在谓词逻辑中符号化如下语句。

(1)所有年轻人都喜欢一些明星。

(2)发光的不都是金子。

(3)某些人吃某些食物过敏。

(4)有些人喜欢读任何书籍。

(5)每个人都有些缺点。

(6)尽管有人幸运，但未必人人幸运。

(7)王菲是聪明勤奋的。

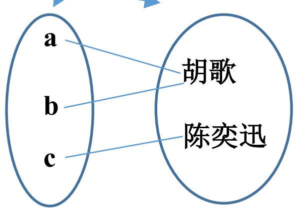
(8)每个人的外祖母都是他母亲的母亲。

解答：思路：其一，参照已有的符号化语句模型；其二，练习重述的技巧。

(1) 所有年轻人都喜欢一些明星。　　有一些<u>明星</u>被所有的<u>年轻人</u>喜欢？

S(x): x 是年轻人，X(x): x 是明星，L(x, y): x 喜欢 y

$$(\forall x)(S(x)\rightarrow(\exists y)(X(y)\wedge L(x, y)))$$



书写规范，量词用括号括起

弄清辖域，量词辖域内的对象用括号括起

(2) 发光的不都是金子。

P(x)：x 发光，G(x)：x 是金子

$$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow G(x)) \quad \text{或} \quad (\exists x)(P(x)\wedge\neg G(x))$$

(3) 某些人吃某些食物过敏。

F(x, y)：x 吃 y 过敏，M(x)：x 是人，　G(x)：x 是食物

$$(\exists x)(M(x)\wedge(\exists y)(G(y)\wedge F(x, y))) \quad \text{或} \quad (\exists x)(\exists y)(M(x)\wedge G(y)\wedge F(x, y))$$

(4) 有些人喜欢读任何书籍。

H(x, y)：x 喜欢读 y，M(x)：x 是人，　S(x)：x 是书籍

$$(\exists x)(M(x)\wedge(\forall y)(S(y)\rightarrow H(x, y)))$$

(5) 每个人都有些缺点。

H(x, y)：x 有 y，M(x)：x 是人，　S(x)：x 是缺点

$$(\forall x)(M(x)\rightarrow(\exists y)(S(y)\wedge H(x, y)))$$

(6) 尽管有人幸运，但未必人人幸运。

M(x)：x 是人，　S(x)：x 幸运

$$(\exists x)(M(x)\wedge S(x))\wedge\neg(\forall x)(M(x)\rightarrow S(x))$$

(7) 王菲是聪明勤奋的。

M(x)：x 是聪明的，　S(x)：x 是勤奋的，**a:** 王菲　　王菲用个体词符号表示出来

$$M(a)\wedge S(a)$$

(8) 每个人的外祖母都是他母亲的母亲。

H(x)：x 是人，G(x, y)：x 是 y 的外祖母，M(x, y)：x 是 y 的母亲

$$(\forall x)(\forall y)((H(x)\wedge H(y)\wedge G(x,y))\rightarrow(\exists z)(H(z)\wedge M(x,z)\wedge M(z,y)))$$

对于宇宙中的一切事物而言，如果 x 是人，且 y 是人，且 x 是 y 的外祖母，那么，存在一个 z，她是人，且 x 是她的母亲，且她是 y 的母亲。

每一个被 2 整除的整数都是偶数 $(\forall x)((I(x)\wedge Q(2,x))\rightarrow O(x))$

若个体域是全人类。则本题的解答为：

$$(\forall x)(\forall y)(G(x,y)\rightarrow(\exists z)(M(x,z)\wedge M(z,y)))$$

对于全人类而言，如果 x 是 y 的外祖母，那么，存在一个 z，她是 y 的母亲，且 x 是她的母亲。

命题逻辑中证明重言蕴涵，9 种方法：

(1) 直接证法。

(2) 间接证法。

(3) 公式等价变换。

(4) 真值表法。

(5) 用公式的主析取范式。

(6) 演绎法。

命题逻辑中证明等价，3 种方法：

(1) 公式等价变换。

(2) 真值表法。

(3) 定理 1。

1、$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$

证明：方法 1，使用命题逻辑里证明重言蕴涵的直接证法：假设前件为 1，推出后件为 1。

设个体域为 D，在任一解释 I 下有 $(\forall x)P(x)=1$，则对于任意的 $x\in D$，有 $P(x)=1$，因此，$(\exists x)P(x)=1$。

方法 2，回到定义中去，用公式等价变换证明 $(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)P(x)$ 为有效公式。

证明：$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$.

即证明：$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$ 为有效公式.

$= \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)P(x)$.

$= (\exists x)\neg P(x) \vee \exists x P(x)$

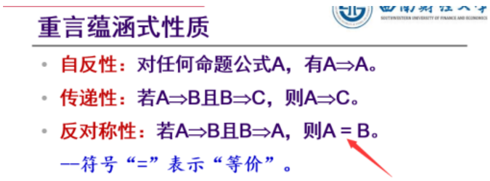
$= (\exists x)(\neg P(x) \vee P(x)) = 1$.

故 $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$.

2、$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$

证明：从上题的证明过程中，可以看出证明有效蕴涵，利用直接证法，很简单！能否借助有效蕴涵的思路去证明等价？

有效蕴涵和等价有什么关系？



如此，第 2 题的证明转换成了证明：

(1) $\neg(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\neg P(x)$ 且 (2) $(\exists x)\neg P(x) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x)$

思路简述为：左为真右也为真，左为假右也为假

（1）设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$\neg(\forall x)P(x) = 1$，则$(\forall x)P(x) = 0$，因此，存在 $x_0 \in D$，使得 $P(x_0) = 0$，因此，$\neg P(x_0) = 1$，亦即，$(\exists x)\neg P(x) = 1$。

（2）设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\exists x)\neg P(x) = 1$，则存在 $x_0 \in D$，使得$\neg P(x_0) = 1$，故 $P(x_0) = 0$，因此，$(\forall x)P(x) = 0$，亦即，$\neg(\forall x)P(x) = 1$。

上述从语义上，利用直接证法证明了等价。

观察下面做法：

证明：$\neg(\forall x)P(x)$：并非所有的 x 都具有性质 P，

$(\exists x)\neg P(x)$：至少存在一个 x 不具有性质 P。

所以，$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$。

这种方法**仅从语义上说明了等价**。

证明：在$\{x_1,x_2\}$域上分析，即使$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$与$\{x_1,x_2,\ldots\}$也不行。

$\neg(\forall x)P(x) = \neg(P(x_1)\wedge P(x_2)) = \neg P(x_1)\vee\neg P(x_2) = (\exists x)\neg P(x)$

这种方法**仅针对具体指定的个体域讨论了等价。**

3、$(\forall x)(A(x)\vee B) = (\forall x)A(x)\vee B$

证明：方法 1，

第 3 题的证明转换成了证明：

(1) $(\forall x)(A(x)\vee B) \Rightarrow (\forall x)A(x)\vee B$ 且 (2) $(\forall x)A(x)\vee B \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B)$

（1）设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\forall x)(A(x)\vee B) = 1$，即对任意的 $x\in D$，有 $A(x)\vee B = 1$。若 $B = 1$，则$(\forall x)A(x)\vee B = 1$；若对任意的 $x\in D$，有 $A(x) = 1$，则$(\forall x)A(x) = 1$，亦即$(\forall x)A(x)\vee B = 1$。

（2）设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\forall x)A(x)\vee B = 1$。若 $B = 1$，则对任意的 $x\in D$，有 $A(x)\vee B = 1$，亦即$(\forall x)(A(x)\vee B) = 1$；若$(\forall x)A(x) = 1$，则对任意的 $x\in D$，有 $A(x)\vee B = 1$，亦即$(\forall x)(A(x)\vee B) = 1$。

方法 2，公式的等价变换

$(\forall x)(A(x)\vee B) = (\forall x)(\neg A(x)\to B) = (\exists x)\neg A(x)\to B = \neg(\exists x)\neg A(x)\vee B = (\forall x)A(x)\vee B$

4、$(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) = (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$

证明：方法 1，

第 4 题的证明转换成了证明：

(1) $(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$ 且

(2) $(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\wedge B(x))$

（1）设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) = 1$，即对任意的 $x\in D$，有 $A(x)\wedge B(x) = 1$，亦即对任意的 $x\in D$，$A(x) = B(x) = 1$，因此，$(\forall x)A(x) = (\forall x)B(x) = 1$，故有，$(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) = 1$。

（2）设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) = 1$，即$(\forall x)A(x) = (\forall x)B(x) = 1$，故对任意的 $x\in D$，$A(x) = B(x) = A(x)\wedge B(x) = 1$，亦即$(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) = 1$。

方法 2，公式的等价变换

$(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$

$= (\forall x)\neg(\neg A(x)\vee\neg B(x))$

$= \neg(\exists x)(\neg A(x)\vee\neg B(x))$

$= \neg((\exists x)(\neg A(x)\vee\neg B(x)))$

$= \neg((\exists x)\neg A(x)\vee(\exists x)\neg B(x))$

$= \neg(\exists x)\neg A(x)\wedge\neg(\exists x)\neg B(x)$

$= (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$

5、$(\exists x)(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

证明：

方法 1，直接证法

设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\exists x)(A(x)\wedge B(x)) = 1$，则存在 $x_0\in D$，使得 $A(x_0)\wedge B(x_0) = 1$，亦即：存在 $x_0\in D$，使得 $A(x_0) = B(x_0) = 1$，因此，$(\exists x)A(x) = (\exists x)B(x) = 1$，亦即，$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x) = 1$。

方法 2，演绎法，直接证明

证明：

1) $(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$	P
2) $A(c)\wedge B(c)$	ES 1)
3) $A(c)$	T 2) I
4) $B(c)$	T 2) I
5) $(\exists x)A(x)$	EG 3)

6) $(\exists x)B(x)$ EG 4)

7) $(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$ T 5)6) I

且看上述推论的逆推导：

1) $(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$ P

2) $(\exists x)A(x)$ T 1) I

3) $A(c)$ ES 2)

4) $(\exists x)B(x)$ T 1) I

5) $B(c)$ ES 4)

6) $A(c)\wedge B(c)$ T 3)4) I

7) $(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ EG 6)

由此可见，$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x)\wedge B(x))$不成立。

正确的推导：

1) $(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$ P

2) $(\exists x)A(x)$ T 1) I

3) $A(c)$ ES 2)

4) $(\exists x)B(x)$ T 1) I

5) $B(b)$ ES 4)

6) $A(c)\wedge B(b)$ T 3)4) I

7) $(\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y))$ EG 6)

由此可见，$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y))$不成立。

6、$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(x))$

证明：方法 1，直接证法

设个体域为 D，在任一解释 I 下，有$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)=1$。若$(\forall x)A(x)=1$，则对任意的 $x\in D$，$A(x)=1$，则 $A(x)\vee B(x)=1$，因此，$(\forall x)(A(x)\vee B(x))=1$；若$(\forall x)B(x)=1$，则$(\forall x)(A(x)\vee B(x))=1$。

方法 2，演绎法，直接证明

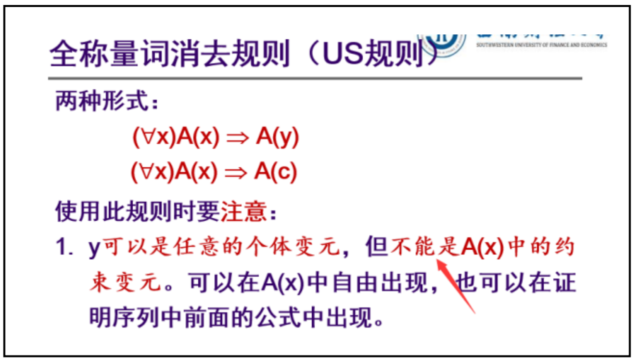
证明：

1) $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$ P

2) $(\forall x)(\forall y)(A(x)\vee B(y))$ T 1) E

3) $(\forall y)(A(x)\vee B(y))$ US 2)

4) $(\forall x)(A(x)\vee B(x))$ T 3) E



此方法是错误的。从 3) 到 4) 将约束变元 y 更名的时候，不能使用辖域内已经出现过的变元名称 x，所以从 3) 不能得到 4)。

此题目用演绎法的正确解法如下：

$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(x))$

用反证法

(1) $\neg(\forall x)(A(x)\vee B(x))$　　P 附加

(2) $(\exists x)(\neg A(x)\wedge\neg B(x))$　　T E (1)

(3) $\neg A(c)\wedge\neg B(c)$　　ES (2)

(4) $\neg A(c)$　　T (3) I

(5) $\neg B(c)$　　T (3) I

(6) $(\exists x)\neg A(x)$　　EG (4)

(7) $(\exists x)\neg B(x)$　　EG (5)

(8) $\neg(\forall x)A(x)$　　T E (6)

(9) $\neg(\forall x)B(x)$　　T E (7)

(10) $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$　　P

(11) $(\forall x)B(x)$　　T I (8)(10)

(12) $\neg(\forall x)B(x)\wedge(\forall x)B(x)$　　T I (9)(11) 矛盾

方法 3，间接证法，依据 **$P\rightarrow Q = \neg Q\rightarrow\neg P$**。

要证$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(x))$，转化为证明

$\neg(\forall x)(A(x)\vee B(x)) \Rightarrow \neg((\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x))$

$\neg(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

$= (\exists x)(\neg A(x)\wedge\neg B(x))$

$\Rightarrow (\exists x)\neg A(x)\wedge(\exists x)\neg B(x)$ 注意下一步的写法

因为，$(\exists x)\neg A(x)\wedge(\exists x)\neg B(x) = \neg(\forall x)A(x)\wedge\neg(\forall x)\neg B(x) = \neg((\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x))$，

所以，$\neg(\forall x)(A(x)\vee B(x)) \Rightarrow \neg((\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x))$。

7、判断下列公式的真假。（要有解题步骤）

（1）$(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge Q(x,y)\rightarrow P(x,y))$。

（2）$(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\vee\neg P(x,y))$。

（3）$(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge\neg P(x,y))$。

解：（1）设个体域为 D，在任一解释 I 下，对任意的 $x\in D, y\in D$，若 $P(x,y)\wedge Q(x,y) = 1$，则 $P(x,y) = Q(x,y) = 1$，因此$(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge Q(x,y)\rightarrow P(x,y)) = 1$。

（2）设个体域为 D，在任一解释 I 下，对任意的 $x\in D, y\in D$，若 $P(x,y) = 1$，则 $\neg P(x,y) = 0$，则 $P(x,y)\vee\neg P(x,y) = 1$，若 $P(x,y) = 0$，则$\neg P(x,y) = 1$，则 $P(x,y)\vee\neg P(x,y) = 1$，因此，对任意的 $x\in D, y\in D$，$P(x,y)\vee\neg P(x,y) = 1$，亦即，$(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\vee\neg P(x,y)) = 1$。

（3）设个体域为 D，在任一解释 I 下，对任意的 $x\in D, y\in D$，若 $P(x,y) = 1$，则 $\neg P(x,y) = 0$，则 $P(x,y)\wedge\neg P(x,y) = 0$，若 $P(x,y) = 0$，则 $\neg P(x,y) = 1$，则 $P(x,y)\wedge\neg P(x,y) = 0$，因此，对任意的 $x\in D, y\in D$，$P(x,y)\wedge\neg P(x,y) = 0$，亦即，$(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge\neg P(x,y)) = 0$。