第六章　留数理论及其应用

本章为第三章 Cauchy 积分理论的继续。留数理论及其应用对复变函数论的发展起过一定的推动作用。留数在复变函数论本身及实际应用中都是很重要的。本章首先介绍留数的一般理论，然后讲述其应用（特别是对计算某些定积分的应用）。

留数和计算周线积分（或归结为考察围线积分）的问题有密切关系，中间插入的 Taylor 级数和 Laurent 级数是研究解析函数的有力工具。应用留数理论可以解决“大范围”的积分计算问题，还可以考察区域内函数的零点分布状况。

本章重点参考文献 [1],[3],[5],[6],[7]

§1、留数

一、教学目的与要求

1、掌握函数在有限点留数的概念，留数定理及有限奇点处留数 $\mathrm{Res}(f(z),a)$ 的求法。

2、掌握在点∞处留数的概念，并能灵活计算。

3、掌握含点∞区域的留数定理（本章习题（二）5）

二、重难点

1、重点

留数的概念及求法

2、难点

用留数计算积分

三、教学方法

采用启发式 课堂讲授法

四、教学手段

电教、CAI 演示（2 课时）

（一）定义及基本定理

定义 6.1 设 $f(z)$ 以有限点 a 为孤立奇点，即 $f(z)$ 在点 a 某去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析，则称（小范围）积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz\left(\Gamma:|z-a|=\rho,0<\rho<R\right)$ 为 $f(z)$ 在点 a 的留数（residue），记为 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)$ 或 $\mathrm{Res}(f(z),a)$

注 ① 此处积分沿 Γ 的方向进行。

② 这里所定义的留数 $\mathrm{Res}(f(z),a)$ 与 Γ 的半径无关。事实上在 $0<|z-a|<R$ 内，$f(z)$ 有 Laurent 展式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(c-a)^n$，且该展式在 Γ 上一致收敛，逐项积分，有

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\Gamma} (z-a)^n dz = 2\pi i C_{-1}$$

所以 $f(z)$ 在 a 的留数等于罗朗级数展式中 $\frac{1}{z-z_0}$ 的系数（显然与圆 Γ 的半径 r 无关）。

定理 6.1（Cauchy 留数定理） $f(z)$ 在复围线 $\bar{C}$ 所围区域 D 内除有限奇点 $a_1, a_2, \cdots a_n$（只有有限个孤立奇点）外解析，在区域 $\overline{D} = D + \overline{C}$ 上除 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 外连续，则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

注 1、在 C 上有连续且只有有限个孤立奇点。

2、留数定理把计算围线积分的整体问题，化为计算各孤立奇点处留数的局部问题。

记以 a_k 为心充分小的数 ρ_k 为半径画圆周 $\Gamma_k : |z-a_k| = \rho_k \ (k=1,2,\cdots n)$，使这些圆周及其内部均含于 D，并且彼此互相隔离。应用定理 3.10 得

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz$$

由留数定义有 $\int_{\Gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \bullet \operatorname{Res} f(z)$ 代入即得

（二）留数的求法

1、若 a 为有限的可去奇点（或解析点），则其点的留数位 0；

反之不真， 例如

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, z_0 = 0, \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = c_1 = 0$$

但 $z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

2、极点 （除用一般方法外，还有）

定理 6.2 设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点，且

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

其中 $\varphi(z)$ 在 a 点解析且 $\varphi(a) \neq 0$ 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

这里 $\varphi^{(0)}(a)$ 代表 $\varphi(a)$ 且有 $\varphi^{(n-1)}(a) = \lim_{z \to a} \varphi^{(n-1)}(z)$

证

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

注　设 a 为$f(z)$的 n 阶极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}\left[(z-a)^n f(z)\right]}{dz^{n-1}}$$

当$(z-a)^n f(z)$中$(z-a)^n$能从$f(z)$中消去时，就在消去后直接代值计算$\dfrac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$否则取极限计算。

推论 6.3　设a为$f(z)$的一阶极点，

$$\varphi(z)=(z-a)f(z)$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\varphi(a)$$

推论 6.4.　设a为$f(z)$的二阶极点

$$\varphi(z)=(z-a)^2 f(z)$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\varphi'(a)$$

定理 6.5　设a为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的一阶极点（其中$\varphi(z)$及$\psi(z)$在$a$解析，且$\varphi(a)\neq 0$，$\psi(a)=0$，$\psi'(a)\neq 0$），则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

特别地，当$\psi(z)=z-a$，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{z-a}=\varphi(a)$$

证　因a为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的一阶极点，故

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{(z-a)}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

1、本质奇点

若z_0为本质奇点，则 $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$

例 1 求 $\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$ 在有限孤立奇点的留数。

解 易见 z_0 和 $z=1$分别为 $f(z)$ 的一阶和二阶极点

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\left.\frac{5z-2}{z-1}\right|_{z=0}=-2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\left.\left(\frac{5z-2}{z}\right)'\right|_{z=1}=2$$

从而

$$\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz=2\pi i(-2+2)=0$$

例 2 求积分$\int_{|z|=n}\tan\pi z dz$（n 为正整数）

解 $\tan\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 的所有有限奇点 $z=k+\frac{1}{2}(k=0,\pm1,\cdots)$

易验证**定理 6.5** 的条件满足，所以

$$\operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}}(\tan\pi z)=\left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

于是由留数定理可知

$$\int_{|z|=n}\tan\pi z dz=2\pi i\sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n}\operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}}(\tan\pi z)=2\pi i\left(-\frac{2n}{\pi}\right)=-4ni$$

例 3 求 $\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$

解 $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$ 仅以 $z=0$ 为其三阶极点，所以

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2!}[\cos z]''\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2}$$

故由留数定理可得

$$\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$$

例 4 求 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin^4 z}$ 在 $z=0$ 处留数。

解 $z=0$ 为 $\sin^4 z$ 分母的四阶零点，分子二阶零点，所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。由 **定理 6.4** 可知

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\left(z^2\bullet\frac{z^2}{\sin^4 z}\right)'=\lim_{z\to 0}\left[\left(\frac{z}{\sin z}\right)^4\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin^4 z}\right)^3\bullet\frac{\sin z-\cos z}{\sin^2 z}=4\times 1\times 0=0$$

例 5 求 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 的留数。

方法一 $z=0$ 为 e^z-1 的一阶零点，为分母 z^5 的五阶零点，所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的四阶极点，据**定理 6.2** 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(4\text{-}1)!}\left[\frac{d^{(4-1)}}{dz^{(4-1)}}\left(z^4\bullet\frac{e^z-1}{z^5}\right)\right]\Bigg|_{z=0}=\frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{e^z-1}{z^5}\right)\right]\Bigg|_{z=0}$$

较为复杂。

方法二 在 $0<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)$ 展开成 Laurent 级数

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\cdots\right)=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z}\cdots$$

由此得

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=C_{-1}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

（三）函数在∞处的留数

定义 6.2 设∞为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，即 $f(z)$ 在去心邻域

$N-\{\infty\}: 0 \le r < |z| < +\infty$ 内解析，则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz \quad (\Gamma: |z| = \rho > r)$$

为 $f(z)$ 在点∞处的留数。记为 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$，此处 Γ^- 指顺时针方向（视作关于绕无穷远点的正向）

注 ① 若 $f(z)$ 在 $0 \le r < |z| < +\infty$ 中的 Laurent 展式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$

② 若∞为 $f(z)$ 的可去奇点$\not\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$

例 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$

而∞为 $f(z)$的可去奇点。

定理 6.6 若 $f(z)$ 在 C_∞ 上只有有限个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots a_n, \infty$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

证 C_∞ 上作一条围线 C，包含所有的 a_k，$(k = 1, 2, \cdots n)$

由留数基本知识知

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

而等式左端

$$-\int_{c^-} f(z)dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

若令 $z = \dfrac{1}{t}$，则

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho^-} f(z)dz \qquad (\Gamma_\rho: |z| > \rho > r)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \quad \left(\gamma:|z|=\frac{1}{\rho}<\frac{1}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)dt \rightarrow \quad \text{沿}\Gamma_{\rho}\text{顺时针，沿}\gamma\text{逆时针}$$

$$=-\operatorname*{Res}_{t=0}\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

例 6 求 $\mathrm{I}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^8-1}$

解

$$\mathrm{I}=\sum_{k=1}^{8}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\left(\frac{1}{z^8-1}\right)=-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{z^8-1}\right)=0$$

其中 $a_k\ (k=1,2,\cdots,8)$ 为 $\frac{1}{z^8-1}$ 的一阶极点。

方法 1

$$\frac{1}{z^8-1}=\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z^8}}\right)=\frac{1}{z^8}\left(1+\frac{1}{z^8}+\frac{1}{2z^8}+\cdots\right)\Rightarrow C_{-1}=0$$

方法 2

$$=\frac{1}{t^8}\bullet\frac{1}{t^8-1}=\frac{t^8}{t^2\left(1-t^8\right)}=\frac{t^6}{1-t^8}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{t^6}{1-t^8}=0\Rightarrow t=0\ \text{为可去奇点}$$

所以留数为 0

例 7 求 $\mathrm{I}=\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}dz$

解 在 $4<|z|<+\infty$ 内

$$f(z)=\frac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}=\frac{z^{15}}{z^{16}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-2\bullet\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1-3\bullet\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

所以 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\mathrm{C}_{-1}=-1$

或

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{\frac{1}{t^{15}}}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{t^4}+2\right)^3}\bullet\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t\left(1+t^2\right)^2\left(1+2t^4\right)^3}$$

它以$t=0$为一阶极点，所以

$$I=2\pi i\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\right]=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{t=0} f\left(\frac{1}{t}\right)\bullet\frac{1}{t^2}\right]=2\pi i$$

例 8 计算 $\int_{|z|=1}\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}dz$

析 因 $e^{\frac{1}{z}}-1$ 以 $z_k=\frac{1}{2\pi i}=\frac{i}{2k'\pi}\left(k'=-k,k\in\mathbb{Z}\right)$ 为零点，故 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}-1$，以这些点为极点，它们都在 $|z|=1$ 的内部，但由此知 $z=0$ 为非孤立奇点，故不能应用有界区域的留数定理（当然亦不能用 Th6.6），而 $z=\infty$ 为$f(z)$的孤立奇点，且为极点，故此可以用∞的留数来求此积分

解 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内解析。故可展成 Laurent 级数

所以有

$$f(z)=\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots}=\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{6z^2}+\cdots\right)}$$

$$=z\bullet\left(1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{12z^2}+\cdots\right)=z-\frac{1}{2}+\frac{1}{12z}+\cdots$$

故

$$-\frac{1}{12}=\operatorname*{Res}_{z=\infty} f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f\left(z\right)dz \quad \left(C:\left|z\right|=1\right)$$

所以

$$\int_{C^-} f\left(z\right)dz=2\pi i\bullet\frac{1}{12}=\frac{\pi i}{6}$$

五、小结

总结求留数的三种方法，突出各种方法的灵活性。

六、作业

$P_{269}-P_{270}$　　1(1)(4)

七、补充及预习提示

预习思考题

1、用留数计算实积分的总体思路是什么？

2、当积分路径上有奇点时，一般作何处理，这种思想与瑕积分的计算有何相似之处？

3、参考[1],[6]（[7]），（P_3之文献）

八、后记