第八章　线性变换

习题 8.1

1. 判断下列变换是否是线性变换.

（1）　在 R^2 上，$T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1 - x_2)$，　$(\forall (x_1, x_2) \in R^2)$ ；

（2）　在 R^3 上，$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_3)$，　$(\forall (x_1, x_2, x_3) \in R^3)$ ；

（3）　在 R^3 上，$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2, x_3)$，　$(\forall (x_1, x_2, x_3) \in R^3)$ ；

（4）　在 $P[x]$ 上，$T(f(x)) = f(x+1)$ ，$(\forall f(x) \in P[x])$.

解 (1)不是.

因为取$X = (1,1)$，则

$$T(2X) = T(2,2) = (4,0)$$

$$2T(X) = 2(1,0) = (2,0)$$

所以$T(kX) \neq kT(X)$，因此T不是线性变换.

（2）　因为$\forall X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$和$k \in R$，有

$$\begin{aligned}
T(X+Y) &= T(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3) \\
&= (x_1 + y_1 - x_2 - y_2,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3) \\
&= (x_1 - x_2 + y_1 - y_2,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3) \\
&= (x_1 - x_2,\ x_2,\ x_3) + (y_1 - y_2,\ y_2,\ y_3) \\
&= T(X) + T(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(kX) &= T(kx_1,\ kx_2,\ kx_3) \\
&= (kx_1 - kx_2,\ kx_2,\ kx_3) \\
&= k(x_1 - x_2,\ x_2,\ x_3) \\
&= kT(X)
\end{aligned}$$

所以 T 是线性变换.

(3)不是.

因为 取$X = (1,1,0), Y = (1,0,0), T(X+Y) = T(2,1,0) = (2,1,0)$

$$T(X) + T(Y) = (1,1,0) + (0,0,0) = (1,1,0)$$

所以 $T(X+Y) \neq T(X) + T(Y)$，因此T不是线性变换

(4) 因为$\forall f(x),g(x)\in P[x],k\in P$，有

$$T(f(x)+g(x))=f(x+1)+g(x+1)=T(f(x))+T(g(x))$$
$$T(kf(x))=kf(x+1)=kT(f(x))$$

所以 T 是线性变换.

2．在空间 $C[a,b]$上，定义变换 T 为

$$T(f(x))=\int_a^x f(t)\cos tdt,\qquad (\forall f(x)\in C[a,b])$$

判断 T 是否是线性变换.

解 因

$$\forall f(x),g(x)\in C[a,b],k\in R$$
$$T(f(x)+g(x))=\int_a^x (f(t)+g(t))\cos tdt$$
$$=\int_a^x f(t)\cos tdt+\int_a^x g(t)\cos tdt=T(f(x))+T(g(x))$$

$$T(kf(x))=\int_a^x kf(t)\cos tdt=k\int_a^x f(t)\cos tdt=kT(f(x))$$

所以，T 是线性变换.

3. 将复数域Z看作自身上的线性空间，定义T：

$$T(\xi)=\bar{\xi},\quad (\forall \xi\in Z)$$

判断T是否是复数域Z的线性变换.

解 不是.因为取

$\alpha=1,k=i,$

则

$$T(k\alpha)=T(i)=\bar{i}=-i$$
$$kT(\alpha)=iT(1)=i\bar{1}=i$$

所以

$$T(k\alpha)\neq kT(\alpha).$$

习题 8.2

1．在实线性空间 $R[x]_n$ 上

$$D(f(x))=f'(x)$$
$$T(f(x))=xf(x)$$
$$(\forall f(x)\in R[x]_n)$$

证明：$DT-TD=\varepsilon,\quad$（ε是单位变换）

证 $(DT-TD)(f(x))=(DT)(f(x))-(TD)(f(x))$
$$\begin{aligned}
&=D\{T[f(x)]\}-T\{D[f(x)]\}\\
&=D(xf(x))-T(f'(x))\\
&=(xf(x))'-xf'(x)\\
&=f(x)+xf'(x)-xf'(x)\\
&=f(x)\\
&=\varepsilon(f(x))
\end{aligned}$$
所以 $DT-TD=\varepsilon.$

2. 设 T,S 是数域 P 上的线性空间 V 的两个线性变换，已知 $S^2=S,T^2=T,ST=TS,$

证明：$(S+T-ST)^2=S+T-ST$

证 $(S+T-ST)^2=S^2+T^2+S^2T^2+2ST-2S^2T-2TST$
$$\begin{aligned}
&=S+T+ST+2ST-2ST-2ST\\
&=S+T-ST
\end{aligned}$$

3. 证明：可逆线性变换是双射.

证 设 T 是数域 P 上的线性空间 V 的可逆线性变换，先证 T 是单射：

$\forall\xi,\eta\in V$, 且 $\xi\neq\eta$，下证 $T\xi\neq T\eta$

用反证法，假设 $T\xi=T\eta$

因为 T 可逆，所以 T^{-1} 存在，两边施行 T^{-1}，有

$T^{-1}(T\xi)=T^{-1}(T\eta)$

$T^{-1}T(\xi)=T^{-1}T(\eta)\Rightarrow\xi=\eta,$

与所设矛盾，假设不成立，于是 $T(\xi)\neq T(\eta)$，所以 T 是单射.

再证 T 是满射：

$\forall\eta\in V$, 因为 T 可逆，所以 T^{-1} 存在，设 $=\xi$

两边施行变换 T，有

$T(T^{-1}\eta)=T\xi$

$T^{-1}T(\eta)=T^{-1}T(\eta)=\eta=T(\xi)$, 即 $T(\xi)=\eta$

所以 T 是满射.

因 T 既是单射又是满射，所以 T 是双射.

4. 设 T 是数域 P 上的线性空间 V 上的线性变换，$\forall\alpha\in V,T^{m-1}(\alpha)\neq\theta,T^m(\alpha)=\theta$

证明：$\alpha,T(\alpha),\cdots,T^{m-1}(\alpha)$ 线性无关.

证　设$k_0\alpha+k_1T(\alpha)+\cdots+k_{m-1}T^{m-1}(\alpha)=\theta\cdots\cdots\cdots(*)$

两边施行变换T^{m-1}：

$k_0T^{m-1}(\alpha)+k_1T^{m}(\alpha)+\cdots+k_{m-1}T^{2m-2}(\alpha)=\theta$

因为　$T^m(\alpha)=\theta$,　所以

$T^{m+1}(\alpha)=\cdots=T^{2m-2}(\alpha)=\theta$

于是　$k_0T^{m-1}(\alpha)=\theta$

又因为$T^{m-1}(\alpha)\neq\theta$

所以$k_0=0$,代入$(*)$：

$k_1T(\alpha)+\cdots+k_{m-1}T^{m-1}(\alpha)=\theta\cdots\cdots\cdots(*)$

两边施行变换T^{m-2}可得

$k_1T^{m-1}(\alpha)=\theta\Rightarrow k_1=0$

继续做下去最后得到$k_0=k_1=\cdots=k_{m-1}=0$

所以$\alpha,T(\alpha),\cdots,T^{m-1}(\alpha)$线性无关.

习题 8.3

1．设 T 是 R^3 上的线性变换

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3,)=(2x_1-x_2,\ x_2+x_3,\ x_1)\ ,\quad (\forall(x_1,x_2,x_3)\in R^3)$$

（1）求 T 在基 ε_1=（1，0，0），ε_2 =（0，1，0），ε_3=（0，0，1）下的矩阵；

（2）求 T 在基 e_1=（－1，1，1），e_2=（1，－1，1），e_3=（1，1，－1）下的矩阵。

解　（1）因

$$T(\varepsilon_1)=(2,0,1)=2\varepsilon_1+\varepsilon_3$$
$$T(\varepsilon_2)=(-1,1,0)=-\varepsilon_1+\varepsilon_2$$
$$T(\varepsilon_1)=(0,1,0)=\varepsilon_2$$

所以 T 在基 ε_1=（1，0，0），ε_2 =（0，1，0），ε_3=（0，0，1）下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

（2）因

$$T(e_1)=(-3,2,-1)$$
$$T(e_2)=(3,0,1)$$
$$T(e_3)=(1,0,1)$$

设

$$x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=T(e_1)$$
$$x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=T(e_2)$$
$$x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=T(e_3)$$

由于上述三个方程组的系数矩阵是相同的,所以我们将三个增广矩阵合为一个矩阵并将其化为行最简阶梯形求解.

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & \vdots & -3 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

易知，在上述行最简阶梯形中的右边的子块中的 3 列分别是$T\alpha_1,T\alpha_2,T\alpha_3$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标，于是线性变换 T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -2 & 2 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2. 已知 3 维线性空间 V 上的线性变换 T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

求 T 在基$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$下的矩阵.

解 因

$$T(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_1$$
$$T(\alpha_3)=\alpha_1-\alpha_3=-\alpha_3+\alpha_1$$
$$T(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_1$$

于是 T 在基$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

3．在 R^2 中，线性变换 T 为

$$T(\alpha)=A\alpha,\ (\forall\alpha\in R^2)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

求 T 在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

解 因

$$T(\alpha_1)=A\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\overset{设}{=}x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=4\end{cases}$$

$$T(\alpha_2)=A\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\overset{设}{=}x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3\\x_2=-2\end{cases}$$

于是 T 在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}7 & -3\\4 & -2\end{pmatrix}$$

4. 在 R^3 中，定义线性变换 T 为

$$T(x,y,z)=(x,y,0),\quad (\forall(x,y,z)\in R^3)$$

称 T 为将向量向 xoy 平面上的垂直投影变换.

（1） 求 T 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

（2） 求 T 在基 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$ 下的矩阵.

解：(1) $T(\varepsilon_1)=T(1,0,0)=(1,0,0)=\varepsilon_1=1\varepsilon_1+0\varepsilon_2+0\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_2)=T(0,1,0)=(0,1,0)=\varepsilon_2=0\varepsilon_1+1\varepsilon_2+0\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_3)=T(0,0,1)=(0,0,0)=\theta=0\varepsilon_1+0\varepsilon_2+0\varepsilon_3$

于是，在基ε_1，ε_2，ε_3下线性变换T的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（2） $T(\alpha_1)=T(1,0,0)=(1,0,0)=\alpha_1=1\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3$

$T(\alpha_2)=T(1,1,0)=(1,1,0)=\alpha_2=0\alpha_1+1\alpha_2+0\alpha_3$

$T(\alpha_3)=T(1,1,1)=(1,1,0)=\alpha_2=0\alpha_1+1\alpha_2+0\alpha_3$

于是，线性变换T在基α_1，α_2，α_3下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

5．设 T 是 R^3 上的线性变换：

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3,)=(\ 2x_1+x_2,\ x_1-x_2,\ 3x_3),\quad (\forall(x_1,x_2,x_3)\in R^3)$$

（1）求 T 在自然基 ε_1=（1，0，0），　ε_2=（0，1，0），　ε_3=（0，0，1）下的矩阵；

（2）求 T 在基 e_1=（1，0，0），e_2=（1，1，0），e_3=（1，1，1）下的矩阵.

解 (1) 因

$$T(\varepsilon_1)=(2,1,0)$$
$$T(\varepsilon_2)=(1,-1,0)$$
$$T(\varepsilon_1)=(0,0,3)$$

于是 T 在原始基 ε_1=（1，0，0），　ε_2=（0，1，0），　ε_3=（0，0，1）下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(2) 因

$$T(e_1)=(2,1,0)=e_1+e_3$$
$$T(e_2)=(3,0,0)=3e_1$$
$$T(e_3)=(3,0,3)=3e_1-3e_2+3e_3$$

于是 T 在基 e_1=（1，0，0），e_2=（1，1，0），e_3=（1，1，1）下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6．设 3 维线性空间 $P_2[x]$ 上的求导变换为 D，即

$$D(f(x)) = f'(x), \qquad \forall f(x) \in P_2[x]$$

求 D 在基 1，$x-1$，$\frac{1}{2}(x-1)^2$ 下的矩阵。

解 因

$$\begin{aligned} &D(1) = 0 \\ &D(x-1) = 1 \\ &D(\frac{1}{2}(x-1)^2) = x-1 \end{aligned}$$

于是 D 在基 1，$x-1$，$\frac{1}{2}(x-1)^2$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7．线性空间 R^4 上的线性变换 T, S 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求线性变换 $T+S$, TS 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵；

(2) T 与 S 是否是可逆线性变换,如果是,求出它们的逆变换在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵.

解 (1) 线性变换 $T+S$, TS 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵分别为

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 因 $|B| = 0$, 所以 S 不可逆, 而 $|A| = 4 \neq 0$, 所以 T 可逆,它的逆变换在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

8．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性空间的一组基，线性变换 T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,2,-3)^T$，求 T（α）在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标。

解 法 1　用公式

T（α）在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\\-2\end{pmatrix}$$

法 2

$$\begin{aligned}T(\alpha)&=T(\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3)\\&=T(\alpha_1)+2T(\alpha_2)-3T(\alpha_3)\\&=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+2(2\alpha_1+\alpha_2)-3(-\alpha_1+\alpha_3)\\&=8\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3\end{aligned}$$

于是 T（α）在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\left(8,1,-2\right)^T$.

9. 已知 T 是 R^4 上的线性变换，T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$$

求 T 在基

$$\begin{aligned}\beta_1&=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4\\\beta_2&=3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4\\\beta_3&=\alpha_4+\alpha_3\\\beta_4&=2\alpha_4\end{aligned}$$

下的矩阵.

解　由题设有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$$

即由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$$

计算得

$$C^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&2&0&0\\4&2&6&0\\-3&0&-3&3\end{pmatrix}$$

所以T在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的矩阵为

$$\begin{aligned}B&=C^{-1}AC\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&2&0&0\\4&2&6&0\\-3&0&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&-9&9&2\\6&12&30&30\\24&-48&120&120\\0&3&-21&-24\end{pmatrix}\end{aligned}$$

习题 8.4

1.已知复数域上的线性空间V的线性变换T在V的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$$

（1）　求线性变换T的特征值与特征向量；

（2） 判断线性变换 T 可否在空间 V 的一组基下的矩阵为对角阵.

解 (1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-3 & 1\\ -2 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-2)^2$

A的特征值λ_1=4，λ_2=λ_3=2

线性变换T的特征值λ_1=4，λ_2=λ_3=2

对λ_1=4，解线性方程组（$4E-A$）$X=0$得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

T属于特征值λ_1=4的线性无关的特征向量为$\xi_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

T属于特征值λ_1=4的全体的特征向量为$k_1\xi_1(k_1\neq 0)$.

对λ_2=λ_3=2，解线性方程组（$2E-A$）$X=0$得基解系

$$X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

T属于特征值λ_2=λ_3=2的线性无关的特征向量为$\xi_2=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

T属于特征值λ_2=λ_3=2的全体的特征向量为$k_2\xi_2(k_2\neq 0)$.

(2) 由于线性变换T属于2重特征值$\lambda_2=\lambda_3=2$的线性无关的特征向量只有1个，
所以线性变换T不可以在空间一组基下的矩阵为对角阵.

2. 已知复数域上的 3 维线性空间 V 的线性变换 T 在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

（1） 求线性变换 T 的特征值与特征向量；

（2） 判断线性变换 T 可否在空间 V 的一组基下的矩阵为对角阵，如果可以，写出对角阵和这组基以及由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到这组基的过渡矩阵.

（3） 写出满足 $T^{-1}AT$ 为对角阵的可逆矩阵 T.

解　(1)　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 1\\ 2 & \lambda+2 & -2\\ -3 & -6 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)^2$

A的特征值$\lambda_1=-4$，$\lambda_2=\lambda_3=2$

线性变换T的特征值$\lambda_1=-4$，$\lambda_2=\lambda_3=2$

对$\lambda_1=-4$，解线性方程组（$-4E-A$）$X=0$得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

T属于特征值$\lambda_1=-4$的线性无关的特征向量为$\xi_1=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3$

T属于特征值$\lambda_1=-4$的全体的特征向量为$k_1\xi_1(k_1\neq 0)$.

对$\lambda_2=\lambda_3=2$，解线性方程组（$2E-A$）$X=0$得基解系

$$X_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

T属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=2$的线性无关的特征向量为$\xi_2=-2\alpha_1+\alpha_2,\xi_3=\alpha_1+\alpha_3$

T属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=2$的全体特征向量为$k_2\xi_2+k_3\xi_3(k_2,k_3$不全为$0)$.

（2）因为线性变换 T 有 3 个线性无关的特征向量，所以 T 可以在空间 V 的一组基下的矩阵为对角阵，这个对角阵为

$$\begin{pmatrix}-4 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

这组基为$\xi_1=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3,\xi_2=-2\alpha_1+\alpha_2,\xi_3=\alpha_1+\alpha_3$.

由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到这组基$\xi_1,\xi_2,\xi_3$的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -2 & 1\\ -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（3）满足$T^{-1}AT$为对角阵的可逆矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -2 & 1\\ -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是 3 维线性空间 V 的一组基，T 是 V 的一个线性变换，已知

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2-3\varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_2)=-\varepsilon_1+4\varepsilon_2-3\varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_3)=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+5\varepsilon_3$$

（1） 求线性变换 T 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵 A；

（2） 求线性变换 T 的特征值与特征向量；

（3） 能否找到一组基，使得线性变换 T 在这组基下的矩阵为对角阵？如果可以，写出对角阵和这组基。

解：（1） $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$

A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$

A的属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$线性无关的特征向量为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

A的属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$全部特征向量为

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

T 属于 2 重根 2 的线性无关的特征向量为$\xi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2$， $\xi_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3$

T 属于 2 重根 2 的全体特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$， (k_1,k_2 不全为 0)

A的属于特征值$\lambda_3=6$线性无关的特征向量为

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

A的属于特征值$\lambda_3=6$全部特征向量为$k_3\alpha_3$

T属于特征根 6 的线性无关的特征向量为$\xi_3=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+3\varepsilon_3$

T属于特征根 6 的全体特征向量为 $k_3\xi_3$ ，($k_3\neq 0$)

(3)因该线性变换有3个线性无关的特征向量，所以存在一组基，
使线性变换在这组基下的矩阵为对角阵。

对角阵为$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$，这组基为$\xi_1,\xi_2,\xi_3$

4. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是 3 维线性空间 V 的一组基，$T$是 V 的一个线性变换，已知

$$T(\varepsilon_1)=5\varepsilon_1+6\varepsilon_2-3\varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_2)=-\varepsilon_1+\varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

（1） 求线性变换 T 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵 A；

（2） 求线性变换 T 的特征值与特征向量；

（3）能否找到一组基，使得线性变换 T 在这组基下的矩阵为对角阵？

解（1）$A=\begin{pmatrix}5&-1&1\\6&0&2\\-3&1&1\end{pmatrix}$

(2) $\left|\lambda E-A\right|=(\lambda-2)^3$

A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$

A的属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$线性无关的特征向量为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

A的属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$全部特征向量为

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

T属于 3 重根 2 的线性无关的特征向量为$\xi_1=\varepsilon_1+3\varepsilon_2$，$\xi_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3$

T属于 3 重根 2 的全体特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$

其中 k_1,k_2 不全为 0

(3)因线性变换T属于3重特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$线性无关的特征向量只有2个，所以，找不到一组基，使线性变换T在这组基下的矩阵为对角阵。

5. 已知 $P[x]_3$ 的线性变换 T:

$$\begin{aligned}T[f(x)]&=T(a_0+a_1x+a_2x^2)\\&=(4a_0+6a_1)+(-3a_0-5a_1)x+(-3a_0-6a_1+a_2)x^2\\&(\forall f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in P[x]_3)\end{aligned}$$

(1) 求T的特征值与特征向量;

(2) 判断T可否在$P[x]_3$的一组基下的矩阵为对角阵, 如果可以，写出这组基和对角阵.

解 （1）

$$T(1)=4-3x-3x^2$$
$$T(x)=6-5x-6x^2$$
$$T(x^2)=x^3$$

T在基$1,x,x^2$,下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

A的特征值$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

线性变换T的特征值$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

对$\lambda_1=-2$，解线性方程组（$-2E-A$）$X=0$得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

T属于特征值$\lambda_1=-2$的线性无关的特征向量为$f_1=-1+x+x^2$

T属于特征值$\lambda_1=-2$的全体的特征向量为$k_1f_1(k_1\neq 0)$.

对$\lambda_2=\lambda_3=1$，解线性方程组（$E-A$）$X=0$得基解系

$$X_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

T属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的线性无关的特征向量为$f_2=-2+x,f_3=x^2$

T属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的全体特征向量为$k_2f_2+k_3f_3(k_2,k_3$不全为$0)$.

(2) 因为线性变换T有3个线性无关的特征向量，所以T可以在空间$P[x]_3$的一组基下的矩阵为对角阵，这个对角阵为

$$\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

这组基为$f_1=-1+x+x^2,f_2=-2+x,f_3=x^2$.

6. 已知数域上 P 的 n 维线性空间 V 上的线性变换 T 在 V 的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{pmatrix}$$

证明：T 在 V 的任一组基下的矩阵都不可能为对角阵.

证 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda-a & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)^n$$

a是矩阵A的n重特征根，a也是线性变换T的n重特征值.

$$aE-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(aE-A)=n-1, A$属于n重特征值a的线性无关的特征向量只有1 个，
于是线性变换T属于n重特征值a的线性无关的特征向量也只有1个，

所以 T 在 V 的任一组基下的矩阵都不可能为对角阵.

7. 设λ_1,λ_2是线性变换 T 的两个不同特征值，ξ_1,ξ_2是 T 分别属于λ_1,λ_2的特征向量，证明：$\xi_1+\xi_2$不是 T 的特征向量.

证 用反证法：假设$\xi_1+\xi_2$是 T 的特征向量，它所对应的特征值为λ，即

$T(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)$

即$T(\xi_1)+T(\xi_2)=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$

又由已知有

$T(\xi_1)=\lambda_1\xi_1$，$T(\xi_2)=\lambda_2\xi_2$

$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$

$(\lambda_1-\lambda)\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2=\theta$

$\because \lambda_1\neq\lambda, \therefore \xi_1,\xi_2$线性无关，于是

$\lambda_1-\lambda=0$，$\lambda_2-\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda$，$\lambda_2=\lambda\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2$

与已知矛盾，假设不成立，即$\xi_1+\xi_2$不是T的特征向量.

8. 如果线性空间 V 的线性变换 T 以 V 中每个非零向量为它的特征向量，证明：T 是数乘变换.

证 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基，由已知$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$是$T$的特征向量，有

$$T\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$$

$\because$由已知$\alpha_i+\alpha_j$也是T的特征向量，由7题的证明知

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$$

即有

$$T\alpha_i=\lambda\alpha_i,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$\forall\alpha\in V,\alpha\neq\theta$，设

$$\begin{aligned}\alpha&=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\\ T(\alpha)&=T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)\\ &=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_nT(\alpha_n)\\ &=k_1\lambda\alpha_1+k_2\lambda\alpha_2+\cdots+k_n\lambda\alpha_n\\ &=\lambda(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)\\ &=\lambda\alpha\end{aligned}$$

当$\alpha=\theta$时，$T(\theta)=\theta=\lambda\theta$

因此 $\forall\alpha\in V,T(\alpha)=\lambda\alpha.$

所以 T 是数乘变换.

习题 8.5

1．已知 4 维线性空间 V 的线性变换 T 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&4&-1&3\\1&2&1&0\\1&2&2&-1\\2&4&1&1\end{pmatrix}$$

（1）求 T 的秩与 $T(V)$的一组基；

（2）求 T 的零度与 $\ker(T)$的一组基.

解 $$A=\begin{pmatrix}2&4&-1&3\\1&2&1&0\\1&2&2&-1\\2&4&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

T 的秩 = $R(A)$=2，因 A 的第 1、3 两列线性无关，所以 $T(\alpha_1)=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,T(\alpha_3)=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关，是 $T(V)$的一组基.

(2) A的零度=4－2=2 .

$\forall \xi \in \ker(T)$, 设ξ的坐标为$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则$T(\xi)$坐标为AX, 由ξ满足$T\xi=\theta$, 知其坐标满足

$$AX=0$$

上述齐次线性方程组的基础解系为

$$X_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}-1`\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以 $\ker(T)$的一组基为$\xi_1=-2\alpha_1+\alpha_2, \xi_2=-\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$.

2. 在 R^3 上定义线性变换 T

$$T(\alpha)=A\alpha,\quad (\forall \alpha \in R^3)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&3&1\\4&5&-1\end{pmatrix}$$

（1） 求 T 的像集的一组基和 T 的秩;

（2） 求 T 的核的一组基和 T 的零度。

解 在 R^3 中取原始基 $\varepsilon_1=(1,0,0), \varepsilon_2=(0,1,0), \varepsilon_3=(0,0,1)$，则矩阵 A 就是线性变换 T 在 R^3 的原始基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&3&1\\4&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2$,所以T的秩为2, 因A的前两列线性无关，所以T的像集$T(V)$的一组基为

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+4\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad T(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

(2)　T的零度为3-2=1；$\forall\alpha\in\ker(T)$,设α的坐标为$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$T(\alpha)$坐标为AX,
由α满足$T(\alpha)=\theta$有坐标满足 $AX=0$,解得方程组$AX=0$的一个基础解系为

$$\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$$

于是T的核的一组基为$\alpha=4\varepsilon_1-3\varepsilon_2+\varepsilon_3=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$.

3. 已知 4 维线性空间 V 的线性变换 T 在 V 的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-3\\2&1&1&1\\1&1&2&2\\2&3&-5&-17\end{pmatrix}$$

求 T 的像集 $T(V)$与核 $\ker(T)$.

解　$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-3\\2&1&1&1\\1&1&2&2\\2&3&-5&-17\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

T 的秩 = $R(A)$=3，因 A 的第 1、2、3 列线性无关，所以 $T(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4, T(\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4, T(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-5\alpha_4$ 线性无关，是 $T(V)$的一组基.

$$\begin{aligned}T(V)&=L(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-5\alpha_4)\\&=k_1(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)+k_2(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-5\alpha_4)\end{aligned}$$

k_1,k_2,k_3为数域P中的任意数

A的零度=$4-3$=1 .

$\forall\alpha\in\ker(T)$,设α的坐标为$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则$T(\alpha)$坐标为AX,由α满足$T(\alpha)=\theta$,
其坐标满足

$$AX=0$$

上述齐次线性方程组的基础解系为 $X_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}$ 所以 ker(T) 的一组基为

$\alpha=-\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4$

$\ker(T)=L(-\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4)=k(-\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4)$
k为数域P中的任意数.

4. 已知P^3的线性变换T:
$T(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$, $(\forall(a,b,c)\in P^3)$
求T的像集$T(P^3)$与核$\ker(T)$.

取P^3的原始基$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$

先求T在基ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵：

$T(\varepsilon_1)=(1,0,1)=\varepsilon_1+\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_2)=(2,1,1)=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_3)=(-1,1,-2)=-\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3$

T在基ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2=\dim T(P^3)$，A的第1、2列线性无关，

所以$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\varepsilon_3=(1,0,1),T(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=(2,1,1)$是$T(P^3)$的一组基

$T(P^3)=L(\varepsilon_1+\varepsilon_3,2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=L((1,0,1),(2,1,1))$

$\quad\quad=k_1(1,0,1)+k_2(2,1,1)$

$(k_1,k_2$为任意常数)

$\ker(T)$的维数为1，$\forall\xi\in\ker(T)$,设ξ的坐标为X,则$T(\xi)$的坐标为AX，

因$T(\xi)=\theta$,所以坐标$AX=0$.

解方程组$AX=0$得基解系为

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

于是$\ker(T)$的一组基为$3\varepsilon_1-(3,-1,1)\varepsilon_2+\varepsilon_3=$

$\ker(T)=L(3\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=L((3,-1,1))=k(3,-1,1).$

$(k$为任意常数)

习题 8.6

1. 设V_1,V_2是线性空间 V 的线性变换 T 的不变子空间，

证明：$V_1+V_2,V_1\cap V_2$ 也是 T 的不变子空间.

证　$\forall \alpha \in V_1 + V_2$，$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，（$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_2 \in V_2$）

因为V_1, V_2都是$T-$子空间，所以$T(\alpha_1) \in V_1, T(\alpha_2) \in V_2$

于是$T(\alpha) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) \in V_1 + V_2$，

因此$V_1 + V_2$是$T-$子空间.

$\forall \alpha \in V_1 \bigcap V_2$，

因为$\alpha \in V_1$，$\alpha \in V_2$，所以$T(\alpha) \in V_1$，$T(\alpha) \in V_2$

于是$T(\alpha) \in V_1 \bigcap V_2$

因此$V_1 \bigcap V_2$是$T-$子空间.

2. 已知 $P^{2\times2}$ 的线性变换 T

$$T(A) = MA - AM \quad (\forall A \in P^{2\times2}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| x_2 + x_3 = 0, x_i \in P \right\} \text{是}V\text{的子空间,}$$

证明：W是T的不变子空间.

证　$\forall A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in P^{2\times2}$,

$$T(A) = MA - AM$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_4 - x_1 \\ x_1 - x_4 & x_2 - x_3 \end{pmatrix},$$

因为$x_4 - x_1 +$（$x_1 - x_4$）$=0$

所以$T(A) \in W$

因此W是T的不变子空间.

3. 已知 4 维线性空间 V 的线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, e_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4, W = L(e_1, e_2)$$

证明：W 是 T 的不变子空间.

证　e_1, e_2在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标向量为$X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$

$T(e_1)$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标向量为

$$Y_1=AX_1=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&4&-2\\2&-1&0&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$T(e_1)=\alpha_1+2\alpha_2=e_1\in W,$

$T(e_2)$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标向量为 .

$$Y_2=AX_2=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&4&-2\\2&-1&0&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$T(e_2)=\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4=e_2\in W.$

所以W是$T-$子空间.

4. 已知 3 维线性空间 V 的线性变换 T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

证明：$W=L(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_3)$ 是 T 的不变子空间.

证 法 1　由已知有

$T(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$

$T(\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$

$T(\alpha_3)=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

$\forall\beta\in W,$设$\beta=k_1(-\alpha_1+\alpha_2)+k_2(-\alpha_1+\alpha_3)$，则

$$\begin{aligned}T(\beta)&=T(k_1(-\alpha_1+\alpha_2)+k_2(-\alpha_1+\alpha_3))\\&=k_1T(-\alpha_1+\alpha_2)+k_2T(-\alpha_1+\alpha_3)\\&=-k_1T(\alpha_1)+k_1T(\alpha_2)-k_2T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_3)\\&=-k_1(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)+k_1(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)-k_2(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)+k_2(2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)\\&=-k_1(-\alpha_1+\alpha_2)-k_2(-\alpha_1+\alpha_3)\in W\end{aligned}$$

所以$W=L(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_3)$ 是 T 的不变子空间.

法 2　令$e_1=-\alpha_1+\alpha_2, e_2=-\alpha_1+\alpha_3,$则$W=L(e_1,e_2)$

所以只需证 $T(e_1)\in W, T(e_2)\in W$ 即可

e_1, e_2在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标向量为$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

设$T(e_i)$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标向量为$Y_i$，$(i=1,2)$

$$Y_1=AX_1=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

坐标向量组成的矩阵

$$\left(Y_1, X_1, X_2\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以坐标向量组Y_1，X_1，X_2线性相关，秩为2，X_1，X_2线性无关，所以Y_1可经X_1，X_2线性表出，于是向量$T(e_1)$可经e_1, e_2线性表出，因此$T(e_1)\in W$.

$$Y_2=AX_2=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

坐标向量组成的矩阵

$$\left(Y_2, X_1, X_2\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

坐标向量组Y_2，X_1，X_2线性相关，秩为2，X_1，X_2线性无关，所以Y_2可经X_1，X_2线性表出，于是$T(e_2)$可经α_1, α_2线性表出，因此$T(e_2)\in W$.

因为$T(e_1)$，$T(e_2)\in W$，所以W是$T-$子空间.

习题八

（A）

一、填空

1．已知 3 维线性空间 V 的线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&1\\2&4&3\end{pmatrix}$$

则 T 在基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$ 下的矩阵为____________________.

解 因

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_1)&=\alpha_1 \quad -\alpha_2+2\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_3-\alpha_2\\
T(\alpha_3)&=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_3+\alpha_2\\
T(\alpha_2)&=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=\alpha_1+4\alpha_3+3\alpha_2
\end{aligned}
$$

于是 T 在基 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$ 下的矩阵为

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

2． 设 3 维线性空间 V 上的线性变换 T 将空间的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 变为

$$
T(\alpha_1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},T(\alpha_2)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},T(\alpha_3)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},
$$

$\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，则 T 将 α 变为______________.

解

$$
\begin{aligned}
T(\alpha)&=T(2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)\\
&=2T(\alpha_1)-T(\alpha_2)+T(\alpha_3)\\
&=2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3．R^3 上的线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ ，则 $T\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为___________.

解 因 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,则 $T\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4．R^3上的线性变换 T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ ，则 $T\alpha$ 由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出的表达式为__________.

解 因在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,2-1)^T$,

所以$T\alpha$基α_1，α_2，α_3下的坐标为

$$T\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

于是

$T\alpha=2\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3$.

5. 设线性空间 V 的线性变换 T,S 在 V 的某组基下的矩阵分别为 A,B,则线性变换 $2TS+T^3$ 在同一组基下的矩阵为____________.

解 因线性变换的运算对应于矩阵的运算,所以线性变换 $2TS+T^3$ 在同一组基下的矩阵为 $2AB+A^3$

6．设线性空间 V 的 T,S 线性变换在 V 的某组基下的矩阵分别为 A，B，则线性变换 $3T^2+5S-2\varepsilon$ 在同一组基下的矩阵为____________。

解 因线性变换的运算对应于矩阵的运算,所以线性变换 $3T^2+5S-2\varepsilon$ 在同一组基下的矩阵为 $3A^2+5B-2E$.

7．2 维线性空间 V 的线性变换 T 在基α_1,α_2下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$V$ 的另一组基为

$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$,则线性变换 T 在基 β_1,β_2 下的矩阵为______________.

解

因为$\left(\beta_1,\beta_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

即由基α_1,α_2到基β_1,β_2的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$,

计算得$C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

所以T在基β_1,β_2下的矩阵为

$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

8. 数域 P 上的 3 维线性空间 V 的全体线性变换构成的线性空间 $L(V)$的维数为_______.

解 因 $L(V)$与 $P^{3\times3}$ 同构，而 $P^{3\times3}$ 的维数为 9，所以 $L(V)$的维数为 9.

9． 可逆线性变换 T 有一个特征值为 2，则 $T^{1}-5E$ 有一个特征值为__________________。

解 因T^{-1}的特征值为$\dfrac{1}{2}$，所以$T^{-1}-5E$的特征值为$\dfrac{1}{2}-5=-\dfrac{9}{2}$.

10. 已知 3 维线性空间 V 的秩为 1，则 V 的零度为__________.

解 因

$$V\text{ 的秩}+V\text{ 的零度}=\text{线性空间的维数}$$

即

$$1+V\text{ 的零度}=3$$

所以 V 的零度=2.

11. 在 R^3 上的线性变换 T 为

$$T(\alpha)=A\alpha$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad (\forall\alpha\in R^3)$$

则 T 的秩为__________, T 的零度为__________.

解

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因 R(A)=2, 所以 T 的秩为 2， T 的零度为 $3-2=1$.

12. 8 维线性空间 V 上的线性变换 T 在空间的一组基下的矩阵为 A,已知齐次

线性方程组 Ax=**0** 的解空间的维数是 3，则线性变换 T 的零度与秩依次为________.

解 因齐次线性方程组的解空间的维数即 T 的零度，所以 T 的零度为 3，

由已知$n-R(A)$=3，于是$R(A)$=$n-3=8-3=5$. 即线性变换的秩为5.

二、单项选择

1． 设 T 是三维行向量空间 P^3 上的变换，下列 T 是线性变换的是（　　）.

(A) $T(a_1,a_2,a_3) = (a_1,a_2+a_3,a_1-a_3)$

(B) $T(a_1,a_2,a_3)=$ （a_1^2,a_2^2,a_3^2）

(C) $T(a_1,a_2,a_3)=$ （a_1^3,a_2,a_3）

(D) $T(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_1a_2,a_1+a_2+a_3)$

$(\forall(a_1,a_2,a_3)\in P^3)$

解 用线性变换的定义进行判断.

对（A）： $\forall X=\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right),Y=\left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)\in$ P^3 和 $k\in P$，有

$$
\begin{aligned}
&T(X+Y)=T\left(a_1+b_1,\ \ a_2+b_2,\ \ a_3+b_3\right)\\
&=\left(a_1+b_1,\ \ a_2+b_2+a_3+b_3,\ \ a_1+b_1-a_3-b_3\right)\\
&=\left(a_1,\ \ a_2+a_3,\ \ a_1-a_3\right)+\left(b_1,\ \ b_2+b_3,\ \ b_1-b_3\right)\\
&=T(X)+T(Y)\\
&T(kX)=T\left(ka_1,\ \ ka_2,\ \ ka_3\right)\\
&=\left(ka_1,\ \ ka_2+ka_3,\ \ ka_1-ka_3\right)\\
&=k\left(a_1,\ \ a_2+a_3,\ \ a_1-a_3\right)\\
&=kT(X)
\end{aligned}
$$

所以 T 是线性变换. 选 A.

2．设 T_1,T_2 是 R^2 上的线性变换：

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\x-2y\end{pmatrix},T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix},(\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2)$$

令

$$(T_1T_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

则$A=$（　　）.

$(A)\begin{pmatrix}3&1\\-1&-3\end{pmatrix}$　$(B)\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$　$(C)\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$　$(D)\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

解

$$(T_1T_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T_1(T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=T_1\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+2(x+y)\\x-y-2(x+y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

则$A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&-3\end{pmatrix}$.

选 A.

3. R^3上的线性变换 T 在基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

则 T 在基$\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&\frac{1}{2}&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&4&1\\0&4&4\\1&-2&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2&4&2\\0&2&4\\2&-2&2\end{pmatrix}$

解

$$T(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_3=\alpha_1+0\cdot(2\alpha_2)+\alpha_3$$
$$T(2\alpha_2)=2T(\alpha_2)=2(2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=4\alpha_1+1\cdot(2\alpha_2)-2\alpha_3$$
$$T(\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+1\cdot(2\alpha_2)+\alpha_3$$

于是 T 在基 $\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

选 C.

4．R^3 上的线性变换 $\boldsymbol{T}$在基

$$e_1, e_2, e_3$$

下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$在基 e_3, e_2, e_1 下的矩阵为(　C.　).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解　$T(e_3)=2e_1+e_2-e_3=-e_3+e_2+2e_1$

$T(e_2)=-e_1+2e_3=2e_3-e_1$

$T(e_1)=e_1+2e_2+e_3=e_3+2e_2+e_1$

所以T在基e_3, e_2, e_1下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

选 C.

5.　设 3 维线性空间 V 上的线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $T(\alpha)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为（　　）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

解 $T(\alpha)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

选 B.

6．已知可逆线性变换 $\boldsymbol{T}$ 有一个特征值为 2，则线性变换 $\boldsymbol{T}^2+2\boldsymbol{T}^{-1}-\boldsymbol{\varepsilon}$ 有一个特征值为（　　）.

(A)　1　(B)　2　(C)　3　(D)　4

解 因 T^{-1}的特征值为$\dfrac{1}{2}$，所以$T^2+2T^{-1}-\varepsilon$有一个特征值为4+1－1=4. 选 D.

7. 6 维线性空间 V 的线性变换 $\boldsymbol{T}$在 V 的某组基下的矩阵为 A，已知线性方程组 AX=0 的解空间的维数为 4，则线性变换 $\boldsymbol{T}$的秩为(　　).

(A)　0　(B)　1　(C)2　(D)　3

解　因齐次线性方程组的解空间的维数为 $n-R(A)$,由已知$n-R(A)$=4，$R(A)$=$n-4=6-4=2$. 即线性变换的秩为2. 选 C.

（B）

1．设线性空间 $R^{2\times2}$ 上的线性变换 T 为

$$T(X)=AX \qquad \forall X\in R^{2\times2}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

求 T 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵。

解

$$T(E_{11})=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}=E_{11}+3E_{21}$$

$$T(E_{12})=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}=E_{12}+3E_{22}$$

$$T(E_{21})=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=2E_{11}+4E_{21}$$

$$T(E_{22})=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}=2E_{12}+4E_{22}$$

于是 T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}$$

2．设线性空间 R^3 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ 在线性变换 T 下的像分别为

$T(\alpha_1)=\beta_1=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix},T(\alpha_2)=\beta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix},T(\alpha_3)=\beta_3=\begin{pmatrix}-5\\-1\\9\end{pmatrix}.$

(1) 求 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 求 $T(\beta_1),T(\beta_2),T(\beta_3)$.

解 （1）因

$$T(\alpha_1)=\beta_1=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix},T(\alpha_2)=\beta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix},T(\alpha_3)=\beta_3=\begin{pmatrix}-5\\-1\\9\end{pmatrix}$$

设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=T(\alpha_1)=\beta_1$$
$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=T(\alpha_2)=\beta_2$$
$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=T(\alpha_3)=\beta_3$$

由于上述三个方程组的系数矩阵是相同的，所以我们将三个增广矩阵合为一个矩阵并将其化为行最简阶梯形求解.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 3 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

在上述行最简阶梯形中的右边的子块中的 3 列分别是 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标，于是线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）

$$\begin{aligned} T(\beta_1) &= T(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) \\ &= 2T(\alpha_1)-T(\alpha_2)-T(\alpha_3) \\ &= 2\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\beta_2) &= T(3\alpha_1+\alpha_3) \\ &= 3T(\alpha_1)+T(\alpha_3) \\ &= 3\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\beta_3) &= T(5\alpha_1-\alpha_2) \\ &= 5T(\alpha_1)-T(\alpha_2) \\ &= 5\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 已知 $P[x]_4$ 的线性变换 T:

$T[f(x)] = T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$

$= (a_0 + a_1) + (a_0 - a_1)x + (a_2 + a_3)x^2 + (a_2 - a_3)x^3$

$(\forall f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P[x]_4)$

(1) 求T在$P[x]_4$的基$1, x, x^2, x^3$下的矩阵；

（2） 判断T是否可逆，若T可逆，求出 T^{-1} .

解 （1）

$T(1) = 1 + x$

$T(x) = 1 - x$

$T(x^2) = x^2 + x^3$

$T(x^4) = x^2 - x^3$

T在基$1, x, x^2, x^3$下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 因为$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$,所以 A可逆，计算得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A^{-1}是T^{-1}在基$1, x, x^2, x^3$下的矩阵，即有

$$T^{-1}(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2, x^3)A^{-1}$$

$$T^{-1}[f(x)]=T^{-1}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)$$

$$=T^{-1}\left[(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right]=[T^{-1}(1,x,x^2,x^3)]\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$=(1,x,x^2,x^3)A^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(a_0+a_1)+\frac{1}{2}(a_0-a_1)x+\frac{1}{2}(a_2+a_3)x^2+\frac{1}{2}(a_2-a_3)x^3$$

4. 已知P^3的 线性变换T:

$T(a,b,c)=(3a+b,-a+b,-a-b+2c),\quad (\forall(a,b,c)\in P^3)$

求T的特征值与特征向量，并判断T是否可在P^3的一组基下的矩阵为对角阵.

解　取P^3的一组基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$

$T(\varepsilon_1)=(3,-1,-1)=3\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_2)=(1,1,-1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_3)=(0,0,2)=2\varepsilon_3$

T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\1&\lambda-1&0\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

A的特征值为2(3重），故T的特征值为2(3重).

解方程组　$(2E-A)X=0$得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

T属于3重特征值2的线性无关的特征向量为$\alpha_1=-\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\alpha_2=\varepsilon_3$

T属于3重特征值2的全体特征向量为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$　(k_1，k_2不全为0)

由于T属于3重特征值2的线性无关的特征向量只有两个，所以T不可以在P^3的一组基下的矩阵为对角

5. 已知P^3的线性变换T:

$T(a,b,c)=(-2b-2c,-2a+3b-c,-2a-b+3c),\quad (\forall (a,b,c)\in P^3)$

求P^3的一组基, 使T在这组基下的矩阵为对角阵, 并写出这个对角阵.

解　取P^3的一组基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$

$T(\varepsilon_1)=(0,-2,-2)=-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_2)=(-2,3,-1)=-2\varepsilon_1+3\varepsilon_2-\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_3)=(-2,-1,-3)=2-\varepsilon_1-\varepsilon_2-3\varepsilon_3$

T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-2&3&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\2&\lambda-3&1\\2&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+2)$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=-2$

T的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=-2$

解方程组（$4E-A)X=0$得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

T属于$\lambda_1=\lambda_2=4$的线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=-\varepsilon_1+2\varepsilon_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=-\varepsilon_1+2\varepsilon_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

T属于$\lambda_1=\lambda_2=4$的全体特征向量为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$　(k_1，k_2不全为0).

解方程组（$-2E-A)X=0$得基解系

$$X_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

T属于$\lambda_3=-2$的线性无关的特征向量为$\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

T属于$\lambda_3=-2$的全体的特征向量为$k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，是$P^3$的一组基，$T$在这组基下的矩阵为对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&-2\end{pmatrix}$$

6. 已知 $P[x]_4$ 的线性变换 T:

$T[f(x)] = T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$
$= (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)x + (a_2 - a_0)x^2 + (a_3 - a_1)x^3$
$(\forall f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P[x]_4)$
求$P[x]_4$的一组基，使在这组基下的矩阵为对角阵, 并写出这个对角阵

解

取$P[x]_4$的一组基$1,x,x^2,x^3$

$T(1)=1-x^2$

$T(x)=x-x^3$

$T(x^2)=-1+x^2$

$T(x^4)=-x+x^3$

T在基$1,x,x^2,x^3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1&0\\0&\lambda-1&0&1\\1&0&\lambda-1&0\\0&1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)^2$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=2$

T的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=2$

解方程组$\left(0E-A\right)X=0$即$AX=0$得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

T属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的线性无关的特征向量为$f_1(x)=1+x^2$，$f_2(x)=x+x^4$

T属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的全体特征向量为$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$　(k_1，k_2不全为0).

解方程组（$2E-A)X=0$得基解系

$$X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},X_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

T属于$\lambda_3=\lambda_4=2$的线性无关的特征向量为$f_3(x)=-1+x^2$，$f_4(x)=-x+x^4$

T属于$\lambda_3=\lambda_4=2$的全体的特征向量为$k_3f_3(x)+k_4f_4(x)$　(k_3，k_4不全为0).

$f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$线性无关,是$P[x]_4$的一组基，$T$在这组基下的矩阵为对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$$

7．设线性变换 T：

$$T(\alpha)=A\alpha, \quad \forall \alpha \in R^4$$

T 在 R^4 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 & 25 \\ 2 & 4 & 9 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 4 & 8 & 17 & 35 \end{pmatrix}$$

（1）求线性变换的像集 $T(V)$ 的维数和一组基；

（2）求线性变换的核 $\ker(T)$ 的维数和一组基.

解 在 R^4 中取原始基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，则 T 在 R^4 的原始基下的矩阵为 A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 & 25 \\ 2 & 4 & 9 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 4 & 8 & 17 & 35 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$,所以 $T(V)$ 的维数是3, A 的第1,3,4列线性无关,于是 T 的像集 $T(V)$ 的一组基为

$$\begin{aligned} T(\alpha_1) &= 3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+4\alpha_4, \\ T(\alpha_3) &= 13\alpha_1+9\alpha_2+3\alpha_3+17\alpha_4, \\ T(\alpha_4) &= 25\alpha_1+15\alpha_2+13\alpha_3+35\alpha_4 \end{aligned}$$

(2) 齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\ker(T)$ 的维数为1, 一组基为 $-2\alpha_1+\alpha_2$.

8. 已知 4 维线性空间 V 的线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（1） 线性变换 T 的特征值与特征向量；

（2） 求 V 的一组基，使线性变换 T 在这组基下的矩阵为对角阵，并写出这个对角阵；

（3） 求线性变换 T 的像集与核.

解 （1）线性变换 T 的特征值为 1（2 重）和 0（2 重）.

对2重特征值1，解方程组$(E-A)X=0$, 得基解系

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是线性变换T属于2重特征值1的线性无关的特征向量为

$\xi_1=\alpha_1+\alpha_3$， $\xi_2=\alpha_4$

T属于2重特征值1的全体特征向量为

$k_1\xi_1+k_2\xi_2$， $(k_1,k_2$不全为$0)$

对2重特征值0，解方程组$\left(0E-A\right)X=0$即$AX=0$, 得基解系

$$X_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

于是线性变换T属于2重特征值0的线性无关的特征向量为

$\xi_3=\alpha_2$， $\xi_4=\alpha_3$

T属于2重特征值0的全体特征向量为

$k_3\xi_3+k_4\xi_4$， $(k_3,k_4$不全为$0)$

（3） （1）中的 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 线性无关，为 V 的一组基，线性变换 T 在这组基下的矩阵为

对角阵

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$$

（3） $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

T 的秩= $R(A)$=2，因 A 的第 1、4 列线性无关，所以 $T(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_3, T(\alpha_4)=\alpha_4$ 线性无关，

是像集 $T(V)$的一组基.

$$T(V)=L(T(\alpha_1),T(\alpha_4))=L(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_4,).$$

A的零度$=4-2=2$.

$\forall\xi\in\ker(T)$, 设ξ的坐标为$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$， 则$T(\xi)$坐标为AX, 由ξ 满足$T(\xi)=\theta$, 其坐标满足

$$AX=0$$

齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$X_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以 $\ker(T)$的一组基为$\xi_1=\alpha_3,\xi_2=\alpha_4$, $\ker(T)=L(\alpha_3,\alpha_4)$.

9. 已知 n 维线性空间 V 的线性变换 T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为 A且$A\neq O$,

存在自然数 k，使 A 满足 $A^k=O$.

证明：T 在线性空间 V 的任一组基下的矩阵都不可能为对角阵.

证 设 A 的特征值为λ，因 $A^k=0$,故λ^k=0，于是λ=0（n 重）

用反证法，假设 A 相似于对角阵，因 A 的特征值全为 0，则此对角阵必为零矩阵，于是存在可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP=O$$

解之得 $A=O$, 与已知矛盾，故假设不成立，即 A 必不相似于对角阵.

因此线性变换 T 在线性空间 V 的任一组基下的矩阵都不可能为对角阵.

10. 设 T 是 n 维线性空间 V 的可逆线性变换，V 的子空间 W 是 T 的不变子空间，证明：W 也是的 T^{-1} 的不变子空间.

证　设W的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,将其扩充为$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,则$T$在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

其中，A_1为r阶矩阵，A_2为$r+1$阶矩阵.

因为T可逆，所以A可逆，

$$|A|=\begin{vmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{vmatrix}=|A_1||A_2|\neq 0\Rightarrow |A_1|\neq 0,|A_2|\neq 0$$

因此A_1,A_2可逆

因为$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}BA_2^{-1} \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$

由定理 8.12 知 W 是的 T^{-1} 的不变子空间.