第二章　极限与连续

极限研究变量的变化趋势.

§2.1　数列的极限

定义　数列即一列无穷多个数： $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，称为数列，记为$\{x_n\}$．其中 x_n 为通项.

如（1）$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$： $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \Lambda$ ；

（2）$\left\{1-\dfrac{1}{2^n}\right\}$： $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{15}{16}, \Lambda$ ；

（3）$\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$： $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{5}, \Lambda$ ；

（4）$\{(-1)^n\}$： $-1, 1, -1, 1, \cdots$；

（5）$\{n^2\}$： $1, 4, 9, 16, \cdots$；

变化趋势：（1）随着 n 的无限增大，$\dfrac{1}{n}$ 越来越小，无限接近于 0；

（2）随着 n 的无限增大，$1-\dfrac{1}{2^n}$ 越来越大，无限接近于 1；

（3）随着 n 的无限增大，$\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ 时大时小，无限接近于 1；

（4）随着 n 的无限增大，$(-1)^n$ 时大时小，振荡而不接近任何数；

（5）随着 n 的无限增大，n^2 越来越大，无限制增大.

例（1）、(2）、(3）有一个共同特征就是：随着 n 的无限增大 x_n 都无限接近于某常数 a.

数列极限的概念：数列$\{x_n\}$和常数 a，若随着 n 的无限增大，x_n 无限接近于 a，则称 $n\to\infty$ 时，数列$\{x_n\}$以 a 为极限或收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a$ （$n\to\infty$）.

若随着 n 的无限增大，x_n 不接近于任何常数，则称数列$\{x_n\}$发散或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

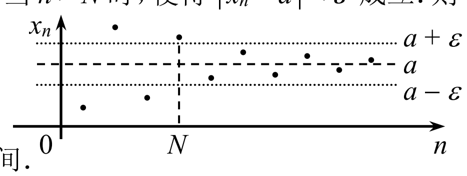
如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^n})=1$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ 不存在.

将数列极限的概念用严密的数学语言叙述即得到数列极限的定义.

“x_n 无限接近于 a”，指 $|x_n-a|$ 可任意小，即对任给很小的正数ε ，使得 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

“随着 n 的无限增大”，即对给定的很大的正整数 N ，使得 $n>N$.

定义　数列$\{x_n\}$和常数 a，如果对任给的$\varepsilon>0$，总存在正整数 N ，使得当 $n>N$ 时，使得 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立．则称 $n\to\infty$ 时，数列$\{x_n\}$以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.



简写为：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

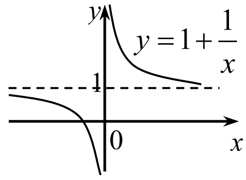
几何意义：对$\forall\varepsilon>0$，数列$\{u_n\}$从某项以后总是位于 $a-\varepsilon$ 和 $a+\varepsilon$ 之间.

例　用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

证明：对$\forall\varepsilon>0$ ，要使得$\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$ 成立，只需 $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，取 $N=\max\{[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}],1\}$，

则当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$ 成立，得证.

§2.2　函数的极限



一．$x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

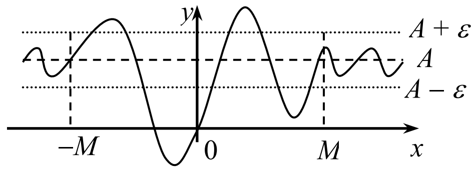
如函数 $y = 1 + \frac{1}{x}$，随着 $|x|$ 的无限增大，$1 + \frac{1}{x}$ 无限接近于 1．

函数极限的概念：函数 $f(x)$ 和常数 A，若随着 $|x|$ 的无限增大，函数 $f(x)$ 无限接近于 A，则称 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$．

如 $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x}) = 1$．

“随着 $|x|$ 的无限增大”，即对给定的很大的正数 M，使得 $|x| > M$．

定义　函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对任给的 $\varepsilon > 0$，总存在 $M > 0$，使得当 $|x| > M$ 时，使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立．则称 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$．



简写为：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0$，当 $|x| > M$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立．

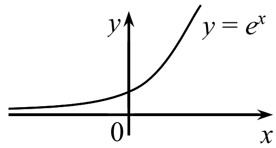
几何意义：对$\forall \varepsilon > 0$，当 $|x|$ 充分大时，

$f(x)$总是位于 $A - \varepsilon$ 和 $A + \varepsilon$ 形成的带形区域之间．

例　用定义证明 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$．

证明：对$\forall \varepsilon > 0$，要使得 $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ 成立，只需 $\left|\frac{2}{x-1}\right| < \varepsilon$，$|x-1| > \frac{2}{\varepsilon}$，即 $x < 1 - \frac{2}{\varepsilon}$ 或 $x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$，

$\therefore$取 $M = \max\{\left|1 - \frac{2}{\varepsilon}\right|, \left|1 + \frac{2}{\varepsilon}\right|\} = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$，当$|x| > M$ 时，$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ 成立，得证．



注意：$x \to \infty$ 包括正负两个方向，而有时只考虑其中一个方向．

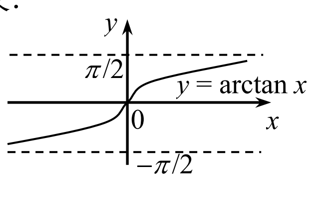
如 e^x，当 x 从正方向趋于∞ 时，e^x 无限制增大；

当 x 从负方向趋于∞ 时，e^x 无限接近于 0．

若随着 x 的无限增大，$f(x)$ 无限接近于 A，则称 $x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$；

若随着 $-x$ 的无限增大，$f(x)$ 无限接近于 A，则称 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$．

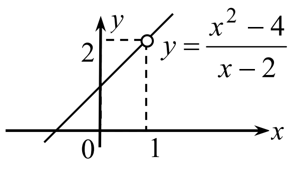
将定义 2. 4 中极限条件$|x| > M$ 分别改为 $x > M$ 或$-x > M$，即得相应的极限定义．



如 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ 不存在，而 $\lim\limits_{x \to \infty} e^x$ 也不存在．

又如 $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$，而 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在．

定理　$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 都存在而且相等．



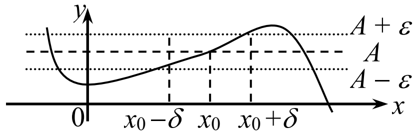
二．$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

如函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$，当 x 无限接近于 1（但 $x \neq 1$）时，$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 无限接近于 2．

函数极限的概念：函数 $f(x)$ 和常数 A，如果当 x 无限接近 x_0（但 $x \neq x_0$）时，$f(x)$ 无限接近于 A，则称 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$．如 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$．

“当 x 无限接近 x_0（但 $x \neq x_0$）”，即对给定的很小的正数δ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$．

定义 函数$f(x)$ 和常数A，如果对任给的 $\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立．则称$x\to x_0$ 时，函数$f(x)$ 以A为极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$．



简写为：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立．

几何意义：对$\forall\varepsilon>0$，当x充分接近x_0时，$f(x)$总是位于$A-\varepsilon$ 和$A+\varepsilon$形成的带形区域之间．

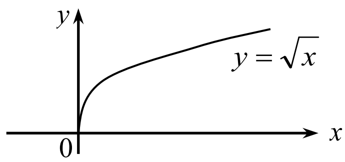
例 用定义证明$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$．

证明：对$\forall\varepsilon>0$ ，要使得$|(x^2+1)-5|<\varepsilon$ 成立，即$|(x-2)(x+2)|<\varepsilon$，$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$，

设$|x-2|<1$，有$3<x+2<5$，当$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$时，满足$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$．

$\therefore$取$\delta=\min\{\dfrac{\varepsilon}{5},1\}$，当$0<|x-2|<\delta$ 时，$|(x^2+1)-5|<\varepsilon$成立，得证．

三．左、右极限



$x\to x_0$ 包括从x_0左右两侧趋于x_0，而有时只考虑其中一侧．

如$y=\sqrt{x}$，当$x\to 0$时，就只能考虑从$x=0$的右侧趋于0．

若随着x无限接近x_0且$x<x_0$，$f(x)$ 无限接近于A，则称$x\to x_0^-$ 时，函数$f(x)$ 以A为左极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$或$f(x_0-0)$；若随着$x$无限接近$x_0$且$x>x_0$，$f(x)$ 无限接近于A，则称$x\to x_0^+$ 时，函数$f(x)$ 以A为右极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$或$f(x_0+0)$．

将定义 2. 3 中条件$0<|x-x_0|<\delta$ 分别改为$0<x-x_0<\delta$ 或$0<x_0-x<\delta$ ，即得相应的左、右极限定义．

如$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ 无定义，而$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ 不存在．

例 讨论$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$ 在$x=0$处的左、右极限．

解：左极限：$x\to 0^-$，即$x<0$且$x\to 0$，$f(x)=x+1$，故$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，

右极限：$x\to 0^+$，即$x>0$且$x\to 0$，$f(x)=x-1$，故$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，$\therefore\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在．

注意：分段函数在分段点处求极限，一般应分左、右极限分别计算．

例 设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2, \\ 2x, & 2<x\le 3, \\ x, & x>3, \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$与$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$．

解：当$x\to 2$时，左极限：$x\to 2^-$，即$x<2$且$x\to 2$，$f(x)=x^2$，故$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$，

右极限：$x\to 2^+$，即$x>2$且$x\to 2$，$f(x)=2x$，故$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x=4$，$\therefore\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$．

当$x\to 3$时，左极限：$x\to 3^-$，即$x<3$且$x\to 3$，$f(x)=2x$，故$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2x=6$，

右极限：$x\to 3^+$，即$x>3$且$x\to 3$，$f(x)=x$，故$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} x=3$，$\therefore\lim\limits_{x\to 3} f(x)$不存在．

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在而且相等.

以上给出的各种极限定义都是反映变量 y 无限接近某常数 A 的情况，所不同的只是极限条件（$n\to\infty$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0$, $x\to {x_0}^+$, $x\to {x_0}^-$）. 下面给出一个统一的极限定义：

定义 变量 y 和常数 A，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在那么一个时刻，在该时刻之后，使得$|y-A|<\varepsilon$ 成立，则称在该极限条件下变量 y 以 A 为极限，记为 $\lim y=A$.

需要指出对于具体的极限必须结合极限条件，如写 $\lim(x-1)$ 就没有意义.

只有在讨论对于任何极限条件都成立的结论时才可以不写出极限条件，如 C 为常数，有 $\lim C=C$.

四．极限的性质

性质 1 （唯一性）若极限 $\lim y$ 存在，则极限值唯一.

证明：反证法，假设 $\lim y=A$ 和 $\lim y=B$，且 $A>B$，取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$,

因 $\lim y=A$ 和 $\lim y=B$，在某时刻之后，$|y-A|<\varepsilon$ 与 $|y-B|<\varepsilon$ 都成立，

即 $\dfrac{A+B}{2}<y<\dfrac{3A-B}{2}$ 且 $\dfrac{A-3B}{2}<y<\dfrac{A+B}{2}$ ，矛盾，故得证.

性质 2 （局部有界性） 若极限 $\lim y$ 存在，则在某时刻之后 y 有界.

证明：设 $\lim y=A$，任取 $\varepsilon>0$，在某时刻之后，$|y-A|<\varepsilon$ 成立，即 $A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$ ，故 y 有界.

注：若 $n\to\infty$ 时，数列$\{x_n\}$极限存在，则数列$\{x_n\}$整体有界. 这是因为由局部有界性知，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，x_n 有界，而当 $n\le N$ 时，仅有有限项 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ ，也是有界的.

性质 3 （局部保号性） 若 $\lim y_1=A$，$\lim y_2=B$，且 $A>B$，则在某时刻之后恒有 $y_1>y_2$.

证明：取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$ ，因 $\lim y_1=A$，在某时刻之后，$|y_1-A|<\varepsilon$ ，即 $\dfrac{A+B}{2}<y_1<\dfrac{3A-B}{2}$ ，

又因 $\lim y_2=B$，在某时刻之后，$|y_2-B|<\varepsilon$ ，即 $\dfrac{A-3B}{2}<y_2<\dfrac{A+B}{2}$，故在某时刻之后 $y_1>y_2$.

推论 1 若 $\lim y=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则在某时刻之后恒有 $y>0$（或 $y<0$）.

推论 2 若 $\lim y_1=A$，$\lim y_2=B$，且在某时刻之后恒有 $y_1>y_2$ ，则 $A\ge B$.

证明：反证法，假设 $A<B$，由性质 3 知在某时刻之后 $y_1<y_2$ ，与已知条件矛盾，故 $A\ge B$.

注：设 $y_1>y_2$ ，但有可能 $\lim y_1=\lim y_2$. 如$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2n}$ ，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}=0$.

§2.5 无穷小量与无穷大量

一．无穷小量的概念

定义 极限为零的变量称为无穷小量. 即如果对$\forall\varepsilon>0$，总有那么一个时刻，在该时刻之后，$|\alpha|<\varepsilon$ 成立，则称在该极限条件下α 为无穷小量.

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ ，即 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^2}$ 为无穷小量； $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ ，即 $x\to1$ 时，$x-1$ 为无穷小量.

注意：（1）具体的无穷小量必须结合极限条件；

（2）无穷小量是一个无限接近于零的变量，而不是一个具体的数；

（3）数零本身是一个特殊的无穷小量.

性质 1 有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

注意：无限个无穷小量的和不一定是无穷小量. 如 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$是无穷小量，但$\underbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}_{n}=1$不是.

性质 2 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量.

证明：设α 是无穷小量，y 是有界变量，不妨设 $|y|\le M$,

对$\forall\varepsilon>0$，$\dfrac{\varepsilon}{M}$仍为一个正数，总有那么一个时刻，在该时刻之后，$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$成立.

∴在该时刻之后，$|\alpha y|<\dfrac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$成立，故$\alpha y$是无穷小量，得证.

如$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$，因$x\to 0$时，$x$为无穷小量，且$\sin\dfrac{1}{x}$是有界变量，故$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

定理 变量y的极限为A的充要条件是$y=A+\alpha$，其中α为无穷小量.

证明：若y的极限为A，则对$\forall\varepsilon>0$，在某时刻之后，$|y-A|<\varepsilon$，令$\alpha=y-A$，有$y=A+\alpha$.

且对$\forall\varepsilon>0$，在某时刻之后，$|\alpha|<\varepsilon$，即α为无穷小量.

若$y=A+\alpha$，其中α为无穷小量，则对$\forall\varepsilon>0$，在某时刻之后，$|\alpha|=|y-A|<\varepsilon$，即$y$的极限为$A$.

二．无穷大量

绝对值无限制增大的变量称为无穷大量，记为$\lim y=\infty$.

“绝对值无限制增大”，即对任给的很大的正数M，使得$|y|>M$成立.

定义 变量y，如果对任意给定的$M>0$，总存在那么一个时刻，在该时刻之后，使得$|y|>M$成立，则称变量y是无穷大量，记为$\lim y=\infty$.

如$n\to\infty$时，n^2无限制增大，即$\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$；$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}$无限制增大，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

注意：（1）具体的无穷大量必须结合极限条件；

（2）无穷大量是属于极限不存在的情形，即无穷大量是发散，而不是收敛.

无穷大量与无穷小量的关系：无穷大量的倒数是无穷小量；非零无穷小量的倒数是无穷大量.

如$n\to\infty$时，n^2是无穷大量，有$\dfrac{1}{n^2}$是无穷小量；

$x\to 1$时，$x-1$是无穷小量，有$\dfrac{1}{x-1}$是无穷大量.

三．无穷小量的比较

同一极限条件下的无穷小量趋于零的程度各不相同.

如$x\to 0$时，x与x^2都是无穷小量，但x^2比x更快的趋于零.

定义 设α和β是同一极限条件下的两个无穷小量，且$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k$，

（1）如果$k=0$，则称α是β的高阶无穷小量；

（2）如果$k=\infty$，则称α是β的低阶无穷小量；

（3）如果$0<|k|<+\infty$，则称α与β是同阶无穷小量；其中$k=1$时，称α与β等价，记为$\alpha\sim\beta$.

例 当$x\to 0$时，分别将x^2, $\sqrt[3]{x}$, $5x$, $x+x^2$与x比较.

解：当$x\to 0$时，x^2, $\sqrt[3]{x}$, $5x$, $x+x^2$与x都是无穷小量，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，故$x\to 0$时，$x^2$是$x$的高阶无穷小量；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$，故$x\to 0$时，$\sqrt[3]{x}$是$x$的低阶无穷小量；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$，故$x\to 0$时，$5x$是$x$的同阶无穷小量；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$，故$x\to 0$时，$x+x^2$是$x$的等价无穷小量，$x+x^2\sim x$.

类似，可以定义无穷大量的比较：高阶、低阶、同阶、等价无穷大量.

§2.3　极限的运算法则及应用

一．极限的四则运算法则

定理　和差积商的极限等于极限的和差积商．（商要求分母的极限不为零）

若 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在，

则 $\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v$；$\lim uv=\lim u\cdot\lim v$； $\lim\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim u}{\lim v}$，（$\lim v\neq 0$）．

1．当 $x\to x_0$ 时，函数极限的计算

例　求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x+5)$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5=(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-3\lim\limits_{x\to 2}x+5=2^3-3\times 2+5=7$．

一般地有： $\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x_0+a_n$．

例　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x^2+1}$．

解：原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)}=\dfrac{2+3}{1^2+1}=\dfrac{5}{2}$．

例　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x^2-1}$．

解：因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x+3}=\dfrac{1-1}{2+3}=0$， 故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x^2-1}=\infty$．

例　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{1+3}{1+1}=2$．

总结：当 $x\to x_0$ 时，分式极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，“先看分母再看分子”．

先看分母极限是否为零．如果分母极限不为零，直接用极限的商运算法则；

如果分母极限为零，再看分子极限是否为零．

若分子极限不为零，则原极限为∞；

若分子极限为零，则原极限为$\dfrac{0}{0}$型，应约分．

根式问题：需作无穷小量因子有理化．

例　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{(x^2-4)(\sqrt{x-1}+2)}$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1-9}{(x^2-4)(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{4x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x+2)(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{4x+1}+3)}=\dfrac{1}{18}$．

待定系数问题：

例　已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$，求 a,b ．

解：$\because \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$， $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b$，故 $1+a+b=0$，即 $b=-a-1$，

则原极限 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+a+1)=a+2=5$，$\therefore a=3$，$b=-4$．

2．当 $x\to\infty$ 时，函数极限的计算

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x^2+1}$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0+0}{1+0}=0$．

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+4}{3x+1}$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5+\dfrac{4}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}=\infty$．

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+6}{3x^2+4x-1}$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{5-0+0}{3+0-0}=\dfrac{5}{3}$．

总结：当 $x\to\infty$ 时，分式极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，“比较分子分母次数”．

分母次数高，极限为 0；分子次数高，极限为 ∞；分子分母次数相等，极限为最高次项系数之比．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\Lambda+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}.$$

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)^{10}(5x-2)^{30}}{(3x-1)^{50}}$．

解：分子 50 次，分母 50 次，原式 $=\dfrac{2^{10}\times5^{30}}{3^{50}}$，或原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\dfrac{2x^2+1}{x^2})^{10}(\dfrac{5x-2}{x})^{30}}{(\dfrac{3x-1}{x})^{50}}=\dfrac{2^{10}\times5^{30}}{3^{50}}$．

根式问题：类似比较次数

例　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}}{2x+3}$．

解：分子 $\dfrac{2}{3}$ 次，分母 1 次，原式= 0.

待定系数问题：

例　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}}{x^n-(x-2)^n}=a\neq0$，求 n, a.

解：$\because x^n-(x-2)^n=x^n-[x^n-n\cdot2x^{n-1}+\cdots+(-2)^n]=n\cdot2x^{n-1}-\cdots-(-2)^n$，即分母 $n-1$ 次，分子 10 次，

则 $n=11$，$a=\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{22}$．

二．复合函数的运算法则

定理　若函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$满足：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq u_0$；（2）$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{\varphi(x)\to u_0}f[\varphi(x)]=A$ 或当 $x\to x_0$ 时，$\varphi(x)\to u_0$，$f(u)\to A$.

证明：因 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists t>0$，当 $0<|u-u_0|<t$ 时，$|f(u)-A|<\varepsilon$，

又因 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，对 $t>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|\varphi(x)-u_0|=|u-u_0|<t$，

由于在 x_0 的某去心邻域内有 $\varphi(x)\neq u_0$，则 $\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$0<|u-u_0|<t$，

进而有 $|f(u)-A|=|f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon$，　故 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

注意：将定理中的 x_0、u_0 或 A 改为 ∞，定理仍然成立.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}=0$.

解：因 $x\to 0$ 时，$-\dfrac{1}{x^2}\to-\infty$，得 $e^{-\frac{1}{x^2}}\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$.

又因 $x\to 0$ 时，$-\dfrac{1}{x}\to\infty$，分左、右极限讨论.

左极限：$x\to 0^-$，有 $\dfrac{1}{x}\to-\infty$，$-\dfrac{1}{x}\to+\infty$，得 $e^{-\frac{1}{x}}\to\infty$，则 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\infty$；

右极限：$x\to 0^+$，有 $\dfrac{1}{x}\to+\infty$，$-\dfrac{1}{x}\to-\infty$，得 $e^{-\frac{1}{x}}\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$；　故 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}$ 不存在.

§2.4　极限存在准则与两个重要极限

一．极限存在准则

准则Ⅰ　（夹逼定理）变量 y,y_1,y_2，若 $\lim y_1=\lim y_2=A$，且在某个时刻之后 $y_1\le y\le y_2$，则 $\lim y=A$.

证明：因 $\lim y_1=\lim y_2=A$，对 $\forall\varepsilon>0$，在某时刻之后，$|y_1-A|<\varepsilon$ 且 $|y_2-A|<\varepsilon$，

即 $A-\varepsilon<y_1<A+\varepsilon$ 且 $A-\varepsilon<y_2<A+\varepsilon$，得：$A-\varepsilon<y_1\le y\le y_2<A+\varepsilon$，故 $\lim y=A$.

例　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\Lambda+\dfrac{n}{n^2+n})$.

解：因 $\dfrac{i}{n^2+n}\le\dfrac{i}{n^2+i}\le\dfrac{i}{n^2}$，　$1\le i\le n$，有 $\dfrac{1+2+\Lambda+n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\Lambda+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{1+2+\Lambda+n}{n^2}$，

而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\Lambda+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\dfrac{1}{2}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\Lambda+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$，

故根据夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\Lambda+\dfrac{n}{n^2+n})=\dfrac{1}{2}$.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

几何意义显然，但理论证明需要用到实数理论，这里略去证明.

例　设 $y_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \Lambda + \frac{1}{n^2}$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在.

证明：由于 $y_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \Lambda + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = y_n + \frac{1}{(n+1)^2} > y_n$，有数列 $\{y_n\}$ 单调增加，

且 $0 < y_n \le 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \Lambda + \frac{1}{(n-1)\times n} = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \Lambda + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2$，

故 $\{y_n\}$ 单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在.

注意：根据数列单调有界，可以判断极限存在，但不能确定既限值.

例　设 $a_1 = \sqrt{2}$，$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$，…，$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

证：因 $a_1 = \sqrt{2}$，$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$，$a_3 = \sqrt{2 + a_2} > \sqrt{2 + a_1} = a_2$，依此类推，

则 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n$，即 $\{a_n\}$ 单调增加，

又因 $a_1 = \sqrt{2} < 2$，$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2+2} = 2$，$a_3 = \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2+2} = 2$，依此类推，

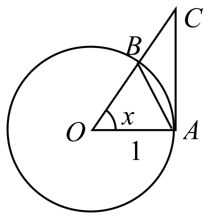
则 $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$，即 $\{a_n\}$ 单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = a$，

由于 $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}$，即 $a = \sqrt{2+a}$，$a^2 = 2 + a$，得 $a = 2$ 或 $a = -1$（舍），

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

二．两个重要极限

1．$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



证：先考虑 $x > 0$ 的情形，设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，如图，作半径为 1 的单位圆，$\angle AOB = x$，

显然，ΔOAB 的面积 $<$ 扇形 OAB 的面积 $< \Delta OAC$ 的面积，

即 $\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin x < \frac{1}{2}|OA|^2\cdot x < \frac{1}{2}|OA|\cdot|AC| < \frac{1}{2}|OA|\cdot|OA|\cdot\tan x$，

得 $\sin x < x < \tan x$，同除以 $\sin x$，有 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$，即 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$，

再考虑 $x < 0$ 的情形，设 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$，有 $0 < -x < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$，即 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$，

则当 $0 < |x - x_0| < \frac{\pi}{2}$ 时，总有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，根据夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5 = 1\times 5 = 5$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 2x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=\dfrac{7}{2}$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解：方法一：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$；

方法二：原式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=1\times\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

注：第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的结构为 $\dfrac{\sin 0}{0}$ 型，

如（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$，（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$，（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$，（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$，

（1）和（4）极限等于 1，（2）和（3）不是（事实上是无穷小量乘有界变量，极限等于 0）.

例　求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 5(x-\pi)}{-\sin 3(x-\pi)}=\lim\limits_{x-\pi\to 0}\dfrac{\frac{\tan 5(x-\pi)}{x-\pi}}{-\frac{\sin 3(x-\pi)}{x-\pi}}=\lim\limits_{x-\pi\to 0}\dfrac{\frac{\tan 5(x-\pi)}{5(x-\pi)}\cdot 5}{-\frac{\sin 3(x-\pi)}{3(x-\pi)}\cdot 3}=-\dfrac{5}{3}$.

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，这里 $e\approx 2.718281828459045\cdots$.

先讨论数列 $\{a_n\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限，直观上看，

n	1	2	3	4	5	10	100	10000	10^8
$(1+1/n)^n$	2^1	1.5^2	1.3333^3	1.25^4	1.2^5	1.1^{10}	1.01^{100}		
a_n	2	2.25	2.37037	2.4414	2.48832	2.59374	2.7048	2.71815	2.718281815

随 n 的无限增大，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的底数逐渐减小，指数逐渐增大，其值缓慢增大，可以看出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证明：用二项式定理展开 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，

$$\text{则 } a_n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

类似 $a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}),$$

比较 a_n 与 a_{n+1}，从第三项起 a_n 中每一项都小于 a_{n+1} 中的对应项，且 a_{n+1} 比 a_n 还多出一个正项，

即 $a_n<a_{n+1}$，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加；

又因为 $a_n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$，

则 $0<a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}$

$$=1+1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=3-\frac{1}{n}<3,$$

即 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，记为 e，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

可以证明对于实数 x，仍然有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，这里包括 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$.

证明：当 $x>0$ 时，设 $n\le x<n+1$，有 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{e}{1}=e$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$；

当 $x<0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x}=\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)$，

故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{-(x+1)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)=e\cdot 1=e$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

若令 $\alpha=\frac{1}{x}$，有 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\times 3}=e^3$.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-2x}\right)^{(-2x)\times(-\frac{1}{2})}=e^{-\frac{1}{2}}$.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^x$.

解：方法一：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{5}{x})^x}{(1-\frac{2}{x})^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{5}{x})^{\frac{x}{5}\times 5}}{(1+\frac{-2}{x})^{\frac{x}{-2}\times(-2)}}=\dfrac{e^5}{e^{-2}}=e^7$；

方法二：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{7}\cdot\frac{7x}{x-2}}$，因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x}{x-2}=7$，故原式$=e^7$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}\times(-3)}=e^{-3}$.

注：第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的结构为 $(1+0)^\infty$ 型，

如（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，　（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$，　（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$，

（1）和（4）极限等于 e，　（2）和（3）不是.

例　求 $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}\times(-1)}=e^{-1}$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解：令 $y=e^x-1$，有 $x=\ln(1+y)$，且 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，故原式$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=1$.

三．连续复利与资本折现问题

设现有资金 p 元，年利率为 r，如果每年结算一次，一年后资金本利和为 $p(1+r)$元；两年后资金本利和为 $p(1+r)^2$元；t 年后资金本利和为 $p(1+r)^t$元.

如果每年结算 m 次，每次利率为 $\frac{r}{m}$，第一次结算后资金本利和为 $p(1+\frac{r}{m})$ 元；一年后资金本利和为 $p(1+\frac{r}{m})^m$ 元；t 年后资金本利和为 $p(1+\frac{r}{m})^{mt}$ 元.

如果按连续复利结息，即 $m\to\infty$，t 年后资金本利和为 $\lim\limits_{m\to\infty}p(1+\frac{r}{m})^{mt}=\lim\limits_{m\to\infty}p(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{r}\cdot rt}=pe^{rt}$ 元. 反过来，设预计 t 年末有一笔收入 A 元，看作是现有的资金 p 元按连续复利结息 t 年后资金的本利和，有 $A=pe^{rt}$，即 $p=Ae^{-rt}$，称之为 t 年末收入的折现.

四．等价无穷小（大）量替换原理

极限问题中，对于乘除运算式的无穷小（大）量，可以通过等价替换进行化简而便于计算.

定理　设α,β是同一极限过程中的两个无穷小（大）量，且$\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

根据 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}=1\cdot\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot 1=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$，即得.

定理　设α,α_1,γ是同一极限过程中的三个变量，α,α_1是等价无穷小（大）量，即$\alpha\sim\alpha_1$，且$\alpha\gamma,\alpha_1\gamma$也是无穷小（大）量，则$\alpha\gamma\sim\alpha_1\gamma$.

根据 $\lim\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，即得.

常见的等价无穷小量有：当 $x\to 0$ 时，

（1）$\sin x\sim x$，　（2）$\tan x\sim x$，　（3）$\ln(1+x)\sim x$，　（4）$e^x-1\sim x$，

（5）$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$，　（6）$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{x}{n}$，　（7）$\arcsin x\sim x$，　（8）$\arctan x\sim x$.

其它情况可通过上述等价无穷小量进行推导，如当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$，

$a^x-1=e^{\ln a^x}-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{1-\cos x}$.

解：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1-x^2}-1=[1+(-x^2)]^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{-x^2}{3}$，$1-\cos x=\frac{x^2}{2}$，故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{3}}{\frac{x^2}{2}}=-\frac{2}{3}$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(e^{\sin x}-1)^2}{\tan^2 x}$.

解：当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\to 0$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot x^2}{x^2}=1$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\times\frac{\cos x-1}{x^2}}$，

当 $x\to0$ 时，$\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，故原式$=e^{-\frac{1}{2}}$．

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)^{10}(5x-2)^{30}}{(3x-1)^{50}}$．

解：当 $x\to\infty$ 时，$2x^2+1\sim2x^2$，$5x-2\sim5x$，$3x-1\sim3x$，故原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2)^{10}(5x)^{30}}{(3x)^{50}}=\dfrac{2^{10}\times5^{30}}{3^{50}}$．

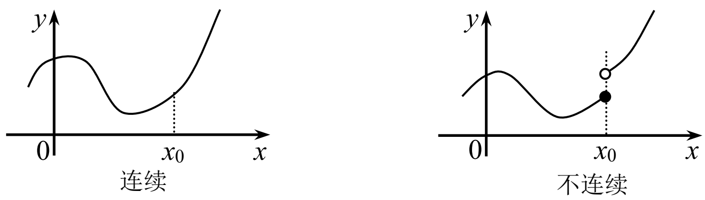
§2.6　函数的连续性

一．变量的增量

设变量 u 从初值 u_0 改变到终值 u_1，则称$\Delta u=u_1-u_0$为变量 u 的增量．

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，因变量 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，称$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的增量．

二．函数连续的概念



连续的特征是：当自变量 x 的增量Δx 很小时，函数 y 的增量Δy 也很小．

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$．如果 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．

例　试证：函数 $y=x^2$ 在任一点 x_0 处连续．

证明：$\because\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，

$\therefore\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0$，得证．

又令 $x=x_0+\Delta x$，有$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，且当$\Delta x\to0$ 时，$x\to x_0$，

故 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)$，

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．

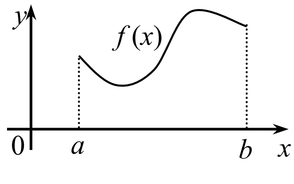
定义　函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．

可见，求函数在连续点的极限，只需直接代入计算该点的函数值即得；

又 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，即连续函数符号可与极限号交换顺序．

此外，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续．显然当且仅当 $y=f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续时，$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．

定义　如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$（即 $f(x)$在点 a 右连续，点 b



左连续），则称 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续．
函数连续的几何意义是函数图形连成一条不断开的曲线．
三．函数的间断点

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 不成立，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断．有以下三种情况：

1．函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

2．极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

3．极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且 $f(x_0)$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$．

如 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处间断．

例　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性．

解：$f(0)=0$ 有定义，

左极限：$x\to 0^-$，即 $x<0$ 且 $x\to 0$，有 $f(x)=x+1$，$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x+1)=1$，

右极限：$x\to 0^+$，即 $x>0$ 且 $x\to 0$，有 $f(x)=x-1$，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x-1)=-1$，

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，∴$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

例　设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<2 \\ 1, & x=2 \\ x^2, & x>2 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的连续性．

解：$f(2)=1$，$\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-} 2x=4$，$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+} x^2=4$，有 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$，但 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$，

∴$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续．

例　设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2+2, & 0<x<1 \\ 3x, & x\ge 1 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的连续性．

解：在 $x=0$ 处，$f(0)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x^2+2)=2$，

∴$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续；

在 $x=1$ 处，$f(1)=3$，$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^2+2)=3$，$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} 3x=3$，

∴$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续．

关于分段函数在分段点的连续性，应讨论函数值 $f(x_0)$，左极限 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$，右极限 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$，三者是否存在而且相等．

根据函数左、右极限的情况将间断点的分类：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 都存在，则称间断点 x_0 是 $f(x)$的第一类间断点；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是 $f(x)$的第二类间断点.

在第一类间断点中，

若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$，但不等于 $f(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$的可去间断点，

（此时若重新定义 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，则 x_0 成为 $f(x)$的连续点）

若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$，则称 x_0 是 $f(x)$的跳跃间断点;

在第二类间断点中，

若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 至少有一个为 ∞，则称 x_0 是 $f(x)$的无穷间断点，

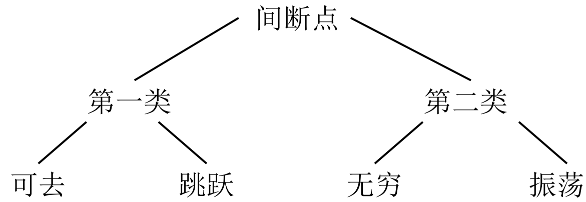
若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 至少有一个不存在，但都不是 ∞，则称 x_0 是 $f(x)$的振荡间断点.

如 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处间断，因 $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故 $x=0$ 是 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点．此时若重新定义 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $x=0$ 是新函数 $f(x)$的连续点.

又如 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，因 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-1$，故 $x=0$ 是函数 $f(x)$的跳跃间断点.

而 $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ 在 $x=1$ 处间断，因 $\lim\limits_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 1+} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，故 $x=1$ 是 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 的无穷间断点.

$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处间断，因 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $x=0$ 是 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.



§2.7　连续函数的运算与初等函数的连续性

一．连续函数的性质

可以证明：四则运算保持连续性（商要求分母不为 0）；复合保持连续性;

二．初等函数的连续性

所有基本初等函数在其定义域内连续，所以所有初等函数在其定义区间内连续.

可见讨论初等函数连续性就是讨论其定义区间，讨论分段函数连续性只需考虑分段点处的连续性.

例　讨论 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4x+3}$ 的连续性.

解：∵$f(x)$是初等函数，其定义区间是 $[0, 1)\cup(1, 3)\cup(3, +\infty)$，

∴$f(x)$的连续区间是 $[0, 1), (1, 3), (3, +\infty)$，其间断点是 $x=1, x=3$.

例　讨论 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$ 的连续性.

解：∵$f(x)$是分段函数，其分段点是 $x=0, x=1$，先讨论分段点处的连续性.

$x=0$ 处，$f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

$x=1$ 处，$f(1)=\sin 1$，$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\sin 1$，$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=2$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断.

∴$f(x)$的连续区间是 $(-\infty, 1], (1, +\infty)$，其间断点是 $x=1$.

求初等函数的极限时，只要有定义，一般可直接代入计算；只要有定义，初等函数符号可与极限号交换顺序.

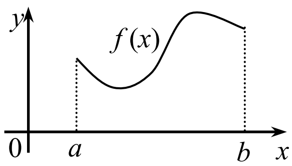
如 $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}=\arcsin\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

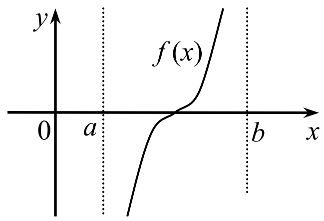
注意：定义区间不同于定义域．如 $y=\sqrt{x^2(x-1)}$ 定义域是$\{0\}\cup[1, +\infty)$，定义区间是$[1, +\infty)$.

§2.8　闭区间上连续函数的性质

定理（最值定理）　设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在$[a, b]$上必能取得最大值和最小值.

注意：若 $y=f(x)$只是在开区间 (a, b) 上连续，则结论不成立.

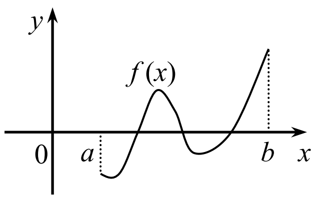




推论（有界性定理）设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在$[a, b]$上有界.

定理（介值定理）设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)\ne f(b)$，则 $f(x)$在(a, b)内必能取得介于 $f(a)$ 与 $f(b)$之间的任何实数 C.　（$f(a)<C<f(b)$或$f(b)<C<f(a)$）

推论（零值定理）设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且端点值 $f(a)$与 $f(b)$异号，则至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.



零点存在定理常用于讨论方程的根.

例　试证方程 $e^x=x+2$ 在$(0, 2)$内至少有一个根.

证：设 $f(x)=e^x-x-2$，因 $f(x)$是初等函数，且在$[0, 2]$内有定义，故连续，

且 $f(0)=e^0-0-2=-1<0$，$f(2)=e^2-2-2=e^2-4>0$，

∴至少存在一点$\xi\in(0, 2)$，使得 $f(\xi)=e^{\xi}-\xi-2=0$，得证.

推论（介值定理）设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在(a, b)内必能取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何实数 C.　（$m<C<M$）