兰州理工大学2023年 春季学期 高等数学B 试题

院(系)______ 专业班级______ 学号______ 姓名______

装 订 线

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分	

一、单项选择题(每小题 3 分，共 18 分)

(　　)1、函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处对x和对y的偏导数存在是$f(x,y)$在该点处可微的

(A)充分条件；(B)必要条件；(C)充分必要条件(D) 既不充分也不必要条件。

(　　)2、设$I_1=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$、$I_2=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$和$I_3=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$的大小,

其中$D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$，则

(A) $I_1\le I_2\le I_3$； (B) $I_2\le I_1\le I_3$； (C) $I_3\le I_2\le I_1$； (D) $I_3\le I_1\le I_2$。

(　　)3、曲面$x^2+4y^2+z^2=4$与平面$x+z=a$的交线在yOz平面上的投影方程是

(A)$\begin{cases}(z-a)^2+4y^2+z^2=4\\x=0\end{cases}$； (B)$\begin{cases}x^2+4y^2+(x-a)^2=4\\z=0\end{cases}$；

(C)$\begin{cases}x^2+4y^2+(x-a)^2=4\\x=0\end{cases}$； (D)$\begin{cases}(z-a)^2+4y^2+z^2=4\\z=0\end{cases}$。

(　　)4、下列无穷级数属于条件收敛的是

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sin3n}{n^2}$； (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$； (C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$； (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$。

(　　)5、设Ω为半球域 $x^2+y^2+z^2\le 1$，$z\ge 0$，则$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v=$

(A)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}r$； (B)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$；

(C)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r$； (D)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r$。

(　　)6 、直线L:$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$与平面$\Pi$:$x+y+z=1$的位置关系是

(A)直线L与平面Π垂直； (B)直线L与平面Π相交但不垂直；

(C)直线L与平面Π平行； (D)直线L在平面Π内

得分	

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$__________；

2、交换积分次序：$\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y=$__________；

3、将xOy面上的抛物线$x^2=2y$绕y轴旋转一周，则所形成的旋转曲面的方程为__________；

4、幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}x^n$的收敛半径$R$为__________；

5、设函数$f(x,y,z)=xyz^2$，则$\mathbf{grad}f(1,1,-1)=$__________；

6、一金属线成半圆形$x=a\cos t,y=a\sin t\,(0\le t\le\pi)$，其上每一点的密度等于该点的纵坐标，则该金属线的质量为__________。

得分	

三、计算题 I (每小题 7 分，共 7 分)

1、求过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程。

院(系)＿＿＿＿ 专业班级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

装　订　线

得分	

四、计算题 II（每小题 7 分，共 28 分）

1、求曲面$\mathrm{e}^z - z + xy = 3x$在点$(2,1,0)$处的切平面和法线方程。

2、求二元函数$f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$的极值。

3、计算二重积分$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$y=-x+3$及抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2-1$所围成的区域.。

4、计算曲面积分$\oiint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成闭区域的整个边界曲面。

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 专业班级＿＿＿＿ 院(系)＿＿＿＿

装 订 线

得分	

五、计算题III（第 1 题 7 分，第 2 题 8 分，共 15 分）

1、计算曲线积分$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中$L$为上半圆周$(x-1)^2+y^2=1, y\geq 0$，沿逆时针方向。

2、利用**高斯公式**计算曲面积分$\oiint_{\Sigma}4xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是平面$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=1$，$y=1$，$z=1$所围成的立方体的全表面的外侧.

得分	

六、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1、证明：数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4$。

2、证明：表达式$2xy\,\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$在整个$xOy$平面内是某个函数$u(x,y)$的全微分，并求这样的一个$u(x,y)$。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 18 分)

1. B 2. A 3. A 4. B 5. A 6. C

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 4； 2. $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{\frac{1}{4}y^2}^{y} f(x,y)\mathrm{d}y$；3. $x^2+z^2=2y$；4. 3；5. $(1,1,-2)$；6. $2a^2$

三、计算题 I (每小题 7 分，共 14 分)

1.

$$\mathbf{s}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}=-16\mathbf{i}+14\mathbf{j}+11\mathbf{k}$$ ……4分

所求平面方程为 $-16(x-2)+14y+11(z+3)=0$ ……3分

四、计算题 II (每小题 7 分，共 28 分)

1.令 $F(x,y,z)=3x-xy+z+\mathrm{e}^z$，则

$$F_x(x,y,z)=3-y,F_y(x,y,z)=-x,F_z(x,y,z)=1-\mathrm{e}^z$$

可得，曲面在点 $(2,1,0)$ 处的法向量 $\mathbf{n}=(2,-2,0)$ ……3 分

所求切平面方程为 $2(x-2)-2(y-1)=0$， ……2 分

所求法线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{0}$ ……2 分

2. $f'_x(x,y)=2x(2+y^2)=0,f'_y(x,y)=2x^2+\ln y+1=0$，故 $x=0,y=\frac{1}{\mathrm{e}}$

……2 分

$f''_{xx}(x,y)=2(2+y^2),f''_{xy}(x,y)=4xy,f''_{yy}(x,y)=2x^2+\frac{1}{y}$，

$A=f''_{xx}(0,\frac{1}{\mathrm{e}})=2(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}),B=f''_{xy}(0,\frac{1}{\mathrm{e}})=0,C=f''_{yy}(0,\frac{1}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}$ ……3 分

由于 $A>0$ 且 $B^2-AC<0$，所以函数 $f(x,y)$ 存在极小值 $f(0,\frac{1}{\mathrm{e}})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ ……2 分

3. $D=\{(x,y)\,|\,-4\le x\le 2,\frac{1}{2}x^2-1\le y\le -x+3\}$ ……3 分

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-4}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x^2-1}^{-x+3}xy\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-4}^{2}(-\frac{1}{4}x^5+2x^3-6x^2-8x)\mathrm{d}x$$ ……4分

$$=-72$$

4. $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，$\Sigma_1:z=1$，$\Sigma_2:z=\sqrt{x^2+y^2}$，投影区域和面积元素为

$$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\},\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$D_2=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\},\mathrm{d}S=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ……3分

$$\oiint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\sqrt{2}\iint_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$ ……4分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$$

五、计算题III（第 1 题 7 分，第 2 题 8 分，共 15 分）

1.设 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-2y$，$Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-2,\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y$$。

补充有向线段 $OA:y=0$，x 从 0 变到 2。则有格林公式可得

$$\oint_{L+OA}(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$ ……4分

所以，

姓名 学号 专业班级 院（系） 装 订 线

$$\int_L (e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$
$$=\pi-\int_{OA}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy \cdots\cdots 3分$$
$$=\pi-\int_0^2(e^x\sin 0-2\cdot 0)dx=\pi$$

2. 由高斯公式得

$$原式=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$
$$=\iiint_\Omega(4z-2y-y)dv \cdots\cdots 4分$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(4z-y)dz$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^1(2-y)dy=\frac{3}{2} \cdots\cdots 4分$$

六、证明题(每小题 7 分，共 14 分)

1. 设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. 则

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},(-1<x<1)$$

$\cdots\cdots$3 分

于是，

$$s(x)=\left(\int_0^x s(x)dx\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},(-1<x<1) \cdots\cdots 3分$$

因此，$s(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$ $\cdots\cdots$1 分

3. 设$P(x,y)=2xy$，$Q(x,y)=x^2$。则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

且一阶偏导连续。因此，所给表达式是某一个$u(x,y)$的全微分$\cdots\cdots$3 分

取$(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\cdot 0dx+\int_0^y x^2dy=x^2y \cdots\cdots 4分$$