数理统计第七章测验题

考试时间2022年6月5日，答卷时间120分钟，总分100分，出题人-李绍文

1．（14 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，检验假设 $H_0: \mu = 6$ vs $H_1: \mu \neq 6$，拒绝域取为 $W = \{|\bar{x} - 6| \geq c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为0.05，并求该检验在 $\mu = 4$ 处犯第二类错误的概率。

解：统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 6}{2/\sqrt{16}} = 2(\bar{X} - 6) 。$$

可得

$$\alpha = P\{|\bar{X} - 6| \geq c \mid \mu = 6\} = P\{|U| \geq 2c \mid \mu = 6\} = 2 - 2\Phi(2c) = 0.05 ，$$

则

$$\Phi(2c) = 0.975 ，\ 2c = 1.96 ，\ c = 0.98 。$$

当 $\mu = 8$ 时，

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 2(\bar{X} - 4) \sim N(0, 1) ，$$

故

$$\beta = P\{|\bar{X} - 6| < 0.98 \mid \mu = 4\} = P\{1.02 < \bar{X} - 4 < 2.98 \mid \mu = 4\}$$

$$= P\{2.04 < U < 5.96 \mid \mu = 4\} = \Phi(5.96) - \Phi(2.04) = 0.0207 。$$

2．（12 分）某袋装食品正常情况下每袋重量（克）服从 $N(500, 100)$，现抽取25袋测得平均重量为495.3克。问这种袋装食品是否重量不足？请写出假设、统计量、拒绝域，并求检验的 p 值。（$\alpha = 0.05$）

解：单个正态总体，已知 σ^2，检验 μ，用 U 检验法。

假设 $H_0: \mu \geq 500$ vs $H_1: \mu < 500$。统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - 500}{\sigma/\sqrt{n}}$。拒绝域 $W = \{u \leq -1.64\}$。

因 $\bar{x} = 495.3$，$\sigma = 10$，$n = 25$，则检验统计量观测值

$$u = \frac{495.3 - 500}{10/\sqrt{25}} = -2.35 \in W ，$$

故拒绝 H_0。可以认为这种袋装食品重量不够。并且左侧检验的 p 值

$$p = P\{U \le -2.35\} = \Phi(-2.35) = 1 - 0.9906 = 0.0094 < \alpha = 0.05 \text{。}$$

3．（12 分）两批钢丝抗断强度都服从正态分布。从第一批中取 12 根，测得样本方差 $s_x^2 = 10.1^2$；从第二批中取 16 根，测得样本方差 $s_y^2 = 9.5^2$。试比较两批钢丝抗断力的方差是否有显著差异？请写出假设、统计量、拒绝域，并求检验的 p 值。（$\alpha = 0.05$）

解：两个正态总体，检验方差，检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，用 F 检验法。

假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$，统计量 $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2}$。$W = \{f \le 0.30 \text{ 或 } f \ge 3.01\}$。

因 $s_x^2 = 10.1^2$，$s_y^2 = 9.5^2$，则检验统计量观测值

$$f = \frac{10.1^2}{9.5^2} \approx 1.13 \notin W \text{，}$$

故接受 H_0。可以认为抗断力的方差没有显著差异。并且双侧检验的 p 值

$$p = 2P\{f \ge 1.13\} = 0.8 > \alpha = 0.05 \text{。}$$

4．（12 分）设某种电子元件平均寿命服从指数分布。随机抽取 5 个元件，测得失效时间（小时）平均值为 $\bar{x} = 4423$。检验这种元件的平均寿命是否不小于 6000 小时。请写出假设、统计量、拒绝域，并求检验的 p 值。（$\alpha = 0.05$）

解：总体服从指数分布，用 χ^2 检验法。

假设 $H_0: \theta \ge 6000$ vs $H_1: \theta < 6000$，统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\bar{X}}{6000}$，拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 3.94\}$。

因 $\bar{x} = 4462.6$，$n = 5$，则检验统计量观测值

$$\chi^2 = \frac{2 \times 5 \times 4423}{6000} = 7.37 \notin W \text{，}$$

故接受 H_0。可以认为平均寿命不小于 6000 小时。并且左侧检验的 p 值

$$p = P\{\chi^2 \le 7.37\} = 0.31 > \alpha = 0.05 \text{。}$$

5．（12 分）掷一枚硬币 100 次，结果正面出现了 65 次，能否认为这枚硬币均匀？请写出假设、统计量、拒绝域，并求检验的 p 值。（$\alpha = 0.05$）

解：比例 p 的假设检验，大样本场合。

假设 $H_0: p=0.5$ vs $H_1: p\neq 0.5$，统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.25}{n}}}$，拒绝域 $W=\{|u|\geq 1.96\}$。

因 $\bar{x}=\dfrac{65}{100}=0.65$，$n=100$，则检验统计量观测值

$$u=\frac{0.65-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.25}{100}}}=3\in W \text{ 或 } u=\frac{0.65-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.65\times 0.35}{100}}}=3.145\in W,$$

故拒绝 H_0。可以认为这枚硬币不均匀。双侧检验的 p 值

$$p=2P\{U\geq 3\}=0.0026<\alpha=0.05 \text{ 或 } p=2P\{U\geq 3.145\}=0.0016。$$

6. （14 分）总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本。求检验 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ 的似然比检验统计量 Λ，并判断 Λ 与 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 是否存在函数关系。

解： 似然函数

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

有 μ 和 σ^2 两个未知参数，μ 与 σ^2 的最大似然估计分别为 $\bar{X}$ 与 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，当 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ 成立时，μ 的最大似然估计为 $\hat{\mu}=\bar{X}$。

对于简单原假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，似然比检验统计量

$$\Lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{L(\bar{X},\hat{\sigma}^2)}{L(\bar{X},\sigma_0^2)}=\frac{\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\hat{\sigma}^n}e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma_0^n}e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}$$

$$=\left[\frac{\sigma_0^2}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right]^{\frac{n}{2}}e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2-\frac{n}{2}}=\left[\frac{1}{n}\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right]^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{1}{2}\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}-\frac{n}{2}}=\left(\frac{\chi^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{\chi^2-n}{2}}。$$

故 Λ 与 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 存在函数关系。

7. （12 分）掷一枚骰子 60 次，结果如下

点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	10	5	7	17	6	15

检验这枚骰子是否均匀。请写出假设、统计量、拒绝域，并求检验的 p 值。（$\alpha = 0.05$）

解：假设 $H_0: p_i = \frac{1}{6},\quad i = 1, 2, \cdots, 6$，统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(r-1)$，拒绝域 $W = \{\chi^2 \geq \chi^2_{0.95}(5)\} = \{\chi^2 \geq 11.0705\}$，

$$\chi^2 = \frac{0^2}{10} + \frac{5^2}{10} + \frac{3^2}{10} + \frac{7^2}{10} + \frac{4^2}{10} + \frac{5^2}{10} = 12.4 \in W,$$

故拒绝 H_0。可以认为这枚骰子不均匀。并且右侧检验的 p 值

$$p = P\{\chi^2 \geq 12.4\} = 0.03 < \alpha = 0.05。$$

8．（12 分）为了检验性别（男或女）与色觉（正常或色盲）有无关系，随机抽取 1000 人按性别及色觉两个属性分类，得二维列联表

色觉 / 性别	正常	色盲
男	535	65
女	382	18

检验二者有无显著关系。请写出假设、统计量、拒绝域，并求检验的 p 值。（$\alpha = 0.05$）

解：列联表独立性检验，用 χ^2 检验法。

假设 $H_0: p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j},\quad i = 1, 2; j = 1, 2$，检验统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} \sim \chi^2(1)$，

右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \geq 3.8145\}$。检验统计量观测值

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} = 12.6482 \in W,$$

故拒绝 H_0。可以认为性别与色觉有显著关系。并且右侧检验的 p 值

$$p = P\{\chi^2 \geq 12.6482\} = 0.0004 < \alpha = 0.05。$$

附录：$\Phi(1.64) = 0.95$，$\Phi(1.96) = 0.975$，$\Phi(2.04) = 0.9793$，$\Phi(2.35) = 0.9906$，$\Phi(3) = 0.9987$，$\Phi(3.145) = 0.9992$；当 $x \geq 4$ 时，$\Phi(x) \approx 1$；$\chi^2_{0.95}(1) = 3.8415$，$\chi^2_{0.9996}(1) = 12.65$，$\chi^2_{0.95}(5) = 11.0705$，$\chi^2_{0.97}(5) = 12.37$，$\chi^2_{0.05}(10) = 3.94$，$\chi^2_{0.31}(10) = 7.37$，$\chi^2_{0.95}(10) = 18.307$，$f_{0.975}(11, 15) = 3.01$，$f_{0.975}(15, 11) = 3.33$，$f_{0.60}(11, 15) = 1.13$。