程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第二章习题详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-03-10 20:09

第一章讲了集合的概念及其运算, 以及集合所含元素的个数(即集合的基数). 第二章讨论集合元素之间的关系. 赋予集合一个度量结构, 就得到了一个度量空间. 在度量空间中, 就可以定义邻域, 进而定义开集、闭集, 讨论集合上函数的极限、连续等性质.

下面我们讲解本章的课后习题.

第 1-3, 7, 9 题考查开核, 导集和闭包的概念.

设 $E \subset \mathbb{R}^n$.

- E 的导集是由 E 的全体聚点构成的集合

$$E' = \{x : \forall U(x), U(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$$

- E 的开核是由 E 的全体内点构成的集合

$$\mathring{E} = \{x : \exists U(x) \text{s.t.} U(x) \subset E\}$$

- E 的闭包

$$\begin{aligned}\overline{E} &= E \cup E' \\ &= \{x : \forall U(x), U(x) \cap E \neq \emptyset\} \\ &= E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E\end{aligned}$$

1. 设 $E_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, 求在 $\mathbb{R}$ 内的 $E_1', \mathring{E}_1, \overline{E_1}$.

解.

由有理数和无理数的稠密性可得

$$E_1' = [0,1], \quad \mathring{E}_1 = \emptyset, \quad \overline{E_1} = [0,1].$$

2. 设 $E_2 = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$, 求在 $\mathbb{R}^2$ 内的 $E_2', \mathring{E}_2, \overline{E_2}$.

解.

$$E_2' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\},$$

$$\mathring{E}_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

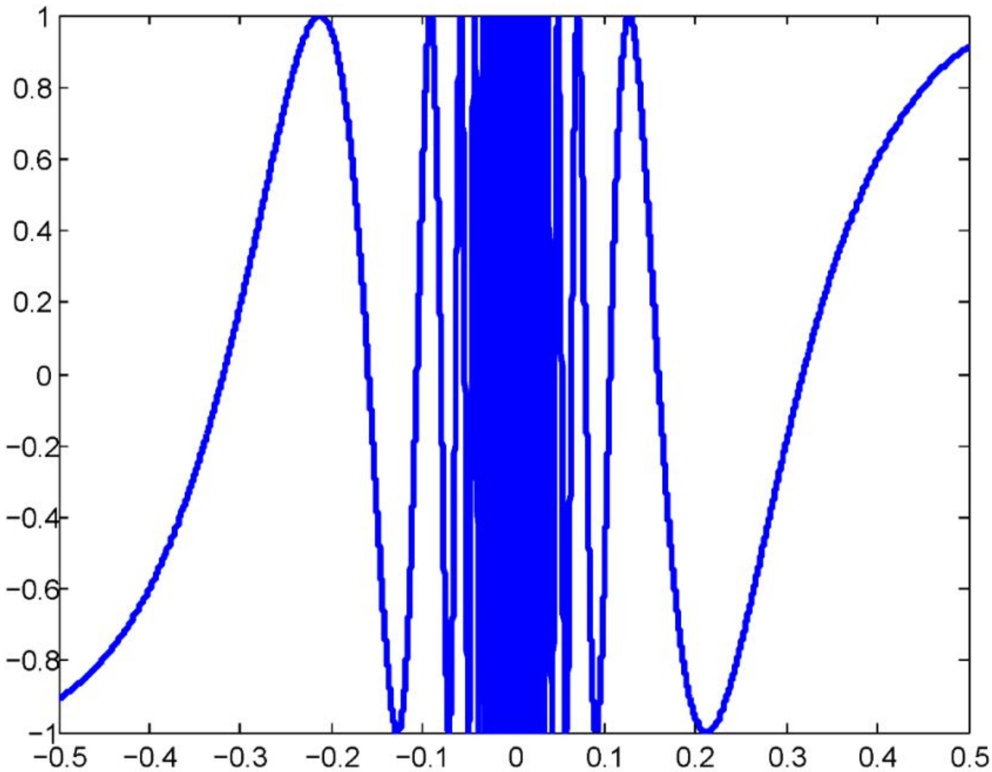
$$\overline{E_2} = E_2 \cup E_2' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}.$$

3. 设 E_3 是函数

$$y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

的图形上的点所组成的集合, 求在 $\mathbb{R}^2$ 内的 E_3', $\mathring{E}_3$, $\overline{E_3}$.

解.



(1) 求 E_3'.

首先, 因为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 内

连续, 所以 $E_3 \setminus \{(0,0)\}$ 中的点都是 E_3 的聚点.

其次, $\forall y \in [-1,1]$, 解方程 $\sin \frac{1}{x} = y$ 可得

$$x_k = \frac{1}{\arcsin y + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

即 $(x_k, y) \in E_3$ 对任意的 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立. $\forall \delta > 0$, $\exists K \in \mathbb{Z}$, 当 $k \geq K$ 时 $|x_k| = |\frac{1}{\arcsin y + 2k\pi}| < \delta$. 即

$$d((x_k, y), (0, y)) = |x_k| < \delta.$$

也就是说当 $k \geq K$ 时 $(x_k, y) \in U((0, y), \delta) \cap E_3$. 因此 $(0, y)$ 是 E_3 的聚点.

除此之外, 其他点都不是 E_3 的聚点. 因此

$$E_3' = E_3 \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

(2) 求 $\mathring{E}_3$.

$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \delta > 0$, $\exists (x, y) \in U((x_0, y_0), \delta)$ 使得 $x \neq 0$ 且 $y \neq \sin \frac{1}{x}$, 即 (x_0, y_0) 不是 E_3 的内点, 由 (x_0, y_0) 的任意性可得

$$\mathring{E}_3 = \emptyset.$$

(3) 求 $\overline{E_3}$.

由第 (1) 部分结论,

$\overline{E_3} = E_3 \cup E_3' = E_3' = E_3 \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$.

7. 设 $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$, 证明: 在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中,

$$(A \times B)' = (\overline{A} \times B') \cup (A' \times \overline{B}).$$

证明.

先证 $(A \times B)' \subset (\overline{A} \times B') \cup (A' \times \overline{B})$.

设 $z = (x, y) \in (A \times B)'$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, 即 $z = (x, y)$ 是 $A \times B$ 的聚点, 则存在 $A \times B$ 中互异的点列 $\{z_n\}$ 使 $z_n \to z(n \to \infty)$.

$\{z_n\}$ 是 $A \times B$ 中互异的点列, 有如下几种情形.

情形 I: $z_n = (x_n, y)$, 其中 $\{x_n\}$ 是 A 中互异的点列, $y \in B$. 由 $z_n \to z$ 可得

$$x_n \to x \quad (n \to \infty),$$

所以 $x \in A'$, 于是 $(x,y) \in A' \times B$.

情形 II: $z_n = (x, y_n)$, 其中 $x \in A$, $\{y_n\}$ 是 B 中互异的点列. 由 $z_n \to z$ 可得

$$y_n \to y \quad (n \to \infty),$$

所以 $y \in B'$, 于是 $(x,y) \in A \times B'$.

情形 III: $z_n = (x_n, y_n)$, 其中 $\{x_n\}$ 是 A 中互异的点列, $\{y_n\}$ 是 B 中互异的点列. 由 $z_n \to z$ 可得

$$x_n \to x, \quad y_n \to y \quad (n \to \infty),$$

所以 $x \in A'$, $y \in B'$, 于是 $(x,y) \in A' \times B'$.

综上可得,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in &(A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B') \\
&= \big((A \times B') \cup (A' \times B')\big) \cup \big((A' \times B) \cup (A' \times B')\big) \\
&= \big((A \cup A') \times B'\big) \cup \big(A' \times (B \cup B')\big) \\
&= \big(\overline{A} \times B'\big) \cup \big(A' \times \overline{B}\big).
\end{aligned}$$

因此, $(A \times B)' \subset (\overline{A} \times B') \cup (A' \times \overline{B})$.

再证 $(\overline{A}\times B')\cup(A'\times\overline{B})\subset(A\times B)'$.

首先, $\overline{A}\times B'=(A\times B')\cup(A'\times B')$.

若 $(x,y)\in A\times B'$, 即 $x\in A$, $y\in B'$, 则存在 B 中互异的点列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to y(n\to\infty)$. 显然, $\{(x,y_n)\}$ 是 $A\times B$ 中互异的点列, 且

$$(x,y_n)\to(x,y),\quad n\to\infty.$$

于是 $(x,y)\in(A\times B)'$.

若 $(x,y)\in A'\times B'$, 即 $x\in A'$, $y\in B'$, 则存在 A 中互异点列 $\{x_n\}$ 和 B 中互异的点列 $\{y_n\}$ 使得 $x_n\to x, y_n\to y(n\to\infty)$. 显然, $\{(x,y_n)\}$ 是 $A\times B$ 中互异的点列, 且

$$(x_n,y_n)\to(x,y),\quad n\to\infty.$$

于是 $(x,y)\in(A\times B)'$.

事实上, 我们已经证明了

$$\overline{A}\times B'=(A\times B')\cup(A'\times B')\subset(A\times B)'.$$

类似可得 $A'\times\overline{B}\subset(A\times B)'$.

因此, $(\overline{A}\times B')\cup(A'\times\overline{B})\subset(A\times B)'$.

综合前面的讨论, 结论得证.

9. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 证明:

(1) $(\mathring{E})^c=\overline{E^c}$;

(2) $(\overline{E})^c=\mathring{E^c}$.

证明.

(1) 证 $(\mathring{E})^c=\overline{E^c}$;

因为

$$\begin{aligned} x\in\left(\mathring{E}\right)^c &\iff x\notin\mathring{E}\\ &\iff \forall U(x), U(x)\cap E^c\neq\emptyset\\ &\iff x\in\overline{E^c}, \end{aligned}$$

所以 $(\mathring{E})^c=\overline{E^c}$.

(2) 证 $(\overline{E})^c=\mathring{E^c}$.

因为

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\overline{E}\right)^c &\iff x \notin \overline{E} \\
&\iff \exists U(x) \text{ s.t. } U(x) \cap E = \emptyset \\
&\iff \exists U(x) \text{ s.t. } U(x) \subset E^c \\
&\iff x \in \mathring{E^c},
\end{aligned}
$$

所以, $(\overline{E})^c = \mathring{E^c}$.

第 4 题讨论了 $\mathbb{R}^n$ 上一个特殊函数的一致连续性. 一致连续的概念如下:

- $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续指对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, 只要 $d(x_1, x_2) < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

4. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$f(x) = d(x, E) = \inf\{d(x, y) \ : \ y \in E\}.$$

证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

证明.

首先，证明 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq d(x_1, x_2).$$

事实上，不妨设 $d(x_1, E) \geq d(x_2, E)$，则

$$\begin{aligned}
&|f(x_1) - f(x_2)| = d(x_1, E) - d(x_2, E) \\
&= \inf\{d(x_1, y) : y \in E\} - \inf\{d(x_2, y) : y \in E\} \\
&\leq \inf\{d(x_1, x_2) + d(x_2, y) : y \in E\} \\
&\quad - \inf\{d(x_2, y) : y \in E\} \\
&= d(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 且 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon.$$

第 5, 6, 8, 10, 14, 16 题考查开集和闭集的概念.

设 $E \subset \mathbb{R}^n$.

- 如果 E 的每一点都是内点, 即 $E = \mathring{E}$, 则称 E 为开集;
- 如果E 的每一个聚点都属于 E, 即 $E' \subset E$, 则称 E 为闭集.

> 证明集合是开集主要有以下几种方法:

- 证明 E 的每个点都是内点, 即 $E = \mathring{E}$;
- 证明 E 的余集是闭集;
- 证明 E 可以表示成有限个开集的交集;
- 证明 E 可以表示成一族开集的并集.

> 证明集合是闭集主要有以下几种方法:

- 证明 E 的每个聚点都属于 E, 即 $E' \subset E$;
- 证明 E 的边界点都属于 E, 即 $\partial E \subset E$;
- 证明 E 的余集 E^c 是开集;
- 证明 E 可以表示成有限个闭集的并集;
- 证明 E 可以表示成一族闭集的交集.

5. 证明: 点集 F 为闭集的充要条件是 $\overline{F}=F$.

证明.

先证必要性. 若 F 为闭集, 则 $F' \subset F$. 所以 $\overline{F}=F'\cup F=F$.

再证充分性. 若 $\overline{F}=F$, 而 $\overline{F}=F'\cup F$, 则 $F'\subset F$, 故 F 是闭集.

第 6 题的证明需要课本 **§ 2定理2**:

- 设 $A\subset B$, 则 $A'\subset B'$, $\mathring{A}\subset\mathring{B}$, $\overline{A}\subset\overline{B}$.

6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明: $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集, 即若 F 是闭集, 且 $E \subset F$, 则必有 $\overline{E} \subset F$.

证明.

F 是闭集, 则 $\overline{F} = F$. 由课本 §2 定理 2, 若 $E \subset F$, 则

$$\overline{E} \subset \overline{F} = F.$$

8. 设 G_1, G_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的开集, 证明:

$$\overline{G_1} \cap G_2 = \emptyset.$$

证明. (反证法)

假设 $x \in \overline{G_1} \cap G_2$. 因为 G_1 与 G_2 互不相交, 所以 $x \in G_1'$, 即存在 G_1 中互异的点列 $\{x_n\}$ 使得

$$x_n \to x \quad (n \to \infty).$$

这与 x 是 G_2 的内点矛盾! 故假设有误, 结论得证.

以前我们知道, 闭区间 $[0,1]$ 可表示成可数个开区间的交,即

$$[0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right);$$

开区间 $(0,1)$ 可表示成可数个闭区间的并, 即

$$(0,1) = \bigcap_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

事实上, 这样的结论对一般的闭集和开集都成立.

10. 证明: 每个闭集必是可数个开集的交集; 每个开集可以表示成可数个闭集的并集.

证明.

(1) 证每个闭集必是可数个开集的交集;

设 F 是闭集. $\forall n \in \mathbb{N}$, 考虑 $G_n = \bigcup\limits_{x \in F} U(x, \frac{1}{n})$, 显然 G_n 是开集且 $F \subset G_n$. 下证 $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

一方面, $F \subset G_n$ 对任意的自然数 n 都成立, 所以 $F \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$;

另一方面, 若 $y \notin F$, 由 F 是闭集可得 $d(y, F) > 0$. 当 n 充分大时, 有 $\frac{1}{n} < d(y, F)$, 故 $y \notin G_n$. 事实上, $\forall z \in G_n$, $\exists x \in F$ 使得 $z \in U(x, \frac{1}{n})$, 因而 $d(z, F) \leq d(z, x) < \frac{1}{n}$. 因此 $y \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. 事实上, 我们已经证明了 $F^c \subset \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n\right)^c$. 于是有 $F \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

综合以上讨论可得, $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 即闭集 F 可表示为可数个开集的交集.

(2) 证每个开集可以表示成可数个闭集的并集.

设 G 是开集, 则 G^c 是闭集, 由 (1) 的结论,

$$G^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

其中 G_n 是开集, $n = 1, 2, \cdots$. 由德摩根公式可得

$$G = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c,$$

其中 G_n^c 是闭集, $n = 1, 2, \cdots$. 结论得证.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 证明集合

$$\{x : \text{对任意 } \varepsilon > 0, f(x+\varepsilon) > f(x-\varepsilon)\}$$

是闭集.

证明.

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+\varepsilon) \leq f(x-\varepsilon)$, 即

$$\{x : \text{对任意 } \varepsilon > 0, f(x+\varepsilon) > f(x-\varepsilon)\} = \emptyset,$$

显然是闭集.

设 $f(x)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $f(x+\varepsilon)\geq f(x-\varepsilon)$. 记

$$F=\{x:\text{对任意 }\varepsilon>0, f(x+\varepsilon)>f(x-\varepsilon)\}.$$

因此

$$F^c=\{x:\exists\varepsilon_0>0\ \text{s.t.}\ f(x+\varepsilon_0)=f(x-\varepsilon_0)\}.$$

$\forall x_0\in F^c$, $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $f(x_0+\varepsilon_0)=f(x_0-\varepsilon_0)$. 又 $f(x)$ 单增, 所以 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0)$ 内为常数. 取 $\delta=\frac{\varepsilon_0}{2}$, 当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, 有

$x_0-\varepsilon_0=x_0-\delta-\delta<x-\delta<x+\delta<x_0+\delta+\delta=x_0+\varepsilon_0$,

即 $x-\delta,x+\delta\in(x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0)$, 因此

$$f(x-\delta)=f(x+\delta).$$

即 $x\in F^c$, 这说明 x_0 是 F^c 的内点. 由 x_0 的任意性可得 F^c 为开集, 所以 F 为闭集.

16. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 证明: $E=\{(x,y):y=f(x)\}$ 和 $F=\{(x,y):y\leq f(x)\}$ 是

$\mathbb{R}^2$ 中的闭集; 而 $G = \{(x, y) : y < f(x)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集.

证明. 因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 所以点集 E 和 F 分别表示平面 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = f(x)$ 及其下方区域.

(1) 证 $E = \{(x, y) : y = f(x)\}$ 是闭集.

设 (x_0, y_0) 是 E 的聚点, 即存在 E 中互异的点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 使得

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0), \quad n \to \infty.$$

由 $(x_n, y_n) \in E$, 可得 $y_n = f(x_n)$. 又 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 因此

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

所以 $(x_0, y_0) \in E$. 于是 $E' \subset E$, 即 E 是闭集.

(2) 证 $F = \{(x, y) : y \leq f(x)\}$ 是闭集.

[方法一] 设 (x_0, y_0) 是 F 的聚点, 即存在 F 中互异

的点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 使得

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0), \quad n \to \infty.$$

由 $(x_n, y_n) \in F$, 可得 $y_n \le f(x_n)$. 又 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 因此

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

所以 $(x_0, y_0) \in F$. 于是 $F' \subset F$, 即 F 是闭集.

[方法二] 点集 F 的边界即为曲线 $y = f(x)$, 因此 $\partial F = E \subset F$, 所以 F 是闭集.

(3) 证 $G = \{(x, y) : y < f(x)\}$ 是开集.

[方法一] 类似 (2) 可得 $G^c = \{(x, y) : y \ge f(x)\}$ 是闭集, 所以 G 是开集.

[方法二] $G = F \setminus \partial F = \mathring{F}$, 所以 G 是开集.

第11题考查完备集.

- 完备集就是自密的闭集, 或者说没有孤立点的闭集, 即满足 $E' = E$.

- 直线上的完备集或者是全直线, 或者是从直线上挖掉有限个或可数个互不相交的且没有公共端点的开区间所得到的集合. 所以证明直线上的某个集合是完备集只需要证明它的余集是有限个或可数个互不相交的且没有公共端点的开区间的并.

注意, 采用十进制计数法, $[0,1]$ 中的每一个点都可以表示成无限小数, 每次十等分的节点处的值有两种不同的表示方法, 比如

$$0.7=0.70000\cdots,\quad 0.7=0.69999\cdots$$

所以 0.7 和 0.8 这两个数都可以不用数字 7 来表示.

11. **证明: 用十进制小数表示 $[0,1]$ 中的数时, 其用不着数字 7 的一切数成一完备集.**

证明.

$[0,1]$ 中第一位小数必须用到数字 7 的小数构成的集合是 $A_1=(0.7,0.8)$.

$[0,1]$ 中第一位小数不是 7 但第二位小数必须用到数字 7 的小数构成的集合为

$$\begin{aligned}A_2=&(0.07,0.08)\cup(0.17,0.18)\cup\cdots\cup(0.67,0.68)\\&\cup(0.87,0.88)\cup(0.97,0.98).\end{aligned}$$

一般地, $[0,1]$ 中前 $n-1$ 位小数不是 7 但第 n 位小数必须用到数字 7 的小数构成的集合为

$$A_n = \bigcup_{\substack{a_i \in \{0,1,\cdots,6,8,9\} \\ i=1,2,\cdots,n-1}} (0.a_1 \cdots a_{n-1}7, 0.a_1 \cdots a_{n-1}8),$$

因此, $[0,1]$ 上必须用 7 表示的小数构成的集合为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 所以, $[0,1]$ 上可不用 7 表示的小数构成的集合为 $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty)\right)^c$. 显然 A_n, $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$ 是互不相交且无公共端点的开区间, 所以 $[0,1]$ 上可不用 7 表示的小数构成的集合是一个完备集.

第12题是用闭集的概念来描述连续函数. 函数连续的定义如下:

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的实值函数.

- 称 $f(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 点连续, 如果
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [a,b]}} f(x) = f(x_0).$$
- 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

12. 证明: $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数的充分必要条件是对任意实数 c, 集 $E_1 = \{x \mid f(x) \geq c\}$ 和 $E_2 = \{x \mid f(x) \leq c\}$ 都是闭集.

证明.

先证必要性.

设 c 为任意的实数. 若 $E_1=\emptyset$, 则 E_1 是闭集. 若 $E_1\neq\emptyset$, 设 x_0 是 E_1 的聚点, 则存在 E_1 中互异的点所成的点列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 由于 $f(x_n)\geq c$ 且 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 故

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\geq c,$$

这说明 $x_0\in E_1$. 由 x_0 的任意性得 $E_1'\subset E_1$, 即 E_1 是闭集.

同理可得 E_2 也是闭集.

再证充分性. (用反证法)

假设存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 点不连续. 即存在 $\varepsilon_0>0$, $[a,b]$ 中互异的点列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 且

$$f(x_n)\geq f(x_0)+\varepsilon_0,\quad \text{或}\quad f(x_n)\leq f(x_0)-\varepsilon_0.$$

不妨设第一种情形成立. 令 $c = f(x_0) + \varepsilon_0$, 则 $x_n \in E_1 = \{x : f(x) \geq c\}$ 对任意的 n 都成立, 但 $x_0 \notin E_1$(因为 $f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon_0 = c$), 这与 E_1 是闭集矛盾. 所以假设不成立, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

第13题考查边界点的概念.

- 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}$, 如果 P_0 的任一邻域内既有属于 E 的点又有不属于 E 的点, 则称 P_0 为 E 的边界点.

下面给出两种方法都是设法找出一个边界点.

13. 证明 §2 定理 5: 设 $E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$, 则 E 至少有一界点(即 $\partial E \neq \emptyset$).

证明.

[方法一] 二分法.

因为 $E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$, 所以存在 $a_1 \in E$, $b_1 \in E^c$. 记 $d = d(a_1, b_1) > 0$.

取 a_1, b_1 的中点 $c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. 若 $c \in E$, 记 $a_2 = c$,

$b_2 = b_1$; 否则, $a_2 = a_1$, $b_2 = c$. 则 $d(a_2, b_2) = \frac{1}{2}d$.

取 a_2, b_2 的中点 $c = \frac{1}{2}(a_2+b_2)$. 若 $c \in E$, 记 $a_3 = c$, $b_3 = b_2$; 否则, $a_3 = a_2, b_3 = c$. 则 $d(a_3, b_3) = \frac{1}{2^2}d$.

按照这个过程一直进行下去, 我们就找到了两个点列 $\{a_n\} \subset E$, $\{b_n\} \subset E^c$, 其中至少有一个是无穷点列, 并且 $d(a_n, b_n) = \frac{1}{2^{n-1}}d \to 0(n \to \infty)$.

从以上过程可以看出, 点列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 在同一条直线上. 设该直线为 L. 记 $[a_n, b_n]$ 为直线 L 上以 a_n, b_n 为两端点的闭区间, 则

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \cdots$$

且区间长度 $d(a_n, b_n) \to 0(n \to \infty)$. 由闭区间套定理, 必存在一点 ξ 属于每一个闭区间, 即

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \cdots .$$

因此 $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$ $(n \to \infty)$. 于是 ξ 是 E 的边界点.

[方法二]

设

$$P_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E,$$

$$P_1=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E^c.$$

令

$$\begin{aligned}P(t)&=tP_1+(1-t)P_0\\&=\big(ty_1+(1-t)x_1,\cdots,ty_n+(1-t)x_n\big),\\&0\le t\le 1.\end{aligned}$$

则 $P(0)=P_0\in E$, $P(1)=P_1\in E^c$. 设

$$t_0=\sup\{t:P(t)\in E\},$$

现证明 $P(t_0)\in\partial E$.

若 $P(t_0)\in E$, 则 $t_0\neq 1$. $\forall t\in(t_0,1]$, 有 $P(t)\notin E$. 在 $(t_0,1]$ 中任取互异的点列 $\{t_n\}$, 使得 $t_n\to t_0$ $(n\to\infty)$, 则 $P(t_n)\to P(t_0)$ 且 $P(t_n)\in E^c$, 所以 $P(t_0)\in\partial E$.

若 $P(t_0)\in E^c$, 则 $t_0\neq 0$. 由 t_0 的上确界定义, 存在由互异的点构成的点列 $\{t_n\}$, 满足 $0\le t_n<t_0$,

$t_n \to t_0 (n \to \infty)$, 且 $P(t_n) \in E$. 再由 $P(t_n) \to P(t_0)$ 可得 $P(t_0) \in \partial E$.

第 15 题考查紧集的概念.

- 设 M 是 度量空间 X 中一集合, $\mathscr{M}$ 是 X 中任一族覆盖了 M 的开集, 如果必可从 $\mathscr{M}$ 中选出有限个开集仍然覆盖 M, 则称 M 为 X 中的紧集.

第 15 题的证明需要用到如下的相关结论:

- $E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集 $\Leftrightarrow$ E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集.
- **闭集套定理:** 设 $\{F_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集列, 满足:

  (1) $F_{n+1} \subset F_n, n = 1, 2, \cdots$;

  (2) $d(F_n) \to 0, n \to \infty$,

  则存在唯一的 $P_0 \in F_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

15. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 则 E 是紧集的充分且必要条件是: 对任意 $\{x_n\} \subset E$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \to x_0 \in E$.

证明.

$E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集等价于 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集.

先证必要性.

E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 则存在闭区间

$I_1 = \{(y_1, \cdots, y_n) : a_i^{(1)} \le y_i \le b_i^{(1)}, i = 1, \cdots, n\}$,

使得 $E \subset I_1$.

设 $\{x_n\}$ 是 E 中任意无穷点列, 任取一点记为 x_{n_1}.

将 I_1 的每个边长都二等分, 得到 2^n 个闭区间, 其中必有一个闭区间包含 $\{x_n\}$ 中的无穷多个点, 记该闭区间为

$I_2 = \{(y_1, \cdots, y_n) : a_i^{(2)} \le y_i \le b_i^{(2)}, i = 1, \cdots, n\}$.

则 $I_2 \subset I_1$ 且

$$b_i^{(2)} - a_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(b_i^{(1)} - a_i^{(1)}\right), \quad |I_2| = \frac{1}{2^n}|I_1|.$$

在 I_2 中任取 $\{x_n\}$ 中异于 x_{n_1} 的一点记为 x_{n_2}.

将 I_2 的每个边长都二等分, 得到 2^n 个闭区间, 其中必有一个闭区间包含 $\{x_n\}$ 中的无穷多个点, 记该闭区间为

$I_3 = \{(y_1, \cdots, y_n) : a_i^{(3)} \le y_i \le b_i^{(3)}, i = 1, \cdots, n\}$.

则 $I_3 \subset I_2$ 且

$$b_i^{(3)} - a_i^{(3)} = \frac{1}{2}\left(b_i^{(2)} - a_i^{(2)}\right), \quad |I_3| = \frac{1}{2^n}|I_2|.$$

在 I_3 中任取 $\{x_n\}$ 中异于 x_{n_1}, x_{n_2} 的一点记为 x_{n_3}.

将这个过程一直进行下去, 我们得到闭区间列 $\{I_k\}$ 和 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$x_{n_k} \in I_k, \quad I_{k+1} \subset I_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

$$|I_{k+1}| = \frac{1}{2^n}|I_k| = \frac{1}{2^{kn}}|I_1| \to 0, \quad k \to \infty.$$

由闭集套定理, 存在唯一的点 x_0 满足

$$x_0 \in I_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

因为闭区间 I_k 的边长

$$b_i^{(k)} - a_i^{(k)} = \frac{1}{2^{k-1}}\left(b_i^{(1)} - a_i^{(1)}\right) \to 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$d(x_{n_k}, x_0) \to 0, \quad k \to \infty.$$

即

$$x_{n_k} \to x_0, \quad k \to \infty.$$

再由 E 是闭集可得 $x_0 \in E$.

再证充分性, 用反证法.

假设 E 无界, 按如下方法取点列 $\{x_n\}$.

在 E 中任取一点记为 x_1. 因为 E 无界, 所以

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, 0) > d(x_1, 0) + 1\} \cap E \neq \emptyset,$$

在 G_1 中任取一点记为 x_2. 因为 E 无界, 所以

$$G_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, 0) > d(x_2, 0) + 1\} \cap E \neq \emptyset,$$

在 G_2 中任取一点记为 x_3.

将这个过程一直进行下去, 我们得到 E 中点列 $\{x_n\}$. 从 $\{x_n\}$ 的选取过程可以看出

$$d(x_k, x_{k+1}) > 1, \quad k = 1, 2, \cdots$$

显然, $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 与题设矛盾! 所以假设错误, E 必有界.

再证 E 是闭集. 设 x 是 E 的聚点, 则存在 E 中互异的点列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$. 而由题设, $\{x_n\} \subset E$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \to x_0 \in E$. 由极限的唯一性可得 $x = x_0 \in E$. 事实上我们已

经证明了 $E' \subset E$, 即 E 是闭集.

综上, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 即紧集.

END

收录于合集 #实变函数与泛函分析 26

上一篇
程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第一章习题13-20详解

下一篇
程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第三章习题详解