# 提纲

# 凸集的几何定义

在我们熟知的$\mathbb{R}^n$空间中，经过不同的两点$x_1, x_2$可以确定一条直线，其方程为

$$y = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}.$$

特别，当$0 \leqslant \theta \leqslant 1$时，直线退化为以$x_1, x_2$为端点的线段.

**定义**

**仿射集**　如果过集合$\mathcal{C}$中的任意两点的直线都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为**仿射集**，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

**例**　线性方程组$Ax = b$的解集$\mathcal{X}$是仿射集，因为$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}(x_1 \neq x_2)$均满足$\theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 = b$.
反之，任何仿射集均可表示为某一线性方程组的解集.

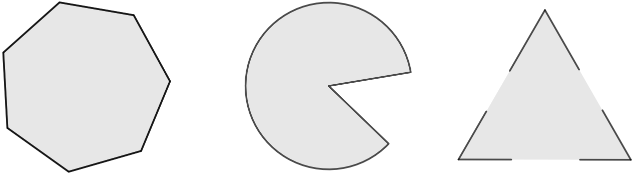
# 凸集的几何定义

**定义**

凸集　如果连接集合$\mathcal{C}$中的任意两点的线段都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为凸集，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

仿射集当然都是凸集.



(a)　(b)　(c)

例　在左图中我们列出了一些凸集、非凸集的例子. 其中(a)为凸集，(b)和(c)均为非凸集.

# 凸集的性质

我们说明，凸集的数乘、凸集之间的加和交运算所得的集合仍是凸集.

**定理**

- 若$\mathcal{S}$是凸集，则$k\mathcal{S} = \{ks|k \in \mathbb{R}, s \in \mathcal{S}\}$是凸集.
- 若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{s + t|s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$是凸集.
- 若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$是凸集.

上述定理的前2点在凸集定义的前提下是显然的. 我们简述第3点为何成立.

Proof: 设$x, y \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$且$\theta \in [0, 1]$. 由于$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均为凸集，则

$$\theta x + (1 - \theta)y \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T},$$

这证明$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$是凸集.

实际上，我们指出，任意多凸集的交都是凸集. 这以结论在证明复杂集合是凸集时非常有用，因为我们可以考虑将其视为任意个凸集的交.

# 凸集的性质

若一个集合是凸集, 则其内部和闭包都是凸集.

**定理**

设$\mathcal{S}$是凸集, 则$\mathring{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{S}}$均是凸集.

要证明此命题, 并不显然. 在此, 我们特别引入凸集的代数判定法.

**定义**

凸集的代数定义　设线性函数$\phi : E \times E \to E$, 其中$E$为全集, 满足

$$\phi(x, y) = \lambda x + (1 - \lambda) y, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x, y \in E,$$

则若成立$\phi(\mathcal{S} \times \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{S} \subseteq E)$, 那么$\mathcal{S}$是凸集.

利用凸集的代数定义, 分别由以下式子证明定理成立:

$$\phi\left(\bar{\mathcal{S}} \times \bar{\mathcal{S}}\right) = \phi\left(\overline{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}\right) \subseteq \overline{\phi\left(\mathcal{S}, \mathcal{S}\right)} \subseteq \bar{\mathcal{S}},$$
$$\phi\left(\mathring{\mathcal{S}} \times \mathring{\mathcal{S}}\right) = \lambda\mathring{\mathcal{S}} + (1 - \lambda)\mathring{\mathcal{S}} \subseteq \phi\left(\mathcal{S} \times \mathcal{S}\right) \subseteq \mathcal{S}.$$

# 凸集的性质

利用凸集的代数定义, 我们可以证明许多关于凸集的重要性质. 限于篇幅, 我们举出一些特别重要的例子, 读者可自证.

**定理**

若$\mathcal{S}$是凸集, 且$\mathring{\mathcal{S}} \neq \oslash$, 则$\exists x_0 \in \mathring{\mathcal{S}}$, 使其对$\forall 0 \leqslant \lambda < 1$且$x \in \mathcal{S}$, 成立$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in \mathring{\mathcal{S}}$.

# 凸组合和凸包

从凸集中可以引出凸组合和凸包的概念.

**定义**

凸组合　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k.$$

的点称为$x_1, \cdots, x_k$的凸组合.

**定义**

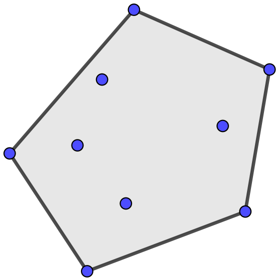
凸包　集合$\mathcal{S}$的所有点的凸组合构成的点集为$\mathcal{S}$的凸包, 记为$\mathbf{conv}\mathcal{S}$.

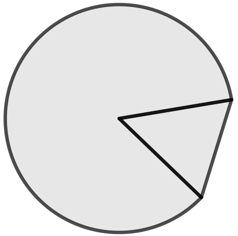
**定理**

凸集和凸包的关系　若$\mathbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, 则$\mathcal{S}$是凸集; 反之亦然.

上述定理并不显然, 请尝试证明.　(提示: 用数学归纳法)

例　在下图中我们列出了一些离散点集和连续点集的凸包. 其中, 左子图为离散点集的凸包, 右子图为扇形连续点集的凸包.





# conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集

**定理**

conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集.

Proof　由凸包的定义可知, $\mathcal{S} \in \textbf{conv}\mathcal{S}$, 并且conv$\mathcal{S}$是凸集.
若再设$\mathcal{X}$是另一凸集且满足$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{S}$, 下面我们需要证明只可能是$\mathcal{X} = \textbf{conv}\mathcal{S}$. 为证明此结论, 我们先证明一个重要的命题, 从而直接导出本定理的成立.

**定理**

对于任意向量集$\mathcal{S}$, conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的一切凸集的交集.

Proof　令$\mathcal{X}$表示包含$\mathcal{S}$的所有凸集的交集. 我们之前证明, 凸集的交是凸集, 因此$\mathcal{X}$是凸集. 因为conv$\mathcal{S}$是一个凸集且包含$\mathcal{S}$, 则$\mathcal{X} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{S}$.
另一方面, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, 因此$\textbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{X}$.
再由凸集和凸包的关系得到$\textbf{conv}\mathcal{X} = \mathcal{X}$, 得到$\textbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$.
综上有$\mathcal{X} = \textbf{conv}\mathcal{S}$.

# 仿射包

我们知道仿射集和凸集的定义很像，除了$\theta$的范围有所不同. 受此启发，从凸组合和凸包的定义中可以自然引出仿射组合和仿射包的概念.

**定义**

仿射组合　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, k.$$

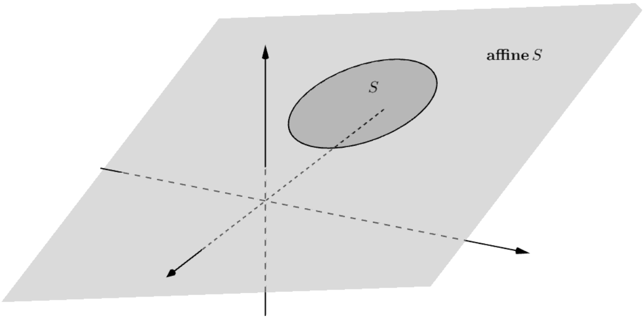
的点称为$x_1, \cdots, x_k$的仿射组合.

**定义**

仿射包　集合$\mathcal{S}$的所有点的仿射组合构成的点集为$\mathcal{S}$的仿射包，记为$\mathbf{affine}\mathcal{S}$.

# $\mathbb{R}^3$中仿射包的例子

**例** 下图为$\mathbb{R}^3$中圆盘$S$的仿射包示意图，可见仿射包直接将原集合拓展为了其所在的全平面.



# affine$S$是包含$S$的最小仿射集

类比凸包和凸集的关系，我们可以写出

**定理**

**affine**$S$是包含$S$的最小仿射集.

它的证明过程几乎和定理"**conv**$S$是包含$S$的最小凸集"的完全相同，请读者自行练习证明.

相比于凸组合和仿射组合，锥组合不要求系数的和为1，因此一般而言锥组合都是开放的.

**定义**

**锥组合**　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k, \theta_i > 0 (i = 1, \cdots, k).$$

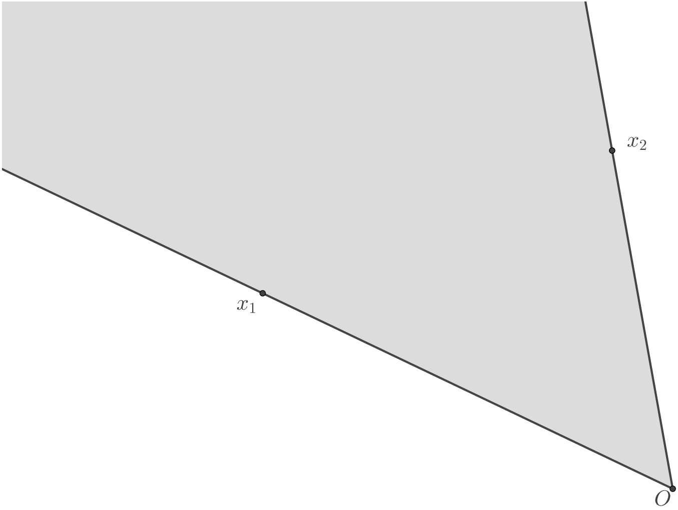
的点称为$x_1, \cdots, x_k$的锥组合.

**定义**

**凸锥**　若集合$S$中任意点的锥组合都在$S$中，则称$S$为凸锥.

# 凸锥的例

例　下图显示了$\mathbb{R}^2$中两点$x_1, x_2$的凸锥. 可见$\mathbb{R}^2$中若两点不与原点$O$共线, 则其形成的凸锥为一个半径无穷的圆的扇形部分.



# 提纲

# 超平面和半空间

**定义**

超平面　任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

$$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$$

的集合称为超平面.

**定义**

半空间　任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

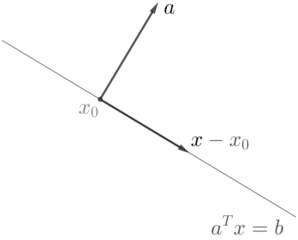
$$\{x|a^{\mathrm{T}}x \leqslant b\}$$

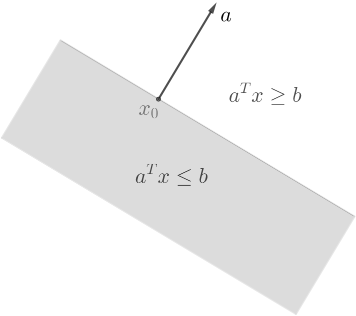
的集合称为半空间.

超平面是仿射集和凸集, 半空间是凸集但不是仿射集.

# 超平面和半空间的例

例　下图是$\mathbb{R}^2$中超平面和半空间的例子. 其中, 左子图为超平面, 其为一条直线; 右子图为半空间.



如下定义的球和椭球也是常见的凸集.

**定义**

**球** 设空间中到某一定点$x_c$(称为中心)的距离小于等于定值$r$(称为半径)的点的集合为(范数)球, 即

$$\mathrm{B}\left(x_c, r\right)=\left\{x \mid \left\|x-x_c\right\| \leqslant r\right\}=\left\{x_c+r u \mid \|u\| \leqslant 1\right\}.$$

一般而言, 我们使用$\|\cdot\|_2$度量距离, 即使用2-范数球.

**定义**

**椭球** 设形如

$$\left\{x \mid \left(x-x_c\right)^{\mathrm{T}} P^{-1}\left(x-x_c\right) \leqslant 1\right\}=\left\{x_c+A u \mid \|u\|_2 \leqslant 1\right\}$$

的集合为椭球, 其中$x_c$为椭球中心, $P$对称正定, 且$A$非奇异.

球和椭球的范围完全取决于$x$的范围，而锥的范围则同时取决于$x$和控制径$t$的范围.

**定义**

**范数锥** 形如

$$\{(x, t) \mid \|x\| \leqslant t\}$$

的集合为范数锥.

锥是凸集. 同时，使用$\|\cdot\|_2$度量距离的锥为二次锥，也称冰淇淋锥。

# 多面体

我们把满足线性等式和不等式组的点的集合称为多面体, 即

$$\{x|Ax \leqslant b, Cx = d\},$$

其中$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x \leqslant y$表示向量$x$的每个分量都小于等于$y$的对应分量.

多面体是有限个半空间和超平面的交, 因此由凸集的性质可知, 其为凸集.

# 单纯形

单纯形是一类特殊的多面体, 因此固然是凸集.
在优化领域有著名的"单纯形方法", 其原理即基于单纯形具有的性质.

**定义**

**单纯形** 在$\mathbb{R}^n$空间中选择$\{v_0, \cdots, v_k\}$共计$k+1$个点, 并要求向量线段$v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_{k-1}, v_0 - v_k$构成线性无关组, 则$\{v_0, \cdots, v_k\}$的凸包构成$k$-单纯形.

由于$\mathbb{R}^n$内最多可以有$n$个向量组成线性无关组, 因此上述定义满足$0 \leqslant k \leqslant n$. 这表明有限维向量空间内, 单纯形不能无限制地扩张; $\mathbb{R}^n$空间中最多存在$n$-单纯形.

例如, 0-单纯形就是点, 1-单纯形就是线段, 2-单纯形就是三角形面, 3-单纯形就是四面体(包括内部), 而4-单纯形是一个五胞体(包括内部). 上述支撑单纯形构建的点均成为单纯形的边界点.

# 特殊矩阵集合和(半)正定锥

我们介绍3类矩阵的集合.

**定义**

**对称矩阵集合** 记$\mathcal{S}^n$为$n \times n$对称矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | X^{\mathrm{T}} = X\right\}.$$

**定义**

**半正定矩阵集合** 记$\mathcal{S}_+^n$为$n \times n$半正定矩阵的集合, 即

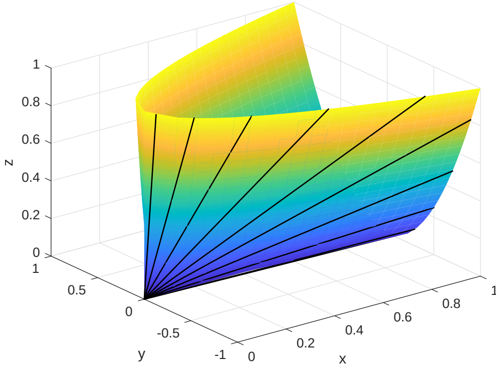
$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n | X \succeq 0\}.$$

**定义**

**正定矩阵集合** 记$\mathcal{S}_{++}^n$为$n \times n$正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}_{++}^n = \{X \in \mathcal{S}^n | X \succ 0\}.$$

我们一般称$\mathcal{S}_+^n$为半正定锥. 下图是二维半正定锥的几何形状.




由图可知, 二维半正定锥的实际范围是

$$\left\{(x,y,z)\,|x \geqslant 0, z \geqslant 0, xz \geqslant y^2\right\}.$$

这实际上可以由半正定矩阵的性质直接得到:

对于矩阵$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, 其特征值应全部大于等于0, 由此可推出

$$x \geqslant 0, z \geqslant 0, xz \geqslant y^2.$$

# 提纲

# 仿射变换的保凸性

在凸集的性质中，我们已经指出，凸集的数乘、加以及任意交所得的集合都是凸集. 因此，在证明一些复杂集合的凸性时，可以将该集合转化为某些较简单集合的交，而后判断简单集合的凸集.
我们现在指出，仿射变换(缩放、平移、投影等)也是保凸的.

**定理**

**仿射变换的保凸性** 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是仿射变换，即$f(x)=Ax+b$，$A\in\mathbb{R}^{m\times n},b\in\mathbb{R}^m$，则

- 凸集在$f$下的像是凸集：

$$S\subseteq\mathbb{R}^n\text{是凸集}\Rightarrow f(\mathcal{S})=\{f(x)|x\in\mathcal{S}\}\text{是凸集}.$$

- 凸集在$f$下的原像是凸集：

$$\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^m\text{是凸集}\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C})=\{x|f(x)\in\mathcal{C}\}\text{是凸集}.$$

# 仿射变换的保凸性

例 线性矩阵不等式的解集

$$\{x|x_1A_1+\cdots+x_mA_m\preceq B\}\,(A_i,i=1,\cdots,m,B\in\mathcal{S}^p)$$

是凸集. 这由仿射变换可以直接得到.

例 双曲锥

$$\left\{x|x^{\mathrm{T}}Px\leqslant\left(c^{\mathrm{T}}x\right)^2,c^{\mathrm{T}}x\geqslant 0,P\in\mathcal{S}_+^n\right\}$$

是凸集.

Proof: 双曲锥可以转化为二阶锥

$$\left\{x|\,\|Ax\|_2\leqslant c^{\mathrm{T}}x,c^{\mathrm{T}}x\geqslant 0,A^{\mathrm{T}}A=P\right\},$$

而二阶锥可由二次锥$\{(x,t)\,|\,\|x\|_2\leqslant t,t\geqslant 0\}$经过仿射变换得到, 因此二阶锥、二次锥均为凸集.

# 透视变换和分式线性变换的保凸性

我们特别说明某些非线性变换的保凸性.

**定理**

透视变换的保凸性　设有集合$\{(x,t)\,|x\in\mathbb{R}^n,t>0\}$, 其透视变换所得的集合为$\{\frac{x}{t}|x\in\mathbb{R}^n,t>0\}$. 这个集合也是凸集.

**定理**

分式线性变换的保凸性　若集合$X=\{x|x\in\mathbb{R}^n\}$是凸集, 则其分式线性变换

$$f(x)=\left\{\frac{Ax+b}{c^{\mathrm{T}}x+d}|x\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbb{R}^{m\times n},b\in\mathbb{R}^m,c\in\mathbb{R}^n,d\in\mathbb{R},c^{\mathrm{T}}x+d>0\right\}$$

也是凸集.

分式线性变换不是线性变换, 因此不能用仿射变换的保凸性解释其保凸性. 然而, 先利用仿射变换, 再利用透视变换, 可以证明上述变换的保凸性确实成立. 这也告诉我们, 保凸运算的复合仍然是保凸运算.

# 提纲

# 分离超平面定理

我们研究凸集，是因为凸集具有很好的性质. 之前我们举出过超平面的例子，超平面是空间中一类特殊的凸集(仿射集)，可以证明$\mathbb{R}^n$空间中的超平面恰好是$n-1$维的.

我们可以用超平面分离不相交的凸集.

**定理**

**分离超平面定理**　如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，则存在非零向量$a$和常数$b$，使得

$$a^{\mathrm{T}}x \leqslant b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

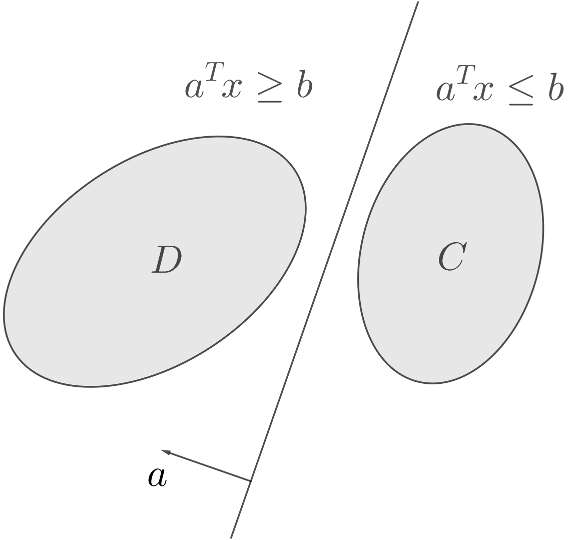
$$a^{\mathrm{T}}x \geqslant b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x | a^{\mathrm{T}}x = b\}$分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$.

超平面分离定理表明，如果要软划分$\mathbb{R}^n$中的2个凸集，则只需要求得一个适当的超平面即可. 这在分类问题中属于很容易解决的问题. 实际上，如果有任何一个集合不是凸集，则定理一般不成立，此时我们若要划分不同的集合，则一般需要使用更加复杂的平面.

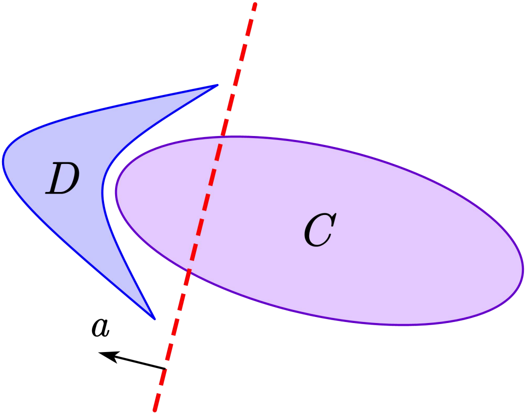
# 分离超平面的示意

**例** 下图是$\mathbb{R}^2$中的2个凸集, 我们使用超平面即可轻松划分.



# 分离超平面的示意

例　下图是$\mathbb{R}^2$中的2个集合，其中一个不为凸集. 我们无法使用超平面对其划分，而必须使用更加复杂的平面. 这就给划分问题带来了巨大的挑战.



# 严格分离定理

我们在超平面分离时提到了软划分的概念，其表明若集合仅是凸集，则定理中等号可能成立，即某一凸集与超平面相交(举例是简单的，请尝试一下). 很多时候我们进一步要求超平面与任何凸集都不交，为此我们需要加强定理的条件.

**定理**

**严格分离定理** 如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，且$\mathcal{C}$是闭集，$\mathcal{D}$是紧集，则存在非零向量$a$和常数$b$，使得

$$a^{\mathrm{T}}x < b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

$$a^{\mathrm{T}}x > b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x | a^{\mathrm{T}}x = b\}$严格分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$.

此定理的退化形式即$\mathcal{D}$退化为单点集$\{x_0\}$. 此时成立课本中的定理.

# 支撑超平面

上述严格分离定理的退化形式要求$x_0 \notin C$. 当点$x_0$恰好落在$C$的边界上时(此时不满足"不相交"的条件), 我们可以构造超平面.

**定义**

**支撑超平面** 给定集合$C$以及边界上的点$x_0$, 如果$a \neq 0$满足$a^{\mathrm{T}}x \leqslant a^{\mathrm{T}}x_0, \forall x \in C$, 那么称集合

$$\left\{x | a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}x_0\right\}$$

为$C$在边界点$x_0$处的支撑超平面.

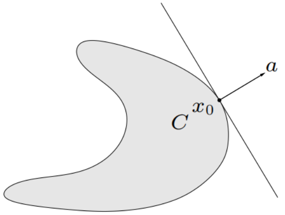
根据定义, 点$x_0$和集合$C$也被该超平面分开.
从集合上而言, 超平面$\left\{x | a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}x_0\right\}$与集合$C$在点$x_0$处相切, 并且半空间$\left\{x | a^{\mathrm{T}}x \leqslant a^{\mathrm{T}}x_0\right\}$包含$C$.

# 支撑超平面定理

注意根据凸集成立的分离超平面定理, 凸集上任何的边界点都满足支撑超平面存在的条件, 则对于凸集成立如下的定理.

**定理**

**支撑超平面定理** 若$C$是凸集, 则$C$的任意边界点处都存在支撑超平面.




支撑超平面定理有非常强的几何直观: 给定一个平面后, 可把凸集边界上的任意一点当成支撑点, 将凸集放在该平面上.

这也是凸集的特殊性质, 一般的集合甚至无法保证存在平面上的支撑点.

# 提纲

我们知道锥是凸集. 一个凸锥$K \subseteq \mathbb{R}^n$是适当锥, 当其还满足

- $K$是闭集;
- $K$是实心的, 即$\mathring{K} \neq \emptyset$;
- $K$是尖的, 即内部不含有直线: 若$x \in K, -x \in K$, 则一定有$x = 0$.

例　非负卦限$K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n\}$ 是适当锥.

例　半正定锥$K = \mathcal{S}^n_+$是适当锥.

例　$[0,1]$上的有限非负多项式

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \geqslant 0, \forall t \in [0,1]\right\}$$

是适当锥.

# 广义不等式

广义不等式是一种偏序(不必要保证所有对象都具有可比较性)关系，可以使用适当锥诱导.

**定义**

**广义不等式** 对于适当锥$K$, 定义偏序广义不等式为

$$x \preceq_K y \Longleftrightarrow y - x \in K,$$

严格偏序广义不等式为

$$x \prec_K y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbf{int} K.$$

**例** 坐标分量不等式($K = \mathbb{R}^n_+$)

$$x \preceq_{\mathbb{R}^n_+} y \Longleftrightarrow y_i \geqslant x_i.$$

**例** 矩阵不等式($K = \mathcal{S}^n_+$)

$$X \preceq_{\mathcal{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow Y - X\text{半正定}.$$

$\preceq_K$的诸多性质在$\mathbb{R}$中与$\leqslant$类似.

**定理**

广义不等式的性质　记$\preceq_K$是定义于适当锥$K$上的广义不等式, 则

- 自反性: $x \preceq_K x$;
- 反对称性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K x$, 则$x = y$;
- 传递性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K z$, 则$x \preceq_K z$;
- 可加性: 若$x \preceq_K y$且$u \preceq_K v$, 则$x + u \preceq_K y + v$;
- 非负缩放: 若$x \preceq_K y$且$\alpha \geqslant 0$, 则$\alpha x \preceq_K \alpha y$.

利用偏序关系和广义不等式的定义可以轻松证明上述性质.

# 对偶锥

设$K$是一个锥.

**定义**

**对偶锥** 令锥$K$为全空间$\omega$的子集, 则$K$的对偶锥为

$$K^* = \{y \in \omega | \langle x, y\rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}.$$

对偶锥是相对于锥$K$定义的, 因此我们知道锥的同时也可以求出对偶锥. 我们将对偶锥为自身的锥称为自对偶锥

例 $K = \mathbb{R}^n_+$的对偶锥是它本身, 因此是自对偶锥.

例(请自证) $K = \mathcal{S}^n_+$的对偶锥是它本身, 因此是自对偶锥.

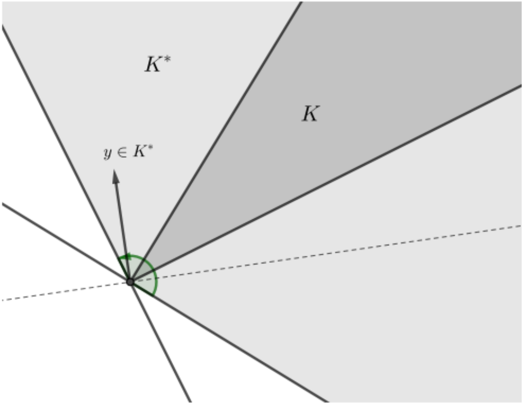
例(请自证) 锥$K = \left\{(x,t) \mid \|x\|_p \leqslant t, t > 0, p \geqslant 1\right\}$的对偶锥是

$$K^* = \left\{(x,t) \mid \|x\|_q \leqslant t, t > 0, q \geqslant 1, (p,q)\text{共轭}\right\}.$$

例 上例中二次锥的对偶锥是它本身, 因此是自对偶锥.

# 对偶锥

例　我们在下图中给出了一个$\mathbb{R}^2$平面上的一个例子. 图中深色区域表示锥$K$, 根据对偶锥的定义, $K^*$中的向量和$K$中所有向量夹角均为锐角或直角. 因此, 对偶锥$K^*$为图中的浅色区域.
注意, 在这个例子中, $K$也为$K^*$的一部分.



# 对偶锥的性质

下面我们简单列举对偶锥满足的性质，这是很重要的.

**定理**

对偶锥的性质 设$K$是一锥, $K^*$是其对偶锥, 则满足

- $K^*$是锥(哪怕$K$不是锥也成立);
- $K^*$始终是闭集, 且是凸集;
- 若$\mathring{K} \neq \oslash$, 则$K^*$是尖的, 即内部不含有直线;
- 若$K$是尖的, 则$\mathring{K^*} \neq \oslash$;
- 若$K$是适当锥, 则$K^*$是适当锥;
- (二次对偶)$K^{**}$是$K$的凸包. 特别, 若$K$是凸且闭的, 则$K^{**} = K$.

# 对偶锥诱导的广义不等式

既然适当锥的对偶锥仍是适当锥，则可以用适当锥$K$的对偶锥$K^*$也可以诱导广义不等式. 我们在下文简称其为"对偶广义不等式".

**定义**

**对偶广义不等式** 适当锥的对偶锥$K^*$可定义广义不等式

$$x \preceq_{K^*} y \Longleftrightarrow y - x \in K^*,$$

其满足性质:

- $x \preceq_K y \Longleftrightarrow \lambda^{\mathrm{T}} x \leqslant \lambda^{\mathrm{T}} y, \forall \lambda \succeq_{K^*} 0;$
- $y \succeq_{K^*} 0 \Longleftrightarrow y^{\mathrm{T}} x \geqslant 0, \forall x \succeq_K 0.$

使用对偶广义不等式的好处是，对偶锥始终是闭且凸的，并可将一个偏序问题转换为满足一个偏序条件的全序问题.