Review

度量空间

(X,d) $d: X\times X \to [0,+\infty)$ 且有

1). $\forall a\in X, b\in X$, 有 $d(a,b)\geq 0$

2). $\forall a,b\in X$, $d(a,b)=d(b,a)$

3). $\forall a,b,c\in X$. $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$

拓扑

X的某些子集构成的集合

(X,τ) $\tau\subseteq P(X)$ 构成的幂集

若① $\emptyset, X\in\tau$

② $A, B\in\tau$, 则 $A\cap B\in\tau$

③ $A_\alpha\in\tau$, $\alpha\in I$, 则 $\bigcup_\alpha A_\alpha\in\tau$

则称 τ 是 X 上的一个拓扑

闭包: $\bar{A}=\bigcap\{B \mid A\subseteq B\ \text{B为闭集}\}=\{x\in X \mid \exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subseteq A\}$

稠密: $A\subseteq B$ A在B中稠密 $\begin{cases}\bar{A}=B\\ \forall x\in B\ \exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subseteq A \quad s.t.\ x_n\xrightarrow{d}x\end{cases}$

可分: (X,d) 可分. $\exists A\subset X$. 且A满足 $\begin{cases}\text{A可数}\\ \text{A在X中稠密}\end{cases}$

$l_\infty=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \mid \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{有界}\}$ 有界数列全体

完备度量空间

1. 度量空间中柯西列定义（完备）

(X,d): $(x_n)_{n=1}^\infty\subseteq X$ 是柯西列

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$. $\forall m,n>N$, $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

2. (X,d) 是完备的 X中的任意一个柯西列都是收敛的

$\forall(x_n)_{n=1}^\infty\subset X$, 柯西列

l^∞ 是完备的度量空间 $l^\infty = \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid |x_n| \le M\}$ $d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$

$(X,d) \xrightarrow{定义}$ 开球 $O_{(x,\varepsilon)} = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$

$\tau_d = \{U \subseteq X \mid U$ 是若干个开球的并$\}$ τ_d 为 X 上的一个拓扑，且 $\forall (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$

有 $x_n \xrightarrow{d} x \iff x_n \xrightarrow{\tau_d} x$

可数公理：

(X,τ) 为第一可数空间，对 $\forall x \in X$，$N(x)$ 存在可数基，$O(x,\varepsilon) \in N(x)$

基：$\mathcal{B} \subseteq N(x)$ 为 $N(x)$ 的一个基，对 $\forall A \in N(x)$，$\exists B \in \mathcal{B}$，使 $B \subseteq A$

在 (X,τ) 中，$A \subseteq X$ 是紧集，对 $\forall \begin{cases} B_\alpha \in \tau, \alpha \in I，包含 A 的一个开覆盖 (\{B_\alpha, \alpha \in I\}) \\ A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases}$

一定 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in I$，使得 $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i} = B_{\alpha_1} \cup B_{\alpha_2} \cup \cdots \cup B_{\alpha_n}$

A 为紧集，任意开覆盖必有有限子覆盖

赋范线性空间 → 内积空间 → 拓扑线性空间

X 线性空间 $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ 且满足

① $\forall x \in X$ $\|x\| \ge 0$ 且 $\|x\| = 0$ 只有 $x = 0$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\forall x \in X$ $\|\lambda x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\|$

③ $x, y \in X$ 有 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 的一个赋范线性空间，X 为一个度量

$\forall x, y \in X$ $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$

$\therefore d$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 上的一个线性空间

$(X, \|\cdot\|)$ 的 Cauchy 列

$(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$ 是 Cauchy ...

$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 是 Cauchy 列 指 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}^+$, $\forall m,n>N$, 有 $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$

$(X,\|\cdot\|)$ 中 Cauchy 收敛的点都在 X 中, 则称 $(X,\|\cdot\|)$ 为完备的赋范线性空间
[Banach 空间]

范数可以诱导一个拓扑 $O(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid \|x-y\|<\varepsilon\}$ 生成开集基

τ. $x_n \xrightarrow{\tau} x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

R 中 (X,d) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列 $\Longrightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有界

(X,d) $A\subseteq X$ 有界 是指 $\forall x,y\in A$, $\exists M\in\mathbb{R}^+$, $d(x,y)\le M$

$A\subseteq(X,\|\cdot\|)$ 为有界集, 指 $\forall x\in A$. $\exists M\in\mathbb{R}^+$, $\|x\|\le M$

Proof. $\|x_m\|\le\|x_n\|+1$

$\|x_m\|\le\|x_m-x_{N+1}\|+\|x_{N+1}\|\le 1+\|x_{N+1}\|$

$M=\max\{\|x_1\|\ \|x_2\| \cdots \|x_{N+1}\|\}$ $\forall x_n$ $\|x_n\|\le M$

$(X,\|\cdot\|)$ 赋范线性空间

若 $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n\|<\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛

$\Longrightarrow X$ 为 Banach 空间

$C_{00}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid$ 除有限项非 0, 其他项都为 0 $\}$

$C_0=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$ C_0 是一个 Banach 空间 → Cauchy 列收敛
→ 若 C_0 为某个 Banach 空间的闭子空间

命题:

任何一个 Banach 空间的闭子空间是 Banach 空间

① $C_{00}\subseteq C_0$ 子空间

②. $X=l_\infty := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \exists M\in\mathbb{R}^+$, s.t. $|x_n|\le M\}$

Proof. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的 Cauchy 列 $\Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的 Cauchy 列

$\xrightarrow[\text{space}]{x\ \text{Banach}}$ $\exists x \in X$ s.t. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ $\xrightarrow[\text{的闭集}]{Y\text{是}X}$ $x \in Y \Rightarrow Y$是Banach空间

$X = l_\infty \quad Y = C_0$

$l_p = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$ 线性空间

$C = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty} \mid \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在$\}$

$\|\cdot\|: C \to [0, +\infty)$

且C是Banach空间 $\qquad C_{00} \subsetneq l_p \subsetneq l_\infty \subsetneq C_0 \subsetneq C \subsetneq l_\infty$