Title

§2

Date: M T W T F S S

Notes Review

上讲连续 见上一文件

度量空间中拓扑相关概念

完备度量空间

- (X,d) 上的连续映射与等价映射

实数 $f: R \to R$ ① f 在 x_0 处连续

② $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x_n \xrightarrow{d} x_0$ 有 $f(x_n) \to f(x_0)$

③ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ 对 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$

度量 $(X,d_1),(Y,d_2)$ $f: X \to Y$ ① f 在 x_0 处连续

② $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in (X,d_1)$ $x_n \xrightarrow{d_1} x_0$ 有 $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(x_0)$

③ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ 对 $\forall x \in O(x_0,\delta)$ $d_2[f(x)-f(x_0)]<\varepsilon$

eg $f:(X,d) \to (X,d)$ $f(x)=x$

$(\overset{X}{\overset{\shortparallel}{[0,1]}}, d)$ $2x \in (X,d)$ 不是所有空间都自带线性性

- 等距映射 $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$

$\forall x,y \in X$ 有 $d_2(f(x),f(y))=d_1(x,y)$

等距映射必连续 $x_n \xrightarrow{d_1} x$ $d_1(x_n,x_1) \to 0$

$\because d_2(f(x),f(y))=d_1(x_n,x_1)$

故 $d_2(f(x),f(y)) \to 0$ $f(x) \xrightarrow{d_2} f(y)$ $\Leftrightarrow f(x)$ 连续

- 拓扑定义 (X,τ) $\tau \le \underline{p(X)}$ 幂集：包含X的所有子集

① $\varnothing, X \in \tau$

② 若 $A,B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

③ $A_\alpha \in \tau$ $\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$

则称 τ 是 X 上的一个拓扑

(X,d) $d \xrightarrow{诱导} \tau$ $\boxed{由d构造\tau}$ / 什么样 τ 可以构造 d

开集 $\xrightarrow{拓扑}$ A开集 $\Leftrightarrow A \in \tau$

A闭集 $\Leftrightarrow A^c \in \tau$

(X,d) $O(x,\varepsilon)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<\varepsilon\}$

$\tau=\{U \mid U$ 是$\underset{\downarrow\ 0/n个/无穷}{\underline{若干个}}$ X 的开球的并$\}$

① $X, \varnothing$ 在 τ 中

$X=\bigcup_{x\in X}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X} \overset{\subseteq X}{O(x,1)} \subseteq X$

$\Rightarrow X=\bigcup_{x\in X} \underbrace{O(x,1)}_{开球并} \in \tau$

② $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ $A_\alpha \in \tau$

由 τ 定义：$A_\alpha=\bigcup_{\beta\in I_\alpha} \underline{O_\beta}$ 开球

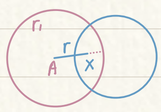
$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\boxed{\bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{\beta\in I_\alpha}} O_\beta \in I$ 怎么并都是开球

Title Date: M T W T F S S

Notes Review

③ $\bigcap_{n=1}^{N} A_n \in I$ 先证 $O_1 . O_2$ 为 X 中的开集

$\Rightarrow O_1 \cap O_2 = \{X$ 中某些开球的并$\}$



$O(x, r_1 - r) \subseteq O_1$

$O(x, r_2 - r) \subseteq O_2$

$\Rightarrow O(x, \min\{r_1 - r, r_2 - r\}) \subseteq O_1 \cap O_2$

$$O_1 \cap O_2 \subseteq \underline{\bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} O_{(x, \min\{r_1 - r, r_2 - r\})}} \subseteq O_1 \cap O_2$$

$$\Rightarrow O_1 \cap O_2 = \bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} O_{(x, \min\{r_1 - r, r_2 - r\})} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$$

则 $A \cap B = (\bigcup_{\alpha \in I_1} O_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in I_2} O_\beta)$

$$= \bigcup_{\alpha \in I_1} \bigcup_{\beta \in I_2} (O_\alpha \cap O_\beta)$$

$$= \bigcup_{\alpha \in I_1} \bigcup_{\beta \in I_2} \bigcup_{x \in O_\alpha \cap O_\beta} O_{(x, \min\{r_1 - r, r_2 - r\})}$$

- 闭包 $\overline{A} = \bigcap \{B \mid B \supseteq A$ B为闭集$\} = \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ s.t. $x_n \xrightarrow{d} x\}$
- 稠密和可分

定义: $A \subseteq B$ A在B中稠密

$$\begin{cases} \overline{A} = B \\ \forall x \in B \quad \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \text{ s.t. } x_n \xrightarrow{d} x \end{cases}$$

∀无理数都可以找到有理数列逼近

$a_0.a_1a_2a_3\cdots$

作业

$x_1 = a_0.a_1$

$x_2 = a_0.a_1a_2$

$\vdots$

$x_n = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_n$

eg Q在R中稠密 $\pi \in R$ $x_1 = 3$ $x_2 = 3.1$ $x_3 = 3.14$ $x_7 = 3.141593$ 考

无理数的极限是有理数 $\{2 - \frac{\sqrt{2}}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$

$\{2 \cdot (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$

定义: (X, d)可分. $\exists A \subset X$ 且A满足

$$\begin{cases} A \text{可数} \\ A \text{在} X \text{中稠密} \end{cases}$$

eg1 R可分 $\Leftarrow Q \subset R$

连续函数

eg2 $C[a,b]$可分

eg3 $R^n = (x_1, x_2 \ldots x_n)$

$R^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid$所有数列构成的全体$\}$ $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots) \subset R^{\infty}$

$l_\infty = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界$\}$ 有界数列全体 $\not\subset l^{\infty}$

下证 l_∞ 不可分

反证: 抽屉原理 无穷多个苹果放到N个抽屉. 必有一个抽屉中有无穷个苹果

不可数个苹果放到可数个抽屉. 必有一个抽屉中有不可数个苹果

$$\begin{cases} \text{有限} \\ \text{无穷} \begin{cases} \text{可数} \\ \text{不可数} \begin{cases} R \\ C \quad 2^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n = 0, 1\} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$(0,1,0,0,1\cdots)$

$\exists f = 2^{\infty} \to [0,1]$

Title

Date: M T W T F S S

Notes

Review

设l_∞可分 $\exists A \subset l^{\infty}$ A满足 $\begin{cases} A\text{可数} \\ A\text{在}l^{\infty}\text{中稠密} \end{cases}$

l^{∞}无穷的度量为 $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sup\limits_{n \in N^+} |x_n - y_n|$

l^{∞} $\{O(x, \frac{1}{3})\}_{x \in A}$ 开球 可数个抽屉

l_∞ $\because$ A稠密 $\bar{A} = l_\infty$ $\therefore \bigcup\limits_{x \in A} O(x, \frac{1}{3}) = l^{\infty}$

$\exists x \in A$ 2^{∞}中有无穷个点在 $O(x, \frac{1}{3})$ 内 $B = 2^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x = 0,1\} \subseteq l^{\infty}$

$\exists \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \in 2^{\infty} \\ \vec{a}, \vec{b} \in O(x, \frac{1}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(\vec{a}, \vec{b}) \leq \frac{2}{3} \\ 2^{\infty}\text{中任意两点距离为}1 \end{cases}$ 开球直径$\frac{2}{3}$ 同一球中不超过直径 矛盾

因为$\vec{a}$.$\vec{b}$都属于B

$A = \{a_n \,.\, n = 1, 2, \cdots\}$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O(a_n, \frac{1}{3}) = l^{\infty}$ A在l^{∞}稠密

$B \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, \frac{1}{3})$

$\Rightarrow \exists\, O(a_n, \frac{1}{3})$ s.t. $b_1, b_1 \in B$ 且 $\underset{(\vec{a}, \vec{b})}{b_1, b_2} \in O(a_n, \frac{1}{3})$

$\hookrightarrow b_1 = (1, 0, 0, 1 \cdots)$

$b_2 = (1, 0, 0, 0 \cdots)$

$d(b_1, b_2) = \sup |x_n - y_n| = 1$ 不同点

$\hookrightarrow \begin{cases} 0 & x_n = y_n \\ 1 & x_n = 1\ y_n = 0 \,/\, x_n = 0\ y_n = 1 \end{cases}$