题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1、C 2、A 3、C 4、A 5、C

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、正； 2、2； 3、8/3； 4、$r(A)=r(Ab)$；5、0.

三、计算行列式(共 10 分)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \to -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \cdots \xrightarrow[5分]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40.$$ (5 分)

四、计算题(10 分)

解：$X=(A-E)^{-1}A$，

$$(A-E,A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$,(5分)

$$X=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$ (5分)

五、讨论题(10 分)

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & \lambda & 5 & \lambda+4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & \lambda+2 & 5 & \lambda+7 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (5 分)

（1）$\lambda=3, r=2, \alpha_1,\alpha_2$ 是极大无关组；(2) $\lambda\neq 3, r=3, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是极大无关组. (5 分)

六、计算题(10 分)

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5分)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系 $\eta_1=(3/2,3/2,1,0)^T,\eta_2=(-3/4,7/4,0,1)^T$，特解为 $\gamma=(5/4,-1/4,0,0)^T$，通解

为 $x=\gamma+c_1\eta_1+c_2\eta_2$. (5 分)

七、计算题(10 分)

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$ 得 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$. (4 分)

$\lambda_1=5$ 的一个特征向量为 $\eta_1=(1,1,1)^T$，全部特征向量为 $k_1\eta_1(k_1\neq 0)$；(3 分)

$\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\eta_2=(-1,0,1)^T$，和 $\eta_3=(-1,1,0)^T$，其全部特征向量为 $k_2\eta_2+k_3\eta_3$， k_2,k_3 不全为 0. (3 分)

八、证明题(10 分)

证明：容易验证 β_1,β_2,β_3 是 $AX=0$ 的解向量，因此要证明 β_1,β_2,β_3 也是 $AX=0$ 的一个基础解系，只需证明 β_1,β_2,β_3 线性无关. (5 分)

若有 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即 $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$，则

$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $k_1+k_2+k_3=0, k_2+k_3=0, k_3=0$，进一步得到 $k_1=k_2=k_3=0$. 由线性无关的定义知，β_1,β_2,β_3 是线性无关的，因此 β_1,β_2,β_3 也是 $AX=0$ 的基础解系. (5 分)