2022 复变函数期中测试

姓名 ________________学号 __________________专业 _______________________

一	二	三	总成绩

一、 填空题(本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．把答案填在前面空白处)：

1. _____________,_____________ ;2______________________________________;

3. ________ ;4. ________________,________________;5. ________________________

6. ______________________;7______________________;8. _____________________;

9. ____________________;10. ____

1. 由棣莫弗公式知道$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$，因此，可得$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

2. $8^{\frac{1}{6}}=\pm\sqrt{2},\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\pm\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

3. $g(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$是否是不包括远点的开域内的调和函数?是，验证 Laplace 方程可得，它是$w=\frac{1}{z^2}$的虚部。

4. $ln[(-1+i)^2]=\ln2-i\frac{\pi}{2},2ln(-1+i)=\ln2+i\frac{3}{2}\pi$

5. $(1+i)^i=\exp(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)\exp(i\frac{\ln2}{2}),n=0,\quad 1,\quad 2,\ldots$、

6. $\int_C\frac{1}{z}dz=\pi i$其中 C 为$|z|=1$的上半圆周，逆时针方向，从$z_1=1$到$z_2=-1$。

7. $\int_{0}^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz = e + \frac{1}{e}$

8. 已知 C 为 $|z|=5$，$f(z)=2\pi i\int_C \frac{2\zeta^2\text{-}4\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(1+i)=-16\pi^2 i$

9. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^{2n}$ 收敛半径为 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}z^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^{2n}}\right|=4|z|^2$$

10. 把 $f(z)=\frac{1}{z^2+4z+3}$ 展开成 $(z-1)$ 的幂级数：

$f(z)=\frac{1}{z^2+4z+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(z-1)^n, |z-1|<2$ 。

二、 计算下列各题（每小题 9 分，共 6 题，共 54 分）

1. 函数 $f(z)=|z|^2+\sin 2z$ 在何处可导？在何处解析？

$\sin 2z$ 是解析的，所以可导性和解析性完全由 $g(z)=|z|^2$ 决定

验证 CR 条件后，仅在上 $z=0$ 可导。
不可能只在一个点上解析，所以所有地方不解析。

2. 已知 $v(x,y)=4xy+3y$，

(1) 验证 $v(x,y)$ 是调和函数，

（2） 试确定 $u(x,y)$ 使 $f(z)=u+iv$ 是解析函数。

$f(z)=2z^2+3z=(2x^2-2y^2+3x)+(4xy+3y)i$
$u=(2x^2-2y^2+3x)+C$

3. 计算积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 。其中 $f(z)=\begin{cases}1, 当y<0时\\4y, 当y>0时\end{cases}$，曲线 C 是 $y=x^3$ 从 $z_1=-1-i$ 到 $z_2=1+i$ 的一段弧。

解: $\begin{array}{l} C_1: z = x + ix^3(-1 \le x \le 0) \\ C_2: z = x + ix^3(0 \le x \le 1) \end{array}$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-1}^{0} 1(1+i3x^2)dx + \int_{0}^{1} 4x^3(1+i3x^2)dx$$

$$= 2+3i$$

4. 计算 $\int_C \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^4}\mathrm{d}z$,其中 C 为圆周 $|z|=2$，逆时针方向。

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^4}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^4}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^4}\mathrm{d}z$$

$$= \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+1)^4}}{(z-1)^3}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z+1)^4}\right]''\Big|_{z=1} + \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{1}{(z-1)^3}\right]'''\Big|_{z=-1}$$

$$= \frac{5}{16}\pi i - \frac{5}{16}\pi i = 0$$

5.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^{n+3}$ 的收敛半径，以及和函数.

(1) 收敛半径 $R=1$ （3 分）

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^{n+3} = z^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^{n+1}\right) = z^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{n+2}\right)'$$

$$= z^2\left(\frac{z^3}{1-z}\right)' = \frac{3z^4-2z^5}{(1-z)^2}$$

（6 分）

6. 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ 分别在下列圆环域内展为洛朗级数

（1） $0<|z-3|<1$

(2) $1<|z-3|<+\infty$

解：$f(z)=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$

（1）

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{1+(z-3)}$$
$$=\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^{n-1}$$

(2)

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{1+(z-3)}$$
$$=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-3}}$$
$$=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-3}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-3)^{n+2}}$$

三．证明题（每题 8 分，共 2 题，共 16 分）

（1）写出解析函数的高阶求导公式的条件和结论，并证明。

书 P62 定理 3.9

（2）叙述洛朗定理并证明。

书 P81 定理 4.7