§2、初等解析函数（Ⅰ）

一、目的要求

1、充分掌握解析函数的等价刻画定理，充分认识C.－R.条件在判别复函数在一点或者整个区域可微的重要性.

2、运用极坐标形式的 C.－R.条件来判别函数的解析性，灵活运用例 2.10 结论及 L’Hospital 法则.

3、充分掌握 Z 整幂函数、有理函数的解析性、指数函数的常见性.

二、重难点

1、重点

解析函数的等价刻画定理，指数函数的常见性质.

2、难点

不同形式的C.－R.条件及应用，指数函数性质.

三、教法与教学手段

课堂讲授法、采用启发式、以例题说明、电教 CIA 演示.

四、教学内容（2 课时）

（一）解析函数的等价刻画原理

回顾解析函数的概念及 C.－R.条件和判别一点可微的几个定理，通过解析的定义及定义 2.2 易得

定义 2.4　函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ u(x,y),v(x,y) \text{在 D 内可微} \\ (2)\ \text{在 D 内} C.-R.\text{条件成立} \end{cases}$$

由定义 2.2 及定义 2.3，我们有

定义 2.5　$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析

$$\Longleftarrow \begin{cases} (1)\ u_x、u_y、v_x、v_y \text{在 D 内连续} \\ (2)\ \text{在 D 内} C.-R.\text{条件成立} \end{cases}$$

从以上几个定理我们可以看出 C.－R.条件是判断复变函数在一点可微或在区域内解析的主要条件.在哪一点不满足它，函数在那一点就不可微，在哪个区域内不满足它，函数在那个区域内就不解析.

例 1　讨论 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解　因为 $u(x,y)=x^2+y^2$　　$v(x,y)=0$

$$u_x=2x \quad u_y=2y \quad v_x=v_y=0$$

这四个偏导数在 z 平面上处处连续，但只在 $z=0$ 处满足 C.－R.条件，故

$f(z)$ 只 $z=0$ 在处可微.

故函数在 z 平面上处处不解析.

例 2 讨论 $f(z)=x^2-iy$ 的可微性及解析性.

解 因 $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=-y$，故

$$u_x=2x,\ u_y=2y, v_x=0, v_y=-1 \quad ,$$

所以

$$u_y=0=-v_x,$$

欲 $2x=u_x=v_y=-1$，必须 $x=-\dfrac{1}{2}$. 故 C.－R. 条件仅在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上成立，且偏导数连续，从而 $f(z)$ 仅在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上可微，但在 z 平面上， $f(z)$ 处处不解析.

例 3 设 $f(z)=my^3+nxy^2+i\left(x^3+lxy^2\right)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，求 l,m,n 之值.

解 易得

$$u_x=2nxy, u_y=3my^2, v_x=3x^2+ly^2, v_y=2lxy.$$

据 C.－R. 条件得

$$2nxy=2lxy \Rightarrow xy(n-l)=0 \qquad (1)$$

$$u_x=-v_y \Rightarrow 3my^2+nx^2 \Rightarrow -3x^2-ly^2$$

即

$$(3m+l)y^2+(n+3)x^2=0 \qquad (2)$$

由（1）取 $x,y\neq 0$ 得 $n=l$

由（2）取 $x=0, y\neq 0$ 及 $x\neq 0, y=0$ 得 $\begin{cases} 3m+l=0 \\ n+3=0 \end{cases}$

故 $n=l=-3, m=1$.

例 4 若函数 $f(z)=x+iy$ 在区域 D 内解析，且在 D 内 $v=u^2$，试证 $f(z)$ 在 D 内必为常数.

证 若 u 为常数，从而 $v=u^2$ 为常数，从而 $f(z)$ 为常数，若 u，v 均不为常数，此时 u_x,u_y,v_x 与 v_y 不同时恒为 0，但从 $-v+u^2=0$ 分别对 x,y 微分，得

$$2uu_x-v_x=0, 2uu_y-v_y=0.$$

上面两方程相容的条件为（代数知识）

$$\begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ u_y & -v_y \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 0$$

故

$$u_x v_y - u_y v_x = 0 \qquad (1)$$

而由 C.－R. 条件，在 D 内

$$u_x = v_y, u_y = -v_x \qquad (2)$$

代入得

$$u_x{}^2 + u_y{}^2 = 0 = v_x{}^2 + v_y{}^2,$$

从而在 D 内，有

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0,$$

故 $f(z)$ 在 D 内必为常数.

证 由题设条件 $v = u^2$ 知：$f(z) = u + iu^2$，又由 C.－R. 条件，在 D 内

$$u_x = v_y = 2uu_y \qquad (3)$$

及

$$u_y = -v_x = -2uu_x \qquad (4)$$

（3）代入（4）得

$$u_y = -2u(2uu_y) = -4u^2 u_y$$

即

$$(4u^2+1)u_y = 0 \Rightarrow u_y = 0,$$

又由（3）知 $u_x = 0 \Rightarrow u$必为常数$\Rightarrow v$必为常数.

例 5 试证 $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ 在 z 平面上解析，且 $f'(z) = f(z)$.

证 $u(x,y) = e^x \cos y, v(x,y) = e^x \sin y$，

而

$$u_x = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, v_x = e^x \sin y, v_y = e^x \cos y$$

在 z 平面上处处解析且合 C. －R. 条件，由定义 2.5 知 $f(z)$ 在平面上解析，且

$$f'(z)=u_x+iv_y=e^x\cos y+e^x\sin y=f(z).$$

例 6 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0\ (z\in D)$，则 $u(x,y)=c_1, v(x,y)=c_2\ (c_1,c_2\text{为常数})$ 为 D 内两正交曲线族.

证 因为

$$f(z)=u_x+iv_x\neq 0(z\in D)$$

故在点 $z(x,y)$ 处，u_x 与 v_x 不全为 0

（1）设在 (x,y) 处，$u_x\neq 0$ 且 $v_x\neq 0$，则曲线族 $u(x,y)=G$ 的斜率由

$$0=du=u_xdx+u_ydy$$

求得

$$k_u=-\frac{u_x}{u_y}$$

同理易得

$$k_v=-\frac{u_x}{v_y}$$

故在点 (x,y) 处

$$k_u\cdot k_v=\frac{u_x}{u_y}\cdot\frac{v_x}{v_y}=\frac{v_y}{-v_x}\cdot\frac{v_x}{v_y}=-1,$$

故曲线 $u(x,y)=c_1$ 及 $v(x,y)=c_2$ 在点 (x,y) 正交.

（2）设在点 (x,y) 处，$u_x\neq 0$ 且 $v_x\neq 0$ 或 $u_x=0$ 且 $v_x\neq 0$，此时过交点的两条切线必然一条为水平切线，另一条为铅直切线，它们仍然在交点处正交.

（二）初等解析函数

1、整幂函数即多项式函数在 $\mathbb{C}$ 解析，有理分式函数在分母不为 0 点处解析.

2、指数函数 由例 5 知 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在 z 平面上解析，且 $f'(z)=f(z)$.

定义 2.4 $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$，定义 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 为指数函数，常记为 $w=e^z$.

（1）基本性质

① 对实数 $z=x\left(y=0\right)$ 来说，此处定义与通常实指数函数的定义是一致的.

② $\left|e^z\right|=e^x>0$, $\arg e^z=y$, 在 z 平面上 $e^z\neq 0$.

③ e^z 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且 $\left(e^z\right)'=e^z$.

④ 加法定理成立，即 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

⑤ e^z 是以 $2\pi i$ 为基本周期的周期函数.

注 周期函数 若 $f\left(z\right)$ 当 z 增加一个定值 w 时，其值不变，即 $f\left(z+w\right)=f\left(z\right)$，则称 $f\left(z\right)$ 为周期函数，称 w 为 $f\left(z\right)$ 的周期，若 $f\left(z\right)$ 的所有周期都是某一周期 w 的整数倍，则称 w 为 $f\left(z\right)$ 的基本周期.

证 ⑤ 显然，$2\pi i$ 为 e^z 一个周期，设 w 为 e^z 的任一周期 $w=a+bi$，从而有

$$1=e^0=e^w=e^a\left(\cos b+i\sin b\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\left|e^w\right|=e^a=1\Rightarrow a=0\\ \arg e^w=b=\arg 1=2k\pi\left(k\in z\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow w=0+2k\pi i=2k\pi i.$$

⑥ 极限 $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 不存在，即 e^∞ 无意义.

⑦ 对任意复数 z_1、z_2，有 $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow z_1=z_2+2k\pi i\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

例 7 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^z$.

分析 应用分析中的 L‘Hospital 法则，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\right|^n=\left|e^z\right|=e^x$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\arg e^z=y$$

证 （1）令 $p_n=\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right|=\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^2+\left(\dfrac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$，故

$$\ln p_n=\frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]$$

令$\xi=\dfrac{1}{n}$视为连续变量，由 L ‘Hospital 法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln p_n=\lim_{\xi\to\infty}\frac{i}{2\xi}\ln\left[\left(1+\xi x\right)^2+\xi^2y^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}\frac{2\left(1+\xi x\right)x+2\xi y^2}{\left[\left(1+\xi x\right)^2+\xi^2y^2\right]^2}=x$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\ln p_n=x.$$

(2) 令$Q\left(n\right)=\arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=n arctg\dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}Q\left(n\right)=\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}arctg\frac{\xi y}{1+\xi x}$$
$$=\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\xi y}{1+\xi x}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+\xi x\right)y-\xi yx}{\left(1+\xi y\right)^2}=y$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^z.$$

补充练习 试证 $f\left(z\right)=e^{\bar{z}}$ 不是 z 的解析函数.

证 $\mathrm{Re}\left[f\left(z\right)\right]=e^x\cos y,\mathrm{Im}\left[f\left(z\right)\right]=-e^x\sin y$

$$u_x=e^x\cos y=-v_y,u_y=-e^x\sin y=v_x$$

而$e^z\neq 0$，又$\cos y$和$\sin y$不能同时为 0

对$\forall z=x+iy$均不能使 C.－R. 条件$u_x=v_y,u_y=-v_x$同时成立，所以 $f\left(z\right)=e^{\bar{z}}$在任一点均不可微, 即 $f\left(z\right)=e^{\bar{z}}$ 在$\mathbb{C}$处处不解析.

五、小结

- 等函数的解析性;
- 数函数的解析性.

六、作业 $p_{90}-p_{91}$ $5_{(1.3)}$ 6选 $8_{(1.2)}$.

七、学习要求

列出初等解析函数与对应实函数的异同!!

八、参阅文献 [1]、[6].

§2、初等解析函数（Ⅱ）

一、目的和要求

1、充分掌握正余弦、正余切函数及其性质，区分其在复数领域与实数领域中的区别

2、掌握双曲线函数及其解析性、周期性及其基本公式.

二、重难点

1、重点

三角函数、双曲函数及其性质.

2、难点

不同复函数间的关系及其与实函数的关系.

三、教法

课堂讲授法、采用启发式、电教、CIA 演示.

四、教学内容（约 2 课时）

（一）复正、余弦函数

定义（由指数函数引出） $\forall z\in\mathbb{C}$，称 $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 分别为 z 的正弦函数及余弦函数.

基本性质

（1）对 $z=x\left(y=0\right)\in\mathbb{R}$ 来说，此处所定义的函数与通常正弦及余弦函数的定义一致.

（2）在 z 平面上是解析的，且 $\left(\sin z\right)'=\cos z,\left(\cos z\right)'=-\sin z$.

证

$$\left(\sin z\right)'=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)'=\frac{1}{2i}\left(ie^{iz}+ie^{iz}\right)\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=\cos z$$

同理可证另一个.

（3）$\sin z$ 为奇函数，$\cos z$ 为偶函数，即：

$$\sin z\left(-z\right)=-\sin z,\cos\left(-z\right)=\cos z .$$

（4）通常的三角恒等式成立，如

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$
$$\sin\left(z_1\pm z_2\right)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2 .$$
$$\cos\left(z_1\pm z_2\right)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$$

试证　$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}}{4}+\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}}{4} \\
&= \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2} \\
&= \cos(z_1+z_2)
\end{aligned}$$

（5）$\sin z$ 及 $\cos z$ 是以为 2π 为基本周期的周期函数.

证　因为 2π 为其周期，如

$$\begin{aligned}
\cos(z+2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)}e^{-i(z+2\pi)}}{2} \\
&= \frac{e^{iz}e^{i2\pi}+e^{-iz}e^{-i2\pi}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z
\end{aligned}.$$

设　$\cos(z+w)=\cos z$

$$\Rightarrow \cos(z+w)-\cos z=0$$

$$\Rightarrow -2\sin\left(\frac{w}{2}+z\right)\cdot\sin\frac{w}{2}=0 \quad \text{（见（6）条）}$$

$$\Rightarrow \frac{w}{2}=k\pi \Rightarrow w=2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

（6）$\sin z$ 及 $\cos z$ 的零点与实数域内情形一致.

例　$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0 \Leftrightarrow e^{iz}=e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz}=1$，令

$$z=a+bi \Rightarrow e^{2ai-2b}=1 \Rightarrow \begin{cases} e^{-2b}=1 \Rightarrow b=0 \\ a=n\pi\left(n\in\mathbb{Z}\right) \end{cases}$$

故 $z=n\pi\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ 为 $\sin z$ 的零点.

同理可推得 $\cos z$ 的零点.

（7）在复数域内不能在断言 $|\sin z|\le 1$，$|\cos z|=1$，即 $\sin z$ 及 $\cos z$ 在复平面上的无界函数

例　取 $z=iy\left(y>0\right)$，则

$$\cos(iy)=\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}>\frac{e^{y}}{2}$$

只要充分大，$\cos(iy)$ 就可大于任一预先给定的正数.

注 定义本身就反映了复正、余弦函数及复指数函数有着密切关系.特别地，对任何复数有

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

这是 Eulor 公式在复数域内的推广.

例 1 求 $\sin(1+2i)$ 的值.

解

$$\begin{aligned}\sin\left(1+2i\right)&=\frac{e^{i(1+2i)}+e^{-i(1+2i)}}{2i}=\frac{e^{-2+i}+e^{2-i}}{2i}\\&=\frac{e^{-2}\left(\cos1+i\sin1\right)+e^{2}\left(\cos1-i\sin1\right)}{2i}\\&=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos1=ch2\sin1+ish2\cos1\end{aligned}.$$

例 2 函数 $f\left(z\right)=e^{-\frac{1}{z}}$ 除 $z=0$ 外在 $\mathbb{C}$ 上都有定义，试证明

（1）在去心半圆"$0<|z|\le1,|\arg z|\le\frac{\pi}{2}$"上 $f\left(z\right)$ 有界;

（2）在上述半圆上 $f\left(z\right)$ 连续，但不一直连续;

（3）在去心扇形"$0<|z|\le1,\left|\arg z\le\alpha<\frac{\pi}{2}\right|$"上 $f\left(z\right)$ 一致连续.

分析 （1）证 $\exists M>0$, 使在此去心半圆上，$\left|f\left(z\right)\right|\le M\left(z\ne0\right)$.

（2）因为 $f\left(z\right)$ 在原点不连续，证明在原点附近总存在充分接近的两个点 $z^{'},z^{''}$，使 $\left|f\left(z^{'}\right)-f\left(z^{''}\right)\right|$ 不能任意小.

（3）先证明 $f\left(z\right)$ 在有界闭集"$0<|z|\le1,\left|\arg z\le\alpha<\frac{\pi}{2}\right|$"上连续.

证 （1）令 $z=re^{i\varphi}=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right),r\ne0$, 因为

$$f\left(z\right)=e^{-\frac{1}{z}}=e^{-\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{r}}$$

故

$$\left|f\left(z\right)\right|=e^{-\frac{\cos\varphi}{r}}$$

当 $|\varphi|=|\arg z|\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\varphi\ge0$，由于 e^{x} 为增函数，所以

$$\left|f\left(z\right)\right|=e^{-\frac{\cos\varphi}{r}}\le e^{0}=1\left(r\ne0\right)$$

（2）$z\neq 0$，知$-\dfrac{1}{z}$为z的连续函数，因而$f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$在上述去心半圆上连续，但不一致连续.

事实上，对$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，无论多么$\zeta$小，总存在两点

$$z^{'}=\frac{i}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\quad 与\ z^{"}=-\frac{i}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi},$$

虽然$\left|z^{'}-z^{"}\right|=\dfrac{4}{(4k+1)\pi}<\varsigma$（只要$k$充分大），但

$$\left|e^{-\frac{1}{z^{'}}}-e^{-\frac{1}{z^{"}}}\right|=\left|e^{i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}-e^{-i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right|$$
$$=2\left|\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right|=2>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

由（1）知$f(z)=e^{-\frac{\cos\varphi}{r}}$，而当$|\varphi|\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$时，有

$$\cos\varphi\ge\cos\alpha\Rightarrow\left|f(z)\right|=e^{-\frac{\cos\varphi}{r}}\le e^{-\frac{\cos\varphi}{r}}_{(r\to 0)}$$

故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$.

若定义$z=0$时，$f(z)=0$，则

$$f(z)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{z}}&,\quad z\neq 0\\ 0&,\quad z=0\end{cases}$$

在有界闭扇形"$0<|z|\le 1,\left|\arg z\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right|$"上连续. 从而一致连续$\Rightarrow f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$在"$0<|z|\le 1,\left|\arg z\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right|$"上一致连续.

（二）正、余切函数

定义 2.6 规定

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}、\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}、\sec z=\frac{1}{\cos z}、\csc z=\frac{1}{\sin z}$$

分别称为 z 的正切、余切、正割及余割函数.

基本性质

（1）$\cos z$ 的零点 $z_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi,\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ 为解析函数 tgz 及 $\sec z$ 在 $\mathbb{C}$ 的全部奇点，

$\sin z$ 的零点 $z_n=n\pi,\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ 为解析函数 $ctgz$ 及 $\csc z$ 在 $\mathbb{C}$ 的全部奇点，且在定义域内

$$\left(tgz\right)^{'}=\sec^2 z,\left(ctgz\right)^{'}=-\csc^2 z$$
$$\left(\sec z\right)^{'}=\sec ztgz,\left(\csc z\right)^{'}=-\csc zctgz$$

（2）正、余切函数的周期为 π，正余割的周期为 2π . 如

$$\tan\left(z+\pi\right)=\frac{\sin\left(z+\pi\right)}{\cos\left(z+\pi\right)}=\frac{-\sin z}{-\cos z}=\tan z\ .$$

例 3 对 $\forall z\in\mathbb{C}$，若 $\tan\left(z+\pi\right)=\tan z$，则 $w=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

证 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{e^{i2z}-1}{i\left(e^{2iz}+1\right)}$

$$\tan\left(z+w\right)=tgz\Leftrightarrow e^{2i(z+w)}=e^{2iz}\Rightarrow e^{2iw}=1\Rightarrow w=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

例 4 当 $z=x+iy$ 时，证明下列不等式

（1）$\left|\sin z\right|\geq\dfrac{1}{2}\left|e^{-y}-e^{y}\right|$ ；（2）$\left|\tan z\right|\geq\dfrac{\left|e^{y}-e^{-y}\right|}{e^{y}+e^{-y}}$.

证 （1）$\left|\sin z\right|=\left|\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|e^{iz}-e^{-iz}\right|\geq\dfrac{1}{2}\left|\left|e^{iz}\right|-\left|e^{-iz}\right|\right|=\dfrac{1}{2}\left|e^{-y}+e^{y}\right|$ ；

（2）$\left|\tan z\right|=\left|\dfrac{\sin z}{\cos z}\right|=\dfrac{\left|e^{iz}-e^{-iz}\right|}{\left|e^{iz}+e^{-iz}\right|}\geq\dfrac{\left|e^{iz}-e^{-iz}\right|}{e^{iz}+e^{-iz}}$，

因由三角不等式 $\left|e^{iz}+e^{-iz}\right|\leq\left|e^{iz}\right|+\left|e^{-iz}\right|=e^{y}+e^{-y}$.

（三）双曲线

定义 2.7 规定

$$\sin hz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\cos hz==\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$
$$\tan hz=\frac{\sin hz}{\cos hz},\coth z=\frac{1}{\tan hz}$$
$$\sec hz=\frac{1}{\cos hz},\csc hz=\frac{1}{\sin hz}$$

并且分别称之为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切、双曲正割及双曲余割函数.

双曲函数皆以$2\pi i$为基本周期，且都是解析函数，各有其解析区域，且都是相应的实双曲函数在复数域内的推广.

基本公式见$T.B.\ \varepsilon_x(1)$ 16~18题各公式.

例 4 （1）解方程 $\cos z = ish5$；

（2）证明 $th(z+\pi i) = thz$.

解 （1）记 $z = x+iy$，$\cos z = \cos xchy - i\sin xshy$

原方程即

$$\cos xxhy - ishy\sin x = i\sin 5$$

可知

$$\cos xchy = 0 \qquad -\sin xshy = sh5$$

又因为 $\cos hy = \frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right) \neq 0$，故 $\cos x = 0$，因此

$$x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

代入得

$$(-1)^{k+1}shy = sh5 \Rightarrow y = (-1)^{k+1}5$$

故

$$z = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + 5(-1)^{k+1}i\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

（2）
$$\begin{aligned}\tan h(z+\pi i) &= \frac{\sin h(z+\pi i)}{\cos h(z+\pi i)}\\ &= \frac{\sinh z\cos h\pi i - \cosh z\sin h\pi i}{\cos hz\cos h\pi i + \sin hz\sin h\pi i}\\ &= \frac{\sin hz\cos\pi - i\cos hz\sin\pi}{\cos hz\cos\pi + i\sin hz\sin\pi}\\ &= \frac{\sin hz}{\cos hz}\\ &= \tan hz\end{aligned}$$

注 无论是复三角函数，还是复双曲函数，都是指由复指数函数表示.

五、小结

- 整函数；
- 三角函数的无界性.

六、作业 p_{92} $11_{(2)}$. 13. 14(3).   .

七、补充及预习要求

预习思考题

1.幂函数何时为单值函数，何时为多值函数？

2.为何会产生多值？如何单值化？

3.实基本初等函数推广到复数域后，产生哪些新性质？

八、后记

1.参考文献[1].[2].[5].