Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date 2022 / 5 / 10

1. SO(3) Special Orthogonal Group.

$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid R \times R^T = I \mid det(R) = 1\}$

特殊正交群

2. SE(3) Special Euclidean Group

$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} \mid R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\}$

特殊欧式群

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 群 (Group) $(A, \cdot)$

群是一种集合A加一种运算·组成的结构。

① 封闭性: $\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \cdot a_2 \in A$.

② 结合律: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A,\ (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)$

③ 幺元: $\exists a_0 \in A$, s.t. $\forall a \in A,\ a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a$.

④. 逆: $\forall a \in A,\ \exists a^{-1} \in A$, s.t. $a \cdot a^{-1} = a_0$. 此处 a_0 为单位元.

旋转矩阵集合与矩阵乘法构成群, SO(n)

变换矩阵集合与矩阵乘法构成群。SE(n)

Memo No.
Date / /

4.1 李群是连续(光滑)的群.

Lie Group: $(G, \circ)$, 运算符$\circ$对元素 $X, Y, Z \in G$:

封闭性: $X \circ Y \in G$

结合律: $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$

幺元: $\varepsilon \circ X = X \circ \varepsilon = X$.

逆元: $X^{-1} \circ X = X \circ X^{-1} = \varepsilon$.

ε为单位元.

4.2 从李群引出李代数. Rotation matrix: $R(t)$.

$$R(t) \cdot R(t)^T = I.$$

$$\dot{R}(t) R(t)^T + R(t) \cdot \dot{R}(t)^T = 0$$

$$\dot{R}(t) \cdot R(t)^T = -(\dot{R}(t) \cdot R(t)^T)^T$$

So, $\dot{R}(t) \cdot R(t)^T$ 是反对称矩阵.

$$a = [a_1, a_2, a_3]^T$$

$$a^\wedge = A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\phi(t) \in \mathbb{R}^3$. 三维向量 $\phi(t)$ 来与 $\dot{R}(t) \cdot R(t)^T$ 对应:

$$\dot{R}(t) \cdot R(t)^T = \phi(t)^\wedge$$

$$\dot{R}(t) = \phi(t)^\wedge \cdot R(t)$$

对旋转矩阵求导, 只需左乘一个 $\phi(t)^\wedge$ 即可.

Memo No. ____

Date / /

Taylor Expansion: $R(t)$, $t_0=0$, $R(0)=I$:

$$R(t) \approx R(t_0) + \dot{R}(t_0)(t-t_0)$$
$$= I + \dot{R}(t_0)\cdot t$$
$$= I + \phi^\wedge(t_0) R(t_0)\cdot t$$
$$= I + \phi^\wedge(t_0)\cdot t.$$

$\because \phi(t_0) = \phi_0$

$$\therefore \quad \dot{R}(t) = \phi(t_0)^\wedge \cdot R(t)$$
$$\dot{R}(t) = \phi_0^\wedge \cdot R(t)$$
$$\Rightarrow \quad R(t) = e^{\phi_0^\wedge \cdot t}$$
$$\dot{R}(t) = (\phi_0^\wedge t)' e^{\phi_0^\wedge \cdot t}$$
$$= \phi_0^\wedge \cdot R(t).$$

ϕ 反应了R的导数的性质，ϕ在 $SO(3)$ 原点附近的正切空间（Tangent Space）上。式子只在t附近有效。

※ ϕ 是 $SO(3)$ 对应的特殊正交群的李代数 $so(3)$。

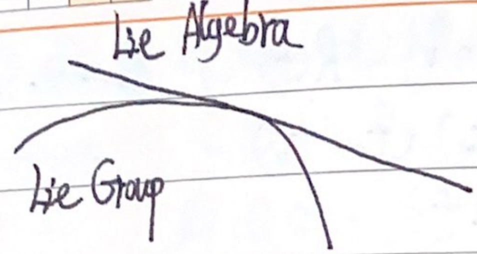
※ 李代数是李群在幺元处的正切空间。

（单位元）

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /



Definition: A Lie group is a smooth manifold that is also a group, such that the group operations multiplication and inversion are smooth maps.

Definition: The tangent space to a Lie group at the identity element is called the associated Lie algebra.

5. 李代数由一个集合 V、一个数域 F 和一个二元运算 $[,]$ 组成，如果满足以下几条性质，称 g 是域 F 上的李代数。$(V, F, [,])$.

1. 封闭性：$\forall X\ Y \in V,\ [X, Y] \in V$.

2. 双线性：
$$[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$$
$$[X, cY_1 + dY_2] = c[X, Y_1] + d[X, Y_2].$$

3. 自反性 $[X, X] = 0$.

4. 雅可比等价：
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

其中二元运算 [,] 被称为李括号 (Lie Bracket)
李括号表达了两个元素之间的差异。
三维向量 $\mathbb{R}^3$ 上定义的叉积 $\times$ 是一种李括号.

李代数 $so(3)=\{\phi\in\mathbb{R}^3,\ \Phi=\phi^\wedge\in\mathbb{R}^{3\times3}\}$.

其中: $\Phi=\phi^\wedge=\begin{bmatrix}0 & -\phi_3 & \phi_2\\ \phi_3 & 0 & -\phi_1\\ -\phi_2 & \phi_1 & 0\end{bmatrix}$

李括号: $[\phi_1,\phi_2]=(\Phi_1\Phi_2-\Phi_2\Phi_1)^\vee$,
其中 $\vee$ 表示将反对称矩阵转换回向量形式.

证明: $\phi_1\times\phi_2$ 叉积: $\begin{bmatrix}\phi_{12}\phi_{23}-\phi_{13}\phi_{22}\\ \phi_{13}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{23}\\ \phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1\\ \tilde{\phi}_2\\ \tilde{\phi}_3\end{bmatrix}$

$\phi_1=[\phi_{11}\ \ \phi_{12}\ \ \phi_{13}]^T$

$\phi_2=[\phi_{21},\ \phi_{22}\ \ \phi_{23}]^T$

$$\phi_1\times\phi_2=\begin{bmatrix}i & j & k\\ \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23}\end{bmatrix}$$

$$(\Phi_1\Phi_2-\Phi_2\Phi_1)=\begin{bmatrix}0 & \phi_{12}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{22} & \phi_{13}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{23}\\ \phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21} & 0 & \phi_{13}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{23}\\ \phi_{11}\phi_{23}-\phi_{13}\phi_{21} & \phi_{12}\phi_{23}-\phi_{13}\phi_{22} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -\tilde{\phi}_3 & \tilde{\phi}_2\\ \tilde{\phi}_3 & 0 & -\tilde{\phi}_1\\ -\tilde{\phi}_2 & \tilde{\phi}_1 & 0\end{bmatrix}.$$

Memo No.
Date / /

$$(\Phi_1\Phi_2-\Phi_2\Phi_1)^\vee=\begin{bmatrix}0 & -\tilde{\phi}_3 & \tilde{\phi}_2\\ \tilde{\phi}_3 & 0 & -\tilde{\phi}_1\\ -\tilde{\phi}_2 & \tilde{\phi}_1 & 0\end{bmatrix}^\vee=\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1\\ \tilde{\phi}_2\\ \tilde{\phi}_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

计算回反对称矩阵向量形式；其结果等于向量叉乘。

$$\tilde{\phi}=\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1\\ \tilde{\phi}_2\\ \tilde{\phi}_3\end{bmatrix}=\phi_1\times\phi_2$$

$\forall\phi_1,\phi_2\in\mathbb{R}^3,\ [\phi_1,\phi_2]=(\Phi_1\Phi_2-\Phi_2\Phi_1)^\vee=\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1\\ \tilde{\phi}_2\\ \tilde{\phi}_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3.$

证明： 5.1 封闭性：$\cancel{[\Phi_1,\Phi_2]}$

$$\Phi_1\Phi_2-\Phi_2\Phi_1=-(\Phi_1\Phi_2-\Phi_2\Phi_1)^T.$$

仍为反对称矩阵，可对应 ϕ.

5.2 双线性：

$$\begin{aligned}&[aX_1+bX_2,Y]\\ &=(aX_1Y+bX_2Y-Y(aX_1+bX_2))^\vee\\ &=(aX_1Y+bX_2Y-aYX_1-bYX_2)^\vee\\ &=a(X_1Y-YX_1)^\vee+b(X_2Y-YX_2)^\vee\\ &=a[X_1,Y]+b[X_2,Y]\end{aligned}$$

5.3 自反性： $[\phi_1,\phi_1]=(\phi_1\phi_1-\phi_1\phi_1)^\vee$

$$=0^\vee=\vec{0}$$

Memo No.
Date / /

5.4 雅可比等价.

$[\phi_1, [\phi_2, \phi_3]] + [\phi_3, [\phi_1, \phi_2]] + [\phi_2, [\phi_3, \phi_1]] = 0.$

① ② ③

①: $[\phi_1, (\Phi_2\Phi_3 - \Phi_3\Phi_2)^\vee]$

$= (\Phi_1(\Phi_2\Phi_3 - \Phi_3\Phi_2) - (\Phi_2\Phi_3 - \Phi_3\Phi_2)\Phi_1)^\vee$

$= (\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \Phi_1\Phi_3\Phi_2 - \Phi_2\Phi_3\Phi_1 + \Phi_3\Phi_2\Phi_1)^\vee = A^\vee$

② $[\phi_3, [\phi_1, \phi_2]] = (\Phi_3\Phi_1\Phi_2 - \Phi_3\Phi_2\Phi_1 - \Phi_1\Phi_2\Phi_3 + \Phi_2\Phi_1\Phi_3)^\vee$

$= B^\vee$

③ $[\phi_2, [\phi_3, \phi_1]] = (\Phi_2\Phi_3\Phi_1 - \Phi_2\Phi_1\Phi_3 - \Phi_3\Phi_1\Phi_2 + \Phi_1\Phi_3\Phi_2)^\vee$

$= C^\vee$

$\therefore$ ① + ② + ③ $= A^\vee + B^\vee + C^\vee = (A + B + C)^\vee$

$= 0.$

6. SO(3) 李代数

6.1 旋转矩阵 特殊正交群: SO(3) 对应的李代数 so(3) 的元素是三维向量 R^3.

6.2 so(3) 李括号: $[\phi_1, \phi_2] = [\Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1]^\vee$.

6.3 so(3) 与 SO(3) 关系由指数映射给定: $R = \exp(\phi^\wedge)$.

Memo No. 02:50.
Date 2022 / 5 / 10

Mo Tu We Th Fr Sa Su

7. se(3) 李代数.

SE(3) 对应的李代数 se(3).

7.1.

☆ $se(3)=\left\{\xi=\begin{bmatrix}\rho\\ \phi\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6,\ \rho\in\mathbb{R}^3,\ \phi\in so(3),\ \xi^\wedge=\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho\\ 0^T & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}\right\}$.

元素 ξ 是一个六维向量：前3维为平移，记作 ρ；

后3维为旋转，记作 ϕ，so(3)元素。

此外，se(3)中 ^ 符号含义被拓展，不再是反对称阵。它将一个六维向量转换为四维矩阵.

$\mathbb{R}^6 \Rightarrow \mathbb{R}^{4\times4}$.

7.2 李括号

$$[\xi_1,\xi_2]=(\xi_1^\wedge\xi_2^\wedge-\xi_2^\wedge\xi_1^\wedge)^\vee$$

So，如何从SO(3)的旋转矩阵 R 来求出 so(3)的向量 ϕ.

李群 李代数

SO(3) → R : so(3) → ϕ.

SE(3) → T : se(3) → ξ.

指数映射 ?