

湖南科技大学考试试题纸 (A 卷)

(2021-2022 学年度第二学期)

课程名称: 复变函数

开课单位: 数学学院

命题教师: 刘灯明

授课对象: 数学学院 2020 级学生

学院 2020 年级 各适用 班

考试时量: 100 分钟 考核方式: 考试 考试方式: 闭卷 审核时间: 2022 年 5 月 30 日

一、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

(1) $\ln(i^5)$ 的值为_____

(2) 设 $z=x+iy$, 复数方程 $\operatorname{Re}(1-\bar{z}) = -1$ 表示的平面曲线方程为_____

(3) 设圆周 $C: |z|=r, 0<r<1$, 则积分 $\oint_C \frac{dz}{z^2} =$ _____

(4) 函数 $w=\frac{1}{z}$ 将平面上的射线 $\arg z=\theta_0, -\pi<\theta_0<\pi$ 映为 w 平面上的_____ (请写出 w 平面上的曲线方程) .

(5) 设 $u(x, y)=x^2-y^2$, 为使 $f(z)=u+iv$ 是解析函数, 且满足 $f(i)=-1$, 则 $v(x, y) =$ _____

(6) 已知 $f(z)=\frac{2}{z+2}$ 按 $z-1$ 的幂展成了泰勒级数, 则级数的收敛半径为_____

(7) 函数 $\frac{z}{\cos z}$ 在 $z=\frac{\pi}{2}$ 处的留数为_____

(8) 方程 $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ 在单位圆 $|z|<1$ 内根的个数为_____

二、判断题 (每小题 3 分, 本题共 18 分)

(1) 以 $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 为顶点的三角形是等边三角形 ()

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$ 是收敛级数. ()

(3) $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的去心邻域内能展开成洛朗级数 ()

(4) 设 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| < R$ 内解析, 且 $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = 0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)$ 的一阶极点 ()

(5) $\tan z$ 是复平面 C 上的亚纯函数 ()

(6) 设 $p(z) = (z-a_1)(z-a_2) \cdots (z-a_n)$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 各不相同, 闭路 C 不经过 a_1, a_2, \dots, a_n , 则积分 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{p'(z)}{p(z)} dz$ 等于位于 C 内 $P(z)$ 的零点个数 ()

三、计算与证明 (本题共 6 小题, 共 48 分)

1. (本题 8 分) 求 $f(z) = \sqrt[3]{z(1-z)}$ 可分出三个单值解析分支的区域, 并求出其在点 $z=2$ 取负值的那个分支在 $z=i$ 的值

2. (本题 8 分) 设函数 $f(z) = u+iv$ 在区域 D 上解析, 证明: $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right| = |f'(z)|^2$

3. (本题 8 分) $|e^z|$ 在闭圆 $|z-z_0| \leq 1$ 上的何处达到最大? 并求出最大值

4. (本题 8 分) 分别求出 $f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$ 在圆环域 $1 < |z| < 2$ 上的洛朗展示

5. (本题 8 分) 用留数方法计算实积分: $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

6. (本题 8 分) 计算积分 $\oint_C \frac{z^{15}}{(z^4+2)^3 (z^2+1)^2} dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z|=5$

四、论述题 (本题共 10 分) 请用你自己的话叙述解析函数惟一性定理的含义, 并给出一实例来说明你表达的意思。