随机过程作业1

截至日期:

一、例题阅读: （该部分自行完成）
1.11, 2.31（分解思想）, 2.32（分解思想）, 2.47（poisson近似）, 3.5（条件密度）, 3.7（条件密度）, 3.10（条件期望公式）, 3.11（方程思想）, 3.15（方程思想）, 3.21（全概率分解思想）, 3.23（全概率分解思想）, 3.24（方程思想）, 3.25（全概率分解思想）, 3.33（条件期望公式）, 5.4（条件期望, 条件方差）, 5.5（全概率分解思想）, 5.8（全概率分解思想）。

二、练习:

Problem 1

设计随机试验并用Matlab近似计算: $\int_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$。

Problem 2

产生30个服从Exp(2)的随机数字。

Problem 3

若每天天气状态只有下雨和无雨2种, 已知第一天下雨, 如果在已知今天天气状态的条件下, 明天的天气状态发生改变的概率是q, 不变的概率为$p = 1 - q$。求第n天天气状态的概率分布。(Hint: 方程思想)

Problem 4

已知$(X, Y) \sim f(x, y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$为2个边际pdf。
证明下列三个条件密度的表达式:

1.

$$f(x|X > a) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\int_a^{+\infty} f_X(x)dx} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

2.

$$f(x|Y \leq a) = \frac{\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dy}{\int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy}$$

3.

$$f(x|X > Y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dy}{\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy}$$

Problem 5

若离散型 r.v. $X \in Z^+$（或连续型r.v. $X \geq 0$, 且$X \sim f(x)$）
证明:
$E[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{X \geq n\}$（或$E[X] = \int_0^{+\infty} P\{X \geq x\}dx$）

Problem 6

已知：r.v. $X \sim Geo(p)$
问题:
利用“分解思想+方程思想”求$E[X], Var(X)$

Problem 7

已知：$(X,Y) \sim UNIF(D)$,其中$D = [0,3] \times [0,3]$

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 2Y & X > Y \\ 2X - (Y - X) & X \leq Y \end{cases}$$

用2种方法求$E[Z]$。

Problem 8

编号为$1,2,3$的三台机器独立工作，寿命分别为X_1, X_2, X_3，$X_i \sim Exp(\lambda_i)$.任何一台机器损坏时，系统发生故障并立即对损坏的机器进行维修，1，2，3号机器的维修时间分别为$Y_1 \sim Exp(u), Y_2 \sim UNIF(0,a), Y_3 \sim Gamma(n,\lambda)$，$X_i$与$Y_j$相互独立。求系统每次故障期的平均长度$E(D)$。

Problem 9

已知：$X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$，且相互独立。
证明:
(1) $min\{X,Y,Z\} \sim Exp(3\lambda)$;

(2) $P\{X \le Y\} = \frac{1}{2}$;
(3) $P(X = min\{X, Y, Z\}) = \frac{1}{3}$;
(4) $max\{X, Y\} - min\{X, Y\} = X$（与$X$同分布）。

Problem 10

已知 $X \sim Exp(\lambda), Y \sim f(x)$（任意非负连续型）且互独，
证明：$(X - Y)|(X > Y) = X$

Problem 11

（课外思考题，选做）顾客独立到达只有一名服务员的服务系统，到达间隔为 $r.v.\ \tau$, $\tau \sim Exp(\lambda)$, 到达后若发现服务员空闲，则立刻接受服务,服务完后离开系统，服务时间为χ，$\chi \sim Exp(u)$,若发现服务员正忙，则进入大厅，每间隔V的时间独立申请服务，$V \sim Exp(\eta)$,申请时若发现服务员空闲，则立刻接受服务，若发现服务员忙，则回到大厅继续申请。τ,χ,V 相互独立，ϕ_i表示某人（设为A）进入大厅时发现恰有i个其它顾客在大厅(申请服务)时的平均等待时间。
证明：

1. $\phi_i = ai + b$
2. $a = \dfrac{1}{2u - \lambda}$
3. $b = \frac{1}{u} + \dfrac{u + \lambda}{u\eta} + \dfrac{\lambda(\lambda + \eta)}{u\eta(2u - \lambda)}$