第一章 复数与复变函数

复变函数即自变量为复数的函数. 我们研究的主要对象是在某种意义下可导的复变函数—解析函数. 本章首先引入复数域，介绍如何在平面上引入复坐标与无穷远点，又引入了复平面上的点集、区域、约当曲线以及复变函数的极限连续等概念.

§1、复数

一、教学的目的和要求

1、 能够复述复数、共轭复数及相关概念，灵活运用复数及共轭复数的相关等式.

2、灵活进行非零复数的三种表示、相互转换及非零复数在指数形式下的乘除、乘方和开方运算.

3、灵活运用复数的向量表示解决的几何问题，理解复平面及与复平面点集的相关概念.

二、重难点

1、重点

复数的三种表示及其相关概念，复数的相等及运算，复平面上的点集及共轭复数应用，复数的几何应用.

2、难点

复数的灵活应用及扩充复平面的规定.

三、教法与手段

以课堂讲授法为准，采用启发式互动、提问、探讨式教学

四、教学内容（共 4 课时）

§1、复数

（一）复数域

1、定义

形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的数称为复数，其中 $x,y\in IR$， i 为虚数单位.

$x\to z$ 的实部，记为 $\operatorname{Re} z$

$y\to z$ 的虚部，记为 $\operatorname{Im} z$

（1）当 $\operatorname{Im} z=0$时，$z=\operatorname{Re} z$为实数；

（2）当 $\operatorname{Im} z\neq 0$时，称$z$为复数；

（3）当 $\operatorname{Im} z\neq 0,\operatorname{Re} z=0$时称$z$为纯虚数.

注 （1）电工学中用 j 表示虚数单位，而不用i

（2）$i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i,i^{4n+4}=1(n\in z)$

2、复数的相等与四则运算

（1） $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$且$\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 = \operatorname{Im} z$

许多问题运用复数相等的定义就可以很好的解决.

（2）对于

$$z_1 = x_1 = iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \overline{z}_2 = x_2 - iy_2$$

有

$$z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$
$$z_1 \bullet z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}(z_2 \neq 0)$$

按多项式乘法展开，利用$i^2 = -1$即可.

3、复数的四则运算

复数的四则运算满足交换律、结合律、分配律且关于四则运算的代数恒等式（如立方和公式）均满足.

结论　全体复数组成的集合并引进上述运算后便形成一个域，称之为复数域，常用$\mathbb{C}$表示.

注　两个虚（复）数不能比较大小，且平方未必大于 0.

（二）复平面——复数的平面表示

1、每个复数$z = x + iy$本质上由一对实数(x, y)决定，而每个实数对(x, y)又可表示平面IR^2的一个点，于是实平面IR^2与复数域$\mathbb{C}$之间成一一对应. 即

$$(x, y) \in IR^2 \leftrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$$

2、对应法则

x轴（实轴）$\leftrightarrow$实数，y轴（虚轴除原点）$\leftrightarrow$虚数

从而有“右（左）半实轴，上（下）半虚轴”及左右（上下）半平面之说.

3、复平面

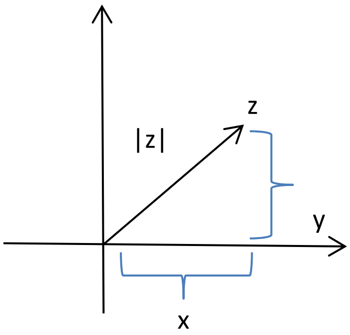
若用平面上的点表示复数，则此平面成为复平面，记作 w平面，z平面

（用表示复数的字母命名，并非心得平面）$\Rightarrow$“数”“点”视为同义语

（三）复数的向量表示

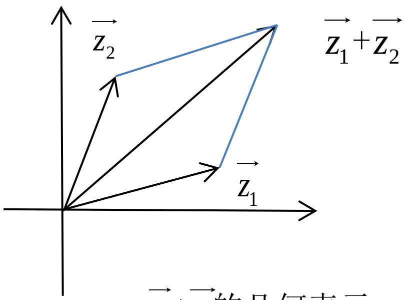
1、复数的向量表示

复数z可以用平面上的起点为原点，终点为z的向量$\overrightarrow{oz}$来唯一表示（平移向量与原向量视为同一向量）

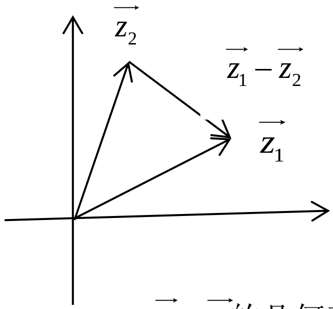


$$z=x+iy\leftrightarrow \text{向量}\overline{oz}$$

复数加减法遵循向量加减法的平行四边形法则.



$\vec{z_1}+\vec{z_2}$的几何表示



$\vec{z_1}-\vec{z_2}$的几何表示

2、模与辐角

（1）模

复数$z=x+iy$的模即为向量$\overline{oz}$的长度，记作：$r=|\vec{z}|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$

（2）辐角

当$\vec{z}\neq 0$时，实轴正向与$\overline{oz}$间的夹角θ称为复数z的辐角，记作$\theta=Argz$

注 ① 零的模为零，且$z=0\Leftrightarrow|z|=0$但零的辐角无意义.

② 对于一个确定的复数$z=x+iy\neq 0$，模$|z|$唯一确定，但辐角却有无穷多个，任何两个之间都有相差2π的整数倍，我们用$\arg z$表示$Argz$的某个特定值（此处指出单值，未限定范围，其关系如图元素与集合）

③ 主辐角θ介于$(-\pi,\pi]$之间的辐角，故可以用$\arg z$表示，但$\arg z$却未必只表示此范围上的角. 显然有 $Argz=\arg z+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 且

$$\arg z = \begin{cases} \arg\tan\frac{y}{x}, x>0; \\ \frac{\pi}{2}, x=0, y>0; \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, x<0, y\geq 0; \\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, x<0, y<0; \\ -\frac{\pi}{2}, x=0, y<0 \end{cases} \quad (z\neq 0)$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$

3、复数的几种表示

（1）称 $z=x+iy$——为代数表示当 $z\neq 0$ 时

（2） $z=|z|\left[\cos(Argz)+i\sin(Argz)\right]=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 三角表示

（3）利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow z=|z|e^{iArgz}=re^{i\theta}$ 指数表示，这里 $\theta=\arg z$ 未必取主值.

注 ① 若 $z=x+ig\neq 0$，记 $\arg z=\theta$ 表主值，则

$$tg\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{r\sin\theta}{r+r\sin\theta}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

故

$$\arg z=\theta\text{（主值）}=2arctg\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

② 对于

$$z_1=\gamma_1 e^{i\theta_1}，\quad z_2=\gamma_2 e^{i\theta_2}，\quad z_1=z_2\Leftrightarrow \gamma_1=\gamma_2 \;，\; \theta_1=\theta_2(\theta_1=\theta_2+2k\pi, k\in\mathbb{Z})$$

③ $e^{\frac{\pi}{2}i}=i, e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i, e^{i\pi}=-1, e^{2k\pi}=1, (k\in\mathbb{Z})$

例1 求下面复数的模、辐角、三角形式及指数形式；

（1） $2-2i$ （2） $-3+4i$

解 （1） $|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$$\arg(2-2i)=arctg\frac{-\pi}{2}=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$Arg(2-2i)=\arg(2-2i)+2k\pi=2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$$

$$2-2i=2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

（2） $|-3+4i|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$$\arg(-3+4i)=arctg\frac{4}{-3}+\pi=\pi-arctg\frac{4}{3}$$

$$Arg(-3+4i)=2k\pi+\pi-arctg\frac{4}{3}=(2k+1)-arctg\frac{4}{3}(k\in\mathbb{Z})$$

$$-3+4i=5[\cos(\pi-arctg\frac{4}{3})+i\sin(\pi-arctg\frac{4}{3})]=5e^{i(\pi-arctg\frac{4}{3})}$$

补充习题　设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $z=(1-itgx)/(1+itgx)$ 的三角形式

例 2　将复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi(0<\varphi<\pi)$ 化成指数形式

解　原式= $2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\sin i\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2})$

当 $0<\varphi<\pi$ 时，$\sin\frac{\varphi}{2}>0$

原式= $2\sin\frac{\varphi}{2}[\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\pi-\varphi}{2}}$

4、基本性质

性质 1　复数

$$z_1=z_2\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|,Argz_1=Argz_2$$

其中 $Argz_1=Argz_2$ 是两个集合形式的相等

性质 2　对复数 $z=x+iy$，有

$$|x|\le|z|,|y|\le|z|,|z|\le|x|+|y|$$

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0)$$

$$||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$$（三角不等式）

其中 $|z_1-z_2|$ 既可表示向量差又可表示两点之间的距离.

$$|z_1+z_2+\dots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$$
$$z=0\Leftrightarrow|z|=0$$
$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$$

性质 3

$$\left.\begin{aligned}&Arg(z_1z_2)=Argz_1+Argz_2\\&Arg(\frac{z_1}{z_2})=Argz_1-Argz_2\quad (*)\\&(z_1,z_2\ne 0)\end{aligned}\right\}\text{注意该式子的理解}$$

注 （*）式也是集合形式的相等，在（*）中，若用 $\arg z$ 代替 $Argz$ 时，$\arg z$ 应理解为 $Argz$ 的某个特定值当 $\arg z$ 表示辐角时，可以相差一个 2π 的整数倍.

特别地 $\arg(\alpha z)=\arg z(\alpha>0)$

例 3 对复数 α 与 β，若 $\alpha\bullet\beta=0$，则 α 与 β 至少有一个为 0

证 $\alpha\bullet\beta=0\Rightarrow|\alpha|\bullet|\beta|=0\Rightarrow|\alpha|=0 or |\beta|=0\Rightarrow\alpha,\beta$ 中至少有一个为 0

5、复数的乘幂与方根

（1）乘幂 若 $z\ne 0$，$n\in N,$ 以 z^n 表示 n 个 z 的乘积，z^{-n} 定义为 $\frac{1}{z^n}$，即

$$\frac{1}{z^n}=z^{-n}$$

命题 若 $z=re^{i\theta},m\in\mathbb{Z},$ 则 $z^m=r^me^{im\theta}$（可用归纳总结法证明），特别的，当 $r=1$ 时，得 De Moivre 公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$$

例 4 将 $\cos\theta$、$\sin 3\theta$ 用 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 表示出来

解 $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$

$$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin^2\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$
$$=(\cos^3\theta-3i\cos^2\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

据复数相关知识得

$$\cos 3\theta=\cos^2\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

（2）方根 若 $n\ge 2,n\in IN$，则满足 $w^n=z$ 的复数 w 成为复数 z 的 n 次方根，记作

$$w=\sqrt[n]{z}$$

设

$$z=re^{i\theta},w=\rho e^{i\varphi}$$

即复数相等得

$$\begin{cases} e^{n}=r\Rightarrow\rho=\sqrt[n]{r} \\ n\varphi=\theta+2k\pi\Rightarrow\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}(k=0\sim n-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow w=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})(k=0\sim n-1)$$

注 ① $w=\sqrt[n]{z}$ 有且仅有 n 个值，即 $k=0,1,2,...,n-1$ 所确定的值

② 上述 n 个根的几何描述（见 TB、P13）

③ 对于

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}w_0\text{（其中 }w_0=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}},k=0\sim n-1\text{）}$$

$e^{i\frac{2k\pi}{n}}(k=0\sim n-1)$ 为1的 n 个 n 次方根，通常记为

$$1,,w,w^2,...,w^{n-1}(w=e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

从而 $z\neq0$ 的 n 个 n 次方根为

$$w_0,ww_0,w^2w_0,...,w^{n-1}w_0$$

④ 若设 $w=e^{\frac{2\pi}{n}i}$ ，则

$$1+w+w^2+...+w^{n-1}=0,w^n=1$$

w 为二项方程 $w^n=1$ 之根，即

$$w^n=1\Leftrightarrow(1-w)(1+w+w^2+...+w^{n-1})=0)$$

特别的，当 $n=3$ 时

$$w=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

则

$$1+w+w^2=0,w^3=1$$

例 5 （1）计算 $\sqrt[3]{8}$ （2）解方程 $z^2-4iz-(4-9i)=0$

解 （1）$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{|-8|}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}),k=0,1,2$

当$k=0$时，$(\sqrt[3]{-8})_0=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}i$；

当$k=1$时，$(\sqrt[3]{-8})_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$

当$k=2$时，$(\sqrt[3]{-8})_2=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=1-\sqrt{3}i$

注 在 IR 中，规定 $\sqrt[3]{-8}=-2$

解 （2）$z^2-4iz+(2i)^2+4-(4-9i)=0\Rightarrow(z-2i)^2=-9i$

$$(z-2i)_k=(\sqrt{-9i})_k=3e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}},k=0,1$$

解得

$$z_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}+(2-\frac{3\sqrt{2}}{2})i,z_1=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+(2+\frac{3\sqrt{2}}{2})i$$

思考 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$

6、共轭复数

（1）定义 复数$x+iy$与$x-iy$称为互为共轭的复数，将z的共轭复数记为$\bar{z}$，他们关于实轴对称.

（2）性质

① $\overline{(\bar{z})}=z,\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

② $\overline{(z_1\bullet z_2)}=\bar{z}_1\bullet\bar{z}_2,\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(\bar{z}_2\neq0)$

③ $|z|^2=|\bar{z}|^2=z\bullet\bar{z},\operatorname{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\operatorname{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

④ 设R$(a,b,c...)$表示对复数$a,b,c...$的任一有理运算，则

$$\overline{R(a,b,c,...)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},...)$$

例 6 求复数$w=\frac{1+z}{1-z}(z\neq1)$的实数，虚部及模

解 （1）因为

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im}z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\operatorname{Re} w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \qquad \operatorname{Im} z=\frac{2\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$$

（2）因为

$$|w|^2=w\bullet\overline{w}=\frac{1+z}{1-z}\bullet\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}=\frac{1+|z|^2+2\operatorname{Re} z}{|1-z|^2}$$

所以

$$|w|=\frac{\sqrt{1+|z|^2+2\operatorname{Re} z}}{|1-z|}$$

例 7　设 z_1 及 z_2 是两个复数，试证

$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}(z_1\bullet\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}(\overline{z_1}\bullet z_2)$$

证　$|z_1\pm z_2|^2=(z_1\pm z_2)\overline{(z_1\pm z_2)}$

$$=z_1\overline{z_1}\pm z_1\overline{z_2}\pm z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$$

其次，由所证等式以及

$$\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\le|z_1\overline{z_2}|=|z_1|\bullet|z_2|$$

得三角不等式

$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

练习补充

试证　$|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$

例 8　若 $|a|<1,|b|<1,$ 试证：

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$$

证　两端平方，证明 $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2<1$ 成立，即 $|a-b|^2<|1-\overline{a}b|^2$ 成立，因为

$$|a-b|^2=(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=|a|^2+|b|^2-2\operatorname{Re}(\overline{a}b)$$

$$|1-\overline{a}b|^2=1+|a|^2|b|^2-2\operatorname{Re}(\overline{a}b)$$

而

$$1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2=(1-|a|)(1-|b|)>0$$

所以

$$|1-\bar{a}b|^2>|a-b|^2$$

7、复数在几何上的应用

（1）常见曲线得复数方程

① $z-z_0$ 表从 z_0到z 的向量，$|z-z_0|$表示 z_0与z 间的距离.

② 过 z_1,z_2 两点的直线方程为 $z=z_1+t(z_2-z_1),t\in IR$，线段 z_1,z_2 的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1)=tz_2+(1-t)z_1,t\in[0,1]$$

由此知

$$z_1,z_2,z_3\text{共线}\Leftrightarrow\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=t(0\neq t\in IR)\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1})=0$$

③ 射线方程 $\arg z=\frac{\pi}{4}$ 表从原点出发与实轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的一条射线，一般 $\arg(z-z_0)=\theta_0$，表示从 z_0 出发与正实轴夹角为 θ_0 的一条射线

④ 平面上以 z_0 为心，$R>0$ 为半径的圆周方程为 $|z+z_0|=R$，特别地原点为圆心的圆周方程写作

$$|z|=R$$

⑤ 复平面上的特殊曲线方程用复数表示的方法为 一般从 (x,y) 平面上已给曲线方程 $F(x,y)=0$ 出发，经过变数代换，可得其复数方程为

$$F\left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\frac{1}{2i}(z-\bar{z})\right)=0$$

例 9 试证 z 平面上圆周方程可以写成

$$Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0 \qquad （1）$$

$$\text{其中}A,C\in IR,A\neq 0,\beta\text{为复数，且}|\beta|^2>AC \qquad （2）$$

证明思路 ① 先证熟知的圆周方程（实 or 复数形式参数方程）可化为要证形式的复方程.

② 再证题设形式的方程表平面上圆周，为此可从题设形式的方程出发，将（1）的证明递推

即可.

证 设圆周的实数形式方程为

$$A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0 \tag{3}$$

其中 $A\neq 0,$ 且A,B,C,D为实数，当

$$B^2+D^2>4AC \tag{4}$$

方程（3）表示实圆周，令 $z=x+iy$，将

$$x^2+y^2=z\overline{z}=|z|^2, x=\frac{z+\overline{z}}{2}, y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

代入（3），得

$$Az\overline{z}+\frac{B}{2}z+\frac{B}{2}\overline{z}+\frac{D}{2i}z-\frac{D}{2i}\overline{z}+C=0$$

即

$$Az\overline{z}+\beta\overline{z}+\overline{\beta}z+C=0\text{，其中 }\beta=\frac{B+iv}{2}$$

且

$$|\beta|^2=\frac{B^2+D^2}{4}>AC,\begin{pmatrix}(3)\Rightarrow(1)\\(4)\Rightarrow(2)\end{pmatrix}$$

反之，将上面的过程递推得 $(1)\Rightarrow(3)$，$(2)\Rightarrow(4)$ 于是 $(1)(2)\Rightarrow(3)(4)$，特别，对实圆周

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+\delta=0,(5)\\ |\alpha|^2>\delta(0\neq\alpha\in\mathbb{C},\delta\in IR),(6)\end{cases}$$

证法二 设已结合实圆周方程为

$$|zz_0|=r>0 \tag{7}$$

应用公式$|z|^2=z\overline{z}$，即证

$$(7)\Leftrightarrow(5)(6)\Leftrightarrow(1)(2)$$

（2）证明几何问题

例 10 设 z_1,z_2,z_3 三点适合，$z_1+z_2+z_3=0$ 及 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，试证

z_1,z_2,z_3 为一个内接于单位圆周 $|z|=1$ 得正三角形得顶点.

证明分析 由 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ 知 z_1,z_2,z_3 在单位圆周上，故只需证

① $\Delta z_1z_2z_3$三边相等

② z_1,z_2,z_3为三项方程$z^3=a,(|a|=1)$的三根

③ 三边所对中心角相等（仅用①其余见后记）

证 $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|-z_3|^2=3$

$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$

即三边相等

例 11 证明三角形内角和为π，证明设三角形三定点为z_1,z_2,z_3，其对应的定点为$\alpha,\beta,\gamma,$（如图），若令$\arg z\in(0,2\pi]$，则

$$\alpha=\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z},\beta=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2},\gamma=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

证 由于

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z}\bullet\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\bullet\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-1$$

故

$$\alpha+\beta+\gamma=\arg(-1)+2k\pi=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

因为 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$，当 $0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$时，$k=0$，即

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

例 12 若z_1,z_2,z_3为等腰直角三角形 的三个顶点 其中z_2为直角顶点的充要条件为

$$z_1^2+2z_2^2+z_3^2=2z_2(z_1+z_3)$$

证 $\Delta z_1z_2z_3$中z_2为直角顶点$\Leftrightarrow\overline{z_1z_2}$绕$z_2$旋转$\pm\dfrac{\pi}{2}$，即得向量$\overline{z_1z_2}$，

即

$$z_3-z_2=(z_1-z_2)e^{\pm\frac{\pi}{2}i}=\pm i(z_1-z_2)$$

两端平方

$$z_3^2+z_2^2-2z_2z_3=-z_1^2-z_2^2+2z_1z_2$$

即

$$z_1^2+2z_2^2+z_3^2=2z_2(z_1+z_3)$$

注　本节内容主要参考教案 P3 文献【1】、【5】、【6】

五、小结

- 复数概念，五种表示
- 模长，辐角的概念计算不等式

六、作业 P41、2、3、4

补充　设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$,求复数$z=\dfrac{1-itgx}{1+itgx}$的三角形式

七、补充说明及预习要求

1、例 10 的另两种证法

证　考虑恒等式

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)z-z_1z_2z_3,(*)$$

由题设条件

$$z_1+z_2+z_3=0及z_k\bullet\overline{z_k}=1(k=1\sim3)$$

可推得

$$\begin{aligned}z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3&=z_1z_2z_3\overline{z_3}+z_2z_3z_1\overline{z_1}+z_1z_3z_2z_2\\&=z_1z_2z_3(\overline{z_1+z_2+z_3})\\&=0\end{aligned}$$

故$(*)$得

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-a$$

证　由题设$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，可设

$$z_1=e^{i\theta_1},z_2=e^{i\theta_2},z_3=e^{i\theta_3}$$

不妨令$0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi$，又由$z_1+z_2+z_3=0$得

$$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_3\overline{z_1}=0$$

即

$$e^{i(\theta_2-\theta_1)}+e^{i(\theta_3-\theta_1)}=-z_1\overline{z_1}=-1$$

记 $\theta_2-\theta_1=\eta,\theta_3-\theta_1=\mu>\eta$，则上式变为

$$\cos\eta+i\sin\eta+\cos\mu+i\sin\mu=-1$$

解得

$$\theta_2-\theta_1=\eta=\frac{2\pi}{3}\qquad\qquad\theta_3-\theta_1=\mu=\frac{4\pi}{3}$$

故

$$\angle z_1oz_2=\angle z_2oz_3=\angle z_3oz_1=\frac{2\pi}{3}$$

2、预习思考

（1） 如何用邻域定义孤立点？

（2） 如何理解孤立点必为界点？