离散数学

Discrete mathematics

罗珺方

西南财经大学计算机与人工智能学院

luojf@swufe.edu.cn

回顾

一元关系

- **n阶笛卡尔积**：$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{<a_1, a_2, \ldots, a_n> | a_i \in A_i\}$
- **n元关系**：$R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$，R为$A_1, \ldots, A_n$上的n元关系。
- **二元关系**：R是A到B的二元关系$\Leftrightarrow R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in P(A \times B)$.
  - A称为关系R的前域，B称为关系R的后域。
  - $<x,y> \in R \Leftrightarrow$ x与y具有R关系$\Leftrightarrow$ xRy (R(x,y)或$<x,y> \in R$)。
  - 从A到B的不同关系共有　　　　个。
  - A上不同的二元关系共有　　　个。

luojf@swufe.edu.cn

回顾

- **R的定义域** (domain)： R中所有序偶的第一元素构成的集合
  domR = $\{x \mid x \in A, \exists y \in B, \langle x,y \rangle \in R\} \subseteq A$；
- **R的值域** (range)：R中所有序偶的第二元素构成的集合
  ranR = $\{y \mid y \in B, \exists x \in A, \langle x,y \rangle \in R\} \subseteq B$；
- **R的域** (field)：
  fldR = domR $\cup$ ranR。

luojf@swufe.edu.cn

回顾

关系的表示法

- **集合表示法**： 枚举法和叙述法；
- **关系图法**：A≠B和A=B；
- **关系矩阵法**

三种特殊的关系

- **空关系**： $R=\varnothing$；
- **A上的恒等关系**： $R=I_A=\{<x,x>|x\in A\}$ ；
- **全关系**： $R=A\times B$。

luojf@swufe.edu.cn

回顾

关系的交并差补和复合运算

设$A=\{a_1, a_2,\dots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2,\dots, b_p\}$，$C=\{c_1, c_2,\dots, c_n\}$

设R, S都是从集合A到B的两个关系：设$M_R=(a_{ij})_{m\times p}$, $M_S=(b_{ij})_{m\times p}$

1) $R\cup S=\{<x,y>\mid (xRy)\vee(xSy)\}\rightarrow M_R\cup M_S=(a_{ij}\vee b_{ij})_{m\times p}$

2) $R\cap S=\{<x,y>\mid (xRy)\wedge(xSy)\}\rightarrow M_R\cap M_S=(a_{ij}\wedge b_{ij})_{m\times p}$

3) $\overline{R}=\{<x,y>\mid (x\not R y)\}\rightarrow \overline{M_R}=(1-a_{ij})_{m\times p}$

4) $R-S=\{<x,y>\mid(xRy)\wedge(x\not S y)\}\rightarrow M_R-M_S=M_R\wedge\overline{M_S}=(a_{ij}\wedge(1-b_{ij}))_{m\times p}$

有相同的行数和列数

设$R: A\rightarrow B$, $S: B\rightarrow C$, $R\circ S: A\rightarrow C$。

5) $R\circ S=\{<x,z>\mid x\in A\wedge z\in C\wedge(\exists y)(y\in B\wedge xRy\wedge ySz)\}$

R和S是可复合的 $\Leftrightarrow$R的后域和S的前域完全相同。

回顾

复合关系的计算方法 (俗称过河拆桥法)(P.177)

$A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,4\}$ $C=\{1,2,3,4,5\}$

$R \subseteq A \times B$ $S \subseteq B \times C$

$R=\{<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>\}$

$S=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,2>,<4,5>\}$

(1) 枚举法

$R \circ S = \{<1,1>,<1,3>,<2,4>,<2,2>,<2,5>,<3,2>\}$

回顾

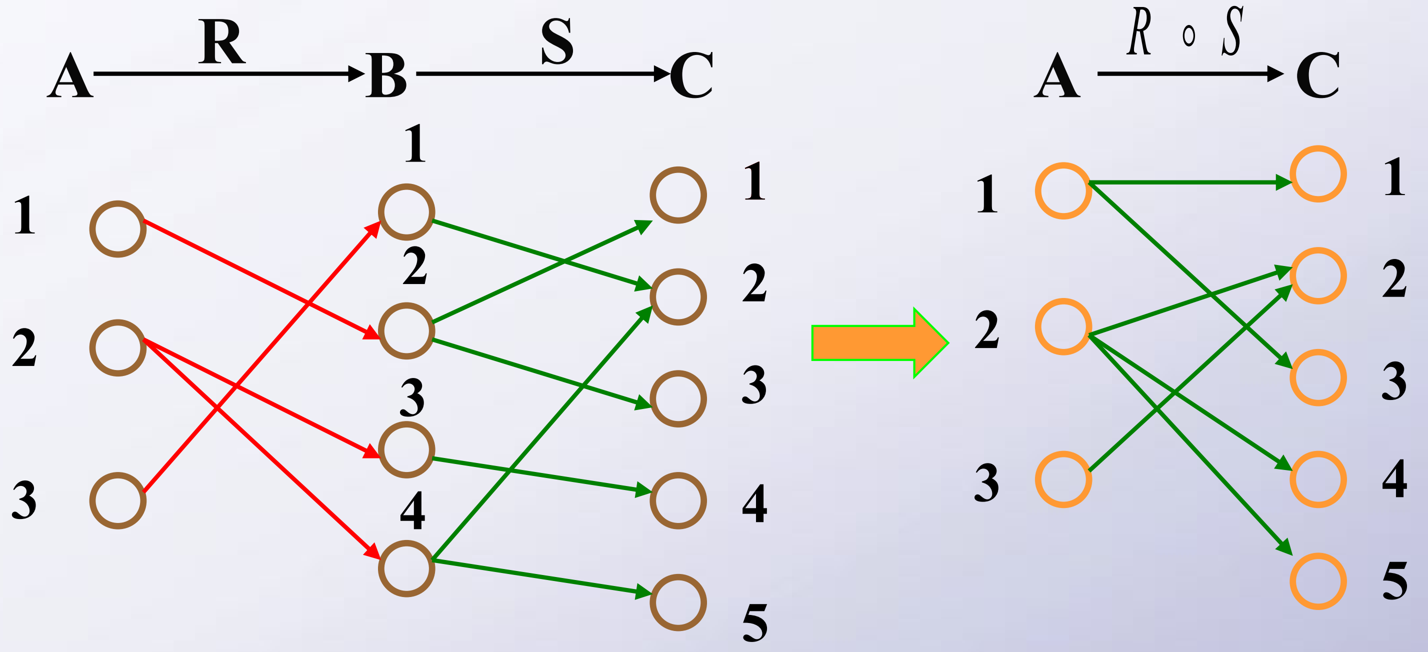
复合关系的计算方法 (俗称过河拆桥法)(P.177)

A={1,2,3} B={1,2,3,4} C={1,2,3,4,5}

R={<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>}

S={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,2>,<4,5>

(2) 有向图法



luojf@swufe.edu.cn

复合关系的计算方法 (俗称过河拆桥法)(P.177)

(3) 关系矩阵法

令$A=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2,\ldots, b_p\}$，$C=\{c_1, c_2,\ldots, c_n\}$

$R \subseteq A\times B$，$S \subseteq B\times C$，求$R\circ S$，

等价于求R与S对应关系矩阵的布尔积。 $M_{R\circ S} = M_R \odot M_S$ 。

luojf@swufe.edu.cn

关系矩阵的布尔积运算(P.172)

Definition

布尔积：如果$M_R=(a_{ij})$是m×p矩阵，$M_S=(b_{ij})$是p×n矩阵，
则A和B的布尔积是一个m×n矩阵，
记为$M_R \odot M_S = M_{R\circ S} =(c_{ij})$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{存在k使得} a_{ik}=1 \text{且} b_{kj}=1, \\ 0, & \text{否则}\end{cases} \quad (1 \le k \le p,\quad 1 \le i \le m,\quad 1 \le j \le n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\ldots\vee(a_{ik}\wedge b_{kj})$$
$$= \bigvee_{k=1}^{p}(a_{ik}\wedge b_{kj})\ (1\le i\le m, 1\le j\le n)$$

复合关系的计算方法 (俗称过河拆桥法)(P.178)

(3) 关系矩阵法

令$A=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2,\ldots, b_p\}$，$C=\{c_1, c_2,\ldots, c_n\}$ $R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，求$R\circ S$，等价于求R与S对应关系矩阵的布尔积。 $M_{R\circ S} = M_R \odot M_S$。

Example

$A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,4\}$ $C=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>\}$

$S=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,2>,<4,5>$

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times 4} \odot \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}_{4\times 5} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

❖**注意**

关系矩阵进行布尔积运算条件：

前一关系矩阵的列等于后一关系矩阵的行。

复合关系的计算方法 (俗称过河拆桥法)(P.178)

(4) 集合表示法

设 I 是实数集合，R和S都是I上的关系，定义如下：

$R=\{\langle x,y\rangle \mid y=x^2+3x\}$

$S=\{\langle y,z\rangle \mid z=2y+3\}$

$$x \xrightarrow{R} x^2+3x \xrightarrow{S} 2(x^2+3x)+3 = 2x^2+6x+3$$

所以 $R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid z=2x^2+6x+3\}$

luojf@swufe.edu.cn

复合关系的计算方法（过河拆桥法）

(1) 枚举法

(2) 有向图法z

(3) 关系矩阵法

(4) 集合表示法

luojf@swufe.edu.cn

设$A=\{1,2,3,4\}$，

$R=\{<1,2>,<2,2>,<3,4>\}$,$S=\{<2,4>,<3,1>,<4,2>\}$,

$T=\{<1,4>,<2,1>,<4,2>\}$是A上的三个关系。计算

(1) $R\circ S$和$S\circ R$；

(2) $(R\circ S)\circ T$和$R\circ (S\circ T)$。

设A={1,2,3,4}，
R={<1,2>,<2,2>,<3,4>},S={<2,4>,<3,1>,<4,2>},
T={<1,4>,<2,1>,<4,2>}是A上的三个关系。计算
(1) R∘S和S∘R；
(2) (R∘S)∘T和R∘(S∘T)。

(1) R∘S={<1,2>,<2,2>,<3,4>}∘{<2,4>,<3,1>,<4,2>}
={<1,4>,<2,4>,<3,2>}
S∘R={<2,4>,<3,1>,<4,2>}∘{<1,2>,<2,2>,<3,4>}
={<3,2>,<4,2>} **≠R∘S**

(2) (R∘S)∘T=({<1,2>,<2,2>,<3,4>}∘{<2,4>,<3,1>,<4,2>})∘{<1,4>,<2,1>,<4,2>}
={<1,4>,<2,4>,<3,2>}∘{<1,4>,<2,1>,<4,2>}
={<1,2>,<2,2>,<3,1>}
R∘(S∘T)={<1,2>,<2,2>,<3,1>} **=(R∘S)∘T**

luojf@swufe.edu.cn

复合运算的性质 (P.177)

❖注意

关系复合运算不满足交换律。

Theorem

设A、B、C和D是任意四个集合，R、S和T分别是从A到B，B到C和C到D的二元关系，则

(1) $R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$ ；**结合律**

(2) $I_A\circ R=R\circ I_B=R$, 其中 I_A 和 I_B 分别是A和B上的恒等关系。

❖分析

二元关系是集合，二元关系的复合是关系，从而也是集合，因此上面两式就是证明两个集合相等。根据集合相等的定义，有$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$并且$B\subseteq A$，

$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in A$，有$x\in B$。

luojf@swufe.edu.cn

(P.177)

$R\subseteq A\times B \quad S\subseteq B\times C \quad T\subseteq C\times D$,

求证结合律： $R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$

证明：任取 $\langle a,d\rangle \in R\circ(S\circ T)$

$\Leftrightarrow (\exists b)(b\in B \wedge \langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,d\rangle \in (S\circ T))$

$\Leftrightarrow (\exists b)(b\in B \wedge \langle a,b\rangle \in R \wedge (\exists c)(c\in C \wedge \langle b,c\rangle \in S \wedge \langle c,d\rangle \in T))$

$\Leftrightarrow (\exists b)(\exists c)(b\in B \wedge \langle a,b\rangle \in R \wedge (c\in C \wedge \langle b,c\rangle \in S \wedge \langle c,d\rangle \in T))$

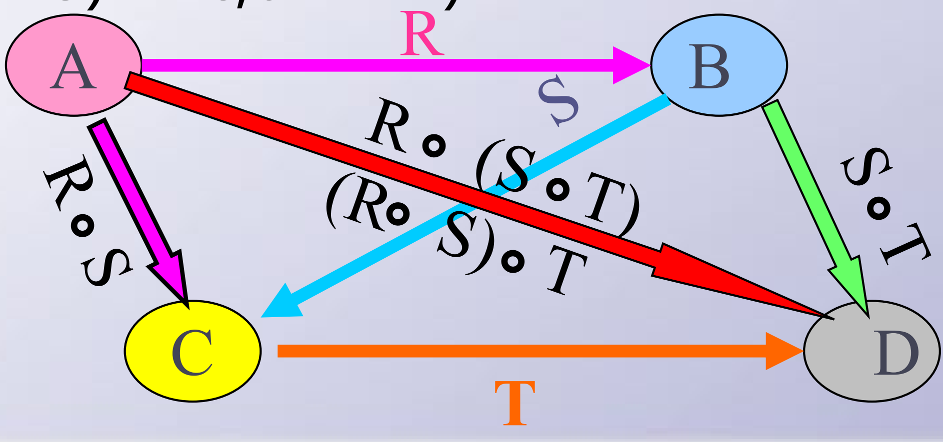
$\Leftrightarrow (\exists c)(\exists b)(c\in C \wedge (b\in B \wedge \langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in S \wedge \langle c,d\rangle \in T))$

$\Leftrightarrow (\exists c)(c\in C \wedge (\exists b)(b\in B \wedge \langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in S) \wedge \langle c,d\rangle \in T)$

$\Leftrightarrow (\exists c)(c\in C \wedge \langle a,c\rangle \in (R\circ S) \wedge \langle c,d\rangle \in T)$

$\Leftrightarrow \langle a,d\rangle \in (R\circ S)\circ T$

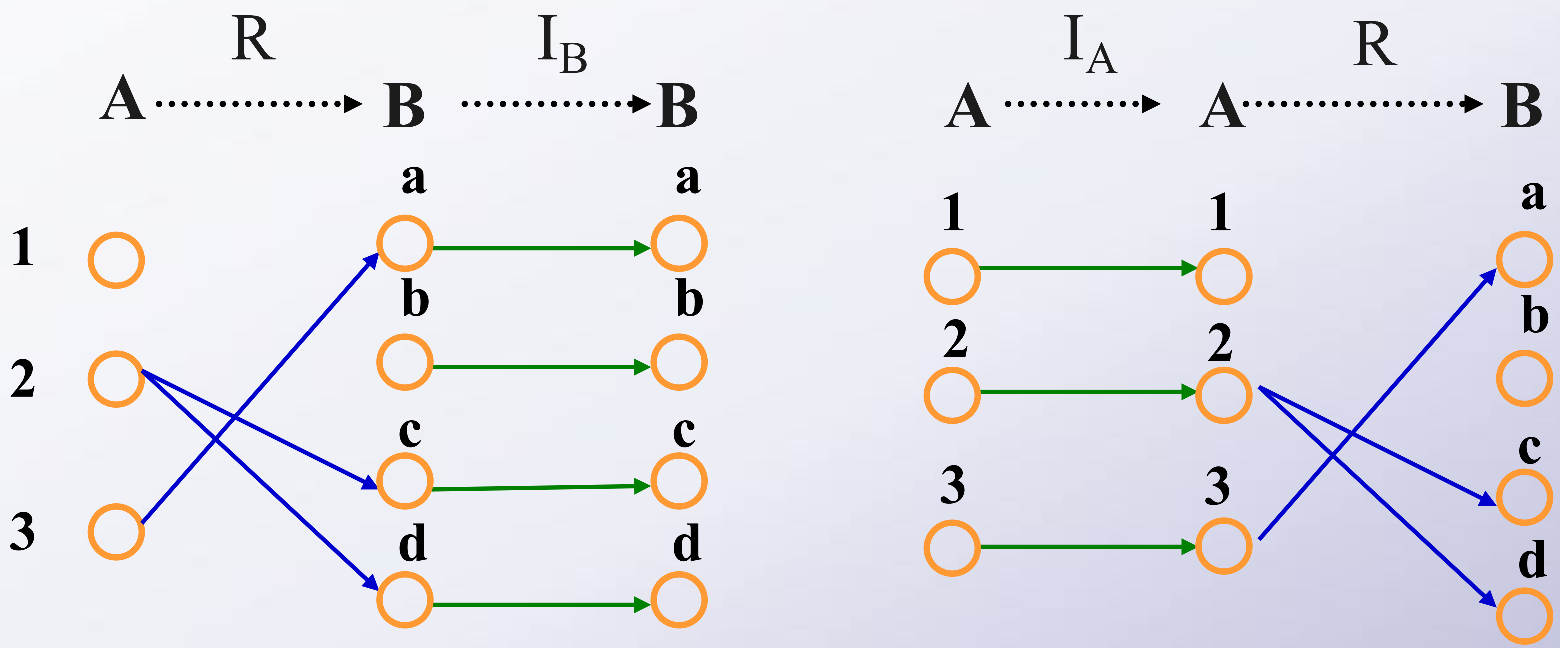
图形表示:



(P.179)

(2) $R \subseteq A\times B$, $I_A \circ R = R \circ I_B = R$。

验证: 令A={1,2,3}, B={a,b,c,d}, R={<a,c>,<a,d>,<3,a>}.



从这两个图看出它们的复合都等于R。(证明请参看P.179)

复合运算的性质 (P.179)

Theorem

$R \subseteq A \times B$，$S_1 \subseteq B \times C$，$S_2 \subseteq B \times C$，$T \subseteq C \times D$，则：

1) $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3) $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4) $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$。

luojf@swufe.edu.cn

复合运算的性质 (P.179)

求证：3) $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$。

对任意 $\langle b,d \rangle \in (S_1 \cup S_2) \circ T$

$\Leftrightarrow (\exists c)(c \in C \wedge \langle b,c \rangle \in (S_1 \cup S_2) \wedge \langle c,d \rangle \in T)$

$\Leftrightarrow (\exists c)(c \in C \wedge (\langle b,c \rangle \in S_1 \vee \langle b,c \rangle \in S_2) \wedge \langle c,d \rangle \in T)$

$\Leftrightarrow (\exists c)((c \in C \wedge \langle b,c \rangle \in S_1 \wedge \langle c,d \rangle \in T) \vee (c \in C \wedge \langle b,c \rangle \in S_2 \wedge \langle c,d \rangle \in T))$

$\Leftrightarrow \langle b,d \rangle \in (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$

luojf@swufe.edu.cn

求证：4) $(S_1 \cap S_2)\circ T \subseteq (S_1\circ T)\cap(S_2\circ T)$ 。

对任意$<b,d>\in(S_1\cap S_2)\circ T$，则由复合运算知至少存在$c\in C$,使得$<b,c>\in(S_1\cap S_2)$, $<c,d>\in T$。

即：$<b,c>\in S_1$且$<b,c>\in S_2$。

因此，由$<b,c>\in S_1$,且$<c,d>\in T$，

则有：$<b,d>\in(S_1\circ T)$,

由$<b,c>\in S_2$,且$<c,d>\in T$，则有：$<b,d>\in(S_2\circ T)$。

所以$<b,d>\in(S_1\circ T)\cap(S_2\circ T)$。即，

$(S_1\cap S_2)\circ T\subseteq(S_1\circ T)\cap(S_2\circ T)$。

luojf@swufe.edu.cn

关系的幂运算(P.183)

令R是A上的关系，由于复合运算可结合，所以关系的复合可以写成乘幂形式。

Definition

设R是集合A上的关系，则R的n次幂，记为R^n,定义如下：

1) $R^0 = I_A = \{<x,x> | x \in A\}$；
2) $R^1 = R$ ；
3) $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$。

❖注意

- 对于A上的任何关系R_1和R_2都有：$R_1^0 = R_2^0 = I_A$；
- 对于A上的任何关系 R 都有：$R^1 = R$。

关系的幂的求法

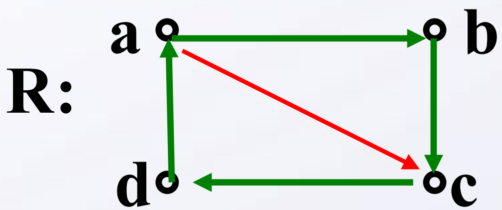
给定A上的关系R和自然数n，怎样计算R^n呢？

- 如果R是用**集合表达式**给出的，可以通过n-1次复合计算得到R^n。
- 如果R是用**关系矩阵**M给出的，则R^n的关系矩阵是M^n，即n个矩阵M的布尔积。
- 如果R是用**关系图**G给出的，可以直接由图G得到R^n的关系图G'。G'的结点集与G相同。考察G的每个结点x_i，如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达结点x_j，则在G'中加一条从x_i到x_j的边。当把所有这样的边都找到以后，就得到图G'。

关系的幂运算(P.183)

$$R \circ R = R^2, R^2 \circ R = R \circ R^2 = R^3 \ldots$$

Example



R是A上关系，如上图所示, 可见$<a,c> \in R^2$,
表明在R的关系图上从a到c有两条边的路径:a→b→c。
$<a,d> \in R^3$,表明在R图上有从a到d有三条边的路径：a→b→c→d。 …
如果$<x,y> \in R^k$,表明在R图上有从x到y有k条边(长为k)的路径($x, y \in A$)。

关系的幂的求法

Example

设A={a,b,c,d}, R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>},
求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示。

关系的幂的求法

Example

设A={a,b,c,d}, R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}, 求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示。

解 R的关系矩阵为M　$R^0=I_A$的关系矩阵为M^0

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关系的幂的求法

Example

R^2, R^3和R^4的矩阵分别是：

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

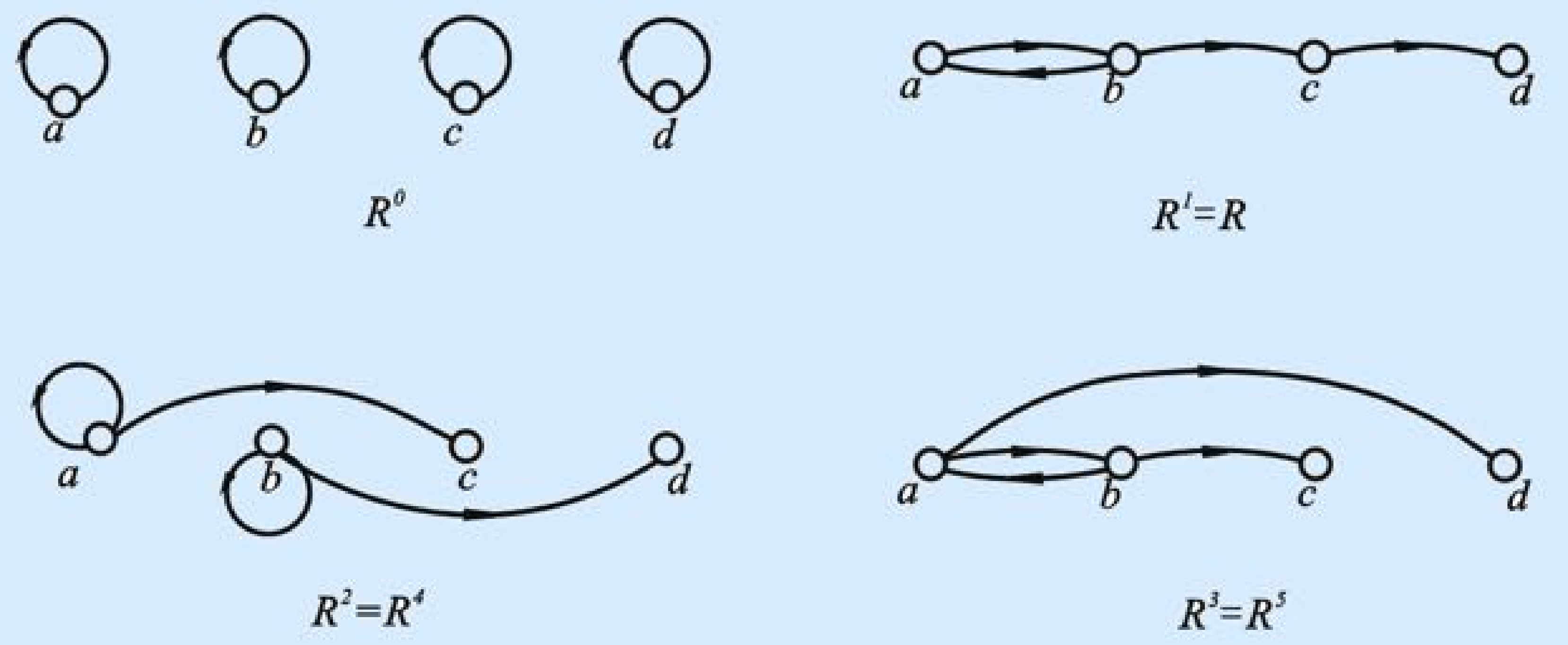
因此，$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

$R^2=R^4=R^6=\ldots$,　$R^3=R^5=R^7=\ldots$

关系的幂的求法

Example

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示



关系的幂运算的性质

Theorem

设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 i 和 j，使得 $R^i = R^j$，其中 $0 \le i < j \le 2^{n^2}$。

鸽笼原理：如果将n+1个东西放到n个盒子里，那么必有一个盒子放两个东西。

证明：R为A上的关系，由于|A|=n,

A上的不同关系有$|P(A\times A)|=2^{n^2}$个。

列出 R 的各次幂$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}$共有$2^{n^2}+1$个，它们都是A×A的子集。

根据鸽笼原理，必存在自然数 i 和 j 使得 $R^i=R^j$。

luojf@swufe.edu.cn

关系的幂运算的性质

Theorem

设 R 是 A 上的关系, m, n$\in$N, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

luojf@swufe.edu.cn

关系的幂运算的性质

Theorem

设 R 是 A 上的关系, m, n$\in$N, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证：用归纳法

(1) 对于任意给定的m$\in$N,

若n=0, 则有 $R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$,

假设$R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1}$,

所以对一切m, n$\in$N有$R^m \circ R^n = R^{m+n}$。

luojf@swufe.edu.cn

关系的幂运算的性质

Theorem

设 R 是 A 上的关系, m, n∈N, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证：用归纳法

(2) 对于任意给定的 m∈N,

若n=0, 则有 $(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$，则有

$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$

所以对一切 m,n∈N 有 $(R^m)^n = R^{mn}$。

luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.178)

Definition

设A，B是两个集合，R是A到B的关系，则从B到A的关系

$$R^{-1}=\{<y,x>|<x,y>\in R\}$$

称为R的逆关系,运算“-1”称为逆运算。

- $<y,x>\in R^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in R.$

❖注意

- 关系是一种集合，逆关系也是一种集合
- 如果R是一个关系，则R^{-1}和 $\overline{R}$ ($\overline{R}=\{<x,y>|\ (x \not R y)\ \}$)都是关系，但$R^{-1}$和$\overline{R}$是完全不同的两种关系，不要混淆。
- $(R^{-1})^{-1}=R$； $\varnothing^{-1}=\varnothing$。

luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.179)

Example

设A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d}, C={2,3,4,5},
R是从A到B的一个关系且
R={<1,a>,<2,c>,<3,b>,<4,b>, <4,d>},
S是从B到C的一个关系且
S={<a,2>,<b,4>, <c,3>,<c,5>,<d,5>}。
(1) 计算R^{-1}，并画出R和R^{-1}的关系图；
(2) 写出R和R^{-1}的关系矩阵；
(3) 计算$(R\circ S)^{-1}$和$S^{-1}\circ R^{-1}$。

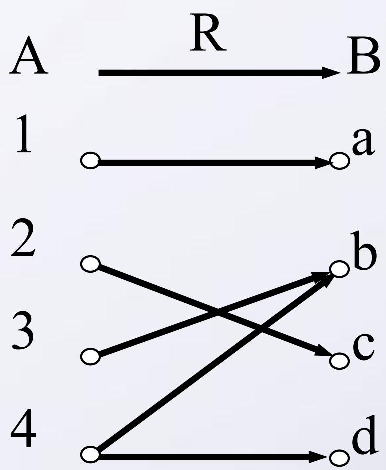
luojf@swufe.edu.cn

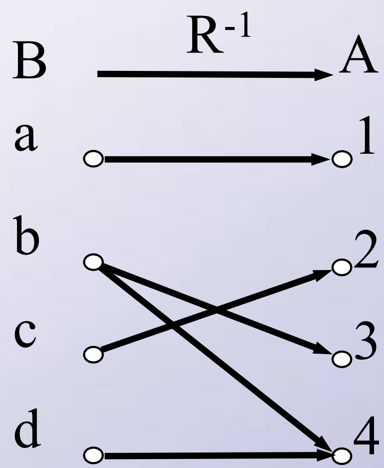
关系的逆运算(P.179)

Example

(1)$R^{-1}=\{\langle a,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle d,4\rangle\}$，
R和R^{-1}的关系图见图6.3.3和图6.3.4。

R^{-1}的关系图: 是将R的有向图的所有边的方向颠倒即可。





luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.179)

Example

(2) R和R^{-1}的关系矩阵为：

R^{-1}的矩阵 $M_{R^{-1}}=(M_R)^T$ 即为R矩阵的转置

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\qquad M_{R^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.179)

Example

(3)

$\because R \circ S=\{<1,2>,<2,3>,<2,5>,<3,4>,<4,4>,<4,5>\}$,

$\therefore (R \circ S)^{-1}=\{<2,1>,<3,2>,<5,2>,<4,3>,<4,4>,<5,4>\}$.

$\because R^{-1}=\{<a,1>,<c,2>,<b,3>,<b,4>,<d,4>\}$,

$S^{-1}=\{<2,a>,<4,b>,<3,c>,<5,c>,<5,d>\}$,

$\therefore S^{-1} \circ R^{-1}=\{<2,1>,<3,2>,<5,2>,<4,3>,<4,4>,<5,4>\}$.

$$(R \circ S)^{-1}=S^{-1} \circ R^{-1}$$

关系的逆运算(P.179)

❖注意

1) 将R的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得R^{-1}的关系图，反之亦然；
2) 将R的关系矩阵转置即得R^{-1}的关系矩阵，即R和R^{-1}的关系矩阵互为转置矩阵。
3) R^{-1}的前域与后域正好是R的后域和前域，并且$domR=ranR^{-1}$，$domR^{-1}=ranR$；
4) $|R|=|R^{-1}|$。

luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.180)

Theorem

R: A→B, S: B → C的二元关系，

则 $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。 **(注意≠$R^{-1}\circ S^{-1}$)**

证明：任取$<c, a>\in(R\circ S)^{-1}$

$\Leftrightarrow <a, c>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow (\exists b)(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S)$

$\Leftrightarrow (\exists b)(b\in B\wedge <c,b>\in S^{-1}\wedge <b,a>\in R^{-1})$

$\Leftrightarrow <c, a>\in S^{-1}\circ R^{-1}$

luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.180)

Theorem

设R，S是从集合A到集合B的关系，则有

(1) $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$； (分配性)

$(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$；

$(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$；

(2) $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$； (可换性)

$(A\times B)^{-1} = (B\times A)$；

(3) $S\subseteq R \Leftrightarrow S^{-1}\subseteq R^{-1}$； (单调性)

luojf@swufe.edu.cn

关系的逆运算(P.180)

Example

(1) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

证明：任取$<b,a>\in(R\cup S)^{-1}$，则

$<b,a>\in(R\cup S)^{-1} \Leftrightarrow <a,b>\in R\cup S$

$\Leftrightarrow <a,b>\in R \vee <a,b>\in S$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R^{-1} \vee <b,a>\in S^{-1}$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R^{-1}\cup S^{-1}$

所以 $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$。

(2) $(\bar{R})^{-1}=\overline{R^{-1}}$

证明：任取$<b,a>\in(\bar{R})^{-1} \Leftrightarrow <a,b>\in \bar{R} \Leftrightarrow <a,b>\notin R$

$\Leftrightarrow <b,a>\notin R^{-1} \Leftrightarrow <b,a>\in\overline{R^{-1}}$。

(3) $R\subseteq S \Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

充分性，已知$R^{-1}\subseteq S^{-1}$，则任取$<a,b>\in R$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R^{-1} \Rightarrow <b,a>\in S^{-1} \Leftrightarrow <a,b>\in S$ $\therefore R\subseteq S$

必要性，已知$R\subseteq S$，则任取$<b,a>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <a,b>\in R \Rightarrow <a,b>\in S \Leftrightarrow <b,a>\in S^{-1}$ $\therefore R^{-1}\subseteq S^{-1}$

3.2.3 关系的性质 (P.186)

注意

- **本节中所讨论的关系都是集合A上的关系。**
（前后域相同且A非空）
- **关系的性质主要有：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。**

luojf@swufe.edu.cn

关系性质的定义(P.187)

Definition

自反性: 设R是集合A上的关系，
如果对于$\forall x \in A$，都有$<x, x> \in R$ (xRx)，
那么称R在A上是自反的，
或称R具有自反性。

- R在A上是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to <x,x> \in R)=1$，
- R在A上不是自反的 $\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge <x,x> \notin R))=1$

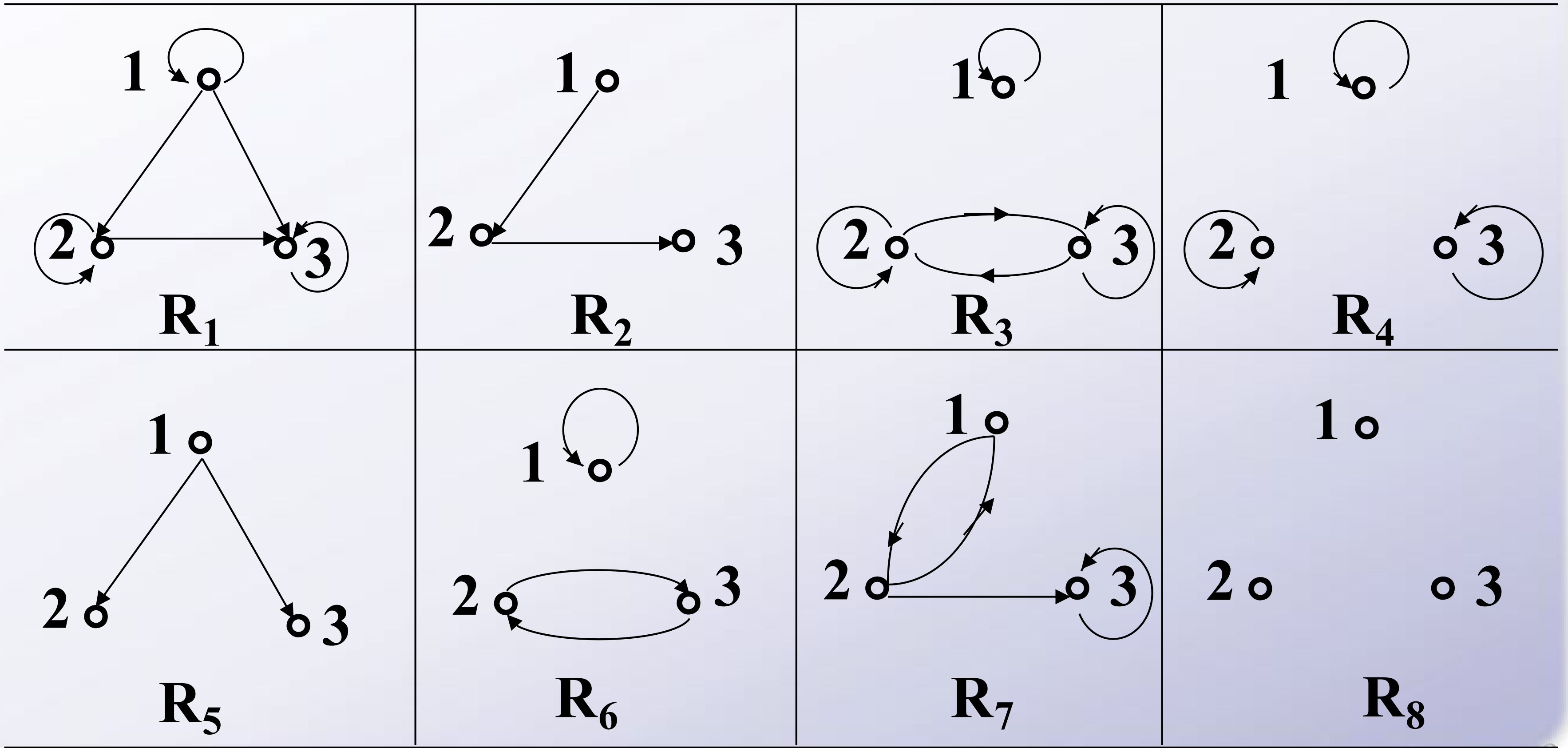
Example

在实数集合中，“≤”是自反关系，因为对任意实数x，有$x \le x$。

关系性质的定义(P.187)

- 从关系有向图看**自反性**：每个结点都有环。
- 从关系矩阵看**自反性**：主对角线都为1。

A={1,2,3}，写出关系矩阵并判断哪些是自反的关系？



关系性质的定义(P.187)

Definition

反自反性: 设R是集合A上的关系，

如果对于$\forall x \in A$，都有$\langle x, x \rangle \notin R$，

那么称R在A上是反自反的，

或称R具有反自反性。

- R在A上是反自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to \langle x,x \rangle \notin R)=1$，
- R在A上不是反自反的 $\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \langle x,x \rangle \in R))=1$

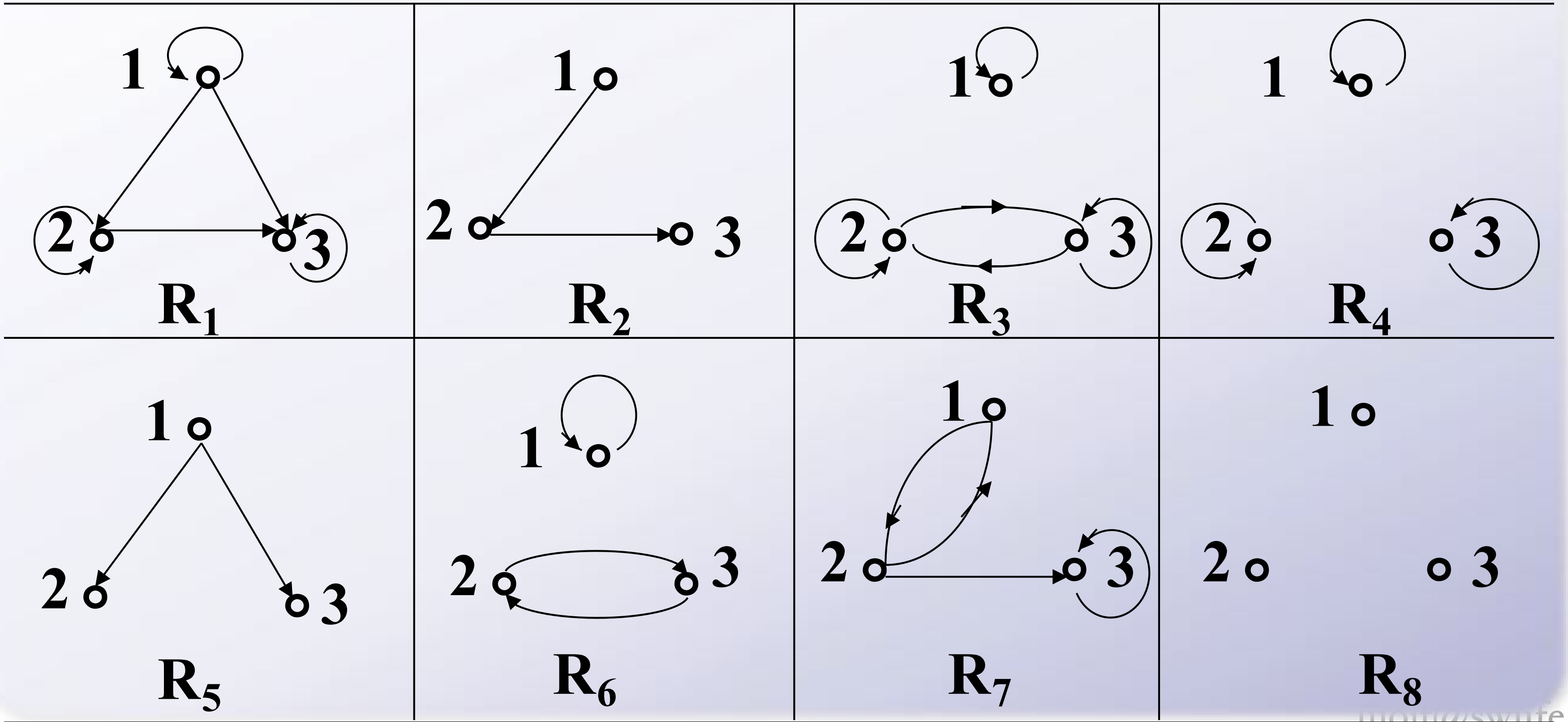
Example

实数的大于关系>，父子关系是反自反的。

关系性质的定义(P.187)

- 从关系有向图看**反自反性**: 每个结点都无环。
- 从关系矩阵看**反自反性**: 主对角线都为0。

A={1,2,3}，确定以下关系哪些是反自反的？



关系性质的定义(P.189)

Example

设A={1,2,3}，定义A上的关系R,S和T如下：

- R={<1,1>,<1,2>,<2,2>,<3,3>}；
- S={<1,2>,<2,3>,<3,1>}；
- T={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>,<3,3>}。

1) 判定它们是否具有自反性和反自反性，
2) 写出R, S, T的关系矩阵并画出关系图。

关系性质的定义(P.189)

Example

设A={1,2,3}，定义A上的关系R,S和T如下：

- R={<1,1>,<1,2>,<2,2>,<3,3>}；
- S={<1,2>,<2,3>,<3,1>}；
- T={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>,<3,3>}。

1) 判定它们是否具有自反性和反自反性，

2) 写出R, S, T的关系矩阵并画出关系图。

1) 解

a) 因为A中$\forall x$，都有$<x,x>\in R$，所以R是自反的；

b) 因为A中$\forall x$，都有$<x,x>\notin S$，所以S是反自反的；

c) 因为存在$2\in A$，使$<2,2>\notin T$，所以T不是自反的；
又因为存在$1\in A$，使$<1,1>\in T$，所以T不是反自反，
即T既不是自反的，也不是反自反的。

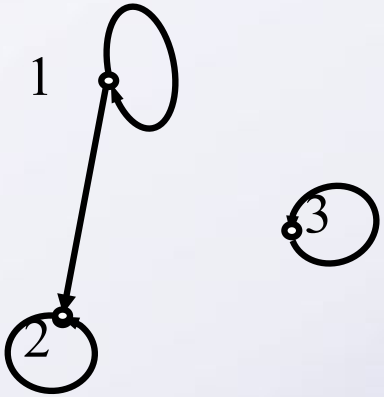
关系性质的定义(P.190)

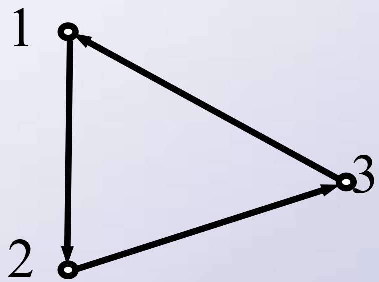
Example

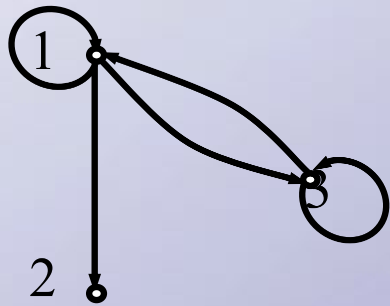
2) 解 设R,S和T的关系矩阵分别为M_R,M_S和M_T，则:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R,S和T的关系图分别如下：







luojf@swufe.edu.cn

关系性质的定义(P.190)

❖注意

1) 关系R是自反的 ⇔ R一定不是反自反的；
2) 存在既不是自反的也不是反自反的关系；
3) 关系R是自反的⇔关系图中每个结点都有自环，
4) 关系R是反自反的⇔关系图中每个结点都无自环;
5) 关系R是自反的⇔关系矩阵的主对角线上全为1，
6) 关系R是反自反的⇔关系矩阵的主对角线上全为0.

luojf@swufe.edu.cn

关系性质的定义(P.192)

Example

设集合|A|=n，请计算A上具有自反性和反自反性关系的个数。

关系性质的定义(P.192)

Example

设集合|A|=n，请计算A上具有自反性和反自反性关系的个数。

(1) A={a,b}, 计算A上所有具有自反性的关系R的个数。

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ 共2*2=4种

(2) A={a,b,c}, 计算A上所有具有自反性的关系R的个数.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$: 共2^6种。

关系性质的定义(P.189)

Definition

对称性: 设R是集合A上的关系，对任意的$x,y\in A$，
如果$\langle x,y\rangle\in R$，那么$\langle y,x\rangle\in R$,
则称关系R是对称的，
或称R具有对称性。

- R在A上是对称的 $\Leftrightarrow$
  $(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R)\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)=1.$
- R在A上是对称的$\Leftrightarrow$对$\forall x,y\in A$, 有: $\langle x,y\rangle\in R$并且$\langle y,x\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\notin R$并且$\langle y,x\rangle\notin R$。
- R在A上不是对称的 $\Leftrightarrow$ $\exists x,y\in A$, 有$\langle x,y\rangle\in R$并且$\langle y,x\rangle\notin R$ 或$\langle x,y\rangle\notin R$并且$\langle y,x\rangle\in R$；

Example

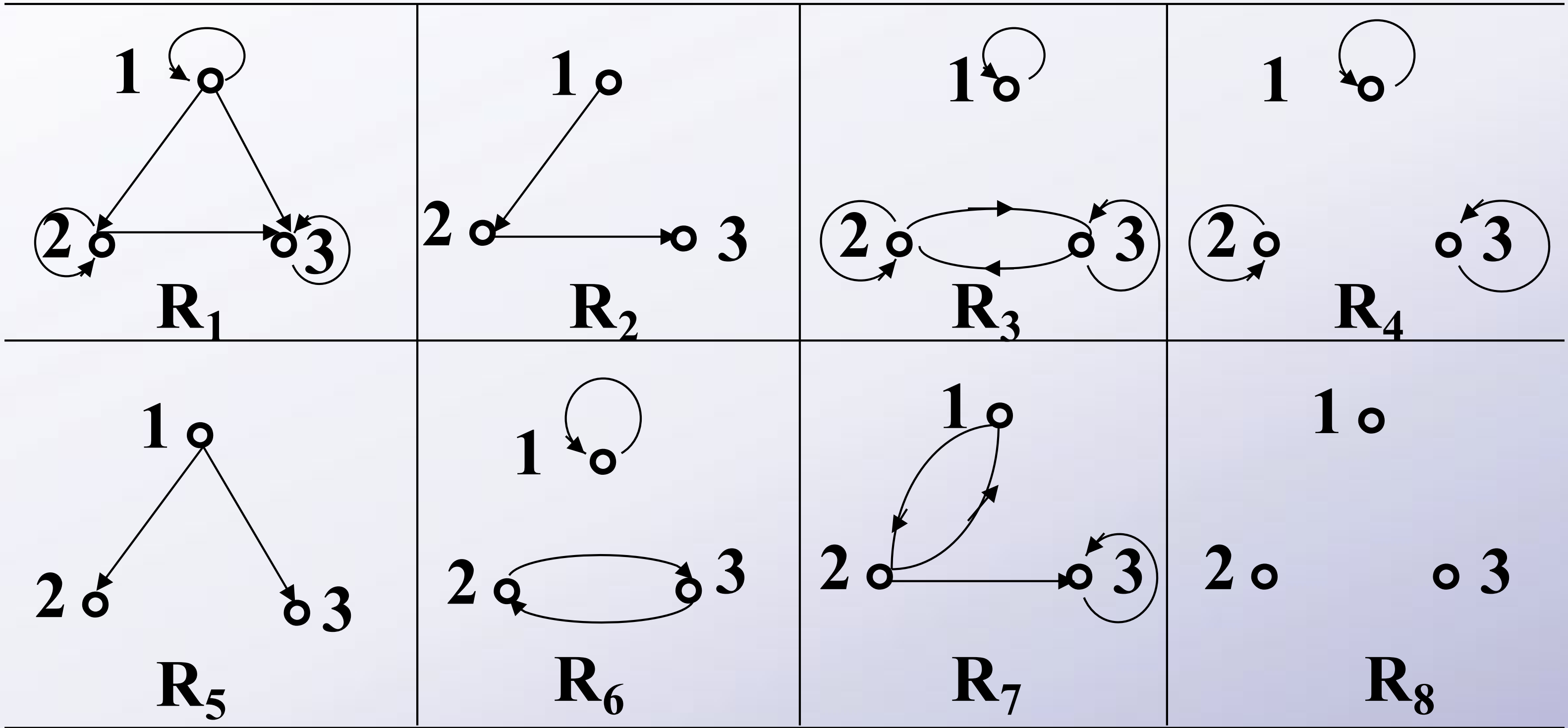
邻居关系和朋友关系是对称关系。

关系性质的定义(P.189)

（ <x,y>∉R并且<y,x>∉R ）

- 从关系有向图看**对称性**：在两个不同的结点之间，若有边，则有方向相反的两条边。无边亦可
- 从关系矩阵看**对称性**：以主对角线对称的矩阵。

A={1,2,3}，确定以下关系哪些是对称的？



关系性质的定义(P.189)

Definition

反对称性: 设R是集合A上的关系，对任意的$x,y\in A$，如果$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,x\rangle\in R$，那么$x=y$，(或如果$x\neq y$且$\langle x,y\rangle\in R$，那么$\langle y,x\rangle\notin R$) 则称关系R是反对称的，或称R具有反对称性。

- R在A上是反对称的 $\Leftrightarrow$ $(\forall x)(\forall y)(x\in A\wedge y\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)=1$
- R在A上是反对称的 $\Leftrightarrow$ 如果$x\neq y$, 则$\langle x,y\rangle\notin R$或$\langle y,x\rangle\notin R$
- R在A上不是反对称的 $\Leftrightarrow$ $\exists x,y\in A, x\neq y, \langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,x\rangle\in R$.

Example

小于等于关系，包含关系，整除关系是反对称关系。

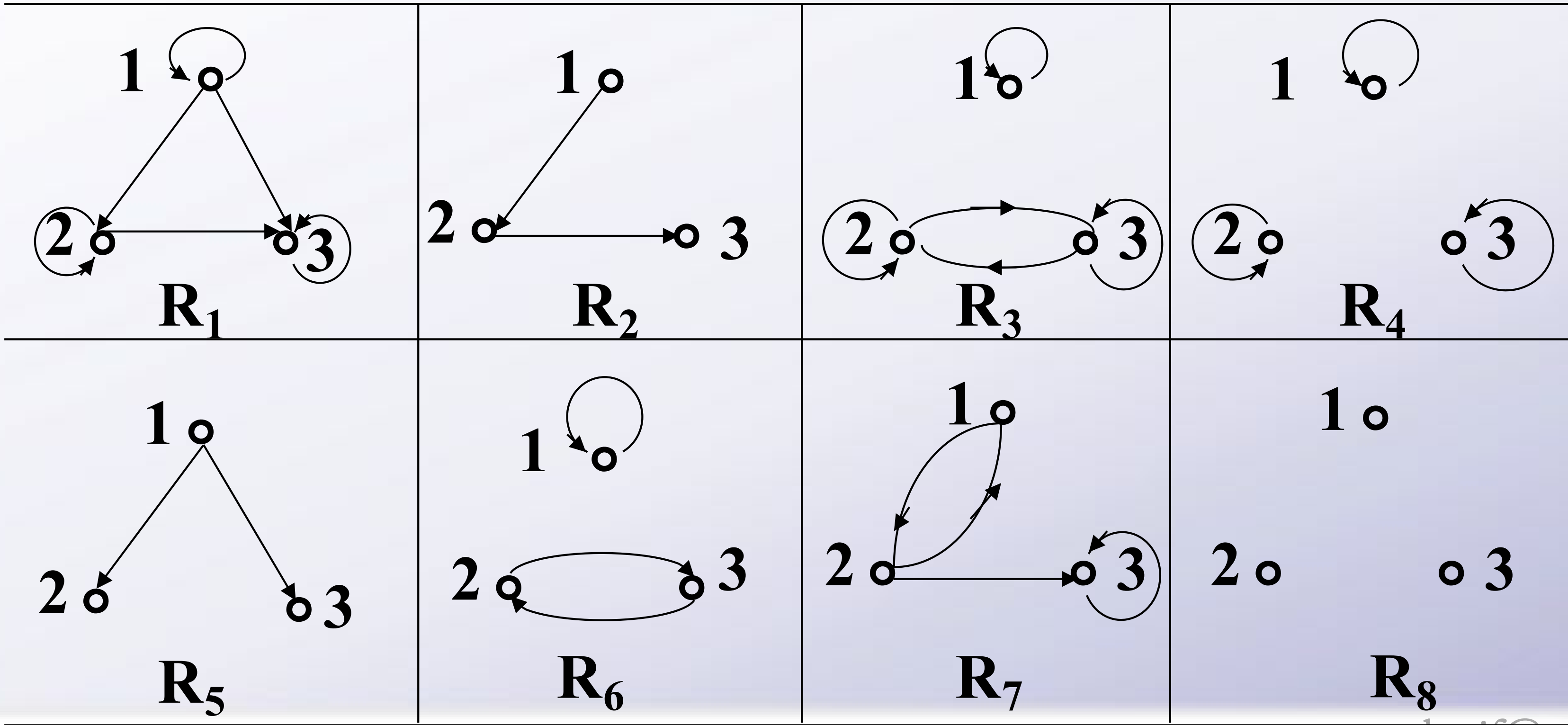
luojf@swufe.edu.cn

关系性质的定义(P.189)

从关系有向图看**反对称性**: 两个不同的结点之间最多有一条边。无边亦可。(<x,y>∉R并且<y,x>∉R)

从关系矩阵看**反对称性**: 以主对角线为对称的两个元素中最多有一个1。

A={1,2,3}，确定以下关系哪些是反对称的？



关系性质的定义(P.188)

❖注意

1) 存在既不是对称也不是反对称的关系，也存在既是对称也是反对称的关系；
2) 关系R是对称的⇔关系图中任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；
3) 关系R是反对称的⇔关系图中任何一对结点之间，至多有一条边；
4) 关系R是对称的⇔R的关系矩阵为对称矩阵 $M_R=(M_R)^T$,
   关系R是反对称的⇔R的关系系矩阵满足 $r_{ij}\wedge r_{ji}=0$, $i,j=1,2,\ldots,n$, $i\neq j$。

关系性质的定义(P.191)

Definition

传递性: 设R是集合A上的关系，对任意的x,y,z∈A，

如果<x,y>∈R且<y,z>∈R，那么<x,z>∈R，

则称关系R是传递的，

或称R具有传递性。

- R在A上是传递的⇔(∀x)(∀y)(∀z)(x∈A∧y∈A∧z∈A∧<x,y>∈R∧<y,z>∈R→<x,z>∈R)=1。
- R在A上是传递的⇔如果<x,y>∈R, <y,z>∈R且<x,z>∈R;
- R在A上是传递的⇔如果<x,y>∉R或者<y,z>∉R;
- R在A上是不传递的⇔有<x,y>∈R且<y,z>∈R, 但<x,z>∉R.

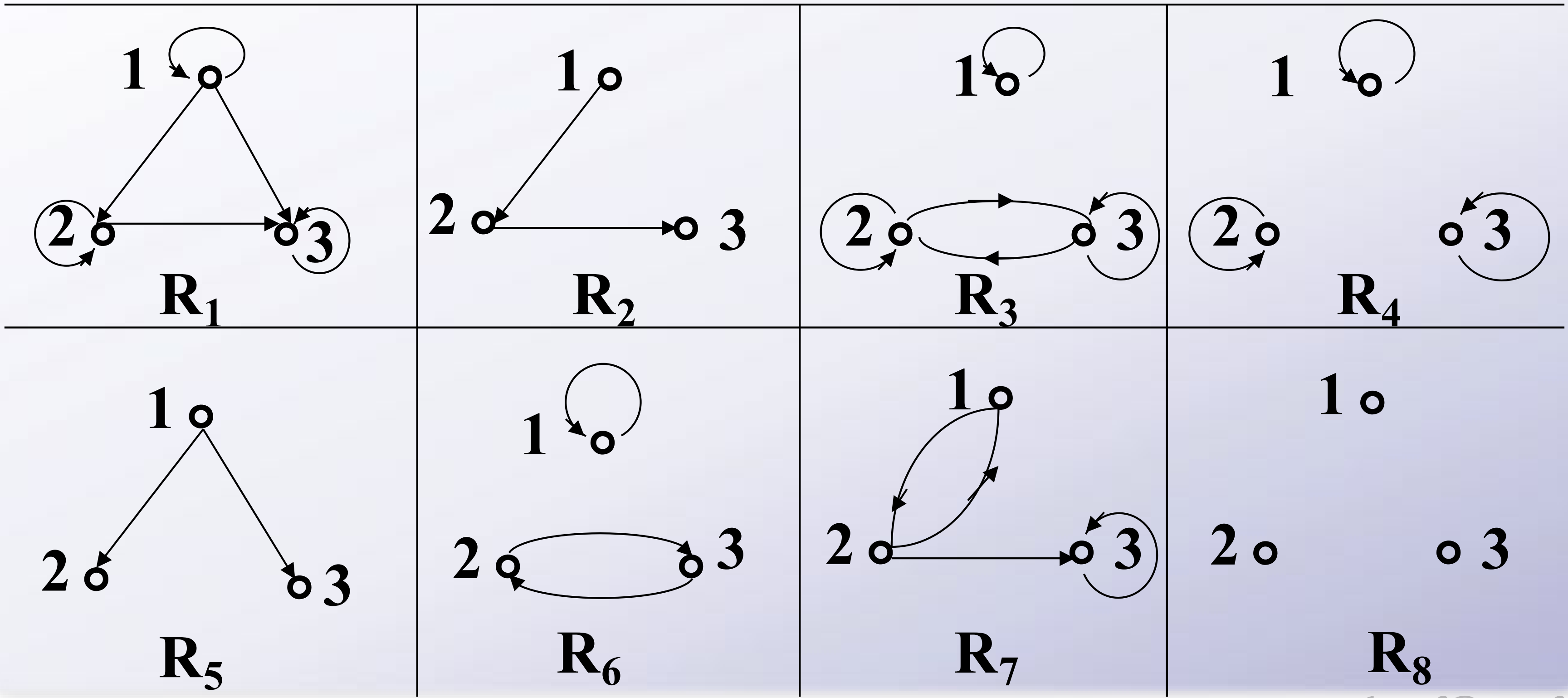
Example

实数集中的≤、 <,集合⊆、⊂是传递的。

关系性质的定义(P.191)

- **从关系有向图看传递性**：如果顶点x_i到x_j有边，顶点x_j到x_k有边，则x_i到x_k有边。无边亦可。($<x,y> \notin R$或者$<y,x> \notin R$)
- 从关系矩阵看**传递性**: 若$r_{ij}=1 \wedge r_{jk}=1$则$r_{ik}=1$。

A={1,2,3}，确定以下关系哪些是传递的？



总结

	自反	反自反	对称	反对称	传递
定义	$<x,x>\in R$	$<x,x>\notin R$	$<x,y>\in R\Rightarrow <y,x>\in R$	$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R\Rightarrow x=y$	$<x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\Rightarrow <x,z>\in R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	每对结点间或有方向相反的两条边,或无任何边	每对结点间至多有一条边存在	任三个结点x,y,z之间,若从x到y有一条边,从y到z有一条边,则从x到z一定有一条边
关系矩阵	对角线上全为1	对角线上全为0	对称矩阵	$r_{ij}\wedge r_{ji}=0$, $i,j=1,2,\ldots,n$, $i\neq j$	若$r_{ij}=1\wedge r_{jk}=1$ 则$r_{ik}=1$

❖谓词表示法

- R在A上是自反的 ⇔ $(\forall x)(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \in R)=1$
- R在A上是反自反的 ⇔ $(\forall x)(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)=1$
- R在A上是对称的 ⇔ $(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in A\wedge \langle x,y\rangle \in R)\rightarrow \langle y,x\rangle \in R)=1$。
- R在A上是反对称的 ⇔ $(\forall x)(\forall y)(x\in A\wedge y\in A\wedge \langle x,y\rangle \in R\wedge \langle y,x\rangle \in R\rightarrow x=y)=1$
- R在A上是传递的 ⇔ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge \langle x,y\rangle \in R\wedge \langle y,z\rangle \in R\rightarrow \langle x,z\rangle \in R)=1$

luojf@swufe.edu.cn

❖集合法

设R为A上的关系，则

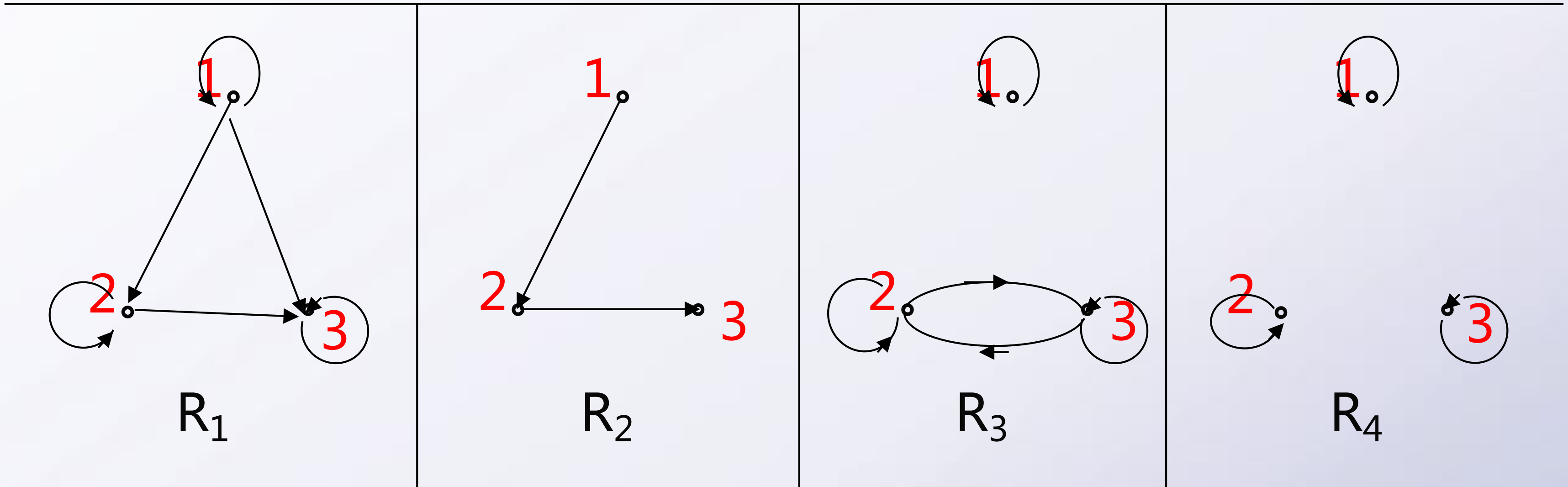
- R在A上自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$；
- R在A上反自反 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$；
- R在A上对称 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$；
- R在A上反对称 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$；
- R在A上传递 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$。

证明：P195。

luojf@swufe.edu.cn

Example

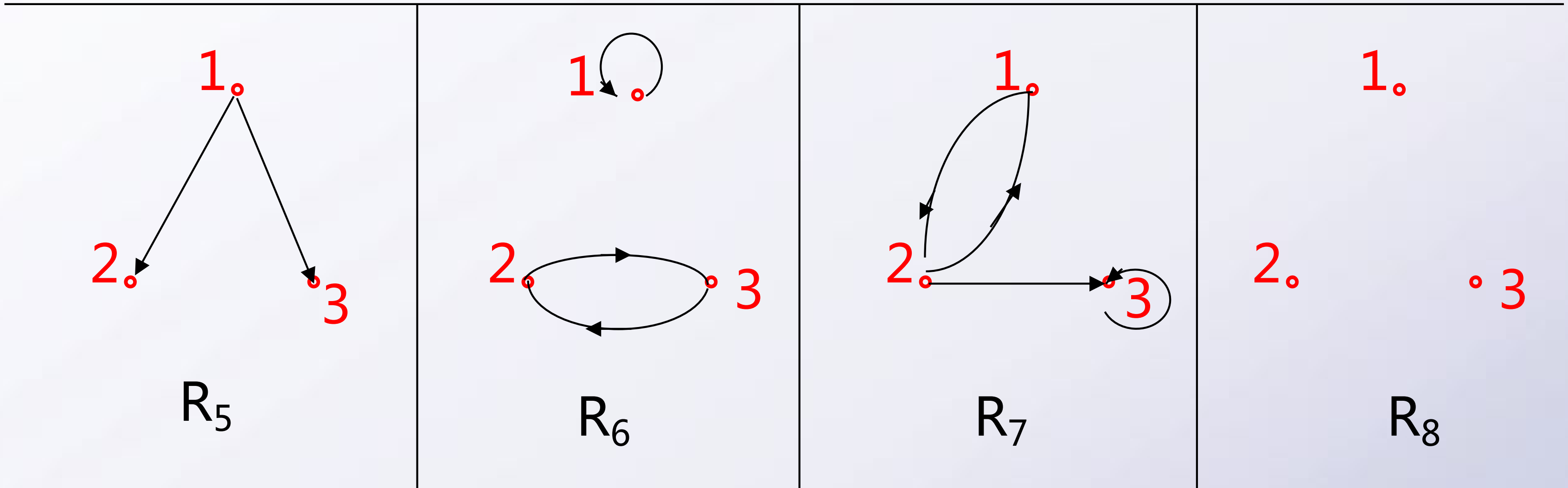
归纳这八个关系的性质：Y-有　　N-无



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	Y	N	N	Y	Y
R_2	N	Y	N	Y	N
R_3	Y	N	Y	N	Y
R_4	Y	N	Y	Y	Y

Example

归纳这八个关系的性质：Y-有　　N-无

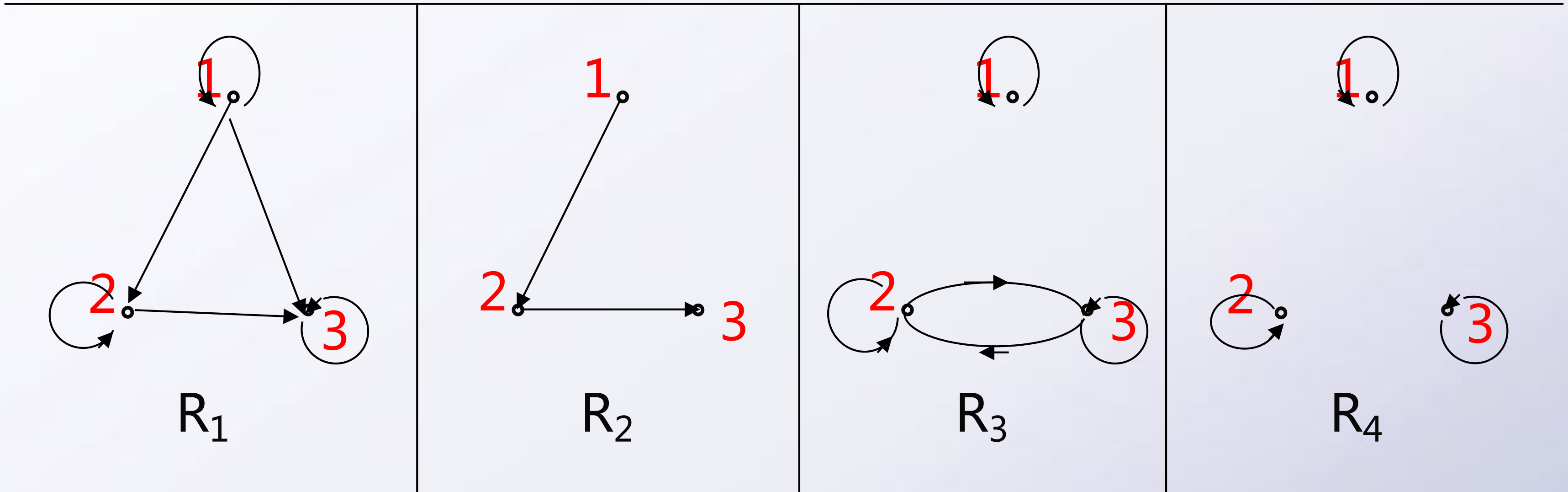


	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_5					
R_6					
R_7					
R_8					

luojf@swufe.edu.cn

Example

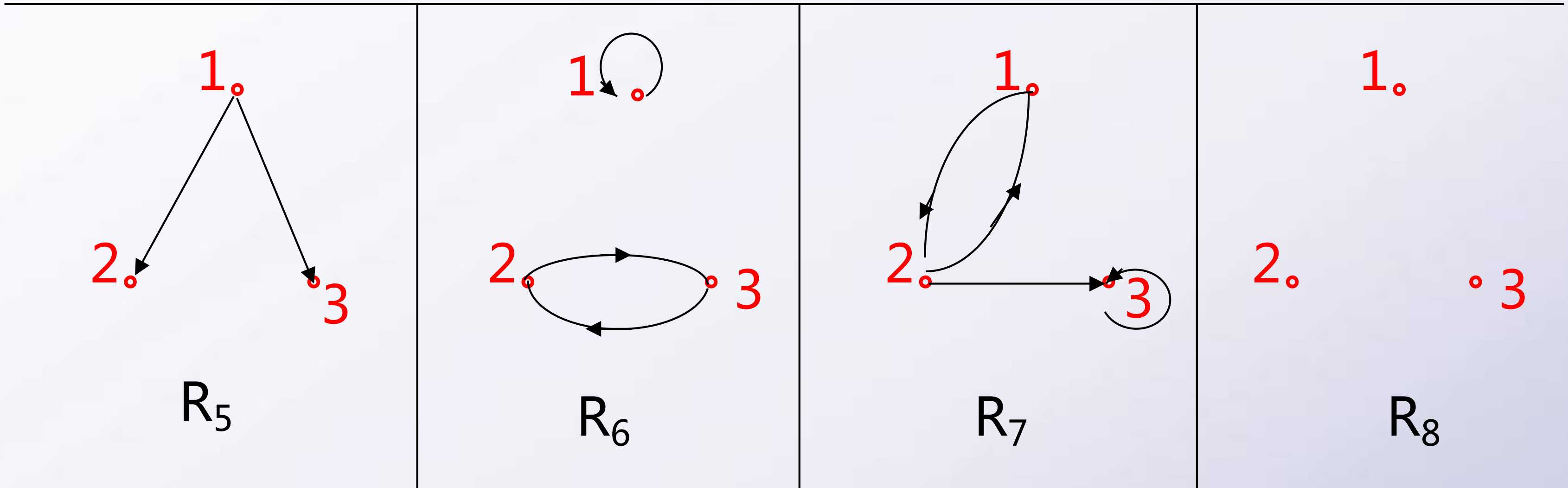
归纳这八个关系的性质：Y-有　　N-无



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1					
R_2					
R_3					
R_4					

Example

归纳这八个关系的性质：Y-有　　N-无



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_5	N	Y	N	Y	Y
R_6	N	N	Y	N	N
R_7	N	N	N	N	N
R_8	N	Y	Y	Y	Y

(p.193)

Example

判定下列关系所具有的特殊性质。

(1) 集合A上的空关系；

(2) 集合A上的恒等关系；

(3) 集合A上的全关系；

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
空关系					
恒等关系					
全关系					

(p.193)

Example

判定下列关系所具有的特殊性质。

(1) 集合A上的空关系；

(2) 集合A上的恒等关系；

(3) 集合A上的全关系；

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
空关系	×	√	√	√	√
恒等关系	√	×	√	√	√
全关系	√	×	√	×	√

(p.194)

Example

Eg1: 假设A={a,b,c,d}，R={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,d>}是定义在A上的关系。试判定R所具有的特殊性质。

Eg2: 设R={<1,1>,<2,2>}，试判断R在集合A和B上具备的特殊性质，其中A={1,2},B={1,2,3}。

luojf@swufe.edu.cn

(p.194)

Example

Eg1: 假设A={a,b,c,d}，R={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,d>}是定义在A上的关系。试判定R所具有的特殊性质。

解 由前面的分析可知，R既不是自反的，也不是反自反的；既不是对称的，也不是反对称的；而且也不是传递的。即R不具备关系的任何性质。

Eg2: 设R={<1,1>,<2,2>}，试判断R在集合A和B上具备的特殊性质，其中A={1,2},B={1,2,3}。

解 当R是定义在集合A上的关系时，R是自反、对称、反对称和传递的；当R是定义在集合B上的关系时，R是对称、反对称和传递的。

❖注意

绝对不能脱离所在的集合来谈论关系的性质。