程其襄等编《实变函数与泛函分析基础》(第四版)第四章习题详解

原创 阿得学数学 阿得学数学 2020-04-20 19:34

在第三章可测集的基础上, 这一章我们讨论可测函数. 可测函数就是实变函数论中研究的主要函数, 比数学分析中研究的连续函数要宽泛的多.

下面开始讲习题.

第 1,2,3,6 题考查函数可测的充分必要条件.

设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数, 则

$$
\begin{aligned}
&f(x)\text{在}E\text{上可测};\\
\Leftrightarrow&\text{对任何有限实数}a, E[f>a]\text{都可测};\\
\Leftrightarrow&\text{对任何有限实数}a, E[f\geq a]\text{都可测};\\
\Leftrightarrow&\text{对任何有限实数}a, E[f<a]\text{都可测};\\
\Leftrightarrow&\text{对任何有限实数}a, E[f\leq a]\text{都可测}.
\end{aligned}
$$

做题的关键是选择一个合适的, 容易判断的充分必要条件.

> **1. 证明: $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是对任一有理数 r, 集合 $E[f>r]$ 可测. 如果集合 $E[f=r]$ 可测, 问 $f(x)$ 是否可测?**
>
> **证明.**

(1) 必要性显然成立. 下证充分性. 设 a 是任意的有限实数, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_n < a$, 且 $r_n \to a(n \to \infty)$. 则

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > r_n].$$

因为 $E[f > r_n]$ 可测, 而可数个可测集的交还是可测集, 所以 $E[f \geq a]$ 可测. 因此, $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

(2) 如果集合 $E[f = r]$ 可测, $f(x)$ 不一定可测. 例如, 设 E_1 是 E 的不可测子集, 定义

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in E_1, \\ e, & x \in E \setminus E_1. \end{cases}$$

对任意的有理数 r, 集 $E[f = r] = \emptyset$, 显然可测. 但是 $E[f > 3] = E_1$ 不可测, 所以 $f(x)$ 不可测.

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上可测函数列, 证明它的收敛点集和发散点集都是可测集.

证明.

[方法一]

记 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点集为 E_1, 发散点集为 E_2. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $x \in E$ 点收敛的充分必要条件是: $\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n, m \geq N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}.$$

即

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{n=N \\ m=N}}^{\infty} E\left[|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right].$$

由函数列 $\{f_n(x)\}$ 可测, 得 $E[|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}]$ 可测对任意的自然数 n, m, k 都成立. 所以 E_1 可测, $E_2 = E \setminus E_1$ 也可测.

[方法二]

由 §1 定理 6, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 都是 E 上的可测函数. 记

$$E_1 = E\left[\varliminf_{n\to\infty} f_n = +\infty\right]$$

是由收敛到 $+\infty$ 的点组成的集合;

$$E_2 = E\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n = -\infty\right]$$

是由收敛到 $-\infty$ 的点组成的集合;

$$E_3 = E\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n > \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n\right]$$

是由 $f_n(x)$ 的不收敛点所组成的集合. 因此 $f_n(x)$ 在 E 上的收敛点集为

$$E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3),$$

因而是可测集; 而发散点集为

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3,$$

也是可测集.

3. 设 E 是 $[0,1]$ 中不可测集, 令

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in E, \\ -x, & x\in[0,1]\setminus E. \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测? $|f(x)|$ 是否可测?

解. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可测.

若 $0\in E$, 则 $\{x\in[0,1]:f(x)\geq 0\}=E$ 不可测;

若 $0\notin E$, 则 $\{x\in[0,1]:f(x)>0\}=E$ 不可测.

总之 $f(x)$ 不可测.

而函数 $|f(x)|=x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以可测.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $g(x)$ 在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上有限可测, 则 $f\circ g(x)=f(g(x))$ 在 E 上可测.

证明. 记 $E_1=(-\infty,+\infty)$.

对任意的有限实数 c, 由 $f(x)$ 连续可得 $E_1[f>c]$ 是直线上的开集. 由开集构造原理, 可设

$$E_1[f>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n),$$

其中 (α_n,β_n) 是其构成区间(可能是有限多个, α_n 可能是 $-\infty$, β_n 可能是 $+\infty$). 因此,

$$\begin{aligned}E[f\circ g>c]&=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[\alpha_n<g<\beta_n]\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(E[g>\alpha_n]\cap E[g<\beta_n]\big).\end{aligned}$$

因为 $g(x)$ 在 E 上可测, 故 $E[g>\alpha_n]$, $E[g<\beta_n]$ 都可测, 所以 $E[f\circ g>c]$ 可测. 由 c 的任意性可得 $f\circ g(x)$ 是可测函数.

第 4 题说明当 $mE < \infty$ 时，几乎处处有限的可测函数是"基本上"有界的.

第 5 题说明当 $mE < \infty$ 时, 几乎处处收敛于有限函数的几乎处处有限的可测函数列是"基本上"一致有界的.

第 4 题可以看作是第 5 题的一个特例.

4. 设 $mE < \infty$, 若 $f(x)$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数, 证明对任意 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 和 $M > 0$, 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 且对任意 $x \in E_\delta$, $|f(x)| \leq M$.

证明.

[方法一]

记 $E_\infty = E[|f| = +\infty]$, 则 $mE_\infty = 0$. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $E_n = E[|f| \leq n]$, 则 E_n 是 E 的可测子集, 满足 $E_n \subset E_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E \setminus E_\infty$. 因而

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = m(E \setminus E_\infty) = mE - m(E_\infty) = mE.$$

即对任意的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时, $m(E \setminus E_n) = mE - mE_n < \delta$. 取 $E_\delta = E_N$, $M = N$, 则 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 且对任意 $x \in E_\delta$, $|f(x)| \leq M$.

[方法二]

$\forall \delta > 0$,

首先, $mE < \infty$, 则存在 $\widetilde{E} \subset E$, 满足 $\widetilde{E}$ 有界, 且 $m(E \setminus \widetilde{E}) < \frac{\delta}{2}$.

事实上, 令 $E_n = E \cap U(0, n)$, 则 $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = mE.$$

由 $mE < \infty$, 可得存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$m(E \setminus E_N) = m(E) - m(E_N) < \frac{\delta}{2}.$$

取 $\widetilde{E} = E_N$, 即满足要求.

其次, 函数 $f(x)$ 在 $\widetilde{E}$ 上可测且 a.e. 有限, 由卢津定理, 对任意 $\delta > 0$, 存在闭子集 $E_\delta \subset \widetilde{E}$, 使 $f(x)$ 在 E_δ 上是连续函数, 且 $m(\widetilde{E} \setminus E_\delta) < \frac{\delta}{2}$.

综上, $E_\delta \subset \widetilde{E} \subset E$, 且

$$m(E \setminus E_\delta) = m(E \setminus \widetilde{E}) + m(\widetilde{E} \setminus E_\delta) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

E_δ 是一个有界闭集, $f(x)$ 在 E_δ 上连续, 所以有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $\forall x \in E_\delta$, $|f(x)| \le M$.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上 a.e. 有限的可测函数列, 而且 a.e. 收敛于有限函数 $f(x)$, 证明对任意 $\delta > 0$, 存在常数 $M > 0$ 与可测集 $E_\delta \subset E$, $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 使得对一切 n 和 $x \in E_\delta$, 有 $|f_n(x)| \leq M$. 这里 $mE < \infty$.

证明.

因为 $E[|f_n| = +\infty]$, $n = 1, 2, \cdots$, $E[f_n \not\to f]$ 都是零测集, 记

$$E_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E[|f_n| = +\infty]\right) \cup E[f_n \not\to f],$$

$$E_2 = E \setminus E_1,$$

则 $mE_1 = 0$.

对任意 $x \in E_2$, $f_n(x)$ 有限且收敛于有限数 $f(x)$, 所以 $\sup\limits_n |f_n(x)| < +\infty$. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 记

$$F_k = E_2[\sup_n |f_n| \leq k],$$

则

$$F_k \subset F_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

且

$$\lim_{k\to\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_2[\sup_n |f_n| \le k] = E_2.$$

因而 $\lim\limits_{k\to\infty} mF_k = mE_2$. 所以对任意的 $\delta > 0$, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 当 $k \ge K$ 时, 有

$$m(E_2 \setminus F_k) = mE_2 - mF_k < \delta.$$

取 $E_\delta = F_K$, $M = K$, 则有

$$m(E \setminus E_\delta) = mE_1 + m(E_2 \setminus F_K) < \delta,$$

$$\forall x \in E_\delta, \quad \sup_n |f_n(x)| \le M,$$

即在 E_δ 上对一切 n 有 $|f_n(x)| \le M$.

卢津定理及其逆定理揭示了可测函数和连续函数的关系. 在应用上通过卢津定理常常可以把有关可测函数的问题归结为连续函数的问题, 从而使问题得以简化.

8. 试证卢津定理的逆定理成立.

卢津定理的逆定理: 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的函数. 若对任意的 $\delta > 0$, 存在闭子集 $F_\delta \subset E$, 使 $f(x)$ 在 F_δ 上连续且 $m(E \setminus F_\delta) < \delta$, 则 $f(x)$ 是

E 上 a.e. 有限的可测函数.

证明.

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 存在闭子集 $E_n \subset E$, 使 $f(x)$ 在 E_n 上连续且 $m(E \setminus E_n) < \frac{1}{n}$.

令 $E_0 = E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$mE_0 = m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq m(E \setminus E_n) < \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$ 得 $mE_0 = 0$. 且

$$E = E_0 \cup (E \setminus E_0) = E_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

对任意的 $a \in \mathbb{R}$,

$$E[f > a] = E_0[f > a] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n[f > a]\right).$$

由 $f(x)$ 在 E_n 上连续, 可得 $E_n[f > a]$ 可测; 而 $m^*(E_0[f > a]) \leq m^*E_0 = 0$, 故 $E_0[f > a]$ 也可测, 从而 $E[f > a]$ 是可测的. 由 a 的任意性可得 $f(x)$ 是可测的.

函数 $f(x)$ 在 E_n 上连续, 因而有限, 故在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 上有限, 而

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = mE_0 = 0,$$

> 于是 $f(x)$ 在 E 上 a.e. 有限.

剩下的几个题目都和函数列的收敛性有关. 我们主要学习了四种不同的收敛性, **一致收敛**, **"基本上"一致收敛**, **几乎处处收敛**, **依测度收敛**.

先给出每个收敛的定义:

设 $\{f_n(x)\}$, $f(x)$ 分别是可测集 $E \subset \mathbb{R}^q$ 上的 a.e. 有限的可测函数列和 a.e. 有限的可测函数.

- 一致收敛: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 对任意 $n \geq N$, 对任意 $x \in E$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f.

- "基本上"一致收敛: 对任意 $\delta > 0$, 存在子集 $E_\delta \subset E$, 使 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f, 且 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上"基本上"一致收敛于 f.

- 几乎处处收敛: 存在 E 的子集 M 满足 $m(E \setminus M) = 0$, 且对任意 $x \in M$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 f.

- 依测度收敛: 对任意 $\sigma > 0$, 有 $\lim\limits_{n} mE[|f_n - f| \geq \sigma] = 0$, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 记为 $f_n \Rightarrow f$.

这四种收敛性之间有密切的关系, 下面我们分 $mE < \infty$ 和 $mE = \infty$ 两种情形进行讨论.

> 当 $mE < \infty$ 时, 四种收敛性有如下关系:
> 一致收敛 $\Rightarrow$ "基本上"一致收敛 $\Leftrightarrow$ 几乎处处收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛

- 一致收敛 $\Rightarrow$ "基本上"一致收敛: 显然;

- "基本上"一致收敛 $\Rightarrow$ 几乎处处收敛: 第7题;
- 几乎处处收敛 $\Rightarrow$ "基本上"一致收敛: 叶戈罗夫定理;
- 几乎处处收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛: 勒贝格定理;
- 依测度收敛 $\nRightarrow$ 几乎处处收敛: 反例: 课本第62页例1.

> 当 $mE=\infty$ 时, 四种收敛性有如下关系:
> 一致收敛 $\Rightarrow$ "基本上"一致收敛 $\Rightarrow$ 几乎处处收敛

- 一致收敛 $\Rightarrow$ "基本上"一致收敛: 显然;
- "基本上"一致收敛 $\Rightarrow$ 几乎处处收敛: 第 7 题;
- 几乎处处收敛 $\nRightarrow$ "基本上"一致收敛: 反例: 课本第63页例2;
- 几乎处处收敛 $\nRightarrow$ 依测度收敛: 反例: 课本第63页例2;
- 依测度收敛 $\nRightarrow$ 几乎处处收敛: 反例: 类似课本第62页例1.

7. 设 $\{f_n(x)\}$ 在可测集 E 上“基本上”一致收敛于 $f(x)$, 证明 $\{f_n(x)\}$ a.e. 收敛于 $f(x)$.

证明.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上“基本上”一致收敛于 $f(x)$, 即对任意的 $\delta > 0$, 存在 E 的可测子集 E_δ 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ 且 $f_n(x)$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$.

记 $E_0 = E[f_n \not\to f]$, 则 $E_0 \subset E \setminus E_\delta$, 所以

$$mE_0 \leq m(E \setminus E_\delta) < \delta.$$

令 $\delta \to 0$, 得 $mE_0 = 0$, 所以 $\{f_n(x)\}$ a.e. 收敛于 $f(x)$.

通常情况下, 依测度收敛 $\not\Rightarrow$ 几乎处处收敛. 但第 10 题告诉我们: 加上一定的条件, 比如函数列的单调性, 则依测度收敛 $\Rightarrow$ 几乎处处收敛.

10. 设在可测集 E 上, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 而对任意正整数 n 和 a.e. 的 $x \in E$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, 证明:

整数 n 和 a.e. 的 $x \in E$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, 证明: $f_n(x)$ a.e. 收敛于 $f(x)$.

证明.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 由里斯(Riesz)定理, 存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$. 即存在 $A_0 \subset E$ 使得 $m(E \setminus A_0) = 0$, 且 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 A_0 上收敛于 $f(x)$.

对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $A_n = E[f_n \leq f_{n+1}]$, 则 $m(E \setminus A_n) = 0$.

记 $A = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k$, 则

$$\begin{aligned} m(E \setminus A) &= m\left(E \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right) = m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (E \setminus A_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} m(E \setminus A_k) = 0, \end{aligned}$$

即 $m(E \setminus A) = 0$, 且在 A 上,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$f_{n_k}(x) \to f(x), \quad k \to \infty.$$

因此在 A 上, $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$. 于是 $f_n(x)$ 在 E

上几乎处处收敛于 $f(x)$.

第 14 题以一个特例分别给出了四种收敛性的充分必要条件.

14. 设 $E_n \subset E(n=1,2,\cdots)$, 对任意 A,

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

证明以下结论:

(1) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ 一致收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是: 存在正整数 N, 使得对任意 $n\geq N$, $E_n=E$;

(2) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ "基本上"上一致收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{N\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)=0$;

(3) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ a.e. 收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是 $m\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)=0$;

(4) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ 依测度收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件

是 $\lim_{n\to\infty} m(E \setminus E_n) = 0$.

证明.

设 $E \subset \mathbb{R}^p$. $\chi_{E_n}(x)$ 和 $\chi_E(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}^p$ 上的函数. 对任意的自然数 n, 有

$$\chi_{E_n}(x) = \chi_E(x) = 0, \quad \forall x \in E^c.$$

即在 E^c 上, $\chi_{E_n}(x)$ 与 $\chi_E(x)$ 是恒等的. 因此我们只需要考虑函数定义在 E 上的部分.

由 $\chi_{E_n}(x)$ 和 $\chi_E(x)$ 的定义,

$$|\chi_{E_n}(x) - \chi_E(x)| = \begin{cases} 0, & x \in E_n, \\ 1, & x \in E \setminus E_n. \end{cases}$$

对任意的 $0 < \sigma < 1$, 有

$$E[|\chi_{E_n} - \chi_E| \geq \sigma] = E[|\chi_{E_n} - \chi_E| > 0] = E \setminus E_n,$$

$$E[|\chi_{E_n} - \chi_E| < \sigma] = E[|\chi_{E_n} - \chi_E| = 0] = E_n.$$

(1) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ 一致收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是: 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, $E_n = E$;

$$\{\chi_{E_n}(x)\} \text{ 一致收敛于 } \chi_E(x).$$

$$\Longleftrightarrow \{\chi_{E_n}(x)\} \text{ 在 } E \text{ 上一致收敛于 } \chi_E(x).$$

$$\Longleftrightarrow \forall 1 > \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n \geq N \text{ 时},$$

$$\forall x \in E, \text{有 } |\chi_{E_n}(x) - \chi_E(x)| < \varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \forall 1 > \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n \geq N \text{ 时},$$

$$E[|\chi_{E_n}(x) - \chi_E(x)| < \varepsilon] = E_n = E.$$

$$\Longleftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n \geq N \text{ 时}, E_n = E.$$

(2) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ "基本上" 上一致收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{N\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}(E \setminus E_n)\right) = 0$;

$$\{\chi_{E_n}(x)\} \text{ "基本上" 一致收敛于 } \chi_E(x).$$

$$\Longleftrightarrow \{\chi_{E_n}(x)\} \text{ 在 } E \text{ 上"基本上"一致收敛于 } \chi_E(x).$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists E_\varepsilon \subset E, \text{ s.t. } m(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \text{ 且}$$

在 E_ε 上 $\{\chi_{E_n}(x)\}$ 一致收敛于 $\chi_E(x)$.

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists E_\varepsilon\subset E$, s.t. $m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$ 且

$\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, 当 $n\geq N_\varepsilon$ 时 $E_n\cap E_\varepsilon=E_\varepsilon$.

$$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \text{s.t. } m\left(\bigcup_{n=N_\varepsilon}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)<\varepsilon.$$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, 当 $N\geq N_\varepsilon$ 时, 有

$$m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)<\varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)=0.$$

上面推导过程中只有第 4 个充分必要性即 $(*)$ 式需要说明. 必要性由

$$\bigcup_{n=N_\varepsilon}^{\infty}(E\setminus E_n)\subset\left(\bigcup_{n=N_\varepsilon}^{\infty}(E_\varepsilon\setminus E_n)\right)\cup(E\setminus E_\varepsilon)$$

立即可得. 记

$$E_\varepsilon=E\setminus\bigcup_{n=N_\varepsilon}^{\infty}(E\setminus E_n)=\bigcap_{n=N_\varepsilon}^{\infty}E_n,$$

则可得充分性.

(3) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ a.e. 收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是

$m\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)=0;$

$\chi_{E_n}(x)$ a.e. 收敛于 $\chi_E(x)$.

$\Longleftrightarrow \chi_{E_n}(x)$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $\chi_E(x)$.

$\Longleftrightarrow mE[\chi_{E_n} \not\to \chi_E]=0.$

$\Longleftrightarrow m\big(\{x\in E:\lim\limits_{n\to\infty}|\chi_{E_n}-\chi_E|\neq 0$ 或不存在$\}\big)=0.$

$$\Longleftrightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|\chi_{E_n}-\chi_E|\geq\frac{1}{k}\right]\right)=0.$$

$$\Longleftrightarrow m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|\chi_{E_n}-\chi_E|>0\right]\right)=0.$$

$$\Longleftrightarrow m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}(E\setminus E_n)\right)=0.$$

(4) $\{\chi_{E_n}(x)\}$ 依测度收敛于 $\chi_E(x)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E\setminus E_n)=0.$

$\chi_{E_n}(x)$ 依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

$\Longleftrightarrow \chi_{E_n}(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

$\Longleftrightarrow \forall 1>\sigma>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}mE[|\chi_{E_n}-\chi_E|\geq\sigma]=0.$

$$\Longleftrightarrow \forall 1 > \sigma > 0, \lim_{n\to\infty} mE[|\chi_{E_n} - \chi_E| > 0] = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} mE[|\chi_E - \chi_{E_n}| > 0] = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} m(E \setminus E_n) = 0.$$

对于第 14 题中的函数列, 利用题目中四个收敛性的等价条件之间的关系, 也能得到四种收敛性之间的关系.

- 当 $mE < \infty$ 时, 因为

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, E_n = E. \\ \Rightarrow & \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0. \\ \Leftrightarrow & m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0. \\ \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} m(E \setminus E_n) = 0. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} & \chi_{E_n}(x) \text{ 一致收敛于 } \chi_E(x). \\ \Rightarrow & \chi_{E_n}(x) \text{ “基本上”一致收敛于 } \chi_E(x). \\ \Leftrightarrow & \chi_{E_n}(x) \text{ 几乎处处收敛于 } \chi_E(x). \\ \Rightarrow & \chi_{E_n}(x) \text{ 依测度收敛于 } \chi_E(x). \end{aligned}$$

- 当 $mE = \infty$ 时, 因为

$$
\begin{aligned}
& \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, E_n = E. \\
\Rightarrow \ & \lim_{N \to \infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0. \\
\Rightarrow \ & m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
& \chi_{E_n}(x) \text{ 一致收敛于 } \chi_E(x). \\
\Rightarrow \ & \chi_{E_n}(x) \text{ “基本上”一致收敛于 } \chi_E(x). \\
\Rightarrow \ & \chi_{E_n}(x) \text{ 几乎处处收敛于 } \chi_E(x).
\end{aligned}
$$

但是,

$$
\begin{aligned}
& m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0. \\
\nRightarrow \ & \lim_{N \to \infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
& \chi_{E_n}(x) \text{ 几乎处处收敛于 } \chi_E(x). \\
\nRightarrow \ & \chi_{E_n}(x) \text{ “基本上”一致收敛于 } \chi_E(x).
\end{aligned}
$$

反例: $E = (0, \infty)$, $E_n = (0, n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

同样,

$$
\begin{aligned}
& m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_n)\right) = 0. \\
\nRightarrow \ & \lim_{n \to \infty} m(E \setminus E_n) = 0.
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
& \chi_{E_n}(x) \text{ 几乎处处收敛于 } \chi_E(x). \\
\nRightarrow \ & \chi_{E_n}(x) \text{ 依测度收敛于 } \chi_E(x).
\end{aligned}
$$

反例: $E=(0,\infty)$, $E_n=(0,n)$, $n=1,2,\cdots$.

第 9, 11, 12, 13, 15, 17 题都是关于依测度收敛的.

第 9 题是依测度收敛的性质.

> 9. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 且对任意正整数 n, $f_n(x)\le g(x)$ a.e. 于 E. 证明: $f(x)\le g(x)$ a.e. 于 E.

证明.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 由里斯(Riesz)定理, 存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$. 即存在 $A_0\subset E$ 使得

$$m(E\setminus A_0)=0,$$

$$\forall x\in A_0,\quad f_{n_k}(x)\to f(x),\quad k\to\infty.$$

对任意的 $k\in\mathbb{N}$, $f_{n_k}(x)\le g(x)$ a.e. 于 E, 即存在 $A_k\subset E$ 使得

$$m(E\setminus A_k)=0,$$

$$\forall x\in A_k,\quad f_{n_k}(x)\le g(x)$$

$$\forall x \in A_k, \quad f_{n_k}(x) \le g(x).$$

记 $A = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k$, 则

$$m(E \setminus A) = m\left(E \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right) = m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (E \setminus A_k)\right)$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} m(E \setminus A_k) = 0,$$

即 $m(E \setminus A) = 0$, 且在 A 上,

$$f_{n_k}(x) \to f(x), \quad k \to \infty,$$

$$f_{n_k}(x) \le g(x), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

于是 $f(x) \le g(x)$ 在 A 上恒成立. 即 $f(x) \le g(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

第 11 题告诉我们, 函数列的依测度收敛性与每个函数在零测集上的取值无关. 即改变函数列中的每个函数在零测集上的取值, 不改变函数列的依测度收敛性.

11. 设在可测集 E 上, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 而对任意正整数 n 和 a.e. 的 $x \in E$, $g_n(x) = f_n(x)$, 证明: $g_n(x) \Rightarrow f(x)$.

证明 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $A_n = E[f_n \neq g_n]$, 则

证明: 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $A_n = E[f_n = g_n]$, 则 $m(E \setminus A_n) = 0$.

记 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $A \subset E$,

$$m(E \setminus A) = m\left(E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n)\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E \setminus A_n) = 0,$$

即 $m(E \setminus A) = 0$, 且在 A 上,

$$f_n(x) = g_n(x), \quad n = 1, 2, \cdots .$$

对任意的 $\sigma > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E[|g_n - f| \geq \sigma] &\subset A[|g_n - f| \geq \sigma] \cup (E \setminus A) \\ &= A[|f_n - f| \geq \sigma] \cup (E \setminus A) \\ &\subset E[|f_n - f| \geq \sigma] \cup (E \setminus A), \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} mE[|g_n - f| \geq \sigma] &\leq mE[|f_n - f| \geq \sigma] + m(E \setminus A) \\ &= mE[|f_n - f| \geq \sigma]. \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 由在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 得

$$0 \leq mE[|g_n - f| \geq \sigma] \leq mE[|f_n - f| \geq \sigma] \to 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} mE[|g_n - f| \geq \sigma] = 0.$$

由 σ 的任意性得 $g_n(x) \Rightarrow f(x)$.

第 12 题给出了判定函数列依测度收敛的一个方法. 该方法在第 13, 17 题中有应用.

12. 设 $mE < \infty$, 证明: 在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 的充要条件是: 对于 $\{f_n(x)\}$ 的任何子函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 存在 $\{f_{n_k}(x)\}$ 的子函数列 $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x) = f(x)$ a.e. 于 E.

证明.

先证必要性.

在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 因此, 对于 $\{f_n(x)\}$ 的任何子函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 有 $f_{n_k}(x) \Rightarrow f(x)$. 由里斯(Riesz)定理, 存在 $\{f_{n_k}(x)\}$ 的子函数列 $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x) = f(x) \text{ a.e. 于 } E.$$

再证充分性.

用反证法. 假设在 E 上 $\{f_n(x)\}$ 不依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\exists \sigma_0 > 0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[|f_n - f| \geq \sigma_0] \neq 0$ 或极限不存在. 即存在 $\varepsilon_0 > 0$, 子函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 使得

$$mE[|f_{n_k} - f| \geq \sigma_0] > \varepsilon_0. \tag{12.1}$$

另一方面, 对于子函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 存在它的子函数列 $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$. 而 $mE < \infty$, 根据勒贝格(Lebesgue)定理, 在 E 上 $f_{n_{k_j}}(x) \Rightarrow f(x)$. 这与 (12.1) 式矛盾.

因此假设不成立, 即在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

第 13 题的结论可以看作是依测度收敛意义下的极限的运算性质.

13. 设 $mE < \infty$, $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ 是两在 E 上 a.e. 有限的可测函数列, 分别依测度收敛于 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明:

(1) $f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x)$;

(2) $\max\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \max\{f(x), g(x)\}$;

(3) $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x)$.

证明.

(1) 利用定义证明.

对任意 $\sigma > 0$, 由 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, $g_n(x) \Rightarrow g(x)$ 得

$$\lim_{n\to\infty} mE\left[|f_n - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right] = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} mE\left[|g_n - g| \geq \frac{\sigma}{2}\right] = 0.$$

又由

$$|(f_n + g_n) - (f + g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g|,$$

得

$$\begin{aligned}&E[|(f_n + g_n) - (f + g)| \geq \sigma]\\ \subset &E\left[|f_n - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right] \cup E\left[|g_n - g| \geq \frac{\sigma}{2}\right].\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} mE[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geq\sigma]\\
\leq&\lim_{n\to\infty}\left(mE\left[|f_n-f|\geq\frac{\sigma}{2}\right]+mE\left[|g_n-g|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} mE\left[|f_n-f|\geq\frac{\sigma}{2}\right]+\lim_{n\to\infty} mE\left[|g_n-g|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\\
=&0.
\end{aligned}
$$

即, $\lim_{n\to\infty} mE[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geq\sigma]=0$. 由 σ 的任意性可得 $f_n(x)+g_n(x)\Rightarrow f(x)+g(x)$.

(2) 证明分三部分.

(i) 若 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 则 $|f_n(x)|\Rightarrow|f(x)|$.

事实上, 对任意 $\sigma>0$, 由 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 得

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n-f|\geq\sigma]=0.$$

又由

$$E[||f_n|-|f||\geq\sigma]\subset E[|f_n-f|\geq\sigma],$$

得

$$mE[||f_n|-|f||\geq\sigma]\leq mE[|f_n-f|\geq\sigma].$$

令 $n\to\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[||f_n|-|f||\geq\sigma]=0$. 即 $|f_n(x)|\Rightarrow|f(x)|$.

(ii) 若 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 则 $\forall a\neq 0$, $af_n(x)\Rightarrow af(x)$. 对任意的 $\sigma>0$, 因为

$$E[|af_n-af|\geq\sigma]=E\left[|f_n-f|\geq\frac{\sigma}{|a|}\right],$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} mE[|af_n-af|\geq\sigma]\\=&\lim_{n\to\infty} mE\left[|f_n-f|\geq\frac{\sigma}{|a|}\right]=0.\end{aligned}$$

即 $af_n(x)\Rightarrow af(x)$.

(iii) 因为

$$\max\{f_n(x),g_n(x)\}=\frac{(f_n(x)+g_n(x))+|f_n(x)-g_n(x)|}{2},$$

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{(f(x)+g(x))+|f(x)-g(x)|}{2}.$$

由 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, $g_n(x)\Rightarrow g(x)$, 再结合第 (1) 题及第 (i),(ii) 部分, 可得

$$\max\{f_n(x),g_n(x)\}\Rightarrow\max\{f(x),g(x)\}.$$

(3) 利用第 12 题的结论.

设 $\{f_{n_k}(x)g_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是函数列 $\{f_n(x)g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意子列, 则 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 由里斯定理, 存在 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 $\{f_{n_{k_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$.

又 $\{g_{n_{k_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 是函数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, $g_n(x) \Rightarrow g(x)$, 由里斯定理, 存在 $\{g_{n_{k_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 的子列 $\{g_{n_{k_{j_i}}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 在 E 上 a.e 收敛于 $g(x)$.

因此, $\{f_{n_{k_{j_i}}}(x)g_{n_{k_{j_i}}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 是函数列 $\{f_{n_k}(x)g_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列, 且满足

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_{k_{j_i}}}(x)g_{n_{k_{j_i}}}(x) = f(x)g(x) \text{ a.e. 于 } E,$$

由第 12 题结论可得 $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x)$.

第 17 题讨论可测函数与连续函数的复合函数列的依测度收敛性.

17. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 且

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 证明: 若 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $\{g(f_n(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $g(f(x))$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 结论是否仍成立? 若 $[a,b]$ 改为 $(-\infty,+\infty)$, 结论是否还成立?

证明.

(1)

设 $\{g(f_{n_k}(x))\}$ 是 $\{g(f_n(x))\}$ 的任意子函数列, 则 $f_{n_k}(x) \Rightarrow f(x)$, 由里斯定理, 存在 $A \subset [a,b]$, 及 $\{f_{n_k}(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$ 使得

$$m([a,b] \setminus A) = 0,$$

且

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x) = f(x), \quad x \in A.$$

又 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 所以

$$\lim_{j\to\infty} g(f_{n_{k_j}}(x)) = g\left(\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x)\right) = g(f(x)), x \in A.$$

即 $\{g(f_{n_k}(x))\}$ 的子列 $\{g(f_{n_{k_j}}(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上 a.e.

收敛于 $g(f(x))$. 由第 12 题结论, 可得

$$g(f_n(x)) \Rightarrow g(f(x)).$$

(2)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 结论仍成立.

(3)

若 $[a,b]$ 改为 $(-\infty,+\infty)$, 结论不一定成立. 反例: 对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, n), \\ x + \frac{1}{x}, & x \in [n, +\infty); \end{cases}$$

$$g(x) = x^2.$$

记 $E = (-\infty,+\infty)$. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) = x$. 事实上, $\forall \sigma > 0$,

$$E[|f_n - f| \geq \sigma] = \begin{cases} [n, \frac{1}{\sigma}], & n \leq \frac{1}{\sigma}, \\ \emptyset, & n > \frac{1}{\sigma}, \end{cases}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n - f| \geq \sigma] = 0.$$

但是, 函数列 $\{g(f_n(x))\}$ 不依测度收敛于 $g(f(x))$.

事实上,

$$g(f_n(x)) - g(f(x)) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, n), \\ 2 + \frac{1}{x^2}, & x \in [n, +\infty). \end{cases}$$

$\forall \sigma > 0$(不妨设 $\sigma < 2$), $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$mE[|g(f_n) - g(f)| \geq \sigma] = m[n, +\infty) = \infty.$$

第 16 题注意必要性的证明. 很多同学这样证:

(⟹) 因为 $mE<\infty$, $\{f_n(x)\}$ 是 E 上有限可测函数列且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ a.e 于 E.

由 Lebesgue 定理, $f_n(x)\Rightarrow 0$. 即 $\forall\alpha>0$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[|f_n|\geq\alpha]=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty} mE[|g_n|\geq\alpha]=\lim_{n\to\infty} mE[g_n\geq\alpha]$$

$$=\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E[|f_k|\geq\alpha]\right)$$

$$=m\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E[|f_k|\geq\alpha]\right)$$

$$\cancel{=}\ m\left(\lim_{n\to\infty}E[|f_n|\geq\alpha]\right)$$

$$\cancel{=}\ \lim_{n\to\infty} mE[|f_n|\geq\alpha]=0$$

所以 $g_n(x)\Rightarrow 0$.

后面两个等式是不成立的.

第一, 注意极限和上极限的区别.

$$\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E[|f_k|\geq\sigma]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E[|f_k|\geq\sigma]$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}E[|f_k|\geq\sigma]$$

第二, 极限和求测度是不能随便交换的. 当可测集列满足

1. $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$

或

2. $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$且 $mE_1<\infty$

时, 有 $m\left(\lim\limits_{n\to\infty}E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}mE_n$. 其他情形要慎重.

16. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上有限可测函数列且$mE<\infty$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ a.e. 于 E 的充分且必要条件是 $g_n(x)\Rightarrow 0$, 其中 $g_n(x)=\sup\{|f_k(x)|:k\geq n\}$.

证明.

先证必要性.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ **在** E **上几乎处处成立可得**, **存在** $A\subset E$ **使得** $m(E\setminus A)=0$ **且**

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\quad x\in A.$$

一方面, $\forall x\in A$, **由** $\{f_n(x)\}$ **有极限可得** $\{f_n(x)\}$ **有界**, **因此** $g_n(x)=\sup\{|f_k(x)|:k\geq n\}$ **也有界**.

所以 $\{g_n(x)\}$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数列;

另一方面, $\forall x \in A$, 由 $g_n(x)$ 的定义, 可得

$$g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

所以 $\{g_n(x)\}$ 收敛, 且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |f_k(x)| = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} |f_k(x)| \\ &= \varlimsup_{n\to\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ a.e. 于 E.

综合以上讨论, 再结合 $mE < \infty$, 由勒贝格定理得, $g_n(x) \Rightarrow 0$.

再证充分性.

一方面, 由定义 $g_n(x) = \sup\limits_{k\geq n} |f_k(x)|$, 可得

$$g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

在 E 上恒成立, 则 $\{g_n(x)\}$ 在 E 上收敛. 另一方面, $g_n(x) \Rightarrow 0$, 由里斯(Riesz)定理, 存在 E 的子集 A 及 $\{g_n(x)\}$ 的子列 $\{g_{n_k}(x)\}$ 使得 $m(E \setminus A) = 0$

且在 A 上 $\{g_{n_k}(x)\}$ 收敛于 0. 由极限的唯一性可得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0, \quad x \in A.$$

又 $0 \le |f_n(x)| \le g_n(x)$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 不等式两边同时取极限得

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0, \quad x \in A.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in A.$$

由 $m(E \setminus A) = 0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 在 E 上几乎处处成立.

第 15 题的证明比较复杂, 这里参考了夏道行等编著的《实变函数论与泛函分析（上册 · 第二版修订本）》中证明 "函数列依测度收敛的充分必要条件是它是依测度基本列" 的方法 (详细内容请查看《实变函数论与泛函分析（上册 · 第二版修订本）》P135 定理 3.2.7 的证明).

15. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可测集列, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若 $\chi_{E_k}(x) \Rightarrow f(x)$, 证明: 存在可测集 E,

使得 $f(x)=\chi_E(x)$ a.e. 于 $\mathbb{R}^n$.

证明.

记 $\widetilde{E}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 对任意 $k\in\mathbb{N}$, $\chi_{E_k}(x)$ 在 $\widetilde{E}^c$ 上的取值都为 0, 因此 $\chi_{E_k}(x)$ 在 $\widetilde{E}^c$ 上处处收敛于 0. 下面只在可测集 $\widetilde{E}$ 上考虑.

第一步, 证明: $\forall\varepsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}$, 当 $k,l\geq K$ 时, $m(E_k\setminus E_l)+m(E_l\setminus E_k)<\varepsilon$.

$\forall 1>\sigma>0$, 由于 $|\chi_{E_k}-\chi_{E_l}|\leq|\chi_{E_k}-f|+|\chi_{E_l}-f|$, 所以当 $|\chi_{E_k}-\chi_{E_l}|\geq\sigma$ 时, 必有 $|\chi_{E_k}-f|\geq\frac{\sigma}{2}$ 或 $|\chi_{E_l}-f|\geq\frac{\sigma}{2}$, 这就是说

$$\begin{aligned}&\widetilde{E}[|\chi_{E_k}-\chi_{E_l}|\geq\sigma]\\ \subset\ &\widetilde{E}\left[|\chi_{E_k}-f|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\cup\widetilde{E}\left[|\chi_{E_l}-f|\geq\frac{\sigma}{2}\right].\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&m(\widetilde{E}[|\chi_{E_k}-\chi_{E_l}|\geq\sigma])\\ \leq&m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_k}-f|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\right)+m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_l}-f|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\right)\end{aligned}$$

根据 $\chi_{E_k}(x)\to f(x)$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}$, 当 $k>K$

根据 $\chi_{E_k}(x) \Rightarrow f(x)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$, 当 $k \geq K$ 时, 有

$$m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_k} - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right]\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, 当 $k, l \geq K$ 时, 有

$$m(\widetilde{E}[|\chi_{E_k} - \chi_{E_l}| \geq \sigma]) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即

$$m(E_k \setminus E_l) + m(E_l \setminus E_k) < \varepsilon.$$

第二步, 证明: 存在可测集 $E \subset \widetilde{E}$ 及 $\{\chi_{E_k}(x)\}$ 的子列 $\{\chi_{E_{K_s}}(x)\}$, 使得 $\{\chi_{E_{K_s}}(x)\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

由第一步, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2^s}$, $\exists K_s \in \mathbb{N}$, 当 $k, l \geq K_s$ 时, 有

$$m(E_k \setminus E_l) + m(E_l \setminus E_k) < \frac{1}{2^s}.$$

不妨设 $K_s < K_{s+1}$, $s = 1, 2, \cdots$, 则

$$m(E_{K_s} \setminus E_{K_{s+1}}) + m(E_{K_{s+1}} \setminus E_{K_s}) < \frac{1}{2^s}.$$

作交集

$$F_m = \bigcap_{s=m}^{\infty} (E_{K_s} \cap E_{K_{s+1}}) \cup \left((\widetilde{E} \setminus E_{K_s}) \cap (\widetilde{E} \setminus E_{K_{s+1}})\right)$$

$$= \left(\bigcap_{s=m}^{\infty} E_{K_s} \right) \cup \left(\bigcap_{s=m}^{\infty} (\widetilde{E} \setminus E_{K_s}) \right)$$

则

$$F_m \subset F_{m+1}, \quad \bigcap_{s=m}^{\infty} E_{k_s} \subset \bigcap_{s=m+1}^{\infty} E_{k_s},$$
$$m = 1, 2, \cdots$$

且

$$\begin{aligned}
& m\left(\widetilde{E} \setminus F_m\right) \\
=& m\left(\bigcup_{s=m}^{\infty} \left((E_{K_s} \setminus E_{K_{s+1}}) \cup (E_{K_{s+1}} \setminus E_{K_s})\right)\right) \\
\leq & \sum_{s=m}^{\infty} m(E_{K_s} \setminus E_{K_{s+1}}) + m(E_{K_{s+1}} \setminus E_{K_s}) \\
< & \sum_{s=m}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{m-1}}.
\end{aligned}$$

对任意 $x \in F_m$, 有

$$\chi_{E_{K_s}(x)} = \chi_{E_{K_{s+1}}}(x), s = m, m+1, \cdots$$

所以 $\{\chi_{K_s}(x)\}$ 在 F_m 上处处收敛, 且极限函数就是 $\chi_{E_{K_m}}(x)$.

令

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m, \quad E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{s=m}^{\infty} E_{K_s} = \underline{\lim} E_{K_s},$$

则 F, E 可测, $m(\widetilde{E} \setminus F) = 0$ 且 $\{\chi_{K_s}(x)\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

事实上, $E \cap F_m = E_{K_m} \cap F_m$, $m = 1, 2, \cdots$. 所以对任意 $1 > \sigma > 0$,

$$F[|\chi_{E_{K_m}} - \chi_E| \geq \sigma] \subset \widetilde{E} \setminus F_m,$$

即

$$m(F[|\chi_{E_{K_m}} - \chi_E| \geq \sigma]) \leq m(\widetilde{E} \setminus F_m) < \frac{1}{2^{m-1}},$$

又 $m(\widetilde{E} \setminus F) = 0$, 故

$$m(\widetilde{E}[|\chi_{E_{K_m}} - \chi_E| \geq \sigma]) < \frac{1}{2^{m-1}},$$

这就证明了 $\{\chi_{K_s}(x)\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

第三步, 证明: $\{\chi_{E_k}(x)\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

由第一步及第二步, 对任意 $1 > \sigma > 0$, $\varepsilon > 0$, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 当 $k, l \geq N$, $K_s \geq N$ 时,

$$m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_k} - \chi_{E_l}| \geq \frac{\sigma}{2}\right]\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_{K_s}}-\chi_E|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

由于

$$|\chi_{E_k}-\chi_E|\leq|\chi_{E_k}-\chi_{E_{K_s}}|+|\chi_{E_{K_s}}-\chi_E|,$$

因此,

$$\begin{aligned}&m\left(\widetilde{E}[|\chi_{E_k}-\chi_E|\geq\sigma]\right)\\ \leq&m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_k}-\chi_{E_{K_s}}|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\right)+m\left(\widetilde{E}\left[|\chi_{E_{K_s}}-\chi_E|\geq\frac{\sigma}{2}\right]\right)\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $\{\chi_{E_k}(x)\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上依测度收敛于 $\chi_E(x)$.

第四步, 证明: $f(x)=\chi_E(x)$ a.e. 于 $\mathbb{R}^n$.

在 $\widetilde{E}$ 上, $\chi_{E_k}(x)\Rightarrow\chi_E(x)$, 在 $\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{E}$ 上, $\chi_{E_k}(x)=\chi_E(x)\equiv 0$. 故, $\chi_{E_k}(x)\Rightarrow\chi_E(x)$ 于 $\mathbb{R}^n$.

又 $\chi_{E_k}(x)\Rightarrow f(x)$, 故

$$f(x)=\chi_E(x)$$

a.e. 于 $\mathbb{R}^n$.