习题 4.3

1． 设$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且

$$P\{X_k=\pm\sqrt{\ln k}\}=\frac{1}{2},\quad k=1,2,\cdots,$$

证明$\{X_k\}$服从大数定律。

证明：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且

$$E(X_k)=(-\sqrt{\ln k})\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\ln k}\cdot\frac{1}{2}=0,$$

$$\mathrm{Var}(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=E(X_k^2)=(-\sqrt{\ln k})^2\cdot\frac{1}{2}+(\sqrt{\ln k})^2\cdot\frac{1}{2}=\ln k,\quad k=1,2,\cdots,$$

则

$$0\le\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\mathrm{Var}(X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\ln k\le\frac{1}{n^2}\times n\ln n=\frac{\ln n}{n},$$

可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=0,$$

故$\{X_k\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_k\}$服从大数定律。

2． 设$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且

$$P\{X_k=\pm 2^k\}=\frac{1}{2^{2k+1}},\ P\{X_k=0\}=1-\frac{1}{2^{2k}},\quad k=1,2,\cdots,$$

证明$\{X_k\}$服从大数定律。

证明：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且

$$E(X_k)=(-2^k)\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}+0\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)+2^k\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=0,$$

$$\mathrm{Var}(X_k)=E(X_k^2)=(-2^k)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)+(2^k)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=1,\quad k=1,2,\cdots,$$

即方差有共同的上界，故$\{X_k\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_k\}$服从大数定律。

3． 设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，且$P\{X_1=0\}=1$，

$$P\{X_n=\pm\sqrt{n}\}=\frac{1}{n},\ P\{X_n=0\}=1-\frac{2}{n},\quad n=2,3,\cdots,$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律。

证明：因$\{X_n\}$为独立随机变量序列，$E(X_1)=0$，$\mathrm{Var}(X_1)=0$，且

$$E(X_n)=(-\sqrt{n})\cdot\frac{1}{n}+0\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}=0,$$

$$\mathrm{Var}(X_n)=E(X_n^2)=(-\sqrt{n})^2\cdot\frac{1}{n}+0^2\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+(\sqrt{n})^2\cdot\frac{1}{n}=2,\quad n=2,3,\cdots,$$

即方差有共同的上界，故$\{X_n\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律。

4． 在伯努利试验中，事件A出现的概率为p。令

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{若在第 } n \text{ 次及第 } n+1 \text{ 次试验中 } A \text{ 出现;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律。

证明：因X_k的分布为

X_k	0	1
P	$1-p^2$	p^2

则

$$E(X_k)=p^2,\quad \mathrm{Var}(X_k)=p^2(1-p^2)。$$

又因当$|k-l|\ge 2$时，X_k与X_l相互独立，且

$$\mathrm{Cov}(X_k,X_{k+1})=E(X_kX_{k+1})-E(X_k)E(X_{k+1})=p^3-p^4,$$

则

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)+2\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_k,X_{k+1})\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}[np^2(1-p^2)+2(n-1)(p^3-p^4)],$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0,$$

故$\{X_k\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_k\}$服从大数定律。

5． 设$\{X_n\}$为独立的随机变量序列，且

$$P\{X_n=1\}=p_n,\quad P\{X_n=0\}=1-p_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律。

证明：因$\{X_n\}$为独立随机变量序列，且

$$E(X_n)=p_n,\quad \mathrm{Var}(X_n)=p_n(1-p_n)<1,\quad n=1,2,\cdots,$$

即方差有共同的上界，故$\{X_n\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律。

6．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a},\quad -\infty<x<+\infty 。$$

试问：辛钦大数定律对此随机变量序列是否适用？

解：因$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，且密度函数

$$p(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{a^2+x^2},\quad -\infty<x<+\infty,$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{a^2+x^2}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{a}{\pi}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}dx=\frac{a}{\pi}\ln(a^2+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty,$$

即X_n的数学期望不存在，故辛钦大数定律对此随机变量序列不适用。

7．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为

$$P\{X_n=\frac{2^k}{k^2}\}=\frac{1}{2^k},\quad k=1,2,\cdots,$$

试问$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解：因$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，且

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{k^2}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

绝对收敛，即数学期望$E(X_n)$存在，故$\{X_n\}$满足辛钦大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律。

8．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为

$$P\{X_n=k\}=\frac{c}{k^2\lg^2 k},\quad k=2,3,\cdots,$$

其中

$$c=\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2\lg^2 k}\right)^{-1},$$

试问$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解：因$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，且

$$E(X_n)=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot\frac{c}{k^2\lg^2 k}=c\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\lg^2 k}$$

绝对收敛，即数学期望 $E(X_n)$ 存在，故 $\{X_n\}$ 满足辛钦大数定律条件，$\{X_n\}$ 服从大数定律。

9．设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，其中 X_n 服从参数为 $\sqrt{n}$ 的泊松分布，试问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律？

解：因 $\{X_k\}$ 为独立随机变量序列，且 $\mathrm{Var}(X_k)=\sqrt{k}$，则

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{1}{n^2}\times n\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0,$$

故 $\{X_k\}$ 满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_k\}$ 服从大数定律。

10．设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，证明：若诸 X_n 的方差 σ_n^2 一致有界，即存在常数 c，使得

$$\sigma_n^2\le c,\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

证明：$\{X_n\}$ 满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$ 服从大数定律。

11．（泊松大数定律）设 S_n 为 n 次独立试验中，事件 A 出现的次数，而事件 A 在第 i 次试验出现的概率为 p_i，$i=1,2,\cdots,n,\cdots$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1。$$

证明：设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 发生;}\\ 0, & \text{在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 不发生.}\end{cases}$$

有 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。因 $\{X_n\}$ 独立，且 $E(X_n)=p_n$，$\mathrm{Var}(X_n)=p_n(1-p_n)<1$，则 $\{X_n\}$ 满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$ 服从大数定律，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1。$$

12．（伯恩斯坦大数定律）设$\{X_n\}$是方差一致有界的随机变量序列，且当$|k-l|\to+\infty$时，一致地有$\text{Cov}(X_k, X_l)\to 0$，证明$\{X_n\}$服从大数定律。

证明：对任意的$\varepsilon>0$，存在正整数M，当$|k-l|>M$时，$\text{Cov}(X_k, X_l)<\dfrac{\varepsilon}{2}$。设$\text{Var}(X_k)\le c$，当$1\le|k-l|\le M$时，有

$$\text{Cov}(X_k, X_l)\le\sqrt{\text{Var}(X_k)}\sqrt{\text{Var}(X_l)}\le c,$$

则

$$\frac{1}{n^2}\text{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)+2\sum_{1\le k<l\le n}\text{Cov}(X_k, X_l)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)+2\sum_{1\le|k-l|\le M}\text{Cov}(X_k, X_l)+2\sum_{|k-l|>M}\text{Cov}(X_k, X_l)\right]$$

$$\le\frac{1}{n^2}\left[nc+(M-1)(2n-M-1)c+(n-M)(n-M-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\le\frac{1}{n^2}\left[nc+(M-1)\cdot 2nc+n^2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right]=\frac{(2M-1)c}{n}+\frac{\varepsilon}{2},$$

取正整数$N\ge\left[\dfrac{(4M-2)c}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，$\dfrac{1}{n^2}\text{Var}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k\right)<\varepsilon$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\text{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=0,$$

故$\{X_n\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律。

13．（格涅坚科大数定律）设$\{X_n\}$是随机变量序列，若记

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,\quad a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)。$$

则$\{X_n\}$服从大数定律的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty}E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=0。$$

证明：以连续随机变量为例进行证明，设Y_n的密度函数为$p(y)$。

必要性：设$\{X_n\}$服从大数定律，即对任意的$\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=\lim_{n\to+\infty}P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}=0,$$

不妨设$0<\varepsilon<1$，有$\varepsilon-\varepsilon^2>0$，存在正整数$N$，当$n>N$时，$P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}<\varepsilon-\varepsilon^2$，则

$$E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy$$

$$=\int\limits_{|y-a_n|<\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy+\int\limits_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy$$

$$\le\int\limits_{|y-a_n|<\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}p(y)dy+\int\limits_{|y-a_n|\ge\varepsilon}p(y)dy$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}+P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}<\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}+\varepsilon-\varepsilon^2<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{n\to+\infty}E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=0$。

充分性：设$\lim\limits_{n\to+\infty}E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=0$，因对任意的$\varepsilon>0$，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}=\int\limits_{|y-a_n|\ge\varepsilon}p(y)dy=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}p(y)dy$$

$$\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy$$

$$=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right],$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=\lim_{n\to+\infty}P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}=0,$$

即$\{X_n\}$服从大数定律。

14．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，方差存在。又设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$为绝对收敛级数。令$Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，证明$\{a_nY_n\}$服从大数定律。

证明：设$\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=S$，则

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kY_k\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\left(\sum_{k=i}^{n}a_k\right)\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)\cdot\left(\sum_{k=i}^{n}a_k\right)^2$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 S^2 = \frac{\sigma^2 S^2}{n},$$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kY_k\right)=0,$$

故 $\{a_nY_n\}$ 满足马尔可夫大数定律条件，$\{a_nY_n\}$ 服从大数定律。

15．设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，方差存在，令 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。又设 $\{a_n\}$ 为一列常数，如果存在常数 $c>0$，使得对一切 n 有 $|na_n|\le c$，证明 $\{a_nY_n\}$ 服从大数定律。

证明：设 $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$，则

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kY_k\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\left(\sum_{k=i}^{n}a_k\right)\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)\cdot\left(\sum_{k=i}^{n}a_k\right)^2$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\cdot\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{c}{k}\right)^2=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}+2\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=k+1}^{n}\frac{1}{kl}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=k+1}^{n}\frac{1}{kl}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{kl}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}k\cdot\frac{1}{kl}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{l}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\sum_{l=1}^{n}(l-1)\cdot\frac{1}{l}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2n-2\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)<\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^2c^2}{n},$$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kY_k\right)=0,$$

故 $\{a_nY_n\}$ 满足马尔可夫大数定律条件，$\{a_nY_n\}$ 服从大数定律。

16．设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，其方差有限，且 X_n 不恒为常数。如果 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，试证：随机变量序列 $\{S_n\}$ 不服从大数定律。

注：此题有误，“X_n 不恒为常数”应该改为“X_n 不恒为常数的概率大于 0”或“$\mathrm{Var}(X_n)>0$”。

证明：设$T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$，有

$$T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)X_i=X_1+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)X_i\text{。}$$

记$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)X_i$，有$T_n=X_1+Y_n$，且$X_1$与$Y_n$相互独立，因$\{X_n\}$独立同分布且$X_n$不恒为常数的概率大于 0，即$P\{X_1\neq E(X_1)\}>0$，有$P\{X_1<E(X_1)\}$与$P\{X_1>E(X_1)\}$都大于 0，则存在$\varepsilon>0$，使得

$$P\{X_1<E(X_1)-\varepsilon\}=p_1>0,\quad P\{X_1>E(X_1)+\varepsilon\}=p_2>0\text{。}$$

因$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)X_i$不恒为常数的概率也大于 0，则$P\{Y_n\leq E(Y_n)\}$与$P\{Y_n\geq E(Y_n)\}$至少有一个大于 0.5，可得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(S_i)\right|\geq\varepsilon\right\}=P\{|T_n-E(T_n)|\geq\varepsilon\}$$

$$=P\{X_1<E(X_1)-\varepsilon\}P\{Y_n\leq E(Y_n)\}+P\{X_1>E(X_1)+\varepsilon\}P\{Y_n\geq E(Y_n)\}$$

$$\geq 0.5\min\{p_1,p_2\}\text{，}$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(S_i)\right|\geq\varepsilon\right\}\geq 0.5\min\{p_1,p_2\}>0\text{，}$$

$\{S_n\}$不服从大数定律。

17．分别用随机投点法和平均值法计算下列定积分：

（1）$J_1=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}-1}dx$；

（2）$J_2=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,dx$。

解：随机投点法：计算定积分$\int_0^1 f(x)dx$，且$0\leq f(x)\leq 1$。用计算机产生在$(0,1)$区间上均匀分布的n对随机数$(x_i,y_i),\quad i=1,2,\cdots,n$，记录满足不等式$y_i\leq f(x_i)$的数据对个数$\mu_n$，用频率$\frac{\mu_n}{n}$作为$\int_0^1 f(x)dx$的估计值。计算一般的定积分$\int_a^b g(x)dx$，可通过变量替换$y=\frac{x-a}{b-a}$化为关于$y$的函数在 0 与 1 之间的积分，

$$\int_a^b g(x)dx=(b-a)\int_0^1 g[a+(b-a)y]dy\text{，}$$

进一步，若$c\leq g(x)\leq d$，通过函数变换$f(y)=\frac{g[a+(b-a)y]-c}{d-c}$，使得$0\leq f(y)\leq 1$，可得

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)(d-c)\int_0^1 f(y)dy + c(b-a)\text{，}$$

用蒙特卡洛方法计算出 $\int_0^1 f(y)dy$，进而就得到 $\int_a^b g(x)dx$ 的值。

（1）$J_1 = \int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx$，因积分区间为 $[0,1]$ 且 $\frac{e^x-1}{e-1}$ 在 $[0,1]$ 之间取值，记 k_1 为满足不等式 $y_i \le \frac{e^{x_i}-1}{e-1}$ 的数对个数，故

$$J_1 = \int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx \approx \frac{k_1}{n}\text{。}$$

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');k=0;
for i=1:n
    x=rand;y=rand;
    if y<=(exp(x)-1)/(exp(1)-1);
        k=k+1;
    end
end
J1=k/n
```

（2）$J_2 = \int_{-1}^1 e^x\,dx$，因积分区间为 $[-1,1]$ 且 e^x 在 $[0,e]$ 之间取值，设

$$f_2(x) = \frac{e^{2x-1}-0}{e-0} = e^{2x-2}\text{，}$$

记 k_2 为满足不等式 $y_i \le e^{-2+2x_i}$ 的数对个数，故

$$J_2 = \int_{-1}^1 e^x\,dx = 2\left[0+(e-0)\int_0^1 e^{2t-2}\,dt\right] = 2e\frac{k_2}{n}\text{。}$$

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');k=0;
for i=1:n
    x=rand;y=rand;
    if y<=exp(-2+2*x);
        k=k+1;
    end
end
J2=k/n*2*exp(1)
```

平均值法：计算定积分 $\int_0^1 f(x)dx$。用计算机产生在 $(0,1)$ 区间均匀分布的 n 个随机数 x_i，$i=1,2,\cdots,n$，计算 $f(x_i)$ 的平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$ 作为积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的估计值。计算一般的定积分 $\int_a^b g(x)dx$，可通过变量替换 $y=\frac{x-a}{b-a}$ 化为关于 y 的函数在 0 与 1 之间的积分，

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)\int_0^1 g[a+(b-a)y]dy \overset{\Delta}{=} (b-a)\int_0^1 f(y)dy\text{，}$$

用蒙特卡洛方法计算出 $\int_0^1 f(y)dy$，进而就得到 $\int_a^b g(x)dx$ 的值。

（1） $J_1=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx$，因积分区间为 $[0,1]$，故

$$J_1=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{x_i}-1}{e-1}。$$

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');
x=rand(n);
J1=mean((exp(x)-1)/(exp(1)-1))
```

（2） $J_2=\int_{-1}^1 e^x\,dx$，因积分区间为 $[-1,1]$，设 $f_2(x)=e^{2x-1}$，故

$$J_2=\int_{-1}^1 e^x\,dx=2\int_0^1 e^{2t-1}\,dt \approx \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{2x_i-1}。$$

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');
x=rand(n);
J2=2*mean(exp(-1+2*x))
```