第二章　矩阵

习题 2.1

1．设 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & b+c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & d-a \\ b & 1 \end{pmatrix}$，求 a，b，c，d 的值.

解

$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 0 & b+c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & d-a \\ b & 1 \end{pmatrix}$，所以 $a=2, b=c=d=0$.

2．计算

（1）$\left(a_1,\ \ a_2,\ \ a_3\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}\left(b_1,\ \ b_2,\ \ \ldots,\ \ b_n\right)$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

（5）$\left(k_1,\ \ k_2,\ \ k_3\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$　　（6）$\left(x_1\ \ \ x_2\ \ \ x_3\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

解

（1）$\left(a_1,\ \ a_2,\ \ a_3\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

（2）$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}\left(b_1,\ \ b_2,\ \ \ldots,\ \ b_n\right) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_1 & \ldots & a_2b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}b_1 & a_nb_1 & \ldots & a_nb_1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

（5）

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\\ &=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3\end{aligned}$$

（6）

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} k_1a_{11}+k_2a_{21}+k_3a_{31} & k_1a_{12}+k_2a_{22}+k_3a_{32} & k_1a_{13}+k_2a_{23}+k_3a_{33} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3．计算

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

（3）$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$

解

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，依次类推可知$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$，依次类推得

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

（4）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E$，所以$\begin{cases} 2^n E, n\text{为偶数} \\ 2^{n-1} A, n\text{为奇数} \end{cases}$.
其中A为原矩阵

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$. 求 $f(A)$.

解 因为

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=x^2+1,$$

故 $f(A)=A^2+E=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

5．设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求所有与 A 可交换的矩阵.

解 设与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，根据 $AB=BA$ 得

$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$

从而 $a+c=a, b+d=a+b, d=c+d$，解得 $c=0, d=a$，所 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 其中 a,b 为任意常数.

6．设 A、B 为同阶方阵。证明：$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$ 的充分必要条件是 A、B 可交换.

证 $(A\pm B)^2=A^2\pm AB\pm BA+B^2=A^2\pm 2AB+B^2 \Leftrightarrow AB=BA$.

7．若$A=\frac{1}{2}(B+E)$.证明：$A^2=A$的充要条件是$B^2=E$.

证 $A^2=A \Leftrightarrow \frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{2}(B+E) \Leftrightarrow B^2+2B+E=2B+2E$

8．证明：

（1）若 B_1, B_2 都与 A 可交换，则 B_1+B_2，B_1B_2 都与 A 可交换；

（2）若 B 与 A 可交换，则 B 的多项式 $f(B)$ 与 A 可交换.，

其中 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ax+a_0$，（$n\neq 0$）.

证 （1）$(B_1+B_2)A=B_1A+B_2A=AB_1+AB_2=A(B_1+B_2)$，

$(B_1B_2)A=B_1B_2A=B_1AB_2=A(B_1B_2)$；

（2）由（1）知 $B^kA=AB^k$，所以

$$
\begin{aligned}
&f(B)A=(a_nB^n+a_{n-1}B^{n-1}+\cdots+aB+a_0E)A\\
&=a_nB^nA+a_{n-1}B^{n-1}A+\cdots+aBA+a_0EA\\
&=a_nAB^n+a_{n-1}AB^{n-1}+\cdots+aAB+a_0AE\\
&=Af(B)\cdot
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow B^2=E$.

9．设 A 为 n 阶方阵，证明：

（1）$A+A^T$ 为对称矩阵, $A-A^T$ 为反对称矩阵；

（2）任一 n 阶方阵 A 都可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

证（1）因

$$A+A^T=(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T$$

故 $A+A^T$ 为对称矩阵。

因

$$(A-A^T)^T=A^T+(-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$$

故 $A-A^T$ 为反对称矩阵.

（2）由(1)易知 $\dfrac{A+A^T}{2}$ 是对称矩阵, $\dfrac{A-A^T}{2}$ 是反对称矩阵, 于是

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$$

即 A 等于一个对称矩阵与一个反对称矩阵

10．设

$$P=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}3&1&1\end{pmatrix},\ A=PQ$$

求 A^n.

解 因为

$$PQ=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&0&0\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$QP=\begin{pmatrix}3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$$

所以

$$A^n=(PQ)^n=PQ\cdot PQ\cdot\cdots\cdot PQ=P(QP)(QP)\cdots(QP)Q$$

$$=P(QP)^{n-1}Q=(QP)^{n-1}PQ=2^{n-1}\begin{pmatrix}3&1&1\\0&0&0\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$$

习题 2.2

1．求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}3&1&3\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&0\\3&1&3\end{pmatrix}$

解

（1）$\begin{pmatrix}3&1&3\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-3&-6\\0&0&3\end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&0\\3&1&3\end{pmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-9&3\\-6&12&-6\\-1&5&-3\end{pmatrix}$

2．若方阵 A 满足等式 $A^3=O$．证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$。

证 因为 $(E-A)(E+A+A^2)=E$，所以 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$．

3．设

$$A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

求$(P^{-1}AP)^{100}$.

解

$$(P^{-1}AP)^{100}=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})AP\cdots P^{-1}A(PP^{-1})AP=P^{-1}A^{100}P$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&2^{100}&\\&&2^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&2^{100}&\\&&2^{100}\end{pmatrix}$$

4. 解下列矩阵方程

(1) $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}8&3\\-5&9\\2&15\end{pmatrix}$

(2) $X\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-1&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$

解 （1）

因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-27\neq 0$$

所以A可逆，又

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=-\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-3 & -6 & -6\\ -6 & 3 & 6\\ -6 & 6 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

用A^{-1}左乘方程两边得

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 3\\ -5 & 9\\ 2 & 15\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 51\\ 7 & -15\\ 28 & 3\end{pmatrix}$$

（2）因

$$|A| = -1 \neq 0$$

所以 A 可逆，计算得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

用 A^{-1} 右乘方程 $XA=B$ 两边得

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

（3）$X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

5．设方阵 A 满足等式 $A^2+A-7E=0$ ．试证明方阵 A 、$A+3E$ 、$A-2E$ 均可逆并求其逆.

证 $A^2+A-7E=O\Rightarrow A(A+E)=7E$，所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{7}(A+E)$

$$A^2+A-7E=O\Rightarrow (A+3E)(A-2E)=E$$

$$\Rightarrow (A+3E)^{-1}=A-2E,(A-2E)^{-1}=A+3E$$

6. 设 A, B 均是 n 阶矩阵，且 $AB=A+B$. 证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$.

证 因为 $AB=A+B$，即 $AB-A-B=O$，因此 $AB-A-B+E=E$

也即 $A(B-E)-(B-E)=E$，即 $(A-E)(B-E)=E$

故 $A-E$ 可逆，并且 $(A-E)^{-1}=(B-E)$.

7．设 3 阶矩阵 *A, X* 满足 $X=AX-A^2+E$ 且

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

求 *X.*

解 $X=AX-A^2+E\Rightarrow(E-A)X=E-A^2=(E-A)(E+A)$

因为 $E-A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $X=E+A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

8．设 3 阶矩阵 *A, B* 满足 *AB=A+2B* 且

$$A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

求 *B*.

解

$$AB=A+2B\Rightarrow B=(A-2E)A=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

9. 设 *A* 为 n 阶矩阵，且 $|A|=\frac{1}{3}$. 求 $\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-15A^*\right|$.

解 $\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-15A^*\right|=\left|4A^{-1}-15|A|A^{-1}\right|=\left|-A^{-1}\right|=(-1)^n\frac{1}{|A|}=(-1)^n3$

10. .设 $A=\begin{pmatrix}2&4&5\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$. 求 $(A^*)^{-1}$.

解 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&4&5\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$

习题 2.3

1．设 $F=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$，$A$ 为例 1 中的矩阵．用分块乘法计算 AF．

解 为使分块乘法得以进行，当 A 采取例 1 中的分块方式时，F 的行必须与 A 的列有相同的分块方式（F 的列则可任意划分）．现令 $F=\begin{pmatrix}G\\H\end{pmatrix}$，其中

$$G=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}，H=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}$$

这样，A 为 2 × 2 分块矩阵，F 为 2 ×1 分块矩阵，符合分块乘法的要求．于是

$$AF=\begin{pmatrix}3E_3&B\\O&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G\\H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2G+BH\\CH\end{pmatrix}.\text{ 因此 } AF=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\\-2&2\\4&1\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

2. 设3阶矩阵A按列分块为$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且$|A|=5, B=(\alpha_1+2\alpha_2, 3\alpha_1+4\alpha_2, 5\alpha_3)$，求$|B|$.

解 $|B|=|\alpha_1+2\alpha_2\quad 3\alpha_1+4\alpha_2\quad 5\alpha_3|=|\alpha_1\quad 4\alpha_2\quad 5\alpha_3|+|2\alpha_2\quad 3\alpha_1\quad 5\alpha_3|$

$=20|A|-30|A|=-50$

3．设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，求 $|A^8|$，A^4, A^{-1}．

解

令 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，易有

$$|A^8|=|A|^8=|A_1|^8|A_2|^8=(-25)^8 4^8=10^{16}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}A_1^4 & O\\ O & A_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}625 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 625 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 64 & 16\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25} & \frac{4}{25} & 0 & 0\\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4．设矩阵 A ，B 可逆，试证明下列矩阵$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}$可逆并求其逆．

证明略

5．利用分块矩阵求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 31 & -19 & 3 & -4\\ -23 & 14 & -2 & 3\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$

解

(1)将 A 写成分块矩阵形式为：$A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 因为 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

（2）将 A 写成分块矩阵形式为：$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$，

其中 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ，$A_2=3$ ，$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，计算得

$$A_1^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ A_2^{-1}=\frac{1}{3},\ A_3^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(3) 假设

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 31 & 19 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}.$$

显然 A_1, A_2 均可逆且

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}.$$

根据例 4 可得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\-A_2^{-1}BA_1^{-1}&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}.$$

(4)将 A 写成分块矩阵形式为：$A=\begin{pmatrix}&A_1\\A_2&\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_{n-1}\end{pmatrix}$，$A_2=(a_n)$.

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\\frac{1}{a_1}&0&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{a_2}&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{pmatrix}$$

(5)将 A 写成分块矩阵形式为：$A=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$，其中

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&n-1\\n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$$

从而有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

习题 2.4

1．用初等行变换将下列矩阵化为阶梯形：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -5 & -5 & -7 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

解

（1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2．用初等行变换将下列矩阵化为行最简阶梯形.

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

解（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-2r_2]{-\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3]{\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

3．求下列矩阵的秩：

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

解

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以秩为 3；

（2）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以秩为 3.

4．用初等行变换求下列矩阵的逆矩阵：

(1)= $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

（1）

$$\left(A \;\vdots\; E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{3r_3 \\ r_3+2r_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+9r_2]{2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{\frac{1}{3}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

从而

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

（2）$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$，

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}9&5&-3&-4\\1&1&0&0\\-2&-1&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

5．解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&4&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5&3\\1&-6\\8&8\end{pmatrix}$　　　(2) $X\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$

解

（1）若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$\left(A\ \vdots\ B\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}2&1&-1&5&3\\0&4&1&1&-6\\3&-1&-2&8&8\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&8&1\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&9&-2\end{array}\right)$$

于是 A 可逆，方程的解为

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}8&1\\-2&-1\\9&-2\end{pmatrix}$$

（2）$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&2\\1&-2&2\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-2&4\\4&-1&6\\1&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+2c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\1&-2&-2\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-2&0\\4&-1&4\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\1&-2&1\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-2&0\\4&-1&-2\\1&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1-c_3]{c_2+2c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\0&0&1\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-2&0\\6&-5&-2\\1&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&2&0\\6&5&-2\\1&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1-2c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\cdots&\cdots&\cdots\\-3&2&0\\-4&5&-2\\-5&3&0\end{pmatrix}$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-4&5&-2\\-5&3&0\end{pmatrix}$$

6. 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示为一些初等矩阵的乘积.

解

由 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

得 $P(3(-1))P(2(-1))P(2,3)P(2,1(-2))A=E$，所以

$A=(P(3(-1))P(2(-1))P(2,3)P(2,1(-2)))^{-1}$

$=P^{-1}(2,1(-2))P^{-1}(2,3)P^{-1}(2(-1))P^{-1}(3(-1))$

$=P(2,1(2))P(2,3)P(2(-1))P(3(-1))$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

根据 A 化成单位阵的不同过程，A 也可以表示为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

当然还存在 A 的其他的表示方法.

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（1） 问 a 为何值时，矩阵 A 和 B 等价；

（2） 当 A 和 B 等价时，求可逆矩阵 P，使得 $PA=B$.

解 （1）A,B 同型，A 等价于 $B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，对于 B，显然有 $r(B)=2$.因此，

对于 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{pmatrix}$，由于 $\begin{vmatrix}1&0\\-1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故要求 $r(A)=r(B)=2$ 时，应有

$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{vmatrix}=-(a+4)=0$ 得 $a=-4$ 时有 $r(A)=r(B)=2\Rightarrow A\cong B$.

（2）当 $a=-4$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}$，对 A 作初等行变换使得 a_{21},a_{32} 为零，即

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=B$ ，即

$P(3,2(2))P(1,2(1))A=B$，故有 $B=P(2,3(2))P(2,1(1))A$，取 $P=P(2,3(2))P(2,1(1))$，

则有 $PA=B$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$.

*习题 2.5

1.已知分块矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 可逆,其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $p\times p$ 块. $\boldsymbol{C}$ 为 $q\times q$ 块.求证: $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都可逆,并求 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

证 (1).因为 $0\neq|\boldsymbol{M}|=(-1)^{pq}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$, 所以 $|\boldsymbol{B}|\neq 0,|\boldsymbol{C}|\neq 0$ ，即证 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都可逆.

(2). 利用用广义行初等变换

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_p&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_q\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}^{-1}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 n 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 可逆,令 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$.证明: $\boldsymbol{G}$ 可逆的充要条件

是 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}$ 可逆.

证　因为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，所以两边取行列式可.得

$$\left|\boldsymbol{G}\right|=(-1)^{mn}\left|\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\right|.$$

于是由 $\left|\boldsymbol{B}\right|\neq 0$ 可知: $\boldsymbol{G}$ 可逆 $\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{G}\right|\neq 0 \Leftrightarrow \left|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\right|\neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}$ 可逆.

3. A,B分别是$n\times m$和$m\times n$矩阵.证明 $\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|.$

证 (1) 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & B \\ O & E_n-AB \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m-BA & A \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ O & E_n-AB \end{vmatrix}=|E_m||E_n-AB|=|E_n-AB|=|E_m-BA||E_n|=\begin{vmatrix} E_m-BA & A \\ O & E_n \end{vmatrix}.$$

(2)

因为

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E_m & \lambda B \\ O & \lambda E_n-AB \end{pmatrix}$$

以及

$$\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E_m-BA & B \\ O & \lambda E_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda E_m & \lambda B \\ O & \lambda E_n-AB \end{vmatrix}=|\lambda E_m-AB||\lambda E_m|=\lambda^m|\lambda E_n-AB|$$

且

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda E_m-BA & B \\ O & \lambda E_n \end{vmatrix}=|\lambda E_m-BA||\lambda E_n|=\lambda^n|\lambda E_m-BA|$$

从而由

$$\begin{vmatrix}\lambda E_m & O\\ -A & E_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_m & B\\ A & \lambda E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m & B\\ A & \lambda E_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda E_m & O\\ -A & E_n\end{vmatrix}$$

可得$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$.

4.设n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可交换，证明$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-R(\boldsymbol{AB})$

证 利用分块初等变换,有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,所以

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}$$

于是,有

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\ge R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}$$

$$\ge R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+R(\boldsymbol{AB})$$

即$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-R(\boldsymbol{AB})$.

5. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$s\times n$与$n\times m$矩阵. 证明 薛尔福斯特(*Sylverster*)公式

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\le R(\boldsymbol{AB}).$$

证 因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}$$

所以

$$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{E}_n)+R(-\boldsymbol{AB})=n+R(\boldsymbol{AB}).$$

但

$$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\ge R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}),$$

因此，

$$n+R(\boldsymbol{AB})\ge R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\Rightarrow R(\boldsymbol{AB})\ge R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n.$$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是任意 3 个矩阵,乘积 $\boldsymbol{ABC}$ 有意义,证明: 佛罗扁尼斯(Frobenius)公式

$$R(\boldsymbol{ABC})\ge R(\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{BC})-R(\boldsymbol{B}).$$

证 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $R(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}$,那么存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

把 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 适当分块 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{M},\boldsymbol{S}\right),\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{T}\end{pmatrix}$,由上式可得

$$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{M},\boldsymbol{S}\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{T}\end{pmatrix}$$

所以

$$R(\boldsymbol{ABC})=R(\boldsymbol{AMNC})\ge R(\boldsymbol{AM})+R(\boldsymbol{NC})-r$$

$$\ge R(\boldsymbol{AMN})+R(\boldsymbol{MNC})-R(\boldsymbol{B})$$

$$=R(\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{BC})-R(\boldsymbol{B}).$$

7.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵， E 为 n 阶单位矩阵. 证明:

(1). 当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 时,必有

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n;$$

(2). 当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 时,必有

$$R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n.$$

证 (1). 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=O$, 所以必有 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\le n$.

另一方面, 我们有

$$n=R(\boldsymbol{E}_n)=R(\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}))\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})$$

所以 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n.$

(2). 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_n,(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=O$ 可得

$$R(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\le n.$$

另一方面,

$$n=R(2\boldsymbol{E}_n)=R((\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}))\le R(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})$$

所以

$$R(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n.$$

8. 若矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的秩分别为 p 和 q, 则矩阵 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$ 的秩不大于 $p+q$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位阵.

证 因为 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$,所以

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})&\le R(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}))+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&\le R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=p+q.\end{aligned}$$

习题二

(A)

一、填空题

1．将 4 阶行列式 A，B 按列分块为

$$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4),B=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta),$$

且$|A|=2,|B|=3$，则$|A+2B|=$________.

解 $|A+2B|=|3\alpha_1\ \ 3\alpha_2\ \ 3\alpha_3\ \ \alpha_4+2\beta|=27\,|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4+2\beta|$

$=27(|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4|+|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ 2\beta|)=27(|A|+2|B|)=216$

2．设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=2,|B|=-3$．则$|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$________.

解 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=|A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}|=|(|B|-|A|)A^{-1}B^{-1}|$

$=|-5A^{-1}B^{-1}|=(-5)^n|A^{-1}||B^{-1}|=(-5)^n\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{-3}=(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{6}$.

3．设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$（$P$ 为可逆矩阵），求 $B^{2000}-2A^2$.

解

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$，易知 $A^4=E$，所以 $B^{2000}=P^{-1}A^{2000}P=E$，

从而 $B^{2000}-2A^2=E-2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$_____.

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{vmatrix}=-10\neq 0$,而 $AA^*=|A|E$,得 A^* 可逆,且

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$$

5. 设 A,B 是 n 阶方阵，已知 $|A|=2,|B|=-4$，则 $|2B^*A^{-1}|=$_______.

解 因为 $|kA|=k^n|A|,|AB|=|A||B|,AA^*=|A|E,|A^*|=|A|^{n-1},|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$，故

$$|2B^*A^{-1}|=2^n|B^*||A^{-1}|=2^n|B|^{n-1}\frac{1}{|A|}=[2\cdot(-4)]^{n-1}=(-8)^{n-1}$$

6. 设 A,B 是 n 阶方阵，已知 $|A|=2,|E+AB|=3$，则 $|E+BA|=$______..

解 由于 $|A|=2\neq 0$ 即 A 可逆，故 $E+BA=(A^{-1}+B)A=A^{-1}(E+AB)A$

两边取行列式，得 $|E+BA|=|A^{-1}(E+AB)A|=|A^{-1}||E+AB||A|=3$

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&-3\\0&0&-1&4\\2&3&0&0\\-2&-2&0&0\end{pmatrix}$,则 $A^{-1}=$________________.

解 利用分块矩阵的结论.将 A 分块为 $\begin{pmatrix}&A_1\\A_2&\end{pmatrix}$，其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}A_2=\begin{pmatrix}2&3\\-2&-2\end{pmatrix}$$

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&-\frac{3}{2}\\0&0&1&1\\4&3&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

8. 设 $B=(E+A)(E-A)^{-1}$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&5\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $(E+B)^{-1}=$ ______________.

解

$$\begin{aligned}(E+B)^{-1}&=[E+(E+A)(E-A)^{-1}]^{-1}=[(E-A)(E-A)^{-1}+(E+A)(E-A)^{-1}]^{-1}\\&=[(E-A+E+A)(E-A)^{-1}]^{-1}=(E-A)(2E)^{-1}=\frac{1}{2}(E-A)\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&-3\\-2&0&-5\\-1&-1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

9．设 $P=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},P,Q$均为非零矩阵，$A=PQ^T,$则$R(A)=$ ____________.

解

$$A=PQ^T=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$$

不妨假设 $a_1\neq 0$，则

$$\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i-\frac{a_i}{a_1}r_1}\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\0_1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

并且因为P,Q均为非零矩阵，从而 A 也是非零矩阵，所以 $R(A)=1$.

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$______.

解 矩阵 A,B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

因为 $r(B)=r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=2$，因此 $|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$

当 $a=-1$ 时，易知 $r(A)=1$，所以 $a=2$ 时，矩阵 A,B 等价.

11. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2,则 A^*的秩为________.

解 A 的秩为 2，所以 $|A|$ 中每个元素的余子式为 0，从而代数余子式也为 0.根据伴随矩阵的定义有 $A^*=O$，所以 $R(A^*)=0$.

12. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $(ABC)^{-1}=$____________.

解

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

.

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

二、单项选择题

1．设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，下列各式中正确的是(　　).

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　　　(B) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

(C) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　　　　(D) $(A+E)(A-E)=A^2-E$

解 对（A），（B）选项可用 $A=B$ 作为反例；(C)选项只有在 A,B 是可交换的时候

才成立,选 D.

2. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $ABC=E$，则下列矩阵为单位矩阵的是（ ）.

（A） ACB　　（B） CBA　　（C） BAC　　（D） BCA

答案：应选 D.

解：$ABC=E$，则 A 和 BC 互逆，则有 $BCA=E$

3. 下列叙述的结论错误的是（　　　）

（A）可逆矩阵的伴随矩阵一定是可逆矩阵

（B）两个可逆矩阵相加一定是可逆矩阵

（C）可逆矩阵的转置矩阵一定是可逆矩阵

（D）两个可逆矩阵的乘积一定是可逆矩阵

解　如果 A 可逆，那么 $-A$ 也是可逆矩阵. 但是他们的和是零矩阵，不可逆. 选 C.

4. 设 A,B,C 都是 n 阶矩阵. 下列命题正确的是（　　　）

（A）当 A 是可逆矩阵，从 $AB=AC$ 一定可以推出 $BA=CA$

（B）当 $A^2=B^2$ 时，可推出 $A=\pm B$

（C）当 $A\neq O$ 时，从 $AB=AC$ 可以推出

（D）当 $B\neq C$ 时，可推出 $AB\neq AC$

解 因为可逆矩阵可以从等式中的同侧消去，所以从 $AB=AC$ 可以推出 $B{=}C$，再在 $B{=}C$ 的两边都右乘 A，即得 $BA=CA$，选 A.

5. 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若$R(A^*)=1$,则(　　).

(A) $a=b$或$a+2b=0$　　　　(B) $a=b$或$a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$且$a+2b=0$　　　　(D) $a\neq b$或$a+2b\neq 0$

解　$R(A^*)=1\Rightarrow |A|=(a+2b)(a-b)^2=0\ \Rightarrow a+2b=0$ 或 $a=b$。但是当 $a=b$ 时 $A^*=O$，即 $R(A^*)=0$，所以 $a+2b=0$，且 $a\neq b$，选 C.

6. 将 3 阶矩阵 A 按列分块得到的分块矩阵为 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 且 $|A|$=1，设

$$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

则$|B|=$（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

解　$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 \quad \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$

$=|\alpha_1 \quad 2\alpha_2 \quad 9\alpha_3|+|\alpha_1 \quad 4\alpha_3 \quad 3\alpha_2|+|\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad 9\alpha_3|$
$+|\alpha_2 \quad 4\alpha_3 \quad \alpha_1|+|\alpha_3 \quad \alpha_1 \quad 3\alpha_2|+|\alpha_3 \quad 2\alpha_2 \quad \alpha_1|$

$=18-12-9+4+3-2=2$，选 B.

7．设 A,B 均为 n 阶矩阵且 $AB=O$,则必有(　　).

(A) $A=O$ 或 $B=O$　　(B) $A+B=O$

(C) $|A|=0$或$|B|=0$　　(D) $|A|+|B|=0$

解　$AB=O \Rightarrow |AB|=0 \Rightarrow |A|=0$ 或 $|B|=0$，正确选项为 C.

8. 设 A 是 4×3 矩阵，B 是 3×4 的非零矩阵，且满足 $AB=O$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 3 & t & 18 \\ 2 & 4 & 2t \\ 1 & 8-t & 4t-18 \end{pmatrix}$$

则（　　）.

（A）$t\neq 6$时，必有$r(B)=1$　　（B）$t=6$时，必有$r(B)=2$

（C）$t\neq 6$时，必有$r(B)=2$　　（D）$t=6$时，必有$r(B)=1$

答案：应选 A.

解：$AB=O, r(A)+r(B)\le 3, B$ 非零，故$r(B)\ge 1$，再者

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 3 & t & 18 \\ 2 & 4 & 2t \\ 1 & 8-t & 4t-18 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & t-6 & 18-3t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-t & 3t-18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & t-6 & 18-3t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当$t\neq 6$时，$r(A)=2 \Rightarrow r(B)=1$，故（A）成立，（C）不成立；

当$t=6$时，$r(A)=1, r(B)=1$或$r(B)=2$，故（B）成立，（D）不成立.

9. n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A-4E=O,$ 则 $(A-E)^{-1}=($　　$).$

(A) $A\text{-}3E$ (B) $A+3E$

(C) $A+E$ (D) $A\text{-}E$

解 $A^2+2A-4E=O\Rightarrow(A-E)(A+3E)=E\Rightarrow(A-E)^{-1}=A+3E$,选 B.

10. 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位阵，若 $A^3=O$，则（ ）.

（A）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆 （B）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆 （D）$E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆

解 由 $A^3=O$ 可得

$$E-A^3=(E-A)(E+A+A^2)=E$$
$$E+A^3=(E+A)(E-A+A^2)=E$$

故 $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆. 答案应选 C.

11．设 A 、B 、$A+B$ 、$A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=($ $)$.

（A） $A(A+B)^{-1}B$ （B） $A+B$

（C） $A^{-1}+B^{-1}$ （D） $(A+B)^{-1}$

解 $(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$

$=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B=E$ ，选 C.

12. $n(n\geq 3)$阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a & 1 & a & \cdots & a\\ a & a & 1 & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

已知$R(A)=n-1$，则a必为（ ）

（A）1 （B）$\dfrac{1}{1-n}$ （C）-1 （D）$\dfrac{1}{n-1}$

解 $R(A)=n-1\Rightarrow|A|=(a+n-1)(a-1)^{n-1}=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{1-n}$ 或 $a=1$. 当 $a=1$ 时，

$R(A)=1$，所以正确答案为 B.

13．设 A 为三阶方阵，$k\neq 0,(kA)^*=$（ ）.

(A) kA^* (B) A^* (C) k^nA^* (D) $k^{n-1}A^*$

解 由 $AA^* = |A|E$ 知 $(kA)(kA)^* = |kA|E = k^n|A|E$，应选 D.

14. 设 A 、B 均为 n 阶矩阵，A^* 、B^* 分别为 A 、B 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 C^* =( ).

（A）$\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

解 利用 $CC^* = |C|E$ 验证四个选项可知应选 D.

15. 设 A 是 3 阶可逆矩阵，将 A 的第 1 列和第 2 列互换得到 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C，则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为（ ）.

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 将 A 的第 1 列和第 2 列互换得到 B，即 $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$，再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C，即 $B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$，从而有

$$A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AQ = C$$

其中 $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，故应选 D.

16. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得到 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到

第 2 列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）.

（A）$C=P^{-1}AP$　　（B）$C=PAP^{-1}$　　（C）$C=P^{T}AP$　　（D）$C=PAP^{T}$

解 将A的第 2 行加到第 1 行得到B，即$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=PA$，再将$B$的第 1 列的

-1 倍加到第 2 列得C，即$C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\triangleq BQ$，其中记$Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，因为

$PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$，故$Q=P^{-1}$，故$C=BQ=PAP^{-1}$，故此应选 B.

17.　设A,B,C为n阶方阵，满足$A=BC$，将A,B以列分块，记为

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]C$$

为保持等号成立，下列做法正确的是（ ）.

（A）　将α_i和α_j互换后，应将β_i,β_j互换

（B）　将β_i和β_j互换后，应将C的i行和j行互换

（C）　将α_i加到α_j后，应将β_i加到β_j

（D）　将β_i加到β_j后，应将C的i行加到j行

解： β_i和β_j互换后，应将C的i行和j行互换，因为

$$\begin{aligned}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]&=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]C\\&=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]E_{ij}E_{ij}^{-1}C=([\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]E_{ij})(E_{ij}^{-1}C)\end{aligned}$$

应选 B.

18. 设n阶矩阵A与B等价，则必有(　　).

（A）　$|A|=a$　　（$a\neq 0$）时，$|B|=a$

（B）　$|A|=a$　　（$a\neq 0$）时，$|B|=-a$

（C） 当 $|A| \neq 0$ 时，$|B| = 0$

（D） 当 $|A| = 0$ 时，$|B| = 0$

解 初等变换不改变方阵的可逆性，但有可能改变其行列式的值，所以应选（D).

19.下列叙述的结论正确的是（　　）

（A）一个不可逆矩阵有可能等价于单位矩阵

（B）一个可逆矩阵经过适当的初等变换可变成不可逆矩阵

（C）一个可逆矩阵经过任何的初等变换后，得到的仍是可逆矩阵

（D）一个不可逆矩阵经过适当的初等变换后可以变成可逆矩阵

解 因为初等矩阵一定是可逆矩阵，进行初等变换相当于是矩阵相乘，而可逆矩阵的成绩一定是可逆矩阵，所以选 C.

20.下列叙述的结论不正确的是（　　）

（A）可逆矩阵与任意的一个同阶初等矩阵的乘积是可交换的

（B）如果 A 是可逆矩阵，那么 A 与 A^{-1} 的是可交换的

（C）任意一个 n 阶矩阵 A 与任意一个数量矩阵的乘积一定是可交换的

（D）两个同阶的初等矩阵的乘积未必是可交换的

解 选 A.同一个初等矩阵左乘 A 与右乘 A 未必是相同的.

（B）

1．设 A 是 n 阶正交矩阵（即 $AA^T = E$），且 $|A| < 0$，证明：$A+E$ 不可逆.

证 $|A+E| = |A+AA^T| = |A(E+A^T)| = |A||E+A^T| = |A||(E+A)^T| = |A||(E+A)|$

故 $(1-|A|)|E+A| = 0$. 由于 $|A| < 0$，即 $1-|A| \neq 0$，从而 $|E+A| = 0$,故 $A+E$ 不可逆.

2．设A,B,C均为n阶矩阵且$C = A+CA, B = E+AB$, 证明$B - C = E$.

证 $C = A + CA \Rightarrow CB = AB + CAB = (E+C)AB$

$= (E+C)(B-E) = -E + B - C + CB \Rightarrow B - C = E$.

3．设 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，其中 $a_0 \neq 0, A$ 是 n 阶矩阵，$|A| = 2$ 且 $f(A) = O$. 求 A^*.

解 $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n=O$，故

$A(a_1E+a_2A^1+\cdots+a_nA^{n-1})=-a_0E$

即 $A^{-1}=-\dfrac{1}{a_0}(a_1E+a_2A^1+\cdots+a_nA^{n-1})$，故 $A^*=|A|A^{-1}=\dfrac{-2}{a_0}(a_1E+a_2A+\cdots+a_nA^{n-1})$.

4. 已知矩阵A, B满足$A^{-1}BA=6A+BA$,求B.其中

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{7}\end{pmatrix}.$$

解 $A^{-1}BA=6A+BA\Rightarrow A^{-1}B=6E+B\Rightarrow B=6(A^{-1}-E)^{-1}$

$$=6\begin{pmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$. 求未知矩阵 X.

解

因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4\neq 0$$

所以A可逆，于是

$$A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$$

$$(\frac{1}{2}A^*)^*=(\frac{1}{2}\cdot 4A^{-1})^*=(2A^{-1})^*$$

$$=|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=\frac{2^3}{|A|}\cdot\frac{1}{2}A=A$$

代入原方程得

$$4A^{-1}XA=8A^{-1}X+E$$

上式两边左乘A得

$$4XA=8X+A$$

$$4X(A-2E)=A$$

$$X=\frac{1}{4}A(A-2E)^{-1}$$

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&-1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

故

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot(-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\2&0&0\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E$$

求 X .

解 由 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，得 $AX(A-B)+BX(B-A)=E$

即 $(A-B)X(A-B)=E$，得 $X=[(A-B)^{-1}]^2$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

故 $X=[(A-B)^{-1}]^2=\left(\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

7. 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式;

(2) $a_{11}\neq 0$.

计算行列式 $|A|$.

解 由（1）知 $A^*=A^T$，又因为 $|A^*|=|A|^2$，$|A^T|=|A|$，所以 $|A|^2=|A|$，得 $|A|=1$ 或 $|A|=0$. 因为 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq 0$，所以 $|A|=1$.

8．设 A 、B 、C 、D 皆为 n 阶方阵，且 A 非奇异．令分块矩阵 $X=\begin{pmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$，$Z=\begin{pmatrix}E&-A^{-1}B\\O&E\end{pmatrix}$.

（1） 求乘积 XYZ；

（2） 证明：$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|A|\,|D-CA^{-1}B|$；

（3）若 A 、C 可交换，则 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.

解 （1）$XYZ=\begin{pmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-A^{-1}B\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$；

（2）证明：$\begin{vmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|XYZ|=|X||Y||Z|=\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}$，所以

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|.$$

（3） 利用（2）的结论得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |A(D - CA^{-1}B)| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB| .$$

9．设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

求 A 的秩.

解 容易计算 $|A| = (k + n - 1)(k - 1)^{n-1}$，所以

当 $k \neq 1$ 且 $k \neq 1 - n$ 时，$R(A) = n;$

当 $k = 1$ 时代入得 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，此时 $R(A) = 1$；

当 $k = n - 1$ 时代入得 $A = \begin{pmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$，此时 $R(A) = n - 1$.