- 复合优化问题一般可以表示为如下形式：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + h(x),$$

其中$f(x)$ 是光滑函数（比如数据拟合项），$h(x)$ 可能是非光滑的（比如ℓ_1范数正则项，约束集合的示性函数，或它们的线性组合）.

- 从已经介绍的各种各样的应用问题不难发现，复合优化问题在实际中有着重要的应用，并且其中的函数$h(x)$一般都是凸的.
- 由于应用问题的驱动，复合优化问题的算法近年来得到了大量的研究，比如次梯度法，近似点梯度法，Nesterov加速算法和交替方向乘子法，等等.

考虑带有ℓ_1 范数正则项的优化问题：

$$\min_{x} \quad f(x) + \mu\|x\|_1, \tag{33}$$

这里$\mu > 0$ 为给定的参数. 这个问题广泛存在于各种各样的应用中：

- ℓ_1 范数正则化回归分析问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \mu\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, \tag{34}$$

  其中$\mu > 0$是给定的正则化参数. 该问题可以看成是问题(33) 的特殊形式,问题(34) 又称为LASSO（least absolute shrinkage and selection operator）.其中$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, h(x) = \mu\|x\|_1$.

复合优化问题：应用举例

- 矩阵分离问题：

$$\begin{aligned}\min_{X,S\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad & \mu\|S\|_1 + \|X\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & X + S = M\end{aligned}$$

其中$f(x) = \|X\|_*, h(x) = \mu\|S\|_1$.

- 字典学习问题：

$$\begin{aligned}\min_{X,D\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad & \lambda\|X\|_1 + \frac{1}{2n}\|DX - A\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad & \|D\|_F \leqslant 1\end{aligned}$$

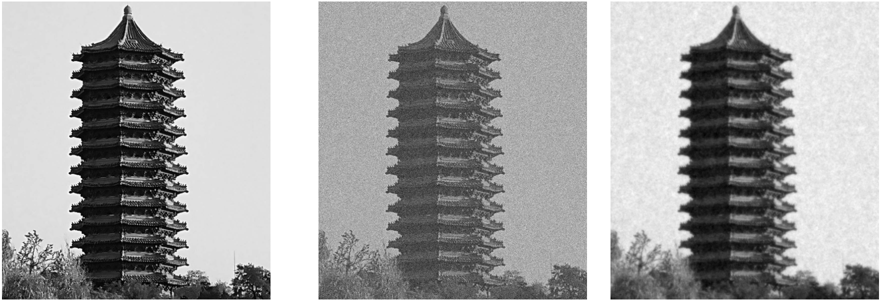
其中$f(D,X) = \frac{1}{2n}\|DX - A\|_F^2$.

复合优化问题：图像去噪

- 图像去噪问题是指从一个带噪声的图像中恢复出不带噪声的原图．记带噪声的图像为y，噪声为ε，那么

$$y = x + \varepsilon,$$

其中x为要恢复的真实图像．



(a) 原始图像u　(b) 添加噪声后的图像　(c) 恢复后的图像

Figure: 图像去噪的例子

复合优化问题：图像去噪

- 由全变差模型，去噪问题可表示为

$$\min_{x\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|x-y\|_F^2+\lambda\|x\|_{TV}.$$

这里，离散的线性算子为单位矩阵.

- 也可以利用小波框架. 小波变换可以很好地保护信号尖峰和突变信号，并且噪声对应的小波系数往往很小. 因此，去噪问题的小波分解模型可以写为

$$\min_{x} \quad \|\lambda\odot(Wx)\|_1+\frac{1}{2}\|x-y\|_F^2,$$

其中$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$是给定的.

复合优化问题：盲反卷积

盲反卷积是图像处理中的一个基本问题，其目的是从一个模糊的图像恢复出原来清晰的图像．

- 为了简化问题，假设模糊是线性的以及空间不变的．线性且空间不变的模糊可以表示成一个卷积．令 x 为原始的清晰图像，a 为未知的卷积核对应的矩阵，y 为观测到的模糊图像以及 ε 为观测噪声．盲反卷积问题可以表示成

$$y = a * x + \varepsilon,$$

其中 $*$ 为卷积算子．假设噪声为高斯噪声，则转化为求解优化问题

$$\min_{a,x} \quad \|y - a * x\|_2^2.$$

- 再假设原始图像信号在小波变换下是稀疏的，进一步得到如下复合优化问题：

$$\min_{a,x} \quad \|y - a * x\|_2^2 + \|\lambda \odot (Wx)\|_1,$$

其中 W 是小波框架，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^{\mathrm{T}}$ 用来控制稀疏度．