习题 2.5

1. 设随机变量 X 服从区间 $(2,5)$ 上的均匀分布，求对 X 进行 3 次独立观察中，至少有 2 次的观察值大于 3 的概率。

解：设 Y 表示 X 大于 3 的次数，有 Y 服从二项分布 $b(3,p)$，且

$$p = P\{X>3\} = \frac{5-3}{5-2} = \frac{2}{3},$$

故所求概率为

$$P\{Y \ge 2\} = C_3^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}。$$

2. 在 $(0,1)$ 上任取一点记为 X，试求 $P\left\{X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \ge 0\right\}$。

解：因 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，故

$$P\left\{X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \ge 0\right\} = P\left\{\left(X-\frac{1}{4}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right) \ge 0\right\} = P\left\{X \le \frac{1}{4} \text{或} X \ge \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4} - 0 + \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}。$$

3. 设 K 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布，求方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率。

解：因方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根，有判别式 $\Delta = K^2 - 4 \ge 0$，即 $K \le -2$ 或 $K \ge 2$，故所求概率为

$$P\{K \le -2 \text{或} K \ge 2\} = 0 + \frac{6-2}{6-1} = \frac{4}{5}。$$

4. 若随机变量 $K \sim N(\mu, \sigma^2)$，而方程 $x^2 + 4x + K = 0$ 无实根的概率为 0.5，试求 μ。

解：因方程 $x^2 + 4x + K = 0$ 无实根，有判别式 $\Delta = 16 - 4K < 0$，即 $K > 4$，则 $P\{K > 4\} = 0.5$，且因 $P\{K > \mu\} = 0.5$，故 $\mu = 4$。

5. 设流经一个 2 Ω 电阻上的电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 9A 至 11A 之间。试求此电阻上消耗的平均功率，其中功率 $W = 2I^2$。

解：因电流 I 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 9 < x < 11; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故平均功率

$$E(W) = E(2I^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2 p(x)dx = \int_9^{11} 2x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_9^{11} = \frac{602}{3}。$$

6. 某种圆盘的直径在区间 (a,b) 上服从均匀分布，试求此种圆盘的平均面积。

解：设 d 表示圆盘的直径，S 表示圆盘的面积，有 $S = \frac{1}{4}\pi d^2$，因直径 d 密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故平均面积

$$E(S)=E\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 p(x)dx=\int_a^b\frac{1}{4}\pi x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{\pi x^3}{12(b-a)}\bigg|_a^b=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2)。$$

7． 设某种商品每周的需求量 X 服从区间 $(10,30)$ 上的均匀分布，而商店进货数为区间 $(10,30)$ 中的某一整数，商店每销售 1 单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利 300 元。为使商店所获利润期望值不少于 9280 元，试确定最少进货量。

解： X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 10\le x\le 30;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

设每周进货量为 a 单位商品，商店所获利润为 Y 元。

当 $X\le a$ 时，$Y=500X-100(a-X)=600X-100a$，

当 $X>a$ 时，$Y=500a+300(X-a)=300X+200a$，

$$Y=g(X)=\begin{cases}600X-100a, & X\le a,\\ 300X+200a, & X>a,\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)dx=\int_{10}^{a}(600x-100a)\frac{1}{20}dx+\int_a^{30}(300x+200a)\frac{1}{20}dx$$

$$=(15x^2-5ax)\Big|_{10}^{a}+(\frac{15}{2}x^2+10ax)\Big|_a^{30}=-\frac{15}{2}a^2+350a+5250,$$

要使得 $E(Y)=-\dfrac{15}{2}a^2+350a+5250\ge 9280$，有 $\dfrac{15}{2}a^2-350a+4030\le 0$，可得 $\dfrac{62}{3}\le a\le 26$。因 a 为整数，故最少进货量为 21 单位商品。

8． 统计调查表明，英格兰在 1875 年至 1951 年期间，在矿山发生 10 人或 10 人以上死亡的两次事故之间的时间 T（以日计）服从均值为 241 的指数分布。试求 $P\{50\le T\le 100\}$。

解： 因 T 服从指数分布，且 $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}=241$，有 T 的密度函数为

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{241}\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

故

$$P\{50\le T\le 100\}=\int_{50}^{100}\frac{1}{241}\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}dt=(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{241}})\bigg|_{50}^{100}=\mathrm{e}^{-\frac{50}{241}}-\mathrm{e}^{-\frac{100}{241}}\approx 0.1523。$$

9． 若一次电话通话时间 X（单位：min）服从参数为 0.25 的指数分布，试求一次通话的平均时间。

解： 因 X 服从参数为 $\lambda=0.25$ 的指数分布，故一次通话的平均时间 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=4$。

10．某种设备的使用寿命 X（以年计）服从指数分布，其平均寿命为 4 年。制造此种设备的厂家规定，若设备在使用一年之内损坏，则可以予以调换。如果设备制造厂每售出一台设备可盈利 100 元，而调换一台设备需花费 300 元。试求每台设备的平均利润。

解： 因 X 服从指数分布，且 $E(X)=4$，有 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

设 Y 表示每台设备的利润。当 $X \le 1$ 时，$Y = 100 - 300 = -200$；当 $X > 1$ 时，$Y = 100$。故平均利润

$$E(Y) = -200P\{X \le 1\} + 100P\{X > 1\} = -200\int_0^1 \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx + 100\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx$$

$$= -200(-e^{-\frac{x}{4}})\Big|_0^1 + 100(-e^{-\frac{x}{4}})\Big|_1^{+\infty} = -200(1 - e^{-\frac{1}{4}}) + 100e^{-\frac{1}{4}} = 300e^{-\frac{1}{4}} - 200 \approx 33.6402\text{。}$$

11．设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以 min 计）服从指数分布，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10min，他就离开。他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求 $P\{Y \ge 1\}$。

解： 因 Y 服从二项分布 $b(5, p)$，且

$$p = P\{X > 10\} = \int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = -e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty} = e^{-2}\text{，}$$

故

$$P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - e^{-2})^5 \approx 0.5167\text{。}$$

12．某仪器装了 3 个独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：h）都服从同一指数分布，密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：此仪器在最初使用的 200h 内，至少有一个此种电子元件损坏的概率。

解： 设 Y 表示电子元件损坏的个数，有 Y 服从二项分布 $b(3, p)$，且

$$p = P\{X \le 200\} = \int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx = -e^{-\frac{x}{600}}\Big|_0^{200} = 1 - e^{-\frac{1}{3}}\text{，}$$

故所求概率为

$$P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - 1 + e^{-\frac{1}{3}})^3 = 1 - e^{-1} \approx 0.6321\text{。}$$

13．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

试求 k，使得 $P\{X > k\} = 0.5$。

解： 因

$$P\{X > k\} = \int_k^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = (-e^{-\lambda x})\Big|_k^{+\infty} = e^{-\lambda k} = 0.5\text{，}$$

故 $k = -\dfrac{\ln 0.5}{\lambda} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$。

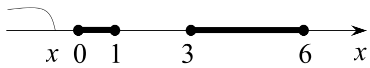
14．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1/3, & 0\le x\le 1;\\ 2/9, & 3\le x\le 6;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

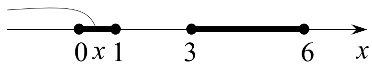
若 $P\{X\ge k\}=2/3$，试求 k 的取值范围。

解：首先求出 X 的分布函数 $F(x)$，分段点 $0, 1, 3, 6$。

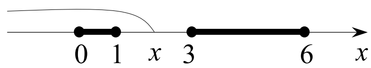
当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，



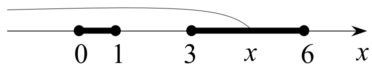
当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x \frac{1}{3}\mathrm{d}t=\left.\frac{t}{3}\right|_0^x=\frac{x}{3}$，



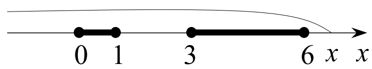
当 $1\le x<3$ 时，$F(x)=\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}t=\left.\frac{t}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$，



当 $3\le x<6$ 时，$F(x)=\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}t+\int_3^x \frac{2}{9}\mathrm{d}t=\left.\frac{t}{3}\right|_0^1+\left.\frac{2t}{9}\right|_3^x=\frac{2x}{9}-\frac{1}{3}$，



当 $x\ge 6$ 时，$F(x)=\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}t+\int_3^6 \frac{2}{9}\mathrm{d}t=\left.\frac{t}{3}\right|_0^1+\left.\frac{2t}{9}\right|_3^6=1$。



因 X 为连续型随机变量，有 $P\{X\ge k\}=1-F(k)=\frac{2}{3}$，即 $F(k)=\frac{1}{3}$，故 k 的取值范围是 $[1, 3]$。

15．写出以下正态分布的均值和标准差。

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x^2+4x+4)},\quad p_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-2x^2},\quad p_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}。$$

解：正态分布的密度函数 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，其中均值为 μ，标准差为 σ。因

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x^2+4x+4)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+2)^2}{2\times\frac{1}{2}}},$$

故均值 $\mu=-2$，标准差 $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$；因

$$p_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{4}}},$$

故均值 $\mu=0$，标准差 $\sigma=\frac{1}{2}$；因

$$p_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{2}}},$$

故均值 $\mu=0$，标准差 $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

16．某地区 18 岁女青年的血压 X（收缩压，以 mm-Hg 计）服从 $N(110,12^2)$。试求该地区 18 岁女青年的血压在 100 至 120 的可能性有多大？

解：因 $X\sim N(110,12^2)$，有 $\mu=110$，$\sigma=12$，故

$$P\{100\le X\le 120\}=\Phi\left(\frac{120-110}{12}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{12}\right)$$

$$=\Phi(0.8333)-\Phi(-0.8333)=2\Phi(0.8333)-1=2\times 0.7976-1=0.5952\text{。}$$

（或近似可得 $P\{100\le X\le 120\}=\Phi(0.83)-\Phi(-0.83)=2\Phi(0.83)-1=2\times 0.7967-1=0.5934$）

17．某地区成年男子的体重 X（kg）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。若已知 $P\{X\le 70\}=0.5$，$P\{X\le 60\}=0.25$。

（1）求 μ 与 σ 各为多少？

（2）若在这个地区随机地选出 5 名成年男子，问其中至少两人体重超过 65kg 的概率是多少？

解：（1）因 $P\{X\le 70\}=\Phi\left(\dfrac{70-\mu}{\sigma}\right)=0.5$，$P\{X\le 60\}=\Phi\left(\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.25$，则

$$\frac{70-\mu}{\sigma}=0\text{，}\quad \frac{60-\mu}{\sigma}=-0.6745\text{，}$$

故

$$\mu=70\text{，}\quad \sigma=\frac{60-70}{-0.6745}=14.8258\text{。}$$

（或近似可得 $\dfrac{70-\mu}{\sigma}=0$，$\dfrac{60-\mu}{\sigma}=-0.67$，故 $\mu=70$，$\sigma=\dfrac{60-70}{-0.67}=14.9254$）

（2）设 Y 表示体重 X 超过 65kg 的人数，有 Y 服从二项分布 $b(5,p)$，且

$$p=P\{X>65\}=1-\Phi\left(\frac{65-70}{14.8258}\right)=1-\Phi(-0.3372)=0.6320\text{，}$$

故所求概率为

$$P\{Y\ge 2\}=1-p(0)-p(1)=1-0.3680^5-C_5^1\times 0.6320\times 0.3680^4=0.9353\text{。}$$

（或近似可得 $p=P\{X>65\}=1-\Phi\left(\dfrac{65-70}{14.9254}\right)=1-\Phi(-0.34)=0.6331$，故 $P\{Y\ge 2\}=0.9360$）

18．由某机器生产的螺栓的长度（cm）服从正态分布 $N(10.05,0.06^2)$，若规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品，求螺栓不合格的概率。

解：设 X 表示螺栓的长度，有 $X\sim N(10.05,0.06^2)$，即 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$，故所求概率为

$$P\{|X-10.05|>0.12\}=2\left[1-\Phi\left(\frac{0.12}{0.06}\right)\right]=2[1-\Phi(2)]=2\times(1-0.9772)=0.0456\text{。}$$

19．某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似地服从 $\mu=72$ 的正态分布，已知 96 分以上的人数占总数的 2.3%，试求考生的成绩在 60 到 84 之间的概率。

解：设 X 表示考生的外语成绩，有 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu=72$，因

$$P\{X>96\}=1-\Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.023,$$

即 $\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977$，$\frac{24}{\sigma}=2$，可得 $\sigma=12$，故所求概率为

$$P\{60\le X\le 84\}=\Phi\left(\frac{84-72}{12}\right)-\Phi\left(\frac{60-72}{12}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\times 0.8413-1=0.6826。$$

20．设 $X\sim N(3,2^2)$，（1）求 $P\{2<X\le 5\}$；（2）求 $P\{|X|>2\}$；（3）确定 c 使得 $P\{X>c\}=P\{X<c\}$。

解：（1）所求概率为

$$P\{2<X\le 5\}=\Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-0.5)=0.8413-(1-0.6915)=0.5328。$$

（2）所求概率为

$$P\{|X|>2\}=1-\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)+\Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right)=1-\Phi(-0.5)+\Phi(-2.5)$$

$$=0.6915+1-0.9938=0.6977。$$

（3）因 $P\{X>c\}=P\{X<c\}$，且 $P\{X>c\}+P\{X<c\}=1$，有 $P\{X>c\}=P\{X<c\}=0.5$，故 $c=\mu=3$。

21．若 $X\sim N(4,3^2)$，（1）求 $P\{-2<X\le 10\}$；（2）求 $P\{X>3\}$；（3）设 d 满足 $P\{X>d\}\ge 0.9$，问 d 至多为多少？

解：（1）所求概率为

$$P\{-2<X\le 10\}=\Phi\left(\frac{10-4}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-2-4}{3}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\times 0.9772-1=0.9544。$$

（2）所求概率为

$$P\{X>3\}=1-\Phi\left(\frac{3-4}{3}\right)=1-\Phi(-0.3333)=0.6306。$$

（或近似可得 $P\{X>3\}=1-\Phi(-0.33)=0.6293$）

（3）因

$$P\{X>d\}=1-\Phi\left(\frac{d-4}{3}\right)=\Phi\left(\frac{4-d}{3}\right)\ge 0.9,$$

有 $\frac{4-d}{3}\ge 1.2817$，故 $d\le 0.1549$。

（或近似可得 $\frac{4-d}{3}\ge 1.28$，故 $d\le 0.16$）

22．测量到某一目标的距离时，发生的随机误差 X（m）具有密度函数

$$p(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-20)^2}{3200}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求在三次测量中，至少有一次误差的绝对值不超过 30 m 的概率。

解：设 Y 表示误差 X 的绝对值不超过 30 m 的次数，有 Y 服从二项分布 $b(3, p)$。因 X 的密度函数 $p(x)=\dfrac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-20)^2}{2\times 40^2}}$，有 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu=20$，$\sigma=40$，则

$$p=P\{|X|\le 30\}=\Phi\left(\frac{30-20}{40}\right)-\Phi\left(\frac{-30-20}{40}\right)=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)$$

$$=0.5987-1+0.8944=0.4931,$$

故所求概率为

$$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-p)^3=1-0.5069^3\approx 0.8698。$$

23．从甲地飞往乙地的航班，每天上午10:10起飞，飞行时间 X 服从均值是 4 h，标准差是 20 min 的正态分布。

（1）该机在下午 2:30 以后到达乙地的概率是多少？

（2）该机在下午 2:20 以前到达乙地的概率是多少？

（3）该机在下午 1:50 至 2:30 之间到达乙地的概率是多少？

解：因 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，单位分钟，其中 $\mu=240$，$\sigma=20$。

（1）所求概率为

$$P\{X>260\}=1-\Phi\left(\frac{260-240}{20}\right)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587。$$

（2）所求概率为

$$P\{X<250\}=\Phi\left(\frac{250-240}{20}\right)=\Phi(0.5)=0.6915。$$

（3）所求概率为

$$P\{220\le X\le 260\}=\Phi\left(\frac{260-240}{20}\right)-\Phi\left(\frac{220-240}{20}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\times 0.8413-1=0.6826。$$

24．某单位招聘员工，共有 10000 人报考。假设考试成绩服从正态分布，且已知 90 分以上有 359 人，60 分以下有 1151 人。现按考试成绩从高分到低分依次录用 2500 人，试问被录用者中最低分为多少？

解：设 X 表示考试成绩，有 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，因

$$P\{X>90\}=1-\Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.0359,\quad P\{X<60\}=\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.1151,$$

即 $\Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.9641$，$\Phi\left(-\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.8849$，得 $\dfrac{90-\mu}{\sigma}=1.8$，$-\dfrac{60-\mu}{\sigma}=1.2$，故 $\mu=72$，$\sigma=10$。

又设录用者中最低分为 a，则

$$P\{X>a\}=1-\Phi\left(\frac{a-72}{10}\right)=0.25,$$

即 $\Phi\left(\dfrac{a-72}{10}\right)=0.75$，得 $\dfrac{a-72}{10}=0.6745$，故 $a=78.745$。

（或近似可得$\dfrac{a-72}{10}=0.67$，故$a=78.7$）

25．设随机变量X服从正态分布$X\sim N(60,3^2)$，试求实数a,b,c,d，使得X落在如下五个区间中的概率之比为$7:24:38:24:7$。

$(-\infty,a]$， $(a,b]$， $(b,c]$， $(c,d]$， $(d,+\infty)$。

解：因

$$P\{X\le a\}=\Phi\left(\frac{a-60}{3}\right)=0.07\text{，}\ \Phi\left(-\frac{a-60}{3}\right)=0.93\text{，}$$

得$-\dfrac{a-60}{3}=1.4757$，故$a=55.5729$；因

$$P\{X\le b\}=\Phi\left(\frac{b-60}{3}\right)=0.31\text{，}\ \Phi\left(-\frac{b-60}{3}\right)=0.69\text{，}$$

得$-\dfrac{b-60}{3}=0.4958$，故$b=58.5126$；因

$$P\{X\le c\}=\Phi\left(\frac{c-60}{3}\right)=0.69\text{，}$$

得$\dfrac{c-60}{3}=0.4958$，故$c=61.4874$；因

$$P\{X\le d\}=\Phi\left(\frac{d-60}{3}\right)=0.93\text{，}$$

得$\dfrac{d-60}{3}=1.4757$，故$d=64.4271$。

（或近似可得$-\dfrac{a-60}{3}=1.48$，$-\dfrac{b-60}{3}=0.50$，$\dfrac{c-60}{3}=0.50$，$\dfrac{d-60}{3}=1.48$，故$a=55.56$，$b=58.50$，$c=61.50$，$d=64.44$）

26．设随机变量X与Y均服从正态分布，X服从正态分布$N(\mu,4^2)$，Y服从正态分布$N(\mu,5^2)$，试比较以下p_1和p_2的大小。

$$p_1=P\{X\le\mu-4\}\text{，}\ p_2=P\{Y\ge\mu+5\}\text{。}$$

解：因

$$p_1=P\{X\le\mu-4\}=\Phi\left(\frac{\mu-4-\mu}{4}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587\text{，}$$

$$p_2=P\{X\ge\mu+5\}=1-\Phi\left(\frac{\mu+5-\mu}{5}\right)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587\text{，}$$

故$p_1=p_2$。

27．设随机变量X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，若$P\{|X|>k\}=0.1$，试求$P\{X<k\}$。

解：因

$$P\{|X|>k\}=1-\Phi\left(\frac{k-0}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-k-0}{\sigma}\right)=2-2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=0.1,$$

得 $\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=0.95$，故

$$P\{X<k\}=\Phi\left(\frac{k-0}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=0.95。$$

28．设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试问：随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 是如何变化的？

解：因

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\times0.8413-1=0.6826,$$

故随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 不变。

29．设随机变量 X 服从参数为 $\mu=160$ 和 σ 的正态分布，若要求 $P\{120<X\le200\}\ge0.90$，允许 σ 最大为多少？

解：因

$$P\{120<X\le200\}=\Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\ge0.90,$$

故 $\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\ge0.95$，即 $\frac{40}{\sigma}\ge1.6450$，可得 $\sigma\le24.3161$。

（或近似可得 $\frac{40}{\sigma}\ge1.64$，故 $\sigma\le24.3902$）

30．设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E|X-\mu|$。

解：因 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

故

$$E|X-\mu|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=2\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{y^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot(-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sigma^2=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}。$$

31．设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，证明：$E|X|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$。

证明：因 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

故

$$E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot(-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\bigg|_0^{+\infty}=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{。}$$

32．设随机变量 X 服从伽玛分布 $Ga(2, 0.5)$，试求 $P\{X<4\}$。

解：因 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}0.5^2x\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

故

$$P\{X<4\}=\int_0^4 0.25x\mathrm{e}^{-0.5x}dx=\int_0^4(-0.5x)d(\mathrm{e}^{-0.5x})=-0.5x\mathrm{e}^{-0.5x}\Big|_0^4+\int_0^4\mathrm{e}^{-0.5x}\cdot 0.5dx$$

$$=-2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-0.5x}\Big|_0^4=-2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}+1=1-3\mathrm{e}^{-2}\approx 0.5940\text{。}$$

33．某地区漏缴税款的比例 X 服从参数 $a=2, b=9$ 的贝塔分布，试求此比例小于 10%的概率及平均漏缴税款的比例。

解：因 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(11)}{\Gamma(2)\Gamma(9)}x(1-x)^8, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}90x(1-x)^8, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$P\{X<0.1\}=\int_0^{0.1}90x(1-x)^8dx=\int_0^{0.1}(-10x)d[(1-x)^9]=-10x(1-x)^9\Big|_0^{0.1}+\int_0^4(1-x)^9\cdot 10dx$$

$$=-0.9^9-(1-x)^{10}\Big|_0^{0.1}=-0.9^9-0.9^{10}+1=0.2639,$$

且平均漏缴税款的比例为 $E(X)=\dfrac{2}{2+9}=\dfrac{2}{11}=0.1818$。

34．某班级学生中数学成绩不及格的比例 X 服从 $a=1, b=4$ 的贝塔分布，试求 $P\{X>E(X)\}$。

解：因 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(1)\Gamma(4)}(1-x)^3, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{1+4}=0.2,$$

故

$$P\{X>E(X)\}=\int_{0.2}^1 4(1-x)^3dx=-(1-x)^4\Big|_{0.2}^1=0.8^4=0.4096\text{。}$$