§3.1 线性变换的定义

一、线性变换的定义

二、线性变换的简单性质

引入

在讨论线性空间的同构时，我们考虑的是一个线性空间到另一个线性空间的映射．实际中，我们经常会碰到一个线性空间到自身的映射。

本节要讨论的是线性空间V到自身的保线性运算的映射 ——— 线性变换.

一、线性变换的定义

定义1　设V是一个线性空间，如果有一个对应关系T，使得对V中任一向量α，都有V中的一个确定向量β与之对应，则称此对应关系T为V的一个**变换**，称β为α在变换下的**像**，记作$\beta = T(\alpha)$

称α为β在变换下的**原像**。

定义2　设V为数域P上的线性空间，若变换

$T: V \to V$　满足：$\forall \alpha, \beta \in V$，$k \in P$

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$T(k\alpha) = kT(\alpha)$$

则称T为线性空间V上的**线性变换**.

注：几个特殊线性变换

单位变换(恒等变换)： $\varepsilon: V \to V,\ \alpha \mapsto \alpha,\ \forall \alpha \in V$

零变换： $0: V \to V,\ \alpha \mapsto 0,\ \forall \alpha \in V$

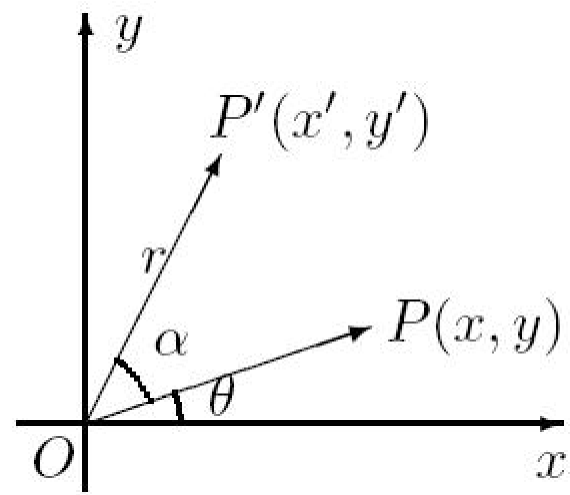
由数k决定的**数乘变换：** $K: V \to V,\ \alpha \mapsto k\alpha,\ \forall \alpha \in V$

事实上，$\forall \alpha, \beta \in V,\ \ \forall m \in P,$

$$K(\alpha+\beta) = k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta = K(\alpha) + K(\beta),$$

$$K(m\alpha) = km\alpha = mk\alpha = mK(\alpha).$$

在平面上建立直角坐标系. 将平面上每个点**P**绕原点逆时针方向旋转角α到点P'. 写出点**P**的坐标**(x,y)**与点**P'**的坐标**(x',y')**之间的函数关系式.



解　设原点O到P的距离|OP|=r, 由射线OX(即x轴正方向) 到OP所成的角$\angle XOP = \theta.$

则|OP'|=|OP|=r, x=rcosθ, y=rsinθ.

$$\angle XOP' = \angle XOP + \angle POP' = \theta + \alpha.$$

x'=rcos(θ+α)

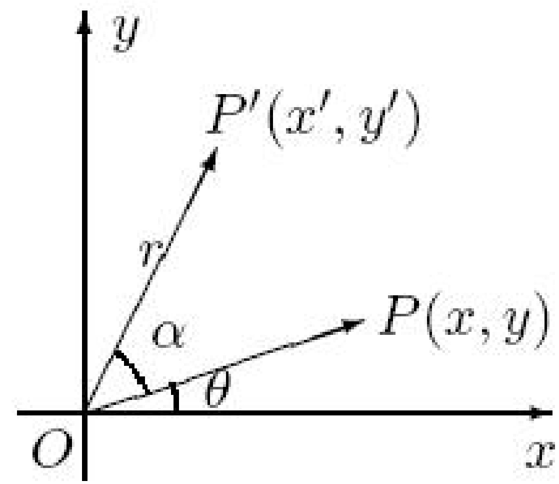
=rcosθcosα-rsinθsinα

=xcosα-ysinα

y'=rsin(θ+α)

=rcosθsinα+rsinθcosα

=xsinα+ycosα



$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

例1. $V = R^2$(实数域上二维向量空间)，把V中每一向量绕坐标原点旋转α角，就是一个线性变换，

用T_α 表示，即

$$T_\alpha : R^2 \to R^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

这里，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

易验证：$\forall \xi, \eta \in R^2, \forall k \in R$

$$T_\alpha(\xi + \eta) = T_\alpha(\xi) + T_\alpha(\eta)$$

$$T_\alpha(k\xi) = kT_\alpha(\xi)$$

例2．$V = P[x]$或$P[x]_n$上的求微商是一个 线性变换，

用D表示，即

$$D: V \to V，D(f(x)) = f'(x), \ \forall f(x) \in V$$

例3. 闭区间 $[a,b]$上的全体连续函数构成的线性空间

$C(a,b)$ 上的变换

$$J: C(a,b) \to C(a,b), \ J\left(f(x)\right) = \int_a^x f(t)dt$$

是一个线性变换.

二、 线性变换的简单性质

1．σ为V的线性变换，则

$$\sigma(0)=0,\ \ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$$

2．线性变换保持线性组合及关系式不变，即

若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,$

则 $\sigma(\beta)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r).$

3．线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组. 即

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 也线性相关.

事实上，若有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

则由2即有，$k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=\mathbf{0}$.

注意： 3的逆不成立，即 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 未必线性相关.

事实上，线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组. 如零变换.

练习：下列变换中，哪些是线性变换？

√1．在 R^3中，$\sigma\left(x_1,x_2,x_3\right)=(2x_1,x_2,x_2-x_3)$.

2．在$P[x]_n$中，$\sigma\left(f(x)\right)=f^2(x)$.

3．在线性空间V中，$\sigma\left(\xi\right)=\xi+\alpha$，$\alpha\in V$ 非零固定.

√4．在 $P^{n\times n}$中，$\sigma\left(X\right)=AX$，$A\in P^{n\times n}$固定.