第三部分：

不完全信息静态博弈

第十章贝叶斯博弈与贝叶斯Nash均衡

主要内容：

一、贝叶斯博弈

二、贝叶斯Nash均衡

三、贝叶斯Nash均衡的应用

一、贝叶斯博弈

- 在“新产品开发”博弈中，企业对市场的需求可能并不清楚；

结论：开始就存在事前不确定性的博弈问题是不完全信息博弈问题。

例如：“斗鸡博弈”

- 考察这样的情形：假设参与人可能有这样的两种性格特征(类型)：
  “强硬”(用S表示)或“软弱”(用W表示)。

- 所谓“强硬”的参与人是指那些喜欢争强好胜、不达目的誓不罢休的决斗者；
- 而“软弱”的参与人是指那些胆小怕事、遇事希望息事宁人的决斗者。

当参与人都为强硬者时

		2	
		U	D
1	U	-4, -4	2, -2
	D	-2, 2	0, 0

- 博弈存在两个纯战略Nash均衡——(U, D)和(D, U)。

当参与人1为强硬者参与人2为软弱者时

		2	
		U	*D*
1	*U*	-4, -4	2, 0
	D	-2, 0	0, 1

- 博弈存在唯一的Nash均衡——(*U*, *D*)。

当参与人1为软弱者参与人2为强硬者时

		2	
		U	*D*
1	*U*	-4, -4	0, -2
	D	0, 2	1, 0

- 博弈存在唯一的Nash均衡——(*D*, *U*)。

当参与人都为软弱者时

		2: *U*	2: *D*
1	*U*	-4, -4	0, 0
	D	0, 0	1, 1

- 博弈存在唯一的Nash均衡——(*D*, *D*)。

1 \ 2	*U*	*D*
U	-4, -4	2, -2
D	-2, 2	0, 0

(1) 参与人都为强硬者

1 \ 2	*U*	*D*
U	-4, -4	2, 0
D	-2, 0	0, 1

(2) 参与人1为强硬者
参与人2为软弱者

1 \ 2	*U*	*D*
U	-4, -4	0, -2
D	0, 2	1, 0

(3) 参与人1为软弱者
参与人2为强硬者

1 \ 2	*U*	*D*
U	-4, -4	0, 0
D	0, 0	1, 1

(4) 参与人都为软弱者

1 \ 2	U	D
U	-4, -4	2, -2
D	-2, 2	0, 0

(1) 参与人1是强硬者
参与人2是强硬者

1 \ 2	U	D
U	-4, -4	2, 0
D	-2, 0	0, 1

(2) 参与人1是强硬者
参与人2是软弱者

对于“强硬”的参与人1来讲，虽然他看到了上面的战略式博弈，但他不知道对手是“强硬”的还是“软弱”的，所以博弈开始之前他无法确定博弈是根据(1)还是(2)进行。 这意味着“强硬”的参与人1面临着事前无法确定的信息。

- 同样，“软弱”的参与人1也会面临类似的问题。此时，“斗鸡博弈”就是一个不完全信息博弈问题。
- 博弈方2也是同样的问题。

不完全信息博弈：无法直接应用前面两部分介绍的方法进行求解。

- 因为：给定参与人1为“强硬”的决斗者，如果对手是“软弱”的，那么博弈就只存在惟一的Nash均衡(U, D)，参与人1有惟一的最优选择“冲上去”；

  如果对手是“强硬”的，则博弈就会出现两个Nash均衡(U,D)和(D,U)。

- 参与人1的最优选择取决于对手的选择。

- 但由于参与人1不知道对手究竟是“强硬”的还是“软弱”的，因此，此时的参与人1就觉得自己似乎是在与两个决斗者进行决斗，一个是“强硬”的，另一个是“软弱”的。

- 当一个参与人并不知道在与谁博弈时，博弈的规则是没有定义的，如何处理不完全信息？
- Harsanyi提出了Harsanyi转换。

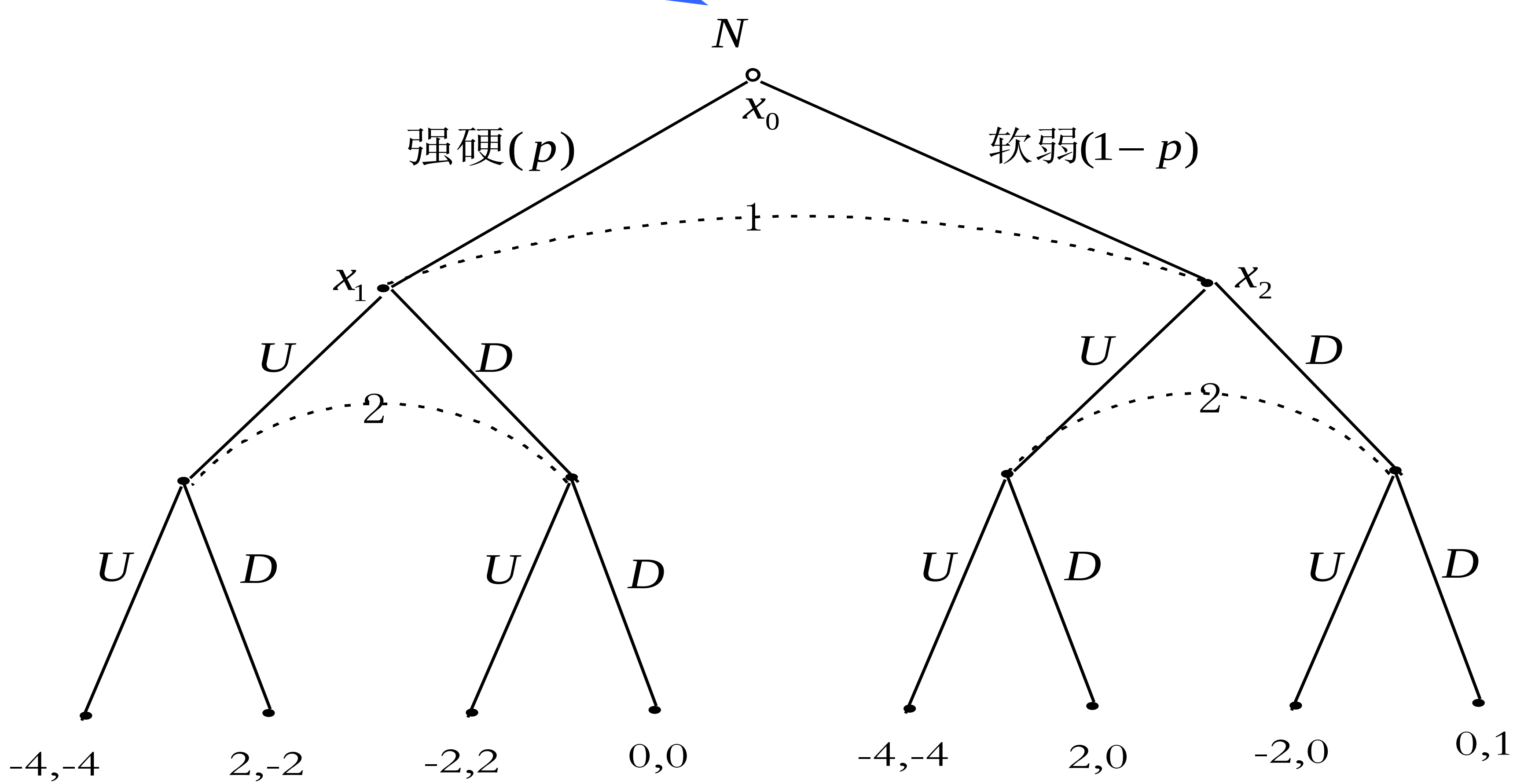
- 简化的“斗鸡博弈”：
- 假设参与人1是“强硬”的决斗者，参与人2可能是“强硬”的也可能是“软弱”的，参与人1不知道参与人2的类型，但参与人2自己清楚。参与人2知道参与人1的类型（为什么）？
- 而且这一假设为所有的参与人所知道。

Harsanyi转换

- 对于简化的“斗鸡博弈”，Harsanyi转换是这样处理的：

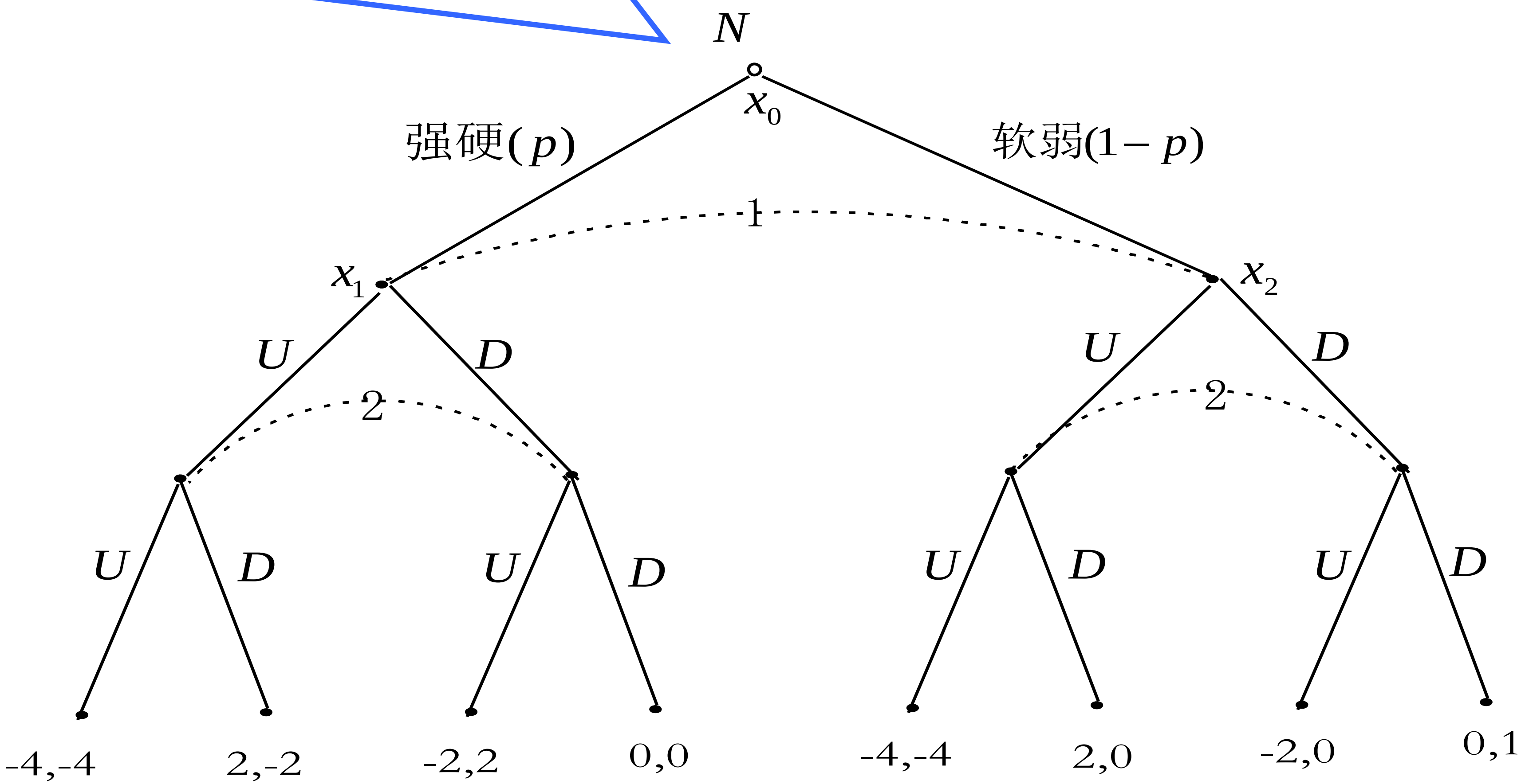
    在原博弈中引入一个“虚拟”参与人——“自然”(nature，用N表示或者O表示)，构造：两个决斗者和“自然”的三人博弈。

“自然”首先行动决定参与人2的性格特征(即选择参与人2是“强硬”的还是“软弱”的)，“自然”的选择参与人1不知道，但参与人2知道。



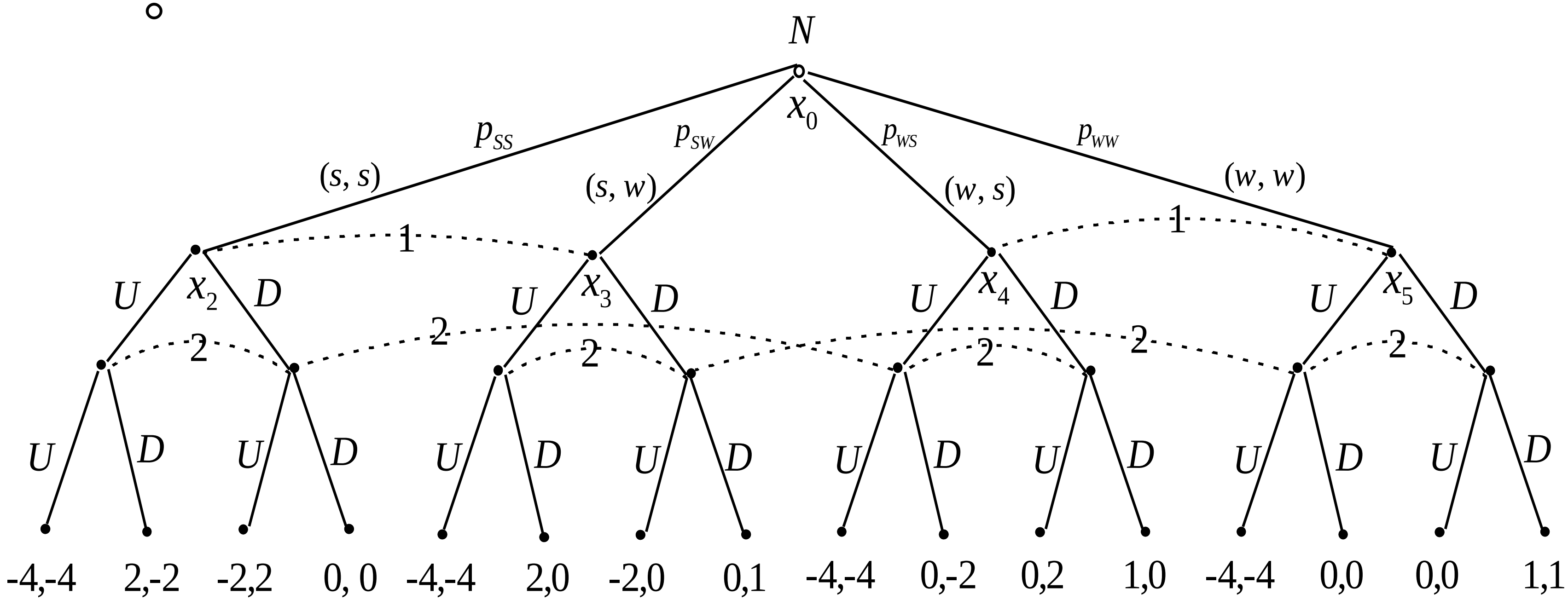
- Harsanyi通过引入“虚拟”参与人，将博弈的起始点由x_1(或x_2)提前至x_0，从而将原博弈中参与人的事前不确定性转变为博弈开始后的不确定性(即参与人1不知道“自然”的选择)。这种通过引入“虚拟”参与人来处理不完全信息博弈问题的方法亦称Harsanyi转换。

如果“自然”选择参与人2的性格特征是“软弱”的，则意味着参与人1与“软弱”的参与人2进行决斗，博弈进入决策结x_2，其支付由(2)决定。



- 在Harsanyi转换中规定：参与人关于“自然”选择的推断为共同知识。
- 也就是说，两个决斗者不仅同时一起看到了“自然”随机选择参与人2的性格特征，而且同时一起看到了“自然”以一定的概率分布随机选择参与人2的性格特征。

- 不完全信息博弈经Harsanyi转换之后得到的完全但不完美信息博弈。(x, y)表示参与人1的性格特征为x，参与人2的性格特征为y；p_{xy}表示“自然”选择(x, y)的概率，这里p_{xy}为共同知识。



在应用Harsanyi转换时，需要注意以下问题：

- 1)“自然”的选择。在一般的不完全信息博弈问题中，Harsanyi转换规定“自然”选择的是参与人的类型(type)。除了根据参与人的支付来划分参与人的类型以外，还可以根据参与人的行动空间，甚至根据参与人掌握信息的多少(或程度)来来划分参与人的类型。
- 此外，需要注意的是，参与人的类型必须是其个人特征的一个完备描述。

- 用t_i表示参与人i的一个特定的类型，T_i表示参与人i所有类型的集合(亦称类型空间，type space)，即 $t_i \in T_i$，$t=(t_1,\ldots,t_n)$表示一个所有参与人的类型组合，$t_{-i}=(t_1,\ldots,t_{i-1},\ldots,t_n)$表示除参与人$i$之外其他参与人的类型组合。所以，$t=(t_i, t_{-i})$。

- 2) 参与人关于“自然”选择的推断。用 $p(t_1,\ldots,t_n)$ 表示定义在参与人类型组合上的一个联合分布密度函数，Harsanyi转换假定：对于一个给定的不完全信息博弈问题，存在一个参与人关于“自然”选择的推断 $p(t_1,\ldots,t_n)$，且 $p(t_1,\ldots,t_n)$ 为共同知识。也就是说，Harsanyi转换假定所有参与人关于“自然”行动的信念(belief)是相同的，并且为共同知识。

- 用 $p_i(t_{-i}|t_i)$ 表示参与人i在知道自己类型为t_i的情况下，关于其他参与人类型的推断(即条件概率)，则

$$p_i(t_{-i}|t_i)=\frac{p(t_{-i},t_i)}{p(t_i)}=\frac{p(t_{-i},t_i)}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p(t_{-i},t_i)}$$

- 假设p_{ss}=0.2，p_{sw}=0.3，p_{ws}=0.25，p_{ww}=0.25。
- 虽然决斗者1不知道决斗者2 的类型，但由于决斗者1知道自己的类型，因此他可以根据贝叶斯公式推知决斗者2的类型分布。

例如

- 根据贝叶斯规则，“强硬”的决斗者1可以推知：
- 决斗者2是“强硬”的概率为 $p_1(s|s)=\frac{0.2}{0.2+0.3}=0.4$
- 决斗者2是“软弱”的概率为 $p_1(w|s)=\frac{0.3}{0.2+0.3}=0.6$
- “软弱”的决斗者1可以推知：
- 决斗者2是“强硬”的概率为 $p_1(s|w)=\frac{0.25}{0.25+0.25}=0.5$
- 决斗者2是“软弱”的概率为 $p_1(w|w)=\frac{0.25}{0.25+0.25}=0.5$

- 这里不同类型的决斗者1所形成的关于“自然”选择的推断是不同的，究其原因，Harsanyi认为：参与人各自掌握的信息不同时对同一事件就会形成不同的概率推断。

- 贝叶斯博弈(the static Bayesian game)是关于不完全信息静态博弈的一种建模方式，也是不完全信息静态博弈的标准式描述。

贝叶斯博弈的定义

- 贝叶斯博弈包含以下五个要素：

（1）参与人集合$N=\{1,2,\ldots,n\}$；

（2）参与人的类型集$T_1,\ldots,T_2$；

（3）参与人关于其他参与人类型的推断$p_1(t_{-1}|t_1)$,

$\ldots,\quad p_n(t_{-n}|t_n)$；

（4）参与人类型相依的行动集$A(t_1),\ldots,A(t_n)$；

（5）参与人类型相依的支付函数$u_1(a_1(t_1),a_2(t_2),\ldots,a_n(t_n);t_1)$

$,\ldots,\ u_n(a_1(t_1),a_2(t_2),\ldots,a_n(t_n);t_n)$。

- 参与人的推断 $p_i(t_{-i}|t_i)$ 来源于一个共同的参与人关于“自然”选择的推断$p(t_1,\ldots,t_n)$，且$p(t_1,\ldots,t_n)$为共同知识。所以，贝叶斯博弈中参与人所具有的关于其他参与人的类型的推断是一致的。

规定贝叶斯博弈的时间顺序如下：

(1) “自然”选择参与人的类型组合$t=(t_1,\ldots,t_n)$，

(2) 参与人i观测到“自然”关于自己类型t_i的选择；虽然参与人i观测不到“自然”关于其他参与人类型t_{-i}的选择，但参与人i具有关于其他参与人类型的推断 $p_i(t_{-i}|t_i)$;

(3) 参与人同时选择行动，每个参与人i从行动集$A_i(t_i)$中选择行动$a_i(t_i)$；

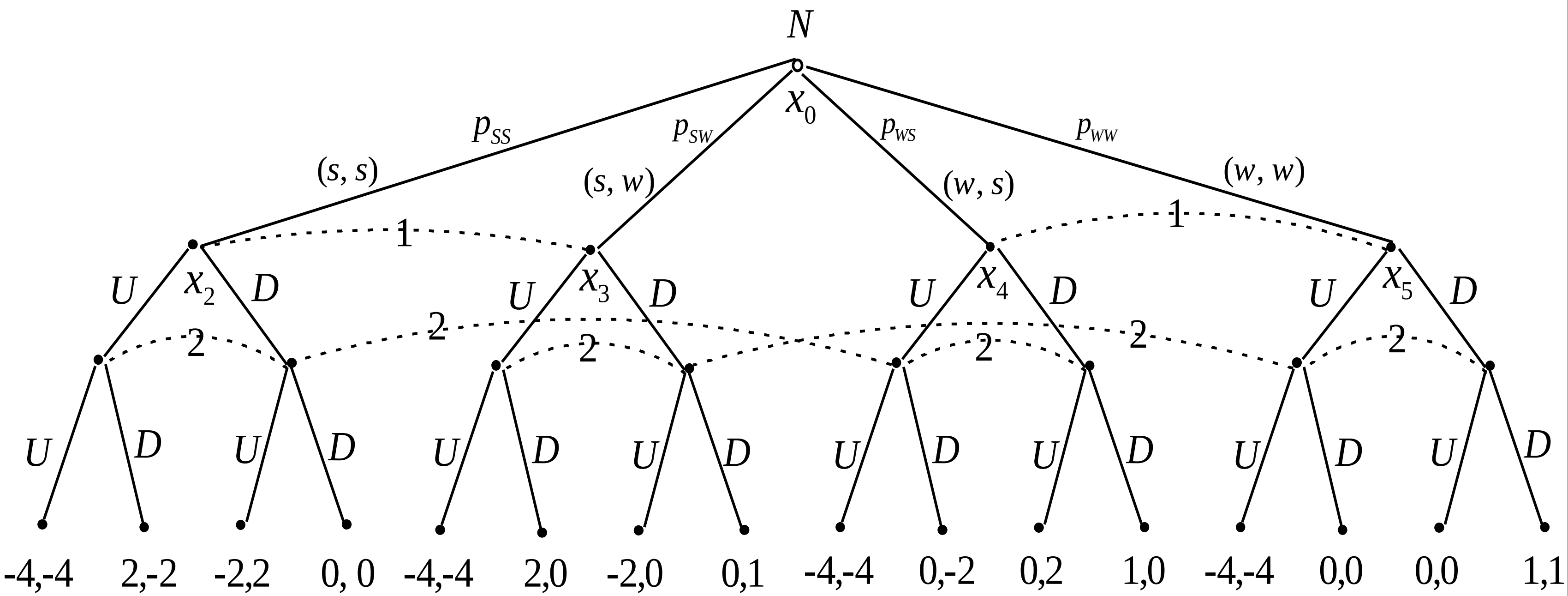
(4) 参与人i得到 $u_i(a_1(t_1),a_2(t_2),\cdots,a_n(t_n);t_i)$。

贝叶斯博弈中的战略

- 在贝叶斯博弈$G=<N;(T_i);(p_i);(A_i(t_i));(u_i(a(t);t_i))>$中，参与人$i$的一个战略是从参与人的类型集$T_i$到其行动集的一个函数$s_i(t_i)$，它包含了当自然赋予$i$的类型为$t_i$时，$i$将从可行的行动集$A_i(t_i)$中选择的行动。

“斗鸡博弈”的贝叶斯模型

- 参与人为决斗者1和2；
- 用s表示决斗者是“强硬”的，w表示决斗者是“软弱”的，所以$T_1=T_2=\{s,w\}$。
- 用p_{t1t2}表示“自然”选择类型组合(t1,t2)的概率，并假设p_{t1t2}为共同知识，则每位决斗者i关于其对手类型的推断$p_i(ti|tj)$。
- 每位决斗者i关于类型相依的行动空间$A_i(x)=\{U,D\}$。
- 每位决斗者i的支付由下面的图决定。


N
x0
pSS
pSW
pWS
pWW
(s, s)
(s, w)
(w, s)
(w, w)
1
1
x2
x3
x4
x5
U
D
2
U
D
-4,-4
2,-2
-2,2
0, 0
-4,-4
2,0
-2,0
0,1
-4,-4
0,-2
0,2
1,0
-4,-4
0,0
0,0
1,1

在贝叶斯博弈中参与人1的战略可定义为

(1) 战略s_1^1 ——“强硬”的决斗者1选择行动U，“软弱”的决斗者1选择行动U，即(U,U)；

(2) 战略s_1^2 ——“强硬”的决斗者1选择行动U，“软弱”的决斗者1选择行动D，即(U,D)；

(3) 战略s_1^3——“强硬”的决斗者1选择行动D，“软弱”的决斗者1选择行动U，即(D,U)；

(4) 战略s_1^4——“强硬”的决斗者1选择行动D，“软弱”的决斗者1选择行动D，即(D,D)。

在贝叶斯博弈中参与人2的战略可定义为

(1) 战略s_2^1 ——“强硬”的决斗者2选择行动U，“软弱”的决斗者2选择行动U，即(U,U)；

(2) 战略s_2^2 ——“强硬”的决斗者2选择行动U，“软弱”的决斗者2选择行动D，即(U,D)；

(3) 战略s_2^3——“强硬”的决斗者2选择行动D，“软弱”的决斗者2选择行动U，即(D,U)；

(4) 战略s_2^4——“强硬”的决斗者2选择行动D，“软弱”的决斗者2选择行动D，即(D,D)。

- 用 $v_i(a_i, s_{-i}; t_i)$表示给定其他参与人的战略

  $$s_{-i} = (s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_n(\cdot))$$

- 类型为t_i的参与人i选择行动a_i时的期望效用，则

  $$v_i(a_i, s_{-i}; t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} | t_i) u_i(a_i, a_{-i}(t_{-i}); t_i)$$

- 其中，对 $\forall t_{-i} \in T_{-i}$， $a_{-i}(t_{-i})$为给定t_{-i}时由s_{-i}所确定的其他参与人的行动组合

  $$s_{-i}(t_{-i}) = (s_1(t_1), \ldots, s_{i-1}(t_{i-1}), s_{i+1}(t_{i+1}), \ldots, s_n(t_n))$$

- “斗鸡博弈”中，“强硬”的决斗者1关于对手类型的推断为

$$p_1(s|s) = \frac{p_{ss}}{p_{ss} + p_{sw}}$$

$$p_1(w|s) = \frac{p_{sw}}{p_{ss} + p_{sw}}$$

假设p_{ss}=0.2，p_{sw}=0.3，p_{ws}=0.25，p_{ww}=0.25。

- 所以，当决斗者2的战略为s_2^1(即(U,U))，则“强硬”的决斗者1选择行动U和D时的期望效用分别为

$$v_1(U,s_2^1,s)=(-4)\cdot\frac{p_{ss}}{p_{ss}+p_{sw}}+(-4)\cdot\frac{p_{sw}}{p_{ss}+p_{sw}}=-4$$

$$v_1(D,s_2^1,s)=(-2)\cdot\frac{p_{ss}}{p_{ss}+p_{sw}}+(-2)\cdot\frac{p_{sw}}{p_{ss}+p_{sw}}=-2$$

- 当决斗者2的战略为s_2^2（即(U,D)），则“强硬”的决斗者1选择行动U和D时的期望效用分别为

$$v_1(U,s_2^2,s)=(-4)\cdot\frac{p_{ss}}{p_{ss}+p_{sw}}+2\cdot\frac{p_{sw}}{p_{ss}+p_{sw}}=\frac{2p_{sw}-4p_{ss}}{p_{ss}+p_{sw}}$$

$$v_1(D,s_2^2,s)=(-2)\cdot\frac{p_{ss}}{p_{ss}+p_{sw}}+0\cdot\frac{p_{sw}}{p_{ss}+p_{sw}}=-\frac{2p_{ss}}{p_{ss}+p_{sw}}$$

- 在贝叶斯博弈中，对于一个理性的参与人i，当他只知道自己的类型t_i而不知道其他参与人的类型时，给定其他参与人的战略s_{-i}，他将选择使自己期望效用(支付)最大化的行动$a_i^*(t_i)$，其中

$$a_i^*(t_i) \in \arg\max_{a_i \in A_i(t_i)} v_i(a_i, s_{-i}; t_i)$$

纯战略贝叶斯Nash均衡

- 贝叶斯博弈 $G=<\Gamma;(T_i);(p_i);(A_i(t_i));(u_i(a(t);t_i))>$ 的纯战略贝叶斯Nash均衡是一个类型相依的行动组合 $(a_1^*(t_1),a_2^*(t_2),\cdots,a_n^*(t_n))$，其中每个参与人在给定自己的类型$t_i$和其他参与人的类型相依行动 $a_{-i}^*(t_{-i})$ 的情况下最大化自己的期望效用。
- 也就是，行动组合 $(a_1^*(t_1),a_2^*(t_2),\cdots,a_n^*(t_n))$ 是一个纯战略贝叶斯Nash均衡，如果对 $\forall i \in \Gamma$ ，

$$a_i^*(t_i) \in \arg\max_{a_i \in A_i(t_i)} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} | t_i) u_i(a_i, a_{-i}^*(t_{-i}); t_i)$$

例1：先以简化的“斗鸡博弈”贝叶斯Nash均衡的求解

- 用p表示决斗者1关于决斗者2的类型的推断。
- $(x,(y,z))$：x表示当决斗者2选择该方格所对应的战略时，决斗者1选择该方格所对应的战略规定的行动所得到的期望支付；y和z分别表示当决斗者1选择该方格所对应的战略时，“强硬”决斗者2和“软弱”决斗者2选择该方格所对应的战略规定的行动所得到的期望支付。

		2			
		(U,U)	(U,D)	(D,U)	(D,D)
1	U	-4, (-4,-4)	2-6p, (-4,0)	6p -4, (-2,-4)	2, (-2,0)
	D	-2, (2, 0)	-2p, (2, 1)	2p-2, (0, 0)	0, (0, 1)

- 给定决斗者1选择战略U，“软弱”决斗者2选择行动D的期望支付为0，选择行动U的期望支付为-4，行动D优于行动U；给定决斗者1选择战略D，“软弱”决斗者2选择行动D的期望支付为1，选择行动U的期望支付为0，所以，行动D优于行动U。
- 这意味着战略（U,U）和（D，U）为决斗者2的劣战略。

		2	
		(U,D)	(D,D)
1	U	2-6p, (-4,0)	2, (-2,0)
	D	-2p, (2, 1)	0, (0, 1)

- 下面根据p的大小，求解博弈的纯战略贝叶斯Nash均衡。
- 1) 假设 $p \le 1/2$ ，无论决斗者2选择战略(U,D)还是(D,D)，决斗者1的最优行动都是U。给定决斗者1的选择U，“强硬”决斗者2的最优行动为D。
- 所以，博弈存在惟一的纯战略贝叶斯Nash均衡——决斗者1选择行动U，“强硬”决斗者2选择行动D，“软弱”决斗者2选择行动D。

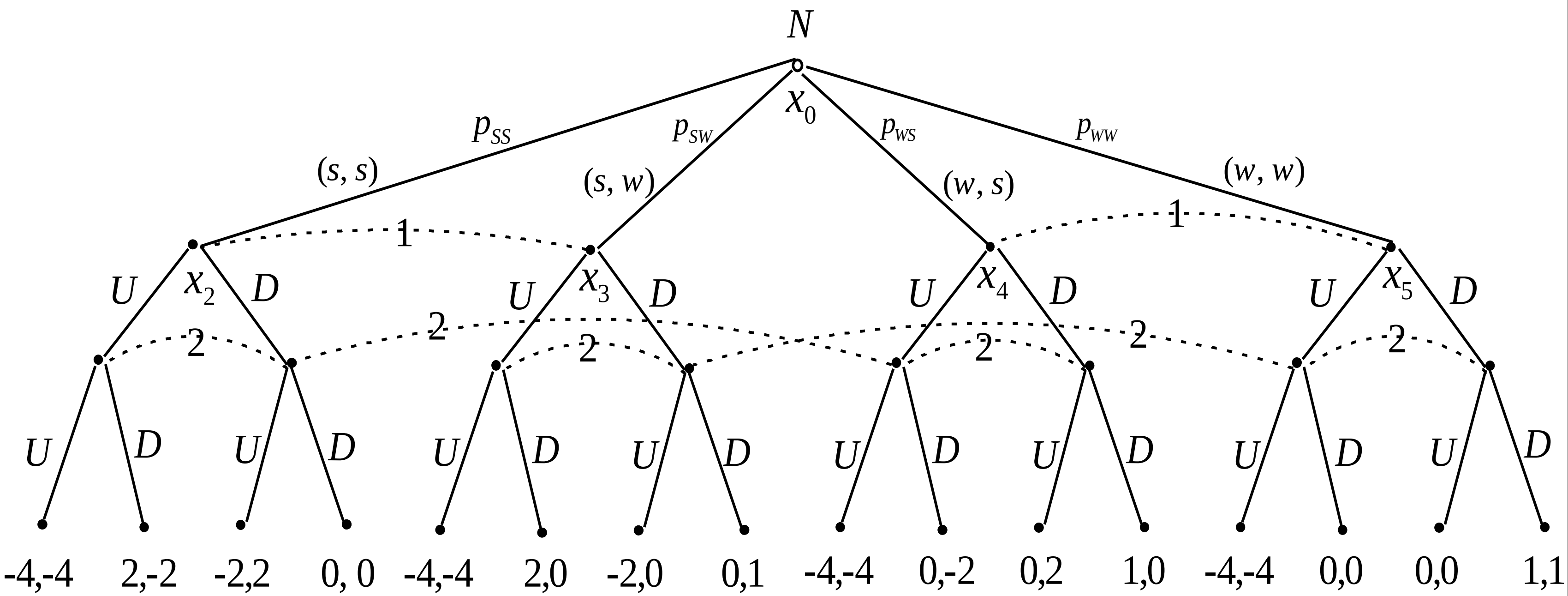
- 2) 假设 $p > 1/2$ ，博弈存在如下两个纯战略贝叶斯Nash均衡：

(1) 决斗者1选择行动U，“强硬”决斗者2选择行动D，“软弱”决斗者2选择行动D；

(2) 决斗者1选择行动D，“强硬”决斗者2选择行动U，“软弱”决斗者2选择行动D。

例2[作业]：　“斗鸡博弈”　贝叶斯Nash均衡的求解

- 假设 $p_{ss}=0.2, p_{sw}=0.3, p_{ws}=0.2, p_{ww}=0.3$
- “强硬”决斗者1关于决斗者2的类型推断 $p_1(s|s)=0.4, p_1(w|s)=0.6$；
- “软弱”决斗者1关于决斗者2的类型推断 $p_1(s|w)=0.4, p_1(w|w)=0.6$；
- “强硬”决斗者2关于决斗者1的类型推断 $p_2(s|s)=0.5, p_2(w|s)=0.5$；
- “软弱”决斗者2关于决斗者1的类型推断 $p_2(s|w)=0.5, p_2(w|w)=0.5$；


N
x0
pSS
pSW
pWS
pWW
(s, s)
(s, w)
(w, s)
(w, w)
1
1
x2
x3
x4
x5
U
D
2
2
2
2
2
2
-4,-4
2,-2
-2,2
0, 0
-4,-4
2,0
-2,0
0,1
-4,-4
0,-2
0,2
1,0
-4,-4
0,0
0,0
1,1

- $((x_1,x_2),(y_1,y_2))$的含义是：x_1和x_2分别表示当决斗者2选择该方格所对应的战略时，“强硬”决斗者1和“软弱”决斗者1选择该方格所对应的战略规定的行动所得到的期望支付；y_1和y_2分别表示当决斗者1选择该方格所对应的战略时，“强硬”决斗者2和“软弱”决斗者2选择该方格所对应的战略规定的行动所得到的期望支付。

2

1	(U,U)	(U,D)	(D,U)	(D,D)
(U,U)	(-4,-4), (-4,-4)	(-0.4,-1.6), (-4, 0)	(-1.6,-2.4), (-2,-4)	(2, 0), (-2, 0)
(U,D)	(-4, 0), (-1,-2)	(-0.4,0.6), (-1,0.5)	(-1.6,0.4), (-1,-2)	(2, 1), (-1,0.5)
(D,U)	(-2,-4), (-1,-2)	(-0.8,-1.6), (-1,0.5)	(-1.2,-2.4), (-1,-2)	(0, 0), (-1,0.5)
(D,D)	(-2, 0), (2, 0)	(-0.8,0.6), (2, 1)	(-1.2,0.4), (0, 0)	(0, 1), (0, 1)

- 对于“软弱”决斗者1，无论决斗者2选择什么战略，其最优行动都是D。
- 所以，战略(U,U)和(D,U)为决斗者1的劣战略。基于同样的原因，战略(U,U)和(D,U)为决斗者2的劣战略。

		2	
		(U,D)	(D,D)
1	(U,D)	(-0.4,0.6), (-1,0.5)	(2, 1), (-1,0.5)
	(D,D)	(-0.8,0.6), (2, 1)	(0, 1), (0, 1)

- 对于“强硬”决斗者1，无论决斗者2选择什么战略，其最优行动都是U。所以，战略(D,D)为决斗者1的劣战略。

- 给定决斗者1选择战略(U,D)，对于决斗者2战略(D,U)和(D,D)是无差异的。

- 所以，博弈存在如下两个纯战略Nash均衡：

(1)“强硬”的决斗者1和2选择行动U，“软弱”的决斗者1和2选择行动D；

(2)“强硬”的决斗者1选择行动U，“软弱”的决斗者1选择行动D；“强硬”的决斗者2和“软弱”的决斗者2选择行动D。

贝叶斯Nash均衡定义的另一种表示方式

- 在静态贝叶斯博弈 $G=<\Gamma;(T_i);(p_i);(A_i(t_i));(u_i(a(t);t_i))>$ 中，战略组合 $s^*=(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ 是一个纯战略贝叶斯Nash均衡，如果对 $\forall i\in\Gamma$ 及 $\forall t_i\in T_i, s_i^*(t_i)$,满足

$$s_i^*(t_i)\in\arg\max_{a_i(t_i)\in A_i(t_i)}\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}u_i(s_1^*(t_1),\cdots,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i(t_i),s_{i+1}^*(t_{i+1}),\cdots,s_n^*(t_n);t_i)p_i(t_{-i}|t_i)$$

- 即没有参与人愿意改变自己的战略，即使这种改变只涉及一种类型下的一个行动。

存在性结论

- 定理 一个有限的贝叶斯博弈一定存在贝叶斯Nash均衡。

三、贝叶斯Nash均衡的应用

1.不完全信息古诺模型

- 在Cournot模型中，每一个企业对其他企业的成本和自己的成本是已知的，因而信息是完全的。
- 然而在实际中，企业往往很难知道其他企业的成本。当Cournot模型中至少有一个企业不知道其他企业的成本时所对应的模型即为不完全信息的Cournot模型。
- 参与人类型——成本函数。

假设：

- 企业1的成本函数为共同知识：

$$c_1(q_1)=c_1\cdot q_1$$

- 企业2的成本函数为私人信息：

$$c_2^l(q_2)=c_2^L\cdot q_2$$

$$c_2^h(q_2)=c_2^H\cdot q_2$$

  其中，$c_2^L<c_2^H$

- 企业1知道企业2是c_2^L的概率为p，是c_2^H的的概率是1-p，p和1-p为共同知识。

市场需求：

$$P = a - Q$$

$$Q = q_1 + q_2$$

进一步假设：

$$a = 2;$$

$$c_1 = 1, c_2^L = \frac{3}{4}, c_2^H = \frac{5}{4};$$

$$p = \frac{1}{2}$$

企业2：

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= q_2 \cdot (P - c_2) \\
&= q_2 \cdot (a - c_2 - q_2 - q_1)
\end{aligned}
$$

- 令 $a-c_2=t$ 则

$$\pi_2 = q_2 \cdot (t - q_2 - q_1)$$

由$\dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2}=0$,得：

$$q_2(q_1,\ t)=\frac{1}{2}(t-q_1)$$

企业2的反应函数

- q_2不仅与企业1的产量有关，而且与自己的成本有关。

$c_2 = c_2^L$时,

$$q_2^L = \frac{1}{2}(\frac{5}{4} - q_1)$$

$c_2 = c_2^H$时,

$$q_2^H = \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - q_1)$$

企业1：

企业1不知道企业2的真实成本，因而也不知道企业2的最优反应是q_2^L还是q_2^H

企业将选择使期望利润最大化的产量。

$$
\begin{aligned}
E\pi_1 &= p \cdot q_1 \cdot (a - c_1 - q_1 - q_2^L) \\
&\quad + (1-p) \cdot q_1 \cdot (a - c_1 - q_1 - q_2^H) \\
&= \frac{1}{2} q_1 \cdot (1 - q_1 - q_2^L) + \frac{1}{2} q_1 \cdot (1 - q_1 - q_2^H)
\end{aligned}
$$

由最优化一阶条件得：

$$q_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}q_2^L - \frac{1}{2}q_2^H)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - p \cdot q_2^L - (1-p) \cdot q_2^H)$$

即企业1的反应函数。

- 联立求解两个反应函数，得贝叶斯Nash均衡为：

$$q_1^* = \frac{1}{3}$$

$$q_2^L = \frac{11}{24}, q_2^H = \frac{5}{24}$$

2 暗标拍卖(一级密封拍卖)

- 假设1:只有两个参加投标的人，他们对标的的估价分别为V1和v2，因此博弈方i用价格p拍得标的的得益为vi-p,
- 假设2：两个博弈方的估价V1和v2时相互独立的，且V1~U[0,1], V2~U[0,1],各博弈方知道自己的估价和另一博弈方估价的概率分布。
- 假设3：各博弈方都是风险中性的。
- 暗标拍卖的静态贝叶斯表示

1）博弈方i的行为就是标价b_i,行动空间 $A_i = [0,+\infty) = [0,1]$

2) 博弈方i的类型就是它的估价V_i

3)博弈方i的得益

$$u_i = u_i(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i，\text{当} b_i > b_j \\ (v_i - b_i)/2，\text{当} b_i = b_j \\ 0，\text{当} b_i < b_j \end{cases}$$

- 要找贝叶斯纳什均衡，必须先找两博弈方的策略空间。他们的策略是根据类型决定行为的函数关系。即是 $b_i(v_i)$ 如果 $[b_1(v_1), b_2(v_2)]$ 是贝叶斯纳什均衡，那么 $b_i(v_i)$ 是对方的最佳反应。 $\max\limits_{b_i}[(v_i - b_i)P\{b_i > b_j\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i)P\{b_i = b_j\}]$

此时 $b_i = b_i(v_i), b_j = b_j(v_j)$

- 满足上述策略的贝叶斯均衡很多，不加限制的讨论意义不大。
- 只考虑线性策略

线性策略均衡

- 假设

$b_1(v_1)=a_1+c_1v_1, b_2(v_2)=a_2+c_2v_2$,其中$a_1<1, a_2<1, c_1\geq 0. c_2\geq 0$

设博弈方j的策略为$b_j(v_j)=a_j+c_jv_j; P\{b_i=b_j\}=0$

$$\max_{b_i}[(v_i-b_i)P\{b_i>a_j+c_jv_j\}]$$

$$=\max_{b_i}[(v_i-b_i)P\{v_j<\frac{b_i-a_j}{c_j}\}]$$

$$=\max_{b_i}[(v_i-b_i)\frac{b_i-a_j}{c_j}]$$

一阶条件：$b_i(v_i)=\dfrac{v_i+a_j}{2}$，当$v_i\geq a_j$

- 注意到可能有 $v_i < a_j$，这时

$$b_i(v_i) = \frac{v_i + a_j}{2} < \frac{a_j + a_j}{2} = a_j < a_j + c_j v_j = b_j$$

- 博弈方i不可能中标，不妨设：$b_i(v_i) = a_j$

- 综上 $b_i(v_i) = \begin{cases} \dfrac{v_i + a_j}{2} = \dfrac{a_j}{2} + \dfrac{v_i}{2}, & \text{当} v_i \geq a_j \\ a_j, & \text{当} v_i < a_j \end{cases}$

- 线性策略为 $b_i(v_i) = a_i + c_i v_i$

- **由于是分段函数，加上是线性策略，只有当时** $a_j \le 0$
- **比较得：** $a_i = \frac{a_j}{2}, c_i = \frac{1}{2}$
- **有对称性有** $a_j = \frac{a_i}{2}, c_j = \frac{1}{2}$
- **联立解得：** $a_j = a_i = 0, c_j = c_i = \frac{1}{2}$，即 $b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$
- **结论：**
- **实际意义：**

二级密封拍卖(Vickrey auction)

假设对某一物品有两个竞标人B_1，B_2，两人对物品的真实估价分别为v_1，v_2，而在密封的信封中所报价格分别为b_1，b_2。两个竞标人都知道v_i（$i=1，2$）独立地取自定义在[0, 1]上的均匀分布函数。竞标人B_1的期望收益用函数表示如下：

$$u_1（v, b）= p\,(b_1 \geq b_2)\,[\,v_1 - b_2\,]$$

一个评注：拍卖理论

- 依据竞标规则的差异，拍卖可以被分成许多种不同的类型，这里我们只分析其中最为重要可能也是最为常见的四种，即：
- 一级密封价格拍卖(first price sealed bid)
- 二级密封价格拍卖(second price sealed bid)
- 英式拍卖(English auctions)
- 荷兰式拍卖(Dutch auctions)

- 英式拍卖与二级密封价格拍卖实际上是等价的，两者都是让代理人说真话的机制，并且在结果上，两者都是让估价最高者以第二高的那个估价得到竞标物，这是一种帕累托有效的结果。

- 荷兰式拍卖与一级密封价格拍卖。实际上也是等价的。在荷兰式拍卖中，每个竞标者都需要确定一个他愿意接受的最高报价，一旦拍卖人的喊价达到该报价时，竞标者就将举牌得到该竞标物。

3 双方报价拍卖

模型

买方报价P_b，卖方报价P_s

如果$P_b \geq P_s$，以价格$P = (P_b + P_s)/2$成交，

否则不成交。

买方对货物估价为v_b，卖方估价为v_s

相互知道对方估价标准分布于[0,1]区间上

贝叶斯纳什均衡

双方策略为 $P_b(v_b)$ $P_s(v_s)$

对任意$v_b \in [0,1]$，$P_b(v_b)$必须满足

$$\max_{P_b}[v_b - \frac{P_b + E[P_s(v_s) \mid P_b \geq P_s(v_s)]}{2}]P\{P_b \geq P_s(v_s)\}$$

对任意$v_s \in [0,1]$，$P_s(v_s)$必须满足

$$\max_{P_s}[\frac{P_s + E[P_b(v_b) \mid P_b(v_b) \geq P_s]}{2} - v_s]P\{P_b(v_b) \geq P_s\}$$

一价均衡——给定价格水平上的均衡

给定[0,1]中任意一个值x，可以看成政府指导价，或者市场理论价格

买方策略：$v_b \geq x$时，$P_b = x$，否则$P_b = 0$，即不买

卖方策略：$v_s \leq x$时，$P_s = x$，否则$P_s = 1$，即不卖

对卖方的决策：

（1）可能成交的情况，$v_s \le x \le v_b$

给定买方的策略：

$P_s = x$，是卖方的最高要价，$P_s > x$，不可能成交。

成交收益$P - v_s = x - v_s \ge 0$

所以$P_s = x$是能够成交的最佳反应

（2）当$v_s > x$时，$P = x$成交。成交收益$P - v_s = x - v_s < 0$,

所以直接要价$P_s = 1$，不成交至少能避免损失

对买方的决策：

（1）可能成交的情况，$v_s \leq x \leq v_b$

给定卖方的策略：

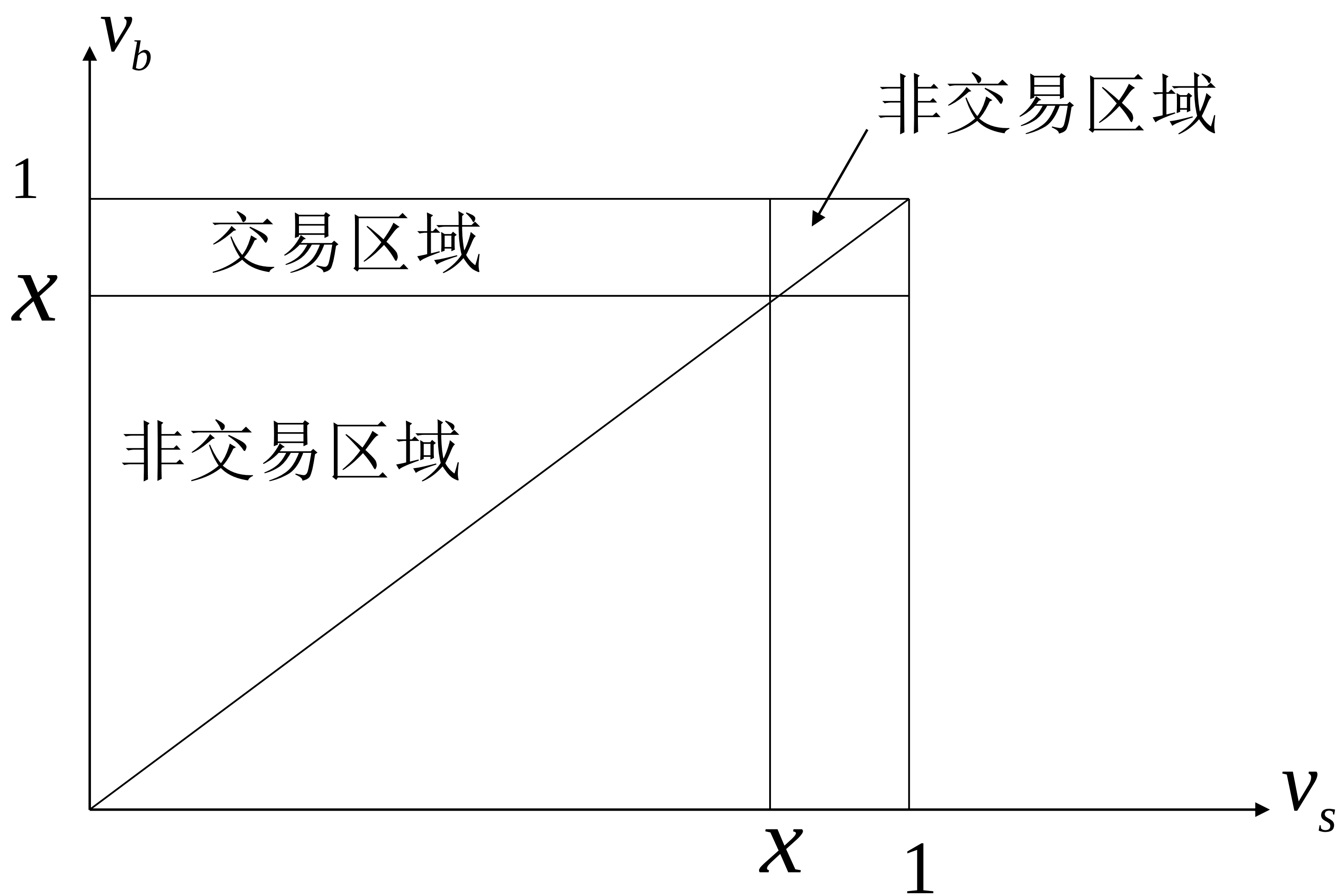
$P_b = x$，是买方的最低报价，$P_b < x$，不可能成交。

成交收益$v_b - P = v_b - x \geq 0$

所以$P_b = x$是能够成交的最佳反应

（2）当$v_b < x$时，$P = x$成交。成交收益$v_b - P = v_b - x < 0$，

所以直接报价$P_b = 0$，不成交至少能避免损失


v_b
非交易区域
1
交易区域
x
非交易区域
v_s
x
1

线性策略均衡

$$\text{买方策略} P_b(v_b) = a_b + c_b v_b$$

$$\text{卖方策略} P_s(v_s) = a_s + c_s v_s$$

对任意$v_b \in [0,1]$，$P_b(v_b)$必须满足

$$\max_{P_b}[v_b - \frac{P_b + E[P_s(v_s) \mid P_b \geq P_s(v_s)]}{2}]P\{P_b \geq P_s(v_s)\}$$

因为$v_s \sim U[0,1]$，$P_s(v_s) \sim U[a_s, a_s + c_s]$

$$E[P_s(v_s) \mid P_b \geq P_s(v_s)] = \frac{\int_{a_s}^{p_b} \frac{1}{c_s} x dx}{prob\{P_b \geq P_s(v_s)\}}$$

因为$v_s \sim U[0,1]$，$P_s(v_s) \sim U[a_s, a_s + c_s]$

$$prob\{P_b \ge P_s(v_s)\} = prob\{P_b \ge a_s + c_s v_s\}$$

$$= prob\{v_s \le \frac{P_b - a_s}{c_s}\} = \frac{P_b - a_s}{c_s}$$

因为$v_s \sim U[0,1]$，$P_s(v_s) \sim U[a_s, a_s + c_s]$

$$\int_{a_s}^{p_b} \frac{1}{c_s} x dx = \frac{{p_b}^2 - {a_s}^2}{2c_s}$$

$$E[P_s(v_s) \mid P_b \ge P_s(v_s)] = \frac{\dfrac{{p_b}^2 - {a_s}^2}{2c_s}}{\dfrac{P_b - a_s}{c_s}} = \frac{a_s + p_b}{2}$$

线性策略均衡

买方策略$P_b(v_b) = a_b + c_b v_b$

卖方策略$P_s(v_s) = a_s + c_s v_s$

$$\max_{P_b}\left[v_b - \frac{1}{2}\left(P_b + \frac{a_s + P_b}{2}\right)\right]\frac{P_b - a_s}{c_s}$$

同理

$$\max_{P_s}\left[\frac{1}{2}\left(P_s + \frac{a_b + c_b + P_s}{2}\right) - v_s\right]\frac{a_b + c_b - P_s}{c_b}$$

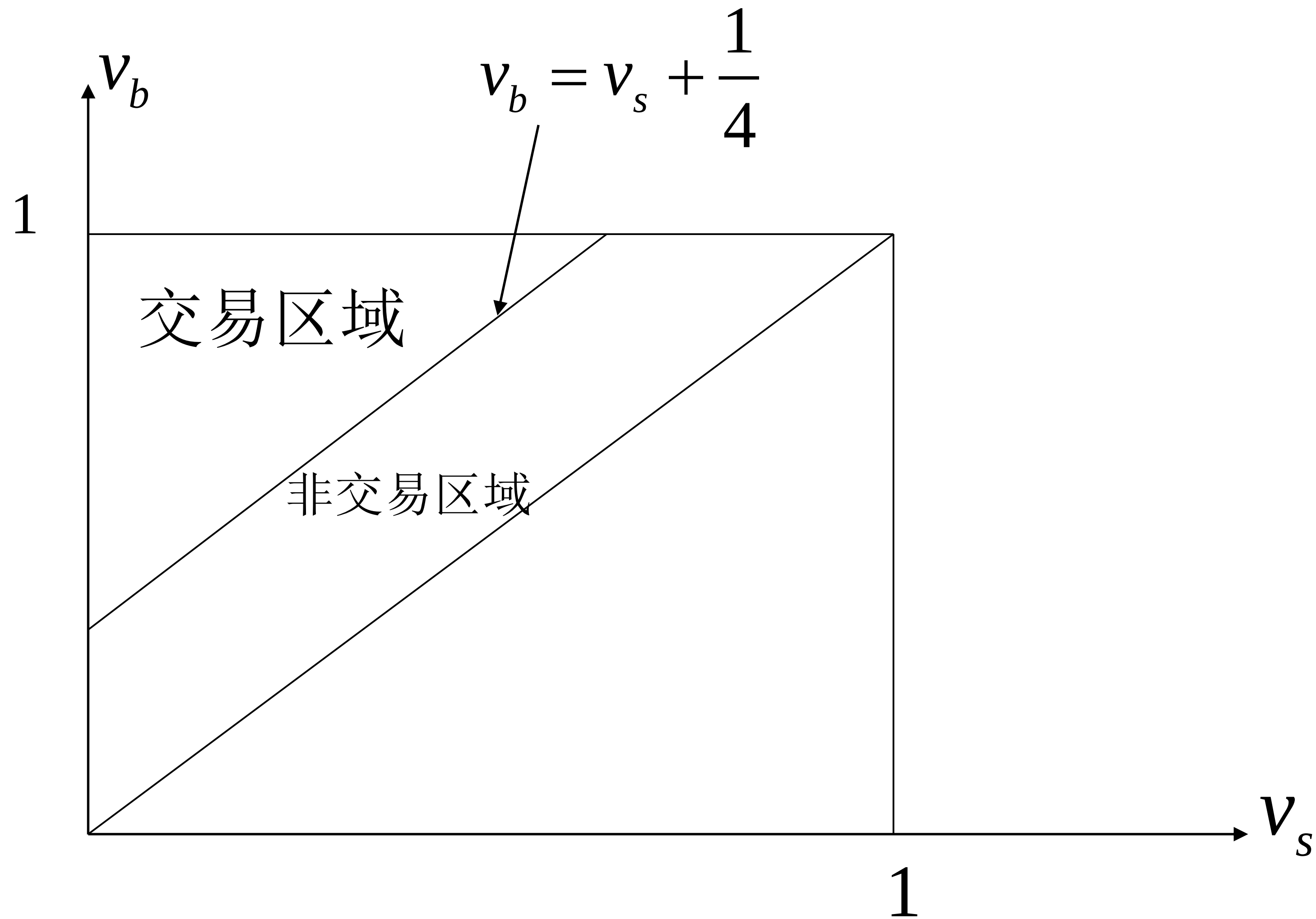
分别求一阶条件

$$P_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12},$$

$$P_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}$$

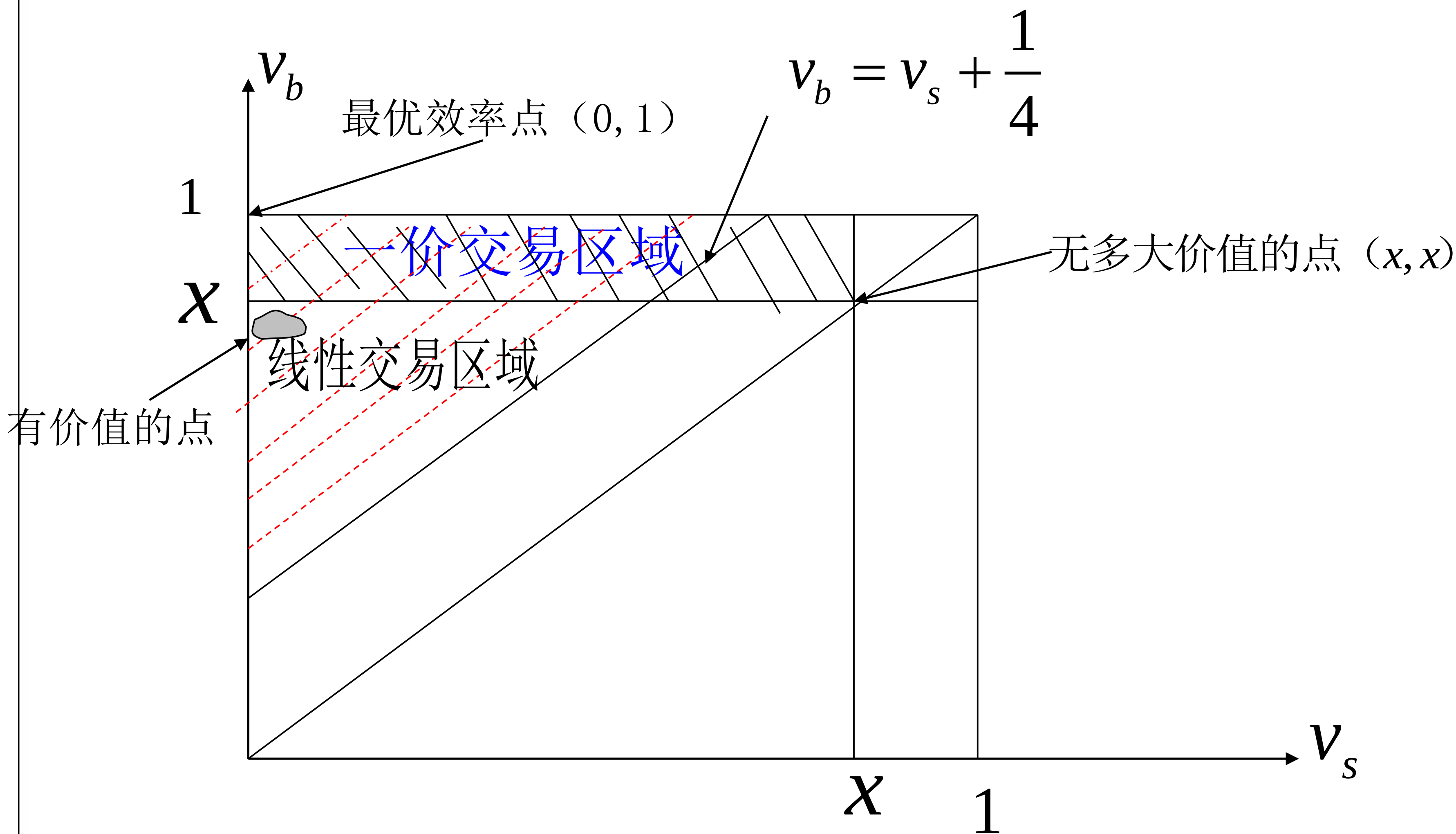
交易的条件是：

$$P_b \geq P_s \Rightarrow v_b \geq v_s + 1/4$$



v_b
$v_b = v_s + \frac{1}{4}$
1
交易区域
非交易区域
v_s
1

两种均衡的比较和均衡效率



两种均衡的比较和均衡效率

- 线性策略均衡比一价均衡效率高
- 不存在能实现所有潜在交易利益的贝叶斯纳什均衡。
- 这正是信息不完全的效率损失，代价。
- 估价在均匀分布下线性策略均衡的效率是最高的（Myerson,et,1983)

4 拍卖规则设计问题和揭示原理

4.1 拍卖规则设计问题

4.2 直接机制和揭示原理

4.1 拍卖规则设计问题

- 投标人较少，且不识货时，买方的出价可能非常低，使拍卖商品得不到应有价格，如果投标人之间形成某种形式的串通，则卖方更吃亏。
- 投标人参与投标而不中标没有任何代价，投标人就不会积极争取成交，会采用低标价多次参加投标的方法，希望投机获较大利益。如果投标人都这样做，价格肯定会偏低，对卖方不利。

- 拍卖规则设计、拍卖方式选择：底价、保证金、中标规则和价格。
- 实现理论、实施理论
- 信息揭示——真实类型和估计是可以了解的吗?

4.2 直接机制和揭示原理

直接机制

1.投标人同时声明自己对标的的估价（即他们的类型）。因为并不要求诚实，因此投标人i可以选择其类型空间T_i中的任意类型做声明，不管他的真实类型是什么

2.假如各投标人的声明是$(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})$,

则投标人i拍得标的的概率为

$q_i(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})$，即要随机选择哪个

投标方中标，随机选择的概率为q_i。

如果投标方i中标，则价格为$p_i(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})$。

对各种可能的声明情况$(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})$，概率之和

$$q_i(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})+q_2(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})+\cdots+q_n(t_1'^{'},\cdots,t_n'^{'})\le 1$$

必须成立

说实话的直接机制

只有两个投标人，他们的估价类型V_1、V_2都是[0,1]上标准分布

1.两投标人同时声明V_1'、V_2'，$V_i' \in [0,1]$

2.投标人i中标的概率为$q_i = V_i'/2$，$q_1 + q_2 \leq 1$，中标的价格为$p_i = V_i'/\theta$

- 设线性齐次策略：$V_i' = a_i V_i$
- 说真话——　　　　$a_i = 1$

$$Eu_i = \frac{V_i''}{2} \times (V_i - \frac{V_i''}{\theta}) = \frac{a_i V_i}{2}(V_i - \frac{a_i V_i}{\theta})$$

$$\max_{a_i} \frac{a_i V_i}{2}(V_i - \frac{a_i V_i}{\theta}) = \frac{V_i^2}{2\theta}(a_i \theta - a_i^2)$$

一阶条件$a_i = \theta / 2$，当$\theta = 2$时，$a_i = 1$，$V_i' = V_i$

揭示原理（显示原理）

定 理：

任何贝叶斯博弈的任何贝叶斯纳什均衡，都可以被一个直接机制“代表”。

四、关于混合战略Nash均衡的一个解释

- 性别战博弈

妻子

			F	B
丈夫	F		2，1	0 , 0
	B		0 , 0	1，2

- 上述博弈除了存在两个纯战略Nash均衡外，还有以下混合战略均衡：

$$((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3}))$$

Harsanyi认为：

参与人i对参与人j的混合战略表示了参与人i对参与人j所选择的纯战略的不确定性，而j的选择又依赖于他(她)的一点私人信息。

不完全信息的性别战博弈

		妻子	
		F	B
丈夫	F	$2+t_p$，1	0，0
	B	0，0	1，$2+t_c$

t_c、t_p分别为参与人的私人信息，假设：t_c、t_p相互独立且为区间$[0, x]$上的均匀分布。

不完全信息的性别战博弈可表示为：

$$G = < A_c, A_p; T_c, T_p; p_c, p_p; u_c, u_p >$$

其中，行动空间$A_c = A_p =$ {足球，芭蕾},

类型空间$T_c = T_p = [0, x]$,

$$p_c(t_c) = p_p(t_p) = \frac{1}{x}$$

构造这样的贝叶斯Nash均衡：

女方在t_c超过临界值c时选择芭蕾，否则选择足球；男方在t_p超过临界值p时选择足球，否则选择芭蕾。

在上述贝叶斯Nash均衡中，女方以$\frac{x-c}{x}$的概率选择芭蕾，男方以$\frac{x-p}{x}$的概率选择足球。

给定男方的选择，女方选择芭蕾与足球的期望收益分别为：

$$\frac{p}{x}\cdot(2+t_c)+\frac{x-p}{x}\cdot 0=\frac{p}{x}\cdot(2+t_c)$$

与

$$\frac{p}{x}\cdot 0+\frac{x-p}{x}\cdot 1=\frac{x-p}{x}$$

所以，当且仅当

$$\frac{p}{x}\cdot(2+t_c)>\frac{x-p}{x}$$

即$t_c>\dfrac{x}{p}-3=c$时，女方选择芭蕾最优。

给定女方的选择，男方选择足球与芭蕾的期望收益分别为：

$$\frac{x-c}{x}\cdot 0+\frac{c}{x}\cdot(2+t_p)=\frac{c}{x}\cdot(2+t_p)$$

与

$$\frac{x-c}{x}\cdot 1+\frac{c}{x}\cdot 0+=\frac{x-c}{x}$$

所以，当且仅当

$$\frac{c}{x}\cdot(2+t_p)>\frac{x-c}{x}$$

即$t_p>\dfrac{x}{c}-3=p$时，男方选择足球最优。

由上述分析可知：

$$\begin{cases} p = c \\ p^2 + 3p - x = 0 \end{cases}$$

解二次方程可得：

$$\begin{cases} p = \dfrac{-3+\sqrt{9+4x}}{2} \\ c = \dfrac{-3+\sqrt{9+4x}}{2} \end{cases}$$

女方选择芭蕾的概率

$$\frac{x-c}{x}=1-\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x}$$

男方选择足球的概率

$$\frac{x-p}{x}=1-\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x}$$

当$x \to 0$时，

$$\frac{x-c}{x} = 1 - \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x} \to \frac{2}{3}$$

$$\frac{x-p}{x} = 1 - \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x} \to \frac{2}{3}$$

- 完全信息博弈的混合战略 Nash 均衡可以解释为与之密切相关、存在一小点非完全信息的博弈的纯战略贝叶斯 Nash 均衡。