# 第三章　复变函数的积分

复积分是研究解析函数的一个重要工具，Cauchy 积分定理及 Cauchy 积分公式尤其重要，它们是复变函数论的基本定理及公式.

## §1、复积分的概念及简单性质（2 课时）

### 一、目的和要求

1、充分理解复积分的定义，掌握复积分的计算方法.

2、记住一些常见结论及复积分的基本性质.

### 二、重难点

1、重点

复积分的定义、算法、重要积分及结论.

2、难点

对复积分定义本质的理解及算法.

### 三、教学方法

课堂讲授法，采用启发式教学；补充例题以说明物体的本质.

### 四、教学手段

电教、CAI 演示.（约 2 课时）

### （一）、复变函数积分的定义

（复习 Riemann 积分定理，提问）

**1、几点的约定（复习）**

（1）今后除特别的声明外，所论及的曲线皆指光滑或逐段光曲线，因而也是可求长的.

（2）周线是指逐段光滑的简单闭曲线，自然是可求长的，仍以“反时针”为正，“顺时针”方向为负.

（3）有向曲线 C:Z=Z(t), $t\in[\alpha,\beta]$ 表示一条以 a=$\mathbb{Z}(\alpha)$ 为起点，以 Z=$\mathbb{Z}(\beta)$ 为终点的曲线.

**定义 3.1**　（分割，求和，取极限）

设 C：Z=$\mathbb{Z}(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$ 为 Z 平面上一条有向线段，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，顺着 C 从 a 到 b 方向 C 上任取分点：

$$a=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=b$$

将 C 分成 n 段弧 $\forall\xi_k\in z_{k-1}z_k$，做和数：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})$$

当分点无限增多，且 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta Z_k|\to 0$ 时，和数 $S_n$ 的极限存在且为 $\tau$；则称 $f(z)$

在 C 上（沿 C）可积，称 $\tau$ 为 $f\left(Z\right)$ 沿 C（从 a 到 b）的积分；记为：$\int_c f\left(z\right)dz$，即

$$\tau=\int_c f\left(z\right)dz$$

并用 $\int_{c^-} f\left(z\right)dz$ 表示取反向时的积分.

**注** 1、复积分为一种有向积分；

2、若 $f\left(Z\right)$ 沿 C 可积，则 $f\left(Z\right)$ 在 C 上有界；

## （二）、复积分的计算方法

**例 3.1** 设 C 为连接点 a 与 b 的任一曲线，试证：

（1）$\int_c dz=b-a$ （2）$\int_c zdz=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.（已知 $f\left(z\right)=Z$ 在 C 可积）

**证** （1）因 $f\left(z\right)=1, S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(z_k-z_{k-1}\right)=b-a$, 故

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max|\Delta\mathbb{Z}_k|\to 0}} S_n=b-a, \text{即}\int_c dz=\text{b-a}.$$

（2）因 $f\left(\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}$, 选 $\xi_k=z_{k-1,}$ 则得

$$\sum\nolimits_1=\sum_{\text{k}=1}^{n} z_{k-1}(z_k-z_{k-1}),$$

但我们又可选 $\xi_k=z_k$，则得

$$\sum\nolimits_2=\sum_{k=1}^{n} z_k(z_k-z_{k-1})\ ,$$

由定理 3.1 可知积分 $\int_c zdz$ 存在，因而 $\mathrm{S_n}$ 的极限存在，且应与 $\sum_1$ 及 $\sum_2$ 的极限相等，从而应与 $\frac{1}{2}(\sum_1+\sum_2)$ 的极限相等，令

$$\frac{1}{2}(\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

故

$$\int_c zdz=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right).$$

**定理 3.1** $f\left(z\right)$ 沿曲线 C 连续，$f\left(z\right)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f\left(z\right)$ 沿 C 可积，且

$$\int_c f(z)dz=\int_c udx-vdy+i\int_c vdx+udy$$

**证** 设

$$z_k = x_k + iy_k, x_k - x_{k-1} = \Delta x_k, y_k - y_{k-1} = \Delta y_k,$$

$$\xi_k = \xi_k + i\eta_k, u\left(\xi_k, \eta_k\right) = u_k, v\left(\xi_k, \eta_k\right) = v_k,$$

我们可以得到：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(z_k - z_{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k\right) + i\sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k)$$

上式右端的两个和数是对应的两个曲线的分和数，用 $f\left(z\right)$ 沿 C 连续，故 u(x, y)及 v(x, y)沿 C 连续，故这两个曲线积分存在，故 $\int_c f(z)dz$ 存在，且公式成立.

**2、参数方程法**

设 C 为光滑曲线 $z = z\left(t\right) = x\left(t\right) + iy\left(t\right)\left(\alpha \le t \le \beta\right)$，则 $z'\left(t\right)$ 在 $\left[\alpha, \beta\right]$ 上连续且导数 $z'\left(t\right) = x'\left(t\right) + iy'(t)$ 不为 0，若 $f\left(z\right)$ 沿 C 连续，令

$$f\left[z\left(t\right)\right] = u\left[x\left(t\right), y(t)\right] + iv\left[x(t), y(t)\right] = u(t) + iv(t)$$

由公式 3.1 可得：

$$\int_c f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c udy + vdx$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u(t)x'(t) - v(t)y'(t)\right]dt + i\int_\alpha^\beta \left[u(t)y'(t) + v(t)x'(t)\right]dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f\left[z\left(t\right)\right]z'\left(t\right)dt$$

或：

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{f\left[z\left(t\right)\right]z'(t)\right\}dt + i\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\left\{f\left[z\left(t\right)\right]z'\left(t\right)\right\}dt$$

**例 3.2**（重要积分） 设 C 为以 a 为心，$\rho$ 为半径的圆周的有向曲线，则：

$$\int_c \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i (n=1) \\ 0(n \ne 1, \text{且为整数}) \end{cases}$$

**证** 设 C 的参数方程为：$z-a=\rho e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$，故：

$$\int_c \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}d\theta}{\rho^n e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当 n 为整数且 n≠1时，

$$\int_c \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} d\theta}{\rho^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta$$

$$= \frac{i}{\rho^{n-1}} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(n-1)\theta d\theta - i \int_0^{2\pi} \sin(n-1)\theta d\theta \right]$$

=0

**补例 3.3** 计算积分：

（1）$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$;　　（2）$\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}$;

（3）$\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}$;　　（4）$\int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right|$;

解：单位圆周的参数方程为：$z = e^{i\theta}(0 \le \theta \le 2\pi)$，则 $dz = ie^{i\theta} d\theta$

故：（1）$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$(重要积分）；

（2）$\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = \int_0^{2\pi} ie^{i\theta} d\theta = 0;$

（3）$\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{|ie^{i\theta} d\theta|}{e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^{i\theta}} = 0;$

（4）$\int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right| = \int_0^{2\pi} \left|\frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}}\right| = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi;$

## （三）、复变函数积分的基本性质

设 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 连续，则有

1、$\int_c \alpha f(z) dz = \alpha \int_c f(z) dz$($\alpha$为常数）；

2、$\int_c [f(z) + g(z)] dz = \int_c f(z) dz + \int_c g(z) dz$

$$= \int_c \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(z) dz$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_c f(z) dz$$ ($f_k(z)$沿C连续，$\alpha_k$为复常数）

3、设曲线 C 是由曲线 $C_1, C_2, \cdots C_n$ 连接而成，则：

$$\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \cdots + \int_{c_n} f(z) dz$$

4、$\int_{c^-} f(z)dz = -\int_c f(z)dz$, 其中$\int_{c^-}$ 表示沿 C 负向积分；

5、$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \le \int_c |f(z)||dz| = \int_c |f(z)|ds;$

其中$|\mathrm{dz}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$ 表示弧微分

证明上式只需用下列不等式即可：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta s_k$$

**3、积分估值**（定理 3.2）

**定理 3.2** 若 $f(z)$ 沿曲线 C 连续，且有正数 M, 使$|f(z)| \le M$ ，L 为 C 之长，则：

$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \le ML$

**证** 由不等式：$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le M\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k| \le ML$，取极限即得证.

**4、数学分析中的积分中值定理不能直接推广到复积分上来.**

**反例** $\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + i\int_0^{2\pi}\sin d\theta = 0$

而$e^{i\theta}(2\pi - 0) \ne 0$

**例 3.4** 试证$\left|\int_c \frac{dz}{z^2}\right| \le 2$，其中 C 为连接 i 和 2+i 的直线段

**证** C 的参数方程为 $\mathrm{z}=(1\text{-}t)i + t(2+i)(0 \le t \le)$

$$z = 2t + i(0 \le \mathrm{t} \le 1)$$

沿 C，$\frac{1}{\mathrm{z}^2}$连续，且

$$\left|\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{4t^2+1} \le 1$$

而 C 之长为 2，由定理 3.2 可得：

$$\left|\int_c \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{z}^2}\right| \le 2$$

**例 3.5** （1）设$\gamma$为上半单位圆周（逆时针旋转），则$\left|\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}{\mathrm{z}}\mathrm{dz}\right| \le \pi\mathrm{e}$

（2）C 为单位圆周，则$\left|\int_c \frac{\sin \mathrm{z}}{\mathrm{z}^2}dz\right| \le 2\pi e$

**分析** 这类题目的求解往往先写出路径（$\gamma$和C）的参数方程，再应用积分估值定理（有时还要用到三角不等式）

**证** （1）$\gamma$：$z=e^{it},0\le t\le\pi,dz=ie^{it}dt$ 在$\gamma$上

$$\left|\frac{e^z}{z}\right|=\frac{\left|e^{\cos t}\right|}{1}\le e \quad (\cos t\le 1)$$

故

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right|\le\int_\gamma\left|\frac{e^z}{z}\right||dz|\le e\pi$$

（2）C：$z=e^{it},0\le t\le 2\pi,dz=ie^{it}dt$，在 C 上

$$\left|\frac{\sin z}{z^2}\right|=\left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2iz^2}\right|\le\frac{1}{2}\left[\left|e^{iz}\right|+\left|e^{-iz}\right|\right]\le\frac{1}{2}\left[e^{|iz|}+e^{|-iz|}\right]=e^{|z|}=e$$

又因为$\left|e^z\right|=e^{\mathrm{Re}\,z}\le e^{|z|}$，故

$$\left|\int_c\frac{\sin z dz}{z^2}\right|\le\int_c\left|\frac{\sin z}{z}\right||dz|\le e\int_c|dz|=2\pi e$$

**例 3.6** 试验证：$\left|\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)(z+a)}\right|\le\frac{2\pi r}{\left|r^2-|a|^2\right|}(r>0,|a|\ne r)$

**证** 若 a=0，由重要积分易得：

$$\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2}=0，\text{不等式成立}$$

若$a\ne 0$，则由复积分的基本性质得：

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)(z+a)}\right|\le\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{\left|z^2-a^2\right|}<\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{\left|r^2-|a|^2\right|}=\frac{2\pi r}{\left|r^2-|a|^2\right|}$$

## 五、小结

1、复积分定义；

2、有向积分存在条件；

3、复积分的单参数算法；

## 六、作业

$P_{142}$ 2、3

## 七、后记（补充材料）

**1、有关 Jordan 不等式**

$\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta\le\theta(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$应用

**例 1** 证$\left|\int_{c} e^{iz} dz\right| < \pi$,其中 C 为圆周$|z|$=R 的上半圆周从+R 到-R;

**证** C：$z = Re^{i\theta}(0 \le \theta \le \pi)$

$$\left|\int_{c} e^{iz} dz\right| \le \int_{c} \left|e^{iz}\right| |dz| = \int_{0}^{\pi} e^{-R\sin\theta} R d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} R d\theta \le 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2R}{\pi}\theta} R d\theta$$

$$= -\pi e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(1 - e^{-R}\right) < \pi$$

**例 2** 若$I_r = \int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$ 其中$C_r$是从 r 到-r 沿$|z|$=r 的上半圆周，

试证明：$\lim\limits_{r\to\infty} I_r = 0, \lim\limits_{r\to 0} I_r = \pi i$

**分析** 用 Jordan 不等式及积分估值，估计$|I_r\text{-}0|$及$|I_r\text{-}\pi i|$可任意小

**证** C：$z = re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi$，则

$$I_r = \int_{0}^{\pi} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} re^{i\theta} d\theta = i\int_{0}^{\pi} e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta} d\theta$$

（1）$|I_r| \le \int_{0}^{\pi} e^{-r\sin\theta} d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta} d\theta \le 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{r}\left(1 - e^{-v}\right) \to 0, (v \to \infty)$

（2）$I_r - \pi i = i\int_{0}^{\pi}（e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta}\text{-}1）d\theta$

故

$$\left|I_r - \pi i\right| \le \int_{0}^{\pi} \left|e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta}\text{-}1\right| d\theta \le \int_{0}^{\pi} re^{r} d\theta = re^{r}\pi$$

$$(\forall z \in C \left|e^{z} - 1\right| \le e^{|z|} - 1 \le |z| e^{|z|})$$

故

$$\lim_{r\to 0} I_r = \pi i$$

**2. 有关多值函数积分的计算**

**例 3** 计算积分(1) $I = \int_{c} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ $(2) I = \int_{c} \ln z dz$

这里 C 表示单位圆周$|z|$=1 按反时针方向从 1 到 1 取积分，而被积分数分别取为按下列条件决定的单值解析分支

$(1)\sqrt{1}=1$及$\sqrt{1}=-1$; $(2)\ln 1=0$及$\ln 1=2\pi i$

**注** 对多值函数约定，积分号里的多值函数的一个单值解析分支，由它在积分路线上某点的值分出，若积分路线为闭曲线，则给定被积函数的那个点，就当作积分路线的起点（当然积分值可能依赖于这个挑选的起点），这里 z=1 就当作积分的起点.

**解** （1）$\left(\sqrt{z}\right)_k=\left(\sqrt{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{2}}\left(0\le\arg z\le 2\pi, k=0,1\right)$

按条件$\sqrt{1}=1$，取 k=0，即可取分支：

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}\left(0\le\arg z\le 2\pi\right)$$

在 C 上，令$z=e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$（即 C 的参数方程）

于是

$$I=\int_c\frac{dz}{\sqrt{|z|}}=\int_c\frac{dz}{e^{i\frac{\arg z}{z}}}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\frac{\theta}{2}}}=\int_0^{2\pi}ie^{i\frac{\theta}{2}}d\theta=2e^{i\frac{\theta}{2}}\Big|_0^{2\pi}=-4$$

按条件$\sqrt{1}=-1$取 k=1，即取分支

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z+2\pi}{2}}\left(0\le\arg z<2\pi\right)$$

在 C 上，令$z=e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$，于是

$$I=\int_c\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_c\frac{dz}{e^{i\frac{\arg z+2\pi}{2}}}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{i\frac{\theta}{2}}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{i\frac{\theta 2\pi}{2}}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{i\frac{\theta}{2}}d\theta=4$$

（2）$\ln_k z=\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right)\left(0\le\arg z<2\pi,k\in z\right)$

按条件$\ln 1=0$，取 K=0，即取分支

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z(0\le\arg z<2\pi)$$

在 C 上，令$z=e^{i\theta},0\le\theta<2\pi$，于是

$$I=\int_c\ln zdz=\int_0^{2\pi}\left(i\theta\right)ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\left(i\theta\right)e^{i\theta}d\left(i\theta\right)=e^{i\theta}\left(i\theta-1\right)\Big|_0^{2\pi}=2\pi i$$

按条件$\ln 1=2\pi i$，取 k=1, 即取分支

$$\ln z=\ln|z|+i\left(\arg z+2\pi\right)(0\le\arg z<2\pi)$$

在 C 上，令$z=e^{i\theta},0\le\theta<2\pi$，于是：

$$I=\int_c\ln zdz=\int_0^{2\pi}i\left(\theta+2\pi\right)ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(i\theta\right)e^{i\theta}d\left(i\theta\right)+2\pi i\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\left(i\theta\right)$$

$$=\left[e^{i\theta}\left(i\theta-1\right)+2\pi i e^{i\theta}\right]\Bigg|_{0}^{2\pi}=2\pi i$$

**3．预习要求**

思考以下问题：

（1）若$\int_{c} f\left(z\right)dz=0$，则 $f\left(z\right)$ 在 C 内部构成的区域 D 是否解析？

（2）若 $f\left(z\right)$ 在 D 内解析，$\mathrm{Z}_{0,}\mathrm{Z}\in D$，为什么$\int_{z_0}^{z} f\left(\xi\right)d\xi$能确定一个函数？

**4．参考文献【1】、【5】、【6】**