电路IA复习 (4-1) 正弦稳态电路的相量分析(上)

2022.8

本讲主要内容

ppt目录	对应教材章节
4 正弦稳态电路的相量分析	第4章
4.1 正弦量	4.1
4.2 正弦量的相量表示法	4.2
4.3 基尔霍夫定律的相量形式和电路相量模型	4.3-4.4
.4 阻抗与导纳 4.5	
4.5 正弦稳态电路的相量分析法	4.6
4.6 正弦电流电路的功率	4.7-4.8
4.7 耦合电感	4.9-4.10
4.8 理想变压器	4.11

请结合课本认真理解每页ppt。

在观看每一部分的ppt前,可以先回忆一下相应的知识点。 对于例题的解答,有动画的可以适时暂停,想一下下一步可能是什么。

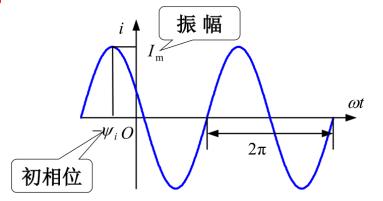
м

4.1 正弦量 以正弦电流为例

瞬时值表达式

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

 $I_{\rm m}$, ω , ψ ——正弦量的三要素



- (1) 幅值/m (振幅、最大值): 反映正弦量变化幅度的大小。
- (2) 角频率 ω : 反映正弦量变化的快慢,为相角随时间变化的速度。相关量: 频率f 和周期T。

关系:
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$
 物理量 符号 单位名称 角频率 ω rad/s,弧度/秒 频率 f 1/s (即Hz),1/秒 周期 T s,秒

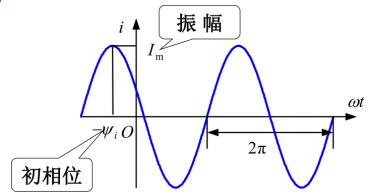
м

4.1 正弦量 以正弦电流为例

瞬时值表达式

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

 $I_{\rm m}$, ω , ψ ——正弦量的三要素



(3) 初相位 ψ : 反映了正弦量的计时起点。

$$(\omega t + \psi)|_{t=0} = \psi$$
 — 初相位角,简称初相位。

同一个正弦量,计时起点不同,初相位不同。

<u>一般规定</u>: |ψ|≤π。

初相为零的正弦量称为参考正弦量。一旦把某一正弦量选作 参考正弦量,其它同频率的正弦量的初相也就相应被确定。

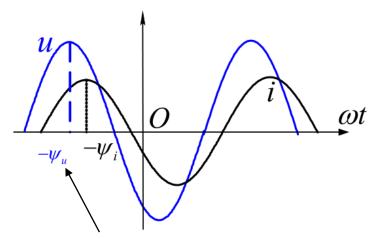
4.1 正弦量

相位差:两个同频率正弦量相位角之差。(不同频率正弦量间讨论相位差无意义)

设电压 $u(t)=U_{\rm m}\cos(\omega t+\psi_u)$, 电流 $i(t)=I_{\rm m}\cos(\omega t+\psi_i)$

则电压、电流间的相位差为 $\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i$

 $\frac{\Xi\varphi}{\varphi}>0$,则电压领先(超前)电流 φ 角,或电流落后(滞后) 电压 φ 角(u 比 i 先到达最大值),反之则电压滞后电流 φ 角。



思考: ①这里为什么是 $-\psi_u$?

②图中是电压超前电流还是电流超前电压?

特例:

 $\varphi=0$, 同相

 $\varphi = \pi$,反相

 $\varphi=\pi/2$,正交

规定: $|\varphi| \leq \pi$ 。

×

4.1 正弦量

有效值

电流有效值:周期性电流i流过电阻R在一周期T内消耗的电能,等于一直流电流I流过R在时间T内消耗的电能,则称电流I为周期性电流i的有效值。(能量角度定义,为功率能量计算提供方便)

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$
 (方均根值)

同样,可定义电压有效值

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

正弦电流、电压的有效值

$$I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$
 或 $I_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}I$ $U = \frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}}$ 或 $U_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}U$

区分<u>正弦/周期</u>电压、电流的瞬时值、最大值、有效值、幅值相量、有效值相量的符号! (小写? 大写? 带下标? 带点?) (直流不区分,因为是一样的)

×

4.2 正弦量的相量表示法

背景: 正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正

弦量;三角函数运算繁琐。→引入相量

正弦量一般表达式为: $f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$

根据欧拉公式建立其与复数的关系: $f(t) = \text{Re}[A_m e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \text{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}]$ 其中 $\dot{A}_m = A_m e^{j\psi} = A_m \angle \psi$ (幅值相量)

则: ①一个正弦量 $f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$

能唯一地确定其对应的幅值相量 $\dot{A}_m = A_m e^{j\psi} = A_m \angle \psi$ $f(t) \rightleftharpoons \dot{A}_m$

②反之,若已知 \dot{A}_m 和角频率 ω ,也能唯一地确定 \dot{A}_m 所代表的正弦量。

还有有效值相量 \dot{A} , 类似可知 $f(t) \rightleftharpoons \dot{A}$

(在正弦电路中,有效值相量和幅值相量相差仅仅是前面的系数,之所以要引入有效值相量是为了方便计算功率。)

м

4.2 正弦量的相量表示法

结合P88 正弦量运算与相量运算的对应关系,理解引入相量表示法的原因和意义:

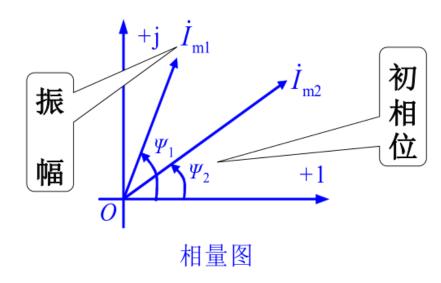
- ①若激励是同频率正弦量,则电路各处响应都是同频率正弦量,对于同频率正弦量,取出幅值/有效值和初相位两个信息,即可表示它们,而相量正体现了这两个信息,且与正弦量可做到一一对应(唯一性)。
- ②微分/积分运算→乘除运算,和差化积、积化和差→加减运算 (线性性质、微分规则)

м

4.2 正弦量的相量表示法

注意: 相量是复值常量(复数),而正弦量是时间的余弦函数,相量只是代表正弦量(反映了正弦量的幅值/有效值和初相位信息),而不是等于正弦量。

按着一定的振幅和相位关系画出若干相量的图形——相量图



在之后的学习和分析中,常把电压相量和电流相量(或多个电压相量、多个电流相量)画在一张图中。此时需要规定参考相量(从参考正弦量而来),其他相量根据与参考相量的超前或落后关系呈现在图中。

4.2 正弦量的相量表示法

简例:
$$u_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$$
 $u_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ) \text{ V}$ $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ 求 $u(t)$.

解: $u_1(t), u_2(t)$ 为同频率正弦量,转为相量表示:

$$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{ V}$$
 (有效值相量,不带 m) $\dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{V}$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ = 5.19 + j3 + 2 + j3.46$$

= 7.19 + j6.46
= 9.64\angle 41.9° V

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 9.64\sqrt{2}\cos(314t + 41.9^{\circ})$$
 V (题目要求的是时域表达式,将相量表达式转换回时域表达式)

м

4.3 基尔霍夫定律的相量形式和电路相量模型

一、基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此,在正弦电流电路中,KCL和KVL可用相应的相量形式表示。

$$\sum i(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum \dot{I}_m = 0 \quad \vec{\boxtimes} \qquad \sum \dot{I} = 0$$

$$\sum u(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum \dot{U}_m = 0 \quad \vec{\boxtimes} \qquad \sum \dot{U} = 0$$

上式表明:流入某一节点的所有电流用相量表示时仍满足KCL;而任一回路所有支路电压用相量表示时仍满足KVL。

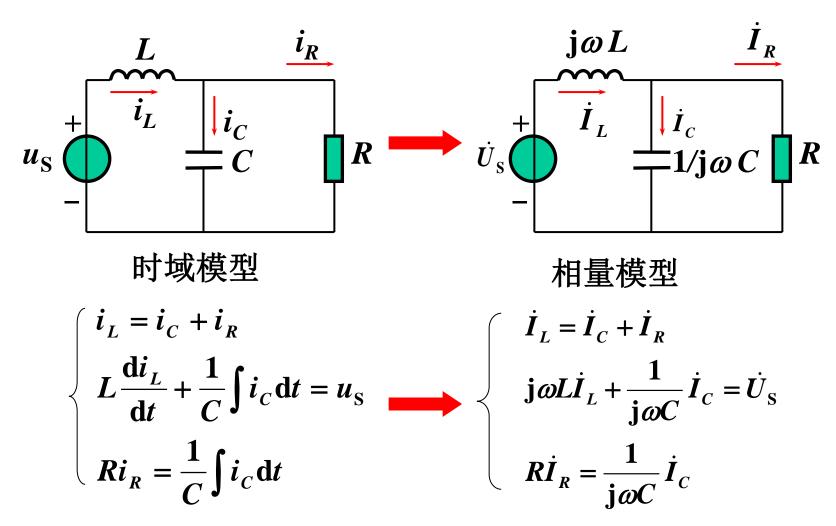
4.3 基尔霍夫定律的相量形式和电路相量模型

二、电路的相量模型

	电阻	电容	电感
电压电流 关系	$\dot{U}_{R}=R\dot{I}$	$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = jX_C \dot{I}_C$	$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I}$
有效值关系	$U_R=RI$	$I_{C} = \omega CU$	$U=\omega LI_L$
电压电流相位关系	$ \psi_u = \psi_i $ $(u,i 同相)$	$\psi_i = \psi_u + 90^\circ$ (i 超前 u 90°)	ψ _u = ψ _i + 90° (u 超前 i 90°)
阻抗关系	R	$X_C = -1/\omega C$	$X_L = \omega L$
相量图	$ \begin{array}{c} +j \\ \dot{I}_{R} \\ \dot{\psi}_{u} = \psi_{i} \\ +1 \end{array} $	$i_{\rm C}$ $i_{\rm C}$ $i_{\rm C}$ $i_{\rm C}$ $i_{\rm C}$	$\dot{U_L}$ $\dot{I_L}$ O $+1$

(上述电压与电流取关联参考方向)

4.3 基尔霍夫定律的相量形式和电路相量模型

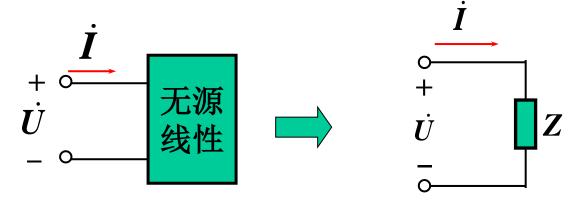


列微分方程 求非齐次方程特解

列、解代数方程

W

4.4 阻抗与导纳



回忆:一个不含独立源的二端电阻网络(一端口)可以用一个电阻等效。 正弦激励下,对于无源线性网络,可定义输入端等效复阻抗: (无源线性网络可以用一个阻抗来等效)

$$Z = \frac{\dot{d}ef}{\dot{I}} = |Z| \angle \varphi = R + jX$$
$$(\varphi = \psi_{u} - \psi_{i})$$

纯电阻
$$Z=R$$

纯电感 $Z=j\omega L=jX_L$
纯电容 $Z=1/j\omega C=jX_C$

(含正弦激励的线性网络,可以用一个正弦电源+阻抗/导纳来进行 戴维南/诺顿等效)

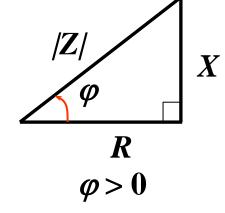
м

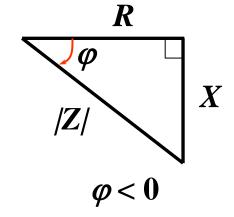
4.4 阻抗与导纳

R—电阻(阻抗的实部); X—电抗(阻抗的虚部); |Z|—复阻抗的模; φ —阻抗角。

关系
$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctan \frac{X}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = |Z| \cos \varphi \\ X = |Z| \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{|Z| = U/I}{\varphi} = \frac{V}{u} - \frac{V}{u}$$

阻抗三角形





4.4 阻抗与导纳

对于上述的无源线性网络,同样可定义入端等效复导纳:

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + jB = |Y| \angle \varphi' \qquad (\varphi' = \psi_i - \psi_u)$$

 $Y_R = 1/R$

纯电感: $Y_L = \frac{1}{\mathbf{j}\omega L} = \mathbf{j}B_L$

(纯电容: $Y_C = \mathbf{j}\omega C = \mathbf{j}B_C$

Y— 复导纳; G—电导(复导纳的实部); B—电纳(复导纳的虚部); |Y|—复导纳的模; φ —导纳角。

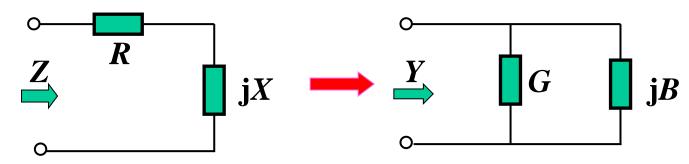
$$\begin{cases} G = |Y| \cos \varphi' \\ B = |Y| \sin \varphi' \end{cases} \begin{cases} |Y| = I/U \\ \varphi' = \psi_i - \psi \end{cases}$$

 $B (\varphi'>0) | P' |$

$$B \quad (\varphi' < 0)$$

4.4 阻抗与导纳

复阻抗和复导纳等效关系



$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi \implies Y = G + jB = |Y| \angle \varphi'$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + iX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|}$$
 , $\varphi' = -\varphi$

注: 阻抗和导纳是复数,但不是相量!

若由Y变为Z,类似处理,此处略去。

4.5 正弦稳态电路的相量分析法

一般过程:

- 1. 将电阻推广为阻抗,将电导推广为导纳;
- 2. 将激励用相量形式表示,时域下的电压、电流推广为电压、电流的相量;
- 3. 按<mark>线性直流电路分析方法</mark>(如回路电流法、节点电压法、戴维南定理等)计算相量模型电路,必要时借助相量图分析;
- 4. 将电压、电流相量计算结果变换成正弦表达式。

也即:除了将时域表达式与相量表达式的互换外,正弦稳态电路分析和 线性直流电路分析相比,<u>没有新的内容</u>。

本章最大难点在于:①新概念、公式多,需要反复练习、消化错题;② 计算难度和计算量大;③之前线性直流电路分析方法掌握不扎实、运用 不熟练(雪上加霜)。

请大家将作业题认真重做一遍,并对照答案仔细订正!



例0 试判断下列表达式的正、误。

1.
$$u = \omega Li$$

2.
$$i = 5\cos\omega t = 5\angle 0^{\circ}$$

3.
$$\dot{I}_{\rm m} = j\omega CU_{\rm m}$$

$$4. X_{\rm L} = \frac{U_{\rm L}}{\dot{I}_{\rm L}}$$

5.
$$\frac{\dot{U}_{\rm c}}{\dot{I}_{\rm c}} = j\omega C \Omega$$

6.
$$\dot{U}_{L} = j\omega L\dot{I}_{L}$$

7.
$$u = C \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



例0 试判断下列表达式的正、误。

1.
$$U = \omega LI$$

5.
$$\frac{U_{\rm c}}{\dot{I}_{\rm c}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \Omega$$

2.
$$i = 5\cos\omega t \neq 5\angle 0^{\circ}$$

相量仅代表正弦量,不是等于正弦量

3.
$$\dot{I}_{\rm m} = j\omega C \dot{U}_{\rm m}$$

6.
$$\dot{U}_{L} = j\omega L\dot{I}_{L}$$

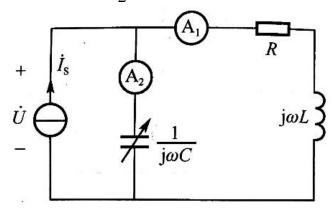
4.
$$X_{L} = \frac{U}{I} = \frac{U_{m}}{I_{m}}$$

7.
$$u = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathbf{j}X_{\mathrm{L}} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{L}}}{\dot{I}_{\mathrm{L}}}$$

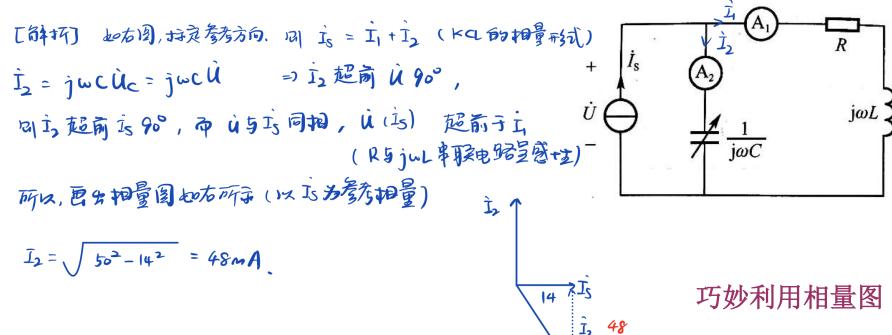
何

如图所示电路,已知 $i_S(t)=14\sqrt{2}\cos(\omega t+\psi)$ (mA),调节电容,使 $\dot{U}=U\angle\psi$ 。电流表A₁、A₂均为理想电流表,A₁的示数为50mA,则A₂的示数为?



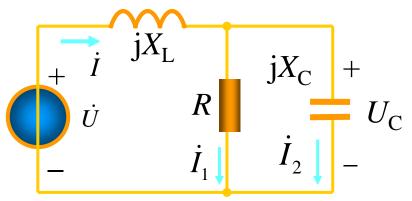
请先独立完成后,再翻到次页查看答案!

如图所示电路,已知 $i_S(t)=14\sqrt{2}\cos(\omega t+\psi)$ (mA),调节电容,使 $\dot{U}=U\angle\psi$ 。电流表A₁、A₂均为理想电流表,A₁的示数为50mA,则A₂的示数为?



图示电路 $I_1=I_2=5A$,U=50V,总电压与总电流同相

位,求I、R、 X_{C} 、 X_{L} 。



请先独立完成后,再翻到次页查看答案!

- 电路

例2解 图示电路 $I_1=I_2=5$ A,U=50V,总电压与总电流同相位,求I、R、 X_C 、 X_L 。

解法1 设 $\dot{U}_{\rm c} = U_{\rm c} \angle 0^{\rm o}$

$$\vec{I}_1 = 5 \angle 0^0, \quad \dot{I}_2 = j5$$

【①确定角度:电阻上电压等于电容上电压,并和4同相位;电容上电流超前电压90°;

②确定模: 题干中已经给出I₁=I₂=5A】

$$\dot{I} = 5 + j5 = 5\sqrt{2}\angle 45^{\circ}$$
 (KCL)

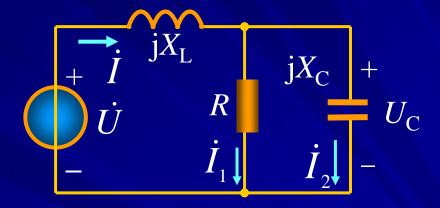
$$\dot{U} = 50 \angle 45^{\circ} = (5 + j5) \times jX_{L} + 5R = \frac{50}{\sqrt{2}}(1 + j)$$
 (KVL)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \overrightarrow{j}X_{L} & & \overrightarrow{j}X_{C} & + \\
 & \dot{U} & & R & & & U_{C} \\
 & & \dot{I}_{1} & & \dot{I}_{2} & - & & \\
\end{array}$$

例2解 图示电路 $I_1=I_2=5A$,U=50V,总电压与总电流同相位,求I、R、 X_C 、 X_L 。

解法1

令等式两边实部等于实部, 虚部等于虚部



$$\begin{cases} 5X_{\rm L} = 50/\sqrt{2} \Rightarrow X_{\rm L} = 5\sqrt{2}\Omega \\ 5R = \frac{50}{\sqrt{2}} + 5 \times 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow R = |X_{\rm C}| = 10\sqrt{2}\Omega \end{cases}$$

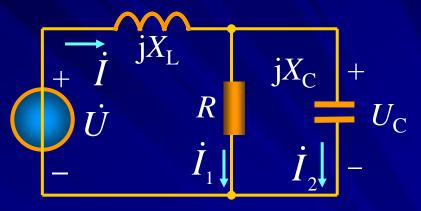
- 电路

解法2

画相量图计算

(电容上电流超前电压90°)

· (题目条件: *U []* 与*[*同相位)



 $I = 5\sqrt{2}$ U 45°

U_L (电感上电压超前 电感电流190°)

$$\dot{I}_{\scriptscriptstyle 1}$$
 $\dot{U}_{\scriptscriptstyle
m R}=\dot{U}_{\scriptscriptstyle
m C}$

(电阻上电压等于电容上电压,并和4同相位)

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

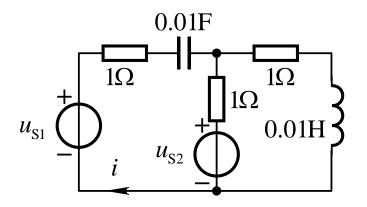
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$$

$$U = U_L = 50V$$

$$X_{\rm L} = \frac{50}{5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\Omega$$

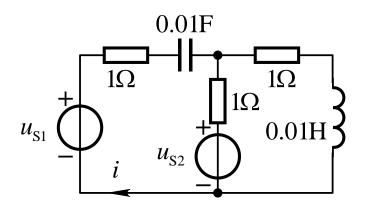
$$\left|X_{\rm C}\right| = R = \frac{50\sqrt{2}}{5} = 10\sqrt{2}\Omega$$

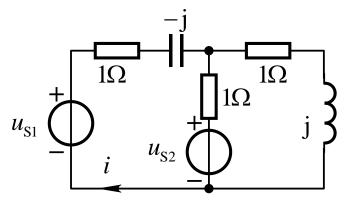
[4.10] 已知图示电路中 $u_{s1} = u_{s2} = 4\cos\omega t$ V, $\omega = 100$ rad/s。试求电流i。



请先独立完成后,再翻到次页查看答案!

[4.10] 已知图示电路中 $u_{s_1} = u_{s_2} = 4\cos\omega t$ V, $\omega = 100$ rad/s。试求电流i。





图示电路容抗
$$X_c = -\frac{1}{\rho C} = -\frac{1}{100 \times 0.01} \Omega = -1\Omega$$
,

感抗
$$X_L = \omega L = (100 \times 0.01)\Omega = 1\Omega$$

列节点电压方程

$$\left[\frac{1}{1\Omega+j(-1\Omega)} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega+j\Omega}\right]\dot{U}_{n1} = \frac{\dot{U}_{S1}}{1\Omega+j(-1\Omega)} + \frac{\dot{U}_{S2}}{1\Omega}$$
(1)

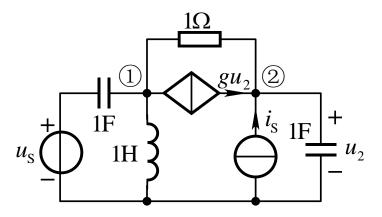
将
$$\dot{U}_{S1} = \dot{U}_{S2} = 2\sqrt{2}\angle 0$$
°V代入(1)式

解得
$$\dot{U}_{n1} = \sqrt{5} \angle 18.43^{\circ} \text{V}$$

$$\dot{I} = -\frac{-\dot{U}_{n1} + \dot{U}_{S1}}{1\Omega + j(-1\Omega)} = \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

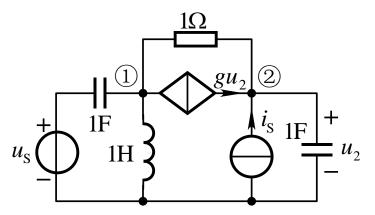
电流
$$i = \cos(100t)$$
A

已知图示电路中 g=1 S, $u_{\rm s}=10\sqrt{2}\cos\omega t$ V, $i_{\rm s}=10\sqrt{2}\cos\omega t$ A, $\omega=1$ rad/s。求受控电流源的电压 u_{12} 。



请先独立完成后,再翻到次页查看答案!

已知图示电路中g=1S, $u_s=10\sqrt{2}\cos\omega t$ V, $i_s=10\sqrt{2}\cos\omega t$ A, $\omega=1$ rad/s。求受控电流源的电压 $u_{i,j}$ 。



解: 电压源和电流源的相量分别为

 $\dot{U}_{\rm s} = 10 \angle 0^{\circ} \, \text{V}, \quad \dot{I}_{\rm s} = 10 \angle 0^{\circ} \, \text{A}$

(将时域表达式变 化为相量表达式)

对节点①和②列相量形式节点电压方程

由图可知受控源控制量 $\dot{U}_{\gamma} = \dot{U}_{n}$, (补充方程)

解得 $\dot{U}_{n1} = j10V$ $\dot{U}_{n2} = 10 - j10V$

 $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{n_1} - \dot{U}_{n_2} = (-10 + j20)V = 22.36 \angle 116.57^{\circ}V$

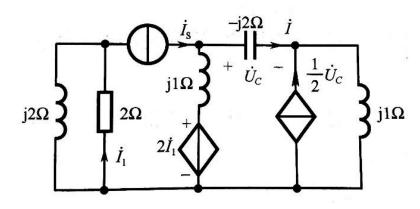
受控电流源的电压为

$$u_{12} = 22.36\sqrt{2}\cos(\omega t + 116.57^{\circ})V$$

大家对照自救群中的答案 和此处的答案,是否能发 现什么区别?



图示电路,已知 $\dot{I}_s = 4\angle 0^\circ A$,用戴维南定理求电流相量 \dot{I} 。



请先独立完成后,再翻到次页查看答案!

图示电路,已知 $I_s = 4\angle 0$ °A,用戴维南定理求电流相量 I。

解: 将国中ab左侧电路作-戴维南等效.

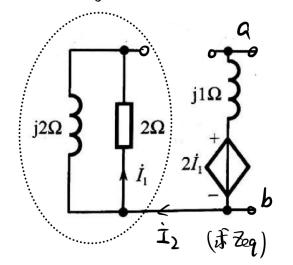
0等效阻抗、将电流消量室, 叫了一

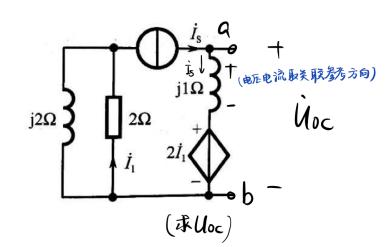
(如左下,对形面到KCL, 至o I2 =0,从面由分流公式知道=0)

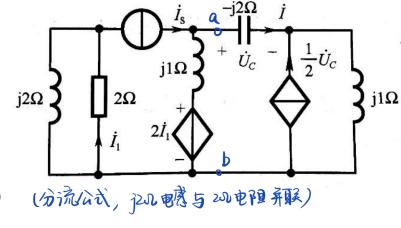
②开路电压:
$$\hat{I}_i = \frac{\hat{j}^2}{2+2\hat{j}} \times 46^\circ A = 2+\hat{j}^2 A$$
 (分流版) 上地區与20中四角联)

(爱控电压源上的压阵) (1)

$$\hat{\mathbf{u}}_{\circ c} = (2+\hat{j}^2) \times 2 + 4\times\hat{j} = 4 + \hat{j} \otimes V = 4\sqrt{5} \sqrt{63.43}^{\circ} V$$







图示电路,已知 $\dot{I}_s = 4\angle 0^\circ A$,用戴维南定理求电流相量 \dot{I} 。

ab 右侧电锅为线性无源一端口,可等效为一胆的元、

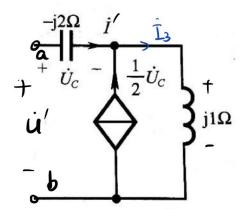
在稀吟的施一电压激励山,则

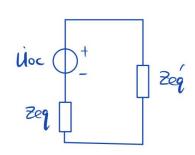
$$\hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{u}}_{c} + \hat{\mathbf{j}}_{1} \underbrace{(\hat{\mathbf{I}}' + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}_{c})}_{\text{Pl}_{3}}$$

$$= \hat{\mathbf{I}}'(-\hat{\mathbf{j}}_{2}) + \hat{\mathbf{j}}_{1} \hat{\mathbf{I}}' + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}}'(-\hat{\mathbf{j}}_{2})(\hat{\mathbf{j}}_{1}) = (1-\hat{\mathbf{j}}_{1})\hat{\mathbf{I}}'$$

$$= Zeq' = I - \hat{j} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{I} = \frac{4+\hat{j}8}{(I-\hat{j})+\hat{j}} = (4+\hat{j}8) A = 4\sqrt{5} \angle 63.43^{\circ} A$$

$$(8.94\angle 63.43^{\circ} A)$$





本讲内容结束 谢谢!

2022.8