第三章　多维随机变量及其分布

习题 3.1

1．100 件商品中有 50 件一等品、30 件二等品、20 件三等品。从中任取 5 件，以 X、Y 分别表示取出的 5 件中一等品、二等品的件数，在以下情况下求 (X, Y) 的联合分布列。

（1）不放回抽取；（2）有放回抽取。

解：（1）(X, Y) 服从多维超几何分布，X, Y 的全部可能取值分别为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$，且

$$P\{X=i, Y=j\} = \frac{C_{50}^{i} C_{30}^{j} C_{20}^{5-i-j}}{C_{100}^{5}},\quad i=0,1,2,3,4,5;\ j=0,\cdots,5-i,$$

故 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0.0002	0.0019	0.0066	0.0102	0.0073	0.0019
1	0.0032	0.0227	0.0549	0.0539	0.0182	0
2	0.0185	0.0927	0.1416	0.0661	0	0
3	0.0495	0.1562	0.1132	0	0	0
4	0.0612	0.0918	0	0	0	0
5	0.0281	0	0	0	0	0

（2）(X, Y) 服从多项分布，X, Y 的全部可能取值分别为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$，且

$$P\{X=i, Y=j\} = \frac{5!}{i!\cdot j!\cdot(5-i-j)!}\times 0.5^{i}\times 0.3^{j}\times 0.2^{5-i-j},\quad i=0,1,2,3,4,5;\ j=0,\cdots,5-i,$$

故 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0.00032	0.0024	0.0072	0.0108	0.0081	0.00243
1	0.004	0.024	0.054	0.054	0.02025	0
2	0.02	0.09	0.135	0.0675	0	0
3	0.05	0.15	0.1125	0	0	0
4	0.0625	0.09375	0	0	0	0
5	0.03125	0	0	0	0	0

2．盒子里装有 3 个黑球、2 个红球、2 个白球，从中任取 4 个，以 X 表示取到黑球的个数，以 Y 表示取到红球的个数，试求 $P\{X=Y\}$。

解：所求概率为

$$P\{X=Y\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=2\} = \frac{C_3^1 C_2^1 C_2^2}{C_7^4} + \frac{C_3^2 C_2^2}{C_7^4} = \frac{6}{35} + \frac{3}{35} = \frac{9}{35}。$$

3．口袋中有 5 个白球、8 个黑球，从中不放回地一个接一个取出 3 个。如果第 i 次取出的是白球，则令 $X_i = 1$，否则令 $X_i = 0,\ \ i = 1, 2, 3$。求：

（1）(X_1, X_2, X_3) 的联合分布列；

（2）(X_1, X_2) 的联合分布列。

解：（1） X_1, X_2, X_3 的全部可能取值分别为 $0, 1$，且

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)\} = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{28}{143},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 1)\} = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{70}{429},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (0, 1, 0)\} = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{70}{429},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (1, 0, 0)\} = \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{70}{429},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (0, 1, 1)\} = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{40}{429},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (1, 0, 1)\} = \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{40}{429},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 0)\} = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{40}{429},$$

$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1)\} = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{5}{143}。$$

（2） X_1, X_2 的全部可能取值分别为 $0, 1$，且

$$P\{(X_1, X_2) = (0, 0)\} = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{39}，\quad P\{(X_1, X_2) = (0, 1)\} = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{39},$$

$$P\{(X_1, X_2) = (1, 0)\} = \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} = \frac{10}{39}，\quad P\{(X_1, X_2) = (1, 1)\} = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{39}。$$

故 (X_1, X_2) 的联合分布列为

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{14}{39}$	$\frac{10}{39}$
1	$\frac{10}{39}$	$\frac{5}{39}$

4. 设随机变量 X_i， $i = 1, 2$ 的分布列如下，且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$，试求 $P\{X_1 = X_2\}$。

X_i	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

解：因 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$，有 $P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 0$，即

$$P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0,$$

则 (X_1, X_2) 的分布列为

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0		0	0.25
0				0.5
1	0		0	0.25
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	

$\longrightarrow$

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	

故

$$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=0\text{。}$$

5． 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

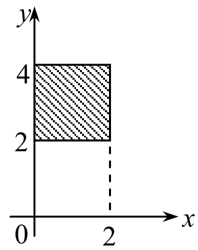
试求

（1）常数 k；

（2）$P\{X<1,Y<3\}$；

（3）$P\{X<1.5\}$；

（4）$P\{X+Y\le 4\}$。

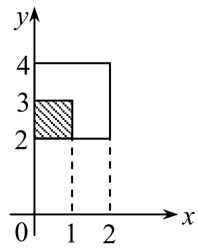


解：（1）由正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$，得

$$\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=\int_0^2 dx\cdot k\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=\int_0^2 k(6-2x)dx=k(6x-x^2)\Big|_0^2=8k=1,$$

故 $k=\dfrac{1}{8}$。

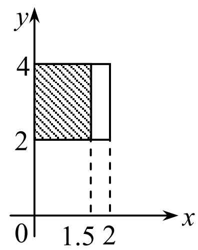
（2）所求概率为



$$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^3$$

$$=\int_0^1\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}\text{。}$$

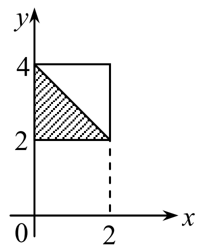
（3）所求概率为



$$P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^{1.5}dx\cdot\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^4$$

$$=\int_0^{1.5}\frac{1}{8}(6-2x)dx=\frac{1}{8}(6x-x^2)\Big|_0^{1.5}=\frac{27}{32}\text{。}$$

（4）所求概率为



$$P\{X+Y<4\}=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^{4-x}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{8}\left(6-4x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\left(6x-2x^2+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}\text{。}$$

6. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

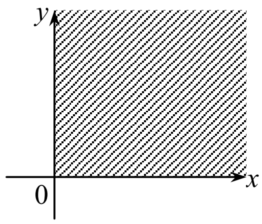
$$p(x, y)=\begin{cases}k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求

（1）常数 k；

（2）(X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$；

（3）$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\}$。



解：（1）由正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dxdy=1$，得

$$\int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\,dy=\int_0^{+\infty} dx\cdot k\left[-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\int_0^{+\infty}\frac{k}{4}\mathrm{e}^{-3x}\,dx=-\frac{k}{12}\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{k}{12}=1,$$

故 $k=12$。

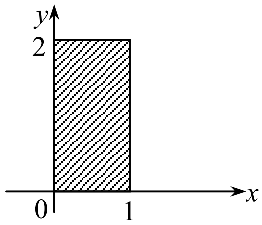
（2）根据 $x=0$ 与 $y=0$ 将 xOy 平面划分为 4 个区域，再进行合并，可得

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x, y)=0$；

当 $x\ge 0$ 且 $y\ge 0$ 时，$F(x, y)=\int_0^x du\int_0^y 12\,\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\,dv=\int_0^x du\cdot[-3\,\mathrm{e}^{-(3u+4v)}]\Big|_0^y=\int_0^x 3\,\mathrm{e}^{-3u}(1-\mathrm{e}^{-4y})du$

$$=-\mathrm{e}^{-3u}(1-\mathrm{e}^{-4y})\Big|_0^x=(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y});$$

故 (X, Y) 的联合分布函数为



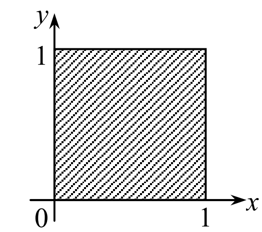
$$F(x, y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x\ge 0,\ y\ge 0; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）所求概率为

$$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\}=P\{X\le 1, Y\le 2\}=F(1, 2)=(1-\mathrm{e}^{-3})(1-\mathrm{e}^{-8})\text{。}$$

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



试求

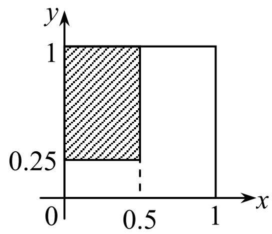
（1）$P\{0<X<0.5, 0.25<Y<1\}$；

（2）$P\{X=Y\}$；

（3）$P\{X<Y\}$；

（4）(X, Y) 的联合分布函数。

解：（1）所求概率为

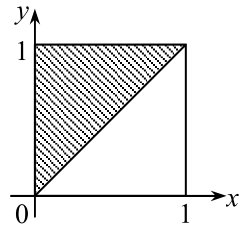


$$P\{0<X<0.5, 0.25<Y<1\}=\int_0^{0.5} dx\int_{0.25}^1 4xydy=\int_0^{0.5} dx\cdot 2xy^2\Big|_{0.25}^1$$

$$=\int_0^{0.5}\frac{15}{8}xdx=\frac{15}{16}x^2\Big|_0^{0.5}=\frac{15}{64}\text{。}$$

（2）$P\{X=Y\}=0$。

（3）所求概率为



$$P\{X<Y\}=\int_0^1 dx\int_x^1 4xydy=\int_0^1(2x-2x^3)dx=\left(x^2-\frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\text{。}$$

（4）根据 $x=0$，$x=1$ 与 $y=0$，$y=1$ 将 xOy 平面划分为 9 个区域，再进行合并，可得

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$，

当 $0\le x<1, 0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^y 4uvdv=\int_0^x du\cdot 2uv^2\Big|_0^y=\int_0^x 2uy^2du=u^2y^2\Big|_0^x=x^2y^2$，

当 $0\le x<1, y\ge 1$ 时，$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^1 4uvdv=\int_0^x du\cdot 2uv^2\Big|_0^1=\int_0^x 2udu=u^2\Big|_0^x=x^2$，

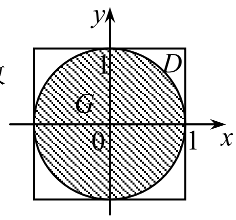
当 $x\ge 1, 0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_0^1 du\int_0^y 4uvdv=\int_0^1 du\cdot 2uv^2\Big|_0^y=\int_0^1 2uy^2du=u^2y^2\Big|_0^1=y^2$，

当 $x\ge 1, y\ge 1$ 时，$F(x,y)=P(\Omega)=1$。

故 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0;\\ x^2y^2, & 0\le x<1, 0\le y<1;\\ x^2, & 0\le x<1, y\ge 1;\\ y^2, & x\ge 1, 0\le y<1;\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1.\end{cases}$$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 在边长为 2，中心为 $(0,0)$ 的正方形区域内服从均匀分布，试求 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$。



解：设 D 表示该正方形区域，面积 $S_D=4$。G 表示单位圆区域，面积 $S_G=\pi$，故

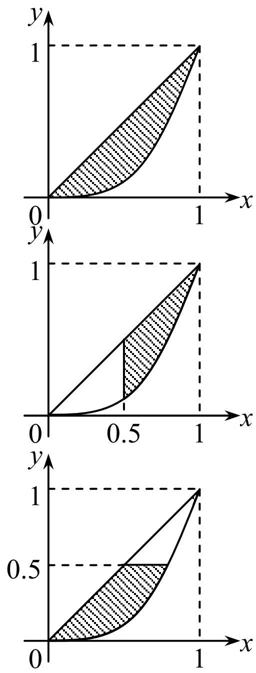
$$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\frac{S_G}{S_D}=\frac{\pi}{4}。$$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x^2<y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）试求常数 k；

（2）求 $P\{X>0.5\}$ 和 $P\{Y<0.5\}$。



解：（1）由正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$，得

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^x kdy=\int_0^1 dx\cdot ky\Big|_{x^2}^x=\int_0^1 k(x-x^2)dx=k\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{k}{6}=1,$$

故 $k=6$。

（2）所求概率为

$$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^1 dx\int_{x^2}^x 6dy=\int_{0.5}^1 dx\cdot 6y\Big|_{x^2}^x=\int_{0.5}^1 (6x-6x^2)dx$$

$$=(3x^2-2x^3)\Big|_{0.5}^1=0.5；$$

$$P\{Y<0.5\}=\int_0^{0.5}dy\int_y^{\sqrt{y}}6dx=\int_0^{0.5}dy\cdot 6x\Big|_y^{\sqrt{y}}=\int_0^{0.5}(6\sqrt{y}-6y)dy$$

$$=(4y^{\frac{3}{2}}-3y^2)\Big|_0^{0.5}=\sqrt{2}-\frac{3}{4}。$$

10. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

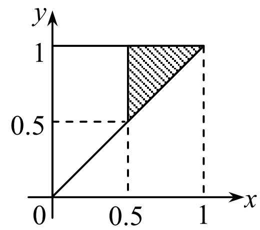
$$p(x,y)=\begin{cases}6(1-y), & 0<x<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求 $P\{X>0.5, Y>0.5\}$；

（2）求 $P\{X<0.5\}$ 和 $P\{Y<0.5\}$；

（3）求 $P\{X+Y<1\}$。

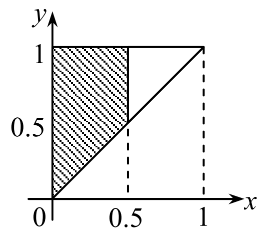
解：（1）所求概率为



$$P\{X>0.5, Y>0.5\}=\int_{0.5}^{1}dx\int_{x}^{1}6(1-y)dy=\int_{0.5}^{1}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^1$$

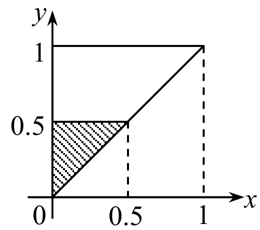
$$=\int_{0.5}^{1}3(1-x)^2dx=-(1-x)^3\Big|_{0.5}^{1}=\frac{1}{8}\text{。}$$

（2）所求概率为



$$P\{X<0.5\}=\int_{0}^{0.5}dx\int_{x}^{1}6(1-y)dy=\int_{0}^{0.5}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^1$$

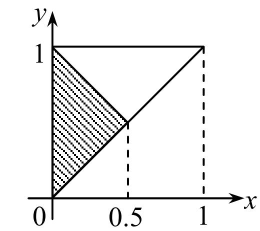
$$=\int_{0}^{0.5}3(1-x)^2dx=-(1-x)^3\Big|_{0}^{0.5}=\frac{7}{8}\text{；}$$



$$P\{Y<0.5\}=\int_{0}^{0.5}dx\int_{x}^{0.5}6(1-y)dy=\int_{0}^{0.5}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^{0.5}$$

$$=\int_{0}^{0.5}\left[-\frac{3}{4}+3(1-x)^2\right]dx=\left[-\frac{3}{4}x-(1-x)^3\right]\Bigg|_{0}^{0.5}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（3）所求概率为



$$P\{X+Y<1\}=\int_{0}^{0.5}dx\int_{x}^{1-x}6(1-y)dy=\int_{0}^{0.5}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^{1-x}$$

$$=\int_{0}^{0.5}[-3x^2+3(1-x)^2]dx=[-x^3-(1-x)^3]\Big|_0^{0.5}=\frac{3}{4}\text{。}$$

11．设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，定义随机变量 X_k 如下：

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k;\\ 1, & Y>k.\end{cases}\quad k=1,2\text{。}$$

求 X_1 和 X_2 的联合分布列。

解：因 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

且 X_1 和 X_2 的全部可能取值都是 $0,1$，则

$$P\{X_1=0, X_2=0\}=P\{Y\le 1, Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=\int_0^1 e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_0^1=1-e^{-1}\text{，}$$

$$P\{X_1=0, X_2=1\}=P\{Y\le 1, Y>2\}=P(\varnothing)=0\text{，}$$

$$P\{X_1=1, X_2=0\}=P\{Y>1, Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_1^2=e^{-1}-e^{-2}\text{，}$$

$$P\{X_1=1, X_2=1\}=P\{Y>1, Y>2\}=P\{Y>2\}=\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,dy=-\mathrm{e}^{-y}\Big|_2^{+\infty}=\mathrm{e}^{-2},$$

故 X_1 和 X_2 的联合分布列为

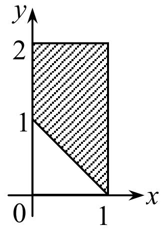
$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$1-\mathrm{e}^{-1}$	0
1	$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$	e^{-2}

12．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0<x<1, 0<y<2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $P\{X+Y\geq 1\}$。

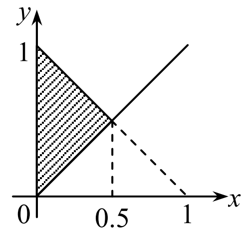
解： 所求概率为



$$P\{X+Y\geq 1\}=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(x^2y+\frac{xy^2}{6}\right)\Bigg|_{1-x}^2$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}x^3+\frac{5}{24}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{65}{72}。$$

13．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为



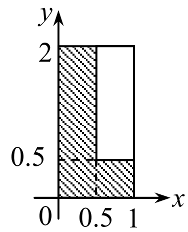
$$p(x, y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $P\{X+Y\leq 1\}$。

解： 所求概率为

$$P\{X+Y\leq 1\}=\int_0^{0.5}dx\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\,dy=\int_0^{0.5}(-\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x})dx=(-\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{0.5}=1+\mathrm{e}^{-1}-2\,\mathrm{e}^{-0.5}。$$

14．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x, y)=\begin{cases} 1/2, & 0<x<1, 0<y<2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

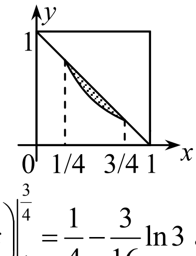
求 X 与 Y 中至少有一个小于 0.5 的概率。

解： 所求概率为

$$P\{\min\{X,Y\}<0.5\}=1-P\{X\geq 0.5, Y\geq 0.5\}=1-\int_{0.5}^1 dx\int_{0.5}^2\frac{1}{2}dy=1-\int_{0.5}^1\frac{3}{4}dx=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}。$$

15．从 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求其积不小于 $3/16$，且其和不大于 1 的概率。

解： 设 X、Y 分别表示从 $(0,1)$ 中随机地取到的两个数，则 (X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x, y)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故所求概率为

$$P\left\{XY\geq\frac{3}{16}, X+Y\leq 1\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}dx\int_{\frac{3}{16x}}^{1-x}dy=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\left(1-x-\frac{3}{16x}\right)dx=\left(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{16}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3。$$