§2、Caudy 积分定理（3 课时）

一、目的和要求

1、灵活运用 Caudy 积分定理（包括等价形式和两种退广形式）
2、理解并掌握复积分与路径无关的条件，不定积分与原函数定理
3、掌握多联通区域内的变上限积分所表示的多值解析函数

二、重难点

1、重点
Caudy 积分定理、不定积分与原函数
2、难点
定理的灵活运用，易混淆.

三、教法

以实例说明说明定理的应用，采用启发式的课堂讲授法.

四、教学手段

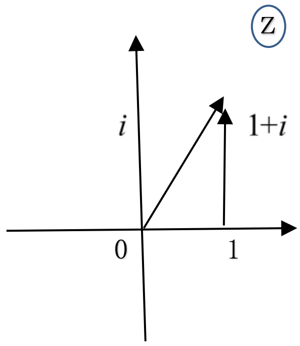
电教、CAI 演示

（一）、引例（过渡）

已知 $f(z)=z$ 在 C 上处处解析，而 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 于 Z 平面内却处处连续、不解析，下面讨论沿不同路径 $f(z)$ 的积分

引例 计算积分 $\int_{c}\operatorname{Re} z dz$ 其中积分路径为

（1）连接由点 0 到 1+i 的直线段；连接由 0 到点 1 的直线段及连接由点 1 到点 1+i 的直线段所组成的折线



解 （1）连接 0 及 1+i 的直线段的参数方程为：

$$z=0+t(1+i-0)=t(1+i),0\le t\le 1$$

故

$$\int_{c}\operatorname{Re} z dz=\int_{0}^{1}\left\{\operatorname{Re}\left[(1+i)t\right]\right\}(1+i)dt=(1+i)\int_{0}^{1}dt=\frac{1+i}{2}$$

（2）连接 0 与 1 的直线段的参数方程为

$$z=t,\quad (0\le t\le 1)$$

连接点 1 与 1+i 的直线段的参数方程为

$$z=(1-t)+(1+i)t=1+it,(0\le t\le 1)$$

故

$$\int_{c}\operatorname{Re} z dz=\int_{0}^{1}\operatorname{Re} t dt+\int_{0}^{1}\operatorname{Re}(1+it)idt=\int_{0}^{1}tdt+i\int_{0}^{1}dt=\frac{1}{2}+i=\frac{1+i}{2}$$

易见：积分路径不同，结果亦不同.

对比上节课的例 3.1 $f(z)=z$ 在 Z 平面（单联通区域）内处处解析，它连接起点 a 及终点 b 的任何路径 C 的积分值却相同，而重要积分中 $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$ 只以 z=a 为奇点，在 Z 平

面除去一点 a 的单连通区域处处解析，但积分$\int_c \frac{dz}{z-a}=2\pi i \neq 0$

由以上分析易见：复积分值与路径无关或沿路径内任何闭区域积分值为 0 的条件，可能与被积分函数的解析性及解析区域的单连通性有关.

（二）、Caudy 积分定理及等价形式

定理 3.3（Caudy 积分定理）

设 $f(z)$ 在 Z 平面上单连通区域 D 内解析，C 为 D 内任一条周线，则 $\int_c f(z)dz=0$

注：该定理是整个复变函数论的基础，它是研究复变函数的钥匙，1851 年 Rieman 在附加“$f(z)$ 在 D 内连续”的条件下，利用 C－R 条件给出了简单证明，1900 年古莎给出严格证明（略），它和下面定理等价

定理 $3.3'$　设 C 是一条周线，D 为 C 之内部，$f(z)$ 在闭区域 $\bar{D}=D+C$ 上解析，则

$$\int_c f(z)dz=0$$

证　定理 3.3 $\Rightarrow$ 定理 $3.3'$

由定理 $3.3'$ 的假设，$f(z)$ 在 Z 平面上一含 $\bar{D}$ 的单连通区域 G 内解析，据定理 3.3, 由

$$\int_c f(z)dz=0$$

定理 $3.3'$ $\Rightarrow$ 定理 3.3

由定理 3.3 的假设：“$f(z)$ 在单连通区域 D 内解析 C 为 D 内任一条周线”，含设 G 为 C 之内部，则 $f(z)$ 必为闭域 $\bar{G}=G+C$ 上解析，由定理 $3.3'$ 有 $\int_c f(z)dz=0$

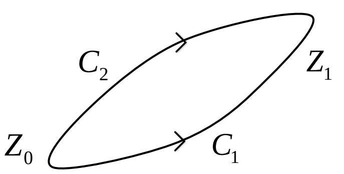
由 C auchy 积分定理易得：

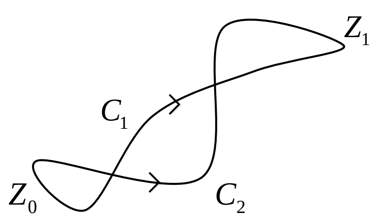
定理 3.4　设 $f(z)$ 在 Z 平面上的单连通区域 D 内解析，C 为任一闭曲线（未必简单），则

$$\int_c f(z)dz=0$$

证　因 C 总可以看成区域 D 内有限多条围线衔接而成，由复积分关于积分路径的可加性及定理 3.3，易得定理 3.4.

结论 3.5　设 $f(z)$ 在 Z 平面上单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内积分与路径无关，即对 D 内任意两点 Z_0 与 Z_1，积分 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ 之值，不依赖于 D 内连接起点 Z_0 与终点 Z_1 的曲线





证 设C_1与C_2是D内连接起点Z_0与终点Z_1的任意两条曲线（如上图），则正方向曲线C_1与负方向曲线C_2^-就衔接成D内的一条闭曲线C，于是由定理3.4与复积分的基本性质

$$0=\int_{c} f(z)dz=\int_{c_1} f(z)dz+\int_{c_2^-} f(z)dz$$

故

$$\int_{c_1} f(z)dz=\int_{c_2} f(z)dz$$

例1　计算

（1）$\int_{|z|=1} z^2 \sin z dz$　　　（2）$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \ln(1+z)dz$

解　（1）因$z^2 \sin z$在整个Z平面上解析，由定理3.3得：

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin z dz=0$$

（2）因$\ln(1+z)$的支点为z=-1和∞，则$\ln(1+z)$在$|z| \leq \frac{1}{2}$上解析，由定理$3.3'$知

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \ln(1+z)dz=0$$

例2　求$\int_{c} \frac{\cos z}{z+i}dz$，其中C为圆周$|z+3i|=1$

解　圆周C：$|z-(-3i)|=1$，被积函数的奇点为-i在C的外部，于是$\frac{\cos z}{z+i}$在以C为边界的闭圆$|z+3i| \leq 1$上解析，据定理$3.3'$，知：

$$\int_{c} \frac{\cos z}{z+i}dz=0$$

（三）、不定积分与原函数

定理3.3　已经解决了积分与路径无关的问题，即若在单连通区域D内$f(z)$解析，沿D内任一曲线L的积分$\int_{L} f(z)dz$只与起点和终点有关，故当Z_0固定，该积分就在D内定义了一个变上限Z的单值函数，记成

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi(\text{定点}z_{0,}\text{动点}z \in D)$$

在D内解析，且$F'(z)=f(z)$

证　$\forall z \in D, F'(z)=f(z)$，据z的任意性即可以z为心作一个含于D内的小圆，在小圆内取动点$z+\Delta z(\Delta z \neq 0)$，考虑在$\Delta z \to 0$时的极限

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi\right]$$

因积分与路径无关，$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$ 的积分路径，可以考虑为由 z_0 到 z，再从 z 沿直线段到 $z+\Delta z$，而由 z_0 到 z 的积分路径取得和 $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ 的积分路径相同，于是就有：

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

因 $f(z)$ 是与积分变量无关的定值，且

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi=f(z)$$

故有

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\xi)-f(z)\right]d\xi$$

据 $f(z)$ 在 D 内的连续性，对于 $\forall\varepsilon>0$，只要开始取的那个小圆足够小，则小圆内一切点均符合条件，$\left|f(\xi)-f(z)\right|<\varepsilon$，据定理 3. 2 有：

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\xi)-f(z)\right]d\xi\right|\le\varepsilon\left|\frac{\Delta z}{\Delta z}\right|=\varepsilon$$

即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

即

$$F'(z)=f(z),(z\in D)$$

分析以上的证明我们实际上已经证明了一个更一般的定理

定理 3.7 （1）设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续；

（2）$\int f(\xi)d\xi$ 沿区域 D 内任一周线的积分值为 0，则函数：

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi,(z_0\in D\text{为固定点})$$

在 D 内解析，且

$$F'(z)=f(z),(z\in D)$$

原函数 在区域 D 内，若 $f(z)$ 连续，则符合条件 $\phi'(z)=f(z),(z\in D)$ 的函数

$\phi(\mathrm{z})$为 $f(\mathrm{z})$的一个不定积分或原函数（显然$\phi(\mathrm{z})$必在 D 内解析）；

例 （1）定理 3.6 及定理 3.7 条件下的$\mathrm{F}(\mathrm{z})=\int_{\mathrm{z}_0}^{\mathrm{z}} f(\xi)d\xi$

（2） $f(z)$的任一原函数$\phi(\mathrm{z})=\int_{\mathrm{z}_0}^{\mathrm{z}} f(\xi)d\xi+C,(C$为任意常数）

定理 3.8 在定理 3.6 或定理 3.7 的条件下，若$\phi(\mathrm{z})$为 $f(\mathrm{z})$在单连通区域 D 内任意一个原函数，则：

$$\int_{\mathrm{z}_0}^{\mathrm{z}} f(\xi)d\xi=\phi(\mathrm{z})-\phi(\mathrm{z}_0)\text{（}z,z_0\in D)$$

例 3 在单连通区域 D：$-\pi<\arg z<\pi$ 内函数$\ln z$是$f(z)=\dfrac{1}{z}$的一个原函数，而 $f(z)=\dfrac{1}{z}$在 D 内解析，故由定理 3.8，有：

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi}=\ln z-\ln 1=\ln z,(z\in D)$$

（四）、Cauchy 积分定理的两种推广

定理 3.9 设 C 是一条围线，D 为 C 之内部 $f(z)$在 D 内解析，在 $\bar{\mathrm{D}}=\mathrm{D}+\mathrm{C}$ 上连续（也可以说“连续到 C”），则：$\int_{\mathrm{c}} f(z)dz=0$

证明思路 $f(z)$沿 C 连续$\Rightarrow\int_{\mathrm{c}} f(z)dz$ 存在，在 C 的内部作围线C_n逼近于 C，据定理 3.5 知$\int_{\mathrm{c}_\mathrm{n}} f(z)dz=0$，通过取极限得出结论.

例 4 计算（1）$\int_{|z-1|=1}\sqrt{z}dz$，其中$\sqrt{\mathrm{z}}$取$\sqrt{1}=-1$的那一支

（2）$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{dz}{z(z+1)}$

解 （1）因$\sqrt{\mathrm{z}}$的支点为 0 与∞点，其单值分支 $f(z)=\sqrt{\mathrm{z}}$ （$\sqrt{1}=-1$）在$|z-1|<1$内解析， $f(z)$ 在内连续，由推广的 Cauchy 积分定理可得：

$$\int_{|z-1|=1}\sqrt{z}dz=0,\left(\sqrt{1}=-1\right)$$

（2）$I=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}\right)dz=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z}dz-\int_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z+1}dz=2\pi i-0=2\pi i$

例 5 求$\int_\alpha^\beta zdz$及$\int_\alpha^\beta \cos zdz$

解　因 Z 及 cosz 在 Z 平面上解析且 $\left(\frac{1}{2}z^2\right)'=z$，故

$$\int_\alpha^\beta zdz=\frac{1}{2}z^2\Big|_\alpha^\beta=\frac{1}{2}\left(\beta^2-\alpha^2\right)$$

同理可得 $(\sin z)'=\cos z$，故

$$\int_\alpha^\beta \cos zdz=\sin z\Big|_\alpha^\beta=\sin\beta-\sin\alpha$$

1、推广到复周线的情形

（1）复周线的定义

考虑 n+1 条围线 $C_0,C_1,\cdots C_n$，其中 $C_1,C_2,\cdots C_n$，中每一条都在其余各条的外部，它们又全部在 C_0 的内部，在 C_0 的内部又同时在 $C_1,C_2,\cdots C_n$ 外部的点集构成一个有界的 n+1 连通区域 D，以 $C_0,C_1,\cdots C_n$ 为它的边界，在这种情况下，我们称区域 D 的边界是一条复周线：

$$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$$

它包括取正方向的 C_0 及取负方向的 $C_1,C_2,\cdots C_n$

定理 3.10　设 D 是由复周线 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 所围成的有界多连通区域，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$=D+C 上连续，则

$$\int_c f(z)dz=0$$

或写成

$$\int_{c_0} f(z)dz+\int_{c_1^-} f(z)dz+\cdots+\int_{c_n^-} f(z)dz=0$$

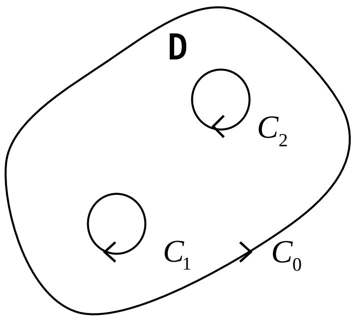
或写成

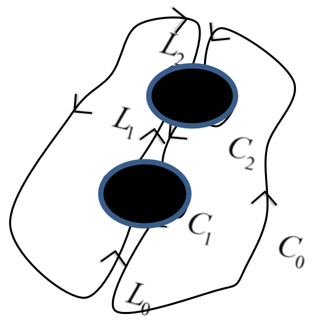
$$\int_{c_0} f(z)dz=\int_{c_1^-} f(z)dz+\cdots+\int_{c_n^-} f(z)dz$$

（沿外界的积分等于沿内边界积分之和）

注　1、定理 3.10 中的复周线换成单周线就是定理 3.9

2、定理 3.9 的条件“C 为一条周线”还可以减弱成“C 是一条可求长简单闭曲线”





证　取 n+1 条互不相交且全 D 内（端点除外）的光滑弧 $L_0,L_1,L_2,\cdots L_n$ 作为割线，设想将 D 沿割线割破，于是 D 就被分成两个单连通区域（如图 n=2 时），其边界各是一条围线，分别记为 $\Gamma_{1,}$，Γ_2 由定理 3.9 可得：

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

将这两式相加，并注意到沿着 $L_0,L_1,L_2,\cdots L_n$ 的积分，各从相反的方向取了一次，在相加的过程中互相抵消，由复积分的基本性质即得：

$$\int_c f(z)dz=0$$

例 6　设 a 为周线 C 内部一点，则

$$\int_c \frac{\mathrm{dz}}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i(n=1) \\ 0(1\neq n\in z) \end{cases}$$

证　以 a 为圆心画圆周 $\mathrm{C}'\subset \mathrm{I(C)}$，则由定理 3.10

$$\int_c \frac{\mathrm{dz}}{(z-a)^n} = \int_{c'} \frac{\mathrm{dz}}{(z-a)^n}$$

再利用重要积分即得.

例 7　设 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathrm{G}\subset\mathrm{I(C)}$ 内解析，（可能除掉某点 $z_0\in G$，又 $|f(z)|$ 在 Z 附近有界，则对于 G 内的任何包围 z_0 的周线 γ，$\int_\gamma f(z)dz=0$

证：对 $\forall\varepsilon>0$, 让 γ_ε 表 G 内以 z_0 为中心的，ε 为半径的圆周，在 z_0 的附近设 $|f(z)|\le M$，由定理 3.10

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_e} f(z)dz$$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma_e} f(z)dz\right| \le M\bullet 2\pi\varepsilon$$

由于ε的任意小，故$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$

注 z_0为$f(z)$的可去奇点，即可使$f(z)$在单连通区域 G 内解析，故有本题结论.

例 8 计算下列积分

（1）$\int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{dz}{z(3z+1)}$ （2）$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(3z+1)}$

分析 被积函数$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{z(3z+1)}$在 C 上共有两个奇点$z=0$和$z=-\frac{1}{3}$

（1） 将 F（z)分成两项后就简化成各有一个奇点

（2） 在$|z|=1$内作一充分小圆周，将两奇点挖去，新区域的边界就构成了一个复围线，应用定理 3.10

解 显然：$\frac{1}{z(3z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3z+1}$

（1）$\int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{dz}{z(3z+1)} = \int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{dz}{z} - \int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{3dz}{3\left[z-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]} = 2\pi\mathrm{i}-0 = 2\pi i$

（$z=-\frac{1}{3}$在$|z|=\frac{1}{6}$外部，$\frac{1}{z+\frac{1}{3}}$在$|z|\le\frac{1}{6}$上解析）

（3） 任作以$z=0$和$z=-\frac{1}{3}$为心，充分小半径$\mathrm{r}<\frac{1}{6}$的圆周

$$\Gamma_1: |z| = r \text{及} \Gamma_2: \left|z-\left(-\frac{1}{3}\right)\right| = r$$

将一奇点挖去，新边界构成复围线$C+\Gamma_1^- + \Gamma_2^-$（$C$表示$|z|=1$），由定理 3.10 可知：

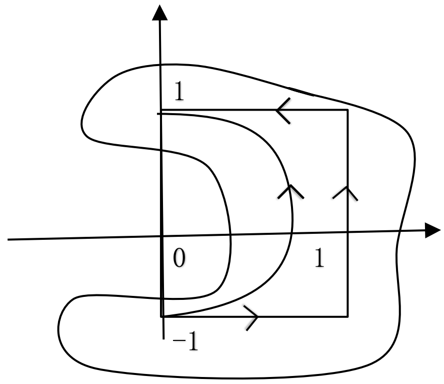
$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(3z+1)} = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{dz}{z(3z+1)}$$

$$= \int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{dz}}{z(3z+1)} + \int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{dz}}{z(3z+1)}$$

$$= \int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{dz}}{z} - \int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{dz}}{z-\left(-\frac{1}{3}\right)} + \int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{dz}}{z} - \int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{dz}}{z-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\int_{\Gamma_1}\frac{\mathrm{dz}}{z}-\int_{\Gamma_1}\frac{3\mathrm{dz}}{3z+1}+\int_{\Gamma_2}\frac{\mathrm{dz}}{z}-\int_{\Gamma_2}\frac{3\mathrm{dz}}{3z+1}$$
$$=2\pi i-0+0-2\pi i$$
$$=0$$

例 9 计算积分$\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z}$，积分路径为顶点是（0，-1），（1，-1），（1,1），（0，1）的四边形的边



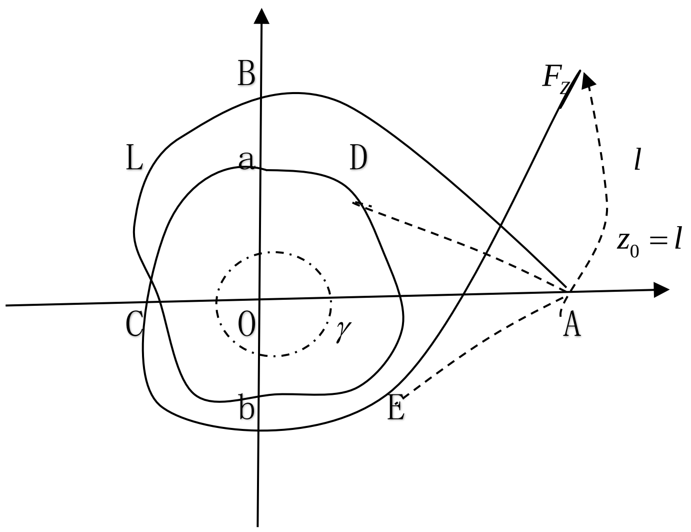
分析 若沿体一提一个单连通区域出的路径计算积分将十分繁重，但是存在一个单连通区域 D（如图），被积函数 $f\left(z\right)=\frac{1}{z}$ 在 D 内解析，并且包含-i 和 i 在 D 内积分就与路径无关，因此我们就可沿另外的路径，计算此积分，为从前取位于原点右边连接 i 和 i 的单位半圆周.

证 设 $z=e^{i\theta}$，则 $\frac{1}{\mathrm{z}}=e^{i\theta}$，$d\theta=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow\int_{-i}^{i}\frac{1}{\mathrm{z}}dz=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi i$

注 D 不包含原点，故不允许我们用位于原点左边的单位圆周来代替给定路径的，（事实上，该半圆上，$\int_{-i}^{i}\frac{1}{\mathrm{z}}dz=i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=-\pi i$）因此，必须确实使给定的路径与实际选作计算的路径都处于被积函数的解析区域内，并且该区域必须是单连通的.

3、多连通区域内的变上限积分一般表示多值解析函数（如教材的例 3.9）

$$\int_{1}^{z}\frac{d\xi}{\xi}=\mathrm{L}nz=\ln z+2\pi i\text{（}z\in G,z\neq 0,n\in Z\text{）}$$



其中积分路径 L 是不经过原点，且连接 $z_0=1$和z 的任意逐段光滑曲线.

注 多连通区域内变上限积分，也有表示单值解析函数的

如 $\int_1^z \frac{d\xi}{\xi^2}\left(z\in G, z\neq 0,\infty\right)$

G 为二连通区域，积分路径 L 为不过原点且连接点 $z_0=1$和z 的任意逐段光滑曲线

(1)当 L 不围绕原点 z=0，被积函数 $\frac{1}{z^2}$ 在包含 L 但不包含原点 z=0 的一个单连通区域 D 内单值解析，从而由定理 3.8

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi^2}=-\frac{1}{3}\bigg|\begin{matrix}z\\1\end{matrix}=-\frac{1}{z}+1\left(z\in D\right)$$

(2)设 r 是在 G 内的一条围线，原点在 D 内部，当 z 沿着 r 的方向绕行一周时，$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi^2}$ 有增量

$$\int_r \frac{1}{\xi^2}d\xi=0$$

(3)由（1）和（2）的结果，并参看图（P_{115}，图 11）知

$$\int_1^z \frac{1}{\xi^2}\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{z}+1\left(z\in \mathrm{G}\right)$$

这就是 Z 的单值解析函数.

五、小结

1、Cauchy 积分定理（三种形式）

2、不定积分与原函数

六、作业

P_{142}. 4

七、补充及预习要求

1、问对什么样的围线 C 有：$\int_c \frac{dz}{z^2+z+1}=0$

解 $z^2+z+1=0$ 的两根，$z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，仅当围线 C 为如下两种情形时积分才可能为零

（1） z_1,z_2 全为 C 的外部，此时由 Cauchy 积分定理得知，积分为 0.

（2） z_1,z_2 为 C 的内部时，则用

方法 1 $\int_c \frac{dz}{z^2+z+1}=\frac{1}{z_1-z_2}\int_c\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)dz=\frac{1}{z_1-z_2}\left[2\pi i-2\pi i\right]=0$

方法 2 设 $f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$

因为

$$\int_c f(z)dz+\int_{c^-} f(z)=0$$

故

$$\int_c f(z)dz=-\int_{c^-} f(z)dz=-2\pi i(-C_{-1})=0$$

因为∞为$f(z)$的二级零点，导致$C_{-1}=0$，“C 的另外两种情形积分就不为零”（自证）

2、预习要求：预习并回答以下问题

（1）在 R 中，Lioullie 定理是否成立？举例说明.

（2）$f(z)$在区域 D 内解析的充要条件有几个？（列举说明）

八、后记

1.参考文献【1】,【3】,【6】