# §2、 用留数计算实积分

## 一、教学目的与要求 （3 课时）

1、灵活运用 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 型求积分的计算方法

2、掌握反常积分主值，灵活运用积分路径上无奇点的广义积分算法

3、掌握积分路径上有奇点的积分

## 二、重难点

1、重点

$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 型积分路径上无奇点的广义积分的计算

2、难点

理解证明和计算中的数据处理

## 三、教法与教学手段

课堂讲授法 补充实例说明题解方法；电教，CAI 演示

## 四、教学内容 （3 课时）

### （一）关于 $I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 型积分的计算

其中 $R(x,y)$ 表示 $(x,y)$ 的有理函数，且在 $[0,2\pi]$ 上连续

**思路 引入变数代换 $z=e^{i\theta}$，然后应用留数定理**

**例 1** 求 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin t}dt=I$，其中常数 $a>1$

**解** （1） 令 $e^{it}=z$，当 t 从 $0\to 2\pi$ 时，z 沿半径圆周逆时针方向旋转一周（封闭曲线），故

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$$\left(e^{it}\right)' = ie^{it}dt = dz \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

所以

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz}}{a + \frac{z - z^{-1}}{2i}} dz = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2ai - 1} dz$$

易得 $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 2ai - 1}$ 有两个一阶极点

$$z_1 = -ai + i\sqrt{a^2 - 1} \text{和} z_1 = -ai - i\sqrt{a^2 - 1} \text{且} |z_1| < 1, |z_2| > 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} = \left.\frac{z}{z - z_2}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi i}{i\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

**注** 若 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 为 θ 的偶函数，则

$$\int_0^\pi R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

**例 2** 计算 $I = \int_0^\pi \dfrac{1}{5\text{-}4\cos x} dx$

**解** 由于 $\dfrac{1}{5\text{-}4\cos x}$ 为 $x$ 的偶函数，所以

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5\text{-}4\cos x} dx$$

令 $e^{ix} = z \Rightarrow \cos x = \dfrac{z + z^{-1}}{2}, dx = \dfrac{dz}{iz}$

$$I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{1}{5\text{-}2\left(z - z^{-1}\right)} \bullet \frac{1}{iz} dz = -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2(z-2)\left(z - z^{-1}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-z^{-1}\right)\left(z-2\right)}$$

又

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right)}=\left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$$

所以

$$I=-\frac{1}{4i}\bullet 2\pi i\bullet\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right)}=\frac{\pi}{3}$$

**例 3** 求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2 x}$

**解** 令 $z=e^{i\theta}$，则 $I=\int_{\Gamma:|z|=1}\frac{4zdz}{\left(z^4+6z^2+1\right)}$

又 令 $z^2=u$ 则

$$\frac{4zdz}{i\left(z^4+6z^2+1\right)}=\frac{2du}{i\left(u^2+6u+1\right)}$$

当 z 绕 Γ 旋转一周时，u 在其上旋转两周，所以

$$I=\int_{\Gamma}\frac{2du}{i\left(u^2+6u+1\right)}=\frac{4}{i}\int_{\Gamma}\frac{du}{u^2+6u+1}$$

被积函数 $f(u)$ 在 Γ 内部仅有一个一级极点 $u=-3+\sqrt{8}$，所以

$$\operatorname*{Res}_{u=-3+\sqrt{8}}f\left(u\right)=\left.\frac{1}{u+3+\sqrt{8}}\right|_{u=-3+\sqrt{8}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

由留数定理得

$$I=\frac{4}{i}\bullet 2\pi i\bullet\frac{1}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$$

**例 4** 求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}d\theta \quad (0<\varepsilon<1)$

**解** （1） 令 $z=e^{i\theta}$，得

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{2}\left(z^2+z^{-2}\right)$$

$$I=\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+z^{-2}\right)}{2}\bullet\frac{1}{1-2\varepsilon\bullet\dfrac{z^2+z^{-2}}{2}+\varepsilon^2}\bullet\frac{1}{iz}dz=-\frac{1}{2i\varepsilon}\int_{|z|=1}\frac{1+z^4}{z^2\left(z-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\left(z-\varepsilon\right)}dz$$

函数 $f(z)=\dfrac{1+z^4}{z^2\left(z-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\left(z-\varepsilon\right)}$，有极点 $z=0,\dfrac{1}{\varepsilon},\varepsilon$，而 0 和 ε 在 $|z|=1$ 内部

（2） 求 $f(z)$ 在 $z=0$ 及 $z=\varepsilon$ 处的留数

$$\operatorname*{Res}_{z=\varepsilon} f(z)=\left.\frac{1+z^4}{z^2\left(z-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}\right|_{z=\varepsilon}=-\frac{1+\varepsilon^4}{\varepsilon\left(1-\varepsilon^2\right)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\left.\left[\frac{1+z^4}{(z-\varepsilon)\left(z-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}\right]'\right|_{z=0}=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}$$

（3） 由 **定理 6.1** 知

$$I=-\frac{1}{2i\varepsilon}\bullet 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\varepsilon} f(z)\right]=-\frac{\pi}{\varepsilon}\left[\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}-\frac{1+\varepsilon^4}{\varepsilon\left(1-\varepsilon^2\right)}\right]=\frac{2\pi\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

$\Leftrightarrow$ 计算积分路径上无奇点的广义积分。

在实际问题中，常遇到一些无穷限广义积分如

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$（光的折射）

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \left(a>0\right)$$（热传导）

函数学分析中求这些积分无统一的处理方法而且过程繁杂，至少像 $\Gamma$ –函数一类的积分，求起来就更困难，但根据留数定理来计算，往往比较简捷。

这种方法的基本思想是：先取被积函数或辅助函数 g(z) 在有限区间 [a，b] 上的定积分，再引入辅助曲线 Γ ，用 [a，b] 一起构成围线，由留数定理得

$$\int_a^b g\left(x\right)dx + \int_\Gamma g\left(z\right)dz = 2\pi i \sum Resg\left(z\right) \qquad (*)$$

其中Σ为 $g(z)$ 在围线内部有限多个奇点处的留数总和；若能估计出（*）中第二项积分值，则两边取极限，就能至少得到所求广义积分的主值。

**例 5** 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

**解** 该积分显然收敛，考虑函数 $\frac{1}{(1+x^2)^2}$，该函数有两个二阶极点，在上半平面上的一个为 $z=i$，作以 O 为心，以 r）1 为半径的圆盘。考虑其上半部分 $C_r$ ，有

$$\int_{-r}^{r} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{C_r} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Re} s(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i) = 2\pi i \bullet \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \qquad (**)$$

又

$$\left| \int_{C_r} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \le \frac{1}{(r^2-1)^2} \bullet \pi r \to 0 \qquad (r \to +\infty)$$

在

$$\left| \int_{C_r} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \le \frac{1}{(r^2-1)^2} \bullet \pi r \to 0,$$式中含 $r \to +\infty$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

从而 $I=\dfrac{\pi}{4}$

**注** (**) 取极限求得反常积分的主值，但该反常积分收敛，主值即为积分值。

为便于处理辅助曲线上的积分，我们介绍两个常用引理。若能直接引用它们解题，则计算就大为简化，否则我们仍要在解题中首先估计 $\left|\int_{\Gamma} \mathrm{g(z)}dz\right|$。

**引理 6.1** 设 $f(z)$ 沿圆弧 $S_R: z=\mathrm{R}e^{i\theta}(\theta_1\le\theta\le\theta_2, R\text{充分大})$ 上连续，且

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{z}\cdot f(\mathrm{z})=\lambda$$

于 $S_R$ 上一致成立（即与 $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ 中的 $\theta$ 无关），则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz=i\left(\theta_2-\theta_1\right)\lambda$$

**证明参 T.B.** $\boldsymbol{P_{233}-P_{234}}$

**引理 6.2（Jordan 引理）** 设 $\mathrm{g}(\mathrm{z})$ 沿上半圆周 $\Gamma_R: z=\mathrm{R}e^{i\theta}(0\le\theta\le\pi, R\text{充分大})$ 连续，且 $\lim\limits_{R\to\infty} g(z)=0$

在 $\Gamma_R$ 上一致成立。则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)e^{imx}dz=0 \qquad (\mathrm{m}>0)$$

**证明可参，余家荣书 （第三版）$\boldsymbol{P_{93}-P_{94}}$ ，T.B. $\boldsymbol{P_{237}}$**

**1、两类重要（常用）广义积分的计算**

**（1）求** $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

**定理 6.7** 设 $P(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\cdots+c_m \quad (c_0\ne 0)$

$$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n \qquad (b_0\ne 0)$$

满足条件 （1）$P(x)$，$Q(x)$ 互质 （2）$n-m\gg 2$（3）$Q(x)\neq 0$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Re}s[\frac{P(x)}{Q(x)},a_k]$$

**注** 该定理中辅助函数 $f(z)=\dfrac{P(Z)}{Q(Z)}$ 合并留数定理及引理 6.1 的条件，在估计辅助路径上半圆周 $\Gamma_R$ 上积分 $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \quad a>0$ 时就用到了引理 6.1

**例 6** 设 $a>0$，求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4+a^4}$

**解** $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4+a^4}=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4+a^4}$

令 $f(z)=\dfrac{1}{x^4+a^4}$，则 $f(z)$共有四个一阶极点，

$$a_k=a\cdot e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}\qquad (k=0\sim 3)$$

且适合**定理 6. 7** 的条件，而

$$\operatorname{Re}s(f(z),a_k)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=a_k}=\frac{1}{4{a_k}^3}=\frac{a_k}{4{a_k}^4}=-\frac{a_k}{4a^4}$$

$f(z)$ 在上半平面内只有两个极点 $a_0$ 及 $a_1$，于是

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}=-\pi i\cdot\frac{1}{4a^4}(ae^{\frac{\pi i}{4}}+ae^{\frac{3\pi i}{4}})=-\pi i\cdot\frac{1}{4a^3}(e^{\frac{\pi i}{4}}-e^{-\frac{\pi i}{4}})=\frac{\pi}{2a^3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}$$

**例 7** 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^4dx}{(3x^2+1)^4}$

**解** 函数 $f(z)=\dfrac{x^4}{(3x^2+2)^4}$ 在上半平面上只有 $z=\sqrt{\dfrac{2}{3}i}$ 一个四阶极点，且含**定理 6. 7** 的条件

记$\sqrt{\frac{2}{3}}i=a$，令$z-a=t$，即$z=a+t$

则

$$f(z)=\frac{z^4}{(3z^2+2)^4}=\frac{z^4}{3^4(z-a)^4(z+a)^4}=\frac{(t+a)^4}{3^4t^4(t+2a)^4}$$

$$=\frac{1}{3^4t^4}\cdot\frac{a^4+4a^3t+6a^2t^2+4at^3+t^4}{16a^4+32a^3t+24a^2t+8at^3+t^4}$$

$$=\frac{1}{3^4t^4}(\frac{1}{16}+\frac{t}{8a}+\frac{t^2}{32a^2}+\frac{t^3}{32a^3}+\cdots)$$

所以 $Res(f(z),a)=C_{-1}=-\frac{1}{3^4+32a^3}$ 辗转相除法求$C_{-1}$

即 $\operatorname{Res}(f(z),\sqrt{\frac{2}{3}}i)=-\frac{1}{3^4\cdot 32(\sqrt{\frac{2}{3}}i)^3}=-\frac{i}{576\sqrt{6}}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4dx}{(3x^2+2)^4}=2\pi i\cdot-\frac{i}{576\sqrt{6}}=-\frac{\pi}{288\sqrt{6}}$

**（2） 求$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$型积分**

**定理 6.8** 设多项式$P(x)$，$Q(x)$满足条件

（1）$P(x)$与$Q(x)$互质

（2）$Q(x)$次数比$P(x)$高

（3）$Q(x)\neq 0$

（4）$m>0$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(\mathrm{x})}{Q(x)}e^{imx}dx=2\pi i\sum_{ima_k>0}\mathrm{Re}\,s[\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx},a_k]$$

**注** ① 该定理中辅助函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}$ 合并留数定理及引理 6.2 的条件，在估计辅助路径上半圆周$\Gamma_R$上积分$\int_{\Gamma_R}\dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}dz$ 时就用到了引理 6.2。

② 特别地，我们 **定理 6. 8** 可得形如

$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\cos mxdx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\sin mxdx$ 的积分

**例 8** 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx \qquad (m>0,a>0)$

分析 $\dfrac{x}{(x^2+a^2)^2}$ 为奇函数，$\sin mx$ 为奇函数，则 $\dfrac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}$ 为偶函数， 所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}\cdot e^{imx}dx]$$

**解** $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}$ 满足**定理 6. 8** 的条件，而 $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}$ 有两个二阶极点，其中 $z=a_i$ 在上半平面内，所以

$$\mathrm{Re}\,s(f(z),a_i)=\frac{d}{dz}\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}\Big|_{z=a_i}=\frac{m}{4a}e^{-ma}$$

据**定理 6. 8** 知

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xxinmx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}\cdot e^{imx}dx]$$

$$=\text{Im}[\pi i\cdot\frac{m}{4a}e^{-ma}]=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}$$

## （二）计算积分路径上有奇点的积分

### 1、反常积分的 Caudy 主值

分析中 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛$\Leftrightarrow f(x)$在$[-R_2,R_1]$上可积，且 $\lim\limits_{\substack{R_1\to+\infty\\R_2\to+\infty}}\int_{-R_2}^{R_1}f(x)dx$ 存在

上述定义中 $R_1$，$R_2$ 为两个独立变量（数），要求它们独立地趋于 $+\infty$ 时，所述极限存在。

在实际中，有的函数虽然这个要求不能满足，但 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{dx}$ 却存在

此时我们称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$在Caudy 主值意义下收敛，且称此极限值为其Caudy 主值，记为 P.V. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$

（1）若$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛，则主值意义下亦收敛，且两者相等。反之未必成立。

（2）对瑕积分也可以类似地定义其 Caudy 主值。

### 2、计算积分路径上有奇点的积分

**引理** 在**定理 6.8** 中，我们假定$Q(z)$无实零点，若把条件削弱一点，容许$Q(z)$有有限多个一级实零点，即 容许 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}$在实轴上有有限个一阶极点，为了估计沿辅助路径的积分，首先给出

**引理 6.3** 设$f(z)$沿圆弧$S_r:z-a=re^{i\theta}(\theta_1\le\theta\le\theta_2,r\text{充分小})$上连续，且设 a 为 $f(z)$的一阶极点，$\text{Re}\,s(f(z),a)=\lambda$，即 设$\lim\limits_{r\to\infty}(z-a)f(z)=\lambda$ 于$S_r$上一致成立，则

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}f(z)dz=i(\theta_2-\theta_1)\lambda$$

特别地，若 $S_r$ 为半圆周 $|z-a|=r$， $\arg(z-a)$ 从 $\pi$ 到 0

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} f(z)dz=-\pi\lambda i=-\pi i\operatorname{Re}s(f(z),a)$$

**证** 因为

$$i(\theta_2-\theta_1)\lambda=\lambda\int_{S_r}\frac{dz}{z-a}$$

所以

$$\left|\int_{S_r} f(z)dz-i(\theta_2-\theta_1)\lambda\right|=\left|\int_{S_r}\frac{(z-a)f(z)-\lambda}{z-a}dz\right|$$

与**引理 6.1** 相仿，可得在 $r$ 充分小时，上式不超过给定的 $\varepsilon>0$

**定理6.8'** 设（1） $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}\quad(m>0)$ ，$P(z)$，$Q(z)$ 为互质多项式，且 $Q(z)$ 比 $P(z)$ 次数高。

（2）Q(z)有有限个一阶零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 则 $P.V$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx=2\pi i[\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Re}s(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz},a_k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Re}s(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz},x_j)]$$

**记 仿教材例 6.15 的解法证之。中间应用了引理 6.2，引理 6.3 和定理 6.1**

**例 9 （Dirichlet 积分）** 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$

**解** $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 存在且 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$

考虑函数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ 下图所示之闭曲线路径 C 的积分，据 Caudy 积分定理得

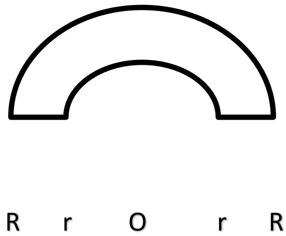
$$\int_c f(z)dz=0$$

即
$$\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=0\qquad(*)$$

这里 $C_R$ 及 $C_r$ 分别表示半圆周 $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$ 及 $z = re^{i\theta}$ $\quad (0 \le \theta \le \pi, r < R)$

由于 $\frac{1}{z} \to 0 \quad (z \to \infty)$ 在 $C_R$ 上一致成立

再由，引理 6.2 知 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$




由于 $z \cdot \frac{e^{iz}}{z} \to 1 \quad (r \to 0)$ 在$C_R$上一致成立

由**引理 6.** 3 知

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{dz} = -(\pi - 0)i = -\pi i$$

在 (*) 式中，令 $r \to 0$， $R \to \infty$ 取极限得

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$ 的主值为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

**注** 在**定理6.8**中有这样一个结果，在上半平面内挖去极点 $a_k$ 的全是邻域，该点留数为全的前面乘 1 挖去实轴上一阶极点为半邻域。该点的留数就算一半，前面乘 $\frac{1}{2}$ 。若矩形的四个顶点为一阶级点，从积分路径（矩形）上挖去它们，则是去掉 $\frac{1}{4}$ 邻域，该点的留数就要在前面乘 $\frac{1}{4}$ 。

即 在积分路径上容许有奇点，推广 3 的留数定理。

补充材料 复积分（留数理论）在积分计算中的应用技巧

（应用**定理 6.8**）

**例 10** 计算积分

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^4+4)(x-1)}dx$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^4+4)(x-1)}dx$

**解** 考虑辅助函数

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$$

$f(z)$ 在上半平面内有一个一阶极点 $z=2i$，在ℝ上有一个一阶极点 $z=1$ 且满足**定理6.8**，

$$\operatorname{Re}s(f(z),2i)=\left.\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)}\right|_{z=2i}=\frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}$$

$$\operatorname{Re}s(f(z),1)=\left.\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right|_{z=1}=\frac{e^{i}}{5}$$

据**定理6.8**得 $P.V$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x-1)}dx=2\pi i[\frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{i}}{5}]=-\frac{1+2e^2\sin 1}{10e^2}\pi+i\frac{e^2\cos 1-1}{5e^2}\pi$$

所以

$$P.V\ .\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx=\frac{e^2\cos 1-1}{5e^2}\pi$$

$$P.V\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)(x-1)}dx=-\frac{1+2e^2\sin 1}{10e^2}\pi=-\frac{\pi}{5}(\sin 1+\frac{1}{2e^2})$$

**例 11** 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{a^2-x^2}dx\quad(a>0)$ 的 Cauedy 主值。

**解** 此积分不收敛，但可求其主值。

设 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{a^2-z^2}$ ，它在上半平面内解析，在ℝ上有两个一阶极点z = ±a ，且满足**定理6.8**,

$$Res(f(z),a)=\left.\frac{e^{iz}}{-(z+a)}\right|_{z=a}=\frac{e^{ia}}{-2a}$$

$$Res(f(z),-a)=\left.\frac{e^{iz}}{-(z-a)}\right|_{z=-a}=\frac{e^{-ia}}{2a}$$

由**定理6.8**

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx=2\pi i[\frac{1}{2}(\frac{e^{-ia}}{2a}-\frac{e^{ia}}{20})]=\frac{\pi\sin a}{a}$$

所以

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi\sin a}{a}$$

**例 12** 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\pi x}{x(1-x^2)}dx=\pi$

**证** 设 $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z}}{z(1-z^2)}$ 它仅在 $R$ 上有三个一阶极点 $0,1,-1$，而$f(z)$在这三个点的留数分别为$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}$

据**定理6.8**,P.V. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\pi x}}{x(1-x^2)}dx=2\pi i[\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2})]=2\pi i$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\pi x}}{x(1-x^2)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\pi x}}{x(1-x^2)}dx=\pi$

## 五、小结

重点突出前两种应用的解法，要求灵活运用！

## 六、作业

$P_{271}-P_{272}$  $4(1),5(1)(3),6(2)$

## 七、补充说明

利用留数定理求定积分,关键是选择一个合适的辅助函数和一条相应的辅助闭路(围线),从而化定积分为沿闭路的复积分，一般地辅助函数 $F(\mathrm{z})$ 总选的当 $z=x$ 时，$F(x)=f(x)$ ，

$\mathrm{Re}\,s(F(\mathrm{x}))=\mathrm{f(x)}$ 或 $\mathrm{Im(F(x))=f(x)}$ （---原被积函数）辅助闭路选取原则为 使添加的路线上的积分能够通过一定的办法（包括用我们给出的几何引理）估计出来，或者其能够化为原来的定积分 但具体选取时，形状是多样的，有半圆周围线，长方形围线，扇形围线，三角形围线等，此外，围线上有奇点还要绕过去。

## 八、预习要求

预习 6.3 并思考

1、函数 $f(z)$ 在其零点与极点处的对数函数各是什么？

2、辅角原理的几何意义又是什么？如何求出函数在围线内的零点为极点个数？

3、 用 Rouche 定理研究函数零点分布的主要思路是？

4、 参考文献[1]，[2] ,[5]