提纲

一阶条件

回顾可微凸函数f 的一阶条件:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^{\mathrm{T}}(y-x)$$

- f 在点x 处的一阶近似是f 的一个全局下界
- $\nabla f(x)$ 可以诱导出上方图$\mathbf{epi}\, f$ 在点$(x, f(x))$ 处的支撑超平面

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad \forall\ (y,t) \in \mathbf{epi}\, f$$

若f 不可微，可否类似地定义一种梯度，使之具有梯度的一些性质？

次梯度

- 设f 为适当凸函数，x为定义域$\mathbf{dom}\, f$中的一点．若向量$g \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f(y) \geq f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x), \quad \forall y \in \mathbf{dom}\, f,$$

则称g 为函数f 在点x 处的一个**次梯度**．

- 进一步地，称集合

$$\partial f(x) = \{g \mid g \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x), \forall y \in \mathbf{dom}\, f\}$$

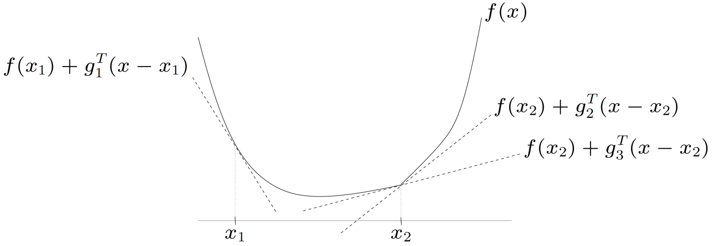
为f 在点x 处的**次微分**.

次梯度

- $f(x)+g^{\mathrm{T}}(y-x)$ 是$f(y)$ 的一个全局下界
- g 可以诱导出上方图$\textbf{epi} f$ 在点$(x,f(x))$ 处的一个支撑超平面

$$\begin{bmatrix} g \\ -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}\right)\leq 0 \quad \forall\,(y,t)\in \textbf{epi} f$$

- 如果f 是可微凸函数，那么$\nabla f(x)$ 是f 在点x 处的一个次梯度
- 例：g_2,g_3 是点x_2 处的次梯度；g_1 是点x_1 处的次梯度



次梯度存在性

设f为凸函数，$\mathbf{dom}\,f$为其定义域．如果$x \in \mathbf{int\ dom}\,f$，则$\partial f(x)$是非空的，其中$\mathbf{int\ dom}\,f$的含义是集合$\mathbf{dom}\,f$的所有内点.

证明：

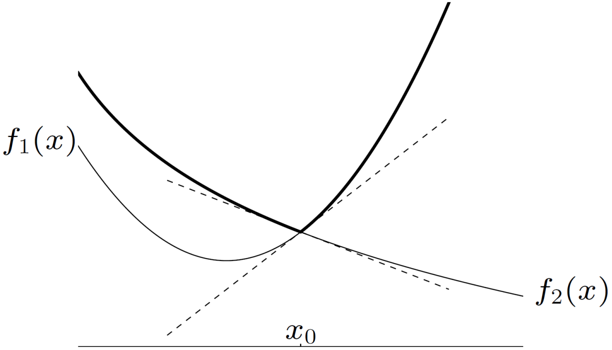
- $(x, f(x))$ 是**epi** f 边界上的点
- 因此存在**epi** f 在点$(x, f(x))$ 处的支撑超平面:

$$\exists\ (a, b) \neq 0, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad \forall\ (y, t) \in \mathbf{epi}\,f$$

- 令$t \to +\infty$, 可知$b \leq 0$
- 取$y = x + \epsilon a \in \mathbf{dom}\,f$, $\epsilon > 0$, 可知$b \neq 0$
- 因此$b < 0$ 并且$g = a/|b|$ 是f 在点x 处的次梯度

例

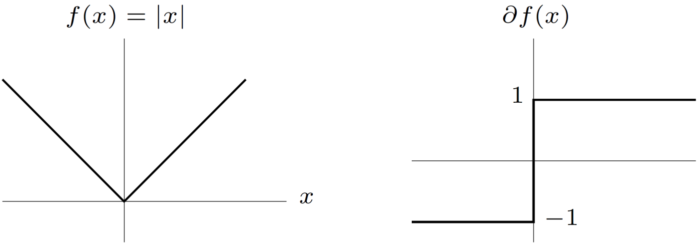
$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \quad f_1, f_2 \text{ 是可微凸函数}$$



- 点x_0 处的次梯度可取范围$[\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0)]$
- 如果$f_1(\hat{x}) > f_2(\hat{x})$, f 在点$\hat{x}$ 处的次梯度等于$\nabla f_1(\hat{x})$
- 如果$f_1(\hat{x}) < f_2(\hat{x})$, f 在点$\hat{x}$ 处的次梯度等于$\nabla f_2(\hat{x})$

例

- 绝对值函数 $f(x) = |x|$



- 欧几里得范数 $f(x) = \|x\|_2$

$$\text{如果 } x \neq 0, \partial f(x) = \frac{1}{\|x\|_2} x, \quad \text{如果 } x = 0, \partial f(x) = \{g \mid \|g\|_2 \leq 1\}$$

提纲

次微分是闭凸集

对任何$x \in \mathbf{dom}\, f$，$\partial f(x)$ 是一个闭凸集（可能为空集）．

证明：

- 设$g_1, g_2 \in \partial f(x)$，并设$\lambda \in (0,1)$，由次梯度的定义

$$f(y) \geq f(x) + g_1^{\mathrm{T}}(y - x), \quad \forall y \in \mathrm{dom} f,$$
$$f(y) \geq f(x) + g_2^{\mathrm{T}}(y - x), \quad \forall y \in \mathrm{dom} f.$$

  由上面第一式的λ 倍加上第二式的$(1-\lambda)$ 倍，我们可以得到$\lambda g_1 + (1-\lambda) g_2 \in \partial f(x)$，从而$\partial f(x)$ 是凸集．

- 令$g_k \in \partial f(x)$为次梯度且$g_k \to g$，则

$$f(y) \geq f(x) + g_k^{\mathrm{T}}(y - x), \quad \forall y \in \mathrm{dom} f,$$

  在上述不等式中取极限，并注意到极限的保号性，最终我们有

$$f(y) \geq f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x), \quad \forall y \in \mathrm{dom} f.$$

  这说明$\partial f(x)$为闭集．

内点的次微分非空有界

如果$x \in \mathbf{int\,dom}\, f$，则$\partial f(x)$ 非空有界集.

证明：

- 非空可由次梯度存在性直接得出
- 取充分小的$r > 0$, 使得

$$B = \{x \pm re_i | i = 1, \cdots, n\} \subset \mathbf{dom}\, f$$

- 对任意非零的$g \in \partial f(x)$, 存在$y \in B$ 满足

$$f(y) \geq f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x) = f(x) + r\|g\|_\infty$$

- 由此得到$\partial f(x)$ 有界:

$$\|g\|_\infty \leq \frac{\max_{y \in B} f(y) - f(x)}{r} < +\infty$$

可微函数的次微分

设凸函数$f(x)$在$x_0 \in \textbf{int dom } f$处可微，则$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

证明：

- 根据可微凸函数的一阶条件可知梯度$\nabla f(x_0)$为次梯度.
- 下证$f(x)$在点x_0处不可能有其他次梯度. 设$g \in \partial f(x_0)$，根据次梯度的定义，对任意的非零$v \in \mathbb{R}^n$且$x_0 + tv \in \textbf{dom } f, t > 0$有

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + tg^{\mathrm{T}}v.$$

若$g \neq \nabla f(x_0)$，取$v = g - \nabla f(x_0) \neq 0$，上式变形为

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - t\nabla f(x_0)^{\mathrm{T}}v}{t\|v\|} \geq \frac{(g - \nabla f(x_0))^{\mathrm{T}}v}{\|v\|} = \|v\|.$$

- 不等式两边令$t \to 0$，根据Fréchet 可微的定义，左边趋于0，而右边是非零正数，可得到矛盾.

次梯度的单调性

设$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为凸函数，$x, y \in \mathbf{dom}\, f$，则$(u - v)^{\mathrm{T}}(x - y) \geq 0$, 其中$u \in \partial f(x)$，$v \in \partial f(y)$.

证明：

- 由次梯度的定义，

$$f(y) \geq f(x) + u^{\mathrm{T}}(y - x),$$
$$f(x) \geq f(y) + v^{\mathrm{T}}(x - y).$$

- 将以上两个不等式相加即得结论.

次梯度的连续性

设$f(x)$ 是闭凸函数且∂f 在点$\bar{x}$ 附近存在且非空．若序列$x^k \to \bar{x}$，$g^k \in \partial f(x^k)$ 为$f(x)$ 在点x^k 处的次梯度，且$g^k \to \bar{g}$，则$\bar{g} \in \partial f(\bar{x})$．

证明：

- 对任意$y \in \mathrm{dom} f$，根据次梯度的定义，

$$f(y) \geq f(x^k) + \langle g^k, y - x^k \rangle .$$

- 对上述不等式两边取下极限，我们有

$$\begin{aligned} f(y) &\geq \liminf_{k \to \infty} [f(x^k) + \langle g^k, y - x^k \rangle] \\ &\geq f(\bar{x}) + \langle \bar{g}, y - \bar{x} \rangle , \end{aligned}$$

其中第二个不等式利用了$f(x)$的下半连续性以及$g^k \to \bar{g}$，由此可推出$\bar{g} \in \partial f(\bar{x})$．

例：非次可微函数

如下函数在点$x = 0$ 处不是次可微的:

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \mathbf{dom}\, f = \mathbf{R}_+$

$$x = 0 \text{ 时}, f(x) = 1, x > 0 \text{ 时}, f(x) = 0$$

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \mathbf{dom}\, f = \mathbf{R}_+$

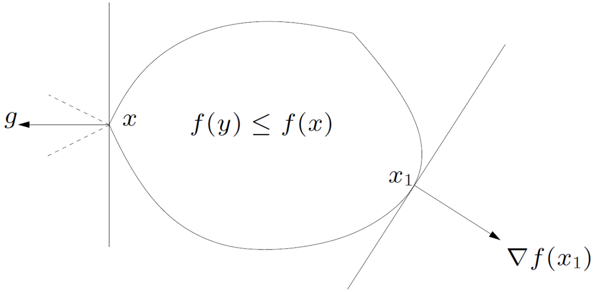
$$f(x) = -\sqrt{x}$$

$\mathbf{epi}\, f$ 在点$(0, f(0))$ 处的唯一支撑超平面是垂直的

次梯度和水平子集

如果g 是f 在点x 处的一个次梯度, 那么

$$f(y) \leq f(x) \Longrightarrow g^{\mathrm{T}}(y-x) \leq 0$$



点x 处的非零次梯度可定义水平子集 $\{y \mid f(y) \leq f(x)\}$ 的支撑超平面

提纲

方向导数

- 一般函数：设f为适当函数，给定点x_0以及方向$d\in\mathbb{R}^n$，方向导数（若存在）定义为

$$\lim_{t\downarrow 0}\phi(t)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t},$$

其中$t\downarrow 0$表示t单调下降趋于0.

- 凸函数：易知$\phi(t)$ 在$(0,+\infty)$上是单调不减的，上式中的极限号lim可以替换为下确界inf. 上述此时极限总是存在（可以为无穷），进而凸函数总是可以定义方向导数.

- 方向导数的定义：对于凸函数f，给定点$x_0\in\textbf{dom}\, f$ 以及方向$d\in\mathbb{R}^n$，其方向导数定义为

$$\partial f(x_0;d)=\inf_{t>0}\frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t}.$$

设$f(x)$为凸函数，$x_0 \in \textbf{int dom} f$，则对任意$d \in \mathbb{R}^n$，$\partial f(x_0; d)$有限.

证明：

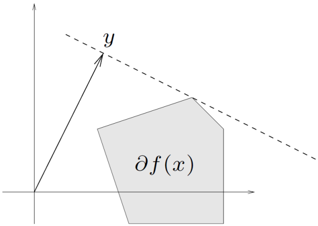
- 首先$\partial f(x_0; d)$不为正无穷是显然的.
- 由于$x_0 \in \textbf{int dom} f$，根据次梯度的存在性定理可知$f(x)$在点$x_0$处存在次梯度$g$.
- 根据方向导数的定义，我们有

$$\begin{aligned}\partial f(x_0; d) &= \inf_{t>0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \\ &\geq \inf_{t>0} \frac{tg^{\mathrm{T}} d}{t} = g^{\mathrm{T}} d.\end{aligned}$$

  其中的不等式利用了次梯度的定义.
- 这说明$\partial f(x_0; d)$不为负无穷.

设$f:\mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ 为凸函数，点$x_0 \in \textbf{int dom} f$，$d$ 为$\mathbb{R}^n$ 中任一方向，则

$$\partial f(x_0;d)=\max_{g\in\partial f(x_0)} g^\mathrm{T} d.$$



$\partial f(x;y)$ 是$\partial f(x)$ 的支撑函数

- 对于可微函数, $\partial f(x_0;d)=\nabla f(x_0)^\mathrm{T} d$
- 这也说明$\partial f(x_0;d)$ 对所有的$x_0 \in \textbf{int dom} f$, 以及所有的$d$ 都存在

证明：

- 记$q(v)=\partial f(x_0;v)$. 根据方向导数有限性的证明过程可得，

$$q(d)=\partial f(x_0;d)\geq g^{\mathrm{T}}d,\ \forall g\in\partial f(x_0).$$

这说明$\partial f(x_0;d)$是$g^{\mathrm{T}}d$的一个上界，接下来说明该上界为上确界.

- 构造函数

$$h(v,t)=t\left(f\left(x_0+\frac{v}{t}\right)-f(x_0)\right),$$

可知$h(v,t)$为$\tilde{f}(v)=f(x_0+v)-f(x_0)$的透视函数，并且

$$q(v)=\inf_{t'>0}\frac{f(x_0+t'v)-f(x_0)}{t'}\xlongequal{t=1/t'}\inf_{t>0}h(v,t).$$

由于透视函数$h(v,t)$为凸函数，取下确界仍为凸函数，因此$q(v)$关于v是凸函数.

- 由方向导数的有限性直接可以得出$\mathbf{dom}\ q=\mathbb{R}^n$，因此$q(v)$在全空间任意一点次梯度存在.

- 对方向d，设$\hat{g} \in \partial q(d)$，则对任意$v \in \mathbb{R}^n$以及$\lambda \geq 0$，我们有

$$\lambda q(v) = q(\lambda v) \geq q(d) + \hat{g}^{\mathrm{T}}(\lambda v - d).$$

- 令$\lambda = 0$，我们有$q(d) \leq \hat{g}^{\mathrm{T}} d$；令$\lambda \to +\infty$，我们有

$$q(v) \geq \hat{g}^{\mathrm{T}} v,$$

- 进而推出

$$f(x+v) \geq f(x) + q(v) \geq f(x) + \hat{g}^{\mathrm{T}} v.$$

这说明$\hat{g} \in \partial f(x)$且$\hat{g}^{\mathrm{T}} d \geq q(d)$．即$q(d)$为$g^{\mathrm{T}} d$的上确界，且当$g = \hat{g}$时上确界达到.

更一般的推广

- 设f为适当凸函数，且在x_0处次微分不为空集，则对任意$d \in \mathbb{R}^n$有

$$\partial f(x_0; d) = \sup_{g \in \partial f(x_0)} g^{\mathrm{T}} d,$$

且当$\partial f(x_0; d)$不为无穷时，上确界可以取到.

提纲

次梯度的计算规则

弱次梯度计算: 得到一个次梯度

- 足以满足大多数不可微凸函数优化算法
- 如果可以获得任意一点处$f(x)$ 的值，那么总可以计算一个次梯度

强次梯度计算: 得到$\partial f(x)$，即所有次梯度

- 一些算法、最优性条件等，需要完整的次微分
- 计算可能相当复杂

下面我们假设$x \in \textbf{int dom} f$

基本规则

- **可微凸函数**：若凸函数f 在点x 处可微，则$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.
- **凸函数的非负线性组合**：设凸函数f_1, f_2 满足$\textbf{int dom}\, f_1 \cap \textbf{dom}\, f_2 \neq \emptyset$，而$x \in \textbf{dom}\, f_1 \cap \textbf{dom}\, f_2$. 若

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0,$$

则$f(x)$的次微分

$$\partial f(x) = \alpha_1 \partial f_1(x) + \alpha_2 \partial f_2(x).$$

- **线性变量替换**：设h 为适当凸函数，f 满足$f(x) = h(Ax + b)$. 若存在$x^\sharp \in \mathbb{R}^m$，使得$Ax^\sharp + b \in \textbf{int dom}\, h$，则

$$\partial f(x) = A^{\mathrm{T}} \partial h(Ax + b), \quad \forall\, x \in \textbf{int dom}\, f.$$

两个函数之和的次梯度

设$f_1,f_2:\mathbb{R}^n\to(-\infty,+\infty]$ 是两个凸函数，则对任意的$x_0\in\mathbb{R}^n$，

$$\partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0)\subseteq\partial(f_1+f_2)(x_0).$$

进一步地，若$\textbf{int dom}\, f_1\cap\textbf{dom}\, f_2\neq\emptyset$，则对任意的$x_0\in\mathbb{R}^n$，

$$\partial(f_1+f_2)(x_0)=\partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0).$$

证明:

- 第一个结论由次梯度的定义是显然的．以下我们证第二个结论．
- 对于任意给定的x_0，设$g\in\partial(f_1+f_2)(x_0)$．如果$f_1(x_0)=+\infty$，则$(f_1+f_2)(x_0)=+\infty$．由次梯度的定义，我们有

$$(f_1+f_2)(x)\geq(f_1+f_2)(x_0)+g^{\mathrm{T}}(x-x_0)$$

  对任意$x\in\mathbb{R}^n$ 成立，故$f_1+f_2\equiv+\infty$．这与$\textbf{int dom}\, f_1\cap\textbf{dom}\, f_2\neq\emptyset$ 矛盾，因此以下我们假设$f_1(x_0),f_2(x_0)<+\infty$．

- 定义如下两个集合，容易验证S_1, S_2 均为非空凸集

$$S_1 = \{(x - x_0, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y > f_1(x) - f_1(x_0) - g^{\mathrm{T}}(x - x_0)\},$$
$$S_2 = \{(x - x_0, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \le f_2(x_0) - f_2(x)\},$$

- 设$(x - x_0, y) \in S_1 \cap S_2$，则

$$y > f_1(x) - f_1(x_0) - g^{\mathrm{T}}(x - x_0),$$
$$y \le f_2(x_0) - f_2(x).$$

上两式相减即得

$$(f_1 + f_2)(x) < (f_1 + f_2)(x_0) + g^{\mathrm{T}}(x - x_0),$$

这与$g \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$ 矛盾．因此$S_1 \cap S_2 = \emptyset$．

- 根据凸集分离定理，存在非零的(a, b) 和另一个实数c，使得

$$a^{\mathrm{T}}(x - x_0) + by \le c, \quad \forall (x - x_0, y) \in S_1, \tag{1}$$
$$a^{\mathrm{T}}(x - x_0) + by \ge c, \quad \forall (x - x_0, y) \in S_2. \tag{2}$$

注意到$(0, 0) \in S_2$，故$c \le 0$．此外，$(0, \varepsilon) \in S_1$ 对任何$\varepsilon > 0$ 成立，由此可得$c = 0$ 以及$b \le 0$．

- 如果$b=0$，则由上两式即得$a^{\mathrm{T}}(x-x_0)=0$ 对任何$x\in\mathbf{dom}\, f_1\cap\mathbf{dom}\, f_2$ 成立．现在取$\hat{x}\in\mathbf{int\ dom}\, f_1\cap\mathbf{dom}\, f_2$，并设$\delta>0$ 使得点$\hat{x}$ 处的邻域$N_\delta(\hat{x})\subset\mathbf{int\ dom}\, f_1\cap\mathrm{dom} f_2$，则

$$a^{\mathrm{T}}u=a^{\mathrm{T}}(\hat{x}+u-x_0)$$

对任何$u\in\mathbb{R}^n$ 成立．此时再令$u=\frac{\delta a}{2\|a\|_2}$ 即得$a=0$．但这与(a,b) 非零矛盾，故b 不可能为0．

- 现将(1) 式除以$-b$，并令$\hat{a}=-\frac{a}{b}$，就得到

$$\begin{aligned}\hat{a}^{\mathrm{T}}(x-x_0)\le y,&\quad\forall(x-x_0,y)\in S_1,\\ \hat{a}^{\mathrm{T}}(x-x_0)\ge y,&\quad\forall(x-x_0,y)\in S_2.\end{aligned}$$

利用上面两个式子和S_1 和S_2 的定义可以分别得到$g+\hat{a}\in\partial f_1(x_0)$ 和$-\hat{a}\in\partial f_2(x_0)$．因此$g=(g+\hat{a})+(-\hat{a})\in\partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0)$．

函数族的上确界

设$f_1,f_2,\cdots,f_m:\mathbb{R}^n\to(-\infty,+\infty]$ 均为凸函数，令

$$f(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)\},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

对$x_0\in\bigcap_{i=1}^{m}\mathbf{int\,dom}\,f_i$，定义$I(x_0)=\{i\mid f_i(x_0)=f(x_0)\}$，则

$$\partial f(x_0)=\mathbf{conv}\bigcup_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0).$$

- $I(x_0)$表示点x_0 处"有效"函数的指标
- $\partial f(x_0)$ 是点x_0 处"有效"函数的次微分并集的凸包
- 如果f_i 可微, $\partial f(x_0)=\mathbf{conv}\{\nabla f_i(x_0)\mid i\in I(x_0)\}$

证明：

- 若$f(x_0)=+\infty$，则$f_i(x_0)=+\infty, i\in I(x_0)$，于是等式两端均为$\emptyset$.
- 下设$f(x_0)<+\infty$. $\forall i\in I(x_0)$，容易验证$\partial f_i(x_0)\subseteq\partial f(x_0)$. 再由次微分是闭凸集可知

$$\mathbf{conv}\bigcup_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0)\subseteq\partial f(x_0).$$

- 另一方面，设$g\in\partial f(x_0)$. 假设$g\notin\mathbf{conv}\bigcup_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0)$，由严格分离定理（注意到$\mathbf{conv}\bigcup_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0)$和$\{g\}$均为闭凸集）和方向导数与次梯度的关系，存在$a\in\mathbb{R}^n$和$b\in\mathbb{R}$，使得

$$a^{\mathrm{T}}g>b\geq\max_{i\in I(x_0)}\sup_{\xi\in\partial f_i(x_0)}a^{\mathrm{T}}\xi=\max_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0;a).$$

- 因为

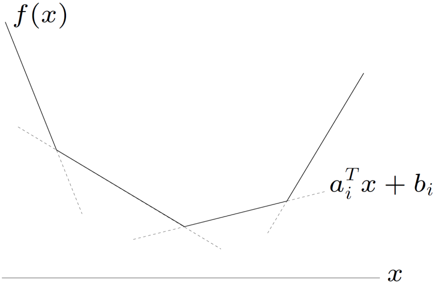
$$\partial f(x_0;a) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+ta)-f(x_0)}{t}$$
$$= \max_{i\in I(x_0)} \lim_{t\to 0^+} \frac{f_i(x_0+ta)-f_i(x_0)}{t}$$
$$= \max_{i\in I(x_0)} \partial f_i(x_0;a).$$

  故$a^{\mathrm{T}}g > \partial f(x_0;a)$.

- 但由于$g\in\partial f(x_0)$，我们有$f(x_0+ta)\geq f(x_0)+tg^{\mathrm{T}}a$，因而$\partial f(x_0;a)\geq a^{\mathrm{T}}g$，这就导致矛盾. 故$g\in \mathbf{conv}\bigcup_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0)$.

例：分段线性函数

$$f(x) = \max_{i=1,2,\cdots,m} \{a_i^{\mathrm{T}} x + b_i\}$$



- 点x处的次微分是一个多面体

$$\partial f(x) = \mathbf{conv}\{a_i \mid i \in I(x)\}$$

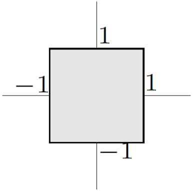
其中$I(x) = \{i \mid a_i^{\mathrm{T}} x + b_i = f(x)\}$

例: ℓ_1-范数

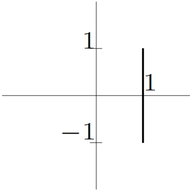
$$f(x) = \|x\|_1 = \max_{s\in\{-1,1\}^n} s^{\mathrm{T}} x$$

- 次微分是区间的乘积

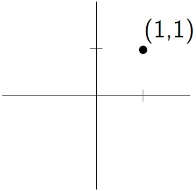
$$\partial f(x) = J_1 \times \cdots \times J_n, \quad J_k = \begin{cases} [-1,1], & x_k = 0 \\ \{1\}, & x_k > 0 \\ \{-1\}, & x_k < 0 \end{cases}$$



$\partial f(0,0) = [-1,1] \times [-1,1]$



$\partial f(1,0) = \{1\} \times [-1,1]$



$\partial f(1,1) = \{(1,1)\}$

逐点上确界函数

设$\{f_\alpha \mid \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是一族凸函数，令

$$f(x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(x).$$

- 对$x_0 \in \cap_{\alpha\in\mathcal{A}} \textbf{int dom}\, f_\alpha$，定义$I(x_0) = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid f_\alpha(x_0) = f(x_0)\}$，则

$$\textbf{conv} \bigcup_{\alpha\in I(x_0)} \partial f_\alpha(x_0) \subseteq \partial f(x_0).$$

- 如果还有$\mathcal{A}$ 是紧集且f_α 关于α 连续，则

$$\textbf{conv} \bigcup_{\alpha\in I(x_0)} \partial f_\alpha(x_0) = \partial f(x_0).$$

例：最大特征值函数

$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$ 并且系数A_i 对称，令

$$f(x) = \lambda_{\max}(A(x)) = \sup_{\|y\|_2=1} y^{\mathrm{T}} A(x) y$$

计算点$\hat{x}$ 处的一个次梯度：

- 选择特征值$\lambda_{\max}(A(\hat{x}))$ 对应的任一单位特征向量y
- $y^{\mathrm{T}} A(x) y$ 在点$\hat{x}$ 处的梯度是f 的一个次梯度:

$$(y^{\mathrm{T}} A_1 y, \cdots, y^{\mathrm{T}} A_n y) \in \partial f(\hat{x})$$

固定分量的函数极小值

$$f(x) = \inf_y h(x, y), \quad h \text{ 关于 } (x, y) \text{ 联合凸}$$

计算点$\hat{x}$ 处的一个次梯度：

- 设$\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ 满足$h(\hat{x}, \hat{y}) = f(\hat{x})$
- 存在$g \in \mathbb{R}^n$ 使得$(g, 0) \in \partial h(\hat{x}, \hat{y})$，则$g \in \partial f(\hat{x})$

证明: 对任意$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} h(x, y) &\geq h(\hat{x}, \hat{y}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}) + 0^{\mathrm{T}}(y - \hat{y}) \\ &= f(\hat{x}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = \inf_y h(x, y) \geq f(\hat{x}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x})$$

设C 是$\mathbb{R}^n$ 中一闭凸集，令

$$f(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$$

计算点$\hat{x}$ 处的一个次梯度：

- 若$f(\hat{x}) = 0$，则容易验证$g = 0 \in \partial f(\hat{x})$；
- 若$f(\hat{x}) > 0$，取$\hat{y}$ 为$\hat{x}$ 在C 上的投影，即$\hat{y} = \mathcal{P}_c(\hat{x})$，计算

$$g = \frac{1}{\|\hat{x} - \hat{y}\|_2}(\hat{x} - \hat{y}) = \frac{1}{\|\hat{x} - \mathcal{P}_c(\hat{x})\|_2}(\hat{x} - \mathcal{P}_c(\hat{x}))$$

复合函数

设$f_1, f_2, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ 为m 个凸函数，$h : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ 为关于各分量单调递增的凸函数，令

$$f(x) = h(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)).$$

计算点$\hat{x}$ 处的一个次梯度:

- $z = (z_1, z_2, \cdots, z_m) \in \partial h(f_1(\hat{x}), f_2(\hat{x}), \cdots, f_m(\hat{x}))$ 以及$g_i \in \partial f_i(\hat{x})$
- $g \stackrel{\text{def}}{=\!=} z_1 g_1 + z_2 g_2 + \cdots + z_m g_m \in \partial f(\hat{x})$

证明:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq h\left(f_1(\hat{x}) + g_1^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}), f_2(\hat{x}) + g_2^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}), \cdots, f_m(\hat{x}) + g_m^{\mathrm{T}}(x - \hat{x})\right) \\ &\geq h(f_1(\hat{x}), f_2(\hat{x}), \cdots, f_m(\hat{x})) + \sum_{i=1}^{m} z_i g_i^T (x - \hat{x}) \\ &= f(\hat{x}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}), \end{aligned}$$

最优值函数

设函数f_i 是凸函数，定义$h(u,v)$ 为如下凸问题的最优值

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le u_i,\ i = 1, \cdots, m \\ & Ax = b + v \end{array}$$

计算点$(\hat{u},\hat{v})$ 处的一个次梯度:

- 假设$h(\hat{u},\hat{v})$ 有限, 强对偶成立

$$\begin{array}{ll} \max & \inf\limits_{x} \left(f_0(x) + \sum\limits_i \lambda_i (f_i(x) - \hat{u}_i) + \nu^{\mathrm{T}}(Ax - b - \hat{v}) \right) \\ \text{s.t.} & \lambda \ge 0 \end{array}$$

- 如果$\hat{\lambda},\hat{\nu}$ 是最优对偶变量，那么$(-\hat{\lambda},-\hat{\nu}) \in \partial h(\hat{u},\hat{v})$

证明:由弱对偶原理可得

$$
\begin{aligned}
h(u,v) &\geq \inf_x \left(f_0(x) + \sum_i \hat{\lambda}_i (f_i(x) - u_i) + \hat{\nu}^{\mathrm{T}}(Ax - b - v) \right) \\
&= \inf_x \left(f_0(x) + \sum_i \hat{\lambda}_i (f_i(x) - \hat{u}_i) + \hat{\nu}^{\mathrm{T}}(Ax - b - \hat{v}) \right) \\
&- \hat{\lambda}^{\mathrm{T}}(u - \hat{u}) - \hat{\nu}^{\mathrm{T}}(v - \hat{v}) \\
&= h(\hat{u}, \hat{v}) - \hat{\lambda}^{\mathrm{T}}(u - \hat{u}) - \hat{\nu}^{\mathrm{T}}(v - \hat{v})
\end{aligned}
$$

u是一个随机变量，h是关于x的凸函数，令

$$f(x) = \mathbb{E}h(x,u)$$

计算点$\hat{x}$处的一个次梯度：

- 选择一个函数g 满足$g(u) \in \partial_x h(\hat{x},u)$
- $g = \mathbb{E}_u\, g(u) \in \partial f(\hat{x})$

证明：由h 的凸性和$g(u)$ 的定义，

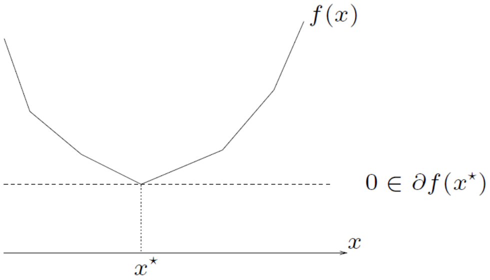
$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}h(x,u) \\ &\geq \mathbb{E}\left(h(\hat{x},u) + g(u)^{\mathrm{T}}(x-\hat{x})\right) \\ &= f(\hat{x}) + g^{\mathrm{T}}(x-\hat{x}) \end{aligned}$$

提纲

最优性条件：无约束问题

x^* 是$f(x)$ 的极小点当且仅当

$$0 \in \partial f(x^*)$$



证明：根据定义

$$f(y) \geq f(x^*) + 0^{\mathrm{T}}(y - x^*), \ \forall y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(x^*)$$

例: 分片线性极小

$$f(x) = \max_{i=1,\cdots,m} (a_i^{\mathrm{T}} x + b_i)$$

- **最优性条件**

$$0 \in \mathbf{conv}\{a_i \mid i \in I(x^*)\}, \quad \text{其中 } I(x) = \{i \mid a_i^{\mathrm{T}} x + b_i = f(x)\}$$

- 也就是说, x^* 是最优解当且仅当存在 λ 使得

$$\lambda \geq 0, \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\lambda = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0, \quad \lambda_i = 0 \text{ for } i \notin I(x^*)$$

- 这是等价线性规划问题的最优性条件

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & Ax + b \leq t\mathbf{1} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^{\mathrm{T}}\lambda \\ \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}\lambda = 0 \\ & \lambda \geq 0, \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\lambda = 1 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(x) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

如果强对偶成立, 那么x^*, λ^* 是最优原始、对偶变量当且仅当

1. x^* 是可行的
2. $\lambda^* \ge 0$
3. $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$, $i = 1, \cdots, m$
4. x^* 是下式的一个极小值点

$$
L(x, \lambda^*) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x)
$$

- 当$\mathbf{dom}\, f_i = \mathbf{R}^n$时，Karush-Kuhn-Tucker 条件为条件1, 2, 3 以及

$$0 \in \partial L_x(x^*, \lambda^*) = \partial f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \partial f_i(x^*).$$

- 对于可微函数f_i, 上式成为

$$0 = \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*)$$