dengyang19900908(VX) 15208369715 通博B532? 周三 周一下午 2:00-5:00

Notes **Review**

泛函 微分方程 非交换几何 期中考试 10%

调和分析 期末考试 70%

刘炳初《泛函分析》第三版 考勤+作业 20%

巴拿赫空间. 一致有界定理

§1

- 距离空间:

定义: 度量空间为一有序对 (X,d) 其中 X 为集合 d 为距离

$d: X\times X \to [0,\infty)$ $\forall x\in X$ $y\in X$

$d(x,y)\geq 0$ $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

例子: $X=\{$世界上所有的机场$\}$

$d: X\times X\to[0,+\infty)$

$A=$(阿姆) $C=$(成都)

$d(A,C)=$ 从 $A\to C$ 所需要的时间

验证 $d(A,C)\geq 0$ $d(A,C)=0 \Leftrightarrow A=C$

$d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)$

$d(A,C)\neq d(C,A)$ 地球自转

R^3 $x=(x_1,x_2,x_3)$ $y=(y_1,y_2,y_3)$ 验证 推三角不等式

$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$

- 离散空间: (D,d) $d: D\times D\to[0,+\infty)$

$x,y\in D$ $d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$

验证 $d(x,y)\geq 0$ $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ 左至多为1 右至少为1

- 集合: A中元素个数 / 有限

\ 无限 / 可数 A_n 可数 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 可数

\ 不可数 $[0,1]$ R.

$A\subset R$ 有界 $\exists M, m\in R$ s.t. $\forall x\in A$ $m\leq x\leq M$

无界 非有界

eg1 $R^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in R\}$

eg2 $R^\infty=\{(x_1,x_2,\dots,x_n\dots)\mid x_n\in R\}$ 所有数列构成的集合

$l_\infty=\{(x_1,x_2,\dots,x_n\dots)\mid\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界$\}$ 有界数列全体

$d: l_\infty\times l_\infty\to[0,+\infty)$ 范数

赋范线性空间

$d(\vec{x},\vec{y})=\sup\limits_{n=1,2}\{|x_n-y_n|\mid n=1,2,\dots\}$

验证 $d(\vec{x},\vec{y})\geq 0$ $d(\vec{x},\vec{y})=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y}$ 反推两向量相同 $|x_n-y_n|$ 全是0

最大值 ≠ 上确界

$d(x,y)=\sup\limits_n|x_n-y_n|=\sup\limits_n|y_n-x_n|=d(y,x)$

有上界必有上确界

$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$=\sup\limits_n|x_n-z_n|=\sup\limits_n|x_n-y_n+y_n-z_n|\leq\sup\limits_n(|x_n-y_n|+|y_n-z_n|)$

$=\sup\limits_n|x_n-y_n|+\sup\limits_n|y_n-z_n|$

$=d(x,y)+d(y,z)$

Content 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Notes　　Review

完备赋范线性空间

eg3　$C[0,1]=\{f \mid f$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数$\}$　　验证　$d(f,g)\geq 0$　$d(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g$

$(C[0,1],d)$　$d: \underset{f}{C[0,1]} \times \underset{g}{C[0,1]} \to [0,+\infty)$　　$d(f,g)=d(g,f)$

$d(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$　　三角不等式类上题

$=\max\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[0,1]\}$

- 度量空间收敛性

数列　R 中　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$　"$\varepsilon-N$"　$\forall\varepsilon>0$　$\exists N\in N^+$　s.t.　$\forall n>N$

有 $|x_n-x|<\varepsilon$

多元函数极限　R^2　$(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x,y)$　$\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in N^+$　s.t.　$\forall n>N$

有 $\sqrt{|x_n-x|^2+|y_n-y|^2}<\varepsilon$

$d: R^2\times R^2 \to [0,+\infty)$　$d(\vec{h}_n,\vec{h})<\varepsilon$

定义：(X,d)，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$　$x\in X$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$　$(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x)$ 是指 $\forall\varepsilon>0$　$\exists N\in N^+$　s.t.　$\forall n>N$　有 $d(x_n,x)<\varepsilon$

- 定理：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (X,d) 中的收敛点列　$\{x_n\}$ 的极限唯一

$x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow \forall\{x_{n_k}\}\leq\{x_k\}$ 有 $x_{n_k}\xrightarrow{d} x$

证明：设 $\begin{cases} x_n \xrightarrow{d} x \\ x_n \xrightarrow{d} y \end{cases}$　要证　$x=y$　　子列概念　x_1　x_2　x_3 … x_n　x_{n+1} …

$\downarrow$ x_{n_1}　$\downarrow$ x_{n_2}　$\downarrow$

$\forall\varepsilon>0$　$\exists N_1\in N^+$　s.t.　$\forall n>N$　有 $d(x_n,x)<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$　$\exists N_2\in N^+$　s.t.　$\forall n>N$　有 $d(x_n,y)<\varepsilon$

$\xrightarrow[n>N]{N=\max\{N_1,N_2\}} \begin{cases} d(x_n,x)<\varepsilon \\ d(x_n,y)<\varepsilon \end{cases} \Rightarrow d(x,y)\leq d(x,x_n)+d(x_n,y)=2\varepsilon$

证明：条件　$x_n\xrightarrow{d}x \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$　$\exists N\in N^+$　s.t.　对 $\forall n>N$　$d(x_n,x)<\varepsilon$

结论　$x_{n_k}\xrightarrow{d}x \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$　$\exists N\in N^+$　s.t.　对 $\forall k>N$　$d(x_{n_k},x)<\varepsilon$

若 $k>N$ 则必有 $n_k>N$