一、 单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.C　　2.D　　3.D　　4.A　　5.A

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1.8　　2.2　　3.2　　4.-2　　5.± 1

三、计算（10 分）

$$\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&1&2&2\\2&2&1&2\\2&2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&2&2&2\\7&1&2&2\\7&2&1&2\\7&2&2&1\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

$$=7\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&1&2&2\\1&2&1&2\\1&2&2&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1&2&2&2\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$=-7\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

四、计算（10 分）

由于 $AB=A+2B$，则 $(A-2E)B=A$，所以 $B=(A-2E)^{-1}A\cdots\cdots\cdots 5\text{分}$

$$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

$$B=(A-2E)^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

五、证明（10 分）

设存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 满足 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=0,$$

于是 $(k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha_1+(k_2+k_3+\cdots+k_s)\alpha_2+\cdots+k_1\alpha_s=0,\cdots\cdots\cdots 5\text{分}$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=k_2+k_3+\cdots+k_s=\cdots=k_1=0.\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

既有 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关$\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$

六、计算（10 分）

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 2分 \qquad \to\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 5分$$

则秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为极大线性无关组……………3分

七、计算（10 分）

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

同解方程组：$\begin{cases}x_1=-2x_3-1\\x_2=x_3+2\end{cases}$，

所以通解为 $\xi=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}(c\in R).$…………………………5分

八、计算（10 分）

A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)$，所以 A 的特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=3.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

(1)当 $\lambda=\lambda_1=-1$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,

则 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$ 为 $\lambda_1=-1$ 的特征向量.……………3分

(2)当 $\lambda=\lambda_2=3$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$,

则 $k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$ 为 $\lambda_2=3$ 的特征向量. ……………3分