§3、初等多值函数

一、目的要求

1、掌握函数多值性产生及支点、分支等概念.

2、分析并掌握对数函数、幅角函数、整根式函数的分支、支点及相应概念和性质的异同点，灵活运用指数函数、幂函数的映照性质.

3、判别函数具有多个有限支点的情形，掌握反三角、反双曲函数的运算.

二、重难点

1、重点

多值性的产生，解析（连续）分支的确定及多个有限分支的情形，幅角函数、对数函数、及根式函数.

2、难点

对多值函数单值分支性质的讨论.

三、教法与教学手段

课堂讲授法、采用启发式、并以例明理；突出核心；电教.

四、教学内容（约 3～4 课时）

定义 2.8　单叶函数

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义，且对于内任意不同的两点 z_1, z_2 有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，称 $f(z)$ 在 D 内为单叶的，并称 D 为 $f(z)$ 的单叶区域.

若 D 为 $f(z)$ 的单叶区域，则 $f(z)$ 在 D 内为单叶函数.

（一）多值函数引导 幅角函数

对 $w = Argz\left(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$，它不是一般意义下的复变初等函数. 已知其为多值函数.

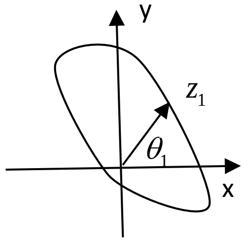
1. $w = Argz$ 多值性的产生.

（1）若在 $z=0$ 的充分小的一个邻域 $N(0)$ 内任取一条简单闭曲线 C，使 $0 \in I(c)$，取定 $z_1 \in C$，让动点 z 自 z_1 出发，照一定方向沿 C 绕旋转一周，则 $(\arg z)_{始} \triangleq 0$，有 $(\arg z)_{终} \triangleq 0, \pm 2\pi$（逆时针为加，顺时针为减），

若绕 k 周，有 $(\arg z)_{终} = 0, \pm 2k\pi \begin{pmatrix} 逆 \\ 顺 \end{pmatrix}$，$k \in \mathbb{Z}$.

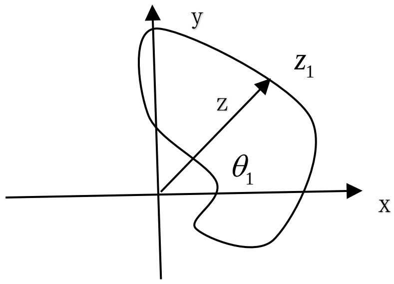
（2）若在 $z=\infty$ 的充分小邻域 $N(\infty)$（即 $|z| > k > 0$，k 充分大）内任取一条绕 ∞ 的简单曲线 C(即 $|z| = R$ 在 $I(c)$ 中)，取定 $z_1 \in C$，让动点自 z_1 出发沿 C 的一个定向（绕 ∞）连

续变动到 z_1 点，则



$$(\arg z)_{始} \triangleq 0，(\arg z)_{终} = 0, \pm 2\pi\begin{pmatrix}顺\\逆\end{pmatrix}$$

（3）对 $z \neq 0,\infty$，在 z_0 的任一个充分小的邻域 $N(z_0)$ 内（使 0 与∞均不含在此邻域内），任取一条简单闭曲线 C，依上述方法取定 $z_1 = C$，当 z 自 z_1 出发绕 z_0 一周后，则 $(\arg z)_{始} = (\arg z)_{终} = 0$.



由上面的讨论易知 $w = Argz$ 的多值性是由于动点绕 $z=0$ 及 $z=\infty$ 旋转而产生的，所以要使它成为单值函数，就要求定义域 D 内任意的简单闭曲线不饶 0 和∞.

考虑复平面除去负实轴（包含 0）而得的区域 D，显然，在 D 内 $Argz$ 的主值 $\arg z(-\pi < \arg z < \pi)$ 为一单值连续函数，$\arg z + 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$ 也如此，故幅角函数在 D 内能分解成无穷多个单值连续函数，每一个函数称为幅角在 D 内一个单值连续分支.

结论

（1） 取区域 D={z 平面}\{包含 0 的负实轴}，在 D 内，

$$w_k = (Argz)_k = \arg z + 2k\pi, \arg z \in (-\pi,\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

是无穷多个单值函数，其中每个单值函数都称为 $Argz$ 的一个单值分支. 对固定的 k，w_k 称为 $Argz$ 的第 k 个分支. 特别地，$w_0 = \arg z$ 称为 $Argz$ 的主（值）支.

满足上述情况时，称 $w = Argz$ 可以分解成无穷多个单值分支，且任意两分支之间相差 2π 的整数倍.

（2）由于 $w = Argz$ 在 D 内连续 $(Exp.13)$，故每个分支 w_k 在 D 内亦连续，从而称 $w = Argz$ 在 D 内可以分解成无穷多个连续单值分支.

注 1. 称上述{负实轴（包含∞）}为割线.

2. 当割线 k 为任一条连接 0 和 ∞ 的扩充（无界）简单连续曲线时，$Argz$ 在 $D_1 = C \setminus k$ 内可能分解成无穷多个单值连续分支.

2. 单值分支的确定

命题 在 $w=Argz$ 的一个确定的分支 $\arg z$ 上，若 $z_1\in D,\arg z_1=\theta_1$，则对 $\forall z\in D,z\neq 0$，$\arg z$ 由 $\arg z_1$ 所唯一确定，记为 $\arg z\left(\arg z_1=\theta_1\right)$.

如 $\arg z\left(\arg i=\dfrac{\pi}{2}\right)$ 表 $Argz$ 的主（值）支；$\arg z\left(\arg 6=6\pi\right)$ 表 w_3，即 $Argz$ 的第 3 支.

例 1 试求分支 $w=\arg z\left(\arg 1=2\pi\right)$ 在 $z=i$ 处的值.

解 由于 $w_k=\arg z+2k\pi=w_0+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$，将 $z=1$ 代入得 $2\pi=0+2k\pi\Rightarrow k=1$.

所给分支为 $w_1=w_0+2\pi$，故

$$w_1\left(i\right)=w_0\left(i\right)+2\pi=\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}.$$

简单地说，确定分支即确定 k 的取值.

3. 多值函数支点的概念

（1）设 α 为 z 平面上的一个点，若当 z 沿着某一条简单闭曲线 C 绕 α 旋转一周后，多值函数 $w=f\left(z\right)$ 从它的一个分支变到相邻的另一分支，则称 α 为 $f\left(z\right)$ 的一个支点.

（2）若按一定方向沿 C 绕 α 有限周后，$f\left(z\right)$ 仍回到出发时的那一支，则称 α 为 $f\left(z\right)$ 的代数支点，否则，α 称为 $f\left(z\right)$ 的超越支点.

显然 $z=0$ 与 $z=\infty$ 为 $w=f\left(z\right)$ 的超越支点.

注 对每一个固定的 k，$w_k=\arg z+2k\pi\left(\arg 1=0\right)$ 在 D 内为单值连续分支（函数），但它在边界（即割线负实轴）上不连续，我们可以将它扩充成在割线 $\left(z\neq 0\right)$ 上、下沿连续，扩充的值称为其上、下沿的取值. 显然，在割线的上、下沿，它的取值不同.

$eg.$ 在 $z=\operatorname{Re}z<0$ 上，$\left[\arg z\right]_{上}=\pi,\left[\arg z\right]_{下}=-\pi$（主支）$\arg z\in\left(-\pi,\pi\right)$.

（二）对数函数

1、对数函数的定义

（1）若 $z\neq 0$，由等式 $z=e^w$ 所决定的复数 w，称为 z 的对数函数，记作 $w=Lnz$.

（2）设 $z=\left|z\right|e^{iArgz}$，$w=u+iv$，由 $z=e^w$ 得

$$|z| = e^u, Argz = v \Rightarrow \begin{cases} u = \ln|z| \\ v = Argz = \arg z + 2k\pi, \quad -\pi < \arg z < \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i\left(argz + 2k\pi\right) \quad , \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ \arg z \in \left(-\pi, \pi\right] \end{matrix} \quad .$$

注 任何不为零的复数 z 都有无穷多个对数，其中任意两个相差 $2\pi i$ 的整数倍. 相应于 $Argz$ 的主值 $\arg z$，定义 Lnz 的主值为 $\ln|z| + i\arg z$，即

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \ \left(-\pi < \arg z < \pi\right)$$

从而

$$Lnz = \ln z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

相应于 k 的 $w = Lnz$ 的值，记作

$$w_k = \left(Lnz\right)_k = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right).$$

2、有关 Lnz 与实对数函数的比较

（1）定义域不同 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及 $\mathbb{R}^+$.

（2）实对数函数为单值的，负对数函数是多值的，且任二值之间相差 2π 的整数倍.

（3）z 取正实数，Lnz 的主值 $\ln z = \ln|z|$ 为实对数函数.

例 2 求 $Ln1, Ln(-1), Ln(i)$ 及 $Ln(-3+4i)$.

解

$$Ln1 = \ln 1 + i\arg 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$Ln(-1) = \ln 1 + i\arg(-1) + 2k\pi i = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$Lni = \ln|i| + i\arg i + 2k\pi i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} Ln(-3+4i) &= \ln|-3+4i| + i\arg(-3+4i) + 2k\pi i \\ &= \ln 5 + i\left(arctg\frac{4}{-3} + \pi\right) + 2k\pi i \\ &= \ln 5 - i\left(arctg\frac{4}{3}\right) + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. 对数函数的性质

性质 1 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$， $z_1, z_2 \neq 0$，则有

$$Ln\left(z_1\cdot z_2\right)=Lnz_1+Lnz_2 \quad , Ln\frac{z_1}{z_2}=Lnz_1-Lnz_2.$$

证

$$\begin{aligned}Ln\left(z_1\cdot z_2\right)&=ln\left(z_1\cdot z_2\right)+iArg\left(z_1\cdot z_2\right)\\&=\ln|z_1|+\ln|z_2|+iArgz_1+iArgz_2\ (*)\\&=Lnz_1+Lnz_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ln\frac{z_1}{z_2}&=ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+iArg\frac{z_1}{z_2}\\&=\ln|z_1|-\ln|z_2|+iArgz_1-iArgz_2 \qquad (**)\\&=Lnz_1-Lnz_2\end{aligned}$$

$(*)$及$(**)$理解为 左边的多值函数的任一值一定有右边两个多值函数的各一值与它对应，使有关等式成立，反之亦真.

例 指出下面推理的错误（伯努利(Bemoulli)理论）.

注 $\alpha=\frac{1}{n}$时，$\ln z^{\alpha}=\alpha\ln z$；$\alpha\neq\frac{1}{n}$时，$\ln z^{\alpha}\neq\alpha\ln z$.

命题 对$\forall z\in\mathbb{C},z\neq 0,\infty,Ln\left(-z\right)=Lnz$.

证 （1） $\left(-z\right)^2=z^2$

（2） $Ln\left(-z\right)^2=Lnz^2$

（3） $Ln\left(-z\right)+Ln\left(-z\right)=Lnz+Lnz$

（4） $2Ln\left(-z\right)=2Lnz$

（5）$Ln\left(-z\right)=Lnz$

解 该命题不真，若$-\pi<\arg z\leq\pi$，则

$$\begin{aligned}&Lnz=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i\\&Ln\left(-z\right)=\ln|z|+i\arg z+\left(2k-1\right)\pi i,k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

故 $Ln\left(-z\right)\neq Lnz$.

该命题证明中，1) ~ 3)正确，但 3)推 4)错误.

此因$Lnz+Lnz$可视为两个相同数集各取一元素相加得到的和的数集，而$2Lnz$只为Lnz中每一数的 2 倍所成数集，显然，$2Lnz$仅为Lnz的一个真子集，$\therefore Lnz+Lnz\neq 2Lnz$.

性质 2 Lnz在区域$D=\left\{z\middle||z|<+\infty\right\}-\left\{z\middle|\operatorname{Re}z\leq 0,\operatorname{Im}z=0\right\}$中可以分解成无穷多个

单值连续分支（连续由复合函数连续性证）

$$w_k=\left(Lnz\right)_k=\ln\left|z\right|+i\left(\arg z+2k\pi\right),-\pi<\arg z<\pi,k\in z\,.$$

同样地，对每个 k （固定）， w_k 称为 Lnz 的第 k 个单值分支.

特别地，$k=0$ 时，记 $\ln z=\ln\left|z\right|+i\left(\arg z+2k\pi\right)$ 为 Lnz 的主支（有时也用 lnz 表 Lnz 的某确定分支）.

*. 对数函数分支的确定

同 $Argz$ 一样，Lnz 的一个分支在 D 上一点的值可唯一确定其在 D 内任一点的值，于是常用下面方法描述其分支

$$w=\ln z\left(\ln 1=i2k\pi\right)=\ln\left|z\right|+i\theta_1+2k\pi i,k\in\mathbb{Z}$$

*. 支点:同 $Argz$ 的讨论易得 $z=0$ 及 $z=\infty$ 是 $w=\ln z$ 的超越支点.

*. 割线上下沿的取值:$\left[w_0\right]_{\text{上}}=\ln\left|z\right|+\pi i,\left[w_0\right]_{\text{下}}=\ln\left|z\right|-\pi i$, 其它分支相应加、减的整数倍.

性质 3　Lnz 的每个单值分支在区域 D 内为解析的，且 $\left(\ln z\right)'=\dfrac{1}{z}$ ，从而称 $w=\ln z$ 是 D 内（多值）解析函数.

证　因任一分支与主支相差一常数，故只需对主支 $w_0=\ln z\left(\ln 1=0\right)$ 进行讨论.

$\forall z_0\in D$ ，则 $\exists N\left(z_0\right)\subset D$ ，对 $\forall z\in N\left(z_0\right)$ ，令 $w=\ln z,w_0=\ln z_0$ ，则

$$z=e^w,z_0=e^{w_0}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\ln z-\ln z_0}{z-z_0}\overset{\text{连续性}}{=}\lim_{w\to w_0}\frac{w-w_0}{e^w-e^{w_0}}=\frac{1}{\lim\limits_{w\to w_0}\dfrac{e^w-e^{w_0}}{w-w_0}}=\frac{1}{e^{w_0}}=\frac{1}{z_0}.$$

（其中，因 $\ln z$ 在 D 内连续，故 $z\to z_0$ 时， $w\to w_0$ ）

从而， $\ln z$ 在 D 内处处有导数，且 $\left(\ln z\right)'=\dfrac{1}{z}$ ，即 $\ln z$ 在 D 内解析.

推论　多值函数 Lnz 在区域 D 内可以分解成无穷多个单值解析分支

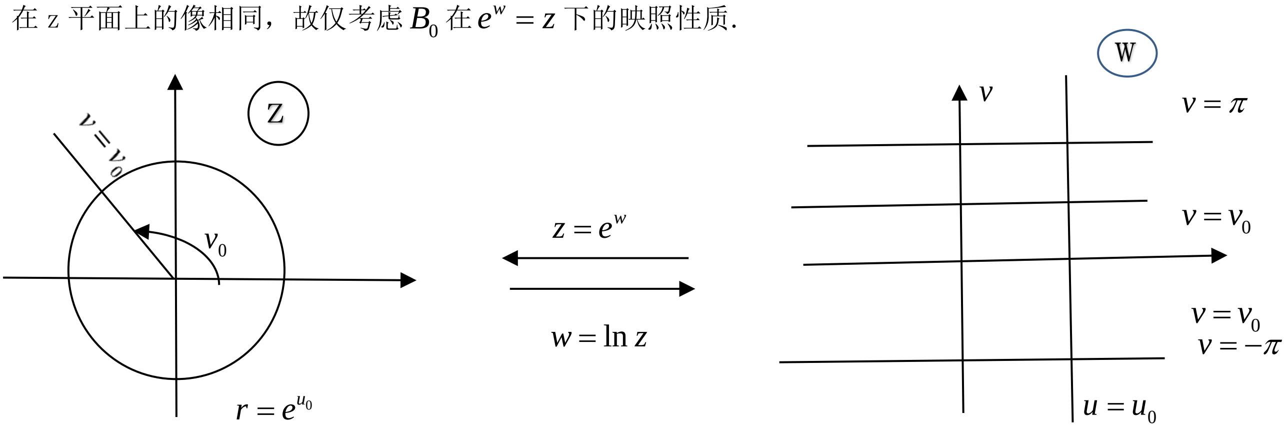
$$w_k=\ln z+2k\pi i=\ln\left|z\right|+i\arg z+2k\pi i,-\pi<\arg z<\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

4. 对数函数的映照性质及 $z=e^w$ 的单叶性区域

（1）先考虑 $z=e^w$ 的映照性质, 因 $z=e^w$ 的周期为 $2k\pi i$，即 带形区域

$$B_k=\left\{w\middle|2k\pi-\pi<\operatorname{Im}w<2k\pi+\pi,k\in\mathbb{Z}\right\},$$

在 z 平面上的像相同，故仅考虑 B_0 在 $e^w=z$ 下的映照性质.



易见，$z=e^w$ 把直线 $v=v_0$ 变成从原点出发的射线 $\theta=v_0$（不含 0），把线段"$u=u_0$"变成圆周 $r=e^{u_0}$（去负实轴部分），当 w 平面上动直线 $v=0$ 扫动到直线 $v=v_0$ 时，在变换 $z=e^w$ 下的像为 z 平面上从射线 $\theta=0$ 扫动到 $\theta=v_0$ 的角形区域，把 w 平面上带形 $-\pi<v<\pi$ 映成 z 平面上的区域 D.

显然，$B_k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ 都是 $z=e^w$ 的一个单叶性区域，而 $z=e^w$ 的单叶性区域为 w 平面上平行于实轴，宽不超过 2π 的带形区域.

思考

$G=\left\{w\middle|\alpha<\operatorname{Im}w<\alpha+2\pi\right\}\xrightarrow{z=e^w}$ 的像?

$G=\left\{w\middle|0<\operatorname{Im}w<2\pi\right\}\xrightarrow{z=e^w}$ 的像?

（2）$w=\ln z$ 的映照性质

由 $z=e^w$ 的映照性质，$w=Lnz$ 的第 k 个单值分支 $w_k=\left(Lnz\right)_k$ 把区域 D 双方单值映照成 B_k 的宽为 2π 的带形区域

$$B_k=\left\{w\middle|2k\pi-\pi<\operatorname{Im}w<2k\pi+\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\quad .$$

例 3 在 z 平面上取负实轴做割线，试求此域中 D 中多值函数 Lnz 的一个分支

$w=f(z)\left(f(1)=-2\pi i\right)$ ，并求出及 $f(i)$、$f(-2i)$ 及 $\left[f(-1)\right]_{上}$ 和 $\left[f(-1)\right]_{下}$.

解 $w=Lnz=w_0+2k\pi i,k\in\mathbb{Z}$, 将 $z=1$ 代入上式得 $w_0(1)+2k\pi i=-2\pi i$，即

$$2k\pi i=-2\pi i\Rightarrow k=-1$$

故所求分支为

$$w_{-1}=w_0-2\pi i=\ln|z|+i\arg z-2\pi i.$$

从而

$$f(i)=\ln|i|+i\arg i-2\pi i=-\frac{3}{2}\pi i,$$

$$f(-2i)=\ln|-2i|+i\arg(-2i)-2\pi i=\ln 2-\frac{5}{2}\pi i,$$

$$\left[f(-1)\right]_{上}=\ln|-1|+\pi i-2\pi i=-\pi i,$$

$$\left[f(-1)\right]_{下}=\ln|-1|-\pi i-2\pi i=-3\pi i.$$

$\varepsilon_x: p_{93}\ 20_{(1.2)}$.

（三）幂函数

1. 基本概念

定义 设 α 为一复常数，当 $z\neq 0,\infty$ 时，定义 z 的 α 次幂函数为 $w=z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}$. 在 α 为正实数的情形，补充规定 当 $z=0$ 时， $z^{\alpha}=0$.

$$z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}=e^{\alpha\ln|z|+\alpha i(\arg z+2k\pi)}=e^{\alpha\ln|z|}\cdot e^{i\alpha(\arg z+2k\pi)}=e^{\alpha\ln z}\cdot e^{\alpha i2k\pi}\ (\ln 1=0,k\in\mathbb{Z})$$

从而， z^{α} 取不同值的个数等于 $e^{\alpha\ln z}\ (k\in\mathbb{Z})$ 取不同值的个数，因 $\alpha\in\mathbb{C}$，故 $\alpha\cdot 2k\pi i$ 未必为 $2\pi i$ 的整数倍，即 $\alpha\cdot 2k\pi i$ 未必为周期.

2. 幂函数 $w=z^{\alpha}$ 的分支情况

（1）当 $\alpha=n\in\mathbb{Z}$ 时，对 $\forall k\in\mathbb{Z}$, $e^{\alpha 2k\pi i}=e^{k\alpha\cdot 2\pi i}=1$，故此时 z^{α} 为单值函数.

（2）设 $\alpha=\frac{m}{n}$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，且 $(m,n)=1$ 时, $e^{\alpha\cdot 2k\pi i}=e^{\frac{m\cdot 2k\pi i}{n}}$ 有 n 个不同值，所以 z^{α} 为一个多值函数.

特别地，当 $\alpha=\frac{1}{n}$， $w=\sqrt[n]{z}$ 为根式函数.

（3）支点及分支

可以验证 $z=0$ 及 $z=\infty$ 为 z^{α} 的支点，

$$w_0 \xrightarrow{\text{绕 z=0 逆时针转一周}} w_1；$$

$$w_0 \xrightarrow{\text{绕 z=0 逆时针转 n 周}} w_0；$$

从而，$z=0$ 及 $z=\infty$ 为 z^{α} 的代数支点. 在以负实轴及原点为割线的区域 D 内，$z^{\frac{m}{n}}$ 可以分解成 n 个单值连续分支 w_k，

$$w_k=\left(z^{\frac{m}{n}}\right)_k=|z|^{\frac{m}{n}}e^{im\frac{\arg z+2k\pi}{n}},k=n-1.$$

（3）当 α 为无理数或虚数时，$z^{\alpha\cdot 2\pi k\pi i}$ 取无穷多个不同值，故此 z^{α} 为一个无穷多值函数，同样可以验证, $z=0$ 及 $z=\infty$ 为 z^{α} 的超越支点，且在区域 D 内可以分解成无穷多个单值连续分支.

3. 幂函数的解析性

在区域 D 内，对 z^{α} 的某一分支 $z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z}$ 可以看作由 $e^{\alpha\xi}$ 及 $\xi=\ln z$ 的复合，且 $e^{\alpha\xi}$ 为指数函数在 ℂ 解析，$\xi=\ln z$ 在 D 内解析，故在共同区域 D 内，z^{α} 解析，且:

$$\left(e^{\alpha\xi}\right)'=\alpha\cdot e^{\alpha\xi},\xi'=(\ln z)'=\frac{1}{z},$$

$$\left(z^{\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha\ln z}\right)'=\alpha\cdot e^{\alpha\ln z}\cdot\frac{1}{z}=\alpha\cdot z^{\alpha-1}.$$

在区域 D 内，对 Lnz 的一个解析分支，z^{α} 也有一个相应的单值分支，它在 D 内亦解析，且 $\left(z^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot z^{\alpha-1}$.

故 z^{α} 在 D 上可以分解成有限或无限个单值解析分支.

例 4 求多值函数 $z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z}$ 在正实轴上取负实值的那一个解析分支.

解 $$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{\frac{\arg z+2k\pi i}{2}}\quad k=0,1,$$

由题意，当 $k=1$ 时，$e^{\frac{\arg z+2k\pi}{2}i}<0$，$k=1$，故所求解析分支为

$$\left(\sqrt{z}\right)_1=\sqrt{|z|}e^{\frac{i\arg z+2\pi}{2}}.$$

4. 根式函数的映照性质

$w=\sqrt[n]{z}\left(n\geq 2\right)$为$z=w^n$的反函数，由上面讨论知 $\sqrt[n]{z}$ 在以负实轴及原点为割线的区域 D 内，可以分解成n个单值解析分支

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{z}\cdot e^{\frac{i\arg z+2k\pi}{n}}\left(\arg 1=0\right)$$

类似于对数函数的讨论知 （详见$T.B.:p_{61}\sim p_{63}$ ）.

$z=w^m$把w平面上张度为$\dfrac{2\pi}{n}$的角形T_k

$$\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)<\varphi<\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)\quad\left(k=0\sim n-1\right)$$

都变成 z 平面上除去原点及负实轴的区域 D.

$w=\sqrt[n]{z}$ 的第k个单值解析分支

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k\quad\left(k=0\sim n-1\right)$$

把区域 D 双方单值映照成

$$T_k=\left\{w\left|\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}<\varphi<\frac{2k\pi+\pi}{n}\right.\right\}\quad\left(k=0\sim n-1\right)$$

张度不超过$\dfrac{2\pi}{n}$的角形区域.

5. 一般指数函数

定义 设α为一个非零有限复数，定义$w=\alpha^z=e^{z\ln\alpha}$为 z 的一般指数函数.

注 它是无穷多个独立的，在 z 平面上单值解析的函数，当$\alpha=e$时，e^z表示无穷多独立的在$\mathbb{C}$单值解析函数，只有当Lne取主值时，e^z才同通常实单值指数函数一致.

例 5 求i^i，1^i及$2^{(1+i)}$.

解 $i^i=e^{i\ln i}=e^{i\left(\ln(i)+i\arg i+2k\pi i\right)}=e^{-\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$，其主值为$e^{-\frac{\pi}{2}}\left(k=0\right)$.

$1^i=e^{i\ln 1}=e^{i\left(\ln 1+i\arg 1+2k\pi i\right)}=e^{-2k\pi}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, 其主值为 $e^0=1$.

$$
\begin{aligned}
2^{(1+i)} &= e^{(1+i)L\text{n}\,2} \\
&= e^{(1+i)(\ln 2+2k\pi i)} \\
&= e^{-2k\pi} \\
&= e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)} \\
&= e^{(\ln 2-2k\pi)}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)(k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

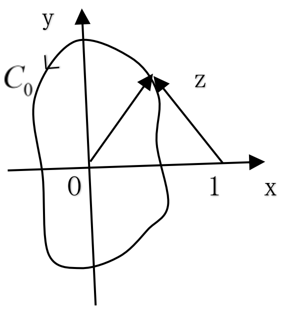
主值 $e^{\ln 2}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)$.

（四）具有多个有限支点的多值函数

1. 关于多项式的根式函数

分化多值为单值分值 $\begin{cases}\text{限制幅角范围} \\ \text{割破 z 平面}\end{cases}$，记$\Delta_c \arg z$表示沿 C 从起始到终点时幅角改变量.

例 6 讨论函数 $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 的支点及分支情况.



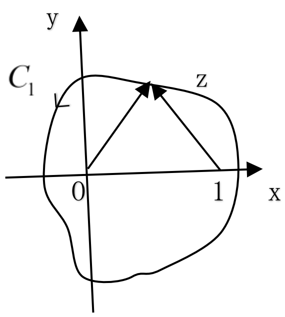
解 （1）先求函数 $f(z)$ 的支点.

由于$\sqrt{z}$ 的支点为$z=0$及∞

故 $f(z)$ 的可能支点为$z=0$，$z=1$及$z=\infty$.

（2）验证支点.

在$z=0$的一个小邻域$N(0)$中，任取简单闭曲线C_0，使$0\in C(0)$，当 z 自C_0上一点出发，沿正向绕行一周后，$\Delta_{C_0}\arg z=2\pi$. 又



$$w=f(z)=\sqrt{z(1-z)}e^{i\frac{\arg z+\arg(1-z)+2k\pi}{2}},(k=0,1)$$

$$w_{终}=w_{始}\cdot e^{i\frac{2\pi+0}{2}}=-w_{始}$$

故$z=0$为的 $f(z)$ 一个支点

同样可证 $z=1$为 $f(z)$ 的一个支点.

在$\infty=z$的一个“充分小”的邻域$N(\infty)$中，使$0,1\in N(\infty)$，任取一条绕∞的简单闭曲线 C，则$0,1\in I(C)$. 当 z 自 C 上一点出发，沿 C 绕一周后，

$$\Delta_C \arg z = 2\pi \text{ , } \Delta_C \arg(1-z) = 2\pi \text{ .}$$

$$\therefore w_{终} = w_{始} \cdot e^{\frac{2\pi+2\pi}{2}i} = w_{始}$$

$$\therefore z = \infty \text{ 不是 } f(z) \text{ 的支点}$$

综上即得， $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 只有 $z=0$ 及1两个支点.

(3) 分支情况.

取线段 $\{x|0 \le x \le 1, y=0\}$,$\exists k$ 为割线，在以 k 为边界的区域 D 内， $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 可分解成两个单值解析分支:

$$\left[f(z)\right]_k = \sqrt{z(1-z)}e^{\frac{i\arg z+\arg(-z)+2k\pi}{2}},(k=0,1) \quad .$$

例 7 讨论函数 $f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 的多值情况，且适当选取割线区域 D，使 $f(z)$ 能在 D 内分解成三个单值解析分支，并求出 $z=2$ 点取负值的分支在 $z=i$ 处的值.

解 由于 $\sqrt[3]{z}$ 的支点为 ∞ 和 0，故 $f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 的可能支点为: $z=0$, 1 和 ∞ .

易验证（仿例 6）它们均为 $f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 的支点 (P_{78}) ，取负实轴及线段 $\{x|0 \le x \le 1, y=0\}$，作为割线，在所得区域 D 内， $f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 可以分解成三个单值解析分支

$$w_k = \left[f(z)\right]_k = \sqrt[3]{z(1-z)}e^{i\frac{\arg z+\arg(1-z)+2k\pi}{3}},(k=0,1,2)$$

当 $z=2$ 时，

$$\left[f(z)\right]_k = \sqrt[3]{z(1-z)}e^{i\frac{i(0+\pi+2k\pi)}{3}} < 0 \Rightarrow k=1$$

所求分支为

$$w_1 = \left[f(z)\right]_1 = \sqrt[3]{z(1-z)}e^{i\frac{\arg z+\arg(1-z)+2\pi}{3}}$$

从而

$$w_1(i) = \left[f(i)\right]_1 = \sqrt[3]{i(1-i)}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}} = -\sqrt[6]{2}e^{\frac{5\pi i}{12}}$$

注 $\arg(1-z)=\pi$, $\Delta_c \arg(1-z)=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \arg(1-i)=\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$.

结论

(1)对具有多个有限支点的多值函数，我们不便采取限制幅角范围的办法去分出其单值分支，而是，首先求除该函数的一切分支（先求可能支点，再验证），然后用适当联结支点以割破 z 平面.于是,在 z 平面上以此割线为边界的区域 G 内就能分出该函数分单值(解析）分支.因 G 内变点不能穿过支割线，就不能单独绕任一支点旋转一周，函数就不可能在 G 内

同一点取不同的值了.

(2)类似于例 6～例 7 的讨论有

对 $w=f(z)=\sqrt[n]{k(z)}$， $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$为有理函数，其中多项式

$$P(z)=A(z-a_1)^{\alpha_1}\cdot(z-a_2)^{\alpha_2}\cdot\ \cdots\ \cdot(z-a_n)^{\alpha_m},$$

$$Q(z)=B(z-b_1)^{\beta_1}\cdot(z-b_2)^{\beta_2}\cdot\ \cdots\ \cdot(z-b_n)^{\beta_l},$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=N,\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_l=M.$$

有

（a） $f(z)$的可能支点为$a_1,a_2,\cdots a_m,b_1,b_2,\cdots,b_l$和$\infty$.

（b）当且仅当 n 不能整除α_i或者β_j时，α_i或者β_j为$f(z)$支点.

（c）∞为$f(z)$支点$\Leftrightarrow n\nmid(N-M)$.

（d）若 n 能整除 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,-\beta_1,-\beta_2,\cdots,-\beta_l$ 中若干个之和，则 $a_1,a_2,\cdots a_m,b_1,b_2,\cdots,b_l$中对应的那几个就可以联结成割线抱成一团，即变点 z 沿只包含它们在其内部的的简单闭曲线转一周后，函数值不变. 这种抱成的团可能不止一个. 其余不入团的点则可与∞和联结成一条割线.

注 若$Q(z)=1$，便得到教材 2.24 的结论.

2. 关于对数函数

例 8 设为 a，b 为两个不同的有限复数，讨论多值函数

$$(1)\ f(z)=Ln(z-a)(z-b)\quad (2)\ g(z)=Ln\frac{z-a}{z-b}$$

的支点及分支情况.

解 （1）可以验证 $z=a,b$及∞均是函数支点. 于是在以连接 a，b 的一条简单（扩充）曲线为割线的区域 D 内， $f(z)$可以分解成无穷多个单值解析函数分支

$$f_k(z)=\ln|(z-a)(z-b)|+i\left[\arg(z-a)+\arg(z-b)+2k\pi\right],k\in\mathbb{Z}.$$

（2）可以验证 $z=a,b$为函数的支点，但$z=\infty$不是$g(z)$支点，于是在以连接 a，b 的直线段（任意简单曲线均可）为割线的区域内，$g(z)$可以分解成无穷多个单值解析函数分支

$$g_k(z)=\ln\left|\frac{z-a}{z-b}\right|+i\left[\arg(z-a)-\arg(z-b)+2k\pi\right],k\in\mathbb{Z}.$$

结论

对于对数函数 $Ln\dfrac{P(z)}{Q(z)}=f(z)$，其中 $P(z),Q(z)$ 为多项式，$(P(z),Q(z))=1$，则有

（1）$P(z)$ 及 $Q(z)$ 的零点均是 $f(z)$ 的支点.

（2）当 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 次数相同时，∞ 不是 $f(z)$ 的支点.

3.已知单值解析分支的初值 $f(z_1)$，计算终值 $f(z_2)$.

方法 1　利用 z_1 处的值求出具体分支表达式（即确定 k），再把 z_2 代入求值.

方法 2　借助于每一单值分支 $f(z)$ 的连续性，先计算当 z 从 z_1 沿曲线 C（不穿过割线）到终点 z_2 时，$f(z)$ 的幅角改变量 $\Delta_C\arg f(z)$，再计算终值

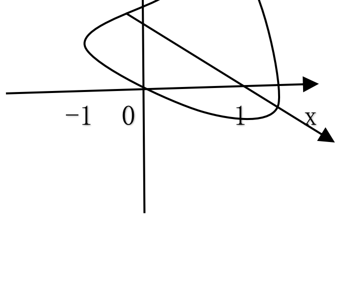
$$f(z_2)=\left|f(z_2)\right|e^{i\arg f(z_2)}=\left|f(z_2)\right|e^{i\left[\arg f(z_2)+\arg f(z_1)-\arg f(z_1)\right]}$$

$$\Rightarrow f(z_2)=\left|f(z_2)\right|\cdot e^{i\Delta_C\arg f(z)}\cdot e^{i\arg f(z_1)}$$

其中 $\Delta_C\arg f(z)$ 与 $\arg f(z_1)$ 的取值无关，$\arg f(z_1)$ 可以相差 2π 的整数倍. 当把 $z\in G$ 换成 G 内动点时，即 $f(z)=\left|f(z_1)\right|e^{i\arg f(z_1)}\cdot e^{i\Delta_C\arg f(z)}$ 为此单值解析分支的表达式.

例 9　试证 在将 z 平面适当割开后，函数 $f(z)=\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 能分出四个单值解析分支，并求出割线上岸取正值的那一支在 $z=-1$ 之值.

解及证　$4\nmid 1$、$4\nmid 3$ 且 $4\mid(1+3)$，知 $f(z)$ 的支点为 0，1. 可以在 z 平面上取线段 $[0,1]$ 为支割线，得一以它为边界的区域 D，在 D 内可以把 $f(z)$ 分成四个单值解析分支.



$$\Delta_C\arg f(z)=\frac{1}{4}\left[\Delta_C\arg z+3\Delta_C\arg(1-z)\right]$$
$$=\frac{1}{4}[\pi+3\times 0]=\frac{\pi}{4}$$

$$f(-1)=\sqrt[4]{\left|(-1)\left[1-(-1)^3\right]\right|}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{i0}$$

$$=\sqrt[4]{8}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$=\sqrt[4]{2}(1+i)$$

例 10 设函数 $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 的可单值分支分区域为 D.

（1）求在支割线 $[0,1]$ 上岸取正值的那一支 $f_0(z)$ 的表达式；

（2）求 $f_0(-1), f_0(4), f_0(\sqrt{3}i), f_0(-\sqrt{3}i), f_0\left(\frac{1}{2}+yi\right)$ 之值.

解 因为 $2\nmid 1$ 且 $2\mid(1+1)$，故此函数的支点为 $0,1$，在 z 平面上取线段 $[0,1]$ 为支割线，得一以它为边界的区域 D， $f(z)$ 在 D 内可以分解成两个单值解析分支.

（1）设 $z=r_1(z)e^{i\theta_1(z)}$， $1-z=r_2(z)e^{i\theta_2(z)}$，则

$$f_k(z)=\sqrt{r_1(z)\cdot r_2(z)}e^{i\frac{\theta_1(z)+\theta_2(z)+\theta_3(z)}{2}}\quad(z\in D,k=0,1)\quad.$$

当 z 在 $[0,1]$ 上岸时， $\theta_1=0,\theta_2=0$（见上图），

$$0<f_k(z)=\sqrt{r_1r_2}e^{\frac{2k\pi}{2}}\Leftrightarrow k=0.$$

故所求分支表达式为

$$f_0(z)=\sqrt{r_1(z)\cdot r_2(z)}e^{i\frac{\theta_1(z)+\theta_2(z)+\theta_3(z)}{2}}\quad(z\in D)\quad,$$

或者

$$f_0(z)=\sqrt{r_1(z)\cdot r_2(z)}\cdot e^{i\frac{1}{2}\left[\Delta_C\arg z+\Delta_C\arg(1-z)\right]}\cdot e^{i0}\quad(z\in D).$$

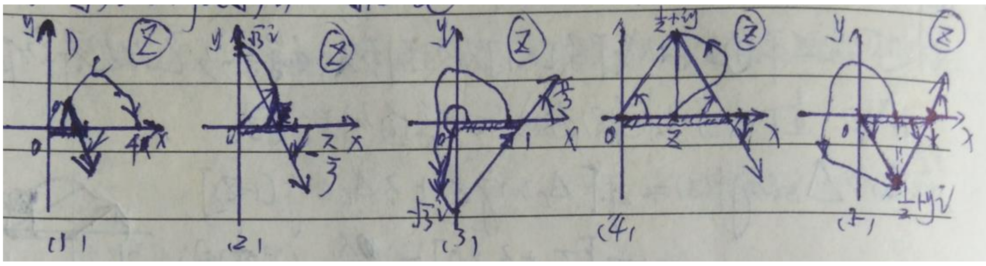
（2）

因 $-1\in D$，故 $f_0(-1)=\sqrt{1\times 2}\cdot e^{\frac{i}{2}(\pi+0)}=\sqrt{2}i$ （见上图）

因 $-4\in D$，故 $f_0(4)=\sqrt{3\times 4}\cdot e^{i(0+(-\pi))}=-\sqrt{12}i$ （见下图 1）

因 $\sqrt{3}\in D$，故 $f_0(\sqrt{3}i)=\sqrt[4]{12}\cdot e^{\frac{i}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}=\sqrt[4]{12}e^{\frac{\pi}{12}i}$ （下图 2）

因 $-\sqrt{3}\in D$，故 $f_0(-\sqrt{3}i)=\sqrt[4]{12}\cdot e^{\frac{i}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right]}=\sqrt[4]{12}e^{\frac{11\pi i}{12}}$ （图 3）



又

$$f_0\left(\frac{1}{2}+yi\right)=\sqrt{\left|\frac{1}{2}+iy\right|\cdot\left|\frac{1}{2}-iy\right|}\cdot e^{i\frac{1}{2}\left[\Delta_c \arg z+\Delta_c \arg(1-z)\right]}$$

$$=\left|\frac{1}{2}+iy\right|\cdot e^{i\frac{1}{2}\left[\Delta_c \arg z+\Delta_c \arg(1-z)\right]}$$

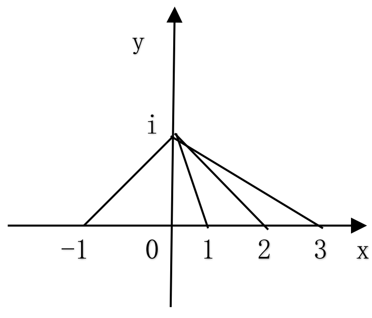
$$=\begin{cases}\left|\frac{1}{2}+iy\right|e^{i0}\left(\text{等腰}\triangle\right)=\left|\frac{1}{2}+iy\right| & y>0\text{时（图4）}\\ \left|\frac{1}{2}+iy\right|e^{i\pi}=-\left|\frac{1}{2}+iy\right| & y<0\text{时（图3）}\end{cases}$$

注　解这类题的要点 即作图、观察，当动点 z 沿 C（C 在 D 内且不穿过割线）从起点 z_1 到终点 z_2 时，各固定幅角的连续改变量 $\Delta_C \arg z,\Delta_C \arg(1-z),\cdots$，即观察向量 $z,1-z,\cdots$ 的幅角改变量，由此可计算 $\Delta_C f(z)$.

练习 求函数 $f(z)=\sqrt[3]{\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$，当 $z=3$ 时，$f(3)>0$ 的那一支在 $z=i$ 处的值.

解　(1)支点 -1，0，1，2 及∞，取以 2 为始点的负实轴为割线，$f(z)$ 在割破 z 平面的区域 D 内能分割成三个单值解析分支.

(2)所求分支解析表达式为



$$f(z)=\sqrt[3]{\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|}e^{i\Delta_C \arg f(z)}\cdot e^{i0}\quad(z\in D,C\in D),$$

其中,

$$\Delta_C \arg f(z)=\frac{1}{3}\left[\Delta_C \arg(z-(-1))+\Delta_C \arg(z-1)+\Delta_C \arg(z-2)-\Delta_C z\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $i\in D,C\subset D,\Delta_C \arg\left[z-(-1)\right]=\dfrac{\pi}{4},\Delta_C \arg(z-1)=\dfrac{3\pi}{4},$

$$\Delta_C \arg z=\frac{\pi}{2},\Delta_C \arg(z-2)=\pi-arctg\frac{1}{2},$$

$$\therefore f(i)=\sqrt[3]{\left|\frac{(i+1)(i-1)(i-2)}{z}\right|}e^{\frac{i}{3}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\pi-\arg ctg\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}=i\sqrt[6]{20}\cdot e^{-\frac{i}{3}arctg\frac{1}{2}}.$$

例 11　求函数$\sqrt{(z-1)(z-2)}$在指定点$z_1=3,z_2=3+\frac{i}{2}$的导数，其中$\sqrt{w}$取单值解析分支 $|w|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg w}{2}}$，$-\pi<\arg w<\pi$，即当$w=(z-1)(z-2)$取正值时，$\sqrt{w}$亦取正值.

解　记$\xi=\sqrt{w}$，$w=(z-1)(z-2)$，其中$\sqrt{w}$取所设的单值分支.

$\sqrt{(z-1)(z-2)}$的支点为 1、2，代换后$\xi=\sqrt{w}$的支点为 0 和∞，利用复合函数求导法则

$$\frac{d\xi}{dz}=\frac{d\xi}{dw}\cdot\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(z-1)(z-2)}}{(z-1)(z-2)}(2z-3),$$

$$\therefore \left.\frac{d\xi}{dz}\right|_{z=z_1=3}=\frac{\frac{1}{2}(6-3)\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{2},$$

$$\left.\frac{d\xi}{dz}\right|_{z=z_2+3+\frac{i}{2}}=\frac{(3+i)\sqrt{7+6i}}{7+6i}=\sqrt[4]{\frac{20}{17}}e^{i\left(arctg\frac{1}{3}-\frac{1}{2}arctg\frac{6}{7}\right)}\quad.$$

练习　求$w=\ln(1+\sin z)$在点$z=\frac{i}{2}$的导数.

分析 应用复数代换$\xi=\sin z$，可使无穷多支点化为单值有限支点情形.

解　$w=\ln(1+\sin z)$是以$w=\ln(1+\xi)$和$\xi=\sin z$的复合函数，$w=\ln(1+\xi)$的支点为$\xi=-1$和$\xi=\infty$，割线可以取ξ平面上从$\xi=-1$出发的负实轴，于是$w=\ln(1+\xi)$在以此为界的区域 D 内单值解析.

$$\sin\frac{i}{2}=\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{i}{2}}-e^{-i\frac{i}{2}}\right)=-\frac{i}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}\right)\neq 1,\infty$$

也不取小于负 1 的实数，故$\sin\frac{i}{2}=\xi\in D$，依复合函数求导法则

$$\left[\ln z(1+\sin z)\right]'_{z=\frac{i}{2}}=\left.\frac{\cos z}{1+\sin z}\right|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{\cos\frac{i}{2}}{1+\sin\frac{i}{2}}=\frac{1-i\Delta h\frac{1}{2}}{ch\frac{1}{2}}$$

（五）反三角与反双曲函数

1. 反正切函数

记号 $w = Arctgz$ 定义为 $tgw = z$ 的解的总体，因

$$
\begin{aligned}
& z = tgw = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{iw}}{e^{iw} + e^{iw}} \Rightarrow e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \\
& \Rightarrow 2iw = Ln\frac{1+iz}{1-iz} \Rightarrow Arctgz = \frac{1}{2i}Ln\frac{1+iz}{1-iz}
\end{aligned}.
$$

2. 反正弦函数

由 $\sin w = z$ 所决定的 w 称为 z 的反正弦函数，记为 $w = Arc\sin z$，因

$$
\begin{aligned}
& z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\
& \Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \\
& \Rightarrow e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} \\
& \Rightarrow w = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)
\end{aligned},
$$

易得反余弦函数

$$Arc\cos z = \frac{1}{i}Ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$$（视作的二次方程）.

3. 反双曲函数

$$Archz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arshz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

$$Arthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$$

例 12 (1) 求 $Arc\sin 2$； （2）求 $Arctg\left(2i\right)$.

解 由题意可得

$$
\begin{aligned}
Arc\sin 2 &= -iLn\left(2i \pm \sqrt{3}i\right) \\
&= -i\left[\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi \\
&= \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi + i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\left(k \in \mathbb{Z}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} Arctg(2i) &= -\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3}+\pi i+2k\pi i\right) \\ &= \frac{\pi}{2}+i\frac{\ln 3}{2}+k\pi \\ &= \left(\frac{1}{2}+k\right)\pi+i\frac{\ln 3}{2}(k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

五、小结

●双曲函数的周期性；

●多值函数及分支；

●解析性.

六、作业 $P_{92\ 1\sim3}, 14_{(3)}, P_{93\ 20(1,2)、23、23}$.

七、补充及预习要求:

补充练习

1. 若 $a\in\mathbb{R}$，求方程 $\cos z=a$ 的解.

解 $z=Arc\cos a=-iLn\left(a+\sqrt{1-a^2}i\right)=-iLn\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$.

（1）若 $|a|\le 1$，则 $\sqrt{a^2-1}$ 为纯虚数，故

$$\left|a+\sqrt{a^2-1}\right|=\left|a+\sqrt{1-a^2}i\right|=1 \quad ,$$

$$\begin{aligned} z &= Arc\cos a \\ &= -i\left[\ln 1+i\left(arctg\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+2k\pi\right)\right] \\ &= arctg\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+2k\pi \\ &= \arccos a+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

（此处 $\arccos a$ 表通常反余弦函数主值，即 $|a|\le 1$ 时，复数意义（视 $a\in\mathbb{C}$）下的解与通常意义相同）.

2）若 $|a|>1$，则 $\sqrt{a^2-1}\in\mathbb{R}$. $a\pm\sqrt{a^2-1}\in\mathbb{R}$，此时，

$$\begin{aligned} z &= Arc\cos a \\ &= -iLn\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right) \\ &= -i\left[\ln\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right)+2k\pi i\right]. \\ &= 2k\pi\pm i\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) \end{aligned}$$

当$a<-1$时，$a\pm\sqrt{a^2-1}$皆为负数，此时

$$\begin{aligned} z &= Arc\cos a \\ &= -i\left[Ln\left|a\pm\sqrt{a^2-1}\right|+i(2k+1)\pi\right] \\ &= (2k+1)\pi \pm iln\left|a\pm\sqrt{a^2-1}\right| \\ &= (2k+1)\pi \pm iln\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right) \end{aligned}$$

方程的解为

$$z=\begin{cases} \arccos a+2k\pi & |a|\le 1 \\ 2k\pi\pm i\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) & a>1 \\ (2k+1)\pi\pm iln\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right) & a<-1 \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

2. 预习要求 预习并回答以下问题

（1）闭曲线 C 为区域边界时，如何确定其正向？

（2）比较复积分与$[a,b]$上实积分的异同？

（3）举例说明 一般不能将 $\int\limits_{(a,b)} f(z)dz$ 改成$\int_a^b f(z)dz$

3. 参考文献[1]、[3]、[6].

割口的区域 D 内的点与 z 平面上带割口的区域 G 内的点也是一一对应的;（2）的逆变换为 $z=\dfrac{i(1-\xi)}{1+\xi}$，可见的支点为$i$，$-i$（下图）.

在下图中,当ξ沿ξ平面的负实轴从 0 经过-1 到时$-\infty(+\infty)$时，像点 z 又沿 z 平面的虚轴从i经$+\infty(-\infty)$到$-i$（与在无穷远点处是一致的）.