Tuần I. Hàm số, dãy số

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Sơ lược kiến thức về tập hợp. Dãy số. Hàm số

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các kiến thức sơ lược về tập hợp, các tập số N, Z, Q, R. Dãy số: định nghĩa; các khái niệm: đơn điệu, bị chặn, giới hạn và các phép toán; các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn: tiêu chuẩn kẹp, tiêu chuẩn đơn điệu, bị chặn, tiêu chuẩn Cauchy. Hàm số: định nghĩa; các khái niệm: tập xác định, tập giá trị, hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn, hàm hợp, hàm ngược; hàm số sơ cấp: khái niệm, các hàm số sơ cấp cơ bản.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức cơ bản về tập hợp, dãy số và hàm số đã được học trong chương trình phổ thông.

B. Lý thuyết

I Tập hợp

1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản không định nghĩa của Toán học. Trong chương trình phổ thông, chúng ta đã quen thuộc với tập hợp các số tự nhiên N, tập hợp các số nguyên Z, tập hợp các số hữu tỉ Q và tập hợp các số thực R.

Trong phần này, chúng ta sẽ không đi quá sâu vào tập hợp và các vấn đề liên quan mà chỉ nhắc lại một số khái niệm về tập con, tập rỗng, các phép toán trên tập hợp và các tính chất, tích Decartes, ánh xạ.

2. Các phép toán trên tập hợp

$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

$A\backslash B := \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$

$A \Delta B := (A \cup B)\backslash(A \cap B)$

3. Các tính chất với các phép toán trên tập hợp

a) $A\cap B = B\cap A$

b) $A\cup B = B\cup A$

c) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

d) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

e) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

f) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

g) $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

h) $A\backslash(B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

II Dãy số*

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.2.1: Một *dãy số thực* (nói ngắn gọn là *dãy số*) là một ánh xạ từ N* vào R:

$$n \in N^* \mapsto xn \in R$$

Người ta thường dùng ký hiệu: $\{x_n\}$, n = 1, 2, …, hoặc $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ để chỉ dãy số. Số i = 1, 2, …, n, … được gọi là chỉ số.

* Khái niệm dãy số và giới hạn dãy đã được học trong chương trình phổ thông, phần này chủ yếu mang tính chất nhắc lại và chính xác hóa các khái niệm.

<u>Chú thích:</u> Trong nhiều tài liệu, dãy số cũng có thể bắt đầu từ chỉ số 0, khi đó, tập N* trong định nghĩa nói trên được thay bằng N.

<u>Ví dụ:</u>

a) $\{x_n\}$; $x_n = \frac{1}{n}$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; …; $x_n = \frac{1}{n}$; …

b) $\{x_n\}$; $x_n = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; …; $x_n = 1$; …

c) $\{x_n\}$; $x_n = (-1)^n$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; …; $x_n = (-1)^n$; …

d) $\{x_n\}$; $x_n = n^2$; $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; …; $x_n = n^2$; …

e) $\{x_n\}$; $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{9}{4}$; …; $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; …

2. Định nghĩa giới hạn dãy

Định nghĩa 1.2.2: Dãy $\{x_n\}$ gọi là hội tụ nếu $\exists\, a\ \forall\, \varepsilon > 0\ (\exists\, n_\varepsilon\ \forall\, n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$

Ta cũng nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a, hay a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ và viết $x_n \to a$ khi $n \to \infty$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Nếu dãy $\{x_n\}$ không hội tụ, ta nói rằng nó *phân kỳ*.

<u>Ví dụ:</u> Xét các ví dụ ở mục trước, ta có:

a) Ta có $\forall\, \varepsilon > 0$, với $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ thì $\forall\, n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

b) $|x_n - 1| = 0\ \forall\, n$, vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

c) $\{x_n\}$; Xét với a bất kỳ, ta có:

i) Nếu $a \geq 0$ thì ta có $\forall\, n$ lẻ, $x_n = -1 \Rightarrow |x_n - a| > \frac{1}{2}$

ii) Nếu $a < 0$ thì ta có $\forall\, n$ chẵn, $x_n = 1 \Rightarrow |x_n - a| > \frac{1}{2}$

Nghĩa là $\{x_n\}$ phân kỳ.

3. Các kết quả về giới hạn của dãy.

Định lý 1.2.1: Nếu dãy hội tụ thì giới hạn là duy nhất.

(+)*Chứng minh:** Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Khi đó, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1$ và n_2 sao cho:

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2 \text{ và } n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon/2$$

Đặt $n_0 = \max(n_1,n_2) \Rightarrow$ với $n > n_0$, ta có: $|a - b| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Để ý rằng, ta có bất đẳng thức đúng $\forall \varepsilon > 0$, vậy $|a - b| = 0$ hay $a = b$ ■.

Định lý 1.2.2: Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì giới nội ($\{x_n\} \subset (b,c)$, với (b,c) là một khoảng nào đó).

(+)*Chứng minh:* Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Khi đó $\exists n_0$ sao cho $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1$, gọi b, c lần lượt là số bé nhất và lớn nhất của tập hữu hạn $\{a - 1, x_1, x_2, ..., x_n, a + 1\}$, thế thì: $\{x_n\} \subset (b,c)$ ■.

Định lý 1.2.3: Cho dãy số hội tụ $\{x_n\}$, giả sử $m \le x_n \le M$ $\forall n$, thế thì $m \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le M$.

(+)*Chứng minh:* Đặt $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, thế thì $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ sao cho: $n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Khi đó:

$x - M \le x - x_n \le |x - x_n| < \varepsilon$. Để ý rằng, ta có bất đẳng thức đúng $\forall \varepsilon > 0$, vậy $x - M \le 0$

$m - x \le x_n - x \le |x_n - x| < \varepsilon$. Để ý rằng, ta có bất đẳng thức đúng $\forall \varepsilon > 0$, vậy $m - x \le 0$ ■.

Định lý 1.2.3: Cho hai dãy số hội tụ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, khi $n \to \infty$ thì $x_n \to y$, $y_n \to y$. Khi đó:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x+y$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = Cx$ iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$ v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{y}$ $(y_n, y \neq 0)$ vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{x}{y}$ $(y_n, y \neq 0)$

vii) $x_n \to a$, $z_n \to a$, $x_n \le y_n \le z_n$ $\forall n \Rightarrow y_n \to a$

(+)*Chứng minh:*

i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1$ và n_2 sao cho:

[*] Các phần có đánh dấu (+) chỉ giảng cho sinh viên nếu điều kiện thời gian cho phép.

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon/2 \text{ và } n > n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon/2$$

Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2) \Rightarrow$ với $n > n_0$, ta có:

$$|x + y - a - b| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ hay } \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$$

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ sao cho:

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon/|C| \Rightarrow |Cx_n - Cx| = |C||x_n - x| < \varepsilon \text{ hay } \lim_{n\to\infty} Cx_n = Cx$$

iii) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} C = C \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x$

iv) $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ => giới nội => $\exists M > 0$ để $|x_n|, |y_n| < M\ \forall n$. Ta có $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ sao cho:

$$n > n0 \Rightarrow |xn - x| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ và } |yn - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\Rightarrow |x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \le |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}.M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

hay:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$$

v) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ sao cho: $n > n_0$

$$\Rightarrow |y| - |y_n| \le |y_n - y| < \left|\frac{y}{2}\right| \Rightarrow |y_n| > \left|\frac{y}{2}\right|$$

và

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} \le \frac{2|y_n - y|}{|y|^2} < \frac{\varepsilon y^2}{2}.\frac{2}{y^2} = \varepsilon \text{ hay } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{y}$$

vi) Hiển nhiên từ iv) và v)

Định lý 1.2.4: Cho hai dãu số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ. Nếu $\exists n^*$ sao cho: $n > n^* \Rightarrow x_n \ge y_n$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(+)*Chứng minh:* Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, khi đó $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ sao cho: $n > n_0$

$$\Rightarrow y - x \le y - y_n + x_n - x \le |y - y_n| + |x_n - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Để ý rằng bất đẳng thức đúng $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow y - x \le 0$, hay $y \le x$ ■.

Định lý 1.2.5 (Tiêu chuẩn kẹp)*:* Cho ba dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Giả sử $\exists\, n_0$ sao cho: $n > n_0 \Rightarrow x_n \le y_n \le z_n$ thế thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

(+)*Chứng minh:* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ sao cho:

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon \le x_n \le y_n \le z_n \le a + \varepsilon \text{ hay } \lim_{n\to\infty} y_n = a \ ■.$$

<u>Ví dụ:</u> Xét dãy $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{\cos n}{n}$, ta có: $\dfrac{-1}{n} \le \dfrac{\cos n}{n} \le \dfrac{1}{n}$ $\forall\, n$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Định nghĩa 1.2.3:

i) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là tăng nếu $x_n < x_{n+1}$ $\forall\, n$

ii) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là không giảm nếu $x_n \le x_{n+1}$ $\forall\, n$

iii) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là giảm nếu $x_n > x_{n+1}$ $\forall\, n$

iv) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là không tăng nếu $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall\, n$

v) Dãy $\{x_n\}$ tăng, giảm, không giảm hay không tăng được gọi là đơn điệu.

vi) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu $\exists\, c$ sao cho $x_n \le c$ $\forall\, n$

vii) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu $\exists\, d$ sao cho $x_n \ge d$ $\forall\, n$

Định lý 1.2.6: Dãy đơn điệu không giảm (tăng) bị chặn trên (dưới) thì hội tụ.

Định nghĩa 1.2.4: Dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nếu:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ (\forall\ m > n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon)$$

Định lý 1.2.5: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

III Hàm số*

1. Khái niệm về tập xác định, tập giá trị

2. Khái niệm về hàm hợp.

Định nghĩa 1.3.1: Cho g: X → Y và f: Y → R => xác định hàm:

$$h = f_o g \quad : X \to R$$

$$h(x) \quad := f(g(x))$$

gọi là *hàm số hợp* của hàm f và hàm g.

Ví dụ: Cho f(x) = x2, g(x) = $\sqrt{x}$

=> f(g(x)) = x có TXĐ [0,+∞), g(f(x)) = |x| có TXĐ (-∞,+∞)

3. Khái niệm về hàm ngược

Định nghĩa 1.3.2: Cho hàm số f: X → Y là một song ánh, khi đó xác định hàm

$$g = f^{-1} \quad : Y \to X$$

$$f^{-1}(x) \quad := y \text{ sao cho } f(y) = x$$

gọi là *hàm số ngược* (gọi tắt *hàm ngược*) của f.

Ví dụ: Hàm số y = f(x) = $\arcsin\left(1+\frac{1}{x}\right)$ có TXĐ và TGT tương ứng là $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ có hàm ngược là y = $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x - 1}$

4. Khái niệm về hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn.

Định nghĩa 1.3.3: Cho hàm số y = f(x) có tập xác định đối xứng qua x = 0, khi đó

i) f *là hàm chẵn* nếu f(-x) = f(x) $\forall$ x $\in$ TXĐ.

ii) f *là hàm lẻ* nếu f(-x) = -f(x) $\forall$ x $\in$ TXĐ.

(+)*Mệnh đề 1.3.1:** Cho f(x), g(x) là hàm chẵn; h(x), k(x) là hàm lẻ; l(x) là hàm bất kỳ, thế thì, với x thuộc tập xác định của các hàm xét:

---

* Các khái niệm về hàm số, tập xác định, tập giá trị, hàm hợp đã được học ở chương trình phổ thông. Phần này mang tính chất nhắc lại, chính xác hóa các khái niệm hàm hợp, hàm ngượcm hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn, cung cấp khái niệm về hàm sơ cấp.

i) $f(x) \pm g(x)$, $f(x)*g(x)$, $f(x)/g(x)$ là hàm chẵn

ii) $h(x) \pm k(x)$ là hàm lẻ; $h(x)*k(x)$ là hàm chẵn

iii) $f(x)*h(x)$ là hàm lẻ.

iv) $l(f(x))$ là hàm chẵn

v) $f(h(x))$ là hàm chẵn

vi) $h(k(x))$ là hàm lẻ

Định nghĩa 1.3.4: Cho hàm số $y = f(x)$

i) f được gọi là *tuần hoàn* với *chu kỳ* $T > 0$ nếu TXĐ của f tuần hoàn với chu kỳ T nếu:

$$\forall x \in \text{TXĐ} \Rightarrow x + T \in \text{TXĐ và } f(x+T) = f(x) \ \forall x \in \text{TXĐ}.$$

ii) Cho f là hàm tuần hoàn, T được gọi là *chu kỳ cơ bản* của f nếu T là chu kỳ bé nhất.

<u>Ví dụ:</u> Hàm cosx là hàm chẵn, sinx là hàm lẻ, cos2x tuần hoàn với chu kỳ cơ bản π

5. Khái niệm về hàm sơ cấp

a) Các hàm sơ cấp cơ bản: luỹ thừa, mũ, lôga, lượng giác, lượng giác ngược.

b) Các hàm sơ cấp: Các hàm số sơ cấp cơ bản, các phép toán số học, hàm hằng, phép lấy hàm hợp.

[*] Chứng minh mệnh đề này đơn giản, có thể xem là bài tập cho sinh viên

C. Bài tập

1. Chứng minh

a) $A\backslash(A\backslash B) = A \cap B$ b) $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B)\backslash C$ c) $A \cap (B\backslash A) = \varnothing$

2. Tìm giới hạn của dãy $\{x_n\}$ (nếu hội tụ):

a) $x_n = \dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$ b) $x_n = \dfrac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$ c) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ d) $x_n = \dfrac{2^n+5.6^n}{3^n+6^n}$

e) $x_n = \dfrac{2n^3}{2n^2+3} + \dfrac{1-5n^2}{5n+1}$ e) $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$ f) $x_n = \dfrac{2+4+...+2n}{1+3+...+(2n+1)}$

g) $x_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n}$ h) $x_n = \sqrt{n^2+n}$ -n i) $x_n = \dfrac{(n+3)!}{2(n+1)!-(n+2)!}$

3. Tìm giới hạn dãy $\{x_n\}$ (nếu hội tụ)

a) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$ b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$ c) $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1}.\arcsin x}{n}$

4. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn dãy $\{x_n\}$ (nếu có):

a) $x_n = \dfrac{a^{n+k}}{n!}$ $(a > 1)$ b) $x_n = \sqrt[n]{an^b}$ c) $x_n = \dfrac{n}{a^n}$ $(a > 1)$ d) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ e) $x_n = \sqrt[n]{n!}$

5. Sử dụng tiêu chuẩn kẹp tìm giới hạn dãy sau

a) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

b) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2-1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2-(n-1)^2}}$

c) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+2^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+n^2}}$

d) $x_n = \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}$ $(0 < \alpha < \beta)$

6. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy sau:

a) $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}$ (n dấu căn) b) $u_1 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $n > 1$, $a > 0$

7. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy sau

a) $x_n = \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}$ b) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ c) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

8. Xét sự hội tụ của các dãy sau

a) $x_n = \sin n$ b) $x_n = (-1)^n + \sin\frac{1}{n}$ c) $x_n = \sin\frac{1}{n}$ d) $x_n = \cos\frac{n\pi}{4}$

9. Tìm tập xác định của hàm số f(x) sau

a) $\sqrt[4]{\lg(\operatorname{tg}x)}$ b) $\frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ c) $\ln\cos x$ d) $\sqrt{\cos x^2}$ e) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ f) $\arcsin\frac{2x}{1+x}$

g) $\arccos(\sin x)$ h) $\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{x-2}$ i) $\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ j) $\arcsin\frac{x+1}{x-1}$ k) $\ln(1 - \cos 2x)$

l) $\arccos\frac{x^2-4x}{x+4}$ m) $\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ n) $\arccos(2\sin x)$ o) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

p) $\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ q) $\operatorname{cotg}\pi x + \arccos(2^x)$ r) $\ln\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$

s) $y = \ln\sqrt{x - 4 - \sqrt{6-x}}$ t) $\frac{1}{x} + 2\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ u) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \ln(4-x)$

10. Cho f(x) xác định trên [0,1]. Tìm miền xác định của các hàm

a) $f(3x^2)$ b) $f(\operatorname{tg}x)$ c) $f(\arcsin x)$ d) $f(\ln x)$ e) $f(e^x)$ g) $f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

11. Tìm tập giá trị của hàm số

a) $y = \lg(1-2\cos x)$ b) $y = \arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$ c) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$ d) $y = \frac{1}{2-\cos 3x}$

e) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ f) $y = \frac{2}{x^2-1}$ g) $y = \frac{2}{x^2-1}$ h) $y = \frac{x}{x^2+1}$ i) $y = \frac{1-|x|}{1+|x|}$

12. Tìm f(x) biết

a) $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$ c) $f(\arcsin x) = \frac{\pi}{2}+x$

13. Tìm hàm ngược của hàm số

a) $y = 2x + 3$ b) $y = \frac{1-x}{1+x}$ c) $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ d) $y = \frac{x}{x+1}$

e) $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ f) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ g) $y = 1 + \frac{2}{\sqrt{\mathrm{arctg}x}}$ h) $y = \frac{\arcsin x - 1}{\arcsin x + 1}$

14. Tìm f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = 2^x$ b) $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$ d) $f(x) = x^5$ $g(x) = x + 5$

15. Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, tìm $f_n(x) = f(f(\ldots f(x)\ldots))$ (n lần).

16. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = a^x + a^{-x}$ $(a > 0)$ b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ c) $f(x) = \sin x + \cos x$

d) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+|x|}$ e) $f(x) = \ln\frac{x+1}{1-x}$ f) $f(x) = \arcsin x + \mathrm{arctg}x$

17. Chứng minh rằng bất cứ hàm số f(x) nào xác định trong một khoảng đối xứng (-a,a) cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

18. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số sau (nếu có)

a) $f(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$ b) $f(x) = \sin^2 x$ c) $f(x) = \sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$

d) $f(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{x}{3}$ e) $f(x) = \sin x^2$ f) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

Tuần II. Giới hạn hàm số, vô cùng bé, vô cùng lớn

A. Tổng quan

1. Nội dung vắn tắt: Các khái niệm về giới hạn hàm số, vô cùng bé, vô cùng lớn, dạng vô định và khử dạng vô định.

2. Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên các kiến thức về giới hạn hàm số: các định nghĩa, các phép toán và tính chất, giới hạn hàm hợp, giới hạn một phía, giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực; các khái niệm vô cùng bé (VCB0, vô cùng lớn (VCL); dạng vô định và khử dạng vô định.

3. Các kiến thức cần có trước: Các kiến thức về hàm số.

B. Lý thuyết

I Giới hạn hàm số[*]

1. Các định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1: Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b); nói rằng f(x) có *giới hạn* L khi $x \to x_0$, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu $\forall \{x_n\} \subset (a,b)$ mà $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

Định nghĩa 2.1.2: Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b); nói rằng f(x) có *giới hạn* L khi $x \to x_0$, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0 \text{ sao cho: } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Định nghĩa 2.1.3: Cho hàm số f(x) xác định trên [a,b); nói rằng f(x) có *giới hạn phải* L khi $x \to x_0$, viết $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0 \text{ sao cho: } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Định nghĩa 2.1.4: Cho hàm số f(x) xác định trên (a,b]; nói rằng f(x) có *giới hạn trái* L khi $x \to x_0$, viết $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0 \text{ sao cho: } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Định nghĩa 2.1.4: Cho hàm số f(x) xác định trên R; nói rằng f(x) có *giới hạn* L *ở vô cùng*, viết $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ nếu: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists M > 0 \text{ sao cho: } |x| > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

Định nghĩa 2.1.5: Cho hàm số f(x) xác định trên (a,b); nói rằng f(x) có *giới hạn vô cùng* khi $x \to x_0$, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ nếu:

$$(\forall M > 0)\ (\exists \delta > 0 \text{ sao cho: } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)^{\dagger}$$

---

[*] Giới hạn hàm số và các vấn đề liên quan tới khử dạng vô định đã được học trong chương trình phổ thông, phần này chỉ mang tính chất nhắc lại, cung cấp thêm khái niệm về giới hạn một phía, một số giới hạn cơ bản.

[†] Từ đây, khi viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, chúng ta không loại trừ khả năng $x_0 = \infty$ và/hoặc $L = \infty$.

2. Các tính chất của giới hạn*

a) Giới hạn nếu có là duy nhất

b) Cho $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = l_2$, khi đó

i) $\lim\limits_{x\to a} Cf_1(x) = Cl_1$

ii) $\lim\limits_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2$

iii) $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)f_2(x) = l_1 l2$

iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

3.Tiêu chuẩn có giới hạn†

a) Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ thì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

b) Nếu hàm đơn điệu không giảm (không tăng) bị chặn trên (chặn dưới) thì có giới hạn.

4. Một số giới hạn cơ bản

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

II Vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (VCL)

1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.2.1:

i) Hàm số f(x) được gọi là *VCB* khi $x \to x_0$, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

ii) Hàm số f(x) được gọi là *VCL* khi $x \to x0$, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

Định nghĩa 2.2.2: Cho f(x), g(x) là các VCB (VCL) khi $x \to x_0$

---

* Các tính chất của giới hạn đã được học ở trường phổ thông, ở đây chỉ cần nhắc lại và liên hệ với giới hạn của dãy số.

† Các tiêu chuẩn có giới hạn của hàm số đã được học ở trường phổ thông, ở đây chỉ cần nhắc lại và liên hệ với giới hạn của dãy số.

i) f(x) được gọi là *VCB cấp cao hơn* (*VCL cấp thấp hơn*) so với g(x) nếu: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Khi đó g(x) cũng được gọi là *VCB cấp thấp hơn* (*VCL cấp cao hơn*) so với f(x).

Nếu f(x) là VCB cấp cao hơn của g(x), ta có ký hiệu: f(x) = o(g(x))

ii) f(x), g(x) được gọi là các *VCB* (*VCL*) *cùng cấp* nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, đặc biệt nếu C = 1 thì f(x), g(x) được gọi là các *VCB* (*VCL*) *tương đương*, ký hiệu f(x) ~ g(x).

Nếu f(x), g(x) là các VCB cùng cấp, ta có ký hiệu f(x) = O(g(x)).

Hiển nhiên, trong một quá trình nào đó, nếu f(x) là một VCB thì $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ là một VCL. Đảo lại, nếu F(x) là một VCB thì $f(x) = \frac{1}{F(x)}$ là một VCB.

2. Các tương đương cơ bản*:

Khi $x \to 0$: $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \mathrm{tg}x \sim \mathrm{arctg}x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \frac{a^x-1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha}$

và $1 - \cos x \sim x^2/2$

3. Quy tắc thay thế VCB và VCL tương đương

Khi $x \to x_0$, giả sử f(x), g(x), h(x), k(x) là các VCB; F(x), G(x), H(x), K(x) là các VCL.

a) Nếu f(x) ~ h(x) và g(x) ~ k(x), thế thì $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)}$

(+) *Chứng minh:* Ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{h(x)}.\frac{k(x)}{g(x)}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)}$

Tương tự, ta cũng có các quy tắc về thay thế các VCB, VCL tương đương sau.

b) Nếu F(x) ~ H(x) và G(x) ~ K(x), thế thì $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{H(x)}{K(x)}$

* Có thể yêu cầu sinh viên chứng minh các tương đương này như bài tập.

c) Nếu f(x) ~ h(x) và G(x) ~ K(x), thế thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).G(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x).K(x)$

4. Quy tắc ngắt bỏ các VCB và VCL

a) Trong cùng một quá trình nếu f(x) = o(g(x)) thì f(x) + g(x) ~ g(x)

b) Trong cùng một quá trình nếu F(x) là VCL cấp thấp hơn so với G(x) thì:

$$F(x) + G(x) \sim G(x)$$

III Dạng vô định*

a) $\frac{0}{0}$ - phân tích thành thừa số

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-x-(x-1)}{x^{50}-x-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x(x^{98}+x^{97}+\ldots+1)-1)}{(x-1)(x(x^{48}+x^{47}+\ldots 1)-1)}$

$$= \frac{49}{24}$$

- nhân liên hợp (nếu biểu thức chứa căn)

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{6x^2+3-9x^2} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3(x-1)(x+1)}$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(x-1)} = -1$$

- thay tương đương

- ngắt bỏ vô cùng bé bậc cao

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^3x-\sin^2x+\ln(x+1)}{\sin^2x+e^{2x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+x}{x^2+2x} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\infty}{\infty}$ - quy về $\frac{0}{0}$

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{y+y^3}}{y+1} = 0 \ (y = \frac{1}{x})$

---

* Dạng vô định và khử các dạng vô định đã được học trong chương trình phổ thông, phần này chỉ nhằm mục đích hệ thống lại cho sinh viên.

- ngắt bỏ vô cùng lớn bậc thấp

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$

c) $0.\infty$ - quy về $\dfrac{0}{0}$

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\mathrm{cotg}\dfrac{\pi}{2}(1-x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=\dfrac{2}{\pi}$

d) $\infty-\infty$ - quy về $\dfrac{0}{0}$ bằng nhân liên hợp hoặc quy đồng

Ví dụ: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=0$

f) 1^{∞} - sử dụng $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{\lim v(x)(u(x)-1)}$, quy về $0.\infty$

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{1-x-1}}=\dfrac{1}{e}$

<u>Chú ý:</u>

a) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ khi và chỉ khi có thể viết $f(x)=L+\alpha(x)$ trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x\to x_0$.

Thật vậy, giả sử $f(x)=L+\alpha(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=L(x)$. Đảo lại, giả sử $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$, khi đó nếu đặt $\alpha(x)=f(x)-L\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-L=0$.

b) Chỉ có thể thay tương đương, ngắt bỏ các VCB, VCL đối với phép nhân và phép chia. Tổng (hiệu) của hai VCB (VCL) cùng bậc có thể cho một VCB cấp cao hơn (VCL cấp thấp hơn).

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \text{tg}x}{x^3}$, nếu thay sinx ~ x, tgx~ x ra kết quả bằng 0 là không đúng, giới hạn này có thể tìm như sau: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \text{tg}x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = -\dfrac{1}{2}$

c) Tích của một hàm giới nội và một VCB là một VCB, nhưng tích của một hàm giới nội với một VCL chưa chắc đã là một VCL.

Ví dụ: xcosx không phải là VCL khi $x \to \infty$, vì khi $x \to \infty$, vẫn chọn được dãy đến xcosx = 0.

C. Bài tập

1. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$

2. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}$ - x)

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

3. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{2x^2-8x+8}$ c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cot gx-\cot ga}{x-a}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1-\cos x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-x}$ g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$ h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$ l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tg^2x}{\sqrt{2}\cos x-1}$ m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-x}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)}$

n) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

4. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$ h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{tg^3 x - 3tgx}{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(a+x)tg(a-x) - tg^2 a}{x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot g(a+2x) - 2\cot g(a+x) + \cot ga}{x^2}$

5. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{2^x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 5^x}{1 - e^x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{7x}{4}\right)}{e^{-2x} - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos mx}{\arcsin^2 x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{tgx}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$ j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{mx} - 1}{nx}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x^3 + \arcsin x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$ p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1 + tg2x)}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{\sin(e^{\sin 5x} - 1)}$ r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + a\sin x)}{\sin x}$ s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + 3x\sin x)}{tg^2 x}$ t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

6. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{b^x - b^a}{x - a}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 4x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + tg2x)}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\sin\left(tg\dfrac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln\cos 3x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$ m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$

7. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\cot g^2 x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x}-\cot gx\right)$

8. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot gx$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\text{arc}\cot gx$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}+\text{arctg}x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+a)-\ln x]$

g) $\lim\limits_{x\to \pi} \sin 2x.\text{cotg}x$ h) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{3}{x}\right)\right]$ i) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$ $(a>0)$

9. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x))$

10. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}+1}\right)^{\frac{x^4}{x^2-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$

11. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{7x-3}$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+9}\right)^{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x+3}$ k) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

12. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\text{arctgx}}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot g^2 x}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tgx}}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\text{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\text{tg}\frac{\pi}{2}x}$ f) $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\text{tg}\left[\frac{\pi}{2}(2-x)\right]}$ g) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tgx}}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tgx}}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ k) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$

13. Khi $x \to 0$, cặp VCB sau có tương đương không?

a) $\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$ b) $\alpha(x) = \ln(\cos x)$, $\beta(x) = -\frac{\text{tg}^2 x}{2}$

c) $\alpha(x) = \text{arctg}(\sin 2x)$, $\beta(x) = e^{\text{tgx}} - \cos 2x$ d) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$, $\beta(x) = \cos x - 1$

Tuần III. Hàm số liên tục, đạo hàm

A. Tổng quan

1. Nội dung vắn tắt: Hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân của hàm số.

2. Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên các kiến thức về hàm số liên tục: các định nghĩa, các phép toán và tính chất; điểm gián đoạn, phân loại điểm gián đoạn; đạo hàm, định nghĩa, ý nghĩa hình học và vật lý, đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục, đạo hàm hàm số ngược, các phép toán và công thức đạo hàm cơ bản.

3. Các kiến thức cần có trước: Các kiến thức về hàm số, giới hạn của hàm số.

B. Lý thuyết

I Hàm số liên tục*

1. Các định nghĩa

Định nghĩa 3.1.1: Cho f(x) xác định trên X

i) x_0 gọi là điểm tụ của X nếu $\exists \{x_n\} \subset X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

ii) Giả sử x_0 là điểm tụ của X và $x_0 \in X$, nếu có $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, thì ta nói hàm số liên tục tại x_0.

Chú ý: Hàm số muốn liên tục tại x_0, thì trước hết phải xác định tại x_0, đồng thời x_0 phải thuộc TXĐ và là điểm tụ của TXĐ.

Định nghĩa 3.1.2: Cho f(x) xác định trên X. f(x) được gọi là liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Định nghĩa 3.1.3: Cho f(x) xác định trên (a,b) hoặc [a,b] hoặc [a,b) hoặc (a,b]. Cho điểm $x_0 \in$ (a,b).

i) f(x) được gọi là *liên tục phải* tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

ii) f(x) được gọi là *liên tục trái* tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Chú ý: Khái niệm liên tục một phía chỉ xét đối với các điểm trong mà không xét đối với các điểm biên.

Định lý 3.1.1: Cho f(x) xác định trong (a,b). f(x) liên tục tại $x_0 \in$ (a,b) nếu và chỉ nếu f(x) liên tục trái và liên tục phải tại x_0.

Định nghĩa 3.1.4: Hàm số f(x) được gọi là *liên tục đều* trên TXĐ X nếu mọi điểm thuộc X đều là điểm tụ của X và nếu:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \text{ sao cho } \forall\ x_1, x_2 \in X, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

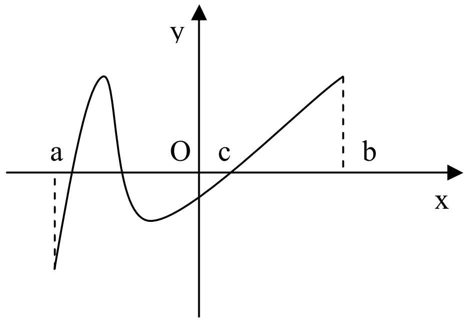
* Vấn đề hàm số liên tục đã được học trong chương trình phổ thông, ở đây chúng ta chỉ nhắc lại và chính xác hóa khái niệm. Cung cấp thêm khái niệm liên tục một phía và liên tục đều.

Chú ý: Hàm số liên tục đều trên TXĐ X thì liên tục trên X, điều ngược lại chưa chắc đúng.*

Ví dụ†*:* Hàm số $y = \frac{1}{x}$ liên tục trên X nhưng không liên tục đều trên X.

2. Các tính chất của hàm số liên tục

Định lý 3.1.2: Cho f(x) là một hàm số xác định, liên tục trong khoảng (α,β) và a < b thuộc (α,β) thoả f(a)f(b) < 0 => tồn tại c thuộc (a,b) sao cho f(x) = 0 (Hình 3.1).



Hình 3.1

Hệ quả 3.1.3: Cho f(x) là một hàm số xác định, liên tục trên đoạn [a,b], khi đó, f(x) nhận tất cả các giá trị từ f(a) tới f(b).

Định lý 3.1.4‡*:*

i) Nếu f(x) xác định, liên tục trong khoảng (α,β) thì af(x) cũng liên tục trong khoảng (α,β) với a là một hằng số nào đó.

ii) Nếu f, g là các hàm liên tục trong khoảng (α,β) thì f(x) + g(x), f(x).g(x) cũng liên tục trong khoảng (α,β)

iii) Nếu f, g là các hàm liên tục trong khoảng (α,β) đồng thời g(x) khác không trong khoảng đó thì f(x)/g(x) liên tục trong khoảng (α,β).

iv) Nếu f, g là các hàm liên tục thì $f_o g$ cũng liên tục.

v) Các hàm số sơ cấp liên tục trên TXĐ.

3. Điểm gián đoạn của hàm số

Định nghĩa 3.1.5:

---

* Nhận xét này có thể yêu cầu sinh viên xem như bài tập, hoặc minh họa một cách vắn tắt thông qua ví dụ.

† Ví dụ này chỉ mô tả vắn tắt tính đúng đắn.

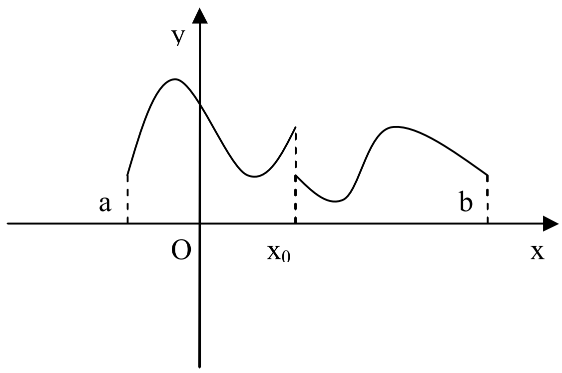
‡ Nếu có thể, mô tả vắn tắt chứng minh một số ý của định lý này dựa trên tính chất về giới hạn của hàm số.

i) f(x) *gián đoạn* tại x_0 nếu không liên tục tại đó, khi đó x_0 gọi là *điểm gián đoạn* của f(x).

ii) x_0 là *điểm gián đoạn loại 1* nếu $x \to x_0$ về phía nào thì có giới hạn hữu hạn của f(x) trong quá trình đó.

iii) x_0 là điểm gián đoạn loại 1 gọi là *gián đoạn bỏ được* nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

iv) điểm gián đoạn không là gián đoại loại 1 gọi là *gián đoạn loại 2*.



Hình 3.2
Điểm gián đoạn loại 1

II Đạo hàm

1. Định nghĩa

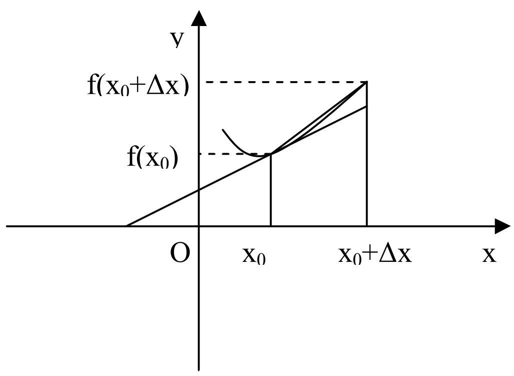
Định nghĩa 3.2.1: Cho hàm số f(x) xác định trên đoạn [a,b], nói rằng hàm số *có đạo hàm* tại điểm $x_0 \in$ [a,b] nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hữu hạn. Khi đó, giá trị của $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ được gọi là *đạo hàm* của f(x) tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$ hàm số f(x).

2. Ý nghĩa hình học, cơ học của đạo hàm*

a) Đạo hàm của hàm số tại một điểm là hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó.

b) Đạo hàm của toạ độ của một chất điểm theo thời gian bằng với tốc độ tức thời của chất điểm đó.

c) Đạo hàm của vận tốc của một chất điểm theo thời gian bằng với gia tốc tức thời của chất điểm đó.



Hình 3.3

* Chú trọng vào ý nghĩa số gia của hàm trên số gia của đối

3. Đạo hàm một phía

Định nghĩa 3.2.2: Cho hàm f(x) xác định trong (a,b), $x_0 \in [a,b]$.

i) Giới hạn $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nếu tồn tại hữu hạn, được gọi là *đạo hàm phải* của f tại x_0, ký hiệu $f'(x_0^+)$.

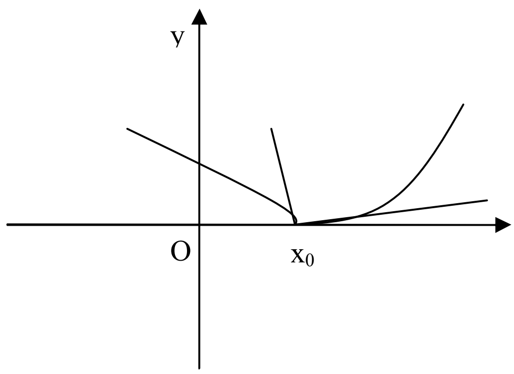
ii) Giới hạn $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nếu tồn tại hữu hạn, được gọi là *đạo hàm trái* của f tại x_0, ký hiệu $f'(x_0^-)$.

Định lý 3.2.1: Cho f(x) xác định trong (a,b). Hàm số có đạo hàm tại $x = x_0 \in (a,b)$ nếu và chỉ nếu tồn tại đạo hàm ở cả hai phía tại x_0, và $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

4. Mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục

Định lý 3.2.2: Hàm số có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0

(+)*Chứng minh:* Trước hết, theo định nghĩa, để tồn tại đạo hàm thì $x_0 \in$ TXĐ, hơn thế, x0 là điểm tụ của TXĐ, đồng thời để $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại hữu hạn thì $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ■.



Hình 3.3: Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm

Chú ý rằng điều ngược lại nói chung không đúng, xét hàm số có đồ thị như trong hình vẽ, liên tục tại x_0 nhưng không có đạo hàm.

5. Đạo hàm của hàm số ngược

Định lý 3.2.3: f(x) có đạo hàm tại lân cận x_0, có hàm ngược g(y) có đạo hàm tại lân cận $y_0 = f(x_0)$ => khi đó $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

6. Các phép toán và công thức tính đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản*

a) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ b) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

c) $(cf(x))' = cf'(x)$

d) Hàm $u = g(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $y = f(x)$ có đạo hàm tại $u_0 = g(x_0)$

=> hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x_0 và $(f(g(x)))' = f'_u(g(x))g'(x)$

e) Bảng đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản

i) $y = c$ $y' = 0$ ii) $y = x^a$ $y' = ax^{a-1}$ iii) $y = \sin x$ $y' = \cos x$

iv) $y = \cos x$ $y' = -\sin x$ v) $y = \mathrm{tg}x$ $y' = 1/\cos^2 x$ vi) $y = \mathrm{cotg}x$ $y' = -1/\sin^2 x$

vii) $y = a^x$ $y' = a^x \ln a$ viii) $y = e^x$ $y' = e^x$ ix) $y = \log_a x$ $y' = 1/(x\ln a)$

x) $y = \ln x$ $y' = 1/x$ xi) $y = \arcsin x$ $y' = 1/\sqrt{1-x^2}$

xii) $y = \arccos x$ $y' = -1/\sqrt{1-x^2}$ xiii) $y = \mathrm{arctg}x$ $y' = 1/(1 + x^2)$

* Phần này đã được học ở chương trình phổ thông, ở đây chúng ta chỉ nhắc lại mang tính chất ôn tập.

C. Bài tập

1. Tìm a để hàm số liên tục tại x = 0

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\text{ khi } x\neq 0\\ a \text{ khi } x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 \text{ khi } x\geq 0\\ a\cos x+b\sin x \text{ khi } x<0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}\text{ khi } x\neq 0\\ a \text{ khi } x=0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}a\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{1-\cos x}\text{ khi } x\geq 0\\ \dfrac{e^{\cos x-1}-1}{\operatorname{tg}x^2}\text{ khi } x<0\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{e^{\sqrt{x+1}-1}-1}\text{ khi } x\neq 0\\ a \text{ khi } x=0\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\text{ khi } x\neq 0\\ a \text{ khi } x=0\end{cases}$

2. Các hàm sau có liên tục đều trên miền đã cho

a) $y=\dfrac{x}{4-x^2}$; $-1\leq x\leq 1$ b) $y=\ln x$; $0<x<1$ c) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x^2}{1-\cos x}$, $0<x<1$

3. Điểm x = 0 là gián đoạn loại gì của hàm số

a) $y=\dfrac{8}{1-2^{\cot gx}}$ b) $y=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ c) $y=\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ d) $y=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$

e) $y=\dfrac{1}{x}\arcsin x$ f) $y=\dfrac{1}{x^2}\ln(\sqrt{x}+1)$ g) $y=\dfrac{4}{1-2^{\cot gx}}$ h) $y=\dfrac{4}{3-2^{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})}}$

4. Xác định điểm gián đoạn và tính chất các điểm gián đoạn của các hàm số

a) $\cos^2\dfrac{1}{x}$ b) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ c) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ d) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$ e) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

f) $\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ g) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x+2}$ h) $\arcsin(\sin x).\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sin x}$

5. Chứng minh rằng, nếu các hàm f(x), g(x) là liên tục thì các hàm min(f(x),g(x)) và max (f(x),g(x)) cũng liên tục

6. Tìm đạo hàm của hàm số

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ khi } x < 1 \\ (1-x)(2-x) \text{ khi } 1 \le x \le 2 \\ x - 2 \text{ khi } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 \text{ khi } a \le x \le b \\ 0 \text{ kh ix } \notin [a,b] \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1} \text{khi } x \ne 1 \\ 0 \text{ khi } x = 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1} \text{khi } x \ne 1 \\ 0 \text{ khi } x = 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \text{khi } x \ne 0 \\ 1 \text{ khi } x = 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ khi} |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{e} \text{khi} |x| > 1 \end{cases}$

7. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} : x \ne 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

a) liên tục tại x = 0 b) có đạo hàm tại x = 0 c) có đạo hàm liên tục tại x = 0

8. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ b) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ c) $y = \dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{b}{x\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

9. Tính đạo hàm của các hàm số y = f(x) với f(x) sau

a) $e^{\cos x}\sin x$ b) $\ln(\sin^2 x)$ c) $\dfrac{\mathrm{tg}x}{\arcsin x}$ d) $\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$ e) $\log_3(x^2 - \sin x)$

f) $\sin[\cos^2(\mathrm{tg}^3 x)]$ g) $\mathrm{arctg}\dfrac{x+a}{1-ax}$ h) $\mathrm{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$ i) $\arccos(\cos^2 x)$

j) $\mathrm{tg}x\cos^2 x$ k) $\ln(1 + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x})$ l) $\arcsin\sqrt{\sin x}$

m) $x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ n) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x}} + \sin^2 x$ o) $\dfrac{1}{\mathrm{arctg}x} - \dfrac{1}{\arcsin x}$

p) $\dfrac{\text{arctg}x}{x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ q) $\sqrt{a^2+x^2}$ - $a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$

r) $\lg(\arccos x) + \ln\sin^4 x$ s) $x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}$

10. Tính đạo hàm của hàm số

a) $y = \sqrt{x^3e^{4x}\sin x}$ b) $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$ c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

d) $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$ e) $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$ f) $y = \sin 2x\sin 3x\sin 5x$

11. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = x^{\frac{1}{x}}$ b) $y = \sin x^x$ c) $y = (\sin x)^{\arcsin x}$ d) $y = (\cos x)^{\sin x}$ e) $y = (1+\sqrt{x})^{\ln x}$

f) $y = x^{\sin x} + \arcsin(\ln x)$ g) $y = xe^{-x^2} + \sin x^{\text{arctg}x}$ h) $y = (\text{arctg}x)^{\arcsin x}$

12. Tính đạo hàm các hàm số

a) $y = x|x|$ b) $y = |(x-1)(x+1)^3|$ c) $y = \sin|x^3|$

d) $y = [x]\sin^2(\pi x)$ e) $y = \ln|x|$ f) $y = \arccos\dfrac{1}{|x|}$

13. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không có đạo hàm tại $x = a$.

Tuần IV. Vi phân, đạo hàm và vi phân cấp cao, định lý về hàm số khả vi

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Vi phân, đạo hàm và vi phân cấp cao, định lý về hàm số khả vi.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các kiến thức về vi phân: định nghĩa, ý nghĩa hình học, ứng dụng để tính gần đúng, mối liên hệ giữa hàm số có đạo hàm và hàm khả vi, vi phân của hàm hợp và tính bất biến của vi phân cấp 1; đạo hàm và vi phân cấp cao; các định lý về hàm khả vi và ứng dụng: định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, đạo hàm của hàm số.

B. Lý thuyết

I Vi phân

1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.1.1: Cho hàm số f(x), nếu tại một điểm $x = x_0$ có biểu diễn:

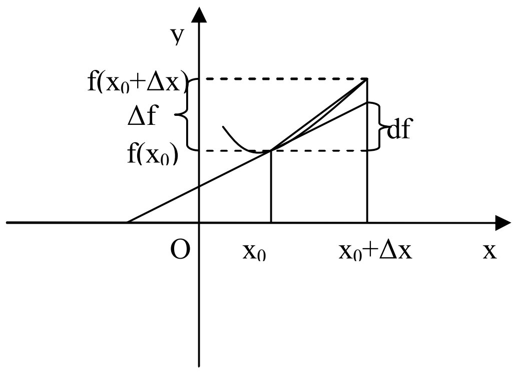
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + o(h) \text{ khi } h \to 0$$

với c là hằng số thì f được gọi là *khả vi một lần* (gọi tắt là *khả vi*) tại $x = x_0$, khi đó biểu thức $df(x_0) = cdx$ được gọi là vi phân của f(x) tại $x = x_0$.

Nếu hàm số f(x) khả vi tại mọi điểm thuộc TXĐ X thì f(x) được gọi là khả vi trên X.

2. Ý nghĩa hình học

Vi phân của hàm số tại một điểm chính là số gia của hàm số tại điểm đó bỏ qua một vô cùng bé cấp cao hơn so với số gia của đối số.



Hình 4.1

3. Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân

Định lý 4.1.1: Hàm số có đạo hàm thì khả vi và ngược lại. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì vi phân của hàm số đó tại x_0 bằng tích số của đạo hàm và số gia của đối số: $df(x_0) = f'(x_0)dx$

(+)*Chứng minh:* Ta có hàm số f(x) có đạo hàm tại x = x0 khi và chỉ khi giới hạn:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x0) \text{ là một giá trị hữu hạn nào đó}$$

<=> có thể viết: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h)$ với $\alpha(h)$ là một VCB khi $h \to 0$

hay $$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \text{ khi } h \to 0$$

4. Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

Ta có $f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0) + o(h) \Rightarrow f(x_0+h) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0).h$

Ví dụ: Tính gần đúng A = $\sqrt{3e^{0,04} + (1,02)^2}$

Xét hàm số f(x) = $\sqrt{3e^{2x} + x^2}$ => f'(x) = $\dfrac{3e^{2x} + x}{\sqrt{3e^{2x} + x^2}}$, ta có:

A = f(0,02) ≈ f(0) + f'(0).0,02 = $\sqrt{3} + 0{,}02.\dfrac{3}{\sqrt{3}} = 1{,}02.\sqrt{3}$

5. Vi phân của hàm hợp

Xét hàm số u = g(x), và hàm hợp y = f(u) = f(g(x))

=> dy = $f'_u(u)du = f'_u(u)u_x'(x)dx = (f_o g)'_x(x)dx = f'_x(x)dx$

Điều này thể hiện tính bất biến của vi phân cấp 1.

II Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 4.2.1: Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b), hàm f(x) gọi là khả vi n lần (trong (a,b)) nếu f là khả vi (n - 1) lần (trong (a,b)) và đạo hàm cấp (n-1) của f cũng khả vi. Khi đó đạo hàm cấp n của f được đinh nghĩa bởi: $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Với bất kỳ hàm số f, g khả vi n lần nào, chúng ta đều có quy tắc Leibnitz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \text{ với } C_n^k \text{ là tổ hợp chập k của n.}$$

(+) Chứng minh:

Ta có (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).

Giả sử $(f(x)g(x))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(n-1-k)}(x) g^{(k)}(x)$, ta có:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(n-1-k)}(x) g^{(k)}(x)\Big)' = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(f^{(n-1-k)}(x) g^{(k)}(x)\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-1-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right)$$

$$= f^{(n)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(C_{n-1}^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + C_{n-1}^{k-1} f^{(n-1-(k-1))}(x) g^{((k-1)+1)}(x)\right) +$$

$+ f(x)g^{(n)}(x) \quad = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$

<u>Ví dụ:</u> Tìm đạo hàm cấp n của xe^x, ta có x' = 1, $x^{(n)} = 0 \;\; \forall n > 1$, và $(e^x)^{(n)} = ex \;\; \forall n$

=> Theo quy tắc Leibnitz $(xe^x)(n) = xe^x + ne^x = (n+x)e^x$

2. Vi phân cấp cao

Vi phân cấp n là vi phân của vi phân cấp n - 1: $d^n(f) = d(d^{n-1}(f))$

<u>Chú ý:</u> Vi phân cấp cao không bất biến như vi phân cấp một.

<u>Ví dụ:</u> Xét hàm $f(x) = x^2$, ta có df = 2xdx và $d^2f = 2(dx)^2$ (*)

Nếu đặt $x = t^2 \Rightarrow f = t^4$, khi đó $df = 4t^3dt$ và $d^2f = 12t^2(dt)^2$,

Nếu thế dx = 2tdt vào (*) thì ta có : $d^2f = 2(2tdt)^2 = 8t^2(dt)^2 \neq 12t^2(dt)^2$

Như thế, khi lấy vi phân cấp cao, cần phải xem kỹ xem lấy vi phân đối với biến nào, độc lập hay phụ thuộc để tránh nhầm lẫn.

III Định lý các hàm số khả vi

1. Định lý Fermat

Định nghĩa 4.3.1: Cho hàm số f(x) xác định trên TXĐ X, liên tục tại x0, khi đó:

i) x_0 được gọi là cực đại của f nếu $\exists\, \delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0) > f(x) \;\; \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

ii) x_0 được gọi là cực tiểu của f nếu $\exists\, \delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0) < f(x) \;\; \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

iii) x_0 được gọi là cực trị của f nếu nó hoặc là cực đại, hoặc là cực tiểu của f.

Định lý 4.3.1: Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b], đạt cực trị tại $c \in (a,b)$, khả vi tại c thì f'(c) = 0.

(+)*Chứng minh:* Giả sử f(x) đạt cực đại tại c, nghĩa là $\exists\, \delta > 0$ sao cho:

$$f(c + h) - f(c) \leq 0 \;\; \forall \; -\delta \leq h \leq \delta$$

nghĩa là: $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ khi h < 0 và $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ khi h >0.

tức là: f'(c+) ≤ 0 và f'(c-) ≥ 0

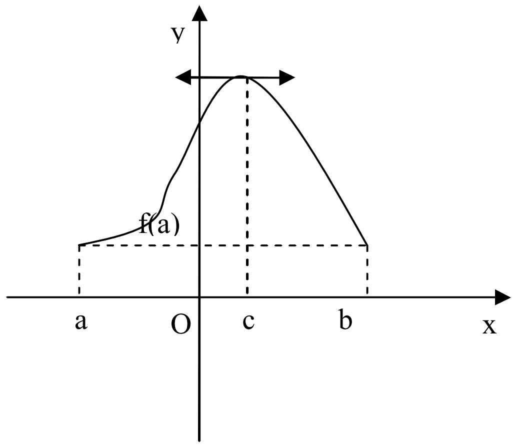
Ta lại có, f(x) khả vi tại c, nghĩa là: f'(c) = f'(c+) = f'(c-) = 0.

Trường hợp f(x) đạt cực tiểu tại c, chứng minh tương tự ■.

2. Định lý Rolle*

Định lý 4.3.2: Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b) và f(a) = f(b), khi đó $\exists c \in (a,b)$ sao cho f'(c) = 0

Đặc biệt, trong khoảng hai nghiệm của phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm của phương trình f'(x) = 0.

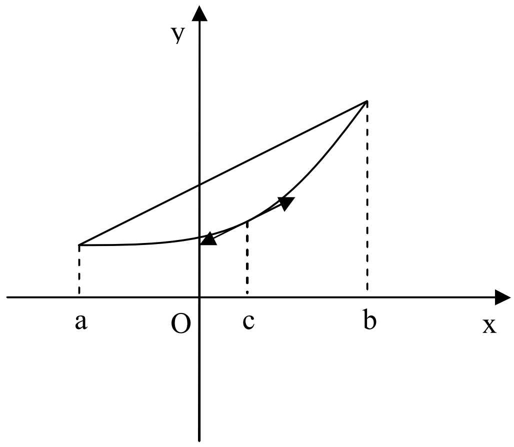


Hình 4.2

3. Định lý Lagrange

Định lý 4.3.3: Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b), khi đó

$\exists c \in (a,b)$ sao cho f'(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Hình 4.2

(+)*Chứng minh:* Xét hàm:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - f(x)$$

ta có: g(a) = g(b) = 0, hàm g(x) cũng liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b) và g'(x) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - f'(x). Nghĩa là, theo định lý Rolle, $\exists c \in (a,b)$ sao cho: g'(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - f'(c) = 0, hay f'(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■.

<u>Ví dụ</u>: Cho 0 < b < a, chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

* Định lý này chỉ minh họa hình học cho sinh viên.

Xét hàm f(x) = lnx, ta có f liên tục và khả vi trên [b,a] (do 0 < b < a), vậy, theo định lý Lagrange, $\exists\, c \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{1}{c} = f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{\ln a - \ln b}{a-b} \Rightarrow \frac{a-b}{c} = \ln\frac{a}{b}$$

Mặt khác, ta lại có: b < c < a => $\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} < \frac{a-b}{b}$ => đpcm ■.

4. Định lý Cauchy

Định lý 4.3.4: Cho f(x), g(x) là hai hàm số xác định, liên tục trên [a,b], g(a) ≠ g(b), f(x), g(x) khả vi trong (a,b), g'(x) ≠ 0 $\forall\ x \in [a,b]$. Khi đó $\exists\, c \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(+)*Chứng minh:* Xét hàm

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)) - f(x)$$

Ta có h(a) = h(b) = 0, hàm h(x) cũng liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b) và

$$h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) - f'(x)$$

Vậy theo định lý Rolle, $\exists\, c \in (a,b)$ sao cho:

$$h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) - f'(c) = 0, \text{ hay } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ ■.$$

C. Bài tập

1. Tìm vi phân của hàm số

a) $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ b) $y = \arcsin\frac{x}{a}$ c) $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ d) $y = \ln|x + \sqrt{x^2+a}\,|$

2. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$ b) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ c) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

d) $\frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)}$ e) $\frac{d(\sqrt{1-x^2})}{d(\arcsin x)}$ f) $\frac{d(tgx)}{d(\cot gx)}$ g) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$

3. Tính gần đúng

a) lg11 b) $\sqrt[7]{\frac{2-0,02}{2+0,02}}$ c) $\sqrt[3]{1,02}$ d) $\sqrt[10]{1000}$ e) $\sin 29^0$

f) arctg1.05 g) $e^{0,02}$ h) arcsin0,51 i) $\sqrt{8e^{0,03}+(0,97)^2}$

4. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$ b) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$ c) $y = \frac{e^x}{x}$, tìm $y^{(10)}$

c) $y = x^2e^{2x}$, tính $y^{(10)}$ d) $y = x^2\sin x$, tính $y^{(50)}$

5. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y = f(x) sau

a) $\frac{x}{x^2-1}$ b) $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ c) $\frac{x}{x(1-x)}$ e) $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ f) ln(ax + b)

g) $\sin^2 x$ h) $\frac{1}{x^2-3x+2}$ i) $\frac{1}{x^2-3x+2}$ j) xcosax

k) $e^x\cos x$ l) x^2e^{ax} m) $\sin^4 x + \cos^4 x$ n) $e^{ax}\sin(bx + c)$

6. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá hai nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

7. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \le x \le 1$.

8. Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$ b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| < |x - y|$ d) $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \le \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$

e) $py^{p-1}(x - y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-1)$ với $0 < y < x$, $p > 1$

9. Cho f là một hàm số thực, khả vi trên [a,b] và có đạo hàm f''(x) trên (a,b), chứng minh rằng $\forall x \in (a,b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

10. Cho f(x), g(x) là các hàm khả vi đơn điệu tăng thoả mãn $f(x_0) = g(x_0)$, đồng thời $f'(x) \le g'(x)$ với mọi $x \ge x_0$. Chứng minh rằng $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \ge x_0$.

Tuần V. Khai triển hữu hạn, ứng dụng các định lý hàm số khả vi, khảo sát hàm số

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Các công thức khai triển hữu hạn, các quy tắc L'Hospital khử dạng vô định, các lược đồ khảo sát hàm số.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các kiến thức về các công thức khai triển hữu hạn Taylor và Maclaurin; ứng dụng định lý các hàm số khả vi: quy tắc L'Hospital để khử dạng vô định, các tính chất của hàm số: đơn điệu, lồi lõm, cực trị; các lược đồ khảo sát hàm số: hàm y = f(x), đường cong tham số, đường cong trong tọa độ cực và tọa độ cực suy rộng.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, giới hạn, đạo hàm của hàm số, các định lý về các hàm số khả vi.

B. Lý thuyết

I Khai triển hữu hạn

1. Khai triển Taylor

Định lý 5.1.1[*]*:* Cho hàm số f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên $[x_0,x_0+h]$ thì

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(h), \text{ trong đó}$$

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad \text{số dư dạng Lagrăng}$$

$$R_n(h) = o(h^n) \qquad \text{số dư dạng Peano}$$

2. Khai triển Mac-Laurin

Trong khai triển Taylor, nếu ta thay $x_0 = 0$, $h = x$, thì ta có khai triển Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(h)$$

3. Một số công thức khai triển Mac-Laurin thường dùng[†]

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

m nguyên dương

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots + x^m$$

$$(1 - x)^m = 1 - \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \ldots + (-1)^k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots + (-1)^m x^m$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n(x)$$

[*] Có thể mô tả vắn tắt chứng minh định lý này cho sinh viên.

[†] Các công thức khai triển MacLaurin ở đây có thể chứng minh vắn tắt, hoặc yêu cầu sinh viên xem là bài tập.

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \ldots + (-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x_n + R_n(x)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3.x^5}{8.5} + \ldots + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

II Ứng dụng định lý các hàm số khả vi

1. Quy tắc L'Hospital

Định lý 5.2.1: Giả sử hàm số f(x) và g(x) khả vi tại lân cận x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và g(x) khả vi tại lân cận x_0, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

<u>Chú ý:</u> Kết quả trên vẫn đúng khi $A = \infty$, khi $x_0 = \infty$, và khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

<u>Ví dụ:</u> a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{2} = 1$

b) $$\lim_{x\to 1}\text{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot g\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}.\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}$$

c) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x - 1}{\frac{x-1}{x} + \ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{(x-1)+x\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{-\cos x+x\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x}{\sin x+x\cos x+\sin x}} = +\infty$$

e) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{tg}x\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\cot gx}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x}{x^2}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{1}}$$

$$= 1$$

2. Ứng dụng khai triển hữu hạn để tìm giới hạn

<u>Ví dụ:</u>* a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+x^3}{\arcsin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1+x^3+o(x^3)}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1+x^3+o(x^3)}{x^2+o(x^3)}$$

$$= 1$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+\frac{\sin^5 x}{5!}-x\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{2x^4}{3.3.2!}-\frac{2.5.x^6}{3.3.3.3!}+o(x^6)\right)}{x^5}$$

* Đối với từng ví dụ, giải thích khai triển hữu hạn đến đâu là đủ.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \frac{x^3 - 3x^5 + o(x^5)}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o(x^5)}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{2} + \frac{1}{120} + \frac{1}{9}\right)x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{113}{180}$$

3. Sự biến thiên của hàm số

Định lý 5.2.2: Cho f là hàm số xác định, liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b), khi đó:

i) f(x) không giảm (tăng) trên [a,b] <=> f'(x) $\geq$ 0 (f'(x) $\leq$ 0), x $\in$ (a,b)

ii) Nếu f'(x) $\geq$ 0 (f'(x) $\leq$ 0) $\forall$ x $\in$ (a,b) và nếu f'(x) > 0 (f'(x) < 0) tại ít nhất một điểm x thì f(b) > f(a) (f(b) < f(a)).

(+)*Chứng minh:*

i) Giả sử f(x) không giảm, khi đó:

$$f(x + h) \geq f(x) \ \forall h > 0, \text{ và } f(x + h) - f(x) \leq 0 \ \forall h < 0$$

=> $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \ \forall h, \text{ nghĩa là } f'(x) \geq 0.$$

Đảo lại, giả sử f'(x) $\geq$ 0, với x $\in$ (a,b), ta có, theo định lý Lagrange:

$\forall$ h > 0 sao cho x + h $\in$ (a,b), $\exists$ 0 < θ < 1, sao cho 0 $\leq$ cf'(x + θh) = $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Trường hợp f(x) không tăng chứng minh tương tự ■.

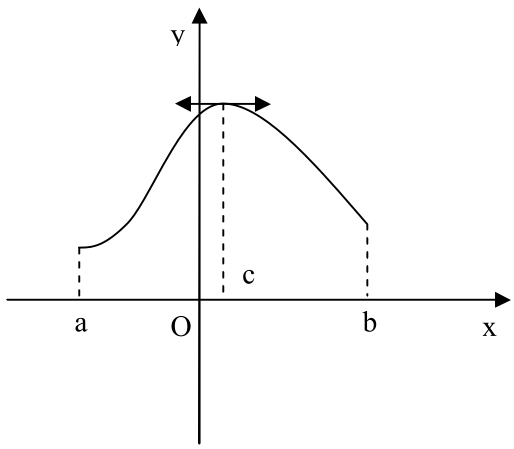
ii) Nếu f'(x) $\geq$ 0 $\forall$ x $\in$ (a,b), ta có f(x) là không giảm trên [a,b], do đó

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \ \forall \ x \in (a,b)$$

Nếu f(b) = f(a) thì đạo hàm triệt tiêu với mọi x thuộc (a,b), mâu thuẫn, vậy ta có đpcm ■.

(+)*Hệ quả:* Nếu f(a) $\leq$ g(a) và f'(x) $\leq$ g'(x) (f'(x) < g'(x)) $\forall$ x $\in$ (a,b) thì f(x) $\leq$ g(x) (f(x) < g(x)) $\forall$ x $\in$ [a,b].

4. Cực trị của hàm số



Hình 5.1

*Định lý 5.2.3:** f xác định, liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b) (có thể trừ ra một số hữu hạn diểm), giả sử c là một điểm thoả a < c < b.

i) Nếu khi x vượt qua c mà f'(x) đổi dấu từ + sang - thì f(x) đạt cực đại tại x = c.

ii) Nếu khi x vượt qua c mà f'(x) đổi dấu từ - sang + thì f(x) đạt cực tiểu tại x = c.

iii) Nếu khi x vượt qua c mà f'(x) không đổi dấu thì f(x) không đạt cực trị tại c.

Định lý 5.2.4: f có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận điểm c, và

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0,\ f^{(n)}(c) \neq 0.$$

i) Nếu n chẵn thì f(c) đạt cực trị tại x = c

cực tiểu nếu $f^{(n)}(c) > 0$ và cực đại nếu $f^{(n)}(c) < 0$.

ii)) Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại x = c.

(+)*Chứng minh:* Theo khai triển Taylor, ta có:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n$$

$$= f(c) + \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n$$

Ta có, do $f^{(n)}(x)$ liên tục tại c => $\exists\,\delta > 0$ sao cho:

$$f^{(n)}(x) \text{ cùng dấu với } f^{(n)}(c)\ \ \forall x \in (c-\delta, c+\delta).$$

i) Nếu n chẵn thì $h^n > 0$, nếu $f^{(n)}(c) > 0$ thì $\frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n > 0$, với $|h| < \delta$ hay f đạt cực tiểu tại c, tương tự, nếu $f^{(n)}(c) < 0$ thì f đạt cực đại tại c.

ii) Nếu n lẻ, ta có h^n đổi dấu qua h = 0, nghĩa là f không đạt cực trị tại c ■.

* Minh họa cho sinh viên bằng hình học

5. Tính lồi của hàm số*

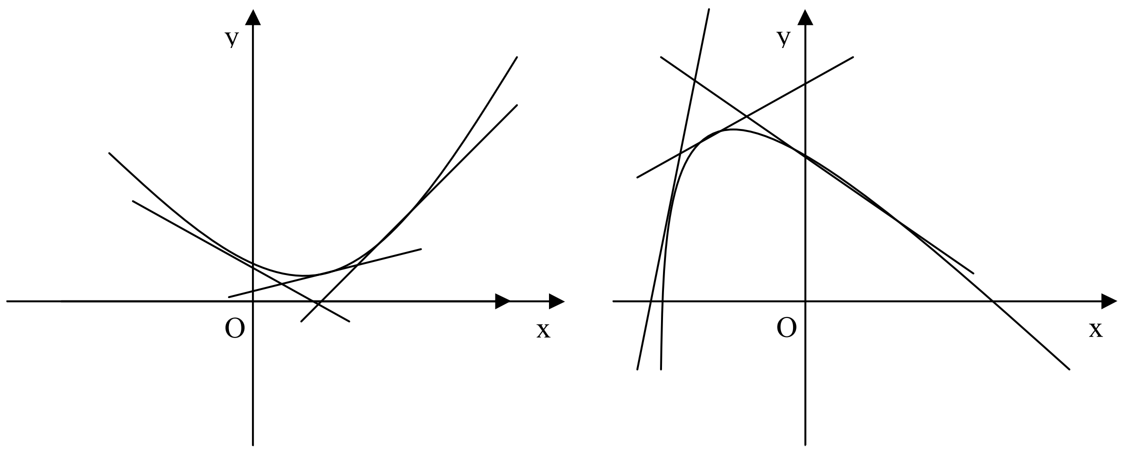
Định nghĩa 5.2.1: Cho hàm số f xác định trong khoảng I

i) f được gọi là lồi nếu:

$\forall a,b \in I$ và $\forall t \in [0,1]$, ta luôn có: $tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b)$†

ii) f được gọi là lõm nếu:

$\forall a,b \in I$ và $\forall t \in [0,1]$, ta luôn có: $tf(a) + (1-t)f(b) \leq f(ta + (1-t)b)$



Hình 5.2

Định lý 5.2.5: Cho f là hàm số xác định, liên tục trong một khoảng I, có đạo hàm cấp hai f'' trong I.

i) Nếu $f'' > 0$ trong I thì với $a < b$, $a,b \in I$, hàm số lồi trên $[a,b]$

ii) Nếu $f'' < 0$ trong I thì với $a < b$, $a,b \in I$, hàm số lõm trên $[a,b]$

(+)*Chứng minh:*

i) Giả sử $f''(x) > 0$ trong I, đặt $g(t) = tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)$, ta có:

$$g'(t) = f(a) - f(b) - (a-b)f'(ta + (1 - t)b)$$

Theo định lý Lagrange, ta có $\exists c \in (a,b)$, hay $c = t_0a + (1 - t_0)b$ sao cho:

---

* Cần phân biệt cho sinh viên khái niệm hàm số lồi với khái niệm đường cong lồi đã được học ở phổ thông.

† Bất đẳng thức này thường được gọi là bất đẳng thức hàm lồi.

$f'(c) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, nghĩa là: $g'(t) = (a - b)[f'(t_0a + (1 - t_0)b) - f'(ta + (1 - t)b)]$

Ta có $(a - b) < 0$, mà $f''(x) > 0$, nên $f'(x)$ tăng trên (a,b) => $g'(t) \geq 0$ với $t \leq t_0$ và $g'(t) \leq 0$ với $t \geq 0$, vậy $g(t)$ không giảm trên $[0,t_0]$ và không tăng trên $[t_0,1]$, mặt khác $g(0) = g(1) = 0$, nghĩa là $g(t) > 0$ trong $(0,1)$, ta có đpcm ■.

ii) Chứng minh tương tự i)

6. Các bất đẳng thức lồi

Định lý 5.2.6 (bất đẳng thức Jensen): Cho f là hàm lồi trên $I = (a,b)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, khi đó:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

Định lý 5.2.7 (bất đẳng thức trung bình): Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geq 0$, thế thì:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i \leq \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Định lý 5.2.8: Cho $p, q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, khi đó:

i) $$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ (Bất đẳng thức Hölder)

ii) $$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (Bất đẳng thức Minkowski)

III Các lược đồ khảo sát hàm số

1. Hàm $y = f(x)$*

a) Miền xác định

* Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã được thực hiện khá nhiều trong chương trình phổ thông, ở đây chỉ nêu lại các bước, chọn một ví dụ minh họa, tránh sử dụng các hàm đa thức, phân thức dạng bậc nhất trên bậc nhất và bậc nhất trên bậc hai.

b) Chiều biến thiên: tìm khoảng tăng, giảm của hàm số

b) Cực trị (nếu có)

d) Tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có)

e) Tiệm cận (nếu có)

f) Bảng biến thiên

g) Vẽ đồ thị

<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

TXĐ: R

Ta có: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)^{3/2}}$, vậy

$$f'(x) > 0 \text{ (hàm đơn điệu tăng) với } x > -\frac{1}{2}$$

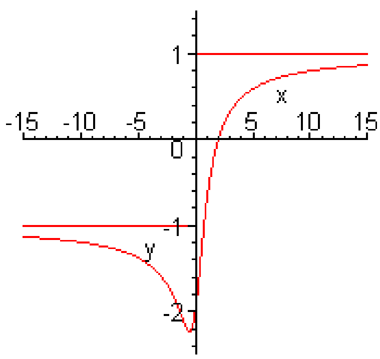
$$f'(x) < 0 \text{ (hàm đơn điệu giảm) với } x < -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ là điểm cực tiểu.}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = -1$, vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang y = 1 và y = -1

Bảng biến thiên

x		$-\frac{1}{2}$	
y'	+	0	-
y	-1 ↘	$-\sqrt{5}$	↗ 1



2. Phương trình tham số của đường cong $x = x(t)$, $y = y(t)$

a) Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của các hàm số $x = x(t)$, $y = y(t)$. Nhận xét các tính chất chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).

b) Xét chiều biến thiên của x, y theo t bằng cách xét dấu các đạo hàm $x'(t)$, $y'(t)$

c) Hệ số góc của đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm $x = x(t_0)$ và $y = y(t_0)$ là:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

c) Tìm các tiệm cận của đường cong

d) Vẽ đường cong

<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đường cong: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$

Ta có x, y xác định với mọi t, và y tuần hoàn với chu kỳ 2π

Do y là hàm chẵn theo biến t, x là hàm lẻ theo biến t, nên đường cong đối xứng qua trục Oy.

Ta có:

$x'(t) = a(1 - \cos t) \Rightarrow x'(t) \ge 0\ \forall t$, '=' $\Leftrightarrow t = 2k\pi$

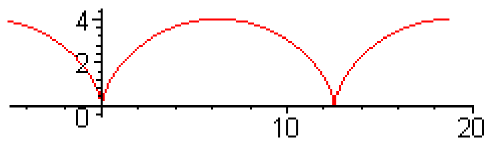
$y'(t) = a\sin t \Rightarrow y'(t) > 0$ khi $2k\pi < t < (2k + 1)\pi$, và $y'(t) < 0$ khi $(2k - 1)\pi < t < 2k\pi$, $y'(t) = 0$ khi $t = k\pi$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ khi $t = (2k + 1)\pi$ và $\frac{dy}{dx} = \infty$ khi $t = 2k\pi$.

Ta xét bảng biến thiên trong một chu kỳ $t = 0..2\pi$

Bảng biến thiên

t	0		π		2π
x'		+		+	
x	0	↗	$a\pi$	↗	$2a\pi$
y'		+		-	
y	0	↗	2a	↘	0



<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đường cong: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$, đường Axtroit.

Tham số hóa đường cong: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a > 0)$

Ta có x, y xác định với mọi t, tuần hoàn theo t với chu kỳ 2π

x là hàm chẵn, y là hàm lẻ, vậy đường cong đối xứng qua trục Ox

Với $t_1 = \pi - t_2$, ta có $x(t_1) = -x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, vậy đường cong đối xứng qua trục Oy.

Với $t_1 = \frac{\pi}{2} - t_2$, ta có $x(t_1) = y(t_2)$ và $y(t_1) = x(t_2)$, vậy đường cong đối xứng qua đường $y = x$.

Chúng ta chỉ cần khảo sát trên đoạn $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, rồi dựa vào các nhận xét trên để vẽ đồ thị.

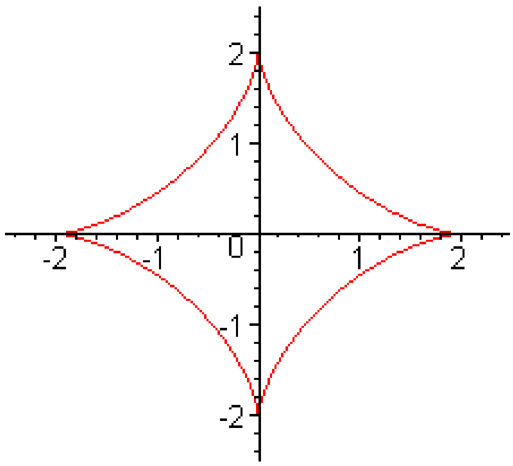
$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \le 0$, '=' khi $t = 0$

$y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t \ge 0$, '=' khi $t = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{tg}t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ tại $t = 0$ và $\frac{dy}{dx} = -1$ tại $t = \frac{\pi}{4}$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{\pi}{4}$
x'		-	
x	a	$\searrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y'		+	
y	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$



<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đường cong: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$, đường lá De'cartes.

Tham số hóa đường cong: $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$; $t \neq -1$

Ta có:

$x'(t) = 3a\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ => $x'(t) > 0$ khi $t < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x'(t) < 0$ khi $t > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x'(t) = 0$ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$y'(t) = 3a\dfrac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$ => $y'(t) > 0$ khi $t < \sqrt[3]{2}$, $y'(t) > 0$ khi $t > \sqrt[3]{2}$, $y'(t) = 0$ khi $t = \sqrt[3]{2}$

Ta có: $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$ và $\lim\limits_{t\to -1}(y(t)+x(t)) = 3a\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t^2+t}{1+t^3} = 3a\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t}{t^2-t+1} = -a$

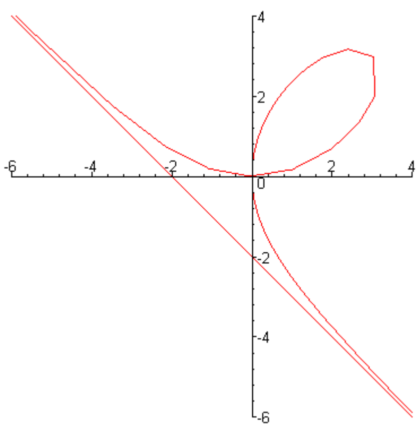
$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{3at}{1+t^3} = 0$, và $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{3at^2}{1+t^3} = 0$

Vậy đường cong có tiệm cận xiên y = -x - a

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$, vậy $\dfrac{dy}{dx} = 0$ tại $t = 0$, $t = \sqrt[3]{2}$ và $\dfrac{dy}{dx} = \infty$ tại $t = \infty$, $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'		+	‖	+		+	0	-		-	
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$a\sqrt[3]{4}$	↘	$a\sqrt[3]{2}$	↘	0
y'		-	‖	-	0	+		+		+	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$a\sqrt[3]{2}$	↗	$a\sqrt[3]{4}$	↘	0



3. Đường cong trong toạ độ cực

a) Hệ toạ độ cực

Trong mặt phẳng, chọn điểm O cố định, gọi là *cực* (*gốc cực*) và một véc tơ đơn vị $\overrightarrow{OP}$, tia mang $\overrightarrow{OP}$ gọi là *trục cực*. Hệ tọa độ xác định bởi cực và trục cực được gọi là *hệ tọa độ cực*. Vị trí của điểm M trong mặt phẳng được xác định bằng véc tơ $\overrightarrow{OM}$, nghĩa là xác định bởi *góc cực* $\varphi = \left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}\right)$ và *bán kính cực* $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$

b) Mối liên hệ giữa hệ tọa độ cực và hệ tọa độ De'cartes vuông góc:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ r \ge 0, \text{ và } r^2 = x^2 + y^2;\ \text{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

c) Hệ tọa độ cực suy rộng

Hệ tọa độ cực suy rộng là hệ tọa độ cực, trong đó có thể lấy:

$$r \le 0 \text{ và } \varphi \le 0, \text{ hoặc } \varphi \ge 2\pi.$$

c) Khảo sát đường cong trong hệ toạ độ cực $r = f(\varphi)$

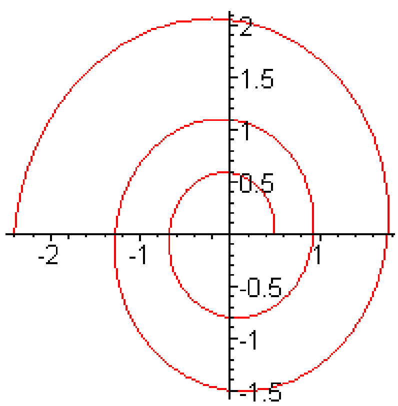
i) Tìm miền xác định của $f(\varphi)$

ii) Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị

iii) Lập bảng biến thiên, xét sự biến thiên của $f(\varphi)$

iv) Đặt V là góc giữa $\overrightarrow{OM}$ và véc tơ chỉ phương tiếp tuyến của đường cong, thì:

$$\text{tgV} = \frac{r}{r'}$$



Ví dụ: Khảo sát và vẽ đường cong $r = ae^{b\varphi}$ (a, b > 0), đường xoắn ốc logarit

r xác định với mọi φ, đơn điệu tăng theo φ:

$\varphi = 0 \Rightarrow r = a$, $\lim\limits_{\varphi\to+\infty} r = +\infty$, $\lim\limits_{\varphi\to-\infty} r = 0$.

$\text{tgV} = \frac{1}{a}$, góc giữa tiếp tuyến và bán kính cực không đổi.

<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đường cong r = asin3φ (a > 0), đường hoa hồng ba cánh

r là hàm tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$, r là hàm lẻ theo φ vì thế chỉ cần khảo sát trên đoạn

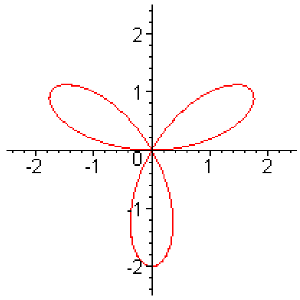
$[0, \frac{\pi}{3}]$.

$r' = 3a\cos 3\varphi \Rightarrow r' = 0$ khi $\varphi = \frac{\pi}{6}$

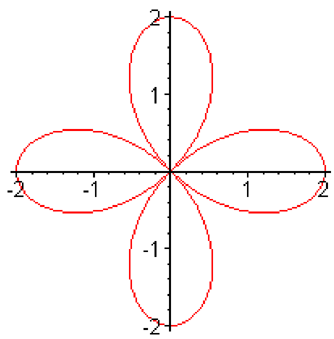
$\text{tgV} = \frac{\text{tg}3\varphi}{3}$

Bảng biến thiên

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'	$3a$	+	0	-	$-3a$
r	0	↗	a	↘	0
tgV	0		∞		0

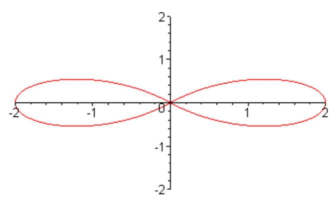


<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đường cong r = acos2φ (a > 0)



Thực hiện các bước tương tự như trên, với chú ý, hàm tuần hoàn chu kỳ π, r là hàm lẻ theo φ, $r(\varphi) = -r(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Ta có đường cong:

Chú ý: Nếu xét đường cong trong hệ tọa độ cực thường (r ≥ 0), thì r chỉ xác định đối với $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ và $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$, ta được đường cong:



<u>Ví dụ:</u> Khảo sát và vẽ đường cong r = 2a(1 + cosφ) (a > 0)

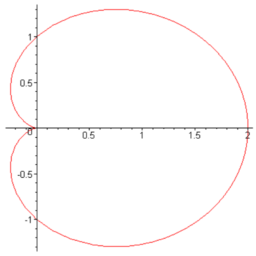
r xác định với mọi φ, tuần hoàn với chu kỳ 2π, r là hàm chẵn, ta chỉ cần khảo sát trên [0,π].

$r' = -2a\sin\varphi$, $r' = 0$ khi $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi$

$\text{tgV} = -\text{cotg}\frac{\varphi}{2}$, $\text{tgV} = -\infty$ khi $\varphi = 0$, $\text{tgV} = 0$ khi $\varphi = \pi$

Bảng biến thiên

φ	0		π
r'	0	$-$	0
r	$4a$	$\searrow$	0
tgV	$-\infty$		0



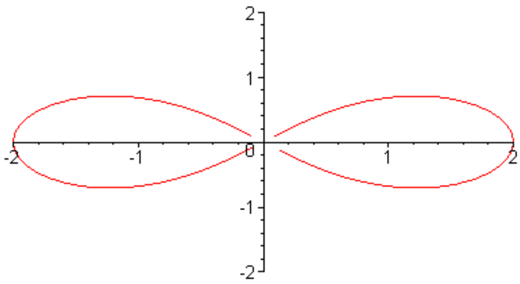
Ví dụ: Khảo sát và vẽ đường cong $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ $(a > 0)$

Ta có hàm $a^2\cos 2\varphi$ tuần hoàn với chu kỳ π, mặt khác đường cong sẽ xác định nếu $\cos 2\varphi \geq 0$, nghĩa là $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, chúng ta cũng chỉ xét với $r \geq 0$ ($r \leq 0$ tương ứng với việc quay đường cong một góc π), nghĩa là:

$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $r' = \frac{-a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $r' = 0$ khi $\varphi = 0$, $tgV = -\cot g\varphi$, $tgV = \infty$ khi $\varphi = 0$.

Bảng biến thiên

φ	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
r'		$+$	0	$-$	0
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
tgV	1		∞		-1



C. Bài tập

1. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x-\operatorname{tg}x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{x}}{\operatorname{tg}x-x}$ g) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$ h) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x}-e^{a}}{x-a}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$

n) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot gx-1}{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{1-\cos x}$

r) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x-x+1}$ s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\cot g\pi x}$ t) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(x+1-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$ u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$

2. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{-1}{x^2}}x^{-100}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi - 2\operatorname{arctg}x)\ln x]$ c) $\lim\limits_{x\to e}\left[(\ln x-1)\ln|x-e|\right]$

3. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot gx-\dfrac{1}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$

4. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\text{tg}x)^{2x-\pi}$ i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tg}x}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\text{arctg}x}{\pi}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$ m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\text{tg}x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ o) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\arccos x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x}}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}(\arccos x)^{\frac{1}{x^2}}$ q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\text{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ r) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ s) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\text{arctg}^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

5. Viết khai triển Mac-Laurin hàm số f(x)

a) $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ đến x^2 b) $\sqrt{1-2x+x^2}$ - $\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ đến x^3

c) tgx đến x^3 d) e^{2x-x^2} đến x^5 e) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ đến x^4 f) $x(e^x-1)^{-1}$ đến x^4

g) $\sqrt[3]{\sin x^3}$ đến x^{13} h) lncosx đến x^6 i) sin(sinx) đến x^3 j) $\ln\frac{\sin x}{x}$ đến x^6

6. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

7. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[3x - x^2\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot gx\right)$

8. Xác định a,b sao cho biểu thức sau có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

9. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số y = f(x) sau

a) $x^3 + x$ b) arctgx - x c) x + |sin2x|

10. Chứng minh bất đẳng thức

a) $2x\text{arctg}x \geq \ln(1 + x^2)\ \forall x \in R$ b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x\ \ \forall\ x \geq 0$

11. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ b) $y = x - \ln(1 + x)$ c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

d) $y = (x - 2)^{2/3}(2x + 1)$ e) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ f) $y = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$

g) $y = x^2\ln x$ h) $y = \frac{x^2 - 2\text{arctg}x^2}{2}$ i) $y = x^2 + 2\text{arccotg}x^2$

12. Tìm tiệm cận của các hàm số sau

a) x^2e^{-x} b) $x\lg\left(\frac{1}{x} + 10\right)$ c) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ d) x^3e^x e) $\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$

13. Tìm cực trị và tiệm cận của các hàm số sau

a) $y = x + \text{arccotg}2x$ b) $y = x^2e^{-x}$ c) $y = \frac{\ln x}{x}$

d) $y = e^x\ln x$ e) $y = x - \text{arctg}2x$ f) $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$

14. Giả sử f là hàm lồi trên đoạn [a,b]. Chứng minh rằng $\forall c \in (a,b)$, ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

15. Cho x, y > 0, chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ b) $\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}$ c) $x\ln x + y\ln y \geq (x + y)\ln\frac{x+y}{2}$

16. Tìm tiệm cận các đường cong sau

a) $x = \frac{3t}{4 - t^2}$ $y = \frac{2t^2}{4 - t^2}$ b) $x = \frac{t^2}{t - 1}$ $y = \frac{t}{t^2 - 1}$

c) $x = t^3 - 3\pi$ $y = t^3 - 6\ \text{arctg}t$ d) $x = t$ $y = t + 2\text{arctg}t$

17. Tính y'_x và y''_{xx} biết $x = t\sin 2t$ $\quad y = t + \cos t$

d) $x = a\cos t$ $\quad y = a\sin t$ $\qquad$ e) $x = a(t - \sin t)$ $\quad y = a(1-\cos t)$

f) $x = a(t - \sin t)$ $\quad y = a(1 - \cos t)$ $\qquad$ g) $x = t^3 + 3t + 1$ $\quad y = t^3 - 3t + 1$

18. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số y = f(x) với f(x) sau

a) $\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$ b) $\dfrac{x^4+8}{x^3+1}$ c) $\dfrac{1}{x} + 4x^2$ d) $x^2\ln x$ e) $\sin^2 x$ f) $x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ g) $\dfrac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$

h) $\arcsin(\cos x)$ $\quad$ i) $\arccos(\cos x)$ $\quad$ j) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$ $\quad$ k) $\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

19. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $x = \dfrac{t^2}{1-t}$ $\quad y = \dfrac{t}{t^2-1}$ $\qquad$ b) $x = t + e^{-t}$ $\quad y = 2t + e^{-2t}$ $\qquad$ c) $x = 2t - t^2$ $\quad y = 3t - t^3$

d) $x = 2a\cos t - a\cos 2t$ $\quad y = 2a\sin t - a\sin 2t$

e) $x = at - h\sin t$ $\quad y = a - h\cos t$ $(0 < h < a)$

f) $x = at - a\cos 2t$ $\quad y = 2a\sin t - a\sin 2t$ $\qquad$ g) $x = te^t$ $\quad y = te^{-t}$

20. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $x^2 + y^2 = x^4 + x^4$ $\qquad$ b) $x^2y^2 = x^3 - y^3$ $\qquad$ c) $x^2 - xy + y^2 = 1$

21. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau trong hệ toạ độ cực

a) $r = a + b\cos\varphi$ $(0 < a \le b)$ $\qquad$ b) $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a > 0)$ $\qquad$ c) $r = a(1 - \cos\varphi)$

d) $r = \varphi$ $\qquad$ e) $r = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ $\qquad$ f) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$

g) $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ $\qquad$ h) $r = a\cos 4\varphi$ $\qquad$ i) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$

Tuần VI. Nguyên hàm và tích phân bất định

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Nguyên hàm và tích phân bất định.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các khái niệm về nguyên hàm, họ nguyên hàm, tích phân bất định, bảng các tích phân các hàm số thông dụng, các quy tắc tính tích phân bất định: tích phân từng phần, đổi biến số, tích phân các hàm phân thức hữu tỷ, vô tỷ, lượng giác, phương pháp đổi biến Euler.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, liên tục, đạo hàm của hàm số.

B. Lý thuyết*

I Định nghĩa

Định nghĩa 6.1.1: Cho f(x) xác định trong (a,b), F(x) xác định trong (a,b) gọi là nguyên hàm của f(x) nếu F(x) khả vi trong (a,b) và F'(x) = f(x) $\forall x \in (a,b)$.

Định lý 6.1.1: Giả sử F(x) khả vi trong (a,b), F(x) là nguyên hàm của f(x) $\forall x \in (a,b)$. Khi đó:

i) $\forall$ hằng số C, F(x) + C cũng là nguyên hàm của f(x) $\forall x \in (a,b)$.

ii) Ngược lại, mọi nguyên hàm của f(x) $\forall x \in (a,b)$ đều có dạng F(x) + C.

Họ các nguyên hàm của f(x) có dạng F(x) + C với C là một hằng số tuỳ ý được gọi là tích phân bất định của f(x), $x \in (a,b)$, ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Ký hiệu $\int$ là dấu tích phân, x là biến lấy tích phân, f(x) là hàm số lấy tích phân, f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân.

II Tính chất

Mệnh đề 6.2.1: Nếu F(x), G(x) là nguyên hàm của f(x) và g(x) tương ứng, thì aF(x), bG(x) và F(x) + G(x) là nguyên hàm của af(x), bg(x) và f(x) + g(x) tương ứng.

Định lý 6.2.2: Mọi hàm số f(x) xác định, liên tục trong (a,b) thì có nguyên hàm trong khoảng đó.

1. Đổi biến

Nếu $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì $\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$

III Nguyên hàm các hàm thông dụng

a) $\int 0dx = C$ b) $\int 1dx = x + C$ c) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$

d) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ e) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

---

* Nguyên hàm và họ nguyên hàm đã được học trong chương trình phổ thông, phần này chỉ mang tính chất hệ thống lại về các công thức cơ bản và các phương pháp tính tích phân.

g) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ h) $\int e^x dx = e^x + C$ i) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

j) $\int \cos x dx = \sin x + C$ k) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg}x + C$ l) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C$

m) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}, a \neq 0$ n) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, a \neq 0$

o) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a \neq 0$ p) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) + C$

q) $\int \sqrt{x^2 + \beta}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + \beta} + \beta\ln|x + \sqrt{x^2 + \beta}|) + C$

r) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

<u>Ví dụ:</u> $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx = \int x^{7/8}dx = \frac{8x^{15/8}}{15} + C$

$$\int \text{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int e^{-\cos^2 x}\sin 2x dx = \int e^{-\cos^2 x}2\sin x\cos x dx = \int e^{-\cos^2 x}d(-\cos^2 x) = e^{-\cos^2 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}\text{cotg}3x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x + c$$

$$\int \frac{xdx}{4 + x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{4 + x^4} = \frac{1}{4}\text{arctg}\frac{x^2}{2}$$

$$\int \frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = -\int 2^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x} = -\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2}$$

$$\int \frac{dx}{x\cos^2(1 + \ln x)} = \int \frac{d(\ln x + 1)}{\cos^2(\ln x + 1)} = \text{tg}(\ln x + 1) + C$$

IV Các phương pháp tính tích phân

1. Đổi biến

Mệnh đề 6.4.1: Nếu $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì $\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$, trong đó các hàm g(t), w(x), w'(x) được giả thiết là những hàm số liên tục.

Ví dụ: $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$, đặt $2^x = t \Rightarrow dt = d2^x = \ln 2.2^x dx$

$$\Rightarrow \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\arcsin t}{\ln 2} + C = \frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C$$

2. Tích phân từng phần

Mệnh đề 6.4.2: Nếu u, v là các hàm số khả vi có các đạo hàm u', v' liên tục thì:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ví dụ: $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a_2I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}I_n$$

Đặc biệt: Cho $P_n(x)$ là một đa thức bậc n đối với biến x.

a) $\int P_n(x)\sin axdx$ (hoặc trường hợp $\int P_n(x)\cos axdx$ cũng tương tự)

Đặt $P_n(x) = u$, $\sin axdx = dv$

$$\Rightarrow \int P_n(x)\sin axdx = -\frac{1}{a}Q_{n-1}(x)\cos ax + \frac{1}{a}\int Q_{n-1}(x)\cos axdx$$

(trong đó $Q_{n-1}(x)$ là một đa thức bậc n-1)

Ta thấy sau mỗi lần lấy tích phân từng phần theo quy tắc phần đa thức đặt là u, tích phần lượng giác và dx đặt là dv, bậc của đa thức giảm đi một, sin đổi thành cos và cos đổi thành sin. Ta cứ tiếp tục quá trình này cho đến khi phần đa thức trở thành hằng số, tích phần còn lại là dễ tính.

Ví dụ: $\int (x^2 - 2x + 1)\sin 2x dx$, đặt x2 - 2x + 1 = u, sin2xdx = dv

$$\Rightarrow \int (x^2 - 2x + 1)\sin 2x dx = -\frac{(x^2 - 2x + 1)\cos 2x}{2} + \int (x-1)\cos 2x dx$$

$$= -\frac{(x^2 - 2x + 1)\cos 2x}{2} + \frac{(x-1)\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{(x^2 - 2x + 1)\cos 2x}{2} + \frac{(x-1)\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

b) $\int P_n(x)e^{ax}dx$, đặt $P_n(x) = u$, $e^{ax}dx = dv$

$$\Rightarrow \int P_n(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}Q_{n-1}(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int Q_{n-1}(x)e^{ax}dx$$

(trong đó $Q_{n-1}(x)$ là một đa thức bậc n-1)

Ta thấy sau mỗi lần lấy tích phân từng phần theo quy tắc phần đa thức đặt là u, tích phần hàm mũ và dx đặt là dv, bậc của đa thức giảm đi một, phần hàm mũ không thay đổi dạng. Ta cứ tiếp tục quá trình này cho đến khi phần đa thức trở thành hằng số, tích phần còn lại là dễ tính.

Ví dụ: $\int x^3e^{3x}dx = \frac{x^3e^{3x}}{3} - \int x^2e^{3x}dx = \frac{x^3e^{3x}}{3} - \frac{x^2e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$

$$= \frac{x^3e^{3x}}{3} - \frac{x^2e^{3x}}{3} + \frac{2xe^{3x}}{9} - \frac{2}{9}\int e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right) + C$$

c) $\int e^{ax}\sin bx dx$, đặt $e^{ax} = u$, sinbxdx = dv

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx$$, đặt $e^{ax} = u$, cosbxdx = dv

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx + C$$

Tương tự, ta cũng có: $\int e^{ax}\cos bxdx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(\text{bsinbx} + \text{acosbx}) + C$

Trong tính toán ở trên, chúng ta cũng có thể thực hiện đặt phần lượng giác là u, tích phần hàm mũ và dx là dv, tuy nhiên cách đặt ở lần thứ hai sẽ phải nhất quán với cách đặt ban đầu.

d) $\int R(x)\ln xdx$, trong đó R(x) là một hàm hữu tỷ.

Đặt lnx = u, R(x)dx = dv => $\int R(x)\ln xdx = S(x)\ln x - \int \dfrac{S(x)}{x}dx$, với S(x) là một hàm hữu tỷ, tích phân sau chúng ta tính theo tích phân hàm hữu tỷ, hoặc đa thức.

<u>Ví dụ:</u> $\int x^2\ln xdx$, đặt lnx = u, x2dx = dv => $v = \dfrac{x^3}{3}$

=> $\int x^2\ln xdx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^2}{3}dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$

e) $\int R(x)\text{arctg}xdx$ (hoặc $\int R(x)\text{arcotg}xdx$), trong đó R(x) là một hàm hữu tỷ.

Đặt arctgx = u, R(x)dx = dv => $\int R(x)\text{arctg}xdx = S(x)\text{arctg}x - \int \dfrac{S(x)}{1+x^2}dx$, với S(x) là một hàm hữu tỷ, tích phân sau chúng ta tính theo tích phân hàm hữu tỷ, hoặc đa thức.

<u>Ví dụ:</u> $\int x\,\text{arctg}xdx$, đặt arctgx = u, xdx = dv

=> $\int x\,\text{arctg}xdx = \dfrac{x^2\text{arctg}x}{2} - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2dx}{1+x^2} = \dfrac{x^2\text{arctg}x}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\text{arctg}x + C$

f) $\int R(x)\arcsin xdx$ (hoặc $\int R(x)\arccos xdx$), trong đó R(x) là một hàm vô tỷ.

Đặt arcsin = u, R(x)dx = dv => $\int R(x)\arcsin xdx = S(x)\arcsin x - \int \dfrac{S(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, với S(x) là một hàm hữu tỷ, tích phân sau chúng ta tính theo tích phân hàm hữu tỷ, hoặc đa thức.

<u>Ví dụ:</u> $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}dx$, đặt arcsinx = u, $\dfrac{dx}{x^2} = dv$ => $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}dx = -\dfrac{\arcsin x}{x} + \int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Để tính tích phân sau, đặt $\sqrt{1-x^2} = t \Rightarrow dt = \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + C = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}} + C$$

Vậy: $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\sqrt{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}} + C$

3. Tích phân hàm hữu tỷ

Ta có, giả sử $q - p^2/4 > 0$

a) $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \; (k \neq 1)$

c) $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}dt$ ($a = \sqrt{q-p^2/4}$, đổi biến $t = x + p/2$)

$$= \int \frac{Mtdt}{t^2+a^2} + \int \frac{(N-Mp/2)dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}(N - Mp/2)\text{arctg}\frac{t}{a} + C$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\text{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^m}dt$ ($a = \sqrt{q-p^2/4}$, đổi biến $t = x + p/2$)

$$= \int \frac{Mtdt}{(t^2+a^2)^m} + \int \frac{(N-Mp/2)dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Tích phân thứ nhất: $\displaystyle\int \frac{Mtdt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{M}{2(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + C$

Tích phân thứ hai có thể tính theo phương pháp tích phân từng phần như ở ví dụ trong phần trước.

Định lý 6.4.2: Mọi đa thức bậc n hệ số thực đều có thể phân tích thành các thừa số là nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai không có nghiệm thực.

Hệ quả: Mọi phân thức thực sự đều có thể phân tích thành các phân thức đơn giản

4. Tích phân hàm vô tỷ

a) $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$, $cd \neq 0$. Đặt $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, với k là bội chung nhỏ nhất của các chỉ số căn, đưa về dạng hữu tỉ với t. (R là hàm hữu tỉ)

Ví dụ: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$, đặt $\sqrt{2-x} = t \Rightarrow x = 2 - t^2$, $dx = -2tdt$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = -2\int(2-t^2)^2dt = -8t + \frac{8}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 = -8\sqrt{2-x} + \frac{8}{3}(2-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-x)^{5/2}$$

b) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ Đặt x = asint, hoặc x = acost

Ví dụ: $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$, đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \text{tg}t + C = \text{tg}(\arcsin x) + C$$

$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ Đặt x = atgt, hoặc x = acotgt

Ví dụ: $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$, đặt $x = \text{tg}t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{\sin t} = -\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t} = \ln\frac{1}{\sqrt{(1-\cos t)(1+\cos t)}} + C = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C$$

$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2}dx$ Đặt x = a/sint, hoặc x = a/cost

Ví dụ: $\int x^3\sqrt{x^2-4}dx$, đặt $x = 2/\sin t \Rightarrow dx = -\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt$

$$\Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-4}dx = -32\int\frac{\cos^2 t dt}{\sin^6 t} = 32\int \cot gt(1+\cot g^2 t)d\cot gt$$

$$= 16\text{cotg}^2 t + 8\text{cotg}^4 t + C = \frac{x^4}{2} + C$$

c) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ Đặt t = x + b/2a, đưa về dạng b

d) Tích phân dạng c có thể sử dụng phép thế Euler

i) a > 0, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$

<u>Ví dụ:</u> $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$, đặt $\sqrt{x^2 + x + 2} = x + t$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{1 - 2t} \Rightarrow dx = \frac{-2t^2 + 2t - 4}{(1 - 2t)^2} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \int \frac{2t^2 - 4}{(1 - 2t)^2} dt = \int \frac{1}{2} dt - \int \frac{dt}{1 - 2t} - \frac{7}{2} \int \frac{dt}{(1 - 2t)^2}$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln(1 - 2t) - \frac{7}{4 - 8t} + C$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 2} - x) + \frac{1}{2} \ln(1 - 2(\sqrt{x^2 + x + 2} - x)) - \frac{7}{4 - 8\sqrt{x^2 + x + 2} + 8x} + C$$

ii) c > 0, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$

<u>Ví dụ:</u> $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$, đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = tx + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 x^2 + 2tx + 1$

$$\Rightarrow x = \frac{2t - 1}{1 - t^2} \Rightarrow dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x + x^2}} = 2\int \frac{(2t - 1)^2 dt}{(1 - t^2)^3}$$

iii) x_0 là nghiệm tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$

<u>Ví dụ:</u> $\int \frac{xdx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$, đặt $\sqrt{3 - 2x - x^2} = t(x - 1) \Rightarrow (1 - x)(x + 3) = t^2(x - 1)^2$

$\Rightarrow t^2 = \dfrac{x+3}{1-x} \Rightarrow tdt = \dfrac{2dx}{(1-x)^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{6-2t^2}{(t^2+1)^2}dt = -2\int \frac{dt}{t^2+1} + 8\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = 2\text{arctg}t + \frac{4t}{t^2+1} + C$$

$$= 2\text{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}} + \sqrt{3-2x-x^2} + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Đặt $x - \alpha = 1/t$

f) $\int x^r(a+bx^p)^q dx$, với r, p , q là các số hữu tỉ

i) q nguyên, s là mẫu số chung của r, p, thế $x = t^s$

ii) $(r + 1)/p$ nguyên, s là mẫu số của q, thế $a + bx^p = t^s$

iii) $(r + 1)/p + q$ nguyên, s là mẫu số của q, thế $a/x^p + b = t^s$

Ví dụ: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$, đặt $t^3 = -\dfrac{1}{x} + 1 \Rightarrow 3t^2dt = \dfrac{1}{x^2}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \int 3t(t^3-1)dt = \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^2 + C = \frac{3}{5}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + C$$

5. Tích phân hàm lượng giác

a) Dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$, R là biểu thức hữu tỷ. Đặt $t = \text{tg}\dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow dt = (t^2 + 1)dx$; $\text{tg}x = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

Ví dụ: $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1}dx$, đặt $t = \text{tg}\dfrac{x}{2}$

$$=> \int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1}dx = \int \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}-1}\frac{dt}{1+t^2} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2(t^2+1)} = \int \frac{-2dt}{(t-1)^2} + \int \frac{2dt}{1+t^2} + \int \frac{4tdt}{1+t^2}$$

$$= \frac{2}{1-t} + 2\text{arctgt} + 2\ln(1+t^2) + C = \frac{2}{1-\text{tg}\frac{x}{2}} + x + 2\ln\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

b) Đặc biệt

i) Nếu R lẻ đối với sin thì đặt cosx = t

ii) Nếu R lẻ đối với cos thì đặt sinx = t

iii) Nếu R là chẵn đối với sin, cos thì đặt tgx = t

c) $\int \sin^m x\cos^n x dx$

i) Nếu m, n có ít nhất một số lẻ, hoặc m, n đều chẵn và có một số âm thì đặt như trường hợp b

<u>Ví dụ:</u> $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} = \ln\sqrt{1-\sin^2 x} + C$

$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$, đặt tgx = t => dt = $(t^2 + 1)dx$

$$=> \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int (t^2+1)^2 dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t + C = \frac{\text{tg}^5 x}{5} + \frac{2\text{tg}^3 x}{3} + \text{tgx} + C$$

ii) Nếu m, n đều chẵn và dương thì hạ bậc

$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ $\sin x\cos x = \sin 2x/2$

<u>Ví dụ:</u> $\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int \cos^2 2x dx$

$$= \frac{1}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{4}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{3}{4}x - \sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + C$$

d) Dạng tích $\int \cos ax \cos bx dx$; $\int \sin ax \cos bx dx$; $\int \sin ax \sin bx dx$

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

C. Bài tập

1. Tính các tích phân

a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$ b) $\int\frac{(1-x^2)}{x\sqrt{x}}dx$ c) $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$

2. Tính các tích phân

a) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ b) $\int\frac{x^3dx}{x^8-2}$ c) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ d) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ e) $\int\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$ f) $\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $\int\cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$ h) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+9}}$ i) $\int tg^5 xdx$ j) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^3 x}}$ k) $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ l) $\int\sin^5 xdx$

m) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ n) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos 2x}}$ o) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ p) $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$ q) $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}$ r) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

s) $\int\cot g^2 xdx$ t) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ u) $\int\frac{dx}{\sin^5 x}$ v) $\int\frac{\sin^7 xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ x) $\int\frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ y) $\int\frac{xdx}{x^8-1}$

3. Tính các tích phân sau

a) $\int\frac{dx}{1+e^x}$ b) $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^6 x}$ c) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ d) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$ f) $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$

g) $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$ h) $\int\left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4dx$ i) $\int\frac{1+\sin x}{\sin^2 x}dx$ j) $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$ k) $\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$

l) $\int\frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$ m) $\int\frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ n) $\int x^2\sqrt{9-x^6}dx$ o) $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$ p) $\int\frac{(1+\sqrt{x})dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

q) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ r) $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$ s) $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ t) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$ u) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$

v) $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$ x) $\int\frac{dx}{5+4x-x^2}$ y) $\int\cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$ z) $\int\sin^5 x\cos^5 xdx$

4. Tính các tích phân

a) $\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$ b) $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$ c) $\int\frac{\sqrt[3]{\mathrm{arc}\cot gx}}{1+x^2}dx$ d) $\int\frac{\sin(a+b\ln x)}{x}dx$

e) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ f) $\int \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{1-x^2}$ g) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ h) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

i) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ j) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ k) $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$ l) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

m) $\int \frac{2xdx}{x^4+3x^2+2}$ n) $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2+1}$ o) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$ p) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$

q) $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ r) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ s) $\int \frac{x^3 dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$ t) $\int \frac{\operatorname{tg}x - 1 + \ln \operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx$

u) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$ v) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ x) $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$

5. Tính các tích phân

a) $\int \frac{xdx}{(1-x)^{12}}$ b) $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}$ c) $\int \frac{\ln 2xdx}{x \ln 4x}$ d) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+ex}}$ g) $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$

h) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$ j) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$ k) $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^{10}}$ m) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+a^x}}$ n) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$

o) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ p) $\int \frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$ q) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ r) $\int \frac{x^4dx}{(x-1)^4}$ s) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^5}$

t) $\int \frac{(1-x^7)dx}{x(1+x^7)}$ u) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}$ v) $\int \frac{(6-x^2)dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ x) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$ y) $\int x(1-x)^{10}dx$

6. Tính các tích phân

a) $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ c) $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$ d) $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}dx$ e) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$

f) $\int \cos^2\sqrt{x}dx$ g) $\int x\cos\sqrt{x}dx$ h) $\int x\sqrt{2-5x}dx$ i) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ j) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx$

k) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ l) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ m) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}$ n) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

o) $\int \frac{x+\sqrt{2x-3}}{x-1}dx$ p) $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$ q) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$ r) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

s) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ t) $\int x^5(2-5x^2)^{2/3}dx$ u) $\int (x+1)\sqrt{1-x^2}dx$

v) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+1}}$ x) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

7. Tính các tích phân

a) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$ b) $\int \frac{\ln^2 xdx}{x^2\sqrt{x}}$ c) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $\int x\sin^3 xdx$ e) $\int x^7e^{-x^2}dx$ f) $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$

g) $\int \sin(\ln x)dx$ h) $\int \cos^3\sqrt{x}dx$ i) $\int \text{arctg}\sqrt{x}dx$ j) $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ k) $\int x^3\text{arctg}xdx$

l) $\int x\cos\sqrt{x}dx$ m) $\int x\sin\sqrt{x}dx$ n) $\int \sin(\ln x)dx$ o) $\int (x^2-1)e^{2x}dx$ p) $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$

q) $\int e^{-x}\cos 2xdx$ r) $\int x\arcsin xdx$ s) $\int \frac{xe^{\text{arctg}x}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ t) $\int (x+1)^2e^xdx$ u) $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

8. Tính các tích phân sau

a) $\int \frac{\arccos x}{x^2}dx$ b) $\int (\arcsin x)^2dx$ c) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$ d) $\int \text{arctg}\sqrt{x}dx$ e) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$

f) $\int x\sin\sqrt{x}dx$ g) $\int e^{ax}\sin bxdx$ h) $\int x\text{tg}^2xdx$ i) $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$ j) $\int e^{2x}\sin^2 xdx$

k) $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$ l) $\int \cos^2\ln xdx$ m) $\int x^2\arcsin xdx$ n) $\int e^{x-1}\sin xdx$ o) $\int e^{5x}\cos 3xdx$

p) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ q) $\int \frac{x\arccos xdx}{(1-x^2)^{3/2}}$ r) $\int \frac{x^2\text{arctg}x}{1+x^2}dx$ s) $\int e^{\text{arctg}x}\frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$ t) $\int (2x+3)e^{3x}dx$

u) $\int (x^2+1)\ln xdx$ v) $\int \sin(1+\ln x)dx$ x) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$ y) $\int x^3\ln(x^2+3)dx$

9. Tính các tích phân

a) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$ b) $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$ c) $\int x^2\arccos xdx$ d) $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$

e) $\int (x-x^2)\sin x dx$ f) $\int (1-x^2)\cos 2x dx$ g) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$ h) $\int (x^2+1)\ln x dx$

i) $\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$ j) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$ k) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) dx$

l) $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx$ m) $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ n) $\int \ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx$ b) $\int \frac{dx}{x^4+8x}$ c) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$ d) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$ e) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx$ f) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$

g) $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$ h) $\int \frac{x^4 dx}{(x-1)^4}$ i) $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}$ j) $\int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx$ k) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$ l) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

m) $\int \frac{dx}{x^3-1}$ n) $\int \frac{dx}{x^4+1}$ o) $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$ p) $\int \frac{x^8 dx}{(x^3-1)^3}$ q) $\int \frac{x^8 dx}{(x^4-1)^3}$ r) $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$

s) $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2}$ t) $\int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx$ u) $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}$ v) $\int \frac{(x^3-2x)}{(x^2+1)^2} dx$ x) $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$

11. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$ b) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}$ c) $\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}$ d) $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$ e) $\int \frac{(3x+2)dx}{2x^2+x-3}$

f) $\int \frac{(2x^3+3x)dx}{x^4+x^2+1}$ g) $\int \frac{dx}{x(x^5+2)^2}$ h) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ i) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}$ j) $\int \frac{(1-x^7)dx}{x(1+x^7)}$

k) $\int \frac{(2x-1)^4 dx}{(x+1)^6}$ l) $\int \frac{(x+2)^2 dx}{x(x-1)^2}$ m) $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$ n) $\int \frac{(x^3+x^2)dx}{x^2+x+1}$

o) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}$ p) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}$ q) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ r) $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$

s) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$ t) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$ u) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$ v) $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$

12. Tính các tích phân

a) $\int \frac{(x^4+1)dx}{(x-1)(x^4-1)}$ b) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3(x+3)}$ c) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x}$ d) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+x^2+1}$

e) $\int \frac{x^5+3x^3-x}{(x^2+1)^2}dx$ f) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$ g) $\int \frac{x^2dx}{(x^2+6x+8)^2}$ h) $\int \frac{(3x^2+x+3)dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$

i) $\int \frac{2xdx}{x^4+3x^2+2}$ j) $\int \frac{dx}{x^4-2x^3+2x-1}$ k) $\int \frac{(x+1)dx}{5x^2+2x+1}$ l) $\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$

m) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$ n) $\int \frac{(5x+3)dx}{x^2+10x+29}$ o) $\int \frac{(x^2+2x-1)dx}{(x-1)(x^2+1)}$ p) $\int \frac{(5x-1)dx}{(x+2)^2(x^2-1)}$

q) $\int \frac{x^5+3x^3-x}{(x^2+1)^2}dx$ r) $\int \frac{(x^4-3)dx}{x(x^8+3x^4+2)}$ s) $\int \frac{2x^2+4x+3}{x^4+x^2}dx$ t) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$

u) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^2}$ v) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ x) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

13. Tính các tích phân

a) $\int \frac{(x^2+2x+6)dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ b) $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+2x^2+x}$ c) $\int \frac{(2x^2+x+3)dx}{x^3+3x^2+3x+2}$

d) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$ e) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$ f) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

g) $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$ h) $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$ i) $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$

j) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+x^3+x^2+x+1}$ k) $\int \frac{(2x^2+x+3)dx}{x^3+3x^2+3x+2}$ l) $\int \frac{(x^5-x^2-1)dx}{x^5+x^4+x^3+x+1}$

m) $\int \frac{(x^3-x)dx}{x^6+4x^4+4x^2+1}$ n) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}$ o) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+x^3+x^2+x+1}$

p) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$ q) $\int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}$

r) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$ s) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

14. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ c) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$ e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ f) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

g) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^3(1-x)}}$ h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ i) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}dx}{x}$ j) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$ k) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

l) $\int \sqrt{4x-x^2}dx$ m) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ n) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ o) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$ p) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

q) $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}dx$ r) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$ s) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$ t) $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$ u) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$

15. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}dx}{x+\sqrt[3]{2+x}}$ b) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}$ c) $\int \frac{\sqrt{x-1}-1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$ d) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ e) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

f) $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$ g) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ h) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^3}}$ i) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$ j) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$

k) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ l) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$ m) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$ n) $\int \frac{(x^2+4x)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ o) $\int \frac{x^3 dx}{(a-bx^2)^{3/2}}$

p) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$ q) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ r) $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$ s) $\int \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt[4]{(x-1)^3}}}$ t) $\int \frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$

u) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$ v) $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx$ x) $\int \sqrt[3]{ax-x^3}dx$ y) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$ z) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

16. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ b) $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ c) $\int \frac{x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ d) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}$ g) $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$ h) $\int \frac{(\sqrt{x+1}+2)dx}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$

i) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$ j) $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx\ (a>0)$ k) $\int \frac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$ l) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+4x-3}}$

m) $\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$ n) $\int \frac{x+\sqrt{2x-3}}{x-1}dx$ o) $\int \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^2}dx$ p) $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

q) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ r) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}-1)^3}$ s) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ t) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

u) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$ v) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$ x) $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ y) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$

17. Tính các tích phân

a) $\int \sqrt{3-4x+4x^2}dx$ b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ c) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$ d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ f) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x-x^2}}$ g) $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

i) $\int \sqrt{5-4x-x^2}dx$ j) $\int \sqrt{x^2-x+1}dx$ k) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ l) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

m) $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}\right)}$ n) $\int \frac{x^5dx}{(a-x^2)\sqrt{a-x^2}}$ o) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x-x^2}}$ p) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

q) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ r) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$ s) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$ t) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

u) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$ v) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$ x) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x-1}}$ y) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$

18. Tính các tích phân

a) $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$ b) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

d) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$ f) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

g) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$ h) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ i) $\int \frac{xdx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}$

j) $\int \frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ k) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$ l) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

19. Tính các tích phân

a) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ b) $\int \cos^6 xdx$ c) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ d) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$ e) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ f) $\int \frac{dx}{4+3tgx}$

g) $\int \cot g^6 xdx$ h) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ i) $\int \frac{dx}{\sin x-\sin a}$ j) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ k) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$

l) $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{\cos x}}$ m) $\int \frac{\sin^7 xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ n) $\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x}$ o) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$ p) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$

q) $\int \sqrt{tgx}dx$ r) $\int \frac{dx}{tg^2x+4tgx}$ s) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$ t) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$ u) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$

v) $\int \frac{dx}{\cos 3x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ x) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$ y) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^4}$ z) $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

20. Tính các tích phân

a) $\int \frac{(\sin x-\cos)dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$ b) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x+\sin x}$ c) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ d) $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

e) $\int \cot g^2 x\cos xdx$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$ g) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$ h) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$

i) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sqrt[3]{\cos x}+\sin x}$ j) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ k) $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$ l) $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin 2x+2\sin x}$

m) $\int \frac{\sin x\cos xdx}{\sin x+\cos x}$ n) $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin x}}$ o) $\int tgxtg(x+a)dx$ p) $\int \sin x\sin(x+y)dx$

q) $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 xdx}{\sin^8 x+\cos^8 x}$ r) $\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{\sin x+2\cos x}$ s) $\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos^2 x\sqrt{tgx}}$ t) $\int \frac{\sin xdx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$

u) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$ v) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^4}$ x) $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^2 x}$ y) $\int \frac{dx}{\cos^5 x-\sin^5 x}$

21. Tính các tích phân

a) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$ b) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ c) $\int \sin 3x\sin xdx$ d) $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

e) $\int \frac{\cos^3 xdx}{4\sin^2 x-1}$ f) $\int \frac{\sin xdx}{1+\sin x+\cos x}$ g) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$ h) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$

i) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$ j) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$ k) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ l) $\int \frac{(2+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}$

m) $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$ n) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$ o) $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ p) $\int \frac{\cos^3+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx$

q) $\int \frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx$ r) $\int \frac{(2\sin x-\cos x)dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$ s) $\int \frac{(\sin x-2\cos x)dx}{1+4\sin x\cos x}$

t) $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$ u) $\int \sin^3 2x\cos^2 3xdx$ v) $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x+\sin x)^2}$

x) $\int \frac{(2\sin x-\sin 2x)dx}{\sin^3 x+(1-\cos x)^3}$ y) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x+5}$ z) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$

22. Tính các tích phân

a) $\int \cos x\cos 2x\cos 3xdx$ b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x-\cos^2 x}$ b) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

c) $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^3 x-\sin^2 x-1}$ d) $\int \frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}dx$ e) $\int \frac{\sin xdx}{\cos x+\sin x+\sqrt{2}}$

f) $\int \frac{(2\sin x+3\cos x)dx}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}$ g) $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x+\sin x)^2}$ h) $\int \frac{(2\sin x-\sin 2x)dx}{\sin^3 x+(1-\cos x)^3}$

i) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ j) $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+2}$ k) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$

l) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ m) $\int \cos x\cos 3x\cos 5xdx$ n) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

o) $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$ p) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x-5\sin^2 x}$

q) $\int \dfrac{dx}{\sin x\cos x\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}}$

23. Tính các tích phân

a) $\int \dfrac{\ln x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ b) $\int \dfrac{\mathrm{arctg} e^x}{e^x}dx$ c) $\int \dfrac{\arcsin e^x}{e^x}dx$ d) $\int x\mathrm{tg}^2 x dx$ e) $\int \dfrac{x^4 \mathrm{arctg} x}{1+x^2}dx$

f) $\int \dfrac{x^2 e^x dx}{(x+2)^2}$ g) $\int \dfrac{x\mathrm{arctg} x dx}{(1+x^2)^2}$ h) $\int \dfrac{x+\cos x}{1+\sin x}dx$ i) $\int \dfrac{\mathrm{arctg} e^{x/2} dx}{e^{x/2}(1+e^x)}$

j) $\int \dfrac{\cos 8x-\cos 7x}{1+2\cos 5x}dx$ k) $\int \dfrac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$ l) $\int \dfrac{\cos x dx}{\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}}$

m) $\int \dfrac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ n) $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx$

o) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$ p) $\int \dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$

24. Tính các tích phân

a) $\int x^n e^x dx$ b) $\int \sin^n x dx$ c) $\int \dfrac{dx}{\cos^n x}$ d) $\int \ln^n x dx$

e) $\int \mathrm{tg}^n x dx$ f) $\int x\ln^n x dx$ g) $\int x^n \sin x dx$

h) $\int \dfrac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ i) $\int \dfrac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$ j) $\int \sin^{n-1} x\sin(n+1)x dx$

Tuần VII. Tích phân xác định

A. Tổng quan

1. Nội dung vắn tắt: Tích phân xác định*

2. Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên các kiến thức về tích phân xác định: định nghĩa, ý nghĩa hình học, cơ học, tiêu chuẩn khả tích; các tính chất của tích phân xác định; công thức đạo hàm theo cận; công thức Newton-Leibnitz; các phương pháp tính: tích phân từng phần, đổi biến số.

3. Các kiến thức cần có trước: Các kiến thức đã học ở phổ thông về tích phân, các kiến thức về hàm số, liên tục, đạo hàm, nguyên hàm, họ nguyên hàm, tích phân bất định.

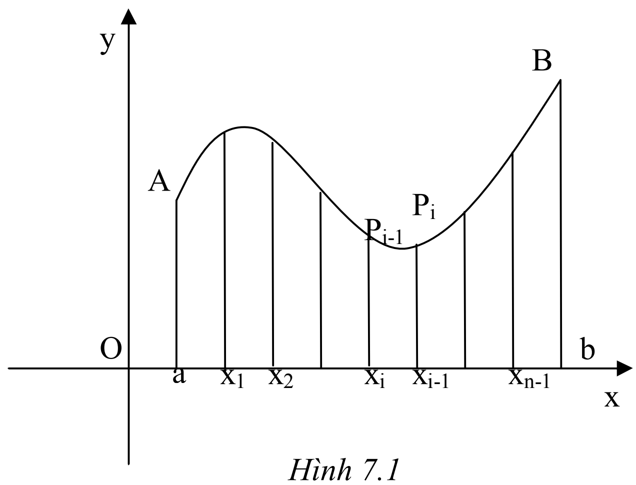
* Tích phân xác định đã được học ở chương trình phổ thông. Phần này chỉ mang tính chất hệ thống lại, cung cấp thêm về tiêu chuẩn khả tích, công thức đạo hàm theo cận.

B. Lý thuyết

I Định nghĩa tích phân xác định

1. Bài toán diện tích hình thang cong

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên khoảng đóng [a,b], giả sử f(x) không âm trên [a,b]. Xét hình thang cong AabB là hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x) (trên [a,b]), các đường thẳng x = a; x = b và Ox. Bài toán đặt ra là tìm cách tính diện tích S của hình thang cong AaaB.



Hình 7.1

Ta chia [a,b] thành n đoạn nhỏ nhỏ bởi các điểm chia: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Ta gọi cách chia đó là một *phân hoạch* $\mathbb{P}$.

Từ các điểm chia x_i ($i = \overline{0,n}$), dựng các đường $x = x_i$ cắt đồ thị của f(x) tại các điểm P_i. Xét các hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$, có đáy: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Trong mỗi đoạn $[x_{i-1},x_i]$, chọn điểm ξ_i tuỳ ý. Ta có $f(\xi_i)\Delta x_i$ là xấp xỉ với diện tích của hình thang cong $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ ($i = \overline{0,n}$). Như thế, diện tích $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Tổng này được gọi là *tổng tích phân* của hàm f ứng với phân hoạch $\mathbb{P}$.

Dựa vào các giả thiết của hàm f, người ta đã chứng minh được rằng:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

nghĩa là diện tích của hình thang cong AabB bằng giới hạn của tổng tích phân khi số điểm chia ra vô cùng sao cho độ dài các đoạn tiến tới 0. Người ta cũng chứng minh được, giới hạn này không phụ thuộc cách chia đoạn [a,b] cũng như cách chọn các điểm trong ξ_i.

2. Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 7.1.1: Cho hàm số f(x) xác định, và bị chặn trên đoạn [a,b]. Chia [a,b] thành từng đoạn nhỏ bởi các điểm:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Với mỗi $i = \overline{1,n}$, đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, trong mỗi đoạn $[x_{i-1},x_i]$, chọn điểm ξ_i tuỳ ý. Nếu $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ tồn tại hữu hạn và bằng một giá trị I nào đó, đồng thời giới hạn này không phụ thuộc cách chia đoạn [a,b] cũng như cách chọn các điểm trong ξ_i, thì ta gọi đó là *tích phân xác định* của f(x) trên [a,b], đồng thời ký hiệu:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

3. Ý nghĩa

a) Dựa vào bài toán dẫn tới định nghĩa tích phân xác định, ta có: $S = \int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình thang cong chắn bởi y = f(x) (> 0), x = a, x = b, y = 0.

b) Xét bài toán tính công của một lực đẩy một chất điểm đi từ điểm a trên Ox, dọc theo Ox tới b trên Ox. Giả sử độ lớn của lực đó tại một điểm $x \in [a,b]$ là f(x). Khi đó, với cách xem xét giống như đối với bài toán diện tích hình thang cong, ta có công của lực là: $A = \int_a^b f(x)dx$.

II Điều kiện khả tích

Định lý 7.2.1: Cho f(x) xác định và bị chặn trên [a,b], chia [a,b] thành n đoạn nhỏ nhỏ bởi các điểm chia: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (phân hoạch $\mathbb{P}$).

Với mỗi $i = \overline{1,n}$, ký hiệu:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ \lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$$

Đặt $s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ lần lượt được gọi là *tổng* (*tích phân*) *dưới* và *tổng* (*tích phân*) *trên* của f(x) trên [a,b], ứng với phân hoạch ℙ.

Khi đó, f(x) khả tích trên [a,b], nếu và chỉ nếu: $\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$.

<u>Chú thích:</u> Với các ký hiệu như trên, nếu đặt ωi = Mi - mi, ta có hàm số f sẽ khả tích khi và chỉ khi $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$.

Định lý 7.2.2: Nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

Định lý 7.2.3: Nếu f(x) bị chặn trên [a,b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

Định lý 7.2.4: Nếu f(x) bị chặn và đơn điệu trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

III Tính chất*

a) $\int_a^b C.f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ b) $\int_a^b Cdx = C(b-a)$ c) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

d) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

e) Cho ba đoạn [a,b], [a,c], [c,b], nếu f(x) khả tích trên đoạn dài nhất thì cũng khả tích trên hai đoạn còn lại, và: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

f) Nếu a ≤ b, và

i) f(x) ≥ 0 trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ ii) f(x) ≤ g(x) trên thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

iii) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

* Các tính chất ở đây, phần lớn dựa vào tính chất tổng của tích phân, như các tính chất: đưa thừa số chung ra ngoài dấu tích phân, tích chất cộng… Các tính chất trong phần này không chứng minh nhưng có thể mô tả vắn tắt cho sinh viên, hoặc minh họa bằng hình học. Chú ý là trong phần này chúng ta luôn có giả thiết các hàm là khả tích trên các đoạn đang xét.

iv) $m \le f(x) \le M$ trên [a,b] thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

g) Định lý trung bình thứ nhất:

Nếu $a < b$, $m \le f(x) \le M$ thì $\exists \mu$: $m \le \mu \le M$ và $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

Đặc biệt: nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $a \le c \le b$.

h) Định lý trung bình thứ hai: Giả thiết như trên, và g(x) không đổi dấu, thì

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

Đặc biệt, nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$, $a \le c \le b$.

IV Cách tính tích phân xác định

Định lý 7.4.1: Cho hàm số f(x) khả tích trên [a,b], khi đó hàm số $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dx$, xác định $\forall x \in [a,b]$. Ta có:

i) $\Phi(x)$ liên tục $\forall x \in [a,b]$.

ii) Nếu f(t) liên tục tại t = x thì $\Phi(x)$ có đạo hàm tại x và: $\Phi'(x) = f(x)$

Định lý 7.4.2: Nếu f(x) liên tục trên [a,b], và nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên (a,b) thì: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Công thức Newton-Leibnitz).

<u>Ví dụ:</u> $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\,\text{arctg}x^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$

<u>Chú thích:</u> Công thức này cũng có thể viết dưới dạng $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

Định lý 7.4.3 (Công thức đạo hàm theo cận): Cho hàm số f(x) liên tục trên [a,b]. Xét hàm $\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, xác định với x thỏa mãn α(x), β(x) ∈ [a,b]. Khi đó:

$$\Phi'(x) = f(\beta(x)).\beta'(x) - f(\alpha(x)).\alpha'(x)$$

<u>Ví dụ:</u> $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} e^{2t}dt = -e^{2x}(\sin x + \cos x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\text{tg}t}\,dt}{\int_0^{\text{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\text{tg}(\sin x)}\cos x}{\frac{\sqrt{\sin(\text{tg}x)}}{\cos^2 x}} = 1$$

V Một số phương pháp tính tích phân từng phần

1. Đổi biến

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, với f(x) liên tục trên [a,b].

a) Xét phép đổi biến x = φ(t) thỏa mãn: φ(t) có đạo hàm liên tục trên [α,β], với α, β thỏa mãn: φ(α) = a, φ(β) = b, và khi t biến thiên trong [α,β] thì x biến thiên trong [A,B] ⊃ [a,b] và f(x) liên tục trên [a,b], khi đó $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

<u>Ví dụ:</u> $\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{dx}{e^x - 1}$, đổi biến x = lnt, khi x biến thiên trong [ln2,ln4] thì t biến thiên trong [2,4] => $\int_2^4 \frac{dt}{t(t-1)} = \ln\frac{t-1}{t}\Big|_2^4 = \ln\frac{3}{2}$

b) Xét phép đổi biến t = φ(x) thỏa mãn: φ (x) biến thiên đơn điệu trên [a,b] và có đạo hàm liên tục, f(x)dx trở thành g(t)dt, trong đó g(t) là một hàm số liên tục trên đoạn [φ(a),φ(b)], khi đó: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$

<u>Ví dụ:</u> $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$, đặt $t = \sqrt{x}$ => $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, khi x biến thiên từ 0 tới 1 thì t cũng biến thiên từ 0 tới 1

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2t^3dt}{1+t} = 2\int_0^1 (t^2 - t + 1)dt - \int_0^1 \frac{2dt}{1+t} = \frac{2}{3}\, t^3\Big|_0^1 - t^2\Big|_0^1 + 2\,t\Big|_0^1 - 2\ln(t+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{3} - 2\ln 2$$

2. Tích phân từng phần

Giả sử u(x) và v(x) là những hàm số có đạo hàm liên tục trên [a,b], khi đó:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

<u>Ví dụ:</u> $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,x\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. Bài tập

1. Tính các đạo hàm

a) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$ b) $\dfrac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$ c) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

d) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^2 dt$ e) $\dfrac{d}{dy}\int\limits_{\sqrt{y}}^{y^3}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

2. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x(\operatorname{arctg}t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int\limits_0^x\cos t^2 dt}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$ e) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{arctg}t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\arcsin t}\,dt}$ f) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}t\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt}$

3. Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_{-3}^{2}\left|\dfrac{x}{x+4}\right|dx$ b) $\int\limits_0^1 x^4e^x dx$ c) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{tg}^4 x\,dx$ d) $\int\limits_0^{\pi}\sin^6\dfrac{x}{2}dx$ e) $\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}}\dfrac{x^9dx}{(1+x^5)^3}$ f) $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{1+\sqrt{x}}$

g) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{(3+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ h) $\int\limits_1^e\dfrac{\ln^2 x}{x}dx$ i) $\int\limits_0^1 e^{\arcsin x}dx$ j) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\dfrac{xdx}{\sin^2 x}$ j) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+e^x}$ k) $\int\limits_0^1 e^{x+e^x}dx$

l) $\int\limits_0^1 xe^{-2x}dx$ m) $\int\limits_0^1 x^2e^{3x}dx$ n) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\dfrac{dx}{e^x-1}$ o) $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$ p) $\int\limits_{1/2}^1\dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx$

q) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}|\dfrac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ r) $\int\limits_0^1\dfrac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ s) $\int\limits_1^e x^2\ln^2 x\,dx$ t) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ u) $\int\limits_0^1\sqrt{9-4x^2}\,dx$

4. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^2 x\cos\sqrt{x}dx$ b) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ c) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $\int_0^{\ln 3} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$ e) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}$

f) $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx$ g) $\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} \cos\sqrt[3]{x}dx$ h) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$ i) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$ j) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$

k) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ l) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ m) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot g^3 xdx$ n) $\int_1^{\pi/2} \cos(\ln x)dx$ o) $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$

p) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ q) $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$ r) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ s) $\int_{-1}^1 \frac{x^4\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

t) $\int_0^1 \frac{(x^2+3x)dx}{(x+1)(x^2+1)}$ u) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ v) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ x) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{2+3\cos x}$

5. Tính các tích phân

a) $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$ b) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ c) $\int_0^{\pi/2} (x^2-x)\sin xdx$ d) $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

e) $\int_1^e \frac{dx}{x+x\ln^2 x}$ f) $\int_1^e |\ln x|(x+1)dx$ g) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$ h) $\int_0^{\pi/4} e^{-x}\sin 2xdx$

i) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$ j) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ k) $\int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ l) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

m) $\int_{1/3}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ n) $\int_0^2 \frac{\sin^2 x\cos x}{(1+tg^2 x)^2}dx$ o) $\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\sqrt{1-x}dx$ p) $\int_0^{\sqrt{2}/2} x^2\arcsin xdx$

q) $\int_0^1 x\arcsin xdx$ r) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+tg^2 x)dx}{(1+tgx)^2}$ s) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^3+\cos x}{9-\sin^2 x}dx$ t) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^5 x+|\sin x|}{9-\cos^2 x}dx$

u) $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$ v) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(4+tg^2 x)\cos^2 x}$ x) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

y) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ z) $\int_0^1 (x^3 - 2x + 5)e^{-\frac{x}{2}} dx$

6. Tính các tích phân

a) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ c) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$

d) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ e) $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx$ f) $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$

7. Với giả thiết các hàm là khả tích trên miền đang xét, chứng minh rằng

a) $\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[a + (b-a)x]dx$ b) $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$ $(a > 0)$

c) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ (f là hàm lẻ) d) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ (f là hàm chẵn)

e) $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ (f là hàm tuần hoàn chu kỳ T)

8. Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trên [0,1] thì

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x)dx$

Áp dụng tính các tích phân sau

c) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$ d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ e) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

f) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (tgx)^{\sqrt{2}}}$ g) $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^3 x + 1)dx}{\sin^3 x + \cos^3 x + 2}$ h) $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{\cos x} + 2)dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} + 4}$

9. Cho f(x), g(x) là hai hàm số khả tích trên [a,b]. Khi đó $f^2(x)$, $g^2(x)$ và f(x)g(x) cũng khả tích trên [a,b], với a < b, chứng minh

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

10. Cho hàm f(x) khả tích và nghịch biến trên [0,1], chứng minh rằng $\forall \alpha \in (0,1)$, ta có:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \geq \alpha \int_0^1 f(x)dx$$

Tuần VIII. Tích phân suy rộng

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Tích phân suy rộng.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các khái niệm về tích phân suy rộng: có cận vô hạn và hữu hạn, định nghĩa, ý nghĩa hình học; các khái niệm: hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ, dấu hiệu so sánh.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, liên tục, đạo hàm của hàm số, tích phân bất định và tích phân xác định.

B. Lý thuyết

I Cận lấy tích phân là vô hạn

1. Định nghĩa

Định nghĩa 8.1.1: Cho hàm số f(x) xác định trên [a,+∞) và khả tích trên bất kỳ đoạn hữu hạn [a,A]. Nếu tồn tại $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm số f(x) trên [a,+∞), ký hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (*), và ta nói tích phân (*) là hội tụ. Ngược lại (giới hạn không tồn tại) thì ta nói rằng tích phân (*) là *phân kỳ*. Tương tự, ta có tích phân suy rộng của hàm số f(x) từ -∞ đến a: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{a} f(x)dx$ (với giả thiết f(x) khả tích trên đoạn hữu hạn [A',a] bất kỳ) và tích phân suy rộng từ -∞ đến +∞: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ A'\to-\infty}}\int_{A'}^{A} f(x)dx$ (với giả thiết f(x) khả tích trên đoạn hữu hạn [A',A] bất kỳ).

<u>Chú thích:</u> Ta cũng có thể viết: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ (tích phân suy rộng ở vế trái sẽ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải là hội tụ).

II Hàm số lấy tích phân không bị chặn

1. Định nghĩa

Định nghĩa 8.2.1: Cho hàm số f(x) bị chặn và khả tích trong khoảng đóng [a,b-η] với 0 < η < b - a bất kỳ, nhưng không khả tích trong đoạn [b-μ,b] với 0 < μ ≤ b - a bất kỳ, đồng thời $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ hữu hạn, thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm f(x) lấy trên [a,b], ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ* và đặt: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$, ngược lại, ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự, nếu f(x) bị chặn và khả tích trong khoảng đóng [a + η’,b] với 0 < η’ < b - a bất kỳ, nhưng không khả tích trong đoạn [a,a + μ’] với 0 < μ’ ≤ b - a bất kỳ, đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\eta'\to 0^-} \int\limits_{a+\eta'}^{b} f(x)dx$ hữu hạn, thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm f(x) lấy trên [a,b], ta nói tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ *hội tụ* và đặt:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\eta'\to 0^-} \int\limits_{a+\eta'}^{b} f(x)dx$.

Định nghĩa 8.2.2: Nếu f(x) không bị chặn tại c thuộc (a,b), ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ bởi biểu thức $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Tích phân suy rộng ở vế trái sẽ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ.

<u>Chú thích:</u> Những điểm mà tại đó hàm số không bị chặn trong các định nghĩa trên được gọi là *điểm bất thường* của hàm số.

III Cách tính

Xét $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Giả sử f(x) trên [a,+∞) có nguyên hàm F(x), khi đó, ta có:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} (F(A) - F(a))$$

nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, ta có $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ hữu hạn, ký hiệu $F(+\infty) = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$, như thế:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

Với các ký hiệu tương tự và giả thiết tương tự, ta cũng có:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a} \text{ và } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Ví dụ: Xét sự hội tụ của $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

a) α = 1, ta có: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty$, vậy tích phân phân kỳ khi α = 1

b) α ≠ 1, ta có: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{khi} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{khi} \quad \alpha < 1 \end{cases}$

vậy tích phân đã cho hội tụ khi α > 1 và phân kỳ khi α ≤ 1.

Cũng như đối với tích phân xác định thông thường, tích phân suy rộng cũng có thể thực hiện phép đổi biến và lấy tích phân từng phần.

Ví dụ: $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_{-\infty}^{0} - 2\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = -2xe^x\Big|_{-\infty}^{0} + 2\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} = 1.$

IV Mối quan hệ của các tích phân suy rộng

Ta cũng có thể viết $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$ (thực hiện phép đổi biến x = -t) như thế tích phân suy rộng dạng $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ có thể quy về dạng $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Tương tự, xét tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ (f(x) không bị chặn tại a) bằng phép đổi biến $t = \frac{1}{x-a}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$ (với ý nghĩa $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$ sẽ cùng phân kỳ hoặc cùng hội tụ và có giá trị bằng nhau).*

Với ý nghĩa tương tự như trên, ta có, trong trường hợp f(x) không bị chặn tại b, $\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(b-\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$ thông qua phép đổi biến $t = \frac{1}{b-x}$, và nếu f(x) không bị chặn tại $c \in (a,b)$, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{a-c}} \frac{f\left(c+\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt + \int_{\frac{1}{b-c}}^{+\infty} \frac{f\left(c+\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$$

thông qua phép đổi biến $t = \frac{1}{x-c}$

<u>Chú thích:</u> Với nhận xét trên, đối với tích phân suy rộng có cận vô hạn, ta cũng coi các điểm ∞ là điểm bất thường.

<u>Ví dụ:</u> Xét sự hội tụ của $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, đổi biến $t = \frac{1}{b-x}$, ta có $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} t^{\alpha-2}dt$, hội tụ khi $\alpha < 1$, phân kỳ khi $\alpha \geq 1$. Tương tự, ta cũng có $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ cũng hội tụ khi $\alpha < 1$, phân kỳ khi $\alpha \geq 1$.

---

* Có thể dễ dàng kiểm chứng được, nếu f(x) hữu hạn và khả tích trên đoạn [A,b] với a < A < b bất kỳ thì f(x) cũng sẽ hữu hạn và khả tích trên đoạn hữu hạn $\left[\frac{1}{b-a}, A\right]$ với $A > \frac{1}{b-a}$ bất kỳ.

V Tính chất của tích phân suy rộng

1. Tính hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào a (trường hợp b là điểm bất thường duy nhất của tích phân) và không phụ thuộc vào b (trường hợp a là điểm bất thường duy nhất của tích phân).

2. Cho các tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ với cùng các điểm bất thường (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$), nếu $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b (f)x) + g(x))dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

3. Nếu tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = I$ thì $\int_a^b cf(x)dx = cI$, ngược lại nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b cf(x)dx$ phân kỳ.

VI Các tiêu chuẩn xét hội tụ

1. $f(x) \geq 0$*

Dựa vào định nghĩa tích phân suy rộng và điều kiện tồn tại giới hạn, ta có nhận xét sau.

Xét trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ với b là điểm bất thường (b có thể là $+\infty$), khi đó ta có $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$ ($a \leq A < b$) là hàm đơn điệu tăng theo biến A. Tức là $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_a^A f(x)dx$ bị chặn trên khi A tăng. Tương tự, ta cũng có

* Trường hợp $f(x) \leq 0$, nhờ tính chất 3 của tích phân suy rộng, được xét tương tự.

tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ với a là điểm bất thường (a có thể là -∞) hội tụ khi và chỉ khi $\int_B^b f(x)dx$ bị chặn trên khi B giảm.

Định lý 8.6.1: Cho hai tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$, (a có thể là -∞, và b có thể là +∞), với cùng các điểm bất thường. Nếu $0 \le f(x) \le g(x)$ tại mọi điểm không bất thường, khi đó:

i) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

ii) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

(+)*Chứng minh:* Ta sẽ chứng minh cho trường hợp tích phân suy rộng có cận trên là +∞, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

i) Giả sử $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, ta có $\forall$ A > a: $\int_a^A f(x)dx \le \int_a^A g(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow \int_a^A f(x)dx$ bị chặn trên khi A tăng hay $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

ii) Giả sử $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ. Ta có $\forall$ A > a: $\int_a^A f(x)dx \le \int_a^A g(x)dx$, mà $\int_a^A f(x)dx$ không bị chặn khi A tăng theo giả thiết, nghĩa là $\int_a^A g(x)dx$ không bị chặn khi A tăng, hay $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ.■

<u>Ví dụ:</u> Xét sự hội tụ của các tích phân:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$, ta có $\frac{1}{1+x^{10}} < \frac{1}{x^{10}}$, mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ hội tụ => $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$ hội tụ.

b) $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$, ta có với $1 < x$, $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, mà $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ phân kỳ => $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$ phân kỳ.

c) $\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ta có, với $0 < x < 1$, $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, mà $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ hội tụ => $\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ.

Định lý 8.6.2: Cho hai tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$, (a có thể là $-\infty$, và b có thể là $+\infty$), với duy nhất điểm bất thường c. Nếu $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0 < k < +\infty)$ thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.

(+)*Chứng minh:* Ta sẽ chứng minh cho trường hợp c là điểm bất thường thuộc (a,b) (a và b hữu hạn), các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Theo định nghĩa giới hạn, ta có $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ sao cho: $\forall\, x \in (c - \delta) \cup (c + \delta)$, ta có: $k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$, hay $(k - \varepsilon)g(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < (k + \varepsilon)g(x)$, dựa vào tính chất thứ hai của tích phân suy rộng và định lý 7.8.1, ta có đpcm.■

<u>Nhận xét:</u> Trong trường hợp $k = 0$ $(k = +\infty)$, ta có với x đủ gần c (đủ lớn trong trường hợp c là $+\infty$, đủ bé trong trường hợp c là $-\infty$), thì $f(x) \le g(x)$ $(g(x) \le f(x))$, từ tính chất thứ nhất của tích phân suy rộng, ta có các kết luận của định lý 8.4.1.

<u>Ví dụ:</u> Xét tính hội tụ của các tích phân sau:

a) $\int_0^1\frac{\cos^2 x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}}$, mà $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ hội tụ => $\int_0^1\frac{\cos^2 x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ hội tụ.

c) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\ln(1+x)}$, ta có, khi x → +∞: ln(1+x) ~ lnx, mà $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_1^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}$ phân kỳ,

nên $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\ln(1+x)}$ phân kỳ.

2. f(x) có dấu bất kỳ

Định lý 8.6.3: Cho tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ (a có thể là -∞, và b có thể là +∞), nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ: $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$, ta có $\frac{|\cos x|}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, mà $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ hội tụ => $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ hội tụ.

Chú ý: Điều ngược lại chưa chắc đúng.

Từ đó, ta có các khái niệm sau.

Định nghĩa 8.6.1: Cho tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ (a có thể là -∞, và b có thể là +∞),

i) Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ gọi là *hội tụ tuyệt đối*.

ii) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nhưng $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ gọi là *bán hội tụ*.

Định lý 8.6.4 (Tiêu chuẩn hội tụ Dirichlet): Cho tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$, nếu khi x → +∞, g(x) khả vi, giảm dần về 0, còn f(x) có nguyên hàm F(x) giới nội, thì tích phân hội tụ.

Ví dụ: Xét tính hội tụ của $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ $(0 \le \alpha \le 1,\ a > 0)$

i) $\alpha > 1$, ta có trên $[a,+\infty)$ $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$, mà $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ => $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ hội tụ tuyệt đối.

ii) $0 < \alpha \le 1$, ta có $\frac{1}{x^\alpha}$ khả vi và $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$, còn sinx có nguyên hàm -cosx giới nội ($|-\cos x| \le 1$) => $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ hội tụ.

Mặt khác, giả sử $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ hội tụ tuyệt đối, ta có $|\sin x| \ge \sin^2 x$ => $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$ hội tụ, mà $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} - \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$, ta có tích phân thứ hai ở vế phải là hội tụ, vậy $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ, mâu thuẫn => $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ bán hội tụ.

iii) $\alpha = 0$, ta có $\int_a^{+\infty} \sin x dx$ phân kỳ.

C. Bài tập

1. Tính các tích phân

a) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ c) $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ d) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\left(x^2-4\right)^2}$ e) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

f) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}$ g) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ h) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ i) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ j) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

k) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$ l) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ m) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ n) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}$

2. Tính các tích phân

a) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\int_0^1 x\ln^2 x dx$ c) $\int_0^2\frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$ d) $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$ e) $\int_0^1\frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $\int_0^1\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ g) $\int_0^{\pi/2}x\cot gx dx$ h) $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ i) $\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)dx$

j) $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ k) $\int_{-1}^{1}\frac{\ln(2-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ l) $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \ (b>a>0)$

3. Xét sự hội tụ các tích phân

a) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\mathrm{ch}^{n+1}x}$ b) $\int_0^{+\infty}\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$ c) $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$

4. Xét sự hội tụ các tích phân sau

a) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2}dx}{x^2}$ b) $\int_0^{+\infty}e^{\frac{tgx}{\cos^2 x}}dx$ c) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^2}dx$ f) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+4}{x^3}dx$

g) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$ h) $\int_1^{+\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}dx$ i) $\int_2^{+\infty}\frac{x+\sin x}{x^2-x}dx$ j) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

k) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ l) $\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{arctg}x dx}{\sqrt{1+x^3}}$ m) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{2+x^2}}$ n) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$

o) $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ p) $\int_{1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$ q) $\int_{2}^{+\infty} \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$

5. Xét sự hội tụ các tích phân sau

a) $\int_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{x}dx$ b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}dx$ d) $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

e) $\int_{0}^{+\infty} \sin x^2 dx$ f) $\int_{0}^{+\infty} 2x\cos x^4 dx$ g) $\int_{2}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt{x-1}}$ h) $\int_{0}^{+\infty} \sin x e^{\frac{-1}{x^2}}dx$

i) $\int_{1}^{+\infty} \cos x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ j) $\int_{0}^{+\infty} x\sin x dx$ k) $\int_{0}^{+\infty} \cos x e^{\frac{-x}{2}}dx$ l) $\int_{0}^{+\infty} \sin x dx$

6. Xét sự hội tụ các tích phân sau

a) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\mathrm{tg}x - x}$ b) $\int_{0}^{1} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$ d) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[4]{x}}-1}$

f) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$ g) $\int_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-1}$ h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\ln(1+x)}$ i) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\arcsin x}-1}$ j) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

k) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$ l) $\int_{0}^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$ m) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}dx$ n) $\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

o) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$ p) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sin x - \mathrm{tg}x}$ q) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ r) $\int_{0}^{\pi/2} \ln\sin x dx$

7. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^m dx}{1+x^n}$ b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}ax}{x^n}dx$ c) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ f) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x^p \cos^q x}$ g) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^m \mathrm{arctg}x}{2+x^n}dx$

8. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ không? Xét ví dụ

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$

9. Cho hàm f(x) liên tục trên $[a,+\infty)$ và $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$, hỏi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ có hội tụ

không?

Tuần IX. Ứng dụng của tích phân xác định

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Ứng dụng của tích phân xác định.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các ứng dụng tính toán sử dụng tích phân suy rộng, trên cơ sở phân tích tổng tích phân, vi phân: tính diện tích, thể tích vật thể bất kỳ, thể tích khối tròn xoay, độ dài đường cong phẳng, diện tích mặt tròn xoay..

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, liên tục, tích phân xác định.

B. Lý thuyết*

I Sơ đồ ứng dụng tích phân xác định

1. Tổng tích phân

Giả sử cần tính một đại lượng A(x,[a,b]) phụ thuộc x và đoạn [a,b] mà x biến thiên trên đó, A(x) thỏa tính chất cộng tính (theo nghĩa nếu chia [a,b] thành hai đoạn [a,c] và [c,b] thì A(x,[a,b]) = A(x,[a,c]) + A(x,[c,b]). Như thế, khi cần tính A, ta tiến hành các bước như sau:

i) Phân hoạch [a,b] thành n đoạn bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

ii) Phân tích A thành tổng n số: $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, với $A_i = A(x,[x_{i-1},x_i])$

iii) Tìm hàm f(x) có thể biểu diễn gần đúng $A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $\xi i \in [x_{i-1},x_i]$, sai số không quá Ai.

iv) Như thế $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

v) Áp dụng định nghĩa tích phân xác định, ta có: $A = \int_a^b f(x)dx$

2. Sơ đồ vi phân

Nếu có thể biểu diễn hiệu của giá trị A tại x_i và x_{i-1} dạng $\Delta A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, ta có:

$\Delta A \approx f(\xi)\Delta x$, nếu sai số của biểu diễn này không quá Δx, ta có thể thay dA = f(x)dx, như thế, $A = \int_a^b f(x)dx$

* Các công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường dạng y = y(x), tính thể tích khối tròn xoay, diện tích mặt tròn xoay đã được học ở chương trình phổ thông, phần này mang tính chất ôn lại và cung cấp thêm công thức tính thể tích vật thể bất kỳ, độ dài đường cong phẳng.

II Tính giới hạn tổng $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Ví dụ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3n^2}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$=$

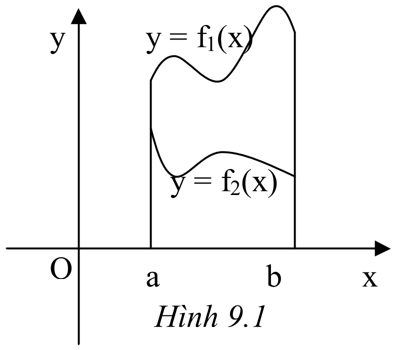
$$\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

III Tính diện tích hình phẳng

1. Diện tích hình giới hạn bởi các đường

$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$

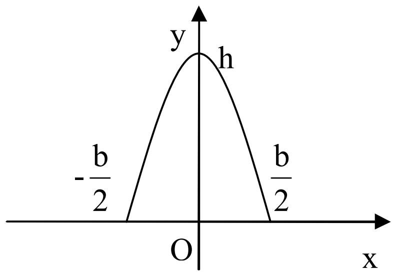
$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$$



Hình 9.1

Ví dụ: Tính diện tích của mảnh parabol có đáy a và chiều cao h.

Xét mảnh parabol như trong hình 9.2, phương trình đường parabol là: $y = h - \frac{4h}{b^2}x^2$, diện tích mảnh parabol là: $S = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(h - \frac{4h}{b^2}x^2\right)dx = \frac{2}{3}bh$

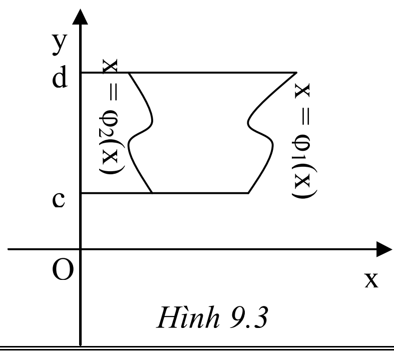


Hình 9.2

2. Diện tích hình giới hạn bởi các đường

$x = \varphi_1(y)$, $y = \varphi_2(y)$, $y = c$, $x = d$

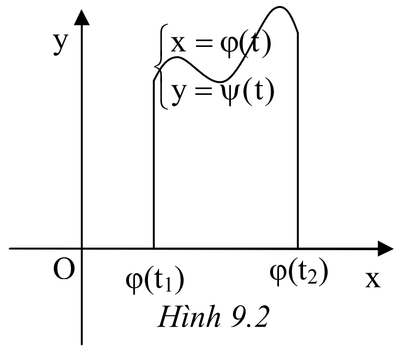
$$S = \int_c^d |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\,dy$$



Hình 9.3

3. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$, $y = 0$



Hình 9.2

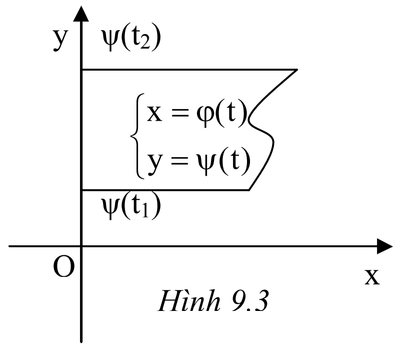
Trong công thức ở phần 1, ta chỉ cần thay

$dx = \varphi'(t)dt$, $f_1(x) = \psi(t)$, $f_2(x) = 0$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt$$

4. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$, $x = 0$



Hình 9.3

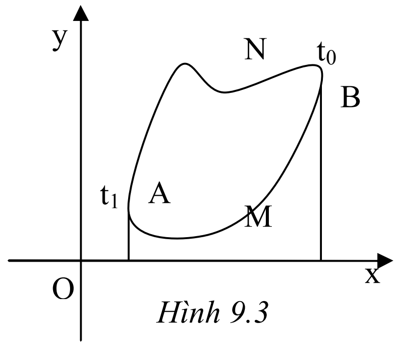
Trong công thức ở phần 2, ta chỉ cần thay

$dy = \psi'(t)dt$, $\varphi_1(y) = \varphi(t)$, $\varphi_2(x) = 0$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi'(t)\varphi(t)|\,dt$$

5. Diện tích hình phẳng tạo bởi đường cong tham số không tự cắt $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ (đường cong khép kín)

Không mất tổng quát, giả sử t_1 là điểm sao cho $x(t_1) \le x(t)$ $\forall t \in [t_1,t_2]$, t_0 là điểm sao cho $x(t) \le x(t_0)$ $\forall t \in [t_1,t_2]$



Hình 9.3

Ký hiệu $A(x(t_1),y(t_1))$ và $B(x(t_0),y(t_0))$ như hình vẽ.

Ta có diện tích hình chắn bởi cung $\overset{\frown}{AMB}$, Ox, $x = x(t_1)$, $x = x(t_0)$ là:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_0} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt$$

Diện tích hình chắn bởi cung $\overset{\frown}{ANB}$, Ox, $x = x(t_3)$, $x = x(t_4)$ là:

$$S_2 = \int_{t_2}^{t_0} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = S_2 - S_1 = \int_{t_2}^{t_0} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt - \int_{t_1}^{t_0} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt$$

Tương tự, ta cũng sẽ có

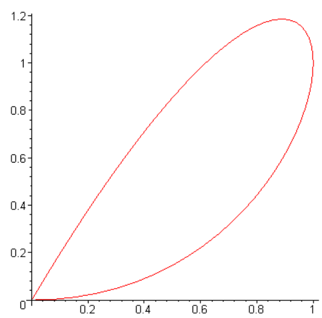
$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi'(t)\varphi(t)|\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (|\psi'(t)\varphi(t)| - |\psi(t)\varphi'(t)|)dt$$

Chú ý: Trong các công thức trên, chúng ta quy ước chiều đi từ t_1 tới t_2 là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường

$$x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t3$$

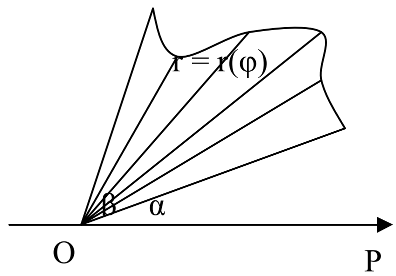
Do x = y = 0 khi t = 0 hoặc t = 2 nên đường cong tự cắt tại gốc tọa độ.



Ta có $S = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)dt = \frac{8}{15}$

6. Diện tích hình quạt cong cho trong tọa độ cực, giới hạn bởi $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$

Chia hình quạt thành các hình quạt con bởi các góc $d\varphi$, ta có diện tích của một hình quạt nhỏ được xấp xỉ bằng: $r^2 d\varphi$, từ đó, ta có: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

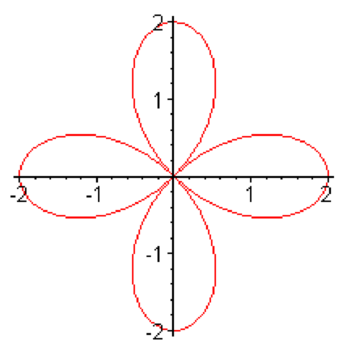


Hình 9.4

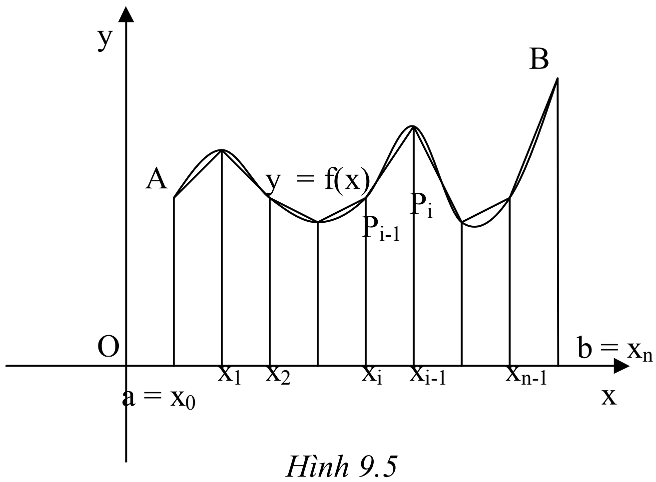
Ví dụ: Tính diện tích giới hạn bởi đường $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Do tính đối xứng của đường cong, ta có:

$$S = 4\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2$$



IV Tính độ dài đường cong phẳng



Hình 9.5

1. Độ dài đường cong phẳng

$y = f(x), a \le x \le b$

Chia đường cong $\overset{\frown}{AB}$ thành n đoạn $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$, $i = \overline{1,n}$ như hình 9.5.

Ta có độ dài cung $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ được xấp xỉ bằng độ dài đoạn: $P_{i-1}P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$

Ta lại có, sử dụng khai triển Lagrange tại lân cận x_{i-1}:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i \ (\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$$

Từ đó, ta có: $P_{i-1}P_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i$ => độ dài đường cong $\overset{\frown}{AB}$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

2. Độ dài đường cong phẳng $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$

Lập luận tương tự phần trước, ta cũng có độ dài đường cong $s = \int_c^d \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy$

3. Độ dài đường cong phẳng cho bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$

Trong công thức ở phần 1, ta chỉ cần thay $dx = x'(t)dt$, $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, ta có độ dài đường cong: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

4. Độ dài đường cong phẳng cho trong hệ tọa độ cực r = r(φ) (α ≤ φ ≤ β)

Trong công thức ở phần 3, chúng ta thực hiện việc đổi biến t = φ, x = rcosφ, y = rsinφ => x'(φ) = r'(φ)cosφ - r(φ)sinφ, y'(φ) = r'(φ)sinφ + r(φ)cosφ, vậy ta có độ dài đường cong: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$

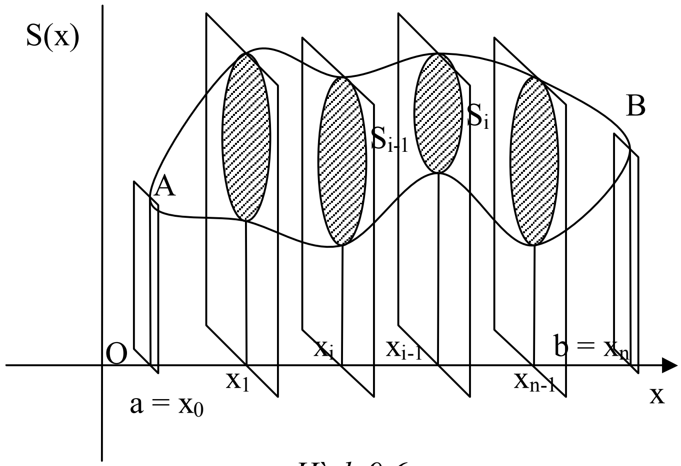
V Thể tích vật thể

1. Thể tích vật thể bất kỳ

Cho một vật thể giới hạn bởi mặt cong và hai mặt phẳng

x = a và x = b

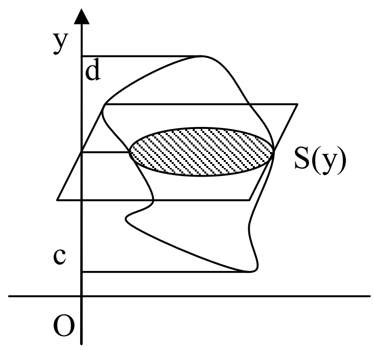
Giả sử diện tích của tiết diện cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại vị trí x là S(x).



Hình 9.6

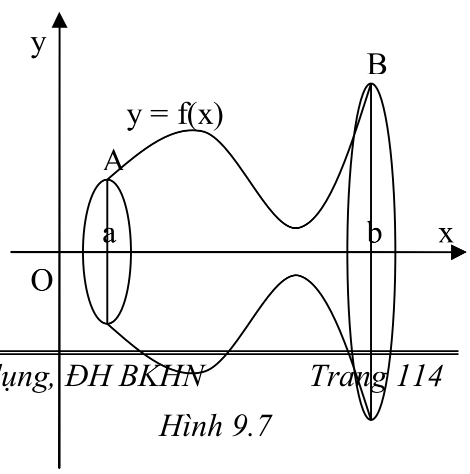
Ta chia vật thể thành từng hình trục bởi các mặt phẳng vuông góc với Ox như hình 9.6. Khi đó thể tích của phần vật thể giới hạn bởi các thiết diện S_{i-1}, S_i có thể tính bằng $S(\xi_i)\Delta x_i$ ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, như thế thể tích vật thể là: $V = \int_a^b S(x)dx$

Tương tự, trong trường hợp vật thể giới hạn bởi các mặt y = c, y = d, và diện tích tiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Oy tại điểm y là S(y), ta có thể tích vật thể là: $V = \int_c^d S(y)dy$



2. Vật thể tròn xoay

Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi bằng cách quay hình thang cong AabB giới hạn bởi các đường y = f(x), y = 0, x = a, y = b quanh trục Ox.

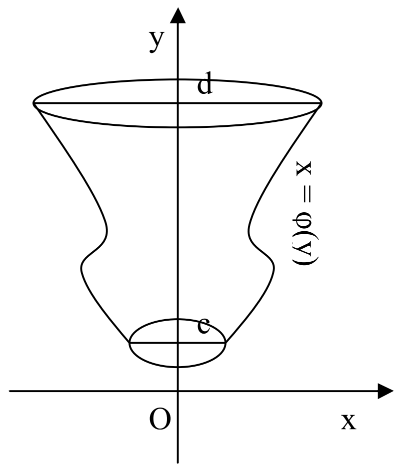


Hình 9.7

Áp dụng công thức tính thể tích vật thể bất kỳ, ta có, $S(x) = \pi f^2(x)$, như thế, thể tích vật thể :

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Tương tự, trường hợp vật thể tròn xoay tạo bởi bằng cách quay hình thang cong CcdD giới hạn bởi các đường $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy, ta có thể tích vật thể: $V = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$



Hình 9.8

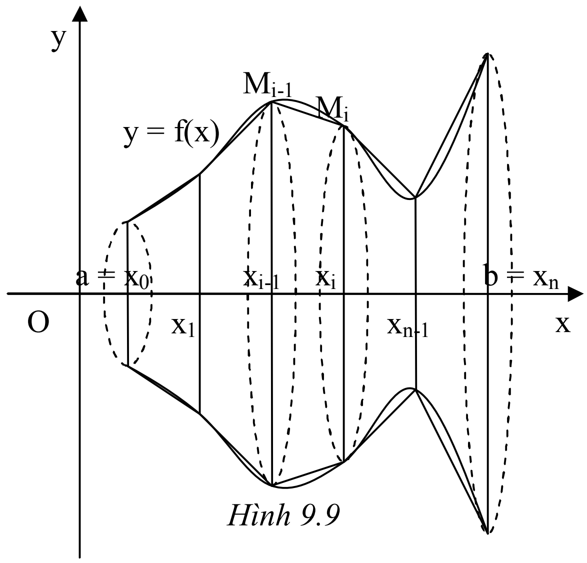
VI Diện tích mặt tròn xoay

1. Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi bằng cách quay đường cong $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ quanh trục Ox.

Chia đoạn [a,b] bằng các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

Dựng các đường thẳng song song với Oy, tại các điểm xi, cắt đường $y = f(x)$ tại các điểm M_i, $i = \overline{0,n}$, ta sẽ tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi bằng cách quay dây $M_{i-1}M_i$ quanh Ox, coi đó là xấp xỉ diện tích mặt tròn xoay tạo bởi bằng cách quay cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ quanh Ox.



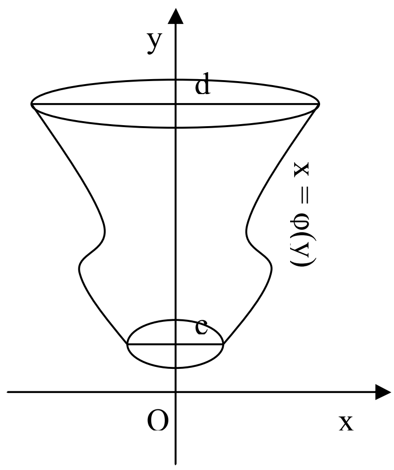
Hình 9.9

Ta có, khi quay quay dây $M_{i-1}M_i$ quanh Ox, ta được một hình nón, có diện tích $S_i = \pi M_{i-1}M_i(|f(x_{i-1})| + |f(x_i)|)$, mặt khác, từ phần tính độ dài đường cong phẳng, ta đã có: $M_{i-1}M_i = \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$ $(\xi_i \in [x_{i-1},x_i])$ => $S_i = \pi\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i(|f(x_{i-1})| + |f(x_i)|)$, nếu độ dài các đoạn chia đủ nhỏ, ta có $f(x_{i-1}) \approx f(\xi_i)$ và $f(x_i) \approx f(\xi_i)$, vậy:

$$S_i \approx 2\pi|f(\xi_i)|\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$$

Vậy diện tích mặt tròn xoay cần tính là $S = \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

2. Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi bằng cách quay đường cong $x = \varphi(y)$ $(c \le y \le d)$ quanh trục Oy.



Hình 9.8

Lập luận tương tự phần 1, ta có $S = \int_c^d |\varphi(y)|\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy$

3. Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi bằng cách quay đường cong $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$ quanh trục Ox.

Trong công thức ở phần 1, ta chỉ cần thay dx = x'(t)dt, f(x) = y(t), $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, ta sẽ có:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

4. Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi bằng cách quay đường cong $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$ quanh trục Oy.

Trong công thức ở phần 2, ta chỉ cần thay dy = y'(t)dt, φ(y) = x(t), $x'(y) = \frac{x'(t)}{y'(t)}$, ta sẽ có:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

C. Bài tập

1. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+...+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^p+1}$ $(p>0)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+...+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\right)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+...+\frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$

2. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi

a) $y = x^2 + 4$, $x - y + 4 = 0$ b) $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$ c) $x^2 + y^2 = 2x$, $y^2 = 2x$

d) $x^2 + y^2 = 2x$, $y^2 = 2x$ e) $y = x^2$, $x + y = 2$ f) $x + y = 0$, $y = 2x - x^2$

g) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$ h) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ i)

g) $y^2 = 2px$, $27py^2 = 8(x - p)^3$ h) $y = x$, $y = x + \sin 2x$ $(0 \le x \le \pi)$

i) $y = (x + 1)^2$, $x = \sin\pi y$, $0 \le y \le 1$ j) $y = |\lg x|$; $y = 0$; $x = 0{,}1$; $x = 10$

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{a}\sin^3 t$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ b) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

c) $x = a\cos t$, $y = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong trong tọa độ cực sau

a) $r = a\sin 3\varphi$ b) $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ c) $r = 3 + 2\cos\varphi r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

Tuần X. Hàm nhiều biến

A. Tổng quan

1. Nội dung vắn tắt: Tích phân suy rộng.

2. Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên các khái niệm về tích phân suy rộng: có cận vô hạn và hữu hạn, định nghĩa, ý nghĩa hình học; các khái niệm: hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ, dấu hiệu so sánh.

3. Các kiến thức cần có trước: Các kiến thức về hàm số, liên tục, đạo hàm của hàm số, tích phân bất định và tích phân xác định.

B. Lý thuyết

1. Một số khái niệm cơ bản

a) Cho $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ và $N(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in R^n$, khoảng cách giữa hai điểm ấy, kí hiệu

$$d(M,N) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Cho $M_0 \in R^n$, quả cầu mở tâm M_0 bán kính r là tập những điểm M sao cho $d(M,M_0) < r$, lân cận ε của M_0 là quả cầu mở tâm M_0 bán kính ε

c) Cho $E \subset R^n$, điểm $M \in E$ được gọi là điểm trong của E, nếu tồn tại một lân cận ε nằm hoàn toàn trong E.

d) Điểm $N \in Rn$ gọi là điểm biên của E nếu mọi lân cận ε của E đều chứa những điểm thuộc E và những điểm không thuộc E. Tập những điểm biên gọi là biên của E.

e) E gọi là mở nếu mọi điểm thuộc E đều là điểm trong.

f) E gọi là đóng nếu E chứa mọi điểm biên

g) E gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu nào đó chứa nó.

h) E gọi là liên thông nếu có thể nối hai điểm bất kỳ bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E.

i) E gọi là đơn liên nếu biên của E là liên thông, ngược lại E gọi là đa liên.

2. Hàm nhiều biến

a) $D \subset R^n$, một phần tử $x \in R^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ánh xạ:

$$f : D \to R$$

$$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \mapsto u = f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

là một hàm số n biến số xác định trên D, D gọi là miền xác định của hàm số, f(D) là miền giá trị của hàm số.

b) Nếu hàm số u cho bởi u = f(M) thì khi đó miền xác định là tập những điểm làm hàm số có nghĩa.

<u>Ví dụ:</u> $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = \dfrac{x - y}{x^3 - y^3}$

3. Ý nghĩa hình học của hàm hai biến

4. Giới hạn của hàm hai biến

Cho D là miền, f là hàm xác định trên D.

a) Nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n,y_n)\} \subset D$ hội tụ về điểm $M_0(x_0,y_0) \in D$ khi $n \to \infty$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_n, M_0) = 0$, hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

b) Nói rằng hàm số f(M) có giới hạn l khi $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$ nếu với mọi dãy điểm $\{M_n(x_n,y_n)\} \subset D$ hội tụ về $M_0 \in D$ đều có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = l$

c) <u>Tiêu chuẩn Cauchy:</u> Hàm số f(M) có giới hạn l khi M dần tới M_0 khi và chỉ khi:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) :\ \forall M \in D \mid d(M,M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon.$$

d) Ta cũng có khái niệm giới hạn tại ∞ và giới hạn bằng ∞ tương tự như đối với hàm một biến.

e) Các kết quả về giới hạn của tổng, tích, thương, hàm sơ cấp cũng giống như của hàm một biến.

<u>Ví dụ:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (x - 1)^2 + (y - 2)^2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

5. Tính liên tục của hàm hai biến

a) f(M) xác định trong miền D, M_0 là một điểm thuộc D. Nói rằng f(M) liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

<u>Chú ý:</u> Trong định nghĩa này, tính liên tục được xét với một điểm thuộc tập xác định và là điểm tụ.

Theo tiêu chuẩn Cauchy, nói hàm f(M) liên tục tại M_0 khi và chỉ khi $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)$: $d(M,M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

b) Hàm f(M) được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

c) Trong tiêu chuẩn về tính liên tục của hàm nhiều biến, nói chung, $\delta = \delta(\varepsilon, M_0)$. Nếu trong miền D, $\delta = \delta(\varepsilon)$, ta có khái niệm liên tục đều. Hàm số f(M) gọi là liên tục đều trên miền D nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) : \forall M_1, M_2 \in D \mid d(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$$

d) Hàm nhiều biến số liên tục cũng có các tính chất và các phép toán tương tự như đối với hàm liên tục một biến số.

C. Bài tập

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ b) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ c) $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$

d) $z = \sqrt{x\sin y}$ e) $z = \sqrt{x\sin y}$ f) $z = \text{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$

g) $z = \ln\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ h) $z = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$ i) $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$

2. Tìm các giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \sin\dfrac{\pi x}{2x + y}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^2y + xy^2}}$ i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2y^2(x^2 + y^2)}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^2y + y^2x}}$

3. Khảo sát tính liên tục của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tuần XI. Đạo hàm và vi phân hàm nhiều biến

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Tích phân suy rộng.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các khái niệm về tích phân suy rộng: có cận vô hạn và hữu hạn, định nghĩa, ý nghĩa hình học; các khái niệm: hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ, dấu hiệu so sánh.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, liên tục, đạo hàm của hàm số, tích phân bất định và tích phân xác định.

B. Lý thuyết

1. Đạo hàm riêng

a) Cho hàm số $u = f(x,y)$ xác định trong một miền D; $M_0(x_0,y_0) \in D$, nếu hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của f đối với x tại x0, ký hiệu $f'_x(x_0,y_0)$, hay $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Ta có:

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

b) Tương tự, ta có khái niệm đạo hàm riêng của f tại y

$$f'y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

<u>Ví dụ:</u> $z = x^y \Rightarrow z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$

2. Vi phân toàn phần

a) Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D, $M_0(x_0,y_0) \in D$, biểu thức:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)$$

gọi là số gia toàn phần của f tại M_0. Nếu có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, A,B là các hằng số, thì ta nói f là khả vi tại M_0 và biểu thức $A.\Delta x + B.\Delta y$ gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x,y)$ tại M_0, ký hiệu dz hay df.

b) Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại lân cận điểm $M_0(x_0,y_0)$, và các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0, và ta có $dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$.

c) Ta có công thức tính gần đúng: $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,y_0) + df$.

3. Đạo hàm hàm hợp

Cho $\varphi : D \subset R^2 \to \varphi(D) \subset R^2$

$$(x,y) \mapsto (u,v) = (u(x,y),v(x,y))$$

và f : φ(D) → R, đặt $F = f_o\varphi$: F(x,y) = f(φ(x,y)) = f(u(x,y),v(x,y)).

Khi đó, nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong D, và u, v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì trong D có các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$, đồng thời

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} \text{ và } \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Vi phân của toàn phần của hàm số z = f(u,v) có cùng một dạng cho dù u, v là các biến độc lập hay là các hàm số của những biến số độc lập khác.

4. Khái niệm hàm ẩn

Cho phương trình F(x,y) = 0 (*), trong đó F : U → R là một hàm số xác định trên tập $D \subset R^2$. Phương trình này xác định một hay nhiều hàm số ẩn theo x trong một khoảng I nào đó. Hàm số f : I → R là một hàm số ẩn xác định bởi (*) nếu $\forall x \in I$, $(x,f(x)) \in D$, đồng thời F(x,f(x)) = 0.

Tương tự như thế, phương trình F(x,y,z) = 0 có thể xác định một hay nhiều hàm số ẩn z của các biến số x,y.

Hệ hai phương trình $\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = 0 \\ G(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$, trong đó F : U → R và G : U → R, với $U \subset R^5$ có thể xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn u, v của các biến số x,y,z.

5. Định lý về sự tồn tại hàm ẩn

Cho phương trình F(x,y) = 0 (*), trong đó F : U → R là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở $U \subset R^2$. Giả sử $(x_0,y_0) \in U$, $F(x_0,y_0) = 0$. Nếu $F'y(x_0,y_0) \neq 0$ thì phương trình xác định duy nhất một hàm số ẩn y = f(x) trong lân cận nào đó của x_0, hàm đó có giá trị bằng y_0 khi $x = x_0$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận đó.

Cho phương trình F(x,y,z) = 0 (**), trong đó F : U → R là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập mở U ⊂ R3, Giả sử (x0,y0,z0) ∈ U, F(x0,y0,z0) = 0. Nếu F'z(x0,y0,z0) ≠ 0 thì phương trình (**) xác định trong một lân cận nào đó của điểm (x0,y0) một hàm số ẩn duy nhất z = f(x,y), hàm số ấy có giá trị bằng z0 khi x = x0, y = y0, liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.

Cho hệ hai phương trình $\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = 0 \\ G(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$ (***), trong đó $F : U \to R$ và $G : U \to R$ là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở $U \subset R^5$. Giả sử $(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) \in U$, $F(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) = 0$, $G(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) = 0$, thì hệ (***) xác định một cặp hàm số ẩn duy nhất u = f(x,y,z), v = g(x,y,z), các hàm số ấy có giá trị theo thứ tự bằng u_0, v_0 khi $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, chúng liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.

6. Đạo hàm của hàm ẩn

Giả sử phương trình (*) xác định một hàm số ẩn y = y(x), khi đó $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

Giả sử phương trình (**) xác định một hàm số ẩn z = z(x,y), khi đó $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$

Giả sử hệ phương trình (***) xác định một cặp hàm số ẩn u = u(x,y,z), v = v(x,y,z), khi đó ta có $u'_x = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}$, $v'_x = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}$, tương tự cho u'_y, v'_y, u'_z, v'_z.

C. Bài tập

1. Tìm các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a) $z = (1 + xy)^y$ b) $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$ c) $z = y^2\sin\frac{x}{y}$ d) $z = \frac{x-y}{x+y}$ e) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $z = x^{y^3}$ (x,y > 0 g) $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$ h) $z = \text{arctg}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

i) $u = x^{y^z}$ (x,y,z > 0) j) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$ k) z = (sinx)xy l) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$

m) $u = x^{\frac{y}{z}}$

2. Khảo sát sự liên tục, sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của hàm số f(x,y) sau:

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, trong đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z, hệ thức sau luôn thoả mãn: $\frac{z'_x}{x} + \frac{z'_y}{y} = \frac{z}{y^2}$

4. Tìm đạo hàm các hàm số hợp sau đây

a) $z = e^{u^2-2v^2}$, u = cosx, $v = \sqrt{x^2+y^2}$ b) $z = \ln(u^2 + v^2)$, u = xy, v = x/y

c) $z = e^u\sin v$, $u = x^2 + y^2$, v = xy d) $z = (1 + uv)^v$, $u = x^2 - y^2$, v = x + y

e) $z = \ln\frac{u+v}{u-v}$, u = x, $v = \sqrt{x^2-y^2}$ f) z = arcsin(x - y), x = 3t, $y = 4t^3$

g) $z = \sin^2(x + y^2)$, $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ h) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x = \cos t$, $y = \sin 2t$

i) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$ j) $z = \arcsin(x - y)$, $x = \sin t$, $y = t^3$

5. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$ b) $z = x^y$ c) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ d) $z = y^x + xy$ e) $z = e^{x^2}\sin^2 y$

g) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$ h) $z = \sin(x^2 + y^2)$ i) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$ j) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

k) $u = x^{y^2 z}$ l) $u = z^{xy}$ m) $u = (xy)^z$ n) $u = \sin^{yz} x$

6. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1{,}02)^2 + (0{,}05)^2}$ b) $B = \ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$ c) $C = (0{,}97)^{2{,}02}$

7. Tìm đạo hàm y' của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - y^3x = a^4$ b) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$ c) $y + \operatorname{tg}(x + y) = 0$ d) $y = \operatorname{arctg}(x + y)$

e) $x^y = y^x$ f) $y + \cos(x + y) = 0$ g) $\operatorname{arctg}(xy) + e^{x-y} = 0$

8. Tính các đạo hàm z'_x, z'_y của hàm số ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi

a) $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ b) $x + y + z = e^z$ c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

d) $x^2 + z^3 - 3xyz = a^3$ e) $z^3 - x^3 - y^3 = a^3$ f) $x^3 + y^3 - z^3 = \sin(xyz)$

g) $x + y + z = xyz$ h) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}$

9. Cho $u = \dfrac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x,y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$

10. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn y(x), z(x) xác định bởi hệ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

11. Phương trình $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn z = z(x,y). Chứng minh rằng $x^2 z'_x + \dfrac{z'_y}{y} = \dfrac{1}{z}$

Tuần XII. Đạo hàm và vi phân cấp cao, cực trị hàm nhiều biến

A. Tổng quan

1. **Nội dung vắn tắt:** Tích phân suy rộng.

2. **Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên các khái niệm về tích phân suy rộng: có cận vô hạn và hữu hạn, định nghĩa, ý nghĩa hình học; các khái niệm: hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ, dấu hiệu so sánh.

3. **Các kiến thức cần có trước:** Các kiến thức về hàm số, liên tục, đạo hàm của hàm số, tích phân bất định và tích phân xác định.

B. Lý thuyết

1. Định lý Schwartz

Nếu trong lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$, hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và các đạo hàm ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Chú ý rằng tính bất biến của vi phân cấp cao (lớn hơn hay bằng 2) của hàm số nhiều biến không còn đúng.

2. Công thức Taylor

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n + 1)$ liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$, nếu điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó, thì ta có:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \quad (0 < \theta < 1)$$

3. Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong một miền D nào đó, $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm trong của D. Ta nói rằng $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0 nếu với mọi điểm M trong một lân cận nào đó của M_0, nhưng khác M_0, hiệu số $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi. Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$, ta có cực tiểu, nếu $f(M) - f(M_0) < 0$, ta có cực đại.

4. Quy tắc tìm cực trị

Đặt $p = f'_x(M)$, $q = f'_y(M)$, $r = f''_{xx}(M)$, $s = f''_{xy}(M)$, $t = f''_{yy}(M)$

Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0 và tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M)$, $q = f'_y(M)$ tồn tại, thì các đạo hàm riêng đó bằng không: $p = q = 0$ tại M_0.

Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của M0(x0,y0). Giả sử tại M0 ta có $p = q = 0$. Khi đó, tại M0, ta có:

a) Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0, là cực tiểu nếu $r > 0$ và cực đại nếu $r < 0$.

b) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $f(x,y)$ không đạt cực trị tại M_0.

c) Nếu $s^2 - rt = 0$, thì $f(x,y)$ có thể hoặc không đạt cực trị tại M_0 (trường hợp nghi ngờ).

C. Bài tập

1. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a) $z = \dfrac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{3}$ b) $z = x^2\ln(x+y)$ c) $z = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$ d) $z = 2x^2y^3$

e) $z = \sin x\cos y$ f) $z = e^{x+y^2}$ g) $z = x\sin xy + y\cos xy$

2. Tìm đạo hàm các hàm ẩn sau

a) $\sin(x + y) - y = 0$, tính y', y'' b) $x + y^2 = 1$, tính y', y'', y'''

c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$, tính y''

3. Lấy vi phân cấp hai của các hàm số sau

a) $z = xy^2 - x^2y$ b) $z = \dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$ c) $z = e^x\sin y$ d) $z = x^y$

e) $z = \ln(x - y)$ g) $z = (x + y)e^{x+y}$ h) $z = \text{arctg}(xy)$ i) $z = \sin x\sin y$

j) $z = \cos(x + y)$

4. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ b) $z = x + y - xe^y$ c) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

d) $z = x^2 + y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$ e) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ f) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

g) $z = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ i) $z = xy^2(1 - x - y)$ j) $z = (x - 1)^2 + 2y^2$

k) $z = x^3 + y^3 - 3x - 6y$ l) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

m) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Tuần XIII. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, cực trị có điều kiện

A. Lý thuyết

1. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

Để tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số trong miền D, chúng ta phải tìm các điểm tới hạn, (điểm cực đại (cực tiểu)), của hàm số sau đó so sánh giá trị hàm tại các điểm đó với nhau và với các điểm cực đại (cực tiểu) trên biên của D, từ đó rút ra kết luận về giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) cũng như vị trí những điểm đạt các giá trị này.

2. Cực trị có điều kiện, phương pháp nhân tử Lagrange

Người ta gọi cực trị của hàm số z = f(x,y) (*), trong đó các biến số x và y bị ràng buộc bởi hệ thức g(x,y) = 0 (**) là cực trị có điều kiện.

Giả sử $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số (*) với điều kiện (**), đồng thời:

a) Ở lân cận M_0, các hàm số f(x,y), g(x,y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục.

b) Các đạo hàm riêng g'x, g'y không đồng thời bằng không tại M_0.

Khi đó, ta có, tại M_0: $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0$ (***)

Điều kiện (***) tương ứng với việc tồn tại số λ sao cho tại M_0, ta có:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad (****)$$

Hệ (****) cùng với (**) cho ta tìm được λ, x_0, y_0, nghĩa là tìm được những điểm mà tại đó hàm (*) có cực trị với điều kiện (**). Số λ gọi là nhân tử Lagrange, phương pháp trên gọi là phương pháp nhân tử Lagrange.

Có thể tóm lược như sau: đặt F(x,y,λ) = f(x,y) + λg(x,y), giải hệ $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases}$ để tìm các điểm cực trị của (*) thoả điều kiện (**).

B. Bài tập

1. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ b) $z = xy$ với $x + y = 1$

c) $z = x^2 + y^2$ với $ax + by + c = 0$ d) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với $x + y - 1 = 0$

e) $z = 6 - 4x - 3y$ với $x^2 + y^2 = 1$ f) $z = x + 2y$ với $x^2 + y^2 = 5$

2. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi $x = 0$, $y = 6$, $x + y = 6$

b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \pi/2$

c) $z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$ trong miền $x^2 + y^2 \le 1$

d) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong miền $x,y \le 0$, $x + y \ge -3$

e) $z = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ trong tam giác O(0;0), A(1;0), B(0;1)

f) $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ trong miền $x,y \ge 0$, $2x + 3y \le 12$

g) $z = xy$ trong miền $x^2 + y^2 \le 1$ h) $z = x^2 - y^2$ trong miền $x^2 + y^2 \le 4$

i) $z = x^2y(2 - x - y)$ trong miền $x,y \ge 0$, $x + y \le 6$

j) $z = x + y$ trong miền $x^2 + y^2 \le 1$

k) $z = x^3 - y^3 - 3xy$ trong miền $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$

l) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trong miền $x^2 + y^2 \le 25$