§2、幂级数（3 课时）

一、目的要求

1、判别幂级数的收敛性，掌握收敛半径等相关概念的意义.

2、掌握幂级数和函数的解析法.

二、重难点

1、重点

幂级数收敛性，收敛半径及求法，和函数解析法.

2、难点

用上极限求收敛半径，和函数的性质的应用.

三、教法

1、课堂讲授法，采用启发式

2、引用作图、设计过渡，自然导出新课，中间衔接恰当

四、教学手段

电教 CAI 演示（约 3 课时）

1、分类复习定义 4.1-定义 4.4，定义 4.5-定义 4.8（提问处）

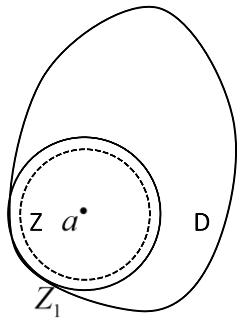
2、强调定义 4.9 由函数项级数的具体化到幂级数（提问处）

（一） 幂级数的敛散性 具有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

形式的复数项级数为幂级数，其中 c_n， $a \in C, n = 0,1,2,\ldots$ （a 称为该幂级数的中心）

幂级数是最简单的解析函数项级数，在理论和实际应用中都很重要，下面是幂级数收敛性之判别



如图 对以 a 为中心的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$，若其在点

$z_1 \neq a$ 处收敛,据收敛级数的必要条件知,∃M>0，使

$$\left|c_n(z-a)^n\right| \leq M (n = 0,1,2,\ldots)$$

对 $|z_1 - a| > |z-a|$ 内的任一 z，令

$$r = \frac{|z-a|}{|z_1-a|}$$

则

$$\left|c_n(z-a)^n\right| = \left|c_n(z_1-a)^n \frac{(z-a)^n}{(z_1-a)^n}\right| \leq M \cdot r^n$$

且 $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot r^n$ 收敛，从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ $|z_1-a| > |z-a|$（以 c_1 为心，

以$|z_1-a|$为半径的圆）内绝对收敛，且对任意

$$\overline{K}_\rho: |z-a|\le\rho<|z_1-a|;$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}M(\dfrac{\rho}{|z_1-a|})^n$ 为原幂级数的优级数，从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在$|z-a|\le\rho<|z_1-a|$内绝对且一致收敛，于是有

定义 4.10（Abel 定理） 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在某点$z_1(\ne 0)$收敛，则它必在圆$K: |z-a|<|z_1-a|$内内闭一致收敛且绝对收敛.

注 即在较小的圆心闭圆$|z-a|\le\rho<|z_1-a|$上绝对且一致收敛

由定义 4.10 易得

定理 4.11 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在$|z-a|=|z_2-a|$外部某点$z_3$处绝对收敛（必收敛）

这与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在$z_2$处发散矛盾，所以命题真.

（二） 幂级数的进一步研究

1、收敛半径 由定理 4.11 引入

定义 若∃R>0，且$R\ne+\infty$，使$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在圆周$|z-a|<R$外处处发散，则称R 为此幂级数收敛半径，$|z-a|<R$及$|z-a|=R$分别称为其收敛圆和收敛圆周.

约定 R=0 表示幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$仅在中心 a 收敛

R=+∞ 表示幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在 z 平面$C$上处处收敛.

注 幂级数在收敛圆周上可能

① 处处发散，如 $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 在$|z|=1$处通项不趋于 0

② 处处收敛，如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{z^{n+1}}{n(n+1)}$， $3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 为优级数

③ 既有收敛点又有发散点，如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^n$ 在 $z=1$ 收敛，在 $z=-1$ 发散.

2、收敛半径 R 之求法

引理 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径与实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$ 的收敛半径相同.

据实幂级数收敛半径的求法易得

定义 4.12 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的系数 c_n 合于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l \qquad (D'Abembert)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = l \qquad (\text{Cauchy}-Hadamard)$$

则该幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R\begin{cases}\dfrac{1}{l} & 0<l<+\infty \\ +\infty & l=0 \\ 0 & l=+\infty\end{cases}$

证法同实幂级数.

例 1 求下列幂级数的收敛半径 R

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ （2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ （3）$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$ （4）$1+z^2+z^4+z^9+\ldots$

解 （1）因

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot n! = 0$$

故 $R=+\infty$

（2）因

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$$

故 $R=1$

（3）因

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$$

故 $R=0$

（4）当 n 为平方数时 $c_n=1$，其他情形 $c_n=0$，因

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$$

故 $R=1$

例 2 求下列幂级数的收敛半径 R

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^n$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]^n z^n$ （3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^n}z^n$

（4）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径 R_1，求 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^p z^n$ 的收敛半径（$p\in Z$）

解（1）$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}$，故 $R=e$

（2）$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}[2+(-1)^n]=3$，故 $R=\frac{1}{3}$

（3）$\frac{1}{R}=(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1+(-1)^n}{2^n}})^{-1}=(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{2^n}})^{-1}=(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{n}})^{-1}=2$，故 $R=\frac{1}{2}$

（4）$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|^p}=(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|})^p=(\frac{1}{R_1})^p$，故 $R={R_1}^p$

（三） 幂级数和的解析性

通过复习定义 4.6 及观察幂级数相关引出

定义 4.13

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的和函数 $f(z)$ 在具有非零收敛半径 R 的收敛圆 $K:|z-a|<R(0<R\le+\infty)$ 内解析

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在 K 内可以逐项微分任意次，且收敛半径不变，即

$$f^{(p)}(z)=p!c_p+(p+1)p\ldots 2c_{p+1}(z-a)+\ldots+n(n-1)\ldots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p}+\ldots(p\in N)$$

（3）$c_p=\frac{f^{(p)}(a)}{p!}(p=0,1,2,\ldots)$

（4）幂级数可沿 K 逐项积分且收敛半径不变

简证 因 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在收敛圆 $K:|z-a|<R$ 内内闭一致收敛（定义 4.10）且各项在 C

解析。据定义 4.9 易得定义 4.13 的前（1）（2）结论，逐项求 p 阶导数后即得（2）中等式.令 z=a，由（2）即得

$$c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(p = 0,1,2,\ldots)$$

又

$$f(a)=f^{(0)}(a)=c_0$$

立得（3），因沿 K 内曲线 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 一致收敛且通项连续，由定义 4.7 易得（4）.

应用

例 3 证明 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|<1$ 内解析，并求 $f'(z)$.

证 所给幂级数的收敛半径 $R=1(\neq 0)$,故由定义 4.13（1）（2）知 在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 解析,且在 $|z|<1$ 内有

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$$

其收敛半径为 R=1

例 4 求 $\int_\gamma (\sum_{n=-1}^{\infty} z^n)dz$，其中 γ 为以 0 为心，$\frac{1}{2}$ 为半径之圆周.

解 $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} z^n$,由课本例 4.2 知 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 内内闭一致收敛,从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 γ 上一致收敛,由定义 4.7 或 4.13（4）有

$$\int_\gamma (\sum_{n=-1}^{\infty} z^n)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma z^n dz = 0 \qquad （1）$$

再由复积分的线性运算性质有

$$\int_\gamma (\sum_{n=-1}^{\infty} z^n)dz=\int_\gamma \frac{1}{z}dz + \int_\gamma (\sum_{n=0}^{\infty} z^n)dz = 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

思考 1、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1}$ 的收敛半径，收敛圆（$|z-3|<1$) 及和函数 $\frac{z-3}{(4-z)^2}$

2、求满足微分方程 $f'(z)+cf(z)=0$（c 为复常数）的中心为 0 的幂级数 $f(z)$，并求其收敛半径 $R>0$.

五、小结

1、收敛判定；

2、收敛半径求法；

3、和函数的解析性.

六、作业

$\mathrm{P}_{178}2$ 选 3

七、补充说明

思考题解法

1、（1）$\mathrm{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})=1$， $R=1$，收敛圆为 $|z-3|<1$

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{1-z}\ (|z|<1)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=(\dfrac{1}{1-z})'\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n=(\dfrac{1}{1-z})'\ z=\dfrac{z}{(1-z)^2}$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(z-3)^n=\frac{z-3}{(1-z+3)^2}=\frac{z-3}{(4-z)^2}\ (|z-3|<1)$$

2、令 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在收敛圆 $|z|<R$ 内.据定义 4.13（2）有

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n$$

代入方程有

$$0=f'(z)+cf(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n+c\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}[c\cdot c_n+(n+1)c_{n+1}]z^n$$

$$\Rightarrow cc_n+(n+1)c_{n+1}=0, n\geq 0$$

$$\Rightarrow c_n=\frac{(-c)^n}{n!}c_0 \qquad （对 n\geq 1）带入幂数$$

得

$$f(z)=c_0(1+\frac{(-c)^n}{n!}z^n)$$

当 c=0 时，$f(z)=c_0$，此时 $R=+\infty$

当 $c \neq 0$ 时，$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|c|}=+\infty$

八、预习要求 预习并回答

1、比较实复分析中 Taylor 级数和 Taylor 展式的关系（收敛性）

2、总结（列出）解析函数幂级数展开主要的方法

3、参考文献【1】,【4】-【6】