2020 复变函数期中测试（第 1-4 章）

姓名 ________________学号 ________________专业 ____________________

一	二	三	总成绩

一、 填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．把答案填在前面空白处）：

1. ______________，______________ ；2________________________________；

3. ____________________ ；4. ______________；5. ____________________________

6. ________________；7____________________________；8. ____________________；

9. ____________________________；10. ________________________

$\arg -\sqrt{3} = \arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi$

1. 设 $z_1 = -3$，则 $\arg z_1 = \underline{\ \pi\ }$. 设 $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$，则 $Arg\, z_2 = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi$.

2. 方程 $z^3 - 8i = 0$ 的根为 $z = \sqrt[3]{|8i|}(\cos\frac{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}{3}), k = 0,1,2$

$2(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3} + i$ $\quad 0$ $\quad \arg 8i = \arctan = \frac{\pi}{2}$

$2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = -\sqrt{3} + i$ $\quad \frac{2}{3}\pi$

$2(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi) = -2i$ $\quad \frac{4}{3}\pi$

$\arg(1+i\sqrt{3})$

3. 函数 e^z 的周期为 $2k\pi i \quad (k \in z)$。$Ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(\frac{1}{3}\pi + 2k\pi)$

4. $\int_C 3\overline{z}dz = 3i$ 期中 C 为从 $z_1 = 1$ 到 $z_2 = i$ 的直线段。

5. $\int_{|z-z_0|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$。 ✓

6. 若 $z_n = \sin\frac{n}{1+n} + i(1-\frac{2}{n})^n$，则 $\lim\limits_{z\to+\infty} z_n =$ ____ $\sin 1 + e^{-2}i$ ______。

7. 函数 $f(z) = \frac{1}{z+1}$ 在 $z = i$ 处泰勒展开为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+i}(-\frac{z-i}{1+i})^n$，收敛半径 R=$\sqrt{2}$

$1+i \quad z-i$

$\frac{1}{1+i} \quad \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}}$

$a_n(3i)^n$ $\quad$ $(-1)^{n-1}$

8. 已知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(z-3i)^n$在$z=0$处收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(z-3i)^{n-1}$在$z=-1+3i$处<u>绝对收敛</u>

（填，**绝对收敛，条件收敛或发散**）

9. 已知函数$f(z)$在单联通区域D内解析且不为零，C为D内任意一条简单闭曲线，

则$\int_C \frac{f''(z)+2f'(z)+1}{f(z)}dz=$ <u>0</u>

10. $\int_{|z|=0.8}(\sum\limits_{n=-2}^{\infty} z^n)dz=$ ___$2\pi i$________.

二、计算下列各题（第1题6分，其他每小题8分，共46分）

1. 求$\int_C(|z|+ze^z)dz$，**其中C为正向圆周**$|z|=3$.

$\int_C ze^z dz=0$

$$\int_C(|z|+ze^z)dz=\int_C|z|dz=3\int_C 1dz=0$$

2. 讨论$f(z)=|z|$在复平面各点的可导性。

$U_x=U_y=0$

x^2+y^2 $\quad$ $U_x=$

$\frac{|z|}{z}:\frac{\bar{z}}{|z|}$

所有点不可导

$U_x=V_y=0$

3.已知$u(x,y)=3x^2-4x-3y^2$，求$v(x,y)$使$f(z)=u+iv$是解析函数，且满足$f(0+0i)=0$.

$v(x,y)=$

$f(z)=3z^2-4z$

$=3x^2-3y^2-4x+(6xy-4y)i$

$v(x,y)=6xy-4y$

4. 求$\int_C \frac{\sin z}{z^2-3z+2}dz$，**其中C是（1）**$|z-1|=\frac{1}{2}$.（2）$|z|=100$

（1）$\int_C \frac{\frac{\sin z}{z-2}}{z-1}dz=2\pi i\frac{\sin 1}{-1}=-2\pi i\sin 1$

（2）

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2-3z+2}dz$$
$$= \int_{C_1} \frac{\frac{\sin z}{z-2}}{z-1}dz + \int_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z-1}}{z-2}dz$$
$$= -2\pi i \sin 1 + 2\pi i \sin 2$$

5.求下列幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n} z^{2n-1}$的收敛半径，以及和函数.

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u(z)|} = \frac{1}{2}|z|^2$

$\frac{1}{2}|z|^2 = 1$

$|z| = \sqrt{2}$

所以收敛半径 $R=\sqrt{2}$（4 分）

$\frac{1}{z} \quad \frac{1}{2^n} z^{2n}$

$z \cdot \frac{2n-1}{2^n} z^{2n-2}$

$2\frac{(z^{2n-1})'}{2^{n-1}}$

(2)

$$z = \sqrt{2}w$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n} z^{2n-1} = \underline{\frac{z}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)w^{2n-2}}$$
$$= \frac{z}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (w^{2n-1})'$$
$$= \frac{z}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} w^{2n-1})'$$
$$= \frac{z}{2}(\frac{w}{1-w^2})' = \frac{z}{2}\frac{1+w^2}{(1-w^2)^2} = \frac{z(2+z^2)}{(2-z^2)^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} w w^{2n-2}$

$z\left(\frac{z^{2n-1}}{2^n}\right)'$ $\quad \frac{z^{2n}}{2^n}$

$z\frac{z^{2n-2}}{2^n} = \quad (\frac{z^2}{2})^n$

$\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{z^2}{2}}\right)'$ $\quad 1+x \quad$ 原式 $= (-x)^n$

$\left(\frac{1}{z}\frac{2}{2-z^2}\right)' = \left(\frac{2}{2z-z^3}\right)' \quad -2(2-3z^2)$

（4 分）

6. 将 $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在下列圆环域内展为洛朗级数

（1）$0<|z|<1$

(2) $1<|z|<+\infty$

$\frac{z+1}{z\cdot z(z-1)} = \frac{t}{z^2} + \frac{s}{z(z-1)}$

$t(z-1) + sz = z+1$

$t+s=1$

$-t=1$

$t=-1$

$s=2$

解：$f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}=-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{2}{z}+\dfrac{2}{z-1}$

（1）

$$
\begin{aligned}
f(z)&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}\\
&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-2\frac{1}{1-z}\\
&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-2(1+z+z^2+z^3+\ldots)\\
&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-2-2z-2z^2-\ldots.
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(z)&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}\\
&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\
&=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots)\\
&=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^4}+\ldots.
\end{aligned}
$$

三．证明题（每题 8 分，共 24 分）

（1）已知 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|=$ 常数，证明：$f(z)$ 在区域 D 内为常数。

书 P30 例 2.5

（2）叙述解析函数关于柯西黎曼方程的充分必要条件，并证明。

书 P27 定理 2.1

（3）写出解析函数的高阶求导公式的条件和结论，并证明。

书 P62 定理 3.9