§2.7 子空间的直和

一、直和的定义

二、直和的判定

三、多个子空间的直和

引入

设V_1,V_2为线性空间V的两个子空间，由维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

有两种情形：

1) $\dim(V_1+V_2)<\dim V_1+\dim V_2$

此时 $\dim(V_1\cap V_2)>0,$

即，$V_1\cap V_2$ 必含非零向量.

2) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

此时 $\dim(V_1\cap V_2)=0,$

$V_1\cap V_2$不含非零向量，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$

情形2）是子空间的和的一种特殊情况

—— **直和**

一、直和的定义

设 V_1,V_2为线性空间V的两个子空间，若和 V_1+V_2 中每个向量α 的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\qquad \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$$

是唯一的，和 V_1+V_2就称为**直和**，记作 $V_1\oplus V_2$.

注： ① 分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 唯一的，意即

若有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$，$\alpha_1,\beta_1\in V_1,\alpha_2,\beta_2\in V_2$

则 $\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2$.

② 分解式唯一的不是在任意两个子空间的和中都成立. 例如，$\mathbf{R}^3$的子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3),\ V_3 = L(\varepsilon_3)$$

这里，$\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$

在和$V_1 + V_2$中，向量的分解式不唯一，如

$$(2,2,2) = (2,3,0) + (0,-1,2) = (2,1,0) + (0,1,2)$$

所以和 $V_1 + V_2$不是直和.

而在和 V_1+V_3 中，向量 $(2,2,2)$ 的分解式是唯一的，

$$(2,2,2)=(2,2,0)+(0,0,2)$$

事实上，对 $\forall\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in V_1+V_3$，

都只有唯一分解式：$\alpha=(a_1,a_2,0)+(0,0,a_3)$.

故 V_1+V_3 是直和.

二、直和的判定

1. V_1+V_2是直和的充要条件是零向量分解式唯一，即若 $\alpha_1+\alpha_2=0,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$ 则必有 $\alpha_1=\alpha_2=0.$

证：必要性. $\because$ V_1+V_2 是直和,

$\therefore$ $\forall\alpha\in V_1+V_2$，α 的分解式唯一.

若$\alpha_1+\alpha_2=0$，$\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$

而0有分解式 $0=0+0,$

$\therefore$ $\alpha_1=0$，$\alpha_2=0.$

充分性．设 $\alpha \in V_1 + V_2$，它有两个分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2,\ \alpha_1, \beta_1 \in V_1,\ \alpha_2, \beta_2 \in V_2$$

于是 $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0$

其中 $\alpha_1 - \beta_1 \in V_1$，$\alpha_2 - \beta_2 \in V_2$

由零向量分解成唯一，且 $0 = 0 + 0,$

有 $\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0.$

即 $\alpha_1 = \beta_1$，$\alpha_2 = \beta_2$ $\quad\therefore$ α 的分解式唯一．

故 $V_1 + V_2$ 是直和．

2. V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$.

证：“$\Leftarrow$ ” 若$\alpha_1+\alpha_2=0$, $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$.

则有 $\alpha_1=-\alpha_2\in V_1\cap V_2=\{0\}$

$\therefore \alpha_1=\alpha_2=0$, 即$V_1+V_2$ 是直和.

“$\Rightarrow$ ” 任取$\alpha\in V_1\cap V_2$, 于是零向量可表成

$$0=\alpha+(-\alpha),\ \alpha\in V_1,\ -\alpha\in V_2.$$

由于V_1+V_2是直和，零向量分解式唯一，

$\therefore\ \alpha=-\alpha=0.$ 故 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

3. V_1+V_2 是直和

$$\Leftrightarrow \quad \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

证： 由维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

有， $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

$$\Leftrightarrow \quad \dim(V_1\cap V_2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad V_1\cap V_2=\{0\}$$

$\Leftrightarrow \quad V_1+V_2$ 是直和.

4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$；$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$分别是线性子空间

V_1,V_2 的一组基，则

V_1+V_2是直和 $\Leftrightarrow \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关.

证：由题设，$V_1=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)$，$\dim V_1=r$

$$V_2=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s),\ \dim V_2=s$$

$$\therefore\quad V_1+V_2=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s).$$

若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关，

则它是V_1+V_2的一组基.　从而有

$$\dim(V_1+V_2)=r+s=\dim V_1+\dim V_2$$

$\therefore\ V_1+V_2$ 是直和.

反之, 若 V_1+V_2 直和，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2=r+s$$

从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 的秩为$r+s$.

所以$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关.

总之，设 V_1, V_2 为线性空间V的子空间，则下面四个条件等价:

1） V_1+V_2是直和

2）零向量分解式唯一

3） $V_1 \cap V_2=\{0\}$

4）$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

定理 设U是线性空间V的一个子空间，则必存在一个子空间W，使 $V=U \oplus W$.

证： 取U的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

把它扩充为V的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$

令 $W=L(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n)$，则 $V=U\oplus W$.

注意：

上述分解式一般不是唯一的(除非U是平凡子空间).

如，在R³中，设

$$\alpha_1=(1,1,0),\ \alpha_2=(1,0,0),\ \beta_1=(0,1,1),\ \beta_2=(0,0,1)$$

令 $U=L(\alpha_1,\alpha_2),\ W_1=L(\beta_1),\ W_2=L(\beta_2),$

则 $R^3=U\oplus W_1=U\oplus W_2$，但 $W_1\neq W_2$

三、推广——多个子空间的直和

1、定义

$V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间V的子空间，若和

$\sum_{i=1}^{s}V_i=V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\ \alpha_i\in V_i, i=1,2,\ldots,s$$

是唯一的，则和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 就称为直和，记作

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

2、判定

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间V的子空间，则下面四个条件等价:

1）$W=\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和

2）零向量分解式唯一，即

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=0,\ \alpha_i\in V_i,\ \text{必有}\ \ \alpha_i=0,\ \ i=1,2,\ldots,s$$

3）$V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\},i=1,2,\cdots,s$

4）$\dim W=\sum_{i=1}^{s}\dim V_i$

例1 设V_1、V_2分别是齐次线性方程组① 与②的解空间：

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = 0 \qquad ①$$

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n \qquad ②$$

证明：$P^n = V_1 \oplus V_2$

证：解齐次线性方程组①，得其一个基础解系

$$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0,-1)$$
$$\varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0,-1)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_{n-1} = (0,0,\cdots,1,-1)$$

$$\therefore\ V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}).$$

再解齐次线性方程组②.

由 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n$

即 $$\begin{cases} x_1 - x_n = 0 \\ x_2 - x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$$

得②的一个基础解系 $\varepsilon = (1,1,\cdots,1)$

$$\therefore\ V_2 = L(\varepsilon).$$

考虑向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon$ 线性无关，即它为P^n的一组基.

$$\therefore\ P^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}) + L(\varepsilon)$$

$$= V_1 + V_2$$

又 $\dim V_1 + \dim V_2 = (n-1) + 1 = n = \dim P^n$

$$\therefore\ P^n = V_1 \oplus V_2$$