应用运筹学基础：组合优化 (3) - 近似算法选讲 (1)

这一节课讲解了 vertex cover 的 2 - 近似算法与 unrelated parallel machine scheduling 的 2 - 近似算法。

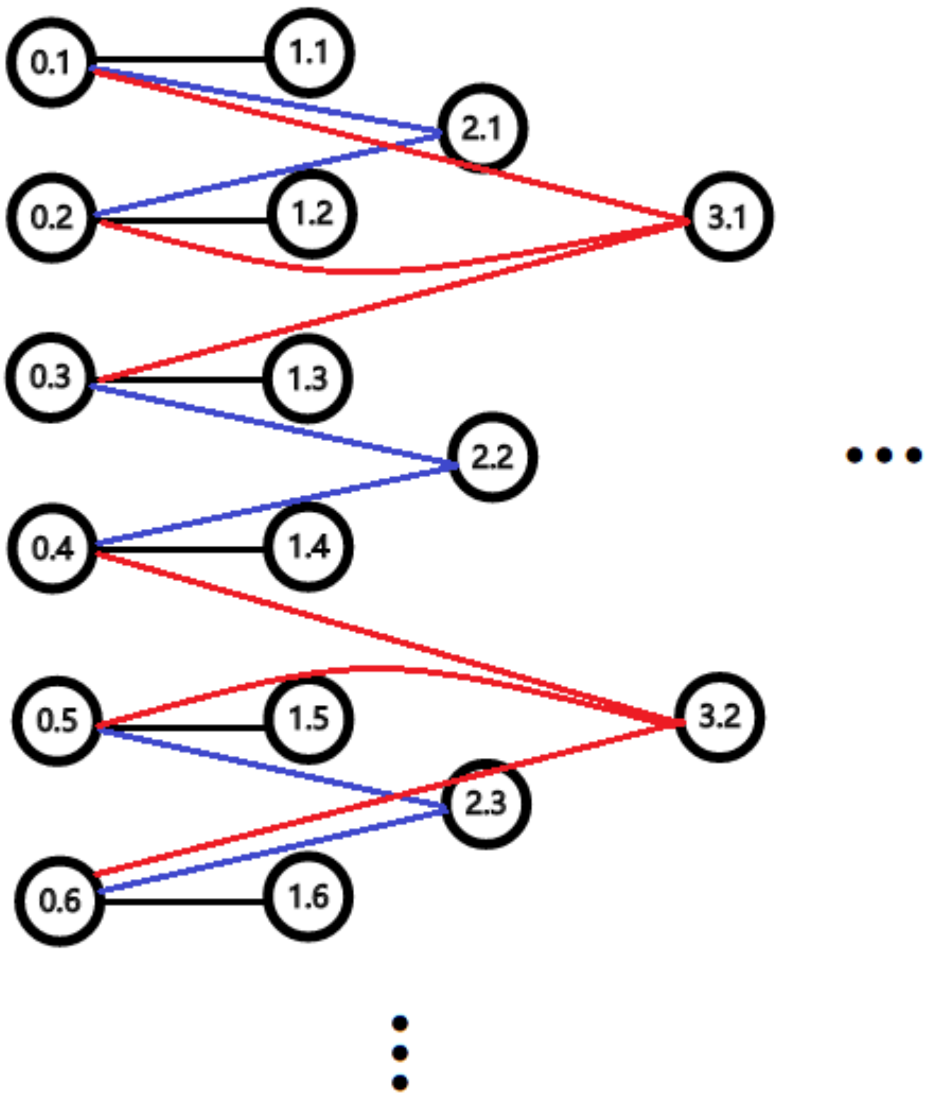
Vertex Cover

来看一些 vertex cover 的近似算法。

近似算法 1

算法描述：将度数最大的点 u 选入答案集合，并将 u 与端点包含 u 的边都删去。重复这个过程，直到所有边都被删去为止。

这是一个思路非常自然的贪心算法，但是它的近似比非常差。我们来看下面这张图：



设第一列共有 n 个点，那么这张图一共有 $n+n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=n+n\ln n$ 个点。

显然，只要将第一列的 n 个点加入答案集合中，就能获得最小的 vertex cover。虽然第一列的 n 个点度数均为 n，可是最后一列的点度数也为 n。如果我们按照上述的贪心算法选择了最后一列的点，第一列的点度数就会减小至 $n-1$。可是倒数第二列的点度数也为 $n-1$，如果我们选择了倒数第二列的点，那么... 这样下去，我们会把从第二列到最后一列的所有点都选入答案集合，才能获得一个 vertex cover。所以，近似算法 1 的近似比至少为 $\frac{n\ln n}{n}=\ln n$，是一个比较差的算法。

近似算法 2

算法描述：随机选择图中的一条边 (u,v)，将 u 与 v 都加入答案集合，并删去 u、v 以及所有端点包含 u 或 v 的边。重复这个过程，直到所有边都被删去为止。

这是一个听起来很不自然的算法- -然而该算法的近似比为 2：假设该算法选中了 k 条边，那么这 k 条边是原图中的一个匹配（因为这 k 条边没有相同的端点）。为了覆盖这 k 条边形成的匹配，每条边至少要有一个端点被选中。也就是说，最优解至少为 $k/2$，那么近似比为 2。

近似算法 3

近似算法 2 对于无权的 vertex cover 问题近似比为 2，而带权的 vertex cover 问题需要使用下面这个算法。

设共有 n 个点。用 x_i 表示第 i 个点是否在答案集合中，w_i 表示第 i 个点的权重。用 E 表示边集，(u,v) 表示连接点 u 与点 v 的一条边。写出 vertex cover 要优化的模型。

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \ge 1 \quad \forall (i,j) \in E \\ & x \in \{0,1\} \end{aligned}$$ 这是一个整数规划问题，设该问题的最优目标函数值为 OPT。

对该问题进行 LP 松弛，将 $x \in \{0,1\}$ 改为 $x \ge 0$。设松弛后的线性规划问题最优解为 x^*，最优目标函数值为 OPT_{LP}，显然有 $\text{OPT}_{LP} \le \text{OPT}$。

我们构造原问题的可行解 x 如下：$x_i = \begin{cases} 1 & x_i^* \ge 0.5 \\ 0 & x_i^* < 0.5 \end{cases}$ 由于对于每条边 (i,j) 存在 $x_i^* + x_j^* \ge 1$ 的限制，则 $\max(x_i^*, x_j^*) \ge 0.5$，所以 $x_i + x_j \ge 1$ 仍然成立。我们构造的解是可行的。

容易看出，$x_i \le 2x_i^*$。将我们构造的解代入目标函数，有 $\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i \le 2 \sum_{i=1}^n w_i x_i^* \\ \le 2\text{OPT}_{LP} \le 2\text{OPT} \end{aligned}$ 这就证明了算法的近似比为 2。

这种“四舍五入”的构造方法在两个东西加起来至少为 1 的限制下似乎挺好用的，可以证明很多近似算法的近似比为 2。

Unrelated Parallel Machine Scheduling

UPMS 问题是说：有 m 台机器和 n 件物品，每件物品都要在一台机器上加工，第 i 台机器加工第 j 件物品的时间为 $a_{i,j}$。求一种把物品分配给机器的方案，使得加工总时长最长的机器，加工总时长最短。

我们很容易写出该问题的优化模型：

$$\begin{aligned} \min_{x,t} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1 \quad && \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_{i,j} \le t \quad && \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ & x_{i,j} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

对这个模型进行 LP 松弛不是一个好主意。假设只有一件物品需要加工，而且该物品在所有机器上的加工时间都为 1。那么原问题的最优目标函数值显然为 1，然而 LP 松弛后的最优目标函数值为 $1/m$（LP 松弛求出的最优解为 $x_{i,1} = 1/m$），下界太松了，很难进行近似比分析。

但是聪明的数学家们对优化模型进行了一个改动：先二分 t 的值，如果 $a_{i,j} > t$，那么加上 $x_{i,j} = 0$ 的限制（或者直接把这个变量从 LP 中拿走）。很显然，让改动后的 LP 问题存在可行解的最小的 t，就是原问题最优目标函数值的下界（用两阶段法的第一阶段判断是否存在可行解即可）。

现在我们通过二分找到了这个最小的 t，设改动后的 LP 问题最优解为 x^*。对于第 j 件物品，若 $\exists i, x^*_{i,j} = 1$ 那么称该物品为“整数物品”，设共有 n_1 个“整数物品”；否则称该物品为“分数物品”，设共有 n_2 个“分数物品”。显然有 $n_1 + n_2 = n$

容易发现，若第 j 件物品为“分数物品”，那么 $x_{i,j}$ 中至少有两个非零值。由于原问题有 $n + m$ 条限制，根据单纯形法，非零的变量至多有 $n + m$ 个，那么 $n_1 + 2n_2 \le n + m$，得到 $n_2 \le m$。

下面我们给每台机器分配物品，使得每台机器的加工总时长都不超过 $2t$，以此设计一个近似比为 2 的算法。

先进行两个定义：若连通图中边数小等于点数，那么称该连通图为**伪树**；若一张图的所有连通块都是伪树，那么称该图为**伪森林**。

构造一张二分图：左边有 m 个点，每个点表示一台机器；右边有 n 个点，每个点表示一件物品。若 $x_{i,j} > 0$ 则连接第 i 台机器和第 j 件物品。如果这个二分图不连通，那么对每个连通块分别求解，最后把解合并起来就是答案，所以我们假设该二分图连通。由于非零变量至多有 $n+m$ 个，所以该连通图的边数不超过点数，是一个伪树。

首先考虑“整数物品”。很显然，每个“整数物品” j 都只和一台机器 i 有连边 (i,j)，那就把“整数物品” j 放在机器 i 中加工，并去掉物品 j 和边 (i,j)。由于每次恰好去除一个点和一条边，这张图仍然是伪树。显然，此时每台机器的加工总时长至多为 t（不然 LP 的最优目标函数值就不只有 t 了）。

这样，图中就只剩机器和“分数物品”了。我们来考虑所有度数为 1 的机器 i。假设唯一连接机器 i 的边是 (i,j)，那么我们把“分数物品” j 放在机器 i 中加工，并去掉机器 i、物品 j 和物品 j 的所有连边。由于每件“分数物品”都有至少两条连边（度数至少为 2），所以我们每次都会去掉两个点以及至少两条边，容易说明剩下的图是伪森林。

反复考虑度数为 1 的机器并进行删除操作，直到最后不存在度数为 1 的机器为止。由于剩下的图是伪森林也是二分图，那么剩下的图中只能包含若干偶环。在偶环上随便给每台机器分配一件物品即可。

这样，每台机器至多分配到一个“分数物品”（别忘了一件物品的加工时间至多为 t），再加上原来分配给它的“整数物品”，每台机器的总加工时长至多为 $2t$，这就是一个近似比为 2 的算法。

参考资料

[1] UPMS 的 2 - 近似算法：https://courses.engr.illinois.edu/cs598csc/sp2011/Lectures/lectures_10-11.pdf，第 1 页到第 4 页说得非常明白，应该比我说得要更好...