线性规划模型笔记

longlin

2023 年 7 月 8 日

1 线性规划模型

1.1 线性规划的矩阵形式

- 不等式组条件矩阵化
- 方程组条件矩阵化
- 每个变量自己的取值范围
- 目标函数的向量化
- 求极值

$$\min_{x} \ c^T X$$
$$s.t. \begin{cases} Ax \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \tag{1}$$

如果遇到求极大值问题，可以将目标函数取负号，转化为求极小值问题。如果不等式组中有 $>=$ 的不等式，可以添负号将其转化为 $<=$ 的不等式。

1.2 单纯形法

国定变量，不断变换基向量求方程组的解带入，看是不是最优解，不是就更新迭代现阶段的解。

单纯形法要求约束条件都为等式，且要所有变量非负。我们需要把不等式约束 **通过引入松弛变量变为等式约束**。

什么情况下要在线性规划中映入松弛变量呢？

- 需要将线性规划化成标准形式时
- 遇到绝对值问题时
- 不等式过多甚至存在非线性的不等关系时

1.3 蒙特卡洛法

在 **可行域范围内生成大批量随机数据点**，观测这些数据点在什么位置取得近似最优。如此得到近似最优解，更多的适用于求解非线性问题。

1.4 0-1 规划问题

0-1 规划问题是线性规划问题的一种特殊形式，即变量只能取 0 或 1。

1.4.1 指派问题

假设 n 个人恰好做 n 项任务，第 i 个人做第 j 项任务的效率为 $c_{ij} \geq 0$，应指派哪个人完成哪项任务，使完成效率最高。

$$\text{决策变量：} x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{指派第 i 个人做第 j 项任务} \\ 0, & \text{不指派第 i 个人做第 j 项任务} \end{cases}$$

$$\text{目标函数：} \min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{约束条件：}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, & j=1,2,\cdots,n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, & i=1,2,\cdots,n \\ x_{ij}\in\{0,1\}, & i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

1.5 动态规划模型

本质上是进行空间换时间的操作

1) 核心思想：将大问题划分为小问题进行解决，从而一步步获取最优解的处理算法

2) 与分治法不同的是,动态规划分解得到的子问题往往不是互相独立的。(即下一个子阶段的求解是建立在上一个子阶段的解的基础上，进行进一步的求解）

3) 动态规划通过填状态表的方式逐步推进，得到最优解。

动态规划程序编写思路（k 表示多轮决策的第 k 轮）：

1. 将问题分解成几个子问题，一个子问题就是多轮决策的一个阶段

2. 选择合适的状态变量 Sk，它需要具备描述多轮决策过程的演变。

3. 确定决策变量 uk，每一轮的决策就是每一轮可能的决策动作，即当前可以有哪些决策可以选择。

4. 列写状态转移方程，即所谓递推公式。

5. 写出代表多轮决策目标的指标函数 Vk,n，即最终需要达到的目标。

6. 寻找目标的终止条件。