程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第一章习题1-12详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-02-27 11:31

收录于合集
#实变函数与泛函分析
26个 >

第一章习题1-12针对这一章第1节和第2节的相关内容：集合的表示和集合的运算. 这两节的内容相对比较简单，大部分知识点同学们都接触过，这里相当于复习一下. 新的知识点包括：一族集合的并、交，德摩根公式，集合列的上极限和下极限及单调集合列的极限.

下面结合课后习题把相关的知识点总结一下.

第1-3题考查集合的运算. 需要的知识点有：

定义

- 并集

$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \text{ or } x \in B\}$$

- 交集

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \text{ and } x \in B\}$$

- 差集

$$A \setminus B = \{x \ : \ x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

- 一族集合的并集

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\alpha\}$$

- 一族集合的交集

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x : \forall\alpha\in\Lambda, x\in A_\alpha\}$$

运算性质

- 交换律：

$$A\cup B = B\cup A,\ A\cap B = B\cap A.$$

- 结合律：

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C).$$

- 分配律：

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)\cap B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\cap B)$$

- 德摩根公式：

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c,$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c.$$

1. 证明:

(1) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

证明.

[方法一] 利用定义.

(1) 因为

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \setminus B) \setminus C \\
\Longleftrightarrow\ & x \in (A \setminus B) \text{ 且 } x \notin C \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \text{ 且 } x \notin B \text{ 且 } x \notin C \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \text{ 且 } x \notin B \cup C \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \setminus (B \cup C),
\end{aligned}
$$

所以 $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \\
\Longleftrightarrow\ & x \in (A \cup B) \text{ 且 } x \notin C \\
\Longleftrightarrow\ & \big(x \in A \text{ 或 } x \in B\big) \text{ 且 } x \notin C \\
\Longleftrightarrow\ & \big(x \in A \text{ 且 } x \notin C\big) \text{ 或 } \big(x \in B \text{ 且 } x \notin C\big) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in (A \setminus C) \text{ 或 } x \in (B \setminus C)
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

所以 $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

[方法二] 利用集合运算的性质.

(1) $(A \setminus B) \setminus C = \left(A \cap B^c\right) \cap C^c = A \cap \left(B^c \cap C^c\right) = A \cap \left(B \cup C\right)^c = A \setminus (B \cup C)$;

(2) $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c = \left(A \cap C^c\right) \cup \left(B \cap C^c\right) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. 证明:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B)$;

(2) $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B)$.

证明.

证明:

[方法一] 利用定义.

(1) 因为

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \exists \alpha_0 \in I \text{ s.t. } x \in A_{\alpha_0} \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \exists \alpha_0 \in I \text{ s.t. } x \in A_{\alpha_0} \setminus B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B),
\end{aligned}
$$

所以 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B)$;

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha \setminus B
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B),$$

所以 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B)$.

[方法二] 利用集合运算的性质.

(1) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B = \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap B^c = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B^c) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B)$;

(2) $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus B = \left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap B^c = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B^c) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B)$.

3. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), n = 2, 3, \cdots,$$

证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合, 而且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明.

第一步, 证明 $\{B_n\}$ 互不相交.

不妨设 $i < j$. 因为

$$
\begin{aligned}
B_i &\subset A_i, \\
B_j &= A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right) \\
&= A_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)^c = A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c\right) \\
&= A_j \cap A_i^c \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{j-1} A_k^c\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$
B_i \cap B_j \subset A_i \cap B_j = A_i \cap A_j \cap A_i^c \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{j-1} A_k^c\right) = \emptyset.
$$

第二步, 证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, \cdots.$

一方面, 因为 $B_i \subset A_i$ 对 $i=1,2,\cdots$ 都成立, 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 显然成立.

另一方面, 设 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 至少存在一个 $1 \leq i \leq n$ 使得 $x \in A_i$. 设 i_0 是满足该条件的最小的下标, 即 $x \in A_{i_0}$ 且 $x \notin A_i, i=1,2,\cdots,i_0-1$. 因此

$$x \in A_{i_0} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{i_0-1} A_i\right) = B_{i_0} \subset \bigcup_{i=1} B_i.$$

事实上, 我们已经证明了 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

综上可得, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i, \quad n=1,2,\cdots$.

第4-5题考查集合列的上极限和下极限的概念.

- 上极限:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x: \text{存在无穷多个 } A_n, \text{使 } x \in A_n\}$$

- 下极限:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x: \text{当 } n \text{ 充分大以后都有 } x \in A_n\}$$

4. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $A_{2n}=(0,n)$, $n=1,2,\cdots$, 求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

解.

对于 $(0,+\infty)$ 中的每个点 x, 都存在自然数 $N(x)$, 使得当 $n>N(x)$ 时,

$$\frac{1}{n}<x<n,$$

即当 $n>N(x)$ 时, $x\in A_{2n}$ 但 $x\notin A_{2n-1}$. 换句话说, 对于 $(0,+\infty)$ 中的每个点 x, 具有充分大的偶数指标的集都含有 x, 即 $\{A_n\}$ 中有无穷多个集合含有 x. 而充分大的奇数指标的集都不含有 x, 即 $\{A_n\}$ 中不含 x 的集不会是有限个. 又 $(-\infty,0]$ 中的点不属于任何的 A_n, 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n=(0,+\infty),\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n=\emptyset.$$

5. 证明: $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

证明. 因为

$$
\begin{aligned}
x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n &\iff \text{当 } n \text{ 充分大以后都有 } x \in A_n \\
&\iff \exists n \in \mathbb{N}, \text{当 } m \geq n \text{ 时有 } x \in A_m \\
&\iff x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,
\end{aligned}
$$

所以, $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

第6-10题考查集合包含关系及集合相等.

- 集合包含关系:

$$A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

证明两个集合的包含关系, 也可以通过证明补集的反包含关系得到. 即

$$A \subset B \iff B^c \subset A^c.$$

- 集合相等:

$$A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A.$$

证明两个集合相等, 通常使用定义, 即证明两个集合互相包含.

6.

(1) 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 均是双射. 对任意 $O \subset Z$, 证明: $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$;

(2) 设 $f: X \to Y$ 是双射, $O \subset Y$, 证明: $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$.

证明.

(1) 因为

$$\begin{aligned} & x \in (g \circ f)^{-1}(O) \\ \iff & x \in X \text{ 且 } (g \circ f)(x) \in O \\ \iff & x \in X \text{ 且 } g(f(x)) \in O \\ \iff & x \in X \text{ 且 } f(x) \in g^{-1}(O) \\ \iff & x \in f^{-1}(g^{-1}(O)), \end{aligned}$$

所以 $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(O^c) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \text{ 且 } f(x) \in O^c \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \text{ 且 } f(x) \notin O \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \text{ 且 } x \notin f^{-1}(O) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \setminus f^{-1}(O) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in [f^{-1}(O)]^c,
\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$.

7. 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 E 上的函数, 证明:

(1) $\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > g(x) + \dfrac{1}{n}\right\}$;

(2) $\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcap\limits \left\{x : f(x) > g(x) - \dfrac{1}{}\right\}$.

$$(2)\ \{x : f(x) \ge g(x)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : f(x) > g(x) - \frac{1}{n}\right\}$$

证明.

(1) 记 $A = \{x : f(x) > g(x)\}$,

$$A_n = \left\{x : f(x) > g(x) + \frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \cdots .$$

一方面, 对任意的自然数 n, $A_n \subset A$ 显然成立, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$.

另一方面, 若 $x \in A$, 即 x 满足 $f(x) > g(x)$, 则 $f(x) - g(x) > 0$. 又 $\frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$, 由极限的定义, 对于 $\varepsilon = f(x) - g(x) > 0$, 存在自然数 N, 当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. 即当 $n > N$ 时, $f(x) > g(x) + \frac{1}{n}$, 也就是 $x \in A_n$. 因此 $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

综合以上讨论可得 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) 记 $B = \{x : f(x) \ge g(x)\}$,

$$B_n = \left\{x : f(x) > g(x) - \frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \cdots .$$

一方面, 对任意的自然数 n, $B \subset B_n$ 显然成立, 故 $B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

另一方面, 若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, 则对任意的自然数 n, $x \in B_n$, 即

$$f(x) - g(x) > -\frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

又 $-\frac{1}{n}$ 单调递增且极限为 0, 故

$$f(x) - g(x) \geq 0,$$

即 $x \in B$. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B$.

综合以上讨论可得 $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

8. 设 $\{A_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ 是集合族.

(1) 若对任意 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $A_{\varepsilon_1} \supset A_{\varepsilon_2}$, 证明:

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}};$$

(2) 若对任意 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$, 证明:

(2) 若对任意 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$, 证明:

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}.$$

证明.

(1) 一方面, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \subset \bigcup\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon$ 显然成立.

另一方面, 若 $x \in \bigcup\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon$, 则存在 $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, 使得 $x \in A_{\varepsilon_0}$. 因为 $\varepsilon_0 > 0$, 必存在自然数 n_0 使得 $\frac{1}{n_0} < \varepsilon_0$, 故 $x \in A_{\varepsilon_0} \subset A_{\frac{1}{n_0}}$. 因此, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$. 于是 $\bigcup\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$.

综合以上讨论可得 $\bigcup\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$.

(2) 一方面, $\bigcap\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ 显然成立.

另一方面, 若 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$, 则对任意的自然数 n, 有 $x \in A_{\frac{1}{n}}$. 对任意的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, 存在自然数 n_ε 使得 $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, 故 $x \in A_{\frac{1}{n_\varepsilon}} \subset A_\varepsilon$. 由 ε 的任意性可得 $x \in \bigcap\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon$. 因此, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \subset$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon.$$

综合以上讨论可得 $\bigcap\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$.

9. 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 E 上的函数, 证明:

对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\{x : |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon\} \subset$$
$$\{x : |f(x)| > \varepsilon\} \cup \{x : |g(x)| > \varepsilon\}.$$

证明. 记

$$\begin{aligned} A =& \{x : |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon\}, \\ B =& \{x : |f(x)| > \varepsilon\}, \\ C =& \{x : |g(x)| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

若 $x \in B^c \cap C^c$, 即 x 满足

$$|f(x)| \le \varepsilon \quad 且 \quad |g(x)| \le \varepsilon.$$

则

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)| \le \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon,$$

即 $x \in A^c$. 事实上, 我们证明了 $B^c \cap C^c \subset A^c$, 因此有

$$A \subset (B^c \cap C^c)^c = B \cup C.$$

10. 证明: 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$,

(1) $\{x : \inf\{f_n(x)\} < c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) < c\}$;

(2) $\{x : \inf\{f_n(x)\} \ge c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) \ge c\}$.

证明.

(1) 记 $A = \{x : \inf\{f_n(x)\} < c\}$,

$$A_n = \{x : f_n(x) < c\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

首先, 对任意自然数 n, 若 $x \in A_n$, 则 $x \in A$, 即 $A_n \subset A$. 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$.

下证 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 为此, 只需要证明

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A^c$$

即可. 事实上, 若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, 即对任意自然数 n, 有 $f_n(x) \geq c$, 则 $\inf\{f_n(x)\} \geq c$, 故 $x \in A^c$. 结论得证.

综合前面的讨论可得 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) 由 (1) 及 De Morgan 公式立即可得.

第11题考查单调集合列的性质:

- 如果$\{A_n\}$单调增加, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

- 如果$\{A_n\}$单调减少，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

> 11. 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数，且对任意 $x \in E$, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明对任意 $c \in \mathbb{R}$, $A_n = \{x : f_n(x) > c\}$ 是单调增集合列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > c\}$.
>
> 证明.
>
> $\forall n \in \mathbb{N}$, 若 $x \in A_n$, 即 x 满足 $f_n(x) > c$, 有
>
> $$f_{n+1}(x) \ge f_n(x) > c,$$
>
> 即 $x \in A_{n+1}$. 因此 $A_n \subset A_{n+1}$, 即 $\{A_n\}$ 是单调增集合列.
>
> 由单调集列的性质可得 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 因为
>
> $$\begin{aligned} & x \in \lim_{n\to\infty} A_n \\ \Longleftrightarrow\ & x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_{n_0}$$

$$\xLeftrightarrow{\{A_n\}\text{ 单调增}} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0 \text{ 有 } x \in A_n$$

$$\Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0 \text{ 有 } f_n(x) > c$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) > c$$

$$\Longleftrightarrow x \in \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) > c\},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > c\}$.

第12题主要考查 $\varepsilon-\delta(N)$ 语言和集合语言的相互转化.

12. 证明: 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数列, 令 $E=\{x:\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=+\infty\}$, 则

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:f_n(x)>k\}.$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}
&x\in E\\
\Longleftrightarrow\ &\lim_{n\to\infty}f_n(x)=+\infty\\
\Longleftrightarrow\ &\forall k\in\mathbb{N},\exists N\in\mathbb{N},\text{当 } n\geq N \text{ 时}, f_n(x)>k\\
\Longleftrightarrow\ &x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:f_n(x)>k\},
\end{aligned}$$

所以 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{x:f_n(x)>k\}$.

END