§3.5 对角矩阵

一、可对角化的概念

二、几个引理

三、可对角化的条件

四、对角化的一般方法

一、可对角化的概念

定义1：设 σ是n 维线性空间V的一个线性变换，如果存在V的一个基，使σ在这组基下的矩阵为对角矩阵，则称线性变换σ 可对角化.

定义2：矩阵A是数域 P上的一个 n 阶方阵. 如果存在一个P 上的n 阶可逆矩阵X，使$X^{-1}AX$ 为对角矩阵，则称矩阵A可对角化.

二、几个引理

1. 设 $\sigma \in L(V)$, λ_0是 σ的特征值, 则

$$\dim V_{\lambda_0} \leq \lambda_0 \text{ 的重数}$$

即几何重数不超过代数重数.

证：

设 $\dim V_{\lambda_0} = m$，令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

为 V_{λ_0} 的基，$\sigma(\alpha_i) = \lambda_0 \alpha_i$.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$,

则

$$\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_0 & \\ & 0 & & * \end{pmatrix}$$

故 σ 的特征多项式为

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$. 从而，$m \le \lambda_0$ 的重数.

2. 设 σ 为 n维线性空间V的一个线性变换,

如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 分别是σ 的属于互不相同的特征值

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的特征向量，则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 线性无关.

证： 对k作数学归纳法.

当 $k=1$ 时，$\because \xi_1 \neq 0$，$\therefore \xi_1$ 线性无关. 命题成立.

假设对于$k-1$来说，结论成立．现设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$为$\sigma$的互不相同的特征值，$\xi_i$是属于$\lambda_i$的特征向量，

即 $\sigma(\xi_i)=\lambda_i\xi_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$

设 $a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_k\xi_k=0,\quad a_i\in P$　　①

以λ_k乘①式的两端，得

$$a_1\lambda_k\xi_1+a_2\lambda_k\xi_2+\cdots+a_k\lambda_k\xi_k=0.\qquad ②$$

又对①式两端施行线性变换σ，得

$$a_1\lambda_1\xi_1+a_2\lambda_2\xi_2+\cdots+a_k\lambda_k\xi_k=0.\qquad ③$$

③式减②式得

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)\xi_1+a_2(\lambda_2-\lambda_k)\xi_2+\cdots+a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\xi_{k-1}=0$$

由归纳假设，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k-1}$ 线性无关，所以

$$a_i(\lambda_i-\lambda_k)=0,\ \ i=1,2,\cdots,k-1.$$

但 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 互不相同，所以 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0.$

将之代入①，得 $a_k\xi_k=0.$

$\because\ \ \xi_k\neq 0,\qquad \therefore\ \ a_k=0$

故 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 线性无关.

3. 设σ为线性空间V的一个线性变换，

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是σ 的不同特征值，而$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$ 是属于特征值λ_i 的线性无关的特征向量，$i=1,2,\cdots,k$，

则向量 $\xi_{11},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\cdots,\xi_{kr_k}$ 线性无关.

三、可对角化的条件

1. 设σ为n维线性空间V的一个线性变换，

则σ可对角化 $\Leftrightarrow$ σ有n个线性无关的特征向量.

证： 设σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则有$\sigma(\varepsilon_i)=\lambda_i\varepsilon_i$， $i=1,2,\cdots n.$

$\therefore\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$就是$\sigma$的$n$个线性无关的特征向量.

反之，若σ有n个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，那么就取$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为基，则在这组基下$\sigma$的矩阵是对角矩阵.

推论：

n阶矩阵A可对角化$\Leftrightarrow$ A 有 n个线性无关的特征向量.

（法一）证：设$\boldsymbol{\sigma}$在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的矩阵为$A$.

设$X^{-1}AX=\Lambda,(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X$,

则$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\Lambda$，其中$\Lambda$为对角阵.

从而$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$在$\eta_1,\cdots,\eta_n$下的坐标为$A$的$n$个线性无关特征向量.

设$X_1,\cdots,X_n$是A的n个线性无关特征向量，

$$X=(X_1,\cdots,X_n),(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X,$$

则$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\Lambda$，且$X^{-1}AX=\Lambda$.

（法二）证：设$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$X$为$n$ 阶可逆矩阵，

$$X^{-1}AX=\Lambda \Leftrightarrow AX=X\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A(X_1,\cdots,X_n)=(X_1,\cdots,X_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AX_i=\lambda_i X_i, i=1,2,\cdots,n.$$

2. 设σ为n 维线性空间V的一个线性变换，

若 σ在数域 P 中有n个不同的特征值，则 σ可对角化.

推论： n阶矩阵A有n个不同特征值 $\Rightarrow A$ 可对角化

3. σ 可对角化 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} \dim V_{\lambda_i} = n.$

其中，$n = \dim V$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$是$\sigma$的全部$t$个不同特征值.

4. σ 可对角化 $\Leftrightarrow \dim V_{\lambda} = \lambda$的重数.

推论： n阶矩阵A可对角化

$\Leftrightarrow$ A的每个k重特征值恰好有k个线性无关特征向量。

$\Leftrightarrow n - R(\lambda E - A) = k$, 其中$k$是$\lambda$的重数.

四、对角化的一般方法

设 σ 为 n 维线性空间V的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基，σ 在这组基下的矩阵为A.

步骤：

1° 求出矩阵A的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$.

2° 对每一个特征值 λ_i ，求出齐次线性方程组

$$\left(\lambda_i E - A\right)X = 0, \qquad i = 1.2.\cdots k$$

的一个基础解系（此即 σ 的属于 λ_i 的全部线性无关的特征向量在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标）.

3° 若全部基础解系所含向量个数之和等于n，则

σ 有n个线性无关的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，从而 σ

（或矩阵A）可对角化．以这些解向量为列，作一个

n阶方阵T，则T可逆，$T^{-1}AT$ 是对角矩阵．而且

T就是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵．

例1. 设复数域上线性空间V的线性变换σ在某组基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问σ是否可对角化．在可对角化的情况下，写出

基变换的过渡矩阵．

解：A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

得A的特征值是1、1、－1.

解齐次线性方程组 $(1E - A)X = 0$, 得 $x_1 = x_3$

故其基础解系为：(1,0,1),(0,1,0)

所以， $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$，$\eta_2 = \varepsilon_2$

是σ 的属于特征值1的两个线性无关的特征向量.

再解齐次线性方程组 $(-1E-A)X=0$，得 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

故其基础解系为：$(1,0,-1)$

所以， $\eta_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$

是σ的属于特征值－1的线性无关的特征向量.

η_1, η_2, η_3 线性无关，故σ可对角化，且

σ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

即基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

例2. 问A是否可对角化？若可，求可逆矩阵T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵．这里 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

解：A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-12\lambda+16=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

得A的特征值是2、2、−4 ．

对于特征值2，求出齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个基础解系：（－2，1，0），（1，0，1）

对于特征值－4，求出齐次方程组

$$\begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个基础解系： $(1,-2,3)$

所以A可对角化.

令 $$T=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

则 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

例3： 在$P[x]_n(n>1)$中，求微分变换D的特征多项式. 并证明：D在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵（即D不可对角化）.

解：在 $P[x]_n$中取一组基：$1,\ x,\ \dfrac{x^2}{2!},\ \cdots,\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

则D在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

$\therefore$ D的特征值为0（n重）.

又由于对应特征值0的齐次线性方程组 $-AX=0$

的系数矩阵的秩为$n-1$，从而方程组的基础解系

只含有一个向量，它小于$P[x]_n$的维数n（＞1）.

故D不可对角化 .