作业: renewal process 1

截至日期:

本章阅读材料：例题7.3-7.20，7.23，7.25，P462 7.10(保险破产问题)

Problem 1

在更新过程$\{N(t), t \geq 0\}$中，更新间隔$X_i \sim UNIF(0,1)$, 更新函数为$M(t)$ 。
问题：建立关于$M(t)$的更新方程，并求当$0 \leq t \leq 1$ 时的更新函数$M(t)$.

Problem 2

$\{N(t), t \geq 0\}$为一更新过程，更新间隔$X_i, i = 1, 2, ...$的分布律如下：$P(X_i = 1) = \frac{1}{3}$,$P(X_i = 2) = \frac{2}{3}$
求：$P(N(2) = 1)$,$P(N(3) = 2)$

Problem 3

某客服中心的电话呼叫次数服从参数为λ的Possion过程。每次通话的时长$Y_i, i = 1, 2, ...$ 为iid r.v.s， $E(Y_i) = u < +\infty$。假设通话时，其它电话打不进来，$N(t)$表示$(0, t]$中打进电话的次数。
问题：建立更新过程模型，并求打进电话的平均速率。

Problem 4

$\{N(t), t \geq 0\}$为一更新过程，$M(t) = E[N(t)]$，更新间隔X_i的CDF为$F(x)$，$T_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$表示$t$时刻之前最后一次更新的时刻。
证明：$\forall 0 \leq x \leq t$， $F_{N(t)}(x) \triangleq P(T_{N(t)} \leq x) = 1 - F(t) + \int_0^x \overline{F}(t-y)dM(y)$。

Problem 5

(练习 7.3)以S_n记具有到达间隔分布函数F的更新过程$\{N(t), t \geq 0\}$的第n个事件时刻。
(a) 求：$P\{N(t) = n | S_n = y\}$;
(b) 当$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$时, 计算$P\{N(t) = n\}$
(Hints:

$$P\{N(t) = n\} = \int_0^\infty P\{N(t) = n | s_n = y\} f_{s_n}(y) dy$$

并且，n个参数为λ的独立指数随机变量的和服从参数为(n, λ)的伽马分布)

Problem 6

(练习 7.5)令$U_1, U_2, ...$是独立的$(0, 1)$均匀随机变量, 定义N为

$$N = min\{n : U_1 + U_2 + ... + U_n > 1\}$$

$E[N]$是多少?

Problem 7

SP $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新过程, 更新间隔$\{X_i, i \geq 1\}$ 的CDF为$F(x), M(t)$ 为更新函数，$A(t), Y(t)$ 分别表示系统在t时刻的年龄和剩余寿命。
问题：利用更新过程解的存在定理求$A(t), Y(t)$的CDF。