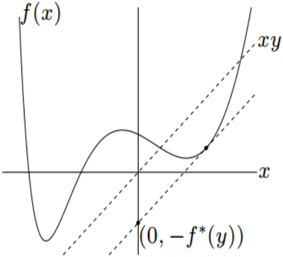
函数 f 的**共轭函数**定义为：

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} (y^T x - f(x))$$



f^* 恒为闭凸函数

Fenchel 不等式：

$$f(x) + f^*(y) \geq x^T y \quad \forall x, y$$

Proof.

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} \{y^\mathrm{T} x - f(x)\} \geq y^\mathrm{T} x - f(x), \quad \forall x \in \mathbf{dom}\, f$$

□

考察二次函数 f 的共轭函数：

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$$

- **强凸情形**（$A \succ 0$）

$$f^*(y) = \frac{1}{2}(y-b)^T A^{-1}(y-b) - c$$

- **一般凸情形**（$A \succeq 0$）

$$f^*(y) = \frac{1}{2}(y-b)^T A^{\dagger}(y-b) - c, \quad \mathbf{dom}\, f^* = \mathcal{R}(A) + b$$

这里$\mathcal{R}(A)$为A的像空间.

负熵与负对数

- **负熵**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \qquad f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i - 1}$$

- **负对数**

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i \qquad f^*(y) = -\sum_{i=1}^{n} \log(-y_i) - n$$

- **矩阵对数**

$$f(x) = -\log \det X \quad (\mathbf{dom}\, f = \mathbf{S}^n_{++}) \quad f^*(Y) = -\log \det(-Y) - n$$

示性函数与范数

凸集 C 的**示性函数**：共轭为 C 的支撑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases} \qquad f^*(y) = \sup_{x \in C} y^T x$$

范数：共轭为单位对偶范数球的示性函数

$$f(x) = ||x|| \qquad f^*(y) = \begin{cases} 0, & ||y||_* \leq 1 \\ +\infty, & ||y||_* > 1 \end{cases}$$

Proof.

回忆对偶范数的定义：$||y||_* = \sup_{||x|| \leq 1} x^T y$

分两类讨论计算$f^*(y) = \sup_x (y^T x - ||x||)$

- 若$||y||_* \leq 1$，则 $y^T x \leq ||x|| \quad \forall x$ (对偶范数的定义)
  $x = 0$时等式成立，因此 $\sup_x (y^T x - ||x||) = 0$
- 若$||y||_* > 1$，则存在一个 x，满足$||x|| \leq 1, x^T y > 1$，因此有

$$f^*(y) \geq y^T(tx) - ||tx|| = t(y^T x - ||x||) \to \infty \quad (t \to \infty)$$

□

二次共轭函数

任一函数f的二次共轭函数定义为

$$f^{**}(x) = \sup_{y \in \mathbf{dom}\, f^*} (x^T y - f^*(y))$$

- $f^{**}(x)$ 为闭凸函数
- 由Fenchel不等式，$x^T y - f^*(y) \leq f(x)$ 对所有x, y 都成立，推出：

  $$f^{**}(x) \leq f(x) \quad \forall x$$

  等价地，$\mathbf{epi}\, f \subseteq \mathbf{epi}\, f^{**}$ (对任意函数f 成立)
- 若f 是闭凸函数，则

  $$f^{**}(x) = f(x) \quad \forall x$$

  等价地，$\mathbf{epi}\, f = \mathbf{epi}\, f^{**}$ (若f 是闭凸函数); 证明在下一面

Proof.

假设$(x, f^{**}(x)) \notin \textbf{epi}\, f$，则存在严格的分割超平面

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z-x \\ s-f^{**}(x) \end{bmatrix} \le c \le 0 \qquad \forall (z,s) \in \textbf{epi}\, f$$

其中$a \in \mathbb{R}^n, b, c \in \mathbb{R}$ 且$b \leqslant 0$ (若$b > 0$, 则取 $s \to +\infty$ 可推出矛盾).

- 若$b < 0$,取$s = f(z)$,有$a^{\mathrm{T}} z + bf(z) - a^{\mathrm{T}} x - bf^{**}(x) \leqslant c$
  记$y = a/(-b)$,两边除以$-b$，并将上式左边关于 z 极大化得到
  $$f^*(y) - y^{\mathrm{T}} x + f^{**}(x) \leqslant -\frac{c}{b} < 0$$
  与Fenchel 不等式矛盾.
- 若$b = 0$, 取$\hat{y} \in \textbf{dom}\, f^*$ 并给$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$加上一个$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ -1 \end{bmatrix}$的$\varepsilon$倍，则
  $$\begin{bmatrix} a + \varepsilon \hat{y} \\ -\varepsilon \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} z-x \\ s-f^{**}(x) \end{bmatrix} \leqslant c + \varepsilon \left(f^*(\hat{y}) - x^{\mathrm{T}} \hat{y} + f^{**}(x)\right) < 0$$
  即化为$b < 0$ 的情况，矛盾.

□

共轭函数与次梯度

定理

如果 f 是闭凸函数，则

$$y \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \partial f^*(y) \quad \Leftrightarrow \quad x^T y = f(x) + f^*(y)$$

Proof.

若$y \in \partial f(x)$，则$f^*(y) = \sup_u (y^T u - f(u)) = y^T x - f(x)$

$$\begin{aligned} f^*(v) &= \sup_u (v^T u - f(u)) \\ &\geq v^T x - f(x) \\ &= x^T(v-y) - f(x) + y^T x \\ &= f^*(y) + x^T(v-y) \end{aligned}$$

对所有的v成立；由此根据次梯度的定义推出$x \in \partial f^*(y)$
另一方面，$x \in \partial f^*(y) \Rightarrow y \in \partial f(x)$ 可以由 $f^{**} = f$ 得到 $\square$

计算规则

- 可分解的和：

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2) \qquad f^*(y_1, y_2) = g^*(y_1) + h^*(y_2)$$

- 数乘：($\alpha > 0$)

$$f(x) = \alpha g(x) \qquad f^*(y) = \alpha g^*(y/\alpha)$$

- 添加线性函数：

$$f(x) = g(x) + a^T x + b \qquad f^*(y) = g^*(y - a) - b$$

- 卷积下确界：

$$f(x) = \inf_{u+v=x} (g(u) + h(v)) \qquad f^*(y) = g^*(y) + h^*(y)$$