兰州理工大学____年___季学期《线性代数》参考答案与评分标准

院(系)________ 专业班级________ 学号________ 姓名________

装……订……线

一、单项选择题

1. B; 2. A; 3. C; 4. C; 5. D.

二、填空题

1. 5; 2. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$; 3. $27a$; 4. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{pmatrix}$; 5. 2.

三、计算题I

$$D=\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$ ………………………… 3 分

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$ ………………………… 3 分

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$ ………………………… 4 分

四、计算题

解：记 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$

因为 $|A|=1\neq 0$, 所以 A 可逆；从而 $X=A^{-1}B$， ………………………… 3 分

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&5&4&-6\\1&3&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&5&4&-6\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-1&0&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&0&8\end{pmatrix}$$ ………………………… 5 分

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-23\\0&1&0&8\end{pmatrix},$$

所以 $X=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$. ………………………… 2 分

五．证明：设有一组数 $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$，使得

$\kappa_1(\alpha_1+\alpha_2)+\kappa_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+\kappa_3(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=0$，即：

$(\kappa_1+\kappa_3)\alpha_1+(\kappa_1+3\kappa_2-2\kappa_3)\alpha_2+(2\kappa_2+\kappa_3)\alpha_3=0$. ………………………… 3 分

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而有线性方程组 $\begin{cases}\kappa_1+\kappa_3=0,\\ \kappa_1+3\kappa_2-2\kappa_3=0,\\ 2\kappa_2+\kappa_3=0.\end{cases}$

其系数行列式为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq 0,$

从而齐此线性方程组只有零解，即 $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$， ………………………… 5 分

所以 $\alpha_1+\alpha_2$，$3\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关. ………………………… 2 分

六. 解：对 A 施行初等行变换变成为行阶梯行矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}$$ ………………………………6 分

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 R(A)=3，故列向量组的最大无关组含 3 个向量. 而三个非零行的非零首元在 1,2,4 三列，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为列向量组的一个最大无关组. 这是因为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$, 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关. ………………………… 4 分

七. 解

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ ………………………… 5 分

即得$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4}\\x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4}\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$ ………………………… 3 分

亦即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix},(c_1,c_2\in R).$ ………………………… 2 分

八. 解：A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1.$ ………………………… 4 分

当$\lambda_1=2$时，解方程$(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以$\kappa p_1(\kappa\neq0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量. ………………………… 3 分

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

所以$\kappa p_2(\kappa\neq0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量. ………………………… 3 分