§3.3 线性变换的矩阵

一、线性变换与基

二、线性变换的矩阵

三、相似矩阵

一、 线性变换与基

1. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间V的一组基，σ 为V的线性变换．则对任意 $\xi\in V$ 存在唯一的一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in P$，使 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$

从而，$\sigma(\xi)=x_1\sigma(\varepsilon_1)+x_2\sigma(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\sigma(\varepsilon_n)$.

由此知，$\sigma(\xi)$ 由 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 完全确定．

所以要求**V**中任一向量在 σ 下的象，只需求出**V**的一组基在 σ 下的象即可．

2. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间V的一组基，σ, τ 为V的线性变换，若 $\sigma(\varepsilon_i)=\tau(\varepsilon_i)$，$i=1,2,\cdots,n.$

则 $\sigma=\tau.$

证：对 $\forall\xi\in V$，$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$

$$\sigma(\xi)=x_1\sigma(\varepsilon_1)+x_2\sigma(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\sigma(\varepsilon_n)$$

$$\tau(\xi)=x_1\tau(\varepsilon_1)+x_2\tau(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\tau(\varepsilon_n)$$

由已知，即得 $\sigma(\xi)=\tau(\xi)$. $\quad\therefore\ \sigma=\tau.$

由此知，一个线性变换完全由它在一组基上的作用所决定.

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间V的一组基，对V中任意n个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，都存在线性变换 σ 使

$$\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

证：$\forall\xi\in V$, 设 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$

定义 $\sigma:V\to V$，$\sigma(\xi)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$,

易知 σ 为V的一个变换，下证它是线性的.

任取 β, $\gamma\in V$, 设 $\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i$, $\gamma=\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i$

则 $\beta+\gamma=\sum_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\varepsilon_i$, $k\beta=\sum_{i=1}^{n}(kb_i)\varepsilon_i$

于是 $\sigma(\beta+\gamma)=\sum_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$

$$=\sigma(\beta)+\sigma(\gamma)$$

$$\sigma(k\beta)=\sum_{i=1}^{n}(kb_i)\alpha_i=k\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i=k\sigma(\beta)$$

$\therefore$ σ 为V的线性变换.

又 $\varepsilon_i=0\varepsilon_1+\cdots+0\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i+0\varepsilon_{i+1}+\cdots+0\varepsilon_n$

$\therefore$ $\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i$, $i=1,2,\cdots,n$

由2与3即得

定理1 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为线性空间V的一组基，对V中任意$n$个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，存在唯一的线性变换 σ，使

$$\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i, \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

即$$\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

二、 线性变换与矩阵

1. 线性变换的矩阵

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为数域P上线性空间V的一组基，$\sigma$

为V的线性变换. 基向量的象可以被基线性表出,设

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_1)=\alpha_{11}\varepsilon_1+\alpha_{21}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n1}\varepsilon_n\\ \sigma(\varepsilon_2)=\alpha_{12}\varepsilon_1+\alpha_{22}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n2}\varepsilon_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma(\varepsilon_n)=\alpha_{1n}\varepsilon_1+\alpha_{2n}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{nn}\varepsilon_n\end{cases}$$

用矩阵表示即为

$$\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A$$

其中
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵A称为**线性变换σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵**.

注： ① A的第i列是$\sigma(\varepsilon_i)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标，它是唯一的．故$\sigma$在取定一组基下的矩阵是唯一的．

② 单位变换在任意一组基下的矩阵皆为单位矩阵；零变换在任意一组基下的矩阵皆为零矩阵；数乘变换在任意一组基下的矩阵皆为数量矩阵。

例1. 设线性空间 P^3 的线性变换 σ 为

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 σ 在标准基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

解： $\because\quad \sigma(\varepsilon_1) = \sigma(1,0,0) = (1,0,1)$

$$\sigma(\varepsilon_2) = \sigma(0,1,0) = (0,1,1)$$

$$\sigma(\varepsilon_3) = \sigma(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\therefore\quad \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m(m<n)$为n维线性空间V的子空间W的一组基，把它扩充为V的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

并定义线性变换σ：
$$\begin{cases}\sigma\varepsilon_i=\varepsilon_i & i=1,2,\cdots,m\\ \sigma\varepsilon_i=0 & i=m+1,\cdots,n\end{cases}$$

则

$$\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}m\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

称这样的变换σ为**对子空间W的一个投影**.

易验证$\sigma^2=\sigma$.

例3. 设线性空间$P[x]_3$的线性变换为

$$D(f(x)) = f'(x)$$

求D在基$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = x^2$下的矩阵.

解： $\because \quad D(\varepsilon_1) = 0, \quad D(\varepsilon_2) = 1, \quad D(\varepsilon_3) = 2x.$

$$\therefore \quad D(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为数域P上线性空间V的一组基，$\sigma$ 为V的线性变换，则

$$\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A,$$

矩阵A存在且唯一.

从而，我们可以建立映射：$L(V)\to P^{n\times n}$，且为单射.

是否为满射？$\forall A\in P^{n\times n}$,是否存在$V$上的线性变换$\tau$,

使得τ在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为$A$?即

$$\tau\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A.$$

设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$，即

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha_{11}\varepsilon_1+\alpha_{21}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n1}\varepsilon_n\\ \alpha_2=\alpha_{12}\varepsilon_1+\alpha_{22}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n2}\varepsilon_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n=\alpha_{1n}\varepsilon_1+\alpha_{2n}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{nn}\varepsilon_n\end{cases}$$

由定理**1**可知，存在V上线性变换τ，使得

$$\tau(\varepsilon_i)=\alpha_i, i=1,\cdots,n.$$

从而，

$$\tau(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

2. 线性变换运算的矩阵

定理2 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为数域P上线性空间V的一组基，V上的线性变换$\sigma,\tau$在这组基下的矩阵分别为A, B, 则

① $(\sigma+\tau)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(A+B)$;

② $(k\sigma)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(kA)$;

③ $(\sigma\tau)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(AB)$;

④ 若σ是可逆变换，则

$$\sigma^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A^{-1}.$$

证：

①$\because \sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A,$

$$\tau\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B,$$

$$\therefore (\sigma+\tau)\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)$$

$$=\left((\sigma+\tau)(\varepsilon_1),(\sigma+\tau)(\varepsilon_2),\cdots,(\sigma+\tau)(\varepsilon_n)\right)$$

$$=\left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\right)+\left(\tau(\varepsilon_1),\tau(\varepsilon_2),\cdots,\tau(\varepsilon_n)\right)$$

$$=\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)+\tau\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)$$

$$=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A+\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B$$

$$=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)(A+B).$$

③ $\because \sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A,$

$\tau\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B,$

$$\begin{aligned}
\therefore (\sigma\tau)\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right) \\
&=\left((\sigma\tau)(\varepsilon_1),(\sigma\tau)(\varepsilon_2),\cdots,(\sigma\tau)(\varepsilon_n)\right) \\
&=\left(\sigma(\tau(\varepsilon_1)),\sigma(\tau(\varepsilon_2)),\cdots,\sigma(\tau(\varepsilon_n))\right) \\
&=\sigma(\tau\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)) \\
&=\sigma(\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B) \\
&=\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B \\
&=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)AB.
\end{aligned}$$

注： $L(V)$与$P^{n\times n}$同构;　　$\dim L(V)=n^2$.

事实上，任意取定V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$后，

对任意 $\sigma\in L(V)$，定义 φ：

$$\varphi:\ L(V)\to P^{n\times n},\qquad \varphi(\sigma)=A,$$

这里A为σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵.

则 φ 就是$L(V)$到 $P^{n\times n}$ 的一个同构映射.

（1）双射　　　（2）保持运算

3．线性变换下象与原像坐标的关系

定理3 设线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为A，

$\xi\in V$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$\sigma(\xi)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

则有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证：由已知有

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

$$\sigma(\xi)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

又

$$\sigma(\xi)=\left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

由于$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，所以 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$

4．同一线性变换在不同基下矩阵之间的关系

定理4 设线性空间V的线性变换 σ在两组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \qquad \text{(I)}$$

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n \qquad \text{(II)}$$

下的矩阵分别为A、B，且从基(I) 到基(II)的过渡

矩阵矩阵是X，则

$$B = X^{-1}AX.$$

证：由已知，有

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

$$\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B,$$

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X.$$

于是，$\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)AX=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X^{-1}AX.$$

由此即得 $B=X^{-1}AX.$

三、相似矩阵

1. 定义

设A、B为数域P上的两个n级矩阵，若存在可逆矩阵 $X \in P^{n\times n}$，使得

$$B = X^{-1}AX$$

则称矩阵A相似于B，记为 $A \sim B$.

2．基本性质

（1）相似是一种二元关系，满足如下三条性质：

① 反身性：$A \sim A.$

$$\left(\because \quad A = E^{-1}AE.\right)$$

② 对称性：$A \sim B \Rightarrow B \sim A.$

$$\left(\because \quad B = X^{-1}AX \Rightarrow A = Y^{-1}BY, Y = X^{-1}.\right)$$

③ 传递性：$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C.$

$$\Big(\because \quad B = X^{-1}AX,\ C = Y^{-1}BY$$

$$\Rightarrow C = Y^{-1}BY = Y^{-1}(X^{-1}AX)Y = (XY)^{-1}A(XY).\Big)$$

（2）

定理5 线性变换在不同基下的矩阵是相似的；

反过来，如果两个矩阵相似，那么它们可以看作

同一线性变换在两组基下所对应的矩阵.

证： 前一部分显然成立. 下证后一部分.

设 $A \sim B$, 且A是线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

$\because B = X^{-1}AX$， 令 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X$.

显然，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 也是一组基，且 σ 在这组基下的

矩阵就是B.

（3）相似矩阵的运算性质

① 若 $B_1 = X^{-1}A_1X$，$B_2 = X^{-1}A_2X$， 则

$$B_1 + B_2 = X^{-1}(A_1 + A_2)X,$$

$$B_1B_2 = X^{-1}(A_1A_2)X.$$

即， $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2, A_1A_2 \sim B_1B_2.$

② 若 $B = X^{-1}AX$，$f(x) \in P[x]$， 则

$$f(B) = X^{-1}f(A)X.$$

特别地， $B^m = X^{-1}A^mX.$

③ $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$.

$$B = X^{-1}AX \Rightarrow |B| = |X^{-1}AX| = |X^{-1}||A||X| = |A|.$$

④ $A \sim B \Rightarrow R(A) = R(B)$.

⑤ $A \sim B$且A可逆$\Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$, $A^{*} \sim B^{*}$.

$$B = X^{-1}AX \Rightarrow B^{-1} = (X^{-1}AX)^{-1} = X^{-1}A^{-1}X.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|B|}B^{*} = \frac{1}{|A|}X^{-1}A^{*}X$$

$$\Rightarrow B^{*} = X^{-1}A^{*}X.$$