微分方程与差分模型

longlin

2023 年 7 月 12 日

1 微分方程的求解

1.1 符号解与数值解

- 符号解：完整写出解的代数式，强调解的代数性
- 数值解：算出具体数值，不需完完全全精确，满足一定要求即可

1.2 多元函数常/偏微分方程组

- 偏微分方程和初始条件组成的问题叫做初值问题（Cauchy 问题）
- 偏微分方程和第一类边界条件组成的问题叫做第一类边值问题（Dirichlet 问题）
- 偏微分方程和第二类边界条件组成的问题叫做第二类边值问题（Neumann 问题）
- 偏微分方程和第三类边界条件组成的问题叫做第三类边值问题（Robin 问题）
- 既有初始条件又有边界条件的问题叫做混合问题

2　微分方程案例

2.1　人口增长模型

2.1.1　Malthus 模型

马尔萨斯模型假设增长率永远是个常数 r，那么一段时间内增长的个体有

$$x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t$$

按照微分方程的形式整理：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

解得：

$$x(t)=x_0e^{rt}$$

2.1.2　Logistic 模型

现在对模型进行一些修正，假设增长率会随着种群数量增加而衰减，种群最大的一个平衡数量叫 K，那么可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx(1-\dfrac{x}{K})\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

$$\text{解得}\quad x(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K}{x_0}-1\right)e^{-rt}}$$