目录

第一讲 函数、极限、连续

一、函数

常见的奇函数: $\sin x,\arcsin x,\tan x,\arctan x,\ln\frac{1-x}{1+x},\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

二、极限

1. 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

2. 极限的性质

(1) 唯一性 (2) 有界性(局部有界性)

(3) 保号性(局部保号性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

① 如果 $A>0(<0)$, 则存在 δ, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>0(<0)$.

② 如果当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)\ge 0(\le 0)$, 那么 $A\ge 0(\le 0)$.

3. 极限的运算法则

(1) 四则运算法则

定理(以函数极限为例): 设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$ 则

1° $\lim[f(x)+g(x)]=A+B$ 2° $\lim[f(x)-g(x)]=A-B$

3° $\lim[f(x)g(x)]=AB$ 4° $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\ne 0)$

(2) 幂指函数极限运算法则

定理(以函数极限为例): 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$.

4. 极限存在准则

(1) 夹逼定理

若 $g(x)\le f(x)\le h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 单调有界数列必有极限

5. 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\sin x<x<\tan x$. ② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

6．无穷小/无穷大

（1）常见无穷大量：$n\to\infty$时，$\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n} (\forall \alpha,\beta>0,\ a>1)$

（2）无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则其倒数 $\left[f(x)\right]^{-1}$ 必为无穷小；反之若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则其倒数 $\left[f(x)\right]^{-1}$ 必为无穷大.

（3）无穷大与无界的关系

无穷大量是无界量，无界量未必是无穷大. $x\to\infty, x\sin x$ 是无界量，不是无穷大

7．常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^{x}-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$，$(1+x)^{a}-1\sim\alpha x$. 这组是基础要求.

$x-\sin x\sim\ \frac{1}{6}x^{3}$ $\qquad$ $\arcsin x-x\sim\ \frac{1}{6}x^{3}$

$x-\tan x\sim\ -\frac{1}{3}x^{3}$ $\qquad$ $\arctan x-x\sim\ -\frac{1}{3}x^{3}$

$x-\ln(1+x)\sim\ \frac{1}{2}x^{2}$，这组在学泰勒公式后会更理解.

几个极限小结论：$\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln^{\beta}x=0,\forall\alpha,\beta>0$

$y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$的性质：

(1)奇函数；(2) 导数为$\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$；(3)与 x 等价无穷小.

这个函数叫：反双曲正弦函数. 后面不定积分还会用到.

8．等价代换原理（加减法，乘除法）

自变量在同一变化过程中，若 $\alpha\sim\alpha'$， $\beta\sim\beta'\Rightarrow\lim\limits_{x\to\square}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to\square}\frac{\alpha'}{\beta'}$.（乘除法代换）

若$\alpha\sim\alpha^{*}$，$\beta\sim\beta^{*}$，且$\lim\frac{\alpha^{*}}{\beta^{*}}\neq 1$，则$\lim(\alpha-\beta)=\lim(\alpha^{*}-\beta^{*})$.（加减法代换）

9．必须考察左、右极限的几种函数

①.求含 a^{x} 的函数 x 趋向无穷的极限，或求含 $a^{\frac{1}{x}}$ 的函数 x 趋于零的极限

②.求含取整函数的函数极限

由$[x]\le x<[x]+1$，或$x-1<[x]\le x$

易知，一般先考察其左、右极限，如他们存在，且相等，则极限存在，否则其极限不存在.

③.求分段函数在分段点处的极限

④.求含$\arctan x$或$arc\cot x$的函数，x趋向无穷的极限

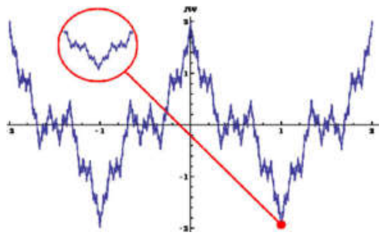
⑤.含偶次方根的函数，由于算术根式前只能取正号，求其$x\to x_0$（常数）（或$x\to\infty$）时的极限，应分$x\to x_0+0$（或$x\to+\infty$）和$x\to x_0-0$（或$x\to-\infty$）两种情况讨论.

三、连续

1．定义

连续的定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续.

魏尔斯特拉斯函数处处连续而处处不可导，如右图，每个点都是转折点



2．间断点及其分类

①第一类间断点.

1° 可去间断点　　2° 跳跃间断点

②第二类间断点.

典型的是：极限为无穷的无穷间断点，极限为振荡的振荡间断点.

此外还有些非典型的第二类间断点：

* Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数，}\\ 0, & x\text{为无理数。}\end{cases}$ 每一点都是第二类间断点。

3．闭区间连续函数的性质

(1)(**最值定理**) 闭区间上的连续函数必取得最大值与最小值.

推论：闭区间上的连续函数在该区间上一定有界.

(2)(**介值定理**) 闭区间上的连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

(3)(**零点定理**)设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，那么至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

第二讲　导数与微分

一、导数

1．定义

（1）导数定义 $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$，

或者 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

（2）对于导数的定义，要注意三点：

①保双侧，即取极限时，趋近的方向是双向的.

②不可跨，分子上一定有一个是定点，这个定点不可跨越，不能是两个动点.

③阶相同，因变量的变化量必须是自变量的变化量的同阶无穷小.

2．导数的几何意义

函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 可导时，曲线在点 $\left(x_0,f\left(x\right)\right)$ 切线的斜率为 $f'\left(x_0\right)$.

切线方程为：$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

法线方程为：$y-f\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)\left(f'\left(x_0\right)\neq 0\right)$ 或 $x=x_0\left(f'\left(x_0\right)=0\right)$.

二、导数的计算

1．求导公式

1. $\left(C\right)'=0$.

2. $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$

特别的，$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

3. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\left(a>0,a\neq 1\right)$

4. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a},\left(a>0,a\neq 1\right)$

特别的，$\left(e^x\right)'=e^x$.特别的，$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

5（1）$\left(\sin x\right)'=\cos x$,

（2）$\left(\cos x\right)'=-\sin x$,

6.（1）$\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

（2）$\left(\arccos x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, （3）$(\tan x)' = \sec^2 x,$ （3）$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$

（4）$(\cot x)' = -\csc^2 x,$ （4）$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

（5）$(\sec x)' = \sec x \tan x,$

（6）$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$

2．求导运算法则

(1) 四则运算求导法则

1° $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x).$

2° $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$

3° $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

(2) 复合函数求导法则

复合函数的导数：设函数$u=g(x)$在点 x 处可导, 而函数 $y=f(u)$ 在点$u=g(x)$可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 处可导, 且 $\dfrac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

(3) 反函数求导

a.设 $y=f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $x=\varphi(y)$ 为其反函数，则 $x=\varphi(y)$ 可导，且

$$\varphi'(y)=x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

b.设 $y=f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $x=\varphi(y)$ 为其反函数，则 $x=\varphi(y)$ 二阶可导，

且 $\varphi''(y)=x''=\dfrac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\dfrac{d\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\Big/dx}{dy\Big/dx}=-\dfrac{f''(x)}{f'^3(x)}.$

注意：这里 x 与 y 不能像高中那样随意调换位置，因而反函数与原函数是同一条曲线.

(4)隐函数求导

若 $F(x, y)=0$ 确定 y 关于 x 的隐函数，求 y 对 x 的导数时，只要将 y 看成 x 的函数，

两边对 x 求导即可.

(6) **由参数方程定义的函数(数一、数二)**

设 y 与 x 的函数关系是由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的,在式子有意义的前提下,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

若 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

（7）绝对值函数的可导性判断

结论 1：当 k 为正整数，$f(x)=(x-a)^k|x-a|$ 在 $x=a$ 处 k 阶可导，但 $k+1$ 阶导数不存在.

结论 2：设 $f(x)=|x-a|g(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

若 $g(a)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=g(a)=0$；

若 $g(a)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

结论 3：

设 $\mathrm{g}(x)$在$x=x_0$处可导，$h(x)$在$x=x_0$处连续但不可导，

则$y=g(x)h(x)$在$x=x_0$处可导的充要条件是$g(x_0)=0$

上述结论可总结为顺口溜“重合连续，不重合可导”。即对于连个连续函数相乘，函数值为 0 的点与不可导点重合时，要求函数值为 0 的点连续，相乘后就可到。若不重合，要求函数值为 0 的点可导时，相乘后才可导。相关详细讲解、题目运用可以看小元老师已发课程。

三、高阶导数

（1）求解高阶导数的通用表达式

①归纳法

第一步先求出一阶、二阶、三阶等导数. 第二步从中归纳出 n 阶导数的表达式.

第三步用数学归纳法证明归纳出的表达式是正确的.

②公式法

a） $[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

b）Leibniz（莱布尼兹）公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + C_n^{n-1}u^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$，其中 $u^{(0)} = u$，$v^{(0)} = v$.

(2) 常用高阶导数的通用表达式

①设 $y = x^m$，则 $y^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ ；

②设 $y = a^x$，则 $y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$；

③ 设 $y = \ln(ax+b)$，则 $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$，该公式可以自己做题时归纳.

④设 $y = \dfrac{1}{ax+b}$ ，则 $y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$，该公式可以自己做题时归纳.

⑤设 $y = \sin x$，则 $y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$；

⑥设 $y = \cos x$，则 $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$；

注意：如果是求高阶到数值，可以用泰勒公式法，而如果求高阶导函数，不能用泰勒.

四、微分

1．定义

微分的定义： $dy = A\Delta x$. 也即 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\bullet\Delta x = f'(x_0)\mathrm{d}x$

2．微分与导数的关系

可微 $\Leftarrow$ 可导　　　　　可微 $\Rightarrow$ 可导

第三讲　微分学中值定理及其应用

一、微分中值定理

1.费马引理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$，对于 $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)$（$f(x) \ge f(x_0)$）且 $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Rightarrow f'(x_0)=0$.

2.罗尔中值定理

若 $f(x)$ 满足条件：（1）　在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）　在开区间 (a,b) 内可导；（3）$f(a)=f(b)$

$\Rightarrow$　在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

常用还原技巧：$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=[\ln f(x)]'$

3.拉格朗日中值定理

若 $f(x)$ 满足条件：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；　（2）在开区间 (a,b) 内可导, 则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$,

或写成 $f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a)\quad(0<\theta<1)$

4.柯西中值定理

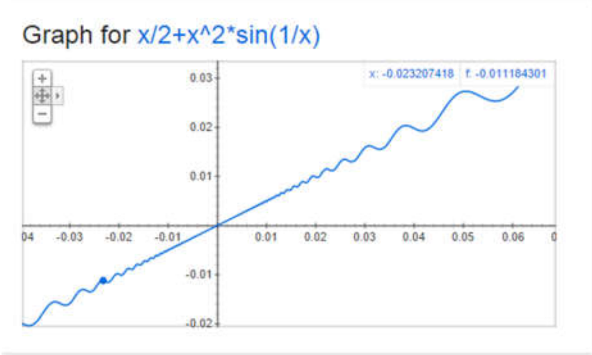
若 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：（1）　在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）　在开区间 (a,b) 内可导，$g'(x)\ne 0$

$\Rightarrow$　在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

【注意】某点导数大于 0，不能推出单调，但可以有上面的结果，看下面反例：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ 可以求得，$f'(0)=\frac{1}{2}$，但其图像如右图，如果放大原点位置，会发现曲线是不断波动的，没有一个单调区间，但这一点导数却是大于 0 的.



5. 18 个罗尔定理结论.

中值等式 $G(\xi)=0$	凑成导函数等式 $F'(x)=0$	辅助函数 $F(x)$
$f'(\xi)+A\xi^k+B=0$（A，B 为常数）	$[f(x)+\frac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx]'=0$	$f(x)+\frac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx$
$f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a)-k=0$	$[f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx]'=0$	$f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx$
$\sum_{i=0}^{n-1}a_i(n-i)\xi^{n-1-i}=0$	$[\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i}]'=0$	$\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i}$
$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$	$[f(x)g(x)]'=0$	$f(x)g(x)$
$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$	$[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$	$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$
$\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$[x^kf(x)]'=0$	$x^kf(x)$
$(\xi-1)f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$[(x-1)^kf(x)]'=0$	$(x-1)^kf(x)$
$f'(\xi)g(1-\xi)-kf(\xi)g'(1-\xi)=0$	$[g^k(1-x)f(x)]'=0$	$g^k(1-x)f(x)$
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	$[e^{\lambda x}f(x)]'=0$	$e^{\lambda x}f(x)$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$[e^{g(x)}f(x)]'=0$	$e^{g(x)}f(x)$

$\xi f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$[f(x)/x^k]'=0$	$f(x)/x^k$
$f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$[f(x)/e^{kx}]'=0$	$f(x)/e^{kx}$
$f(\xi)+\dfrac{x-b}{a}f'(\xi)=0$	$\left[(x-b)^a f(x)\right]'=0$	$(x-b)^a f(x)$
$f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$	$[f(x)/g(x)]'=0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$
$(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2=0$	$[x/(1+x^2)]'=0$	$x/(1+x^2)$
$f'(\xi)-f(\xi)+k\xi-k=0$	$\left\{e^{-x}\left[f(x)-kx\right]\right\}'=0$	$e^{-x}\left[f(x)-kx\right]$
$f''(\xi)+f'(\xi)-k=0$	$\left\{e^{x}\left[f'(x)-k\right]\right\}'=0$	$e^{x}\left[f'(x)-k\right]$
$f'(\xi)+\mathrm{k}\left[f(\xi)-\xi\right]-1=0$	$\left\{e^{kx}\left[f(x)-x\right]\right\}'=0$	$e^{kx}\left[f(x)-x\right]$
$f''(\xi)-f(\xi)=0$	$\left\{e^{x}[f(x)-f'(x)]\right\}'=0$	$e^{x}[f(x)-f'(x)]$

6．洛必达法则

定理：设(1) 当 $x\to a$ （或 $x\to\infty$)时, $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零或无穷；

(2) 在点 a 的某去心领域内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大), 那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

洛必达失效的三种情况

洛必达失效一：不是未定式

洛必达失效二：不能化简

洛必达失效三：极限不存在

当 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在时（等于无穷大的情况除外），$\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 仍可能存在

7．泰勒公式

若 $f(x)$ 在 x_0 及其附近有直到 $n+1$ 阶的导数, 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间,这是带有拉格朗日余项的泰勒公式.

需要熟记的泰勒公式：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\quad(-\infty<x<+\infty)\qquad a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(-\infty<x<+\infty)\qquad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\quad(-1<x<1)\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\quad(-1<x\leqslant 1)$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\quad(-1<x<1)\qquad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

还有一种写出前几项的形式(标背景色的和前面通项形式不重复)，常用于求极限：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\qquad \tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\qquad (1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+o(x^3)$$

有个简单的口诀，方便大家初学泰勒记忆：

指对连，三角断，三角对数隔一换，三角指数有感叹.

指对连：指数函数和对数函数的展开式中 1、2、3…是连续的.

三角断：三角函数的展开式 1、3、5 或 2、4、6 这样不连续的.

三角对数隔一换：三角函数和对数函数的符号隔一个换一次.

三角指数有感叹：三角函数和指数函数中分母有阶乘（感叹号）.

反三角函数与三角函数首项相同，第二项相反数。

泰勒公式前一两项主要是等价无穷小，写出前几项后后面的规律就可以背上面的口诀写下去.

$(1+x)^a$ 和高中的二项式展开很类似，$\dfrac{1}{1+x},\dfrac{1}{1+x^2}$ 是等比数列求和公式，这两个没在口诀里，但可以结合已掌握的知识.

二、微分学的应用

1．单调性的判断

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

（1）如果在$\left(a,b\right)$内$f'\left(x\right)>0$，那么函数$y=f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上单调增加；

（2）如果在$\left(a,b\right)$内$f'\left(x\right)<0$，那么函数$y=f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上单调减少.

2．函数极值及求法

（1）取得极值的必要条件： x_0是极值点$\Rightarrow$函数$f\left(x\right)$在x_0不可导或者$f'\left(x_0\right)=0$

(2) 判定极值点的充分条件：

第一充分条件：设函数$f\left(x\right)$在x_0处连续,且在x_0的某去心邻域$U\left(x_0,\delta\right)$内可导.

①若$x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，而$x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，则$f\left(x\right)$在$x_0$处取得极大值；

②若$x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，而$x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，则$f\left(x\right)$在$x_0$处取得极小值；

③若$x\in U\left(x_0,\delta\right)$时，$f'\left(x\right)$的符号保持不变,则$f\left(x\right)$在$x_0$处没有极值.

第二充分条件：

若函数$f\left(x\right)$在x_0点有$f'\left(x_0\right)=0$，$f''\left(x_0\right)\neq 0$，则函数在$x_0$处取得极值.

①当$f''\left(x_0\right)<0$时取得极大值；②当$f''\left(x_0\right)>0$时取得极小值.

第三充分条件：

设$y=f(x)$在$x=x_0$处n阶可导，$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，
且$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则当n为偶数时，$(x_0,f(x_0))$是曲线的极值点.
①$f^{(n)}(x_0)>0$时，是极小值点；
②$f^{(n)}(x_0)<0$时，是极大值点.

3．曲线的凹凸性.

（1）凹凸性的判定

凹凸性判断的充分条件：设函数$f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$内具有二阶导数$f''\left(x\right)$，

如果在$\left(a,b\right)$内的每一点x，恒有$f''\left(x\right)>0$，则曲线$y=f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$内是凹的；

如果在$\left(a,b\right)$内的每一点x，恒有$f''\left(x\right)<0$，则曲线$y=f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$内是凸的.

(2) 拐点的判定

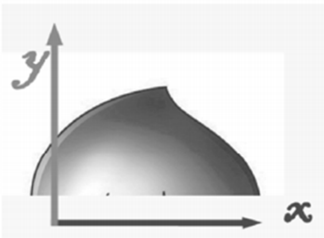
① **拐点的定义：**曲线的凹凸性改变的点为该曲线的拐点.

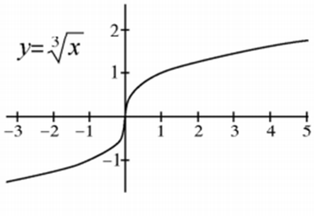
拐点可能是下列 3 类点：

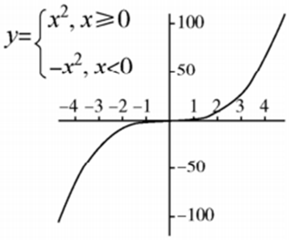
a. 一阶导数不存在的点,如下图最左边的桃子形状，顶部是拐点也是不可导点. 中间的图也是，在 0 点导数无无穷大，考研官方认为导数无穷大就是导数不存在.

b. 一阶导数存在,而二阶导数不存在的点，如下图最右边，求导后变为绝对值函数，二阶不可导，但在 0 点是拐点.

c. 二阶导数存在时,二阶导数为 0 的点. 正常的拐点都这样.







② **拐点存在的必要条件**：点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点的必要条件是 $f''\left(x_0\right)=0$ 或 $f''\left(x_0\right)$ 不存在.

③**拐点存在的第一充分条件**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续且二阶可导（$f'\left(x_0\right)$ 或 $f''\left(x_0\right)$ 可以不存在),在 x_0 的左右两边 $f''\left(x\right)$ 的符号相反,则点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点.

④ **拐点存在的第二充分条件**:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内三阶可导, $f''\left(x_0\right)=0$，而 $f'''\left(x_0\right)\neq 0$，则点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点.

若 $f'''(x_0)=0$，则判别法失效.

⑤**拐点存在的第三充分条件**：

设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ 且 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则当 n 为奇数时,$(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

4．曲率

曲率 K 的表达式 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$. 曲率半径 ρ 有如下关系：$\rho=\dfrac{1}{K}$，$K=\dfrac{1}{\rho}$.

5．渐近线

(1) 渐近线的概念

当曲线上的动点沿着曲线无限远离原点时,若动点与某一定直线的距离趋于零,则称该直线为曲线的渐近线.

(2) 曲线 $y=f(x)$ 渐近线的分类与求法

①水平渐近线:若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b_1$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b_2$,其中 b_i 为常数,则称 $y=b_i$ 为 $y=f\left(x\right)$ 的水平渐近线.

②铅垂渐近线: $\lim\limits_{x\to c^-}f\left(x\right)$ 与 $\lim\limits_{x\to c^+}f\left(x\right)$ 中至少有一个是无穷大,则称 $x=c$ 为 $y=f\left(x\right)$ 的铅垂渐近线.

③斜渐近线:求斜渐近线有两种方法,一种是使用渐近线定义直接求出.为此常从给定的函数表示式中分离出一个线性函数,将它改写成

$y=(ax+b)+h(x)$,

其中 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=0$.直线 $y=ax+b$ 就是所求的斜渐近线.

求斜渐近线的另一常用方法.按下式

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)/x]=a_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=b_1$;

和(或) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)/x]=a_2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=b_2$

分别求出 a_i 和 b_i(常数),则直线 $y=a_ix+b_i$ 就是曲线 $f(x)$ 的一条斜渐近线($i=1,2$).

渐近线的存在是有规律的:

- 铅直渐近线可以无数条;
- 水平渐近线,斜渐近线最多两条;
- 在一个方向,水平渐近线和斜渐近线只能存在一条.

注意(1)一般情况下,如果 y 为偶函数,则其曲线的渐近线(如果存在的话)必定关于 y 轴对称;如果是奇函数,则其曲线的渐近线(如果存在的话)必定关于原点对称.

(2)如果 $y=f(x)$ 为有(无)理分式函数,且分子的次数较分母高一,当 $x\to\pm\infty$ 时,y 时与 x 同阶无穷大,曲线可能有斜渐近线.

第四讲　不定积分

一、原函数

定义： $x \in I$，$F'(x) = f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 及 $f'(x)$ 都是偶函数；

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 不一定为奇函数，但原函数 $\int_o^x f(t)dt$ 一定是奇函数，$f'(x)$ 为奇函数；

若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 不一定是周期函数，但 $f'(x)$ 一定是周期函数。

有些函数存在原函数，但是其原函数不是初等函数.典型的例子如下：

$$e^{\pm x^2},\frac{\cos x}{x},\frac{\sin x}{x},\sin x^k\left(k\geq 2\right),\cos x^k\left(k\geq 2\right),\frac{1}{\ln x},\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

有第一类间断点的函数一定不存在原函数（可用反证法证明）

有第二类间断点的函数可能有原函数（无穷间断不存在原函数，震荡间断有可能存在原函数）.

二、不定积分

1. 积分公式（积分表）

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ \left(\mu \neq -1，\text{实常数}\right) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C\ (a > 0, a \neq 1) \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \sec x dx = \sec x + C \qquad \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C; \qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C;$ $\int \csc x dx = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C(a>0);$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C;$

伴随积分常用公式：

积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

二倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

降幂公式：

$$sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

三、积分方法

1．借助积分公式和不定积分的性质

2．第一换元法(凑微分法)

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F\left(u\right) + C = F\left[\varphi\left(x\right)\right] + C.$$

3.第一换元法(凑微分法)的常见类型

（1）$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

（2） $\int f(ax^2+b)xdx = \frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b).$

（3）

$$\int f(a\sqrt{x}+b)\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int f(a\sqrt{x}+b)d\sqrt{x}(\text{因}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x})$$

$$= \frac{2}{a}\int f(a\sqrt{x}+b)d(a\sqrt{x}+b).$$

（4） $\int f(ax+b)xdx = \int \frac{1}{a}(ax+b-b)f(ax+b)dx$

$$= \frac{1}{a}\int f(ax+b)(ax+b)dx - \frac{b}{a}\int f(ax+b)dx(a \neq 0)$$

（5）

$$\int f[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}]\frac{1}{(ax+b)^k}dx$$

$$= -\frac{1}{a(k-1)}\int f[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}]d\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$$

事实上，$k=2, \int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx = -\int f(\frac{1}{x})d\left(\frac{1}{x}\right),$

$k=3, \int f(\frac{1}{x^2})\frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\int f(\frac{1}{x^2})d(\frac{1}{x^2}),$

$k=4, \int f(\frac{1}{x^3})\frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3}\int f(\frac{1}{x^3})d(\frac{1}{x^3}),\ldots$

一般,当 k 为大于 1 的实数时,上式成立.

（6） $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$

（7） $\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d\ln x$

（8） $\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x; \int f(e^x)dx = \int \frac{f(e^x)}{e^x}de^x$

（9） 有关三角函数的不定积分的凑微分法

$\int f(\sin x)\cos xdx=\int f(\sin x)d(\sin x);$

$\int f(\cos x)\sin xdx=-\int f(\cos x)d(\cos x);$

$\int f(\tan x)\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int f(\tan x)\sec^2 xdx=\int f(\tan x)d(\tan x);$

$\int f(\cot x)\dfrac{dx}{\sin^2 x}=\int f(\cot x)\csc^2 xdx=-\int f(\cot x)d(\cot x);$

$\int f(\sec x)\sec x\tan xdx=\int f(\sec x)d(\sec x);$

$\int f(\csc x)\csc x\cot xdx=-\int f(\csc x)d\csc x$

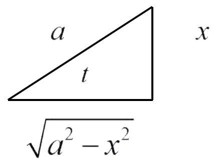
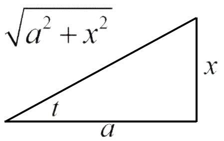
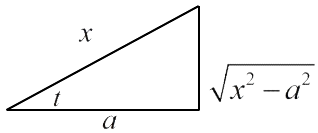
（10）先凑出复合函数的中间变量，再继续下一步拼凑，然后换元.

4. 第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi^{'}(t)=0$，若 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C$，则

$$\int f(x)dx \xlongequal{令 x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C=G[\varphi^{-1}(x)]+C$$

（1）含有二次根式的积分

根式的形式	所作替换	三角形示意图(求反函数用)
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

（2）被积函数含有 x 与 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 的有理式的积分

换元分别为$t=\sqrt[n]{ax+b}$或者$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$以去掉根号,称为幂代换.

(3) 分式函数情形且分子的幂次低于分母的幂次的积分。换元为$t=\dfrac{1}{x}$,称倒代换.

5．分部积分法

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$$

反复重复上述分部积分的步骤，可以得到分布积分的推广：

$$\int uv^{(n+1)}dx=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx$$

上述规律可以总结为如下表格：

u的各阶导数	u $\searrow^{+}$	u' $\searrow^{-}$	u'' $\searrow^{+}$	u''' $\searrow^{-}$	$\cdots$	$u^{(n+1)}$ $\downarrow^{(-1)^{n+1}}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$	$\cdots$	v

四、特殊类型函数的积分(数一、数二)

1．有理函数的积分

这类积分的主旨想法：$\displaystyle\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx(m<n)\xrightarrow[\text{部分分式}]{\text{分解为}}\begin{cases}\displaystyle\int\frac{1}{x-a}dx\\ \displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^k}dx\ (k\neq1)\\ \displaystyle\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx\\ \displaystyle\int\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}dx\end{cases}$

有的可以通过倒代换，三角代换求解。

有理函数，或者有理分式列项方法：

①一阶极点的系数

例：$\dfrac{3x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-5)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-5}$ （注意裂项形式的假设）

$$A=\left[\frac{3x^2+1}{(x-2)(x-5)}\right]_{x=1}=\frac{4}{4}=1$$

$$B=\left[\frac{3x^2+1}{(x-1)(x-5)}\right]_{x=2}=-\frac{13}{3}，\quad C=\left[\frac{3x^2+1}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=5}=\frac{76}{12}=\frac{19}{3}$$

②高阶极点的系数求法

$$\frac{1}{x(x+1)^4}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{(x+1)^4}+\frac{C_3}{(x+1)^3}+\frac{C_4}{(x+1)^2}+\frac{C_5}{(x+1)}$$

单极点系数 $C_1=\left[\frac{1}{(x+1)^4}\right]_{x=0}=1$

高阶系数 $C_2=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=-1}=-1$，$C_3=\left.\left[\frac{1}{x}\right]'\right|_{x=-1}=\left[-\frac{1}{x^2}\right]_{x=-1}=-1$

$$C_4=\left.\left[\frac{1}{x}\right]''\right|_{x=-1}\Big/2!=\left[\frac{1}{x^3}\right]_{x=-1}=-1，\quad C_5=\left.\left[\frac{1}{x}\right]'''\right|_{x=-1}\Big/3!=\left[-\frac{1}{x^4}\right]_{x=-1}=-1$$

③分母有二次实数域不可约多项式

例：$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{C_2x+C_3}{x^2+1}$（注意第二项分子形式的假设，应为一次多项式）

C_1 是一阶极点系数，求法和上文相同 $C_1=\left[\frac{2}{x^2+1}\right]_{x=1}=1$

C_2，C_3 可通过通分，对应系数相等，求解。

2．三角函数有理式的积分

这类积分的一般方法是：$\int R(\sin x,\cos x)dx\xrightarrow{\text{万能公式}}$有理函数积分

万能公式为：$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$

3．无理函数积分

这类积分典型的是带根号的，主要的转化思路：

无理积分 $\longrightarrow$ 三角代换化为三角函数有理式积分

↓

去根号化为有理积分

（1）被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$（n 为正整数，$n>1$）的积分常作根幂代换 $t=\sqrt[n]{ax+b}$，化为 t 的有理函数的积分求之.

（2）被积函数为分式函数，其分母（或分子，或其分子、分母分别）为两个同次幂的根式之代数和，先将分母（或分子）有理化，分成只含一个根式的两个积分，如需要再用根幂式代换求之

（3）被积函数为分式函数，其分母为两个不同次幂的根式的代数和：

$\sqrt[n]{ax+b}+\sqrt[m]{ax+b}$，**常作根幂代换** $t=\sqrt[p]{ax+b}$，**其中 p 为正整数 m,n 的最小公倍数，化为 t 的有理函数的积分求之**

（4）被积函数含有 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+b}}$ **的积分，常作根幂代换** $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+b}}$ **求之**

（5）被积函数若含有下述根式，常作三角代换

(I) $\sqrt{a^2-x^2}$，**可作三角代换** $x=a\sin\theta$ 或 $x=a\cos\theta$;.

(II) $\sqrt{x^2-a^2}$，**可作三角代换** $x=a\sec\theta$ 或 $x=a\csc\theta$;

(III) $\sqrt{a^2+x^2}$，**可作三角代换** $x=a\tan\theta$ 或 $x=a\cot\theta$;

（6）被积函数含 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，或 $1/\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分求法，**套用下述公式：**

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0);$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C(a>0);$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0);$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2\pm x^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C(a>0);$$

第五讲　定积分及应用

一、定积分

1.定义

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \text{或} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

2. 可积条件

（1）闭区间上的连续函数必可积

（2）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有限个第一类间断点必可积，但不存在不定积分.

二、定积分的性质

（1）$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$　　　（2）$\int_a^a f(x)dx = 0$

（3）$\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx$

（4）$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$（$c$ 也可以在 $[a,b]$ 之外）

（5）设 $a\le b,\ f(x)\le g(x)\ \ (a\le x\le b)$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

（6）设 $a<b,\ m\le f(x)\le M\ \ (a\le x\le b)$，则 $m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

（7）设 $a<b$，则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

（8）定积分中值定理：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

定义：我们称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值.

积分中值定理的推广：

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

积分第一中值定理：设 $f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$ 且 $g(x)\ge 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

（9）奇偶函数的积分性质

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$（ f 奇函数） $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$（ f 偶函数） 简称：**奇零偶倍**

（10）周期函数的积分性质

$f(x)$ 以 T 为周期， $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx.$

三、微积分基本定理

1. 变上限积分的函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ， $x \in [a,b]$ 称为变上限积分的函数

2. 变上限积分的函数的性质

⑴ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除有限个第一类间断点外连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 连续，不一定可导，若都是可去间断就可导，都是跳跃间断，就不可导.

⑵ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt = f\left[\varphi_2(x)\right]\varphi_2'(x) - f\left[\varphi_1(x)\right]\varphi_1'(x).$$

3. 牛顿一莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意一个原函数，

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

四、定积分的计算方法

1. 定积分的换元积分法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

【定积分的换元法得到的小结论】

① 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx,$

当$n=2k$时，$I_n=\frac{2k-1}{2k}\bullet\frac{2k-3}{2k-2}\bullet\cdots\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\bullet\frac{\pi}{2}$

当$n=2k+1$时，$I_n=\frac{2k}{2k+1}\bullet\frac{2k-2}{2k-1}\bullet\cdots\bullet\frac{2}{3}\bullet1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.这个公式可以极大地简化计算.

②设$f(x)$在$[0,1]$上连续，则$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$;

即$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx$

$\int_0^{\pi}f(|\cos x|)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

$\int_0^{\pi}\cos^n xdx=\begin{cases}2I_n, n=2,4,6,\cdots,\\0,\quad n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$

$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=2I_{\mathrm{n}}.$

③设$f(x)$在$[0,1]$上连续，则$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx.$

④设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，则

$\int_0^{2\pi}f(|\sin x|)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx,\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx.$

⑤设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$

2.分部积分法

设$u'(x),v'(x)$在$[a,b]$上连续， $\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$

五、反常积分

1.无穷区间上的广义积分

(1)定义 1： $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$，（$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$）

若极限存在，称广义积分是收敛的；若极限不存在，则称广义积分是发散的.

(2)定义 2： $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$

上述两个极限都存在，则称广义积分是收敛的；反之，则称广义积分是发散的.

反 常 积 分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}(a>0)$ 当 p＞1时 收 敛 ， 当 p≤1时 发 散 .

小元老师总结一个顺口溜叫：**大的喜欢大的**. 积分上限是正无穷，是大的；$p>1$ 是大的，两个大的相遇时，曲线逼近渐近线更快，就像一见钟情的情侣，卿卿我我，很快腻在一起，积分是收敛的，面积是有限值. 当然如果相反，$p\le 1$ 时，**大的不喜欢小的**，两人保持距离，分道扬镳，结果就是积分的面积无穷大，不收敛.

2. 无界函数的广义积分(瑕积分)

(1)**瑕点**：设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$，则称 b 为 $f(x)$ 的瑕点.

同样的，设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，则称 a 为 $f(x)$ 的瑕点.

(2) **定义 1**：已知 b 为函数 $f(x)$ 的唯一瑕点 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)dx$，若上述极限存在，则称广义积分是收敛的值；若极限不存在，则称广义积分是发散的.

(2) **定义 2**：已知 a 为函数 $f(x)$ 的唯一瑕点，$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b}f(x)dx$ 若上述极限存在，则称广义积分是收敛的；若极限不存在，则称广义积分是发散的.

(3) **定义 3**：已知 c 为瑕点，如果 $\int_a^c f(x)dx=\lim\limits_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx$ 与

$\int_c^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$ 都收敛时，则定义反常积分

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 收敛，否则就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

反 常 积 分 $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0<q<1$ 时 收 敛 ， 当 $q\ge 1$ 时 发 散 .

小元老师也总结一个顺口溜，对应前面的 p 积分，叫：**小的喜欢小的**. 积分瑕点是常数 a，相比于积分限为无穷，是小的；$q<1$ 是小的，两个小的相遇时，曲线逼近渐近线更快，就像一见钟情的情侣，卿卿我我，很快腻在一起，积分是收敛的，面积是有限值. 当然如果相反，$q\ge 1$ 时，**小的不喜欢大的**，两人保持距离，分道扬镳，结果就是积分的面积无穷大，不收敛.

这个顺口溜和前面的无穷限反常积分顺口溜中，p=1 或者 q=1 是临界情况，都是瘦脸的。

3. 反常积分审敛法

定理4(极限审敛法1)　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$. 如果存在常数 $P>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=c<+\infty$，那么，反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$ (或 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$)，那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

定理5　设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

收敛，那么反常积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

也收敛.

定理7（极限审敛法2）　设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，$x=a$为$f(x)$的瑕点.如果存在常熟$0<q<1$，使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$$

存在，那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0\ \left(或\lim_{x\to a+}(x-a)f(x)=+\infty\right),$$

那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

4　Γ函数

Γ函数也叫欧拉第二积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\quad(s>0).$$

1. 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0)$.　　　　$\Gamma(n+1)=n!$

也就是$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=1$　$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x}dx=2!$　$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x}dx=3!$，可以当小结论记住

2. 当 $s\to 0^+$时，$\Gamma(s)\to+\infty$.

$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}$，$\Gamma(1)=1$，所以当 $s\to 0^+$时，$\Gamma(s)\to+\infty$.

3．$\Gamma(s)=\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}(0<s<1)$.

这个公式称为余元公式.

当$s=\frac{1}{2}$时，由余元公式可得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

4.　$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

六、定积分的应用

1 定积分的几何应用

(1)平面图形的面积

①直角坐标

由直线 $x=a,x=b,y=f(x),y=g(x)$ 所围图形的面积为 $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx,$

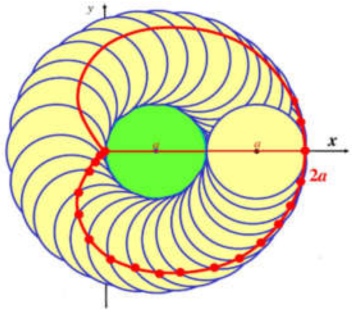
由直线 $y=\alpha,y=\beta,x=\varphi(y),x=\psi(y)$ 所围图形的面积为 $S=\int_\alpha^\beta\left|\varphi(y)-\psi(y)\right|dy.$

②极坐标

由 $r=r_1(\theta),r=r_2(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$ 所围图形的面积为 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]d\theta.$

③常见的极坐标曲线

a) 心形线

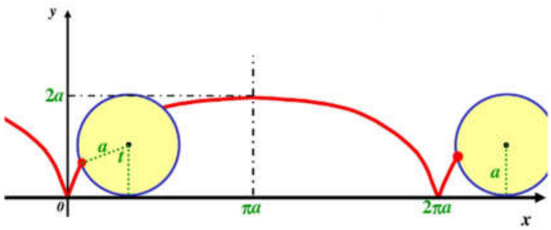


$\rho=a\left(1+\cos\theta\right)\ \ \left(a>0\right)$ (其中的'+'换成'-'，余弦换正弦都仍然是心形线，只是开口方向不同)，也称作圆外旋轮线，如右图.

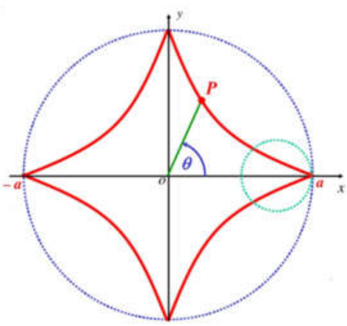
b) 摆线

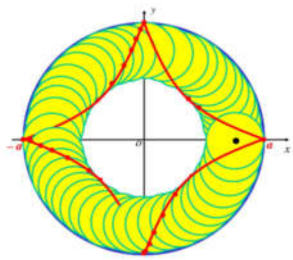
$$\begin{cases}x=a\left(t-\sin t\right)\\ y=a\left(1-\cos t\right)\end{cases}$$

也称作旋轮线，因为是下图的轮上一点旋转产生的轨迹.



c) 星形线





极坐标方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$$

$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$

直角坐标方程为:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

也叫圆内旋轮线，注意当角度 θ=0 时，起点在 x 轴正半轴.

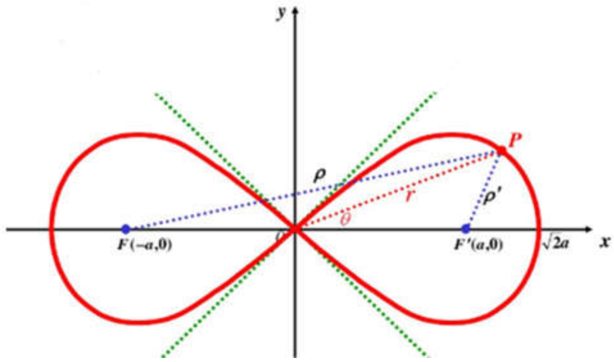
d）双纽线

$FF'=2a$，到 F 与 F′距离之积为 a^2 的点的轨迹（$\rho\rho'=a^2$）

方程为 $r^2=2a^2\cos 2\theta$

由于要求 $\cos 2\theta \geq 0$，

$\theta\in(0,\frac{\pi}{4})\cup(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})\cup(\frac{7\pi}{4},2\pi)$



(2)体积的求解

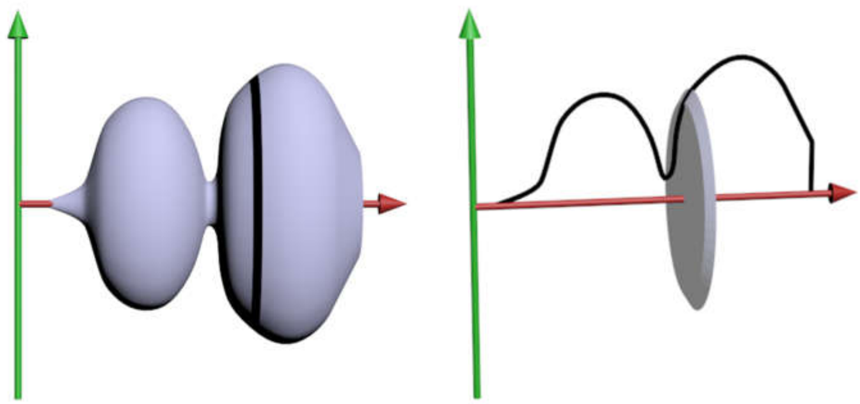
①旋转体的体积

由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,x=b$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的几何体称作旋转体，其体积的求解方法可以分为两类：

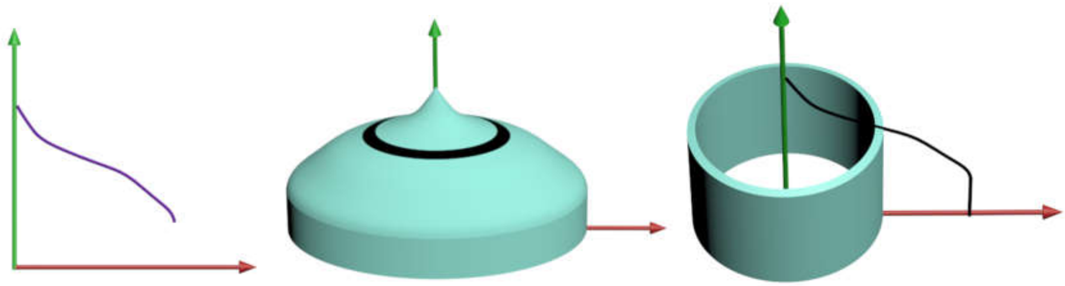
方法一：切土豆片法

绕着 x 轴旋转产生的旋转体，体积就是：$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2dx.$

绕着 y 轴旋转，结果类似：$V=\pi\int_c^d\left[\varphi(y)\right]^2dy.$

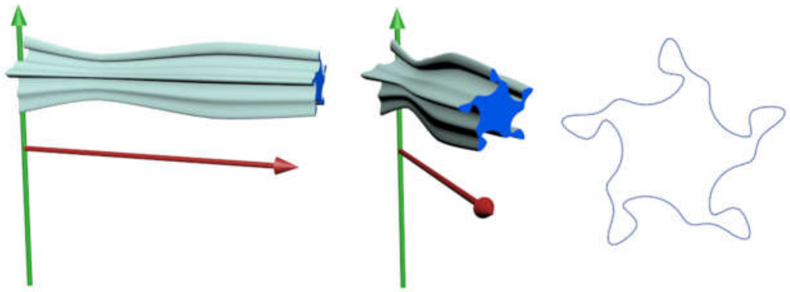


方法二：剥洋葱法，或者喜欢叫剥竹笋、剥辣条都行，就是看作一圈一圈的.



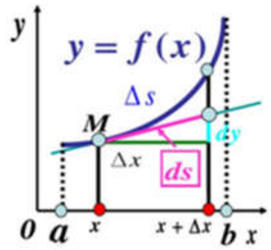
体积就是：$V_y=2\pi\int_a^b |x||f(x)|dx.$

②平行截面面积已知的立体体积（数一、数二）



立体在过点 $x=a,x=b$ 且垂直于 x 轴的两平面之间. 以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积. $A(x)$ 为连续函数. 则所求的立体体积公式为：$V=\int_a^b A(x)dx.$

(3) 平面曲线的弧长问题（数一、数二）



1. 设平面曲线 $\widehat{AB}$ 由方程 $y=f(x)(a\le x\le b)$ 给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续的导数, 则曲线的弧长为

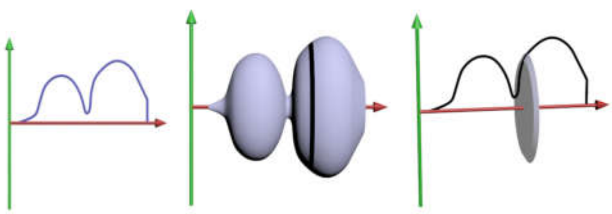
$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$（也即用切线长度代替曲线长度）

2. 设平面曲线 $\widehat{AB}$ 由参数方程 $x=x(t),y=y(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 给出，其中 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 具有一阶连续的导数, 则曲线的弧长为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$

3. 设平面曲线 $\widehat{AB}$ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$, 其中 $r=r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导数, 则曲线的弧长为 $\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$.

(4) 旋转面的侧面积问题（数一、数二）

在 x 轴上方有一平面曲线绕 x 轴旋转一周得旋转曲面, 其面积记为 s.



①设 $\overset{\frown}{AB}$ 为直线段, 则 $S=\pi l\left(y_A+y_B\right)$, 其中 l 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度，y_A,y_B 为 A,B 的纵坐标.

②设 $\overset{\frown}{AB}$ 以弧长为参数的方程为 $x=x(s),y=y(s)\ \left(0\le s\le l\right)$, 则 $S=2\pi\int_0^l y(s)ds.$

③设 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x=x(t),y=y(t)\ \left(\alpha\le t\le\beta\right)$,

$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$, 其中 $x(t),y(t)$ 在 $\left[\alpha,\beta\right]$ 上有连续偏导数.

④设 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y=f(x)\ \left(a\le x\le b\right)$, 则 $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

⑤设 $\overset{\frown}{AB}$ 由极坐标方程 $r=r\left(\theta\right)\ \left(\alpha\le\theta\le\beta\right)$ 给出, 则

$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$ 其中 $r=r\left(\theta\right)$ 在 $\left[\alpha,\beta\right]$ 有连续的导数.

(5)直线段的质心坐标(数一、数二)

设 L 位于 x 轴区间[a,b]上，其线密度为 $\rho(x)$，则其质心坐标为 $\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b\rho(x)dx}$

2. 定积分的物理应用（数一、数二）

① 变力作功

$W=\int_a^b F(x)dx$.

② 水压力

$P=\int_a^b \gamma x f(x)dx$. 其中 γ 为液体的密度，$f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，$f(x)$ 为薄板的函数.

③ 引力

$F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ 其中 k 为引力常数, 引力的方向沿着两质点的连线方向.

第六讲　常微分方程

一、常微分方程的概念

含有未知一元函数及其导数和自变量的方程称为**常微分方程**，简称微分方程.

二、一阶微分方程

1.变量可分离微分方程

(1)方程形式：　$y' = f(x)g(y)$ 也就是方程中的变量 x 和变量 y 可分离.

(2)解法：当 $g(y)\neq 0$ 时，$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$，其中 C 为任意常数，

若 y_0 使 $g(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也是原方程的一个特解.

2.齐次微分方程

(1)方程的形式 $y' = f(\frac{y}{x})$

(2)解法令 $u=\frac{y}{x}$，由于 $y' = u + xu'$，所以微分方程 $y' = f(\frac{y}{x})$ 变为 $u' = \frac{1}{x}(f(u)-u)$

3.一阶线性微分方程

(1)方程形式　$y' + p(x)y = q(x)$，当右端项 $q(x)$ 恒为零时称其为**一阶线性齐次微分方程**，否则称其为**一阶线性非齐次微分方程**.

(2)解法(公式解)

$y = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)$.（其中 $\int p(x)dx$ 如果积分后含有绝对值，可以不写，因为括号内外两个绝对值正负相同，相互抵消了）

4.伯努利(Bernoulli)方程(数一)

(1)方程形式：形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n$，$(n\neq 0,1)$

(2)解法　令 $u = y^{1-n}$，则伯努利方程变为 $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$

5.全微分方程(数一)

(1)方程形式　$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，若 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，该方程称为全微分方程.

(2)解法 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = C$．后面格林公式会讲这个类型的求解.

三、可降阶微分方程(数一、二)

1. 方程 $y^{(n)}=f(x)$，求 n 次定积分得解

2. 方程 $y''=f(x,y')$，缺y 哦！　令 $u=y'(x)$，则微分方程变为 $u'=f(x,u)$

3. 方程 $y''=f(y,y')$，缺x 哦！

令 $u=y'$，则 $\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=uu'$，微分方程变为 $uu'=f(y,u)$

四、线性微分方程解的性质

（1）二阶线性微分方程解的性质

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$　(1)非齐次

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$　　(2)齐次

①若 y_1,y_2 是(2)的解，则 $c_1y_1+c_2y_2$ 也是(2)的解，其中 c_1,c_2 为任意常数.

②若 y_1,y_2 是(2)的两个线性无关的解（$\frac{y_1}{y_2}\neq c$），则 $\tilde{y}=c_1y_1+c_2y_2$ 是(2)的通解.

③若 y_1,y_2 是(1)的解，则 y_1-y_2 为(2)的解.

④若 $\tilde{y}$ 是(2)的通解，y^* 是(1) 的特解，则 $y=\tilde{y}+y^*$ 是(1)的通解.

⑤若 y_1^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ 的解，y_2^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ 的解，则

$y_1^*+y_2^*$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解．这个称作叠加原理。

（2）高于二阶的线性微分方程解的性质

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (1)$$

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (2)$$

1.设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_s(x)$ 为(1)的一组解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 也为方程(1)的解.

2.若 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 分别为(1)(2)的两个解，则 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为(2)的一个解.

3.若 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 为(2)的两个解，则 $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ 为(1)的解.

4.若$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_s(x)$为(2)的一组解，则$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$为(2)的解的充分必要条件是$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

5.若$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_s(x)$为(2)的一组解，则$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$为(1)的解的充分必要条件是$k_1+k_2+\cdots+k_s=0$.

6.设$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_s(x)$为(1)的$n$个线性无关解，则$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)$为(1)的通解.

7.若$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_s(x)$为(1)的$n$个线性无关解，$\varphi_0(x)$为(2)的一个特解，则$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)+\varphi_0(x)$为(2)的通解.

五、高阶常系数线性微分方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程

(1)方程形式： $y''+ay'+by=0$ 其中 a,b 是常数.

(2)解法(特征方程法)

方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 称为它的特征方程，特征方程的根λ_1,λ_2称为它的特征根.

①当$\lambda_1\neq\lambda_2$，且都是实数时，微分方程的通解是 $y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$；

②当$\lambda_1=\lambda_2$时，微分方程的通解是 $y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2xe^{\lambda_1x}$；

③当$\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$时，微分方程的通解是 $y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

2. 高于二阶的常系数齐次线性微分方程(数一)

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

特征方程为：$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根	给出一项：Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出两项：$e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$
k重实根r	给出k项：$e^{rx}\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)$
一对k重复根	给出$2k$项：

$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}\left[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x\right]$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+ay'+by=f(x)$ 由解的性质知只需找齐次方程的通解和一个特解.

(1)右端项为 $f(x)=P_n(x)e^{\mu x}$ 的方程

设方程的一个特解形式为 $y^*(x)=x^kQ_n(x)e^{\mu x}$

其中 $Q_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为 n 次多项式的一般形式， k 的取值方式为：

当 μ 不是 $y''+ay'+by=0$ 的特征根时， $k=0$；

μ 是 $y''+ay'+by=0$ 的特征根时， $k=1$；

μ 是 $y''+ay'+by=0$ 的复特征根时， $k=2$.

(2)右端项为 $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$ 的方程

设方程的一个特解形式为 $y^*(x)=x^ke^{\alpha x}\left[Q_n(x)\cos\beta x+W_n(x)\sin\beta x\right]$,

其中 $Q_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

$W_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

为 n 次多项式的一般形式， $n=\max\{l,m\}$,

①当 $\alpha\pm i\beta$ 不是 $y''+ay'+by=0$ 的特征根时，$k=0$,

②当 $\alpha\pm i\beta$ 是 $y''+ay'+by=0$ 的特征根时，$k=1$,

六、欧拉(Euler)方程(数一)

1. 方程形式

形如 $x^2y''+axy'+by=f(x)$ 的微分方程称为 2 阶**欧拉方程**， a,b 是常数.

2. 解法

当 $x>0$ 时，作变量代换 $x=e^t$，因此欧拉方程变为 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\dfrac{dy}{dt}+by=f(e^t)$

当 $x<0$ 时，通过变量代换 $x=-e^t$，可类似求解.

七、微分方程在几何上应用举例

对于几何问题的应用关键是建立几何问题的微分方程，这个方程除用到导数的几何意义外，还要用到几何问题所给出的各种几个关系及有关几何量的计算公式，常用的几何量有下述几种：

（1）与切（法）线有关的几何量：（2）切（法）线的斜率与倾角；

（3）切（法）线在坐标轴上的截距；（4）切（法）线在两坐标轴之间的长度

（5）原点到切（法）线的距离；（6）切点到切线与坐标轴交点之距离

（7）弧长、曲率与曲率半径. （8）曲边梯形的面积及其绕坐标轴旋转的体积.

对于上述几何量，要能准确地写出或能熟练地推出其表示式（计算公式）.

八、微分方程在物理上应用举例

因微分方程中必含有导数, 因此可根据导数的物理意义建立微分方程. 在物理学上, 导数表示速度$v=\dfrac{dx}{dt}$，加速度$v=\dfrac{d^2x}{dt^2}$，角速度$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$等等. 因此, 在问题中如出现象“变化”、“改变”、“增加”、“减少”、“什么率”、“什么度”等词的时候, 就表明该物理问题与导数有关, 可试用导数去描述. 再根据有关物理量与变化率(导数)的关系, 例如成比例的关系, 即可建立微分方程.

如果还给出在某一特定时刻或特定位置的信息, 据此可写出定解条件, 于是问题归结为求解微分方程的初值问题. 利用这些定解条件, 就可确定解中的有关常数, 如积分常数、比例常数等等.

为此要熟悉物理、力学领域中与该实际问题有关的基本知识、公式或定律

第七讲　向量代数与空间解析几何（仅数一）

一、向量

1. 定义

向量(或矢量)既有大小,又有方向。向量的大小叫做向量的模.

2. 数量积

（1）几何表示：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$.

（2）代数表示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

（3）运算规律：

i）交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　　ii）分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

（4）几何应用：

i）求模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$　　ii）求夹角：$\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

iii）判定两向量垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

3.向量积

（1）几何表示 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一向量.

模：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha$. 表示两个向量张成的平行四边形面积，方向：右手法则

（2）代数表示：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$.

（3）运算规律

i）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$　　ii）分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

（4）几何应用：i）求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

ii）求以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

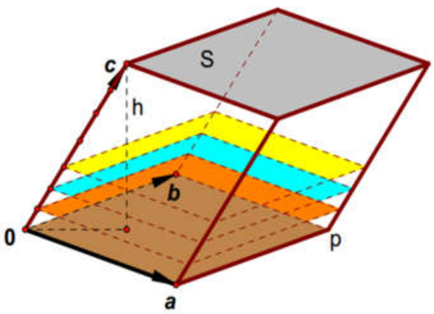
iii)判定两向量平行：$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

4.混合积

$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

（1）代数表示：

$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$. 几何上表示右图这样的平行六面体的体积.



（2）运算规律：

i）轮换对称性：$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})$.

ii）交换变号：$(\boldsymbol{abc})=-(\boldsymbol{acb})$.

（3） 几何应用

i） $V_{平行六面体}=|(\boldsymbol{abc})|$.　　　ii)判定三向量共面：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ ($\boldsymbol{abc}$)=0.

二、直线与平面

1.平面方程

（1）一般式：$Ax+By+Cz+D=0$. $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

（2） 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 法线 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$

(3)截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

2.直线方程

(1)一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

(2)对称式：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

(3)参数式: $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt.$

3.平面与直线的位置关系（平行、垂直、夹角）

(1)两平面的夹角

两平面法向量：$n_1=(A_1,B_1,C_1)$，$n_2=(A_2,B_2,C_2)$

$(\widehat{n_1,n_2})$和$(\widehat{-n_1,n_2})=\pi-(\widehat{n_1,n_2})$两者中的锐角或直角

$$\cos\theta=\left|\cos(\widehat{n_1,n_2})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(2)两直线的夹角

两直线的方向向量：$\mathrm{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\mathrm{s}_1=(m_2,n_2,p_2)$

夹角φ应是$(\widehat{s_1,s_2})$和$(\widehat{-s_1,s_2})=\pi-(\widehat{s_1,s_2})$两者中的锐角或直角

$$\cos\varphi=\left|\cos(\widehat{s_1,s_2})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{s}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{s}_2}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{s}_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{s}_2}\right|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

(3)直线与平面的夹角

直线的方向向量为$s=(m,n,p)$,

平面的法向量为$n=(A,B,C)$,

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\theta = \left|\frac{\pi}{2} - \left(\widehat{s,n}\right)\right|$,

$\sin\theta = \left|\cos\left(\widehat{s,n}\right)\right| = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

4.点到面的距离

点(x_0, y_0, z_0)到平面$Ax+By+Cy+D=0$的距离：$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

5.点到直线距离

点(x_0, y_0, z_0)到直线$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$的距离为：

$$d = \frac{\left|\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\} \times \{l,m,n\}\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

6. 3 个平面之间的 8 种位置关系

设平面π_1 π_2 π_3的方程所组成的线性方程组（下简称方程组）的系数矩阵和增广矩阵分别为A和$\overline{A}$.有下述 6 种不同情况（该知识可以看小元老师动画课程）：

（1）秩$\overline{A}$=3=秩A时.

●方程组有唯一解，三平面交于一点,下图（1）.

（2）秩$\overline{A}=3$，秩$A=2$时，可能有：

●3平面两两相交，下图（2）.

●3平面中有两平面相交，另一平面与其中一平面平行，下图（3）.

（3）秩$\overline{A}=3$，秩$A=1$.根据秩的定义易知这不可能.

（4）秩$\overline{A}=2=$秩A时，可能有：

●两平面相交，另一平面通过这交线，但 3 平面互异，下图(4）.

●两平面相交，另一平面与其中一平面重合，两平面互异，下图（5）.

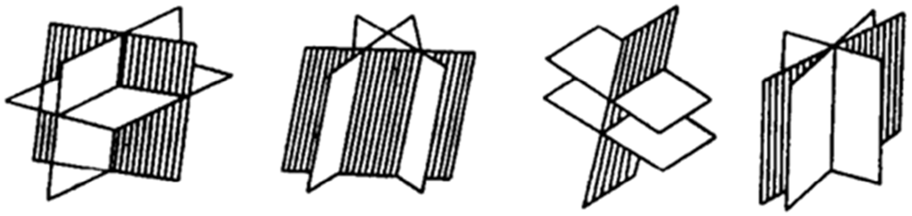
（5）.秩$\overline{A}=2$，秩$A=1$时，可能有.

●3平面平行，且3平面互异，下图（6）.

●3平面平行，其中有两平面重合，这时有两平面互异，下图（7）.

（6）秩$\overline{A}=1=$秩A时，

●3个平面重合，下图（8）.



(1) (2) (3) (4)

(5) (6) (7) (8)

三、曲面与空间曲线

1.旋转面

如果曲线方程为 $f(y, z)=0$, 它绕 z 轴旋转，方程：$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$.

而该曲线如果绕y 轴旋转，曲面方程为: $f\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$.

2.柱面

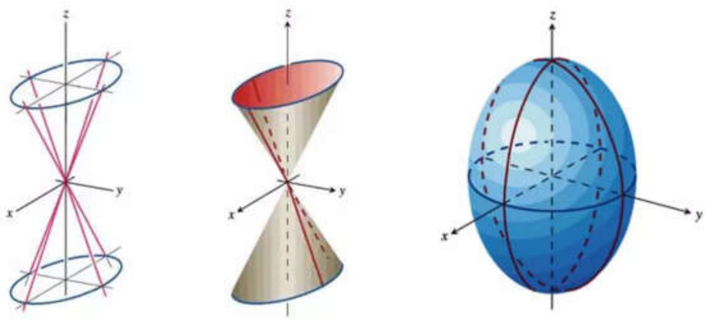
平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹.

3.锥面

过定点并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹.

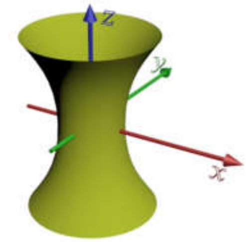
4.常见二次曲面

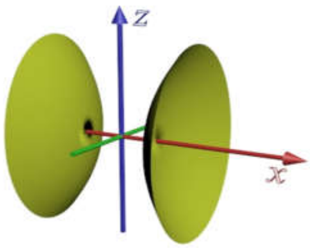
椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, 如下面左图.

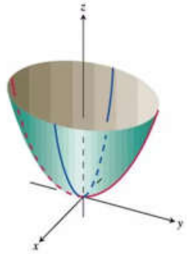


椭球面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$(a,b,c>0)$, 如上面右图.

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，如下面左图. 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，如下面中图.

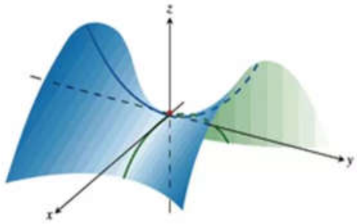




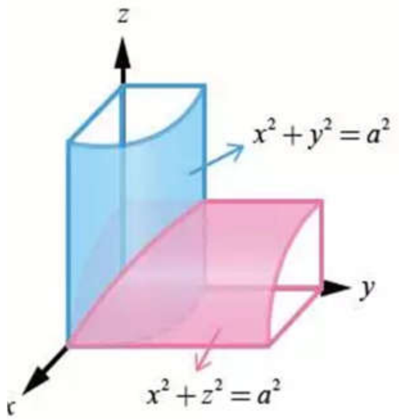


椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$，如上面右图.

双曲抛物面：$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=z$，如下面左图.



该曲面也称马鞍面



5、考试常见曲面

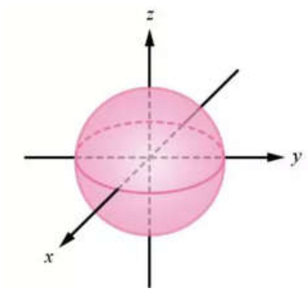
直交圆柱面：$x^2+y^2=a^2,(x>0,y>0)$ $x^2+z^2=a^2,(x>0,z>0)$

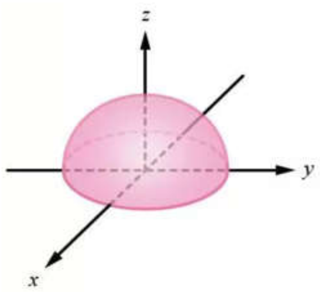
如上面右图.

球面：

$x^2+y^2+z^2=R^2$

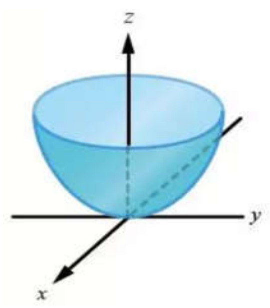
$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

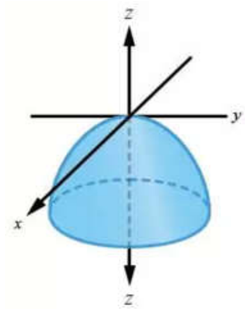




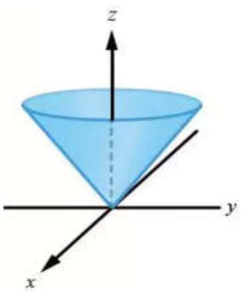
抛物面：$z=x^2+y^2$

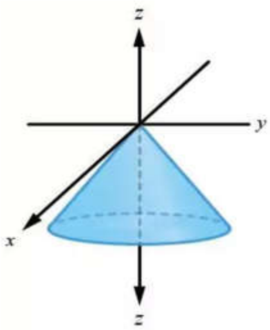
$z=-(x^2+y^2)$





圆锥面：$z=\sqrt{x^2+y^2}$　　　　　　　　$z=-\sqrt{x^2+y^2}$





6. 空间曲线

i) 参数式: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$　　　ii) 一般式: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$

6．空间曲线投影

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 消去变量z，得：$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$，即为投影.

7.切线与法向量

设空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t\in[\alpha,\beta]. \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

对参数方程求导，就得到切线的方向向量，因此切线方程为$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$.

法平面方程为：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

曲面方程$F(x,y,z)=0$

曲面的法向量

$n=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right)$

切平面的方程是

$\mathrm{F}_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$

法线方程是$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$

另外常见的一种方程表达是这样的：$z=f(x,y)$，那么我们可以将它改写下，

$F(x,y,z)=f(x,y)-z,$

$F_x(x,y,z)=f_x(x,y),F_y(x,y,z)=f_y(x,y),F_z(x,y,z)=-1.$

$n=\left(f_x(x_{0,}y_o),f_y(x_0,y_0),-1\right),$

切面方程为 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$

而法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.$

法向量的方向余弦为

$\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f^2_y}},\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$

这是法向量的典型选取方法，朝上的，而有些题也会用朝下的法向量，

即将上面结果都取相反数.

第八讲　多元函数微分法及其应用

一、多元函数、极限、连续性

1.多元函数的概念

(1)定义：设 D 是平面上的一个非空子集，称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数

(2)几何意义：二元函数 $z=f(x,y)$ 表示空间的曲面

2.二元函数的极限

(1)定义：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的去心邻域有定义，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

(2)计算：可借助一元函数求极限的方法，也常用夹逼定理，或者极坐标代换来求解.

（3）多元函数的洛必达法则

$f(x,y)$与$g(x,y)$在区域D内有定义,(x_0,y_0)为D的一个聚点，

且$f(x,y)$与$g(x,y)$在(x_0,y_0)可微

若$g_x'(x_0,y_0)\neq 0$且$g_y'(x_0,y_0)\neq 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f_x'(x,y)}{g_x'(x,y)}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f_y'(x,y)}{g_y'(x,y)}$$

3.多元函数的连续性

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则连续.

二、多元函数的偏导数与全微分

1 偏导数的概念

（1）定义　$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

（2）高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)，\quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)，\quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在某区域内均连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

2.求偏导的方法

(1)直接求偏导

(2)复合函数求偏导

$z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y),z$ 对 u,v 有连续偏导数， u,v 对 x,y 偏导数存在，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u^{'}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_v^{'}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=f_u^{'}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}+f_v^{'}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}$$

3. 全微分

(1)定义

全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分， $dz\big|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$.

(2)可微的等价定义（充要条件）

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x-\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y}{\rho}=0$，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

4. 方向导数与梯度（仅数一）

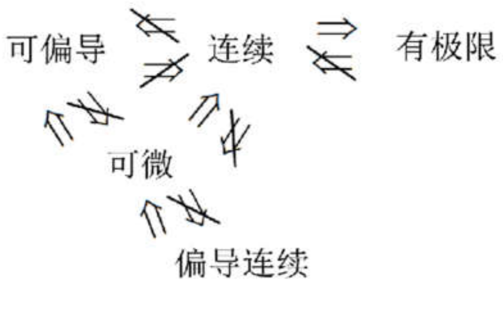
方向导数的定义： $\dfrac{\partial f}{\partial l}\big|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{l\to 0^+}\dfrac{f\left(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{t}$.

函数在点 $p_0\left(x_0,y_0\right)$ 可微分，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\big|_{(x_0,y_0)}=f_x\left(x_0,y_0\right)\cos\alpha+f_y\left(x_0,y_0\right)\cos\beta$

其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦.

等值线的概念： L^*方程: $\begin{cases}z=f\left(x,y\right),\\ z=c.\end{cases}$ L^*为函数$z=f\left(x,y\right)$的等值线。

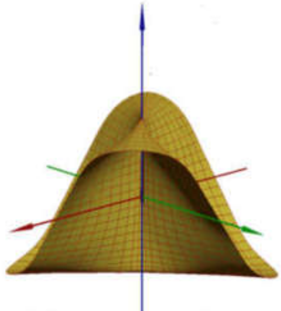
5. 几个概念之间关系



各方向导数存在 $\begin{cases}\not\Rightarrow \text{连续}\\ \not\Rightarrow \text{偏导数存在}\\ \not\Rightarrow \text{可微}\end{cases}$

①偏导存在 $\nRightarrow$ 连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}，& x^2+y^2\neq 0\\ 0，& x^2+y^2=0\end{cases}$$



该函数偏导存在，但不连续

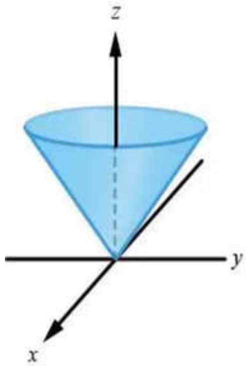
$f_x(0,0)==0$，$f_y(0,0)=0$

在 $(0,0)$ 点 $f(x,y)$ 不连续

②连续 $\nRightarrow$ 偏导存在

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

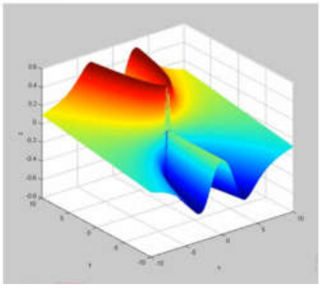
$f_x(0,0)$不存在，$f_y(0,0)$不存在.



③方向导数存在 $\nRightarrow$ 连续

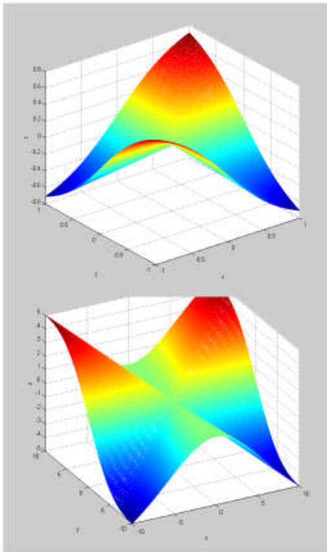
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}，& x^2+y^2\neq 0\\ 0，& x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\beta},\cos\beta\neq 0\\ 0,\cos\beta=0\end{cases}$$



④连续 $\nRightarrow$ 全微分存在，偏导存在 $\nRightarrow$ 全微分存在

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}，& x^2+y^2\neq 0\\ 0，& x^2+y^2=0\end{cases}$$



⑤连续 $\nRightarrow$ 全微分存在，

偏导存在 $\nRightarrow$ 全微分存在

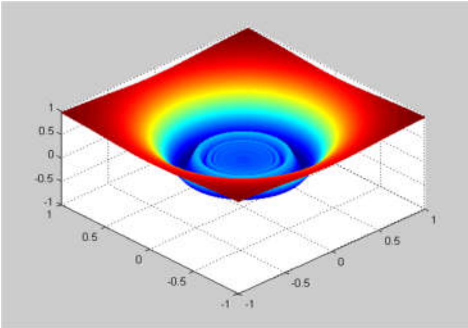
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}，& x^2+y^2\neq 0\\ 0，& x^2+y^2=0\end{cases}$$

⑥

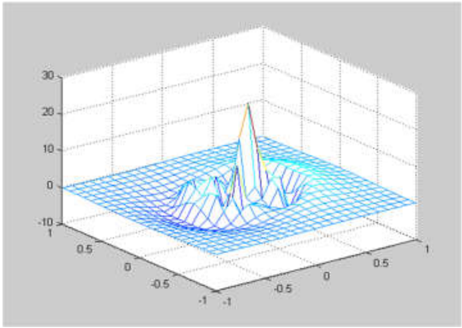
偏导连续 $\Rightarrow$ 可微分　　可微分 $\nRightarrow$ 偏导连续

不可微分，且偏导存在 $\Rightarrow$ 偏导不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}，x^2+y^2\neq 0\\ 0，x^2+y^2=0\end{cases}$$



$f(x,y)$



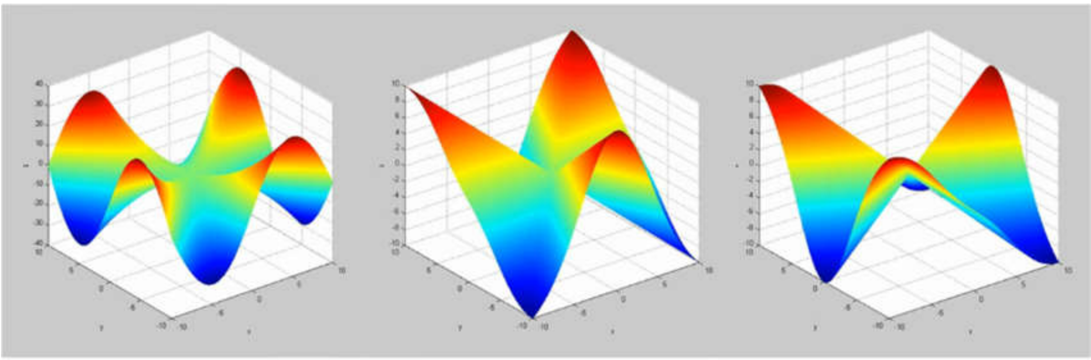
$f_x(x,y)$

⑦

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\text{与}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\text{连续}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

可微分 $\nRightarrow$ 偏导连续　　可微分 $\nRightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 连续　　可微分 $\nRightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}，x^2+y^2\neq 0\\ 0，x^2+y^2=0\end{cases}$$



$f(x,y)$　　$f_x(x,y)$　　$f_y(x,y)$

总结上面的例子，可以得到一个**局部经验**：大家观察这几个分段函数，在 $x^2+y^2\neq 0$

时，都是有理分式或者无理分式形式，对分子我们观察最低幂次，对分母的我们观察最高幂次（其原理大家可以对比一元函数的类型来理解），相比较可以得到：

如果分子的幂次小于等于分母幂次，那么不连续；如果分子幂次比分母高 1 阶，那么连续但不可微；如果分子幂次比分母高 2 阶，那么可微.

注意：如果不是有理分式或者无理分式形式，可以使用等价替换。比如$\sin(x^2+y^2)$可替换为(x^2+y^2)。这是这类题的局部规律，并不是说所有的函数都有这个特点的.

三、微分学的应用

1. 多元函数的极值

(1) 一般极值

●极值存在的充分条件

设函数$z=f(x,y)$在驻点(x_0,y_0)的某邻域内具有连续的一阶及二阶偏导数，令

$f_{xx}''(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}''(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}''(x_0,y_0)=C$，则

① $AC-B^2>0$时在(x_0,y_0)取得极值，且当$A<0$时取极大值，当$A>0$时取极小值；

① $AC-B^2<0$时在(x_0,y_0)不取得极值；

② $AC-B^2=0$时无法判断.（考研出题中，该情况通常极限不存在）

(2) 条件极值

求目标函数$z=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值(或最值).

拉格朗日乘数法先作拉格朗日函数$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中$\lambda$为参数，

先求$F(x,y,\lambda)$的驻点，即解方程组$\begin{cases}F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0\\F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0\\F_\lambda'=\varphi(x,y)=0\end{cases}$

由此解出x,y，其中(x,y)就是函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下可能取得极值的点．据实际问题确定驻点是最大(小)值点.

第九讲　重积分

一、二重积分

1. 二重积分的概念

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

设$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$,则 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\dfrac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f(\dfrac{i}{m},\dfrac{j}{n})=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

2. 二重积分的性质

（1）$\iint\limits_D[\alpha f(x,y)\pm\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\pm\beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，$\alpha,\beta$ 任意常数.

（2）若区域 D 分为两个部分区域 D_1,D_2，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

（3）若在 D 上，$f(x,y)\equiv 1$，σ为区域 D 的面积，则 $\sigma=\iint\limits_D d\sigma$

（4）如果区域 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$,那么有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

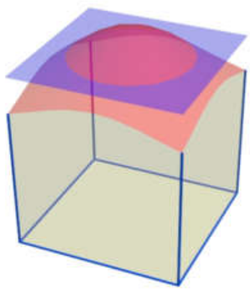
特殊地，$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint\limits_D|f(x,y)|d\sigma$

(5) 估值不等式

设 M 与 m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上最大值 M 和最小值 m，σ 是 M 的面积，则

$$m\sigma\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma$$

(6) 二重积分的中值定理



设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$

这里的 $f(\xi,\eta)$ 可看作是曲顶柱体的平均高度，如右图.

3. 二重积分的计算

化二重积分为累次积分

(1) 二重积分在直角坐标系中的计算

① D 为 X 型区域

设积分区域 D 可以用不等式 $a\le x\le b,y_1(x)\le y\le y_2(x)$ 表示，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

② D 为 Y 型区域

设积分区域 D 可以用不等式 $c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

③ D 为其他型区域　　分成若干个 X（或 Y）型区域进行计算.

（2）二重积分在极坐标系中的计算

1. 标准计算公式

设积分区域 D 可表示成: $\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$，其中函数 $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ 在

$[\alpha,\beta]$ 上连续. 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

2. 用极坐标系计算二重积分的一般原则

①积分区域的边界曲线的方程用极坐标方程表示比较简单(常见积分区域与圆有关).

②被积函数表示式用极坐标变量表示较简单（含 $(x^2+y^2)^\alpha$，α 为实数）.

3. 用极坐标系计算二重积分的步骤

①画草图，观察边界曲线.　②ρ 的积分限.　③找 θ 的积分限.

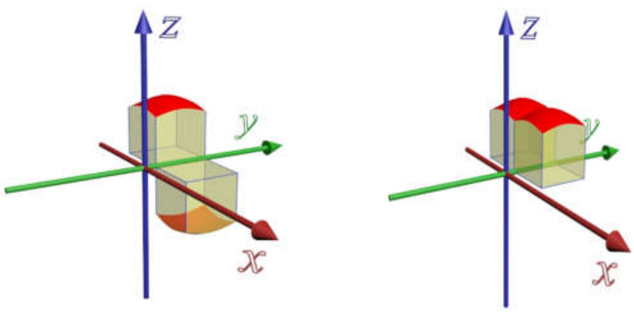
(3) 二重积分的特殊计算方法

①利用积分区域 D 关于坐标轴的对称性

若 D 关于 y（或 x）轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 0, & 若 f(x,y) 是 x(或 y) 的奇函数 \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma & 若 f(x,y) 是 x(或 y) 的偶函数 \end{cases}$$

D_1 是 D 在 y（或 x）轴右(上)边部分. 简称奇零偶倍，如下图情况：



②利用积分区域 D 的轮换对称性

若区域 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$

若区域 D 关于 $y=-x$ 对称，则 $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_D f\left(-y,-x\right)dxdy$

（4）在哪些情况下需调换二次积分的次序

●题目要求的

●为简化计算，调换二次积分的积分次序

●按一种积分次序无法算出的二次积分，调换积分次序后化为可算出的二次积分

（Ⅰ）内层积分的被积函数的原函数不是初等函数.

（Ⅱ）被积函数含抽象函数，若按原积分次序无法计算，可调换积分次序试求之.

（5）被积函数不是初等函数的情况

原函数不是初等函数的被积函数，由于无法直接求解，一般采用交换积分次序，或者极坐标，或者奇偶对称、轮换对称等方法，转换之后再求解.

原函数不是初等函数的常见（对 x 的积分）函数有：

$$e^{\pm x^2},e^{\frac{y}{x}},\frac{\cos x}{x},\frac{\sin x}{x},\sin x^k\left(k\geq 2\right),\cos x^k\left(k\geq 2\right),\sin\frac{y}{x},\frac{1}{\ln x},\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

（6）将单（定）积分、二次积分化为二重积分，利用二重积分性质证明

结论：设 $f\left(x\right)$ 在 $a\leq x\leq b$，$g\left(x\right)$ 在 $c\leq x\leq d$ 连续，则

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\int_c^d g\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx\int_c^d g\left(y\right)dy=\iint\limits_D f\left(x\right)g\left(y\right)dxdy$$

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\int_c^d g\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(y\right)dy\int_c^d g\left(x\right)dx=\iint\limits_{D_1} f\left(y\right)g\left(x\right)dxdy$$

其中 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|a\leq x\leq b,c\leq y\leq d\right\},D_1=\left\{\left(x,y\right)\middle|c\leq x\leq d,a\leq y\leq b\right\}$

二、三重积分（仅数一）

1. 三重积分的概念

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$，其中 dv 叫体积元素.

2. 三重积分的计算：将三重积分化成三次定积分

(1) 利用直角坐标计算三重积分

①投影法(先一后二)

若空间闭区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leq z\leq z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\right\}$，其中

$D_{xy}=\left\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,y_1(x)\leq y\leq y_2(x)\right\}$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

②平面截割法(先二后一)

设空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D_z, c\le z\le d\}$，其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域，则有 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

（2）利用柱面坐标计算三重积分

①直角坐标与柱面坐标的关系

点 M 的直角坐标与柱面坐标之间有关系式 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$

其中 $0\le r<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty$

②利用柱面坐标计算三重积分

若空间闭区域 Ω 可以用不等式 $z_1(r,\theta)\le z\le z_2(r,\theta), r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta$

来表示，则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz.$$

(3）利用球坐标计算三重积分

①直角坐标与球面坐标的关系

点 M 的直角坐标与球面坐标间的关系为 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$

其中 $0\le r<+\infty, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi$

②利用球面坐标计算三重积分

$dv=r^2\sin\phi drd\phi d\theta$ 这就是球面坐标系中的体积元素.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega} F(r,\phi,\theta)r^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

(4)三重积分的特殊计算方法

①利用奇偶对称性简化三重积分的计算

结论 1: 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续,若 Ω 关于坐标面 yOz (或 xOy ,或 xOz)

对称,被积函数关于变量x(或 z,或 y)是奇函数，则此三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$的值为零；若被积函数关于变量 x（或 z,或 y）是偶函数，则该三重积分等于其一半对称区域上积分的两倍.

结论 2：设$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续，若Ω关于 x(或 y 或 z)轴对称，且$f(x,y,z)$关于变量 y,z(或 z,x 或 x,y)为奇函数，即

$f(x,-y,-z)=-f(x,y,z)$[或$f(-x,y,-z)=-f(x,y,z)$, $f(-x,-y,z)=-f(x,y,z)$]，

则此三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=0.$

若$f(x,y,z)$关于变量 y,z(或 x,y 或 x,z)为偶函数.则该三重积分等于其一半对称区域上的重积分的两倍.

结论 3：设$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续，若Ω关于原点对称，$f(x,y,z)$关于变量 x,y,z 为奇函数，即$f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$,则三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=0.$若$f(x,y,z)$关于变量 x,y,z 为偶函数，即$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$.则该三重积分等于其一半对称区域上的重积分的两倍.

②利用轮换对称性简化计算

如果被积函数，积分区域关于变量x,y,z具有轮换对称性(即：x换成y，y换成z，z换成x，其他表达式均不变)，则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y,z,x)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z,x,y)dv$

三、重积分的应用（仅数一）

（1）曲面面积

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.\qquad A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz.$$

$$A=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dzdx.$$

（2）质心

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma},\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}$$

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dv,\overline{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,dv,\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,dv,$$

其中 $M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dv$

结论：三角形顶点的坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 则形心：$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

（3）转动惯量

$$I_x=\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 m_i,\ I_y=\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 m_i,$$

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,d\sigma,\ I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,d\sigma,$$

$$I_l=\iint_D d^2\rho(x,y)\,dxdy,$$

质点对于三维空间 x 轴、y 轴、z 轴的转动惯量依次为：

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv,$$

$$I_y=\iiint_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,dv,$$

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dv,$$

第十讲 无穷级数（数一、数三）

一、数项级数的概念与性质

1.数项级数的概念

(1)定义

设$\{u_n\}$是一个数列，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$为一个数项级数，简称级数

(2)收敛与发散

若$\lim_{n\to\infty} S_n = s$，称级数收敛，$s$为该级数的和；若该极限值不存在，称级数发散.

等比级数：$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$.（当$|q|<1$时收敛）

p 级数敛散性：$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$. p 为大于 0 的常数

当$p>1$时收敛，当$p\leqslant 1$时发散.

2. 数项级数的性质

(1)级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$同敛散性，其中$k \neq 0$.

(2)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$必收敛.一个收敛，一个发散，加和发散；两个都发散，加和不一定

(3) 在级数中去掉、加上或改变有限项、不会改变级数的收敛性.

(4）级数收敛的必要条件：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

二、正项级数的敛散性的判别

1.正项级数的概念及其收敛的充要条件

定义：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \geq 0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数.

2 正项级数敛散性判别法

(1)比较判别法

①**比较审敛法的一般形式**：设两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，使当$n \geq N$时有$u_n \leq v_n$成立，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

②**比较判别法的极限形式**：设两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，如果存在极限$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$，

则 a. 当 $0<l<+\infty$ 时, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散.

b. 当 $l=0$ 时, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

c. 当 $l=+\infty$, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

（2）比值审敛法

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则:

①当 $l<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；②当 $l>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；③当 $l=1$ 时无法判断.

（3）根值审敛法(数一)

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则:

①当 $l<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；②当 $l>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；③当 $l=1$ 时无法判断.

（4）积分审敛法(了解)

设 $\{a_n\}\downarrow$，令 $a_n=f(n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 敛散性相同.

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}(a>1)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$ 敛散性相同.

对结果可以总结为下面的顺口溜，方便大家记忆结论：

$$\begin{cases}\alpha>1,\forall\beta,\text{收敛，老大以一敌百，小弟直接躺赢，}\\ \alpha<1,\forall\beta,\text{发散，老大投降主义，小弟回天无力，}\\ \alpha=1,\beta>1,\text{收敛，老大势均力敌，小弟临危受命，}\\ \alpha=1,\beta\le1,\text{发散，老大势均力敌，小弟极不给力。}\end{cases}$$

三、任意项级数

1. 交错级数及其审敛法

(1)定义　　设 $u_n>0$，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数.

(2)莱布尼兹定理

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件: ① $u_n\ge u_{n+1}$; ② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

2. 任意项级数

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 就称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**; 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散， 而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**条件收敛**.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

三个级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n,\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$,

$$\begin{cases}\text{若其中两个收敛, 另一个一定收敛；}\\ \text{若其中两个发散, 另一个敛散性不确定；}\\ \text{若一个收敛, 一个发散, 另一个一定发散}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{若其中两个绝对收敛, 另一个一定绝对收敛；}\\ \text{若其中两个条件收敛, 另一个条件收敛或绝对收敛；}\\ \text{若一个条件收敛, 一个绝对收敛, 另一个一定条件收敛}\end{cases}$$

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$都不一定收敛

如:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛, 但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}}$都发散;

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$收敛，但$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}\ln n}$发散.

学习级数的知识要学会上面这样举反例，熟悉常见反例.

但若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项收敛级数，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2}$一定收敛, 上述其他也都收敛.

四、函数项级数

1. 定义

设函数列 $u_n(x)(n=1,2,3...)$ 都在 I 上有定义，则称 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 为定义在 I 上的一个函数项级数，$u_n(x)$称为通项，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一个收敛点，所有收敛点构成的集合称为级数的收敛域.

2. 和函数

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=S(x)$ 成立，则定 $S(x)$ 称为和函数.

五、幂级数

1.幂级数及相关概念

设 $\{a_n\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ 是实数列，则形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为 x_0 处的幂级数， $x_0=0$ 时的幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，其中常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 叫做幂级数的系数.

2.阿贝尔定理

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0\ (x_0\neq 0)$ 处收敛, 则当 $|x|<|x_0|$ 时, 幂级数绝对收敛; 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 时发散, 则当 $|x|>|x_0|$ 时, 幂级数发散.

3.收敛半径的求解方法

(1) 不缺项: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$, 则收敛半径 $R=\begin{cases}1/\rho & ,0<\rho<+\infty\\ +\infty & ,\rho=0\\ 0 & ,\rho=+\infty\end{cases}$.

（2）缺项：对于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{kn+b}$ ， $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ ， $R=(\frac{1}{\rho})^{1/k}$

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$,若当 $x=x_0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 条件收敛，则 $R=|x_0|$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径相同，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 是以 $x=0$ 为收敛区间的中心，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 以 $x=x_0$ 为收敛区间的中心。

4.幂级数的运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R_a， $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛半径为 R_b；

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$, 收敛半径为 $R=\min\{R_a,R_b\}$.

5.幂级数的性质

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

（2）幂级数在其收敛区间内可逐项求导，即 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

（3）幂级数在其收敛域内可逐项积分，即 $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

求导或积分后，收敛半径不变，端点处敛散性可能变化哦！

7. 函数的幂级数展开式

（1）直接展开法（泰勒公式法，详解参考前面章节即可） $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

（2）间接展开法

常用函数的幂级数展开式：$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \frac{1}{1-x}, (1+x)^{\alpha}$, 也就是泰勒的结论.

通过求导或积分或拆分使 $f(x)$ 变成已知幂级数展开式函数的组合，把已知展开式带入.

六、傅里叶级数（数一）

1. 傅里叶系数与傅里叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad n = 0,1,2\cdots \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad n = 1,2\cdots$$

2. 收敛定理（狄里克雷充分条件）

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或有有限个第一类间断点, 且只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛, 且收敛于

① $f(x)$, 当 x 为 $f(x)$ 的连续点. ② $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, 当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

③ $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, 当 $x = \pm\pi$

3. 周期为 2π 的函数的展开.

(1) $[-\pi,\pi]$ 上展开.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad n = 0,1,2\cdots \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad n = 1,2\cdots$$

(2) $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开.

① $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0,\ n = 0,1,2\cdots \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad n = 1,2\cdots \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

② $f(x)$ 为偶函数.

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\ n=0,1,2\cdots\ b_n=0\ n=1,2\cdots\ f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$

(3)在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或展为余弦.

①展为正弦. $a_n=0,\ n=0,1,2\cdots$　　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ n=1,2\cdots$

②展为余弦. $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\ n=0,1,2\cdots\ b_n=0\ n=1,2\cdots$

4. 周期为 $2l$ 的函数的展开.

(1) $[-l,l]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ n=0,1,2\cdots\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ n=1,2\cdots$$

(2) $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开.

① $f(x)$ 为奇函数. $a_n=0,\ n=0,1,2\cdots\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ n=1,2\cdots$

② $f(x)$ 为偶函数. $a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ n=0,1,2\cdots\ b_n=0\ n=1,2\cdots$

(3)在 $[0,l]$ 上展为正弦或展为余弦.

①展为正弦. $a_n=0,\ n=0,1,2\cdots\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ n=1,2\cdots$

②展为余弦. $a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ n=0,1,2\cdots\ b_n=0\ n=1,2\cdots$

第十一讲　曲线积分与曲面积分（仅数一）

一、曲线积分

1 对弧长的曲线积分

(1) 对弧长的曲线积分的概念与性质

①对弧长的曲线积分的定义 $\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

②对弧长曲线积分的性质

a. 设 $L=L_1+L_2$，则 $\int_L f(x,y)ds=\int\limits_{L_1}f(x,y)ds+\int\limits_{L_2}f(x,y)ds$.

b. $\int_L[\alpha f(x,y)\pm\beta g(x,y])ds=\alpha\int_L f(x,y)ds\pm\beta\int_L g(x,y)ds$，$\alpha,\beta$ 为常数.

c. $f(x,y)=1$，则 $\int_L f(x,y)ds=s$（s 为 L 的弧长）.

d. 设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$.

(2) 对弧长曲线积分的计算

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$$

设 $f(x,y)$ 在弧 L 上有定义且连续，L 方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$（$\alpha\le t\le\beta$），

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\ (\alpha<\beta).$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{x_0}^X f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx\ (x_0<X).$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{y_0}^Y f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy\ (y_0<Y).$$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt\ (\alpha<\beta).$$

(3) 简化运算

①利用奇偶性、对称性

若 L 关于 y 轴对称，则 $\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & ,f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\int_{L_1}f(x,y)ds & ,f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$，

其中 L_1 为 L 在 y 轴右边.

②利用轮换对称性　　若 L 关于 $y = x$ 对称，则 $\int_L f(x,y)ds = \int_L f(y,x)ds$.

2 . 对坐标的曲线积分

（1）对坐标的曲线积分定义和性质

该类型积分可以研究变力沿曲线所作的功：

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j \qquad W = F \bullet \overrightarrow{AB}.$$

①定义：$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ ，$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$.

②对坐标曲线积分的性质

a. $\int_L aP(x,y)dx = a\int_L P(x,y)dx$

b. L 为有向曲线弧，L^- 为 L 与方向相反的曲线，则

$$\int_L P(x,y)dx = -\int_{L^-} P(x,y)dx\ , \quad \int_L Q(x,y)dy = -\int_{L^-} Q(x,y)dy$$

c. 设 $L = L_1 + L_2$ ，则 $\int_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy$

（2）对坐标的曲线积分的计算

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上有定义，且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

3. 两类曲线积分之间的关系

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\,ds$$

其中，$\cos\alpha$ 、$\cos\beta$ 为有向曲线 L 正向切向量的方向余弦.

与平面曲线积分类似，对于空间曲线积分有

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_L [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds$$

其中，$\cos\alpha$ 、$\cos\beta$ 、$\cos\gamma$ 为有向曲线 Γ 切向量的方向余弦.

二、曲面积分

1. 对面积的曲面积分

（1）对面积的曲面积分的概念与性质

①定义　$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$

②性质　　与二重积分类似，$f(x,y,z)=1$ 时，$S=\oiint_{\Sigma} dS$ 为曲面 Σ 的面积；

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$.

（2）对面积的曲面积分的计算方法

如果曲面 Σ 的方程 $z=z(x,y)$ 为单值函数，Σ 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy}，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dxdy$$

如果曲面 Σ 的方程 $y=y(x,z)$ 为单值函数，Σ 在 xoz 面上的投影区域为 D_{xz}，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^2(x,z)+y_z^2(x,z)}\,dxdz$$

如果曲面 Σ 的方程 $x=x(y,z)$ 为单值函数，Σ 在 yoz 面上的投影区域为 D_{yz}，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}\,dydz$$

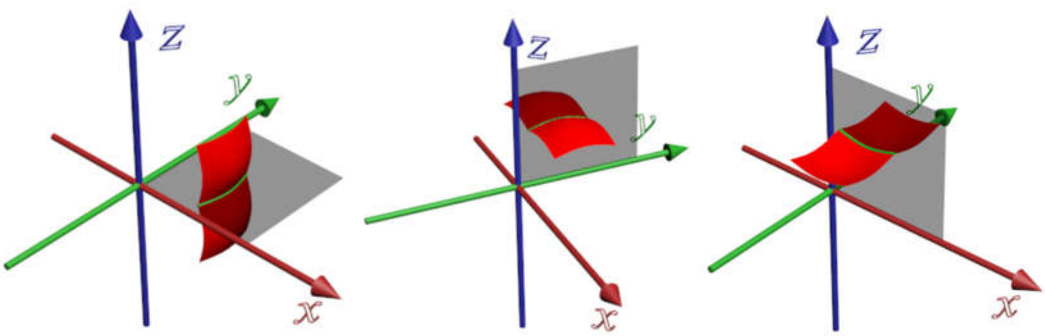
（3）简化运算

①利用奇偶性对称性：若 Σ 关于 xoy 对称，如下面左图，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\begin{cases}0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Σ 在 $z\ge 0$ 部分.

如果关于其他平面对此，如下面中间和右图，有类似的结果，奇零偶倍.



②利用轮换对称性：若 Σ 的方程关于 x,y,z 具有轮换对称性，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} f(y,z,x)dS=\iint_{\Sigma} f(z,x,y)dS.$$

2. 对坐标的曲面积分

(1) 对坐标的曲面积分的概念与性质

①定义：$v(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$

有向曲面在 xoy 平面投影：$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0\\ 0, & \cos\gamma\equiv 0\end{cases}$

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma}Pdydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\quad,\quad \iint_{\Sigma}Qdzdx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

②性质：

a. 若 $\sum=\sum_1+\sum_2$，则 $\iint_{\Sigma}Pdydz=\iint_{\Sigma_1}Pdydz+\iint_{\Sigma_2}Pdydz$.

b. 设 $\sum$ 为有向曲面，$\sum^-$ 表示与 $\sum$ 相反的侧，则

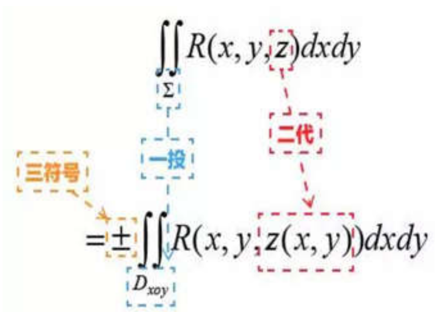
$$\iint_{\Sigma^-}Pdydz=-\iint_{\Sigma}Pdydz;\quad \iint_{\Sigma^-}Qdzdx=-\iint_{\Sigma}Qdzdx;\quad \iint_{\Sigma^-}Rdxdy=-\iint_{\Sigma}Rdxdy.$$

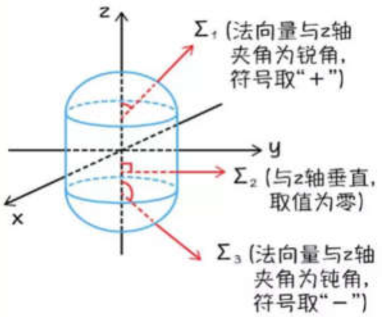
(2) 对坐标的曲面积分的计算法

设 $\sum$ 由 $z=z(x,y)$ 给出的有向曲面，$\sum$ 在 xoy 面上的投影为 D_{xy}，$z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 内具有一阶连续偏导数，R 在 $\sum$ 上连续，则 $\iint_{\Sigma}Rdxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy$

其中当曲面取上侧，取正号，曲面取下侧，则取负号.

一投，二代，三符号:





曲面积分	曲面方程	一投	二代	三符号	化成二重积分

$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$	$z=z(x,y)$	D_{xoy}	$R(x,y,z(x,y))$	$\pm dxdy$	$\pm\iint\limits_{D_{xoy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$
$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$	$x=x(y,z)$	D_{yoz}	$P(x(y,z),y,z)$	$\pm dydz$	$\pm\iint\limits_{D_{yoz}} P(x(y,z),y,z)dydz$
$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$	$y=y(x,z)$	D_{zox}	$Q(x,y(x,z),z)$	$\pm dzdx$	$\pm\iint\limits_{D_{zox}} Q(x,y(x,z),z)dzdx$

3. 两类曲面积分间的关系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS$$

其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲面$\sum$在点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦.

转换投影法：若 $S:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，分块光滑，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D_{xy}}[P\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})+Q\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})+R]dxdy$$

其中$z=z(x,y)$，S取上侧，取"+"，S取下侧，取"$-$".

4. 曲线积分的应用

(1)求平面曲线、空间曲线及曲面的质量

$M=\int_L \mu(x,\ y)\mathrm{d}s$，$M=\int_\Gamma \mu(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s$，$M=\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,\ y,\ \mathrm{z})\mathrm{d}s$

(2)求平面曲线L、空间曲线Γ及曲面Σ的重心(形心)

曲面重心: $x_c=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}\mu x\mathrm{d}s}{\iint\limits_{\Sigma}\mu\mathrm{d}s}$，$y_c=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}\mu y\mathrm{d}s}{\iint\limits_{\Sigma}\mu\mathrm{d}s}$，$z_c=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}\mu z\mathrm{d}s}{\iint\limits_{\Sigma}\mu\mathrm{d}s}$

(3)求平面曲线 L、空间曲线Γ及曲面Σ的转动惯量

①对坐标轴(Ox轴): $I_x=\int_\Gamma \mu(y^2+z^2)\mathrm{d}s$　②对原点O：$I_O=\int_\Gamma \mu(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

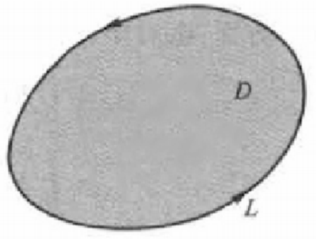
③对定点$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$：$I_{P_0}=\int_\Gamma \mu\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\mathrm{d}s$

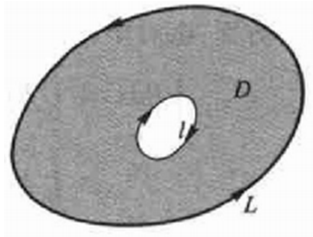
④对坐标平面(如xOy平面)：$I_{xy}=\int_\Gamma \mu z^2\mathrm{d}s$.

⑤对定平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$，$I_\pi=\int_\Gamma \mu\dfrac{(Ax+By+Cz+D)^2}{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}s$

三、三大公式及其应用

1. 格林公式





单连通区域：区域内任一闭曲线所围的部分都属于这个区域

复连通区域：不是单连通的区域就是复连通区域

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有 $\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

其中，L 为 D 的取正向的边界曲线，该公式叫做格林公式.

2. 平面上曲线积分与路径无关的条件

设区域 G 是一个**单连通区域**，曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关的充要条件是：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立．积分与路径无关的场称作**保守场**

3. 二元函数的全微分求积

设区域 G 是一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$，在 G 内具有一阶连续偏导数，则表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内为某函数 $u(x,y)$ 的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\text{ 在 } G \text{ 内恒成立, 且 } u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\ .$$

设 D 为单连通区域，函数 $P\left(x,y\right),Q\left(x,y\right)$ 在区域 D 内连续可偏导，下列四个命题等价：

(1) 曲线积分 $\int_L P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$ 与路径无关.

(2) 对区域 D 内任意闭曲线 C，有 $\oint_C P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0.$

(3) 区域 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$

（4）在区域D内存在二元函数$u\left(x,y\right)$，使得 $du\left(x,y\right)=P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy.$

4. 高斯公式

设空间闭区域Ω是由分片光滑，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ $R(x,y,z)$在有一阶连续偏导数，

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

其中$\sum$是Ω的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是法向量的方向余弦

5. 斯托克斯公式

设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，$\sum$是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与的$\sum$侧符合右手规则，P,Q,R在曲面$\sum$(连同边界Γ)上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz\ .$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

四、通量、散度、旋度

1. 通量的定义

$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，$P,Q,R$有一阶连续偏导数，$\sum$为有向曲面，$\vec{n}$为$\sum$上单位法向量，$\oiint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ 称为$\vec{A}$通过曲面$\sum$向着指定侧的**通量**(流量).

2. 散度的定义

$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，称 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为 $\vec{A}$ 在点(x,y,z)的散度，记 $\boldsymbol{div}\vec{A}$，即 $\boldsymbol{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

3. 旋度的定义

向量 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，

$\oint_{\Gamma} A \bullet \tau ds = \oint_{\Gamma} A \bullet dr = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$ 称为向量场A沿有向闭曲线Γ的环流量.

则向量$\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}$，称为向量场 $\overline{A}$ 的旋度，记 $rot\overrightarrow{A}$，即

$$rot\overrightarrow{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

若向量场 A 的旋度 $rotA$ 处处为零，则称向量场 A 为无旋场.

$$*\text{调和场}(C\text{-}R\text{方程}):\begin{cases}\text{旋度为}0\text{：}\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0\\ \text{散度为}0\text{：}\ \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0\end{cases}$$（二维空间的旋度、散度，没有变量z）

拉普拉斯（Laplace）方程：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

*符合拉普拉斯方程的函数称作调和函数，调和场里面的 P、Q 就符合拉普拉斯方程，它们常做无源无旋场的流函数，势函数.

第十二讲　数学的经济应用（仅数学三）

一、差分方程

（1）差分方程的基本概念

①差分

设 $y_t=f(t)$ 为 t 的函数，称 $\Delta y_t=f(t+1)-f(t)$ 为 $f(t)$ 的一阶差分，称 $\Delta^2 y_t=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=f(t+2)-2f(t+1)+f(t)$ 为 $f(t)$ 的二阶差分.

一般地，$\Delta^k y_t=\Delta^{k-1}y_{t+1}-\Delta^{k-1}y_t=\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i f(t+k-i)$ 称为 $f(t)$ 的 k 阶差分.

②差分方程

含 t，y_t，y_{t+1}，…，y_{t+k} 的方程 $F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+k})=0$ 称为差分方程.

③差分方程的解

若函数 $y_t=\varphi(t)$ 使得差分方程 $F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+k})=0$ 成立，称函数 $y_t=\varphi(t)$ 为差分方程的解，其中 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 为一阶常系数差分方程.

（2）、一阶常系数差分方程的求解

①一阶常系数齐次差分方程的通解

一阶常系数齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=0$ 的通解为 $y_t=C(-a)^t$，其中 C 为任意常数.

②一阶常系数非齐次差分方程的特解与通解

一阶常系数非齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的通解为一阶常系数齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=0$ 的通解与 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解之和.

对 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解有如下几种情形：

情形一：$f(t)=b$

当 $a\neq -1$ 时，$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解为 $y^*=\dfrac{b}{a+1}$；

当 $a=-1$ 时，$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解为 $y^*=bt$.

情形二：$f(t)=(a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0)b^t$，则 $y^*=t^k(b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+$

$b_1 t + b_0)b^t$，其中当 $a \neq -b$ 时， $k = 0$，当 $a = -b$ 时， $k = 1$.

二、边际与弹性

（1）经济数学的五大函数

①成本函数

产品的总成本即生产一定数量的产品需要的全部资源投入的费用总额，包括固定成本和可变成本，用 $C(Q)$ 表示，且 $C(Q) = C_0 + C_1(Q)$，其中 Q 为产量，C_0 为固定成本，$C_1(Q)$ 为可变成本.

平均成本指厂商在短期内平均每生产一单位产品所消耗的全部成本.定义公式为 $AC(Q) = \dfrac{C(Q)}{Q}$.

②收入函数

生产者出售一定数量的产品所获得的全部收入称为总收益，记为 $R(Q)$，且 $R(Q) = P \cdot Q$，其中 P 为价格, Q 为产量.

③需求函数

需求，是指在一定时期内，在不同的价格下，消费者愿意并且能够购买的某种商品或服务的数量.构成需求必须具备两个要素：第一，消费者有购买的欲望（愿意），第二，消费者有相应的支付能力（能够），这两个要素缺一不可.

如果假定影响需求的其他的因素不变，只单独研究商品的需求量与其价格的关系，则需求函数为： $Q = Q(P)$，且 $Q = Q(P)$ 为价格 P 的单调减函数.

④供给函数

种商品的供给是指生产者在一定时期内在各种可能的价格下愿意而且能够提供出售的该商品的数量.注意：供给必须是指既有提供出售的愿望又有提供出售能力的有效供给.

如果仅考虑一种商品的价格变化对其供给数量的影响不考虑其他影响供给量的因素则供给函数可以表示为 $Q = f(P)$，供给函数 $Q = f(P)$ 为价格 P 的单调增函数.

⑤利润函数

企业的经济利润指企业的总收益和总成本之间的差额，简称企业的利润.

$$L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

题目中经常会出现利润最大化的问题，此时可对利润函数求导，并让导数等于 0，即 $\dfrac{dL(Q)}{\mathrm{dQ}} = \dfrac{dR(Q)}{\mathrm{dQ}} - \dfrac{dC(Q)}{\mathrm{dQ}} = 0$，结合下面边际函数的定义，企业利润最大化的条件就是

边际收益等于边际成本.利用这个条件可以得出利润最大化时对应的产量.

（2）边际与弹性

①边际函数

设函数 $y=f(x)$ 为可导函数，称 $f'(x)$ 为边际函数.

比如边际成本为：$MC(Q)=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}=\dfrac{dC(Q)}{dQ}$，它指厂商在短期内增加一单位产量时所增加的总成本.

同理，边际收益为：$MR(Q)=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{\Delta R(Q)}{\Delta Q}=\dfrac{dR(Q)}{dQ}$,它指厂商增加一单位产品销售所获得的收入的增量.

②弹性函数

设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，称 $\eta=\lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}\Big|_{x=x_0}=x_0\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的弹性.也即弹性 $=\dfrac{\text{因变量变动的百分比}}{\text{自变量变动的百分比}}$，弹性用来表示因变量的变动对于自变量变动的反应程度.

弹性的定义中，并不要求结果的正负，但国内的教材及题目中，常常给出的弹性都是正的，因此还要对弹性再细分一下：

假定需求函数为 $Q=Q(P)$，前文说过 $Q=Q(P)$ 为价格 P 的单调减函数，因此

需求的价格弹性 $=-\dfrac{\text{需求量变动的百分比}}{\text{价格变动的百分比}}$

即 $e_d=\lim\limits_{\Delta P\to 0}-\dfrac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}=-\dfrac{dQ}{dP}\dfrac{P}{Q}$

假定供给函数为 $Q=f(P)$，其为价格 P 的单调增函数，因此供给的价格弹性为：

$$e_s=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

三、价值与利息

（1）分期复利计息公式

设 A_0 为开始存入银行的钱（本金），r 为年利率，利息按年计算，n 年末的本利和为

$$A_n = A_0(1+r)^n,$$

若已知 n 年末的本利和为 A_n，则现值为 $A_0 = A_n(1+r)^{-n}$.

（2）连续复利计息公式

设 A_0 为开始存入银行的钱（本金），r 为连续复利年利率，n 年末的本利和为

$A_n = A_0 e^{nr}$，若已知 n 年末的本利和为 A_n，则现值为 $A_0 = A_n e^{-nr}$.