作业四

截至日期:

Problem 1

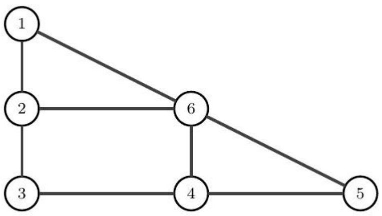

Figure 1: Problem1

如图，6个车站通过公路连接，汽车每天凌晨以相同的概率开往相邻的车站，并在夜晚到达且留宿，次日凌晨重复相同的活动。
求：各站每晚留宿的汽车数量比例(以便正确设置各站的服务规模)
$\langle(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4})\rangle$

Problem 2

设甲袋中有k个白球，1个黑球，乙袋中有k+1个白球，每次从两袋中各取一球，交换后放入对方袋中。 $P_n = P$(经过n次交换后黑球仍在甲袋中)．
证明：$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$.

Problem 3

某商品在24个季度的销售情况如下：(1表畅销，2表滞销)
$1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1$,若销售情况近似满足齐次MC性

1. 求销售状态的TPM
2. 若现在是畅销，预测之后的第4个季度的状态
3. 预测长期的销售状况

$$\left\langle ①P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix};\ ②P_{11}^{(4)}=0.611, P_{12}^{(4)}=0.389;\ ③(\frac{14}{23},\frac{9}{23}) \right\rangle$$

Problem 4

一位健忘的教授有2把伞，用于上下班往返于家与学校之间，如遇下雨且出发点有伞，则带上一把伞。如果没遇下雨总是忘记带伞，设每次出发时下雨概率为p $(0<p<1)$且独立于其它时候。
问题：建立DTMC模型，并求平稳状态下教授淋雨的概率。

Problem 5

(教材第四章习题23)在好天气的年份中，暴风的次数是均值为1的泊松随机变量；在坏天气的年份中，暴风的次数是均值为3的泊松随机变量。假定任何一年的天气情况仅仅通过上一年的天气情况依赖于过去年份的天气情况。假设一个好天气年份后，好天气年份和坏天气年份等可能地出现；而一个坏天气年份后，坏天气年份是好天气年份的2倍。假设去年(称为年0)是好天气年份。
(a)求在接下来的两年(即年1和年2)中暴风总次数的期望值。
(b)求年3没有暴风的概率
(c)求每年暴风的长程平均次数

Problem 6

(教材第四章习题25)某人每天早晨都长跑，他等可能地从前门或者从后门离开房子。离开时，他选一双跑鞋(或者赤脚跑，如果在他离开的门没有鞋)。回来时，他等可能地进入前门或者后门，并脱下跑鞋。如果他总计有k双跑鞋，问他赤脚跑的时间的比例是多少?

Problem 7

某系统为一个 DTMC $\{X_n, n\geq 0\}$, 状态空间$S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $C_1=\{1,2\}$, TPM为

$$P=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

问题:
（1）求$a_4=P($最终被C_1吸收 $\mid X_0=4)$;
（2）求$u_4=E[$最终被吸收所需的转移步数 $\mid X_0=4]$;
(3）求 $\lim_{n\to\infty} P_{41}^{(n)}$.

Problem 8

(教材第四章习题27，特殊情况) 在一个含有2个个体的总体中，每一个个体在每个时段可能积极也可能消极，如果一个个体在某时段积极，那么他在下一个时段也积极的概率是0.5，如果一个个体在某时段消极，那么他在下一时段也消极的概率是0.6。个体之间相互独立。令X_n表示在时段n积极的个体数。
(a)建立DTMC模型，求$E[X_4 \mid X_0 = 1]$；
(b)求恰有$j(j = 0, 1, 2)$个积极个体的长程时间比例。

Problem 9

(教材第四章习题27，一般情况，选做，但至少需要阅读参考解答) 在一个含有N个个体的总体中，每一个个体在每个时段可能积极也可能消极，如果一个个体在某时段积极，那么他在下一个时段也积极的概率是α，如果一个个体在某时段消极，那么他在下一时段也消极的概率是β。个体之间相互独立。令X_n表示在时段n积极的个体数。
(a)验证$\{X_n, n \geqslant 0\}$是DTMC；
(b)求$E[X_n \mid X_0 = i]$；
(c)推导转移概率的表达式；
(d)求恰有j个个体积极的长程时间比例（提示：首先考虑$N = 1$的情形）。