Poisson过程

一、概念

二、性质

1. 任意时间段内发生次数：$N(t+s)-N(s)\triangleq N(t)\sim P(\lambda t)$,

2. 发生间隔、发生时刻：$\begin{cases} \{X_i, i\geq 1\}\text{为}iid\text{ 随机变量，且}X_i\sim Exp(\lambda) \\ T_i\sim Gamma(n,\lambda)\text{，即 }f_{T_i}(t)=\frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}\lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$

以及Poisson过程的3种等价定义

3. 发生时刻的条件分布：$f(t_1,\ldots,t_n|N(t)=n)=\frac{n!}{t^n}$，　$0<t_1<\cdots<t_n\leq t$

$$T_i|N(t)=n\ \sim UNIF(0,t)$$

4. Poisson过程的合并：两个Poisson过程的独立和是Poisson过程

5. Poisson过程的随机分解：（一）

事件在每次发生时刻以概率p被独立划分为第1类，以概率$q=1-p$被独立划分为第2类。

$N_1(t)$，$N_2(t)$分别表示$[0,t]$内发生的第1，2类事件次数

$\Longrightarrow \{N_1(t),t\ge 0\}$，$\{N_2(t),t\ge 0\}$是参数分别为$\lambda p,\lambda q$的Poisson过程，且相互独立

6. Poisson过程的随机分解：（二）

若事件在$T=s$时刻发生，则以概率$p_i(s)$被独立划分为第$i(i=1,2,\ldots,n)$类，$N_i(t)$ 表示

$[0,t]$内发生的第i类事件次数

$\Longrightarrow N_i(t)\sim P(\lambda t p_i)$，其中，$p_i=\frac{1}{t}\int_0^t p_i(s)ds$

Poisson过程的推广

一、非齐次Poisson过程

（一）概念

1. 背景

（1）$[0,t]$内随机事件A发生的次数

$$\Downarrow$$

$$\text{计数过程} \xrightarrow{(\text{独立增量+平稳增量})} \text{参数是}\lambda\text{的Poisson过程（齐次）}$$

$$\Downarrow\ (\lambda=\lambda(t),\text{且独立增量})$$

参数是$\lambda(t)$的Poisson过程（非齐次）

（2）e.g.： 系统故障发生的强度会随运行时间变大；

昆虫产卵的强度会随年龄、季节变化；

人口增长的强度会随人口基数变化；

放射性物质衰变的强度会随质量大小变化;

。。。

2. Def.

称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$为强度是$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N(0) = 0; \\ \text{独立增量;} \\ P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h),\ P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h) \end{cases}$$

（二）性质

性质1. 任意时间段内发生次数的概率分布

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$为强度是$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程，$\forall t > 0, s \geq 0$

$$\Longrightarrow N(t+s) - N(s) \sim P(m),$$

即 $P\{N(t+s) - N(s) = k\} = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$

其中，$m = m(s,t) = \int_s^{s+t} \lambda(x) dx$ 称为累积强度函数

证法：逼近思想

性质2. 发生时刻的概率分布

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$为强度是$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程，事件发生时刻是T_i, 其pdf记为

$f_{T_i}(t)$

$$\Rightarrow f_{T_i}(t) = \frac{m^{i-1}}{(i-1)!}\lambda(t)e^{-m}$$

其中， $m = \int_0^t \lambda(x)dx$

思考：非齐次Poisson过程中事件发生的间隔$\{X_i, i \geq 1\}$，条件发生时刻$T_i|N(t) = n$具有什么性质？（参看教材英文版P352，习题5.80、5.81）

二、复合Poisson过程

（一）概念

1.背景

（1）齐次Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$中，在事件每次发生的时刻T_i产生一个报酬Y_i，关注$[0, t]$内产生的总报酬$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

（2）模型含义

e.g. $N(t)$: $[0, t]$内到达某车站的车辆数， Y_i：第i辆车上的乘客数；

$N(t)$: $[0, t]$内到达某商场的顾客数， Y_i：第i个顾客在商场的消费额；

$N(t)$: $[0, t]$内某保险公司收到的索赔次数， Y_i：第i次索赔的额度；

$N(t)$: $[0, t]$内到达某银行的顾客数， Y_i：第i个到达银行的顾客的取钱数额

。。。。。。

（3）Def. 令$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda$的Poisson过程，$\{Y_i,i\geq 1\}$是$iid$ 随机变量，且Y_i独立于$N(t)$。则称SP $\{X(t),t\geq 0\}$是复合Poisson过程

（二）性质

性质1.期望、方差

TH. $\{X(t),t\geq 0\}$是复合Poisson过程

$$\Rightarrow \begin{cases} E[X(t)]=\lambda t\cdot E[Y_i], \\ Var[X(t)]=\lambda t\cdot E\left[{Y_i}^2\right] \end{cases}$$

性质2. 复合Poisson过程的正态近似

TH. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合Poisson过程， Y_i表示事件在第i次发生时被分类的情况，其PMF

为$Y_i \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$，$N_j(t)$表示 $[0,t]$内第j类事件$(Y_i = \alpha_j)$发生的次数

$$\Rightarrow X(t) \begin{cases} = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot N_j(t) \\ \simeq N(\mu, \sigma^2) \ (\text{约服从于正态分布}) \end{cases}$$

其中， $\{N_j(t), t \geq 0\}$为参数$\lambda \cdot p_j$ 的Poisson过程，且相互独立；

$\mu = E[X(t)]$， $\sigma^2 = var[X(t)]$

e. g. 1 某设备的使用期限为10年，前5年平均2.5年维修一次，后5年平均2年维修一次。假设维修次数是强度为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程.

问题：求10年内只维修过1次的概率

强度随时间而改变

累积强度函数：$\lambda(t)=\begin{cases}\frac{1}{2.5} & 0<t\le 5\\ \frac{1}{2} & 5<t\le 10\end{cases}$

$$m=\int_0^t \lambda(t)\,dt=\int_0^5 \frac{1}{2.5}\,dt+\int_5^{10}\frac{1}{2}\,dt=4.5$$

所以 $P(N(10)-N(0)=1)=\frac{m^1}{1!}e^{-m}=4.5e^{-4.5}$

e. g. 2 迁入某地区的家庭数量是强度为2户/周的Poisson过程，迁入的第i个家庭的成员数是$Y_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

问题：在接下来的50周内至少有240个人迁入该地区的概率.

($E[Y_i] = 2.5$, $E[Y_i^2] = \frac{43}{6}$, N(250，4300/6)，0.6525)

$N(t)$：$[0, t)$ 内迁入该地区的家庭数

$X(t)$：$[0, t)$ 内迁入该地区的总人数

所以 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

又因为 $X(t) \sim N(u, \sigma^2)$ 正态分布

其中 $u = E[X(t)] = E[N(t)] \cdot E[Y_i] = \lambda t \cdot E[Y_i] = 5t$

$\sigma^2 = Var(X(t)) = \frac{43}{3} t$

所以 $X(50) \sim N(250, \frac{4300}{6})$

所以 $P(X(50) \geq 240) = 1 - P(X(50) < 240) = 1 - P(X(50) \leq 239.5) = 1 - \Phi\left(\frac{239.5 - 250}{\sqrt{\frac{4300}{6}}}\right) = \Phi(0.3922) = 0.625$

三、条件（混合）Poisson过程

（一）概念

1. 背景

$$\{N(t),t\geq 0\}\text{是参数}\lambda\text{的齐次Poisson过程}\begin{cases}\xRightarrow{\text{发生强度}\lambda\to\lambda(t)}\quad\text{非齐次Poisson过程}\\ \xRightarrow{\text{到达时刻产生报酬}}\quad\text{复合Poisson过程}\\ \xRightarrow{\text{到达强度}\lambda\to r.v.\,L}\quad\text{条件Poisson过程}\end{cases}$$

2. Def. $\{N(t), t \geq 0\}$是计数过程， $L > 0$是随机变量，若$\{N(t)|L = \lambda,\ t \geq 0\}$是强度为$\lambda$的Poisson过程，则称$\{N(t), t \geq 0\}$是条件（混合）Poisson过程。

注：条件Poisson过程不是Poisson过程，风险理论中常用作意外事件发生模型。

3. 主要结论

（1）期望、方差

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$是条件Poisson过程 $\Longrightarrow \begin{cases} E[N(t)] = t \cdot E[L] \\ Var[N(t)] = t \cdot E[L] + t^2 \cdot Var[L] \end{cases}$

（2）任意时段内发生k次的概率

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$是条件Poisson过程，$L \sim g(\lambda)$（连续型）或$L \sim \{p_i, i \geq 1\}$（离散型），$\forall s \geq 0, t > 0$

$$\Longrightarrow \quad P\{N(s+t) - N(s) = k\} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \cdot g(\lambda) d\lambda \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i t)^k}{k!} e^{-\lambda_i t} \cdot p_i \end{cases}$$

（3）对发生强度L的估计（课后练习）

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$是条件Poisson过程，$L \sim g(\lambda)$

$$\Rightarrow P\{L \leq x \mid N(t) = k\} = \frac{\int_0^x \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \cdot g(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \cdot g(\lambda) d\lambda}$$

（4）A Nice Formula（思考）

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$是条件Poisson过程，$L \sim g(\lambda)$，其CDF为$G(\lambda)$

$$\Rightarrow P\{N(t) > k\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \cdot t\bar{G}(\lambda) d\lambda$$

例题. 某意外事故发生的次数为条件Poisson过程，强度为$L \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$，已知在时刻$t$

两点分布

已经发生了n次事故。

问题：求下一次事故在$t+s$之前不会发生的概率

$$P(N(t+s)-N(t)=0 \mid N(t)=n) = \frac{P(N(t+s)-N(t)=0,\ N(t)=n)}{P(N(t)=n)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{2} P(N(s+t)-N(t)=0,\ N(t)=n \mid L=\lambda_i)\cdot P(L=\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(N(t)=n \mid L=\lambda_i)\cdot P(L=\lambda_i)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{2} P(N(s+t)-N(t)=0 \mid L=\lambda_i)\cdot P(N(t)=n \mid L=\lambda_i)\cdot P(L=\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(N(t)=n \mid L=\lambda_i)\, P(L=\lambda_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} P(N(s+t)-N(t)=0 \mid L=\lambda_i)$$

(泊松分布的事件概率计算)