ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

TỐI ƯU LẬP KẾ HOẠCH

Giới thiệu tổng quan

Nội dung

- Bài toán tối ưu tổ hợp
- Một số bài toán tối ưu lập kế hoạch trong thực tế
- Mô hình hóa

Bài toán tối ưu tổ hợp

- Cần tìm một phương án (thường là một cấu hình tổ hợp) thỏa mãn 1 số ràng buộc cho trước đồng thời tối ưu 1 hoặc nhiều hàm mục tiêu đặt ra.

Bài toán tối ưu tổ hợp

- Cần tìm một phương án (thường là một cấu hình tổ hợp) thỏa mãn 1 số ràng buộc cho trước đồng thời tối ưu 1 hoặc nhiều hàm mục tiêu đặt ra.
  - Kho vận
    - Lập lộ trình vận tải giao hàng từ kho trung tâm
    - Lập lộ trình vận tải nhận hàng và trả hàng
    - Tối ưu tìm đường lấy hàng trong kho
  - Sản xuất
    - Cắt vật liệu
    - Cấu hình dây chuyền lắp ráp
  - Giáo dục
    - Xếp thời khóa biểu
    - Phân công giảng dạy
  - Dịch vụ công
    - Xếp lịch làm việc theo ca cho nhân viên
    - Lập lịch bảo dưỡng máy móc
  - Viễn thông
    - Thiết kế mạng truyền thông
    - Tìm đường truyền tin

Bài toán tối ưu tổ hợp

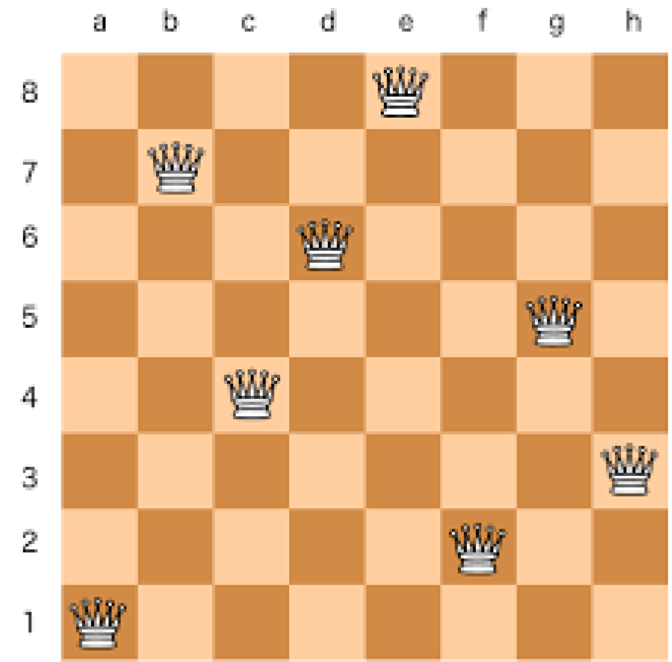
- Cần tìm một phương án (thường là một cấu hình tổ hợp) thỏa mãn 1 số ràng buộc cho trước đồng thời tối ưu 1 hoặc nhiều hàm mục tiêu đặt ra.

- Bài toán thỏa mãn ràng buộc CSP = (X, D, C)
  - $X = \{X_1, \ldots, X_N\}$: tập các biến
  - $D = \{D_1, . . ., D_N\}$: miền giá trị của các biến
  - $C = \{C_1, . . ., C_K\}$: tập các ràng buộc

- Bài toán tối ưu COP = (X, D, C, f)
  - $\mathrm{X} = \{X_1, \ldots, X_N\}$: tập các biến
  - $D = \{D_1, . . ., D_N\}$: miền giá trị của các biến
  - $C = \{C_1, . . ., C_K\}$: tập các ràng buộc
  - f: hàm mục tiêu

Bài toán tối ưu tổ hợp

- Bài toán N-Queen, CSP = (X, D, C)
  - Biến: $X = \{X_1, \ldots, X_N\}$ trong đó X_i là hàng của quân hậu trên cột i, $\forall$ i = 1, 2, . . . , N
  - Miền giá trị $D(X_i) = \{1, \ldots, N\}$, $\forall$ i = 1, 2, . . . , N
  - Ràng buộc
    - Với mọi (i, j) sao cho $1 \le i < j \le N$:
      - $X_i \neq X_j$
      - $X_i + i \neq X_j + j$,
      - $X_i - i \neq X_j - j$,



Bài toán tối ưu tổ hợp

- Bài toán Sudoku, CSP = (X, D, C)
  - Biến: $X = \{X_{1,1}, \ldots, X_{9,9}\}$ trong đó $X_{i,j}$ là giá trị trong ô (i, j), $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, 9$
  - Miền giá trị $D(X_{i,j}) = \{1, \ldots, 9\}$, $\forall\, i, j = 1, \ldots, 9$
  - Ràng buộc
    - Các số trên mỗi cột đôi một khác nhau
      - $X_{i1,j} \neq X_{i2,j}$, với mọi $1 \leq i_1 < i_2 \leq 9$, $1 \leq j \leq 9$
    - Các số trên mỗi hàng đôi một khác nhau
      - $X_{j,i1} \neq X_{j,i2}$, với mọi $1 \leq i_1 < i_2 \leq 9$, $1 \leq j \leq 9$
    - Các số trong mỗi hình vuông con 3x3 đôi một khác nhau
      - $X_{3i+i1,3j+j1} \neq X_{3i+i2,3j+j2}$, với mọi $0 \leq i, j \leq 2$, với mọi $1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq 3$ thỏa mãn $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Bài toán phân bổ môn học BACP

- N môn học 1, 2, …, N cần được phân bổ vào P học kỳ 1, 2, …, P.
- Mỗi môn học i có số tín chỉ là c(i) và điều kiện tiên quyết được xác định bởi tập Q các bộ (i,j) trong đó môn học i phải được học trước môn j.
- Cho trước các hằng số α, β, λ, γ. Cần xác định phương án phân bổ thỏa mãn:
    - Tổng số môn học được phân vào mỗi học kỳ phải lớn hơn hoặc bằng α và nhỏ hơn hoặc bằng β
    - Tổng số tín chỉ các môn học được phân vào mỗi học kỳ phải lớn hơn hoặc bằng λ và nhỏ hơn hoặc bằng γ
    - Với mỗi bộ (i,j) $\in$ Q, môn học i phải được xếp vào học kỳ trước học kỳ mà môn j được xếp vào
    - Mục tiêu: số tín chỉ nhiều nhất của 1 học kỳ phải ít nhất

Bài toán phân bổ môn học BACP

- Ví dụ

Môn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số tín chỉ	2	1	2	1	3	2	1	3	2	3	1	3

Điều kiện tiên quyết

2	1
6	9
5	6
5	8
4	11
6	12
2	7
3	10
5	7
8	11
4	12

3 ≤ Số môn học mỗi học kỳ ≤ 3
5 ≤ Số tín chỉ các môn học mỗi học kỳ ≤ 7

Bài toán phân bổ môn học BACP

- Ví dụ

Môn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số tín chỉ	2	1	2	1	3	2	1	3	2	3	1	3

Điều kiện tiên quyết

2	1
6	9
5	6
5	8
4	11
6	12
2	7
3	10
5	7
8	11
4	12

3 ≤ Số môn học mỗi học kỳ ≤ 3

5 ≤ Số tín chỉ các môn học mỗi học kỳ ≤ 7

Phương án phân bổ

Học kỳ	1	2	3	4
Danh sách môn	2, 5, 3	1, 6,10	4,7,8	9,11,12

Bài toán phân công giảng dạy

- Có *N* lớp 1,2,…, *N* đã được sắp xếp thời khóa biểu, cần được phân cho *M* giáo viên 1,2,…, *M*.
- Mỗi lớp *i* có *T*(*i*) là danh sách giáo viên có thể thực hiện giảng dạy (*i* = 1,…, *N*) và *c*(*i*) là số tín chỉ của môn học của lớp đó.
- Do đã được xếp thời khóa biểu từ trước nên giữa *N* lớp này có tập *Q* các cặp 2 lớp (*i,j*) bị xếp trùng giờ (2 lớp này không thể phân cho cùng 1 giáo viên).
- Hãy tìm phương án phân công giảng dạy sao cho tổng số tín chỉ lớn nhất của các lớp phân cho 1 giáo viên là nhỏ nhất.

Bài toán phân công giảng dạy

- Ví dụ

Lớp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số tiết	3	3	4	3	4	3	3	3	4	3	3	4	4

Giáo viên	Danh sách lớp học có thể dạy
0	0, 2, 3, 4, 8, 10
1	0, 1, 3, 5, 6, 7, 8
2	1, 2, 3, 7, 9, 11, 12

Cặp lớp trùng tiết

0	2
0	4
0	8
1	4
1	10
3	7
3	9
5	11
5	12
6	8
6	12

Bài toán phân công giảng dạy

Lớp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số tiết	3	3	4	3	4	3	3	3	4	3	3	4	4

Giáo viên	Danh sách lớp học có thể dạy
0	0, 2, 3, 4, 8, 10
1	0, 1, 3, 5, 6, 7, 8
2	1, 2, 3, 7, 9, 11, 12

Cặp lớp trùng tiết

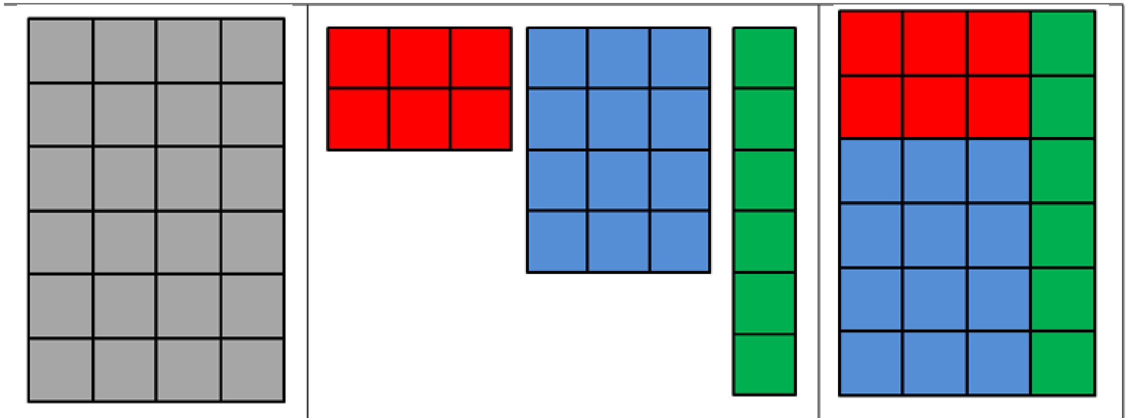
0	2
0	4
0	8
1	4
1	10
3	7
3	9
5	11
5	12
6	8
6	12

Phương án phân công

Giáo viên	Danh sách môn học được phân công	Số tiết
0	2, 4, 8, 10	15
1	0, 1, 3, 5, 6	15
2	7, 9, 11, 12	14

Bài toán sắp đặt kiện hàng trong thùng chứa

- Có N gói hàng 1, 2 ,…, N hình chữ nhật, gói hàng i có chiều dài là h_i và chiều rộng là w_i. N gói hàng cần được xếp vào thùng xe có hình chữ nhật chiều dài là H và chiều rộng là W sao cho không có 2 gói hàng nào xếp chồng lên nhau (giả thiết w_i, h_i, W, H là các số nguyên dương)



a. Container b. Three rectangle items c. Solution

Bài toán lập kế hoạch sản xuất nông sản

- Cần lập kế hoạch gieo trồng cho nông sản. Do đặc tính sinh trưởng và thu hoạch của cây, khi gieo trồng 1 đơn vị diện tích nông sản vào ngày *d* sẽ thu hoạch được $a(d,1)$, $a(d,2)$,…, $a(d,M)$ lượng thành phẩm vào ngày 1,2,..,*M*.
- Do nhu cầu của thị trường nên tổng lượng thành phẩm thu được trong mỗi ngày *d* cần đạt ngưỡng mong muốn: tức là tổng lượng thành phẩm thu được trong ngày *d* phải lớn hơn hoặc bằng m_d và nhỏ hơn hoặc bằng M_d.
- Hãy tính toán diện tích gieo trồng nông sản cho mỗi ngày 1, 2, …, *M* sao cho số ngày (trong khoảng 1, 2,…, *M*) mà lượng thành phẩm thu được đạt ngưỡng là lớn nhất.

Bài toán quảng bá dữ liệu

- Một hạ tầng mạng truyền thông bao gồm các điểm *V* kết nối với nhau bởi các đường truyền *E*. Trên mạng có 1 điểm phát tin, cần truyền gói thông tin từ điểm này đến tất cả các điểm khác trong mạng.
- Biết rằng gói tin khi được truyền đến 1 điểm thì từ điểm này, gói tin lại có thể được truyền ngay lập tức đến các điểm khác theo các đường kết nối. Thời gian gói tin truyền từ điểm u đến điểm v theo đường kết nối (u,v) là d(u,v) và chi phí sử dụng đường kết nối đó là c(u,v).
- Hãy tìm phương án truyền gói tin từ điểm phát đến tất cả các điểm còn lại thỏa mãn:
  - Thời gian gói tin truyền từ điểm phát đến mỗi điểm khác phải nhỏ hơn hoặc bằng D và
  - Tổng chi phí thuê các đường truyền là nhỏ nhất.

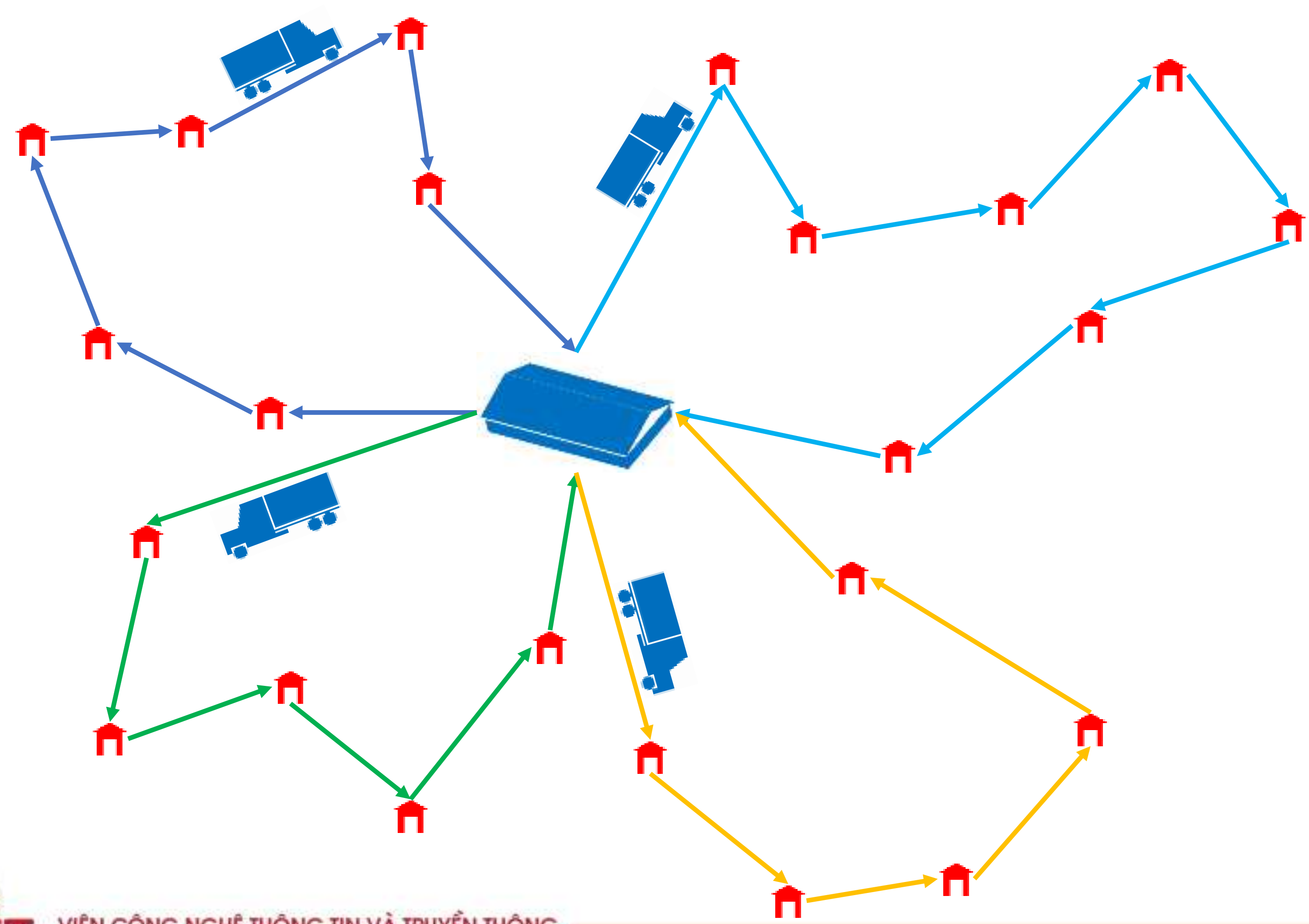
Bài toán người du lịch

- Một người du lịch xuất phát từ điểm 1 và cần đi qua các thành phố 2, 3, …, *N*, mỗi thành phố đúng 1 lần và quay trở về thành phố xuất phát. Biết chi phí đi từ thành phố *i* đến thành phố *j* là c(*i*,*j*). Hãy tính toán phương án cho người du lịch với tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài toán lộ trình vận chuyển - CVRP

- Kho hàng trung tâm 0 và *N* điểm khách hàng 1, 2, …, *N*.
- Khách hàng *i* yêu cầu một lượng hàng là d_i
- Kho có *K* xe, khả năng vận chuyển (tổng lượng hàng tối đã trên mỗi chuyến xe) của mỗi xe là *Q*
- *D*(*i*,*j*) là khoảng cách di chuyển từ điểm *i* đến điểm *j* (với mọi *i*, *j* = 0, 1, …, *N*)
- Hãy lập lộ trình vận tải cho *K* xe để vận chuyển hàng hoá từ kho trung tâm đến các khách hàng sao cho tổng quãng đường di chuyển là ngắn nhất

Bài toán lộ trình vận chuyển - CVRP



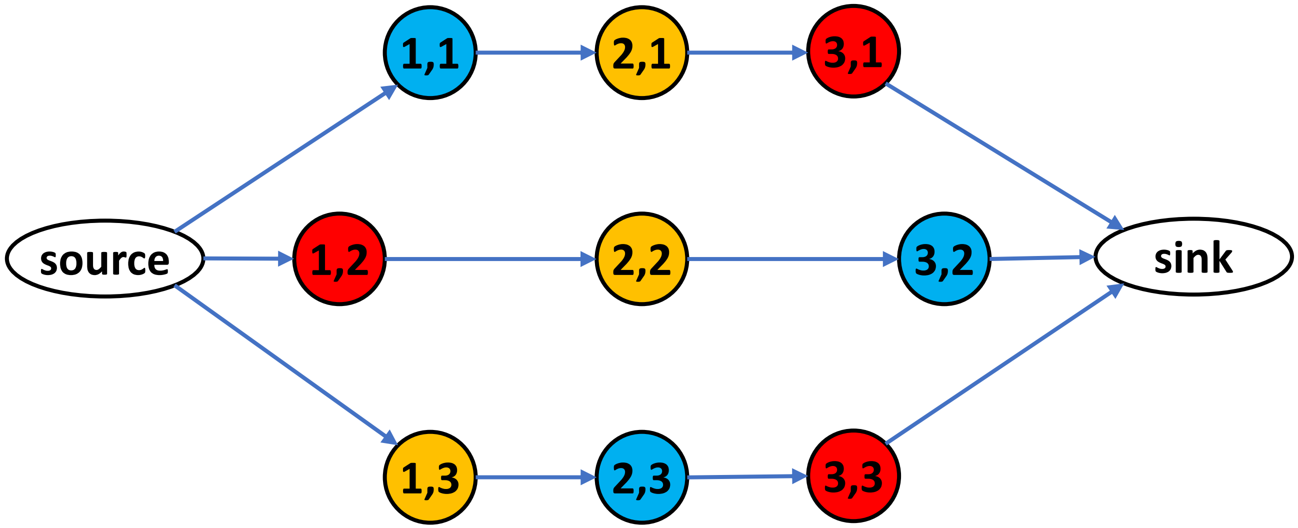
Bài toán lập lịch - JobShop Scheduling

- Một tập hữu hạn J gồm n jobs 1, 2, …, n cần được xử lý trên một tập hữu hạn M gồm m machines 1, 2, …, m
- Mỗi job j bao gồm 1 chuỗi các task t(1,j), . . ., t(λ_j, j), mỗi task được thực hiện trên 1 machine khác nhau và theo thứ tự đặt ra
- Mỗi task t(i, j) bao gồm 2 thông tin
    - r(i,j): chỉ số của machine mà task t(i,j) được thực hiện
    - d(i,j): khoảng thời gian task t(i,j) thực hiện trên machine r(i,j)
- Cần lập lịch thực hiện các tasks của các jobs trên các machines sao cho thời gian hoàn thành là ngắn nhất

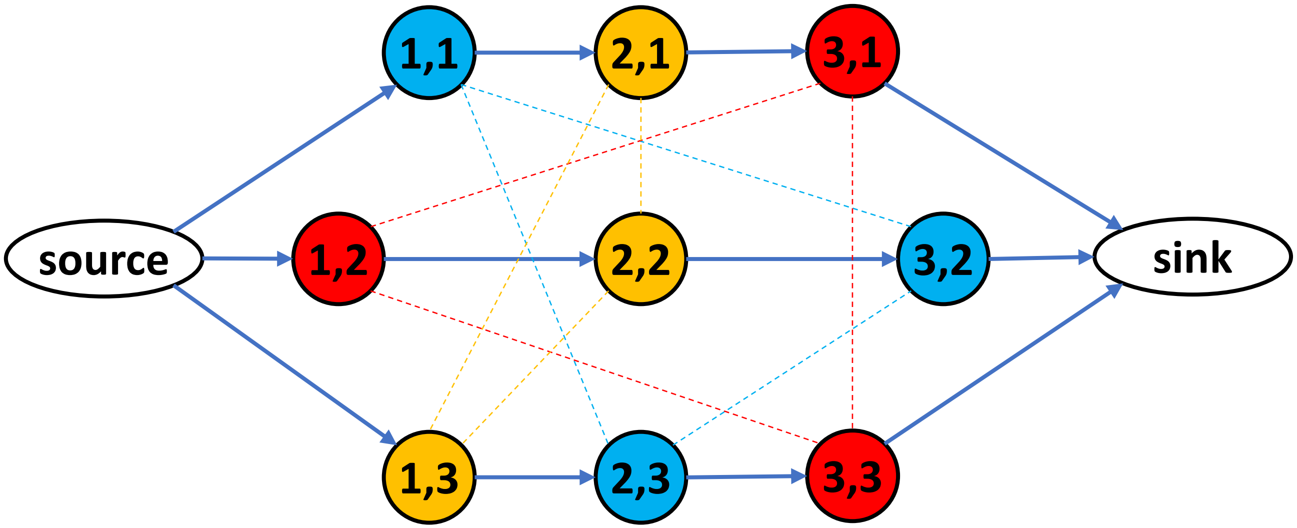
Bài toán lập lịch - JobShop Scheduling

- Ràng buộc
  - Với mỗi job, một task chỉ được bắt đầu thực hiện khi task trước đó đã hoàn thành
  - Mỗi machine chỉ có thể thực hiện duy nhất 1 task tại mỗi thời điểm
  - Mỗi task khi được thực hiện trên 1 machine nào đó thì nó thực hiện liên tục cho đến khi hoàn thành

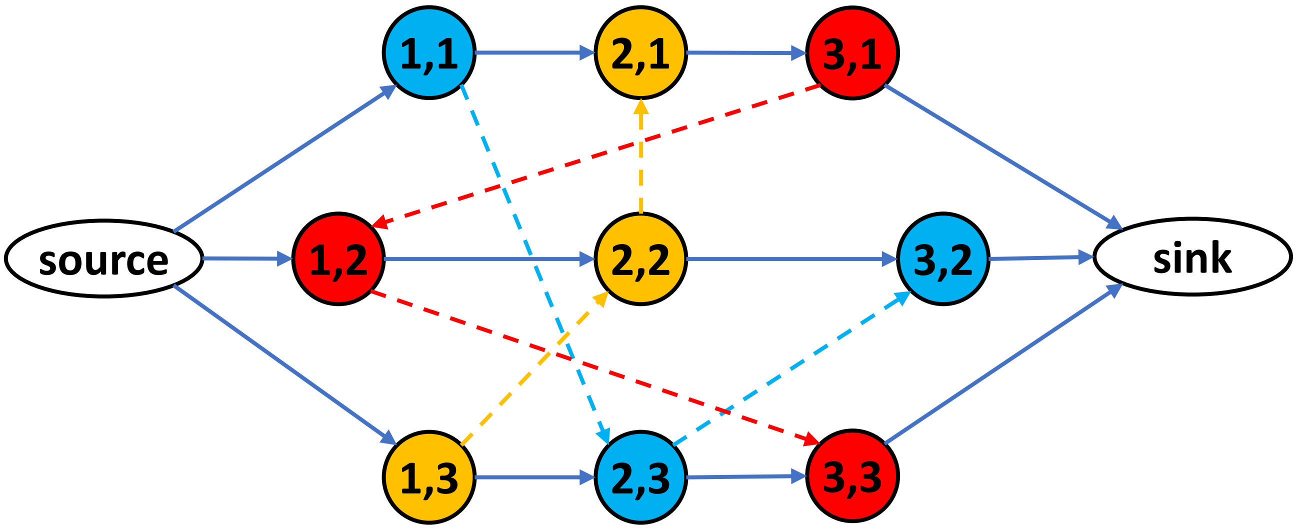
Bài toán lập lịch - JobShop Scheduling



Bài toán lập lịch - JobShop Scheduling



Bài toán lập lịch - JobShop Scheduling



Mô hình hóa

- Biểu diễn bài toán dưới dạng mô hình toán học bằng các ký hiệu toán học
  - Biến
  - Ràng buộc
  - Hàm mục tiêu

Mô hình hóa

- Quy hoạch tuyến tính (QHTT) là bài toán dạng:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq bi, \; i = 1, \ldots, m$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến thực

Mô hình hóa

- Quy hoạch tuyến tính (QHTT) là bài toán dạng (viết cách khác):

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min(\max)$$

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \le b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \le b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \le b_m$$

$x_1, x_2, \ldots x_n$ là các biến thực

Mô hình hóa

- **Bài toán phân công giảng dạy**
  - Có *N* lớp 1,2,…, *N* đã được sắp xếp thời khóa biểu, cần được phân cho *M* giáo viên 1,2,…, *M*.
  - Mỗi lớp *i* có *T*(*i*) là danh sách giáo viên có thể thực hiện giảng dạy (*i* = 1,…, *N*) và *c*(*i*) là số tín chỉ của môn học của lớp đó.
  - Do đã được xếp thời khóa biểu từ trước nên giữa *N* lớp này có tập *Q* các cặp 2 lớp (*i,j*) bị xếp trùng giờ (2 lớp này không thể phân cho cùng 1 giáo viên).
  - Hãy tìm phương án phân công giảng dạy sao cho tổng số tín chỉ lớn nhất của các lớp phân cho 1 giáo viên là nhỏ nhất.

Mô hình hóa

- **Bài toán phân công giảng dạy**
- Biến
  - $X(i,j) = 1$: giáo viên giảng dạy môn j dạy môn i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $j = 0, 1, \ldots, M-1$
  - y : số tín chỉ lớn nhất mà 1 giáo viên được phân công (biến biểu diễn hàm mục tiêu)
  - Miền giá trị: $D(X(i,j)) = \{0,1\}$, $D(y) = \{0,1,\ldots, \sum_{i=0}^{N-1} c(i)\}$
- Ràng buộc
  - $X(i,j) = 0$, với mọi $i = 0,\ldots, N-1$, mọi $j \notin T(i)$
  - $X(i_1, j) + X(i_2, j) \leq 1$, $\forall (i_1, i_2) \in Q$, $j = 0,1,\ldots,M-1$
  - $\sum_{j=0}^{M-1} X(i,j) = 1$, $i = 0,1,\ldots, N-1$
  - $\sum_{i=0}^{N-1} X(i,k)c(i) \leq y$, $k = 0, \ldots, M-1$
- Hàm mục tiêu: $y \rightarrow \min$

Mô hình hóa

- **Bài toán TSP** Một người du lịch xuất phát từ điểm 1 và cần đi qua các thành phố 2, 3, …, *N*, mỗi thành phố đúng 1 lần và quay trở về thành phố xuất phát. Biết chi phí đi từ thành phố *i* đến thành phố *j* là c(*i*,*j*). Hãy tính toán phương án cho người du lịch với tổng chi phí nhỏ nhất.

Mô hình hóa - Bài toán TSP

- Biến
  - $X(i,j) = 1$, nếu chu trình đi từ thành phố i đến thành phố j, $X(i,j) = 0$, nếu chu trình ko đi từ i đến j (với mọi $i,j = 1,\ldots,N$ và $i \neq j$).
- Ràng buộc
  - Mỗi thành phố sẽ có 1 đường đi vào và 1 đường đi ra
    - $\sum_{i\in\{1,\ldots,N\}\setminus\{j\}} X(i,j) = \sum_{i\in\{1,\ldots,N\}\setminus\{j\}} X(j,i) = 1$, với mọi $j = 1,\ldots, N$
  - Ràng buộc cấm tạo chu trình con
    - $\sum_{i,j\in S, i\neq j} X(i,j) \leq |S| - 1$, với mọi $S \subset \{1,2,\ldots,N\}$
- Hàm mục tiêu: $\sum_{i,j\in\{1,\ldots,N\}, i\neq j} X(i,j)c(i,j) \rightarrow \min$