# §2.3 维数·基与坐标

## 一、线性空间中向量之间的线性关系

## 二、线性空间的维数、基与坐标

# 一、线性空间中向量之间的线性关系

**1、定义：V 是数域 P 上的一个线性空间**

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V\,(r \geq 1)$， $k_1,k_2,\cdots,k_r \in P$， 称

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的一个**线性组合**.

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta \in V$， 若存在 $k_1,k_2,\cdots,k_r \in P$

使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$

则称向量 $\beta$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性表示**；

若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中每一向量皆可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，则称向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性表示**；

若两个向量组可以相互线性表示，则称这两个向量组为**等价的**.

（3）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r\in P$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\theta$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性相关**；

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 不是线性相关的，即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\theta$$

只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才成立，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性无关**.

## 2、常用性质

（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中有一个向量可由其余向量线性表出.

（2）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则 $r \le s$ ；

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$为两个线性无关的等价向量组，则 $r = s$.

（3）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，但向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则 $\beta$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，且表示方式是唯一的.

# 二、线性空间的维数、基与坐标

## 1、无限维线性空间

若线性空间 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，则称 V 是无限维线性空间.

例1 所有实系数多项式所构成的线性空间 $\mathbf{R}[x]$ 是无限维的. 因为，

对任意的正整数 $n$，都有 $n$ 个线性无关的向量

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$$

## 2、有限维线性空间

### （1）$n$ 维线性空间：

若在线性空间 V 中有 $n$ 个线性无关的向量，但是任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的，则称 V 是一个 $n$ **维线性空间**；常记作 $\dim V = n$ .

**注：**零空间的维数定义为0.

$\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$

### （2）基

在 $n$ 维线性空间 V 中，$n$ 个线性无关的向量

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，称为 V 的一组**基**.此时,

$$V = \{k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n \mid k_i \in P, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

## （3）坐标

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一组基, $\alpha\in V$,

若 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$, $a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$

则数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，就称为 $\alpha$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

下的**坐标**，记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

有时也形式地记作 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

**注意：**

向量 $\alpha$ 的坐标 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是被向量 $\alpha$ 和基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一确定的. 即向量 $\alpha$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标是唯一的.

但是，在不同基下 $\alpha$ 的坐标一般是不同的.

## 3、线性空间的基与维数的确定

**定理：** 若线性空间V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足

i） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关；

ii） $\forall \beta \in V$， $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

则V为$n$ 维线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为V的一组基.

证明：$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\therefore$V的维数至少为 $n$ .

任取V中 $n+1$个向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$， 由 ii），向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$可用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出.

若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$是线性无关的，则$n+1\leqslant n$，矛盾.

∴V中任意n＋1个向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$是线性相关的.

故，V是$n$维的，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$就是V的一组基.

**例2** 设V=**R**$^3$，P=**R**，

（1）求V的维数与一组基；

（2）向量组$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$
是否为V的一组基？

（3）若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是V的一组基，求向量$\beta=(2,1,-3)$
在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标。

解：（1）$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$

是V的一组基，**dimV＝ 3.**

（2）因为dimV=3, 且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的，

故，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 就是V的一组基.

$$\left|\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right|$$

（3）设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 则

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=2\\ k_1+k_2=1\\ k_1=-3\end{cases}$$

解得 $k_1=-3, k_2=4, k_3=1$,所以 $\beta$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为$(-3,\ 4,\ 1)$.

注：$P^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in P, i=1,2,\cdots,n\}$ 为$n$维的，

$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$

就是 $P^n$ 的一组基，称为$P^n$的**标准基**.

**例3** 设V=P[x]$_3$

（1）求V的维数与一组基；

（2）向量组 $\alpha_1 = x^2 - x + 1, \alpha_2 = x + 2, \alpha_3 = x - 1$ 是否为V的一组基？

（3）若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是V的一组基，求向量$\beta = x^2 + 2x + 1$ 在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标。

解：（1）设$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$，

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 x + k_3 x^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

且$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 f_1 + a_1 f_2 + a_2 f_3$，

所以，$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$ 是V的一组基，**dimV＝ 3.**

（2）因为dimV=3，只需验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性无关。设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

法一：$k_1(x^2-x+1)+k_2(x+2)+k_3(x-1)=0$

$$\Rightarrow k_1x^2+(-k_1+k_2+k_3)x+(k_1+2k_2-k_3)=0$$

$x^2$ $x$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\-k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2-k_3=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

从而，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关.

法二：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0, \because \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0$，　　从而，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关.

法三：$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3) = (1 \ \ x \ \ x^2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{线性无关},$$

从而，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关.

（3）设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 则

法一：$x^2 + 2x + 1 = k_1x^2 + (-k_1 + k_2 + k_3)x + k_1 + 2k_2 - k_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ -k_1 + k_2 + k_3 = 2 \\ k_1 + 2k_2 - k_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2,$$

所以 $\beta$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1,\ 1,\ 2)$.

法二：$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

所以，$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**解得** $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2$, **从而** $\beta$ **在** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **下的坐标为** $(1,\ 1,\ 2)$.

**例4** 设 $V=P^{2\times 2}$，

（1）求V的维数与一组基；

（2）向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ 是否为V的一组基？

（3）若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是V的一组基，求向量 $\beta=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标。

解：（1）设 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=O\Rightarrow\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix}=O$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0,$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{21}A_3+a_{22}A_4,$$

从而， $A_1, A_2, A_3, A_4$ 是V的一组基，**dimV＝ 4.**

（2）因为dimV=4, 只需验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是否线性无关。

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=O$,

法一： $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=O,$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}k_1+k_2-k_3+2\underline{k_4} & k_1+2k_2-\underline{k_3}\\ \underline{k_1+k_2} & \underline{k_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0,$$

从而， $\alpha_1$， $\alpha_2$， $\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

法二：$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & A_3 & A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$\because \begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$, $\therefore \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$线性无关,

从而，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$线性无关.

（3）设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$，则

法一：$\begin{pmatrix} k_1+k_2-k_3+2k_4 & k_1+2k_2-k_3 \\ k_1+k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 5, k_3 = 7, k_4 = 3,$$

所以 $\beta$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 $(-2,\ 5,\ 7,\ 3)$.

法二：$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=-2, k_2=5, k_3=7, k_4=3,$$

所以$\beta$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$(-2,\ 5,\ 7,\ 3)$.

**注意：**

① $n$维线性空间V的基不是唯一的，V中任意n个线性无关的向量都是V的一组基.

② 任意两组基向量是等价的.