§3、Cauchy 积分公式及其推论（3 课时）

一、目的和要求

1、充分掌握 Cauchy 积分公式及解析函数的平均值定理.

2、灵活运用 Cauchy 多阶导数公式及解析函数的无穷维解析性来解决问题.

3、灵活使用 Cauchy 不等式、刘维尔定理、摩勒拉定理和掌握解析函数的判定条件

二、重难点

1、重点

Cauchy 积分公式、均值定理、多阶导数公式、无穷维解析性、Cauchy 不等式、刘维尔定理、摩勒拉定理和解析函数等价刻画定理.

2、难点

各定理的证法、应用及定理的综合应用.

三、教法

课堂讲授法，采用启发式，以足够量的例题突破难点，增强应用性的介绍.

四、教学手段

电教、CAI 演示（约 3 课时）

（一）、Cauchy 积分及其推论

定理 3.11 设区域 D 的边界是围线（或复围线）C，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}=D+C$ 上连续，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (z\in D) \tag{3.15}$$

或

$$\int_c\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi if(z) \qquad (z\in D) \tag{3.15$'$}$$

注 （1）Cauchy 积分公式(3.15)为解析函数的积分表达式，用边界值确定其内部值.

（2）在定理 3.11 的条件下，（3.15）的右端称为 Cauchy 积分

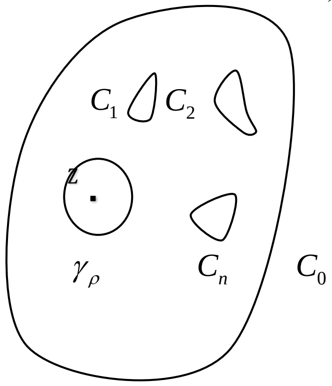
（3）用公式$(3.15)'$可以计算某些积分路径是围线的围线积分

（4）在公式中，ξ=z 为被积函数 $f(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$ 在 C 内唯一的奇点，如$\mathrm{F}(z)$在 C 内有两个以上的奇点，就不能直接应用 Cauchy 积分公式

证 任意固定 $z\in D, F(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$ 作为ξ的函数在 D 内除点 Z 外均解析；令以 Z 为心，充分小的 $\rho>0$ 的半径做圆γ_ρ，使 γ_ρ 及其内部均含于 D，对于复围线$\Gamma=C+\gamma_\rho^-$及函数 $\mathrm{F}(\xi)$，由定理 3.10 得：

$$\int_c\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

上式表示右端与γ_ρ的半径无关，我们只需证明：



$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i f(z)$$

因 $f(z)$ 与变量ξ无关，而

$$2\pi i=\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

故

$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-2\pi i f(z)\right|=\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-f(z)\int_{\gamma_\rho}\frac{d\xi}{\xi-z}\right|=\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi\right| \quad (*)$$

据 $f(\xi)$ 的连续性有

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 只要$|\xi-z|<\delta$，就有：

$$|f(\xi)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\quad(\xi\in\gamma_\rho)$$

据定理 3.2 知，(*）式不含超过$\frac{\varepsilon}{2\pi\rho}\bullet 2\pi\rho=\varepsilon$

例1 求积分$I=\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)(z-2)}dz$

解法 1

$$\frac{z}{(2z+1)(z-2)}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{z+\frac{1}{2}}+\frac{4}{z-2}\right)$$

又因为

$$\int_{|z|=1}\frac{4}{(z-2)}dz=0,,\int_{|z|=1}\frac{1}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}dz=2\pi i$$

故

$$I=\frac{1}{10}(2\pi i+0)=\frac{\pi i}{5}$$

解法 2 由 Cauchy 积分公式

$$\int_{|z|=1}\frac{\frac{z}{2(z-2)}}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}dz=2\pi i\left[\frac{z}{2(z-2)}\right]\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{5}$$

（因为 $f(z)=\dfrac{z}{2(z-2)}$ 在闭圆 $|z|\le 1$ 上解析）

例 2　求 $I=\int_c \dfrac{dz}{z^2-z}$　C: $|z|=5$

解　做 C_1: $|z|=\dfrac{1}{4}$，C_2: $|z_1|=\dfrac{1}{4}$，据定理 3.10 知：

$$\int_c \frac{dz}{z^2-z}=\int_{c_1}\frac{dz}{z^2-z}+\int_{c_2}\frac{dz}{z^2-z}$$

$$=\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z-1}}{z}dz+\int_{c_2}\frac{\frac{1}{z}}{z-1}dz$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=0}+2\pi i\left.\frac{1}{z}\right|_{z=1}$$

$$=-2\pi i+2\pi i=0$$

作为定理 3.11 的特殊情形，有如下的解析函数平均值定理

定理 3.12　若函数 f(z)在圆：$|\xi-z_0|<R$ 内解析，在闭圆 $|\xi-z_0|\le R$ 上连续，则：

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta$$

即：$f(z)$ 在圆心 z_0 的值等于它在圆周上值的算数平均数

证　设C：$|\xi-z_0|=R$, 则：$\xi-z_0=\mathrm{Re}^{i\theta}$　$(0\le\theta\le 2\pi)$

或：$\xi=z_0+\mathrm{Re}^{i\theta}$，据 Cauchy 积分公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta}\right)i\,\mathrm{Re}^{i\theta}}{\mathrm{Re}^{i\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta$$

例 3　设 $f(z)$ 在闭圆 $|z|\le R$ 上解析，若 $\exists a>0$ 使得当 $|z|=R$ 时，$|f(z)|>a$ 且 $|f(0)|<a$

证　（反证）若 $f(z)$ 在 $|z|\le R$ 内无 $|z|\le R$ 零点，由题设 $f(z)$ 在 $|z|=R$ 上也无零点

令 $\mathrm{F}(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，则

$$\mathrm{F}(z)\text{在}|z|\le R\text{上解析}\Rightarrow \mathrm{F}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow|\mathrm{F}(0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\mathrm{F}\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta\right|\le\frac{1}{2\pi}\bullet\frac{1}{a}\bullet 2\pi=\frac{1}{a}$$

因

$$\left(\left|\mathrm{F}\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|=\frac{1}{\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|}<\frac{1}{a},\left|F\left(0\right)\right|=\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}>\frac{1}{a}\right)$$

故在$|z|<R$内，$f\left(z\right)$至少有一个零点

（二）、解析函数的无穷可微性及多阶导数公式

定理 3.13 在 3.11 的条件下，函数$f\left(z\right)$在区域 D 内有各阶导数，且

$$f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{f\left(\xi\right)}{\left(\xi-z\right)^{n+1}}d\xi \qquad \left(n\in N\right)$$

证 对 n 用数学归纳法,即可，详见（P_{119}）

注 1、在定理 3.11 的条件下，有$\int_c\frac{f\left(\xi\right)}{\left(\xi-z\right)^{n+1}}d\xi=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}\left(z\right)$，应用此公式可以求一类积分.

2、ξ=z 为$\frac{f\left(\xi\right)}{\left(\xi-z\right)^{n+1}}=F\left(\xi\right)$在 C 内唯一奇点，若$\mathrm{F}\left(\xi\right)$在 D 内有两个以上的奇点，该定理（公式）不能直接用.

例 4 求$\int_c\frac{\cos z}{\left(z-i\right)^3}dz$，C 为绕 i 一周的围线.

解 因 cosz 在 z 平面上解析，应用公式（3.19）于$f\left(z\right)=\cos z$，我们得：

$$\int_c\frac{\cos z}{\left(z-i\right)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(\cos z\right)''\Big|_{z=i}=-\pi i\cos i=-\pi\frac{e^{-1}+e}{2}i$$

定理 3.14 设$f\left(z\right)$在区域 D⊂C 内解析，则$f\left(z\right)$在 D 内具有各阶导数，并且它们在 D 内解析.

证 $\forall z_0\in D, f\left(z\right)$在$z_0$解析，因为 D 为区域，故存在$\mathrm{N}_\rho\left(z_0\right)\subset D,$在$\mathrm{N}_\rho\left(z_0\right)$内应用定理 3.13，有$f\left(z\right)$在$\mathrm{N}_\rho\left(z_0\right)$内有各阶导数，据$z_0$的任意性，$f\left(z\right)$在 D 内有各阶导数.

例 4 设$f\left(z\right)$在区域 D 内解析且不为 0，C 为 D 内一围线.

$$\overline{I\left(c\right)}=I\left(c\right)+c\subset D,\text{则}\int_{\mathrm{c}}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz=0$$

证 因为 $f(z)$ 在 D 内解析，故 $f'(z)$ 在 D 内解析

又因为 $f(z)$ 在 D 内不为 0，故 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内解析

据定理 3.10，知

$$\int_{c}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$$

由定理 3.14 易得刻画解析函数的另一个充要条件.

定理 3.15

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析 $\Leftrightarrow\begin{cases}1.u_x,u_y,v_x,v_y\text{在D内连续}\\2.u,v\text{在D内满足C}-R\text{条件}\end{cases}$

（充分性为定理 3.15，必要性为 $f'(z)$ 连续）

（三）、Cauchy 不等式与 Liouville 定理

Cauchy 不等式 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，a 为 D 内一点，以 a 为中心作圆周 $\gamma:|\xi-a|=R$，只要 γ 及其内部 k 均含于 D，则有

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\le\frac{n!M(R)}{k^n}\qquad\text{其中}M(R)=\max_{|z-a|=R}|f(z)|,n=1,2,\cdots$$

证 应用定理 3.3，在 $\overline{\mathrm{k}}$ 上有：

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right|\le\frac{n!}{2\pi}\bullet\frac{M(R)}{R^{n+1}}\bullet2\pi R\le\frac{n!M(\mathrm{R})}{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}}$$

1、整函数——在整个复平面内解析的函数
已学过的整函数、常数函数、三角函数、指数函数、多项式函数等
Liouville 定理：有界整函数必为常数

证法 1 设 $|f(z)|$ 的上界为 M，则在 Cauchy 不等式中：$\forall\mathrm{R}>0$，均有 $\mathrm{M}(R)\le M$，令 n=1 得：$|f'(a)|\le\dfrac{M}{R}$，上式对一切 R 均成立，当 $R\to\infty$时，$f'(a)=0$，a 为 C 内任一点，故

$$f'(z)\text{在 Z 平面必为常数 }0\Rightarrow f(z)\text{为常数}$$

证法 2 C 上任意两点 a 和 b，$f(a)=f(b)$，取 R）0, 使$|a|<R,|b|<R$（a, b 均在充分大的圆周外部），由 $f(z)$ 为整函数，故 $f(z)$ 在闭圆$|\mathrm{z}|\le\mathrm{R}$ 上解析，据 Cauchy 积分

公式有

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{dz}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-b}\mathrm{dz}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{\mathrm{z}-\mathrm{b}}\right)\mathrm{f}(z)\mathrm{dz}$$

$$=\frac{a-b}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{f}(z)}{(z-a)(z-b)}\mathrm{dz}$$

又 $f(z)$ 在 C 上有界，可设 $|f(z)|\le M \quad (z\in C)$

$$\Rightarrow |f(a)-f(b)|=\left|\frac{a-b}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}\right|\le\frac{|a-b|M}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{dz}{|z-a||z-b|}$$

$$\le\frac{|a-b|M}{2\pi(R-|a|)(R-|b|)}\int_{|z|=\mathrm{R}}ds=\frac{M|a-b|R}{(R-|a|)(R-|b|)}\to 0(R\to\infty)$$

故

$$f(a)=f(b)$$

由 b 的任意性可知

$$f(\mathrm{z})=f(a)=\text{常数}$$

例 5 代数学基本定理，在 Z 平面上，n 次多项式

$$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\ne 0)$$

至少有一个零点.

证 若 $p(z)$ 在 C 内无零点，则 $\mathrm{F}(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ 在 C 内解析

因

$$\lim_{z\to\infty}p(z)=\lim_{z\to\infty}z^n(a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n})=\infty$$

故

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=\lim_{z\to 0}F(z)=0$$

$\exists\mathrm{M}>0,$ 使 $\left|\dfrac{1}{\mathrm{p}(\mathrm{z})}\right|\le\mathrm{M}$，z 在 $|z|\le R$，在 C 上，$\left|\dfrac{1}{\mathrm{p}(\mathrm{z})}\right|<\mathrm{M}+1$

据 Liouvill 定理知：

$\frac{1}{\mathrm{p}(\mathrm{z})}$为常数，从而 $p(z)$ 至少有一个零点.

例 6 若 $f(z)$ 为一整函数，且 $\exists M \in R,$ 使得 $\operatorname{Re} f(z) < M$

试证：$f(z)$ 为常数

证 令 $\mathrm{F}(z) = e^{f(z)}$，则 $\mathrm{F}(z)$ 为整函数，在 z 平面上，

$$\left|\mathrm{F}(z)\right| = \left|e^{f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re} f(z)} < e^{M}$$

由 Liouvill 定理，知

$\mathrm{F}(z)$ 为常数，故 $f(z)$ 也为常数.

（四）Morera 定理

定理 3.16 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，且对区域 D 内任意一围线 C，有：$\int_{c} f(z)dz = 0$，则在 $f(z)$ D 内解析.

证 在题设条件下，据定理 3.7,知：

$$\mathrm{F}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \quad (z_0 \in D)$$

在 D 内解析，且 $\mathrm{F}'(z) = f(z) \quad (z \in D)$，根据定理 3.14 可知 $f(z)$ 亦解析

易见，Morera 定理定理之逆亦真，从而有：1.$f(z)$在D内连续

定理 3.17

$$f(z)\text{在区域 D 解析} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\text{、} f(z)\text{在 D 内连续} \\ 2\text{、对任一围线 C，只要 C 及其内部全含于 D 内就有} \end{cases}$$

$$\int_{\mathrm{C}} f(z)dz = 0$$

证 “必要性” 由 Cauchy 积分定理 3.3 导出

“充分性” $\forall z_0 \in D$，在 z_0 的一个邻域 k 内解析，特别地：$f(z)$ 在 z_0 解析，据 z_0 的任意性证明.

四、小结

1．Cauchy 积分公式的多阶导数公式；

2．Cauchy 不等式及推论（三大定理）

五、作业

$\mathrm{P}_{142} - \mathrm{P}_{143}$ 9、10、15

六、预习要求：思考下列问题

1．共轭调和函数是否对称？

2．若已知调和函数 $u(x,y)$，如何求 $v(x,y)$ 使得 $u+iv$ 解析？