程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第一章习题13-20详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-10-11 20:02

第一章习题 13-20 针对第一章第 3 节-第 5 节的相关内容.

这部分内容主要研究集合中元素的“个数”, 以及怎样把“个数”这个概念从有限集推广到无限集. 这部分内容比较抽象, 是这一章学习的难点. 为了帮助同学们更好的理解相关知识, 本公号曾整理过三篇文章:

无穷大也能比大小? （一）

无穷大也能比大小? （二）

无穷大也能比大小? （三）

建议大家看一下, 比课本讲的**有趣**多了.

下面正式讲课后习题.

第13-14题证明两个集合对等, 本质上就是建立两个集合之间的一一对应.

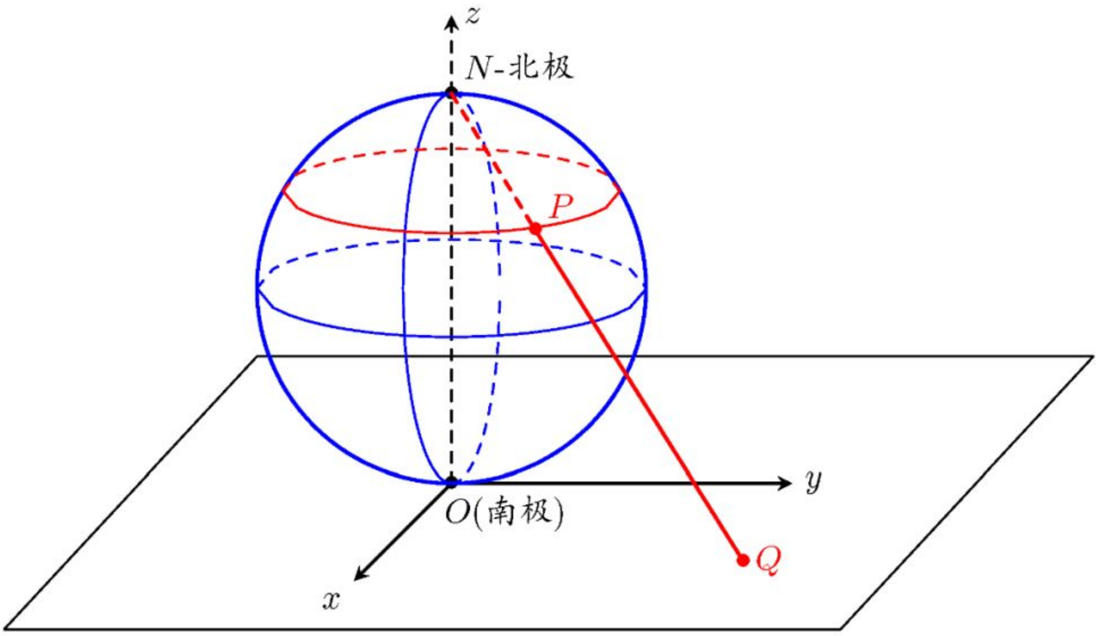
13. 作出一个从$(-1,1)$到$(-\infty,+\infty)$的双射, 并写出该映射的解析表达式.

解.

$$\varphi(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad x\in(-1,1).$$

14. 证明: 将球面去掉一点以后, 余下的点所成的集合和整个平面上的点所成集合是对等的.

证明.



设球面为 S, 如图所示, 让球面的南极与 xOy 平

设球面为 S. 如图所示, 让球面的南极与 xOy 平面的坐标原点相切, 球面北极点记为 N. 对球面上任意异于北极点的点 P, 过北极点 N 及点 P 作一条直线, 与平面相交于唯一的一点 Q. 不难发现, 除了北极点外, 球面上每一点都与平面上的一点对应; 反过来, 对平面上任意一点 Q, 连接球面北极点 N 和点 Q 必与球面相交于异于 N 的一点 P, 即平面上每一点都与球面上异于北极的一点对应. 实际上我们找到了 $S \setminus \{N\}$ 与 xOy 平面之间的双射.

具体来说, 设球面方程为 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, 北极点 N 的坐标为 $(0,0,2)$. 球面上一点 P 的坐标为 (x,y,z), 与之对应的点 Q 的坐标为 $(x',y',0)$. 因为 $N(0,0,2)$, $P(x,y,z)$, $Q(x',y',0)$ 三点共线, 所以

$$\frac{x'-0}{x-0}=\frac{y'-0}{y-0}=\frac{0-2}{z-2}.$$

从而

$$x'=\frac{-2}{z-2}x, \qquad y'=\frac{-2}{z-2}y.$$

> 这就是从 $S\setminus\{N\}$ 到 xOy 面的双射. 因此, $S\setminus\{N\}$ 与 xOy 平面是对等的.

第15-20题都是讨论集合的基数.

> 证明一个集合 A 是可数集 (即 $\overline{\overline{A}}=a$) 有下面几种方法:

- 证明 A 与一个可数集(比如自然数集、整数集、有理数集)对等;
- 已知 B 是一可数集. 证明 A 与 B 的一个子集对等, B 与 A 的一个子集对等, 用康托尔-伯恩斯坦定理得 A 也是一个可数集;
- 已知 B 和 C 都是可数集. 证明 A 与 B 的一个子集对等, 则 $\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}}=a$. 再证 C 与 A 的一个子集对等, 则 $\overline{\overline{A}}\geq\overline{\overline{C}}=a$. 综合起来可得 $\overline{\overline{A}}=a$, 即 A 可数;
- 把 A 表示成可数个可数集的并集或有限个可数集的直积, 即

$$a\cdot a=a,\quad a^n=a.$$

15. 证明: 所有系数为有理数的多项式组成一可数集.

证明.

设系数为有理数的 n 次多项式为

$$P_n = \left\{ a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \,\middle|\, \begin{array}{l} a_n \in \mathbb{Q}_0, \\ a_i \in \mathbb{Q}, \\ i=n-1,\cdots,0. \end{array} \right\}.$$

显然 $P_n \sim \mathbb{Q}_0 \times \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n\text{个}}$, 其中 $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是可数集. 因此 P_n 是一个可数集. 从而有理系数多项式组成的全体 $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n$ 是一个可数集.

16. 设 A 是平面上以有理点(即坐标都是有理数)为中心, 有理数为半径的圆的全体, 则 A 是可数集.

证明.

平面上的一个圆是由它的圆心坐标 (x, y) 及半径 r 唯一确定的. 因此

$$A \sim \{(x, y, r) \,:\, x, y \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}^+\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+,$$

其中 $\mathbb{Q}^+$ 表示非负有理数集, 它和 $\mathbb{Q}$ 都是可数集, 从而 A 也是可数集.

17. 证明: 增函数的不连续点最多只有可数多个.

证明.

设 $f(x)$ 是增函数, 则 x_0 是 $f(x)$ 的不连续点的充分必要条件是 $f(x_0+0)-f(x_0-0)>0$, 即

$$\big(f(x_0-0), f(x_0+0)\big)$$

是一个开区间. 把 $f(x)$ 的全体不连续点构成的集合记为 A. 对任意的 $x\in A$, 由于 $\mathbb{Q}$ 在直线上稠密, 任取 $r\in\big(f(x-0), f(x+0)\big)\cap\mathbb{Q}$, 定义 $\varphi(x)=r$. 若 x_1 和 x_2 是 $f(x)$ 的不同间断点, 则 $\big(f(x_1-0), f(x_1+0)\big)\cap\big(f(x_2-0), f(x_2+0)\big)=\emptyset$. 因此 φ 是从 A 到 $\mathbb{Q}$ 内的单射, 于是 $A\sim\varphi(A)\subset\mathbb{Q}$, 所以 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{\mathbb{Q}}}=\aleph_0$, 即 A 是可数集或有限集. 于是 $f(x)$ 的不连续点最多只有可数多个.

证明一个集合 A 的基数是 c 有下面几种方法:

- 证明 A 与一个基数为 c 的集合(比如实数集、区间 (a,b), $(a,b]$, $[a,b]$)对等;
- 已知集合 B 的基数为 c. 证明 A 与 B 的一个子集对等, B 与 A 的一个子集对等, 用康托尔-伯恩斯坦定理得 A 的基数也是 c;
- 已知 B 和 C 的基数都是 c. 证明 A 与 B 的一个子集对等, 则 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} = c$. 再证 C 与 A 的一个子集对等, 则 $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{C}} = c$. 综合起来可得 $\overline{\overline{A}} = c$;
- 借助已有结论: 可数个或有限个基数为 c 的集合的直积的基数是 c, 可数个二元集合的直积的基数为 c, 即

$$c^a = c, \quad c^n = c, \quad 2^a = c.$$

18. **求下列集合的基数:**

$$(1)\ A = \left\{ (r_1, \cdots, r_n, r, r, \cdots) \;\middle|\; \begin{array}{l} r, r_i \in \mathbb{Q}: \\ i = 1, \cdots, n; \\ n = 1, 2, \cdots \end{array} \right\};$$

解. $\overline{\overline{A}} = a$ (**或** $\aleph_0$).

对任意的自然数 n, **记**

$$A_n = \{(r_1, \cdots, r_n, r, r, \cdots) : r_1, \cdots, r_n, r \in \mathbb{Q}\},$$

则 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

显然, $A_n \sim \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n\text{ 个}} \times \mathbb{Q}$, **由课本** §4 **定理** 6, **这**

是一个可数集. 再由 §4 定理 4, $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是一个可数集, 因而它的基数是 a.

$$(2)\ B=\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\cdots)\ \middle|\ \begin{array}{l}\varepsilon_i\in\{0,1\},\\ i=1,2,\cdots\end{array}\right\};$$

解. $\overline{\overline{B}}=c$ (或 $\aleph$).

记 $B_n=\{0,1\}$, $n=1,2,\cdots$, 则 $B=\prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, 由课本 §5 推论 2 可得 $\overline{\overline{B}}=2^a=c$.

$$(3)\ C=\mathbb{Q}^{\infty}=\left\{(r_1,\cdots,r_n,\cdots)\ \middle|\ \begin{array}{l}r_i\in\mathbb{Q},\\ i=1,2,\cdots\end{array}\right\}.$$

解. $\overline{\overline{C}}=c$ (或 $\aleph$).

一方面, 与第 (2) 小题中的集合 B 相比, 显然 $B\subset C$, 故 $c=\overline{\overline{B}}\le\overline{\overline{C}}$;

另一方面, 与集合 $\mathbb{R}^{\infty}$ 相比, 显然 $C=\mathbb{Q}^{\infty}\subset\mathbb{R}^{\infty}$, 故 $\overline{\overline{C}}\le\overline{\overline{\mathbb{R}^{\infty}}}=c^a=c$.

结合以上两方面的讨论, $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{\mathbb{Q}^{\infty}}}=a^a=c$.

19. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的有限实函数. 如果对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得对任意 $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$, $f(y) \geq f(x)$, 则 $f(x)$ 的值域 $f(\mathbb{R})$ 至多是可数集.

证明.

由假设知: 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得对任意 $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$, 有

$$f(y) \geq f(x).$$

所以存在有理数 $r_x < R_x$, 使得 $x \in \Delta_x = (r_x, R_x)$ 且对任意 $y \in (r_x, R_x)$ 有$f(y) \geq f(x)$.

记

$$A = \{(r, R) : r, R \in \mathbb{Q}, r < R\},$$

按如下方式作映射

$$\varphi : f(\mathbb{R}) \longrightarrow A.$$

对任意的 $f(x) \in f(\mathbb{R})$, 从集合

$$\{y \in \mathbb{R} : f(y) = f(x)\}$$

中选取一个代表元 y_0, 把 $\Delta_{y_0} = (r_{y_0}, R_{y_0})$ 与 $f(x)$ 对应.

这是一个单射. 事实上, 若 $\varphi(f(x_1)) = \Delta_{y_1}$, $\varphi(f(x_2)) = \Delta_{y_2}$, 且 $\Delta_{y_1} = \Delta_{y_2}$.

$$\text{由 } y_2 \in \Delta_{y_1} \text{ 得 } f(y_2) \geq f(y_1);$$

$$\text{由 } y_1 \in \Delta_{y_2} \text{ 得 } f(y_1) \geq f(y_2).$$

因此 $f(y_1) = f(y_2)$. 又

$$f(x_1) = f(y_1), \quad f(x_2) = f(y_2),$$

于是, $f(x_1) = f(x_2)$.

因为 A 是一个可数集, 所以 $f(\mathbb{R})$ 至多是可数集.

20. 证明 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合 $C[a, b]$ 的基数为 c.

证明.

一方面, 取 $C[a, b]$ 的子集

$$L = \{kx \,:\, 0 \leq k \leq 1\},$$

则 $L \sim [0, 1]$. 因此 $\overline{\overline{C[a,b]}} \geq \overline{\overline{L}}$

则 $L \sim [0,1]$, 因此, $C[a,b] \geq L = c$.

另一方面, 将 $[a,b]$ 中的全体有理数排列为

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots,$$

定义映射 $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}^\infty$,

$$\varphi(f) = (f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots).$$

则 φ 是一个单射.

事实上, 如果 $f(x), g(x) \in C[a,b]$ 且 $\varphi(f) = \varphi(g)$, 则说明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中的一切有理数 r 处取值相等. 而 $f(x), g(x)$ 都是连续函数, 故对任何 $x \in [a,b]$, 只要取有理数列 $\{x_n\}$ 使 $x_n \to x$, 便有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x),$$

故 $f(x) \equiv g(x)$.

因此, $\overline{\overline{C[a,b]}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}^\infty}} = c^a = c$.

综上可得, $\overline{\overline{C[a,b]}} = c$.