第二章

1. X ， Y 是概率空间 (Ω, F, P) 上平方可积的随机变量， G 是 F 的子 σ 代数.

证明：1. $\mathrm{Var}(X) \ge \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X \mid G])$ ，等号成立当且仅当 $X = \mathrm{E}[X \mid G],\ a.s$;

2. 若 $Y = \mathrm{E}[X \mid Y],\ X = \mathrm{E}[Y \mid X]$ ，则 $X = Y,\ a.s$.

2. X ， Y 是概率空间 (Ω, F, P) 上的联合正态随机变量，且 $\mathrm{E}[X \mid Y] = \mathrm{E}[X]$ ，

证明： X 与 Y 独立.

3. X 是概率空间 (Ω, F, P) 上平方可积的随机变量， G 是 F 的子 σ 代数，

证明： $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X \mid G])^2] \le \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]$.

4. X 是概率空间 (Ω, F, P) 上平方可积的随机变量， G 是 F 的子 σ 代数，

证明： $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X \mid G])^2] + \mathrm{E}[(\mathrm{E}[X \mid G])^2] = \mathrm{E}[X^2]$.

5. X ， Y 是概率空间 (Ω, F, P) 上的可积随机变量，具有联合密度 $f(x, y)$ ，

求： X 基于 Y 的条件期望 $\mathrm{E}[X \mid Y]$.（用含有 $f(x, y)$ 的表达式表示）

第三章

1. (Ω, F, P) 是概率空间， $W(t)$ ， $t \ge 0$ 是初值 $W(0) = 0$ 的连续随机过程，若满足

1. 若对任意的 $0 < t_1 < \cdots < t_m$ ， $W(t_1), W(t_2), \cdots, W(t_m)$ 为联合正态随机变量，

2. 对任意的 $s, t \ge 0$ ，有 $E[W(t)] = 0$ ，以及 $E[W(s)W(t)] = s \wedge t$ ，

证明： $W(t)$ 为布朗运动.

2. $W(t)$ ， $t \ge 0$ 是布朗运动， $F(t)$ ， $t \ge 0$ 是关于该布朗运动的域流.

证明： $W^2(t) - t$ 是鞅.

3. $W(t)$ ， $t \ge 0$ 是布朗运动， $F(t)$ ， $t \ge 0$ 是关于该布朗运动的域流。

用鞅的定义证明： $W^3(t) - 3tW(t)$ 是鞅.

4. $W(t)$ ， $t \ge 0$ 是布朗运动，截至时刻 T 的一阶变差为

$$V_W(T)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=1}^{n}|W(t_j)-W(t_{j-1})|,$$

其中$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$是区间$[0,T]$的一个划分，$\lambda=\max\limits_{1\le j\le n}|t_j-t_{j-1}|$是划分的最大宽度，证明：$V_W(T)=\infty$几乎必然成立.

5. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，证明：$W(t)$的路径在任意的区间$[a,b]$上几乎必然不单调.

6. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，证明：$P(\sup\limits_{t\ge 0}W(t)=+\infty)=1$.

7. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，$F(t)$，$t\ge 0$是关于该布朗运动的域流. $\mu\in R,\ \sigma>0$，定义几何布朗运动$S(t)=S(0)e^{\sigma W(t)+\mu t}$.

证明：$S(t)$为马尔可夫过程. 即对任意的博雷尔可测函数$f(x)$，以及任意的$0\le s<t$，都

存在博雷尔可测函数$g(x)$，满足$\mathrm{E}[f(S(t))|F(s)]=g(S(s))$，并且

$$g(x)=\int_0^{+\infty}f(y)\frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(\ln\frac{y}{x}-\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}}dy$$

8. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，$m>0$. 令

$$\tau_m=\min\{t:W(t)=m,t>0\}$$

是$W(t)$相应于水平m的首达时间，求τ_m的累积分布函数和密度函数.

9. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，令

$$M(t)=\max_{0\le s\le t}W(s)$$

是$W(t)$截至时刻t的迄今最大值，求$M(t)$的累积分布函数和密度函数.

10. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，令

$$M(t)=\max_{0\le s\le t}W(s)$$

是$W(t)$截至时刻t的迄今最大值，求二维随机变量$(M(t),W(t))$的联合密度.

第四章

1. $W(t)$，$t\ge 0$是布朗运动，$F(t)$，$t\ge 0$是关于该布朗运动的域流. 令

$$X(t)=t^2W(t)-2\int_0^t sW(s)ds$$

证明：$X(t)$是适应于域流$F(t)$的鞅.

2. $W(t)$，$t\geq 0$是布朗运动，$X(t)=e^{W(t)-\frac{t}{2}}$，求$d(X^2(t))$.

3. $W(t)$，$t\geq 0$是布朗运动，$F(t)$，$t\geq 0$是关于该布朗运动的域流。

用伊藤公式证明：$W^3(t)-3tW(t)$是鞅.

4. $X(t)$，$Y(t)$是适应于域流$F(t)$，$t\geq 0$的鞅，$[X,Y](t)$是截至时刻t的交互变差.

证明如下的分部积分公式：

$$\int_0^t X(u)dY(u)=X(t)Y(t)-X(0)Y(0)-\int_0^t Y(u)dX(u)-[X,Y](t).$$

5. $X(t)$是适应于域流$F(t)$，$t\geq 0$的鞅，$[X,X](t)$是截至时刻t的二次变差.

证明：$M(t)=X^2(t)-[X,X](t)$是适应于域流$F(t)$的鞅.

6. $X(t)$，$Y(t)$是适应于域流$F(t)$，$t\geq 0$的鞅，$[X,Y](t)$是截至时刻t的交互变差.

证明：$M(t)=X(t)Y(t)-[X,Y](t)$是适应于域流$F(t)$的鞅.

7. 证明布朗运动的列维鞅刻画：

$M(t)$，$t\geq 0$是初值$M(0)=0$的连续随机过程，若$M(t)$是适应于域流$F(t)$，$t\geq 0$的鞅，且对任意的$t\geq 0$，截至t时刻的二次变差$[M,M](t)=t$. 则$M(t)$是布朗运动.

8. 股票价格$S(t)$满足广义几何布朗运动

$$dS(t)=\alpha S(t)dt+\sigma S(t)dW(t)$$

其中$W(t)$是布朗运动，收益率$\alpha\in R$，波动率$\sigma>0$. 假设利率$r\in R$，定义风险的市场价格$\theta=\dfrac{\alpha-r}{\sigma}$，以及状态价格密度$\zeta(t)=e^{-\theta W(t)-(r+\frac{1}{2}\theta^2)t}$.

证明：1. $\zeta(t)$满足随机微分方程$d\zeta(t)=-r\zeta(t)dt-\theta\zeta(t)dW(t)$.

2. 设持有股票的头寸为$\Delta(t)$，资产组合的价值$X(t)$满足

$$dX(t)=rX(t)dt+\Delta(t)(\alpha-r)S(t)dt+\Delta(t)\sigma S(t)dW(t),$$

求$d(\zeta(t)X(t))$，并说明$\zeta(t)X(t)$是鞅.