambda_1 + \lambda_2)|t|} ,$$

这是柯西分布 $Ch(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知

$$X_1 + X_2 \sim Ch(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2) ,$$

即柯西分布具有可加性。

（2）当 $\mu = 0, \lambda = 1$ 时， $X \sim Ch(1, 0)$ ，有 $X$ 的特征函数为 $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ 。又因 $Y = X$ ，有 $Y$ 的特征函数也为 $\varphi_Y(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ ，且 $X + Y = 2X$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = \varphi_X(2t) = \mathrm{e}^{-|2t|} = \mathrm{e}^{-|t|} \cdot \mathrm{e}^{-|t|} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) ,$$

但 $Y = X$ ，显然有 $X$ 与 $Y$ 不独立。

（3）因 $X_i \sim Ch(\lambda, \mu), \quad i = 1, 2, \cdots, n$ ，且 $X_i$ 相互独立，有 $X_i$ 的特征函数为 $\varphi_{X_i}(t) = \mathrm{e}^{i\mu t - \lambda |t|}$ ，根据特征函数的性质可得 $Y_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\frac{1}{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\mathrm{e}^{n\left(i\mu\cdot\frac{t}{n}-\lambda\cdot\left|\frac{t}{n}\right|\right)}=\mathrm{e}^{i\mu t-\lambda|t|}=\varphi_{X_1}(t)\text{，}$$

故根据特征函数的唯一性定理知 $\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ 与 $X_1$ 同分布。

12．设连续随机变量 $X$ 的密度函数为 $p(x)$，试证：$p(x)$ 关于纵轴对称的充要条件是它的特征函数是实的偶函数。

注：此题原题有误，“$p(x)$ 关于原点对称”应改为“$p(x)$ 关于纵轴对称”，即 $p(x)$ 是偶函数。

**证明：**方法一：根据随机变量 $X$ 与 $-X$ 的关系

充分性：设 $X$ 的特征函数 $\varphi_X(t)$ 是实的偶函数，有 $\varphi_X(t)=\varphi_X(-t)$，则 $-X$ 的特征函数

$$\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(-t)=\varphi_X(t)\text{，}$$

根据特征函数的唯一性定理知 $-X$ 与 $X$ 同分布。因 $X$ 的密度函数为 $p(x)$，有 $-X$ 的密度函数为 $p(-x)$，故由 $-X$ 与 $X$ 同分布可知 $p(-x)=p(x)$，即 $p(x)$ 关于纵轴对称。

必要性：设 $X$ 的密度函数 $p(x)$ 关于纵轴对称，有 $p(-x)=p(x)$。因 $-X$ 的密度函数为 $p(-x)$，则 $X$ 与 $-X$ 同分布，可知 $X$ 与 $-X$ 的特征函数相同，即

$$\varphi_X(t)=\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(-t)\text{，}$$

且

$$\varphi_X(t)=\varphi_{-X}(t)=E[\mathrm{e}^{it(-X)}]=E[\mathrm{e}^{-itX}]=\overline{E[\mathrm{e}^{itX}]}=\overline{\varphi_X(t)}\text{，}$$

故 $X$ 的特征函数 $\varphi_X(t)$ 是实的偶函数。

方法二：根据密度函数与特征函数的关系

充分性：设连续随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi_X(t)$ 是实的偶函数，有 $\varphi_X(t)=\varphi_X(-t)$。因

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\,\varphi(t)dt\text{，}$$

有

$$p(-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it(-x)}\,\varphi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\,\varphi(t)dt\text{，}$$

令 $t=-u$，有 $dt=-du$，且当 $t\to-\infty$ 时，$u\to+\infty$，当 $t\to+\infty$，$u\to-\infty$，则

$$p(-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\mathrm{e}^{i(-u)x}\,\varphi(-u)(-du)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-iux}\,\varphi(-u)du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-iux}\,\varphi(u)du=p(x)\text{，}$$

故 $p(x)$ 关于纵轴对称。

必要性：设 $X$ 的密度函数 $p(x)$ 关于纵轴对称，有 $p(-x)=p(x)$。因

$$\varphi(t)=E(\mathrm{e}^{-itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\,p(x)dx\text{，}$$

有

$$\varphi(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(-t)x}\,p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\,p(x)dx\text{，}$$

令 $x=-y$，有 $dx=-dy$，且当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，当 $x\to+\infty$，$y\to-\infty$，则

$$\varphi_X(-t)=\int_{+\infty}^{-\infty}\mathrm{e}^{-it(-y)}\,p(-y)(-dy)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ity}\,p(-y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ity}\,p(y)dy=\varphi_X(t)\text{，}$$

且

$$\varphi_X(t)=\varphi_X(-t)=E[\mathrm{e}^{i(-t)X}]=E[\mathrm{e}^{-itX}]=\overline{E[\mathrm{e}^{itX}]}=\overline{\varphi_X(t)}\,,$$

故 $X$ 的特征函数 $\varphi_X(t)$ 是实的偶函数。

13．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且都服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，试求 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的分布。

**解**：因 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2),\quad i=1,2,\cdots,n$，且 $X_i$ 相互独立，有 $X_i$ 的特征函数为 $\varphi_{X_i}(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，根据特征函数的性质可得 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的特征函数为

$$\varphi_{\overline{X}}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\frac{1}{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\mathrm{e}^{n\left[i\mu\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]}=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2n}}\,,$$

这是正态分布 $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)。$$

14．利用特征函数方法证明如下的泊松定理：设有一列二项分布 $\{b(k,n,p_n)\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty}b(k,n,p_n)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots。$$

**证明**：二项分布 $b(n,p_n)$ 的特征函数为

$$\varphi_n(t)=(p_n\,\mathrm{e}^{it}+1-p_n)^n=[1+p_n(\mathrm{e}^{it}-1)]^n\,,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot np_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}[1+p_n(\mathrm{e}^{it}-1)]^n=\lim_{p_n\to0}[1+p_n(\mathrm{e}^{it}-1)]^{\frac{1}{p_n(\mathrm{e}^{it}-1)}\cdot np_n(\mathrm{e}^{it}-1)}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}\,,$$

这正是泊松分布 $P(\lambda)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $b(n,p_n)$ 依分布收敛于 $P(\lambda)$，即

$$\lim_{n\to\infty}b(k,n,p_n)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots。$$

15．设随机变量 $X\sim Ga(n,\lambda)$，证明：当 $\alpha\to+\infty$ 时，随机变量 $(\lambda X-\alpha)/\sqrt{\alpha}$ 按分布收敛于标准正态变量。

**证明**：因 $X\sim Ga(n,\lambda)$，有 $X$ 的特征函数为 $\varphi_X(t)=\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$，令

$$Y=\frac{\lambda X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}X-\sqrt{\alpha}\,,$$

则 $Y$ 的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{-it\sqrt{\alpha}}\,\varphi_X\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{\alpha}}\right)=\mathrm{e}^{-it\sqrt{\alpha}}\left(1-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha},$$

$$\ln\varphi_Y(t)=-it\sqrt{\alpha}-\alpha\ln\left(1-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)=-\alpha\left[\frac{it}{\sqrt{\alpha}}+\ln\left(1-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)\right],$$

令 $u=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$，有 $\alpha=\dfrac{1}{u^2}$，且当 $\alpha\to+\infty$ 时，有 $u\to 0$，则

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\varphi_Y(t)=-\lim_{u\to 0}\frac{itu+\ln(1-itu)}{u^2}=-\lim_{u\to 0}\frac{it+\dfrac{-it}{1-itu}}{2u}=-\lim_{u\to 0}\frac{-(it)^2u}{2u(1-itu)}=-\frac{t^2}{2},$$

即 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$，这正是标准正态分布 $N(0,1)$ 的特征函数，故根据特征函数的唯一性定理知 $Y=\dfrac{\lambda X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 按分布收敛于标准正态变量。