Title

§10 算子

Date: M T W T F S S

Notes Review

1. 映射： $f: R^n \to R^m$ 变换

$\downarrow$

$f: C \to R$ 泛函

赋范 无穷维

$f: \underline{C[0,1]} \to Y$ 算子

2. 线性映射：X. Y 线性空间 $T: X \to Y$ （$Y=R$ 算子 $\to$ 泛函）

若 $T(ax+by)=aTx+bTy$ $\forall a,b \in R$. $x,y \in X$. 则称 T是线性算子

3. 有界线性算子 $T: C_{00} \to C_{00}$ 有限项非零. 其余项都为零

$e_n=(0,0\dots 0\,1,0,\dots 0)$ $C_{00} = \mathrm{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

$Te_n = ne_n$ 无界线性算子. $\|e_n\|=1$ $T \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ 没有最大值

$\forall x \in C_{00}$ $x=\sum_{k=1}^{N} a_k e_{n_k}$ $Tx = T(\sum_{k=1}^{N} a_k e_{n_k}) \overset{T线性}{=\!=} \sum_{k=1}^{N} a_k Te_{n_k} = \sum_{k=1}^{N} a_k n_k e_{n_k}$

赋范 线性

4. 算子范数 $T: X \longrightarrow Y$ $\|T\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ 最大拉伸倍数

① 更大的集合 ② $\sup ③ \le \sup ① \le \sup ②$

更小的集合 证明 $\|$ ③

$\Leftrightarrow = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=c} \frac{\|Tx\|}{c}$

若 $\|T\|$ 存在. 则称T为有界线性算子

$\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \overset{T线性}{=\!=\!=} \sup\limits_{x\neq 0} \|T\cdot\frac{x}{\|x\|}\| \overset{令 y=\frac{x}{\|x\|}}{=\!=\!=} \sup\limits_{\|y\|=1} \|Ty\|$ $\|y\| = \|\frac{1}{\|x\|}x\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$

$\overset{令 z=cy}{=\!=\!=} \sup\limits_{\|z\|=c} \|T\frac{1}{c}z\| = \frac{1}{c}\sup\limits_{\|z\|=c}\|Tz\|$

eg1 $T: C[0,1] \to C[0,1]$ $Id(f)=f$ $\|Id\| = \sup\limits_{f\neq 0} \frac{\|Idf\|}{\|f\|} = \sup\limits_{f\neq 0} \frac{\|f\|}{\|f\|} = 1$

导数也连续

eg2 $T: C^1[0,1] \to C[0,1]$ $Tf=f'$ $T(af+bg)=(af+bg)'=aTf+bTg$ 闭区间函数有最大值（最大值范数）

积分算子？ 微分算子：$f(x)=x^n \in C^1[0,1]$ $(x^n)'=nx^{n-1}$ $\|T\| = \sup\limits_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \sup\{\frac{\|Tf\|}{\|f\|} \mid f\neq 0 \ \ f\in C^1[0,1]\} \geq \frac{\|Tx^n\|}{\|T\|} = \{\frac{\|Tf\|}{\|f\|} \mid f=x^n\} = \frac{n\|x^{n-1}\|}{\|x^{n-1}\|} = n$ 无界

赋范 线性

5. （定理3.1.2） $T: X \to Y$ 线性 T有界 $\Leftrightarrow$ T连续 连续 $(X, \|\cdot\|_X)(Y, \|\cdot\|_Y)$. 象. 原象都是拓扑线性？ $\underline{X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} X \Rightarrow TX_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} TX}$ $\|T\| = \sup\limits_{X\neq 0} \frac{\|TX\|}{\|X\|} \Rightarrow \|T\| \geq \frac{\|TX\|}{\|X\|}$

$\|T\|$ 有界

证明："$\Rightarrow$" 设 $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|} X$ $\|X_n - X\| \to 0$ $\|TX_n - TX\| = \|T(X_n-X)\| \le \|T\|\|X_n - X\| \le \underline{M}\|X_n - X\| \to 0$ $\|T\|\|X\| \geq \|TX\|$

"$\Leftarrow$" T无界 $\Rightarrow$ T不连续 $\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x\neq 0 \ \ x\in X\}$ 对 $\forall n \in N^+$ $\exists x_n$ s.t. $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \geq n$

不连续：$\begin{cases} \exists (X_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X \\ X_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \end{cases}$ 且 $TX_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ 构造 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_0\|}$ $\|y_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ $\|Ty_n\| = \|T\frac{x_n}{n\|x_0\|}\| = \|\frac{1}{n\|x_n\|}Tx_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_0\|} \geq 1 \not\to 0$ 所以T不连续

6. $T_1: X \to Y$ $T_2: X \to Y$ 定义 $(T_1+T_2)X \to T_1X + T_2X$ 是线性

$\begin{cases} (T_1+T_2)(x+y) = (T_1+T_2)x + (T_1+T_2)y \\ (T_1+T_2)kx = k(T_1+T_2)y \end{cases}$ $T_1+T_2)(x+y) = T_1(x+y) + T_2(x+y) = T_1x + T_1y + T_2x + T_2y = (T_1+T_2)x + (T_1+T_2)y$

7. 赋范线性空间 $B(X,Y)$ 表示X到Y上所有有界线性算子的全体. 则 $B(X,Y)$ 为线性空间.

$T\in B(X,Y)$ $\|\cdot\|: T \to [0,+\infty)$ $\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|TX\|}{\|X\|}$ $\|\cdot\|$ 为 $B(X,Y)$ 上的范数

1) $\|T\| \geq 0$ 且 $\|T\|=0 \Leftrightarrow T\equiv 0$

若 $T \not\equiv 0$ $\exists 0\neq x$. s.t. $Tx\neq 0$ $\|T\| \geq \frac{\|TX\|}{\|X\|} > 0$ 故 $\|T\|=0 \Rightarrow T\equiv 0$

2) $\|kT\| = |k|\cdot\|T\|$

$\|kT\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|(kT)\cdot x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|k\cdot Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{k\|TX\|}{\|X\|} = |k|\cdot\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|TX\|}{\|X\|} = |k|\cdot\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|TX\|}{\|X\|} = |k|\cdot\|T\|$

Content 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Title

Date: M T W T F S S

Notes

Review

3) $\|T_1+T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$

$$\|T_1+T_2\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(T_1+T_2)x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_1x+T_2x\|}{\|x\|} \leqslant \sup \frac{\|T_1x\|+\|T_2x\|}{\|x\|} = \|T_1\|+\|T_2\|$$

$B(X,Y)$是赋范线性 ..

7. 定理：$B(X,Y)$是Banach空间 当 Y为Banach空间 （证明见书）

8. $X^*=B(X,R)$ 为X的对偶空间：X上所有有界线性空间构成的全体.

推论：X为赋范线性空间 $\Rightarrow$ X^*为Banach空间

eg $X=R^n$ $X^*=R^n$ $R^n=\text{span}\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ $f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1$ $f_1: R^n\to R$

$f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_2$

$\vdots$

$f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_n$ $X^*=\text{span}\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$

eg $(l^2)^*=l^2$ $l_p^*=l_q$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $l_p^{**}=l_p$

$c_0^*=l_1$ $l_1^*=l_\infty$ l_∞^* 非序列空间

9. 通过X^*在X上定义一个拓扑（弱拓扑）

X. $N\subseteq P(X)=\{A \mid A\subseteq X\} \Rightarrow \bigcup_{A\in N} A = X$

$\downarrow$

$\tau_N = \bigcup \bigcap_{\substack{A_i\in N\\ i=1}}^{N} A_i$ 有限交的任意并

$f\in X^*$ $a.b\in R$ $A_{f.a.b}=\{x\in X \mid a\leqslant f(x)\leqslant b\}\subseteq X$

集族：$N=\{A_{f.a.b} \mid f\in X^*.\ a.b\in R\}$ $\tau_N=\underset{\text{任意}}{\bigcup}\underset{\text{有限}}{\bigcap} N$ τ_N为X上的一个拓扑. 称为X上的弱拓扑

$(x_n \xrightarrow{w} x)$

10. 命题 $x_n \xrightarrow{\tau} x \iff f(x_n)\longrightarrow f(x)$ $\forall f\in X^*$

$\forall x\in U$ $\exists N.$ s.t. $\forall n>N$ $x_n\in U$

11. w^*拓扑 X^* $f_n \xrightarrow{w^*} f \iff f_n(x)\to f(x)$ 对$\forall x\in X^*$成立

(X^*,τ_w) (X^*,τ_{w^*})

12. $X\to X^*\longrightarrow X^{**}$ Banach

$X\subseteq X^{**}$ $\forall f\in X^*$ $\forall x\in X$ Def: $i_x: X^*\to R$ $i_x(f)=f(x)$

$f_n \xrightarrow{w} 0$ $g(f_n)\to 0$ $\forall g\in X^{**}$

$f_n \xrightarrow{w} 0$ 在X^* $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ 在X^* $X=X^{**}$ $L_p^{**}=L_p$ $1<p<\infty$