第六章多项式习题解答

习题 6. 1

1. 设$f(x)=5x^4+x^3-2x^2-1$，$g(x)=-5x^4+4x^3-x+4$，求$\deg(f(x)+g(x)),\deg(f(x)g(x))$.

解： 因为

$f(x)+g(x)$与$f(x)g(x)$的首项分别为$5x^3$和$-25x^8$，所以

$\deg(f(x)+g(x))=3,\deg(f(x)g(x))=8.$

2. 设$f(x)=x-5$，$g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$，$f(x)=g(x)$,求$a,b,c$ 的值.

分析 利用多项式相等即对应的同次项系数相等确定参数。

解

$$\begin{aligned}g(x)&=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)\\&=(a+c)x^2+(-4a+b-c)x+(4a+b+2c)\end{aligned}$$

因$f(x)=g(x)$，由同次项系数相等得

$$a+c=0,\quad -4a+b-c=1,\quad 4a+b+2c=-5$$

解得$a=-\dfrac{6}{5},b=-\dfrac{13}{5},c=\dfrac{6}{5}.$

习题 6. 2

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$,求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$.

(1) $f(x)=3x^4-4x^3+5x-1$，$g(x)=x^2-x+1$

(2) $f(x)=x^4+4x^2-x+6$，$g(x)=x^2+x+1$

(3) $f(x)=2x^3+3x^2+5$，$g(x)=x^2+2x-1$

解 （1）

$g(x)$	$f(x)$	$q(x)$
x^2-x+1	$3x^4-4x^3\qquad+5x-1$	$3x^2-x-4$
	$3x^4-3x^3+3x^2$	
	$-x^3-3x^2+5x$	
	$-x^3+x^2-x$	

$$
\begin{array}{l}
-4x^2+6x-1 \\
-4x^2+4x-4 \\
\hline
r(x)=2x+3
\end{array}
$$

因此 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商和余式分别为 $q(x)=3x^2-x-4, r(x)=2x+3$.

（2）

$$
\begin{array}{c|l|l}
g(x) & \qquad f(x) & q(x) \\
x^2+x+1 & x^4 \qquad\quad +4x^2-x+6 & x^2-x+4 \\
 & x^4 \;\; +x^3 \;\; +x^2 & \\
\hline
 & -x^3+3x^2-x+6 & \\
 & -x^3- \;\; x^2-x & \\
\hline
 & 4x^2 \qquad +6 & \\
 & 4x^2+4x+4 & \\
\hline
 & r(x)=-4x+2 &
\end{array}
$$

因此 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商和余式分别为 $q(x)=x^2-x+4, r(x)=-4x+2$.

（3）

$$
\begin{array}{c|l|l}
g(x) & \qquad f(x) & q(x) \\
x^2+2x-1 & 2x^3+3x^2 \qquad +5 & 2x-1 \\
 & 2x^3+4x^2-2x & \\
\hline
 & -x^2+2x+5 & \\
 & -x^2-2x+1 & \\
\hline
 & r(x)=4x+4 &
\end{array}
$$

因此 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商和余式分别为 $q(x)=2x-1, r(x)=4x+4$.

2. 用综合除法求 $g(x)$除 $f(x)$所得的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$.

(1) $f(x)=x^3+6x^2+12x+8$，$g(x)=x-2$

(2) $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$，$g(x)=x+\dfrac{1}{2}$

解 （1）

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 6 & 12 & 8 \\
\hline
 & 1 & 8 & 28 & 64
\end{array}
$$

因此，商和余数分别为$q(x)=x^2+8x+28,\quad r=64.$

（2）

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-\frac{1}{2} & 4 & 0 & -7 & -5 & -1 \\
\hline
 & 4 & -2 & -6 & -2 & 0
\end{array}
$$

因此，商和余数分别为$q(x)=4x^3-2x^2-6x-2,\quad r=0.$

3. 当a,b为何值时，$x^2-1|x^4-3x^3+6x^2+ax+b.$

解法 1 用带余除法

$$
\begin{array}{c|l|c}
g(x) & f(x) & q(x) \\
x^2-1 & x^4-3x^3+6x^2+ax+b & x^2-3x+7 \\
 & x^4\qquad\quad -x^2 & \\
\hline
 & -3x^3+7x^2+ax+b & \\
 & -3x^3\qquad\quad +3x & \\
\hline
 & \quad 7x^2+(a-3)x+b & \\
 & \quad 7x^2\qquad\qquad -7 & \\
\hline
 & \quad r(x)=(a-3)x+b+7 &
\end{array}
$$

因此$g(x)$除$f(x)$所得的商和余式分别为

$$q(x)=x^2-3x+7\text{，}\quad r(x)=(a-3)x+b+7$$

令$r(x)=0$即得

$$a-3=0,b+7=0$$

解得$a=3,b=-7.$

解法 2 用待定系数法

因为

$$x^2-1 \mid x^4-3x^3+6x^2+ax+b$$

所以 $q(x)$ 应是首项系数为 1 的 2 次多项式, 设 $q(x)=x^2+cx+d$, 有

$$\begin{aligned} x^4-3x^3+6x^2+ax+b &= (x^2+cx+d)(x^2-1) \\ &= x^4+cx^3+(d-1)x^2-cx-d \end{aligned}$$

由两边同次项系数相等, 得

$$\begin{cases} c=-3 \\ d-1=6 \\ -c=a \\ -d=b \end{cases} \qquad \text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=-7 \\ c=-3 \\ d=7 \end{cases}$$

于是, 当 a=3, b=−7 时 $x^2-1 \mid x^4-3x^3+6x^2+ax+b$.

习题 6. 3

1. 设

$$f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$$
$$g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

解

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=-x+2$	$3x^4-4x^3-x^2-x-2$ $3x^4+2x^3$	$3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ $3x^5-4x^4\quad -x^3\quad -x^2-2x$	$q_1(x)=x+3$
	$-6x^3-x^2-x-2$ $-6x^3-4x^2$	$9x^4-15x^3-5x^2-3x-6$ $9x^4-12x^3-3x^2-3x-6$	
	$r_2(x)=3x^2-x-2$ $3x^2+2x$	$r_1(x)=-3x^3-2x^2$ $-3x^3\quad +x^2+2x$	
$q_4(x)=-x+1$	$-3x-2$ $-3x-2$	$-3x^2-2x$ $-3x^2+x+2$	$q_3(x)=-x-1$

	$r_4(x)=0$	$r_3(x)=-3x-2$	

于是，$f(x),g(x)$的最大公因式为$r_3(x)=-3x-2$.

2. 设 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$，$g(x)=x^2+x-2$

(1)求$(f(x),g(x))$；

(2)求$u(x),v(x)$使$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

解 辗转相除：

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=-\frac{1}{4}x$	x^2+x-2 x^2+x	x^3+2x^2-5x-6 $x^3+\ \ x^2-2x$	$q_1(x)=x+1$
	$r_2(x)=-2$	x^2-3x-6 $x^2+\ \ x-2$	
		$r_1(x)=-4x-4$ $-4x-4$	$q_3(x)=2x+2$
		$r_3(x)=0$	

$f(x),g(x)$的最大公因式为$r_2(x)=-2$，所以$(f(x),g(x))=-\frac{1}{2}r_2(x)=1$.

(2) 因

$$
\begin{aligned}
f(x)&=q_1(x)g(x)+r_1(x)\\
g(x)&=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\
r_1(x)&=q_3(x)r_2(x)+0
\end{aligned}
$$

由上面的第二式与第一式有

$$
\begin{aligned}
r_2(x)&=g(x)-q_2(x)r_1(x)\\
&=g(x)-q_2(x)[f(x)-g(x)q_1(x)]\\
&=(-q_2(x))f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x)
\end{aligned}
$$

于是

$$(f(x),g(x))=1=-\frac{1}{2}r_2(x)=\frac{1}{2}q_2(x)f(x)-\frac{1}{2}[1+q_1(x)q_2(x)]g(x)$$

令

$$u(x)=\frac{1}{2}q_2(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{4}x)=-\frac{1}{8}x$$
$$v(x)=-\frac{1}{2}[1+q_1(x)q_2(x)]=-\frac{1}{2}[1+(x+1)(-\frac{1}{4}x)]=\frac{1}{8}(x^2+x-4)$$

则

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)=-\frac{1}{8}xf(x)+\frac{1}{8}(x^2+x-4)g(x)$$

3. 若$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x),d(x)$是$f(x),g(x)$的一个组合，

(1)证明：$d(x)$是$f(x),g(x)$的一个最大公因式.

(2)如果仅有$d(x)$是$f(x),g(x)$的一个组合，举例说明$d(x)$不一定是$f(x),g(x)$的最大公因式.

证 (1)设$\varphi(x)$是$f(x),g(x)$的任一公因式，即$\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$,

$\because d(x)$是$f(x),g(x)$的一个组合，

$\therefore \varphi(x)\mid d(x)$,即$\varphi(x)$是$d(x)$的因式

又由题设 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$,

$\therefore d(x)$是$f(x),g(x)$的一个最大公因式.

(2)取$f(x)=x^2,g(x)=x,d(x)=x^2$

$\because x^2=2x^2-x\cdot x$

令$u(x)=2,v(x)=-x$,

即有

$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

但因$d(x)=x^2$不能整除$g(x)=x$，所以$d(x)=x^2$不是$f(x),g(x)$的公因式, 当然也就不是$f(x),g(x)$的最大公因式.

4. 如果 $f(x),g(x)$ 不全为零,且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

证明：$(u(x),v(x))=1$.

证 因 $f(x),g(x)$ 不全为零，所以$(f(x),g(x))\neq 0$, 且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

上式两边同除以$(f(x),g(x))$，得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$$，（其中$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$为多项式）

于是$u(x)$与$v(x)$互素，即$(u(x),v(x))=1$.

5. 若 $f(x)$与$g(x)$互素，证明：$f(x^m)$与$g(x^m)$互素.

证 因 $f(x)$与$g(x)$互素，即存在$u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

于是

$$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1$$

即 $f(x^m)$与$g(x^m)$互素.

习题 6. 4

1. 判断下列多项式是否有重因式,如果有,求出重因式及其重数.

(1) $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$

(2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$

解(1) $f'(x)=5x^4-30x^2-40x-15$. 由辗转相除法（计算过程略）求得

$(f(x),f'(x))=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$.

即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素，所以 $f(x)$ 有重因式, 重因式为 $x+1$, 其重数为 4.

(2) 计算 $f'(x)=4x^3+8x-4$，作辗转相除法(计算过程略)得

$$(f(x),f'(x))=1$$

因为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素，所以 $f(x)$没有重因式.

2. a,b 满足什么条件时，$f(x)=x^4+4ax+b$ 有重因式.

解 计算 $f'(x)=4x^3+4a$，用$f'(x)$除$f(x)$(计算过程略)得余式$r_1(x)=3ax+b$，如果

$a \neq 0$,再用$r_1(x)$除$f'(x)$(计算过程略)得余式：

$$r_2(x) = \frac{4(27a^4 - b^3)}{27a^3}$$

当$27a^4 - b^3 = 0$时，$r_2(x) = 0$，$f(x)$与$f'(x)$有 1 次的最大公因式$r_1(x)$，$f(x)$与$f'(x)$不互素，于是 $f(x)$ 有重因式;

如果 a =0, 只有当 b=0，此时 $f(x) = x^4$才有重因式.

习题 6. 5

1．求 t, 使 $f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$有重根.

解 $f'(x) = 3x^2 - 6x + t$, 当$t \neq 0$时，用 $f'(x)$除$f(x)$:

$$\begin{array}{r|l|l}
f'(x) & \quad f(x) & q(x) \\
3x^2 - 6x + t & x^3 - 3x^2 \quad + tx - 1 & \\
 & x^3 - 2x^2 + \frac{t}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\
\cline{2-2}
 & \quad -x^2 + \frac{2t}{3}x - 1 & \\
 & \quad -x^2 \quad + 2x - \frac{t}{3} & \\
\cline{2-2}
 & r(x) = (\frac{2t}{3} - 2)x - 1 + \frac{t}{3} &
\end{array}$$

$$r(x) = (\frac{2t}{3} - 2)x - 1 + \frac{t}{3} = (\frac{t}{3} - 1)(2x + 1)$$

此时余式已是次数不超过 1 的或余式为零，以$(f(x), f'(x)) = r(x)$进行讨论：

如果$\frac{t}{3} - 1 \neq 0$,则$x = -\frac{1}{2}$是$r(x)$的根亦是$f'(x)$的根和$f(x)$的重根，于是

$f'(-\frac{1}{2}) = 3 \times \frac{1}{4} + 3 + t = 0$, 解得 $t = -\frac{15}{4}$;

当$\frac{t}{3} - 1 = 0$,即$t = 3$时，$r(x) = 0$，此时$f'(x) \mid f(x)$,即 $f(x)$与$f'(x)$不互素，$f(x)$ 有重根.

于是当 $t = -\frac{15}{4}$或$t = 3$时，$f(x)$有重根.

2．已知 $(x-2)^2 \,\big|\, x^3+ax^2+bx$, 求$a,b$的值.

解 由所设知 $x-2$ 是 $f(x)$ 的重因式，则它必是$f'(x)$的因式，因此 2 是 $f(x)$与$f'(x)$ 的根.

计算得$f'(x)=3x^2+2ax+b$,于是有

$$\begin{cases} f(2)=8+4a+2b=0 \\ f'(2)=12+4a+b=0 \end{cases}$$

解得 $a=-4, b=4$.

3.已知 1 是多项式 $f(x)=ax^4-5x^3+3x^2+bx+c$ 的三重根，求 a，b, c .

解 因 1 是多项式 $f(x)=ax^4-5x^3+3x^2+bx+c$ 的三重根，

所以 1 必是其导数 $f'(x)=4ax^3-15x^2+6x+b$ 的二重根，

是 $f''(x)=12ax^2-30x+6$ 的单根

即

$$\begin{cases} a-5+3+b+c=0 \\ 4a-15+6+b=0 \\ 12a-30+6=0 \end{cases}$$

解得：$a=2$，$b=1, c=-1$

4. 举例说明“如果a是$f'(x)$的s重根,则a是$f(x)$的$s+1$重根”的说法是不正确的.

例如 $f(x)=x^3+1$,则$f'(x)=3x^2$，0是$f'(x)$的2重根,但0却不是$f(x)$的3重根 . 因此“如果a是$f'(x)$的s重根,则a是$f(x)$的$s+1$重根”的说法是不正确的.

习题 6. 6

1. 求下列多项式函数的有理根.

（1） $f(x)=2x^4+x^3-2x-1$

（2） $f(x)=2x^3-x^2+x+1$

（3） $f(x)=3x^4+8x^3+6x^2+3x-2$

（4） $f(x)=2x^4-3x^3+2x-3$

(5) $f(x)=6x^4-x^3+5x^2-x-1$

解

(1) $f(x)$的所有可能的有理根为$\pm 1, \pm\frac{1}{2}$,

验证知只有$f(1)=0, f(-\frac{1}{2})=0$,

所以$f(x)$的有理根为$1, -\frac{1}{2}$.

（2）$f(x)$的所有可能的有理根为$\pm 1, \pm\frac{1}{2}$.

验证知：只有 $f(-\frac{1}{2})=0$,

所以 $f(x)$ 的有理根为 $x=-\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)$ 的所有可能的有理根为$\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$.

验证知：只有 $f(-2)=0$, $f(\frac{1}{3})=0$,

所以 $f(x)$ 的有理根为 $x=-2$, $x=\frac{1}{3}$.

（4） $f(x)$ 的所有可能的有理根为$\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

验证知：只有 $f(-1)=0$,

所以 $f(x)$ 的有理根为 $x=-1$.

(5) $f(x)$的所有可能的有理根为$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}$,

验证知只有$f(\frac{1}{2})=0, f(-\frac{1}{3})=0$,

所以$f(x)$的有理根为$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$.

1．判断下列多项式在有理数域上是否可约.

（1） $f(x)=x^{10}+5$

（2） $f(x)=7x^5+18x^4+6x-6$

(3) $f(x)=2x^3+x^2-3x+1$

（4） $f(x)=x^3+3x+1$

解 (1) 取素数 p=5,则 5 能整除 $f(x)=x^{10}+5$ 中除首项以外的一切项的系数,但 5 不能整除首项系数 1, $5^2=25$ 不能整除常数项 5,所以由 Eisenstein 判别法知 $f(x)=x^{10}+5$ 在有理数域上不可约.

(2) 取素数 p=2,则 2 能整除 $f(x)=7x^5+18x^4+6x-6$ 中除首项以外的一切项的系数,但 6 不能整除首项系数 7, $2^2=4$ 不能整除常数项-6,所以由 Eisenstein 判别法知 $f(x)=7x^5+18x^4+6x-6$ 在有理数域上不可约.

(3) $f(x)=2x^3+x^2-3x+1$ 的有理根只可能是 $\pm1,\pm\frac{1}{2}$.验证知: $f(\frac{1}{2})$=0,所以 $f(x)$ 有有理根 $x=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)=2x^3+x^2-3x+1$ 在有理数域上可约.

(4) 法 1: 因该多项式次数为 3,如果可约,$f(x)$ 必有一个一次因式,所以必有有理根.

$f(x)$ 可能的有理根为 1 和-1,

但 $f(1)=5$, $f(-1)=-1$

所以 $f(x)$ 没有有理根,这就矛盾,

所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

法 2: 令 $x=y-1$,则

$f(y-1)=y^3-3y^2+6y-3$

取素数 p=3, 3不能整除1, $3\mid-3$, $3\mid6$, 3^2不能整除 -3 .

所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

习题六

(A)

一、填空题

1. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

$(a_n\neq0,b_m\neq0)$,则 $\deg(f(x)g(x))$=________.

解 因为$f(x)g(x)$的首项为$a_nb_mx^{m+n}$，所以$\deg(f(x)g(x))=m+n.$

2. 设$f(x)=x^2+x-1$，$g(x)=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$，$f(x)=g(x)$，则

a=_______, b=_______, c=_______.

解 $g(x)=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$

$$=(a+b+c)x^2+2(a-c)x+a-b+c$$

因$f(x)=g(x)$，所以

$$a+b+c=1，\ 2(a-c)=1，\ a-b+c=-1$$

解得$a=\dfrac{1}{4},b=1,c=-\dfrac{1}{4}.$

3. 设 $f(x)$是一个首项系数为 1 的三次多项式，它被 x-1 除后余 1，被 x-2 除后余 2，被 x-3 除后余 3，则此多项式 $f(x)$=_______________________.

解 设$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，分别用$x-1$、$x-2$、$x-3$除$f(x)$(计算略）得余式$r_1(x),r_2(x),r_3(x)$，由

$$r_1(x)=1，\ r_2(x)=2，\ r_3(x)=3$$

解得：$a=-6,b=12,c=-6$

于是$f(x)=x^3-6x^2+12x-6$

4. 若 $x^2+b\,|\,x^3+ax$，则 a, b 满足条件____________.

解 用待定系数法

设$x^3+ax=x(x^2+b)=x^3+bx$，

由两边同次项系数相等得：$a=b.$

5. 当 a, b,c 满足条件_____$a=c,b=0$_______时，$x^2+c\,|\,x^3+ax+b.$

解 用待定系数法

设$x^3+ax+b=(x+d)(x^2+c)=x^3+dx^2+cx+cd$，

由两边同次项系数相等得：

$d=0,a=c,b=cd\Rightarrow b=0,a=c.$

6. 设 1 是多项式 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b$ 的二重根,则 a=_____，b=_____.

解 因 1 是多项式 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b$ 的二重根，所以 1 必是其导数 $f'(x)=8x^3-9x^2+8x+a$ 的根.即

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-3+4+a+b=0 \\ 8-9+8+a=0 \end{cases}$$

解得$a=-7$，$b=4$.

二、单项选择题

1. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,则$\deg(f(x)+g(x))$（　　　）.

（A）$=\deg(f(x))$　　　　（B）$=\deg(g(x))$

（C）$\le \min(\deg(f(x),\deg(g(x))$　　　（D）$\le \max(\deg(f(x),\deg(g(x))$

解 因$\deg(f(x)+g(x))\le \max(\deg(f(x),\deg(g(x))$, 选 D.

2．设 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b$，$g(x)=x^2-3x+1$，若 $g(x)$ 除 $f(x)$后余式为 $25x-5$,则 a,b 分别为(　　).

（A）5,6　（B）-5,6　（C）-6,5　（D）-5,-6

解 用$g(x)=x^2-3x+1$除$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b$作带余除法得余式为 $(a+30)x+b-11$,由已知条件有$(a+30)x+b-11=25x-5$有

$$a+30=25，b-11=-5$$

解得$a=-5$，$b=6$.选 B.

3. 已知$(x-1)^2 \mid ax^4+bx^3+1$, 则 a,b 分别为(　　).

（A）3,-4　（B）-3,4　（C）3,4　（D）-3,-4

解　由已知，1 是多项式 $f(x)=ax^4+bx^3+1$ 的二重根，所以 1 必是其导数 $f'(x)=4ax^3+3bx^2$的根.即

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ 4a+3b=0 \end{cases}$$

解得$a=3$，$b=-4$.选 A.

4. 若（$f(x)$,g (x))=$d(x)\ne 0$，则下列等式成立的是（　　）.

(A)　$(\frac{f(x)}{d(x)},g(x))=1$　　　(B)　$(f(x),\frac{g(x)}{d(x)})=1$

(C)　$(f(x),d(x))=1$　　　(D)　$(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)})=1$

解 由（$f(x)$,g (x)）=$d(x) \neq 0$ 有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

因为$d(x) \neq 0$，上式两边同除以$d(x)$得

$$u(x)\frac{f(x)}{d(x)}+v(x)\frac{g(x)}{d(x)}=1$$

所以$\left(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)}\right)=1$. 选$D$.

5. 下列说法正确的是( ).

（A）多项式都有次数

（B）零多项式的次数为 0

（C）常数多项式的次数为 0

（D）零次多项式是非零常数

解 因零多项式没有定义次数, 因此零次多项式是非零常数. 选 D.

6. 下列说法错误的是( ).

（A）次数大于 1 的整系数多项式只要有有理根,则它在有理数域上就可约

（B）在有理数域上存在任意次数的不可约多项式

（C）有理系数多项式在有理数域上不一定能分解

（D）有理系数多项式在有理数域上必可分解

解 $f(x)=x^{10}+5$ 是有理系数多项式,它在有理数域上不可分解(见习题 4.6 第 2 题(1)小题解答), 所以“有理系数多项式在有理数域上必可分解”的说法是错误的. 选 D.

7．下列说法正确的是( ).

（A）若多项式$f(x)$，$f'(x)$的最大公因式是k次多项式，则$f(x)$有k重根

（B）若复数c是多项式$f(x)$的导数$f'(x)$的k重根，则c是$f(x)$的$k+1$重根

（C）若复数c是多项式$f(x)$的k重根，则c也是$f'(x)$的k重根

（D）若复数c是多项式$f(x)$的k重根，则c也是$f'(x)$的$k-1$重根

解 由定理 4.8 :如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 k-1 重因式. 再由 k 重根的定义知应选 D.

8.下列说法正确的是（ ）.

(A) 如果多项式 $f(x)$ 在数域 P 上有根, 则 $f(x)$ 在数域 P 上就可约

(B) 如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，则 $f(x)$ 必不能整除 $g(x)$

(C) 若多项式$f(x)\mid g(x)h(x)$，则$f(x)\mid g(x)$或$f(x)\mid h(x)$

(D) 次数≤ 1 的多项式是不可约的多项式

解 由多项式 $f(x)$ 在数域 P 上有根知 $f(x)$ 在数域 P 上就有一次因式，故 $f(x)$ 在数域 P 上就可约.选 A.

9. 下列说法错误的是(　　　).

（A）次数大于 1 的整系数多项式只要有有理根,则它在有理数域上就可约（B）有理系数多项式在有理数域上不一定可约

（C）在有理数域上存在任意高次的不可约多项式

（D）如果数域 P 上的多项式 $f(x)$ 在数域 P 上可约，则 $f(x)$ 在数域 P 上就有根

解

$f(x)=x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$在有理数域上可约，但是$f(x)$在有理数域上没有根.

选 D.

(B)

1. k,l,m 满足什么条件时，$x^2+kx+1\mid x^4+lx^2+m.$

解 法 1 用带余除法

用 x^2+kx+1除x^4+lx^2+m得余式为$k(2-l-k^2)x+(m+1-l-k^2)$，由已知可得余式为 0，即

$$\begin{cases} k(2-l-k^2)=0 \\ m+1-l-k^2=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k=0 \\ l=m+1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m=1 \\ l=2-k^2 \end{cases}$$

法 2 用待定系数法. 设

$$\begin{aligned} x^4+lx^2+m &= (x^2+kx+1)(x^2+px+q) \\ &= x^4+(k+p)x^3+(kp+q+1)x^2+(kq+p)x+q \end{aligned}$$

比较两边同次项系数得

$$\begin{cases} k+p=0 \\ kp+q+1=l \\ kq+p=0 \\ q=m \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k=0 \\ l=m+1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} m=1 \\ l=2-k^2 \end{cases}$$

2．如果$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1,$证明$:(f(x),g(x)h(x))=1$

证 因$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1,$所以存在多项式

$u_1(x),v_1(x),u_2(x),v_2(x),$使得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$$
$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1$$

将以上两式相乘得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x)+[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1$$

由互素的条件知

$$(f(x),g(x)h(x))=1$$

3．设$f_1(x)$，$f_2(x),\cdots$，$f_m(x);g_1(x)$，$g_2(x),\cdots$，$g_n(x)$都是数域P上的多项式，且

$\left(f_i(x),g_j(x)\right)=1,\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

证明：$\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)=1$

证　当$i=1$时，首先对$g_j(x)$的个数使用数学归纳法

个数为2时

$\because \left(f_1(x), g_1(x)\right)=1, \quad \left(f_1(x), g_2(x)\right)=1,$

由第2题的结果：

$\left(f_1(x), g_1(x)g_2(x)\right)=1$

假设个数为$n-1$时结论成立，即$\left(f_1(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_{n-1}(x)\right)$=1

个数为n时

$\left(f_1(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)$=$\left(f_1(x), (g_1(x)g_2(x)\cdots g_{n-1}(x))g_n(x)\right)=1$

类似可证

$\left(f_i(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)=1 \quad (i=2,\cdots,m)$

再反复应用第2题的结果得

$\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)$=1

4. 若$\left(f(x), g(x)\right)=1$,证明:$\left(f(x)\text{+}g(x),\ f(x)g(x)\right)$=1

证 因$(f(x), g(x))=1$,所以存在多项式$u(x), v(x)$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

因此

$$\begin{aligned}&u(x)f(x)+v(x)g(x)\\&=u(x)f(x)+v(x)g(x)+v(x)f(x)-v(x)f(x)\\&=\big(u(x)-v(x)\big)f(x)+v(x)\big(f(x)+g(x)\big)=1\end{aligned}$$

所以

$$\big(f(x),f(x)+g(x)\big)=1$$

又

$$\begin{aligned}&u(x)f(x)+v(x)g(x)\\&=u(x)f(x)+v(x)g(x)+u(x)g(x)-u(x)g(x)\\&=\big(v(x)-u(x)\big)g(x)+u(x)\big(f(x)+g(x)\big)=1\end{aligned}$$

所以

$$\big(g(x),f(x)+g(x)\big)=1$$

由第2题得：$\big(f(x)g(x),f(x)+g(x)\big)=1$

5. 证明: $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$不可能有重根.

证 假设 a 是 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 的重根，则 a 也是 $f'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$的根,所以 $f(a)=0, f'(a)=0$.于是 $f(a)-f'(a)=0$.

$f(x)-f'(x)=\dfrac{x^n}{n!}$,即有$\dfrac{a^n}{n!}=0\Rightarrow a=0$.但 0 不是 $f(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$的根,矛盾,所以假设不成立,即$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$不可能有重根.

6. 如果a是$f'''(x)$的k重根，证明：a是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的$k+3$重根.

证

因为a是$f'''(x)$的k重根，所以设

$f'''(x)=(x-a)^k h(x)$, 其中$(x-a)$不能整除$h(x)$

$$g'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)]$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{x-a}{2}f'''(x) \\ &= \frac{x-a}{2}(x-a)^k h(x) \\ &= \frac{(x-a)^{k+1}}{2}h(x) \end{aligned}$$

即$(x-a)^{k+1}|g''(x)$,

但因$(x-a)$不能整除$h(x)$,所以$(x-a)^{k+2}$不能整除$g''(x)$.

$\therefore x-a$是$g''(x)$的$k+1$重因式，即a是$g''(x)$的$k+1$重根.

又验算知$g(a)=0, g'(a)=0$，即 a 是 $g(x)$和$g'(x)$ 的根，于是 a 是 $g'(x)$ 的 k+2 重根，所以 a 是 $g(x)$ 的根 k+3 重根.

7. 判断多项式 $f(x)=x^6+x^3+1$ 在有理数域上是否可约.

解 令 $x=y+1$代入 $f(x)=x^6+x^3+1$得

$$g(y)=f(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$$

取素数 p=3,则 3 能整除 $g(y)=f(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$ 中除首项以外的一切项的系数,但 3 不能整除首项系数 1, $3^2=9$ 不能整除常数项 3,所以由 Eisenstein 判别法知 $g(y)$ 在有理数域上不可约，从而 $f(x)=7x^5+18x^4+6x-6$ 在有理数域上不可约.