习题 7.2

说明：本节习题均采用拒绝域的形式完成，在可以计算检验的 p 值时要求计算出 p 值.

1. 有一批枪弹，出厂时，其初速率 $v \sim N(950, 1000)$（单位：m/s）. 经过较长时间储存，取 9 发进行测试，得样本值（单位：m/s）如下：

   914　920　910　934　953　945　912　924　940.

   据经验，枪弹经储存后其初速率仍服从正态分布，且标准差保持不变，问是否可认为这批枪弹的初速率有显著降低（$\alpha = 0.05$）？

解：设枪弹经储存后其初速率 $X \sim N(\mu, 1000)$，假设 H_0：$\mu = 950$　vs　H_1：$\mu < 950$，

已知σ^2，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W = \{u \le -1.645\}$，

因 $\bar{x} = 928$，$\mu = 950$，$\sigma = 10$，$n = 9$，

则 $u = \dfrac{928 - 950}{10/\sqrt{9}} = -6.6 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \le -6.6\} = 2.0558 \times 10^{-11} < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为这批枪弹的初速率有显著降低.

2. 已知某炼铁厂铁水含碳量服从正态分布 $N(4.55, 0.108^2)$. 现在测定了 9 炉铁水，其平均含碳量为 4.484，如果铁水含碳量的方差没有变化，可否认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55（$\alpha = 0.05$）？

解：设现在生产的铁水含碳量 $X \sim N(\mu, 0.108^2)$，假设 H_0：$\mu = 4.55$　vs　H_1：$\mu \ne 4.55$，

已知σ^2，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \ge 1.96\}$，

因 $\bar{x} = 4.484$，$\mu = 4.55$，$\sigma = 0.108$，$n = 9$，

则 $u = \dfrac{4.484 - 4.55}{0.108/\sqrt{9}} = -1.8333 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \le -1.8333\} = 0.0668 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55.

3. 由经验知某零件质量 $X \sim N(15, 0.05^2)$（单位：g），技术革新后，抽出 6 个零件，测得质量为

   14.7　15.1　14.8　15.0　15.2　14.6.

   已知方差不变，问平均质量是否仍为 15 g（取 $\alpha = 0.05$）？

解：设技术革新后零件质量 $X \sim N(\mu, 0.05^2)$，假设 H_0：$\mu = 15$　vs　H_1：$\mu \ne 15$，

已知σ^2，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \ge 1.96\}$，

因 $\bar{x} = 14.9$，$\mu = 15$，$\sigma = 0.05$，$n = 6$，

则 $u = \dfrac{14.9 - 15}{0.05/\sqrt{6}} = -4.8990 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \le -4.8990\} = 9.6326 \times 10^{-7} < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即不能认为平均质量仍为 15 g .

4. 化肥厂用自动包装机包装化肥，每包的质量服从正态分布，其平均质量为 100 kg，标准差为 1.2 kg . 某日开工后，为了确定这天包装机工作是否正常，随机抽取 9 袋化肥，称得质量如下：

   99.3　98.7　100.5　101.2　98.3　99.7　99.5　102.1　100.5.

设方差稳定不变，问这一天包装机的工作是否正常（取$\alpha = 0.05$）？

解：设这天包装机包装的化肥每包的质量 $X \sim N(\mu, 1.2^2)$，假设 H_0：$\mu = 100$ vs H_1：$\mu \neq 100$，

已知σ^2，选取统计量$U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \geq 1.96\}$，

因$\bar{x} = 99.9778$，$\mu = 100$，$\sigma = 1.2$，$n = 9$，

则$u = \dfrac{99.9778-100}{1.2/\sqrt{9}} = -0.0556 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \leq -0.0556\} = 0.9557 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这一天包装机的工作正常.

5. 设需要对某正态总体的均值进行假设检验

H_0：$\mu = 15$， H_1：$\mu < 15$.

已知$\sigma^2 = 2.5$，取$\alpha = 0.05$，若要求当 H_1 中的$\mu \leq 13$ 时犯第二类错误的概率不超过 0.05，求所需的样本容量.

解：设该总体 $X \sim N(\mu, 2.5)$，假设 H_0：$\mu = 15$ vs H_1：$\mu < 15$，

已知σ^2，选取统计量$U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W = \{u \leq -1.645\}$，

因$\mu = 15$，$\sigma^2 = 2.5$，有$u = \dfrac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}}$，

当$\mu \leq 13$ 时犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\left\{\frac{\overline{X}-15}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} > -1.65 \,|\, \mu \leq 13\right\} = P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} > -1.65 + \frac{15-\mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} \,|\, \mu \leq 13\right\}$$

$$\leq P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} > -1.65 + \frac{15-13}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \Phi(-1.65 + 1.2649\sqrt{n}) \leq 0.05,$$

则 $\Phi(-1.65 + 1.2649\sqrt{n}) \geq 0.95$，即 $-1.65 + 1.2649\sqrt{n} \geq 1.65$，$\sqrt{n} \geq 2.6089$，$n \geq 6.8064$，

故样本容量 n 至少为 7.

6. 从一批钢管抽取 10 根，测得其内径（单位：mm）为：

100.36 100.31 99.99 100.11 100.64 100.85 99.42 99.91 99.35 100.10.

设这批钢管内直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，试分别在下列条件下检验假设（$\alpha = 0.05$）.

H_0：$\mu = 100$ vs H_1：$\mu > 100$.

（1）已知$\sigma = 0.5$；

（2）σ 未知.

解：设这批钢管内直径 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，假设 H_0：$\mu = 100$ vs H_1：$\mu > 100$，

（1）已知σ^2，选取统计量$U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域 $W = \{u \geq 1.645\}$，

因$\bar{x} = 100.104$，$\mu = 100$，$\sigma = 0.5$，$n = 10$，

则$u=\dfrac{100.104-100}{0.5/\sqrt{10}}=0.6578\notin W$，并且检验的$p$值$p=P\{U\geq 0.6578\}=0.2553>\alpha=0.05$，

故接受H_0，拒绝H_1，即不能认为$\mu>100$.

（2）未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(9)=1.8331$，右侧拒绝域$W=\{t\geq 1.8331\}$，
因$\bar{x}=100.104$，$\mu=100$，$s=0.4760$，$n=10$，

则$t=\dfrac{100.104-100}{0.4760/\sqrt{10}}=0.6910\notin W$，并且检验的$p$值$p=P\{T\geq 0.6910\}=0.2535>\alpha=0.05$，

故接受H_0，拒绝H_1，即不能认为$\mu>100$.

7. 假定考生成绩服从正态分布，在某地一次数学统考中，随机抽取了 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？

解：设这次考试考生的成绩$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设H_0：$\mu=70$ vs H_1：$\mu\neq 70$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301$，双侧拒绝域$W=\{|t|\geq 2.0301\}$，
因$\bar{x}=66.5$，$\mu=70$，$s=15$，$n=36$，

则$t=\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}=-1.4\notin W$，并且检验的$p$值$p=2P\{T\leq -1.4\}=0.1703>\alpha=0.05$，

故接受H_0，拒绝H_1，即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

8. 一个小学校长在报纸上看到这样的报道："这一城市的初中学生平均每周看 8 h 电视."她认为她所在学校的学生看电视的时间明显小于该数字．为此她在该校随机调查了 100 个学生，得知平均每周看电视的时间$\bar{x}=6.5\,\text{h}$，样本标准差为$s=2\,\text{h}$．问是否可以认为这位校长的看法是对的（取$\alpha=0.05$）？

解：设学生看电视的时间$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设H_0：$\mu=8$ vs H_1：$\mu<8$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$n=100$，大样本，有$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\dot{\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(99)\approx u_{0.95}=1.645$，左侧拒绝域$W\approx\{t\leq -1.645\}$，
因$\bar{x}=6.5$，$\mu=8$，$s=2$，$n=100$，

则$t=\dfrac{6.5-8}{2/\sqrt{100}}=-7.5\in W$，并且检验的$p$值$p=P\{T\leq -7.5\}=3.1909\times 10^{-14}<\alpha=0.05$，

故拒绝H_0，接受H_1，即可以认为这位校长的看法是对的.

9. 设在木材中抽出 100 根，测其小头直径，得到样本平均数$\bar{x}=11.2\,\text{cm}$，样本标准差为$s=2.6\,\text{cm}$，问该批木材小头的平均直径能否认为不低于$12\,\text{cm}$（取$\alpha=0.05$）？

解：设该批木材小头的直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设H_0：$\mu=12$ vs H_1：$\mu<12$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$n=100$，大样本，有$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\dot{\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(99)\approx u_{0.95}=1.645$，左侧拒绝域$W\approx\{t\leq -1.645\}$，

因 $\bar{x}=11.2$，$\mu=12$，$s=2.6$，$n=100$，

则 $t=\dfrac{11.2-12}{2.6/\sqrt{100}}=-3.0769\in W$，并且检验的 p 值 $p=P\{T\le -3.0769\}=0.0010<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即不能认为这批木材小头的平均直径不低于 12 cm.

10．考察一鱼塘中鱼的含汞量，随机地取 10 条鱼测得各条鱼的含汞量（单位：mg）为：

0.8　1.6　0.9　0.8　1.2　0.4　0.7　1.0　1.2　1.1.

设鱼的含汞量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试检验假设 H_0：$\mu=1.2$　vs　H_1：$\mu>1.2$（取 $\alpha=0.10$）.

解：设鱼的含汞量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=1.2$　vs　H_1：$\mu>1.2$，

未知 σ^2，选取统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.1$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.9}(9)=1.3830$，右侧拒绝域 $W=\{t\ge 1.3830\}$，

因 $\bar{x}=0.97$，$\mu=1.2$，$s=0.3302$，$n=10$，

则 $t=\dfrac{0.97-1.2}{0.3302/\sqrt{10}}=-2.2030\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{T\ge -2.2030\}=0.9725>\alpha=0.10$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即不能认为 $\mu>1.2$．

11．如果一个矩形的宽度 w 与长度 l 的比 $\dfrac{w}{l}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$，这样的矩形称为黄金矩形．下面列出某工艺品工厂随机取的 20 个矩形宽度与长度的比值.

0.693　0.749　0.654　0.670　0.662　0.672　0.615　0.606　0.690　0.628

0.668　0.611　0.606　0.609　0.553　0.570　0.844　0.576　0.933　0.630.

设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值总体服从正态分布，其均值为 μ，试检验假设（取 $\alpha=0.05$）

H_0：$\mu=0.618$　vs　H_1：$\mu\ne 0.618$.

解：设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=0.618$　vs　H_1：$\mu\ne 0.618$，

未知 σ^2，选取统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(19)=2.0930$，双侧拒绝域 $W=\{|t|\ge 2.0930\}$，

因 $\bar{x}=0.6620$，$\mu=0.618$，$s=0.0918$，$n=20$，

则 $t=\dfrac{0.6620-0.618}{0.0918/\sqrt{20}}=2.1422\in W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{T\ge 2.1422\}=0.0453<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即不能认为 $\mu=0.618$.

12．下面给出两种型号的计算器充电以后所能使用的时间（h）的观测值

型号 A　5.5　5.6　6.3　4.6　5.3　5.0　6.2　5.8　5.1　5.2　5.9;

型号 B　3.8　4.3　4.2　4.0　4.9　4.5　5.2　4.8　4.5　3.9　3.7　4.6.

设两样本独立且数据所属的两总体的密度函数至多差一个平移量．试问能否认为型号 A 的计算器平均使用时间明显比型号 B 来得长（取 $\alpha=0.01$）？

解：设两种型号的计算器充电以后所能使用的时间分别为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1>\mu_2$，

未知 σ_1^2,σ_2^2，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平$\alpha = 0.01$，$t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2) = t_{0.99}(21) = 2.5176$，右侧拒绝域 $W = \{t \ge 2.5176\}$，
因$\bar{x} = 5.5$，$\bar{y} = 4.3667$，$s_x = 0.5235$，$s_y = 0.4677$，$n_1 = 11$，$n_2 = 12$，

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{10\times 0.5235^2+11\times 0.4677^2}{21}} = 0.4951,$$

则$t = \dfrac{5.5-4.3667}{0.4951\times\sqrt{\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}}} = 5.4844 \in W$，并且检验的$p$值$p = P\{T \ge 5.4844\} = 9.6391\times 10^{-6} < \alpha = 0.01$，
故拒绝H_0，接受H_1，即可以认为型号A的计算器平均使用时间明显比型号B来得长．

13．从某锌矿的东、西两支矿脉中，各抽取样本容量分别为9与8的样本进行测试，得样本含锌平均数及样本方差如下：

东支：$\bar{x}_1 = 0.230,\ s_1^2 = 0.1337$；

西支：$\bar{x}_2 = 0.269,\ s_2^2 = 0.1736$．

若东、西两支矿脉的含锌量都服从正态分布且方差相同，问东、西两支矿脉含锌量的平均值是否可以看作一样（取$\alpha = 0.05$）？

解：设东、西两支矿脉的含锌量分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设H_0：$\mu_1 = \mu_2$ vs H_1：$\mu_1 \ne \mu_2$，

未知σ_1^2,σ_2^2，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量$T = \dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = t_{0.975}(15) = 2.1314$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \ge 2.1314\}$，

因$\bar{x}_1 = 0.230,\ s_1^2 = 0.1337,\ \bar{x}_2 = 0.269,\ s_2^2 = 0.1736$，$n_1 = 9$，$n_2 = 8$，

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{8\times 0.1337+7\times 0.1736}{15}} = 0.3903,$$

则$t = \dfrac{0.230-0.269}{0.3903\times\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}}} = -0.2056 \notin W$，并且检验的$p$值$p = 2P\{T \le -0.2056\} = 0.8399 > \alpha = 0.05$，
故接受H_0，拒绝H_1，即可以认为东、西两支矿脉含锌量的平均值是一样的．

14．在针织品漂白工艺过程中，要考察温度对针织品断裂强力（主要质量指标）的影响．为了比较 70°C 与 80°C 的影响有无差别，在这两个温度下，分别重复做了8次试验，得数据如下（单位：N）：

70°C 时的强力：20.5　18.8　19.8　20.9　21.5　19.5　21.0　21.2，

80°C 时的强力：17.7　20.3　20.0　18.8　19.0　20.1　20.0　19.1．

根据经验，温度对针织品断裂强力的波动没有影响．问在 70°C 时的平均断裂强力与 80°C 时的平均断裂强力间是否有显著差别？（假设断裂强力服从正态分布，$\alpha = 0.05$）

解：设在 70°C 和 80°C 时的断裂强力分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设H_0：$\mu_1 = \mu_2$ vs H_1：$\mu_1 \ne \mu_2$，

未知σ_1^2,σ_2^2，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量$T = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = t_{0.975}(14) = 2.1448$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \ge 2.1448\}$，
因 $\bar{x} = 20.4$， $\bar{y} = 19.375$， $s_x = 0.9411$，$s_y = 0.8876$，$n_1 = 8$，$n_2 = 8$，

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2 + (n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{7\times 0.9411^2 + 7\times 0.8876^2}{14}} = 0.9148,$$

则 $t = \dfrac{20.4 - 19.375}{0.9148\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = 2.2410 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{T \ge 2.2410\} = 0.0418 < \alpha = 0.05$，
故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为 70°C 时的平均断裂强力与 80°C 时的平均断裂强力间有显著差别.

15．一药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

H_0：$\mu_1 = 2\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1 > 2\mu_2$.

此处μ_1, μ_2分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至开始起作用的时间间隔的总体的均值．设两总体均为正态分布且方差分别为已知值σ_1^2, σ_2^2，现分别在两总体中取一样本 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$，设两个样本独立．试给出上述假设检验问题的检验统计量及拒绝域.

解：设服用原有止痛片和新止痛片后至开始起作用的时间间隔分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

因 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 分别 X 和 Y 为来自的样本，且两个样本独立，

则 $\bar{X} \sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n})$， $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{m})$，且 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 独立，有 $\bar{X} - 2\bar{Y} \sim N(\mu_1 - 2\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{4\sigma_2^2}{m})$，

标准化，得 $\dfrac{(\bar{X}-2\bar{Y}) - (\mu_1 - 2\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{4\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$，

假设 H_0：$\mu_1 = 2\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1 > 2\mu_2$，

已知σ_1^2, σ_2^2，选取统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - 2\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{4\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$，

显著性水平α，右侧拒绝域 $W = \{u \ge u_{1-\alpha}\}$.

16．对冷却到−0.72°C 的样品用 A、B 两种测量方法测量其融化到 0°C 时的潜热，数据如下：

方法 A：79.98　80.04　80.02　80.04　80.03　80.03　80.04　79.97　80.05　80.03　80.02　80.00　80.02，

方法 B：80.02　79.94　79.98　79.97　80.03　79.95　79.97　79.97.

假设它们服从正态分布，方差相等，试检验：两种测量方法的平均性能是否相等？（取$\alpha = 0.05$）.

解：设用 A、B 两种测量方法测量的潜热分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，

假设 H_0：$\mu_1 = \mu_2$　vs　H_1：$\mu_1 \ne \mu_2$，

未知σ_1^2, σ_2^2，但$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，选取统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = t_{0.975}(19) = 2.0930$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \ge 2.0930\}$，
因 $\bar{x} = 80.0208$， $\bar{y} = 79.9787$， $s_x = 0.0240$，$s_y = 0.0.314$，$n_1 = 8$，$n_2 = 8$，

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{12\times 0.0240^2+7\times 0.0314^2}{19}} = 0.0269,$$

则 $t = \dfrac{80.0208-79.9787}{0.0269\times\sqrt{\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{8}}} = 3.4722 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{T \ge 3.4722\} = 0.0026 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，可以认为两种测量方法的平均性能不相等.

17．为了比较测定活水中氯气含量的两种方法，特在各种场合收集到 8 个污水样本，每个水样均用这两种方法测定氯气含量（单位：mg/l），具体数据如下：

水样号	方法一（x）	方法二（y）	差（$d=x-y$）
1	0.36	0.39	–0.03
2	1.35	0.84	0.51
3	2.56	1.76	0.80
4	3.92	3.35	0.57
5	5.35	4.69	0.66
6	8.33	7.70	0.63
7	10.70	10.52	0.18
8	10.91	10.92	–0.01

设总体为正态分布，试比较两种测定方法是否有显著差异．请写出检验的 p 值和结论（取 $\alpha = 0.05$）.

解：设用这两种测定方法测定的氯气含量之差为 $D = X - Y \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$，成对数据检验，

假设 H_0：$\mu_d = 0$ vs H_1：$\mu_d \ne 0$，

未知 σ_d^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(7) = 2.3646$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \ge 2.3646\}$，

因 $\overline{d} = 0.4138$，$s_d = 0.3210$，$n = 8$，

则 $t = \dfrac{0.4138}{0.3210/\sqrt{8}} = 3.6461 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{T \ge 3.6461\} = 0.0082 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，可以认为两种测定方法有显著差异.

18．一工厂的；两个化验室每天同时从工厂的冷却水取样，测量水中的含气量（10^{-6}）一次，下面是 7 天的记录：

室甲：1.15　1.86　0.75　1.82　1.14　1.65　1.90，

室乙：1.00　1.90　0.90　1.80　1.20　1.70　1.95.

设每对数据的差 $d_i = x_i - y_i$　$(i = 1, 2, \cdots, 7)$来自正态总体，问两化验室测定结果之间有无显著差异？（$\alpha = 0.01$）

解：设两个化验室测定的含气量数据之差为 $D = X - Y \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$，成对数据检验，

假设 H_0：$\mu_d = 0$ vs H_1：$\mu_d \ne 0$，

未知 σ_d^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平 $\alpha = 0.01$，$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.995}(6) = 3.7074$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \ge 3.7074\}$，

因 $\overline{d} = -0.0257$，$s_d = 0.0922$，$n = 7$，

则 $t=\dfrac{-0.0257}{0.0922/\sqrt{7}}=-0.7375\notin W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{T\le -0.7375\}=0.4886>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，可以认为两化验室测定结果之间没有显著差异．

19．为比较正常成年男女所含红血球的差异，对某地区 156 名成年男性进行测量，其红血球的样本均值为 465.13（$10^4/mm^3$），样本方差为 54.80^2；对该地区 74 名成年女性进行测量，其红血球的样本均值为 422.16，样本方差为 49.20^2．试检验：该地区正常成年男女所含红血球的平均值是否有差异？（取 $\alpha=0.05$）

解：设该地区正常成年男女所含红血球分别为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$ vs H_1：$\mu_1\ne\mu_2$，

未知 σ_1^2,σ_2^2，大样本场合，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}}\mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

显著水平 $\alpha=0.05$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，双侧拒绝域 $W=\{|t|\ge 1.96\}$，

因 $\bar{x}=465.13,\ s_x^2=54.80^2,\ \bar{y}=422.16,\ s_y^2=49.20^2$，$n_1=156$，$n_2=74$，

则 $u=\dfrac{465.13-422.16}{\sqrt{\dfrac{54.80^2}{156}+\dfrac{49.20^2}{74}}}=5.9611\in W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{U\ge 5.9611\}=2.5055\times 10^{-9}<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，可以认为该地区正常成年男女所含红血球的平均值有差异．

20．为比较不同季节出生的女婴体重的方差，从去年 12 月和 6 月出生的女婴中分别随机地抽取 6 名及 10 名，测其体重如下（单位：g）：

12 月：3520 2960 2560 2960 3260 3960，

6 月：3220 3220 3760 3000 2920 3740 3060 3080 2940 3060．

假定新生女婴体重服从正态分布，问新生女婴体重的方差是否是冬季的比夏季的小（取 $\alpha=0.05$）？

解：设 12 月和 6 月出生的女婴体重分别为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs H_1：$\sigma_1^2<\sigma_2^2$，

选取统计量 $F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

显著水平 $\alpha=0.05$，$F_\alpha(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(5,9)=\dfrac{1}{F_{0.95}(9,5)}=\dfrac{1}{4.77}=0.21$，左侧拒绝域 $W=\{f\le 0.21\}$，

因 $s_x^2=491.5960^2$，$s_y^2=306.5217^2$，

则 $f=\dfrac{491.5960^2}{306.5217^2}=2.5721\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{F\le 2.5721\}=0.8967>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，新生女婴体重的方差冬季的不比夏季的小．

21．已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布，且标准差为 0.048．从某天产品中抽取 5 根纤维，测得其纤度为

1.32 1.55 1.36 1.40 1.44

问这一天纤度的总体标准差是否正常（取$\alpha = 0.05$）？

解：设这一天维尼纶纤度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，假设 H$_0$：$\sigma^2 = 0.048^2$ vs H$_1$：$\sigma^2 \neq 0.048^2$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(4) = 0.4844$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(4) = 11.1433$，

双侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 0.4844$ 或$\chi^2 \ge 11.1433\}$，

因$\sigma^2 = 0.048^2$，$s^2 = 0.0882^2$，$n = 5$，

则 $\chi^2 = \dfrac{4 \times 0.0882^2}{0.048^2} = 13.5069 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{\chi^2 \ge 13.5069\} = 0.0181 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H$_0$，接受 H$_1$，即可以认为这一天纤度的总体方差不正常.

22．某电工器材厂生产一种保险丝．测量其熔化时间，依通常情况方差为 400，今从某天产品中抽取容量为 25 的样本，测量其熔化时间并计算得 $\bar{x} = 62.24$，$s^2 = 404.77$，问这天保险丝熔化时间分散度与通常有无显著差异（取$\alpha = 0.05$，假定熔化时间服从正态分布）？

解：设这天保险丝熔化时间分散度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，假设 H$_0$：$\sigma^2 = 400$ vs H$_1$：$\sigma^2 \neq 400$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(24) = 12.4012$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(24) = 39.3641$，

双侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 12.4012$ 或$\chi^2 \ge 39.3641\}$，

因$\sigma^2 = 400$，$s^2 = 404.77$，$n = 25$，

则 $\chi^2 = \dfrac{24 \times 404.77}{400} = 24.2862 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{\chi^2 \ge 24.2862\} = 0.8907 > \alpha = 0.05$，

故接受 H$_0$，拒绝 H$_1$，即可以认为这天保险丝熔化时间分散度与通常没有显著差异.

23．某种导线的质量标准要求其电阻的标准差不得超过 0.005（Ω）．今在一批导线中随机抽取样品 9 根，测得样本标准差 $s = 0.007$（Ω），设总体为正态分布．问在显著水平$\alpha = 0.05$ 下，能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解：设这批导线的电阻 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，假设 H$_0$：$\sigma^2 = 0.005^2$ vs H$_1$：$\sigma^2 > 0.005^2$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.95}(8) = 15.5073$，右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge 15.5073\}$，

因$\sigma^2 = 0.005^2$，$s^2 = 0.007^2$，$n = 9$，

则 $\chi^2 = \dfrac{8 \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 15.68\} = 0.0472 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H$_0$，接受 H$_1$，即可以认为这批导线的标准差显著地偏大.

24．两台车床生产同一种滚珠，滚珠直径服从正态分布．从中分别抽取 8 个和 9 个产品，测得其直径为

甲车床：15.0　14.5　15.2　15.5　14.8　15.1　15.2　14.8；

乙车床：15.2　15.0　14.8　15.2　15.0　15.0　14.8　15.1　14.8.

比较两台车床生产的滚珠直径的方差是否有明显差异（取$\alpha = 0.05$）.

解：设两台车床生产的滚珠直径分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H$_0$：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs H$_1$：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，

选取统计量 $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(7, 8) = \dfrac{1}{F_{0.975}(8, 7)} = \dfrac{1}{4.9} = 0.2041$，

$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.975}(7, 8) = 4.53$，双侧拒绝域 $W = \{F \le 0.2041$ 或 $F \ge 4.53\}$，

因$s_x^2 = 0.3091^2$，$s_y^2 = 0.1616^2$，

则$F = \dfrac{0.3091^2}{0.1616^2} = 3.6591 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{F \ge 3.6591\} = 0.0892 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两台车床生产的滚珠直径的方差没有明显差异.

25．有两台机器生产金属部件，分别在两台机器所生产的部件中各取一容量为 $m = 14$ 和 $n = 12$ 的样本，测得部件质量的样本方差分别为$s_1^2 = 15.46$，$s_2^2 = 9.66$，设两样本相互独立，试在显著性水平$\alpha = 0.05$ 下检验假设

H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs H_1：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

解：设两台机器生产金属部件质量分别为$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs H_1：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$，

选取统计量$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$F_{1-\alpha}(m - 1, n - 1) = F_{0.95}(13, 11) = 2.7614$，右侧拒绝域 $W = \{F \ge 2.7614\}$，

因$s_1^2 = 15.46$，$s_2^2 = 9.66$，

则$F = \dfrac{15.46}{9.66} = 1.6004 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{F \ge 1.6004\} = 0.2206 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

26．测得两批电子器件的样品的电阻（单位：Ω）为

A 批（x）	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137；
B 批（y）	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140.

设这两批器材的电阻值分别服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且两样本独立.

（1）试检验两个总体的方差是否相等（取$\alpha = 0.05$）？

（2）试检验两个总体的均值是否相等（取$\alpha = 0.05$）？

解：设两批电子器件样品的电阻分别为$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

（1）假设 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs H_1：$\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$，

选取统计量$F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(5, 5) = \dfrac{1}{F_{0.975}(5, 5)} = \dfrac{1}{7.15} = 0.1399$，

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.975}(5,5) = 7.15$，双侧拒绝域 $W = \{F \le 0.1399$ 或 $F \ge 7.15\}$，

因 $s_x^2 = 0.002805^2$， $s_y^2 = 0.002665^2$，

则 $F = \dfrac{0.002805^2}{0.002665^2} = 1.1080 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{F \ge 1.1080\} = 0.9131 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两个总体的方差相等；

（2）假设 H_0：$\mu_1 = \mu_2$ vs H_1：$\mu_1 \ne \mu_2$，

未知 σ_1^2, σ_2^2，但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.975}(10) = 2.2281$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \ge 2.2281\}$，

因 $\bar{x} = 0.1407$， $\bar{y} = 0.1385$，$s_x = 0.002805$，$s_y = 0.002665$，$n_1 = 6$，$n_2 = 6$，

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2 + (n_2-1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{5 \times 0.002805^2 + 5 \times 0.002665^2}{10}} = 0.002736,$$

则 $t = \dfrac{0.1407 - 0.1385}{0.002736 \times \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}}} = 1.3718 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{T \ge 1.3718\} = 0.2001 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两个总体的均值相等.

27. 某厂使用两种不同的原料生产同一类型产品，随机选取使用原料 A 生产的样品 22 件，测得平均质量为 2.36（kg），样本标准差为 0.57（kg）. 取使用原料 B 生产的样品 24 件，测得平均质量为 2.55（kg），样本标准差为 0.48（kg）. 设产品质量服从正态分布，两个样本独立. 问能否认为使用原料 B 生产的产品质量较使用原料 A 显著大（取 $\alpha = 0.05$）？

解：设两种原料生产的产品质量分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\mu_1 = \mu_2$ vs H_1：$\mu_1 < \mu_2$，

未知 σ_1^2, σ_2^2，大样本，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1} + \dfrac{S_y^2}{n_2}}} \dot\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W \approx \{u \le -1.645\}$，

因 $\bar{x} = 2.36$， $\bar{y} = 2.55$，$s_x = 0.57$，$s_y = 0.48$，$n_1 = 22$，$n_2 = 24$，

有 $u = \dfrac{2.36 - 2.55}{\sqrt{\dfrac{0.57^2}{22} + \dfrac{0.48^2}{24}}} = -1.2171 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \le -1.2171\} = 0.1118 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为使用原料 B 生产的产品质量较使用原料 A 不是显著大.