eg. 赋范线性空间(Banach空间)

(1) R^n $x=(x_1, x_2 \cdots x_n)$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

R^n是赋范空间，是完备的.

eg. P40 有 C_{00} 的例子 ☆ 重点.

$C_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid$ 除有限项非0，其余项均为0$\}$

(1) C_{00}为线性空间 (加法与数乘封闭)，且$(e_n)_{n=1}^{\infty}$为C_{00}的一组基.

即$C_{00} = \mathrm{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

C_{00}为一个无穷维的最小线性空间.

$e_1 = (1, 0, 0 \cdots) \in C_{00}$

$e_2 = (0, 1, 0 \cdots) \in C_{00}$

$\cdots$

$e_n = (0, 1, 0 \cdots n \cdots) \in C_{00}$

$\therefore (e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C_{00}$

(2) 定义 $\|x\| = \max\limits_{n\in N} |x_n|$

下检验范数

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in C_{00}$

(2) $\|\lambda x\| = \max\limits_{n\in N} |\lambda x_n| = \max\limits_{n\in N} |\lambda| |x_n| = |\lambda| \|x_n\|$

(3) 令 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$

$\|x+y\| = \max\limits_{n\in N} |x_n + y_n| \leq \max\limits_{n\in N}(|x_n| + |y_n|) \leq \max\limits_{n\in N}(\max|x_n| + |y_n|)$

$\leq \max\limits_{n\in N}|x_n| + \max\limits_{n\in N}|y_n| = \|x\| + \|y\|$

故所定义的范数是C_{00}上的一个范数

故C_{00}为一个赋范线性空间.

(3). C_{00}是Banach空间吗? 不是 [找一个柯西列使其收敛点不在C_{00}中]

先找柯西列 [$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N, \|a_n - a_m\| < \varepsilon$]

$a_1 = (1, 0, 0 \cdots\cdots) \in C_{00}$

$a_2 = (1, \frac{1}{2}, 0 \cdots\cdots) \in C_{00}$

…

$a_n = (1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots) \in C_{00}$

$\therefore (a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C_{00}$

$\|a_m - a_n\|$ 设 $m > n$

$= \|(1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \cdots \frac{1}{m}, 0, 0, \cdots) - (1, \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n}, 0 \cdots 0)\|$

$= \|(0, 0 \cdots 0, \frac{1}{n+1} \cdots \frac{1}{m}, 0 \cdots)\| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$

$\therefore$ 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

eg. $C_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0\}$ 极限为0的数列构成的全体

下证 C_0 是一个 Banach 空间. [线性空间 → 定义范数 → 检验范数 → 得赋范线性空间 → 找到柯西列 → 证明柯西列的极限值在该空间中]

(1) C_0 是线性空间.

(2) $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, 定义 $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ $\underline{< \infty}$ 收敛为0的数列有上确界

检验范数

(3). 下证完备 → 柯西列收敛 or → 若 C_0 为某个 Banach 空间的闭子空间. (任何一个 Banach 空间的闭子空间都为 Banach 空间)

X C_0 是 X 的闭子空间
$x \in C_0 \subseteq X$
$\|x\|_{C_0} = \|x\|_X$

有 (1) $C_{00} \subseteq C_0$ 子空间.

(2) $X = l_\infty := \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \exists M \in \mathbb{R}^n,\ 使\ |x_n| \le M \}$

$\|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

证其为Banach空间 (P_{11} 证了 l^∞ 完备)

$x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^\infty$

$d(x,y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = \|x - y\|$

即 l^∞ 在 d 下完备 $\longrightarrow$ l^∞ 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下完备

$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$

作业.

证：设 X 为 Banach空间，Y 为其闭子空间，下证 Y 为 Banach空间

若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 Y 中柯西列

$\Downarrow$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中柯西列

$\Downarrow$ X 为Banach空间

$\exists x \in X$，使 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

$\Downarrow$ Y 是 X 的闭集　集合的极限点还在集合中.

$x \in Y$

$\therefore Y$ 为 Banach空间.

$X = l^\infty$　　$Y = C_0$

$\downarrow$　　$\downarrow$　只需证 C_0 为 l^∞ 的闭子空间.

Banach空间　　Banach空间

设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 C_0 中的柯西列.

$\Downarrow$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 l^{∞} 中的柯西列

$\Downarrow$ Banach空间

$\exists a \in l^{\infty}$，使 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

需证 $a \in C_0$

$a_n = (x_n^m)_{m=1}^{\infty} \in C_0$

$a = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in l^{\infty}$

$\Downarrow$

$a \in C_0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_m = 0$

$a_1 = (x_1^m)_{m=1}^{\infty}$

$= (x_1^1 \; x_1^2 \cdots x_1^m \cdots)$

$a_2 = (x_2^m)_{m=1}^{\infty}$

$= (x_2^1 \; x_2^2 \cdots x_2^m \cdots)$

$a_n = (a_1 \; a_2 \cdots a_n \cdots)$

$= [(x_1^1 \; x_1^2 \cdots x_1^m \cdots)(x_2^1 \; x_2^2 \cdots x_2^m \cdots) \cdots (\quad)]$

$c_{00} \subseteq c_0 \subseteq l^\infty$ 序列空间.

l_p: $1 \le p < +\infty$

$l_p := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$ 线性空间.

$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

(1) $p=1$ $\quad l_1 \subsetneq c_0$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty \quad \therefore \text{通项为}0, x_n \longrightarrow 0\right)$

$x = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow x \notin l_1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow x \in c_0$

(2) $1 \le p < q$ $\quad l_p \subseteq l_q$

$x = \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)^p \nless +\infty$ 发散 $\quad x \notin l_p$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}} < +\infty \Rightarrow x \in l_q$

$q > p \Rightarrow \frac{q}{p} > 1$

$\therefore c_{00} \subsetneq l_1 \subsetneq \underset{p>1}{l_p} \subsetneq c_0 \subsetneq l^\infty$

eg. $C[0,1]$

$\|f\| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f \in C[0,1]$

eg. (X, Σ, μ) $\quad L_0(\mu) := \{f \text{ 为 } \mu \text{ 可测}\}$

$L_p(\mu)(1 \le p < \infty) := \{f \in L_0(\mu) \mid \int_\mu |f|^p d\mu < +\infty\}$

$L_p[0,1]$ 若 $p > q$, 则 $L_p(\mu) \subseteq L_q(\mu)$

只在 $[0,1]$ 上有包含关系.

$L_p[0,1]$ 是线性空间.

$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ $\quad$ $\|\cdot\|_p$ 是 $L_p[0,1]$ 上的一个范数.

且 L_p 在 $\|\cdot\|_p$ 下完备

eg. $L_\infty(\mu) := \{ f \in L_0(\mu) \mid |f(x)| \le M \}$

L_p 空间里所有函数均为等价类.