第一章　行列式

习题 1. 1

1．求以下排列的逆序数，并指出排列的奇偶性：

（1）　14253

（2）　528497631

（3）　135⋯(2n-1)246⋯(2n)）

（4）　24 ⋯（2 n）（2 n －1）（2 n －3）⋯31

解（1）τ（14253）=0+2+0+1+0=3，该排列为奇排列.

（2）　$\tau(528497631)=4+1+5+2+4+3+2+1=22$，排列为偶排列；

（3）τ（135⋯(2n-1)246⋯(2n)）=1+2+ ⋯ +（n-1）=$\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k$ 或 $n=4k+3$（$k=0$，1，2，⋯）时此排列为偶排列，当 $n=4k+1$ 或 $n=4k+2$（$k=0$，1，2，⋯）时此排列为奇排列；

（4）$\tau(24\ \cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots 31)=1+2+\cdots+n+(n-1)+\cdots+1=n^2$，

n 为奇数时为奇排列，n 为偶数时为偶排列.

2．确定 i 、j ，使下面的 8 级排列为偶排列：

（1）　62i 418 j 3　　　　　　　　（2）　4 i 13 j 765

解（1）$\tau(62541873)=5+1+3+2+0+2+1=14$，所以当 $i=5, j=7$ 时，排列为偶排列；

（2）$\tau(42138765)+3+1+3+2+1=10$，所以当 $i=2, j=8$ 时，排列为偶排列.

3．证明：$\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)+\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}=C_n^2$.

证 如果在排列 $i_1\,i_2$ ⋯ $i_{n-1}i_n$ 中的任意两个数构成一个逆序，那么它们在排列 $i_n\,i_{n-1}$ ⋯ i_2i_1 中构成一个顺序，反之也成立. 故结论成立.

4．确定 i ，j

（1）使 $a_{13}a_{29}a_{37}a_{42}a_{5i}a_{61}a_{75}a_{8j}a_{94}$ 为 9 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 带负号的项；

（2）使 $a_{12}a_{21}a_{3i}a_{43}a_{57}a_{68}a_{7j}a_{84}a_{96}$ 为 9 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 带正号的项.

解

（1）因为$\tau(397281564)=21$，所以$i=8, j=6$时$a_{13}a_{29}a_{37}a_{42}a_{5i}a_{61}a_{75}a_{8j}a_{94}$为带负号项；

（2）因为$\tau(215376948)=6$，所以$i=5, j=9 \quad i=9, j=5$时$a_{12}a_{21}a_{3i}a_{43}a_{57}a_{68}a_{7j}a_{84}a_{96}$为带正号项.

5．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix}$ （2）$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ （4）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)}1\cdot x\cdot x+(-1)^{\tau(213)}(-1)\cdot 2\cdot x+(-1)^{\tau(231)}(-1)\cdot(-1)\cdot 3$

$$= x^2+2x+3$$

（2）$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

（4）根据行列式定义，每一项中取后三行的元素时，必有一个元素为 0，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

（5）$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n} a_{2,\ n-1} \cdots a_{n1}$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,\ n-1} \cdots a_{n1}$$

（6）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(23\cdots n1)} 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = (-1)^{n-1} n!$

习题 1. 2

1．计算行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ （2）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$ （4）$\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} a & b & b+c & b+c+d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+b+c & 4a+b+c+d \\ a & 3a+b & 6a+b+c & 10a+b+c+d \end{vmatrix}$ （6）$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & & \\ & -a_2 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解（1）57；

（2）$\begin{vmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1+c_2+c_3+c_4}}\begin{vmatrix}7&1&1&1\\7&4&1&1\\7&1&4&1\\7&1&1&4\end{vmatrix}=7\times 27=189$

（3）$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\0&0&2e\\0&2c&0\end{vmatrix}=4abcdef$

（4）$\begin{vmatrix}c&a&d&b\\a&c&d&b\\a&c&b&d\\c&a&b&d\end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&a&d&b\\0&c-a&0&0\\0&c-a&b-d&d-b\\0&0&b-d&d-b\end{vmatrix}=0$

(5)$\begin{vmatrix}a&b&b+c&b+c+d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+b+c&4a+b+c+d\\a&3a+b&6a+b+c&10a+b+c+d\end{vmatrix}\overset{r_{i+1}-r_i}{\underset{i=3,2,1}{=}}\begin{vmatrix}a&b&b+c&b+c+d\\0&a&a&a\\0&a&2a&3a\\0&a&3a&6a\end{vmatrix}$

$\overset{r_i-r_2}{\underset{i=3,4}{=}}\begin{vmatrix}a&b&b+c&b+c+d\\0&a&a&a\\0&0&a&2a\\0&0&2a&5a\end{vmatrix}\overset{r_4-2r_3}{=}\begin{vmatrix}a&b&b+c&b+c+d\\0&a&a&a\\0&0&a&2a\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4$

（6）

$$\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&2&0\\z&0&0&3\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1-c_2-\frac{y}{2}c_3-\frac{z}{3}c_4}}\begin{vmatrix}1-x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}z^2&x&y&z\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=6(1-x^2-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3})$$

(7）当$n=1$时，原行列式等于a_1+b_1；

当$n=2$时，原行列式等于$(a_1-a_2)(b_2-b_1)$；

当$n\geq 3$时，对行列式按行或列分解可知其值为 0.

（8）$\begin{vmatrix}-a_1&a_1&&&\\&-a_2&a_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-a_n&a_n\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1+c_2+\cdots+c_n}}\begin{vmatrix}0&a_1&&&\\&-a_2&a_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-a_n&a_n\\n+1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

$$=(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n$$

2．证明：

（1）$\begin{vmatrix}(a_1+1)^2 & a_1^2 & a_1 & 1\\(a_2+1)^2 & a_2^2 & a_2 & 1\\(a_3+1)^2 & a_3^2 & a_3 & 1\\(a_4+1)^2 & a_4^2 & a_4 & 1\end{vmatrix}=0$

（2）$\begin{vmatrix}x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

证

（1）$\begin{vmatrix}(a_1+1)^2 & a_1^2 & a_1 & 1\\(a_2+1)^2 & a_2^2 & a_2 & 1\\(a_3+1)^2 & a_3^2 & a_3 & 1\\(a_4+1)^2 & a_4^2 & a_4 & 1\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2-2c_3-c_4}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}0 & a_1^2 & a_1 & 1\\0 & a_2^2 & a_2 & 1\\0 & a_3^2 & a_3 & 1\\0 & a_4^2 & a_4 & 1\end{vmatrix}=0$

（2）

$$\begin{vmatrix}x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\x_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\x_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1 & z_1 & x_1\\y_2 & z_2 & x_2\\y_3 & z_3 & x_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

3．解方程：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\1 & 2-x^2 & 2 & 3\\2 & 3 & 1 & 5\\2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}=0$　　（2）$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1-x & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 2-x & \cdots & 1\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x\end{vmatrix}=0$

（3）$\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & & a_{n-1} & 1\\a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\\a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1\\a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1\end{vmatrix}=0$.

解（1）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 3(1-x^2)(4-x^2) = 0$$

根为 1，-1，2，-2.

（2）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix} = -x(1-x)\cdots((n-2)-x) = 0$$

方程的解为 $x_1 = 0, x_2 = 1, \cdots, x_{n-1} = n-2$.

（3）

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=n,\cdots,1]{r_{i+1}-r_i} \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1-x & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-x & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x & 0 \end{vmatrix} = -\prod_{i=1}^{n}(a_i-x) = 0$$

方程的解为 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots, x_n = a_n$.

4. 计算 n 阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 2 & 0 & .... & 0 \\ 1 & 0 & 3 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 1 & 0 & 0 & .... & n \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} \lambda+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, $a_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$

解 (1)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+n-1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{r_i-r_1,(i=2,3,\cdots,n)}{=\!=\!=\!=\!=} (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ -1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(r_i-r_n,(i=1,2,\cdots,n-1)}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^n(n+1)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - r_2, (i=3,4,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\text{-}2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\text{-}2 \end{vmatrix} = -2 \times (n-2)!$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 2 & 0 & .... & 0 \\ 1 & 0 & 3 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 1 & 0 & 0 & .... & n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{c_1 - \frac{1}{i}c_i} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & .... & 1 \\ 0 & 2 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 3 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & \mathrm{n} \end{vmatrix} = (1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})n!$$

(5)

$$\begin{vmatrix} \lambda+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} \lambda+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} \lambda+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda+\sum_{i=1}^{n}a_i)$$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})$$ 5．若 n 阶行列式 D_n 中的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji}$（i、$j=1$，2，…，n），则称 D_n 为反对称行列式．即

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

5. 证明奇数阶反对称行列式的值等于 0.

证

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D_n$$

所以当 n 为奇数时，$D_n = -D_n$，从而 $D_n = 0$.

习题 1. 3

1. 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

计算：（1）$A_{11} + A_{12} - A_{13} + 2A_{14}$

（2）$A_{21} + 2A_{22} + 4A_{23} + 2A_{24}$

（3）$M_{13} + M_{23} + M_{33} + M_{43}$

其中，M_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.（i，$j=1$，2，3，4）

解（1）此式等于将原行列式的第一行元素换成系数 1，1，-1，2 以后的行列式.

$$\begin{aligned} & A_{11} + A_{12} - A_{13} + 2A_{14} \\ & = 1 \times A_{11} + 1 \times A_{12} + (-1) \times A_{13} + 2 \times A_{14} \end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-5&3\\2&-4&-3\\1&5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-2r_3}\begin{vmatrix}0&-5&3\\0&-14&-3\\1&5&0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-5&3\\-14&-3\end{vmatrix}=15+42=57$$

（2）$A_{21}+2A_{22}+4A_{23}+2A_{24}$ 是 D 中第四行元素与 D 中第二行元素的代数余子式的乘积之和， 由**定理** 1.2 的推论知，此和等于零.即

$$A_{21}+2A_{22}+4A_{23}+2A_{24}=0.$$

（3）$M_{13}+M_{23}+M_{33}+M_{43}=A_{13}-A_{23}+A_{33}-A_{43}=$

$$\begin{vmatrix}1&2&1&-1\\-1&-1&-1&1\\2&4&1&1\\1&2&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[(i=1,2,3)]{c_i+c_4}\begin{vmatrix}0&1&0&-1\\0&0&0&1\\3&5&2&1\\3&4&1&2\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}0&1&0\\3&5&2\\3&4&1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&2\\3&1\end{vmatrix}=3$$

2．已知 n 阶方阵 A 某一行的元素都是 4，且其行列式 $|A|=-12$，求 A 中所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$.

解 因为 $A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in}=0(i=2,\cdots,n)$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$

又因为 $4A_{11}+4A_{12}+\cdots+4A_{1n}=-12$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=-3$;

3．计算行列式

（1）$\begin{vmatrix}2&1&-3&-1\\3&1&0&7\\-1&2&4&-2\\1&0&-1&5\end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix}1&1&2&3&1\\3&-1&-1&2&2\\2&3&-1&-1&0\\1&2&3&0&1\\-1&2&1&1&0\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$　　　（4）$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$

解（1）-85；（2）102；（3）900；

（4）

.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_i}{\underset{(i=2,3,4)}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2a+b & a & b & a \\ 2a+b & 0 & a & b \\ 2a+b & a & 0 & a \\ 2a+b & b & a & 0 \end{vmatrix} = (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & -a & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b-a & a-b & -a \end{vmatrix} = (2a+b)\begin{vmatrix} -a & a-b & b-a \\ 0 & -b & 0 \\ b-a & a-b & -a \end{vmatrix} = (2a+b)(-b)\begin{vmatrix} -a & b-a \\ b-a & -a \end{vmatrix}$$

$$=(2a+b)(-b)[a^2-(b-a)^2]=b^2(b^2-4a^2)$$

4.计算 n 阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$　　　（4）$\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$

解　（1）可利用行列式定义，也可对行列式按第一行展开得，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}$$

（2）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix} \xlongequal[i=n-1,\cdots,1]{c_i + c_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\cdots+n & 2+\cdots+n & 3+\cdots+n & \cdots & n-1+n & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!.$$

（3）类似（1）可得 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n$

（4）

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ 1 & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + n - 1 = n + 1.$$

5．计算行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

（3）$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$

解（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=0$

（2）$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}(-1)^{(1+4)+(1+4)}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$

（3）按第 1 和第 $2n$ 行展开得 $D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$，所以 $D_{2n}=(a^2-b^2)^n$.

习题 1.4

1．用克莱姆法则解下列方程组

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ x_1+2^2x_2+3^2x_3+4^2x_4=5^2 \\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4=5^3 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+5x_4=10 \\ 2x_1+3x_2-x_3=-3 \\ -x_1-4x_3+2x_4=-4 \\ x_2+x_3+4x_4=3 \end{cases}$

解 (1)利用范德蒙行列式计算可得 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}=12$, $D_1=-12$， $D_2=48$，

$D_3=-72$， $D_4=48$，所以方程组的解为 $x_1=-1, x_2=4, x_3=-6, x_4=4$.

（2）计算得 $D=-148$， $D_1=-296$， $D_2=296$， $D_3=-148$， $D_4=-148$，从而方程

组的解为 $x_1=2, x_2=-2, x_3=1, x_4=1$.

2． 试讨论当 λ 取何值时线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-6)x_1+2x_2-2x_3=5\\ 2x_1+(\lambda-3)x_2-4x_3=-1\\ 2x_1-4x_2+(\lambda-3)x_3=2\end{cases}$$

有唯一解.

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-3 & -4\\ -2 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-3 & -4\\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-7)\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-3 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_2}(\lambda-7)\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2 & -4\\ 2 & \lambda-3 & -\lambda-1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(\lambda-7)[-\begin{vmatrix}\lambda-6 & 4\\ 2 & -\lambda-1\end{vmatrix}]$$

$$=(\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14)=(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

故当 $\lambda\neq 7$ 且 $\lambda\neq -2$ 时方程组有唯一解.

3．a 、b 取何值时线性方程组 $\begin{cases}ax_1+2x_2+3x_3=8\\ 2ax_1+2x_2+3x_3=10\\ x_1+2x_2+bx_3=5\end{cases}$ 有唯一解，并求出这个解.

解

$D=\begin{vmatrix}a & 2 & 3\\ 2a & 2 & 3\\ 1 & 2 & b\end{vmatrix}=-2a(b-3)$，所以当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 3$ 时方程组有唯一解.

$D_1=-4(b-3)$， $D_2=15a-6ab-6$， $D_3=2(a+2)$，方程组解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{a} \quad ， x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{15a-6ab-6}{2a（3-b）} \quad ， x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{a+2}{a（3-b）}.$$

4．已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=4\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 3x_1+2x_2+\mu x_3=5\end{cases}$$

有多个解,求 μ 的值.

解 由克莱姆法则知，此时须$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & \mu\end{vmatrix}=5\mu-20=0$，即$\mu=4$；

又因为当$\mu=4$方程组有解，从而此时方程组有多个解.

5．讨论什么条件下齐次线性方程组只有零解：

（1）$\begin{cases}x_1+ax_2+a^2x_3=0\\ x_1+bx_2+b^2x_3=0\\ x_1+cx_2+c^2x_3=0\end{cases}$ （2）$\begin{cases}(3-a)x_1+x_2+x_3=0\\ (2-a)x_2-x_3=0\\ 4x_1-2x_2+(1-a)x_3=0\end{cases}$

解 （1）该方程组是齐次线性方程组，其系数行列式是3阶范德蒙行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

当$D\neq 0$时即a，b，c互不相同时原方程组只有零解.

（2）由$D=\begin{vmatrix}3-a & 1 & 1\\ 0 & 2-a & -1\\ 4 & -2 & 1-a\end{vmatrix}=(a-3)(a-4)(a+1)\neq 0$ 得，$a\neq 3且a\neq 4且a\neq -1$.

6. 求方程$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & x\\ 1 & 4 & 9 & x^2\\ 1 & 8 & 27 & x^3\end{vmatrix}$=0 的全部根.

解 这是一个由1、2、3、x组成的范德蒙行列式，根据范德蒙行列式知

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & x\\ 1 & 4 & 9 & x^2\\ 1 & 8 & 27 & x^3\end{vmatrix}=2(x-1)(x-2)(x-3)\ .$$

所以其根为1、2、3.

7. 计算行列式

（1）$\begin{vmatrix}a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & a_3^2+a_3 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & a_3^{n-1}+a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

解 （1）

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

再利用范德蒙行列式的结果可得原行列式为 $\prod\limits_{0\le j<i\le n}(i-j)$.

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & a_3^2+a_3 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & a_3^{n-1}+a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_{i+1}-r_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j).$$

习题一

（A）

一.　填空题

1．当 i, j 分别为____________时，3i7261j84 为偶排列.

解 i=9，j=5 时排列的逆序数为 20，即为偶排列.

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & x^2 \\ 1 & 3 & x^3 \end{vmatrix}$. 则 $f(x+1)-f(x)=$ ____________________.

解

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix}1&0&x+1\\1&2&(x+1)^2\\1&3&(x+1)^3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&x\\1&2&x^2\\1&3&x^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&x+1\\1&2&x^2+2x+1\\1&3&x^3+3x^2+3x+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&x\\1&2&x^2\\1&3&x^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&2x+1\\1&3&3x^2+3x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&3&3x^2\end{vmatrix}=6x^2$$

3. 已知$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix}a_1+2b_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\a_2+2b_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\a_3+2b_3&b_3-c_2&c_3+3a_3\end{vmatrix}=$ ________

解

$$\begin{vmatrix}a_1+2b_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\a_2+2b_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\a_3+2b_3&b_3-c_2&c_3+3a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1-c_1&c_1+3a_1\\a_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\a_3&b_3-c_2&c_3+3a_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\b_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\b_3&b_3-c_2&c_3+3a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1-c_1&c_1\\a_2&b_2-c_2&c_2\\a_3&b_3-c_2&c_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b_1&-c_1&c_1+3a_1\\b_2&-c_2&c_2+3a_2\\b_3&-c_2&c_3+3a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_{32}&c_3\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\\b_3&c_2&a_3\end{vmatrix}=m-6m=-5m.$$

4. 设$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&a\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$, A_{ij}是D_n中元素a_{ij}的代数余子式，求D_n得全部代数余子式之和.

解 $\sum\limits_{j=1}^{n}A_{1j}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}$

$$\sum_{j=1}^{n}A_{2j}=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\1&1&1&\cdots&1\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&a&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-a&0&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&1\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&x\end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}$$

同理：$\sum\limits_{j=1}^{n}A_{3j}=(x-a)^{n-1}, i=3,\cdots,n$.故$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=n(x-a)^{n-1}.$

5. 已知$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$，则$\lambda=$______.

答案：应填“0 或 4”.

解 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4)=0$

因此$\lambda=0$或 4.

6．已知 4 阶行列式的值为 91,它的第一行元素为 2、3、t+1、-5. 第一行元素的余子式依次为-1、0、6、9.则 t=_________.

解 根据题意知

$2\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)+3\cdot(-1)^{1+2}\cdot 0+(t+1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot 6+(-5)\cdot(-1)^{1+4}\cdot 9=91$，化简得

$6(t+1)=48$，所以$t=7$.

7. $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$__________.

答案：应填$4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$.

解 方法 1： 直接利用 1.3 节例 2 立即可得.

方法 2： 将其按第 4 行展开，即$D_4=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}+$

$3\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}+(\lambda+1)\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$

$=4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$

将其按第 4 行展开，即$D_4=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}+$

$$3\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}+(\lambda+1)\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$$

8． $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=$__________

解

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 0 & 0 & x & -x\\ 0 & x & 0 & -x\\ x & 0 & 0 & -x\end{vmatrix}\overset{c_4+c_3+c_2+c_1}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x\\ 0 & 0 & x & 0\\ 0 & x & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x^4$$

9．设多项式

$$f（x）=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & x\\ 1 & 4 & 9 & 16 & x^2\\ 1 & 9 & 5 & -2 & x^3\\ 1 & 8 & 27 & 64 & x^4\end{vmatrix}$$

则 f（x）中 x^3 的系数为__________.

解 易知 x^3 的系数为其代数余子式

$$A_{45}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}$$

计算得 x^3 的系数为-12.

10．设

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a$$

则 $f(\lambda)$ 中 λ^n 的系数为__________，λ^{n-1} 的系数为__________,常数项为__________.

解　根据行列式定义知 λ^n 与 λ^{n-1} 只会出现在 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$ 项中，所以 λ^n 的系数为 1，λ^{n-1} 的系数为 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$，常数项为

$$f(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n a$$

11. 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \end{vmatrix}$ =________________.

解 构造行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & x \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & x^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & x^3 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

可以看出此行列式为范德蒙行列式，从而

$$D_1 = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2) \prod_{2 \le i < j \le 5} (j - i)$$

将前四项乘积展开可得 x^3 的系数为 $-14 \prod\limits_{2 \le i < j \le 5} (j-i)$.如果按第五列展开可得 x^3 的系数为 $(-1)^{4+5} D$.所以有 $D = 14 \prod\limits_{2 \le i < j \le 5} (j-i)$.

二.　　单项选择题

1．设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a$ ，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}=$ _________ .

（A） a　　（B） $-a$　　（C） $(-1)^n a$　　（D） $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a$

解　通过相邻对换，即依次将后面的列与前一列相交换，$\frac{n(n-1)}{2}$ 次后与原行列式相同，所以 $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$，选 D.

2. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a$，则 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=(\quad)$

(A)a　　(B) ka　　(C) $k^n a$　　(D) 0

解　每行都提出公因子 k 知所求行列式等于 $k^n a$，故选 C.

3．各列元素之和为零的行列式的值(　　).

(A) 一定为 0　　(B) 不一定为 0　　(C)一定不为 0　　(D) 一定大于 0

解　利用行列式各行元素之和为零的特点，将行列式各列都加到第一列去，则行列式第一列全为零，从而行列式等于零，故选 A.

4．$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$（　　）.其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$

(A) $(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$　　(B) $-(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$

(C) $(-1)^n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$　　(D) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$

解　这是一个爪型行列式，将它化简得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_1 - \frac{1}{a_i} r_{i+1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) a_1 a_2 \cdots a_n$$

故选 D.

5．方程 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$ 的根为 ________ .

（A） a_1+a_2 ，a_3+a_4　　　　（B） 0 ，$a_1+a_2+a_3+a_4$

（C） $a_1a_2a_3a_4$ ，0　　　　（D） 0 ，$-a_1-a_2-a_3-a_4$

解

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_3+c_2+c_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1+\cdots+a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_1+\cdots+a_4+x \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_1+\cdots+a_4+x \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_1+\cdots+a_4+x \end{vmatrix}$$

$$= (a_1+\cdots+a_4+x) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^2(a_1+\cdots+a_4+x)$$

所以方程的根为 0，$-a_1-a_2-a_3-a_4$，选 D.

6. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 ________ .

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解　因为 x）$=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 5x(x-1)$，所以根的个数为 2，选 B

7. 设某 3 阶行列式 D 的第二行元素分别为-1,2,3, 其对应的余子式分别为-3,-2,1，则此

行列式 D 的值为____________.

(A) 3 (B) 14 (C)- 10 = (D)

解

由余子式与代数余子式的关系及行列式的性质得到：

$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=3$

$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-2$

$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-1$

$|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=-1\times3+2\times(-2)+3\times(-1)=-10$

所以本题选 C

8 .设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}0&-1&x&0\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}$,则 $f(x)$ 的常数项为______________

(A) 4; (B) 1; (C)-1 ; (D)-4

解 因为

$$-A_{12}=M_{12}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4$$

且 $f(x)=(-1)A_{12}+xA_{13}$，所以常数项为 4. 选 A

9．设 D 为 n 阶行列式，下列命题中错误的是 _________ .

（A） 若 D 中至少有 n^2-n+1 个元素为 0 ，则 $D=0$ ；

（B） 若 D 中每列元素之和均为 0 ，则 $D=0$ ；

（C） 若 D 中位于某 k 行及某 l 列的交点处的元素都为 0 ，且 $k+l>n$ ，则 $D=0$ ；

（D） 若 D 的主对角线和次对角线上的元素都为 0 ，则 $D=0$.

解 选 D. 例如 $\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=1.$

10．已知方程组

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + tx_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 则 t=(　　).

(A) 4　　　(B) $\frac{1}{4}$　　　(C)2　　　(D) $\frac{1}{2}$

解 $\begin{vmatrix} t & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & t & 0 \end{vmatrix} = 4t - 1 = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{4}$，选 B.

（B）

1. 证明：若行列式的某行元素全为$k(k \neq 0)$，则这个行列式的全部代数余子式之和为该行列式值的$\frac{1}{k}$倍，即$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \frac{1}{k}|A|$.

证 不失一般性，设$|A| = \begin{vmatrix} k & k & \cdots & k \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \sum_{j=1}^{n} A_{1j}$

其中$\sum_{j=1}^{n} A_{2j} = 0, i = 2, 3, \cdots, n$. 故$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \frac{1}{k}|A|$.

2．计算行列式

（1）$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}, b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$　　（2）$\begin{vmatrix} x_1^2 + 1 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 + 1 & \cdots & x_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 + 1 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$

*(6) $\begin{vmatrix} \lambda & \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$

*(7) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

*(8) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$

*(9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

解

（1）$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_1 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_1 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+\frac{b_1}{b_i}c_i} \begin{vmatrix} b_1(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j}) & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j})$$

（2）设 $D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$，则

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & 0 \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{vmatrix} = D_{n-1}+x_n^2$$

所以 $D_n = 1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

（3）

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 - b_i c_i} \begin{vmatrix} a_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - \cdots - a_n b_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - \cdots - a_n b_n$$

（4）$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n-1}a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = (n+1)\,a^n$$

（5）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + c_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i - r_{i-1}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=3,\cdots,n]{r_i - r_2} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,\cdots,n-2]{c_{n-1} + c_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

*(6)　第二行以后的各行都减去最后一行，得

原式$=\begin{vmatrix} \lambda & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$

将第 $2,3,\cdots,(n-1)$列都加到第n列，再按第1列展开，得

$$
原式=\begin{vmatrix}
\lambda & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & (n-1)\alpha \\
0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\
b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda\begin{vmatrix}
\alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\
\beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta
\end{vmatrix}_{(n-1)阶}
$$

$$
+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}
\alpha & \alpha & \cdots & \alpha & (n-1)\alpha \\
\alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0
\end{vmatrix}_{(n-1)阶}
$$

$$
=\lambda(\alpha-\beta^{n-2})[\alpha+(n-2)\beta]+(-1)^{n+1}b(-1)^{1+(n-1)}(n-1)\alpha(\alpha-\beta)^{n-2}
$$
$$
=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)\alpha b](n\geq 2)
$$

*(7)　将原式记为D_n，将第n行写成两项之和，再分成两个行列式，得

$$
D_n=\begin{vmatrix}
x & a & a & \cdots & a & a \\
-a & x & a & \cdots & a & a \\
-a & -a & x & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
-a & -a & -a & \cdots & -a & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-a
\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}
x & a & a & \cdots & a & a \\
-a & x & a & \cdots & a & a \\
-a & -a & x & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
-a & -a & -a & \cdots & -a & x \\
-a & -a & -a & -a & -a & a
\end{vmatrix}
$$

$$
=(x-a)D_{n-1}+\begin{vmatrix}
x+a & 2a & 2a & \cdots & 2a & a \\
0 & x+a & 2a & \cdots & 2a & a \\
0 & 0 & x+a & \cdots & 2a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x+a & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a
\end{vmatrix}
$$
$$
=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1}
$$

同理，将第n行写成另外两项之和，又可得

$$
D_n=\begin{vmatrix}
x & a & a & \cdots & a & a \\
-a & x & a & \cdots & a & a \\
-a & -a & x & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
-a & -a & -a & \cdots & -a & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x+a
\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}
x & a & a & \cdots & a & a \\
-a & x & a & \cdots & a & a \\
-a & -a & x & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
-a & -a & -a & \cdots & -a & x \\
-a & -a & -a & -a & -a & -a
\end{vmatrix}
$$

$$
=(x+a)D_{n-1}+\begin{vmatrix}
x+a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-2a & x+a & 0 & \cdots & 0 \\
-2a & -2a & x-a & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
-2a & -2a & -2a & \cdots & x-a \\
-a & -a & -a & \cdots & -a
\end{vmatrix}
$$
$$
=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}
$$

联立两式，解方程组得

$$D_n=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$$

*(8) 原式记为D_n

当$y\neq z$时，仿上题方法，将D_n分别按第一列与第一行用两种不同方法拆成两个行列式之和，得

$$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$$

$$D_n=(x-y)D_{n-1}+y(-z)^{n-1}$$

解得

$$D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$$

当$y=z$时，容易计算

$$D_n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

*(9) 在原行列式的基础上，作如下行列式，使之配成范德蒙行列式：

$$f(y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n\end{vmatrix}=\sum_{i=j}^{n}(y-x_i)\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

将行列式$f(y)$按最后一列展开，原行列式记为D，则y^{n-1}的系数为

$$(-1)^{n+(n+1)}D=(-1)^{2n+1}D=-D$$

又从$f(y)$的最终结果中知，y^{n-1}的系数为

$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\nolimits_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j).$$

故

$$D=\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

*3. 试由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$证明奇偶排列各半.

证 由题设，所给行列式的展开式中的每一项的绝对值等于 1. 而行列式的值为 0，这说明带正号与带负号的项的项数相等.根据行列式的定义，其展开式中的每一项的符号是由该乘积中各因子下标排列的逆序数所决定的，即当该乘积中各因子的第一个下标排成自然顺序，且第二个下标所成排列为偶排列时，该项前面所带的符号为正，否则为负号，所以，由带正号的项与带负号的项数相等即说明奇偶排列各半.

*4. 试求

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有n级排列求和.

解 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} D$$

又由于在所有n级排列中，奇偶排列各半，从而当$j_1, j_2, \cdots, j_n$取遍所有n级排列时，带正号与带负号的D的个数相等，故原式$= 0$.

5. 判断下述线性方程组是否有唯一解：

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b_1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \cdots + a_n^n x_n = b_n \end{cases}$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$是互不相同的数.

证 将第 i 列提取公因子 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，再利用范德蒙行列式的结果有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1a_2a_3\cdots a_n \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j) \neq 0$$

所以由 Cramer 法则知方程组有唯一解.

6. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 + \cdots + a_1^{n-1}x_n = b \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 + \cdots + a_2^{n-1}x_n = b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2x_3 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b \end{cases}$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$是互不相同的数.

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j) \neq 0$$，方程组有唯一解.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ b & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ b & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = b\prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j) \neq 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & b & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & b & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & b & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$，同理有 $D_3 = \cdots = D_n = 0$，由 Cramer 法则得

$x_1 = b, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

*7. 已知 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_nx^n$ 有 n+1 个互不相同的零点，证明 $f(x) = 0$.

证 设 $f(x)$ 经过的 $n+1$ 个的零点为 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$，并且对任意的 $i \neq j$ 有 $x_i \neq x_j$. 则

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = 0 \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_n x_2^n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_n x_{n+1}^n = 0 \end{cases}$$，因为 $D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j) \ne 0$．由 Cramer 法则知方程组关于 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 仅有零解，即 $f(x) = 0$．