第四章　矩阵的特征值与特征向量

习题 4.1

1. (1) 若 $A^2=E$，证明 A 的特征值为 1 或 -1;

   (2) 若 $A^2=A$，证明 A 的特征值为 0 或 1.

   (3)若正交矩阵有实特征值，证明它的实特征值为 1 或 -1.

证明（1）因为 $A^2=E$, 所以A^2的特征值为1，故A的特征值为± 1

（2）设 λ 为矩阵 A 的特征值， X 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，

用特征向量X右乘 $A^2=A$ 两边,得

$A^2X=AX$, 则$\lambda^2X=\lambda X \Rightarrow (\lambda^2-\lambda)X=0$,

由于特征向量X非零，故$\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$或1

(3) 设 λ 为正交矩阵 A 的实特征值， X 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则有

$$AX=\lambda X$$

等式两边取转置，再用 AX 右乘等式两边 ，可得 $X^TA^TAX=\lambda X^TAX$ ，

因为A是正交阵，所以$A^TA=E$ ，从而有 $X^TX=\lambda^2X^TX$ ，即 $(\lambda^2-1)X^TX=0$.

又因为特征向量X非零，所以$X^TX>0$. 故$\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 -1.

2. 设 A 为 n 阶方阵， $A\neq E$ 且满足 $R(A+E)+R(A-E)=n$,求 A 的一个特征值.

解　由 $A\neq E$即$A-E\neq O$ 得 $R(A-E)>0$,

从而 $R(A+E)=n-R(A-E)<n$,

于是 $|E+A|=0$ 即 $|E+A|=|A-(-1)E)|=0$,

所以 A 有一个特征值为 -1.

3．已知 A 是三阶方阵, 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+3\beta$ (k_1,k_2 是任意常数), 求 A 的特征值与特征向量.

解

因为 3β 是 $AX=\beta$ 的一个特解, 所以 $A(3\beta)=\beta=\frac{1}{3}(3\beta)$,则 $3t\beta(t\neq 0)$ 是 A 的属于特征值 $\frac{1}{3}$ 的特征向量.

又因为 $A\alpha_1=0=0\alpha_1, A\alpha_2=0=0\alpha_2$, α_1,α_2 线性无关,所以 $t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$(t_1,t_2不全为零)

是 A 的属于特征值 0(二重)的特征向量.

4．求下列矩阵的特征值与特征向量.

（1）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　　　（2）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　　　　（4）$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix}, a \neq 0$

(5) $A = \alpha\beta^T$, 其中$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ 且$\alpha^T\beta = 0$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}, b \neq 0$

解（1）由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{求得特征值为}: \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1,$$

分别代入$(A-\lambda E)X = \theta$, 求得

A 属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $k_1(1,0,1)^T$，($k_1 \neq 0$);

A 属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量为 $k_2(3，-1，0)^T$，($k_2 \neq 0$).

（2）由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4-\lambda & 9-\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1-c_3}} \begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda & 9-\lambda \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1+\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{按第一列展开}}}(1+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 9-\lambda \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2(\lambda-8)$$

求得特征值：$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$

分别代入 $(A-\lambda E)X = \theta$，求得

A 属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$的全部特征向量为$X=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$不全为零;

A 属于特征值$\lambda_3=8$的全部特征向量为$X=k\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，　$k\neq 0$.

（3）由

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\5 & -3-\lambda & 3\\-1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1+c_2-c_3}}\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 2\\-1-\lambda & -3-\lambda & 3\\1+\lambda & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)[-\lambda^2-2\lambda-1]=-(\lambda+1)^3,$$

可得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$；A 属于特征值-1 的全部特征向量为 $k(1,1,-1)^T$，($k\neq 0$).

（4）由$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}a-\lambda & \cdots & & 0\\0 & a-\lambda & \cdots & 0\\0 & \cdots & \cdots & 0\\0 & \cdots & \cdots & a-\lambda\end{vmatrix}$

所以特征值为a(n 重), A 属于 a 的特征向量为 $k_1(1,0,\cdots,0)^T+k_2(0,1,\cdots,0)^T+k_n(0,0,\cdots,1)^T$，($k_1$, k_2, $\cdots$, k_n不全为 0)，即全体 n 维非零列向量.

（5）设λ为A的任一特征值，ξ为A的属于λ的特征向量，则

$$A\xi=\lambda\xi \quad 于是 \qquad A^2\xi=\lambda A\xi=\lambda^2\xi,$$

而$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=\alpha(\alpha^T\beta)^T\beta^T=0$,

故 $\lambda^2\xi=0$，因为特征向量$\xi\neq 0$，所以 $\lambda=0$，即矩阵A的所有特征值为 0（n 重）.

由

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ & \cdots & \cdots & \\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix},$$

得

$$A-0E=\begin{pmatrix} a_1b_1-\lambda & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2-\lambda & \cdots & a_2b_n \\ & \cdots & \cdots & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{a_1\neq 0, b_1\neq 0} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

解$(A-0E)X=\theta$可得一个基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -\frac{b_3}{b_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-1}=\begin{pmatrix} -\frac{b_n}{b_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 A 属于 n 重特征值 0 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}$（ k_1，k_2，$\cdots$，k_{n-1} 不全为零）

(6) **方法一：**由特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & b & b \\ b & 1-\lambda & b \\ b & b & 1-\lambda \end{vmatrix}=[(1+2b)-\lambda][\lambda-(1-b)]^2=0 \quad ,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1+2b$， $\lambda_2=\lambda_3=1-b$.

对 $\lambda_1=1+2b$，因其是单根,对应的线性无关特征向量有且只有一个,而矩阵 λ_1E-A 的每行元素的和为零,则 $\xi_1=(1,1,1)^T$ 是 $(\lambda_1E-A)X=\theta$ 的一个基础解系，所以 A 的属于 $1+2b$ 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1(1,1,1)^T \qquad (k_1\text{ 为任意不为零的常数}).$$

对 $\lambda_2=\lambda_3=1-b$，解 $((1-b)E-A)X=\theta$，得一个基础解系为

$$\xi_2=(1,-1,0)^T，\ \xi_3=(1,0,-1)^T，$$

故 A 的属于 $\lambda_2=\lambda_3=1-b$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3 \qquad (k_2,k_3\text{ 是不全为零的常数}).$$

方法二: $A=(1-b)E+\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}=(1-b)E+B, B=\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$,

因为矩阵 B 的每行元素的和为 $3b$,所以矩阵 B 有一个特征值为 $\mu_1=3b$,对应的全部特征向

量为

$$k_1(1,1,1)^T \qquad (k_1\text{为任意不为零的常数}).$$

因为$R(B)=1$,所以矩阵B有两个特征值为$\mu_2=\mu_3=0$,对应的全部特征向量为

$$k_2(1,-1,0)^T+k_3(1,0,-1)^T\ (k_2,k_3\text{是不全为零的常数}).$$

则矩阵A的特征值为

$$\lambda_1=1-b+\mu_1=1+2b,\lambda_2=1-b+\mu_2=1-b,\lambda_3=1-b+\mu_3=1-b,$$

矩阵A的特征向量与矩阵B的特征向量一致.

λ_1,对应的全部特征向量为

$$k(1,1,1)^T \qquad (k_1\text{为任意不为零的常数});$$

$\mu_2=\mu_3$,对应的全部特征向量为

$$k_2(1,-1,0)^T+k_3(1,0,-1)^T\ (k_2,k_3\text{是不全为零的常数}).$$

5. 设A为4阶方阵，且$|A+3E|=0$，$|A|$=6，

（1）求A^*的一个特征值；

（2）$|A|^2A^{-1}$的一个特征值.

解

（1） 由已知可得A的一个特征值$\lambda_1=-3$,

则A^*的一个特征值$\mu_1=\dfrac{|A|}{\lambda}=-2$.

（2）A^{-1}的一个特征值$-\dfrac{1}{3}$,

故$|A|^2A^{-1}$的一个特征值-12.

6. 设

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$$

(1)求A的特征值与特征向量；

(2）求$E+A^{-1}$特征值与特征向量.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{r_1+r_2+r_3}}\begin{vmatrix}3-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

解 （1）由 $\underline{\underline{c_3-c_2}}\begin{vmatrix}3-\lambda & -1-\lambda & 0\\ 2 & -1-\lambda & \lambda-1\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1-\lambda & 0\\ 4 & -3-\lambda & 0\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}4 & -1-\lambda\\ 3+\lambda & -2\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+5)(\lambda-1)$$

可得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$，代入 $(A-\lambda E)X=\theta$，求得

属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为

$\xi=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ （k_1,k_2 不全为0）；

属于 $\lambda=-5$ 的特征向量为

$\xi=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ （$k\neq 0$）.

(2) $E+A^{-1}$ 的特征值为 $:1+1=2$(二重)$,1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,

属于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为

$\xi=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ （k_1,k_2 不全为0）；

属于 $\lambda=\frac{4}{5}$ 的特征向量为

$\xi=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ （$k\neq 0$）.

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，已知 $X=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是 A^{-1} 的一个特征向量，求 k 及 A^{-1} 的特征向量 X 所对应的特征值.

解 X 是 A^{-1} 的一个特征向量，则 X 也是 A 的一个特征向量.设 A 的特征向量 X 所对应的特征值为 λ，由 $AX=\lambda X$ 知

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}2+k+1=\lambda\\1+2k+1=\lambda k\\1+k+2=\lambda\end{cases}$ 解得：$k=-2$或1, 代回得

$\begin{cases}k=-2\\\lambda=1\end{cases}$, $\begin{cases}k=1\\\lambda=4\end{cases}$

当$k=-2$时，$X=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=1$, A^{-1}的特征向量X所对应的特征值为$\dfrac{1}{\lambda}=1$;

当$k=1$时，$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=4$, A^{-1}的特征向量X所对应的特征值为$\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{4}$.

8．(1)设λ_1,λ_2是n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的两个特征值，且$\lambda_1\neq\lambda_2$, α_1,α_2分别是A的属于λ_1,λ_2的特征向量，证明$\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量;

(2) 设λ_1,λ_2是n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的两个特征值，且$\lambda_1\neq\lambda_2$, α是属于λ_1的特征向量，证明α不是属于λ_2的特征向量.

证明 (1)用反证法.假设$\alpha_1+\alpha_2$是A的属于特征值λ的特征向量，则有

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)$$

因为α_1,α_1是属于特征值λ_1,λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$,代入上式，则有

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)$$

即 $$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=0$$

由于属于不同特征值的特征向量线性无关，故

$$\lambda-\lambda_1=0,\lambda_1-\lambda_2=0$$

从而 $\lambda_1=\lambda_2$ 与已知$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾，

故$\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量.

(2) 用反证法. 假设α是属于λ_2的特征向量,则有$A\alpha=\lambda_2\alpha$,

又α是属于λ_1的特征向量,则有$A\alpha=\lambda_1\alpha$,即得$\lambda_1\alpha=\lambda_2\alpha \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\alpha=0$,

因为特征值的特征向量是非零向量,所以$\lambda_1-\lambda_2=0$,

从而 $\lambda_1=\lambda_2$ 与已知$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾，

故α不是属于λ_2的特征向量.

9．设n阶方阵A的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n，计算$|3E-A|$.

解 因为n阶方阵A的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n

所以$3E-A$的特征值为$3-\lambda_1$，$3-\lambda_2$，…，$3-\lambda_n$

故$|3E-A|=\prod_{i=1}^{n}(3-\lambda_i)$

习题 4. 2

1. 判断习题 4.1 第 4 题中各矩阵能否与对角矩阵相似.如果相似，求出相似变换矩阵与对角矩阵.

解 (1)

二重特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$只有一个线性无关的特征向量，不能对角化.

(2)二重特征植$\lambda_1=\lambda_2=-1$有两个线性无关的特征向量，可以对角化.

相似变换矩阵为$P=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，对角阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$.

(3) 三重特征值有一个线性无关的特征向量，不能对角化.

(4) 这是对角阵,可以与它自己相似，相似变换矩阵为单位矩阵.

(5) n重特征值$\lambda=0$有$n-1$个线性无关的特征向量，所以不能对角化.

(6) 二重特征植$\lambda_2=\lambda_3=1-b$有两个线性无关的特征向量，可以对角化.

相似变换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad 对角阵为\ \Lambda=\begin{pmatrix}1+2b&&\\&1-b&\\&&1-b\end{pmatrix}.$$

2．设

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&b\end{pmatrix}$$

A 与 B 相似.

（1） 求 a,b 的值；

（2） 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ =B.

解

(1) A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征多项式，即

$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$,

$\lambda^3-(a-1)\lambda^2-(a+4)\lambda\ \ +2(a-2)=\lambda^3-(b+1)\lambda^2+(b-2)\lambda\ \ +2b$

各项系数对应相等可得：

$2b=2a-4, b-2=-(a+4), b=a-2$

$\therefore a=0, b=-2$

（2）$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}$，易计算得 B 的特征值为 -1，2，-2，

则 A 的特征值为 -1，2，-2，

当$\lambda_1=-1$，解（$A+E)X=\theta$, 得一个基础解系为$\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=2$，解（$A-2E)X=\theta$, 得一个基础解系为$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

当$\lambda_3=-2$，解（$A+2E)X=\theta$, 得一个基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, 有 $P^{-1}AP=B$.

3.设

$$A=\begin{pmatrix}0&a&1\\0&2&0\\4&b&0\end{pmatrix}$$

已知A与对角阵相似，求a，b满足的条件.

解

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & a & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & b & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$.

因 A 相似于对角阵，所以 A 有三个线性无关的特征向量，因此 A 的二重特征根 2 对应的线性无关的特征向量有两个，所以齐次方程组（A－$2E$）$X=\theta$ 的一个基础解系中含两个解向量，于是

$$R（A-2E）=1$$

因

$$A-2E=\begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -a & -1 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由

$$R（A-2E）=1$$

知

$$-2a-b=0 \text{ 即 } 2a+b=0$$

4．设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A 与 B 相似.

（1） 求 a,b 的值；

（2） 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 （1）A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的迹、相同的行列式，即

$$\begin{cases} 0+3+a=1+b+1 \\ 2a-3=b \end{cases}$$

可解得 $a=4, b=5$.

（2）易计算得 B 的特征值为：1，1，5，

则 A 的特征值为：1，1，5，

当$\lambda_1=\lambda_2=1$，解（$A-E)X=\theta$, 得一个基础解系为$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

当$\lambda_3=5$，解（$A-5E)X=\theta$, 得一个基础解系为$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

令可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$.

5.计算(k为正整数)：

（1）$\begin{pmatrix}-4&0&3\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix}^k$ ，（2）$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}^k$

解 (1)由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-4-\lambda&0&3\\0&2-\lambda&0\\3&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+5)(\lambda-5) ,$$

可得矩阵的特征值为$\lambda_1=2,\ \lambda_2=5,$， $\lambda_3=-5$

当$\lambda_1=2$时,$(A-2E)=\begin{pmatrix}-6&0&3\\0&0&0\\3&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

解$(A-2E)X=\theta,$得线性无关特征向量：$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=5$时,$(A-5E)=\begin{pmatrix}-9&0&3\\0&-3&0\\3&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

解$(A-5E)X=\theta,$ 得线性无关特征向量：$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=-5$时,$(A+5E)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&7&0\\3&0&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

解$(A+5E)X=\theta,$ 得线性无关特征向量：$\xi_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

则$\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)^{-1}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}$，

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-4 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}^k=\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}^k\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5^k+9(-5)^k & 0 & 3\cdot 5^k-3(-5)^k\\ 0 & 10\cdot 2^k & 0\\ 3\cdot 5^k-3(-5)^k & 0 & 9\cdot 5^k+(-5)^k\end{pmatrix}$$

(2)由

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2\\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda+1)^2,$$

可得矩阵的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时,$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

解$(A+E)X=\theta$,得线性无关特征向量：$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$,

当$\lambda_3=5$时,$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ -4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

解$(A-5E)X=\theta$, 得线性无关特征向量：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

则$\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^{k+1}+5^k\\(-1)^{k+1}+5^k&2(-1)^k+5^k&(-1)^{k+1}+5^k\\(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^{k+1}+5^k&2(-1)^k+5^k\end{pmatrix}$$

6. 某公司通过市场调查得到的统计资料表明，已经使用本公司产品的客户中有 60%表示会继续购买该公司产品，在未使用过本公司产品的被调查者中 25%表示将购买该公司产品，目前该公司产品在市场的占有率为 60%，能否预测 5 年后该公司产品的市场占有状况呢？

解 定义矩阵 $P=\begin{pmatrix}0.6&0.25\\0.4&0.75\end{pmatrix}$，$X^{(0)}=\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}$表示该公司产品的初始市场状态，则一年后该公司产品的市场占有状态可表示为 $X^{(1)}=PX^{(0)}$，则 k 年后该公司产品的市场状态可表示为 $X^{(k)}=P^kX^{(0)}$.

可以计算出矩阵 P 的特征值为 1，0.35，对应的线性无关特征向量分别为$\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，于是

$$X^{(5)}=P^5X^{(0)}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5&1\\8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&0.35^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\8&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}.$$

故预测 5 年后该公司产品的市场占有率约为 50%.

7. 写出裴波那契数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34， ⋯的通项表达式.

解 设 $u_0=1,u_1=1$，裴波那契数列具有递推关系 $u_{i+1}=u_i+u_{i-1}$，这种递推关系可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}u_{i+1}\\u_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i\\u_{i-1}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^i\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix},$$

可以计算出矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，对应的线性无关特征向量分别为 $p_1=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}$，

则

$$\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ u_i \end{pmatrix} = (p_1,\ p_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}(p_1,\ p_2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而有 $u_{i+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}\right]$.

8．若 A 与 B 相似且 A 可逆，证明：A^*与 B^*相似.

证　因为 $A \sim B$, 有 $|A| = |B|$　且存在可逆矩阵 P，使

$P^{-1}AP = B \quad B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$ ，

而 $A^* = |A|A^{-1},\quad B^* = |B|B^{-1}$，

则 $P\ A^*P^{-1} = P|A|A^{-1}P^{-1} = |A|PA^{-1}P^{-1} = |A|B^{-1} = |B|B^{-1} = B^*$

故 A^*与 B^*相似.

9．设 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，已知$A$有特征值1和$-1$, 证明$A$可对角化.

证　因 1 和-1 是 A 的特征值，故

$$|E - A| = 0, \quad |-E - A| = 0$$

即

$$|A - E| = 0, \quad |E + A| = 0$$

由

$$\begin{cases} |A - E| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 5 & b-1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7(1+a) = 0 \\ |A + E| = \begin{vmatrix} 3 & a & 2 \\ 5 & b+1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(3a - 2b - 3) = 0 \end{cases}$$

解得$a = -1, b = -3$.

设A还有一个特征值为λ，于是由

$$1 + (-1) + \lambda = 2 + (-3) + (-1)$$

得

$$\lambda = -2$$

由于A的3个特征值都是单根，所以A可对角化.

习题 4.3

1．求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ （2）$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

解 （1）先求特征值和特征向量，由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&-\lambda&-\lambda\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)^2$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$，

当 $\lambda=3$,

$$(A-3E)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解 $(A-3E)X=\theta$, 得线性无关特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 正交化为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

单位化得 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,

当 $\lambda_3=0$，

$$A-0E=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解 $(A-0E)X=\theta$, 得线性无关特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ，单位化为 $\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

于是有正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

(2) 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=$ 1, $\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=$ 1,

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解齐次线性方程组 $(A-E)X=\theta$，得 A 属于特征值 1 的线性无关特征向量

$p_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，正交化为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1\end{pmatrix}$,

单位化得 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$,

$$A+2E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解齐次线性方程组 $(A+2E)X=\theta$，得 A 属于特征值 1 的线性无关特征向量为

$p_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，单位化为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

于是有正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

2．已知 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称矩阵 A 的三个特征值，A 的属于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$， $X_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，求 A 的属于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 A ．

解 令 A 的属于 $\lambda_1=6$ 的一个特征向量为：$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，因为 A 是实对称矩阵，所以

$$X_1^TX_2=X_1^TX_3=0$$

于是有：

$\begin{cases}-x_1+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$ 解得：$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

故 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

且 A 的属于 $\lambda_1=6$ 的特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k\neq0)$.

3. 判断 n 阶矩阵 A、B 是否相似，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$.

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = n, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.

因 A 是实对称矩阵，故 A 必与对角阵 $\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 相似,

又

$$\left|\lambda E - B\right| = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

可见 B 与 A 有相同的特征值.

因为

$$R(0E - B) = R(-B) = R(B) = 1$$

所以 B 属于 $n-1$ 重特征根 0 的线性无关的特征向量有 $n-1$ 个，因此 B 也与对角阵 $\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 相似. 由相似关系的传递性知 A 与 B 相似.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, f(x) = x^3 - x + 4, B = f(A)$, 判断 B 可否对角化？ 若可以,求出可逆矩阵 P,使 $P^{-1}BP$ 为对角阵.

解 因为 A 是实对称矩阵，所以

$$\begin{aligned} B^T &= (A^3 - A + 4E)^T = (A^3)^T - A^T + 4E \\ &= (A^T)^3 - A + 4E = A^3 - A + 4E = B, \end{aligned}$$

则 B 也是实对称矩阵， B 可以对角化.

由

$$\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda - 2)^2$$

得 A 的特征值为-1,2,2,

对应的线性无关特征向量分别为 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

则 B 的特征值为 $f(\lambda)$: -4,10,10, 对应的线性无关特征向量也分别为

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

取 $P=(\alpha,\beta,\gamma)$,有

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-4 & & \\ & 10 & \\ & & 10\end{pmatrix}.$$

习题四

(A)

一、填空题

1．已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，3，-2，则 A^*+E 的特征值为_________.

解 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_A}$ ，即有 $-6,-2,3$ ，则

A^*+E的特征值为：$-6+1,-2+1,3+1$.即$-5,-1,4$.

2．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$ ，则 $|A+4E|$=_________

解

由题意知：A的特征值为-1，-2，-3，$A+4E$的特征值为3, 2, 1,

则 $|A+E|=3\times2\times1=6$.

3. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，1，-2，则 $tr(A^2)=$________.

解 因为 A 的特征值为 1，1，-2，则 A^2 的特征值为 1，1，4，

$tr(A^2)=1+1+4=6$.

4．若 3 阶方阵 A 与 B 相似，A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ ，则 $\begin{vmatrix}B^{-1}-E & E\\ O & A^{-1}\end{vmatrix}$=________.

解

$$\begin{vmatrix} B^{-1}-E & E \\ O & A^{-1} \end{vmatrix} = |B^{-1}-E||A^{-1}|$$

$\because A$相似于B,则A与B有相同的特征值,且A^{-1}相似于B^{-1},

$\therefore A^{-1},B^{-1}$的特征值都为：2，3，4,

则B^{-1}-E的特征值为：1，2，3,

从而$\begin{vmatrix} B^{-1}-E & E \\ O & A^{-1} \end{vmatrix} = |B^{-1}-E||A^{-1}| = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 144.$

5．已知矩阵 A 的各行元素之和为 2, 则 A 有一个特征值为__________.

解

显然 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 可得 A 的各行元素之和, 由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix}$ 知 A 有一个特征值为 2.

6．已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $(3A^2)^{-1}$ 的特征值为_________.

解　A 的特征值为λ=1, 3, 2, $(3A^2)^{-1}$的特征值为$\dfrac{1}{3\lambda^2}=\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{12}$

7. 已知 2 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & x & 0\\4 & 2 & 1\end{pmatrix}$的特征值 ,则 x=___________.

解　$|A-2E|$=0 $\Rightarrow x=4$

8. 向量$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\x & -2 & 2\\3 & y & -1\end{pmatrix}$的特征向量,则 x =__________，y=____________.

解　$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\x & -2 & 2\\3 & y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow x=-2, y=6$

9. 设 A，B 均为 3 阶方阵，A 的特征值为 1，2，3，$|B|=-1$，则$|A^*B+B|$=__________.

解　因A的特征值是1，2，3，所以$|A|=1\cdot 2\cdot 3=6.$

$|A^*B+B|=|(A^*+E)B|=|A^*+E\|B|,$

A^*的特征值是6, 3, 2,

A^*+E的特征值是 7, 4, 3,

$|A^*B+B|=|(A^*+E)B|=|A^*+E\|B|=7\cdot 4\cdot 3\cdot(-1)=-84.$

10. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

相似，则 x =_______________， y=_______________.

解 相似矩阵有相同的特征值，则

$$tr(A)=tr(B)\Rightarrow x+1=y$$

$|A|=|B|\Rightarrow -1=-y\Rightarrow y=1$，$x=0$.

11. 已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，则参数 x =____________

解 矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,$$

因为 A 可以对角化，所以 A 的二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量，于是

$R(A-1\cdot E)=3-2=1$，又因为 $A-E\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $x=0$.

12．设 3 阶实对称矩阵 A 是幂等矩阵（即 $A^2=A$），$R(A)=2$，则 $|A-2E|$=__________.

解 由 $A^2=A$ 知，A 的特征值是 0 或 1. 因为 A 是 3 阶实对称矩阵且 $R(A)=2$，所以 A 与对角阵 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$ 相似，从而 A 的特征值是 1，1，0，则 $A-2E$ 的特征值是-1，-1，-2，故 $|A-2E|$= -2.

13．设 A 是 n 阶实对称矩阵，满足 A^3-$3A^2$+$3A$-$2E$=O，则 A 的特征值为__________.

解 设 A 的属于 λ 的一个特征向量为 X，由于 A 是 n 阶实对称矩阵，所以 A 的特征值都是实数，

$A^3-3A^2+3A-2E=0$，两边同乘以特征向量 X，有

$(A^3-3A^2+3A-2E)X=0\Rightarrow A^3X-3A^2X+3AX-2EX=0$
$\Rightarrow \lambda^3X-3\lambda^2X+3\lambda X-2X=0$
$\Rightarrow (\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2)X=0$，
由于$X\neq 0$,则$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+1)=0$，
由于λ是实数，所以$\lambda=2$（n重）.

14. 已知 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&4\\0&4&2\end{pmatrix}$，则 $A^3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=$______________.

解 $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1^3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

15. n 阶实对称矩阵 A 有 n 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\xi_1$ 是对应于特征值 λ_1 的单位特征向量，则矩阵 $B=A-\lambda_1\xi_1\xi_1^T$ 的特征值为______________________.

解 设 $\xi_2,\cdots,\xi_n$ 分别是 A 的异特征值 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的单位特征向量，因实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交，所以 $(A-\lambda_1\xi_1\xi_1^T)\xi_i=A\xi_i-\lambda_1\xi_1\xi_1^T\xi_i=\begin{cases}0 & i=1\\ \lambda_i\xi_i & i\neq 1\end{cases}$,从而 B 的特征值为 $0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

二、单项选择题

1. 设 A 为 3 阶矩阵,有特征值 1,-1,2,则下列矩阵中可逆矩阵是(　　　).

(A) $E-A$　　(B) $E+A$　　(C) $2E-A$　　(D) $2E+A$

解

因为-2 不是 A 的特征值，所以 $|2E+A|\neq 0$ ，故选(D)

2．设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$，记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$, 则(　　　).

(A) A 是可逆矩阵　　　　(B) A^2 不是零矩阵
(C) A 的特征值全为 0　　　　(D) A 的特征值不全为 0

解 设 A 的特征值为 λ，则 A^2 的特征值为 λ^2

$\because A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T$,　$\beta^T\alpha=(\alpha^T\beta)^T=0$
$\therefore A^2=0$

故 A^2 的特征值全为零，有 $\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=0$　选(C)

3. 设 A 为 n 阶矩阵，将 A 的第一、二行互换后，再将第一、二列互换得到矩阵 B，则 A 与 B 的特征值（　　　）.

(A) 完全相同　　(B) B 的特征值是 A 的特征值的平方

(C) B 的特征值是 A 的特征值的相反数　　(D) 无一定关系

解 因为 $B=P_{12}AP_{12}=P_{12}AP_{12}^{-1}$，所以 A 与 B 相似，

选（A）

4. 设 A 为 n 阶矩阵, X 为 A 属于 λ 的一个特征向量, 则与 A 相似的矩阵 $B=P^{-1}AP$ 的属于 λ 的一个特征向量为(　　).

(A) PX　　(B) $P^{-1}X$　　(C) $P^{T}X$　　(D) $P^{n}X$

解

$$\because A=PBP^{-1}, AX=\lambda X$$
$$\therefore PBP^{-1}X=\lambda X \Rightarrow B(P^{-1}X)=\lambda(P^{-1}X),\quad 选(B)$$

5. 下列结论正确的是(　　).

（A） X_1, X_2 是方程组$(\lambda E-A)X=\theta$ 的一个基础解系, 则 $k_1X_1+k_2X_2$ 是 A 的属于 λ 的全部特征向量,其中 k_1, k_2 是全不为零的常数

（B） A, B 有相同的特征值, 则 A 与 B 相似

（C） 如果$|A|=0$, 则 A 至少有一个特征值为零

（D） 若 λ 同是方阵 A 与 B 的特征值, 则 λ 也是 $A+B$ 的特征值

解 选（C）

(A) k_1,k_2应为不全为零的常数,

(B)A与A^T,

(C) 正确,因为方阵特征值的乘积等于方阵的行列式,

（D）若 $AX=\lambda X, BY=\lambda Y, X\neq Y$,λ 不是 A+B 的特征值

6. 设 λ_1，λ_2是矩阵 A 的两个不相同的特征值，ξ，η 是 A 的分别属于 λ_1，λ_2的特征向量，则（　　）.

（A）对任意 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$，$k_1\xi+k_2\eta$ 都是 A 的特征向量

（B）存在常数 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$，使 $k_1\xi+k_2\eta$ 是 A 的特征向量

（C）当 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$ 时，$k_1\xi+k_2\eta$ 不可能是 A 的特征向量

（D）存在唯一的一组常数 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$，使 $k_1\xi+k_2\eta$ 是 A 的特征向量

解 选（C）

假设 $k_1\xi+k_2\eta$ 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量,则

$$A(k_1\xi+k_2\eta)=\lambda(k_1\xi+k_2\eta)$$
$$\Rightarrow k_1\lambda_1\xi+k_2\lambda_2\eta=\lambda k_1\xi+\lambda k_2\eta$$
$$\Rightarrow k_1(\lambda_1-\lambda)\xi+k_2(\lambda_2-\lambda)\eta=0$$

因为 ξ， η 是 A 的分别属于 λ_1， λ_2 的特征向量,

所以 ξ， η 线性无关,则当 $k_1\neq 0$ ， $k_2\neq 0$ 时,有 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$,矛盾.

7. 设 3 阶矩阵 A 的秩为 1, 则 0 是(　　).

（A） A 的三重特征值　　　　（B） A 的二重特征值

（C） A 的一重或二重特征值　　　　（D） A 的二重或三重特征值

解 选（D）

因为 3 阶矩阵 A 的秩为 1, 所以 $\left|A\right|=0$,则 0 是 A 的特征值且 $(0E-A)X=0$ 的一个基础解系含两个线性无关解. 又因为特征值的重数≥线性无关特征向量的个数, 所以特征值 0 的重数≥2.可举例如 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 或 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

8. 下列矩阵中,不能相似对角化的是(　　).

$(A)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$　$(B)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　$(C)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　$(D)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$

解 选(B),因为存在一个二阶若当块.

9．设 A 为三阶实对称矩阵，且 $A^2+A=O$ ，若 A 的秩为 2 ，则 A 相似于 (　　).

$(A)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　$(B)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　$(C)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　$(D)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

解 选(D)

由 $\begin{cases}AX=\lambda X, X\neq 0\\ A^2+A=O\end{cases}\Rightarrow(\lambda^2+\lambda)X=0\Rightarrow\lambda^2+\lambda=0$,知实对称矩阵 A 的特征值只能是 0 或－1，再由实对称矩阵必可对角化及 A 的秩为 2，可得答案为（D）

10. 若矩阵 A 只与自己相似，则（　　）

（A） A 必为单位阵　　　　　　　　（B） A 必为数量矩阵

（C） A 必为零矩阵　　　　　　　　（D） A 为任意对角阵

解 选（B）

由 $P^{-1}AP = A \Rightarrow AP = PA$，A 与可逆矩阵 P 可交换.

11 .设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已知矩阵 A 与 B 相似，则 $R(A\text{-}2E)+R(A\text{-}E)$为(　　　　).

(A) 3　　　　(B) 4　　　　(C) 5　　　　(D) 6

解 选（B）

A相似于B　则 A 与 B 有相同的特征值，先求 B 的特征值,由

$$\left|B-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

知$\lambda = 1$是二重特征值,

因$(B-E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以$R(B-E) = 1$,故$\lambda = 1$时 B可以对角化,A也可以对角化

故$R(A-E) = 1$.

又因 2 不是 A 的特征值, 所以$\left|A-2E\right| \neq 0$,于是有$R(A-2E) = 3$,

故 $R(A-2E)+R(A-E) = 4$.

12. 设 A 是三阶矩阵，$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$可逆,若 $AB = \begin{pmatrix} b_{12} & 2b_{11} & -b_{13} \\ b_{22} & 2b_{21} & -b_{23} \\ b_{32} & 2b_{31} & -b_{33} \end{pmatrix}$,则 A 与（　　）相似.

$(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　　$(C)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

解 选（D）

矩阵 B 第一二列互换,然后第二列乘以 2,第三列乘以-1,可得 AB ,即

$$B\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=AB$$

因 B 可逆,用 B^{-1} 左乘上式可得答案.

(B)

1．已知方阵 A 的特征值为 0，1，3，对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

（1） 求 A；

（2） 求 $A^n\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解

（1）由题意取 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 有

$$A=P\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

（2）

$$A^n\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=A^n(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A^n\alpha_1+A^n\alpha_2+A^n\alpha_3$$

$$=\lambda_1{}^n\alpha_1+\lambda_2{}^n\alpha_2+\lambda_3{}^n\alpha_3=0+\alpha_2+3^n\alpha_3=\begin{pmatrix}1+3^n\\0+(-2)3^n\\-1+3^n\end{pmatrix}$$

2．已知向量 $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 的一个特征向量，

且 $|A|=-1$，求 a,b,c 与 X 所对应的特征值 λ.

解

$A^*X=\lambda\ X$ 两边同左乘以 A ,得

$|A|\ EX=\lambda\ AX, \because |A|=-1, \therefore AX=-\frac{1}{\lambda}X$

即 $\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

再结合 $|A|=-1$，可解得 $a=2, b=-3, c=2, \lambda=1$.

3. A 是奇数阶正交矩阵，$|A|=1$，证明 1 是 A 的特征值.

证明 $\because |A|=1, \therefore |A^T|=1$,有

$|E-A|=|E-A||A^T|=|A^T-E|=|(A-E)^T|=|A-E|$,

由于 A 是奇数阶方阵，所以 $|A-E|=0$，故 1 是 A 的特征值.

4. 设 5 阶方阵 A 是幂等矩阵（即 $A^2=A$），$R(A)=3$，求 A 的特征值.

解 由 $A^2=A$ 知，A 的特征值是 0 或 1. 又 $A^2=A \Rightarrow (E-A)A=O$，则 A 的列向量是 $(E-A)X=\theta$ 的解. 因为 $R(A)=3$，所以 $(E-A)X=\theta$ 至少有 3 个线性无关解，则 1 至少是 A 的三重特征值. 又 $AX=\theta$ 有 $5-R(A)$ =2 个线性无关解，则 0 至少是 A 的二重特征值，故 A 的特征值是 0，0，1，1，1.

5. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，α 是非零列向量，满足 $A^5\alpha=\lambda\alpha, A^6\alpha=\mu\alpha$, 证明 α 是 A 的特征向量.

证明 由 $A^6\alpha=AA^5\alpha=A\lambda\alpha=\mu\alpha \Rightarrow A\alpha=\frac{\mu}{\lambda}\alpha$, 知 α 是 A 的特征向量.

6.矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2t & 0 \\ 0 & 1 & -3t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的绝对值最大的实特征值及其对应的特征向量.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2t & 0\\ 0 & 1-\lambda & -3t\\ 1 & t & 1-\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{r_1+2r_3}}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2-2\lambda\\ 0 & 1-\lambda & -3t\\ 1 & t & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[\lambda^2-(1-3t^2)]$$

当$1-3t^2\ge 0$,即$-\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\frac{1}{\sqrt{3}}$,$A$有三个实特征值: $\lambda_1=1,\lambda_2=\sqrt{1-3t^2},\lambda_3=-\sqrt{1-3t^2}$,

因为$-\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $|\lambda_2|=|\lambda_3|\le|\lambda_1|=1$(当$t=0,|\lambda_2|=|\lambda_3|=|\lambda_1|=1$) .

由 $A-E=\begin{pmatrix}-2 & -2t & 0\\ 0 & 0 & -3t\\ 1 & t & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

解$(A-E)X=\theta$,当$t\ne 0$,A的绝对值最大的实特征值 1 的特征向量为$k\begin{pmatrix}-t\\ 1\\ 0\end{pmatrix},k\ne 0$,

当$t=0$,A的绝对值最大的实特征值 1 的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},k_1,k_2$不全为0.

7. 设A是 3 阶方阵,A有 3 个不同的特征值λ_1, λ_2, λ_3,对应的特征向量依次为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,

令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,证明:

(1) α_1,α_2,β线性无关;

(2) $\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

解 (1) 设$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+t_3\beta=0$,由题有

$$(t_1+t_3)\alpha_1+(t_2+t_3)\alpha_2+t_3\alpha_3=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是不同特征值所对应的特征向量，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

故有$t_1+t_3=0,\ t_2+t_3=0,\ t_3=0\Rightarrow t_1=t_2=t_3=0$,从而α_1,α_2,β线性无关.

(2) 由题有

$$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,$$
$$A^2\beta=A^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3,$$

设$k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0$,则有

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)+k_3(\lambda_1{}^2\alpha_1+\lambda_2{}^2\alpha_2+\lambda_3{}^2\alpha_3)$$
$$=(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1{}^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2{}^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3{}^2)\alpha_3=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是不同特征值所对应的特征向量，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

故有

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1{}^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2{}^2=0\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3{}^2=0\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1{}^2\\1&\lambda_2&\lambda_2{}^2\\1&\lambda_3&\lambda_3{}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0,$$

系数行列式为范德蒙行列式, 由于λ_1，λ_2，λ_3是 3 个不同的特征值,则系数行列式不为零,

所以$k_1=k_2=k_3=0$, 从而$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

8．已知$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&x&1\end{pmatrix}$可相似对角化，求与它相似的对角阵$\Lambda$和$A^n$.

解 由

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-2&2-\lambda&0\\4&x&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(\lambda+1)(\lambda-2)+2]=(1-\lambda)\lambda[\lambda\ -1]$$

可得特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$.

A可对角化，需二重特征值 1 有两个线性无关特征向量，则有$3-R(A-1\cdot E)=2$,

$$\text{由}R(A-1\cdot E)=R\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&x&0\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&1&0\\4&x&0\end{pmatrix}=1,$$

有$x=-2$，

$$\text{故}A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_1=0$,

$$(A-0E)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&-2&1\\-2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解 $(A-0E)X=\theta$, 得一特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$

$$(A-1E)=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解 $(A-1E)X=\theta$, 得线性无关特征向量：

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以存在相似变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix},\quad 使得P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},$$

从而 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\-1&1&0\\4&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$

9．设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$，试判断 A 、B 是否相似，若相似，求出可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 0 & -6 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

知 A 、B 有相同的特征值且都可以对角化，所以 A 与 B 相似.

先求特征向量：

当$\lambda_1=2$,

$$\left(A-\lambda E\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

解$\left(A-\lambda E\right)X=\theta$, 得一特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=1$,

$$\left(A-E\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

解$\left(A-E\right)X=\theta$,得特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

当$\lambda_3=-1$,

$$\left(A+E\right)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

解$\left(A+E\right)X=\theta$,得特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

则有可逆矩阵 $P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 使得 $P_1^{-1}AP_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$,

同理,有可逆矩阵 $P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ ，使得$P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

则$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$，故$P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$

10. 设矩阵 A 与对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$相似，证明

$(P\Lambda P^{-1}-\lambda_1E)(P\Lambda P^{-1}-\lambda_2E)(P\Lambda P^{-1}-\lambda_3E)$.

证 因为矩阵 A 与对角阵Λ相似，则存在可逆矩阵 P， 使得 $A=P\Lambda P^{-1}$，

从而

$$
\begin{aligned}
&(P\Lambda P^{-1}-\lambda_1E)(P\Lambda P^{-1}-\lambda_2E)(P\Lambda P^{-1}-\lambda_3E)\\
&=P(\Lambda-\lambda_1E)P^{-1}P(\Lambda-\lambda_2E)P^{-1}P(\Lambda-\lambda_3E)P^{-1}\\
&=P\begin{pmatrix}0&&\\&\lambda_2-\lambda_1&\\&&\lambda_3-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2&&\\&0&\\&&\lambda_3-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3&&\\&\lambda_2-\lambda_3&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}\\
&=O
\end{aligned}
$$

11．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$有一个 2 重特征根，求 a 的值并讨论 A 可否相似对角化.

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-3\\-1&4-\lambda&-3\\1&a&5-\lambda\end{vmatrix}\overline{\overline{r_1-r_2}}\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\-1&3-\lambda&-3\\1&a+1&5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)，$$

（1）当 $a=-2, 18+3a=12$，有$\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$ ，$\lambda=2$ 是A的二重特征值，由

$$\left(A-2E\right)=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知$3-R\left(A-2E\right)=1$， A 可以对角化.

(2) 当 $a=-\dfrac{2}{3}, 18+3a=16$, 有 $\lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2$ ，$\lambda=4$ 是 A 的二重特征值

由 $(A-4E)=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -\dfrac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ -1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

知 $3-R(A-4E)=1$,此时 A 不能对角化.

12．A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$$

（1） 求矩阵 B,使 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$;

（2） 求 A 的特征值.

解

(1) 由 $A(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，知

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

（2）因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，所以 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆

有 $P^{-1}AP=B$ 即矩阵 A 与 B 相似，由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值.由

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 2\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(4-\lambda)=0$$

得矩阵 B 的特征值，即矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4.$

13．A 是 3 阶实对称矩阵，A 征值为 1， 0，-1，A 属于 1 与 0 的特征向量分别为 $(1,a,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$，求 A.

解 A 是 3 阶实对称矩阵，且 A 的特征值互不相同，故这三个特征值所对应的特征向量正交,有

$$\left(1,a,1\right)\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}=0,\text{得}:a^2+2a+1=(a+1)^2=0$$

所以$a=-1$

设 A 的属于-1 的特征向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则有$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_3=0 \end{cases}$，

可得 A 的属于-1 的一个特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

故有相似变换矩阵$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,使得$A=P\ \Lambda P^{-1}=P\ \Lambda P^{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

14．设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=\left(1,-1,1\right)^T$ 是A属于λ_1 的一个特征向量，$B=A^5-4A^3+E$. 求 B 的特征值和特征向量.

解 A 是 3 阶实对称矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$ 互不相同，所以对应于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量两两正交.设

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 与α_1正交$\Rightarrow x_1-x_2+x_3=0$，

可得正交解$X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$X_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B=f(A)=A^5-4A^3+E$ 的特征值 $\mu=f(\lambda)$,即有B的特征值为$\mu_1=-2,\mu_2=\mu_3=1$,

B属于$\mu_1=-2$的全部特征向量为$k\alpha_1(k\neq 0)$,

B属于$\mu_2=\mu_3=1$的全部特征向量为$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,($k_1,k_2$不全为0）.