Renewal Process（2）

一、概念

二、关于$N(t)$、$M(t)$的瞬态性质

1. 有界性

2. $N(t)$的概率分布、$M(t)$的表达

3. 更新方程

4. 更新时刻$T_{N(t)}$ 的概率性质

三、关于$N(t)$、$M(t)$的极限性质

（1）TH. SP $\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程, $\{X_i, i \geq 1\}$为更新间隔, $E[X_i] = u > 0$

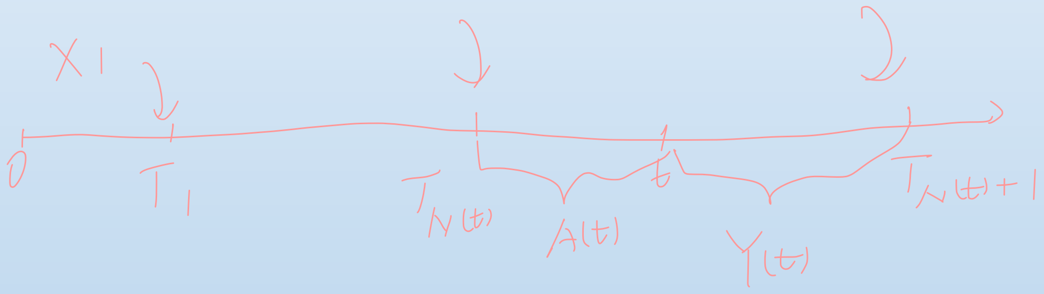
$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[X_i]} = \frac{1}{u} \quad \text{w.p.1}$$

（2）Feller基本更新定理

A. 内容

TH. SP $\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程, $\{X_i, i \geq 1\}$为更新间隔， $E[X_i] = u > 0$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{E[X_i]} = \frac{1}{u}$$



证明思路：

要证：$E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] = E(N(t)) \cdot E(X_i)$ （条件：个数独立于 X_i）

$T_{N(t)+1} = t + Y(t)$, 两边取期望：

$$E[T_{N(t)+1}] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right] = E[N(t)+1] \cdot E[X_i]\ ?$$

法一：利用Wald等式（见教材P420，自学）；

法二：利用更新方程解的存在TH

注：证明过程中的结论 $[M(t)+1]\cdot E[X_i]=t+E[Y(t)]$, 可以用于求解$M(t)$或$E[Y(t)]$

根据

求极限的工具

B. Feller基本更新定理的一个重要应用：求发生更新的极限概率

TH. 离散时间SP$\{N(n), n=0,1,\cdots\}$为更新过程, 更新发生在整数点处, $\{X_i, i\geq 1\}$为更新间隔, $E[X_i]=u>0$，令$A_n=$ "在时刻n处发生更新"，假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{A_n\}$ 存在

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P\{A_n\}=\frac{1}{E[X_i]}=\frac{1}{u}$$

更新次数 → 更新函数

$N(n)$ 表示 $[0,n]$ 内发生的更新次数，$M(n)=E[N(n)]$

TH. （练习）连续时间SP$\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程，$\{X_i, i \geq 1\}$为更新间隔， $E[X_i] = u > 0$,

令$A_t =$ "时刻t处发生更新"， 假设$\lim\limits_{t \to +\infty} P\{A_t\}$存在

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} P\{A_t\} = \frac{1}{E[X_i]} = \frac{1}{u}$$

（3）Blackwell更新定理

A. 准备：格点分布的定义

特殊的离散型随机变量

Def. $r.v.\ X$的CDF $F(x)$为**格点分布**（或称$r.v.\ X$是**格点的**）

$\Leftrightarrow \exists d>0,\ s.t. \sum_{n=0}^{\infty} P(X=nd)=1$

即，X只有nd形式的取值，

称满足上诉条件的最大的d为X的**周期**

B. Blackwell更新定理的内容：

TH. SP$\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程，更新间隔$\{X_i, i \geq 1\}$的CDF为$F(x)$，$M(t)$为更新函数

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{当}F(x)\text{为非格点分布时，}\forall a > 0,\ \lim\limits_{t \to +\infty} [M(t+a) - M(t)] = \dfrac{a}{u} \\ \text{当}F(x)\text{为格点分布时，}d\text{为周期，}\lim\limits_{n \to +\infty} P(\text{在}nd\text{处发生更新}) = \dfrac{d}{u} \end{cases}$$

注：当$F(x)$为非格点分布时，在远离原点的**任意区间**$[t, t+a]$上发生的平均更新次数

$\approx \dfrac{1}{u} \cdot a$，对起始时间 t的依赖逐步消失。

（4）Smith关键更新TH

TH. $\{N(t), t \geq 0\}$为RP，更新间隔$\{X_i, i \geq 1\}$的CDF为$F(x)$，$E[X_i] = u$，$k(t)$为更新方程

$k(t) = h(t) + k(t) * F(x)$的解，且满足：A. $h(t)$非负不增；B. $\int_0^{\infty} h(t)dt < +\infty$

一般函数

求一般函数的极限工具

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{当}F(x)\text{为非格点分布时，} \lim\limits_{t \to +\infty} k(t) = \dfrac{1}{u}\int_0^{\infty} h(t)dt \\ \text{当}F(x)\text{为格点分布时，}d\text{为周期，} \lim\limits_{n \to +\infty} k(c+nd) = \dfrac{d}{u}\sum_{n=0}^{\infty} h(c+nd) \end{cases}$$

$0<x<t$

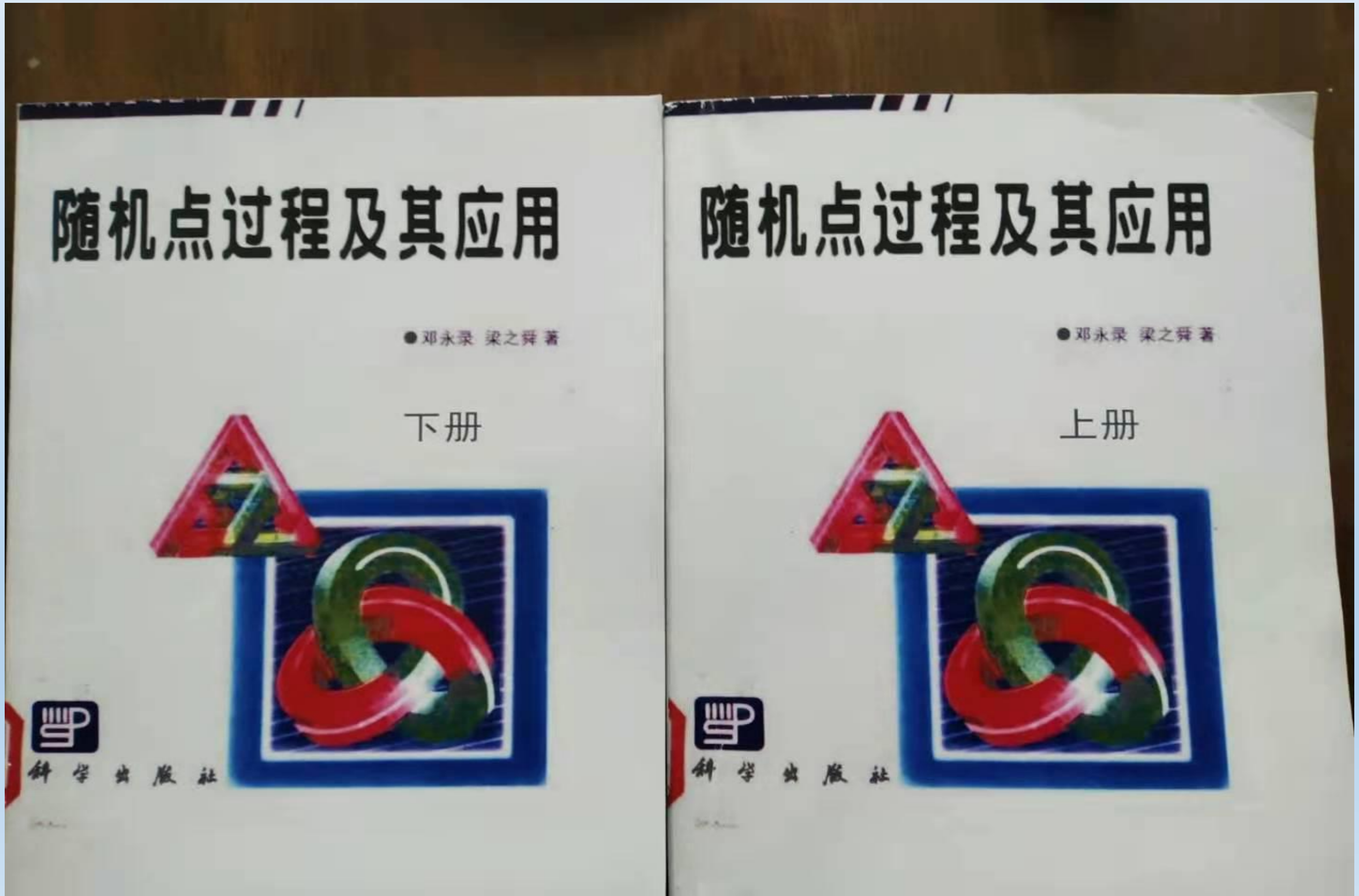
$0<t-x<t$

$\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = 0$

注：

A. Smith关键更新TH中的A,B条件可以推广为： $h(t)$直接黎曼可积

Reference：邓永禄，梁之舜.随机点过程及其应用[M]（P157 TH.3-6-1）.科学出版社，1988.



B. 关系

Smith关键更新TH $\Longleftrightarrow$ Blackwell更新定理 $\Longrightarrow$ Feller基本更新定理

C. 应用

$$\text{求解极限概率的工具}\begin{cases}\text{Blackwell更新定理（格点分布情况）}\\ \text{Smith关键更新TH}\end{cases}$$

（5）Smith关键更新TH的一个重要应用

TH. SP$\{X(t), t \geq 0\}$为一个循环过程，循环期$\{X_i, i \geq 1\}$的CDF为$F(x)$，且为非格点分布，$E[X_i] = u > 0$，$X(t)$表示t时刻系统所处的状态，系统的状态空间为$S = \{0,1,\cdots\}$. $P_j(t) = P\{X(t) = j\}$

$$\Rightarrow p_j = \lim_{t \to +\infty} P_j(t) = \frac{E[\text{一个循环期内处于状态}j\text{的总时间}]}{E[X_i]}$$

证明思路：先建立关于目标$P_j(t)$的更新方程，再利用Smith关键更新TH

$P_j(t)$ 全概率分解

（6）更新过程的CLT

A. 背景：

$$\begin{cases} \text{更新次数的近似计算} \begin{cases} N(t) \approx t \cdot \frac{1}{E[X_i]} \text{(粗糙)} \\ N(t) \rightarrow N(\mu, \sigma^2)\ ? \end{cases} \\ Var\left(N(t)\right) =? \end{cases}$$

B. 内容：

TH. SP$\{X(t), t \geq 0\}$为更新过程，更新间隔$\{X_i, i \geq 1\}$的CDF为$F(x)$，$E[X_i] = u > 0$，

$Var[X_i] = \sigma^2 > 0$

$$\Longrightarrow \frac{N(t)-t/u}{\sqrt{t\sigma^2/u^3}} \rightarrow N(0,1)\ \text{（依分布收敛）}$$

注：A. 关系：$N(t) \simeq N(t/u, t\sigma^2/u^3)$

B. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{Var(N(t))}{t} = \dfrac{\sigma^2}{u^3}$

例题（P426 Example7.13）.2台机器独立、持续加工一些部件，第一台机器加工一个部件的时间是$X\sim Gamma(4,2)$，第二台机器加工一个部件的时间是$Y\sim UNIF(0,4)$

问题：估计2台机器在$(0,100)$的时间段内一共加工的部件数量不少于90件的概率

（$N_1(50, 25/2)$，$N_2(50, 50/3)$，0.9741）

记 $N_1(t)$, $N_2(t)$ 分别表示 $[0,t)$ 内机器 1、2 加工的部件数

则由条件知：$\{N_1(t), t\geq 0\}$, $\{N_2(t), t\geq 0\}$ 为 2 个 RP 且独立

所以 $N_1(t) \sim N\left(\frac{t}{\mu_1}, \frac{t\sigma_1^2}{\mu_1^3}\right)$, $N_2(t) \sim N\left(\frac{t}{\mu_2}, \frac{t\sigma_1^2}{\mu_2^3}\right)$

所以 $N(t) = N_1(t) + N_2(t) \sim N\left(\frac{t}{\mu_1}+\frac{t}{\mu_2}, \frac{t\sigma_1^2}{\mu_1^3}+\frac{t\sigma_1^2}{\mu_2^3}\right)$

即 $N(100) = N\left(50+50, \frac{25}{2}+\frac{50}{3}\right)$

$$P(N(100)\geq 90) = 1-\Phi\left(\frac{90-100}{\sqrt{\frac{25}{2}+\frac{50}{3}}}\right) = 0.9741$$

（7）训练：更新过程的识别、平均更新间隔的计算

训练1. 一台机床持续加工同类部件，对第i个部件的加工时间是S_i，$\{S_i, i \geq 1\}$是iid r.v.s，且$E[S_i] = u$（加工完成时刻）

问题：

（1）建立RP模型

（2）计算平均更新间隔

训练2. 一台机床持续工作，其工作寿命是X，一旦损坏立刻进行维修，维修时间是Y，且修复如新，修复后继续工作（维修完成时刻）

问题：

（1）建立RP模型

（2）计算平均更新间隔

训练3. 一台机床持续加工部件，每个部件的加工时间是$S \sim f(x)$，机床的故障以参数为λ的Poisson过程发生，且独立于S，一旦发生故障立刻更换同类新机床，并停止未完的加工，开始另一个新部件的加工（加工完成时刻）

更新点就是重置点

问题：

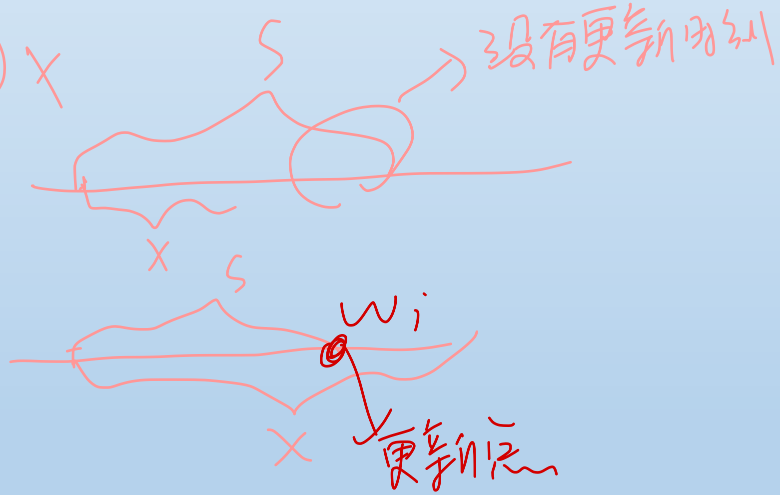
（1）建立RP模型

（2）计算平均更新间隔

更新间隔.

r.v: $\begin{cases} \text{加工时间} & S \\ \text{机床故障间隔时间(机床的寿命)} & X \end{cases}$

$\begin{cases} X < S \\ X > S \end{cases}$



重期望公式

$E(X_i) = E[E(E(W_i|X,S)$

W_i表示第i个更新间隔

$W_i = \begin{cases} X + W_i, & X \le S \\ S, & X > S \end{cases}$

$E[W_i] = E[E[W_i | X, S]]$

训练4. 一台机床持续工作，故障以参数为λ的Poisson过程发生，维修人员每隔时间$Y \sim Exp(u)$检查一次机床，且独立于故障发生，如果发现机床故障则立刻更换同类新机床（更换机床的时刻）

从0开始，即更新点

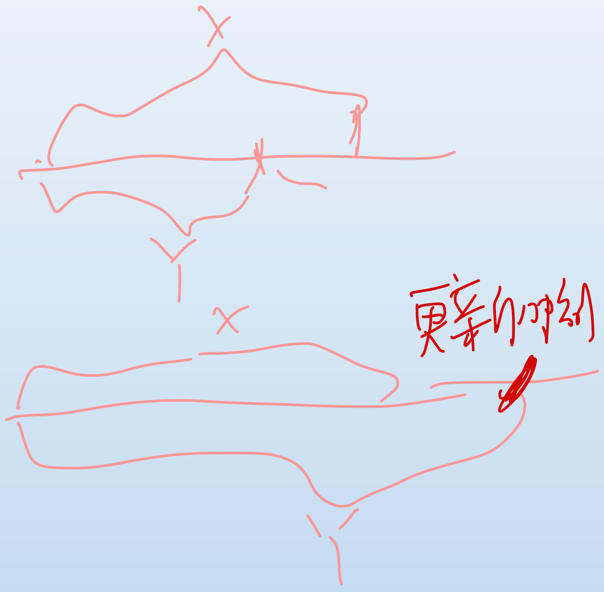
问题：

（1）建立RP模型

（2）计算平均更新间隔

X 故障发生间隔（寿命）

Y 检查间隔（指数）



$$W_i = \begin{cases} Y + W_i & Y \le X \\ Y & Y > X \end{cases}$$

$E(X)$

训练5. 顾客以参数是λ的Poisson过程到达一个单服务台系统，当顾客到达时需要经过一个通向服务台的门，每当有顾客通过这道门后，门就会处于一个长度为t的关闭期。每个在关闭期到达系统的顾客会流失，并造成损失费用C；当一个顾客通过门进入系统后发现服务台空闲，则接受长度是$Y \sim Exp(u)$的服务，若发现服务台正忙，则流失并造成损失费用K，假设服务独立于到达（关闭期开始时刻）

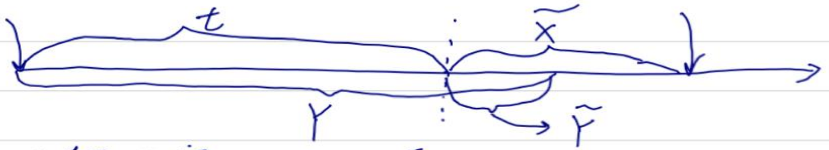
问题：

（1）建立RP模型

（2）计算平均更新间隔；

（3）计算一个更新间隔内的平均损失费用。

分析:



① 记 X 表示顾客到达间隔，则 $X \sim Exp(\lambda)$

Y表示服务时间，则 $Y \sim Exp(u)$

将关闭期开始时刻视为更新点

W 表示相邻2个关闭时刻之间的间隔.

则 $W = t + \tilde{X}$，其中 $\tilde{X}$ 表示顾客到达间隔([illegible])

则此服务过程为一RP. 更新间隔为 $W = t + \tilde{X}$

② ∵ $E[W] = t + \frac{1}{\lambda}$

③ 记 L 表示一个更新间隔内的损失费用.

则 L 由2部分构成. 一是在关闭期 $[0, t]$ 内流失顾客产生的费用 L_1，另一个则是 通过门∴s后因为服务台忙所流失顾客的费用 L_2.

记 $N(t)$ 表示 $[0, t]$ 内到达系统的顾客数.

$$\therefore L = L_1 + L_2 = C \cdot N(t) + L_2$$

其中 $L_2 = \begin{cases} k, & Y > t \text{ 且 } \tilde{X} < \tilde{Y} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$\therefore E[L] = E[L_1] + E[L_2] = C \cdot \lambda t + k \cdot P(Y > t, \tilde{X} < \tilde{Y})$$

$$= C \cdot \lambda t + k \cdot \int_0^{+\infty} P(Y > t, s < \tilde{Y} \mid \tilde{X} = s) \lambda e^{-\lambda s} ds$$

$$= C \cdot \lambda t + k \cdot \int_0^{+\infty} P(Y > t, \tilde{Y} > s) \lambda e^{-\lambda s} ds \qquad (Y - t) \mid Y > t \overset{d}{=} Y$$

$$= C \cdot \lambda t + k \cdot \int_0^{+\infty} P(Y > t) \cdot P(Y - t > s \mid Y > t) \lambda e^{-\lambda s} ds$$

$$= C \cdot \lambda t + k \cdot e^{-ut} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-us} \cdot \lambda e^{-\lambda s} ds = C\lambda t + k e^{-ut} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + u}$$

训练6. （M/G/1排队系统，课后思考）

假设顾客以强度是λ的Poisson过程到达只有一个服务员的服务系统，若到达发现服务员正忙，则排队等待。对每个顾客的服务时间为R，其CDF是$G(x)$.

问题：

（1）建立RP模型（忙期结束时刻）

（2）计算平均更新间隔

6.

(1)

分析：将每次服务忙期的结束时刻视为更新点.

$N(t)$表示$[0,t]$内忙期的个数.

则$\{N(t), t\geq 0\}$为一计数过程.

记 X_i 表示第i个闲期+忙期

则 $X_i = \tilde{\tau}_i + b$，其中$\tilde{\tau}_i$表示顾客的到达间隔

故 $\tilde{\tau}_i \sim Exp(\lambda)$

$\because \{X_i, i\geq 1\}$ 为 i.i.d r.v.s 且 $E[X_i] = E[\tilde{\tau}_i] + E[b]$

$= \frac{1}{\lambda} + E[b]$

$\therefore \{N(t), t\geq 0\}$ 为一个 RP.

(2) 下求$E[b]$

记 R 表示b中第一个顾客的服务时间. $N(R)$表示R内新到的顾客人数，编号为$1, 2, \dots, N(R)$，则由这$N(R)$个顾客形成$N(R)$个忙期，记为 $b_1, b_2, \dots, b_{N(R)}$

其中 b_i $(1\leq i\leq N(R))$ 表示服务编号为 i 的顾客以及其服务此顾客期间新到顾客的时间.

则 $b_i \overset{d}{=} b$.

其中 b_i $(1\leq i\leq N(R))$ 表示服务编号为 i 的顾客以及其服务此顾客期间新到顾客的时间.

则 $b_i \overset{d}{=} b$.

$\therefore b = R + b_1 + b_2 + \cdots + b_{N(R)}$

$$\therefore E[b] = E[R] + E\left[\sum_{i=1}^{N(R)} b_i\right] = E[R] + E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N(R)} b_i \,\middle|\, R\right)\right]$$

$$= E[R] + \int_0^{+\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} b_i \,\middle|\, R=t\right] dG(t)$$

$$= E[R] + \int_0^{+\infty} E[N(t)]\cdot E[b]\cdot dG(t)$$

$$= E[R] + \int_0^{+\infty} \lambda t\cdot E[b]\cdot dG(t) = E[R] + \lambda\cdot E[b]\cdot E[R]$$

$$\Rightarrow E[b] = \frac{E[R]}{1-\lambda E[R]}$$

$\therefore$ 平均更新间隔为 $E[X_i] = E[\tilde{\tau}_i] + E[b]$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{E[R]}{1-\lambda E[R]}$$