数理统计第六章测验题

考试时间2022年5月15日，答卷时间120分钟，总分100分，出题人-李绍文

1．（10分）总体X的密度函数为$p(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{0<x<1}$，求参数$\theta$的矩估计和最大似然估计。

解：因

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}x^{\theta+1}\bigg|_0^1=\frac{\theta}{\theta+1},$$

即$\theta=\dfrac{E(X)}{1-E(X)}$，用$\bar{X}$替换$E(X)$，故$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$。

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}I_{0<x_i<1}=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}I_{0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1}。$$

当$0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$时，有

$$\ln L(\theta)=\ln\theta^n+\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i。$$

令

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得驻点

$$\theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}。$$

并且

$$\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}=-\frac{n}{\theta^2}<0,$$

故$\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$是最大值点，$\theta$的最大似然估计为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

2．（10分）总体X的密度函数为$p(x;\lambda,\mu)=\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}I_{x>\mu}$，$\lambda>0$，求$\lambda$与$\mu$的最大似然估计。

解：因似然函数

$$L(\lambda,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda(x_i-\mu)}I_{x_i>\mu}=\lambda^n e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)}I_{x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu},$$

当$x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$时，

$$\ln L(\lambda, \mu) = n\ln\lambda - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right),$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0,$$

解得

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu} = \frac{1}{\bar{x} - \mu},$$

且显然μ越大，$\lambda^n e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)}$越大，但只有$x_1, x_2, \cdots, x_n > \mu$时，才有$L(\lambda, \mu) > 0$，即$\mu = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = x_{(1)}$时，$L(\lambda, \mu)$才能达到最大，故$\mu$与$\lambda$的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = X_{(1)},\quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X} - \mu},$$

3．（10 分）设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是样本，确定常数c使得$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

解：因

$$E[(X_{i+1} - X_i)^2] = \text{Var}(X_{i+1} - X_i) + [E(X_{i+1} - X_i)]^2$$

$$= \text{Var}(X_{i+1}) + \text{Var}(X_i) + [E(X_{i+1}) - E(X_i)]^2 = 2\sigma^2,$$

则

$$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2\right] = c\sum_{i=1}^{n-1} E[(X_{i+1} - X_i)^2] = c\cdot(n-1)\cdot 2\sigma^2 = 2c(n-1)\sigma^2,$$

故当$c = \dfrac{1}{2(n-1)}$时，$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2\right] = \sigma^2$，即$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$是$\sigma^2$的无偏估计。

4．（10 分）总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2已知，问样本容量n取多大时才能保证μ的置信水平为 95%的置信区间的长度不大于k。

解：已知σ^2，估计μ，选取枢轴量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

置信区间为$\left[\overline{X}\pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，长度为$2u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

置信度 $1-\alpha=0.95$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，有置信区间的长度

$$2u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le k\,,$$

故$\sqrt{n}\ge 3.92\times\dfrac{\sigma}{k}$，即$n\ge\dfrac{15.3664\sigma^2}{k^2}$。

5．（10 分）在一批货物中随机抽取 100 件，发现有 20 件不合格品，试求这批货物的不合格品率的置信水平为 95%的置信区间。

解：大样本，估计概率 p，选取枢轴量

$$U=\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\dot{\sim}N(0,1)\,,$$

近似置信区间为

$$\left[\overline{x}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right]=\left[0.2\pm 1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{100}}\right]=[0.1216,0.2784]\text{。}$$

6．（15 分）验证概率 p 的共轭先验分布是贝塔分布。即进行 n 次独立重复试验，记事件 A 的发生次数为 X 次。若在每次试验中事件 A 发生的概率 p 的先验分布是贝塔分布 $Be(a,b)$，$a,b>0$ 且已知，密度函数为 $\pi(p)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}I_{0<p<1}$，证明概率 p 的后验分布也是贝塔分布。

解：概率 p 的先验分布为贝塔分布 $Be(a,b)$，密度函数为

$$\pi(p)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}I_{0<p<1}\,,$$

设总体为每一次试验中事件 A 的发生次数，总体服从两点分布 $b(1,p)$，总体条件分布

$$p(x\,|\,p)=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1\,,$$

样本条件分布

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n\,|\,p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},\quad x_1,x_2,\cdots,x_n=0,1\,,$$

事件 A 的发生次数 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，有

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n\,|\,p)=p^x(1-p)^{n-x},\quad x_1,x_2,\cdots,x_n=0,1\text{。}$$

分子为样本与参数联合分布

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n,p)=\pi(p)p(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid p)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{x+a-1}(1-p)^{n-x+b-1}I_{0<p<1}\text{。}$$

分母为样本边际分布

$$m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_0^1\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{x+a-1}(1-p)^{n-x+b-1}dp=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\beta(x+a,n-x+b)$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(x+a)\Gamma(n-x+b)}{\Gamma(n+a+b)}\text{。}$$

参数 p 的后验分布

$$\pi(p\mid x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{h(x_1,x_2,\cdots,x_n,p)}{m(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n-x+b)}p^{x+a-1}(1-p)^{n-x+b-1}I_{0<p<1}\text{，}$$

这是贝塔分布 $Be(x+a,n-x+b)$，故贝塔分布是概率 p 的共轭先验分布族。

7．（15 分）总体 X 服从伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$，密度函数 $p(x;\alpha,\lambda)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{x>0},\quad \alpha,\lambda>0$，证明 $\dfrac{\bar X}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

证明：无偏性：因 X 服从伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$，有

$$EX=\frac{\alpha}{\lambda}\text{，}\ \mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}\text{，}$$

则

$$E\left(\frac{\bar X}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}EX=\frac{1}{\lambda}\text{。}$$

有效性：方差

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\bar X}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{Var}(\bar X)=\frac{1}{n\alpha^2}\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{n\alpha\lambda^2}\text{。}$$

参数 λ 的 Fisher 信息量：当 $x>0$ 时，

$$\ln p(x;\alpha,\lambda)=\alpha\ln\lambda-\ln\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\ln x-\lambda x\text{，}$$

$$\frac{\partial\ln p(x;\alpha,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}-x\text{，}$$

$$I(\lambda)=E\left[\left(\frac{\partial\ln p(X;\alpha,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right]=E\left[\left(\frac{\alpha}{\lambda}-X\right)^2\right]=\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}\text{。}$$

则 $g(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)}=\frac{\left(-\dfrac{1}{\lambda^2}\right)^2}{n\cdot\dfrac{\alpha}{\lambda^2}}=\frac{1}{n\alpha\lambda^2}=\mathrm{Var}\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right)。$$

故 $\dfrac{\bar{X}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

8．（20 分）总体 X 服从指数分布 $Exp\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本。

（1）参数 θ 的点估计 $\hat{\theta}=\bar{X}$，由此猜测 $g(\theta)=\theta^2$ 的点估计为 $\bar{X}^2$。判断 $\bar{X}^2$ 是否 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计？如果不是，请修偏得到 $\hat{g}$，使得 $E(\hat{g})=\theta^2$，并证明 $\hat{g}$ 是 $g(\theta)=\theta^2$ 的 UMVUE；

（2）求出 θ 的 Fisher 信息量 $I(\theta)$ 及 $g(\theta)=\theta^2$ 的 C-R 下界；

（3）由 X 服从指数分布 $Exp\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$，可知 $\dfrac{2n\bar{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$，且 $\chi^2(m)$ 的 k 阶原点矩

$$E(Y^k)=2^k\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2},$$

由此求出 $E(\bar{X}^4)$，再求出 $\mathrm{Var}(\hat{g})$，并判断 $\hat{g}$ 是否 $g(\theta)=\theta^2$ 的有效估计。

解：（1）因

$$E(\bar{X}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\frac{\theta^2}{n}+\theta^2=\frac{n+1}{n}\theta^2\neq\theta^2,$$

故 $\bar{X}^2$ 不是 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计。而

$$E\left(\frac{n}{n+1}\bar{X}^2\right)=\theta^2,$$

令 $\hat{g}=\dfrac{n}{n+1}\bar{X}^2$，有 $E(\hat{g})=\theta^2$，故 $\hat{g}=\dfrac{n}{n+1}\bar{X}^2$ 是 $g(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计。

（2）因 $E(\hat{g})=\theta^2$，且

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}} I_{x_1, x_2, \cdots, x_n > 0},$$

$$\theta^n p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}} I_{x_1, x_2, \cdots, x_n > 0},$$

则

$$\frac{\partial[\theta^n p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)]}{\partial\theta} = \frac{n\bar{x}}{\theta^2} e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}} I_{x_1, x_2, \cdots, x_n > 0} = n\theta^{n-2}\bar{x}p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta),$$

令统计量$T = \bar{X}$，$c = \theta^n$，$a = n\theta^{n-2}$，$b = 0$，即$\frac{\partial(cp)}{\partial\theta} = (a\bar{x} + b)p$，可知根据$E(\varphi) = 0$可得到$E(\varphi\bar{X}) = 0$。

取$\tilde{\varphi} = \varphi\bar{X}$，根据$E(\varphi) = 0$可得到$E(\tilde{\varphi}) = 0$，再根据$E(\tilde{\varphi}) = 0$及统计量$\varphi$的任意性，可得到$E(\tilde{\varphi}\bar{X}) = 0$，即$E(\varphi\bar{X}^2) = 0$。从而根据$E(\varphi) = 0$可得到

$$E(\varphi\hat{g}) = E\left(\varphi \cdot \frac{n}{n+1}\bar{X}^2\right) = \frac{n}{n+1}E(\varphi\bar{X}^2) = 0,$$

故$\hat{g}$是$g(\theta) = \theta^2$的 UMVUE。

（3）因指数分布$Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$的密度函数为

$$p(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{x>0},$$

则

$$\ln p(x; \theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}, \quad x > 0,$$
$$\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} = \frac{x - \theta}{\theta^2},$$

故

$$I(\theta) = E\left(\frac{X - \theta}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}。$$

且$g(\theta) = \theta^2$的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)} = \frac{(2\theta)^2}{n \cdot \frac{1}{\theta^2}} = \frac{4\theta^4}{n}。$$

（4）因$E(\hat{g}) = \theta^2$，且

$$\operatorname{Var}(\hat{g})=\operatorname{Var}\left(\frac{n}{n+1}\bar{X}^2\right)=\frac{n^2}{(n+1)^2}\operatorname{Var}(\bar{X}^2)=\frac{n^2}{(n+1)^2}[E(\bar{X}^4)-(E(\bar{X}^2))^2],$$

设$Y=\dfrac{2n\bar{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$，有

$$E(Y^2)=\frac{4n^2}{\theta^2}E(\bar{X}^2)=4(n+1)n,\quad E(Y^4)=\frac{16n^4}{\theta^4}E(\bar{X}^4)=16(n+3)(n+2)(n+1)n,$$

则

$$E(\bar{X}^2)=\frac{n+1}{n}\theta^2,\quad E(\bar{X}^4)=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3}\theta^4,$$

可得

$$\operatorname{Var}(\hat{g})=\frac{n^2}{(n+1)^2}[E(\bar{X}^4)-(E(\bar{X}^2))^2]=\frac{n^2}{(n+1)^2}\left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3}\theta^4-\frac{(n+1)^2}{n^2}\theta^4\right]$$

$$=\frac{4n+6}{n(n+1)}\theta^4>\frac{4\theta^4}{n}=\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)},$$

故$\hat{g}$不是$g(\theta)=\theta^2$的有效估计。