习题 5.4

1．在总体 $N(7.6,4)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求样本均值落在 $(5.6,9.6)$ 内的概率不小于 0.95，则 n 至少为多少？

解：因总体 $X\sim N(7.6,4)$，有 $\bar{X}\sim N\left(7.6,\dfrac{4}{n}\right)$，$\dfrac{\bar{X}-7.6}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则

$$P\{\bar{X}\in(5.6,9.6)\}=P\left\{-\sqrt{n}<\frac{\bar{X}-7.6}{2/\sqrt{n}}<\sqrt{n}\right\}=\Phi(\sqrt{n})-\Phi(-\sqrt{n})=2\Phi(\sqrt{n})-1\geq 0.95,$$

即 $\Phi(\sqrt{n})\geq 0.975$，$\sqrt{n}\geq 1.96$，$n\geq 3.8416$，故取 $n\geq 4$。

2．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\mu,16)$ 的样本，问 n 多大时才能使得 $P\{|\bar{X}-\mu|<1\}\geq 0.95$ 成立？

解：因总体 $X\sim N(\mu,16)$，有 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{16}{n}\right)$，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{4/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则

$$P\{|\bar{X}-\mu|<1\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{4/\sqrt{n}}\right|<\frac{\sqrt{n}}{4}\right\}=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-1\geq 0.95,$$

即 $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)\geq 0.975$，$\dfrac{\sqrt{n}}{4}\geq 1.96$，$n\geq 61.4656$，故取 $n\geq 62$。

3．由正态总体 $N(100,4)$ 抽取二个独立样本，样本均值分别为 $\bar{X},\bar{Y}$，样本容量分别为 15，20，试求 $P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>0.2\}$。

解：因 $\bar{X}\sim N\left(100,\dfrac{4}{15}\right)$，$\bar{Y}\sim N\left(100,\dfrac{4}{20}\right)$，即 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(0,\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{20}\right)$，$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{20}}}\sim N(0,1)$，故

$$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>0.2\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{4}{15}+\frac{4}{20}}}\right|>\frac{0.2}{\sqrt{\frac{4}{15}+\frac{4}{20}}}=0.29\right\}=2[1-\Phi(0.29)]=2-2\times 0.6141=0.7718.$$

4．由正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 抽取容量为 20 的样本，试求 $P\left\{10\sigma^2\leq\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\leq 30\sigma^2\right\}$。

解：因 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 相互独立，则

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(20),$$

故

$$P\left\{10\sigma^2\leq\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\leq 30\sigma^2\right\}=P\left\{10\leq\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\leq 30\right\}=0.9301-0.0318=0.8983.$$

注：利用 MATLAB 计算，命令窗口输入：chi2cdf(30,20)- chi2cdf(10,20)。这里 chi2cdf(x,n)表示自由度为 n 的 χ^2 分布在点 x 处的分布函数值。

5. 设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，经计算 $\bar{x}=9$，$s^2=5.32$，试求 $P\{|\bar{X}-\mu|<0.6\}$。

解：因 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(15)$，故

$$P\{|\bar{X}-\mu|<0.6\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<\frac{0.6}{\sqrt{5.32}/4}=1.0405=t_{0.8427}(15)\right\}=2\times0.8427-1=0.6854\text{。}$$

注：最后一步的积分利用 MATLAB 计算，命令窗口输入：2*tcdf(1.0405,15)-1。这里 tcdf(x,n)表示自由度为 n 的 t 分布在点 x 处的分布函数值。

6. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\mu,1)$ 的样本，试确定最小的常数 c，使得对任意的 $\mu\ge0$，有 $P\{|\bar{X}|<c\}\le\alpha$。

注：此题应该改为"确定最大的常数 c"。

分析：首先求使得概率 $P\{|\bar{X}|<c\}$ 达到最大值的 μ 值，再求出在该 μ 值时满足条件 $P\{|\bar{X}|<c\}\le\alpha$ 的最大常数 c。

解：因 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\right)$，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则

$$P\{|\bar{X}|<c\}=P\left\{\sqrt{n}(-c-\mu)<\frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}<\sqrt{n}(c-\mu)\right\}=\Phi(\sqrt{n}(c-\mu))-\Phi(\sqrt{n}(-c-\mu))\text{。}$$

设 $f(\mu)=\Phi(\sqrt{n}(c-\mu))-\Phi(\sqrt{n}(-c-\mu))$。令

$$f'(\mu)=-\sqrt{n}\varphi(\sqrt{n}(c-\mu))+\sqrt{n}\varphi(\sqrt{n}(-c-\mu))=0\text{，}$$

其中 $\varphi(x)$ 是标准正态分布的密度函数。可得 $\varphi(\sqrt{n}(c-\mu))=\varphi(\sqrt{n}(-c-\mu))$，由 $\varphi(x)$ 的对称性得

$$\sqrt{n}(c-\mu)=\sqrt{n}(c+\mu)\text{，}$$

即 $\mu=0$。因

$$f''(\mu)=n\varphi'(\sqrt{n}(c-\mu))-n\varphi'(\sqrt{n}(-c-\mu))\text{，}$$

且当 $x<0$ 时，$\varphi'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)<0$。可得

$$f''(0)=n\varphi'(\sqrt{n}c)-n\varphi'(-\sqrt{n}c)<0\text{，}$$

即 $\mu=0$ 时，$f(\mu)$ 达到最大值。当 $\mu=0$ 时，

$$f(0)=\Phi(\sqrt{n}c)-\Phi(-\sqrt{n}c)=2\Phi(\sqrt{n}c)-1\le\alpha\text{，}$$

即

$$\Phi(\sqrt{n}c) \le \frac{1+\alpha}{2}，\quad \sqrt{n}c \le u_{\frac{1+\alpha}{2}}，$$

故满足条件的最大常数 $c = \frac{1}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+\alpha}{2}}$。

7. 设随机变量 $X \sim F(n, n)$，证明 $P\{X < 1\} = 0.5$。

证明：因 $X \sim F(n, n)$，有 $\frac{1}{X} \sim F(n, n)$，即 X 与 $\frac{1}{X}$ 同分布，且 $X > 0$，则

$$P\{X < 1\} = P\left\{\frac{1}{X} < 1\right\} = P\{X > 1\}，$$

且显然 $P\{X < 1\} + P\{X > 1\} = 1$，故 $P\{X < 1\} = 0.5$。

8. 设 $X \sim F(n, m)$，证明 $Z = \frac{n}{m} X \Big/ \left(1 + \frac{n}{m} X\right)$ 服从贝塔分布，并指出其参数。

证明：因 $X \sim F(n, m)$，其密度函数为

$$p_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \left(1 + \frac{n}{m} x\right)^{-\frac{n+m}{2}}，\quad x > 0，$$

而 $z = \frac{n}{m} x \Big/ \left(1 + \frac{n}{m} x\right)$ 在 $x > 0$ 时严格单调增加，反函数为 $x = h(z) = \frac{m}{n} \cdot \frac{z}{1-z}$，其导数 $h'(z) = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}$，且当 $x > 0$ 时，$0 < z < 1$。则 Z 的密度函数为

$$p_Z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{z}{1-z}\right)^{\frac{n}{2}-1} \left(1 + \frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1} (1-z)^{\frac{m}{2}-1}，\quad 0 < z < 1。$$

这正是贝塔分布 $Be\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$ 的密度函数，故 Z 服从参数为 $\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$ 的贝塔分布。

9. 设 X_1, X_2 是来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，试求 $Y = \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2}\right)^2$ 的分布。

解：因 $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$，$X_2 \sim N(0, \sigma^2)$ 且相互独立，有 $X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$，$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$，则

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)，\quad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)，$$

即

$$\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)，\quad \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)。$$

再证明二者的独立性。因(X_1, X_2)服从二维正态分布，知(X_1+X_2, X_1-X_2)也服从二维正态分布，且

$$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2)=\mathrm{Cov}(X_1, X_1)-\mathrm{Cov}(X_2, X_2)=\sigma^2-\sigma^2=0,$$

可知X_1+X_2与X_1-X_2不相关，从而相互独立。可知$\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}$与$\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}$相互独立，故由$F$分布定义知

$$Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2=\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\bigg/\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}\sim F(1,1)。$$

10．设总体为$N(0,1)$，X_1, X_2为样本，试求常数k，使得

$$P\left\{\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2+(X_1+X_2)^2}>k\right\}=0.05。$$

解：因$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,1)$且相互独立，由第 9 题的结论知$\left(\dfrac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2\sim F(1,1)$，则

$$P\left\{\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2+(X_1+X_2)^2}>k\right\}=P\left\{\frac{1}{\left(\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}\right)^2+1}>k\right\}=P\left\{\left(\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}\right)^2<\frac{1}{k}-1\right\}=0.05,$$

可得

$$\frac{1}{k}-1=f_{0.05}(1,1)=\frac{1}{f_{0.95}(1,1)},$$

故

$$k=\frac{1}{\frac{1}{f_{0.95}(1,1)}+1}=\frac{1}{\frac{1}{161.45}+1}=0.9938。$$

注：此题中$\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2+(X_1+X_2)^2}$分子分母不独立，不能用分布$F(1,2)$处理。

11．设$X_1,\cdots,X_n$是来自$N(\mu_1,\sigma^2)$的样本，$Y_1,\cdots,Y_m$是来自$N(\mu_2,\sigma^2)$的样本，c, d是任意两个不为 0 的常数，证明$T=\dfrac{c(\bar{X}-\mu_1)+d(\bar{Y}-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{c^2}{n}+\dfrac{d^2}{m}}}\sim t(n+m-2)$，其中$S_w^2=\dfrac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$。

解：因$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma^2}{m}\right)$，有

$$c(\bar{X}-\mu_1)+d(\bar{Y}-\mu_2)\sim N\left(0,\frac{c^2\sigma^2}{n}+\frac{d^2\sigma^2}{m}\right),$$

则

$$U=\frac{c(\bar{X}-\mu_1)+d(\bar{Y}-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}}\sim N(0,1)\text{。}$$

又因

$$\chi_1^2=\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\text{，}\quad \chi_2^2=\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)\text{，}$$

且相互独立，则

$$\chi_1^2+\chi_2^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n+m-2)\text{，}$$

且与U相互独立，故由t分布定义知

$$T=\frac{U}{\sqrt{\frac{\chi_1^2+\chi_2^2}{n+m-2}}}=\frac{\frac{c(\bar{X}-\mu_1)+d(\bar{Y}-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}}}{\sqrt{\frac{S_w^2}{\sigma^2}}}=\frac{c(\bar{X}-\mu_1)+d(\bar{Y}-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}}\sim t(n+m-2)\text{。}$$

12．设$X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$是来自$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$，试求常数$c$，使得$T_c=c\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}$服从$t$分布，并指出分布的自由度。

解：因$\bar{X}_n\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$且相互独立，有$X_{n+1}-\bar{X}_n\sim N\left(0,\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)$，即

$$U=\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)\text{，}$$

又因$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且与$X_{n+1}-\bar{X}_n$相互独立，则由$t$分布定义知

$$T=\frac{U}{\sqrt{S_n^2/(n-1)}}=\frac{\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\frac{S_n^2}{\sigma^2}}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}\sim t(n-1)\text{，}$$

故当$c=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$时，$T_c=c\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}$服从自由度为$n-1$的$t$分布。

13．设从两个方差相等的正态总体中分别抽取容量为15, 20的样本，其样本方差分别为S_1^2,S_2^2，试求$P\{S_1^2/S_2^2>2\}$。

解：因

$$\chi_1^2=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}=\frac{14S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(14)，\quad \chi_2^2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{19S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(19)，$$

且相互独立，则由 F 分布定义知

$$F=\frac{\chi_1^2/14}{\chi_2^2/19}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(14,19)，$$

故

$$P\{S_1^2/S_2^2>2\}=P\{F>2\}=0.0798。$$

注：最后一步的积分利用 MATLAB 计算，命令窗口输入：1-fcdf(2,14,19)。

14．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，求

$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$$

的分布。

解：因 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 相互独立且都服从 $N(0,\sigma^2)$，有

$$\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1),\quad i=1,2,\cdots,15，$$

则由 χ^2 分布的构成可知

$$\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10)，\quad \frac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)，$$

且相互独立，故由 F 分布的构成可知

$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{\sigma^2}\Big/10}{\dfrac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{\sigma^2}\Big/5}\sim F(10,5)。$$

15．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{17})$ 是来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{X}$ 与 S^2 分别是样本均值与样本方差。求 k，使得 $P\{\bar{X}>\mu+kS\}=0.95$。

解：因自由度 $n=17$，有

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{17}}\sim t(16)，$$

则

$$P\{\bar{X}>\mu+kS\}=P\left\{T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{17}}>\sqrt{17}k\right\}=0.95，$$

即

$$\sqrt{17}k=-t_{0.95}(16)=-1.7459，$$

故

$$k=-0.4234。$$

16．设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$， $\sigma^2>0$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$， $(n\ge 1)$，其样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$ 的数学期望。

解：因

$$E(\bar{X})=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}E(X_i)=\mu，\quad \mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{\sigma^2}{2n}，$$

且

$$\begin{aligned}Y&=\sum_{i=1}^{n}[X_i^2+X_{n+i}^2+2X_iX_{n+i}-4\bar{X}(X_i+X_{n+i})+4\bar{X}^2]\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+X_{n+i}^2)+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4\bar{X}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})+4n\bar{X}^2\\&=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4\bar{X}\cdot 2n\bar{X}+4n\bar{X}^2=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4n\bar{X}^2，\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i^2)+2\sum_{i=1}^{n}E(X_iX_{n+i})-4nE(\bar{X}^2)\\&=\sum_{i=1}^{2n}[\mathrm{Var}(X_i)+(EX_i)^2]+2\sum_{i=1}^{n}E(X_i)E(X_{n+i})-4n[\mathrm{Var}(\bar{X})+(E\bar{X})^2]\\&=2n(\sigma^2+\mu^2)+2n\mu^2-4n\left(\frac{\sigma^2}{2n}+\mu^2\right)=2(n-1)\sigma^2。\end{aligned}$$

17．证明：若随机变量 $T\sim t(k)$，则对 $r<k$ 有

$$E(T^r)=\begin{cases}0, & r\text{为奇数};\\ \dfrac{k^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-r}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & r\text{为偶数}.\end{cases}$$

并由此写出 $E(T)$， $\mathrm{Var}(T)$。

证明：因 T 的密度函数为

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}，\quad -\infty<x<+\infty，$$

则

$$E(T^r)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx。$$

这是一个无穷区间反常积分。当 $x\to\infty$ 时，

$$x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\sim x^r\left(\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}=k^{\frac{k+1}{2}}x^{r-k-1}，$$

对于$r<k$，有$r-k-1<-1$，则$\int_{-\infty}^{-1} x^{r-k-1}dx$与$\int_{1}^{+\infty} x^{r-k-1}dx$都收敛，即$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx$收敛，$E(T^r)$存在。反之，若$r\geq k$，有$r-k-1\geq -1$，则$\int_{1}^{+\infty} x^{r-k-1}dx$发散，即$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx$发散，$E(T^r)$不存在。

当r为奇数时，$x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$为奇函数，可知$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx=0$，即$E(T^r)=0$。

当r为偶数时，$x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$为偶函数，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx=2\int_{0}^{+\infty} x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx。$$

令$t=\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-1}$，$x>0$，有$x=k^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$，$dx=-\frac{1}{2}k^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$，且当$x=0$时，$t=1$；当$x\to+\infty$时，$t\to 0$。可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx=2\int_{1}^{0} k^{\frac{r}{2}}t^{-\frac{r}{2}}(1-t)^{\frac{r}{2}}\cdot t^{\frac{k+1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)k^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=k^{\frac{r+1}{2}}\int_{0}^{1} t^{\frac{k-r}{2}-1}(1-t)^{\frac{r-1}{2}}dt$$

$$=k^{\frac{r+1}{2}}\beta\left(\frac{k-r}{2},\frac{r+1}{2}\right)=k^{\frac{r+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{k-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

则

$$E(T^r)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot k^{\frac{r+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{k-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}=\frac{k^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{k-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}。$$

故当$r\geq k$时，$E(T^r)$不存在；当$r<k$时，

$$E(T^r)=\begin{cases}0, & r\text{为奇数};\\ \dfrac{k^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-r}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & r\text{为偶数}.\end{cases}$$

取$r=1$，r为奇数。当$k=1$时，$E(T)$不存在；当$k>1$时，$E(T)=0$。

取$r=2$，r为偶数。当$k\leq 2$时，$E(T^2)$不存在，即$\mathrm{Var}(T)$不存在；当$k>2$时，

$$\mathrm{Var}(T)=E(T^2)=\frac{k\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=\frac{k\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\frac{k-2}{2}\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}=\frac{k}{k-2}。$$

18．证明：若随机变量 $F \sim F(k,m)$，则当 $-\frac{k}{2} < r < \frac{m}{2}$ 时，有

$$E(F^r) = \frac{m^r \Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{k^r \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}。$$

由此写出 $E(F)$， $\mathrm{Var}(F)$。

证明：因 F 的密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-\frac{k+m}{2}}, \quad x>0,$$

则

$$E(F^r) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{k}{2}+r-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-\frac{k+m}{2}} dx。$$

令 $t=\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-1}$，有 $x=\frac{m}{k}\left(\frac{1}{t}-1\right)$，$dx=-\frac{m}{k}\frac{1}{t^2}dt$，且当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x\to+\infty$ 时，$t\to 0$。可得

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{k}{2}+r-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-\frac{k+m}{2}} dx = -\int_1^0 \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r-1}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{k}{2}+r-1}\cdot t^{\frac{k+m}{2}}\cdot\frac{m}{k}\frac{1}{t^2}dt = \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-r-1}(1-t)^{\frac{k}{2}+r-1}dt,$$

当 $-\frac{k}{2} < r < \frac{m}{2}$ 时，有 $\frac{m}{2}-r>0$ 且 $\frac{k}{2}+r>0$，这是贝塔函数，即

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{k}{2}+r-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-\frac{k+m}{2}} dx = \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}\beta\left(\frac{m}{2}-r,\frac{k}{2}+r\right) = \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{m+k}{2}\right)},$$

故当 $r\le -\frac{k}{2}$ 或 $r\ge\frac{m}{2}$ 时，$E(F^r)$ 不存在；当 $-\frac{k}{2} < r < \frac{m}{2}$ 时，

$$E(F^r) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{m+k}{2}\right)} = \frac{m^r\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{k^r\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}。$$

取 $r=1$，当 $m\le 2$ 时，$E(F)$ 不存在；当 $m>2$ 时，

$$E(F) = \frac{m\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{m\cdot\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)} = \frac{m}{m-2}。$$

取 $r=2$，当 $m\le 4$ 时，$E(F^2)$ 不存在，即 $\mathrm{Var}(F)$ 不存在；当 $m>4$ 时，

$$E(F^2)=\frac{m^2\Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{k^2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{m^2\cdot\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{k^2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}=\frac{m^2(k+2)}{k(m-2)(m-4)},$$

故

$$\mathrm{Var}(F)=E(F^2)-[E(F)]^2=\frac{m^2(k+2)}{k(m-2)(m-4)}-\left(\frac{m}{m-2}\right)^2=\frac{2m^2(m+k-2)}{k(m-2)^2(m-4)}。$$

19．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某连续总体的一个样本．该总体的分布函数 $F(x)$ 是连续严格单增函数，证明：统计量 $T=-2\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_i)$ 服从 $\chi^2(2n)$。

证明：因 $F(X_i)\in(0,1)$，有 $Y_i=-2\ln F(X_i)\in(0,+\infty)$，可知 Y_i 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{-2\ln F(X_i)\le y\}=P\{X_i\ge F^{-1}(e^{-\frac{y}{2}})\}=1-F[F^{-1}(e^{-\frac{y}{2}})]=1-e^{-\frac{y}{2}},\quad y>0,$$

即 Y_i 服从指数分布 $Exp\left(\frac{1}{2}\right)$，也就是服从自由度为 2 的 χ^2 分布 $\chi^2(2)$。因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，有 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，故由 χ^2 分布的可加性知 $T=-2\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_i)$ 服从 $\chi^2(2n)$。

20．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是样本方差，试求满足 $P\left\{\frac{S_n^2}{\sigma^2}\le 1.5\right\}\ge 0.95$ 的最小 n 值。

解：因 $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，有

$$P\left\{\frac{S_n^2}{\sigma^2}\le 1.5\right\}=P\left\{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\le 1.5(n-1)\right\}\ge 0.95,$$

则 $1.5(n-1)\ge\chi^2_{0.95}(n-1)$，即 $1.5\ge\frac{\chi^2_{0.95}(n-1)}{n-1}$。因 $\frac{\chi^2_{0.95}(k)}{k}$ 单调下降，且

$$\frac{\chi^2_{0.95}(25)}{25}=1.5061,\quad\frac{\chi^2_{0.95}(26)}{26}=1.4956,$$

故 $n-1\ge 26$，即 n 至少为 27。

21．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布服从 $N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，记 $\xi=\frac{X_1-\bar{X}}{S}$。试找出 ξ 与 t 分布的联系，因而定出 ξ 的密度函数（提示：作正交变换 $Y_1=\sqrt{n}\bar{X}$，$Y_2=\sqrt{\frac{n}{n-1}}(X_1-\bar{X})$，$Y_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j$，$i=3,\cdots,n$）。

解：因

$$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}(1,1,\cdots,1)\vec{X},$$

$$X_1-\bar{X}=X_1-\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}(n-1,-1,\cdots,-1)\vec{X}\text{，}$$

分别取α_1与α_2为上面得到的两个n维向量（写成列向量）单位化之后的结果，即

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\text{，}\quad\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\begin{pmatrix}n-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}\text{，}$$

有

$$\sqrt{n}\bar{X}=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\cdots,1)\vec{X}=\alpha_1^T\vec{X}\text{，}$$

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}}(X_1-\bar{X})=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(n-1,-1,\cdots,-1)\vec{X}=\alpha_2^T\vec{X}\text{，}$$

注意到α_1与α_2都是单位向量且正交，将α_1,α_2扩充为R^n中一组标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$，再令

$$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)\text{，}$$

C为正交矩阵，作正交变换$\vec{X}=C\vec{Y}$，有

$$\vec{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}=C^T\vec{X}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}\vec{X}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\vec{X}\\\alpha_2^T\vec{X}\\\alpha_3^T\vec{X}\\\vdots\\\alpha_n^T\vec{X}\end{pmatrix}\text{，}$$

则$Y_i=\alpha_i^T\vec{X},\quad i=1,2,3,\cdots,n$，特别是

$$Y_1=\alpha_1^T\vec{X}=\sqrt{n}\bar{X}\text{，}\quad Y_2=\alpha_2^T\vec{X}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}(X_1-\bar{X})\text{，}$$

可化二次型为标准形

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2=Y_2^2+Y_3^2+\cdots+Y_n^2\text{，}$$

并且$Y_1,Y_2,Y_3,\cdots,Y_n$相互独立都服从方差同为σ^2的正态分布，另外

$$E(Y_i)=\alpha_i^TE(\vec{X})=\alpha_i^T\begin{pmatrix}\mu\\\mu\\\vdots\\\mu\end{pmatrix}=\alpha_i^T\cdot\sqrt{n}\mu\alpha_1=\sqrt{n}\mu\alpha_i^T\alpha_1\text{，}$$

即

$$E(Y_1)=\sqrt{n}\mu\text{，}\ E(Y_2)=E(Y_3)=\cdots=E(Y_n)=0\text{，}$$

可知$Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$相互独立都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，有

$$\frac{Y_2}{\sigma}\sim N(0,1)\text{，}\ \left(\frac{Y_3}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_n}{\sigma}\right)^2=\frac{Y_3^2+\cdots+Y_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-2)\text{，}$$

且相互独立。因

$$\xi=\frac{X_1-\bar{X}}{S}=\frac{\sqrt{\frac{n-1}{n}}Y_2}{\sqrt{\frac{1}{n-1}(Y_2^2+Y_3^2+\cdots+Y_n^2)}}=\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{Y_2}{\sqrt{Y_2^2+Y_3^2+\cdots+Y_n^2}}\text{，}$$

根据t分布的构成可知

$$T=\frac{\frac{Y_2}{\sigma}}{\sqrt{\frac{Y_3^2+\cdots+Y_n^2}{(n-2)\sigma^2}}}=\sqrt{n-2}\frac{Y_2}{\sqrt{Y_3^2+\cdots+Y_n^2}}\sim t(n-2)\text{，}$$

可得

$$\xi=\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{Y_2}{\sqrt{Y_2^2+Y_3^2+\cdots+Y_n^2}}=\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\frac{Y_2}{\sqrt{Y_3^2+\cdots+Y_n^2}}}{\sqrt{\frac{Y_2^2}{Y_3^2+\cdots+Y_n^2}+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\frac{T}{\sqrt{n-2}}}{\sqrt{\frac{T^2}{n-2}+1}}\text{，}$$

即$\xi=\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{T}{\sqrt{T^2+n-2}}$，且$T\sim t(n-2)$。这样可根据随机变量函数由$T$的分布得出$\xi$的分布。因

$$p_T(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{(n-2)\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}\text{，}$$

函数$y=g(t)=\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+n-2}}$严格单增（导数大于 0），反函数$t=h(y)=\frac{y\sqrt{n(n-2)}}{\sqrt{(n-1)^2-ny^2}}$，其导数为

$h'(y)=\sqrt{n(n-2)}(n-1)^2[(n-1)^2-ny^2]^{-\frac{3}{2}}$，且$-\infty<t<+\infty$时，$-\frac{n-1}{\sqrt{n}}<y<\frac{n-1}{\sqrt{n}}$，故

$$p_\xi(y)=p_T[h(y)]\cdot|h'(y)|$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{(n-2)\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1+\frac{ny^2}{(n-1)^2-ny^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n(n-2)}(n-1)^2[(n-1)^2-ny^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{n}(n-1)^{3-n}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot[(n-1)^2-ny^2]^{\frac{n-4}{2}},\quad -\frac{n-1}{\sqrt{n}}<y<\frac{n-1}{\sqrt{n}}。$$

22．设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 相互独立， X_i 服从 $\chi^2(n_i)$， $i=1,2,\cdots,m$。令

$$U_1=\frac{X_1}{X_1+X_2}, U_2=\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3},\cdots,U_{m-1}=\frac{X_1+\cdots+X_{m-1}}{X_1+\cdots+X_m}。$$

证明：$U_1,\cdots,U_{m-1}$ 相互独立，且 U_i 服从 $Be\left(\frac{n_1+\cdots+n_i}{2},\frac{n_{i+1}}{2}\right)$， $i=1,\cdots,m-1$。（提示：令 $U_m=X_1+\cdots+X_m$，作变换 $X_1=U_1\cdots U_m, X_2=U_2\cdots U_m-U_1\cdots U_m,\cdots,X_m=U_m-U_{m-1}U_m$）。

证明：由题意得 $(X_1, X_2,\cdots,X_m)$ 的联合密度函数为

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\prod_{i=1}^m\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n_i}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)}x_i^{\frac{n_i}{2}-1}e^{-\frac{x_i}{2}}I_{x_i>0}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m n_i}}{\prod_{i=1}^m\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)}\prod_{i=1}^m x_i^{\frac{n_i}{2}-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m x_i}I_{x_1,x_2,\cdots,x_m>0},$$

因

$$U_1=\frac{X_1}{X_1+X_2}, U_2=\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3},\cdots,U_{m-1}=\frac{X_1+\cdots+X_{m-1}}{X_1+\cdots+X_m}。$$

且 $X_i>0,\quad i=1,2,\cdots,m$， 则 $0<U_i<1,\quad i=1,2,\cdots,m-1$。令 $U_m=X_1+\cdots+X_m$， 有 $U_m>0$， 且

$$X_1=U_1\cdots U_m, X_2=U_2\cdots U_m-U_1\cdots U_m,\cdots,X_m=U_m-U_{m-1}U_m。$$

对于变换 $x_1=u_1\cdots u_m, x_2=u_2\cdots u_m-u_1\cdots u_m,\cdots,x_m=u_m-u_{m-1}u_m$， 引入中间变量，设

$$y_1=u_1\cdots u_m, y_2=u_2\cdots u_m,\cdots,y_m=u_m,$$

有 $x_1=y_1, x_2=y_2-y_1,\cdots,x_m=y_m-y_{m-1}$。这样由 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 到 $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 的雅可比行列式为

$$J=\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\right|=\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\right|\cdot\left|\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\-1&1&0&\cdots&0&0\\0&-1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}u_2\cdots u_m&u_1u_3\cdots u_m&u_1u_2u_4\cdots u_m&\cdots&u_1\cdots u_{m-2}u_m&u_1\cdots u_{m-1}\\0&u_3\cdots u_m&u_2u_4\cdots u_m&\cdots&u_2\cdots u_{m-2}u_m&u_2\cdots u_{m-1}\\0&0&u_4\cdots u_m&\cdots&u_3\cdots u_{m-2}u_m&u_3\cdots u_{m-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&u_m&u_{m-1}\\0&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}$$

$$=u_2u_3^2\cdots u_m^{m-1}。$$

可得$(U_1, U_2, \cdots, U_m)$的联合密度函数为

$$p_U(u_1, u_2, \cdots, u_m) = p_X(x_1(u_1, \cdots, u_m), x_2(u_1, \cdots, u_m), \cdots, x_m(u_1, \cdots, u_m)) \cdot |J|$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} n_i}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} (u_1 u_2 \cdots u_m)^{\frac{n_1}{2}-1} \prod_{i=2}^{m} (u_i \cdots u_m - u_{i-1} u_i \cdots u_m)^{\frac{n_i}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}u_m} I_{0<u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}<1, u_m>0} \cdot u_2 u_3^2 \cdots u_m^{m-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} n_i}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} u_1^{\frac{n_1}{2}-1} (1-u_1)^{\frac{n_2}{2}-1} I_{0<u_1<1} \cdot u_2^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} (1-u_2)^{\frac{n_3}{2}-1} I_{0<u_2<1} \cdots u_{m-1}^{\frac{n_1+\cdots+n_{m-1}}{2}-1} (1-u_{m-1})^{\frac{n_m}{2}-1} I_{0<u_{m-1}<1}$$

$$\cdot u_m^{\frac{n_1+\cdots+n_m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}u_m} I_{u_m>0}\text{。}$$

由于$(U_1, U_2, \cdots, U_m)$的联合密度函数$p_U(u_1, u_2, \cdots, u_m)$可分离变量，故$U_1, U_2, \cdots, U_m$相互独立，且$U_i$服从贝塔分布$Be\left(\frac{n_1+\cdots+n_i}{2}, \frac{n_{i+1}}{2}\right)$，$i = 1, \cdots, m-1$；$U_m$服从$\chi^2$分布$\chi^2(n_1+\cdots+n_m)$。