Title

Date: M T W T F S S

Notes Review

考试 12月21号 F201

1. 度量空间: $(X,d)$ $d: X\times X\to[0,+\infty)$ $x,y,z\in X$

① $d(x,y)\geq 0$ $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

② $d(x,y)=d(y,x)$

③ $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

R上度量: $d: R\times R\to[0,+\infty)$

$d_1(x,y)=|x-y|$ $d_2=2|x-y|$ $d_3$"离散度量"

2. 拓扑空间 $(X,\tau)$ $\tau\subseteq P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$ $P(X)$是X的幂集

若τ满足 ① $\emptyset, X\in\tau$

② τ对有限交封闭

③ τ对任意并封闭

例子: $\tau_1=\{\emptyset,X\}$ $\tau_2=P(X)$ 都是X上的拓扑

3. 紧集: $A\subseteq(X,\tau)$ A是紧集 当且仅当 任意开覆盖有有限子覆盖

$\forall(x_\alpha)_{\alpha\in I}\subseteq A$ $(\forall(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq A)$

有限:有界闭就是紧

$\exists(x_{\alpha_\beta})_{\beta\in I'}\subseteq(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ $(\exists(x_{n_k})_{n_k=1}^{\infty}\subseteq(x_n)_{n=1}^{\infty})$

和 $x\in A$ s.t. $x_{\alpha_\beta}\xrightarrow{\tau}x$ $(x_{n_k}\xrightarrow{\tau}x)$

$x_\alpha\xrightarrow{\tau}x$ $\forall x\in A\in\tau$

$\exists\ \alpha_0$ s.t. $\forall\alpha\geq\alpha_0$ 有 $x_\alpha\in A$

4. 连续函数 $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(Y,\tau_2)$ f 连续

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)\in\tau_1$ 对 $\forall U\in\tau_2$ 成立

$\Leftrightarrow$ $\forall x_\alpha\xrightarrow{\tau_1}x \Rightarrow f(x_\alpha)\xrightarrow{\tau_2}f(x)$

5. 紧集在连续函数下的像也是紧集 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 连续 若A为紧集. $f(A)$也是紧集

Proof: $(y_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq f(A)$

$\exists(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s.t. $f(x_n)=y_n$ 对$\forall n$成立

由于A紧集 $\exists x\in A$ $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}\subseteq(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 且 $x_{n_k}\xrightarrow{\tau_1}x$

$\xRightarrow{\text{连续}} f(x_n)-f(x) \xRightarrow[y_{n_k}=f(x_k)]{令\ y=f(x)}$ $\exists(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}\subseteq(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $y\in A$ $y_{n_k}\xrightarrow{\tau_2}y$

6. 无穷维有限闭非紧 $l_1=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\mid\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<+\infty\}$

$B_{l_1}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_1\mid\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\leq 1\}$

$B_{l_1}$不是紧集 找 $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq B_{l_1}$ 且无收敛子列 $a_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$
↓第n项

$\forall n\in N$ $a_n\in B_{l_1}$ 且 $\|a_n-a_m\|=2$ $m\neq n$ 故 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 无收敛子列



Content 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Title

Date: M T W T F S S

Notes Review

7. 用平行四边形法则判断某个Banach空间中的范数不是由内积诱导的.

8. 拓扑线性空间

① 给出拓扑线性空间的例子 $c_0$ $l_\infty$ $L_p$ $l_p$ 函数 序列

② 给出不是拓扑线性空间的例子

9. 弱拓扑和弱星拓扑 X为赋范线性拓扑

定义1: $A_{f.\varepsilon_1.\varepsilon_2}=\{x\in X \mid \varepsilon_1\le f(x)\le\varepsilon_2\}$ $f\in X^*$ $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\in R$

$\tau=\bigcup_{\text{任意}}\bigcap_{\text{有限}}\{A_{f.\varepsilon_1.\varepsilon_2} \mid f\in X^*,\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\in R\}$

定义2: 设 $\tau_w$ 为X上的弱拓扑

$x_n\xrightarrow{\tau_w}x \iff f(x_n)\longrightarrow f(x)$ 对 $\forall f\in X^*$ 成立

弱星拓扑: $X^*$ 为 X 的共轭空间

定义1: $A_{f.\varepsilon_1.\varepsilon_2}=\{x\in X^* \mid \varepsilon_1\le f(x)\le\varepsilon_2\}$ $x\in X$ $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\in R$

$\tau=\bigcup_{\text{任意}}\bigcap_{\text{有限}}\{A_{f.\varepsilon_1.\varepsilon_2} \mid x\in X,\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\in R\}$

定义2: 设 $\tau_w$ 为 $X^*$ 上的弱星拓扑

$f_n\xrightarrow{\tau_w^*}f \iff f(x_n)\longrightarrow f(x)$ 对 $\forall f\in X$ 成立

10 弱拓扑弱于范数拓扑

$c_0$ 上 $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots 0)$

$\begin{cases}\|e_n\|=1 \not\longrightarrow 0\\ f(e_n)\xrightarrow{n\to\infty}0\end{cases}$ 有限项非零 $\forall f\in c_0^*=l_1 \Rightarrow e_n\xrightarrow{\tau_w}0$ 极限

弱拓扑强于弱星拓扑

$l_1$ 上 $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$ $e_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ 对 $\forall x\in c_0$ 成立 $\Longrightarrow e_n\xrightarrow{\tau_w^*}0$

取 $f=(1,1,\cdots,1,\dots)\in l_\infty=l_1^*$ $f(e_n)=1\not\longrightarrow 0 \Rightarrow e_n \xrightarrow{\tau_w} 0$