拓扑的引入和定义

拓扑的例子

拓扑的连续映射和同胚映射

分离公理

可数公理

R中, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N, |x_n - x|<\varepsilon$

(X,d) → ① 依赖于度量，无度量时拓扑可以讨论收敛性

② $(x_n)_{n\in N^+}$ (可数个)　　(拓扑实现了两个扩展)

指标集

$(x_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ (不可数个)　网

拓扑时可以讨论"网"的收敛性

拓扑定义:

(X,τ)　$\tau \subseteq P(X) := \{A \mid A\subseteq X\}$　τ是X的某些子集

<1> $\phi, X \in \tau$

<2> $\forall\ U,V\in\tau \Rightarrow U\cap V\in\tau$ (有限交封闭)

<3> $U_\alpha\in\tau,\ \alpha\in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$ (任意并封闭)

则称τ为X上的一个拓扑.

eg1. $\tau_1=\{\phi, X\}$ ✓　$\tau_2=P(X)$ ✓

eg2. $X=\{1,2,3\}$　$\tau_1=\{\phi,\{1\},\{2,3\},X\}$ ✓　$\tau_2=\{\phi,\{1,2\},\{3\},X\}$ ✓

$B=\{\phi,\{1\},\{2\},X\}$ ✗

eg3. [命题]. (X,τ_1) 和 (X,τ_2)，则 $\tau_1\cap\tau_2$ 也为X上的拓扑.

$\tau_1\cup\tau_2$ 非X上的拓扑

反例: $\tau_1\cup\tau_2=\{\phi,\{1\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},X\}$

<1> ✓　<2> ✓　<3> $\{1,3\}\notin\tau_1\cup\tau_2$　则 $\tau_1\cup\tau_2$ 非拓扑

证明: $\tau_1\cap\tau_2 \subseteq P(X)$

<1> $\phi, X\in\tau_1\cap\tau_2$

<2> 若 $A,B\in\tau_1\cap\tau_2 \Rightarrow \begin{cases} A,B\in\tau_1 & \text{由于}\tau_1\text{为拓扑}\ \therefore A\cap B\in\tau_1 \\ A,B\in\tau_2 & \cdots\ \tau_2\ \cdots\quad A\cap B\in\tau_2 \end{cases}$

$\therefore A\cap B \in \tau_1\cap\tau_2$

(3). $\alpha\in I$, $A_\alpha \in \tau_1\cap\tau_2 \Rightarrow \begin{cases} A_\alpha\in\tau_1 \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\in\tau_1 \\ A_\alpha\in\tau_2 \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\in\tau_2 \end{cases}$

$\therefore \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau_1\cap\tau_2$

$\therefore \tau_1\cap\tau_2$ 为 X 上的一个拓扑

$(X,d) \xrightarrow{\text{定义}}$ 开球 $O(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}$

$\tau_d=\{U\subseteq X \mid U$ 是若干个开球的并$\}$，τ_d 为 X 上的一个拓扑，且 $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq X$

0 | 有限 | 可数 | 可数

有 $x_n \xrightarrow[①]{d} x \iff x_n \xrightarrow[②]{\tau_d} x$　　称 τ_d 为度量 d 诱导的拓扑.

度量空间一定是拓扑空间.

①: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N^+$, $\forall n>N$, 有 $d(x_n,x)<\varepsilon$

②: $\forall \begin{cases} U\in\tau_d \\ x\in U \end{cases}$, $\exists N\in N^+$, $\forall n>N$, 有 $x_n\in U$

结论: 度量空间一定可以是拓扑空间，度量 d 可以诱导拓扑 τ_d.

? (X,τ) 为一拓扑空间，是否存在 d(度量)，使 $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}$ $x_n \xrightarrow{\tau} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$ ✗

若 ✓，称 (X,τ) 可度量化(可数公理)

egs. R 中, $\tau=\{A\subseteq R \mid A^c$ 为有限集$\}$　A^c 中仅包含有限个元素.

(1) $\phi, X\in\tau$

(2) $A,B\in\tau$

$\begin{cases} A,B\text{ 中至少一个为 }\phi \Rightarrow A\cap B=\phi\in\tau \\ A,B\text{ 均非空, } \because (A\cap B)^c=A^c\cup B^c\text{ 为有限集, 故 }A\cap B\in\tau \end{cases}$

(3) $\alpha\in I$, $A_\alpha\in\tau$, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in\tau$

$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$ 为有限集, 故 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\in\tau$

故 τ 为 R 上的一个拓扑.

拓扑的连续映射和同胚映射

定义f，在x_0处连续 $\xrightarrow[f均连续]{若对\forall x_0}$ 称f为连续函数.

$f:(X,\tau_1)\longrightarrow(Y,\tau_2)$　　开集的逆像只占为开集

f在$x_0(\in X)$处连续：$\exists x_0\in V\in\tau_1$，有$\underline{f(V)\subseteq U}$　$\forall f(x_0)\in U\in\tau_2$

若f在X中任一点均连续，则称f是连续函数.

定理：$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$　f连续 $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)\in\tau_1$，对$\forall\ U\in\tau_2$成立

$f^{-1}(U)=\{x\in X\mid f(x)\in U\}$

同胚映射：$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$　若f $\begin{cases}f双射,\\ f连续\\ f^{-1}连续\end{cases}$，则称f为同胚映射.

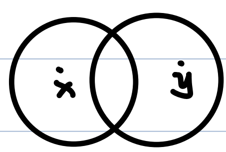
同胚映射一定为连续映射，连续映射不一定是同胚映射.

分离公理.

X　$\{\phi,X\}$　$P(X)$

分离：

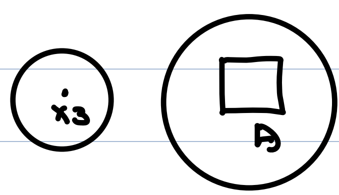
T_1



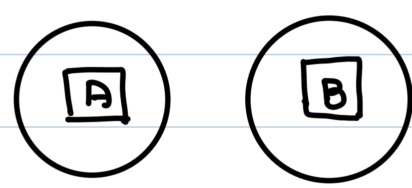
T_2

$U\cap V=\phi$

T_3



T_4



(X,τ)为T_1空间：对$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，$\exists U\in\tau$，使$\begin{cases}x\in U\\ y\notin U\end{cases}$

(X,τ)为T_2空间：对$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，$\exists\begin{cases}U,V\in\tau\end{cases}$　使$\begin{cases}x\in U\end{cases}$

$U\cap V=\phi$ $y\in V$

(X,τ)为T_3空间：对$\forall\begin{cases}x\in X\\ A\subseteq X, A^c\in\tau\\ x\notin A\end{cases}$，$\exists\begin{cases}U,V\in\tau\\ U\cap V=\phi\end{cases}$ 使$\begin{cases}x\in U\\ A\subseteq V\end{cases}$

(X,τ)为T_4空间，对$\forall\begin{cases}A,B, A^c\in\tau, B^c\in\tau\\ A\cap B=\phi\end{cases}$，$\exists\begin{cases}U,V\in\tau\\ U\cap V\neq\phi\end{cases}$ 使$\begin{cases}A\in U\\ B\in V\end{cases}$

<1> 有空间非T_1，$\tau=\{\phi,X\}$

<2> 本课程大多为T_1空间.

<3> 在(X,τ)为T_1的前提下，有 $T_4\Rightarrow T_3\Rightarrow T_2\Rightarrow T_1$

(X,τ)为T_1 $\Longleftrightarrow$ 单点集为闭集.

可数公理

(X,τ)

邻域：A为x的一个邻域，指$\exists\ x\in U\in\tau$，使 $x\in U\subseteq A$

$N(x)=\{A\mid A为x的邻域\}$

基：$\mathcal{B}\subseteq N(x)$为$N(x)$的一个基，对$\forall A\in N(x)$，$\exists B\in\mathcal{B}$，使$B\subseteq A$

eg. 取$\mathcal{B}=\{U\in\tau\mid x\in U\}$

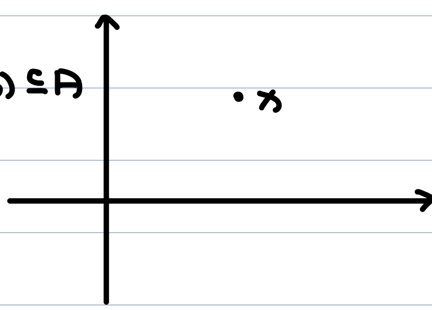
可数公理：(X,τ)为第一可数空间，对$\forall x\in X$，$N(x)$存在可数基，$\underline{O(x,\varepsilon)}\in N(x)$
$\varepsilon>0$ 不可数个

$A\in N(x)$，$O(x,\varepsilon_0)\subseteq A$

选$B=O(x,\frac{1}{n_0})\subseteq O(x,\varepsilon_0)\subseteq A$

其中 $\frac{1}{n_0}<\varepsilon_0$

$\mathcal{B}=\{O(x,\frac{1}{n})\ n\in N^+\}$



紧集和列紧集

在(X,τ)中，$A\subseteq X$是紧集，对$\forall\{$ $B_\alpha\in\tau$ $\alpha\in I$ 记为A的一个开覆盖 $\mid\{B_\alpha,\alpha\in I\}\}$

$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$

一定 $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_n \in I$，使得 $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} = B_{\alpha_1} \cup B_{\alpha_2} \cup \cdots \cup B_{\alpha_n}$

A为紧集：任意开覆盖均有有限子覆盖

$\Longleftrightarrow \forall (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq A \Rightarrow \exists\, x \in X$，$(x_{\alpha\beta})_{\alpha\beta \in I}$ 使 $x_{\alpha\beta} \xrightarrow{\tau} x$

列紧集：$A \subseteq (X, \tau)$ 是列紧集，$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，则 $\exists$ $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty}$，$x \in X$，$x_{n_k} \xrightarrow{\tau} x$

eg. 在 (X, d)，A为紧集 $\Longleftrightarrow$ A为列紧集

定理：$A \subseteq (X, \tau)$，为紧集，$B \subseteq A$，B为闭集 $\Rightarrow$ B为紧集

定理：$f: (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ 连续，设 $A \subseteq X$ 为紧集，$\Rightarrow f(A)$ 为Y中紧集.

R^n 中，有界数列必有收敛子列

$\Downarrow$ 定理：R^n 中，A为有界闭集 $\Longleftrightarrow$ A为紧集

$\Rightarrow$ $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，有界，$\exists (x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty}$，有 $x_{n_k} \longrightarrow x$，$x \in A$

$\Rightarrow$ A为紧集.

$\Leftarrow$ 反证法：若A无界，即对 $\forall n \in N^+$，$\exists x_n \in A$，且 $|x_n| \geq n$，$|x_{n_k}| \geq n_k$ 任意子列均无界

故A非紧集，故矛盾.

$l_\infty = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid |x_n| \leq M,\ n = 1, 2 \cdots \}$

$B_{l_\infty} = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid |x_n| \leq 1,\ n = 1, 2 \cdots \}$ 不为紧集（找到一个序列，使该序列无任何收敛子列）

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ $\qquad d(\vec{x}, \vec{y}) = \sup |x_n - y_n|$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, 0 \cdots 1, 0 \cdots)$

$d(e_n, e_m)=1 \quad n \neq m$

对于子列 $d(e_{n_{k_1}}, e_{n_{k_2}})=1 \quad k_1 \neq k_2$

故并非柯西列，故不收敛.