2021 复变函数期中测试

姓名 ________________学号 ________________专业 ______________________

一	二	三	总成绩

一、 填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．把答案填在前面空白处）：

1. ____________ ;2____________________;3. ________________________ ;

4. ______________,______________;5. ________________________

6. ______________;7__________________________;8. ____________________;

9. __________________________;10. ____________________________

$e^{i\ln i}$

1. $i^{i} =$ ____________.

$3i$ $x-yi$ $y=-3$

2. $\mathrm{Im}(i+\overline{z}) = 4$ 所描述的曲线方程为____________.

3. $\sqrt[4]{-2i} =$ $\sqrt[4]{|-2i|}\left(\cos\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$.

$\ln 2 + i\arg(-2) + 2k\pi i$

4. $Ln(-2) =$ πi ____________. 它的主值 $ln(-2)$= $\ln 2 + \pi i$ ____________.

$x=-2$ $y=0$ πi

5. 已知 $f(z) = x^2 + iy^2$，则 $f'(1+i) =$ $2+2i$ 2 ____________.

$2x+2yi$ 2 $A2i$

6. $\displaystyle\int_C \frac{\overline{z}}{|z|} dz =$ $8\pi i$ ____________, 其中 C 为|z|=4 。

$\frac{|z|^2}{z\cdot|z|} = \int \frac{4}{z} dz$

$e^{i\cdot i} = e^{-1}$

7. $\displaystyle\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z =$ $i\sin i + \cos i - 1$.

$\int_0^i z\, d\sin z = z\cdot\sin z - \int \sin z dz = (z\sin z + \cos z)\Big|_0^i =$

8. 已知 C 为|z|=2， $f(z) = \displaystyle\int_C \frac{\xi^2 - 1}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$，则 $f'(2i)$=____________.

$2\pi i(z^2-1)'$

$2z\cdot 2$

$4i$

$\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = n+1\cdot\dfrac{n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = e$

9. 级数 $\sum_{n=}^{+\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$ 收敛半径为______.

10. 幂级数展开 $\sin(2z^3)=$ $(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}$______.

二、 计算下列各题（第 1 题 6 分，其他每小题 8 分，共 46 分）

1. 函数 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$ 在何处可导？在何处解析？

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$2x-1=2x-2y$ $-2y=-2y$

$y=\frac{1}{2}$

2. 已知 $u+v=x^2-y^2+2xy$，试确定解析函数 $f(z)=u+iv$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ $\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x+2y$

v是u的共轭调和函数

$v-u=2xy+y^2+\varphi(y)$

$2x-2y=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

$u-v=x^2-2xy+b(x)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ $2v=4xy+y^2+\cancel{b(y)}\ C$

$u=x^2+C$ $v=2xy+\dfrac{x^2}{2}+C_0$

3. 计算积分 $\int_C \mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$。其中

t $t+ti$

（1） C 为从原点(0,0)到(1,1)的直线段；$\int_0^1 t\,d(t+ti)$

$\int_0^1 t(1+i)dt$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

（2） C 为从原点(0,0)到(1,0)再到(1,1)的直线段.

$\int_0^1 ti\,dt=\frac{1}{2}i$

$\mathrm{Im}(z)$

$\int_C f(z)\,dz$

4. 计算 $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,其中 C 为不经过 0 与 1 的闭曲线。

0

$\frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z} = 2\pi i$

$\frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3} = 2\pi i e$

$2\pi i(1+e)$

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

$\oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3}dz = -\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(z_0)$

$= -\pi i \cdot \left(\frac{e^z(z-1)}{z^2}\right)'$

$= -\pi i\left(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2}\right)'$

$= -\pi i\left(\frac{e^z(z-1)}{z^2} - \frac{e^z(z^2-2z)}{z^4}\right)$

$= -e\pi i$

5.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^n$ 的收敛半径，以及和函数.

∞

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!} / \frac{n^2}{n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} = 0.$

6. 试求 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 以 $z = i$ 为中心的洛朗级数。

三．证明题（每题 8 分，共 24 分）

（1）叙述解析函数关于柯西黎曼方程的充分必要条件，并证明。

（2）证明 C-R 条件的极坐标形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

（3）叙述并证明柯西积分公式。