半定规划

半定规划问题的一般形式如下：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^{\mathrm{T}} x, \\
\text{s.t.} \quad & x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n + B \preceq 0, \\
& Gx = h,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中$c \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathcal{S}^m, i = 1, 2, \cdots, m, B \in \mathcal{S}^m, G \in \mathbb{R}^{p \times n}, h \in \mathbb{R}^p$ 为已知的向量和矩阵，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$是自变量.

- 半定规划（SDP）是线性规划在矩阵空间中的一种推广．它的目标函数和等式约束均为关于矩阵的线性函数，而它与线性规划不同的地方是其自变量取值于半正定矩阵空间.
- 作为一种特殊的矩阵优化问题，半定规划在某些结构上和线性规划非常相似，很多研究线性规划的方法都可以作为研究半定规划的基础．由于半定规划地位的特殊性，我们将在本节中单独讨论半定规划的形式和应用.

类似于线性规划问题，我们考虑半定规划的标准形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \langle C, X \rangle, \\
\text{s.t.} \quad & \langle A_1, X \rangle = b_1, \\
& \cdots \\
& \langle A_m, X \rangle = b_m, \\
& X \succeq 0,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

和对偶形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -b^{\mathrm{T}} y, \\
\text{s.t.} \quad & y_1 A_1 + y_2 A_2 + \cdots + y_n A_n \preceq C.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

形如(20) 式的优化问题都可以转化成(21) 式或者(22) 式的形式．

LP与SDP

$$\text{LP:} \quad \min \ c^T x \quad \text{s.t.} \ Ax \le b \qquad \text{SDP:} \quad \min \ c^T x \quad \text{s.t.} \ \operatorname{diag}(Ax - b) \preceq 0$$

SOCP 与SDP

$$\text{SOCP:} \quad \begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{s.t.} & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

$$\text{SDP:} \quad \begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} (c_i^T x + d_i)I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^T & c_i^T x + d_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 考虑二次约束二次规划问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & x^{\mathrm{T}}A_0x+2b_0^{\mathrm{T}}x+c_0, \\
\text{s.t.} \quad & x^{\mathrm{T}}A_ix+2b_i^{\mathrm{T}}x+c_i\leq 0, \quad i=1,2,\cdots,m,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中A_i 为$n\times n$ 对称矩阵．当部分A_i为对称不定矩阵时，问题(23)是NP 难的非凸优化问题．

- 写出问题(23) 的半定规划松弛问题．对任意$x\in\mathbb{R}^n$以及$A\in\mathcal{S}^n$，有恒等式

$$
x^{\mathrm{T}}Ax=tr x^{\mathrm{T}}Ax=tr Axx^{\mathrm{T}}=\left\langle A,xx^{\mathrm{T}}\right\rangle,
$$

因此问题(23) 中所有的二次项均可用下面的方式进行等价刻画：

$$
x^{\mathrm{T}}A_ix+2b_i^{\mathrm{T}}x+c_i=\left\langle A_i,xx^{\mathrm{T}}\right\rangle+2b_i^{\mathrm{T}}x+c_i.
$$

由上述分析，原始问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \langle A_0, X\rangle + 2b_0^{\mathrm{T}}x + c_0 \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X\rangle + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\ & X = xx^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{24}$$

进一步地，

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}}A_i x + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i &= \left\langle \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ b_i^{\mathrm{T}} & c_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & x \\ x^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ &\overset{\text{def}}{=\!=} \langle \overline{A_i}, \overline{X} \rangle, \quad i = 0, 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

接下来将等价问题(24) 松弛为半定规划问题.

- 在问题(24) 中，唯一的非线性部分是约束$X = xx^{\mathrm{T}}$，我们将其松弛成半正定约束$X \succeq xx^{\mathrm{T}}$. 可以证明，$\overline{X} \succeq 0$ 与$X \succeq xx^{\mathrm{T}}$ 是等价的.
- 因此这个问题的半定规划松弛可以写成

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \langle \overline{A_0}, \overline{X} \rangle \\
\text{s.t.} \quad & \langle \overline{A_i}, \overline{X} \rangle \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\
& \overline{X} \succeq 0, \\
& \overline{X}_{n+1,n+1} = 1.
\end{aligned}
$$

其中“松弛”来源于我们将$X = xx^{\mathrm{T}}$ 替换成了$X \succeq xx^{\mathrm{T}}$.

最大割问题的半定规划松弛

- 令G为一个无向图，其节点集合为$V=\{1,2,\cdots,n\}$和边的集合为E. 令$w_{ij}=w_{ji}$为边$(i,j)\in E$上的权重，并假设$w_{ij}\geq 0$, $(i,j)\in E$. 最大割问题是找到节点集合V的一个子集S使得S与它的补集$\overline{S}$之间相连边的权重之和最大化.
- 可以将最大割问题写成如下整数规划的形式：令$x_j=1$, $j\in S$和$x_j=-1$, $j\in\overline{S}$，则

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i<j}(1-x_ix_j)w_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & x_j\in\{-1,1\},\ j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{25}
$$

- 在问题(25)中，只有当x_i与x_j不同时，目标函数中w_{ij}的系数非零. 最大割问题是一个离散优化问题，很难在多项式时间内找到它的最优解.

二次约束二次规划问题的半定规划松弛

接下来介绍如何将问题(25) 松弛成一个半定规划问题．

- 令$W=(w_{ij})\in\mathcal{S}^n$，并定义$C=-\frac{1}{4}(\mathrm{Diag}(W\mathbf{1})-W)$为图$G$的拉普拉斯矩阵的$-\frac{1}{4}$倍，则问题(25) 可以等价地写为

$$\begin{aligned} \min \quad & x^\mathrm{T}Cx, \\ \mathrm{s.t.} \quad & x_i^2=1,\ i=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

  由于目标函数是关于x的二次函数，可将其等价替换为$\langle C, xx^\mathrm{T}\rangle$．

- 接下来令$X=xx^\mathrm{T}$，注意到约束$x_i^2=1$，这意味着矩阵X对角线元素$X_{ii}=1$．因此利用矩阵形式我们将最大割问题转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X\rangle, \\ \mathrm{s.t.} \quad & X_{ii}=1,\ i=1,2,\cdots,n, \\ & X\succeq 0,\ \mathrm{rank}(X)=1. \end{aligned} \tag{26}$$

- 问题(26) 和(25) 是等价的，这是因为$X=xx^\mathrm{T}$ 可以用约束$X\succeq 0$和$\mathrm{rank}(X)=1$等价刻画．

极小化最大特征值

- 问题的形式可表示为：$\lambda_{\max}(A_0 + \sum_i x_i A_i)$:

$$\min \quad \lambda_{\max}(A_0 + \sum_i x_i A_i)$$

SDP形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & zI - \sum_i x_i A_i \succeq A_0 \end{aligned}$$

对偶问题形式：

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle A_0, Y \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, Y \rangle = 0 \\ & \langle I, Y \rangle = 1 \\ & Y \succeq 0 \end{aligned}$$

- 等价形式来源于：

$$\lambda_{\max}(A) \le t \Longleftrightarrow A \preceq tI$$

极小化二范数问题

- 令$A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 极小化$A(x) = A_0 + \sum_i x_i A_i$的二范数:

$$\min_x \quad \|A(x)\|_2$$

该问题的SDP形式：

$$\begin{aligned} \min_{x,t} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} tI & A(x) \\ A(x)^\top & tI \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

- 约束形式来源于：

$$\begin{aligned} \|A\|_2 \le t \quad & \Longleftrightarrow \quad A^\top A \preceq t^2 I, \quad t \ge 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} tI & A(x) \\ A(x)^\top & tI \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

特征值优化问题

- 令$\Lambda_k(A)$ 表示A的前k个最大特征值.并且最小化$\Lambda_k(A_0+\sum_i x_i A_i)$:

$$\min \quad \Lambda_k(A_0+\sum_i x_i A_i)$$

该问题的SDP形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & kz+\mathrm{Tr}(X) \\ \text{s.t.} \quad & zI+X-\sum_i x_i A_i \succeq A_0 \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

- 约束来源于：

$$\Lambda_k(A) \le t \Longleftrightarrow t-kz-\mathrm{Tr}(X) \ge 0, zI+X \succeq A, X \succeq 0$$