# §3、复数函数

## 一、目的和要求

1、 掌握复变函数及相关的定义，掌握复变函数极限连续的定义及其等价刻画定理，找出复变函数和数学分析的异同.

2、复述出极限连续的性质，掌握复球面及无穷远点的相关概念及相关规定定，掌握拓扑性质.

## 二、重难点

1、 重点 复变函数概念极限连续及等价刻画.

2、难点 复变极限，无穷远点的某些概念.

## 三、教法和教学手段

课堂讲授法采用启发式，讨论式；电教 CAI 演示

## 四、教学内容 （共 2 课时）

### （一）基本概念

（提问处）复习单、多值复变函数的概念，引入 定义（从映射角度考虑）

取两张复平面 $z$ 平面和 $w$ 平面，此时 $w=f(z)$ 可视为 $z$ 平面到 $w$ 平面的一个映射（变换），设 $E$ 、$F$ 分别为 $z$ 平面和 $w$ 平面上的点集.

（1）若 $\forall z\in E,\exists w\in F$ 与之对应，称 $w=f(z)$ 为 $E$ 到 $F$ 的内映射（or 入变换），即

$$f(E)\leq F$$

（2）若 $f(E)\leq F,\text{且}\forall z\in E,\text{使}f(z)=w$，则称 $w=f(z)$ 称为 $E$ 到 $F$ 的映射（满变换）

（3）若 $f(E)=F$ 则对 $F$ 中的任一 $w$，存在一个（几个）点 $z$，使 $f(z)=w$ 则，在 $F$ 上也确定了一个单（多）值函数，它成为 $w=f(z)$ 的反函数或变换 $w=f(z)$ 的逆变换，记为 $z=f^{-1}(w)$，若 $w=f(z)$，$z=f^{-1}(w)$ 均为单值函数，则称 $w=f(z)$，是 $E\to F$ 的一个双方单值照应或一一变换.

**注** （1）映射这一概念的引入，对于复变函数论的进一步发展，特别是在解析函数的几何理论方面起着重要作用，因它给出了函数的分析表示和几何表示的综合，此综合是函数论发展的基础和新问题不断出现的源泉之一，生物理学的许多领域中有着重要作用.

（4）当 $f$ 是满射时，对 $\forall w\in F,$ 有 $f(f^{-1}(w))=w$ 当 $w=f(z)$ 为双方单值射影时，对 $\forall z\in E,$ 有 $f(f^{-1}(z))=z$.

**例 1** 在变换 $w=iz$ 下，圆周 $|z-1|=1$ 变成何曲线？

**解** 设 $z=re^{i\theta},w=\rho e^{i\varphi}$，因为

$$w=iz\Leftrightarrow \rho e^{i\varphi}=re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\Leftrightarrow \rho=r,\varphi=\theta+\frac{\pi}{2}$$

故 $w=iz$ 把 $z$ 平面上的圆周 $|z-1|=1$ 变成 $w$ 平面上圆周 $|w=i|=1$

**例1** 问函数 $w=z^2$ 把下列 $z$ 平面上曲线映成 $w$ 平面上何曲线？

（1）以原点为心；$z$ 为半径，在第一象限里的圆弧.

（2）倾角为 $\dfrac{\pi}{3}=\theta$ 的直线.

（3）双曲线 $x^2-y^2=4$

**解** （1）$|w|=|z|^2, Argw=2Argz$ 变成以原点为心，4 为半径，在 $u$ 轴上方的半圆.

（2）把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的直线视为两对线 $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$ 及 $\arg z=\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 经 $w=z^2$ 后变成 $\arg z=\dfrac{2\pi}{3}$ 的射线.

（3）$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$，因为 $xy\in IR,$ 所以在 $w$ 平面上的像为 $u=4$ 的直线.

## （二）复数的极限与连续

### 1、极限

（1）定义 设 $f(z)=w$ 为定义在点集 $E$ 上的函数，$z_0$ 为 $E$ 聚点，若 $\exists w_0\in\mathbb{C},$ 对 $\forall\varepsilon>0,$ $\exists\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时 $(z\in E)$ 恒有

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon,$$

则称 $f(z)$ 沿 $E$ 于 $z_0$ 有极限 $w_0$，记为

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=w_0$$

**注** ① $E$ 为平面点集，$\therefore z\to z_0$ 要求 $z$ 在 $E$ 上沿任意方向趋于 $z_0$，而实分析中 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 中 $x\to x_0$ 仅在 $x$ 轴上，$x$ 沿 $x_0$ 左右两个方向区域 $x_0$

② 几何意义 见 T、B P30.

**例2** （1）设 $f(z)=\frac{\sqrt{|xy|}}{z}, 0\neq x+iy\in\mathbb{C}$，当 $z$ 沿射线

$$c: x=\alpha t, y=\beta t, (t>0)$$

趋于 0 时，极限为

$$\lim_{\substack{z\to 0\\(z\in\mathbb{C})}} f(z)=\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$$

其值因 $\alpha,\beta$ 不同而不同，故 $f(z)$在$z=0$ 处极限不存在.

（2）试证 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z}$ 及 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$ 不存在

**证** 仅证 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$ 不存在，设 $z=x+iy$

当 $z$ 沿正实轴 $\to 0$ 时， $z=x>0, \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{|z|}=1$

当当 $z$ 沿负实轴 $\to 0$ 时， $z=x<0, \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{|z|}=-1$

故 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$ 不存在.

**2、性质**

（1）若极限存在，则极限必唯一.

（2）若 $f(z), g(z)$ 沿 $E$ 于 $z_0$ 有极限，则其和、差、积、商（分母极限不为 0）沿 $E$ 在 $z_0$ 的极限为原函数在 $z_0$ 点的极限的和差积商.

**定理 1.2** 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 于点集 $E$ 上有定义. $z_0=x_0+iy_0$ 为 E 定位聚点，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0=u_0+iv_0$$

的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

**证明** 因为

$$f(z)-w_0=u(x,y)-u_0+i\left[v(x,y)-v_0\right]$$

由

$$\left.\begin{array}{l}|u(x,y)-u_0|\leq|f(z)-w_0|\\|v(x,y)-v_0|\leq|f(z)-w_0|\end{array}\right\}$$

可证必要性

由

$$|f(z)-w_0|\leq|u(x,y)-u_0|+|v(x,y)-v_0|$$

可证充分性.

**例 4** 设 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\eta$，则 $f(z)$ 在 $z_0$ 的某个去心邻域内有界.

**证** $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\eta$，故对 $\varepsilon=1,\exists\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-\eta|<1\Rightarrow|f(z)|\leq|f(z)-\eta|+|\eta|<1+|\eta|$$

## （三）连续性

**定义 1. 17** 设 $w=f(z)$在点集$E$上有定义， $z_0$为$E$ 的聚点，且 $z_0\in E$,若

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}}f(z)=f(z_0)$$

即对任给的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，只要$\left|z-z_0\right|<\delta$， $z\in E$，就有

$$\left|f\left(z\right)-f\left(z_0\right)\right|<\varepsilon$$

则称 $f(z)$ 沿 $E$ 于 $z_0$ 连续.

若 $f(z)$ 在 $E$ 的每一个点都连续，则称 $f(z)$ 在 $E$ 上连续或 $f(z)$ 为 $E$ 上连续函数.

**例3** （1）设

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)(z\neq0),\ f(0)=0$$

试证 $f(z)$在$z=0$ 无极限，从而在 $z=0$ 不连续.

**证** 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bullet\bar{z}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2i}\left(\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{r^2}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\frac{2r\cos\theta\bullet 2ri\sin\theta}{r^2}\\
&=2\cos\theta\sin\theta\\
&=\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

当 $z\to 0(\theta=0)$ 时， $f(z)\to 0$

当 $z\to 0(\theta=\frac{\pi}{4})$ 时， $f(z)\to 1$

故 $f(z)$在$z_0$ 处无极限，从而在 $z=0$ 处不连续.

（2）问 $f(z)=\begin{cases}\operatorname{Im} z/(1+|z|), z\neq 0 \\ 0, \qquad\qquad z=0\end{cases}$，在原点是否连续？

**解**　令 $z=x+iy$，则

$$\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}=\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$

故 $f(z)$在$z=0$ 处连续.

## （四）复变函数的性质

**性质 1**　设 $f(z),g(z)$ 沿 $E$ 于 $z_0$ 连续，若 $f(z),g(z)$在$E$ 连续，则上述函数在 $E$ 上连续.

**性质 2**　设函数 $\eta=f(z)$沿$E$于$z_0$ 连续（或在 $E$ 上连续），且 $f(E)\subseteq G$, 函数 $w=g(\eta)$在 $\eta_0=f(z_0)$（或 G）连续则复变函数 $w=g[f(z)]$ 沿 $E$ 于 $z_0$（or 于 $E$）也连续.

**性质 3**　定理 1、3 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 于点集 $E$ 上有定义，

$z_0=x_0+iy_0\in E$，则 $f$ 沿 $E$ 于 $z_0$ 连续的充要条件为 二元实函数 $u(x,y),v(x,y)$ 沿 $E$ 于 $(x_0,y_0)$ 连续.证 用定理 1、2 把极限值变为函数值即得.

**性质 4**　设 $f(z)$在$z_0$ 处连续，且 $f(z_0)\neq 0$，则 $f(z)$在点$z_0$ 的某个邻域内恒为 0;

**证明**　因为 $f(z)$在$z_0$ 连续，故对 $\varepsilon=\frac{|f(z_0)|}{2}>0$，$\exists\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \Rightarrow |f(z)|>|f(z_0)|-\varepsilon=\dfrac{|f(z_0)|}{2}>0$，

故 $f(z)$在$z_0$ 的邻域 $N_\delta(z_0)$ 内恒不为 0、

**注** ①证明不连续（在点 $z_0$ 处）方法.

a、在该点无定义　　b、在 $z_0$ 无极限（极限值$\neq f(z_0)$）

②分析中的聚点定理，闭集合定理及有限覆盖定理仍然成立.

**性质 5** 设 $f(z)$ 为有限闭集 $E$ 上的连续函数，则

（1）$|f(z)|$在$E$ 上有界，即$\exists M>0$，使$|f(z)\leq M|, z\in E$；

（2）$|f(z)|$在$E$ 上取得最大值和最小值；

（3）$f(z)$在$E$ 上一直连续$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，对 $E$ 上满足$|z_1-z_2|<\delta$ 的任意两点 $z_1$及$z_2$,有$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$；

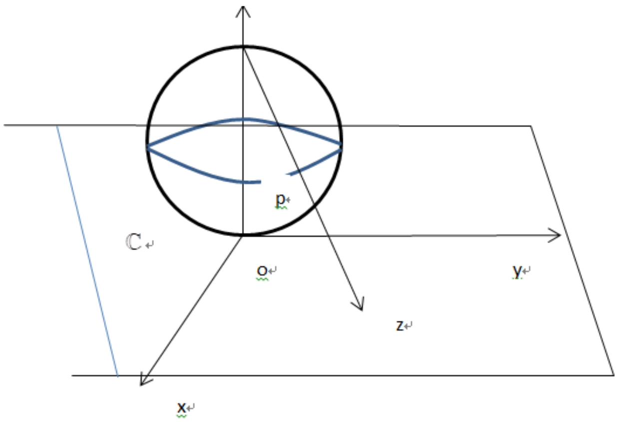
**注** 性质 5 对区域未必成立，如 $D=\{z\,||z|<1\}, f(z)=\dfrac{1}{1-z}$

## （五）复球面与无穷远点

### 1、复球面

如图 球面$\sum$与 $z$ 平面$\mathbb{C}$相切于$o$，过$o$ 作一垂线$on\cap\sum=N$——北极，$o$ 称为南极，对$\forall(x,y,0)\in\mathbb{C}$，连$zN$ 交球面$x^2+y^2+(u-1)^2=1$于点 P. P 称为$z$ 点的求极投影，$z$ 称为 P 的测地投影从而以此建立$z$ 平面$\mathbb{C}\to\sum\backslash\{N\}$，若$|z|$越大，P 越接近$N$，反之亦然，我们假想$z$ 平面上有一个理想点，模长为无穷远点与$N$ 对应，记为$\infty$（理解为一个“复数”）.

**定义** 复平面加上$\infty$称为扩充复平面，记为$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}+\{\infty\}$与扩充复平面相应的整个球面称为复球面.




**注**　复球面是扩充复平面的几何模型，其优越性在于将无界的复平面化为有界的形式来表示.

**2、几点规定**

（1）$\infty \pm \infty, 0, \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 无意义.

（2）$a \neq \infty$时$, \dfrac{\infty}{a} = \infty, \dfrac{a}{\infty} = 0, \infty \pm a = a \pm \infty = \infty$

（3）$b \neq 0$时$(b$可为$\infty), \infty \bullet b = \infty = b \bullet \infty, \dfrac{b}{0} = \infty$

（4）$|\infty| = +\infty$，但$\infty$的实部，虚部及辐角无意义.

（5）复平面上的每一条直线都通过$\infty$，同时，没有一个半平面含$\infty$

**3、扩充复平面上的几个概念**

（1）邻域

在扩充复平面上，满足$|z| > \dfrac{1}{\varepsilon}$（充分大）的所有点$z$所成之集，称为$\infty$的一个邻域，记为$N_{\varepsilon}(\infty)$，类似可给出$\mathbb{C}_{\infty}$关于$\infty$为集$E$的聚点，内点，边界点的概念.

**注**　① $\infty$为$\mathbb{C}_{\infty}$的内点，是复平面的唯一边界点（上闭集必为有界）

② 扩充复平面是唯一无边界的区域. $\mathbb{C}_{\infty}$上闭集未必有界

③ Jordan 定理依然成立.

区别

（2）单连通区域

在$\mathbb{C}_{\infty}$上，区域 D 内任一条简单闭曲线$\mathbb{C}$内部或外部（含$\infty$）仍含于 D，则称 D 为单连通区域. 如 $|z| > R > 0$在$\mathbb{C}$为多连通区域，在$\mathbb{C}_{\infty}$为单连通区域.

**注** $\mathbb{C}_\infty$ 上不含 $\infty$ 的区域定义与 $\mathbb{C}$ 内相同，含 $\infty$ 的区域为 $\mathbb{C}$ 上一区域与 $\infty$ 的一个邻域之并集.

（3）关于 $f(z)$ 的极限及连续（广义）

一般不具有常义情形的性质，其运算要符合上述规定.

① 广义极限

当 $z_0=\infty$为$E$ 聚点时，$\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in E}} f(z)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\rho>0,$使当$+\infty>|z|>\rho(z\in E)$时，

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

类似地可给出 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 及 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ 的定义

② $\lim\limits_{z\to\infty} z_n=\infty$ 可视为点列 $\{z_n\}$ 趋向 $\infty \Rightarrow C_\infty$ 上任何点列有聚点.

③ 广义连续 若 $z_0=\infty\in E, f(z)$在$E$ 有意义 or $f(z_0)=\infty$，且有 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ (z\in E)}} f(z)=f(z_0)$

则称 $f(z)$于$z_0$ 广义连续.

**例 5** $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在$\mathbb{C}_\infty$ 广义连续.

**证** $z\neq 0,\infty$时，$f(z)=\dfrac{1}{z}$ 连续，又

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0=f(\infty)=\frac{1}{\infty} \qquad \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty=f(0)=\frac{1}{0},$$

故 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 连续.

**注** $f(z)=z+\alpha;\alpha z;\dfrac{1}{z}$ 及多项式函数皆为 $\mathbb{C}_\infty$ 的连续函数.

## 五、小结

复函数的极限，连续及关系.

## 六、作业

$P_{43}$ 11、（1）（4）

## 七、说明与预习要求

1、无穷远点邻域正好对应着复球面上以北极 $N$ 为心的一个球盖. 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上即为任何一个圆周的外部（含 $\infty$），即

$$N(\infty): r<|z-a|$$

就称为以 $z=a$ 中心的 $z=\infty$ 的邻域（包括 $\infty$）;

$$N(\infty)-\{\infty\}: r<|z-a|<+\infty$$

就称为以 $z=a$ 为中心的 $z=\infty$ 的去心邻域；

为$\mathbb{C}$圆环 $r<|z-z_0|<R$ 的退化情形当 $a=0$ 时即为 T、B $P_{36-36}$ 及 $P_{196}$ 解说的情形.

2、预习思考题 （1）如何理解 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析？

（2）可导与解析的关系？

3、参考文献【1】,【6】