§2、复平面上的点集

一、目的和要求

1、 掌握点 z_0 的邻域及定义 1.1—定义 1.4 关于平面点集的几个基本概念.

2、 理解区域与约当曲线的概念，掌握有界集及简单闭曲线方向.

3、 掌握约当定理；判定区域的连通性，比较单连通区域和多连通区域的差异性；画出点集的示意图；充分理解复变函数的概念.

二、重难点

1、 重点

邻域及与之相关的点集概念，区域，约当曲线，单、多连通区域及有界集，复变函数.

2、 难点

一些等价关系定义的理解.

三、教法与教学手段

校内课堂主要采用课堂讲授、指导读书、启发式教学和线上线下混合式教学相结合的教学方法。线上课堂采用基于本课程平台的网络教学。

四、教学内容 （共 2 课时）

（一）基本概念（复习提问实分析中相关概念）

1、邻域

设 $z_0 \in \mathbb{C}, \rho > 0$ 满足 $|z - z_0| < \rho$ 的所在点， z 所有点所成云集称为点 z_0 的 ρ 一邻域，记为 $N\rho(z_0)$，即： $N\rho(z_0)$ 为以 z_0 为中心，ρ 为半径的圆(盘)，去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 之点集

角度 1 ih 点相对于集的位置.角度 2 ih 点周围是否聚集集中无限多个点.

2、点与集合

设 $z_0 \in \mathbb{C}$，E 为平面点集（$E \subset \mathbb{C}$）则有

（1）聚点（极限点）

若 z_0 的任何邻域 N 中都有含 E 的无穷多个点（z_0 未必属于 E）则称 z_0 为 E 的一个聚点，下列关于聚点的定义等价

（a） z_0 的任一邻域都含有异于 z_0 而属于 E 的一个点.

（b） z_0 的任一邻域都含有 E 的两个点.

（c） 可以从 E 中取出点列 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ 异于 z_0，且以 z_0 为极限.

注 点列 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$（记为 $\{z_n\}$）的聚点 or 极限点为 $z_0 \Leftrightarrow z_0$ 的任一邻域含有此点列的无穷多个点.

（2）孤立点

若$\exists z_0$的一个邻域N，得$N\cap E=\{z_0\}$，则称z_0为E的孤立点.

（3）内点

若$\exists z_0$的一个邻域$N_\rho(z_0)$，$N_\rho(z_0)<E$，称z_0为E的一个内点.

（4）外点

若 $z_0\notin E$，且z_0不是E的聚点， 称z_0为E外点

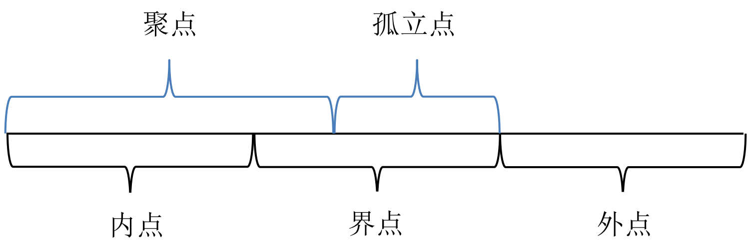
（5）边界点

若对z_0的任一邻域$N_\rho(z_0)$，都含有E中的点，也含有非E中的点，则称z_0为E边界点.

（6）边界

E的全体边界点所成之集称为E的边界，记为∂E.

以上几种点集的关系如下 （注 距离空间中皆真）



（7）开集

若E中点皆为内点，称E为开集（如邻域）.

（8）闭集

若E含有所有聚点，则称E为闭集$\Rightarrow$单点集，有限点集，IN皆为闭集.

（9）有界集

若$\exists M>0, E\subset\{z \mid |z|<M\}=N_M(0)$，称$E$为有界集，直径

$$d(E)=\sup\{|z-z'| \mid z\in E, z'\in E\}$$ 否则，称E为无界集.

例 1 （1）点集$\left\{i,\frac{1}{2}i,\frac{2}{3}i,\dots,\frac{n-1}{n}i,\dots\right\}$中除点 i 是它的聚点外，其余参点皆为其孤立点.

（2）点集$\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i,\frac{3}{4}+\frac{4}{3}i,\dots,\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n-1}i,\dots\right\}$中每一点皆为孤立点，$1+i$是其聚点却不属于它.

（3）$Q=\phi,\partial Q=IR,Q=IR,Q'=IR$

例 2 设 E 为单位圆，$|z|<1$ 内非实数的点集，求 E 的内点，外点，边界点，聚点和孤立点.

解 ①对 $z=x+iy\in E$取$0<\varepsilon<\min\{1-|z|,|y|\}$，则

$$N_\varepsilon(z)\subset E\Rightarrow z_0\text{为}E\text{内点}$$

E为开集

②设 $E_2=\{z\,||z|=1 or z=x(-1<x<1)\}$，对于

$$z\in E_2，\ \forall\varepsilon>0, N_\varepsilon(z)\cap E\neq\phi,\ N_\varepsilon(z)\cap {E_2}^2\neq\phi\Rightarrow\partial E=E_2$$

③设 $E_3=\{z\,||z|\leq 1\}$

④聚点集 $E_3=\{z\,||z_1|\leq 1\}$

（二）区域与曲线

1、区域 （连通开集）

定义 （1）非空点集 D 称为区域，若① D 为开集② D 中任何两点可用完全属于 D 的折线相连接（连通性）

（2）若区域 D 为一个有界集，则称 D 为一个有界区域. 否则就称为无界区域.

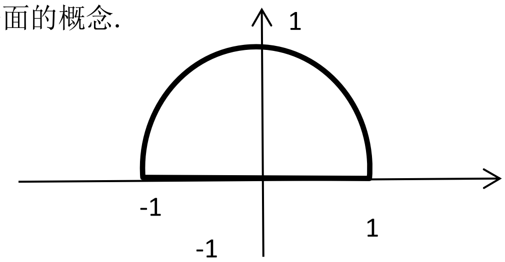
（3） $D\cup\partial D$ 称为闭区域，记为 $\overline{D}=D+\partial D$.

注 区域是开集，不包含其边界，除全平面外，区域不是闭区间，闭区间不是区域.

例 3 z 平面上的圆盘 $|z|<R(R>0)$ 为一个闭区域（圆形闭域），它们均以 $|z|=R$ 为边界，且都是有界区域.

例 4 （1） z 平面上以 $\mathrm{Im}\,z=0$（实轴）为边界的两个无界区域为 上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 和下半平面 $\mathrm{Im}\,z<0$，同样可以定义在左（右）半平面的概念.

（2）由关系式 $\begin{cases}|z|>1 \\ \mathrm{Im}\,z>0\end{cases}$ 决定的点集表一个无界区域



例 5 由两个圆 $|z-1|<1$及 $|z+1|<1$ 的内部所构成的点集 E 是开集而不是区域.

解 易见 E 是由内点所组成故 E 为开集. 其次，在圆 $|z-1|<1$及 $|z+1|<1$ 内各取一点 z_1,z_2，显然无法用一条完全含于 E 内的折线连接这两点，即 E 不具有连通性，从而不是区

域.

例 6 （1）由不等式$\theta_1 < \arg z < \theta_2$确定的点集，是以射线$\theta_1 = \arg z$ 和$\theta_2 = \arg z$为边界的无界角形区域.

（2）由$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$所决定的点为带形区域.

（3）圆环区域 $0 \le r < |z - z_0| < R < +\infty$

2、曲线

定义 设$x(t), y(t)$是两个在闭区间$[\alpha, \beta]$上的连续实函数则方程组

$$\begin{cases} x = x(t) & t \in [\alpha, \beta] \\ y = y(t) \end{cases}$$

看成复数方程

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta] \qquad (*)$$

所决定的点集称为 z 平面上一条连续曲线，记为$\mathbb{C}$，

$$\mathbb{C}: z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$$

（*）式称为$\mathbb{C}$的参数方程，其中$z(\alpha), z(\beta)$分别称为$\mathbb{C}$的起点和终点.

（1） 当$t_1, t_2 \in (\alpha, \beta), t_1 \ne t_2$时，$z(t_1) = z(t_2)$则称$z(t_1)$为$\mathbb{C}$的重点，无重点的连续曲线称为简单曲线（约当曲线）$z(\alpha) = z(\beta)$时的简单曲线称为简单闭曲线，简称围线.

（2）若$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上可导，且$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$，则称$\mathbb{C}$为光滑曲线.

（3）由有限条光滑曲线连接而成的曲线称为逐段光滑曲线.

注 逐段光滑曲线是可求长的，简单曲线未必可求长.

定理 1.1（Jordan） 任一简单闭曲线$\mathbb{C}$将 z 平面唯一的分成$c, I(c)$及$E(c)$三个点集，且满足

② 彼此不变.

② $I(c)$为一个有界区域（称为$\mathbb{C}$的内部）

③ $E(c)$为一个无界区域（称为$\mathbb{C}$的外部）

④ $\mathbb{C}$为$I(c)$、$E(c)$的共同边界.

⑤ 若简单折线 P 的一个端点属于$I(c)$，另一端点属于$E(c)$，则P与c必有交点.

注 简单闭曲线的方向为当z沿c移动时，$I(c)$位于动点左侧，则此方向为正向，反之，称为负方向.

3、单多连通区域

设$D\subset\mathbb{C}$为区域，对D内任一条简单曲线c，均有 $I(c)\subset D$则称单连通区域，否则称为多连通区域.

例 6、（1）$|z-z_0|<R$ —————— 圆盘

$\mathrm{Im}>0$ —————— 上半平面

$y_1<\mathrm{Im}\,z<y_2$ ————— 带形区域

（2）$0<|z-z_0|<R(R>0)$ ——— 去心邻域

$0<r<|z-z_0|<R<+\infty$ ——— 圆环

为多连通区域.

三、 满足 $\frac{\pi}{4}<\arg(z-i)<\frac{3\pi}{4}$ 的点集为一角形区域，是单连通区域.

（三）复变函数的概念

1、定义 设$E\subset D$，若对每个$z\in E$存在确定的复数w与z对应，则称w为复数z的函数，记成 $w=f(z)$其中 E称为定义域，$f(E)$称为值域. 若对应中w的值是唯一的，称f为单值函数，若z一个值有两个或两个以上的值与之对应称$f(z)$为多值函数.

例 $w=|z|, w=z^2, w=\frac{z+1}{z-1}(z\neq 1)$为单值函数，

$$\left.\begin{array}{l} w=Argz \text{ 为无穷多值函数} \\ w=\sqrt[n]{z}(n\geq 2) \text{ 为 } n \text{ 值函数} \end{array}\right\} \text{多值函数}$$

约定 以后不做说明时，所提到的函数皆指单值函数

注 （1）设$z=x+iy$, 若$w=u+iv$，则$w=f(z)$可以写成

$$w=u(x,y)+iv(x,y)$$

其中$u(x,y)$及$v(x,y)$是关于r,θ的二元函数, 等价于单复变的复函数

$$w=f(z)(z=x+iy,or,re^{i\theta})$$

等价于两个相应的实函数

例 $w=z^2$, 当 $z=x+iy$ 则

$$w=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$$

即

$$u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=2xy$$

当$z=re^{i\theta}$时

$$w=r^2e^{i2\theta}=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

即

$$P(r,\theta)=r^2\cos 2\theta,\ Q(r,\theta)=r^2\sin 2\theta$$

五、小结

内点，界点，外点与聚点，孤立点的关系，复函数.

六、作业

P_{42} 6(1、3、5) 并画图. 10(2、3)

七、预习要求

预习下节内容，并思考一下问题

1、$w=z^2$ 把平面 z 上的点 $z_0=\sqrt{3}+\sqrt{2}i$ 映成平面 z 上哪些点？

2、$w=\dfrac{1}{z}$ 将平面 z 上 $y=x$ 映成 S_w 上何图？

3、比较复数 z 与实分析中函数极限定义的异同.

4、如何理解 $f(z)$ 在闭区间 $\overline{D}$ 上连续？

八、后记

1、本书参考题目，见教案 P_3.[1][3][6]

2、可登陆网络教程（见 P_3 ）查阅相关教学内容.