Title

§3

Date: M T W T F S S

Notes   Review

完备的度量空间

度量空间完备化

压缩映射和不动点理论

- 度量空间中 Cauchy 列

(X,d): $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 是 Cauchy列 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N \in N^+$ s.t. $\forall m,n>N$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

(X,d)是完备的 X中任意一个柯西列都是收敛的

$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ Cauchy $\exists x \in X$ 使得 $x_n \xrightarrow{d} x$

eg1 (Q,d) 度量空间 $a_1=3.1$ $a_2=3.14$ … $a_n=3.141\dots$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}=Q$ Cauchy 收敛点是π

eg2 R^n 完备的

$Q.$ R/Q 非完备

- 1个空间可以有多个度量

$C[0,1]$ 是完备的度量空间 sup不在集合里

默认测度 d $d(f,g)=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$ 闭区间连续函数一定有最大.小值

证明: 设 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ 且 Cauchy

$\forall \varepsilon>0$ $\exists N$ 对$\forall$ $m,n>N$ $d(f_m,f_n)<\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\in[0,1]$ $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

一致 Cauchy $\exists f$ $f_n(x) \xrightarrow[\text{一致收}]{\text{Uniform}} f(x) \in C[0,1]$

连续函数一致收敛的极限亦为连续函数

反例: $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$

i 一个集合可以有多个度量 (Q,d) $d(p,q)=|p-q|$

ii d是$[0,1]$上的一个度量 $d: C[0,1]\times C[0,1]\to R$

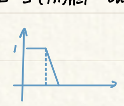
$d(f,g)\geq 0$ 且 $d(f,g)=0$ $\Rightarrow f=g$

$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$

$d(f,h)=\int_0^1|f(x)-h(x)|dx=\int_0^1|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|dx\leq\int_0^1|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|dx$

$=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx+\int_0^1|g(x)-h(x)|dx = d(f,g)+d(g,h)$

下证 $\exists (f_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy列 f_n不收敛到$C[0,1]$中的任一元素



$$f_n(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq x\leq 1 \\ \perp & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \end{cases}$$

$d(f_m,f_n)=\int_0^1|f_n(x)-f_m(x)|dx$

Content 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Title

Date: M T W T F S S

Notes Review

$\to (f_n)_{n=1}^{\infty}$ 在d下是Cauchy列

$\to f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}<x\leq 1\end{cases}$ 非连续 $f\notin C[0,1]$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty\ d} f$

- l^{∞}是完备的度量空间 $l^{\infty}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid |x_n|\leq M\}$

证明：$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq l^{\infty}$ Cauchy $d(x,y)=\sup\limits_{n}|x_n-y_n|$

$\Downarrow$ $x_n=(x_n^m)_{m=1}^{\infty}$ $x_n^m\in R$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in N^+$ s.t. $\forall n_1, n_2>N$ 有 $d(x_{n_1},x_{n_2})<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \sup\limits_{m\in N^+}|x_{n_1}^m-x_{n_2}^m|<\varepsilon \to$ 固定 m $(x_n^m)_{n=1}^{\infty}$ 是K中的一个Cauchy列

$\Rightarrow \exists\, y_m\in R$ s.t. $x_n^m\xrightarrow{n\to\infty} y_m$ $(y_m)_{m=1}^{\infty}$

要证 $(y_m)_{m=1}^{\infty}\in l^{\infty}$ $x_n\xrightarrow{d}(y_m)_{m=1}^{\infty}$ (任意Cauchy列收敛则l^{∞}完备)

$\forall\varepsilon>0$ $x_1=(x_1^1, x_1^2, \dots x_1^m, \cdots)$

$\exists N$ $x_2=(x_2^1, x_2^2, \dots x_2^m, \cdots)$

$x_{n_1}=(x_{n_1}^1, x_{n_1}^2, \dots x_{n_1}^m, \cdots)$

$x_{n_2}=(x_{n_2}^1, x_{n_2}^2 \dots x_{n_2}^m, \cdots)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$y_1 \quad y_2 \quad y_m$

$d(x_m, x_n)<\varepsilon$ $|x_{n_1}^m-x_{n_2}^m|<\varepsilon$ $n_2\to\infty \Rightarrow |x_{n_1}^m-y_m|<\varepsilon$

$\forall m$ $|x_{n_1}^m|\leq M \Rightarrow \forall m$ $|y_m|\leq M+\varepsilon \Rightarrow (y_m)_{m=1}^{\infty}\in l^{\infty}$

- $E\subset(X,d)$ E是疏集指 E不在X中的任何一个开集中稠密
- $A\subset X$为第一纲：A可以写成可数个疏集的并，不是第一纲的集合为第二纲
- 定理：对每一个(X,d)必存在一个完备集$(\tilde{X},\tilde{d})$ 使(X,d)与$(\tilde{X},\tilde{d})$中的一个稠密集是

则称$(\tilde{X},\tilde{d})$为(X,d)的完备化

(Q,d)在(R,d)中稠密

$R=\begin{cases} x\in Q & (x_n)_{n=1}^{\infty} & x_n=x \\ x\in Q\backslash R & (x_n)_{n=1}^{\infty} & (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq Q \text{ (逼近)}\end{cases}$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为(Q,d)上的Cauchy列 $x_n\xrightarrow{n\to\infty} x$

Q中 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\sim(y_n)_{n=1}^{\infty}$

"~"等价关系

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n \overset{R中}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty}y_n$

$\tilde{R}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n\in Q \quad (x_n)_n^{\infty} \text{ Cauchy}\}$

Title

Date: M T W T F S S

Notes

Review

等价类

$\tilde{R} \backslash \sim = \{ [(x_n)_{n=1}^{\infty}] \mid x_n \in Q \quad (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ Cauchy} \}$

R中点x和有理 Cauchy列的等价类——对应

- 压缩映射 $T:(X,d_1) \to (Y,d_2)$

  $x,y \in X \quad d(Tx,Ty) = \theta d(x,y) \quad 0<\theta<1$ 则T为压缩映射

命题 若$T:(X,d_1)\to(Y,d_2)$是一个压缩映射 则T连续 $\quad d(Tx_n, Tx) \leqslant \theta d(x_n, x) < \theta\varepsilon < \varepsilon$

- 设(X,d)完备 $T: X \to X$ 并且 $d(Tx,Ty) = \theta d(x,y)$ 则 $\exists \bar{x} \in X$ s.t. $T\bar{x} = \bar{x}$

不动点定理

证明: $\forall x \in X \quad (T^n x)_{n=1}^{\infty} \subset X \quad T^2 = T(Tx)$

先默认对 $(T^n x)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy列 $T^n x \xrightarrow[]{d} \bar{x}$ Def

T连续 $T(\lim\limits_{n\to\infty} T^n x) = T\bar{x}$

极限可以换位置 $\to \lim\limits_{n\to\infty} T^n x = \bar{x}$

下证$T^n x$是 Cauchy列

$d(T^n x, T^m x) = d(T T^{n-1} x, T T^{m-1} x) \leqslant \theta d(T^{n-1}x, T^{m-1}x) \leqslant \dots \leqslant \theta^N d(T^{n-N}x, T^{m-N}x)$ $\quad m=n+p$

$= d(T^n x, T^{n+p}x) \leqslant d(T^n x + T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, T^{n+2}x) + \dots + d(T^{m-1}x, T^m x)$

$\leqslant (\theta^n + \theta^{n-1} + \dots + \theta^{n+p+1}) d(x, Tx) \quad \hookrightarrow 0$

$= \dfrac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta} \to 0$

eg f压缩 $x_m \quad f(x_m) = x_m \quad \cos(\cos(\dots\cos(x)) = \frac{\Xi}{2}$