院(系)________ 专业班级________ 学号________ 姓名________

装 订 线

兰州理工大学____年___季学期《线性代数》参考答案与评分标准

一、选择题（每小题 4 分）

1、 C　　2、 D　　3、B　　4、A　　5、 A

二、填空题（每小题 4 分）

1、13　　2、$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$　　3、-24　　4、$R(A)\neq R(A,b)$　　5、1(二重根)

三、解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{分})$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{分})$$

$$= -18 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{分})$$

四、解：$AX+E=A^2+X$，$(A-E)X=(A+E)(A-E)$

若 $A-E$ 可逆，则 $X=A+E$ ……………………（5 分）

又 $|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，从而 $A-E$ 可逆

$$X = A+E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{分})$$

五、证明：设数 k_1，k_2，k_3 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，

从而 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2\ (k_2+k_3)\alpha_3=0$ ……………………（5 分）

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知，$k_1+k_3=k_2+k_3=k_1+k_2=0$ ……………（3 分）

即 $k_1=k_2=k_3=0$，β_1,β_2,β_3 线性无关……………………（2 分）

六、解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ ……………………（7 分）

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 或 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ……………（3 分）

七、解：

$$\tilde{A} = (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 9 & -5 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{分})$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{分})$$

所以方程组的通解为 $x = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

其中 c_1,c_2 为任意常数。……………………（5 分）

八、解：A 的特征多项式为 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$ ……………………（4 分）

对 $\lambda_1=2$，解 $(2E-A)X=0$，

$2E-A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$k\xi$（k 不为零）是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量。……………（3 分）

对 $\lambda_2=\lambda_3=1$，解 $(E-A)X=0$，

姓名__________ 学号__________ 专业班级__________ 院(系)__________

装 订 线

$E-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，其基础解系$\eta=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$，

$k\eta$（k 不为零）是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量。……………………（3 分）