§3、辐角原理及其应用（3 课时）

一、目的与要求

1、掌握作为留数定理直接应用的零点与极点个数定理。

2、掌握辐角原理，Rouché定理及其应用。

二、重难点

1、重点 零点与极点个数定理，辐角原理，Rouché定理及其应用。

2、难点 定理内涵的理解和应用。

三、教法

采用启发式的课堂讲授法，理论采用分析引入，过渡自然，并以实例验证，具有说服力。

四、教学手段 电教，CAI 演示。（3 课时）

（一）零点与极点个数定理

定义 称函数 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数，若 $f(z)$ 在 D 内除极点外处处解析。

引理 1 设 $f(z)$ 为有界区域 D 内的亚纯函数，且 $f(z)$ 在 $C=\partial D$ 上解析，无零点，则 $f(z)$ 在 D 内零点与极点个数至多为有限个。（补充 有界区域之意义）

证 对于极点，若 $f(z)$ 在 D 内有无穷多个极点，记 $A=\{z|z\text{为}f(z)\text{的所有极点}\}$，

固 D 为有界集，从而点集 A 至少有一个聚点 $z_0\in\overline{D}=D\bigcup\partial D$，又 $f(z)$ 在 C 上解析，故 $z_0\in D$，从而 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点，与 $f(z)$ 为 D 中亚纯函数矛盾，故 $f(z)$ 在 D 内的奇点至多为有限个，对零点仅需考虑 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 即可

注 易见 **引理 1** 中把“亚纯函数”换成“解析函数”，则 $f(z)$ 在 D 内至多只有有限个零点。

下面研究函数在其极点或零点的邻域内的一种性质。

假设 $f(z)$ 在 G $(|z-a|<R, R\le+\infty)$ 内解析，且 $f(z)$ 不恒为常数，无零点（在 G 内无），

而 $z=a$ 为 $f(z)$ 的零点或极点，于是在 G 内

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z) \qquad (*)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|$（R 内解析，且不为 0， $k\in z\{0\}$

当 a 为 $f(z)$ 的 n 阶零点时， $k=n$

当 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点时， $k=-n$

由 $(*)$ 式，我们有 在 G 内

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{[(z-a)^k\varphi(z)]'}{(z-a)^k\varphi(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \qquad (**)$$

显然 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 G 内解析，以 a 为一阶极点，且

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=k \qquad (C=C_{-1})$$

当 a 为 $f(z)$ n 阶零点时， $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=n$

当 a 为 $f(z)$ n 阶极点时， $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=-n$

这样便有如下结论

引理 6.4（1）设 a 为 $f(z)$n 阶零点，则 a 必为 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点，且 $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=n$

（2）若b为m阶极点，则b必为$\frac{f^{'}(z)}{f(z)}$的一阶极点，且$\operatorname{Re}s(\frac{f'(z)}{f(z)},a)=n$

定理 6.9 设D为围线C所围的有界区域，$f(z)$符合条件

（1）$f(z)$为D内亚纯函数或解析函数。

（2）$f(z)$在 C 上解析且不为 0，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz=N(f,c)-P(f,c)$$

其中$N(f,c)$与$P(f,c)$分别表示$f(z)$在D内零点与极点个数（一个n阶零点算n个零点，一个m阶极点算m个极点）。

证明 由**引理 1** 知 $f(z)$在D内至多有有限个零点与极点

设 $a_k(k=1\sim p)$为$f(z)$在D内不同零点，相应阶数为n_k

$b_j(j=1\sim q)$ 为$f(z)$在D内不同极点，相应阶数为m_j

据**引理 6.4** 知 $\frac{f^{'}(z)}{f(z)}$在$\overline{D}=D\bigcup\partial D$除一阶极点，$a_k$及$b_j$外皆解析

由定理 6.1，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{P}\operatorname{Re}s(\frac{f^{'}(z)}{f(z)},a_k)+\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Re}s(\frac{f^{'}(z)}{f(z)},b_j)=\sum_{k=1}^{p}n_k+\sum_{j=1}^{q}m_j$$

$$=N(f,c)-P(f,c)$$

例 1 求$I=\int_{|z|=4}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz$

解 设 $f(z)=z^{10}-1$，则 $f(z)$在$|z|=4$解析且不为0

又 $f(z)$ 在 $|z|=4$ 内部解析，有 10 个零点，无极点，所以

$$N(f,c)=10, P(f,c)=0$$

所以 $\int_{|z|=4}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz=\frac{1}{10}\int_{|z|=4}\frac{10z^9}{z^{10}-1}dz=\frac{1}{10}\cdot 2\pi i(10-0)=2\pi i$

法 2 $I=-2\pi i\cdot \mathrm{Re}\,s(\frac{z^9}{z^{10}-1},\infty)$

而 $\frac{z^9}{z^{10}-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^{10}}}=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{20}}+\cdots)$

所以 $\mathrm{Re}\,s(\frac{z^9}{z^{10}-1},\infty)=-C_{-1}=-1$

所以 $I=-2\pi i\cdot(-1)=2\pi i[or:\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{t^2}\cdot f(\frac{1}{t}),0)=\frac{1}{1-t^{10}}\Big|_{t=0}=1]$

（二）辐角原理

在**定理 6.9** 条件下，有

$$N(f,c)-P(f,c)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln f(z)=\frac{1}{2\pi i}[\int_C d\ln|f(z)|+i\int_C d\arg f(z)]$$

函数 $\ln|f(z)|$ 为 z 的单值函数，当 z 从 z_0 起绕 C 一周后，有

$$\int_C d\ln|f(z)|=\ln|f(z_0)|-\ln|f(z_0)|=0$$

所以 上式 $=\frac{1}{2\pi i}\cdot i\Delta_C\arg f(z)=\frac{1}{2\pi}\cdot\Delta_C\arg f(z)$

其中 $\Delta_C\arg f(z)$ 为 z 沿 $\mathbb{C}$ 正方向绕一周后 $\arg f(z)$ 的改变量，它必为 2π 的整数倍。

于是有

辐角原理 设D为围线C所围区域，$f(z)$适合条件

（1）$f(z)$在D内亚纯（or 解析）函数，且连续到边界C

（2）沿C，$f(z)\neq 0$

则 $N(f，C)-P(f，C)=\frac{\Delta_C argf(z)}{2\pi}$

特别地，若$f(z)$在$\overline{D}=D\cup$C上解析，且$f(z)$在C不为0，则

$$N(f，C)=\frac{\Delta_C\ argf(z)}{2\pi}$$

例 2 设 $f(z)=(z-1)(z-2)^2(z-4)$，$C:|z|=3$，试验证辐角原理。

解 $f(z)$在z平面上解析，在C上零点，且在C的内部只有一阶零点$z=1$及二阶零点$z=2$，所以

$$N(f,c)=1+2=3$$

又因为当z沿C方向绕行一周时，有

$$\Delta_C\arg f(z)=\Delta_C\arg(z-1)+\Delta_C\arg(z-2)^2+\Delta_C\arg(z-4)$$

$$=\Delta_c\arg(z-1)+2\Delta_C\arg(z-2)+0=2\pi+2\cdot 2\pi=6\pi$$

所以 $N(f,c)=3=\dfrac{\Delta_C\arg f(z)}{2\pi}=\dfrac{6\pi}{2\pi}$

例 3 设 $f(z)=\dfrac{z(\sin z-z)}{(z^3+1)(z+1)^3}$,$C$为圆周$|z|=R$，试求$\Delta_C\arg f(z)$

解 由辐角原理可知

（1）当$R>1$时，$\Delta_C\arg f(z)=2\pi[N(f,c)-P(f,c)]=2\pi[4-6]=-4\pi$

固 $z=0$ 为分子 $z(\sin z-z)$ 的四阶零点且不是分母零点，且 $z=-1$ 为分母$(z^3+1)(z+1)^3$的四阶零点，但不是分子的零点

所以$z=-1$为$f(z)$的四阶极点，并且 z^3+1除$z=-1$外，还有$z=e^{\frac{\pi}{2}i}$和$e^{\frac{5\pi}{3}i}$两阶零点， 所以 $f(x)$在C内共有四个零点，六个极点.

（2）当$0<R<1$时，$P(f,c)=0$

$$\Delta_C \arg f(z)=2\pi\cdot N(f,c)=2\pi\cdot 4=8\pi$$

（三）鲁歇（Rouché）定理

下面的定理是**辐角原理**的一个推论，但在考察函数的零点分布时，用起来更为方便。

定理 6.10（Rouché定理）——零点个数比较定理 设C为一条围线，函数$f(z)$及$\varphi(z)$满足

（1） $f(z)$与$\varphi(z)$在C的内部解析，且连续到C

（2）在C上，$|f(z)|>|\varphi(z)|$

则 函数$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)$在C的内部有同样多的（几阶算几个）零点.即

$$N\left(f(z)+\varphi(z),C\right)=N\left(f(z),C\right)$$

证明 由假设知 $f(z)$与 $f(z)+\varphi(z)$在C内解析且连续到C，在C上有 $|f(z)|>0$且

$$|f(z)+\varphi(z)|\geq|f(z)-\varphi(z)|>0$$

从而$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)$均满足定理 6.9 的条件

又因$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)$在C内解析，故只要证

$$\Delta_C \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right]=\Delta_C \arg f(z)$$

因 $f(z)+\varphi(z)=f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$，所以

$$\Delta_C \arg[f(z)+\varphi(z)]=\Delta_C \arg f(z)+\Delta_C \arg[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}]$$

据条件（2），当 z 沿 C 变动时，$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$

借助函数 $\eta=1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ 将 z 平面上的围线 C 变成 η 平面上的闭曲线 Γ，

于是 Γ 全在圆周 $|\eta-1|=1$ 的内部，即点 η 不会围着点 $\eta=0$ 绕行，所以

$$\Delta_c \arg[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}]=0$$

所以 $\Delta_C \arg f(z)=\Delta_C \arg[f(z)+\varphi(z)]$

例 4 应用 **Rouché定理**证明代数学基本定理 任一 n 次方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

在复平面上有且只有 n 个根。

证明 令 $f(z)=a_0z^n, g(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，则

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|=\left|\frac{a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{a_0z^n}\right|\leq\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\cdot\frac{1}{|z|}+\left|\frac{a_2}{a_0}\right|\cdot\frac{1}{|z|^2}+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\cdot\frac{1}{|z|^n}\to 0 \qquad (|z|\to\infty)$$

所以 ∃充分大的 $R>0$，仅当 $|z|\geq R$ 时，$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$，即

在 $|z|\geq R$ 上，$|f(z)|>|g(z)|$ $\Rightarrow$ 在 $|z|\geq R$ 时，$f(z)+g(z)$ 不可能有零点（否则 $|f(z)|=|g(z)|$）

又 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $|z|\le R$ 时解析，据 **Rouché定理**，知 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在圆内的零点个数相同，显然 $f(z)=a_0z^n$ 在圆内（$(|z|<R)$ 的零点个数为 n，从而

$$f(z)+g(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

当 $|z|<R$ 内有 n 个零点

综述之，命题真。

重要结论

（Th*）**例 5** 设 n 次多项式

$$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \qquad (a_0\ne 0)$$

满足

$$|a_t|>|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{t-1}|+|a_{t+1}|+\cdots+|a_n|$$

则 $p(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内有 $n-t$ 个零点。

证明 令

$$f(z)=a_tz^{n-t},g(z)=a_0z^n+\cdots+a_{t-1}z^{n-t+1}+a_{t+1}z^{n-t-1}+\cdots+a_n$$

易证 在单位圆 $|z|=1$ 上有 $|f(z)|>|g(z)|$

由 **Rouché定理**知 $p(z)=f(z)+g(z)$ 在 $|z|<1$ 内与 $f(z)=a_tz^{n-t}$ 有相同多的零点数，即 $n-t$ 个.

据此，一望而知（亦可像本例题一样，应用 Rouché定理求证）

$4z^5-2z+1$ 在单位圆 $|z|=1$ 内有 5 个零点，

$z^7+6z^6-z^3$ 在 $|z|<1$ 内有 6 个零点，

$z^8+4z^5+z^2-1$在$|z|<1$内有 5 个零点，

z^9-5z^5+2z-1在$|z|<1$内有 5 个零点。

例 3.6 试确定方程 $z^4+iz^2+3=0$的根的位置。

解 由 Th*知 已知方程在$|z|=1$内部无根, 又在$|z|=2$上，

$$\left|iz^2+3\right|\le|z|^2+3=7<16=|z|^4$$

故由**Rouché定理**，该方程的四个根全在$1<|z|<2$上，且显然关于原点对称

又在$|z|=1$上，$\left|z^4+iz^2+3\right|>0$

例 3.7 试确定方程 $z^4-5z+1=0$在圆 $|z|<1$内以及$1<|z|<2$内根的个数。

解 （1）由 Th*知 已给方程在$|z|<1$内仅有且仅一个根

（2）在$|z|=2$上，$|1-5z|\le 1+5|z|=11<16=|z|^4$

由**Rouché定理**知 已给方程的四个根全在$|z|<2$内,但当$|z|<1$时，

$$\left|z^4-5z\right|=|z|\cdot\left|z^3-5\right|\le|z|(z^3+5)=6$$

$$\left|z^4-5z+1\right|\ge\left|1-\left|z^4-5z\right|\right|\ge|1-6|=5>0$$

所以 在$|z|=1$上，$z^4-5z+1=0$无根;在$1<|z|<2$内，原方程有三个根。

五、小结

三大定理及其关系

六、作业

P_{273} 14

七、补充

赫尔维兹（Hurwity）定理 若$\{f_n(z)\}(n\in N_+)$为区域D内的解析函数列，它在D内内闭一致收敛于$f(z)$，$f(z)\neq 0$；又设C为一条连同其内部都含于D的围线，$f(z)$在C上无零点，则存在$N\in N_+$，使得当$n>N$时，$f_n(z)$与$f(z)$在C内有相同数目的零点。

证明 据题设，由**Weierstrass定理**知 $f(z)$在D内解析，且

$$\min_{z\in c}|f(z)|=m>0$$

因为 $f_n(z)\xrightarrow[n\to\infty]{C} f(z)$,故

$$\exists N\in N_+\text{，使当}n>N\text{时，}|f_n(z)-f(z)|<m\quad (z\in C)$$

所以由

$$f_n(z)=f(z)+[f_n(z)-f(z)]$$

$$|f(z)|\geq m>|f_n(z)-f(z)|\qquad (z\in C,n>N)$$

及**Rouché定理**知 $N(f_n(z),C)=N(f(z),C)\qquad (n>N)$

八、预习定理 7.1，预习要求

思考并回答

（1）研究共形映射的意义何在？

（2）共形映射是从几何角度讨论变换的性质，函数的解析性则讨论函数的分析性质，两者何关系？

（3）$W=f(z)$在z_0解析且$f'(z_0)\neq 0$，试求$\arg f'(z_0)$和$|f(z_0)|$的几何意义

九、后记

参考文献 [2]，[5]，[6]。