《数值分析》第七章

- 方程求根二分算法
- 不动点迭代法及收敛性
- 迭代收敛加速方法
- 牛顿迭代法及变形
- 非线性方程组求解

非线性方程数值解法

考虑方程

$$\boxed{f(x) = 0} \qquad x \in R, \quad f(x) \in C[a,b]$$

若 $f(x)$ 是一次多项式，则称为线性方程；否则称为非线性方程

若 $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$，则称为代数方程

n=1, 2, 3, 4 时有相应的求根公式，$n \geq 5$ 时不存在求根公式

非线性方程可能有(无穷)多个解，一般要强调 求解区间

非线性方程一般没有直接解法，通常用迭代法求数值解

一些基本概念

- 实根与复根

- 根的重数 $f(x) = (x-x_*)^m \cdot g(x)$ 且 $g(x_*) \neq 0$，则 x_*为 $f(x)=0$ 的 m 重根

- 有根区间：$[a, b]$ 上至少存在 $f(x) = 0$ 的一个实根

研究内容：在有根的前提下求出方程的近似根

7.1 二分法（对分法）

- **基本思想、数学原理、计算过程**
- **收敛性分析**

二分法（对分法）

- **基本思想**

将有根区间对分，并找出根所在的小区间，然后再对该小区间对分，依次类推，直到有根区间的长度足够小为止。

- **数学原理：零点定理**

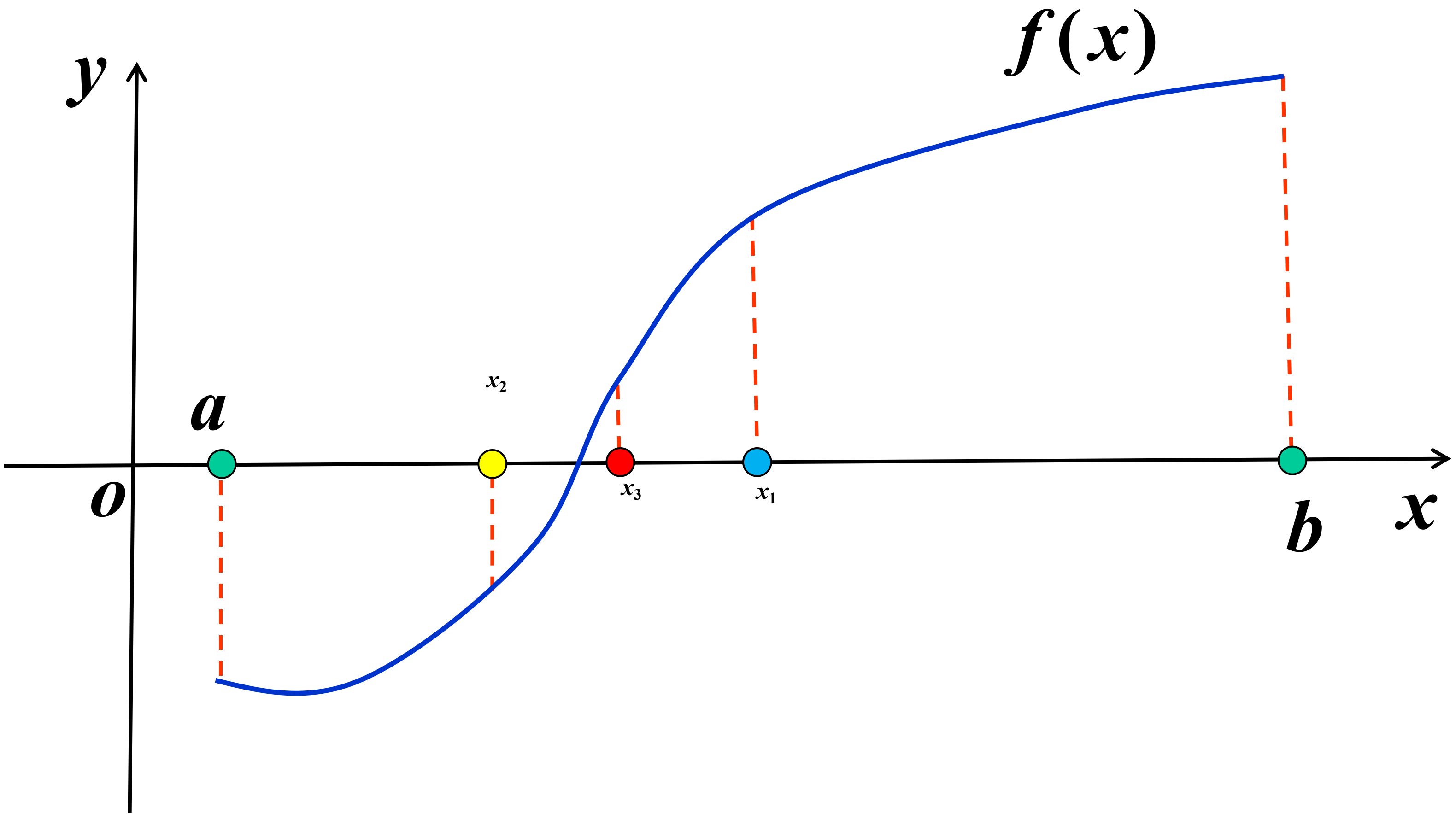
设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\,f(b)<0$，则由零点定理可得，在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$

- **适用范围**

求有根区间内的 单重实根 或 奇重实根，即 $f(a)\,f(b)<0$

用二分法求根，通常先给出 $f(x)$ 草图以确定有根区间

二分法（对分法）



二分法

算法：(二分法)

(1) 计算 $f(a)$，$f(b)$，若 $f(a)\,f(b)>0$，则算法失效，停止计算

(2) 令 $x=\dfrac{a+b}{2}$，计算 $f(x)$

(3) 若 $|f(x)|<\varepsilon$ 或 $|b-a|<\varepsilon$，停止计算，输出近似解 x

(4) 若 $f(a)\cdot f(x)<0$，则令 $b=x$；否则令 $a=x$

(5) 返回第 2 步

误差分析

● 误差分析

记 $a_1 = a,\ b_1 = b$，第 k 步的有根区间为 $[a_k, b_k]$

$$\Rightarrow\quad |x_k - x_*| = \left|\frac{b_k + a_k}{2} - x_*\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{4} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

$$\Rightarrow\quad |x_k - x_*| \le \frac{b-a}{2^k} \to 0\ (k \to \infty)$$

结论：二分法总是收敛的！(函数满足零点定理)

二分法迭代将得到一系列隔根区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

性质:1. $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$; 2. $b_n - a_n=(b-a)/2^n$

定理 设x^*是$f(x)=0$在$[a, b]$内的唯一根,且$f(a)\cdot f(b)<0$,则二分计算过程中, 各区间的中点数列

$$x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)(n=0,1,2,\cdots)$$

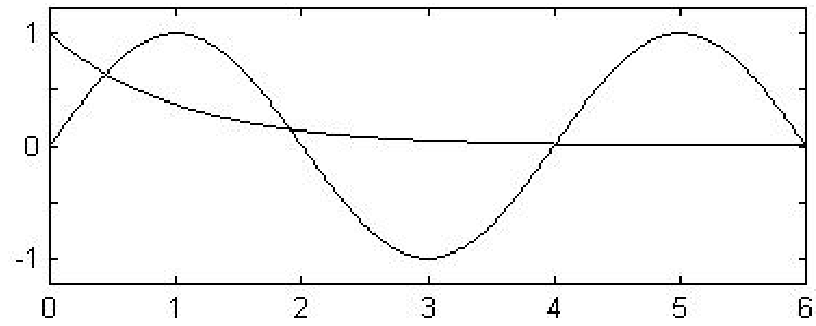
满足: $|x_n - x^*|\le(b-a)/2^{n+1}$

$$\log_2 10\approx 3.3219$$

注记: 若要 $|x_n-x^*|\le\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

只需 $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2}\times 10^{-3}$ ➔ $\boxed{n\ge\log_2\frac{b-a}{10^{-3}}}$

例 二分法求方程 $\exp(-x)-\sin(\frac{\pi x}{2})=0$ 在区间 [0, 1]内的根.二分十次。



解: 令 $f(x)=\exp(-x)-\sin(\frac{\pi x}{2})$

$$f(0)=1>0 \quad f(1)=e^{-1}-1<0 \qquad \Rightarrow f(0)f(1)<0$$

$$f'(x)=-[\exp(-x)+\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2})]<0,\ \ 0<x<1$$

函数在[0,1]内有唯一零点, 故[0,1]是隔根区间.

二分法迭代实验数据

n	an	xn	bn
0	0	5.0000e-001	1.0000e+000
1	0	2.5000e-001	5.0000e-001
2	2.5000e-001	3.7500e-001	5.0000e-001
3	3.7500e-001	4.3750e-001	5.0000e-001
4	4.3750e-001	4.6875e-001	5.0000e-001
5	4.3750e-001	4.5313e-001	4.6875e-001
6	4.3750e-001	4.4531e-001	4.5313e-001
7	4.3750e-001	4.4141e-001	4.4531e-001
8	4.4141e-001	4.4336e-001	4.4531e-001
9	4.4336e-001	4.4434e-001	4.4531e-001
10	4.4336e-001	4.4385e-001	4.4434e-001

$$|x_{10}-x^*|\le 1/2^{11}\le 1/2000$$

二分法求解非线性方程的优缺点：

- 计算过程简单，收敛性可保证；
- 对函数的性质要求低，只要连续即可。

- 收敛速度慢；
- 不能求复根和重根；
- 调用一次求解一个$[a, b]$间的多个根无法求得。

总结：一般用来计算解的一个粗糙估计

7.2不动点迭代

- 基本思想
- 迭代格式
- 收敛性分析（全局收敛与局部收敛）

不动点迭代基本思想

- 构造 $f(x)=0$ 的一个等价方程：

$$x=\varphi(x)$$

$$f(x)=0 \quad \overset{\text{等价变换}}{\Longleftrightarrow} \quad x=\varphi(x)$$

$f(x)$ 的零点 $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ 的不动点

不动点迭代格式

- 任取一个迭代初始值 x_0，计算

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \ldots$$

得到一个迭代序列： x_0， x_1， x_2， . . . ， x_n， . . .

几何含义： 求曲线 $y = \varphi(x)$ 与直线 $y = x$ 的交点。

例 方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有一个根，将方程变换成另一形式

(1) $x = \sqrt{10 - x^3}/2$ $\quad \varphi(x) = \sqrt{10 - x^3}/2$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

(2) $x = \sqrt{10/(x+4)}$ $\quad \varphi(x) = \sqrt{10/(x+4)}$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.5000	
1	1.2870	2.1e-1
2	1.4025	1.1e-1
3	1.3455	5.7e-2
4	1.3752	2.9e-2
5	1.3601	1.5e-2
6	1.3678	7.7e-3
7	1.3639	3.9e-3
8	1.3659	2.0e-3
9	1.3649	1.0e-3
10	1.3654	5.3e-4

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n + 4}}$$

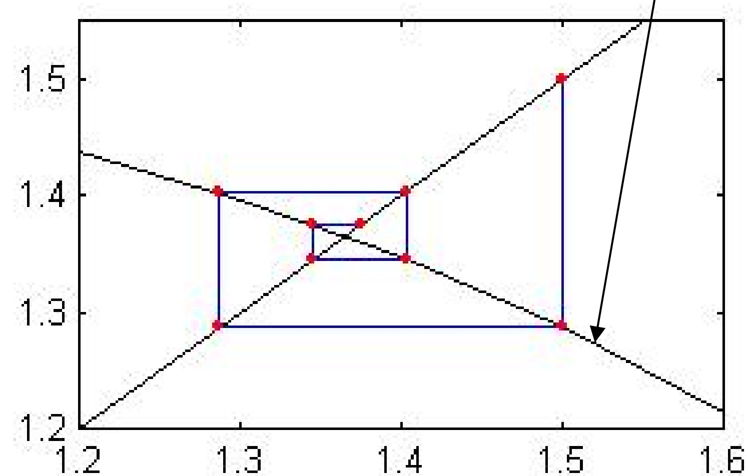
n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.5000	
1	1.3484	1.5e-1
2	1.3674	1.8e-2
3	1.3650	2.4e-3
4	1.3653	3.0e-4
5	1.3652	3.9e-5
6	1.3652	4.9e-6

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\varphi(x)$$

若存在 x^*, 使得 $x^*=\varphi(x^*)$, 则称 x^*为 $\varphi(x)$的不动点

$\varphi(x)$ —— 迭代函数

$$\varphi(x)=\sqrt{10-x^3}/2$$

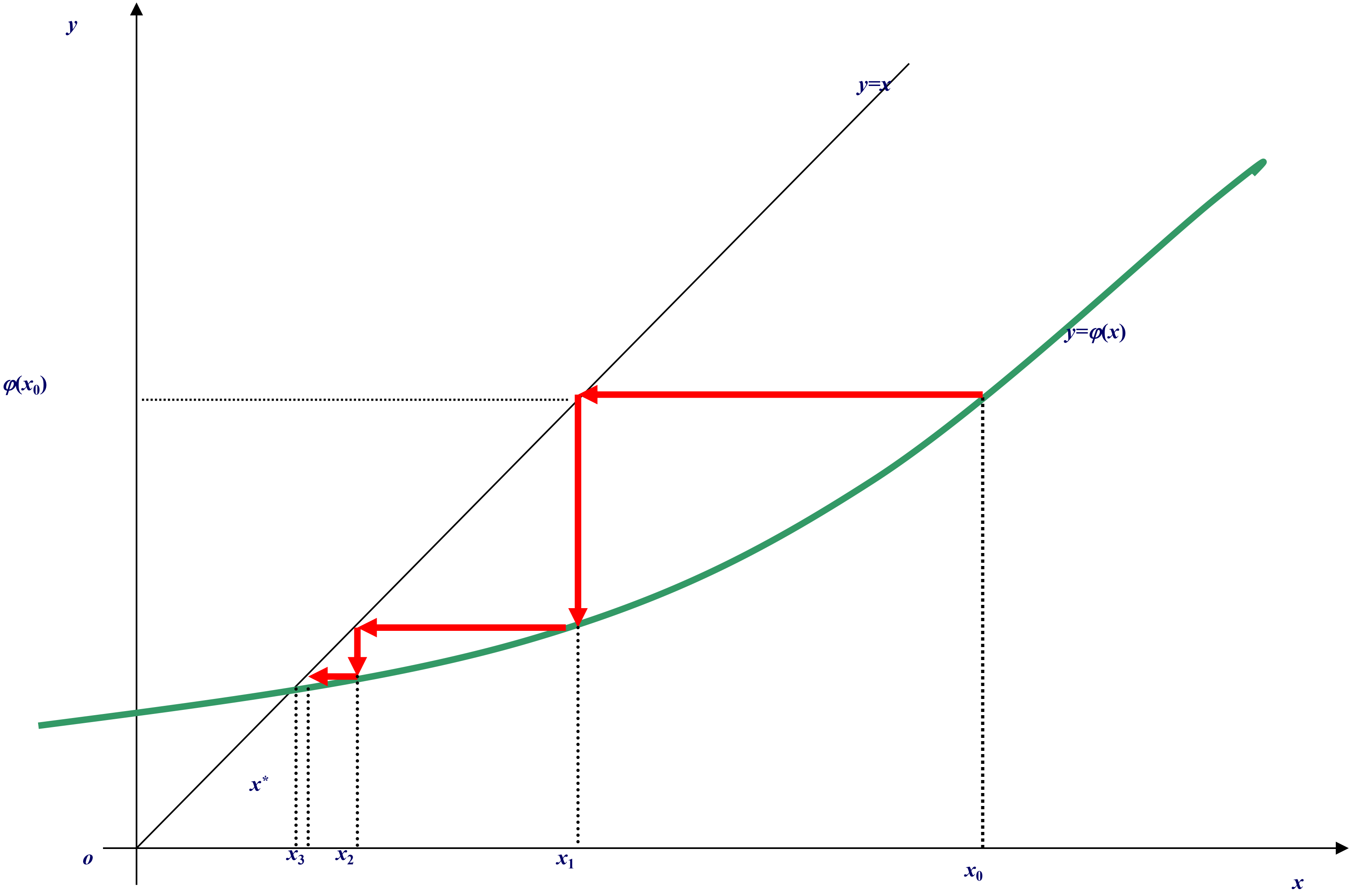


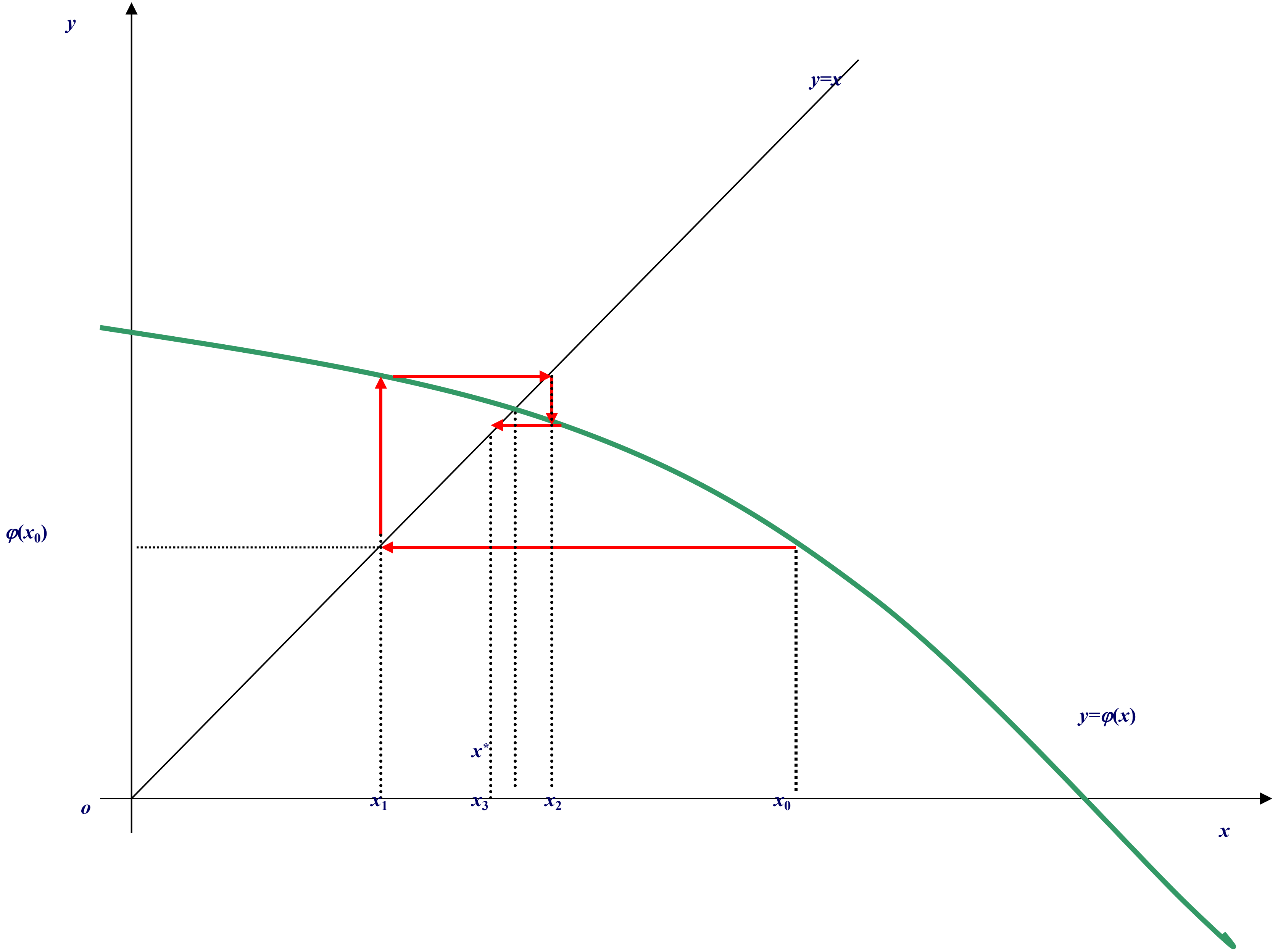
不动点迭代蛛网图

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

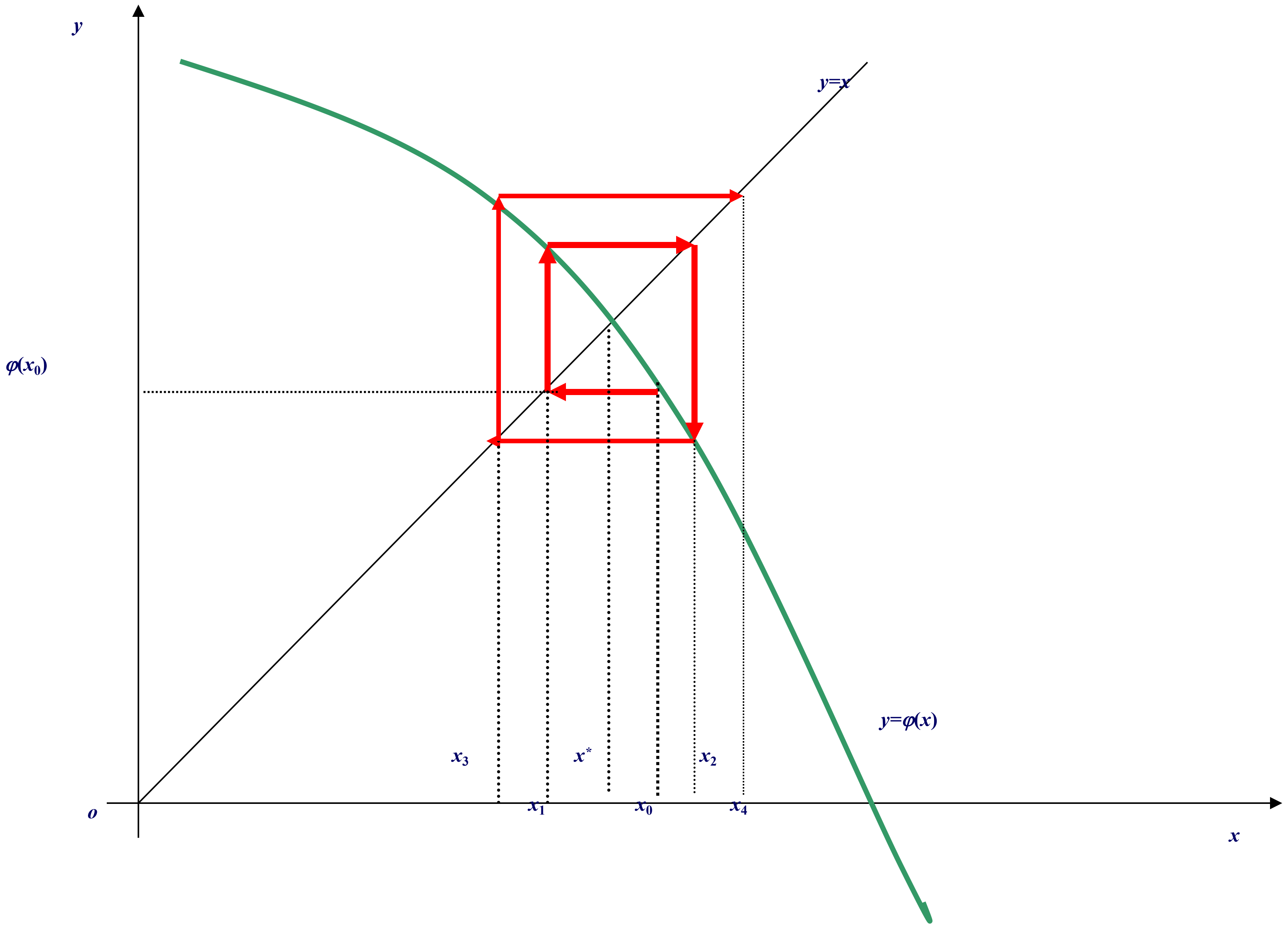
$$\Rightarrow \begin{cases} y_n=\varphi(x_n) \\ x_{n+1}=y_n \end{cases}$$

$(x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_n) \rightarrow$
$\rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) \cdots\cdots\cdots\cdots$

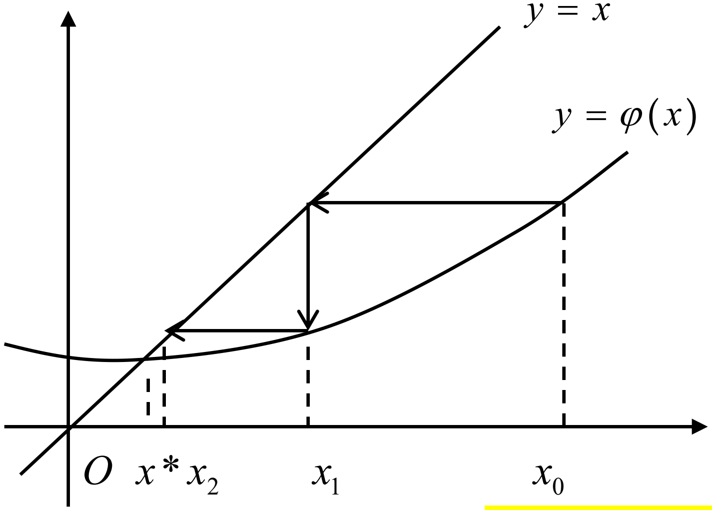

y
y=x
y=φ(x)
φ(x0)
x*
o
x3
x2
x1
x0
x



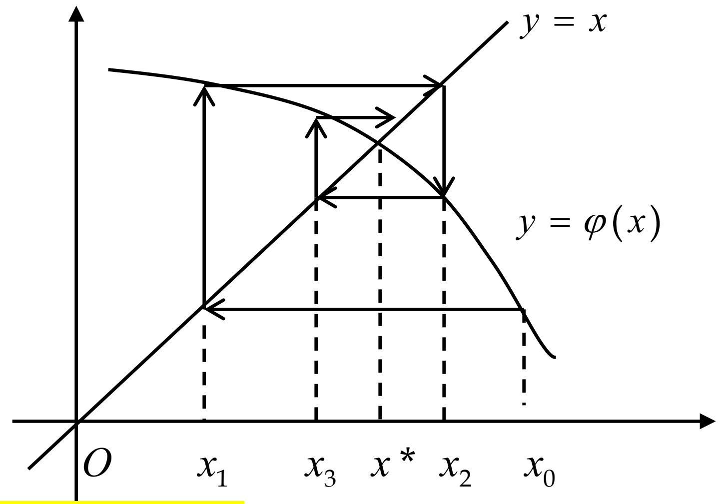
y
y=x
φ(x0)
y=φ(x)
x*
o
x1
x3
x2
x0
x



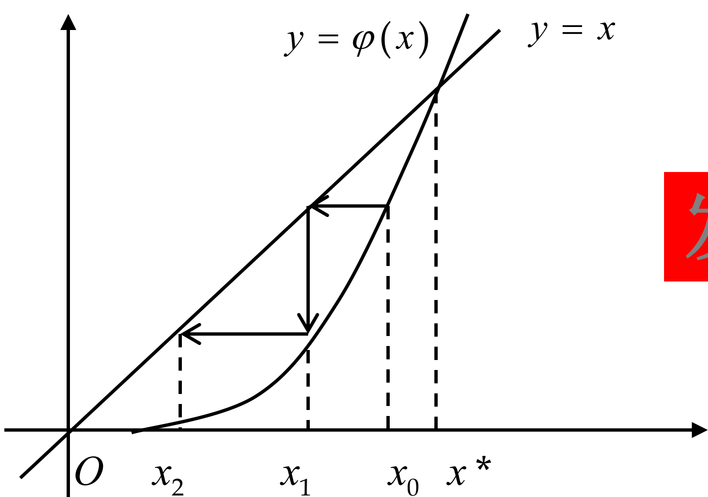
y
y=x
φ(x0)
y=φ(x)
x3
x*
x2
o
x1
x0
x4
x



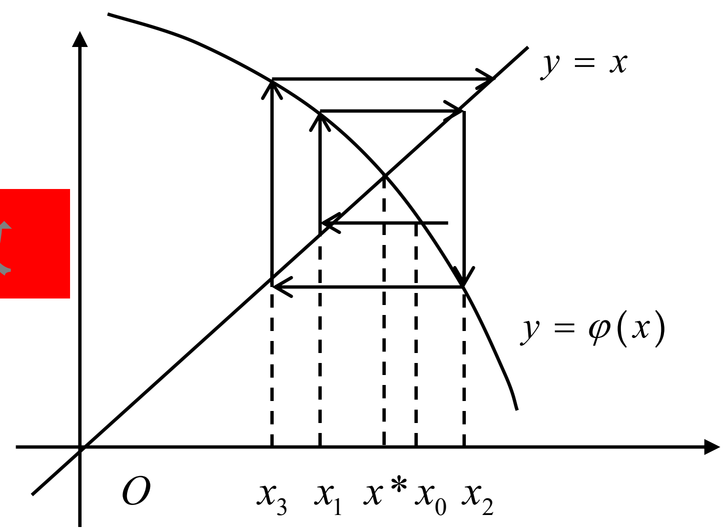
收敛



$\varphi(x)$在x^*附近较平缓



发散



$\varphi(x)$在x^*附近较陡峭

收敛性分析

设 $\varphi(x)$ 连续，若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$ ，则

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)$$

$\Rightarrow$ $x_* = \varphi(x_*)$ 即 $\boxed{f(x_*) = 0}$

性质：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$ ，则不动点迭代**收敛**，且 x_* 就是 $f(x)=0$ 的解；否则迭代法**发散**。

定理 如果$\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 有唯一的不动点 x^*

证 若$\varphi(a)=a$ 或 $\varphi(b)=b$,显然 $\varphi(x)$ 有不动点

设 $\varphi(a)\ne a, \varphi(b)\ne b$ 则有 $\varphi(a)>a,\ \varphi(b)<b$

记 $\psi(x)=\varphi(x)-x$ 则有 $\psi(a)\cdot\psi(b)<0$

所以, 存在 x^*, 使得 $\psi(x^*)=0$

即 $x^*=\varphi(x^*)$, 故 x^* 是 $\varphi(x)$的不动点.

如果 $\varphi(x)$ 有两个不同的不动点 $x_1^* \neq x_2^*$ 则有

$$x_1^* = \varphi(x_1^*) \quad x_2^* = \varphi(x_2^*)$$

两式相减得

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 ξ 介于 x_1^* x_2^* 之间, 使

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*) = \varphi'(\xi)(x_1^* - x_2^*)$$

➔ $|x_1^* - x_2^*| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_1^* - x_2^*|$

➔ $|x_1^* - x_2^*| \leq L \cdot |x_1^* - x_2^*|$

➔ $1 \leq L$ （与 $L<1$ 条件矛盾 ）

故不动点唯一。

不动点迭代的收敛性判断

定理： 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi(x)\in[a,b]$

(2) 存在常数 $0<L<1$，使得任意的 $x, y\in[a,b]$ 有

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \le L\left|x-y\right|$$

则对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，且

$$\left|x_k - x_*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

注：一般来说，L 越小，收敛越快！

定理 如果 $\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则对任意的 $x_0\in[a,b]$,迭代格式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$

产生的序列 $\{x_n\}$收敛到不动点 x^*,且有

$$|x^*-x_n|\le\frac{1}{1-L}|x_{n+1}-x_n|$$

证

$$\begin{cases}x_n=\varphi(x_{n-1})\\ x^*=\varphi(x^*)\end{cases}\Rightarrow\ \begin{aligned}|x_n-x^*|&=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|\\&=|\varphi'(\xi)|\cdot|x_{n-1}-x^*|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ |x_n-x^*|\le L|x_{n-1}-x^*|$$

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0 \quad (0<L<1)$$

所以, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 故迭代格式收敛

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*| \le |x_n - x_{n+1}| + L|x_n - x^*|$$

➔ $(1-L)|x_n - x^*| \le |x_n - x_{n+1}|$

➔ $|x^* - x_n| \le \dfrac{1}{1-L} |x_{n+1} - x_n|$

不动点迭代的收敛性判断

推论： 若 $\varphi(x)\in C^1[a,b]$，对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi(x)\in[a,b]$ 且对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)|\le L<1$$

则上述定理中的结论成立。

以上两个结论中的 **收敛性与初始值的选取无关！**

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{全局收敛}}$

举例

例：求 $f(x) = x^3 - x - 1=0$ 在区间 [1, 2] 中的根

(1) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow 1 \le \varphi(x) \le 2 \quad (x \in [1,2])$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \Rightarrow |\varphi'(x)| \le \frac{1}{3}\sqrt[3]{0.25} < 1$$

✓

全局收敛

(2) $\varphi(x) = x^3 - 1 \Rightarrow 0 \le \varphi(x) \le 7 \quad (x \in [1,2])$

$$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow |\varphi'(x)| > 1$$

✗

不动点迭代的局部收敛

定义：设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若存在 x_* 的某个 δ-**邻域** $U_\delta(x_*)=[x_*-\delta,\ x_*+\delta]$，对任意 $x_0\in U_\delta(x_*)$，不动点迭代

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

产生的点列都收敛到 x_*，则称该迭代**局部收敛**。

定理：设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 x_* 的某个邻域内连续，且

$$|\varphi'(x_*)|<1$$

则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛

定理（局部收敛性） 设x^*为$\varphi(x)$的不动点，$\varphi'(x)$在x^*的某邻域连续，且$|\varphi'(x^*)|<1$，则不动点迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛。

证明： 根据连续函数性质，因$\varphi'(x)$连续，存在x^*的某邻域R：$|x-x^*|\le\delta$，对任意$x\in R$，$|\varphi'(x)|\le L<1$，且

$$|\varphi(x)-x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)|\,|x-x^*|$$

$$\le L\,|x-x^*| \le |x-x^*| \le \delta$$

即对任意$x\in R$，总有$\varphi(x)\in R$。

由全局收敛性定义知，迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in R$均收敛。

例 用不同方法求 $x^2-3=0$ 的根。

解： 格式（1） $$x_{k+1}=x_k^2+x_k-3$$

格式（2） $$x_{k+1}=\frac{3}{x_k}$$

格式（3） $$x_{k+1}=x_k-\frac{1}{4}(x_k^2-3)$$

格式（4） $$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{3}{x_k})$$

取$x_0=2$，对上述四种方法，计算三步所得结果如下：

k	x_k	(1)	(2)	(3)	(4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.73475	1.732143
3	x_3	87	1.5	1.732361	1.732051

注：$x^*=1.7320508……$

收敛速度

定义： 设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x_*，记 $e_k=x_k-x_*$，若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$$

其中常数 $C>0$，则称该迭代为 p 阶收敛。

(1) 当 $p=1$ 且 $0<C<1$ 时称为线性收敛

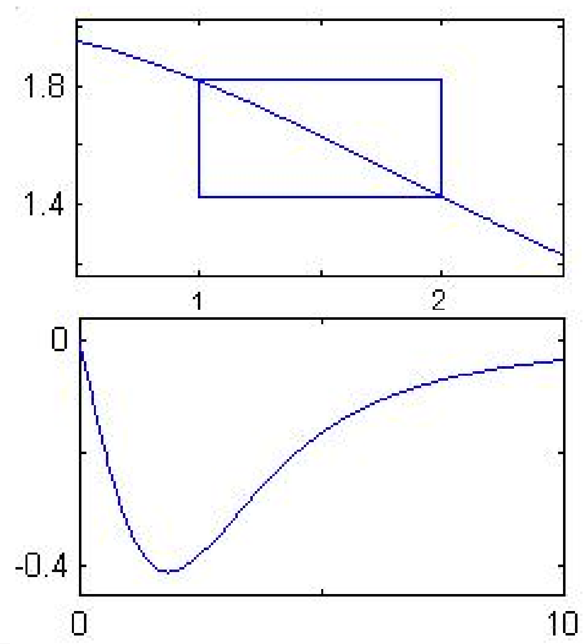
(2) 当 $p=2$ 时称为二次收敛，或平方收敛

(3) 当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $C=0$ 时称为超线性收敛

- 二分法是全局线性收敛的
- 若 $0<|\varphi'(x_*)|<1$，则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部线性收敛

例 方程 $x^3+10x-20=0$,取 $x_0 = 1.5$, 证明迭代法

$$x_{n+1} = 20/(x_n^2+10)$$ 是线性收敛



证:令 $\varphi(x) = 20/(x^2+10)$

$\Rightarrow \quad \varphi(1) \approx 1.82 \quad \varphi(2) \approx 1.43$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x) = -40x/(x^2+10)^2 \\ \varphi''(x) = 40\dfrac{3x^2-10}{(x^2+10)^3} \end{cases}$$

$\varphi''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{10/3}$

$\varphi'(\hat{x}) \approx -0.4108 \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(x)| \le 0.411$

显然,在x^*附近 $|\varphi'(x)|<1 \quad \varphi'(x)\neq 0$

利用Lagrange中值定理, 有

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_n)||x_n-x^*|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\lim_{n\to\infty}|\varphi'(\xi_n)|=|\varphi'(x^*)|$$

由此可知,这一序列的收敛阶数为1,即迭代法是线性收敛.

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\dfrac{\lvert x_{n+2} - x_{n+1} \rvert}{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}$
0	1.5000000		
1	1.6326530	1.3265e-001	
2	1.5790858	5.3567e-002	4.0381e-001
3	1.6008308	2.1745e-002	4.0594e-001
4	1.5920195	8.8113e-003	4.0521e-001
5	1.5955927	3.5732e-003	4.0553e-001
6	1.5941442	1.4486e-003	4.0540e-001
7	1.5947315	5.8733e-004	4.0545e-001
8	1.5944934	2.3812e-004	4.0543e-001
9	1.5945899	9.6545e-005	4.0544e-001
10	1.5945508	3.9143e-005	4.0544e-001
11	1.5945666	1.5870e-005	4.0544e-001
12	1.5945602	6.4343e-006	4.0544e-001

收敛定理 设x^*是 $\varphi(x)$ 的不动点,且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 则 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ **p阶收敛**

由Taylor公式

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=\frac{|x_n-x^*|^p}{p!}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p}=\frac{1}{p!}\lim_{n\to\infty}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x^*)|$$

故迭代法p阶收敛.

举例

例：求 $f(x) = x^2 - 3=0$ 的正根 $x_* = \sqrt{3}$

(1) $\varphi(x) = x^2 - 3 + x$ ⇨ $\varphi'(x_*) = 2\sqrt{3} + 1 > 1$

(2) $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2 - 3}{4}$ ⇨ $\varphi'(x_*) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 < 1$

(3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ ⇨ $\varphi'(x_*) = 0$

$$\varphi''(x_*) = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$$

- **一般来说，$|\varphi'(x_*)|$ 越小，收敛越快！**

7.3不动点迭代的加速

- **Aitken 加速方法**
- **Steffensen 迭代方法**

Aitken 加速

$$x_1=\varphi(x_0) \Rightarrow x_1-x_*=\varphi(x_0)-\varphi(x_*)=\varphi'(\xi_1)(x_0-x_*)$$

$$x_2=\varphi(x_1) \Rightarrow x_2-x_*=\varphi(x_1)-\varphi(x_*)=\varphi'(\xi_2)(x_1-x_*)$$

若 $\varphi'(x)$ 变化不大，则可假定 $\boxed{\varphi'(\xi_1)\approx\varphi'(\xi_2)}$：

$$\Rightarrow \frac{x_1-x_*}{x_2-x_*}\approx\frac{x_0-x_*}{x_1-x_*}$$

$$\Rightarrow x_*\approx x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0} = y_1$$

Aitken 加速

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \cdots$$

$$y_1 \qquad y_2 \qquad y_3 \qquad \cdots$$

$$\boxed{y_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}}$$

收 敛 性： $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{y_{k+1} - x_*}{x_k - x_*} = 0 \Longrightarrow$ y_k 收敛较快

Steffenson 加速

基本思想：将 Aitken 加速技巧与不动点迭代相结合

$$y_k = \varphi(x_k),\ \ z_k = \varphi(y_k),\ \ x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Steffensen 迭代函数：

$$x_{k+1} = \psi(x_k),\ \psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi\big(\varphi(x)\big) - 2\varphi(x) + x}$$

Steffensen 迭代方法

定理： 若 x_* 是 $\psi(x)$ 的不动点，则 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点。反之，若 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，且 $\varphi''(x)$ 存在，$\varphi'(x_*)\neq 1$，则 x_* 是 $\psi(x)$ 的不动点，且 Steffensen 加速迭代是二阶收敛的。

- 若原迭代是 p 阶收敛的，则 Steffensen 加速后 $p+1$ 阶收敛
- 原来不收敛的迭代，Steffensen 加速可能收敛

7.4 Newton 迭代法

- 基本思想、几何意义
- 二阶局部收敛性
- 简化 Newton 法
- Newton 下山法
- 重根情形

Newton 法

- **基本思想**

将非线性方程线性化

设 x_k 是 $f(x)=0$ 的近似根，将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

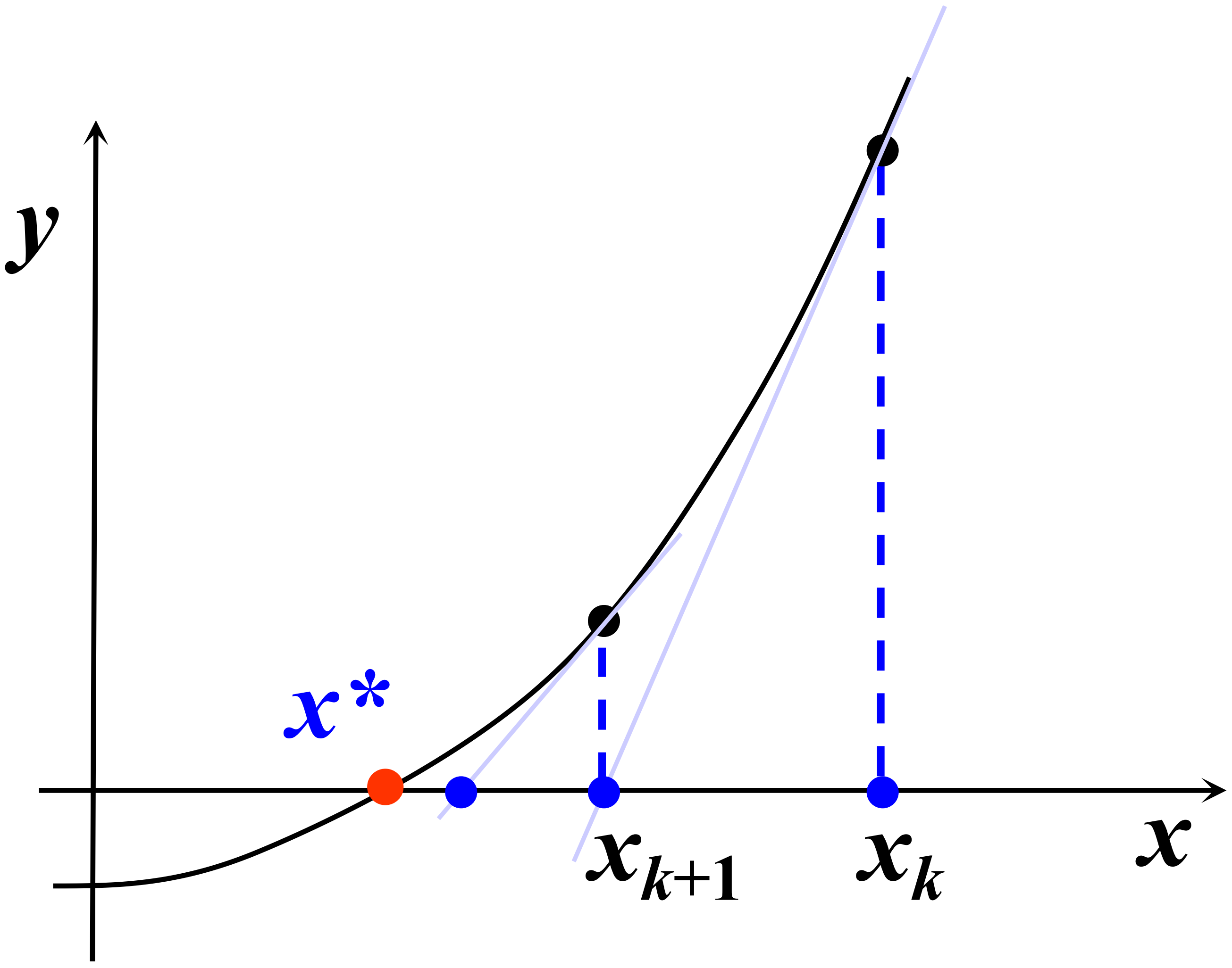
$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)^2$$

$$\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k) \triangleq P(x)$$

令：$P(x)=0$ ⇒ $$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

条件：$f'(x)\neq 0$

Newton 法



Newton 法

算法：(Newton 法)

(1) 任取迭代初值 x_0

(2) 计算 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(3) 判断收敛性：如果 $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ 或者 $\left|f\left(x_1\right)\right| < \varepsilon$ ，
则算法收敛，停止计算，输出近似解 x_1

(4) 令 $x_0 \leftarrow x_1$，返回第二步

Newton迭代法的收敛性：

– 迭代函数：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

设$f(x^*)=0$，$f`(x^*)\neq 0$，则$\varphi`(x^*)=0$，故Newton迭代法在x^*附近至少平方收敛。

定理： 假设$f(x)$在x^*的某邻域内具有连续的二阶导数，且设$f(x^*)=0$，$f`(x^*)\neq 0$，则对充分靠近x^*的初始值x_0，Newton迭代法产生的序列$\{x_n\}$至少平方收敛于x^*。

应用举例：计算平方根

例： 用 Newton 法求 $f(x)=x^2-C=0$ 的正根

解： $x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{C}{x_k}\right)$ $\Rightarrow$

$$x_{k+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2x_k}\left(x_k-\sqrt{C}\right)^2$$

$$x_{k+1}+\sqrt{C}=\frac{1}{2x_k}\left(x_k+\sqrt{C}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x_{k+1}-\sqrt{C}}{x_{k+1}+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{C}}{x_k+\sqrt{C}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x_k-\sqrt{C}}{x_k+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}\right)^{2^k}\triangleq q^{2^k}$$

$$\Rightarrow\quad x_k-\sqrt{C}=2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}$$

对任意 $x_0>0$，
总有 $|q|<1$，
即牛顿法收敛

例 平方根算法求 $\sqrt{2}$

初值: $x_0=1.5$

迭代格式: $x_{n+1}=0.5(x_n+2/x_n)$ $(n = 0,1,2,\cdots\cdots)$

表1 平方根算法实验

x_n	Error
1.416666666666667	2.45e-003
1.414215686274510	2.12e-006
1.414213562374690	1.59e-012
1.414213562373095	2.22e-016
1.414213562373095	2.22e-016

$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}[x_n+\frac{2}{x_n}]-\sqrt{2}$$

$$=\frac{1}{2x_n}[x_n^2-2x_n\sqrt{2}+2]=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})^2$$

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{(x_n-\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\sqrt{2}|}{|x_n-\sqrt{2}|^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

由此可知，平方根算法具有 2 阶收敛速度

例. 求 $x^3+10x-20=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根

解:取 $f(x)=x^3+10x-20$

则有 $f'(x)=3x^2+10$

牛顿迭代格式 $$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+10x_n^2-20}{3x_n^2+10}$$

表2 牛顿迭代法实验

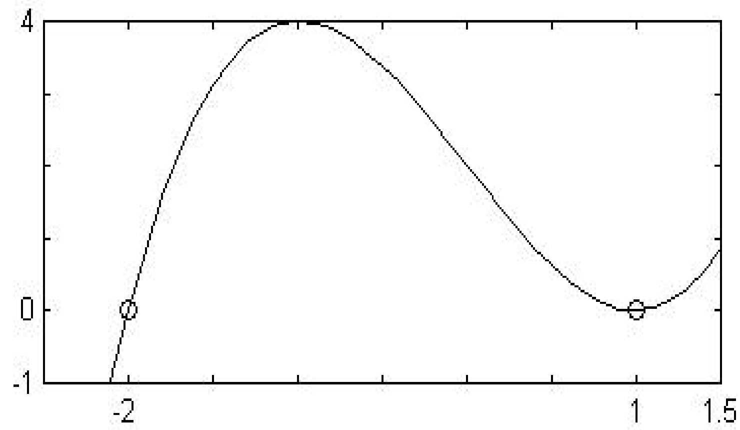
n	x_n	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
0	1.5	
1	1.59701492537313	9.7015e-002
2	1.59456374876881	2.4512e-003
3	1.59456211663188	1.6321e-006
4	1.59456211663115	7.2298e-013

缺陷

1.被零除错误

$f(x)=x^3-3x+2=0$

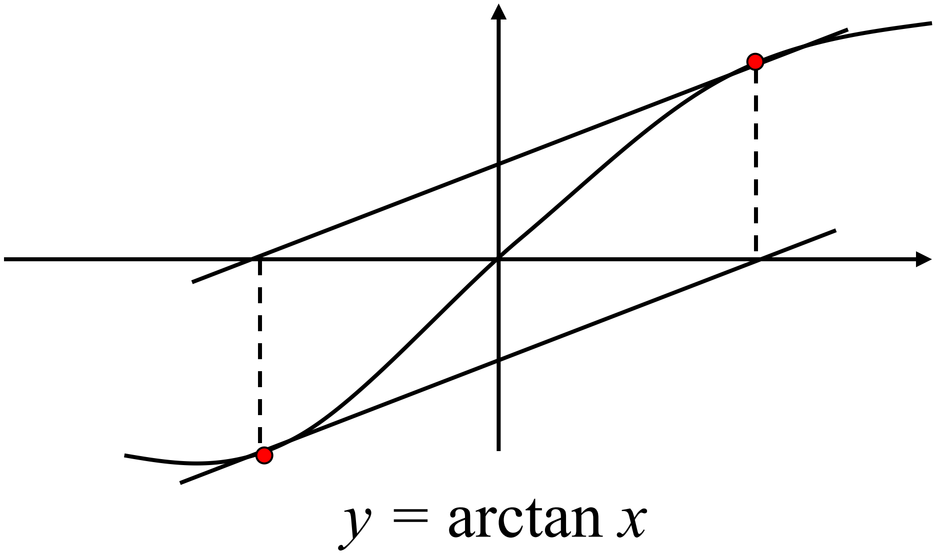
在$x^*=1$附近，$f'(x)\approx 0$



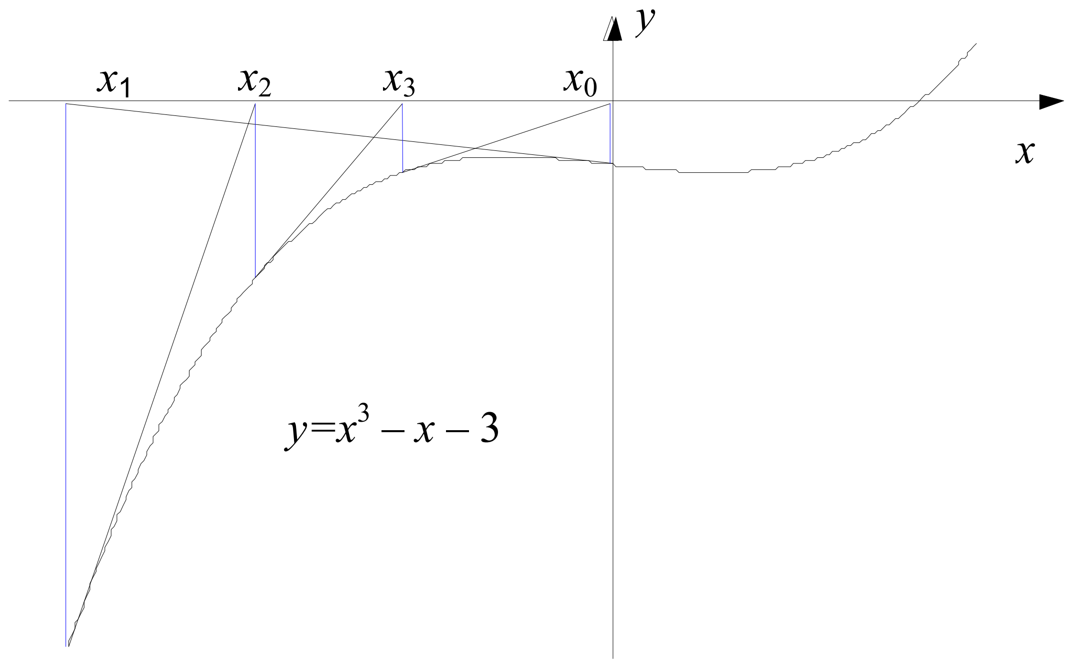
2.程序死循环

对 $f(x)=\arctan x$

存在 x_0, 使Newton迭代法陷入死循环

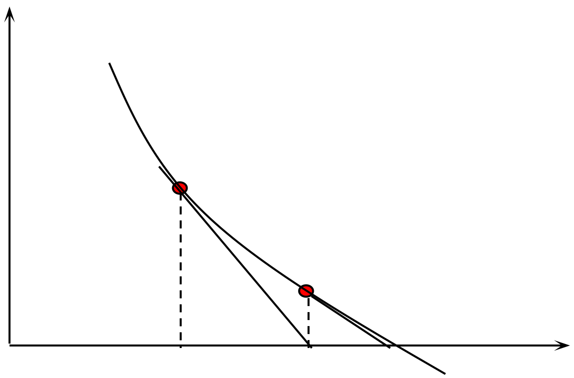


取 x_0=0, $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 3}{3x_n^2 - 1} \qquad (n = 0, 1, \cdots\cdots)$$

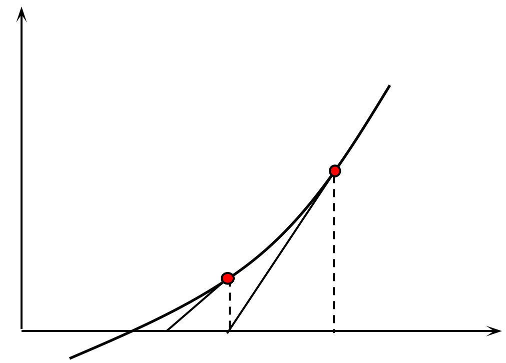


Newton迭代法陷入死循环的另一个例子

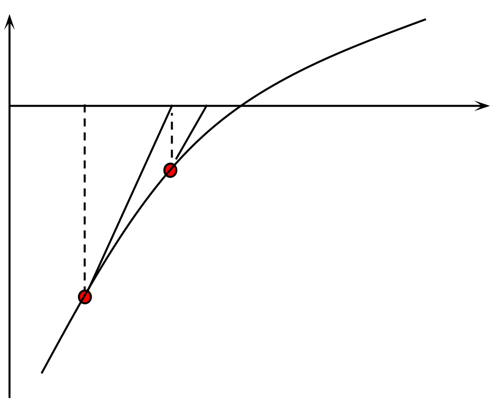
牛顿迭代法收敛的四种情况



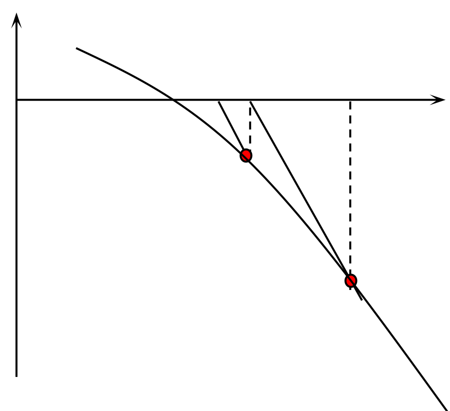
$f'<0,\ f''>0$



$f'>0,\ f''>0$



$f'>0,\ f''<0$



$f'<0,\ f''<0$

例 已知方程 $x^3 - 3x + 2 = 0$

有两根： $x_1^* = -2 \qquad x_2^* = 1$

取根附近值做初值，分析牛顿迭代法实验的数据。

表3 初值取 -1.5 时牛顿迭代法速度

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\lvert e_{n+1} \rvert / \lvert e_n \rvert^2$
0	-1.5	5.00e-001	
1	-2.33333333333	3.33e-001	1.3333
2	-2.05555555555	5.55e-002	0.5000
3	-2.00194931773	1.94e-003	0.6316
4	-2.00000252829	2.52e-006	0.6654
5	-2.00000000000	4.26e-012	0.6667

表4 初值取 1.5 时牛顿迭代法速度

n	x_n	$\|e_n\|$	$\|e_{n+1}\|/\|e_n\|$
0	1.5	5.00e-001	
1	1.2666666	2.66e-001	0.5333
2	1.1385620	1.38e-001	0.5196
3	1.0707773	7.07e-002	0.5108
4	1.0357918	3.57e-002	0.5057
5	1.0180008	1.80e-002	0.5029
6	1.0090271	9.02e-003	0.5015
7	1.0045203	4.52e-003	0.5007
8	1.0022618	2.26e-003	0.5004
9	1.0011313	1.13e-003	0.5002
10	1.0005657	5.65e-004	0.5001
11	1.0002829	2.82e-004	0.5000

引理 设 x^*是 $f(x)=0$ 的二重根, 则牛顿迭代法只具有一阶收敛

证: x^*是二重根 ➔ $f(x)=(x-x^*)^2 g(x)$

$$f'(x)=(x-x^*)[2g(x)+(x-x^*)g'(x)]$$

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-x^*)g(x)}{2g(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

➔ $\varphi'(x^*)=1-\dfrac{1}{2}$ 牛顿迭代法只是一阶收敛.

若 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根,修正的牛顿迭代法

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

为二阶收敛

$$m = 2 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

表5 x^*为二重根时修正的牛顿迭代实验

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\lvert e_{n+1} \rvert / \lvert e_n \rvert^2$
0	1.5	5.00e-001	
1	1.03333333333	3.33e-002	0.1333
2	1.00018214936	1.85e-004	0.1639
3	1.00000000552	5.52e-009	0.1667

牛顿法

- **牛顿的优点**

  至少二阶局部收敛，收敛速度较快，特别是当迭代点充分靠近精确解时。

牛顿法是目前求解非线性方程 (组) 的主要方法

- **牛顿的缺点**
  - 对重根收敛速度较慢（线性收敛）
  - 对初值的选取很敏感，要求初值相当接近真解

  先用其它算法获取一个近似解，然后使用牛顿法

  - **每一次迭代都需要计算导数！**

7.4.2 简化Newton法（平行弦法）

迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - cf(x_k)$$ （c≠0,k=0,1,……）

迭代函数： $$\varphi(x) = x - cf(x)$$

– 若$|\varphi`(x)|=|1-cf`(x)|<1$，即取$0<cf`(x)<2$在x^*附近成立，则收敛。
– 若取$c=1/f`(x_0)$，则称简化Newton法。

7.4.2 Newton下山法

- 为防止Newton法发散，可增加一个条件：$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$，满足该条件的算法称下山法。
- 可用下山法保证收敛，Newton法加快速度。

记

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k$$

（$0<\lambda\leq 1$,—下山因子）

即

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

称Newton下山法。

λ的选取：

从λ=1开始，逐次减半计算。

即按 $$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\cdots$$

的顺序，直到使下降条件$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$成立为止。

例：求解方程 $\dfrac{x^3}{3}-x=0$

要求达到精度$|x_n-x_{n-1}|\le 10^{-5}$，取$x_0=-0.99$。

解：先用Newton迭代法：$f`(x)=x^2-1$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k}{3(x_k^2-1)}$$

$$x_1=x_0-\frac{x_0^3-3x_0}{3(x_0^2-1)}=32.505829$$

$x_2=21.69118$ $x_3=15.15689$ $x_4=9.70724$

$x_5=6.54091$ $x_6=4.46497$ $x_7=3.13384$

$x_8=2.32607$ $x_9=1.90230$ $x_{10}=1.75248$

$x_{11}=1.73240$ $x_{12}=1.73205$ $x_{13}=1.73205$

需迭代13次才达到精度要求

- 用Newton下山法，结果如下：

k	下山因子	x_k	$f(x_k)$
$k=0$		x_0 =-0.99	$f(x_0)$ =0.666567
$k = 1$		x_1 =32.505829	$f(x)$ = 11416.4
	λ =0.5	x_1 =15.757915	$f(x)$ = 1288.5
	λ =0.25	x_1 =7.383958	$f(x)$ =126.8
	λ =0.125	x_1 =3.196979	$f(x)$ =7.69
	λ = 0.0625	x_1 =1.103489	$f(x)$=-0.655
$k = 2$		x_2 = 4.115071	$f(x)$ =19.1
	λ = 0.5	x_2 = 2.60928	$f(x)$=3.31
	λ =0.25	x_2 =1.85638	$f(x)$=0.27
$k = 3$		x_3 =1.74352	$f(x)$=0.023
$k = 4$		x_4 = 1.73216	$f(x)$=0.00024
$k = 5$		x_5 = 1.73205	$f(x)$=0.00000
$k = 6$		x_6 = 1.73205	$f(x)$=0.000000

重根情形

$$f(x)=(x-x_*)^m g(x)\ \text{且}\ g(x_*)\neq 0 \Longrightarrow \boxed{m\ \text{重零点}}$$

- **解法一**：直接使用 Newton 法

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Longrightarrow \varphi'(x_*)=1-\frac{1}{m} \Longrightarrow \boxed{\text{线性收敛}}$$

- **解法二**：改进的 Newton 法

$$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)} \Longrightarrow \varphi'(x_*)=0 \Longrightarrow \boxed{\text{二阶收敛}}$$

缺点：需要知道 m 的值

重根情形

- **解法三**：用 Newton 法解 $\mu(x)=0$，其中

$$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad x_* \text{ 是 } \mu(x)=0 \text{ 的单重根}$$

$$\varphi(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

迭代格式：

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}}$$

$\Rightarrow$ **二阶收敛**

弦截法与抛物线法

目的：避免计算 Newton 法中的导数，并且尽可能地保持较高的收敛性（超线性收敛）

- 弦截法（割线法）：用差商代替微商
- 抛物线法：用二次多项式近似 $f(x)$

弦截法

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- **弦截法迭代格式：**

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

注：弦截法需要提供两个迭代初始值

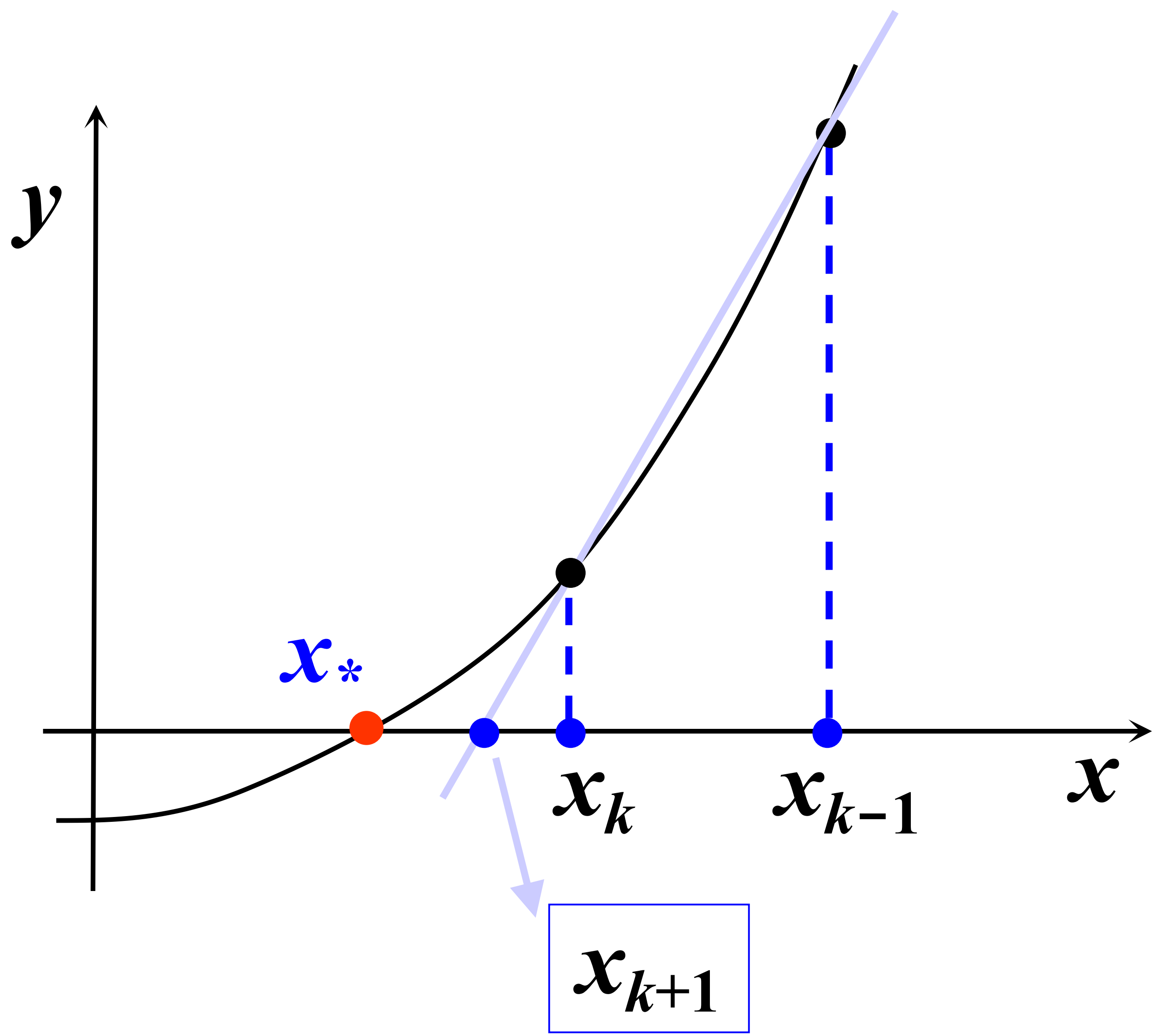
收敛性

定理： 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点， $f(x)$ 在 x_* 的某邻域 $U(x_*,\delta)$ 内有二阶连续导数，且 $f'(x)\neq 0$，若初值 x_0，$x_1 \in U(x_*,\delta)$，则当 δ 充分小时，弦截法具有 p 阶收敛性，其中

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

$$(p^2-p-1=0)$$

弦截法几何含义



例 用简化的Newton迭代法和弦截法计算方程 $x^3-3x+1=0$ 的根。

解： 设 $f(x)=x^3-3x+1$，则 $f`(x)=3x^2-3$

由简化的Newton法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_0^2-3}$$

由弦截法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

$$=x_k-\frac{x_k^3-3x_k+1}{x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2-3}$$

简化Newton法

$x_0=0.5$
$x_1=$ 0.3333333333
$x_2=$ 0.3497942387
$x_3=$ 0.3468683325
$x_4=$ 0.3473702799
$x_5=$ 0.3472836048
$x_6=$ 0.3472985550
$x_7=$ 0.3472959759
$x_8=$ 0.3472964208
$x_9=$ 0.3472963440
$x_{10}=$ 0.3472963572
$x_{11}=$ 0.3472963553

弦截法

$x_0=0.5;$
$x_1=0.4;$
$x_2=$ 0.3430962343
$x_3=$ 0.3473897274
$x_4=$ 0.3472965093
$x_5=$ 0.3472963553
$x_6=$ 0.3472963553

要达到精度10^{-8}，简化Newton法迭代11次，弦截法迭代5次， Newton迭代法迭代4次。

无论前面哪种迭代法：

（Newton迭代法、简化Newton法、弦截法）

是否收敛均与初值的位置有关。

如 $f(x) = \arctan(x) = 0$ 精确解为 $x = 0$

Newton迭代法 $x_{k+1} = x_k - \arctan x_k \cdot (1 + x_k^2)$

取初值 $x_0 = 1$

$x_0 = 1$
$x_1 = -0.5708$
$x_2 = 0.1169$
$x_3 = -0.0011$
$x_4 = 7.9631\text{e-}010$
$x_5 = 0$

收敛

取初值 $x_0 = 2$

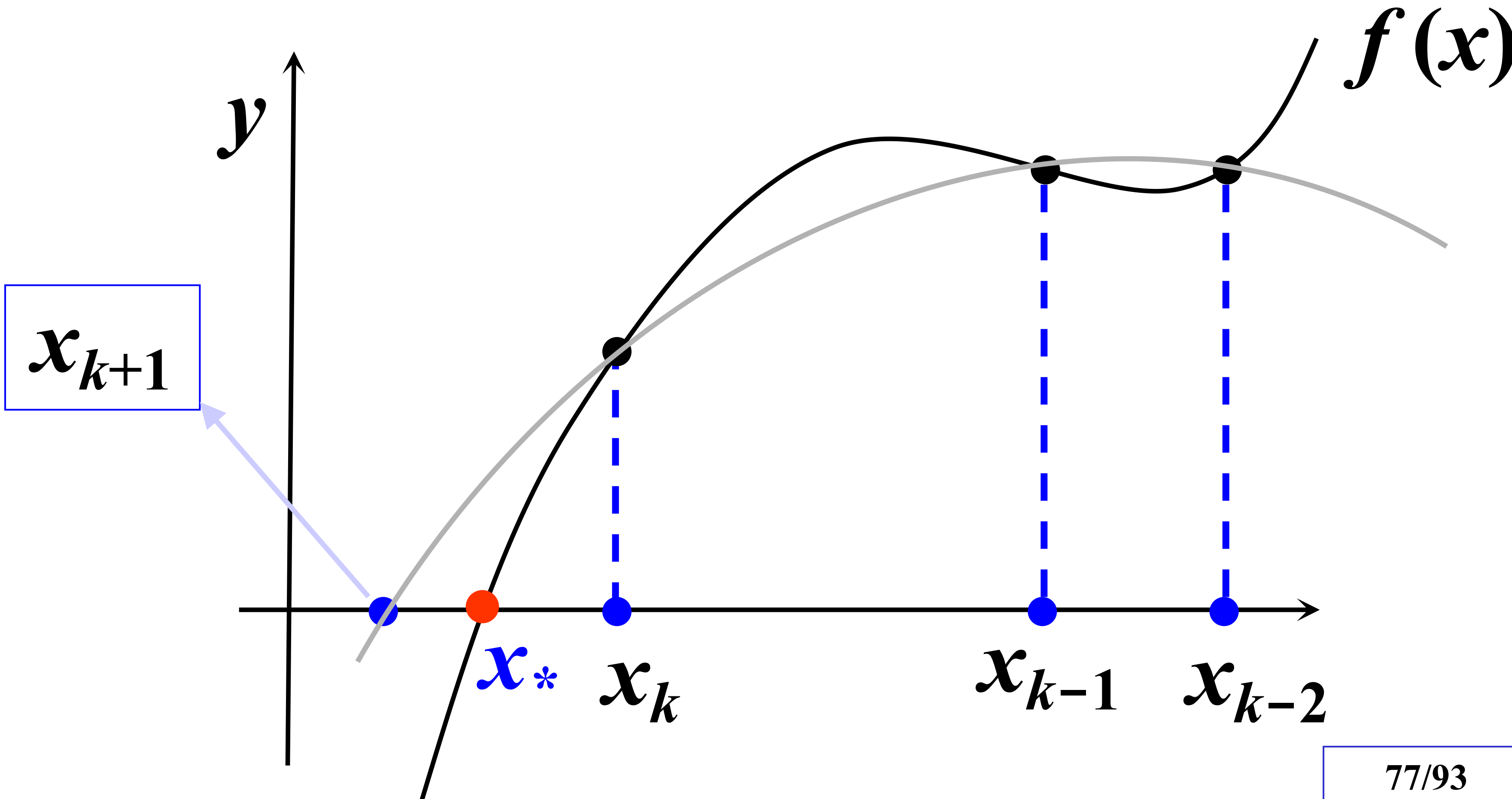
$x_0 = 2$
$x_1 = -3.54$
$x_2 = 13.95$
$x_3 = -279.34$
$x_4 = 122017$

发散

抛物线法

基本思想：

用二次曲线与 x 轴的交点作为 x_* 的近似值



抛物线法

- **计算过程**

二次曲线方程 (三点 Newton 插值多项式)

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

- **问题：** $p_2(x)$ 与 x 轴有**两个交点**，取哪个点？

解决方法： 取靠近 x_k 的那个点！

抛物线法

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}}$$

$$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

取靠近 x_k 的那个点

- **抛物线法可能涉及复数运算，因此可以用来求复根**

收敛性

在一定条件下可以证明：抛物线法的收敛阶为

$$\boxed{p \approx 1.840} \qquad (p^3 - p^2 - p - 1 = 0)$$

- 与弦截法相比，抛物线法具有更高的收敛阶
- 抛物线法需提供三个初始值
- 抛物线法也称为 Muller 法

7.7非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \overset{F = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T}{\underset{x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T}{\Longleftrightarrow}} \quad F(x) = 0$$

迭代法：单变量函数 $f(x)$ → 多变量函数 $F(x)$

基本性质

$F(x)$ 在 x_* 点处连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_*} F(x) = F(x_*)$

$F(x)$ 在区域 $D\subseteq R^n$ 内连续

$\Longleftrightarrow$ $F(x)$ 在 D 内所有点都连续

导数：Jacobi 矩阵

$$F'(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

迭代方法

- 不动点迭代法
- Newton 迭代法

不动点迭代

- 构造 $F(x)=0$ 的一个等价方程组：$x=\Phi(x)$

$$F(x)=0 \quad \xleftrightarrow{\text{等价变换}} \quad x=\Phi(x)$$

$F(x)$ 的零点 $\longleftrightarrow$ $\Phi(x)$ 的不动点

迭代格式　给定迭代初始值 $x^{(0)}$，计算

$$x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)}) \qquad k=0,1,2,\dots$$

注：函数 $\Phi(x)$ 称为迭代函数

收敛性分析

设 $\Phi(x)$ 连续，若迭代序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x_*$$

则

$$x_* = \Phi(x_*) \qquad \text{即} \quad F(x_*) = 0$$

注：x_* 为 $\Phi(x)$ 的不动点，$F(x)$ 的零点。

收敛性分析

定理： 设函数 $\Phi(x)$ 在区域 $D\subseteq R^n$ 内有定义，且：

(1) 存在闭集 $D_0\subseteq D$ 和实数 $L\in(0,1)$，使得

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\le L\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in D_0$$

(2) 对任意 $x\in D_0$ 有 $\Phi(x)\in D_0$

则 $\Phi(x)$ 在 D_0 内存在唯一不动点 x_*，且对任意 $x^{(0)}\in D_0$，由迭代法生成的序列都收敛到 x_*，同时有以下误差估计

$$\|x^{(k)}-x_*\|\le\frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

注： 该定理也称为压缩映像原理，条件 (1) 称为压缩条件。

局部收敛性

定理： 设 x_* 是 $\Phi(x)$ 的不动点，且 $\Phi(x)$ 在 x_* 的某个领域 $U_\delta(x_*)$ 内存在连续偏导数，且

$$\rho\left(\Phi'(x_*)\right) < 1,$$

则存在 x_* 的一个领域 D_0，对任意 $x^{(0)} \in D_0$，由迭代法生成的序列都收敛到 x_*。

收敛阶

定义： 设序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 x_* ，且存在常数 $p \geq 1$ 和 $C > 0$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\| x^{(k+1)} - x_* \right\|}{\left\| x^{(k)} - x_* \right\|^p} = C$$

则 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 为 p **阶收敛**。

(1) 当 $p=1$ 且 $0< C < 1$时称为**线性收敛**

(2) 当 $p=2$ 时称为**二次收敛**，或**平方收敛**

(3) 当 $p>1$ 或 $p=1$且 $C=0$ 时称为**超线性收敛**

Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

收敛性分析

定理： 设 x_* 是 $F(x)$ 的零点，且 $F(x)$ 在 x_* 的某个领域 $U_\delta(x_*)$ 内存在连续偏导数。若 $F'(x_*)$ 非奇异，则存在 x_* 的一个闭领域 S，使得 Newton 法生成的序列都**超线性收敛**到 x_*。

进一步，若还存在常数 $L\in(0, 1)$，使得

$$\|F'(x)-F'(x_*)\| \le L\|x-x_*\|, \quad \forall x \in S$$

则 Newton 法生成的序列至少**平方收敛**。

Newton 法举例

例： 用 Newton 法求解非线性方程组

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解：

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

$$F'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

取迭代初始值 $x^{(0)}=[0,0]^T$

总结

- 方程求根二分算法
- 不动点迭代法及收敛性
- 迭代收敛加速方法
- 牛顿迭代法及变形
- 非线性方程组牛顿迭代