第一章　随机事件与概率

习题 1.1

1．　写出下列随机试验的样本空间：

（1）抛三枚硬币；

（2）抛三颗骰子；

（3）连续抛一枚硬币，直至出现正面为止；

（4）口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球，先从中取出一个，放回后再取出一个；

（5）口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球，先从中取出一个，不放回后再取出一个。

解：（1）将出现正面记为 1，出现反面记为 0，样本空间

$\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$。

（2）样本空间

$\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1,x_2,x_3=1,2,3,4,5,6\}$。

（3）将出现正面记为 1，出现反面记为 0，样本空间

$\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots,(0,0,\cdots,0,1),\cdots\}$。

（4）将黑球记为 B，白球记为 W，红球记为 R，样本空间

$\Omega=\{BB,BW,BR,WB,WW,WR,RB,RW,RR\}$。

（5）将黑球记为 B，白球记为 W，红球记为 R，样本空间

$\Omega=\{BW,BR,WB,WR,RB,RW\}$。

2．　先抛一枚硬币，若出现正面（记为 Z），则再掷一颗骰子，试验停止；若出现反面（记为 F），则再抛一枚硬币，试验停止。那么该试验的样本空间 Ω 是什么？

解：样本空间

$\Omega=\{Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6,FZ,FF\}$。

3．　设 A,B,C 为三事件，试表示下列事件：

（1）A,B,C 都发生或都不发生；

（2）A,B,C 中不多于一个发生；

（3）A,B,C 中不多于两个发生；

（4）A,B,C 中至少有两个发生。

解：（1）$ABC\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

（2）$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

（3）$\overline{ABC}$ 或 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

（4）$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$。

4．　指出下列事件等式成立的条件：

（1）$A\cup B=A$；

（2）$AB=A$；

（3）$A-B=A$。

解：（1）当 $A\supset B$ 时，$A\cup B=A$。

（2）当 $A\subset B$ 时，$AB=A$。

（3）当 $AB=\varnothing$ 时，$A-B=A$。

5．　设 X 为随机变量，其样本空间为 $\Omega=\{0\le X\le 2\}$，记事件 $A=\{0.5<X\le 1\}$，$B=\{0.25\le X<1.5\}$，

写出下列各事件：

（1）$\bar{A}B$；

（2）$\bar{A}\cup B$；

（3）$\overline{AB}$；

（4）$\overline{A\cup B}$。

解：（1）$\bar{A}B=\{0.25\le X\le 0.5\}\cup\{1<X<1.5\}$。

（2）$\bar{A}\cup B=\{0\le X\le 2\}=\Omega$。

（3）$\overline{AB}=\{0\le X\le 0.5\}\cup\{1<X\le 2\}=\bar{A}$。

（4）$\overline{A\cup B}=\{0\le X<0.25\}\cup\{1.5\le X\le 2\}=\bar{B}$。

6. 检查三件产品，只区分每件产品是合格品（记为 0）与不合格品（记为 1），设 X 为三件产品中的不合格品数，指出下列事件所含的样本点：

$A="X=1"$，$B="X>2"$，$C="X=0"$，$D="X=4"$。

解：所求事件为

$A=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$，$B=\{(1,1,1)\}$，$C=\{(0,0,0)\}$，$D=\varnothing$。

7. 试问下列命题是否成立？

（1）$A-(B-C)=(A-B)\cup C$；

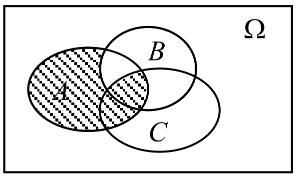
（2）若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

（3）$(A\cup B)-B=A$；

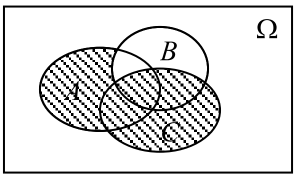
（4）$(A-B)\cup B=A$。

解：（1）不成立，

$$A-(B-C)=A-B\bar{C}=A\overline{B\bar{C}}=A(\bar{B}\cup C)=A\bar{B}\cup AC=(A-B)\cup AC\ne(A-B)\cup C。$$



$A-(B-C)$



$(A-B)\cup C$

（2）成立，因 $C\subset A$，有 $BC\subset AB=\varnothing$，故 $BC=\varnothing$。

（3）不成立，

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=A\bar{B}\cup\varnothing=A-B\ne A。$$

（4）不成立，

$$(A-B)\cup B=A\bar{B}\cup B=(A\cup B)(\bar{B}\cup B)=(A\cup B)\Omega=A\cup B\ne A。$$

8. 若事件 $ABC=\varnothing$，是否一定有 $AB=\varnothing$？

解：不能得出此结论，如当 $C=\varnothing$ 时，无论 AB 为任何事件，都有 $ABC=\varnothing$。

9． 请叙述下列事件的对立事件：
（1）$A =$“掷两枚硬币，皆为正面”;
（2）$B =$“射击三次，皆命中目标”;
（3）$C =$“加工四个零件，至少有一个合格品”。
解：（1）$\overline{A} =$“掷两枚硬币，至少有一个反面”。
（2）$\overline{B} =$“射击三次，至少有一次没有命中目标”。
（3）$\overline{C} =$“加工四个零件，皆为不合格品”。
10．证明下列事件的运算公式：

（1）$A = AB \cup A\overline{B}$；

（2）$A \cup B = A \cup \overline{A}B$。

证明：（1）由并对交的分配律可得

$$AB \cup A\overline{B} = A(B \cup \overline{B}) = A\Omega = A\text{。}$$

（2）由交对并的分配律可得

$$A \cup \overline{A}B = (A \cup \overline{A})(A \cup B) = \Omega(A \cup B) = A \cup B\text{。}$$

11．设 $\mathscr{F}$ 为一事件域，若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，试证：

（1）$\varnothing \in \mathscr{F}$；

（2）有限并 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$，$n \geq 1$；

（3）有限交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$，$n \geq 1$；

（4）可列交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$；

（5）差运算 $A_1 - A_2 \in \mathscr{F}$。

证明：（1）由事件域定义条件 1，知 $\Omega \in \mathscr{F}$，再由定义条件 2，可得
$\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathscr{F}$。

（2）在定义条件 3 中，取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，可得

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}\text{。}$$

（3）由定义条件 2，知 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n \in \mathscr{F}$，根据（2）小题结论，可得 $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i \in \mathscr{F}$，再由条件 2，知

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}\text{。}$$

（4）由定义条件 2，知 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n,\cdots\in\mathscr{F}$，根据条件（3），可得 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i\in\mathscr{F}$，再由条件 2，知

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}\text{。}$$

（5）由定义条件 2，知 $\overline{A}_2\in\mathscr{F}$，根据（3）小题结论，可得

$$A_1\overline{A}_2=A_1-A_2\in\mathscr{F}\text{。}$$