§3、解析函数的 Taylor 展式

一、目的要求

1、灵活运用 Taylor 定理，Taylor 系数公式并掌握其解析函数的又一等价刻画定理.

2、掌握幂级数的和函数在其收敛圆周上的状况.

3、掌握一些主要函数的 Taylor 展式及解析函数（常用的幂级数）展开.

二、重难点

1、重点 Taylor 定理 解析函数的另一等价刻画初等函数的 Taylor 展式.

2、难点 解析函数的 Taylor 展式（幂级数展开）.

三、教法

总结方法，以具体实例说明抽象方法，同时突出难点采用启发式的课堂讲授法.

四、教学手段 电教 CAI 展式（约 3 课时）

本节主要研究在圆内解析函数展开成幂级数问题.

（一）Taylor 定理

复习定义 4.13 并由此引出定义 4.14（提问处）

定义 4.14(泰勒定理) 设 $f(z)$在区域D内解析，$a\in D$，只要圆 K:$|z-a|<R$ 含于D，

则 $f(z)$能展成幂级数（Taylor 级数）

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (\Gamma_\rho:|\xi-a|=p,0<\rho<R,n=0,1,2,\ldots)$$

且展式是唯一的.

证明 设z为K内任意取定的点，总有一个圆周Γ_ρ:$|\xi-a|=\rho(0<\rho<R)$，使z含于

Γ_ρ 内，由 Cauchy 积分公式得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\frac{1}{\frac{z-a}{\xi-a}}\right)d\xi$$

当$\xi\in\Gamma_\rho$时，$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho}<1$，此时有

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$$

右端级数当$\xi\in\Gamma_\rho$时为一致收敛的，以Γ_ρ上的有界函数$\frac{f(\xi)}{\xi-a}$相乘，仍然得Γ_ρ 上的一致

收敛级数

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\cdot\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$$

将上式沿Γ_ρ积分，并乘以$\dfrac{1}{2\pi i}$，根据逐项积分定理有

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\end{aligned}$$

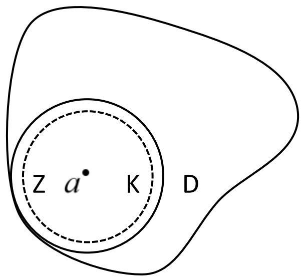
注 ① 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$是它的和函数$f(z)$在收敛圆盘内的泰勒展式，亦即

$$c_0=f(a),c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(n=1,2,3,\ldots)$$

从而有在定义 4.14 中幂级数的和函数$f(z)$在D内不可能有另一种形式$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的幂级数展式，即 解析函数的幂级数展式是唯一的.

② 定义 4.14 展式中幂级数的收敛半径大于或等于R.

在定义 4.14 中$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$称为$f(z)$在点a的 Taylor 展式，$c_n$称为其 Taylor 系数，级数$c_n(z-a)^n$称为 Taylor 级数.



推论 任一具有收敛半径R>0 的幂级数都是它的和函数在收敛圆内的 Taylor 展式.

综合定义 4.13（1）和 4.14 可得刻画解析函数的第四个等价定理

定义 4.15 （1） $f(z)$在区域D内解析的充要条件是

$$\forall a\in D,f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n(z\in K_\rho:|z-a|<R_a)$$

(2) Taylor 级数的 Cauchy 不等式 若$f(z)$在$|z-a|<R$内解析，则

$$\left|c_n\right| \le \max_{|z-a|=\rho}\left|f(z)\right|/\rho^n \quad (0<\rho<R,\ n=0,1,2,...)$$

（一） 幂级数的和函数在其收敛圆周上的状况

定义 4.16 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径 R>0，且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n (z\in K:\left|z-a\right|<R)$$

则 $f(z)$ 在收敛圆周 C:$\left|z-a\right|=R$ 上至少有一个奇点.

解析函数 $f(z)$ 在一点a 幂级数（Taylor 展式）的收敛半径等于从该点到 $f(z)$ 最近奇点的距离.

注 纵使级数在收敛圆周上处处收敛，其和函数在收敛圆周上至少有一个奇点.

例见T. B. P_{156}

$$f(z)=\frac{z^n}{n^2}$$

易知 R=1，且在 $\left|z\right|=1$ 上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 敛散性知其绝对收敛，故

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在 $\left|z\right|\le 1$ 绝对且一致收敛，但

$$f'(z)=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+...+\frac{z^{n-1}}{n}+...(\left|z\right|<1)$$

当z 沿实轴从单位圆趋于 1 时 $f'(z)\Rightarrow +\infty$，故z=1为 $f(z)$ 的奇点.

（二） 一些初等函数的泰勒展式

1、据定义 4.14 立即可以得出

例1 在 z 平面上解析的函数 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 在 $z=0$ 的 $Taylor$ 展式为

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad (\left|z\right|<+\infty)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z=1-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

例 2 （1）在$|z|<1$时有 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

（2）$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z|<1)$

例 3 多值函数$Ln(1+z)$以$z=-1$，∞为支点将 z 平面沿负实轴从-1 到∞割破，在所剩区域G（特别是$|z|<1$）内；Ln(1+z)（主支）在单位圆内，有

$$f_0(z)=\frac{1}{1+z!}，\quad f_0^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+z)^n}$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

从而有

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \qquad |z|<1$$

Ln(1+z)的各支展式应为

$$\ln_k(1+z)=2k\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \qquad (k\in Z,|z|<1)$$

注 可由例 2 类比实分析的形式得出（求积、导）

$$\ln_0(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad \frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

例 4 求$(1+z)^2$的如下解析分支在$z=0$处的泰勒展式（α不是整数）

$$e^{\alpha\ln(1+z)}(\ln 1=0)$$

解 已知分支在z=0处的值为 1，它在z=0的一阶导数为α，二阶导数为$\alpha(\alpha-1)$，n 阶导数为

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\ldots$$

所给分支在z=0（或$|z|<1$内）的泰勒展示为

$$(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n \qquad |z|<1$$

其中

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

该展式为二项式定理推广，适用 $n \in Z$ 的情况.

2、利用基本展式求解析函数的 Taylor 展式

（1）方法 $\begin{cases} \text{直接法（利用定理 4.14 求出 } c_n \text{ 的展示} \\ \text{间接法} \end{cases}$

（2）要求 $\begin{cases} \text{① 结果要化成标准式} \\ \text{② 写出收敛半径} \\ \text{③ 求解过程中尽量避免级数相乘除} \end{cases}$

间接法解题实例

（1）利用已知展式

例 5 求 $f(z)=e^z\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展式

解法 1 见 T. B. $P_{167}eg4.12$

解法 2 为避免级数相乘，将 $\cos z$ 用指数表示，因

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}e^z(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}\left[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right]$$

故

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}z^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[(1+i)^n+(1-i)^n\right]z^n$$

将 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ 及 $1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ 代入得

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}(e^{\frac{n\pi}{4}i}+e^{-\frac{n\pi}{4}i})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n \qquad (|z|<+\infty)$$

解法 3 用 Cauchy 乘积之法

例 6 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$ 按 $z-1$ 的幂展开，并指明收敛范围

解 由题意知

$$f(z)=\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{(z-1)+3}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$$

$$=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{z-1}{3})^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n\cdot(z-1)^n$$

例 7 求$\sqrt{z+i}$ $(\sqrt{i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})$在 z=0 的 Taylor 展式

解 因为$\sqrt{z+i}$的支点为$-i$及∞，故其指定支点在$|z|<1$内单值解析，故

$$\sqrt{z+i}=\sqrt{i}\sqrt{1+\frac{z}{2}}=\sqrt{i}(1+\frac{z}{i})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{z}{i}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(\frac{z}{i})^2+\ldots+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(\frac{z}{i})^n+\ldots\right]\qquad(|z|<1)$$

（2）利用幂级数的乘除运算（选讲）

例 8 把$e^z\sin z$展成 z 的幂级数

解 $e^z\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^n$，$\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

两级数在$|z|<+\infty$内绝对收敛，故 Cauchy 积也绝对收敛

	1	1	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	$\cdots$
0	0	0	0	0	0	$\cdots$
1	1	1	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	$\cdots$
0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$-\frac{1}{3!}$	$-\frac{1}{3!}$	$-\frac{1}{3!}$	$-\frac{1}{3!2!}$	$-\frac{1}{3!3!}$	$-\frac{1}{3!4!}$	$\cdots$
0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{3!2!}$	$\frac{1}{3!3!}$	$\frac{1}{3!4!}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$$e^z\sin z=0+(1+0)z+(0+1+0)z^2+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})z^3+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!})z^4+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!\cdot2!}+\frac{1}{4!})z^5+\ldots$$

$$=z+z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{30}z^5+\ldots\qquad(|z|<+\infty)$$

例 9 求$\tan z$在 z=0 的泰勒展式

解析 因$\tan z$奇点为$z_k=(k+\dfrac{1}{2})\pi$ $(k\in Z)$而距原点 z=0 最近的奇点为$z_0=\dfrac{\pi}{2}$，

$z_1=-\dfrac{\pi}{2}$，函数 $\tan z$ 在 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内解析且能展成 z 幂级数

解　　$\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots$$

可像多项式按升幂排列用直式作除法那样（分看系数），将分式的分子、分母的幂级数用直式相除得

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots$$

故

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\ldots\qquad (|z|<\frac{\pi}{2})$$

（3）待定系数法

例 10 求 $f(z)=\sec z$ 在 $z=0$ 的 Taylor 展式

解　同例 9 分析知 $f(z)=\sec z$ 在 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内可展成幂级数，设

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

其中 c_0，c_1，$c_2,\ldots$，$c_n,\ldots$ 为待定系数，故

$$f(-z)=f(z)=c_0-c_1z+c_2z^2\ldots$$

由 Taylor 展式的唯一性得

$$c_1=c_3=c_5=\cdots=0$$

所以

$$1=\cos z\cdot\sec z=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots)(c_0+c_2z^2+c^4z^4+\ldots)$$

$$\underset{\text{乘积}}{\overset{Cauchy}{=}} c_0+(c_2-\frac{c_0}{2!})z^2+(c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!})z^4+\ldots$$

比较两端系数得　$c_0=1$，$c_2=\dfrac{1}{2!}$，$c_4=\dfrac{5}{4!},\ldots$

$$\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\ldots\qquad (|z|<\frac{\pi}{2})$$

注　本例亦可直接用幂级数除法（分子为 1）.

（4）微分方程法

例 11 把 $\frac{1}{e^{1-z}}$ 展成幂级数

解析 $z=1$ 为 $f(z)=\frac{1}{e^{1-z}}$ 在 C 内唯一奇点，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，从而能展成幂级数.

$$f(z)=\frac{1}{e^{1-z}}$$

求导

$$f'(z)=\frac{1}{e^{1-z}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=f(z)\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$$

即

$$(1-z)^2 f'(z)-f(z)=0 \qquad (2)$$

对（2）逐次求导

$$(1-z)^2 f''(z)+(2z-3)\ f'(z)=0 \qquad (3)$$
$$(1-z)^2 f'''(z)-(4z-5)\ f''+2f'(z)=0 \qquad (4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由 $f(0)\overset{(1)}{=}e$ 由上列幂微分方程得

$$f'(0)\overset{(2)}{=}e,\quad f''(0)\overset{(3)}{=}3e,\quad f'''(0)\overset{(4)}{=}13e\quad \ldots$$

故

$$\frac{1}{e^{1-z}}=e(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\ldots)\qquad (|z|<1)$$

逐项求导逐项积分法

例 12 用逐项求导法求 $\frac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 内 Taylor 展式

解 因

$$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\left[(1-z)^{-1}\right]''\qquad (|z|<1)$$

用逐项求导法算得

$$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]''=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)z^m\qquad (|z|<1)$$

例 13 求 $f(z)=\ln\frac{z-1}{z+1}$ 在 $z=0$ 的泰勒展式，其中 $f(z)$ 是符合条件 $f(0)=\pi i$ 的那一单值解析分支

解析 因为 $Ln\frac{z-1}{z+1}$ 的分支为-1 及+1，在 $|z|<1$ 内它能分出所求的单值解析分支，它

在$|z|<1$内能展成z的幂级数，因

$$f'(z)=(\ln\frac{z-1}{z+1})'=\frac{z-1}{z+1}(\frac{z-1}{z+1})'$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{1-z}-\frac{1}{z+1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^{n+1}-1]z^n$$

上式两端在$|z|<1$内沿 0 到z积分得

$$c_n\frac{z-1}{z+1}-\pi i=\int_0^z(\ln\frac{z-1}{z+1})'dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}[(-1)^{n+1}-1]z^{n+1}$$

故

$$\ln\frac{z-1}{z+1}=\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^n-1]z^n \qquad (|z|<1)$$

（5）代换法

例 14　把函数$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$展成$z-1$的幂级数

解析　$f(z)$在C上有唯一的奇点$z=-2$，$z=1$为解析点，从而收敛半径$R=|-2-1|=3$，收敛圆 $|z-1|<3$

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}$$

令$g(z)=\frac{1}{3}(z-1)$，则

$$|g(z)|=\frac{1}{3}|z-1|<1$$

由

$$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n \qquad (|z|<1)$$

$$\frac{1}{[1+g(z)]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)[g(z)]^n \qquad (|g(z)|<1)$$

$$f(z)=\frac{1}{9}\frac{1}{\left[1+g(z)\right]^2}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left[g(z)\right]^n \qquad (|g(z)|<1)$$

$$=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n(n+1)(z-1)^n \qquad (|z-1|<3)$$

$$=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(\frac{z-1}{3})^n \qquad (\left|\frac{z-1}{3}\right|<1)$$

五、小结

1. Taylor 定理.
2. 常见初等函数的 Taylor 展式

六、作业

P_{179}5(4)、7(2)

七、补充说明

把解析函数展成幂级数用间接法时，可能多法并用，也可能有多种解法，另外，泰勒展式可广泛用于解题.

1. 将 $f(z)=\frac{z-1}{z^3}$ 在 $z=-1$ 展开成泰勒级数

解 令 $t=z-(-1)=z+1$ 代入得

$$f(z)=\frac{z-1}{z^3}=\frac{t-1-1}{(t-1)^3}=\frac{t-2}{(t-1)^3}=-\frac{t-2}{(1-t)^3} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(1-t)^3}=(1-t)^{-3}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n \qquad (|t|<1) \qquad (2)$$

代入（1）得

$$\frac{z-1}{z^3}=-(t-2)\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2t-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n$$

$$=-t-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)nt^n+2+3\cdot 2t+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n$$

$$=2+5t+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)[(n+2)-\frac{n}{2}]t^n \qquad (|t|<1)$$

$$=2+5(z+1)+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)[(n+2)-\frac{n}{2}](z+1)^n \qquad (|z+1|<1)$$

2、设 $-1\le t\le 1$ 为参数，求 $f(z)$ 函数 $f(z)=\dfrac{4-z^2}{4-4zt+z^2}$ 在 $z=0$ 的泰勒展式

解析　令 $t=\cos\varphi$，并将展成最简分式

$$f(z)=\frac{4-z^2}{4-4z\cos\varphi+z^2}$$

$$=-1+\frac{1}{1-\frac{z}{2}e^{-i\varphi}}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}e^{i\varphi}}$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n e^{-in\varphi}+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n e^{in\varphi}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}z^n$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\arccos t)}{2^{n-1}}z^n \qquad |z|<2$$

由三角知识知所求幂级数原数

$$T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t) \qquad (n=0,1,2,...)$$

是一个 t 的 n 次多项式（称为切比雪夫多项式）

3、试求下列级数之和

（1）$c=1+\dfrac{\cos z}{1!}+\dfrac{\cos 2z}{2!}+...+\dfrac{\cos nz}{n!}+...$

（2）$s=\dfrac{\sin z}{1!}+\dfrac{\sin 2z}{2!}+...+\dfrac{\sin nz}{n!}+...$

解　　$\forall z\in C$有：$e^{iz}=\cos z+i\sin z$　　　　(A)

故

$$c+is=1+\frac{e^{iz}}{1!}+\frac{e^{2iz}}{2!}+...++\frac{e^{inz}}{n!}+...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{iz})^n}{n!}=e^{e^{iz}}=e^{\cos z+i\sin z}=e^{\cos z}+e^{i\sin z}$$

即

$$e^{\cos z}[\cos(\sin z)+i\sin(\sin z)]=c+is \qquad (B)$$

同理

$$\text{c}-i\text{s}=\text{e}^{\cos z}[\cos(\sin z)-i\sin(\sin z)] \qquad (\text{C})$$

故

$$\text{c}=\frac{1}{2}[(c+is)+(\text{c}-i\text{s})]=e^{\cos z}\cos(\sin z)$$
$$\text{s}=\frac{1}{2i}[(c+is)-(\text{c}-i\text{s})]=e^{\cos z}\sin(\sin z)$$

4、若 $f(z)$ 为整函数，且 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{M(r)}{r^n}<+\infty(M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|)$，则 $f(z)$ 为不等于 n 次的多项式

证 $f(z)$ 为整函数，则可展成 z 的幂级数，且 R=+∞，设

$$f(z)=\sum_{R=0}^{\infty}c_R\text{z}^k \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

其原数的 Cauchy 不等式为

$$|c_R|\le\frac{M(r)}{r^n} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

当 $\text{k}\ge\text{n}+1$ 时，$\text{c}_R=0$，故 $f(z)$ 为不等于 n 次的多项式。

注 n=0 时，该命题为 Lioucville 定理.

八、预习要求 预习并思考

1、求零点的阶数有哪些方法？

2、为什么实三角恒等式对复变等情形也成立？

3、实分析中可微函数是否具有零点孤立性及唯一性定理及最大模原理？

4、查阅文献【1】,【6】.