§3.2 线性变换的运算

一、线性变换的乘积

二、线性变换的加法

三、线性变换的数乘

四、线性变换的逆

五、线性变换的多项式

一、 线性变换的乘积

1. 定义

设 σ,τ 为线性空间V的两个线性变换，定义它们

的**乘积**$\sigma\tau$为：$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha)),\ \forall\alpha\in V$

则$\sigma\tau$也是V的线性变换.

事实上，$(\sigma\tau)(\alpha+\beta)=\sigma(\tau(\alpha+\beta))=\sigma(\tau(\alpha)+\tau(\beta))$

$$=\sigma(\tau(\alpha))+\sigma(\tau(\beta))=(\sigma\tau)(\alpha)+(\sigma\tau)(\beta),$$

$$(\sigma\tau)(k\alpha)=\sigma(\tau(k\alpha))=\sigma(k\tau(\alpha))=k\sigma(\tau(\alpha))=k(\sigma\tau)(\alpha)$$

2．基本性质

（1）满足结合律：　$(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta)$

（2）$\varepsilon\sigma = \sigma\varepsilon = \sigma, \varepsilon$为单位变换

（3）交换律一般不成立，即一般地，

$\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

例1. 线性空间 $R[x]$中，线性变换

$$D\left(f(x)\right)=f'(x)$$

$$J\left(f(x)\right)=\int_0^x f(t)dt$$

$$(DJ)\left(f(x)\right)=D\left(\int_0^x f(t)dt\right)=f(x),$$ 即 $DJ=\varepsilon.$

而，

$$(JD)\left(f(x)\right)=J\left(f'(x)\right)=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$$

$\therefore\quad DJ\neq JD.$

例2. 设A、B $\in P^{n\times n}$ 为两个取定的矩阵，定义变换

$$\sigma(X) = AX, \qquad \forall X \in P^{n\times n}$$
$$\tau(X) = XB,$$

则 σ,τ 皆为 $P^{n\times n}$ 的线性变换，且对 $\forall X \in P^{n\times n}$, 有

$$(\sigma\tau)(X) = \sigma(\tau(X)) = \sigma(XB) = A(XB) = AXB,$$

$$(\tau\sigma)(X) = \tau(\sigma(X)) = \tau(AX) = (AX)B = AXB.$$

$$\therefore \quad \sigma\tau = \tau\sigma.$$

二、 线性变换的和

1. 定义

设 σ,τ 为线性空间V的两个线性变换，定义它们的**和** $\sigma+\tau$为：$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha),\forall\alpha\in V$

则$\sigma+\tau$也是V的线性变换.

事实上，$(\sigma+\tau)(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha+\beta)+\tau(\alpha+\beta)$

$=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)+\tau(\alpha)+\tau(\beta)=(\sigma+\tau)(\alpha)+(\sigma+\tau)(\beta),$

$(\sigma+\tau)(k\alpha)=\sigma(k\alpha)+\tau(k\alpha)=k\sigma(\alpha)+k\tau(\alpha)$

$=k(\sigma(\alpha)+\tau(\alpha))=k(\sigma+\tau)(\alpha).$

例3. 设A、B $\in P^{n\times n}$为两个取定的矩阵，定义变换

$$\left.\begin{aligned}\sigma(X) &= AX,\\ \tau(X) &= XB,\end{aligned}\right. \qquad \forall X \in P^{n\times n}$$

则 $(\sigma+\tau)(X)=\sigma(X)+\tau(X)=AX+XB.$

2．基本性质

（1）满足交换律：$\sigma+\tau=\tau+\sigma$

（2）满足结合律：$(\sigma+\tau)+\delta=\sigma+(\tau+\delta)$

（3）$0+\sigma=\sigma+0=\sigma$，0为零变换.

（4）乘法对加法满足左、右分配律：

$$\sigma(\tau+\delta)=\sigma\tau+\sigma\delta$$

$$(\tau+\delta)\sigma=\tau\sigma+\delta\sigma$$

3．负变换

设 σ 为线性空间V的线性变换，定义变换 $-\sigma$ 为：

$$(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha), \qquad \forall \alpha \in V$$

则 $-\sigma$ 也为V的线性变换，称之为 σ 的**负变换**.

注： $(-\sigma)+\sigma=0$

三、 线性变换的数量乘法

1. 定义

设 σ 为线性空间V的线性变换，$k\in P$，定义 k 与 σ 的**数量乘积** $k\sigma$ 为：

$$(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha),\qquad \forall\alpha\in V$$

则 $k\sigma$ 也是V的线性变换.

例4. 线性空间 $R[x]$中，线性变换

$$D\big(f(x)\big)=f'(x)$$

则 $(kD)\big(f(x)\big)=kD\big(f(x)\big)=kf'(x).$

2. 基本性质

(1) $(kl)\sigma = k(l\sigma)$

(2) $(k+l)\sigma = k\sigma + l\sigma$

(3) $k(\sigma+\tau) = k\sigma + k\tau$

(4) $1\sigma = \sigma, -1\sigma = -\sigma, 0\sigma = 0$

注： 线性空间V上的全体线性变换所成集合对于线性变换的加法与数量乘法构成数域P上的一个线性空间，记作 $L(V)$.

四、 线性变换的逆

1. 定义

设σ为线性空间V的线性变换，若有V的变换τ使

$$\sigma\tau=\tau\sigma=\varepsilon$$

则称σ为可逆变换，称τ为σ的逆变换，记作σ^{-1}.

2. 基本性质

(1) 可逆变换σ的逆变换 σ^{-1}也是V的线性变换.

证： 对 $\forall \alpha,\beta \in V$，$\forall k \in P$,

$$\sigma^{-1}(\alpha+\beta)=\sigma^{-1}\Big(\big(\sigma\sigma^{-1}\big)(\alpha)+\big(\sigma\sigma^{-1}\big)(\beta)\Big)$$

$$=\sigma^{-1}\Big(\sigma\big(\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)\big)\Big)$$

$$=\big(\sigma^{-1}\sigma\big)\big(\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)\big)$$

$$=\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)$$

$$\sigma^{-1}(k\alpha)=\sigma^{-1}\Big(k\big(\sigma\sigma^{-1}\big)(\alpha)\Big)=\sigma^{-1}\Big(k\Big(\sigma\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big)\Big)\Big)$$

$$=\sigma^{-1}\Big(\sigma\Big(k\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big)\Big)\Big)=k\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big)=k\sigma^{-1}(\alpha)$$

$\therefore$ σ^{-1} 是V的线性变换.

(2) 线性变换 σ 可逆 $\Leftrightarrow$ 线性变换 σ 是双射.

问题：1. 设A $\in P^{n\times n}$ 为可逆矩阵，定义变换

$$\sigma(X) = AX, \quad \forall X \in P^{n\times n}$$

那么，上述线性变换是否存在逆变换？若存在，其逆变换是什么呢？

2. 线性空间 $R[x]$中，线性变换

$$D\left(f\left(x\right)\right) = f'\left(x\right)$$

是否存在逆变换？若存在，其逆变换是什么呢？

五、线性变换的多项式

1. 线性变换的幂

设σ为线性空间V的线性变换，n为自然数，定义

$$\sigma^n = \underbrace{\sigma\cdots\sigma}_{n},$$

称之为σ的n次幂.

当 $n=0$ 时，规定 $\sigma^0=\varepsilon$（单位变换）.

例5. 设$A\in P^{n\times n}$，定义变换

$$\sigma(X)=AX,\qquad \forall X\in P^{n\times n}$$

则$\sigma^2(X)=\sigma(\sigma(X))=\sigma(AX)=A^2X,$

$$\sigma^m(X)=A^mX.$$

注：

① 易证 $\sigma^{m+n}=\sigma^m\sigma^n,\ \left(\sigma^m\right)^n=\sigma^{mn},\qquad m,n\geq 0$

② 一般地，$\left(\sigma\tau\right)^n\neq\sigma^n\tau^n.$

2．线性变换的多项式

设 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0 \in P[x]$,

σ 为V的一个线性变换，则

$$f(\sigma)=a_m \sigma^m+\cdots+a_1 \sigma+a_0 \varepsilon$$

也是V的一个线性变换，称 $f(\sigma)$ 为线性变换 σ 的**多项式**.

设 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0\in P[x]$,

例6. 设A$\in P^{n\times n}$ ，定义变换

$$\sigma(X)=AX,\quad \forall X\in P^{n\times n}$$

则 $f(\sigma)(X)=a_m\sigma^m(X)+\cdots+a_1\sigma(X)+a_0\varepsilon(X)$

$$=a_m A^m X+\cdots+a_1 AX+a_0 X.$$

注： ① 在 $P[x]$ 中，若

$$h(x)=f(x)+g(x),\quad p(x)=f(x)g(x)$$

则有，$h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma)$，

$$p(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma)$$

② 对 $\forall f(x),g(x)\in P[x]$，有

$$f(\sigma)+g(\sigma)=g(\sigma)+f(\sigma)$$

$$f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma)$$

即线性变换的多项式满足加法和乘法交换律.