完备度量空间

1. 度量空间中柯西列定义(完备)

(X,d)，$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 是柯西列：$\forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathbb{N}^+, \forall m,n>N, d(x_n,x_m)<\varepsilon$

2. (X,d)是完备的：定义1.3.1：X中的任意一个柯西列都是收敛的.

$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$，柯西列. $\exists x\in X, x_n \xrightarrow{d} x$

eg. $(\mathbb{Q},d)$ 度量空间 $a_1=3.1$ $a_2=3.14$ ⋯ $a_n=3.1415926\cdots n$ 且 $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$

当m,n足够大时，$d(a_n,a_m)<\varepsilon$，但并在$\mathbb{Q}$中不收敛，因为其收敛点是π，是无理数

故$(\mathbb{Q},d)$不是完备的

eg. $\mathbb{R}^n$ 完备的. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 柯西列 $\subseteq \mathbb{R}$，$\exists x\in\mathbb{R}$，$x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$

/ \

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 非完备.

eg. $C[0,1]$ 或 $C[a,b]$ 是完备度量空间.

① 一个空间可以有很多个度量

② $C[0,1]$ 默认的度量 $d(f,g)=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$ (是连续函数，故最大值一定能找到)

证：设$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$是柯西列. $\forall\varepsilon>0, \exists N$，对$\forall m,n>N$，$d(f_m,f_n)<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1]$ $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ 一致柯西：$\exists f$，$f_n(x) \xrightarrow{u} f(x)$

连续函数一致收敛的极限也是连续函数，故$C[0,1]$完备.

在$C[0,1]$上的反例：$(C[0,1],d)$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$

① 一个集合可以有很多度量 $(\mathbb{Q},d)$ $d(q,p)=5|p-q|$

② d是$C[0,1]$上的一个度量 $d: C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R}^+$

i) $d(f,g)\geq 0$ 且 $d(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g$

ii) $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$ $|a+b|\leq|a|+|b|$

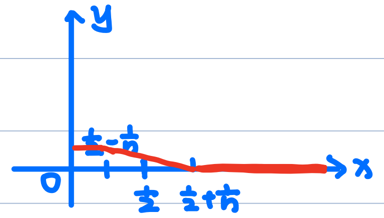
iii) $f,g,h\in C[0,1]$ $d(f,h)+d(h,g)=\int_0^1|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|dx$

$\geq\int_0^1|f-h+h-g|dx=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=d(f,g)$

$\therefore d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$

故d可作为$C[0,1]$上的一个度量.

下证其不完备：$\exists (f_n)_{n=1}^{\infty}$ 柯西列，f_n 不收敛到 $C[0,1]$ 中的任一个元素



$$f_n(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\ 0 & x\ge \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\\ \backslash & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le x\le \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\end{cases}$$

$d(f_n,f_m)=\int_0^1 |f_n(x)-f_m(x)|\,dx$

设 $m>n$，当 m,n 越来越大时，$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ 越来越接近，

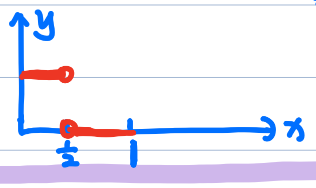
两函数不同的部分越来越小，故 $d(f_n,f_m)<\varepsilon$

故 ① $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 在 d 下是一个柯西列

② 设有 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$

$f_n \xrightarrow[d]{n\to\infty} f$

故 $f\notin C[0,1]$，故在该度量下不完备.



即证一个空间在 d_1 下完备，可在 d_2 下非完备.

eg. l^{∞} 是完备的度量空间. $l^{\infty}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid |x_n|\le M\}$ $d(x,y)=\sup\limits_n |x_n-y_n|$

证明：$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq l^{\infty}$ 柯西 $x_n=(x_n^m)_{n=1}^{\infty}$，$x_n^m\in\mathbb{R}$ $x_n\in l^{\infty}$（元素向量）

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbb{N}^+$，使 $\forall n_1,n_2>N$，有 $d(x_{n_1},x_{n_2})<\varepsilon$

$\sup\limits_m |x_{n_1}^m-x_{n_2}^m|<\varepsilon$，固定 m，$(x_n^m)_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个柯西列，故 $\exists y_m\in\mathbb{R}$，$x_n^m \xrightarrow{n\to\infty} y_m$

构造 $(y_m)_{m=1}^{\infty}$

只证 $\begin{cases}(y_m)_{m=1}^{\infty}\in l^{\infty} & ①\\ x_n \xrightarrow{d} (y_m)_{m=1}^{\infty} & ②\end{cases}$ 故 l^{∞} 完备.

下证①,②

$x_1=(x_1^1, x_1^2, \cdots x_1^m \cdots)$

$x_2=(x_2^1, x_2^2, \cdots x_2^m \cdots)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$

$x_{n_1}=(x_{n_1}^1, x_{n_1}^2, \cdots x_{n_1}^m \cdots)$

$x_{n_2}=(x_{n_2}^1, x_{n_2}^2, \cdots x_{n_2}^m \cdots)$

$d(x_{n_1},x_{n_2})<\varepsilon$

$d(x_{n_1},x_{n_2})<\varepsilon$

y_1 y_2 y_3

$$|x_{n_1}^{m}-x_{n_2}^{m}|<\varepsilon \quad n_2\to\infty \quad |x_{n_1}^{m}-y_m|\le\varepsilon$$

$\forall m, |x_{n_1}^{m}|\le M$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_m$$

故 $\forall m, |y_m|\le M+\varepsilon \Rightarrow (y_m)_{m=1}^{\infty}\in l^{\infty}$

y_m 有界

$E\subseteq(X,d)$，E是疏集指E不在X中的任何一个开集中稠密. Q在R中不稠密 $Q\cap(a,b)$

$A\subseteq X$ 为第一纲：A可以写成可数个疏集的并，反之为第二纲.

完备集都是第二纲的.

度量空间的完备化

定理1.3.3. 对每一个 (X,d)，必∃一个完备的 $(\tilde{X},\tilde{d})$，使得 (X,d) 与 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中的一个稠密子集，是等距同构的，称 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是 (X,d) 的完备化

eg. (Q,d) 在 (R,d) 中稠密.

$$R=\begin{cases} x\in Q & (x_n)_{n=1}^{\infty} \quad x_n=x \\ x\in R-Q & (x_n)_{n=1}^{\infty} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq Q \end{cases}$$

Q中 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\sim(y_n)_{n=1}^{\infty}$（等价）

$$\lim_{n\to\infty}x_n \overset{R中}{=\!=} \lim_{n\to\infty}y_n$$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 (Q,d) 中的柯西列.

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\in R$$

$\tilde{R}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n\in Q,\ (x_n)_{n=1}^{\infty}\ 柯西\}$ $\quad$ $\tilde{R}\backslash\sim=\{[(x_n)_{n=1}^{\infty}] \mid x_n\in Q,\ (x_n)_{n=1}^{\infty}\ 柯西\}$

把极限相同的所有柯西列看作一个

$$R\cong\tilde{R}\backslash\sim$$

R中的点x和有理柯西列的等价类一一对应.

压缩映射和不动点定理.

$T:(X,d_1)\longrightarrow(Y,d_2)$

$x,y\in X$，$d(Tx,Ty)\le\theta\, d(x,y)$ $\quad 0<\theta<1$ 则T为压缩映射.

例. 若 $T:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ 是一个压缩映射，则T连续，

$x_n \xrightarrow{d_1} x$ 在 X 中，$Tx_n \xrightarrow{d_1} Tx$　　$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, d(x_n,x)<\varepsilon$

(压缩映射连续)　　$d(Tx_n,Tx) \le \theta d(x_n,x) < d(x_n,x)<\varepsilon$

(不动点定理)

定理1.4.1　设(X,d)为一完备度量空间，$T: X\to X$ 并且 $d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)$

$\Rightarrow \exists \bar{x}\in X, T\bar{x}=\bar{x}$

证明: $\forall x\in X, (T^n x)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$　$T^2 = T(Tx)$

① $(T^n x)_{n=1}^{\infty}$ 为柯西列　$T^n x \xrightarrow{d} \bar{x}$

② $\lim_{n\to\infty} T^n x = \bar{x}$　　证: 由连续 $T(\lim_{n\to\infty} T^n x) = T\bar{x} = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = \bar{x}$

连续，故极限和函数可交换位置

$T^n x$ 柯西列，$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall m,n>N$, $d(T^n x, T^m x) = d(T T^{n-1}x, T T^{m-1}x)$　　$0<\theta<1$

$\le \theta d(T^{n-1}x, T^{m-1}x) \le \theta^N d(T^{n-N}x, T^{m-N}x)$

$\le \theta^n d(x, Tx)$ [设 $m=n+1$] $\longrightarrow 0$

$0<\theta<1$　　常数.

$d(T^n x, T^m x) = d(T^n x, T^{n+p}x) \le d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, T^{n+2}x)+\cdots+d(T^{m-1}x, T^m x)$

$\le (\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p-1})\, d(x,Tx) \longrightarrow 0$

$= \dfrac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta} \to 0$　　常数