习题 7.3

1．从一批服从指数分布的产品中抽取 10 个进行寿命测试，观测值如下（单位：h）：

1643　1629　426　132　1522　432　1759　1074　528　283

根据这批数据能否认为其平均寿命不低于 1100 h（取$\alpha = 0.05$）？

解：设这批产品的寿命 $X \sim Exp(1/\theta)$，假设 H_0：$\theta = 1100$　vs　H_1：$\theta < 1100$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\overline{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_\alpha(2n) = \chi^2_{0.05}(20) = 10.8508$，左侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 10.8508\}$，

因 $\bar{x} = 942.8$，$n = 10$，$\theta = 1100$，

则 $\chi^2 = \dfrac{2\times 10\times 942.8}{1100} = 17.1418 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \le 17.1418\} = 0.3563 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为其平均寿命不低于 1100 h.

2．某厂一种元件平均使用寿命为 1200 h，偏低，现厂里进行技术革新，革新后任选 8 个元件进行寿命试验，测得寿命数据如下：

2686　2001　2082　792　1660　4105　1416　2089

假定元件寿命服从指数分布，取$\alpha = 0.05$，问革新后元件的平均寿命是否有明显提高？

解：设革新后元件的寿命 $X \sim Exp(1/\theta)$，假设 H_0：$\theta = 1200$　vs　H_1：$\theta > 1200$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\overline{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{1-\alpha}(2n) = \chi^2_{0.95}(16) = 26.2962$，右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge 26.2962\}$，

因 $\bar{x} = 2103.875$，$n = 8$，$\theta = 1200$，

则 $\chi^2 = \dfrac{2\times 8\times 2103.875}{1200} = 28.0517 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 28.0517\} = 0.0312 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为革新后元件的平均寿命有明显提高.

3．有人称某地成年人中大学毕业生比例不低于 30%，为检验之，随机调查该地 15 名成年人，发现有 3 名大学毕业生，取$\alpha = 0.05$，问该人看法是否成立？并给出检验的 p 值.

解：设该地 n 名成年人中大学毕业生人数为 $n\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，有 $n\overline{X} \sim b(n,\, p)$，

假设 H_0：$p = 0.3$　vs　H_1：$p < 0.3$，

选取统计量 $n\overline{X} \sim b(n,\, p)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 15$，$p = 0.3$，

有 $\sum\limits_{k=0}^{1} C_{15}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{15-k} = 0.0353 < 0.05 < \sum\limits_{k=0}^{2} C_{15}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{15-k} = 0.1268$，左侧拒绝域 $W = \{n\bar{x} \le 1\}$，

因 $n\bar{x} = 3 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{n\overline{X} \le 3\} = \sum\limits_{k=0}^{3} C_{15}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{15-k} = 0.2969$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为该人看法成立.

4．某大学随机调查 120 名男同学，发现有 50 人非常喜欢看武侠小说，而随机调查的 85 名女同学中有 23 人喜欢，用大样本检验方法在$\alpha = 0.05$ 下确认：男女同学在喜爱武侠小说方面有无显著差异？并给出检验的 p 值.

解：设 n_1 名男同学中有 $n_1\overline{X}=\sum_{i=1}^{n_1}X_i$ 人喜欢看武侠小说，n_2 名女同学中有 $n_2\overline{Y}=\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$ 人喜欢看武侠小说，

有 $n_1\overline{X}\sim B(n_1,\,p_1)$，$n_2\overline{Y}\sim B(n_2,\,p_2)$，大样本，有 $\overline{X}\,\dot{\sim}\,N\left(p_1,\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$，$\overline{Y}\,\dot{\sim}\,N\left(p_2,\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，

则 $\overline{X}-\overline{Y}\,\dot{\sim}\,N\left(p_1-p_2,\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，即 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\,\dot{\sim}\,N(0,1)$，

当 $p_1=p_2=p$ 但未知时，此时用总频率 $\hat{p}=\dfrac{n_1\overline{X}+n_2\overline{Y}}{n_1+n_2}$ 作为 p 的点估计替换 p，在大样本场合，有

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\,\dot{\sim}\,N(0,1),$$

假设 H_0：$p_1=p_2$ vs H_1：$p_1\neq p_2$，

大样本，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\,\dot{\sim}\,N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，双侧拒绝域 $W=\{|u|\geq 1.96\}$，

因 $n_1=120$，$n_2=85$，$n_1\bar{x}=50$，$n_2\bar{y}=23$，有 $\hat{p}=\dfrac{n_1\bar{x}+n_2\bar{y}}{n_1+n_2}=\dfrac{50+23}{120+85}=0.3561$，

则 $u=\dfrac{\dfrac{50}{120}-\dfrac{23}{85}}{\sqrt{0.3561\times(1-0.3561)}\sqrt{\dfrac{1}{120}+\dfrac{1}{85}}}=2.1519\in W$，

并且检验的 p 值 $p=2P\{U\geq 2.1519\}=0.0314<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，可以认为男女同学在喜爱武侠小说方面有显著差异．

5．假定电话总机在单位时间内接到的呼叫次数服从泊松分布，现观测了 40 个单位时间，接到的呼叫次数如下：

0 2 3 2 3 2 1 0 2 2 1 2 2 1 3 1 1 4 1 1

5 1 2 2 3 3 1 3 1 3 4 0 6 1 1 1 4 0 1 3.

在显著性水平 0.05 下能否认为单位时间内平均呼叫次数不低于 2.5 次？并给出检验的 p 值．

解：设电话总机在单位时间内接到的呼叫次数 $X\sim P(\lambda)$，有 $n\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$，

大样本，有 $\dfrac{n\overline{X}-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\,\dot{\sim}\,N(0,1)$，

假设 H_0：$\lambda=2.5$ vs H_1：$\lambda<2.5$，

大样本，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\,\dot{\sim}\,N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W = \{u \le -1.645\}$，

因$\bar{x} = 1.975$，$n = 40$，$\lambda = 2.5$，

则$u = \dfrac{1.975 - 2.5}{\sqrt{2.5/40}} = -2.1 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \le -2.1\} = 0.0179 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，不能认为单位时间内平均呼叫次数不低于 2.5 次；

6．通常每平方米某种布上的疵点数服从泊松分布，现观测该种布 100 m^2，发现有 126 个疵点，在显著性水平 0.05 下能否认为该种布每平方米上平均疵点数不超过 1 个？并给出检验的 p 值.

解：设每平方米该种布上的疵点数 $X \sim P(\lambda)$，有 $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$，

大样本，有 $\dfrac{n\bar{X} - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} = \dfrac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

假设 H_0：$\lambda = 1$ vs H_1：$\lambda > 1$，

大样本，选取统计量$U = \dfrac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域 $W = \{u \ge 1.645\}$，

因$\bar{x} = 1.26$，$n = 100$，$\lambda = 1$，

则$u = \dfrac{1.26 - 1}{\sqrt{1/100}} = 2.6 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \ge 2.6\} = 0.0047 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，不能认为该种布每平方米上平均疵点数不超过 1 个；

7．某厂的一批电子产品，其寿命 T 服从指数分布，其密度函数为

$$p(t;\ \theta) = \theta^{-1}\exp\{-t/\theta\}\ I_{t>0},$$

从以往生产情况知平均寿命$\theta = 2000$ h．为检验当日生产是否稳定，任取 10 件产品进行寿命试验，到全部失效时停止．试验得失效寿命数据之和为 30200．试在显著性水平$\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0:\ \theta = 2000 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \theta \ne 2000.$$

解：假设 H_0：$\theta = 2000$ vs H_1：$\theta \ne 2000$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\bar{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(2n) = \chi^2_{0.025}(20) = 9.5908$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(2n) = \chi^2_{0.975}(20) = 34.1696$，

双侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 9.5908$ 或$\chi^2 \ge 34.1696\}$，

因$\bar{x} = \dfrac{30200}{10} = 3020$，$n = 10$，$\theta = 2000$，

则$\chi^2 = \dfrac{2 \times 10 \times 3020}{2000} = 30.20 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 30.20\} = 0.0667 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为其平均寿命等于 2000 h．

8．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自两点分布 $b(1, p)$的随机样本．

（1）试求单侧假设检验问题 H_0：$p \le 0.01$ vs H_1：$p > 0.01$ 的显著水平$\alpha = 0.05$ 的检验；

（2）若要这个检验在 $p = 0.08$ 时犯第二类错误的概率不超过 0.10，样本容量 n 应为多大？

解：（1）假设 H_0：$p = 0.01$ vs H_1：$p > 0.01$，

若为小样本，选取统计量 $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,\ p)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$p = 0.01$，

取$c_2 = \min\left\{\sum_{k=c}^{n} C_n^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{n-k} \le 0.05\right\} = \min\left\{\sum_{k=0}^{c-1} C_n^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{n-k} \ge 0.95\right\}$，

当$n \le 5$时，$c_2 = 1$；当$6 \le n \le 35$时，$c_2 = 2$；当$36 \le n \le 82$时，$c_2 = 3$；当$83 \le n \le 137$时，$c_2 = 4$；

右侧拒绝域$W = \{n\bar{x} \ge c_2\}$，

根据$n\bar{x}$，作出决策；

若为大样本，选取统计量$U = \dfrac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域 $W = \{u \ge 1.645\}$，
计算u，作出决策；

（2）在$p = 0.08$时，$n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, 0.08)$，

则犯第二类错误的概率

$$\beta = P\{n\bar{X} \notin W \mid p = 0.08\} = P\{n\bar{X} < c_2 \mid p = 0.08\} = \sum_{k=0}^{c_2-1} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} \le 0.10,$$

当$n \le 5$时，$c_2 = 1$，$\beta = 0.92^n \ge 0.6591$；

当$6 \le n \le 35$时，$c_2 = 2$，$\beta = \sum_{k=0}^{1} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} \ge 0.2184$；

当$36 \le n \le 82$时，$c_2 = 3$，

若$n = 64$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} = 0.1050$；若$n = 65$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} = 0.0991$；

故$n \ge 65$.

9. 有一批电子产品共 50 台，产销双方协商同意找出一个检验方案，使得当次品率$p \le p_0 = 0.04$时拒绝的概率不超过 0.05，而当$p > p_1 = 0.30$时，接受的概率不超过 0.1，请你帮助找出适当的检验方案.

解：设这批电子产品中的次品数为$n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$，有$n\bar{X} \sim b(n, p)$，

假设 H_0：$p = 0.04$ vs H_1：$p > 0.04$，

小样本，选取统计量$n\bar{X} \sim b(n, p)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$p = 0.04$，

取$c_2 = \min\left\{\sum_{k=c}^{n} C_n^k \cdot 0.04^k \cdot 0.96^{n-k} \le 0.05\right\} = \min\left\{\sum_{k=0}^{c-1} C_n^k \cdot 0.04^k \cdot 0.96^{n-k} \ge 0.95\right\}$，

当$n = 1$时，$c_2 = 1$；当$2 \le n \le 9$时，$c_2 = 2$；当$10 \le n \le 21$时，$c_2 = 3$；当$22 \le n \le 35$时，$c_2 = 4$；

当$36 \le n \le 50$时，$c_2 = 5$；右侧拒绝域$W = \{n\bar{x} \ge c_2\}$，

根据$n\bar{x}$，作出决策；

在 $p = p_1 = 0.30$ 时，$n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, 0.30)$，

则犯第二类错误的概率

$$\beta = P\{n\overline{X} \notin W \mid p = 0.30\} = P\{n\overline{X} < c_2 \mid p = 0.30\} = \sum_{k=0}^{c_2-1} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} \le 0.10,$$

当 $n = 1$ 时，$c_2 = 1$，$\beta = 0.70$；

当 $2 \le n \le 9$ 时，$c_2 = 2$，$\beta = \sum_{k=0}^{1} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} \ge 0.1960$；

当 $10 \le n \le 21$ 时，$c_2 = 3$，

若 $n = 15$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} = 0.1268$；若 $n = 16$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} = 0.0994$；

故随机抽取 $n = 16$ 台该电子产品，当其中次品数小于 $c_2 = 3$ 时接受，次品数不小于 $c_2 = 3$ 时拒绝.

10．若在猜硬币正反面游戏中，某人在 100 次试猜中共猜中 60 次，你认为他是否有诀窍？（取 $\alpha = 0.05$）.

解：设在 $n = 100$ 次试猜中的猜中次数为 $n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$p$ 为猜中的概率，有 $n\overline{X} \sim b(n, p)$，

假设 H_0：$p = 0.5$ vs H_1：$p > 0.5$，

大样本，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，双侧拒绝域 $W = \{u \ge 1.645\}$，

因 $n = 100$，$p = 0.5$，$\bar{x} = \dfrac{60}{100} = 0.6$，

则 $u = \dfrac{0.6 - 0.5}{\sqrt{0.5 \times 0.5/100}} = 2 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \ge 2\} = 0.0228 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为他有诀窍.

11．设有两工厂生产的同一种产品，要检验假设 H_0：它们的废品率 p_1, p_2 相同，在第一、二工厂的产品各抽取 $n_1 = 1500$ 个及 $n_2 = 1800$ 个，分别有废品 300 个及 320 个，问在 5%显著性水平上应接受还是拒绝 H_0.

解：设在抽取的第一、二工厂的 $n_1 = 1500$ 及 $n_2 = 1800$ 个产品中废品数分别为 $n_1\overline{X} = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$，$n_2\overline{Y} = \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$，

则 $n_1\overline{X} \sim b(n_1, p_1)$，$n_2\overline{Y} \sim b(n_2, p_1)$，大样本，有 $\overline{X} \mathrel{\dot\sim} N\left(p_1, \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$，$\overline{Y} \mathrel{\dot\sim} N\left(p_2, \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，

设两个总体相互独立，有 $\overline{X} - \overline{Y} \mathrel{\dot\sim} N\left(p_1 - p_2, \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，

则 $\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

当 $p_1 = p_2 = p$ 但未知时，此时用总频率 $\hat{p} = \dfrac{n_1\overline{X} + n_2\overline{Y}}{n_1 + n_2}$ 作为 p 的点估计替换 p，在大样本场合，有

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1),$$

假设 H_0：$p_1 = p_2$ vs H_1：$p_1 \neq p_2$，

选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，有 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \ge 1.96\}$，

因 $\bar{x} = \dfrac{300}{1500} = 0.2$，$\bar{y} = \dfrac{320}{1800} = 0.1778$，$n_1 = 1500$，$n_2 = 1800$，$\hat{p} = \dfrac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1 + n_2} = \dfrac{300 + 320}{1500 + 1800} = 0.1879$，

则 $u = \dfrac{0.2 - 0.1778}{\sqrt{0.1879 \times 0.8121}\sqrt{\dfrac{1}{1500} + \dfrac{1}{1800}}} = 1.4665 \notin W$，

并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \ge 1.4665\} = 0.1425 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为它们的废品率 p_1, p_2 相同.