线性规划基本形式

线性规划问题的一般形式如下：

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^\mathrm{T}x, \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b, \\
& Gx \le e,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中$c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, G \in \mathbb{R}^{p\times n}$ 和$e \in \mathbb{R}^p$ 是给定的矩阵和向量，$x \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量．在实际中，由于其他形式都可进行转化，故考虑问题(1) 的两种特殊形式：标准形式

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^\mathrm{T}x, \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b, \\
& x \ge 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

以及不等式形式

$$
\begin{aligned}
\max_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & b^\mathrm{T}y, \\
\text{s.t.} \quad & A^\mathrm{T}y \le c.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

线性规划的应用：运输问题

- 线性规划最先在第二次世界大战时被提出，用于最大化资源的利用效率．
- 在1947 年，著名的单纯形方法被提出，使得线性规划问题可以被有效地求解．之后，线性规划用到了更多其他领域当中，如农业、石油、钢铁、运输、通信和运筹学等．线性规划的有效应用节省了大量的人力、物力和财力．随着计算机以及求解算法的快速发展，我们可以求解更大规模的线性规划问题，保证了线性规划问题的应用前景．
- 运输问题的假设如下：假设有I 个港口$P_1, P_2, \cdots, P_I$，提供某种商品．有J 个市场$M_1, M_2, \cdots, M_J$需要这种商品．假设港口P_i 有s_i 单位的这种商品$(i = 1, \cdots, I)$，市场M_j 需要r_j 单位的这种商品，且总供应与总需求相等，即$\sum_{i=1}^{I} s_i = \sum_{j=1}^{J} r_j$．令$b_{ij}$ 为从港口P_i 运输单位数量商品到市场M_j 的成本．运输问题是在满足市场需求下使得运输成本最低．

线性规划的应用：运输问题

- 令x_{ij}为从港口P_i运输到市场M_j的商品数量，总的运输代价为

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ij}b_{ij}. \tag{4}$$

- 港口P_i总输出量为$\sum_{j=1}^{J} x_{ij}$，因为港口P_i存有的商量总量为s_i，所以

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, 2, \cdots, I. \tag{5}$$

- 市场M_j总输入量为$\sum_{i=1}^{I} x_{ij}$，因为市场M_j的需求量为r_j，所以

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} = r_j, \quad j = 1, 2, \cdots, J. \tag{6}$$

- 因为运输量是非负的，所以

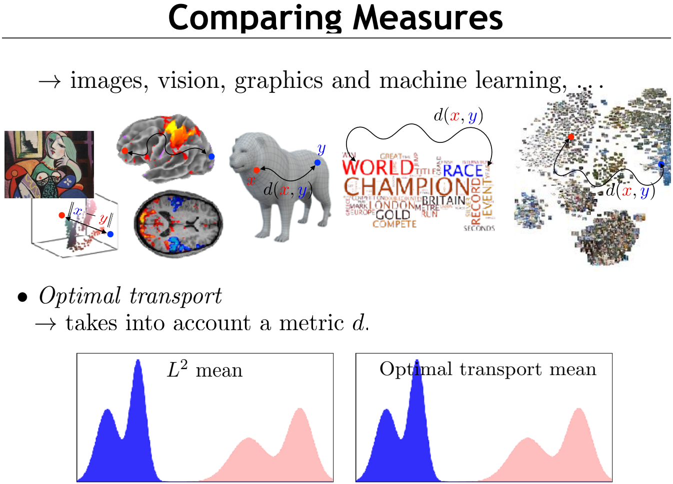
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, I, \quad j = 1, 2, \cdots, J. \tag{7}$$

因此，想要在约束(5)—(7) 成立的情况下极小化(4)式．针对决策变量的$I \times J$ 矩阵(x_{ij})，可以得到如下线性规划问题：

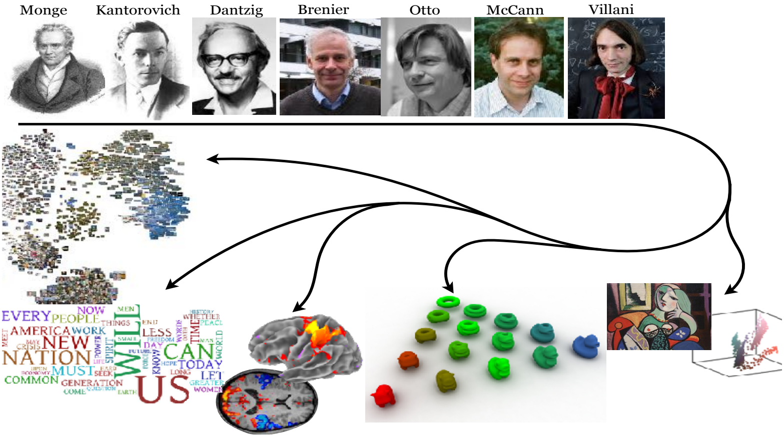
$$\begin{aligned}
\min_{x} \quad & \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ij} b_{ij}, \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{J} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, 2, \cdots, I, \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{ij} = r_j, \quad j = 1, 2, \cdots, J, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, I, \quad j = 1, 2, \cdots, J.
\end{aligned}$$

线性规划的应用：最运输问题

- 运输问题还有更一般的情形，即最优运输问题．它关心两个（离散、连续）测度的对应关系．具体地，若测度是离散的，我们想要确定的是离散点之间的对应关系.



Toward High-dimensional OT



线性规划的应用：马尔可夫决策过程

- 在马尔可夫决策过程中，考虑终止时间$T=\infty$的情形．因为折现因子$0<\gamma<1$，所以如果单步奖励是有界的，则策略对应的奖励和是有界的．否则，如果奖励和无界，任意一个策略的奖励和都是无限的，失去了研究价值．
- 在有界的假设下，Bellman 方程可以转化为如下线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{V \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}|}} \quad & \sum_i V(i) \\
\text{s.t.} \quad & V(i) \geq \sum_j P_a(i,j)\left(r(i,a)+\gamma V(j)\right), \forall i \in \mathcal{S},\ \forall a \in \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

其中$V(i)$是向量V的第i个分量，表示从状态i出发得到的累积奖励，$P_a(i,j)$是转移概率，$r(i,a)$是单步奖励以及γ为折现因子．通过求解上述优化问题，可以求出最优动作$a(i)$以及最优期望奖励．

线性规划的应用

- 节食问题：选择n种食品的数量：$x_1, ..., x_n$
  - 每种食品含有热量c_j,并且a_{ij}表示第j种食物含有的第i种营养.
  - 每天摄入的营养含量不低于$b \in \mathbb{R}^m$.

  故良好的饮食条件需满足：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, x \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

- 分段线性最小化问题

$$\min \quad \max_{i=1,...,m} (a_i^T x + b_i) \tag{9}$$

也即求一个线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x + b_i \leq t, \quad i = 1, ..., m \end{aligned} \tag{10}$$

基追踪问题

基追踪问题是压缩感知中的一个基本问题，可以写为

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b. \end{aligned} \tag{11}$$

对每个$|x_i|$ 引入一个新的变量z_i，可以将问题(11) 转化为

$$\begin{aligned} \min_{z\in\mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^{n} z_i, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & -z_i \le x_i \le z_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{12}$$

这是一个线性规划问题．

- 除此之外，也可以引入x_i的正部和负部,其中$x_i^+ = \max\{x_i, 0\}$, $x_i^- = \max\{-x_i, 0\}$..
- 利用$x_i = x_i^+ - x_i^-$, $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$，则问题(11) 转化为的另外一种等价的线性规划形式可以写成

$$\begin{aligned} \min_{x^+,x^- \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^n (x_i^+ + x_i^-), \\ \text{s.t.} \quad & Ax^+ - Ax^- = b, \\ & x^+, x^- \geq 0. \end{aligned}$$

可以看出这也是一个线性规划问题，且与原问题等价.

数据拟合

在数据拟合中，除了常用的最小二乘模型外，还有最小ℓ_1 范数模型

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_1, \tag{13}$$

和最小ℓ_∞ 范数模型

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_\infty. \tag{14}$$

这两个问题都可以转化成线性规划的形式.

- 对于问题(13)，通过引入变量$y=Ax-b$，可以得到如下等价问题：

$$\begin{aligned} \min_{x,y\in\mathbb{R}^n} \quad & \|y\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & y = Ax-b. \end{aligned}$$

- 利用基追踪问题中类似的技巧，可以将上述绝对值优化问题转化成线性规划问题.

- 对于问题(14)，令$t = \|Ax - b\|_\infty$，则得到等价问题

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}} \quad & t, \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\|_\infty \le t. \end{aligned}$$

- 利用ℓ_∞ 范数的定义，可以进一步写为

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}} \quad & t, \\ \text{s.t.} \quad & -t\mathbf{1} \le Ax - b \le t\mathbf{1}, \end{aligned}$$

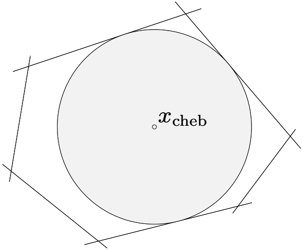
这是一个线性规划问题.

多面体的

$$\mathcal{P} = \{x | a_i^T x \leq b_i, i = 1, ..., m\}$$

的切比雪夫中心即为其最大半径内接球的球心

$$\mathcal{B} = \{x_c + u | \ \|u\|_2 \leq r\}$$



- $a_i^T x \leq b_i$ 对$\forall\ x \in \mathcal{B}$ 当且仅当

$$\sup\{a_i^T(x_c + u) | \ \|u\|_2 \leq r\} = a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \leq b_i$$

- 因此, x_c, r 可以用LP方式求解

$$\begin{array}{ll} \max & r \\ \text{s.t.} & a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \leq b_i, \quad i = 1, ..., m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Gx \leq h, Ax = b \end{aligned} \tag{15}$$

分式线性函数：

$$f_0 = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \quad \mathrm{dom} f_0(x) = \{x | e^T x + f > 0\} \tag{16}$$

则该问题等价于一个线性问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + dz \\ \text{s.t.} \quad & Gy \leq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$