院系　　班级　　姓名　　学号

第一章　复数和复平面

一、单项选择题

1、设 $z=1+i$，则 z^8 的值为　【　】

(A). $16i$　　(B). $-16i$　　(C). 16　　(D). -16

2、连接 $z_1=1+i$ 与 $z_2=-1-4i$ 的直线段的复数式参数方程为　【　】

(A). $z=1+i+(-2+5i)t$　　(B). $z=1+i+(-2-5i)t$

(C). $z=1+i+(2+5i)t$　　(D). $z=1+i+(2-5i)t$

3、复数 $z=-2+2i$ 的幅角主值 $\arg(z)$ 的值为　【　】

(A). $\pi/4$　　(B). $3\pi/4$

(C). $2k\pi+\pi/4$，$k=0,\pm1,\pm2,...$　　(D). $2k\pi+3\pi/4$，$k=0,\pm1,\pm2,...$

4、满足 $|z-1|>2|z+1|$ 的所有 z 组成的集合是　【　】

(A). 有界开区域　　(B). 无界开区域

(C). 有界闭区域　　(D). 无界闭区域

5、下列结论错误的是　【　】

(A). $2i<3i$　　(B). 当 $z\neq0$ 且不为负实数时，有 $|\overline{z}|=|z|$, $\arg(\overline{z})=-\arg(z)$

(C). $|z|^2=z\cdot\overline{z}$　　(D). 对任意的正数 $M>0$，集合 $|z|>M$ 为无穷远点的邻域

二、填空题

1、复数 $z=\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$ 的实部 $\mathrm{Re}(z)=$__________，虚部 $\mathrm{Im}(z)=$__________，模 $|z|=$__________，

辐角主值为 $arg(z)=$__________，三角表示式为 $z=$____________________.

2、方程 $|z+2-3i|=\sqrt{2}$ 表示的曲线是____________________________.

3、$\lim\limits_{z\to1+i}(1+2z)=$__________.

4、复数 $z=\sin(\pi/5)+i\cos(\pi/5)$ 的三角表示式为 $z=$____________________.

三、计算题

1. 计算复数的值

(1). $(1+i)(-2+2i)$.

(2). $\dfrac{-2+3i}{3+2i}$.

(3). $(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2})^3$.

(4). $\sqrt[4]{-16}$.

2. 将 $f(z)=x^2-y^2-i(xy-y)$ 写为 $z=x+iy$ 的函数.

四、证明题

1. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}$不存在.

2. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & 若z\neq 0\\ 0, & 若z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 处不连续.

院系　　班级　　姓名　　学号

第二章　解析函数

一、单项选择题

1. 设二元函数$u(x,y),v(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点处可微，则其在$P_0(x_0,y_0)$点处满足$C-R$条件是复变函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z_0=x_0+iy_0$处解析的　【　】

(A). 充分不必要条件　(B). 必要不充分条件

(C). 充分必要条件　(D). 以上皆错

2. 设$f(z)=(x^3+axy^2)+i(3x^2y+by^3)$在整个复平面上解析，则实常数$a,b$的值为　【　】

(A). $-3,1$　(B). $-3,-1$

(C). $3,1$　(D). $3,-1$

3. 下面结论错误的是　【　】

(A). $Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$　(B). $Ln(z_2/z_1)=Ln(z_2)-Ln(z_1)$

(C). $[Ln(z)]'=1/z$　(D). $Ln(z^2)=2Lnz$

4. 下列函数中周期为$T=2\pi i$的是　【　】

(A). e^z　(B). $\sin z$

(C). Lnz　(D). z^α

5. 下列函数中在整个复平面内解析的是　【　】

(A). x^2-y^2-2xyi　(B). x^2+xyi

(C). $2y(x-1)+i(y^2-x^2+2x)$　(D). x^3+iy^3

二、填空题

1. $Ln(1+i)=$____________，其主值为$ln(1+i)=$____________.

2. 设$\ln z=i\pi/2$，则$z=$____________.

3. 设$1-e^{-z}=0$，则$z=$____________.

4. 函数$f(z)$在$z=z_0$处可导是$f(z)$在$z=z_0$处解析的________条件，而函数$f(z)$在非空区域D内可导是$f(z)$在区域D内解析的________条件.

三、计算题

1. 讨论下列函数的可导性与解析性，并求其在可导点处的导数

(1). $f(z)=x^2+3iy^2$.

(2). $f(z)=x^3-y^3+2ix^2y^2$.

(3). $f(z)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)+i(3x^2y+3xy^2-x^3-y^3)$.

(4). $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{C}$ 为常数，且 $ad-bc\neq 0$.

2. 求满足下列条件的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

(1). $u(x,y)=x^2-y^2$.

(2). $v(x,y)=2xy+3x$.

(3). $u(x,y)=2y(x-1), f(0)=-i$.

(4). $v(x,y)=3x^2y-y^3, f(0)=0$.

3. 求下列各式的值

(1). $e^{5-i\pi/3}$.

(2). $Ln(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$.

(3). 3^{2-i}.

四、证明题

1. 证明 $f(z)=e^{x}\left[(x\cos y-y\sin y)+i(y\cos y+x\sin y)\right]$处处解析，并求其导数 $f'(z)$.

2. 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在非空区域 D 内解析，且满足下列条件之一，证明 $f(z)$ 在 D 内恒为常数：

(1). $\overline{f(z)}$ 在区域 D 内解析.　(2). $v(x,y)=u^2(x,y)$.

(3). $\mathrm{Im}\left[f(z)\right]\equiv$ 常数.　(4). $\arg\left[f(z)\right]\equiv$ 常数.

院系 班级 姓名 学号

第三章 复变函数的积分

一、单项选择题

1．设 L 为复平面上不经过 $z=\pm 1$ 的简闭正向曲线，则 $\oint_L \frac{zdz}{(z-1)(z+1)^2}=$ 【 】

(A). $\pi i/2$ (B). $-\pi i/2$

(C). 0 (D). 前三种情况皆有可能

2．设函数 $f(z)$ 在非空单连通区域 D 内解析且 $f(z)\neq 0$，而 L 为 D 内任意一条简单封闭的正向曲线，则积分 $\oint_L \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}dz=$ 【 】

(A). $2\pi i$ (B). $-2\pi i$

(C). 0 (D). 不能确定

3．设函数 $f(z)$ 在非空区域 D 内解析，而 L 为 D 内的简闭正向曲线，且由 L 所界的内部区域完全包含于 D 内，而 $f(z)$ 在 L 上的值恒为2，则 $f(z)$ 在 L 内任一点 z_0 处的值为 【 】

(A). 0 (B). 1

(C). 2 (D). 不能确定

二、填空题

1. 连接 $z_1=1, z_2=i$ 的直线段 L 的复参数方程为 $z=$，积分 $\int_L ze^z dz=$______________.

2. 设 L 为正向圆周 $|z-z_0|=a$，则 $n=1$ 时，$\oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n}=$____________，而 $n\neq 1$ 为整数时，

$\oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n}=$____________.

3. 设 L 为正向圆周 $|z|=a$，则对整数 $n\geq 0$，当 $0<a<1$ 时，有 $\oint_L \frac{dz}{(z-1)^n}=$____________，

而 $a>1$ 时，有 $\oint_L \frac{dz}{(z-1)^n}=$____________.

4. 设 L 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\oint_L \frac{ze^z dz}{(z-2)(z-3)(z-4)}=$____________.

三、计算题

1. 计算 $\int_L |z| dz$，其中积分路径 L 分别为：

(1). 从 $z_1 = 0$ 到 $z_2 = 1 + i$ 的直线段.

(2)、先从 $z_1 = 0$ 沿直线到 $z_2 = 1$，再从 $z_2 = 1$ 沿直线到 $z_3 = 1 + i$ 的折线段.

(3)、正向圆周 $|z| = 5$.

2. 计算下列积分

(1). $\int_0^i z e^{z^2} dz$.

(2). $\int_0^i (\sin z + 2z) dz$.

3. 计算下列积分

(1). $\oint\limits_{|z|=3/2}\dfrac{dz}{(z+1)(z-2)}$.

(2). $\oint\limits_{L}\dfrac{dz}{z^2-2}$，其中 L 是不经过 $\pm\sqrt{2}$ 且仅包含此两点之一的简闭正向曲线.

(3). $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$.

院系　班级　姓名　学号

4．计算下列积分：

(1). $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^{100}}$.

(2). $\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{(z-1)^3 (z+1)^4}$.

第四章 解析函数的级数表示

一、单项选择题

1. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n}$ 的敛散性为 【 】

(A). 绝对收敛 (B). 条件收敛 (C). 发散 (D). 不确定

2. 若幂级数 $\sum_{0\le n<+\infty} c_n z^n$ 在 $z_1=1+2i$ 处收敛，则该幂级数在 $z_2=2$ 处的敛散性为 【 】

(A). 绝对收敛 (B). 条件收敛 (C). 发散 (D). 不确定

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}(z/2)^n$ 的收敛半径为 【 】

(A). 1 (B). 2 (C). $\sqrt{2}$ (D). $+\infty$

4. 级数 $\sum_{-2\le n<+\infty} z^n$ 的收敛域为 【 】

(A). $|z|<1$ (B). $0<|z|<1$ (C). $1<|z|<+\infty$ (D). 空集

5. 函数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z-2)(z+4)}$ 在以原点为中心的圆环域的 *Laurent* 级数展开式有 【 】

(A). 1个 (B). 2个 (C). 3个 (D). 4个

6. 设 $S(z)$ 为幂级数 $\sum_{0\le n<+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的和函数，则下列结论正确的是 【 】

(A). $S(z)$ 在收敛圆域内处处解析 (B). $S(z)$ 在收敛点处均解析

(C). 该幂级数在收敛圆周上处处收敛 (D). 以上皆错

二、填空题

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R=$____________，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径为 $r=$____________.

2. 若幂级数 $\sum_{0\le n<+\infty} c_n(z+i)^n$ 在 $z_1=i$ 处发散，则该幂级数在 $z_2=2$ 处的敛散性为____________.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+ni}{n+4}=$____________.

4. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^3}$ 的幂级数展开式为____________，收敛半径为 $R=$____________.

三、计算题

1. 求下列函数 $f(z)$ 在指定点 z_0 处的 $Taylor$ 级数，并指出收敛域：

(1). $f(z)=\dfrac{1}{4-3z}$， $z_0=1+i$.

(2). $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$， $z_0=0$.

(3). $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$， $z_0=0$，其中 $a,b\neq 0$.

(4). $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$， $z_0=1$ 或 $z_0=2$.

2. 求下列函数 $f(z)$ 在指定环域内的 *Laurent* 级数：

(1). $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$，$1<|z|<2$.

(2). $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，$0<|z-1|<1$ 或 $1<|z-2|<+\infty$.

3. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$ 在以 $z_0=3i$ 为中心的圆环域内展为 *Laurent* 级数.

院系　　班级　　姓名　　学号

第五章　留数理论及其应用

一、单项选择题

1. 点 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1-e^{z}}{z^{4}\sin z}$ 的 m 阶极点，则 $m=$ 【　】

(A). 5　　(B). 4　　(C). 3　　(D). 2

2. 点 $z=1$ 是 $f(z)=(z-1)\sin\left[1/(z-1)\right]$ 的 【　】

(A). 可去奇点　　(B). 一阶极点　　(C). 二阶极点　　(D). 本性奇点

3. 设 $f(z)=\sum\limits_{0\le n<+\infty} c_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内解析，$m\ge 1$ 为自然数，则 $Res\left[f(z)/z^m,0\right]=$ 【　】

(A). c_m　　(B). $m!c_m$　　(C). c_{m-1}　　(D). $(m-1)!c_{m-1}$

4. 设 $z_0\ne\infty$，则下列结论中正确的是 【　】

(A). 若 $m\ge 1$ 为自然数，且 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，则 $z=z_0$ 为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ 的 m 阶极点

(B). 若无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $Res\left[f(z),\infty\right]=0$

(C). 若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或解析点，则 $Res\left[f(z),z_0\right]=0$

(D). 若 $\oint_C f(z)dz=0$，则 $f(z)$ 在 C 内无奇点

5. 点 $z=0$ 是 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$ 的 m 阶零点，则 $m=$ 【　】

(A). 1　　(B). 2　　(C). 3　　(D). 4

6. 设 $z_0\ne\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m\ge 1$ 阶极点，则下列结论中正确的是 【　】

(A). $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析

(B). $Res\left[f(z),z_0\right]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$，其中 $n\ge m$ 为整数

(C). $z=z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 $m\ge 1$ 阶零点

(D). $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\infty$

院系 班级 姓名 学号

二、填空题

1. $z=0$ 是 $f(z)=z^3-\sin(z^3)$ 的 $m=$__________阶零点.

2. 若 $z=z_0\neq\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m\geq 1$ 阶极点，则 $Res\left[f(z)/f'(z),z_0\right]=$__________.

3. $Res\left[2z/(z^2+1),\infty\right]=$__________.

4. $\oint_{|z|=1} z^3 e^{1/z}dz=$__________.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=$__________.

三、计算题

1. 求下列函数 $f(z)$ 的所有有限奇点，并指出其类型：

(1). $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

(2). $f(z)=e^{1/(z-1)}$.

(3). $f(z)=\dfrac{z-1}{z^3-z^2-z+1}$.

(4). $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$.

(5). $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(e^z-1)}$.

(6). $f(z)=\dfrac{6}{(z+1)(z-2)}+\dfrac{2}{z+1}$.

2. 求下列函数 $f(z)$ 在有限孤立奇点处的留数：

(1). $f(z)=\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$.

(2). $f(z)=z^2\sin(z^{-1})$.

(3). $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^3}$.

(4). $f(z)=z^2\cos(z^{-1})$.

3. 判断 $z=\infty$ 是否为函数 $f(z)$ 的孤立奇点？对孤立的无穷远点，求留数 $Res\left[f(z),\infty\right]$

(1). $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$.

(2). $f(z)=\dfrac{2z}{3+z^2}$.

(3). $f(z)=z^2+z^{-1}$.

(4). $f(z)=e^{z^2}$.

4. 利用留数计算积分

(1). $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2}$.

院系　　班级　　姓名　　学号

(2). $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{\sin z dz}{z(1-e^z)}$.

(3). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(5z-2)dz}{z(z-1)}$.

(4). $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^2}$.

5. 计算积分

(1). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{z^4-1}$.

(2). $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)^5(z-4)}$.

(3). $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{15}dz}{(z^2-1)^2(z^4+2)^3}$.

(4). $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^3 e^{1/z}dz}{1+z}$.

院系　班级　姓名　学号

第七章　傅里叶变换与拉普拉斯变换

一、填空题

1. 设 $\alpha > 0$ 为常数，则 $\mathscr{F}\left[\cos(\alpha t)\right] =$ __________，$\mathscr{L}\left[\cos(\alpha t)\right] =$ __________.

2. 设 $\alpha > 0$ 为常数，则 $\mathscr{F}\left[\sin(\alpha t)\right] =$ __________，$\mathscr{L}\left[\sin(\alpha t)\right] =$ __________.

3. 单位阶跃函数 $u(t)$ 的傅氏变换为 $\mathscr{F}\left[u(t)\right] =$ __________.

4. 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的傅氏变换为 $\mathscr{F}\left[\delta(t)\right] =$ __________.

5. 若 $f(t) \equiv 1$，则其傅氏变换为 $\mathscr{F}\left[f(t)\right] =$ __________，拉氏变换为 $\mathscr{L}\left[f(t)\right] =$ __________.

6. 设 $\alpha \neq 0$ 为常数，则 $e^{\alpha t}$ 的拉氏变换为 $\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] =$ ____________.

二、计算题

1. 求下列函数的傅氏变换

(1). $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t), & 若\, t \in (-1,1) \\ 0, & 若\, t \notin (-1,1) \end{cases}$.

(2). $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$.

(3). $f(t) = u(t)\sin(\alpha t)$，其中 $\alpha > 0$ 为常数.

院系　　班级　　姓名　　学号

2. 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & 若 t\in[-1,1]\\ 0, & 若 t\notin[-1,1]\end{cases}$ 的傅氏变换及傅氏积分表示.

3. 求下列函数的拉氏变换

(1). $f(t)=\begin{cases}3, & 若 0\le t<2\\ -1, & 若 2\le t<4\\ 0, & 若 t\ge 4\end{cases}$.

(2). $f(t)=\begin{cases}t^3, & 若 t\ge 0\\ 0, & 若 t\le 0\end{cases}$.

4. 求下列函数的拉氏逆变换

(1). $F(s)=\dfrac{2}{1-s^2}$.

(2). $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

5. 求解如下微分方程

(1). $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+x(t)=e^t \\ t=0: x'(t)=x(t)=0 \end{cases}$.

(2). $\begin{cases} x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{-t} \\ t=0: x'(t)=x(t)=1 \end{cases}$.

(3). $\begin{cases} x'''(t)+3x''(t)+3x'(t)+x(t)=1 \\ t=0: x''(t)=x'(t)=x(t)=0 \end{cases}$.

(4). $\begin{cases} x''(t)-x(t)=4\sin t+5\cos t \\ t=0: x'(t)=-2, x(t)=-1 \end{cases}$.