第七章 子博弈精炼Nash均衡

主要内容：

一、子博弈精炼Nash均衡

二、子博弈精炼Nash均衡的求解

一、子博弈精炼Nash均衡

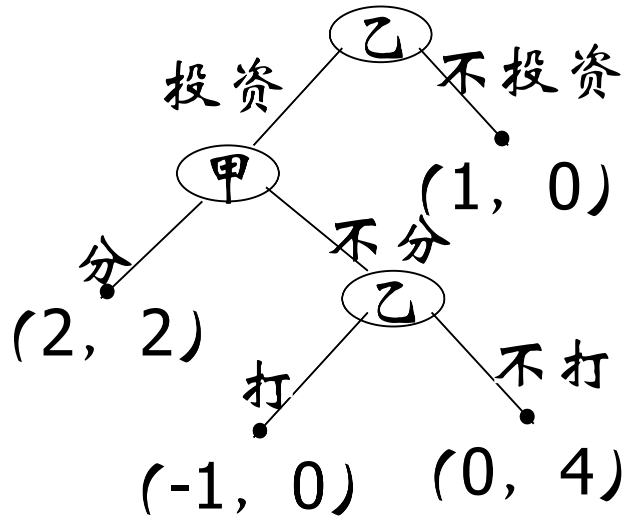
- 知道Nash均衡是一个静态均衡，将Nash均衡作为扩展式博弈的解同样会遇到Nash均衡的多重性问题，而且在多个Nash均衡中有些是明显不合理的。

例1：法律保障不足的开金矿博弈

求：NE？

？纳什均衡的问题

？为什么会出现这种情况呢？



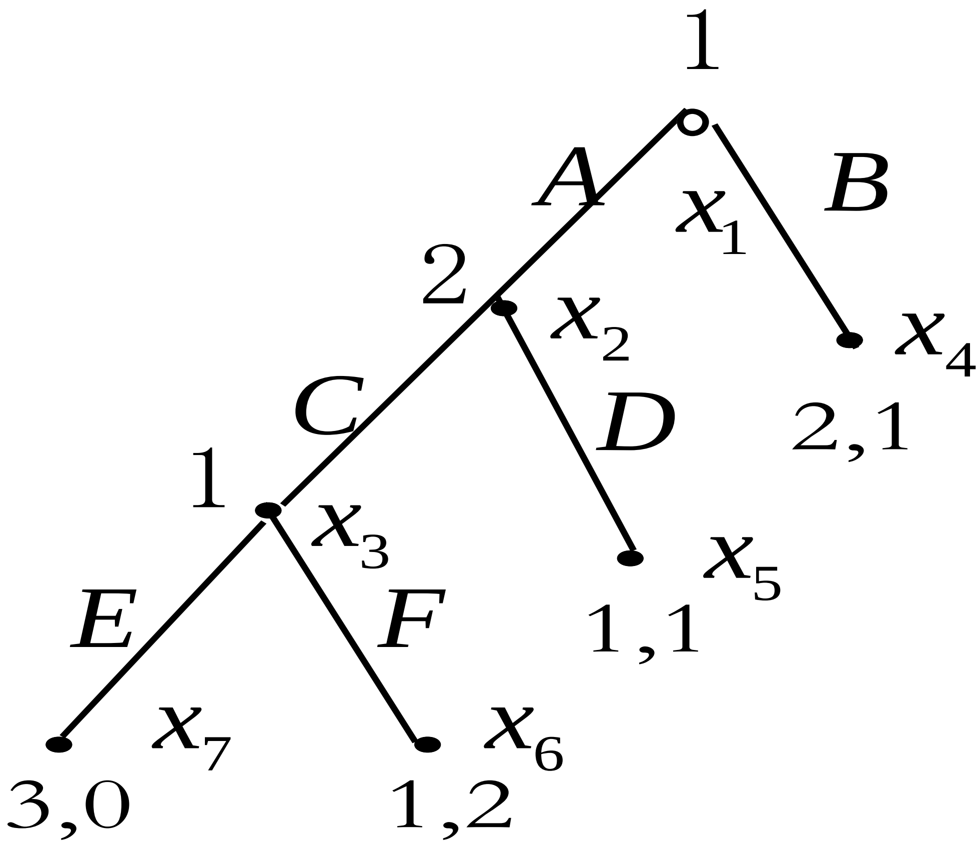
法律保障不足的开金矿博弈

——分钱打官司都不可信

- **结论：**<u>纳什均衡在动态博弈可能缺乏稳定性，也就是说，在完全信息静态博弈中稳定的纳什均衡，在动态博弈中可能是不稳定的，不能作为预测的基础。</u>

- **根源：**<u>纳什均衡本身不能排除博弈方策略中包含的不可信的行为设定，不能解决动态博弈的相机选择引起的可信性问题</u>

例2：



		2	
		C	D
1	(A, E)	3, 0	1, 1
	(A, F)	1, 2	1, 1
	(B, E)	2, 1	2, 1
	(B, F)	2, 1	2, 1

- 当参与人1在信息集$I_1(\{x_1\})$采取行动B时，博弈结束。但是，作为参与人1的战略必须告诉参与人1，如果他在信息集$I_1(\{x_3\})$上他应如何选择?
- 显然，如果轮到参与人1在信息集$I_1(\{x_3\})$上决策，他的最优选择为行动E。所以，均衡是不合理的$((B,F),D)$。

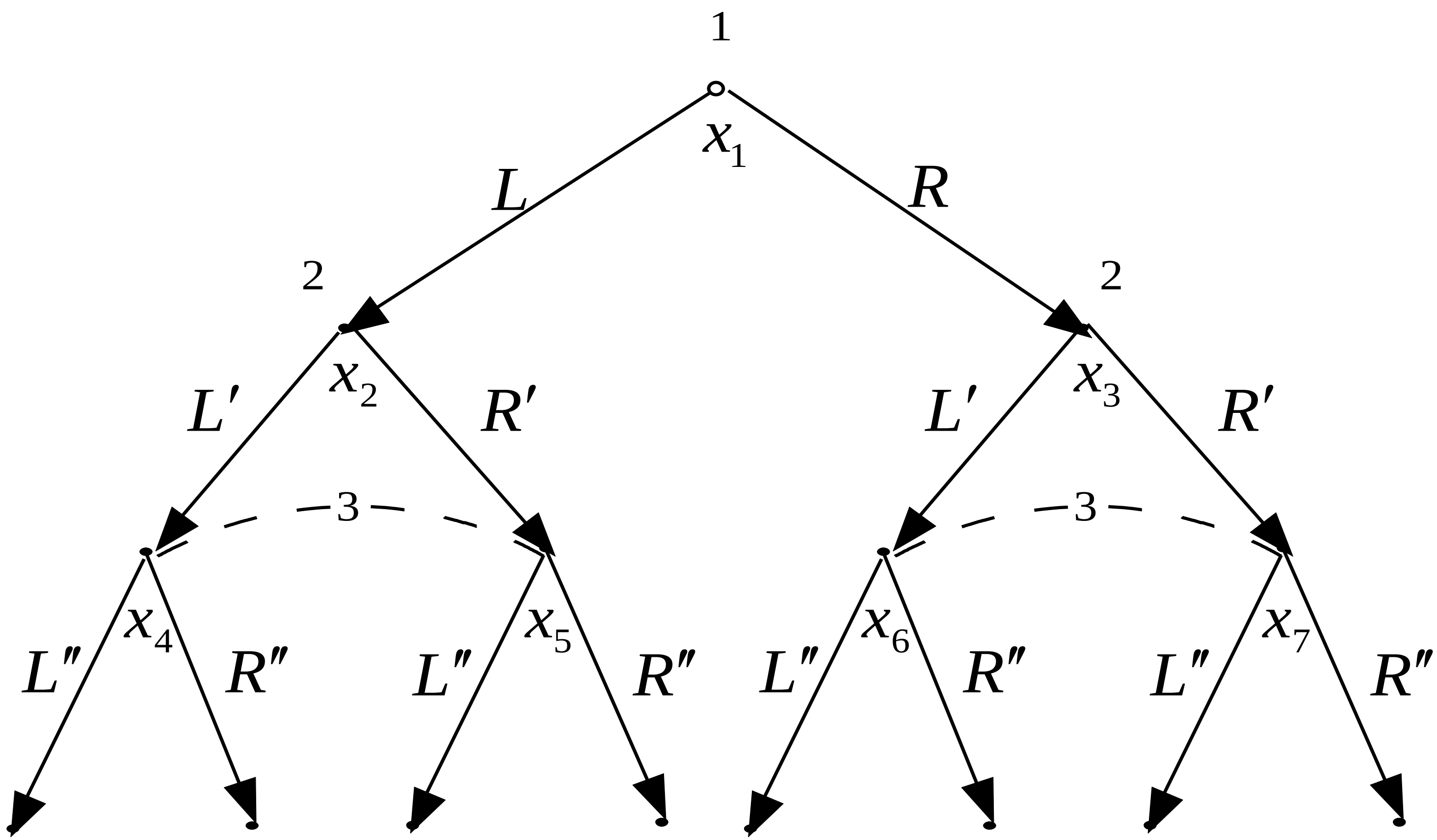
- Selten在1965年提出的“子博弈精炼Nash均衡”(subgame perfect Nash equlibrium)的概念，就是这样一种新的博弈解。子博弈精炼Nash均衡不仅在一定程度上解决了Nash均衡的不足，而且对完全信息的动态博弈问题尤为适用。

子博弈的概念

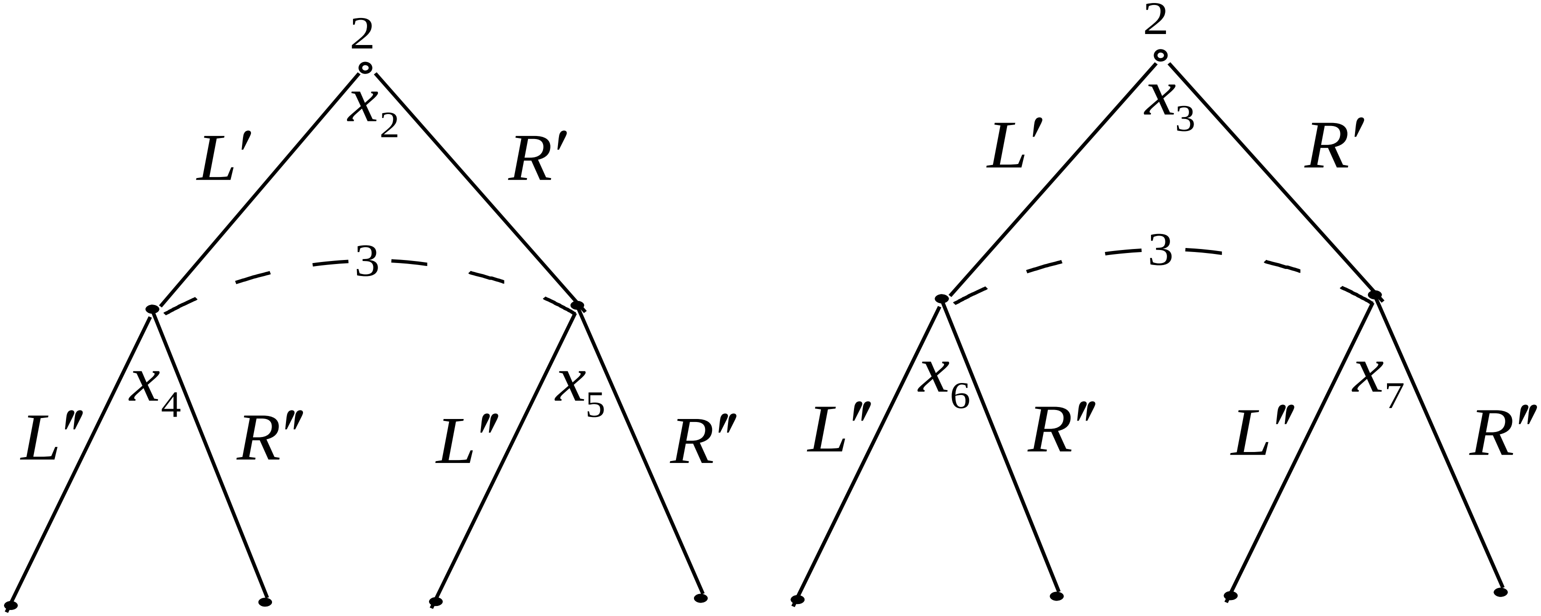
- 所谓“子博弈”就是原博弈的一部分，它始于原博弈中一个位于单结信息集中的决策结x，并由决策结x及其后续结共同组成。
- 子博弈可以作为一个独立的博弈进行分析，并且与原博弈具有相同的信息结构。

- 为了叙述方便，用$\Gamma(x_i)$表示博弈树中开始于决策结的子博弈。

例子：找出下列博弈的子博弈。

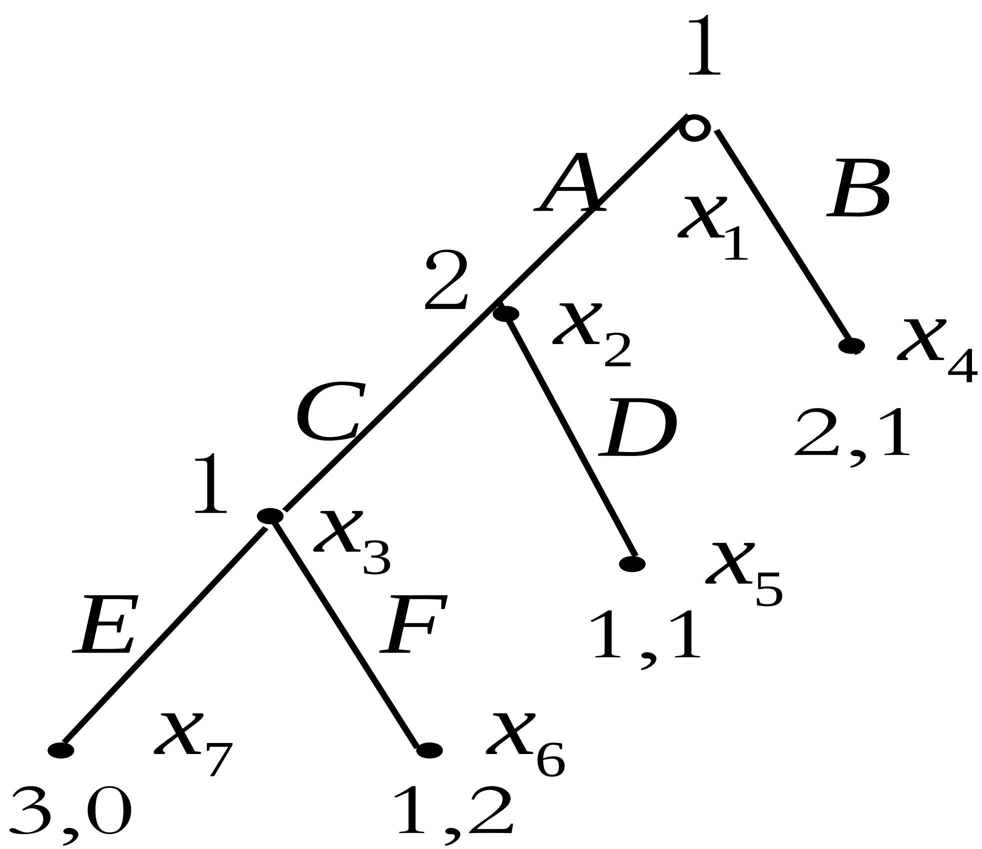


该博弈存在3个子博弈：除了原博弈自己以外，还存在下面两个子博弈。

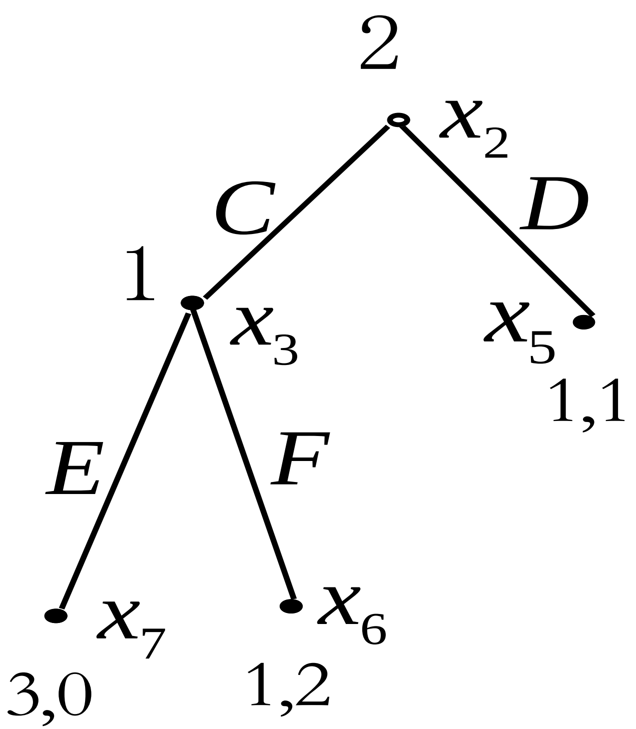


(1)子博弈 $\Gamma(x_2)$ (2)子博弈 $\Gamma(x_3)$

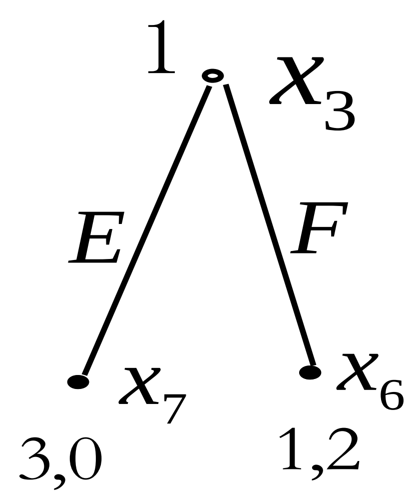
例子：找出下列博弈的子博弈



该博弈存在3个子博弈：除了原博弈自己以外，还存在下面两个子博弈。



(1)子博弈 $\Gamma(x_2)$



(2)子博弈 $\Gamma(x_3)$

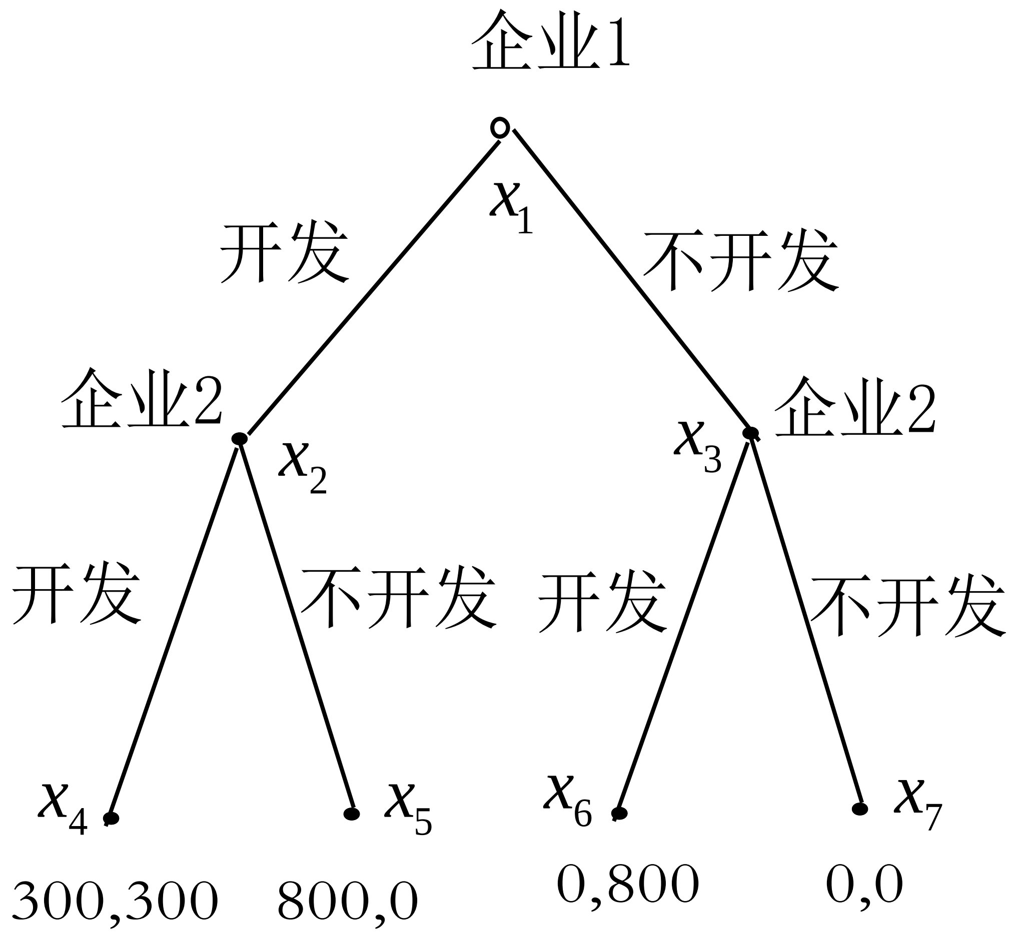
子博弈精炼Nash均衡的定义

扩展式博弈的战略组合 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ 是一个子博弈精炼Nash均衡，当且仅当满足以下条件：

1) 它是原博弈的Nash均衡；
2) 它在每一个子博弈上给出(或构成)Nash均衡。

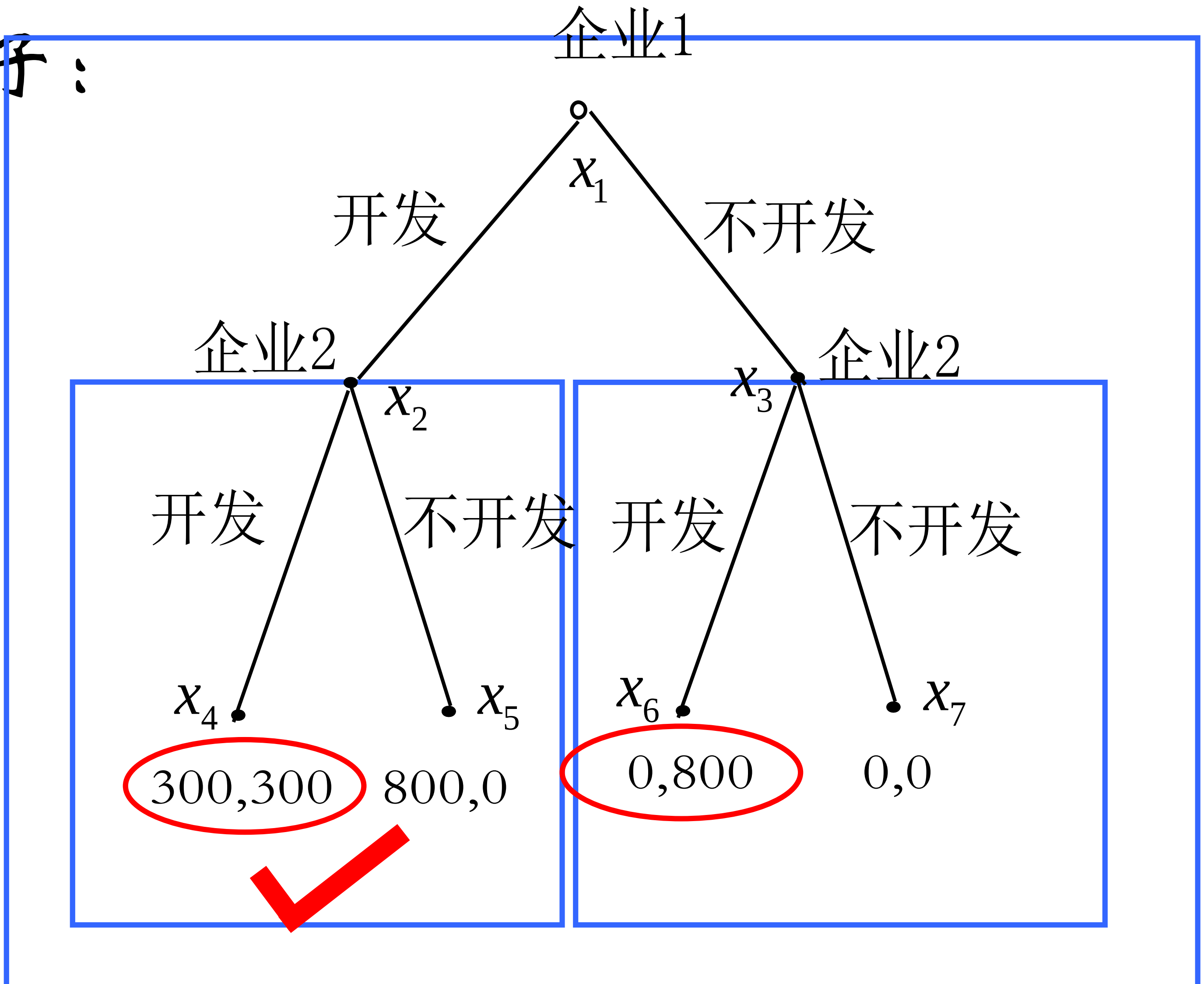
二、子博弈精炼Nash均衡的求解

什么是阶段？


企业1
x_1
开发
不开发
企业2
x_2
企业2
x_3
开发
不开发
开发
不开发
x_4
x_5
x_6
x_7
300,300
800,0
0,800
0,0

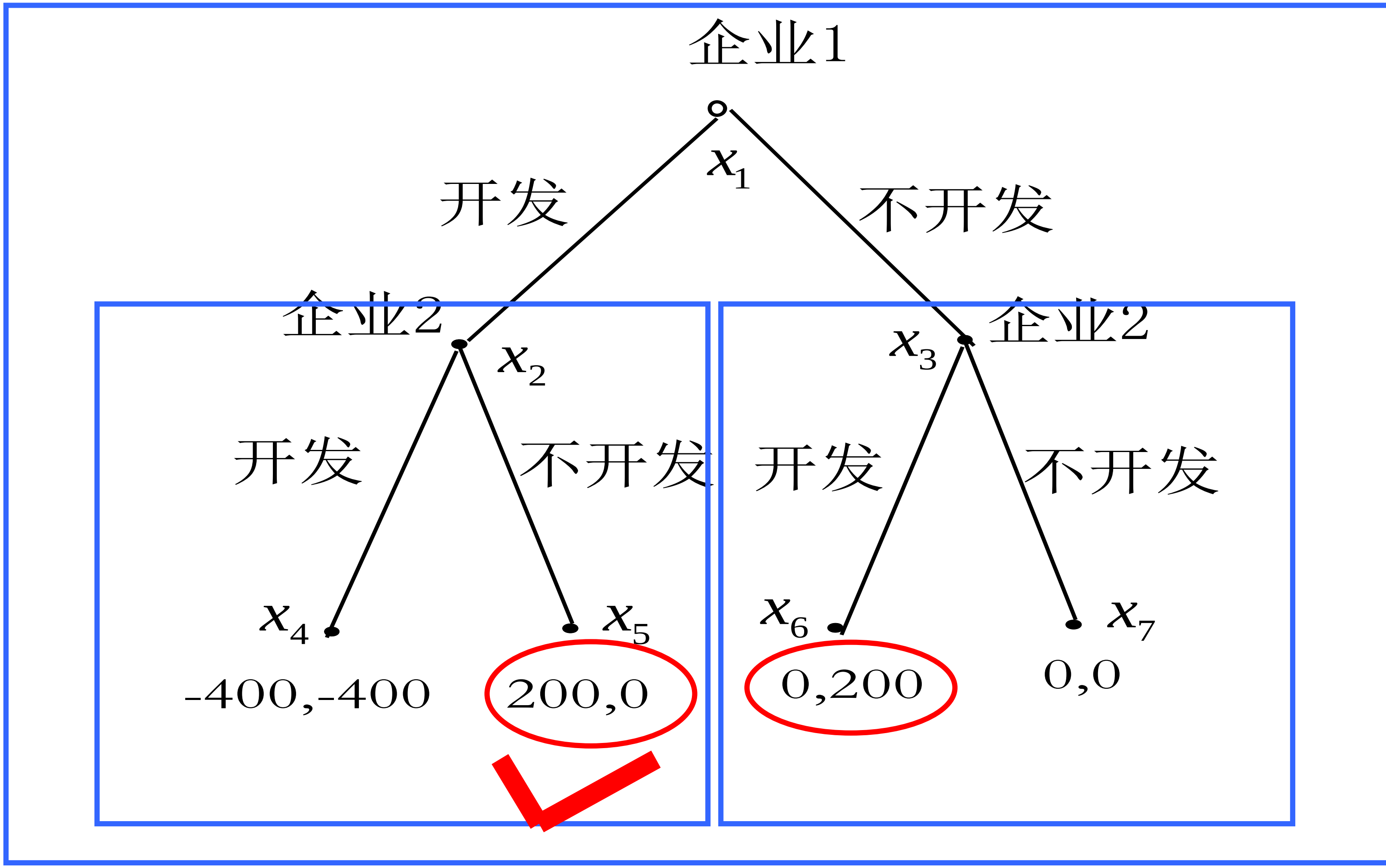
求解方法：逆向归纳法

例子：



企业1
x_1
开发
不开发
企业2
x_2
企业2
x_3
开发
不开发
开发
不开发
x_4
x_5
x_6
x_7
300,300
800,0
0,800
0,0

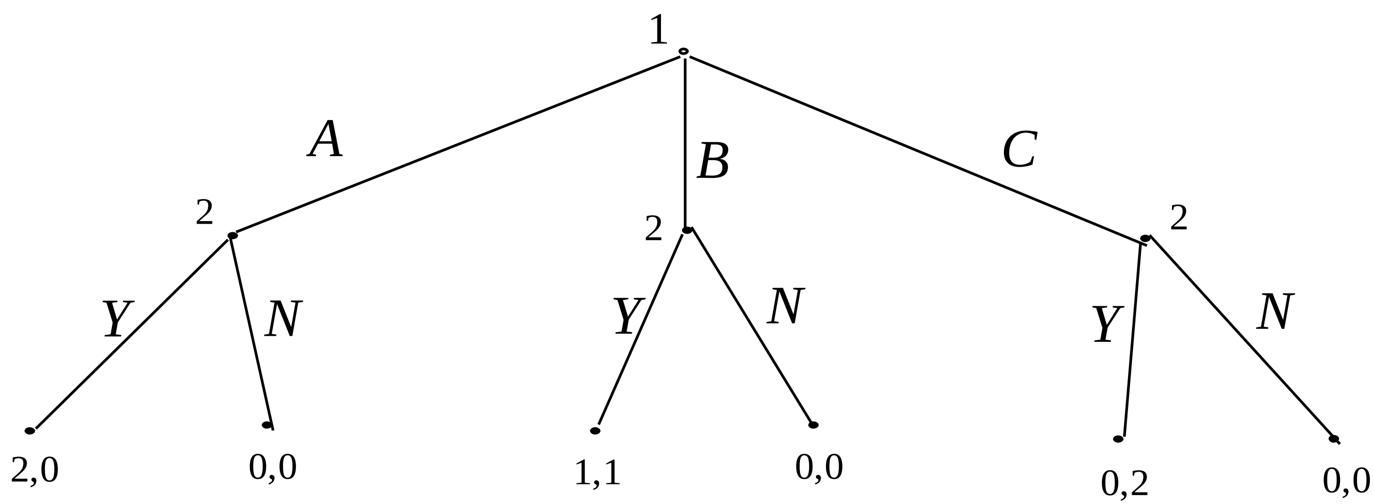
例子：新产品开发博弈


企业1
x_1
开发
不开发
企业2
x_2
企业2
x_3
开发
不开发
开发
不开发
x_4
x_5
x_6
x_7
-400,-400
200,0
0,200
0,0

考察下面的分配博弈问题：

- 两人使用下列过程去分配两个相同的不可分割的物品：他们中的某一个人提出一种分配方式，另一个人可能接受也可能拒绝。如果拒绝，两人都得不到任何东西。假设每个人仅关心所得的物品数量。

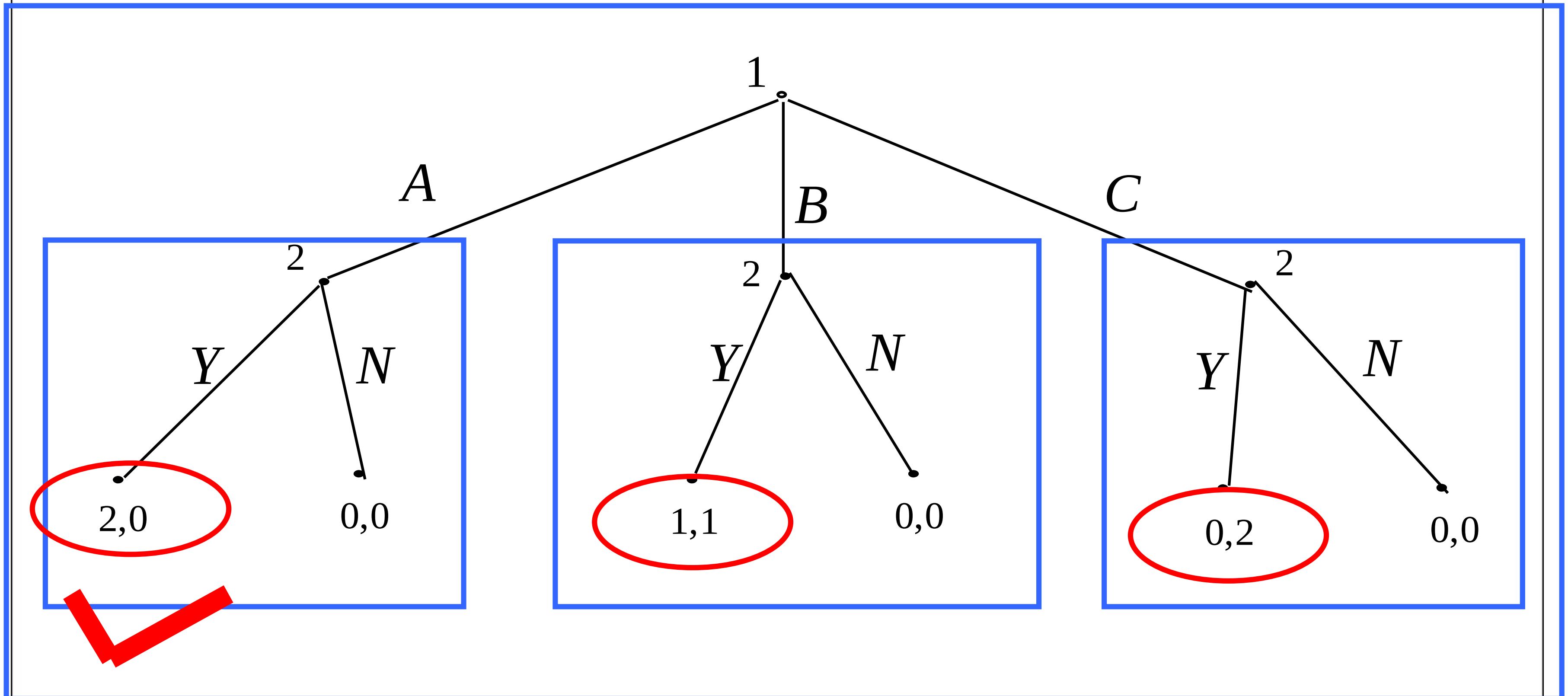
分配博弈的扩展式描述为：

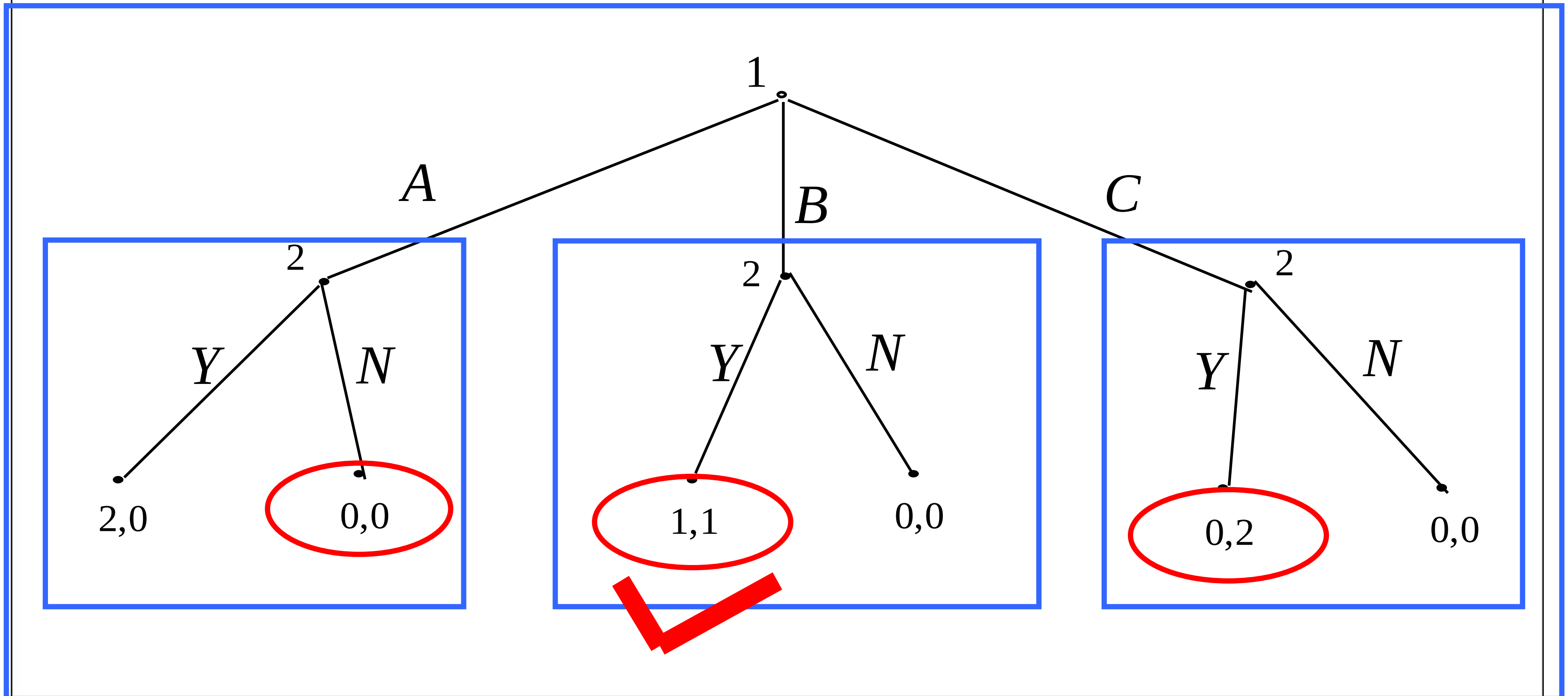


- A表示“参与人1得2件物品，参与人2得0件物品”分配方案，
- B表示“两个参与人各得1件物品”分配方案，
- C表示“参与人1得0件物品，参与人2得2件物品”分配方案；
- Y表示参与人2接受参与人1的分配方案，
- N表示参与人2拒绝参与人1的分配方案。

- 博弈的Nash均衡为：$(A,(Y,Y,Y))$、$(A,(Y,Y,N))$、$(A,(Y,N,Y))$、$(A,(Y,N,N))$、$(A,(N,N,Y))$、$(A,(N,N,N))$、$(B,(N,Y,Y))$、$(B,(N,Y,N))$、$(C,(N,N,Y))$。

1 \ 2	(Y,Y,Y)	(Y,Y,N)	(Y,N,Y)	(N,Y,Y)	(Y,N,N)	(N,Y,N)	(N,N,Y)	(N,N,N)
A	2，0	2，0	2，0	0，0	2，0	0，0	0，0	0，0
B	1，1	1，1	0，0	1，1	0，0	1，1	0，0	0，0
C	0，2	0，0	0，2	0，2	0，0	0，0	0，2	0，0

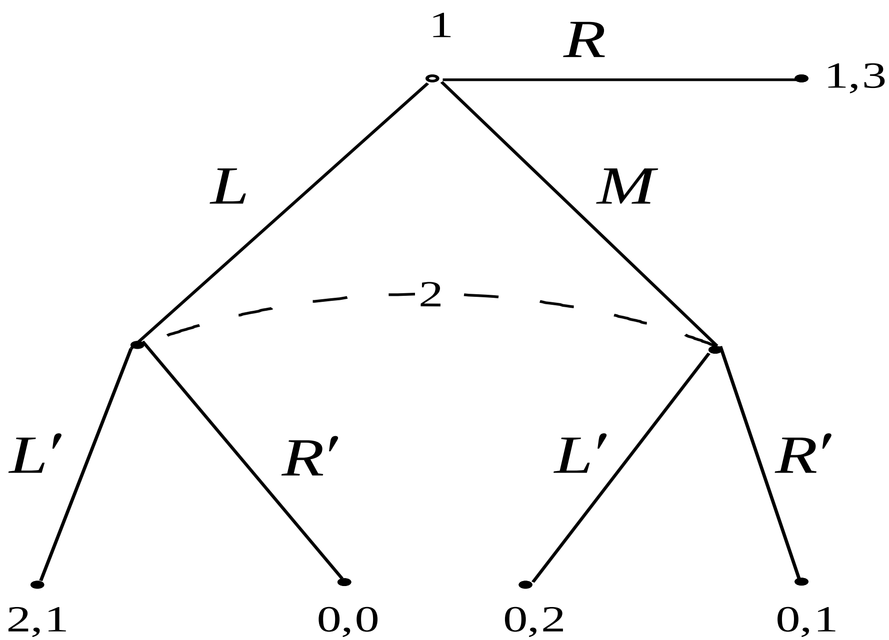

1
A
B
C
2
2
2
Y
N
Y
N
Y
N
2,0
0,0
1,1
0,0
0,2
0,0


1
A
B
C
2
2
2
Y
N
Y
N
Y
N
2,0
0,0
1,1
0,0
0,2
0,0

Kuhn定理

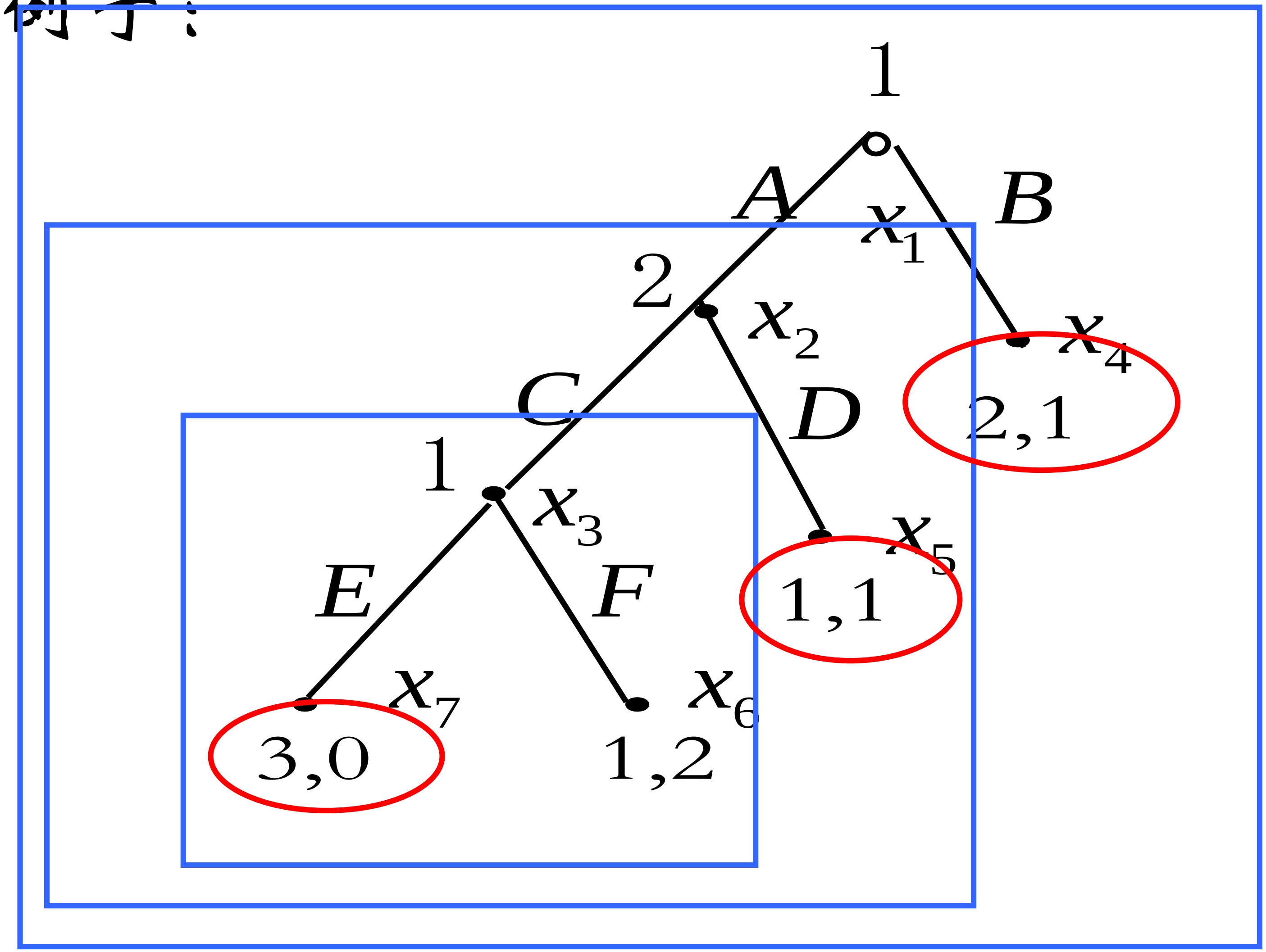
- 每个有限的扩展式博弈都存在子博弈精炼Nash均衡。
- 虽然Kuhn定理保证了子博弈精炼Nash均衡的存在性，但Kuhn定理并不能确保我们所讨论的有限的扩展式博弈都只存在惟一的子博弈精炼Nash均衡。

存在多个子博弈精炼Nash均衡的例子：

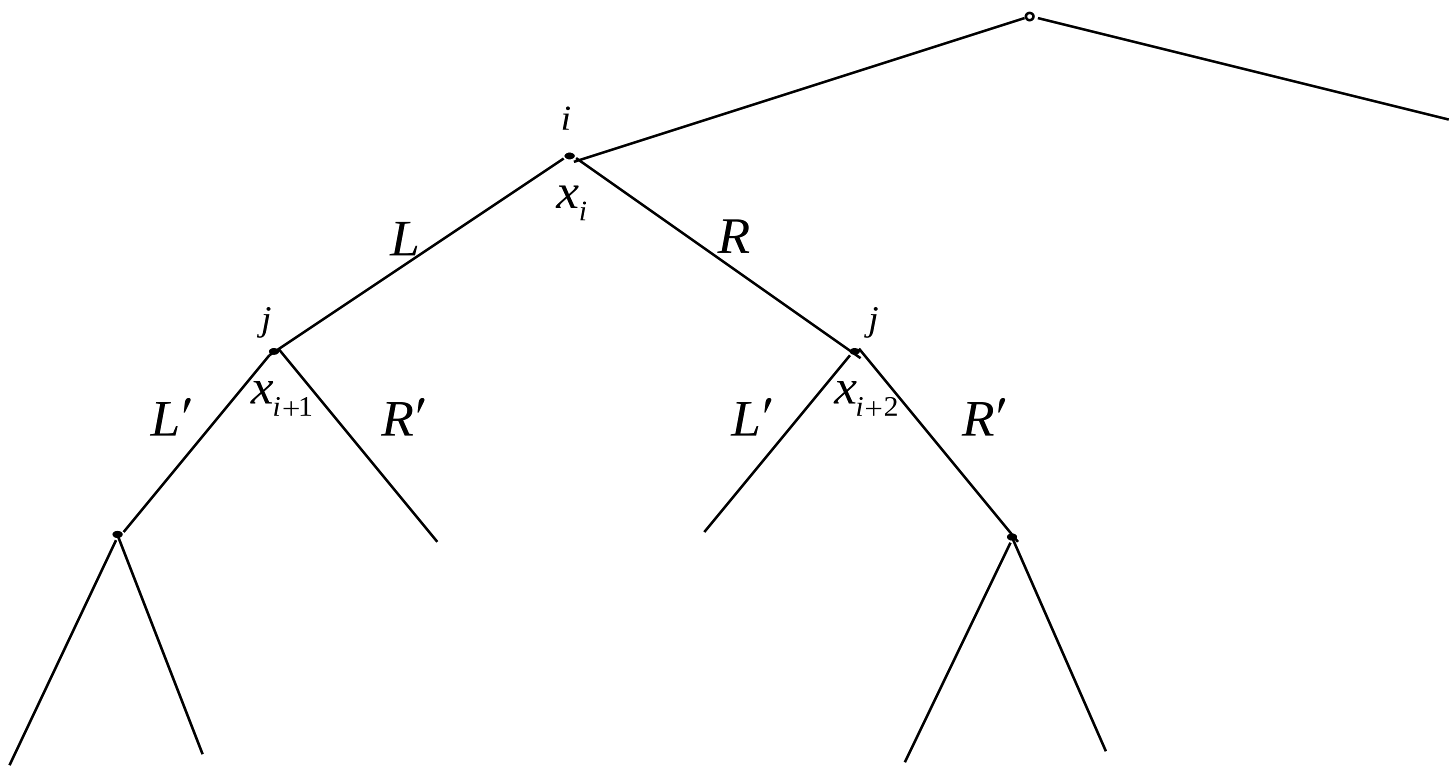


1 \ 2	L'	R'
L	2,1	0,0
M	0,2	0,1
R	1,3	1,3

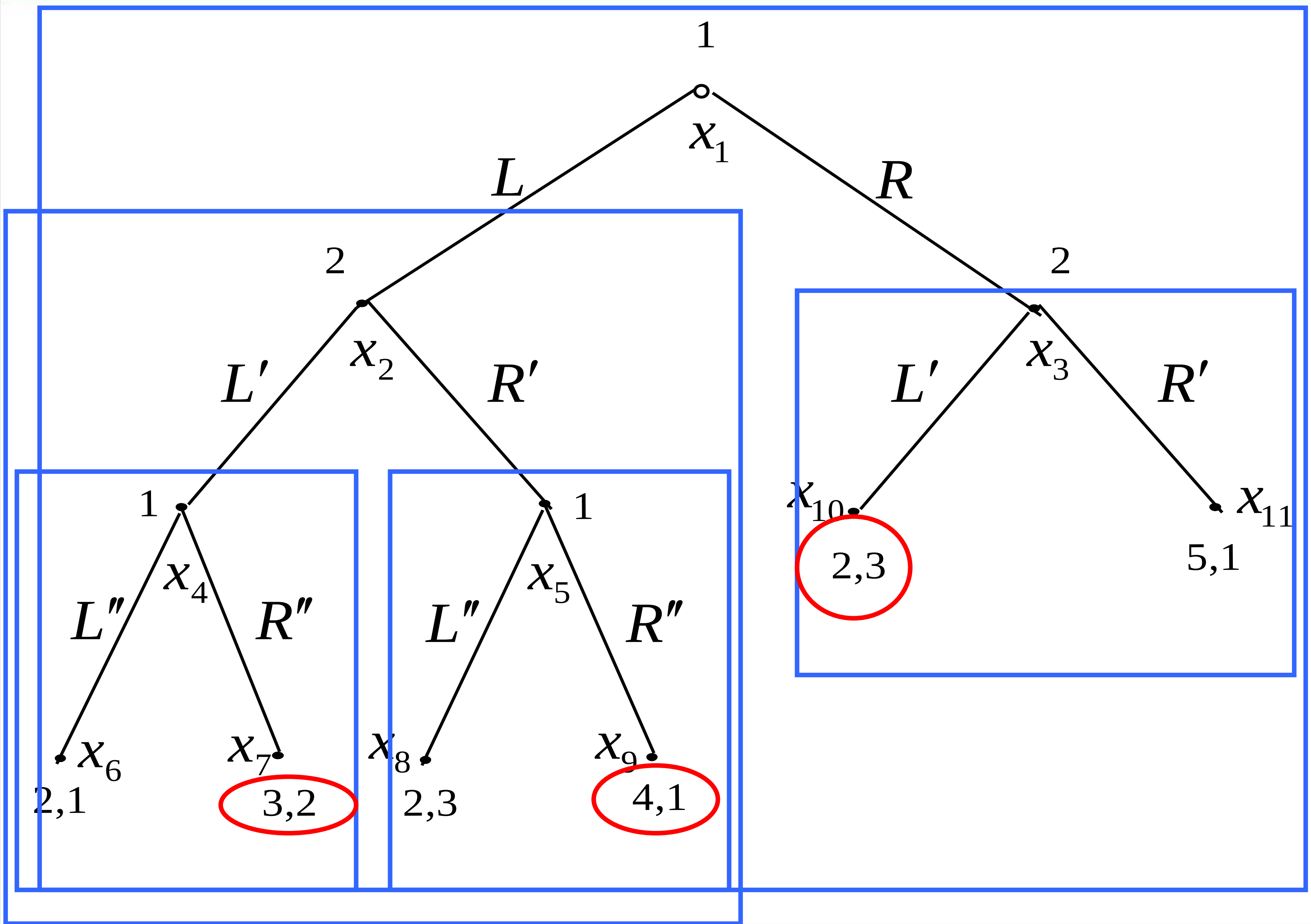
例子：



考察更一般的情形。

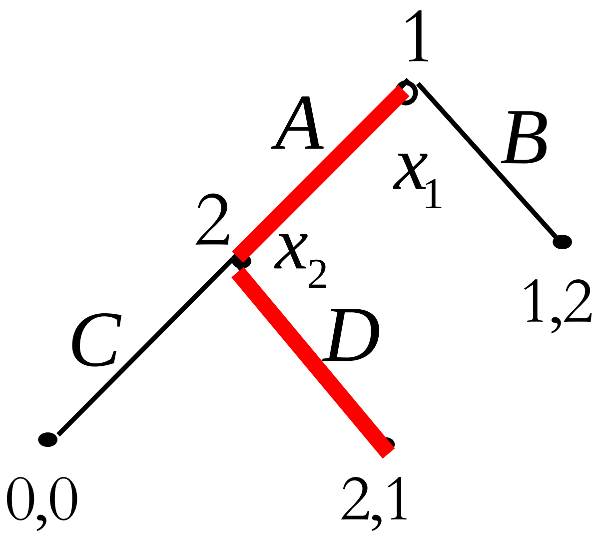


例子：利用逆向归纳法求解下列博弈的子博弈精炼Nash均衡。



1
x_1
L
R
2
x_2
L'
R'
2
x_3
L'
R'
1
x_4
L''
R''
1
x_5
L''
R''
x_6
2,1
x_7
3,2
x_8
2,3
x_9
4,1
x_{10}
2,3
x_{11}
5,1

例如：



		2	
		C	D
1	A	0, 0	2, 1
	B	1, 2	1, 2

如果决策变量连续呢？

如何求SPNE

几个经典动态博弈模型

1 寡占的斯塔克博格(Stackelberg)模型

2 讨价还价博弈

3 委托—代理理论

1 寡占的斯塔克博格(Stackelberg)模型

假设市场上有两个厂商，决策内容是产量，一个是领头(leader)企业，一个是跟随(follower)企业。领头企业先选择自己的产量，跟随企业根据领头企业的产量选择，选择自己的产量。

显然，他们选择有先有后，所以是一个

动态博弈。

斯塔克博格(Stackelberg)模型

➢ **假设条件:**

1. 在一个寡头市场上两企业生产销售同质产品,市场总产量$Q=q_1+q_2$,企业1是领头(leader)企业, 企业2是追随(follower)企业.
2. 市场出清价格 $P=8-Q$
3. 生产无固定成本,边际成本 $c=c_1=c_2=2$
4. 二企业先后决定各自的产量$q_1\geqslant 0$, $q_2\geqslant 0$

➢ 问题:两个企业应如何决策?

➢ 该动态的寡头市场产量博弈是一无限策略动态博弈

Stackelberg模型分析

企业1的得益(利润):

$$u_1(q_1, q_2) = P \times q_1 - c_1 \times q_1$$
$$= (8-Q) \times q_1 - 2q_1$$
$$= 6q_1 - q_1 q_2 - q_1^2$$

企业2的得益:

$$u_2(q_1, q_2) = P \times q_2 - c_2 \times q_2$$
$$= (8-Q) \times q_2 - 2q_2$$
$$= 6q_2 - q_1 q_2 - q_2^2$$

用逆推归纳法 求子博弈完美纳什均衡

- 在第2个阶段,企业2是在企业1选择定q_1下求解:

$$\max_{q_2} u_2(q_1, q_2) = \max_{q_2} (6q_2 - q_1 q_2 - q_2^2)$$

一阶条件： $6 - q_1 - 2q_2 = 0$

有企业2对企业1产量的反应函数:

$$q_2 = (6 - q_1)/2 = 3 - q_1/2 \cdots \quad (1)$$

- 将式(1)代入企业1的的得益函数
- $u_1(q_1, q_2) = 6q_1 - q_1 q_2 - q_1^2$

  $= 3q_1 - q_1^2/2$

  $\max_{q_1}(3q_1 - q_1^2/2)$

一阶条件： $3 - q_1^* = 0$

有 $q_1^*=3$ (单位)， $q_2^*=3 - q_1^*/2 = 1.5$ (单位)

每个企业利润： $u_1 = 4.5$， $u_2 = 2.25$

市场总产量 $Q = q_1 + q_2 = 4.5$,

企业总得益

$$U = u_1 + u_2 = 4.5 + 2.25 = 6.75$$

模型的均衡解

- Stackelberg寡头竞争模型的子博弈完美纳什均衡解:

企业1在第1个阶段选择产量q_1为3 单位,

企业2在第2个阶段选择产量q_2为1.5单位

先行优势

	产量	得益
厂商1	3单位	4.5
厂商2	1.5单位	2.25

信息的悖论

- 在Stackelberg模型中企业1与2得益:

$$u_1 = 4.5 > u_2 = 2.25$$

- 信息不对称的博弈中,信息较多的博弈方有可能吃亏
- 即是：尽管跟随企业看到了领头企业的决策，掌握了更多的信息，但最终收益反而低。

2讨价还价与耐心

Bargaining问题的普遍性

- 几乎所有的交易都涉及讨价还价:
- 买卖双方之间;
- 雇员与顾主之间;
- 合伙人之间;
- 竞争企业之间
- 夫妻之间;
- 政治领域之间;
- 中央政府与地方政府;
- 国家之间;

所有讨价还价的共同之处

- 达成某种协议是当事人的共同利益，但他们之间在究竟达成哪一个协议的问题上存在利益冲突；协议的多重行可能阻止任何协议的出现；
- 典型的“合作与竞争”问题；
- 合作意味着存在着帕累托改进，但不同的当事人偏好不同的帕累托状态。
- 不同与集体选择（唯一均衡）和其他多重均衡；
- 不是零和博弈。

两种思路

- 合作博弈思路（cooperative game approach)：参与人联合作出决定，协议对双方具有约束力；强调的是集体理性；

- 非合作博弈思路(non-cooperative approach)：每个参与人独立决策，协议是一个纳什均衡，没有约束力；强调的是个人理性；

非合作博弈思路

- 谈判实际上是一个讨价还价的过程，一个动态博弈；
- 用非合作博弈的方法更合理；

轮流出价谈判

- 基本特征：两人，1和2，分单位1的货币；1先出价，2决定接受还是拒绝；如果接受，按照A提出的方案分配，谈判结束；如果2拒绝，2提出方案，1决定接受还是拒绝；如果接受，按2的方案分配，谈判结束；如果不接受，再由1提出方案；如此等等。
- 博弈有无穷多个纳什均衡，但精炼纳什均衡可能是唯一的。

变量说明

- 先考虑没有固定谈判成本的情况；
- 假定
  - x：1得到的份额；
  - y：2得到的份额；x+y=1
  - s：1的无风险利率；

    a=1/（1+s）：1的贴现因子；
  - r：2的无风险利率；
  - b=1/（1+r）：2的贴现因子；

有限期谈判

- 如果只有一次谈判：逆向归纳意味着SPNE是：$x=1$，$y=0$；
- 如果允许谈判两次：SPNE是：$x=1-b$，$y=b$；如果贴现率不很大，就有后动优势；
- 如果谈判三次，SPNE是：
  - $x=1-b(1-a)$, $y=b(1-a)$;
- 如果谈判四次，SPNE是：
  - $x=1-b(1-a(1-b))$, $y=b(1-a(1-b))$

无限次谈判

- 没有最后一次，我们不能用逆向归纳法求解，但可以使用类似的思路得到均衡解（x，y）；
- 假定在时间t>3时，1出价，得到x；时间t-1时，2出价，给1为ax就可以了,2给得到y=1-ax；时间t-2时，1出价，给2为b(1-ax)就可以了，自己得到x=1-b(1-ax)

精炼纳什均衡解

$$x=\frac{1-b}{1-ab};\ y=\frac{b(1-a)}{1-ab}$$

基本结论

- 无限次谈判具有“先动优势”(first-mover advantage);
- 一个人的耐心越大（贴现率越小），谈判中的优势就越大。

如果B先出价

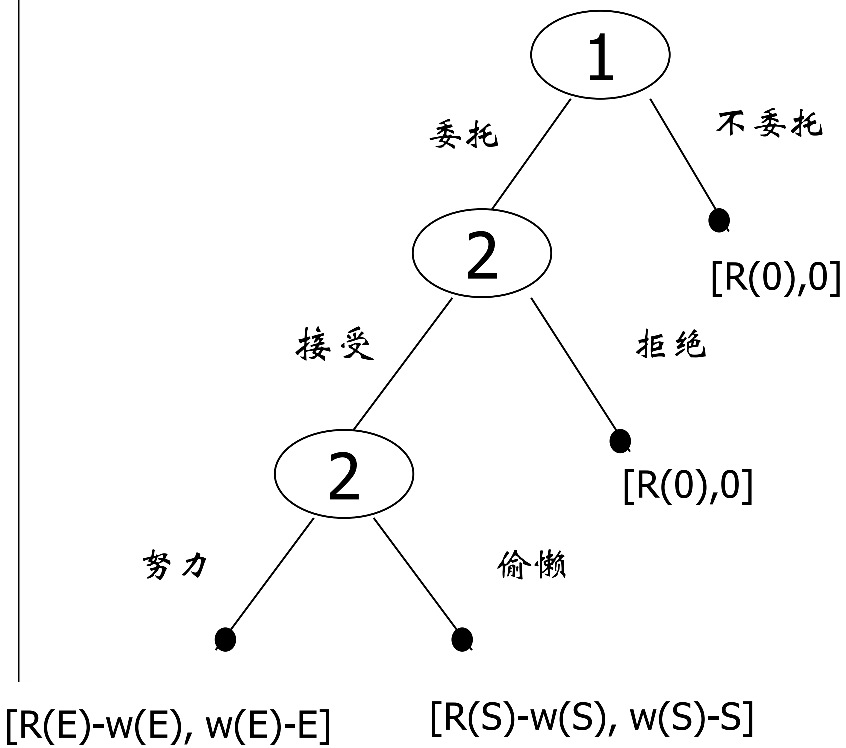
$$x=\frac{a(1-b)}{1-ab};\ y=\frac{1-a}{1-ab}$$

3 委托(Principle)—代理(Agents)理论

一、委托——代理关系

- 经济活动和社会活动中有很多委托人——代理人关系，有明显的，也有隐蔽的。经理和员工、店主和店员、客户和律师、市民和政府、基金购买者和基金管理人等都是。
- 委托人——代理人的关键特征：不能直接控制，监督不完全，信息不完全，利益相关性
- 委托人——代理人涉及问题：激励机制设计、机制设计理论，委托合同设计问题等

A简单的委托人—代理人模型



代理人的选择

激励相容约束：

w(E)-E> w(S)-S

w(E)> w(S)+E-S

B选择报酬和连续努力水平的委托人—代理人博弈

参与约束：

$$w[R(e)] - C(e) \geq \overline{U}$$

委托人当然希望支付的工资越少越好，

于是参与约束为：$w[R(e)] - C(e) = \overline{U}$

从而：$w[R(e)] = C(e) + \overline{U}$

Cont..

激励相容约束：代理人选择努力希望他的收益越大越好，于是有：

$$\max_{e} w[R((e\ \ )]-C(e)$$

而委托人也希望他的收益越大越好：

即：$\max_{w} R(e)-w$

综合上面得到该委托代理模型：

$$\max_{w} R(e)-w$$

$$st: e\in\arg\max_{e} w[R((e\ \ )]-C(e)$$

$$w[R(e)]-C(e)=\overline{U}$$

应用：店主和店员的问题

商店的利润 $R = 4e + \eta$，η 是均值为0的随机变量

店员的负效用 $C = e^2$，e 是店员的努力

机会成本为1

店主采用的报酬计算公式 $S = \alpha + \beta R = \alpha + \beta(4e + \eta)$

店员的得益 $\alpha + \beta(4e + \eta) - e^2$

店主的得益为 $4e + \eta - \alpha - \beta(4e + \eta) = 4(1 - \beta)e + (1 - \beta)\eta - \alpha$

假设店员和店主都是风险中性。

参与约束： $E[\alpha+\beta(4e+\eta)-e^2]\geq 1$

激励相容： $\max\limits_{e} E[\alpha+\beta(4e+\eta)-e^2]$

店主的得益函数： $\max\limits_{\alpha，\beta} E\{4e+\eta-\alpha-\beta[4e+\eta]\}$

综上，模型为：

$$\max_{\alpha，\beta} E\{4e+\eta-\alpha-\beta[4e+\eta]\}$$

$$st: e\in\arg\max_{e} E[\alpha+\beta(4e+\eta)-e^2]$$

$$E[\alpha+\beta(4e+\eta)-e^2]\geq 1$$

cont..

模型变为

$$\max_{(\alpha,\beta)} 4e-\alpha-4\beta e \quad (1)$$

$$st: 2\beta = e \quad \text{(求解激励相容约束)} \quad (2)$$

$$\alpha+4\beta e-e^2=1 \quad \text{（参与约束变形）(3)}$$

将(2)(3)式代入(1)式:

$$\max_{\beta} 8\beta-1-4\beta^2 \quad (4)$$

Cont..

- (4)式的一阶条件： β=1，

从而：e=2， α=-3.

So :工资合同：-3+ βR= -3+R

最有努力水平： e*=2

C. 风险规避代理人确定性等价收益的计算

- 代理人追求的不是收益的最大化，而是收益所带来的效用的最大化，代理人会在既定的约束条件下选择适当的行动a使自己的期望效用最大化。
- 现在假定代理人的效用函数为

$$u(x) = -e^{-rx}$$

- 对于绝对分险规避程度 $R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$，$R_a(x) = r$ 。如果代理人喜欢冒险，则效用函数时凸函数，$R_a(x) < 0$；如果代理人是分险中性的，效用函数是线性的，$R_a(x) = 0$；如果是规避的，效用函数为凹函数，$R_a(x) > 0$ 。这一函数的一个重要特征就是可以用值 r 来度量代理人的风险规避程度。

(Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion)

Cont…

- **如果代理人的效用函数的形式为 $u(x)=-e^{-rx}$，其中收益服从均值为 $E(x)$ 、方差为$V(x)$的正态分布，那么：**

$$E(u(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}-e^{-rx}\frac{1}{\sqrt{2\pi V(x)}}e^{-\frac{(x-E(x))^2}{2V(x)}}dx=-e^{-r[E(x)-\frac{rV(x)}{2}]}$$

Cont…

- **定义代理人在不确定条件下的收益的确定性等值（certainty equivalent）为 CE ，由于 $u(CE)=E(u(x))$ ，所以**

$$-e^{-rCE}=-e^{-r[E(x)-\frac{rV(x)}{2}]}$$

- **即** $CE=E(x)-\frac{1}{2}rV(x)$ 。

Cont…

- **采取适当的行动使得自己的确定性等值最大化即**

$$\max CE = \max[E(w-c(a)) - \frac{1}{2} rV(w-c(a))]$$

霍姆斯特姆和米尔格罗姆（Holmstrom and milgrom,1987）委托-代理模型的简化。

- 假设1：委托人是风险中性的，代理人是风险规避的。
- 假设2：代理人的努力α是一个一维努力变量，产出函数取如下线性形式：$\pi=\alpha+\theta$,

  其中θ是均值为0、方差为σ^2的正态分布。
- 因此，$E\pi=E(\alpha+\theta)=\alpha, var(\pi)= \sigma^2$,即代理人的努力水平决定产出的均值，但不影响产出的方差。

- 假设3：代理人努力的成本c(α)可以等价于货币成本；$c(\alpha)=b\alpha^2/2$,
- 假设4：考虑线性合同s（π）=α+βπ。
- 假设5：代理人的效用函数具有不变绝对风险规避特征，即 $u=-e^{-\rho\omega}$,其中ρ是绝对风险规避度量，ω是实际货币收入。

根据以上假设：

委托人的期望效用等于期望收入

$$
\begin{aligned}
& Ev(\pi - s(\pi)) = Ev(\pi - \alpha - \beta\pi) \\
& = -\alpha + E(1-\beta)\pi = -\alpha + (1-\beta)a
\end{aligned}
$$

代理人的实际收入为：

$$\omega = \mathrm{s}(\pi) - \mathrm{c}(\mathrm{a}) = \alpha + \beta(\mathrm{a} + \theta) - \frac{1}{2}\mathrm{ba}^2$$

- 确定性定价收入为：
- $$\mathrm{E}\omega - \frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2 = \alpha + \beta\mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathrm{ba}^2 - \frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2$$
- 其中，Eω是代理人的期望收入，$\frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2$ 是代理人的风险成本；当β=0时，风险成本为0。代理人最大化期望效用函数 $Eu = -Ee^{-\rho\omega}$ 等价于最大化上述确定性等价收入。

一个例子:信息对称情况下的应用（比较基准）

信息对称情况的委托-代理模型（比较基准）

- 令ω0为代理人的保留收入水平。那么，代理人的参与约束可以表述如下：

$$\alpha+\beta \mathrm{a}-\frac{1}{2}\mathrm{ba}^{2}-\frac{1}{2}\rho\beta^{2}\sigma^{2}\geq\omega_{0}$$

- 首先考虑委托人可以观测代理人努力水平a的最优合同。此时，激励约束IC不起作用，任何水平的a都可以通过满足参与约束IR的强制合同实现。

- 因此，委托人的问题是选择（α，β）和a解下列最优化问题：

$$\max_{\alpha,\beta,a} Ev = -\alpha + (1-\beta)a$$

$$s.t:(IR)\alpha + \beta \mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathrm{ba}^2 - \frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2 \geq \omega_0$$

- 因为在最优情况下，参与约束的等式成立（委托人没有必要支付代理人更多），将参与约束通过固定项α代入目标函数，

- **委托-代理模型变为：**

$$\max_{\alpha,\beta,a} Ev = -\alpha + (1-\beta)a$$

$$s.t: (IR)\alpha + \beta \mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathrm{ba}^2 - \frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2 = \omega_0$$

- 上述最优化问题可以重新表述如下：
- $$\max_{\beta,a} a-\frac{1}{2}\mathrm{b}\mathrm{a}^2-\frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2-\omega_0$$

- 最优化的一阶条件意味着：

$$\mathrm{a}^*=\frac{1}{\mathrm{b}},\beta^*=0$$

- **将上述结果代入代理人的参与约束得：**

$$\alpha^{*}=\omega_{0}+\frac{1}{2}\mathrm{b}(\mathrm{a}^{*})^{2}=\omega_{0}+\frac{1}{2\mathrm{b}}$$

- **这就是帕累托最优合同。**
- **因为委托人是风险中性的，代理人是风险规避的，帕累托最优风险分担要求代理人不承担任何风险（β*=0），委托人支付给代理人的固定收入刚好等于代理人的保留工资加上努力的成本；**

信息不对称情况下的委托代理模型

$$\max_{\alpha,\beta} Ev = -\alpha + (1-\beta)a$$

$$s.t:(IC): \quad a \in \arg\max \alpha + \beta \mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathrm{ba}^2 - \frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2$$

$$(IR): \quad \alpha + \beta \mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathrm{ba}^2 - \frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2 \geq \omega_0$$

上述模型变为：

$$\max_{\alpha,\beta} Ev = -\alpha + (1-\beta)a$$

$$s.t:(IC):a=\beta/b$$

$$(IR)\alpha+\beta\text{a}-\frac{1}{2}\text{ba}^2-\frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2\geq\omega_0$$

- **将参与约束IR和激励相容约束IC代入目标函数，上述最优化问题可以重新表述如下：**
- $$\max_{\beta}\frac{\beta}{b}-\frac{1}{2}\rho\beta^2\sigma^2-\frac{\text{b}}{2}(\frac{\beta}{\text{b}})^2-\omega_0$$
- **一阶条件为：** $\frac{1}{b}-\rho\beta\sigma^2-\frac{\beta}{\text{b}}=0$, 即 $\bar{\beta}^*=\frac{1}{1+\text{b}\rho\sigma^2}>0$
- **最优努力为：** $\bar{a}^*=\frac{1}{b(1+b\rho\sigma^2)}>0$

进一步分析：

- 当委托人不能观测代理人的努力水平时，存在两类在对称信息下不存在的代理成本。
- 一类是上面提到的由帕累托最优风险分担无法达到而出现的风险成本，
- 另一类是由较低的努力水平导致的期望产出的净损失减去努力成本的节约，简称为激励成本。

- 因为委托人是风险中性的，努力水平可观测时委托人承担全部风险意味着风险成本为零。
- 当委托人不能观测代理人的努力水平时，代理人承担的风险为$\beta=1/(1+b\rho\sigma^2)$，风险成本为：

$$\Delta RC = \frac{1}{2}\beta^2\rho\sigma^2 = \frac{\rho\sigma^2}{2(1+b\rho\sigma^2)^2} > 0$$

- 这是净福利损失。
- 为了计算激励成本，注意到，当努力水平可观测时，最优努力水平为α=1/b；当努力水平不可观测时，委托人可诱使代理人自动选择的最优努力水平为：

$$\overline{a}^* = \frac{\overline{\beta}^*}{b} = \frac{1}{b(1+b\rho\sigma^2)} < \frac{1}{b} = a^*$$

Cont…

- **就是说，非对称信息下的最优努力水平严格小于对称信息下的努力水平。因为期望产出为Eπ=α，期望产出的净损失为：**
- $$\Delta E\pi = \Delta a = a^{*} - \overline{a}^{*} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b(1+b\rho\sigma^{2})} = \frac{\rho\sigma^{2}}{1+b\rho\sigma^{2}} > 0$$
- **努力成本的节约为：**
- $$\Delta c = c(a^{*}) - c(\overline{a}^{*}) = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b(1+b\rho\sigma^{2})^{2}} = \frac{2\rho\sigma^{2} + b\rho\sigma^{2}}{2(1+b\rho\sigma^{2})^{2}}$$

Cont…

- **所以，激励成本为：** $\Delta E\pi - \Delta c = \dfrac{b(\rho\sigma^2)^2}{2(1+b\rho\sigma^2)^2} > 0$
- **总代理成本为：**
- $$AC = \Delta RC + (\Delta E\pi - \Delta c) = \frac{\rho\sigma^2}{2(1+b\rho\sigma^2)^2} > 0$$
- **注意，当代理人为风险中性时，代理成本为零，因为β=1可以达到帕累托最优风险分担和最优激励。进一步，代理成本随代理人风险规避度ρ和产出方差σ2（代表不确定性）的上升而上升。**

三、具有同时选择的动态博弈

1 标准模型

- 四个博弈方：博弈方1、博弈方2、博弈方3和博弈方4
- 第一阶段是博弈方1和博弈方2的选择阶段，同时各自选择 a_1和 a_2
- 第二阶段是博弈方3和博弈方4的选择阶段，分别选择 a_3和 a_4
- 博弈方i的得益是各个博弈方所选择策略的多元函数 $u_i = u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$

2. 国际市场的不完全竞争和最优关税

——1992，Gibbons

问题：

国家1和国家2分别有企业1和企业2两个企业，他们生产同一种既可内销又可出口的商品，每个国家的消费者既可买国货又可买进口货（两种产品完全替代）。

Cont..

- **假设条件:**

1.国家i市场总产量$Q_i = h_i + e_j$,其中h_i为企业i的生产量， e_j为企业j在国家i的出口量.且当i=1时，j=2当i=2时，j=1。

2. 市场出清价格 P_i=a- Q_i, i=1,2

3. 生产无固定成本,边际成本 $c=c_1=c_2=2$

问题： 1、国家1和国家2怎样制定关税率：t_1,t_2

2、企业1和企业2根据关税率，制定自己的：h_1,e_1和h_2和 e_2

Cont..

企业i的得益函数为：

$$\pi_i = \pi_i(t_i, t_j, h_i, h_j, e_i, e_j) = p_i h_i + p_j e_i - c(h_i + e_i) - t_j e_i$$
$$= [a - (h_i + e_j)]h_i + [a - (e_i + h_j)]e_i - c(h_i + e_i) - t_j e_i$$

第二阶段企业i选择：

$$\max_{e_i, h_i} \pi_i(t_i, t_j, h_i, h_j, e_i, e_j)$$

$$h_i^* = \frac{a - c + t_i}{3}, e_i^* = \frac{a - c - 2t_j}{3}$$

政府关心消费者剩余、本国企业利润和关税，得益函数；

$$w_i = w_i(t_i, t_j, h_i, h_j, e_i, e_j) = \frac{1}{2}(h_i + e_j)^2 + \pi_i + t_i e_j$$

第一阶段政府选择：先把第二阶段根据厂商选择得到结果代入政府得益，再求最优化：

$$\max_{t_i} w_i(t_i, t_j^*)$$

$$w_i(t_i, t_j^*) = \frac{[2(a-c)-t_i]^2}{18} + \frac{(a-c+t_i)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_j^*)^2}{9} + \frac{t_i(a-c+t_i)}{3}$$

$$t_i^* = \frac{a-c}{3}, h_i^* = \frac{4(a-c)}{9}, e_i^* = \frac{a-c}{9}, i = 1, 2$$

3.工资奖金制度

- **问题背景：**在实际中可能存在多个代理人的情况，并且多个代理人还可能相互竞争。

- 1981年Lazear和Rosen 提出一种“工资奖金制度模型”，

- 就是在相互竞争雇员的前提下，雇主通过让雇员竞赛的方法实现有效激励的博弈模型。

1.雇员i (i=1,2)的产出函数为 $y_i = e_i + \varepsilon_i$ ，e_i 为雇员努力水平，ε_i 为随机扰动。

ε_i 服从分布密度 $f(\varepsilon)$ ，均值为0的随机变量。且相互独立。

雇员努力的负效用函数为 $g(e)$ ，且 $g'>0, g''>0$ 。

2.产量高的雇员得到高工资 w_h ，产量低的得到低资 w_l 。

3.两雇员在已知雇主宣布的工资奖金制度下，同时独立选择各自的努力程度。

第二阶段：两个雇员选择

雇主决定了工资以后，雇员同时决定努力程度：

$$\max_{\varepsilon_i \geq 0}\left[w_h P\left\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\right\} + w_l P\left\{y_i(e_i) \leq y_j(e_j^*)\right\} - g(e_i)\right]$$

$$= \max_{\varepsilon_i \geq 0}\left[(w_h - w_l) P\left\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\right\} + w_l - g(e_i)\right]$$

一阶条件 $$(w_h - w_l)\frac{\partial P\left\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\right\}}{\partial e_i} = g'(e_i)$$

这是雇员所选择努力程度必须满足的基本条件。

$$P\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\} = P\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i\}$$
$$= \int_{\varepsilon_j} P\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i \mid \varepsilon_j\} f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$
$$= \int_{\varepsilon_j} \left[1 - F(e_j^* + \varepsilon_j - e_i)\right] f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$

代入得： $\left(w_h - w_l\right)\int_{\varepsilon_j} f(e_j^* + \varepsilon_j - e_i) f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e_i)$

两雇员情况一样，对努力程度的选择也相同，即： $e_1^* = e_2^* = e^*$，

这样就得到：

$$\left(w_h - w_l\right)\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e^*)$$

这就是两雇员之间的静态博弈纳什均衡。

若进一步假设 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ **，那么** $\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = \dfrac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$

第一阶段：雇主选择

由于雇员之间博弈的均衡是对称均衡，因此双方赢得竞赛的机会都是0.5，假设雇员能得到其他工作机会提供的得益是 U_a 则保证雇员接受工作的基本条件是：

$$\frac{1}{2}w_h+\frac{1}{2}w_l-g(e^*)\geq U_a$$

此即“参与约束”。

由于在雇员接受工作的前提下，雇主必然尽可能压低工资，因此约束条件可取等号：

$$\frac{1}{2}w_h+\frac{1}{2}w_l-g(e^*)=U_a$$

于是得到：$w_h+w_l=2g(e^*)+2U_a$，　　$w_l=2g(e^*)+2U_a-w_h$

设上述参与约束条件满足，雇主的利润函数为

$$y_1+y_2-w_h-w_l=2e^*+\varepsilon_1+\varepsilon_2-w_h-w_l$$

雇主的期望利润为 $2e^* - w_h - w_l$，因此雇主有如下的最优化问题：

$$\max_{w_h > w_l > 0}\left\{2e^* - w_h - w_l\right\}$$

上述雇主决策可**转化**为促使雇员的努力程度满足：

$$\max_{e^* > 0}\left\{2e^* - 2U_a - 2g(e^*)\right\}$$

一阶条件为：$1 - g'(e^*) = 0$

代入两雇员的最优努力水平决定公式得到：

$$(w_h - w_l)\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j)d\varepsilon_j = 1$$

$$(w_h - w_l) = 1\Big/\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j)d\varepsilon_j$$

作业1：

- 两位投资者各自将D 存在银行，而银行则将他们资金用于长期投资。本博弈的规则如下：在第一期，两位投资者同时决定是否收回资金。如果任何投资者收回资金，则项目被迫清算，项目收益为2r。此时抽取资金投资者收益为D，而未抽回资金投资者收为2r – D；如果两位投资者都抽回资金，则投资者收益都为r；如果两者都未抽回资金，博弈进入第二期。第二期项目成熟且项目收益为2R。此时如果两投资者都抽回资金则收益为R；如果只有一位抽取资金，抽回资金投资者收益为2R-D，未抽回为D；如果两者都不抽回资金则收益为R，假定R>D>r>D/2，求解子博弈精炼纳什均衡。

作业2：

- 在霍特林价格竞争模型中，两个厂商的生产边际成本都是**c**，运输成本参数为**t**。博弈进行两
- 期，在第一阶段两个厂商同时在线性城市上选择自己的位置；第二阶段在观察到两者位置后选择
- 自己的价格。
- **（1）**、如果运输成本为线性函数，证明以上博弈不存在纯战略精炼纳什均衡
- **（2）**、如果运输成本为二次型函数（运输成本为**t x2**），证明以上博弈的精炼纳什均衡的结果是
- 两个厂商位于城市两端。

四、子博弈精炼Nash均衡的合理性讨论

1 逆推归纳法的问题

- 逆推归纳法只能分析明确设定的博弈问题，要求博弈的结构，包括次序、规则和得益情况等都非常清楚，并且各个博弈方了解博弈结构，相互知道对方了解博弈结构。这些可能有脱实际的可能。

- 逆推归纳法也不能分析比较复杂的动态博弈。

- 在遇到两条路径利益相同的情况时逆推归纳法也会发生选择困难。

- 对博弈方的理性要求太高，不仅要求所有博弈方都有高度的理性，不允许犯任何错误，而且要求所有博弈方相互了解和信任对方的理性，对理性有相同的理解，或进一步有“理性的共同知识”。

2 颤抖手均衡

- 在遇到博弈方犯错误的情况下，关于理性及其判断的推理对后面的博弈进程和结果有重要甚至决定性的影响。“颤抖手均衡”就是理解博弈方“犯错误”的一种方法。

颤抖手均衡是赛尔顿提出的一种方法，它是理解有限理性的博弈方在动态博弈中偏离子博弈完美Nash均衡行为最重要的思想。

静态博弈的颤抖手均衡

- 由于简单的动态博弈可转化为静态博弈形式，先用得益矩阵形式

介绍颤抖手思想。

下面考虑可能犯错误的情况。

博弈方2

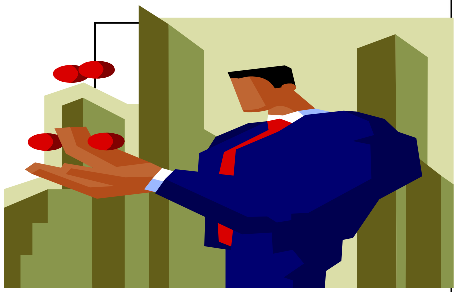
博弈方1		L	R
	U	10, 0	$\underline{6}$, $\underline{2}$
	D	$\underline{10}$, $\underline{1}$	2, 0

Cont…

- （D,L）不具有稳定性。

- 再看（U,R）
具有稳定性。
对于概率较小的偶然偏差来说具有稳定性.称具有这样性质的策略组合为“颤抖手均衡”。

博弈方1 \ 博弈方2	L	R
U	10, 0	6, 2
D	10, 1	2, 0

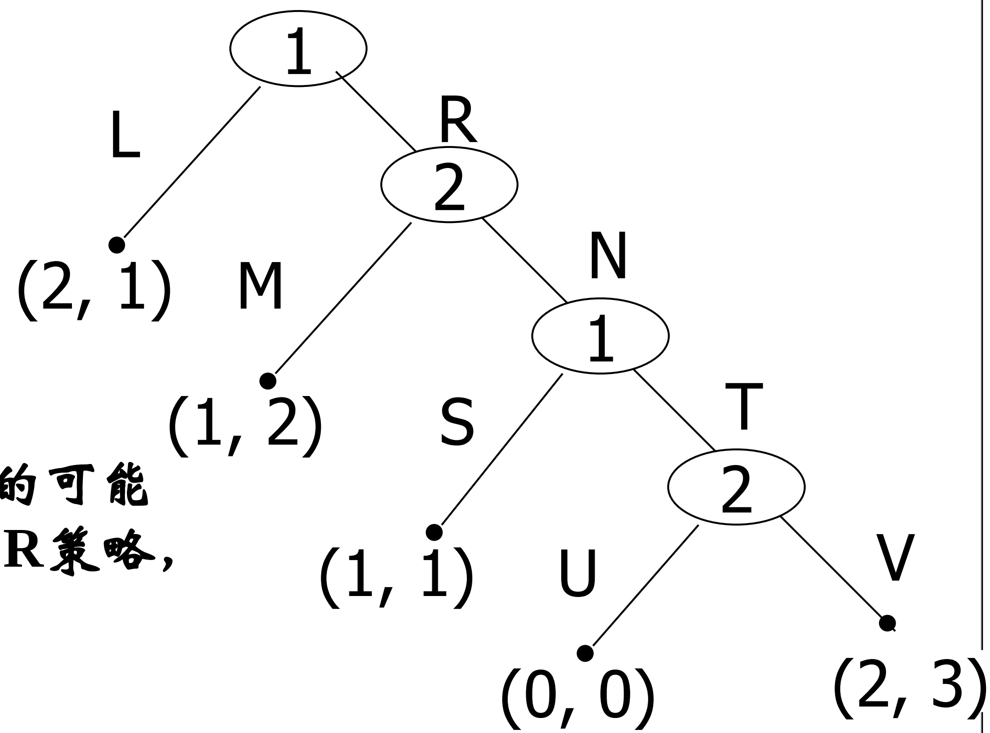


Cont..

- 结论：一个策略组合是一个颤抖手均衡，首先是一个Nash均衡，其次**不能包含任何的弱劣策略——偏离对偏离者没有损失的策略。**
- 包含弱劣策略的Nash均衡不可能是颤抖手均衡，因为他们经不起任何非完全理性的“扰动”，缺乏在有限理性下的稳定性。

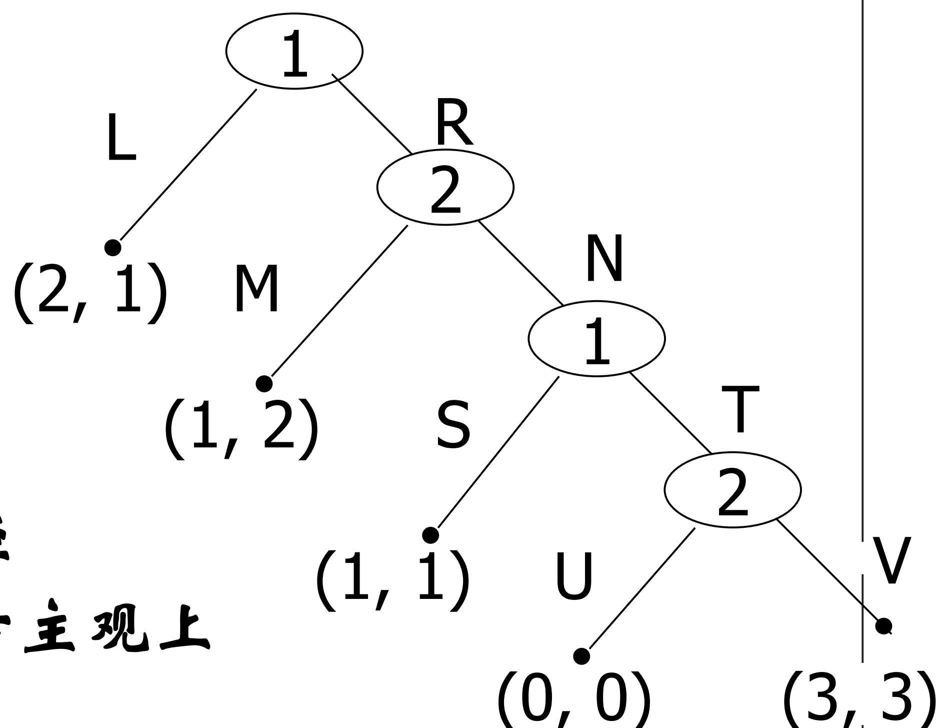
动态博弈的颤抖手均衡

- 博弈有两个子博弈完美Nash均衡，一是博弈方1在第一阶段选择L结束，另一个是R-N-T-V.
R-N-T-V不是颤抖手均衡。因为只要博弈方1考虑到博弈方2在第二阶段有任何一点偏离N的可能性，第一阶段就不可能坚持R策略，因此它不是稳定的。



Cont…

- 如果该为右边的动态博弈。那么**R-N-T-V**既是唯一的子博弈完美**Nash**均衡，又是颤抖手均衡。因为只要每一个博弈方犯错误，偏离该路径的概率比较小，那么博弈方主观上都有坚持的愿望。



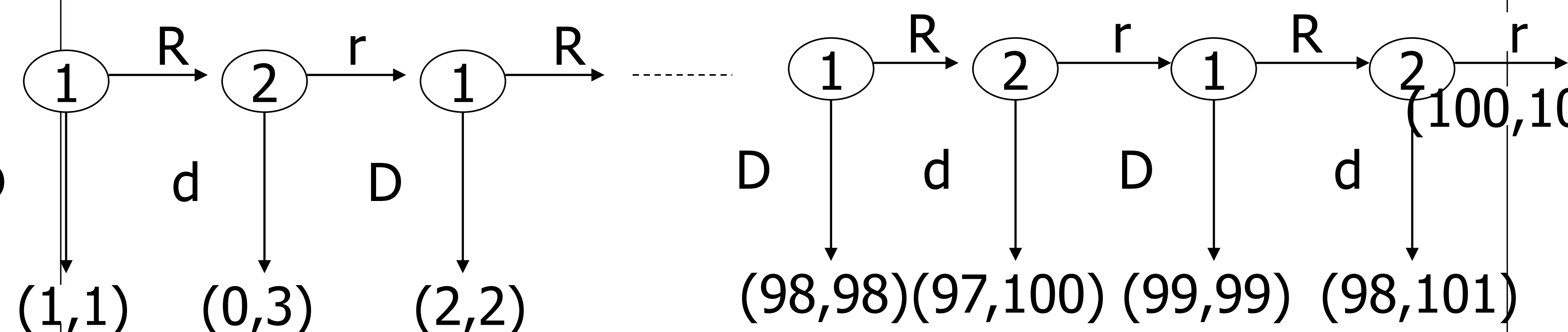
结论：

- 颤抖手均衡是一种精炼子博弈完美Nash均衡。
- 能够通过颤抖手均衡检验的子博弈Nash均衡，在动态博弈中的稳定性更强， 预测也更加可靠。
- 当然颤抖手均衡本身没有解决犯错误的问题，因此不能保证它使博弈的唯一预测的结果。

3、顺推归纳法(Forwards Induction)

4 蜈蚣博弈问题——Rosenthal,1981

- 前面的假设隐含了决策者的完全理性，但仍然遇到困难。该博弈是说明逆推归纳法和博弈分析困难的经典博弈.



五、子博弈精炼Nash均衡的惟一性讨论（不要求）