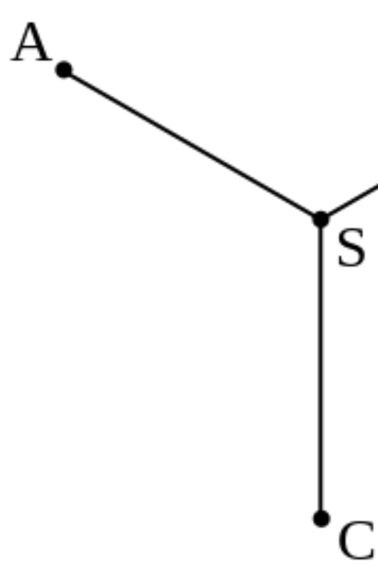
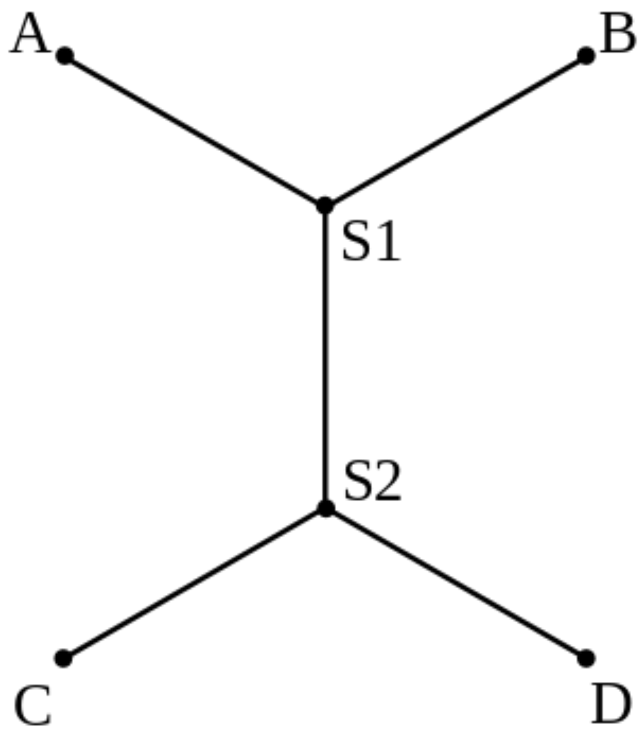
应用运筹学基础：组合优化 (6) - 近似算法选讲 (4)

这节课介绍了斯坦纳树问题（Steiner tree）与旅行商问题（TSP），并讲解了它们的近似算法。

平面上的斯坦纳树

平面上的斯坦纳树指的是这样的问题：平面上有 n 个点，要用总长尽量少的线段把它们连通起来。要注意，线段不一定要在给定的 n 个点相交（不然跑个最小生成树就没了），完全可以在平面上的其它点相交。最优解中，线段在平面上除了给定点外的交点称为斯坦纳点。





可以从上图看出 $n = 3$ 和 $n = 4$ 的情况，S、S_1 和 S_2 是斯坦纳点。$n = 3$ 时，斯坦纳点就是三角形的费马点。

平面上的斯坦纳树是一个 NP-Hard 问题。

满足三角不等式的完全图上的斯坦纳树

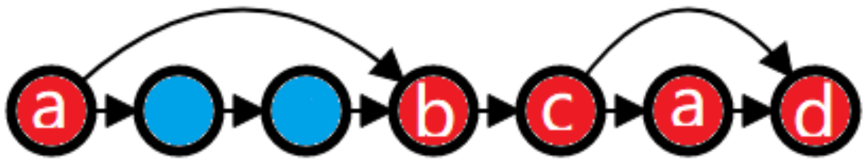
满足三角不等式的完全图上的斯坦纳树指的是这样的问题：给定一张满足三角不等式（对于任意两两有连边的三点 x, y, z，有 $w(x, y) \le w(x, z) + w(z, y)$，$w$ 表示边权）的完全图 $G = (V, E)$ 和 $S \subseteq V$，求 G 的连通子图 G'，使得 S 中的所有点都在 G' 中，且 G' 边权之和最小。

即使有了这么多的限制条件，这个问题仍然是一个 NP-Hard 问题（证明见此）。下面我们提出它的一个 2- 近似算法：其实很简单，只要算出 S 的最小生成树即可（别忘了是完全图，S 肯定是连通的）。

算法近似比证明：

假设最优的斯坦纳树边权之和为 OPT，最小生成树的边权之和为 MST。我们把最优斯坦纳树中的每条边复制一次，得到一张有欧拉回路的图，它的边权总和为 $2\mathrm{OPT}$。

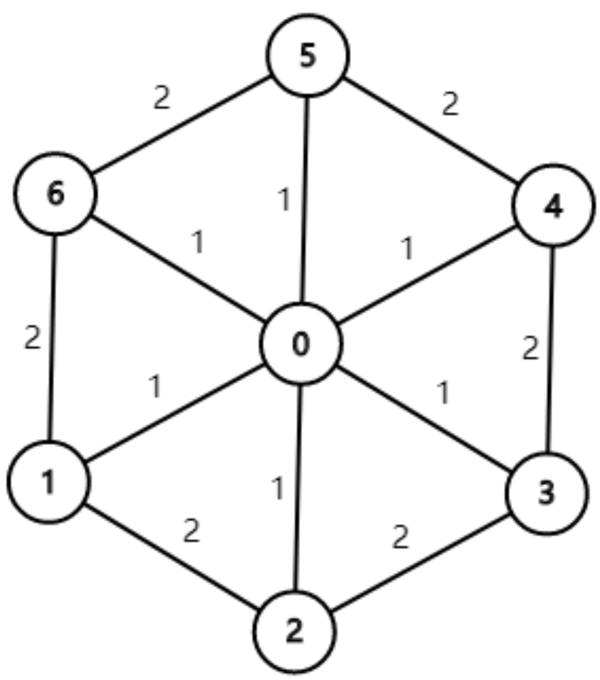
我们在欧拉图中任选一个 S 中的点出发，找到一条欧拉回路 L。我们只走 S 中的点，且每个点只走一次，如果不能沿着 L 走到下一个点就直接“跳到”那个点（别忘了是完全图，这种“跳跃”称为 short-cutting）。



举个例子，例如上图是我们找到的欧拉回路的一部分，红色点是 S 中的点。由于不能从第一个 a 沿着 L 走到 b，我们要跳过去；由于 a 已经走过了，所以不能走 $\mathrm{c} \to \mathrm{a} \to \mathrm{d}$，而是要从 c 直接跳到 d。

由于完全图符合三角不等式，直接跳过去肯定不比沿着 L 走过去来得长。这样，我们就找到了 S 的一个连通图，而且这个连通图的边权之和至多为 $2\mathrm{OPT}$。

别忘了，S 的任何连通图，边权之和都不比最小生成树小。所以我们有 $\mathrm{MST} \le 2\mathrm{OPT}$。这就证明了算法的近似比是 2。



用上图的例子说明这个近似比对于这个算法是紧的。图中没有画出来的边权值都是 2。令 $S=\{1,2,\ldots,n\}$，显然最优解为 n（利用中间的 0 作为斯坦纳点），但用上面的算法会得到 $2(n-1)$ 的结果，在 n 足够大的时候近似比趋近于 2。

旅行商问题的近似比

大家都知道，完全图上的 TSP 是 NP-Hard。然而，完全图上的 TSP 甚至没有很好的近似比。下面证明完全图上的 TSP 不存在近似比为 $O(2^{\mathrm{poly}(n)})$ 的多项式算法，其中 $\mathrm{poly}(n)$ 表示 n 的多项式。

我们利用哈密尔顿回路问题进行证明。对于普通无向图 $G=(V,E)$ 上的哈密尔顿回路问题，我们构造完全图 $G'=(V,E')$，E' 中一条边 e' 的边权 $w(e')$ 定义如下：
$w(e')=\begin{cases}1 & e'\in E\\ 2^{\mathrm{poly}(n)}n & e'\notin E\end{cases}$ 这张完全图的输入规模仍然是 n 的多项式。

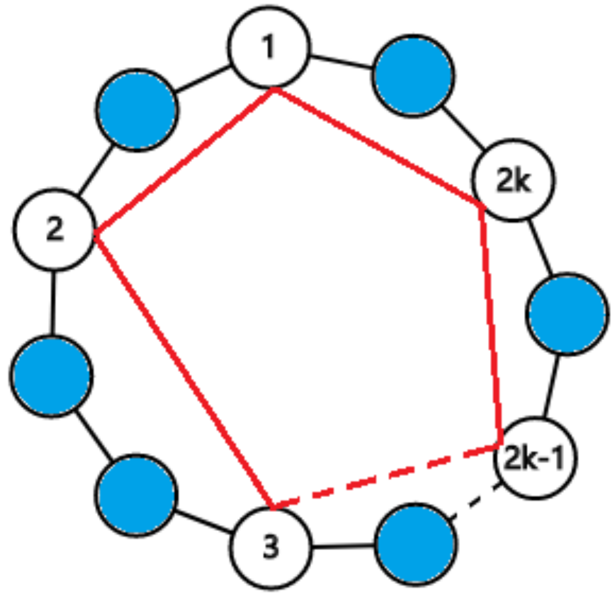
如果 TSP 存在近似比为 $O(2^{\mathrm{poly}(n)})$ 的算法，那么对于上面的完全图，算法就绝对不能选 $e'\notin E$ 的边。但如果算法只用 $e'\in E$ 的边构造出了一个解，那就同时找到了 G 中的哈密尔顿回路。我们知道，找哈密尔顿回路本身就是 NPC 的，这就完成了证明。

满足三角不等式的完全图的旅行商问题

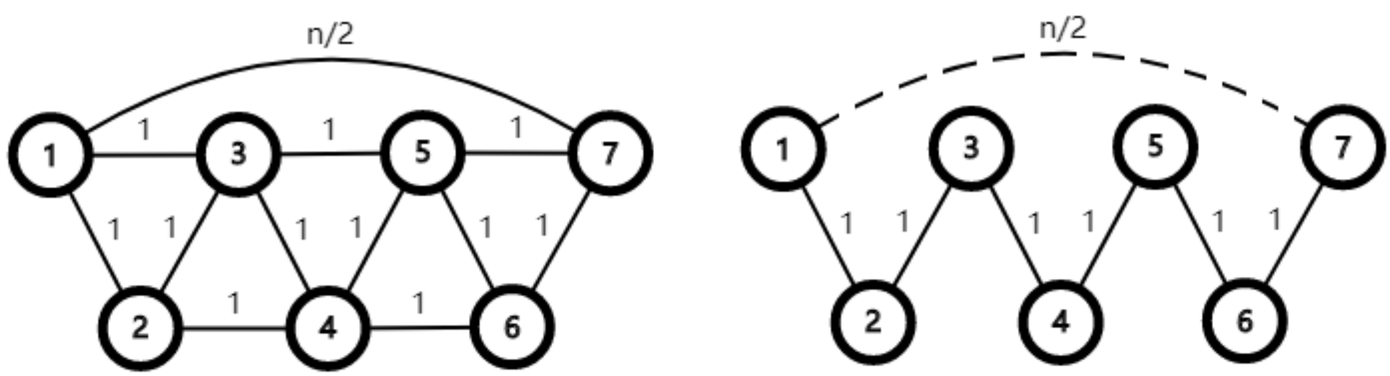
既然普通完全图上的旅行商问题这么难，我们给它加一点限制。在满足三角不等式的完全图上，TSP 就有很好的近似比。

首先容易证明这个问题近似比上界为 2：先跑个最小生成树（边权和肯定小等于最优哈密尔顿回路），把树上每条边重复一次变成欧拉图，在欧拉图上进行和斯坦纳树类似的 short-cutting 即可。

不过我们可以证明一个更紧的上界。不一定要把树上每条边都重复一次才能得到欧拉图嘛，如果我们把树上度数为奇数的点（下面简称奇点）进行配对（一张图的奇点肯定有偶数个，不用担心有一个匹配不上），每一对之间连一条边，那么构成的图就都是偶点，也就是一张欧拉图了。这种配对工作非常容易，只要用带花树什么的求一个最小权完美匹配即可。下面证明这种算法的近似比为 1.5。



假设最优的哈密尔顿回路如上图，白色的点是最小生成树上的奇点。我们将奇点按顺序进行 short-cutting，就能得到两个不相交匹配（1 - 2, 3 - 4, ..., 2k-1 - 2k 以及 2 - 3, 4 - 5, ..., 2k - 1）。由于满足三角不等式，这两个匹配的权值之和肯定不大于 OPT，那么两个匹配中较小的那个权值肯定不大于 $0.5\mathrm{OPT}$。别忘了，我们在算法中求出来的可是最小完美匹配，那么最小完美匹配的权值肯定也不大于 $0.5\mathrm{OPT}$。最小生成树 + 最小权完美匹配就证明了 1.5 的近似比。



上面的例子可以说明 1.5 对这个算法是紧的，没有画出来的边权值都是 2。右边实线是算法可能获得的最小生成树，虚线是算法可能算出的最小权完美匹配。显然最优解为 n，而算法可能得出的解是 $n + \frac{n}{2}$。只要“梯形”上面的点足够多，那么近似比就是 1.5。

满足三角不等式的完全图的最短哈密尔顿路

下面来考虑一个有些不一样的问题：在满足三角不等式的完全图中，给定 $k=\{0,1,2\}$ 个固定点（即指定起点或者终点，或者都指定，或者都不指定），求满足固定点的最短哈密尔顿路。

这个问题可以通过以下近似算法解决：

\1. 首先求个最小生成树 T；

\2. 令点集 S 包含两类点：在最小生成树上是偶点的固定点（因为要把固定点变奇点，才好找以它们开头的欧拉路），以及在最小生成树上是奇点的非固定点；

\3. 类似于 TSP 问题，求个 S 的最小权匹配 M，要求有 $2-k$ 个非固定点不匹配（只要加入 $2-k$ 个辅助点，与非固定点连权值为 0 的辅助边即可）。容易发现，这样会恰有 2 个点成为奇点，并且固定点一定在这 2 个点里；

\4. 这样 $T\cup M$ 就是一张有欧拉路的图，用 short-cutting 的方法把欧拉路变成哈密尔顿路即可。

这个算法在 $k\in\{0,1\}$ 时是 1.5 近似算法。下面进行证明。

$k=0$

证明思想与 TSP 类似。假设最优解上有 $2t$ 个奇点，那么可以拆成两个匹配：1 - 2, 3 - 4, ..., (2t-3) - (2t-2)（2t-1 和 2t 没有匹配） 与 2 - 3, 4 - 5, 6 - 7, ..., (2t-2) - (2t-1)（1 和 2t 没有匹配），就可以证明 M 的权值之和至多为 $0.5\mathrm{OPT}$。

$k=1$

不妨设起点（设为 s）是固定点。

如果起点是奇点比较好办，假设最优解上有 $2t+1$ 个奇点（不含起点），那么可以拆成两个匹配：1 - 2, 3 - 4, ..., (2t-1) - 2t（2t+1 没有匹配）与 2 - 3, 4 - 5, ..., 2t - (2t+1)（1 没有匹配）；

如果起点是偶点就比较麻烦了。假设最优解上有 $2t$ 个奇点，因为起点必须被匹配，我们没法把最优解拆成两个匹配符合要求的匹配。不过我们可以先把最优解拆成两个匹配 M_1：s - 1, 2 - 3, ..., (2t-2) - (2t-1)（2t 没有匹配），以及 M_2：1 - 2, 3 - 4, ..., (2t-1) - 2t（s 没有匹配）。

记 $w(M)$ 表示匹配 M 的权重之和。如果 $w(M_1) < w(M_2)$ 那把 M_1 并入 T 答案就已经出来了，否则我们用 $T \cup M_2$ 得到一张欧拉图，找出一条哈密尔顿回路，再去掉连接 s 的一条边，获得以 s 为起点的哈密尔顿路。由于 $w(M_2) \le w(M_1)$，而我们加进图的是 M_2，所以仍然有 1.5 的近似比。

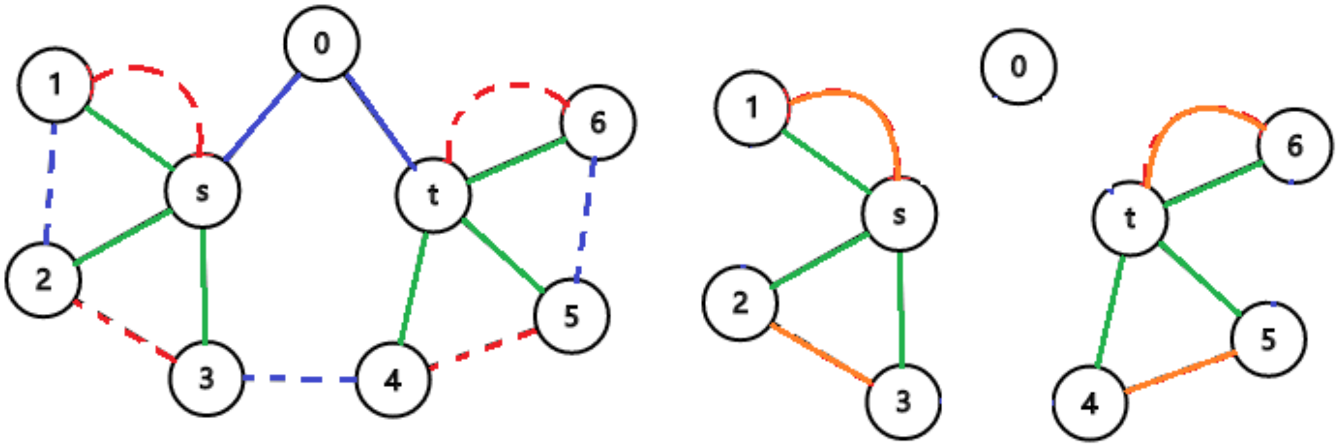
$k = 2$

$k = 2$ 的情况稍有不同，这个算法在同时给定起点与终点的情况下，近似比为 5/3。这次我们要把 $T \cup \mathrm{OPT}$ 拆成 3 个匹配来完成证明。下面以起点（记为 s）与终点（记为 t）均为偶点为例进行证明，其它情况类似。

不难发现，$T - \{s, t\}$ 中有偶数个点，那么 S 中也有偶数个点。设最优路径依次经过 $s, v_1, v_2, \ldots, v_{2k}, t$，其中 v_i 是 T 上的奇度点。

记 $u - v$ 表示仅通过最优路径中的边从点 u 走到点 v，$u \sim v$ 表示仅通过 T 中的边从点 u 走到点 v。我们尝试将 $T \cup \mathrm{OPT}$ 拆成这样三个部分（不一定是匹配），且每条边至多使用一次：
\1. $s - v_1, v_2 - v_3, \ldots, v_{2k-2} - v_{2k-1}, v_{2k} - t$；
\2. $v_1 - v_2, v_3 - v_4, \ldots, v_{2k-1} - v_{2k}, s \sim t$；
\3. 找到 $s, t, v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ 的一个排列 $u_1, u_2, \ldots, u_{2k+2}$，
$u_1 \sim u_2, u_3 \sim u_4, \ldots, u_{2k+1} \sim u_{2k+2}$。

由于三角不等式，$u \sim v$ 所使用的边的权值总和，一定大等于直接连接 u 和 v 的边的权值。如果我们能找到以上拆分，且每条边至多使用一次，那么我们就找到了 3 个 S 的完美匹配，其权值总和不超过 $2\mathrm{OPT}$。这样，S 的最小权完美匹配权值就不会超过 $\frac{2}{3}\mathrm{OPT}$，就能证明 $\frac{5}{3}$ 的近似比。



举个例子。左图中，实线是 T 的边，虚线是 OPT 中的边；红边是部分 1 中的边，蓝边是部分 2 中的边，绿边是部分 3 中的边。

再看右图。虽然所有绿色边不能构成一个匹配，但是橙色边却可以构成一个匹配，而且权值之和一定不大于绿色边的权值之和。

很显然，部分 1 与部分 2 中除开 $s \sim t$ 之外的边，就组成了最优路径。我们通过以下算法，在 T 上找到部分 3 以及部分 2 中 $s \sim t$ 中的边：

\1. 在 T 中找到从 s 到 t 的路径作为 $s \sim t$，去掉使用过的边；
\2. 对于每个连通块，选择任意一个奇度点 u，在 T 中找到通往另一个奇度点 v 的路径，且路径上不含其它奇度点。去掉使用过的边；
\3. 重复步骤 2，直到 S 中的点都在步骤 2 中找到了对应的点。

根据算法描述容易看出，如果算法成功退出，我们就找到了需要的拆分。接下来说明 S 中的每个点都能在步骤 2 中找到对应的点，即算法可以成功退出。

注意到 s 与 t 均为偶度点。步骤 1 结束后，由于 s 与 t 是路径端点，去掉路径上的边后，s 与 t 都变成了奇度点；而路径上的其它点在去掉路径上的边后，奇偶性不变。

步骤 2 中，由于每个连通块一定有偶数个奇度点，所以一定可以找到符合要求的 u 和 v。由于路径中间不含其它奇度点，所以其它点的奇偶性不变，不影响算法的后续运行；而 u 与 v 作为路径端点，在去掉路径中的边后都变成了偶度点，不会再次被选中，也不影响算法的后续运行。

因此，我们一定可以将 $T \cup \mathrm{OPT}$ 拆成 S 的 3 个完美匹配，即可证明算法的近似比不超过 $\frac{5}{3}$。