1. 赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 算子 $\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}$ 度量空间

$\downarrow$

内积空间

$\downarrow$

拓扑线性空间

2. 定义 X 线性空间 $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$ 且满足

① $\forall x \in X$ $\|x\| \geq 0$ 且 $\|x\| = 0$ iff $x = 0$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

③ 三角不等式 $x, y \in X$ 有 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 的一个赋范线性空间，X 为一个度量

3. 与度量的关系

① $d(x,y) = 0 = \|x-y\| \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

② $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x)$

③ $\forall x, y \in X$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$

$\therefore$ d 是 $(X, \|\cdot\|)$ 上的一个线性空间

eg. $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ 离散度量不是赋范线性空间

假设 $\|\cdot\|$ 使得 $\|x-y\| = d(x,y)$ $y=0$ $x=1,2$

$x=1$ $y=0$ $\|x-y\| = \|1-0\| = 1$

$x=2$ $y=0$ $\|2-0\| = \|2\| = 1$

$\|2\| = 2\|1\| = 2$, $2 \neq 1$

4. 依范数收敛

$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, $x \in X$, 依范数收敛于 x ($x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$) 指 $\|x_n - x\| \to 0$ (*) 是 $\mathbb{R}$ 中数列

$\|x_n\| \to \|x\|$ (**)

$(*) \overset{\Longrightarrow}{\longleftarrow} (**)$

反例: $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{x} = (x, y)$

$\vec{x} = (x, y)$

$x_n = (1, 0)$ $\|x_n\| \to \|x\|$

$x=(0,1)$ $\|x_n-x\|=\sqrt{2} \nrightarrow 0$

$$\begin{cases} x_n=(1,0) & \|x_n\| \to \|x\| \\ x=(0,1) & \|x_n-x\| = \sqrt{2} \nrightarrow 0 \end{cases}$$

5. $(X,\|\cdot\|)$ 的 Cauchy 列

$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 是 Cauchy 列 指 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N^+$, $\forall m,n>N$, 有 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

$(X,\|x\|)$ 中 Cauchy 收敛的点都在 X 中，则称 $(X,\|\cdot\|)$ 为完备的赋范线性空间 [Banach空间]

范数可以诱导一个拓扑 $O(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid \|x-y\|<\varepsilon\}$ 先有限再任意并

τ. $x_n \xrightarrow{\tau} x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

6. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$

证：$x_n + x - x_n = x$

$\|x\| \leq \|x_n\| + \|x-x_n\|$

$\|x\| - \|x_n\| \leq \|x-x_n\|$

$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$ 对所有 n 都成立

由于 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，则 $\|x_n-x\| \longrightarrow 0$

由极限保号性 $0 \leq \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n-x\| \to 0$

$\therefore \|x_n\| - \|x\| \to 0$

$\therefore \|x_n\| \to \|x\|$

7. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ $\forall y\in X \Rightarrow x_n+y \xrightarrow{\|\cdot\|} x+y$

证明：需证 $\|(x_n+y)-(x+y)\| \to 0$ 即 $\|x_n-x\|\to 0$ 显然成立.

$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y \Rightarrow x_n+y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x+y$

$0 \leq \|(x_n+y_n)-(x+y)\| \leq \|x_n-x\| + \|y_n-y\| \longrightarrow 0$

8. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ $\forall \lambda\in R$ $\lambda x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x$

$\|x_n - x\| \to 0$

$\|\lambda x_n - \lambda x\| \to 0$ $\therefore \lambda x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x$

9. $\begin{cases} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \\ y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y \end{cases}$ $\forall a,b \in R \Longrightarrow ax_n + by_n \xrightarrow{\|\cdot\|} ax+by$

证明：$\begin{cases} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x & ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|} ax \\ y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y & by_n \xrightarrow{\|\cdot\|} by \end{cases}$

10. R中(X,d) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是cauchy列 $\Longrightarrow$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有界

(X,d), $A \subseteq X$ 有界, 指 $\forall x,y \subseteq A$, $\exists M \in R^+$, $d(x,y) \leq M$

$A \subseteq (X, \|\cdot\|)$ 为有界集, 指 $\forall x \in A$, $\exists M \in R^+$, $\|x\| \leq M$

$\varepsilon = 1 > 0$, $\exists N$, $\forall n,m > N$, $\|x_n - x_m\| < 1 \Rightarrow \|x_{N+1} - x_m\| < 1$

证: $\|x_m\| \leq \|x_n\| + 1$

$\|x_m\| \leq \|x_m - x_{N+1}\| + \|x_{N+1}\| \leq 1 + \|x_{N+1}\|$

$M = \max\{\|x_1\|\ \|x_2\| \cdots \|x_{N+1}\|\}$ $\forall x_0$ $\|x_n\| \leq M$

11. $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, A是(X,C)中的紧集, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq (X, \|\cdot\|)$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} S_m$

$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$

$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \lim_{m\to\infty} H_m$ $H_m = \sum_{n=1}^{H} \|H_n\|$

13. 定理: X为赋范线性空间, X完备, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 且

$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ 收敛

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 收敛, 且 $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

证明：$S_m = x_1 + \cdots + x_m$ $(S_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq X$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall m,n > N$, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$

$\|S_n - S_m\| = \|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{m+(n-m)}\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_{m+(n-m)}\| < \varepsilon$

故$(S_m)_{m=1}^{\infty}$为cauchy列 $X \xRightarrow{\text{完备}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛

$\|S_m\| = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_m\| \leq \sum_{n=1}^{m} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

$\Big\downarrow {\scriptstyle m\to\infty}$

$\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|$

14. 定理：$(X, \|\cdot\|)$ 赋范线性空间

若 $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛　　比 x_n 收敛要弱

$\Rightarrow$ X 为 Banach 空间

证明：$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 为 cauchy 列　$(\exists x \in X$，使 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x)$

取 $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty}$ 且 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$

构造. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in N^+$ 使 $\forall n, m > N_1$, $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}$　$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 > N_1 \in N^+$ 使 $\forall n, m > N_1$, $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{4}$　$\varepsilon = \frac{1}{4}$

$x_{n_2} - x_{n_1}$, $x_{n_3} - x_{n_2}$, $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \cdots$

先假设成立　p: $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$　①

q: $\exists x \in X$，使 $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x$

$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_{k+1}} \longrightarrow x + x_{n_1}$

假设成立. 在 $(X, \|\cdot\|)$ 中，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cauchy 列 且存在 $\begin{cases} (x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x & ② \\ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x \end{cases}$

$\xRightarrow{①*②} \lim_{n \to \infty} x_n = x + x_{n_1}$

证明②　由 $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，使 $k > N$，$\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$

由 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 cauchy 列，$\exists N_2$，使 $\forall m, n > N_2$，$\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \max\{n_N, N_2\}$　$\forall n > N$

$\|x_n - x\| = \|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$