

第六章 扩展式博弈

主要内容：

一、扩展式博弈

二、扩展式博弈的战略及其Nash均衡

三、两种博弈描述形式的比较

一、扩展式博弈

- 所谓扩展式博弈(extensive form game)是博弈问题的一种规范性描述。与战略式博弈侧重博弈结果的描述相比，扩展式博弈更注重对参与人在博弈过程中所遇到决策问题的序列结构的详细分析。

研究博弈问题的具体进程必须弄清楚的两个问题

- (1) 每个参与人在什么时候行动(决策);
- (2) 每个参与人行动时, 他所面临决策问题的结构。这包括参与人行动时可供他选择的行动方案, 以及参与人行动时所了解的信息。

- 上述两个问题构成了参与人在博弈过程中所遇到决策问题的序列结构。
- 对于一个博弈问题，如果能够说清楚博弈过程中参与人的决策问题的序列结构，那么就意味着知道了博弈问题的具体进程。

扩展式博弈的定义：

扩展式博弈包括以下要素：

- (1) 参与人集合 $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ ；
- (2) 参与人的行动顺序，即每个参与人在何时行动；
- (3) 每个参与人行动时面临的决策问题，包括参与人行动时可供他选择的行动方案以及他所了解的信息；
- (4) 参与人的支付函数，即博弈结束时每个参与人得到的博弈结果。

- 如果要用扩展式博弈对一个博弈问题进行建模，那么除了要说明博弈问题所涉及的参与人及每位参与人的支付函数以外，还必须对博弈过程中参与人所遇到的决策问题的序列结构，进行详细的解释，说清楚每个参与人在何时行动，以及参与人行动时可供选择的行动方案 and 所了解到的信息。

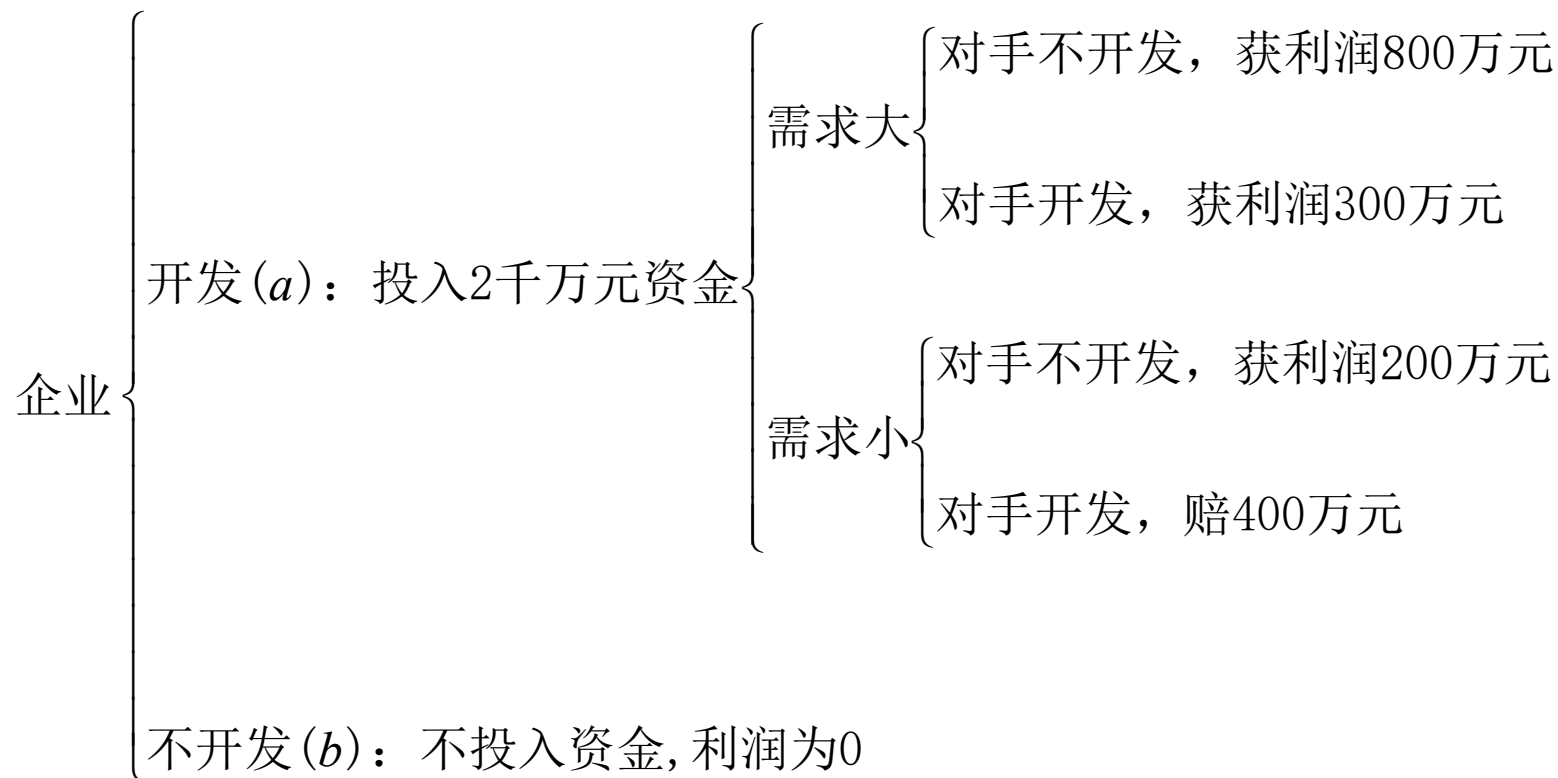
例子：“新产品开发博弈”

- 试用扩展式博弈对两个企业都知道市场需求，且企业1先决策，企业2观测到企业1的选择后再进行选择的情形即完全信息动态的“新产品开发博弈”进行建模。

完全信息动态的“新产品开发博弈”的扩展式博弈包括以下要素：

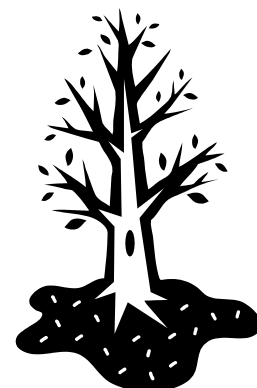
- (1) 参与人是企业1和企业2；
- (2) 企业1先行动，企业2后行动；
- (3) 企业1行动时有两种选择——“开发”和“不开发”，企业1行动时不知道企业2的行动；企业2行动时有两种选择——“开发”和“不开发”，但企业2行动时已经知道企业1的行动；

(4) 两个企业的支付如下：



- 在上述例子中，我们用文字描述的方法给出了博弈问题的扩展式描述。对于一些简单的博弈问题，这种文字表述的方法也许是简单可行的。但可以想象，如果我们遇到的是更为复杂的博弈问题，文字描述所给出的模型就会显得繁冗拖沓，极不直观。

- 因此，我们需要寻找一种简便易行的扩展式博弈的描述方式。下面我们就以“新产品开发博弈”为例，介绍一种不仅简单方便，而且十分直观的扩展式博弈的描述方式——博弈树。



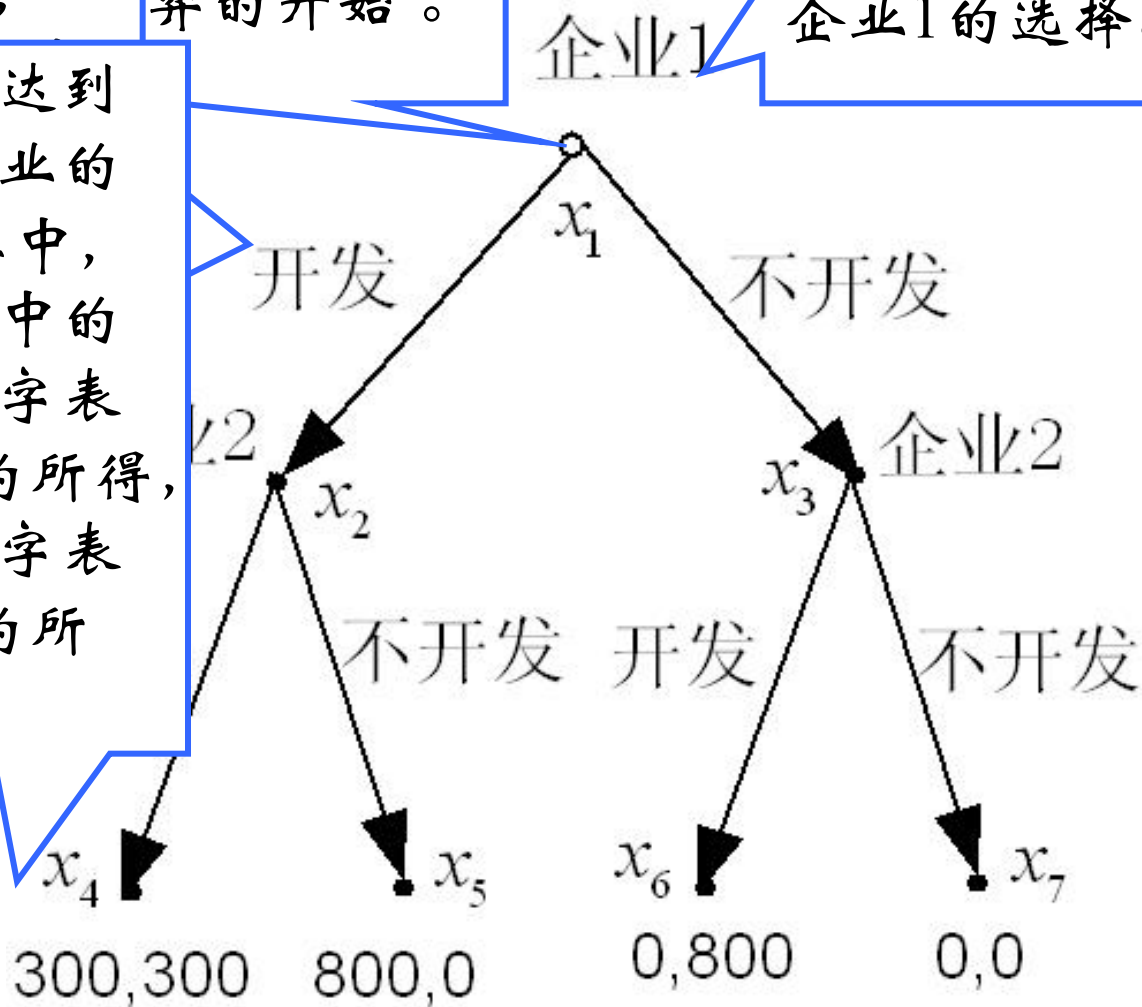
- 所谓博弈树就是由结和有向枝构成的“有向树”。

企业1的选择
有“开发”和
“不开发”

点(用空心圆
表示博弈的开始。

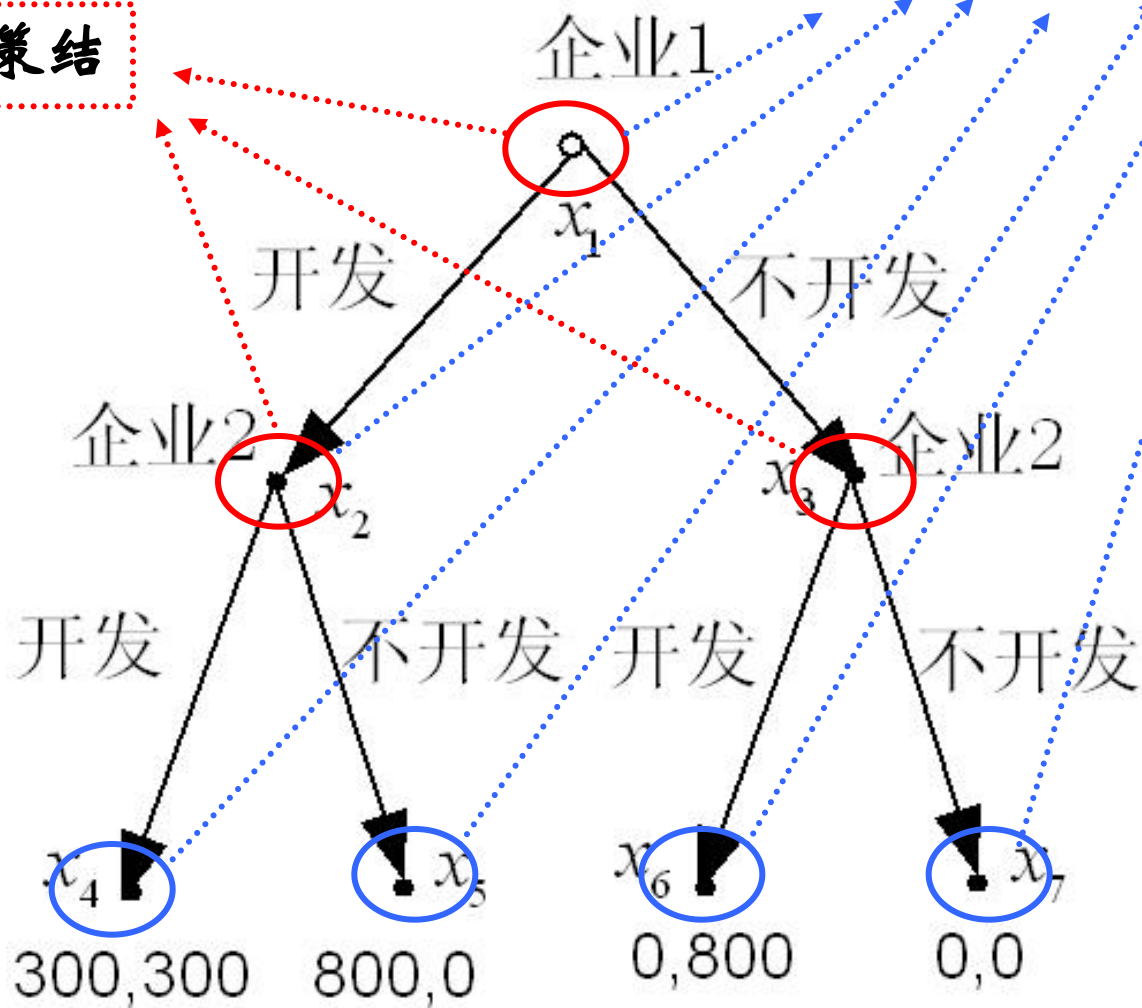
将“企业1”标示在点 x_1 上，表示博弈开始于
企业1的选择。

表示博弈达到
该点时企业的
所得，其中，
支付向量中的
第一个数字表
示企业1的所得，
第二个数字表
示企业2的所
得。



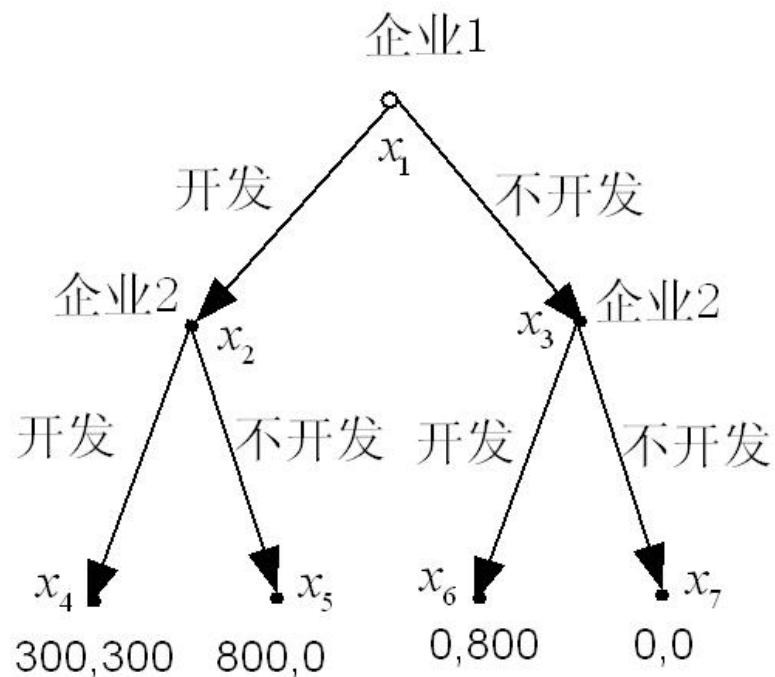
决策结

称为博弈树的结(node)

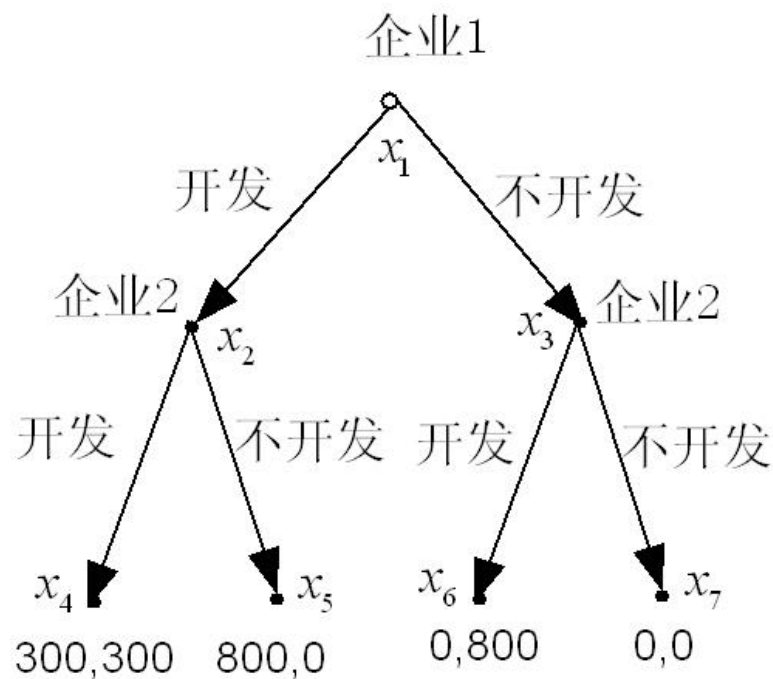


回过头来再考察上图中的博弈树，可以得到这样的信息：

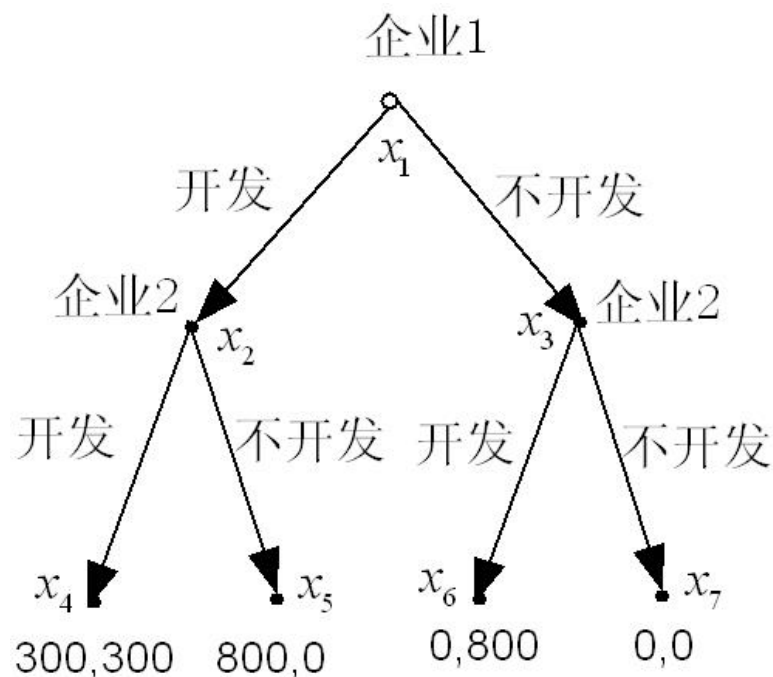
- (1) 博弈中的参与人是企业1和企业2；
- (2) 博弈中企业1先选择，企业2后选择；
- (3) 企业1选择时有行动“开发”和“不开发”，企业2选择的行动有“开发”和“不开发”；
- (4) 博弈中企业的支付。



- 也就是说，除了“企业2行动时是否观测到企业1的选择”这一点，暂时无法从上图中知道以外，
- 完全信息动态的“新产品开发博弈”的扩展式描述所需要的信息(或要素)，都可以从上图中得到。

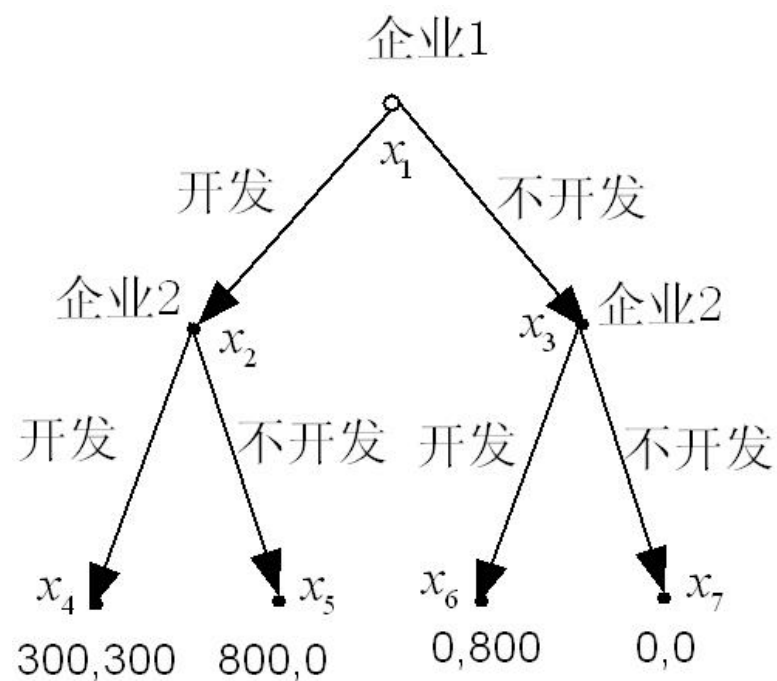


- 如果还能够直接从博弈树中知道“企业2行动时是否观测到企业1的选择”，那么给出博弈树，
- 就意味着给出了完全信息动态的“新产品开发博弈”的扩展式描述。



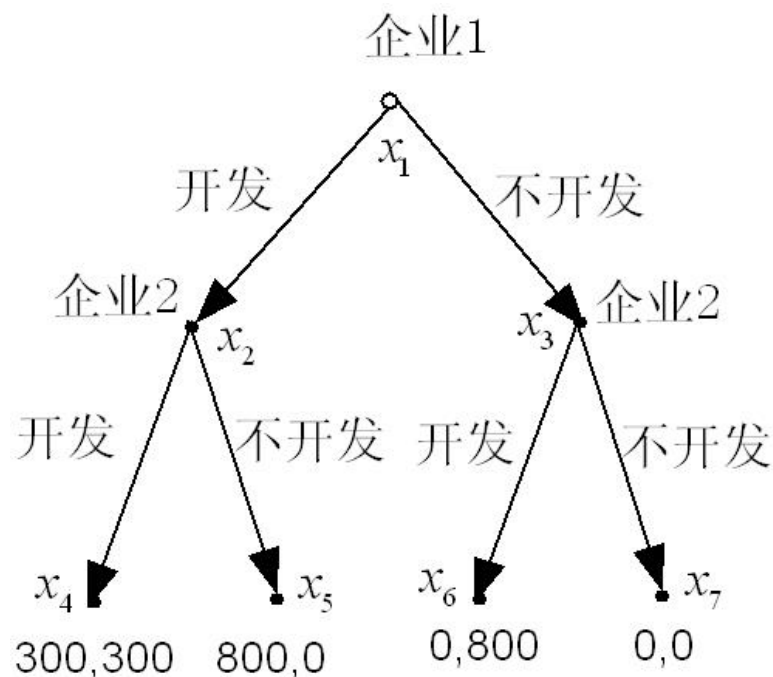
问题：

- 如何在博弈树中，将“企业2行动时是否观测到企业1的选择”这一信息表示出来？

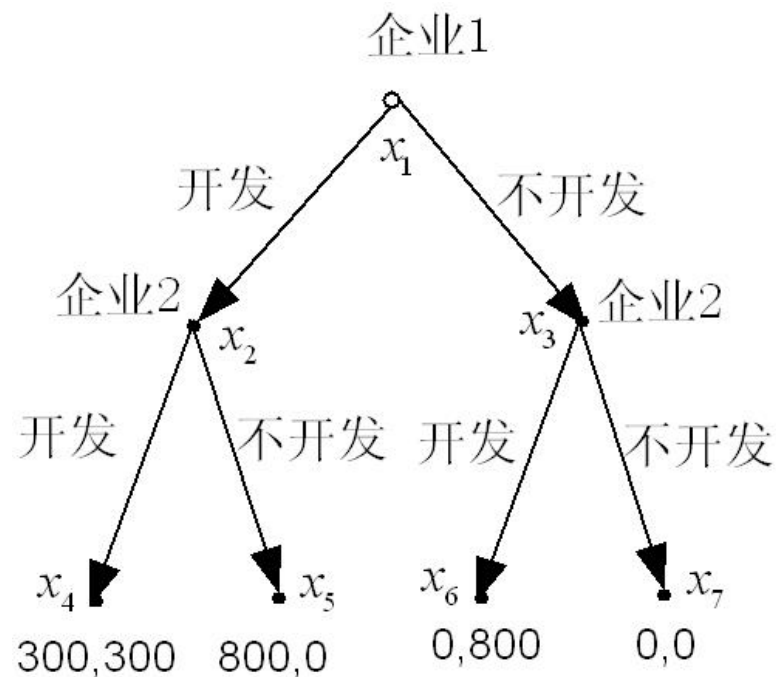


- 在完全信息动态的“新产品开发博弈”中，企业2决策时，企业1已经做出选择。此时，企业2面临的决策情形就有以下两种：

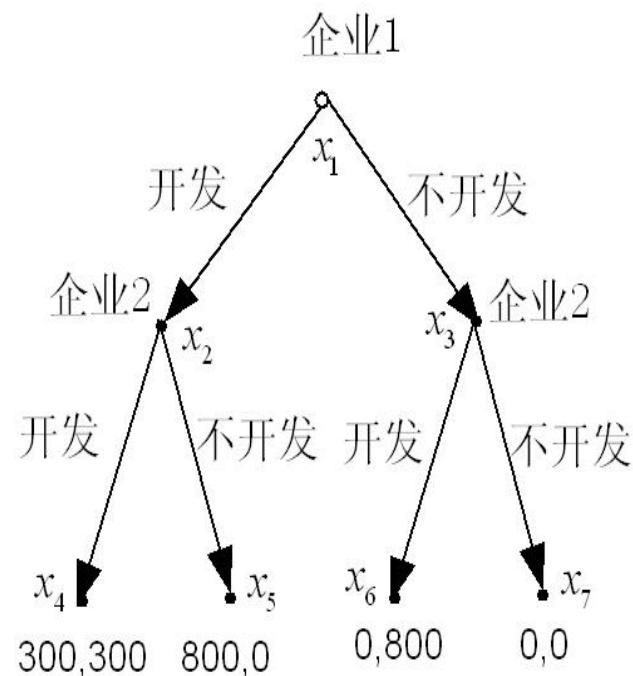
- (1) 企业2知道企业1的选择；
- (2) 企业2不知道企业1的选择。



- 对于第一种情形：企业2知道企业1的选择，即知道企业1选择了“开发”还是“不开发”。
- 因此，企业2知道博弈是从 x_1 到了 x_2 还是从 x_1 到了 x_3 。这意味着当轮到企业2决策时，他知道自己是在点 x_2 上还是在点 x_3 上；



- 对于第二种情形：企业2不知道企业1的选择，即不知道博弈是从 x_1 到了 x_2 还是从 x_1 到了 x_3 。
- 因此，当轮到企业2决策时，他不知道自己是在点 x_2 上还是在点 x_3 上。
- 所以，“企业2行动时是否观测到企业1的选择”这一问题，实际上就等价于“企业2行动时是否知道自己是在博弈树中的点 x_2 上还是在点 x_3 上”。



- 为了将“企业2行动时是否知道自己是在博弈树中的点 x_2 上还是在点 x_3 上”这一点说清楚，需要引入“信息集”(information set)的概念。

- 在博弈树中，参与人 i 的一个信息集(用 I_i 表示)是参与人 i 决策结的一个集合，它满足以下两个条件：

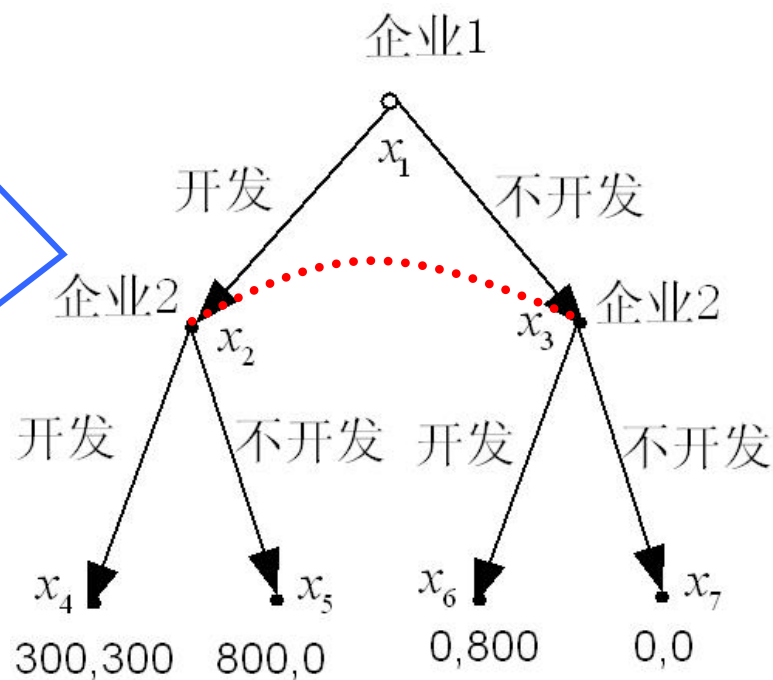
- (1) I_i 中的每个决策结都是参与人 i 的决策结；
- (2) 当博弈到达信息集 I_i (即博弈到达 I_i 中某个决策结)时，参与人 i 知道自己是在信息集 I_i 中的决策结上，但不知道自己究竟在 I_i 中哪个决策结上。

- 因此，参与人 i 的信息集 I_i 可以用来描述：
- 当轮到参与人 i 行动时，他所了解到的信息，即他知道什么(知道自己位于哪一个信息集上)、不知道什么(不知道自己位于信息集中哪一个决策结上)。

例如

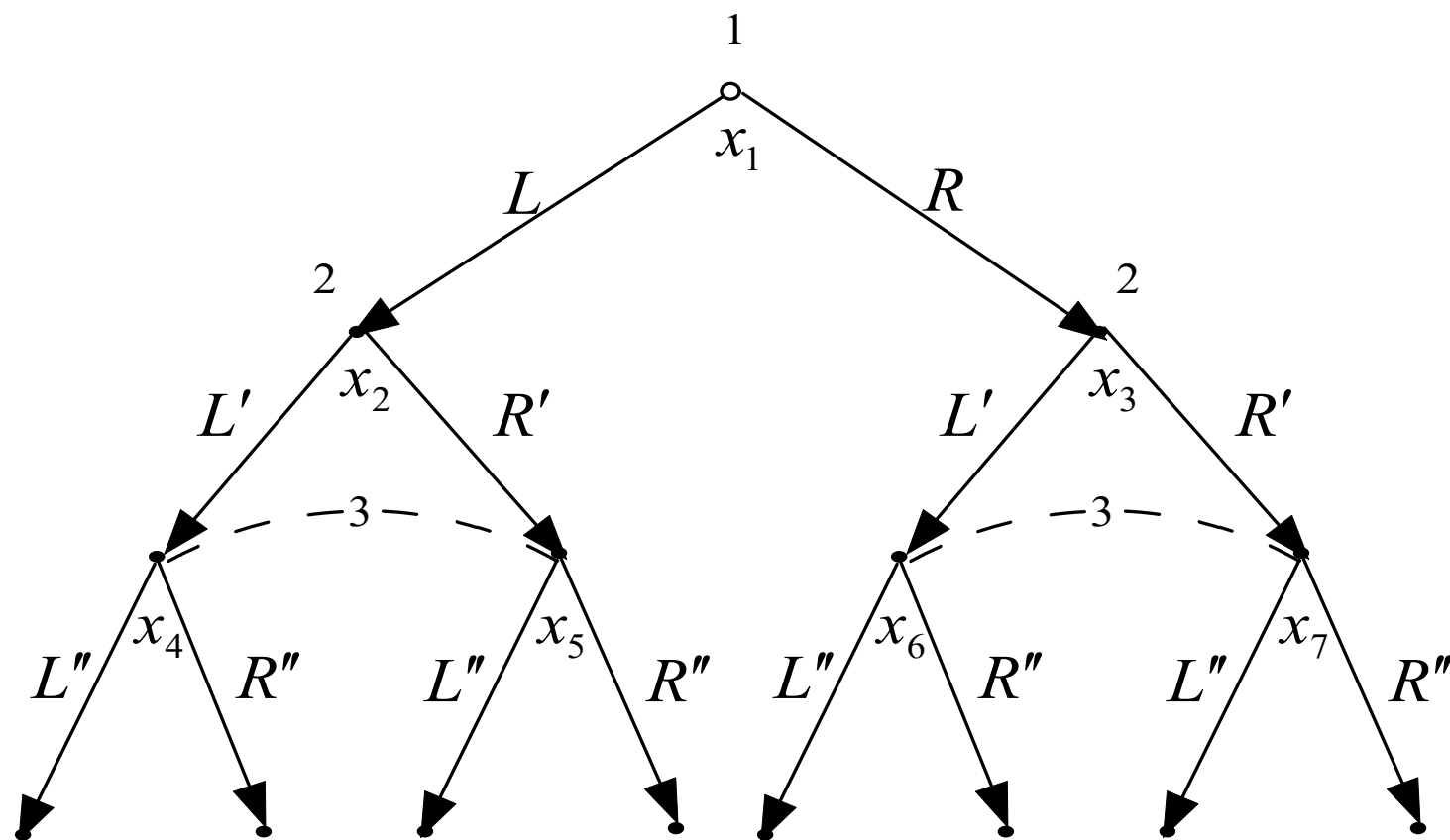
- 在“新产品开发博弈”中，假设企业1先行动，企业2后行动，但企业2行动时不知道企业1的行动。

企业2行动时，只知道博弈要么到达点 x_2 ，要么达到点 x_3 ，但具体在哪一点上，企业2不清楚。也就是说，企业2只知道自己位于决策集合 $\{x_2, x_3\}$ 上，但不知道位于 $\{x_2, x_3\}$ 中哪一个决策结上。

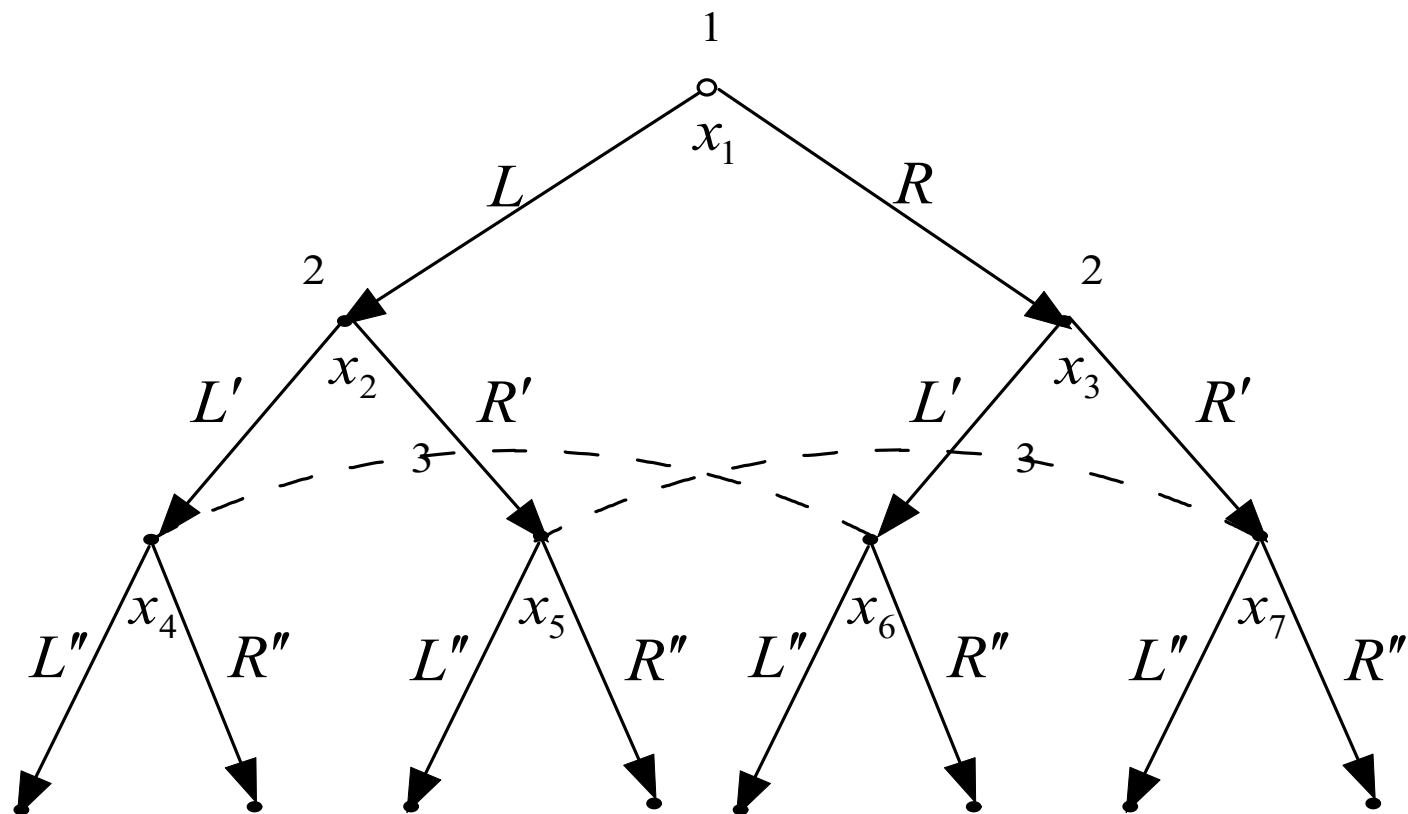


- 设 X 为一决策结集合，用 $I_i(X)$ 表示参与人的由决策结集 X 构成的一个信息集。
- 例如， $I_2(\{x_2, x_3\})$ 表示企业2的由决策结集 $\{x_2, x_3\}$ 构成的信息集；
- $I_2(\{x_2\})$ 和 $I_2(\{x_3\})$ 分别表示企业2的由决策结集 $\{x_2\}$ 和 $\{x_3\}$ 构成的信息集。

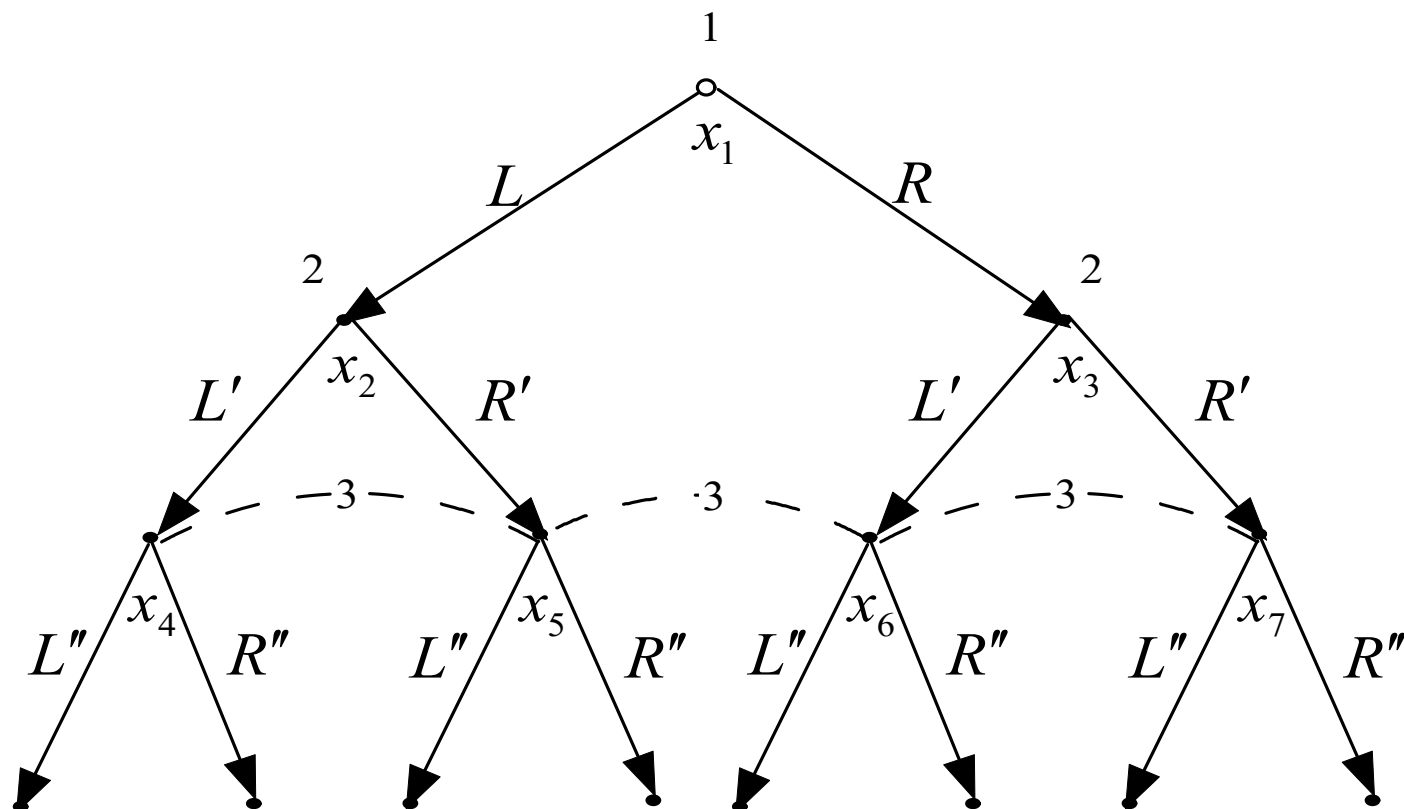
下图表示参与人3选择时，知道参与人1的选择，但不知道参与人2的选择的博弈情形。



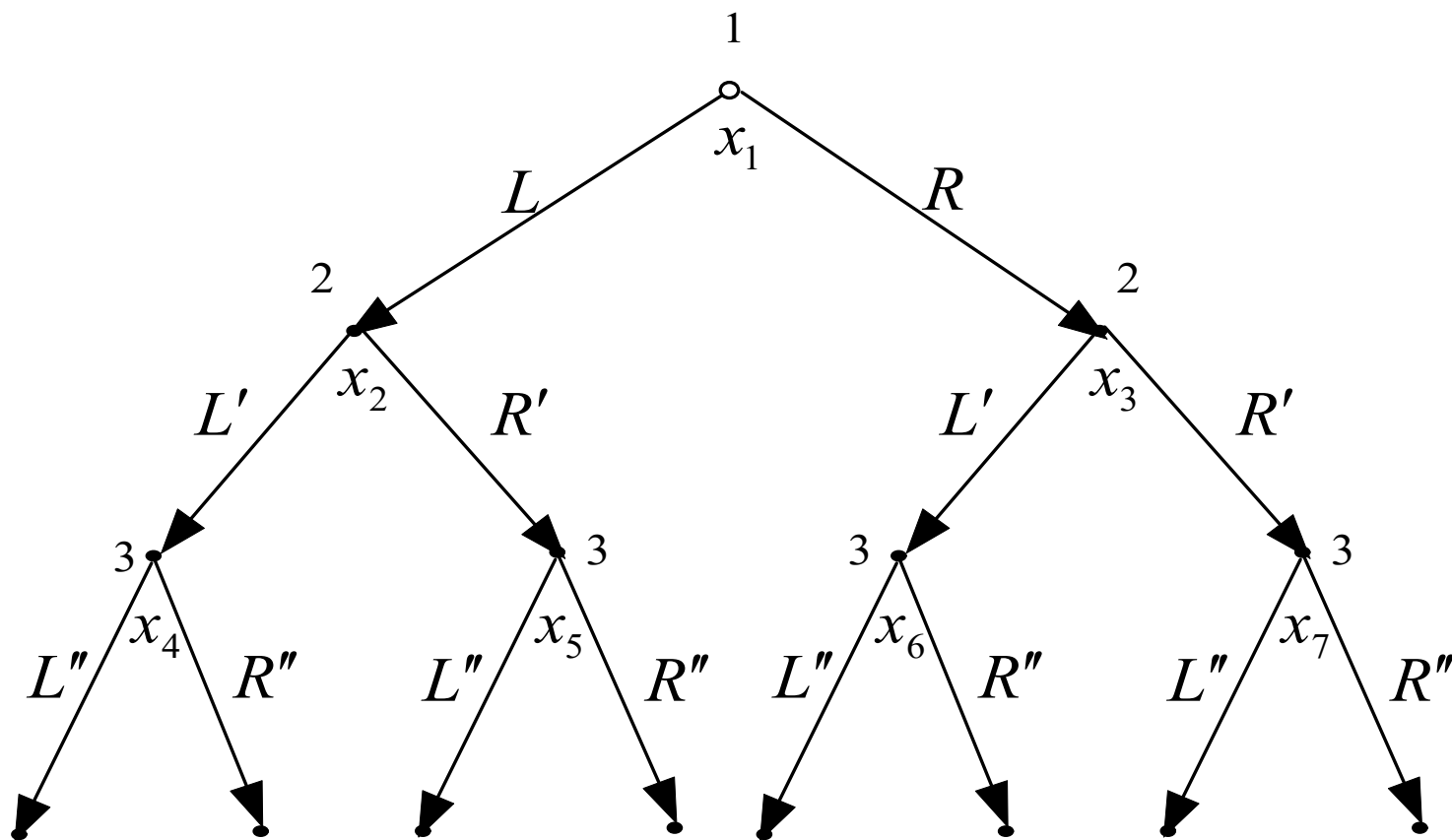
下图表示参与人3选择时，知道参与人2的选择，但不知道参与人1的选择的博弈情形。



下图表示参与人3选择时，即不知道参与人2的选择，也不知道参与人1的选择的博弈情形。



下图表示参与人3选择时，即知道参与人2的选择，也知道参与人1的选择的博弈情形。

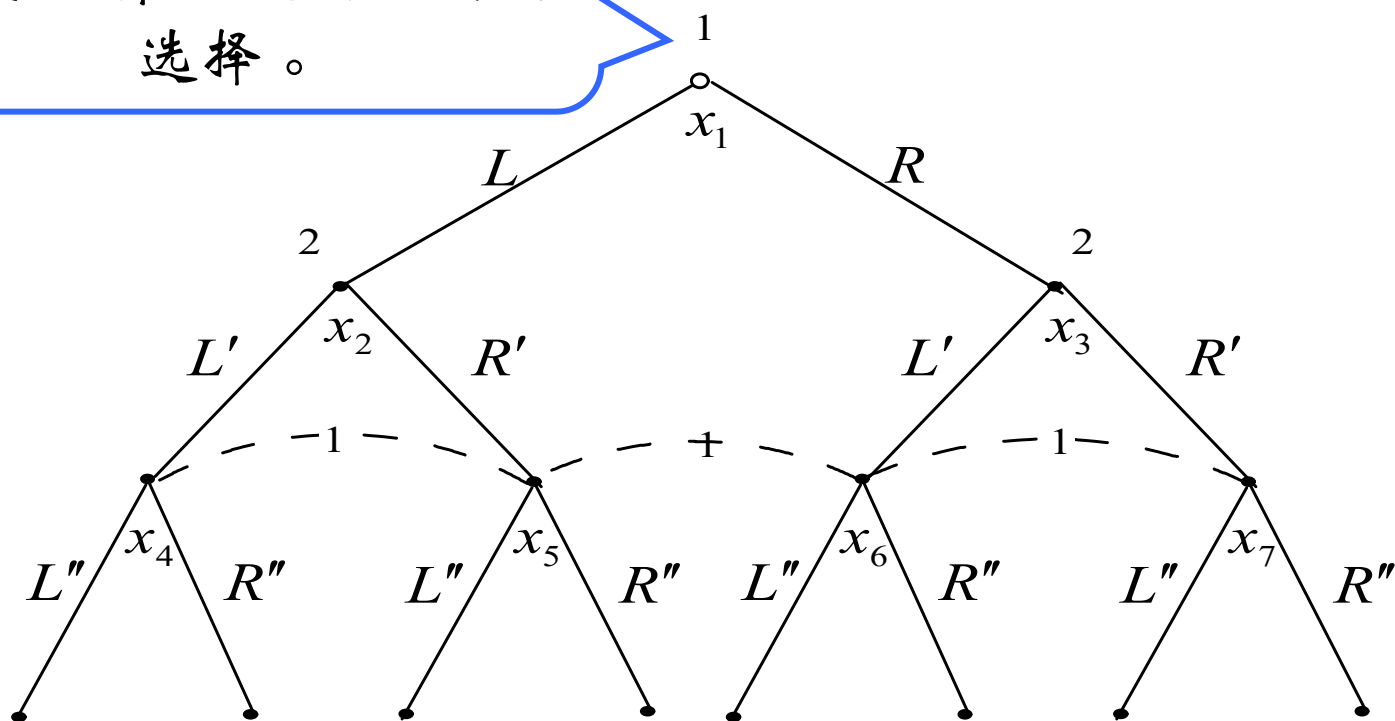


- 由于在博弈分析中，假设博弈的结构(或描述方式)为**共同知识**，因此，在以后的讨论中，如果给出博弈树，就意味着所有的参与人都**同时一起**看到了博弈树。

- 除了前面一再提到的博弈结构和参与人完全理性为共同知识外。
- 对于多阶段的动态博弈问题，一般还假设参与人满足“完美记忆”(perfect recall)要求，即假设参与人不会忘记以前知道或者做过的事情。

不满足“完美记忆”要求的博弈情形

参与人1第二次行动时
忘了他第一次行动时的
选择。



二、扩展式博弈的战略及其Nash均衡

- 考虑如下问题：

给定一个博弈问题的扩展式，该如何来求解博弈问题的解？

- 已知对于战略式博弈，可以用Nash均衡来描述博弈问题的解，对于博弈树所描述的扩展式博弈，是否同样可以用Nash均衡来描述博弈问题的解？

- 对于一个博弈问题，要给出其战略式描述，就必须定义清楚该博弈问题的三个要素：参与人、参与人的战略以及参与人在相应战略组合下的支付。

- 一个扩展式博弈实际上已定义了博弈的参与人及参与人的支付，因此，如果能定义一个扩展式博弈的战略，那么就意味着给出了一个扩展式博弈的战略式描述，同时也就意味着可以用Nash均衡来描述博弈的解。

- 所谓参与人的战略就是参与人在博弈中的行动规则，它规定了参与人在博弈中每一种轮到自己行动的情形下，应该采取的行动。

- 而在博弈树中，参与人在博弈中每一种轮到自己行动的情形又可以用一个信息集来表示，因此，参与人在扩展式博弈中的战略实际上就是参与人在每个信息集上的行动规则。

- 用 H_i 表示博弈树中参与人 i 的信息集的集合,
即 $H_i = \{I_i\}$;
- 用 $A_i(I_i)$ 表示参与人 i 在信息集 I_i 上的行动集, $A_i(H_i)$ 表示参与人在所有信息集上的行动集合,
即

$$A_i(H_i) = \bigcup_{I_i \in H_i} A_i(I_i)$$

- 参与人 i 的一个纯战略 s_i 就是从信息集集合 H_i 到行动集合 $A_i(H_i)$ 的一个映射关系，
即

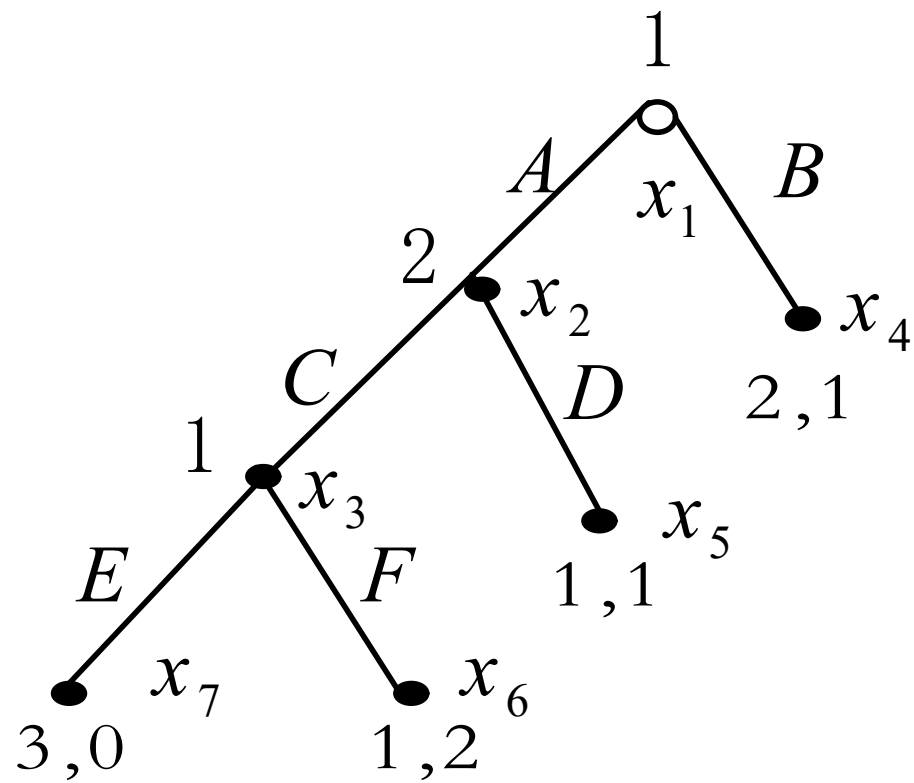
$$s_i : H_i \rightarrow A_i(H_i)$$

- 其中，对 $\forall I_i \in H_i, s_i(I_i) \in A_i(I_i)$

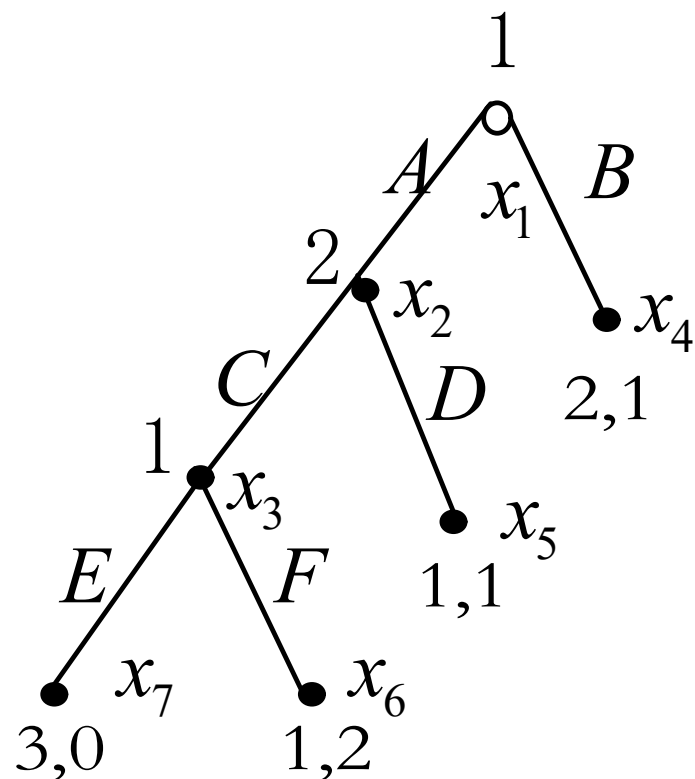
- 根据上述定义，参与人 i 的一个纯战略可以解释为参与人 i 在单个信息集上的行动组合。
- 因此，可以用参与人 i 在每个信息集上的行动集 $A_i(I_i)$ 的笛卡尔积来表示参与人 i 的战略集 S_i ，即

$$S_i = \prod_{I_i \in H_i} A_i(I_i)$$

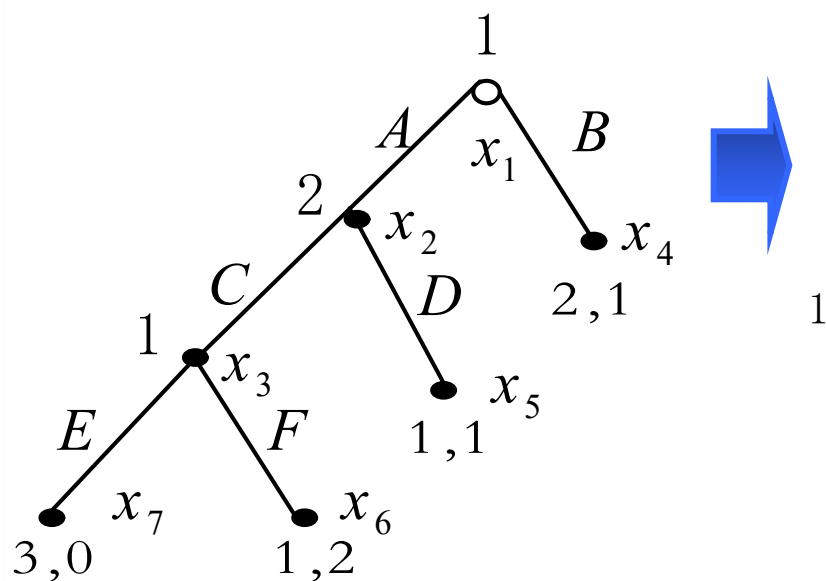
例如：



- 参与人2的信息集为 $I_2(\{x_2\})$ ，参与人2在 $I_2(\{x_2\})$ 上的行动集为 $\{C, D\}$ 。所以，参与人2的战略集为 $\{C, D\}$ ；
- 参与人1的信息集为 $I_1(\{x_1\})$ 和 $I_1(\{x_3\})$ ，其中参与人1在 $I_1(\{x_1\})$ 上的行动集为 $\{A, B\}$ ，在 $I_1(\{x_3\})$ 上的行动集为 $\{E, F\}$ 。所以，参与人1的战略集为 $\{A, B\} \times \{E, F\}$ ，即 $\{A, E\}$ 、 $\{A, F\}$ 、 $\{B, E\}$ 和 $\{B, F\}$ 。



例如



扩展式描述

(A, E)

(A, F)

(B, E)

(B, F)

	2	
	<i>C</i>	<i>D</i>
(A, E)	3, 0	1, 1
(A, F)	1, 2	1, 1
(B, E)	2, 1	2, 1
(B, F)	2, 1	2, 1

战略式描述



		2	
		<i>C</i>	<i>D</i>
1	(A, E)	3, 0	1, 1
	(A, F)	1, 2	1, 1
	(B, E)	2, 1	2, 1
	(B, F)	2, 1	2, 1

由左图可得前面所示的扩展式博弈的Nash均衡—— $((B, E), D)$ 和 $((B, F), D)$ 。

三、两种博弈描述形式的比较

1. 战略式博弈从本质上来讲是一种静态模型

- 战略式博弈从本质上来讲是一种静态模型，它假设所有的参与人同时选择战略并得到博弈的结果，至于博弈中参与人何时行动、行动时又如何行动等等，战略式博弈并不考虑。

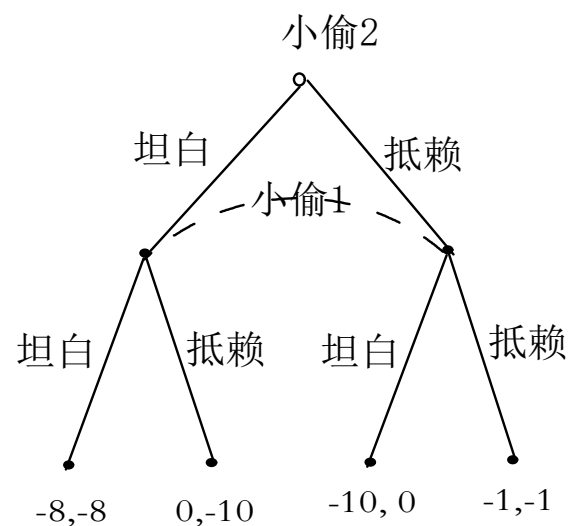
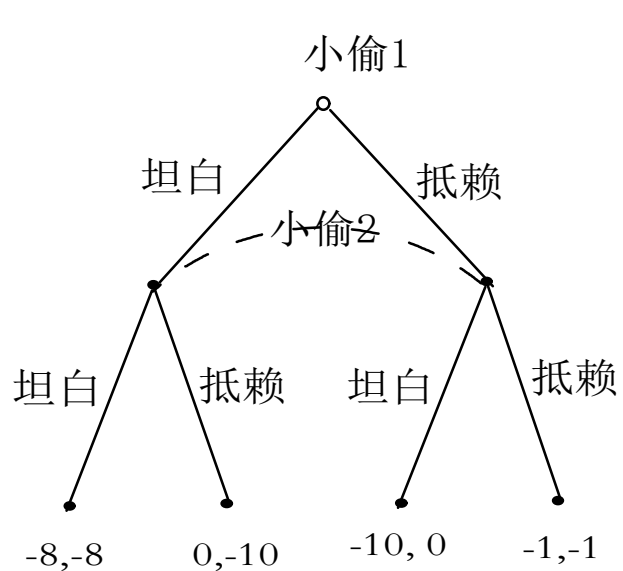
2.扩展式博弈从本质上来讲是一种动态模型

- 扩展式博弈从本质上来讲是一种动态模型，它不仅直观地给出了博弈的结果，而且还对博弈的过程进行详尽的描述，如给出博弈中参与人的行动顺序，以及参与人行动时的决策环境和行动空间等等。

例如：

		小偷 2	
		坦白	抵赖
小偷 1	坦白	-8, -8	0, -10
	抵赖	-10, 0	-1, -1

囚徒困境的战略式描述



囚徒困境的扩展式描述