§4、解析函数和调和函数的关系

一、教学目的

1、掌握调和函数及共轭调和函数的定义；

2、充分理解调和函数和解析函数的关系；

3、切实掌握从已知解析函数的实部（虚部）求出它虚部（实部） 的方法.

二、重难点

1、重点

调和函数、共轭调和函数、解析函数实（虚）部求法.

2、难点

概念间的关系及解析函数求法.

三、教法

采用启发式、课堂讲授法、

四、教学手段

电教、CAI 演示(约 2 课时)

（一）、调和函数及相关概念

定义 4.1 称二元实函数 $\mathrm{H}(x,y)$ 为区域 D 内调和函数，若：

（1）$\mathrm{H}(x,y)$ 在 D 内有二阶连续偏导数；

（2）$\dfrac{\alpha^2\mathrm{H}}{\alpha x^2}+\dfrac{\alpha^2\mathrm{H}}{\alpha y^2}=0$ （Laplace 方程）

记 $\Delta\equiv\dfrac{\alpha^2}{\alpha x^2}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha y^2}$ 称为 Laplace 算子

则 Laplace 方程可写为：$\Delta\mathrm{H}=0$

例 1 已知 $u(x,y),v(x,y)$ 为区域 D 内调和函数

试证：$au(x,y)+bv(x,y)$ 也为 D 内调和函数

证 记 $f=au+bv$

因

$$f_x=au_x+bv_x \qquad f_y=au_y+bv_y$$

$$f_{xy}=au_{xy}+bv_{xy} \qquad f_{yx}=au_{yx}+bv_{yx}$$

$$f_{xx}=au_{xx}+bv_{xx} \qquad f_{yy}=au_{yy}+bv_{yy}$$

又因 u 和 v 为 D 内调和函数，据定义 u 和 v 的二阶偏导在 D 内连续，且有：$u_{xx}+u_{yy}=0$，$v_{xx}+v_{yy}=0$，从而 $f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy}$ 在 D 内连续，且：

$$f_{xx}+f_{yy}=a\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+b\left(v_{xx}+v_{yy}\right)=0$$

注 该例可推广为：有限调和函数的线性组合仍为调和函数

定义 4.2 若（1）$u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)$为区域D内调和函数

（2）在D内C－R条件：$\dfrac{\alpha u}{\alpha x}=\dfrac{\alpha v}{\alpha y};\dfrac{\alpha u}{\alpha y}=-\dfrac{\alpha v}{\alpha x}$成立

则称 v 为 u 在区域D内的共轭调和函数.

2. 解析函数和调和函数的关系

若$f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$在D内解析，则由C－R条件：

$$\frac{\alpha u}{\alpha x}=\frac{\alpha v}{\alpha y};\frac{\alpha u}{\alpha y}=-\frac{\alpha v}{\alpha x};$$

得

$$\frac{\alpha^2 u}{\alpha x^2}=\frac{\alpha^2 v}{\alpha x\alpha y};\frac{\alpha^2 u}{\alpha y}=-\frac{\alpha^2 v}{\alpha y\alpha x}$$

又因为$\dfrac{\alpha^2 v}{\alpha x\alpha y}$与$\dfrac{\alpha^2 v}{\alpha y\alpha x}$在D内连续，故必相等，因此在D内：

$$\frac{\alpha^2 u}{\alpha x^2}+\frac{\alpha^2 u}{\alpha y^2}=0$$

同理，在D内：

$$\frac{\alpha^2 v}{\alpha x^2}+\frac{\alpha^2 v}{\alpha y^2}=0$$

从而有：

定理 3.18 若$f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$在区域D内解析，则在D内，

$v\left(x,y\right)$为$u\left(x,y\right)$的共轭调和函数.

注 1. 由$f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$在D内解析，得 u, v 必为D内调和函数

2. 由于 C-R 条件中的 u 和 v 不能交换，故“v 为 u 的共轭调和函数”中，u，v 也不能交换顺序

3. 由于一个解析函数$f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$的任意节导数仍解析，且

$$f'\left(z\right)=u_x+iv_x=v_y+i\left(-u_y\right)$$

$$f''\left(z\right)=u_{xx}+iv_{xx}=v_{yx}+i\left(-u_{yx}\right)=v_{xy}+i\left(-u_{xy}\right)=-u_{yy}+i\left(-v_{yy}\right)\cdots$$

由定理 3.18 知，调和函数的任意阶偏导数也都是调和函数，又由于任意二元调和函数都可作为一个解析函数 $f(z)$ 的实部 u（和虚部 v），而虚部 v(或实部 u)可由 C-R 条件确定，于是有： 任一二元调和函数的任意阶偏导数也是调和函数.

命题 若 v 为 u 的在 D 内的共轭调和函数，则函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 D 内解析函数

$$\left.\begin{cases}\text{调和}\Rightarrow\text{一阶偏导连续}\\ \text{共轭}\Rightarrow\text{ C-R 条件成立}\end{cases}\right\}\Rightarrow f(z)\text{解析}$$

定理 3.19 设 $u(x,y)$ 为单连通区域 D 内的调和函数，则 $\exists v(x,y)$ 为 u 在 D 内的共轭调和函数，使得 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 D 内的解析函数

证明提示 能求得在 D 内具有连续偏导数且满足

$$\frac{\alpha u}{\alpha x}=\frac{\alpha v}{\alpha y};\frac{\alpha u}{\alpha y}=-\frac{\alpha v}{\alpha x}$$

的函数 $v(x,y)$，即要求出函数 $v(x,y)$，使其在 D 内有全微分：

$$-\frac{\alpha u}{\alpha y}dx+\frac{\alpha u}{\alpha x}dy$$

由于 $u(x,y)$ 为调和函数，故上式必然为全微分.

且 D 为单连通区域，$v(x,y)$ 可由下列线积分确定：

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\alpha u}{\alpha y}dx+\frac{\alpha u}{\alpha x}dy+C \quad \text{（C 为实常数）}$$

3．由已知解析函数的实部 u（或虚部 v），求其虚部 v（或实部 u）的方法；

（1）线积分法（单连通区域）

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_x dx+v_y dy+C=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y dx+u_x dy+C \quad \text{（知 u 求 v）}$$

若单连通区域包含原点，则上式中的 (x_0,y_0) 可取成（0,0）

（2）先由 C-R 条件（知 u 求 v 为例）

$v_y=u_x, v_x=-u_y$ 中的一个，如：$v_y=u_x$

解得：$v=F(x,y)+\varphi(x)$

再由 C-R 条件的另一个：$v_x=-u_y$ 得：

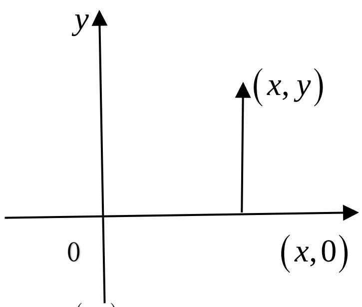
$$F_x(x,y)+\varphi'(x)=v_x=-u_y$$

由此可求出$\varphi(x)$，因此就能求出$v(x,y)$

例 2　验证$\mathrm{u}(x,y)=x^3-3xy^2$为 z 平面上的调和函数，并求以$\mathrm{u}(x,y)$为实部的解析函数$f(z)$，使$f(0)=i$

证　$u_x=3x^2-3y^2$　　$u_y=-6xy$　　$u_{xy}=-6y=u_{yx}$

$u_{xx}=6x$　　$u_{yy}=-6x$



在 C 连续，且

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

故$u(x,y)$为 z 平面上的调和函数.

解法 1　取如右图为路径：

$$\mathrm{v}(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}6xydx+\left(3x^2-3y^2\right)dy+\int_{(x,0)}^{(x,y)}6xydx+\left(3x^2-3y^2\right)dy+C$$

$$=\int_0^y\left(3x^2-3y^2\right)dy+C$$

$$=3x^2y-y^3+C$$

故

$$f(z)=u+iv=x^3-3y^2x+i\left(3x^2y-y^3+C\right)$$

要符合$f(0)=i$，必须 C＝1

故

$$f(z)=x^3-3y^2x+i3x^2y-y^3+\mathrm{i}=\mathrm{z}^3+i$$

解法 2

$$v(x,y)=\int u_xdx+\varphi(y)=\int -u_ydx+\varphi(y)=\int 6xydx+\varphi(y)=3x^2y+\varphi(y)$$

$$v_y=3x^2y+\varphi'(y)=u_x=3x^2-3y^2$$

$$\Rightarrow\varphi'(y)=-3y^2$$
$$\Rightarrow\varphi(y)=-y^3+C$$

故

$$v=3x^2y-y^3+C$$
$$f=u+iv=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)+C$$

例 3　　验证$v(x,y)=\arg\tan\dfrac{y}{x}(x>0)$在右半平面内为调和函数，并求以此为虚部的

分析函数 $f\left(z\right)$

解 $v_x=\dfrac{\dfrac{-y^2}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\left(x>0\right)$ $v_y=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\left(x>0\right)$

$$v_{xx}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad v_{yy}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x>0\right)$$

故

$$v_{xx}+v_{yy}=0(x>0)$$

在右半平面内，$v\left(x,y\right)$为调和函数

$$u\left(x,y\right)=\int u_x dx+\varphi\left(y\right)=\int v_y dx+\varphi\left(y\right)=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx+\varphi\left(y\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\varphi\left(y\right)$$

对 y 求导可得：

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{2y}{x^2+y^2}+\varphi'\left(y\right)=u_y=-v_x=\frac{y}{x^2+y^2}$$

由于$g'\left(y\right)=0$，故

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C$$

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C+i\arg\tan\frac{y}{x}(x<0)$$

$$=\ln\left|z\right|+i\arg z+c$$

$$=\ln \mathrm{z}+\mathrm{C}$$

补 例 4 设$v\left(x,y\right)=e^{px}\sin y,$ 而 $f\left(z\right)=u+iv$ 为解析函数，求 p 的值和 $f\left(z\right)$

解 $v_x=pe^{px}\sin y$ $v_{\mathrm{y}}=e^{px}\cos y$

$$u=\int u_x dx+\varphi\left(y\right)$$

$$=\int v_y dx+\varphi\left(y\right)$$

$$=\int e^{px}\cos y dx+\varphi\left(y\right)$$

$$=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\varphi\left(y\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{p}e^{px}\sin y+\varphi'(y)=u_y=-v_x=-pe^{px}\sin y$$

$$\Rightarrow g'(y)=\left(\frac{1}{p}-p\right)e^{px}\sin y$$

（左端仅为 y 的函数，右端仅为 x，y 的函数）

$$\Rightarrow \varphi'(y)=0 \qquad \left(\frac{1}{p}-p\right)e^{px}\sin y=0$$

$$\Rightarrow \varphi(y)=\text{实常数C} \qquad (p=\pm 1)$$

故

$$u(x,y)=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+C \qquad (p=\pm 1)$$

$$f(z)=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+C+ie^{px}\sin y$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{p}e^{pz}+C$$

当 p=1 时， $f(z)=e^{z}+C$

当 p=-1 时， $f(z)=e^{-z}+C$，都在 C 上解析

五、小结

1. 调和函数
2. 知实部求解析函数的方法

六、作业

$P_{143}-P_{144}$ 16（1） （3）

七、后记

1．练习题：

（1）求 $\int_{c}\frac{e^{z}}{z+i}dz \qquad \mathrm{C}:|z+3i|=1$

（2）求 $I=\int_{\Gamma}\frac{e^{z}}{z(1-z)^{3}}dz$，$\Gamma$ 为不通过 0, 1 的围线

（3）已知 $f(z)=(z-1)\overline{(z-1)},\mathrm{Im}(z-1)$,求$\int_{c}f(z)dz$

其中 $C:|z-1|=2$

（4）$u(x,y)$ 为 z 平面上的有界调和函数，证明 u 为常数

2．预习要求：预习并回答

（１）复函数项级数绝对收敛是数学分析中的正项级数收敛问题吗？为什么？

（２）函数项级数收敛与一致收敛有何区别？

（3）为何说复变幂级数的Ａble 定理是实幂级数Ａble 定理在　复平面上的推广？

（4）幂级数和函数在收敛圆周内具有哪些性质？

（5）实函数项级数一致收敛的Ａble 判别法能否推广到复函数项级数中？为什么？

3.参考文献【1】【6】

4.查找文献　归纳由调和函数求解析函数的方法