KVE

Nhóm Toán và LaTeX

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MINITEST 03 - MARK - ÔN THI THPT QUỐC GIA 2023

Bài thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 60 phút

Mã đề: 930

Câu 1.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -2)$. **B.** $(-1; 3)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)\,x^2 + (3m^2 + 1)\,x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 9}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 4. Tìm m để hàm số: $y = -x^3 + 3mx^2 - 3\,(2m - 1)\,x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. Luôn thỏa mãn với mọi giá trị của m. **B.** $m = 1$.

C. Không có giá trị của m. **D.** $m \neq 1$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng

A. 20. **B.** 16. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 7. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x+3}{x-2}$.

Câu 8. Hàm số $y=-x^4+2x^2+3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}(m+2)x^3+2(m+1)x^2+(m-5)x+2m-1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m<-1$. **B.** $3<m\le 4$. **C.** $m>4$. **D.** $1\le m<3$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào đúng trong những mệnh đề sau:

A. $f'(x)>0$ với $\forall x\in[a,b] \Leftrightarrow f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a,b]$.

B. $f'(x)>0$ với $\forall x\in(a,b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b).

C. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a,b) \Leftrightarrow f'(x)\ge 0, \forall x\in(a,b)$.

D. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a,b) \Rightarrow f'(x)\ge 0, \forall x\in(a,b)$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;1)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]$.

Câu 13. Trong các hàm số sau, hàm sô nào chỉ có một cực đại mà không có cực tiểu:

A. $y=x^3+3x^2-6x+1$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x}$.

C. $y=-x^4-x^2+5$. **D.** $y=\dfrac{4x^2+x-5}{x+2}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=x^3-3x+1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ sao cho hàm số $y=f(2-x)-(1-m)x-6$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2m(m+1)x+2m^3+m^2+1}{x-m}$ có đồ thị (C_m) (m là tham số thực). Gọi A là điểm thỏa mãn vừa là điểm cực đại của (C_m) ứng với một giá trị m vừa là điểm cực tiểu của (C_m) ứng với giá trị khác của m. Giá trị của a để khoảng cách từ A đến đường thẳng $(d)\colon x-(a+1)y+a=0$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $a=3$. **B.** $a=-3$. **C.** $a=\dfrac{10}{3}$. **D.** $a=-\dfrac{10}{3}$.

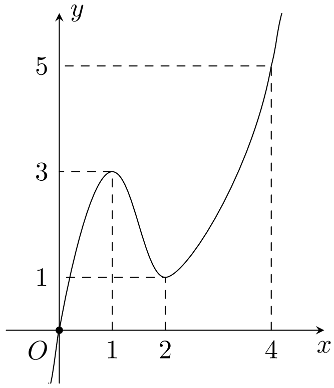
Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ thỏa mãn $x_A^2+x_B^2=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm3$. **C.** $m=\pm1$. **D.** $m=2$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Nếu phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x)\cdot f''(x)=[f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 4 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Câu 18.



Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$; $f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 19. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

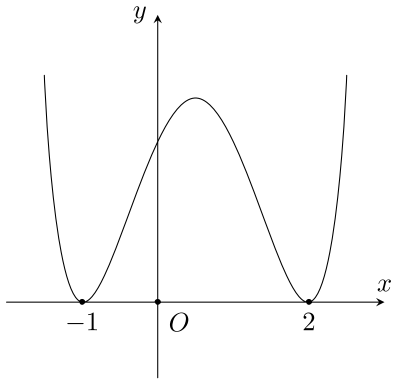
Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(x+m^2) - \dfrac{3}{2}m$ (m là tham số thực). Gọi tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| + \min\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = \dfrac{9}{4}$ là $S = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ $(a,\, b \in \mathbb{N})$. Giá trị $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{36}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{18}$. **C.** $\dfrac{9}{5}$. **D.** $\dfrac{18}{5}$.

Câu 21. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f'(x)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 22. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** 9. **C.** 1. **D.** 10.

Câu 23. Một sợi dây dài $6\,m$ được cắt thành hai phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều cạnh a, phần thứ hai được uốn thành hình vuông. Hỏi giá trị a bằng bao nhiêu để diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}\,(m)$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\,(m)$. **C.** $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}\,(m)$. **D.** $\dfrac{36\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\,(m)$.

Câu 24. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 27 m/s. **B.** 36 m/s. **C.** 144 m/s. **D.** 243 m/s.

Câu 25. Huyết áp của một bệnh nhân cao huyết áp sau khi tiêm thuốc được đo bởi công thức $G(x) = 0,025x^2 - x + 30$ trong đó x được tính bằng đơn vị miligam (mg), $x > 0$ là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng:

A. 20 mg. **B.** 40 mg. **C.** 15 mg. **D.** 30 mg.

HẾT

KVE Nhóm Toán và LaTeX ĐỀ THI CHÍNH THỨC	MINITEST 03 - MARK - ÔN THI THPT QUỐC GIA 2023 Bài thi: TOÁN *Thời gian làm bài: 60 phút* Mã đề: 930

GIẢI CHI TIẾT MÃ ĐỀ 930

1.C	2.B	3.B	4.C	5.D	6.A	7.D	8.A	9.A	10.C
11.B	12.D	13.C	14.C	15.D	16.A	17.B	18.B	19.A	20.D
21.C	22.A	23.C	24.B	25.A					

Câu 1.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khoảng nghịch biến của hàm số là $(-2;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Xét $y=\dfrac{1}{3}x^3+\left(m^2-m+2\right)x^2+\left(3m^2+1\right)x$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2+2\left(m^2-m+2\right)x+\left(3m^2+1\right)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ nên $y'(-2)=0$ và $y''(-2)>0$.

Ta có $4-4\left(m^2-m+2\right)+3m^2+1=0\Leftrightarrow m^2-4m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3.\end{array}\right.$

$y''=2x+2\left(m^2-m+2\right)y''(-2)=2m^2-2m$.

$y''(-2)>0\Leftrightarrow 2m^2-2m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0.\end{array}\right.$

Vậy giá trị cần tìm là $m=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 3.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-9}{(x+m)^2}$.Hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}m^2-9<0\\-m\notin(-\infty;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2<9\\-m\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<3\\m\leq -1\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\leq -1.$$

Do m nguyên nên $m\in\{-2;-1\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 4.

$y'=-3x^2+6mx-3(2m-1)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\9m^2-18m+9<0\end{cases}\Leftrightarrow 9(m-1)^2<0$ (vô lí)

Vậy không có giá trị của m thỏa ycbt.

Chọn đáp án C □

Câu 5.

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 6.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1; 3] \\ x = -1 \in [-1; 3]. \end{array}\right.$

Do $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f(3) = 20$ nên $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 20$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 7.

Do $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 1$ nên loại đáp án B, C.

Do $\lim\limits_{x \to x_0^-} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} = +\infty$ nên chọn A.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 8.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Khi đó $y' = -4x^3 + 4x$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	
	$-\infty$				3				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 9.

Ta có $y' = (m + 2)x^2 + 4(m + 1)x + (m - 5)$.

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow (m+2)(m-5) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 5$.

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 10.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1 - m}{(x - 1)^2}$.

Với $-1 - m > 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(2) \Rightarrow \dfrac{2 + m}{1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ loại.

Với $-1 - m < 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) \Rightarrow \dfrac{4 + m}{3} = 3 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow m > 4$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 11.

- ý A. đúng
- ý B. sai vì chiều ngược lại sai.

- ý C. sai vì có thể xảy ra trường hợp $f'(x) = 0\,, \forall x \in (a, b)$ khi đó $f(x)$ là hàm hằng.
- ý D. hiển nhiên sai.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 12.

Ta có $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, ta có $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, theo (1) ta được $m \leq -1$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 13.

- Giải nghiệm phương trình bậc 2 ở tử của đạo hàm phương án A: $4x^2+16x+7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

  Phương trình bậc 2 này có 2 nghiệm đơn đồng thời không là nghiệm của mẫu nên đều là hai cực trị. Do đó loại đáp án này.
- Phương án B có: $b^2 - 3ac = 3^2 - 3.1.(-6) = 27 > 0$. Như vậy phương án này có 2 cực trị. Loại.
- Phương án C có: $y = \dfrac{2x-1}{x} = 2 - \dfrac{1}{x}$

  $\Rightarrow y' = \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  Do đó hàm số này không có cực trị.
- Phương án D có: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{2.(-1)} = -\dfrac{1}{2} < 0$ nên có một cực trị đạt được tại $x = 0$.

  thay vào đạo hàm cấp 2 ta được cực trị này là cực đại: $y''(0) = -2 < 0$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 14.

Xét hàm số $y = f(2-x) - (1-m)x - 6$ trên khoảng $(2; 3)$.

Ta có $y' = -f'(2-x) - 1 + m = -(2-x)^3 + 3(2-x) - 1 - 1 + m \Rightarrow y' = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 + m$.

Để hàm số $y = f(2-x) - (1-m)x - 6$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$ thì

$$y' \leq 0, \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow m \leqslant -x^3 + 6x^2 - 9x + 4, \forall x \in (2; 3).$$

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ trên khoảng $(2;3)$.

Ta có $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin (2;3) \\ x = 3 \notin (2;3). \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$		0		2		4		$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leqslant 2$.
Vì $m \in [-5;5] \Rightarrow m \in [-5;2]$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị của tham số m.
Chọn đáp án C □

Câu 15.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 2m^2(m+1) - 2m^3 - m^2 - 1}{(x-m)^2} = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = x + 1 \\ m = x - 1 \end{array}\right.$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) có phương trình $\Delta\colon y = 2x - 2m(m+1)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		$-2m^2-2$		$-\infty$ || $+\infty$		$-2m^2+2$		$+\infty$

Điểm cực đại là $B(m-1; -2m^2-2)$, điểm cực tiểu là $C(m+1; -2m^2+2)$.

Quỹ tích điểm cực đại là $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = -2m^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 1 \\ y = -2(x+1)^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2x^2 - 4x - 4 \quad (P_1)$.

Quỹ tích điểm cực tiểu là $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = -2m^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x - 1 \\ y = -2(x-1)^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2x^2 + 4x \quad (P_2)$.

Điểm A vừa là điểm cực đại vừa là điểm cực tiểu nên $A = (P_1) \cap (P_2)$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là

$$-2x^2 - 4x - 4 = -2x^2 + 4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

Điểm cố định của đường $(d)\colon x - (a+1)y + a = 0$ là $H(1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$.

Khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) lớn nhất khi và chỉ khi

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot (a+1) + \frac{7}{2} \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16.

Đạo hàm của hàm số này là một tam thức bậc 2 nên nếu nó có hai nghiệm thì đó là hai nghiệm đơn do đó cũng sẽ là hai cực trị của hàm số ban đầu.

$x_A^2 + x_B^2 = 2 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 2x_A.x_B = 2$

$\Leftrightarrow S^2 - 2P = 2$

với $S = x_A + x_B$, $P = x_A.x_B$.

$y' = x^2 - 2mx - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (-1).1 = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ S = 2m \\ P = -1 \end{cases}$

Thay vào phương trình trên ta có:

$(2m)^2 - 2.(-1) = 2 \Leftrightarrow 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17.

Xét đa thức bậc bốn: $g(x) = 2f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2$.

Ta có: $g'(x) = 2f(x) \cdot f'''(x) = 12f(x)$

Vì $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên $g'(x) = 0$ cũng có ba nghiệm phân biệt.

Mặt khác, $g'(x)$ là hàm bậc ba (vì $g(x)$ là hàm bậc bốn) nên ta suy ra $g'(x) = 0$ có ba nghiệm bậc nhất. Hay $g(x)$ có tối đa ba cực trị.

Điều này dẫn đến $g(x)$ có tối da bốn nghiệm.

Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là ba nghiệm phân biệt của $f(x)$ hay của $g'(x)$.

Vì các nghiệm này đều là nghiệm bậc nhất nên hàm $y = f(x)$ không thể đạt cực trị tại các vị trí này (tức hai phía của $x_0 \in \{x_1; x_2; x_3\}$ không thể cùng dương hoặc cùng âm), từ đó ta suy ra hàm số $y = f(x)$ không thể đạt cực trị tại các điểm này, mà $y = f(x)$ là hàm đa thức nên:

$$\begin{cases} f'(x_1) \neq 0 \\ f'(x_2) \neq 0 \\ f'(x_3) \neq 0 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vì: $\begin{cases} g(x_1) = 2f(x_1) \cdot f''(x_1) - [f'(x_1)]^2 = -[f'(x_1)]^2 < 0 \\ g(x_2) = 2f(x_2) \cdot f''(x_2) - [f'(x_2)]^2 = -[f'(x_2)]^2 < 0 \\ g(x_3) = 2f(x_3) \cdot f''(x_3) - [f'(x_3)]^2 = -[f'(x_3)]^2 < 0 \end{cases}$

Suy ra $g(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đầu bài cũng sẽ có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 18.

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $h'(x) = 2x \cdot f(x^2) - 2$.
Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x^2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Với $x \leq 0$ ta luôn có $h'(x) = 2x \cdot f(x^2) - 2 < 0$.
Với $x > 0$, ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$. $\quad$ (1)
Đặt $t = x^2$, với $t > 0$, phương trình (1) trở thành $f'(t) - \dfrac{1}{\sqrt{t}} = 0$. $\quad$ (2)
Khi $t > 1$ thì $f'(t) \geq 1$ và $\dfrac{1}{\sqrt{t}} < 1$ nên phương trình (2) không có nghiệm $t > 1$.
Xét $t \in (0; 1]$, hàm số $k(t) = f'(t) - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ liên tục.
Ta có $k'(t) = f''(t) + \dfrac{1}{2\sqrt{t^3}} > 0$ với $t \in (0; 1)$ nên hàm số $k(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$.
Mặt khác $\lim\limits_{x \to 0^+} k(t) = -\infty$ và $k(1) = 2$, nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = t_0 \in (0; 1)$.
Khi đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t_0}$.
Mặt khác $h(0) = f(0) - 0 = 0$ và $h(2) = f(4) - 4 > 0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

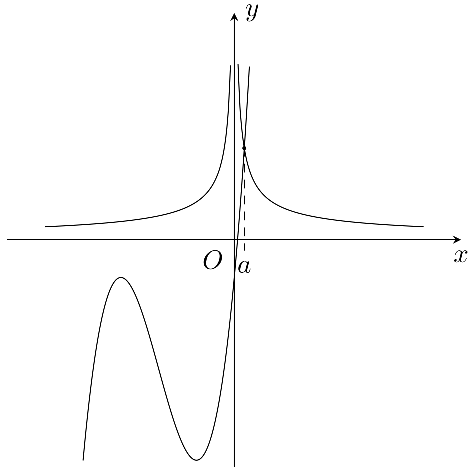
x	$-\infty$		0		$\sqrt{t_0}$		2		$+\infty$
h'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h\left(\sqrt{t_0}\right)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = h(x)$ có một điểm cực trị và đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt, suy ra hàm số $y = g(x) = |h(x)|$ có ba điểm cực trị, trong đó có hai điểm cực tiểu.

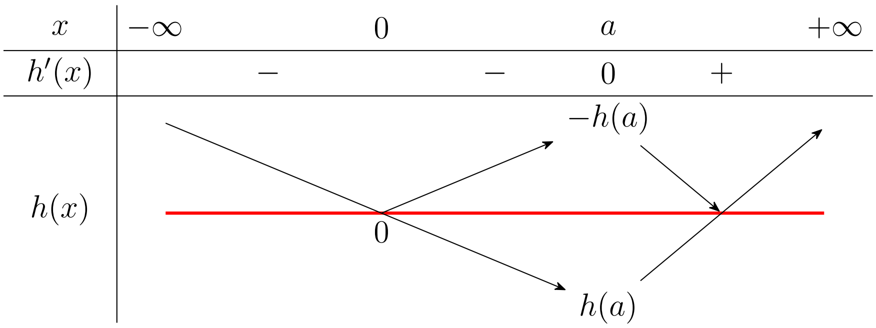
Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 19.

Đặt $h(x) = f(x^3) - 3x$.
$h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3x$.
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.
Xét sự tương giao của đồ thị hàm $y = f'(x)$ và hàm $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.



Dựa vào đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a > 0$.
Bảng biến thiên hàm số $h(x)$ là



Dựa vào bảng biến thiên hàm $h(x)$ ta thấy hàm $g(x) = |h(x)|$ có 3 điểm cực trị.
Chọn đáp án A □

Câu 20.

Ta có $f'(x) = 2(x-1)(x+m^2) + (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in [1;2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.
Ta lại có $f(1) = -\dfrac{3}{2}m$, $f(2) = m^2 - \dfrac{3}{2}m + 2$ nên ta xét các tường hợp sau

- Nếu $m \leq 0$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in [1;2]$ nên $\min\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = -\dfrac{3}{2}m$ và $\max\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = m^2 - \dfrac{3}{2}m + 2$.
  Khi đó yêu cầu bài toán trở thành
  $$m^2 - \frac{3}{2}m + 2 - \frac{3}{2}m = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m^2 - 3m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3-\sqrt{10}}{2} \\ m = \dfrac{3+\sqrt{10}}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

- Nếu $1 \leq m \leq 2$ thì $\min\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = 0$ và $\max\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = \dfrac{3}{2}m$.
  Yêu cầu bài toán trở thành $0 + \dfrac{3}{2}m = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

- Nếu $0 < m < 1$ hoặc $m > 2$ thì $\min\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = 0$ và $\max\limits_{x\in[1;2]} |f(x)| = m^2 - \dfrac{3}{2}m + 2$.
  Yêu cầu bài toán trở thành $0 + m^2 - \dfrac{3}{2}m + 2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{4}$ (loại).

Vậy $S=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{36}-\sqrt{10}\right)$ nên $a=36$, $b=10$ suy ra $\dfrac{a}{b}=\dfrac{18}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21.

Ta có $g(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2-2f(x)\cdot f'(x)=[f(x)-f'(x)]^2$.

Đa thức $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+\mathrm{d}x+e$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm $x=-1$, $x=2$.

Do đó $f(x)=a(x+1)^2(x-2)^2$ với $a>0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, suy ra $f'(x)=a\left[2(x+1)(x-2)^2+2(x-2)(x+1)^2\right]$.

$$\begin{aligned} f(x)-f'(x) &= a(x+1)^2(x-2)^2-a\left[2(x+1)(x-2)^2+2(x-2)(x+1)^2\right] \\ &= a(x+1)(x-2)\left[(x+1)(x-2)-2(x-2)-2(x+1)\right] \\ &= a(x+1)(x-2)\left(x^2-5x\right) \\ &= a(x+1)(x-2)x(x-5). \end{aligned}$$

Do đó $g(x)=[f(x)-f'(x)]^2=a^2(x+1)^2x^2(x-2)^2(x-5)^2$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-mx+1$, $f'(x)=3x^2-m$.

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|=|x^3-mx+1|$ được dựng từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ bằng cách giữ lại phần đồ thị hàm số trên trục Ox và lấy đối xứng phần phía dưới Ox qua trục Ox, xóa bỏ phần đồ thị nằm phía dưới trục Ox của $y=f(x)$.

- Với $m=0$ ta có hàm số: $y=x^3+1\Rightarrow\begin{cases} y'=3x^2\geq 0 \\ f(1)=1^3+1=2>0\end{cases}$

  $\Rightarrow$ Hàm số $y=|f(x)|=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

  Vậy $m=0$ thỏa yêu cầu.

- Với $m>0$ ta có: $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2 (x_1<x_2)$.

  Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

  Để hàm số $y=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases} m>0 \\ x_1<x_2\leq 1 \\ f(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -\dfrac{m}{3}+1\geq 0 \\ 2-m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m\leq 2$$

  Mà $m\in\mathbb{N}\Rightarrow m\in\{1;2\}$

  Vậy: $S=\{0;1;2\}$. Số phần tử của S là 3.

Chọn đáp án A □

Câu 23.

Gọi l_1, l_2 lần lượt là chu vi tam giác đều và chu vi hình vuông.

Gọi d_1 là độ dài cạnh hình vuông.

Gọi S_1, S_2, S lần lượt là diện tích tam giác đều, diện tích hình vuông, tổng diện tích của hai hình thu được.

Chu vi tam giác đều trên là: $l_1 = 3a$

Chu vi hình vuông là: $l_2 = 6 - 3a$

Cạnh hình vuông là:$d_1 = \dfrac{l_2}{4} = \dfrac{6-3a}{4}$

Diện tích tam giác là: $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Diện tích hình vuông là: $S_2 = d_1^2 = \left(\dfrac{6-3a}{4}\right)^2$

Tổng diện tích các hình thu được là: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\dfrac{6-3a}{4}\right)^2$

$S'(a) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{16}.2.(-3)(6-3a) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{8}(6-3a) = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{8}\right) - \dfrac{9}{4}$

$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{54 - 24\sqrt{3}}{11} = \dfrac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$

Chọn đáp án C □

Câu 24.

Vận tốc của vật được tính bởi: $v(t) = -t^2 + 12t$.

Ta có $v'(t) = -2t + 12$.

Bảng biến thiên:

t	0		6		9
v'		+	0	−	
v	0	↗	36	↘	27

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36 m/s.

Chọn đáp án B □

Câu 25.

$G'(x) = 2.0,025x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 20$

$G''(x) = 2.0,025 > 0 \Rightarrow G''(20) = 0,05$

Như vậy $G(x)$ đạt cực tiểu thì $x = 20\,\text{mg}$.

Chọn đáp án A □