§3.6 线性变换的值域与核

一、值域与核的概念

二、值域与核的有关性质

一、值域与核的概念

定义1：设σ是线性空间V的一个线性变换，

集合 $\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

称为**线性变换σ的值域**，也记作$\mathrm{Im}\,\sigma$，或 σV.

集合 $\sigma^{-1}(0)=\{\alpha\mid\alpha\in V,\sigma(\alpha)=0\}$

称为**线性变换σ的核**，也记作 $\ker\sigma$.

注：$\sigma(V)$，$\sigma^{-1}(0)$皆为V的子空间.

事实上，$\sigma(V)\subseteq V, \sigma(V)\neq\varnothing$，且对

$$\forall\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\in\sigma(V),\ \forall k\in P$$

有 $\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\sigma(\alpha+\beta)\in\sigma(V)$

$$k\sigma(\alpha)=\sigma(k\alpha)\in\sigma(V)$$

即 $\sigma(V)$ 对于V的加法与数量乘法封闭.

$\therefore\sigma(V)$ 为V的子空间.

再看 $\sigma^{-1}(0)$. 首先，$\sigma^{-1}(0)\subseteq V, \sigma(0)=0$,

$\therefore 0 \in \sigma^{-1}(0),\ \ \sigma^{-1}(0) \neq \varnothing.$

又对 $\forall \alpha, \beta \in \sigma^{-1}(0),$ 有 $\sigma(\alpha) = 0, \sigma(\beta) = 0$ 从而

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = 0.$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha) = k0 = 0, \qquad \forall k \in P$$

即 $\alpha + \beta \in \sigma^{-1}(0),\ \ k\alpha \in \sigma^{-1}(0),$

$\therefore \sigma^{-1}(0)$ 对于V的加法与数量乘法封闭.

故 $\sigma^{-1}(0)$ 为V的子空间.

定义2：线性变换 σ 的值域$\sigma(V)$的维数称为σ **的秩**；

σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数称为 **σ的零度**.

例1 在线性空间 $P[x]_n$中，令

$$D(f(x)) = f'(x)$$

则 $D\left(P[x]_n\right) = P[x]_{n-1}$,

$$D^{-1}(0) = P$$

所以D的秩为$n-1$，D的零度为1.

二、有关性质

1. 设 σ 是 n 维线性空间V的线性变换，

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是V的一组基，σ 在这组基下的矩阵是A，

则

1） σ 的值域 $\sigma(V)$ 是由基象组生成的子空间，即

$$\sigma(V)=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big),$$

2） σ 的秩＝R(A),

3) $$\sigma^{-1}(0)=\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0,\ x_i\in P,\ i=1,\cdots,n\right\},$$

4）σ 的零度＝n-R(A).

证：1）$\sigma(V)=\left\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\right\}$

$$=\left\{\sigma(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i)\mid x_i\in P, i=1,\cdots,n\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma(\varepsilon_i)\mid x_i\in P, i=1,\cdots,n\right\}$$

$$=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big)$$

2）由1），σ 的秩等于基象组 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的秩，又

$$\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$$

而 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的秩等于矩阵A的秩.

$\therefore$ 秩(σ)＝秩(A).

3) $$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha\,|\,\sigma(\alpha)=0\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\,\middle|\,\sigma\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\Big)=0\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma(\varepsilon_i)=0\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \mid \left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \mid (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)AX = 0\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \mid AX = 0\right\},\text{其中}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

4) 由3）可知，$\sigma^{-1}(0)$与$AX=0$的解空间同构，

所以，σ的零度$=n-R(A)$.

2. 设σ为n维线性空间V的线性变换，则

σ的秩＋σ的零度＝n

即 $$\dim\sigma(V)+\dim\sigma^{-1}(0)=n.$$

证明：设σ的零度等于r，在核$\sigma^{-1}(0)$中取一组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,$$

并把它扩充为V的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\cdots,\varepsilon_n,$

则 $\sigma(V)$是由基象组$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 生成的.

但 $\sigma(\varepsilon_i)=0,\qquad i=1,2,\cdots,r.$

$\therefore\ \sigma(V)=L\big(\sigma(\varepsilon_{r+1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big).$

下证$\sigma(\varepsilon_{r+1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$为$\sigma(V)$的一组基，即证它们线性无关.

设 $k_{r+1}\sigma(\varepsilon_{r+1})+\cdots+k_n\sigma(\varepsilon_n)=0,$

则有 $\sigma\left(k_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\right)=0,$

$\therefore\ \xi=k_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\in\sigma^{-1}(0),$

即ξ可被$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$线性表出.

设 $\xi = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_r\varepsilon_r$,

于是有 $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_r\varepsilon_r - k_{r+1}\varepsilon_{r+1} - \cdots - k_n\varepsilon_n = 0$,

由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为V的基.

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$

故$\sigma(\varepsilon_{r+1}), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)$ 线 性无关，即它为$\sigma(V)$的一组基.

$\therefore$ σ 的秩＝n－r .

因此，σ 的秩＋ σ 的零度＝n.

注意：

虽然 $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数之和等于n ，但是

$\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$ 未必等于V.

如在例1中,

$$D\left(P[x]_n\right)+D^{-1}\left(0\right)=P[x]_{n-1}+P\neq P[x]_n$$

3. 设 σ 为 n 维线性空间V的线性变换，则

i) σ 是满射 $\Leftrightarrow \sigma(V)=V$

ii) σ 是单射 $\Leftrightarrow \sigma^{-1}(0)=\{0\}$

证明：i) 显然.

ii) 因为 $\sigma(0)=0$, 若 σ 为单射，则 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$.

反之，若 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$, 任取 α、$\beta\in V$, 若

$\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$, 则 $\sigma(\alpha-\beta)=\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=0$,

从而 $\alpha-\beta\in\sigma^{-1}(0)=\{0\}$, 即 $\alpha=\beta$. 故 σ 是单射.

4. 设 σ 为 n 维线性空间V的线性变换，则

σ 是单射 $\Leftrightarrow$ σ 是满射.

证明： σ 是单射

$$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(0)=\{0\}$$

$$\Leftrightarrow \dim\sigma^{-1}(0)=0$$

$$\Leftrightarrow \dim\sigma(V)=n$$

$$\Leftrightarrow \sigma(V)=V$$

$\Leftrightarrow$ σ 是满射.

例2 设A是一个n阶方阵，$A^2=A$, 证明：A相似于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证：设A是n维线性空间V的一个线性变换σ在一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵，即

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

由 $A^2 = A$，知 $\sigma^2 = \sigma$.

任取 $\alpha \in \sigma(V)$，设 $\alpha = \sigma(\beta)$，$\beta \in V$，

则 $\sigma(\alpha) = \sigma(\sigma(\beta)) = \sigma^2(\beta) = \sigma(\beta) = \alpha$

故有 $\alpha \in \sigma(V)$，$\sigma(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$.

因此有 $\sigma(V) \cap \sigma^{-1}(0) = \{0\}$

从而 $\sigma(V) + \sigma^{-1}(0)$ 是直和 .

又 $\dim \sigma(V) + \dim \sigma^{-1}(0) = n$

所以有 $V = \sigma(V) \oplus \sigma^{-1}(0)$.

在 $\sigma(V)$ 中取一组基：$\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_r$

在 $\sigma^{-1}(0)$ 中取一组基：$\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$

则 $\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$ 就是V的一组基.

显然有，

$$\sigma(\eta_1)=\eta_1,\ \sigma(\eta_2)=\eta_2,\ \cdots,\ \sigma(\eta_r)=\eta_r,$$

$$\sigma(\eta_{r+1})=0,\ \sigma(\eta_{r+2})=0,\ \cdots,\ \sigma(\eta_n)=0.$$

用矩阵表示即

$$\sigma(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

所以，A相似于矩阵 $\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}.$

例3 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是线性空间V的一组基，已知线性变换 σ 在此基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

求 $\sigma(V)$ 及 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数及一组基.

解：1）先求 $\sigma^{-1}(0)$. 设 $\xi \in \sigma^{-1}(0)$, 它在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 (x_1, x_2, x_3, x_4).

$$\text{故} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解此齐次线性方程组，得它的一个基础解系：

$$(-4 \quad -3 \quad 2 \quad 0), \ (-1 \quad -2 \quad 0 \quad 1).$$

从而 $\eta_1 = -4\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3,$

$$\eta_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$$

是$\sigma^{-1}(0)$的一组基.

$$\therefore\ \sigma^{-1}(0) = L(\eta_1, \eta_2), \dim \sigma^{-1}(0) = 2.$$

再求$\sigma(V)$. 由于σ 的零度为2，所以σ 的秩为2，

即 $\sigma(V)$为2维的. 又由矩阵A，有

$$\sigma(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4$$

$$\sigma(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4$$

所以，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ 线性无关，　从而有

$$\sigma(V)=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3),\sigma(\varepsilon_4)\big)$$

$$=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)\big),$$

$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ 就是$\sigma(V)$的一组基，$\dim\sigma(V)=2.$