第三章：混合策略Nash均衡

主要内容：

一、混合战略；

二、混合战略Nash均衡；

三、混合战略Nash均衡的求解。

一、混合策略

- 在“石头.剪刀.布”游戏中，分别以1/3的概率选择石头，剪刀，布。像这种以一定的概率分布来选择自己战略的行为，在博弈论中称之为**混合策略**(mixed strategy)。

纯战略：

参与人在给定信息下只选择一种特定战略(或行动)。

混合战略：

参与人给定信息下**以某种概率分布**随机地选择不同的行动。它可以定义为战略空间(集)上概率分布。

定义1：混合策略

在博弈 $G=<\Gamma; S_1,...,S_n; u_1,...,u_n>$ 中，对任一参与人i，设 $S_i=\{s_i^1,...,s_i^K\}$，则参与人i的一个混合策略为定义在策略集 S_i 上的一个概率分布 $\sigma_i=(\sigma_i^1,...,\sigma_i^K)$

其中$\sigma_i^j(j=1,...,K)$ 表示参与人i选择策略 s_i^j 的概率，即 σ_i^j 满足：

$$0\le\sigma_i^j\le1\ ,\quad \sum_{j=1}^{K}\sigma_i^j=1$$

混合战略解释了一个参与人对其他参与人所采取的行动的不确定性，它描述了参与人在给定信息下以某种概率分布随机地选择不同的行动或策略。

根据上述定义，纯战略可以理解为混合战略的特例。例如，纯战略 s_i^1 等价于混合战略

$$\sigma_i = (1, 0, 0, ..., 0)$$

即选择 s_i^1 的概率为1，其余战略为零。

$\sum_i$ 表示i的混合战略空间，

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ 代表混合战略组合

$\sum = \prod \sum_i$ 代表混合战略组合空间

(即 $\sigma \in \sum$)。

对于纯战略，参与人i的支付

$$u_i = u_i(s) = u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots s_n)$$

u_i是纯战略组合s的函数，且u_i为确定值，即

$$u_i : s \to u_i$$

对于混合战略，参与人i的支付是不确定的，参与人此时关心的是期望效用。

支付

1) 纯战略时

$$u_i(s)\text{或}u_i(s_i, s_{-i})$$

2) 混合战略时： $\upsilon_i(\sigma)$或$\upsilon_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$

$$\upsilon_i(\sigma)=\upsilon_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$=\sum_{s\in S}\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(s_j)\right)\cdot u_i(s)$$

其中，$\sigma_j(s_j)$为参与人j采取$s=(s_1, s_2,\cdots s_j,\cdots s_n)$中$s_j$的概率，$\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(s_j)$表示$s=(s_1, s_2,\cdots s_n)$发生的概率。

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) \cdot u_i(s)$$

其中，$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \prod_{j=1}^{n} S_j$

混合策略扩展博弈：博弈方在混合策略的策略空间（概率分布空间）的选择看作一个博弈，就是原博弈的“混合策略扩展博弈）。

混合策略纳什均衡：包含混合策略的策略组合，构成纳什均衡。

- 看下面的例子：

			2	
			q	$1-q$
			b_1	b_2
1	p	a_1	x_1 , y_1	x_2 , y_2
	$1-p$	a_2	x_3 , y_3	x_4 , y_4

参与人1在混合战略组合$\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$下的期望效用为

$$v_1(\sigma) = pqx_1 + p(1-q)x_2 + (1-p)qx_3 + (1-p)(1-q)x_4$$

- 参与人2在混合战略组合$\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$下的期望效用为

$$v_2(\sigma) = pqy_1 + (1-p)qy_3 + p(1-q)y_2 + (1-p)(1-q)y_4$$

定义2：混合战略Nash均衡

在博弈 $G=<\Gamma;S_1,...,S_n;u_1,...,u_n>$ 中，混合战略组合 $\sigma^*=(\sigma_1^*,...,\sigma_n^*)$ 为一个Nash均衡，当且仅当 $\forall i\in\Gamma,\forall\sigma_i\in\Sigma_i$, 有 $v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)\geq v_i(\sigma_i,\sigma_{-i}^*)$。

混合战略Nash均衡求法1：期望效用最大法

该博弈无纯策略纳什均衡，可用混合策略纳什均衡分析

博弈方2

博弈方1	C	D
A	2， 3	5， 2
B	3， 1	1， 5

	策略	得益
博弈方1	（0.8，0.2）	2.6
博弈方2	（0.8，0.2）	2.6

$$
\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & & \multicolumn{2}{c}{2} \\
 & & & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
 & & & b_1 & b_2 \\
\cline{4-5}
\multirow{2}{*}{1} & \frac{1}{3} & a_1 & 2\,,\,1 & 1\,,\,3 \\
\cline{4-5}
 & \frac{2}{3} & a_2 & 1\,,\,2 & 3\,,\,1 \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

混合战略Nash均衡求法2：无差异法

该博弈无纯策略纳什均衡，可用混合策略纳什均衡分析

		博弈方2 C	博弈方2 D
博弈方1	A	2， 3	5， 2
	B	3， 1	1， 5

	策略	得益
博弈方1	（0.8，0.2）	2.6
博弈方2	（0.8，0.2）	2.6

- 对简单的博弈问题，容易根据定义判断出Nash均衡。但对于一些复杂的博弈问题，要找到Nash均衡尤其是混合战略Nash均衡是非常不容易的。
- 为了求解混合战略Nash均衡，必须了解在选择混合战略的情况下，参与人如何剔除劣战略以及参与人最优混合战略的特性。

混合策略和严格下策反复消去法

- **结论：** 严格下策反复消去法既不会消去纯策略Nash均衡也不会消去混合策略Nash均衡。

- 对博弈方1和博弈方2，都没有严格下策。但是博弈方1采用混合策略(1/2,1/2,0)时，博弈方2采用纯策略L时，博弈方1的得益：U1=1/2*3+1/2*0+0*1=3/2

博弈方**2**

博弈方**1**		L	R
	U	3，1	0，2
	M	0，2	3，3
	D	1，3	1，1

即使博弈方2也采用混合(q,1-q)，

博弈方1的得益：U1=1/2*q*3+1/2*(1-q)*0+1/2*q*0+1/2*(1-q)*3=3/2

表明：策略D是相对于混合策略(1/2,1/2,0)的严格下策。于是删去策略D得到又变得博弈。

博弈方2

博弈方1		L	R
	U	3， 1	0， 2
	M	0， 2	3， 3

- 参与人i的最优混合战略的构成：给定其他参与人的选择σ_{-i}，假设$\sigma_i^* = (\sigma_i^{1^*}, \cdots, \sigma_i^{K^*})$为参与人$i$的最优混合战略，那么$\forall \sigma_i \in \Sigma_i$有

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq v_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sigma_i^{k^*} v_i(s_i^k, \sigma_{-i}) \geq \sum_{k=1}^{K} \sigma_i^k v_i(s_i^k, \sigma_{-i})$$

命题1

- 在参与人的最优混合战略$\sigma_i^* = (\sigma_i^{1^*}, \cdots, \sigma_i^{K^*})$中，对$\forall \sigma_i^{j^*} > 0$，有

$$v_i(s_i^j, \sigma_{-i}) = v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i})$$

证明：

（1）如果参与人i的最优混合策略σ_i^*为退化的纯策略，结论显然成立。

（2）如果参与人i的最优混合策略σ_i^*为严格的混合策略，则存在至少两个大于0的分量，由于

$$v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i})=\sum_{k=1}^{K}\sigma_i^{k^*}v_i(s_i^k,\sigma_{-i})$$

如果能够证明：对

$$\forall \sigma_i^{j*}, \sigma_i^{h*}，有 v_i(s_i^{j*}, \sigma_{-i}) = v_i(s_i^{h*}, \sigma_{-i})$$

那么命题得证。

（反证法）

假设$\forall \sigma_i^{j*}, \sigma_i^{h*}$，有$v_i(s_i^{j*}, \sigma_{-i}) \neq v_i(s_i^{h*}, \sigma_{-i})$

不失一般性：设

$$v_i(s_i^{j*}, \sigma_{-i}) > v_i(s_i^{h*}, \sigma_{-i})$$

构造满足如下条件的参与人i的混合策略$\sigma_i' = (\sigma_i^{1\prime}, \ldots, \sigma_i^{K\prime})$

（1）对

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, K\}, \ if \ \ k \neq j, \ and \ \ k \neq h, 则 \sigma_i^{k\prime} = \sigma_i^{k*}.$$

（2） $\sigma_i^{j\prime} = \sigma_i^{j*} + \sigma_i^{h*}, \ and \ \ \sigma_i^{h\prime} = 0.$

显然，与最优混合策略σ_i^*相比，在混合策略σ_i'中，除了纯策略s_i^j和s_i^h所对应的分量与最优混合策略σ_i^*的不同外，其他纯策略所对应的分量都是相同的。

$$v_i(\sigma_i{}',\sigma_{-i})\text{-}v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i})=\sum_{k=1}^{K}\sigma_i^{k}{}'v_i(s_i^k,\sigma_{-i})\text{-}\sum_{k=1}^{K}\sigma_i^{k^*}v_i(s_i^k,\sigma_{-i})$$

$$=\sigma_i^{h^*}v_i(s_i^j,\sigma_{-i})\text{-}\sigma_i^{h^*}v_i(s_i^h,\sigma_{-i})$$

$$>0$$

显然，上式与为参与人 i 的最优策略 σ_i^* 矛盾，命题得证。

混合战略Nash均衡求法3：反应函数法

该博弈无纯策略纳什均衡，可用混合策略纳什均衡分析

博弈方2

		C	D
博弈方1	A	2， 3	5， 2
	B	3， 1	1， 5

	策略	得益
博弈方1	（0.8，0.2）	2.6
博弈方2	（0.8，0.2）	2.6

例2：夫妻之争博弈

丈夫

		时装q	足球1-q
妻子	时装r	2， 1	0， 0
	球1-r	0， 0	1， 3

夫妻之争

反应函数：略

夫妻之争博弈的混合策略纳什均衡

博弈方1　　(0.75，0.25)

博弈方2　　(1/3，2/3)

在该混合均衡下的双方得益

妻子：$p_w(C)[p_h(C)*2+p_h(F)*0]+p_w(F)[p_h(C)*0+p_h(F)*1]$

$=3/4*1/3*2+1/4*2/3*1=0.67$

丈夫：$p_w(C)[p_h(C)*1+p_h(F)*0]+p_w(F)[p_h(C)*0+p_h(F)*3]$

$=3/4*1/3*1+1/4*2/3*3=0.75$

若两人协商选择(时装，时装)，(足球，足球)的一个其收益都大于0.67，0.75。

沟通的重要性：夫妻，团队，人际关系，一些制式

练习：用反应函数求纳什均衡

伯特兰德（Bertland,1883）悖论:

在古诺模型中，产品是同质的，如果企业的竞争战略是价格，即使只有两个企业，在均衡情况下，价格等于边际成本，企业利润为零。

用反应函数求解

- **假设1**：企业i的单位成本为c;
- **假设2**：线性需求函数为：

$$D(p)=\begin{cases} a-p, & p\le a; \\ 0, & p>a; \end{cases}$$

- **假设3：** 当企业设定不同的价格时，消费者总是偏向价格低的企业，而另一方的销售量为0，如果两个企业开出的价格相同时，他们平分市场。

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)(a - p_i), & p_i < p_j; \\ (p_i - c)(a - p_i)/2, & p_i = p_j; \\ 0, & p_i > p_j; \end{cases}$$

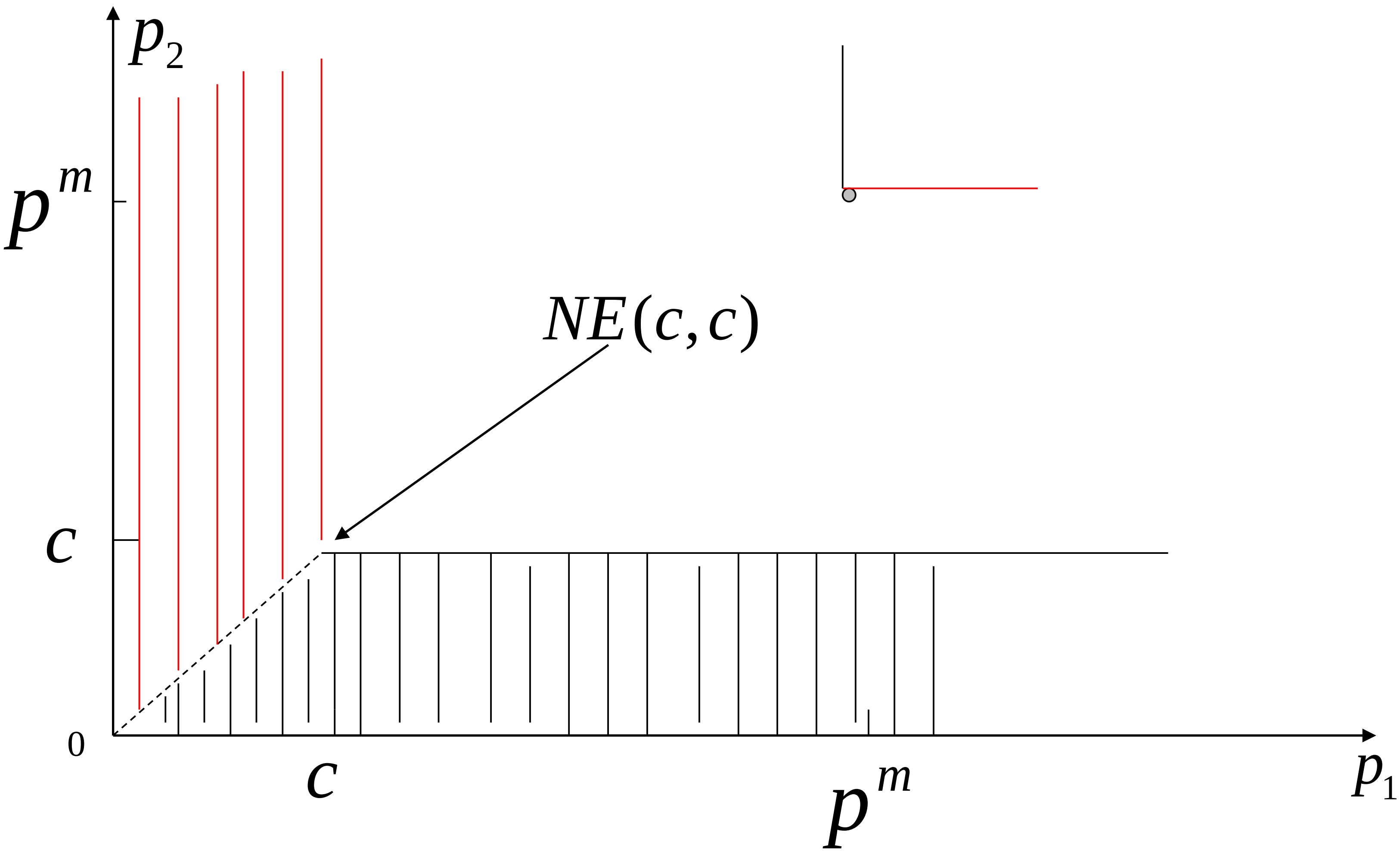
- When $p_j<c$, 企业i的利润在$p_i<=p_j$时为负，在$p_i>p_j$时为0，所以任何大于p_j的p_i都是对p_j的最佳反应；所以最优反应函数为：$B_i(p_j)=\{p_i : p_i>p_j\}$.

- When $p_j=c$,任何价格$p_i<p_j$都将带来亏损；任何大于或等于p_j的价格都会带来零利润，所以最优反应函数为：$B_i(p_j)=\{p_i : p_i >=p_j\}$.

- When $p_j>c$,只要$p_i<p_j$, i就获得$(p_i-c)(a-p_i)$的利润，p^m就是最值点，也是垄断价格。所以当$p_j>p_m$, p_m就是企业i的唯一最优反应。当$c<p_j<=p_m$时,找不到最优的p_i既要小于pj,又不能等于pi（因为等于pi 意味着利润少一半）,因此最优的p_i的不存在。
- 综上反应函数为：

$$B_i(p_j)=\begin{cases}\{p_i : p_i > p_j\}, & p_j < c; \\ \{p_i : p_i \geq p_j\}, & p_j = c; \\ \phi, & c < p_j \leq p^m; \\ \{p^m\}, & c < p^m < p_j;\end{cases}$$

反应函数如下



- 支集：对于给定的参与人的混合战略σ_i，称σ_i中所有大于0的分量所对应的纯战略的集合为σ_i的支集(记为 $S_i(\sigma_i)$) 即

$$S_i(\sigma_i) = \{s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0\}$$

定理1：最优反应的引理

在有限n人战略式博弈$G=<\Gamma;S_1,...,S_n;u_1,...,u_n>$中，混合战略组合$\sigma^*=(\sigma_1^*,...,\sigma_n^*)$为一个Nash均衡，当且仅当$\forall i\in\Gamma$，$\sigma_i^*$的支集$S_i(\sigma_i^*)$中每一个纯战略都是给定$\sigma_{-i}^*$下的最优反应。

混合战略Nash均衡求法4：图解法

该博弈无纯策略纳什均衡，可用混合策略纳什均衡分析

博弈方2

博弈方1		C	D
	A	2，3	5，2
	B	3，1	1，5

	策略	得益
博弈方1	（0.8，0.2）	2.6
博弈方2	（0.8，0.2）	2.6

问题提出：

- 1.如果小偷偷自行车被抓住，加大惩罚，能防止盗窃的发生吗?
- 2.如果学生考生作弊被监考老师抓住，诸如：留校察看、开除等惩罚措施能防止 学生作弊吗?
- 3.如果学生逃课，老师点名发现逃课同学，一次扣5分，学生就不逃课吗?
- 4.应该加大对逃税人的处罚，还是应该加大对税收机关的监督来减少偷税漏税呢?

小偷和守卫的博弈

1996年3月Professor Selten于上海

- Reinhard Selten (1930 -)

(一)、小偷和守卫的博弈模型

1、模型的描述

(1)小偷偷窃，守卫睡觉，则小偷偷得脏物 V（$V>0$），守卫有负效用 $-D$(管理部门对守卫的惩罚 $D>0$)；

(2)如小偷偷窃，守卫不睡觉，则小偷被抓有惩罚 $-P$（管理部门对小偷的惩罚 $P>0$)，守卫有 0 效用；

(3)如小偷不偷窃，守卫睡觉，则小偷有 0 效用，守卫有正效用 S（$S>0$);

(4)如小偷不偷窃，守卫不睡觉，则小偷与守卫各有 0 效用;

2.模型的得益矩阵表示

		守　　卫	
		睡	不睡
小偷	偷	V，$-D$	$-P$，0
	不偷	0，S	0，0

图1：小偷与守卫的得益矩阵

4、小偷和守卫的博弈特征

有纯策略Nash均衡吗？

一是在一次性博弈中没有自动实施的纯策略Nash均衡；

二是不能让对对方预先猜测到自己的策略。

		守卫：睡	守卫：不睡
小偷	偷	**V，-D**	-P，0
小偷	不偷	0，S	**0，0**

5、小偷和守卫的博弈分析

- **方法一：代数方法(略)**

(1)假设小偷选择“偷”策略的概率为p_t，选择“不偷”策略的概率为$1-p_t$

(2)假设守卫选择“睡”策略的概率为p_g，选择“不睡”策略的概率为$1-p_g$

		守卫	
		睡 (p_g)	不睡 ($1-p_g$)
小偷	偷 (p_t)	V，$-D$	$-P$，0
	不偷 ($1-p_t$)	0，S	0，0

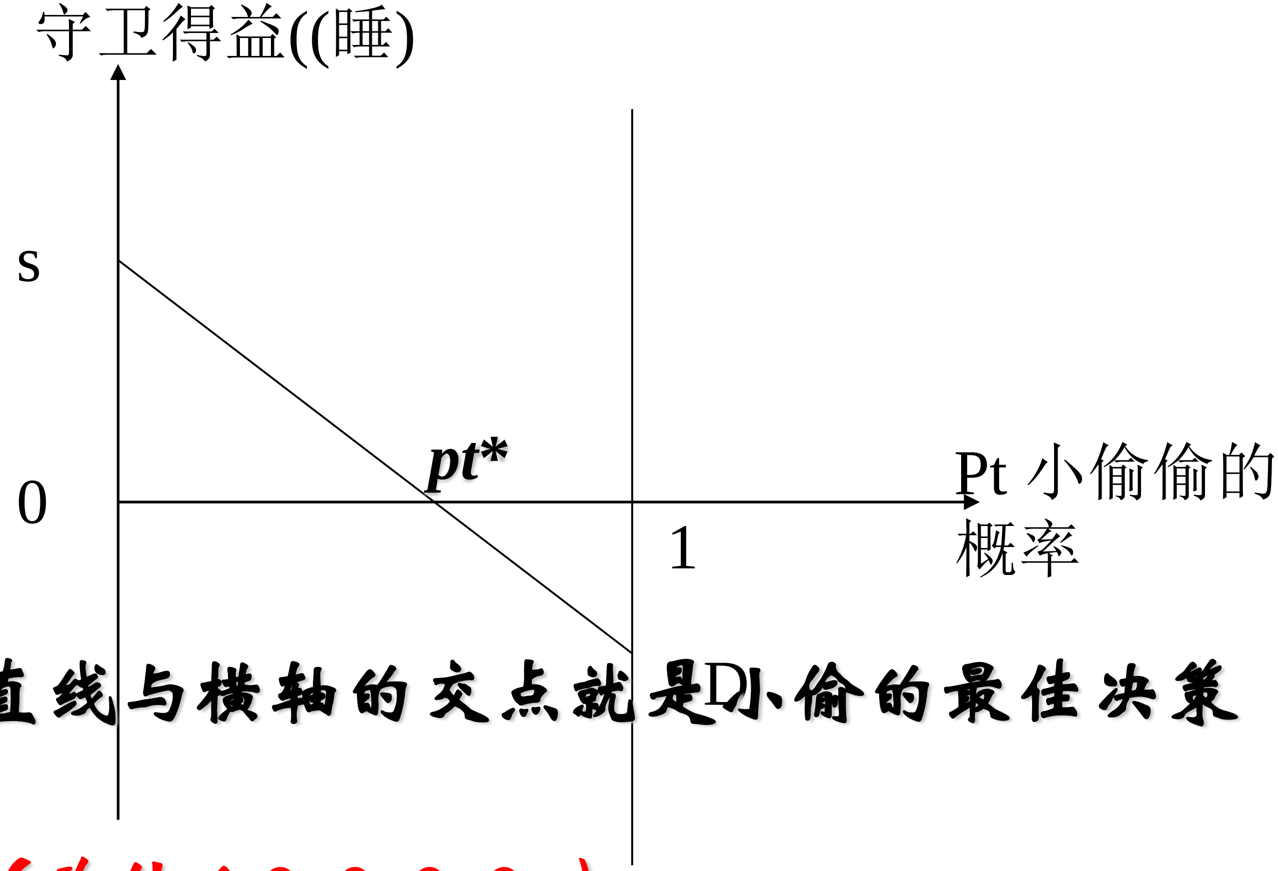
5、小偷和守卫的博弈分析(续)

- 方法二：图示方法
- *小偷的决策:*
- 守卫睡的得益

$$U_{守卫睡} = p_t(-D) + (1 - p_t)S$$

		守 卫	
		睡 (p_g)	不睡 ($1 - p_g$)
小偷	偷 (p_t)	V，$-D$	$-P$，0
	不偷 ($1 - p_t$)	0，S	0，0

守卫得益((睡) $U_{守卫睡}$的图象



于是：直线与横轴的交点就是小偷的最佳决策 *pt 。**

（为什么？？？？）

Cont……

- $U_{守卫睡} = p_t\,(-D) + (1 - p_t) \cdot S$

- 于是令$U_{守卫睡}=0$
- 解得：$p_t^* = \frac{S}{S+D}$，$1 - p_t^* = \frac{D}{S+D}$，

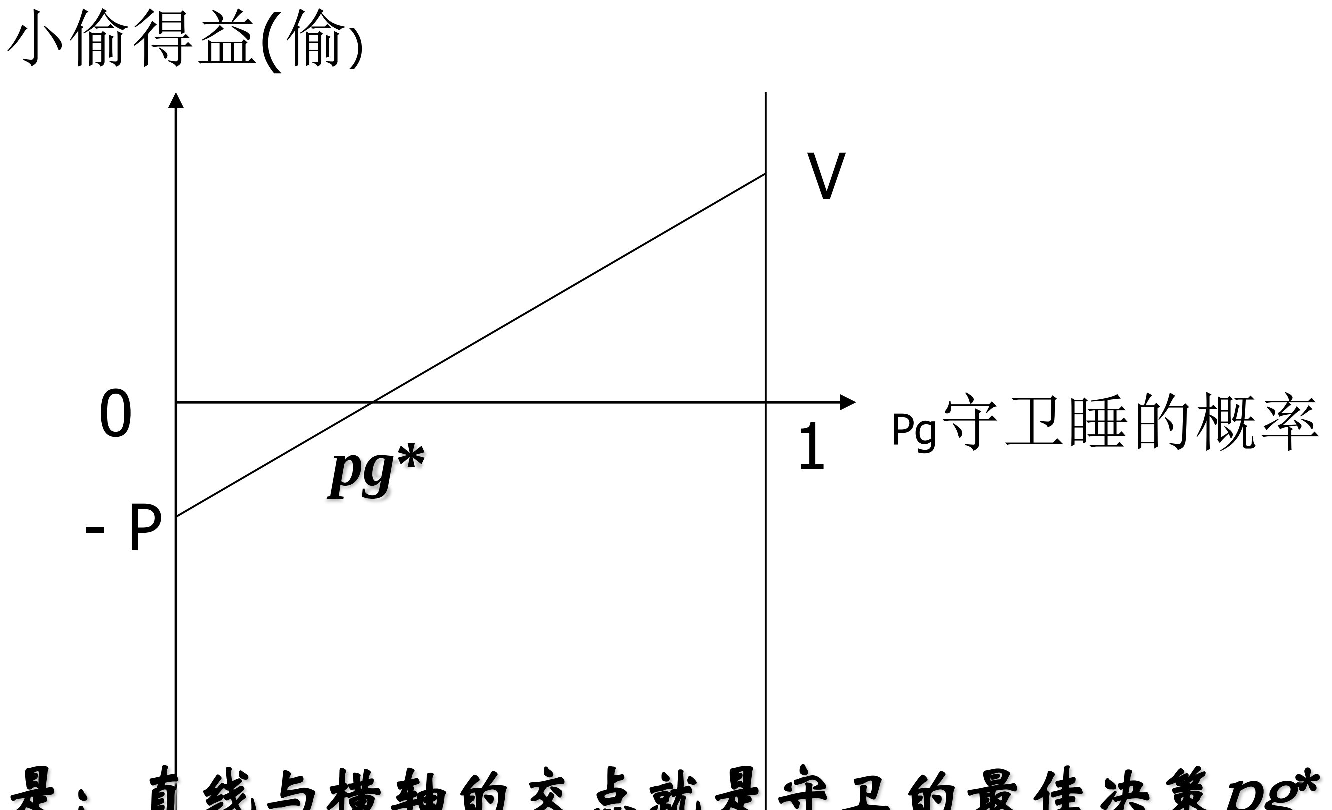
- 小偷选择“偷”与“不偷”的混合策略为：

$$\left(\frac{S}{S+D}, \frac{D}{S+D} \right)$$

- ***守卫的决策:***
- **小偷偷的得益**

$$U_{小偷偷} = p_g V + (1-p_g)(-P)$$

		守卫	
		睡 (p_g)	不睡 ($1 - p_g$)
小偷	偷 (p_t)	V，$-D$	$-P$，0
	不偷 ($1 - p_t$)	0，S	0，0



于是：直线与横轴的交点就是守卫的最佳决策*pg。**

（为什么？）

$U_{小偷偷} = p_g V + (1-p_g)(-P)$

$U_{小偷偷} = 0$

于是解得： $p_g^* = P/(V+P)$， $1-p_g^* = V/(V+P)$

- **守卫选择“睡”与“不睡” 的混合策略为：**

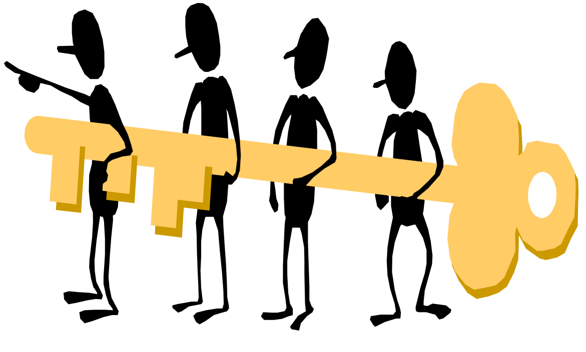
  （$P/(V+P)$，$V/(V+P)$）

综上：混合策略*Nash*均衡为：

[（$S/(S+D)$，$D/(S+D)$），（$P/(V+P)$，$V/(V+P)$）

6、结果与实践意义

- 激励的悖论
- 增加对守卫的惩罚作用，可以防止犯罪有很好的作用。但小偷的惩罚D由于守卫的收入P无关。为什么守卫不睡呢?
- 管理实践：如何有效激励?



2.5 纳什均衡的存在性

- Nash 定理(1950,Nash的存在性定理1):

  在一个博弈$G=\{S_1,\cdots,S_n;\ u_1,\cdots,u_n\}$,如博弈方个数$n$有限, 博弈方的策略空间$S_i$都为有限集,则该博弈至少存在一个Nash均衡,但可能包含混合策略

- Nash 定理:每一个有限博弈至少存在一个纯策略的或混合策略的纳什均衡。

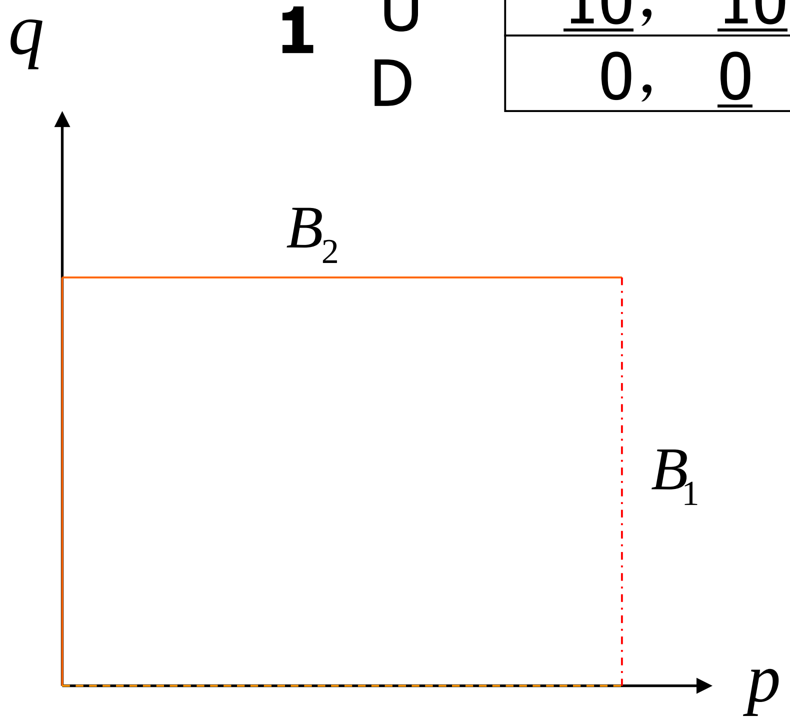
2.5 纳什均衡的存在性(Cont…)

- 纳什均衡的奇数定理

威尔逊（Wilson）在1971年证明，几乎所有有限博弈都有有限奇数个纳什均衡。如果一个博弈有2m（即偶数个）纯策略纳什均衡，则一定存在第2m+1个（即奇数个）混合策略纳什均衡。

一个反例

1 \ 2	L	R
U	$\underline{10}$, $\underline{10}$	$\underline{0}$, 0
D	0, $\underline{0}$	$\underline{0}$, $\underline{0}$



再论 求纳什均衡

去掉劣策略求混合策略纳什均衡

1、求博弈的纳什均衡

解：**(1)求纯策略NE**

	L	M	R
U	3,1	$\underline{2}$,2	$\underline{5}$,$\underline{3}$
M	2,$\underline{3}$	1,$\underline{3}$	4,1
B	$\underline{4}$,$\underline{5}$	$\underline{2}$,3	3,4

(2)求混合策略NE

设博弈方1的混合策略：

（p_U, p_M, p_B）

设博弈方2的混合策略：

（p_L, p_M, p_R）

设博弈方1的混合策略：

（p_U, p_M, p_B）

设博弈方2的混合策略：

（p_L, p_M, p_R）

则：对博弈方1

$p_U+3p_M+5p_B=$

$2p_U+3p_M+3p_B=$

$3p_U+p_M+4p_B$

解得：

（p_U^*, p_M^*, p_B^*）＝

(4/9,3/9,2/9)

	L	M	R
U	3,1	2,2	5,3
M	2,3	1,3	4,1
B	4,5	2,3	3,4

博弈方2：

$3p_L+2p_M+5p_R=$

$2p_L+p_M+4p_R=$

$4p_L+2p_M+3p_R$

解得：

？？？？？

先去掉严格劣策略

此时:

MNE:

((1/3,2/3), (2/3,1/3))

	L	R
U	3,1	<u>5</u>,<u>3</u>
B	<u>4</u>,<u>5</u>	3,4

混合战略Nash均衡求法5：支撑求解法

（略，自学）

混合战略Nash均衡求法6：规划求解法

- 所谓规划求解法就是将求解博弈的混合战略Nash均衡，转换为一个规划问题进行求解。规划求解法对两人有限博弈问题的Nash均衡求解尤为有效。

- 在一个两人有限战略式博弈中：
  设$S_1=\{s_1^1,\ldots,s_1^m\}$，$S_2=\{s_2^1,\ldots,s_2^n\}$。
- 用矩阵$U_1=(a_{ij})_{m\times n}$表示参与人1的支付，其中a_{ij}表示参与人1在战略组合(s_1^i,s_2^j)下的支付，即$a_{ij}=u_1(s_1^i,s_2^j)$用矩阵$U_2=(b_{ij})_{m\times n}$表示参与人2的支付，其中b_{ij}表示参与人2在战略组合(s_1^i,s_2^j)下的支付，即$b_{ij}=u_2(s_1^i,s_2^j)$。设参与人1和2的混合战略分别为$\sigma_1=(\sigma_1^1,\ldots,\sigma_1^m)$和$\sigma_2=(\sigma_2^1,\ldots,\sigma_2^n)$，则$v_1(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1U_1\sigma_2^T$，$v_2(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1U_2\sigma_2^T$。

- 一个两人有限战略式博弈的Nash均衡可以通过求解以下规划问题得到：

$$
\begin{aligned}
&Max\ z=\sigma_1 U_1 \sigma_2^T-\upsilon_1+\sigma_1 U_2 \sigma_2^T-\upsilon_2 \\
&s.t.\ \ U_1\sigma_2^T \le \upsilon_1 E_m^T \\
&\qquad (\sigma_1 U_2)^T \le \upsilon_2 E_n^T \\
&\qquad \sigma_1 E_m^T=\sigma_2 E_n^T=1 \\
&\qquad \sigma_1^i \ge 0, i=1,\ldots,m \\
&\qquad \sigma_2^j \ge 0, j=1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

- E_m和E_n分别表示矩阵$(1,\ldots,1)_{1\times m}$和$(1,\ldots,1)_{1\times n}$，υ_1 和 υ_2 分别表示参与人1和2在Nash均衡下的期望支付。

				2		
			σ_2^A	σ_2^B	σ_2^C	σ_2^D
			A	B	C	D
1	σ_1^U	U	3, 5	1, 4	5, 7	4, 2
	σ_1^L	L	4, 3	2, 5	0, 3	2, 6

- 参与人1的支付矩阵为

$$U_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 参与人2的支付矩阵为

$$U_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- 参与人1和参与人2的混合战略分别是$\sigma_1 = (\sigma_1^U, \sigma_1^L)$和 $\sigma_2 = (\sigma_2^A, \sigma_2^B, \sigma_2^C, \sigma_2^D)$ ， υ_1 和 υ_2 分别表示参与人1和2在Nash均衡下的期望支付。

利用规划求解方法求解该战略式博弈，构造规划问题如下

$$Max\ z=(\sigma_1^U,\sigma_1^L)\begin{bmatrix}3&1&5&4\\4&2&0&2\end{bmatrix}(\sigma_2^A,\sigma_2^B,\sigma_2^C,\sigma_2^D)^T-\upsilon_1$$

$$+(\sigma_1^U,\sigma_1^L)\begin{bmatrix}5&4&7&2\\3&5&3&6\end{bmatrix}(\sigma_2^A,\sigma_2^B,\sigma_2^C,\sigma_2^D)^T-\upsilon_2$$

$$s.t.\ \begin{bmatrix}3&1&5&4\\4&2&0&2\end{bmatrix}(\sigma_2^A,\sigma_2^B,\sigma_2^C,\sigma_2^D)^T\le(\upsilon_1,\upsilon_1)^T$$

$$((\sigma_1^U,\sigma_1^L)\begin{bmatrix}5&4&7&2\\3&5&3&6\end{bmatrix})^T\le(\upsilon_2,\upsilon_2,\upsilon_2,\upsilon_2)^T$$

$$\sigma_1^U+\sigma_1^L=1$$

$$\sigma_2^A+\sigma_2^B+\sigma_2^C+\sigma_2^D=1$$

$$\sigma_1^U\ge0,\sigma_1^L\ge0$$

$$\sigma_2^A\ge0,\sigma_2^B\ge0,\sigma_2^C\ge0,\sigma_2^D\ge0$$

- 求解上述规划问题，可得博弈的三个Nash均衡，其中一个纯战略Nash均衡 (U,C) 和两个混合战略Nash均衡 $((\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(0,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}))$ 和 $((\frac{2}{5},\frac{3}{5}),(0,\frac{5}{6},\frac{1}{6},0))$

多人博弈规划求解法

- 有限人战略式博弈 $G = <\Gamma; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n>$。
- 对 $\forall i \in \Gamma$ ，设 $S_i = \{s_i^1, \ldots, s_i^{K_i}\}$，$\sigma_i = (\sigma_i^1, \ldots, \sigma_i^{K_i})$。
- 求解下列规划问题即可得到博弈的解：

$$
\begin{aligned}
& Max\ z = \sum_{i=1}^{n} (v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - \upsilon_i) \\
& s.t.\ \ v_i(s_i^j, \sigma_{-i}) \le \upsilon_i,\ \ \forall i \in \Gamma, \forall s_i^j \in S_i \\
& \qquad \sum_j \sigma_i^j = 1,\ \forall i \in \Gamma \\
& \qquad \sigma_i^j \ge 0,\ \forall i \in \Gamma, \forall j \in \{1, \ldots, K_i\}
\end{aligned}
$$

- 其中，$\upsilon_i (i = 1, \ldots, n)$ 为参与人在Nash均衡下的期望支付。

规划法求解多人战略式博弈的混合战略Nash均衡

- 参与人1的混合战略为$\sigma_1=(\sigma_1^1,\sigma_1^2)$，参与人2的混合战略为$\sigma_2=(\sigma_2^1,\sigma_2^2)$，参与人3的混合战略为$\sigma_3=(\sigma_3^1,\sigma_3^2)$ 。

3

U | D

2

1	2: U	2: D
U	0, 0, 0	-1, 2,-1
D	2,-1,-1	-1,-1, 2

2

1	2: U	2: D
U	-1,-1, 2	2,-1,-1
D	-1, 2,-1	0, 0, 0

$$v_1(\sigma_1, \sigma_{-1}) = \sigma_1^1 v_1(U, \sigma_{-1}) + \sigma_1^2 v_1(D, \sigma_{-1})$$

$$v_2(\sigma_2, \sigma_{-2}) = \sigma_2^1 v_2(U, \sigma_{-2}) + \sigma_2^2 v_2(D, \sigma_{-2})$$

$$v_3(\sigma_3, \sigma_{-3}) = \sigma_3^1 v_3(U, \sigma_{-3}) + \sigma_3^2 v_3(D, \sigma_{-3})$$

,

,

,

$$\begin{cases} v_1(U,\sigma_{-1}) = -\sigma_2^2\sigma_3^1 - \sigma_2^1\sigma_3^2 + 2\sigma_2^2\sigma_3^2 \\ v_2(U,\sigma_{-2}) = -\sigma_1^2\sigma_3^1 - \sigma_1^1\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2 \\ v_3(U,\sigma_{-3}) = -\sigma_1^2\sigma_2^1 - \sigma_1^1\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(D,\sigma_{-1}) = 2\sigma_2^1\sigma_3^1 - \sigma_2^2\sigma_3^1 - \sigma_2^1\sigma_3^2 \\ v_2(D,\sigma_{-2}) = 2\sigma_1^1\sigma_3^1 - \sigma_1^2\sigma_3^1 - \sigma_1^1\sigma_3^2 \\ v_3(D,\sigma_{-3}) = 2\sigma_1^1\sigma_2^1 - \sigma_1^2\sigma_2^1 - \sigma_1^1\sigma_2^2 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = v_1(\sigma_1,\sigma_{-1}) + v_2(\sigma_2,\sigma_{-2}) + v_3(\sigma_3,\sigma_{-3}) - \upsilon_1 - \upsilon_2 - \upsilon_3 \\
&s.t.\ \ v_i(U,\sigma_{-i}) \le \upsilon_i,\ i = 1,2,3 \\
&\qquad v_i(D,\sigma_{-i}) \le \upsilon_i,\ i = 1,2,3 \\
&\qquad \sigma_i^1 + \sigma_i^2 = 1,\ i = 1,2,3 \\
&\qquad \sigma_i^1, \sigma_i^2 \ge 0,\ i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

- 其中，υ_1，υ_2 和 υ_3 分别表示参与人1，2和3在Nash均衡下的期望支付。

2.6、零和博弈中参与人的极大极小化行为

- 什么是零和博弈?
- 矩阵表示

零和博弈中参与人的极大极小化行为

- 给定参与人1的任一选择a_i，参与人2选择战略使自己支付最大化的行为(即$\mathop{Max}\limits_j b_{ij}$)，就是选择战略使参与人1的支付最小化的行为(即$\mathop{Min}\limits_j a_{ij}$)
- 由于在任一情况下，参与人2都选择使参与人1的支付最小化的战略$b_k \in \arg\min\limits_j a_{ij}$ ，因此，参与人1就会在使自己支付最小化的战略中，选择使自己的支付达到最大化所对应的战略

。 $a_h \in \arg\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$

零和博弈中参与人的极大极小化行为

- 给定参与人2的任一选择b_j，参与人1选择战略 $a_k \in \arg\max_i a_{ij}$，与此同时，参与人2在使自己支付最小化(即参与人1支付最大化)的战略中，选择使自己的支付达到最大化(即损失降到最小)所对应的战略 $b_h \in \arg\min_j \max_i a_{ij}$

规划求解法

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{min} \\
U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ (2) \\ 1 \end{array} \\
\text{max} \quad 4 \quad 4 \quad (2) &
\end{array}
$$

作业1. 对零和博弈的支付矩阵：$U=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

证明：$\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} \le \min\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$

定义：鞍点

对于给定的零和博弈的支付矩阵，如果存在某个i^*和j^*，使得

$$a_{i^* j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

那么我们称i^*行j^*列所对应的点为支付矩阵U的鞍点(saddle point)。

作业2. 对零和博弈的支付矩阵： $U=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

证明： $\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}=\min\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ 的充分必要条件是存在纯策略组合 $\left(s_{i*}, s_{j*}\right)$,

使得 $a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j}$ ， $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$ 。

其中 s_{i*} 是博弈方 1 的第 i 个纯策略, s_{j*} 是博弈方 2 的第 j 个纯策略。

定理

- 在零和博弈中，如果支付矩阵存在鞍点，那么鞍点所对应的战略组合就是博弈的Nash均衡。

- 零和博弈都不存在纯策略NE?

规划求解法

不存在定义所定义的鞍点的零和博弈问题，需要定义混合战略意义下的鞍点。

$$\begin{array}{rcc} & & \min \\ U = & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \\ \max & \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} & \end{array}$$

定义

对于给定的零和博弈的支付矩阵，如果存在参与人1的某个混合战略$\sigma_1^* = (\sigma_1^{1^*},...,\sigma_1^{m^*})$和参与人2某个混合战略$\sigma_2^* = (\sigma_2^{1^*},...,\sigma_2^{n^*})$，使得

$$v_1(\sigma_1^*,\sigma_2^*) = \max_{\sigma_1}\min_{\sigma_2} v_1(\sigma_1,\sigma_2) = \min_{\sigma_2}\max_{\sigma_1} v_1(\sigma_1,\sigma_2)$$

那么称战略组合(σ_1^*,σ_2^*)为支付矩阵U的鞍点。

定理：Von Neumann极小极大定理

在零和博弈中，对于给定的支付矩阵，**如果存在混合战略**$\sigma_1^* = (\sigma_1^{1^*}, \ldots, \sigma_1^{m^*})$和$\sigma_2^* = (\sigma_2^{1^*}, \ldots, \sigma_2^{n^*})$以及一个常数$v$，使得对任意$j$有$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sigma_1^{i^*} \geq v$，对任意$i$有$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sigma_2^{j^*} \leq v$，那么战略组合$(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$为该博弈的Nash均衡。其中，$v$为参与人1在均衡中所得到的期望支付，亦称该博弈的值。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sigma_2^{j^*} \leq v \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sigma_1^{i^*}$$

定理

对于给定的零和博弈，如果博弈的值大于0，则博弈的Nash均衡为以下对偶线性规划问题的解

$$\min \sum_{i=1}^{m} p_i \qquad\qquad \max \sum_{j=1}^{n} q_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1 \ \ (j=1,\dots,n) \quad \text{和} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i \le 1 \ \ (i=1,\dots,m)$$

$$p_i \ge 0 \ \ (i=1,\dots,m) \qquad\qquad q_i \ge 0 \ \ (j=1,\dots,n)$$

其中，Nash均衡支付 $v=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} q_j}$，Nash均衡战略 $\sigma_1^* = (vp_1,\dots,vp_i,\dots,vp_m), \sigma_2^* = (vq_1,\dots,vq_i,\dots,vq_n)$

规划求解法

- **命题2**：如果支付矩阵的每个元素都大于0，即$a_{ij}>0$，那么博弈的值大于0，即$v>0$。
- **命题3**：如果支付矩阵 $U'=(a_{ij}')_{m\times n}$ 是由$U=(a_{ij})_{m\times n}$的每个元素都加上一个常数c得到，即$a_{ij}'=a_{ij}+c$那么支付矩阵U和U'所对应的零和博弈的Nash均衡战略相同，博弈的值相差c。

规划求解法

- 根据上述命题，我们可以得到求解一般零和博弈Nash均衡的方法：

(1) 使支付矩阵中的所有元素都大于0。如果支付矩阵中有小于0的元素，可以通过加上一个常数使它们都大于0；

(2) 求解定理中的两个对偶线性规划问题。

规划求解法

			2	
		L	M	R
	U	2,-2	1,-1	3,-3
1	C	2,-2	3,-3	1,-1
	D	4,-4	2,-2	2,-2

规划求解法

$$U=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\2 & 3 & 1\\4 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

- 设参与人1和参与人2的混合战略分别是$\sigma_1=(vp_1,vp_2,vp_3)$和$\sigma_2=(vq_1,vq_2,vq_3)$，利用对偶线性规划求解方法求解该战略式博弈的Nash均衡，构造规划问题如下：

规划求解法

- 设参与人1和参与人2的混合战略分别是和，利用对偶线性规划求解方法求解该战略式博弈的Nash均衡，构造规划问题如下。

$$\begin{aligned} &\min(p_1+p_2+p_3) \\ s.t.\quad &2p_1+2p_2+4p_3\ge 1 \\ &p_1+3p_2+2p_3\ge 1 \\ &3p_1+p_2+2p_3\ge 1 \\ &p_1\ge 0, p_2\ge 0, p_3\ge 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &\max(q_1+q_2+q_3) \\ s.t.\quad &2q_1+q_2+3q_3\le 1 \\ &2q_1+3q_2+q_3\le 1 \\ &4q_1+2q_2+2q_3\le 1 \\ &q_1\ge 0, q_2\ge 0, q_3\ge 0 \end{aligned}$$

- 得到 $p_1=\frac{1}{4},p_2=\frac{1}{4},p_3=0$ ，参与人1的支付$v=2$，参与人1的混合战略$\sigma_1^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 。
- 对对偶问题求解，得到$q_1=0,q_2=\frac{1}{4},q_3=\frac{1}{4}$ 参与人2的损失$v=2$ ，因此，参与人2的混合战略$\sigma_2^*=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 所以，该博弈存在一个混合战略Nash均衡 $((\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$

例：教材P54，例3-9