2021 复变函数期中测试

姓名 ________________ 学号 __________________ 专业 ______________________

一	二	三	总成绩

一、 填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．把答案填在前面空白处）：

1. ____________ , ____________ ; 2 ______________________________ ;

3. ____________________ ; 4. ______________ ; 5. __________________________

6. ________________ ; 7 ____________________________ ; 8. ____________________ ;

9. ____________________________ ; 10. ______________________

$+2k\pi i$

$e^{i\cdot \ln i}$ $\ln i = \ln|i| + i\arg i = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i$

1. $i^{i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$.

2. $\operatorname{Im}(i+\overline{z}) = 4$ 所描述的曲线方程为 $y=-3$

3. $\sqrt[4]{-2i} = \sqrt[4]{|-2i|}(\cos\frac{2k\pi-\frac{1}{2}\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi-\frac{1}{2}\pi}{4}), k=0,1,2,3$ $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\times\frac{1}{4}$

$\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n}$

4. $Ln(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$, 它的主值 $\ln(-2) = \ln 2 + i\pi$

5. $f(z) = x^2 + iy^2$, $f'(1+i) = 2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $2x$ $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}$

6. $\int_C \frac{\overline{z}}{|z|} dz = 8\pi i$ 其中 C 为 $|z|=4$。 $\frac{|z|}{z}$ $2\pi i|z| = 8\pi i$

7. $\int_0^i z\cos z\,dz = e^{-1} - 1$

$f(z)$

$2\pi i(z^2-1)' = 4\pi i z$

8. 已知 C 为 $|z|=2$，$f(z) = \int_C \frac{\xi^2-1}{\xi - z} d\xi$，则 $f'(2i) = -8\pi$

$(2\pi i(\xi^2-1))' = 4\pi i\xi$

9. 级数 $\sum_{n=}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ 收敛半径为 e

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\sin z = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

10. 幂级数展开 $\sin(2z^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{6n+3}}{(2n+1)!}$。

二、 计算下列各题（第 1 题 6 分，其他每小题 8 分，共 46 分）

1. 函数 $f(z) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y^2)$ 在何处可导？在何处解析？

验证 CR 条件后值，仅在上 $y = 1/2$ 可导。 $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$

不可能只在一个条线上解析，所以所有地方不解析。

2. 已知 $u + v = x^2 - y^2 + 2xy$，试确定解析函数 $f(z) = u + iv$.

$U_x = V_y$ $V_x = -U_y$

$u_x + v_x = 2x + 2y,$ $U_x + V_x = 2x + 2y$

$V_x + V_y = 2x + 2y$

$u_y + v_y = -2y + 2x,$ $U_y + V_y = -2y + 2x$

$-V_x + V_y = -2y + 2x$

根据 CR 条件，得到 $v_y = 2x,\ v_x = 2y,$ $V_y = 2x$ $V_x = 2y$

$f'(z) = v_y + iv_x = 2z$

$f(z) = z^2 + C$ （C 的实部和虚部互为相反数）

3. 计算积分 $\int_C \operatorname{Im}(z)\mathrm{d}z$。其中

（1） C 为从原点(0,0)到(1,1)的直线段；

（2） C 为从原点(0,0)到(1,0)再到(1,1)的直线段.

$y=0$ $x=1$

$\int_{C_1}$ $\int_{C_2}$

$$\int_C \operatorname{Im}(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}((1+i)t) = (1+i)\cdot\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{(1+i)}{2}.$$

$$\int_C \operatorname{Im}(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^1 y\mathrm{d}(1+iy) = \frac{i}{2}.$$

4. 计算 $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$，其中 C 为不经过 0 与 1 的闭曲线。

e^z

（1） C 不包括 0 与 1，积分为 0

（2） C 包括 0，不包括 1，积分为 $2\pi i$ $\frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}$

（3） C 包括 1，不包括 0，积分为 $\frac{2\pi i}{2!} \frac{(z^2 - 2z + 2)e^z}{-z^3}\Big|_{z=1} = -e\pi i$

$\frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3} \mathrm{d}z =$ 2 $\left(\frac{e^z}{z}\right)'' \Big|_{z=1}$

（4） C 包括 0，1 使用复合闭路后，是(2)与（3）的和，为$(2-e)\pi i$

5.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^n$ 的收敛半径，以及和函数. $\frac{n^2}{n!}z^n$

$\frac{C_{n+1}}{C_n}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=0.$

所以收敛半径 $R=\infty$（4 分）

$e^z = \frac{z^n}{n!}$

(2) $e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n.$

$n^2\cdot e^z$ $\frac{n}{(n-1)!}z^n$

z^2 $\frac{n}{(n-1)!}z^{n-2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=e^z-1$

求导得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{z-1}=e^z.$ z^{n-1} 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}z^n=ze^z.$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}z^{n-1}$

求导得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^{n-1}=ze^z+e^z.$

于是，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^n=z^2e^z+ze^z.$

（4 分）

6. 试求 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 以 $z=i$ 为中心的洛朗级数。

书 P86 例 4. 15

$+i$ $-i$ $0<|z-i|<2$

$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(1+iz)(1-iz)}$

$z=i$ $z=-1$ $(i-z)(i+z)$

$0<|z-i|<2$ $2<|z-i|<\infty$

三．证明题（每题 8 分，共 24 分）

（1）叙述解析函数关于柯西黎曼方程的充分必要条件，并证明。

书 P27 定理 2.1

（2）证明 C-R 条件的极坐标形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

书 P44 习题 2.6

（3）叙述并证明柯西积分公式。

书 P57 定理 3.7