第七章 微分方程

回顾：一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 类型与解法

1.可分离变量方程 $y'=f_1(x)f_2(y)$ 分离变量法：分离变量,两边积分

2.齐次方程 $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) \xrightarrow[\text{令 } u=\frac{y}{x}]{\text{变量代换}}$ 可分离变量

3.一阶线性方程 齐次：$y'+P(x)y=0$ 可分离变量 通解：$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

非齐次：$y'+P(x)y=Q(x)$ 常数变易法 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

4.伯努利方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$ $\xrightarrow[\text{令 } z=y^{1-n}]{\text{变量代换}}$ $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ 线性方程

➢**基本方法** 变量代换、常数变易、交换x与y的地位

➢**主要公式** 一阶线性方程通解 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

回顾：一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 类型与解法

1.可分离变量方程 $y'=f_1(x)f_2(y)$ 分离变量法：分离变量,两边积分

2.齐次方程 $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\xrightarrow[\text{令 } u=\frac{y}{x}]{\text{变量代换}}$ 可分离变量

3.一阶线性方程 齐次：$y'+P(x)y=0$ 可分离变量 通解：$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

非齐次：$y'+P(x)y=Q(x)$ 常数变易法 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

4.伯努利方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$ $\xrightarrow[\text{令 } z=y^{1-n}]{\text{变量代换}}$ $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ 线性方程

➢**基本方法** 变量代换、常数变易、交换x与y的地位

➢**主要公式** 一阶线性方程通解 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

二、线性微分方程解的结构—小结

定理1(叠加原理): 设 $y_1(x), y_2(x)$分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) \quad (1)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x) \quad (2)$$

的解, 则$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ (3)的解.

二、线性微分方程解的结构—小结

定理2：若函数 $y^*(x)$是二阶非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ (1)

的特解,$Y(x)$是对应的齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (2)的通解,

那么,$y=Y(x)+y^*(x)$是非齐次方程(1)的通解.

定理3：若$y_1(x),y_2(x)$均是二阶非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$(1)的解,

则 $y_1(x)-y_2(x)$是对应的齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (2)的解.

定理4：若$y_1(x),y_2(x)$均是二阶齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$(2)的两个

线性无关的特解,则该方程的通解为： $Y=C_1y_1+C_2y_2$

二、线性微分方程解的结构

非齐次线性： $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ (1)

齐次线性： $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (2)

结论:1.若$y_1,y_2,\cdots,y_n$是非齐次方程(1)的解,则

①若$C_1+C_2+\cdots+C_n=1$,则$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$是(1)的解.

②若$C_1+C_2+\cdots+C_n=0$,则$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$是(2)的解.

2.若$y_1,y_2,\cdots,y_n$是齐次方程(2)的解,则对任意的常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$,

$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$均是(2)的解.

思考：若已知齐次方程的特解,怎样得到齐次方程(2)的通解?

一、二阶常系数齐次线性方程

小结： $y''+p\,y'+q\,y=0 \quad (p, q\text{为常数})$

步骤：
$$\begin{cases} \text{①写出特征方程：} r^2+pr+q=0 \\ \text{②求特征根：} r_1, r_2 \\ \text{③根据特征根写出通解} \end{cases}$$

特征根	通解
$\Delta>0$时： $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$\Delta=0$时： $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
$\Delta<0$时： $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

结论： $y''+py'+qy=f(x)$ （p,q为常数）

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ λ为实数,$P_m(x)$为m次多项式.

可设特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ $(k=0,1,2)$

k对应λ是特征方程根的重数

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

λ,ω为实数, $P_l(x),P_n(x)$分别为l,n次多项式.

特解形式：$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$

$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$为$m$次多项式,其中$m=\max\{l,n\}$

$$\begin{cases}\lambda+i\omega\text{不是特征方程的根} \longrightarrow k=0\\ \lambda+i\omega\text{是特征方程的根} \longrightarrow k=1\end{cases}$$

解题步骤：

设特解$\begin{cases}\text{写出}f(x)\text{,明确}\lambda,\omega\text{和}m\\ \text{写出特征方程,确定}k\end{cases}$

求特解$\begin{cases}\text{代入方程,比较系数}\\ \text{列出等式,求出系数}\end{cases}$

第八章 向量代数与空间解析几何

内容小结

1. 两向量的数量积(点积、内积)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0,\text{若}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

2. 两向量的向量积(叉积、外积)

(1) 反交换律: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

$$\text{向量}\vec{c}\begin{cases}\text{方向：}\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}\text{且符合右手规则}\\ \text{模：}|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\quad(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=$以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积

二、两向量的向量积

向量积的行列式表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

内容小结

2. 平面基本方程

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (A、B、C不全为零).

一般式 $Ax+By+Cz+D=0$ (A、B、C不全为零).

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ $(abc \neq 0)$

内容小结

3. 平面之间的关系

平面Π_1 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面Π_2 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

点到平面的距离公式 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

内容小结

1. 空间直线

一般式（面交式）

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

对称式（点向式）

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

参数式

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,t \\ y = y_0 + n\,t \\ z = z_0 + p\,t \end{cases}$$

两点式

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

内容小结

2. 线与线之间的关系

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad \vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1)$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},\quad \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

夹角公式 $$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

垂直 $$L_1\perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\perp\vec{s}_2 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

平行 $$L_1//L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1//\vec{s}_2 \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

内容小结

3. 线面之间的关系

平面Π $Ax+By+Cz+D=0,\ \vec{n}=(A,B,C)$

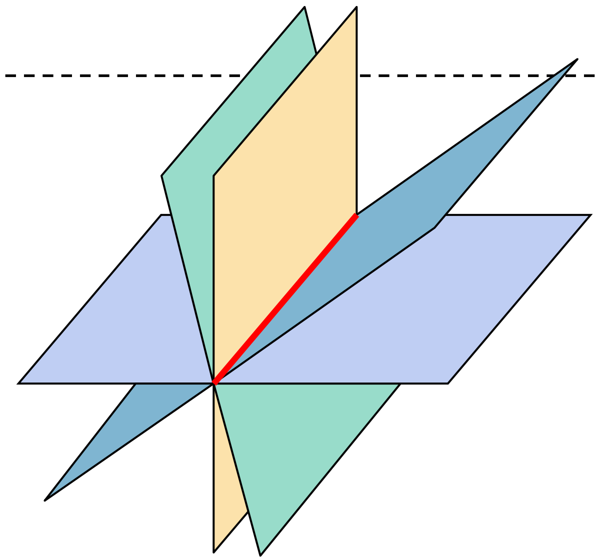
直线L $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p},\ \vec{s}=(m,\ n,\ p)$

垂直 $\vec{n}\times\vec{s}=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$

平行 $\vec{n}\cdot\vec{s}=0 \Longleftrightarrow mA+nB+pC=0$

夹角公式 $\sin\theta=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

过直线的平面束方程



直线L $\begin{cases}\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

过L的平面束方程:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

$(\lambda_1,\lambda_2$ 不全为$0)$

注：通常情况令一个参数等于1. 过L的平面束方程(Π_2除外):

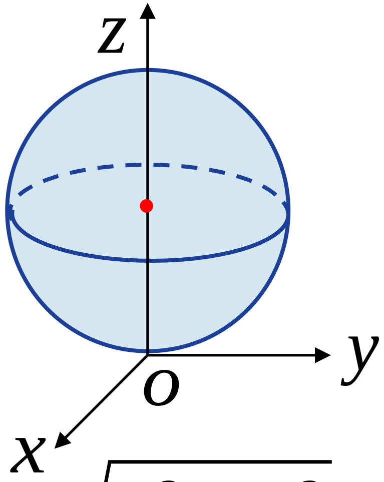
$$\Rightarrow (A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\ (\lambda\in R)$$

一、曲面研究的基本问题

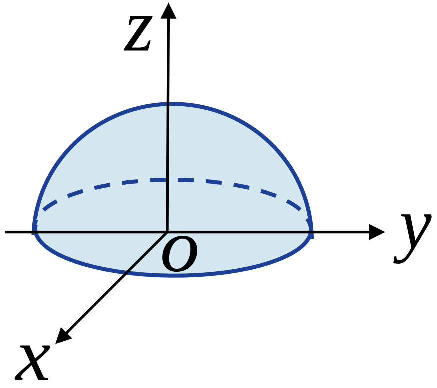
球面方程:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

例2. 判断下列方程为何种曲面？

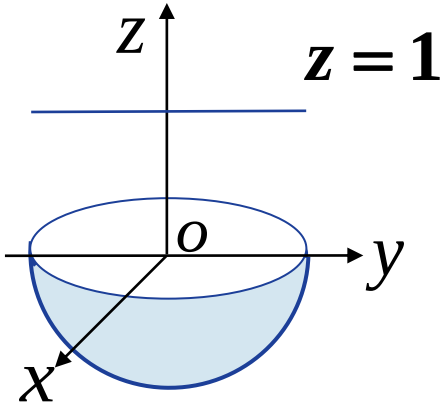
$(1)\ x^2+y^2+z^2-2z=0$



$(2)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

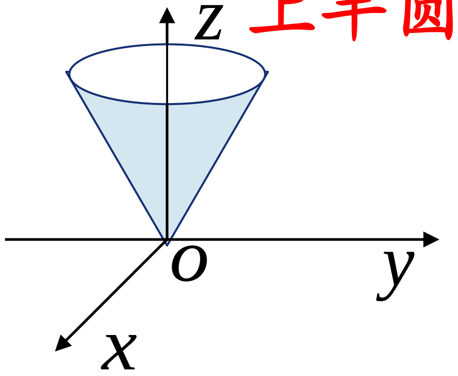


$(3)\ z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$



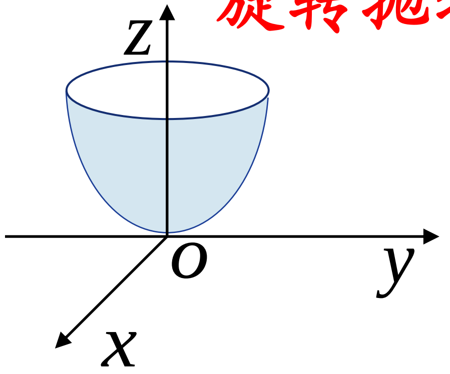
$(4)\ z=\sqrt{x^2+y^2}$

上半圆锥面



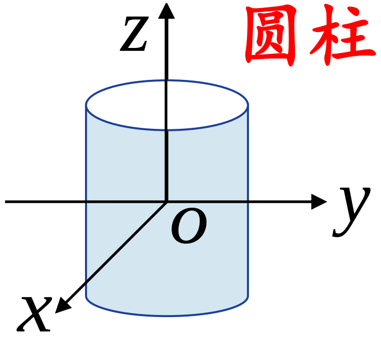
$(5)\ z=x^2+y^2$

旋转抛物面



$(6)\ x^2+y^2=a^2$

圆柱面



二、旋转曲面

找到M的坐标(x,y,z)满足的关系式

2.坐标面上曲线绕坐标轴旋转所得旋转曲面

建立yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$绕z轴旋转所成曲面S的方程.

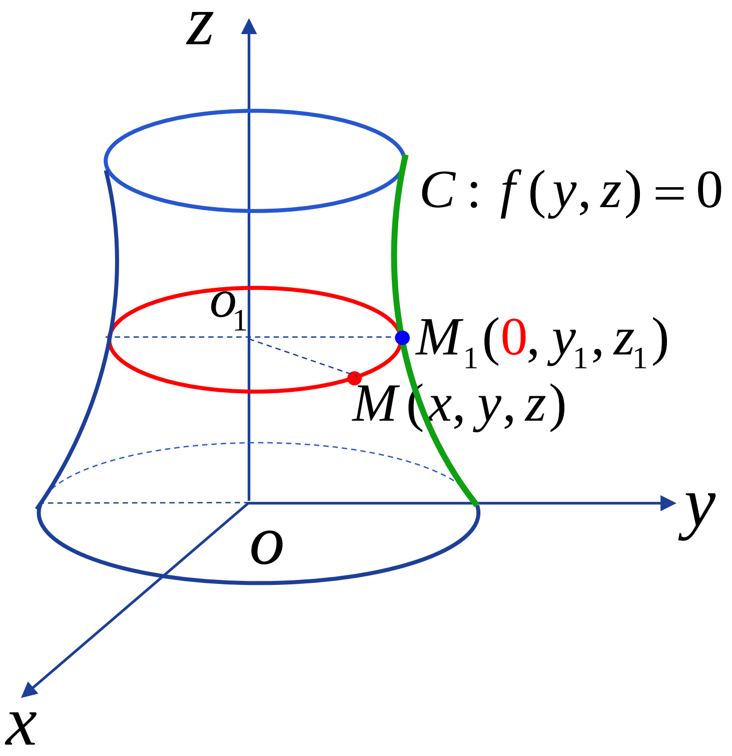
方法：$\forall M(x,y,z)\in S$，则它必是由C上相应点$M_1(0,y_1,z_1)$旋转而来的.

因为$M_1(0,y_1,z_1)\in C$，所以$f(y_1,z_1)=0$.

点M与M_1的坐标有如下关系：

$$z=z_1,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$



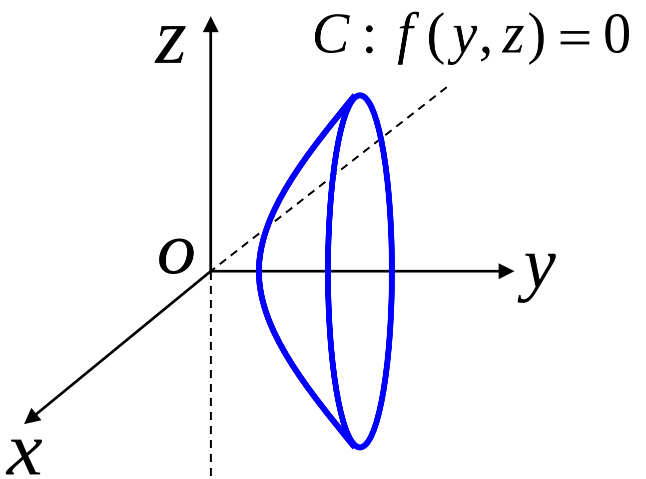
故旋转曲面方程为：$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

二、旋转曲面

yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$ 绕z轴旋转一周而成的旋转曲面S的方程为：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

其他结论：当yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$ 绕y轴旋转时,方程如何？



$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

当xoy面上曲线$C: f(x,y)=0$ 绕y轴旋转时,方程为：$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

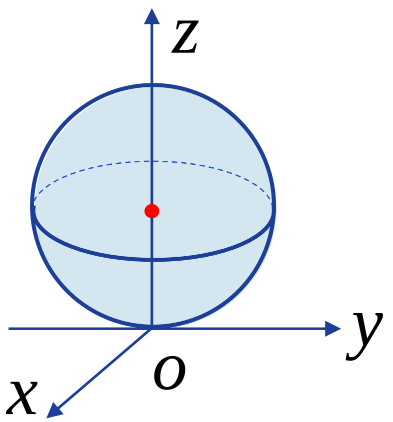
二、旋转曲面

yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$绕z轴旋转一周而成的旋转曲面S的方程为：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

例3 求下列曲面方程.

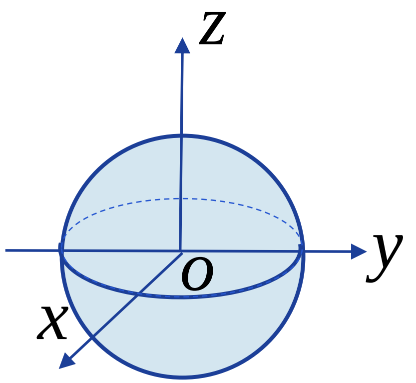
(1) yoz面上曲线$C: y^2+(z-1)^2=1$绕z轴旋转一周而成的旋转曲面的方程为：$x^2+y^2+(z-1)^2=1$



二、旋转曲面

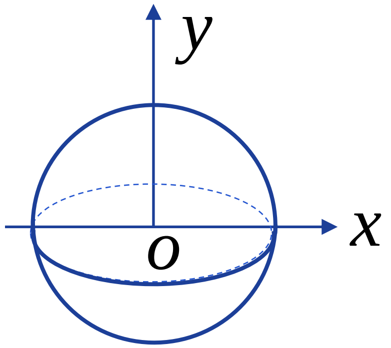
yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$ 绕z轴旋转一周而成的旋转曲面S的方程为：

例3求下列曲面方程. $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$



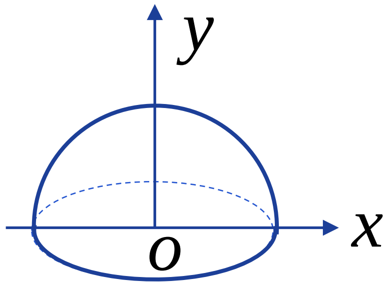
(2) xoy面上曲线$C: y=\sqrt{1-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周

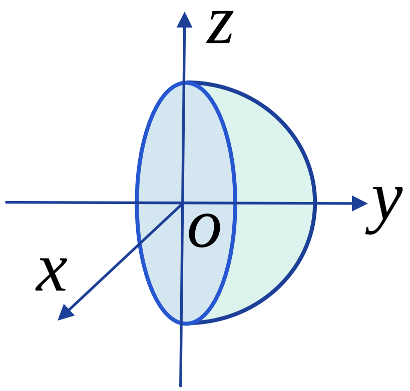
而成的旋转曲面的方程为：$x^2+y^2+z^2=1$



(3) xoy面上曲线$C: y=\sqrt{1-x^2}$ 绕 y 轴旋转一周

而成的旋转曲面的方程为：$y=\sqrt{1-x^2-z^2}$





右半球面

二、旋转曲面

yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$绕z轴旋转一周而成的旋转曲面S的方程为：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

例3 求下列曲面方程.

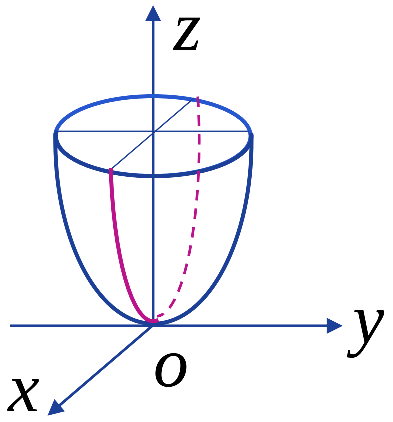
旋转抛物面

(4) yoz面上曲线$C: z=y^2$绕z轴旋转一周而成的

旋转曲面的方程为：$z=x^2+y^2$

(5) xoz面上曲线$C: z=x^2$绕z轴旋转一周而成的

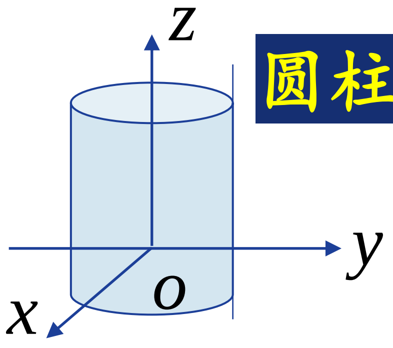
旋转曲面的方程为：$z=x^2+y^2$



二、旋转曲面

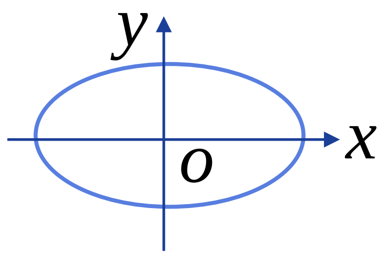
yoz面上曲线$C: f(y,z)=0$绕z轴旋转一周而成的旋转曲面S的方程为：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

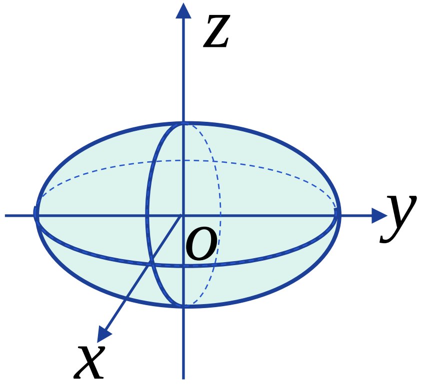


例3求下列曲面方程.

(6) yoz面上直线$C: y=a$绕z轴旋转一周而成的旋转曲面的方程为：$x^2+y^2=a^2$



(7) xoy面上曲线$C: x^2+2y^2=1$绕x轴旋转一周而成的旋转曲面的方程为：$x^2+2(y^2+z^2)=1$ 旋转椭球面

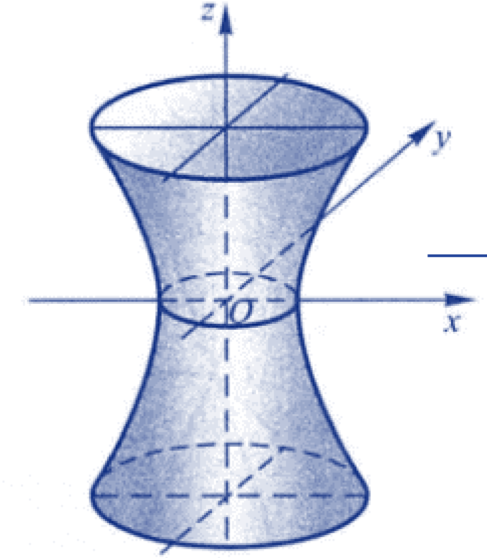


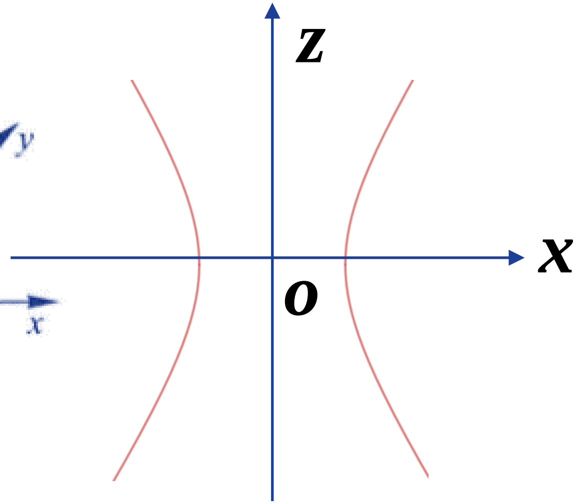
二、旋转曲面

例5.求xoz面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$分别绕z轴和x轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解：绕z轴旋转所成曲面方程为：

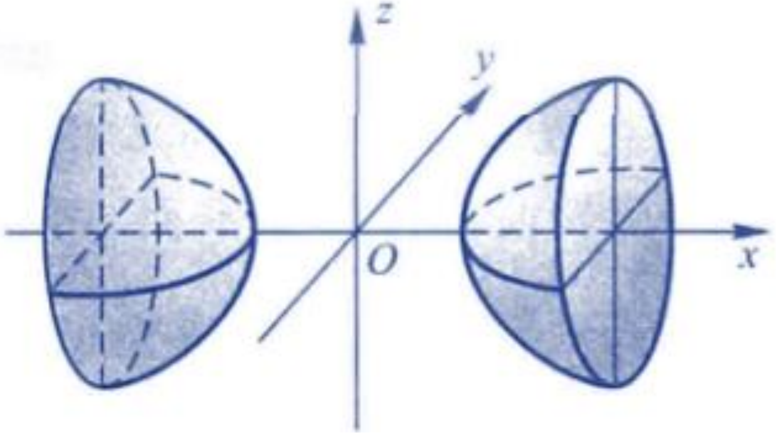
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 旋转单叶双曲面





绕x轴旋转所成曲面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$ 旋转双叶双曲面



这两种曲面都叫做旋转双曲面

三、空间曲线在坐标面上的投影

类似地：可定义空间曲线C在其他坐标面上的投影

空间曲线C: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{消去}x}$ yoz面的投影曲线 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

空间曲线C: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{消去}y}$ xoz面的投影曲线 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

第九章 多元函数微分法及其应用

三、多元函数的极限

1. 二元函数的极限定义 设二元函数 $z=f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点, 如果存在常数 A, 对 $\forall\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得对适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点, 都有 $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立, 则称 A 是 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限,

记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $f(P)\to A(P\to P_0)$

称二元函数的极限为**二重极限**.

注: (4)若 $P\to P_0$ 沿两条不同路径时, $f(P)$ 趋近于不同的常数, 则二重极限不存在.

(5)若 $P\to P_0$ 沿某条特殊路径时, 极限不存在, 则二重极限不存在.

三、多元函数的极限

例2. 证明$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在点(0,0)处的极限不存在.

解： 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0)，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2+k^2\cancel{x}^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同，

极限不同 ！

故 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在点(0,0)极限不存在.

练习： 证明极限不存在 (1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}$； (2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

三、多元函数的极限

练习： 证明极限不存在 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

证: (1) 当 $(x,y)\xrightarrow{\text{沿}x\text{轴}}(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{x+y}{x-y}=1$；

当 $(x,y)\xrightarrow{\text{沿}y\text{轴}}(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}=-1$；

故原极限不存在.

(2) 当 $(x,y)\xrightarrow{\text{沿}x\text{轴}}(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}=0$；

当 $(x,y)\xrightarrow{\text{沿}y=x^2}(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}=\dfrac{1}{2}$；

故原极限不存在.

2. 二元函数极限的求法(四则法则、复合法则、夹逼准则等)

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则.

例3. 计算极限：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$； (3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解:(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{\text{令}t=x^2+y^2} \lim\limits_{t\to 0} t\sin\dfrac{1}{t}=0$ 有界函数乘无穷小仍为无穷小

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot 2=2$ 重要极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

(3) $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0}0$

由夹逼准则: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$, 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

2. 二元函数极限的求法（四则法则、复合法则、夹逼准则等）

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则.

例3. 计算极限：(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

另解: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = \lim\limits_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$

一、偏导数——求法

3. 求法

(2)求二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数的方法：(以 $f_x(x_0,y_0)$为例)

①先将y看做常数,求出$f_x(x,y)$,再将$x=x_0,y=y_0$代入$f_x(x,y)$即得.

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

先求后代

②在$f(x,y)$中固定$y=y_0$得$f(x,y_0)$,再关于x求导得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)$, 再将$x=x_0$代入即得.

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

先代后求

③用偏导数的定义：$f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

注：若点(x_0,y_0)为$f(x,y)$的分段点,则只能用偏导数定义计算！

二、高阶偏导数---求法

定理： 如果函数的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续，

那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

一、二元函数可微和全微分的概念

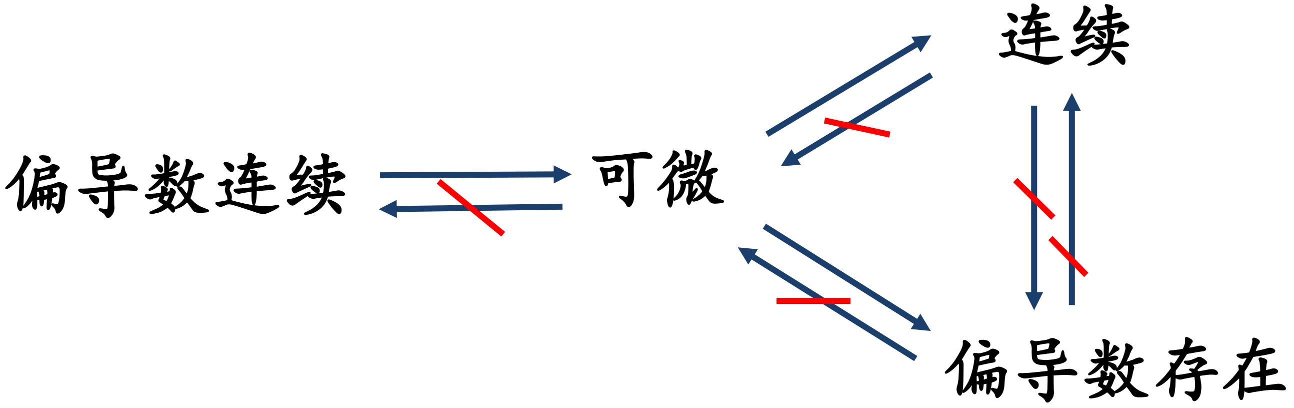
$$\Delta z = \underbrace{A\Delta x + B\Delta y}_{\boxed{\text{全微分 } dz}} + o(\rho), \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

二、全微分的求法

$z = f(x, y)$的全微分：$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy}$

$u = f(x, y, z)$的全微分：$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz}$

三、多元函数连续、可导、可微的关系（注意：与一元函数的区别）



一、多元复合函数求导法则—注意不需要记公式，关键是掌握方法

1. 一元函数与多元函数复合的情形

定理1: 若函数$u=\varphi(t), v=\psi(t)$在点t**可导**,函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有**连续偏导数**,则复合函数$z=f(\varphi(t),\psi(t))$在点t**可导**,且有

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}}$$

(全导数公式)

➢复合关系图

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr, dash] & \\ z \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & t \\ & v \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

➢链式法则：连线相乘,分线相加

➢特点：中间变量均为一元函数

$\boxed{\text{链上求积,链间求和;一元求导,多元偏导.}}$

一、多元复合函数求导法则

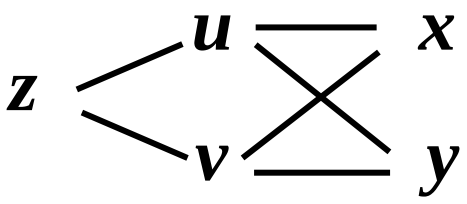
2. 多元函数与多元函数复合的情形

定理2： 若函数$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$都在点$(x,y)$具有对$x$及对$y$的偏导数,函数$z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数,则复合函数$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$在点$(x,y)$各偏导数均存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

➢复合关系图



➢链式法则：

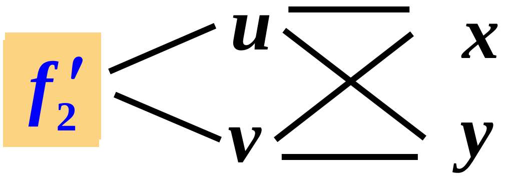
链上求积,链间求和;
一元求导,多元偏导.

➢特点：中间变量均为多元函数

一、多元复合函数求导法则

例6. 设$z = f\left(\frac{y}{x}, x+2y\right)$,其中$f$为可微函数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: 令$u = \frac{y}{x}, v = x+2y, \quad z = f(u,v)$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_2' \cdot 1 = f_1'\left(\frac{y}{x}, x+2y\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_2'\left(\frac{y}{x}, x+2y\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(f_{11}'' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_{12}'' \cdot 1\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_1' \cdot \left(\frac{2y}{x^3}\right) + \left(f_{21}'' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_{22}'' \cdot 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(f_{11}'' \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + f_{12}'' \cdot 2\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_1' \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(f_{21}'' \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + f_{22}'' \cdot 2\right)$$

二、一个方程确定的隐函数的情形

隐函数存在定理1.

设函数$F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数; ①

$F(x_0,y_0)=0$, ②　　$F_y(x_0,y_0)\neq 0$; ③

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$满足条件:

① $y_0=f(x_0)$;

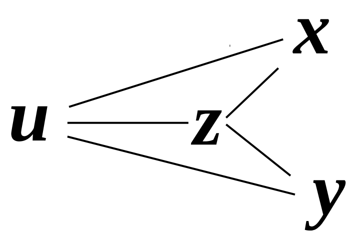
② $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}.}$ (隐函数求导公式)

二、一个方程确定的隐函数的情形

定理2: 方程 $F(x,y,z)=0 \Longrightarrow z=f(x,y) \Longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}.}$

方法: 设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，

令 $u=F(x,y,f(x,y))\equiv 0$



$$\Big\downarrow \text{求} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Big\downarrow \text{在}(x_0,y_0,z_0)\text{的某邻域内} F_z\neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\qquad \text{同理可得}\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

注： 在 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ 中，

- F_x 和 F_z 分别表示 F（三元函数）对 x 和对 z 求偏导
- 分子和分母不要颠倒
- 不要丢掉负号

三、方程组确定的隐函数组的情形

例4. 设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

解：方程两边对x求导，(z和y均看作x的一元函数)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 2y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ 2x + 4y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{3z+1} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x(6z+1)}{2y(3z+1)} \end{cases}$$

对于方程组确定的隐函数组求导问题，

注意是采用直接求导的方法，不需要背公式

隐函数求导

2.隐函数(组)求导方法（重点）

方法1：公式法；

方法2：直接法

➢ 解题思路

(1) 确定因变量个数与自变量个数.

- 明确变量个数与方程个数
- 确定因变量个数 ⟵ 方程个数
- 确定自变量个数 ⟵ 变量个数—方程个数

(2) 明确因变量与自变量. ⟵ 题目要求

(3) 方程两边求导或求偏导.

内容小结

一、空间曲线的切线与法平面

1. 曲线Γ: $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $t=t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$\Longrightarrow$ 切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$

切线方程 $$\boxed{\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}}$$

法平面方程 $$\boxed{\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0}$$

内容小结

一、空间曲线的切线与法平面

2. 曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\xrightarrow{\text{隐函数组}}$ $\Gamma:\begin{cases}y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$

$\longrightarrow$ 切向量 $\vec{T}=(1,\ \varphi'(x),\psi'(x))\big|_{M_0}$

切线方程 $$\boxed{\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x)|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\psi'(x)|_{M_0}}}$$

法平面方程 $$\boxed{1(x-x_0)+\varphi'(x)|_{M_0}(y-y_0)+\psi'(x)|_{M_0}(z-z_0)=0}$$

内容小结

二、曲面的切平面与法线

1. 曲面$\Sigma: F(x,y,z)=0$,　$M_0(x_0,y_0,z_0)$,

2. 曲面$\Sigma: z=f(x,y)$,　$M_0(x_0,y_0,z_0)$,　令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$,

$\Rightarrow$ 法向量 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

切平面方程

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$$

法线方程

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

一、多元函数的极值

多元函数取得极值的条件

定理1(必要条件): 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数,且在点(x_0,y_0)处有极值,则有：$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$

说明： 使偏导数都为0的点称为驻点.具有偏导数的极值点必为驻点,但驻点不一定是极值点.

可能的极值点 $\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{偏导不存在的点}\end{cases}$

一、多元函数的极值

多元函数取得极值的条件

定理2(充分条件)： 若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续,且具有一阶和二阶连续偏导数,且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$

令$A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则：1) 当$AC-B^2>0$时,具有极值$\begin{cases} A<0\text{时取极大值;} \\ A>0\text{时取极小值.} \end{cases}$

2) 当$AC-B^2<0$时,没有极值.

3) 当$AC-B^2=0$时,不能确定,需另行讨论.

二、多元函数的最值

假设函数在D内连续,在D内可微且只有有限个驻点,求函数的最值的方法:

(1)求开区域内的可能极值点：驻点.

(2)求边界上的最值点.

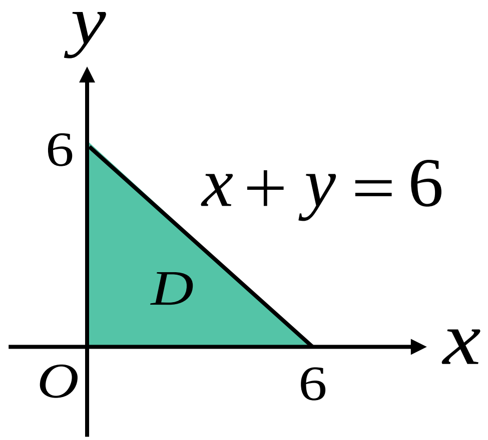
(3)将$z=f(x,y)$在D内所有驻点处的函数值,及在D的边界上的最大、最小值进行比较,其中最大(小)者为$f(x,y)$在D上的最大(小)值.

特别的,若已知最大(小)值一定在D的内部,且函数在D内只有一个驻点P时,

$f(P)$为最大(小)值.

二、最值应用问题

例3: 求函数$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在直线$x+y=6$, x轴, y轴所围成的闭区域D上的最大值和最小值.



解: (1)求函数在D内的驻点; (2)求函数在边界上的最值;

(3)比较大小

(1)求函数在D内的驻点

$$\begin{cases} f_x=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

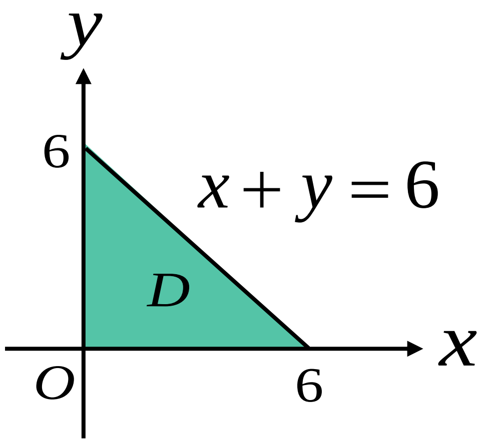
$\Rightarrow$ (2,1)为D内唯一驻点.

(2)求函数在边界上的最值

在$x=0$上, $f(x,y)=0$;　在$y=0$上, $f(x,y)=0$;

二、最值应用问题

例3: 求函数$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在直线$x+y=6$, x轴, y轴所围成的闭区域D上的最大值和最小值.



(2)求函数在边界上的最值

在$x=0$上, $f(x,y)=0$; 在$y=0$上, $f(x,y)=0$;

在$x+y=6$上,求$f(x,y)$的最值.

$$f(x,y)=f(x,6-x)=2x^3-12x^2 \triangleq g(x)$$

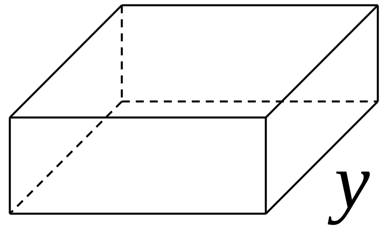
求$g(x)$在$[0,6]$上的最值. 令$g'(x)=6x^2-24x=0$ 得$x=0,4$

(3)比较$f(2,1)$, $f(0,6)$, $f(4,2)$, $f(6,0)$, 0的大小.

$f(x,y)$在D上的最大值为$f(2,1)=4$, 最小值为$f(4,2)=-64$.

三、条件极值——拉格朗日乘数法

例4： 要设计一个容量为V_0的长方体开口水箱,试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省？



解： 设x,y,z分别表示长、宽、高,

求水箱表面积$S=2(xz+yz)+xy$在条件$xyz=V_0$下的最小值

令 $F=2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V_0)$

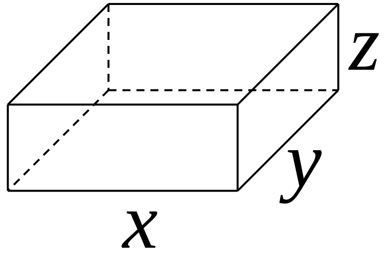
解方程组：
$$\begin{cases} F_x=2z+y+\lambda yz=0 \\ F_y=2z+x+\lambda xz=0 \\ F_z=2(x+y)+\lambda xy=0 \\ xyz-V_0=0 \end{cases}$$

得唯一驻点$x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0}$

三、条件极值---拉格朗日乘数法

得唯一驻点$x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0}$

由题意可知合理的设计是存在的,因此,当高为$\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$,长、宽为高的2倍时,所用材料最省.



思考： 1) 当水箱封闭时,长、宽、高的尺寸如何?

提示： 利用对称性可知,$x=y=z=\sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的2倍时,欲使造价最省,应如何设拉格朗日函数?长、宽、高尺寸如何?

提示： $F=1\cdot 2(xz+yz)+2\cdot xy+\lambda(xyz-V_0)$

长、宽、高尺寸相等.

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步： 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数$z = f(x,y)$，即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

第二步： 利用充分条件,判别驻点是否为极值点.

2. 函数的最值问题

第一步： 找目标函数,确定定义域

第二步： 根据题意,选用方法

只比较不判断---比较驻点及边界上函数值的大小；

不判断不比较---唯一驻点,根据问题的实际意义确定最值.

内容小结

3. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的极值,

设拉格朗日函数$F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组：$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ F_y=f_x+\lambda\varphi_y=0 \\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 求可能的极值点

注：拉格朗日乘数法要结合实际问题使用才有意义！

第十章 重积分

一、二重积分的定义

1\. 定义：$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 二重积分是一个数!

D：积分区域

$f(x,y)$：被积函数

$f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$：被积表达式

$\mathrm{d}\sigma$：面积元素

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$：积分和

2\. 存在性：若$f(x,y)$在闭区域D上连续，$f(x,y)$在D上的二重积分存在.

几何意义：以$z=f(x,y)$为曲顶以D为底的曲顶柱体体积$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

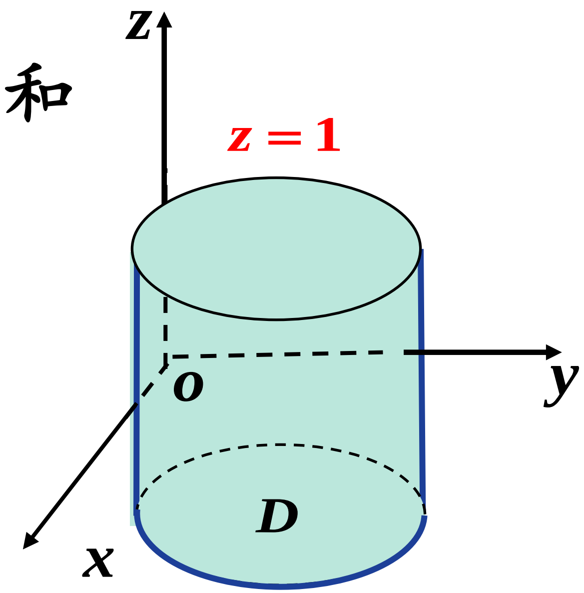
物理意义：以$\rho=\mu(x,y)$为面密度以D底的平面薄片质量$m=\iint\limits_{D} \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

一、二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

3. 几何意义：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \begin{cases} f(x,y)\ge 0 & \text{曲顶柱体的体积} \\ f(x,y)\le 0 & \text{曲顶柱体体积的相反数} \\ \text{一般情况} & \text{曲顶柱体体积的代数和} \end{cases}$$



特别的：$\iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma =$ 积分区域D的面积

被积函数等于1时,二重积分等于积分区域的面积.

三、性质

6. 二重积分的奇偶对称性法则

D关于y轴对称，

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0 & f(x,y)\text{是关于}x\text{的奇函数} \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,y)\text{是关于}x\text{的偶函数} \end{cases}$$

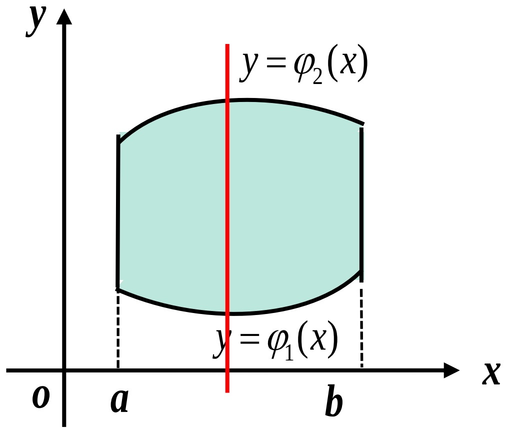
D关于x轴对称，

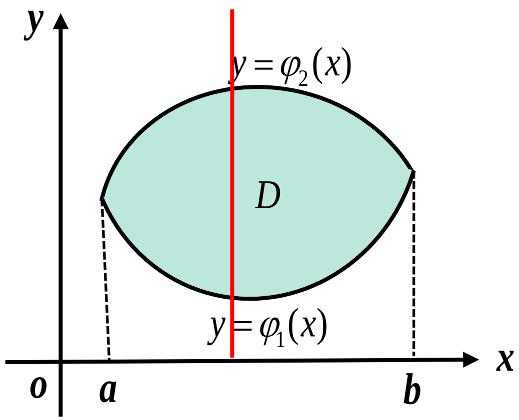
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0 & f(x,y)\text{是关于}y\text{的奇函数} \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,y)\text{是关于}y\text{的偶函数} \end{cases}$$

二、公式推导

二重积分转化为二次积分的公式

(1) **X型** $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$

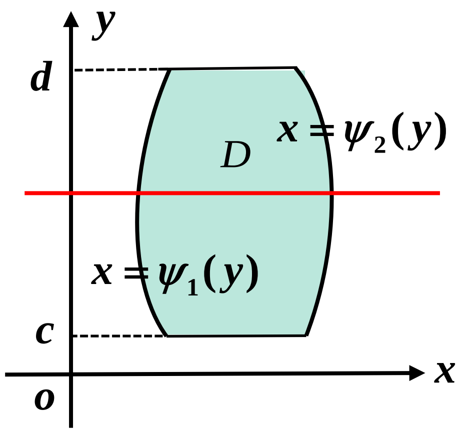


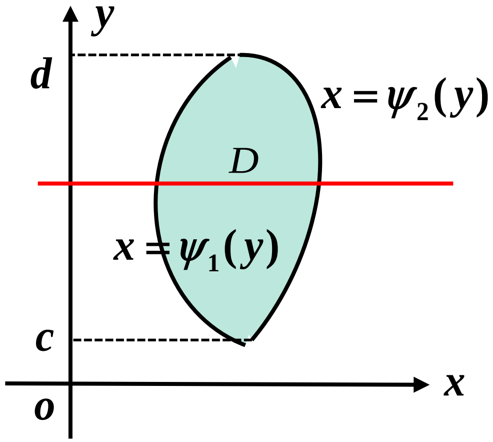


$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

先 y 后 x

(2) **Y型** $c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$





$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

先 x 后 y

内容小结　　二重积分的计算----直角坐标

1. 计算公式

	积分区域	二次积分
X型	$a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$	$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$
Y型	$c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$	$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

2. 计算技巧

(1)对称性奇偶性法则

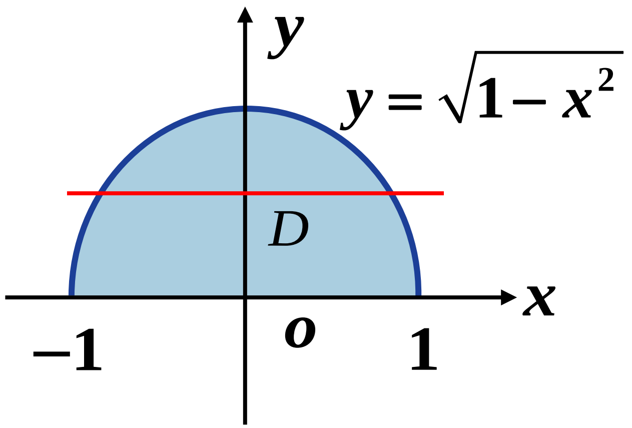
(2)分离变量

(3)交换积分次序

交换积分次序一定要注意先画出积分区域的图形

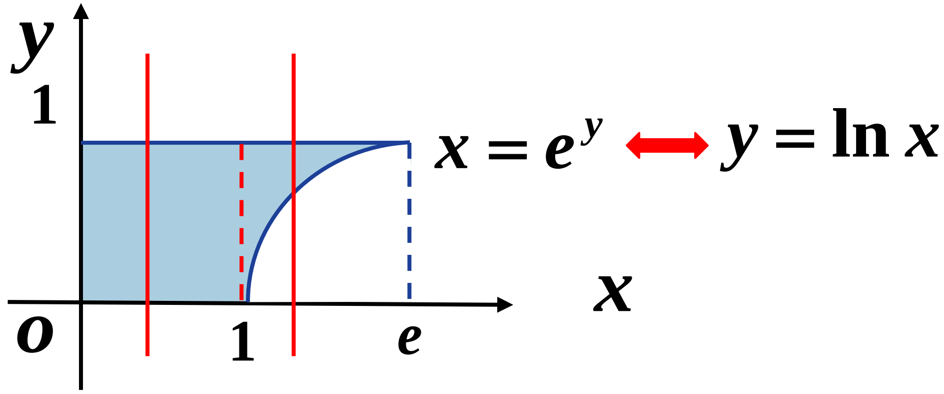
(1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$



(2) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{e^y} f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{e}\mathrm{d}x\int_{\ln x}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y$$

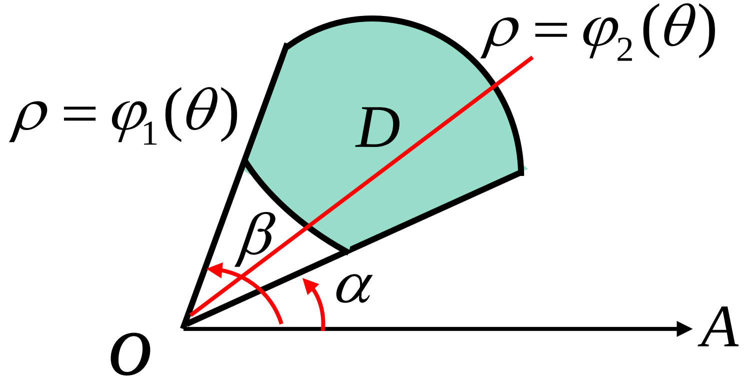


内容小结

二、极坐标

$$\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$



使用极坐标的一般情形：

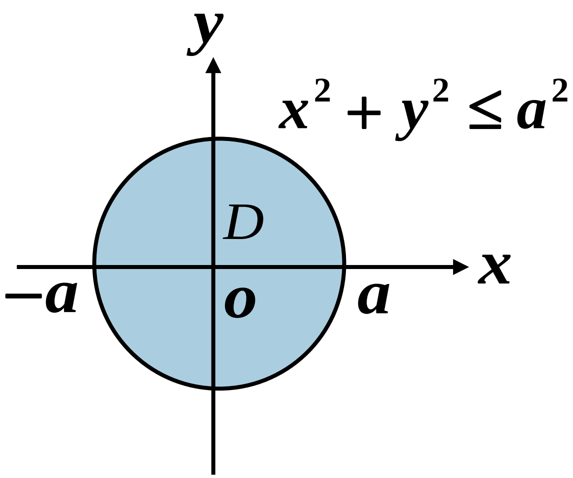
1. 积分区域是圆或圆的一部分；

2. 被积函数$f(x,y)$中含有x^2+y^2或$\arctan\dfrac{y}{x}$的项

二、极坐标系

圆心在原点的圆

例1 计算下列二重积分(积分区域$D: x^2+y^2\le a^2$).



(1) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{3}a^3$$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{3}a^3$$

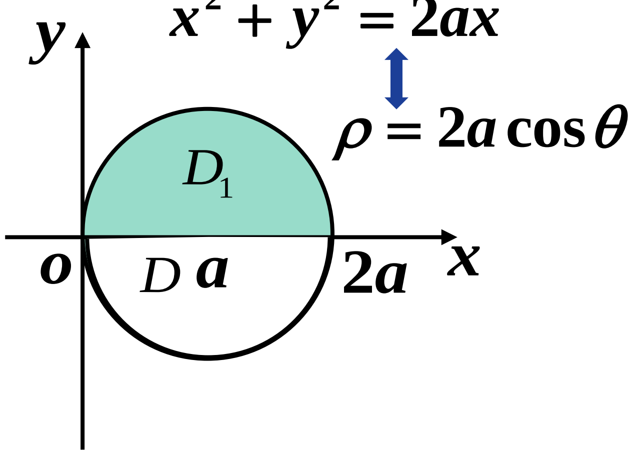
二、极坐标系

圆心不在原点的圆

例2 求二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2ax\}$.

解： 根据对称性，$\iint\limits_D \underline{2y\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

关于y是奇函数



$$\iint\limits_D \underline{x\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

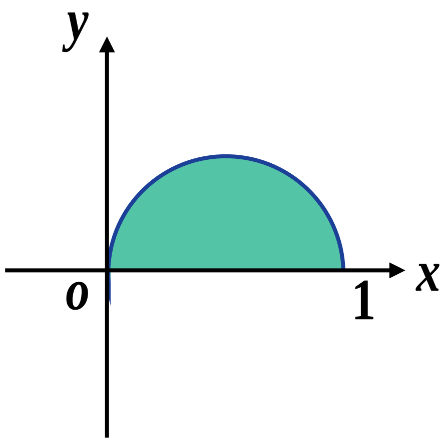
关于y是偶函数

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cos\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{64}{15}a^4$$

瓦里斯公式

坐标转换也是要先画出积分区域的图形

例5 坐标转换



$$(3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\rho=\cos\theta \Longrightarrow \rho^2=\rho\cos\theta$$

$$x^2+y^2=x \Longrightarrow y=\sqrt{x-x^2}$$

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$$

第十一章 曲线积分与曲面积分

一、第一类曲线积分的定义

$$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i}.$$

积分弧段　被积函数　弧长元素　积分和

注：(1) $f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时，

$\int_L f(x,y)ds$存在.

(2)曲线L封闭时，记为$\oint_L f(x,y)ds$.

(3)曲线形构件的质量：$M=\int_L \rho(x,y)ds$.

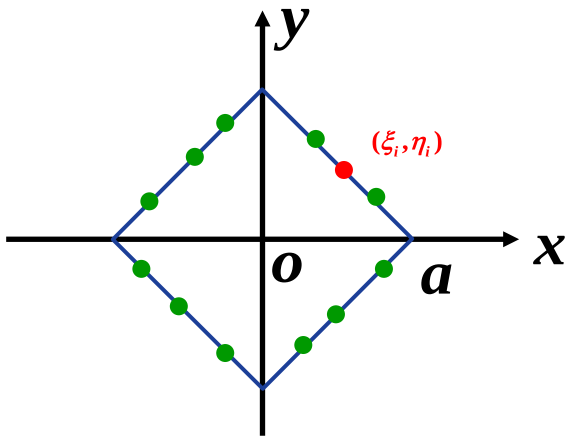
(4)曲线L的长度：$s(L)=\int_L ds$.

推广：函数$f(x,y,z)$在空间曲线弧Γ上对弧长的曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta s_i.$$

一、第一类曲线积分的定义

例1. 设$L: |x|+|y|=a$,求$\oint_L (|x|+|y|)\,ds$.



解: $\oint_L (|x|+|y|)\,ds = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i|+|\eta_i|)\Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} a\Delta s_i = 4\sqrt{2}\,a^2$$

(ξ_i,η_i)在曲线L上,满足曲线方程,即$|\xi_i|+|\eta_i|=a$

总结: ①被积函数$f(x,y)$中积分变量x,y满足曲线方程

②$\int_L ds = L$的长度

单选题 1分

设置

练习： 设 L: $x^2+y^2=a^2$, D是L围成的闭区域,下列运算**错误**的是（ ）.

A $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\oint_L a^2\mathrm{d}s$

B $\oint_L (x+y)\mathrm{d}s=0$

C $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho$

特别提示：曲线和曲面积分时被积函数可以用曲线或曲面的方程化简，但是二重积分不行，一定要注意！

提交

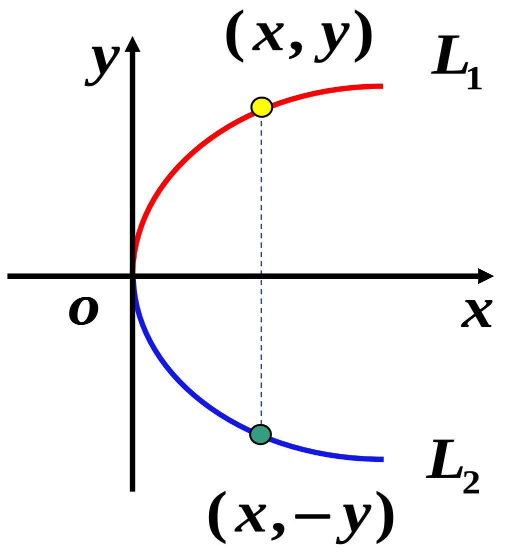
4. 对称性 设$\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s$和$\int_{L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s$都存在,

如果L_1与L_2关于y轴对称,且$f(x,y)$是关于x的奇(偶)函数

如果L_1与L_2关于x轴对称,且$f(x,y)$是关于y的奇(偶)函数

则$\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \mp\int_{L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s$

特别提示：第一类曲线积分和第一类曲面积分，二重积分可以用奇偶对称性，但第二类曲线积分不可以用！



L_1与L_2关于x轴对称

$f(x,y)$是关于y的奇函数 $f(x,-y)=-f(x,y)$

$f(x,y)$是关于y的偶函数 $f(x,-y)=f(x,y)$

三、第一类曲线积分的计算方法

定理： 设$f(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$$

若$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$存在，且

$$\boxed{\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t}$$

三、第一类曲线积分的计算方法

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}(\alpha\le t\le\beta),\text{则}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

注:(1)方法: 参数法化为定积分!

(2)"三变"
$$\begin{cases} \text{积分曲线} \quad L \longrightarrow \text{积分区间}[\alpha,\beta] \\ \text{被积函数} \quad f(x,y) \longrightarrow f\left[\varphi(t),\psi(t)\right] \\ \text{弧微分} \quad \mathrm{d}s \longrightarrow \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

(3)积分限：从小到大$(\alpha<\beta)$

$\because \mathrm{d}s>0, \therefore \mathrm{d}t>0$,积分下限要小于积分上限$(\alpha<\beta)$.

三、第一类曲线积分的计算方法

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta),\text{则}\ \boxed{\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t}$$

特例：(1) $L:\ y=\varphi(x)\quad (a\le x\le b) \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\varphi(x) \\ x=x \end{cases}\quad (a\le x\le b)$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}s=\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(2) $L:\ x=\psi(y)\quad (c\le y\le d) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\psi(y) \\ y=y \end{cases}\quad (c\le y\le d)$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[\psi(y),y]\sqrt{1+\psi'^2(y)}\mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}s=\sqrt{1+\psi'^2(y)}\mathrm{d}y$$

三、第一类曲线积分的计算方法

$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$, 则 $\boxed{\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t}$

特例:(3) L: $\rho=\rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\rho'(\theta))^2+\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{(\rho'(\theta))^2+\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

推广: 空间曲线$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t$$

对面积的曲面积分

1. 对面积的曲面积分的定义：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i .$$

(1) 存在性：被积函数$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续时，$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$存在.

(2) 物理意义：曲面形构件的质量$M=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

(3) $\iint_{\Sigma} 1\cdot \mathrm{d}S=$积分曲面$\Sigma$的面积

(4) 对称性奇偶性法则

一、对面积的曲面积分的概念和性质

对面积的曲面积分的性质与对弧长的曲线积分的性质类似.

对称性奇偶性法则 设$\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$和$\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$都存在,

如果下列条件之一成立:

(1)如果Σ_1与Σ_2关于xoy面对称,且$f(x,y,z)$是关于z的奇(偶)函数

(2)如果Σ_1与Σ_2关于yoz面对称,且$f(x,y,z)$是关于x的奇(偶)函数

(3)如果Σ_1与Σ_2关于zox面对称,且$f(x,y,z)$是关于y的奇(偶)函数

则$\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \mp \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

一、对面积的曲面积分的概念和性质

例1 求$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2-3)\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为：$x^2+y^2+z^2=4.$

解：$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2-3)\,\mathrm{d}S$

计算对面积的曲面积分

被积函数可以用曲面方程化简

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2-3)\Delta S_i$$

(ξ_i,η_i,ζ_i)在曲面Σ上，满足曲面方程

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta S_i=16\pi$$

内容小结

2. 对面积的曲面积分的计算方法：一投、二代、三变换

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \Sigma: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x \quad \Sigma: y=y(x,z),(x,z)\in D_{xz}$$

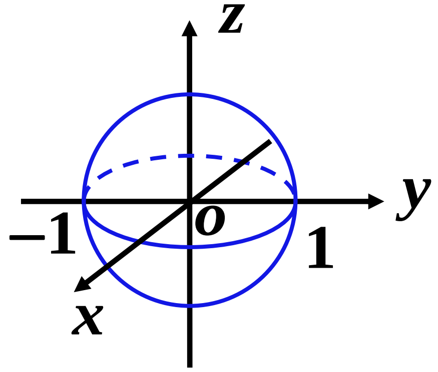
注：投影区域的面积不为0

一、对面积的曲面积分的概念和性质

例2 求$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(xe^{y}+z^{2}\sin y+z\cos y+x^{2}+y^{2}+z^{2})\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为：$x^{2}+y^{2}+z^{2}=1.$

解：由对称性，$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xe^{y}\,\mathrm{d}S=0,\ \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} z^{2}\sin y\,\mathrm{d}S=0,$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} z\cos y\,\mathrm{d}S=0.$$



$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^{2}+y^{2}+z^{2})\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}1\,\mathrm{d}S=4\pi$$

一、第二类曲线积分的定义

1. 定义：$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 对坐标x的曲线积分

$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 对坐标y的曲线积分

第二类

其中$P(x,y),Q(x,y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段.

(2)物理意义：一质点在变力$\overrightarrow{F(x,y)}=(P(x,y),Q(x,y))$作用下从点$A$沿平面光滑曲线弧$L$移动到点$B$，所做的功$W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

三、第二类曲线积分的计算

定理： 设$P(x,y)$与$Q(x,y)$在有向曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为

$$L:\ \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

$t=\alpha$对应L的起点，$t=\beta$对应L的终点. 若$\varphi(t),\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$存在，且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

终点

起点

注： 下限对应起点，上限对应终点. 下限可能大于上限！

三、第二类曲线积分的计算

$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, t从α到β, 则$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$

终点

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

起点

注：(1)方法：化为定积分.

(2)三变
- 积分曲线 L(有向) $\longrightarrow$ $[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$
- 被积函数 $\begin{cases} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P[\varphi(t),\psi(t)] \\ Q[\varphi(t),\psi(t)] \end{cases}$
- 积分元素 $\begin{cases} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \varphi'(t)\mathrm{d}t \\ \psi'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$

(3)积分限：从始到终

三、第二类曲线积分的计算（计算时不能用奇偶对称性）

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},t\text{从}\alpha\text{到}\beta,\ \text{则}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_\alpha^\beta\left\{P\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\varphi'(t)+Q\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\psi'(t)\right\}\mathrm{d}t$$

特例：$(1)L:y=\varphi(x)(x\text{从}a\text{到}b)\Leftrightarrow L:\begin{cases}x=x\\ y=\varphi(x)\end{cases}(x\text{从}a\text{到}b)$

$$\text{则}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\left\{P\left[x,\varphi(x)\right]+Q\left[x,\varphi(x)\right]\varphi'(x)\right\}\mathrm{d}x$$

$(2)L:x=\psi(y)(y\text{从}c\text{到}d)\Leftrightarrow L:\begin{cases}x=\psi(y)\\ y=y\end{cases}(y\text{从}c\text{到}d)$

$$\text{则}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\left\{P\left[\psi(y),y\right]\psi'(y)+Q\left[\psi(y),y\right]\right\}\mathrm{d}y$$

三、第二类曲线积分的计算

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\text{从}\alpha\text{到}\beta,\ \text{则}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \left\{P\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\varphi'(t)+Q\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\psi'(t)\right\}\mathrm{d}t}$$

推广： 空间曲线弧$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad (t\text{从}\alpha\text{到}\beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

则$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z=$

$$\int_\alpha^\beta \left\{P\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\varphi'(t)+Q\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\psi'(t)+R\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\omega'(t)\right\}\mathrm{d}t$$

格林公式

1. 格林公式 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$

应用：(1)通过相互转化,简化积分的计算

条件：	(1) L 封闭；	(2) L 取正向；	(3)P、Q在D上具有一阶连续偏导数
	L 不封闭	L 取负向	P、Q在D上某点一阶偏导数不存在
解决方法：	补线法	加负号	曲线方程代入或“去瘤法”

(2)求平面图形的面积 $A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

内容小结

2.平面上曲线积分与路径无关的条件

设区域G是单连通域,若函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数,则下列条件等价

(1) $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}}$在$G$内恒成立;

(2) 曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$G$内与路径无关;

(3) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在$G$内是某一函数$u(x,y)$的全微分,即$\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$.

应用: (1)计算曲线积分时,可选择简便的积分路径;

(2) 可用积分法求$du=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$G$内的原函数

内容小结

3. 平面上曲线积分的计算方法：

(1)直接计算 参数法 $L:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$，从始到终

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

(2)格林公式 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,

(3)特殊路径 $\begin{cases} Q_x=P_y & \text{选择简便路径计算} \\ Q_x\neq P_y & \text{考虑格林公式或参数法} \end{cases}$

一、格林公式—应用

1. 通过相互转化，简化两类积分的计算

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

例2 计算 $I=\int_L (\sin^7 x-y)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}y$

(1) L 为 $y=\sqrt{1-x^2}$ 及 x 轴所围闭区域 D 的边界，逆时针方向.

解：

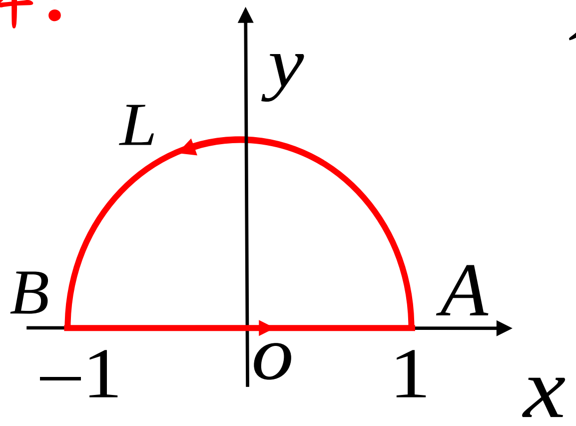


图1

令 $P=\sin^7 x-y, Q=3x+\mathrm{e}^{y^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3, \dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$

由格林公式，$I=\iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_D (3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$$

例2 计算 $I=\int_L(\sin^7 x-y)\mathrm{d}x+(3x+e^{y^2})\mathrm{d}y$

(2) L为有向半圆弧AB：$y=\sqrt{1-x^2}$，起点为A，终点为B.

解：(补线法) 取线段BA：$y=0,(x:-1\to 1)$ 令$P=\sin^7 x-y, Q=3x+e^{y^2}$，

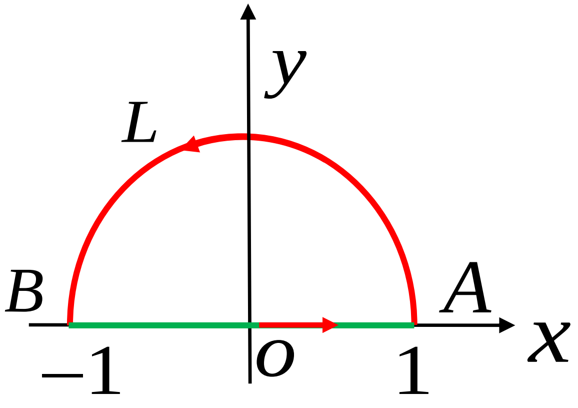


图2

注意：L不封闭

$$I=\oint_{L+BA}-\int_{BA}$$

$$=\iint_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{BA}(\sin^7 x-y)\mathrm{d}x+(3x+e^{y^2})\mathrm{d}y$$

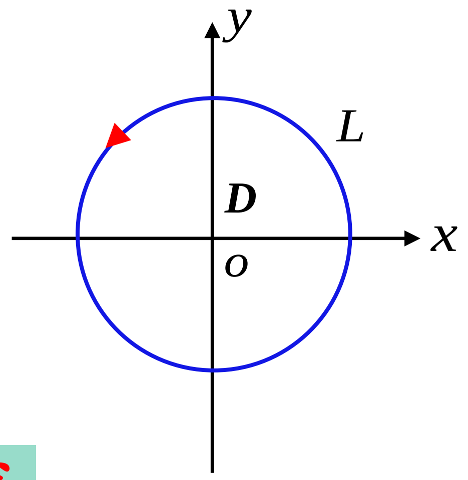
$$=\iint_D(3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\sin^7 x\mathrm{d}x=2\pi$$

一、格林公式—应用

例3.计算 $I=\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$,其中曲线$L$为逆时针圆周$x^2+y^2=a^2$.

分析：P、Q在(0,0)点处偏导不存在,(0,0)点为“瘤点”不能用格林公式.

解：$I=\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ 曲线方程代入



$=\frac{1}{a^2}\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy$ $\quad P=x+y, Q=-(x-y)$

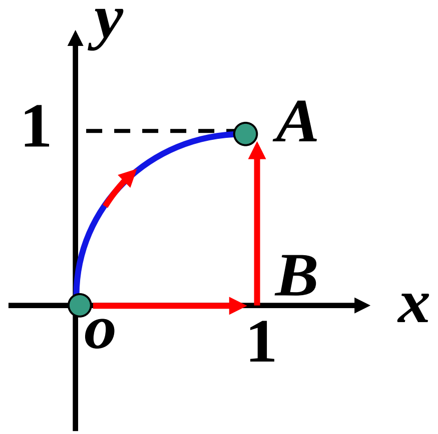
$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(-1-1)dxdy$ L内无瘤点,可用格林公式

$=-2\pi$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

(1) $I=\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中$L$为曲线

$y=\sqrt{2x-x^2}$从$O(0,0)$到$A(1,1)$的有向弧.



解：$P=x^2-y,\ Q=-(x+\sin^2 y)$

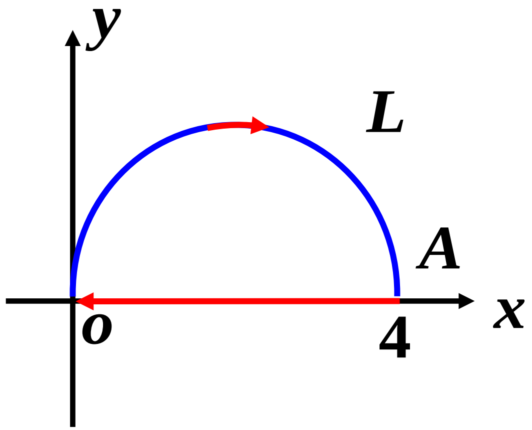
$Q_x=P_y=-1,$ 积分与路径无关 选简单路径进行计算

$$I=\int_{OB+BA}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1-(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\sin 2-\frac{7}{6}$$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

(2) $I=\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$,其中$L$为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从$O(0,\ 0)$到$A(4,\ 0)$.



解: $P=x^2+3y, Q=y^2-x,\ Q_x=-1, P_y=3$ $Q_x\neq P_y$

积分与路径有关

考虑用格林公式

补线法 取线段$\overline{AO}: y=0(x:4\to 0)$,

它与L所围区域为D ,则

$$I=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(-4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x=8\pi+\frac{64}{3}$$

第十二章 无穷级数

第十二章 无穷级数

§ 12.1 常数项级数的概念和性质

理学院 张晴霞

一、常数项级数的概念

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛与发散定义

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s & \text{则} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s, \text{收敛} \\ \text{不存在，} & \text{则} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \end{cases}$$

2.结论:(1)等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1 \quad (\text{和} = \dfrac{\text{首项}}{1-\text{公比}}) \\ \text{发散，} & |q|\geq 1 \end{cases}$

(2)调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散

二、收敛项级数的基本性质

性质1: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ks$.

性质2: 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sigma$,则 $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = s \pm \sigma$.

注: 两个收敛级数可逐项相加或逐项相减.

收敛 ± 收敛 = 收敛, 收敛 ± 发散 = 发散, 发散 ± 发散 = 不确定

性质3: 在级数中去掉、添加或改变有限项,不会改变级数的收敛性.

三、级数收敛的必要条件

性质4: 收敛级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛,且其和不变.

定理1: 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

注:1. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \not\Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 如$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散,但$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

2. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

判断级数发散的有力工具

总结：判断级数的敛散性的方法

(1)定义法: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \\ \text{不存在}, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \end{cases}$

(2)基本结论：等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, |q|<1 \left(\text{和} = \dfrac{\text{首项}}{1-\text{公比}}\right) \\ \text{发散}, \quad |q| \geq 1 \end{cases}$

(3)基本性质：收敛 ± 收敛 = 收敛, 收敛 ± 发散 = 发散

(4)收敛的必要条件: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

第十二章 无穷级数

§12.2 常数项级数的审敛法

授课教师：　张晴霞

一、正项级数及其审敛法

1.比较审敛法 “大收则小收，小发则大发”

定理2： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n (n = 1, 2, \cdots)$，

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

一、正项级数及其审敛法

p级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛， & 当p>1时 \\ 发散， & 当p\le 1时\end{cases}$

等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}=\frac{a}{1-q}， & |q|<1, \\ 发散， & |q|\ge 1,\end{cases}$

已知敛散性

一、正项级数及其审敛法

定理2'(比较审敛法的极限形式) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,

1)若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho\left(0<\rho<+\infty\right)$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$具有相同的敛散性.

2) 若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$, 且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

3) 若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$, 且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

关键: 需要一个已知敛散性的参照级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$进行比较

常选用p级数、等比级数作为参照级数!

一、正项级数及其审敛法

2.比值审敛法

定理3 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,则

1)当$\rho<1$时,级数收敛;

2)当$\rho>1$时(或$\rho=\infty$),级数发散;

3)当$\rho=1$时,敛散性不确定.

分析: 与比较法相比,不需要另外找一个已知敛散性的级数进行比较,

简便易行,但$\rho=1$时不确定.

一、正项级数及其审敛法

例4. 判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\quad(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}\quad(3)\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}\ (x>0)$$

解： $$(1)\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

由比值法知, 原级数收敛.

一、正项级数及其审敛法

例4. 判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n} \quad (3)\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}\ (x>0)$$

解：$(2)\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!2^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$ 由比值法知，原级数收敛.

问题1: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!2^n}{n^n}=?$ 　　问题2: u_n具备什么特征时采用比值法?

一、正项级数及其审敛法

例4. 判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n} \quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}\ (x>0)$$

解：(3) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n-1}}=x$

由比值法，当$0<x<1$时,级数收敛；

当$x>1$时,级数发散；

当$x=1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$发散.

$u_n=n\,x^{n-1}$

比值法

u_n：含$n!$或a^n

一、正项级数及其审敛法

3. 根值审敛法

定理4 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，若$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

1)当$\rho<1$时，级数收敛；

2)当$\rho>1$时(或$\rho=\infty$)，级数发散；

3)当$\rho=1$时，敛散性不确定.

分析： 与比较法相比，不需要另外找一个已知敛散性的级数进行比较，简便易行，但$\rho=1$时不确定.

与比值法相比，所求极限不同，结论相同.

问题： u_n具备什么特征时采用根值法？

一、正项级数及其审敛法

例5 判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

解：$(1)\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

由根值法,原级数收敛.

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$$

原级数发散.

$$u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

根值法

$u_n=(\ )^n$

二、交错级数及其审敛法

定义2: 设 $u_n > 0$, $(n = 1, 2, \cdots,)$, 则各项符号正负相间的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$$ 称为交错级数.

定理5 (莱布尼茨判别法) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$

满足条件: (1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$; (2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

二、交错级数及其审敛法

例6.判断级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$的敛散性. $u_n=\frac{\ln n}{n}\quad(n\geq 2)$

解：设$f(x)=\frac{\ln x}{x}(x\geq 2)$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 由$f'(x)=0$,得$x=e$.

所以, $f(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减, 故$n\geq 3$时, $u_n=\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}=u_{n+1}$,

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 由莱布尼兹判别法, 级数收敛.

莱布尼茨判别法:

若(1)$\{u_n\}\downarrow$ (2)$u_n\to 0$, 则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\quad(u_n>0)$收敛:

三、绝对收敛与条件收敛

定义3： 对任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛；

若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛.

定理6. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必收敛.

p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛，& p>1\\ 发散，& p\le 1\end{cases}$

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\begin{cases}绝对收敛, & p>1\\ 条件收敛, & 0<p\le 1\\ 发散, & p\le 0\end{cases}$

例如，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ 绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 绝对收敛

例7. 判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4};\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}.$$

解： (1) $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}\right|\le\dfrac{1}{n^4}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛，

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$，考察 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ 的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}\bigg/\frac{n^2}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}<1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}\text{ 收敛}$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

思考：判断下列级数的敛散性,若收敛确定是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{3^n} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$$

解：(1) $\left|\dfrac{n\cos n\pi}{3^n}\right| \le \dfrac{n}{3^n}$, 考察$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$的敛散性：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{1}{3}<1$$

由比值法,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$收敛.

由比较法:$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\cos n\pi}{3^n}\right|$收敛, 故原级数收敛,且为绝对收敛.

思考. 判断下列级数的敛散性, 若收敛确定是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{3^n} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$$

解：（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$, 由比较法：$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$发散

又$\because$所给级数为交错级数，且$u_n=\ln(1+\frac{1}{n})$, 则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

令$f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})(x>0)$, 则$f'(x)=\frac{-1}{x^2+x}<0 \Rightarrow f(x)$单减

从而$\{u_n\}$单减, 由莱布尼茨定理：原级数收敛, 且为条件收敛.

小结—常数项级数敛散性的判别方法

1. 利用级数敛散性的定义、性质判断其敛散性.

2. 正项级数审敛法.

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足 ↓

比较审敛法 $u_n \le v_n$

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ → 不定 用它法判别：比较审敛法；部分和极限

$\rho < 1$ → 收 敛

$\rho > 1$ → 发 散

第十二章 无穷级数

§ 12.3　幂级数

理学院　高等数学课程建设团队

二、幂级数及其收敛性

定理1(阿贝尔(Abel)定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0\ (x_0 \neq 0)$

$$\begin{cases} \text{收敛，则对} |x| < |x_0| \text{的一切} x, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{绝对收敛.} \\ \text{发散，则对} |x| > |x_0| \text{的一切} x, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{发散.} \end{cases}$$

例1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -2$ 处收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 处 <u>绝对收敛</u>；

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处 <u>绝对收敛</u>.

二、幂级数及其收敛性

分析： 由Abel定理可知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域是以原点为中心的区间.

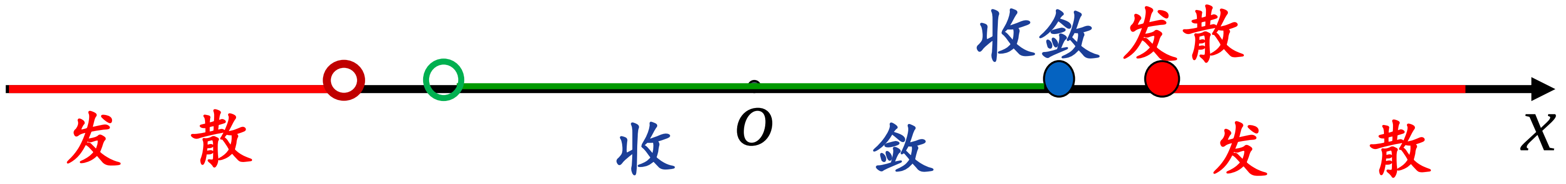
（不一定包含区间端点）

用$\pm R$表示幂级数收敛与发散的分界点,则

$$\begin{cases} R=0: & \text{仅在} x=0 \text{收敛;} \\ R=+\infty: & \text{在}(-\infty,+\infty)\text{收敛;} \\ 0<R<\infty: & \text{在}(-R,R)\text{收敛,在}[-R,R]\text{外发散,} x=\pm R \text{处不定} \end{cases}$$

从原点出发向两侧走，
最初只遇到收敛点，
从遇到第一个发散点
开始之后都是发散点.

收敛半径： R **收敛区间:** $(-R,R)$ **收敛域:** $(-R,R)$+收敛的端点



二、幂级数及其收敛性

定理2 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$（或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$），

则收敛半径$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$

证明： 对级数$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho |x|$，

用比值判别法讨论.

$$\left.\begin{array}{l} \text{(1)若}\rho \neq 0,\ \text{当}\rho|x| < 1,\text{即}|x| < \frac{1}{\rho}\text{时原级数(绝对)收敛} \\ \qquad\qquad\ \ \text{当}\rho|x| > 1,\text{即}|x| > \frac{1}{\rho}\text{时原级数发散} \end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$$

(2)类似讨论$\rho = 0, \rho = +\infty$情形.

二、幂级数及其收敛性

定理2: 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$,

则$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ 0 \ , & \rho = +\infty \\ +\infty \ , & \rho = 0 \end{cases}$$

注: (1)此公式只能在不缺项情形使用;

(2)对缺项情形,可用比值(或根值)判别法讨论;

(3)对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$,可令$t = x - x_0$化为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

(4)收敛半径为$R = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

二、幂级数及其收敛性

例2. 求下列幂级数的收敛域.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}\qquad (3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}$$

解: (1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$ $\therefore$ 收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$

对端点 $x=1$, 原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x=-1$, 原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 故收敛域为 $(-1,1]$.

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ "一般形式" 换元法

解：(2)令$t=x-1$，则原级数可化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2}$$，所以收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=2$

当$t=2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；

当$t=-2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛.

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$的收敛域为：$-2\le t<2$

$\Rightarrow -2\le x-1<2 \Rightarrow -1\le x<3$. 故原级数收敛域为$[-1,3)$.

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$ 比值法

解：(3)"缺项"情形.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right| = x^2$$

当$|x|<1$时原级数(绝对)收敛，当$|x|>1$时原级数发散，故收敛半径$R=1$;

当$x=1$时原级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，收敛;

当$x=-1$时原级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，收敛;

故收敛域为$[-1,1]$.

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}$$ 幂级数的一般形式且"缺项"情形.

解：令$t=x+2$，则原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{t^{2n}}\right|=t^2$$

当$|t|<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n(n+1)}$(绝对)收敛；当$|t|>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n(n+1)}$发散，

故收敛半径$R=1$；又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{2n}}{n(n+1)}$收敛，

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n(n+1)}$的收敛域为：$-1\le t\le 1\Rightarrow -1\le x+2\le 1$ 即$-3\le x\le -1$.

故原级数收敛域为$[-3,-1]$.

三、幂级数的运算

1.代数运算

若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$, R_2,令$R=\min\{R_1, R_2\}$,

(1)则对$\forall x\in(-R_1, R_1)$,有 $\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n$ (λ为常数);

(2)则对$\forall x\in(-R, R)$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$;

(3)则对$\forall x\in(-R, R)$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_n b_0)x^n$.

三、幂级数的运算

2.分析运算 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R>0$,则有:

(1)和函数$S(x)$在其收敛域I上连续;

(2) 和函数$S(x)$在其收敛域I上可积,并有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in I$$

(3) 和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内可导,并有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R,R)$$

注:逐项积分和求导运算中,收敛半径不变,但收敛域可能改变.

3.和函数的求法

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)}$$

例3.求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$的和函数.

解：易得收敛域为$[-1,1)$，令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}, x\in[-1,1)$,

当$x\in(-1,1)$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x x^{n-1}\mathrm{d}x\right) = \int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = -\ln(1-x)$$

所以，$S(x)=-\ln(1-x), x\in[-1,1)$

思考：求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的和函数. $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3.和函数的求法

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1)}$$

例4. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$在收敛域内的和函数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

解：易得收敛域为$(-1,1)$, 令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, x\in(-1,1)$,

当$x\in(-1,1)$时，$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

所以，$S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.　于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4.$$

思考:求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$的和函数.　$S(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.

3.和函数的求法

例5. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解：先考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，易得收敛域为$(-1,1)$,

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n, x\in(-1,1)$,

当$x\in(-1,1)$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}\cdot x=x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''=x(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

所以,$S(x)=\dfrac{2x}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$. 于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=8.$

3.和函数的求法

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\quad x \in (-1, 1)}$$

例6 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$的收敛域及收敛域上的和函数.

解 易得收敛域为$(-1,1)$，令$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n, x \in (-1,1)$,

$$则S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} \mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x),$$

$$故S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x), x \in (-1,1),$$

三、幂级数的运算

总结：和函数的求法

基本类型

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\quad x \in (-1, 1)}$$

例3 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$的和函数.

例4 求$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$在收敛域内的和函数

转化 $\uparrow$ 拆项、逐项积分或逐项求导等技巧

和函数

第十二章 无穷级数

§12.4 函数展开成幂级数

授课教师：　张晴霞

二、函数展开成幂级数

2.间接展开法

根据唯一性,利用常见展开式,通过变量代换、四则运算、恒等变形、逐项求导、逐项积分等方法求展开式.

已知

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$

(2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$

(3) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$

例3 将下列函数展开成x的幂级数.

(1) e^{-x}　　(2) $\dfrac{1}{1+2x}$　　(3) $\cos x$

(4) $\dfrac{e^{x}-1}{x}$　　(5) $\ln(1+x)$　　(6) $\arctan x$

解:(1) $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^{n}}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}x^{n}}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $\dfrac{1}{1+2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^{n}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

(3) $\cos x=(\sin x)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty)$

(4) $$\frac{e^x-1}{x}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

(5) $\ln(1+x)$

因为$$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1)$$

$$\Rightarrow \ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

当$x=1$时收敛，$x=-1$时发散. 故收敛域为$x\in(-1,1]$

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

(6) $\arctan x$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

当$x=\pm 1$时该级数收敛，故收敛域为$x \in [-1,1]$

例4. 将$f(x)=\dfrac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数.　变量替换

解：令$t=x-3$,则

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+t}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{t}{3})^n,\ t\in(-3,3)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{3^{n+1}},x\in(0,6)$$

例5. 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$(x-1)$的幂级数.

解：令$t=x-1$,则

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{(t+2)(t+4)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{t}{2}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{t}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{4}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+2}}\right)t^n,$$

$$t\in(-2,2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \quad (-1<x<3)$$

小结

一、函数的幂级数展开法

1. 直接展开法——利用泰勒公式

2. 间接展开法——利用幂级数的性质及已知展开式的函数

二、常用函数的幂级数展开式

(1) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$　(2) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in(-\infty,+\infty)$

(4) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}; x\in(-1,1]$

第十二章 无穷级数

§ 12.5 傅里叶级数

授课教师： 张晴霞

二、函数展开成傅里叶级数

定理3 (收敛定理) 设$f(x)$是周期函数，且满足狄利克雷(Dirichlet)条件

(1)在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

(2)在一个周期内至多只有有限个极值点，

则$f(x)$的傅里叶级数收敛，并且

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}$$

狄利克雷，P.G.L.

注：该定理给出了傅里叶级数的和函数$s(x)$与函数$f(x)$的关系.

二、函数展开成傅里叶级数

问题2：若$f(x)$是周期为$2l$的周期函数呢？ 从特殊到一般

设$f(x)$是周期为2π的周期函数

$f(x)$的傅里叶系数

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$f(x)$的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

设$f(x)$是周期为$2l$的周期函数

$f(x)$的傅里叶系数

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$f(x)$的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

二、函数展开成傅里叶级数

若$f(x)$是周期为$2l$的周期函数，则有

$f(x)$的傅里叶系数

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$f(x)$的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

注：特别地，

(1) 若$f(x)$为奇函数，则$a_0=0, a_n=0$

$f(x)$的傅里叶级数为正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(2)若$f(x)$为偶函数，则 $b_n=0$

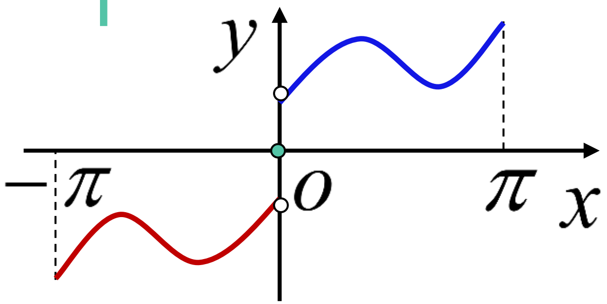
$f(x)$的傅里叶级数为余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2. 奇延拓与偶延拓

$f(x),\ x\in[0,\pi]$

奇延拓

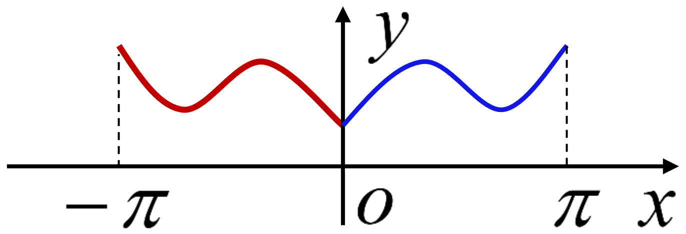


$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓$F(x)$

$f(x)$在$[0,\pi]$上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓$F(x)$

$f(x)$在$[0,\pi]$上展成余弦级数

将$[0,\pi]$上的函数$f(x)$展成正弦级数与余弦级数

练习

（1）已知 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0, \\ x^3, & 0<x\le 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=1$ 处收敛于______.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0, \\ 1+x^2, & 0<x\le \pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处收敛于______.

练习

（3）已知级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是 $f(x)=\pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的 Fourier 级数展开式，则系数 $b_3 =$ ________.

练习

（4）设函数 $f(x)=x^2$， $0\le x\le 1$， $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ $(n=1,2,3\cdots)$，且 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则 $s\left(-\frac{1}{2}\right)=$______，$s(2016)=$______.

练习

（5）设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1, \end{cases}$ $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$，

$s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\pi x$，则 $s\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ ________.