数 值 分 析

林一丁
linyiding@swufe.edu.cn

教材：《数值分析》第五版，李庆扬、王能超、易大义，清华大学出版社

参考书目：

1. 《数值分析》钟尔杰、黄廷祝，高等教育出版社
2. 《数值分析》 陈晓江，黄樟灿，科学出版社
3. 《科学和工程计算基础》施妙根、顾丽珍，清华大学出版社
4. 《数值线性代数》徐树方、高立、张平文，北京大学出版社

先修课:高等数学，线性代数

（MATLAB程序语言）

成绩安排:

不定期点名+课后作业完成质量 30

闭卷考试 70

一级学科：数学
二级学科：基础数学，应用数学，统计学，计算数学

基础数学：数论，抽象代数，实变，泛函

应用数学：偏微分方程，离散数学

统计学：概率论与数理统计

计算数学：数值逼近，数值代数，微分方程数值解

数值分析 是计算数学的概论

数值分析（计算方法）的基本内容

1、数值逼近

插值法

函数逼近与曲线拟合

数值积分与数值微分

2、数值代数

线性代数问题(方程组和特征值)

非线性方程(组)数值解法

3、常微方程数值解法和偏微方程数值解法

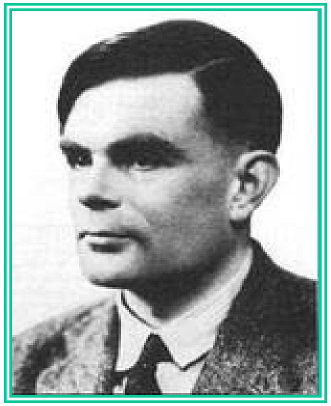
第1章　数值分析与科学计算引论

1. 数值分析研究对象、作用与特点
2. 数值计算的误差
3. 误差定性分析与避免误差危害
4. 数值计算中算法设计的技术
5. 数学软件

➢数值分析——研究以计算机为工具求解数学问题的数值方法及其理论.

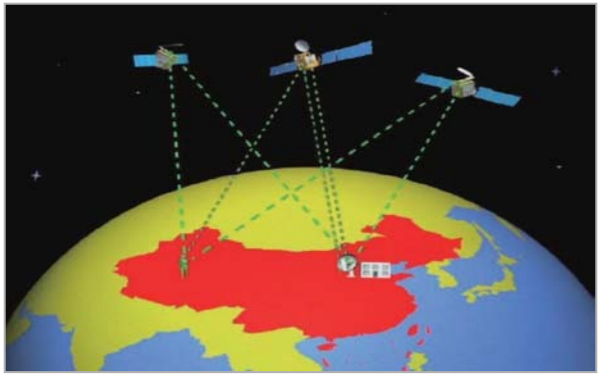
von Neumann and Goldstine:
"高阶矩阵的数值求逆" (1947)


冯·诺依曼


图灵

数值计算广泛应用，计算问题规模扩大，一系列新问题有待研究，这些问题涉及现有的多门数学分支。

- ➢1958年, 前苏联载人飞船
- ➢1969年, 美国Apollo 登月
- ➢1994年, 美国GPS运行


中国北斗系统

2009年3-4月份的美国《Inside GNSS》杂志，披露了美国斯坦福大学研究人员成功破解我国"北斗"导航卫星信号编码程序的情况。人们还发现，同样是这个研究团队，曾在2006年成功破解了欧洲"伽利略"导航卫星的信号编码。

哈尔滨的女孩高杏欣，她在清华读的本科。

她父亲叫做高德林，黑龙江省公安厅常务副厅长。2010年被免职，写了本《跨进美国斯坦福大学:追寻女儿成长的足迹》。

§1 数值分析的对象、作用与特点

1 研究对象

用计算机求解数学问题的数值计算方法、理论及软件实现

实际问题

→ 数学模型

} 应用数学

→ 数值计算方法

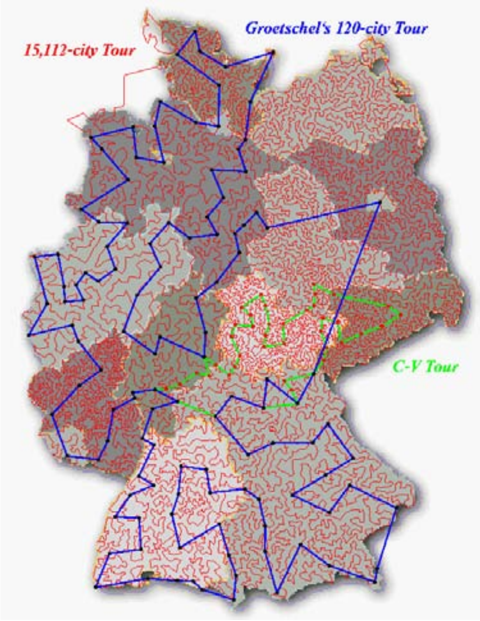
→ 程序设计（数学软件）

→ 上机计算求出结果

} 计算数学即数值分析

2 数值分析作用

科学研究的手段：科学理论、科学实验与科学计算



例 考虑线性方程组数值解问题 $Ax = b$

相关理论与精确解法 纯数学

根据方程的特点研究算法及相关理论 计算数学

3 数值分析特点

面向计算机提供有效算法；

可靠的理论分析（精度、收敛、稳定）；

好的计算复杂性（时、空）；

数值实验

旅行商问题

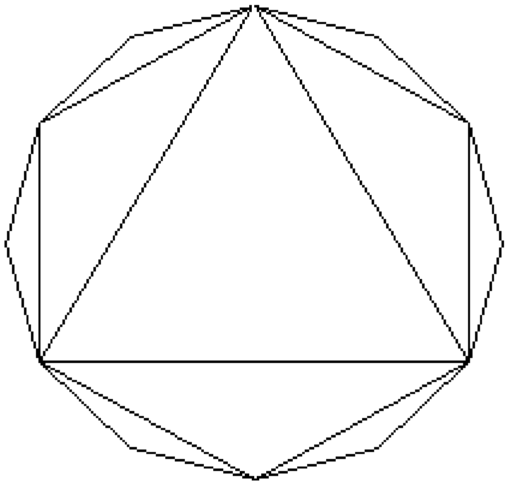
$Ax = b$

π 阿基米德、刘徽、祖冲之

B.C. 3 A.D.3 A.D.5

评价算法的主要指标:

速度和精度



例: 圆内接正多边形边长计算Pi方法

$$L_n = n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$L_{2n} = L_n / \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$\hat{L}_{2n} = (4L_{2n} - L_n) / 3$$

n	L	error
192	3.1414524	1.4e-004
384	3.1415576	3.5e-005
	3.1415926	4.6e-010

4 利用计算机进行计算

科学计算 的核心内容是以现代化的计算机及数学软件（Matlab， Mathematica， Maple， MathCAD etc. ）为工具，以数学模型为基础进行模拟研究。

促使一些边缘学科的相继出现：

计算数学, 计算物理学, 计算力学, 计算化学, 计算生物学,

计算地质学, 计算经济学, 等等

全球十大超级计算机：

每年两次的全球超级计算机500强名单出炉，即便极少惊喜，但一个全新系统的存在仍会令人侧目。

2016年6月使用中国自主芯片制造的“神威太湖之光”取代“天河二号”登上榜首。

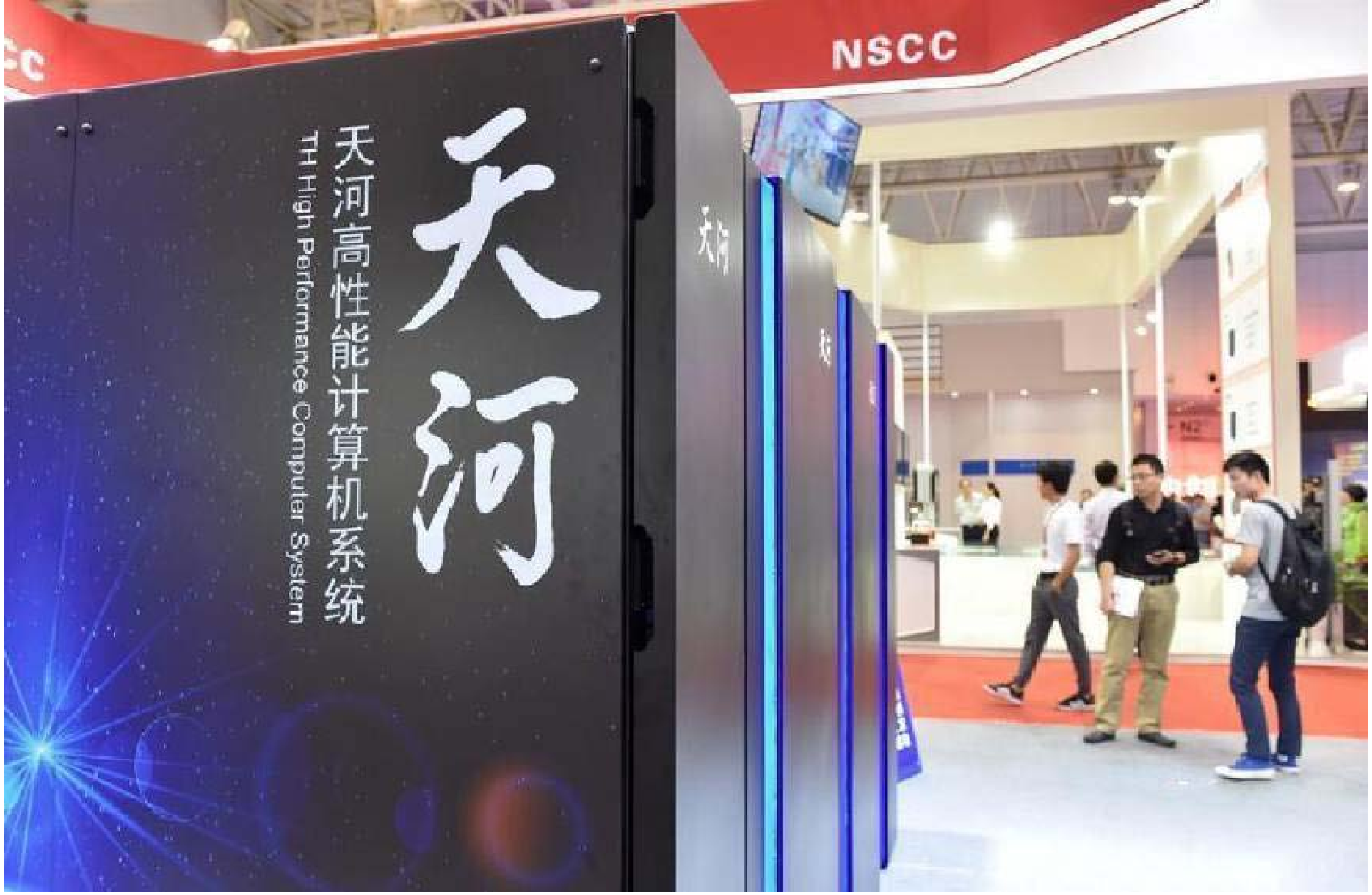
神威太湖之光（中国）：它是世界上体积最大、运算功能最强的超级计算机，拥有1000多万个处理器核心，双精浮点峰值高达125PFlops（每秒12.5亿亿次运算），稳定性能为93PFlops。

凭借神威·太湖之光，中国两度拿下国际高性能计算应用领域的最高奖项“戈登·贝尔”奖。

2016年“千万核可扩展全球大气动力学全隐式模拟”。

2017年“非线性地震模拟”

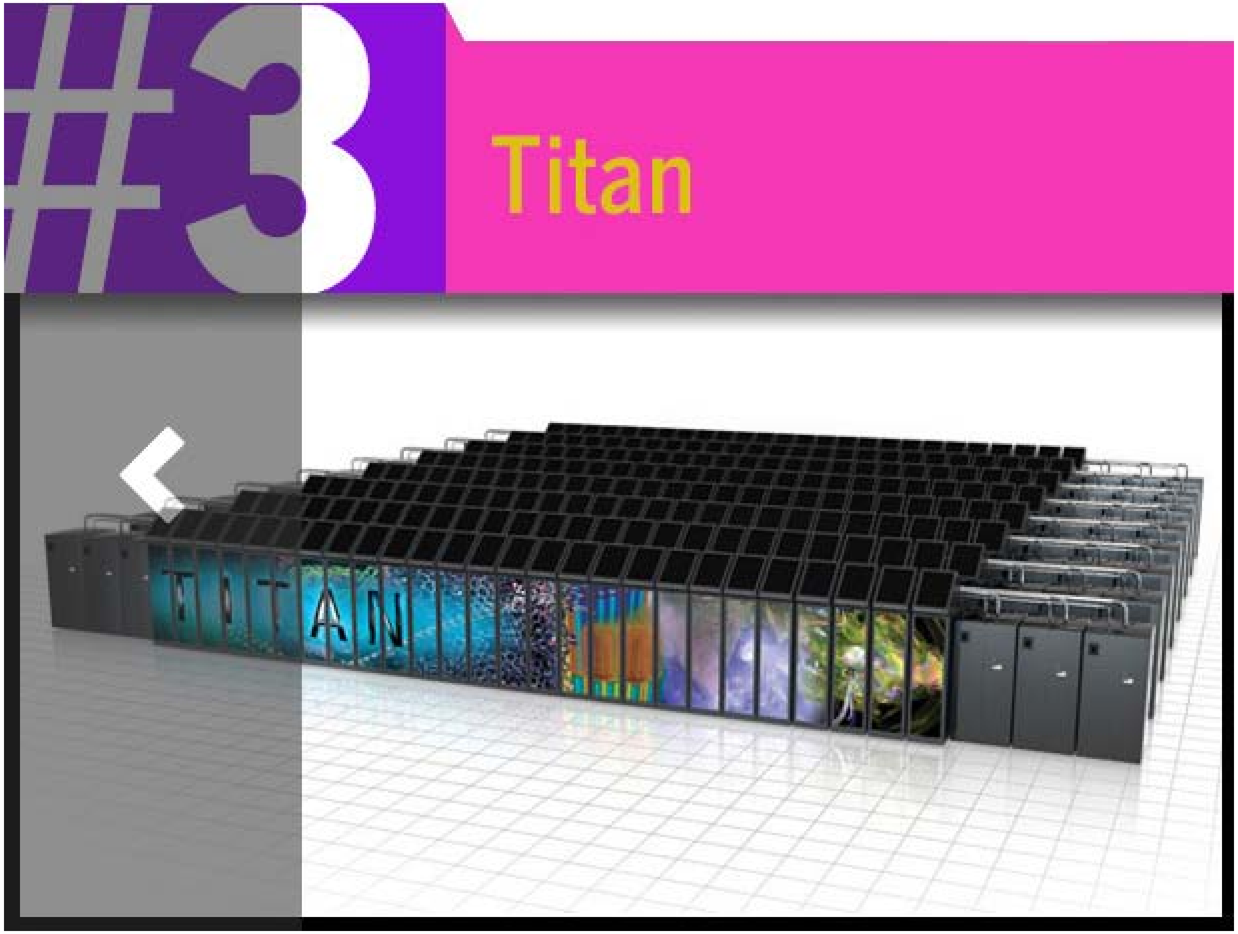
在落后于中国4年后，美国推出了世界上运行速度最快的超级计算机。美国能源部日前正式对外公布了新一代超级计算机**Summit**



天河三号原型机

中国公开E级超算天河三号原型机，这是世界首台百亿亿次超级计算机，天河三号E级超算运算能力是天河二号20倍，是天河一号的200倍。最为重要的是天河三号原型机全自主创新，不用担心会出现如2015年天河二号被美国禁售芯片的尴尬境地。

天河2号（中国）：在此前10年的十大最强超级计算机榜单中，天河2号已经6次蝉联榜首。尽管它今年被神威太湖之光取代，但依然是十分强大的超级计算机系统。它有312万个处理器核心，持续计算速度达每秒3.39亿亿次双精度浮点运算。



泰坦（美国）：它是美国橡树岭国家实验室的计算中枢，在能源部的各种研究项目中，运算速度可达到每秒1.76亿亿次**双精度浮点运算**。在以前的超级计算机评级中，泰坦始终是前十榜单中四大超级计算机之一。

TOP 5 Sites for November 2017

1. **Sunway TaihuLight** - China
2. **Tianhe-2A** - China
3. **Piz Daint** - Switzerland
4. **Gyoukou** - Japan
5. **Titan** - United States

TOP 7 Sites for June 2021

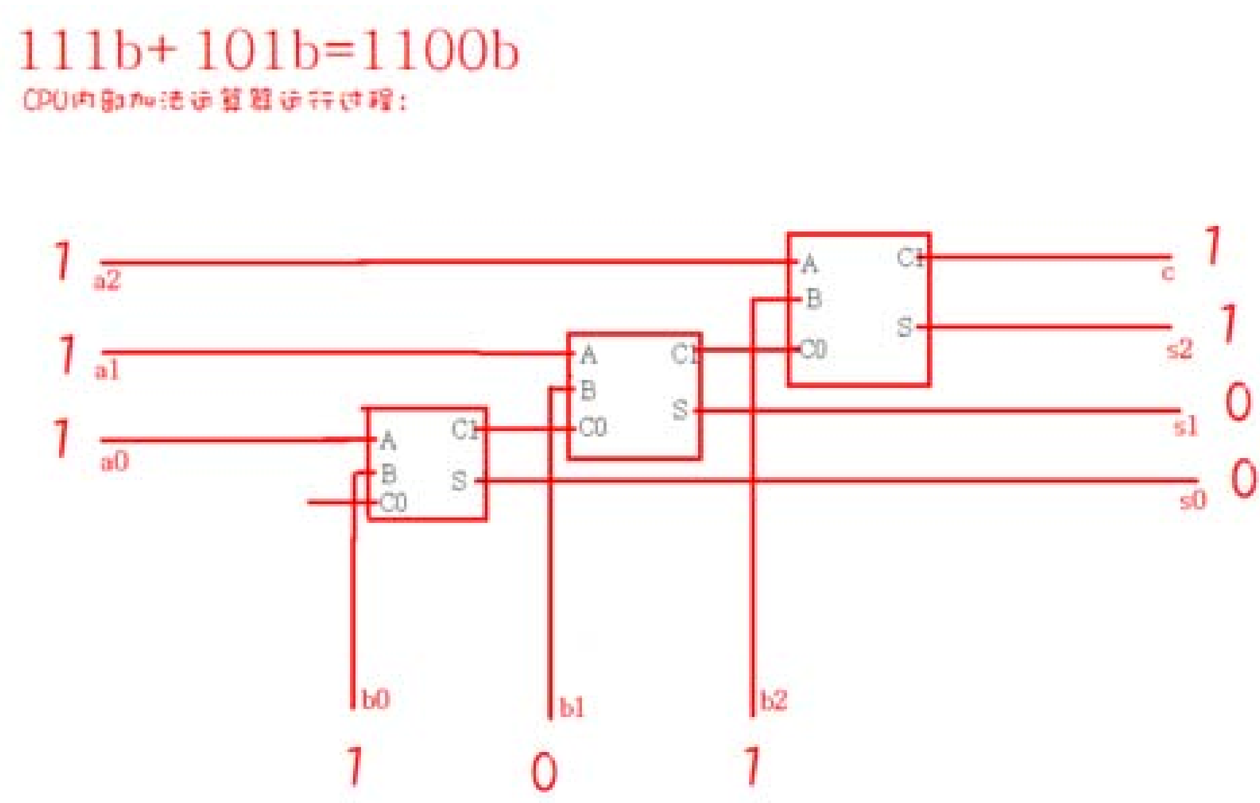
1. **Fugaku** - Japan
2. **Summit** - United States
3. **Sierra** - United States
4. **Sunway TaihuLight** - China
5. **Perlmutter** - United States
6. **Selene** - United States
7. **Tianhe-2A** - China

超级计算机作用

1. 气候预测；
2. 交通业：汽车、飞机或轮船等设计
3. 生物信息学和计算生物学：基因学
4. 地震模拟；
5. 地球物理探测和地球科学：如石油的勘测问题
6. 材料科学与计算纳米技术：对物质和能量的模拟是计算密集型的。
7. 模拟核试验：借助于超级计算机的强大而且快速的运算能力，在实验室实施的亚临界核试验，与真正核试爆的效果是相同的。

此外，还比如在娱乐产业的应用，阿凡达的电影中，超过三分之二的人物与景象都是通过超级计算机计算出来的。

加法器


111b+ 101b=1100b
CPU内部加法运算器运行过程：
A
B
C0
C1
S
a0
a1
a2
b0
b1
b2
s0
s1
s2
c
1
0

Intel 酷睿i7 6700K

CPU主频：4GHz

核心数量：四核心

线程数：八线程

制作工艺：14纳米

热设计功耗：91W

三级缓存：8MB

64位处理器

中国大连：65纳米

2015年4月9日，美国商务部发布了一份公告，决定禁止向中国4家国家超级计算机中心出售“至强”(XEON)芯片。而据美国媒体报道，美国商务部今年2月18日发布的一份通知称，使用了两款英特尔微处理器芯片的天河二号系统和早先的天河1号A系统，“据信被用于核爆炸模拟”。

此次，被禁运的4家机构分别是国家超级计算长沙中心、国家超级计算广州中心、国家超级计算天津中心和国防科技大学，它们被美国列入“坚持违背美国国家安全或者外交利益的实体名单”。

5. 数值问题与算法

什么样的算法是好的算法？

（误差分析，稳定性，收敛性，计算复杂性・・・）

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

vs

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \cdots\right).$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} - \cdots\right),$$

Cramer法则 vs Gauss消去法.

求解一个 n 阶线性方程组，若使用克莱姆法则，需要计算 n+1 个 n 阶行列式，在不计加减运算情况下，需要 $n!(n^2-1)$ 次乘除运算。而使用高斯消去法，只需约 $2n^3/3$ 次乘除运算。

- **当 n=20 时，** $20!\times(20^2-1) \approx 9.7\times 10^{20}$

  用每秒运算 30 亿次（主频3.0G）的计算机求解时，大约需要10000年的时间

如果使用高斯消去法，不到一秒钟就能完成！

6. 如何学好数值分析

1、积极动手上机实践

2、掌握各种方法的优缺点

3、注意掌握基本原理、处理技巧，误差分析

4、注重实际问题，练习、作业

7.数值分析要解决的问题

解Ax=b
最小二乘法
方程的求根
求A特征值
求积分
近似函数值，函数
微分方程的解法

程序语言MATLAB

§2　数值计算的误差

误差分类：

模型误差：建立数学模型时所引起的误差；

牛顿力学：宏观物体在低速和常状态，宏观精度，低温状态下都适用
在微观，高速，高温下不适用

观测误差:测量工具的限制或在数据的获取时随机因素所引起的物理量的误差；

来源：测量仪器，观测者，外界条件

世界最大的球面射电望远镜，FAST当之无愧。

南非和澳大利亚的平方公里阵（Square Kilometer Array）

截断误差:求解数学模型时，用简单代替复杂, 或者用有限过程代替无限过程所引起的误差

$$f(x) \approx P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

截断误差: $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

舍入误差:计算机表示的数的位数有限，通常用四舍五入的办法取近似值，由此引起的误差.

$R = \pi - 3.14159 = 0.0000026\cdots.$ 数制转换、机器数.

误差分类

模型误差: 数学模型 ⟺ 实际问题

观测误差: 由观测产生

(不讨论)

截断误差/方法误差: 近似解 ⟺ 精确解

舍入误差:计算机字长的限制

在数值分析中，我们总假定数学模型是准确的，因而不考虑模型误差和观测误差，主要研究截断误差和舍入误差对计算结果的影响.

例： 近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

解法之一：将 e^{-x^2} 作Taylor展开后再积分

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2\,!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}}_{S_4}+\underbrace{\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9}-\cdots}_{R_4}$$

取 $\boxed{\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx S_4}$

则 $R_4=\frac{1}{4\,!}\times\frac{1}{9}-\frac{1}{5\,!}\times\frac{1}{11}+\cdots$ 称为 **截断误差**

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx S_4 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}$$

保留小数点后 4 位数字

$$\approx 1-\underline{0.3333}+0.1000-\underline{0.0238}$$

$$=0.7429$$

舍入误差

绝对误差

定义： 设 x 为精确值，x^* 为它的一个近似值，则称

$$e^* = x^* - x$$

为近似值 x^* 的**绝对误差**，有时简称**误差**。

x —— 精确值
x^* —— 近似值

- 绝对误差**可正可负**
- 绝对误差通常是不可知的

定义： 存在一个正数 ε^*，使得，

$$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*$$

则称 ε^* 为**绝对误差限**，简称**误差限**。记： $x = x^* \pm \varepsilon^*$

- 做误差估计时所求的是**绝对误差限**，越小越好！
- 但绝对误差限却不能很好地表示近似值的精确程度

例：东风-5弹道导弹

射程：12000公里

精度：500米

例：军用高分辨率光学成像遥感卫星

（1）美国“锁眼12号”，分辨率达0.1米。它采用了大面阵探测器、大型反射望远镜系统、数字成像系统、自适应光学成像技术、实时图像传输技术等，镜头口径3米，焦距27米。

（2）法国太阳神2号A、B卫星分辨率达0.5米，其军民两用光学成像遥感卫星“昴宿星”的分辨率达0.7米。

中国“高分三号”为1米分辨率（民用）。

相对误差

定义： 设 x 为精确值，x^* 为它的一个近似值，则称

$$e_r^* = \frac{x^* - x}{x}$$

为近似值 x^* 的 **相对误差**。

- 由于精确值难以求出，通常也采用下面的定义

$$e_r^* = \frac{x^* - x}{x^*}$$

- 若存在正数 ε_r^*，使得 $|e_r^*| \le \varepsilon_r^*$，则称 ε_r^*为 **相对误差限**

- 近似值的精确程度取决于 **相对误差** 的大小
- 实际计算中我们所能得到的是 **绝对误差限** 或 **相对误差限**

有效数字

定义： 若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位，且该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，则称 x^* 有 n 位有效数字。

例： $\pi = 3.14159265\cdots$，近似值

$x_1 = 3.1415$，$x_2 = 3.1416$

问： x_1, x_2 分别有几位有效数字？

（4, 5）

例： 根据四舍五入原则写出下列各数的具有 5 位有效数字的近似值： 187.9325，0.03785551，8.000033

（187.93，0.037856，8.0000）

- 按四舍五入原则得到的数字是有效数字
- 一个数末尾的 0 不可以随意添加或省略

注：关于有效数字有以下几点说明

1、用四舍五入法取准确值的前n位作为近似值，则x^*必有n位有效数字；

2、有效数字位数相同的两个近似数，绝对误差限不一定相同；

3、将任何数乘以10^m(m为整数)，等于移动该数的小数点，并不影响它的有效数字的位数；

4、准确值被认为具有无穷位有效数字.

有效数字与相对误差的关系（定理1）

☞ 有效数字 $\Rightarrow$ 相对误差限

已知 x^* 有 n 位有效数字，则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \left|\frac{\varepsilon^*}{x^*}\right| = \frac{0.5\times 10^{m-n}}{0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m} = \frac{10^{-n}}{2\times 0.a_1\cdots}$$

$$\le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$$

☞ 相对误差限 $\Rightarrow$ 有效数字

已知 x^* 的相对误差限可写为 $\varepsilon_r^* = \dfrac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1}$

则 $|x-x^*| \le \varepsilon_r^* \cdot |x^*| = \dfrac{10^{-n+1}}{2(a_1+1)}\times 0.a_1a_2\cdots\times 10^m$

$$< \frac{10^{-n+1}}{2(a_1+1)}\cdot(a_1+1)\times 10^{m-1} = 0.5\times 10^{m-n}$$

可见 x^* 至少有 n 位有效数字.

例　为使 π^*的相对误差小于0.001%，至少应取几位有效数字？

解　假设 π^* 取到 n 位有效数字，则其相对误差上限为

$$\varepsilon_r^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

要保证其相对误差小于0.001%，只要保证其上限满足

$$\varepsilon_r^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} < 0.001\%$$

已知 $a_1 = 3$，则从以上不等式可解得 $n > 6 - \log 6$，即 $n \ge 6$，应取 $\pi^* = 3.14159$.

$\blacksquare$

§ 1.2.3 误差估计

1、代数运算的误差估计

设近似数x_1^*与x_2^*的误差限分别为$\varepsilon(x_1^*)$和$\varepsilon(x_2^*)$，则它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* \, x_2^*) \approx \left|x_1^*\right| \varepsilon(x_2^*) + \left|x_2^*\right| \varepsilon(x_1^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* / x_2^*) \approx \frac{\left|x_1^*\right| \varepsilon(x_2^*) + \left|x_2^*\right| \varepsilon(x_1^*)}{\left|x_2^*\right|^2} \qquad (x_2^* \neq 0)$$

2、函数值的误差估计

当自变量有误差时计算函数值也会产生误差，其误差限可利用函数的泰勒展开式进行估计.

$$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2 \qquad (\xi\text{介于}x\text{与}x^*\text{之间})$$

$$\left|f(x)-f(x^*)\right|\le\left|f'(x^*)\right|\varepsilon(x^*)+\frac{\left|f''(\xi)\right|}{2}\varepsilon^2(x^*)$$

忽略$\varepsilon(x^*)$的高阶项，可得计算函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*))\approx\left|f'(x^*)\right|\varepsilon(x^*)$$

附：泰勒公式　若函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上有定义，且有一直到n阶的连续导数，当$a<x<b$时有有限导数$f^{(n+1)}(x)$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x-a)^k+R_n(x) \qquad (a\le x\le b)$$

式中　$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \qquad (a<\xi<b)$$

当 f 为多元函数时，若$A=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$，而$x_1,x_2,\cdots x_n$的近似值为$x_1^*,x_2^*,\cdots x_n^*$，则A的近似值为$A^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots x_n^*)$，于是函数值$A^*$的误差$e(A^*)$为

$$e(A^*)=A^*-A=f(x_1^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)\left(x_k^*-x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^* e_k^*$$

于是误差限 $$\varepsilon(A^*)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*);$$

而A^*的相对误差限为

$$\varepsilon_r^*=\varepsilon_r(A^*)=\frac{\varepsilon(A^*)}{\left|A^*\right|}\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\frac{\varepsilon(x_k^*)}{\left|A^*\right|}$$

例 设 $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x}$ $\quad x=1.30\pm 0.005 \quad y=0.871\pm 0.0005$.
如果用 $\tilde{u}$ 作为 $f(1.30,0.871)$ 的近似值，则 $\tilde{u}$ 能有几位有效数值？

解： $$\tilde{u}=f(1.30,0.871)=\frac{\cos 0.871}{1.30}\approx 0.49543$$

由于，$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\cos y}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\sin y}{x}$$

而 $$\varepsilon(\tilde{u})\approx\left|\frac{\cos 0.871}{1.30^2}\right|\times 0.005+\left|\frac{\sin 0.871}{1.30}\right|\times 0.0005$$
$$\approx 0.0022<0.005$$

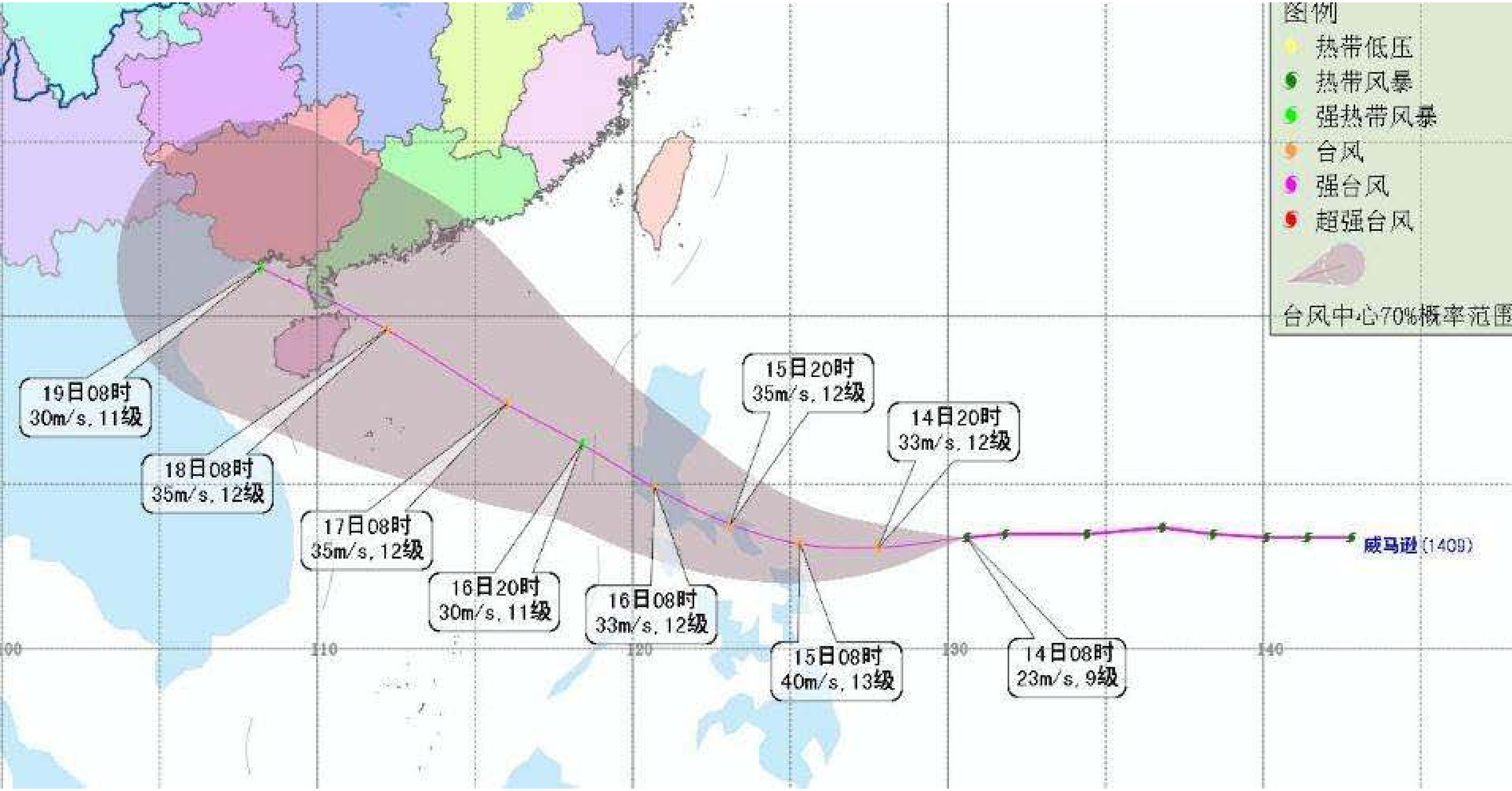
所以，$\tilde{u}$ 能有 $f(1.30\ 0.871)$ 二位有效数字 .

§3 误差定性分析、避免误差危害

- 误差分析
  - 数值计算中的误差分析很重要，但也很复杂
  - 在计算过程中，误差会传播、积累、对消
  - 对每一步运算都做误差分析比较不切实际（运算次数通常都在千万次以上）

- 误差定量分析
  - 向后误差分析法：比较有效的方法
  - 向前误差分析法，区间误差分析法，概率分析法

定量分析工作量大，都到的误差界往往不太实用。
目前在数值计算中更关注的是误差的定性分析


图例
热带低压
热带风暴
强热带风暴
台风
强台风
超强台风
台风中心70%概率范围
19日08时
30m/s, 11级
18日08时
35m/s, 12级
17日08时
35m/s, 12级
16日20时
30m/s, 11级
16日08时
33m/s, 12级
15日20时
35m/s, 12级
15日08时
40m/s, 13级
14日20时
33m/s, 12级
14日08时
23m/s, 9级
威马逊(1409)
100
110
120
130
140

● 误差定性分析

算法有“优劣”之分，问题有“好坏”之别，即使不能定量地估计出最终误差，但是若能判别计算过程中误差不会被任意放大，那就能放心地实施计算，这就是定性分析的初衷。

- 定性分析包括研究数值问题的适定性，数值问题与原问题的相容性，数值算法的稳定性，避免扩大误差的准则等
- 定性分析的核心是原始数据的误差和计算中产生的误差对最终计算结果的影响

数值稳定性

稳定性：数学问题的稳定性和数值算法的稳定性

数学问题的稳定性（适定性，well-posedness）：满足

(1) 对任意满足一定条件的数据，存在一个解

(2) 对任意满足一定条件的数据，解是唯一的

(3) 问题的解关于输入数据是连续的

否则就称问题是不适定的（ill-posed）

通俗描述：如果输入数据的微小扰动会引起输出数据（即计算结果）的很大变化（误差），则称该数值问题是病态的。

良态问题：一阶微分方程的解的存在性，解对初值的连续性

病态问题举例

例： 解线性方程组 $\begin{cases} x+\alpha y=1 \\ \alpha x+y=0 \end{cases}$

解： 当 $\alpha=1$ 时，无解

当 $\alpha\neq 1$ 时，解为 $x=\dfrac{1}{1-\alpha^2}$，$y=\dfrac{-\alpha}{1-\alpha^2}$

当 $\alpha\approx 1$ 时，误差可能会被大大地放大

比如取 $\alpha=0.9990$，则 $x\approx 500.25$;

如果输入数据为 $\alpha^*=0.9991$，即带有误差 0.0001，

则 $x^*\approx 555.81$，误差约为 55.56

这时的问题就是病态的

条件数

设一元函数 $f(x)$ 可微，x^*为 x 的近似值，则有

$$f(x^*)-f(x)=f'(x)(x^*-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(x^*-x)^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r\big(f(x^*)\big)=\left|\frac{f(x^*)-f(x)}{f(x)}\right|\approx\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\times\left|\frac{x^*-x}{x}\right|$$

$$\triangleq C_p\varepsilon_r(x^*)$$

其中 C_p 就称为 $f(x)$ 的条件数。

例如$f(x)=x^{10}, C_p=10, f(1)=1, f(1.02)\approx 1.24$,自变量相对误差为2%,函数值相对误差为24%.

1. 一般情况下，条件数大于 10 时，就认为问题是病态的
2. 条件数越大问题病态就越严重
3. 病态是问题本身固有的性质，与数值算法无关
4. 对于病态问题，选择数值算法时需要谨慎

1.3.1算法的数值稳定性

定义　一个算法如果输入数据有误差，而在计算过程中舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的，否则称此算法为不稳定的。

例：P. 9

$$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}$$

$$(A)\begin{cases} \tilde{I}_0 = 1 - 0.3679 = 0.6321 \\ \tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1} \end{cases} \qquad \tilde{I}_8 = -0.7280, \tilde{I}_9 = 7.552$$

$$\frac{e^{-1}}{n+1} < I_n < \frac{1}{n+1}, \quad \frac{e^{-1}}{10} < I_9 < \frac{1}{10}, \quad I_9 \approx \frac{1}{2}(\frac{e^{-1}}{10} + \frac{1}{10}) \approx 0.0684 = I_9^*$$

$$(B)\begin{cases} I_9^* = 0.0684 \\ I_{n-1}^* = \frac{1}{n}(1 - I_n^*) \end{cases}$$

$$e^{-1} \approx 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^7}{7!}, \quad \mathrm{R}_7 = \left| e^{-1} - 0.3679 \right| < 0.000025$$

$$I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}$$

$$(A)\begin{cases} \tilde{I}_0 = 1 - 0.3679 = 0.6321 \\ \tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1} \end{cases}$$

$$\tilde{I}_0 = 0.6321, \tilde{I}_1 = 0.3679, \tilde{I}_2 = 0.2642, \tilde{I}_3 = 0.2074, \tilde{I}_4 = 0.1704, \tilde{I}_5 = 0.1480,$$

$$\tilde{I}_6 = 0.1120, \tilde{I}_7 = 0.2160, \tilde{I}_8 = -0.7280, \tilde{I}_9 = 7.552$$

$$\frac{e^{-1}}{n+1} < I_n < \frac{1}{n+1}, \quad \frac{e^{-1}}{10} < I_9 < \frac{1}{10}, \quad I_9 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-1}}{10} + \frac{1}{10}\right) \approx 0.0684 = I_9^*$$

$$(B)\begin{cases} I_9^* = 0.0684 \\ I_{n-1}^* = \frac{1}{n}(1 - I_n^*) \end{cases}$$

$$I_9^* = 0.0684, I_8^* = 0.1035, I_7^* = 0.1121, I_6^* = 0.1268, I_5^* = 0.1455, I_4^* = 0.1708,$$

$$I_3^* = 0.2073, I_2^* = 0.2643, I_1^* = 0.3679, I_0^* = 0.6321$$

数值分析最理想的情况：

设计出数值稳定的算法来解决良态问题。

数值计算中的基本原则

(1)避免绝对值小的数做除数；

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\frac{|x_1|}{|x_2|^2}\varepsilon(x_2)+\frac{1}{|x_2|}\varepsilon(x_1)$$

若 $|x_2|<<|x_1|$ 则 $\dfrac{|x_1|}{|x_2|^2}>>1$

这时 $\varepsilon\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$ 将比 $\varepsilon(x_2)$ 扩大很多。

绝对值小的数做除数，绝对误差会很大

例：P11 例6

(2)避免两相近数相减;

$$\varepsilon(x_1 \pm x_2) = \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2)$$

$$\varepsilon_r(x_1 - x_2) = \frac{\varepsilon(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|} = \frac{|x_1|}{|x_1 - x_2|} \times \frac{\varepsilon(x_1)}{|x_1|} + \frac{|x_2|}{|x_1 - x_2|} \times \frac{\varepsilon(x_2)}{|x_2|}$$

$$= \frac{|x_1|}{|x_1 - x_2|} \times \varepsilon_r(x_1) + \frac{|x_2|}{|x_1 - x_2|} \times \varepsilon_r(x_2)$$

当x_1和x_2十分相近时， x_1-x_2接近零，

$\frac{|x_1|}{|x_1 - x_2|}$ 和 $\frac{|x_2|}{|x_1 - x_2|}$ 将很大，所以 $\varepsilon_r(x_1 - x_2)$

将比 $\varepsilon_r(x_1), \varepsilon_r(x_2)$ 大很多，即相对误差将显著扩大.

相近的数相减，相对误差会增大

避免两相近的数相减

例： $a_1 = 0.12345$，$a_2 = 0.12346$，各有5位有效数字。

而 $a_2 - a_1 = 0.00001$，只剩下1位有效数字。

几种经验性避免误差危害的方法：

$$\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}}$$

$$\ln(x+\varepsilon) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)$$

当 $|x| << 1$ 时： $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \dots\right)$$

例： P11 例 7，8

（3）避免大数吃小数

例：用单精度（**8位浮点数**）求解 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0.$

精确解为 $x_1=10^9$，$x_2=1$

算法1：利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

在计算机内，**10^9**存为**0.1×10^{10}**，**1**存为**0.1×10^{1}**．做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加．即**1**的指数部分须变为**10^{10}**，则：**$1 = 0.0000000001\times10^{10}$**，取单精度时就成为：

$10^9+1=0.10000000\times10^{10}+0.0000\cdots00\times10^{10}=0.10000000\times10^{10}$

大数吃小数

$$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

✍算法2：先解出 $x_1 = \dfrac{-b - sign(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 10^9$

再利用 $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \;\Rightarrow\; x_2 = \dfrac{c}{a\cdot x_1} = \dfrac{10^9}{10^9} = 1$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小.

例：按从小到大、以及从大到小的顺序分别计算

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 40 + 10^9$$

假如你是一个大富翁，有92, 124, 233, 383元（约921亿元），你的管家跟你汇报你的总资产，为了方便表示，会跟你汇报你有921.24亿元。有一天，你的管家缺钱了，就偷了你40万元。然后在跟你汇报的时候，依然如实的报告你有921.24亿（实际是921.2383亿，四舍五入就是921.24亿）。

那么假设这个管家是向你借了40万，而且你的账本只能记录这样的一个小数点后有两位小数的数，写不下第三位。这个时候你以为你有921.24亿，所以你会觉得你借钱之后有921.236亿，但是本子写不下，必须四舍五入，所以你的账本上还是会记录921.24亿。如此的借钱行为进行10次，账本上依然记录的是921.24亿，而你此时应该只有921.20亿。

(4)尽量减少计算工作量(乘、除法次数)

例 计算 $P(x) = 1+2x+3x^2+4x^3 + 5x^4$ 的值

秦九韶算法

$$P(x)=1+x(2+x(3+x(4+5x)))$$

应用：2进制数转换为10进制数算法

$(1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)_2 = 2^7+2^6 +2^5 +0 +2^3 +2^2 +2 +0$

$=((((((1\cdot 2+1)2+1)2+0)2+1)2+1)2+1)2+0$

$=238$

§4算法设计

- **多项式计算：秦九韶算法 或 Horner算法**
- **迭代法与开方求值：如非线性方程的迭代法解法**
- **以直代曲与化整为零：如差商代替微商**
- **加权平均的松弛技术：如 Simpson 算法**

§5数学软件

Matlab 优点:

- 用 Matlab 处理矩阵 —— 容易
- 用 Matlab 绘图 —— 轻松
- 用 Matlab 编程 —— 简洁
- 用 Matlab 的工具箱 —— 高效

本 章 小 结

算法优劣的标准

1. 误差分类
2. 问题适定性，算法稳定性
3. 数值计算的原则