

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论
- 4 对偶理论
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

最优性理论:引言

- 在实际中最优化问题的形式多种多样. 给定一类具体的优化问题, 我们首先需要分析其解的存在性.
- 如果优化问题的解存在, 再考虑如何设计算法求出其最优解.
- 一般的非凸优化问题可能存在很多局部极小解, 但其往往也能够满足实际问题的要求.
- 对于这些局部(全局) 极小解的求解, 最优性理论是至关重要的.

最优化问题解的存在性

考虑优化问题

$$\begin{array}{ll}\min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x), \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X},\end{array}$$

其中 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为可行域.

- 首先要考虑的是最优解的存在性, 然后考虑如何求出其最优解.
- 在数学分析课程中, 我们学习过Weierstrass 定理, 即定义在紧集上的连续函数一定存在最大(最小) 值点.
- 而在许多实际问题中, 定义域可能不是紧的, 目标函数也不一定连续, 因此需要将此定理推广来保证最优化问题解的存在性.

最优化问题解的存在性: 推广的Weierstrass 定理

定理 (推广的Weierstrass定理)

若函数 $f: \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 适当且闭, 且以下条件中任意一个成立:

- ① $\text{dom}f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{X} : f(x) < +\infty\}$ 是有界的;
- ② 存在一个常数 $\bar{\gamma}$ 使得下水平集

$$C_{\bar{\gamma}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq \bar{\gamma}\}$$

是非空且有界的;

- ③ f 是强制的, 即对于任一满足 $\|x^k\| \rightarrow +\infty$ 的点列 $\{x^k\} \subset \mathcal{X}$, 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty,$$

则函数 f 的最小值点集 $\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{X}\}$ 非空且紧.

条件(2) 下的证明

假设条件(2) 成立, 且 $t \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) = -\infty$.

- 由下确界的定义, 存在点列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset C_{\bar{\gamma}}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = -\infty$.
- 由 $C_{\bar{\gamma}}$ 有界知点列 $\{x^k\}$ 存在聚点 x^* .
- 由 f 是闭函数知 $\text{epi} f$ 为闭集, 因此 $(x^*, t) \in \text{epi} f$. 根据上方图的定义知 $f(x^*) \leq t = -\infty$, 这与 f 适当矛盾, 故 $t \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ 有限.
- 由 f 为闭函数知 $C_{\bar{\gamma}}$ 为闭集, 由假设知 $C_{\bar{\gamma}}$ 有界, 故为紧集.
- 由 $f(x^*) = t$ 知最小值点集非空, 且为紧集 $C_{\bar{\gamma}}$ 的子集, 而紧集的子集也是紧集, 故最小值点集为非空紧集.

条件(1)(3)下的证明

假设条件(1)成立, 则 $\text{dom}f$ 是有界的.

- 由 f 适当知存在 $x_0 \in \mathcal{X}$ 使得 $f(x_0) < +\infty$.
- 记 $\bar{\gamma} = f(x_0)$, 此时 f 的 $\bar{\gamma}$ 下水平集 $C_{\bar{\gamma}}$ 非空有界, 条件(2)成立.

假设条件(3)成立, 我们证明条件(2)成立.

- 用反证法, 假设存在一个无界的下水平集 $C_{\bar{\gamma}}$, 那么可以取点列 $\{x^k\} \subset C_{\bar{\gamma}}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty$, 这与 $f(x^k) \leq \bar{\gamma}$ 矛盾, 故此时 f 的任意下水平集都有界, 条件(2)成立.

推广的Weierstrass定理:注记

- 推广的Weierstrass定理的三个条件在本质上都是保证 $f(x)$ 的最小值不能在无穷远处取到.
- 因此我们可以仅在一个有界的下水平集中考虑 $f(x)$ 的最小值.
- 定理仅要求 $f(x)$ 为适当且闭的函数,并不需要 $f(x)$ 的连续性,因此比数学分析中的Weierstrass定理应用范围更广.
- 当定义域不是有界闭集时,对于强制函数 $f(x) = x^2$, $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$,其全局最优解一定存在.
- 对于适当且闭的函数 $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$,它不满足三个条件中任意一个,因此我们不能断言其全局极小值点存在.事实上,其全局极小值点不存在.

解的存在唯一性

- 推广的Weierstrass定理给出了最优解的存在性条件,但其对应的解可能不止一个.
- 当最优解是唯一存在时,我们可以通过比较不同算法收敛至该解的速度来判断算法好坏.
- 但是如果问题有多个最优值点,不同的算法收敛到的最优值点可能不同,那么这些算法收敛速度的比较就失去了参考价值.
- 因此,最优化问题解的唯一性在理论分析和算法比较中扮演着重要角色.

解的存在唯一性: 拟强凸函数

定义 (拟强凸函数)

给定凸集 \mathcal{X} 和函数 $f: \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, +\infty]$. 若任取 $x \neq y$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\},$$

那么我们称函数 f 是强拟凸的.

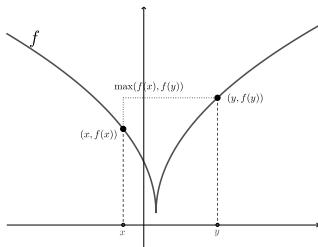


Figure: 一个强拟凸函数

拟强凸函数

- 强拟凸函数不一定是凸函数,但其任意一个下水平集都是凸集,并可以包含一部分性质较好的非凸函数.
- 任意强凸函数均为强拟凸的,但凸函数并不一定是强拟凸的.
- 任何定义在闭有界凸集上的强凸函数(如 $f(x) = x^2$),其最优解都是唯一存在的.
- 对于一般的凸函数,其最优解可能不唯一,比如 $f(x) = \max\{x, 0\}$,任意 $x \leq 0$ 都是 $f(x)$ 的最优解.

唯一性定理

定理 (唯一性定理)

设 \mathcal{X} 是 \mathbb{R}^n 的一个非空, 紧且凸的子集, 如果 $f: \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是适当, 闭且强拟凸函数, 那么存在唯一的 x^* 满足

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \{x^*\}.$$

证明:由Weierstrass定理知 f 至少存在一个全局极小点 x^* . 若 x^*, y^* 皆为全局极小点, 则有:

$$f(\lambda x^* + (1 - \lambda)y^*) < \max\{f(x^*), f(y^*)\} = f(x^*), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

这与 x^* 的全局极小性矛盾.

提纲

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论
- 4 对偶理论
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

无约束可微问题的最优性理论:引言

无约束可微优化问题通常表示为如下形式:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

其中 f 是连续可微函数.

- 给定一个点 \bar{x} , 我们想要知道这个点是否是函数 f 的一个局部极小解或者全局极小解.
- 如果从定义出发, 需要对其邻域内的所有点进行判断, 这不可行.
- 因此, 需要一个更简单的方式来验证一个点是否为极小值点. 我们称其为最优性条件, 它主要包含一阶最优性条件和二阶最优性条件.

一阶必要条件:下降方向

定义 (下降方向)

对于可微函数 f 和点 $x \in \mathbb{R}^n$, 如果存在向量 d 满足

$$\nabla f(x)^T d < 0,$$

那么称 d 为 f 在点 x 处的一个下降方向.

- 一阶最优性条件是利用梯度(一阶)信息来判断给定点的最优性.
- 由下降方向的定义, 容易验证: 如果 f 在点 x 处存在一个下降方向 d , 那么对于任意的 $T > 0$, 存在 $t \in (0, T]$, 使得

$$f(x + td) < f(x).$$

因此, 在局部最优点处不能有下降方向.

一阶必要条件

定理 (一阶必要条件)

假设 f 在全空间 \mathbb{R}^n 可微.如果 x^* 是一个局部极小点,那么

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

证明:任取 $v \in \mathbb{R}^n$, 考虑 f 在点 $x = x^*$ 处的泰勒展开

$$f(x^* + tv) = f(x^*) + tv^T \nabla f(x^*) + o(t),$$

整理得

$$\frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^T \nabla f(x^*) + o(1).$$

根据 x^* 的最优性, 在上式中分别对 t 取点0处的左, 右极限可知

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^T \nabla f(x^*) \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^T \nabla f(x^*) \leq 0,$$

即对任意的 v 有 $v^T \nabla f(x^*) = 0$, 由 v 的任意性知 $\nabla f(x^*) = 0$.

一阶必要性条件: 注记

- 对于 $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, 我们知道满足 $f'(x) = 0$ 的点为 $x^* = 0$, 并且其也是全局最优解.
- 对于 $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, 满足 $f'(x) = 0$ 的点为 $x^* = 0$, 但其不是一个局部最优解.
- 称满足 $\nabla f(x) = 0$ 的点 x 为 f 的稳定点(有时也称为驻点或临界点).
- 除了一阶必要条件, 还需要对函数加一些额外的限制条件, 才能保证最优解的充分性.

二阶最优性条件

- 在没有额外假设时, 如果一阶必要条件满足, 我们仍然不能确定当前点是否是一个局部极小点.
- 假设 f 在点 x 的一个开邻域内是二阶连续可微的. 类似于一阶必要条件的推导, 可以借助当前点处的二阶泰勒展开来逼近该函数在该点附近的取值情况, 从而来判断最优性.
- 在点 x 附近我们考虑泰勒展开

$$f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + o(\|d\|^2).$$

- 当一阶必要条件满足时, $\nabla f(x) = 0$, 那么上面的展开式简化为

$$f(x+d) = f(x) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + o(\|d\|^2).$$

由此, 我们可以导出二阶最优性条件.

二阶最优性条件

定理 (二阶最优性条件)

必要条件: 若 x^* 是 f 的一个局部极小点, 则 $\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succeq 0$.

充分条件: 若 $\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succ 0$, 则 x^* 是 f 的一个局部极小点.

- **必要性:** 若 $\nabla^2 f(x^*)$ 有负的特征值 $\lambda_- < 0$, 设 $\nabla^2 f(x^*)d = \lambda_- d$, 则

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{1}{2} \frac{d^T}{\|d\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{d}{\|d\|} + o(1) = \frac{1}{2} \lambda_- + o(1).$$

当 $\|d\|$ 充分小时, $f(x^* + d) < f(x^*)$, 这和点 x^* 的最优性矛盾.

- **充分性:** 由 $\nabla f(x^*) = 0$ 时的二阶展开,

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\|d\|^2)}{\|d\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} + o(1).$$

当 $\|d\|$ 充分小时有 $f(x^* + d) \geq f(x^*)$, 即二阶充分条件成立.

二阶最优性条件:注记

- 设点 \bar{x} 满足一阶最优性条件(即 $\nabla f(\bar{x}) = 0$), 且该点处的海瑟矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 不是半正定的, 那么 \bar{x} 不是一个局部极小点.
- 进一步地, 如果海瑟矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 既有正特征值又有负特征值, 我们称稳定点 \bar{x} 为一个鞍点.
- 事实上, 记 d_1, d_2 为其正负特征值对应的特征向量, 那么对于任意充分小的 $t > 0$, 我们都有 $f(\bar{x} + td_1) > f(\bar{x})$ 且 $f(\bar{x} + td_2) < f(\bar{x})$.
- 注意, 二阶最优性条件给出的仍然是关于局部最优性的判断. 对于给定点的全局最优性判断, 我们还需要借助实际问题的性质, 比如目标函数是凸的、非线性最小二乘问题中目标函数值为0等.

无约束可微问题最优性理论:实例

- 线性最小二乘:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|b - Ax\|_2^2,$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. 由 f 可微且凸知

$$x^* \text{ 为一个全局最优解} \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = A^T(Ax^* - b) = 0.$$

- 非线性最小二乘(实数情形的相位恢复):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m r_i^2(x),$$

其中 $r_i(x) = (a_i^T x)^2 - b_i^2$, $i = 1, 2, \dots, m$.

实数情形的相位恢复

$$\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla r_i(x) = 4 \sum_{i=1}^m ((a_i^T x)^2 - b_i^2) (a_i^T x) a_i,$$

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m (12(a_i^T x)^2 - 4b_i^2) a_i a_i^T.$$

- 如果 x^* 为局部最优解, 那么其满足一、二阶必要条件

$$\sum_{i=1}^m ((a_i^T x^*)^2 - b_i) (a_i^T x^*) a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m (12(a_i^T x^*)^2 - 4b_i^2) a_i a_i^T \succeq 0.$$

- 如果一个点 $x^\#$ 满足二阶充分条件

$$\sum_{i=1}^m ((a_i^T x^\#)^2 - b_i) (a_i^T x^\#) a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m (12(a_i^T x^\#)^2 - 4b_i^2) a_i a_i^T \succ 0,$$

那么 $x^\#$ 为局部最优解.

提纲

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论**
- 4 对偶理论
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

无约束不可微问题的最优性理论

仍考虑问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

但其中 $f(x)$ 为不可微函数.

- 很多实际问题的目标函数不是光滑的, 例如 $f(x) = \|x\|_1$.
- 对于此类问题, 由于目标函数可能不存在梯度和海瑟矩阵, 因此无约束可微问题的一阶和二阶条件不适用, 此时我们必须使用其他最优性条件来判断不可微问题的最优点.

凸优化问题一阶充要条件

对于目标函数是凸函数的情形, 我们已经引入了次梯度的概念并给出了其计算法则. 一个自然的问题是: 可以利用次梯度代替梯度来构造最优性条件吗?

定理 (凸优化问题一阶充要条件)

假设 f 是适当且凸的函数, 则 x^* 为全局极小点当且仅当 $0 \in \partial f(x^*)$.

- **必要性:** 因为 x^* 为全局极小点, 所以

$$f(y) \geq f(x^*) = f(x^*) + 0^T(y - x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 0 \in \partial f(x^*).$$

- **充分性:** 如果 $0 \in \partial f(x^*)$, 那么根据次梯度的定义

$$f(y) \geq f(x^*) + 0^T(y - x^*) = f(x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

因而 x^* 为一个全局极小点.

凸优化问题的一阶充要条件: 注记

- $0 \in \partial f(x^*)$ 是 x^* 为全局最优解的充要条件, 这个结论比一般的无约束可微问题一阶必要条件要强, 其原因是凸问题有非常好的性质, 它的稳定点中不存在鞍点.
- 因此, 可通过计算凸函数的次梯度来求解其对应的全局极小点.
- 相较于非凸函数, 凸函数的最优性分析简单, 计算以及验证起来比较方便, 在实际建模中受到广泛的关注.

复合优化问题

- 在实际问题中, 目标函数不一定是凸函数, 但它可以写成一个光滑函数与一个非光滑凸函数的和.
- 其中目标函数的光滑项可能是凸的, 比如LASSO 问题、图像去噪问题和盲反卷积问题.
- 也可能是非凸的, 例如字典学习问题和神经网络的损失函数.
- 因此研究此类问题的最优性条件十分必要.
- 考虑一般复合优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + h(x),$$

其中 f 为光滑函数(可能非凸), h 为凸函数(可能非光滑).

复合优化问题的一阶必要条件

定理 (复合优化问题的一阶必要条件)

令 x^* 为复合优化问题的一个局部极小点, 那么

$$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*),$$

其中 $\partial h(x^*)$ 为凸函数 h 在点 x^* 处的次梯度集合.

- 由 $\psi(x) = f(x) + h(x)$ 及方向导数的定义

$$\begin{aligned}\psi'(x^*; d) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\psi(x^* + td) - \psi(x^*)}{t} \\ &= \nabla f(x^*)^T d + \partial h(x^*; d) \\ &= \nabla f(x^*)^T d + \sup_{\theta \in \partial h(x^*)} \theta^T d.\end{aligned}$$

复合优化问题的一阶必要条件:证明

- 若 $-\nabla f(x^*) \notin \partial h(x^*)$, 由 h 是凸函数知 $\partial h(x^*)$ 是有界闭凸集, 又根据严格分离定理知, 存在 $d \in \mathbb{R}^n$ 以及常数 b , 使得

$$\theta^T d < b < -\nabla f(x^*)^T d, \quad \forall \theta \in \partial h(x^*) \Rightarrow \psi'(x^*; d) < 0.$$

- 这说明对充分小的非负实数 t ,

$$\psi(x^* + td) < \psi(x^*).$$

这与 x^* 的局部极小性矛盾. 因此 $-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$.

- 该定理给出了当目标函数含有非光滑凸函数时的一阶必要条件.
- 由于目标函数可能是整体非凸的, 因此一般没有一阶充分条件.

非光滑非凸问题的最优性条件:次微分

当函数 f 不可微且非凸时,我们必须对次梯度和次微分概念进行推广.

定义 (次微分)

设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是适当下半连续函数.

- ① 对给定的 $x \in \text{dom}f$, 满足如下条件的所有向量 $u \in \mathbb{R}^n$ 的集合定义为 f 在点 x 处的 *Fréchet* 次微分:

$$\liminf_{y \rightarrow x, y \neq x} \frac{f(y) - f(x) - \langle u, y - x \rangle}{\|y - x\|} \geq 0,$$

记为 $\hat{\partial}f(x)$. 当 $x \notin \text{dom}f$ 时, 将 $\hat{\partial}f(x)$ 定义为空集 \emptyset .

- ② f 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的极限次微分(或简称为次微分)定义为

$$\partial f(x) = \{u \in \mathbb{R}^n : \exists x^k \rightarrow x, f(x^k) \rightarrow f(x), u^k \in \hat{\partial}f(x^k) \rightarrow u\}.$$

极限次微分通过对 x 附近的点处的 *Fréchet* 次微分取极限得到.

次微分: 注记

- ① 容易证明 $\hat{\partial}f(x) \subseteq \partial f(x)$, 前者是闭凸集, 后者是闭集. 并非在所有的 $x \in \text{dom}f$ 处都存在 *Fréchet* 次微分.

- ② 凸函数的次梯度要求不等式

$$f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle, \quad g \in \partial f(x)$$

在定义域内全局成立, 而非凸函数只要求在极限意义下成立.

- ③ 当 f 是可微函数时, *Fréchet* 次微分和次微分都退化成梯度.

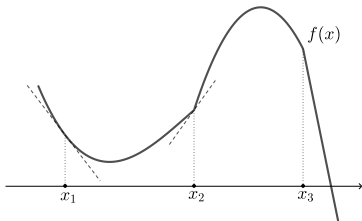


Figure: 非凸函数次微分

($f(x)$ 在点 x_3 处不存在 *Fréchet* 次微分, 但存在次微分)

一阶必要条件

- 引入非凸函数次微分的目的是为了推导出非凸非光滑函数局部极小点的一阶必要条件.
- 对凸函数 f , x 是 $f(x)$ 的全局极小点当且仅当 $0 \in \partial f(x)$.而对适当下半连续函数 f , 我们依然有类似的一阶必要条件.

定理 (一阶必要条件)

设 f 是适当下半连续函数.若 x^* 是其局部极小点, 则有 $0 \in \partial f(x^*)$.

证明:在 x^* 的任意邻域内有 $f(x) \geq f(x^*)$, 对 $x \rightarrow x^*$ 取下极限得

$$\liminf_{x \rightarrow x^*, x \neq x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{\|x - x^*\|} \geq 0 \Rightarrow 0 \in \hat{\partial} f(x^*) \Rightarrow 0 \in \partial f(x^*).$$

该证明用到了次微分的性质: $\hat{\partial} f(x^*) \subset \partial f(x^*)$.

实例: ℓ_1 范数优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \mu \|x\|_1,$$

其中 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 系数 $\mu > 0$.

- $\|x\|_1$ 不是可微的, 但我们可以计算其**次微分**

$$\partial_i \|x\|_1 = \begin{cases} \{1\}, & x_i > 0, \\ [-1, 1], & x_i = 0, \\ \{-1\}, & x_i < 0. \end{cases}$$

- 若 x^* 是局部最优解, 则 $-\nabla f(x^*) \in \mu \partial \|x^*\|_1$, 从而有必要条件:

$$\nabla f(x^*) = \begin{cases} -\mu, & x_i^* > 0, \\ a \in [-\mu, \mu], & x_i^* = 0, \\ \mu, & x_i^* < 0. \end{cases}$$

- 如果 $f(x)$ 是凸的(比如在LASSO问题中 $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$), 那么满足上式的 x^* 就是问题的全局最优解.

提纲

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论
- 4 对偶理论**
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

对偶理论:一般的约束优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

其中 c_i 为定义在 \mathbb{R}^n 或其子集上的实值函数, \mathcal{I} 和 \mathcal{E} 分别表示不等式约束和等式约束对应的下标集合且各下标互不相同.

- 这个问题的可行域定义为

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \text{ 且 } c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}\}.$$

- 通过将 \mathcal{X} 的示性函数加到目标函数中可以得到无约束优化问题.但是转化后问题的目标函数是不连续的、不可微的以及不是有限的,这导致我们难以分析其理论性质以及设计有效的算法.

拉格朗日函数

一般的约束优化问题:

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ \text{s.t.} & c_i(x) \leq 0, \ i \in \mathcal{I}, \ |\mathcal{I}| = m \\ & c_i(x) = 0, \ i \in \mathcal{E}, \ |\mathcal{E}| = p\end{array}$$

变量 $x \in \mathbb{R}^n$, 最优值为 p^* , 定义域为

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \leq 0, \ i \in \mathcal{I} \text{ 且 } c_i(x) = 0, \ i \in \mathcal{E}\}$$

拉格朗日函数 $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x)$$

- λ_i 为第 i 个不等式约束对应的拉格朗日乘子
- ν_i 为第 i 个等式约束对应的拉格朗日乘子

拉格朗日对偶函数

拉格朗日对偶函数 $g : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow [-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x) \right) \end{aligned}$$

定理 (弱对偶原理)

若 $\lambda \geq 0$, 则 $g(\lambda, \nu) \leq p^*$.

证明: 若 $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, 则

$$g(\lambda, \nu) = \inf_x L(x, \lambda, \nu) \leq L(\tilde{x}, \lambda, \nu) \leq f(\tilde{x}),$$

对 \tilde{x} 取下界得

$$g(\lambda, \nu) \leq \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} f(\tilde{x}) = p^*.$$

拉格朗日对偶问题

拉格朗日对偶问题:

$$\max_{\lambda \geq 0, \nu} g(\lambda, \nu) = \max_{\lambda \geq 0, \nu} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$$

- 称 λ 和 ν 为对偶变量, 设最优值为 q^*
- q^* 为 p^* 的最优下界, 称 $p^* - q^*$ 为对偶间隙
- 拉格朗日对偶问题是一个凸优化问题
- $\text{dom} g = \{(\lambda, \nu) \mid \lambda \geq 0, g(\lambda, \nu) > -\infty\}$, 称其元素为对偶可行解

例: 标准形式线性规划及其对偶

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & -b^T \nu \\ \text{s.t.} & A^T \nu + c \geq 0 \end{array}$$

实例:线性方程组具有最小模的解

$$\begin{array}{ll}\min & x^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b\end{array}$$

对偶函数

- 拉格朗日函数为 $L(x, \nu) = x^T x + \nu^T (Ax - b)$
- 求 L 关于 x 的最小值, 由一阶条件:

$$\nabla_x L(x, \nu) = 2x + A^T \nu = 0 \implies x = -(1/2)A^T \nu$$

- 将上式代入 L 得到对偶函数 g :

$$g(\nu) = L((-1/2)A^T \nu, \nu) = -\frac{1}{4}\nu^T A A^T \nu - b^T \nu$$

它是关于 ν 的凹函数

弱对偶性: $p^* \geq -(1/4)\nu^T A A^T \nu - b^T \nu, \forall \nu$

实例:标准形式线性规划

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b, \quad x \geq 0\end{array}$$

对偶函数

- 拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L(x, \lambda, \nu) &= c^T x + \nu^T (Ax - b) - \lambda^T x \\ &= -b^T \nu + (c + A^T \nu - \lambda)^T x\end{aligned}$$

- L 关于 x 线性, 因此

$$g(\lambda, \nu) = \inf_x L(x, \lambda, \nu) = \begin{cases} -b^T \nu & A^T \nu - \lambda + c = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

g 在仿射集 $\{(\lambda, \nu) \mid A^T \nu - \lambda + c = 0\}$ 上线性, 因此是凹函数

弱对偶性: $p^* \geq -b^T \nu$ 若 $A^T \nu + c \geq 0$

线性规划问题的对偶

$$\begin{array}{ll}\min_x & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

- 拉格朗日函数:

$$L(x, s, \nu) = c^T x + \nu^T (Ax - b) - s^T x = -b^T \nu + (A^T \nu - s + c)^T x$$

- 对偶函数:

$$g(s, \nu) = \inf_x L(x, s, \nu) = \begin{cases} -b^T \nu, & A^T \nu - s + c = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 对偶问题:

$$\begin{array}{ll}\max_{s, \nu} & -b^T \nu, \\ \text{s.t.} & A^T \nu - s + c = 0, \\ & s \geq 0.\end{array} \quad \begin{array}{c} y = -\nu \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{ll}\max_{s, y} & b^T y, \\ \text{s.t.} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0.\end{array}$$

线性规划问题的对偶

- 若保留约束 $x \geq 0$, 则拉格朗日函数为

$$L(x, y) = c^T x - y^T (Ax - b) = b^T y + (c - A^T y)^T x.$$

- 对偶问题需要将 $x \geq 0$ 添加到约束里:

$$\max_y \left\{ \inf_x b^T y + (c - A^T y)^T x, \quad \text{s.t. } x \geq 0 \right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max_y & b^T y, \\ \text{s.t.} & A^T y \leq c. \end{array}$$

此对偶问题可以通过将上页最后一个问题中的变量 s 消去得到.

- 视 $\max b^T y$ 为 $\min -b^T y$, 对偶问题的拉格朗日函数为

$$L(y, x) = -b^T y + x^T (A^T y - c) = -c^T x + (Ax - b)^T y.$$

线性规划问题的对偶

- 因此得到对偶函数

$$g(x) = \inf_y L(y, x) = \begin{cases} -c^T x, & Ax = b, \\ -\infty, & \text{其他.} \end{cases}$$

- 相应的对偶问题是

$$\begin{aligned} \max_x \quad & -c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

该问题与原始问题完全等价, 这表明线性规划问题与其对偶问题互为对偶.

线性规划问题的对偶性

强对偶性: 若一个线性规划问题有最优解, 则其对偶问题有最优解, 且最优值相等.

<div>primal \ dual</div>	finite	unbounded	infeasible
finite	✓	×	×
unbounded	×	×	✓
infeasible	×	✓	✓

- 若 $p^* = -\infty$, 则 $d^* \leq p^* = -\infty$, 因此对偶问题不适定
- 若 $d^* = +\infty$, 则 $+\infty = d^* \leq p^*$, 因此原问题不适定

$$\min \quad x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 3$$

$$\max \quad p_1 + 3p_2$$

$$\text{s.t.} \quad p_1 + 2p_2 = 1$$

$$p_1 + 2p_2 = 2$$

实例:等式约束下的范数最小化

$$\begin{array}{ll}\min & \|x\| \\ \text{s.t.} & Ax = b\end{array}$$

对偶函数

$$g(\nu) = \inf_x (\|x\| - \nu^T Ax + b^T \nu) = \begin{cases} b^T \nu & \|A^T \nu\|_* \leq 1 \\ -\infty & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\|v\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} u^T v$ 是 $\|\cdot\|$ 的对偶范数

证明: 利用 $\inf_x (\|x\| - y^T x)$ 在 $\|y\|_* \leq 1$ 时等于0 否则等于 $-\infty$

- 若 $\|y\|_* \leq 1$, 则 $x - y^T x \geq 0$ 对任意 x 都成立, 当 $x = 0$ 时取等
- 若 $\|y\|_* > 1$, 取 $x = tu$, 其中 $\|u\| \leq 1, u^T y = \|y\|_* > 1$:

$$\|x\| - y^T x = t(\|u\| - \|y\|_*) \rightarrow -\infty \text{ 当 } t \rightarrow \infty$$

弱对偶性: $p^* \geq b^T \nu$ 若 $\|A^T \nu\|_* \leq 1$

实例：二路划分

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T W x \\ \text{s.t.} \quad & x_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- 非凸问题；可行域由 2^n 个离散点组成
- 含义：将 $\{1, \dots, n\}$ 划分为两个集合； W_{ij} 是将 i, j 划入同一集合的代价； $-W_{ij}$ 则是将 i, j 划入不同集合的代价

对偶函数

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \inf_x (x^T W x + \sum_i \nu_i (x_i^2 - 1)) = \inf_x x^T (W + \text{diag}(\nu)) x - \mathbf{1}^T \nu \\ &= \begin{cases} -\mathbf{1}^T \nu & W + \text{diag}(\nu) \succeq 0 \\ -\infty & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

弱对偶性： $p^* \geq -\mathbf{1}^T \nu$ 若 $W + \text{diag}(\nu) \succeq 0$

例：取 $\nu = -\lambda_{\min}(W)\mathbf{1}$ 即得下界的估计， $p^* \geq n\lambda_{\min}(W)$

拉格朗日对偶与共轭函数

$$\begin{array}{ll}\min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & Ax \leq b, \quad Cx = d\end{array}$$

对偶函数

$$\begin{aligned}g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \text{dom } f_0} (f_0(x) + (A^T \lambda + C^T \nu)^T x - b^T \lambda - d^T \nu) \\ &= -f_0^*(-A^T \lambda - C^T \nu) - b^T \lambda - d^T \nu\end{aligned}$$

- 回顾共轭函数的定义 $f^*(y) = \sup_{x \in \text{dom } f} (y^T x - f(x))$
- 在 f_0 的共轭函数已知时可以简化对偶函数的推导

例：最大化熵

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i, \quad f_0^*(y) = \sum_{i=1}^n e^{y_i - 1}$$

弱对偶性与强对偶性

弱对偶性: $d^* \leq p^*$

- 对凸问题与非凸问题都成立
- 可导出复杂问题的非平凡下界, 例如, SDP问题

$$\begin{aligned} \max \quad & -\mathbf{1}^T \nu \\ \text{s.t.} \quad & W + \text{diag}(\nu) \succeq 0 \end{aligned}$$

给出了二路划分问题的一个下界:

$$\min x^T W x, \quad \text{s.t. } x_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

强对偶性: $d^* = p^*$

- 对一般问题而言通常不成立
- (通常) 对凸问题成立
- 称保证凸问题强对偶性成立的条件为约束品性

问题形式与对偶性

- 一个问题不同等价形式的对偶可能差异巨大
- 当对偶问题难以推导或没有价值时, 可以尝试改写原问题的形式

常用的改写技巧

- 引入新变量与等式约束
- 将显式约束隐式化或将隐式约束显式化
- 改变目标函数或者约束函数的形式
例如, 用 $\phi(f_0(x))$ 取代 $f_0(x)$, 其中 ϕ 是凸的增函数

引入新变量与等式约束

$$\min f_0(Ax + b)$$

- 对偶函数为常数
- 强对偶性成立, 但对偶问题无意义

改写原问题及其对偶

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(y) \\ \text{s.t.} & Ax + b - y = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T \nu - f_0^*(\nu) \\ \text{s.t.} & A^T \nu = 0 \end{array}$$

对偶函数为

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \inf_{x,y} (f_0(y) - \nu^T y + \nu^T Ax + b^T \nu) \\ &= \begin{cases} -f_0^*(\nu) + b^T \nu & A^T \nu = 0 \\ -\infty & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

范数逼近问题: $\min \|Ax - b\|$

$$\begin{aligned} \min \quad & \|y\| \\ \text{s.t.} \quad & y = Ax - b \end{aligned}$$

由 $\|\cdot\|$ 的共轭函数知其对偶函数为:

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \inf_{x,y} (\|y\| + \nu^T y - \nu^T Ax + b^T \nu) \\ &= \begin{cases} b^T \nu + \inf_y (\|y\| + \nu^T y) & A^T \nu = 0 \\ -\infty & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} b^T \nu & A^T \nu = 0, \quad \|\nu\|_* \leq 1 \\ -\infty & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

范数逼近问题的对偶

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T \nu \\ \text{s.t.} \quad & A^T \nu = 0, \quad \|\nu\|_* \leq 1 \end{aligned}$$

隐式约束

带边界约束的线性规划: 原问题与对偶问题

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & -\mathbf{1} \leq x \leq \mathbf{1}\end{array} \qquad \begin{array}{ll}\max & -b^T \nu - \mathbf{1}^T \lambda_1 - \mathbf{1}^T \lambda_2 \\ \text{s.t.} & c + A^T \nu + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ & \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0\end{array}$$

通过隐式化边界约束改写原问题

$$\begin{array}{ll}\min & f_0(x) = \begin{cases} c^T x & -\mathbf{1} \leq x \leq \mathbf{1} \\ -\infty & \text{其他} \end{cases} \\ \text{s.t.} & Ax = b\end{array}$$

对偶函数为

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \inf_{-\mathbf{1} \leq x \leq \mathbf{1}} (c^T x + \nu^T (Ax - b)) \\ &= -b^T \nu - \|A^T \nu + c\|_1 \end{aligned}$$

对偶问题: $\max -b^T \nu - \|A^T \nu + c\|_1$

带广义不等式约束优化问题

- 问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

中的不等式约束 $c_i(x)$, $i \in \mathcal{I}$ 都是实值函数的形式.

- 在许多实际应用中, 我们还会遇到大量带广义不等式约束的优化问题, 例如自变量 x 可能取值于半正定矩阵空间中.
- 对于这类约束我们不易将其化为 $c_i(x) \leq 0$ 的形式, 此时又该如何构造拉格朗日对偶函数呢?

适当锥与广义不等式

定义 (适当锥)

称满足如下条件的锥 K 为适当锥(*proper cone*):

- ① K 是凸锥;
- ② K 是闭集;
- ③ K 是实心的(*solid*), 即 $\text{int } K \neq \emptyset$;
- ④ K 是尖的(*pointed*), 即对任意非零向量 x , 若 $x \in K$, 则 $-x \notin K$, 也即 K 中无法容纳直线.

- 适当锥 K 可以诱导出广义不等式, 它定义了全空间上的偏序关系:

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K.$$

- 类似地, 可以定义严格广义不等式:

$$x \prec_K y \iff y - x \in \text{int } K.$$

- 当 $K = \mathbb{R}_+^n$ 时, $x \preceq_K y$ 是我们之前经常使用的记号 $x \leq y$
- 当 $K = \mathcal{S}_+^n$ 时, $X \preceq_K Y$ 表示 $Y - X \succeq 0$, 即 $Y - X$ 是半正定矩阵

对偶锥与拉格朗日乘子

- 对广义不等式, 该如何构造广义不等式约束所对应的乘子?

定义 (对偶锥)

令 K 为全空间 Ω 的子集, 称集合

$$K^* = \{y \in \Omega \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$$

为其对偶锥.

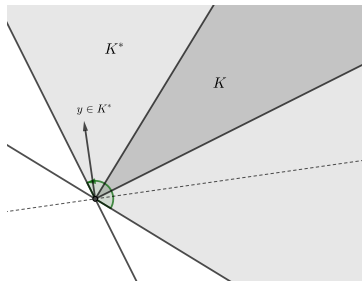


Figure: \mathbb{R}^2 平面上的锥 K 及其对偶锥 K^*

对偶锥与拉格朗日乘子: 注记

- 如果 $K = \mathbb{R}_+^n$, $\Omega = \mathbb{R}^n$ 并且定义 $\langle x, y \rangle = x^T y$, 那么易知 $K^* = \mathbb{R}_+^n$.
- 假设 $K = \mathcal{S}_+^n$, $\Omega = \mathcal{S}^n$ 并且定义

$$\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY^T),$$

可以证明

$$\langle X, Y \rangle \geq 0, \forall X \in \mathcal{S}_+^n \iff Y \in \mathcal{S}_+^n,$$

即半正定锥的对偶锥仍为半正定锥.

- 称满足 $K = K^*$ 的锥 K 为**自对偶锥**, 因此非负锥和半正定锥都是自对偶锥.
- 直观来说, 对偶锥 K^* 中向量和原锥 K 中向量的内积**恒非负**, 这一性质可以被用来构造拉格朗日对偶函数.

广义不等式约束优化问题拉格朗日函数的构造

- 广义不等式约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

其中 $c_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}_+$, $i \in \mathcal{I}$ 为向量值函数, f 与 $c_i, i \in \mathcal{E}$ 为实值函数, $K_i, i \in \mathcal{I}$ 为适当锥.

- 拉格朗日函数 L :

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle c_i(x), \lambda_i \rangle + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x), \quad \lambda_i \in K_i^*, \nu_i \in \mathbb{R}.$$

- 容易验证 $L(x, \lambda, \nu) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\lambda_i \in K_i^*, \nu_i \in \mathbb{R}$.
- 对偶函数 $g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$, 对偶问题为

$$\max_{\lambda_i \in K_i^*, \nu_i \in \mathbb{R}} g(\lambda, \nu).$$

半定规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathcal{S}^n} \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

其中 $A_i \in \mathcal{S}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, $C \in \mathcal{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

● 拉格朗日函数:

$$L(X, y, S) = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^m y_i (\langle A_i, X \rangle - b_i) - \langle S, X \rangle, \quad S \succeq 0$$

● 对偶函数:

$$g(y, S) = \inf_X L(X, y, S) = \begin{cases} b^T y, & \sum_{i=1}^m y_i A_i - C + S = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

● 对偶问题:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad -b^T y, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m y_i A_i - C + S = 0, \quad S \succeq 0$$

半定规划对偶问题的对偶问题

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} -b^T y, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m y_i A_i \preceq C$$

- 拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L(y, X) &= -b^T y + \langle X, \sum_{i=1}^m y_i A_i - C \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m y_i (-b_i + \langle A_i, X \rangle) - \langle C, X \rangle \end{aligned}$$

- 对偶函数:

$$g(X) = \inf_y L(y, X) = \begin{cases} -\langle C, X \rangle, & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 对偶问题:

$$\min_{X \in \mathcal{S}^n} \langle C, X \rangle, \quad \text{s.t.} \quad \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad X \succeq 0$$

ℓ_1 正则化问题的对偶

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \mu \|x\|_1$$

令 $r = Ax - b$, 问题等价于 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|r\|^2 + \mu \|x\|_1$, s.t. $r = Ax - b$

● 拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L(x, r, \lambda) &= \frac{1}{2} \|r\|^2 + \mu \|x\|_1 - \langle \lambda, Ax - b - r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|r\|^2 + \lambda^T r + \mu \|x\|_1 - (A^T \lambda)^T x + b^T \lambda \end{aligned}$$

● 对偶函数:

$$g(\lambda) = \inf_{x, r} L(x, r, \lambda) = \begin{cases} b^T \lambda - \frac{1}{2} \|\lambda\|^2, & \|A^T \lambda\|_\infty \leq \mu \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

● 对偶问题:

$$\max \quad b^T \lambda - \frac{1}{2} \|\lambda\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \|A^T \lambda\|_\infty \leq \mu$$

最大割问题

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & x^T C x \\ \text{s.t.} \quad & x_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

- 拉格朗日函数:

$$L(x, y) = -x^T C x + \sum_{i=1}^n y_i (x_i^2 - 1) = x^T (\text{Diag}(y) - C) x - \mathbf{1}^T y$$

- 对偶函数:

$$g(y) = \inf_x L(x, y) = \begin{cases} -\mathbf{1}^T y, & \text{Diag}(y) - C \succeq 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 对偶问题:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{1}^T y \\ \text{s.t.} \quad & \text{Diag}(y) - C \succeq 0 \end{aligned}$$

最大割对偶问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{1}^T y \\ \text{s.t.} \quad & \text{Diag}(y) - C \succeq 0 \end{aligned}$$

- 拉格朗日函数:

$$L(y, X) = \mathbf{1}^T y - \langle \text{Diag}(y) - C, X \rangle = \sum_{i=1}^n (1 - X_{ii})y_i + \langle C, X \rangle$$

- 对偶函数:

$$g(X) = \inf_y L(y, X) = \begin{cases} \langle C, X \rangle, & X_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 对偶问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & X_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

SOCP/SDP Duality

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad c^\top x \\ & \text{s.t.} \quad Ax = b, x_{\mathcal{Q}} \succeq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \max \quad b^\top y \\ & \text{s.t.} \quad A^\top y + s = c, s_{\mathcal{Q}} \succeq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad \langle C, X \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle A_1, X \rangle = b_1 \\ & \quad \dots \\ & \quad \langle A_m, X \rangle = b_m \\ & \quad X \succeq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \max \quad b^\top y \\ & \text{s.t.} \quad \sum_i y_i A_i + S = C \\ & \quad S \succeq 0 \end{array}$$

Strong duality

- If $p^* > -\infty$, (P) is **strictly** feasible, then (D) is feasible and $p^* = d^*$
- If $d^* < +\infty$, (D) is **strictly** feasible, then (P) is feasible and $p^* = d^*$
- If (P) and (D) has **strictly** feasible solutions, then both have optimal solutions.

Failure of SOCP Duality

$$\begin{array}{ll} \inf & (1, -1, 0)x \\ \text{s.t.} & (0, 0, 1)x = 1 \\ & x_Q \succeq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \sup & y \\ \text{s.t.} & (0, 0, 1)^\top y + z = (1, -1, 0)^\top \\ & z_Q \succeq 0 \end{array}$$

- primal: $\min x_0 - x_1$, s.t. $x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + 1}$; It holds $x_0 - x_1 > 0$ and $x_0 - x_1 \rightarrow 0$ if $x_0 = \sqrt{x_1^2 + 1} \rightarrow \infty$. Hence, $p^* = 0$, no finite solution

- dual: $\sup y$ s.t. $1 \geq \sqrt{1 + y^2}$. Hence, $y = 0$

$p^* = d^*$ but primal is not attainable.

Failure of SDP Duality

Consider

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X \right\rangle \\ \text{s.t.} \quad & \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0 \\ & \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 2 \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \max \quad & 2y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} y_2 \preceq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- primal: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p^* = 1$
- dual: $y^* = (0, 0)$. Hence, $d^* = 0$

Both problems have finite optimal values, but $p^* \neq d^*$

提纲

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论
- 4 对偶理论
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论**
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

带约束凸优化问题

- 稀疏优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1, \text{ s.t. } Ax = b.$$

- 低秩矩阵恢复问题:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|X\|_*, \text{ s.t. } X_{ij} = M_{ij}, (i, j) \in \Omega.$$

- 矩阵分离问题:

$$\min_{X, S \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|X\|_* + \mu \|S\|_1, \text{ s.t. } X + S = M.$$

- 回归分析中的问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_1 \leq \sigma.$$

带约束凸优化问题

- 前述问题都可以写为

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & Ax = b, \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 为适当的凸函数, $\forall i, c_i(x)$ 是凸函数且 $\text{dom} c_i = \mathbb{R}^n$.

- $A \in \mathbb{R}^{p \times n}, b \in \mathbb{R}^p$ 是已知的.
- 集合 \mathcal{D} 表示自变量 x 的自然定义域, 即

$$\mathcal{D} = \text{dom} f = \{x \mid f(x) < +\infty\}.$$

- 自变量 x 还受约束的限制, 定义可行域

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{D} : c_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m; Ax = b\}.$$

- 由于凸优化问题的可行域是凸集, 因此等式约束只能是线性约束.

Slater约束品性与强对偶原理

- 凸优化问题有很多好的性质.一个自然的问题是:我们能否像研究无约束问题那样找到该问题最优解的一阶充要条件?如果这样的条件存在,它在什么样的约束品性下成立?
- 在通常情况下,优化问题的对偶间隙大于0,即强对偶原理不满足.
- 但对很多凸优化问题,在特定约束品性下可以证明强对偶原理.
- 直观的一种约束品性是存在满足所有约束条件的严格可行解.

Slater约束品性与强对偶原理:相对内点

首先给出集合 \mathcal{D} 的相对内点集 $\text{relint}\mathcal{D}$ 的定义.给定集合 \mathcal{D} ,记其仿射包为

$$\mathbf{affine}\mathcal{D} = \{x \mid x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k, x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathcal{D}, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1\}.$$

定义(相对内点)

集合 \mathcal{D} 的相对内点集定义为

$$\text{relint}\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \mid \exists r > 0, \text{ 使得 } B(x, r) \cap \mathbf{affine}\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

相对内点是内点的推广,若 \mathcal{D} 本身的“维数”较低,则 \mathcal{D} 不可能有内点,但在它的仿射包 $\mathbf{affine}\mathcal{D}$ 中考虑,则 \mathcal{D} 可能有相对内点.

Slater约束品性

定义 (Slater约束品性)

若对凸优化问题

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x), \text{ s.t. } c_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b,$$

存在 $x \in \text{relint}\mathcal{D}$ 满足

$$c_i(x) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b,$$

则称对此问题 Slater 约束品性满足. 该约束品性也称为 Slater 条件.

- Slater约束品性实际上是要求自然定义域 \mathcal{D} 的相对内点中存在使得不等式约束严格成立的点, **affine** $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ 时相对内点就是内点.

- 不等式约束是仿射函数时, Slater条件可以放宽. 设前 k 个不等式约束是仿射的, 此时 Slater约束品性变为: 存在 $x \in \text{relint}\mathcal{D}$, 满足

$$c_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k; \quad c_i(x) < 0, i = k+1, k+2, \dots, m; \quad Ax = b,$$

即对线性不等式约束无要求其存在严格可行点.

Slater约束品性与强对偶原理

定理

若凸优化问题满足Slater条件, 则强对偶原理成立.

- 当 $d^* > -\infty$ 时, 对偶问题的最优解可以取到, 即存在对偶可行解 (λ^*, ν^*) , 满足 $g(\lambda^*, \nu^*) = d^* = p^*$.
- 假设集合 \mathcal{D} 内部非空(即 $\text{relint}\mathcal{D} = \text{int}\mathcal{D}$), A 行满秩(否则可以去掉多余的线性等式约束)以及原始问题最优函数值 p^* 有限.
- 定义集合

$$\mathbb{A} = \{(u, v, t) \mid \exists x \in \mathcal{D}, c_i(x) \leq u_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ Ax - b = v, f(x) \leq t\}.$$

$$\mathbb{B} = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}.$$

- 可以证明集合 \mathbb{A} 和 \mathbb{B} 是不相交的.
- 假设 $(u, v, t) \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. 根据 $(u, v, t) \in \mathbb{B}$, 有 $u = 0, v = 0$ 和 $t < p^*$.
- 由 $(u, v, t) \in \mathbb{A}$, 可知 $f(x) \leq t < p^*$, 这与 p^* 是原始问题最优值矛盾.

Slater约束品性与强对偶原理

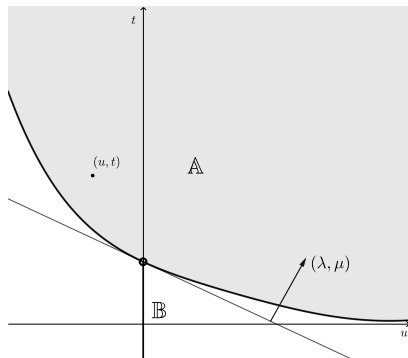


Figure: 集合 \mathbb{A} 和 \mathbb{B} 在 $u-t$ 方向投影的示意图
(\mathbb{A} 一般为有内点的凸集, \mathbb{B} 是一条射线且不含点 $(0, 0, p^*)$)

因为 \mathbb{A} 和 \mathbb{B} 均为凸集, 由超平面分离定理, 存在 $(\lambda, \nu, \mu) \neq 0$ 和 α , 使得

$$\lambda^T u + \nu^T v + \mu t \geq \alpha, \quad \forall (u, v, t) \in \mathbb{A},$$

$$\lambda^T u + \nu^T v + \mu t \leq \alpha, \quad \forall (u, v, t) \in \mathbb{B}.$$

Slater约束品性与强对偶原理

- 我们断言 $\lambda \geq 0$ 和 $\mu \geq 0$ (否则可以取 u_i 和 t 为任意大的正实数以及 $\nu = 0$, 这会导致 $\lambda^T u + \mu t$ 在集合 \mathbb{A} 上无下界).
- 同时, 由于 $\mu t \leq \alpha$ 对于所有 $t < p^*$ 成立, 可得 $\mu p^* \leq \alpha$.
- 对任意 $x \in \mathcal{D}$, 取 $(u, v, t) = (c_i(x), Ax - b, f(x)) \in \mathbb{A}$, 可知

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x) + \nu^T (Ax - b) + \mu f(x) \geq \alpha \geq \mu p^*.$$

- 假设 $\mu > 0$, 则

$$L(x, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\nu}{\mu}) \geq p^*.$$

进一步地, 我们有 $g(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\nu}{\mu}) \geq p^*$, 根据弱对偶性 $g(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\nu}{\mu}) \leq p^*$ 自然成立. 因此, 必有 $g(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\nu}{\mu}) = p^*$ 成立. 说明在此情况下强对偶性满足, 且对偶最优解可以达到.

Slater约束品性与强对偶原理

- 考虑 $\mu = 0$ 的情况, 可以从上面得到对于所有的 $x \in \mathcal{D}$,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x) + \nu^T(Ax - b) \geq 0.$$

- 取满足Slater条件的点 x_S , 有 $\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x_S) \geq 0$.
- 又 $c_i(x_S) < 0$ 和 $\lambda_i \geq 0$, 我们得到 $\lambda = 0$, 上式化为

$$\nu^T(Ax - b) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

根据 $(\lambda, \nu, \mu) \neq 0$ 可知 $\nu \neq 0$, 结合 A 行满秩可以得到 $A^T \nu \neq 0$. 由于 x_S 是可行解, 我们有 $\nu^T(Ax_S - b) = 0$.

- 因为 $x_S \in \text{int } \mathcal{D}$, 则存在点 $\tilde{x} = x_S + e \in \mathcal{D}$, 满足 $\nu^T(A\tilde{x} - b) < 0$. 这与 $\nu^T(Ax - b) \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}$ 矛盾.
- 综上所述, Slater条件能保证强对偶性.
- 在定理的证明中, Slater条件保证了 $\mu \neq 0$.

一阶充要条件

- 对于一般的约束优化问题, 当问题满足特定约束品性时, 我们知道KKT条件是局部最优解处的必要条件.
- 而对于凸优化问题, 当Slater条件满足时, KKT条件则变为局部最优解的充要条件(根据凸性, 局部最优解也是全局最优解).

定理 (凸优化问题的一阶充要条件)

对于凸优化问题, 用 a_i 表示矩阵 A^T 的第 i 列, $\partial f, \partial c_i$ 表示次梯度, 如果Slater条件成立, 那么 x^*, λ^* 分别是原始, 对偶全局最优解当且仅当

$$\text{稳定性条件} \quad 0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i^* \partial c_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* a_i,$$

$$\text{原始可行性条件} \quad Ax^* = b, \quad \forall i \in \mathcal{E},$$

$$\text{原始可行性条件} \quad c_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\text{对偶可行性条件} \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\text{互补松弛条件} \quad \lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

一阶充要条件:充分性

- 设存在 $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ 满足KKT条件, 我们考虑凸优化问题的拉格朗日函数

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i (a_i^T x - b_i).$$

- 当固定 $\lambda = \bar{\lambda}$ 时, 注意到 $\bar{\lambda}_i \geq 0, i \in \mathcal{I}$ 以及 $\bar{\lambda}_i (a_i^T x - b_i), i \in \mathcal{E}$ 是线性函数可知 $L(x, \bar{\lambda})$ 是关于 x 的凸函数.
- 由凸函数全局最优点的一阶充要性可知, 此时 \bar{x} 就是 $L(x, \bar{\lambda})$ 的全局极小点. 根据拉格朗日对偶函数的定义,

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \bar{\lambda}) = g(\bar{\lambda}).$$

- 根据原始可行性条件 $A\bar{x} = b$ 以及互补松弛条件 $\bar{\lambda}_i c_i(\bar{x}) = 0, i \in \mathcal{I}$,

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + 0 + 0 = f(\bar{x}).$$

- 根据弱对偶原理,

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) \geq p^* \geq d^* \geq g(\bar{\lambda}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \Rightarrow p^* = d^*,$$

故 $\bar{x}, \bar{\lambda}$ 分别是原始问题和对偶问题的最优解.

关于充分性的评述

- 定理的充分性说明, 若能直接求解出凸优化问题的KKT对, 则其就是对应问题的最优解.
- 在充分性部分的证明中, 我们没有使用Slater条件, 这是因为在证明的一开始假设了KKT点是存在的.
- Slater条件的意义在于当问题最优解存在时, 其相应KKT条件也会得到满足.
- 当Slater条件不满足时, 即使原始问题存在全局极小值点, 也可能不存在 (x^*, λ^*) 满足KKT条件.

example: water-filling (assume $\alpha_i > 0$)

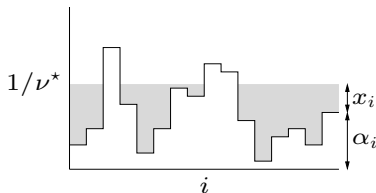
$$\min \quad - \sum_{i=1}^n \log(x_i + \alpha_i)$$

$$\text{s.t.} \quad x \geq 0, \quad \mathbf{1}^T x = 1$$

x is optimal iff $x \geq 0$, $\mathbf{1}^T x = 1$, and there exist $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{R}$ such that

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda_i x_i = 0, \quad \frac{1}{x_i + \alpha_i} + \lambda_i = \nu$$

- if $\nu < 1/\alpha_i$: $\lambda_i = 0$ and $x_i = 1/\nu - \alpha_i$
- if $\nu \geq 1/\alpha_i$: $\lambda_i = \nu - 1/\alpha_i$ and $x_i = 0$
- determine ν from $\mathbf{1}^T x = \sum_{i=1}^n \max\{0, 1/\nu - \alpha_i\} = 1$



interpretation

- n patches; level of patch i is at height α_i
- flood area with unit amount of water
- resulting level is $1/\nu^*$

非光滑凸优化实例:基追踪问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b. \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min \quad & \sum_i x_i^+ + x_i^-, \\ \text{s.t.} \quad & Ax^+ - Ax^- = b, \\ & x^+, x^- \geq 0. \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^{2n}} \quad & \mathbf{1}^T y, \\ \text{s.t.} \quad & [A, -A]y = b, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

根据一般线性规划问题的最优性条件, 求解基追踪问题等价于求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1} + [A, -A]^T \nu^* - s^* = 0, \\ [A, -A]y^* = b, \\ y^* \geq 0, \\ s^* \geq 0, \\ s^* \odot y^* = 0, \end{array} \right.$$

其中 $s^* \in \mathbb{R}^{2n}, \nu^* \in \mathbb{R}^m$.

基追踪问题最优性条件:直接推导

- 拉格朗日函数: $L(x, \nu) = \|x\|_1 + \nu^T(Ax - b)$.
- x^* 为全局最优解当且仅当存在 $\nu^* \in \mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{cases} 0 \in \partial\|x^*\|_1 + A^T\nu^*, \\ b = Ax^*. \end{cases}$$

- 令 $x_i^* = y_i^* - y_{n+i}^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$[A, -A]y^* = b \implies Ax^* = b.$$

- 对于等式 $\mathbf{1} + [A, -A]^T\nu^* - s^* = 0$, 我们有

$$(A^T\nu^*)_i = -1 + s_i^* = 1 - s_{n+i}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

因此, $s_i^* + s_{n+i}^* = 2$. 根据互补条件, y_i^* , y_{n+i}^* 至少有一个为0.

基追踪问题最优性条件:直接推导

- 若 $x_i^* = 0$, 则有 $y_i^* = y_{n+i}^* = 0$. 由 $s_i^*, s_{n+i}^* \geq 0$ 知 $(A^T \nu^*)_i \in [-1, 1]$.
- 若 $x_i^* < 0$, 则有 $y_i^* = 0, y_{n+i}^* > 0$, 此时有 $(A^T \nu^*)_i = 1$.
- 对于 $x_i^* > 0$, 我们有 $(A^T \nu^*)_i = -1$.
- 以上过程均可逆推, 这就证明了利用非光滑凸优化理论推导的最优性条件和利用线性规划推导的最优性条件是等价的.

一阶充要条件:必要性

考虑问题

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x),$$

其中 \mathcal{X} 是闭凸集并且 $f(x)$ 是凸函数.该问题给出了凸优化问题的一般形式.为了证明KKT条件的必要性,我们首先引入极锥和法锥的概念.

定义(极锥)

设 K 为 \mathbb{R}^n 的子集,我们称集合

$$K^\circ = \{y \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in K\}$$

为 K 的极锥,其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 K 所在空间的一个内积.

回顾对偶锥的定义:

定义(对偶锥)

令 K 为全空间 Ω 的子集,其对偶锥为

$$K^* = \{y \in \Omega \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K\}.$$

极锥实际上是对偶锥中元素取相反元素得到的.

极锥

极锥有非常好的性质, 设 K 为 \mathbb{R}^n 上的凸锥, 则

- ① K° 是闭凸锥;
- ② $K^\circ = (\bar{K})^\circ$, 其中 \bar{K} 为 K 的闭包;
- ③ 若 K 还为闭凸锥, 则 $K^{\circ\circ} = K$.

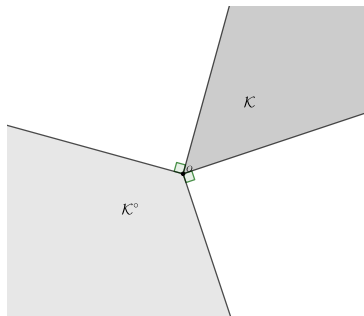


Figure: \mathbb{R}^2 上的锥 K 以及其极锥 K°

法锥

- 法锥是几何学中法线的推广, 和极锥有密切的关系.

定义 (法锥)

设 \mathcal{X} 为凸集, $x \in \mathcal{X}$ 为其上一点. 我们称集合

$$N_{\mathcal{X}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid \langle z, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in \mathcal{X}\}$$

为 \mathcal{X} 在点 x 处的法锥.

- 法锥实际上是将 x 平移到原点后的极锥, 即

$$N_{\mathcal{X}}(x) = (\mathcal{X} - \{x\})^\circ.$$

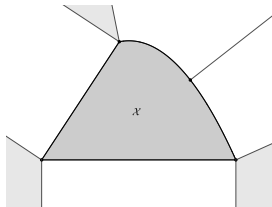


Figure: 集合 \mathcal{X} 在不同点的法锥, 在 \mathcal{X} 光滑边界上, $N_{\mathcal{X}}(x)$ 退化成外法线.

法锥与示性函数次微分的等价性

- 法锥的重要性之一是其和示性函数的次微分是等价的.

定理 (法锥与示性函数次微分的等价性)

设 \mathcal{X} 是闭凸集, $x \in \mathcal{X}$, 则 $N_{\mathcal{X}}(x) = \partial I_{\mathcal{X}}(x)$, 其中 $I_{\mathcal{X}}(x)$ 是集合 \mathcal{X} 的示性函数.

- 证明: 若 $z \in \partial I_{\mathcal{X}}(x)$, 则对任意 $y \in \text{dom} I_{\mathcal{X}}$ 有

$$0 = I_{\mathcal{X}}(y) - I_{\mathcal{X}}(x) \geq z^T(y - x),$$

这说明 $\partial I_{\mathcal{X}}(x) \subseteq N_{\mathcal{X}}(x)$. 反之结论亦成立.

回顾: Moreau-Rockafellar定理

定理 (Moreau-Rockafellar定理)

设 $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是两个凸函数, 则对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) \subseteq \partial(f_1 + f_2)(x_0).$$

进一步地, 若 $\text{int dom} f_1 \cap \text{dom} f_2 \neq \emptyset$, 则对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

利用法锥重写最优性条件:必要性

定理

设Slater条件满足. 对于 $x^* \in \mathcal{X}$, 其为问题 $\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ 的全局极小解当且仅当存在 $s \in \partial f(x^*)$ 使得 $-s \in N_{\mathcal{X}}(x^*)$.

- **必要性:** 利用凸集 \mathcal{X} 的示性函数 $I_{\mathcal{X}}(x)$, 我们可以将问题转化为如下无约束优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + I_{\mathcal{X}}(x).$$

- 由凸优化问题一阶充要条件可知, x^* 为其全局极小解当且仅当

$$0 \in \partial(f + I_{\mathcal{X}})(x^*).$$

- 由于Slater条件成立, 根据Moreau-Rockafellar定理, 有

$$\partial(f + I_{\mathcal{X}})(x^*) = \partial f(x^*) + \partial I_{\mathcal{X}}(x^*).$$

因此, 一定存在一个次梯度 $s \in \partial f(x^*)$, 使得

$$-s \in \partial I_{\mathcal{X}}(x^*).$$

又 $\partial I_{\mathcal{X}}(x^*) = N_{\mathcal{X}}(x^*)$, 故有 $-s \in N_{\mathcal{X}}(x^*)$.

利用法锥重写最优性条件:充分性

- **充分性:**假设存在 $s \in \partial f(x^*)$ 满足 $-s \in N_{\mathcal{X}}(x^*)$. 由次梯度的定义,

$$f(y) \geq f(x^*) + s^T(y - x^*), \quad \forall y \in \mathcal{X}.$$

因为 $-s \in N_{\mathcal{X}}(x^*)$, 我们有

$$s^T(y - x^*) \geq 0.$$

因此,

$$f(y) \geq f(x^*), \quad \forall y \in \mathcal{X},$$

即 x^* 为全局极小解.

- 上述定理将最优性条件转化为了 $\partial f(x)$ 和法锥 $N_{\mathcal{X}}(x)$ 的关系.
- 对问题 $\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$, 其可行域实际上可写成若干集合的交, 即

$$\mathcal{X} = \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{x \mid c_i(x) \leq 0\} \right) \cap \{x \mid Ax = b\}.$$

通常来说, 对每个约束 $c_i(x) \leq 0$ 研究其法锥是比较容易的, 我们希望从 $c_i(x) \leq 0$ 的法锥出发去研究 \mathcal{X} 的法锥.

交集的法锥为各集合对应法锥的和

定理 (交集的法锥为各集合对应法锥的和)

给定 \mathbb{R}^n 中的一列闭凸集 $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_m$, 记其交集为 $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{X}_i$. 对其内一点 $x \in \mathcal{X}$, 如果

$$\text{int } \mathcal{X}_1 \cap \text{int } \mathcal{X}_2 \cap \dots \cap \text{int } \mathcal{X}_m \neq \emptyset,$$

则

$$N_{\mathcal{X}}(x) = N_{\mathcal{X}_1}(x) + N_{\mathcal{X}_2}(x) + \dots + N_{\mathcal{X}_m}(x).$$

若某 \mathcal{X}_i 是多面体, 则在上式中 $\text{int } \mathcal{X}_i$ 可减弱为 \mathcal{X}_i .

- 上述引理实际上是Moreau-Rockafellar定理的推论, 利用法锥和示性函数次微分的等价性可自然得到此结果.
- 有了上述引理, 我们只需研究 $c_i(x) \leq 0$ 的法锥, 接下来的引理给出了每个集合 $\{x \mid c_i(x) \leq 0\}$ 法锥的具体形式.

回顾:次梯度

Lemma

设 f 为适当凸函数, 且在 x_0 处次微分不为空集, 则对任意 $d \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\partial f(x_0; d) = \sup_{g \in \partial f(x_0)} g^T d,$$

且当 $\partial f(x_0; d)$ 不为无穷时, 上确界可以取到.

$\{x \mid c_i(x) \leq 0\}$ 法锥的具体形式

定理

设 $c(x)$ 是适当的闭凸函数, $\partial c(x_0)$ 存在, 非空且 $c(x_0) = 0$. 定义集合

$$\mathcal{X} = \{x \mid c(x) \leq 0\},$$

且存在 x_s 使得 $c(x_s) < 0$, 则有 $N_{\mathcal{X}}(x_0) = \mathbf{cone} \partial c(x_0)$, 其中 $\mathbf{cone} S$ 是集合 S 的锥包, 即

$$\mathbf{cone} S \stackrel{\text{def}}{=} \{tx \mid x \in S, t \geq 0\}.$$

- 定义 $K_0 = \mathbf{cone}(\mathcal{X} - \{x_0\})$ 以及 $\mathcal{G}(x_0) = \mathbf{cone} \partial c(x_0)$.
- 根据法锥的定义, 我们实际上有 $(K_0)^\circ = N_{\mathcal{X}}(x_0)$.
- 先证 $K_0 \subseteq (\mathcal{G}(x_0))^\circ$: 设 $d \in K_0$, 由 \mathcal{X} 的凸性知, 当 τ 充分小时有

$$x_0 + \tau d \in \mathcal{X}.$$

- 现考虑点 x_0 处的方向导数 $\partial c(x_0; d)$, 根据上页引理及 \mathcal{X} 的定义,

$$0 \geq \partial c(x_0; d) = \sup_{s \in \mathcal{G}(x_0)} d^T s \Rightarrow d^T s \leq 0, \forall s \in \mathcal{G}(x_0) \Rightarrow K_0 \subseteq (\mathcal{G}(x_0))^\circ$$

$\{x \mid c_i(x) \leq 0\}$ 法锥的具体形式

再证 $(\mathcal{G}(x_0))^\circ \subseteq \overline{K_0}$: 若 $d \in (\mathcal{G}(x_0))^\circ$, 则 $\partial c(x_0; d) \leq 0$.

① $\partial c(x_0; d) < 0$. 由方向导数的定义知, 当 τ 充分小时有 $c(x_0 + \tau d) < 0$, 即 $x_0 + \tau d \in \mathcal{X}$. 这说明 $d \in K_0$.

② $\partial c(x_0; d) = 0$. 此时构造一系列方向 d^k :

$$d^k = (1 - \alpha_k)d + \alpha_k(x_s - x_0),$$

其中 x_s 为满足 Slater 条件的点, $\{\alpha_k\}$ 为单调下降趋于 0 的正序列, 则 d^k 处的方向导数有如下估计:

$$\begin{aligned}\partial c(x_0; d^k) &= \sup_{s \in \partial c(x_0)} s^T d^k \\ &\leq (1 - \alpha_k) \sup_{s \in \partial c(x_0)} s^T d + \alpha_k \sup_{s \in \partial c(x_0)} s^T (x_s - x_0) \\ &\leq (1 - \alpha_k) \partial c(x_0; d) + \alpha_k c(x_s) < 0,\end{aligned}$$

其中第二个不等式用到了次梯度的定义及 $c(x_0) = 0$ 以及上页中定理的结果. 根据情况 1 的结论, 可知 $d^k \in K_0, \forall k$. 取极限知 $d \in \overline{K_0}$.

$\{x \mid c_i(x) \leq 0\}$ 法锥的具体形式

- 结合上面的两种情况可知 $(\mathcal{G}(x_0))^\circ \subseteq \overline{K_0}$. 进一步, 我们有

$$K_0 \subseteq (\mathcal{G}(x_0))^\circ \subseteq \overline{K_0}.$$

- 极锥是闭集, 对上式中的三个集合取闭包可知 $(\mathcal{G}(x_0))^\circ = \overline{K_0}$.
- 再次取二者的极锥, 我们最终得到

$$N_{\mathcal{X}}(x_0) = (\overline{K_0})^\circ = (\mathcal{G}(x_0))^{\circ\circ} = \mathcal{G}(x_0).$$

- 利用上面的若干结论, 我们可以进一步刻画出凸优化问题

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x), \text{ s.t. } c_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b,$$

的法锥. 在这里注意, 由于 $\text{dom} c_i = \mathbb{R}^n$, 根据凸函数的连续性定理, 这意味着 $c_i(x)$ 在全空间是连续的凸函数

法锥 $N_{\mathcal{X}}(x)$ 的分解形式:定理

定理

假设Slater条件满足.若 x 为问题

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x), \text{ s.t. } c_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b,$$

的可行域 \mathcal{X} 中的点, 则

$$N_{\mathcal{X}}(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{I}} \mathcal{G}_i(x) + \mathcal{R}(A^T),$$

其中 $\mathcal{G}_i(x) = \text{cone } \partial c_i(x)$, $\mathcal{R}(A^T)$ 是 A^T 的像空间, $\mathcal{A}(x)$ 为 x 的积极集.

该定理的证明实际上是前面结论的结合.定义可行域

$$\mathcal{X} = \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{x \mid c_i(x) \leq 0\} \right) \cap \{x \mid Ax = b\} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i \right) \cap L.$$

由Slater条件成立, 由交集的法锥的性质可得

$$N_{\mathcal{X}}(x) = N_{\mathcal{X}_1}(x) + N_{\mathcal{X}_2}(x) + \dots + N_{\mathcal{X}_m}(x) + N_L(x).$$

法锥 $N_{\mathcal{X}}(x)$ 的分解形式:证明

- 在点 x 处, 若 $c_i(x) < 0$, 根据连续性可知 c_i 在点 x 的一个开邻域内均为负. 由法锥的定义可知此时 $N_{\mathcal{X}_i}(x) = \{0\}$. 这说明针对不起作用的约束, 在最优性条件中可不作考虑.
- 若 $c_i(x) = 0$, 根据 $\{x \mid c_i(x) \leq 0\}$ 法锥的具体形式可知 $N_{\mathcal{X}_i}(x) = \mathcal{G}_i(x)$.
- 最后只需计算 $L = \{x \mid Ax = b\}$ 的法锥. 对任意 $y \in L$, $A(y - x) = 0$. 这说明 $\mathcal{R}(A^T) \subseteq N_L(x)$.
- 另一方面, 根据 \mathbb{R}^n 上的分解, 对任意 $w \in \mathbb{R}^n$ 有

$$w = z + A^T s, \quad z \in \mathcal{N}(A), \quad s \in \mathbb{R}^p,$$

可知若 $w \in N_L(x)$ 则必有 $z = 0$. 这说明 $N_L(x) \subseteq \mathcal{R}(A^T)$.

结合上述的推导我们可知分解式成立.

KKT条件的必要性

- 由最优点 x^* 处次梯度包含0及法锥的分解可以得到

$$0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}} \mathcal{G}_i(x^*) + \mathcal{R}(A^T).$$

- 根据 $\mathcal{G}_i(x^*)$ 和 $\mathcal{R}(A^T)$ 的定义, 存在 $\lambda_i^* \geq 0$ 和 $\nu_i^* \in \mathbb{R}$, 使得

$$0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}} \lambda_i^* \partial c_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i^* a_i.$$

- 若补充定义 $\lambda_i^* = 0, i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}(x^*)$, 则我们最终可得到

$$0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i^* \partial c_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i^* a_i.$$

- 由可行性知 $Ax^* = b$ 以及 $c_i(x^*) \leq 0$. 由 λ_i^* 的定义可知互补松弛条件

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

成立. KKT条件的必要性得证

光滑凸优化实例:仿射空间的投影问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ 以及 $y \in \mathbb{R}^n$ 为给定的矩阵和向量且 A 满秩.

- 拉格朗日函数: $L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \lambda^T (Ax - b)$.
- Slater条件成立, x^* 为一个全局最优解当且仅当存在 $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{cases} x^* - y + A^T \lambda^* = 0, \\ Ax^* = b. \end{cases}$$

- 由上述KKT 条件第一式, 等号左右两边同时左乘 A 可得

$$Ax^* - Ay + AA^T \lambda = 0 \Rightarrow \lambda^* = (AA^T)^{-1} (Ay - b).$$

- 将 λ^* 代回KKT 条件第一式可知

$$x^* = y - A^T (AA^T)^{-1} (Ay - b).$$

因此点 y 到集合 $\{x \mid Ax = b\}$ 的投影为 $y - A^T (AA^T)^{-1} (Ay - b)$.

提纲

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论
- 4 对偶理论
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

切锥

定义 (切锥)

给定可行域 \mathcal{X} 及 $x \in \mathcal{X}$, 若存在序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x$ 以及正标量序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \rightarrow 0$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d$$

则称向量 d 为 \mathcal{X} 在点 x 处的一个切向量. 所有点 x 处的切向量构成的集合称为切锥, 用 $T_{\mathcal{X}}(x)$ 表示.

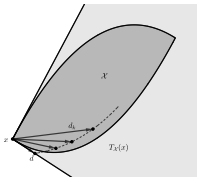


Figure: 不等式约束

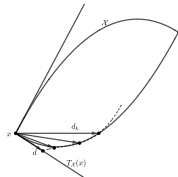


Figure: 等式约束

几何最优性条件

一般优化问题:

$$\begin{array}{ll}\min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.t.} & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}\end{array}$$

定理 (几何最优性条件)

假设可行点 x^* 是上述问题的一个局部极小点. 如果 $f(x)$ 和 $c_i(x)$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$ 在点 x^* 处是可微的, 那么

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0, \quad \forall d \in T_{\mathcal{X}}(x^*)$$

等价于

$$T_{\mathcal{X}}(x^*) \cap \{d \mid \nabla f(x^*)^T d < 0\} = \emptyset.$$

- 若 $T_{\mathcal{X}}(x^*) \cap \{d \mid \nabla f(x^*)^T d < 0\} \neq \emptyset$, 取 $d \in T_{\mathcal{X}}(x^*)$ 且 $f(x^*)^T d < 0$.
- 存在 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $x^* + t_k d_k \in \mathcal{X}$, 其中 $t_k \rightarrow 0$ 且 $d_k \rightarrow d$.
- 由于 $\nabla f(x^*)^T d < 0$, 对于充分大的 k , 我们有

$$\begin{aligned} f(x^* + t_k d_k) &= f(x^*) + t_k \nabla f(x^*)^T d_k + o(t_k) \\ &= f(x^*) + t_k \nabla f(x^*)^T d + t_k \nabla f(x^*)^T (d_k - d) + o(t_k) \\ &= f(x^*) + t_k \nabla f(x^*)^T d + o(t_k) \\ &< f(x^*) \end{aligned}$$

这与 x^* 的局部极小性矛盾.

线性化可行锥

定义 (线性化可行锥)

对于可行点 $x \in \mathcal{X}$, 定义该点的积极集 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} : c_i(x) = 0\}$, 点 x 处的线性化可行方向锥定义为

$$\mathcal{F}(x) = \left\{ d \mid \begin{array}{l} d^T \nabla c_i(x) = 0, \forall i \in \mathcal{E}, \\ d^T \nabla c_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{I} \end{array} \right\}$$

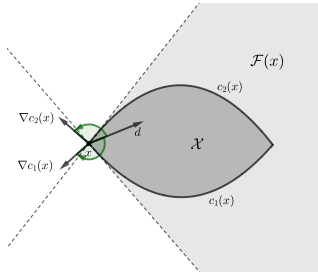


Figure: \mathbb{R}^2 上的约束集合和线性化可行方向锥

线性化可行锥包含切锥

定理 (线性化可行锥包含切锥)

设 $c_i(x), i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 一阶连续可微, 则对任意可行点 x 有 $T_{\mathcal{X}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$.

证明: 不妨设积极集 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, 设 $d \in T_{\mathcal{X}}(x)$, 由定义

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d \Leftrightarrow z_k = x + t_k d + e_k$$

其中残量 e_k 满足 $\|e_k\| = o(t_k)$. 对 $i \in \mathcal{E}$, 根据泰勒展开,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t_k} c_i(z_k) \\ &= \frac{1}{t_k} (c_i(x) + \nabla c_i(x)^T (t_k d + e_k) + o(t_k)) \\ &= \nabla c_i(x)^T d + \frac{\nabla c_i(x)^T e_k}{t_k} + o(1). \end{aligned}$$

注意到 $\frac{\|e_k\|}{t_k} \rightarrow 0$, 令 $k \rightarrow \infty$ 即可得到

$$\nabla c_i(x)^T d = 0, \quad i \in \mathcal{E}.$$

线性化可行锥包含切锥

同理, 对 $i \in \mathcal{I}$, 根据泰勒展开,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{t_k} c_i(z_k) \\ &= \frac{1}{t_k} (c_i(x) + \nabla c_i(x)^T (t_k d + e_k) + o(t_k)) \\ &= \nabla c_i(x)^T d + \frac{\nabla c_i(x)^T e_k}{t_k} + o(1). \end{aligned}$$

注意到 $c_i(x) = 0$, $i \in \mathcal{I}$, 因此我们有

$$\nabla c_i(x)^T d \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

结合以上两点, 最终可得到 $T_{\mathcal{X}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$

反例:切锥未必包含线性化可行锥

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad & f(x) = x \\ \text{s.t.} \quad & c(x) = -x + 3 \leq 0 \end{aligned}$$

- 则 $T_{\mathcal{X}}(3) = \{d \mid d \geq 0\}$, $\mathcal{F}(3) = \{d : d \geq 0\}$, 于是 $T_{\mathcal{X}}(3) = \mathcal{F}(3)$
- 将问题的约束变形为

$$c(x) = (-x + 3)^3 \leq 0$$

因为可行域不变, 故点 $x^* = 3$ 处, 切锥 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \{d : d \geq 0\}$ 不变

- 由 $c'(x^*) = -3(x^* - 3)^2 = 0$ 知线性化可行锥 $\mathcal{F}(x^*) = \{d \mid d \in \mathbb{R}\}$
- 此时, $\mathcal{F}(x^*) \supset T_{\mathcal{X}}(x^*)$ (严格包含)

约束品性的引入

- 线性化可行方向锥 $\mathcal{F}(x)$ 受可行域 \mathcal{X} 代数表示方式的影响
- 切锥 $T_{\mathcal{X}}(x)$ 仅由可行域 \mathcal{X} 决定
- 线性可行化方向锥容易计算, 但不能反映可行域 \mathcal{X} 的本质特征
- 切锥能反映可行域 \mathcal{X} 的本质特征, 但不容易计算
- 引入约束品性来沟通两者, 确保最优点 x^* 处 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$, 从而可以用 $\mathcal{F}(x)$ 取代 $T_{\mathcal{X}}(x)$

线性无关约束品性

定义 (线性无关约束品性)

给定可行点 x 及相应的积极集 $\mathcal{A}(x)$. 如果积极集对应的约束函数的梯度, 即 $\nabla c_i(x)$, $i \in \mathcal{A}(x)$, 是线性无关的, 则称线性无关约束品性 (LICQ) 在点 x 处成立.

定理

给定任意可行点 $x \in \mathcal{X}$, 若在该点 LICQ 成立, 则有 $T_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{F}(x)$.

- 证明: 不失一般性, 我们假设积极集 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. 记矩阵

$$A(x) = [\nabla c_i(x)]_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}}^T.$$

- 假设集合 $\mathcal{A}(x)$ 的元素个数为 m , 那么矩阵 $A(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 并且 $\text{rank}(A) = m$.
- 令矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ 为 $A(x)$ 的零空间的基矩阵, 则 Z 满足

$$\text{rank}(Z) = n - m, \quad A(x)Z = 0.$$

线性无关约束品性

- 令 $d \in \mathcal{F}(x)$ 为任意线性化可行方向, 给定 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$ 的正标量 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, 定义映射 $R: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$R(z, t) = \begin{bmatrix} c(z) - tA(x)d \\ Z^T(z - x - td) \end{bmatrix},$$

其中 $c(z)$ 为向量值函数, 其第 i 个分量为 $c_i(z)$.

- 由 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 知

$$R(x, 0) = \begin{bmatrix} c(x) \\ Z^T(x - x) \end{bmatrix} = 0, \quad \frac{\partial R(x, 0)}{\partial z} = \begin{bmatrix} A(x) \\ Z^T \end{bmatrix}.$$

- 根据 Z 的构造, 雅可比矩阵 $\frac{\partial R(x, 0)}{\partial z}$ 是非奇异的. 因此, 由隐函数定理, 对任意充分小的 t_k , 都存在唯一的 z_k , 使得 $R(z_k, t_k) = 0$.
- 由于 $R(z_k, t_k) = 0$, 故 $c_i(z_k) = t_k \nabla c_i(x)^T d$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$. 根据线性化可行方向 d 的定义, $c_i(z_k) \geq 0$, $i \in \mathcal{I}$, $c_i(z_k) = 0$, $i \in \mathcal{E}$, 即 z_k 为可行点.

线性无关约束品性

- 由泰勒展开得

$$\begin{aligned} 0 = R(z_k, t_k) &= \begin{bmatrix} c(z_k) - t_k A(x)d \\ Z^T(z_k - x - t_k d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(x)(z_k - x) + e_k - t_k A(x)d \\ Z^T(z_k - x - t_k d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(x) \\ Z^T \end{bmatrix} (z_k - x - t_k d) + \begin{bmatrix} e_k \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中残量 e_k 满足 $\|e_k\| = o(t_k)$.

- 两边同时作用 $[A(x)^T \ Z]^T$ 并除以 t_k , 则有

$$\frac{z_k - x}{t_k} = d + \begin{bmatrix} A(x) \\ Z^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{e_k}{t_k} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d,$$

即 $d \in T_{\mathcal{X}}(x)$. 故 $\mathcal{F}(x) \subseteq T_{\mathcal{X}}(x)$. 又 $T_{\mathcal{X}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$, 则两集合相同.

Mangasarian–Fromovitz 约束品性 (MFCQ)

定义 (Mangasarian–Fromovitz 约束品性)

给定可行点 x 及相应的积极集 $\mathcal{A}(x)$. 如果存在一个向量 $w \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\nabla c_i(x)^T w < 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{I},$$

$$\nabla c_i(x)^T w = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E},$$

并且等式约束对应的梯度集 $\{\nabla c_i(x), i \in \mathcal{E}\}$ 是线性无关的, 则称点 x 处 **MFCQ** 成立.

- Mangasarian–Fromovitz 约束品性是 LICQ 的一个常用推广, 简称为 MFCQ.
- LICQ 可以推出 MFCQ, 但是反过来不成立. 在 MFCQ 成立的情况下, 我们也可以证明 $T_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{F}(x)$.

线性约束品性

- 另外一个用来保证 $T_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{F}(x)$ 的约束品性是线性约束品性.

定义 (线性约束品性)

若所有的约束函数 $c_i(x)$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$ 都是线性的, 则称线性约束品性成立.

- 当线性约束品性成立时, 也有 $T_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{F}(x)$.
- 因此对只含线性约束的优化问题, 例如线性规划、二次规划, 很自然地有 $T_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{F}(x)$, $\forall x$. 我们无需再关注约束函数的梯度是否线性无关.
- 一般来说, 线性约束品性和LICQ之间没有互相包含的关系.

Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件:引入

- 回顾几何最优性条件:

$$x^* \text{局部极小} \Leftrightarrow T_{\mathcal{X}}(x^*) \cap \{d \mid \nabla f(x^*)^T d < 0\} = \emptyset.$$

- $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ 时(约束品性成立), 上述条件变为

$$\left\{ d \left| \begin{array}{l} d^T \nabla f(x^*) < 0, \\ d^T \nabla c_i(x^*) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \\ d^T \nabla c_i(x^*) \leq 0, \quad i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \end{array} \right. \right\} = \emptyset.$$

- 上式依然难以验证, 但可使用Farkas引理进行化简.

定理 (Farkas引理)

设 p 和 q 为两个非负整数, 给定 \mathbb{R}^n 中的向量 $\{a_i\}_{i=1}^p, \{b_i\}_{i=1}^q$ 和 c . 则满足:

$$d^T a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$d^T b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

$$d^T c < 0$$

的 d 不存在当且仅当存在 $\{\lambda_i\}_{i=1}^p$ 和 $\mu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$, 使得

$$c = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^q \mu_i b_i.$$

证明: 仅证必要性, 若这样的 λ_i 和 μ_i 不存在, 定义集合

$$S = \{z \mid z = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^q \mu_i b_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i \geq 0\}.$$

- S 是一个闭凸锥. 因为 $c \notin S$, 由凸集严格分离超平面定理可知: 存在 $d \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$d^T c < \alpha < d^T z, \quad \forall z \in S.$$

- 因为 $0 \in S$, 所以

$$d^T c < \alpha < d^T 0 = 0.$$

- 任取 b_i 与 $t \geq 0$, 有 $tb_i \in S$, 故 $\alpha < td^T b_i$. 由 t 的任意性知 $d^T b_i \geq 0$.
- 同理, 任取 $t \in \mathbb{R}$ 与 a_i , 有 $ta_i \in S$, 故 $td^T a_i < \alpha$. 由 t 的任意性知 $d^T a_i = 0$.
- 综上, 此时的 d 为不等式系统的解.

从Farkas引理到KKT条件

- 由Farkas引理, 取 $a_i = \nabla c_i(x^*)$, $i \in \mathcal{E}$, $b_i = \nabla c_i(x^*)$, $i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}$ 以及 $c = -\nabla f(x^*)$, 则 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ 时几何最优性条件等价于:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*),$$

其中 $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E}$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}$.

- 如果补充定义 $\lambda_i^* = 0$, $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}(x^*)$, 那么

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*),$$

这恰好对应于拉格朗日函数关于 x 的一阶最优性条件.

- 互补松弛条件:**对于任意的 $i \in \mathcal{I}$, 我们注意到

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0.$$

这说明 $i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}$ 时乘子 $\lambda_i^* = 0$ 或 $c_i(x^*) = 0$ 至少出现一种, 当两种情况恰好只有一种满足时, 我们也称严格互补松弛条件.

KKT条件:总结

假设 x^* 是一般优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

的一个局部最优点.如果

$$T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$$

成立, 那么存在拉格朗日乘子 λ_i^* 使得如下条件成立:

$$\text{稳定性条件} \quad \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0,$$

$$\text{原始可行性条件} \quad c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E},$$

$$\text{原始可行性条件} \quad c_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\text{对偶可行性条件} \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\text{互补松弛条件} \quad \lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

KKT条件: 注记

- 称满足KKT条件的变量对 (x^*, λ^*) 为KKT对.
- 称 x^* 为KKT点.
- 如果局部最优点 x^* 处 $T_{\mathcal{X}}(x^*) \neq \mathcal{F}(x^*)$, 那么 x^* 不一定是KKT点.
- KKT条件只是必要的, KKT点不一定是局部最优点.

二阶最优性条件:引入

依旧考虑一般优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad \text{s.t. } c_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}; c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}.$$

若 x^* 是满足KKT条件的点, 假设 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$, 则 $\forall d \in \mathcal{F}(x^*)$,

$$d^T \nabla f(x^*) = - \sum_{i \in \mathcal{E}} \underbrace{\lambda_i^* d^T \nabla c_i(x^*)}_{=0} - \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}} \underbrace{\lambda_i^* d^T \nabla c_i(x^*)}_{\leq 0} \geq 0,$$

此时一阶条件无法判断 x^* 是否是最优值点.

- 若 $d^T \nabla f(x^*) = 0$, 则需要利用二阶信息来进一步判断在其可行邻域内的目标函数值.
- 拉格朗日函数在这些方向上的曲率即可用来判断 x^* 的最优性.
- 首先引入临界锥来精确刻画这些方向.

临界锥

定义 (临界锥)

设 (x^*, λ^*) 是满足KKT条件的KKT对, 定义临界锥为

$$\mathcal{C}(x^*, \lambda^*) = \{d \in \mathcal{F}(x^*) \mid \nabla c_i(x^*)^T d = 0, \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ 且 } \lambda_i^* > 0\},$$

其中 $\mathcal{F}(x^*)$ 为点 x^* 处的线性化可行方向锥.

- 临界锥是线性化可行方向锥 $\mathcal{F}(x^*)$ 的子集.
- 沿着临界锥中的方向进行优化, 所有等式约束和 $\lambda_i^* > 0$ 对应的不等式约束(此时这些不等式均取等)都会尽量保持不变.
- 当 $d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$ 时, $\forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 有 $\lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^T d = 0$, 故

$$d^T \nabla f(x^*) = \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i^* d^T \nabla c_i(x^*) = 0.$$

- 临界锥定义了依据一阶导数不能判断是否为下降或上升方向的线性化可行方向, 必须使用高阶导数信息加以判断.

二阶最优性条件

考虑一般优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad \text{s.t. } c_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}; c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}.$$

定理 (二阶最优性条件)

必要性: 假设 x^* 是问题的一个局部最优解, 并且 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ 成立. 令 λ^* 为相应的拉格朗日乘子, 即 (x^*, λ^*) 满足 *KKT* 条件, 那么

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*).$$

充分性: 假设在可行点 x^* 处, 存在一个拉格朗日乘子 λ^* , 使得 (x^*, λ^*) 满足 *KKT* 条件. 如果

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), d \neq 0,$$

那么 x^* 为问题的一个严格局部极小解.

二阶最优性条件:无约束VS有约束

回顾无约束优化问题的二阶最优性条件:

- 问题: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.
- 必要条件:若 x^* 是 f 的一个局部极小点, 则 $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$.
- 充分条件:若 $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$, 则 x^* 是 f 的一个局部极小点.

约束优化问题的二阶最优性条件也要求某种“正定性”, 但只需要考虑临界锥 $C(x^*, \lambda^*)$ 中的向量而无需考虑全空间的向量.

有些教材中将其称为“投影半正定性”.

约束优化的最优性理论:例子

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2, \quad \text{s.t.} \quad \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 = 0,$$

其拉格朗日函数为

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1\right).$$

该问题可行域在任意一点 $x = (x_1, x_2)^T$ 处的线性化可行方向锥为

$$\mathcal{F}(x) = \{(d_1, d_2) \mid \frac{x_1}{4}d_1 + x_2d_2 = 0\}.$$

因为只有一个等式约束且其对应函数的梯度非零, 故有LICQ成立, 于是 $\mathcal{F}(x) = T_{\mathcal{X}}(x)$. 若 (x, λ) 为KKT对, 由于无不等式约束, 故 $\mathcal{C}(x, \lambda) = \mathcal{F}(x)$.

可以计算出其4个KKT对

$$(x^T, \lambda) = (2, 0, -4), \quad (-2, 0, -4), \quad (0, 1, -1) \quad \text{和} \quad (0, -1, -1).$$

约束优化的最优性理论:例子

考虑第一个KKT对 $y = (2, 0, -4)^T$, 计算可得

$$\nabla_{xx}^2 L(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(y) = \{(d_1, d_2) \mid d_1 = 0\}.$$

取 $d = (0, 1)$, 则

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(y) d = -6 < 0,$$

因此 y 不是局部最优点. 类似地, 对第三个KKT对 $z = (0, 1, -1)$,

$$\nabla_{xx}^2 L(z) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(z) = \{(d_1, d_2) \mid d_2 = 0\}.$$

对于任意的 $d = (d_1, 0)$ 且 $d_1 \neq 0$,

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(z) d = \frac{3}{2} d_1^2 > 0.$$

因此, z 为一个严格局部最优点.

最大割问题的半定规划松弛

$$\begin{array}{ll}\max & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} & X_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & X \succeq 0.\end{array}$$

- 拉格朗日函数:

$$L(X, \mu, \Lambda) = \langle C, X \rangle + \sum_{i=1}^n \mu_i (X_{ii} - 1) - \text{Tr}(X\Lambda), \quad \Lambda \in \mathcal{S}_+^n, \mu \in \mathbb{R}^n.$$

- Slater条件成立, 最优性条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} C + \text{Diag}(\mu^*) - \Lambda^* = 0, \\ X_{ii}^* = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ X^* \succeq 0, \\ \Lambda^* \succeq 0, \\ \text{Tr}(X^* \Lambda^*) = 0. \end{array} \right.$$

由于 X^* 与 Λ^* 的半正定性, $\text{Tr}(X^* \Lambda^*) = 0$ 等价于 $X^* \Lambda^* = 0$.

光滑非凸优化:最大割问题半定规划松弛的非凸分解

$$\begin{aligned} \max_{Y \in \mathbb{R}^{n \times p}} \quad & \text{Tr}(CYY^T), \\ \text{s.t.} \quad & \text{diag}(YY^T) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

- 利用 $X = YY^T$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 来减小规模, 此时 $YY^T \succeq 0$ 自然满足.
- 可行点 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 处约束为 $c_i(Y) = \|y_i\|^2 - 1 = 0, \forall i$.

$$\nabla c_i(Y) = 2[0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0]^T.$$

因为 $y_i \neq 0$, 故 $\{c_i(Y)\}_{i=1}^n$ 是线性无关的, 即LICQ成立.

- 拉格朗日函数: $L(Y, \lambda) = \text{Tr}(CYY^T) + \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(Y)$.
- KKT条件:

$$\begin{cases} 2CY - 2[\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \dots, \lambda_n y_n]^T = 0, \\ \text{diag}(YY^T) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

光滑非凸优化:最大割问题半定规划松弛的非凸分解

- 令 $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, KKT 条件第一式可以转换为

$$(C - \Lambda)Y = 0.$$

- 因为该问题只有等式约束, 故临界锥就是切锥, 即

$$\mathcal{C}(Y, \lambda) = \{D \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid \text{diag}(Y^T D) = 0\}.$$

- 拉格朗日函数的海瑟矩阵算子形式为

$$\nabla_{YY}^2 L(X, \lambda)[D] = 2(C - \Lambda)D.$$

- 必要性:** 假设 Y 为一个局部最优解, 则存在 λ_i , 使得

$$\begin{cases} \langle (C - \Lambda)D, D \rangle \geq 0, & \forall \text{diag}(Y^T D) = 0, \\ \text{diag}(YY^T) = \mathbf{1}, \\ (C - \Lambda)Y = 0. \end{cases}$$

光滑非凸优化:最大割问题半定规划松弛的非凸分解

- 充分性:假设在一点 Y 处, 存在 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 使得

$$\begin{cases} \langle (C - \Lambda)D, D \rangle > 0, & \forall \text{diag}(Y^T D) = 0, \\ \text{diag}(YY^T) = \mathbf{1}, \\ (C - \Lambda)Y = 0, \end{cases}$$

那么 Y 为问题的一个严格局部最优解.

- 利用关系式 $(C - \Lambda)Y = 0$ 和约束 $\text{diag}(YY^T) = \mathbf{1}$ 可以显式求得 $\lambda = \text{diag}(CYY^T)$.
- 在这个例子中根据约束的特殊结构, 我们能显式给出乘子 λ 的表达式. 这个性质在一般约束优化问题中是没有的.

提纲

- 1 最优化问题解的存在性
- 2 无约束可微问题的最优性理论
- 3 无约束不可微问题的最优性理论
- 4 对偶理论
- 5 带约束凸优化问题的最优性理论
- 6 一般约束优化问题的最优性理论
- 7 总结

总结:无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	$\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$ (必要) $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$ (充分)
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	—
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	—
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	—

总结:约束优化问题的最优性条件和相应约束品性

问题	一阶条件	二阶条件	约束品性
一般问题	KKT 条件(必要)	$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$ (必要) $d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), d \neq 0$, (充分) ¹	LICQ ²
凸问题	KKT 条件(充要)	—	Slater

- ① 一般约束优化问题的二阶充分条件不需要LICQ 作为前提.
- ② 或其他可推出 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ 的约束品性.