作业七：Poisson process(2)

截至日期:

Problem 1

(Example 5.22，写出解答过程)假设部件按速率为λ的泊松过程到达一个处理车间。在某固定的时间T，将车间内所有的部件都分发出去。现考虑在$(0,T)$中增加一个分发时间t（在时刻t将车间内所有的部件都分发出去），使$(0,T)$所有部件的等待时间的总期望最小。
问题：求t。

Problem 2

(Exercise 5-59)保险公司有两种类型的理赔。以$N_i(t)$记在时间t之前类型i理赔个数，并且假设$\{N_1(t), t \geq 0\}$和$\{N_2(t), t \geq 0\}$是独立的泊松过程，具有速率$\lambda_1 = 10$和$\lambda_2 = 1$。类型1相继的理赔额是均值为\$1000的独立指数随机变量，而类型2的理赔额是均值为\$5000的独立指数随机变量。刚接到的一个\$4000的理赔，问是类型1的概率是多少?

Problem 3

(Exercise 5-63)考察一个有无穷多条服务线的排队系统，顾客按速率为λ的泊松过程到达，对每个顾客的服务时间服从参数为μ的指数分布。服务独立于到达。以$X(t)$记在时间t系统中的顾客数。求

(a) $E[X(t+s)|X(s)=n]$;

(b) $Var(X(t+s)|X(s)=n)$。

Problem 4

(Exercise 5-73)震动按速率为λ的泊松过程发生，每个震动以概率p独立地引起系统失效。以T记系统失效的时刻，并以N记系统失效时发生的震动次数。
（1）求给定$N=n$时T的条件分布;
（2）计算给定$T=t$时N的条件分布。（提示：$N|T=t$同分布于$(0,t]$内发生的不引起系统失效的震动次数加1）。

Problem 5

(Exercise 5-83)假设$\{N_0(t), t \geq 0\}$是速率$\lambda = 1$的泊松过程。以$\lambda(t)$记t的一个非负函数，而令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

用$N(t) = N_0(m(t))$定义$N(t)$。论证$\{N(t), t \geq 0\}$是一个具有强度函数$\lambda(t)(t \geq 0)$的非时齐泊松过程。
提示：将$m(t+h)$在t处作一阶泰勒展开

Problem 6

(Exercise 5-85改编)某保险公司在寿险项目上按每周速率$\lambda = 5$的泊松过程支付理赔件数，每款保险赔付金额服从均值为0.5的指数分布. 问题:
(1) 在4周内，保险公司赔付金额的均值与方差分别是多少?
(2) 在4周内，保险公司赔付金额超过12的概率是多少?

Problem 7

(Exercise 5-87)当$\{X(t), t \geq 0\}$是一个复合泊松过程时，确定

$$Cov(X(t), X(t+s))$$

Problem 8

(Exercise 5-89)一个系统由两个部件构成，有3种类型的震动独立地按泊松过程到达。第1型震动按速率为λ_1的Poisson过程到达，并且引起第一个部件失效。第2种类型的震动按速率为λ_2的Poisson过程到达，并且引起第二个部件失效。第3种类型的震动按速率为λ_3的Poisson过程到达，并且引起两个部件同时失效。以X_1和X_2分别表示两个部件的工作寿命。
证明: X_1和X_2的联合分布是

$$P\{X_1 > s, X_2 > t\} = \exp\{-\lambda_1 s - \lambda_2 t - \lambda_3 \max(s,t)\},\ s,t > 0$$

这个分布就是著名的二维指数分布。

Problem 9

(Exercise 5-95)已知$\{N(t), t \geq 0\}$是具有随机速率L的条件泊松过程，$L \sim g(\lambda)$（pdf）
问题:
（1）推导$E[L|N(t) = n]$的表达式;
（2）对于$s > t$，推导$E[N(s)|N(t) = n]$的表达式;
（3）对于$s < t$，推导$E[N(s)|N(t) = n]$的表达式。
提示：(a)先求$L|N(t) = n$的CDF，再PDF，再$E[L|N(t) = n]$，b, c需要用全期望公式$E[X|Y] = E[E(X|Y,Z)|Y]$

Problem 10

(Exercise 5-98，选做, 方程思想)在例5.21中令$M(t) = E[D(t)]$

(a) 证明
$$M(t+h) = M(t) + e^{-\alpha t}\lambda h\mu + o(h)$$

(b) 用(a)证明
$$M^{'}(t) = \lambda\mu e^{-\alpha t}$$

(c) 证明
$$M(t) = \frac{\lambda\mu}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$