第五章　二次型

习题 5.1

1．写出下列二次型的矩阵.

（1） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+7x_4^2-2x_1x_2-2x_2x_3+4x_3x_4$

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

（3） $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k_1x_1^2+k_1x_2^2+\cdots+k_nx_n^2$

（4） $f(x_1,\cdots,x_n)=2x_1x_2+2x_2x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n$

解

1.（1）$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&0&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}&6\\\frac{5}{2}&4&7\\6&7&5\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}k_1&0&\cdots&0\\0&k_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&k_n\end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$

2. 写出下列矩阵对应的二次型.

（1）$A=\begin{pmatrix}a&b&0\\b&a&b\\0&b&a\end{pmatrix}$　　（2）$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&3&\cdots&\frac{1}{4}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\cdots&n\end{pmatrix}$

解 （1）二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2bx_1x_2+2bx_2x_3$

（2）二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+\cdots nx_n^2+x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n$

$$+\frac{2}{3}x_2x_3+\cdots+\frac{2}{3}x_2x_n+\cdots+\frac{2}{n}x_{n-1}x_n$$

3．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2cx_1x_2+2x_2x_3$ 的秩为 2，求 c.

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&c&0\\c&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$\because R(A)=2,$

$\therefore |A|=\begin{vmatrix}2&c&0\\c&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-c^2=0\Rightarrow c=0.$

当 $c=0$ 时, $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，满足 $R(A)=2$，故 $c=0$.

4．设

$$A=\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}a_2&0&0\\0&a_3&0\\0&0&a_1\end{pmatrix}$$

证明 A 与 B 合同，并求可逆矩阵 C ，使得 $B=C^TAC$.

证明 矩阵 A 的特征值为 a_1,a_2,a_3 ,对应的特征向量分别为

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,构成正交矩阵 $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $B=C^{-1}AC=C^TAC.$

习题 5.2

1．用正交变换法化下列实二次型为标准形，并求出所用的正交变换.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$

（3） $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$

解 （1）

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，

由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 4] = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)$ =0

得特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

当 $\lambda_1 = 1,$

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A - E)X = \theta$，可得一个特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

当 $\lambda_2 = 2$，

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A - 2E)X = \theta$，可得一个特征向量为 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3 = 5$

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A - 5E)X = \theta$，可得一个特征向量为 $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将特征向量 p_1, p_2, p_3 分别单位化，可得正交阵

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

正交变换 $X=QY$ 将二次型化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

（2）二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda^2-1)^2=0$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$,

$$A-E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解 $(A-E)X=\theta$，易得正交特征向量： $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3=\lambda_4=-1$,

$$A+E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A+E)X=\theta$，易得正交特征向量： $p_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, p_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

将特征向量 p_1,p_2,p_3,p_4 单位化,可得正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

正交变换 $X=QY$ 将二次型化为标准形 $f={y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2-{y_4}^2$.

（3） $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2$，

知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3,\lambda_3=\lambda_4=1$，

当 $\lambda_1=-1$ 时，解 $(A+E)X=\theta$，可得单位特征向量 $P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_2 = 3$ 时，解 $(A-3E)X=\theta$，可得单位特征向量 $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，

当 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时，解 $(A-E)X=\theta$，易得正交单位特征向量 $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$，$P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

于是在正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

下二次型化为标准形 $f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

2．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求一正交变换化二次型为标准形;

(2) 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

解 （1） 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix},$$

$$\because r(A)=2 \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix} = 0,$$

$\therefore\ c=3$，从而 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(4-\lambda)(\lambda-9)=0$

得特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=9,\lambda_3=0$，

当 $\lambda_1=4$，

$$A-4E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A-4E)X=\theta$，可得单位特征向量 $p_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2=9$，

$$A-9E=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A-9E)X=\theta$，可得单位特征向量 $p_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_3=0$

$$A-0E=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $AX=\theta$，可得单位特征向量 $p_3=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$,

将正交特征向量 p_1,p_2,p_3 构成正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

正交变换$X=QY$将二次型化为标准形$f=4y_1^2+9y_2^2$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=4y_1^2+9y_2^2=1$ 表示椭圆柱面.

3. 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xy+2yz=4$可经正交变换$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\zeta^2=4$,求$a,b$的值与正交矩阵$Q$.

解

由题意二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，且 A 与 $B=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}$正交相似，则有

$\begin{cases}trA=trB\\ |A|=|B|\end{cases}$，即$\begin{cases}1+a+1=1+4\\ -(b-1)^2=0\end{cases}$

解得：$a=3,b=1$.

从而二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，其特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$

当$\lambda_1=0$，由

$$A-0E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解 $AX=\theta$，可得特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

当$\lambda_2=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解$(A-E)X=\theta$，可得特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ；

当$\lambda_3=4$，

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解$(A-4E)X=\theta$，可得特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

将特征向量分别单位化,可得正交矩阵：

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

4．用配方法化下列二次型为标准形，并求出所用的可逆线性替换.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-5x_1x_3+x_2x_3$

解 （1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

$$=[x_1^2+2x_1(x_3-x_2)+(x_3-x_2)^2]-(x_3-x_2)^2+x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$
$$=(x_1-x_2+x_3)^2+6x_2x_3$$

令$y_1=x_1-x_2+x_3, y_2=x_2+x_3, y_3=x_2-x_3$，则有可逆线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(y_2 - y_3) \end{cases}，即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

化二次型为标准形 $f = y_1{}^2 + 6y_2{}^2 + 6y_3{}^2$.

（2） 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$ 代入二次型,可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - 5(y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 - 4y_1y_3 - 6y_2y_3 \\ &= y_1^2 - 4y_1y_3 + 4y_3^2 - y_2^2 - 6y_2y_3 - 4y_3^2 \\ &= (y_1 - 2y_3)^2 - (y_2 + 3y_3)^2 + 5y_3^2 \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - 2y_3 \\ z_2 = y_2 + 3y_3 \\ z_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$，可得标准形 $f = z_1{}^2 - z_2{}^2 + 5z_3{}^2$.

$$由 \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} 及$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - 2y_3 \\ z_2 = y_2 + 3y_3 \\ z_3 = \quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -2 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

则所用可逆变换为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

5. 将二次型$f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 + 2cx_1x_3$化为标准形，求出所用的可逆线性替换.

解 当$a=0$, $f(x_1,x_2,x_3) = bx_2^2 + 2cx_1x_3$,

令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$，作可逆线性替换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

可将二次型化为标准形$f = 2cy_1^2 + by_2^2 - 2cy_3^2$.

当$a \neq 0$，$f(x_1,x_2,x_3) = a[x_1^2 + 2\frac{c}{a}x_1x_3 + (\frac{c}{a}x_3)^2] + bx_2^2 + (a - \frac{c^2}{a})x_3^2$,

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{c}{a}x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，作可逆线性替换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

可将二次型化为标准形$f = ay_1^2 + by_2^2 + (a - \frac{c^2}{a})y_3^2$.

6．在二次型 f（x_1 ，x_2 ，x_3 ）＝ $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 中，令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 - x_1 \end{cases}$$

得 f= $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$，可否由此认定上式为原二次型f 的标准形？为什么？若结论是否定的，请你将f化为标准形并确定 f 的秩.

解

$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，因为$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=0，

所以题中的线性替换不可逆，不能认为上式为原二次型f 的标准形.

由配方法，二次型$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$

$$=2[x_1-\frac{1}{2}(x_2+x_3)]^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-\frac{1}{2}(x_2+x_3) \\ y_2= \qquad x_2-x_3 \\ y_3= \qquad\quad x_3 \end{cases}$ 得二次型的标准形 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$， 且二次型的秩为2 .

另解

因为二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_1x_3$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$，从而得二次型的标准形 $f=3{y_1}^2+3{y_2}^2$,原二次型的秩为 2.

7. 设实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满秩， A_{ij}是元素a_{ij} 的代数余子式，试写出二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 的矩阵，并判断二次型的矩阵是否与 A 合同.

解 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}.$$

因为 $(A^{-1})^TAA^{-1}=(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，所以二次型的矩阵与 A 合同.

8. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$ 的正、负惯性指数均为

1，求 a.

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

由于二次型的正负惯性指数均为 1，故 f 的秩为 2，于是 A 的秩也为 2，所以 $|A|=0$，

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1-a)(a^2+a-2)=0 \Rightarrow (a+2)(a-1)^2=0$$

$\Rightarrow a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=-2$，由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\lambda(\lambda+3)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=0,\lambda_3=-3$，对应二次型的规范形为 $y_1^2-y_3^2$，符合题意.

当 $a=1$，由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\lambda^2$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$，对应二次型的规范形为 y_3^2，不合题意，舍去 $a_2=1$，

故 $a_1=-2$.

习题 5.3

1. 证明实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为负定二次型的充要条件是 A 的奇数阶顺序主子式小于零，偶数阶顺序主子式大于零.

证明　A 为负定矩阵，当且仅当 $-A$ 为正定矩阵. 由定理 5.8，正定矩阵的顺序主子式判定法可得结论.

2．判定下列实二次型的正定性.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$

（2）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$

（3）$f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

（4）$f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4\ -12x_3x_4$

分析 可用顺序主子式判别法

解 （1）因为$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&4\end{pmatrix}$ 的各阶顺序主子式

$$A_1=2>0,\ A_2=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&3\end{vmatrix}=2>0,\ A=\begin{vmatrix}2&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&4\end{vmatrix}=6>0$$

所以该实二次型为正定二次型.

（2）

二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 的矩阵为三对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&&&\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&&\\&\frac{1}{2}&1&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\frac{1}{2}\\&&&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$，各阶顺序主子式也是三对角矩阵且大于 0，

所以 A 为正定矩阵，二次型为正定二次型.

(3) f 的矩阵为$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$,

因为$a_{11}=-2<0$，$\begin{vmatrix}-2&1\\1&-6\end{vmatrix}=11>0$，$\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{vmatrix}=-38<0$，

故二次型为负定二次型.

(4) f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$,

因为 $a_{11}=1>0$，$\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0$，$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0$，$|A|=24>0$，

故二次型为正定二次型.

3．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$ 可配方为 $f(x_1,x_2,x_3)=$ $\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2-x_3)^2+\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2$,可否由此认定该二次型是正定的，请说明原因.

解 因为 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\ y_2=x_2-x_3\\ y_3=x_1-x_3\end{cases}$ 是不可逆线性替换，所以不可由此认定该二次型是正定的. 事实上，

当 $x_1=x_2=x_3=1$，有 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=0$，该二次型不是正定的.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=(kE+A)^2$, 其中 k 为实数. 求参数 k 的值，使 B 为正定矩阵.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2\lambda$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=2$， 从而有 B 的特征值为 k^2 ,$(k+2)^2$,$(k+2)^2$.

因为当 B 的特征值都大于 0 时, B 为正定矩阵，所以 $k\neq 0$ 且 $k\neq -2$ 时，B 为正定矩阵.

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵，如果对任一 n 维列向量 X，都有 $f=X^TAX=0$, 证明 $A=O$.

证明 设 $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，由于 A 对称，故 $a_{ij}=a_{ji}$

取基本向量 $X=\varepsilon_i=\begin{pmatrix}0, & \cdots & 1, & 0,\cdots & 0\end{pmatrix}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$\varepsilon_i^T A\varepsilon_i=a_{ii}=0,(i=1,2,\cdots n)$,

再取 $X=\varepsilon_i+\varepsilon_j=(0,\cdots,0,\overset{\text{第}i\text{个分量}}{1},0,\cdots,0,\overset{\text{第}j\text{个分量}}{1},0,\cdots,0), i<j$,则

$X^TAX=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=a_{ij}+a_{ji}=2a_{ij}=0\Rightarrow a_{ij}=0$，故 $A=\boldsymbol{O}$

6．设 A 为 n 阶实对称矩阵且 $A^3-2A^2+A-2E=O$ ，证明 A 是正定矩阵.

证 设 λ 是 A 的任一特征值，X 为 A 的属于 λ 的特征向量.
则有

$$(A^3-2A^2+A-2E)X=(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2)X$$

再由题设

$$A^3-2A^2+A-2E=O$$

得

$$(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2)X=\theta$$

而 $X\neq\theta$ ，故

$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$$

解之得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=\pm i$

因为 A 为实对称矩阵，所以特征值一定是实数，故 A 只有特征值 $\lambda=2$，即 A 的全部特征值为正 ，所以 A 是正定矩阵.

7．设 A 是 n 阶正定矩阵，证明 $|A+E|>1$.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，因 A 正定，所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零，于是矩阵

$A+E$ 的特征值 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$ 全大于 1，所以

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

8．设 n 阶实方阵 A 是满秩矩阵，证明 A^TA 是正定矩阵.

证 因为 $(A^TA)^T=A^TA$，所以 A^TA 是实对称矩阵.由于二次型

$f=X^TA^TAX=(AX)^TAX\geq 0$，所以 $f=0\Leftrightarrow AX=0$ ，

又由于 A 是满秩矩阵 ，则 $AX=0\Leftrightarrow X=0$，

$\therefore$ 对于非零向量 X，有 $f=X^TA^TAX>0$，从而 A^TA 是正定矩阵.

习题五

(A)

一、填空题

1．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的矩阵为______________.

解

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2=2x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

可得二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2．二次型 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的矩阵为______________..

解 二次型为 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_1{}^2+x_2{}^2+7x_3{}^2+6x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$

该二次型的矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

3．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2,则 a___________.

解 对二次型的矩阵进行初等变换, 有

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix},$$

因为秩为 2 ，$\therefore a=0$

4．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+2ax_1x_3+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，$(2,1,2)^T$ 是二次型的矩阵的特征向量，则二次型的规范形为____________________.

分析 求正交变换后二次型的标准形就是求二次型的矩阵的特征值.

解 该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -5 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$，$(2,1,2)^T$ 是 A 的特征向量，可设

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$，即有 $\begin{cases}2+a+2=2\lambda_1\\2a-5+2b=\lambda_1\\2+b+2=2\lambda_1\end{cases}$

可解出 $a=b=2,\lambda_1=3$． 由 A 的秩为 2 知 $|A|=0$，则 A 有一个特征值为 0.

设 A 的另一个特征值为 λ_3，由 $tr(A)=1+(-5)+1=3+0+\lambda_3$ 知 $\lambda_3=-6$，因此二次型的规范形为 $y_1^2-y_2^2$.

5．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2ax_2x_3$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，则 a 满足______________.

解　采用配方法，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2ax_2x_3=(x_1+ax_2+x_3)^2+(1-a^2)x_2^2,$$

因规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 $1-a^2>0\Rightarrow a\in(-1,\ 1)$.

6．已知实对称矩阵 A 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 X^TAX 的规范形为__________.

解　由于实对称矩阵 A 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同，所以对应的二次型有相同的规范形.

先求矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 的特征值，由 $\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-1-\lambda&2\\0&2&2-\lambda\end{vmatrix}=(1\text{-}\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$，

得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3,\lambda_3=-2$． 所以规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

7．已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2ax_2x_3$ 正定，则 a 满足______________.

解　设二次型的矩阵为 A，由题设 A 的顺序主子式满足

$$A_1=2>0,\ A_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0,\ A=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&a\\0&a&4\end{vmatrix}=4-2a^2>0$$

$\therefore |a|<\sqrt{2}$

8．已知 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-4x_2^2-2x_3^2+4tx_1x_2+2x_1x_3$ 负定，则 t 满足______________.

解 设二次型的矩阵为 A，由题设 A 的顺序主子式满足

$$A_1<0;\ A_2=\begin{vmatrix}-1 & 2t\\ 2t & -4\end{vmatrix}=4-4t^2>0 \quad \Rightarrow |t|<1;\ A=\begin{vmatrix}-1 & 2t & 1\\ 2t & -4 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=8t^2-4<0,$$

$$\therefore |t|<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. 实对称矩阵 A 的秩为 r，对应二次型的正惯性指数为 m，则二次型的符号差为__________.

解

实对称矩阵 A 的秩为 r，对应二次型的正惯性指数为 m，则二次型的负惯性指数为 r-m，则二次型的符号差为 m-（r-m）=$2m$-r.

10．已知三元二次型的正惯性指数为 2，且二次型的矩阵 A 满足 $A^2+A=6E$，则 A 的特征值为__________.

解

实对称矩阵 A 满足 $A^2+A=6E$，则 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda-6=0$，所以 $\lambda=2$或-3，又因正惯性指数为 2，所以 A 的特征值为 2，2，－3.

二、单项选择题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$，则 A 与 B (　　).

(A) 合同　(B) 等价　(C) 相似　(D) 合同且相似

解 选(B)

因为 A 的特征值为 5，－1，－1，A 与 B 的特征值不相同，且特征值符号也不相同，所以 A 与 B 既不相似也不合同，但他们都是满秩矩阵，都与单位矩阵等价.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与 A 合同的矩阵是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

解 选(C)

因为题设矩阵的的特征值为两负一正，只有(C)与题设矩阵的特征值符号一致，他们对应的二次型有相同的正、负惯性指数.

3.设 A, B 为 n 阶实对称矩阵，若 A 与 B 合同，则（　　）.

（A）A 与 B 有相同的特征值　　　　　　　　（B）A 与 B 有相同的秩

(C）A 与 B 有相同的行列式　　　　　　　　(D）A 与 B 有相同的特征向量

解　选(B).

若取 $A=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & \\ & 4\end{pmatrix}$，则 A 合同于 B，且有 A， C， D 选项均不正确.

4. 设 A, B 都是正定矩阵, 则下列结论不正确的是(　　).

(A)　$A+B$ 是正定矩阵　　　　　　　(B) $A - B$ 是正定矩阵

(C)　A^* 是正定矩阵　　　　　　　(D) 若 D 可逆，则 D^TAD 是正定矩阵

解 选（B）.

因为 A, B 都是正定矩阵,则对任一非零实列向量 α，$\alpha^T(A+B)\alpha=\alpha^TA\alpha+\alpha^TB\alpha>0$，从而 $A+B$ 是正定矩阵.

因为 A 为正定矩阵，所以 A 的特征值全为正，于是 A^* 的特征值全为正，所以 A^* 为正定矩阵.

又因为 A 为正定矩阵，则存在 n 阶非奇异矩阵 C，使得 $A=C^TC$. 若 D 可逆，则 $D^TAD=D^TC^TCD=(CD)^T(CD)$，且 CD 可逆，故 D^TAD 是正定矩阵.

5. 下列条件不能保证 n 阶实对称矩阵 A 为正定的是(　　).

(A)　A^{-1} 正定

(B)　二次型 $f=X^TAX$ 的负惯性指数为零

(C)　二次型 $f=X^TAX$ 的正惯性指数为 n

(D)　A 合同于单位矩阵

解 选(B)，因为负惯性指数为零也可能是半正定.

6. 设 A 为实对称矩阵，则下列结论不正确的是(　　).

(A)　若 A 可逆，则 A^{-1} 与 A^T 合同

(B)　若 A 合同于单位矩阵，则 $|A|>0$

(C) 若 A 可逆，则 A^2 与单位矩阵合同

(D)　若 $|A|>0$，则 A 合同于单位矩阵

解 选（D）

因为 (A)　若 A 可逆，则 $A^T=A^TA^{-1}A$，即 A^{-1} 与 A^T 合同.

(B)若 A 合同于单位矩阵，则 A 正定，$|A|>0$.

(C) 若 A 可逆，则 A 的特征值 λ 不为 0，A^2 的特征值 $\lambda^2>0$, A^2 正定且与单位矩阵合同.

(D) 若 $|A|>0$， A 的特征值不一定全大于 0.

7. 已知实对称矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$,则 A(　　).

(A) 正定　　(B) 半正定　　(C) 负定　　(D) 不定

解 设 $AX=\lambda X, X\neq\theta$， 由实对称矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，

用非零向量 X 右乘等式两边, 得

$$(A^2-3A+2E)X=\theta\Rightarrow\lambda^2X-3\lambda X+2X=\theta$$

$$\therefore\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

A 的特征值为 2 或 1，均为正数，故选(A)

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2ax_2x_3$ 具有标准形

$f=y_1^2+ay_2^2$ 的充要条件是(　　).

(A) $a=1$　　(B) $a=0$　　(C) $a<1$　　(D) $a>1$

解 由配方法，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2ax_2x_3$

$=(x_1+ax_2+x_3)^2+(a-a^2)x_2^2$，再由题设知，充要条件是 $a-a^2$ 与 a 符号一致，

故选(C)

9. 下列矩阵合同于单位矩阵的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\3&6&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&7&1\\1&1&8\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-1&3&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$

解 选（C）

因(A)不是对称矩阵，(B)有负特征值 -4，(D)的行列式为 0 .

10. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 合同且相似的矩阵是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

解 A 的特征值为 1，2，3，而正交相似满足合同，故选(A).

(B)

1．已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为2,

(1)求a的值;

(2)求正交变换$X=QY$，将二次型化为标准形;

(3)求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

解 （1）二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\because R(A)=2,\quad \therefore \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=0$$

（2）当$a=0$，有 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$，解$(A-\lambda E)X=\theta$，可得

A 属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的一组线性无关特征向量为$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(0,0,1)^T$，

A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 的一个线性无关特征向量为$\alpha_3=(-1,1,0)^T$，

将正交特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化，可得正交矩阵$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

在正交变换$X=QY$下二次型可化为标准形$f=2y_1^2+2y_2^2$.

（3）在正交变换$X=QY$下,$f=0$ 即 $2y_1^2+2y_2^2=0 \Rightarrow y_1=y_2=0$，则

方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解为 $X=Q\begin{pmatrix}0\\0\\y_3\end{pmatrix}$即$k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},k\in R.$

2．已知 $B=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$相似于对角阵，

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换使二次型 X^TBX 为标准形.

解　（1）先求 $B=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$的特征值：

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&0\\0&a&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-6)^2(\lambda+2)$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=\lambda_2=6$，

$$\left(B-6E\right)=\begin{pmatrix}-4&2&0\\8&2&0\\0&a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&2&0\\0&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$$

因为 B 相似于对角阵，所以 $R\left(B-6E\right)=1$,于是有 $a=0$.

(2)二次型 X^TBX 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&5&0\\5&2-\lambda&0\\0&a&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)=0$

得 A 的特征值为$\lambda_1=6,\lambda_2=7,\lambda_3=-3$.

当$\lambda_1=6$时,解$(A-6E)X=\theta$,可得一个线性无关的特征向量$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

当$\lambda_2=7$时,解$(A-7E)X=\theta$,可得一个线性无关的特征向量$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

当$\lambda_3=-3$时,解$(A+3E)X=\theta$,可得一个线性无关的特征向量$\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

因为实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量η_1,η_2,η_3正交，所以只需将特征向量分别单位化,可得正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则有正交变换$X=QY$将二次型X^TBX化为标准形$f=6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$.

3. 已知实二次型f=X^TAX在正交变换$X=QY$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$，矩阵Q的第三列为$(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$, 求该二次型.

解 由题设知A的特征值为$1,1,0$且$(1,0,1)^T$为A属于特征值0的一个特征向量.

设$(x_1,x_2,x_3)^T$为A属于特征值1的特征向量，因A为实对称阵，所以

$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0$，即$x_1+x_3=0$，取$(\sqrt{2}/2,0,-\sqrt{2}/2)^T,(0,1,0)^T$为$A$属于特征值1的两个正交的单位特征向量，可得到正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，使得

$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则$A=Q\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}Q^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

该二次型为$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2-x_1x_3$.

4．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$经正交变换

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 + y_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(-2y_1 + y_2 + 2y_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(y_1 - 2y_2 + 2y_3) \end{cases}$$

化为了标准形$f = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$,求该二次型。

解 由题意

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad X = QY \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = Q \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

5.设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

（1） 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y .

（2） 求矩阵 P ，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角阵.

分析 （1）可将 A 的一个特征值 3 代入特征方程可求得 y ,

(2) 注意到 A 是对称阵，所以 $(AP)^T(AP) = P^T A^2 P$ ，求出 A^2 的标准形即可.

解 （1）将特征值 3 代入矩阵 A 的特征多项式 $\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

解得 $y = 2$.

(2) 由（1）结果可知

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

因为 $A^T=A$，所以 $(AP)^T(AP)=P^TA^2P$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$$

对应于 A^2 的二次型为

$$X^TA^2X=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$$

$$\underline{\underline{\text{配方}}}\,x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2+\frac{9}{5}x_4^2$$

作线性替换：

$$\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_2\\y_3=x_3+\dfrac{4}{5}x_4\\y_4=x_4\end{cases}\qquad \text{即：}X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\dfrac{4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=PY$$

将 $X=PY$ 代入二次型 X^TA^2X，得

$$X^TA^2X=(PY)^TA^2(PY)=Y^T(AP)^T(AP)Y$$

$$=Y^T\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\dfrac{9}{5}\end{pmatrix}Y$$

即 矩阵 P，使得

$$(AP)^T(AP)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\dfrac{9}{5}\end{pmatrix}$$

6．设 $f=X^TAX$ 为 n 元实二次型，λ 与 μ 分别为其矩阵 A 的最大特征值与最小特征值，

证明对任一实 n 维列向量 X，总有 $\mu X^TX\leqslant X^TAX\leqslant\lambda X^TX$.

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由于 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使

$Q^T AQ = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，显然对任一实 n 维列向量 $X = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，令

$Y = Q^{-1}X$，有 $X^T A X = Y^T Q^T AQY = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \ge \mu Y^T Y = \mu(Q^{-1}X)^T(Q^{-1}X) = \mu X^T X$.

而对任一实 n 维向量 X，$X^T A X \leqslant \lambda X^T X$ 的情形同理可证.

7. A 是 n 阶实对称矩阵且正定，证明函数 $f = X^T AX + 2\beta^T X + c$ 的极小值为 $c-\beta^T A^{-1}\beta$，其中 $\beta = (b_1,\cdots,b_n)^T$ 是实向量，c 为实数.

证 因为 A 是 n 阶实对称矩阵，所以函数可写为二次型的矩阵形式

$$f = X^T AX + 2\beta^T X + c = (X^T,1)\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 A 是正定阵，所以可逆，又因为 A 是 n 阶实对称矩阵，现做分块矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -\beta^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}\beta \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & c-\beta^T A^{-1}\beta \end{pmatrix},$$

令 $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}\beta \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$，即有 $Y = X + A^{-1}\beta$，于是

$$f = (Y^T,1)\begin{pmatrix} A & O \\ O & c-\beta^T A^{-1}\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix} = Y^T AY + c - \beta^T A^{-1}\beta \ge c - \beta^T A^{-1}\beta,$$

当 $X = -A^{-1}\beta$，函数 $f = X^T AX + 2\beta^T X + c$ 的极小值为 $c-\beta^T A^{-1}\beta$.

8. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，$m>n$，证明 $A^T A$ 为正定矩阵的充要条件是 $R(A)=n$.

证 先证充分性.

因为 $(A^T A)^T = A^T A$，所以 $A^T A$ 是实对称矩阵.若 $R(A)=n$，则

$AX=0$ 只有零解，从而对任意非零向量 X 有

$AX \ne 0 \Rightarrow (AX)^T(AX) > 0 \Rightarrow X^T A^T AX > 0$ 成立，故 $A^T A$ 为正定矩阵.

再证必要性.

因为 $A^T A$ 为正定矩阵，所以 $\left|A^T A\right| > 0$，则 $R(A^T A)=n$，从而 $R(A)\ge n$，

又因为 $m>n$，所以 $R(A)\le n$，故 $R(A)=n$.

9. 设 A 是 n 阶正定矩阵，$a>0$，证明 $\left|A+aE\right| > \left|A\right| + a^n$.

证 因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以 A 的所有特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n>0$，从而矩阵 $A+aE$ 的所有特征值 $\lambda_1+a,\ldots,\lambda_n+a>0$，于是

$$|A+aE|=(\lambda_1+a)\ldots(\lambda_n+a)>\lambda_1\ldots\lambda_n+a^n=|A|+a^n.$$

10．设实对称矩阵 A 与 B 合同，若 A 是正定矩阵，证明 B 是正定矩阵.

证 因为实对称矩阵 A 与 B 合同，A 是正定矩阵，所以 A 与 E 合同，由合同的传递性知，E 与 B 合同，所以 B 是正定矩阵.

11．设 A 是实对称矩阵．证明：(1)当实数 t 充分大时，$tE+A$ 是正定矩阵;

(2) 当正数 ε 充分小时， $E+\varepsilon A$ 是正定矩阵.

证 （1）证法 1：易证 $tE+A$ 是实对称矩阵，设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因为 A 是实对称阵，所以 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 为实数，取 $t>\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$，则 $tE+A$ 的特征值 $t+\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 全大于 0，于是 $tE+A$ 为正定矩阵.

证法 2：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因为 A 是实对称矩阵，则存在正交阵 Q，使

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

从而对任一非零列向量 Y，有

$$Y^TQ^T(tE+A)QY=Y^TQ^TtEQY+Y^TQ^TAQY=Y^TtEY+Y^T\Lambda Y$$

$=Y^T(tE+\Lambda)Y=(t+\lambda_1)y_1^2+\cdots+(t+\lambda_n)y_n^2$，显然取 $t>\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$ 时，

$Y^T(tE+\Lambda)Y$ 为正数，则 $tE+A$ 与正定矩阵合同，$tE+A$ 是正定矩阵.

(2) 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交阵 T，使

$$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

取 $\lambda_0=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$，不妨设 $\lambda_0>0$（若 $\lambda_0=0$，则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0\Rightarrow A=O$，结论得证），令 $\varepsilon=\dfrac{1}{\lambda_0+1}$，有 $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0+1}\right|<1,i=1,2,\cdots,n$，

则

$$T^{-1}(E+\varepsilon A)T=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0+1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\dfrac{\lambda_n}{\lambda_0+1}\end{pmatrix}$$

且$1+\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0+1}>0, i=1,2,\cdots,n$，故 $E+\varepsilon A$ 是正定矩阵.

12．设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶可逆实矩阵，证明: $\left|A+B^TB\right|\geq|A|+\left|B^TB\right|$.

证　因为 B 为可逆矩阵，所以$\forall X\neq\theta$,有 $BX\neq\theta$，则二次型 $f=X^TB^TBX=(BX)^TBX$

>0，故 $f=X^TB^TBX$ 为正定二次型，从而 B^TB 为正定矩阵.

因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以 A 与单位矩阵合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=E$，从而$|A||P|^2=1$.

又因为 B^TB 为 n 阶可逆实对称矩阵，则 P^TB^TBP 仍为 n 阶可逆实对称矩阵，所以存在正交矩阵Q，使得

$$Q^TP^TB^TBPQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}, P^TB^TBP \text{ 的特征值 } \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n>0\text{，从而}$$

$\left|B^TB\right||P|^2=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

令$T=PQ$，则有

$$T^T(A+B^TB)T=\begin{pmatrix}1+\lambda_1 & & & \\ & 1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n\end{pmatrix},$$

从而$\left|A+B^TB\right||T|^2=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)$，

因为Q为正交矩阵，所以$|T|^2=|P|^2|Q|^2=|P|^2$，从而$\left|A+B^TB\right||T|^2=\left|A+B^TB\right||P|^2$

$=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)\geq1+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，另一方面，$\left(|A|+\left|B^TB\right|\right)|P|^2=1+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，

从而$\left|A+B^TB\right||P|^2>\left(|A|+\left|B^TB\right|\right)|P|^2\Rightarrow\left|A+B^TB\right|\geq|A|+\left|B^TB\right|$.

13. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明下面命题等价：

（1） A 是正定矩阵；

（2） 存在主对角线上元素全为 1 的上三角矩阵 B，使得 $A = B^T DB$，D 是正定对角阵；

（3） 存在主对角线上元素全为正的上三角矩阵 C，使得 $A = C^T C$.

证 （1）$\Rightarrow$（2）: 先证存在主对角线上元素全为 1 的上三角矩阵 P，使得 $P^T AP = D$ 是正定对角阵. 对矩阵 A 的阶数用数学归纳法进行证明.

当 $n = 1$，结论显然成立. 假设结论对于 $n-1$ 阶矩阵成立，即存在主对角线上元素全为 1 的 $n-1$ 阶上三角矩阵 P_{n-1}，使得 $P_{n-1}^T A_{n-1} P_{n-1} = D_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶正定对角阵，现对 n 阶矩阵 A 进行证明. 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$，其中 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶矩阵，α 是 $n-1$ 维列向量. 因为 A 是正定矩阵，所以其各阶顺序主子式大于 0，从而 A_{n-1} 是正定矩阵且可逆，考虑如下分块矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix},$$

由 A 的正定性知 $a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha > 0$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

则 P 是主对角线上元素全为 1 的上三角矩阵，且有 $P^T AP = \begin{pmatrix} D_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$ 是正定对角阵.

容易证明 P^{-1} 是主对角线上元素全为1的上三角矩阵，令 $B = P^{-1}$，即有 $A = B^T DB$，D 是正定对角阵.

（2）$\Rightarrow$（3）：由(2)，因 D 是正定对角阵，可设 $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$d_1, d_2, \cdots, d_n > 0$，取 $t_i = \sqrt{d_i}, i = 1, 2, \cdots, n$，设矩阵 $T = diag(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，令 $C = TB$，则有主对角线上元素全为正的上三角矩阵 C，使得 $A = C^T C$.

（3）$\Rightarrow$（1）：由(3) 中 $A = C^T C$ 知 A 是正定矩阵.