应用运筹学基础：线性规划 (3) - 初始可行解

这一节课讲解了利用单纯形法求解线性规划问题中，如何获得一个初始可行解。

再次加入松弛变量

松弛变量总是那么好用...考虑原问题为 $\begin{aligned}\max_x \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0\end{aligned}$ 我们加入松弛变量 $\bar{x}$，把问题转化为 $\begin{aligned}\max_x \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + \bar{x} = b \\ & x, \bar{x} \geq 0\end{aligned}$ （这里我们要求 $b \geq 0$，一般的带不等式约束的线性规划问题，都能通过移项、加/减松弛变量等方法凑出 $b \geq 0$ 的只含等式约束的线性规划问题标准形式）

这样，我们就有了一个天然的初始可行解 $x = 0, \bar{x} = b$。

但还存在一个问题：$\bar{x}$ 是我们添加进去的变量，我们希望最后的最优解里，$\bar{x}$ 能全部出基（这样 $\bar{x} = 0$），只留下 x 中的变量作为基变量，这样我们才能在不改变原问题的情况下，获得原问题的解。

大 M 法

一个很自然的想法，就是对不为 0 的 $\bar{x}$ 进行“惩罚”。我们可以将目标函数改为 $z = c^T x - M\sum_{i=1}^m \bar{x}_i$ 如果 M 是一个足够大的正数，那么如果原问题存在可行解，$\bar{x}$ 就会在 $-M$ 这个“严厉的惩罚”之下变成 0。

可是这个方法有一个很大的缺陷：M 的值到底该取多少呢？如果 M 的值取得太小导致 $\bar{x}$ 最后还是非 0，到底是因为 M 太小了，还是因为问题本来就没有可行解呢；如果 M 的值取得太大，可能会带来计算上的误差。所以这个方法貌似不太常用...

两阶段法

我们只是想要找到线性规划问题的一个初始可行解，并不一定要同时获得原问题的最优解，所以我们完全可以另外设计一个只由松弛变量组成的优化问题，解决了这个优化问题，就找到了原问题的一个可行解。我们设计优化问题如下

$$\begin{aligned}\min_{\bar{x}} \quad & \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \\ \text{s.t.} \quad & Ax+\bar{x}=b \\ & x,\bar{x}\ge 0\end{aligned}$$

（如果觉得看 max 比较习惯的话也可以写成 $\max_x \quad -\sum_{i=1}^m \bar{x}_i$）

对于这个优化问题，$\bar{x}=b$ 就是一个可行解，所以就不用费心再去找初始可行解了。

容易发现，如果这个优化问题的最优解的目标函数值不为 0，那么原问题无可行解；如果最优解让目标函数值为 0，就说明了存在一种 x 的取值满足约束，且 $\bar{x}=0$，这样就找到了原问题的一个可行解。我们再以这个可行解为起点，利用单纯形法求出原问题的最优解即可。

来举一个例子，考虑以下线性规划问题

$$\begin{aligned}\max_x \quad & 4x_1-x_2+x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+2x_2+3x_3=1 \\ & 2x_1+3x_2+2x_3=2 \\ & x\ge 0\end{aligned}$$

加入松弛变量，转化为两阶段法的优化问题

$$\begin{aligned}\max_x \quad & -x_4-x_5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+2x_2+3x_3+x_4=1 \\ & 2x_1+3x_2+2x_3+x_5=2 \\ & x\ge 0\end{aligned}$$

利用单纯形表求解，第一次迭代：

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 3 & 5 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ \hline x_4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

为了展示一个特殊情况，我们不按常规选择检验数最大的入基，而是选择 x_1 入基，x_4 出基，第二次迭代：

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 0 & -1 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

我们发现，目标函数值已经是 0 了，但是基变量里有一个 x_5，还是没有把 $\bar{x}$ 完全从基变量里弄出去。不过没关系，这是一个退化情况，我们有 $x_2=x_3=x_5=0$。我们此时可以让 x_2 入基，x_5 出基，就能把基变量变为 x_1 和 x_2。同时也求出了原问题的一个可行解：$x_1=1, x_2=x_3=0$，基变量是 x_1 和 x_2。

接下来继续利用单纯形表求解原问题。第一次迭代：$\begin{array}{c|ccc|c} & 0 & 0 & 25 & -4 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}$ 是一个退化情况，不过我们还是继续计算。让 x_3 入基，x_2 出基，第二次迭代：$\begin{array}{c|ccc|c} & 0 & -25/4 & 0 & -4 \\ \hline x_1 & 1 & 5/4 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \end{array}$ 所有检验数都非正，迭代结束。我们获得了原问题的最优解：$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$，此时目标函数值为 4。