③

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(\varepsilon-T)^{-1}(\theta)+\dim(\varepsilon-T)V=n \qquad ④$$

由①③④即证 $V=V_1\oplus V_2$

6.已知T为欧式空间V的对称变换，求证：TV是$T^{-1}(\theta)$的正交补。

证 $\forall T\alpha\in TV,\forall\beta\in T^{-1}(\theta)$,则$T\beta=\theta$，于是

$$(T\alpha,\beta)=(\alpha,T\beta)=(\alpha,\theta)=0$$

故$T\alpha\perp T^{-1}(\theta)$，此即$T\alpha\in\left[T^{-1}(\theta)\right]^{\perp}$。又由于

$$\dim TV=n-\dim T^{-1}(\theta)=\dim\left[T^{-1}(\theta)\right]^{\perp}.$$

即证$TV=\left[T^{-1}(\theta)\right]^{\perp}$.

五、习题解答

习题 9. 1

1.求向量 $\alpha=\left(-1,0,-2,2\right)$ 的长度.

解 $\|\alpha\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2+2^2}=3$ ..

2．求下列向量之间的夹角

（1） $\alpha=\left(1，-1,2,0\right)$ ，$\beta=\left(1,0,1,2\right)$;

（2） $f(x)=x,g(x)=1-x$ ，内积定义为$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

解（1）因为$\left(\alpha,\beta\right)=1\times1+(-1)\times0+2\times1+0\times2=3,\|\alpha\|=\sqrt{6},\|\beta\|=\sqrt{6}$,

所以，$\left\langle\alpha，\beta\right\rangle=\arccos\dfrac{\left(\alpha，\beta\right)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

（2）因为$\left(f(x),g(x)\right)=\int_0^1 x(1-x)dx=\dfrac{1}{6}$, ,

$$\|f(x)\|=(\int_0^1 x^2dx)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \|g(x)\|=(\int_0^1(1-x)^2dx)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以$\langle f(x),g(x)\rangle=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

3. 设α，β,γ为n维欧氏空间中的向量，证明：$d(\alpha,\beta)\le d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$.

证　因为
$$\begin{aligned}\|\alpha-\beta\|^2&=\|\alpha-\gamma+\gamma-\beta\|^2=(\alpha-\gamma+\gamma-\beta,\alpha-\gamma+\gamma-\beta)\\&=(\alpha-\gamma,\alpha-\gamma)+(\alpha-\gamma,\gamma-\beta)+(\gamma-\beta,\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta,\gamma-\beta)\\&=(\alpha-\gamma,\alpha-\gamma)+2(\alpha-\gamma,\gamma-\beta)+(\gamma-\beta,\gamma-\beta)\\&\le\|\alpha-\gamma\|^2+2\|\alpha-\gamma\|\cdot\|\gamma-\beta\|+\|\gamma-\beta\|^2\end{aligned}$$

所以$\|\alpha-\beta\|^2\le(\|\alpha-\gamma\|+\|\gamma-\beta\|)^2$， 从而$d(\alpha,\beta)\le d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$.

4. 判断下列实线性空间中分别规定的二元函数是不是该空间上的一个内积：

（1）在 n 阶实矩阵构成的线性空间中，定义$(A,B)=tr(AB)$；

（2）在 n 阶实矩阵构成的线性空间中，定义$(A,B)=tr(AB^T)$；

（3）在R^2中，定义$(\alpha,\beta)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$，其中$\alpha=(x_1,x_2),\beta=(y_1,y_2)$；

（4）在R^n中，定义$(X,Y)=X^TC^TCY$,其中$X,Y\in R^n$为列向量，C为 n 阶实可逆矩阵。

解　（1）不是.例如，当$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$时，$(A,A)=0$.

（2）是.

（3）不是.例如，当α=(1,1)时，$(\alpha,\alpha)=0$.

（4）是.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是欧氏空间 V 的一组基，其度量矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$. 再设

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\beta=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求$(\alpha,\beta)$.

解　$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=-1.$$

习题 9.2

1．求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3 \qquad\quad +x_5=0 \end{cases}$$

的解空间的一组标准正交基.

分析 因齐次线性方程组的一个基础解系就是其解空间的一组基，所以只需求出一个基础解系再将其标准正交化即可.

解 对齐次线性方程组的系数矩阵施行初等行变换化为行最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

可得齐次线性方程组的一个基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由施密特正交化方法, 取

$$\beta_1=\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2=\eta_2+\frac{1}{2}\beta_1=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3=\eta_3-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2=\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

将 β_1,β_2,β_3 单位化得单位正交向量组

$$\beta_1^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2^*=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3^*=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因为齐次线性方程组的解向量的线性组合仍然是齐次线性方程组的解，所以 $\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*$ 是解空间的一组标准正交基.

2. 将 $R[x]_3$ 中的一组基 $f_1(x)=1-x, f_2(x)=1+x, f_3(x)=1-x-x^2$ 化为标准正交基，

$R[x]_3$ 上定义的内积为

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx\,,\quad f(x),g(x)\in R[x]_3\,.$$

解 令 $g_1=f_1=1-x$ ， $g_2=f_2-\dfrac{(g_1,f_2)}{(g_1,g_1)}g_1=1+x-2(1-x)=-1+3x$ ，

$g_3=f_3-\dfrac{(g_1,f_3)}{(g_1,g_1)}g_1-\dfrac{(g_2,f_3)}{(g_2,g_2)}g_2=1-x-x^2-\dfrac{3}{4}(1-x)+\dfrac{5}{12}(-1+3x)=-\dfrac{1}{6}+x-x^2$ ，

则 g_1,g_2,g_3 为 $R[x]_3$ 中的正交向量组.

将 g_1,g_2,g_3 单位化,

$$g_1^*=\frac{g_1}{\|g_1\|}=\sqrt{3}(1-x),\quad g_2^*=\frac{g_2}{\|g_2\|}=-1+3x\,,\quad g_3^*=\frac{g_3}{\|g_3\|}=6\sqrt{5}(-\frac{1}{6}+x-x^2)$$

则 g_1^*,g_2^*,g_3^* 为 $R[x]_3$ 的一组基标准正交基.

3．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一组标准正交基, 证明

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$$

也是 V 的一组标准正交基.

证 由题知

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一组标准正交基，且 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$ 是正交矩阵，所以 β_1,β_2,β_3 构成 V 的一组标准正交基.

4. 设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$ 为欧氏空间 V 的一组正交基，$V_1=L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s), V_2=L(\alpha_{s+1},\ \alpha_{s+2},\cdots,\ \alpha_n)$.证明：对任意的 $\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2$，都有 β_1与β_2 正交.

证 因为 $\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2$，所以 β_1,β_2 可表达为 $\beta_1=\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\alpha_i,\beta_2=\sum\limits_{i=s+1}^{n}k_i\alpha_i$.

从而$(\beta_1,\beta_2)=(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i,\sum_{i=s+1}^{n}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{n}k_ik_j(\alpha_i,\alpha_j)=0$，即$\beta_1$与$\beta_2$正交.

5. 设ε_1，ε_2,…，ε_5是欧氏空间 V 的一组标准正交基，$V_1=L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$,其中$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_5$，$\alpha_3=\varepsilon_1-2\varepsilon_2-\varepsilon_4-\varepsilon_5$，求$V_1$的一组标准正交基.

解 首先正交化，

令 $\beta_1=\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1-\frac{1}{2}\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_5,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\frac{-1}{2}\beta_1-\beta_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4$$

再单位化，

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ ,\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1-\frac{1}{2}\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_5\right)\quad \eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4),$$

则η_1,η_2,η_3 为V_1 的一组标准正交基.

习题 9. 3

设欧氏空间 V 与 W 同构，σ是同构映射.证明：$\forall\alpha,\beta\in V$, 都有$\|\alpha\|=\|\sigma(\alpha)\|$，$\|\alpha-\beta\|=\|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)\|$，且对非零向量$\alpha,\beta$，有$<\alpha,\beta>=<\sigma(\alpha),\sigma(\beta)>$，

证 （1） 因为$\|\sigma(\alpha)\|^2=(\sigma(\alpha),\ \ \sigma(\alpha))=(\alpha,\ \ \alpha)=\|\alpha\|^2$，所以$\|\alpha\|=\|\sigma(\alpha)\|$；

（2）根据（1）有，$\|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)\|=\|\sigma(\alpha-\beta)\|=\|\alpha-\beta\|$；

（3）$\langle\sigma(\alpha),\ \ \sigma(\beta)\rangle=\arccos\frac{(\sigma(\alpha),\ \ \sigma(\beta))}{\|\sigma(\alpha)\|\|\sigma(\beta)\|}=\arccos\frac{(\alpha,\ \ \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\langle\alpha,\ \ \beta\rangle$.

习题 9. 4

1. 设$A=\begin{pmatrix}-\sin\omega & \cos\omega\\ \cos\omega & \sin\omega\end{pmatrix}$，$T\alpha=A\alpha$，其中$\alpha$是欧氏空间$R^2$上的列向量，$\omega\in R$.

问：T是否为R^2上的正交变换？并说明理由.

解 T是正交变换.显然 T 是R^2上的一线性变换.又因为对于R^2任意列向量α，β有，

$$\left(T\alpha,\quad T\beta\right)=\left(A\alpha,\quad A\beta\right)=(A\alpha)^{T}A\beta=\alpha^{T}A^{T}A\beta=\alpha^{T}\beta=\left(\alpha,\quad\beta\right).$$

从而 T 是正交变换.

2. 证明正交变换保向量的距离不变，保非零向量的夹角不变.

证 设 T 是欧氏空间 V 上的一个正交变换，则

（1） 因为$\|T\alpha\|^{2}=\left(T\alpha,\quad T\alpha\right)=\left(\alpha,\quad\alpha\right)=\|\alpha\|^{2}$，所以$\|\alpha\|=\|T\alpha\|$；

所以有，$\|T\alpha-T\beta\|=\|T(\alpha-\beta)\|=\|\alpha-\beta\|$,即保距离不变；

（2）对非零向量α,β，

$$\left\langle T\alpha,\quad T\beta\right\rangle=\arccos\frac{\left(T\alpha,\quad T\beta\right)}{\|T\alpha\|\|T\beta\|}=\arccos\frac{\left(\alpha,\quad\beta\right)}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\left\langle\alpha,\quad\beta\right\rangle.$$

注 事实上，正交变换也是同构变换.这样，我们利用习题 9.3 的结果也可得上述结论.

3. 证明正交变换的乘积是正交变换.

证 设 T 和 S 是欧氏空间 V 上的正交变换，下证 TS 是正交变换.由线性变换的结论可知,TS 是 V 上的一个线性变换,所以只需证 TS 保内积不变即可.任取 V 中两个向量α,β，则

$$\left(TS\alpha,\quad TS\beta\right)=\left(T(S\alpha),\quad T(S\beta)\right)=\left(S\alpha,\quad S\beta\right)=\left(\alpha,\quad\beta\right)$$

所以，TS 是 V 上一个正交变换.

4. 设 T 是 n 维欧氏空间 V 上的一个正交变换，证明：如果 T 有特征值，那么 T 的特征值为 1 或-1.

证 设λ是 T 的一个特征值，α是 T 的属于λ的特征向量，则$T\alpha=\lambda\alpha$.从而

$$\left(T\alpha,\quad T\alpha\right)=\left(\lambda\alpha,\quad\lambda\alpha\right)=\lambda^{2}\left(\alpha,\quad\alpha\right)=\left(\alpha,\quad\alpha\right)$$

因为α是非零向量，即$\left(\alpha,\quad\alpha\right)>0$，所以$\lambda^{2}=1$.

5. 设 V 是 n 维欧氏空间，T 是 V 上一个线性变换.证明：若 T 保持任意两个向量的距离不变，则 T 是 V 上的一个正交变换.

证 因为$\|T\alpha\|=\|T\alpha-T\theta\|=\|\alpha-\theta\|=\|\alpha\|$，所以由定理 9.6 可知 T 是正交变换.

6.设T是n维欧式空间V的一个线性变换，若T对一组基$\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$有

$$(T\varepsilon_i,T\varepsilon_i)=(\varepsilon_i,\varepsilon_i),(i=1,2,\cdots n) \qquad ①$$

问T是否为正交变换？对，给出证明；不对，请举出反例。

答 不一定是正交变换，反例如下:

设$V=R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$,内积如通常所述，取V的一组标准正交基：$\varepsilon_1=(1,0)$, $\varepsilon_2=(0,1)$,并定义$T:R^2\to R^2$如下

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)A \qquad ②$$

其中$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，由于$V$的全体线性变换所成集合与$R^{2\times2}$是一一对应的，

故由②定义的T是V的一个线性变换，且

$$T\varepsilon_1=\varepsilon_1,\ T\varepsilon_2=\varepsilon_1,\Rightarrow(T\varepsilon_1,\ T\varepsilon_1)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_1) \qquad ③$$

$$(T\varepsilon_2,\ T\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)=1=(\varepsilon_2,\ \varepsilon_2) \qquad ④$$

由③④知①式成立

但T不是正交变换，因$(T\varepsilon_1,\ T\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)=1$，而$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=0$，所以

$$(T\varepsilon_1,\ T\varepsilon_2)\neq(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$$

即不能保持内积不变.

7．证明：欧式空间中保持内积不变的变换是正交变换.

证 设T是V的一个变换，满足

$$(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V \qquad ①$$

对$\forall \alpha,\beta \in V$,有

$$(T(\alpha+\beta)-T\alpha-T\beta,T(\alpha+\beta)-T\alpha-T\beta)$$
$$=(T(\alpha+\beta),T(\alpha+\beta))-2(T(\alpha+\beta),T\alpha)-2(T(\alpha+\beta),T\beta)$$
$$+2(T\alpha,T\beta)+(T\alpha,T\alpha)+(T\beta,T\beta)$$
$$=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)$$
$$=(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)-2(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)-2(\alpha,\beta)-2(\beta,\beta)+$$
$$2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)=0$$

所以$T(\alpha+\beta)-T\alpha-T\beta=\theta$.此即

$$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta \qquad ①$$

同理，由$(T(k\alpha)-kT\alpha,T(k\alpha)-kT\alpha)=0$,可证

$$T(k\alpha)=kT\alpha,\forall k\in R,\alpha\in V \qquad ②$$

由①②即证T是V的线性变换，又保持内积不变，从而T是V的正交变换.

习题 9.5

1. 设R^4是具有通常内积的欧氏空间，W 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ \quad x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$$

的解空间，求$W^{\perp}$.

解 上述方程组的基础解系为$\eta_1=\left(-2,\quad 1,\quad 1,\quad 0\right),\eta_2=\left(-2,\quad 1,\quad 0,\quad 1\right)$.设$\left(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4\right)\in W^{\perp}$，则

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ -2x_1+x_2+x_4=0 \end{cases}$$

解得其基础解系为$\alpha_1=\left(1,\quad 0,\quad 2,\quad 2\right),\alpha_2=\left(0,\quad 1,\quad -1,\quad -1\right)$.从而

$$W^{\perp}=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \mid k_1,k_2\in R\right\}.$$

2. 证明$W^{\perp}=\{\alpha \mid \alpha\in V,\alpha\perp W\}$.

证 由定义可知$W^{\perp}\subset\{\alpha \mid \alpha\in V,\alpha\perp W\}$.设$\beta\in\{\alpha \mid \alpha\in V,\alpha\perp W\}$，下证$\beta\in W^{\perp}$.

因为$W^{\perp}+W=V$,则存在$\gamma\in W^{\perp},\eta\in W$，使得$\beta=\gamma+\eta$.从而

$$(\beta,\eta)=(\gamma,\eta)+(\eta,\eta)$$

又因为$(\beta,\eta)=(\gamma,\eta)=0$，所以$(\eta,\eta)=0$.即$\eta=\theta$.所以$\beta=\gamma\in W^{\perp}$.

3. 证明本节引理.

证 必要性：因为$W_s\in\sum_{i\neq k}W_i,s\neq k$，所以当$s\neq k$时，$W_s$与$W_k$正交，即$W_1,\cdots,W_m$是两两正交的.

充分性：设α为W_k中任意一向量，下证$\alpha\perp\sum_{i\neq k}W_i$.由线性子空间和的定义可知，对$\sum_{i\neq k}W_i$中任意向量$\beta$，都有

$$\beta=\sum_{i\neq k}\beta_i\text{，其中}\beta_i\in W_i$$

由已知，$(\alpha,\beta_i)=0,i\neq k$，从而$(\alpha,\beta)=0$.即$\alpha\perp\sum_{i\neq k}W_i$.所以，$W_k$与$\sum_{i\neq k}W_i$正交.

4. 设V_1,V_2是欧氏空间V的两个子空间，证明：

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp},(V_1\bigcap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}.$$

证 先证$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$.因为$V_i\in V_1+V_2,i=1,2$，所以$(V_1+V_2)^{\perp}\subset V_i^{\perp},i=1,2$.即有$(V_1+V_2)^{\perp}\subset V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$.设$\alpha$为$V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$的任一向量，则$\alpha\perp V_i,i=1,2$.从而，$\alpha\perp V_1+V_2$，即$\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$.所以，$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$.

再证$(V_1\bigcap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.由第一个等式可得，

$$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\bigcap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\bigcap V_2,$$

所以，$(V_1\bigcap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

5.设

$$V=R[x]_4,V_1=L(1,x),V_2=L(x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x)$$

是V的子空间，在V中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

证明：V_1与V_2互为正交补。

证 易验证$1,x,x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x$线性无关，所以$V=V_1+V_2$. 设

$f_1(x)=1,f_2(x)=x,g_1(x)=x^2-\frac{1}{3},g_2(x)=x^3-\frac{3}{5}x$，则$\int_{-1}^{1}f_i(x)g_j(x)dx=0,i,j=1,2$.

从而$V_1\perp V_2$. 所以V_1与V_2互为正交补.

习题 9. 6

1. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 V 的一组标准正交基，证明 T 为对称变换的充要条件为$(T\alpha_i,\alpha_j)=(T\alpha_j,\alpha_i)$，$i,j=1,2,\cdots,n$.

证 参考书中性质 2 的证明.设 A 是 T 在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵，则

$$(T\alpha_i,\alpha_j)=a_{ij},(T\alpha_j,\alpha_i)=a_{ji}，i,j=1,2,\cdots,n.$$

所以$(T\alpha_i,\alpha_j)=(T\alpha_j,\alpha_i)$，$i,j=1,2,\cdots,n$的充要条件是 A 为对称矩阵，自然也是 T 为对称变换的充要条件.

2. 设 T 和 S 都是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换，证明：TS 是 V 上对称变换的充要条件是 TS=ST.

证 必要性：设α,β为 V 中任意两个向量，则

$$(TS\alpha,\beta)=(\alpha,TS\beta)=(T\alpha,S\beta)=(ST\alpha,\beta)$$

由α,β的任意性可知 TS=ST.

充分性：设α,β为 V 中任意两个向量，则

$$(TS\alpha,\beta)=(ST\alpha,\beta)=(T\alpha,S\beta)=(\alpha,TS\beta),$$

即 TS 是对称变换.

3. 设 T 和 S 都是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换，证明：T+S 也是 V 上的对称变换.

证　设α,β为V中任意两个向量，则

$$((T+S)\alpha,\beta)=(T\alpha+S\alpha,\beta)=(T\alpha,\beta)+(S\alpha,\beta)$$

$$=(\alpha,T\beta)+(\alpha,S\beta)=(\alpha,T\beta+S\beta)=(\alpha,(T+S)\beta),$$

从而T+S是对称变换.

4. 设V是n维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是V的一组基，T是V上一个变换，那么，当T是对称变换时，T在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵是对称矩阵吗？当T在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵是对称矩阵时，T是V上的一个对称变换吗？若是，请说明原因.若不是，请举出反例.

解　T为对称变换时，T在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵不一定是对称矩阵.例如，设V是2维欧氏空间，β_1，β_2是V的一组标准正交基，则β_1，$\beta_1+\beta_2$也是V的一组基，再设T在β_1，β_2下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，此时T在$\beta_1$，$\beta_1+\beta_2$下的矩阵为$\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}$，不是对称矩阵.

当T在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是对称矩阵时，T也不一定是V上的一个对称变换.例如，设α_1,α_2是V的一组基，但可能不是标准正交基，T在α_1,α_2下的矩阵为$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$，则

$$T\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2,T\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2.$$

从而

$$(T\alpha_1,\alpha_2)=2(\alpha_1,\alpha_2)+(\alpha_2,\alpha_2),(\alpha_1,T\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_1,\alpha_2).$$

所以，当α_1,α_2不是标准正交基时，比如$(\alpha_1,\alpha_2)=0,(\alpha_2,\alpha_2)=2,(\alpha_1,\alpha_1)=1$，也有$(T\alpha_1,\alpha_2)\neq(\alpha_1,T\alpha_2)$.也就是说，$\alpha_1,\alpha_2$为正交基也不足以保证T为对称变换.

习题九

(A)

一、填空题

1．设$\alpha=\begin{pmatrix}1, & 1, & -1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1, & -1, & -2\end{pmatrix}$，则$\|\alpha\|=$________，$\dfrac{\beta}{\|\beta\|}=$________，

$\|\alpha-\beta\|=$________，$<\alpha,\beta>=$________.

解 $\|\alpha\|=\sqrt{3}$，$\dfrac{\beta}{\|\beta\|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\quad -\dfrac{1}{\sqrt{6}},\quad -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$，$\|\alpha-\beta\|=3$，$<\alpha,\beta>=\dfrac{\pi}{2}$.

2．设$\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 0),\alpha_2=(0,\quad -1,\quad 2),\alpha_3=(1,\quad 1,\quad 1)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的度量矩阵为________.

解 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. 设$\alpha_1=(-1,\quad 1,\quad 1),\alpha_2=(0,\quad -1,\quad 1),\alpha_3=(1,\quad -1,\quad 2)$，利用施密特正交化方法将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$化为$R^3$的标准正交基为________________.

解 $\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

4. 设V是n维欧氏空间，W是V的s维子空间，则$\dim(W^{\perp})=$________________.

解 因为$\dim(W)+\dim(W^{\perp})=\dim(V)$,所以$\dim(W^{\perp})=n-s$.

5. 设V是3维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为V的一组标准正交基，T，S是V上的两个对称变换，且T,S在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵分别为A和B，则$T+S$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵的为______.

解 $(T+S)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A+(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(A+B)$

从而，$T+S$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为A+B.

二、单项选择题

1. 在线性空间$R[x]_3$中定义内积

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx\text{，}\ f(x),g(x)\in R[x]_3\text{，}$$

设 $f_1(x)=x,f_2(x)=x^2-1$，则 $\langle f_1(x),f_2(x)\rangle=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{2}$　　（B）0　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{\pi}{4}$

解　因为 $(f_1(x),f_2(x))=0$，故选 A.

2. 下列矩阵中可以作为 3 维欧氏空间一组基度量矩阵的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&1&5\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&5\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$

解　度量矩阵必为正定矩阵，故选 B.

3. 设 V_1 是 4 维欧氏空间 V 的子空间，且 $\dim V_1=3$，则 $\dim V_1^{\perp}=$（　　）

（A）3　　（B）0　　（C）1　　（D）2

解　根据 $\dim V_1+\dim V_1^{\perp}=\dim V$ 可知，$\dim V_1^{\perp}=1$.故选 C.

4. 下列关于标准正交基的表述错误的是（　）

（A）标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵

（B）对称变换在标准正交基下的矩阵是对称矩阵

（C）欧氏空间中标准正交基是唯一的

（D）标准正交基的度量矩阵是单位阵

解 标准正交基是不唯一的，例如 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^2 的标准正交基，而 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 也是 R^2 的标准正交基.故选 C.

5. 在欧氏空间 R^n 中定义正交变换 $T(\alpha)=A\alpha$，则 A 必为（　）

（A）可逆矩阵　　（B）正交矩阵　　（C）对称矩阵　　（D）正定矩阵

解　由 $\left(T(\alpha),T(\alpha)\right)=\left(A\alpha,A\alpha\right)=\alpha^TA^TA\alpha=\left(\alpha,\alpha\right)=\alpha^T\alpha$ 可知 $A^TA=E$，从而 A 必为正交矩阵.即选 B.

6. 设欧氏空间 $V=\left\{\left(x_1,\ \ 0,\ \ x_3,\ \ x_4\right)|\,x_1,x_3,x_4\in R\right\}$，则下列与 V 不同构的欧式空

间是（　　）。

（A）$\{x_1+x_2+x_3+x_4=0 \mid x_1,\cdots,x_4\in R\}$　　　　（B）$R[x]_3$

（C）$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关　　　（D）全体 2 阶实矩阵.

解　欧氏空间同构的充要条件是维数相等，与上面定义的内积无关。只有选项（D）中空间的维数是 4，其他空间的维数都是 3.故选 D.

(B)

1.设$V=C[0,1]$,考虑 V 到自身的一个映射：$\sigma: f\to\sigma f$，其中σf的定义为$\forall t\in[0,1],(\sigma f)t=tf(t)$.证明：

（1）σ是 V 上的一个线性变换，且σ是单射；

（2）对于任意的$f,g\in V$，定义

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)t^2dt$$

则(f,g)是 V 上的一个内积.

证　（1）显然σ是 V 上的一个变换，下证σ保持线性运算.

对于任意的$f,g\in V$，及常数k,l，都有

$$\sigma(kf+lg)t=t(kf(t)+lg(t))=ktf(t)+ltg(t)=(k\sigma f+l\sigma g)t\text{，}\ \forall t\in[0,1].$$

所以，$\sigma(kf+lg)=k\sigma f+l\sigma g$，即$\sigma$是线性变换.

再证σ是单射.若$\sigma f=\sigma g$，即$\forall t\in[0,1],(\sigma f)t=(\sigma g)t$，则$f(t)=g(t)$.从而，$f=g$.所以$\sigma$是单射.

（2）（i）显然$(f,g)=(g,f)$；

（ii）

$$(f+h,g)=\int_0^1[f(t)+h(t)]g(t)t^2dt=\int_0^1 f(t)g(t)t^2dt+\int_0^1 h(t)g(t)t^2dt=(f,g)+(h,g)\text{；}$$

(iii)　$(kf,g)=\int_0^1 kf(t)g(t)t^2dt=k\int_0^1 f(t)g(t)t^2dt=k(f,g)$；

（iv）$(f,f)=\int_0^1 f(t)f(t)t^2dt\ge 0$,且$(f,f)=0$时，必有$f=0$.

综上可知，(f,g)是 V 上的一个内积.

2. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha \in V$ 且α为非零向量.证明:

（1） $V_1=\left\{x \mid (x,\alpha)=0, x\in V\right\}$是 V 的一子空间;

（2）V_1的维数是$n-1$.

证 （1）只需证明V_1对加法和数乘运算封闭即可.对任意的向量$x,y\in V_1$，及任意常数k,l，因为$(kx+ly,\alpha)=(kx,\alpha)+(ly,\alpha)=k(x,\alpha)+l(y,\alpha)=0$，所以$kx+ly\in V_1$，即$V_1$对加法和数乘运算封闭.

（2）设$V_2=L(\alpha)$,则$V_1=V_2^{\perp}$，而$\dim V_2=1$，所以V_1的维数是$n-1$.

3. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 V 的一组基.证明：对于任意给定的一组实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，V 中存在唯一的一个向量$\alpha$，使得$(\alpha,\alpha_i)=c_i, i=1,2,\cdots,n$.

证 设$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，则

$$\begin{cases}(\alpha,\alpha_1)=k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_2,\alpha_1)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha_1)\\(\alpha,\alpha_2)=k_1(\alpha_1,\alpha_2)+k_2(\alpha_2,\alpha_2)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha_2)\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha,\alpha_n)=k_1(\alpha_1,\alpha_n)+k_2(\alpha_2,\alpha_n)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha_n)\end{cases}$$

若对于任意给定的一组实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得$(\alpha,\alpha_i)=c_i, i=1,2,\cdots,n$，则

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_1)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_1)\\(\alpha_1,\alpha_2)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_2)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(\alpha_1,\alpha_n)&(\alpha_2,\alpha_n)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$$

其中 A 是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的度量矩阵，为正定矩阵.从而存在唯一$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得上式成立，即

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}.$$

4. 设 V 是欧氏空间，$\alpha,\beta \in V$.证明：α 与 β 正交当且仅当对任意的实数 t，有 $\|\alpha+t\beta\| \ge \|\alpha\|$.

证 因为

$$\|\alpha+t\beta\| \ge \|\alpha\| \Leftrightarrow (\alpha+t\beta,\alpha+t\beta) \ge (\alpha,\alpha) \Leftrightarrow (\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta) \ge (\alpha,\alpha)$$

由于 $(\beta,\beta) \ge 0$，所以欲使上式对任意的实数 t 成立，必须有 $(\alpha,\beta)=0$，即 α 与 β 正交.

5.设 V 是 3 维欧氏空间，V 中的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

求 V 的一组标准正交基.

解 利用施密特正交化方法将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 标准正交化.

设 $\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_2$，

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_1,\alpha_3)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\alpha_2,\alpha_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2$$

则 β_1,β_2,β_3 为正交向量组.再单位化，令

$$\gamma_1=\beta_1, \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\beta_2, \gamma_3=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\beta_3$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为一组标准正交基.

6. 在欧氏空间 $R[x]_3$ 中，定义内积

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

求 $R[x]_3$ 的一组基和一组标准正交基.

解 $R[x]_3$ 的一组基为 $1,x,x^2$.利用施密特正交化方法将此基标准正交化.令 $f_1=1$，

$$f_2 = x - \frac{(f_1, x)}{(f_1, f_1)} f_1 = x - \frac{1}{2},$$

$$f_3 = x^2 - \frac{(f_1, x^2)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(f_2, x^2)}{(f_2, f_2)} f_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

再单位化得

$$h_1 = 1, h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = 2\sqrt{3} f_2, h_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = 3\sqrt{20} f_3.$$

此即为 $R[x]_3$ 的一组标准正交基.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组向量，令

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

称 A 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是的 Gram 矩阵，记作 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.证明：

$|A| \geq 0$，等号成立当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

证 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$，则

$$(\alpha, \alpha) = (x_1, x_2, \cdots, x_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \geq 0.$$

因为 A 为对称矩阵，所以作为上述二次型的二次型矩阵是半正定的，即 $|A| \geq 0$.

设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \theta$，则有

$$(\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i(\alpha_i, \alpha_j) = 0, j = 1, 2, \cdots, m$$

即

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\theta$$

所以，当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关时，上述齐次线性方程组有非零解，从而$|A|=0$.

反之，当$|A|=0$时，二次型

$$(\alpha,\alpha)=(x_1,x_2,\cdots,x_m)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$$

是半正定的.从而存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$(\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i,\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i)=0$，即$\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i=\theta$.所以，此时$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

8. 设欧氏空间R^4具有通常内积，W 是其一子空间，$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$,其中$\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 0,\quad 1),\alpha_2=(0,\quad 1,\quad 1,\quad 1)$.求$W^\perp$的维数及一组标准正交基.

解 因为$\dim(W)=2$,所以$\dim(W^\perp)=\dim(R^4)-\dim(W)=2$.设$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in W^\perp$，则

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

其基础解系为$\eta_1=(1\quad -1,\quad 1,\quad 0),\eta_2=(0\quad -1,\quad 0,\quad 1)$，此即$W^\perp$的一组基.利用施密特正交化方法得一组标准正交基为

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\quad -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad 0\right),\beta_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\quad -\frac{2}{\sqrt{14}},\quad -\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

9. 证明：具有通常内积的欧氏空间R^n的任一真子空间 W 都是一个齐次线性方程组的解空间.

证　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$W^{\perp}$的一组基，则 W 为齐次线性方程组

$$(1)\qquad \begin{cases}(\alpha,\alpha_1)=0\\(\alpha,\alpha_2)=0\\ \quad\cdots\cdots\\(\alpha,\alpha_m)=0\end{cases}$$

的解空间.

因为 W 中的向量都与$W^{\perp}$正交，所以比满足方程组（1），即为（1）的解.反之，（1）的解与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$正交，从而与$W^{\perp}$正交.而 W 包含了所有与$W^{\perp}$正交的向量.所以（1）的解必在 W 中.从而 W 即为（1）的解集.

10. 设 T 是 2 为欧氏空间 V 上的一个正交变换，证明：

（1）如果 T 是第一类的，那么 V 中存在一组标准正交基，使得 T 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix},0\le\omega\le\pi\text{；}$$

（2）如果 T 是第二类的，那么 V 中存在一组标准正交基，使得 T 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

证　（1）设$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$是 T 在某标准正交基$\alpha_1,\alpha_2$下的矩阵，则 A 是正交矩阵，且$|A|=1$.

所以

$$\begin{cases}a_{11}^2+a_{21}^2=1\\ a_{12}^2+a_{22}^2=1\\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0\\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1\end{cases}$$

解得，$a_{11}=\cos\omega,a_{12}=-\sin\omega,a_{21}=\sin\omega,a_{22}=\cos\omega$，或者

$a_{11}=\cos\omega,a_{12}=\sin\omega,a_{21}=-\sin\omega,a_{22}=\cos\omega$，$0\le\omega\le\pi$.如果 T 在$\alpha_1,\alpha_2$下的矩阵为$\begin{pmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ -\sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}$，则 T 在$\alpha_2,\alpha_1$下的矩阵为$\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}$.所以存在 V 中的一组标准

正交基，T 在此基下的矩阵为$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$.

（2） 与（1）类似可得，如果 T 是第二类正交变换，那么，存在 V 中一组标准正交基 α_1,α_2，T 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}.$$

设

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\omega & \sin\frac{1}{2}\omega \\ \sin\frac{1}{2}\omega & -\cos\frac{1}{2}\omega \end{pmatrix}$$

则 β_1,β_2 也是 V 的一组标准正交基，且

$$T(\beta_1,\beta_2)=T(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\omega & \sin\frac{1}{2}\omega \\ \sin\frac{1}{2}\omega & -\cos\frac{1}{2}\omega \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\omega & \sin\frac{1}{2}\omega \\ \sin\frac{1}{2}\omega & -\cos\frac{1}{2}\omega \end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\omega & \sin\frac{1}{2}\omega \\ \sin\frac{1}{2}\omega & -\cos\frac{1}{2}\omega \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\omega & \sin\frac{1}{2}\omega \\ \sin\frac{1}{2}\omega & -\cos\frac{1}{2}\omega \end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. 设η是 n 维欧氏空间 V 中一单位向量，定义

$$T\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\forall\alpha\in V$$

证明：（1）T 是正交变换，这样的正交变换称为镜面反射；

（2）T 是第二类的；

（3）如果 n 维欧氏空间中，正交变换 T 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间V_1的维数为$n-1$，那么 T 是镜面反射.

证　（1）显然 T 是 V 上一个变换.下面首先证明 T 是 V 上一个线性变换.设α_1,α_2是 V 中任意两个向量，k_1,k_2为常数，则

$$
\begin{aligned}
T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2) &= k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-2(\eta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\eta \\
&= k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-2k_1(\eta,\alpha_1)\eta-2k_2(\eta,\alpha_2)\eta \\
&= k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)
\end{aligned}
$$

从而，T 是线性变换.再证 T 为正交变换，即保持内积运算.利用内积的性质，我们有

$$
\begin{aligned}
&(T(\alpha_1),T(\alpha_2))=(\alpha_1-2(\eta,\alpha_1)\eta,\alpha_2-2(\eta,\alpha_2)\eta) \\
&=(\alpha_1,\alpha_2)-2(\eta,\alpha_2)(\eta,\alpha_1)-2(\eta,\alpha_2)(\eta,\alpha_1)+4(\eta,\alpha_2)(\eta,\alpha_1)(\eta,\eta) \\
&=(\alpha_1,\alpha_2)
\end{aligned}
$$

所以，T 是 V 上一个正交变换.

（2）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 V 的一组标准正交基，则 T 在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵 A 为正交矩阵.下证矩阵 A 的行列式为-1.设$\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$.因为$\eta$是单位向量，所以

$(\eta,\eta)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2=1$.因为

$$
T(\alpha_i)=\alpha_i-2(\eta,\alpha_i)\eta=(1-2k_i^2)\alpha_i-2k_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}k_j\alpha_j\ ,\quad i=1,2,\cdots,n,
$$

所以

$$
A=\begin{pmatrix}
1-2k_1^2 & -2k_1k_2 & \cdots & -2k_1k_n \\
-2k_1k_2 & 1-2k_2^2 & \cdots & -2k_2k_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-2k_1k_n & -2k_2k_n & \cdots & 1-2k_n^2
\end{pmatrix}
$$

设$|A|=D_n$，则

$$D_n=\begin{vmatrix}1-2k_1^2 & -2k_1k_2 & \cdots & -2k_1k_n \\ -2k_1k_2 & 1-2k_2^2 & \cdots & -2k_2k_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2k_1k_n & -2k_2k_n & \cdots & 1-2k_n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-2k_1^2 & -2k_1k_2 & \cdots & 0 \\ -2k_1k_2 & 1-2k_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2k_1k_n & -2k_2k_n & \cdots & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1-2k_1^2 & -2k_1k_2 & \cdots & -2k_1k_n \\ -2k_1k_2 & 1-2k_2^2 & \cdots & -2k_2k_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2k_1k_n & -2k_2k_n & \cdots & -2k_n^2\end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}-2k_n^2=\cdots=1-2\sum_{i=1}^{n}k_i^2=-1\,.$$

所以，T 是第二类正交变换.

（3）由题意可知，-1 也是 T 的一个特征值，且其对应的特征子空间是 1 维的.设 α 为 T 的属于 1 的特征向量，η 为 T 的属于 -1 的特征向量，则

$$(\alpha,\eta)=(T\alpha,T\eta)=(\alpha,-\eta)=-(\alpha,\eta)\ ,$$

从而 $(\alpha,\eta)=0$，即属于 1 的特征向量与属于 -1 的特征向量正交.所以，V_1 的正交补即为 -1 的特征子空间.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 为 V_1 的一组标准正交基， η 为 V_1 的正交补中一单位向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\eta$ 为 V 的一组标准正交基.任取 V 中一向量 β，有

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+l\eta\ ,$$

从而

$$T\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}-l\eta\,.$$

因为 $l=(\eta,\beta)$，所以

$$T\beta=\beta-2(\eta,\beta)\eta\,.$$

即 T 是镜面反射.

12. 证明：如果 T 是 n 维欧氏空间的一个正交变换，那么 T 的不变子空间的正交补也是 T 的不变子空间.

证 设 W 是 T 的不变子空间，下证 $W^{\perp}$ 也是 T 的不变子空间，即证任取 $W^{\perp}$ 的一个向

量α，都有$T\alpha \in W^{\perp}$.设β为 W 中的任意一个向量.因为 W 是 T 的不变子空间，且正交变换是双射，所以$T^{-1}\beta \in W$.从而

$$(T\alpha,\beta)=(T\alpha,TT^{-1}\beta)=(\alpha,T^{-1}\beta)=0,$$

即有$T\alpha \in W^{\perp}$.

13. 欧氏空间 V 中的线性变换称为反对称的，如果对任意α，$\beta \in V$，$(T\alpha,\beta)$=−$(\alpha,T\beta)$.

证明：（1）T 为反对称的充要条件是，T 在一组标准正交基下的矩阵为反对称的；

（2）如果V_1是反对称变换 T 的不变子空间，则$V_1^{\perp}$也是.

证 （1）必要性：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 V 的一组标准正交基，矩阵$C=(c_{ij})_{n\times n}$是 T 在这组基下的矩阵.下证 C 是反对称的.因为$T\alpha_i=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ki}\alpha_k$，所以$(T\alpha_i,\alpha_j)=c_{ij}$.同理有$(T\alpha_j,\alpha_i)=c_{ji}$.因为 T 是反对称变换，所以$(T\alpha_j,\alpha_i)=-(T\alpha_i,\alpha_j)$，即$c_{ij}=-c_{ji}$.从而 C 是反对称矩阵.

充分性：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 V 的一组标准正交基，矩阵$C=(c_{ij})_{n\times n}$是 T 在这组基下的矩阵，且 C 是反对称的，则$(T\alpha_j,\alpha_i)=-(T\alpha_i,\alpha_j)$.下证 T 是反对称变换.设$\alpha,\beta$是 V 中任意两个向量，且$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}l_i\alpha_i$，则

$$T\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_iT\alpha_i,\quad T\beta=\sum_{i=1}^{n}l_iT\alpha_i$$

从而

$$(T\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{n}k_iT\alpha_i,\sum_{i=1}^{n}l_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_il_j(T\alpha_i,\alpha_j)$$

$$(\alpha,T\beta)=(\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i,\sum_{i=1}^{n}l_iT\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_il_j(\alpha_i,T\alpha_j).$$

根据$(T\alpha_j,\alpha_i)=-(T\alpha_i,\alpha_j)$可知，$(T\alpha,\beta)$=−$(\alpha,T\beta)$.即 T 是反对称变换.

（2）设 α 为 $V_1^{\perp}$ 中任意一个向量，下证 $T\alpha \in V_1^{\perp}$.再设 β 为 V_1 中任意一个向量，则 $T\beta \in V_1$.因为

$$(T\alpha, \beta) = -(\alpha, T\beta) = 0$$

所以 $T\alpha \in V_1^{\perp}$.从而 $V_1^{\perp}$ 是不变子空间.

14. 设V_1是有限维欧式空间V的子空间，定义:

V到V_1的投影变换σ如下：对任意$x \in \mathrm{V}$, 有$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^{\perp}, \sigma\alpha = \alpha_1,$ 证明：

(1)σ是V上的线性变换

(2) σ是满足$\sigma^2 = \sigma$的对称变换

证（1） $\forall \alpha, \beta \in V, k \in R,$ 设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2$$

其中$\alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_1^T$,则

$$\sigma(\alpha + \beta) = \alpha_1 + \beta_1 = \sigma\alpha + \sigma\beta$$

$$\sigma(k\alpha) = k\alpha_1 = k\sigma\alpha$$

即证σ是V的线性变换.

(2)$\forall \alpha \in V,$ 若$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$ 其中$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^T$，则

$$\sigma^2\alpha = \sigma\alpha_1 = \alpha_1 = \sigma\alpha$$

故$\sigma^2 = \sigma$

$$\forall \alpha, \beta \in V, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2, \text{其中}\alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_1^T$$

$$(\sigma\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_1, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1) \quad ①$$

$$(\alpha, \sigma\beta) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1) = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_1) = (\alpha_1, \beta_1) \quad ②$$

由①②得

$$(\sigma\alpha, \beta) = (\alpha, \sigma\beta)$$

故σ是对称变换

15.设σ是n维欧式空间的线性变换，σ^*是V的变换，且$\forall\alpha$，$\beta\in V$有

$$(\sigma\alpha,\beta)=(a,\sigma^*\beta) \qquad ①$$

证明:(1)σ^*是线性变换
(2)σ的核等于σ^*的值域的正交补。

证 (1)$\forall\alpha$，$\beta,\gamma\in V,k\in R$,由①有

$$(\gamma,\sigma^*(\alpha+\beta)-\sigma^*\alpha-\sigma^*\beta)=(\sigma\gamma,\alpha+\beta)-(\sigma\gamma,\alpha)-(\sigma\gamma,\beta)=0 \qquad ②$$

由γ的任意性，特别令

$$\gamma=\sigma^*(\alpha+\beta)-\sigma^*\alpha-\sigma^*\beta$$

则②式仍然成立，从而$\gamma=\theta$，此即

$$\sigma^*(\alpha+\beta)=\sigma^*\alpha+\sigma^*\beta$$

类似可证$\sigma^*(k\alpha)=k\sigma^*(\alpha)$.所以$\sigma^*$是$V$的线性变换。
(2)下证

$$\sigma^{-1}(\theta)=(\sigma^*V)^{\perp}$$

$\forall\alpha\in\sigma^{-1}(\theta)$,有$\sigma\alpha=\theta.\forall\sigma^*\beta\in\sigma^*V$，由①有

$$(\alpha,\sigma^*\beta)=(\sigma\alpha,\beta)=(\theta,\beta)=0$$

从而，$\alpha\perp\sigma^*V$，即$\alpha\in(\sigma^*V)^{\perp}$.此即

$$\sigma^{-1}(\theta)\subset(\sigma^*V)^{\perp}$$

反之，$\forall\delta\in(\sigma^*V)^{\perp}$，$\forall\beta\in V$,则

$$(\sigma\delta,\beta)=(\delta,\sigma^*\beta)=0$$

由β的任意性，特别令$\beta=\sigma\delta$，则$\sigma\delta=\theta$，所以$\delta\in\sigma^{-1}(\theta)$.此即

$$(\sigma^*V)^{\perp}\subset\sigma^{-1}(\theta)$$

即证$(\sigma^*V)^{\perp}=\sigma^{-1}(\theta)$.