§3.4 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

二、特征值与特征向量的求法

三、特征子空间

四、特征值与特征向量的性质

引入

有限维线性空间V中取定一组基后，V的任一线性变换都可以用矩阵来表示. 为了研究线性变换性质，希望这个矩阵越简单越好，如对角矩阵.

从本节开始，我们主要讨论，对某个给定V的线性变换，如何选择一组适当的基，使此变换在这组基下的矩阵是一个对角矩阵?

$$\sigma\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right) = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right) = \left(\lambda_1\varepsilon_1, \lambda_2\varepsilon_2, \cdots, \lambda_n\varepsilon_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

一、特征值与特征向量的概念

定义： 设 σ 是数域P上线性空间V的一个线性变换，若对于P中的一个数 λ_0 存在一个V的非零向量 ξ，使得

$$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi \quad ,$$

则称 λ_0 为 σ 的一个**特征值**，称 ξ 为 σ 的属于特征值 λ_0 的**特征向量**.

注： ① 几何意义：特征向量经线性变换后方向保持相同 $(\lambda_0>0)$ 或相反 $(\lambda_0<0)$. $\lambda_0=0$ 时，$\sigma(\xi)=0$.

② 若 ξ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则

$k\xi\ \ (k\in P, k\neq 0)$ 也是 σ 的属于 λ_0 的特征向量.

$$\left(\ \because\ \ \sigma(k\xi)=k\sigma(\xi)=k(\lambda_0\xi)=\lambda_0(k\xi)\ \right)$$

由此知，特征向量不是被特征值所唯一确定的，但是特征值却是被特征向量所唯一确定的，即若 $\sigma(\xi)=\lambda\xi$ 且 $\sigma(\xi)=\mu\xi$ ，则 $\lambda=\mu$.

二、特征值与特征向量的求法

分析： 设 $\dim V = n$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是V的一组基，线性变换σ在这组基下的矩阵为A.

设λ_0是σ的特征值，它的一个特征向量ξ在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标记为$\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$,

则$\sigma(\xi)$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标为 $A\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$,

而$\lambda_0\xi$ 的坐标是 $\lambda_0\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$， 又 $\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$

于是 $A\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$， 从而 $(\lambda_0 E-A)\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}=0.$

即 $\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$是线性方程组 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的解，

又 $\because \xi\neq 0$, $\therefore \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}\neq 0$,

称 λ_0 为 A 的特征值，$\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$为 A 的属于 λ_0 的特征向量.

从而 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 有非零解.

所以它的系数行列式 $|\lambda_0 E - A| = 0.$

以上分析说明:

若 λ_0 是 σ 的特征值，则 $|\lambda_0 E - A| = 0.$

反之，若 $\lambda_0 \in P$ 满足 $|\lambda_0 E - A| = 0,$

则齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 有非零解.

若 $(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})'$ 是 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 一个非零解，

则向量 $\xi = x_{01}\varepsilon_1 + \cdots + x_{0n}\varepsilon_n$ 就是 σ 的属于 λ_0 的一个特征向量.

λ_0是 σ的特征值 $\Leftrightarrow \lambda_0$ 是 A 的特征值

$\Leftrightarrow (\lambda_0 E - A)X = 0$有非零解

$\Leftrightarrow \left|\lambda_0 E - A\right| = 0.$

$\xi = x_{01}\varepsilon_1 + \cdots + x_{0n}\varepsilon_n$ 是σ 的属于λ_0的一个特征向量

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})'$是$(\lambda_0 E - A)X = 0$ 一个非零解.

1. 特征多项式的定义

设 $A \in P^{n\times n}$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq f_A(\lambda)$$

称为A的**特征多项式**.

（ $f_A(\lambda)$是数域P上的一个n次多项式）

注：

① 若矩阵A是线性变换 σ 关于V的一组基的矩阵，而 λ_0 是 σ 的一个特征值，则 λ_0 是特征多项式 $f_A(\lambda)$ 的根，即 $f_A(\lambda_0)=0.$

反之，若 λ_0 是A的特征多项式的根，则 λ_0 就是 σ 的一个特征值.（所以，特征值也称**特征根**.）

② 矩阵A的特征多项式的根有时也称为A的**特征值**，而相应的线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解也就称为A的属于这个特征值的**特征向量**.

2. 求特征值与特征向量的一般步骤

i) 在V中任取一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,写出$\sigma$在这组基下的矩阵A.

ii) 求A的特征多项式$|\lambda E-A|$ 在P上的全部根,它们就是σ的全部特征值.

iii) 把所求得的特征值逐个代入方程组

$$(\lambda E-A)X=0$$

并求出它的一组基础解系.(它们就是属于这个特征值的全部线性无关的特征向量在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标.)

如果特征值 λ_0 对应方程组的基础解系为：

$$(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n}),(c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n}),\cdots,(c_{r1},c_{r2},\cdots,c_{rn})$$

则 $\eta_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\varepsilon_j,\quad i=1,2,\cdots,r$

就是属于这个特征值 λ_0 的全部线性无关的特征向量.

而 $\xi=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_r\eta_r,$

（其中，$k_1,k_2,\cdots,k_r\in P$ 不全为零）

就是 σ 的属于 λ_0 的全部特征向量.

例1. 在线性空间V中，数乘变换K在任意一组基下的矩阵都是数量矩阵kE，它的特征多项式是

$$\left|\lambda E - kE\right| = (\lambda - k)^n.$$

故数乘法变换K的特征值只有数k，且

对 $\forall \xi \in V \quad (\xi \neq 0)$，皆有 $K(\xi) = k\xi.$

所以，V中任一非零向量皆为数乘变换K的特征向量.

例2. 设线性变换σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$$

求σ的特征值与特征向量.

解：A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

故σ的特征值为：$\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=5$

把 $\lambda=-1$ 代入齐次方程组 $(\lambda E-A)X=0$，得

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}\qquad 即\quad x_1+x_2+x_3=0$$

它的一个基础解系为：$(1,0,-1)$，$(0,1,-1)$

因此，属于-1的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\quad \xi_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3$$

而属于-1的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\qquad (k_1,k_2\in P\ 不全为零)$$

把 $\lambda = 5$ 代入齐次方程组 $(\lambda E - A)X = 0$，得

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解得它的一个基础解系为：(1,1,1)

因此，属于5的一个线性无关的特征向量为

$$\xi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

而属于5的全部特征向量为

$$k_3\xi_3, \qquad (k_3 \in P，\ k_3 \neq 0\ )$$

例3. 设线性变换 D 是 $P[x]_3$ 的微商变换，即

$$D(f(x)) = f'(x), \forall f(x) \in P[x]_3,$$

求 D 的特征值与特征向量.

解：取 $P[x]_3$ 的一组基 $\varepsilon_1=1$， $\varepsilon_2=x$， $\varepsilon_3=x^2$，

则 $D(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3,$

故 σ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$

把 $\lambda=0$ 代入齐次方程组$(\lambda E-A)X=0$, 得

$$\begin{cases}-x_2=0\\-2x_3=0\end{cases}$$

它的一个基础解系为：(1,0,0),

因此，属于 0 的线性无关的特征向量为ε_1,

从而属于0 的全部特征向量为

$$k\varepsilon_1, \qquad (k\in P,\text{且}k\neq 0).$$

三、特征子空间

定义： 设σ为n维线性空间V的线性变换，λ_0为σ的一个特征值，令V_{λ_0}为σ的属于λ_0的全部特征向量再添上零向量所成的集合，即$V_{\lambda_0}=\left\{\alpha \middle| \sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha\right\}$

则V_{λ_0}是V的一个子空间, 称之为σ的一个**特征子空间**.

$$\because \quad \sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\lambda_0\alpha+\lambda_0\beta=\lambda_0(\alpha+\beta)$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)=k(\lambda_0\alpha)=\lambda_0(k\alpha)$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta\in V_{\lambda_0}, \qquad k\alpha\in V_{\lambda_0}$$

注：

若 σ 在n维线性空间V的某组基下的矩阵为A，则

$$\dim V_{\lambda_0} = n - \text{秩}(\lambda_0 E - A)$$

即特征子空间 V_{λ_0}的维数等于齐次线性方程组

$$(\lambda_0 E - A)X = 0 \qquad (*)$$

的解空间的维数，且由方程组(*)得到的属于λ_0的全部线性无关的特征向量就是V_{λ_0}的一组基.

四、特征值和特征向量的性质

1. 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in P^{n\times n}$，则A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n}-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}|A|$$

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$|\lambda E-A|=0$的$n$个根，

则$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$$=\lambda^{n}-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

由多项式根与系数的关系还可得

① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$.

2. A可逆 $\Leftrightarrow$ A的特征值都不为**0.**

3. 设 $AX=\lambda X$，则

(1) $A^2X = AAX = \lambda AX = \lambda^2 X$,

同理， $A^m X = \lambda^m X$,

(2) $(kA)X = (k\lambda)X$,

$$(3)(a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E)X$$

$$= (a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0)X.$$

例如，$(A^3 - 2A + 3E)X = (\lambda^3 - 2\lambda + 3)X.$

4.设A可逆，则

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X \Leftrightarrow A^{*}X = \frac{|A|}{\lambda}X.$$

5.A与A^T有相同的特征值.

$$\left|\lambda E - A^T\right| = \left|(\lambda E - A)^T\right| = \left|\lambda E - A\right|.$$

6. A与B相似$\Rightarrow$ A与B有相同的特征值.

证:设 $A\sim B$, 则存在可逆矩阵P，使得

$$B=P^{-1}AP$$

于是，$$\left|\lambda E-B\right|=\left|\lambda E-P^{-1}AP\right|$$

$$=\left|\lambda P^{-1}EP-P^{-1}AP\right|$$

$$=\left|P^{-1}(\lambda E-A)P\right|$$

$$=\left|P^{-1}\right|\left|\lambda E-A\right|\left|P\right|$$

$$=\left|\lambda E-A\right|$$

7. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$为$A$的$m$个互异特征值，$X_1,X_2,\cdots,X_m$为$A$的分别属于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$的特征向量，则$X_1,X_2,\cdots,X_m$线性无关.

证明：对 m 作数学归纳法.

当$m=1$时，$X_1\neq 0$,线性无关. 即结论成立.

假设结论对 $m-1$ 成立，下证结论对 m 成立.

设$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_mX_m=0$,则

$$k_1AX_1+k_2AX_2+\cdots+k_mAX_m=A0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_iX_i=0$$

又因为,$\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_mX_i=0$, 所以,$\sum_{i=1}^{m-1}k_i(\lambda_m-\lambda_i)X_i=0.$

由假设$X_1, X_2, \cdots, X_{m-1}$线性无关，所以$k_i = 0, i = 1, \cdots, m-1$.

带入$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m = 0$得$k_mX_m = 0$,

从而，$k_m = 0$. 所以$X_1, X_2, \cdots, X_m$线性无关.

8. 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$为$A$的$m$个互异特征值，$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik_i}$

为A的属于λ_i的线性无关特征向量,则$X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1k_1}$,

$X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2k_2}, \cdots,$ $X_{m1}, X_{m2}, \cdots, X_{mk_m}$线性无关.

例如，$X_1=(1,0,-1)$，$X_2=(0,1,-1)$是$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$的

属于-1的线性无关特征向量，$X_3=(1,1,1)$是A

的属于5的特征向量，则X_1,X_2,X_3线性无关.

9. A的k重特征值的线性无关特征向量最多有k 个，

即$n-R(\lambda E-A)\le k$,特别地，当$k=1$时，$n-R(\lambda E-A)=1$，

其中n是A的阶数,λ是A的k重特征值.

10.σ是可逆变换 $\Leftrightarrow$ σ的特征值都不为**0.**

11.设 $\sigma(\xi)=\lambda\xi$，则

(1) $\sigma^m(\xi)=\lambda^m\xi$,

(2) $(k\sigma)(\xi)=(k\lambda)\xi$,

(3) $(a_m\sigma^m+a_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+a_1\sigma+a_0\varepsilon)(\xi)$

$$=(a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\xi.$$

12.设σ是V的可逆变换，则

$$\sigma(\xi)=\lambda\xi\Leftrightarrow\sigma^{-1}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\xi.$$

例3： 已知 $A \in P^{n\times n}$，λ为A的一个特征值，则

（1） $2A$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad 2\lambda \quad}$；

（2）$A^3 - A$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad \lambda^3 - \lambda \quad}$；

（3）A可逆时，$A^{-1} - 2E$必有一个特征值为 $\underline{\quad \lambda^{-1} - 2 \quad}$；

（4）A可逆时，$(A^*)^2 + E$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad \left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1 \quad}$；

（5）$2A^{-1} - A$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad \frac{2}{\lambda} - \lambda \quad}$.

例4： 已知3阶方阵A的特征值为：1、－1、2，

矩阵B与A相似，则 $B^{-1}+E$ 的特征值为：$\underline{\quad 2,0,\frac{3}{2} \quad}$，

行列式 $\begin{vmatrix} B^{-1} & A+E \\ O & A+2E \end{vmatrix}$ = $\underline{\quad -6 \quad}$.

13. 哈密尔顿—凯莱（Hamilton—Caylay）定理

设 $A\in P^{n\times n}$，$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|$ 为A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n\left|A\right|E=O.$$

零矩阵

证明： 设$B(\lambda)$ 是$\lambda E-A$ 的伴随矩阵，

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix},$$

因为$B(\lambda)$ 的每个元素都是$\left|\lambda E-A\right|$ 的元素的代数余子式，

所以，$B(\lambda)$ 的每个元素都是次数不超过$n-1$ 次的多项式.

设$B(\lambda)=B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0$,

其中B_i为n阶矩阵，$i=1,2,\cdots,n$.

例如，

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2+\lambda-1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

再设$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$,

则有$(\lambda E-A)B(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|E=f(\lambda)E$,

因为$(\lambda E-A)B(\lambda)=(\lambda E-A)(B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0)$,

$$=B_{n-1}\lambda^n+(B_{n-2}-AB_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots+(B_0-AB_1)\lambda-AB_0,$$

即，左边$=B_{n-1}\lambda^n+(B_{n-2}-AB_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots+(B_0-AB_1)\lambda-AB_0$,

又有，右边$=f(\lambda)E=E\lambda^n+a_{n-1}E\lambda^{n-1}+\cdots+a_1E\lambda+a_0E$,

从而有，

$$\begin{cases} B_{n-1}=E \\ B_{n-2}-AB_{n-1}=a_{n-1}E \\ \vdots \\ B_0-AB_1=a_1E \\ -AB_0=a_0E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^nB_{n-1}=A^n \\ A^{n-1}B_{n-2}-A^nB_{n-1}=a_{n-1}A^{n-1} \\ \vdots \\ AB_0-A^2B_1=a_1A \\ -AB_0=a_0E \end{cases}$$

两边对应相加得

$$f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E=O.$$

14. 设σ为有限维线性空间V的线性变换，$f(\lambda)$ 是σ的特征多项式，则 $f(\sigma)=0.$

零变换

例5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E.$

解： A的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-2\lambda+1$

用$f(\lambda)$去除 $2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4=g(\lambda)$，得

$$g(\lambda) = f(\lambda)(2\lambda^5 + 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 14)$$

$$+(24\lambda^2 - 37\lambda + 10),$$

$$\because \quad f(A) = O,$$

$$\therefore \quad 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E = 24A^2 - 37A + 10E$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{pmatrix}.$$