第四章 数值积分与数值微分（作业答案）

1．确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明求积公式所具有的代数精度：

可以精确相等的最高次多项式

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$

(2) $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$

(3) $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4} f(0) + A_0 f(x_0)$

解：

（1）令$f(x) = 1, x, x^2$时等式精确成立，可列出如下方程组：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2h & (1) \\ -A_0 + A_2 = 0 & (2) \\ A_0 + A_2 = \frac{2}{3}h & (3) \end{cases}$$

得：$A_0 = A_2 = \frac{h}{3}, A_1 = \frac{4}{3}h$

即：$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)]$

可以验证，对$f(x) = x^3$公式亦成立，

而对$f(x) = x^4$ 不成立，故公式（1）具有3次代数精度。

（2）令 $f(x) = 1, x, x^2$时等式精确成立，可列出如下方程组：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 & (1) \\ A_0 + 2A_1 + 3A_2 = 2 & (2) \\ 3A_0 + 12A_1 + 27A_2 = 16 & (3) \end{cases}$$

得$A_0 = A_2 = \frac{2}{3}, A_1 = -\frac{1}{3}$

即：$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})]$

可以验证，对$f(x) = x^3$公式亦成立，

而对$f(x) = x^4$ 不成立，故公式（2）具有3次代数精度。

（3）令$f(x) = 1, x$ 时等式精确成立，可解得：$A_0 = \frac{3}{4}$，$x_0 = \frac{2}{3}$
即：$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f(\frac{2}{3})$ 可以验证，对$f(x) = x^2$公式亦成立，

而对$f(x) = x^3$ 不成立，故公式（3）具有2次代数精度。

2.设已给出$f(x) = 1 + e^{-x}\sin 4x$的数据表，

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	1.000 00	1.655 34	1.551 52	1.066 66	0.721 59

分别用复合梯形法与复合辛普生法求积分$I = \int_0^1 f(x)dx$的近似值。

review 切比雪夫的版式

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ， $x \in [-1,1]$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$

令 $\theta = \arccos x$ ， $\theta \in [0,\pi]$ $\therefore x = \cos\theta$

$\therefore T_n(x) = \cos(n\theta)$

$\therefore T_0(x) = 1$ ， $T_1(x) = x$ $\therefore$ $T_n(x)$ 的首项系数为 2^{n-1}

$T_n(x)$ 的零点

$T_n(x) = \cos(n\theta) = 0$ ， $\theta = \arccos x$ ， $\theta \in [0,\pi] \Rightarrow n\theta \in [0, n\pi]$

$\therefore n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $k = 0,1,2,\cdots,n-1$ （或 $n\theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $k = 1,2,\cdots,n$

$\therefore \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ ， $k = 0,1,2\cdots n-1$ $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ， $k = 1,2,\cdots n$ ， $\therefore x_k = \cos\theta_k = \cos(\frac{2k-1}{n})\pi$ ， $k = 1,2,\cdots n$ ）

$\therefore x_k = \cos\theta_k = \cos(\frac{(2k+1)}{2n}\pi)$ ， $k = 0,1,2,\cdots,n-1$

辛普森公式： $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{b-a}{2}) + f(b)]$

高斯-切比雪夫： $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

$x_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi$ ， $i = 1,2,\cdots,n$

$A_i = \frac{\pi}{n}$

解：（1）用复合梯形法：

$$a=0, b=1, n=5, h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{4}=0.25$$
$$T_5=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$
$$T_5=\frac{0.25}{2}\times\{f(0.00)+2\times[f(0.25)+f(0.50)+f(0.75)]+f(1.00)\}$$
$$T_5=0.125\times[1.00000+2\times(1.65534+1.55152+1.06666)+0.72159]$$
$$T_5=1.28358$$

（2）用复合辛普生法：

$$a=0, b=1, n=2, h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{2}=0.5$$
$$S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$
$$S_2=\frac{0.5}{6}\times\{f(0.00)+4\times[f(0.25)+f(0.75)]+2\times f(0.50)+f(1.00)\}$$
$$S_2=\frac{1}{12}\times[1.00000+10.888+3.10304+0.72159]\approx 1.30939$$

3.确定$x_1x_2A_1A_2$使下式成为Guass型求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx\approx A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$

解：因为$\int_{-1}^1 f(x)dx=f(\frac{\sqrt{3}}{3})+f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 令$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$，$x\in[0,1]$，$t\in[-1,1]$

则$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t)dt=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}})$

上面的求积公式显然是两点Guass型求积公式，其中$A_1=A_2=\frac{1}{2}$,

$x_1=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$, $x_2=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$

4.用$n=2,3$ 的高斯-勒让德公式计算积分 $\int_1^3 e^x\sin x dx$.

解：$I=\int_1^3 e^x\sin x dx$.

因为$x\in[1,3]$, 可令 $t=x-2$ 则$t\in[-1,1]$

用 $n=2$的高斯－勒让德公式计算积分

$$I\approx 0.5555556\times[f(-0.7745967)+f(0.7745967)]+0.8888889\times f(0)$$
$$\approx 10.9484$$

用 $n=3$的高斯－勒让德公式计算积分

$$I\approx 0.3478548\times[f(-0.8611363)+f(0.8611363)]$$
$$+0.6521452\times[f(-0.3399810)+f(0.3399810)]$$
$$\approx 10.95014$$

5. 用两点Guass-chebgshev公式计算积分$\int_{-1}^1\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解：设$f(x)=1-x^2$，使用两点Guass-chebgshev公式可得 代数精度$=2n-1=2\times2-1=3$

$$\int_{-1}^1\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}[f(\cos\frac{\pi}{4})+f(\cos\frac{3\pi}{4})]=\frac{\pi}{2}$$

∵代数精度$=3$

$f=1-x^2$ 为二次 ∴是精确相等

$= \int_{-1}^{1} \frac{f(\frac{1}{2}(t+1))}{\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)-\frac{1}{4}(t+1)^2}}\, d\frac{1}{2}(t+1) = \int_{-1}^{1} \frac{f(\frac{1}{2}(t+1))}{\sqrt{[2-(t+1)](t+1)}}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{f(\frac{1}{2}(t+1))}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

6. 已知求积公式 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x-x^2}}dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ 具有 $2n-1$ 次代数精度, 求 A_k, x_k.

解：做变量替换 $x = \frac{1}{2}(t+1)$ 转换成第一类切比雪夫类型，套用高斯-切比雪夫求积公式得到：

$$A_k = \frac{\pi}{n};$$

$t_k = \cos\frac{(2k-1)}{2n}\pi$, $k=1,2\cdots n$

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+1\right], \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

7.（1） 求出3点Gauss-Legendre公式。(已知前几个Legendre正交多项式为 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$.)

（2）使用3点Gauss-Legendre公式求 $I = \int_0^1 e^{-x}dx$.

解：（1）通过 $p_3(x) = 0$ 求出求积节点，然后算出求积系数。

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \frac{5}{9}g(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

（2）做变量替换

$$x = \frac{1}{2}(1+t)$$

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \frac{5}{9}g(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \times \left[\frac{5}{9}f\left(\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right) + \frac{8}{9}f(\frac{1}{2}) + \frac{5}{9}f\left(\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x}dx \approx \frac{1}{2} \times \left[\frac{5}{9}e^{-\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}} + \frac{8}{9}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{9}e^{-\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{18}e^{-\frac{1}{2}} \times \left[5e^{\frac{\sqrt{0.6}}{2}} + 8 + 5e^{-\frac{\sqrt{0.6}}{2}}\right] = 0.632120255$$

8.(1)写出三点Gauss-Chebyshev求积公式.

(2)使用三点Gauss-Chebyshev求积公式近似计算

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} dx$

$\Downarrow$

$f(x)$

解：（1）n=2,

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\sum_{k=0}^{2}\frac{\pi}{3}f(x_k),\qquad x_0=-\sqrt{3}/2,x_1=0,x_2=\sqrt{3}/2.$$

(2)

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}dx$$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
代入公式得：

$$I\approx\frac{\pi}{3}\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}+1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}\}=2.630411$$

9.设已给出$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$的数据表:

x	1.0	1.1	1.2
$f(x)$	0.2500	0.2268	0.2066

试用三点公式计算$f'(1.0),f'(1.1),f'(1.2)$的近似值。
解：已知$x_0=1.0,x_1=1.1,x_2=1.2,h=x_1-x_0=x_2-x_1=0.1$
用三点公式计算微商：

$f'(1.0)\approx\frac{1}{2h}[-3f(1.0)+4f(1.1)-f(1.2)]=\frac{1}{2\times0.1}[-3\times0.2500+4\times0.2268-0.2066]=-0.2470$
$f'(1.1)\approx\frac{1}{2h}[-f(1.0)+f(1.2)]=\frac{1}{2\times0.1}[-0.2500+0.2066]=-0.2170$
$f'(1.2)\approx\frac{1}{2h}[f(1.0)-4f(1.1)+3f(1.2)]=\frac{1}{2\times0.1}[0.2500-4\times0.2268+3\times0.2066]=-0.1870$