§2.6 子空间的交与和

一、子空间的交

二、子空间的和

三、子空间交与和的性质

一、子空间的交

1、定义

设V_1、V_2为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 = \{a \mid a \in V_1 且 a \in V_2\}$$

也为V的子空间，称之为V_1与V_2的**交空间**.

事实上，$\because 0 \in V_1, 0 \in V_2$，$\therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$

任取$\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$，即 $\alpha, \beta \in V_1$, 且$\alpha, \beta \in V_2$,

则有 $\alpha + \beta \in V_1, \alpha + \beta \in V_2$，$\therefore$ $\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$

同时有 $k\alpha \in V_1, k\alpha \in V_2$，$\therefore$ $k\alpha \in V_1 \cap V_2$，$\forall k \in P$

故 $V_1 \cap V_2$为V的子空间.

显然有，$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$，

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$$

2、推广——多个子空间的交

$V_1, V_2, \cdots, V_s$ 为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^{s} V_i = \{\alpha \mid \alpha \in V_i, i = 1,2,3,\cdots,s\}$$

也为V的子空间，称为 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的交空间.

V的两子空间的并集是否为V的子空间？

$$V_1=\{(a,0,0)\mid a\in R\},\ V_2=\{(0,b,0)\mid b\in R\}$$

皆为$\mathbf{R}^3$的子空间，但是它们的并集

$$V_1\cup V_2=\{(a,0,0),(0,b,0)\mid a,b\in R\}$$

$$=\{(a,b,0)\mid a,b\in R\text{ 且}a,b\text{中至少有一是}0\}$$

并不是$\mathbf{R}^3$的子空间．因为它对$\mathbf{R}^3$的运算不封闭，如

$$(1,0,0),\ (0,1,0)\in V_1\cup V_2$$

但是 $(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin V_1\cup V_2$

二、子空间的和

1、定义

设V_1、V_2为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1+V_2=\{a_1+a_2\mid a_1\in V_1, a_2\in V_2\}$$

也为V的子空间，称之为V_1与V_2的**和空间**.

事实上，$\because 0\in V_1, 0\in V_2$， $\therefore 0=0+0\in V_1+V_2\neq\varnothing$

任取 $\alpha,\beta\in V_1+V_2$， 设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \beta=\beta_1+\beta_2$，

其中，$\alpha_1,\beta_1\in V_1, \alpha_2,\beta_2\in V_2$，则有

$$\alpha+\beta=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)\in V_1+V_2$$

$$k\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2)=k\alpha_1+k\alpha_2\in V_1+V_2,\quad \forall k\in P$$

显然有，$V_1+V_2=V_2+V_1$，

$$(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$$

2、推广——多个子空间的和

$V_1,V_2,\cdots,V_s$ 为线性空间V的子空间，则集合

$$\sum_{i=1}^{s}V_i=V_1+V_2+\cdots+V_s$$
$$=\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s \mid \alpha_i\in V_i, i=1,2,3,\cdots,s\}$$

也为V的子空间，称为 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的和空间.

$$V_1=\{(a,0,0)\mid a\in R\},\ V_2=\{(0,b,0)\mid b\in R\}$$

$$V_1\cap V_2=\{(0,0,0)\}$$

$$V_1\cup V_2=\{(a,0,0),(0,b,0)\mid a,b\in R\}$$

$$=\{(a,b,0)\mid a,b\in R\text{ 且}a,b\text{中至少有一是0}\}$$

$$V_1+V_2=\{(a,b,0)\mid a,b\in R\}$$

三、子空间的交与和的有关性质

1、 设 V_1,V_2,W 为线性空间V的子空间

1）若 $W\subseteq V_1, W\subseteq V_2$，则 $W\subseteq V_1\cap V_2$.

2）若 $V_1\subseteq W, V_2\subseteq W$，则 $V_1+V_2\subseteq W$.

2、 设 V_1,V_2 为线性空间V的子空间，则以下三条件等价:

1) $V_1\subseteq V_2$

2) $V_1\cap V_2=V_1$

3) $V_1+V_2=V_2$

3、 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为线性空间V中两组向量，则

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

$$=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

证明：

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

$$=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_i\in P, i=1,2,\cdots,s\}$$

$$+\{l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t \mid l_i\in P, i=1,2,\cdots,t\}$$

$$=\{\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}l_i\beta_i \mid k_i,l_j\in P, i=1,2,\cdots,s, j=1,2\cdots,t\}$$

$$=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

4、维数公式

设V_1,V_2为线性空间V的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

证明： 设 $V_1\cap V_2$ 的维数为s，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$V_1\cap V_2$的一组基. 下面的证明过程对s=0仍是成立的.

将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$扩充为$V_1$一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$扩充为$V_2$一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$.

下证$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$为$V_1+V_2$的一组基即可.

先证$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$是线性无关的. 设

$$\sum_{i=1}^{s}b_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}k_i\beta_i+\sum_{i=1}^{m}l_i\gamma_i=\theta,$$

则$\sum_{i=1}^{s} b_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{t} k_i\beta_i = -\sum_{i=1}^{m} l_i\gamma_i$，从而，$\sum_{i=1}^{m} l_i\gamma_i \in V_1 \cap V_2$，

即有$\sum_{i=1}^{m} l_i\gamma_i$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

设$\sum_{i=1}^{m} l_i\gamma_i = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s$，

因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$线性无关，

所以，$l_i = c_j = 0, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots s.$

带入$\sum_{i=1}^{s} b_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{t} k_i\beta_i + \sum_{i=1}^{m} l_i\gamma_i = \theta$，得$\sum_{i=1}^{s} b_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{t} k_i\beta_i = \theta.$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性无关，

所以，$b_i = k_j = 0, i = 1, \cdots, s, j = 1, \cdots t.$

即有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 线性无关.

再证，$\forall\alpha\in V_1+V_2$,

α可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$线性表示即可.

设$\alpha=\eta_1+\eta_2$，其中$\eta_1\in V_1$，$\eta_2\in V_2$,

再设$\eta_1=\sum_{i=1}^{s}b_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}k_i\beta_i$, $\eta_2=\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}l_i\gamma_i$,得

$$\alpha=\sum_{i=1}^{s}b_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}k_i\beta_i+\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}l_i\gamma_i$$

$$=\sum_{i=1}^{s}(b_i+c_i)\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}k_i\beta_i+\sum_{i=1}^{m}l_i\gamma_i$$

从而，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 为 V_1+V_2的一组基.

所以,$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$.

注： 从维数公式中可以看到，子空间的和的维数往往比子空间的维数的和要小.

例如，在R^3中，设子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

其中，$\varepsilon_1 = (1,0,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,0),\ \varepsilon_3 = (0,0,1)$

则，$\dim V_1 = 2,\quad \dim V_2 = 2$

但，$V_1 + V_2 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + L(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = R^3$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3$$

由此还可得到，$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$，$V_1 \cap V_2$ 是一直线.

推论： 设 V_1,V_2为n维线性空间V的两个子空间，若 $\dim V_1+\dim V_2>n$，则 V_1,V_2必含非零的公共向量. 即 $V_1\cap V_2$中必含有非零向量.

证： 由维数公式有

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$$

又 V_1+V_2是V的子空间，∴ $\dim(V_1+V_2)\le n$

若 $\dim V_1+\dim V_2>n$， 则 $\dim(V_1\cap V_2)>0.$

故 $V_1\cap V_2$中含有非零向量.

例1 在 P^4 中，设

$$\alpha_1=(1,2,1,0),\ \alpha_2=(-1,1,1,1)$$

$$\beta_1=(2,-1,0,1),\ \beta_2=(1,-1,3,7)$$

1） 求 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数与一组基；

2） 求 $L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数与一组基.

解：1) 任取 $\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2)\bigcap L(\beta_1,\beta_2)$

设 $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$，

则有 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$，

即 $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3y_2 = 0 \\ x_2 - y_1 - 7y_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

解 (*) 得 $$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 4t \\ y_1 = -3t \\ y_2 = t \end{cases}$$ （t 为任意数）

$$\therefore \quad \gamma = t(-\alpha_1 + 4\alpha_2) = t(\beta_2 - 3\beta_1)$$

令 t=1，则得 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基

$$\gamma = -\alpha_1 + 4\alpha_2 = (-5,2,3,4)$$

$$\therefore \quad L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2) = L(\gamma)$$ 为1维的.

2) $L(\alpha_1,\alpha_2) + L(\beta_1,\beta_2) = L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

对以 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为列向量的矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&2&-2&2\\0&1&1&7\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&0&-2&-6\\0&1&-1&1\\0&0&2&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由B知，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组.

$\therefore\ L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)$ 为3维的，

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为其一组基.