§3 辐角原理及其应用

1. 对数留数. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$. （因为 $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}[\ln f(z)]$

显然，函数 $f(z)$ 的零点和奇点都可能是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的奇点.

引理 6.4 (1) 设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶零点，则 a 必为 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点，并且 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=n$

(2) 设 b 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 b 必为函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点，并且 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=-m$.

定理 6.9 设 C 是一条周线，$f(z)$ 符合条件：(1) $f(z)$ 在 C 的内部是亚纯的；(2) $f(z)$ 在 C 上解析且不为零

则有 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(f,C) - P(f,C)$.

$N(f,C)$ 与 $P(f,C)$ 分别表示 $f(z)$ 在 C 内部的零点与极点个数.

2. 辐角原理

在定理 6.9 的条件下，$f(z)$ 在周线 C 内部的零点个数与极点个数之差，等于当 z 沿 C 之正方向绕行一周后 $\arg f(z)$ 的改变量 $\Delta_C \arg f(z)$ 除以 2π，即 $N(f,C) - P(f,C) = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$

若 $f(z)$ 在圆周 C 上及 C 内部均解析，且 $f(z)$ 在 C 上不为零，则 $N(f,C) = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$ 即无极点.

3. 鲁歇定理

设 C 是一条周线，函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 满足条件：

(1) 它们在 C 的内部均解析，且连续到 C.

(2) 在 C 上，$|f(z)| > |\varphi(z)|$

则函数 $f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在 C 的内部有同样多的零点，即 $N(f+\varphi, C) = N(f,C)$