# §3、解析函数在无穷远点的性质 整函数与亚纯函数

## 一、 目的和要求

1、掌握函数在$\infty$邻域内的性质，掌握孤立奇点类型的判定定理；

2、掌握整函数的概念及其分类，灵活运用亚纯函数的概念及其与有理函数的关系

## 二、重难点

1、重点

$\infty$作为孤立奇点的判定方法，亚纯函数的概念；

2、难点

判定定理的应用及概念间关系

## 三、 教法

课堂讲授法，采用启发式

## 四、教学手段

电教，CAI 演示（2 课时）

### （一）解析函数在$\infty$的性质

**定义** 设 $f(z)$ 在区域 $R<|z|<+\infty(R\geq 0)$ 内解析，则$\infty$称为 $f(z)$ 的孤立奇点

在该区域内有 *Laurent* 级数（展式）

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n \qquad (1)$$

其中 $c_n$ 由 *Laurent* 系数公式决定。

令 $z=\frac{1}{w}$ ，按照 $R>0$ 或 $R=0$，我们的在 $0<|w|<\frac{1}{R}$ 或 $0<|w|<+\infty$ 内解析的函数 $\varphi(z)=f(\frac{1}{w})$，其 *Laurent* 展式为

$$\varphi(w)=\sum_{n=\infty}^{\infty}\frac{c_n}{w^n} \quad (2)。$$

若 w=0 为函数的可去奇点（m 阶）极点或本性奇点，这样

（1）若当 $n=1,2,\cdots$时，$c_n=0$，则称$\infty$为函数的可去奇点；

（2）若只有有限个整数（至少有一个）n）0，使 $c_n\neq 0$，则 $z=\infty$ 为函数的极点，若 $c_m\neq 0$，$\forall n>m>0$ 时，$c_n=0$ 则称$\infty$为函数的 m 阶极点，m=1 时称为简单极点

（3）若有无穷多个 n）0，使 $c_n\neq 0$，则$\infty$为函数的本性奇点，并称 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ 为函数在$\infty$的解析部分和主要部分.

**注** （1）若$\infty$为函数奇点之聚点，就是函数的非孤立奇点.

（2）$f(z)$在$\infty$解析$\Leftrightarrow \infty$为$f(z)$的可去奇点，且定义$f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

**1、判定定理**

**定理 5.3** 设$z=\infty$为$f(z)$的孤立奇点，下列陈述等价

（1）$z=\infty$为$f(z)$可去奇点

（2）$f(z)$在$\infty$处主要部分为 0

（3）$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b(\neq 0)$

（4）$f(z)$在$\infty$的某去心邻域内有界

**定理 5.4** 设$z=\infty$为$\infty$的孤立奇点，则下列陈述等价

（1）$z=\infty$为$f(z)$的 m 阶极点

（2）$f(z)$在$\infty$的主要部分为 $b_1 z+b_2 z^2+\cdots+b_m z^m (b\neq 0)$

（3）$f(z)$在$z=\infty$的某去心邻域$N-\{\infty\}$内能表成 $f(z)=z^m\varphi(z)$，其中$\varphi(z)$在 N 内解析且$\varphi(\infty)\neq 0$.

（4）$z=\infty$为$g(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq\infty \\ 0, & z=\infty \end{cases}$ 的 m 级零点。

$Cor1.$ $z=\infty$为$f(z)$的$m$阶极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^m}=b(b\neq 0,\infty)$

$Cor2.$ $z=\infty$为$f(z)$的极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

**定理 5.6** $z=\infty$为$f(z)$的孤立奇点，则下列陈述等价

（1）$z=\infty$为$f(z)$的本性奇点

（2）$f(z)$在$z=\infty$的主要部分有无穷多个非零项

（3）不存在有限或无穷的极限$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

**注** 上节中定理 5.7 到定理 5.9 对$z=\infty$的本性奇点也真

**例 1**　$z=\infty$ 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的可去奇点；

$z=\infty$ 为 n 此多项式的 n 阶极点；

$z=\infty$ 为 $\cos z$，$\sin z$ 的本性奇点。

**例 2**　判断下列函数孤立奇点的类型（含 $\infty$）

（1）$\dfrac{1}{(z^2-4)^3}$　　（2）$e^{z+\frac{1}{z}}$　　（3）$\dfrac{1\text{-}\cos z}{z^2}$　　（4）$\dfrac{1+e^z}{e^z-1}$

**解**　（1）易知 $z=\pm 2$ 为其三阶极点（两种方法）$\begin{cases}(z+2)^3\bullet f(z)\\ \dfrac{f(z)}{(z-2)^2}\end{cases}$，$z=\infty$ 为可去奇点

（$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$）。

（2）其孤立奇点为 0 或 $\infty$。

**法二** 由于 $z_n=\dfrac{1}{2n\pi i}\to 0(n\to\infty)$ 有 $e^{z_n+\frac{1}{z_n}}=e^{\frac{1}{2n\pi i}}\to 1(n\to\infty)$，

$$z_n^{'}=\frac{1}{2n\pi i+\pi i}\to 0 \text{ 有 } e^{z_n^{'}+\frac{1}{z_n^{'}}}=-e^{\frac{1}{2n\pi i+\pi i}}\to -1\quad (n\to\infty),$$

故　$\lim\limits_{z\to 0} e^{z+\frac{1}{z}}$ 不存在；即 $z=0$ 为其本性奇点

同理 取 $z_r=2\pi ni$ 及 $z_n^{'}=2n\pi i+\pi i$　易得，$\infty$ 也为本性奇点

**法一** 用展式

（3）当 $z=0$ 时，$1-\cos z=0$，故 z=0 非其二阶极点，

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\frac{1}{2}$$

$z=0$ 为其可去奇点　又

$$\frac{1\text{-cosz}}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}$$

故　$z=\infty$ 为其本性奇点

（4）因为 $z_k=2k\pi i$ 为 $e^z-1$ 的简单零点，故 $z_k$ 为 $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ 的简单极点，又

$$z_k=2k\pi i\to\infty\quad (k\to\infty)$$

故 $z=\infty$ 为非孤立奇点

（5）$\dfrac{z^7}{(z+1)^2(z-5)^3}$

**解** 易知 $z=-1$为其二阶极点$z=5$为其三阶极点

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}\bullet\frac{z^7}{(z+1)^2(z-5)^3}=1$$

故 $z=\infty$为其二阶极点

**例 3** 求多值函数$Ln\dfrac{z-a}{z-b}$的第 k 支在$\infty$某去心邻域内的 Laurent 展式

**解** $Lnz=\ln z+2k\pi i\ (k\in Z)$考虑主支$\ln\dfrac{z-a}{z-b}$，且 $z=\infty$不是其支点 ，故在$\infty$的邻域$|z|>\max\{|a|,|b|\ \}$内解析，

$$\ln\frac{z-a}{z-b}=\ln(1-\frac{a}{z})-\ln(1-\frac{b}{z})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\bullet(\frac{a}{z})^n+\mp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\bullet(\frac{b}{z})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{n}\bullet\frac{1}{z^n}$$

$$(\ln\frac{z-a}{z-b})_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{n}\bullet\frac{n}{2}+2k\pi i\qquad(k\in Z)$$

**例 4** 问 $\sec\dfrac{1}{z-1}$在 z=1 的邻域内是否解析

**解** 易得: $z_k=\dfrac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}+1$为$\sec\dfrac{1}{z-1}$的一阶奇点且$z_k\to1(k\to\infty)$，故 $z=1$为非孤立奇点，不能展成 Laurent 级数（题改条件下）

**例 5** 若$f(z)$在$0<|z-a|<k$内解析且不恒为 0，又若 f(z)有异于 a 但却异 a 为聚点的零点，证 a 必为$f(z)$本性奇点。

**证明** （穷举法）由题可知 $z=a$为$f(z)$的孤立奇点

（1）若 z=a 为$f(z)$可去奇点，则 在$|z-a|<R$内，令$f(a)=0$解析且以 a 为非孤立零矢$\Rightarrow f(z)\equiv0$。

（2）若 a 为$f(z)$极点，则$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，$\lim\limits_{z\to a}f(z)=0$从而 z=a 为$f(z)$的本性奇点（据解析函数孤立奇点特征，可区分为两种最简单的解析函数族）。

## （二） 整函数与亚纯函数

**1、整函数（全纯函数）**

已知 若 $f(z)$ 在复平面（有限）$\mathbb{C}$ 上解析，则称之为一个整函数，显然 $\infty$ 为整函数的孤立奇点，$f(z)$ 绕 $\infty$ 的 Laurent 展式即为 Taylor 展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \qquad (0\le |z|<+\infty) \qquad (*)$$

显然有

**定理 5.10** 若 $f(z)$ 为以整函数，则

（1）$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 为常数 $c_0$；

（2）$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 为 m 此多项式；

（3）$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow$ $(*)$ 中有无穷多个 $c_n\neq 0$，此时称（3）为超越整函数，如 $e^x$，$\sin z$，$\cos z$ 等

**2、亚纯函数**

定义 在 z 平面 $\mathbb{C}$ 上出极点外，无其他类型奇点的单值解析函数，称为亚纯函数。亚纯函数族是较枕函书更一般的函数族（推广）。最简单，有几点的亚纯函数是有理（分式）函数。

**例** $\dfrac{1}{\sin z}$ 为一个亚纯函数，极点 $z=k\pi(k\in Z)$——无穷多个有理数

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n}{\beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\cdots\beta_n z^n} \qquad (\alpha_n,\beta_{n\neq 0})$$

也是一个亚纯函数，$(\alpha_k,\beta_l\in\mathbb{C} \quad k=0\to m,m,n\in N)$，在 $\mathbb{C}$ 上有有限个极点，无穷远点 $\infty$ 为其极点（n）m 时）或可去奇点（$n\le m$ 时）。

**定理 5.11** 函数 $f(z)$ 为有理函数 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在上除极点和可去极点外无其他类型奇点

**证** “$\Rightarrow$” 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 P(z),Q(z)分别为 z 的 m 次和 n 次多项式且彼此互质，则

（1）当 m）n,时，$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m-n 阶极点；

（2）当$m \le n$时，$z=\infty$必为$f(z)$的可去极点，只要令$f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{P(z)}{Q(z)}$　$z=\infty$为其解析点；

（3）$Q(z)$的零点必为$f(z)$的极点。

“$\Leftarrow$”若$f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上除极点的无其他类型奇点，则 这些极点的个数只能为有限多个，若不然，这些极点在$\mathbb{C}_\infty$上的聚点便为非孤立奇点

令$f(z)$在$\mathrm{Z}$平面上的极点为$z_1, z_2, \ldots, z_n$，其阶分别为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$则函数

$$g(z)=(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\cdots(z-z_n)^{\lambda_n}f(z)$$

要多以$z=\infty$为极点，而在$\mathbb{C}$上解析，故$g(z)$必为多项式（或常数），即 $f(z)$必为有理函数。

**定义 5.7**　非有理函数的亚纯函数称为超越亚纯函数

注 亚纯函数可以表示成两个整函数的商，也可表示成部分公式

**补 例 6**　（1） $f(z)=(z-e)(z^2+1)$为整函数

此因$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$，$\therefore \infty$为函数极点此外别无奇点，$\therefore$ $f(z)$为整函数且为三次多项式。

（2）考查$f(z)=1+e^{z+1}$

**解**　$f(z)$为整函数，又因*Laurent*展式为

$$f(z)=1+e^{z+1}=1+[1+(z+1)+\frac{(z+1)^2}{2!}+\cdots]$$

$$=2+(z+1)+\frac{(z+1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z+1)^n}{n!}+\cdots \qquad (0 \le |z+1| < +\infty)$$

易见 $z=\infty$为函数的本性奇点，故 函数$f(z)$为超越整函数。

**例 7**　考察函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$

**解**　$e^z+1$的零点为 $z_k=(2k+1)\pi i$　　$(k\in \mathrm{Z})$，又 $(e^z+1)'=e^z$在$z_k$处不为 0，

故$z_k$皆为函数的一阶极点其极限$\infty$为函数非孤立奇点，此外，$f(z)$别无奇点，

依定义，$f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$为超越亚纯函数

**例 8**　设$f(z)$在$\mathbb{C}$上解析，且当$z\to\infty$时，$\dfrac{f(z)}{z}\to 1$，证明 $f(z)$必有一个零点

**证**　由题设知 $f(z)$必为一个整函数，即 $f(z)$只以$z=\infty$为孤立奇点（据$Taylor$定理知）

设 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots\qquad(0\le|z|<+\infty)$

又由题设

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=1\qquad（1）$$

$\therefore z=\infty$为$\dfrac{f(z)}{z}$的可去奇点，从而$z=\infty$为函数的一阶极点，故必

$$f(z)=c_0+c_1z\qquad（2）$$

（2）代入（1）后，必有 $c_1=1$　故$f(z)=c_0+z$，即 必有且只有一个零点。

## 五 小结

1、$\infty$奇点的类型与判定

2、亚纯函数与分类.

## 六 作业

$P_{212}4(1)$ ，6， 8（1）（4）

## 七 预习要求 预习并回答

1、函数有那两种定义方式？为何说这两种定义是统一的？

2、在$\mathbb{C}$上，可去奇点的函数一定为 0 吗？

3、$\infty$函数定义中积分方向如何理解？

## 八 后记

参教文献【1】【5】【6】