这次的作业批改了两天，大家的解答过程丰富多彩，让我边批改作业，边去完善我的课件，把你们的想法敲出来，留给下学期的同学。
这次的答案全都来自努力的你们，谢谢大家的辛苦工作。

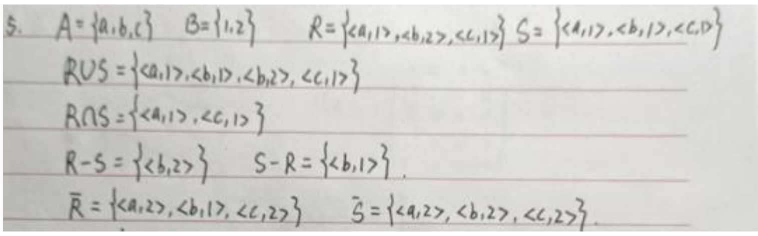
较集中的几个问题：

1、给出关系图，判断关系性质的第19题，请做错的同学仔细看解析。
2、Warshall算法有同学还不会。
3、求解关系的复合、关系的幂比较容易出错。
4、证明等价关系的几道证明题不会写。
5、对称和反对称关系的个数不知道怎么算。

第 5 题

解析：本题求关系的并、交、差、补运算。可以借助不同的方法。并、交、差求解，可用列举法。差运算，推荐用关系矩阵。

结果如下：



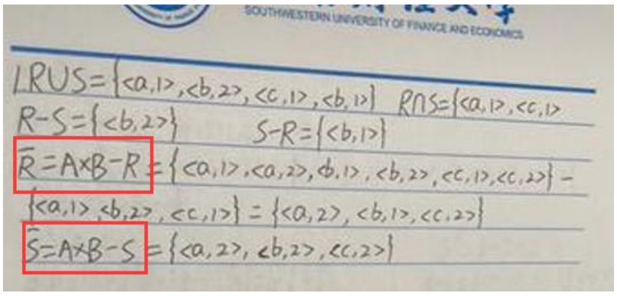
5. $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2\}$ $R=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$ $S=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

$R\cup S=\{<a,1>,<b,1>,<b,2>,<c,1>\}$

$R\cap S=\{<a,1>,<c,1>\}$

$R-S=\{<b,2>\}$ $S-R=\{<b,1>\}$.

$\bar{R}=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$ $\bar{S}=\{<a,2>,<b,2>,<c,2>\}$.



SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

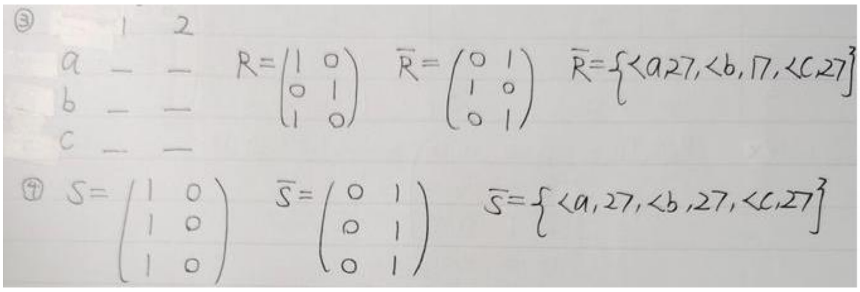
1. $R\cup S=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>,<b,1>\}$ $R\cap S=\{<a,1>,<c,1>$

$R-S=\{<b,2>\}$ $S-R=\{<b,1>\}$

$\boxed{\bar{R}=A\times B-R}=\{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>,<c,1>,<c,2>\}-\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$

$\boxed{\bar{S}=A\times B-S}=\{<a,2>,<b,2>,<c,2>\}$

求补运算，推荐用关系矩阵求



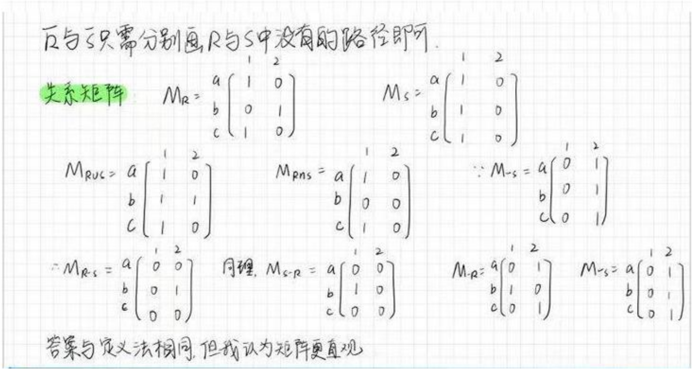
③

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & \_ & \_ \\ b & \_ & \_ \\ c & \_ & \_ \end{array} \quad R=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \bar{R}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \bar{R}=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$$

④

$$S=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix} \quad \bar{S}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix} \quad \bar{S}=\{<a,2>,<b,2>,<c,2>\}$$

都用矩阵求解



$\bar{R}$与$\bar{S}$只需分别画R与S中没有的路径即可.

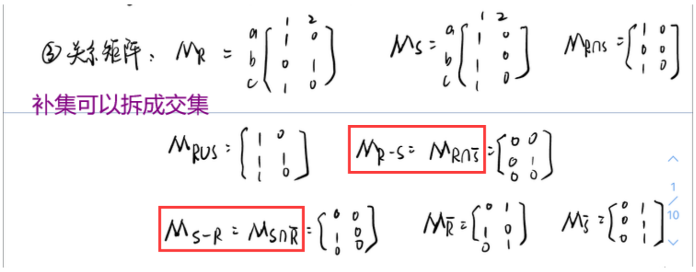
关系矩阵

$$M_R=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{array} \qquad M_S=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{array} \qquad M_{R\cap S}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array} \qquad \because M_{-S}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{array}$$

$$\therefore M_{R-S}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{array} \quad \text{同理}, M_{S-R}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{array} \quad M_{-R}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{array} \quad M_{-S}=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{array}$$

答案与定义法相同,但我认为矩阵更直观



③ 关系矩阵：

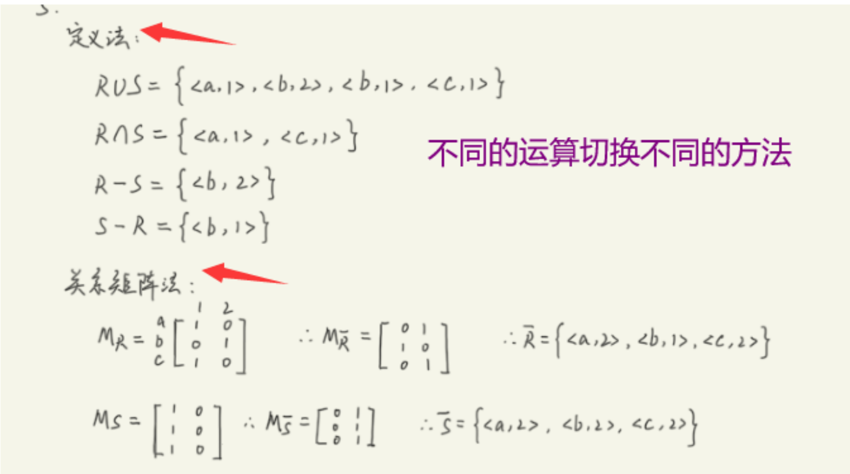
$$M_R=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{array} \qquad M_S=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array} \qquad M_{R\cap S}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

补集可以拆成交集

$$M_{R\cup S}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&0\end{bmatrix} \qquad \boxed{M_{R-S}=M_{R\cap\bar{S}}}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{M_{S-R}=M_{S\cap\bar{R}}}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad M_{\bar{R}}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad M_{\bar{S}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

按照运算的类别选择方法



3.

定义法:

$R\cup S=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$R\cap S=\{\langle a,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$R-S=\{\langle b,2\rangle\}$

$S-R=\{\langle b,1\rangle\}$

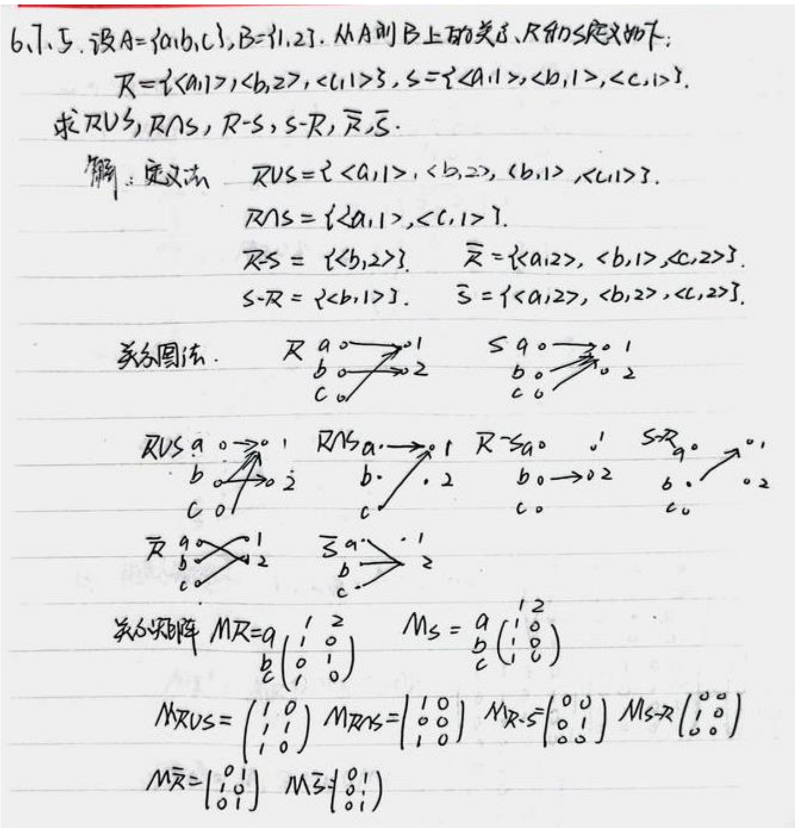
不同的运算切换不同的方法

关系矩阵法:

$M_R=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2\\ \hline a & 1 & 0\\ b & 0 & 1\\ c & 1 & 0\end{array}$ $\therefore M_{\bar{R}}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\therefore \bar{R}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$

$M_S=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix}$ $\therefore M_{\bar{S}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$ $\therefore \bar{S}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$

3 种方法都用上



6.7.5. 设$A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$. 从A到B上的关系、R和S定义如下:

$R=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$, $S=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

求$R\cup S$, $R\cap S$, $R-S$, $S-R$, $\bar{R}$, $\bar{S}$.

解: 定义法 $R\cup S=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

$R\cap S=\{\langle a,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

$R-S=\{\langle b,2\rangle\}$. $\bar{R}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$.

$S-R=\{\langle b,1\rangle\}$. $\bar{S}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$.

关系图法.

关系矩阵 $M_R=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2\\ \hline a & 1 & 0\\ b & 0 & 1\\ c & 1 & 0\end{array}$ $M_S=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2\\ \hline a & 1 & 0\\ b & 1 & 0\\ c & 1 & 0\end{array}$

$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $M_{S-R}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$M_{\bar{R}}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $M_{\bar{S}}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$

第8次作业

1、习题 6.7 第 5, 6, 7, 8 和 10 题。

答题时候注意：第 5,7,8 题，在求解并、交、差、补、复合、幂、逆运算的时候，可以尝试用定义、关系图、关系矩阵法都算一遍。心中要清楚，不同的运算用什么方法计算最优。最优 应为关系矩阵法?

way1 way2 way3

R, S ⊆ A×B

5、设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$, 从A到B上的关系R和S定义如下，

$R=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$, $S=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

求 $R\cup S$, $R\cap S$, $R-S$, $S-R$, $\overline{R}$, $\overline{S}$.

解：way1 定义法 (列举法)

① $R\cup S=\{<a,1>,<b,1>,<b,2>,<c,1>\}$

② $R\cap S=\{<a,1>,<c,1>\}$

③ $R-S=\{<b,2>\}$

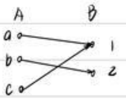
④ $S-R=\{<b,1>\}$

⑤ $\overline{R}=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$

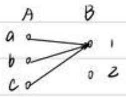
⑥ $\overline{S}=\{<a,2>,<b,2>,<c,2>\}$

way 2 关系图法

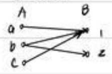
R



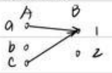
S



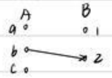
① $R\cup S$



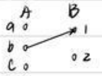
② $R\cap S$



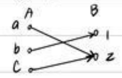
③ $R-S$



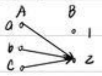
④ $S-R$



⑤ $\overline{R}$



⑥ $\overline{S}$



way 3 关系矩阵法

$$M_R=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{array} \quad M_S=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array} \quad M_{\overline{S}}=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{array} \quad M_{\overline{R}}=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{array}$$

① $R\cup S$

$$M_{R\cup S}=M_R\vee M_S=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{array}$$

② $R\cap S$

$$M_{R\cap S}=M_R\wedge M_S=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array}$$

③ $R-S$

$$M_{R-S}=M_R\wedge M_{\overline{S}}=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{array}$$

④ $S-R$

$$M_{S-R}=M_S\wedge M_{\overline{R}}=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{array}$$

⑤ $\overline{R}$

$$M_{\overline{R}}=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{array}$$

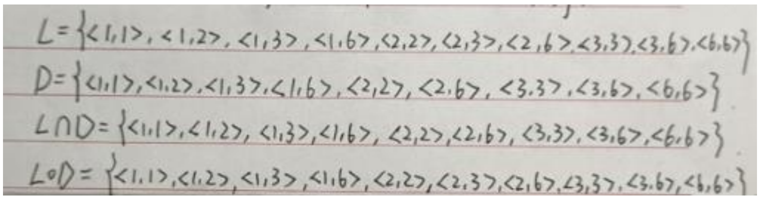
⑥ $\overline{S}$

$$M_{\overline{S}}=\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{array}$$

第 6 题

解析：注意此题中，a 整除 b 是指，b/a 的结果是整数，而不是 a/b 的结果是整数。所以不要把 D 中序偶的第一和第二元素写反了。

结果如下：



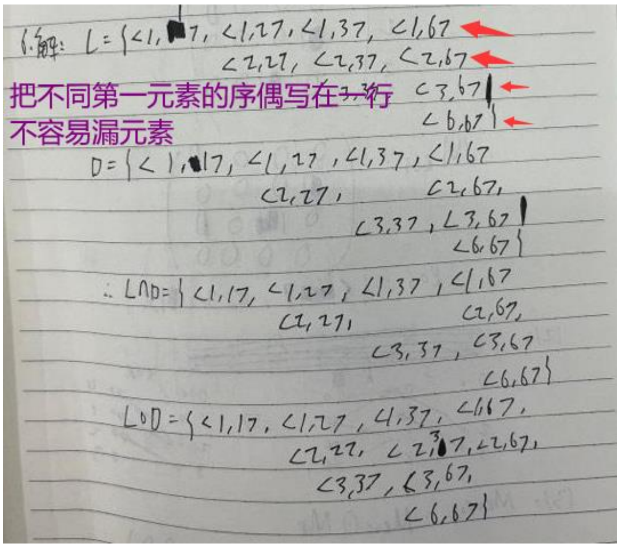
$L=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,3>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

$D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

$L\cap D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

$L\circ D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,3>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

可以把结果按照序偶第一元素的类型写在不同的行



6.解: $L=\{<1,$[illegible]$>, <1,2>, <1,3>, <1,6>$
$<2,2>, <2,3>, <2,6>$
$<3,6>$
$<6,6>\}$

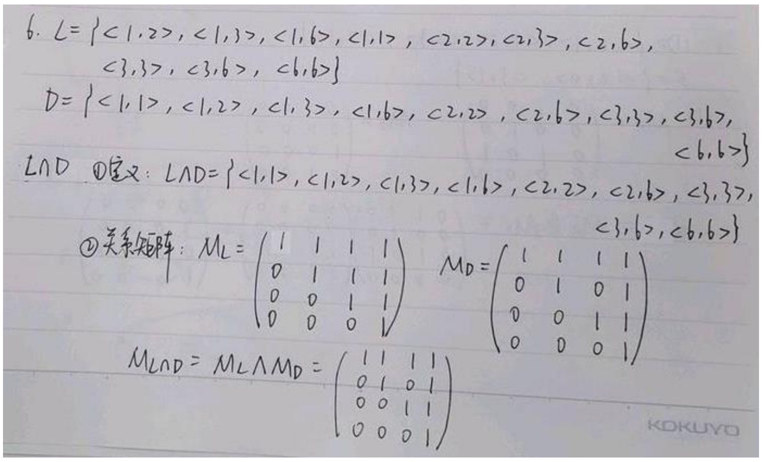
把不同第一元素的序偶写在~~一~~行
不容易漏元素

$D=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,6>$
$<2,2>, <2,6>,$
$<3,3>, <3,6>$
$<6,6>\}$

$\therefore L\cap D=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,6>$
$<2,2>, <2,6>,$
$<3,3>, <3,6>$
$<6,6>\}$

$L\circ D=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,6>,$
$<2,2>, <2,3>, <2,6>,$
$<3,3>, <3,6>,$
$<6,6>\}$

用关系矩阵求



6. $L=\{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<1,1>,<2,2>,<2,3>,<2,6>,$
$<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

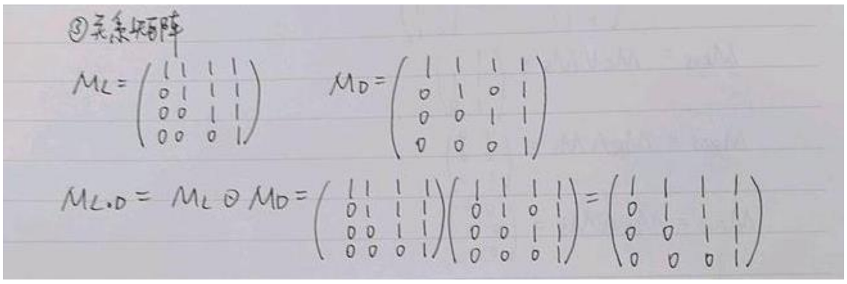
$D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,$
$<6,6>\}$

$L\cap D$ ①定义: $L\cap D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,$
$<3,6>,<6,6>\}$

②关系矩阵: $M_L=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $M_D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$M_{L\cap D}=M_L\wedge M_D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

KOKUYO

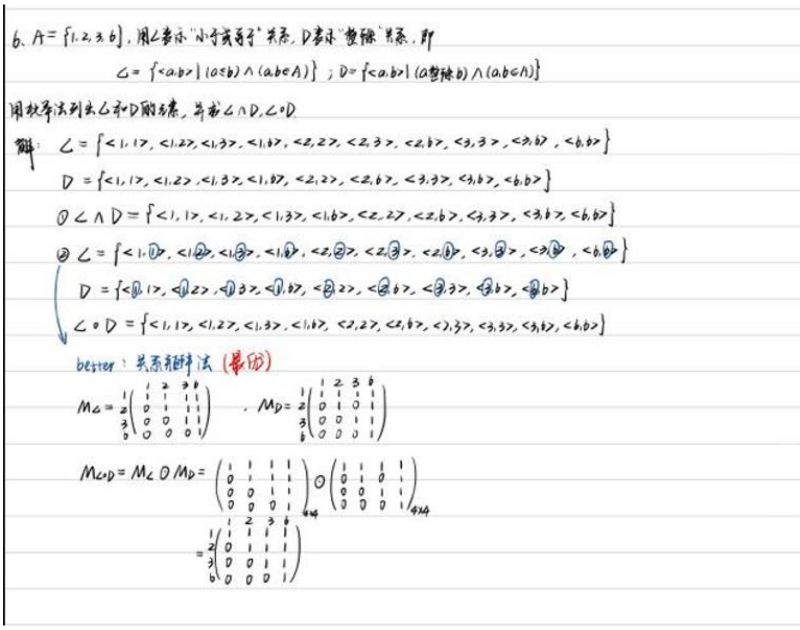


③关系矩阵

$M_L=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $M_D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$M_{L\circ D}=M_L\odot M_D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

用定义和关系矩阵都求了，注意用定义求时，“中介”标了序号，很值得借鉴的一个做法



6. $A=\{1,2,3,6\}$，用 L 表示“小于或等于”关系，D 表示“整除”关系，即

$L=\{<a,b> \mid (a\le b)\wedge(a,b\in A)\}$；$D=\{<a,b> \mid (a\text{整除}b)\wedge(a,b\in A)\}$

用枚举法列出 L 和 D 的元素，并求 $L\cap D$，$L\circ D$

解：$L=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,3>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

$D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

① $L\cap D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

② $L=\{<1,①>,<1,②>,<1,③>,<1,⑥>,<2,②>,<2,③>,<2,⑥>,<3,③>,<3,⑥>,<6,⑥>\}$

$D=\{<①,1>,<①,2>,<①,3>,<①,6>,<②,2>,<②,6>,<③,3>,<③,6>,<⑥,6>\}$

$L\circ D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<2,3>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

better：关系矩阵法（最优）

$$M_L=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 6\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\ ,\quad M_D=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 6\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

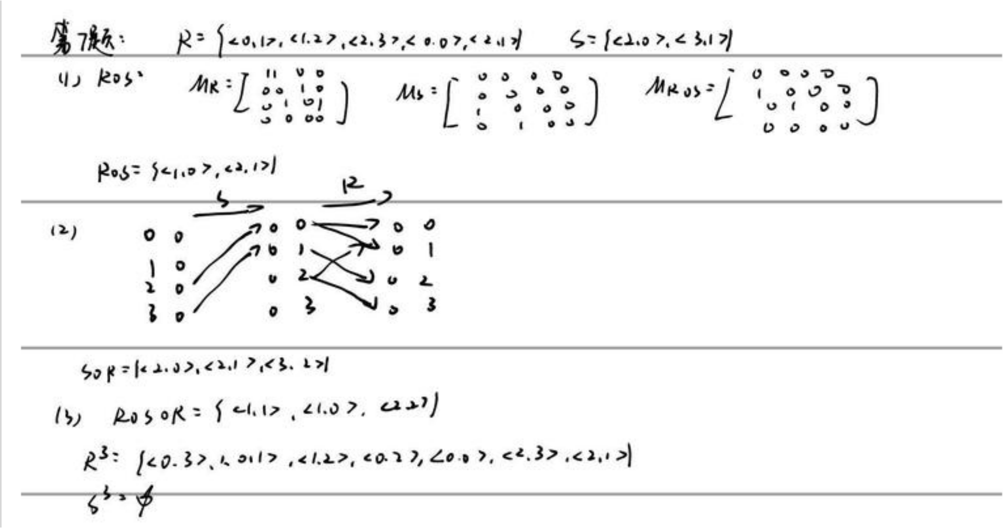
$$M_{L\circ D}=M_L\odot M_D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_{4\times4}\odot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_{4\times4}$$

$$=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 6\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

第 7 题

结果如下：

此题注意 S 中的序偶的第一元素和第二元素位置不要写反了。



第7题： $R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$ $S=\{<2,0>,<3,1>\}$

(1) $R\circ S$: $M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $M_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ $M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$R\circ S=\{<1,0>,<2,1>\}$

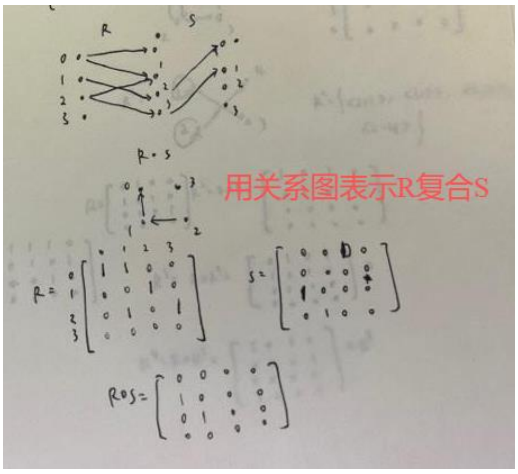
(2)

$S\circ R=\{<2,0>,<2,1>,<3,2>\}$

(3) $R\circ S\circ R=\{<1,1>,<1,0>,<2,2>\}$

$R^3=\{<0,3>,<0,1>,<1,2>,<0,2>,<0,0>,<2,3>,<2,1>\}$

$S^3=\phi$

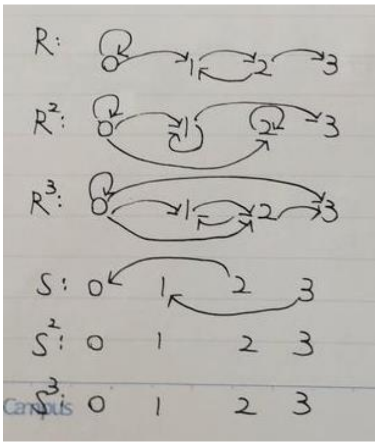


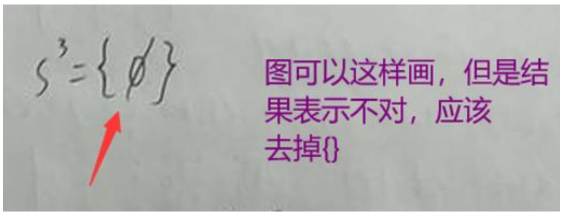
用关系图表示R复合S

$R=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$ $S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

$R\circ S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

求解 R^3 与 S^3 用关系图：

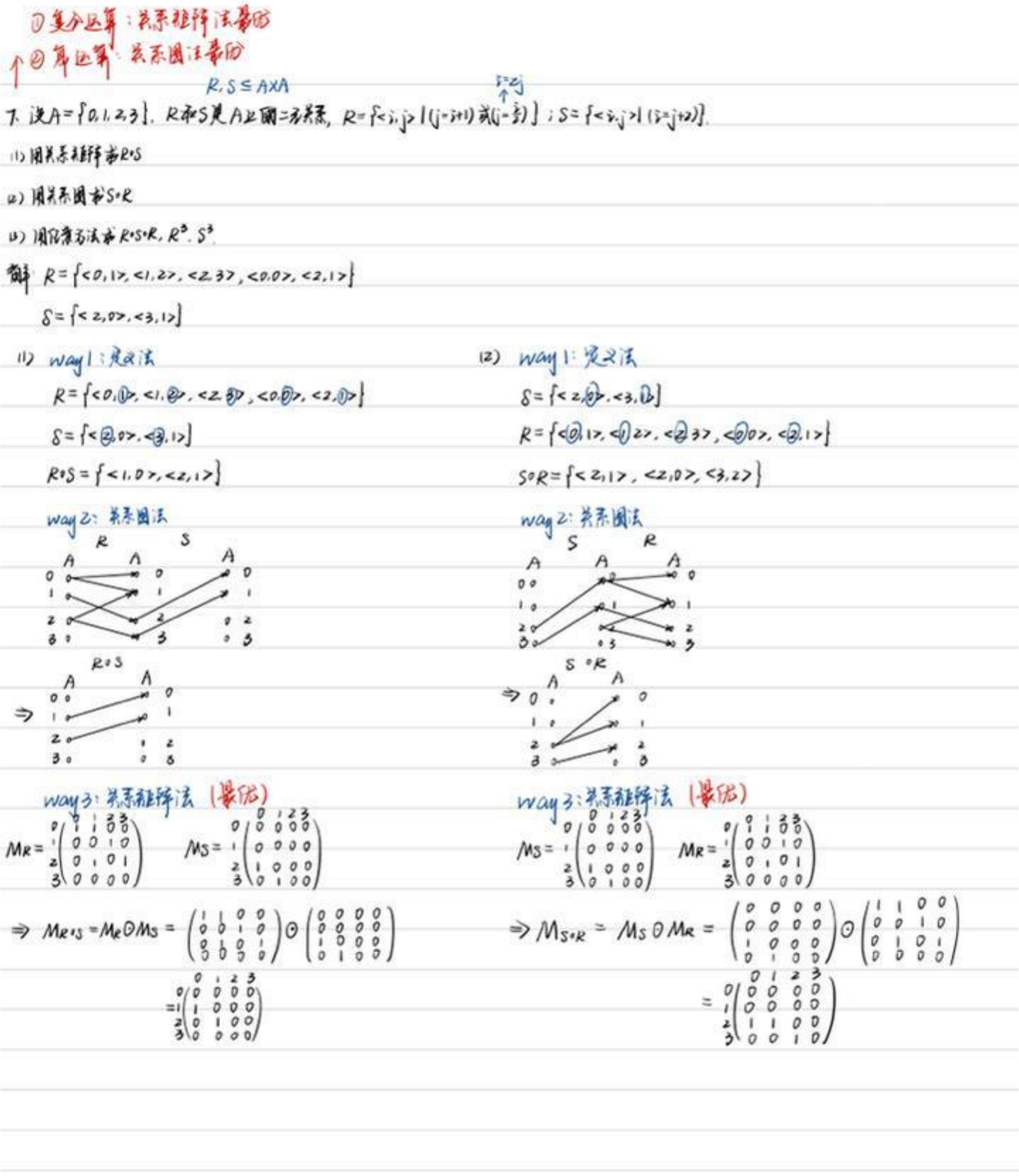




$S^3=\{\phi\}$

图可以这样画，但是结果表示不对，应该去掉{}

定义、关系图和关系矩阵都用上的结果：



① 复合运算：关系矩阵法最优

↑② 幂运算：关系图法最优

7. 设A={0,1,2,3}，R和S是A上的二元关系，$R=\{<i,j> | (j=i+1)$ 或 $(j=\overset{i=2j}{\frac{i}{2}})\}$；$S=\{<i,j> | (i=j+2)\}$.　$R,S \subseteq A\times A$

(1) 用关系矩阵求 $R\circ S$

(2) 用关系图求 $S\circ R$

(3) 用你喜欢的方法求 $R\circ S\circ R$，R^3，S^3.

解 $R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

$S=\{<2,0>,<3,1>\}$

(1) way1：定义法

$R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

$S=\{<2,0>,<3,1>\}$

$R\circ S=\{<1,0>,<2,1>\}$

way2：关系图法

way3：关系矩阵法（最优）

$$M_R=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\qquad M_S=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}$$

$$\Rightarrow M_{R\circ S}=M_R\odot M_S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

(2) way1：定义法

$S=\{<2,0>,<3,1>\}$

$R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

$S\circ R=\{<2,1>,<2,0>,<3,2>\}$

way2：关系图法

way3：关系矩阵法（最优）

$$M_S=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\qquad M_R=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

$$\Rightarrow M_{S\circ R}=M_S\odot M_R=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}$$

$R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

$S=\{<2,0>,<3,1>\}$

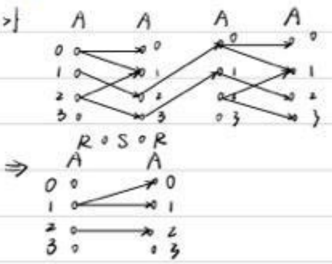
(3) ① $R\circ S\circ R$

way1: $R\circ S=\{<1,0>,<2,1>\}$

$R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

$\Rightarrow R\circ S\circ R=\{<1,1>,<1,0>,<2,2>\}$

way2: R S R



way 3: (最简)

$M_{R\circ S\circ R}=M_R\odot M_S\odot M_R$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 0&0&0&0\\ 1 & 1&1&0&0\\ 2 & 0&0&1&0\\ 3 & 0&0&0&0\end{array}$$

② R^3

$R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

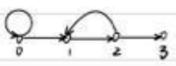
way1: $R=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<0,0>,<2,1>\}$

$R^2=\{<0,2>,<1,3>,<1,1>,<0,1>,<0,0>,<2,2>\}$

$R^3=R^2\circ R=\{<0,3>,<0,1>,<1,2>,<0,2>,<0,0>,<2,3>,<2,1>\}$

(最简)

way2: R



R^3

way 3: $M_{R^3}=M_{R\circ R\circ R}=M_R\odot M_R\odot M_R$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 1&1&1&1\\ 1 & 0&0&1&0\\ 2 & 0&1&0&1\\ 3 & 0&0&0&0\end{array}$$

③ S^3

$S=\{<2,0>,<3,1>\}$

way1: $S=\{<2,0>,<3,1>\}$

$S^2=\phi$, $S^3=\phi$

(最简)

way2: S

S^3

way 3: $M_{S^3}=M_{S\circ S\circ S}=M_S\odot M_S\odot M_S$

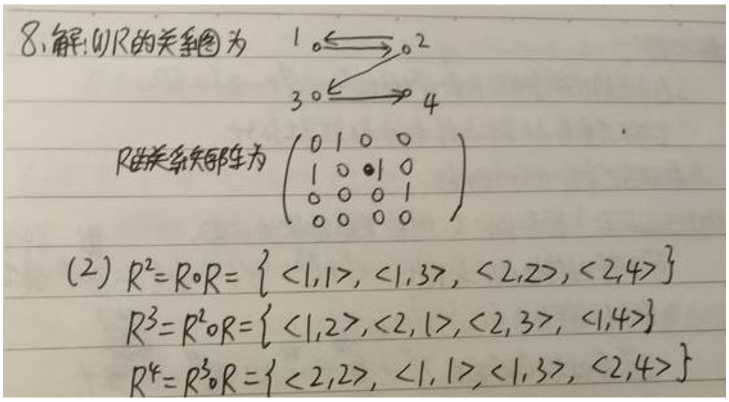
$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

第 8 题

结果如下：



8、解:(1) R的关系图为

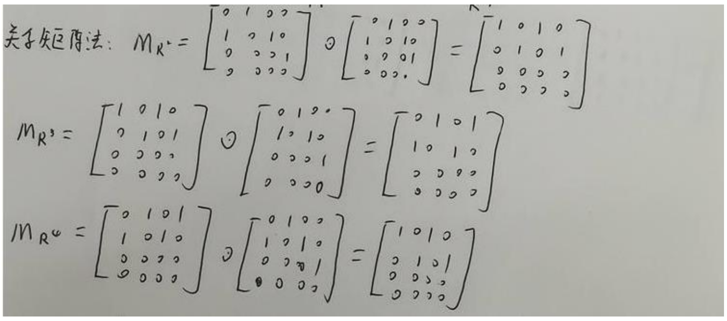
R的关系矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $R^2 = R \circ R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle\}$

$R^4 = R^3 \circ R = \{\langle 2,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$

用关系矩阵求



关系矩阵法: $M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{R^4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

定义、关系图和关系矩阵都用上的结果：见下一页

$R \subseteq A \times A$

8. 设$A=\{1,2,3,4\}$，定义在A上的关系R如下

$$R=\{<1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,4>\}$$

(1) 画出R的关系图，并写出R的关系矩阵

(2) 求R^2, R^3, R^4

解：(1) R

$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$R=\{<1,②>, <2,①>, <2,③>, <3,④>\}$

(2) way1: $R=\{<①,2>, <②,1>, <②,3>, <③,4>\}$

$R^2=\{<1,①>, <1,③>, <2,②>, <2,④>\}$

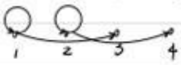
$R^3=R^2 \circ R=\{<1,②>, <1,④>, <2,①>, <2,③>\}$

$R^4=R^3 \circ R=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,4>\} = R^2$

(常用)

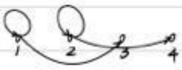
way2: R

R^2



R^3

R^4



同R^2关系图相同

way3: $$M_R = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

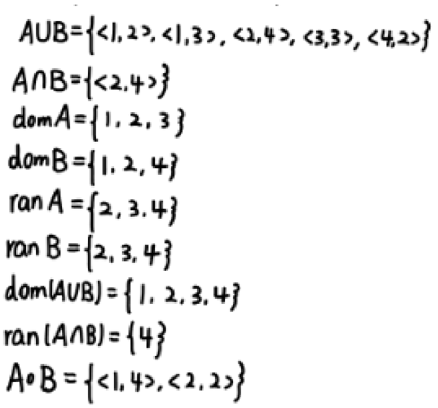
$$M_{R^2} = M_{R\circ R} = M_R \odot M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2\circ R} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3\circ R} = M_{R^3} \odot M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = M_{R^2}$$

第 10 题

结果如下：



$A\cup B=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,3>,<4,2>\}$

$A\cap B=\{<2,4>\}$

$\mathrm{dom}A=\{1,2,3\}$

$\mathrm{dom}B=\{1,2,4\}$

$\mathrm{ran}A=\{2,3,4\}$

$\mathrm{ran}B=\{2,3,4\}$

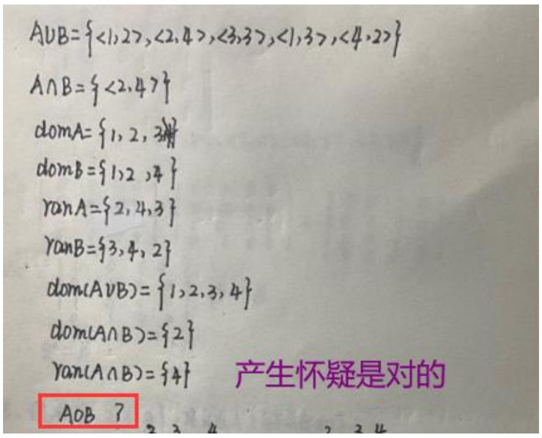
$\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$

$\mathrm{ran}(A\cap B)=\{4\}$

$A\circ B=\{<1,4>,<2,2>\}$

这位两位同学意识到了，当 A 的后域等于 B 的前域时，A 和 B 才可以进行复合运算，而这道题，并没有提及 A 和 B 的前后域，故是不完整的一道题。

应该在题干前面加上 C={1,2,3,4}，A 和 B 是 C 上的关系。才可以算。



$A\cup B=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>,<1,3>,<4,2>\}$

$A\cap B=\{<2,4>\}$

$\mathrm{dom}A=\{1,2,3\}$

$\mathrm{dom}B=\{1,2,4\}$

$\mathrm{ran}A=\{2,4,3\}$

$\mathrm{ran}B=\{3,4,2\}$

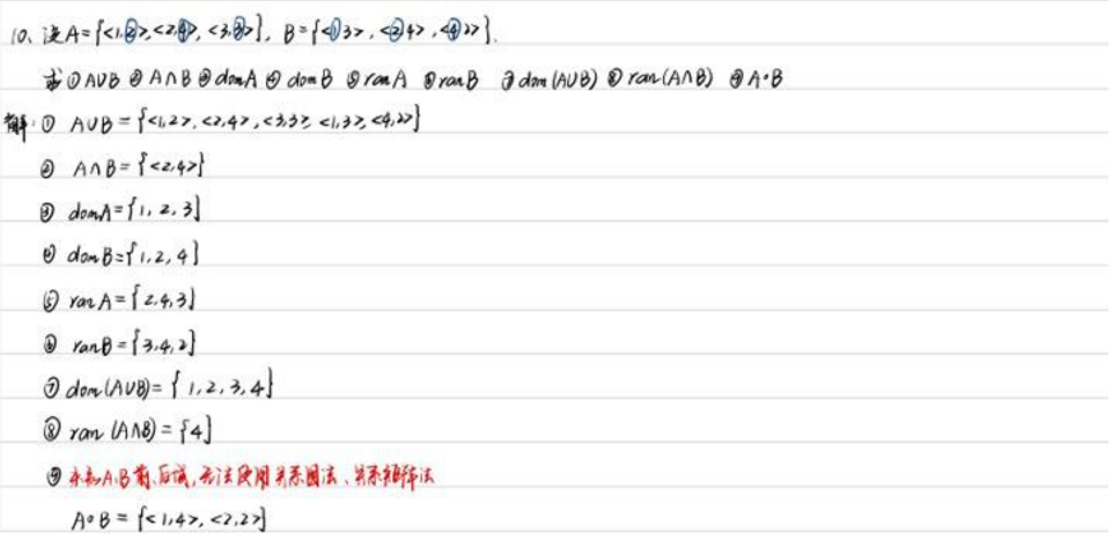
$\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$

$\mathrm{dom}(A\cap B)=\{2\}$

$\mathrm{ran}(A\cap B)=\{4\}$

产生怀疑是对的

$A\circ B$?



10、设 $A=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>\}$，$B=\{<1,3>,<2,4>,<4,2>\}$.

求 ① $A\cup B$ ② $A\cap B$ ③ $\mathrm{dom}A$ ④ $\mathrm{dom}B$ ⑤ $\mathrm{ran}A$ ⑥ $\mathrm{ran}B$ ⑦ $\mathrm{dom}(A\cup B)$ ⑧ $\mathrm{ran}(A\cap B)$ ⑨ $A\circ B$

解：① $A\cup B=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>,<1,3>,<4,2>\}$

② $A\cap B=\{<2,4>\}$

③ $\mathrm{dom}A=\{1,2,3\}$

④ $\mathrm{dom}B=\{1,2,4\}$

⑤ $\mathrm{ran}A=\{2,4,3\}$

⑥ $\mathrm{ran}B=\{3,4,2\}$

⑦ $\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$

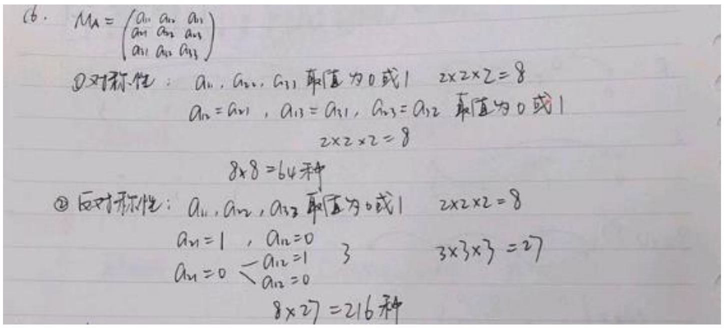
⑧ $\mathrm{ran}(A\cap B)=\{4\}$

⑨ 未知A、B前、后域，无法使用关系图法、关系矩阵法

$A\circ B=\{<1,4>,<2,2>\}$

第 16 题

通过观察关系矩阵求解



16. $M_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

①对称性：a_{11}, a_{22}, a_{33} 取值为0或1　$2\times2\times2=8$

$a_{12}=a_{21}$，$a_{13}=a_{31}$，$a_{23}=a_{32}$ 取值为0或1

$2\times2\times2=8$

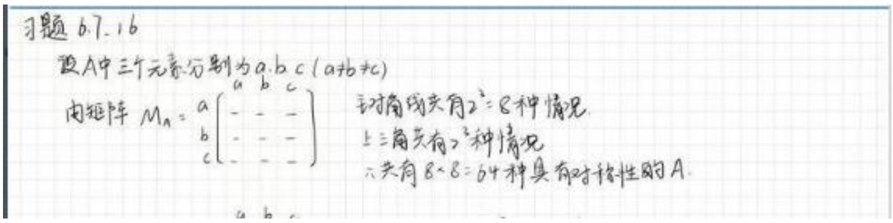
$8\times8=64$种

②反对称性：a_{11}, a_{22}, a_{33} 取值为0或1　$2\times2\times2=8$

$a_{21}=1$，$a_{12}=0$　3　$3\times3\times3=27$

$a_{21}=0 < \begin{matrix} a_{12}=1 \\ a_{12}=0 \end{matrix}$

$8\times27=216$种



习题 6.7.16

设A中三个元素分别为a.b.c（$a\neq b\neq c$）

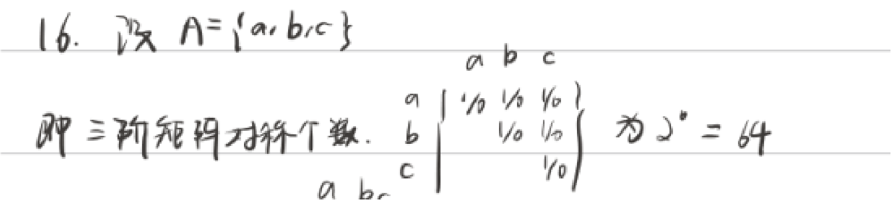
则矩阵 $M_A = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & - & - & - \\ b & - & - & - \\ c & - & - & - \end{array}$

主对角线共有$2^3=8$种情况

上三角共有2^3种情况

∴共有$8\times8=64$种具有对称性的A.

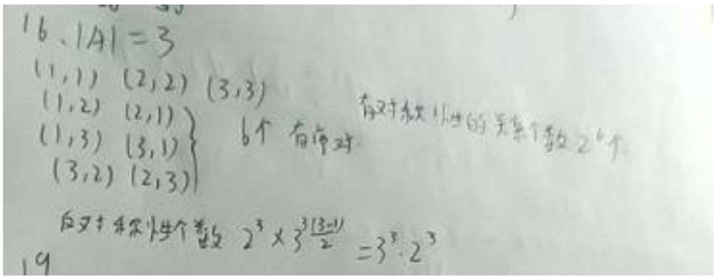
只用研究半个三角形的位置，是 1 或 0



16. 设 $A=\{a,b,c\}$

即三阶矩阵对称个数. $\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1/0 & 1/0 & 1/0 \\ b & & 1/0 & 1/0 \\ c & & & 1/0 \end{array}$ 为 $2^6=64$

通过研究有序对求解



16. $|A|=3$

(1,1) (2,2) (3,3)

(1,2) (2,1)

(1,3) (3,1) } 6个 有序对

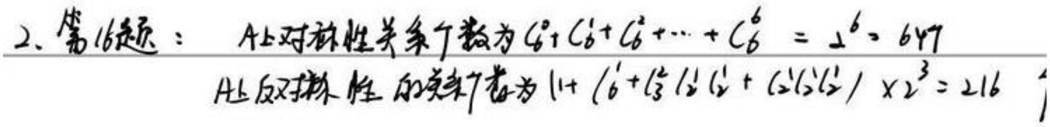
(3,2) (2,3)

有对称性的关系个数 2^6个

反对称性个数 $2^3\times3^{\frac{3(3-1)}{2}}=3^3\cdot2^3$

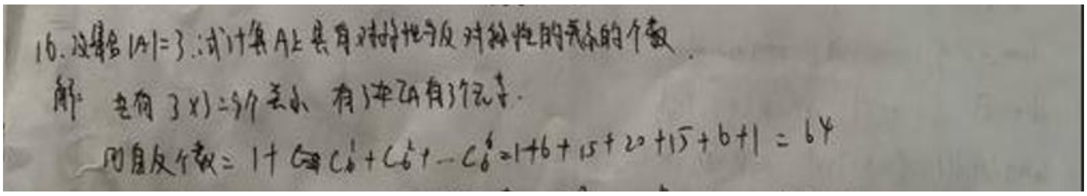
19

直接用组合的方法做



2、第16题：A上对称性关系个数为 $C_6^0+C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6=2^6=64$；

A上反对称性的关系个数为 $(1+C_6^1+C_3^2C_2^1C_2^1+C_3^3C_2^1C_2^1C_2^1)\times2^3=216$；

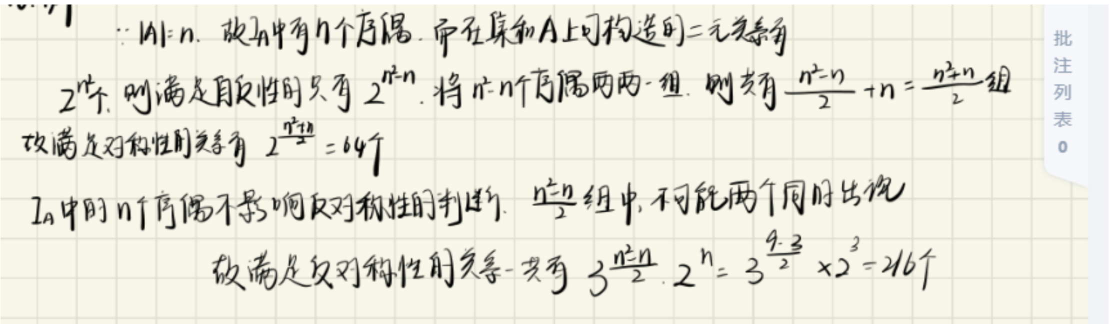


16. 设集合$|A|=3$，试计算A上具有对称性与反对称性的关系的个数。

解：共有$3\times3=9$个元素，有3[illegible]有3个元素.

则自反个数$=1+C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6=1+6+15+20+15+6+1=64$

用组合的方法做的详细解析，这位同学直接给出了 A 中元素为 n 时的计算公式



∵$|A|=n$. 故I_A中有n个序偶. 而在集和A上可构造的二元关系有

2^{n^2}个. 则满足自反性的只有 2^{n^2-n}. 将n^2-n个序偶两两一组. 则共有 $\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$组

故满足对称性的关系有 $2^{\frac{n^2+n}{2}}=64$个

I_A中的n个序偶不影响反对称性的判断. $\frac{n^2-n}{2}$组中, 不可能两个同时出现

故满足反对称性的关系一共有 $3^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot2^n=3^{\frac{9-3}{2}}\times2^3=216$个

(2)满足对称性的关系要求除I_A中的序偶外，其他的序偶应成对出现或不出现。基于该分析，可以将I_A中的序偶自行成对，其余序偶两两成对，因而可以构造$n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$对。该集合有多少子集，则有多少关系满足对称性。因而，满足对称性的关系有$\frac{n^2+n}{2}$个。

更正为2^((n^+n)/2)

计算满足反对称性的关系数量时，I_A中的序偶不影响，其他的$\frac{n^2-n}{2}$对序偶中，有三种情况：都不出现、各出现一次。因此基于乘法原则，满足反对称性的关系数量为$2^n\bullet3^{\frac{n^2-n}{2}}$个。

进一步，当计算同时满足对称性和反对称性的关系时，只能考虑I_A中的序偶。因此，同时满足对称性和反对称的关系有2^n个。

在计算既不满足对称性、又不满足反对称性的关系时，可以借助容斥原理。设满足对称性的关系集合为M，满足反对称性的关系集合为N。则既不满足对称性、又不满足反对称性的关系集合为$\overline{M}\cap\overline{N}$。借助德摩根律，可以得到：

$$|\overline{M}\cap\overline{N}|=|\overline{M\cup N}|=2^{n^2}-|M\cup N|$$

根据容斥原理，有：

$$|M\cup N|=|M|+|N|-|M\cap N|=2^{\frac{n^2+n}{2}}+2^n\bullet3^{\frac{n^2-n}{2}}-2^n$$

因此，既不满足对称性、又不满足反对称性的关系数量为：

$$2^{n^2}-2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^n\bullet3^{\frac{n^2-n}{2}}+2^n$$

第 19 题

根据观察关系图，可以判定下面的关系具有的性质。

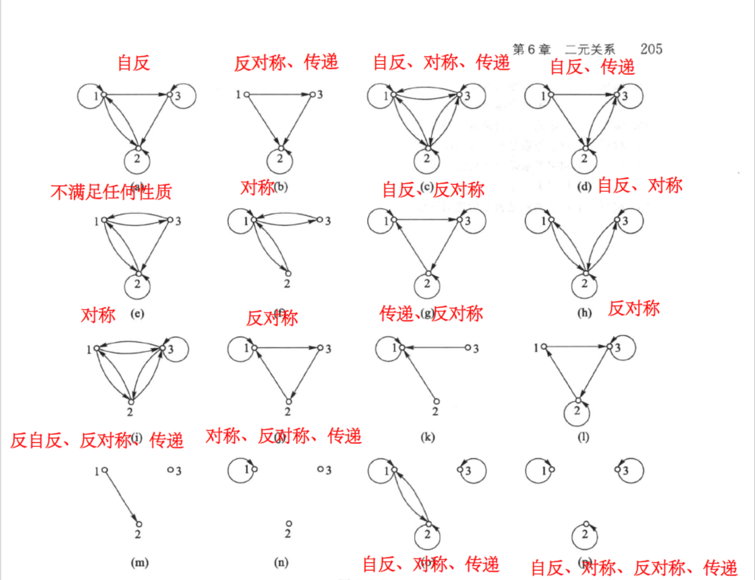
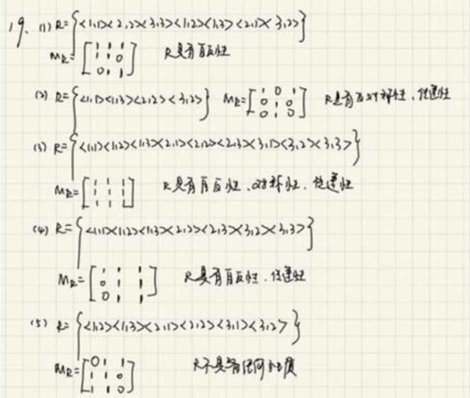


图 6.7.1

解析：注意反自反性质的判别。注意传递性的判别。如第 6 个图，是不具有传递性的。因为按照传递性的定义，<3,1>和<1,2>之间有边，那么<3,2>之间就应该有边，故不满足传递性。如第 7 个图，是不具有传递性的。因为按照传递性的定义，<1,3>和<3,2>之间有边，那么<1,2>之间就应该有边。而图 7 只有<2,1>之间有边，故不满足传递性。

也可以把关系矩阵写出来，通过矩阵去判断



19. (1) R={<1,1><2,2><3,3><1,2><1,3><2,1><3,2>}

$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ R具有自反性

(2) R={<1,1><1,3><2,2><3,2>} $M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ R具有反对称性，传递性

(3) R={<1,1><1,2><1,3><2,1><2,2><2,3><3,1><3,2><3,3>}

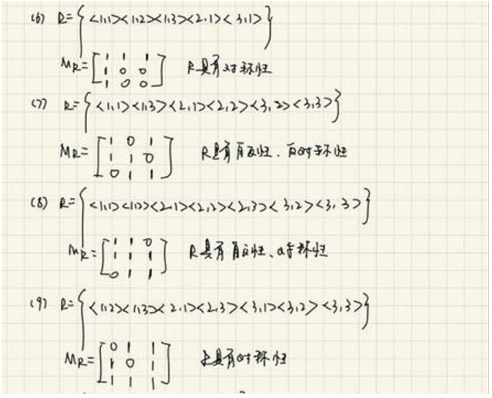
$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ R具有自反性，对称性，传递性

(4) R={<1,1><1,2><1,3><2,2><2,3><3,2><3,3>}

$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ R具有自反性，传递性

(5) R={<1,2><1,3><2,1><2,2><3,1><3,2>}

$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$ R不具有任何性质



(6) R={<1,1><1,2><1,3><2,1><3,1>}

$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ R具有对称性

(7) R={<1,1><1,3><2,1><2,2><3,2><3,3>}

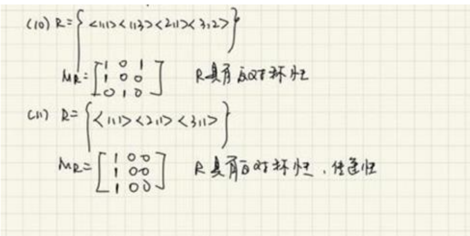
$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ R具有自反性，反对称性

(8) R={<1,1><1,2><2,1><2,2><2,3><3,2><3,3>}

$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ R具有自反性、对称性

(9) R={<1,2><1,3><2,1><2,3><3,1><3,2><3,3>}

$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ R具有对称性

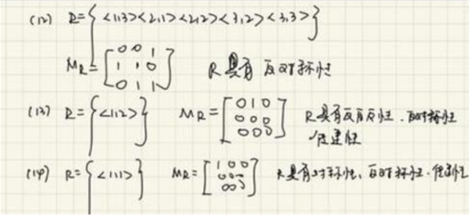


(10) R={<1,1><1,3><2,1><3,2>}

$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ R具有反对称性

(11) R={<1,1><2,1><3,1>}

$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ R具有反对称性，传递性

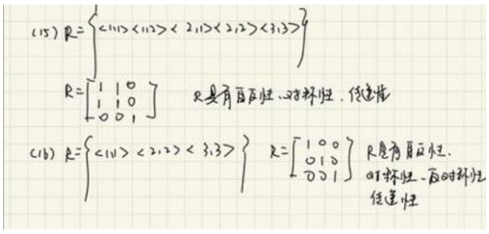


(12) R={<1,3><2,1><2,2><3,2><3,3>}

$M_R=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ R具有反对称性

(13) R={<1,2>} $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ R具有反自反性，反对称性，传递性

(14) R={<1,1>} $M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ R具有对称性，反对称性，传递性

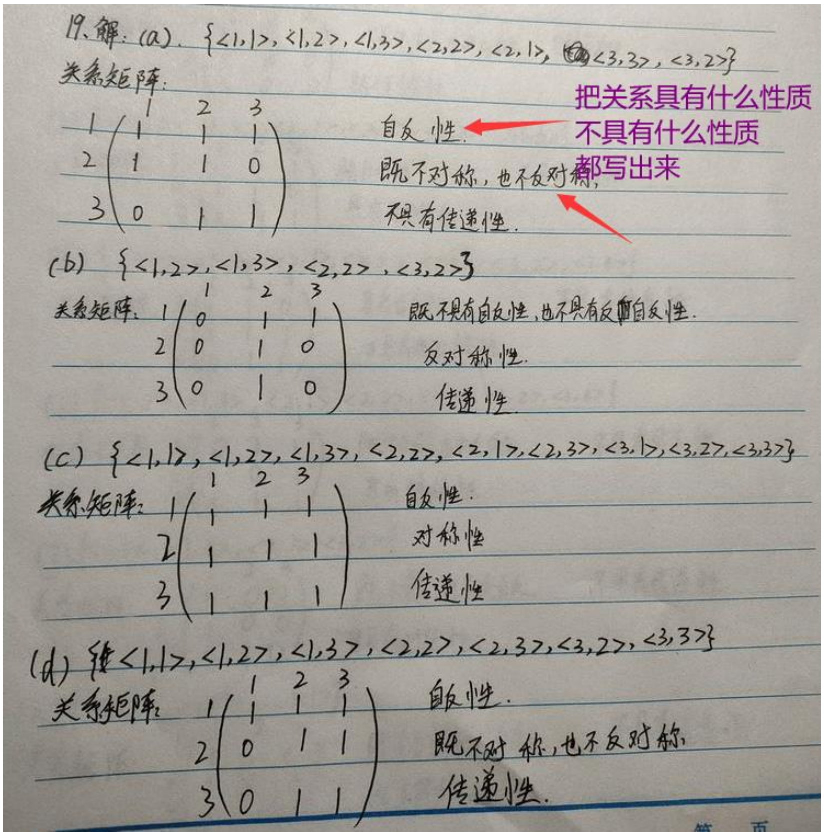


(15) R={<1,1><1,2><2,1><2,2><3,3>}

$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ R具有自反性，对称性，传递性

(16) R={<1,1><2,2><3,3>} $R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ R具有自反性，对称性，反对称性，传递性

研究时，把关系的 5 个性质都研究一下



19、解：(a). $\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,1>, <3,3>, <3,2>\}$

关系矩阵：

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

自反性.

既不对称，也不反对称，

不具有传递性.

把关系具有什么性质
不具有什么性质
都写出来

(b) $\{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <3,2>\}$

关系矩阵：

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

既不具有自反性，也不具有反自反性.

反对称性.

传递性.

(c) $\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,1>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,3>\}$

关系矩阵：

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

自反性.

对称性

传递性

(d) $\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

关系矩阵：

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

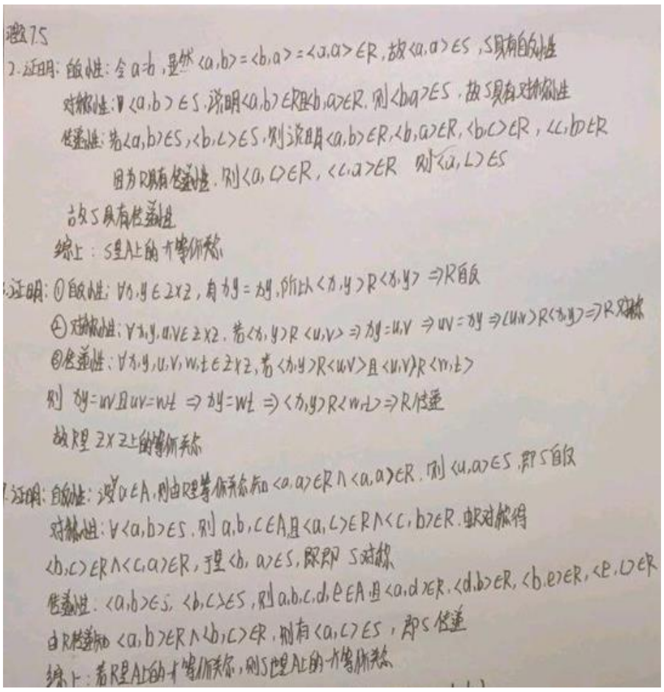
自反性.

既不对称，也不反对称，

传递性.

习题 7.5，第 2，3，9 题

用定义的办法证明，用文字描述



习题7.5

2.证明：自反性：令$a=b$，显然$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle=\langle a,a\rangle\in R$，故$\langle a,a\rangle\in S$，S具有自反性

对称性：$\forall\langle a,b\rangle\in S$，说明$\langle a,b\rangle\in R$且$\langle b,a\rangle\in R$，则$\langle b,a\rangle\in S$，故S具有对称性

传递性：若$\langle a,b\rangle\in S$，$\langle b,c\rangle\in S$，则说明$\langle a,b\rangle\in R$，$\langle b,a\rangle\in R$，$\langle b,c\rangle\in R$，$\langle c,b\rangle\in R$

因为R具有传递性，则$\langle a,c\rangle\in R$，$\langle c,a\rangle\in R$ 则$\langle a,c\rangle\in S$

故S具有传递性

综上：S是A上的等价关系

3.证明：①自反性：$\forall x,y\in Z\times Z$，有$xy=xy$，所以$\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle\Rightarrow R$自反

②对称性：$\forall x,y,u,v\in Z\times Z$，若$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\Rightarrow xy=uv\Rightarrow uv=xy\Rightarrow\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\Rightarrow R$对称

③传递性：$\forall x,y,u,v,w,t\in Z\times Z$，若$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$且$\langle u,v\rangle R\langle w,t\rangle$

则 $xy=uv$且$uv=wt\Rightarrow xy=wt\Rightarrow\langle x,y\rangle R\langle w,t\rangle\Rightarrow R$传递

故R是$Z\times Z$上的等价关系

9.证明：自反性：设$a\in A$，则由R是等价关系知$\langle a,a\rangle\in R\wedge\langle a,a\rangle\in R$，则$\langle a,a\rangle\in S$，即S自反

对称性：$\forall\langle a,b\rangle\in S$，则$a,b,c\in A$且$\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle c,b\rangle\in R$，由R对称得

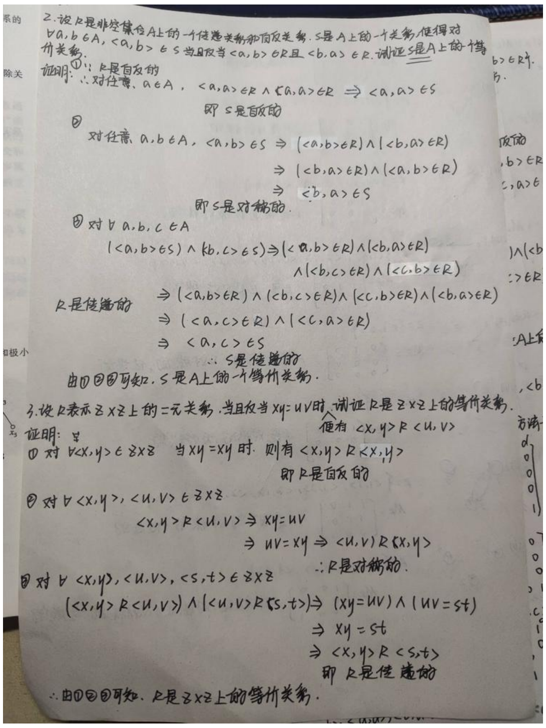
$\langle b,c\rangle\in R\wedge\langle c,a\rangle\in R$，于是$\langle b,a\rangle\in S$，即S对称

传递性：$\langle a,b\rangle\in S$，$\langle b,c\rangle\in S$，则$a,b,c,d,e\in A$且$\langle a,d\rangle\in R$，$\langle d,b\rangle\in R$，$\langle b,e\rangle\in R$，$\langle e,c\rangle\in R$

由R传递知$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R$，则有$\langle a,c\rangle\in S$，即S传递

综上：若R是A上的等价关系，则S也是A上的等价关系

用定义的办法证明，用逻辑符号描述



2.设R是非空集合A上的一个传递关系和自反关系．S是A上的一个关系，使得对$\forall a,b\in A$，$\langle a,b\rangle\in S$当且仅当$\langle a,b\rangle\in R$且$\langle b,a\rangle\in R$．试证S是A上的一个等价关系．

证明：①∵R是自反的

∴对任意、$a\in A$，$\langle a,a\rangle\in R\wedge\langle a,a\rangle\in R\Rightarrow\langle a,a\rangle\in S$

即S是自反的

②

对任意、$a,b\in A$，$\langle a,b\rangle\in S\Rightarrow(\langle a,b\rangle\in R)\wedge(\langle b,a\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle b,a\rangle\in R)\wedge(\langle a,b\rangle\in R)$

$\Rightarrow\langle b,a\rangle\in S$

即S是对称的．

③对$\forall a,b,c\in A$

$(\langle a,b\rangle\in S)\wedge(\langle b,c\rangle\in S)\Rightarrow(\langle a,b\rangle\in R)\wedge(\langle b,a\rangle\in R)\wedge(\langle b,c\rangle\in R)\wedge(\langle c,b\rangle\in R)$

R是传递的 $\Rightarrow(\langle a,b\rangle\in R)\wedge(\langle b,c\rangle\in R)\wedge(\langle c,b\rangle\in R)\wedge(\langle b,a\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle a,c\rangle\in R)\wedge(\langle c,a\rangle\in R)$

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in S$

∴S是传递的

由①②③可知．S是A上的一个等价关系．

3.设R表示$Z\times Z$上的二元关系，当且仅当$xy=uv$时，便有$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$．试证R是$Z\times Z$上的等价关系．

证明：

①对$\forall\langle x,y\rangle\in Z\times Z$ 当$xy=xy$时．则有$\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

即R是自反的

②对$\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in Z\times Z$

$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\Rightarrow xy=uv$

$\Rightarrow uv=xy\Rightarrow\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle$

∴R是对称的．

③对$\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle s,t\rangle\in Z\times Z$

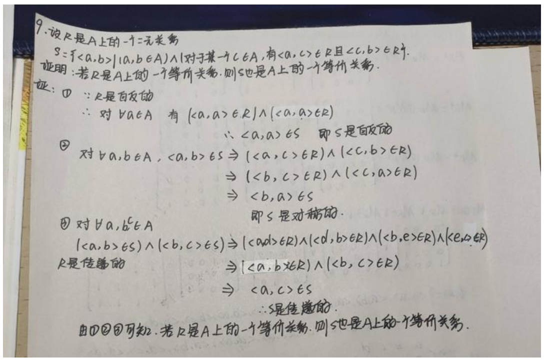
$(\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle)\wedge(\langle u,v\rangle R\langle s,t\rangle)\Rightarrow(xy=uv)\wedge(uv=st)$

$\Rightarrow xy=st$

$\Rightarrow\langle x,y\rangle R\langle s,t\rangle$

即R是传递的

∴由①②③可知．R是$Z\times Z$上的等价关系．



9.设R是A上的一个二元关系

$S=\{\langle a,b\rangle\mid(a,b\in A)\wedge($对于某一个$c\in A$，有$\langle a,c\rangle\in R$且$\langle c,b\rangle\in R)\}$．

证明：若R是A上的一个等价关系．则S也是A上的一个等价关系．

证：①∵R是自反的

∴对$\forall a\in A$ 有$(\langle a,a\rangle\in R)\wedge(\langle a,a\rangle\in R)$

∴$\langle a,a\rangle\in S$ 即S是自反的

②对$\forall a,b\in A$，$\langle a,b\rangle\in S\Rightarrow(\langle a,c\rangle\in R)\wedge(\langle c,b\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle b,c\rangle\in R)\wedge(\langle c,a\rangle\in R)$

$\Rightarrow\langle b,a\rangle\in S$

即S是对称的．

③对$\forall a,b,c\in A$

$(\langle a,b\rangle\in S)\wedge(\langle b,c\rangle\in S)\Rightarrow(\langle a,d\rangle\in R)\wedge(\langle d,b\rangle\in R)\wedge(\langle b,e\rangle\in R)\wedge(\langle e,c\rangle\in R)$

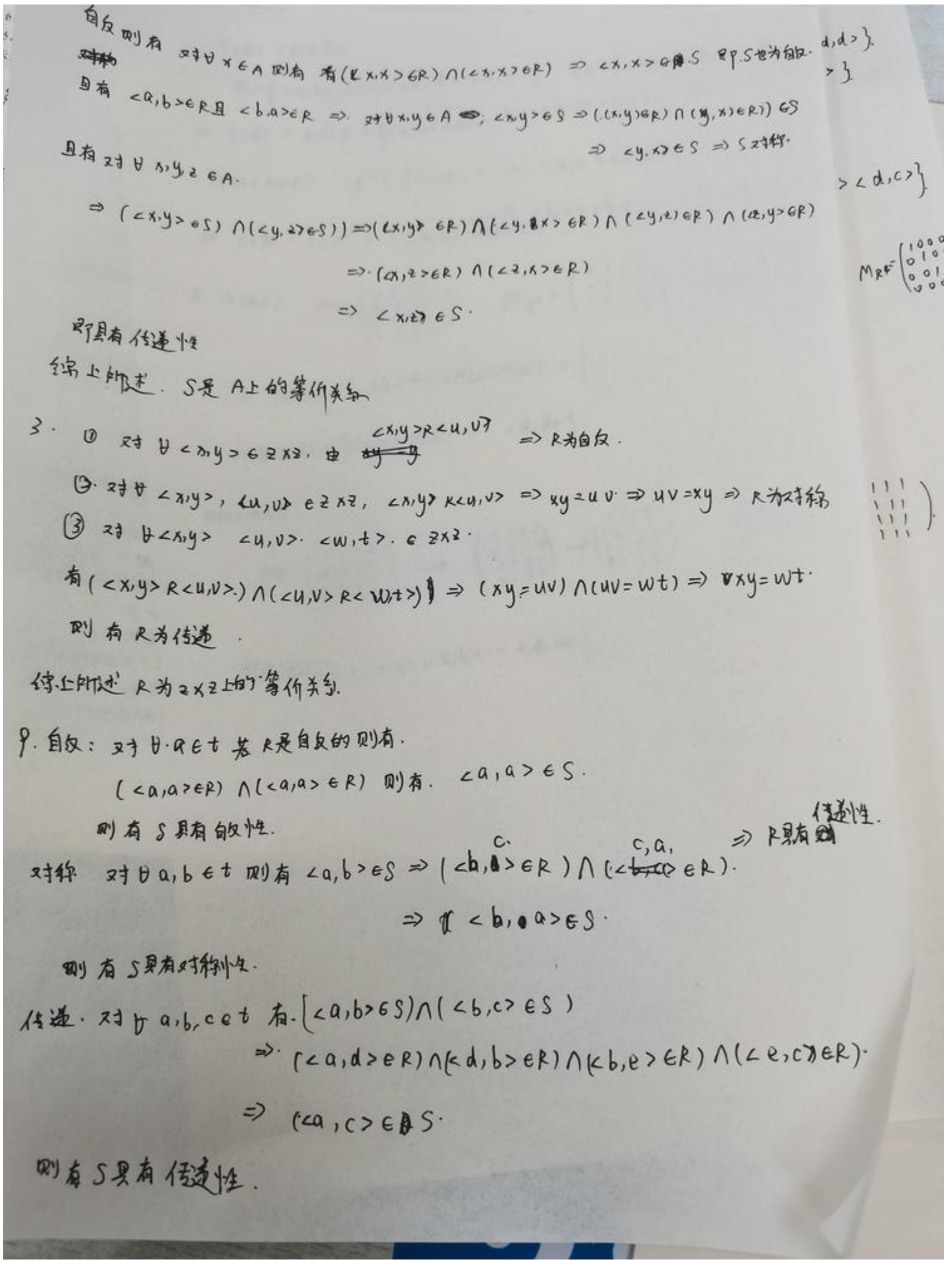
R是传递的 $\Rightarrow(\langle a,b\rangle\in R)\wedge(\langle b,c\rangle\in R)$

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in S$

∴S是传递的．

由①②③可知．若R是A上的一个等价关系．则S也是A上的一个等价关系．

用逻辑的方法书写证明



自反则有 ~~对称~~ 对$\forall x \in A$ 则有 有$(\langle x,x\rangle \in R) \wedge (\langle x,x\rangle \in R) \Rightarrow \langle x,x\rangle \in S$ 即S也为自反.

且有 $\langle a,b\rangle \in R$且$\langle b,a\rangle \in R \Rightarrow$ 对$\forall x,y \in A$; $\langle x,y\rangle \in S \Rightarrow ((x,y) \in R) \wedge ((y,x) \in R)) \in S$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in S \Rightarrow S$对称.

且有 对$\forall x,y,z \in A$.

$\Rightarrow (\langle x,y\rangle \in S) \wedge (\langle y,z\rangle \in S)) \Rightarrow (\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\langle y,x\rangle \in R) \wedge (\langle y,z\rangle \in R) \wedge (\langle z,y\rangle \in R)$

$\Rightarrow (\langle x,z\rangle \in R) \wedge (\langle z,x\rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in S$.

即具有传递性

综上所述. S是A上的等价关系

3. ① 对$\forall \langle x,y\rangle \in Z \times Z$. 由 ~~xy=xy~~ $\langle x,y\rangle R \langle u,v\rangle \Rightarrow R$为自反.

② 对$\forall \langle x,y\rangle, \langle u,v\rangle \in Z \times Z$, $\langle x,y\rangle R \langle u,v\rangle \Rightarrow xy = uv \Rightarrow uv = xy \Rightarrow R$为对称

③ 对$\forall \langle x,y\rangle$ $\langle u,v\rangle$. $\langle w,t\rangle$. $\in Z \times Z$.

有$(\langle x,y\rangle R \langle u,v\rangle) \wedge (\langle u,v\rangle R \langle w,t\rangle)) \Rightarrow (xy = uv) \wedge (uv = wt) \Rightarrow xy = wt$.

则有 R为传递.

综上所述 R为$Z \times Z$上的等价关系.

9. 自反: 对$\forall a \in t$ 若R是自反的则有.

$(\langle a,a\rangle \in R) \wedge (\langle a,a\rangle \in R)$ 则有. $\langle a,a\rangle \in S$.

则有 S具有自反性.

对称 对$\forall a,b \in t$ 则有 $\langle a,b\rangle \in S \Rightarrow (\langle b,\overset{c}{a}\rangle \in R) \wedge (\langle \overset{c,a}{\cancel{b,c}}\rangle \in R)$. $\Rightarrow R$具有传递性.

$\Rightarrow \langle b,a\rangle \in S$.

则有S具有对称性.

传递. 对$\forall a,b,c \in t$ 有.$(\langle a,b\rangle \in S) \wedge (\langle b,c\rangle \in S)$

$\Rightarrow (\langle a,d\rangle \in R) \wedge (\langle d,b\rangle \in R) \wedge (\langle b,e\rangle \in R) \wedge (\langle e,c\rangle \in R)$.

$\Rightarrow (\langle a,c\rangle \in S$.

则有S具有传递性.

d,d>}.

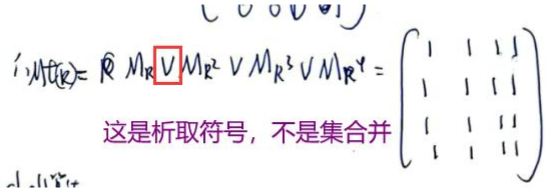
>}

> < d,c>}

$M_R =$

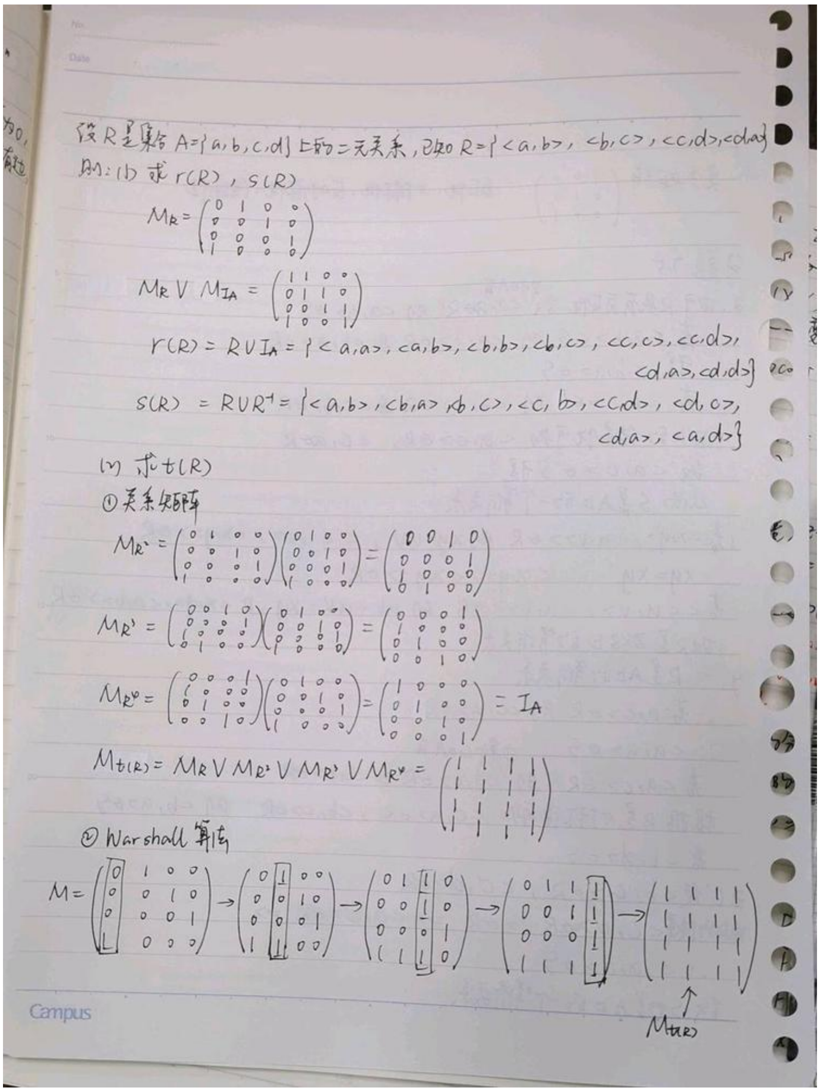
最后一题

书写注意



$$i, M_{t(R)} = R\ M_R \boxed{\vee} M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

这是析取符号，不是集合并



设R是集合A={a,b,c,d}上的二元关系，已知R={<a,b>, <b,c>, <c,d>,<d,a>}

则：(1) 求 r(R), s(R)

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R \vee M_{I_A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

r(R) = R∪I_A = {<a,a>, <a,b>, <b,b>, <b,c>, <c,c>, <c,d>, <d,a>, <d,d>}

s(R) = R∪R^{-1} = {<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,b>, <c,d>, <d,c>, <d,a>, <a,d>}

(2) 求t(R)

①关系矩阵

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_A$$

$$M_{t(R)} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

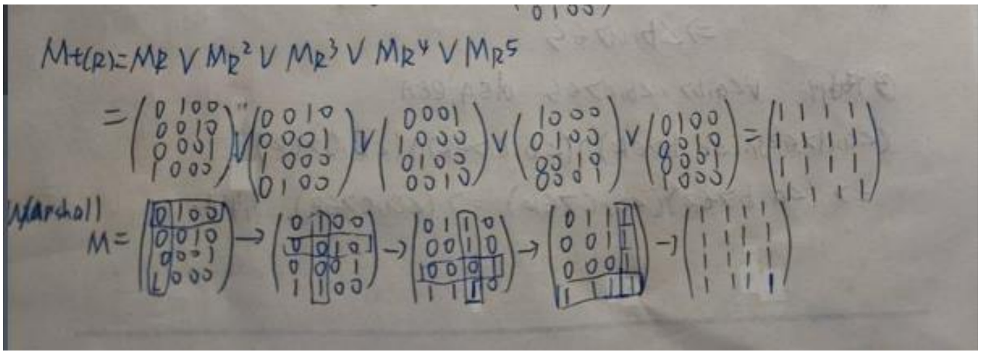
② Warshall 算法

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{t(R)}$

Campus

Warshall 行和列都圈起来



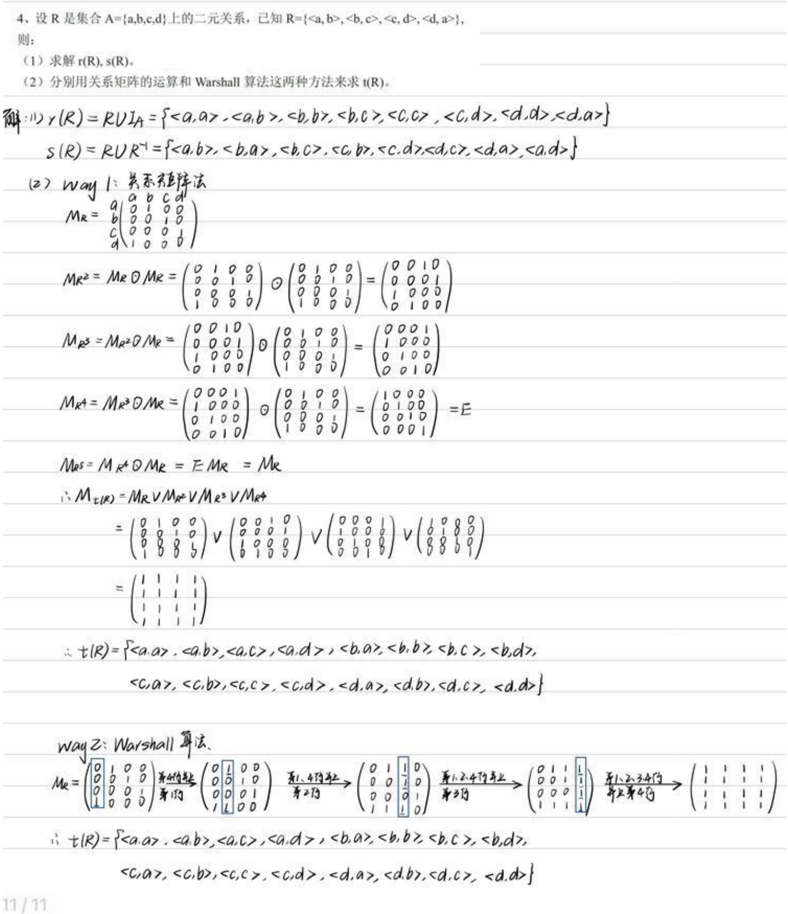
$$M_{t(R)} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4} \vee M_{R^5}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Warshall

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

两种方法都用的结果



4、设 R 是集合 A={a,b,c,d} 上的二元关系，已知 R={<a, b>, <b, c>, <c, d>, <d, a>}，则：

（1）求解 r(R), s(R)。

（2）分别用关系矩阵的运算和 Warshall 算法这两种方法来求 t(R)。

解：(1) $r(R) = R \cup I_A = \{<a,a>, <a,b>, <b,b>, <b,c>, <c,c>, <c,d>, <d,d>, <d,a>\}$

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,b>, <c,d>, <d,c>, <d,a>, <a,d>\}$

(2) way 1：关系矩阵法

$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \odot M_R = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} = E$$

$$M_{R^5} = M_{R^4} \odot M_R = E M_R = M_R$$

$$\therefore M_{t(R)} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4}$$

$$= \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$\therefore t(R) = \{<a,a>, <a,b>, <a,c>, <a,d>, <b,a>, <b,b>, <b,c>, <b,d>,$
$<c,a>, <c,b>, <c,c>, <c,d>, <d,a>, <d,b>, <d,c>, <d,d>\}$

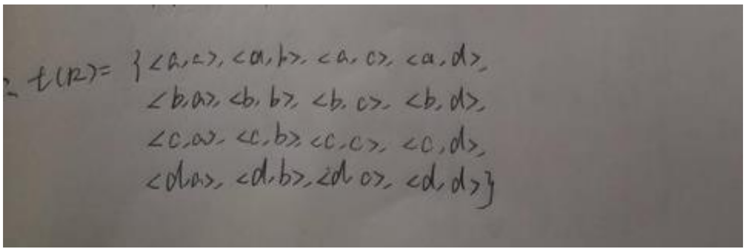
way 2：Warshall 算法、

$$M_R = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行}]{\text{第4行加上}} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行}]{\text{第1、4行加上}} \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行}]{\text{第1、2、4行加上}} \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加上第4行}]{\text{第1、2、3、4行}} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$\therefore t(R) = \{<a,a>, <a,b>, <a,c>, <a,d>, <b,a>, <b,b>, <b,c>, <b,d>,$
$<c,a>, <c,b>, <c,c>, <c,d>, <d,a>, <d,b>, <d,c>, <d,d>\}$

11 / 11

计算结束后，如果要求用列举法表示，还可以进一步书写为



$\therefore t(R) = \{<a,a>, <a,b>, <a,c>, <a,d>,$
$<b,a>, <b,b>, <b,c>, <b,d>,$
$<c,a>, <c,b>, <c,c>, <c,d>,$
$<d,a>, <d,b>, <d,c>, <d,d>\}$