高等代数II试卷

1. 已知二次型 $f(x_1,x_{2,}x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2。

(1)求 a 的值；

(2)求正交变换 $X=QY$ ，把 $f(x_1,x_{2,}x_3)$ 化成标准形。

2. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 。

$f(x)=x^3-3x^2-x-1$， $g(x)=3x^2-2x+1$

3. 求 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的最大公因式。

$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$， $g(x)=x^3+x^2-x-1$

4. 求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根。

5. 设 A 是 m 阶正定矩阵， B 是 $m\times n$ 实矩阵，证明 B^TAB 是正定矩阵的充要条件是 $R(B)=n$ 。

答案

1.

(1)由于二次型 f 的秩为2，则对应矩阵 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 行列式为0，可得 a=0。

(2) a=0 时，$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2\lambda$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $\eta_1=(1,1,0)^T,\eta_2=(0,0,1)^T$，

$\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\eta_3=(-1,1,0)^T$

且 η_1,η_2,η_3 两两正交，将 η_1,η_2,η_3 单位化得：

$e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,e_2=(0,0,1),e_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$

取 $Q=(e_1,e_2,e_3)$ 为正交矩阵

令 $X=QY$，得 $f(x_1,x_{2,}x_3)=2y_1^2+2y_2^2$

2.

(1) 待定系数法设 $x^3-3x^2-x-1=(\frac{1}{3}x+p)(3x^2-2x+1)+qx+r$

展开可得

$$x^3-3x^2-x-1=x^3+\left(3p-\frac{2}{3}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-2p+q\right)x+p+r$$

两边 0 到 3 次项系数相等所以 $p=-\frac{7}{9},q=-\frac{26}{9},r=-\frac{2}{9}$

3.

(1) $f(x)=xg(x)-2x^2-3x-1$, 求 $g(x)$ 与 $2x^2+3x+1$ 的最大公因式即可. 因式分解 $g(x)=(x+1)^2(x-1),2x^2+3x+1=(x+1)(2x+1)$, 故最大公因式为 $x+1$（差一个非零常数）。

4.

$f'(x)=3x^2-6x+t$ 且 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)(3x^2-6x+t)+\left(\frac{2}{3}t-2\right)x+(\frac{1}{3}t-1)$.

当$t=3$,此时余式为 0，$\left(f(x),f'(x)\right)=f'(x)$有重根。

当$t\neq 3$，此时$\left(f(x),f'(x)\right)=(f'(x),2x+1)$.如果$f(x)$有重根，则必有$2x+1|3x^2-6x+t$.余数定理推论知这要求$3x^2-6x+t|_{x=-\frac{1}{2}}=0$,解得$t=-\frac{15}{4}$.

5.

必要性：

若B^TAB是正定矩阵，则对任意 n 阶非零向量，有$X^T\left(B^TAB\right)X>0$，即$\left(BX\right)^TA\left(BX\right)>0$，由于 A 是正定矩阵，故$BX\neq 0$。因此$BX=0$只有零解，从而 B 满秩，即$R(B)=n$

充分性：

由于$\left(B^TAB\right)^T=B^TAB$，故$B^TAB$是实对称矩阵，若$R(B)=n$，即矩阵 B 的列向量线性无关，则线性方程组$BX=0$只有零解，从而对任意 n 维非零向量 X，$BX\neq 0$。又因为 A 是正定矩阵，故$\left(BX\right)^TA\left(BX\right)>0$，于是当$X\neq 0$时，$X^T\left(B^TAB\right)X>0$。因此$B^TAB$是正定矩阵