



西南财经大学  
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

# 2020 届

## 本科毕业论文（设计）

论文题目： 计量经济学三大检验比较分析

学生姓名： 王美婷

所在学院： 经济数学学院

专 业： 数学与应用数学（金融数学创新实验班）

学 号： 41625012

指导教师： 林谦

成 绩：

2020 年 XX 月

# 摘要

最大似然估计作为计量经济学的另一种估计方法，区别于最小二乘估计法，该方法不仅可以估计线性模型，还可以估计非线性模型，也是学者常用的估计方法。在该方法下的检验，即 Wald 检验、LM 检验、LR 检验也被称为计量经济学三大检验。明确三大检验的背后构造的原理，分析三大检验的相同点和不同点，对于准确地使用这三个检验有重要意义，从而使得采用最大似然估计法估计的参数更准确，模型更合理。经过一系列分析比较最后得出结论，在经典线性模型并且约束条件为线性的情况下，LM 检验的准确性最高，Wald 检验犯第一类错误的概率很大，小样本下渐进性较差。对于一般模型，基于现有这三个检验的研究，无法对这三检验进行比较。

**关键词：**最大似然估计；Wald 检验；LM 检验；LR 检验



# **Abstract**

**As another estimation method in econometrics, the maximum likelihood estimation is different from the least square estimation. It can not only estimate the linear model, but also estimate the nonlinear model. It is also a common estimation method used by scholars. The tests under this method——Wald test, LM Test and LR test, are known as the three major econometric tests. It is of great significance to make clear the principle of the three tests and analyze the similarities and differences of the three tests, so that the parameters estimated by the maximum likelihood estimation method are more accurate and the model is more reasonable. After a series of analysis and comparison, in the case of classical linear model and linear constraints, it is concluded that LM Test has the highest accuracy, Wald test has a higher probability of making the first type of errors, and in small sample , it has poor gradualness. For the general model, based on the existing research of these three tests, it is impossible to compare three tests.**

**Keywords: Maximum likelihood estimation; Wald test; Lagrange multiplier test; Likelihood ratio test**

# 目录

1.绪论.....	1
1.1 研究的背景与意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	1
1.3 主要研究内容.....	2
1.4 创新之处与不足.....	2
2.相关概念与理论基础.....	3
2.1 最大似然估计法介绍.....	3
2.2 假设检验方法介绍.....	5
2.2.1 假设检验的原理与步骤.....	5
2.2.2 显著性水平 $\alpha$ 与 P 值.....	6
2.2.3 假设检验的两类错误.....	6
3.三大检验方法介绍.....	7
3.1 Wald 检验方法介绍.....	7
3.1.1 原理与公式.....	7
3.1.2 检验步骤与优缺点.....	9
3.2 LR 检验方法介绍.....	9
3.2.1 原理与公式.....	9
3.2.2 检验步骤与优缺点.....	10
3.3 LM 检验方法介绍.....	10
3.3.1 原理与公式.....	10
3.3.2 检验步骤与优缺点.....	11
4.三大检验的比较分析.....	12
4.1 基于一般线性模型的实例分析.....	12
4.1.1 Wald 统计量.....	13

4.1.2 LR 统计量.....	15
4.1.3 LM 统计量.....	15
4.1.4 三个统计量的大小关系.....	16
4.2 三大检验几何表示的比较.....	17
4.3 三种检验的精准临界值比较分析.....	18
4.3.1 F 统计量.....	19
4.3.2 三种检验的精确分布.....	19
4.3.3 三种检验的精确检验临界值与卡方临界值的比较分析.....	20
<b>5.结论.....</b>	<b>24</b>
5.1 三种检验的相同点.....	24
5.2 三种检验的不同点.....	25
5.2.1 原理与需要估计的模型不同.....	25
5.2.2 有限样本下统计量的值不同.....	25
5.3 三种检验在实际运用中的选择.....	25
参考文献.....	27
附录 A.....	29
附录 B.....	35
附录 C.....	35

# 1.绪论

## 1.1 研究的背景与意义

经典估计模型——最小二乘估计的的检验中，常用的检验统计量是基于残差平方和构造的，例如 F 统计量、t 统计量等。虽然各种类型的线性模型对于数据的估计效果不错，但是随着更深入的研究发现，对于数据的估计模型仅仅停留在线性模型的基础上是不够的，往往会造成很大的误差。而随着计算机软件数据处理功能的不断发展，使得学者能利用越来越复杂的技术来建立和估计计量经济模型，区别于线性估计的最小二乘估计之外的非线性估计方法越来越普遍。与线性模型相比，非线性模型的应用范围更加广阔。最小二乘估计法有时会得到非有效估计或者非一致的估计。而最大似然估计法在很一般的条件下，参数估计量还是保持一致的，最大似然估计作为一种可以估计线性模型与非线性模型的方法，成为另一种非常常用的方法。

Wald 检验（Wald test; 沃尔德检验）、LM 检验（Lagrange multiplier test; 拉格朗日乘数检验）、LR 检验（Likelihood ratio test; 似然比检验）是在非经典模型的最大似然估计下的检验，是基于最大似然函数值构造的。明确三大检验的背后构造的原理，分析三大检验的相同点和不同点，对于准确地使用这三个检验有重要意义，从而使得采用最大似然估计法估计的参数更准确，模型更合理。

## 1.2 国内外研究现状

三大检验出现之后，关于三种检验国外的研究有很多，其中关于三种检验的不等式关系是比较三者的一个重要的成果。Savin(1976)和 Berndt 与 Savin(1977)表明，在检验某些线性模型的系数的线性约束条件时，三种检验统计量之间存在一个数值不等式的关系即  $Wald \geq LR \geq LM$ 。Brulsch(1979)进一步探讨这个不等式，建立了在最大似然估计下，满足以下条件即干扰项服从多元正态分布：估计

模型为线性模型；约束条件为线性条件时，三者之间的不等式关系即  $Wald \geq LR \geq LM$ 。Breusch 是前者结论的一般情况。胡新明（2010）指出了目前国内一些学者利用这个不等式时存在的问题，他详细阐述了不等式关系成立的条件，即在线性模型，线性约束条件，干扰项服从正态分布，大样本的情况下，这个不等式才成立。国内外尤其是国内对于三种检验的相关比较分析除了上述不等式外，没有关于三种检验方式在一般模型中及其他方面的更进一步的结论。

### 1.3 主要研究内容

文章从最大似然估计引入，在第二部分介绍最大似然估计与假设检验的相关概念，明确两者的重要性，从而为下文最大似然估计下的三种检验的引入作铺垫。第三部分主要介绍三种检验的原理以及构造，从原理上对三者进行对比。第四部分是文章的主要部分，基于一般线性模型的线性约束条件，比较三种检验的变形，并且考虑将三种检验表示为 F 检验的相关形式，根据 F 分布的临界值得出三种检验的精确检验临界值，并与卡方临界值作比较，从而比较三种检验在小样本下利用卡方临界值得准确性。最后得出结论，LM 检验的准确性最高，Wald 检验犯第一类错误的概率很大，小样本下渐进性较差。对于一般模型，基于现有这三个检验的研究，无法对这三个检验进行比较。

### 1.4 创新之处与不足

文章的创新之处在于利用 F 分布的临界值去表示三种检验的精确临界值，通过数据以及图形比较三种检验在小样本下用卡方临界值的准确性。文章不足主要有以下三点：

第一：文章的许多结论都是已经存在的，只是对这些内容进行了整理与总结。

第二：由于实验数据有限，关于第四部分利用 F 分布的临界值得出关于 LM 检验的部分结论可能具有偶然性。

第三：在经典线性模型下，如果约束为线性的，F 检验是最精确的方法，所以，在这个条件下得出的关于三种检验的相关结论在实际运用中可能不会有很大的作



用。

## 2.相关概念与理论基础

### 2.1 最大似然估计法介绍

最大似然估计法 (Maximum Likelihood Estimate, 简称为 MLE), 也称为最大概似估计或极大似然估计。在 1821 年, 德国数学家 Gauss 针对正太分布提出了最大似然估计。但对此方法的研究通常归功于英国统计学家 Fisher, 他在 1922 年再次提出了这个想法并证明了它的一些性质, 由此之后, 最大似然估计法得到了广泛的应用。

假设有两个箱子 A、B, 箱子中都放有 100 个球, 箱子 A 中黑球比白球多, 箱子 B 白球比黑球多, 如随机的从箱子中抽取一个球 c, 球 c 为白球, 则这个白球是从哪个箱子中取得? 因为箱子 B 对出现白球的结果更有利, 则推断球 c 来自箱子 B。这个推断的过程就是运用了最大似然原理。

依据上述直观例子来理解最大似然估计, 球 c 即是样本观测值, 总体是 100 个球, 这 100 个球中有黑球与白球, 但有多少黑球多少白球不得而知。对总体参数估计即是判断这个总体的球的颜色特征分布, 使得这个总体抽到白球的概率最大。相对于箱子 A, 箱子 B 这个总体使得抽到的白球概率最大, 箱子 B 中球的颜色特征分布就是相较于箱子 A 的更好的参数估计。

更一般的来讲, 从总体中进行  $n$  次随机抽取, 得到样本容量为  $n$  的样本观测值, 任意一次的随机抽取, 样本观测值都以一定的概率出现, 如果知道总体的相关参数, 可以计算某个样本观测值出现的概率。但是如果只知道总体服从某种分布, 但不知道具体的分布参数, 就需要通过随机样本估计总体参数。对于最小二乘法, 从总体中随机的抽取  $n$  组样本观测值后, 最好的参数估计量应该是使得模型能最好的拟合样本数据; 而对于最大似然法, 最好的参数估计量应该是使得从

模型中抽取该  $n$  组样本观测值的概率最大。

例如正态分布的总体，每个总体都有自己的参数期望  $\mu$  与方差  $\sigma^2$ ，如果已知  $n$  组样本观测值，在可供选择的总体中，哪个总体最有可能产生这  $n$  个观测值？更进一步讲，当参数期望与方差分别为多少时，出现这  $n$  个观测值得概率最大？使得这个概率最大的参数期望与方差即为最好的参数估计量，这个估计方法即为最大似然估计。

最大似然估计的定义如下：设总体的概率函数为  $p(x; \theta)$ ， $\theta \in \Theta$ ，其中  $\theta$  是一个未知参数或几个未知参数组成的参数向量， $\Theta$  是参数空间， $x_1, \dots, x_n$  是来自该总体的样本，将样本的联合概率函数看成  $\theta$  的函数，用  $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$  表示，简记为  $L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = p(x_1; \theta)p(x_2; \theta) \cdots p(x_n; \theta)$ ， $L(\theta)$  称为样本的似然函数。如果某统计量  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  满足

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta) \quad (2-1)$$

则称  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的最大似然估计，简记为 MLE (Maximum Likelihood Estimate)。求解的方法：通过取对数以及一阶条件可以求得该参数估计值。最大化  $\ln L(\theta)$  的必要条件是：

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2-2)$$

下面给出最大似然估计量的性质：

若  $x_1, \dots, x_n$  是来自该总体的样本，未知参数  $\theta$  的最大似然估计  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ ，在似然函数三阶偏导数都存在等条件下，大样本下线性模型的最大似然估计量有以下渐进性质：

(1) 一致性 (相合性)：即对任意的  $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0 \quad (2-3)$$

即  $\hat{\theta}_n$  依概率收敛于  $\theta$ 。

(2) 渐进正态性： $\hat{\theta}_n \xrightarrow{a} N(\theta, \frac{1}{nJ(\theta)})$ ，其中  $I(\theta)$  是费希尔信息量

$$I(\theta) = E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x; \theta) \right]^2 \quad (2-4)$$

即  $\hat{\theta}_n$  依分布收敛于  $N(\theta, \frac{1}{nJ(\theta)})$ 。

(3) 渐进有效性:  $\theta$  的无偏估计的  $\hat{\theta}_n$ , 有  $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq (nI(\theta))^{-1}$ , 其中  $(nI(\theta))^{-1}$  称为  $\theta$  的无偏估计的方差的 C-R 下界。

(4) 不变性: 若  $c(\theta)$  是一个连续且连续可微的函数, 则  $c(\hat{\theta})$  是  $c(\theta)$  的最大似然估计量。

## 2.2 假设检验方法介绍

估计和假设检验是经典统计学的两大分支。估计是成功的一半, 假设检验是另一半。上文对于最大似然估计的一些内容作了介绍, 接下来介绍假设检验的一些相关内容。对模型进行假设检验可以改善模型的设定, 从而确保假设适合于数据。

### 2.2.1 假设检验的原理与步骤

假设检验是基于小概率原理的反证法。其过程是运用反证法, 先承认待检验的假设是成立的, 然后观察在此假设成立的条件下样本的出现是否合理。如果合理, 则假设成立; 如果不合理, 则事实与假设的前提出现矛盾, 则假设不成立。其判断假设成立与否的依据是最小概率原理。小概率原理即认为小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的。如果某个假设对于总体来说是真实的, 那么不利于或不能支持这个假设的事件 A 在一次试验中就应该是几乎不可能发生的; 但是, 如果在一次试验中事件 A 竟然发生了, 那么我们就有理由怀疑这个假设的真实性, 从而拒绝这个假设。

假设检验是数理统计中最基本的一种统计推断方法, 它的基本思想如下: 如果已知总体分布, 那么可以根据经验或者历史数据等对分布中的未知参数作出某种假设, 然后根据样本数据提供的信息, 在给定显著性水平  $\alpha$  的前提下, 基于小概率原理对假设的合理性作出推断。假设检验的具体步骤一般可以概括如下:

第一步: 根据问题提出假设, 包括原假设  $H_0$  与备择假设  $H_1$ ;

第二步: 根据原假设  $H_0$  的内容选取检验统计量并确定统计量的分布。统计量的选取有一定的要求: 合适的统计量要求包含要检验的参数, 不含其它未知的参数, 并且统计量的分布已知;

第三步：结合选定的显著性水平 $\alpha$ 与统计量的分布根据相关软件或者查询相关表格确定出临界值，或者确定出对应的 P 值，从而得到统计量值的接受域与拒绝域；

第四步：根据样本观测值计算统计量的值并作出推断，得到结论。

### 2.2.2 显著性水平 $\alpha$ 与 P 值

显著性水平（significance level）是统计学专有名词，通常用 $\alpha$ 表示。在假设检验中， $\alpha$ 指的是当原假设正确时却被拒绝的概率，即是假设检验中“弃真”的概率。 $\alpha$ 是人们根据经验确定的，需要研究者根据实际情况确定其大小，传统经验上通常选择 $\alpha = 0.01$  或者 0.05 或者 0.1 等，也就是说，当检验结果为接受原假设时，正确的概率为 99%或者 95%或者 90%。假设检验构造的拒绝域与显著性水平有关，因此显著性水平的大小会影响决策者的判断。

P 值检验的方法在数理统计中有着重要的地位。P 值是在原假设为真的情况下，统计量的取值以其观察值为最大值或者最小值的事件的小概率。可以理解为利用观察值能够拒绝原假设的最小显著性水平。

P 值是拒绝原假设所犯的最小的第一类错误的概率， $\alpha$ 是事先确定的犯第一类错误的最大概率。由于 $\alpha$ 具有很大的主观性，因此运用 P 值进行判断决策更具有意义。虽然 P 值的计算比较复杂，但是随着计算机技术的发展，对于 P 值的计算也更加方便，从而在进行假设检验时更加准确与方便。

通常在假设检验中将 $\alpha$ 与 P 值进行比较来判断原假设的真假。如果 $\alpha \geq P$ ，则在显著性水平 $\alpha$ 下拒绝原假设；如果 $\alpha < P$ ，则在显著性水平 $\alpha$ 下保留原假设。

### 2.2.3 假设检验的两类错误

由于样本信息的局限性，假设检验可能得到错误的结果。错误可以分为两类：

（1）I类错误即第一类错误指在原假设成立的情况下拒绝原假设，简单的讲为“弃真”的错误，其概率一般用 $\alpha$ 表示。

（2）II类错误即第二类错误指在原假设不成立的情况下接受原假设，简单的讲为“存伪”的错误，其概率一般用 $\beta$ 表示。

在其他条件不变的情况下， $\alpha$ 与 $\beta$ 不能同时减小。在假设检验中，要降低两种错误的方法是增加样本量，但是，在现实情况中，增加样本量意味着增加实验成本，并且有时候显著性可取的样本量有限。所有在某些情况下，增加样本量的方法并不可取。这种情况下，仍然选择传统意义上的较小的 $\alpha$ 值，可能会对检验结果造成误判。此时，要想降低假设检验出现错误的几率，只有选择合适的 $\alpha$ 值，才能达到更好的检验结果。因此在假设检验中，通常通过控制犯第一类错误 $\alpha$ 的大小来达到控制检验错误的目的。

## 3.三大检验方法介绍

### 3.1 Wald 检验方法介绍

#### 3.1.1 原理与公式

Wald 检验即沃尔德检验，由沃尔德（Wald 1943）提出，适用于线性与非线性约束条件的检验。Wald 检验的原理是通过测量无约束估计量与约束估计量之间的距离来实现对约束条件的检验。如果约束是有效的，那么在没有约束情况下估计出来的估计量应该渐进地满足约束条件，因为最大似然估计量是一致的。以无约束估计量为基础构造 Wald 统计量，这个统计量服从卡方分布。

Polit（1996）和 Agresti（1990）描述的 Wald 检验是测试与一组解释变量相关的参数是否为零的多种方法之一。如果对于特定的解释变量或解释变量组，Wald 检验后得到的结论是约束条件不成立，那么我们将得出结论，与这些变量相关的参数不为零，因此变量应该包含在模型中。如果 Wald 检验表明这些解释变量不具有重要意义，即约束条件成立，这些变量为零，则可以从模型中省略这些解释变量。对于单个约束条件，Wald 统计量在形式上是 Z 统计量的平方。即当原假设为 $\theta_k = 0$ ，自变量 $x_k$ 对模型整体没有任何作用，Wald 统计量的表达方式如下：

$$Wald = \left( \frac{\hat{\theta}_k}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_k)}} \right)^2 = Z^2 \sim \chi_{(1)}^2 \quad (3-1)$$

大样本下，根据古典线性回归的基本假定， $\hat{\theta}_k$ 服从均值为 $\theta_k$ ，方差为 $Var(\theta_k)$ 的正态分布， $Var(\theta_k)$ 未知，用 $Var(\hat{\theta}_k)$ 来代替。则由Wald统计量的构造知上式中服从自由度为1的卡方分布。

当有多个线性约束条件时，记为 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ ， $\boldsymbol{\theta}$ 表示 $n \times 1$ 的列向量， $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ 表示 $m \times 1$ 的约束条件列向量。则Wald统计量的表示如下：

$$Wald = [\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^T [\mathbf{Var}(\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))]^{-1} [\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \sim \chi_{(m)}^2 \quad (3-2)$$

其中 $\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ 后的表达式， $[\mathbf{Var}(\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))]$ 是 $\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 的方差协方差矩阵，其计算公式如下：

$$\mathbf{Var}(\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^T} \right] [\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^T} \right]^T \quad (3-3)$$

其中 $\left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^T} \right]$ 表示 $m \times n$ 的偏导数矩阵，第 $i$ 行第 $j$ 列的数值表示第 $i$ 个约束条件对第 $j$ 个未知参数的偏导数。 $[\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$ 表示未知参数估计值的方差协方差矩阵。类比上述一个约束条件的情况，当有 $m$ 个线性约束条件时，大样本下Wald统计量渐进服从自由度为 $m$ 的卡方分布。

更一般的情况，既包括线性约束，又包括非线性约束，用 $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{q}$ 来表示约束条件， $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta})$ 与 $\mathbf{q}$ 都表示 $m \times 1$ 的约束条件列向量，其中 $\mathbf{q}$ 是常数向量，则Wald统计量的表达式为：

$$Wald = [\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}]^T \left\{ \left[ \frac{\partial \mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^T} \right] [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^T} \right]^T \right\}^{-1} [\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}] \sim \chi_{(m)}^2 \quad (3-4)$$

因为最大似然估计是渐进有效的，所以其渐进协方差矩阵达到CR下界，由最大似然估计渐进正态性知： $\hat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{a} N\{\boldsymbol{\theta}, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}\}$ ，其中 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]$ 是信息矩阵， $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$ 是CR下界。因此，式(3-4)可类比于式(3-2)， $\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}$ 相当于 $\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ ； $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$ 相当于 $[\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$ ； $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$ 表示CR下界 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$ 代入估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 后的结果。 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$ 与其估计值计算公式如下：

$$[I(\boldsymbol{\theta})]^{-1} = \left\{ E \left[ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \right\}^{-1} = \left\{ -E \left[ \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \right\}^{-1} \quad (3-5)$$

$$[I(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = \left[ \frac{\partial \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\partial \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^T} \right]^{-1} \quad (3-6)$$

### 3.1.2 检验步骤与优缺点

第一步：建立原假设 $H_0$ 与备择假设 $H_1$ ；

$H_0$ ：约束条件成立； $H_1$ ：约束条件不成立；

第二步：用最大似然法计算无约束模型的参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ；

第三步：确定显著性水平 $\alpha$ ，并找出相应自由度下卡方分布的临界值；

第四步：把无约束模型的参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 带入 Wald 统计量并计算，计算结果与临界值比较：

若  $Wald \leq \chi^2_{(m)}$ ，则接受原假设，约束条件成立。

若  $Wald > \chi^2_{(m)}$ ，则拒绝原假设，约束条件不成立。

Wald 检验的优点是只需估计无约束模型，当约束模型的估计很困难时，此方法尤其适用；Wald 统计量与方差有关，当参数估计值代入约束条件相差特别大时，方差会膨胀，导致 Wald 统计量变小，增大第二种错误的发生的概率。

## 3.2 LR 检验方法介绍

### 3.2.1 原理与公式

LR 检验即似然比检验，由奈曼-皮尔逊（Neyman-Pearson 1928）提出，他认为（Neyman-Pearson, 1928）LR 检验只适用于对线性约束的检验，张晓峒的教科书中也如此说，但这个说法可能存在争议。Green 的第五版教科书中描述 LR 方法是可以用于非线性约束检验的。LR 检验的原理是通过测量无约束估计与约束估计下的极大似然函数值之间的距离来实现对约束条件的检验。如果约束条件成立，则相应的约束条件与非约束条件下的极大似然函数值应该是近似相等的，因为加上约束后不应该引起似然函数最大值的大幅度降低。LR 统计量是以似然比为基础

构造的，似然比检验由此而得名，这个统计量服从卡方分布。

似然比定义为有约束条件下的似然函数最大值与无约束条件下似然函数最大值之比，记为 $\lambda$ ， $\lambda = \frac{L(\hat{\theta}_r)}{L(\hat{\theta}_u)}$ 。其中 $L(\hat{\theta}_r)$ 表示在约束条件下的似然函数最大值， $L(\hat{\theta}_u)$ 表示在无约束条件下的似然函数最大值。可以证明，在大样本下 LR 统计量服从卡方分布，自由度为约束条件的个数，LR 统计量的表达式为：

$$LR = -2 \ln \lambda = -2 (\ln L(\hat{\theta}_r) - \ln L(\hat{\theta}_u)) \sim \chi^2_{(m)} \quad (3-7)$$

显然  $0 < \lambda \leq 1$ 。有约束的最大值当然不会超过无约束的最大值，所以 $\lambda \leq 1$ 。如果原假设成立，有约束的最大值应当接近无约束时的最大值， $\lambda$ 的值接近 1，如果 $\lambda$ 值太小，则应该拒绝原假设。

### 3.2.2 检验步骤与优缺点

第一步：建立原假设 $H_0$ 与备择假设 $H_1$ ；

$H_0$ ：约束条件成立； $H_1$ ：约束条件不成立；

第二步：用最大似然法计算无约束模型与有约束模型下的参数估计 $\hat{\theta}$ ；

第三步：确定显著性水平 $\alpha$ ，并找出相应自由度下卡方分布的临界值；

第四步：计算非约束模型与约束模型的极大似然函数值，计算 LR 统计量与临界值比较：

若 $LR \leq \chi^2_{(m)}$ ，则接受原假设，约束条件成立。

若 $LR > \chi^2_{(m)}$ ，则拒绝原假设，约束条件不成立。

LR 检验的优点是统计量的构造比较简单，但是此方法需要估计约束模型与无约束模型，当两者的估计都较简单时，此方法比较适用。但是当任意一种模型的估计比较复杂时此方法不适用。

## 3.3 LM 检验方法介绍

### 3.3.1 原理与公式

LM 检验即拉格朗日乘数检验，是由艾奇逊-西尔维（Aitchison-Silvey 1960）



提出的，可以用于线性与非线性约束的检验。LM 检验的原理是通过比较有无约束条件下最大化拉格朗日函数的估计值的大小来实现对约束条件的检验。在约束条件下用拉格朗日法构造目标函数，如果约束条件成立，则最大化拉格朗日函数所得估计量应与最大化无约束所得参数估计值近似相等。据此构造 LM 统计量，该统计量服从卡方分布。

无约束模型的对数似然函数记为  $\ln L_u(\theta)$ ，假设约束条件为  $c(\theta) = q$ ，用拉格朗日乘数法求有约束条件的极值：

$$\text{Max}_{\theta} \ln L(\theta) + \lambda^T (c(\theta) - q) \quad (3-8)$$

记有约束条件  $\theta$  的估计值为  $\hat{\theta}_r$ 。若约束条件成立，则  $\hat{\theta}_r$  与无约束条件下的估计值非常接近，则  $\frac{\partial \ln L_u(\theta)}{\partial \theta}$  在  $\theta = \hat{\theta}_r$  时应接近 0。LM 的原理是若  $\frac{\partial \ln L_u(\hat{\theta}_r)}{\partial \hat{\theta}_r}$  显著的不为 0，则约束条件不成立，LM 统计量表达式如下：

$$LM = \left[ \frac{\partial \ln L_u(\hat{\theta}_r)}{\partial \hat{\theta}_r^T} \right] [I(\hat{\theta}_r)]^{-1} \left[ \frac{\partial \ln L_u(\hat{\theta}_r)}{\partial \hat{\theta}_r^T} \right]^T \sim \chi_{(m)}^2 \quad (3-9)$$

其中  $[I(\hat{\theta}_r)]^{-1}$  是  $[I(\theta)]^{-1}$  代入估计值  $\hat{\theta}_r$  后的结果， $m$  表示约束条件的个数。

LM 检验另一种表达式是由拉奥 (Rao 1948) 提出的，称为得分检验。记  $S(\theta) = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}$ ，称  $S(\theta)$  为  $\ln L(\theta)$  在  $\theta$  处的得分向量（即在  $\theta$  处的一阶偏导数）。无约束估计量  $\hat{\theta}_u$  的得分向量为  $S(\hat{\theta}_u) = 0$ ，有约束估计量  $\hat{\theta}_r$  的得分为  $S(\hat{\theta}_r)$ ，在约束条件成立的情况下，有  $S(\hat{\theta}_r) \approx 0$ 。可以证明，得分向量  $S(\theta)$  的均值为零，方差协方差矩阵为信息矩阵  $[I(\theta)]$ 。则当大样本时，在约束条件成立的情况下，LM 统计量的表达式可表示为：

$$LM = [S(\hat{\theta}_r)]^T [I(\hat{\theta}_r)]^{-1} [S(\hat{\theta}_r)] \sim \chi_{(m)}^2 \quad (3-10)$$

### 3.3.2 检验步骤与优缺点

第一步：建立原假设  $H_0$  与备择假设  $H_1$ ；

$H_0$ ：约束条件成立； $H_1$ ：约束条件不成立；

第二步：构造拉格朗日函数计算有约束模型的参数估计  $\hat{\theta}_r$ ；

第三步：确定显著性水平  $\alpha$ ，并找出相应自由度下卡方分布的临界值；

第四步：将上述 $\hat{\theta}_r$ 代入无约束模型的一阶导中并计算 LM 统计量，之后与临界值比较：

若  $LM \leq \chi^2_{(m)}$ ，则接受原假设，约束条件成立。

若  $LM > \chi^2_{(m)}$ ，则拒绝原假设，约束条件不成立。

LM 检验的优点是只需估计约束模型。当施加约束条件后模型形式变得简单时，更适用于这种检验。但是同 Wald 统计量相似，LM 统计量也涉及方差，即当参数估计值代入无约束条件相差特别大时，方差会膨胀，导致 LM 统计量变小，增大第二种错误的发生的概率。

## 4.三大检验的比较分析

### 4.1 基于一般线性模型的实例分析

目前在一般线性模型下对三大检验进行的研究较为成熟，在这种模型下，三大检验的表达式可以残差平方和的相关形式来表示，并且在第一部分提到的不等式关系也是在该模型下的研究。下面比较三种统计量在一般线性模型并且是线性约束条件下进行参数检验的表达式与应用。

考虑简单的线性回归模型： $Y = X\beta + u$ 。其中  $Y$  为  $n \times 1$  的列向量， $X$  为  $n \times k$  的样本矩阵， $\beta$  为  $k \times 1$  的系数矩阵， $u$  为  $n \times 1$  的误差列向量。由经典线性回归的假设知  $u \sim N(0, \sigma^2 I)$ ，并且每一个  $Y_i$  的概率密度函数为：

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(Y_i - X_i\beta)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4-1)$$

则  $n$  个样本的似然函数为：

$$\begin{aligned} L(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \beta, \sigma^2) &= f(Y_1)f(Y_2)\cdots f(Y_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - X_i\beta)^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (4-2)$$

对应的对数似然函数可计算如下：

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (4-3)$$

一阶导为零：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (4-4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (4-5)$$

可解得：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (4-6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (4-7)$$

最小二乘估计使残差的平方和最小与上述取 $\boldsymbol{\beta}$ 使对数似然函数最大最终的考虑的是同一个问题，所以最大似然估计与最小二乘估计的 $\boldsymbol{\beta}$ 值相等。但是 $\sigma^2$ 的值不同。最小二乘估计下的 $\sigma^2$ 的分母为 $n - k$ 。

各种线性约束都可以用 $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{q}$ 来表示。其中 $\mathbf{R}$ 是 $m \times k (m \leq k)$ 的常数矩阵， $\mathbf{q}$ 是 $m \times 1$ 的常数矩阵。考虑 $H_0: \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{q} = \mathbf{0}$ 约束条件成立。 $H_1$ ：约束条件不成立。在比较三种检验统计量在上述条件下的表达式之前，先估计有约束模型下的参数最大似然估计值。构造拉格朗日函数：

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda^T (\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{q}) \quad (4-8)$$

$\boldsymbol{\beta}$ 、 $\sigma^2$ 与 $\lambda$ 的一阶导为零：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R}^T \lambda = 0 \quad (4-9)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (4-10)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4-11)$$

记有约束条件下的 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\sigma^2$ 的估计值为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ 与 $\hat{\sigma}^{2*}$ 。

#### 4.1.1 Wald 统计量

已知最小二乘估计下 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的分布： $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$ ，因为最大似然估计下 $\boldsymbol{\beta}$

的估计相同，或者考虑最大似然估计下的渐进正态性，所以最大似然估计下 $\beta$ 的估计也服从上述分布。那么代入 Wald 统计量的公式可以得到：

$$Wald = [\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q}]^T [\mathbf{R}\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}^T]^{-1} [\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q}] \sim \chi_{(m)}^2 \quad (4-12)$$

记 $\hat{\beta}^* - \hat{\beta} = \hat{\beta}_0$ ，有约束条件下将 $\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + \hat{\beta}_0$ 与式(4-4)代入上式(4-9)，得到：

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta}_0 + \mathbf{R}^T \lambda = 0 \quad (4-13)$$

解上述式子得 $\hat{\beta}_0 = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T \lambda \sigma^2$ 。在约束条件成立下的估计应满足 $\mathbf{R}\hat{\beta}^* - \mathbf{q} = 0$ ，即 $\mathbf{R}(\hat{\beta} + \hat{\beta}_0) - \mathbf{q} = 0$ ，代入 $\hat{\beta}_0$ 得：

$$\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T \lambda \sigma^2 \quad (4-14)$$

由式(4-14)得 $\lambda$ ：

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{R}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T]^{-1} (\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q}) \quad (4-15)$$

将式(4-15)代入 $\hat{\beta}_0 = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T \lambda \sigma^2$ 得：

$$\hat{\beta}_0 = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T [\mathbf{R}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T]^{-1} (\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q}) \quad (4-16)$$

记 $\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{e}$ ， $\mathbf{e}$ 为无约束估计下的残差，记有约束条件下的残差为 $\mathbf{e}^*$ ：

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^* = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} - \mathbf{X}(\hat{\beta}^* - \hat{\beta}) = \mathbf{e} - \mathbf{X}(\hat{\beta}^* - \hat{\beta}) \quad (4-17)$$

将式(4-17)等式两边转置后与自身相乘得：

$$\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + (\hat{\beta}^* - \hat{\beta})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\hat{\beta}^* - \hat{\beta}) - 2\mathbf{e}^T \mathbf{X} (\hat{\beta}^* - \hat{\beta}) \quad (4-18)$$

由式(4-4)知 $\mathbf{e}^T \mathbf{X} = 0$ ，所以：

$$\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\hat{\beta}^* - \hat{\beta})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\hat{\beta}^* - \hat{\beta}) \quad (4-19)$$

将式(4-16)代入上式得：

$$\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e} = [\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q}]^T [\mathbf{R}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}^T]^{-1} [\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{q}] \quad (4-20)$$

代入式(4-20)与上述的 $\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n}$ 代入 Wald 统计量得：

$$Wald = \frac{n(\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e})}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \quad (4-21)$$

### 4.1.2 LR 统计量

代入上述的 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 与 $\hat{\sigma}^2$ 于式(4-3)得无约束条件下的最大似然函数值:

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{n}{2} [\ln(2\pi) + 1] - \frac{n}{2} \ln \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n} \quad (4-22)$$

有约束条件下的残差为 $\mathbf{e}^*$ 。则代入上面计算的估计值于式(4-8), 可得有约束条件下的最大似然函数值:

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*, \hat{\sigma}^{2*}) = -\frac{n}{2} [\ln(2\pi) + 1] - \frac{n}{2} \ln \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*}{n} \quad (4-23)$$

将上述式(4-22)与式(4-23)代入式(3-7)中得到 LR 统计量得:

$$LR = n \ln \left( \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \right) \quad (4-24)$$

### 4.1.3 LM 统计量

先计算得分向量:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ln L_u(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

代入有约束估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ 得:

$$\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T \mathbf{e}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

已知 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta})]^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ , 现在求 $[\mathbf{I}(\sigma^2)]$ :

$$[\mathbf{I}(\sigma^2)] = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln L_u(\sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^{2T}} \right] = E \left[ \frac{1}{\sigma^6} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - \frac{n}{2\sigma^4} \right] = \frac{n}{2\sigma^4} \quad (4-27)$$

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{I} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

根据统计量的公式(3-10)可以计算出结果:

$$LM = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{e}^{*T} \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T \mathbf{e}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

在有约束条件下,  $\hat{\sigma}^{2*} = \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*}{n}$ , 代入式(4-30)计算得:

$$LM = \frac{n(\mathbf{e}^{*T} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e}^*)}{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*} \quad (4-31)$$

令  $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ , 其中  $\mathbf{I}$  是单位矩阵,  $\mathbf{MX} = \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{Me}^* = \mathbf{M}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) = \mathbf{MY} = \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^{*T} \mathbf{M}^T \mathbf{Me}^* = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M}$ , 则:

$$\mathbf{e}^{*T} \mathbf{Me}^* = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^{*T} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e}^* \quad (4-32)$$

即  $\mathbf{e}^{*T} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e}^* = \mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ . 所以LM统计量最终可以转换为:

$$LM = \frac{n(\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e})}{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*} \quad (4-33)$$

在实际应用中,在上述条件下计算  $LM$  统计量可以借助辅助回归的方式,方法是从受约束的模型开始,检验是否约束条件使得存在某些变量系数范围被限制,对约束模型进行回归,得到残差  $\mathbf{e}^*$ . 如果约束条件不成立,则无约束条件下的变量回归出的模型应对  $\mathbf{e}^*$  有影响。则  $\mathbf{e}^*$  对所有变量回归,回归模型的可决系数  $R^2$  的大小就能直接决定是否应该去掉约束条件,如果  $R^2$  很大,则说明无约束条件下的变量对  $\mathbf{e}^*$  有显著影响,则真实模型不应该加上约束条件,即参数约束不成立;如果  $R^2$  较小,则说明无约束条件下的变量对  $\mathbf{e}^*$  无显著影响,真实模型就应是有约束的模型,即约束条件成立。此时  $LM = nR^2$ , 所以又称  $LM$  统计量为  $nR^2$  统计量。恩格尔(Engle, 1982)证明了对于大样本来说,  $LM$  检验可分两步完成。第一步,计算有约束的估计量  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ , 从而得到残差向量  $\mathbf{e}^*$ . 第二步,让  $\mathbf{e}^*$  对所有的变量  $\mathbf{X}$  回归,可得回归的可决系数  $R^2$ . 其中回归模型是否有常数项与原无约束模型有无常数项相同。

#### 4.1.4 三个统计量的大小关系

虽然三个统计量在大样本下是渐近等价的,但是在有限样本下,三者存在确定的大小排序:  $Wald \geq LR \geq LM$ . 下面给出证明:

根据  $\ln(1+x)$  在  $x$  趋于0时的泰勒展开式知:

$$\begin{aligned}
LR &= n \ln \left( \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \right) = n \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \right) \\
&= n \left[ \left( \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \right)^2 + \dots \right] \quad (2-34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
LR &= -n \ln \left( \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*} \right) = -n \ln \left( 1 - \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*} \right) \\
&= n \left[ \left( \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*} \right)^2 + \dots \right] \quad (4-35)
\end{aligned}$$

所以  $Wald \geq LR \geq LM$ ，证明完毕。

## 4.2 三大检验几何表示的比较

考虑三个统计量在几何上的区别。先考虑一元线性回归，原假设为  $H_0: \beta = \beta_0$ ，则三个统计量可写作以下形式：

$$Wald = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)^2}{Var(\hat{\beta})} \quad (4-36)$$

$$LR = -2(\ln L(\beta_0) - \ln L(\hat{\beta})) \quad (4-37)$$

$$LM = S^2(\beta_0) I(\beta_0)^{-1} \quad (4-38)$$

就几何上而言， $LR$  检验是基于  $\hat{\beta}$  和  $\beta_0$  的似然函数值之间的距离， $Wald$  检验是基于  $\hat{\beta}$  和  $\beta_0$  之间的距离， $LM$  检验则是基于对数似然函数在  $\beta_0$  处的斜率，每一个检验都很好地度量了原假设与备择假设之间的“距离”。Buse（1928）做出三大检验统计量的几何解释，如下图：

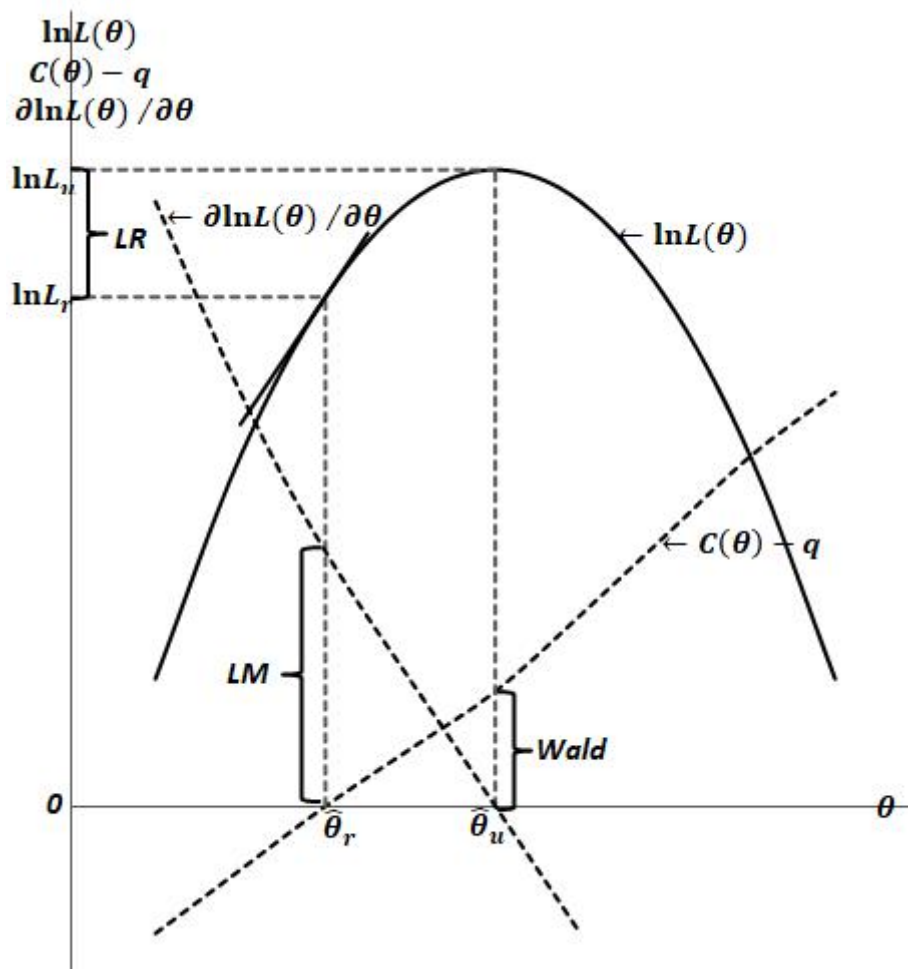


图 1：三种统计量的几何表示

从上图很容易看出，Wald 检验依赖约束条件，估计无约束模型；LM 检验依赖得分向量，估计有约束模型；LR 检验依赖似然函数值，估计两个模型。（注意：图中纵轴对于不同的线表示不同意义，所以部分交点无意义。）

### 4.3 三种检验的精准临界值比较分析

三种检验在大样本下渐进服从卡方分布，当检验使用渐近卡方临界值时，它们具有相同的临界区域，但由上述知检验统计量的值可能不相等，它们之间的不平等关系意味着，对于小样本，用卡方临界值来检验会产生相互矛盾的结论。那么真实的临界值与与卡方临界值之间的差异有多大？

三种检验在一般线性模型下的表达式都与残差的平方和有关，考虑也与残差



平方和有关的 F 检验与三种检验之间是否存在某种关系。

#### 4.3.1 F 统计量

在经典线性回归假设条件下，检验线性约束条件，已知： $\mathbf{e}^{*\text{T}}\mathbf{e}^* - \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})^{\text{T}}\mathbf{X}^{\text{T}}\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})$ 。显然 $\mathbf{e}^{*\text{T}}\mathbf{e}^* \geq \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e}$ ，说明对模型施加约束条件后会降低模型的解释能力。若约束条件为真，则有约束回归模型与无约束回归模型应具有近似相同的解释能力，即两个残差平方和应近似相等。由此构造 F 统计量：

$$F = \frac{(\mathbf{e}^{*\text{T}}\mathbf{e}^* - \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e})/m}{\mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e}/(n-k)} = \frac{(\mathbf{e}^{*\text{T}}\mathbf{e}^* - \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e})(n-k)}{\mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e}m} \sim F(m, n-k) \quad (4-39)$$

#### 4.3.2 三种检验的精确分布

由上述三大检验与 F 检验的公式可知，三大检验与 F 检验之间存在密切的联系。在小样本情况下，考虑用 F 检验统计量来表示三大检验的统计量，然后用 F 统计量的相应临界值来检验。有以下变形：

$$Wald = \frac{mn}{n-k} F \quad (4-40)$$

$$LM = \frac{Wald}{1 + Wald/n} \quad (4-41)$$

$$LR = n \ln(1 + \frac{Wald}{n}) \quad (4-42)$$

每个检验统计量具有不同的精确抽样分布，因此每个检验统计量的真实临界值不同，但每个检验统计量都是 F 统计量的函数，是 F 分布的临界值的某种变形，因此三种检验又是等价的。即基于精确分布的三个检验之间应该是没有冲突，使用三个检验统计量的精确分布在显著性水平 $\alpha$ 下的临界值，得到的结论相同：当精确 Wald 检验在显著性水平 $\alpha$ 上接受 $H_0$ 时，精确 LM 和 LR 检验也在水平 $\alpha$ 上接受 $H_0$ ，同样，如果精确 Wald 检验拒绝 $H_0$ ，那么精确 LM 减检验和 LR 检验也在水平 $\alpha$ 上拒绝 $H_0$ 。在大样本下，精确分布近似于渐近的卡方分布，精确检验的临界值近似于卡方临界值。对于显著性水平 $\alpha$ ，则三种检验的临界值为：

$$Z_w = \frac{mn}{n-k} F_{\alpha} \quad (4-43)$$

$$Z_{LM} = \frac{Z_w}{1 + Z_w/n} \quad (4-44)$$

$$Z_{LR} = n \ln(1 + \frac{Z_w}{n}) \quad (4-45)$$

即在原假设为真的情况下，以下等式成立：

$$P(Wald > Z_w) = P(LM > Z_{LM}) = P(LR > Z_{LR}) = \alpha \quad (4-46)$$

### 4.3.3 三种检验的精确检验临界值与卡方临界值的比较分析

由于每个检验统计量的精确分布可能与渐近分布有实质性差异，因此精确临界值可能与卡方临界值有实质性差异。不等式关系  $Wald \geq LR \geq LM$  表明在同一显著性水平下用卡方临界值去判断检验结果可能会得到相互冲突的结论。由上述已知三种检验在一般线性模型下的精确分布与用 F 分布表示的精确检验临界值，考虑比较精确临界值与卡方临界值之间的差距，从而分析三种检验的渐进性与适用情况。

因为三种检验的卡方临界值与约束条件有关，为了能存在更多的约束条件以与更多的卡方临界值比较，所以一般线性模型的未知参数不能太少；又因为未知参数太多会影响 F 检验的自由度，所以未知参数也不能太少；最终在本次讨论中假设模型有 10 个未知参数，即  $k = 10$ ；那么约束条件的个数  $m$  可以为 1~10；本次讨论也考虑在不同显著性水平下三种检验的渐进性，所以  $\alpha$  取 0.01, 0.05 与 0.1；因为参数取 10 个，为了保证 F 的自由度，样本个数  $n$  从 31 开始到 50 与 60、70、80、90、100、110 与  $\infty$ 。根据 F 分布的临界值计算三种检验在约束条件个数分别为 1~10，不同显著性水平下，上述样本个数下的精确检验临界值，计算结果见附录 A。

卡方分布在三种显著性水平下不同自由度下的检验临界值见附录 B。对比三种检验精确检验临界值的结果与卡方检验临界值的结果可知，无论参数约束条件与显著性水平如何变化，当样本个数趋于无穷或者说足够大时，前者与后者可以说是相等，这一点也为三种检验渐进服从卡方分布相一致。并且随着样本个数的增大，无论约束条件个数与显著性水平如何，Wald 检验与 LR 检验的精确临界值与卡方临界值之间的距离越来越小；LM 检验大体上也满足上述规律，只存在三次偶

然的情况；即当 $\alpha = 0.01$ ， $m = 5$ ； $\alpha = 0.05$ ， $m = 7$ ； $\alpha = 0.1$ ， $m = 8$ 时，两者之间的距离可能会随着样本个数的增大而增大，但最终都会随着样本个数的增大而减小。

为了进一步明确不同的约束条件个数与显著性水平下，考虑在样本数为 110 时，三种检验精确检验临界值与卡方检验临界值之间的距离变化；由于 LM 检验上述存在的特殊情况，同时也考虑了样本数为 31 时两者之间的距离。前者减去后者的结果见附录 C，为了直观的比较，做出不同检验的趋势图如下。其中横轴代表约束条件个数，纵轴代表距离，不同的线表示不同的显著性水平。

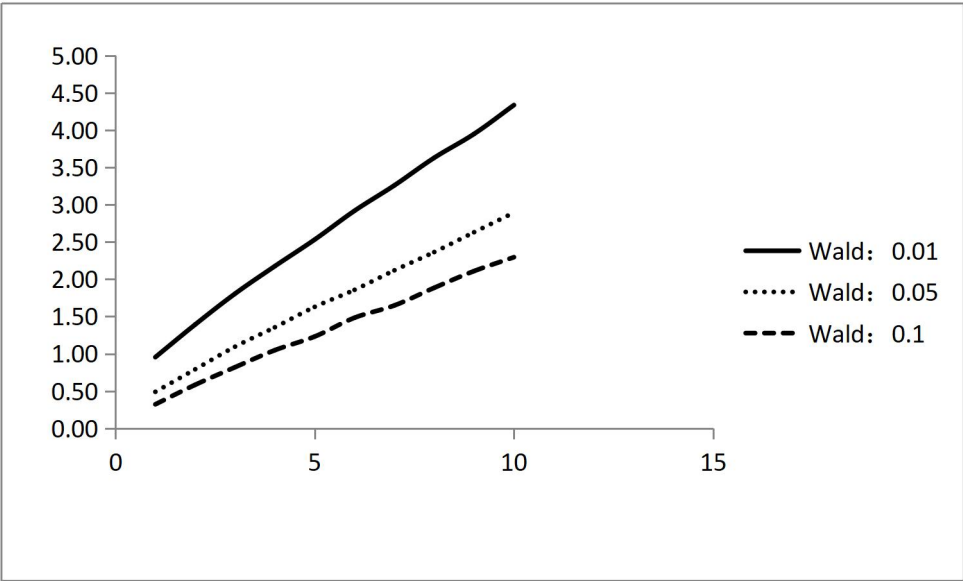


图 2：Wald 检验的距离变化

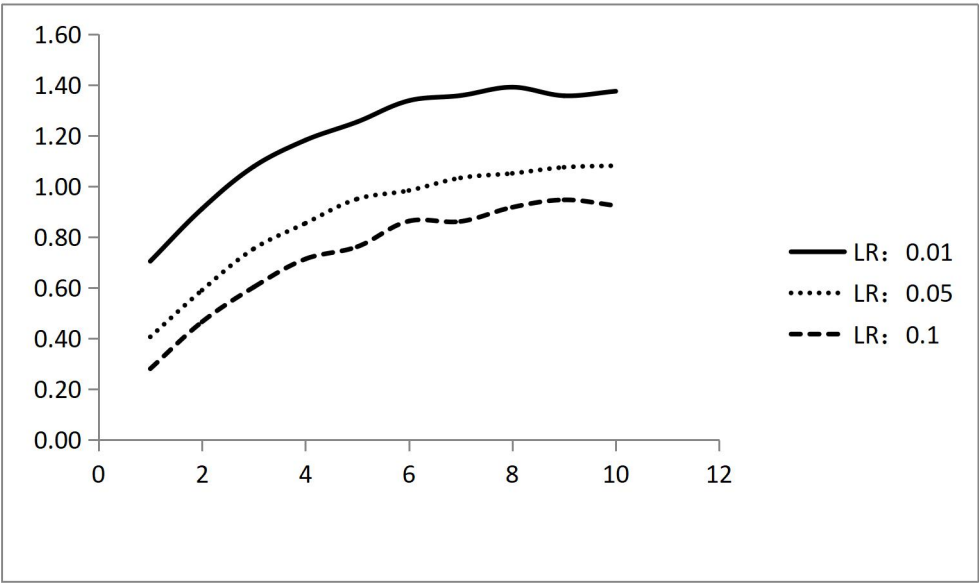


图 3：LR 检验的距离变化

由图 2 与图 3 可以看出，在其他条件不变的情况下，随着约束条件的增多，Wald 检验与 LR 检验，精确分布临界值与卡方分布临界值的距离越大，也就是说，约束条件越小，用卡方临界值得出的检验结果越精确；并且，显著性水平越大，用卡方临界值得出的检验结果也越精确。

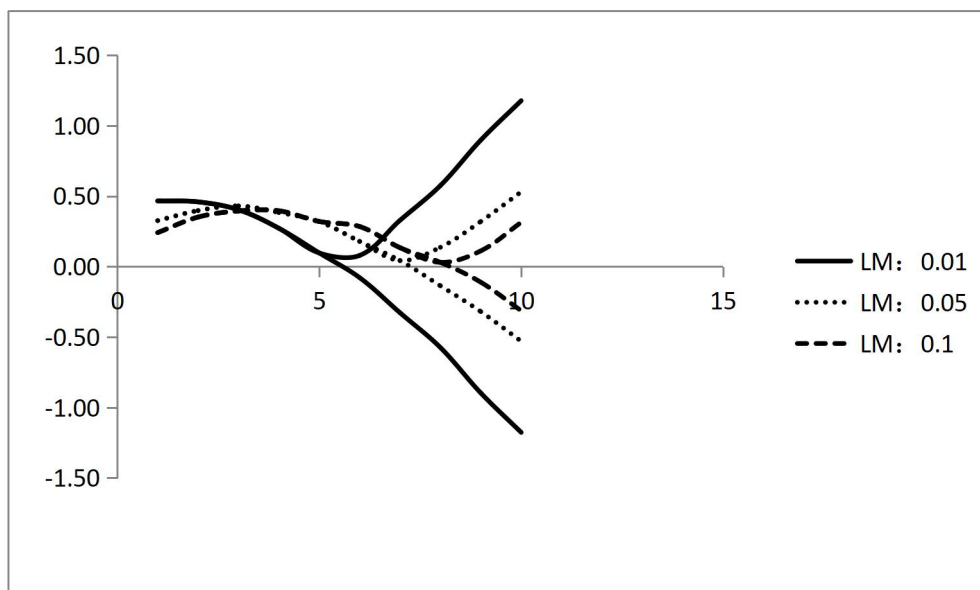


图 4：LM 检验的距离变化

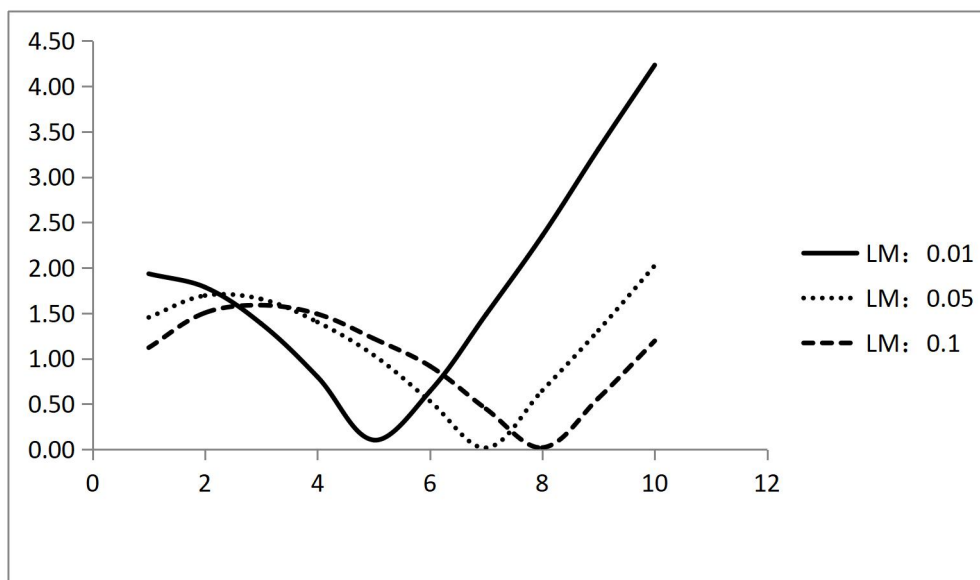


图 5：LM 检验的距离变化

原数据存在负值，为了更好的表示距离，图 4 表示了原数据以及数据的绝对

值；图 5 的样本数为 31，直接表示数据的绝对值。图 4 与图 5 呈现的 LM 检验的距离变化规律与前两种检验的规律不同，无论是样本数为 110 或者 31，随着约束条件的增多，精确分布临界值与卡方分布临界值的距离越大都有一个减小到最小再增大的过程。在约束条件较少或者较多的情况下，随着显著性水平的增大，精确分布临界值与卡方分布临界值的距离越小，用卡方临界值得出的检验结果也越精确。并且根据数据与图可以看出当 $\alpha = 0.01, m = 5$  或  $6$ ;  $\alpha = 0.05, m = 7$ ;  $\alpha = 0.1, m = 8$  时，两者之间的距离达到最小。

上述 LM 检验存在的三种情况：即当 $\alpha = 0.01, m = 5$ ;  $\alpha = 0.05, m = 7$ ;  $\alpha = 0.1, m = 8$  时，两者之间的距离可能会随着样本个数的增大而增大，但最终都会随着样本个数的增大而减小。两者之间的 $\alpha$ 与  $m$  相互对应，两者之间应该存在某种联系。当约束条件的个数达到某种程度时，随着样本数的增大，两者之间的距离可能会增大，但是整体来说，在这个约束条件个数下，样本数对于卡方临界值的精确程度没有太大影响，并且此时，卡方临界值与其他约束条件个数下的比较最准确。

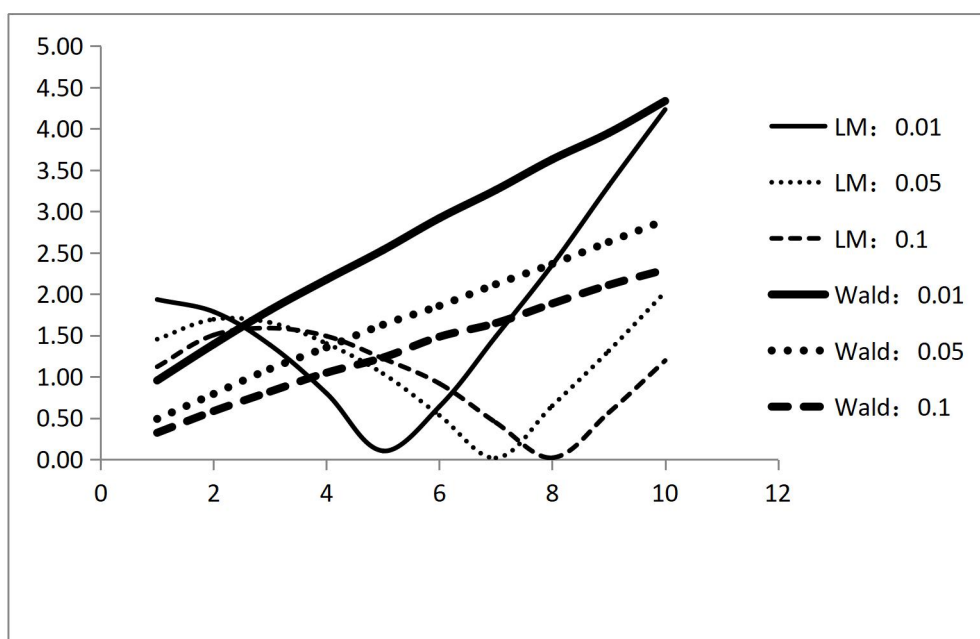


图 6: Wald 与 LM 检验的距离变化

因为随着样本数的增加，一般来说，卡方临界值越准确。很容易看出，在相同条件下，Wald 检验精确分布临界值与卡方分布临界值最大，LR 检验随后，LM 检验最小，并且比 Wald 检验小得多，由此，考虑比较 LM 检验在小样本下与 Wal

d 检验在样本数稍大情况下的检验临界值距离。图 6 表示 Wald 检验在 110 个样本下的距离与 LM 检验在 31 个样本下的距离。从图中可以看出：在约束条件个数稍微多一点的情况下，Wald 检验的距离比 LM 检验的距离大。即在小样本下，LM 检验卡方临界值在约束条件个数稍多的情况下，比 Wald 检验较大样本下的卡方临界值更准确。

上图显示三种检验卡方临界值与精确临界值相差很大，这也表明小样本下精确的分布很难用渐近分布来近似。这也意味着即使三个检验在卡方临界值下得出相同的结论，这也不表示渐近分布对精确分布有较满意的逼近。

## 5.结论

### 5.1 三种检验的相同点

三种检验方法都由极大似然估计而来，都用到了对数似然函数，都是针对模型约束条件进行检验，每一个检验都很好地度量了原假设与备择假设之间的“距离”，都可以被认为是依赖于测量零假设和替代假设之间偏差的统计数据，当零假设为真时的分布。这三个检验方法都是渐进等价的，大样本下都渐进服从自由度为约束个数的卡方分布，即在样本容量特别大的情况下，依据卡方分布的临界值它们将得出同样的检验结果。

除此之外，在经典的线性回归模型中，三大检验的分布都是 F 检验分布的函数，因此，推断在其他模型中，三大检验的分布可能也是某个统计分布的函数。在经典的线性回归模型中，三大检验结果冲突的产生是使用卡方临界值检验的结果，而不是使用精确检验的结果。因此推断在任何可以使用三大检验的模型中，利用其精确分布的临界值得到的三大检验的结果是统一的。

## 5.2 三种检验的不同点

### 5.2.1 原理与需要估计的模型不同

尽管三种检验都是针对模型约束条件进行检验，但是原理不同。Wald 检验的原理是通过测量无约束估计量与约束估计量之间的距离来实现对约束条件的检验。

LM 检验的原理是通过比较有无约束条件下最大化拉格朗日函数的估计值的大小来实现对约束条件的检验。LR 检验的原理是通过测量无约束估计与约束估计下的极大似然函数值之间的距离来实现对约束条件的检验。也可以解释为尽管每一个检验都很好地度量了原假设与备择假设之间的“距离”，但是，就几何上而言，LR 检验是基于  $\hat{\beta}$  和  $\beta_0$  的似然函数值之间的距离，Wald 检验是基于  $\hat{\beta}$  和  $\beta_0$  之间的距离，LM 检验则是基于对数似然函数在  $\beta_0$  处的斜率。

LM 检验只需估计约束模型；LR 检验需要估计约束模型与无约束模型，Wald 检验只需估计无约束模型。

### 5.2.2 有限样本下统计量的值不同

在以下三个条件下：干扰项服从多元正态分布；估计模型为线性模型；约束条件为线性条件时，有限样本条件下有如下关系成立： $Wald \geq LR \geq LM$ 。不等式说明只有当 LM 检验的结果为拒绝零假设即约束条件不成立，或者 Wald 检验的结果为接受零假设即约束条件成立时，三种检验的结论才是一致的。所以，实际中，三种检验方法有可能得出相互不一致的结论。

## 5.3 三种检验在实际运用中的选择

实际运用中，对三种检验方法的选择应以做实际计算时的难易程度而定。一般来说 Wald 和 LM 检验的计算难度较 LR 检验低，因为 Wald 和 LM 检验只需要估计一个模型，虽然 LR 检验的统计量的构造比较简单，但是此方法需要估计约束模型与无约束模型，当两者的估计都较简单时，此方法比较适用；但是当任意一种模型的估计比较复杂时此方法不适用。若无约束模型较容易估计，就采用 Wald

检验，反之，当施加约束条件后模型形式变得简单时，就采用 LM 检验。一般情况下，有约束模型的估计相对更复杂，所有 Wald 检验最为常用。

在经典线性模型假设下，当约束条件为线性时，每个检验统计量都可以化为 F 统计量的函数，精确检验临界值是 F 分布的临界值的某种变形，基于精确分布的三个检验之间是没有冲突，使用三个检验统计量的精确分布在显著性水平  $\alpha$  下的临界值，得到的结论相同。检验统计量具有不同的精确抽样分布，因此每个检验统计量的真实临界值不同。对比三种检验精确检验临界值的结果与卡方检验临界值的结果可知，无论参数约束条件与显著性水平如何变化，当样本个数趋于无穷或者说足够大时，前者与后者可以说是相等，这说明三种检验渐进服从卡方分布相一致。但是小样本下，三种检验卡方临界值与精确临界值相差很大，这也表明小样本下精确的分布很难用渐近分布来近似。这也意味着即使三个检验在卡方临界值下得出相同的结论，这也不表示小样本下渐近分布对精确分布有较满意的逼近。

根据上述三种检验的精确检验临界值与卡方临界值的比较分析，可得出以下结论：三种检验利用卡方分布临界值得出的结论的精确度会随着样本数的增加而增加；对于 Wald 检验与 LR 检验，随着约束条件个数的增加，精确分布临界值与卡方分布临界值的距离越大，也就是说，约束条件越小，用卡方临界值得出的检验结果越精确；并且，显著性水平越大，用卡方临界值得出的检验结果也越精确；对于 LM 检验，情况略有不同。随着约束条件的增多，精确分布临界值与卡方分布临界值的距离越大都有一个减小到最小再增大的过程。在约束条件较少或者较多的情况下，随着显著性水平的增大，精确分布临界值与卡方分布临界值的距离越小，用卡方临界值得出的检验结果也越精确。无论是哪一种显著性水平，当约束条件的个数达到某种程度时，距离会达到最小值，几乎为 0，此时卡方临界值最准确。但时，不同的显著性水平下，达到最小距离的约束条件个数是不一样的，显著性水平越小，需要的约束条件个数越少。

有以上规律知，三种检验中，LM 的渐进性较好，Wald 检验的渐进性较差，在使用卡方临界值的情况下，Wald 检验有时会拒绝原假设，犯第一类错误的概率最高。所有，在实际运用中，如果为了保证结论的准确性，在其他条件不变的情况下，最好使用 LM 检验方法，即使是在小样本的情况下，LM 的渐进性也可以。同时，显著性水平越大，三种检验出错的概率越小，所以可以在实情情况下尽可



能选择较大的显著性水平。并且，若约束条件较多时，也优先考虑 LM 检验。约束条件一般时，对于 LM 检验，在较小的显著性水平下，也会出现非常准确的结论。

但是，在经典线性模型假设下，当约束条件为线性时，用 F 检验比用这三个检验更可靠。一旦上述任一条件不成立，F 检验不再适用，需要 Wald, LR 与 LM 等检验。然而，对于一般模型下的三种检验的精确分布，目前还没有结论，关于三者之间的进一步比较还有待研究。根据三种检验可以表示为 F 分布推断在其他模型中，三大检验的分布可能也是某个统计分布的函数，并且利用其精确分布的临界值得到的三种检验的结果是统一的。

## 参考文献

- [1]胡新明.论 Wald、LR 和 LM 检验不一致时的选择依据[J]. 数量经济技术经济研究, 2010, (5):153-160.
- [2] Neyman, Jerzy, and Egon S. Pearson. On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference: Part II. [J]. Biometrika A 20.1 75-240, 1928:263-294.
- [3] Wald, A. Tests of Hypotheses Concerning Several Parameters When the Number of Observations is Large[J].Transactions of the American Mathematical Society, 1943, 54:426-482.
- [4] RAO, C.R. Large Sample Tests of Statistical Hypotheses Concerning Several Parameters with Applications to Problems of Estimation[J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1947, 44:50-57.
- [5] Aitchison, J. and D. Silvey. Maximum Likelihood Estimation of Parameters Subject to Restraints[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1958, 29:813-828.
- [6] Silvey, S. D. The Lagrange Multiplier Test[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1959, 30:389-407.

- [7] Savin, N. E. Conflict Among Testing Procedures in a Linear Regression Model with Autoregressive Disturbances[J]. *Econometrica*, 1976, 44:1303-1315.
- [8] Berndt, E. R. and N. E. Savin. Conflict Among Criteria for Testing Hypotheses in the Multivariate Linear Regression Model[J]. *Econometrica*, 1977, 45:1263-1278.
- [9] Breusch, T. S. Conflict Among Criteria for Testing Hypotheses: Extensions and Comments[J]. *Econometrica*, 1979 47:203-207.
- [10] Engle, R. F. A General Approach to Lagrange Multiplier Model Diagnostics [J]. *Journal of Econometrics*, 1982, 20:83-104.
- [11] Buse, A. The Likelihood Ratio, Wald, and Lagrange Multiplier Tests: An Expository Note[J]. *American Statistician*, 1982, 36:153-157.
- [12] William H. Greene. *Econometrics Analysis*[M]. Fifth Edition. American: Prentice-hall, Inc., 2002:484-496.

# 附录 A

**表 1: Wald 检验在 $\alpha = 0.01$  下的精确临界值**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	11.83	17.07	21.59	25.80	29.83	33.76	37.61	41.40	45.15	48.86
22	11.56	16.64	21.02	25.10	29.00	32.80	36.52	40.18	43.80	47.38
23	11.31	16.25	20.51	24.47	28.26	31.94	35.54	39.09	42.60	46.07
24	11.08	15.91	20.05	23.90	27.59	31.17	34.67	38.11	41.51	44.88
25	10.88	15.59	19.64	23.39	26.98	30.47	33.88	37.23	40.54	43.81
26	10.69	15.30	19.26	22.93	26.43	29.83	33.16	36.43	39.65	42.84
27	10.52	15.04	18.91	22.50	25.93	29.25	32.50	35.69	38.84	41.96
28	10.36	14.80	18.60	22.12	25.47	28.72	31.90	35.02	38.10	41.15
29	10.22	14.58	18.31	21.76	25.05	28.24	31.35	34.41	37.42	40.41
30	10.08	14.37	18.04	21.43	24.66	27.79	30.84	33.84	36.80	39.72
31	9.96	14.18	17.79	21.12	24.30	27.37	30.37	33.32	36.22	39.09
32	9.84	14.01	17.56	20.84	23.96	26.99	29.94	32.83	35.68	38.50
33	9.73	13.84	17.34	20.58	23.65	26.63	29.53	32.38	35.18	37.96
34	9.63	13.69	17.14	20.33	23.36	26.29	29.15	31.96	34.72	37.45
35	9.54	13.55	16.96	20.10	23.09	25.98	28.80	31.56	34.29	36.97
36	9.45	13.41	16.78	19.88	22.84	25.69	28.47	31.20	33.88	36.53
37	9.37	13.28	16.61	19.68	22.60	25.41	28.16	30.85	33.50	36.11
38	9.29	13.17	16.46	19.49	22.37	25.16	27.87	30.52	33.14	35.72
39	9.21	13.05	16.31	19.31	22.16	24.91	27.59	30.22	32.80	35.35
40	9.14	12.95	16.17	19.14	21.96	24.68	27.33	29.93	32.49	35.01
50	8.60	12.14	15.12	17.85	20.45	22.94	25.37	27.74	30.08	32.38
60	8.26	11.61	14.44	17.03	19.48	21.83	24.12	26.35	28.54	30.70
70	8.01	11.25	13.97	16.46	18.80	21.06	23.25	25.39	27.48	29.55
80	7.83	10.98	13.62	16.03	18.31	20.49	22.61	24.68	26.70	28.70
90	7.69	10.78	13.36	15.71	17.93	20.06	22.12	24.14	26.11	28.05
100	7.58	10.61	13.15	15.46	17.63	19.72	21.74	23.71	25.64	27.54
$\infty$	6.63	9.22	11.34	13.28	15.10	16.80	18.48	20.08	21.69	23.20

(注：第一行表示约束条件的个数即  $m$ ；第一列表示样本数减去未知参数个数，即  $n-k$ ，表 1-9 同)

**表 2: Wald 检验在 $\alpha = 0.05$  下的精确临界值**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	6.38	10.24	13.61	16.77	19.82	22.79	25.70	28.58	31.43	34.26
22	6.26	10.02	13.31	16.39	19.35	22.25	25.09	27.89	30.66	33.41
23	6.14	9.82	13.03	16.04	18.94	21.76	24.53	27.26	29.96	32.64
24	6.03	9.64	12.79	15.73	18.56	21.32	24.02	26.69	29.33	31.94
25	5.94	9.48	12.56	15.45	18.22	20.92	23.57	26.18	28.75	31.31
26	5.85	9.33	12.36	15.19	17.91	20.55	23.15	25.70	28.23	30.73
27	5.77	9.19	12.17	14.95	17.62	20.22	22.77	25.27	27.75	30.21
28	5.69	9.07	12.00	14.73	17.36	19.91	22.41	24.88	27.31	29.72

29	5.63	8.95	11.84	14.53	17.12	19.63	22.09	24.51	26.90	29.27
30	5.56	8.84	11.69	14.34	16.89	19.36	21.79	24.17	26.53	28.86
31	5.50	8.74	11.55	14.17	16.68	19.12	21.51	23.86	26.18	28.48
32	5.45	8.65	11.42	14.01	16.49	18.89	21.25	23.57	25.85	28.12
33	5.39	8.56	11.30	13.86	16.31	18.68	21.01	23.29	25.55	27.79
34	5.34	8.48	11.19	13.72	16.14	18.48	20.78	23.04	25.27	27.48
35	5.30	8.40	11.09	13.58	15.98	18.30	20.57	22.80	25.00	27.18
36	5.26	8.33	10.99	13.46	15.83	18.12	20.37	22.58	24.75	26.91
37	5.22	8.26	10.89	13.34	15.69	17.96	20.18	22.37	24.52	26.65
38	5.18	8.20	10.81	13.23	15.55	17.80	20.00	22.17	24.30	26.41
39	5.14	8.14	10.72	13.13	15.43	17.66	19.84	21.98	24.09	26.18
40	5.11	8.08	10.65	13.03	15.31	17.52	19.68	21.80	23.90	25.97
50	4.84	7.64	10.04	12.27	14.40	16.46	18.47	20.45	22.39	24.31
60	4.67	7.35	9.65	11.78	13.81	15.78	17.69	19.57	21.42	23.25
70	4.55	7.15	9.38	11.44	13.40	15.30	17.15	18.96	20.74	22.50
80	4.46	7.00	9.18	11.19	13.10	14.95	16.74	18.51	20.24	21.95
90	4.39	6.88	9.02	10.99	12.86	14.67	16.43	18.16	19.86	21.53
100	4.33	6.79	8.90	10.84	12.68	14.46	16.19	17.88	19.55	21.19
$\infty$	3.84	6.00	7.80	9.48	11.05	12.60	14.07	15.52	16.92	18.30

表 3: Wald 检验在 $\alpha = 0.1$  下的精确临界值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	4.37	7.60	10.47	13.19	15.81	18.38	20.91	23.40	25.88	28.34
22	4.29	7.45	10.26	12.91	15.48	17.98	20.45	22.89	25.30	27.70
23	4.21	7.32	10.07	12.66	15.17	17.62	20.04	22.42	24.78	27.12
24	4.15	7.19	9.89	12.44	14.90	17.30	19.66	21.99	24.30	26.60
25	4.08	7.08	9.73	12.23	14.65	17.00	19.32	21.61	23.87	26.12
26	4.03	6.98	9.58	12.04	14.42	16.73	19.01	21.25	23.48	25.69
27	3.98	6.88	9.45	11.87	14.20	16.48	18.72	20.93	23.12	25.28
28	3.93	6.79	9.33	11.71	14.01	16.25	18.46	20.63	22.78	24.92
29	3.88	6.71	9.21	11.56	13.83	16.04	18.21	20.35	22.47	24.58
30	3.84	6.64	9.10	11.43	13.66	15.84	17.98	20.10	22.19	24.26
31	3.80	6.57	9.00	11.30	13.51	15.66	17.77	19.86	21.92	23.97
32	3.77	6.50	8.91	11.18	13.36	15.49	17.58	19.64	21.67	23.69
33	3.73	6.44	8.83	11.07	13.23	15.33	17.39	19.43	21.44	23.44
34	3.70	6.38	8.74	10.96	13.10	15.18	17.22	19.24	21.23	23.20
35	3.67	6.33	8.67	10.87	12.98	15.04	17.06	19.05	21.02	22.97
36	3.64	6.28	8.60	10.77	12.87	14.91	16.91	18.88	20.83	22.76
37	3.62	6.23	8.53	10.69	12.76	14.78	16.77	18.72	20.65	22.57
38	3.59	6.18	8.47	10.61	12.66	14.67	16.63	18.57	20.48	22.38
39	3.57	6.14	8.40	10.53	12.57	14.56	16.50	18.42	20.32	22.20
40	3.54	6.10	8.35	10.45	12.48	14.45	16.38	18.29	20.17	22.03
50	3.37	5.79	7.91	9.89	11.80	13.65	15.46	17.24	19.01	20.75
60	3.26	5.58	7.62	9.52	11.35	13.12	14.86	16.57	18.25	19.92
70	3.18	5.44	7.42	9.27	11.04	12.75	14.44	16.09	17.72	19.33
80	3.12	5.33	7.27	9.07	10.80	12.48	14.12	15.73	17.32	18.90
90	3.07	5.25	7.15	8.93	10.62	12.27	13.88	15.46	17.02	18.56
100	3.03	5.18	7.06	8.81	10.48	12.10	13.69	15.25	16.78	18.30

$\infty$	2.71	4.60	6.24	7.76	9.25	10.62	12.04	13.36	14.67	16.00
----------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------

**表 4: LR 检验在 $\alpha = 0.01$  下的精确临界值**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	10.02	13.60	16.38	18.77	20.90	22.84	24.63	26.29	27.86	29.33
22	9.87	13.40	16.16	18.53	20.65	22.58	24.36	26.03	27.60	29.07
23	9.72	13.21	15.95	18.31	20.41	22.34	24.12	25.79	27.35	28.83
24	9.59	13.05	15.76	18.10	20.20	22.12	23.90	25.56	27.13	28.61
25	9.47	12.89	15.59	17.92	20.00	21.92	23.69	25.36	26.92	28.41
26	9.36	12.75	15.43	17.74	19.82	21.73	23.50	25.17	26.73	28.22
27	9.26	12.62	15.28	17.58	19.65	21.56	23.33	24.99	26.56	28.05
28	9.16	12.50	15.14	17.43	19.49	21.39	23.16	24.82	26.39	27.88
29	9.07	12.39	15.01	17.29	19.35	21.24	23.01	24.67	26.24	27.73
30	8.99	12.28	14.89	17.16	19.21	21.10	22.86	24.52	26.09	27.59
31	8.92	12.18	14.78	17.04	19.08	20.97	22.73	24.39	25.96	27.45
32	8.84	12.09	14.67	16.92	18.96	20.84	22.60	24.26	25.83	27.33
33	8.78	12.00	14.57	16.81	18.85	20.72	22.48	24.14	25.71	27.21
34	8.71	11.92	14.48	16.71	18.74	20.61	22.37	24.02	25.60	27.09
35	8.65	11.84	14.39	16.62	18.64	20.51	22.26	23.92	25.49	26.99
36	8.59	11.77	14.30	16.53	18.54	20.41	22.16	23.81	25.39	26.89
37	8.54	11.70	14.23	16.44	18.45	20.32	22.06	23.72	25.29	26.79
38	8.49	11.63	14.15	16.36	18.37	20.23	21.97	23.63	25.20	26.70
39	8.44	11.57	14.08	16.28	18.28	20.14	21.89	23.54	25.11	26.62
40	8.40	11.51	14.01	16.21	18.21	20.06	21.80	23.46	25.03	26.54
50	8.04	11.05	13.48	15.63	17.59	19.43	21.16	22.80	24.38	25.89
60	7.80	10.75	13.13	15.24	17.18	19.00	20.72	22.36	23.94	25.46
70	7.64	10.53	12.88	14.96	16.89	18.69	20.41	22.05	23.62	25.15
80	7.51	10.36	12.69	14.76	16.67	18.46	20.17	21.81	23.38	24.91
90	7.41	10.23	12.54	14.59	16.49	18.28	19.99	21.62	23.20	24.72
100	7.33	10.13	12.42	14.46	16.35	18.14	19.84	21.47	23.05	24.57
$\infty$	6.63	9.22	11.34	13.28	15.10	16.80	18.48	20.08	21.69	23.20

**表 5: LR 检验在 $\alpha = 0.05$  下的精确临界值**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	5.81	8.84	11.28	13.40	15.32	17.08	18.72	20.26	21.70	23.08
22	5.71	8.71	11.13	13.23	15.14	16.89	18.52	20.05	21.50	22.88
23	5.63	8.60	10.98	13.07	14.97	16.71	18.34	19.87	21.32	22.69
24	5.55	8.49	10.85	12.93	14.81	16.55	18.17	19.70	21.15	22.52
25	5.49	8.39	10.73	12.80	14.67	16.40	18.02	19.54	20.99	22.37
26	5.42	8.30	10.62	12.67	14.54	16.26	17.88	19.40	20.84	22.22
27	5.36	8.21	10.52	12.56	14.41	16.13	17.74	19.26	20.71	22.08
28	5.31	8.13	10.43	12.45	14.30	16.01	17.62	19.14	20.58	21.96
29	5.25	8.06	10.34	12.35	14.19	15.90	17.50	19.02	20.46	21.84
30	5.21	7.99	10.25	12.26	14.09	15.79	17.39	18.91	20.35	21.73
31	5.16	7.92	10.18	12.17	14.00	15.69	17.29	18.80	20.25	21.62
32	5.12	7.86	10.10	12.09	13.91	15.60	17.19	18.71	20.15	21.53
33	5.08	7.81	10.04	12.01	13.82	15.51	17.10	18.61	20.05	21.43

34	5.04	7.75	9.97	11.94	13.75	15.43	17.02	18.53	19.97	21.35
35	5.01	7.70	9.91	11.87	13.67	15.35	16.94	18.45	19.88	21.27
36	4.98	7.66	9.85	11.81	13.60	15.28	16.86	18.37	19.81	21.19
37	4.95	7.61	9.80	11.75	13.54	15.21	16.79	18.29	19.73	21.11
38	4.92	7.57	9.75	11.69	13.47	15.14	16.72	18.22	19.66	21.04
39	4.89	7.53	9.70	11.63	13.41	15.08	16.66	18.16	19.60	20.98
40	4.86	7.49	9.65	11.58	13.36	15.02	16.59	18.09	19.53	20.91
50	4.66	7.19	9.29	11.17	12.91	14.55	16.10	17.60	19.03	20.41
60	4.52	6.99	9.04	10.89	12.61	14.23	15.77	17.26	18.69	20.07
70	4.42	6.85	8.87	10.69	12.39	14.00	15.54	17.01	18.44	19.83
80	4.35	6.74	8.74	10.54	12.23	13.83	15.36	16.83	18.26	19.64
90	4.29	6.66	8.64	10.43	12.10	13.69	15.22	16.69	18.11	19.50
100	4.25	6.59	8.55	10.33	12.00	13.58	15.10	16.57	18.00	19.38
$\infty$	3.84	6.00	7.80	9.48	11.05	12.60	14.07	15.52	16.92	18.30

表 6: LR 检验在 $\alpha = 0.1$  下的精确临界值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	4.09	6.80	9.02	10.99	12.78	14.43	15.98	17.44	18.82	20.13
22	4.02	6.70	8.90	10.85	12.62	14.27	15.81	17.26	18.64	19.95
23	3.97	6.61	8.79	10.72	12.48	14.12	15.66	17.11	18.48	19.80
24	3.91	6.52	8.68	10.60	12.35	13.98	15.52	16.96	18.34	19.65
25	3.86	6.45	8.59	10.49	12.23	13.86	15.38	16.83	18.20	19.51
26	3.82	6.38	8.50	10.39	12.12	13.74	15.26	16.70	18.08	19.39
27	3.78	6.31	8.42	10.30	12.02	13.63	15.15	16.59	17.96	19.27
28	3.74	6.25	8.34	10.21	11.93	13.53	15.04	16.48	17.85	19.16
29	3.70	6.19	8.27	10.13	11.84	13.44	14.94	16.38	17.75	19.06
30	3.67	6.14	8.20	10.05	11.75	13.35	14.85	16.28	17.65	18.96
31	3.64	6.09	8.14	9.98	11.67	13.26	14.77	16.19	17.56	18.87
32	3.61	6.04	8.08	9.91	11.60	13.18	14.68	16.11	17.48	18.79
33	3.58	6.00	8.03	9.85	11.53	13.11	14.61	16.03	17.40	18.71
34	3.55	5.96	7.98	9.79	11.47	13.04	14.53	15.96	17.32	18.63
35	3.53	5.92	7.93	9.73	11.40	12.98	14.47	15.89	17.25	18.56
36	3.51	5.88	7.88	9.68	11.35	12.91	14.40	15.82	17.18	18.49
37	3.48	5.85	7.84	9.63	11.29	12.85	14.34	15.76	17.12	18.43
38	3.46	5.82	7.80	9.58	11.24	12.80	14.28	15.70	17.06	18.37
39	3.44	5.79	7.76	9.54	11.19	12.75	14.22	15.64	17.00	18.31
40	3.42	5.76	7.72	9.49	11.14	12.69	14.17	15.59	16.94	18.26
50	3.28	5.53	7.43	9.16	10.77	12.30	13.76	15.16	16.51	17.82
60	3.18	5.37	7.23	8.93	10.52	12.03	13.47	14.87	16.22	17.53
70	3.11	5.26	7.09	8.77	10.34	11.83	13.27	14.66	16.00	17.31
80	3.06	5.18	6.99	8.65	10.20	11.69	13.12	14.50	15.84	17.15
90	3.02	5.12	6.91	8.55	10.10	11.57	13.00	14.38	15.72	17.03
100	2.99	5.07	6.84	8.47	10.01	11.48	12.90	14.28	15.62	16.92
$\infty$	2.71	4.60	6.24	7.76	9.25	10.62	12.04	13.36	14.67	16.00

表 7: LM 检验在 $\alpha = 0.01$  下的精确临界值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

21	8.56	11.01	12.72	14.08	15.20	16.16	16.99	17.73	18.38	18.97
22	8.49	10.95	12.69	14.07	15.21	16.20	17.06	17.81	18.49	19.10
23	8.42	10.89	12.65	14.05	15.22	16.23	17.11	17.89	18.59	19.23
24	8.36	10.84	12.61	14.04	15.23	16.26	17.17	17.97	18.69	19.35
25	8.30	10.79	12.58	14.02	15.24	16.29	17.21	18.04	18.78	19.46
26	8.24	10.74	12.55	14.01	15.24	16.31	17.26	18.11	18.87	19.56
27	8.19	10.69	12.52	13.99	15.25	16.34	17.30	18.17	18.95	19.66
28	8.14	10.65	12.49	13.98	15.25	16.36	17.34	18.23	19.03	19.76
29	8.10	10.61	12.46	13.97	15.25	16.38	17.38	18.28	19.10	19.85
30	8.05	10.57	12.43	13.95	15.26	16.40	17.41	18.33	19.17	19.93
31	8.01	10.54	12.41	13.94	15.26	16.41	17.45	18.38	19.23	20.01
32	7.97	10.50	12.38	13.93	15.26	16.43	17.48	18.43	19.29	20.09
33	7.94	10.47	12.36	13.92	15.26	16.44	17.51	18.47	19.35	20.16
34	7.90	10.44	12.34	13.91	15.26	16.46	17.53	18.51	19.41	20.23
35	7.87	10.41	12.32	13.89	15.26	16.47	17.56	18.55	19.46	20.30
36	7.84	10.38	12.29	13.88	15.26	16.48	17.59	18.59	19.51	20.36
37	7.81	10.36	12.27	13.87	15.26	16.49	17.61	18.62	19.56	20.42
38	7.78	10.33	12.26	13.86	15.26	16.51	17.63	18.66	19.60	20.48
39	7.75	10.31	12.24	13.85	15.26	16.52	17.65	18.69	19.65	20.54
40	7.73	10.28	12.22	13.84	15.26	16.52	17.67	18.72	19.69	20.59
50	7.53	10.09	12.08	13.76	15.25	16.60	17.83	18.97	20.03	21.03
60	7.39	9.96	11.97	13.70	15.24	16.64	17.94	19.14	20.28	21.34
70	7.28	9.86	11.89	13.65	15.23	16.67	18.01	19.27	20.46	21.58
80	7.21	9.79	11.83	13.61	15.21	16.69	18.07	19.37	20.59	21.76
90	7.14	9.73	11.78	13.58	15.20	16.71	18.12	19.44	20.70	21.90
100	7.10	9.68	11.74	13.55	15.20	16.72	18.15	19.51	20.79	22.02
$\infty$	6.63	9.22	11.34	13.28	15.10	16.80	18.48	20.08	21.69	23.20

表 8：LM 检验在 $\alpha = 0.05$  下的精确临界值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	5.29	7.69	9.46	10.88	12.09	13.13	14.05	14.87	15.61	16.27
22	5.23	7.63	9.40	10.84	12.06	13.12	14.06	14.90	15.66	16.34
23	5.18	7.57	9.34	10.80	12.03	13.11	14.07	14.93	15.70	16.41
24	5.12	7.51	9.29	10.76	12.01	13.10	14.08	14.95	15.75	16.47
25	5.08	7.46	9.24	10.72	11.98	13.09	14.08	14.98	15.79	16.53
26	5.03	7.41	9.20	10.68	11.96	13.08	14.09	15.00	15.82	16.58
27	4.99	7.36	9.16	10.65	11.94	13.07	14.09	15.02	15.86	16.63
28	4.95	7.32	9.12	10.62	11.92	13.07	14.10	15.03	15.89	16.68
29	4.92	7.28	9.08	10.59	11.90	13.06	14.10	15.05	15.92	16.72
30	4.88	7.24	9.05	10.56	11.88	13.05	14.10	15.07	15.95	16.76
31	4.85	7.21	9.01	10.53	11.86	13.04	14.11	15.08	15.98	16.81
32	4.82	7.17	8.98	10.51	11.84	13.03	14.11	15.10	16.00	16.84
33	4.79	7.14	8.95	10.48	11.82	13.02	14.11	15.11	16.03	16.88
34	4.77	7.11	8.92	10.46	11.81	13.02	14.11	15.12	16.05	16.91
35	4.74	7.08	8.89	10.43	11.79	13.01	14.12	15.13	16.07	16.95
36	4.72	7.05	8.87	10.41	11.78	13.00	14.12	15.14	16.09	16.98
37	4.69	7.03	8.84	10.39	11.76	12.99	14.12	15.15	16.11	17.01
38	4.67	7.00	8.82	10.37	11.75	12.99	14.12	15.16	16.13	17.04

39	4.65	6.98	8.80	10.35	11.73	12.98	14.12	15.17	16.15	17.06
40	4.63	6.96	8.78	10.34	11.72	12.97	14.12	15.18	16.17	17.09
50	4.48	6.78	8.60	10.19	11.61	12.92	14.12	15.25	16.31	17.30
60	4.38	6.65	8.48	10.09	11.54	12.88	14.12	15.30	16.40	17.45
70	4.30	6.56	8.39	10.01	11.48	12.84	14.12	15.33	16.47	17.56
80	4.25	6.49	8.33	9.95	11.43	12.82	14.12	15.35	16.52	17.65
90	4.20	6.44	8.27	9.90	11.40	12.80	14.12	15.37	16.57	17.71
100	4.17	6.40	8.23	9.86	11.37	12.78	14.11	15.38	16.60	17.77
$\infty$	3.84	6.00	7.80	9.48	11.05	12.60	14.07	15.52	16.92	18.30

表 9: LM 检验在 $\alpha = 0.1$  下的精确临界值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	3.83	6.10	7.83	9.25	10.47	11.54	12.49	13.34	14.10	14.80
22	3.78	6.04	7.77	9.20	10.43	11.51	12.48	13.34	14.13	14.85
23	3.74	5.99	7.71	9.15	10.39	11.49	12.47	13.35	14.15	14.89
24	3.70	5.94	7.66	9.11	10.36	11.47	12.46	13.35	14.17	14.92
25	3.66	5.89	7.61	9.06	10.32	11.44	12.45	13.36	14.19	14.96
26	3.62	5.84	7.57	9.02	10.29	11.42	12.44	13.36	14.21	14.99
27	3.59	5.80	7.53	8.99	10.26	11.40	12.43	13.37	14.23	15.02
28	3.56	5.76	7.49	8.95	10.24	11.38	12.42	13.37	14.24	15.05
29	3.53	5.73	7.45	8.92	10.21	11.37	12.41	13.37	14.26	15.08
30	3.50	5.69	7.42	8.89	10.18	11.35	12.41	13.38	14.27	15.10
31	3.48	5.66	7.38	8.86	10.16	11.33	12.40	13.38	14.28	15.13
32	3.46	5.63	7.35	8.83	10.14	11.32	12.39	13.38	14.30	15.15
33	3.43	5.60	7.32	8.80	10.11	11.30	12.38	13.38	14.31	15.17
34	3.41	5.57	7.29	8.78	10.09	11.29	12.38	13.38	14.32	15.19
35	3.39	5.55	7.27	8.75	10.07	11.27	12.37	13.39	14.33	15.21
36	3.37	5.52	7.24	8.73	10.06	11.26	12.36	13.39	14.34	15.23
37	3.36	5.50	7.22	8.71	10.04	11.25	12.36	13.39	14.35	15.25
38	3.34	5.48	7.20	8.69	10.02	11.23	12.35	13.39	14.36	15.26
39	3.32	5.46	7.17	8.67	10.00	11.22	12.35	13.39	14.36	15.28
40	3.31	5.44	7.15	8.65	9.99	11.21	12.34	13.39	14.37	15.29
50	3.19	5.28	6.99	8.49	9.86	11.12	12.29	13.39	14.43	15.42
60	3.11	5.17	6.87	8.38	9.77	11.05	12.26	13.40	14.48	15.50
70	3.05	5.09	6.79	8.30	9.70	11.00	12.23	13.39	14.51	15.57
80	3.01	5.03	6.73	8.24	9.65	10.96	12.21	13.39	14.53	15.62
90	2.98	4.99	6.67	8.19	9.60	10.93	12.19	13.39	14.54	15.66
100	2.95	4.95	6.63	8.16	9.57	10.90	12.17	13.39	14.56	15.69
$\infty$	2.71	4.60	6.24	7.76	9.25	10.62	12.04	13.36	14.67	16.00



# 附录 B

表 10：卡方分布的临界值

$m \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.10
1	6.63	3.84	2.71
2	9.21	5.99	4.61
3	11.34	7.81	6.25
4	13.28	9.49	7.78
5	15.09	11.07	9.24
6	16.81	12.59	10.64
7	18.48	14.07	12.02
8	20.09	15.51	13.36
9	21.67	16.92	14.68
10	23.21	18.31	15.99

# 附录 C

表 11：Wald 检验精确临界值与卡方临界值的差值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.01	0.95	1.39	1.81	2.18	2.53	2.92	3.26	3.63	3.95	4.34
0.05	0.49	0.79	1.10	1.36	1.63	1.86	2.12	2.36	2.63	2.89
0.1	0.32	0.58	0.82	1.05	1.23	1.48	1.65	1.89	2.11	2.30

（注：第一行表示约束条件的个数即  $m$ ；第一列表示显著性水平  $\alpha$ ，表 11-14 同）

表 12：LR 检验精确临界值与卡方临界值的差值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.01	0.70	0.91	1.08	1.18	1.25	1.34	1.36	1.39	1.36	1.37
0.05	0.41	0.59	0.75	0.85	0.95	0.98	1.03	1.05	1.08	1.08
0.1	0.28	0.47	0.60	0.71	0.76	0.86	0.86	0.92	0.95	0.92

表 13：LM 检验精确临界值与卡方临界值的差值

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.01	0.47	0.46	0.40	0.27	0.10	-0.08	-0.33	-0.57	-0.90	-1.18

0.05	0.33	0.40	0.43	0.38	0.32	0.18	0.04	-0.14	-0.32	-0.53
0.1	0.24	0.35	0.39	0.40	0.32	0.28	0.13	0.03	-0.11	-0.31

**表 14：LM 检验精确临界值与卡方临界值的差值**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.01	1.93	1.79	1.38	0.80	0.10	-0.64	-1.49	-2.35	-3.31	-4.23
0.05	1.45	1.69	1.66	1.40	1.04	0.53	-0.02	-0.65	-1.31	-2.03
0.1	1.12	1.50	1.59	1.49	1.22	0.92	0.45	-0.02	-0.57	-1.20

（注：表 13 样本数为 110，表 14 样本数为 31）