第三章求积分总结

① 参数方程法. $\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta[u(t)x'(t)-v(t)y'(t)]dt+i\int_\alpha^\beta[u(t)y'(t)+v(t)x'(t)]dt$

② 柯西积分定理. D内解析. C为D内周线. $\int_C f(z)dz=0$

③ 推论 3.5. D内解析. 则与路径无关. $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$

④ 柯西积分定理推广到复周线.(用于求具有奇点的区域.割去奇点)

⑤ 柯西积分公式. 形如 $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z)$ $(z\in D)$ z是单奇点.

⑥ 无穷可微性: 形如 $\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$. $(z\in D$, 单奇点)

⑦ 求共轭调和函数. I. 由 $u_x=v_y$. 有 $v=\int u_x dy+\varphi(x)$

II. 又由 $-u_y=v_x$ 有 $[\int u_x dy]'_x+\varphi'(x)=-u_y$ 得 $\varphi(x)=\int\varphi'(x)dx$

III $v=\int u_x dx+\int\varphi(x)dx$

第四章.

判断级数收敛与发散:

① $a_n=a_n+ib_n$. 收敛于 $S=a+ib$ 的充要条件: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 分别收敛于 a, b.

② 级数绝对收敛, 则级数收敛

③ 函数项级数优级数准则

求收敛半径:

1. $\left\{\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l \\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l \\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=l\end{array}\right.$ $\quad R=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{l} & l\neq 0, l\neq\infty \\ 0 & l=\infty \\ \infty & l=0\end{array}\right.$

2. 若b为离a最近的奇点, 则 $|b-a|=R$

求幂级数和函数.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z\cdot z^n = z\cdot\frac{1}{1-z}$$

$$\Uparrow$$

1. ① 利用逐项积分, $\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}$

② 求导 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1-z+z}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\quad |z|<1$

2. 间接求和 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$

一些初等函数泰勒展式

① $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

② $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

③ $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

④ $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ $\quad\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-+\cdots(-1)^n z^n+\cdots$

⑤ $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n}}{(2n)!}+\cdots$

⑥ $(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n}$

展开成幂级数.

① 直接法. $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$

② 间接法. $\left\{\begin{array}{l}\text{① } f(z)\text{ 转化成已知的初等函数.} \\ \text{② 将 } f(z)\text{ 求导后为已知的初等函数, 再逐项积分} \\ \text{③ 当 } f(z)\text{ 求积分后为已知初等函数, 则用已知的逐项求导}\end{array}\right.$

求零点的阶.

①按定义，求导，直至 $f^{(m)}(a)\neq 0$. 则为 m 阶.

②泰勒展开：$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$. $\varphi(a)\neq 0$. 则为 m 阶.