第二章　　解析函数

复变函数论研究的主要对象是解析函数.本案首先给出了一般解析函数的概念及判别方法，其次给出了几类初等函数单值和多值函数，并研究其性质.他们是初等函数在复数域的推广.

§1、解析函数的概念与 Cauchy－Riemann 条件

一、目的和要求

1、充分掌握复数域中函数可导（微）的概念与连续的关系.

2、区分函数解析的不同定义，掌握奇点的定义并判断能够判断出奇点；灵活运用解析函数的运算法则、C.－R.条件及有关定理与公式 .

二、重难点

1、重点

可导（微）、解析的概念及 C.－R.条件.

2、难点

可微、解析的判别方法及区别.

三、教法与教学手段

课堂讲授法、采用启发式并以例题攻关 .电教、CAI 演示.

四、教学内容（共 2 课时）

(一)复变函数的导数和为微分

由实数域中函数的可导（ $\Leftrightarrow$ 可微），形式推广为

定义 2.1　设 $f(z)$ 为区域 D 内的函数， $z_0 \in D$.若极限

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z \neq z_0)$$

当 z 以任意形式趋于 z_0 时都存在，有限且相等　，我们称此极限为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的函数，记为 $f'(x)$，即

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+z_0)-f(z_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

设函数 $f(z)$ 在点 z 可导，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f^{'}(z)$$

即

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f^{'}(z) + \eta \text{，} \lim_{\Delta z \to 0} \eta = 0 \Rightarrow \Delta w = f^{'}(z)\Delta z + \varepsilon$$

其中$|\varepsilon| = |\eta \cdot \Delta z|$为比$|\Delta z|$的高阶无穷小 .

称 $f'(z)\Delta z$ 为$w = f(z)$在点 z 的微分，记为dw或者$df(z)$，此时也称 $f(z)$ 在点 z 可微，即

$$dw = df(z) = f^{'}(z)\Delta z$$

当 $f(z) = z$时，$dz = \Delta z$，有

$$dw = f'(z)dz$$

即

$$\frac{dw}{dz} = f'(z)$$

注 ① 易见 $w = f(z)$ 在点 z 可微$\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在点 z 可导.

② $w = f(z)$ 在点 z 可导（微）在点 z 连续.

③ 虽然形式上复数域中函数可导一致，但复变函数在一点可导比实变函数形式严得多 .

④ 复数域中处处连续而处处不可导的例子随手可得.

例 1 函数 $f(z) = \operatorname{Re} z$、$\bar{z}$、$\operatorname{Im} z$、$|z|$为$\mathbb{C}$中处处连续但处处不可导的函数.

证 $\forall z_0 \in \mathbb{C}$，$\lim\limits_{\Delta z \to z_0} \dfrac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z - z_0} = \begin{cases} 0, & \text{Rez=Rez}_0 \\ 1, & \text{Rez} \neq \text{Rez}_0 \end{cases}$

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\overline{z + \Delta z}}{\Delta z} - \frac{\bar{z}}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \frac{\bar{z}}{\Delta z} - \frac{\bar{z}}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

当$\Delta z \to 0$ 时，上式极限不存在 . 因为让Δz取实数而趋于零时，其极限为 1；让Δz取纯虚数而趋于零时，其极限为−1 .

类似可得$\operatorname{Im} z$及$|z|$在处极限不存在，据z_0的任意性立得要证的结论（连续性显然）.

例 2 （1）证明 $f(z) = z^n \left(n \in \mathbb{N}\right)$ 在$\mathbb{C}$处处可微.

证 $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \because \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0}\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) = nz_0^{n-1}$

据 z_0 的任意性立得.

证法请观看TB、 $p45$、例 2.2

（2）讨论 $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & , \quad z\neq 0 \quad , \\ 0 & , \quad z=0 \quad . \end{cases}$ 在原点的可导性.

解 ① 当 $z=x(y=0)$ 时

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

② 在 $\mathbb{Z}$ 平面内 沿实轴

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}e^{-\frac{1}{z^2}}=0.$$

沿虚轴

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right|=\lim_{n\to 0}\left|\frac{1}{n_i}e^{-\frac{1}{n^2}}\right|=+\infty \quad .$$

故在 $\mathbb{R}$ 内 $f^{'}(0)=0$ 不存在，在 $\mathbb{C}$ 内 $f^{'}(0)$ 不存在.

练习

设 $f(z)=\begin{cases} \dfrac{x(x^2+y^2)(y-xi)}{x^2+y^4} & , \quad z\neq 0 \quad , \\ 0 & , \quad z=0 \quad . \end{cases}$

证 当 z 沿任何向径 $\to 0$ 时

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\to 0$$

但 $f'(0)$ 不存在（提示 向径 $y=mx$ 只需沿一条非向径路线 $\to 0$，如 $y^2=x$）.

（二）解析函数及其简单性质

定义 2.2 (1)若函数 $f(x)$ 在区域 D 内各点可微,称 $f(x)$ 在区域内解析（可微），或者称 f 为 D 内的解析函数（全纯函数、正则函数）.

（2）若函数 $f(x)$ 在 z_0 的一个邻域内解析，则称 $f(x)$ 在点 z_0 解析.

（3）称函数在闭区域 $\overline{D}$ 解析，若存在区域 $G\supset\overline{D}$，使 $f(x)$ 在 G 内解析.

注 ① $f(x)$ 在区域 D 解析 $\Leftrightarrow$ D 内可微 $\Leftrightarrow$ D 内点点解析.

② $f(x)$ 在点 z_0 解析 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 某邻域内可微 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 z_0 可微（反之，不成

立）.

定义 2.3 若 $f\left(x\right)$ 在点 z_0 不解析，但在 z_0 的任意邻域内总有 $f\left(x\right)$ 的解析点，则称 z_0 为 $f\left(x\right)$ 的奇点.

例 $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 内以 z=0 为奇点.

* 一般所遇到的多是分母为 0 的点为奇点.

1、解析函数的运算法则

（1）设 $f_1\left(z\right)$、$f_2\left(z\right)$ 在区域 D 内解析，则其和、差、积、商（分母 $\neq 0$）仍在 D 内解析，且有:

$$\left[f_1\left(z\right)\pm f_2\left(z\right)\right]=f_1'\left(z\right)\pm f_2'\left(z\right)$$

$$\left[f_1\left(z\right)\cdot f_2\left(z\right)\right]=f_1'\left(z\right)\cdot f_2\left(z\right)\pm f_2'\left(z\right)\cdot f_1\left(z\right)$$

$$\left[\frac{f_1\left(z\right)}{f_2\left(z\right)}\right]=\frac{f_1'\left(z\right)\cdot f_2\left(z\right)\pm f_2'\left(z\right)\cdot f_1\left(z\right)}{f_2{}^2\left(z\right)}\left(f_2\left(z\right)\neq 0\right)$$

（2）设函数 $\xi=f\left(z\right)$ 在区域 D 内解析，函数 $w=g\left(\xi\right)$ 在区域 G 内解析，且 $f\left(D\right)\subset G$，则 $w=g\left[f\left(z\right)\right]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dg\left(\xi\right)}{dz}\qquad\qquad \frac{df\left(z\right)}{dz}=g'\left(\xi\right)f'\left(z\right).$$

（3）几个简单而重要的解析函数

① 若 $f\left(z\right)=\alpha$（常数），则 $f^{'}\left(z\right)=0\left(z\in\mathbb{C}\right)$.

② 多项式函数 $f\left(z\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k z^k$ 在 $\mathbb{C}$ 内解析且 $f^{'}\left(z\right)=\sum_{k=1}^{n}ka_k z^{k-1}$.

③ 有理分式函数（两多项式之商）$\dfrac{P\left(z\right)}{Q\left(z\right)}$ 在 $\mathbb{C}$ 除使 $Q\left(z\right)=0$ 的点外解析，而使 $Q\left(z\right)=0$ 的点为其奇点.

（三）Cauchy－Riemann 条件（C.–R. 条件）

1、设 $w=f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ 为定义在区域 D 内的函数，下面讨论 $f\left(z\right)$ 在一点可微的必要条件.

设函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在一点 $z=x+iy$ 可微, 而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z+z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)\quad ,$$

又设 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y,\ f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$, 其中

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)$$
$$\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)$$

从而上式可写成

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=a+bi \qquad (*)$$

由于 Δz 从任何路径趋于 0 时，$(*)$ 式成立, 故

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)=a+bi\,,$$

即 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 及 $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ 都存在且 $\frac{\Delta u}{\Delta x}=a,\frac{\Delta v}{\Delta y}=b$. 同样地，

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(-i\frac{\Delta u}{\Delta y}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=a+bi$$

得 $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ 及 $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ 都存在且

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=a \qquad \frac{\Delta u}{\Delta y}=-b$$

故 u_x、u_y、v_x、v_y 皆存在，且有

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=a=\frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad \frac{\Delta v}{\Delta y}=b=-\frac{\Delta u}{\Delta y}\left(C.-R.\text{条件}\right)$$

定义 2.1（可微的必要条件）

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内有定义

$$f(z)\text{在点 } z\in D \text{ 可微} \Rightarrow \begin{cases}\text{（1）} u_x\text{、}u_y\text{、}v_x\text{、}v_y \text{ 在点}(x,y)\text{存在}\\ \text{（2）在点}(x,y)\ C.-R.\text{条件成立}\end{cases}$$

注 定义 2.1 的条件非充分

反例 $f(z)=\sqrt{|xy|}$

在 $z=0$ 处，

$$u(x,y)=\sqrt{|xy|} \qquad v(x,y)=0$$

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0)$$

$$u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0)$$

但

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\sqrt{\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{x}+i\Delta y}}$$

不存在（沿 $\Delta y=k\Delta x,\Delta x>0$ 趋于 0 即得）, 把定理 2.1 的条件适当加强就得到

定义 2.2（可微的充要条件）

设函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内有定义,则

$f(z)$ 在 D 可微 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}（1）u(x,y),v(x,y)\text{在点}(x,y)\text{可微} \\ （2）\text{在点}(x,y)\ C.-R.\text{条件成立}\end{cases}$

且当上述条件满足时， $f(z)$ 在 z 的导数可表为

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_x-iu_y=u_x-iu_y=v_y+iv_x.$$

证 "$\Rightarrow$" 设 $f(z)$ 在 z_0 可导 $f'(z_0)=a+bi$，则

$$\Delta f=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z) \quad ,$$

其中 $\rho(\Delta z)=\varepsilon_1(\Delta z)+i\varepsilon_2(\Delta z)$，满足

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0.$$

比较上式的实部和虚部得

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y\Delta+\Delta\varepsilon_1(\Delta z)$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y\Delta+\Delta\varepsilon_2(\Delta z)$$

显然 $\Delta\varepsilon_1(\Delta z)$ 与 $\Delta\varepsilon_2(\Delta z)$ 满足条件

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varepsilon_1(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta z)}{\Delta z}=0$$

故$u(x,y),v(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，且

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)=a$$
$$u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)=-b$$

"$\Leftarrow$"　设u,v在(x_0,y_0)可微，且在这点满足 C.–R.条件，若记

$$\alpha=u_x(x_0,y_0),\beta=v_y(x_0,y_0),$$

则

$$\begin{aligned}u(x,y)-u(x_0,y_0)&=\beta(y-y_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)\\ v(x,y)-v(x_0,y_0)&=\beta(x-x_0)+\varepsilon_2(|\Delta z|)\end{aligned},$$

其中 $|\Delta z|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 且$\varepsilon_1,\varepsilon_2$满足

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0,$$

将第一式与第二式乘以i相加得到

$$f(z)-f(z_0)=(\alpha+i\beta)(z-z_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|)$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(\alpha+i\beta)=\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z-z_0}$$

故

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha+i\beta$$

即

$$\begin{aligned}f'(z_0)&=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\\&=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)\\&=u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)\\&=v_y(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\end{aligned}.$$

据数学分析中二元函数可微与偏导数连续的关系，可得

定义 2.3　设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域 D 内有定义，则$f(z)$在 D 内一点

$$z=x+iy\text{可微}\Leftarrow\begin{cases}\text{（1）}u(x,y),v(x,y)\text{在点}(x,y)\text{连续}\\ \text{（2）在点}(x,y)\ C.-R.\text{条件成立}\end{cases}$$

例 3 考察函数 $f(z)=\begin{cases}|z|(1+i), z\neq\pm\bar{z}\\ 0 \qquad\quad\ , z=\pm\bar{z}\end{cases}$，在 $z=0$ 的解析性.

解 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$u(x,y)=v(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, xy\neq 0\\ 0 \qquad\qquad , xy=0\end{cases}$$

显然

$$u_x(0,0)=v_y(0,0)=u_y(x,y)=v_x(x,y)$$

但 $u(x,y)$ 在 $z=0$ 处不可微，事实上，对 $xy\neq 0$，有

$$\begin{aligned}\Delta u-(u_x\Delta x+u_y\Delta y)&=u(x,y)-u(0,0)-u_x(0,0)(x-0)-u_y(0,0)(y-0)\\&=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

不能任意小，由定义 2.2 知 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可微.

五、小结

- 三种解析法；
- C. - R. 条件；
- 判定结论.

六、作业 P_{90} 2. 4(4).

七、补充及预习要求

1、设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内 z_0 可微

（1）$u_x+iv_x=f'(z_0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

（2）$iu_y+v_y=f'(z_0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x=x_0}}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

2、预习要求 思考并回答一下问题

（1）为何指数函数为周期函数？

（2）幂、根式等多值函数为何会出现多值？

3、本节及预习内容可参阅文献[1]、[6].