§2、解析函数的（有限）孤立奇点

一、目的和要求

1、掌握有限孤立奇点的三种类型及其判定定理，灵活利用判定定理判定奇点的类型.

2、掌握关于本质奇点的 Weierstrass 定理及 Picard（大）定理.

二、重难点

1、重点

孤立奇点的分类及判定；

2、难点

判定定理及应用.

三、教学方法

课堂讲授法，采用启发式，以实例导入，易懂易分析概念；在判定定理的教学中采用启发式法.

四、教学手段

电教，CAI 演示　（2 课时）

（一）（有限）孤立奇点的三种类型（定义与分类）

实例（1）$\dfrac{\sin z}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}=1-\dfrac{z^2}{3!}+\cdots\qquad(0<|z|<+\infty)$

（2）$\dfrac{e^z}{z^5}=\dfrac{1}{z^5}+\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{z!}\bullet\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{3!}\bullet\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{4!}\bullet\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{z}{6!}+\cdots\qquad(0<|z|<+\infty)$

（3）$e^z+e^{\frac{1}{z}}=z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\bullet\dfrac{1}{z^n}\qquad(0<|z|<+\infty)$

从其负幂部分的讨论得出传授内容

若 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点 则 $f(z)$ 在 a 的某去心邻域 $\mathrm{K}-\{a\}$ 内可以展成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$$

称其 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 为 $f(z)$ 在点 a 的解析部分，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为 $f(z)$ 再点 z_0 处的主要部分.此时，实际上，非负幂部分表示点 a 的邻域 $\mathrm{K}:|z-a|<R$ 内的解析函数，故函数再点 a 的奇异性质完全体现在洛朗级数的非负幂部分上.

定义 5.3　设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点

若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0，则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点；

若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项，设为 $\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}$

$(c_{-m}\neq 0)$ 则称 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，一阶极点又称简单极点.

若 $f(z)$ 在 z_0 出的主要部分有无穷多项部位 0，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

（二）孤立奇点类型的判定定理

定理 5.3 若 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列条件等价

（1） $f(z)$ 在 a 点的主要部分为零；

（2） $\lim\limits_{z\to a} f(z)=b(\neq\infty)$；

（3） $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界。

证 $(1)\Rightarrow(2)$

有（1）知

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\cdots(0<|z-a|<R)$$

故

$$\lim_{z\to a} f(z)=c_0(\neq\infty)$$

$(2)\Rightarrow(3)$ 已证.

$(3)\Rightarrow(1)$ 设 $f(z)$ 在点 a 某去心邻域 $K-\{a\}$ 内以 M 为界，即 $\exists\delta>0$，使当 $0<|z-a|<\delta<R$ 时，$|f(z)|\leq M$

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|}f\left(z\right)\left(z-a\right)^{n-1}dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}\bullet M\bullet 2\pi\rho\bullet\rho^{n-1}=M\rho^n$$

令 $\rho\to+\infty$，得到; $c_{-n}=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 从而函数在点 a 的主要部分为零.

例 1 设 $f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi}$，确定奇点 $z=\pi$ 的类型.

解 $f\left(z\right)$ 在 C 上只有奇点 $z=\pi$，故为孤立奇点，又因为

$$\lim_{z\to\pi}\frac{\sin z}{z-\pi}=-\lim_{z\to\pi}\frac{\sin\left(\pi-z\right)}{\pi-z}=-1\neq\infty$$

故 $z=\pi$ 为其可去奇点.

练习 1、用展式和极限方法证明$z=0$为$\dfrac{e^z-1}{z}$的可去奇点。

2、*Schwarz* 引理　方法即 Ch7,4

3、极点

定理5.4　若 a 为$f(z)$的孤立奇点，则下列条件等价

（1）$f(z)$在 a 点的主要部分为 $\dfrac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\dfrac{c_{-1}}{(z-a)}$　　$(c_{-m}\neq 0)$

（2）$f(z)$在点 a 的某一去心邻域内能表成 $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$， 其中$\lambda(z)$在点 a 的邻域内解析且$\lambda(z)\neq 0$

（3）$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$以 a 为 m 级零点，只要令$g(a)=0$

z_0为$f\left(z\right)$的 m 阶极点$\Rightarrow\lim\limits_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)^m f\left(z\right)=b$其中 b 为一个非零有限常数

证　$(1)\Rightarrow(2)$

假设条件（1）成立，则$f(z)$在$z_0=a$的某去心邻域内的 Laurent 展式为

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m+1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots]$$

令 $\lambda(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n-m}(z-z_0)^n$，$\lambda(z)$则在 a 邻域内解析，且$\lambda(a)\neq 0$

$(2)\Rightarrow(3)$

若（2）真，则在 a 点的某去心邻域内，有$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-a)^m}{\lambda(z)}$　，其中$\dfrac{1}{\lambda(z)}$在 a 点某邻域解析且$\dfrac{1}{\lambda(a)}\neq 0$， 故 a 为$g(z)$可去奇点（作为解析点来看）又$g(z)=0$，则 a 为$g(z)$的 m 阶零点.

$(3)\Rightarrow(1)$

若 z_0 为 $g(z)$ 的 m 阶零点，则在 z_0 的某邻域 K 内为 $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在此邻域内解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，从而 $\mathrm{K}-\{a\}$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\varphi(z)},$$

因 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在 K 中仍解析，且 $\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$，故可设 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在 K 中的 Taylor 展式为

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots$$

从而 $f(z)$ 在 $\mathrm{K}-\{a\}$ 内的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\ (c_{-m}\neq 0)$$

注 $f(z)$ 的 m 阶极点即为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点

$f\left(z\right)$ 的孤立奇点为 a 的极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$

例 2 函数 $f(z)=\frac{5z+1}{(z-1)(2z+1)^2}$

(1) 以 $z=1$ 为简单极点 $[\frac{5z+1}{(2z+1)^2}/(z-1)]$

(2) 以 $z=-\frac{1}{2}$ 为二阶极点 $[\frac{5z+1}{(z-1)}/(2z+1)^2]$

（以 $\frac{\sin z}{z^2}$ 为例，$z=0$ 为一阶极点）

补例 3 求 $f(z)=\frac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 的奇点并确立其类型。

解 易知 $z=0, z=1, z=-1$ 为 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点.

法一 先考虑 $z=0$，$f(z)=\frac{1}{z}[\frac{z-5}{(z-1)^2(z+1)^3}\bullet\frac{\sin z}{z}]=\frac{1}{z}\lambda(z)$（显然 $\lambda(z)$ 在 $z=0$ 解析（只需令 $\frac{\sin z}{z}|_{z=0}=1$），且 $\lambda(0)=-5\neq 0$，故 $z=0$ 为函数的简单极点.

同法可知 $z=1, z=-1$ 分别为 $f(z)$ 的二阶和三阶奇点。

法二 由于 $z=0$ 为 $\sin z$ 的一阶零点，以 z 除 $f(z)$ 的分子，分母有

$$f(z)=\frac{(z-5)\dfrac{\sin z}{z}}{(z-1)^2 z(z+1)^3}.$$

由定理 5.4 知 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，$z=1, z=-1$ 分别为 $f(z)$ 的二阶极点和三阶极点.

补例 4 求 $f(z)=\cot\dfrac{1}{z}$ 的全部有限奇点并确定其类型.

解 $\cot\dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos\dfrac{1}{z}}{\sin\dfrac{1}{z}}$ ，故全部奇点只能为 $z=0$ 和 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}\left(K\in Z\left|\{0\}\right.\right)$（$\dfrac{1}{z}$ 无意义及 $\sin\dfrac{1}{z}=0$ 的点）， 又 $\cos\dfrac{1}{z}\Big|_{z=z_k}=0$，而 $\sin\dfrac{1}{z}\Big|_{z=z_k}=0$，且 $(\sin\dfrac{1}{z})'\Big|_{z=z_k}\neq 0$. $z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 为 $f(z)=\cot\dfrac{1}{z}$ 的一阶奇点且 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=0=z_0$，则 z_0 为函数的非孤立奇点（为驻极点之聚点）.

4、本性奇点（少用，一般多用定义）

定理 5.6 $f\left(z\right)$ 的孤立奇点为本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)\neq\begin{cases} b \\ \infty\end{cases}$（b 为有限数），即 $\lim\limits_{z\to a} f\left(z\right)$ 不存在.

注 就本书所遇到的奇点情况来看，可列表如下

$$\text{奇点}\begin{cases}\text{孤立奇点}\left\{\begin{matrix}\text{可去奇点}\\ \text{极点}\\ \text{本质奇点}\end{matrix}\right\}\text{单值函数}\\ \\ \text{非孤立奇点}\end{cases}$$

定理 5.7 若 $z=a$ 为 $f(z)$ 之一的本质奇点且 $f(z)$ 在 a 的某去心邻域内不为 0，则 a 也是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证 a 不是 $\varphi(z)$ 的可去奇点和极点（反证）

若$z=a$为可去奇点（由假设$z=a$为$\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$的孤立奇点）

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to a}\varphi(z)=b\neq 0\Rightarrow \lim_{z\to a}f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{b}(b\neq 0)\\ \infty(b=0)\end{cases}$$

故a为$\varphi(z)$的可去奇点或极点

若$z=a$为$\varphi(z)$的极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=\infty\Rightarrow \lim\limits_{z\to a}f(z)=0$，故 a 为$f(z)$的可去奇点

注　该定理中，“$f(z)$在 a 的某去心邻域内不为 0”不可少

如　z=0 为$f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$的本性奇点（Laurent）

例 5　$z=0$为e^z的本质奇点，因为

$$\frac{1}{e^z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots$$

从而$z=0$为$e^{-\frac{1}{z}}$的本质奇点

定理 5.8 （*Weierstrass* 定理）　如果a为函数$f\left(z\right)$的本质奇点，

$\Leftrightarrow$对于任何常数 A，都有一个收敛于a的点列$\left\{z_n\right\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(z)=A$

证　'$\Leftarrow$'　$\lim\limits_{z\to\infty}f(z_n)=\lim\limits_{z\to a}f(z)$不存在（可为任意数），则据 Th5.6 说明;

'$\Rightarrow$'　$A=\infty$用函数在 a 的任何去心邻域内部都是无界的（否则 a 必为可去奇点），则结论真.

若$A\neq\infty$ ，若在 a 的任何小邻域内部都存在一点 z，使$f(z)=A$，则该情况下定理真.

假设在 a 的充分小邻域内K-$\{\mathrm{a}\}$，$f(z)\neq A$，据 Th5.7　$\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$在$\mathrm{K}$-$\{a\}$内解析且以 a 为本性奇点（a 为$f(z)$本性奇点）。

据（1）段结果，必有一个超于 a 的点列$\{z_n\}$存在使

$$\lim_{z_n\to a}\varphi(z)=\infty\Rightarrow \lim_{z_n\to a}f(z_n)=A\text{。}$$

关于本性奇点，证明了一个更的深刻的结论，即

定理 5.9（*Picard* 定理）　若 a 为 f(z)的本性奇点，则对于每一个$A\neq\infty$除掉$A=A_0$可能的一个值外，必有超于 a 的无限点列，　使

$$f(z_n)=A(n\in N)$$

例 z=0 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。

不难证明，对 $\forall\varepsilon>0$, 及 $\forall r\in\mathbb{C}-\{0\}$, 在 $0<|z|<\varepsilon$ 内必存在一点 z', 使 $f(z')=r$ 。

五、小结

1、孤立奇点的分类；2、判定；3、应用

六、作业 预习下面并思考

1、∞ 是否一定为整数的孤立奇点？

2、比较 $0<|z|<+\infty$ 内解析函数在 z=0 和 $z=\infty$ 展式的异同？

3、如何判定 $z=0$ 和 $z=\infty$ 的类型？（参阅【1】,【6】）