# 程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第三章习题详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-05-03 20:51

收录于合集
#实变函数与泛函分析 26个 >

第三章在 $\mathbb{R}^n$ 上建立了测度论. 这部分内容是比较抽象的, 理解起来也比较困难.

简单来说, $\mathbb{R}$ 上的测度就是长度概念的一个推广, 在 $\mathbb{R}$ 中能够量出长度的点集是很少的, 需要把长度的适用范围进行扩大, 使更多的集合具有新意义的长度, 这就是测度. 仿照长度的性质, 数学家勒贝格提出了测度公理, 即测度必须满足非负性, 正则性和可列可加性.

那么如何找出具有这些性质的测度 $m$ 以及关于 $m$ 的可测集类呢? 思路是这样的: 首先引进外测度, 外测度对 $\mathbb{R}$ 中的任意点集都有定义, 满足非负性和正则性, 但不一定满足可列可加性. 然后, 对外测度的定义域加以限制, 即在 $\mathbb{R}$ 中找某一集合类 $\mathscr{M}$, 使得外测度在 $\mathscr{M}$ 上满足可列可加性. 此时, $\mathscr{M}$ 中的元素就称为可测集, 可测集的外测度就是它的测度.

下面我们讲课后习题.

第 1-3 题考查外测度的定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $E$ 的外测度定义为

$$m^*E = \inf_{E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|,$$

其中 $I_i \subset \mathbb{R}^n$ 是开区间.

外测度的定义中用到了下确界. 事实上, 这一章很多地方都用到了**下确界**和**上确界**的概念, 我们这里复习一下.

设 $E$ 是任一数集, $E$ 的最大下界称为 $E$ 的下确界. 更确切地说, 若存在一个数 $\alpha$ 满足

以下两个条件:

1. 对任意的 $x \in E$, 有 $x \geq \alpha$(即 $\alpha$ 是 $E$ 的一个下界);
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 < \alpha + \varepsilon$(即比 $\alpha$ 大一点就不是 $E$ 的下界了).

则称 $\alpha$ 为 $E$ 的下确界, 记为 $\alpha = \inf E$ 或 $\alpha = \inf\limits_{x \in E} x$.

类似地, 设 $E$ 是任一数集, $E$ 的最小上界称为 $E$ 的上确界. 更确切地说, 若存在一个数 $\alpha$ 满足以下两个条件:

1. 对任意的 $x \in E$, 有 $x \leq \alpha$(即 $\alpha$ 是 $E$ 的一个上界);
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \alpha - \varepsilon$(即比 $\alpha$ 小一点就不是 $E$ 的上界了).

则称 $\alpha$ 为 $E$ 的上确界, 记为 $\alpha = \sup E$ 或 $\alpha = \sup\limits_{x \in E} x$.

## 1. 证明: 若 $E$ 有界, 则 $m^*E < \infty$.

**证明.**

因为 $E$ 有界, 所以存在有界开区间 $I$ 使得 $E \subset I$.

由外侧度的单调性可得

$$m^*E \leq m^*I = |I| < \infty.$$

2. 证明: 可数点集的外侧度为零.

证明.

设可数点集 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 存在开区间 $I_n$ 使得 $x_n\in I_n$ 且 $|I_n|=\frac{\varepsilon}{2^n}$. 因此 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. 由外侧度的定义得

$$0\le m^*E\le\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

再由 $\varepsilon$ 的任意性可得 $m^*E=0$.

第 3 题的证明主要应用闭区间上连续函数的性质, 即

**介值定理**: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果在这闭区间的两端点的函数值 $f(a)=\alpha$ 与 $f(b)=\beta$ 不相等, 那么在开区间 $(a,b)$ 内函数能够取得介于 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的任意值.

这个题目证明的关键是结合题意构造闭区间上的连续函数.

3. 设 $E$ 是直线上一有界集合, $m^*E>0$, 则对任意小于 $m^*E$ 的正数 $c$, 恒有 $E$ 的子集 $E_1$, 使得 $m^*E_1=c$

$m^*E_1 = c$.

证明.

设 $a = \inf_{x\in E} x$, $b = \sup_{x\in E} x$, 则 $E \subset [a,b]$. 令

$$E_x = [a,x] \cap E, \quad a \leq x \leq b,$$

则函数 $f(x) = m^*E_x$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 事实上, 对任意的 $x \in [a,b)$, $\Delta x > 0$, 且 $x+\Delta x \in [a,b]$, 有

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) - f(x) &= m^*E_{x+\Delta x} - m^*E_x \\ &\leq m^*(E_{x+\Delta x} - E_x) \\ &\leq m^*(x, x+\Delta x] \\ &= \Delta x \to 0, (\Delta x \to 0). \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上右连续. 同理可得 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上左连续. 因此, $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 又 $f(a) = 0$, $f(b) = m^*E$. 由闭区间上连续函数的性质可得, 对于任意大于 0 小于 $m^*E$ 的数 $c$, 存在 $x \in (a,b)$ 使得 $f(x) = c$. 即 $E_x = [a,x] \cap E \subset E$ 且 $m^*E_x = c$.

剩下题目都是有关可测集的. 首先回忆一下, 什么是**可测集**?

设 $E$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点集, 如果对于任一点集 $T$ 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 $E$ 是 L 可测的. 这时 $E$ 的 L 外测度 $m^*E$ 即称为 $E$ 的 L 测度, 记为 $mE$.

反复利用可测集的定义就可得到第 4 题和第 7 题.

4. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是互不相交的可测集合,

$$E_i \subset S_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

求证:

$$m^*(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = m^*E_1 + m^*E_2 + \cdots + m^*E_n.$$

证明.

[方法一] 利用课本 §2 推论1.

令 $T = \bigcup_{i=1}^n E_i$, 则 $T \cap S_i = E_i$. 因此,

$$T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (T \cap S_i) = \bigcup_{i=1}^n E_i = T.$$

因为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 可测且互不相交, 所以,

$$
\begin{aligned}
m^*T &= m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1} S_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m^*(T \cap S_i) = \sum_{i=1}^{n} m^* E_i.
\end{aligned}
$$

[方法二] 利用可测集的定义.

$$
\begin{aligned}
& m^*(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \\
\xlongequal{S_1\text{可测}} \; & m^*((E_1 \cup \cdots \cup E_n) \cap S_1) \\
& + m^*((E_1 \cup \cdots \cup E_n) \cap S_1^c) \\
\xlongequal[(E_2 \cup \cdots \cup E_n) \subset S_1^c]{E_1 \subset S_1} \; & m^* E_1 + m^*(E_2 \cup \cdots \cup E_n) \\
\xlongequal{S_2\text{可测}} \; & m^* E_1 + m^*((E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cap S_2) \\
& + m^*((E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cap S_2^c) \\
\xlongequal[(E_3 \cup \cdots \cup E_n) \subset S_2^c]{E_2 \subset S_2} \; & m^* E_1 + m^* E_2 + m^*(E_3 \cup \cdots \cup E_n) \\
\xlongequal{S_3, \cdots, S_n\ \text{可测}} \; & \cdots \\
\xlongequal{\qquad\qquad} \; & m^* E_1 + m^* E_2 + \cdots + m^* E_n.
\end{aligned}
$$

7. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $m^*B < \infty$. 若 $A$ 是可测集, 证明:

$$m^*(A \cup B) = mA + m^*B - m^*(A \cap B).$$

证明.

由 $A$ 可测, 得

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &= m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap A^c) \\ &= m^*A + m^*(B \cap A^c). \end{aligned} \tag{7.1}$$

再由 $A$ 可测, 得

$$m^*B = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c),$$

即

$$m^*(B \cap A^c) = m^*B - m^*(B \cap A). \tag{7.2}$$

将 (7.2) 式代入 (7.1) 式即得

$$m^*(A \cup B) = mA + m^*B - m^*(A \cap B).$$

外测度是不满足可列可加性的, 而测度满足可列可加性. 第 6 题的证明正是利用了测度的可列可加性.

6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集, 若对任意区间 $I \subset \mathbb{R}^n$, $m(E \cap I) = 0$, 证明: $mE = 0$.

证明.

$\mathbb{R}^n$ 可表示为可数个互不相交的左开右闭区间的并集. 事实上,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{Z}} (i_1, i_1+1] \times (i_2, i_2+1] \times \cdots \times (i_n, i_n+1]$$
$$\triangleq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

因此,

$$\begin{aligned} mE = m(E \cap \mathbb{R}^n) &= m\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \\ &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap I_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m(E \cap I_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

证明一个集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测通常有以下两种方法:

- 利用定义, 证明对任意的集合 $T \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

成立.

- 因为可测集族 $\mathscr{M}$ 对作差, 有限并, 有限交, 可数并, 可数交等集合运算是封闭的, 所以如果集合 $E$ 是由有限个或可数个可测集通过以上集合运算得到的, 则 $E$ 是可测的.

**5. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $m^*E = 0$, 证明: $E$ 可测.**

**证明.**

**设** $T$ **为** $\mathbb{R}^n$ **中任意点集**, $T = (T \cap E) \cup (T \cap E^c)$.

**一方面, 由外侧度的次可加性得**

$$m^*T \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c);$$

**另一方面, 由** $T \cap E \subset E$ **得** $0 \leq m^*(T \cap E) \leq m^*E = 0$, **即** $m^*(T \cap E) = 0$. **而** $T \cap E^c \subset T$, **于是**

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*(T \cap E^c) \leq m^*T.$$

**综合以上讨论**, $m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$ **对任意点集** $T \subset \mathbb{R}^n$ **都成立, 所以** $E$ **可测.**

9. 设 $E \subset \mathbb{R}^q$, 存在两列可测集 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, 使得 $A_n \subset E \subset B_n$ 且 $m(B_n \setminus A_n) \to 0(n \to \infty)$, 则 $E$ 可测.

证明.

[方法一] 利用定义

情形 I: $m^*E < \infty$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$mA_n \le m^*E < \infty$, $mB_n \le mA_n + m(B_n \setminus A_n) < \infty$.

设 $T$ 是 $\mathbb{R}^q$ 中的任意点集. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 由 $A_n$, $B_n$ 可测, 得

$$m^*T = m^*(T \cap A_n) + m^*(T \cap A_n^c),$$

$$m^*T = m^*(T \cap B_n) + m^*(T \cap B_n^c).$$

因为 $A_n \subset E \subset B_n$, 所以

$$T \cap A_n \subset T \cap E \subset T \cap B_n,$$

$$T \cap A_n^c \supset T \cap E^c \supset T \cap B_n^c.$$

因此有

$$m^*(T \cap A_n) + m^*(T \cap B_n^c)$$

$$\leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

$$\leq m^*(T \cap B_n) + m^*(T \cap A_n^c). \qquad (9.1)$$

又

$$0 \leq m^*(T \cap B_n) - m^*(T \cap A_n)$$

$$\leq m^*\big((T \cap B_n) \setminus (T \cap A_n)\big)$$

$$= m^*\big(T \cap (B_n \setminus A_n)\big) \leq m^*(B_n \setminus A_n)$$

$$= m(B_n \setminus A_n) \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\lim_{n\to\infty} m^*(T \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap A_n)$. 因而,

$$\lim_{n\to\infty} \big(m^*(T \cap A_n) + m^*(T \cap B_n^c)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap A_n) + \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap B_n^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap B_n) + \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap B_n^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \big(m^*(T \cap B_n) + m^*(T \cap B_n^c)\big) = m^*T.$$

同样,

$$\lim_{n\to\infty} \big(m^*(T \cap B_n) + m^*(T \cap A_n^c)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap B_n) + \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap A_n^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap A_n) + \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap A_n^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \big(m^*(T \cap A_n) + m^*(T \cap A_n^c)\big) = m^*T.$$

$$= \lim_{n\to\infty}(m^*(T\cap A_n)+m^*(T\cap A_n)) = m^*T.$$

令 $n\to\infty$, 由不等式 (9.1) 得

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c) = m^*T.$$

于是 $E$ 可测.

情形 II: $m^*E=\infty$. 对任意 $m,n\in\mathbb{N}$, 令

$$A_{n,m} = A_n\cap U(0,m),$$

$$E_m = E\cap U(0,m),$$

$$B_{n,m} = B_n\cap U(0,m),$$

则 $m^*E_m<\infty$, $A_{n,m}\subset E_m\subset B_{n,m}$, 且

$$m(B_{n,m}\setminus A_{n,m})\le m(B_n\setminus A_n)\to 0,\quad n\to\infty.$$

由情形 I 可得 $E_m$ 可测.

又

$$E=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m=\lim_{m\to\infty}E_m,$$

所以 $E$ 可测.

[方法二]

令 $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. 由 $A_n\subset E\subset B_n$ 对任意的自然数 $n$ 都成立, 得 $E\subset B$ 且

$$(B \setminus E) \subset (B_n \setminus E) \subset (B_n \setminus A_n).$$

由外测度的单调性得

$$0 \le m^*(B \setminus E) \le m^*(B_n \setminus E) \le m^*(B_n \setminus A_n)$$
$$= m(B_n \setminus A_n) \to 0 (n \to \infty).$$

因此, $m^*(B \setminus E) = 0$, 即 $B \setminus E$ 可测, 是一个零测集. 于是 $E = B \setminus (B \setminus E)$ 可测.

第 9 题的结论也可以作为证明集合可测的一个方法, 如第 15 题.

15. 若有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 满足条件:

$$\inf\{mG : G \text{ 是开集}, E \subset G\}$$
$$= \sup\{mK : K \text{ 是紧集}, K \subset E\},$$

证明: $E$ 是可测集.

证明. 记

$$\inf\{mG : G \text{ 是开集}, E \subset G\}$$
$$= \sup\{mK : K \text{ 是紧集}, K \subset E\} = a,$$

由上下确界的定义, 对任意的自然数 $n$, 存在开集 $G_n$, 紧集 $K_n$, 使得 $K_n \subset E \subset G_n$, 且

$$a - \frac{1}{n} < mK_n \leq mG_n < a + \frac{1}{n}.$$

即存在可测集列 $\{K_n\}$, $\{G_n\}$, 使得 $K_n \subset E \subset G_n$, 且 $m(G_n \setminus K_n) = mG_n - mK_n < \frac{2}{n} \to 0 (n \to \infty)$. 由第 9 题结论可得 $E$ 可测.

16. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$. 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 记

$$cE = \{cx : x \in E\}.$$

(1) 若 $m^*E = 0$, 证明 $m^*(cE) = 0$;

(2) 若 $E$ 是可测集, 证明 $cE$ 是可测集.

证明.

首先证明, 对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$, 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 有

$$m^*(cE) = |c|^n m^*E. \tag{16.1}$$

若 $c = 0$, 则 $cE = \{0\}$, 结论显然成立.

若 $c \neq 0$, 由外测度的定义,

$$m^*E = \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

若 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 则

$$cE \subset c \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} cI_i.$$

因此,

$$m^*(cE) \leq \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |cI_i| = \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |c|^n |I_i|$$

$$= |c|^n \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = |c|^n m^*E.$$

$$E\subset\bigcup_{i=1} I_i$$

另一方面,

$$m^*E = m^*\left(\frac{1}{c}\cdot cE\right) \leq \frac{1}{|c|^n} m^*(cE),$$

即

$$m^*(cE) \geq |c|^n m^*E.$$

综上可得, $m^*(cE) = |c|^n m^*E$.

(1) 若 $m^*E = 0$, 证明 $m^*(cE) = 0$;

若 $m^*E = 0$, 则

$$m^*(cE) = |c|^n m^*E = 0.$$

(2) 若 $E$ 是可测集, 证明 $cE$ 是可测集.

若 $c=0$, 则 $cE=\{0\}$, 显然可测.

若 $c\neq 0$. 对任意 $T\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$
\begin{aligned}
& m^*(T\cap cE)+m^*(T\cap(cE)^c) \\
=& m^*\left(c\cdot\frac{1}{c}T\cap cE\right)+m^*\left(c\cdot\frac{1}{c}T\cap cE^c\right) \\
=& m^*\left(c\left(\frac{1}{c}T\cap E\right)\right)+m^*\left(c\left(\frac{1}{c}T\cap E^c\right)\right) \\
=& |c|^n\left[m^*\left(\frac{1}{c}T\cap E\right)+m^*\left(\frac{1}{c}T\cap E^c\right)\right] \\
=& |c|^n m^*\left(\frac{1}{c}T\right)=|c|^n\frac{1}{|c|^n}m^*T \\
=& m^*T,
\end{aligned}
$$

其中第三、五个等式用到了 (16.1), 第四个等式用到了 $E$ 可测. 于是, $cE$ 可测.

第 8,10 题的结论说明了可测集和开集, 闭集的关系.

8. 证明: 若 $E$ 可测, 则对任意 $\varepsilon>0$, 恒有开集

$G$ 及闭集 $F$, 使 $F \subset E \subset G$, 而 $m(G \setminus E) < \varepsilon$, $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

证明.

(1) 证: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G$, 使 $E \subset G$, 且 $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

先设 $mE < \infty$, 则由测度的定义, 有一列开区间 $\{I_i\}$, $i = 1, 2, \cdots$, 使

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon.$$

令 $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, 则 $G$ 为开集, $G \supset E$, 且

$$mE \leq mG \leq \sum_{i=1}^{\infty} mI_i = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon.$$

因此, $mG - mE < \varepsilon$ (这里用到 $mE < \infty$), 从而 $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

其次, 设 $mE = \infty$, 这时 $E$ 必为无界集, 但它总可以表示成可数多个互不相交的有界可测集的并: $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ $(mE_n < \infty)$, 对每个 $E_n$ 应用上面结

果, 可找到开集 $G_n \supset E_n$ 使 $m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

令 $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 $G$ 为开集, $G \supset E$, 且

$$G \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n),$$

$$m(G \setminus E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) < \varepsilon.$$

(2) 证: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F$, 使 $F \subset E$, 且 $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

$E$ 可测, 则 $E^c$ 可测. 由 (1) 的结论, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G$, 使 $G \supset E^c$, 且 $m(G \setminus E^c) < \varepsilon$.

令 $F = G^c$, 则 $F$ 是闭集, $F \subset E$, 且

$m(E \setminus F) = m(E \setminus G^c) = m(E \cap G) = m(G \setminus E^c) < \varepsilon$.

结论得证.

10. $E$ 是可测集的充分必要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1$, $G_2$ 使得

$$E \subset G_1, E^c \subset G_2, m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon.$$

证明.

先证必要性(利用第 8 题结论).

$E$ 可测, 则 $E^c$ 可测. 据第 8 题结论, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2$ 使得 $E \subset G_1$, $E^c \subset G_2$ 且

$$m(G_1 \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(G_2 \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= (G_1 \cap G_2) \cap (E \cup E^c) \\ &= \big((G_1 \cap G_2) \cap E\big) \cup \big((G_1 \cap G_2) \cap E^c\big) \\ &= (G_2 \cap E) \cup (G_1 \cap E^c) \\ &= (G_2 \setminus E^c) \cup (G_1 \setminus E), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} m(G_1 \cap G_2) &= m\big((G_2 \setminus E^c) \cup (G_1 \setminus E)\big) \\ &\le m(G_2 \setminus E^c) + m(G_1 \setminus E) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

再证充分性(利用第 9 题结论).

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在开集 $A_n, B_n$ 使得

$$E \subset A_n, \quad E^c \subset B_n, \quad m(A_n \cap B_n) < \frac{1}{n}.$$

因为 $A_n, B_n^c$ 可测, 且

$$B_n^c \subset E \subset A_n, \quad m(A_n \setminus B_n^c) \to 0 (n \to \infty).$$

据第 9 题结论, $E$ 可测.

第 11,12 题需要明确集合列的下极限, 上极限及数列的下极限, 上极限的概念.

设 $\{E_n\}$ 是一集合列, 则

- 下极限

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m;$$

- 上极限

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m.$$

设 $\{f_n\}$ 是一数列, 则

- 下极限

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} f_m;$$

- 上极限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} f_m.$$

11. 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集, 证明 $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ 和 $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ 都是可测集, 且

(1) $m\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} m(E_n)$;

(2) 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} mE_n \leq m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right).$$

证明. 因为

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m,$$

而可测集类对可数交和可数并都是封闭的, 所以 $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ 和 $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ 都可测.

(1) 证 $m\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} mE_n$;

记 $F_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$, 则 $F_n \subset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{F_n\}$ 是单调增集合列. 因此,

$$m\left(\underline{\lim} E_n\right) = m\left(\bigcup^{\infty} \bigcap^{\infty} E_m\right) = m\left(\bigcup^{\infty} F_n\right)$$

$$= m\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} mF_n.$$

记 $f_n = \inf\limits_{m\geq n} mE_m$, 则 $f_n \leq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{f_n\}$ 是单调增数列. 因此,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, mE_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} mE_m = \sup_{n\geq 1} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

而 $F_n = \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} E_m \subset E_m$ 对任意的 $m \geq n$ 都成立, 所以 $mF_n \leq mE_m$ 对任意的 $m \geq n$ 都成立, 因此,

$$mF_n \leq \inf_{m\geq n} mE_m = f_n.$$

不等式两边同时取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty} mF_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, 于是, $m\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n\right) \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, mE_n$.

(2) 证若 $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, m(E_n) \leq m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right).$$

记 $G_n = \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} E_m$, 则 $G_n \supset G_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{G_n\}$ 是单调减集合列且 $m(G_1) < \infty$. 因此,

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$$

$$= m\left(\lim_{n\to\infty} G_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(G_n).$$

记 $g_n = \sup\limits_{m\geq n} m(E_m)$, 则 $g_n \geq g_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{g_n\}$ 是单调减数列且 $g_1 < \infty$. 因此,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, m(E_n) = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} m(E_m) = \inf_{n\geq 1} g_n = \lim_{n\to\infty} g_n.$$

而 $G_n = \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} E_m \supset E_m$ 对任意的 $m \geq n$ 都成立, 所以 $m(G_n) \geq m(E_m)$ 对任意的 $m \geq n$ 都成立, 因此,

$$m(G_n) \geq \sup_{m\geq n} m(E_m) = g_n.$$

不等式两边同时取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty} m(G_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, 于是, $m\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n\right) \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m(E_n)$.

12. 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n < \infty$, 证明: $m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0$.

证明.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} mE_n = 0$. 由第 11 题的结论得

$$0 \le m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) \le \varlimsup_{n\to\infty} mE_n = \lim_{n\to\infty} mE_n = 0.$$

所以, $m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0$.

第 13,14,17 题都用到了**零测集**, 在证明一个集合可测时, 零测集能给我们提供很大的帮助.

- 凡外测度为零的集合都可测, 称为零测集.
- 与可测集相差一个零测集的集合都可测. 准确来讲, 设 $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $m^*(B \setminus A) = 0$, 则 $A$ 可测的充分必要条件是 $B$ 可测. 且当 $A, B$ 可测时, $mA = mB$.

13. 设 $E$ 是 $[0,1]$ 中可测集, 若 $mE=1$, 证明: 对任意可测集 $A\subset[0,1]$, $m(E\cap A)=mA$.

证明.

因为 $E$ 和 $A$ 都可测, 所以

$$mA=m(A\cap E)+m(A\setminus E). \tag{13.1}$$

又 $A\setminus E\subset[0,1]\setminus E$, 因此

$$\begin{aligned}0\le m(A\setminus E)&\le m([0,1]\setminus E)\\&=m([0,1])-mE=1-1=0.\end{aligned}$$

即 $m(A\setminus E)=0$, 将其代入 (13.1) 式即得

$$mA=m(A\cap E)=m(E\cap A).$$

14. 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中可测集列, 若 $mE_n=1$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明: $m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1$.

证明.

[方法一]

记 $F_n = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, 则 $F_n$ 可测且 $F_n \supset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{F_n\}$ 是单调减集合列.

现证 $mF_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 事实上, 当 $n = 1$ 时, $mF_1 = mE_1 = 1$. 假设 $mF_{n-1} = 1$ 成立, 则由第 13 题结论,

$$mF_n = m(E_n \cap F_{n-1}) = mE_n = 1,$$

因此, 由数学归纳法即得 $mF_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$.

于是,

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} mF_n = 1.$$

[方法二]

把 $[0, 1]$ 看作全集. 对任意的自然数 $n$, $mE_n = 1$, 则 $mE_n^c = 0$. 因为 $E_n$ 可测, 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 可测, 且

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n^c = 0.$$

于是

$$
\begin{aligned}
m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= m\left([0,1] \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c\right) \\
&= m([0,1]) - m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}
$$

第 17 题用到了 $G_\delta$ 型集. $G_\delta$ 型集与 $F_\sigma$ 型集都是博雷尔集, 这是一类非常重要的可测集.

- 设集合 $G$ 可表示为一列开集 $\{G_i\}$ 的交集:

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

则称 $G$ 为 $G_\delta$ 型集;

- 设集合 $F$ 可表示为一列闭集 $\{F_i\}$ 的并集:

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

则称 $F$ 为 $F_\sigma$ 型集.

17. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 且 $A \cup B$ 可测, $m(A \cup B) < \infty$. 若 $m(A \cup B) = m^*A + m^*B$, 证明: $A$ 与 $B$ 可测.

证明.

首先证明: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $m^*E < \infty$, 则存在 $G_\delta$ 型集 $G$ 使得 $E \subset G$ 且 $mG = m^*E$. 此时, $G$ 称为 $E$ 的等测外包.

由外测度的定义, 对任意 $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, 存在一列覆盖 $E$ 的开区间 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*E + \frac{1}{n}.$$

记 $G_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, 则 $G_n$ 是开集, $E \subset G_n$, 且

$$mG_n = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*E + \frac{1}{n}.$$

令 $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 $G$ 是 $G_\delta$ 型集, $E \subset G$ 且

$$m^*E \leq mG \leq mG_n < m^*E + \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$ 即得 $mG = m^*E$.

利用以上结论证明 $A, B$ 可测.

分别作 $A, B$ 的等测外包 $G_1, G_2$, 则 $G_1, G_2$ 可测且

$$A \subset G_1, \quad m^*A = mG_1, \quad B \subset G_2, \quad m^*B = mG_2.$$

我们有

$$\begin{aligned} mG_1 + mG_2 \geq m(G_1 \cup G_2) \geq m(A \cup B) \\ = m^*A + m^*B = mG_1 + mG_2, \end{aligned}$$

从而可知

$$m(G_1 \cup G_2) = m(A \cup B), \quad m(G_1 \cap G_2) = 0.$$

且由

$$G_1 \setminus A \subset \big((G_1 \cup G_2) \setminus (A \cup B)\big) \cup (G_1 \cap G_2)$$

可得

$$\begin{aligned} m^*(G_1 \setminus A) &\leq m\Big[\big((G_1 \cup G_2) \setminus (A \cup B)\big) \cup (G_1 \cap G_2)\Big] \\ &\leq m\big((G_1 \cup G_2) \setminus (A \cup B)\big) + m(G_1 \cap G_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

即 $G_1 \setminus A$ 是零测集. 注意到 $A = G_1 \setminus (G_1 \setminus A)$, $G_1$ 可测, 故 $A$ 可测.

又

$$B = [(A \cup B) \setminus A] \cup (A \cap B),$$

其中 $A \cup B$ 与 $A$ 可测, $A \cap B \subset G_1 \cap G_2$ 是零测集, 所以 $B$ 可测.

第 17 题的证明过程中用到了**等测外包**的概念.

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $m^*E < \infty$, 则存在 $G_\delta$ 型集 $G$ 使得 $E \subset G$ 且 $mG = m^*E$. 此时, $G$ 称为 $E$ 的等测外包.

有些同学可能要有疑问了:

> 由 $E \subset G$ 和 $mG = m^*E$ 可得 $m^*(G \setminus E) = 0$, 这说明 $E$ 与可测集 $G$ 相差一个零测集, 所以 $E$ 可测. 由 $E$ 的任意性可得 $\mathbb{R}^n$ 中的任意点集都是可测的.

这显然是**不对**的. 那么问题出在哪里呢? 问题就出在 $m^*(G \setminus E) = 0$. 我们知道, 外测度只满足次可数可加性, 不满足可数可加性. 所以由 $E \subset G$ 和 $mG = m^*E$ 只能得到

$$m^*(G \setminus E) \geq mG - m^*E = 0,$$

等号不一定能取到.

END

收录于合集 #实变函数与泛函分析 26

上一篇
程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第二章习题详解

下一篇
程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第四章习题详解