期末复习

第5章 留数

5.1孤立奇点

一、孤立奇点的概念

二、函数的零点与极点的关系

三、函数在无穷远点的性态

一、孤立奇点的概念

定义 如果函数 $f(z)$在 z_0不解析, 但 $f(z)$在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点.**

例 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

不应认为函数的奇点都是孤立的.

例如 $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的非孤立奇点。

换句话说，在 $z=0$ 的不论怎样小的去心领域内总有 $f(z)$ 的奇点存在.

综上所述:

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

二、函数的零点与极点的关系

1.零点的定义 不恒等于零的解析函数 $f(z)$如果能表示成 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且$\varphi(z_0)\neq 0$, m为某一正整数, 那么z_0 称为 $f(z)$ 的 m 级零点.

例 $z=0$是函数 $f(z)=z(z-1)^3$的一级零点，

$z=1$是函数 $f(z)=z(z-1)^3$的三级零点.

注意: 不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

2.零点的判定

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0, (n=0,1,2,\cdots m-1); \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

证 (必要性) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点

由定义: $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

设 $\varphi(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式为:

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

其中 $c_0 = \varphi(z_0) \neq 0,$

从而$f(z)$在z_0的泰勒展开式为

$$f(z) = c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + c_2(z - z_0)^{m+2} + \cdots$$

展开式的前m项系数都为零 ,由泰勒级数的系数

公式知: $f^{(n)}(z_0) = 0, (n = 0,1,2,\cdots m-1);$

并且 $$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = c_0 \neq 0.$$

充分性证明略 .

3.零点与极点的关系

定理 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 那么 z_0 就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反过来也成立.

这个定理为判断函数的极点提供了一个较为简单的方法

例 函数$1/\sin z$有些什么奇点？如果是极点，指出它的级.

[解] 函数 $1/\sin z$ 的奇点显然是使 $\sin z=0$ 的点.这些奇点是 $z=k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.由于$(\sin z)'|_{z=k\pi}=\cos z|_{z=k\pi}=(-1)^k\neq 0$, 所以 $z=k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点，也就是 $1/\sin z$ 的一级极点.

例 求$f(z)=\dfrac{z^n}{e^z-1}\quad(n\leq 0)$的极点。

$$f(z)=\frac{1}{z^{1-n}\left(1+z/2!+\cdots+z^{m-1}/m!+\cdots\right)}\Rightarrow z=0\text{为}1-n\text{阶极点}.$$

$$z=2k\pi i\text{为}e^z-1\text{的一阶零点}(k\neq 0)$$

$$\Rightarrow z=2k\pi i\text{为}f(z)\text{的一阶极点}(k\neq 0).$$

例 对 $m \in Z$ 讨论函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^m}$ 在 $z=0$ 处的性态。

解

$m \le 0: z=0$为解析点； $m=1: z=0$为可去奇点；

$$m>1: f(z)=\frac{1}{z^m}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^m}{m!}+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}+\cdots\right)$$

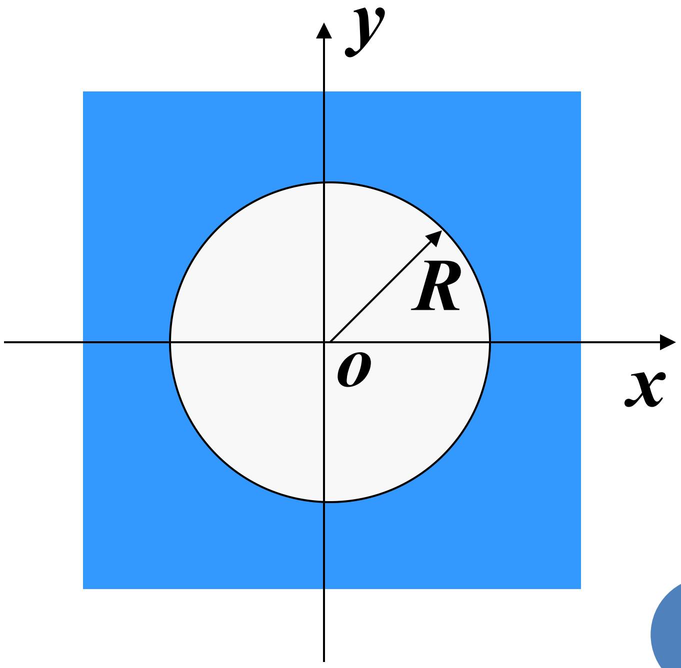
$$=\frac{1}{z^{m-1}}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^{m-1}}+\cdots+\frac{1}{m!}+\frac{z}{(m+1)!}+\cdots$$

$\Rightarrow z=0$为$m-1$阶极点。

三、函数在无穷远点的性态

1. 定义 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$



令变换 $z = \dfrac{1}{w}$

则 $f(z) = f\left(\dfrac{1}{w}\right) = \varphi(w)$,

$$R < |z| < +\infty \xrightarrow{\text{映射为}} 0 < |w| < \frac{1}{R}$$

$$\varphi(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n w^n$$

如果函数 $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$内解析，**称点∞为 $f(z)$的孤立奇点.**

作变换 $w=\dfrac{1}{z}$把扩充z平面上∞的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 映射成扩充w平面上原点的去心邻域：$0<|w|<\dfrac{1}{R}$.

又 $f(z)=f(\dfrac{1}{w})=\varphi(w)$.这样，我们可把在去心邻域$R<|z|<+\infty$ 对$f(z)$的研究变为在$0<|w|<\dfrac{1}{R}$ 内对$\varphi(w)$的研究.显然$\varphi(w)$在 $0<|w|<\dfrac{1}{R}$ 内解析，所以$w=0$是孤立奇点.

$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{w\to 0}\varphi(w)\Rightarrow$ $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的奇点类型等价于$\varphi(w)$在$w=0$的奇点类型。

2.判别方法: **判别法1 (利用洛朗级数的特点)**

如果 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数中:

1)不含正幂项;

2)含有有限多的正幂项且 z^m 为最高正幂;

3)含有无穷多的正幂项;

那么 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1)可去奇点 ;

2) m 级极点;

3)本性奇点 .

判别法2：(利用极限特点)

如果极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

1)存在且为有限值；

2)无穷大;

3)不存在且不为无穷大；

那么 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1)可去奇点；

2)m级极点；

3)本性奇点.

即$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点, 极点或本性奇点, 完全看极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 是否存在(有限值), 为无穷大或即不存在又不是无穷大来决定.

例 $f(z)=(z-2)(z^2+1)$. $z=\infty$为唯一奇点: 3阶极点.

例 $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$. $z=0$与∞均为本性奇点.

例 $f(z)=e^{\tan\frac{1}{z}}$. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=1 \Rightarrow \infty$为$f(z)$的可去奇点.

$$z_k=1\Big/\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\text{为本性奇点}$$

$z=0$为非孤立奇点;

练习 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点? 如果是极点, 指出它的级.

解 函数 $f(z)$ 除点 $z=0,\pm 1,\pm 2\cdots$ 外,

在 $|z|<+\infty$ 内解析.

因 $(\sin \pi z)'=\cos \pi z$ 在 $z=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 处均不为零.

所以这些点都是 $\sin \pi z$ 的一级零点,

故这些点中除1, -1, 2外, 都是 $f(z)$ 的三级极点.

因 $z^2-1=(z-1)(z+1)$，以1与-1为一级零点，

所以 1与-1是$f(z)$的2级极点.

当$z=2$时，

$$因为\ \lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$$

$$= \frac{3}{\pi^3},$$

那末 $z=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

当$z=\infty$时，

函数 $f(z)$ 有奇点 $z=0,\pm 1,\pm 2\cdots$

所以，$z=\infty$ 不是孤立奇点。

完整的说明方法见下一页

当 $z=\infty$ 时，因为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{(1-\zeta^2)(1-2\zeta)^3}{\zeta^2\sin^3\frac{\pi}{\zeta}}$,

$\zeta=0, \zeta_n=\frac{1}{n}$ 使分母为零，$\zeta_n=\frac{1}{n}$ 为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的极点，

当 $n\to\infty$ 时，$\zeta_n\to 0$,

故 $\zeta=0$ 不是 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的孤立奇点，

所以 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点.

5.2留数

一.留数的引入

二.利用留数求积分

三.在无穷远点求留数

积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

$$= \cdots + \underbrace{c_{-n}\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}_{0\ \text{(高阶导数公式)}} + \cdots + \underbrace{c_{-1}\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}_{2\pi i}$$

$$\underbrace{+\oint_C c_0\mathrm{d}z + \oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z + \cdots}_{0\ \text{(柯西-古萨基本定理)}}$$

$= 2\pi i c_{-1}$　洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数

即 $$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$$

$f(z)$在z_0的留数

定义 如果 z_0为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 则沿在z_0的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < R$内包含 z_0 的任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值除以 $2\pi i$ 后所得的数称为 $f(z)$在z_0的留数.

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$.

例　求下列积分的值，其中C为包含$z=0$的简单正向闭曲线.

$$(1)\oint_C z^{-3}\cos z\mathrm{d}z \quad (2)\oint_C \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}\mathrm{d}z$$

解： (1)令$f(z)=z^{-3}\cos z$，则$z=0$为$f(z)$的孤立奇点.

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots, |z|<\infty.$$

$$f(z)=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z}+\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}+\cdots, 0<|z|<\infty,$$

所以$\mathrm{Res}\,[f(z),0]= -\dfrac{1}{2}$.

$$\oint_C z^{-3}\cos z\mathrm{d}z = -\pi i$$

(2) 令 $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$，则 $z=0$为 $f(z)$ 的孤立奇点.

$$e^{\xi}=1+\frac{\xi}{1!}+\frac{\xi^2}{2!}+\cdots\frac{\xi^n}{n!}+\cdots,|z|<\infty,$$

以 $\xi=\dfrac{1}{z^2}$ 代入上式，得

$$f(z)=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4}+\cdots\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}+\cdots,0<|z|<\infty.$$

所以，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0.$

$$\oint_C e^{\frac{1}{z^2}}\mathrm{d}z=0$$

二、利用留数求积分

1.留数定理　函数 $f(z)$ 在区域 D内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$外处处解析, C 是 D内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线, 那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

2.留数的计算方法

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算规则

•**规则1** 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那么

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z).$$

•**规则2**　如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点， 那么

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

•**规则3** 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析，

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，那么 z_0 为

$f(z)$ 的一级极点，且有 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

例 计算 $f(z)=\dfrac{e^z}{\sin z}$ 在$z=0$处的留数.

解: $P(z)=e^z$, $\quad Q(z)=\sin z$,

于是$P(0)=1, Q(0)=0, Q'(0)=1.$

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{P(0)}{Q'(0)}=1$$

例 求 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 的留数.

解 如果利用洛朗展开式求 c_{-1} 较方便:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]$$

$$\therefore\ \operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$$

例 计算积分$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$, C 为正向圆周$|z|=2$.

解 被积函数$f(z)=\frac{z}{z^4-1}$有四个一级极点$\pm 1, \pm i$ 都在圆周$|z|=2$ 内，所以

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}\cdot$$

由规则3, $\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$,故

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=0.$$

例 计算积分$\oint_C \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}dz$, C 为正向圆周$|z|=2$.

解 $z=0$ 为被积函数的一级极点, $z=1$ 为二级极点，而

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.$$

所以$\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^3}\mathrm{d}z=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\}$

$$=2\pi i(1+0)=2\pi i.$$

三、在无穷远点的留数

1. **定义** **设函数** $f(z)$**在圆环域** $R<|z|<+\infty$ **内解析，**

C**为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线，**

那么积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 的值与C无关，**则称此定值**

为 $f(z)$ **在** ∞ **点的留数，**

记作 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$

注意积分路线取顺时针方向

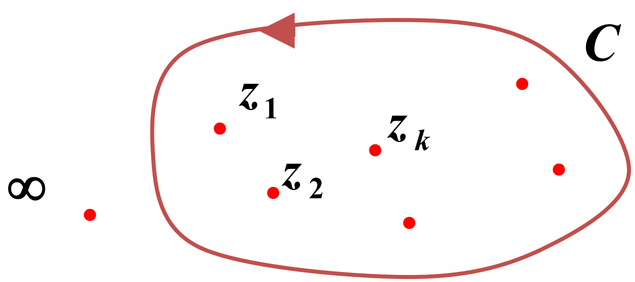
$= -c_{-1}$

说明 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$

2.定理二

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括∞点)的留数的总和必等于零.

证



(绕原点的并将 z_k 包含在内部的正向简单闭曲线)

由留数定义有:

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

[证毕]

3.在无穷远点处留数的计算

- **规则4**

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

说明：定理二和规则4提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

此法在很多情况下此法更为简单.

例 计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$, C为正向圆周: $|z|=2$.

解 函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在 $|z|=2$ 的外部, 除 ∞ 点外没有其他奇点. 根据定理 二与规则4:

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right] = 0.$$

使用内部奇点留数的方法见下一页。

例 计算积分$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$, C 为正向圆周$|z|=2$.

解 被积函数$f(z)=\frac{z}{z^4-1}$有四个一级极点$\pm1,\pm i$ 都在圆周$|z|=2$ 内，所以

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}\cdot$$

由规则2，$\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$，故

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0\,.$$

5.3 留数在定积分计算上的应用

- 一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分
- 二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分
- 三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x \quad (a>0)$ 的积分

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

令 $z=e^{i\theta}$

当 θ 历经变程 $[0,2\pi]$ 时,

z 沿单位圆周 $|z|=1$ 的正方向绕行一周.

$$令\ z=e^{i\theta} \longrightarrow \mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \longrightarrow \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz},$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

z的有理函数，且在单位圆周上分母不为零，满足留数定理的条件.

包围在单位圆周内的诸孤立奇点.

例 计算积分 $\int_0^{2\pi} \cos^4 4\theta \mathrm{d}\theta$.

解： 令 $z=$ $\mathrm{e}^{i\theta}(0 \le \theta \le 2\pi)$,则 $\cos^4 4\theta = (\frac{z^4+z^{-4}}{2})^4$,

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 4\theta \mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} (\frac{z^4+z^{-4}}{2})^4 \frac{1}{iz}\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(z^8+1)^4}{16z^{17}}\mathrm{d}z$$

在0 $<|z|<$ 1内，被积函数的罗朗展开式为

$$\frac{(z^8+1)^4}{16z^{17}} = \frac{1}{16}z^{-17} + \frac{1}{4}z^{-9} + \frac{3}{8}z^{-1} + \cdots.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 4\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{i}[2\pi i \operatorname{Res}[\frac{(z^8+1)^4}{16z^{17}},0]] = \frac{3}{4}\pi.$$

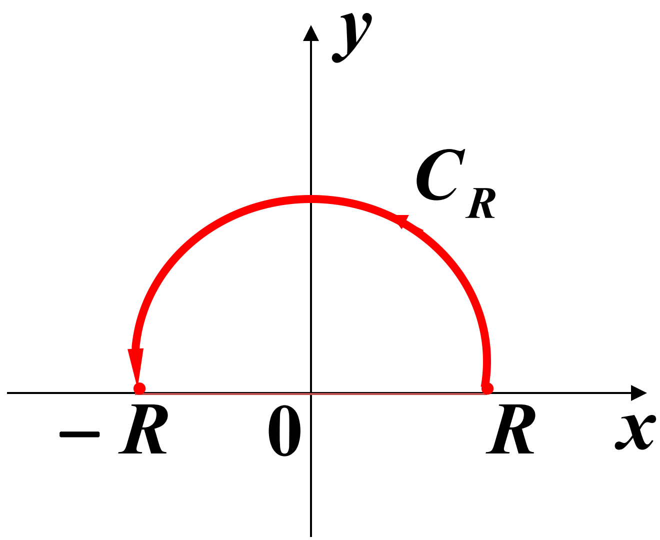
二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分

有理函数 $R(x)$的分母至少比分子高两次，

并且分母在实轴上无孤立奇点.

一般设 $$R(z)=\frac{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1 z^{m-1}+\cdots+b_m},\ m-n\geq 2$$

(当z在实轴上的区间内变动时，$R(z)=R(x)$)



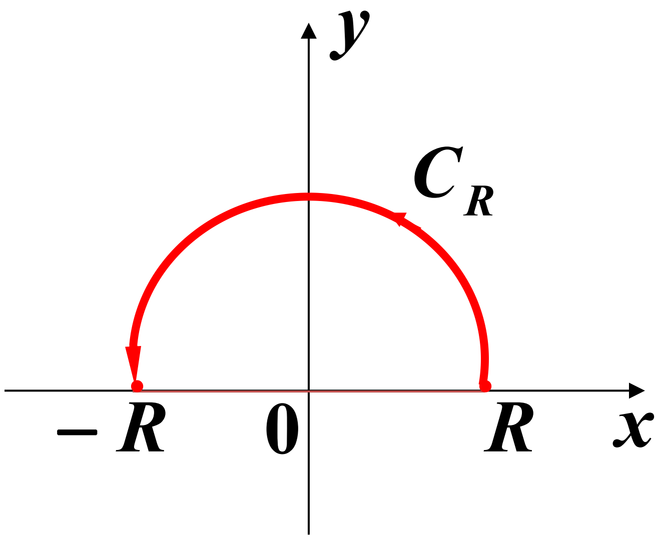
$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{C_1} R(z)\mathrm{d}z$$

C_R与$[-R,R]$一起构成封闭曲线C, $R(z)$在C及其内部(除去有限孤立奇点）处处解析.

根据留数定理得：

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z),z_k],$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\, i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k],$$

$$R \to +\infty : \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z \to 0$$

所以 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$

$$\int_{-R}^{R} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

此等式不因C_R的半径R不断增大而有所改变.

$$|R(z)| = \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$\le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$< \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot M < \frac{M}{|z|^2} (\text{当} |z| \text{足够大时})$$

$$\left|\int_{C_R} R(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_R} |R(z)|\,\mathrm{d}s \le \frac{M}{R^2} \pi R$$

$$= \frac{M\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k].$

如果$R(x)$为偶函数,

$$\int_{0}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

例 计算$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

$$z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 - z^2 = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{z^2}{z^4 + z^2 + 1}$的四个一阶极点为:

$z_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i,\ z_{3,4} = \pm\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$,其中$z_1, z_2$在上半平面

$$I = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z), z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2]\}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i} + \frac{1-\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

例 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$

解: $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$

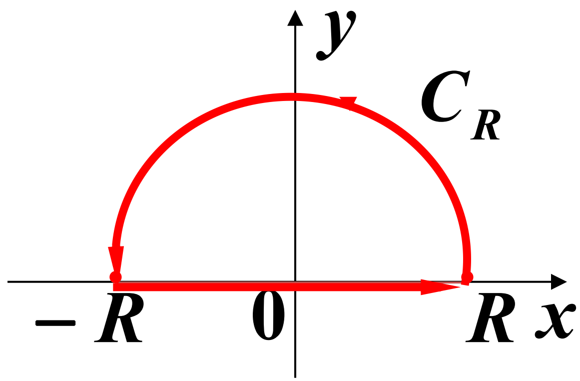
$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ 在上半平面只有一个 $n+1$ 阶极点 $z = i$,

$$I = \pi i \mathrm{Res}[f(z), i] = \pi i \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z+i}\right)^{n+1}\Bigg|_{z=i} = \pi i \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{(2i)^{2n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!\, 2^{2n+1}}\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x$ 的积分 $(a>0)$

$R(x)$是x的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且$R(z)$在实轴上无孤立奇点.



由留数定理:

$$\int_{-R}^{R} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

由留数定理:

$$\int_{-R}^{R} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$R \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k].$$

例 求积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$

解： 设$R(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+5}$，则$R(z)$的分母高于分子二次，实轴上无奇点，上半平面只有一个一级极点$z=-2+i$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{ix}\mathrm{d}x=2\pi i\,\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{iz},-2+i]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-2+i}[z-(-2+i)]R(z)\mathrm{e}^{iz}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-2+i}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z+2+i}=2\pi i\frac{\mathrm{e}^{-1-2i}}{2i}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}[2\pi i\frac{\mathrm{e}^{-1-2i}}{2i}]=\pi\mathrm{e}^{-1}\cos 2.$$

6.1共形映射概念

一、导函数的几何意义

二、共形映射的概念

三、几个简单的共形映射

$$\frac{w-w_0}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{|\triangle w|e^{i\varphi}}{|\triangle z|e^{i\theta}}=\frac{|\triangle w|}{|\triangle z|}e^{i(\varphi-\theta)},$$

所以 $|f'(z_0)|=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$.

称为曲线 C 在 z_0 的伸缩率

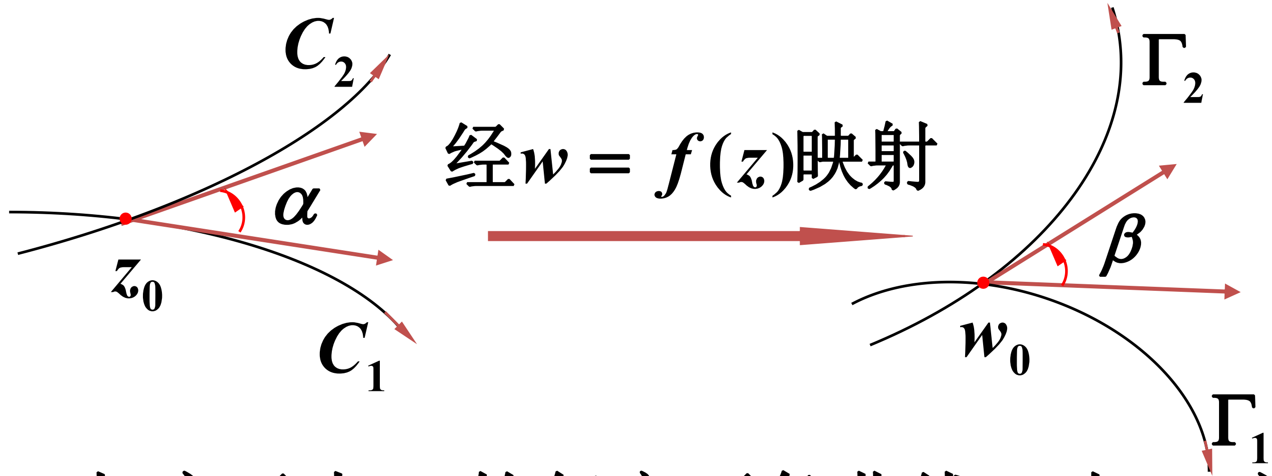
结论: $|f'(z_0)|$是经过映射 $w=f(z)$ 后通过点 z_0 的的任何曲线 C在 z_0的伸缩率,它与曲线 C的形状及方向无关. 所以这种映射具有**伸缩率的不变性**.

$$\frac{w-w_0}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{|\triangle w|e^{i\varphi}}{|\triangle z|e^{i\theta}}=\frac{|\triangle w|}{|\triangle z|}e^{i(\varphi-\theta)},$$

所以$\arg f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(\varphi-\theta)$ $=\varphi_0-\theta_0.$

称为曲线 C 在 z_0 的旋转角

结论: $\arg f'(z_0)$是经过映射 $w=f(z)$ 后通过点 z_0 的的任何曲线 C 在 z_0 的旋转角, 它与曲线 C 的形状及方向无关. 所以这种映射具有**旋转角的不变性**.



结论：相交于点 z_0 的任意两条曲线 C_1与 C_2之间的夹角在其大小和方向上都等同于经过$w = f(z)$映射后跟 C_1与C_2对应的曲线 Γ_1与 Γ_2之间的夹角.

映射 $w = f(z)$ 具有保持两曲线间夹角的大小和方向不变的性质, 此性质称为**保角性**.

综上所述, 有

定理

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内一点,

且 $f'(z)\neq 0$, 那么映射 $w=f(z_0)$ 在 z_0 具有两个性

质：（1）保角性；（2）伸缩率不变性.

二、共形映射的概念

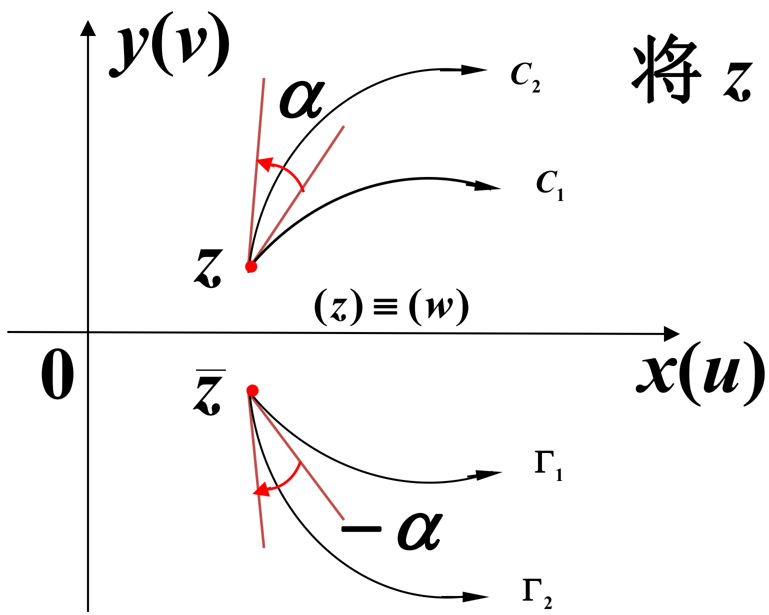
定义 设 $w=f(z)$ 在区域D内的任意一点 z_0 具有保角性和伸缩率不变性，则称 $w=f(z)$ 是第一类保角映射.

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内一点，且 $f'(z)\neq 0$，那么映射 $w=f(z_0)$ 在 z_0 具有两个性质：（1）保角性；（2）伸缩率不变性.

说明: 如果映射 $w=f(z)$具有伸缩率不变性，但仅保持夹角的绝对值不变而方向相反, 则称之为第二类保角映射.

思考题:

关于实轴对称的映射 $w=\bar{z}$是第一类保角映射吗?



将 z 平面与 w 平面重合观察,

夹角的绝对值相同

而方向相反.

答案: 否.

$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.因为$w=f(z)$在z_0处解析，则在该点满足柯西一黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

在该点的雅各比式有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left|f'(z_0)\right|\neq 0.$$

映射$w=f(z)$在z_0的邻域内是一一对应的.

定义6.2 设$w=f(z)$是区域D内的第一类保角映射. 如果当$z_1\neq z_2$时，有$f(z_1)\neq f(z_2)$，则称$f(z)$为共形映射.

保形映射是把区域双方单值的映射成区域，在每一点保角，在每一点具有伸缩率不变性。

练习： 考察函数$w=e^z$构成的映射

函数 $w=e^z$ 在 $0<Imz<4\pi$是第一类保角的；

在$0<\mathrm{Im}z<2\pi$是保形的。

3. $w=\dfrac{1}{z}$ 反演变换

此映射可进一步分解为

$$w_1=\frac{1}{\bar{z}},\quad w=\overline{w_1}$$

欲由点z作出点w, 可考虑如下作图次序:

$$z\rightarrow w_1\rightarrow w$$

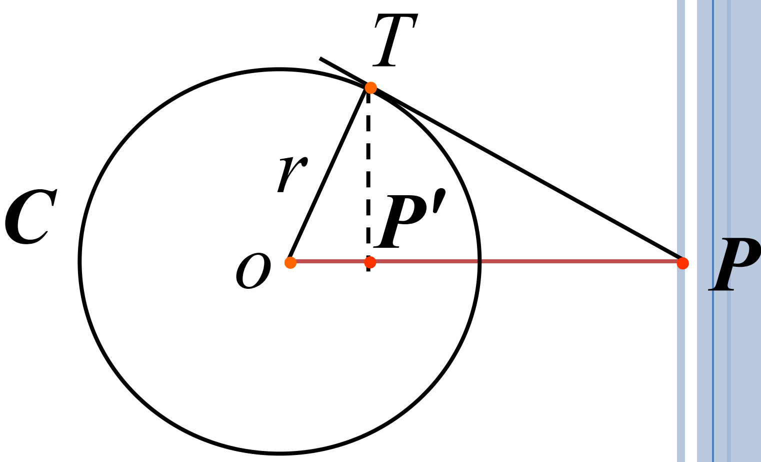
关于实轴对称

关键：在几何上如何由 $z\rightarrow w_1$?

对称点的定义:

设C为以原点为中心, r为半径的圆周. 在以圆心为起点的一条半直线上, 如果有两点 P与 P' 满足关系式

$$OP \cdot OP' = r^2,$$

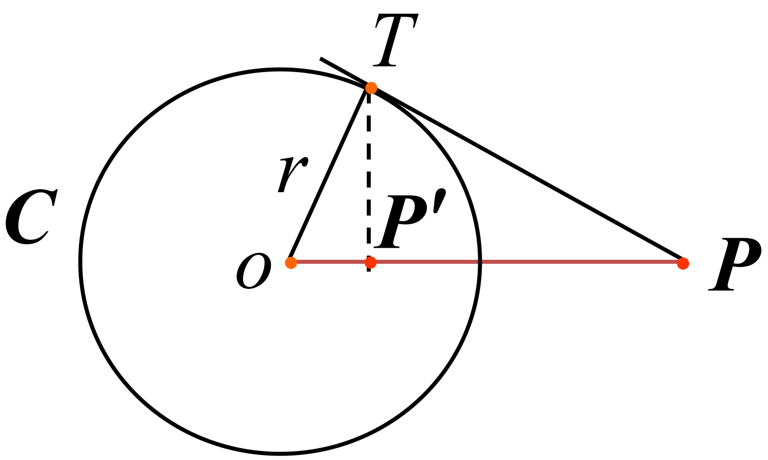


那么就称这两点为关于这圆周的对称点.

规定: 无穷远点的对称点是圆心O.

作图:

设P在C外, 从P作C的切线PT, 由T作OP的垂线TP'与OP交于P', 那么P与P'即互为对称点.



$$\Delta OP'T \sim \Delta OTP$$

$$\downarrow$$

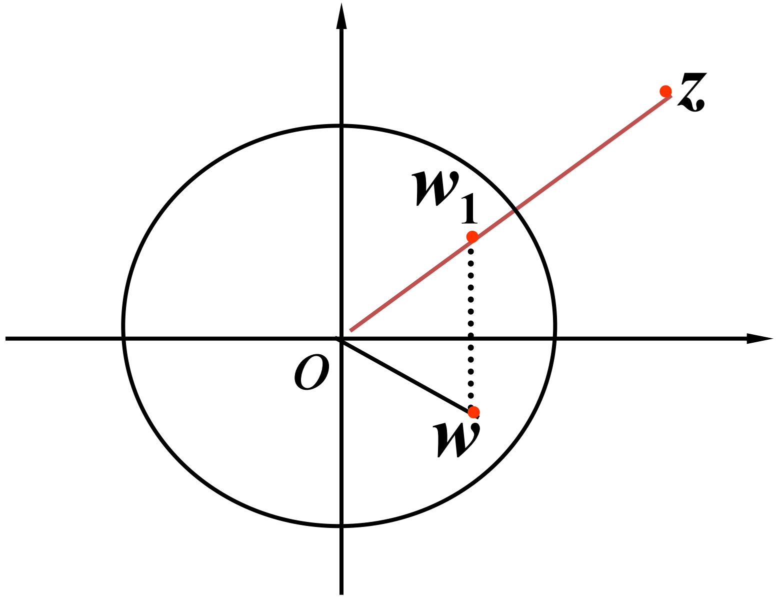
$$OP' : OT = OT : OP$$

$$\downarrow$$

$$OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$$

z与w_1是关于单位园周 $|z|=1$的对称点

$w_1 \longrightarrow w$ 关于实轴对称



反演映射规定和说明在在P127

核心就是说：0和无穷远点有对应关系。

§6.2 共形映射的基本问题

一、问题一

二、问题二(基本问题)

一、问题一

对于给定的区域 D 和定义在区域 D 上的函数 $w = f(z)$，求象集合 $G = f(D)$.

1. 保域性定理

定理 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，且不恒为常数，则其象集合 $G = f(D)$ 仍然为区域。

P122 定理 6.2

证明 （略）

意义 保域性定理将解析函数的象集合的求解问题变成了求象区域的问题。

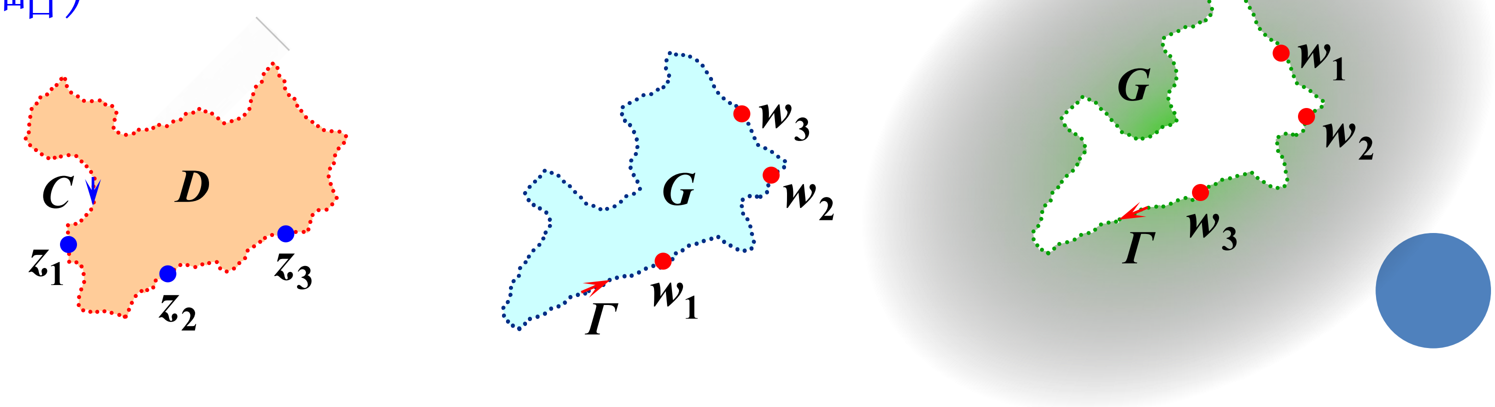
一、问题一

2. 边界对应原理

定理 设区域 D 的边界为简单闭曲线 C，函数 $w=f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，且将曲线 C 双方单值地映射为简单闭曲线 Γ. 当 z 沿 C 的正向绕行时，相应的 w 的绕行方向定为 Γ 的正向， 并令 G 是以 Γ 为边界的区域，则 $w=f(z)$ 将 D 共形映射为 G。

P122
定理
6.3

证明 （略）



一、问题一

3. 求象区域的一般方法

设函数 $w = f(z)$ 在闭域 $\overline{D} = D + C$ 上解析，且为一一映射。

(1) 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$，则有

$$(\mathrm{A})\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y); \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{B})\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

(3) 求象区域.

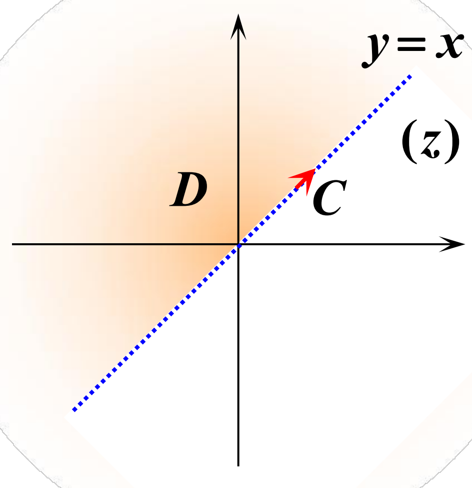
方法一　沿边界 C 的正向找三点，考察象点的走向。

方法二　在区域 D 的内部找一点，考察象点的位置。

注意　对于具体的函数，将还会有一些特殊的方法。

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。

解 (1) 由 $w=\dfrac{1}{z+i}$，有 $z=\dfrac{1}{w}-i$，



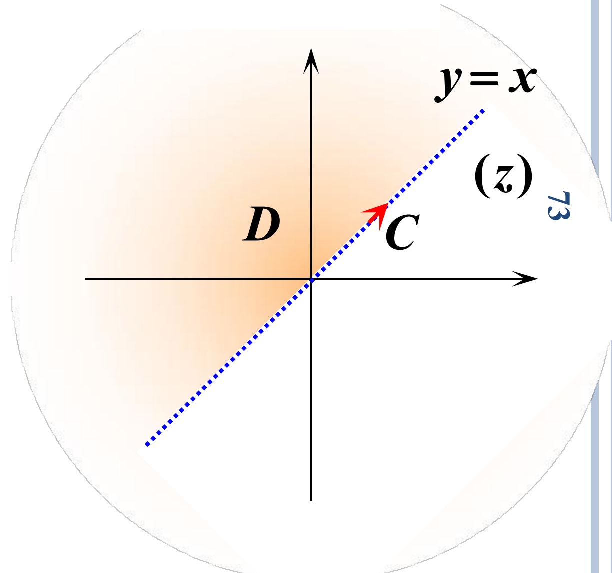
令 $z=x+iy,\ w=u+iv$，

则有 $x+iy=\dfrac{1}{u+iv}-i$

$$=\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}i-i,$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=-\frac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}.$$

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。

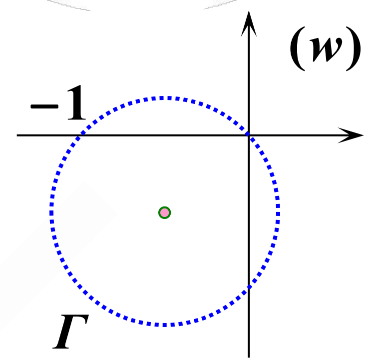


解 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=-\dfrac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$.

(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

曲线 C 的方程为 $x-y=0$,

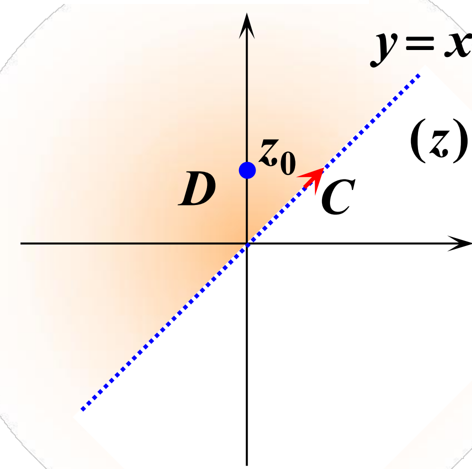
$$\xrightarrow{\text{由(1)式}} u^2+v^2+u+v=0,$$



即得象曲线 Γ 的方程为

$$(u+\frac{1}{2})^2+(v+\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2.$$

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。



解 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=-\dfrac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$.

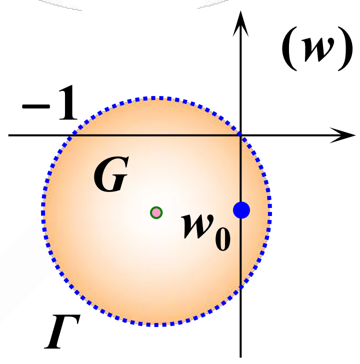
(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

(3) 求象区域.

方法一 在 D 的内部取一点 $z_0=i$，

代入函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，

得到象点 $w_0=-\dfrac{1}{2}i$，



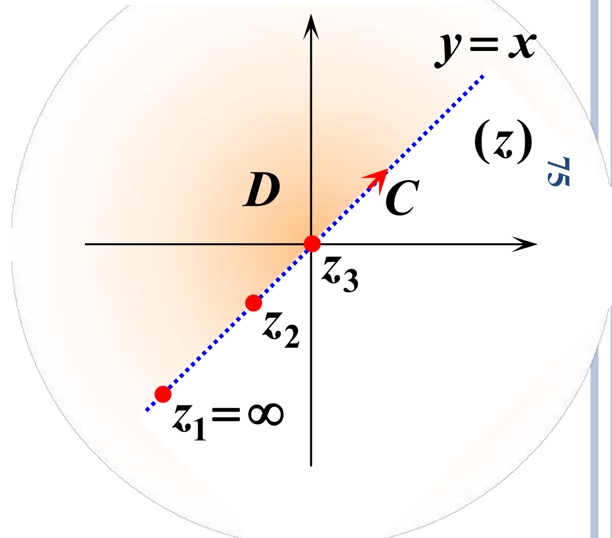
故象区域 G 在曲线 Γ 的“内部”。

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。

解 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=-\dfrac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$.

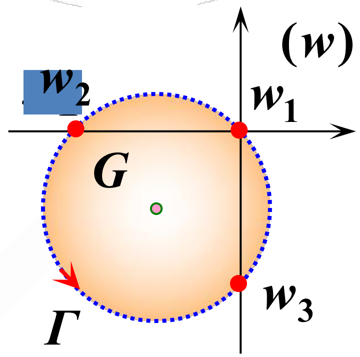
(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

(3) 求象区域.



方法二 在 D 的边界上取三点：

后续讨论将会看到仅此一步就足够了	$z_1=\infty,\ \longrightarrow\ w_1=0,$ $z_2=-1-i,\ \longrightarrow\ w_2=-1,$ $z_3=0,\ \longrightarrow\ w_3=-i,$



故象区域 G 在曲线 Γ 的“内部”。

二、问题二(基本问题)

对给定的区域 D 和 G，求共形映射 $w=f(z)$，使 $G=f(D)$.

1. 黎曼存在唯一性定理

定理 设 D 和 G 是任意给的的两个单连域，在它们各自的边界上至少含有两个点，则一定存在解析函数 $w=f(z)$，将区域 D 双方单值地映射为 G。如果在区域 D 和 G 内再分别任意指定一点 z_0 和 w_0，并任给一个实数 $\theta_0\ (-\pi<\theta_0\le\pi)$，要求函数 $w=f(z)$ 满足 $f(z_0)=w_0$ 且 $\arg f'(z_0)=\theta_0$，则映射 $w=f(z)$ 的函数是唯一的。

P124 定理 6.4

证明 (略)

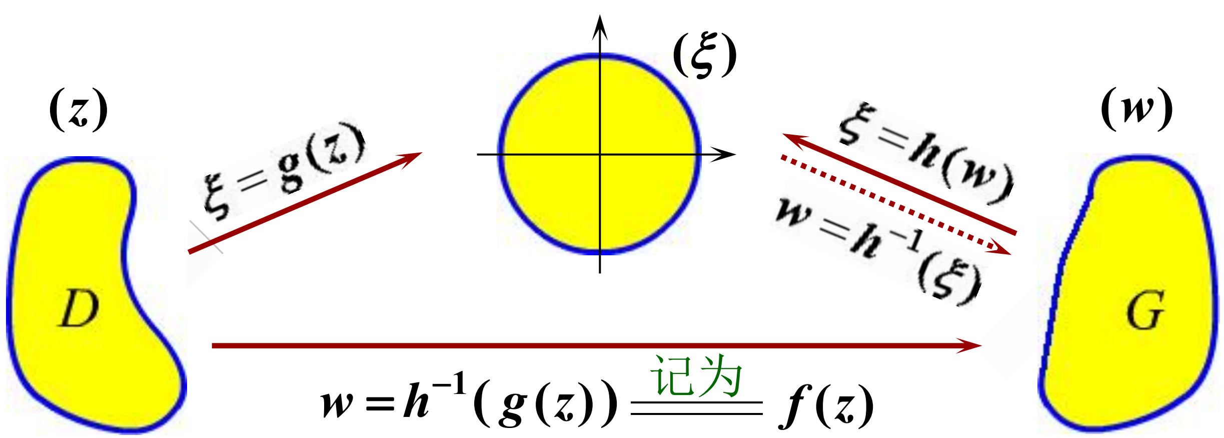
二、问题二(基本问题)

对给定的区域D和G，求共形映射$w=f(z)$，使$G=f(D)$.

2. 基本问题的简化 P128

对给定的单连域D，求共形映射，使得D映射为单位圆域。

- 事实上，由此即可求得任意两个单连域之间的共形映射。



附：关于存在性与唯一性的补充说明。

附：关于存在性与唯一性的补充说明

1. 关于存在性 P123

- 若区域 D 为下列情形之一：(1) 扩充复平面；(2) 复平面；(3) 扩充复平面上除去一个有限点 z_0，则不存在解析函数，使 D 共形映射为单位圆域。

  其中，情形(3)可利用映射 $\xi=\dfrac{1}{z-z_0}$ 转化为情形(2)。

证明 若存在函数 $w=f(z)$，将 D 共形映射为单位圆域 $|w|<1$，

则 $w=f(z)$ 在整个复平面上解析且 $|f(z)|<1$（即有界），

根据刘维尔(liouville)定理（见 § 3.4），$f(z)$ 必恒为常数。

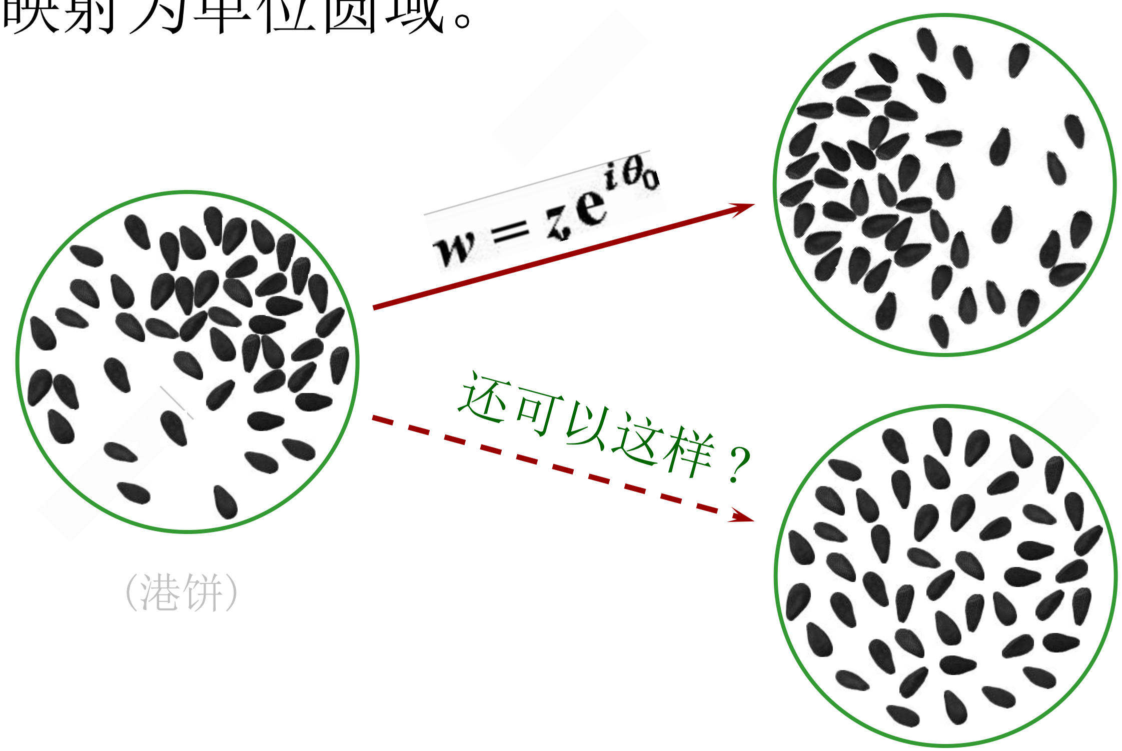
这显然不是所要求的映射。

附：关于存在性与唯一性的补充说明

2. 关于唯一性 P124

- 一般说来是不唯一的。

比如 对于任意给定的实常数 θ_0，函数 $w=z\,\mathrm{e}^{i\theta_0}$ 将单位圆域仍然映射为单位圆域。



6.3 分式线性映射

一、分式线性映射的概念

二、分式线性映射的性质

一、分式线性映射的概念

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0,\ a,b,c,d\text{均为常数.})$$

称为**分式线性映射**.

$c=0$ 则$w=\dfrac{az+b}{d}=\dfrac{a}{d}\left(z+\dfrac{b}{a}\right)$

$$c=0 \qquad \text{则} w=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}\left(z+\frac{b}{a}\right)$$

$$c\neq 0 \qquad \text{则} w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

z不同时，w也不同，所以是单射

一个一般形式的分式线性映射是由下列几种特殊的简单映射复合而成:

(1) $w=z+b$ 平移映射 (2) $w=ze^{i\theta_0}$ 旋转映射

(3) $w=rz\ (r>0)$ 相似映射 (4) $w=\dfrac{1}{z}$ 反演映射

分式线性映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\to ad-bc\neq 0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,z}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

逆还是分式线性映射

$$cwz+dw-az-b=0$$

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a},(-a)(-d)-bc\neq 0$$

两个分式线性映射的复合，仍是一个分式线性映射. 例如

$$w=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0),$$

$$\zeta=\frac{\alpha'z+\beta'}{\gamma'z+\delta'}(\alpha'\delta'-\beta'\gamma'\neq 0),$$

则

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

式中$(ad-bc)=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')\neq 0$

也可将分式线性映射分解为一些简单映射的复合

$$w=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}=\left(\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}\right)\frac{1}{\gamma\zeta+\delta}+\frac{\alpha}{\gamma}.$$

令$\zeta_1=\gamma\zeta+\delta,\zeta_2=\dfrac{1}{\zeta_1}$,则

$w=A\zeta_2+B,(A,B$为常数)

二、分式线性映射的性质

1. 保形性

定理6.5 分式线性映射在扩充复平面上是共形映射.

函数 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的导数除点 $z=-\dfrac{d}{c}$ 和 $z=\infty$ 以外处处存在，而且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$，映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 除那两个点以外是共形的. 注：逆也是分式线性，双射

保角性

讨论iii) $w=\dfrac{1}{z}$, 这时$w'=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=\dfrac{-1}{z^2}$

当$z\neq 0, z\neq\infty$时是解析函数,因此是保形映射.

而当$z=0$时$w=\infty, z=\infty$时$w=0$,对这两点作保形映射的补充规定,任何穿过$z=0$点的两条曲线在0点的夹角,就是$w=1/z$在无穷远处的两条曲线的夹角.则$1/z$在整个扩充复平面是保形的.

2. 保圆性

所谓保圆性指在扩充复平面上将圆周映射为圆周的性质.

特殊地，直线可看作是半径为无穷大的圆周.

定理6.6 分式线性映射将扩充z平面上的圆周映射成扩充w平面上的圆周, 即具有保圆性.

考查：反演映射 $w=\frac{1}{z}$

若z平面上圆方程为: $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

令 $z=x+iy,\quad w=\frac{1}{z}=u+iv,$

有 $\frac{1}{x+iy}=u+iv$ 即 $x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}$

反演映射 $w = \frac{1}{z}$

若z平面上圆方程为: $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

有 $x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{-v}{u^2+v^2}$

代入 z 平面圆方程得其象曲线方程:

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0.$$

所以此映射在扩充复平面上具有保圆性.

映射$w=1/z$将方程 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

变为方程 $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$

当$a\neq 0,d\neq 0$：圆周映射为圆周；

当$a\neq 0,d=0$：圆周映射成直线；

当$a=0,d\neq 0$：直线映射成圆周；

当$a=0,d=0$：直线映射成直线.

这就是说，映射$w=1/z$把圆周映射成圆周.

或者说，映射$w=1/z$具有保圆性.

复合一起后，分式线性映射

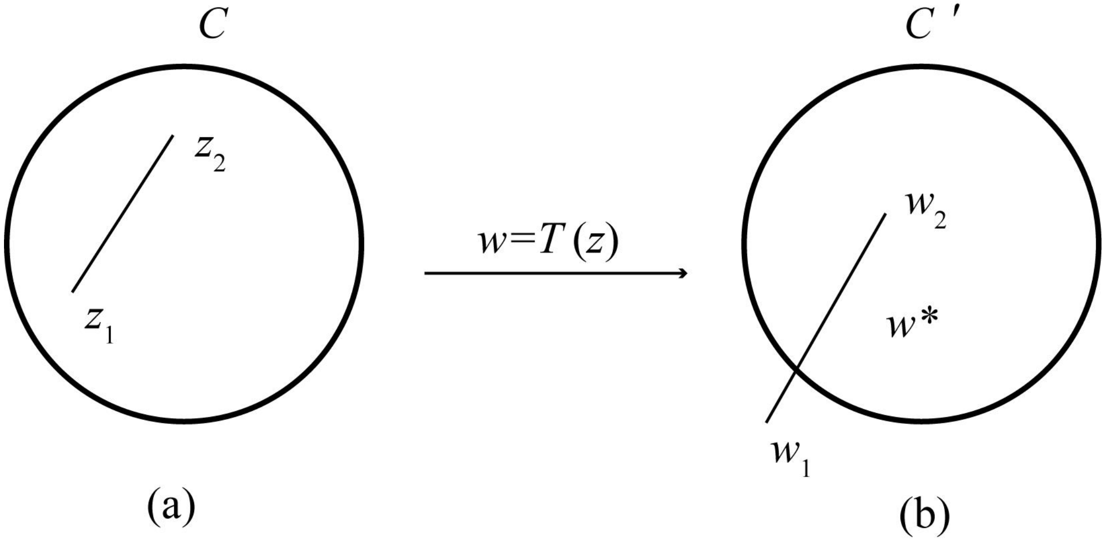
$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

定理6.6 分式线性映射将扩充z平面上的圆周映射成扩充w平面上的圆周, 即具有保圆性.

重要说明: 如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点, 那么它就映射成半径为有限的圆周;如果有一个点映射成无穷远点, 那么它就映射成直线.

推论 在分式线性变换下，圆C映射成圆C'.如果在C内任取一点z_0，而点z_0的象在C'的内部，那么C的内部就是映射到C'的内部；如果z_0的象在C'的外部，那么C的内部就映射成C'的外部.

证明： 设z_1,z_2为C内的任意两点，用直线段把这两点连接起来.如果线段z_1z_2的象为圆弧w_1w_2，且w_1在C'之外，w_2在C'之内，那么弧w_1w_2必与C'交于一点w^*，于是w^*必是C上某一点的象.



但w^*又是线段z_1z_2上某一点的象，因而就有两个不同的点被映射为同一点.这就与分式线性映射的一一对应性相矛盾.故推论成立.

3. 保对称点性

定理6.7 设点z_1,z_2是关于圆周C的一对对称点，则在分式线性映射下，它们的象点w_1与w_2也是关于C的象曲线Γ的一对对称点.

证 设经过w_1与w_2的任一圆周Γ'是经过z_1与z_2的圆周Γ由分式线性映射过来的. 由于Γ与C正交, 而分式线性映射具有保角性, 所以Γ'与C'(C的象)也必正交, 因此, w_1与w_2是一对关于C'的对称点.

定理6.8 在z平面上任意给定三个相异的点z_1, z_2, z_3，在w平面上也任意给定三个相异的点w_1, w_2, w_3，那么就存在唯一的分式线性映射，将$z_k\ (k=1,2,3)$依次映射成$w_k\ (k=1,2,3)$.

且有
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

对应点公式

分式线性映射对圆弧边界区域的映射:

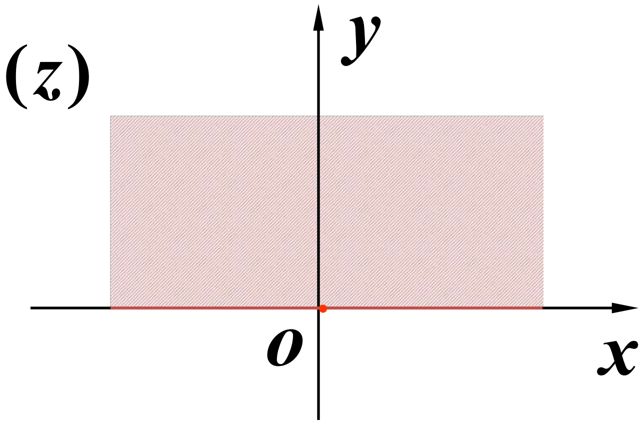
1) 当二圆周上没有点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域.

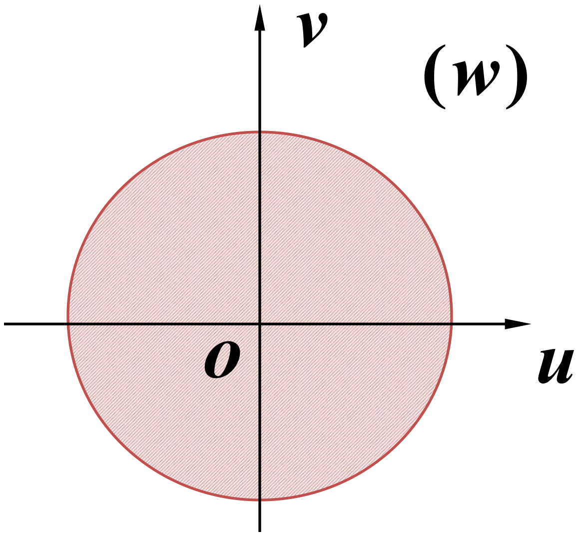
2) 当二圆周上有一点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域.

3) 当二圆交点中的一个映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映成角形区域.

6.3.6两个典型区域的映射

例 求将上半平面$\mathrm{Im}(z) > 0$映射成单位圆$|w| < 1$的分式线性映射.

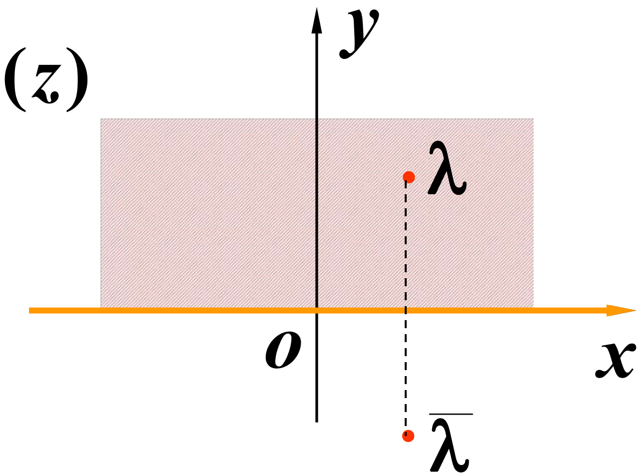


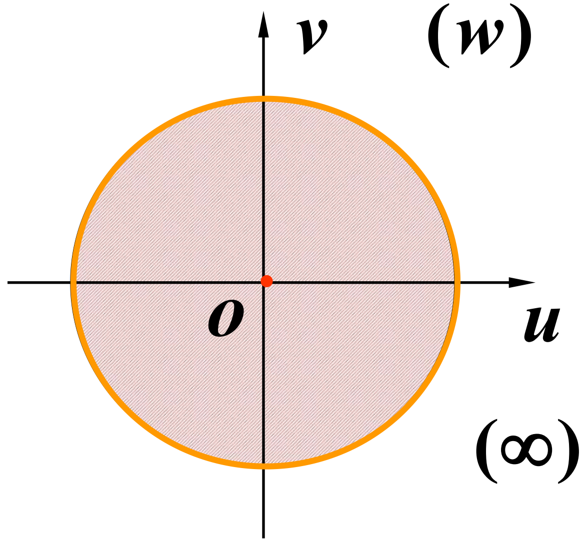


解: 设实轴映射成单位圆周,

上半平面某点 $z=\lambda$ 映射成圆心 $w=0$

那么 $z=\bar{\lambda}$ 必映射成 $w=\infty$





则所求映射具有下列形式: $w=k\left(\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$ k为常数.

由于z为实数时，$|w|=1$, $\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=1$,

所以$|w|=|k|\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=|k|=1$, 即$k=e^{i\theta}$($\theta$为任意实数).

$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right), \quad (\mathrm{Im}(\lambda)>0)$$

上半平面映为单位圆的分式线性映射的一般形式

说明: 取 $\lambda=i,\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，得 $w=\dfrac{z-i}{iz-1}$.

若取 $\lambda=i,\theta=0$，得 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

例 求将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成单位圆$|w|<1$且满足$w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$的分式线性映射.

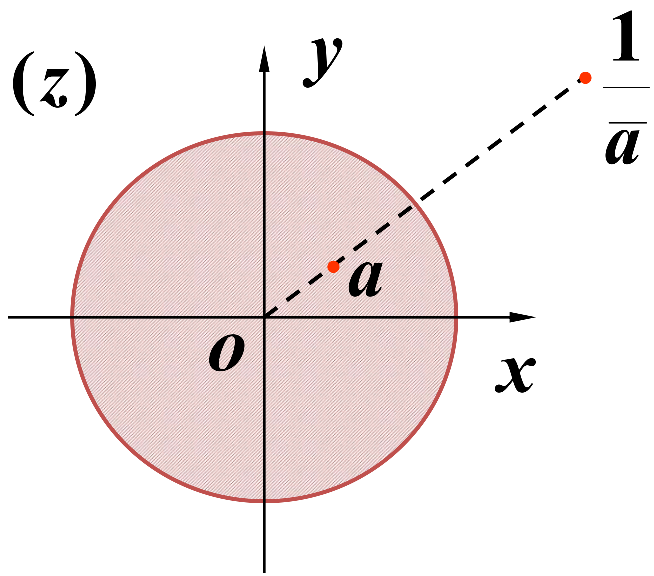
解: 由条件$w(2i)=0$知, 所求的映射要将上半平面中的点$z=2i$映射成单位圆周的圆心$w=0$. 所以

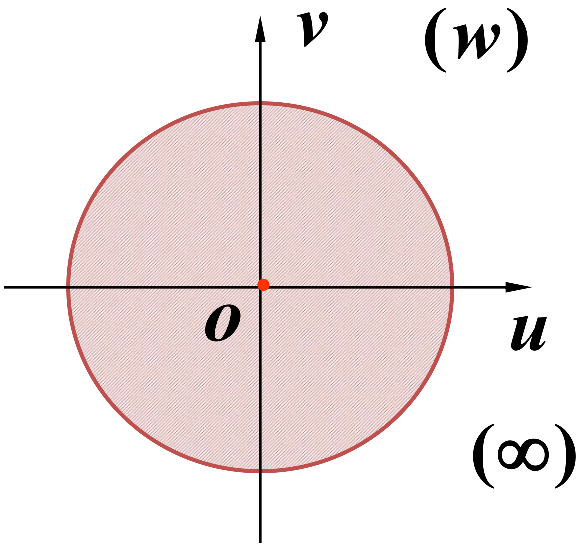
$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right).\quad \text{故有}\quad w'(z)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{4i}{(z+2i)^2},$$

$$w'(2i)=e^{i\theta}\left(-\frac{i}{4}\right).\qquad \arg w'(2i)=\theta-\frac{\pi}{2}=0,\ \theta=\frac{\pi}{2}.$$

从而得所求的映射为 $w=i\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right).$

例 求将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.





解 设 $z=a\to w=0$, 则 $z=\dfrac{1}{\overline{a}}\to w=\infty$.

因此可设所求分式线性映射为:

$$w = k\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = k\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

$$= k'\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \ (k' = -k\bar{a})$$

因为 $|z| = 1 \leftrightarrow |w| = 1,\quad |w| = |k'|\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|,$

所以 $\quad |w| = |k'|\left|\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = 1.$

又因为 $|1-a| = |1-\bar{a}|$，

所以 $|k'| = 1$，即 $k' = e^{i\theta}$.

故所求分式线性映射为:

$$\boxed{w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\theta\text{为任意实数})}$$

将单位圆映为单位圆的常用映射

例　求将单位圆映射成单位圆且满足条件

$w(1/2)=0,\ w'(1/2)>0$ 的分式线性映射.

[解] 由条件$w(1/2)=0$知, 所求的映射要将$z=1/2$映射成$|w|<1$的中心. 所以

$$w=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right), w'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{i\varphi}\left.\frac{\left(1-\frac{1}{2}z\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}}=e^{i\varphi}\frac{4}{3}$$

故 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi$,由于 $w'\left(\frac{1}{2}\right)>0$ 为正实数,从而 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

即 $\varphi=0$. 所以所求映射为 $w=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\dfrac{2z-1}{2-z}$.

6.4 几个初等函数所构成的映射

一、幂函数

二、指数函数

一、幂函数 $w = z^n$ ($n \geq 2$为自然数)

该函数在 z 平面内处处可导，导数

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1}$$

当 $z \neq 0$时：

$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \neq 0$, 则在 z 平面内除原点外,

由 $w = z^n$ 所构成的映射是第一类保角映射.

令 $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ ，有 $\rho = r^n, \varphi = n\theta.$

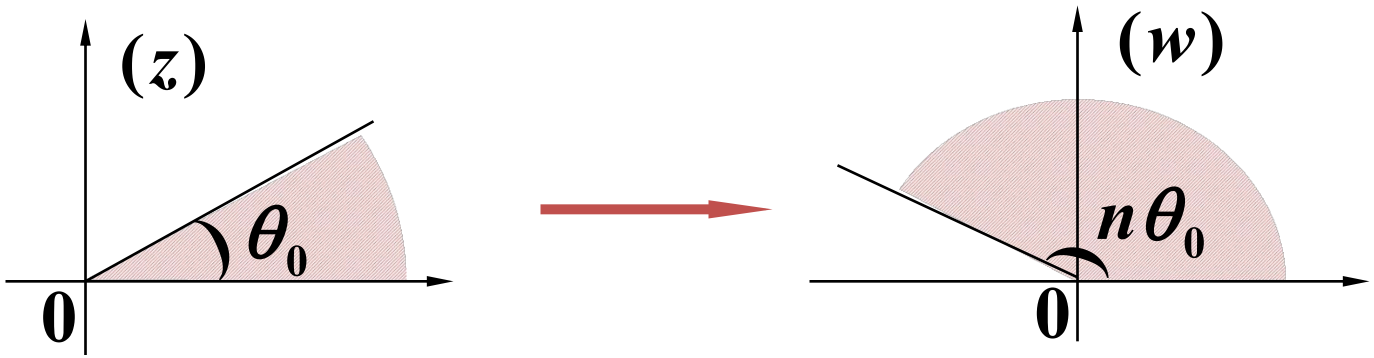
则: 1)圆周 $|z| = r$ $\longrightarrow$ 圆周 $|w| = r^n$

(特殊地: 单位圆周映射为单位圆周)

2) 射线 $\theta = \theta_0$ $\longrightarrow$ 射线 $\varphi = n\theta_0$

(正实轴 $\theta = 0$ 映射成正实轴 $\varphi = 0$)

3) 角形域 $0<\theta<\theta_0\left(<\dfrac{2\pi}{n}\right)$ ⟶ 角形域 $0<\varphi<n\theta_0$

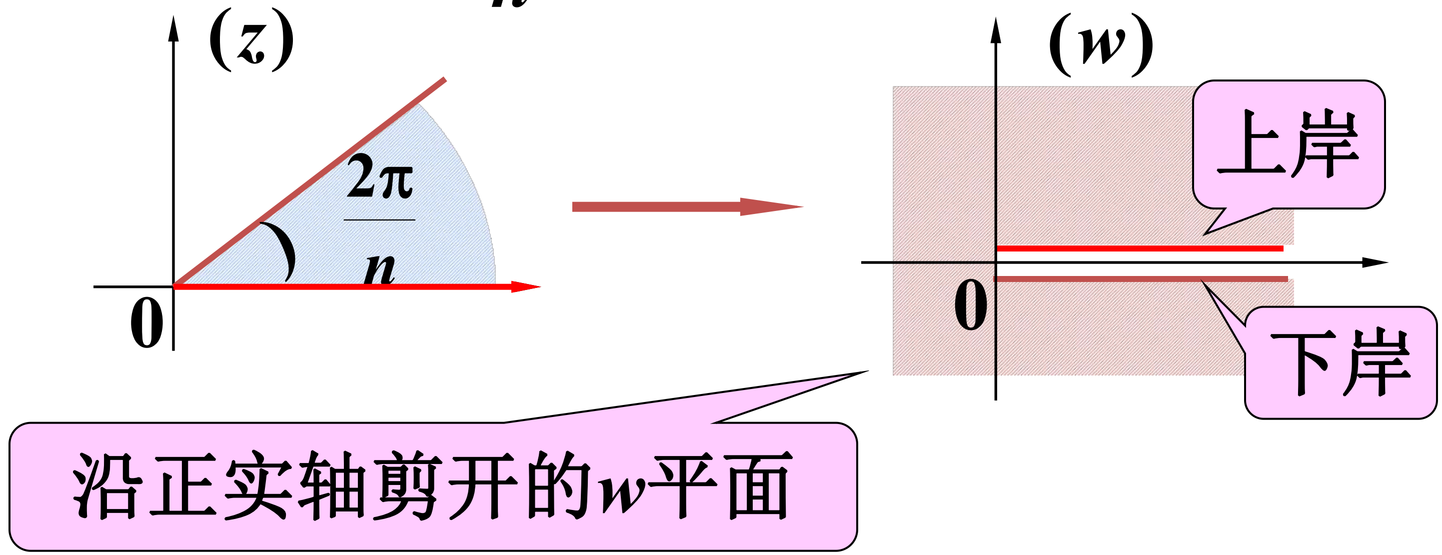


即在 $z=0$ 处角形域的张角经过映射变为原来的 n 倍.

因此,当 $n\geq 2$时,映射 $w=z^n$在 $z=0$处没有保角性.

特殊地:

角形域 $0<\theta<\dfrac{2\pi}{n}$ ⟶ 角形域 $0<\theta<2\pi$



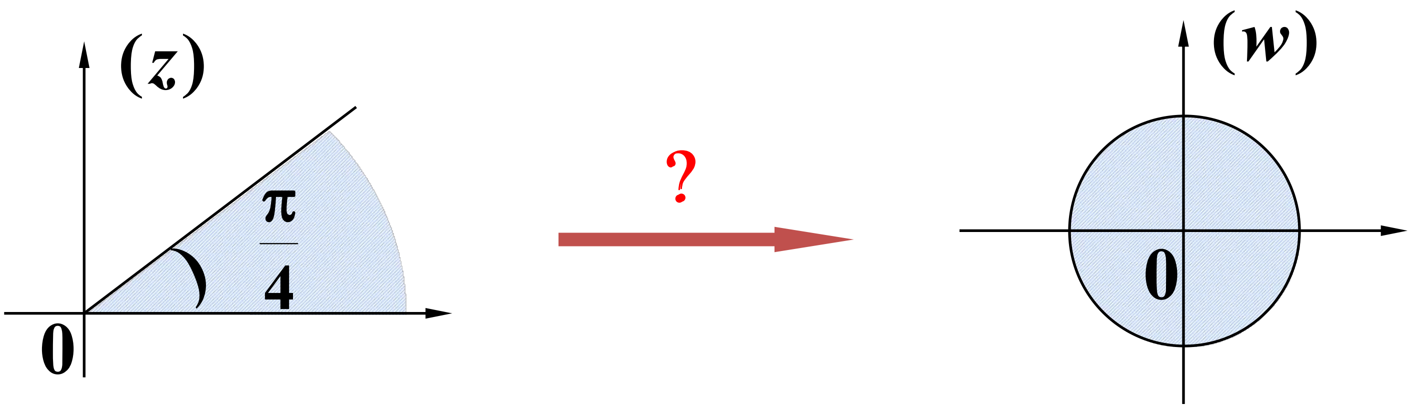
$\theta=0$映射成正实轴的上岸 $\varphi=0$

$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$映射成正实轴的下岸 $\varphi=2\pi$

映射特点: 把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域, 但张角变成为原来的 n 倍.

如果要把角形域映射成角形域，常利用幂函数.

例 求把角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的一个映射.



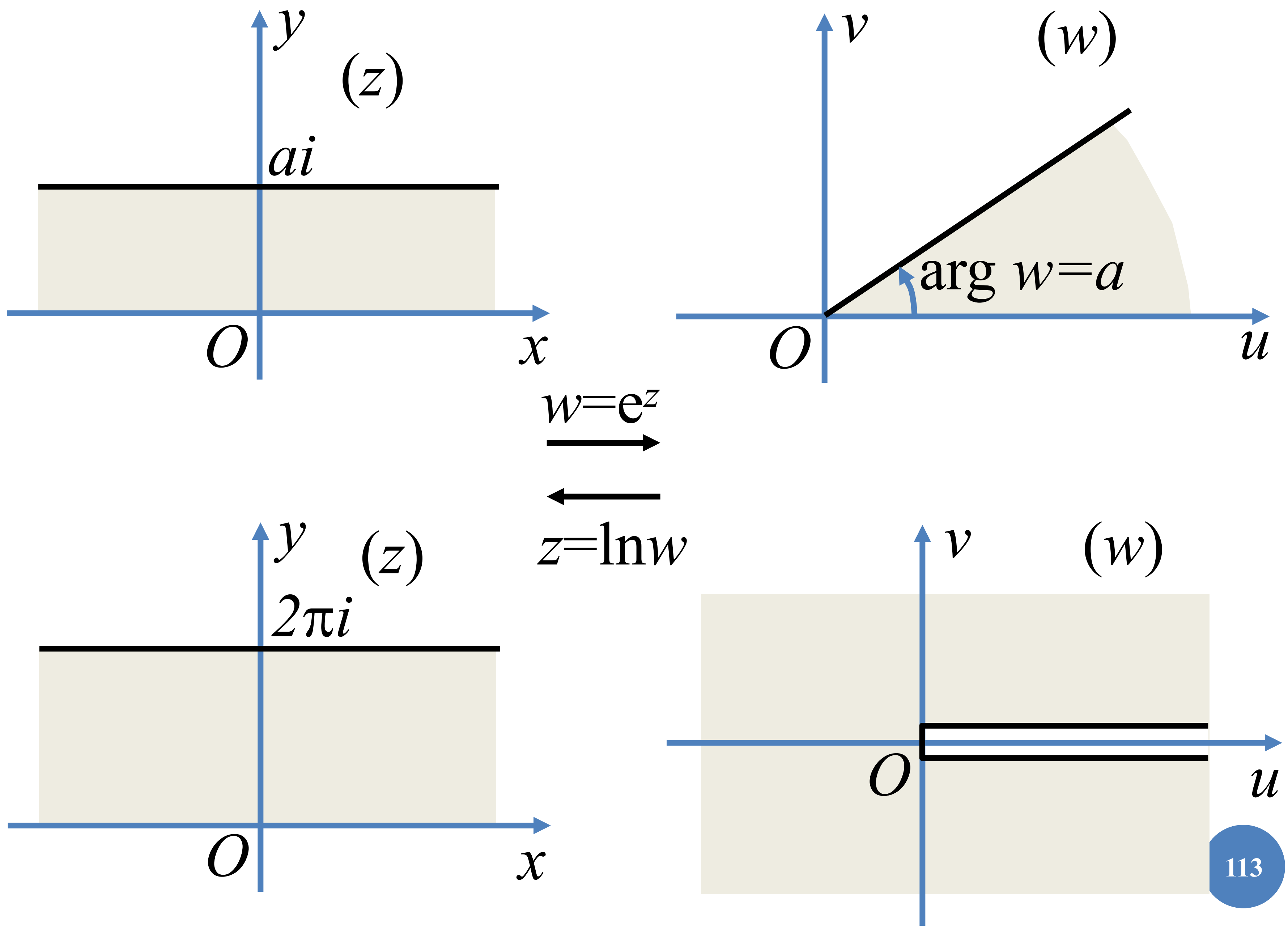
二、指数函数 $w = e^z$

因为 $w' = (e^z)' = e^z \neq 0,$

所以由$w = e^z$所构成的映射是一个全平面上的第一类保角映射.

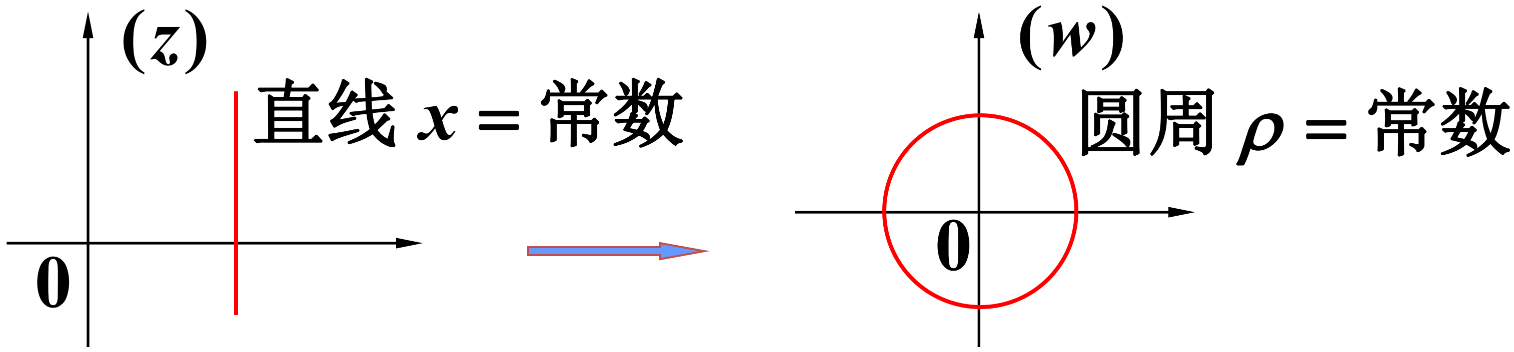
设 $z = x + iy,\ w = \rho e^{i\varphi}$,　　那么 $\rho = e^x, \varphi = y$,

$$z\text{平面} \underset{z = \ln w}{\overset{w = e^z}{\rightleftarrows}} w\text{平面}$$

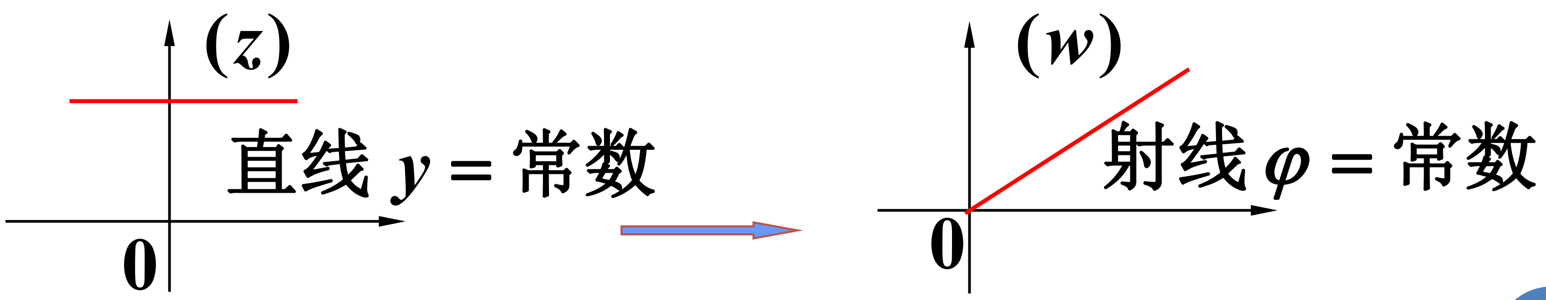


(z)
y
ai
O
x
(w)
v
arg w=a
O
u
w=e^z
z=ln w
(z)
y
2πi
O
x
(w)
v
O
u

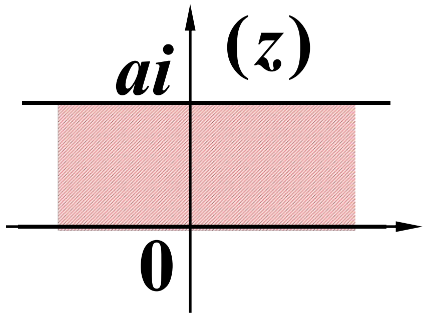
1)

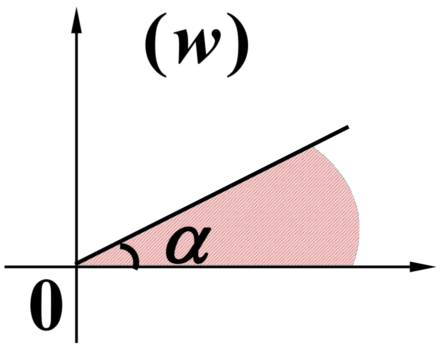


2)

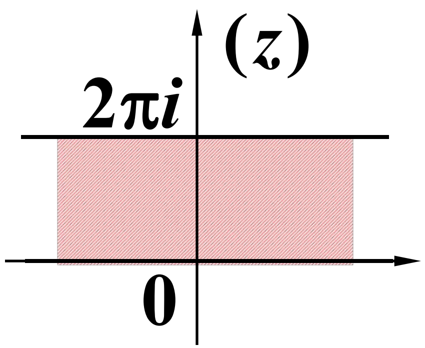


3) 带形域 $0 < \mathrm{Im}(z) < a$ $(0 < a \le 2\pi)$ $\longrightarrow$ 角形域 $0 < \arg w < a$

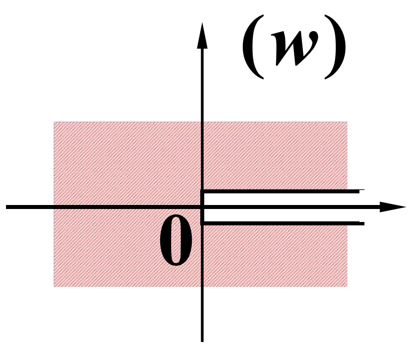




特殊地:



$\longrightarrow$



映射特点: 把水平的带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<a$ 映射成角形域 $0<\arg w<a.$

如果要把带形域映射成角形域, 常利用指数函数.

练习: 求把带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<\pi$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的一个映射.

解

$$0<\mathrm{Im}(z)<\pi \quad \xrightarrow{w=\frac{e^z-i}{e^z+i}} \quad |w|=1$$

$$\eta=e^z$$

上半平面 $\mathrm{Im}(\eta)>0$

$$w=\frac{\eta-i}{\eta+i}$$

九种分解动作：

分式线性映射：

1.当二圆周上没有点映射成无穷远点时,这二圆周的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域.

2. 当二圆周上有一点映射成无穷远点时,这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域.（可以不是半圆）

3.当二圆交点中的一个映射成无穷远点时,这二圆周的弧所围成的区域映成角形区域.

4.两个圆相切，切点映射为无穷远点，变成平行线，即变成带状（条状）区域

5.上半平面变成单位圆内部

6.单位圆内部变成单位圆内部

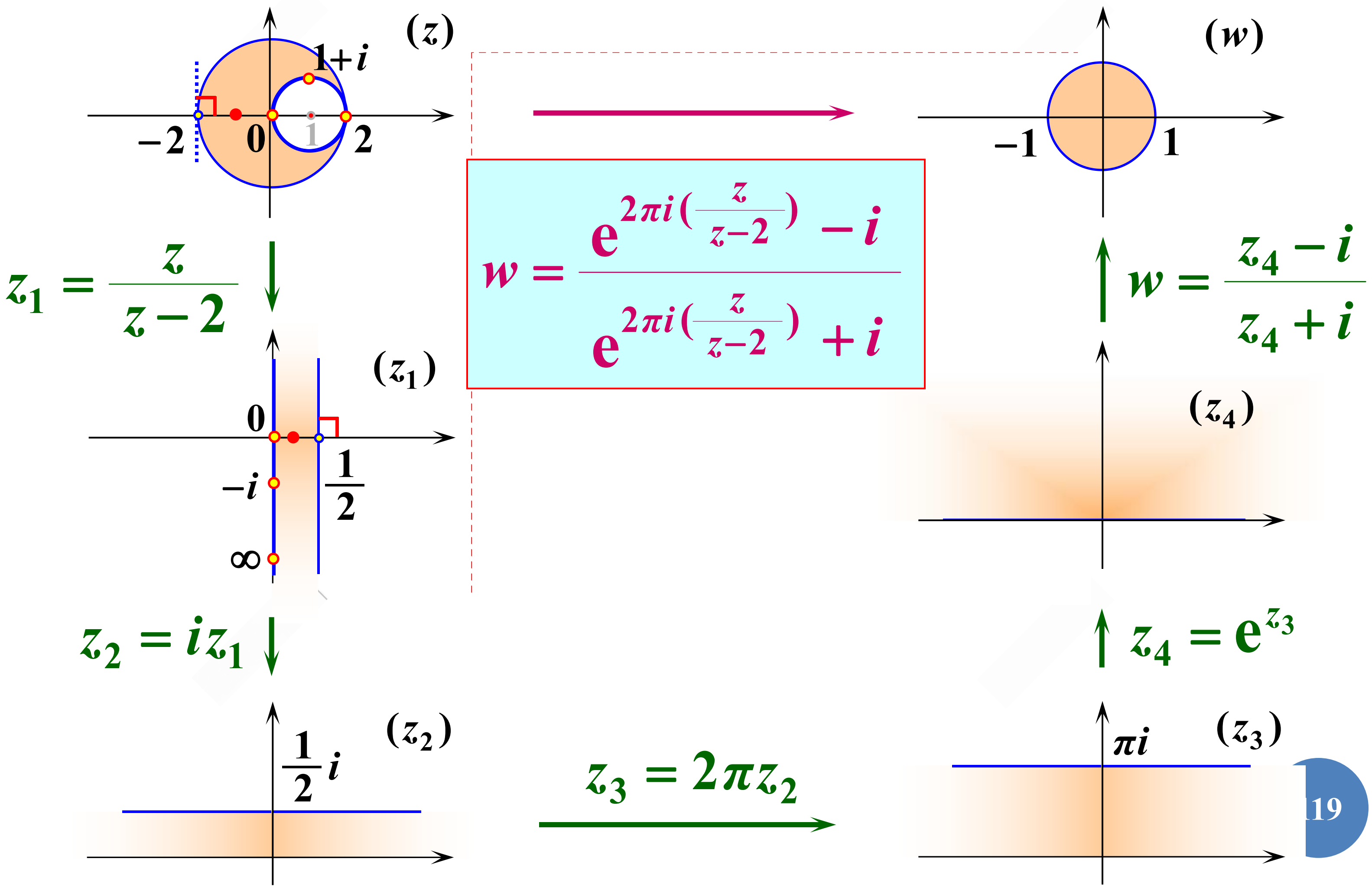
7.幂函数：角形区域变成角形区域（上半平面是特殊的角形区域）

8.指数函数：水平的带状区域变成角形区域

9.指数函数：水平的半带状区域（虚部是负无穷到零）变成扇形区域（扇形区域可以通过幂函数变成半圆形区域，半圆形区域是而二圆周）

例 设区域 $D=\{z:|z|<2,|z-1|>1\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。 P139 例6.16

解



$$z_1=\frac{z}{z-2}$$

$$z_2=iz_1$$

$$z_3=2\pi z_2$$

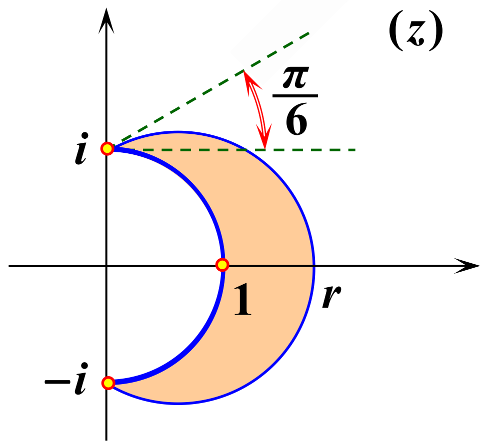
$$z_4=e^{z_3}$$

$$w=\frac{z_4-i}{z_4+i}$$

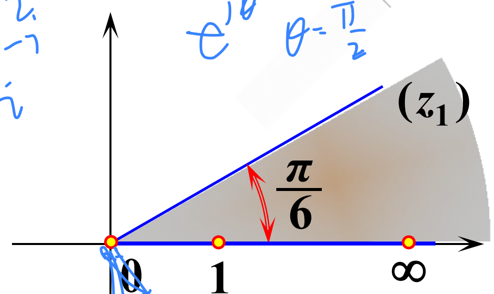
$$w=\frac{e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}-i}{e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}+i}$$

例 设区域 D 由两个圆弧围成(如图所示)，其中 $r>1$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。 P140 例6.17

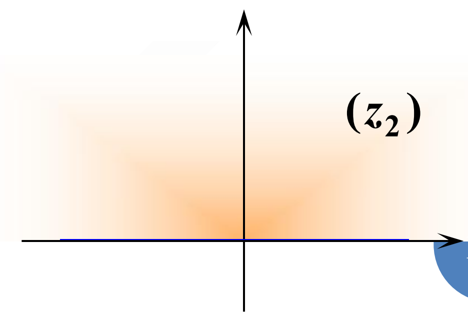
解



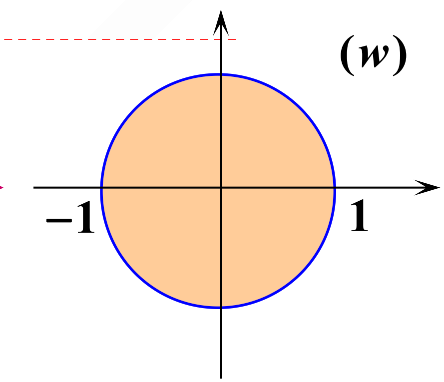
$$z_1 = i\,\frac{z-i}{z+i}$$



$$z_2 = z_1^6$$



$$w = \frac{z_2 - i}{z_2 + i}$$



$$w = \frac{\left(i\,\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6 - i}{\left(i\,\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6 + i}$$

$\frac{z-i}{z+i}$

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$

$e^{j\theta}$ $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{z^2-1-2zi}{z^2+1}$

第八章 Fourier变换

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的三角形式

定理 (Dirichlet 定理) 设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实值函数，且在区间 $[-T/2, T/2]$ 上满足如下条件(称为 Dirichlet 条件)：

P159 定理 8.1

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点.

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

在 $f_T(t)$ 的间断处，上式左端为 $\frac{1}{2}\left[f_T(t+0) + f_T(t-0) \right]$.

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的三角形式

定理 （Dirichlet 定理）

$$\boxed{f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),}\qquad \text{(A)}$$

其中，$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，称之为基频。

定义 称 (A) 式为 Fourier 级数的三角形式。

一、周期函数的 Fourier 级数

4. Fourier 级数的物理含义

$$f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$$

表明　周期信号可以分解为一系列固定频率的简谐波之和，这些简谐波的(角)频率分别为一个基频 ω_0 的倍数。

意义　认为 “一个周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 并不包含所有的频率成份，其频率是以基频 ω_0 为间隔离散取值的。”

- <u>这是周期信号的一个非常重要的特点</u>。

一、周期函数的 Fourier 级数

5. Fourier 级数的指数形式

推导 $$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\right).$$

令 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$， $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$， $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$， 则有

$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},} \qquad \text{(B)}$$

其中， $c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$， $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

定义 称 (B) 式为 Fourier 级数的指数形式。

一、周期函数的Fourier级数

6. 离散频谱与频谱图

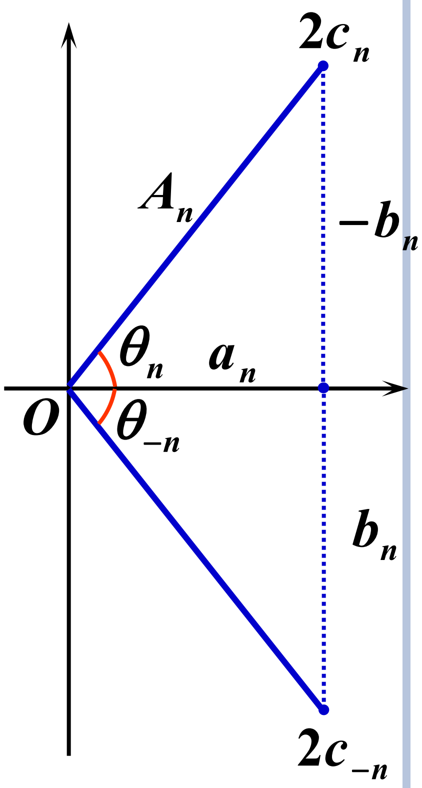
分析 由 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$, $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$, $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$,

P161

得 $c_0=A_0$, $|c_n|=|c_{-n}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\dfrac{A_n}{2}$,

$$\arg c_n=-\arg c_{-n}=\theta_n,\quad (n>0).$$

即 c_n 的模与辐角正好是振幅和相位。



定义 称 $|c_n|$ 为振幅谱，称 $\arg c_n$ 为相位谱；

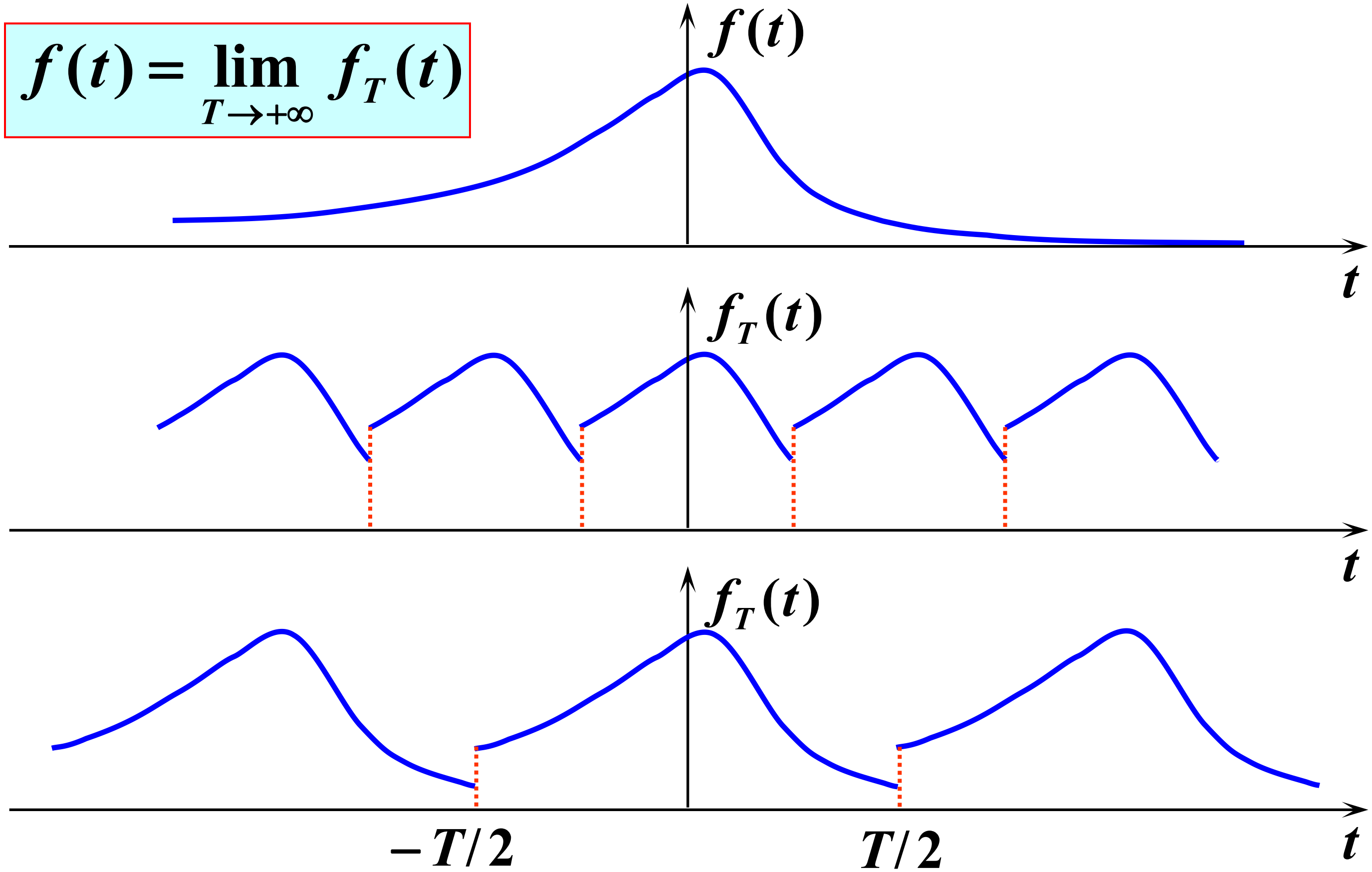
称 c_n 为频谱，记为 $F(n\omega_0)=c_n$.

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(1) 非周期函数可以看成是一个周期为无穷大的“周期函数”。

$$\boxed{f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t)}$$



二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(2) 当 $T \to +\infty$ 时，频率特性发生了什么变化?

分析　Fourier 级数表明周期函数仅包含离散的频率成份，

其频谱是以 $\omega_0 = 2\pi/T$ 为间隔离散取值的。

当 T 越来越大时，取值间隔越来越小；

当 T 趋于无穷时，取值间隔趋向于零，

即频谱将连续取值。

因此，一个非周期函数将包含所有的频率成份。

离散频谱变成连续频谱。

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(3) 当 $T \to +\infty$ 时，级数求和发生了什么变化？

分析

P163

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t) = \lim_{T\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

将间隔 ω_0 记为 $\Delta\omega$，节点 $n\omega_0$ 记为 ω_n，

并由 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega_n t}\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{j\omega_n t}}\,\Delta\omega \qquad (C)$$

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(3) 当 $T \to +\infty$ 时，级数求和发生了什么变化？

分析　记 $g_T(\omega)=[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{j\omega t}$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n)\Delta\omega$$

按照积分定义，在一定条件下，(C) 式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$

级数求和变成函数积分。

二、非周期函数的傅立叶变换

2. Fourier 积分公式

定理 设函数 $f(t)$ 满足

P164 定理 8.2

(1) 在 $(-\infty,+\infty)$上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件;

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$.

则在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}\,t}\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\,\omega \qquad \text{(D)}$$

在 $f(t)$ 的间断处，公式的左端应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为 Fourier 积分公式。

二、非周期函数的傅立叶变换

3. Fourier 变换的定义

定义 (1) Fourier 正变换(简称傅氏正变换)

P164
定义
8.1

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathscr{F}[f(t)]$$

(2) Fourier 逆变换(简称傅氏逆变换)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

其中，$F(\omega)$ 称为象函数，$f(t)$ 称为象原函数.

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 称为傅氏变换对，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

注　上述变换中的广义积分为柯西主值。

二、非周期函数的傅立叶变换

4. Fourier 变换的物理意义

与 Fourier 级数的物理意义一样，Fourier 变换同样刻画了一个非周期函数的频谱特性，不同的是，非周期函数的频谱是连续取值的。

$F(\omega)$ 反映的是 $f(t)$ 中各频率分量的分布密度，它一般为复值函数，故可表示为

$$F(\omega)=|F(\omega)|\,\mathrm{e}^{j\arg F(\omega)}.$$

定义 称 $F(\omega)$ 为频谱密度函数(简称为连续频谱或者频谱)；称 $|F(\omega)|$ 为振幅谱；称 $\arg F(\omega)$ 为相位谱。

P164

例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}\ (a>0)$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。

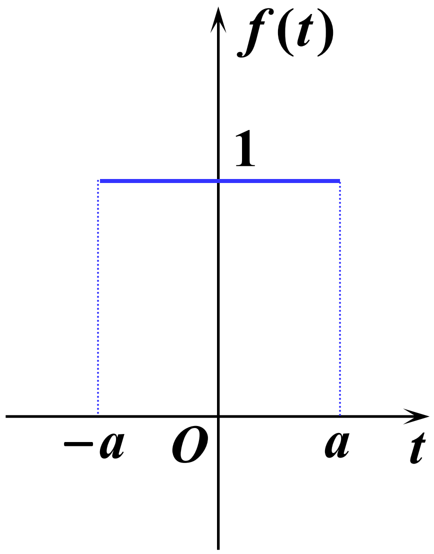
P165 例8.2

解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})}{-2j}=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

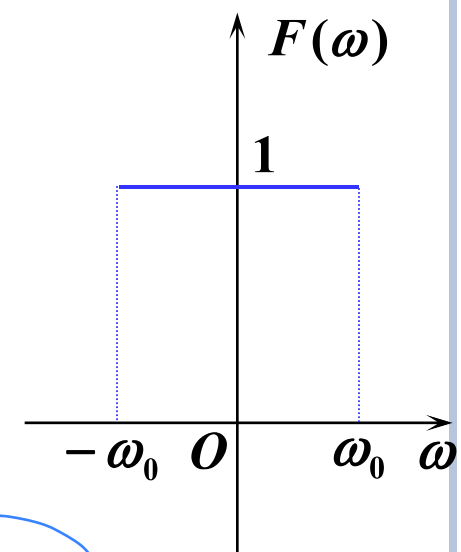


例　已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$ $(\omega_0>0)$，求 $f(t)$.

P166 例8.3

解　$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$



$\cos\omega_0 t+j\cdot\sin\omega_0 t=e^{j\omega_0 t}$

$\cos\omega_0 t-j\cdot\sin\omega_0 t=e^{-j\omega_0 t}$

$$=\frac{1}{2\pi jt}\mathrm{e}^{j\omega t}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{\mathrm{e}^{j\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}=\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)=\frac{\omega_0}{\pi}S_a(\omega_0 t).$$

(?)

(关于抽样信号)

例 已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(t)$.

解 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\cos x\,dx}{\cdot\sin x}$$

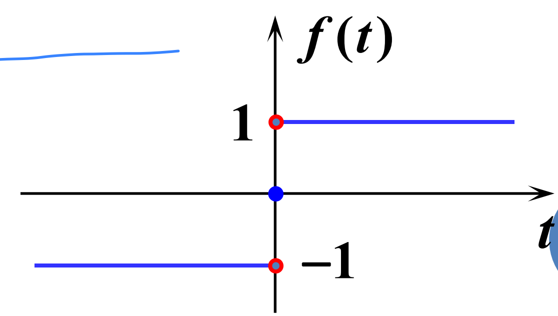
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j\sin\omega t}{j\omega}\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{j\omega}\,\mathrm{d}\omega \quad =0$$

$$\int\frac{\sin 2x}{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases} \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} \mathrm{sgn}\,t.$$

$$\frac{2\sin x}{x} \quad \alpha\sin x$$

$$\boxed{\mathrm{sgn}\,t \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}.}$$



二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

定义　单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足：

P168

(1) 当 $t \neq 0$ 时，$\delta(t) = 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

- 单位冲激函数 $\delta(t)$又称为 **Dirac** 函数或者 δ 函数。

- 显然，借助单位冲激函数，前面引例中质点的密度函数就可表示为 $P(x) = m\delta(x)$.

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

注 (1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 并不是经典意义下的函数，而是一个广义函数(或者奇异函数)，它不能用通常意义下的“值的对应关系”来理解和使用，而总是通过它的性质来使用它。

(2) 单位冲激函数有多种定义方式，前面给出的定义方式是由 Dirac(狄拉克)给出的。

单位冲激函数
其它定义方式

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 按照 Fourier 逆变换公式有

$$\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\,\omega=\delta(t).$$

- 重要公式 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\,\omega=2\pi\delta(t).}$

注 在 δ 函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据 δ 函数的性质直接给出的，而不是通过通常的积分方式得出来的，称这种方式的 Fourier 变换是一种广义的Fourier变换。

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质 (1) 筛选性质

P168 性质 8.1

设函数 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数，且在 $t=0$ 处连续，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$.

一般地，若 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0).$$

P169 性质 8.2

(2) 对称性质

δ 函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

例 分别求函数 $f_1(t)=1$ 与 $f_2(t)=t$ 的 Fourier 变换。

P170 例8.7 修改

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega).$$

(2) 将等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$ 的两边对 ω 求导，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta'(\omega),$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}t\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi j\delta'(\omega),$$

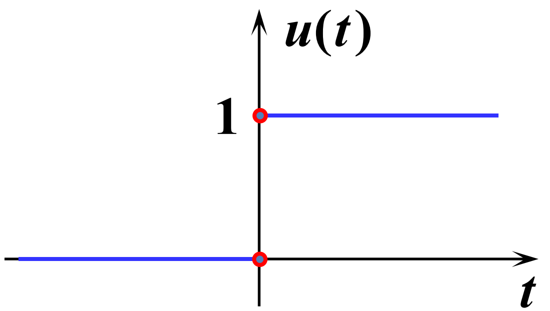
即得 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=2\pi j\delta'(\omega).$

例 求函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的 Fourier 变换 $U(\omega)$。

P170 例8.8 修改

解 已知 $\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\dfrac{2}{j\omega}$,

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),$$



又 $u(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} t+1)$,

得 $U(\omega)=\dfrac{1}{2}\left(\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]+\mathscr{F}[1]\right)=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega).$

注 称 $u(t)$ 为单位阶跃函数，也称为 Heaviside 函数，它是工程技术中最常用的函数之一。

例 分别求函数 $f_2(t)=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ 与 $f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的 Fourier 变换

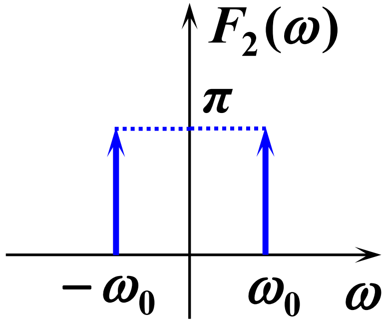
P170 例8.7 部分　　P170 例8.9

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,

有 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$



$$=\frac{1}{2}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{j\omega_0 t}]+\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}])$$

$$=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0).$$

一、基本性质(汇总)

线性性质 $\mathscr{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega)$.

位移性质 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega)$; (时移性质)

$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}f(t)$. (频移性质)

相似性质 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

一、基本性质(汇总)

微分性质 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega);$

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t).$$

积分性质 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega).$

Parseval 等式 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$

（直接进入 Parseal 等式举例?）

例 设 $f(t)=u(t)\cdot 2\cos\omega_0 t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 已知 $\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$, $=F(\omega)$

又 $f(t)=u(t)\cdot(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,

根据线性性质和频移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$=\frac{2j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

例 已知抽样信号 $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{\pi t}$ 的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le 2,\\ 0, & |\omega|>2.\end{cases}$

求信号 $g(t)=f(2t)$ 的频谱 $G(\omega)$. P173 例8.11 修改

解 根据相似性质有

$$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[f(2t)]$$

$$=\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)=\begin{cases}1/2, & |\omega|\le 4,\\ 0, & |\omega|>4.\end{cases}$$

例 设 $f(t)=t^2\cos t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 令 $g(t)=\cos t$，则 $f(t)=t^2 g(t)$，$\mathscr{F}[g^{(2)}(t)]=(j\omega)^2 G(\omega)$

又已知 $G(\omega)=\mathscr{F}[\cos t]=\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)$，

根据微分性质 $\mathscr{F}^{-1}[G''(\omega)]=(-jt)^2 g(t)$，有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[t^2 g(t)]=-G''(\omega)$$

$$=-\pi\delta''(\omega-1)-\pi\delta''(\omega+1).$$

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

定义　设函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，如果

P176
定义
8.2

广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 对任何实数 t 都收敛，则

它在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义了一个自变量为 t 的函数，称此

函数为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t) * f_2(t)$，即

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

二、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则有

P178 定理 8.4

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega); \qquad (A)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)\cdot f_2(t). \qquad (B)$$

证明 $\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)*f_2(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}\underline{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dt\right]}d\tau=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

同理可证 (B) 式。

例 设函数 $f(t)=\dfrac{\sin at}{\pi t}$，$g(t)=\dfrac{\sin bt}{\pi t}$，其中，$a>0, b>0$，求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。 P178 例8.15

$F(w)\cdot G(w)$

解 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为抽样信号，其频谱分别为

$$F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le a,\\ 0, & |\omega|>a,\end{cases}\qquad G(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le b,\\ 0, & |\omega|>b.\end{cases}$$

令 $c=\min(a,b)$，则 $F(\omega)\cdot G(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le c,\\ 0, & |\omega|>c.\end{cases}$

根据卷积定理有

$$f_1(t)*f_2(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=\frac{\sin ct}{\pi t}.$$

例 求 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。 P179 例8.16

(跳过?)

解 方法一 利用卷积定理求解

令 $g(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$h(t)=\cos bt$，

$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot u(t)\, e^{-j\omega t}\,dt$

$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$

则 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$，

$$H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]=\pi[\delta(\omega+b)+\delta(\omega-b)],$$

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[g(t)\cdot h(t)]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)$$

$$=\frac{\pi}{2\pi}[G(\omega)*\delta(\omega+b)+G(\omega)*\delta(\omega-b)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

例　求 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。

解　方法二　利用频移性质求解

令 $g(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，则 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$，

又 $f(t)=\dfrac{1}{2}[g(t)\mathrm{e}^{-jbt}+g(t)\mathrm{e}^{jbt}]$，

根据频移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{2}[G(\omega+b)+G(\omega-b)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

第九章 Laplace变换

一、Laplace变换的引入

2. 如何对Fourier变换要进行改造？

实施结果

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+j\omega)t}\mathrm{d}t$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为 s，就得到了一种新的变换：

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{记为}} F(s).$$

注意　上述广义积分存在的关键：

$\boxed{\text{变量 } s \text{ 的实部 } \mathrm{Re}\,s = \beta \text{ 足够大。}}$

二、Laplace变换的定义

定义 设函数 $f(t)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的实值函数，如果对于

P186
定义
9.1

复参数 $s=\beta+j\omega$，积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在复平面

s 的某一区域内收敛，则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的 **Laplace变换**

或**像函数**，记为 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，即

$$\boxed{F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,.}$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 **Laplace逆变换**或**像原函数**，

记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

Laplace简介

注 $f(t)$ 的Laplace变换就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的Fourier变换。

三、存在性定理

定理 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时，满足：

P188
定理
9.1

(1) 在任何有限区间上分段连续；

(2) 具有有限的增长性，

即存在常数 c 及 $M>0$，使得 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{ct}$，

（其中，c 称为函数 $f(t)$ 的"增长"指数）。

则象函数 $F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, s > c$ 上一定存在且解析。

证明 （略）

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$.

特点 变换的结果均为分式函数。

部分基本性质汇总

线性性质

$$\mathscr{L}[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,F(s)+b\,G(s);$$

$$\mathscr{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

相似性质

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

延迟性质

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

部分基本性质汇总

位移性质 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(s-a).$

微分性质 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

$$F'(s) = -\mathscr{L}[t f(t)];$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)].$$

积分性质 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \dfrac{1}{s} F(s).$

$$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

例 求函数 $f(t)=t\sin\omega t$ 的 Laplace 变换。 P192 例9.8

解 已知 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$,

根据象函数的导数性质有

$$\mathscr{L}[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

例 求函数 $f(t)=t^2\cos^2 t$ 的 Laplace 变换。 P192 例9.9

解 $t^2\cos^2 t=\dfrac{1}{2}t^2(1+\cos 2t)$,

已知 $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathscr{L}[\cos 2t]=\dfrac{s}{s^2+2^2}$,

根据线性性质以及象函数的导数性质有

$$\mathscr{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{2(s^6+24s^2+32)}{s^3(s^2+4)^3}.$$

例 求函数 $f(t)=t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$,

根据位移性质有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

再由象函数的导数性质有

$$\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{(s+3)^2+4}\right)$$

$$=\frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}.$$

例 求函数 $f(t)=\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$，

根据微分性质有

$$\mathscr{L}[t\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2},$$

再由积分性质得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{4}{(s^2+4)^2}.$$

五、周期函数的像函数 P195

性质 设 $f(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 内以 T 为周期的函数，且逐段光滑，

则 $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$.

证明 $\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \xlongequal{\text{记为}} I_1 + I_2$,

其中，$I_2 \xlongequal{\text{令 } x=t-T} \int_0^{+\infty} f(x+T)e^{-s(x+T)}dx$

$$= e^{-sT}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx = e^{-sT}\mathscr{L}[f(t)],$$

即得 $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$.

六、卷积与卷积定理 P196

1. 卷积

- 按照上一章中卷积的定义，两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

- 如果函数满足：当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，则有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\quad (t\geq 0).$$

- 显然，由上式给出的卷积的仍然满足交换律、结合律以及分配律等性质。

六、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s).$

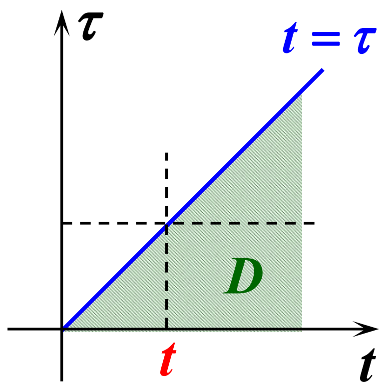
证明 左边 $=\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-st}dt$

(跳过?)

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$=\iint_D f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-st}d\tau\, dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau$$



六、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$.

证明 左边 $=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)[\underline{\underline{\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}\,dt}}]d\tau \xlongequal{\text{记为}} \int_0^{+\infty}f_1(\tau)\,I\,d\tau$

其中 $I=\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}\,dt$

$$\xlongequal{\text{令 } x=t-\tau} e^{-s\tau}\int_0^{+\infty}f_2(x)e^{-sx}\,dx = e^{-s\tau}F_2(s),$$

左边 $=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau\cdot F_2(s) = F_1(s)\cdot F_2(s) =$ 右边。

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P198 例9.16

解 由于 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$，$\mathscr{L}[\dfrac{s}{s^2+1}]=\cos t$，故有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\cos t*\cos t$$

$$=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

2. 反演积分公式

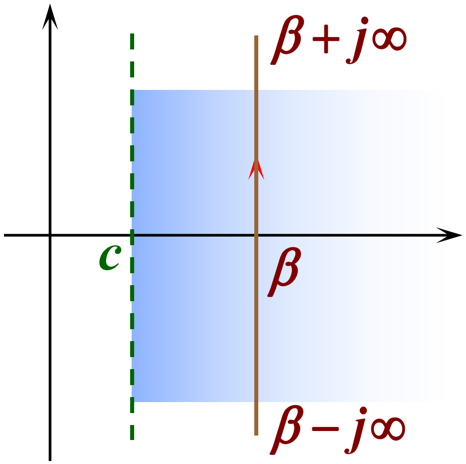
- 根据上面的推导，得到如下的 Laplace 变换对:

$$\begin{cases} F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t; & (A) \\ \Updownarrow & \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\ (t>0). & (B) \end{cases}$$

P199（9.16）式

定义 称 (*B*) 式为反演积分公式。

注 反演积分公式中的积分路径是 s 平面上的一条直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$，该直线处于 $F(s)$ 的存在域中。



二、求Laplace逆变换的方法

1. 留数法

- 利用留数计算反演积分。

定理 设函数 $F(s)$ 除在半平面 $\mathrm{Re}\, s \le c$ 内有有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots s_n$ 外是解析的，且当 $s \to \infty$ 时，$F(s) \to 0$，则

P199 定理 9.2

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} F(s) e^{st} \mathrm{d}\, s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[\, F(s)\, e^{st},\ s_k \,],\ (t > 0).$$

证明 （略） (进入证明?)

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法 常用

- 利用Laplace变换的性质，并根据一些已知函数的Laplace变换来求逆变换。

- 大多数情况下，象函数 $F(s)$常常为(真)分式形式：

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)},$$ 其中，$P(s)$ 和 $Q(s)$ 是实系数多项式。

由于真分式总能进行部分分式分解，因此，利用查表法很容易得到象原函数。 ⇨ (真分式的部分分式分解)

- 此外，还可以利用卷积定理来求象原函数。

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用的 Laplace 逆变换的性质

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)]=af(t)+bg(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=\mathrm{e}^{at}f(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-tf(t). \qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}F(s)]=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t.$$

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用函数的 Laplace 逆变换

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!}{s^{m+1}}\right]=t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]=\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2+b^2}\right]=\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=\mathrm{e}^{at}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}\right]=\mathrm{e}^{at}t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathrm{e}^{at}\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathrm{e}^{at}\sin bt.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P199 例9.17

解 方法一 利用查表法求解

$$(1)\quad F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$$

$$=\frac{1}{s-2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{-1}{(s-1)^2}.$$ （重根）

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=e^{at}$，$\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s-a)^2}]=te^{at}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}-e^{t}-te^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法二 利用留数法求解

(1) $s_1=2,\ s_2=1$ 分别为 $F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st},2]=\frac{1}{(s-1)^2}e^{st}\Big|_{s=2}=e^{2t},$$

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st},1]=\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right)'\Big|_{s=1}=-e^{t}-te^{t}.$$

(2) $f(t)=\operatorname{Res}[F(s)e^{st},2]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},1]$

$$=e^{2t}-e^{t}-te^{t}.$$

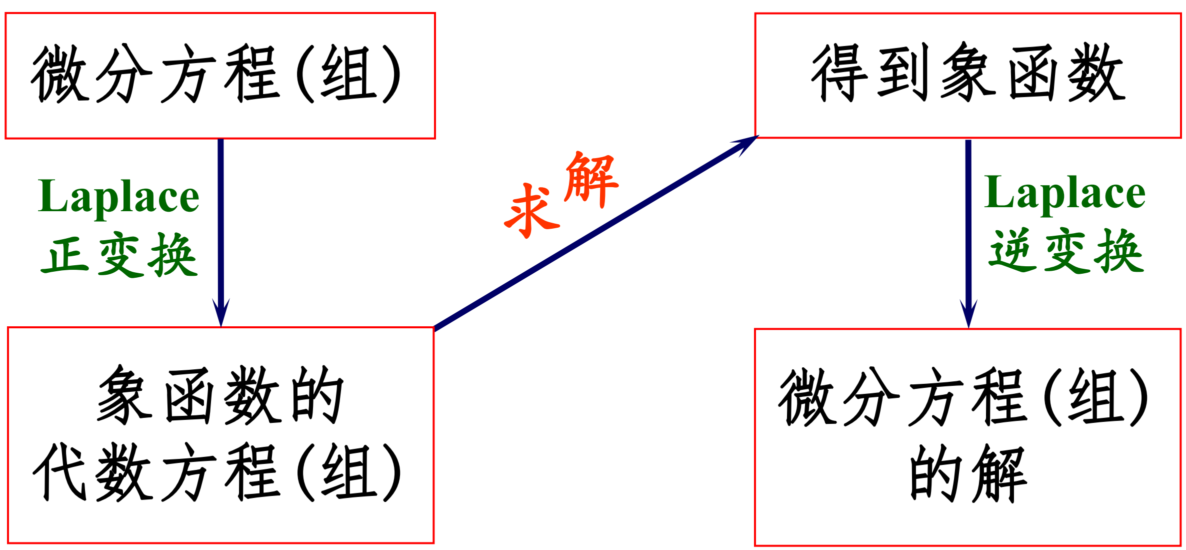
一、求解常微分方程(组)

工具 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$

步骤 (1) 将微分方程(组)化为象函数的代数方程(组)；

(2) 求解代数方程得到象函数；

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。



例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 6\mathrm{e}^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$s^3 X(s) + 3s^2 X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{6}{s+1},$$

求解此方程得 $X(s) = \dfrac{3!}{(s+1)^4}$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = t^3 \mathrm{e}^{-t}.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

P201 例9.19

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$， $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

整理得
$$\boxed{\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1}, \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}. \end{cases}}$$

求解得 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$， $Y(s)=\dfrac{1}{s-1}$.

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

求解得 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$，$Y(s)=\dfrac{1}{s-1}$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t)=y(t)=\mathrm{e}^t$.