1. $c=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在$\}$

线性空间"+""·"封闭

$\|\cdot\|: c\to[0,+\infty)$

定义 $\|\cdot\| = \sup\limits_{n\in N}|x_n|$

且c是Banach空间

$c_{00} \subsetneq l_p \subsetneq l_q \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq l_\infty$

$1\le p<q<+\infty$

有界不一定收敛，收敛数列必然有界。

下讨论关于 $l_p\subsetneq l_q$，以 l_1 和 l_2 为例

$(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \notin l_1$　　$(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}\in l_2$（由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2<+\infty$）

范数的等价：X（线性空间）

$\|\cdot\|_1: X\to[0,+\infty)$　　$\|\cdot\|_2: X\to[0,+\infty)$ $\xrightarrow[\text{三个条件}]{\text{满足范数的}}$ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为X上的两个范数.

任何一个赋范线性空间，其范数不一定为一个.

eg：$\|\cdot\|$ 是X上的一个范数，$\|\cdot\|': X\to[0,+\infty)$，构造 $\forall x\in X, \|x\|'=\lambda\|x\|$　$\lambda\in R^+$（正齐次）

(*) X上，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价，对 $\forall x\in X$，$\exists M,m\in R^+$，使 $m\|x\|_2\le\|x\|_1\le M\|x\|_2$

(**) 等价意即 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 在X上的收敛性是一致的.

即 $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq X$，$\|x_n\|_1\to0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2\to0$

eg1：　$\|x\|_2=\lambda\|x\|_1$　$\forall x\in X$ 均成立.

首先按照定义等价

eg2：

(*) $\Leftrightarrow$ (**)

证：由于 $\|x_n\|_1\to0$

$\|x\|_2\le\frac{1}{m}\|x_n\|_1\to0$

∴ $\|x\|_2\to0$

$\|x\|_2\ge\frac{1}{M}\|x_n\|_1$

∴ $\frac{1}{M}\|x_n\|_1\le\|x_n\|_2\le\frac{1}{m}\|x_n\|_1$

由 $\|x_n\|_1\to0$

故 $\|x_n\|_2\to0$

eg3：$X=l_1$　$x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$　$\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$　$\|x\|_2=\sup\limits_{x\in N^+}|x_n|$

下证：$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 不等价（2范数下收敛，但1范数下不收敛）

给出 $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq X=l_1$，若 $\|a_n\|_1\to0 \Longrightarrow \|a_n\|_2\to0$

每个分量的绝对值求和后趋于0，说明每个分量都为0，

故其上确界也为0.

$\lim_{m\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_n^m|=0$

$0\leq \sup|a_n^m| \leq \sum_{m=1}^{\infty}|a_n^m|$ 由夹逼，$\lim_{m\to\infty}\sup|a_n^m|=0$

故 $\|a_n\|_2\to 0$

若 $\|a_n\|_2\to 0$，但 $\|a_n\|_1 \not\to 0$

$a_1=(1,0,0\cdots\cdots)\in l_1$

$a_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\cdots\cdots)\in l_1$ $\|a_n\|_1=1\not\to 0$

$\|a_n\|_2=\sup_m|a_n^m|=\frac{1}{n}\to 0$

$a_3=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\cdots)\in l_1$

$\cdots$

$a_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n},0\cdots 0)\in l_1$

注：l_p 与 l_q $1\leq p<q$，在 l_p 上可定义 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_q$，但 $\|\cdot\|_p \neq \|\cdot\|_q$

通过找 $(\frac{1}{n^p})_{n=1}^{\infty}$ 的收敛性来证明.

Banach空间中基的概念.

$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ $e_n=(0,0\cdots 1,0,0\cdots)$ 线性表示只能是有限项 $\sum_{n=1}^{N}a_ne_n$ $N\to$ 不可能为无穷

第n项

例如 $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\cdots\cdots\frac{1}{n}\cdots\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$ × 所以 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 并非基.

$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是X的一个基（Banach空间中）：$X=\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}^{\|\cdot\|}$（范数闭包）

eg. c_0 $\mathrm{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}=\underline{c_{00}}$ 有限项非0，其余项均为0 $(\cdots x_{n_1}\cdots x_{n_2}\cdots x_{n^n})$

$=x_{n_1}\cdot e_{n_1}+x_{n_2}\cdot e_{n_2}+\cdots$

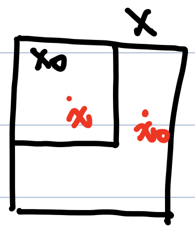
$\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|}=c_0$

$(x_1\ x_2\cdots x_n\ x_{n+1}\cdots)\in c_0$，即收敛为0

$\underbrace{(x_1\ x_2\cdots x_N\ 0\ 0\cdots)}_{\in c_{00}\ 有限项非0\ 其余项均为0}+\underbrace{(0,0\cdots x_{N+1}\ x_{N+2}\cdots x_n\cdots)}_{后面的范数小于\varepsilon.}$

引理：X为赋范线性空间，$X_0 \subsetneq X$ 为闭子空间

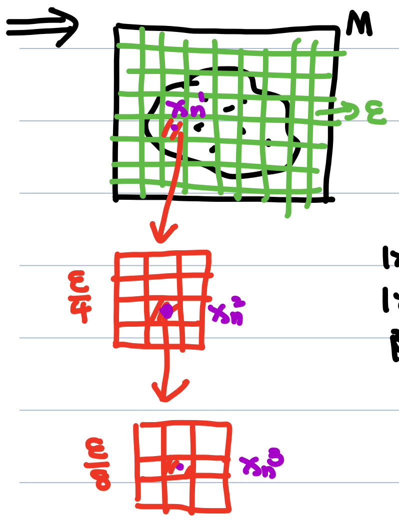
$\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0 \in X$，$\|x_0\|=1$，使 $\forall x \in X_0$，$\|x-x_0\| > 1-\varepsilon$



X_0距x_0的距离$>1-\varepsilon$

定理2.4.3　X是有限维 $\Longleftrightarrow$ X中有界闭集为紧集　任何开覆盖都存有有限子覆盖

$\Longrightarrow$



抽屉原理：无限个球放到有限个抽屉中，必有一个抽屉包含无限个球。

个数 $\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^2$　必有一个区域包含无穷个点，取出来再分。

$|x_n^1 - x_n^2| < \varepsilon$

$|x_n^2 - x_n^3| < \frac{\varepsilon}{4}$

随着k的增大，任意两点间的距离将会更小

$\Longleftarrow$ 假设X无限维，找到X中的有界闭集A，但A非紧。

$x_0 \in X$，

$\{\lambda x_0 : \lambda \in [-1,1]\} \subseteq \operatorname{span} x_0$

$x_1 \in X \setminus$

[illegible]补

eg.(习题7)

$\{\sum_{i=1}^{n} q_i e_i : q_i \in Q\}$, $\bar{A} = c_0$, $\forall x=(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, $\forall \varepsilon>0$, 找一个 $y \in A$, 使 $\|y-x\|<\varepsilon$

收敛为0　　收敛为0 $\forall n>N$, $|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n>N$, $|x_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$, $x=(x_1, x_2 \cdots x_N\ x_{N+1} \cdots)$

$= (x_1\ x_2 \cdots x_N\ 0 \cdots 0) + \underbrace{(0\ 0 \cdots 0\ x_{N+1}\ x_{N+2} \cdots)}_{\text{其范数小于 } \frac{\varepsilon}{2}}$

有理数稠密,必然可以做到

令 $y=(q_1\ q_2 \cdots q_N\ 0 \cdots 0)$, 使 $|q_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ $i=1,2 \cdots N$

$\|y-x\| = \|(q_1\ q_2 \cdots q_N\ 0 \cdots 0) - (x_1\ x_2 \cdots x_N\ x_{N+1} \cdots)\|$

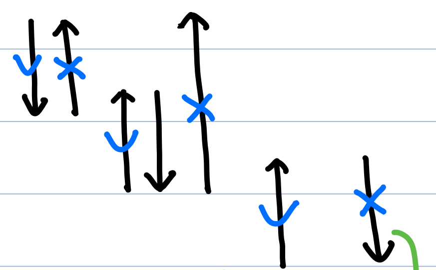
$= \|(q_1-x_1\ q_2-x_2 \cdots q_N-x_N\ 0 \cdots 0) - (0, 0\ 0 \cdots x_{N+1}\ x_{N+2} \cdots)\|$

$\leq \|(\underbrace{q_1-x_1}_{<\frac{\varepsilon}{2}}, \underbrace{q_2-x_2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \cdots \underbrace{q_N-x_N}_{<\frac{\varepsilon}{2}}, 0 \cdots 0)\| + \underbrace{\|(0,0 \cdots 0 \cdots x_{N+1}\ x_{N+2} \cdots)\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$

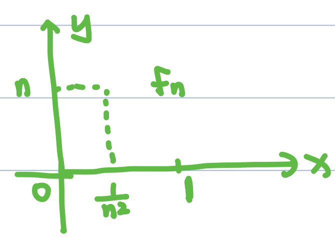
$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Lp空间中的收敛性:

$L_p(M)$ $\begin{cases} f_n \xrightarrow{a.e.} f & \text{(几乎处处收敛)} \\ f_n \xrightarrow{m} f & \text{(依测度收敛)} \\ f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f & \text{(p范数收敛)} \\ f_n \xrightarrow{u} f & \text{(一致收敛)} \end{cases}$



$L^p[0,1]$ ✓



$\int_0^1 |f_n|\, dm = \frac{1}{n} \to 0$

f_n 非一致收敛于0

内积空间.

H线性空间 $(\cdot)$: $H\times H \longrightarrow K$

且 ① $(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

② $(x,y)=\overline{(y,x)}$ 实空间的话共轭可去

③ $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$ α在第一个分量

④ $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

则称 $(\cdot)$ 为H上的一个内积

eg1: $(x,\alpha y) \overset{②}{=\!=} \overline{(\alpha y,x)} \overset{③}{=\!=} \overline{\alpha(y,x)} = \bar{\alpha}\cdot\overline{(y,x)} = \bar{\alpha}(x,y)$

系数α在第2个分量，提出来要共轭

eg2: $(z,x+y)=\overline{(x+y,z)}=\overline{(x,z)}+\overline{(y,z)}=(z,x)+(z,y)$

eg: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

① $\|x\|\geq 0$ 且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

② $\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda\cdot\bar{\lambda}(x,x)}=|\lambda|\cdot\sqrt{(x,x)}=|\lambda|\,\|x\|$

③ $\|x+y\|=\sqrt{(x+y,x+y)}=\sqrt{(x,x)+(y,y)+(x,y)+(y,x)}=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+\underline{(x,y)+(y,x)}}$

$\leq 2|(x,y)|$

$\leq 2\|x\|\cdot\|y\|$

$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ $\|y\|=\sqrt{(y,y)}$

$\leq \sqrt{(\|x\|+\|y\|)^2}$

$\|x\|+\|y\|=\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}$

$=\|x\|+\|y\|$

利用施瓦茨不等式：H为内积空间，$\forall x,y\in H$, $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$

$=\|x\|^2\cdot\|y\|^2$

$\therefore |(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$

$(\vec{x},\vec{y})\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$

故可验证其确为范数.

内积可诱导范数

$d(x,y)=\|x-y\|$ $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

度量空间 (X,d) $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ 赋范线性空间 $\underset{?}{\leftrightarrows}$ 内积空间

关注两个问题：① 范数是否可诱导内积？ ② $(\cdot)$ 的例子.

eg. R^n $(\vec{x}\cdot\vec{y})$ $\vec{x}=(x_1\ x_2\cdots x_n)$ $\vec{y}=(y_1\ y_2\cdots y_n)$

完备

$(\vec{x}\cdot\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

eg. l_2 $x=(x_1\ x_2\cdots x_n\cdots)$ $y=(y_1\ y_2\cdots y_n\cdots)$

完备

$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$

二次方可积

eg. l_3 $x=\left(\frac{1}{n^{1+\frac{3}{8}}}\right)_{n=1}^{\infty}\in l_3$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{3}{8}}}<+\infty$

✗

eg. $L_2[0,1]$

完备

$(f,g)=\int_0^1 f\cdot g\,dx$

均为Hilbert空间.

Hilbert空间: $H:(\cdot)\longrightarrow\|\cdot\|$ $(H,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间

若 $(H,\|\cdot\|)$ 完备,则称 H 是完备的内积空间.

eg.(是内积空间但不是Hilbert空间)(例4.1.4)

$H=l_1$ $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$ $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\le M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}x_n$

$\lim_{n\to\infty}y_n=0$

$(l_1,\|\cdot\|_2)$ $x_1=(1,0\cdots\cdots0\cdots)$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq C_{00}\in l_1$

$x_2=(1,\frac{1}{2},0\cdots\cdots0\cdots)$

$\cdots$

$x_n=(1,\frac{1}{2}\cdots\cdots\frac{1}{n}0\cdots0)$

Cauchy $(\|\cdot\|_2)$

$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,$

$\|x_n-x_m\|$

$=\|(0,0\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\cdots\frac{1}{m})\|$

$=\underline{\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{i^2}<\varepsilon}$ 只能在 l_2 中收敛
在 l_1 中不收敛

在 l_1 中不完备故不为Hilbert空间.