§3.7 不变子空间

一、不变子空间的概念

二、线性变换在不变子空间上的限制

三、不变子空间与线性变换的矩阵化简

四、线性空间的直和分解

一、不变子空间

1、定义

设 σ 是数域P上线性空间V的线性变换，W是V的的子空间，若 $\forall \xi \in W$，有 $\sigma(\xi) \in W$ $\left(\text{即}\sigma(W) \subseteq W\right)$ 则称W是 σ 的不变子空间，简称为 σ 一子空间.

注：

V的平凡子空间（V及零子空间）对于V的任意一个变换 σ 来说，都是 σ 一子空间.

2、不变子空间的简单性质

1）两个σ一子空间的交与和仍是σ一子空间.

2）设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$， 则W是$\sigma$一子空间

$$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s) \in W.$$

证："$\Rightarrow$"显然成立.

"$\Leftarrow$" 任取 $\xi \in W$，设 $\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$，

则 $\sigma(\xi) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s).$

由于 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s) \in W$， $\therefore$ $\sigma(\xi) \in W.$

故W为σ的不变子空间.

3、一些重要不变子空间

1） 线性变换σ的值域 $\sigma(V)$与核$\sigma^{-1}(0)$都是σ的不变子空间.

证： $\because$ $\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)\,|\,\alpha\in V\}\subseteq V,$

$\therefore \forall\xi\in\sigma(V)$, 有$\sigma(\xi)\in\sigma(V)$.

故 $\sigma(V)$为σ的不变子空间.

又任取$\xi\in\sigma^{-1}(0)$, 有 $\sigma(\xi)=0\in\sigma^{-1}(0)$.

$\therefore$ $\sigma^{-1}(0)$也为σ的不变子空间.

2） 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则 $\tau(V)$ 与 $\tau^{-1}(0)$ 都是 σ—子空间.

证： $\because\ \tau(V)=\{\tau(\alpha)\,|\,\alpha\in V\}.$

$\therefore$ 对 $\forall\xi\in\tau(V)$, 存在 $\alpha\in V$，使 $\xi=\tau(\alpha)$,

于是有，

$$\sigma(\xi)=\sigma\big(\tau(\alpha)\big)=\sigma\tau(\alpha)=\tau\sigma(\alpha)=\tau\big(\sigma(\alpha)\big)\in\tau(V)$$

$\therefore\tau(V)$ 为 σ 的不变子空间.

其次，由 $\tau^{-1}(0)=\{\alpha\,|\,\alpha\in V,\tau(\alpha)=0\}$,

$\therefore$ 对 $\forall\xi\in\tau^{-1}(0)$, 有 $\tau(\xi)=0.$

于是 $\tau\left(\sigma(\xi)\right)=\tau\sigma(\xi)=\sigma\tau(\xi)=\sigma\left(\tau(\xi)\right)=\sigma(0)=0.$

$\therefore \sigma(\xi)\in\tau^{-1}\left(0\right).$

故 $\tau^{-1}\left(0\right)$ 为σ 的不变子空间.

3）任何子空间都是数乘变换K 的不变子空间.

$\left(\because \forall\xi\in W，\ \mathrm{K}\xi=k\xi\in W\right)$

4） 线性变换σ的特征子空间 V_{λ_0} 是σ的不变子空间.

$$\left(\because \forall \xi \in V_{\lambda o},\ \text{有}\ \sigma\left(\xi\right)=\lambda_o\xi \in V_{\lambda o}.\right)$$

5） 由σ的特征向量生成的子空间是σ的不变子空间.

证：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是σ 的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的特征向量．任取 $\xi \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,

设 $\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$,　　则

$$\sigma(\xi) = k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 + \cdots + k_s\lambda_s\alpha_s \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$$

$\therefore$ $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 为σ的不变子空间.

二、σ 在不变子空间W上的限制

定义：

设 σ 是线性空间V的线性变换，W是V的一个 σ 的不变子空间． 把 σ 看作W上的一个线性变换，称作 σ 在不变子空间W上的限制．记作 $\sigma|_W$.

注：

① 当 $\xi \in W$时，$\sigma\big|_W(\xi)=\sigma(\xi)$.

当 $\xi \notin W$时，$\sigma\big|_W(\xi)$ 无意义.

② $\sigma\big|_W(W)\subseteq W$，$\sigma|_W : W \to W$ 是线性变换.

③ 任一线性变换 σ 在它核上引起的线性变换是零变换，即 $\sigma\big|_{\sigma^{-1}(0)}=0$ ；

σ 在特征子空间 V_{λ_0} 上引起的线性变换是数乘变换，即有 $\sigma\big|_{V_{\lambda_0}}=\lambda_o\varepsilon$.

三、不变子空间与线性变换的矩阵化简

1、设σ 是 n维线性空间V的线性变换，W是V 的σ一子空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$为W的一组基，把它扩允为V的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots\varepsilon_n$.

若 $\sigma\big|_W$ 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$下的矩阵为 $A_1\in P^{k\times k}$，则σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵具有下列形状：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

反之，若 $\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$,

$A_1 \in P^{k\times k}$．则由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 生成的子空间必为σ 的不变子空间.

事实上，因为W是V的不变子空间.

$\therefore\ \ \sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_k)\in W$.

即，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_k)$ 均可被 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 线性表出.

设 $\begin{cases} \sigma(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{k1}\varepsilon_k \\ \sigma(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{k2}\varepsilon_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\varepsilon_k) = a_{1k}\varepsilon_1 + a_{2k}\varepsilon_2 + \cdots + a_{kk}\varepsilon_k \end{cases}$

从而，$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

2、设σ是n 维线性空间V的线性变换，W_i都是σ的不变子空间，而$\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$是$W_i$的一组基，且$\sigma|_{W_i}$在这组基下的矩阵为$A_i$，$A_i\in P^{n_i\times n_i},i=1,2,\cdots,s.$

若 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，则

$$\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$$

为V的一组基，且在这组基下σ 的矩阵为准对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

反之，若 σ在基 $\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$

下的矩阵为准对角矩阵(1)，则由 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$ 生成

的子空间 W_i为σ的不变子空间，且V具有直和分解：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s.$$

由此即得：

V的线性变换 σ在某组基下的矩阵为准对角形

$\Leftrightarrow$ V可分解为一些 σ的不变子空间的直和.

四、线性空间的直和分解

定理：σ为线性空间V的线性变换，$f(\lambda)$是是σ的特征多项式. 若 $f(\lambda)$ 具有分解式：

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

再设 $V_i=\left\{\xi \,\middle|\, (\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\xi)=0,\xi\in V\right\}$

则V_i都是σ的不变子空间；且V具有直和分解：

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s\quad.$$

证： 令 $f_i(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$

$$=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{r_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{r_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

$$W_i=f_i(\sigma)V,$$

则W_i是$f_i(\sigma)$的值域，∴ W_i是σ的不变子空间.

又 ∵ $(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}W_i=(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}f_i(\sigma)V$

$$=\left((\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}f_i(\sigma)\right)V=f\left(\sigma\right)V$$

∴ $(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}W_i=\{0\}.$ （2）

下证 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$. 分三步：

1°. 证明 $V=W_1+W_2+\cdots+W_s$.

2°. 证明 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和.

3°. 证明 $V_i=W_i$, $i=1,2,\cdots,s$.

$$\because \left(f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots f_s(\lambda)\right)=1$$

$\therefore$ 存在多项式 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_s(\lambda)$, 使

$$u_1(\lambda)f_1(\lambda)+u_2(\lambda)f_2(\lambda)+\cdots+u_s(\lambda)f_s(\lambda)=1$$

于是 $u_1(\sigma)f_1(\sigma)+u_2(\sigma)f_2(\sigma)+\cdots+u_s(\sigma)f_s(\sigma)=\varepsilon$

$\therefore$ 对 $\forall\alpha\in V$, 有

$$\alpha=\varepsilon(\alpha)$$

$$=\left(u_1(\sigma)f_1(\sigma)+u_2(\sigma)f_2(\sigma)+\cdots+u_s(\sigma)f_s(\sigma)\right)(\alpha)$$

$$=u_1(\sigma)f_1(\sigma)(\alpha)+u_2(\sigma)f_2(\sigma)(\alpha)+\cdots+u_s(\sigma)f_s(\sigma)(\alpha)$$

$$=f_1(\sigma)\left(u_1(\sigma)(\alpha)\right)+f_2(\sigma)\left(u_2(\sigma)(\alpha)\right)+\cdots\cdots$$

$$+f_s(\sigma)\left(u_s(\sigma)(\alpha)\right)$$

这里 $f_i(\sigma)\left(u_i(\sigma)(\alpha)\right)\in f_i(\sigma)V=W_i,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

$\therefore\ \ V=W_1+W_2+\cdots+W_s.$

为证明2°和3°,设有

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0$$

其中β_i满足$(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\beta_i)=0, i=1\cdots,s.$

现证 $\beta_i=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$ 对于给定的i,有

$$\because\ \ (\lambda-\lambda_j)^{r_j}\,\big|\,f_i(\lambda),\ \ i\neq j$$

$\therefore$ 存在 $h(\lambda)$, 使 $f_i(\lambda)=h(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{r_j}.$

于是 $f_i(\sigma)=h(\sigma)(\sigma-\lambda_j\varepsilon)^{r_j}.$

$$\therefore \quad f_i(\sigma)(\beta_j) = h(\sigma)(\sigma - \lambda_j\varepsilon)^{r_j}(\beta_j)$$

$$= h(\sigma)\Big((\sigma - \lambda_j\varepsilon)^{r_j}(\beta_j)\Big) = h(\sigma)(0) = 0, \quad j \neq i.$$

用 $f_i(\sigma)$ 作用（3）的两端，得

$$f_i(\sigma)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s)$$

$$= f_i(\sigma)(\beta_1) + f_i(\sigma)(\beta_2) + \cdots + f_i(\sigma)(\beta_s)$$

$$= f_i(\sigma)(\beta_i) = 0$$

又 $\left(f_i(\lambda), (\lambda - \lambda_i)^{r_i}\right) = 1.$

∴ 有多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$，使

$$u(\lambda)f_i(\lambda)+v(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{r_i}=1$$

从而 $$u(\sigma)f_i(\sigma)+v(\sigma)(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}=\varepsilon$$

$$\therefore\quad \beta_i=\varepsilon(\beta_i)=\left(u(\sigma)f_i(\sigma)+v(\sigma)(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\right)(\beta_i)$$

$$=u(\sigma)\left(f_i(\sigma)(\beta_i)\right)+v(\sigma)\left((\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\beta_i)\right)$$

$$=u(\sigma)(0)+v(\sigma)(0)=0,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

2°. 设$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=0$, 其中$\alpha_j\in W_j$, $j=1,\cdots,s$.

下证$\alpha_j=0$，$j=1,\cdots,s$.

因为$\alpha_j\in W_j$，显然有$(\sigma-\lambda_j\varepsilon)^{r_j}(\alpha_j)=0$,

从而，$\alpha_j=0$，$j=1,\cdots,s$.

所以，$W_1+\cdots+W_s$是直和.

3°．证明： $W_i = V_i = \left\{ \xi \,\middle|\, (\sigma - \lambda_i \varepsilon)^{r_i}(\xi) = 0,\ \xi \in V \right\}$

首先由(2)，有 $W_i \subseteq \left((\sigma - \lambda_i \varepsilon)^{r_i} \right)^{-1}(0)$

$\boxed{(\sigma - \lambda_i \varepsilon)^{r_i} W_i = \{0\}.}$

即 $W_i \subseteq V_i$.

其次，任取 $\alpha \in V_i$，设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,\ \alpha_j \in W_j, j = 1, \cdots, s.$$

即 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + (\alpha_i - \alpha) + \cdots + \alpha_s = 0$

令 $\beta_j = \alpha_j,\ (j \neq i);\ \beta_i = \alpha_i - \alpha.$

由（2），有

$$(\sigma-\lambda_j\varepsilon)^{r_j}(\beta_j)=(\sigma-\lambda_j\varepsilon)^{r_j}(\alpha_j)=0,\ j\neq i.$$

又 $$(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\beta_i)=(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\alpha_i-\alpha)$$

$$=(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\alpha_i)-(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}(\alpha)=0$$

从而有 $$(\sigma-\lambda_j\varepsilon)^{r_j}(\beta_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

所以，$\beta_j=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$

于是 $\alpha = \alpha_i \in W_i$. 即有 $V_i \subseteq W_i$.

故 $W_i = V_i = \left\{ \xi \middle| (\sigma - \lambda_i \varepsilon)^{r_i}(\xi) = 0,\ \xi \in V \right\}$.

综合 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$，即有

V_i 是 σ 的不变子空间，且

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$