第七章　线性空间

五、习题解答

习题 7．1

1. 判断全体 n 阶实对称矩阵按矩阵的加法与数乘是否构成实数域上的线性空间.

答　是.

因为是通常意义的矩阵加法与数乘，所以只需检验集合对加法与数乘运算的封闭性.

由 n 阶实对称矩阵的性质知，n 阶实对称矩阵加 n 阶实对称矩阵仍然是 n 阶实对称矩阵，数乘 n 阶实对称矩阵仍然是 n 阶实对称矩阵，所以集合对矩阵加法与数乘运算封闭，构成实数域上的线性空间.

2．全体正实数 R^+，其加法与数乘定义为

$$a \oplus b = ab$$
$$k \circ a = a^k$$

其中$a,b \in R^+, k \in R$

判断 R^+按上面定义的加法与数乘是否构成实数域上的线性空间.

答　是.　设$\lambda, \mu \in R$.

因为$\forall a,b \in R^+ \Rightarrow a \oplus b = ab \in R^+$,

$$\forall \lambda \in R, a \in R^+ \Rightarrow \lambda \circ a = a^\lambda \in R^+,$$

所以 R^+ 对定义的加法与数乘运算封闭.

下面一一验证八条线性运算规律

(1)　$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;

(2)　$(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = abc = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$;

(3)　R^+ 中存在零元素 1，$\forall\ a \in R^+$，有 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$;

(4)　对 R^+ 中任一元素 a，存在负元素 $a^{-1} \in R^n$，使 $a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1$;

(5)$1 \circ a = a^1 = a$;　　　　(6) $\lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^\mu = \left(a^\mu\right)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$;

(7)　$(\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda + \mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \oplus a^\mu = \lambda \circ a \oplus \mu \circ a$;

(8) $\lambda\circ(a\oplus b)=\lambda\circ(ab)=(ab)^{\lambda}=a^{\lambda}b^{\lambda}=a^{\lambda}\oplus b^{\lambda}=\lambda\circ a\oplus\lambda\circ b.$

所以 R^{+}对定义的加法与数乘构成实数域上的线性空间.

3. 全体实 n 阶矩阵，其加法定义为

$$A\oplus B=AB-BA$$

按上述加法与通常矩阵的数乘是否构成实数域上的线性空间.

答 否.

$\because A\oplus B=AB-BA,\ B\oplus A=BA-AB=-(AB-BA)$

$\therefore A\oplus B$与 $B\oplus A$不一定相等.

故定义的加法不满足加法的交换律即运算规则（1），全体实 n 阶矩阵按定义的加法与数乘不构成实数域上的线性空间.

4．在 $P^{2\times2}$ 中，$W=\left\{A/|A|=0,A\in P^{2\times2}\right\}$,判断$W$是否是$P^{2\times2}$的子空间.

答 否.

例如$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$和 $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$的行列式都为零，但 $\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$的行列式不为零，也就是说集合对加法不封闭.

习题 7.2

1．讨论 $P^{2\times2}$ 中

$$A_1=\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&a\\1&1\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&1\\a&1\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}$$

的线性相关性.

解 设 $x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4=O$,

即$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+ax_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2+ax_3+x_4=0\\x_1+x_2+x_3+ax_4=0\end{cases}$. 由系数行列式$\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3$

知，$a\neq-3$且$a\neq1$时，方程组只有零解，这组向量线性无关;

$a=-3$ 或 $a=1$时，方程组有非零解，这组向量线性相关.

2．在 R^4 中，求向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标. 其中

$$\alpha=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

解 设$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$

由$$\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\ \vdots\ \alpha\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&0&\vdots&0\\1&1&1&1&\vdots&0\\0&3&0&-1&\vdots&0\\1&1&0&-1&\vdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&1\\0&1&0&0&\vdots&0\\0&0&1&0&\vdots&-1\\0&0&0&1&\vdots&0\end{pmatrix}$$

得$\alpha=\alpha_1-\alpha_3$. 故向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为 (1, 0 , - 1 , 0).

3. 在$P^{2\times2}$中求$\alpha=\begin{pmatrix}2&3\\4&-7\end{pmatrix}$在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$下的坐标.

解 设$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$

则有$$\begin{cases}x_1+0x_2+x_3+x_4=2\\x_1-x_2-x_3+0x_4=3\\x_1+x_2+0x_3+0x_4=4\\x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-7\end{cases}.$$

由$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&\vdots&2\\1&-1&-1&0&\vdots&3\\1&1&0&0&\vdots&4\\1&0&0&0&\vdots&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&-7\\0&1&0&0&\vdots&11\\0&0&1&0&\vdots&-21\\0&0&0&1&\vdots&30\end{pmatrix}$$

得$\alpha=-7\alpha_1+11\alpha_2-21\alpha_3+30\alpha_4$.故向量$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为（-7，11，-21，30）.

4．已知R^3的两组基

（Ⅰ）：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

（Ⅱ）：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$

（1） 求由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵；

（2） 已知向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,求$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标；

（3）　已知向量β在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,求$\beta$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标；

（4）　求在两组基下坐标互为相反数的向量γ.

解（1）设C是由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵，由 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,C$

即$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}C$,

知基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵为$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

（2）首先计算得$C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-2\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$,

于是α 在基β_1,β_2,β_3 下的坐标为$C^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（3）β 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为$C\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$.

(4) 设γ在基β_1,β_2,β_3 下的坐标为$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，据题意有$\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_1\\-y_2\\-y_3\end{pmatrix}$,

解此方程组可得$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$，$k$为任意常数.

$\therefore\gamma=4k\beta_2-3k\beta_3=k\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}$,$k$为任意常数.

5．已知$P[x]_4$的两组基

（Ⅰ）：$f_1(x)=1+x+x^2+x^3$，$f_2(x)=-x+x^2$，$f_3(x)=1-x$，$f_4(x)=1$

（Ⅱ）：$g_1(x)=x+x^2+x^3$，$g_2(x)=1+x^2+x^3$，$g_3(x)=1+x+x^3$，$g_4(x)=1+x+x^2$

（1） 求由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵；

（2） 求在两组基下有相同坐标的多项式 $f(x)$.

解 （1）设 C 是由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵，由 $(g_1,g_2,g_3,g_4)=(f_1,f_2,f_3,f_4)C$

有 $(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-1&-1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}C$.

$$\because \left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&1&1&0&1&1&1\\1&-1&-1&0&1&0&1&1\\1&1&0&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&0&-1&1\\0&0&1&0&0&1&1&-2\\0&0&0&1&-1&-1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\therefore C=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&1&1&-2\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}.$$

（2）设多项式 $f(x)$在基（Ⅰ）下的坐标为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$.

$$\text{据题意有 } C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Rightarrow(C-E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad (*)$$

$$\text{因为}|C-E|=\begin{vmatrix}0&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&1&0&-2\\-1&-1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=1$$

所以方程组（*）只有零解，则 $f(x)$在基（Ⅰ）下的坐标为$(0,0,0,0)^T$ ，所以 $f(x)=0$

习题 7.3

1. 在通常的向量线性运算下，判断下列哪些是 R^3 的子空间.

（1）$W_1=\{(x_1,\ 0,\ x_3)\mid x_1,x_3\in R\}$；

（2）$W_2=\{(x_1,\ x_2,\ x_1+x_2)\mid x_1,x_2\in R\}$；

（3）$W_3=\{(x_1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ x_3)|\ \ x_1,x_3\in R\}$；

（4）$W_2=\{(x_1,\ \ x_2+1,\ \ 0)|\ \ x_1,x_2\in R\}$.

提示 验证 W 是否为 R^3 的子集且对加法和数乘运算封闭.

答 （1）是；（2）是；（3）不是；（4）不是.

2. 设 W 为 $P^{n\times n}$ 中对角阵集合，证明 W 是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

证 设 $A=diag(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=diag(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$A+B=diag(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$，$kA=diag(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$，即 W 对加法和数乘运算封闭. 从而 W 是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

3. 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的子空间，且 $W_1\subset W_2$，证明：$W_1=W_2$ 的充要条件是 $\dim W_1=\dim W_2$.

证 必要性显然. 下证充分性. 由于 $\dim W_1=\dim W_2$ 且 $W_1\subset W_2$，所以 W_1 的基也是 W_2 的基. 从而，$W_1=W_2$.

4. 证明 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t)$ 的充要条件是 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.

证 必要性：因为 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t)$，所以 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也是 $L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t)$ 中的向量组，从而 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示. 同理可证 $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. 所以 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.

充分性：设 α 是 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 中的任一向量，则 α 可由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. 由线性表示的传递性可知，α 也可由 $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，所以 $\alpha\in L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t)$. 同理可证 $L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t)$ 中的任意向量也在 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 中. 从而有

$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_t)$.

5. 设 $A\in P^{n\times n}$，证明 $P^{n\times n}$ 中全体与 A 可交换的矩阵构成 $P^{n\times n}$ 的一个子空间.

证 设与 A 可交换的矩阵构成的集合为 W. 因为 A 为 n 阶矩阵，所以与 A 可交换的矩

阵也是 n 阶矩阵.从而，W 是 $P^{n\times n}$ 的 一个子集. 下证 W 中的矩阵对矩阵加法和数乘运算是封闭的.设 $B,C\in P^{n\times n}$，且都与 A 是可交换的，则

$$A(kB+lC)=kAB+lAC=kBA+lCA=(kB+lC)A$$

从而，B,C 的线性组合与 A 是可交换的，即 W 对线性运算是封闭的.所以，W 是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

习题 7. 4

1. 证明例 2 的结论. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\cdots,$ $\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\in V$，则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

证
$$\begin{aligned}&L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\\&=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\right\}+\left\{l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t\right\}\\&=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t\right\}\\&=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\end{aligned}$$

2. $W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求 $W_1\cap W_2$ 和 W_1+W_2 的基和维数.

解
$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&-1&0&1\\-1&0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1+x_4\beta_2=\theta$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}-1, & -1, & 1, & 0\end{pmatrix}$，从而 β_1 是 $W_1\cap W_2$ 的一组基.因为 $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大线性无关组，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$ 是 W_1+W_2 的一组基. $\dim(W_1\cap W_2)=1,\dim(W_1+W_2)=3$.

3. 设 $W_1=\left\{(x_1,0,x_3)\mid x_1,x_3\in R\right\}$，$W_2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0,x_i\in R(i=1,2,3)\right\}$，求 $W_1\cap W_2$ 和 W_1+W_2 的基和维数.

解 W_1 的一组基为 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,0,1)$，$W_2$ 的一组基为 $\beta_1=(-1,0,1),\beta_2=(-1,1,0)$，则 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$. 根据

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可知，β_1 是 $W_1 \cap W_2$ 的一组基，$\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 是 $W_1 + W_2$ 的一组基，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$，$\dim(W_1 + W_2) =$.

4. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，W_1 和 W_2 是 V 的子空间且 $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$，证明 $W_1 + W_2$ 的基可由 W_1 和 W_2 的基合并而成.

证 因为 $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$，所以 $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 W_1 的一组基，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是 W_2 的一组基，则

$$W_1 + W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

从而，根据 $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 构成 $W_1 + W_2$ 的一组基.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关，$W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，$W_2 = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$，证明：$W_1 \cap W_2$ 的维数等于

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_x\alpha_s + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_t\beta_t = \theta$$ 解空间的维数.

证 设 V_3 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_x\alpha_s + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_t\beta_t = \theta$ 解空间，则

$$\dim V_3 = s + t - \dim(L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)) = s + t - \dim(W_1 + W_2)$$

又由维数公式

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = s + t - \dim(W_1 \cap W_2)$$

可知

$$\dim V_3 = \dim(W_1 \cap W_2)$$

习题 7.5

1. 设 $\alpha_1=(1,-1,0)$，$\alpha_2=(-1,1,1)$，$\beta_1=(1,1,1)$，$\beta_2=(2,-2,-1)$，$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，试判断 W_1+W_2 是否为直和，并说明原因.

解 因为 $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线性相关，所以

$$\dim(W_1+W_2)<4=\dim W_1+\dim W_2.$$

由直和的充要条件 $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$ 可知，W_1+W_2 不是直和.

1. 设 $\alpha=(1,\ 1,\ 0)$，$W=L(\alpha)$，求子空间 U，使得 $R^3=W\oplus U$.

解 将 α 扩展为 R^3 的一组基 α,α_1,α_2，其中 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 1),\alpha_2=(0,\ 1,\ 1)$.

令 $U=L(\alpha_1,\alpha_2)$,则 $R^3=W\oplus U$.

3. 设 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，$U=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$,证明 $W+U$ 是直和的充要条件是

$$R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+R(\beta_1,\cdots,\beta_t)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

证 因为 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，$U=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$，所以

$$W+U=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

从而

$$\dim W=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\dim U=R(\beta_1,\cdots,\beta_t),$$

$$\dim(W+U)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

所以，$\dim(W+U)=\dim W+\dim U$ 等价于

$$R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+R(\beta_1,\cdots,\beta_t)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

即 $W+U$ 是直和的充要条件是

$$R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+R(\beta_1,\cdots,\beta_t)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

习题 7. 6

1.证明线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-6x_3-4x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3-5x_4+3x_5=0 \\ x_1-5x_2-6x_3+8x_4-6x_5=0 \end{cases}$$

的解空间与实系数多项式空间 $R[x]_3$ 同构.

证 设线性方程组为 $AX=\mathbf{0}$, 对系数矩阵施以初等行变换.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 & 8 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because R(A)=2$ $\quad\therefore$ 线性方程组的解空间的维数是 $5-R(A)=3$.

实系数多项式空间 $R[x]_3$ 的维数也是 3, 所以此线性方程组的解空间与实系数多项式空间 $R[x]_3$ 同构.

2. 设 α_1, α_2, α_3 是线性空间 V 的一组基,

$$\begin{aligned} &\beta_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \\ &\beta_2=\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3 \\ &\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2-4\alpha_3 \\ &\beta_4=2\alpha_2+\alpha_3 \end{aligned}$$

求 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩及其一个极大线性无关组.

解 因为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的线性关系与其在基 α_1, α_2, α_3 下的坐标的线性关系相同，所以可以根据这些坐标来判断 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的线性关系.根据已知，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 在 α_1, α_2, α_3 下的坐标为

$$(1,\ 1,\ -1),\ (1,\ -1,\ -2),\ (3,\ 1,\ -4),\ (0,\ 2,\ 1).$$

根据

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为 2，$\beta_1,\beta_2$为其一个极大线性无关组.

3. 设V是数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$V$的一组基.

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$
$$\beta_2=\alpha_1-2\alpha_2+k\alpha_3$$
$$\beta_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

问：当k为何值时，β_1,β_2,β_3线性相关？

解 β_1,β_2,β_3线性相关等价于其在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标线性相关. β_1,β_2,β_3在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,\ 1,\ 1),(1,\ -2,\ k),(2,\ -1,\ 1)$.因为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & k\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & k-1\\ 0 & 0 & k\end{vmatrix}=-k,$$

所以，当$k=0$时，β_1,β_2,β_3线性相关.

4. 设V与W是数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$V$的一组基，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$W$的一组基，证明存在$V$到$W$的同构映射，并给出$\alpha=\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$在此同构映射下的像.

证 因为V和W都与P^3同构，所以存在同构映射$\sigma_1:V\to P^3$，$\sigma_2:W\to P^3$，其中σ_1将V中的向量映射到其在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标，而$\sigma_2$将$W$中的向量映射到其在$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标.定义映射$\sigma_2^{-1}\sigma_1:V\to W$，其中对$V$中的向量$\alpha$有$\sigma_2^{-1}\sigma_1(\alpha)=\sigma_2^{-1}(\sigma_1(\alpha))$，$\sigma_2^{-1}$是$\sigma_2$的逆映射，则$\sigma_2^{-1}\sigma_1$是同构映射.根据$\sigma_1$、$\sigma_2$的定义可知，

$$\sigma_2^{-1}\sigma_1(\alpha)=\sigma_2^{-1}(\sigma_1(\alpha))=\sigma_2^{-1}((1,\ -1,\ -2))=\beta_1-\beta_2-2\beta_3.$$

习题七

(A)

一、填空题

1．当 k 满足___________时，$\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,k),\alpha_1=(3,k,3)$为$R^3$的一组基.

解 三个三维向量为 R^3 的一组基的充要条件是$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，即 $k\neq 2$且$k\neq 6$.

2．由向量$\alpha=(1,2,3)$所生成的子空间的维数为_____.

解 向量$\alpha=(1,2,3)$所生成的子空间的维数为向量组α 的秩，故答案为 1.

3．R^3中的向量$\alpha=(3,7,1)$在基$\alpha_1=(1,3,5),\alpha_2=(6,3,2),\alpha_3=(3,1,0)$下的坐标为_________.

解　根据定义，求解方程组就可得答案.

设所求坐标为(x_1,x_2,x_3)，据题意有$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$.

为了便于计算，取下列增广矩阵进行运算

$$(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1|\alpha)=\begin{pmatrix}3&6&1&\vdots&3\\1&3&3&\vdots&7\\0&2&5&\vdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&154\\0&1&0&\vdots&-82\\0&0&1&\vdots&33\end{pmatrix},$$

所以$(x_1,x_2,x_3)=(33,-82,154)$.

4．R^3中的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\alpha_1=(-2,1,3),\alpha_2=(-1,0,1),\alpha_3=(-2,-5,-1)$的过渡矩阵为______.

解　因为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\1&0&-5\\3&1&-1\end{pmatrix}$，所以过渡矩阵为$\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\1&0&-5\\3&1&-1\end{pmatrix}$.

5. 正交矩阵 A 的行列式为___________.

解　$|A^TA|=|E|\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$.

6．已知 5 元线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的系数矩阵的秩为 3，则该方程组的解空间的维数为_____.

解　5 元线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解集合的极大无关组（基础解系）含 $5-3=2$ 个向量，故解空间的维数为 2.

7. 已知$\alpha_1=(2,1,1,1),\alpha_2=(2,1,a,a),\alpha_3=(3,2,1,a),\alpha_4=(4,3,2,1)$不是$R^4$的基且$a\neq1$，则$a$满足 _____________ .

解　四个四维向量不是 R^4 的一组基的充要条件是$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$，则 $a=\frac{1}{2}$ 或 1.

故答案为 $a=\dfrac{1}{2}$.

二、单项选择题

1．下列向量集合按向量的加法与数乘不构成实数域上的线性空间的是(　　).

（A）　$V_1=\{(x_1,0,\cdots,0,x_n)|x_1,x_n\in R\}$

（B）　$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\ x_i\in R\}$

（C）　$V_3=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\ x_i\in R\}$

(D)　$V_4=\{(x_1,0,\cdots,0,0)|x_1\in R\}$

解　(C) 选项的集合对向量的加法不封闭，故选 C.

2. 在$P^{3\times3}$中,由$A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$生成的子空间的维数为（　　）.

(A)　1　　(B)　2　　(C) 3　　(D)　4

解　向量组 $A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$生成的子空间的维数是向量组 A 的秩，故选 A.

3. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的基, 则下列向量组(　　)是$R^3$的基.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　$(B)\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

解　因 (B)选项中($\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$)=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$,

又因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关且$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$可逆，所以$\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$线性无关.

故选 B.

4. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的基, 则下列向量组（　　）不是$R^3$的基.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$　　(B) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$　　(D) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_3$

解　因 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_3)=0$，所以(C)选项中向量组线性相关，故选 C.

5．n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵的秩为 r，该方程组的解空间的维数为 s，则 (　　).

(A) s=r　　(B) s=n-r　　(C) s>r　　(D)　s<r

选 B.

6. 已知 A, B 为同阶正交矩阵，则下列(　　)是正交矩阵.

(A)　$A+B$　(B)　A-B　(C) AB　　(D) kA　（k 为数）

解 A, B 为同阶正交矩阵$\Rightarrow AB(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = E$　故选 C .

7. 线性空间中，两组基之间的过渡矩阵（　　）.

(A)　一定不可逆　(B) 一定可逆　(C) 不一定可逆　(D)　是正交矩阵

选 B.

(B)

1．已知 R^4 的两组基

（Ⅰ）：　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ \alpha_4$

（Ⅱ）：$\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \beta_2 = \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \beta_3 = \alpha_3+\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4$

(1)求由基（Ⅱ）到（Ⅰ）的过渡矩阵；

(2)求在两组基下有相同坐标的向量.

解　（ 1 ）设 C 是由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵，已知

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以由基（Ⅱ）到基（Ⅰ）的过渡矩阵为

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

（2）设在两组基下有相同坐标的向量为 α，又设 α 在基（Ⅰ）和基（Ⅱ）下的坐标均为 (x_1, x_2, x_3, x_4)，由坐标变换公式可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad 即 \quad (E-C)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

齐次线性方程（*）的一个基础解系为$\eta=(0,0,0,1)$，通解为 $X^*=(0,0,0,k) \quad (k\in R)$.

故在基（Ⅰ）和基（Ⅱ）下有相同坐标的全体向量为

$$\alpha = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + k\alpha_4 = k\alpha_4 \qquad (k\in R).$$

2. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 R^3 的基, 向量组β_1,β_2,β_3 满足$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$

(1)证明 β_1,β_2,β_3 是R^3的基;

⑵ 求由基 β_1,β_2,β_3 到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵;

(3)求向量 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3下的坐标.

解 （1）由题有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0$，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关 .

故β_1,β_2,β_3是 3 个线性无关向量，构成R^3 的基.

(2) 因为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以从 基β_1,β_2,β_3到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以向量α在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. 设R^4的两组基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4$与$\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

且由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ \beta_4$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4$;

(2) 求向量$\alpha=\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ \beta_4$下的坐标.

解 (1) 因为由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 所以

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)C^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

所以

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(2) $\because \alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)C^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}0\\1\\12\\-7\end{pmatrix},$$

$\therefore$向量$\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}0\\1\\12\\-7\end{pmatrix}$.

4. 证明$f_1(x)=1+x+x^2,\ f_2(x)=1+x+2x^2,\ f_3(x)=1+2x+3x^2$是线性空间$P[x]_3$的一组基，并求$f(x)=6+9x+14x^2$在这组基下的坐标.

证 设$t_1f_1(x)+t_2f_2(x)+t_3f_3(x)=0$,

则有$t_1(1+x+x^2)+t_2(1+x+2x^2)+t_3(1+2x+3x^2)=0$

即$\begin{cases}t_1+t_2+t_3=0\\t_1+t_2+2t_3=0\ (*)\\t_1+2t_2+3t_3=0\end{cases}$ 因为系数行列式$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$

所以方程组（*）只有零解. 故 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 线性无关, 构成线性空间$P[x]_3$的一组基.

设 $f(x)=y_1f_1(x)+y_2f_2(x)+y_3f_3(x)$

则有$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=6\\y_1+y_2+2y_3=9\\y_1+2y_2+3y_3=14\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

所以 $f(x)$ 在基$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$下的坐标为（1, 2, 3）.

5. 设线性空间 V 中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

（1）试问：向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$是否线性相关？要求说明理由.

（2）求向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$生成的线性空间 W 的一组基以及 W 的维数.

解 （1）令$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，那么

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}, \qquad ①$$

$$\text{Q}\ |A|=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0, \therefore \alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1 \text{线性相关}.$$

（2）由①式可以看出，Q β_1,β_2,β_3线性无关（因为左上角的三阶子式不为 0），$\therefore$秩$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$=3，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为它的一个极大线性无关组.

令

$$W=L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1)=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$

$\therefore \dim W=$秩$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$=3，且$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4$为$W$的一组基.

6. 以$P^{2\times2}$表示数域 P 上的 2 阶矩阵的集合. 假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为两两互异的数，且他们的和不等于零. 试证明

$$A_1=\begin{pmatrix}1&\alpha_1\\\alpha_1^2&\alpha_1^4\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&\alpha_2\\\alpha_2^2&\alpha_2^4\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&\alpha_3\\\alpha_3^2&\alpha_3^4\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1&\alpha_4\\\alpha_4^2&\alpha_4^4\end{pmatrix}$$

是 P 上线性空间$P^{2\times2}$的一组基.

证　设$x_1,x_2,x_3,x_4\in P$，且由关系式$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4=0$，

即有

$$\begin{pmatrix}x_1&\alpha_1x_1\\\alpha_1^2x_1&\alpha_1^4x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2&\alpha_2x_2\\\alpha_2^2x_2&\alpha_2^4x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3&\alpha_3x_3\\\alpha_3^2x_3&\alpha_3^4x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_4&\alpha_4x_4\\\alpha_4^2x_4&\alpha_4^4x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0\\\alpha_1^2x_1+\alpha_2^2x_2+\alpha_3^2x_3+\alpha_4^2x_4=0\\\alpha_1^4x_1+\alpha_2^4x_2+\alpha_3^4x_3+\alpha_4^4x_4=0\end{cases},\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\alpha_1^2&\alpha_2^2&\alpha_3^2&\alpha_4^2\\\alpha_1^4&\alpha_2^4&\alpha_3^4&\alpha_4^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

因此，只要能证明上述关于x_1,x_2,x_3,x_4的线性方程组只有零解，则A_1,A_2,A_3,A_4就线性无关，从而能够成$P^{2\times2}$的一组基.

下面计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&\alpha_3^2&\alpha_4^2\\ \alpha_1^4&\alpha_2^4&\alpha_3^4&\alpha_4^4\end{vmatrix}$$

在中加一行，加一列变为

$$D_{n+1}(y)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&y\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&\alpha_3^2&\alpha_4^2&y^2\\ \alpha_1^3&\alpha_2^3&\alpha_3^3&\alpha_4^3&y^3\\ \alpha_1^4&\alpha_2^4&\alpha_3^4&\alpha_4^4&y^4\end{vmatrix}=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3)(y-\alpha_4)\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

又因为 D_n 为 $D_{n+1}(y)$ 中 y^3 的系数的相反数，而由上式右边知 y^3 的系数为 $(-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i)\prod_{i>j}(a_i-a_j)$，从而

$$D_n=(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i)\prod_{i>j}(a_i-a_j).$$

由 $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\neq 0, a_i\neq a_j(i\neq j)$ 知，$D_n\neq 0$，从而上述线性方程组只有零解，从而 A_1,A_2,A_3,A_4 构成 $\mathrm{P}^{2\times 2}$ 的一组基.

7. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}$$

$W=\{B\in P^{3\times 3}\mid AB=BA\}$. 求 W 的维数和一组基.

解 设

$$B=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{bmatrix}$$

由 $AB=BA$ 得

$$
\begin{cases}
x_1 = x_2 + 3x_3, \\
x_2 = x_2 + x_3, \\
x_3 = 2x_3, \\
x_4 = x_4 + 3x_6, \\
x_5 = x_5 + x_6, \\
x_6 = 2x_6, \\
3x_1 + x_4 + 2x_7 = x_7 + 3x_9, \\
3x_2 + x_5 + 2x_8 = x_8 + x_9, \\
3x_3 + x_6 + 2x_9 = 2x_9.
\end{cases}
$$

化简后得

$$
\begin{cases}
x_3 = 0, \\
x_6 = 0, \\
x_7 = -3x_1 - x_4 + 3x_9, \\
x_8 = -3x_2 - x_5 + x_9.
\end{cases}
$$

其中 x_1, x_2, x_4, x_5, x_9 为自由未知量.

令 $x_1 = 0, x_2 = x_4 = x_5 = x_9 = 0$，得 $x_7 = -3, x_8 = 0$. 即

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

类似还可得

$$
B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}，\ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

$$
B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}，\ B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.
$$

于是 $B_i \in W (i = 1,2,3,4,5)$，且 $B_1, \dots B_5$ 线性无关. 因此 $\forall B \in W$，B 可由 $B_1, \dots B_5$ 线性表出，比如，设

$$
B = (b_{ij})_{3\times 3} \in W
$$

则 $b_{13} = b_{23} = 0$，且 $B = b_{11}B_1 + b_{21}B_2 + b_{22}B_3 + b_{33}B_4 + b_{12}B_5$. 这样

$$
\dim W = 5
$$

且 $B_1,\ldots B_5$ 为它的一组基.

8. 设 V 是定义域实数集 R 的所有实函数组成的集合，对于 $f,g\in V,a\in R$，分别利用下列式子定义 $f+g,af$ ：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in r \qquad ①$$

$$af(x)=af(x),\quad x\in r \qquad ②$$

则 V 成为实数域上的一个线性空间. 设

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\cos 2x,\ f_3(x)=\cos 3x$$

（1） 判断 f_0,f_1,f_2,f_3 是否线性相关，写出理由；

（2） 用 $\langle f,g\rangle$ 表示 f,g 生成的线性子空间，判断

$$\langle f_0,f_1\rangle+\langle f_2,f_3\rangle$$

是否为直和.

解 （1） 令 $k_0f_0+k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0$，即

$$k_0+k_1\cos x+k_2\cos 2x+k_3\cos 3x=0 \qquad ①$$

分别将 $x=0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2},\pi$ 带入①式得

$$\begin{cases}k_0+k_1+k_2+k_3=0,\\ k_0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}k_3=0,\\ k_0-k_2=0,\\ k_0-k_1+k_2-k_3=0,\end{cases}$$

解得 $k_0=k_1=k_2=k_3=0$. $\therefore$ f_0,f_1,f_2,f_3 线性无关.

（2）令 $W_1=\langle f_0,f_1\rangle=L(f_0,f_1),W_2=\langle f_2,f_3\rangle=L(f_2,f_3)$.

$$W_1+W_2=L(f_0,f_1,f_2,f_3)$$

$$\dim W_1=\dim W_2=2+2=4=\dim(W_1+W_2)$$

$\therefore W_1+W_2$ 为直和，即 $\langle f_0,f_1\rangle+\langle f_2,f_3\rangle$ 是直和.

9. 设 P 是数域，$m<n,A\in P^{m\times n},B\in P^{(n-m)\times n}$，$V_1$ 和 V_2 分别是齐次线性方程组 $AX=0$

和 $BX=0$ 的解空间. 证明：$P^n=V_1\oplus V_2$ 的充分必要条件是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 只有零解.

证 先证充分性. 因 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\in P^{m\times n}$，若 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 只有零解，则 $\begin{vmatrix}A\\B\end{vmatrix}\neq 0$，且

$秩A=m, 秩B=n-m$.

$\forall x_0\in V_1\cap V_2$，则 $\begin{cases}Ax_0=0\\Bx_0=0\end{cases}$，即 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x_0=0$，$\therefore x_0=0$. 即证

$$V_1\cap V_2=\{0\}. \qquad ①$$

又 $V_1+V_2\subseteq P^n$，因而由①知

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2=(n-秩A)+(N-秩B)$$

$$=(n-m)+m=n=\dim P^n$$

$\therefore P^n=V_1\oplus V_2$.

再证必要性. 设 $P^n=V_1\oplus V_2$，用反证法. 如果 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解 x_1，那么

$\begin{cases}Ax_1=0\\Bx_1=0\end{cases}$，即 $x_1\in V_1\cap V_2$，这与 $P^n=V_1\oplus V_2$ 矛盾. 从而 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 只有零解.