Homework 03

Name:Limingwei ID:3190106234

1.

(a)

容易分析，电子受电场力大小

$$F_e = |q|E$$

方向向上。
通过长度为L的平行板电容器所需时间

$$t = \frac{L}{v}$$

在t时间内，电子向上移动的距离

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2$$

y方向牛顿第二定律容易得到：

$$qE = ma \Rightarrow a = \frac{|q|E}{m}$$

由此容易得到在y方向的偏移

$$\Delta y = \frac{|q|EL^2}{2mv}$$

(b)

当磁感应强度为B时, 电子所受洛伦兹力大小

$$F_B = B|q|v$$

若刚好没有偏转，则$F_B = F_e$
即有：

$$B|q|v = |q|E \Rightarrow E = Bv(*)$$

由(a)中的结论

$$\Delta y = \frac{|q|EL^2}{2mv} \Rightarrow \frac{|q|}{m} = \frac{2\Delta yv}{EL^2}$$

利用$(*)$式容易消去v得到：

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2\Delta yE}{B^2L^2}$$

2.

(a)

$$\vec{\tau} = i\vec{L_2} \times (\vec{L_3} \times \vec{B}) = i\vec{L_3}(\vec{L_2} \cdot \vec{B}) - i\vec{B}(\vec{L_2} \cdot \vec{L_3})$$

注意到$\vec{L_2}$ and $\vec{L_3}$ is perpendicular，则有

$$\vec{L_2} \cdot \vec{L_3} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{\tau} = i\vec{L_3}(\vec{L_2} \cdot \vec{B}) = i\vec{L_3}\|\vec{B}\|\|\vec{L_2}\|\cos\theta = i\|\vec{B}\|\|\vec{L_2}\|\|\vec{L_3}\|\cos\theta = i\vec{A} \times \vec{B}$$

其中$\vec{A} = ab\hat{n}, a, b$为矩形边框的两条边长

(b)

事实上，对于一个任意形状的平面线圈，任取其中一小段面积为$\|\vec{dA}\|$的小矩形，它所受到的力矩
$\vec{d\tau} = i\vec{dA} \times \vec{B} = i\|\vec{B}\|\sin\theta\hat{n}dA$
因而对于面积存在（为A）的线圈，总存在$A = \iint dxdy = \int dA$
因而

$$\vec{\tau} = \int d\tau = i\|\vec{B}\|\sin\theta\hat{n}dA = i\|\vec{B}\|\sin\theta A\hat{n} = i\vec{A}\times\vec{B}$$

3.

从图b容易看出，当$x_1 = 4cm$时，F_2恰好为0，而

$$I_1 : I_3 = 0.750A : 0.250A = 3:1$$

通过电流I的长直导线在其周围距离r处产生的磁感应强度B的大小：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以容易知道

$$d : x_1 = I_3 : I_1 = 3:1 \Rightarrow d = 3x_1 = x_s = 12cm$$

所以在wire 2处磁感应强度

$$B_{wire2}(x) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} + \frac{\mu_0 I_3}{2\pi x}$$

当$x \to +\infty$时$B_{wire2} \to -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = 1.25\times 10^{-6}T$
因而此时wire 2单位长度所受安培力

$$F_2/L = B_{wire2}I_2 = -0.627\mu N/m \Rightarrow I_2 = 0.5016A$$

4.

由安培环路定理知道：

$$\int_L \vec{B}\cdot d\vec{L} = \mu_0\sum I$$

所以有

$$B_{center} = \frac{\mu_0 i_{wire}}{2\pi(3R)} = \frac{\mu_0 i_{wire}}{6\pi R}$$

所以说$B_p = B_{center}$，则电流方向一定是垂直指向纸面向内的

$$B_P = B_{P,wire} - B_{P,pipe} = \frac{\mu_0 i_{wire}}{2\pi R} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(2R)}$$

令两者大小相等方向相反，则：

(a)

$$i_{wire} = \frac{3}{8}i = 3mA$$

(b)

由右手螺旋定则容易判断，电流方向垂直纸面向内

5.

通电螺线管的磁感应强度：

$$B = \mu_0 nI = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

则

$$F_B = qBv\sin\theta = \frac{qBv}{2}$$

牛二：

$$\frac{Bqv}{2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{2mv}{Bq}$$

旋转一圈的周期

$$T = \frac{2\pi m}{Bq}$$

而沿着轴线方向的速度

$$v_{\parallel} = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

于是

$$t = \frac{L}{\frac{\sqrt{3}}{2}v} = \frac{2L}{\sqrt{3}v}$$

旋转圈数

$$N_{roll} = \frac{t}{T} = \frac{BqL}{\sqrt{3}v\pi m}$$

代入$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$
得到

$$N_{roll} = \frac{\mu_0 NI}{L}\frac{qL}{\sqrt{3}v\pi m} = \frac{\mu_0 NIq}{\sqrt{3}\pi vm} = 1.6 \times 10^6$$

6.

磁偶极矩

$$\vec{\mu} = \sum i\vec{A}$$

所以

$$\mu = Ni * \pi d^2 = 2.36A \cdot m^2$$

当$d \ll z$注意到电偶极矩产生的磁场

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{z^3} = 5.0\mu T = 5.0 \times 10^{-6}T$$

则

$$z = 0.46m = 46cm$$

7.

铜的自由电子密度为$n = 8.5 \times 10^{28} m^{-3}$。铜在室温下的电阻率$\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$。在金属的经典理论中，估计铜中电子的平均自由程$l$，以米为单位？
设mean free time为τ,则每个电子的加速度

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

电子的平均漂移速度

$$\vec{v_d} = \vec{a}\tau = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

注意到电流密度

$$\vec{J} = -ne\vec{v_d} \Rightarrow \vec{v_d} = -\frac{J}{ne} = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$$

注意到

$$\vec{J} = \rho\vec{E}$$

则有

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

由热力学的知识我们知道

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

所以平均自由程

$$\lambda = \bar{v}\tau = \frac{m}{ne^2\rho}\sqrt{\frac{3kT}{m}} = 3 \times 10^{-9} m$$

其中T按照室温为$293K$计算

8.

霍尔效应达到平衡的时候满足：

$$B_z q v_y = q E_y$$

$$I = neSv_y = neL_yL_zv_y$$

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho L_x}{L_yL_z}$$

$$V_x = IR$$

$$E_y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\kappa\varepsilon_0}$$

则总共的载流子数目

$$N_{total} = nL_xL_yL_z$$

参与产生霍尔电场的载流子数目

$$N_{Hall} = \sigma_0 L_xL_z = \kappa\varepsilon_0 E_y L_xL_z = \kappa\varepsilon_0 B_z \cdot \frac{V_x}{\rho neL_x} L_xL_z = \frac{\kappa\varepsilon_0 B_z V_x L_z}{\rho ne}$$

所以

$$\frac{N_{Hall}}{N_{total}} = \frac{\kappa\varepsilon_0 B_z V_x}{\rho n^2 e L_x L_y}$$

代入$\kappa = 1$可以计算得到

$$\frac{N_{Hall}}{N_{total}} = 5.52 \times 10^{-32}$$

代入$\boldsymbol{\kappa} = 12$可以计算得到

$$\frac{N_{Hall}}{N_{total}} = 6.63 \times 10^{-31}$$