2020 复变函数期中测试（第 1-4 章）

姓名 ________________学号 __________________专业 ______________________

一	二	三	总成绩

一、　填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．把答案填在前面空白处）：

1. ______________ , ____________ ; 2 ______________________________________ ;

3. ___________ , ____________ ; 4. ______________ ; 5. ___________________________

6. _________________ ; 7 ____________________________ ; 8. _____________________ ;

9. ___________________________ ; 10. ________________________

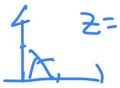
1. 设 $z_1 = -3$，则 $\arg z_1 =$ π ________ .

   设 $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$，则 $Arg\, z_2 =$ ________ . $\arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi$ ✓

2. 方程 $z^3 - 8i = 0$ 的根为 $z = 2\{\cos[\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)] + i\sin[\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]\}$ $k=0,1,2$ ________________.

   $e^{2k\pi i} = 1$

3. 函数 e^z 的周期为________ . $Ln(1+i\sqrt{3}) =$ ________________________.



$z = 1-t+it$

4. $\int_C 3\bar{z}dz =$ $3i$ ______________，其中 C 为从 $z_1 = 1$ 到 $z_2 = i$ 的直线段。

   $3\int_C \bar{z}dz = 3\int_0^1 (1-t-it)d(1-t+it) = 3\int_0^1 (1-t-it)(-1+i)dt = 3\int_0^1(-1+t+it+i-it+t)dt = 3\int_0^1(2t-1+i)dt = 3i$

5. $\int_{|z-z_0|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} =$ $\begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$ ________________.

6. 若 $z_n = \sin\frac{n}{1+n} + i(1-\frac{2}{n})^n$，则 $\lim\limits_{z\to+\infty} z_n =$ $\sin 1 + ie^{-2}$ ____________.

   $(1+0)^\infty$

7. 函数 $f(z) = \frac{1}{z+1}$ 在 $z = i$ 处泰勒展开为 $R=\sqrt{2}$ ______________.

   $\frac{1}{1+i+z-i} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{z-i}{1+i})^n$

8. 已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-3i)^n$ 在 $z = 0$ 处收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-3i)^{n-1}$ 在 $z = -1+3i$ 处

   ____________________. （填，**绝对收敛，条件收敛或发散**）

9. 已知函数 $f(z)$ 在单联通区域 D 内解析且不为零，C 为 D 内任意一条简单闭曲线，

   则 $\int_C \frac{f''(z) + 2f'(z) + 1}{f(z)} dz =$ 0 ____________.

   $\int_C f(z)dz = 0$

0

$2\pi i$

$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

10. $\int_{|z|=0.8}(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n)dz =$ $2\pi i$.

二、计算题。（第 1 题 6 分，其他每小题 8 分，共 46 分）

1. 求 $\int_C (|z| + ze^z)dz$ ，其中 C 为正向圆周 $|z|=3$.

$\int z de^z = e^z z - e^z$

0

2. 讨论 $f(z) = |z|$ 在复平面各点的可导性。

所有点不可导

$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(z) = \sqrt{x^2+y^2}$

$u + iv$

$u = \sqrt{x^2+y^2}$

$v = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} =$

3.已知 $u(x,y) = 3x^2-4x-3y^2$，求 $v(x,y)$ 使 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，且满足 $f(0+0i)=0$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$6x-4 = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad$ $-6y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$v = 6xy - 4y + \varphi(x)$

$6y + \varphi'(x) = 6y$

$\varphi'(x) = 0$

$v = 6xy - 4y + t$

$f(z) = u + iv$

$t = 0$

4. 求 $\int_C \frac{\sin z}{z^2-3z+2}dz$ ，其中 C 是（1）$|z\text{-}1|=\frac{1}{2}$.（2）$|z|=100$.

$\cancel{\int_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)} dz}$ $\qquad \int_C \frac{\frac{\sin z}{z-2}}{(z-1)} \qquad \int_C \frac{\frac{\sin z}{z-1}}{z-2}$

$|z-1|=\frac{1}{2}$ $\qquad \cancel{\frac{\sin z}{(z-1)(z-1-1)}} = \frac{\sin z}{(z-1)^2-(z-1)}$

5.求下列幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n} z^{2n-1}$ 的收敛半径，以及和函数.

$\sqrt{2}$

$\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}} z^2 = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} z^2$

6. 将 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在下列圆环域内展为洛朗级数

（1）$0<|z|<1$

(2) $1<|z|<+\infty$

$$\frac{z-1+2}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^2(z-1)} =$$

三．证明题。（每题 8 分，共 24 分）

（1）已知 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|=$ 常数，证明：$f(z)$ 在区域 D 内为常数。

（2）叙述解析函数关于柯西黎曼方程的充分必要条件，并证明。

（3）写出解析函数的高阶求导公式的条件和结论，并证明。