



第四章 Nash均衡解的特性

主要内容:

- 一、Nash均衡的意义
- 二、Nash均衡解的存在性
- 三、Nash均衡解的多重性

一、Nash均衡的意义

- 观点:

Nash均衡是博弈的一种一致性预测——如果所有参与人预测一个特定的Nash均衡会出现，那么所有参与人都不会偏离，这个Nash均衡将会出现。

对任一个参与人 i ，在给定其他参与人选择的情况下，均衡战略是自己的最优战略。

- Nash均衡具有作为博弈一致性预测的特点——所有参与人的自我肯定。
- 一个博弈结果 (s_i, s_{-i}) (或 (σ_i, σ_{-i})) 如果不是Nash均衡, 那么就意味着: 至少有一个参与人 i , 在给定其他参与人的选择 s_{-i} (或 σ_{-i}) 的情况下, 会偏离 s_i (或 σ_i)。因此, (s_i, s_{-i}) (或 (σ_i, σ_{-i})) 不可能成为博弈的一致性预测。
- 也就是说, 一个非Nash均衡的预测将会被参与人(至少一个参与人)自我否定。

例子：斗鸡博弈(Chicken Game)

- 两个所谓的勇士举着长枪，准备从独木桥的两端冲上桥中央进行决斗。每位勇士都有两种选择：冲上去(用 U 表示)，或退下来(用 D 表示)。若两人都冲上去，则两败俱伤；若一方上去而另一方退下来，冲上去者取得胜利(至少心理上是这样的)，退下来的丢了面子；若两人都退下来，两人都丢面子。

	U	D
U	-4, -4	<u>1, -1</u>
D	<u>-1, 1</u>	0, 0

存在两个纯战略Nash均衡—— (U, D) 和 (D, U) ，也就是一个人上去，另一个就必须退下来。

当一个理性的参与人预测到对方将会冲上去时，明智的选择就是退下来；

而当预测到对方将会选择退却时，就应该大胆地冲上去。所以，可以将Nash均衡作为“斗鸡博弈”的一致性预测。

实践意义

- 这样的例子充斥在社会中，往往无理取闹的人、发疯事的闹人在发生纠纷以后更容易震慑住理性的人。
- 一个简单的例子就是，在公路上发生了交通事故，一个无赖和一个书生进行理论，由于时间成本不一样，斗鸡博弈是很容易产生的，最后的结果往往是一个：秀才遇到兵，有理说不清。

- 斗鸡博弈的反向结果往往是两败俱伤。
- 所以斗鸡博弈强调的是如何采用妥协的方式使双方都获益。双方进行换位思考，进行谈判，进的一方给退的一方一定的补偿，如果补偿等于退者的损失，谈判就可以进行下去，使两者的利益最大化。

- 但斗鸡博弈妥协的前提是双方能进行有效的换位思考，而不是妄加蛮干，而且博弈的双方力量很多时候不对等。
- 国家间的策略互动。因为多数情况下，国际交往持为平等互利原则，但具体事件上，大鸡啄小鸡的事情层出不穷，一些规则虚设。在两国实力差别不大的时候，充分显示自己不甘示弱又有韧性的外交策略。

二、Nash均衡解的存在性

Nash均衡的存在性定理

每一个有限的战略式博弈至少存在一个Nash均衡(包括纯战略和混合战略Nash均衡)。

纳什均衡的奇数定理

威尔逊 (Wilson) 在1971年证明, 几乎所有有限博弈都有有限奇数个纳什均衡。如果一个博弈有 $2m$ (即偶数个) 纯策略纳什均衡, 则一定存在第 $2m+1$ 个 (即奇数个) 混合策略纳什均衡。

一个反例

2

L

R

1 U
D

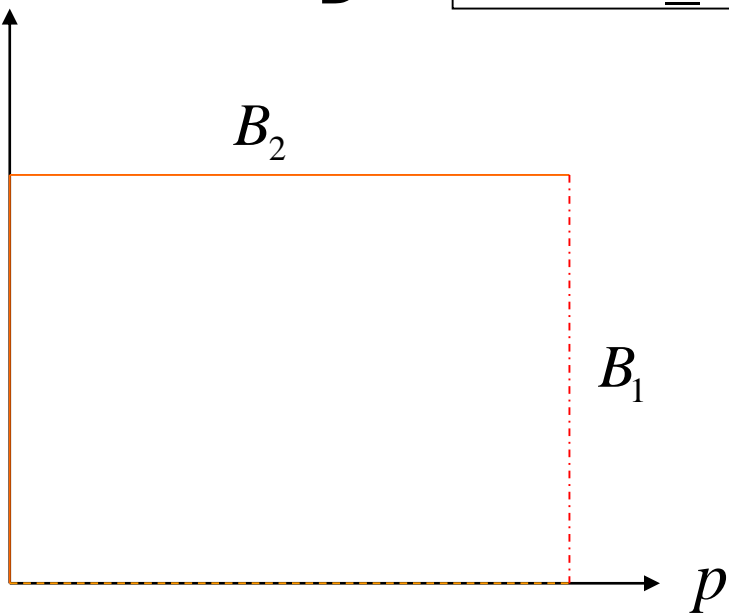
<u>10</u> , <u>10</u>	<u>0</u> , 0
0, <u>0</u>	<u>0</u> , <u>0</u>

q

B_2

B_1

p



三、Nash均衡解的多重性

- 在博弈论中Nash均衡是作为博弈的解——一致性的预测而引入的。
- 在一个博弈问题中，如果博弈只存在一个Nash均衡，那么Nash均衡作为一致性的预测，应该说是相当有效的。
- 但是，如果博弈中存在多个Nash均衡，那么Nash均衡作为博弈解的意义也就相对弱化了。

例如，在“斗鸡博弈”

- 因此，传统的博弈论研究的问题或许并不是如何找到博弈的Nash均衡(即存在性问题)，而是在博弈的多个Nash均衡中选择一个合理的均衡(即多重性问题)。
- 事实上，当在一个博弈中存在多个Nash均衡时，目前还没有一个一般的理论能证明哪个Nash均衡结果一定会出现。

- 对于Nash均衡的多重性问题，目前解决的思路主要有两种：
- 第一种是均衡精炼的方法（后面章节的内容）；
- 第二种解决Nash均衡多重性问题的方法就是非规范式的方法。

非规范式方法的特点

- 针对一些特定情形下的特定博弈问题，给出具体的解决Nash均衡多重性问题的方法。

非规范的方法的方式：

针对一些特定情形下的特定博弈问题，给出具体的解决Nash均衡多重性问题的方法。

- 帕累托上策均衡
- 风险上策均衡
- 聚点均衡
- 相关均衡

一、帕累托上策均衡

- 有些博弈问题虽然存在着多个Nash均衡，但是所有博弈方明显都对其中一个Nash均衡有相同的偏好，这个均衡称为——帕累托上策均衡

例1：鹰鸽博弈——经典博弈

鹰鸽博弈并不是鹰鸽两种动物之间的博弈，恰恰是同一物种、种群内部竞争和冲突问题。

模型描述：

博弈方2

鷹

鴿

博
弈
方
1
鷹
鴿

$(v-c/2), (v-c/2)$	$V/3, c/3$
$c/3, v/3$	v, v

鷹鴿博弈

例2：国家之间的战争与和平问题

两个纯策略纳什均衡，

（战争，战争）

和（和平，和平），显然
后者帕累托优于前者，所
以，（和平，和平）是本
博弈的一个帕累托上策均衡。

		国家2	
		战争	和平
国家1	战争	-5, -5	8, -10
	和平	-10, 8	10, 10

战争与和平

注意到：实际中，（和平，和平）并不容易实现。

大学改革：教师招聘

	只留本校生	不留本校生
只留本校生	<u>2</u> , <u>2</u>	2, 0
不留本校生	0, 2	<u>10</u> , <u>10</u>

二、风险上策均衡

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	<u>9</u> , <u>9</u>	0, 8
	D	8, 0	<u>7</u> , <u>7</u>

风险上策均衡 (D, R)

风险上策均衡的定义：

- 虽然某个Nash均衡帕累托优于另一个Nash均衡，但风险却要高于后者，为了规避风险，博弈方必然趋于选择后一个Nash均衡策略，这个Nash均衡称为“风险上策均衡”（Risk-dominant Equilibrium）
例如：上例中(D,R)为“风险上策均衡”

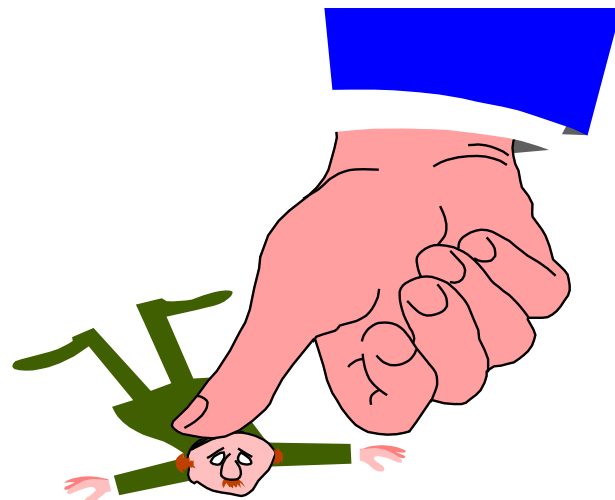
猎鹿博弈 (Stag-hunting game)

- 模型描述 (略)

		猎人2	
		鹿	兔子
猎人1	鹿	<u>5</u> , <u>5</u>	0, 3
	兔子	3, 0	<u>3</u> , <u>3</u>

猎鹿博弈

风险上策均衡 (兔子, 兔子)



三、焦点均衡

- 在某些存在多个Nash均衡的博弈中，往往会出现这样的现象：所有的参与人都会相互预期博弈中某一特定的均衡将会出现，从而选择执行这个特定的均衡。

- 2005年诺贝尔经济学奖获得者Schelling对这种现象进行了详尽的探讨并且证明：在一个具有多重均衡的博弈中，趋向于将参与人的注意力集中到一个均衡的任何事情，都可能使参与人全都预期并随之实行这个均衡，就像一个自行应验的预言一样。

- Schelling将这种现象称之为“焦点效应”(focal-point effect), 在焦点效应中具有某种使它显著地区别于所有其它均衡之性质的均衡, 被称为“焦点均衡”(focal equilibrium)。

例子：“性别战”博弈

- 一对青年夫妻决定周末出去娱乐，可供他们娱乐的项目有或者去观看足球比赛(用表示 F)，或者观看芭蕾演出(用表示 B)。男的喜欢看足球比赛，女的喜欢看芭蕾演出，但夫妻双方都宁愿在一起，不愿分开。假设夫妻双方同时选择娱乐项目

- 在“性别战”博弈中，将博弈聚焦于一个特定均衡的简单易行的方法，就是在博弈之前，夫妻双方进行一个简单的沟通或商议。对于一个家庭和睦、夫妻关系融洽的家庭来讲，这种沟通或商议往往是十分有效的。

四、相关均衡

- 在博弈中遇到多重Nash均衡的难题时，博弈方就应设计某种形式的均衡选择机制，“相关均衡”就是在这种机制下选择出的Nash均衡。



- 模型1:

博弈方2

		L	R
博弈方1	U	<u>5</u> , <u>1</u>	0, 0
	D	4, 4	<u>1</u> , <u>5</u>

相关均衡例子



发出“相关信号”的相关装置：

1、各以1/3概率选择A、B、C

三种信号；

2、博弈方1看到是否A，博弈方2看到是否C

3、博弈方1见A采用U，否则D；
博弈方2见C采用R，否则L。

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	<u>5</u> , <u>1</u>	0, 0
	D	4, 4	<u>1</u> , <u>5</u>

相关均衡例子

- 该机制具有以下性质：
 - (1) U,R不会同时出现（为什么？）即排出 (U,R)
 - (2) (U,L),(D,L),(D,R)各以 $1/3$ 的概率出现。从而两博弈方的期望得益达到 $10/3$ 。
 - (3) 该装置是一个Nash均衡。
 - (4) 如果双方都忽略信号，不影响各博弈方原来的利益。

相关均衡

- 如果参与人根据信号选择行动的规则本身能够构成一个Nash均衡，那么参与人就可能会根据某个共同观测到的信号来选择行动。这种由参与人的行动规则所构成的Nash均衡，就是Aumann定义的“相关均衡” (correlated equilibrium)。

相关均衡

- 给定一个有限 n 人战略式博弈 $G = \langle \Gamma; (A_i); (u_i) \rangle$, 其中 A_i 为参与人 i ($i=1, 2, \dots, n$) 的行动集。用 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ 表示状态(如“性别战”中的天气状况)集, P_i 为参与人 i 关于状态集 Ω 的一个分割, 即 $P_i = \{P_i^1, \dots, P_i^{K_i}\}$

- $\pi(\omega)$ 为定义在状态集 Ω 上的概率测度，即 ω 出现的概率。对 $\forall i \in \Gamma$ ，参与人 i 的战略 δ_i 为从状态集到行动集的映射，即 $\delta_i: \Omega \rightarrow A_i$ ，它满足对 $\forall P_i^j \in P_i$ ，若 $\omega \in P_i^j$ 且 $\omega' \in P_i^j$ ，则 $\delta_i(\omega) = \delta_i(\omega')$
 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ 表示参与人战略的组合。

相关均衡的定义

- 一个给定的有限 n 人战略式博弈 $\langle \Gamma, (A_i), (u_i) \rangle$ 的相关均衡，包括：
 - (1) 有限概率空间 (Ω, π) ;
 - (2) $\forall i \in \Gamma$ ，状态集 Ω 的一个分割 P_i ;
 - (3) 若 $\delta = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_n^*)$ 为相关均衡当且仅当对 $\forall i \in \Gamma$ 和任意的 δ_i ，有

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) u_i(\delta_i^*, \delta_{-i}^*(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) u_i(\delta_i, \delta_{-i}^*(\omega))$$

再例如：

		2	
		b_1	b_2
1	a_1	5, 1	0, 0
	a_2	4, 4	1, 5

- 该战略式博弈存在两个纯战略Nash均衡 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) ， 和一个混合战略Nash均衡 $((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$ ， 其中混和战略Nash均衡的期望支付为2.5。

- 假设参与人通过掷骰子的方法来决定参与人的行动。此时，骰子上出现的点数就是所谓的状态，所以，令 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ ，其中 ω_i 表示骰子上的点数为 “ i ” ($i = 1, \dots, 6$)。此时，
$$\pi(\omega_i) = \frac{1}{6} (i = 1, 2, \dots, 6)$$

- 假设双方约定：当出现奇数时，参与人1选择行动 a_1 ，参与人2选择行动 b_1 ；当出现偶数时，参与人1选择行动 a_2 ，参与人2选择行动 b_2 。也就是，出现奇数时 (a_1, b_1) ，双方选择均衡；出现偶数时，双方选择均衡 (a_2, b_2) 。

- 对于参与人 $j(j=1,2)$, 构造参与人 j 关于状态集的分割 $P_j = \{P_j^1, P_j^2\}$;
- 其中 , $P_j^1 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, P_j^2 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

• 所以，参与人1存在以下四个战略：

(1) 战略 δ_1^1 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_1^1$

$$\delta_1^1(\omega) = a_1, \text{ 对 } \forall \omega \in P_1^2, \delta_1^1(\omega) = a_2 ;$$

(2) 战略 δ_1^2 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_1^1$

$$\delta_1^2(\omega) = a_1, \text{ 对 } \forall \omega \in P_1^2, \delta_1^2(\omega) = a_1 ;$$

(3) 战略 δ_1^3 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_1^1$

$$\delta_1^3(\omega) = a_2, \text{ 对 } \forall \omega \in P_1^2, \delta_1^3(\omega) = a_1 ;$$

(4) 战略 δ_1^4 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_1^1$

$$\delta_1^4(\omega) = a_2, \text{ 对 } \forall \omega \in P_1^2, \delta_1^4(\omega) = a_2 \quad \circ$$

参与人2存在以下四个战略：

- (1) 战略 δ_2^1 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_2^1$
 $\delta_2^1(\omega) = b_1$, 对 $\forall \omega \in P_2^2, \delta_2^1(\omega) = b_2$;
- (2) 战略 δ_2^2 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_2^1$
 $\delta_2^2(\omega) = b_1$, 对 $\forall \omega \in P_2^2, \delta_2^2(\omega) = b_1$;
- (3) 战略 δ_2^3 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_2^1$
 $\delta_2^3(\omega) = b_2$, 对 $\forall \omega \in P_2^2, \delta_2^3(\omega) = b_1$;
- (4) 战略 δ_2^4 为满足如此条件的映射：对 $\forall \omega \in P_2^1$
 $\delta_2^4(\omega) = b_2$, 对 $\forall \omega \in P_2^2, \delta_2^4(\omega) = b_2$.

- 在参与人1的四个战略中，战略 δ_1^1 就是参与人1根据双方约定确定的战略；在参与人2的四个战略中，战略 δ_2^1 就是参与人2根据双方约定确定的战略。

- 构造战略式博弈 $\langle \Gamma, (S_i), (u_i) \rangle$, 其中, $\Gamma = \{1, 2\}$, $S_1 = \{\delta_1^1, \delta_1^2, \delta_1^3, \delta_1^4\}$, $S_2 = \{\delta_2^1, \delta_2^2, \delta_2^3, \delta_2^4\}$, 博弈的支付如图所示。

		2			
		δ_2^1	δ_2^2	δ_2^3	δ_2^4
1	δ_1^1	5, 1	5, 1	0, 0	0, 0
	δ_1^2	5, 1	5, 1	0, 0	0, 0
	δ_1^3	4, 4	4, 4	1, 5	1, 5
	δ_1^4	4, 4	4, 4	1, 5	1, 5

骰子上点数为奇数时的支付

		2			
		δ_2^1	δ_2^2	δ_2^3	δ_2^4
1	δ_1^1	1, 5	4, 4	4, 4	1, 5
	δ_1^2	0, 0	5, 1	5, 1	0, 0
	δ_1^3	0, 0	5, 1	5, 1	0, 0
	δ_1^4	1, 5	4, 4	4, 4	1, 5

骰子上点数为偶数时的支付

		2			
		δ_2^1	δ_2^2	δ_2^3	δ_2^4
1	δ_1^1	3, 3	4.5, 2.5	2, 2	0.5, 2.5
	δ_1^2	2.5, 0.5	5, 1	2.5, 0.5	0, 0
	δ_1^3	2, 2	4.5, 2.5	3, 3	0.5, 2.5
	δ_1^4	2.5, 4.5	4, 4	2.5, 4.5	1, 5

参与人的期望支付

- 战略组合 (δ_1^1, δ_2^1) 为 Nash 均衡。这也意味着 (δ_1^1, δ_2^1) 为战略式博弈的相关均衡。

- 存在 (δ_1^3, δ_2^3) 这样一个均衡，它实际上对应的是参与人这样的约定：出现奇数时，双方选择均衡 (a_2, b_2) ；出现偶数时，双方选择均衡 (a_1, b_1) 。

作业1

- 用上述方式证明模型1是相关均衡。

五、 共谋和防共谋均衡

- 在多人博弈中，有可能部分博弈方，为了追求小团体利益，联合起来(共谋)进行博弈。从而导致Nash均衡不稳定。
- 为此要讨论下列问题：
 - 1.何为共谋?
 - 2.怎样防止共谋?

多人博弈中的共谋问题

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	<u>0,0,10</u>	-5,-5, <u>0</u>
	D	-5,-5, <u>0</u>	<u>1,1,-5</u>
		博弈方3——A	

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	<u>-2,-2,0</u>	-5,-5, <u>0</u>
	D	-5,-5, <u>0</u>	<u>-1,-1,5</u>
		博弈方3——B	

防共谋均衡

如果一个博弈的某个策略组合满足下列要求：

- (1) 没有任何单个博弈方的“串通”会改变博弈的结果，即单独改变策略无利可图；
- (2) 给定选择偏离的博弈方有再次偏离的自由时，没有任何两个博弈方的串通会改变博弈的结果；
- (3) 依此类推，直到所有博弈方都参加的串通也不会改变博弈的结果。

称为“防共谋均衡”。

前面例子中： (D, R, B) 是防共谋均衡
 (U, L, A) 不是防共谋均衡

作业2

- 设三人博弈如下，求纳什均衡。

		B1 b1	B2 b2
A1 a1	4	<u>5</u> <u>3</u>	3 2 <u>5</u>
A2 a2	<u>5</u> 3 2	<u>5</u> <u>4</u> 4	
	C1 c1		

		B1 b1	B2 b2
A1 a1	<u>4</u> <u>6</u> 2	<u>5</u> 3 4	
A2 a2	<u>4</u> 2 <u>6</u>	4 <u>3</u> <u>5</u>	
	C2 c2		

本章终于结束了