2.5.1. 伽玛分布（Gamma Distribution）

一．伽玛函数

含参变量积分

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx,\quad \alpha>0,$$

称为伽玛函数（Γ 函数）．伽玛函数具有以下性质：

（1）$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，特别是 $\alpha=n$ 为正整数时，$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$；

（2）$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx=\sqrt{\pi}$ ．

证明：（1）$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}d(-\mathrm{e}^{-x})=-x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\alpha x^{\alpha-1}dx=0+\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha)$ ．

当 $\alpha=n$ 为正整数时，

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=1 \text{ 且 } \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\cdots=n(n-1)\cdots2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!;$$

（2）对于 $\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$，令 $y=x^{\frac{1}{2}}$，有 $x=y^2$，$dx=2ydy$，且 $x=0$ 时，$y=0$；$x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}y^{-1}\,\mathrm{e}^{-y^2}\cdot2ydy=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}\ .$$

二．伽玛分布

定义　若连续随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad(\alpha>0,\lambda>0),$$

则称 X 服从伽玛分布（Γ 分布），记为 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$ ．

基本性质：非负性，$\alpha>0,\lambda>0$ 时，$\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}>0$；正则性，当 $r>0$ 时，对于 $\int_0^{+\infty}x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$，

令 $y=\lambda x$，有 $x=\dfrac{y}{\lambda}$，$dx=\dfrac{1}{\lambda}dy$，且 $x=0$ 时，$y=0$；$x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，则

$$\int_0^{+\infty}x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{y^{r-1}}{\lambda^{r-1}}\mathrm{e}^{-y}\cdot\frac{1}{\lambda}dy=\frac{1}{\lambda^{r}}\int_0^{+\infty}y^{r-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,dy=\frac{\Gamma(r)}{\lambda^{r}},$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}=1.$$

三．伽玛分布的数学期望和方差

当 $r>0$ 时，有 $\int_0^{+\infty}x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\dfrac{\Gamma(r)}{\lambda^{r}}$，可得伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$ 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\lambda},$$

又因

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},$$

故方差为

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

四．伽玛分布的特例

（1）当$\alpha=1$时，伽玛分布$Ga(1,\lambda)$的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad(\lambda>0),$$

可见伽玛分布$Ga(1,\lambda)$就是指数分布$Exp(\lambda)$.

（2）当$\alpha=\dfrac{n}{2},\lambda=\dfrac{1}{2}$时，伽玛分布$Ga\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$是自由度为$n$的$\chi^2$分布$\chi^2(n)$，密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\qquad n\text{为正整数},$$

可以证明n个独立标准正态变量的平方和服从$\chi^2(n)$．χ^2分布是统计学中三种重要分布之一.

（3）当$\alpha=n$为正整数时，伽玛分布$Ga(n,\lambda)$表示泊松过程的质点流中第n个质点到达时间的分布.

2.5.2. 贝塔分布（Beta Distribution）

一．贝塔函数

含参变量积分

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a>0,b>0$$

称为贝塔函数（β函数）．贝塔函数具有以下性质：

（1）$\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(b,a)$；

（2）贝塔函数与伽玛函数的关系为

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

证明：（1）对于$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$，令$y=1-x$，有$x=1-y$，$dx=-dy$，且$x=0$时，$y=1$；$x=1$时，$y=0$；故

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_1^0(1-y)^{a-1}y^{b-1}(-dy)=\int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1}dy=\mathrm{B}(b,a);$$

（2）因

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx\cdot\int_0^{+\infty}y^{b-1}\mathrm{e}^{-y}\,dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dxdy,$$

令$x=uv$，$y=u(1-v)$，有

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u,$$

即 $dxdy=|J|\,dudv=|u|\,dudv$，且 $x\ge 0, y\ge 0$ 时，有 $uv\ge 0, u(1-v)\ge 0$，可得 $u\ge 0, 0\le v\le 1$，故

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{+\infty}\int_0^1 (uv)^{a-1}[u(1-v)]^{b-1}\,\mathrm{e}^{-u}\cdot u\,dudv$$

$$=\int_0^{+\infty}u^{a+b-1}\,\mathrm{e}^{-u}\,du\cdot\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv=\Gamma(a+b)\cdot \mathrm{B}(a,b),$$

得证.

二．贝塔分布

定义 若连续随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\quad (a>0, b>0),$$

则称 X 服从贝塔分布（β 分布），记为 $X\sim Be(a,b)$.

由于贝塔分布的支撑区间为 $(0,1)$，故常用贝塔分布反映比率的分布.

基本性质：非负性，$a>0, b>0$ 时，$\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}>0$；正则性，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot \mathrm{B}(a,b)=1.$$

三．贝塔分布的数学期望和方差

贝塔分布 $Be(a,b)$ 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^{+\infty}x^{a}(1-x)^{b-1}dx$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot \mathrm{B}(a+1,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}=\frac{a}{a+b},$$

又因

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^{+\infty}x^{a+1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot \mathrm{B}(a+2,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)}=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)},$$

故方差为

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$