基于公交换乘的算法设计

常远 42023017[1)]

[1)](西南财经大学 数学学院 四川 成都 611130)

摘 要 城市中公交车站点的分布存在一定的规律，规划者追求从起始点到终点着乘车人所化时间最短、公交车能耗最小、公交车路线及换乘站点不交叉的最优路径。在本文中，只考虑公交车路线中的换乘问题，求一个人在任意两个站点的最少换乘次数，我们采取动态规划思想和贪心算法思想，首先建立一个二维矩阵，再通过 Floyd 算法和 Dijkstra 算法两种解法求出换乘次数的最小值。Dijkstra 算法的时间复杂度相较 Floyd 算法更低，但其为单源最短路径，分析公交换乘问题不够全面。在实际应用中，需要根据具体情况选择合适的算法来解决公交车换乘次数最少问题。

关键词 动态规划；贪心算法；Floyd 算法；Dijkstra 算法

1 问题介绍

1.1 引言

我们大家都坐过公交车。一个城市中有很多辆公交车，并且有着不同线路，构成了方便市民的公交车线路网络，这些公交车的路线错综复杂，从一个起始点车站到目标点车站可能有数十条线路，有好多种换乘搭配，通常来说，因为部分公交车到站的间隔时间比较长，我们都会尽可能减少换乘的次数，达到减少时间的效果。

1.2 问题描述

我们对该问题进行如下的建模与简化，在这里我们用数组 routes，表示一系列公交路线，其中数组中的每一个列表都表示一辆公交车的路线，routes[i]表示第 i 辆公交车的路线。

例如，路线 routes[0]=[1,3,6,9]表示第 0 辆公交车按照 1 -> 3 -> 6 -> 9 -> 1 -> 3 -> 6 ->...的路线行驶。

现在我们假设 starting 为起始站，terminal 为终点站，期间可以换乘公交车。试求解从 starting 到 terminal 最少乘坐的公交车数量。

为了使得题解更加直观可使，设计一个公交路线图，由图 1 所示，为环形路线，共有 6 条公交线路，即有 6 个不同的换乘公交，有 19 个站点，其中站点 4,8,12,17 为重要的交点站，我们在执行算法时着重对交点站进行验证。

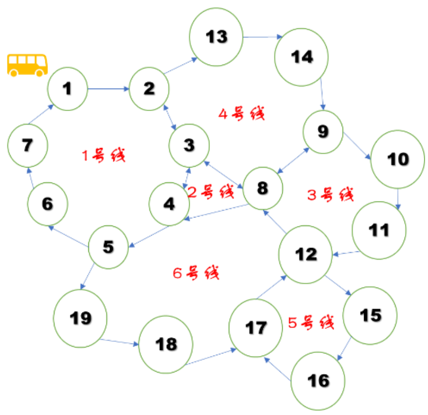


图 1 公交路线图

2 动态规划解法

2.1 动态规划思路分析

在这里我们采取使用了动态规划思想的 Floyd 算法。

Floyd 算法可以一次性计算出所有点之间相互的最短距离。

在该算法中，我们将公交车路线构造为一个二维矩阵 graph[i][j]来表示顶点之间的最短距离。如果 i 和 j 之间有边，则 graph[i][j]等于该边的权值；如果 i 和 j 之间没有边，则 graph[i][j]等于 inf（表示不可达）。

在算法迭代过程中，对于每对顶点 i 和 j，考虑在路径上是否经过顶点 k，将顶点集合{1,2,…,n}分为两部分，第一部分是除了 k 以外的所有顶点，第二部分是 k 顶点，按照此划分，可得状态转移方程为：

graph[i][j]=min(graph[i][k]+graph[k][j]),

如果 graph[i][j]>graph[i][k]+graph[k][j]成立，则更新 graph[i][j]的值，同时令 P[i][j]=k，P[i][j]二维列表代表的是最少换乘车数的站点。

我们可以从图 2 中看出。结点 5 是一个重要的中轴点，更新减少了到达结点 12，17,19 的换乘次数，而结点 13 会使得换乘次数增加，需舍去。

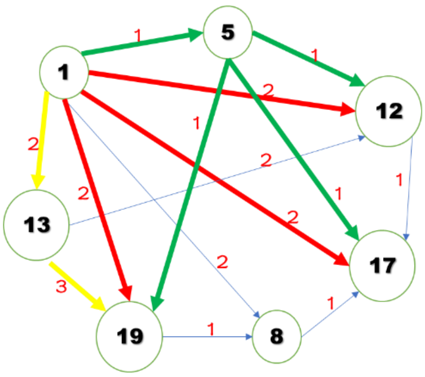


图 2 动态规划思想图

2.2 动态规划伪代码

表 1 动态规划思想伪代码

Floyd 算法伪代码

输入：出发点 starting，终点 terminal，二维列表 routes[i][j]，其中列表中的每一行代表一个公交车经过的站点路线。

输出:公交车从出发点 starting 到重点 terminal 的最少换乘公交的次数 k。

```
将 routes 的每个元素转为集合
rows ← length(routes)
start ← 0
end ← 0
建立一个二维数组
graph[v][u]
FOR i, row_route do      //定义路线 row_route
  IF starting, terminal∈row_route
    return 1
  IF starting∈row_route
    return start ← i
  IF terminal∈row_route
    return end ← i
graph[i][i] ← 0
FOR j ← i+1 to rows do
  IF  第 i 行的站点也出现在第 j 行的站点上
  THEN graph[i][j]=graph[j][i]=1
FOR k ← 0 to rows do
  FOR i ← 0 to rows do
    FOR j ← 0 to rows do
      Graph[i][j] ← min(graph[i][j],
graph[i][k]+ graph[k][j])
IF graph[start][end] != inf
   return graph[start][end] + 1
```

3 贪心算法解法

3.1 贪心算法思路分析

在这里我们采取使用了贪心思想的 Dijkstra 算法。

我们假设路径和长度都已知，通过 Dijkstra 算法计算最短距离。Dijkstra 算法只能求一个顶点到其他点的最短距离而不能任意两点。

在这个分析中我们认为换乘等待的时间远大于坐过站数的时间，没有考虑换乘车辆时站点中间需要坐过的站数，使得模型更容易分析。

在这里，我们选取具有代表性的几个站点作实例分析。如图 3 所示。

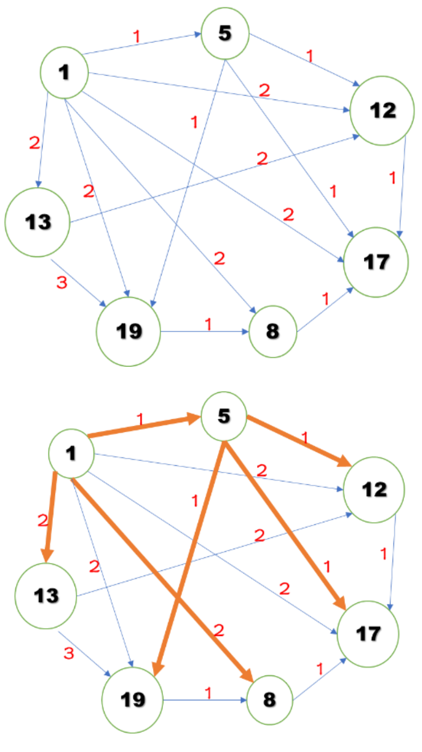


图 3 贪心算法思想图

我们用到了贪心算法的思想。

S 代表结点的集合，dist[i]表示到 i 点的距离长度，L[j]表示新加入的结点 j 相连的结点。

第一步，S={1}, 下面计算结点 5,8,12,13,17,19 相对于 S 的最短路径。

dist[5]=1,dist[13]=2,dist[8]=2,

dist[12]=dist[17]=dist[19]=0.

其中最短距离是 1，于是结点 5 加入到 S 中，得 L[5]=1。

第二步，S={1,5},修改距离 dist 如下：

dist[19]=min{1+1,**2**}=2,

dist[12]=min{1+1,**2**}=2,

dist[17]=min{1+1,**2**}=2.

其中三个点的最短距离都为 2，于是结点 12,17,19 加入到 S 中，得 L[12]= L[17]= L[19]=5。

……

最后一步，S={1,5,12,13,17,19}，不修改距离。把最后一个结点 8 加入到 S 中，L[8]=1,S={1,5,12,13,17,19,8},S=V,算法结束。得到

dst[1]=0, dist[5]=1, dist[8]=2, dist[12]=2,

dist[13]=2, dist[17]=2, dist[19]=2.

最后的最短路径如图橘色粗线所示。

3.2 贪心算法伪代码

表 2 贪心算法思想伪代码

Dijkstra 算法伪代码
输入：出发点 starting，终点 terminal，二维列表 routes[i][j]，其中列表中的每一行代表一个公交车经过的站点路线。
输出:公交车从出发点 starting 到重点 terminal 的最少换乘公交的次数 k。
1. 将 routes 的每个元素转为集合
2. rows ← length(routes)
3. start ← 0
4. end ← 0
5. 建立一个二维数组
6. graph[v][u]
7. FOR i, row_route do //定义路线 row_route
8. IF starting, terminal ∈ row_route
9. return 1
10. IF starting ∈ row_route
11. return start ← i
12. IF terminal ∈ row_route
13. return end ← i
14. graph[i][i] ← 0
15. FOR j ← i+1 to rows do
16. IF 第 i 行的站点也出现在第 j 行的站点上
17. THEN graph[i][j]=graph[j][i]=1
18. not_nodes ← list(元素为未成为 start 的点)
19. FOR k ← 0 to rows-1 do
20. min_cost ← inf
21. min_node ← -1
22. FOR not_node ∈ not_nodes do
23. IF graph[start][not_node] < min_cost
24. THEN min_cost ←graph[start][not_node]
25. THEN min_node ← not_node
26. 遍历列表中的结点后，选择代价最小的节点移除
27. FOR not_node in not_nodes do
28. Graph[start][not_node] ← min(Graph[start][not_node],Graph[start][min_node]+ Graph[min_node][not_node])
29. IF graph[start][end] != inf
30. return graph[start][end] + 1

4 分析与总结

4.1 算法时间复杂度分析

在 Floyd 算法中，用 map 函数将一个列表转化，时间复杂度为 O(mn)，其中 n 代表二维列表 routes 的长度，即公交车线路数量，m 代表 routes 中最长的一个 list 的长度。之后，我们初始化了一个二维数组 graph，时间复杂度为 O(n^2)，其中 n 表示列表 routes 的长度。之后，我们用 enumerate()函数按顺序返回一个二元组(i,row_route)，其中 i 代表索引号，row_route 代表对应的集合其时间复杂度为 O(nm)。之后在循环中使用 if 语句遍历列表 routes 的值，然后判断、负值，其时间复杂度为 O(nm^2)。接下来是典型的 Floyd 算法的三层循环，时间复杂度为 O(n^3)。因此，Floyd 算法的时间复杂度为 O(nm^2+n^3)。

在 Dijkstra 算法中，同样用 enumerate()函数按顺序返回一个二元组(i,row_route)，其时间复杂度为 O(nm)。之后在循环中使用 if 语句遍历列表 routes 的值，然后判断、负值，其时间复杂度为 O(nm^2)。然后是 Dijkstra 算法，循环共执行了 n-1 次，其中 n 代表的是列表 routes 的长度,即公交车数量，且每次循环中都会选出当前未访问过的节点中代价最小的点，其时间复杂度为 O(n^2)。因此，Dijkstra 算法的时间复杂度为 O(nm^2+n^2)。

我们可以发现，在时间复杂度效果上，使用 Dijkstra 算法比 Floyd 算法略强。

4.2 总结

在本文中，我们只针对换乘次数进行分析，没有考虑在一辆公交车上经过的站点，对于现实生活中的公交车换乘需要将两者花费时间结合来具体分析。

我们对公交路线采用两种算法思想进行分析，分别是动态规划思想和贪心算法思想，其中，我们具体使用动态规划思想的 Floyd 算法和贪心算法思想的 Dijkstra 算法来解决问题。

Floyd 算法和 Dijkstra 算法对于该公交

车换乘次数问题都能很好解决，且时间复杂度不超过 x^3,代码效率较高。Floyd 算法是多源最短路径算法，可以解决任意两个两点之间的最短路问题，而 Dijkstra 算法是单源最短路径解法，所以 Floyd 算法相比其更为全面。然而，如果城市规模较大，公交车的路线更加繁杂，导致二维列表矩阵 graph 中的元素非常多，这会提高算法的时间复杂度，造成计算瓶颈。在本文的代码的时间复杂度分析中，我们得知 Dijkstra 算法略强于 Floyd 算法，同时 Dijkstra 算法还可以使用堆优化进一步降低时间复杂度到 O(m*log n)。因此，在实际应用中，需根据实际情况选择合适的算法来解决公交车换乘次数最少问题。

致　谢　感谢施龙老师在我的论文完成过程中的细心指导和支持。从选题阶段到构思、撰写和修改，给予了宝贵的建议和专业知识。我衷心感谢施龙老师所付出的时间和精力，谨向他表达最诚挚的谢意。

参 考 文 献

[1] 屈婉玲、刘田、张立昂、王捍贫．算法设计与分析（第 2 版）：清华大学出版社，2016

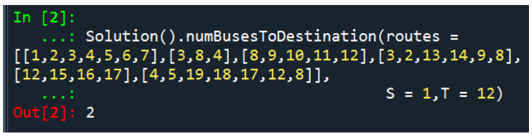
附录：

Python 代码：

```
#Floyd 算法
def numBusesToDestination(self, routes: List[List[int]], S: int, T: int) -> int:
    if not routes:
        return -1
    if S == T:
        return 0
    routes = list(map(set, routes))
    rows = len(routes)
    start = 0
    end = 0
    graph = [[float('inf') for _ in range(rows)] for _ in range(rows)]
    for i, row_route in enumerate(routes):
        if S in row_route and T in row_route:
            return 1
        if S in row_route:
            start = i
        if T in row_route:
            end = i
        graph[i][i] = 0
        for j in range(i + 1, rows):
            if any([route in routes[j] for route in row_route]):
                graph[i][j] = 1
                graph[j][i] = 1
    for k in range(rows):
        for i in range(rows):
            for j in range(rows):
                graph[i][j] = min(graph[i][j], graph[i][k] + graph[k][j])
    return -1 if graph[start][end] == float('inf') else graph[start][end] + 1
```

Floyd 算法输入实例：

Solution().numBusesToDestination(routes = [[1,2,3,4,5,6,7],[3,8,4],[8,9,10,11,12],[3,2,13,14,9,8],[12,15,16,17],[4,5,19,18,17,12,8]],S = 1,T = 12)



```
In [2]:
   ...: Solution().numBusesToDestination(routes =
[[1,2,3,4,5,6,7],[3,8,4],[8,9,10,11,12],[3,2,13,14,9,8],
[12,15,16,17],[4,5,19,18,17,12,8]],
   ...:                              S = 1,T = 12)
Out[2]: 2
```

```
#Dijkstra 算法
def numBusesToDestination(self, routes: List[List[int]], S: int,T: int) -> int:
    if not routes:
        return -1
    if S == T:
        return 0
    rows = len(routes)
    start = 0
    end = 0
    graph = [[float('inf') for _ in range(rows)] for _ in range(rows)]
    for i, row_route in enumerate(routes):
        if S in row_route and T in row_route:
            return 1
        if S in row_route:
            start = i
        if T in row_route:
            end = i
        graph[i][i] = 0
        for j in range(i + 1, rows):
            if any([route in routes[j] for route in row_route]):
                graph[i][j] = 1
                graph[j][i] = 1
    not_visited_nodes = [i for i in range(rows) if i != start]
    for _ in range(rows - 1):
        min_cost = float('inf')
        min_node = -1
        for not_visited_node in not_visited_nodes:
            if graph[start][not_visited_node] <= min_cost:
                min_cost = graph[start][not_visited_node]
                min_node = not_visited_node
        not_visited_nodes.remove(min_node)
        for not_visited_node in not_visited_nodes:
            graph[start][not_visited_node] = min(graph[start][not_visited_node], graph[start][min_node]+graph[min_node][not_visited_node])
    return -1 if graph[start][end] == float('inf') else
```

graph[start][end] + 1

Dijkstra 算法输入实例：

Solution().numBusesToDestination(routes = [[1,2,3,4,5,6,7],[3,8,4],[8,9,10,11,12],[3,2,13,14,9,8],[12,15,16,17],[4,5,19,18,17,12,8]],S = 1,T = 12)

```
In [5]: Solution().numBusesToDestination(routes =
[[1,2,3,4,5,6,7],[3,8,4],[8,9,10,11,12],[3,2,13,14,9,8],
[12,15,16,17],[4,5,19,18,17,12,8]],S = 1,T = 12)
Out[5]: 2
```