§4、解析函数零点的孤立性及唯一性定理（3 课时）

一、目的要求

1、掌握解析函数零点的概念及具有零点的解析函数表达式，掌握解析函数零点的孤立性及内部唯一性定理.

2、掌握解析函数的最大模定理并灵活运用应用.

二、重难点

1、重点 零点概念，解析函数零点孤立性及内部唯一性定理，最大模定理.

2、难点 解析函数特性的内在联系的深刻理解和应用.

三、教法

1、课堂讲授法，采用启发式

2、适当重组教材，突出本质和重点

四、教学手段

电教、CAI 演示（约 3 课时）

（一）解析函数零点的孤立性

1、零点

定义 4.7 设 $f(z)$ 在点 a 的邻域 $N(a,R)$ 内解析，且 $f(a)=0$，则称 a 为 $f(z)$ 的零点，

即 a 为解析函数 $f(z)$ 零点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 a 解析，且 $f(a)=0$

注 一般称 $f(z)=A$ 的 z_0 为 $f(z)$ 的 A 点

设 $f(z)$ 在 $N(a,R)$ 内的 Taylor 展式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{(n-1)}$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots(|z-a|<R)$$

若 （1） $f^{(n)}(a)=0$，$n=0,1,2,\ldots$，则 $f(z)$ 在 $N(a,R)$ 内恒为 0

（2） $f(z)$ 在 $N(a,R)$ 内不恒为 0，且 $\exists n\,(n\geq 1)$ 使 $f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$，但 $f^{(n)}(a)\neq 0$，此时称 a 为 $f(z)$ 的 n 阶零点.其中 n 阶零点为简单零点.

易见 以下命题是成立的

定义 4.17 a 为不恒为 0 的函数 $f(z)$ 的 m 级（阶）零点 $\Leftrightarrow$ $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在点 a 的邻域 $|z-a|<R$ 内解析，且 $\varphi(a)\neq 0$.

证明　用定义 4.16 及定义 4.13 立明

在时机问题中往往需要研究使一个函数等于 0 的点，即求根

例 1　考察函数 $f(z)=z-\sin z$ 在 $z=0$ 的性质.

解　显然 $f(z)$ 在 z=0 解析，且 $f(0)=0$，由

$$f(z)=z-(z\cdot\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...)=z^3(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+...)$$

或

$$f'(z)=1-\cos z\ ,f'(0)=1-1=0$$

$$f''(z)=\sin z\quad ,f''(0)=0$$

$$f'''(z)=\cos z\quad ,f'''(0)=1\neq 0$$

知 $z=0$ 为 $f(z)=z-\sin z$ 的三阶零点

例 2　求 $\sin z-1$ 的全部零点，并指出它们的阶.

解　易知 $\sin z-1$ 在 z 平面上解析，由 $\sin z-1=0$ 得

$$z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k\in z)$$

这就是 $\sin z-1$ 在 z 平面上的全部零点

$$(\sin z-1)'\big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=\cos z\big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=0$$

$$(\sin z-1)^{n}\big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=-\sin z\big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=-1\neq 0$$

故 $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 为 $\sin z-1$ 的二阶零点

2、解析函数零点孤立性

复习孤立点及聚点，从书上 P_{165} 实例导入

定义 4.18　不恒为零的解析函数的零点必是孤立的，即 若在 $|z-a|<R$ 内解析的函数 $f(z)\neq 0$，a 为其零点，则必存在 a 的邻域，使 $f(z)$ 在其中无异于 a 零点.

证明　由定义 4.17 易见 若 a 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，从而 $\varphi(z)$ 在 a 点连续，邻域 $|z-a|<r$，使 $\varphi(z)$ 在其内恒不为零，故 $f(z)$ 在其中无异于 a 的点。

补 一个实变可微函数的零点不一定是孤立的

如

$$f(\mathrm{x})=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \mathrm{x}\neq 0\\ 0\quad, & \mathrm{x}=0\end{cases}$$

则 f 在 x=0 可微，且 $x=0$ 上 $\pm\dfrac{1}{nx}$ 为零点，且 $x=0$ 为聚点，$\mathrm{x}=0$ 不是一个孤立点

定理 4.19　设（1）$f(z)$ 在邻域 $\mathrm{K}:|z-a|<R$ 内解析

（2）在 K 内有 $f(z)$ 的一列零点 $\{\mathrm{z}_n\}(\mathrm{z}_n\neq a)$ 收敛于 $a(\in k)$，则在 K 内必有 $f(z)\equiv 0$.

证　因 $f(z)$ 在点 a 连续，且 $f(z_n)=0$，故 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} f(z_n)=f(a)=0$，即 a 为一个非孤立的零点，由定义 4.18 必有 $f(z)$ 在 K 内恒为零.

（二）解析函数内部唯一性定理

引理　设 (z) 为区域 D 内解析的函数，若 $f(z)$ 在 D 内的一个圆盘内恒等于 0，则 $f(z)$ 在 D 内恒为零.

证明　设在 D 内一个以 z_0 为心的圆盘 k_0 内 $f(z)\equiv 0$，得证在 k_0 以外任一点

$\mathrm{z}'\in D, f(z')=0$

用在 D 内的曲线 L 连接 z_0 及 z'，存在 δ>0，使 L 上任一点与区域 D 的边界上任一点的距离大于 ∂，在 L 上一次取 $\mathrm{z}_0,\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,...,\mathrm{z}_{n-1},\mathrm{z}_n=z'$，使 $\mathrm{z}_1\in k_0$，而其它任意相邻两点间的距离小于 δ，作每点 z_j 的 δ 邻域 k_j（j=1, 2, . . . , n)（如图），显然 当 j<n 时，$\mathrm{z}_{j+1}\in k_j\subset D$，由于 $f(z)$ 在 k_0 内恒为 0，故

$$f^{(n)}(\mathrm{z}_1)=0, n=0,1,2,...$$

于是 $f(z)$ 在 k_1 内泰勒展式的系数亦为 0，从而 $f(z)$ 在 k_1 内恒为 0。

一般地，已经证明了 $f(z)$ 在 $k_j(j\leq n-1)$ 内恒为 0，就可以推出它在 k_{j+1} 内恒为 0，最后就得到 $f(z')=0$。

据 z' 的任意性，定理得证.

据定理 4.19 及引理 1 即得

定义 4. 20　设

（1） $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在区域 D 内解析

（2）D 内有一收敛于 a 的点列 $\left\{z_n\right\}(z_n \neq a)$ 使

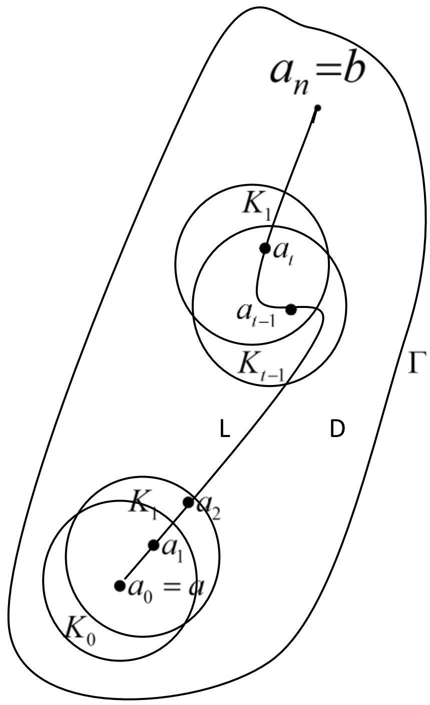
$f_1(z_n)=f_2(z_n)$，则在 D 内　$f_1(z)$=$f_2(z)$

证　令 $f(z)$=$f_1(z)-f_2(z)$，　$f_1(z)$，$f_2(z)$ 在区域 D 内解析，故必连续

$$f_1(z_n)=f_2(z_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty 1} f(z_n)=f(a)=0$$

从而必存在 a 点的某一邻域 U（a, R），使在

U(a, R）内 $f(z)$ 满足定理 4.19 之条件



于是改邻域内 $f(z)\equiv 0$，又据引理 4.1 知　$f(z)$ 在解析区域 D 内恒为 0，故在 D 内

$f_1(z)$=$f_2(z)$

定理 4. 21 设 （1） $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在区域 D 内解析

（2）在 D 内某一子区域（或一小段弧上） $f_1(z)$=$f_2(z)$，则在 D 内 $f_1(z)$=$f_2(z)$

定理 4. 22　一切在实轴上成立的恒等式，在 z 平面 C 上成立，只要该等式两边函数在 C 解析。

例 1　在实轴上等于 $\sin x$ 的整函数 $f(z)$ 只可能为 $\sin z$.

证　设 $f(z)$ 为 C 上解析函数，且在实轴上等于 $\sin x$，则在复平面上解析的函数 $f(z)-\sin \mathrm{z}$ 在实轴上为 0，从而

$$f(z)-\sin \mathrm{z}=0 \Rightarrow f(z)=\sin \mathrm{z} \quad (\mathrm{z}\in \mathrm{C})$$

例 2　问在原点解析，在 z=$\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\ldots)$ 处取下列多组值的函数 $f(z)$ 是否存在？

（1）$0,2,0,2,0,2,\ldots.$

（2）$1,0,\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{5},0,\ldots.$

（3）$1,1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\ldots.$

（4）$\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\ldots.(\frac{n}{2n+1})$

解　（1）不存在，若$\exists f(\frac{1}{2n-1})=\frac{1}{2n-1}$，且在0点解析的$f(z)$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$，由唯一性定理知 在z=0的某邻域内$f(z)=0$与$f(\frac{1}{2n})=2$ 相矛盾

（2）不存在，方法同（1）

（3）不存在，若$\exists f(\frac{1}{2n-1})=\frac{1}{2n-1}$，且在0点解析的$f(z)$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$知

$$f(z)\equiv z\text{（在}a\text{的某邻域内）}\Rightarrow f(\frac{1}{2k})=\frac{1}{2k}\neq\frac{1}{2k-1}$$

（4）函数值点列为 $\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}(n\in N)$，作$f(z)=\frac{1}{2+z}$，在原点0解析，在$z=\frac{1}{n}$取

$$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{n}{2n+1}(n\in N)$$

所求符合题设条件的函数存在，即$f(z)=\frac{1}{2+z}$.

例3　设（1）$f(z)$及$g(z)$在区域D内解析

（2）在D内，$f(z)\cdot g(z)\equiv 0$

试证 在D内，$f(z)\equiv 0$或$g(z)\equiv 0$

证　若$g(z)\equiv 0$，则结论真

若$\exists z_0\in D$，使$g(z_0)\neq 0$，因$g(z)$在点z_0连续，故$\exists z_0$的邻域$K\subset D$，使$g(z)$在K内恒不为零。而题设

$$f(z)\cdot g(z)\equiv 0\quad (z\in K\subset D)$$

故有

$$f(z)\equiv 0\quad (z\in K\subset D)$$

由唯一性定理（定理4.21）知 $f(z)\equiv 0$.

例4 用唯一性定理从$\sin x$的幂级数展开式得到$\sin z$的幂级数展式.

解　已知

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.\qquad |x|<+\infty$$

显然幂级数 $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots.$的收敛半径也为$+\infty$，它表示z平面C上的一个解析函数

$f(\mathrm{z})$，显然在实轴上 $f(\mathrm{z})=\sin z$ $(f(x)=\sin x)$，因 sinz 在 C 上解析，又在实轴上与 $f(x)$ 相等，由唯一性定理知 $f(\mathrm{z})\equiv\sin z$

$$\sin\mathrm{z}=\mathrm{z}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots \qquad |\mathrm{z}|<+\infty$$

易见 应用唯一性定理（定理 4.21 or 定理 4.22），在数学分析中常见的一些初等函数的幂级数展式都可以推广到复数域上来（另见 P_{168} 例 4.18）

（三）最大模原理

定义 4. 23 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $|f(z)|$ 在 D 内任何点都不能达到最大值，除非在 D 内 $f(z)$ 恒等于常数.

证明 若用 M 表示 $|f(z)|$ 在 D 内的最小上界，则必有 0<M<+∞

假定该原理不成立，则在 D 内必存在一点 z_0，使函数 $f(z)$ 的模在 z_0 达到最大值，即 $|f(z_0)|=M$

由定义 3.12 在以 z_0 为中心，且连同它的周界一起全含于 D 内的任一周 $|z-z_0|<R$ 内有 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})d\varphi$

$$\Rightarrow|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})\right|d\varphi$$

由于 $\left|\int_0^{2\pi}f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})\right|\le\mathrm{M}$，而 $|f(z_0)|=M$，从而由上述不等式知 对任何 $\varphi\in[0,2\pi]$ 有

$$|f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})|=M$$

事实上，若对某 $-\varphi=\varphi_0$ 有 $|f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})|<M$，在某个充分小的区间 $\varphi_0-\varepsilon<\varphi<\varphi_0+\varepsilon$ 内恒成立，而在该区间外，有

$$|f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})|\le M$$

从而有

$$\mathrm{M}=|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\mathrm{Re}^{i\varphi})|d\varphi<M$$

因此我们已证明了 在以 z_0 为中心的每一个充分小的圆周上

$$\left| f(z) \right| = M$$

即 在 z_0 的足够小邻域 K（K 及其周界全含于 D）内有 $\left| f(z) \right| = M$，由第二章（一）6（3）

知 $f(z)$ 在 K 内必为常数；再根据唯一性定理 $f(z)$ 在 D 内必为常数。

注 该定理说明了解析函数在区域边界上的最大模可以限制区域内的最大模.这也是解析函数特有的性质.

定理 4.24 设 （1） $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+\partial D$ 上连续

（2）$\left| f(z) \right| \le M$ （$z \in \overline{D}$）

则除 $f(z)$ 为常数外，均有 $\left| f(z) \right| < M$

即若 $f(z)$ 不为常数，则最大模 M 只能在 D 边界上达到

注 Cauchy 不等式中 $M(R)=\max\limits_{|z-a|\le R}\left| f(z) \right|$ 现在亦可理解为 $M(R)=\max\limits_{|z-a|\le R}\left| f(z) \right|$.

例 5 试用最大模原理证明

设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \le R$ 上解析，若 $\exists a > 0$，使在 $|z|=R$ 时，$\left| f(z) \right| > a$ 且 $\left| f(0) \right| < a$，则

在 $|z| \le R$ 内 $f(z)$ 至少有一个零点.

证明（反证法）

若在 $|z| < R$ 内，$f(z)$ 无零点，由题设，在 $|z|=R$ 上 $\left| f(z) \right| > a > 0$，且 $f(z)$ 在 $|z| \le R$

解析，故 $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 在 $|z| \le R$ 上解析，且 $|\varphi(0)| = \dfrac{1}{|f(0)|} > \dfrac{1}{a}$，又在 $|z|=R$ 上

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{a}$$

于是 $\varphi(z)$ 必为常数，但在 $|z|=R$ 上有 $|\varphi(z)| < |\varphi(0)|$

五、小结

1、零点及阶数判定

2、唯一性定理

3、最大模原理.

六、作业

$P_{179-180}$ 8、9、11、13

七、补充说明

Weierstrass 第二定理 设 $f_n(z)(n \in N)$ 在有界区域 D 内解析，在闭域 $\overline{D}=D+\partial D$ 上

连续，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$在$\partial D$上一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在闭域$\overline{D}$上一致收敛.

证明 由题设得$\forall\varepsilon>0$，$\exists \mathrm{N}\in \mid N$，使当$\mathrm{n}\geq \mathrm{N}$，$\forall \mathrm{p}\in \mid N$有

$$\left| f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\ldots+f_{n+p}(z)\right|<\varepsilon$$

在∂D上恒成立； 据最大模原理，该不等式在D内亦成立，故其在$\overline{D}$成立，据 Cauchy 一致收敛准则，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$\overline{D}$上一致收敛。

八、预习要求

预习并思考

1、能否利用$a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$求 Laurent 系数$a_n$？为什么？

2、把函数展成 Taylor 级数和 Laurent 级数的方法有哪些相同的？

3、幂级数与 Laurent 级数关系如何？

4、参考文献【1】、【6】