§2.8 线性空间的同构

一、同构的定义

二、同构的有关结论

引入

我们知道，在数域P上的n维线性空间V中取定一组基后，V中每一个向量α有唯一确定的坐标$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，向量的坐标是P上的n元数组，因此属于P^n. 这样一来，取定了V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$对于V中每一个向量$\alpha$，令$\alpha$在这组基下的坐标$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\alpha$对应，就得到V到$P^n$的一个单射

$$\sigma: V \to P^n, \ \alpha \mapsto (a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

反过来，对于P^n中的任一元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\alpha=\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n$是V中唯一确定的元素，并且$\sigma(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，即$\sigma$也是满射.

因此，σ是V到P^n的双射.

这个对应的重要性表现在它与运算的关系上.

任取 $\alpha,\beta\in V$, 设

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,\quad \beta=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n$$

则 $\sigma(\alpha)=(a_1,a_2\cdots,a_n)$, $\sigma(\beta)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

从而 $\sigma(\alpha+\beta)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

$$=(a_1,a_2\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha)=(ka_1,ka_2\cdots,ka_n)\qquad \forall k\in P$$

$$=k(a_1,a_2\cdots,a_n)=k\sigma(\alpha),$$

这就是说，向量用坐标表示后，它们的运算可以归结为它们的坐标的运算.

一、同构映射的定义

设 V, V' 都是数域P上的线性空间，如果映射

σ: $V \to V'$ 具有以下性质：

i) σ 为双射

ii) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta), \quad \forall \alpha,\beta \in V$

iii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha), \quad \forall k \in P, \forall \alpha \in V$

则称 σ 是 V 到 V' 的一个**同构映射**，并称线性空间

V 与 V' **同构**.

例1 V为数域P上的n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基，则前面V到P^n的双射

$$\sigma: V \to P^n,$$

$$\alpha \mapsto (a_1,a_2,\cdots,a_n), \quad \forall \alpha \in V$$

这里$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为α在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$基下的坐标，

就是一个V到P^n的同构映射，所以V与P^n同构.

性质

1.反身性： V与V同构；

2.对称性： V与V'同构 $\Rightarrow V'$与V同构

3.传递性： V与V'同构，V'与V''同构 $\Rightarrow V$与V''同构

证：2.

设 $\sigma: V \to V'$ 是同构映射，

下证$\sigma^{-1}: V' \to V$是同构映射

首先 $\sigma^{-1}: V' \to V$ 是双射，并且

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \varepsilon_{V'}, \quad \sigma^{-1} \circ \sigma = \varepsilon_V ,$$

任取 $\alpha', \beta' \in V'$， 由于σ 是同构映射，有

$$\sigma(\sigma^{-1}(\alpha' + \beta')) = \sigma \circ \sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \alpha' + \beta'$$

$$= \sigma \circ \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma \circ \sigma^{-1}(\beta') = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha')) + \sigma(\sigma^{-1}(\beta'))$$

$$= \sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta'))$$

再由σ是单射，有 $\sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')$

同理，有 $\sigma^{-1}(k\alpha') = k\sigma^{-1}(\alpha'), \quad \forall \alpha' \in V', \forall k \in P$

所以，σ^{-1}为V'到V的同构映射.

3.设 σ: $V \to V'$，$\tau: V' \to V''$ 为线性空间的同构映射，则乘积 $\tau\circ\sigma$ 是 V 到 V'' 的双射.

任取 $\alpha, \beta \in V$，$k \in P$，有

$$\tau\circ\sigma(\alpha+\beta)=\tau\big(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)\big)$$

$$=\tau\big(\sigma(\alpha)\big)+\tau\big(\sigma(\beta)\big)=\tau\circ\sigma(\alpha)+\tau\circ\sigma(\beta)$$

$$\tau\circ\sigma(k\alpha)=\tau\big(\sigma(k\alpha)\big)=\tau\big(k\sigma(\alpha)\big)$$

$$=k\tau\big(\sigma(\alpha)\big)=k\tau\circ\sigma(\alpha)$$

所以，乘积 $\tau\circ\sigma$ 是 V 到 V'' 的同构映射.

二、同构的有关结论

设 V, V' 是数域 P 上的线性空间，σ 是 V 到 V' 的同构映射，则有

1） $\sigma(0)=0,\ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$

2） $$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)$$
$$=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r),$$
$$\alpha_i\in V,\ \ k_i\in P,\quad i=1,2,\cdots,r.$$

3） V中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关（线性无关）

的充要条件是它们的象 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_r)$

线性相关（线性无关）.

4） $\dim V = \dim V'$.

证： 1）在同构映射定义的条件iii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

中分别取 $k=0$与$k=-1$, 即得

$$\sigma(0)=0,\ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$$

2）这是同构映射定义中条件ii)与iii)结合的结果.

3）因为由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

可得 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$

反过来，由 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$

可得 $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0.$

而σ是双射，只有$\sigma(0)=0.$

所以可得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0.$

因此，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关（线性无关）

$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关（线性无关）.

4）设 $\dim V=n$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V 中任意一组基.

由3）知，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 为V'的一组基.

所以 $\dim V'=n=\dim V.$

三、同构的判定

1、数域P上任一n维线性空间都与P^n同构.

2. 数域P上的两个有限维线性空间 V_1, V_2同构 $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

证： "$\Rightarrow$" 若V_1与V_2同构，则由性质可得

$$\dim V_1 = \dim V_2.$$

"$\Leftarrow$" 若$\dim V_1 = \dim V_2 = n$,

则V_1与P^n同构, V_2与P^n同构

$\therefore V_1$与V_2同构.

例2 设 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 是数域P上线性空间，

其中， $\alpha_1 = x+2,\ \alpha_2 = x^2 - x - 1, \alpha_3 = x^2 + 1,$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

问：$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 与 $L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 是否同构？

解： 设 $\varepsilon_1 = x^2, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = 1,$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$,

又因为$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

所以,$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2.$

同理，由$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(A_1,A_2,A_3,A_4)\begin{pmatrix}1&0&2&-2\\-1&2&0&2\\0&1&1&0\\1&0&2&-2\end{pmatrix}$得

$\dim L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=2.$

所以，$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$与$L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$同构.