第一章 函数与极限

第一节 函数

一、选择题

1、下列各组函数中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同的是 (A)

A、 $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg|x|$；　B、 $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$；

C、 $f(x)=\tan 2x, g(x)=2\tan x$；　D、 $f(x)=x-1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$。

2、在 $(-\infty,+\infty)$ 内，下列函数中无界的是 (D)

A、 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$；　B、 $f(x)=e^{-x^2}$；　C、 $f(x)=\sin x$；　D、 $f(x)=x\cos x$。

3、 $f(x)=x|x|-\sin x$ 是 (B)

A、偶函数；　B、奇函数；　C、周期函数；　D、有界函数。

二、填空题

1、设 $f(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3} \\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ ，则 $f(-\dfrac{\pi}{4})=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。

2、设 $f(x)$ 是周期函数，且周期为 1，则 $F(x)=f(2x+1)$ 也是周期函数，它的周期为 $\underline{\dfrac{1}{2}}$。

三、 设 $f(x)=2x^2+6x-3$，求 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出哪个是奇函数，哪个是偶函数。

解： $\varphi(x)=2x^2-3$ 是偶函数， $\psi(x)=6x$ 是奇函数。

第二节 初等函数

一、选择题 $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2}$ 的定义域为 (B)

A、$[-1,1]$； B、$[-2,2]$； C、$(-1,1)$； D、$(-2,2)$。

二、填空题

1、设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域为 $\underline{[1,e]}$。

2、设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$，$g(x)=6x-4$，则 $f\left[g(0)\right]=\underline{\quad 16 \quad}$。

三、计算题

1、求 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数。

解：由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=e^{y-1}-2$，故其反函数为 $y=e^{x-1}-2$。

2、设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

解：$f[g(x)]=\begin{cases} 1, & |g(x)|=e^x<1 \\ 0, & |g(x)|=e^x=1 \\ -1, & |g(x)|=e^x>1 \end{cases}=\begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$，$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$。

第三节 数列的极限

一、选择题 下列说法中错误的是 (A)

A、若$\{x_n\}$有界，则$\{x_n\}$必收敛； B、若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$必有界；

C、若$\{x_n\}$收敛于a，则其任一子列也收敛于a； D、数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限。

二、填空题

1、设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n =$ ___0___。

2、设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ ___0___。

3、对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1} \to a(k\to\infty)$，$x_{2k} \to a(k\to\infty)$，则$x_n \to$ ___a___。

三、证明题

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$。

证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在$N = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$，使$n > N$时，有$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1} - \dfrac{3}{2}\right| = \dfrac{1}{2(2n+1)} < \dfrac{1}{4n} < \varepsilon$，只要$n > \dfrac{1}{4\varepsilon}$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$。

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$，其中$a$为常数。

证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在$N = \left[\dfrac{a^2}{2\varepsilon}\right]$，使$n > N$时，有$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1\right| = \dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)} \le \dfrac{a^2}{2n} < \varepsilon$，故

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$。

3、$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$。

证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则$\forall \varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使$n > N$时，有$||u_n|| = |u_n| < \varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$；

若$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$，则$\forall \varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使$n > N$时，有$|u_n| = ||u_n|| < \varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

第四节 函数的极限

一、选择题

1、如果 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 存在，则 (C)

A、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$； B、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但不一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；

C、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不一定存在； D、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 一定不存在。

2、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}=$ (D)

A、-1； B、1； C、0； D、不存在。

二、填空题

1、$f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的<u> 必要 </u>条件；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的<u> 充分 </u>条件；

2、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（$A$ 为有限数），而 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$<u> 不存在 </u>。

三、计算题

1、$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx}{nx^2+2}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{0}{0+2}=0, & 若 x=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+2n^{-1}}=\dfrac{1}{x}, & 若 x\neq 0\end{cases}$。

2、设 $f(x)=\begin{cases}x, & 若 |x|\le 1\\ 1, & 若 |x|>1\end{cases}$，作 $y=f(x)$ 的图形，并根据图形求

(1)、$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$；

(2)、$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 存在吗？

解：图略，$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-1$；

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 不存在。

四、证明题

1、$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta=\varepsilon$，使$0<|x+2|<\delta$时，有$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$。

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，存在$X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，使$|x|>X$时，有$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$。

第五节 无穷小与无穷大

一、选择题

1、当 $x \to 0$ 时，下列变量中是无穷小量的是　　　　(C)

A、$\sin\frac{1}{x}$；　　B、$\frac{\sin x}{x}$；　　C、$2^{-x}-1$；　　D、$\ln|x|$。

2、下列变量在给定的变化过程中是无穷大量的是　　(A)

A、$\lg x\ (x\to 0+)$；　B、$\lg x\ (x\to 1)$；　C、$\frac{x^2}{x^3+1}\ (x\to\infty)$；　D、$e^{1/x}\ (x\to 0-)$。

3、无穷小量是　　　　(C)

A、比 0 稍大一点的一个数；　　B、一个很小很小的数；

C、以 0 为极限的一个变量；　　D、常数 0。

4、下列命题正确的是　　　　(D)

A、无穷小量是个绝对值很小很小的数；　B、无穷大量是个绝对值很大很大的数；

C、无穷小量的倒数是无穷大量；　　D、无穷大量的倒数是无穷小量。

5、函数 $f(x)=\frac{x(x-1)\sqrt[3]{(x+1)}}{x+1}$ 在(　　)时为无穷大量　(C)

A、$x\to 0$；　B、$x\to 1$；　C、$x\to -1$；　D、$x\to -2$。

二、填空题

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$____0____；　　2、$\lim\limits_{x\to 0}|x|=$____0____；

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=$____2____；　　4、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=$____1____。

三、讨论题

1、两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明。

解：两个无穷小的商不一定是无穷小，如 $x\to 0$ 时，$x,2x$ 是无穷小，但 $\frac{x}{2x}$ 不是无穷小。

2、函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？又当 $x\to+\infty$ 时这个函数是否为无穷大？何哉？

解：由于 $y(n\pi)=n\pi\cos(n\pi)=(-1)^n n\pi\to\infty$ ($n\to\infty$ 时)，故 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界；

又 $y(n\pi+0.5\pi)=(n\pi+0.5\pi)\cos(n\pi+0.5\pi)\equiv 0$，故 $x\to+\infty$ 时 $y=x\cos x$ 非无穷大。

第六节 极限运算法则

一、选择题

1、如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，则必有 (D)

A、 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$；

B、 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=0$；

C、 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$；

D、 $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=\infty\,(k\neq 0$常数$)$。

2、当 $x\to\infty$时， $\arctan x$ 的极限是 (D)

A、 $\dfrac{\pi}{2}$； B、 $-\dfrac{\pi}{2}$； C、 ∞； D、不存在，但有界。

3、下列命题肯定正确的是 (A)

A、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$必不存在；

B、 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$必不存在；

C、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$必不存在；

D、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|$必不存在。

4、若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-k}{x-3}=4$，则 k 的值为 (C)

A、0； B、-1； C、3； D、2。

二、填空题

1、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x-3}=$ __-5__；

2、 $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+3}=$__0__；

3、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}=$ __∞__；

4、 $\lim\limits_{x\to\infty}(6-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=$__6__；

5、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^4-x-1}=$__0__；

6、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\arctan x}{x}=$__0__。

三、计算题

1、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$；

2、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\sin\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(\pi x/2)}{\sqrt{x+x^{-1}}}=0$；

3、 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(2-2^{-n})=2$；

4、 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{9}{1-x^3}-\frac{3}{1-x})=3\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}=3\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3(2+x)}{1+x+x^2}=3$；

5、 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\arctan x}{2x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^{-1}\arctan x}{2+x^{-1}\sin x}=\frac{1}{2}$；

6、 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-x^{-1})^{30}(3-2x^{-1})^{20}}{(2+x^{-1})^{50}}=(3/2)^{20}$。

第七节 极限存在准则 两个重要极限

一、选择题

1、下列极限中正确的是 (B)

A、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$； B、$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin(1/x)=1$； C、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=1$； D、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1/x)}{(1/x)}=1$。

2、下列极限中正确的是 (D)

A、$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x}=e$； B、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})^{n}=e$；

C、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e$； D、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+2}=e$。

二、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=$ ___$3/2$___； 2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=$ ___2___；

3、$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=$ ___e^{-2}___； 4、$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}-1}=$ ___e^{-1}___。

三、计算题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{\cos 3x}=3$；

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{3x^3}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}=\dfrac{1}{3}$；

3、$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(x/2^n)}{(x/2^n)}=x$；

4、$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-\dfrac{1}{x})^{-x}\right]^{-k}=e^{-k}$， k 为常数；

5、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$；

6、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{x}+o(\dfrac{1}{x})\right]^{x}=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+t+o(t)\right)^{\frac{1}{t+o(t)}}\right]^{\frac{t+o(t)}{t}}=e$。

四、证明题 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n})=1$。

证明：设 $x_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$， 则 $\dfrac{n^2}{n^2+n}\le x_n\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$， 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$，

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1$。

第八节 无穷小的比较

一、选择题

1、当 $x \to 0$ 时，$\arctan 3x$ 与 $\dfrac{ax}{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $a =$ (C)

A、1； B、2； C、3； D、1/2。

2、设 $f(x) = 2x^2, g(x) = \sin x$，则当 $x \to 0$ 时 (A)

A、$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小； B、$f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小；

C、$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价的无穷小； D、$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小。

二、填空题

1、当 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是比 $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}$ ____高阶____的无穷小；

2、当 $x \to 0$ 时，有 $\sin x$ ～ __x__，$\tan 2x$ ～ __$2x$__，$e^{3x} - 1$ ～ __$3x$__，$\ln(1+x)$ ～ __x__，

$\sqrt{1+2x} - 1$ ～ __x__；

3、若 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin a(x-1)}{2(x-1)} = 1$，则 $a =$ __2__。

三、计算题

1、$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} \cdot \dfrac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$；

2、$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x} - 1)\sin x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos(x/2)}{(1 + \sqrt{1+x})\sin(x/2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x/2)}{\sin(x/2)} \cdot \dfrac{2\cos(x/2)}{1 + \sqrt{1+x}} = 1$；

3、$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{(x-1)\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{(x-1)\sin x} = -3$。

第九节 函数的连续性与间断点

一、选择题

1、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & 若 x\neq 0\\ 0, & 若 x=0\end{cases}$，则 (C)

A、$f(x)$ 在 $x=0$ 的极限存在且连续； B、$f(x)$ 在 $x=0$ 的极限存在但不连续；

C、$f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限存在但不相等； D、$f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限不存在。

2、设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 若 x<1\\ 0, & 若 x=1\\ 3-x, & 若 x>1\end{cases}$，则 $x=1$ 是函数的 (A)

A、可去间断点； B、跳跃间断点； C 无穷间断点； D、连续点。

二、填空题

1、函数 $y=\dfrac{2x-1}{x^2+3x+2}$ 的间断点是 $\underline{x=-1,-2}$；

2、设 $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+a, & 若 x<2\\ b, & 若 x=2\\ x+2, & 若 x>2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，则 $a=\underline{\quad 0\quad}$， $b=\underline{\quad 4\quad}$；

3、已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\ln(x+1)}, & 若 x<0\\ 3x^2-2x+k, & 若 x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=\underline{\quad 2\quad}$；

4、$x=0$ 是 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 的第____一____类间断点，且为____跳跃____间断点。

三、讨论题

1、设 $f(x)=\begin{cases}x, & 若 |x|\leq 1\\ 1, & 若 |x|>1\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 的连续性，若有间断点，说明间断点类型。

解：$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1=f(1)\neq -1=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1=f(1)$，故

$f(x)$ 仅在 $x=-1$ 处间断，且 $x=-1$ 是其第一类跳跃间断点。

2、求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型。

解：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$，$x\neq 1$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，故

$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点，而 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点。

第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=$ $\underline{\quad\sqrt{5}\quad}$； 2、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=$ $\underline{\quad 0\quad}$；

3、$\lim\limits_{x\to\infty}e^{1/x}=$ $\underline{\quad 1\quad}$； 4、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$ $\underline{\quad 1/2\quad}$；

5、$\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=$ $\underline{\quad 0\quad}$； 6、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=$ $\underline{\quad\cos a\quad}$。

二、计算题

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right]^3=e^3$；

2、$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=2\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{2x+1}+3}=\dfrac{4}{3}$；

3、求常数 a，使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & 若x\neq 0\\ a\,, & 若x=0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上连续；

解：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}, & 若0<|x|\le 1\\ a\,, & 若x=0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，故 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

又 $f(x)$ 在 $0<|x|\le 1$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，故 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。

4、已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，求 a 与 b 的值。

解：由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$ 知，$a+b+1=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$，且

$$1=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{1-x}=-(a+2),$$

故 $a=-3,\ b=2$。

第十一节 闭区间上连续函数的性质

1、证明：存在 $x_0 \in (0,2)$，使 $e^{x_0} - 2 = x_0$。

证明：设 $f(x) = e^x - 2 - x$，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0) = -1 < 0, f(2) = e^2 - 4 > 0$，

故由零点定理知，存在 $x_0 \in (0,2)$，使 $f(x_0) = 0$，即 $e^{x_0} - 2 = x_0$。

2、设 $a,b > 0$，则方程 $x = a\sin x + b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根。

证明：设 $f(x) = a\sin x + b - x$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续，且

$f(0) = b > 0$， $f(a+b) = a\left[\sin(a+b) - 1\right] \le 0$，

(1)、当 $\sin\left(a+b\right) < 1$ 时， $f\left(a+b\right) < 0$，由零点定理，$\exists \xi \in (0, a+b)$，使 $f(\xi) = 0$，即 ξ 为原方程不超过 $a+b$ 的正根；

(2)、当 $\sin\left(a+b\right) = 1$ 时， $f\left(a+b\right) = 0$，即 $a+b$ 就是满足条件的正根。

3、若 $f(x)$ 在 $[a,\mathrm{b}]$ 上连续， $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，则在 $[x_1, x_n]$ 上必有一点ξ，使

$f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$。

证明：由题设知 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续，故必存在最大值 M 与最小值 m，又 $x_i \in [x_1, x_n]$，故

$m \le f(x_k) \le M,\ k = 1,2,...,n$，从而 $m \le \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \le M$，故由介值定理知，存在 $\xi \in [x_1, x_n]$，使 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$。

第二章 导数与微分

第一节 函数导数概念

一、选择题

1、函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处切线存在的　(A)

A、充分条件；　B、必要条件；　C、充要条件；　D、非充要条件。

2、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左导数和右导数存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的　(C)

A、充分条件；　B、必要条件；　C、充要条件；　D、非充要条件。

3、设 $f'(0)=1$，$f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$　(B)

A、 0；　B、1；　C、∞；　D、不存在。

二、填空题

1、设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $\underline{\quad -2f'(x_0)\quad}$；

2、 设函数 $f(x)=\begin{cases}2e^x+a, & 若x<0\\ x^2+bx+1, & 若x\ge 0\end{cases}$ 处处可导，则 $a=\underline{\ -1\ }$，$b=\underline{\ 2\ }$。

三、计算题

1、设 $f(x)=(x-1)g(x)$，$g(x)$ 在 $x=1$ 处连续，$g(1)=1$，求 $f'(1)$；

解：$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\cdot g(1+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(1+\Delta x)=g(1)=1$；

2、求曲线 $y=\cos x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程；

解：$y(\pi/3)=\cos(\pi/3)=1/2, y'(\pi/3)=-\sin(\pi/3)=-\sqrt{3}/2$，故

切线方程为 $y=y(\pi/3)+(x-\pi/3)y'(\pi/3)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

法线方程为 $y=y(\pi/3)-\dfrac{x-\pi/3}{y'(\pi/3)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}})+\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$。

3、设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & 若 x\ge 0 \\ 2x+1, & 若 x<0 \end{cases}$，求 $f'(0)$；

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{e^{2\Delta x}-1}{\Delta x}=2\lim\limits_{t\to 0-}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=2\lim\limits_{t\to 0-}\dfrac{1}{\ln\left[(1+t)^{1/t}\right]}=\dfrac{2}{\ln e}=2$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{(2\Delta x+1)-1}{\Delta x}=2$，故 $f'(0)=2$；

4、设曲线 $y=ax^3$ 与直线 $y=x+b$ 在点 $x=1$ 处相切，求常数 a，b 的值；

解：由题设知 $\begin{cases} b+1=(x+b)\big|_{x=1}=y(1)=ax^3\big|_{x=1}=a \\ 1=(x+b)'\big|_{x=1}=y'(1)=(ax^3)'\big|_{x=1}=3a \end{cases}$，解之得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$；

5、讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & 若 x\ne 0 \\ 0, & 若 x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性。

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，而 $\sin(1/x)$ 为有界函数，故

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin(1/x)=0=f(0)$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin(1/x)=0$，故

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导。

第二节 函数的和、差、积、商的求导法则

一、填空题

1、设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则 $f'(\dfrac{\pi}{2})=$ ___0___ ；

2、曲线 $f(x)=x^2(x-1)^2$ 上具有水平切线的点有 ___3___ 个。

二、求下列函数的导数

1、 $y=3e^x\cos x$， $y'=3e^x\left(\cos x-\sin x\right)$；

2、 $y=\dfrac{\ln x}{x}$， $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$；

3、 $y=\dfrac{1}{\ln x}+\ln 3$， $y'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$；

4、 $y=x\sin x-4e^x\tan x$， $y'=\sin x+x\cos x-4e^x(\tan x+\sec^2 x)$；

5、 $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$， $y'=-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$；

6、 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$， $y'=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$；

7、 $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$， $y'=\dfrac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$；

8、 $y=x^2\ln x\cdot\cos x$， $y'=2x\ln x\cdot\cos x+x\cos x-x^2\ln x\cdot\sin x$。

三、以初速 v_0 竖直上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$，求：

(1)、该物体的速度 $v(t)$；　　(2)、该物体达到最高点的时刻。

解： $v(t)=s'\left(t\right)=v_0-gt$，再由 $v(T)=v_0-gT=0$ 得物体达到最高点的时刻为 $T=v_0/g$。

第三节 反函数的导数 复合函数的求导法则

一、填空题

1、设 $y=(1+x^2)\arctan x$，则 $y'(x)=$ $\underline{\quad 1+2x\arctan x \quad}$；

2、设 $y=\sin f(x)$，其中 $f(x)$ 具有连续的导函数，则 $y'=$ $\underline{\quad f'(x)\cos f(x) \quad}$；

3、设 $f(x)=xe^{\sin x}$，则 $f'(0)=$ $\underline{\quad 1 \quad}$。

二、求下列函数的导数

1、 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$， $y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$；

2、 $y=x^2e^{2x}$， $y'=2x(1+x)e^{2x}$；

3、 $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$， $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$；

4、 $y=\sin(\tan x^2)$， $y'=2x\cos(\tan x^2)\sec^2 x^2$；

5、 $y=\ln\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$， $y'=\dfrac{a}{x^2-a^2}$；

6、 $y=\dfrac{\sin x}{x^2}\ln\dfrac{1}{x}$， $y'=\dfrac{1}{x^3}\left[(2\sin x-x\cos x)\ln x-\sin x\right]$。

三、设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数

1、 $y=f(x^2)$， $y'=2xf'(x^2)$；

2、 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$， $y'=\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]$。

第四节 初等函数的求导问题

求下列函数的导数：

1、 $y=\sin^2 x\sin(x^2)$， $y'=\sin 2x\cdot\sin x^2+2x\sin^2 x\cdot\cos x^2$；

2、 $y=(\arctan\frac{x}{2})^2$， $y'=\frac{4}{x^2+4}\arctan\frac{x}{2}$；

3、 $y=\ln\cos\frac{1}{x}$， $y'=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$；

4、 $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$， $y'=\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；

5、 $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$， $y'=\arcsin\frac{x}{2}$；

6、 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$， $y'=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$；

7、 $f(x)=\begin{cases}1/x, & 若x<0\\ 3x-x^2-2, & 若0\le x\le 1\\ \ln x, & 若x\ge 1\end{cases}$， $f'(x)=\begin{cases}1/x^2, & 若x<0\\ 3-2x, & 若0<x\le 1\\ 1/x, & 若x\ge 1\end{cases}$。

第五节 高阶导数

一、选择题

1、设 $y=x^n+e^x$，则 $y^{(n)}=$ (D)

A、e^x； B、$n!$； C、$n!+ne^x$； D、$n!+e^x$。

2、设 e^{2x} 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f''(x)=$ (B)

A、e^{2x}； B、$2e^{2x}$； C、$4e^{2x}$； D、0。

二、填空题

1、设 $f(x)=(10-3x)^5$，则 $f^{(4)}(3)=$ ___9720___；

2、设 $y=\sin f(x)$，则 $y''(x)=$ ___$f''(x)\cos f(x)-\left|f'(x)\right|^2\sin f(x)$___。

三、计算题

1、设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $y''(x)=-\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$；

2、设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 $y''(x)=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$；

3、设 $y=f(x)\cos x$，其中 $f(x)$ 二阶可导，求 $y''(x)=f''(x)\cos x-2f'(x)\sin x-f(x)\cos x$；

4、设 $y=\ln[f(x)]$，其中 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，求 $y''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-\left|f'(x)\right|^2}{f^2(x)}$；

5、设 $y=\ln(1-x)$，求 $y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$；

6、 设 $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$。

解：$y^{(50)}=\sum\limits_{0\le k\le 50}C_{50}^k(x^2)^{(k)}(\sin 2x)^{(50-k)}=\sum\limits_{0\le k\le 2}C_{50}^k(x^2)^{(k)}(\sin 2x)^{(50-k)}$

$=C_{50}^0x^2(\sin 2x)^{(50)}+C_{50}^1(x^2)'(\sin 2x)^{(49)}+C_{50}^2(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}$

$=2^{50}x^2(\sin 2x+\dfrac{50}{2}\pi)+50\times 2^{50}x(\sin 2x+\dfrac{49}{2}\pi)+50\times 49\times 2^{48}(\sin 2x+\dfrac{48}{2}\pi)$

$=2^{49}(-2x^2\sin 2x+100x\cos 2x+1225\sin 2x)$。

四、试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，证明$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$。

证明：$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$。

第六节 隐函数与参数式函数的导数 相关变化率

一、选择题

1、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ (A)

A、$\ln 2-1$； B、$(\ln 2-1)dx$； C、$\ln 2$； D、$\ln 2dx$。

2、设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2}=$ (B)

A、 12； B、3； C、$3/2$； D、6。

二、填空题

1、设 $xy^3=y-1$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ ___1___；

2、曲线 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 上点 $(0,0)$ 处的切线方程是 ___$2y=3x$___；

3、 设 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$， 则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ___$-\cot t$___。

三、计算题

1、设 $e^y+xy=e$，求 $y'(0)$；

解：方程 $e^y+xy=e$ 两边求导得 $y'e^y+y+xy'=0$，即 $y'=-\dfrac{y}{x+e^y}$，当 $x=0$ 时， $y=1$，故 $y'(0)=-\dfrac{y}{x+e^y}\Big|_{x=0,y=1}=-\dfrac{1}{e}$；

2、设 $y=2+e^y\sin x$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$；

解：方程 $y=2+e^y\sin x$ 两边求导得 $y'=y'e^y\sin x+e^y\cos x$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y\cos x}{1-e^y\sin x}$，

当 $x=0$ 时， $y=2$，故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{e^y\cos x}{1-e^y\sin x}\Big|_{x=0,y=2}=e^2$；

3、设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=t\cdot f'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 具有连续的二阶导函数，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t\cdot f''(t)+f'(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{f''(t)}$；

4、设 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，求 $y'(x)$；

解：由于 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，故 $\ln y=\sin x\ln(1+x^2)$，两边求导得，$\dfrac{y'}{y}=\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}$，

即 $y'=\left[\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}\right]y=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$；

5、设 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$，求 $y'(x)$。

解：由于 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$，故 $\ln y=\dfrac{1}{25}\left[5\ln(x-5)-\ln(2+x^2)\right]$，两边求导得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{25}(\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{2x}{2+x^2})$，

即 $y'=\dfrac{1}{25}(\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{2x}{2+x^2})\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$。

四、注水入深 8m、上顶直径 8m 的正圆锥形容器中，其速率为 $4\,m^3/\min$，当水深为 5m 时，其表面上升的速率为多少？

解：设在 t 时刻容器中的水深为 h，容积为 V，半径为 r，则由 $r/4=h/8$ 得 $r=h/2$，故

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi}{12}h^3$，求导得 $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi h^2}{4}\dfrac{dh}{dt}$，故 $\dfrac{dh}{dt}\Big|_{h=5}=\dfrac{4}{\pi h^2}\dfrac{dV}{dt}\Big|_{h=5}=\dfrac{16}{25\pi}\approx 0.204(m/\min)$。

第七节 函数的微分

一、选择题

1、函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的 (C)

A、充分条件； B、必要条件； C、充要条件； D、非充要条件。

2、设函数 $f(x)$ 可导，则在 $x=2$ 处当自变量 x 有微小该变量 dx 时，函数值约改变了 (B)

A、 $f'(2)$； B、 $f'(2)dx$； C、 $f(2+dx)$； D、 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。

二、填空题

1、设 $y=[\ln(1-x)]^2$，则 $dy\big|_{x=-1}=$ $\underline{\quad -\ln 2dx \quad}$；

2、函数 $f(x)=x^2$ 对应于 $x_0=1$，$\Delta x=-0.2$ 时的微分 $dy=$ $\underline{\quad -0.4 \quad}$；

3、 $d(\underline{\ x^4+c\ })=4x^3dx$。

三、计算下列函数的微分

1、 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$， $dy=-\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx=-\dfrac{\operatorname{sgn}(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$，$0<|x|<1$；

2、 $y=\ln\sqrt{1-2x}$， $dy=\dfrac{1}{2x-1}dx$；

3、 $y=x^a a^x$， $dy=x^{a-1}a^x(a+x\ln a)dx$；

4、设 $y=f(1-2x)+\sin f(x)$，其中 $f(u)$ 可微，求 $dy=\left[f'(x)\cos f(x)-2f'(1-2x)\right]dx$。

第三章 中值定理与导数的应用

第一节 中值定理

一、选择题

1、 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则方程 $f'(x)=0$（ C ）

A、仅有一个实根； B、有两个实根； C、有三个实根； D、无实根。

2、函数 $f(x)=2x^2-x+1$ 在 $[-1,3]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件，定理中的值 $\xi=$（ C ）

A、$\dfrac{3}{4}$； B、$-\dfrac{3}{4}$； C、1； D、 0 。

二、填空题

1、设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)=g'(x)$，则在 (a,b) 内， $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系为

$\underline{f(x)=g(x)+C}$；

2、已知 $f(1)=4$，且 $f(x)$ 满足 $xf'(x)+f(x)\equiv 0$，则 $f(2)=$ ____2____。

三、证明题

1、若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，则 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

证明：令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，则 $f(x_0)=f(0)=0$，由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(0,x_0)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $a_0n\xi^{n-1}+a_1(n-1)\xi^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$。

2、证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证明：令 $f(x)=x^5+x-1$，则 $f(0)=-1$， $f(1)=1$，由零点定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x^5+x-1=0$ 存在一个正根 ξ；

设 $0<\eta<\xi$ 是方程的另一个根，则由罗尔定理，必 $\exists c\in(\eta,\xi)$，使得 $f'(c)=0$，即 $4c^2+1=0$，但这不可能，即原方程只有一个正根。

3、证明 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$ 。

证明：令 $f(x)=\arctan x+arc\cot x$， $x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$，故 $f(x)=C$，

由 $f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，得 $\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}$ 。

4、设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

证明：令 $f(x)=\ln x$，则由拉格朗日中值定理，知$\exists\xi\in(b,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}$，

而$\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，即$\frac{1}{a}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}$，故$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

5、设$0<a<b$，函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在一点$\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

证明：令$F(x)=\ln x$，则由柯西中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\xi^{-1}}$，即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

6、设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(1/2)=1$，则存在一点$\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$。

证明：令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续、$(0,1)$内可导，且$F(0)=0$及 $F(1)=-1<0<1/2=F(1/2)$，故由零点定理知存在$x_0\in(1/2,1)$，使$F(x_0)=0$，

再由 *Rolle* 定理知，存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)-1=F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$。

第二节 洛必达法则

一、选择题

1、求下列极限，能直接使用洛必达法则的是（ B ）

A、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$； B、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$； C、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$； D、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$。

2、下列各式中正确运用洛必达法则求极限的是（ B ）

A、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$； B、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$；

C、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$不存在； D、$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x^{-1}}=0$。

二、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=$____1____； 2、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=$____不存在____；

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=$____0____； 4、$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+12x-8}=$____$\infty$____。

三、计算题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}=2$；

2、$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$；

3、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 6x}{1+\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}=3$；

4、$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x\tan x}{-x}}=e^0=1$；

5、$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\sec^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x}{2}=\dfrac{1}{2}$；

6、$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}(-\dfrac{1}{2x})=-\dfrac{1}{2}$；

7、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$；

解：令 $y=(1+\dfrac{a}{x})^x$，则 $\ln y=x\ln(1+\dfrac{a}{x})$， $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+ax^{-1})}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{1+ax^{-1}}=a$，

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^a$；

8、 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ 。

解：令 $y=(\dfrac{1}{x})^x$，则 $\ln y=x\ln\dfrac{1}{x}=-x\ln x$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x})^x=1$ 。

四、验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛比达法则求得。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\sin x)=1$，若用洛必达法则计算，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在，故原极限存在，但不能用洛必达法则求得。

五、讨论 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & 若x>0\\ x+1, & 若x\le 0\end{cases}$ 的连续性。

解：若 $x>0$，则 $f(x)=x^{2x}=e^{2x\ln x}$ 连续；而 $x<0$ 时， $f(x)=x+1$ 连续；且

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{2x}=\lim_{x\to 0^+}e^{2x\ln x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

第三节 泰勒公式

一、选择题

下列哪种函数对应的n阶泰勒多项式恰好等于它自己（ D ）

A、三角函数； B、指数函数；

C、对数函数； D、不超过n次的一元多项式函数。

二、计算题

1、求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的n阶麦克劳林公式。

解： $f(0)=0,\ f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}\Big|_{x=0}=(-1)^{k-1}(k-1)!$， $k=1,2,\cdots,n$， 故

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}，\quad 0<\theta<1。$$

2、求函数 $f(x)=xe^x$ 的n阶麦克劳林公式。

解： $f^{(k)}(0)=(k+x)e^x\big|_{x=0}=k$， $k=0,1,2,\cdots,n$， 故

$$xe^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(k-1)!}+\frac{(\theta x+n+1)x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}，\quad 0<\theta<1。$$

3、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=-1$ 处展开成带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式。

解： $f^{(k)}(-1)=\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\Big|_{x=-1}=-k!$， $k=0,1,2,\cdots,n$， 故

$$\frac{1}{x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}=-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k+\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{\left[\theta(x+1)-1\right]^{n+2}}，\quad 0<\theta<1。$$

三、提高题

1、设 $\boldsymbol{m\ge 2}$ 为整数，而 $\boldsymbol{0<a_1,a_2,...,a_{m-1},a_m<+\infty}$ 为常数，求 $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m})^{1/x}}$。

解：令 $\boldsymbol{f(x)=(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m})^{1/x}}$，则有 $\boldsymbol{x\to 0}$ 时，$\boldsymbol{\ln f(x)=\dfrac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x)-\ln m}{x}}$ 为 $\boldsymbol{\dfrac{0}{0}}$ 型

未定式，故由 ***L.Hospital*** 法则，得

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x)-\ln m\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}}$$

$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_m}{m}=\ln(\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m})^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln f(x)}=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$ 。

2、设 $m\geq 2$ 为整数，而 $0<a_1,a_2,...,a_{m-1}\leq 1<a_m<+\infty$ 为常数，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m})^{1/x}$ 。

解： $x\to+\infty$ 时， $\ln f(x)=\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x)-\ln m}{x}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，且

由于 $0<a_1,a_2,...,a_{m-1}\leq 1<a_m<+\infty$ ，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_k/a_m)^x=0,\ k=1,2,...,m-1$ ，

再由 ***L.Hospital*** 法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x)-\ln m\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a_1/a_m)^x\ln a_1+(a_2/a_m)^x\ln a_2+\cdots+(a_{m-1}/a_m)^x\ln a_{m-1}+\ln a_m}{(a_1/a_m)^x+(a_2/a_m)^x+\cdots+(a_{m-1}/a_m)^x+1}=\ln a_m,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m})^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln f(x)}=a_m=\max\{a_1,a_2,...,a_m\}$ 。

3、求 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x^2\ln x}$ 。

解：由 ***Taylor*** 公式得， $x\to 0$ 时，有

$\sin x=x+o(x^2)$ ， $e^x=1+x+o(x)$ ， $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ ，且

$\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=-\lim\limits_{x\to 0+}x=0$ ，而

$$\ln(1+\sin x)-x=\ln\left[1+x+o(x^2)\right]-x$$

$=\left[x+o(x^2)\right]-\frac{1}{2}\left[x+o(x^2)\right]^2+o(x^2)-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，故

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}\left[\ln(1+\sin x)-x\right]=\lim\limits_{x\to 0+}\left[-\frac{1}{2}+\frac{o(x)}{x}\right]\cdot x\ln x=0$ ，从而

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x^2\ln x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-e^{\ln x}}{x^2\ln x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\ln x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}[\ln(1+\sin x)-x]}-1}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\ln x}{x}\left[\ln(1+\sin x)-x\right]}{x\ln x}=\lim_{x\to 0+}\left[-\frac{1}{2}+\frac{o(x)}{x}\right]=-\frac{1}{2}\text{。}$$

4、将 $f(x)=\tan x$ 在 $x=0$ 处的 m 阶 $Taylor$ 公式。

解：由于 $f(x)=\tan x$ 为奇函数，故在 $x=0$ 处的 $Taylor$ 级数中只包含 x 的奇数次幂，不妨设

$f(x)=\tan x=\sum\limits_{0\le n\le m}a_n x^{2n+1}+o(x^{2m+1})$，则由 $\sin x=\tan x\cdot\cos x$，得

$$\sum_{0\le n\le m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2m+1})=\sin x=\tan x\cdot\cos x$$

$$=\left[\sum_{0\le k\le m}a_k x^{2k+1}+o(x^{2m+1})\right]\left[\sum_{0\le j\le m}\frac{(-1)^j}{(2j)!}x^{2j}+o(x^{2m})\right]=\sum_{0\le n\le m}\sum_{0\le k\le n}\frac{(-1)^{n-k}a_k x^{2n+1}}{(2n-2k)!}+o(x^{2m+1}),$$

故 $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}a_k}{(2n-2k)!},\ n=0,1,2,\ldots,m$，解之得

$a_0=1$，

$$a_1=\frac{a_0}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3},$$
$$a_2=\frac{a_1}{2!}-\frac{a_0}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{2}{15},$$
$$a_3=\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{4!}+\frac{a_0}{6!}-\frac{1}{7!}=\frac{17}{315},$$
$$a_4=\frac{a_3}{2!}-\frac{a_2}{4!}+\frac{a_1}{6!}-\frac{a_0}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{62}{2835},$$
$$a_5=\frac{a_4}{2!}-\frac{a_3}{4!}+\frac{a_2}{6!}-\frac{a_1}{8!}+\frac{a_0}{10!}-\frac{1}{11!}=\frac{1382}{155925},$$
$$a_6=\frac{a_5}{2!}-\frac{a_4}{4!}+\frac{a_3}{6!}-\frac{a_2}{8!}+\frac{a_1}{10!}-\frac{a_0}{12!}+\frac{1}{13!}=\frac{21844}{6081075},$$
$$a_7=\frac{a_6}{2!}-\frac{a_5}{4!}+\frac{a_4}{6!}-\frac{a_3}{8!}+\frac{a_2}{10!}-\frac{a_1}{12!}+\frac{a_0}{14!}-\frac{1}{15!}=\frac{929569}{638512875},\ \ldots\ldots,$$

从而 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\tan x$ 的 $m=15$ 阶 $Taylor$ 公式为

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+\frac{929569}{638512875}x^{15}+o(x^{15})$$

(1)、令 $T=\tan x$，则 $(\tan x)^{(n)}=f_n(T)=\begin{cases}T, & 若 n=0\\ (1+T^2)f'_{n-1}(T), & 若 n\ge 1\end{cases}$，利用数学归纳法，可以证明 $f_n(T)$ 为系数大于零的 $(n+1)$ 次多项式，且 $f_{2n+1}(0)>0=f_{2n}(0),\ n=0,1,2,\ldots$，从而 $\tan x$ 在

$x=0$ 处的 $Taylor$ 公式中只包含 x 的奇数次幂；

(2)、若 $0<x<\pi/2$，则

$$\tan x > x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+\frac{929569}{638512875}x^{15}$$。

第四节 函数单调性的判定法

一、选择题

设 $f(x), g(x) > 0$ 是可导，且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$，则 $a < x < b$ 时，有（ A ）

A、 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$；　　B、 $f(x)g(a) > f(a)g(x)$；

C、 $f(x)g(x) > f(b)g(b)$；　　D、 $f(x)g(x) > f(a)g(a)$。

二、确定下列函数的单调区间

1、 $y = x - \ln(1+x)$；

解： $D = (-1, +\infty)$， $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$，增区间为 $(0, +\infty)$，减区间为 $(-1, 0)$；

2、 $y = \sqrt[3]{(2x - x^2)^2}$。

解： $y' = \dfrac{4}{3}\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$，增区间为 $[0,1] \cup [2, +\infty)$，减区间为 $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$。

三、证明题

1、若 $x > 0$，则 $e^x > 1 + x$。

证明：令 $f(x) = e^x - x - 1$，则 $x > 0$ 时，有 $f'(x) = e^x - 1 > 0$，故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增，

故 $x > 0$ 时，有 $e^x - x - 1 = f(x) > f(0) = 0$，即 $e^x > 1 + x$。

2、若 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin x + \tan x > 2x$。

证明：令 $f(x) = \sin x + \tan - 2x$，则 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时， $f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2$，

$f''(x) = -\sin x + 2\sec^2 x \tan x = \sin x(2\sec^3 - 1) > 0$，

故 $f'(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 内单增，即 $f'(x) > f'(0) = 0$，从而 $f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 内单增，即

$\sin x + \tan - 2x = f(x) > f(0) = 0$，故 $\sin x + \tan x > 2x$。

3、方程 $\cos x = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个实根。

证明：设 $f(x) = x - \cos x$，则 $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$，且导数为零的点不构成区间，故 $f(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 内严格单增，故方程 $f(x) = x - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内至多有一个根；

又 $f(x) = x - \cos x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上连续，且 $f(0) = -1 < 0, \quad f(\pi/2) = \pi/2 > 0$，故由零点定理知至少

存在一点 $\xi \in (0, \pi/2)$，使得 $f(\xi) = \xi - \cos\xi = 0$，即方程 $f(x) = x - \cos x = 0$ 在 $(0, \pi/2)$ 内至少有

一个根；从而方程 $\cos x = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个实根。

第五节 函数的极值及其求法

一、选择题： 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=x^3$ 的（ A ）

A、驻点但不是极值点； B、极值点但不是驻点；

C、非驻点也非极值点； D、连续但不可导点。

二、填空题

1、当 $a=$__2__时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值；

2、函数 $y=x^2e^{-x}$ 的极大值点为 $x=$__2__，极小值点为 $x=$ __0__。

三、求下列函数的极值

1、 $y=2x-\ln(4x)^2$；

解：$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y'=2-\frac{2}{x}$，$y''=\frac{2}{x^2}$，令 $y'=0$，得唯一驻点 $x=1$；又 $y''\big|_{x=1}=2>0$，故 $y\big|_{x=1}=2-4\ln 2$ 为极小值；

2、 $y=3-2\sqrt[3]{(x+1)^2}$

解： $D=(-\infty,+\infty)$， $y'=-\frac{4}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$，函数无驻点，但在 $x=-1$ 处不可导，且

$y=3-2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}\le 3=y\big|_{x=-1}$， 故 $y\big|_{x=-1}=3$ 为极大值；

3、 $y=x+\tan x$；

解： $D=(-\infty,+\infty)$ ， $y'=1+\sec^2 x>0$，故函数无极值；

4、 $y=-x^4+2x^2$ 。

解： $D=(-\infty,+\infty)$，由 $y'=-4x(x^2-1)=0$ 得驻点 $x=0,x=\pm1$；且 $y''=-12x^2+4$，

而 $y''(\pm1)<0$， $y''(0)>0$，故 $y\big|_{x=\pm1}=1$ 为极大值， $y\big|_{x=0}=0$ 为极小值。

四、若 $b^2-3ac<0$，则 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 没有极值。

证明：若 $b^2-3ac<0$，则 $a,c\ne0$，且二次三项式 $y'=3ax^2+2bx+c$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)<0$，

即 $y'=3ax^2+2bx+c\ne0$ 且不变号，即 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调，无极值。

第六节 最大值、最小值问题

一、填空题

1、函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值为___80___；

2、函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}(x<0)$ 在 $x=$ ___-3___ 处取得最小值___27___。

二、求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点。

解：椭圆方程两边分别对 x 求导，得 $2x-y-xy'+2yy'=0$，则 $y'=\dfrac{y-2x}{2y-x}$，令 $y'=0$，得 $y=2x$，代入椭圆方程得 $x=\pm1$，由题意知点 $(1,2)$、$(-1,-2)$ 为椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点。

三、在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内作一内接矩形，试问其长、宽各为多少时，矩形面积最大？此时面积值等于多少 $($其中$a,b>0)$？

解：设此矩形的相邻两边的长度为 $m,n>0$，则 $(\pm m/2,\pm n/2)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，故

$\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}=4$，即 $n=\dfrac{b}{a}\sqrt{4a^2-m^2}$，而矩形的面积为 $A=mn=\dfrac{b}{a}m\sqrt{4a^2-m^2}$，

由 $\dfrac{dA}{dm}=\dfrac{b}{a}\left[\sqrt{4a^2-m^2}-\dfrac{m^2}{\sqrt{4a^2-m^2}}\right]=\dfrac{2b(2a^2-m^2)}{a\sqrt{4a^2-m^2}}=0$，得唯一驻点 $m=\sqrt{2}a,n=\sqrt{2}b$，此时最大面积 $A=2ab$。

四、要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？

解：已知 $V=\pi r^2h$，即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，圆柱形油罐的表面积为 $A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$，

由 $\dfrac{dA}{dr}=4\pi r-\dfrac{4V}{r^2}=0$，得唯一驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，故 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，$h=2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，表面积最小。

第七节 曲线的凹凸与拐点

一、选择题： 对于曲线 $y=x^5+x^3$，下列结论中正确的是（ D ）

A、有4个极值点； B、有3个拐点； C、有2个极值点； D、有1个拐点。

二、填空题

1、曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凸区间是 $\underline{[0,+\infty)}$ ；

2、曲线 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ 的凹区间是 $\underline{(-\infty,0)与(0,+\infty)}$ ；

3、当 $a=\underline{-3/2}$ ，$b=\underline{9/2}$ 时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

三、求下列函数图形的拐点及凹、凸区间

1、 $y=\ln(x^2+1)$ ；

解：$D=(-\infty,+\infty)$，$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$，

曲线在 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$ 上是凸的， 在 $[-1,1]$ 上是凹的，曲线的拐点为 $(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$；

2、 $y=\dfrac{9}{7}x^{\frac{4}{3}}(x+7)$ 。

解：$D=(-\infty,+\infty)$，$y'=3x^{\frac{4}{3}}+12x^{\frac{1}{3}}$，$y''=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$，曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的，在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上是凹的曲线的拐点为 $(-1,\dfrac{54}{7})$。

四、 若 $x,y>0$，则 $x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ 。

证明：令 $f(t)=t\ln t$，则在 $t>0$ 内，$f'(t)=\ln t+1$，$f''(t)=\dfrac{1}{t}>0$，故 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的，

从而 $\forall x,y>0$，有 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]\geq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$，即 $\dfrac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)\geq\dfrac{x+y}{2}\ln\dfrac{x+y}{2}$，

亦即 $x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ 。

第八节 函数图形的描绘

一、填空题

1、曲线 $y=\sqrt{x^2+1}-(x+1)$ 的水平渐近线为 $\underline{\quad y=-1 \quad}$；

2、曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的铅直渐近线为 $\underline{\quad x=0 \quad}$。

二、求 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调区间、极值、凹、凸区间、拐点和渐近线，并画出函数图像。

解：$D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$，$y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$；

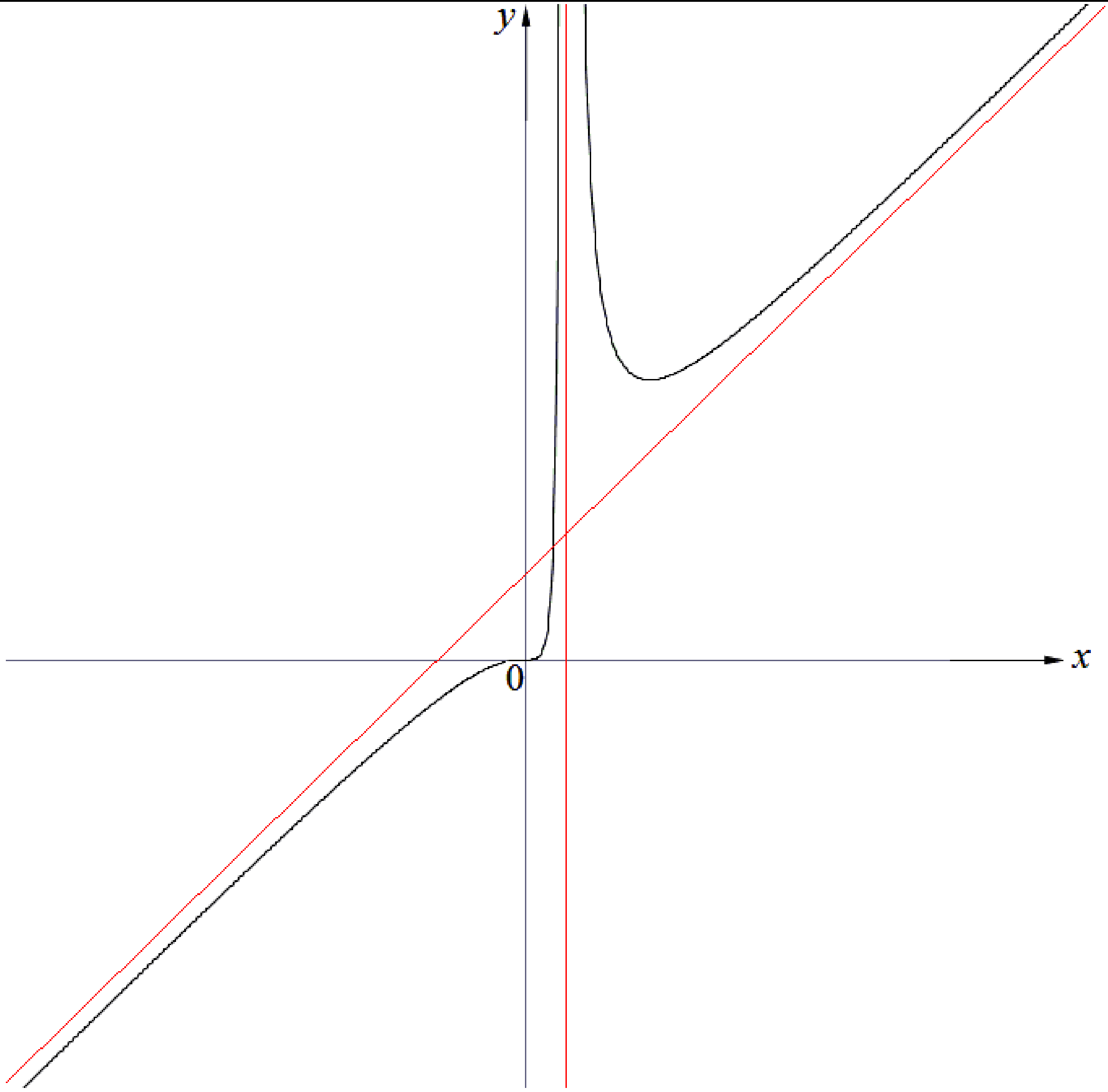
令 $y'=0$，得 $x_1=0,\quad x_2=3$；令 $y''=0$，得 $x_3=0$，且

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y		拐点 0			极小 27/4	

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$，故 $x=1$ 是曲线的铅垂渐近线；

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)^2}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(2x-1)}{(x-1)^2}=2$，故 $y=x+2$ 是曲线的斜渐近线

(图像见下页)。


y
x
0

第九节 曲率

一、填空题

1、椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率为 $\underline{\quad 2 \quad}$；

2、曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率为 $\underline{\cos x}$，曲率半径为 $\underline{\sec x}$。

二、计算题

1、曲线弧 $y=\sin x (0<x<\pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径。

解： $y'=\cos x$， $y''=-\sin x$，曲线弧的曲率为 $K=\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$，

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时曲率最大， $K\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$，此时曲率半径 $\rho=1$ 最小。

2、飞机沿抛物 $y=\dfrac{x^2}{10000}$ 线路径(y 轴铅直向上，单位为 m)作俯冲飞行，在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200\ m/s$，飞行员体重 $G=70\ kg$，求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反作用力。

解： $y'=\dfrac{x}{5000}$， $y''=\dfrac{1}{5000}$，抛物线在坐标原点的曲率半径为 $\rho=\left.\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}\right|_{x=0}=5000$，故向心力 $F_1=\dfrac{m\upsilon^2}{\rho}=\dfrac{70\times 200^2}{5000}=560$ (牛顿)，座椅对飞行员的反作用力

$F=mg+F_1=70\times 9.8+560=1246$ (牛顿)。

第四章 不定积分

第一节 不定积分概念与性质

一、选择题

1、设 $f(x)$ 可导，下列结论正确的是（ A ）

A、$\int f'(x)dx = f(x)+C$；　　B、若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int dF(x)=F(x)$；

C、$\int f(x)dx = f'(x)+C$；　　D、$\frac{d}{xx}\int f(x)dx = f(x)+C$。

2、若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$，则 $f(x)$ 的导函数为（ D ）

A、$\sin x$；　B、$-\sin x$；　C、$\cos x$；　D、$-\cos x$。

二、填空题

1、$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}+C$；　　2、$\int x\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}x^{5/2}+C$；

3、$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$；　　4、$-\int \frac{dx}{x^2+1} = arc\cot x + C$；

5、$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$；　　6、$\int \frac{-3dh}{2h^2\sqrt{h}} = h^{-3/2}+C$；

三、求下列不定积分

1、$\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4+2x^2+1)dx = \frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C$；

2、$\int \frac{2\tan x dx}{\sin 2x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$；

3、$\int \frac{x^2+2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{2(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int (\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})dx = -(\frac{2}{x}+\arctan x)+C$；

4、$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int (\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+x^{3/2})dx = 2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C$；

5、$\int (10^x+\cot^2 x)dx = \int (10^x+\csc^2 x-1)dx = \frac{10^x}{\ln 10}-\cot x - x + C$；

6、$\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int (3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx = x^3+\arctan x + C$；

7、$\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx=3\arctan x-2\arcsin x+C$；

8、$\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int(x^{3/4}-x^{-5/4})dx=\frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}+C$；

9、$\int(2e^x+3^xe^x+\frac{3}{x})dx=\int\left[2e^x+(3e)^x+\frac{3}{x}\right]dx=2e^x+\frac{3^xe^x}{1+\ln 3}+3\ln|x|+C$；

10、$\int(\sec x-\tan x)\sec xdx=\int(\sec^2 x-\tan x\sec x)dx=\tan x-\sec x+C$；

11、$\int(\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{1+\cos 2x})dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x+\sec^2 x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x+\tan x)+C$；

12、$\int\frac{\cos 2xdx}{cox^2x\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{cox^2x\sin^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx=-\cot x-\tan x+C$。

四、证明题 证明函数 $\ln(-x),\ln(-5x),\ a+\ln(-\pi x)$ 都是同一函数的原函数。

证明：$\ln(-5x)=\ln(-x)+\ln 5,\ a+\ln(-\pi x)=\ln(-x)+\ln\pi+a$ 与 $\ln(-x)$ 相差于常数，故

$\frac{d}{dx}[\ln(-5x)]=\frac{d}{dx}[a+\ln(-\pi x)]=\frac{d}{dx}[\ln(-x)]=\frac{1}{x}$，故它们都是同一函数的原函数。

五、 应用题

1、曲线 $y=f(x)$ 通过点 $(1,2)$，且在 $P(x,f(x))$ 处的切线的斜率等于 $2x$，求该曲线的方程。

解：由 $y'=2x$，得 $y=x^2+C$，又 $y|_{x=1}=2$，故 $C=1$，从而所求曲线方程为 $y=x^2+1$。

2、物体由静止开始运动，t 秒后的速度是 $3t^2(m/s)$，问在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少？物体走完 360m 需要多少时间？

解：$s(t)=\int 3t^2dt=t^3+C$，故 $\Delta s=s(3)-s(0)=27m$；

$T^3=s(T)-s(0)=\Delta s=360m$，故 $T=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(s)$。

第二节 换元积分法

一、选择题

1、设 $\int f(x)dx = x^2 + C$，则 $\int 2xf(x^2)dx =$（ B ）

A、$2x(x^2+C)$； B、x^4+C； C、$f(x^2)+C$； D、$2x\cdot\int f(x^2)dx+C$。

2、$\int \frac{dx}{9+x^2} =$（ C ）

A、$\frac{1}{9}\arctan x + C$； B、$\arctan\frac{x}{3}+C$； C、$\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$； D、$\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{3}+C$。

3、下列四个关系式中，错误的是 （ B ）

A、$xdx = -\frac{1}{2}d(-x^2+2)$； B、$\frac{1}{x}dx = 3d(\ln 3x)$；

C、$\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = d(1-\arccos\theta)$； D、$e^{1-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{1-3x}d(1-3x) = d(-\frac{1}{3}e^{1-3x})$。

二、填空题

1、$\int e^{5t}dt = \underline{\frac{1}{5}e^{5t}+C}$；

2、$\int (3-2x)^3dx = \underline{-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C}$；

3、$\int \frac{dx}{1-2x} = \underline{-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C}$；

4、$\int 2x\cos(x^2)dx = \underline{\sin(x^2)+C}$；

5、$\int xe^{-x^2}dx = \underline{-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C}$；

6、$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \underline{-2\cos\sqrt{x}+C}$。

三、计算题

1、$\int(\sin\pi x - e^{-x/2})dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x + 2e^{-x/2} + C$；

2、$\int \tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx = \int\tan^{10}xd(\tan x) = \frac{1}{11}\tan^{11}x + C$；

3、$\int\frac{3x^3dx}{1-x^4} = -\frac{3}{4}\int\frac{d(1-x^4)}{1-x^4} = -\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right| + C$；

4、$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan(e^x)+C$；

5、$\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \int\frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln\left|\ln\ln x\right| + C$；

6、$\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = -\int \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = -\ln(1+\cos x)+C$；

7、$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx = \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3}+C$；

8、$\int \cos^3 x dx = \int (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$；

9、$\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt = -\frac{1}{\omega}\int \cos^2(\omega t+\varphi)d\left[\cos(\omega t+\varphi)\right] = -\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C$；

10、$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int e^{\arctan x}d(\arctan x) = e^{\arctan x}+C$；

11、$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} = \int \frac{tdt}{1+t} = \int (1-\frac{1}{1+t})dt = t-\ln(1+t)+C = \sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$，其中 $t=\sqrt{2x}$；

12、$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C$；

13、$\int \sin 2x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x-\sin x)dx = \frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+C$；

14、$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1-1)\sqrt{x^2+1}d(x^2+1) = \frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}-\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$；

15、$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{(1+x)\sqrt{x}}dx = 2\int \arctan(\sqrt{x})d(\arctan(\sqrt{x})) = (\arctan\sqrt{x})^2+C$；

16、$\int \sin^2 x\cos^5 x dx = \int \sin^2 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$；

17、$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

解：令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 tdt$，故

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 tdt}{\tan^4 t\sec t} = \int \cot^3 t\csc tdt = \csc t-\frac{1}{3}\csc^3 t+C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3x^3}+C;$$

18、$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

解：令 $x=\sin t$，则 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t}{1+\cos t}dt = t-\tan\frac{t}{2}+C = \arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$；

19、$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

解：令 $x=\sec t$，即 $t=\arccos(1/x)$，则 $dx=\sec t\tan tdt$，故

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t\left|\tan t\right|}dt = \pm t + C = \arccos(\frac{1}{x}) + C\text{；}$$

20、$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$，其中 $a>0$ 为常数。

解：令 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t dt$，故

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C\text{。}$$

第三节 分部积分法

一、选择题

1、设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数，则 $\int uv'dx=$（ A ）

A、$uv-\int vdu$； B、$uv'-\int v'du$； C、$u'v-\int udv$； D、$uv'-\int uvdx$。

2、$\int x\sin xdx=$（ A ）

A、$\sin x-x\cos x+C$； B、$\sin x-x\cos x$；

C、 $x\cos x-\sin x+C$； D、$\cos x-x\cos x+C$。

二、填空题

1、$\int \ln xdx=\underline{x(\ln x-1)+C}$；

2、$\int xe^{x}dx=\underline{e^{x}(x-1)+C}$；

3、$\int \cos x\,d(e^{x^2})+\int e^{x^2}d(\cos x)=\underline{e^{x^2}\cos x+C}$。

三、计算题

1、$\int te^{-2t}dt=-\frac{1}{2}\int tde^{-2t}=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C$；

2、$\int x\cos(x/2)dx=\int 2xd(\sin\frac{x}{2})=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$；

3、$\int (x-1)\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int (x-1)d(\cos 2x)=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$；

4、$\int x^2e^{x}dx=\int x^2d(e^{x})=(x^2-2x+2)e^{x}+C$；

5、$\int e^{-\sqrt{x}}dx=2\int e^{-t}tdt=-2\int td(e^{-t})=-2(t+1)e^{-t}+C=-2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}}+C$；

6、$\int \cos\ln xdx=x\cos\ln x+\int \sin\ln xdx=x(\cos\ln x+\sin\ln x)-\int \cos\ln xdx$，

故 $\int \cos\ln xdx=\frac{x(\cos\ln x+\sin\ln x)}{2}+C$；

7、$\int \frac{\ln\ln x}{x}dx=\int \ln\ln xd(\ln x)=\ln x\cdot\ln\ln x-\int \frac{dx}{x}=(\ln\ln x-1)\ln x+C$；

8、$\int 2x\arctan xdx=\int \arctan xd(1+x^2)=(1+x^2)\arctan x-\int dx=(x^2+1)\arctan x-x+C$；

9、$\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int \ln(x-1)d(x^2-1)=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int (x+1)dx$

$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{2}(x+1)^2+C$；

10、$\int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int 2\arcsin x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$。

四、证明题 求证 $\int(\sin x + \cos x)e^x dx = \int e^x \sin x dx + \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + C$。

证明：$\int(\sin x + \cos x)e^x dx = \int e^x \sin x dx + \int e^x \cos x dx = \int d(e^x \sin x) = e^x \sin x + C$。

第四节 几类特殊类型函数的不定积分

计算题

1、$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$；

2、$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx = \int (x^2+x+1+\frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1})dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8\ln|x| - 3\ln|x-1| - 4\ln|x+1| + C$；

3、$\int \frac{3dx}{x^3+1} = \int (\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1})dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$；

4、$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^2}{t+1}dt = 4\int (t-1+\frac{1}{t+1})dt = 2t^2 - 4t + 4\ln(t+1) + C$，其中$t = \sqrt[4]{x}$

$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C$；

5、$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = \int \frac{-4t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \ln\frac{t-1}{t+1} + 2\arctan t + C$，其中$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$= \ln\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} + 2\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) + C$；

6、$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{du}{1+u+u^2} = 2\int \frac{du}{(1+2u)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C$，其中$u = \tan(x/2)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}} + C$。

第五节 积分表的使用

计算下列不定积分

1、$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C$；

2、$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{|x|}+C$；

3、$\int\sin^4 xdx=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\int\sin^2 xdx=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{8}\int(1-\cos 2x)dx$

$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{8}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+C$；

4、$\int\ln^3 xdx=x\ln^3 x-3\int\ln^2 xdx=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6\int\ln xdx=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x(\ln x-1)+C$ 。

第五章 定积分

第一节 定积分概念

一、填空题

1、函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可(常义)积分的<u> 必要 </u>条件，而函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可(常义)积分的<u> 充分 </u>条件；

2、由定积分的几何意义知：$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx=$ $\underline{\ \dfrac{\pi}{4}R^2\ }$ ，$\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=$ $\underline{\ 0\ }$ ；

3、由曲线 $y=x^3$、直线 $x=1$、$x=3$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 $\underline{\int_1^3 x^3dx=20}$ ；

4、物体在(与 x 轴方向一致的)变力 $F(x)$ 的作用下，由点 $x=a$ 移动到点 $x=b$，则在此过程中力 F 对物体所做的功为 $\underline{\ W=\int_a^b F(x)dx\ }$ 。

二、计算题 用定积分定义计算

1、$\int_2^4(1+x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[1+(2+\dfrac{2k}{n})\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(3+\dfrac{2k}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}(4n+1)=8$；

2、$\int_0^1 e^xdx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{k/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{(1-e)e^{1/n}}{1-e^{1/n}}=(e-1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/n)e^{1/n}}{e^{1/n}-1}=(e-1)\lim\limits_{t\to0}\dfrac{te^t}{e^t-1}=e-1$ 。

第二节 定积分的性质

一、选择题

设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$c\in(a,b)$，则下列各式中错误的是（ C ）

A、$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$； B、$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy$；

C、$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$； D、$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$。

二、计算题

1、比较积分 $\int_1^2 e^x dx$ 与 $\int_1^2 e^{x^2}dx$ 的大小；

解：由于 $1\le x\le 2$ 时，有 $e^x\le e^{x^2}$，且二者不恒等，故 $\int_1^2 e^x dx<\int_1^2 e^{x^2}dx$；

2、估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$ 的取值范围。

解：由于 $f(x)=e^{x^2-x}$ 在 $[0,2]$ 上可导，且由 $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}=0$ 得 $x=1/2$，

而 $f(0)=1$，$f(1/2)=e^{-1/4}$，$f(2)=e^2$，故 $0\le x\le 2$ 时，有

$e^{-1/4}=f(1/2)\le f(x)=e^{x^2-x}\le f(2)=e^2$，从而 $2e^{-1/4}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$。

三、证明题 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续、$(0,1)$ 内可导，且 $4\int_{3/4}^1 f(x)dx=f(0)$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$。

证明：由定积分中值定理知，存在 $x_0\in\left[3/4,1\right]$，使 $f(0)=4\int_{3/4}^1 f(x)dx=4(1-3/4)f(x_0)=f(x_0)$，

故由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$。

第三节 微积分基本公式

一、选择题

函数 $f(x)=\int_0^x (2t-1)dt$ 的极小值为（ D ）

A、$1/2$； B、0； C、$1/4$； D、$-1/4$。

二、填空题

1、$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt=$ $\underline{2x\sqrt{1+x^4}}$；

2、$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}e^{-t^2}dt=$ $\underline{2xe^{-x^4}-e^{-x^2}}$。

三、计算题

1、计算下列积分

(1)、$\int_{-1}^2 |x|dx=\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^2 xdx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0+\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=\frac{5}{2}$；

(2)、$\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^0(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx=(x^3+\arctan x)\Big|_{-1}^0=1+\frac{\pi}{4}$；

(3)、$\int_1^4(\sqrt{x}+x)dx=(\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{x^2}{2})\Big|_1^4=\frac{14}{3}+\frac{15}{2}=\frac{73}{6}$；

(4)、$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x/2)^2}}=\arcsin(x/2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$；

(5)、$\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx=(x-arc\tan x)\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$；

(6)、$\int_0^\pi\sqrt{1+\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^\pi|\cos x|dx=\sqrt{2}(\int_0^{\pi/2}\cos xdx-\int_{\pi/2}^\pi\cos xdx)$

$=\sqrt{2}(\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^\pi)=2\sqrt{2}$；

(7)、$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{\pi}{3}$；

(8)、$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{4}(2t+\sin 2t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$。

2、求下列极限

(1)、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan tdt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\arctan(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$；

(2)、设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f'(0)=1$。

3、设 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 若0\le x<1\\ 5-2x, & 若1\le x\le 2\end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，并讨论其连续性。

解：$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x 3t^2dt=x^3, & 若0\le x\le 1\\ \int_0^1 3t^2dt+\int_1^x(5-2t)dt=5x-x^2-3, & 若1\le x\le 2\end{cases}$，它在$[1,2]$上连续。

4、 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{kn^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k/n}=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\dfrac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1=\dfrac{3}{4}$。

四、证明题 设 $f(x)>0$ 在$[a,b]$上连续，而 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{dt}{f(t)}$，则

(1)、 $F'(x)\ge 2$； (2)、方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根。

证明：由题设知 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{dt}{f(t)}$ 在$[a,b]$上连续、(a,b) 内可导，且 $\forall x\in(a,b)$，有

(1)、 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}=2>0$；

(2)、由(1)知 $F(x)$ 在$[a,b]$上严格单调递增，且 $F(a)=-\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}<0,\ F(b)=\int_a^b f(x)dx>0$，

故方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根。

第四节 定积分的换元法

一、填空题

1、$\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_0^1 xdx=$ __1__ ；

2、$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_1^2\frac{d(x^{-1})}{\sqrt{1-x^{-2}}}=\arcsin(x^{-1})\Big|_1^2=$ __$-\pi/3$__ ；

3、$\int_0^4\frac{du}{1+\sqrt{u}}=2\int_0^2\frac{xdx}{1+x}=2\int_0^2(1-\frac{1}{1+x})dx=$ __$2(2-\ln 3)$__ ；

4、$\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3 x)dx=\int_0^{\pi/2}dx+\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)d(\cos x)=(x+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x)\Big|_0^{\pi/2}=$ __$\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$__ 。

二、计算题

1、$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos 2xdx=2\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2xdx=\int_0^{\pi/2}(\cos x+\cos 3x)dx=\frac{1}{3}(3\sin x+\sin 3x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}$ ；

2、$\int_0^1(1+x^2)^{-3/2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2 u}{\sec^3 u}du=\int_0^{\pi/4}\cos udu=\sin u\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，其中 $x=\tan u$ ；

3、$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2x^2}dx=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2x^2}dx=8\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2 udu=4\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2u)du$

$=2\sqrt{2}(2u+\sin 2u)\Big|_0^{\pi/4}=(\pi+2)\sqrt{2}$，其中 $x=2\sin u$ ；

4、$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=\frac{1}{8}\int_1^3(5-u^2)du=\frac{1}{24}(15u-u^3)\Big|_1^3=\frac{1}{6}$，其中 $u=\sqrt{5-4x}, x=(5-u^2)/4$ ；

5、$\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^1=\ln(\frac{2e}{1+e})$ ；

6、$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}}=\sqrt{1+u^2}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1}=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}$，其中 $u=x^{-1}$ ；

7、设 $f(x)=e^{-x^2}$，求 $\int_0^1 f'(x)f''(x)dx$ ；

解：$\int_0^1 f'(x)f''(x)dx=\frac{1}{2}(|f'(1)|^2-|f'(0)|^2)=2x^2e^{-2x^2}\Big|_0^1=2e^{-2}$ ；

8、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求 $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(a+b-x)dx$ ；

解：$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(t)dt=0$，其中 $t=a+b-x$ ；

9、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 若x\le 1 \\ 2-x, & 若x>1 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2} f(x+1)dx$ 。

解：$\int_{-1}^{2} f(x+1)dx=\int_{0}^{3} f(t)dt=\int_{0}^{1} t^2dt+\int_{1}^{3}(2-t)dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}(4t-t^2)\Big|_1^3=\frac{1}{3}$ 。

三、证明题 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的连续函数，则 $\forall a\in R,n\in N$，积分 $\int_{a}^{a+nT} f(x)dx$ 只与 n,T 有关，而与 a 无关。

证明：由题设知，$\forall x\in R,n\in Z$，有 $f(x+nT)\equiv f(x)$，故

$$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{T} f(x)dx+\int_{T}^{a+nT} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx+\int_{a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a+(n-1)T} f(x+T)dx$$

$$=\int_{0}^{T} f(x)dx+\int_{a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a+(n-1)T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx+\int_{a}^{a+(n-1)T} f(x)dx=\cdots$$

$$=n\int_{0}^{T} f(x)dx+\int_{a}^{a} f(x)dx=n\int_{0}^{T} f(x)dx$$ 。

第五节 定积分的分部积分法

一、填空题

1、$\int_0^1 xe^x dx = (x-1)e^x\Big|_0^1 = \underline{\quad 1 \quad}$；

2、$\int_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = \underline{\quad 1 \quad}$；

3、设 xe^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$\int_0^1 xf'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = \left[(xe^x)' - xe^x\right]\Big|_0^1 = e^x\Big|_0^1 = \underline{\quad e-1 \quad}$。

二、计算下列不定积分

1、$\int_0^{\pi/3} x\sin x dx = -\int_0^{\pi/3} xd(\cos x) = -x\cos x\Big|_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3}\cos x dx = (\sin x - x\cos x)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$；

2、$\int_1^4 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}} = 4\int_1^4 \ln(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = 4\int_1^2 \ln u du = 4(u\ln u - u)\Big|_1^2 = 4(2\ln 2 - 1)$；

3、$\int_0^{\sqrt{3}/2} \arccos x dx = \int_{\pi/2}^{\pi/6} ud(\cos u) = (\sin u - u\cos u)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{6+\sqrt{3}\pi}{12}$；

4、$\int_0^1 x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x d(x^2+1) = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi-2}{4}$；

5、$\int_0^1 t^2 e^{-t}dt = -\int_0^1 t^2 d(e^{-t}) = -t^2e^{-t}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 td(e^{-t}) = -(t^2+2t+2)e^{-t}\Big|_0^1 = 2 - 5e^{-1}$；

6、$\int_0^{\pi/2} e^x\sin x dx = \int_0^{\pi/2}\sin x d(e^x) = e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos x d(e^x) = e^x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\sin x dx$，

故 $\int_0^{\pi/2} e^x\sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1+e^{\pi/2}}{2}$。

第六节 广义积分

一、选择题

下列广义积分发散的是（ A ）

A、$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$； B、$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$； C、$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{1+x^2}$； D、$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$。

二、填空题

1、设 $b>a>0$ 为常数，则 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 在 $\underline{\ q<1\ }$ 时收敛，而 $\underline{\ q\geq 1\ }$ 时发散；

2、设 $a>0$ 为常数，则 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 在 $\underline{\ q>1\ }$ 时收敛，而 $\underline{\ q\leq 1\ }$ 时发散。

三、计算题

1、$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})dx = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x+3})\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 3$；

2、$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^1 = 1$；

3、$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$，其中为常数。

解：
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_{\ln 2}^{+\infty} u^{-k}du = \begin{cases} \frac{u^{1-k}}{1-k}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty, & \text{若} k<1 \\ \ln u\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty, & \text{若} k=1 \text{。} \\ \frac{u^{1-k}}{1-k}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1}, & \text{若} k>1 \end{cases}$$

第六章 定积分的应用

第二节 平面图形的面积

一、填空题

1、由曲线 $y=1/x$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$ 所界平面图形的面积为 $A=\int_1^2 (x-x^{-1})dx=$ $\underline{\ \dfrac{3}{2}-\ln 2\ }$；

2、心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 上相应于 $\pi\le\theta\le 2\pi$ 的那一段与极轴所围成的平面图形的面积为

$A=\dfrac{a^2}{2}\int_\pi^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta=4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 u du=$ $\underline{\ \dfrac{3}{4}\pi a^2\ }$；

3、由摆曲线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱线($0\le t\le 2\pi$)与 x 轴所围成的平面图形的面积为 $A=\int_0^{2\pi a} ydx=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=16a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 u du=$ $\underline{\ 3\pi a^2\ }$。

二、计算题

1、求由直线 $y=2x$ 与抛物线 $y=3-x^2$ 所围成的平面图形的面积；

解：直线 $y=2x$ 与抛物线 $y=3-x^2$ 的交点为 $(-3,-6),(1,2)$，故所求面积为

$A=\int_{-3}^1 (3-x^2-2x)dx=\dfrac{1}{3}(9x-3x^2-x^3)\Big|_{-3}^1=\dfrac{32}{3}$；

2、求由星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$ 所围成的平面图形的面积；

解：$A=4\int_0^a ydx=12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 tdt=12a^2\int_0^{\pi/2}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt=\dfrac{3}{8}\pi a^2$；

3、求由心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆周 $r=3a\cos\theta$ 所围成图形的公共部分之面积；

解：心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆周 $r=3a\cos\theta$ 的交点对应的极角为 $\theta=\pm\arccos(1/2)=\pm\dfrac{\pi}{3}$，故根据对称性知所求公共部分之面积为

$$A=a^2\int_0^{\pi/3}(1+\cos\theta)^2 d\theta+9a^2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}(3+4\cos\theta+\cos 2\theta)d\theta+\frac{9a^2}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}(6\theta+8\sin\theta+\sin 2\theta)\Big|_0^{\pi/3}+\frac{9a^2}{4}(2\theta+\sin 2\theta)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}=\frac{5\pi a^2}{4}；$$

4、求曲线 $y=x^2$ 在区间 $(0,1)$ 内的一条切线，使该切线与直线 $x=0$、$x=1$ 及 $y=x^2$ 所围成的平面图形的面积最小；

解：设所求切点为 (u,u^2)，其中 $u\in(0,1)$，则切线为 $y=u^2+2u(x-u)=u(2x-u)$，且所求图形

的面积为 $A=\int_0^1\left[x^2-u(2x-u)\right]dx=\int_0^1(x-u)^2dx=\frac{1}{3}(x-u)^3\Big|_0^1=(u-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}\geq\frac{1}{12}$，

故当 $u=\frac{1}{2}$ 时，面积取到最小值 $\min A=\frac{1}{12}$，此时切线方程为 $y=\frac{1}{4}(4x-1)$；

5、设曲线 $y=2\sqrt{x}$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 相切于点 $(1,2)$，且它们与 y 周所围平面图形的面积为 $5/6$，求常数 a,b,c 的值(其中 $a>0$)。

解：由题设知常数 b,c 及 $a>0$ 满足

$$\begin{cases}a+b+c=y(1)=2\\2a+b=y'(1)=1\\2a+3b+6c-8=6\int_0^1(ax^2+bx+c-2\sqrt{x})dx=6A=5\end{cases}$$

，解之得 $a=2,b=-3,c=3$。

第三节 空间立体的体积

一、选择题 曲线$(x/4)^2+(y/3)^2=1$绕x轴旋转一周而成的旋转体之体积为（ C ）

A、144π； B、24π； C、48π； D、96π。

二、填空题 曲线$(x/a)^2+(y/b)^2=1$绕y轴旋转一周而成的旋转体之体积为$\dfrac{4\pi}{3}a^2b$。

解：$D:0\le x\le \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},-b\le y\le b$，$V=\dfrac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}(b^2-y^2)dy=\dfrac{4\pi}{3}a^2b$。

三、计算题

1、求由曲线$y=x^2$与$x=y^2$所围成的平面图形绕x轴旋转一周而成的旋转体之体积；

解：$D:x^2\le y\le\sqrt{x},0\le x\le 1$，$V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\dfrac{3\pi}{10}$；

2、求由曲线$y=\sqrt{x}$与$x=4$及x轴所围成的平面图形绕y轴旋转一周而成的旋转体之体积；

解：$D:y^2\le x\le 4,0\le y\le 2$，$V=\pi\int_0^2(16-y^4)dy=\dfrac{128\pi}{5}$；

3、计算底面是半径为R的圆、而垂直于底面上一条固定直径的所有截面是等边三角形的立体之体积。

解：所求立体上垂直于底面上一条固定直径的所有截面为

$A(x)=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{R^2-x^2})^2\sin(\pi/3)=\sqrt{3}(R^2-x^2)$，

故其体积为$V=\int_{-R}^{R}A(x)dx=\sqrt{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\dfrac{4R^3}{\sqrt{3}}$。

第四节 平面曲线的弧长

一、选择题

摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 上一拱 $0\le t\le 2\pi$ 的弧长为（ D ）

A、$2a$； B、$4a$； C、$6a$； D、$8a$。

解：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt$

$=2a\int_0^{2\pi}\sin(t/2)dt=-4a\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi}=8a$。

二、填空题

1、星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$ 的周长为 $\underline{\quad 6a \quad}$；

解：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\cos^2 t\sin t)^2+(\cos t\sin^2 t)^2}dt=3a\int_0^{2\pi}\left|\sin t\cos t\right|dt$

$=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos tdt=6a$；

2、曲线 $y=x^{3/2}$ 上相应于 $0\le x\le 4$ 的那一段的弧长为 $\underline{\quad \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1) \quad}$；

解：$L=\int_0^4\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+9x}dx=\frac{1}{18}\int_4^{40}\sqrt{u}du=\frac{1}{27}u^{3/2}\Big|_4^{40}=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$；

3、对数螺线 $r=e^{a\theta}$ 上相应于 $0\le\theta\le\varphi$ 的那一段的弧长为 $\underline{\quad (e^{a\varphi}-1)\sqrt{a^{-2}+1} \quad}$。

解：$L=\int_0^{\varphi}\sqrt{r^2(\theta)+\dot{r}^2(\theta)}d\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{(e^{a\theta})^2+(ae^{a\theta})^2}d\theta=\sqrt{a^2+1}\int_0^{\varphi}e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e^{a\varphi}-1)$。

三、计算题

1、求曲线 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $1\le x\le 3$ 的那一段的弧长；

解：$L=\int_1^3\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}dx=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{4+(\sqrt{x^{-1}}-\sqrt{x})^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^3(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\frac{1}{3}(x+3)\sqrt{x}\Big|_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$；

2、求曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2\pi$ 的弧长；

解：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}dt=a\int_0^{2\pi}tdt=2\pi^2a$；

3、对心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的周长。

解：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\theta)+\dot{r}^2(\theta)}d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos(\theta/2)\right|d\theta$

$=4a\int_0^{\pi}\left|\cos u\right|du=8a\int_0^{\pi/2}\cos udu=8a$。

第五节 变力作功

一、选择题 1千克的力能使弹簧伸长1厘米，现在要使弹簧伸长10厘米，则需要作功（ A ）

A、0.5千克米； B、5千克米； C、1千克米； D、10千克米。

解：设弹簧的弹性系数为k，则由题设知$0.01k=1$，故$k=100$千克/米，故将弹簧拉长x米时，所受到弹力为$F=kx=100x$千克，从而要使弹簧伸长10厘米$=0.1$米，则需要作功为

$$W=\int_0^{0.1}F(x)dx=100\int_0^{0.1}xdx=50x^2\Big|_0^{0.1}=0.5\text{千克米。}$$

二、填空题 质量为m_1,m_2(千克)的两个质点，相距a米，现将质点m_1沿着两质点连线向外移动距离l米，需要克服引力所作的功为$W=km_1m_2\int_a^{a+b}\frac{dx}{x^2}=$ $\underline{\dfrac{km_1m_2b}{a(a+b)}}$ 。

三、计算题

1、设一锥形蓄水池深$H=15m$、口径$D=20m$，内盛满水(水的比重为$\gamma=1000$千克/米^3，重力加速度为$g=9.8$米/秒^2)，现用吸筒将其中的水全部吸出，问需要作多少功?

解：将蓄水池中位于x米到$x+dx$米的那一层水，吸出到蓄水池口的位置需要作的功为

$dW=F(x)\cdot(H-x)=\pi\gamma g(\frac{Dx}{2H})^2(H-x)dx=\frac{\pi D^2\gamma g}{4H^2}x^2(H-x)dx$，故总功为

$$W=\frac{\pi D^2\gamma g}{4H^2}\int_0^H x^2(H-x)dx=\frac{\pi D^2H^2\gamma g}{48}\approx5.76975\times10^7(\text{焦耳})\text{。}$$

2、用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉被击入木板的深度成正比，在击第一次时，可将铁钉击入木板$a_1=1$厘米，如果每次打击铁钉时外力对木板所作的功相等，问第n次打击时，又能击入多少?

解：设木板对铁钉的阻尼系数为$k>0$，第n次打击时击入木板的深度为a_n厘米、外力所作的功为W_k，则由题设知

$$\frac{k}{2}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2\right]=k\int_{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}^{a_1+a_2+\cdots+a_n}xdx=W_n=W_1=k\int_0^{a_1}xdx=\frac{k}{2}a_1^2,$$

解之得$a_n=\sqrt{a_1^2+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2}-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})a_1$， $n=1,2,\ldots$。

第七章 空间解析几何

第一节 空间直角坐标系

一、选择题

1、以 $A(4,1,9), B(5,4,2), C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是（ B ）

A、等边三角形； B、直角三角形； C、钝角三角形； D、一般三角形。

解：$|AB|=\sqrt{(5-4)^2+(4-1)^2+(2-9)^2}=\sqrt{59},\ |BC|=\sqrt{(2-5)^2+(4-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$，

$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=\sqrt{49},\ |AB|^2=|BC|^2+|AC|^2$，它为直角三角形；

2、点 (a,b,c) 关于 yoz 面的对称点是（ D ）

A、$(-a,b,-c)$； B、$(a,-b,-c)$； C、$(-a,-b,c)$； D、$(-a,b,c)$。

二、填空题

1、过点 (x,y,z) 作 xoy 面的垂线，则垂足的坐标为 $\underline{(x,y,0)}$ ；

2、点 (x,y,z) 到 x 轴的距离为 $\underline{\sqrt{y^2+z^2}}$ 、z 轴的距离为 $\underline{\sqrt{x^2+y^2}}$ 。

二、计算题

1、求点 $A(1,-3,2)$ 关于点 $B(-1,2,2)$ 的对称点；

解：设点 $A(1,-3,2)$ 关于点 $B(-1,2,2)$ 的对称点为 $C(x,y,z)$，则 B 是 A 与 C 连线的中点，故

$x=2\times(-1)-1=-3, y=2\times2-(-3)=7, z=2\times2-2=2$，即对称点为 $C(-3,7,2)$；

2、在 yoz 面上找一点，使之与三点 $A(3,1,2), B(4,-2,-2), C(0,5,1)$ 的距离相等。

解：设所求点为 $P(0,y,z)$，则由题设知

$$(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2,$$

即 $3y+4z+5=7y+3z-1=0$，解之得 $y=1, z=-2$，故所求点为 $P(0,1,-2)$。

第二节 向量及其运算

一、选择题

1、向量$\vec{a},\vec{b}$的起点重合且夹角为$\pi/3$，$|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=8$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$（ C ）

A、5； B、6； C、7； D、8。

解：$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta}=7$。

2、非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足下列条件（ C ）时，有$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$。

A、$\vec{a}\,||\,\vec{b}$； B、$\vec{a},\vec{b}$同向； C、$\vec{a}\perp\vec{b}$； D、$\vec{a}=\vec{b}$。

二、填空题

1、设$\vec{a}=\{1,-1,2\},\vec{b}=\{-1,3,-1\}$，则$3\vec{a}-2\vec{b}=$ $\underline{\{5,-9,8\}}$ 。

2、设M为平行四边形$ABCD$对角线的交点，且$\overline{AB}=\vec{a},\overline{AD}=\vec{b}$，则$\overline{MB}=$ $\underline{\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})}$ 。

3、设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两垂直，且$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}=$ $\underline{\sqrt{14}}$ 。

三、将ΔABC上BC边 5 等分，设分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4，令$\overline{BC}=\vec{a},\overline{AB}=\vec{c}$，求

$\overline{D_kA},k=1,2,3,4$。

解：$\overline{D_kA}=-\overline{AD_k}=-(\overline{AB}+\overline{BD_k})=-(\overline{AB}+\frac{k}{5}\overline{BC})=-\frac{1}{5}(k\vec{a}+5\vec{c}),\quad k=1,2,3,4$。

四、若平面四边形$ABCD$的对角线相互平分，则$ABCD$是平行四边形。

证明：设M为平行四边形$ABCD$对角线的交点，若$\overline{AM}=\overline{MC}=\vec{a},\ \overline{DM}=\overline{MB}=\vec{b}$，则

$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=\vec{a}+\vec{b}=\overline{DM}+\overline{MC}=\overline{DC}$，即平面四边形$ABCD$的一组对边平行且等长，

故$ABCD$是平行四边形。

第三节 向量的坐标

一、选择题

1、设 $A(1,0,2),B(2,3,1)$，则 $\overline{AB}=\{1,3,-1\}$ 在 x 轴上的投影、沿 z 轴正向的分量为（ B ）

A、$-1,-1$； B、$1,-1$； C、$-1,-\vec{k}$； D、$1,-\vec{k}$。

2、设向量的方向余弦 $\cos\alpha=0$，则该向量与坐标轴之间的关系为（ A ）。

A、垂直于 x 轴； B、垂直于 y 轴； C、平行于 x 轴； D、平行于 y 轴。

二、填空题

1、若 $|\vec{a}|=4$，且 $\vec{a}$ 与 x 轴正向之间的夹角为 $\pi/3$，则 $Prj_x(\vec{a})=$ __2__；

2、与 $\vec{a}=\{6,7,-6\}$ 平行的单位向量为 __$\pm1\{6/11,7/11,-6/11\}$__ 。

三、计算题

1、设 $A(4,\sqrt{2},1),B(3,0,2)$，求 $\overline{AB}$ 的模、方向余弦、方向角；

解：$\overline{AB}=\left\{-1,-\sqrt{2},1\right\}=2\left\{-1/2,-1\big/\sqrt{2},1/2\right\}$，故 $\left|\overline{AB}\right|=2$，

$\cos\alpha=-1/2,\ \cos\beta=-1\big/\sqrt{2},\ \cos\gamma=1/2$， $\alpha=2\pi/3,\ \beta=3\pi/4,\ \gamma=\pi/3$；

2、求常数 k,λ，使 $\vec{a}=\{k,5,-1\}$ 与 $\vec{b}=\{2k+1,\lambda,2\}$ 平行。

解：$\vec{a}=\{k,5,-1\}$ 与 $\vec{b}=\{2k+1,\lambda,2\}$ 平行 $\Longleftrightarrow \dfrac{2k+1}{k}=\dfrac{\lambda}{5}=\dfrac{2}{-1}\Longleftrightarrow k=-\dfrac{1}{4},\lambda=-10$。

第四节 数量积与向量积

一、选择题

1、$\vec{a}\parallel\vec{b}$ 的充要条件为（ C ）

A、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$； B、$\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$； C、$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$； D、$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$。

2、若 $\vec{a}=\{2,-3,1\},\vec{b}=\{1,-1,3\},\vec{c}=\{1,2,0\}$，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$（ B ）。

A、$\{-8,-10,0\}$； B、-18； C、$\{3,-2,-2\}$； D、18。

二、填空题

1、与 $\vec{a}=\{2,4,-1\},\vec{b}=\{0,-2,2\}$ 同时垂直的单位向量为 $\pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=$ $\underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}\{3,-2,-2\}}$；

解：由题设知 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=\{6,-4,-4\}$；

2、设单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ $\underline{-3/2}$；

解：由题设知 $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+3=2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=0$；

3、设 $\vec{a}=\{3,0,-3\}$ 在 $\vec{b}=\{2,2,1\}$ 上的投影为 $Prj_{\vec{b}}(\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}/|\vec{b}|=$ $\underline{1}$。

三、计算题

1、设 $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=5$，且 $\vec{a},\vec{b}$ 之间的夹角为 $\alpha=\pi/6$，求 $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$；

解：$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=6|\vec{a}|^2-6|\vec{b}|^2+5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=50\sqrt{3}-54$；

2、在 yoz 面上找一向量 $\vec{b}$，使之垂直于 $\vec{a}=\{12,-3,-4\}$ 且与 $\vec{a}$ 等长。

解：设 $\vec{b}=\{0,y,z\}$，则由题设知 $\begin{cases}3y+4z=-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ y^2+z^2=|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2=169\end{cases}$，解之得 $\vec{b}=\{0,y,z\}=\pm\dfrac{13}{5}\{0,4,-3\}$。

第五节 曲面及其方程

一、选择题

方程 $z=2-x^2$ 表示的曲面为（ B ）

A、圆锥曲面； B、抛物柱面； C、旋转曲面； D、圆柱面。

二、填空题

1、将 xoz 面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面之方程为 $\underline{\ y^2+z^2=5x\ }$；

2、方程 $x^2+y^2+z^2-2x\ +4y+2z=0$ 表示的曲面为 $\underline{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6\ (\text{球面})}$。

三、计算题

1、建立以 $(1,3,3)$ 为球心且通过坐标原点的球面方程；

解：所求球面的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0-3)^2=19$，即

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-6z=0$；

2、求与坐标原点及 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点所生成的曲面方程，并问它表示什么曲面?

解：题设曲面上点 $M(x,y,z)$ 满足 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4(x^2+y^2+z^2)$，即

$(x+\frac{2}{3})^2+(y+1)^2+(z+\frac{4}{3})^2=\frac{116}{9}$，它表示球面；

3、指出下列方程在平面解析几何与空间解析几何中分别表示什么图形?

方程	平面解析几何中表示的图形	空间解析几何中表示的图形
$y=x+1$	直线	平面
$x^2+y^2=4$	圆周曲线	圆柱面

第六节 空间曲线及其方程

一、选择题

过曲线$\begin{cases}(x/4)^2+(y/2)^2-(z/\sqrt{5})^2=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$且母线垂直与 xoy 面的柱面方程为（ A ）

A、 $x^2+20y^2-24x-116=0$； B、 $4y^2+4z^2-12z-7=0$；

C、 $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\ z=0\end{cases}$； D、 $\begin{cases}4y^2+4z^2-12z-7=0\\ z=0\end{cases}$。

二、填空题

1、曲线$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\ z=0\end{cases}$的参数方程为 $x=1+\sqrt{3}\cos t,\ y=\sqrt{3}\sin t,\ z=0$(圆周)；

2、曲面 $x^2-y^2=2z$ 与 xoy 面的交线为 $x=t,\ y=\pm t,\ z=0$(直线)。

三、计算题

1、方程$\begin{cases}x^2+4y^2+z^2=25\\ x=-3\end{cases}$表示什么曲线?

解：曲线$\begin{cases}x^2+4y^2+z^2=25\\ x=-3\end{cases}$的方程即$\begin{cases}(y/2)^2+(z/4)^2=1\\ x=-3\end{cases}$表示椭圆曲线；

2、求曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xoy 面上的投影曲线之方程；

解：在$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x+z=1\end{cases}$中消去变量 z 得过交线且母线垂直于 xoy 面的柱面 $x^2+y^2+(1-x)^2=9$，

即 $2x^2+y^2-2x=8$，故投影曲线之方程为$\begin{cases}2x^2+y^2-2x=8\\ z=0\end{cases}$；

3、指出下列方程组在平面解析几何与空间解析几何中分别表示什么图形?

方程	平面解析几何中表示的图形	空间解析几何中表示的图形
$\begin{cases}y=5x+1\\ y=2x-3\end{cases}$	点 $(-4/3,-17/3)$	直线
$\begin{cases}(x/2)^2+(y/3)^2=1\\ y=3\end{cases}$	点 $(0,1)$	直线

第七节 平面及其方程

一、选择题

1、若 $B,C,D\neq 0$，则平面 $By+Cz+D=0$（ A ）

A、平行于 x 轴； B、平行于 y 轴； C、经过 y 轴； D、垂直于 y 轴。

2、平面 $x-y+2z=6$ 与 $2x+y+z=5$ 之间的夹角为（ A ）

A、$\pi/3$； B、$\pi/4$； C、$\pi/6$； D、0。

二、填空题

1、过点 $(2,-3,1)$ 且与 $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{3}$ 垂直的平面方程为 $\underline{4(x-2)+5(y+3)+3(z-1)=0}$；

2、点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离为 $\underline{\ 1\ }$。

三、计算题

1、求过点 $(3,0,-1)$ 且平行于 $3x-7y+5z-12=0$ 的平面方程；

解：所求平面方程为 $3(x-3)-7y+5(z+1)=0$，即 $3x-7y+5z-4=0$；

2、求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且垂直于 $\overline{OM_0}$ 的平面方程；

解：所求平面方程为 $2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0$，即 $2x+9y-6z-121=0$；

3、求通过 y 轴和点 $(1,2,-2)$ 的平面方程；

解：所求平面方程为 $Ax+Cz=0$，其中 A,C 不全为零且满足 $A-2C=0$，即 $A=2C\neq 0$，故所求平面方程为 $2x+z=0$；

4、若平面 Π 在 x 轴上的截距为 2，且过点 $(0,-1,0),(-2,1,3)$，求 Π 的方程；

解：设所求平面方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，由于 Π 过 $(0,-1,0),(-2,1,3)$，故其 $b=-1,c=1$，从而

所求平面方程为 $\dfrac{x}{2}-y+z=1$，即 $x-2y+2z=2$；

5、求过三点 $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$ 的平面方程。

解：所求平面方程为 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$，即 $x-3y-2z=0$。

第八节 空间直线及其方程

一、选择题

1、平面 $2x+3y+z-1=0$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{6}$ 的交点为（ C ）

A、$(0,0,0)$； B、$(1,-1,0)$； C、$(-1,1,0)$； D、$(1,-2,6)$。

2、平面 $4x-2y-2z=3$ 与直线 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 的位置关系为（ D ）

A、相交单不垂直； B、垂直相交； C、直线在平面上； D、平行。

二、填空题

1、过点 $(2,-1,0)$ 且与 $\begin{cases}2x-4y=3\\2x-y-5z=1\end{cases}$ 平行的直线方程为 $\underline{\frac{x-2}{10}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{3}}$；

2、平面 $x+y=3$ 与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 的夹角为 $\underline{\pi/6}$。

三、计算题

1、过点 $(3,-2,1),(-1,0,2)$ 的直线方程为 $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$；

2、求过点 $(-1,-4,3)$ 且同时垂直于 $L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y-5=0\end{cases}$ 与 $L_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{2}$ 的直线方程；

解：$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y-5=0\end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{v}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-4&1\\1&3&0\end{vmatrix}=\{-3,1,10\}$，

$L_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{2}$ 的方向向量为 $\vec{v}_2=\{4,-1,2\}$，

所求直线的方向向量为 $\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&1&10\\4&-1&2\end{vmatrix}=\{12,46,-1\}$，

故所求直线的方程为 $L:\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}$；

3、坐标面在平面 $\Pi:3x-y+4z-12=0$ 上截得三角形 ΔABC，从 z 的轴上的顶点 C 作 $\overline{AB}$ 的垂线，求此面垂线的方程；

解：平面 $\Pi:3x-y+4z-12=0$ 的方程即 $\Pi:\frac{x}{4}-\frac{y}{12}+\frac{z}{3}=1$，由题设知 ΔABC 顶点的坐标为 $A(4,0,0),B(0,-12,0),C(0,0,3)$，且所求直线的方向向量 $\vec{v}$ 同时垂直于 $\overline{AB}$ 的方向向量及平面 Π

的法向量，故 $\vec{v}=\vec{n}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 4\\ -4 & -12 & 0\end{vmatrix}=\{48,-16,-32\}=-16\{-3,1,2\}$，

从而所求直线方程为 $L:\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{2}$；

4、求直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z=9\end{cases}$ 在平面 $\Pi:4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程。

解：过直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z=9\end{cases}$ 的平面为 $\Pi_\lambda:(1-\lambda)(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-2z-9)=0$，即

$\Pi_\lambda:(2+\lambda)x-(4-3\lambda)y+(1-3\lambda)z-9\lambda=0$，

由于 $\Pi\perp\Pi_\lambda\Longleftrightarrow 4(2+\lambda)+(4-3\lambda)+(1-3\lambda)=0\Longleftrightarrow\lambda=13/2$，

此时 $\Pi_\lambda:17x+31y-37z=117$，故所求投影线的方程为 $L_1:\begin{cases}17x+31y-37z=117\\ 4x-y+z=1\end{cases}$。

第九节 二次曲面

一、填空题

1、曲线 $L:\begin{cases} y^2+z^2-2x=0 \\ z=3 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线之方程为 $\underline{L_1:\begin{cases} y^2-2x+9=0 \\ z=0 \end{cases}}$；

2、锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围成的立体在 xoy 面上的投影区域为 $\underline{(x-1)^2+y^2\le 1}$。

二、作图题 画出下列曲面围成的立体之图形

1、$3x+4y+2z=12$， $x=0$， $y=0$， $z=0$， $x=2$， $y=1$；

解：$\Omega: 0\le z\le \frac{1}{2}(12-3x-4y),\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$；

2、 $x^2+y^2=R^2$， $x^2+z^2=R^2$， $x=0$， $y=0$， $z=0$(第一卦限部分)；

解：$\Omega: 0\le z\le \sqrt{R^2-x^2},\ 0\le y\le \sqrt{R^2-x^2},\ 0\le x\le R$；

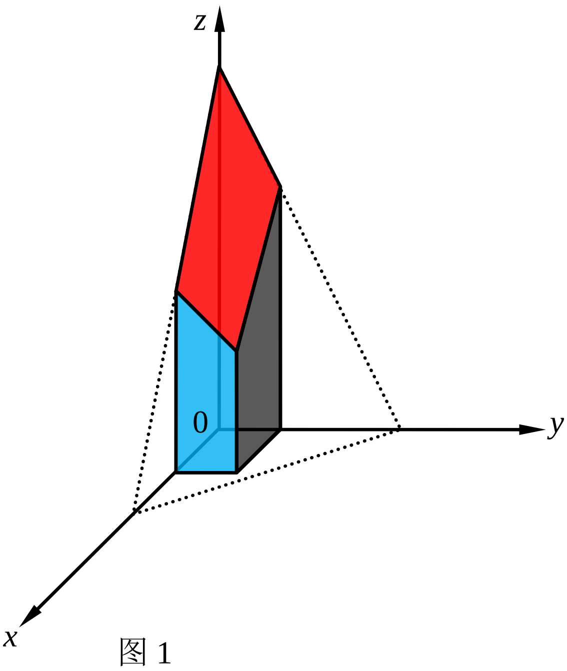


图 1

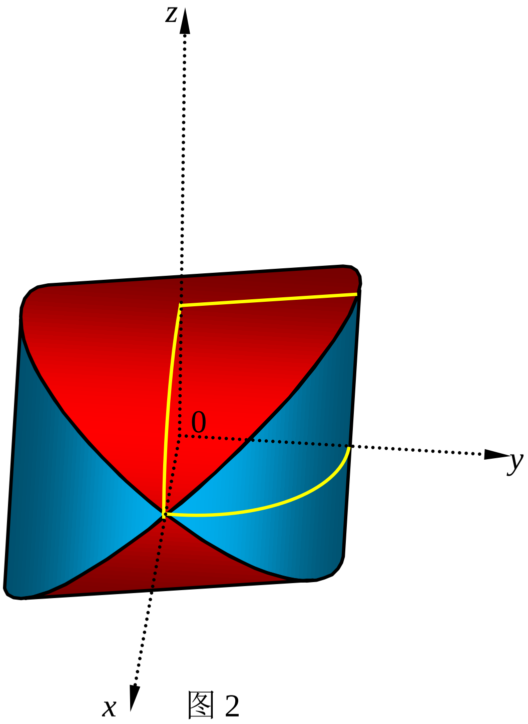


图 2

3、 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ， $z=2-(x^2+y^2)$；

解：$\Omega: \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-(x^2+y^2),\ x^2+y^2\le 1$；

4、 $x^2+y^2=1$， $x-y=0$， $x-\sqrt{3}y=0$， $z=0$， $z=3$(第一卦限部分)。

解：$\Omega: 0\le z\le 3,\ x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\le r\le 1,\ \pi/6\le\theta\le\pi/4$。

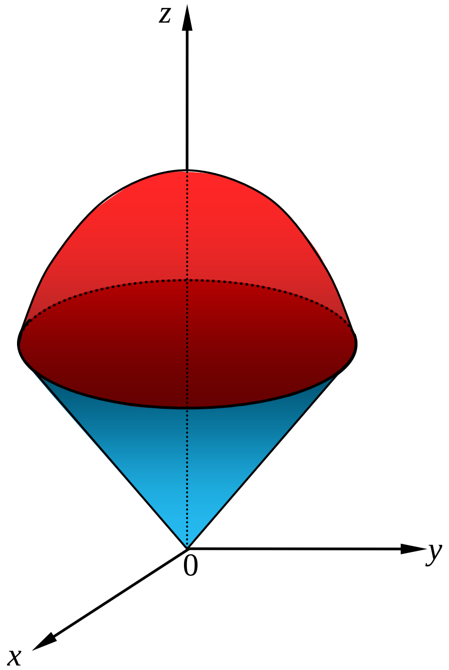


图 3

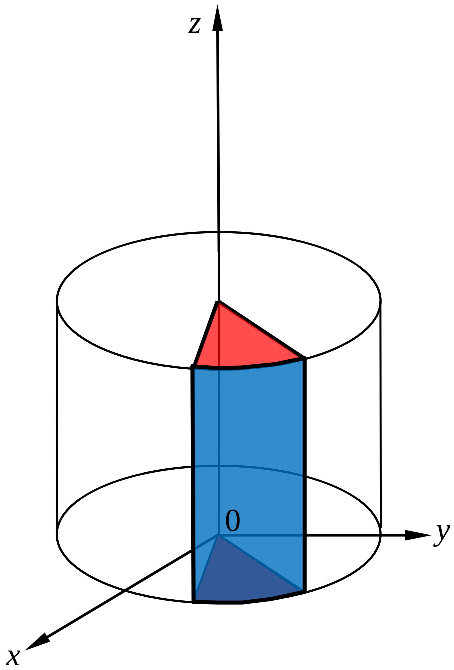


图 4

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念

一、选择题

1、函数 $f(x,y)=\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$，则 $f(1,\dfrac{x}{y})$ 值为（ D ）

A、 $f(1,0)$；　B、 $f(x,1)$；　C、 $f(1,y)$；　D、 $f(y,x)$。

2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3x^2+y^2}$ 的值为（ B ）

A、 0；　B、不存在；　C、$1/3$；　D、$1/4$。

二、填空题

1、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=$____1____；　2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{y+e^x}{x^2+y^2}=$____2____；

3、$\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=$____0____；　4、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$____2____。

三、计算题

1、求函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\ln(1-\sqrt{y})$ 的定义域。

解：$\begin{cases}-1\le xy^{-2}\le 1, y\ne 0\\ 1-\sqrt{y}>0, y\ge 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-y^2\le x\le y^2\\ 0<y<1\end{cases}$。

2、证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=2\varepsilon>0$，使 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=2\varepsilon$ 时，有

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon\text{，故}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\text{。}$$

3、设常数 $a\ne 0$，计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$。

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}y=a$。

4、计算$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$。

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}$。

5、证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在。

证明：当$P(x,y)$沿直线$y=kx$趋于$(0,0)$时(其中$k\neq 1$为常数)，有

$\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+kx}{x-kx}=\dfrac{1+k}{1-k}$与$k\neq 1$有关，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在。

6、讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\cos(1/x), & 若x\neq 0\\ 0, & 若x=0\end{cases}$在(0,0)处的连续性。

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\cos(1/x)=0=f(0,0)$，故$f(x,y)$在(0,0)处连续。

第二节 偏导数

一、选择题

1、二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0\\ 0, & 若x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处（ B ）

A、连续、偏导数存在； B、不连续、偏导数存在；

C、连续、偏导数不存在； D、不连续、偏导数不存在。

2、函数 $z=\ln\tan(x/y)$ 的二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 为（ A ）

A、$\dfrac{2\left[(2x/y)\cos(2x/y)-\sin(2x/y)\right]}{y^2\sin^2(2x/y)}$； B、$\dfrac{2\left[(2x/y)\cos(2x/y)-\sin(2x/y)\right]}{y^2\sin(2x/y)}$；

C、A 和 B 均正确； D、以上答案都不正确.

二、填空题

1、设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\quad 1/y \quad}$。

三、计算题

1、求函数 $f(x,y)=\sin(xy)+\cos^2(xy)$ 的偏导数。

解：$f_x(x,y)=y\cos(xy)-y\sin(2xy)$，$f_y(x,y)=x\cos(xy)-x\sin(2xy)$。

2、求函数 $u=\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在 $x^2+y^2+z^2>0$ 内的偏导数。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{yz(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xz(x^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$。

3、 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 若x^2+y^2\neq 0\\ 0, & 若x^2+y^2=0\end{cases}$ 的偏导数.

解：若 $(x,y)\neq(0,0)$，则 $f_x(x,y)=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$， $f_y(x,y)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，

若 $(x,y)=(0,0)$，则 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$， $f_y(0,0)=0$。

4、求函数 $z=x^4+y^4-x^2y^2$ 的二阶偏导数。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2xy^2$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x^2y$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-2y^2$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2x^2$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4xy$。

5、求函数$u=x^{yz}$的$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=yz(yz-1)\cdot x^{yz-2}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=y\cdot x^{yz-1}+y^2z\cdot x^{yz-1}\ln x$，

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=z(2yz-1)\cdot x^{yz-2}+yz^2(yz-1)\cdot x^{yz-2}\ln x$。

第三节 全微分及其应用

一、选择题

1、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 若x^2+y^2\neq 0\\ 0, & 若x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处（ C ）

A、偏导数存在但不连续； B、连续但偏导数不存在；

C、连续 偏导数存在但不可微； D、具有连续的偏导数。

2、设 $z=f(x,y)$ 为二元函数，则在点 (x_0,y_0) 处下结论成立的是（ C ）

A、可微(全微分存在)$\Longleftrightarrow$可导(偏导数存在)；

B、可微$\Rightarrow$可导$\Rightarrow$连续；

C、可微$\Rightarrow$可导，可微$\Rightarrow$连续，但偏导数存在却不一定连续；

D、可导$\Rightarrow$连续，但不一定可微。

二、填空题

1、设函数 $z=e^{2x}+xy^2$，则 $dz=$ $\underline{(2e^{2x}+y^2)dx+2xydy}$ ；

2、设函数 $z=x^y$，则 $dz\big|_{(e,1)}=$ $\underline{dx+edy}$ 。

二、计算题

1、求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 的全微分；.

解：$dz=-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy=\dfrac{1}{x^2}(xdy-ydx)$；

2、 求函数 $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的全微分；

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$， $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\dfrac{x(xdy-ydx)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$；

3、 求函数 $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的全微分；

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$， $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$，

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=-\frac{xydx+yzdy-(x^2+y^2)dz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}；$$

4、求函数 $u=\sin(x\cos y)$ 的全微分；

解： $du=\cos(x\cos y)\cdot(\cos y dx - x\sin y dy)$；

5、设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}), & 若 x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & 若 x^2+y^2=0 \end{cases}$，则

(1)、 $f_x'(0,0),\ f_y'(0,0)$ 存在；　　　　(2)、 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微。

证明：由题设知 $f(x,0)=f(0,y)\equiv 0$，故

(1)、 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$；

(2)、 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})=0$，

故 $f(x,y)=f(0,0)+x\cdot f_x(0,0)+y\cdot f_y(0,0)+o(\sqrt{x^2+y^2})$，从而 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微。

第四节 多元复合函数的求导法则

一、选择题

1、函数 $z=\dfrac{y}{x}$，而 $x=e^t, y=1-e^{2t}$，则 $\dfrac{dz}{dt}$ 为（ D ）

A、e^t+e^{-t}； B、e^t-e^{-t}； C、$-e^t+e^{-t}$； D、$-e^t-e^{-t}$。

二、填空题

1、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $z=f(x^2+y,xy^2)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{2xf_1'+y^2f_2'}$ 。

三、计算题

1、设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x(1+2z\sin y)e^{x^2+y^2+z^2}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2(y+x^2z\cos y)e^{x^2+y^2+z^2}$；

2、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $z=f(2x-y,y\sin x)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\cos xf_2'$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\cdot f_2'+2x(-f_{11}''+\sin xf_{12}'')+y\cos x(-f_{21}''+\sin xf_{22}'')$；

3、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $z=f(\dfrac{y}{x},x^2y)$，求二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f_1'+2xyf_2'$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}f_1'+2f_2'+\dfrac{y^2}{x^4}f_{11}''+-\dfrac{4y^2}{x}f_{12}''+4x^2y^2f_{22}''$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2xf_2'-\frac{1}{x^2}f_1'-\frac{y}{x^2}(\frac{1}{x}f_{11}''+x^2f_{12}'')+2xy(\frac{1}{x}f_{21}''+x^2f_{22}'')\text{。}$$

第五节 隐函数的求导公式

一、选择题

1、设 $x=x(y,z), y=y(x,z), z=z(x,y)$ 都是由方程 $f(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，则 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$（ A ）

A、-1；　　B、1；　　C、$-f_x'\big/f_z'$；　　D、$-f_y'\big/f_z'$.

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x-az,y-bz)=0$ 所定义的隐函数，其中 $f(u,v)$ 是变量为 u,v 的任意可微函数，则必有（ B ）

A、$b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=1$；　B、$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$；　C、$b\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}=1$；　D、$a\frac{\partial z}{\partial x}-b\frac{\partial z}{\partial y}=1$。

二、填空题

1、设函数 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ __1/3__ 。

三、计算题

1、设函数 $z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 所确定，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$；

证明：由于 $F_x'=F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'$，$F_y'=-\frac{z}{y^2}F_1'+F_2'$，$F_z'=\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x(xF_1'+yF_2')},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{y(xF_1'+yF_2')},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{xF_1'+yF_2'}+\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{xF_1'+yF_2'}=\frac{(z-xy)(xF_1'+yF_2')}{xF_1'+yF_2'}=z-xy\ ;$$

2、设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

解：两边同时对 x 和 y 求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$；

3、设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

解：两边同时对 x 和 y 求偏导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$；

4、设 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，求 $\dfrac{dx}{dz},\dfrac{dy}{dz}$。

解：$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0 \\ 2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}+2z=0 \end{cases}$，解之得 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}=\dfrac{y-z}{x-y} \\ \dfrac{dy}{dz}=\dfrac{z-x}{x-y} \end{cases}$。

第六节 微分法在几何上的应用

一、选择题

1、在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（ B ）

A、只有一条； B、只有两条； C、至少有三条； D、不存在.

二、填空题

1、过曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于 $2x+2y+z-1=0$，则 P 点的坐标为 (1,1,2) 。

三、计算题

1、求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点(2,1,4)处的切平面及法线方程；

解：法向量 $\vec{n}\,|_{(2,1,4)}=\left\{z'_x, z'_y, -1\right\}\Big|_{(2,1,4)}=\left\{2x, 2y, -1\right\}\Big|_{(2,1,4)}=\left\{4,2,-1\right\}$，故切平面及法线方程分别为

$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$， $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$；

2、求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程和法线方程；

解：法向量 $\vec{n}\,|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left\{F'_x, F'_y, F'_z\right\}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left\{\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right\}$，故切平面及法线方程分别为

$\Pi: \dfrac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\dfrac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\dfrac{z_0(z-z_0)}{c^2}=0$， 即 $\Pi: \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$，

$L: \dfrac{a^2(x-x_0)}{2x_0}=\dfrac{b^2(y-y_0)}{2y_0}=\dfrac{c^2(z-z_0)}{2z_0}$；

3、求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}, y=\dfrac{1+t}{t}, z=t^2$ 在 $t=2$ 处的切线方程和法平面方程.

解：切向量 $\vec{\tau}\,|_{t=2}=\left\{x'(2), y'(2), z'(2)\right\}=\left\{(1+t)^{-2}, -t^{-2}, 2t\right\}\Big|_{t=2}=\left\{1/9, -1/4, 4\right\}$，故切线及法平面方程分别为 $\dfrac{x-2/3}{4}=\dfrac{y-3/2}{-9}=\dfrac{z-4}{144}$， $4(x-\dfrac{2}{3})-9(y-\dfrac{3}{2})+144(z-4)=0$；

4、求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程；

解：在 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 对 x 求导，得 $\begin{cases}x+y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=0\\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z-x}{y-z}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-y}{y-z}\end{cases}$，故原曲线在 $(1,-2,1)$

处的切向量为 $\vec{\tau}=\left\{1, y', z'\right\}\Big|_{(1,-2,1)}=\left\{1, (z-x)/(y-z), (x-y)/(y-z)\right\}\Big|_{(1,-2,1)}=\left\{1,0,-1\right\}$，

故法平面方程为 $(x-1)-(z-1)=0$，切线方程为 $y=-2, z=2-x$；

5、求曲面 $z=x^2+y^2$ 在(1,1,2)处的切平面方程和法线方程.

解：法向量 $\vec{n}|_{(1,1,2)}=\left\{z'_x, z'_y, -1\right\}\Big|_{(1,1,2)}=\{2x, 2y, -1\}\Big|_{(1,1,2)}=\{2,2,-1\}$，故切平面及法线方程分别为

$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$；

6、求曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程。

解：法向量 $\vec{n}|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left\{F'_x, F'_y, F'_z\right\}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\{2x_0, 2y_0, 2z_0\}=2k\{1,-1,2\}$，故 $y_0=-x_0, z=2x_0$，代

入 $6x_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$，得 $x_0=\pm 1\big/\sqrt{6}$，故所求切平面为 $(x-x_0)-(y+x_0)+2(z-2x_0)=0$，

即 $x-y+2z=6x_0=\pm\sqrt{6}$ 。

第七节 方向导数与梯度

一、选择题

1、设 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 P 处沿着 x 轴负向的方向导数为（ C ）

A、f'_x； B、f'_y； C、$-f'_x$； D、$-f'_y$。

二、填空题

1、设函数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^x$，则 $grad\ f(1,1)=$ $\underline{\{4,1\}}$；

2、已知 $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+4z^2$，则 $grad\ f(1,1,1)=$ $\underline{\{4,6,8\}}$。

三、计算题

1、求函数 $f(x,y,z)=xy^2z$ 在点(1,-1,2)处取得最大方向导数的方向；

解：所求方向为 $grad\ f(1,-1,2)=\left\{f'_x,f'_y,f'_z\right\}\big|_{(1,-1,2)}=\left\{y^2z,2xyz,xy^2\right\}\big|_{(1,-1,2)}=\{2,-4,1\}$。

2、求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿(5,1,2)到点(9,4,14)的方向的方向导数；

解：$\vec{l}=\{4,3,12\}=13\{4/13,3/13,12/13\}$，即 $\cos\alpha=\dfrac{4}{13},\cos\beta=\dfrac{3}{13},\cos\gamma=\dfrac{12}{13}$，

$grad\,(u)=\left\{u'_x,u'_y,u'_z\right\}\big|_{(5,1,2)}=\{yz,xz,xy\}\big|_{(5,1,2)}=\{2,10,5\}$，

故 $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(5,1,2)}=grad(u)\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\dfrac{1}{13}(2\times4+10\times3+5\times12)=\dfrac{98}{13}$。

3、求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上点(1,1,1)处沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数。

解：曲线切向量 $\vec{\tau}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}|_{t=1}=\{1,2t,3t^2\}|_{t=1}=\{1,2,3\}$，即

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{14}},\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，且

$grad\,(u)=\left\{u'_x,u'_y,u'_z\right\}\big|_{(1,1,1)}=2\{x,y,z\}\big|_{(1,1,1)}=\{2,2,2\}$，故

$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}=grad(u)\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2\times1+2\times2+2\times3)=\dfrac{12}{\sqrt{14}}$。

第八节 多元函数的极值及其求法

一、选择题

1、设 $u(x,y)$ 的全微分为 $du = xdx + ydy$，则点 $(0,0)$ 为（ D ）

A、不是 $u(x,y)$ 的连续点； B、不是 $u(x,y)$ 的极值点；

C、是 $u(x,y)$ 的极大值点； D、是 $u(x,y)$ 的极小值点。

二、填空题

1、函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的驻点为 $\underline{\quad (2,-2) \quad}$ 。

三、计算题

1、求函数 $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ 的极值；

解：由 $\begin{cases} f'_x = 6xy - 6x = 6x(y-1) = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y = 3(x^2 + y^2 - 2y) = 0 \end{cases}$ 得 4 个驻点 $(0,0),(0,2),(1,1),(-1,1)$，

又 $A = f''_{xx} = 6(y-1),\ B = f''_{xy} = 6x,\ C = f''_{yy} = 6(y-1),\quad \Delta = AC - B^2 = 36(y-1)^2 - 36x^2$，

	$(0,0)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(-1,1)$
A	-6	6	0	0
B	0	0	6	-6
C	-6	6	0	0
Δ	36	36	-36	-36
$f(x,y)$	极大值 4	极小值 0	非极值 2	非极值 2

2、求函数 $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

解：由 $\begin{cases} f'_x = (1 + 2x + 4y + 2y^2)e^{2x} = 0 \\ f'_y = 2(1+y)e^{2x} = 0 \end{cases}$ 得唯一驻点 $(1/2,-1)$，且

$A = f''_{xx}(1/2,-1) = 4\left[x + (1+y)^2\right]e^{2x}\Big|_{(1/2,-1)} = 2e > 0$，

$B = f''_{xy}(1/2,-1) = 4(1+y)e^{2x}\Big|_{(1/2,-1)} = 0$，

$C = f''_{yy}(1/2,-1) = 2e^{2x}\Big|_{(1/2,-1)} = 2e > 0$，$\Delta = AC - B^2 = 4e^2 > 0$，

故$(1/2,-1)$为函数的极小值点，而极小值为$f(1/2,-1)=-\dfrac{e}{2}$；

3、设$a,b,c>0$为常数，求椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内点$(x,y,z)$处的切平面与三坐标面所围成的四面体体积的最小值。

解：椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内点$(x,y,z)$处的切平面为$\dfrac{X}{a^2/x}+\dfrac{Y}{b^2/y}+\dfrac{Z}{c^2/z}=1$，该切平面与三坐标面所围成的四面体体积为$V=\dfrac{1}{6}\cdot(a^2/x)(b^2/y)(c^2/z)=\dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz}$，其中$x,y,z>0$满足$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，故问题即求$f(x,y,z)=xyz$在约束条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$及$x,y,z>0$下的最大值，令$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$，则

由$\begin{cases}F_x'(x,y,z)=yz+2\lambda(x/a^2)=0\\F_y'(x,y,z)=xz+2\lambda(y/b^2)=0\\F_z'(x,y,z)=xy+2\lambda(z/c^2)=0\\F_\lambda'(x,y,z)=(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2-1=0\end{cases}$，解之得$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\\y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\\z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}\end{cases}$，

故所求体积的最小值为$\min V=V(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$。

4、求内接于半径为a的球且有最大体积的长方体。

解：设内接于球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的长方体的 8 个顶点之坐标为$(\pm x,\pm y,\pm z)$，其中$x,y,z>0$满足$x^2+y^2+z^2=a^2$，长方体的体积为$V=8xyz$，问题即求$V=8xyz$在约束条件$x,y,z>0$及$x^2+y^2+z^2=a^2$下的的极大值，令$F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$，则类似于第 3 题知当$x=y=z=a/\sqrt{3}$(内接正方体)时，体积达到最大值，且$\max V=8(a/\sqrt{3})^3=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}a^3$。

第九章 重积分

第一节 重积分的概念与性质

一、选择题

1、$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$ 中 λ 是（ D ）

A、最大小区间长度； B、小区域最大面积；

C、小区域直径； D、小区域最大直径。

2、二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的值与（ C ）

A、函数 f 及变量 x , y 有关； B、区域 D 及变量 x , y 无关；

C、函数 f 及区域 D 有关； D、函数 f 无关，区域 D 有关。

3、函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界是二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在的（ C ）

A、充分必要条件； B、充分非必要条件；

C、必要非充分条件； D、既非充分条件，也非必要条件。

4、设 $I_1=\iint\limits_D (x+y)d\sigma,\ I_2=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma,\ I_3=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的区域，则大小顺序是（ B ）

A、$I_1\le I_2\le I_3$； B、$I_3\le I_2\le I_1$； C、$I_1\le I_3\le I_2$； D、$I_3\le I_1\le I_2$。

二、填空题

1、设 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_D d\sigma=$ ___1/2___ ；

2、设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，而 D 关于 y 轴对称，且 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=$ ___0___ 。

3、设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，则由二重积分的几何意义可知 $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma=$ ___$2\pi/3$___ 。

第二节 二重积分的计算

一、选择题

1、设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域D上大于零，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示（ B ）

A、平面薄片的质量； B、曲顶柱体的体积；

C、曲线的弧长； D、曲边梯形的面积。

2、在极坐标系中的面积元素为（ B ）

A、$dv = r^2\cos\varphi drd\varphi d\theta$； B、$d\sigma = rdrd\theta$；

C、$d\sigma = dxdy$； D、$dv = rdxdydz$。

3、设 $D = \{(x,y)\big|0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$，则 $\iint\limits_D xyd\sigma =$（ D ）

A、1； B、$1/2$； C、$1/4$； D、$3/4$。

4、设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy =$（ D ）

A、$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$； B、$\int_0^y dy\int_0^1 f(x,y)dx$；

C、$\int_y^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$； D、$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$。

二、填空题

1、设区域 $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le \ln 2, 0 \le y \le \ln 3\}$，则 $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$ = <u>　2　</u>；

2、设平面薄片所占区域为 $x^2 + y^2 \le y$，其面密度函数为 $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$，则其质量为 <u>　4/9　</u>。

三、计算题

1、设 D 是由直线 $x=0, y=1, y=x$ 所围成的闭区域，则

$$\iint\limits_D xy^2 d\sigma = \int_0^1 y^2dy\int_0^y xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^4dy = \frac{1}{10};$$

2、设 D 是由 $y = x^2, xy = 1, x = 2$ 所围成的闭区域，则

$$\iint\limits_D (x^2+2y)d\sigma = \int_1^2 dx\int_{x^{-1}}^{x^2}(x^2+2y)\,dy = \int_1^2(2x^4 - x - x^{-2})\,dx = \frac{52}{5};$$

3、设 $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4$，则

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma = \int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 re^{r^2}dr = 2\pi\int_1^2 re^{r^2}dr = \pi(e^4 - e);$$

4、设 $D: x^2+y^2\le 1$，则

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2\pi}{3};$$

5、设 D 是由 $y=x^2, y=x, x=1, x=2$ 所围成的闭区域，则

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,d\sigma=\int_1^2\frac{dx}{x}\int_x^{x^2} y\,dy=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)\,dx=\frac{9}{8};$$

6、其中设 $D: x^2+y^2\le 2x$，则

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr=\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,d(\sin\theta)=\frac{32}{9};$$

7、$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{e-1}{2e}$；

8、$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^2 re^{r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^2 re^{r^2}dr=\frac{\pi(e^4-e)}{4}$。

第三节 二重积分的应用

一、填空题

1、曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的面积为 $\underline{\quad \sqrt{2}\pi \quad}$ ；

2、由曲面 $z=x^2+y^2$, $z=1$ 所围成的立体的体积为 $\underline{\quad \pi/2 \quad}$ 。

二、计算题

1、求平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 被三坐标面所截得部分的面积；

解：$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 即 $z=4(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3})$，故 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{\sqrt{61}}{3}$，故其面积为

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{61}}{3}\iint_D d\sigma=\frac{\sqrt{61}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=\sqrt{61}\text{；}$$

2、设均匀薄片所占平面区域为 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0$，求该薄片的重心；

解：由题意知，重心坐标为 $(0,\bar{y})$，其中

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{2}{\pi ab}\cdot 2\int_0^b y\,dy\int_0^{ab^{-1}\sqrt{b^2-y^2}}dx=\frac{4}{\pi b^2}\int_0^b y\sqrt{b^2-y^2}\,dy=\frac{4b}{3\pi}\text{；}$$

3、设均匀薄片(面密度为常数 1)所占平面区域 D 由 $y^2=\dfrac{9}{2}x$, $x=2$ 所围成，求该薄片对 x 轴的转动惯量 I_x 。

解：$I_x=\iint\limits_D y^2 d\sigma=2\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{9x/2}} y^2 dy=\dfrac{2}{3}\int_0^2 (9x/2)^{3/2}dx=\dfrac{4}{27}\int_0^9 u^{3/2}du=\dfrac{72}{5}$ 。

第四节 三重积分及其计算法

一、填空题

1、设某物体所占的空间区域为Ω，其体密度为$\rho(x,y,z)$，则该物体的质量为$\underline{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}$；

2、设$\Omega:0\le x,y,z\le\pi$，则$\iiint\limits_{\Omega}xyzdv=\underline{\quad \pi^6/8 \quad}$。

二、计算题

1、设$\Omega:0\le x,y,z\le 1$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(x+y+z)dz=3\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\int_0^1 dz=\frac{3}{2};$$

2、设Ω是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1,z=2$所围成的区域，则

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2dv=\int_1^2 z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\pi\int_1^2 z^4dz=\frac{31\pi}{5};$$

3、设Ω是由平面$x+y+z=1$与三坐标面所围成的区域，则

$$\iiint\limits_{\Omega}xzdv=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3dx=\frac{1}{120}。$$

第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分

一、选择题

1、在球面和柱面坐标系中当 θ 为常数时，其表示（ B ）

A、以 z 轴为轴的圆柱面； B、过 z 轴的半平面；

C、以原点为心的球面； D、平行于 xoy 平面的平面。

2、在球面坐标系中的体积元素为（ A ）

A、$dv = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$； B、$dv = r^2 \cos\varphi dr d\varphi d\theta$；

C、$dv = dxdydz$； D、$dv = r dr d\theta dz$。

3、设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \ z \ge 0,$ 则 $\iiint\limits_{\Omega} z dv =$（ A ）

A、$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr$； B、$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi dr$；

C、$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr$； D、$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\varphi dr$。

4、设函数 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，Ω 关于 xoy 面对称，且 Ω_1 为 Ω 在 xoy 平面上方部分，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv =$（ A ）

A、0； B、1； C、$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv$； D、无法确定。

二、填空题

1、曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积为 $\underline{\quad 32\pi/3 \quad}$；

2、设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 4$，则 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dv = \underline{\quad 128\pi/5 \quad}$；

3、设 Ω 由曲面 $x^2+y^2 = 2z$ 与平面 $z=2$ 围成，则 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dv = \underline{\quad 16\pi/3 \quad}$。

三、计算题

1、设 Ω 是由曲面 $4z^2 = 25(x^2+y^2)$ 与平面 $z=5$ 所围成的区域，则；

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{\frac{5r}{2}}^{5} r^2 \cdot \mathrm{r}\, dz = 8\pi；$$

2、设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le z$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{\pi}{10}；$$

3、设均匀立体(密度 $\rho=1$)占有空间区域 $\Omega: x^2+y^2 \le z \le 2-\sqrt{x^2+y^2}$ ，求其形心及其对 z 轴的转动惯量。

解：由对称性知，形心坐标为 $(0,0,\bar{z})$，其中 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}=\dfrac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r} r\cdot zdz}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r} rdz}=\dfrac{9}{10}$，而其对 z 轴的转动惯量为 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \int_{r^2}^{2-r} dz=\dfrac{4\pi}{15}$ 。

第十章 曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分

一、选择题

设 $L: y=\varphi(x), a\le x\le b$, 则 $\int_L f(x,y)ds=$（ D ）

A、$\int_a^b f(x,\varphi(x))dx$； B、$\int_b^a f(x,\varphi(x))dx$；

C、$\int_a^b f(\varphi(x),x)dx$； D、$\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$。

二、填空题

1、设 $L: x^2+y^2=R^2$, 则 $\int_L (x^2+y^2)ds=\underline{2\pi R^3}$；

2、设 xoy 面上曲线弧 L 在点 (x,y) 处的线密度为 $\rho(x,y)$, 则其质量 $M=\underline{\int_L \rho(x,y)ds}$。

三、计算题

1、设 L 为连接 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y)ds=\int_0^1\left[x+(-x+1)\right]\sqrt{2}dx=\sqrt{2}$；

2、设 Γ 为连接 $O(0,0,0)$ 及 $P(1,2,4)$ 两点的直线段，则

$$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^1\sqrt{t^2+4t^2+16t^2}\cdot\sqrt{1+4+16}dt=21\int_0^1 tdt=\frac{21}{2};$$

3、设 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界，则

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\oint_{L_1+L_2+L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^R e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^R\cdot Rd\theta+\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}dx=2(e^R-1)+\frac{\pi Re^R}{4};$$

4、设 $L: x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2\pi$，则

$$\int_L (x^2+y^2)ds=2\int_0^{2\pi}\left[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2\right]\cdot atdt$$

$$=\int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)tdt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2);$$

5、求半径为 R，圆心角为 α 的均匀圆弧 $(\rho=1, 0<\alpha<\pi)$ 的重心。

解：重心为 $(\bar{x},0)$，其中 $\bar{x}=\dfrac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds}=\dfrac{1}{\alpha R}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}R\cos\theta\cdot Rd\theta=\dfrac{2R}{\alpha}\sin\dfrac{\alpha}{2}$。

第二节　对坐标的曲线积分

一、选择题： 设 L 为 xoy 面上从点 $A(0,a)$ 到 $B(0,b)$ 的直线段，则下列结论不正确的是（D）

A、$\int_L Q(x,y)dy=\int_a^b Q(0,y)dy$；　　B、$\int_L P(x,y)dx=0$；

C、$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L Q(x,y)dy$；　　D、$\int_L Q(x,y)dy=0$。

二、计算题

1、设 $O(0,0),A(1,0),B(1,1)$，在下列情形下，求 $\int_L xydx+x^2dy$：

(1)、$L=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$；

解：$\overrightarrow{OA}:y=0,x:0\to 1$，$\overrightarrow{AB}:x=1,y:0\to 1$，故

$$\int_L xydx+x^2dy=(\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}})xydx+x^2dy=\int_0^1 0dx+\int_0^1 dy=1;$$

(2)、L 为曲线 $y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的弧段；

解：$L:y=x^2,x:0\to 1$，故 $\int_L xydx+x^2dy=\int_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}$；

(3)、L 为 $x=y^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的弧段。

解：$L:x=y^2,y:0\to 1$，故 $\int_L xydx+x^2dy=\int_0^1 3y^3dy=\frac{3}{5}$。

2、设 $A(1,1),B(1,2),C(4,2)$，在下列情形下，求 $\int_L (2x+y)dx+(x-2y)dy$：

(1)、$L=\overrightarrow{AC}$；

解：$\overrightarrow{AC}:y=\frac{1}{3}(x+2),x:1\to 4$，故 $\int_L (2x+y)dx+(x-2y)dy=\frac{2}{9}\int_1^4(11x+1)dx=19$；

(2)、$L=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；

解：$\overrightarrow{AB}:x=1,y:1\to 2$，$\overrightarrow{BC}:y=2,x:1\to 4$，故

$$\int_L (2x+y)dx+(x-2y)dy=(\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}})(2x+y)dx+(x-2y)dy=\int_1^2(1-2y)dy+2\int_1^4(x+1)dx=19;$$

(3)、L 为曲线 $x=2t^2+t+1,y=t^2+1$ 上从点 A 到 C 的一段弧。

解：$L:x=2t^2+t+1,y=t^2+1,t:0\to 1$，故

$$\int_L (2x+y)dx+(x-2y)dy=\int_0^1\left[(5t^2+2t+3)(4t+1)+2t(t-1)\right]dt=\int_0^1(20t^3+15t^2+12t+3)dt=19。$$

3、求 $\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz$，其中 $\Gamma:x=k\theta,y=a\cos\theta,z=a\sin\theta,\theta:0\to\pi$。

解：$\int_{\Gamma} x^2dx + zdy - ydz = \int_0^{\pi}(k^2\theta \cdot k - a\sin\theta \cdot a\sin\theta - a\cos\theta \cdot a\cos\theta)d\theta = \dfrac{k^3\pi^3}{3} - a^2\pi$

4、一力场由沿横轴正方向的常力 F 所构成，试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时所作的功。

解：$\vec{F} = \{F, 0\}$，$L: x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, \theta: 0 \to \pi/2$，故 $W = \int_L Fdx = F\int_0^{\pi/2}(-R\sin\theta)d\theta = -FR$ 。

第三节 格林公式及应用

一、选择题

1、设G为单连通区域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在G上具有连续的偏导数，且对任一全部含在G内的曲线L，曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与路径无关，则以下说法中错误的是（ B ）

A、对任一全部含在G内的闭曲线C，有$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$；

B、$Q'_y=P'_x$在G内处处成立；

C、$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$在G内是某个二元函数的全微分；

D、对G内任意区域D，有$\iint\limits_D (Q'_x-P'_y)d\sigma=0$。

2、已知$\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某个函数的全微分，则$a=$（ D ）

A、-1； B、0； C、1； D、2。

二、计算题

1、求$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y^2)dy$，其中$L$是由抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围成的区域的正向边界曲线；

解：$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y^2)dy=\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D (2x-2x)dxdy=0$；

2、利用曲线积分计算椭圆$9x^2+16y^2=144$所围区域的面积；

解：$L: x=4\cos\theta, y=3\sin\theta, \theta: 0\to 2\pi$，则$A=\oint_L xdy=\int_0^{2\pi} 4\cos\theta\cdot 3\cos\theta d\theta=12\pi$；

3、求$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中$L$为抛物线$2x=\pi y^2$上由点$O(0,0)$到$A(\pi/2,1)$的一段弧；

解：补$\overrightarrow{AB}: x=\pi/2, y:1\to 0$，$\overrightarrow{BO}: y=0, x:\pi/2\to 0$，则

$$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=(\oint\limits_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}+\int_{\overline{BA}}+\int_{\overline{OB}})(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=\iint\limits_D 0d\sigma+\int_0^1(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2)dy+\int_0^{\pi/2}0dx=\frac{\pi^2}{4}。$$

4、已知平面力场 $\vec{F}=\left\{x^2-y,x+\sin^2 y\right\}$，求质点沿路线 $L:y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 O(0,0) 移动到点 $A(2,0)$ 时场力所作的功。

解：$W=\int_L (x^2-y)dx+(x+\sin^2 y)dy=(\oint\limits_{L+\overline{AO}}+\int_{\overline{OA}})(x^2-y)dx+(x+\sin^2 y)dy$

$=-\iint\limits_D 2d\sigma+\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}-\pi$ 。

5、求 $\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中 $L:(x-1)^2+y^2=2$ (逆时针方向)。

解：令 $L_1:x^2+y^2=\varepsilon^2$(逆时针)，$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\geq\varepsilon^2 且 (x-1)^2+y^2\leq 2\right\}$，其中 $0<\varepsilon<\sqrt{2}-1$ 为常数，则 $\forall(x,y)\in D$，有 $(x,y)\neq(0,0)$，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 连续，故由 $Green$ 公式得

$$\oint\limits_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\oint\limits_{L+L_1^-}\frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}+\oint\limits_{L_1}\frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma+\oint\limits_{L_1}\frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$$

$$=\iint\limits_D 0d\sigma+\oint\limits_{L_1}\frac{ydx-xdy}{2\varepsilon^2}=\frac{1}{2\varepsilon^2}\oint\limits_{L_1}ydx-xdy=-\pi \text{ 。}$$

三、验证表达式 $(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 是某个二元函数的全微分，求出其原函数，并计算 $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 。

解：由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y}$，故存在可微函数 $u(x,y)$，使 $du=(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$，

即 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-y^4+3,\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-4xy^3$，故 $\begin{cases}u=\int(2xy-y^4+3)dx+\varphi(y)=x^2y-xy^4+3x+\varphi(y)\\ x^2-4xy^3+\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-4xy^3\end{cases}$，

故 $\varphi'(y)=0$，从而 $\varphi(y)\equiv C,\ u(x,y)=x^2y-xy^4+3x+C$，而

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=u(x,y)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=(x^2y-xy^4+3x+C)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=5 \text{ 。}$$

第四节 对面积的曲面积分

一、填空题

1、设Σ为$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限的部分，则$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$ $\underline{\quad 4\sqrt{61} \quad}$；

2、设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=9$，则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=$ $\underline{\quad 324\pi \quad}$；

3、设Σ是平面$x+y+z=4$被圆柱$x^2+y^2=1$截出的有限部分，则$\iint\limits_{\Sigma}ydS=$ $\underline{\quad 0 \quad}$。

二、计算题

1、求$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围区域的整个边界曲面；

解：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\Sigma_2: z=1$，$(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1$，故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2})(x^2+y^2)dS=(1+\sqrt{2})\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})\text{。}$$

2、求面密度为常数ρ的均匀半球壳$x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$对于z轴的转动惯量。

解：$I_z=\rho\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=a\rho\iint\limits_{D}\frac{(x^2+y^2)d\sigma}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r^3dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\frac{4\pi}{3}\rho a^4$。

第五节 对坐标的曲面积分

一、选择题

设Σ是曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧，D为Σ在xoy面上的投影区域，则$\oiint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=$（ A ）

A、0；

B、$\iint\limits_{D}(a^2-x^2-y^2)dxdy$；

C、$-\iint\limits_{D}(a^2-x^2-y^2)dxdy$；

D、$2\iint\limits_{D}(a^2-x^2-y^2)dxdy$。

二、填空题

1、设Σ为锥面$x^2+y^2=z^2(0\le z\le 3)$的下侧，则$\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=-\dfrac{81\pi}{2}$；

2、设Σ是曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy=\dfrac{4\pi R^3}{3}$。

三、计算题

1、设Σ为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=1$和$z=3$所截得的在第一卦限内的部分的前侧，求$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx$。

解：Σ在xoy面上的投影为圆弧段(区域面积微元为 0)，故$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$；而$\Sigma$在$xoz$及$yoz$面上的投影分别为$D_{xz}=\left\{(x,z)\middle|0\le x\le 1,1\le z\le 3\right\}$，$D_{yz}=\left\{(y,z)\middle|0\le y\le 1,1\le z\le 3\right\}$，故

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}dydz+\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}dxdz$$

$$=\int_1^3 dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy+\int_1^3 dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\pi。$$

2、设Σ是由平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧，求$\oiint\limits_{\Sigma}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy$。

解：设Σ在xoy、yoz、xoz面及$x+y+z=1$面的部分分别为Σ_1、Σ_2、Σ_3和Σ_4，则

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-\frac{1}{2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy=-\iint\limits_{D_{yz}}(0+1)dydz=-\frac{1}{2},$$

$$\iint_{\Sigma_3}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy=-\iint_{D_{xz}}0dxdz=0,$$

$$\iint_{\Sigma_4}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy=\iint_{D_{yz}}(1-y-z+1)dydz+\iint_{D_{xz}}(1-x-z)dxdz+\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{4}{3},$$

故 $\oiint_{\Sigma}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy=(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})+0+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$。

3、将对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 化为对面积的曲面积分，其中 Σ 是抛物面 $z=16-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧。

解：由 $\vec{n}=\{2x,2y,1\}$ 得 $\cos\alpha=\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$， $\cos\beta=\dfrac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$， $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$，

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS。$$

4、设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间部分的下侧，求 $\iint_{\Sigma}x^2dydz+zdxdy$。

解：由于 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中 $\Sigma_1: x=\sqrt{z-y^2},(y,z)\in D_{yz}$ (前侧)，$\Sigma_2: x=-\sqrt{z-y^2},(y,z)\in D_{yz}$ (后侧)，而 $D_{yz}=\left\{(y,z)\middle| y^2\le z\le 3,-\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}\right\}$， 故

$$\iint_{\Sigma}x^2dydz=\iint_{\Sigma_1}x^2dydz+\iint_{\Sigma_2}x^2dydz=\iint_{D_{yz}}(z-y^2)dydz-\iint_{D_{yz}}(z-y^2)dydz=0;$$

又 $\Sigma: z=x^2+y^2,(x,y)\in D_{xy}=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 3\right\}$ (下侧)，故

$$\iint_{\Sigma}zdxdy=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^3dr=-\frac{9\pi}{2},$$

从而 $\iint_{\Sigma}x^2dydz+zdxdy=0-\dfrac{9\pi}{2}=-\dfrac{9\pi}{2}$。

第六节 高斯公式 通量与散度

一、填空题

1、设Σ是体积为V的立体Ω的外表面，则$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3zdxdy=\underline{6V}$；

2、向量场$\vec{A}=\left\{y^2,xy,xz\right\}$的散度$div(\vec{A})=\underline{2x}$；

3、设Σ是圆柱体$x^2+y^2\le 9, 0\le z\le 3$的表面取外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\underline{81\pi}$。

二、计算题

1、设Σ是半球体$0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的表面之外侧，求：

$$\oiint\limits_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(3xy+y^2z)dxdy$$。

解：$$\oiint\limits_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(3xy+y^2z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^4dr=\frac{2\pi R^5}{5}$$。

2、设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$的下侧，求$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$。

解：补$\sum_1: z=h, x^2+y^2\le h^2$(上侧)，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=0-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=-\frac{\pi R^4}{4}$$。

3、设Σ是半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，求$\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+x^2ydzdx+(3+y^2z)dxdy$。

解：补$\sum_1: z=0, x^2+y^2\le 4$(下侧)，则

$$\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+x^2ydzdx+(3+y^2z)dxdy=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})xz^2dydz+x^2ydzdx+(3+y^2z)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv-\iint\limits_{\Sigma_1}xz^2dydz+x^2ydzdx+(3+y^2z)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(3+y^2z)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr+3\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{64\pi}{5}+12\pi=\frac{128\pi}{5}$$ 。

4、求向量场 $\vec{A}=\left\{yz,xz,xy\right\}$ 穿过柱面 $x^2+y^2=R^2(0\le z\le h)$ 的全表面的通量。

解：$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma}yzdydz+xzdzdx+xydxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=0$ 。

第十一章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念和性质

一、填空题

1、等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n (a \neq 0)$ 在 $\underline{\ |q|<1\ }$ 时收敛于 $\underline{\ a/(1-q)\ }$ ，而 $\underline{\ |q|\geq 1\ }$ 时发散；

2、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ 收敛于 $\underline{\ 2S-u_1\ }$ ；

3、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 的敛散性是<u> 发散 </u>；

4、若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定<u> 发散 </u>。

二、判定下列级数的敛散性，并对收敛级数求和

1、 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$ ， $S_n = \ln(n+1) \to +\infty$ ，发散；

2、 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin(\pi/n)$ ， $u_n = n\sin(\pi/n) \to \pi \neq 0$ ，发散；

3、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ， $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{3n+1}) \to \frac{1}{3}$ ，收敛；

4、 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1/2)^n - (-1/3)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1/3)^n = \frac{1}{1-(1/2)} - \frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{5}{4}$ ，收敛。

第二节 常数项级数的审敛法

一、填空题

1、若 $u_n \ge 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界；

2、$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散。

二、选择题

1、下列级数中收敛的是（ D ）.

A、$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^n$；　B、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；　C、$\sum_{n=3}^{\infty}\tan\frac{\pi}{n}$；　D、$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$。

2、下列级数中绝对收敛的是（ D ）.

A、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$；　B、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n}$；　C、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{3}}$；　D。$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$。

三、判定下列正项级数的敛散性

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$，$u_n=\frac{1}{2n-1}\sim\frac{1}{2n}$，发散；

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$，其中 $a>0$ 为常数，若 $a>1$，则 $0<u_n=\frac{1}{1+a^n}\le(1/a)^n$，收敛；而 $a\le 1$ 时，有 $u_n=\frac{1}{1+a^n}\ge\frac{1}{2}$，发散于 $+\infty$；

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$，$\sqrt[n]{u_n}=\frac{\sqrt[n]{n^2}}{3}\to\frac{1}{3}<1$，收敛；

4、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$，$n\ge 3$ 时，$u_n=\frac{\ln n}{n}\ge\frac{1}{n}$，发散。

四、判定下列交错级数的敛散性，对收敛级数，指出是条件收敛还是绝对收敛

1、$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$；

解：令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $x>e$ 时，有 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，故 $n\ge 3$ 时，$u_n=\frac{\ln n}{n}=f(n)>\frac{1}{n}>0$ 单调递趋于 0，故 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 收敛，但 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}=+\infty$ 发散，

从而级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$条件收敛；

2、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$；

解：$u_n=(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}\sim(1/3)^{2n-1}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n<+\infty$收敛，故

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$绝对收敛；

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$；

解：$\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n\to\frac{e}{2}>1$，即$u_n\to+\infty$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$发散；

4、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$，其中$\alpha$是常数。

解：$u_n=1-\cos\frac{\alpha}{n}=2\sin^2(\frac{\alpha}{2n})\sim\frac{\alpha^2}{2n^2}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})\right|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，即原级数绝对收敛。

五、证明题 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛。

证明：由题设知存在常数$M>0$，使$\forall n\geq1$，有$0\leq u_n+v_n\leq M$，故$(u_n+v_n)^2\leq M(u_n+v_n)$，

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛。

第三节 幂级数

一、选择题

1、若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则在$x=2$处（ B ）.

A、条件收敛； B、绝对收敛； C、发散； D、敛散性不定。

2、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的收敛半径是（ D ）.

A、$R=2$； B、$R=-1$； C、$R=0$； D、$R=1$。

二、填空题

1、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$的收敛半径是 $\underline{3}$，收敛区间是 $\underline{[-3,3)}$；

2、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛区间是 $\underline{[0,6)}$；

3、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$的收敛区间是 $\underline{[-1,1]}$；

4、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n}$的和函数为 $\underline{S(x)=\frac{2}{(2-x)^2}, x\in(-2,2)}$。

三、求下列级数的收敛区间及其和函数

1、$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{d}{dx}(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x})=\frac{1}{(1-x)^2}$, $x\in(-1,1)$；

2、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}t^{4n})dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t^4}=\frac{1}{4}\int_0^x(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{2}{1+t^2})dt$

$=\frac{1}{4}\ln(\frac{1+x}{1-x})+\frac{1}{2}\arctan x,\ \ x\in(-1,1)$；

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n}=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n=\frac{d}{dx}(\frac{2}{2-xX})=\frac{2}{(2-x)^2}$, $x\in(-2,2)$；

4、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{2n-1}dt=x\int_0^x t\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-2}dt=x\int_0^x\frac{tdt}{1-t^2}=-\frac{x}{2}\ln(1-x^2),\ \ x\in(-1,1)$。

四、综合题

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3/4)^n}{2n-1}$的和。

解：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-t^2)^{n-1}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x,\quad x\in(-1,1)$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3/4)^n}{2n-1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\sqrt{3}/2)^{2n-1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}S(\sqrt{3}/2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(\sqrt{3}/2)$$ 。

第四节 函数展开成幂级数

一、填空题

1、函数 $f(x)$ 在某一邻域 $U(x_0)$ 内任意阶可导，则在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件为 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 在 $n\to\infty$ 时的极限为__零__；

2、函数 $f(x)=xe^{-2x}$ 展开成 x 的幂级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^{n+1},\ -\infty<x<+\infty$ 。

二、计算题

1、将函数 $f(x)=\sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数；

解：$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!},\quad -\infty<x<+\infty$；

2、将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数；

解：$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$， $-1<x<1$；

3、将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数；

解：$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(x-3)/3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$， $0<x<6$；

4、将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数；

解：$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(x+4)/2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(x+4)/3}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\quad -6<x<-2\text{；}$$

5、将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $(x+\frac{\pi}{3})$ 的幂级数。

解：$\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3})+\sin(\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{\pi}{3})$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[(2n+1)(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\sqrt{3}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}\right],\quad -\infty<x<+\infty \text{。}$$

三、证明题 利用函数的级数展开式证明$\int_0^1\frac{dx}{1+x^\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n\alpha}$，其中$\alpha>0$为常数。

证明：由于$\frac{1}{1+x^\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^\alpha)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n\alpha}$，$|x|<1$，故$\int_0^1\frac{dx}{1+x^\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n\alpha}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n\alpha}$。

第七～九节 傅立叶级数 正弦级数和余弦级数

一、选择题

1、函数系$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots$中任两个相同函数之积在$[-\pi,\pi]$上的积分值（ D ）

A、等于1； B、等于0； C、等于π； D、不等于0。

2、函数系$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots$中任两个不同函数之积在$[-\pi,\pi]$上的积分值（ A ）

A、等于0； B、不等于0； C、等于π； D、不确定.

二、填空题

1、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且能展开成傅立叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则函数$f(x)$的傅立叶系数 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=0,1,2,3,...$ ；.

2、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，在一个周期上可积，当$f(x)$为奇函数时，它的傅立叶系数为 $a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=0,1,2,3,...$.；

3、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上，$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅立叶级数在$x=\pi$时收敛于 $-\pi/2$ ；

4、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，在$[-\pi,\pi]$上，$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅立叶级数在$x=\pi$时收敛于 π ；

5、已知函数$f(x)=x^2$在$[-1,1]$上的傅立叶级数$\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$，则得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=$ $-\frac{\pi^2}{12}$。

三、计算题

1、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且在区间$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\mathrm{sgn}(x)$，将其展开成傅立叶级数。

解：由题设知$f(x)$为奇函数，故其傅里叶系数为$a_n\equiv 0$，$n=0,1,2,...$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & 若 n\ge 1 为奇数\\ 0, & 若 n\ge 1 为偶数\end{cases}$$，故

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x,\quad -\infty<x<+\infty 。$$

2、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=3x^2+1$，将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。

解：由题设知 $f(x)$ 为偶函数，故其傅里叶系数为 $b_n\equiv 0$， $n=1,2,\ldots$，而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+3x^2)dx=2(1+\pi^2)，$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+3x^2)\cos nxdx=\frac{2}{n^3\pi}\int_0^{n\pi}(n^2+3t^2)\cos tdt$$

$$=\frac{2}{n^3\pi}\left[(3t^2+n^2-6)\sin t+6t\cos t\right]\Big|_0^{n\pi}=\frac{12\cdot(-1)^n}{n^2}\cos n\pi，\quad n=1,2,\ldots，故$$

$$3x^2+1=1+\pi^2+12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),\quad -\pi<x<\pi 。$$

3、将函数 $f(x)=x+1,\ 0\le x\le\pi$ 展开成正弦级数。

解：先做奇延拓，即令 $F(x+2n\pi)=(|x|+1)\operatorname{sgn}(x),\ -\pi<x\le\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$，并将 $F(x)$ 展开傅里叶级数，则傅里叶系数为 $a_n\equiv 0$， $n=0,1,2,\ldots$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{n\pi}(t+n)\sin tdt$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[\sin t-(t+n)\cos t\right]\Big|_0^{n\pi}=\frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)\cos n\pi\right]=\frac{2}{n\pi}\left[1+(-1)^{n-1}(\pi+1)\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2(\pi+2)}{n\pi}, & 若 n\ge 1 为奇数\\ -\dfrac{2\pi}{n\pi}, & 若 n\ge 1 为偶数\end{cases}，故$$

$$x+1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(\pi+2)}{2n-1}\sin(2n-1)x-\frac{\pi}{2n}\sin(2nx)\right],\quad 0<x<\pi 。$$

4、将函数 $f(x)=x^2, 0\le x\le\pi$ 展开成余弦级数。

解：先做偶延拓，即令 $F(x+2n\pi)=f(x)=x^2$， $-\pi<x\le\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$，并将 $F(x)$ 展开傅里叶级数，则傅里叶系数为 $b_n\equiv 0$， $n=1,2,\ldots$，而

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x^2dx=\dfrac{2x^3}{3\pi}\Big|_0^{\pi}=\dfrac{2\pi^2}{3}, & 若n=0\\ \dfrac{2}{n^3\pi}\displaystyle\int_0^{n\pi}t^2\cos tdt=\dfrac{2}{n^3\pi}\left[(t^2-2)\sin t+2t\cos t\right]\Big|_0^{n\pi}=\dfrac{4(-1)^n}{n^2}, & 若n\ge 1\end{cases},$$

故 $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),\quad 0<x<\pi$ 。

5、设利用傅里叶级数的理论，求 $f(x)=x+x^2$

(1)、在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数展开式；

(2)、在区间 $(0,\pi)$ 内的正弦级数展开式；

(3)、在区间 $(0,\pi)$ 内的余弦级数展开式。

解：由题设知，需要对 $f(x)$ 进行延拓，再进行展开。

(1)、扩展延拓：令 $F_1(x+2n\pi)=(x+x^2),\ -\pi<x\le\pi, n=0,\pm1,\pm2,\dots$，并将 $F_1(x)$ 展开傅里叶级数，则傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x^2dx=\dfrac{2x^3}{3\pi}\Big|_0^{\pi}=\dfrac{2\pi^2}{3}, & 若n=0\\ \dfrac{2}{n^3\pi}\displaystyle\int_0^{n\pi}t^2\cos tdt=\dfrac{2}{n^3\pi}\left[(t^2-2)\sin t+2t\cos t\right]\Big|_0^{\pi}=\dfrac{4(-1)^n}{n^2}, & 若n\ge 1\end{cases},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{n\pi}t\sin tdt$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\sin t-t\cos t)\Big|_0^{n\pi}=\frac{2(-1)^{n-1}}{n},n=1,2,\dots，故$$

$$x+x^2=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left[2\cos(nx)-n\sin(nx)\right],\quad -\pi<x<\pi\ ;$$

(2)、奇延拓：令 $F_2(x+2n\pi)=(|x|+x^2)\operatorname{sgn}(x),\ -\pi<x\le\pi, n=0,\pm1,\pm2,\dots$，并将 $F_2(x)$ 展开傅里叶级数，则傅里叶系数为 $a_n\equiv 0$， $n=0,1,2,\dots$， 而

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+x^2)\sin nxdx=\frac{2}{n^3\pi}\int_0^{n\pi}(t^2+nt)\sin tdt$$

$$=\frac{2}{n^3\pi}\left[(2t+n)\sin t-(t^2+nt-2)\cos t\right]\Big|_0^{n\pi}=-\frac{2}{n^3\pi}\left[2+(-1)^n(n^2\pi^2+n^2\pi-2)\right]，故$$

$$x+x^2=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\left[1-(-1)^n\right]+(-1)^n n^2\pi(\pi+1)}{n^3}\sin(nx),\quad 0\le x<\pi\text{；}$$

(3)、偶延拓：令 $F_3(x+2n\pi)=(|x|+x^2),\ -\pi<x\le\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$，并将 $F_3(x)$ 展开傅里叶级数，

则傅里叶系数为 $b_n\equiv 0$， $n=1,2,\ldots$，而

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_3(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+x^2)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+x^2)dx=\frac{x^2(2x+3)}{3\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi(2\pi+3)}{3}\text{，}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_3(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+x^2)\cos nxdx=\frac{2}{n^3\pi}\int_0^{n\pi}(t^2+nt)\cos tdt$$

$$=\frac{2}{n^3\pi}\left[(t^2+nt-2)\sin t+(2t+n)\cos t\right]\Big|_0^{n\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left[(2\pi+1)(-1)^n-1\right],\quad n\ge1\text{，故}$$

$$x+x^2=\frac{\pi(2\pi+3)}{6}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\pi+1)(-1)^n-1}{n^2}\cos(nx),\quad 0\le x<\pi\text{。}$$

第十二章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

一、选择题 对于微分方程$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$，下面说法错误的是（ C ）

A、$y=\sin(x+C)$ 是其通解(其中C为任意常数)；

B、$y=\sin x$是其满足初始条件$y(0)=0$的一个特解；

C、$y=1$是其满足初始条件$y(\pi/2)=1$的一个特解；

D、$y=1$与$y=-1$都是其解，但非特解。

二、填空题

1、若曲线$L: y=y(x)$在$P(x,y)$的法线与x轴交于Q点，且直线段$\overline{PQ}$被y轴平分，则曲线L满足的微分方程为$\underline{\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}}$；

2、设某种气体的气压P对于温度T的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比，则该气体的气压P所满足的微分方程为$\underline{\frac{dP}{dT}=k\frac{P}{T^2}\,(k\text{是比例常数})}$。

三、计算题

1、验证$x^2-xy+y^2=C$(其中$C>0$是任意常数)是常微分方程$(x-2y)y'=2x-y$的通解，并求出该方程满足$y(0)=1$的特解。

解：在$x^2-xy+y^2=C$两边求导，得中$(2x-y)-(x-2y)y'=0$，即

$(x-2y)y'=2x-y$，故$x^2-xy+y^2=C$是方程的通解；

在$x^2-xy+y^2=C$中令$x=0, y(0)=1$，得$C=1$，

故方程满足$y(0)=1$的特解为$x^2-xy+y^2=1$。

第二节 可分离变量的微分方程

一、选择题

设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+\int_0^2 f(x)dx$，则函数 $f(x)=$（ D ）

A、$x+2$； B、$x+1$； C、$x-1$； D、$x-2$。

二、填空题

1、微分方程 $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+x^3=0$ 的通解为 $\underline{3x^4+4(y+1)^3=C,\ \text{其中}C\text{为任意常数}}$ ；

2、微分方程 $\cos x\sin ydy=\sin x\cos ydx$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解为 $\underline{\cos x=\cos y}$ 。

三、计算题

1、求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=2}=1$ 的特解。

解：原方程即 $\dfrac{dy}{y}+\dfrac{2dx}{x}=0$，积分得 $\ln(x^2y)=\ln C$，即 $x^2y=C$，取 $x=2,y(2)=1$，得 $C=4$，

故原方程满足初始条件 $y\big|_{x=2}=1$ 的特解为 $x^2y=4$。

2、求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$ 的通解.

解：设 $u=x+y,y=u-x$，则 $\dfrac{du}{dx}=u^2+1$，即 $\dfrac{du}{u^2+1}=dx$，积分得通解 $\arctan u=x+C$，

故原方程通解为 $\arctan(x+y)=x+C$。

第三节 齐权方程

一、选择题

微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{y^2+x^2}$ 的通解为（ C ）.

A、$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx$； B、$y-\sqrt{y^2+x^2}=Cx$；

C、$y+\sqrt{y^2+x^2}=Cx^2$； D、$y-\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$。

二、填空题

微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ 满足 $y\big|_{x=1}=2$ 的特解为 $\underline{y^2=2x^2(\ln x+2)}$。

三、计算题

1、求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解。

解：令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，则 $y'=xu'+u$，故原方程即 $u+x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$，即 $\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$，

积分得 $\ln(\ln u-1)=\ln(Cx)$，即通解 $\ln\dfrac{y}{x}=Cx+1$，或 $y=xe^{Cx+1}$，其中 C 为任意常数。

2、求微分方程 $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$ 的特解。

解：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则原方程化为 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u+u^2+u^3}du=(\dfrac{1}{1+u}-\dfrac{2u}{1+u^2})du$，积分得

$\ln(Cx)=\ln(\dfrac{1+u}{1+u^2})$，即 $\dfrac{1+u}{1+u^2}=\dfrac{x}{C}$，故原方程通解为 $x^2+y^2=C(x+y)$，

代入初始条件得特解为 $x^2+y^2=2(x+y)$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$。

第四节 一阶线性微分方程

一、选择题 微分方程 $xy'+y=\sin x$ 的通解为（ D ）

A、$y=\dfrac{C+\cos x}{x}$； B、$y=\dfrac{C-\sin x}{x}$；

C、$y=\dfrac{C+\cos x}{x}$； D、$y=\dfrac{C-\cos x}{x}$。

二、填空题 微分方程 $(y^2-6x)dy+2ydx=0$ 的通解为 $\underline{2x=Cy^3+y^2,\text{其中}C\text{为任意常数}}$。

三、计算题

1、设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+\int_0^x f(t)dt=2x$，求 $f(x)$。

解：由原方程知 $f(0)=0$，且 $f'(x)+f(x)=2$，解得 $f(x)=2+Ce^{-x}$，其中 C 为任意常数，

再由 $f(0)=0$，得 $C=-2$，故 $f(x)=2-2e^{-x}$。

2、求微分方程 $(x^2-1)y'+2xy=\cos x$ 的通解.

解：原方程即 $y'+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$，其通解为

$$y=e^{-\int\frac{2xdx}{x^2-1}}(C+\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2xdx}{x^2-1}}dx)=\frac{1}{x^2-1}(C+\int\cos xdx)=\frac{\sin x+C}{x^2-1}$$，其中 C 为任意常数。

3、求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-3xy=xy^2$ 的通解.

解：原方程两边除以 $(-y^2)$，得 $\dfrac{d(y^{-1})}{dx}+3xy^{-1}=-x$，其通解为

$$y^{-1}=e^{-\int 3xdx}(\frac{C}{3}-\int xe^{\int 3xdx}dx)=e^{-3x^2/2}(\frac{C}{3}-\int xe^{3x^2/2}dx)=\frac{1}{3}e^{-3x^2/2}(C-e^{3x^2/2})=\frac{1}{3}(Ce^{-3x^2/2}-1)$$，

即 $y=\dfrac{3}{Ce^{-3x^2/2}-1}$，也即 $\dfrac{3}{2}x^2+\ln\left|\dfrac{3}{y}+1\right|=C_1$，其中 $C_1=\ln C$ 为任意常数。

第五节 全微分方程

一、选择题 下列方程为全微分方程的是（ C ）.

A、$(x^2+y^2)dx+xydy=0$；　　B、$(xy-2y^2)dx-x^2dy=0$；

C、$e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$；　　D、$(x^2+y)dx-xdy=0$。

二、填空题 若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数，则微分方程

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在区域 G 内恒成立。

三、计算题

1、求微分方程 $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$ 的通解。

解：原方程即 $d(xe^y-y^2)=0$，故通解为 $xe^y-y^2=C$，其中 C 为任意常数。

2、用观察法求出微分方程 $ydx-xdy+y^2xdx=0$ 的积分因子，并求出其通解。

解：积分因子是 y^{-2}，原方程两边同乘以 y^{-2}，得 $d(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y})=\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0$，故其通解为

$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=C$，其中 C 为任意常数。

第七节 可降阶的高阶微分方程

一、选择题

1、微分方程 $y''=6x-\sin x$ 的通解为（ B ）

A、$y=x^3-\sin x+C_1x+C_2$； B、$y=x^3+\sin x+C_1x+C_2$；

C、$y=x^3+\cos x+C_1x+C_2$； D、$y=x^3-\cos x+C_1x+C_2$。

2、微分方程 $y''=y'+2x$ 的通解为（ C ）

A、$y=C_1+C_2e^{-x}-(x+1)^2$； B、$y=C_1+C_2e^{-x}+(x+1)^2$；

C、$y=C_1+C_2e^{x}-(x+1)^2$； D、$y=C_1+C_2e^{x}+(x+1)^2$。

二、填空题

1、微分方程 $xy''+y'=0$ 满足 $y'\big|_{x=1}=y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $\underline{y=\ln|x|+1}$；

2、微分方程 $y''=y'+(y')^3$ 通解为 $\underline{y=C_1+\arcsin(C_2e^x),\text{其中}C_1,C_2\text{为任意常数}}$。

三、计算题

1、求 $xy''+y'=x$ 的经过点 $M(1,0)$，且在此点与直线 $y=x-1$ 相切的积分曲线。

解：原方程即 $\frac{d}{dx}(xy')=x$，两边积分得 $xy'=\frac{1}{2}(\frac{C_2}{2}+x^2)$，即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(\frac{C_2}{2}x^{-1}+x)$，再积分得 $y=\frac{1}{4}(C_1+C_2\ln|x|+x^2)$，又由题设知 $y(1)=0,y'(1)=1$，从而 $C_1=-1,C_2=2$，

故所求积分曲线的方程为 $y=\frac{1}{4}(x^2+2\ln|x|-1)$。

2、求微分方程 $y''=3\sqrt{y}$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=2$ 的特解。

解：令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，原方程即 $2pdp=6\sqrt{y}dy$，积分得 $p^2=4y^{3/2}+C_1$，

由 $y(0)=1,y'(0)=2$，即 $y=1$时， $x=0,p=y'=2$，故 $C_1=0$，故 $p^2=4y^{3/2}$，即

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{1}{2y^{3/4}}$，即 $dx=\frac{dy}{2y^{3/4}}$，积分得 $x=2y^{1/4}+C_2$，再由 $y=1$时， $x=0$ 得

$C_2=-2$， $x=2y^{1/4}-2$，即 $y=\frac{1}{16}(x+2)^4$。

第八节 高阶线性微分方程

一、选择题 设 $y_1(x)=1, y_2(x)=e^x$ 是二阶齐次方程 $y''+y'p_1(x)+yp_2(x)=0$ 的解，则二阶非齐次方程 $y''+y'p_1(x)+yp_2(x)=1$ 的通解为（ B ）。

A、$y=C_1+C_2e^x$； B、$y=-x+C_1+C_2e^x$；

C、$y=x+C_1+C_2e^x$； D、$y=x^2+C_1+C_2e^x$。

二、填空题 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程 $y''+y'p_1(x)+yp_2(x)=f(x)\neq 0$ 的三个线性无关的特解，则该方程的通解为 $\underline{y=y_1+C_1(y_1-y_2)+C_2(y_1-y_3)}$。

三、计算题

1、设 $y_0(x)=x^2e^x$ 是方程 $y''+ay'+by=ce^{\lambda x}$ 的解，求常数 a,b,c,λ 及该方程的通解.

解：题设可知 $\lambda=1$ 是方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的 2 重根，即 $(\lambda-1)^2=\lambda^2+a\lambda+b=0$，故

$a=-2, b=\lambda=1$，将这些值及 $y_0(x)=x^2e^x$ 代入原方程得 $c=2$，且原方程的通解为：

$y=(C_1+C_2x+x^2)e^x$。

2、已知 $y_1(x)=x$ 是齐次线性微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=0$ 的一个特解，求非齐次线性微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解。

解：设非齐次方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解的通解为 $y=uy_1=xu$，将其代入非齐次方程，

则 $x^2(2u'+xu'')-2x(u+xu')+2xu=2x^3$，化简得 $u''=2$，故 $u=C_1+C_2x+x^2$，故非齐次方程的通解为 $y=xu=C_1x+C_2x^2+x^3$。

第九节 二阶常系数齐次线性微分方程

一、选择题

微分方程 $y''-2y'+2y=0$ 的通解为（ D ）.

A、$y=C_1\cos x+C_2\sin x$；

B、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$；

C、$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}$；

D、$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x$.

二、填空题

微分方程 $y^{(4)}-2y'''+y''=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x}$ 。

三、计算题

1、求微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解。

解：特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，故其通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

2、求微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 满足 $y'\big|_{x=0}=2,y\big|_{x=0}=0$ 的特解。

解：特征方程 $\lambda^2+6\lambda+13=0$，特征值为 $\lambda=-3\pm2i$，故其通解为

$y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数，

代入初始条件 $C_1=0,C_2=1$，得特解为 $y=e^{-3x}\sin2x$ 。

3、求微分方程 $y^{(4)}-y=0$ 的通解。

解：特征方程 $\lambda^4-1=0$，特征值为 $\lambda_{1,2}=\pm1,\lambda_{3,4}=\pm i$，故通解为

$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$，其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数。

第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程

一、选择题 微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}\cos x$ 具有的特解形式为（ D ）

A、$y^{*}(x)=(a+bx)e^{x}$，其中 $a,b\in R$ 为待定常数；

B、$y^{*}(x)=(a+bx)e^{x}\cos x$，其中 $a,b\in R$ 为待定常数；

C、$y^{*}(x)=(a+bx)e^{x}\sin x$，其中 $a,b\in R$ 为待定常数；

D、$y^{*}(x)=\left[(a+bx)\cos x+(\alpha+\beta x)\sin x\right]e^{x}$，其中 $a,b,\alpha,\beta\in R$ 为待定常数。

二、填空题 微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解为 $\underline{y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+(1/3)}$。

三、计算题

1、求微分方程 $2y''+y'-y=2e^{x}$ 的通解。

解：通解为 $y=C_1e^{x/2}+C_2e^{-x}+e^{x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

2、求微分方程 $y''+y=e^{x}+\cos x$ 的通解。

解：通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}(e^{x}+x\sin x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数。