广义实值函数与适当函数

定义 (广义实值函数)

令$\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$为广义实数空间，则映射$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$称为**广义实值函数**.

和数学分析一样，我们规定

$$-\infty < a < +\infty, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad +\infty + a = +\infty, \ \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

定义 (适当函数)

给定广义实值函数f和非空集合$\mathcal{X}$. 如果存在$x \in \mathcal{X}$使得$f(x) < +\infty$，并且对任意的$x \in \mathcal{X}$，都有$f(x) > -\infty$，那么称函数f关于集合$\mathcal{X}$是适当的.

概括来说，适当函数f的特点是“至少有一处取值不为正无穷”，以及“处处取值不为负无穷”.

下水平集与上方图

定义 (α-下水平集)

对于广义实值函数$f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$，

$$C_\alpha=\{x\,|\,f(x)\le\alpha\}$$

称为f的**α-下水平集**.

定义 (上方图)

对于广义实值函数$f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$，

$$\operatorname{epi}f=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,f(x)\le t\}$$

称为f的**上方图**.

闭函数

定义 (闭函数)

设$f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$为广义实值函数，若$\operatorname{epi} f$为闭集，则称$f$为**闭函数**.

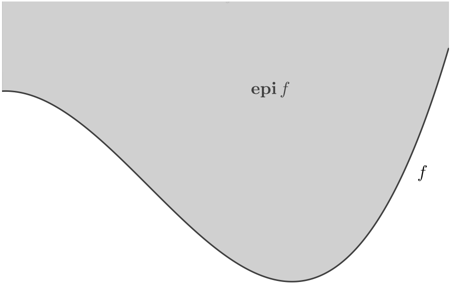

Figure: 函数f和其上方图$\operatorname{epi} f$

定义 (下半连续函数)

设广义实值函数$f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$，若对任意的$x \in \mathbb{R}^n$，有

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x),$$

则$f(x)$为**下半连续函数**.

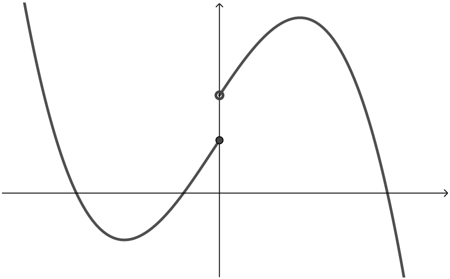

Figure: 下半连续函数$f(x)$

闭函数与下半连续函数

虽然表面上看这两种函数的定义方式截然不同，但闭函数和下半连续函数是等价的.

定理

设广义实值函数$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$，则以下命题等价：

1. $f(x)$的任意α-下水平集都是闭集；
2. $f(x)$是下半连续的；
3. $f(x)$是闭函数.

闭函数与下半连续函数

闭（下半连续）函数间的简单运算会保持原有性质:

- 加法: 若f 与g 均为适当的闭（下半连续）函数，并且$\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$，则$f+g$ 也是闭（下半连续）函数. 其中适当函数的条件是为了避免出现未定式$(-\infty)+(+\infty)$ 的情况;
- 仿射映射的复合: 若f 为闭（下半连续）函数, 则$f(Ax+b)$ 也为闭（下半连续）函数;
- 取上确界: 若每一个函数f_α 均为闭（下半连续）函数，则$\sup_\alpha f_\alpha(x)$ 也为闭（下半连续）函数.

提纲