

5. 证明: $RP^{\wedge} \cdot R^T = (RP)^{\wedge}$.

注: $u \times v = u^{\wedge} \cdot v$. $P \in \mathbb{R}^3$, $R \cdot R^T = I$.

$$RP^{\wedge} \cdot R^T \cdot R = (RP)^{\wedge} \cdot R$$

$$R \cdot P^{\wedge} = (RP)^{\wedge} \cdot R$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad R \cdot P^{\wedge} \cdot u = (RP)^{\wedge} \cdot Ru$$

$$\Rightarrow R \cdot (P \times u) = (RP) \times (Ru)$$

\therefore 在 $R \cdot R^T = I$ 下, 上式成立。

补充: 叉乘的几何性质:

$$(Ra) \times (Rb) = R(a \times b). \quad R \text{ rotation matrix.}$$

$$\det(R) = 1.$$

更通用: 对叉乘的旋转, 满足以下性质.

$$(Ma) \times (Mb) = \det(M) (M^{-1})^T (a \times b).$$