程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题1-11详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-04-12 10:09

收录于合集
#实变函数与泛函分析
26个 >

第五章进入了实变函数论的核心——建立勒贝格(Lebesgue)积分理论.

基本思路是按照"非负简单函数 → 非负可测函数 → 一般可测函数"的顺序来建立勒贝格积分理论. 这是一个由简单到复杂, 由特殊到一般的过程.

我们先来回忆一下.

> 非负简单函数的 Lebesgue 积分

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\varphi(x)$ 为 E 上的一个非负简单函数, 即 E 可表示为有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 之并, 而在每个 E_i 上 $\varphi(x)$ 取非负常数值 c_i, 也就是说

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x).$$

这里 $\chi_{E_i}(x)$ 是 E_i 的特征函数.

$\varphi(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E \varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i m E_i.$$

> 非负可测函数的 Lebesgue 积分

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $f(x)$ 是 E 上的一个非负可测函数, $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为

$$
\int_E f(x)\mathrm{d}x = \\
\sup\left\{\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x : \varphi(x)\text{是}E\text{上的简单函数}, \right. \\
\left. \text{且}x \in E\text{时}, 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\right\}
$$

若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty$, 则称 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积.

> 一般可测函数的 Lebesgue 积分

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $f(x)$ 为 E 上的可测函数. 令

$$
f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \\
f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.
$$

则 f^+ 和 f^- 都是 E 上的非负可测函数, 当 $x \in E$ 时,

$$
f^+(x) - f^-(x) = f(x), \\
f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|.
$$

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 中至少一个有限, 则称 f 在 E 上积分确定, 称 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 为 f 在 E 上的 Lebesgue 积分, 记作 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 都有限, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积.

下面我们开始讲解习题.

这一章的课后习题比较多, 我们将分成三次来讲解.

今天是第一部分, 包含课后习题 1-11.

第 1,2,3 题讨论函数的可积性. 注意 Lebesgue 积分是绝对收敛的积分, 即

- $f(x)$ 在 E 上可积 $\Leftrightarrow$ $|f(x)|$ 在 E 上可积.

第 2 题给出了函数可积的一个必要条件.

2. 设 E 可测, $f(x)$ 在 E 上可积, $e_n = E[|f| \geq n]$, 则

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot me_n = 0.$$

证明.

函数 $f(x)$ 在 E 上可积, 则 $|f(x)| < +\infty$ a.e. 于 E, 即 $e_\infty = E[|f| = +\infty]$ 是零测集.

另一方面, $e_{n+1} \subset e_n$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, $me_1 < +\infty$, 且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} e_n = e_\infty$, 则

$$\lim_{n \to \infty} me_n = me_\infty = 0.$$

由于 $|f(x)|$ 可积, 由积分的绝对连续性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $e \subset E$ 且 $me < \delta$ 时,

$$\int_e |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

对此 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使当 $n \geq N$ 时, $me_n < \delta$, 故

$$n \cdot me_n \leq \int_{e_n} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot me_n = 0$.

即 $\lim_{n\to\infty} n \cdot mE_n = 0$.

第 3 题给出了当 $mE < +\infty$ 时函数可积的一个充分必要条件.

3. 设 E 可测, 且 $mE < +\infty$, $f(x)$ 为 E 上可测函数, $E_n = E[n-1 \leq f < n]$, 则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |n| mE_n < +\infty$.

证明.

当 $n \geq 1$ 时, 在 E_n 上, 有

$$n-1 \leq |f(x)| = f(x) < n;$$

当 $n \leq 0$ 时, 在 E_n 上, 有

$$|n| < |f(x)| = -f(x) \leq 1 + |n|.$$

先证必要性.

函数 $f(x)$ 在 E 上可积, 则 $|f(x)|$ 在 E 上可积.

因此,

$$
\begin{aligned}
+\infty > \int_E |f(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{E_n} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0} \int_{E_n} |f(x)|\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{n=-\infty}^{0} |n| mE_n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) mE_n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| mE_n - \sum_{n=1}^{+\infty} mE_n.
\end{aligned}
$$

又 E_n 是 E 的互不相交的子集, 故

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} mE_n = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq mE < +\infty.
$$

所以 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |n| mE_n < +\infty.$

再证充分性.

若 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|n|mE_n<+\infty$, 则

$$\begin{aligned}
\int_E|f(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{n=-\infty}^{0}(1+|n|)mE_n+\sum_{n=1}^{+\infty}nmE_n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|mE_n+\sum_{n=-\infty}^{0}mE_n \\
&\le \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|mE_n+mE<+\infty.
\end{aligned}$$

即 $|f(x)|$ 可积, 因而 $f(x)$ 在 E 上可积.

第 1 题是一个具体函数的可积性. 部分同学认为题中的函数 $f(x)$ 是非负简单函数, 这是不正确的. 请大家参考简单函数的定义，想一下为什么该题中的 $f(x)$ 不是非负简单函数.

事实上, 第 1 题的证明需要用到

> Lebesgue 积分的可数可加性:

- 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 这里每个 E_n 都是可测集且 $i \neq j$ 时 $E_i \cap E_j = \emptyset$, 设 f 在 E 上积分确定, 则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

1. 设在康托尔集 P 上定义函数 $f(x)=0$, 而在 P 的余集中长为 3^{-n} 的构成区间上定义为 n, $n=1,2,\cdots$. 证明: $f(x)$ 可积, 并求出积分值.

证明.

显然 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非负可测函数, 所以积分确定. 只需要证明积分有限即可.

记第 n 步挖掉的 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的开区间的并为 E_n, 则

$$mE_n=\frac{2^{n-1}}{3^n},\quad 且\quad [0,1]=P\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right).$$

由积分的可数可加性, 得

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x&=\int_P f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}\\&=3.\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是 L 可积的, 积分值为 3.

第 5 题告诉我们, 对于非负可测函数列, 函数列的积分收敛于 0 是函数列依测度收敛于 0 的充分条件.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上非负可测函数列, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

证明.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上非负可测且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$, 则对充分大的 n, $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 即 $f_n(x)$ 在 E 上非负可积. 所以, 不妨设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上非负可积.

对任意的 $\sigma > 0$, 由 $f_n(x)$ 非负可积得

$\sigma \cdot mE[|f_n| \geq \sigma] \leq \int_{E[|f_n|\geq\sigma]} f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$

因此,

$$mE[|f_n| \geq \sigma] \leq \frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

令 $n \to \infty$, 得

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n| \geq \sigma] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[|f_n| \geq \sigma] = 0$, 即 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

第 6 题对于 $mE < \infty$ 的情形, 对一般的可测函数列, 利用积分给出函数列依测度收敛于 0 的一个充分必要条件.

其中充分性的证明需要用到依测度收敛型 Lebesgue 控制收敛定理, 关于 Lebesgue 控制收敛定理, 我们下一次再详细讨论.

6. **设** $mE < \infty$, $\{f_n(x)\}$ **为** a.e. **有限可测函数列.**

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x = 0$$

的充要条件是 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

证明.

先证充分性.

若 $f_n(x) \Rightarrow 0$, **对任意的** $\sigma > 0$, **由**

$$E\left[\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geq \sigma\right] \subset E[|f_n| \geq \sigma]$$

得

$$\lim_{n\to\infty} mE\left[\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geq \sigma\right] \leq \lim_{n\to\infty} mE[|f_n| \geq \sigma]$$

$$= 0,$$

即

即 即

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \Rightarrow 0.$$

又对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \leq 1$, $mE < \infty$, 由依测度收敛型 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \mathrm{d}x = \int_E 0 \mathrm{d}x = 0.$$

再证必要性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \mathrm{d}x = 0$, 由第 5 题结论得

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \Rightarrow 0.$$

又函数 $y = \frac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上严格单调递增, 因此, 对任意的 $\sigma > 0$,

$$E[|f_n| \geq \sigma] = E\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\right].$$

于是,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} mE[|f_n| \geq \sigma] &= \lim_{n\to\infty} mE\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

第 8,9 题的证明巧妙的运用了特征函数. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 E 的特征函数定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \in E^c. \end{cases}$$

8. 设由 $[0,1]$ 中取出 n 个可测子集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$, 假定 $[0,1]$ 中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个, 试证必有一集, 它的测度大于或等于 $\dfrac{q}{n}$.

证明.

设 $\varphi_k(x) = \chi_{E_k}(x)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 则

$$\int_{[0,1]} \varphi_k(x) \mathrm{d}x = mE_k.$$

因为 $[0,1]$ 中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \geq q, \quad x \in [0,1].$$

不等式两边积分得

$$\sum_{k=1}^{n} mE_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{[0,1]} \varphi_k(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) dx$$

$$= \int_{[0,1]} \sum_{k=1} \varphi_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{[0,1]} q\mathrm{d}x = q.$$

因此至少存在一个 $1 \leq k \leq n$, 使得 $mE_k \geq \dfrac{q}{n}$.

9. 设 $mE \neq 0$, $f(x)$ 在 E 上可积. 若对任意有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x) = 0$ a.e. 于 E.

证明.

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 设 $\varphi_n(x)$ 是 $E[f > \frac{1}{n}]$ 的特征函数, 则

$$\frac{1}{n} mE\left[f > \frac{1}{n}\right] \leq \int_{E[f>\frac{1}{n}]} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

故 $mE\left[f > \frac{1}{n}\right] = 0$. 同理可得 $mE\left[f < -\frac{1}{n}\right] = 0$.

又

$$E[f \neq 0] = E[f > 0] \cup E[f < 0]$$
$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f > \frac{1}{n} \right] \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f < -\frac{1}{n} \right] \right),$$

所以

$$mE[f \neq 0] \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE\left[f > \frac{1}{n} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} mE\left[f < -\frac{1}{n} \right]$$
$$= 0,$$

即 $mE[f \neq 0] = 0$. 因此 $f(x) = 0$ a.e. 于 E.

[如果 $mE < +\infty$, 还可以用下面的方法.]

证明.

$f(x)$ 在 E 上可积, 则 $f(x)$ 在 E 上 a.e. 有限. 由第四章第 4 题, $\forall\delta > 0$, $\exists E_\delta \subset E$ 和 $M > 0$, 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ 且 $\forall x \in E_\delta$, $|f(x)| \leq M$.

令

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \setminus E_\delta, \\ f(x), & x \in E_\delta. \end{cases}$$

则 $\varphi_\delta(x)$ 有界可测, 由题目条件

$$\begin{aligned} 0 = \int_E f(x)\varphi_\delta(x)\mathrm{d}x &= \int_{E_\delta} f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{E\setminus E_\delta} 0\mathrm{d}x \\ &= \int_{E_\delta} f^2(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

而 $f^2(x)$ 非负可测, 故 $f^2(x) = 0$ a.e. 于 E_δ. 即 $f(x) = 0$ a.e. 于 E_δ. 令 $\delta \to 0$, 得 $f(x) = 0$ a.e. 于 E.

> Riemann 积分和 Lebesgue 积分的关系:

- R 积分是“竖”着分割区间 $[a,b]$, L 积分是“横”着分割值域 $[m,M]$;
- L 积分是绝对收敛的积分, R 积分不是.
- 对于有界区间上的有界函数, L 积分是 R 积分的推广.

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个有界函数, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积, 且

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- 对于无界区间上的有界函数, 当函数非负时, L 积分是 R 反常积分的推广; 但在一般情况下, L 积分并不是 R 反常积分的推广.

设 $f(x)$ 是 $[a,\infty)$ 上的一个非负实函数, 若对于任意的 $A>a$, $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上 R 可积且 R 反常积分收敛, 则 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上 L 可积且

$$(L)\int_{[a,\infty]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

一般情况下的反例: 课本 P86 例

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & 若\ x>0,\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上的 R 反常积分收敛, 但不是 L 可积的.

- 对于有界区间上的无界函数, 当函数非负时, L 积分是 R 瑕积分的推广; 但在一般情况下, L 积分并不是 R 瑕积分的推广.

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个非负实函数, a 是唯一的瑕点. 若对于任意的 $b-a>\eta>0$, $f(x)$ 在 $[a+\eta,b]$ 上 R 可积且 R 瑕积分收敛, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积且

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

一般情况下的反例: 第 7 题中当 $\alpha = 1$ 的情形.

$$f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$$

在 $[0,1]$ 上 R 反常积分收敛, 但不是 L 可积的.

> 一般情况下, L 积分不是 R 反常积分或 R 瑕积分的推广的原因就是 L 积分是绝对收敛的积分, 而 R 积分不是.

第 4 题讨论有界区间上的无界函数, L 积分和 R 积分的关系.

其中必要性的证明需要用到

> 莱维(Levi)定理:

- 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列非负可测函数, 当 $x \in E$ 时对于任一正整数 n, 有 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

> **4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼反常积分收敛, 其中 a 是唯一的瑕点. 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 R 反常积分收敛. 并证明**
>
> $$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明.

因为 a 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一瑕点, 则 $\forall 0<\eta<b-a$, 函数在 $[a+\eta,b]$ 上 R 可积. 反常积分 $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 即

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

设数列 $\{\eta_n\}$ 满足

$$0<\eta_{n+1}<\eta_n<b-a,\quad n=1,2,\cdots,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=0$. 则

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{a+\eta_n}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

先证必要性.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积, 即

$$(L)\int_{[a,b]}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty.$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_{a+\eta_n}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a+\eta_n,b]}|f(x)|\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]}|f(x)|\chi_{[a+\eta_n,b]}(x)\mathrm{d}x\\
&=(L)\int_{[a,b]}|f(x)|\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

其中第一个等式用了课本 §5 定理 2, 最后一个等式用到了莱维 (Levi) 定理. 因此反常积分 $(R)\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

再证充分性.

设 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 R 反常积分 $(R)\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

$$
\begin{aligned}
(L)\int_{[a,b]}|f(x)|\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]}|f(x)|\chi_{[a+\eta_n,b]}(x)\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a+\eta_n,b]}|f(x)|\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}(R)\int_{a+\eta_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x\\
&= (R)\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty,
\end{aligned}
$$

所以 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积, 因而 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上 L 可积.

最后证明当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积时, 有

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在上述条件下,

$$\begin{aligned}
&(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x\\
=&(L)\int_{[a,b]} f^+(x)\mathrm{d}x-(L)\int_{[a,b]} f^-(x)\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]} f^+(x)\chi_{[a+\eta_n,b]}(x)\mathrm{d}x\\
&-\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]} f^-(x)\chi_{[a+\eta_n,b]}(x)\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a+\eta_n,b]} f^+(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a+\eta_n,b]} f^-(x)\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}(L)\left(\int_{[a+\eta_n,b]} f^+(x)\mathrm{d}x-\int_{[a+\eta_n,b]} f^-(x)\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a+\eta_n,b]} f(x)\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}(R)\int_{a+\eta_n}^b f(x)\mathrm{d}x\\
=&(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

第 7 题借助 R 积分讨论函数的 L 可积性.

7. 设 $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}$, $0<x\le 1$, 讨论 α 为何值时, $f(x)$ 为 $(0,1]$ 上 L 可积函数.

解.

当 $\alpha\le 0$ 时, 考虑函数 $\frac{1}{x^\alpha}$, 它在 $[0,1]$ 上连续, R 可积, 因而 L 可积. 而 $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上 L 可积.

当 $0<\alpha<1$ 时, 考虑函数 $\frac{1}{x^\alpha}$, 它在 $[0,1]$ 上 R 瑕积分收敛, $x=0$ 是唯一的瑕点. 因而 L 可积. 而 $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上 L 可积.

当 $\alpha\ge 1$ 时, 考虑函数 $\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|$, 因为

$$\int_0^1\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x=\int_1^\infty\frac{|\sin y|}{y}\mathrm{d}y=+\infty,$$

因而 L 不可积. 而 $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\right|\ge\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上 L 不可积.

综上, 当 $\alpha<1$ 时, $f(x)$ 为 $(0,1]$ 上 L 可积函数.

第 10,11 题讨论函数的 R 可积性. 课本 § 5 定理 1 给出了有界区间上有界函数 R 可积的充分必要条件.

- 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积的充要条件为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 a.e. 连续, 即 $f(x)$ 的不连续点全体成一零测度集.

> 10. 设 $F \subset [a,b]$ 是疏朗闭集, 则 $\chi_F(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是 $mF = 0$.
>
> 证明.
>
> $\chi_F(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界函数, 所以 $\chi_F(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件为 $\chi_F(x)$ 的不连续点全体成一零测度集.
>
> 因此, 要证 $\chi_F(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是 $mF = 0$, 只需证明, $\chi_F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点的全体就是集合 F.
>
> 事实上, 设 $x_0 \in F$, $\chi_F(x) = 1$, 由 F 是疏朗集, 对任意邻域 $U(x_0)$, 存在 $y \in U(x_0) \cap F^c$, 即 $\chi_F(y) = 0$. 所以, $\chi_F(x)$ 在 x_0 点不连续.
>
> 设 $y_0 \in [a,b] \setminus F$, 由 F 是闭集, 存在邻域 $U(y_0)$ 使

设 $y_0 \in [a.b] \setminus F$, 由 F 是闭集, 存在邻域 $U(y_0)$ 使

设 $y_0 \in [a,b] \setminus F$, 由 F 是闭集, 存在邻域 $U(y_0)$ 使得 $U(y_0) \cap F = \emptyset$. 即,

$$\chi_F(x) = 0, \quad \forall x \in U(y_0).$$

所以, $\chi_F(x)$ 在 y_0 点连续.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续函数, 证明: $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

证明.

记 $E \subset [a,b]$ 为 $f(x)$ 的全体不连续点构成的集合, $F \subset [a,b]$ 是 $g(f(x))$ 的全体不连续点构成的集合. 则 $F \subset E$. 事实上, 若 $f(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 连续, 由 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可得 $g(f(x))$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 连续.

因此,

$$
\begin{aligned}
& f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上黎曼可积} \\
\Leftrightarrow\ & mE = 0 \\
\Rightarrow\ & mF = 0 \\
\Leftrightarrow\ & g(f(x)) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上黎曼可积.}
\end{aligned}
$$

END