Renewal Process

Poisson：指数分布，无记忆

一、概念

1. 背景：

（1）一些随机现象在特殊时刻呈现“周而复始”，“反复发生” 的特征

e. g. ： 一盏照明灯在$[0,t]$内更换灯泡的过程；

一台工作机床在$[0,t]$内维修的过程；

马路上一个红绿灯在$[0,t]$内亮红灯的过程；

一个随机服务系统在$[0,t]$内繁忙的过程;

参数是λ的Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$

。。。

（2）与计数过程的关系

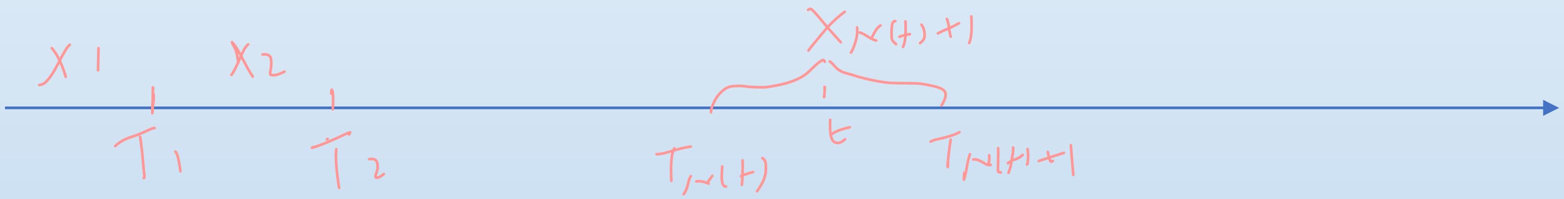
Poisson：独立、同分布、指数

计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$

发生间隔τ_i为$iid\ rv$, 且$\tau_i \sim Exp(\lambda)$ $\Longrightarrow$ 参数是λ的Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$

发生间隔τ_i为$iid\ rv$ $\Longrightarrow$ 更新过程$\{N(t), t \geq 0\}$

2. Def. 称SP $\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程 $\Leftrightarrow \begin{cases} \{N(t), t \geq 0\}\text{是计数过程} \\ \text{事件发生的间隔}\{X_i, i \geq 1\}\text{是}iid\ r.v.s \\ X_i\text{的CDF为}F(x), E[X_i] = u > 0 \end{cases}$



$T_2 = X_1 + X_2$

X_i: 更新间隔;

T_i: 更新时刻（点）; Poisson: 事件发生的时刻

$N(t)$: $[0, t]$中的更新次数;

$M(t) = E[N(t)]$: 关于$F(x)$的更新函数

注：在每个更新点处，更新过程在概率意义上重新开始

二、关注

38+12+12+8=70

1. 关于更新次数$N(t)$、更新函数$M(t)$的瞬态性质；

2. 关于更新次数$N(t)$、更新函数$M(t)$的极限性质；

稳态性质

3. 更新过程理论的应用：建立更新过程模型解决问题。

三、关于$N(t)$、$M(t)$的瞬态性质

1. 有界性

TH. SP $\{N(t), t \ge 0\}$为更新过程，$\{X_i, i \ge 1\}$为更新间隔序列，$E[X_i] = u \in (0, +\infty)$，

则， $\forall t > 0$

$N(t) = \max\{n: T_n < t\}$ 且 $T_n \le t$

即 $\sum_{i=1}^{n} X_i \le t$ $\quad E[\sum_{i=1}^{n} X_i] \le t$ $\quad nE[X_i] \le t$ $\quad n \le \frac{t}{u}$ $\quad N(t) \le \frac{t}{u}$

$$\Rightarrow \begin{cases} N(t) < +\infty,\ M(t) < +\infty \\ \lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty \quad \underbrace{w.p.1}_{\text{以概率1成立}},\ \lim_{t\to+\infty} M(t) = +\infty \end{cases}$$

这个结论成立，概率为1

即证：$P(\lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty) = 1$

$P(M(+\infty) = +\infty) = 1$

$P(M(+\infty) = +\infty) = 1 - P(M(+\infty) < +\infty) = 1 - P(X_1 = +\infty, X_2 = +\infty, \cdots$至少有一个$)$

2. $N(t)$ 的概率分布、$M(t)$的表达

$=1-P(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i(-\infty))$

由更新间隔 X_i 决定

TH. SP $\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程, 更新间隔$\{X_i, i \geq 1\}$的CDF为$F(x)$，$M(t)$为更新函数

$P(N(t)=n)=P(T_n \leq t < T_{n+1})=P(T_n \leq t < T_n+X_{n+1})$

$$\Rightarrow \begin{cases} P\{N(t)=n\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \\ M(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F^{(n)}(t)\,, \end{cases}$$

(有界 级数 函数)

独立随机变量和的分布

其中，$F^{(n)}(t) = P\{X_1 + \cdots + X_n \leq t\} = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF(x)$称为$F(x)$的$n$重Stietjes卷积。

$X_1 \sim F(x)$　　$X_2 \sim G(x)$

$F_{X_1+X_2}(t)=P(X_1+X_2 \leq t)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(X_1+X_2 \leq t \mid X_1=x)dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(X_2 \leq t-x)dF(x)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-x)dF(x)=G(t)*F(t)$

全概率分解公式

注：（1） $N(t)$, $M(t)$ 由$F(x)$唯一确定，即*<u>更新间隔决定更新过程</u>*;

$F(t)*F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(t-x)dF(x)$

（2） $\lim\limits_{n \to +\infty} F^{(n)}(t) = 0$

3. 更新方程

（1）背景：利用**方程思想**求解$M(t)$

A. 用定义求$M(t)$：$M(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}F^{(n)}(t)$；

B. 用方程思想求$M(t)$：建立关于$M(t)$的方程

$M(t)=E[N(t)]=\sum_{n=1}^{+\infty}P(N(t)\geq 1)$

TH. SP $\{N(t),t\geq 0\}$为更新过程，更新间隔$\{X_i,i\geq 1\}$的CDF为$F(x)$，$M(t)$为更新函数

$$\Longrightarrow M(t)=F(t)+M(t)*F(t)$$

其中，$M(t)*F(t)=\int_0^t M(t-x)dF(x)$称为$M(t)$与$F(x)$的Stietjes卷积。

$M(t)=E[N(t)]=E[\underbrace{E[N(t)|X_1]}_{\varphi(X_1)}]=\int_0^{+\infty}E(N(t)|X_1=x)dF(x)=\int_0^t E(N(t)|X_1=x)dF(x)+\int_t^{+\infty}E(N(t)|X_1=x)dF(x)$

（双期望公式）

$=\int_0^t E[N(t-x)+1]dF(x)+\int_t^{\infty}0\cdot dF(x)$

证明思路：利用第一次更新间隔X_1分解$M(t)$

（2）Def.（更新方程）

若$H(t)$在$[0,t]$上有界，且当t < 0时，$H(t) = F(t) = 0$，则称

$K(t) = H(t) + K(t) * F(t)$ 为 **更新方程**。

设 $|K(t)| \le C$

①: $|K(t)| = |H(t) + H(t)$

（3）更新方程解的存在和唯一性定理

假设还有另一解 K_1

TH. 若$K(t) = H(t) + K(t) * F(t)$为更新方程，$F(t)$为CDF

$\Longrightarrow$ 更新方程存在唯一有界解：$K(t) = H(t) + H(t) * M(t)$

其中，$M(t)$为$F(x)$的更新函数。

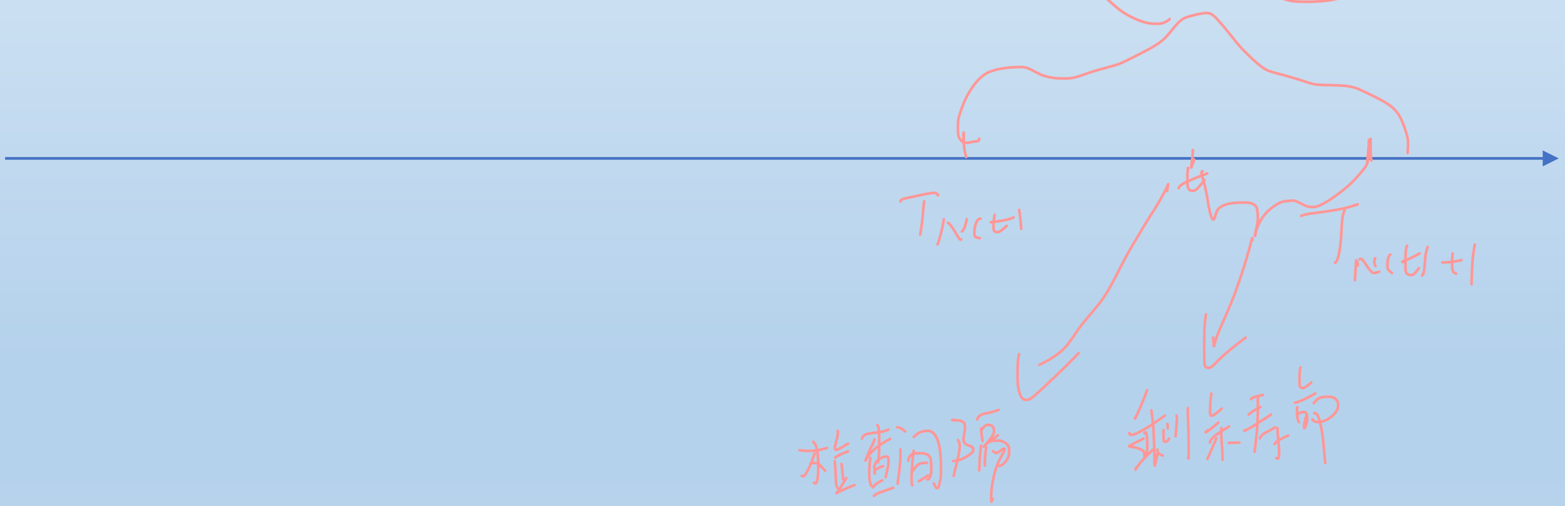
4. 关于更新函数$M(t)$的渐进展开（更新报酬部分）

5. 更新时刻 $T_{N(t)}$ 的概率性质

~ 时间t之前最后一次更新时刻

（1）背景：应用时，往往需要取定 $T_{N(t)}$作为条件，来全概率分解目标量

$X_{N(t)+1}$ → 年龄 (eg. 灯泡工作时长)



（2）结论：

特殊时刻的概率分布思想

TH. SP $\{N(t), t \ge 0\}$为更新过程，更新间隔$\{X_i, i \ge 1\}$的CDF为$F(x)$，$M(t)$为更新函数，$\{T_i, i \ge 1\}$为更新时刻，$\forall 0 \le x \le t$

不是卷积

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_{T_{N(t)}}(x) = P\{T_{N(t)} \le x\} = \bar{F}(t) + \int_0^x \bar{F}(t-u)\,d\,M(u) \\ f_{T_{N(t)}}(x) = F'_{T_{N(t)}}(x) = \bar{F}(t-x)M'(x) \end{cases}$$

证明思路：利用“$N(t)=n$”分解“$T_{N(t)} \le x$”

全概率分解思想

复合型随机变量

额外增加$N(t)$信息，简化，

$F_{T_{N(t)}}(x) = P(T_{N(t)} \le x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_{N(t)} \le x, N(t)=n)$

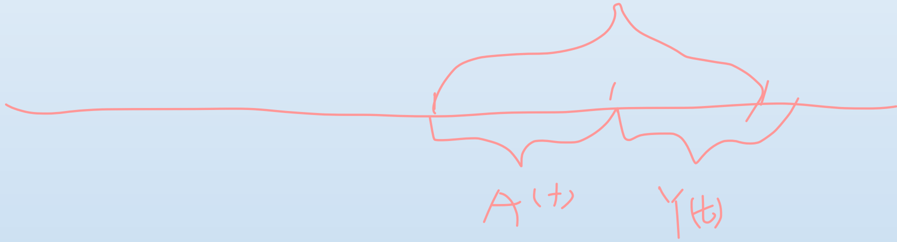
$= P(X_1 > t) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n \le x, T_n \le t < T_{n+1})$

=

例题. SP $\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程, 更新间隔$\{X_i, i \geq 1\}$的CDF为$F(x)$, $M(t)$为更新函数，$A(t)$, $Y(t)$分别表示系统在t时刻的年龄和剩余寿命。

问题：利用更新过程解的存在定理求$A(t)$, $Y(t)$的CDF。

$K(t) = P(A(t) \leq x) = \int_0^{+\infty} P(A(t) \leq x \mid X \leq x)\, dF(t)$



$K(t) = K(t) * F(t) + H(t)$

由更新过程，$K(t) = P(A(t) \leq x) = H(t) + H(t) * m(t)$

四、关于$N(t)$ 、$M(t)$ 的极限性质

1. 背景：$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = +\infty \quad w.p.1 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} M(t) = +\infty \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{关注“更新率”}}$ $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{N(t)}{t} \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{M(t)}{t} \end{cases}$

2. 结论：

（1）TH. SP $\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程, $\{X_i, i \geq 1\}$为更新间隔, $E[X_i] = u > 0$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[X_i]} = \frac{1}{u} \quad \text{w.p.1}$$

(更新率)

以概率1成立

由SSLLN

例题. 顾客以强度 λ 的Poisson过程到达一个单服务台系统，若发现服务员正在服务则离开；若发现服务员空闲则进入并接受服务，对每个顾客的服务时间为Y，$E[Y]=u$

问题：

（1）顾客进入系统的实际强度（单位时间内进入系统的顾客数）；

（2）实际进入系统的顾客比例。

$W_i = T_i - T_{i-1}$

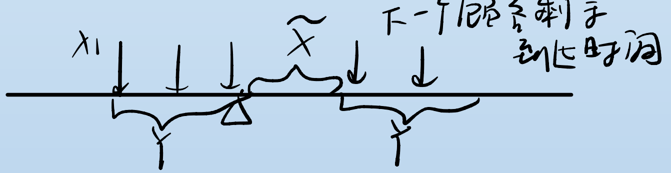
$\tilde{\tau}_x$ 表示顾客到达剩余时间

$\tilde{\tau} \sim Exp(\lambda)$

$N(t)$ 表示 $[0,t]$ 到达且进入的人数

(1). 令 $T_1, T_2, \cdots$ 表示到达且进入系统的时刻，$N(t)$ 表示 $[0,t]$ 内到达且进入系统的人数

令 W_i 表示第 i 个到达且进入系统的间隔



因为 $W_i = Y + \tilde{X}$

所以 $\{W_i, i \geq 1\}$ 为 iid r.v.s

所以 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 RP

所以 $\tilde{\lambda}$ = 进入强度 = 更新率 $= \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[W_i]} = \frac{1}{E[Y+\tilde{X}]}$

又因为 $\tilde{X} \sim Exp(\lambda)$

所以 $\tilde{\lambda} = \frac{1}{E[Y+\tilde{X}]} = \frac{1}{E[Y]+E[\tilde{X}]} = \frac{1}{u+\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda u+1}$

(2). $\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda u + 1}$