最优化问题的一般形式

最优化问题一般可以描述为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x), \\
\text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$是**决策变量**
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是**目标函数**
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$是**约束集合或可行域**，可行域包含的点称为**可行解或可行点**．记号 s.t. 是“subject to”的缩写，专指约束条件．
- 当$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$时，问题(1) 称为无约束优化问题．
- 集合$\mathcal{X}$通常可以由约束函数$c_i(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, m+l$ 表达为如下具体形式：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \le 0, \quad & i = 1, 2, \cdots, m, \\
c_i(x) = 0, \quad & i = m+1, m+2 \cdots, m+l\}.
\end{aligned}
$$

最优化问题的一般形式

- 在所有满足约束条件的决策变量中，使目标函数取最小值的变量x^* 称为优化问题(1) 的最优解，即对任意$x \in \mathcal{X}$ 都有

$$f(x) \geq f(x^*).$$

- 如果求解在约束集合$\mathcal{X}$ 上目标函数$f(x)$的最大值，则问题(1) 的“min”应相应地替换为“max”.
- 注意到在集合$\mathcal{X}$ 上，函数f 的最小（最大）值不一定存在，但是其下（上）确界“inf f(sup f)” 总是存在的. 因此，当目标函数的最小(最大）值不存在时，我们便关心其下（上）确界，即将问题(1) 中的“min(max)” 改为“inf(sup)”.
- 为了叙述简便，问题(1) 中x为$\mathbb{R}^n$空间中的向量. 实际上，根据具体应用和需求，x还可以是矩阵、多维数组或张量等.

最优化问题的类型

最优化问题的具体形式非常丰富，可以按照目标函数、约束函数以及解的性质将其分类.

- 当目标函数和约束函数均为线性函数时，问题称为**线性规划**；
- 当目标函数和约束函数中至少有一个为非线性函数时，相应的问题称为**非线性规划**；
- 如果目标函数是二次函数而约束函数是线性函数则称为**二次规划**；
- 包含非光滑函数的问题称为**非光滑优化**；
- 不能直接求导数的问题称为**无导数优化**；
- 变量只能取整数的问题称为**整数规划**；
- 在线性约束下极小化关于半正定矩阵的线性函数的问题称为**半定规划**，其广义形式为锥规划.

最优化问题的类型

- 最优解只有少量非零元素的问题称为**稀疏优化**；
- 最优解是低秩矩阵的问题称为**低秩矩阵优化**.
- 此外还有几何优化、二次锥规划、张量优化、鲁棒优化、全局优化、组合优化、网络规划、随机优化、动态规划、带微分方程约束优化、微分流形约束优化、分布式优化等.
- 就具体应用而言，问题(1) 可涵盖统计学习、压缩感知、最优运输、信号处理、图像处理、机器学习、强化学习、模式识别、金融工程、电力系统等领域的优化模型.

最优化问题的应用

数学建模很容易给出应用问题不同的模型，可以对应性质很不相同的问题，其求解难度和需要的算法也将差别很大．在投资组合优化中，人们希望通过寻求最优的投资组合以降低风险、提高收益．

- 这时决策变量x_i 表示在第i 项资产上的投资额，向量$x \in \mathbb{R}^n$ 表示整体的投资分配．
- 约束条件可能为总资金数、每项资产的最大（最小）投资额、最低收益等．
- 目标函数通常是某种风险度量．
- 如果是极小化收益的方差，则该问题是典型的二次规划.
- 如果极小化风险价值(value at risk)函数，则该问题是混合整数规划
- 如果极小化条件风险价值（conditional value at risk)函数，则该问题是非光滑优化，也可以进一步化成线性规划．

投资组合优化

- r_i, 随机变量, 股票的回报率i
- x_i, 投资于股票的相对金额i
- 回报: $r = r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n$
- 期望回报: $R = E(r) = \sum E(r_i)x_i = \sum \mu_i x_i$
- 风险: $V = Var(r) = \sum_{i,j} \sigma_{ij}x_ix_j = x^\top \Sigma x$

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2}x^\top \Sigma x, \\ \text{s.t.} \sum \mu_i x_i \geq r_0 \\ \sum x_i = 1, \\ x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad \text{risk measure}, \\ \text{s.t.} \sum \mu_i x_i \geq r_0 \\ \sum x_i = 1, \\ x_i \geq 0 \end{aligned}$$

风险度量

- 风险值(VaR): $F(\cdot)$ 为损失变量X的分布函数. 对于给定的$\alpha \in (0,1)$, X 的水平为α 的VaR 定义为

$$\text{VaR}_\alpha(X) := \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} = F^{-1}(\alpha).$$

- 条件风险值(CVaR): α尾的分布函数定义为

$$F_{\alpha,X}(x) := \begin{cases} 0, & \text{for } x < \text{VaR}_\alpha(X), \\ \frac{F_X(x)-\alpha}{1-\alpha}, & \text{for } x \geq \text{VaR}_\alpha(X). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) &:= \text{X的}\alpha\text{尾分布的均值 } X \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\alpha,X}(x). \end{aligned}$$

- 市场风险的资本要求

$$\begin{aligned} c_t &= \max\left\{\mathsf{VaR}_{\alpha,t-1}, \frac{k}{60}\sum_{s=1}^{60}\mathsf{VaR}_{\alpha,t-s}\right\} \\ &\quad + \max\left\{\mathsf{sVaR}_{\alpha,t-1}, \frac{\ell}{60}\sum_{s=1}^{60}\mathsf{sVaR}_{\alpha,t-s}\right\} \end{aligned}$$

- $\mathsf{sVaR}_{\alpha,t-s}$ 称为在$t-s$日的置信水平为$\alpha = 99\%$ 的压力 VaR，它是在金融市场承受重大压力的情况下计算的，如2007年至2008年期间发生的那种情况。

投资组合优化

- 使用CVaR(或等价的ES)代替VaR
- 股权、信贷、利率、货币等主要风险因素相似的一组交易部门的资本金要求定义为该组交易部门可能发生的损失的CVaR;
- CVaR应在有压力的情况下计算，而不是在当前市场条件下。
- 市场风险的资本要求

$$c_t = \max\left\{\text{sCVaR}_{\alpha,t-1}, \frac{\ell}{60}\sum_{s=1}^{60}\text{sCVaR}_{\alpha,t-s}\right\},$$

- $\text{scVaR}_{\alpha,t-s}$ 称为在$t-s$日的置信水平为$\alpha = 99\%$ 的压力 CVaR