程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题22-30详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-04-28 22:35

收录于合集
#实变函数与泛函分析
26个 >

这一期是第五章习题详解的第三部分, 包含课后习题 22-30.

第 22 题的结论类似于数学分析中的夹逼定理.

22. 设 $E \subset \mathbb{R}^q$ 为可测集, $f(x)$ 是定义在 E 上的一个实函数, 若在 E 上有两列勒贝格可积函数 $\{g_n(x)\}$ 和 $\{h_n(x)\}$, 使得

(1) $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E (h_n(x) - g_n(x))\mathrm{d}x = 0$,

求证: $f(x)$ 是 E 上的 L 可积函数.

证明.

先证 $f(x)$ 可测.

令 $G_n(x)=\sup\limits_{k\le n} g_k(x)$, 则

$$g_n(x)\le G_n(x)\le G_{n+1}(x),\quad G_n(x)\le f(x),$$

$n=1,2,\cdots$.

令 $H_n(x)=\inf\limits_{k\le n} h_k(x)$, 则

$$h_n(x)\ge H_n(x)\ge H_{n+1}(x),\quad f(x)\le H_n(x),$$

$n=1,2,\cdots$.

一方面, 由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}0&\le\int_E\lim_{n\to\infty}[H_n(x)-G_n(x)]\mathrm{d}x\\&\le\varliminf_{n\to\infty}\int_E[H_n(x)-G_n(x)]\mathrm{d}x\\&\le\lim_{n\to\infty}\int_E[h_n(x)-g_n(x)]\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

即 $\int_E\lim\limits_{n\to\infty}[H_n(x)-G_n(x)]\mathrm{d}x=0$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}[H_n(x)-G_n(x)]$ 非负, 故

$$\lim_{n\to\infty}[H_n(x)-G_n(x)]=0\quad \text{a.e. 于 } E.$$

而 $0\le f(x)-G_n(x)\le H_n(x)-G_n(x)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-G_n(x)]=0\quad \text{a.e. 于 } E.$$

因而 $\lim[f(x)-G_n(x)]$ 可测

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-G(x)]$ 可测

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-G_n(x)]$ 可测.

另一方面, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(x)$ 也可测. 所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} G_n(x)+\lim_{n\to\infty}[f(x)-G_n(x)],$$

可测.

再证 $f(x)$ 可积.

因为

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\mathrm{d}x &\le \int_E \max\{|g_n(x)|,|h_n(x)|\}\mathrm{d}x\\ &\le \int_E (|g_n(x)|+|h_n(x)|)\mathrm{d}x\\ &\le \int_E |g_n(x)|\mathrm{d}x+\int_E |h_n(x)|\mathrm{d}x<+\infty,\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是 E 上的 L 可积函数.

第 23 题的结论可以看作 Lebesgue 控制收敛定理的推广, 它给出了一个积分和极限换序的充分条件. 第 29 题的证明正是应用了第 23 题的结论.

Lebesgue 控制收敛定理在程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题12-21详解中详细讨论过, 这里只给出 Lebesgue 控制定理的内容, 方便读者将其与第 23 题 比较.

Lebesgue 控制收敛定理:

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列可测函数. F 是 E 上的非负 L 可积函数, 如果对于任意的正整数 n, $|f_n(x)| \leq F(x)$ a.e. 于 E 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. 于 E, 则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x$.

23. 设 $E \subset \mathbb{R}^q$ 为可测集, $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列 L 可积函数, $\{g_n(x)\}$ 是 E 上一列非负 L 可积函数且 $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ a.e. 于 E. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ a.e. 于 E, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x) \mathrm{d}x = \int_E g(x) \mathrm{d}x.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x.$$

证明.

首先, $f(x)$, $g(x)$ 在 E 上可测.

其次, 因为 $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都成

立, 所以 $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)-f_n(x)\}$ 都是 E 上的非负可测函数列.

一方面, 因为 $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ 非负可测, 由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\int_E f(x)+g(x)\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty}[f_n(x)+g_n(x)]\mathrm{d}x\\ &\leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E[f_n(x)+g_n(x)]\mathrm{d}x\\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x+\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面, 因为 $\{g_n(x)-f_n(x)\}$ 非负可测, 由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\int_E g(x)-f(x)\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty}[g_n(x)-f_n(x)]\mathrm{d}x\\ &\leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E[g_n(x)-f_n(x)]\mathrm{d}x\\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_E f(x)dx \geq \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

于是,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

再结合

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$

可得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

该题的证明过程两次运用 Fatou 引理, 为了方便读者理解, 把 Fatou 引理引用如下:

> Fatou 引理:

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列非负可测函数, 则

$$\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

下面讨论第 24, 25 题.

设 E 为可测集, $f(x)$ 是 E 上的一个非负可测函数. 如果 $f(x)$ 可积, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限.

非负可积函数的这个性质结合非负可测函数的逐项积分定理可以用来证明函数项级数的收敛性. 比如第 24 题, 25 题.

> 非负可测函数的逐项积分定理:

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列非负可测函数, 则

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x.$$

24. 设 $\{r_k\}$ 是 $[0,1]$ 中全体有理数, 求证: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}$ 在 $[0,1]$ 上 a.e. 收敛.

证明.

由逐项积分定理,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}\right)\mathrm{d}x\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}\mathrm{d}x\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}(\sqrt{r_k}+\sqrt{1-r_k})\\
<&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}<+\infty.
\end{aligned}$$

所以,

$$0\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}<+\infty\quad \text{a.e. 于 } E,$$

即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}$ 在 $[0,1]$ 上 a.e. 收敛.

25. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 L 可积函数.

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 绝对收敛.

证明.

对任意的 $N \in \mathbb{Z}$, 由非负可测函数列的逐项积分定理,

$$
\begin{aligned}
&\int_{[N-1,N)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[N-1,N)} |f(x+n)| \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[N-1+n,N+n)} |f(x)| \mathrm{d}x \\
&= \int_{[N,+\infty)} |f(x)| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty,
\end{aligned}
$$

所以

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)| < +\infty \; a.e. \text{ 于 } [N-1, N),$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ 在 $[N-1, N)$ 上 a.e. 绝对收敛.

由 N 的任意性可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 绝对收敛.

第 26 题要证 $f(x)$ 可积, 只需要证 $|f(x)|$ 可积, 即 $|f(x)|$ 的积分有限.

> 26. 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的可测函数, 若 $|f(x)|\ln(1+|f(x)|)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的 L 可积函数, 证明: $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的 L 可积函数.
>
> 证明. 作点集
>
> $$E_1=\{x\in[0,2\pi]:|f(x)|\le 2\},\quad E_2=[0,2\pi]\setminus E_1,$$
>
> 则有
>
> $$|f(x)|\le 2,\qquad x\in E_1;$$
>
> $$|f(x)|\le|f(x)|\ln(1+|f(x)|),\quad x\in E_2.$$
>
> 因此 $f\in L(E_1)$ 且 $f\in L(E_2)$, 从而
>
> $$f\in L(E_1\cup E_2)=L([0,2\pi]).$$

对于第 28 题, 当 $mE<+\infty$ 时, 结论显然成立. 当 $mE=+\infty$ 时, 可以借助测度有限的情形, 用有限逼近无限的方法来证明.

> 28. 设 $E\subset\mathbb{R}^q$ 为可测集, $f(x)$ 为 E 上非负 L 可

积函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在测度有限的可测集 $E_0 \subset E$, 使得 $(L)\int_{E\setminus E_0} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

证明.

当 $mE < +\infty$ 时, 由积分的绝对连续性, 结论显然成立.

现考虑 $mE = +\infty$ 的情形. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记

$$E_n = E \cap U(0,n) = \{x \in E : d(0,x) < n\},$$

其中 $U(0,n)$ 为 $\mathbb{R}^q$ 中以原点为圆心 n 为半径的开球, 则 E_n 可测, $mE_n < +\infty$, $E_n \subset E_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

设 $\chi_{E_n}(x)$ 是 E_n 的特征函数. 因为

$$\{f(x)\chi_{E_n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ 在 } E \text{ 上非负可测},$$

$$f(x)\chi_{E_n}(x) \le f(x)\chi_{E_{n+1}}(x), n = 1, 2, \cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x)\chi_{E_n}(x) = f(x),$$

所以由 Levi 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时,

$$\left|\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \int_{E\setminus E_n} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

记 $E_0 = E_N$, 则 $mE_0 < +\infty$ 且

$$(L)\int_{E\setminus E_0} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_{E_N} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

最后, 我们讨论第 27, 29, 30 题.

27. 设 $E \subset \mathbb{R}^q$ 是可测集, $f(x)$ 和 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 都是 E 上的可积函数. 若

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

证明: 存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ a.e. 于 E.

证明.

对任意的 $\sigma > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\sigma m E[|f_n - f| \geq \sigma] \leq \int_E |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x.$$

令 $n \to \infty$, 不等式两边同时取极限, 得

$$\begin{aligned} &\sigma \lim_{n\to\infty} mE[|f_n - f| \geq \sigma] \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[|f_n - f| \geq \sigma] = 0$, 即 $f_n(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 由里斯(Riesz) 定理, 存在 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)\ a.e.\ \text{于}\ E.$$

29. 设 $E \subset \mathbb{R}^q$ 为可测集, $f(x)$ 和 $f_n(x), n = 1, 2, \cdots$ 都是 E 上勒贝格可积函数, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. 于 E. 若

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_E |f(x)| \mathrm{d}x,$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

证明. 令

$$h_n(x) = |f_n(x)-f(x)|,$$

$$g_n(x) = |f_n(x)|+|f(x)|,$$

$$n = 1, 2, \cdots .$$

显然 h_n 和 g_n 都是 E 上的非负 L 可积函数, 且 $h_n(x) \le g_n(x)$. 当 $n\to\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)-f(x)| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (|f_n(x)|+|f(x)|) = 2|f(x)|$$

a.e. 于 E, 且

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|+|f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x + \int_E |f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_E |f(x)|\mathrm{d}x + \int_E |f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_E 2|f(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由第 23 题结论可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E h_n(x)\mathrm{d}x = \int_E 0\mathrm{d}x = 0.$$

把第 29 题中的几乎处处收敛改成依测度收敛, 结论也成立, 参见如下的第 29' 题.

29'. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^q$ 为可测集, $f(x)$ 和 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$都是 E 上的 L 可积函数, 当 $n \to \infty$ 时 $f_n \Rightarrow f$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x,$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$

证明.

首先, 对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x+\int_E |f(x)|\mathrm{d}x,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x + \int_E |f(x)|\mathrm{d}x\right)$$
$$=2\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty,$$

所以 $\left\{\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

其次, 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$ 不成立, 则 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_{n_k}(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \alpha > 0,$$

不妨设

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \alpha > 0. \qquad (29.1)$$

因为 $f_n \Rightarrow f(x)$, 由 F.Riesz 定理, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{a.e. 于 } E.$$

由第 29 题结论, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_{n_k}(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$. 这与 (29.1) 式矛盾, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

从第 27, 29, 29' 题, 我们可以得到以下几个结论:

设 $f(x)$ 和 $\{f_n(x)\}$ 在可测集 E 上 L 可积.

(1). 因为

$$-|f_n(x)-f(x)| \le f_n(x)-f(x) \le |f_n(x)-f(x)|,$$
$$-|f_n(x)-f(x)| \le |f_n(x)|-|f(x)| \le |f_n(x)-f(x)|,$$

所以由

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(2). 反过来一般不成立. 如果再加个条件, $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ (第 29 题), 或 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ (第 29' 题), 则由

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

(3). 另一方面, 由

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$$

可得 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.(第 27 题的证明过程)

(4). 综合 (1)(2)(3) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x,$$
$$f_n(x)\Rightarrow f(x).$$

对 $mE<\infty$ 的情形, 第 30 题也给出了

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

的一个充分条件.

> 30. 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列可积函数, a.e. 收敛于可积函数 $f(x)$. 若 $\{f_n(x)\}$ 具有一致的积分绝对连续性, 即满足条件: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得任取 $e\subset E$, $me<\delta$ 时, 对任意 n, 有 $\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 证明: 当 $mE<\infty$ 时,
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$
>
> **证明.** $\forall\varepsilon>0$.
>
> 首先, 由 $\{f_n(x)\}$ 具有一致的积分绝对连续性, 存在 $\delta_1>0$, 使得任取 $e\subset E$, $me<\delta_1$ 时, 对任意 n,

有

$$\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

其次, 由积分的绝对连续性, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得任取 $e \subset E$, 只要 $me < \delta_2$, 就有

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 因为 $mE < \infty$, $\{f_n(x)\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$, 由叶戈罗夫定理, 存在子集 $e \subset E$, 使 $me < \delta$, 且 $f_n(x)$ 在 $E \setminus e$ 上一致收敛于 $f(x)$. 因此, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时, 对任意的 $x \in E \setminus e$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3mE}.$$

于是, 当 $n \geq N$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\
\leq\ &\int_{E\setminus e} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x+\int_e |f(x)|\mathrm{d}x \\
<\ &\frac{\varepsilon}{3mE} \cdot m(E \setminus e) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
<\ &\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

3 3 3

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

欢迎读者指正！

END

收录于合集 #实变函数与泛函分析 26

上一篇

程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第五章习题12-21详解

下一篇

程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第六章习题详解