程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题12-21详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-04-25 19:00

这一期是第五章习题详解的第二部分, 包含课后习题 12-21.

首先, 我们来讨论极限换序的问题, 极限换序主要分为三类:

- 极限与积分换序;
- 积分与无穷求和换序;
- 积分与积分换序.

对于 Riemann 积分, 这三类极限换序所需要的条件都比较苛刻, 比如积分和极限换序，需要函数列一致收敛. 但对于 Lebesgue 积分, 这三类极限换序所需要的条件都要弱得多. 这也是 Lebesgue 积分比 Riemann 积分更有优势的地方, Lebesgue 积分也因此成为现代数学的重要工具之一.

下面我们具体的来看这三类极限换序.

极限与积分换序

- Riemann 积分

> 逐项积分定理:

如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项的在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 并且这函数列在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 那么就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- Lebesgue 积分

> Lebesgue 控制收敛定理:

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列可测函数. F 是 E 上的非负 L 可积函数, 如果对于任意的正整数 n, $|f_n(x)|\le F(x)$ a.e. 于 E 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e. 于 E, 则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

> 依测度收敛型 Lebesgue 控制收敛定理:

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为可测集, f 和 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上的可测函数. F 是 E 上的非负 L 可积函数, 如果对于任意的正整数 n, $|f_n(x)|\le F(x)$ a.e. 于 E 且 $n\to\infty$ 时 $f_n\Rightarrow f$, 则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

第 13 题需要用到 Lebesgue 控制收敛定理，上次讲的第 6 题用的是依测度收敛型 Lebesgue 控制收敛定理.

> **13. 证明:**
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}=1.$$

证明.

第一步: 证明: 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$(R)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = (L)\int_{(0,+\infty)} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}.$$

事实上,

$$\begin{aligned}
&(R)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \\
=&(R)\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} + (R)\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}$$

(1). $(R)\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}$ 是瑕积分, 0 是唯一瑕点, 则

$$\begin{aligned}
&(R)\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \\
=&\lim_{\eta\to 0}(R)\int_\eta^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \\
=&\lim_{\eta\to 0}(L)\int_{(\eta,1)} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \\
=&(L)\int_{(0,1)} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}},
\end{aligned}$$

最后一个等式用到了 L 积分的可数可加性.

(2). $(R)\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}$ 是广义积分. 则

$$
\begin{aligned}
&(R)\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}\\
=&\lim_{M\to+\infty}(R)\int_1^{M}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}\\
=&\lim_{M\to+\infty}(L)\int_{[1,M)}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}\\
=&(L)\int_{[1,+\infty)}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}},
\end{aligned}
$$

最后一个等式用到了 L 积分的可数可加性.

综合 (1),(2) 的讨论, 可得

$$
\begin{aligned}
&(R)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}\\
=&(R)\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}+(R)\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}\\
=&(L)\int_{(0,1)}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}+(L)\int_{[1,+\infty)}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}\\
=&(L)\int_{(0,+\infty)}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}
$$

第二步: 证明 $\lim_{n\to\infty}(L)\int_{(0,+\infty)}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}=1.$

当 $t\in(0,1)$ 时, 有

当 $t \in (0,1)$ 时, 有

当 $t \in (0,1)$ 时, 有

$$0 < \frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \le \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} \le \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (n \ge 2).$$

当 $t \in [1,+\infty)$ 时, 有

$$0 < \frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(1+t+\frac{n-1}{2n}t^2+\cdots+\frac{1}{n^n}t^n\right) t^{\frac{1}{n}}}$$

$$\le \frac{2n}{t^2(n-1)} \le \frac{4}{t^2} \quad (n \ge 2).$$

令

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \in (0,1) \\ \frac{4}{t^2}, & t \in [1,+\infty) \end{cases},$$

则对任意 $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, 有

$$0 < \frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \le F(x), \quad x \in (0,+\infty).$$

又

$$(R)\int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = (R)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t + (R)\int_1^{+\infty} \frac{4}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2+4 = 6,$$

所以 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 L 可积. 由勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{1/n}}$$

$$= (L)\int_{(0,+\infty)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{t}{n})^n \cdot t^{\frac{1}{n}}} \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=(L)\int_{(0,\infty)}\lim_{n\to\infty}\frac{}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{1/n}}\mathrm{d}t\\
&=(L)\int_{(0,\infty)}\frac{1}{e^t}\mathrm{d}t=1.
\end{aligned}
$$

结论得证.

6. 设 $mE<\infty$, $\{f_n(x)\}$ 为 a.e. 有限可测函数列.

证明:

$$
\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x=0
$$

的充要条件是 $f_n(x)\Rightarrow 0$.

证明.

先证充分性.

若 $f_n(x)\Rightarrow 0$, 对任意的 $\sigma>0$, 由

$$
E\left[\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\sigma\right]\subset E[|f_n|\geq\sigma]
$$

得

$$
\lim_{n\to\infty}mE\left[\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\sigma\right]\leq\lim_{n\to\infty}mE[|f_n|\geq\sigma]
$$

$$= 0,$$

即

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \Rightarrow 0.$$

又对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \leq 1$, $mE < \infty$, 由依测度收敛型 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \mathrm{d}x = \int_E 0 \mathrm{d}x = 0.$$

再证必要性.

若 $\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \mathrm{d}x = 0$, 由第 5 题结论得

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \Rightarrow 0.$$

又函数 $y = \frac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上严格单调递增, 因此, 对任意的 $\sigma > 0$,

$$E[|f_n| \geq \sigma] = E\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\right].$$

于是,

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n| \geq \sigma] = \lim_{n\to\infty} mE\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\right]$$

$$= 0,$$

> 即 $f_n(x) \Rightarrow 0.$

积分与无穷求和换序

- Riemann 积分

> 逐项积分定理:

如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的每一项都在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 并且这函数项级数在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 那么就有

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

- Lebesgue 积分

> 非负可测函数的逐项积分定理:

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列非负可测函数, 则

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

> 一般可测函数的逐项积分定理:

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列 L 可积函数. 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E|f_n(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上a.e. 收敛, 其和函数在 E 上 L

可积, 且

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

第 12，14 题都是借助非负可测函数的逐项积分定理来证明的.

12. 试从 $\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots\ (0<x<1)$ 证明:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

证明. 一方面,

$$\ln 2=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$$

函数 $\frac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以

$$(R)\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=(L)\int_{(0,1)}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$$

另一方面, 在 $(0,1)$ 上

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}-x^{2n+1},$$

且 $x^{2n}-x^{2n+1}(n=0,1,2,\cdots)$ 非负可测, 由逐项积分定理, 得

$$(L)\int_{(0,1)}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int_{(0,1)}\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n}-x^{2n+1})\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} x^{2n} - x^{2n+1} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .
\end{aligned}
$$

故

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

14. 若 $p > -1$, 求证:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}.$$

证明.

第一步: 证明:

$$(R) \int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x = (L) \int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

事实上, $(R) \int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 是瑕积分, $0, 1$ 是可能的瑕点. ▽

能的瑕点,又

能的瑕点，又

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{-1}=1,$$

所以只有 0 一个瑕点. 于是

$$(R)\int_0^1\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0}(R)\int_\eta^1\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{\eta\to 0}(L)\int_{(\eta,1)}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=(L)\int_{(0,1)}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

最后一个等式用到了 L 积分的可数可加性.

第二步: 证明

$$(L)\int_{(0,1)}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}.$$

当 $x\in(0,1)$ 时,

$$\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+p}\ln\frac{1}{x},$$

且 $x^{n+p}\ln\frac{1}{x}\geq 0,\ n=1,2,\cdots$. 因此, 由逐项积分定理可得

$$(L)\int_{(0,1)}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=(L)\int_{(0,1)}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+p}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(L)\int_{(0,1)}x^{n+p}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p+1)^2}$$

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(n+p+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2}.$$

积分与积分换序

- Riemann 积分

> 定理:

设 $E = A \times B$ 是 $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 中的闭方块, 函数 $f(x, y)$ 在 E 上可积. 如果对每个 $x \in A$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数在 B 上可积, 那么

$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_A \mathrm{d}x \int_B f(x,y)\mathrm{d}y.$$

如果对每个 $y \in B$, $f(x, y)$ 作为 x 的函数在 A 上可积, 那么

$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_B \mathrm{d}y \int_A f(x,y)\mathrm{d}x.$$

特别重要的情形是: 如果 $f(x, y)$ 在 E 上连续, 那么

$$\begin{aligned} &\int_{A\times B} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\ =& \int_A \mathrm{d}x \int_B f(x,y)\mathrm{d}y = \int_B \mathrm{d}y \int_A f(x,y)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

- Lebesgue 积分

> 非负可测函数的 Fubini 定理:

设 $f(P) = f(x, y)$ 在 $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ (A, B 分别为 $\mathbb{R}^p$ 与 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集) 上非负可

测, 则

1. 对 a.e. 的 $x \in A$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可测;
2. 对 a.e. 的 $y \in B$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 A 上可测,

且

$$\begin{aligned}&\int_{A\times B} f(P)\mathrm{d}P\\=&\int_A \mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y=\int_B \mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

> 一般可测函数的 Fubini 定理:

设 $f(P)=f(x,y)$ 在 $A\times B\subset\mathbb{R}^{p+q}$ 上可积, 则

1. 对 a.e. 的 $x \in A$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可积, $\displaystyle\int_B f(x,y)\mathrm{d}y$ 作为 x 的函数在 A 上可积;
2. 对 a.e. 的 $y \in B$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 A 上可积, $\displaystyle\int_A f(x,y)\mathrm{d}x$ 作为 y 的函数在 B 上可积,

且

$$\begin{aligned}&\int_{A\times B} f(P)\mathrm{d}P\\=&\int_A \mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y=\int_B \mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从另一个角度看, Fubini 定理是数学分析中重积分化累次积分的推广.

第 18, 19 题用 Fubini 定理来证明.

> **18. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可积, $g(y)$ 在 $\mathbb{R}^q$ 上可积, 证明: $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可积.**

证明.

第一步: 证 $f(x)g(x)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可测.

函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可积, 则它在 $\mathbb{R}^p$ 上可测, 把它看成 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的函数也可测. 同理, $g(y)$ 作为 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的函数也可测. 因此, $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可测.

第二步: 证 $f(x)$ 和 $g(y)$ 非负可积的情形.

若 $f(x)$ 和 $g(y)$ 非负可积, 记

$$h(P)=h(x,y)=f(x)g(y),\quad P=(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,$$

则 $h(P)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上非负可测, 由 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}h(P)\mathrm{d}P&=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}h(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}f(x)g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^p}f(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}g(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$< +\infty,$$

所以 $f(x)g(y) = h(P)$ 在 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上可积.

第三步: 证 $f(x)$ 和 $g(y)$ 一般可积的情形.

若 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是一般的可积函数, 则

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad g(y) = g^+(y) - g^-(y),$$

其中 $f^+(x)$, $f^-(x)$, $g^+(y)$ 和 $g^-(y)$ 都是非负可积函数. 因此,

$$\begin{aligned} f(x)g(y) = & f^+(x)g^+(y) - f^+(x)g^-(y) \\ & - f^-(x)g^+(y) + f^-(x)g^-(y), \end{aligned}$$

它的每一项都在 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上可积, 所以 $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上可积.

19. 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上非负可测函数且 $f(x)g(x)$ 在 E 上可积. 令 $E_y = E[g \geq y]$. 证明:

$$F(y) = \int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x$$

对一切 $y>0$ 都存在, 且成立

$$\int_0^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明.

设 $y>0$, $\varphi_y(x)$ 是 E_y 的特征函数, 则

$$g(x)\geq y\varphi_y(x),\quad x\in E.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x&=\int_E f(x)\varphi_y(x)\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{1}{y}\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x<+\infty,\end{aligned}$$

即 $F(y)=\int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

另一方面, 令

$$\psi(x,y)=\varphi_y(x)=\begin{cases}1, & 0<y\leq g(x)\\ 0, & y>g(x)\end{cases},$$

则 $\psi(x,y)$ 是 $E\times(0,+\infty)$ 的子集

$$G(E,g)=\{(x,y):x\in E,0<y\leq g(x)\}$$

的特征函数. 由 $g(x)$ 可测得 $G(E,g)$ 也可测, 即

$\psi(x,y)$ 可测, 且当 $x \in E$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \psi(x,y)\mathrm{d}y = mG(E,g)_x = g(x).$$

于是, 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty}\left(\int_E f(x)\varphi_y(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} \varphi_y(x)\mathrm{d}y \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} \psi(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

接下来, 我们讨论

L 积分与上、下极限的换序

> 非负可测函数的 Fatou 引理:

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列非负可测函数, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

> 一般可测函数的 Fatou 引理: (习题 21)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列可测函数, $f(x)$ 是 E 上非负 L 可积函数且 $|f_n(x)| \leq f(x)$ a.e. 于 E. 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

21. **设** $E \subset \mathbb{R}^q$ **为可测集,** $\{f_n(x)\}$ **是定义在** E **上的可测函数列,** $f(x)$ **是** E **上非负 L 可积函数且** $|f_n(x)| \leq f(x)$ a.e. **于** E**. 求证:**

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明.

令 $g_n(x) = \inf\{f_k(x) : k \geq n\}$, $x \in E$. 则 $\{g_n(x)\}$ 是 E 上的一列可测函数且 $x \in E$ 时

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(x), \quad |g_n(x)| \leq f(x).$$

于是

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$

其中第二个等号用了 Lebesgue 控制收敛定理. 第一个不等式得证.

类似地, 令 $h_n(x) = \sup\{f_k(x) : k \ge n\}$, $x \in E$. 则 $\{h_n(x)\}$ 是 E 上的一列可测函数且 $x \in E$ 时

$$h_n(x) \ge h_{n+1}(x) \ge f_{n+1}(x), \quad |h_n(x)| \le f(x).$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty} h_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E h_n(x)\mathrm{d}x \\ &\ge \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中第二个等号用了 Lebesgue 控制收敛定理. 第二个不等式得证.

第 15 题和第 17 题都是借助 Fatou 引理得到的.

15. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上可积函数列, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. 于 E, 且

$$\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \le K, \quad K \text{ 为常数},$$

证明 $f(x)$ 可积.

证明.

首先, $f(x)$ 在 E 上可测, 所以 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数. 其次, 由法图(Fatou) 引理,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\le \varliminf_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \le K,\end{aligned}$$

所以 $|f(x)|$ 在 E 上 L 可积, 因而 $f(x)$ 也 L 可积.

17. 设 $f(x), f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 E 上可积, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. 于 E, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x,$$

对任意可测子集 $e \subset E$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_e |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明.

由题意, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. 于 E, 则

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|\ a.e.\ 于\ E.$$

由 Fatou 引理,

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x = \int_e \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x.$$

下证

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x \ge \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x.$$

否则, 如果

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x < \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x.$$

则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_e |f_{n_k}(x)|\mathrm{d}x = \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x > \int_e |f(x)|\mathrm{d}x.$$

因此,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\int_{E\setminus e} |f_{n_k}(x)|\mathrm{d}x\\ =&\lim_{k\to\infty}\int_E |f_{n_k}(x)|\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_e |f_{n_k}(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$< \int_E |f(x)|\mathrm{d}x - \int_e |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_{E\setminus e} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

这与 Fatou 引理矛盾. 所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x \le \int_e |f(x)|\mathrm{d}x \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x.$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} \int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_e |f(x)|\mathrm{d}x.$$

对于第 16 题, 如果函数 $f(x)$ 连续, 由有界性和 Lebesgue 控制收敛定理, 知结论成立. 那么对于一般的可积函数呢?

第五章第 4 节有这样一个例子(教材第 83 页):

- 设 $f \in L[a,b]$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C[a,b]$, 使得

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这个例子说明: 在积分的意义下, $[a,b]$ 上的 L 可积函数可以用一个连续函数来逼近.

结合这两个方面, 即可得结论.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上可积, 证明:

$$\lim_{t\to 0} \int_{[a,b]} |f(x+t) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

证明.

函数 $f(x)$ 在 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上可积, 则由课本第五章 §4 的例题(P83)可得:

$\forall \delta > 0$, 存在 $g \in C[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 使得

$$\int_{[a-\varepsilon, b+\varepsilon]} |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x < \frac{\delta}{3}.$$

由 g 在 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上连续, 得 g 在 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上一致连续. 则对上述 $\delta > 0$, 存在 $\sigma > 0$, 当 $x \in [a, b]$, $|t| < \min\{\varepsilon, \sigma\}$ 时, 有

$$|g(x+t)-g(x)| < \frac{\delta}{3(b-a)}.$$

因此, 当 $|t| < \min\{\varepsilon, \sigma\}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]} |f(x+t)-f(x)| \mathrm{d}x \\
\leq &\int_{[a,b]} |f(x+t)-g(x+t)|+|g(x+t)-g(x)|+|g(x)-f(x)| \mathrm{d}x \\
< &\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\delta}{3} \\
= &\delta.
\end{aligned}$$

由 δ 的任意性可得

$$\lim_{t\to 0}\int_{[a,b]}|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

第 20 题是讨论函数可积性的.

20. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在且有限, 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积.

证明.

首先, $\frac{f(x)}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),$$

所以对 $\varepsilon_0=1$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-0|<\delta$ 时, $\left|\frac{f(x)}{x}-f'(0)\right|<1$, 即

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<|f'(0)|+1.$$

因而,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x\\ =&\int_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x+\int_{(-\delta,\delta)}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x\\ <&\frac{1}{\delta}\int \qquad |f(x)|\mathrm{d}x+(|f'(0)|+1)2\delta\end{aligned}$$

$$<\frac{1}{\delta}\int_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|f(x)|dx+(|f'(0)|+1)2\delta$$

$$
\begin{aligned}
&\delta \int_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \cdots \\
<&\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\mathrm{d}x+(|f'(0)|+1)2\delta \\
<&+\infty.
\end{aligned}
$$

故 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上 L 可积.

注: 本文中所有关于 Riemann 积分的定理都选自

- 张筑生编著, 数学分析新讲(第一册, 第二册, 第三册), 北京大学出版社, 2014年.

欢迎读者批评指正!

END

上一篇
程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题1-11详解

下一篇
程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题22-30详解

文章已于2020-06-03修改