第五章　解析函数的 laurent 展式与孤立奇点

在第四章里，我们已经建立了区域 D 内解析的函数与幂级数的等价关系，也有用到了泰勒级数表示图形区域内的解析函数是很方便的。但对特殊的函数（如圆心为奇点的函数）就不能在奇点的领域内表示成泰勒级数，为此，本章将建立在圆环内解析函数的级数表示，并用它的工具来研究解析函数在其孤立奇点领域内的性质.

通过圆环内解析函数的级数展开，我们的到来推广了的幂级数——Laurent 级数，它既可以是函数在其孤立奇点去心领域内的幂级数展式，反之，以它为工具又可研究解析函数连去心领域内的性质.

泰勒级数与洛朗级数是研究解析函数的有力工具.

本章主要参考文献　【1】,【3】—【6】

§1、解析函数的 Laurent 展式

一 、目的和要求

1、了解双边幂级数极其收敛圆环内的性质.

2、掌握 Laurent 定理及其与泰勒定理的关系.

3、掌握求 Laurent 展式的常用方法及 Laurent 展式的初步应用.

二、　重难点

1、重点

双边幂级数，Laurent 定理，Laurent 展式.

2、难点

Laurent 展式求法及其应用.

三、教学方法

采用启发式的课堂讲授法.

四、教学手段

电教，CAI 演示（**2 课时**）

（一）　双边幂级数

我们已知幂级数

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots \tag{5.1}$$

在其收敛圆$|z-a|<R(0<R\le+\infty)$内表示一个解析函数，考虑级数

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots \tag{5.2}$$

作代换 $\xi=\dfrac{1}{z-a}$ 则它表示一个幂级数

$$c_{-1}\xi + c_{-2}\xi^2 + \cdots + c_{-n}\xi^n + \cdots,$$

若其收敛区域为 $|\xi| < r(0 < r \le +\infty)$ 则

$$|z-a| > \frac{1}{r}\ (0 \le r < +\infty)$$

内表示一个解析函 $f_2(z)$

定理 5.1 形如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数称为双边幂级数.其中 z_0，

$c_n\left(0 \le r \le |z-a| < R \le +\infty\right)$，易得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \text{ 及 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \text{ 均收敛且有公共收敛域} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_n)^n .$$

由以上讨论及定理 4.10，定理 4.13 易得.

定义 5.1 设双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛圆环为 $\mathrm{H}\left(0 \le r \le |z-a| < R \le +\infty\right)$，则

(1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 H 内绝对收敛且内闭一致收敛于 $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ ，其中

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(z-a)^n \qquad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

(2) $f(z)$ 在 H 内解析.

(3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 H 内可以逐项求导 $p = k\left(k = 1,2,3\cdots\right)$, 还可以沿 H 内曲线逐项积分.

注 该定理对应于 Th4.13

（二） 解析函数的 Laurent 定理以及 Taylor 定理的关系

1、Laurent 定理

前面指出 双边幂级数在其收敛圆环内表示解析函数，反之亦有.

定理 5.2（洛朗定理） 在圆环内 H：$0 \le r < |z-a| < \mathrm{R} \le +\infty$ 解析的函数 $f(z)$ 必可以展成双边幂级数（即洛朗级数）

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

其中洛朗系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \quad (n=0,\pm1,\cdots)$$

Γ 为圆周 $|\xi-a|=\rho$（$0<\rho<R$ 的任何数）并且展式是惟一的.

证 设 z 为圆环 H 内的任意点，在 H 内作圆环 $H^{'}:\rho_1\le|Z-a|\le\rho_2$，使 $z\in H^{'}$，且 $r<\rho_1<\rho_2<R$，记

$$\Gamma_1: |\xi-a|=\rho_1 \quad \Gamma_2: |\xi-a|=\rho_2$$

由于 $f(z)$ 在闭圆环 $\overline{\mathrm{H}'}$ 上解析，据 Cauchy 积分定理有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \tag{1}$$

当 $\xi\in\Gamma_2$ 时，有级数

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)(z-a)}=\frac{1}{(\xi-a)(1-\frac{z-a}{\xi-a})}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{\mathrm{n}+1}} \tag{2}$$

一致收敛

当 $\xi\in\Gamma_1$ 时，有级数

$$-\frac{1}{\xi\text{-}z}=\frac{1}{(z-a)(1-\frac{z-a}{\xi-a})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \tag{3}$$

一致收敛.

将（2），（3）分别代入(1)式，然后逐项求积分，我们就可以看到 $f(z)$ 有展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \quad (n=0,1,2\cdots)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi$$

根据复周线的 Cauchy 积分定理 ，对 $\forall\Gamma: |z-a|=\rho(r<\rho<R)$，有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_i}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\left(n=0,1,2,\cdots\right)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi\left(n=0,1,2,\cdots\right)$$

于是系数可统一成

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\ (\mathrm{n}\in z)$$

因为系数 c_n 与我们所取得 z 无关，故在圆环 H 内，有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n .$$

（2）唯一性

若 $f(z)$ 在圆环 H 内又能展成 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n{}'(z-a)^n$，据定理 5.1 知 它在圆周 $\Gamma:|z-a|=\rho(r<\rho<R)$ 上一致收敛. 乘以上 Γ 的有界函数 $\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$ 后仍一致收敛，故可逐项积分

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}}d\xi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n{}'\int_{\Gamma}(\xi-a)^{n-m-1}d\xi$$

又重要积分知 右端级数中 n=m 那一项积分为 $2\pi i$，其余多项为 0，则

$$c_m{}'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}}d\xi\left(m=0,\pm1,\cdots\right)$$

故 $c_n{}'=c_n\left(n=0,\pm1,\cdots\right)$

注 ① 此处展式的唯一性指的是 $f(z)$ 与圆环 H 唯一确定了系数 c_n，但同一个函数在不同环内展式自然是不同的。

② 当已给函数在 a 点解析时，收敛圆环就退化成收敛圆 $K:|z-a|<K$，此时洛朗定理就是泰勒定理，洛朗系数就是泰勒系数，也只有此时，洛朗系数除了有上述积分形成外，还有微积分形成 $\frac{f^{(n)}(a)}{n}$ 也只有这时，洛朗级数才退化成泰勒级数。因此，泰勒级数是洛朗级数的特殊，即 $c_{-n}=0(n\in Z)$.

③ 在求一些初等函数的 Laurent 展式时，往往不直接用公式，而是主要通过间接法，

即据洛朗展式的唯一性，通过利用已知初等函数的泰勒展式来展开.

例 2 求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在适当圆环内的洛朗展式.

分析 $f(z)$ 在 c_∞ 上只以 $z=0,1,\infty$ 为奇点，故此 z 半平面被分成

（1）$0<|z|<1$（原点的去心领域，f 最大解析邻域）

（2）$1<|z|<+\infty$（点无穷的去心邻域）

两个不交解析区域，自然还有

（3）$0<|z-1|<1$（$z=1$ 的去心邻域）

（4）$1<|z-1|<+\infty$（以 1 为心的点 ∞ 的去心邻域）

下面分这四个最大去心邻域来展开 $f(z)$

解 （1）$0<|z|<1$（展开中心为 $z=0$）

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{1-z}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

（2）$1<|z|<+\infty$，即 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$（展开中心 $z=0$）

$$f(z)=\frac{1}{z}\bullet\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\bullet\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\bullet\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}z^{-n}$$

（3）$0<|z-1|<1$（展示中心为 $z=1$）

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

（4）$1<|z-1|<+\infty$，即 $\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$（展开中心为 $z=1$）

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\bullet\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z-1})^n$$

$$=-\frac{1}{z-1}\bullet\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\bullet(\frac{1}{z-1})^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n}$$

例 1　求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在

（1）$|z|<1$　　（2）$1<|z|<2$　　（3）$2<|z|<+\infty$ 内的展式.

解　首先将函数 $f(z)$ 分解成部分分式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

（1）在圆 $|z|<1$ 内，因 $|z|<1<2$，即 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，故

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$$

即 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内的泰勒展式.

(2)在圆环 $1<|z|<2$ 内，即有 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\bullet\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n-1}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

（3）在圆环 $2<|z|<+\infty$ 内，有 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，$\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$，故

$$f(z)=\frac{1}{z}\bullet\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\bullet\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n-\frac{1}{z}\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}-1}{z^n}$$

解析函数在孤立奇点邻域内的洛朗展式

1、孤立奇点

定义 5.2 若函数 $f(z)$ 在点 a 的某一去心邻域 $K-\{a\}$ $0\le|z-a|<R$ 内解析，a 为

$f(z)$的奇点，则称a为$f(z)$的一个孤立奇点.

注　用$f(z)$在$K-\{a\}$内为单值的，故也称a为$f(z)$的单值性孤立奇点。若$f(z)$为$K-\{a\}$内多值函数，则称a为$f(z)$的多值性孤立奇点（即支点）.

以后不特别声明提到的孤立奇点皆指的是单值性孤立奇点，当然也有非孤立奇点.

1、据定义及 Laurent 定理知

若a为$f(z)$的一个孤立奇点，则必$\exists R>0$，使$f(z)$在点a的去心邻域$K-\{a\}$ $0\le|z-a|<R$内可展成 Laurent 级数，即解析函数在孤立奇点的去心邻域内能展成洛朗级数，但在非孤立奇点的邻域内则不能.

例 2　求函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)}\bullet\dfrac{1}{(z-2)}$在$z=1$及$z=2$去心邻域内的洛朗展式.

解　(1)在以 1 为心的最大解析区域（去心邻域）$0<|z-1|<1$内

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

（2）在（最大）去心邻域$0<|z-2|<1$内

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$$

补　**例 2**（见前页）

例 3　$\dfrac{\sin z}{z}$在 C 上只有奇点$z=0$，在其去心邻域$0<|z|<+\infty$内有 Laurent 展式

$$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\bullet z^{2n}}{(2n+1)!}$$

例 4　$e^z+e^{\frac{1}{z}}$在 C 上只有奇点$z=0$，在去心邻域$0<|z|<+\infty$内，有洛朗展式

$$e^z+e^{\frac{1}{z}}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\bullet\frac{1}{z^n}\qquad(0<|z|<+\infty)$$

例 5　$\dfrac{\sin z}{z-1}$在 C 上只有奇点$z=1$且在去心邻域$0<|z-1|<+\infty$内，可以展成 Laurent 级数

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin(1+\frac{1}{z-1})=\sin1\cos\frac{1}{z-1}+\cos1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin1[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\cdots]+\cos1[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots]$$

$$=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{z!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots$$

补例 求函数 $f(z)=\frac{1}{1-z}e^z$ 在适当圆环内的洛朗展式.

解 $f(z)=\frac{1}{1-z}e^z$ 在 C_∞ 上只以 $z=1,\infty$ 为奇点（孤立），而 $0<|z-1|<+\infty$ 即为 $z=1$ 的（最大解析）去心邻域，又为以 $z=1$ 为中心的 $z=\infty$ 的去心邻域.

$$\frac{1}{1-z}e^z=\frac{1}{1-z}e^{z-1+1}=-\frac{e}{z-1}e^{z-1}=-e\frac{1}{z-1}\bullet\sum_{n=9}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=-e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\bullet(z-1)^{n-1}$$

$$=-e[\frac{1}{z-1}+1+\frac{z-1}{2!}+\cdots+\frac{(z-1)^{n-1}}{n!}+\cdots]\qquad(0<|z-1|<+\infty)$$

补例 6 问函数 $\tan\frac{1}{z}$ 能否在 $0<|z|<R$ 内展成洛朗级数？

解 $\tan\frac{1}{z}=\frac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}$ 的奇点为 $\cos\frac{1}{z}$ 的零点 $\frac{1}{z_k}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 及 $z=0$；当 $k\to\infty$ 时，$z_k\to0$，故 $z=0$ 为非孤立奇点，故不存在去心邻域 $0<|z|<R$，使 $\tan\frac{1}{z}$ 在其内解析，则不可能把 $\tan\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<R$ 内展成 Laurent 级数

五、小结

1、双边幂级数　2、Laurent 定理　3、Laurent 展开的方法

六、作业

P_{127} 1（1），2（1）

七、补充说明

1、求一个函数的 Laurent 级数，基本上都是从已知的洛朗级数出发，有时可利用洛朗级数的加法和乘法得到所求的洛朗级数.

（1）（洛朗级数的加法）

设 $F(z)=f(z)+g(z)$ 于 $r<|z-a|<R$ 内解析，又

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n$$

在 $r<|z-a|<R$ 内，则

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n$$

证 据级数加法及洛朗展式的唯一性，即得。特别地，$f(z)$ 于 $|z-a|<R$ 内解析，

$g(z)$ 于 $r<|z-a|$ 内解析，则 $f(z)$ 按 $z-a$ 正幂展开，$g(z)$ 按 $z-a$ 负幂展开.

（2）（洛朗级数的乘法）

设 $F(z)=f_1(z)\bullet f_2(z)$ 于 $r<|z-a|<R$ 内解析，且

$$f_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n \qquad f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-a)^n$$

则

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

其中

$$c_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k b_{n-k} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

证　由题意可得

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{F(\xi)}{(\xi-\mathrm{a})^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(\xi-a)^k\bullet f_2(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

其中，$r<\rho<R$，因为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(\xi-a)^k f(\xi)$ 于 $|\xi-a|=\rho$ 上一致收敛.

$$c_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\frac{1}{2\pi i}\bullet\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f_2(\xi)}{(\xi-a)^{n-k+1}}d\xi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k b_{n-k}$$

注　要灵活应用上面的系数公式，只要记住乘积中多项式为

$$c_n(z-a)^n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-a)^k\bullet b_{n-k}(z-a)^{n-k}.$$

补充材料

例 1　将 $e^{c\left(z+\frac{1}{z}\right)}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展为 Laurent 级数.

解　由题意可知

$$e^{c(z+\frac{1}{z})}=e^{cz}\bullet e\frac{c}{z}-(1+cz+\frac{c^2z^2}{z!}+\cdots)(1+c\frac{1}{z}+\frac{c^2}{z!}\bullet\frac{1}{z^2}+\cdots)$$

应用上述公式（*），此时，e^{cz}，$e^{\frac{c}{z}}$ 中多正幂项及负幂项分别为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^{n+k}}{(n+k)!}z^{n+k}\bullet\frac{c^k}{k!}\frac{1}{z^k}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}z^k\bullet\frac{c^{n+k}}{(n+k)!}\frac{1}{z^{n+k}}\quad(n\in N)$$

由此得

$$e^{c(z+\frac{1}{z})}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z^n+\frac{1}{z^n})$$

其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\frac{c^{n+k}}{(n+k)!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

2、求洛朗展式的直接法

例 2 再原点去心邻域把函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^5}$ 展成洛朗级数

解 直接法 作圆周 $\Gamma:|z|=\rho \qquad 0<\rho<+\infty$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{\xi}}{\xi^{n+6}}d\xi=\frac{1}{(n+5)!}\quad(n\geq 0)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{\xi}}{\xi^{-n+6}}d\xi=\frac{1}{(-n+5)!}\quad(n=0,1,2,3,4,5)$$

间接法 $f(z)=\frac{1}{z^5}e^z=\frac{1}{z^5}\bullet\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\qquad(0<|z|<+\infty)$

八、预习要求 预习并思考；

1、如何判断三种孤立奇点类型？奇点共分几类？

2、z_0 为 $f+g$ 的孤立奇点，是否为 $f+g$ 的孤立奇点？若是可能为哪些类型？请举例说明 （参文【1】【5】【6】）