习题 6.2

1. 从一批电子元件中抽取 8 个进行寿命测试，得到如下数据（单位：h）：

   1050，1100，1130，1040，1250，1300，1200，1080，

   试对这批元件的平均寿命以及寿命分布的标准差给出矩估计．

解：平均寿命μ的矩估计$\hat{\mu}=\bar{x}=1143.75$；标准差$\sigma$的矩估计$\hat{\mu}=s^*=89.8523$．

2. 设总体$X\sim U(0,\theta)$，现从该总体中抽取容量为 10 的样本，样本值为：

   0.5，1.3，0.6，1.7，2.2，1.2，0.8，1.5，2.0，1.6，

   试对参数θ给出矩估计．

解：因$X\sim U(0,\theta)$，有$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$，即$\theta=2E(X)$，故θ的矩估计$\hat{\theta}=2\bar{x}=2\times1.34=2.68$．

3. 设总体分布列如下，$X_1,\cdots,X_n$是样本，试求未知参数的矩估计．

   （1）$P\{X=k\}=\dfrac{1}{N}$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$，N（正整数）是未知参数；

   （2）$P\{X=k\}=(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$，$k=2,3,\cdots$，$0<\theta<1$．

解：（1）因$E(X)=\dfrac{1}{N}[0+1+\cdots+(N-1)]=\dfrac{N-1}{2}$，即$N=2E(X)+1$，故$N$的矩估计$\hat{N}=2\overline{X}+1$；

（2）因
$$E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}=\theta^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{d^2}{d\theta^2}(1-\theta)^k=\theta^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\sum_{k=2}^{+\infty}(1-\theta)^k\right]$$
$$=\theta^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{(1-\theta)^2}{1-(1-\theta)}\right]=\theta^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\theta}-2+\theta\right)=\theta^2\cdot\frac{2}{\theta^3}=\frac{2}{\theta},$$

则$\theta=\dfrac{2}{E(X)}$，

故θ的矩估计$\hat{\theta}=\dfrac{2}{\overline{X}}$．

4. 设总体密度函数如下，$X_1,\cdots,X_n$是样本，试求未知参数的矩估计．

   （1）$p(x;\theta)=\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x)$，$0<x<\theta$，$\theta>0$；

   （2）$p(x;\theta)=(\theta+1)x^{\theta}$，$0<x<1$，$\theta>0$；

   （3）$p(x;\theta)=\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}$，$0<x<1$，$\theta>0$；

   （4）$p(x;\theta,\mu)=\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}$，$x>\mu$，$\theta>0$．

解：（1）因$E(X)=\displaystyle\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx=\frac{2}{\theta^2}\left(\theta\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\theta}=\frac{\theta}{3}$，即$\theta=3E(X)$，故$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=3\overline{X}$；

（2）因$E(X)=\displaystyle\int_0^1x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=(\theta+1)\cdot\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\Bigg|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，即$\theta=\dfrac{2E(X)-1}{1-E(X)}$，

故θ的矩估计$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$；

（3）因 $E(X)=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\sqrt{\theta}\cdot\left.\dfrac{x^{\sqrt{\theta}+1}}{\sqrt{\theta}+1}\right|_0^1=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，即 $\theta=\left[\dfrac{E(X)}{1-E(X)}\right]^2$，

故θ的矩估计 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$；

（4）因 $E(X)=\int_\mu^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\int_\mu^{+\infty}x\cdot(-1)d\,e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}=-x\,e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_\mu^{+\infty}+\int_\mu^{+\infty}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu-\theta e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_\mu^{+\infty}=\mu+\theta$，

$$E(X^2)=\int_\mu^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\int_\mu^{+\infty}x^2\cdot(-1)d\,e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}=-x^2\,e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_\mu^{+\infty}+\int_\mu^{+\infty}2x\,e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu^2+2\theta E(X)$$

$=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2$，

则 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\theta^2$，即 $\theta=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$，$\mu=E(X)-\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$，

故θ的矩估计 $\hat{\theta}=S^*$，$\hat{\mu}=\overline{X}-S^*$.

5. 设总体为 $N(\mu, 1)$，现对该总体观测 n 次，发现有 k 次观测值为正，使用频率替换方法求μ的估计.

解：因 $p=P\{X>0\}=P\{X-\mu>-\mu\}=1-\Phi(-\mu)=\Phi(\mu)$，即 $\mu=\Phi^{-1}(p)$，

故μ的矩估计 $\hat{\mu}=\Phi^{-1}(\hat{p})=\Phi^{-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

6. 甲、乙两个校对员彼此独立对同一本书的样稿进行校对，校完后，甲发现 a 个错字，乙发现 b 个错字，其中共同发现的错字有 c 个，试用矩法给出如下两个未知参数的估计：

（1）该书样稿的总错字个数；

（2）未被发现的错字数.

解：（1）设 N 为该书样稿总错别字个数，且 A、B 分别表示甲、乙发现错别字，有 A 与 B 相互独立，

则 $P(AB)=P(A)P(B)$，使用频率替换方法，即 $\hat{p}_{AB}=\dfrac{c}{N}=\hat{p}_A\hat{p}_B=\dfrac{a}{N}\cdot\dfrac{b}{N}$，得 $N=\dfrac{ab}{c}$，

故总错字个数 N 的矩估计 $\hat{N}=\dfrac{ab}{c}$；

（2）设 k 为未被发现的错字数，因 $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，

使用频率替换方法，即 $\hat{p}_{\overline{A}\overline{B}}=\dfrac{k}{N}=1-\hat{p}_A-\hat{p}_B+\hat{p}_{AB}=1-\dfrac{a}{N}-\dfrac{b}{N}+\dfrac{c}{N}$，即 $k=N-a-b+c$，

故未被发现的错字数 k 的矩估计 $\hat{k}=\hat{N}-a-b+c=\dfrac{ab}{c}-a-b+c$.

7. 设总体 X 服从二项分布 $b(m, p)$，其中 m, p 为未知参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为 X 的一个样本，求 m 与 p 的矩估计.

解：因 $E(X)=mp$，$\mathrm{Var}(X)=mp(1-p)$，有 $1-p=\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)}$，

则 $p=1-\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)}$，$m=\dfrac{E(X)}{p}=\dfrac{[E(X)]^2}{E(X)-\mathrm{Var}(X)}$，

故 m 的矩估计 $\hat{m}=\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-S^{*2}}$，$p$ 的矩估计 $\hat{p}=1-\dfrac{S^{*2}}{\overline{X}}$.