第四章 解析函数的幂级数表示方法

复级数也是研究解析函数的一个重要工具，把解析函数表示成幂级数不但有理论上的意义，且具有实用的意义。

本章将讨论把解析函数表示成幂级数的问题. 首先介绍了复(函)数项级数及其基本性质(4.1 节)，其次把级数具体化，讨论与幂级数相关的知识(4.2 节). 再次介绍了解析函数的幂级数表示方法之——Taylor 展式. 最后将讨论解析函数零点的一些性质(4.4 节)，本章约用 12 课（学）时。

§1、复级数的基本性质（3 课时）

一、目的和要求

1、掌握复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的敛散性的定义并判别其敛散性，灵活运用收敛性的等价刻画定理 4.1、定理 4.2，掌握复级数的绝对收敛性.

2、掌握复函数项级数在点集 E 上收敛及一致收敛的定义，灵活运用 Cauchy 一致收敛准则和优级数准则.

3、掌握复连续函数项级数的性质，及关于解析函数项级数的 Weierstrass 定理.

二、重难点

1、重点

复数项级数收敛性的判别，复函数项级数一致收敛性判别，连续解析函数项级数

2、难点

复函数项级数一致收敛性，解析函数项级数

三、教法

因许多部分和实分析平行，一方面注重复习，另一方面对比注重区别，以例明理，采用启发式的课堂讲授法.

四、教学手段 电教 CAI 演示（3 课时）

（提问处）回顾本书的进程（前几章）引出新课

（一） 复数项级数

1、复数序列 $\{\alpha_n\}$，$\alpha_n = a_n + ib_n$

（1）有界性 依 $\{|\alpha_n|\}$ 的有界性定义

（2）收敛问题 T.B. P40 第 17 个习题

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = s = a + bi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n = a, \lim_{n\to\infty}b_n = b$$

（3）视为复平面内点列时的几何意义

1、复数项级数

定义 4.1 对于复数项的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

令 $s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$（部分和）.若复数列 $s_n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 以有限复数 s 为极限，即若

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s$$

则称复数项无穷级数收敛于 s，且称 s 为级数的和，写成

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$$

若 $s_n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 无有限极限，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散

注 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=0$

② $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ 收敛 $\Rightarrow\exists M>0$，使 $\left|\alpha_n\right|\le M\,(n=1,2\cdots)$（注 收敛级数多项必有界）

③ 若 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n{}'=s',\lim_{n\to\infty}\alpha_n=s$，则 $\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n{}'+\alpha_n\right)=s'+s$

④ 略去 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 有限个项，不影响原级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\pm\alpha_n{}')=s\pm s';\sum_{n=1}^{\infty}c\alpha_n=c\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=cs\ \text{（c 为常数）}$$

2、收敛性的判定

充要条件 据 P_{40} 第 17 题及 $\sum_{n=1}^{\infty}Z_n$ 收敛定义易得

定义 4. 1 设 $\alpha_n=a_n+ib_n,s=a+ib$，则

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=s=a+bi\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=a,\lim_{n\to\infty}b_n=b$$

证 设

$$s_n=\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_k,A_n=\lim_{n\to k}a_k,B_n=\lim_{n\to k}b_k$$

则

$$s_n=A_n+iB_n(n=1,2,\ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=a+bi\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}A_n=a\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}B_n=b$$

例 1 考察下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$（q为复数）　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{n}-\frac{b}{n+1})$　　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{i}{z^n})$

解（1）$s_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

① 用极限定义易证 当$|q|<1$时，$\lim_{n\to\infty} q^n=0$，故由极限性质得

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-\mathrm{q}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\frac{1}{1-\mathrm{q}}$$

② 当$|q|>1$时，有 $\lim_{n\to\infty} q^n=\infty$，因而$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}$=∞，故$\sum q^n$发散

③ 当$q=1$时，显然$S_n=n\to+\infty\ \ (n\to+\infty)$，　故$\sum q^n$发散

④ 当$|q|=1$，但$q\neq1$时，设$q=e^{i\theta},\theta\neq2k\pi(k\in Z)$，则

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

因为$\arg e^{in\theta}=n\theta$对任意固定$\theta$无极限，故$e^{in\theta}$当$n\to\infty$时无极限，即$S_n$无极限，则

$\sum q^n$发散

（2）
$$C_n=\frac{a}{n}-\frac{b}{n+1}=(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})+(\frac{a}{n+1}-\frac{b}{n+1})=a_n+b_n$$

而

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=a-\frac{a}{n+1}\to a(n\to\infty)$$

$\sum_{k=1}^{n} a_n$收敛，故与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同敛散

① 当a=b时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} C_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

② 当$a\neq b$时，由$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=(a-b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散知$\sum_{n=1}^{\infty} C_n$发散

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{\mathrm{i}}{z^n})$发散

由复数列收敛的 Cauchy 收敛准则，有

定义 4. 2 复级数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in N,$当$\mathrm{n}>N,$对$\forall\mathrm{p}\in N$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k\right|<\varepsilon$$

3、复级数的绝对收敛性$\rightarrow$判别$\sum Z_{\mathrm{n}}$收敛的充分条件.

定义 4. 2 若$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则称原级数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\alpha_n|$绝对收敛，非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛.

由定义 4.2 易得

（2）**定义 4. 3** $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\Leftarrow\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\alpha_{\mathrm{n}}|$收敛

注 ① 级数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\alpha_{\mathrm{n}}|$的各项均为非负实数，可依据项级数理论判别其收敛性.

② 命题 $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛$\Leftrightarrow\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}a_n$及$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{b}_n$绝对收敛

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}|a_k|-\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}|\mathrm{b}_k|\leq\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\leq\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}|a_k|+\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}|\mathrm{b}_k|$$

定义 4. 4（1）绝对收敛的数具有较好的性质，和实数一样，我们有 一个绝对收敛的级数的各项可以任意重排顺序，而不改变其绝对收敛性和其和.

（2）若复数项级数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\alpha_n$及$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\alpha_n'$绝对收敛，其和分别为$s$和$s'$，则级数

$\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty}(\alpha_1\alpha_n'+\alpha_2\alpha_{n-1}'+\ldots+\alpha_n\alpha_1')\rightarrow$ Cauchy 乘积也绝对收敛，并且它的和为ss'

例 2 判断下列级数的收敛性

（1）$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3\mathrm{i})^n}$ （2）$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{i}^n}$

解 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(2+3\mathrm{i})^{n}\right|}{\left|(2+3i)^{n+1}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}<1$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2+3\mathrm{i})^{n}}$绝对收敛

（2）$\left|\dfrac{1}{1+\mathrm{i}^{n}}\right|=\dfrac{1}{\left|1+i^{n}\right|}\geq\dfrac{1}{1+(\mathrm{i})^{n}}=\dfrac{1}{2}$，通项不趋于 0，故发散

（二）复函数项级数及一致收敛性

定义 4. 3 设$\{f_n(z)\}(n=1,2,\ldots)$在z平面上点集E上有定义，则

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

为在E上的复变函数项级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$或$\sum f_n(z)$.

注 ① 函数项级数收敛的ε-N描述见$T.B.\ P_{144}$

② Cauchy 收敛准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$收敛（E 上）$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，对给定$z\in E$ $\exists N(\varepsilon, z)>0$，当$n\geq N$时，对$\forall p\in N$有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)\right|<\varepsilon$$

若$N=N(\varepsilon,z)$换成$N=N(\varepsilon)$，即N与z无关（不依赖），则有

定义 4. 4 若$\forall\varepsilon>0$，存在仅与ε有关，与z无关的$N(\varepsilon)\in N$，当$n>N$，$z\in E$时，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon$$

则称$\sum f_n(z)$在E上一致收敛于$f(z)$

注 据定义 4.4 证明$\sum f_n(z)$在E上一致收敛的关键，是找$N(\varepsilon)$，使$n>N$时，

$$\left|f(z)-s_n(z)\right|<\varepsilon$$

一般是先如下加强不等式 $\left|f(z)-s_n(z)\right|\leq P_n(z)\leq Q_n$并对$\forall\varepsilon>0$，由$Q_n<\varepsilon$找$N$

（2）证明不一致收敛是利用定义 4.4 的否定形式

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall N>0$，$\exists n_0$使当$n_0>N$，$\exists z_0\in E$，使$\left|f(z_0)-s_n(z_0)\right|\geq\varepsilon_0$

4、一致收敛的判定

（1）Cauchy 一致收敛准则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)>0$，

使当 n>N，$\forall \mathrm{z}\in Z, \forall p\in N$，有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)<\varepsilon$$

由此可立即推出 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛的一个常用判别法

（2）M 判别法（优级数） 若 $\exists \mathrm{M_n}>0$，使得对一切 $\mathrm{z}\in E$，有

$$\left|f_n(z)\right|\le \mathrm{M_n} \qquad (\mathrm{n}=1,2,...)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{M_n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在集合 E 上绝对收敛且一致收敛

例 3 （1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{z}^n$ 在闭圆 $|\mathrm{z}|\le r(r<1)$ 上一致收敛.

（2）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\mathrm{z}^n+\frac{1}{\mathrm{z}^n})$，当 $|\mathrm{z}|=1$ 时收敛，当 $|\mathrm{z}|\ne 1$ 时发散.

证 （1）取 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{z}^n$ 的优级数即得

（2）当 $|\mathrm{z}|=1$ 时，因 $\left|\frac{1}{n^2}(\mathrm{z}^n+\frac{1}{\mathrm{z}^n})\right|\le\frac{2}{n^2}$，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，据 M 判别法知

原级数在 $|\mathrm{z}|=1$ 时绝对且一致收敛

当 $|\mathrm{z}|\ne 1$ 时，因 $\left|\frac{1}{n^2}\mathrm{z}^n\right|<\frac{1}{n^2}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{z}^n$ 绝对收敛

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2 z^{n+1}}}{\left|\dfrac{1}{n^2 z^n}\right|}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 z^n}{(n+1)^2 z^{n+1}}\right|=\frac{1}{|z|}>1$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{z}^n$ 发散，从而原级数在 $|\mathrm{z}|\ne 1$ 时发散

当$|z|>1$时，$\frac{1}{|z|}<1$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{2^n}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n$发散，故原级数在$|z|>1$时发散

5、复连续函数项级数的性质（和函数性质）

定义 4.6 设$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$的各项在点集$E$上连续；$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$一致收敛于$f(z)$ （$z\in E$）

则和函数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$E$上连续.

定义 4.7 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$的各项在曲线$C$上连续；$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$C$上一致收敛于

$f(z)$，则沿C可以逐项积分

$$\int_c f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c f_n(z)dz$$

6、内闭一致收敛

定义 4.5 设函数$f_n(z)(n=1,2,...)$在区域D内有定义，若$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$E$内的任一有

界闭集上一致收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在区域$D$内内闭一致收敛.（如例 3（1））

定义 4.8 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在圆$K$:$|z-a|<R$内内闭一致收敛$\Leftrightarrow\forall\rho>0$，只要$\rho<R$

$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在闭圆$\bar{K}_\rho$:$|z-a|\le\rho$上一致收敛.

证 必要性 根据内闭一致收敛可证

充分性 因K内任意闭集F总可包含在K内的某个闭圆$\bar{K}_\rho$上，即得.

三、解析函数数项级数的Weierstrass定理

定义 4.9 设（1） $f_n(z)$ （n=1, 2, . . . ）在区域D内解析

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$D$内内闭一致收敛于$f(z)$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

则 （1） $f(z)$ 在 D 内解析

（2） $f^{(\mathrm{p})}(z)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} f_{\mathrm{n}}{}^{(p)}(z), z \in D$，$\mathrm{p}=1,2,\ldots$

证明 （1）$\forall \mathrm{z}_0 \in D$，$\exists \rho>0$，使 $\overline{\mathrm{K}}:\left|z-z_0\right| \leq \rho$ 全含于 D，若 C 为圆 $\mathrm{K}:\left|z-z_0\right|<\rho$ 内任一周线，据 Cauchy 积分定理得

$$\int_c f_{\mathrm{n}}(z) dz=0 \quad (\mathrm{n} \in \mathrm{N})$$

再根据条件（1）、（2）由定义 4.6 知 $f(z)$ 在 $\overline{\mathrm{K}}$ 上连续.由定义 4.7 知

$$\int_c f(z) dz=\sum_{n=1}^{\infty} \int_c f_{\mathrm{n}}(z) dz=0$$

由 Morera 定理知 $f(z)$ 在 K 内解析 $\Rightarrow$ 在 z_0 解析

据 z_0 的任意性即证

（2）$\forall \mathrm{z}_0 \in D$，$\exists \rho>0$，使 $\overline{\mathrm{K}}:\left|z-\mathrm{z}_0\right| \leq \rho$ 全含于 D，$\overline{\mathrm{K}}$ 边界为 Γ，据定义 3.13 有

$$f^{(p)}(\mathrm{z}_0)=\frac{p!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-\mathrm{z}_0)^{p+1}} d\xi$$

$$f_{\mathrm{n}}{}^{(p)}(\mathrm{z}_0)=\frac{p!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(\xi)}{(\xi-\mathrm{z}_0)^{n+1}} d\xi \quad (\mathrm{p} \in \mathrm{N})$$

在 Γ 上由条件（2）知级数

$$\frac{f(\xi)}{(\xi-\mathrm{z}_0)^{p+1}}=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{f_{\mathrm{n}}(\xi)}{(\xi-\mathrm{z}_0)^{p+1}} \text{ 一致收敛}$$

据定义 4.7 得

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-\mathrm{z}_0)^{p+1}} d\xi=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \int_\Gamma \frac{f_n(\xi)}{(\xi-\mathrm{z}_0)^{p+1}} d\xi$$

两端同乘以 $\dfrac{p!}{2\pi i}$ 即得证

注 由题设还可推出 $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} f_{\mathrm{n}}{}^{(p)}(\mathrm{z}_0)$ 在 D 内内闭一致收敛于 $f^{(p)}(\mathrm{z})$

五、小结（参见教材处理）

六、作业 $\mathrm{P}_{178} 1$

七、补充及预习要求

教材处理 本节讲了三块内容，前两块各四个定理，关系图如下

(1) 复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \overset{\text{判别}}{\Leftrightarrow}$

- ① $\sum a_n, \sum b_n$ 收敛 定理 4.1
- ② *Cauchy* 收敛准则 定理 4.2
- ③ $\sum |z_n|$ 收敛 定理 4.3

$\Downarrow$

- ④ 绝对收敛性质 定理 4.4

(2) 复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的一致收敛

- $\overset{\text{判别}}{\Leftrightarrow}$ *Cauchy* 一致收敛准则 定理 4.5
- $\Rightarrow$ 和函数 $f(x)$ $\begin{cases} \text{连续性} & \text{定理 4.6} \\ \text{逐项可积性} & \text{定理 4.7} \end{cases}$
- $\overset{\text{相关}}{\rightarrow}$ 内闭一致收敛（$|z-a|$<R 内） 定理 4.8

  $\Leftrightarrow$ 在 $|z-a| \le \rho < R$ 上一致收敛

(3) $\left.\begin{array}{c} \text{解析函数项级数} \\ + \\ \text{内闭一致收敛} \end{array}\right\} \overset{\text{定理4.9}}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{① 和函数在 D 内解析} \\ \text{② 可逐项求多阶导数} \end{cases}$

八、预习要求 预习并回答

1、实数项级数与复函数项级数的性质与判断收敛的方法有何异同？

2、幂级数和函数在收敛圆周上有何性质？