程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第三版)第一章课后习题详解

原创 阿得 阿得学数学 2019-04-02 08:10

第1-3题考查集合的运算. 需要的知识点有:

定义

- $A \cup B=\{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
- $A \cap B=\{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
- $A-B=\{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
- $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha=\{x: \exists \alpha \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\alpha\}$
- $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha=\{x: \forall \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}$

运算性质

- 交换律:
$$A \cup B=B \cup A,\ A \cap B=B \cap A.$$
- 结合律:
$$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C).$$
- 分配律:
$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \cap B=\bigcup_{\alpha \in \Lambda}\left(A_\alpha \cap B\right).$$
- 德摩根公式:
$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c,$$
$$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c.$$

1. 证明

1. 证明:

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

证明.

[方法一] 利用定义.

(1) 因为

$$
\begin{aligned}
& x\in(A-B)-C \\
\Longleftrightarrow\ & x\in(A-B)\text{ 且 }x\notin C \\
\Longleftrightarrow\ & x\in A\text{ 且 }x\notin B\text{ 且 }x\notin C \\
\Longleftrightarrow\ & x\in A\text{ 且 }x\notin B\cup C \\
\Longleftrightarrow\ & x\in A-(B\cup C),
\end{aligned}
$$

所以 $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(2) 因为

$$x\in(A\cup B)-C$$

$$\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\text{ 且 }x\notin C$$

$$\Longleftrightarrow \big(x \in A \text{ 或 } x \in B\big) \text{ 且 } x \notin C$$

$$\Longleftrightarrow \big(x \in A \text{ 且 } x \notin C\big) \text{ 或 } \big(x \in B \text{ 且 } x \notin C\big)$$

$$\Longleftrightarrow x \in (A - C) \text{ 或 } x \in (B - C)$$

$$\Longleftrightarrow x \in (A - C) \cup (B - C)$$

所以 $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

[方法二] 利用集合运算的性质.

(1) $(A-B)-C = \big(A \cap B^c\big) \cap C^c = A \cap \big(B^c \cap C^c\big) = A \cap \big(B \cup C\big)^c = A - (B \cup C)$;

(2) $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C^c = \big(A \cap C^c\big) \cup \big(B \cap C^c\big) = (A - C) \cup (B - C)$.

2. 证明:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha - B = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha - B)$;

(2) $\bigcap A_\alpha - B = \bigcap (A_\alpha - B)$

(2) $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha - B = \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha - B)$.

证明.

[方法一] 利用定义.

(1) 因为

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha - B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \exists \alpha_0 \in I\ s.t.\ x \in A_{\alpha_0} \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \exists \alpha_0 \in I\ s.t.\ x \in A_{\alpha_0} - B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha - B),
\end{aligned}
$$

所以 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha - B = \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha - B)$;

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha - B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha \text{ 且 } x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha - B
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I}(A_\alpha - B),$$

所以 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha - B = \bigcap\limits_{\alpha \in I}(A_\alpha - B)$.

[方法二] 利用集合运算的性质.

(1) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha - B = \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap B^c = \bigcup\limits_{\alpha \in I}(A_\alpha \cap B^c) = \bigcup\limits_{\alpha \in I}(A_\alpha - B)$;

(2) $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha - B = \left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap B^c = \bigcap\limits_{\alpha \in I}(A_\alpha \cap B^c) = \bigcap\limits_{\alpha \in I}(A_\alpha - B)$.

3. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n - \left(\bigcup_{v=1}^{n-1} A_v\right), n > 1.$$

证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集, 而且

$$\bigcup_{v=1}^{n} A_v = \bigcup_{v=1}^{n} B_v, \quad 1 \leq n \leq \infty.$$

证明.

第一步, 证明 $\{B_n\}$ 互不相交.

不妨设 $i < j$. 因为

$$
\begin{aligned}
B_i &\subset A_i, \\
B_j &= A_j - \left(\bigcup_{v=1}^{j-1} A_v\right) \\
&= A_j \cap \left(\bigcup_{v=1}^{j-1} A_v\right)^c = A_j \cap \left(\bigcap_{v=1}^{j-1} A_v^c\right) \\
&= A_j \cap A_i^c \cap \left(\bigcap_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{j-1} A_v^c\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$
B_i \cap B_j \subset A_i \cap B_j = A_i \cap A_j \cap A_i^c \cap \left(\bigcap_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{j-1} A_v^c\right) = \emptyset.
$$

第二步, 证明 $\bigcup\limits_{v=1}^{n} A_v = \bigcup\limits_{v=1}^{n} B_v, \quad 1 \leq n \leq \infty.$

一方面, 因为 $B_v \subset A_v$ 对 $v = 1, 2, \cdots$ 都成立, 所以 $\bigcup\limits_{v=1}^{n} B_v \subset \bigcup\limits_{v=1}^{n} A_v$ 显然成立.

另一方面, 设 $x \in \bigcup\limits_{v=1}^{n} A_v$, 至少存在一个 $1 \leq v \leq n$ 使得 $x \in A_v$. 设 v_0 是满足该条件的最小的下标, 即 $x \in A_{v_0}$ 且 $x \notin A_v, v = 1, 2, \cdots, v_0 - 1$. 因此

$$x \in A_{v_0} - \left(\bigcup_{v=1}^{v_0-1} A_v\right) = B_{v_0} \subset \bigcup_{v=1}^{n} B_v.$$

事实上, 我们已经证明了 $\bigcup\limits_{v=1}^{n} A_v \subset \bigcup\limits_{v=1}^{n} B_v$.

综上可得, $\bigcup\limits_{v=1}^{n} A_v = \bigcup\limits_{v=1}^{n} B_v, \quad 1 \leq n \leq \infty.$

第4-5题考查集合列的上极限和下极限的概念.

- 上极限:

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \{x : \text{存在无穷多个 } A_n, \text{使 } x \in A_n\}$$

- 下极限:

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{x : \text{当 } n \text{ 充分大以后都有 } x \in A_n\}$$

4. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $A_{2n}=(0,n)$, $n=1,2,\cdots$, 求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

解.

对于 $(0,+\infty)$ 中的每个点 x, 都存在自然数 $N(x)$, 使得当 $n>N(x)$ 时,

$$\frac{1}{n}<x<n,$$

即当 $n>N(x)$ 时, $x\in A_{2n}$ 但 $x\notin A_{2n-1}$. 换句话说, 对于 $(0,+\infty)$ 中的每个点 x, 具有充分大的偶数指标的集都含有 x, 即 $\{A_n\}$ 中有无穷多个集合含有 x. 而充分大的奇数指标的集都不含有 x, 即 $\{A_n\}$ 中不含 x 的集不会是有限个. 又 $(-\infty,0]$ 中的点不属于任何的 A_n, 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,+\infty),\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\emptyset.$$

5. **证明:** $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m.$

证明. **因为**

$$
\begin{aligned}
x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n &\iff \text{当 } n \text{ 充分大以后都有 } x \in A_n \\
&\iff \exists n \in \mathbb{N}, \text{当 } m \geq n \text{ 时有 } x \in A_m \\
&\iff x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,
\end{aligned}
$$

所以, $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m.$

证明两个集合相等的常用方法是证明这两个集合相互包含. 即

$$A = B \iff A \subset B, B \subset A.$$

证明三个或三个以上集合相等, 可证明循环包含关系. 即

$$A = B = C \iff A \subset B \subset C \subset A.$$

6. **设** $f(x), g(x)$ **是定义在** E **上的函数, 证明:**

(1) $\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x : f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n}\right\};$

(1) $\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > g(x) + \frac{1}{n}\right\}$;

(2) $\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n}\right\}$.

证明. 记

$$A = \{x : f(x) > g(x)\},$$
$$A_n = \left\{x \ : \ f(x) > g(x) + \frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \cdots,$$
$$B_n = \left\{x \ : \ f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \cdots.$$

两个小题合起来就是要证明

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

我们只需要证明

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(a) 对任意的自然数 n, 若 $x \in A_n$, 即 x 满足 $f(x) > g(x) + \frac{1}{n}$, 则必有 $f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n}$, 即 $x \in B_n$. 也就是说, 对任意的自然数 n, 有 $A_n \subset B_n$. 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

(b) 对任意的自然数 n, 若 $x \in E$ 满足 $f(x) \geq g(x)+\frac{1}{n}$, 则必有 $f(x) > g(x)$, 即 $B_n \subset A$. 因此 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset A$.

(c) 若 $x \in A$, 即 x 满足 $f(x) > g(x)$, 则 $f(x) - g(x) > 0$. 又 $\frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$, 由极限的定义, 对于 $\varepsilon = f(x) - g(x) > 0$, 一定存在自然数 N, 当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. 即当 $n > N$ 时, $f(x) > g(x) + \frac{1}{n}$, 也就是 $x \in A_n$. 因此 $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

综上, 结论得证.

证明两个集合的包含关系, 也可以通过证明余集的反包含关系得到. 即

7. 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 E 上的函数, 证明:

对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\{x : |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon\} \subset$$
$$\{x : |f(x)| > \varepsilon\} \cup \{x : |g(x)| > \varepsilon\}.$$

证明. 记

$$A = \{x : |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon\},$$
$$B = \{x : |f(x)| > \varepsilon\},$$
$$C = \{x : |g(x)| > \varepsilon\}.$$

若 $x \in B^c \cap C^c$, 即 x 满足

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{且} \quad |g(x)| \leq \varepsilon.$$

则

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

即 $x \in A^c$. 事实上, 我们证明了 $B^c \cap C^c \subset A^c$, 因此有

$$A \subset (B^c \cap C^c)^c = B \cup C.$$

第8题考查单调增集合列的性质：如果$\{A_n\}$单调增加，则

$$\lim_{n\to} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

8. 证明: 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数, 且对任意 $x \in E$, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$, $A_n = \{x : f_n(x) > c\}$ 是单调增集合列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > c\}$.

证明.

$\forall n \in \mathbb{N}$, 若 $x \in A_n$, 即 x 满足 $f_n(x) > c$, 有

$$f_{n+1}(x) \ge f(x) > c,$$

即 $x \in A_{n+1}$. 因此 $A_n \subset A_{n+1}$, 即 $\{A_n\}$ 是单调增集合列.

由单调集列的性质可得 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 因为

$$x \in \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$\iff x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ x \in A$$

$$\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ x \in A_{n_0}$$

$$\xLeftrightarrow{\{A_n\}\text{ 单调增}} \exists n_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n \geq n_0 \text{ 有 } x \in A_n$$

$$\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n \geq n_0 \text{ 有 } f_n(x) > c$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} f_n(x) > c$$

$$\iff x \in \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) > c\},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > c\}.$

第9题主要考查 $\varepsilon-\delta(N)$ 语言和集合语言的相互转化.

9. 证明: 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一列函数, 令 $E=\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty\}$, 则

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x : f_n(x)>k\}.$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}
& x\in E \\
\Longleftrightarrow\ & \lim_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty \\
\Longleftrightarrow\ & \forall k\in\mathbb{N}, \exists N\in\mathbb{N}, \text{当 } n\geq N \text{ 时}, f_n(x)>k \\
\Longleftrightarrow\ & x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x : f_n(x)>k\},
\end{aligned}$$

所以 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x : f_n(x)>k\}$.

第10-11题证明两个集合对等, 本质上就是建立两个集合之间的一一对应.

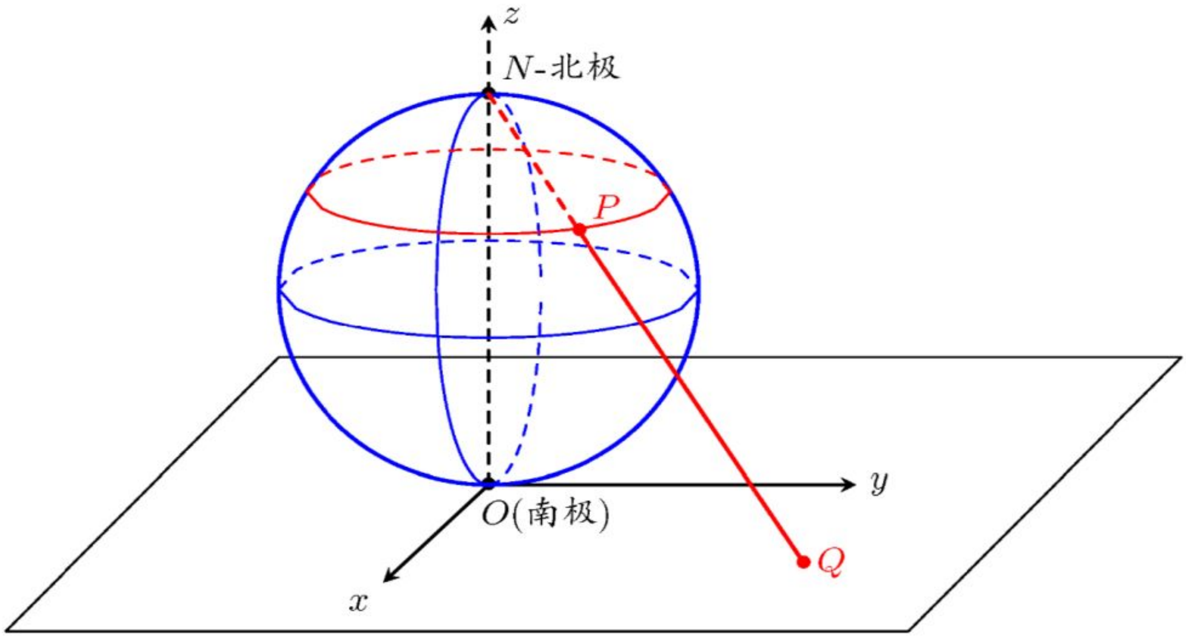
10. 作出一个 $(-1,1)$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 的一一对应, 并写出该对应的解析表达式.

解.

$$\varphi(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad x\in(-1,1).$$

11. 证明: 将球面去掉一点以后, 余下的点所成的集合和整个平面上的点所成的集合是对等的.

证明.



设球面为 S. 如图所示, 让球面的南极与 xOy 平面的坐标原点相切, 球面北极点记为 N. 对球面上任意异于北极点的点 P, 过北极点 N 及点 P 作一条直线, 与平面相交于唯一的一点 Q. 不难发现, 除了北极点外, 球面上每一点都与平面上的一点对应; 反过来, 对平面上任意一点 Q, 连接球面北极点 N 和点 Q 必与球面相交于异于 N 的一点 P, 即平面上每一点都与球面上异于北极的一点对应. 实际上我们找到了 $S-\{N\}$ 与 xOy 平面之间的一一映射.

具体来说, 设球面方程为 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, 北极点 N 的坐标为 $(0,0,2)$. 球面上一点 P 的坐标为 (x,y,z), 与之对应的点 Q 的坐标为 $(x',y',0)$. 因为 $N(0,0,2)$, $P(x,y,z)$, $Q(x',y',0)$ 三点共线, 所以

$$\frac{x'-0}{x-0}=\frac{y'-0}{y-0}=\frac{0-2}{z-2}.$$

从而

$$x'=\frac{-2}{z-2}x, \qquad y'=\frac{-2}{z-2}y.$$

$$z-2 \qquad\qquad z-2$$

这就是从 $S-\{N\}$ 到 xOy 面的一一映射. 因此, $S-\{N\}$ 与 xOy 平面是对等的.

第12-14题都是证明一个集合是可数集. 证明一个集合A是可数集有下面几种方法:

- 证明A与一个可数集(比如自然数集、整数集、有理数集)对等;
- 已知B是一可数集. 证明A与B的一个子集对等, B与A的一个子集对等, 用康托尔-伯恩斯坦定理得A也是一个可数集;
- 把A表示成可数个可数集的并集或有限个可数集的直积.

12. 证明: 所有系数为有理数的多项式组成一可数集.

证明.

设系数为有理数的 n 次多项式为

$$P_n = \left\{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_n \in \mathbb{Q}_0, \\ a_i \in \mathbb{Q}, \\ i = n-1, \cdots, 0. \end{array} \right\}.$$

显然 $P_n \sim \mathbb{Q}_0 \times \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n\text{个}}$, 其中 $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是可数集. 因此 P_n 是一个可数集. 从而有理系数多项式组成的全体 $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n$ 是一个可数集.

13. 设 A 是平面上以有理点(即坐标都是有理数)为中心, 有理数为半径的圆的全体, 则 A 是可数集.

证明.

平面上的一个圆是由它的圆心坐标 (x, y) 及半径 r 唯一确定的. 因此

$A \sim \{(x, y, r) : x, y \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}^+\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$,

其中 $\mathbb{Q}^+$ 表示非负有理数集, 它和 $\mathbb{Q}$ 都是可数集, 从而 A 也是可数集.

14. 证明: 增函数的不连续点最多只有可数多个.

证明.

设 $f(x)$ 是增函数, 则 x_0 是 $f(x)$ 的不连续点的充分必要条件是 $f(x_0+0)-f(x_0-0)>0$, 即

$$\big(f(x_0-0),f(x_0+0)\big)$$

是一个开区间. 把 $f(x)$ 的全体间断点构成的集合记为 A. 对任意的 $x\in A$, 由于 $\mathbb{Q}$ 在直线上稠密, 任取 $r\in\big(f(x-0),f(x+0)\big)\cap\mathbb{Q}$, 定义 $\varphi(x)=r$. 若 x_1 和 x_2 是 $f(x)$ 的不同间断点, 则 $\big(f(x_1-0),f(x_1+0)\big)\cap\big(f(x_2-0),f(x_2+0)\big)=\emptyset$. 因此 φ 是从 A 到 $\mathbb{Q}$ 内的单射, 于是 $A\sim\varphi(A)\subset\mathbb{Q}$, 所以 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{\mathbb{Q}}}=\aleph_0$, 即 A 是可数集或有限集. 于是 $f(x)$ 的不连续点最多只有可数多个.