习题 4.4

1．某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数。

（1）写出 X 的分布列；

（2）求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值。

解：（1）因 X 服从二项分布 $b(100, 0.2)$，故 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=C_{100}^{k}\times 0.2^{k}\times 0.8^{100-k},\quad k=0,1,2,\cdots,100\text{ 。}$$

（2）因

$$E(X)=np=20\text{，}\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16\text{，}$$

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-20}{4}\dot{\sim}N(0,1)$，故

$$P\{14\le X\le 30\}=P\{13.5<X\le 30.5\}\approx\Phi\left(\frac{30.5-20}{4}\right)-\Phi\left(\frac{13.5-20}{4}\right)=\Phi(2.625)-\Phi(-1.625)$$

$$=\Phi(2.625)+\Phi(1.625)-1=0.9957+0.9479-1=0.9436\text{ 。}$$

2．某电子计算机主机有 100 个终端，每个终端有 80%的时间被使用。若各个终端是否被使用是相互独立的，试求至少有 15 个终端空闲的概率。

解：设 X 表示空闲的终端个数，有 X 服从二项分布 $b(100, 0.2)$，因

$$E(X)=np=20\text{，}\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16\text{，}$$

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-20}{4}\dot{\sim}N(0,1)$，故

$$P\{X\ge 15\}=P\{X>14.5\}\approx 1-\Phi\left(\frac{14.5-20}{4}\right)=1-\Phi(-1.375)=\Phi(1.375)=0.9154\text{ 。}$$

3．有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3 m，现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3 m 的概率是多少？

解：设 X 表示短于 3m 的木柱根数，有 X 服从二项分布 $b(100, 0.2)$，因

$$E(X)=np=20\text{，}\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16\text{，}$$

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-20}{4}\dot{\sim}N(0,1)$，故

$$P\{X\ge 30\}=P\{X>29.5\}\approx 1-\Phi\left(\frac{29.5-20}{4}\right)=1-\Phi(2.375)=1-0.9912=0.0088\text{ 。}$$

4．掷一颗骰子 100 次，记第 i 次掷出的点数为 X_i，$i=1,2,\cdots,100$，点数之平均为 $\overline{X}=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$，试求概率 $P\{3\le\overline{X}\le 4\}$。

解：因 X_i 的概率分布列为

$$P\{X_i=k\}=\frac{1}{6},\quad k=1,2,\cdots,6\text{，}$$

则

$$E(X_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=3.5\text{，}\quad E(X_i^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\cdots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}\text{，}$$

可得

$$E(\overline{X})=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}E(X_i)=3.5\text{，}\quad \mathrm{Var}(\overline{X})=\frac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{10000}\times100\times\frac{35}{12}=\frac{7}{240}\text{，}$$

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\overline{X}-3.5}{\sqrt{7/240}}\dot{\sim}N(0,1)$，故

$$P\{3\le\overline{X}\le4\}\approx\Phi\left(\frac{4-3.5}{\sqrt{7/240}}\right)-\Phi\left(\frac{3-3.5}{\sqrt{7/240}}\right)=\Phi(2.9277)-\Phi(-2.9277)$$

$$=2\times\Phi(2.9277)-1=2\times0.9983-1=0.9966\text{。}$$

5． 连续地掷一枚骰子 80 次，求点数之和超过 300 的概率。

解：记第 i 次掷出的点数为 X_i， $i=1,2,\cdots,80$，有 X_i 的概率分布列为

$$P\{X_i=k\}=\frac{1}{6},\quad k=1,2,\cdots,6\text{，}$$

则

$$E(X_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=3.5\text{，}\quad E(X_i^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\cdots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}\text{，}$$

可得

$$E\left(\sum_{i=1}^{80}X_i\right)=\sum_{i=1}^{80}E(X_i)=80\times3.5=280\text{，}\quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{80}X_i\right)=\sum_{i=1}^{80}\mathrm{Var}(X_i)=80\times\frac{35}{12}=\frac{700}{3}\text{，}$$

且 $n=80$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{80}X_i-280}{\sqrt{700/3}}\dot{\sim}N(0,1)$，故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{80}X_i>300\right\}\approx1-\Phi\left(\frac{300-280}{\sqrt{700/3}}\right)=1-\Phi(1.3093)=1-0.9048=0.0952\text{。}$$

6． 有 20 个灯泡，设每个灯泡的寿命服从指数分布，其平均寿命为 25 天。每次用一个灯泡，当使用的灯泡坏了以后立即换上一个新的，求这些灯泡总共可使用 450 天以上的概率。

解：记第 i 个灯泡的寿命为 X_i， $i=1,2,\cdots,20$，有 $X_i\sim Exp\left(\dfrac{1}{25}\right)$，则

$$E(X_i)=\frac{1}{\lambda}=25\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}=625\text{，}$$

可得

$$E\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right)=\sum_{i=1}^{20} E(X_i)=20\times 25=500\text{，}\quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right)=\sum_{i=1}^{20}\mathrm{Var}(X_i)=20\times 625=12500\text{，}$$

且 $n=20$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{20} X_i-500}{\sqrt{12500}}\dot{\sim} N(0,1)$，故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{20} X_i>450\right\}=1-\Phi\left(\frac{450-500}{\sqrt{12500}}\right)=\Phi(0.4472)=0.6726\text{。}$$

7． 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{48}$ 为独立同分布的随机变量，共同分布为 $U(0,5)$。其算术平均为 $\overline{X}=\dfrac{1}{48}\sum_{i=1}^{48} X_i$，试求概率 $P\{2\le \overline{X}\le 3\}$。

解：因 X_i 服从均匀分布 $U(0,5)$，有

$$E(X_i)=\frac{a+b}{2}=2.5\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{25}{12}\text{，}$$

可得

$$E(\overline{X})=\frac{1}{48}\sum_{i=1}^{48} E(X_i)=2.5\text{，}\quad \mathrm{Var}(\overline{X})=\frac{1}{48^2}\sum_{i=1}^{48}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{48^2}\times 48\times\frac{25}{12}=\frac{25}{576}\text{，}$$

且 $n=48$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\overline{X}-2.5}{5/24}\dot{\sim} N(0,1)$，故

$$P\{2\le \overline{X}\le 3\}\approx\Phi\left(\frac{3-2.5}{5/24}\right)-\Phi\left(\frac{2-2.5}{5/24}\right)=\Phi(2.4)-\Phi(-2.4)$$

$$=2\times\Phi(2.4)-1=2\times 0.9918-1=0.9836\text{。}$$

8． 某汽车销售点每天出售的汽车数服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布。若一年 365 天都经营汽车销售，且每天出售的汽车数是相互独立的，求一年中售出 700 辆以上汽车的概率。

解：设 X_i 表示一年中第 i 日售出的汽车数，有 X_i 服从泊松分布 $P(2)$，有

$$E(X_i)=\lambda=2\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=\lambda=2\text{，}$$

因一年中售出的汽车数为 $Y=\sum_{i=1}^{365} X_i$，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{365} E(X_i)=730\text{，}\quad \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{365}\mathrm{Var}(X_i)=730\text{，}$$

且 $n=365$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-730}{\sqrt{730}}\dot{\sim} N(0,1)$，故

$$P\{Y\ge 700\}=P\{Y>699.5\}\approx 1-\Phi\left(\frac{699.5-730}{\sqrt{730}}\right)=1-\Phi(-1.1289)=\Phi(1.1289)=0.8705\text{。}$$

9． 某餐厅每天接待 400 名顾客，设每位顾客的消费额（元）服从 $(20,100)$ 上的均匀分布，且顾客的

消费额是相互独立的。试求：

（1）该餐厅每天的平均营业额；

（2）该餐厅每天的营业额在平均营业额± 760元内的概率。

解：设X_i表示第i个顾客的消费额，有X_i服从均匀分布$U(20,100)$，有

$$E(X_i)=\frac{a+b}{2}=60，\ \mathrm{Var}(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1600}{3}。$$

（1）因该餐厅一天内的营业额为$Y=\sum\limits_{i=1}^{400}X_i$，故该餐厅每天的平均营业额

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{400}E(X_i)=400\times 60=24000\ （元）。$$

（2）因

$$E(Y)=24000，\ \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{400}\mathrm{Var}(X_i)=400\times\frac{1600}{3}=\frac{640000}{3}，$$

且$n=400$较大，根据中心极限定理知$\dfrac{Y-24000}{800/\sqrt{3}}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$，故

$$P\{-760\le Y-24000\le 760\}\approx\Phi\left(\frac{760}{800/\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(\frac{-760}{800/\sqrt{3}}\right)=\Phi(1.6454)-\Phi(-1.6454)$$

$$=2\Phi(1.6454)-1=2\times 0.9501-1=0.9002。$$

10．一仪器同时收到 50 个信号U_i，$i=1,2,\cdots,50$。设U_i是相互独立的，且都服从$(0,10)$内的均匀分布，试求$P\left\{\sum\limits_{i=1}^{50}U_i>300\right\}$。

解：因U_i服从均匀分布$U(0,10)$，有

$$E(U_i)=\frac{a+b}{2}=5，\ \mathrm{Var}(U_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{25}{3}，$$

可得

$$E\left(\sum_{i=1}^{50}U_i\right)=\sum_{i=1}^{50}E(U_i)=50\times 5=250，\ \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{50}U_i\right)=\sum_{i=1}^{50}\mathrm{Var}(U_i)=50\times\frac{25}{3}=\frac{1250}{3}，$$

且$n=50$较大，根据中心极限定理知$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{50}U_i-250}{\sqrt{1250/3}}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$，故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{50}U_i>300\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{300-250}{\sqrt{1250/3}}\right)=1-\Phi(2.4495)=1-0.9928=0.0072。$$

11．计算机在进行加法运算时对每个加数取整数（取最为接近于它的整数）。设所有的取整误差是相互独立的，且它们都服从$(-0.5,0.5)$上的均匀分布。

（1）若将 1500 个数相加，求误差总和的绝对值超过 15 的概率；

（2）最多几个数加在一起可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 90%。

解：设 X_i 表示第 i 个加数的取整误差，有 X_i 服从均匀分布 $U(-0.5, 0.5)$，则

$$E(X_i)=\frac{a+b}{2}=0\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{12}\text{。}$$

（1）因 1500 个数相加的误差总和为 $Y=\sum_{i=1}^{1500}X_i$，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{1500}E(X_i)=0\text{，}\quad \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{1500}\mathrm{Var}(X_i)=125\text{，}$$

且 $n=1500$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-0}{\sqrt{125}}\dot{\sim}N(0,1)$，故

$$P\{|Y|>15\}\approx 2\left[1-\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right)\right]=2[1-\Phi(1.3416)]=2\times(1-0.9101)=0.1798\text{。}$$

（2）因 n 个数相加的误差总和为 $\sum_{i=1}^{n}X_i$，有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0\text{，}\quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{n}{12}\text{，}$$

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-0}{\sqrt{n/12}}\dot{\sim}N(0,1)$，有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<10\right\}\approx\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right)=2\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)-1\geq 0.9\text{，}$$

$$\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)\geq 0.95\text{，}\quad \frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\geq 1.6449\text{，}$$

故 $n\leq 443.5338$，即 n 不超过 443。

12．设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5 kg，标准差为 0.1 kg，问 5000 只零件的总重量超过 2510 kg 的概率是多少？

解：设 X_i 表示第 i 个零件的重量，有

$$E(X_i)=0.5\text{，}\quad \mathrm{Var}(X_i)=0.1^2=0.01\text{。}$$

因 5000 只零件的总重量为 $Y=\sum_{i=1}^{5000}X_i$，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5000}E(X_i)=2500\text{，}\quad \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{5000}\mathrm{Var}(X_i)=50\text{，}$$

且 $n=5000$ 很大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-2500}{\sqrt{50}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，故

$$P\{Y>2510\} \approx 1-\Phi\left(\frac{2510-2500}{\sqrt{50}}\right)=1-\Phi(1.4142)=1-0.9214=0.0786。$$

13．某种产品由 20 个相同部件连接而成，每个部件的长度是均值为 2 mm，标准差为 0.02 mm 的随机变量。假如这 20 个部件的长度相互独立同分布，且规定产品总长为 (40 ± 0.2) mm 时为合格品，求该产品的不合格品率。

解：设 X_i 表示第 i 个部件的长度，有

$$E(X_i)=2，\ \mathrm{Var}(X_i)=0.02^2=0.0004。$$

因 20 个部件总长为 $Y=\sum_{i=1}^{20} X_i$，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{20} E(X_i)=40，\ \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{20}\mathrm{Var}(X_i)=0.008，$$

且 $n=20$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-40}{\sqrt{0.008}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，故

$$P\{|Y-40|>0.2\} \approx 2\left[1-\Phi\left(\frac{0.2}{\sqrt{0.008}}\right)\right]=2[1-\Phi(2.2361)]=2\times(1-0.9873)=0.0254。$$

14．一个保险公司有 10000 个汽车投保人，每个投保人平均索赔 280 元，标准差为 800 元。求总索赔额超过 2700000 元的概率。

解：设 X_i 表示第 i 个投保人索赔额，有

$$E(X_i)=280，\ \mathrm{Var}(X_i)=800^2=640000。$$

因总索赔额 $Y=\sum_{i=1}^{10000} X_i$，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{10000} E(X_i)=2800000，\ \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{10000}\mathrm{Var}(X_i)=6400000000，$$

且 $n=10000$ 很大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-2800000}{\sqrt{6400000000}}=\dfrac{Y-2800000}{80000} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，故

$$P\{Y>2700000\} \approx 1-\Phi\left(\frac{2700000-2800000}{80000}\right)=1-\Phi\left(-\frac{10}{8}\right)=\Phi(1.25)=0.8944。$$

15．有两个班级同时上一门课，甲班有 25 人，乙班有 64 人。该门课程期末考试平均成绩为 78 分，标准差为 14 分。试问甲班的平均成绩超过 80 分的概率大，还是乙班的平均成绩超过 80 分的概率大？

解：设 X_i 表示第 i 个同学的考试成绩，有

$$E(X_i)=78，\ \mathrm{Var}(X_i)=14^2=196。$$

因平均成绩 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，有

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=78\text{，}\quad \mathrm{Var}(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{196}{n}\text{，}$$

且 $n=25$ 或 64 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\overline{X}-78}{\sqrt{196/25}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，则

$$P\{\overline{X}>80\}\approx 1-\Phi\left(\frac{80-78}{\sqrt{196/25}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{7}\right)\text{。}$$

因甲班有 25 人，甲班的平均成绩超过 80 分的概率

$$P\{\overline{X}>80\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\sqrt{25}}{7}\right)=1-\Phi(0.7143)=1-0.7625=0.2375\text{，}$$

乙班有 64 人，乙班的平均成绩超过 80 分的概率

$$P\{\overline{X}>80\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\sqrt{64}}{7}\right)=1-\Phi(1.1429)=1-0.8735=0.1265\text{，}$$

故甲班的平均成绩超过 80 分的概率大。

16．进行独立重复试验，每次试验中事件 A 发生的概率为 0.25。试问能以 95%的把握保证 1000 次试验中事件 A 发生的频率与概率相差多少？此时 A 发生的次数在什么范围内？

解：设 X 表示 1000 次试验中事件 A 发生的次数， X 服从二项分布 $b(1000, 0.25)$，因

$$E(X)=np=250\text{，}\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=187.5\text{，}$$

且 $n=1000$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-250}{\sqrt{187.5}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$。设 1000 次试验中事件 A 发生频率与概率相差不超过 a 的概率为 95%，即 $P\left\{\left|\dfrac{X}{1000}-0.25\right|\le a\right\}=0.95$，则

$$P\{|X-250|\le 1000a\}\approx\Phi\left(\frac{1000a}{\sqrt{187.5}}\right)-\Phi\left(\frac{-1000a}{\sqrt{187.5}}\right)=2\Phi\left(\frac{1000a}{\sqrt{187.5}}\right)-1=0.95\text{，}$$

$$\Phi\left(\frac{1000a}{\sqrt{187.5}}\right)=0.975\text{，}\quad \frac{1000a}{\sqrt{187.5}}=1.96\text{，}$$

则 $a=0.0268$。可见能以 95%的把握保证 $\left|\dfrac{X}{1000}-0.25\right|\le 0.0268$，即

$$|X-250|\le 26.8\text{，}\quad 223.2\le X\le 276.8\text{，}$$

故 A 发生的次数在 223 次到 277 次之间。

17．设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 min，且各件产品的组装时间是相互独立的。

（1）试求组装 100 件产品需要 15 h 至 20 h 的概率；

（2）保证有 95%的可能性，问 16 个 h 内最多可以组装多少件产品。

解：设 X_i 表示组装第 i 件产品的时间，有 X_i 服从指数分布 $Exp(\lambda)$ 且 $E(X_i)=10$，则

$\lambda=0.1$，$E(X_i)=\dfrac{1}{\lambda}=10$， $\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{1}{\lambda^2}=100$ 。

（1）因组装 100 件产品需要的时间为 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ ，则

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{100}E(X_i)=1000\text{，}\quad \mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{100}\mathrm{Var}(X_i)=10000\text{，}$$

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-1000}{100}\overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$，故

$$P\{15\times 60\le Y\le 20\times 60\}=P\{900\le Y\le 1200\}\approx \Phi\left(\frac{1200-1000}{100}\right)-\Phi\left(\frac{900-1000}{100}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.9772+0.8413-1=0.8185\text{ 。}$$

（2）因组装 n 件产品需要的时间为 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ ，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=10n\text{，}\quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=100n\text{，}$$

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-10n}{10\sqrt{n}}\overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$，有

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le 16\times 60\right\}=P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le 960\right\}\approx \Phi\left(\frac{960-10n}{10\sqrt{n}}\right)\ge 0.95\text{，}$$

$$\frac{960-10n}{10\sqrt{n}}\ge 1.6449\text{，}$$

即 $10n+16.449\sqrt{n}-960\le 0$，解方程得 $\sqrt{n}\le 9.01$，故 $n\le 81.1801$，即 n 不超过 81。

18．某种福利彩票的奖金额 X 由抽奖决定，其分布列为

X（万元）	5	10	20	30	40	50	100
P	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

若一年中要开出 300 个奖，问需要多少奖金总额，才有 95%的把握能够发放奖金。

解：设 X_i 表示第 i 次抽奖的奖金额，则

$$E(X_i)=5\times 0.2+10\times 0.2+20\times 0.2+30\times 0.1+40\times 0.1+50\times 0.1+100\times 0.1=29\text{，}$$

$$E(X_i^2)=5^2\times 0.2+10^2\times 0.2+20^2\times 0.2+30^2\times 0.1+40^2\times 0.1+50^2\times 0.1+100^2\times 0.1=1605\text{，}$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=1605-29^2=764\text{，}$$

因一年开出的奖金总额为 $Y=\sum\limits_{i=1}^{300}X_i$ ，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{300}E(X_i)=8700, \quad \text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{300}\text{Var}(X_i)=229200,$$

且 $n=300$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-8700}{\sqrt{229200}} \dot{\sim} N(0,1)$。设需要准备的奖金总额为 a 万元，有

$$P\{Y\le a\}\approx\Phi\left(\frac{a-8700}{\sqrt{229200}}\right)=0.95,$$

$$\frac{a-8700}{\sqrt{229200}}=1.6449,$$

故 $a=9487.49$（万元）。

19．一家有 500 间客房的大旅馆的每间客房装有一台 2 kW（千瓦）的空调机。若开房率为 80%，需要多少 kW 的电力才能有 99%的可能性保证有足够的电力使用空调机。

解：设 X 表示开房的房间数，有 X 服从二项分布 $b(500, 0.8)$，因

$$E(X)=np=400, \quad \text{Var}(X)=np(1-p)=80,$$

且 $n=500$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-400}{\sqrt{80}} \dot{\sim} N(0,1)$。设需要的电力为 a kW，有

$$P\{2X\le a\}=P\{X\le 0.5a\}\approx\Phi\left(\frac{0.5a-400}{\sqrt{80}}\right)=0.99,$$

$$\frac{0.5a-400}{\sqrt{80}}=2.3263,$$

故 $a=841.615$ kW。

20．设某元件是某电器设备的一个关键部件，当该元件失效后立即换上一个新的元件。假定该元件的平均寿命为 100 小时，标准差为 30 小时，试问应准备多少备件，才能以 0.95 以上的概率，保证这个系统能连续运行 2000 小时以上？

解：设 X_i 表示第 i 个元件的使用寿命，有

$$E(X_i)=100, \quad \text{Var}(X_i)=30^2=900.$$

因准备 n 个备件时系统连续运行时间 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=100n, \quad \text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)=900n,$$

且 n 应大于 20 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-100n}{\sqrt{900n}} \dot{\sim} N(0,1)$，则

$$P\{Y>2000\}\approx 1-\Phi\left(\frac{2000-100n}{\sqrt{900n}}\right)=\Phi\left(\frac{100n-2000}{30\sqrt{n}}\right)\ge 0.95,$$

$$\frac{100n-2000}{30\sqrt{n}}\ge 1.645,$$

即 $100n-49.35\sqrt{n}-2000\ge 0$，解得 $n\ge 22.3321$，故至少应准备 23 个备件。

21．独立重复地对某物体的长度 a 进行 n 次测量，设各次测量结果 X_i 服从正态分布 $N(a, 0.2^2)$。记 $\overline{X}$

为n次测量结果的算术平均值，为保证有 95%的把握使平均值与实际值a的差异小于 0.1，问至少需要测量多少次？

解：因X_i服从正态分布$N(a, 0.2^2)$且相互独立，有$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$服从正态分布，则

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=a\text{，}\quad \mathrm{Var}(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{0.2^2}{n}\text{，}$$

不妨设n较大，根据中心极限定理知$\frac{\overline{X}-a}{0.2/\sqrt{n}}\dot{\sim}N(0,1)$，有

$$P\{|\overline{X}-a|<0.1\}=\Phi\left(\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geq 0.95\text{，}$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.975\text{，}$$

即$\frac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.96$，故$n\geq 15.3664$，即至少需要测量 16 次。

22．某工厂每月生产 10000 台液晶投影机，但它的液晶片车间生产液晶片合格率为 80%，为了以 99.7%的可能性保证出厂的液晶投影机都能装上合格的液晶片，试问该液晶片车间每月至少应该生产多少片液晶片？

解：设每月应该生产n片液晶片，其中合格液晶片有X片，有X服从二项分布$b(n, 0.8)$，因

$$E(X)=np=0.8n\text{，}\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=0.16n\text{，}$$

且n应大于 10000，n很大，根据中心极限定理知$\frac{X-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\dot{\sim}N(0,1)$，有

$$P\{X\geq 10000\}\approx 1-\Phi\left(\frac{10000-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}\right)\geq 0.997\text{，}$$

$$\frac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}\geq 2.7478\text{，}$$

即$0.8n-1.0991\sqrt{n}-10000\geq 0$，解方程得$\sqrt{n}\geq 112.4924$，故$n\geq 12654.55$，即$n$至少为 12655。

23．某产品的合格率为 99%，问包装箱中应该装多少个此种产品，才能有 95%的可能性使每箱中至少有 100 个合格产品。

解：设包装箱中应该装n个此种产品，其中合格产品有X个，有X服从二项分布$b(n, 0.99)$，因

$$E(X)=np=0.99n\text{，}\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=0.0099n\text{，}$$

且n应大于 100，n很大，根据中心极限定理知$\frac{X-0.99n}{\sqrt{0.0099n}}\dot{\sim}N(0,1)$，有

$$P\{X\geq 100\}\approx 1-\Phi\left(\frac{100-0.99n}{\sqrt{0.0099n}}\right)=\Phi\left(\frac{0.99n-100}{\sqrt{0.0099n}}\right)\geq 0.95\text{，}$$

$$\frac{0.99n-100}{\sqrt{0.0099n}}\geq 1.6449\text{，}$$

即$0.99n-0.1637\sqrt{n}-100\geq 0$，解方程得$\sqrt{n}\geq 10.1334$，故$n\geq 102.69$，即$n$至少为 103。

24．为确定某城市成年男子中吸烟者的比例 p，任意调查 n 个成年男子，记其中的吸烟人数为 m，问 n 至少为多大才能保证 m/n 与 p 的差异小于 0.01 的概率大于 95%。

解：因 m 服从二项分布 $b(n, p)$，有

$$E(m) = np，\quad \mathrm{Var}(m) = np(1-p)，$$

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \dot\sim N(0,1)$，有

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0.01\right\} \approx \Phi\left(\frac{0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1>0.95，$$

$$\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)>0.975，\quad \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}>1.96，$$

即 $n>196^2 p(1-p)$。因 $p(1-p)\le 0.25$，故只须 $n>196^2\times 0.25 = 9604$。

25．设 $X\sim Ga(n,1)$，试问 n 应该多大，才能满足

$$P\left\{\left|\frac{X}{n}-1\right|>0.01\right\}<0.01。$$

解：设 X_i 独立同分布，且都服从 $Exp(1) = Ga(1,1)$，有

$$E(X_i) = 1，\quad \mathrm{Var}(X_i) = 1，$$

由伽玛分布可加性知 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n,1)$，有

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n，\quad \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = n，$$

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-n}{\sqrt{n}} \dot\sim N(0,1)$，有

$$P\left\{\left|\frac{X}{n}-1\right|>0.01\right\} = P\left\{\left|\frac{X-n}{\sqrt{n}}\right|>0.01\sqrt{n}\right\} \approx 2[1-\Phi(0.01\sqrt{n})]<0.01，$$

$$\Phi(0.01\sqrt{n})>0.995，\quad 0.01\sqrt{n}>2.5758，$$

故 $n>66348.9660$，即 n 应该至少为 66349。

26．设 $\{X_n\}$ 为一独立同分布的随机变量序列，已知 $E(X_i^k) = a_k$，$k = 1, 2, 3, 4$。试证明：当 n 充分大时，$Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出此正态分布的参数。

注：此题原题有误，应将“$X_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$”改写为“$Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$”，即随机变量 X_n 与其平方和的平均值应使用不同的记号。

证明：因

$$E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=a_2\,,$$

$$\mathrm{Var}(Y_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i^2)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2\}=\frac{1}{n}(a_4-a_2^2)\,,$$

当 n 充分大时，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y_n-a_2}{\sqrt{(a_4-a_2^2)/n}}\sim N(0,1)$，故当 n 充分大时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布 $N\left(a_2,\dfrac{a_4-a_2^2}{n}\right)$。

27．用概率论的方法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}=\frac{1}{2}\,。$$

证明：首先证明泊松分布正态逼近：设 $X\sim P(\lambda)$，记 $Y_\lambda^*=\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$，则 Y_λ^* 按分布收敛于标准正态分布。

设 $X\sim P(\lambda)$，有 X 的特征函数为 $\varphi(v)=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{iv}-1)}$，则 $Y_\lambda^*=\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X-\sqrt{\lambda}$ 的特征函数为

$$\varphi_{Y_\lambda^*}(v)=\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}v}\,\varphi\left(\frac{v}{\sqrt{\lambda}}\right)=\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}v}\cdot\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1)}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1-\frac{iv}{\sqrt{\lambda}})}\,,$$

因 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，有

$$\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}=1+\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}+\frac{-v^2}{2\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1-\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}=-\frac{v^2}{2\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi_{Y_\lambda^*}(v)=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1-\frac{iv}{\sqrt{\lambda}})}=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{\lambda\left[-\frac{v^2}{2\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}+o(1)}=\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,,$$

这正是标准正态分布的特征函数，则 Y_λ^* 按分布收敛于标准正态分布，即对任意实数 y，都满足

$$\lim_{\lambda\to+\infty}F_{Y_\lambda^*}(y)=\Phi(y)\,,$$

特别是取 $\lambda=n$，$y=0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n^*}(0)=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$，因

$$F_{Y_n^*}(0)=P\left\{Y_n^*=\frac{X-n}{\sqrt{n}}\le 0\right\}=P\{X\le n\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}=\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}\,,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}=\frac{1}{2}\,。$$