《随机过程》

骆川义
18980513344
lcy@swufe.edu.cn

要求

1.先行课：完成《概率论》学习

2.守时；做笔记

3.课后学习

（1）作业保质保量；

（2）保证足够学习时间

课外：课堂>=3:1

成绩评定

1.期末考试：60%

2.平时成绩：40%

（课后作业＋两次月考）

教材

1.(主 用)《Introduction to probability models》

（11th）, Sheldon M. Ross

特点:

（1）广泛采用

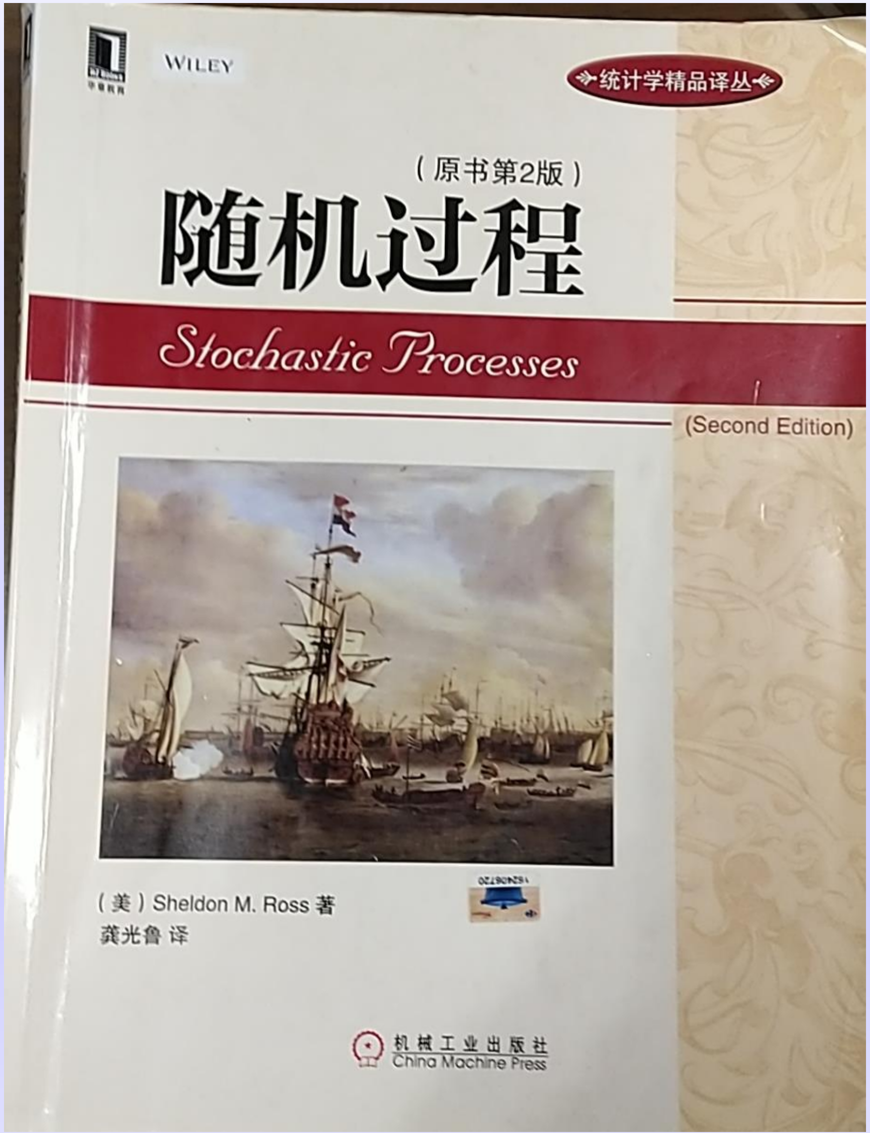
由University of Southern California的国际知名概率与统计学家Sheldon M. Ross编写，是国外较为经典的随机过程入门教材，被University of California Berkeley，Columbia University，Purdue University，University of Michigan，Oregon State University，University of Washington等众多国外知名大学所采用。

（2）前三章为概率论内容，可作为概率论复习回顾，是一部概率论与随机过程衔接很好的教材。

（3）与其他随机过程教材相比，此教材非常强调实践性，配备了极其丰富的例子和习题，涵盖了众多学科的各种应用，如：精算学、运筹学、管理学、工程学、计算机科学和社会科学。

（4）注重对随机过程的直观认识，可读性较强。

2. (参考)《Stochastic Processes》（2th）, Sheldon M. Ross

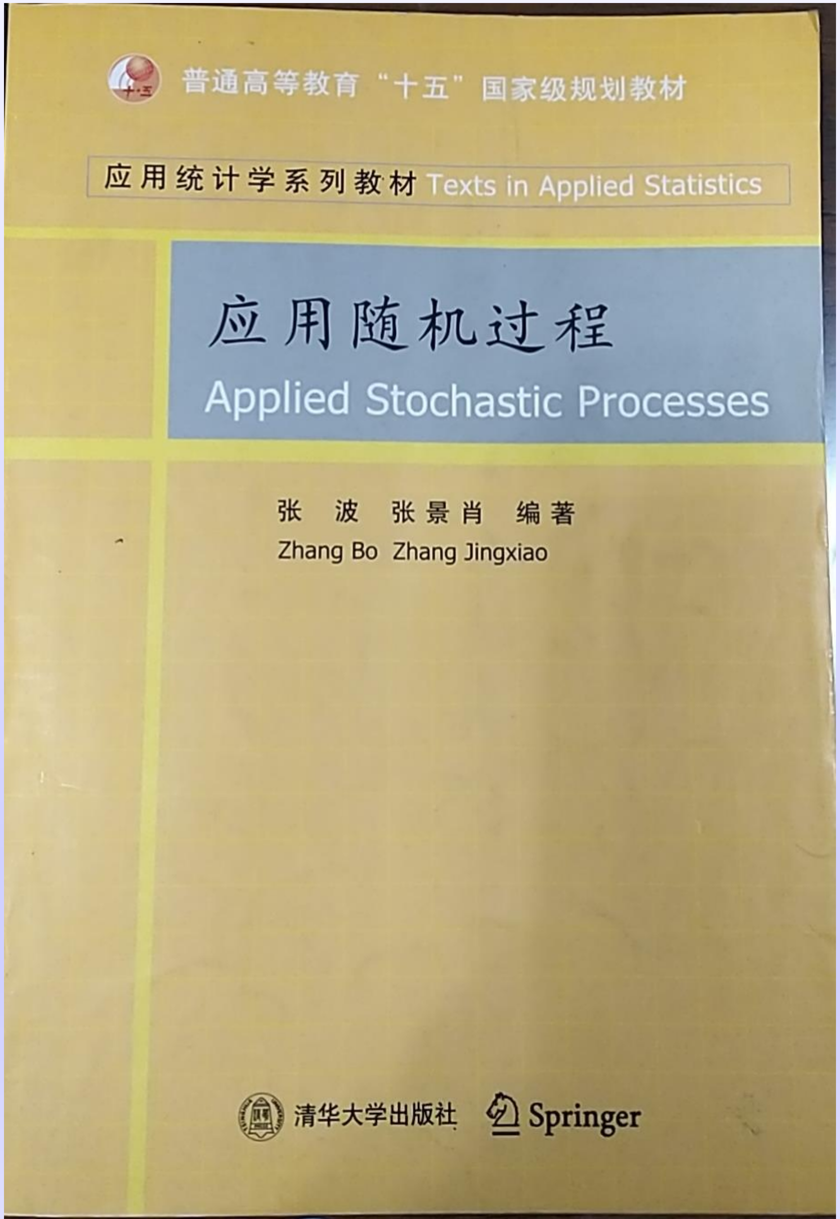


特点:

（1）是Sheldon M. Ross教授的另一本经典之作，是一本基于非测度论的随机过程。该书已经被美国的许多著名大学选为包括统计专业在内的各领域的研究生(和本科生)的教科书，是一本公认的优秀的教材。

（2）与推荐教材相比，此书知识结构更加完善，更加注重基础理论的构建与推导，更加注重理论概念和数学推导。

3.(参考)《应用随机过程》，张波，张景肖



特点:

偏经管类应用的随机过程教材，优点是知识点较为完善（纳入了部分随机分析的内容），搜集了部分管理、金融方面应用问题，缺点是体系不够严谨（缺少与测度论相关的概念和结论的介绍）、对每一类随机过程的介绍较为粗糙，理论推导上缺乏思路分析。

内容

1.概率论复习;

2.Poisson 过程;

3.更新过程;

4.离散时间Markov Chains (DTMC);

5.连续时间Markov Chains (CTMC);

6.Martingales;

7.Brownian Motion.

知识准备：

概率论复习

- 概率论知识点回顾

  1、重要概念

  2、特殊分布

  3、重要结论

- 概率论中的思想方法

  1、公理化思想

  2、对立思想

  3、分解思想

  4、频率思想

  5、Bayesian思想

  6、函数思想

  7、方程思想

  8、极限（逼近）思想

  9、矩母函数法（MGF）或特征函数法

概率论知识点回顾

一、重要概念

1、概率的公理化定义

Def. （1）Ω 为某随机试验E下的样本空间；

（2）F为 Ω 上的一个事件域(σ-代数)；

（3）建立集函数 P：F $\rightarrow$ R，s.t.

- （非负性）P(A) $\geq$ 0;
- （正则性）P(Ω)=1;
- （可加性）$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$，$A_1$，$A_2,\cdots$，$A_n$ 互斥

则称P(A)为概率空间(Ω, F, P）上事件A的概率。

2、随机变量、分布函数

Def. (Ω, F, P) 为一个概率空间，建立映射

X：$\Omega \rightarrow R$，若$X^{-1}(-\infty, x] \in F$，$\forall x \in R$，则称X为一个随机变量。

Def. 称$F(x) = P(X \leq x)$ 为随机变量X的累积概率分布函数(CDF)

问题：1. 为何要提出这一定义？（动机）

2. 为何要如此定义？（形成过程）

动机、过程: 概率是什么（概念）、有什么（性质）

建立概率测度空间 (Ω, F, P)

怎么**计算**一般事件A的概率？

$$(\Omega, F, P) \overset{r.v.X}{\Rightarrow} (R, B, m)$$

“数化”概率空间 → 欧氏距离空间，

进行Lebesgue测度（最熟悉）

$\boldsymbol{P(A) = P(X \in D) = m(D)}$ → 由CDF $\boldsymbol{F(x)}$实现

二、特殊分布

(1) 均匀分布

A. 产生正态分布的随机数；

原理：CLT

步骤：

* 在$(0,1)$上产生n个均匀分布的随机数

$$y_1, y_2, \cdots, y_n \sim UNIF(0,1)$$

* 令$w_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - 0.5n}{\sqrt{n/12}}$，令$z_1 = \sigma \cdot w_1 + u$

* 重复上面两个步骤m次，即可得到m个服从$N(u,\sigma^2)$的随机数$z_1, z_2, \cdots, z_n$

B. 产生服从某一分布的随机数；

原理：

TH. 连续型随机变量X的CDF $F(x)$严格单调， $y=F(x)$的反函数有一阶连续导数

$$\Longrightarrow Y=F(X) \sim UNIF(0,1)$$ （概率教材P112, TH. 2. 6. 5）

步骤：

* 在$(0,1)$上产生n个均匀分布的随机数

$$y_1, y_2, \cdots, y_n \sim UNIF(0,1)$$

* 将$y_1, y_2, \cdots, y_n$分别代入$x=F^{-1}(y)$，即可得到n个以$F(x)$为CDF的随机数

C. 近似计算定积分（随机模拟的方法）

$$\int_a^b g(x)dx\text{，}\ g(x) \geq 0$$

方法1：

* 原理：将积分视为求期望（辛钦 LLN）

* 步骤：

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)\int_a^b g(x)\frac{1}{b-a}dx$$

$$= (b-a)E[g(Y)],\ \ Y \sim UNIF(a,b)$$

$$\approx (b-a)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(y_i)$$ （辛钦 LLN）

练习：利用概率方法计算$\int_{-2}^{100} e^{-x^2}dx$

方法1：辛钦 LLN

编辑器 - /Users/lys/Desktop/untitled3.m

untitled2.m　模拟程序.m4.m　untitled3.m

```
clear;

n = 10^7; %试验次数
u = 102.*rand(1,n)-2; % 产生n个服从[-2,100]区间均匀分布的随机数
g = exp(-u.^2);
L = vpa(102*mean(g),4); % 均值保留4位数
L % 模拟结果



syms x
y = vpa(int(exp(-x^2),-2,100),4);
y %真实值
```

命令行窗口

```
L =

1.772


y =

1.768
```

方法2：（课后自学）

* 原理：将积分视为求概率（Bernoulli LLN）

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[\int_0^{g(x)} dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_m^{g(x)} dy\right] dx + m(b-a)$$

$$= S_D \cdot \int_a^b \left[\int_m^{g(x)} \frac{1}{S_D} dy\right] dx + m(b-a)$$

$$= S_D \cdot \iint_{G:y\leq g(x)} \frac{1}{S_D} dxdy + m(b-a)$$

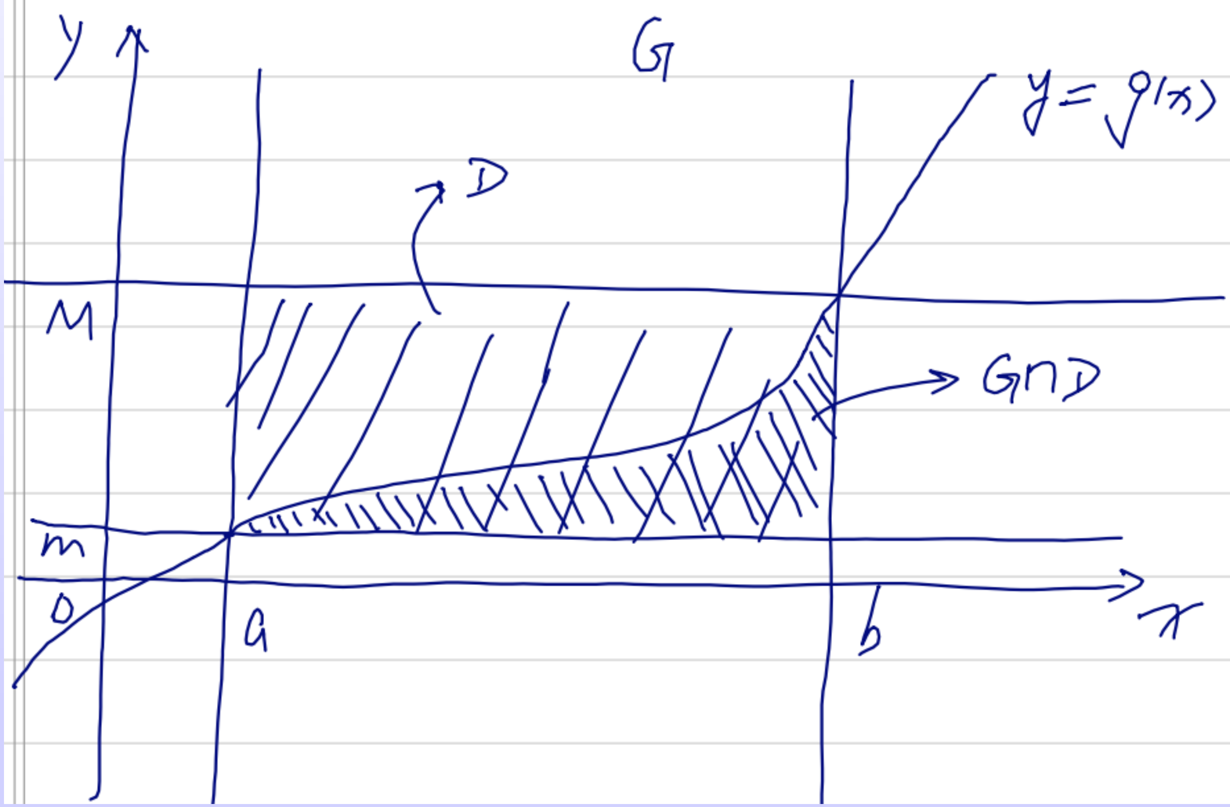
$$= S_D \cdot P[(X,Y) \in G] + m(b-a)$$

$$\approx S_D \cdot f_n(A) + m(b-a) = S_D \cdot \frac{n_A}{n} + m(b-a)$$

其中，$(X,Y) \sim UNIF(D)$，$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ m \leq y \leq M\}$，

$G = \{(x,y) | y \leq g(x)\}$ m，M分别是$y = g(x)$在$[a,b]$上的最小、大值

$$P((X,Y)\in G) = \iint f(x,y)\,dx\,dy$$



练习：利用概率方法计算$\int_{-2}^{100} e^{-x^2}dx$

方法2：Bernoulli LLN

编辑器 - /Users/lys/Documents/MATLAB/untitled1.m

untitled1.m

```matlab
nA=0;
n=1000000;%做n次随机试验
for i=1:n
    x=102*rand()-2;%x的上下界
    y=rand();%y~unif(0,1)
    if y<=exp(-x^2)
        nA=nA+1;%统计落入y=exp(-x^2)下方的随机点，即事件发生的次数
    end
end
int=(nA/n)*102
```

命令行窗口

```
>> untitled1

int =

    1.7636
```

D. 产生beta分布：对假设为UINF(0, 1)分布的修正结果

目标：上抛一枚质地**非**均匀的硬币，估计出现正面的概率大小 X

思想：假设$X \sim UNIF(0,1)$(先验分布) $\rightarrow$ 获取试验信息(m, n)

$\downarrow Bayes$

修正假设$f(x|(m,n))$

$\downarrow$

beta分布(后验分布)

（2）指数分布

A. **性质：无记忆性的刻画（定义及其变式）；**

$$X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

$$\Leftrightarrow \bar{F}(s + t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$$

$$\Leftrightarrow (X - s)|(X > s) = X$$（**即在非负条件下$X - s$与X同分布**）

B. **重要常识（ $X_i \sim Exp(\lambda_i)$且互独）：**

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}; \qquad \min\{X_1, X_2\} \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$P(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

C. 指数分布与Gamma分布的关系

$\{X_i, i \geq 1\}$为iid 随机变量，且$X_i \sim Exp(\lambda)$

$\Longrightarrow\ T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim\ Gamma(n, \lambda)$, 即 $f_{T_n}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}$

课后思考：

A. 假设 $X_i \sim Exp(\lambda),\ i = 1,2$，且互独, 则

$$\max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\} = X_1$$

B. 假设 $X \sim Exp(\lambda),\ Y \sim f(x)$（任意非负连续型分布）

且互独

$$\Longrightarrow\ (X - Y)|(X > Y) = X$$（即在非负条件下$X - Y$与X同分布）

（4） Poisson 分布

A. Poisson 分布的随机分解

N表示进入某商场的顾客数，服从参数λ的Poisson分布，每个进入商场的顾客以概率p被独立划分为第1类，以概率$q=1-p$被独立划分为第2类。N_1 ,N_2分别表示第1，2类顾客的个数

$\Longrightarrow N_1 \sim P(\lambda p)$，$N_2 \sim P(\lambda q)$，且相互独立

B. Poisson Paradigm（Poisson 近似，补充）

一段时间（空间）内小概率事件的发生次数（或大量Bernoulli试验中，小概率事件发生的次数）近似服从 Poisson分布，即

$$\left.\begin{array}{l} X_{\boldsymbol{i}} \sim Bernoulli(p_{\boldsymbol{i}})\text{且互独} \\ \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{\boldsymbol{i}} \\ p_{\boldsymbol{i}} \to 0,\ n \to \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_{\boldsymbol{i}} \xrightarrow{\boldsymbol{d}} P(\lambda)$$

注：

（1）$\{X_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$可以弱相依

（2）证法：特征函数法

四、重要结论

1、全期望公式（分解思想，增补信息简化E[X]）

（1）简单情况

$$E[X]=E[E(X|Y)]=\begin{cases}\sum_{j=1}^{\infty}E[X|Y=b_j]P(Y=b_j)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}E[X|Y=y]f_Y(y)dy\end{cases}$$

（2）全期望公式推广与特殊形式(补充)

$$E[X]=E[E(X\mid Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)]$$

$$E[X\mid Y]=E\left\{\left[E\left(X\mid Y,Z\right)\right]\mid Y\right\}$$

$$P(B)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}P(B\mid Y=b_j)P(Y=b_j)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P(B\mid Y=y)f_Y(y)dy\end{cases}$$

$$P(B)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid Y=b_j)P(Y=b_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(B \mid Y=y)f_Y(y)dy\end{cases}$$

$$P(B|A)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A,Y=b_i)P(Y=b_i|A) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(B|A,Y=y)f(y|A)dy\end{cases}$$

2、四种收敛及其关系

(1) 依概率收敛

a. 定义： $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$

b. 性质：具有四则运算性质;

c. Mark: $X_n \xrightarrow{P} X$

(2) r-阶收敛（随机微积分基础，了解）

a. 定义: $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r) = 0$

b. 性质：只具有 +， − 运算性质;

c. Mark: $X_n \xrightarrow{r} X$

(3) 以概率1收敛（了解）

定义：$P\left(\left\{\omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$

Mark: $X_n \xrightarrow{w.p.1} X$, or $X_n \xrightarrow{a.e.} X$, or $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

性质:

a. 具有四则运算性质;

b. (Dominated convergence TH)

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X \quad a.e. \\ |X_n| \le Y \quad a.e. \\ E[Y] < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E[X] = E\left[\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} E[X_n]$$

c. (Bounded convergence TH)

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X \quad a.e. \\ |X_n| \le C \quad a.e. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E[X] = E\left[\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} E[X_n]$$

d. (Monotone convergence TH)

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X \quad a.e. \\ \{X_n, n\geq 1\}\uparrow \\ \exists n,\ s.t.\ E[X_n] > -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \quad E[X] = E\left[\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} E[X_n]$$

e. (Integration term by term TH)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n = X \quad a.e. \\ E[X] = E\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} E[X_n]\end{array}\right.$$

（4）依分布（函数）收敛

定义: $r.v.s\ \{X_n, n \geq 0\}$依分布收敛于X

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \forall x \text{为} F(x) \text{的连续点}$$

其中， $F_n(x)$和$F(x)$分别为X_n和X的CDF

Mark: $X_n \xrightarrow{d} X$

性质:

a. 不具有四则运算性质

$$
\text{b.}\quad \left.\begin{array}{l} F_n(x) \xrightarrow{W} F(x) \\ F(x) \lfloor\, C(R) \end{array}\right\} \Rightarrow F_n(x) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\text{—}}} F(x)
$$

3、（强）大数定律(LLN)

解决的问题：样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \rightarrow \ E[X_i]$

4、中心极限定理（CLT）

解决的问题:

大量、独立、微小随机因素之和 $\sum_{i=1}^{n} X_i \ \rightarrow \ N(u, \sigma^2)$

5、直接黎曼可积(补充)

（1）定义

$h(x)$在$(0,+\infty)$上是直接黎曼可积的(Directly Riemann Integrable)

$\Leftrightarrow \underline{\sigma}(\eta)$(下和)与$\bar{\sigma}(\eta)$(上和)绝对收敛到同一有限数

其中，$\underline{\sigma}(\eta)=\eta\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\underline{c}_k$，$\bar{\sigma}(\eta)=\eta\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{c}_k$

$$\underline{c}_k=\inf_{(k-1)\eta\le x<k\eta}h(x)$$

$$\bar{c}_k=\sup_{(k-1)\eta\le x<k\eta}h(x)$$

（2）Mark: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ (同于广义黎曼积分)

（3）关系

若直接黎曼积分与广义黎曼积分存在，则二者相等

（4）关于直接黎曼可积的判断

A. $f(x)$非负、单调不增、可积（广义黎曼可积）

$\Longrightarrow f(x)$直接黎曼可积

B. $f(x)$ 单调、绝对可积

$\Longrightarrow f(x)$直接黎曼可积

C. $f(x)$ 非负、有界、连续，则

$f(x)$直接黎曼可积 $\Longleftrightarrow$ $\exists\eta$，$\bar{\sigma}(\eta) < +\infty$

6、密度函数的求解

(1) $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$;

(2) $f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$;

(3) $f(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{P(x\le X\le x+\Delta x;\ y\le Y\le y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}$

7、卷积

(1) $F(t) ** G(t) = \int_0^t F(t-x)G(x)dx$ 称为$F(x)$与$G(t)$的卷积；

(2) $F(t) * G(t) = P\{X_1 + X_2 \le t\} = \int_0^t F(t-x)dG(x)$ 称为$F(x)$与$G(t)$ 的Stietjes卷积。其中， X_1，X_2互独。

$F^{(n)}(t) = P\{X_1 + \cdots + X_n \le t\} = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF(x)$称为$F(x)$的$n$重Stietjes卷积。其中， X_1， …， X_2 为iid r.v.

8、次序统计量的密度

(1) 随机变量$\{X_i, 1 \le i \le n\}$独立同分布，其密度函数$p(x)$，记

$\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}\right)$表示$\{X_i, 1 \le i \le n\}$的次序统计量，其联合

密度为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\Longrightarrow \ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n!\, p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

(2) 在(1)中若$X_i \sim UNIF(0, t)$，其他条件不变

$$\Longrightarrow \ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{n!}{t^n}$$

概率论中的思想方法

1、对立思想

例题 袋中装有n－1个红球1个白球，每次任取一球并换入一个红球，问：第k（<=n）次取到红球的概率。

2、分解思想

例题 4个人参加聚会，每人带有一顶帽子，聚会时所有帽子放于一处，离开时每人随机取走一顶帽子，问：至少有两个人恰好取到自己帽子的概率。

练习 从1-9九个数字中有放回地取n个数字，每次取一个，求取出的最大数字恰好是k的概率

3、频率思想（了解）

(1) 概率的统计学定义;

(2) 概率与频率的关系（Bernoulli SLLN）;

(3) 极大似然估计法（MLE）

问题. 如何估计一枚质地非均匀的硬币在上抛试验中出现正面的概率大小。

分析方法一：利用频率与概率的关系

独立上抛硬币m+n次，发现正面出现了m次，反面出现了n次，

记$A=$“下一次出现正面”，则

$P(A)\approx f_{m+n}(A)=\frac{m}{m+n}$ （要求m+n足够大）

如果m+n不够大尼？

分析方法二：利用极大似然估计（频率派观点）

独立上抛硬币m+n次，发现正面出现了m次，反面出现了n次，

A. 假设

* 正面向上的概率θ是固定不变的未知参数
* 试验结果是随机事件，试验中发生的事件是最有可能发生的事件，即发生概率最大的事件会在试验中出现

B. 方法：及大似然估计法（MLE）

记$E =$“独立上抛硬币m+n次，发现正面出现了m次，反面出现了n次”，则

$$\mathrm{P}(E) = C_{m+n}^{m}\theta^{m}(1-\theta)^{n} \implies \frac{d\mathrm{P}(E)}{d\theta} = 0 \implies \theta = \frac{m}{m+n}$$

4、Bayesian思想（了解）

(1) Bayesian公式

(2) Bayesian哲学思想

* 假设事件发生的概率不是固定不变的，利用获取的试验信息去修正之前的初始判断（先验概率），得到更加准确的判断（后验概率），而且这种修正可以持续下去。

* 事物不是一成不变的，会受到后天信息的影响，

$\longrightarrow$ 用发展的眼光看待事物

（3）Bayesian修正法（估计参数的分布）

问题. 如何估计一枚质地非均匀的硬币在上抛试验中出现正面的概率大小。

分析方法三： Bayesian修正法

独立上抛一枚质地非均匀的硬币m+n次，发现正面出现了m次，反面出现了n次，记下一次出现正面的概率为θ

先验假设：$\theta \sim UNIF(0,1)$

后验分布：$\mathrm{P}[x \le \theta \le x+dx|(m,n)] = \frac{\mathrm{P}[x\le\theta\le x+dx,\,(m,n)]}{\mathrm{P}[(m,n)]}$

$$= \frac{\mathrm{P}[x\le\theta\le x+dx]P[(m,n)|x\le\theta\le x+dx]}{\int_0^1 P[(m,n)|\theta=x]dx}$$

$$= \frac{dx\cdot C_{m+n}^{m}x^{m}(1-x)^{n}}{\int_0^1 C_{m+n}^{m}x^{m}(1-x)^{n}dx}$$

$$\Longrightarrow \quad f_\theta[x|(m,n)] = \frac{\mathrm{P}\left[x \le \theta \le x+dx\middle|(m,n)\right]}{dx}$$

$$= \frac{x^{m}(1-x)^{n}}{\int_0^1 x^{m}(1-x)^{n}dx}$$ （Beta(m+1, n+1)分布的密度）

故，下一次抛出正面的概率为：

$$\tilde{\theta} = \mathrm{E}[\theta|(m,n)] = \frac{m+1}{m+n+2}$$ （Beta(m+1, n+1)分布的期望）

5、函数思想（课后思考）

例题 一只小虫在平面上随机游走，从A点出发，每次随机向一个方向行走一个单位长度的距离。假设第n次行走后到达B点。求：$E[|AB|^2]$

6、极限（逼近）思想

想法：构造简单（特殊）分布去逼近未知分布

实现：切割，近似，逼近（极限）

问题1. 二项分布$BIN(n,p_n)$与Poisson分布$P(\lambda)$的关系？

$$\left.\begin{array}{l}\text{离散时间下, 有限次独立的Bernoulli试验} \\ \text{关注}: n\text{次试验中事件发生的总次数}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad BIN(n, p_n)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{连续时间下, 无限次}(\Delta t \to 0)\text{独立的Bernoulli试验} \\ \text{关注}: [0, t]\text{内事件发生的总次数}\end{array}\right\} \Longrightarrow \ P(\lambda t)$$

证明：

想 法：

$P(\lambda)$ (目标)

离散化 $\Downarrow \quad \Uparrow$ 逼 近

$X_n \sim BIN(n, p_n)$(已知)

实现想法：

A. 切割：将$[0, t]$ n等分，关注每个小区间内事件发生的次数

B. 近似：将$[0, t]$内事件发生总次数近似为二项分布

C. 逼近：利用二项分布逼近Poisson分布

问题2. 几何分布$Geo(p)$与指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$的关系？

$$\left.\begin{array}{r}\text{离散时间下，独立的Bernoulli试验}\\ \text{关注：事件首次发生时的试验总次数}\end{array}\right\} \Longrightarrow Geo(p)$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{r}\text{连续时间下，频繁}(\Delta t \to 0)\text{独立的Bernoulli试验}\\ \text{关注：事件首次发生时的时间长度}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Exp}(\lambda)$$

7、方程思想

例题（赌徒破产模型）A，B两个赌徒赌博，每局赌博输赢一个单位财富，且相互独立，A对B的单局胜率为p，直到一方输光为止，假设A，B的初始赌资分别是 m, n

求：A最终输光的概率。

课后思考题:

独立上抛硬币试验中，N="直到出现连续k次正面向上时的试验次数"，求：E(N)

8、特征函数

（1）定义、本质

（2）性质

（3）应用:

a. 求矩;

b. 证明某随机变量服从某一分布;

c. 证明随机变量序列依分布收敛于某随机变量。

课后练习:

若随机变量X服从参数u的Poisson分布,

证明: $\dfrac{X\text{-}u}{\sqrt{u}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ （概率教材P201，例4.2.6）

随机过程基本概念

1、随机过程

（1）背景

概率论：研究随机现象的数量规律；

随机过程：研究随机现象随时间演变的概率规律。

（2）例子

e.g.1 (0,t]中某网站的点击次数$N(t)=N(\omega,t)$

e.g.2 t时刻某服务窗口前排队的顾客数量$N(\omega,t)$

e.g.3 从i元本金开始，第n次赌博后赌徒拥有的赌资$N_i(\omega,n)$

（3）Def. 设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）为一个概率度量空间，T为一个参数集。若$\forall t \in T, \exists$（$\Omega, \mathcal{F}, P$）上的$r.v.\, X(t)$，则称$r.v.$簇$\{X(t), t \in T\}$为一个随机过程（Stochastic Process, 记为SP）。称$X(t)$的所有取值的集合S为状态空间。

（4）关系（随机过程、随机变量）

$$X(\omega, t) = \begin{cases} * \ \forall t_0 \in T，\ X(\omega) = X(\omega, t_0)\text{为一个}r.v.(\text{关于}\omega\text{的函数}) \\ * \ \forall \omega_0 \in \Omega，\ x(t) = X(\omega_0, t)\text{为一个关于}t\text{的函数称为} \\ \quad \text{样本函数或样本路径} \end{cases}$$

2、随机过程中的有限维分布函数

（1）Def. 在SP $\{X(t), t \in T\}$中，$\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n$维

$r.v.(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$的**联合分布函数（CDF）**为:

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_n) \le x_n\}$$

（2）SP中有限维CDF的性质

A. 对称性：$(j_1, \dots, j_n)$为$(1, \dots, n)$的任一排列，则

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_n\left(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n}\right)$$

B. 相容性：$\forall m < n$, 有

$$F_n(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1,\ t_2, \dots, t_n)$$
$$= F_m(x_1, \dots, x_m; t_1,\ t_2, \dots, t_m)$$

C. (Kolmogorov存在TH 了解)

若某分布函数簇$\{F_n(x_1, \dots, x_n; t_1,\ t_2, \dots, t_n), n \geq 1\}$

满足性质A, B

$\Longrightarrow$ 必存在以此为分布函数簇的SP $\{X(t), t \in T\}$。

3、随机过程的分类

（1）按照参数集T分类

$$SP\ \{X(t), t \in T\} \rightarrow \begin{cases} \text{离散时间}SP\text{或时间序列，} & T\text{为可数集，} \\ \text{连续时间}SP\text{，} & T\text{为一个区间} \end{cases}$$

（2）按照$X(t)$的取值情况分类

$$SP\ \{X(t), t \in T\} \rightarrow \begin{cases} \text{离散型}SP\text{，} & \text{状态空间}S\text{为可数集，} \\ \text{连续型}SP\text{，} & \text{状态空间}S\text{为一个区间} \\ \text{其它，} & \end{cases}$$

$$SP\ \{X(t), t \in T\} \quad \rightarrow \begin{cases} \text{离散时间，离散状态}SP \\ \text{连续时间，离散状态}SP \\ \text{连续时间，连续状态}SP \\ \text{离散时间，连续状态}SP \end{cases}$$

（2）按照$X(t)$的概率特征分类

A. 二阶矩过程$\{X(t), t \in T\}$： $\forall t \in T, E\left[X^2(t)\right] < +\infty$
（随机分析的基础）

B. 独立过程$\{X(t), t \in T\}$：
$\forall t_1, \dots, t_n \in T$， $X(t_1), \dots, X(t_n)$相互独立。

e.g. 在n次独立上抛硬币试验中，设$\boldsymbol{X_n}$为第n次出现的结果（正面为1，反面为0），称$\boldsymbol{SP\{X_n, n \geq 1\}}$为**一个Bernoulli过程，则Bernoulli过程为独立过程。**

e. g. 上个例子中，令$\boldsymbol{Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, SP\{Y_n, n \geq 1\}}$**为独立过程吗?**

C. 独立增量过程$\boldsymbol{\{X(t), t \in T\}}$**：** $\boldsymbol{\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n}$,
$\boldsymbol{X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})}$相互独立。

D. 平稳过程（or 宽平稳过程）$\{X(t), t \in T\}$：

* $\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程
* 均值函数$m_X(t) = E[X(t)] = m_X$（常数）
* 自协方差函数

$$C_X(s,t) = E[X(s)X(t)] - E[X(s)]E[X(t)]$$
$$= f(t-s),\ \forall s < t$$

即，一阶统计特征与二阶统计特征不随时间的推移而改变

E. 严平稳过程$\{X(t), t \in T\}$：

* $\mathrm{F}(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;\ x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{F}(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)$,

$\forall t_1,\cdots,t_n \in \mathrm{T}$，$\forall x_1,\cdots,x_n \in R$，$\forall \tau > 0$

即，任意有限维CDF不随时间的推移而改变

即，$(X_1(t_1+\tau),\cdots,X_n(t_n+\tau)) = (X_1(t_1),\cdots,X_n(t_n))$

注：严平稳过程一定为宽平稳过程？

F. 平稳增量过程$\{X(t), t \in T\}$：

$$X(t_2+h)-X(t_2)=X(t_1+h)-X(t_1)\quad (\text{同分布})$$

$\forall t_1, t_2 \in T$，$\forall h > 0$,

或者

$X(t+h)-X(t)$ 的概率性质只与h有关而与t无关。

G. Poisson过程，更新过程，离散时间Markov过程，连续时间Markov过程，鞅过程，Brown运动过程,随机积分过程…

例题：独立上抛一枚质地均匀的硬币，SP $\{X(t), t>0\}$，其中，

$$X(t)=X(t,\omega)=\begin{cases}\cos\pi t, & \omega=\omega_1\text{（正面）}\\ 2t, & \omega=\omega_2\text{（反面）}\end{cases}$$

求:

(1) SP $\{X(t), t>0\}$的一维CDF $F\left(x,\frac{1}{2}\right)$;

(2) SP $\{X(t), t>0\}$的二维CDF $F_2(x_1,x_2;\frac{1}{2},1)$