不定积分的解题思路及技巧总结

知乎: 零蛋大

2021 年 8 月 25 日

摘要: 以例题讲思路, 简单总结了下积佬的各方法技巧. 本文并不属于纯基础讲解, 需要有一定的基础知识. 本文选的例题很多都有代表性但也大都有一定难度的, 希望读者可以耐心看完, 应该可以开阔读者的视野.

关键字: 不定积分, 原函数, 高等数学

第 1 讲　原函数

定义 (原函数) 在区间 I 上, 如果 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的导函数, 即

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

注记: 区间内处处可导! 在后续的求定积分里使用 Newton-Leibniz 公式就需要验证, 否则

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \arctan(\sec x)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi} = -\arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

一般来说, 不定积分题目几乎不会验证是不是原函数, 除非那种专门考你原函数的分段函数的不定积分!

定理 (原函数存在定理)

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$.
2. 含有第一类间断点、无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

注记: 对于 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ 仅仅只是一种记法, 不能认为 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在原函数.

例题 1.1 求 $\displaystyle\int \max\{1, |x|\}\,\mathrm{d}x$

解答: 由于被积函数连续, 由原函数存在定理知不定积分存在.

$$\max\{1,|x|\}=\begin{cases}-x\,, & x<-1\\ 1\,, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x\,, & x>1\end{cases}$$

可得

$$\int\max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C_1\,, & x<-1\\ x+C_2\,, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{x^2}{2}+C_3\,, & x>1\end{cases}$$

由于原函数连续, 于是, 记 $C_2=C$, 则 $C_1=-\dfrac{1}{2}+C$, $C_3=\dfrac{1}{2}+C$. 故

$$\int\max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}+C\,, & x<-1\\ x+C\,, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}+C\,, & x>1\end{cases}$$

例题 1.2 求 $\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x$.

解答: 由于函数满足连续, 故不定积分存在.

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}e^x+C_1\,, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+C_2\,, & x<0\end{cases}$$

由于原函数满足连续，所以

$$\lim_{x\to0^+}(e^x+C_1)=\lim_{x\to0^-}(-e^{-x}+C_2)\Longrightarrow C_2=C_1+2$$

因此,

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}e^x+C\,, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+2+C\,, & x<0\end{cases}$$

例题 1.3 (蒲和平, P94) 计算 $\int\lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x$ $(x\geqslant 0)$, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 为取整函数

解答: 由 $\int\lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\int_0^x\lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C$, 将区间 $[0,x]$ 内插入整数点,

$$\int\lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\int_0^x\lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + \cdots \\
&\quad + \int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor} \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + \int_{\lfloor x\rfloor}^{x} \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + C \\
&= 2 - \int_1^2 \sin \pi x\,\mathrm{d}x + 2\int_2^3 \sin \pi x\,\mathrm{d}x + \cdots + \\
&\quad (-1)^{\lfloor x\rfloor-1}(\lfloor x\rfloor-1)\int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor} \sin \pi x\,\mathrm{d}x + (-1)^{\lfloor x\rfloor}\lfloor x\rfloor\int_{\lfloor x\rfloor}^{x} \sin \pi x\,\mathrm{d}x + C \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot 2 + \frac{2}{\pi}\cdot 2 + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}(\lfloor x\rfloor-1)}{\pi}\cdot 2(-1)^{\lfloor x\rfloor} \\
&\qquad + \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor+1}\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\cos \pi x - (-1)^{\lfloor x\rfloor}\right) + C \\
&= \frac{\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\lfloor x\rfloor - (-1)^{\lfloor x\rfloor}\cos \pi x\right) + C
\end{aligned}
$$

第 2 讲　基本技术

下面这几个公式对绝大多数初学者不熟悉, 我们专门列出来记一下

定理 (请背)

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

一、三角函数的基本公式

定理 (半角公式与倍角公式)

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

例题 2.1 求不定积分: $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解答: 注意到

$$\frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{4\sin x}$$

故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{4\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|\sec x - \cot x| + C\end{aligned}$$

倍角、半角公式乱入, 高中学的这些公式不能丢!

定理 (和差化积与积化和差)

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

和差化积

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

注记: 和差化积与积化和差公式是作为高中公式, 大学不讲. 如果考试大纲没有特指, 不代表不考!“名师”说不考也不行!

例题 2.2 求不定积分 $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int(\cos x - \cos 3x)\sin 3x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \cos x\sin 3x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 3x\sin 3x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int(\sin 2x + \sin 4x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \sin 6x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C\end{aligned}$$

如果你能记住公式, 这种就是送分的!

例题 2.3[1] 计算: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\tan\frac{3x}{2}}\,\mathrm{d}x.$

解答: 注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\frac{3x}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{3x}{2}} &\xlongequal{\text{半角公式}} \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &\xlongequal{\text{积化和差}} \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x - \sin x}{\sin 2x + \sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1}\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\tan\frac{3x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2 x)(1+\cos x)\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{部分分式}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x - \frac{3}{4(2\cos x + 1)} - \frac{1}{4}\right] \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}(3 - 2\ln 2)}{8}$$

进一步可参考：神琦冰河的公众号《冰河的数学小世界》积分级数欣赏 (5) 解析

二、组合积分法

注记: 组合积分法

- 分子 $=A$分母$+B$分母$'$, 解出 A, B.

下面这道题目常规思路当然是三角换元啦, 但这里不写, 默认都会. 我们来欣赏用组合积分的做法, 长长见识.

例题 2.4 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}(x + \sqrt{1 - x^2}) \\
&= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 - x^2}| + C
\end{aligned}$$

例题 2.5 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

解答: 应用待定系数法, 将 $\sin x$ 改写为

$$\begin{aligned}
\sin x &= A(\sqrt{2} + \sin x + \cos x) + B(\sqrt{2} + \sin x + \cos x)' + C \\
&= (A + C) + (A - B)\sin x + (A + B)\cos x
\end{aligned}$$

解得 $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. 故得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2} + \sin x + \cos x)}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{2} + \sin x + \cos x| - \frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + C
\end{aligned}$$

例题 2.6 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \mathrm{d}x$

解答: 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

可得

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'=\frac{x^n}{n!}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x \\
&= n!\int \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x \\
&= n!\int \mathrm{d}x - n!\int \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x \\
&= n!x - n!\ln\left|1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right|+C
\end{aligned}$$

如果能注意到, 也许不算难!

三、添与拆的技巧

注记: 请多留心多观察, 例如:

$$\begin{aligned}
\frac{x^6}{1+x^2} &= \frac{x^6+x^4-x^4}{1+x^2} = x^4+\frac{-x^4-x^2+x^2}{1+x^2} \\
&= x^4-x^2+\frac{x^2}{1+x^2} = x^4-x^2+\frac{x^2+1-1}{1+x^2} \\
&= x^4-x^2+1-\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

这个太容易, 也可以多项式的除法!

例题 2.7 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$.

解答:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} &= \frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2+x^4)+x^2+(1-x^4)}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3} \\
&= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|+C
\end{aligned}$$

注记: 我来提个问题: 分母是怎么拆的?

(1) 强拆, 待定系数

$$\left.\begin{aligned} 1+x^6 &= (1+x^2)(1+ax^2+x^4) \\ &= x^6+(a+1)x^4+(a+1)x^2+1 \end{aligned}\right. \Rightarrow a=-1$$

类似拆分 $1+x^8$,

$$\begin{aligned} 1+x^8 &= (1+ax^2+x^4)(1+bx^2+x^4) \\ &= x^8+(a+b)x^6+(ab+2)x^4+(a+b)x^2+1 \end{aligned}$$

解得: $a=-\sqrt{2}, b=\sqrt{2}$ 或者 $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$

(2) 立方和公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

(3) 强拆, 复分解[1]

四、欧拉公式

定理 (欧拉公式)

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\mathrm{i}}+e^{-x\mathrm{i}}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{x\mathrm{i}}-e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \end{cases}$$

注记: 可以用, 一般挺麻烦!

例题 2.8 求不定积分 $\displaystyle\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

解答: 由欧拉公式

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \int e^x \frac{e^{x\mathrm{i}}-e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int \left(e^{x(1+\mathrm{i})}-e^{x(1-\mathrm{i})}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)} e^{x(1+\mathrm{i})} - \frac{1}{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})} e^{x(1-\mathrm{i})} + C \\ &= e^x \left(\frac{(1-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}x}-(1+\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right) + C \\ &= \frac{1}{2} e^x \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}\right)}{2\mathrm{i}}\right) + C \\ &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \end{aligned}$$

[1] https://www.zhihu.com/question/430982343/answer/1583839368

第 3 讲 换元法

一、第一类换元法

第一类换元法也叫做凑微分, 一般来说, 能凑就不换元!

(1) 奇技淫巧

接下来请欣赏笔者认为的几道奇技淫巧的凑微分, 这些技巧, 我们就当长长见识, 也许对自己来说可以总结出新东西!

- 笔者更推荐常规思路、容易想到的思路来解题
- 如果见到考研书这么写, 千万不要学! 书上再简短的步骤如果考试想不到, 白搭!

例题 3.1 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

解答:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{(b-a)-\left(\sqrt{x-a}\right)^2}}$$
$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

例题 3.2 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}$

解答:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(9+(\sqrt{x-2})^2\right)\sqrt{x-2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}(\sqrt{x-2})}{9+\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3} + c$$

注记: 这种私以为属于“奇技淫巧”! 我不否认技巧的重要性, 但我不会去追逐! 这种凑的方式就当长见识.

例题 3.3 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解答:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$$

例题 3.4 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解答: 首先有

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \left(\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x}_{I} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x}_{J}$$

其中

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C \\
I &= \int \left(\frac{1}{x^2}-1\right)\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-2\right]\mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\int \left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2 - 2\right]\mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^3 + 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = \frac{(5x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C
\end{aligned}$$

于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = I + J = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$$

例题 3.5 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{(\frac{1}{x}+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

例题 3.6 计算积分 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})}$

解答:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}}{(1+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})} = \int \frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{x^2+1})}{\ln(1+\sqrt{x^2+1})}
\end{aligned}$$

$$= \ln\left|\ln(1+\sqrt{x^2+1})\right| + C$$

(2) 应知应会的思路

注记: 笔者认为以下思路是“应知应会”, 这样的思路可以推广的

- 对后续的分部积分、奥斯特罗格拉茨基方法很有帮助!

例题 3.7 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{\sin^{188} x}{(\sin x+\cos x)^{190}}\,\mathrm{d}x$

解答: 注意到

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)' = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^{188} x}{(\sin x+\cos x)^{190}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^{188} x}{(\sin x+\cos x)^{188}} \cdot \left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)' \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{189}\frac{\sin^{189} x}{(\sin x+\cos x)^{189}} + C\end{aligned}$$

注记: 这种题目的思路是在分部积分里也是非常常见的, 在标准答案通常会很简洁, 初学者能看懂但一般注意不到. 实际上, 我个人认为“注意到”是用求导试探然后拼凑出来的. 例如此题, 很容易 (假设你见过此类题目) 联想到求相关的导数, 最后根据结果来修正. 我通常直接用 Wolfram Alpha 直接试.

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)' = ? \quad \left(\frac{cosx}{\sin x+\cos x}\right)' = ? \quad \left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)' = ?$$

例题 3.8 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x\tan x)}{(1-x\tan x)^2} \\ &= \frac{1}{1-x\tan x} + C = \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x} + C\end{aligned}$$

注记: 我们应联想到 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$, 接着

$$(\cos x - x\sin x)' = -2\sin x - x\cos x$$

对比原不定积分, 拼凑分子, 选最可能接近的来尝试

$$\left(\frac{\cos x}{\cos x - x\sin x}\right)' = ?$$

更多类似题目可参考：https://tieba.baidu.com/p/4889396727?pn=1

例题 3.9 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}-\int \frac{\mathrm{d}(x\cos x-\sin x)}{x\cos x-\sin x}\\
&=\ln\left|\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}\right|+C
\end{aligned}$$

外表看起来吓人, 实际只是常规思路！拆了之后就显然了

(3) 特殊凑配 $\left(ax\pm\dfrac{b}{x}\right)$

例题 3.10 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C
\end{aligned}$$

例题 3.11 求不定积分: $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{\sqrt{\tan x}=t}2\int \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t-\int \frac{1-t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\\
&=\int \frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+2}\,\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\int \frac{1}{(t+\frac{1}{t})^2-2}\,\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right|+c\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x-1}{2\sqrt{\tan x}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right|+c
\end{aligned}$$

例题 3.12 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x^8+2x^4+1)-x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{(x^4+1)^2 - x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left[(x^4+1)-x^2\right]\left[(x^4+1)+x^4\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\
&= \frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + C
\end{aligned}
$$

例题 3.13 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

解答:

$$
I = \int \frac{x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x-\frac{1}{x})^2+2)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)
$$

$$
J = \int \frac{-x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x+\frac{1}{x})^2-2)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)
$$

例题 3.14 求不定积分: $\displaystyle\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解答: 法 I. 一方面,

$$
\begin{aligned}
\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right) + C
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \ln\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\right)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right) \\
&\xlongequal{x-\frac{1}{x}=u} \frac{1}{2}\int \ln(u^2+4)\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{2}u\ln(u^2+4) + 2\arctan\frac{u}{2} - u + C \\
&\xlongequal{\text{带值}} \left(x-\frac{1}{x}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2\arctan\frac{x^2-1}{2x} - \left(x-\frac{1}{x}\right) + C
\end{aligned}
$$

所以

$$\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\arctan\frac{x^2-1}{2x}-x+C$$

法 II. 直接分部积分

$$\begin{aligned}\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x+2\arctan x+C.\end{aligned}$$

例题 3.15 求不定积分: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}$.

解答: 一方面,

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &\xlongequal{x+\frac{1}{x}=u}\int\frac{1}{\sqrt{u^2-12}}\mathrm{d}u\\ &= \ln|u+\sqrt{u^2-12}|+C\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sqrt{(x-x^{-1})^2-8}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)\\ &\xlongequal{x-\frac{1}{x}=v}\int\frac{1}{\sqrt{v^2-8}}\mathrm{d}v\\ &= \ln|v+\sqrt{v^2-10}|+C\end{aligned}$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}=\frac{1}{2}\left(\ln|u+\sqrt{u^2-12}|+\ln|v+\sqrt{v^2-8}|\right)+C$$

其中, $u=x+\dfrac{1}{x}, v=x-\dfrac{1}{x}$

(4) 阴间凑配

虚调子: "锁在于, 原本在分子分母均应出现的指数项合并于分母. 所以我们不妨称其为指数锁[2]". 我们不妨称这类为阴间凑配

例题 3.16 求不定积分:

$$I=\int\frac{f'(x)+f(x)g'(x)}{f(x)[c+f(x)e^{g(x)}]}\mathrm{d}x$$

解答: 注意到

$$\left(f(x)e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]$$

故

$$\begin{aligned}
\int \frac{f'(x)+f(x)g'(x)}{f(x)[c+f(x)e^{g(x)}]}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]}{f(x)e^{g(x)}[c+f(x)e^{g(x)}]}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\big(f(x)e^{g(x)}\big)}{f(x)e^{g(x)}[c+f(x)e^{g(x)}]} \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{f(x)e^{g(x)}}-\frac{1}{c+f(x)e^{g(x)}}\right)\mathrm{d}\big(f(x)e^{g(x)}\big) \\
&= \frac{1}{c}\ln\left|\frac{f(x)e^{g(x)}}{c+f(x)e^{g(x)}}\right|+C
\end{aligned}$$

本题的突破口应该是分母的 $e^{g(x)}$, 这是无论凑或者其它都是绕不开的地方, 除非它根本就没初等原函数!

例题 3.17 计算积分:

$$\int \frac{x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x$$

解答: 分析: e^x 只在分母出现, 是不可能"凑". 有初等表达那只可能是分子分母同时有 e^{ax} 被约掉了! 尝试把分母的 e^x 提出来.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{xe^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x &= -2\int \frac{\mathrm{d}\left((x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}} \\
&= -2\ln\left((x+2)e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}\right)+C
\end{aligned}$$

更多类似题目: https://www.zhihu.com/question/397590932/answer/1248588688

例题 3.18 求不定积分:

$$\int \frac{\frac{\ln x}{x}+\ln^2 x}{e^{-2x}+\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

解答: 分析: e^{-2x} 只在分母出现, 是不可能"凑". 有初等表达那只可能是分子分母同时有 e^{ax} 被约掉了! 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln^2 x)=\frac{2\ln x}{x}$$

利用微分方程或者观察, 容易知道 $a=2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{2x}\ln^2 x)=2e^{2x}\left(\frac{\ln x}{x}+\ln^2 x\right)$$

代入可得,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{\ln x}{x}+\ln^2 x}{e^{-2x}+\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(e^{2x}\ln^2 x)'}{2e^{2x}(e^{-2x}+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(e^{2x}\ln^2 x)'}{2+2e^{2x}\ln^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+e^{2x}\ln^2 x|+C
\end{aligned}$$

例题 3.19 (JWCMC,2019) 求不定积分:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 1 - x^2}{(1 + x\sin x)\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

解答: (by 白朗)[3] 假设我们已经猜到这个不定积分是有初等原函数的! 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x + x) = \cos x + 1.$$

尝试求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x + \sin x}{x\sin x + 1} = \frac{\cos x(\cos x + 1 - x^2)}{(x\sin x + 1)^2}$$

令 $y := \dfrac{x + \sin x}{x\sin x + 1}$, 则

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{\cos x + 1 - x^2}{(1 + x\sin x)\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\sin x + 1}{\cos x\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{观察}}{=\!=} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-\sin^2 x)}{(x\sin x+1)^2}}}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

希望 $(1 - x^2)(1 - \sin^2 x) = A(x + \sin x)^2 + B(x\sin x + 1)^2$.

$$(1 - x^2)(1 - \sin^2 x) = 1 - \sin^2 x - x^2 + x^2\sin^2 x$$

$$(x + \sin x)^2 = x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x$$

$$(x\sin x + 1)^2 = 1 + 2x\sin x + x^2\sin^2 x$$

观察可知

$$(1 - x^2)(1 - \sin^2 x) = (x\sin x + 1)^2 - (x + \sin x)^2.$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-\sin^2 x)}{(x\sin x+1)^2}}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(x\sin x+1)^2-(x+\sin x)^2}{(x\sin x+1)^2}}}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin y + C. \end{aligned}$$

因此,

$$I_1 := \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 1 - x^2}{(1 + x\sin x)\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\arcsin\left(\frac{4 + \pi\sqrt{2}}{\pi + 4\sqrt{2}}\right).$$

注记: 如果读者觉得不过瘾, 可参考知乎大佬虚调子的文章 不定积分王者 100 题

二、第二类换元法

例题 3.20 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

解答:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3(x-1)^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal[x=\frac{u^3+1}{u^3-1}]{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} \int \frac{u}{\left(\dfrac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1} \cdot \frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u \\
&= -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}u = -\frac{3}{2}u + C \\
&= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C
\end{aligned}
$$

注记: 一般而言, 哪个看起来比较复杂, 就可以考虑把哪个设为 t.

例题 3.21 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\,\mathrm{d}x$.

解答: 最小公倍数: $[2,7,14]=14$, 于是令 $t=x^{1/14} \Rightarrow \mathrm{d}x = 14t^{13}\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=x^{1/14}} \int \frac{t^2+t^7}{t^{16}+t}\cdot 14t^{13}\mathrm{d}t = 14\int \frac{t^{14}(1+t^5)}{t^{15}+1}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{立方和}} 14\int \frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+1}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=t^5} \frac{14}{5}\int \frac{u^2}{u^2-u+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{14}{5}\int \frac{u^2-u+1+\frac{1}{2}(2u-1)-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{14}{5}\int \mathrm{d}t + \frac{7}{5}\int \frac{\mathrm{d}(u^2-u+1)}{u^2-u+1} - \frac{7}{5}\int \frac{1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u \\
&= \frac{14}{5}u + \frac{7}{5}\ln|u^2-u+1| + \frac{7}{5}\int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{14}{5}u + \frac{7}{5}\ln|u^2-u+1| + \frac{14\sqrt{3}}{15}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{14}{5}x^{5/14} + \frac{7}{5}\ln|x^{5/7}-x^{5/14}+1| + \frac{14\sqrt{3}}{15}\arctan\left(\frac{2x^{5/14}-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}
$$

(1) 给出隐函数方程求不定积分

例题 3.22 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数, 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x$

解答: 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$, 则

$$y=\frac{1}{t(1-t)}\,,\ \mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

故

$$\int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t=3t-2\ln t+C=\frac{3y}{x}-2\ln\frac{y}{x}+C$$

例题 3.23 设 $y=y(x)$ 是由方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所确定的隐函数, 求积分

$$\int\frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\,\mathrm{d}x$$

解答: 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\sqrt{2}a\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$, 则

$$y=\sqrt{2}a\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}\,,\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}a\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

注意到 $x^2+y^2+a^2=a^2\dfrac{3-t^2}{1+t^2}$, 有

$$\int\frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+C$$

例题 3.24 设 $y(x-y)^2=x$, 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x$

解答: 令 $\begin{cases}x-y=u\\ \dfrac{x}{y}=v\end{cases}$ 即 $u^2=v$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{uv}{v-1}=\dfrac{u^3}{u^2-1}\\ y=\dfrac{u}{v-1}=\dfrac{u}{u^2-1}\end{cases}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{u^4-3u^2}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u$

所以

$$\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x=\int\frac{u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\left|u^2-1\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C$$

(2) 倒代换

注记: 通常, 当提到倒代换想到的基本为 $\frac{1}{x}=t$, 但我们做题的思维并不能局限于此, 下面这道题就是一个很好的例子.

- 事实上, 在用倒代换的时侯应分别考虑 $x>0$, $x<0$ 以及 $x=0$ 的情况

例题 3.25 求不定积分: $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2-(x+1)+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} \\
&= \ln(1+x) - \ln(2\sqrt{x^2+x+1}-x+1) + C
\end{aligned}
$$

例题 3.26 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

解答:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4(2x+1)-(2x+1)^2}} \\
&\xlongequal{t=\frac{1}{2x+1}} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4t-1}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\sqrt{4t-1}+C \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3-2x}{2x+1}}+C
\end{aligned}
$$

例题 3.27 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

解答:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} &\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{\sqrt[4]{a1+t^4}}{t}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1+t^4}} \\
&\xlongequal{u^4=1+t^4} -\int \frac{\frac{1}{4}\cdot 4u^3(u^4-1)^{-\frac{3}{4}}}{u\sqrt[4]{u^4+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int \frac{u^2}{u^4-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{(u^2+1)-(1-u^2)}{u^4-1}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \\
&= -\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right| + C
\end{aligned}
$$

(3) 三角换元

例题 3.28 (周明强, P322) 计算不定积分 $\int \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}\,\mathrm{d}x$ (其中根号 $\sqrt{\ }$ 有 n 重)。

解答: [4] 令 $x=2\cos t$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}} &= \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos t}}}\\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+2\cos(\tfrac{t}{2})}} = \cdots = 2\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} I &= -4\int \sin t\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{积化和差}}{=\!=\!=} -2\int\left[\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}t\right)-\sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\cos\left(\frac{2^n+1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{2^{n+1}}{2^n-1}\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C\end{aligned}$$

注记: 这样的换元, 你还可以在极限、级数里看到! 如果没见过此类换元, 应该会很难想出来吧?

(4) 万能代换

定理万能替换

令 $u=\tan\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$, 则 $x=2\arctan u \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$
- $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$
- $\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1-u^2}$

注记: 万能替换可以将三角函数的积分转化为有理式的积分, 即转化为相对熟悉可操作的积分. 这是万能替换的优点, 但缺点是计算量一般都不小, 所以我个人一般习惯于绕开这个方法.

例题 3.29 求不定积分:

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$$

解答:

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=} \int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int \frac{t}{(1+t^2)(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln|1+t| + C \\
&= \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C \\
&= \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left|\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right| + C.
\end{aligned}
$$

(5) 欧拉代换

定理 Euler 替换

对于 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 的不定积分.

- **Euler 第一替换**: 若 $a>0$, 则令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$.
- **Euler 第二替换**: 若 $c>0$, 则令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, 我们有

$$
ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}
$$

- **Euler 第三替换**: 在 ax^2+bx+c 有两个实根的情形;

$$
ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)
$$

可作替换 $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$. 此时有 $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$, 以及

$$
a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2 \Rightarrow x = \frac{\alpha\beta - \alpha t^2}{a-t^2}
$$

注记: 由于绝大多数用 Euler 替换计算量都很大, 所以我个人一般喜欢绕开这种方法

例题 3.30 求不定积分

$$
\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x
$$

解答: 令 $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1} = e^x + t$, 则 $t = \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} - e^x$, $x = \ln\dfrac{t^2+1}{4-2t}$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x &= \int (e^x+t)\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\mathrm{d}x + \int t\,\mathrm{d}x \\
&= e^x + \int t\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{2-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= e^x + \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1} - 1 + \frac{2}{2-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= e^x + t - 2\arctan t - 2\ln(2-t) + C
\end{aligned}
$$

例题 3.31 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

解答: (by 予一人)[5] 利用 Euler 代换, 置 $\sqrt{1-x-x^2}=xz-1$, 则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-x-x^2}}{x}, x=\frac{2z-1}{z^2+1}, \mathrm{d}x=\frac{2(1+z-z^2)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z,$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} &= 2\int \frac{2z-1}{z(z^2+1)(z+2)}\mathrm{d}z\\ &= 2\int \left(\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{2(z+2)}-\frac{1}{2z}\right)\mathrm{d}z\\ &= 2\arctan z+\ln|z+2|-\ln|z|+C\\ &= 2\arctan z+\ln\left|\frac{z+2}{z}\right|+C.\end{aligned}$$

推论 (周明强, P347) 一般地, 对于积分

$$\int \frac{(Mx+N)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, p^2-4q<0.$$

若 $p\neq\dfrac{b}{a}$, 可采用替换 $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$, 其中, α, β 的选取规则为: 使二次三项式 x^2+px+q 与 ax^2+bx+c 在替换后消失 t 的一次项, 而得到形式 $\displaystyle\int \frac{P(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{st^2+r}}$, 这里的 $P(t)$ 是 $2m-1$ 次多项式, $\lambda>0$. 然后, 再分解有理真分式 $\dfrac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$, 使之形成两类不定积分

$$\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}.$$

对此, 可用替换 $u^2=st^2+r$, $v=(\sqrt{st^2+r})'=\dfrac{st}{\sqrt{st^2+r}}$ 进行积分.

例题 3.32 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

解答: ([4],P347) 作替换 $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$, 则 (让 t 的一次项消失, 再定 α, β) 得

$$x^2+2=\frac{(\alpha t+\beta)^2+2(t+1)^2}{(t+1)^2}=\frac{(\alpha^2+2)t^2+\beta^2+2}{(t+1)^2},$$

$$2x^2-2x+5=\frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2},$$

其中, 利用方程组 $\begin{cases}2\alpha\beta+4=0,\\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=-1,\\ \beta=2,\end{cases}$ 确定 α, β 值. 例如取 $\alpha=-1$, $\beta=2$, 有

$$x=\frac{2-t}{1+t},\quad t=\frac{2-x}{1+x},\quad \mathrm{d}x=\frac{-3\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2},$$

$$x^2+1=\frac{3t^2+6}{(t+1)^2},\quad 2x^2-2x+5=\frac{9t^2+9}{(t+1)^2}.$$

从而可知 $I=-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{|t+1|\,\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$. 在 $t+1>0$ 即 $t>-1$ 的区域, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}}_{u^2=t^2+1}-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}}_{v=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}\\
&=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}v}{2-v^2}=-\frac{1}{3}\arctan u-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}+C\\
&=-\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x}+C.
\end{aligned}$$

在 $x<-1$ 的区域, 可类似地操作

(6) 双元法

注记: 双元法是知乎大佬虚调子的原创方法, 详细参考 虚调子 本人的各种文章以及回答

例题 3.33 求不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

解答: (by 虚调子)[5] 设 $\sqrt{1-x-x^2}=p$, $x+\dfrac{1}{2}=q$, 其中 $b=\dfrac{q}{p}$, 且有

$$p^2+q^2=\frac{5}{4},\quad p\,\mathrm{d}p+q\,\mathrm{d}q=0$$

常用公式:

$$\frac{\mathrm{d}q}{p}=\frac{(p^2+q^2)\,\mathrm{d}q}{(p^2+q^2)p}=\frac{p\,\mathrm{d}q-q\,\mathrm{d}p}{p^2+q^2}=\frac{\mathrm{d}b}{1+b^2}$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{(q-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}q}{(q+\frac{1}{2})p}&=\int\frac{(q^2+\frac{1}{4})\,\mathrm{d}q}{(q^2-\frac{1}{4})p}-\int\frac{q\,\mathrm{d}q}{(q^2-\frac{1}{4})p}\\
&=\int\frac{(6b^2+1)\mathrm{d}b}{(4b^2-1)(1+b^2)}+\int\frac{\mathrm{d}p}{1-p^2}\\
&=\int\frac{2\,\mathrm{d}b}{4b^2-1}+\int\frac{\mathrm{d}b}{1+b^2}+\mathrm{arth}p\\
&=-\mathrm{arth}\left(\frac{2q}{p}\right)+\arctan\frac{q}{p}+\mathrm{arth}p
\end{aligned}$$

也即：

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1-x-x^2}} + \operatorname{arth}\left(\sqrt{1-x-x^2}\right) - \operatorname{arth}\frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}} + C$$

可以继续化简：

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arth}\frac{x+3}{2\sqrt{1-x-x^2}} + C$$

注记: 为何选这个回答？无他，因为这道题目[5] 的另一种回答刚好虚调子用双元法回答的.

第 4 讲　分部积分

注记: 分部积分: 反对幂三指. 含 x^n 多次循环可以考虑: 表格法（计算傅里叶系数可能用到）

- 可以先观察考虑被积函数内的某一项或者整体求导出来是什么？积分出来又是什么？
- 哪一项求导/积分更容易？
- 思考怎么才更容易化为更容易求解的？一般不至于越求越多吧？不至于越求越陌生吧？

例题 4.1 求不定积分:

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

解答:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int \frac{\overbrace{3/4+(x+1/2)^2}^{x^2+x+1}-(x+1/2)^2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} - \frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C
\end{aligned}$$

注记: 推广思路：奥斯特罗格拉茨基方法

例题 4.2 求不定积分:

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

解答:

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x \xlongequal{t=\arctan x} \int \frac{t^2\sec^2 t}{(\tan t-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{t^2}{(\sin t - t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin t - t\cos t}\right) \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t - t\cos t)} - \int \frac{1}{\sin t - t\cos t} \times \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t - t\cos t)} + \cot t + C \\
&= \frac{x\arctan x}{x - \arctan x} + C
\end{aligned}
$$

例题 4.3 求不定积分: $\int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} - \int x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} + C
\end{aligned}
$$

例题 4.4 求不定积分 $\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

解答:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(1-x^4)+2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int x\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{-(-4x^3)}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C
\end{aligned}
$$

例题 4.5 求不定积分 $\int \frac{x^x(\cot x + \ln x\cdot\ln\sin x)}{e^x}\,\mathrm{d}x.$

解答:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{e^{x\ln x}(\cot x + \ln x\cdot\ln\sin x)}{e^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \ln x\cdot\ln\sin x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int e^{x(\ln x-1)}\,\mathrm{d}\ln\sin x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x\\
&= e^{x(\ln x-1)}\ln\sin x - \int \ln\sin x\,\mathrm{d}e^{x(\ln x-1)}x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x\\
&= e^{x(\ln x-1)}\ln\sin x + C
\end{aligned}
$$

例题 4.6 求不定积分: $\int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x+\cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

解答: 观察分母 $x^2\cos^2 x$, 联想到 $\frac{f}{g}$ 的求导, 于是对 g 求导, 得到

$$(x\cos x)' = \cos x - x\sin x.$$

而 $e^{x\sin+\cos x}$ 比较复杂, 猜测需要凑或者分部, 求导

$$(x\sin x+\cos x)' = x\cos x$$

根据此思路整理的过程如下

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x+\cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int e^{x\sin+\cos x}x^2\cos x\,\mathrm{d}x + \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int x\,\mathrm{d}\left(e^{x\sin+\cos x}\right) + \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x\cos x}\right)\\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \frac{1}{x\cos x}e^{x\sin+\cos x} + \int \frac{1}{x\cos x}x\cos xe^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \frac{e^{x\sin+\cos x}}{x\cos x} + C
\end{aligned}
$$

例题 4.7 求不定积分: $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解答: 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t \Rightarrow \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \int e^{3t}t^4e^t\,\mathrm{d}t = \int t^4e^{4t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}e^{4t}\left(t^4 - t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{8}t + \frac{3}{32}\right) + C\\
&= \frac{1}{4}x^4\left(\ln^4 x - \ln^3 x + \frac{3}{4}\ln^2 x - \frac{3}{8}\ln x + \frac{3}{32}\right) + C
\end{aligned}
$$

表格法如下:

$$
\begin{array}{cccccc}
t^4 & 4t^3 & 12t^2 & 24t & 24 & 0 \\
 & + \quad - & + & - & + & \\
e^{4t} & \frac{1}{4}e^{4t} & \frac{1}{4^2}e^{4t} & \frac{1}{4^3}e^{4t} & \frac{1}{4^4}e^{4t} & \frac{1}{4^5}e^{4t}
\end{array}
$$

注记: 表格法特别适用于如下类型的积分:

$$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin ax \\ \cos bx \end{Bmatrix} \mathrm{d}x.$$

第 5 讲　有理式的积分

注记: 有理式的拆分技巧: 多项式的除法、直接拆然后比较系数、留数法

1. 多项式的除法;
   - 科大那本《积分的方法与技巧》还有另一种思路的多项式的除法
2. 直接拆然后比较系数: 常用且实用
   - 之前已经提到的加加减减
   - 直接拆分然后待定系数
3. 留数法: 需要一丢丢复变的知识

注记: 有理式函数的积分技巧

- 拆开分别算嘛
- 奥斯特罗格拉茨基方法
- Risch 算法

例题 5.1 求 $\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$ 的最简分式.

解答: (by 布布)[6]

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
\xlongequal{\text{有理化}}\ & \frac{\left[(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1\right]\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{x+1} \\
\xlongequal{\text{化简}}\ & \frac{2x^4+x^3+2x^2+1-x+x^4}{x+1}+\frac{(1-x^3)\sqrt{x^2+x+1}-x(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}
\end{aligned}
$$

$$
\xlongequal{\text{有理化}} \frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1} - \frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}
$$

$$
= \left(2x^3-x^2+3x-3\right) + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^4+3x^2-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}
$$

(1) 待定系数法

例题 5.2 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$

解答:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2+\cos x)\sin x} &= \frac{A+B\cos x}{\sin x} + \frac{C\sin x}{2+\cos x} \\
&= \frac{(A+2B)\cos x + (2A+B\cos^2 x + C\sin^2 x)}{(2+\cos x)\sin x}
\end{aligned}
$$

比较系数, 得

$$
\begin{aligned}
A+2B=0\,, \\
2A+B\cos^2 x + C\sin^2 x = 1
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{cases} A = 2/3, \\ B = C = -1/3 \end{cases}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} &= \int \left(\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cos x}{\sin x} + \frac{-\frac{1}{3}\sin x}{2+\cos x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{3}\ln(\cot x+\csc x) - \frac{1}{3}\ln\sin x + \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) + C
\end{aligned}
$$

例题 5.3 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

解答:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)} \\
&= 2\int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2(2-\sin x\cos x)}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\sin x+\cos x}{(1+2\sin x\cos x)\left[1+(\cos x-\sin x)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\left[2-(\sin x-\cos x)^2\right]\left[1+(\sin x-\cos x)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}v}{(2-v^2)(1+v^2)} = 2\int \frac{\frac{1}{3}(2-v)^2+\frac{1}{3}(1+v^2)}{(2-v^2)(1+v^2)} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{2-v^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\arctan v - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sin x-\cos x-\sqrt{2}}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}
$$

例题 5.4 (MR,U476) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1}\,\mathrm{d}x$

解答: 注意到

$$x^5+x-1=(x^3+x^2-1)(x^2-x+1)$$

以及

$$\frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}-\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2-1}$$

因此,

$$\int \frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\ln|x^3+x^2-1|+C$$

一、多项式的除法

例题 5.5 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^5-3x^3+6x+9}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

解答: 使用多项式的除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3-4x \\
\hline
x^2+1 & x^5-3x^3+6x+9 \\
 & -x^5-x^3 \\
\hline
 & -4x^3+6x \\
 & 4x^3+4x \\
\hline
 & 10x+9
\end{array}
$$

得到

$$\frac{x^5-3x^3+6x+9}{1+x^2}=x^3-4x+\frac{10x+9}{x^2+1}$$

把它代入积分式, 并进行分项积分, 得到

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^5-3x^3+6x+9}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(x^3-4x+\frac{10x+9}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x^4-2x^2+5\ln(1+x^2)+9\arctan x+C
\end{aligned}
$$

注记: 事实上, 多项式的除法不止这一种方式, 而另一种除的方式见金玉明老师的《积分的方法与技巧》[7] P56-P57

例题 5.6 求不定积分:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

解答: [7] 令 $x-1=y$, 则有 $x=1+y$, 及 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$, 则

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{(1+y)^2}{y^3(2+y)}=\frac{1+2y+y^2}{y^3(2+y)}$$

使用多项式的除法 [7]

$$\begin{array}{r l}
 & \frac{1}{2}+\frac{3y}{4}+\frac{y^2}{8} \\ \cline{2-2}
2+y \big) & 1+2y+y^2 \\
 & 1+\frac{y}{2} \\ \cline{2-2}
 & \frac{3y}{2}+y^2 \\
 & \frac{3y}{2}+\frac{3y^2}{4} \\ \cline{2-2}
 & \frac{y^2}{4} \\
 & \frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{8} \\ \cline{2-2}
 & -\frac{y^3}{8}
\end{array}$$

得到

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)} &= \frac{1}{y^3}\left[\frac{1}{2}+\frac{3y}{4}+\frac{y^2}{8}-\frac{y^3}{8(2+y)}\right] \\
&= \frac{1}{2y^3}+\frac{3}{4y^2}+\frac{1}{8y}-\frac{1}{8(2+y)} \\
&= \frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}
\end{aligned}$$

把它代入积分式, 并进行分项积分, 得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left[\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}\right]\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C
\end{aligned}$$

二、留数法

定义 (留数) 设 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 我们把 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗展开式

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

中负一次幂项的系数 C_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数. 记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$, 即

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$$

例题 5.7 求 $f(x)=\dfrac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ 的最简分式

解答: [8] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2} \tag{1}$$

关键是求 A,B,C.

法 1(比较系数)

$$\begin{aligned} x^2+x+5 &= A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1) \\ &= (A+B+C)x^2+(-3A-B)x^2+(2A-2B-C) \end{aligned}$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r} x^2 & A+B+C=1\,, \\ x & -3A-B=1\,, \\ x^0 & 2A-2B-C=5 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} A=\frac{5}{6}, \\ B=-\frac{7}{2}, \\ C=\frac{11}{3} \end{cases}$$

(法 2) 我们有

$$x^2+x+5=A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1) \tag{2}$$

令 $x=-1$, 带入 (2) 得 $A=\dfrac{5}{6}$; 令 $x=1$, 带入 (2) 得 $B=-\dfrac{7}{2}$;
令 $x=2$, 带入 (2) 得 $C=\dfrac{11}{3}$.

(法 3) 式 (1) 两边同乘以 $(x+1)$ 得

$$\frac{x^2+x+5}{(x-1)(x-2)}=A+\frac{B}{x-1}(x+1)+\frac{C}{x-2}(x+1)$$

上式令 $x=-1$ 得到 $A=\dfrac{5}{6}$. 同法求 B,C

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x^2+x+5}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x-2)}\right|_{x=-1}=\frac{5}{6} \\ B &= \left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x-2)}\right|_{x=1}=-\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$C=\frac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)\cancel{(x-2)}}\bigg|_{x=2}=\frac{11}{3}$$

例题 5.8 求 $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{(x-1)(x^2+1)}$ 的最简分式

解答: [8] 设

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

不难得到

$$A=\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=\frac{x^2+5x}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}\bigg|_{x=1}=3$$

$$Bi+C=\lim_{x\to\mathrm{i}}(x^2+1)f(x)=\frac{x^2+5x}{(x-1)\cancel{(x^2+1)}}\bigg|_{x=\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}+3$$

例题 5.9 求 $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ 的最简分式

解答: [8] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

设 x 为 x^2+x+1 的一个根.

$$A=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\frac{2x^2+1}{\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)}\bigg|_{x=-1}=3$$

$$\begin{aligned}Bx+C&=\frac{2x^2+1}{(x+1)\cancel{(x^2+x+1)}}\overset{x^2=-x-1}{=\!=\!=\!=}\frac{-2x-1}{x+1}\\&=\frac{-(2x+1)x}{(x+1)x}\overset{x^2=-x-1}{\underset{x^2+x=-1}{=\!=\!=\!=}}-(x+2)\end{aligned}$$

例题 5.10 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^3(x+1)}$ 的最简分式

解答: 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}\tag{3}$$

$$A=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^3}\bigg|_{x=-1}=3$$

由留数的定义知 B 为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的留数

$$B=\operatorname{Res}[f(x),-2]=\lim_{x\to-1}\frac{1}{2!}\lim_{x\to-2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(x-2)^3f(x)\right]=\frac{3}{(x+1)^3}\bigg|_{x=-2}=-3$$

式 (5) 两边同乘以 $(x+2)^3$ 得

$$\frac{x+4}{x+1}=\frac{A(x+2)^3}{x+1}+B(x+2)^2+C(x+2)+D\tag{4}$$

令 $x=-2$, 得

$$D=\left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (6) 两边同导得

$$-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)+2B(x+2)+C$$

可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 我们令 $\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}=(x+2)^3g(x)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)=3(x+2)^2g(x)+(x+2)^3g'(x)$$

$$C=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^3f(x)\right)\right|_{x=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=-\left.\frac{3}{(x+1)^2}\right|_{x=-2}=-3$$

例题 5.11 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 的最简分式

解答: 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{E}{(x+2)^4} \tag{5}$$

$$A=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4}\right|_{x=-1}=3$$

由留数的定义知 B 为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的留数

$$B=\mathrm{Res}[f(x),-2]=\lim_{x\to-1}\frac{1}{3!}\lim_{x\to-2}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[(x-2)^4f(x)\right]=-\left.\frac{3}{(x+1)^4}\right|_{x=-2}=-3$$

式 (5) 两边同乘以 $(x+2)^4$ 得

$$\frac{x+4}{x+1}=\frac{A(x+2)^4}{x+1}+B(x+2)^3+C(x+2)^2+D(x+2)+E \tag{6}$$

令 $x=-2$, 得

$$E=\left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (6) 两边同导得

$$-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)+3B(x+2)^2+2C(x+2)+D$$

可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 我们令 $\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}=(x+2)^3g(x)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)=3(x+2)^2g(x)+(x+2)^3g'(x)$$

故 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 同法可知 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$. 于是

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=-\frac{3}{(x+1)^2}\Big|_{x=-2}=3$$

$$C=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=\frac{3}{(x+1)^3}\Big|_{x=-2}=3$$

例题 5.12 求 $f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 的最简分式

解答: 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{E}{(x+2)^4}$$

$$A=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^4}\Big|_{x=-1}=3$$

在圆环 $0<|x+2|<+\infty$ 内将 $f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 展开为洛朗级数

$$f(x)=C_{-4}(x+2)^{-4}+C_{-3}(x+2)^{-3}+C_{-2}(x+2)^{-2}+C_{-1}(x+2)^{-1}+C_0$$

两边同乘 $(x+2)^4$, 得

$$(x+2)^4f(x)=C_{-4}+C_{-3}(x+2)+C_{-2}(x+2)^2+C_{-1}(x+2)^3+C_0(x+2)^4 \tag{7}$$

令 $x=-2$ 得

$$E=C_{-4}=\lim_{x\to-2}(x+2)^4f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}\Big|_{x=-2}=-2$$

式 (7) 两边求 1 阶导数, 得

$$D=C_{-3}=\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2}=-3$$

式 (7) 两边求 2 阶导数, 得

$$C=C_{-2}=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2}=-3$$

式 (7) 两边求 3 阶导数, 得

$$B=C_{-1}=\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2}=-3$$

例题 5.13 求不定积分 $\int\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

解答: [8] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

设 x 为 x^2-x+1 的一个根.

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{1}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}\right|_{x=-1}=\frac{1}{3}$$

$$Bx+C=\frac{1}{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}=\frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-2}{x^2-x-2}\overset{}{\underset{x^2-x=-1}{=\!=\!=\!=}}\frac{1}{3}(2-x)$$

于是

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\frac{2-x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

三、奥斯特罗格拉茨基方法

定理 (奥斯特罗格拉茨基方法)

有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x$$

其中 $Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots(x^n+\cdots)$, $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$$

$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 的系数可用待定系数法从 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)+\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 求出

例题 5.14 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

解答:

$$Q(x)=(x-1)^2(x+1)^3$$

$$Q_1(x)=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$$

$$Q_2(x) = (x-1)(x+1)x^2 - 1$$

设 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \left(\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)' + \dfrac{Dx+E}{x^2-1}$, 则

$$x = (2Ax+B)(x-1)(x+1) - (A^2+Bx+C)(3x-1) + (Dx+E)(x-1)(x+1)^2$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r} x^4 & D=0\,, \\ x^3 & -A+D+E=0\,, \\ x^2 & A-2B-D+E=0\,, \\ x^1 & -2A-3C+B-D-E=1\,, \\ x^0 & -B+C-E=0\,. \end{array} \implies \begin{cases} A=-\frac{1}{8}, \\ B=-\frac{1}{8}, \\ C=-\frac{1}{4}, \\ D=0, \\ E=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3} &= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} \\ &= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C \end{aligned}$$

注：进一步可详解参考《微积分教程》菲赫金哥尔茨第二卷，P276

例题 5.15 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

解答: 设 $\dfrac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2} = \left(\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)' + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$, 则

$$x^2+2 = A(x^2+x+1) - (Ax+B)(2x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1)$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r} x^3 & C=0\,, \\ x^2 & -A+C+D=1\,, \\ x^1 & -2B+C=0\,, \\ x^0 & A-B+D=2 \end{array} \implies \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ C=0, \\ D=2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x+1}{x^2+x+1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} \\ &= \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

第 6 讲 非初等表达

绝大多数的不定积分是没有初等表达式!

- 若不是有兴趣的读者 (积佬), 可以暂时性放弃.
- 没有初等表达式的不定积分期末不考! 考研不考! 竞赛不考!
- 如果你有兴趣, 找虚调子这种不定积分的积佬!

判断某个不定积分是不是有初等表达?

- 通常我们借助软件, 手机上可以使用 Wolfram Alpha, 电脑上可以使用 Mathematica, Matlab... 来判别!
- 而不是借助某些定理, 如刘维尔定理, 切比雪夫定理。

注记: **绝大多数的不定积分是否非初等表达可以用 Wolfram Alpha 来判别!**

- 有一些阴间题有初等原函数 mathematica 却不能算是因為它沒有完全植入 symbolic integration 的一些算法.
- 若用其他有內置該算法的 CAS, 例如 Axiom, 就可以輕鬆得到原函數. 可以 Google: Axiom sandbox

例题 6.1 求不定积分 $\displaystyle\int \ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

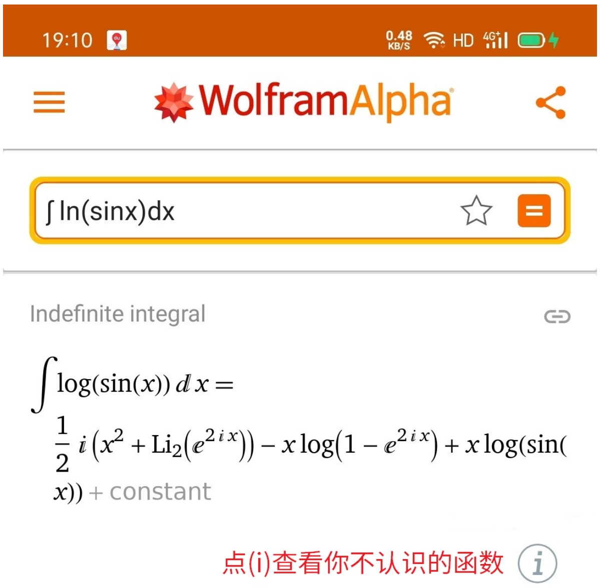
解答:

$$
\begin{aligned}
\int \ln\sin x\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{分部积分}} x\ln\sin x-\int x\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{欧拉公式}} x\ln\sin x-\int x\frac{\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}}{\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\ln\sin x-\int \mathrm{i}x\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\ln\sin x-\int \mathrm{i}x\,\mathrm{d}x-\int \frac{2\mathrm{i}xe^{-\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\ln\sin x-\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}\int \frac{x}{1-e^{2\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\ln\sin x-\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}\int x\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\
&= x\ln\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\int xe^{2\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{分部积分}} x\ln\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}nx}}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}nx}}{n^2}+C\\
&= x\ln\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2-x\ln(1-e^{2\mathrm{i}nx})+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Li}_2(e^{2\mathrm{i}nx})+C
\end{aligned}
$$

其中, $\mathrm{Li}_2(x)$ 为二重对数函数.

注记: Wolframalpha 求不定积分

- 语法: `int␣f(x)␣dx`



定理 (刘维尔第三定理)

设 $f(x)$, $g(x)$ 为代数函数, 且 $g(x)$ 不为常数. 如果 $\int f(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则

$$f(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = F(x)e^{g(x)} + C.$$

其中 $F(x)$ 是有理函数, C 为常数

定理 (刘维尔第四定理)

设 $f_k(x), g_k(x)\,(k=1,2,\cdots,n)$ 为代数函数, 且对于不同的 k, j, 函数 $f_k(x)-g_j(x)$ 不为常数. 如果 $\int \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e^{g_k(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则对每个 $k=1,2,\cdots,n$, $\int f_k(x)e^{g_k(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数.

例题 6.2 证明: $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 不能表为初等函数

解答: 反证法: 设 $u(x)=\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 为初等函数, 则由刘维尔第三定理知:

$$u(x) = R(x)e^{g(x)} + C,$$

(其中 $R(x)$ 为 x 的有理函数, C 为常数, $f(x)\equiv 1, g(r) = -x^2$) 上式两边求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= R'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}R(x)\\ &= e^{-x^2}\left[R'(x) - 2xR(x)\right] = e^{-x^2},\end{aligned}$$

所以

$$R'(x) - 2xR(x) = 1.$$

上式右端的 1 在有限平面上无极点, 所以 $R(x)$ 在有限平面无极点, 故 $R(x)$ 不是有理分式函数. 另一方面, $R(x)$ 也不是多项式函数. 否则, 若 $R(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则上式也是 $n+1$ 次多项式, 矛盾. 故 $\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 不是初等函数.

定理 (切比雪夫定理)

不定积分 $\int x^p(a+bx^q)^r\,\mathrm{d}x$(其中 p,q,r 为有理数) 为初等函数的充分必要条件是 r, $\frac{p+1}{q}$, $r+\frac{p+1}{q}$ 中至少有一个为整数

参考文献

[1] 神琦冰河. 积分级数欣赏 (5). https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=Mzg5MDAxNTc3NQ==&mid=2247485333&idx=1&sn=595976c1b666458664b5e1e19e26a6bb&chksm=cfe25ee5f895d7f3e273cdc8b3f1ed7b7d668b8ca2bd3b195485144ae77a2178e2ee8c56f9de&mpshare=1&scene=23&srcid=0309PhZMG5rmuyoBjOSgadQL&sharer_sharetime=1615266353755&sharer_shareid=79447cb4c502fae62a97c9bae0bed672#rd, 10 2020.

[2] 虚调子. 如何求不定积分 $\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\,\mathrm{d}x$? . https://www.zhihu.com/question/397590932, 5 2020.

[3] MathRoc and 予一人. 这道难度较大的定积分如何做? . https://www.zhihu.com/question/383448413, 3 2020.

[4] 周明强. 数学分析习题演练. 科学出版社, 北京, 第二版 edition, 2010.

[5] 虚调子 and 予一人. 各位大神, 这个无理函数的不定积分怎么求? . https://www.zhihu.com/question/431520672, 11 2020.

[6] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 高等教育出版社, 北京, 第 8 版 edition, 1 2006.

[7] 金玉明, 顾新身, and 毛瑞庭. 积分的方法与技巧. 中国科学技术大学出版社, 安徽, 2017.

[8] 楼红卫. 微积分进阶. 科学出版社, 北京, 8 2009.

[9] 同济大学数学系. 高等数学. 高等教育出版社, 北京, 第七版 edition, 7 2014.

[10] 楼红卫. 数学分析要点 • 难点 • 拓展. 高等教育出版社, 北京, 6 2020.

[11] 蒲和平. 大学生数学竞赛教程. 电子工业出版社, 北京, 2014.

[12] 零蛋大. 微积分笔记 v3.141. https://zhuanlan.zhihu.com/p/300880567, 11 2020.

[13] 零蛋大, 喵喵女王, and Eliauk. $\int \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$ 怎么积分? . https://www.zhihu.com/question/430982343, 12 2020.