兰州理工大学 2011 年线性代数试题

一、填空题($5\times4=20$分)

1、矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$的秩为$r(A)=$ _3_；注：$A\sim E$。

2、n阶方阵A可逆$\Longleftrightarrow A$的列向量组线性_无关_；

3、若方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a=$ _-1_；

注：$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&2a+1&3\\0&1&-a&-1\\0&0&(a+1)(a-3)&a-3\end{pmatrix}$。

4、若λ是n阶实对称方阵A的$k\geq1$重特征根，则$r(\lambda E-A)=$ _$n-k$_；

5、若A,B均为n阶正交阵，则$\left|(AB)^{10}\right|=$ _1_。

二、选择题($5\times4=20$分)

1、若n阶方阵A,B,C满足$ABC=E$，则必有(D)

(A)、$ACB=E$；　(B)、$CBA=E$；　(C)、$BAC=E$；　(D)、$BCA=E$。

2、设$A\in R^{n\times m}$，且$r(A)=r$，则方程组$AX=0$的基础解系中包含的向量个数是(A)

(A)、$m-r$；　(B)、$n-r$；　(C)、r；　(D)、无法确定。

3、设A为正交阵，则下列说法中错误的是(D)

(A)、$AA^T=E$；　(B)、$A^{-1}=A^T$；

(C)、A的行向量组是两两正交的单位向量；　(D)、$|A|=1$。

4、设A,B为相似的n阶方阵，则它们有(C)

(A)、相同的特征向量；　(B)、不同的特征向量；

(C)、相同的特征向值；　(D)、不同的特征值。

5、实二次型$f(X)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-x_2x_3$为($B$)

(A)、半正定；　(B)、正定；　(C)、负定；　(D)、不定。

注：由于 $f(X)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-x_2x_3=(x_1-2x_2)^2+(x_2-\frac{x_3}{2})^2+\frac{3}{4}x_3^2\ge 0$，且

$f(X)=0\Longleftrightarrow X=(x_1,x_2,x_3)^T=0$，故 $f(X)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-x_2x_3$ 正定。

三、计算行列式($2\times5=10$分)

1、$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b(b-a)&c(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b&c\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$；

2、$D_n=\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}_n$，其中 $n\ge 2$；

解：$D_n=\begin{vmatrix}x+0&y&0&\cdots&0&0\\0+0&x&y&\cdots&0&0\\0+0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0+0&0&0&\cdots&x&y\\0+y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\0&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}_n+\begin{vmatrix}0&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}_n$

$=x^n+(-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1}=x^n-(-y)^n$。

四、(本题10分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求 X。

解：原方程等价于 $(A-B)X(A-B)=E$，而

$$(A-B,E)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}，故(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，$$

故 $X=(A-B)^{-2}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$。

五、(本题10分)设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关。

证明：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$，即 A 可逆，且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，

故 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，即 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。

六、(本题10分) 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$ 的秩及其极大无关组。

解：由于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&1&-2&1\\4&2&2&-2\\3&0&-9&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，且

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是其极大无关组。

七、(本题10分) 求方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=1\\x_1-x_2+x_3+x_4=2\\x_1-x_2-x_3+x_5=1\end{cases}$ 的通解。

解：由于 $(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&-1&1\\1&-1&1&1&0&2\\1&-1&-1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-1&-1\\0&0&0&1&1&3\end{pmatrix}$，故 $r(A)=r(A,b)=3$，

原方程组有无穷多解，且原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3-x_5=-1\\x_4+x_5=3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=-1+x_5\\x_4=3-x_5\end{cases}\Longleftrightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\3\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2\in R$ 任意。

八、(本题10分) 求一正交变换，将二次型 $f(X)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形。

解：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&-2&\lambda-3\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-5)\end{pmatrix}$，

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=1$，且

A 的对应于 λ_k 的特征向量 $\xi_k \neq 0$ 满足 $\begin{pmatrix} \lambda_k - 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda_k - 3 \\ 0 & 0 & (\lambda_k - 1)(\lambda_k - 5) \end{pmatrix} \xi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$k = 1,2,3$，即

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，故

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，取 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，

并令 $Y = P^T X$，则 $X = PY$ 为正交变换，且在此变换下有

$f(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2 x_3 = X^T A X = Y^T (P^T A P) Y = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$。

2014～2017 年线性代数试题详解

一、单项选择题

(D)01、设某 8 阶全排列的逆序数为5，则将其变为自然排列的对换次数为

(A)、5；　　(B)、8；　　(C)、偶数；　　(D)、奇数。

(D)02、下列排列中是偶排列的是

(A)、$5\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3$；　　(B)、$4\cdot2\cdot3\cdot1\cdot5$；　　(C)、$3\cdot5\cdot2\cdot4\cdot1$；　　(D)、$1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$。

(B)03、设A,B是对称矩阵，则$C=AB-BA$为

(A)、对称矩阵；　　(B)、反对称矩阵；　　(C)、可逆矩阵；　　(D)、正交矩阵。

(A)04、设$A\in R^{2\times2}$，则$\left|-2A\right|=$

(A)、$4\left|A\right|$；　　(B)、$-4\left|A\right|$；　　(C)、$2\left|A\right|$；　　(D)、$-2\left|A\right|$。

(A)05、设$A,B\in R^{3\times3}$，而B可逆，且$AB=0$，则必有

(A)、$A=0$；　　(B)、A可逆；　　(C)、$r(A)=3$；　　(D)、$\left|A\right|\neq0$。

(C)06、设$A,B\in R^{n\times n}$，则必有

(A)、$\left|A+B\right|=\left|A\right|+\left|B\right|$；　　(B)、$AB=BA$；

(C)、$\left|AB\right|=\left|A\right|\cdot\left|B\right|$；　　(D)、$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$。

(A)07、方阵$A\in R^{n\times n}$可逆的充要条件是

(A)、$\left|A\right|\neq0$；　　(B)、$A=E$；　　(C)、$r(A)>n$；　　(D)、$r(A)<n$。

(B)08、设$n\geq2,\ A\in R^{n\times n}$，则$\left|A^*\right|=$

(A)、$\left|A\right|^{n-2}$；　　(B)、$\left|A\right|^{n-1}$；　　(C)、$\left|A\right|^{n}$；　　(D)、$\left|A\right|$。

注：若$\left|A\right|\neq0$，则$AA^*=\left|A\right|E$，两边取行列式得$\left|A\right|\cdot\left|A^*\right|=\left|A\right|^n$，故$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}\neq0$，$r(A^*)=n$；

若$r(A)<n-1$，则A的任一$(n-1)$阶子式恒为0，故由定义知$A^*=0$，$r(A^*)=0,\ \left|A^*\right|=0=\left|A\right|^{n-1}$；

若$r(A)=n-1$，则A $(n-1)$至少有一个$(n-1)$阶子式$\neq0$，故由定义知$A^*\neq0$，且$A^*A=\left|A\right|E=0$，

故$1\leq r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1$，$r(A^*)=1,\ \left|A^*\right|=0=\left|A\right|^{n-1}$；

故$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$恒成立，而$r(A^*)=\begin{cases} n, & 若r(A)=n \\ 1, & 若r(A)=n-1 \\ 0, & 若r(A)<n-1 \end{cases}$。

(C) 09、设$n\ge 2,\ A,B\in R^{n\times n}$，且$r(A)=n-1, r(B)=n$，则$r(A^*B^*)=$

(A)、n；　　(B)、$n-1$；　　(C)、1；　　(D)、0。

注：由题设知$(A^*B^*)=(BA)^*$，$r(BA)=n-1$，故$r(A^*B^*)=r((BA)^*)=1$。

(A) 10、设A^*是可逆阵$A\in R^{n\times n}$的伴随矩阵，则$(A^*)^{-1}=$

(A)、$|A|^{-1}A$；　　(B)、$|A|\cdot A$；　　(C)、$|A|^{-1}A^{-1}$；　　(D)、$|A|\cdot A^{-1}$。

注：$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$，即$A^*=|A|A^{-1}$，故$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$。

(B) 11、设$A,B\in R^{n\times n}$，则下面结论错误的是

(A)、$r(AB)\le r(A)$；　　(B)、$r(A)\le r(A+B)$；

(C)、$r(AB)=r(B^TA^T)$；　　(D)、若$AB=0$，则$r(A)+r(B)\le n$。

(B) 12、向量组$\alpha_1=(0,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1,0)^T,\alpha_4=(0,0,0,1)^T$的极大无关组为

(A)、α_1,α_2；　　(B)、α_3,α_4；　　(C)、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　　(D)、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$。

(D) 13、设向量组$\alpha_1=(1+\lambda,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+\lambda,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+\lambda)^T$的秩为$2$，则$\lambda=$

(A)、1；　　(B)、-1；　　(C)、3；　　(D)、-3。

注：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、三行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1+\lambda & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行减去第一行的}(\lambda+1)\text{倍}]{\text{第二减去第一行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(\lambda+2)\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{再}(-1)\text{用乘第三行}]{\text{先将第二加到第三行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+3)\end{pmatrix},$$

若$\lambda=0$，则$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，此时$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$；

若$\lambda=-3$，则$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，此时$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$；

若$\lambda \neq 0,-3$，则$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，此时$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$；

故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2 \Longleftrightarrow \lambda=-3$。

(B) 14、向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性无关的充要条件是

(A)、$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$中有一向量不能由其余向量线性表示；

(B)、向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$的秩为$m$；

(C)、$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$中任意两个向量线性无关；

(D)、存在不全为零的数$k_1,k_2,...,k_m$，是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \neq 0$。

(B) 15、向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$秩为$n$的充要条件是

(A)、$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性相关；　　(B)、$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关；

(C)、$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中无零向量；　　(D)、$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中有零向量。

(A) 16、设向量$\alpha=(1,3,-2,0,1)^T$与$\beta=(-3,-9,6,a,-3)^T$线性相关，则

(A)、$a=0$；　(B)、$a\neq 0$；　(C)、$a>0$；　(D)、a任意。

注：两个向量线性相关$\Longleftrightarrow$此两个向量的对应分量成正比。

(D) 17、设$A\in R^{m\times n},B\in R^{m\times k},C=(A,B)$的秩依次为$r,s,t$，则方程$AX=B$有解的充要条件为

(A)、$r=s=t$；　(B)、$r=s$；　(C)、$s=t$；　(D)、$r=t$。

(D) 18、设$A\in R^{m\times n}$的秩为r(其中$0<r<n$)，则方程组$AX=0$的基础解系中包含的向量之个数为

(A)、$m-r$；　(B)、r；　(C)、$r-n$；　(D)、$n-r$。

(D) 19、下面向量是$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$之特征向量的是

(A)、$(1,0)^T$；　(B)、$(0,0)^T$；　(C)、$(0,1)^T$；　(D)、$(1,1)^T$。

注：$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。

(A) 20、设$A\in R^{3\times 3}$的特征值为$-1,2,2$，则$B=(A-E)^2$的特征值为

(A)、$4,1,1$；　(B)、$1,4,4$；　(C)、$-1,1,4$；　(D)、$1/2,1,1$。

注：若 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_m\lambda^m$，而 λ 是 $A\in R^{n\times n}$ 的特征值，$\xi\neq 0$ 是相应的特征向量，则

$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_m\lambda^m$ 是 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 的特征值，

因此将 $\lambda=-1,2,2$ 代入 $\varphi(\lambda)=1-2\lambda+\lambda^2=(\lambda-1)^2$ 即得 $B=E-2A+A^2=(A-E)^2$ 的特征值。

二、填空题

01、排列 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 4\cdot 6\cdot 5$ 的逆序数为 $\tau=$ __4__ 。

02、四阶排列 $3\cdot 1\cdot 4\cdot 2$ 的逆序数为 $\tau=$ __3__ 。

03、行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\*&*&1&8\\*&*&1&3\end{vmatrix}=$ __10__ 。

注：由分块三角矩阵的行列式得 $\begin{vmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\*&*&1&8\\*&*&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&8\\1&3\end{vmatrix}=-2\times(-5)=10$ 。

04、设三阶方阵 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且 $|A|=5$，则 $|\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_3,3\alpha_2|=$ __$-3|A|=-15$__ 。

注：$B=(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_3,3\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}1&0&0\\2&0&3\\0&1&0\end{vmatrix}=-3$，故

$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\2&0&3\\0&1&0\end{vmatrix}=5\cdot(-3)=-15$ 。

05、设 $A\in R^{n\times n}$ 且 $|A|=a$，则 $|2A|=$ __$2^n a$__ 。

06、设 λ 是正交阵 $A\in R^{n\times n}$ 的特征值，则 $|A^{-1}|=$ __± 1__，$|\lambda|=$ __1__ 。

注：若 λ 是正交阵 $A\in R^{n\times n}$ 的特征值，$\xi\neq 0$ 是相应的向量，则 $A^{-1}=A^T$，$A\xi=\lambda\xi$，故

$|A|^2=|A|\cdot|A^T|=|AA^T|=|AA^{-1}|=|E|=1$，从而 $|A^{-1}|=|A^T|=|A|=\pm 1$；

又 $|\lambda|^2\|\xi\|^2=(\overline{\lambda\xi})^T(\lambda\xi)=(\overline{A\xi})^T(A\xi)=\bar{\xi}^T(A^TA)\xi=\bar{\xi}^T(E)\xi=\bar{\xi}^T\xi=\|\xi\|^2>0$，

故 $|\lambda|^2=1$，即 $|\lambda|=1$。

07、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，则 $|AA^*|=\underline{|A|^3=8}$。

08、$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $A^{-1}=|A|^{-1}A^*=\underline{\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}}$。

09、$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}}$。 注：正交阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=A^T$。

10、$r\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\underline{\ 2\ }$。

注：$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二、三行分别减去第一行}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二行的2倍加到第三行}]{\text{第一行减去第二行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

11、当 $\lambda=\underline{-3}$ 时，$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&\lambda\end{pmatrix}$ 的秩为 2。

注：$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、二行}}\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&-1&3\\-1&2&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第一行加到第三行}]{\text{第二行减去第一行的2倍}}\begin{pmatrix}1&-3&4\\0&5&-5\\0&-1&\lambda+4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第二行除以5}}\begin{pmatrix}1&-3&4\\0&1&-1\\0&-1&\lambda+4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二行加到第三行}]{\text{将第二行的3倍加到第一行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&\lambda+3\end{pmatrix}$。

12、若向量 $\alpha=(a,1,-1)^T$ 与 $\beta=(1,1,9)^T$ 正交，则 $a=\underline{\ 8\ }$。

注：$\alpha\perp\beta\Longleftrightarrow$ 内积 $(\alpha,\beta)=a+1-9=0\Longleftrightarrow a=8$。

13、向量 $\alpha=(1,0,0,1)^T$ 与 $\beta=(1,-1,0,0)^T$ 间的夹角为 $\theta=\underline{\pi/3}$。

注：α,β 间的夹角 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{|(\alpha,\beta)|}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}=\dfrac{1}{2}$。

14、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+4\alpha_3$ 的秩为 $\underline{3}$。

注：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\0&1&4\end{vmatrix}=8+1-4=5\neq0$，即 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ 可逆。

15、设 $\beta=(0,k,k^2)^T$ 可由 $\alpha_1=(1+k,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+k,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+k)^T$ 唯一地线性表示，则常数 k 应满足 $\underline{k\neq 0,-3}$。

注：$\beta=(0,k,k^2)^T$ 可由 $\alpha_1=(1+k,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+k,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+k)^T$ 唯一地线性表示

$\Longleftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，即

$$0\neq|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1+k&1&1\\1&1+k&1\\1&1&1+k\end{vmatrix}\xlongequal{\text{各行加到第一行}}\begin{vmatrix}k+3&k+3&k+3\\1&1+k&1\\1&1&1+k\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一行提出公因式}(k+3)}(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+k&1\\1&1&1+k\end{vmatrix}\xlongequal{\text{各行减去第一行}}(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&k&0\\0&0&k\end{vmatrix}=k^2(k+3)\text{。}$$

16、设 $A\in R^{n\times n}$，则方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件为 $|A|=\underline{\ 0\ }$。

17、设 $A\in R^{m\times n},b\in R^m$，则 $AX=b$ 有解的充要条件是 $r(A,b)=\underline{\ r(A)\ }$。

18、若方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+3x_4=-2\\x_1+7x_2-4x_3+8x_4=a\end{cases}$ 有解，则 $a=\underline{\ -7\ }$。

注：$$(A,b)=\begin{pmatrix}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&3&-2\\1&7&-4&8&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、二行}}\begin{pmatrix}1&2&-1&3&-2\\2&-1&1&1&1\\1&7&-4&8&a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行减去第一行}]{\text{第一行乘以}(-2)\text{后加到第二行}}\begin{pmatrix}1&2&-1&3&-2\\0&-5&3&-5&5\\0&5&-3&5&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二行除以}(-5)]{\text{第二行加到第三行}}\begin{pmatrix}1&2&-1&3&-2\\0&1&-3/5&1&-1\\0&0&0&0&a+7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行减去第二行的2倍}}\begin{pmatrix}1&0&1/5&1&0\\0&1&-3/5&1&-1\\0&0&0&0&a+7\end{pmatrix},$$

原方程组有解 $\Longleftrightarrow r(A,b)=r(A)=2\Longleftrightarrow a=-7$。

19、设 $A\in R^{n\times n}$ 且方程组 $AX=0$ 有非零解 $\xi\neq 0$，则 ξ 是 A 相应于特征值 $\lambda=\underline{\ 0\ }$ 的特征向量。

注：由题设知 $A\xi=0=0\cdot\xi$，其中 $\xi\neq 0$。

20、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\underline{1,1,2}$。

注：特征值λ满足$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-2 & 0\\ -3 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$。

三、计算行列式

1、$D=\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$；

解：按第一行展开，得

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}\overset{\text{按第一行展开}}{=\!=\!=\!=}a_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & 0\\ b_3 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}0 & a_2 & b_2\\ 0 & b_3 & a_3\\ b_4 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{两个行列式再按第三行展开}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}a_1a_4\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)\cdot(a_2a_3-b_2b_3)\text{。}$$

2、$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$。

解：按第一行展开，得

$$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b & 1 & 0\\ -1 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}=1+ab+ad+cd+abcd\text{。}$$

3、$D=\begin{vmatrix}x+a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ -x & x & 0 & 0\\ 0 & -x & x & 0\\ 0 & 0 & -x & x\end{vmatrix}$。

解：从第 4 列起，各列加到前一列，得

$$D=\begin{vmatrix}x+a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ -x & x & 0 & 0\\ 0 & -x & x & 0\\ 0 & 0 & -x & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4\\ 0 & x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}$$

$$=x^3(x+a_1+a_2+a_3+a_4)\text{。}$$

4、$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$。

解：按最后一行展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n=x^n-(-y)^n\text{。}$$

5、$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$。

解：各列加到第一列、第一列提出公因式$(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$后，再各行减去第一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+a_1+a_2+\cdots+a_n\text{。}$$

四、矩阵的运算

1、$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的秩、特征值及其行列式。

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行减去第一行的2倍}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、三行}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{第一行减去第二行的2倍}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，故 $r(A)=2<3$，$|A|=0$，

又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\-2&\lambda-2&-4\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{\text{按第三行展开}}{=\!=\!=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-2&\lambda-2\end{vmatrix}$

$\overset{\text{按对角线法展开}}{=\!=\!=}(\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-2)-2\right]=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$，

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $B\in R^{3\times3}$，使 $A^*BA=2BA-8E$。

解：$A^*=|A|\cdot A^{-1}=-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，$(2E-A^*)B=8A^{-1}$，

$$(2E-A^*,8A^{-1})=\begin{pmatrix}4&0&0&8&0&0\\0&1&0&0&-4&0\\0&0&4&0&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一、三行各除以4}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&-4&0\\0&0&1&0&0&2\end{pmatrix},$$

故 $B=8(2E-A^*)^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

3、设 $A\in R^{3\times3}$ 且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵。

解：$|A|^{-1}=|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2$，

$$(A^{-1},E)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二、三行各自减去第一行}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行除以2}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行减去第二、三行}}\begin{pmatrix}1&0&0&5/2&-1&-1/2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{pmatrix},$$

故 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，而 $(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$。

4、求解方程 $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$。

解：令 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$，则 $|A|=2\cdot3-1\cdot5=1,\ A^*=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$，故

$$X=A^{-1}B=|A|^{-1}A^*B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}。$$

5、设 $A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求 B，使之满足 $AB=A+2B$。

解：$AB=A+2B\Longleftrightarrow(A-2E)B=A$，而

$$(A-2E,A)=\begin{pmatrix}-2&3&3&0&3&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、二行}}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\-2&3&3&0&3&3\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第一行加到第三行}]{\text{第一行乘2后加到第二行}}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&3&2&5&3\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第三行除以}(-2)]{\text{第三行减去第二行}}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&3&2&5&3\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行减去第三行的3倍}}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&2&3\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行加到第一行}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&3&3\\0&1&0&-1&2&3\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix},$$

故 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$。

6、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&2&-3\\0&1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\3&-5&0\end{pmatrix}$，求方程 $AX=B$ 的解。

解：利用矩阵的初等行变换，得

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&3\\-1&2&-3&0&1&-2\\0&1&-1&3&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行加到第二行}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&3\\0&2&-1&1&1&1\\0&1&-1&3&-5&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换第二、三行}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&3\\0&1&-1&3&-5&0\\0&2&-1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第三行减去第二行的2倍}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&3\\0&1&-1&3&-5&0\\0&0&1&-5&11&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行加到二行}]{\text{第一行减去第三行的2倍}}\begin{pmatrix}1&0&0&11&-22&1\\0&1&0&-2&6&1\\0&0&1&-5&11&1\end{pmatrix},$$

故 $AX=B$ 的解为 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}11&-22&1\\-2&6&1\\-5&11&1\end{pmatrix}$。

五、向量组的极大无关组及线性相关性

1、设 $\alpha_1=(a,3,1)^T,\alpha_2=(2,b,3)^T,\alpha_3=(1,2,1)^T,\alpha_4=(2,3,1)^T$ 的秩为 2，求 a,b。

解：$(\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、三行}}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&3&3&b\\1&2&a&2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第三行减去第一行}]{\text{第二行减去第一行的2倍}}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&b-6\\0&1&a-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一、三行减去第二行}}\begin{pmatrix}1&0&0&9-b\\0&1&1&b-6\\0&0&a-2&5-b\end{pmatrix},$$

故 $r(\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1,\alpha_2)=2\Longleftrightarrow a=2,b=5$。

2、求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ 的秩与极大无关组，并将 $\beta=\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$ 用此极大无关组表示出来。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\-1&1&1&0\\0&3&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、二行}}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\1&2&3&5\\0&3&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行加到第二行}}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&4&5\\0&3&2&7\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{再第三行除以}(-2)]{\text{先第三行减去第二行}}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&4&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{再第三行除以3，第一行乘}(-1)]{\text{先第二行减去第三行的4倍}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二、三行加到第一行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}，故$$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其极大无关组，且 $\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$。

3、求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}7\\0\\14\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\1\\6\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\1\end{pmatrix}$的秩与极大无关组。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第三行减去第一行的2倍}]{\text{第二行减去第一行的3倍}}\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\0&-21&-7&-14&-7\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第三行除以}(-4)]{\text{将第四行的7倍加到第二行}}\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第一行减去第三行的2倍}]{\text{第四行减去第三行}}\begin{pmatrix}1&7&0&3&2\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&3&0&1&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第一行减去第四行的7倍}]{\text{第四行除以3}}\begin{pmatrix}1&0&0&2/3&-1/3\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1/3&1/3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第二、四行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2/3&-1/3\\0&1&0&1/3&1/3\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其极大无关组，且

$\alpha_4=\dfrac{1}{3}(2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)$，$\alpha_5=\dfrac{1}{3}(-\alpha_1+\alpha_2)$。

4、求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\\2\end{pmatrix}$的秩与极大无关组。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&1&2&2\\0&-1&-2&-1&-1\\2&1&4&4&6\\0&2&4&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{将第二行的2倍加到四行}]{\text{第三行减去第一行的2倍}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&2\\0&-1&-2&-1&-1\\0&1&2&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第三行加到第二行}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&2\\0&0&0&-1&1\\0&1&2&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行乘以}(-1)\text{后与第三行交换}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&2\\0&1&2&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第一行减去第三行的2倍}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&4\\0&1&2&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，故

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为其极大无关组，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4$。

5、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=3\alpha_1+2\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$线性无关。

证明：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&3&1\\1&0&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$，而$\begin{vmatrix}1&3&1\\1&0&-2\\0&2&1\end{vmatrix}=2+4-3=3\neq 0$，即$\begin{pmatrix}1&3&1\\1&0&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$可逆，

故$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，从而$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

6、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\beta_1=3\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=5\alpha_2+2\alpha_3,\beta_3=4\alpha_3-7\alpha_1$线性无关。

证明：令$A=\begin{pmatrix}3&0&-7\\-1&5&0\\0&2&4\end{pmatrix}$，则$|A|=\begin{vmatrix}3&0&-7\\-1&5&0\\0&2&4\end{vmatrix}=3\cdot5\cdot4+(-1)\cdot2\cdot(-7)=74\neq 0$，即$A$可逆，且

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，故$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，从而$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

7、设$m\ge n\ge k\ge 1, A\in R^{n\times k}$，而$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R^{m\times 1}$线性无关，且$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)A$，则

$\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$线性无关$\Longleftrightarrow r(A)=k$。

证明：由题设知$1\le k\le n=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le m$，且$r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)\le r(A)\le k$，故

$\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$线性无关$\Longleftrightarrow r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)=k \Longleftrightarrow r(A)=k$。

8、设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关，则$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,...,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$线性无关。

证明：令$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$，则$A$可逆，且$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)A$，故

$r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=n$，从而$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$线性无关。

9、设ξ_0是$AX=b\neq 0$的特解，而$\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$为$AX=0$的基础解系，则$\xi_0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$线性无关。

证明：由题设知$\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$线性无关，假设$\xi_0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$线性相关，则$\xi_0$可由$\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$线性表示，

即存在$x_1,x_2,...,x_{n-r}\in R$，使$\xi_0=\sum_{k=1}^{n-r}x_k\xi_k$，故$b=A\xi_0=\sum_{k=1}^{n-r}x_kA\xi_k=0$，矛盾，

故$\xi_0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$线性无关。

10、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$满足：

(1)、$\alpha_1\neq 0$；　　(2)、对$2\le k\le n$，向量α_k都不能由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{k-1}$线性表示。

则向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关。

证明：设存在数$x_1,x_2,...,x_n$，使$\sum_{k=1}^{n}x_k\alpha_k=0$，且$x_n\neq 0$，则

$\alpha_n=\sum_{1\le k\le n-1}(-x_k/x_n)\alpha_k$，这与题设条件矛盾，故$x_n=0$，

同理$x_2=x_3=\cdots=x_n=0$，故$x_1\alpha_1=0$，且$\alpha_1\neq 0$，故$x_1=0$，

从而$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，故$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关。

六、线性方程组的求解

1、$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$；

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二、三行乘2}}\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\2&-4&2&2\lambda\\2&2&-4&2\lambda^2\end{pmatrix}$，

$$\xrightarrow{\text{第一行加到第二、三行}}\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&3&-3&2\lambda^2-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行加到第三行}}\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&0&0&2\lambda^2+2\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行乘3}}\begin{pmatrix}-6&3&3&-6\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&0&0&2(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行加到第一行}}\begin{pmatrix}-6&0&6&2\lambda-8\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&0&0&2(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行除以2}]{\text{第一行除以}(-6)\text{，第二行除以}(-3)}\begin{pmatrix}1&0&-1&(4-\lambda)/3\\0&1&-1&2(1-\lambda)/3\\0&0&0&(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)、若$\lambda\neq 1,-2$，则由$(*)$式知$(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故$r(A,b)=3>2=r(A)$，方程组无解；

(2)、若$\lambda=-2$或1，则由$(*)$式知$(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&-1&(4-\lambda)/3\\0&1&-1&2(1-\lambda)/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(A,b)=2=r(A)<3$，方程

组有无穷多组解，且原方程组等价于$\begin{cases}x_1-x_3=(4-\lambda)/3\\ x_1-x_3=(2-2\lambda)/3\end{cases}$，取$x_3=C$，得其通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C+(4-\lambda)/3\\C+2(1-\lambda)/3\\C\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4-\lambda\\2-2\lambda\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$，其中C任意。

2、$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2+x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$；

解：$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、三行}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\-1&k&1&k^2\\1&1&k&4\end{pmatrix},$$

$$\xrightarrow[\text{第三行减去第一行}]{\text{第一行加到第二行}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&k-1&3&k^2-4\\0&2&k-2&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第一、三行各乘以2}]{\text{交换第二、三行}}\begin{pmatrix}2&-2&4&-8\\0&2&k-2&8\\0&2(k-1)&6&2(k^2-4)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行减去第二行的}(k-1)\text{倍}]{\text{第二行加到第一行}}\begin{pmatrix}2&0&k+2&0\\0&2&k-2&8\\0&0&-(k+1)(k-4)&2k(k-4)\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)、若$k\neq-1,4$，则由$(*)$式知

$$(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}2&0&k+2&0\\0&2&k-2&8\\0&0&-(k+1)(k-4)&2k(k-4)\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第三行除以}(k+1)(4-k)}\begin{pmatrix}2&0&k+2&0\\0&2&k-2&8\\0&0&1&-2k/(k+1)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第一行减去第三行的}(k+2)\text{倍}]{\text{第二行减去第三行的}(k-2)\text{倍}}\begin{pmatrix}2&0&0&2k(k+2)/(k+1)\\0&2&0&2(k^2+2k+4)/(k+1)\\0&0&1&-2k/(k+1)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一、二行各除以2}}\begin{pmatrix}1&0&0&k(k+2)/(k+1)\\0&1&0&(k^2+2k+4)/(k+1)\\0&0&1&-2k/(k+1)\end{pmatrix},$$

故此时$r(A,b)=r(A)=3$，方程组有唯一解$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{k+1}\begin{pmatrix}k(k+2)\\k^2+2k+4\\-2k\end{pmatrix}$；

(2)、若$k=-1$，则由$(*)$式知$(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&-3&8\\0&0&0&10\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二行减去第三行的8倍}]{\text{第三行除以10}}\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&-3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故

此时$r(A,b)=3>2=r(A)$，方程组无解；

(3)、若 $k=4$，则由 $(*)$ 式知 $(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}2&0&6&0\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一、二行各除以2}}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故

此时 $r(A,b)=r(A)=2<3$，方程组有无穷多解，且原方程组等价于 $\begin{cases}x_1+3x_3=0\\x_2+x_3=4\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=4-x_3\end{cases}$，

取自由变量 $x_3=-C$，得方程组的通解 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3C\\4+C\\-C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$，其中 C 任意。

3、$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$；

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&3\\1&1&1+\lambda&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、三行}}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\1&1+\lambda&1&3\\1+\lambda&1&1&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第三行减去第一行的}(\lambda+1)\text{倍}]{\text{第二行减去第一行}}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&-\lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第二行加到第三行}}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&-(\lambda-1)(\lambda+3)\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第三行乘以}(-1)}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&\lambda(\lambda+3)&(\lambda-1)(\lambda+3)\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(*)$，

(1)、若 $\lambda\neq0,-3$，则由 $(*)$ 式知

$(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&\lambda(\lambda+3)&(\lambda-1)(\lambda+3)\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第三行除以}\lambda(\lambda+3)]{\text{第二行除以}\lambda}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&1&-1&3\lambda^{-1}-1\\0&0&1&1-\lambda^{-1}\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第一行减去第三行的}(\lambda+1)\text{倍}]{\text{第三行加到第二行}}\begin{pmatrix}1&1&0&\lambda^{-1}\\0&1&0&2\lambda^{-1}\\0&0&1&1-\lambda^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行减去第二行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\lambda^{-1}\\0&1&0&2\lambda^{-1}\\0&0&1&1-\lambda^{-1}\end{pmatrix}$，

此时 $r(A,b)=r(A)=3$，方程组有唯一解 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda^{-1}\\2\lambda^{-1}\\1-\lambda^{-1}\end{pmatrix}$；

(2)、若 $\lambda=0$，则由(*)式知 $(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二行除以3}]{\text{第二行加到第三行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

此时 $r(A,b)=2>1=r(A)$，方程组无解；

(3)、若 $\lambda=-3$，则由(*)式知 $(A,b)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{再第一行减去第二行}]{\text{先第二行除以}(-3)}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

此时 $r(A,b)=r(A)=2<3$，方程组有无穷多组解，且原方程组等价于：

$\begin{cases}x_1-x_3=-1\\x_2-x_3=-2\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\end{cases}$，取自由变量 $x_3=C$ 得方程组的通解为

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C-1\\C-2\\C\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，其中 $C\in R$ 任意。

4、$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$；

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-1&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第三行减去第一行}]{\text{第二行减去第一行的2倍}}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-5&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第三行减去第二行}}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-5&-4\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二行减去第三行的5倍}]{\text{将第三行的2倍加到第一行}}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&-4\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第三行乘以}(-1)]{\text{第二行除以}(-3)}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&4/3\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行减去第二行的2倍}}\begin{pmatrix}1&0&0&-5/3\\0&1&0&4/3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，

故 $r(A)=3<4$，方程组有无穷多组解，且原方程组等价于：

$\begin{cases}3x_1-5x_4=0\\3x_2+4x_4=0\\x_3=0\end{cases}$，取 $x_4=3C$ 得 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}5\\-4\\0\\3\end{pmatrix}$，其中 $C\in R$ 任意。

5、$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=5 \end{cases}$；

解：$$(A,b)=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一行减去第二行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第一行乘4后加到第三行}]{\text{第一行乘3后加到第二行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 15 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第二行除以7}]{\text{第三行减去第二行的3倍}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第一行乘以}(-1)]{\text{第一行减去第二行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，故 $r(A,b)=r(A)=2<4$，从而原方程组有无穷多组

解，且原方程组等价于 $\begin{cases} x_1=2x_2+\dfrac{2}{7}x_4-\dfrac{4}{7} \\ x_3=\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{7}x_4 \end{cases}$，令自由变量 $x_2=C_1,x_4=7C_2$ 得原方程的通解为

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2C_1+2C_2-4/7 \\ C_1 \\ -5C_2+3/7 \\ 7C_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$，其中 C_1,C_2 为常数。

七、方阵的特征值与特征向量

1、$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$；

解：$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换第二、三行}} \begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{将第二行的}(\lambda-3)\text{倍加到第三行}} \begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-4) \end{pmatrix}$$，

由 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$，且

(1)、$\lambda_1=2$ 对应的特征向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$ 满足 $(\lambda_1 E-A)\alpha=0$，即

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，等价方程组为$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，取$x_3 = -C_1$，得

$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中$0 \neq C_1 \in R$；

(2)、$\lambda_2 = \lambda_3 = 4$对应的特征向量$\beta = (y_1, y_2, y_3)^T \neq 0$满足$(\lambda_2 E - A)\beta = 0$，即

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\beta = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，等价方程组为$y_2 = y_3$，取$y_1 = C_2, y_3 = C_3$，得

$\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中$C_2, C_3 \in R$不全为零。

2、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；

解：$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换第一、三行}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{将第一行}(\lambda-1)\text{的倍加到第三行}]{\text{第二行减去第一行}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 0 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第一、三行各乘}(-2)]{\text{第二行减去第三行}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2-2\lambda \\ 0 & 2 & 2+\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -2(\lambda-2) & -2\lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{将第二行}(\lambda-2)\text{的倍加到第三行}]{\text{第二行加到第一行}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -(\lambda^2+\lambda-4) \\ 0 & 2 & -(\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix},$$

由$|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$得$A$的特征值为$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$，且$A$对应于$\lambda_k$对应的

特征向量$\xi_k \neq 0$满足$(\lambda_k E - A)\xi_k = 0$，即$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -(\lambda_k^2+\lambda_k-4) \\ 0 & 2 & -(\lambda_k+1)(\lambda_k-2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xi_k = 0$，将$\lambda_k, k = 1,2,3$的值代

入得$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xi_3 = 0$，故

$$\xi_1=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \xi_2=C_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \xi_3=C_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$，其中 $0\neq C_1,C_2,C_3\in R$。

3、$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$；

解：$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一、三行}}\begin{pmatrix}4&-1&\lambda-3\\0&\lambda-2&0\\\lambda+2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行乘以4}}\begin{pmatrix}4&-1&\lambda-3\\0&\lambda-2&0\\4(\lambda+2)&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第三行减去第一行的}(\lambda+2)\text{倍}}\begin{pmatrix}4&-1&\lambda-3\\0&\lambda-2&0\\0&\lambda-2&-(\lambda+1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行乘以}(-1)]{\text{第三行减去第二行}}\begin{pmatrix}4&-1&\lambda-3\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda+1)(\lambda-2)\end{pmatrix},$$

由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$，且

(1)、$\lambda_1=-1$ 对应的特征向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$ 满足 $(\lambda_1E-A)\alpha=0$，即

$$\begin{pmatrix}4&-1&-4\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\alpha=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，即 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，取 $x_3=C_1$ 得

$$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\0\\C_1\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 $0\neq C_1\in R$；

(2)、$\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量 $\beta=(y_1,y_2,y_3)^T\neq 0$ 满足 $(\lambda_2E-A)\beta=0$，即

$$\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，即 $4y_1-y_2-y_3=0$，取 $y_2=4C_2,y_3=4C_3$ 得

$$\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_2+C_3\\4C_2\\4C_3\end{pmatrix}=C_2\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$，其中 $C_2,C_3\in R$ 不全为零。

4、$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$；

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{交换第一、三行}]{\text{第一行各乘2}}\begin{pmatrix}-2 & -2 & \lambda-1\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 2(\lambda-1) & -4 & -4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第三行加上第一行的}(\lambda-1)\text{倍}]{\text{第二行各减去第一行}}\begin{pmatrix}-2 & -2 & \lambda-1\\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1)\\ 0 & -2(\lambda+1) & (\lambda+1)(\lambda-3)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行加上第二行的2倍}}\begin{pmatrix}-2 & -2 & \lambda-1\\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1)\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-5)\end{pmatrix},$$

由 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$ 得 A 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$，且

(1)、$\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的特征向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$ 满足 $(\lambda_1 E-A)\alpha=0$，即

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，故 \alpha=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}，其中 C_1,C_2\in R 不全为零；$$

(2)、$\lambda_3=5$ 对应的特征向量 $\beta=(y_1,y_2,y_3)^T\neq 0$ 满足 $(\lambda_1 E-A)\beta=0$，即

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 4\\ 0 & 6 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，故 \beta=C_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，其中 0\neq C_3\in R。$$

5、$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$；

解：$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&-1\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\-1&0&0&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{交换第二、三行}]{\text{交换第一、四行}}\begin{pmatrix}-1&0&0&\lambda\\0&-1&\lambda&0\\0&\lambda&-1&0\\\lambda&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第二行乘}\lambda\text{后加到第三行}]{\text{第一行乘}\lambda\text{后加到第四行}}\begin{pmatrix}-1&0&0&\lambda\\0&-1&\lambda&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda+1)&0\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+1)\end{pmatrix},$$

由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1$，且

(1)、$\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的特征向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\neq 0$ 满足 $(\lambda_1 E-A)\alpha=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，即 $\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$，取 $x_3=-C_2, x_4=-C_1$ 得

$$\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$，其中 $C_1, C_2 \in R$ 不全为零；

(2)、$\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量 $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T \neq 0$ 满足 $(\lambda_2 E-A)\beta=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，即 $\begin{cases} y_1-y_4=0 \\ y_2-y_3=0 \end{cases}$，取 $y_3=C_4, y_4=C_3$ 得

$$\beta=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_4 \\ C_3 \end{pmatrix}=C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$，其中 $C_3, C_4 \in R$ 不全为零。

6、设 $\alpha, \beta \in R^n$ 为非零列向量，求矩阵 $A=\alpha\beta^T$ 的秩、特征值与特征向量。

解：不妨设 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)^T, \beta=(b_1,b_2,...,b_n)^T \neq 0$，则存在 $1 \le i, j \le n$，使 $a_i b_j \neq 0$，且

$$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,...,b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\left(a_ib_j\right)_{n\times n} \neq 0$$，故

$1 \le r(A)=r(\alpha\beta^T) \le \min\left\{r(\alpha), r(\beta)\right\}=1$，即 $r(A)=r(\alpha\beta^T)=1$；

又 $A\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=(\beta^T\alpha)\cdot\alpha$，$\lambda_1=\beta^T\alpha=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 为其特征值，且

(1)、$\lambda_1=\beta^T\alpha$ 对应的特征向量为 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)^T \neq 0$；

(2)、$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 对应的特征向量 $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T \neq 0$ 满足 $AX=0$，用 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1}$ 表示该齐次方程组的基础解系，则 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 对应的特征向量为 $X=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\cdots+C_{n-1}\xi_{n-1}$，其中 $C_1,C_2,...,C_{n-1} \in R$ 不全为零。

兰州理工大学 2018 春线性代数试题 A

一、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

(C)1、设 $A,B\in R^{n\times n}$，则下列结论中正确的是

(A)、$AB\neq 0\Longleftrightarrow A,B\neq 0$；　　(B)、$|A|=0\Longleftrightarrow A=0$；

(C)、$|AB|=0\Longleftrightarrow |A|=0$或$|B|=0$；　　(D)、$A=E\Longleftrightarrow |A|=1$。

(B)2、若 m 个 n 维向量线性无关，则

(A)、再增加一个向量后也线性无关；　　(B)、再去掉一个向量后也线性无关；

(C)、有一个向量可被其余向量线性表示；　　(D)、以上皆错。

(D)3、设 A 是正交矩阵，则下列结论中错误的是

(A)、$AA^T=E$；　　(B)、$A^{-1}=A^T$；

(C)、A 的行向量组是标正组；　　(D)、$|A|=1$。

(A)4、设 $A\in R^{m\times n}$，则 $AX=0$ 仅有零解的充要条件是

(A)、A 的列向量组线性无关；　　(B)、A 的列向量组线性相关；

(C)、A 的行向量组线性无关；　　(D)、A 的行向量组线性相关。

(D)5、设 $A\in R^{n\times n}$，则下列结论中正确错误的是

(A)、A 可逆$\Longleftrightarrow |A|\neq 0$；　　(B)、A 可逆$\Longleftrightarrow A\sim E$；

(C)、A 可逆$\Longleftrightarrow A=$初等阵的乘积；　　(D)、A 可逆$\Longleftrightarrow A$的列向量组线性相关。

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、排列 32514 的逆序数 $\tau=$ <u>5</u>；

2、设 $A\in R^{n\times n}$，则 $AX=0$ 有非零解的充要条件是 <u>$|A|=0, r(A)<n$</u>；

3、设 $ad\neq bc$，则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=$ <u>$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$</u>；

4、设 $A\in R^{m\times n}$，且 $P\in R^{m\times m}$ 可逆，则 $r(PA)-r(A)=$ <u>0</u>；

5、方程组 $AX=B$ 有解的充要条件是 <u>$r(A,B)=r(A)$</u>。

三、计算下列行列式(每小题 10 分，共 60 分)

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$；

解：$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{交换第2,4列}]{\text{交换第2,4行}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$；

2、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $AXB=C$ 的解；

解：$(A,E)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},\quad B^{-1}=|B|^{-1}B^*=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}，故$$

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}。$$

3、求 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$ 的秩及其极大无关组。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & 18 \\ 3 & 6 & -9 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故

由 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其极大无关组，且

$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=5\alpha_1-\alpha_2$。

4、求下面方阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值及相应的特征向量。

解：由于 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}4 & \lambda-3 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$，故

A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$，

且 A 对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量 $\alpha_1\neq 0$ 满足 $(\lambda_1E-A)\alpha_1=0$，即

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\alpha_1=C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 $C_1\neq 0$，

而 A 对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量 $\alpha_2\neq 0$ 满足 $(\lambda_2E-A)\alpha_2=0$，即

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\alpha_2=C_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$，其中 $C_2\neq 0$。

5、求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$ 的通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}4 & 0 & -6 & 3 & 5\\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $r(A,b)=r(A)=2<4$，

原方程有无穷多解，且等价于 $\begin{cases}4x_1=+5+6x_3-3x_4\\ 4x_2=-1+6x_3+7x_4\end{cases}$，从而原方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+5\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-3\\7\\0\\4\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2\in R$ 任意。

6、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 α_1 可 α_2,α_3 线性表出，但 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

证明：由题设知 α_2,α_3 线性无关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 α_1 可 α_2,α_3 线性表出；

假设 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 α_4 可由 α_2,α_3 线性表出，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，矛盾，

故 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

兰州理工大学 2018 春线性代数试题 B

一、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

(B)1、设 A^* 是 $A\in R^{n\times n}$ 的伴随矩阵，则下列结论中正确的是

(A)、$\left|A^*\right|=\left|A\right|^n$； (B)、$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$；

(C)、$\left|A^*\right|=\left|A^{-1}\right|$； (D)、$\left|A^*\right|=\left|A\right|$。

(B)2、设 $A\in R^{m\times n}, B\in R^{n\times m}$，则 AB 的阶数为

(A)、n； (B)、m；

(C)、$m\times n$； (D)、$n\times m$。

(D)3、下列结论中错误的是

(A)、$A\in R^{n\times n}$ 可逆 $\Longleftrightarrow \left|A\right|\neq 0$； (B)、$A\in R^{n\times n}$ 可逆 $\Longleftrightarrow A\sim E$；

(C)、$A\in R^{n\times n} \Longleftrightarrow A=$初等阵之积； (D)、以上皆错。

(C)4、设 $A,B\in R^{n\times n}$ 满足 $AB=0$，则

(A)、$A=0$； (B)、当 $B\neq 0$ 时，$A=0$；

(C)、A,B 都有可能不等于零； (D)、A,B 至少有一个等于零。

(C)5、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 中

(A)、至少有一个零向量； (B)、A 可逆至少两个向量成比例；

(C)、至少有一个向量可由其余向量线性表示； (D)、至少有一部分向量线性相关。

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、排列 $n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 的逆序数 $\tau=$ $\underline{\quad n(n-1)/2 \quad}$；

2、$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}}$；

3、设三阶方阵 A 的行列式 $\left|A\right|=2$，则 $\left|2A\right|=$ $\underline{\quad 16 \quad}$；

4、向量组 $\alpha_1=(1,4,5),\alpha_2=(2,t,-1),\alpha_3=(-2,3,1)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow t=$ $\underline{\quad -3 \quad}$；

5、设三阶方阵 A 的特征值为 $1,2,3$，则 $\left|A\right|=$ $\underline{\quad 6 \quad}$。

三、计算下列行列式(每小题 10 分，共 60 分)

1、计算行列式$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$；

解：$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \overset{\text{将各列加到第一列}}{\underset{\text{第一列提出}(a+3b)}{=\!=\!=\!=\!=}} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} \overset{\text{各行减去第一行}}{=\!=\!=\!=} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$=(a+3b)(a-b)^3$；

2、设$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，求$AXB=C$的解；

解：$A^{-1}=|A|^{-1}A^*=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B^{-1}=|B|^{-1}B^*=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，故

$X=A^{-1}CB^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$。

3、求$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$的秩及其极大无关组。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11/9 \\ 0 & 1 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故

由$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$为其极大无关组，且$\alpha_3=\dfrac{1}{9}(5\alpha_2-11\alpha_1)$。

4、求下面方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$的特征值及相应的特征向量。

解：由于$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} -3 & -3 & \lambda-6 \\ 0 & 3(\lambda+1) & -(2\lambda-3) \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-9) \end{pmatrix}$，故

A的特征多项式为$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$，$A$的特征值为$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=9$，

且A对应λ_k的特征向量$\alpha_k\neq 0$满足$(\lambda_k E-A)\alpha_k=0,\ k=1,2,3$，即

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\alpha_1=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\alpha_2=C_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 30 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\alpha_3=C_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

其中$C_1,C_2,C_3\neq 0$。

5、求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=7\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=-3\end{cases}$ 的通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & -3 \end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故$r(A,b)=r(A)=2<4$，

原方程有无穷多解，且等价于$\begin{cases}4x_1=+8+6x_3-3x_4\\4x_2=-4+6x_3+7x_4\end{cases}$，从而原方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-3\\7\\0\\4\end{pmatrix}$$，其中$C_1,C_2\in R$任意。

6、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

证明：由题设知$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆，

故$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，即$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

兰州理工大学线性代数试题

一、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、将n阶行列式D的第i行与第j行互换得到D_1，再将D_1的第i列与第j列互换得到$D_2 (1 \le i < j \le n)$，则$D_2 - D =$ __0__ 。

2、设方阵$A \ne \pm E$满足$A^2 = E$(单位阵)，则$|A \pm E| =$ __0__ 。

3、设$n \ge 2$维向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性相关，而$\beta_k$是将$\alpha_k$的第一个分量换为$0$ ($k = 1,2,...,m$)所得的向量，则$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$线性__相关__。

4、设$n \ge 2,\ \alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)^T \ne 0$，则$A = \alpha\alpha^T$的非零特征值为 __$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$__ 。

5、n阶方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \ne$ __0__ 。

二、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

(B)1、设A^*为n阶方阵A的伴随矩阵，且$|A| \ne 0,1$，则

(A)、$|A^*| = |A|$；　(B)、$|A^*| = |A|^{n-1}$；　(C)、$|A^*| = |A|^n$；　(D)、$|A^*| = 0$。

(C)2、设$A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times m}$满足$AB = 0$，则其秩满足

(A)、$r(A) + r(B) \le m$；　(B)、$r(A) + r(B) > m$；

(C)、$r(A) + r(B) \le n$；　(D)、$r(A) + r(B) > n$。

(A)3、设B是将$n \ge 2$阶方阵A的第i行与第i列删除后得的矩阵，则它们的秩$r(A), r(B)$满足

(A)、$r(A) \ge r(B)$；　(B)、$r(A) = r(B)$；

(C)、$r(A) \le r(B)$；　(D)、以上皆错。

(A)4、设矩阵$A, B \in R^{m\times n}$等价，其中$m \ne n$，则下列结论正确的是

(A)、$r(A) = r(B)$；　(B)、A与B^T等价；

(C)、A, B的行向量组等价；　(D)、A, B的列向量组等价。

(C)5、设α_1, α_2是方阵A对应于特征值$\lambda_1 \ne \lambda_2$的特征向量，则$\alpha_1 + \alpha_2$

(A)、可能是A的特征向量；　(B)、一定是A的特征向量；

(C)、一定不是A的特征向量；　(D)、以上皆错。

三、计算下列行列式(每小题 5 分，共 10 分)

1、$D=\begin{vmatrix}4&3&2&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}$；

解：$D=\begin{vmatrix}4&3&2&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&2&3\end{vmatrix}=0$；

2、$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{n\times n}$。

解：$D_n=2\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}-\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=2D_{n-1}-D_{n-2}$，

且 $D_1=2, D_2=3$，再由归纳法得 $D_n=n+1$。

四、(本题 10 分) 求矩阵 X，使之满足 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$。

解：令 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则原方程即 $\begin{cases}AY=B\\Y=XA^T\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}AY=B\\Y^T=AX^T\end{cases}$，

由 $(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&2&0\\1&0&1&1&0&1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&2&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$，得 $Y=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

再由 $(A,Y^T)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&2&0\\1&0&1&1&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&2&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$，得 $X^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

五、(本题 10 分) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关。

证明：由题设知 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

$$A=\begin{pmatrix}+1&+1&+1&+1\\+1&-1&+1&-1\\+1&+1&-1&-1\\+1&-1&-1&+1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，即 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。

六、(本题 10 分) 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 的秩及其极大无关组。

解：由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&+1\\0&1&0&-1\\0&0&1&+1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，故

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其极大无关组，且 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$。

七、(本题 10 分) 求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=7\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=-3\end{cases}$ 的通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&7\\1&5&-9&-8&-3\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}4&0&-6&3&8\\0&4&-6&-7&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，故原方程等价于

$\begin{cases}4x_1=+8+6x_3-3x_4\\4x_2=-4+6x_3+7x_4\end{cases}$，从而原方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-3\\7\\0\\4\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2\in R$ 任意。

八、(本题 10 分) 求下面方阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值及相应的特征向量。

解：由于 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}4 & 0 & 4+\lambda-\lambda^2\\ 0 & 2 & \lambda\\ 0 & 0 & (\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}$，故 A 的特征值为

$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$，$A$ 对应 λ_k 的特征向量 $\alpha_k\neq 0$ 可由 $(\lambda_k E-A)\alpha_k=0$ 确定，即

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$，解之得

$$\alpha_1=C_1\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ +2\end{pmatrix},\ \alpha_2=C_2\begin{pmatrix}+2\\ +1\\ -2\end{pmatrix},\ \alpha_3=C_3\begin{pmatrix}+2\\ -2\\ +1\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2,C_3\neq 0$。

历届硕士研究生招生线性代数试题详解

1、设方程组 I：$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$，而方程组 II 的通解为 $X=k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$，求

(1)、方程组 I 的通解； (2)、方程组 I 与 II 的公共解。

解：由题设知

(1)、方程组 I：$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2=-x_1 \\ x_4=x_3 \end{cases}$，故方程组 I 的通解为 $X=C_1(1,-1,0,0)^T+C_2(0,0,1,1)^T$；

(2)、设方程组 I 与 II 的公共解为 X，则存在 $C_1,C_2,k_1,k_2\in R$，使

$X=C_1(1,-1,0,0)^T+C_2(0,0,1,1)^T=k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$，即

$\begin{cases} k_2+C_1=0 \\ k_1+2k_2+C_1=0 \\ k_1+2k_2-C_2=0 \\ k_2-C_2=0 \end{cases}$，解之得 $\begin{cases} k_1=-C \\ k_2=C \\ C_1=-C \\ C_2=C \end{cases}$，即其通解为 $X=C(-1,1,1,1)^T$，其中 C 任意。

2、设方程组 I：$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ \vdots \\ b_{1,2n} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ \vdots \\ b_{2,2n} \end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ \vdots \\ b_{n,2n} \end{pmatrix}$，求方程

组 II：$\begin{cases} b_{1,1}y_1+b_{1,2}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{2,1}y_1+b_{2,2}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n,1}y_1+b_{n,2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$ 的通解。

解：令 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,2n} \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{2,2n} \end{pmatrix},\dots,\ \alpha_n=\begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,2n} \end{pmatrix},\ \beta_1=\begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ \vdots \\ b_{1,2n} \end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ \vdots \\ b_{2,2n} \end{pmatrix},\dots,\ \beta_n=\begin{pmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ \vdots \\ b_{n,2n} \end{pmatrix}$，

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),\ B=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n),\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$，则由题设知

$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=r(B)=n$，且 $\alpha_i^T\beta_j=\beta_j^T\alpha_i=0,\ i,j=1,2,\dots,n$，

即 $A^TB=B^TA=0$，

而方程组 I：$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases} \Longleftrightarrow A^TX=0$，

方程组 II：$\begin{cases} b_{1,1}y_1+b_{1,2}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{2,1}y_1+b_{2,2}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n,1}y_1+b_{n,2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases} \Longleftrightarrow B^TY=0$，

故 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,2n} \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{2,2n} \end{pmatrix}$，...，$\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,2n} \end{pmatrix}$ 方程组 II 的基础解系，从而其通解为

$$Y=C_1\alpha_1+C_2\alpha_1+\cdots+C_n\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,2n} & a_{2,2n} & \cdots & a_{n,2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}。$$

3、设 $0\neq a,b,c\in R$，则平面上三条直线 $ax+2by+3c=0$、$bx+2cy+3a=0$、$cx+2ay+3b=0$ 相交于一点 $\Longleftrightarrow a+b+c=0$。

解：令 $A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$，$\beta=-3\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则由题设知所给三条直线相交于一点的充要条件为

方程组 $\begin{cases} ax+2by+3c=0 \\ bx+2cy+3a=0 \\ cx+2ay+3b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow AX=\beta$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,\beta)=2$，而

$$\det(A,\beta)=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & 2(a+b+c) & -3(a+b+c) \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2(c-b) & 3(b-a) \\ 0 & 2(a-c) & 3(c-b) \end{vmatrix}$$

$$=6(a+b+c)\left[(b-c)^2+(a-b)(a-c)\right]=6(a+b+c)\left[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ac)\right]$$

$$=3(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right],$$

(1)、若 $a+b+c=0$，其中 $0\neq a,b,c\in R$，则 $\det(A,\beta)=0$，且 (A,β) 与 A 都有一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & -2(a+b) \end{vmatrix}=-2(a^2+ab+b^2)\neq 0$$，从而 $r(A)=r(A,\beta)=2$，

故所给方程组 $\begin{cases} ax+2by+3c=0 \\ bx+2cy+3a=0 \\ cx+2ay+3b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow AX=\beta$ 有唯一解，即三条直线相交于一点；

(2)、若 $a=b=c\neq 0$，则 $(A,\beta)=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} a & 2a & -3a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $r(A)=r(A,\beta)=1$，

故所给方程组 $\begin{cases} ax+2by+3c=0 \\ bx+2cy+3a=0 \\ cx+2ay+3b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow AX=\beta$ 有无穷多解，即三条直线重合；

故由(1)、(2)知三条直线相交于一点 $\Longleftrightarrow a+b+c=0$。

4、设 $a\in R$，求方程组 $\begin{cases} (1+a)x_1 & +x_2 & +x_3 & +\cdots+ & x_{n-1} & +x_n & =0 \\ 2x_1 & +(2+a)x_1 & +2x_3 & +\cdots+ & 2x_{n-1} & +2x_n & =0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ nx_1 & +nx_2 & +nx_3 & +\cdots+ & nx_{n-1} & +(n+a)x_n & =0 \end{cases}$ 的解。

解：方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix}$$，将各行加到第一行，得

$$A_1=\begin{pmatrix} a+\frac{1}{2}n(n+1) & a+\frac{1}{2}n(n+1) & a+\frac{1}{2}n(n+1) & \cdots & a+\frac{1}{2}n(n+1) & a+\frac{1}{2}n(n+1) \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix}$$。

(1)、若 $a\neq 0$或$-\frac{1}{2}n(n+1)$，则

$$A \sim A_1 \xleftrightarrow[k=2,3,\ldots,n]{\text{第}k\text{行减去第1行的}k\text{倍}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

此时 $r(A)=n$，方程组只有平凡解 $X=0$；

(2)、若 $a=-\dfrac{1}{2}n(n+1)$，则

$$A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1/n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -2/n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -3/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -(n-1)/n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $r(A)=n-1$，方程组的通解为 $X=C(1,2,\ldots,n)^T$，其中 C 任意；

(3)、若 $a=0$，则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $r(A)=1$，方程组的通解为

$$X=C_1(1,-1,0,0,\dots,0,0)^T+C_2(1,0,-1,0,\dots,0,0)^T+\cdots+C_{n-1}(1,0,0,0,\dots,0,-1)^T,$$

其中$C_1,C_2,\dots,C_{n-1}$为任意常数。

5、设$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$有一个二重特征根，求$a$的值，并问$A$能否相似对角化。

解：$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1&-a&\lambda-5\\0&\lambda-a-4&\lambda-2\\0&(a\lambda-a+2)&-(\lambda-2)(\lambda-4)\end{pmatrix}$

$$\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1&-a&\lambda-5\\0&\lambda-(a+4)&\lambda-2\\0&(\lambda-4)^2+(3a+2)&0\end{pmatrix},$$

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-a&\lambda-5\\0&\lambda-(a+4)&\lambda-2\\0&(\lambda-4)^2+(3a+2)&0\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left[(\lambda-4)^2+(3a+2)\right],$$

由于A有一个二重特征根，故必有如下两种情形之一

(1)、$a=-2/3$且$f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$，此时其三个特征值为$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=4$，而

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1&2/3&\lambda-5\\0&\lambda-10/3&\lambda-2\\0&(\lambda-4)^2&0\end{pmatrix},$$

A对于特征值λ_k的特征向量X_k可由$(\lambda_kE-A)X_k=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-1&2/3&\lambda_k-5\\0&\lambda_k-10/3&\lambda_k-2\\0&(\lambda_k-4)^2&0\end{pmatrix}X_k=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$求

得$X_1=C_1\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\ X_2=C_2\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix},\ X_3=C_3\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$，其中$C_1,C_2,C_3\neq0$任意，

故A不存在线性无关的三个特征向量，从而此时A不能相似对角化；

(2)、$a=-2$且$f(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，此时其三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=6$，而

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1&2&\lambda-5\\0&\lambda-2&\lambda-2\\0&(\lambda-2)(\lambda-6)&0\end{pmatrix},$$

A 对于特征值 λ_k 的特征向量 X_k 可

$$(\lambda_k E-A)X_k=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda_k-5 \\ 0 & \lambda_k-2 & \lambda_k-2 \\ 0 & (\lambda_k-2)(\lambda_k-6) & 0 \end{pmatrix} X_k=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 求得

$X_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，这三个特征向量是线性无关的，只要取

$P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，即 A 可以相似对角化。

6、设 a,b,c 不全为0，且 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$满足 $AB=0$，求方程 $AX=0$ 的通解。

解：由 $AB=0$ 得 $\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 3a+6b+kc=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a=-(2b+3c) \\ (k-9)c=0 \end{cases}$，且 b,c 不同时为0。

(1)、若 $k\neq 9$，则 $c=0,\ a=-2b\neq 0$，$r(B)=2$，$1\le r(A)\le 3-r(B)=1$，即 $r(A)=1$，故 $AX=0$ 的基础解系中包含的解向量之个数为 $3-r(A)=2$，而 $X_1=(1,2,3)^T$, $X_2=(0,c,-b)^T$ 是其两个线性无关的特解，故 $AX=0$ 的通解为 $X=C_1X_1+C_2X_2=C_1(1,2,3)^T+C_2(0,c,-b)^T$；

(2)、若 $k=9, r(A)=1$，则 $AX=0$ 的基础解系中包含的解向量之个数为 $3-r(A)=2$，而 $X_1=(1,2,3)^T$, $X_2=(0,c,-b)^T$ 是其两个线性无关的特解，故 $AX=0$ 的通解为

$X=C_1X_1+C_2X_2=C_1(1,2,3)^T+C_2(0,c,-b)^T$；

(3)、若 $k=9, r(A)=2$，则 $AX=0$ 的基础解系中包含的解向量之个数为 $3-r(A)=1$，而 $X_1=(1,2,3)^T$ 是非零的特解，故 $AX=0$ 的通解为 $X=C_1X_1=C_1(1,2,3)^T$。

故 $AX=0$ 的通解为 $X=\begin{cases} C_1(1,2,3)^T+C_2(0,c,-b)^T, & 若r(A)=1 \\ C_1(1,2,3)^T, & 若r(A)=2 \end{cases}$。

7、设非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=-1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解，则

(1)、系数矩阵 A 的秩为 $r(A)=2$； (2)、求 a,b 的值及方程组的通解。

解：原方程组即 $AX=\beta$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&-b\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，不妨设 X_1,X_2,X_3 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的三个线性无关的解，则 $Y_1=X_2-X_1,Y_2=X_3-X_1$ 是齐次方程组 $AY=0$ 的两个解，且 $(Y_1,Y_2)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，而 $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 为列满秩阵，故 Y_1,Y_2 线性无关，故 $AY=0$ 的基础解系中包含的解向量的个数 $4-r(A)\geq 2$，即 $r(A)\leq 4-2=2$。

又由于 A 中有一个 2 阶子式 $D=\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故 $r(A)\geq 2$，故必有 $r(A)=2$；

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\4&3&5&-1&1\\a&1&3&-b&-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第3行减去第1行的}a\text{倍}]{\text{第2行减去第1行的4倍}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&1&-5&-3\\0&1-a&3-a&-(a+b)&-(a+1)\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\text{第2行乘以}(1-a)\text{加到第3行}]{\text{第2行加到第1行}}\begin{pmatrix}1&0&2&-4&-2\\0&-1&1&-5&-3\\0&0&-2(a-2)&-(5+b-4a)&2(a-2)\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\text{第2、3行乘以}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&2&-4&-2\\0&1&-1&5&3\\0&0&2(a-2)&(5+b-4a)&-2(a-2)\end{pmatrix},$$

由于 $r(A,\beta)=r(A)=2$，故 $a-2=5+b-4a=0$，即 $a=2,\ b=3$，且此时

$$AX=\beta\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_3-4x_4=-2\\x_2-x_3+5x_4=3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-2-2x_3+4x_4\\x_2=3+x_3-5x_4\end{cases}$$，故其通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

8、设三阶实对称方阵 A 的各行元素之和均为 3，且 $\alpha_1=(1,-2,1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $AX=0$ 的解，求

(1)、矩阵 A 的特征值与特征向量； (2)、求正交矩阵 P，使 P^TAP 为对角阵。

解：由于三阶实对称方阵 A 的各行元素之和均为 3，故 $\alpha_3=(1,1,1)^T$ 满足 $A\alpha_3=3\alpha_3$，

又 $A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\cdot\alpha_2$，故 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3$ 为 A 的三个特征值，

而$\alpha_1=(1,-2,1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$为A对应于$\lambda_1=\lambda_2=0$的两个线性无关的特征向量，

$\alpha_3=(1,1,1)^T$为A对应于$\lambda_3=3$的一个特征向量。

(1)、矩阵A对应于特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$的特征向量为$\alpha=C_1(1,-2,1)^T+C_2(0,-1,1)^T$，

A对应于特征值$\lambda_3=3$的特征向量为$\beta=C_3(1,1,1)^T$，其中C_1,C_2不全为0，$C_3\neq 0$；

(2)、取$\beta_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T$，$\beta_2=\dfrac{(\alpha_1^T\alpha_1)\alpha_2-(\alpha_1^T\alpha_2)\alpha_1}{\|(\alpha_1^T\alpha_1)\alpha_2-(\alpha_1^T\alpha_2)\alpha_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$，

$$\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,\quad P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-2&0&\sqrt{2}\\1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

则P为正交阵，且$P^TAP=diag\{0,0,3\}$。

9、设方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$与$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求$a$的值及其公共解。

解：由题设知方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$有解，而

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{交换行}]{\text{各行减去第一行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\text{第4行减去第2行的3倍}]{\text{第3行减去第2行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&-(a-1)\\0&0&a^2-1&-3(a-1)\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第4行减去第3行的}(a+1)\text{倍}]{\text{第1行减去第2行}}\begin{pmatrix}1&0&1&-(a-1)\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&-(a-1)\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}$$

$r(A,\beta)=r(A)\Longleftrightarrow(a-1)(a-2)=0\Longleftrightarrow a=1或2$，且

(1)、若$a=1$，则$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行等价}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时原方程组的公共解为

$X=(x_1,x_2,x_3)^T=C(1,0,-1)^T$，其中$C\in R$任意；

(2)、若$a=2$，则$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时原

方程组的公共解为$X=(x_1,x_2,x_3)^T=(0,1,-1)^T$。

10、设三阶实对称方阵A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，且$\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$是$A$对应于$\lambda_1$的特征

向量，而$B=A^5-4A^3+E$，则

(1)、α_1是矩阵B的特征向量，并求B的所有特征值与特征向量； (2)、求矩阵B。

解：由于三阶实对称方阵A的特征值互异，故A对应于三个特征值的特征向量两两正交，从而A对应于

$\lambda_2=2,\lambda_3=-2$的特征向量$X=(x_1,x_2,x_3)^T$满足$x_1-x_2+x_3=\sqrt{3}\alpha_1^TX=0$，其通解为

$X=(x_1,x_2,x_3)^T=C_1(1,2,1)^T+C_2(1,0,-1)^T$，故可取$A$对应于$\lambda_2=2,\lambda_3=-2$的特征向量分别为

$\alpha_2=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T+\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=-\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T+\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$，其中$\theta\in R$，

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta&\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\\-\sqrt{2}&2\cos\theta&-2\sin\theta\\\sqrt{2}&\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta&-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\end{pmatrix}$，

$D=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，则$P$为正交阵，$D^5-4D^3+E=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且

$P^TAP=D$，即$A=PDP^T$，故$B=A^5-4A^3+E=P(D^5-4D^3+E)P^T=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$。

11、设$A=\begin{pmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{pmatrix}_{n\times n}$，$b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则

(1)、$|A|=(n+1)a^n$； (2)、求方程组$AX=b$的解。

解：由题设知

(1)、令 $D_n=|A|$，则 $D_1=2a$， $D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，而 $n\geq 3$ 时，有

$$D_n=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n=2a\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & \\ & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2a\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}-a^2\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-2}=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2},$$

假设 $n\leq m$ 时，有 $D_n=(n+1)a^n$，则

$$D_{m+1}=2aD_m-a^2D_{m-1}=2a\cdot(m+1)a^m-a^2\cdot ma^{m-1}=(m+2)a^{m+1},$$

故由数学归纳法知 $\forall n\geq 1$，有 $D_n=(n+1)a^n$；

(2)、方程组 $AX=b$ 写为分量形式即 $\begin{cases}2ax_1+x_2=1\\ a^2x_{k-1}+2ax_k+x_{k+1}=0, \quad n=2,3,\ldots,n-1\\ a^2x_{n-1}+2ax_n=0\end{cases}$，故

$$\begin{cases}x_2=1-2ax_1\\ x_3=-2ax_2-a^2x_1=-2a(1-2ax_1)-a^2x_1=-2a+3a^2x_1\\ x_4=-2ax_3-a^2x_2=-2a(-2a+3a^2x_1)-a^2(1-2ax_1)=3a^2-4a^3x_1\end{cases},$$

假设 $1\leq k\leq m$ 时，有 $x_k=(k-1)(-a)^{k-2}+k(-a)^{k-1}x_1$，则

$$\begin{aligned}x_{m+1}&=-2ax_m-a^2x_{m-1}\\ &=2(-a)\left[(m-1)(-a)^{m-2}+k(-a)^{m-1}x_1\right]-(-a)^2\left[(m-2)(-a)^{m-3}+(m-1)(-a)^{m-2}x_1\right]\\ &=m(-a)^{m-1}+(m+1)(-a)^m x_1,\end{aligned}$$

故 $\forall k=1,2,\ldots,n$，有 $x_k=(k-1)(-a)^{k-2}+k(-a)^{k-1}x_1$，将其代入 $a^2x_{n-1}+2ax_n=0$ 得

$$0=a^2x_{n-1}+2ax_n=a^2\left[(n-2)(-a)^{n-3}+(n-1)(-a)^{n-2}x_1\right]+2a\left[(n-1)(-a)^{n-2}+n(-a)^{n-1}x_1\right]$$

$$=-n(-a)^{n-1}-(n+1)(-a)^n x_1=-(-a)^{n-1}\left[n-(n+1)ax_1\right],$$

故 $x_1=\begin{cases}C, & 若a=0\\ \dfrac{n}{(n+1)a}, & 若a\neq 0\end{cases}$，代入 $x_k=(k-1)(-a)^{k-2}+k(-a)^{k-1}x_1$ 得

$$x_k=(k-1)(-a)^{k-2}+k(-a)^{k-1}x_1=\begin{cases}C, & 若a=0,k=1\\ 1, & 若a=0,k=2\\ 0, & 若a=0,3\le k\le n\\ \dfrac{n+1-k}{a(n+1)}(-a)^{k-1}, & 若a\neq 0,k=1,2,\dots,n\end{cases}。$$

①、若 $a=0$，则方程组有无穷多组解 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$；

②、若 $a\neq 0$，则方程组有唯一解 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_k\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\dfrac{1}{a(n+1)}\begin{pmatrix}n\\(n-1)(-a)\\(n-2)(-a)^2\\ \vdots\\(n+1-k)(-a)^{k-1}\\ \vdots\\(-a)^{n-1}\end{pmatrix}$。

12、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，求 $A\alpha_2=\alpha_1$，$A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的解，并证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

解：由题设知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，且

$$(A,\alpha_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第3行除以}(-2)]{\text{第1行加到第2行}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&2&1&-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第3行加到第1行}]{\text{第1行乘以2}}\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\0&0&0&0\\0&2&1&-1\end{pmatrix}$$

$\xleftrightarrow{\text{交换第2,3行}}\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $A\alpha_2=\alpha_1$ 的解为 $\alpha_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\dfrac{C_1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}C_1+1\\-(C_1+1)\\2C_1\end{pmatrix}$；

$$(A^2,\alpha_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第3行减去第1行的2倍}]{\text{第1行加到第2行}}\begin{pmatrix}2&2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的解为 $\alpha_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{C_2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{C_3}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+C_2\\-C_2\\C_3\end{pmatrix}$，其中 $C_1,C_2,C_3\in R$ 任意；

$$(\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&C_1+1&1+C_2\\-1&-(C_1+1)&-C_2\\2&2C_1&C_3\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第2行减去第1行的2倍}]{\text{第1行加到第2行}}\begin{pmatrix}1&C_1+1&1+C_2\\0&0&1\\0&-2&C_3-2-2C_2\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\text{第3行减去第2行的}(C_3-2-2C_2)\text{倍}]{\text{第1行减去第2行的}(C_1+1)\text{倍}}\begin{pmatrix}1&C_1+1&0\\0&0&1\\0&-2&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第3行除以}(-2)]{\text{第3行乘}(C_1+1)/2\text{后加到第1行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\text{交换第2、3行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

13、设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $AX=b$ 的通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{交换第1、3行}}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{pmatrix}$

$$\xleftrightarrow[\text{第2行加到第3行}]{\text{第3行减去第1行的}\lambda\text{倍}}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{pmatrix},$$

(1)、若 $\lambda\neq\pm1$，则

$$(A,b)\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&(\lambda a-2)/(\lambda^2-1)\\0&1&0&1/(\lambda-1)\\0&0&1&(\lambda-a-1)/(\lambda^2-1)\end{pmatrix},$$

故 $r(A,b)=3=r(A)$，此时方程组 $AX=b$ 有唯一解 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda^2-1}\begin{pmatrix}\lambda a-2\\\lambda+1\\\lambda-a-1\end{pmatrix}$；

(2)、若 $\lambda=1$，则 $(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故$r(A,b)=2>1=r(A)$，此时方程组$AX=b$无解；

(3)、若$\lambda=-1$，$a\neq-2$，则

$$(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

故$r(A,b)=3>2=r(A)$，此时方程组$AX=b$无解；

(4)、若$\lambda=-1$，$a=-2$，则

$$(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}2&0&-2&3\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$r(A,b)=2=r(A)$，此时方程组$AX=b$有无穷多组解$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。

14、设实对称阵$A\in R^{3\times3}$的秩$r(A)=2$，且$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，求$A$的特征值、特征向量及$A$。

解：取$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \alpha_1=(1,0,1)^T,\ \alpha_2=(1,0,-1)^T$，则由题设知$A\alpha_k=\lambda_k\alpha_k,k=1,2$，即

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \alpha_1=(1,0,1)^T,\ \alpha_2=(1,0,-1)^T$分别为$A$的两个特征值及其相应的特征向量，

由于$r(A)=2$，故A的第三个特征值为$\lambda_3=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-|A|=0$，且$A$相应于特征值$\lambda_3=0$的特征

向量$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$与前两个特征向量都正交，即$\begin{cases}x_1+x_3=\alpha_3^T\alpha_1=0\\x_1-x_3=\alpha_3^T\alpha_2=0\end{cases}$，故$\alpha_3=(0,1,0)^T$，

令$P=(\alpha_1/\|\alpha_1\|,\alpha_2/\|\alpha_2\|,\alpha_3/\|\alpha_3\|)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$D=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$A=PDP^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}。$$

15、设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$不能由向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$线性表示，

求a的值，并将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

解：由于$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性

表示，故$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\le 2$，而$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-5\end{pmatrix}$，故必有$a=5$，且此时

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{第3行减去第1行}}\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\text{第3行减去第2行}}\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第2行减去第3行的3倍}]{\text{第1行减去第3行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix},$$

故$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3\\\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2\\\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3\end{cases}$。

16、设$A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，问$a,b$为和值时，方程$AX-XA=B$有解并求其解。

解：设$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，代入$AX-XA=B$，得

$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=1\\ax_1-x_2-ax_4=-1\\x_2-ax_3=0\\x_2-ax_3=b\end{cases}$，其增广阵$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\a&-1&0&-a&-1\\0&1&-a&0&0\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$，

只有$a=-1,b=0$时，$r(A,\beta)=r(A)=2$，方程组$AX-XA=B$有解，且此时该方程组等价于

$\begin{cases}x_1=1+x_3+x_4\\x_2=-x_3\end{cases}$，其解为$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+C_1+C_2&-C_1\\C_1&C_2\end{pmatrix}$，其中$C_1,C_2\in R$任意。

17、设$\lambda_i\in R,\ \alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})^T\in R^n,\ i=1,2,\dots,n$，且

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$，则

(1)、二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$的系数矩阵为$A=\sum\limits_{1\le i\le n}\lambda_i\alpha_i\alpha_i^T$；

(2)、若$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$为$R^n$的标正基，则$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$的正交标准形为$\sum\limits_{1\le i\le n}\lambda_iy_i^2$。

证明：令$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in R^n$，则由题设知

(1)、 $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i^TX)^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i^TX)^T(\alpha_i^TX)$

$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX^T(\alpha_i\alpha_i^T)X=X^T\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i\alpha_i^T)X=X^TAX$，其中 $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i\alpha_i^T)$；

(2)、若 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 为 R^n 的标正基，则 $\alpha_i^T\alpha_j=\delta_{ij}$，$i,j=1,2,...,n$，故

$A\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i\alpha_i^T)\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i(\alpha_i^T\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{ij}\alpha_i=\lambda_j\alpha_j$，$j=1,2,...,n$，

故 λ_j 是 $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i\alpha_i^T)$ 的特征值，α_j 是 $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_i\alpha_i^T)$ 相应于特征值 λ_j 的特征向量，而

$P=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 为正交阵，且 $AP=PD$，$P^TAP=D$，其中 $D=diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$，令

$Y=(x_1,x_2,...,x_n)^T=P^TX$，即 $X=PY$，则

$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX=Y^T(P^TAP)Y=Y^TDY=\sum_{1\le i\le n}\lambda_iy_i^2$。

18、证明 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}_{n\times n}$ 相似。

证明：由题设知

$$|\lambda E_n-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1&-1\\-1&-1&\cdots&-1&\lambda-1\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}\lambda-n&\lambda-n&\cdots&\lambda-n&\lambda-n\\-1&\lambda-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1&-1\\-1&-1&\cdots&-1&\lambda-1\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1&-1\\-1&-1&\cdots&-1&\lambda-1\end{vmatrix}_{n\times n}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\&\lambda&&&\\&&\ddots&&\\&&&\lambda&\\&&&&\lambda\end{vmatrix}_{n\times n}=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

$$|\lambda E_n - B| = \begin{vmatrix} \lambda & & & & -1 \\ & \lambda & & & -2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda & -(n-1) \\ & & & & \lambda - n \end{vmatrix}_{n\times n} = \lambda^n(\lambda - n),$$

故 A,B 有相同的特征值为 $\lambda_1 = n,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$，令

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\dots,\alpha_n = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\dots,\beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 都是线性无关的向量组，且 $A\alpha_k = \lambda_k\alpha_k$，$B\beta_k = \lambda_k\beta_k$，$k \in \underline{n}$，

故 A,B 都各自有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$，令

$P = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),\ Q = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n),\ D = diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$，则

$P^{-1}AP = D = Q^{-1}BQ$，即 $(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B$，故 A 与 B 相似。

19、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基底，$\beta_1 = 2\alpha_1 + k\alpha_2$，$\beta_2 = 2\alpha_2$，$\beta_3 = (k+1)\alpha_1 + \alpha_3$，则

(1)、β_1,β_2,β_3 是 R^3 的一组基底；

(2)、求 $0 \ne X \in R^3$，使 X 在基底 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同。

解：令 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 \\ k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 \\ k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{行} \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 4 & -k(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，即 $r(A) = 3$，且由题设

知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 3$，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，故

(1)、$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 3$，即 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的一组基底；

(2)、若存在 $0 \ne X \in R^3$，使 X 在基底 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，即存在 $x_1,x_2,x_3 \in R$，使

$X = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \left[2x_1 + (k+1)x_3\right]\alpha_1 + (kx_1 + 2x_2)\alpha_2 + x_3\alpha_3$，即

$\begin{cases} x_1+(k+1)x_3=0 \\ kx_1+x_2=0 \end{cases}$ 有非平凡解，其系数矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & -k(k+1) \end{pmatrix}$，

故上述方程组的解为 $x_1=-C(k+1),\quad x_2=Ck(k+1),\quad x_3=C$，所求向量为

$X=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=C\left[\alpha_3+k(k+1)\alpha_2-(k+1)\alpha_1\right]$。

20、设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3=0$，求

(1)、参数 a 的值； (2)、方程 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$ 的解。

解：$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-a & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-a \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} -1 & \lambda-a & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-a \\ 0 & 0 & (\lambda-a)^3 \end{pmatrix}$，

故 A 的 $Jordan$ 标准形为 $J=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=aE+B$，其中 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

即存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=J$，从而 $A^3=0 \Longleftrightarrow J^3=0$。

(1)、由 $\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}=a^3E+3a^2B+3aB^2+B^3=J^3=0$，得 $a=0$，此时 $P^{-1}AP=J=B$；

(2)、$X-XA^2-AX+AXA^2=E \Longleftrightarrow (E-A)X(E-A^2)=E \Longleftrightarrow (E-B)X(E-B^2)=E$

$\Longleftrightarrow X=(E-B)^{-1}(E-B^2)^{-1}=\left[(E-B^2)(E-B)\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$，

而 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

从而 $X=\left[(E-B^2)(E-B)\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

21、设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求

(1)、参数 a,b 的值； (2)、可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解：由题设知

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & -2 & 3\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-a\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1 & 2 & \lambda-a\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ \lambda & -2 & 3\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1 & 2 & \lambda-a\\ 0 & \lambda-1 & \lambda+3-a\\ 0 & 2(\lambda-1) & \lambda^2-a\lambda+3\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1 & 2 & \lambda-a\\ 0 & \lambda-1 & \lambda+3-a\\ 0 & 0 & \lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3\end{pmatrix},$$

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 0 & \lambda-b & 0\\ 0 & -3 & \lambda-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-b)\end{pmatrix},$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3\right],$$

$$f_B(\lambda)=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2(\lambda-b)\text{。}$$

(1)、由于 A 与 B 相似，故 $(\lambda-1)^2(\lambda-b)=f_B(\lambda)=f_A(\lambda)=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3\right]$，故

$$\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3=(\lambda-1)(\lambda-b)=\lambda^2-(b+1)\lambda+b\Longleftrightarrow\begin{cases}a+2=b+1\\ 2a-3=b\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}a-b=-1\\ 2a-b=3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=5\end{cases};$$

(2)、由(1)知 $\lambda E-A\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1 & 2 & \lambda-a\\ 0 & \lambda-1 & \lambda+3-a\\ 0 & 0 & \lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & \lambda-4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-5)\end{pmatrix}$，

故 A 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=1$，而相应的特征向量满足

$$(\lambda_k E-A)X_k=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & \lambda_k-4\\ 0 & \lambda_k-1 & \lambda_k-1\\ 0 & 0 & (\lambda_k-1)(\lambda_k-5)\end{pmatrix}X_k=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad k=1,2,3\text{，即}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_1=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_1=0\Longleftrightarrow X_1=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_2=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_2=0\Longleftrightarrow X_2=C_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},$$

取 $P=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&2&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

22、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-(a+1)&-2\end{pmatrix}$，求方程 $AX=B$ 的解。

解：由题设知方程 $AX=B$ 的增广矩阵为

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-(a+1)&-2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{pmatrix},$$

(1)、若 $a\neq 1,-2$，则 $(A,B)\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&3a/(a+2)\\0&1&0&0&(a-4)/(a+2)\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}$，故 $r(A,B)=3=r(A)$，

此时方程组 $AX=B$ 有唯一解 $X=\frac{1}{a+2}\begin{pmatrix}a+2&3a\\0&a-4\\-(a+2)&0\end{pmatrix}$；

(2)、若 $a=1$，则 $(A,B)\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $r(A,B)=2=r(A)$，

此时方程组 $AX=B$ 有无穷多个解 $X=\begin{pmatrix}+1&+1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0&0\\+1&+1\\-1&-1\end{pmatrix}$，其中 $C\in R$ 任意；

(3)、若 $a=-2$，则 $(A,B)\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 $r(A,B)=3>2=r(A)$，

此时方程组 $AX=B$ 无解。

23、设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 满足 $B^2=BA$。

(1)、求矩阵 A^{99}； (2)、将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示出来。

解：由于 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}-2&\lambda+3&0\\0&(\lambda+1)(\lambda+2)&-2\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，故 A 的特征多项式及特征值分

别为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$，$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=0$，而相应的特征向量满足

$$\begin{pmatrix}-2 & \lambda_k+3 & 0\\ 0 & (\lambda_k+1)(\lambda_k+2) & -2\\ 0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}X_k=0,\ k=1,2,3，即$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_1=0,\ \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_2=0,\ \begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X_3=0,$$

故 $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$，令 $D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则

$$(P,E)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 4 & -2 & -4\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

故 $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，且 $A=PDP^{-1}$。

(1)、$A^{99}=PD^{99}P^{-1}=-P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{99}\end{pmatrix}P^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1+3\times 2^{99}\\ -4 & 4 & 2+2\times 2^{99}\\ 0 & 0 & 2\times 2^{99}\end{pmatrix}$；

(2)、由 $B^2=BA$ 得 $B^3=B\cdot B^2=B^2A=BA^2$，$B^4=B\cdot B^3=B^2A^2=BA^3$，$\ldots,B^{100}=BA^{99}$，故

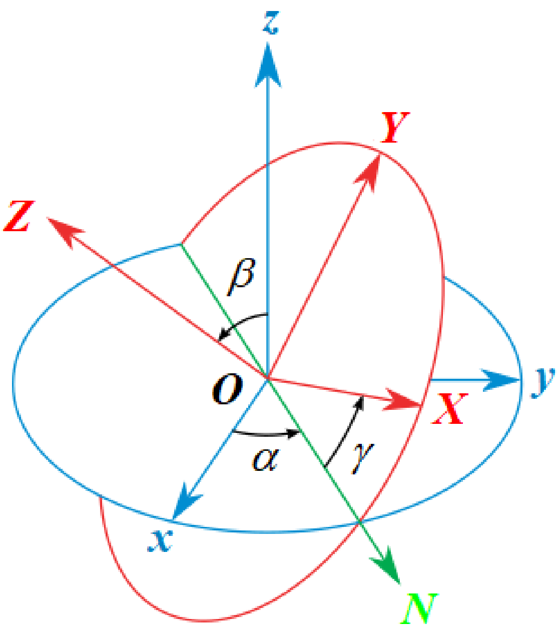
$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=B^{100}=BA^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=-\frac{1}{2}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1+3\times 2^{99}\\ -4 & 4 & 2+2\times 2^{99}\\ 0 & 0 & 2\times 2^{99}\end{pmatrix}，即$$

$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\ \ \beta_2=-(\alpha_1+2\alpha_2),\ \ \beta_3=-\left[(2^{-1}+3\times 2^{98})\alpha_1+(1+2^{99})\alpha_2+2^{99}\alpha_3\right]$。

24、欧拉角与三阶正交阵

欧拉角是用来唯一地确定定点转动物体位置的三个独立角参量，由章动角 β、进动角 α 和自转角 γ 组成，为欧拉首先提出，故得名。

如图所示，由定点 O 作出固定坐标系 $Oxyz$ 以及固连于刚体的坐标系 $OXYZ$，以轴 Oz 和 OZ 为基本轴，其垂直面 Oxy 和 OXY 为基本平面，由轴 Oz 到 OZ 间的角度 β 称为章动角，平面 zOZ 的垂线 ON 称为节线，它又是基本平面 Oxy 和 OXY 的交线。在右手坐标系中，由 ON 的正端看，角 β 应按逆时针方向计量。由固定轴 Ox 到节线 ON 的角度 α 称为进动角，由节线 ON 到动轴 OX 的角度 γ 称为自转角。由轴



Oz 和 OZ 正端看，角 α,γ 也都按逆时针方向计量。

三个欧拉角是不对称的，在几个特殊位置上具有不确定性(当 $\beta=0$ 时，γ 和 α 就分不开)。对不同的问题，宜取不同的轴作基本轴，并按不同的方式量取欧拉角。

令 $OXYZ$ 的原始位置重合于 $Oxyz$，经过相继绕 Oz、ON 和 OZ 的三次转动 $\sigma_1(\alpha)$、$\sigma_2(\beta)$、$\sigma_3(\gamma)$ 后，刚体将转到图示的任意位置，则刚体上任一点 Q 在两个坐标系中的坐标 x,y,z 和 X,Y,Z 的关系为：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=R(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$，其中 $R(\alpha,\beta,\gamma)=\sigma_3(\gamma)\sigma_2(\beta)\sigma_1(\alpha)$，而

$$\sigma_3(\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_2(\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},\quad \sigma_1(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta & \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

注：根据 n 阶正交阵的定义知，正交阵的每一行向量都是单位向量，且任意两个行向量都正交，故

(1)、n 阶正交阵的独立元的个数为 $n^2-(1+2+\cdots+n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；特别二阶正交阵的独立元的个数为 2，三阶正交阵的独立元的个数为 3；

(2)、二阶正交阵必为 $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (或其交换其行、列后的矩阵)；

(3)、三阶正交阵必为如下的旋转矩阵(或其交换其行、列后的矩阵)：

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta & \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}。$$

25、能否找到一些变换，使之将对角阵 $A=diag\{a_1,a_2,...,a_n\}$ 化为：

(1)、向量 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)^T$?

(2)、向量 $\beta=(a_n,a_{n-1},...,a_1)^T$?

(3)、数值 $m=a_1+a_2+\cdots+a_n$?

解：可以，取 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in R^n$， $B=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\in R^{n\times n}$，则 $A\xi=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\alpha$，

而 $BA\xi=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\\\vdots\\a_1\end{pmatrix}=\beta$，

$$\xi^T A\xi=(1,1,...,1)\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(1,1,...,1)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1+a_2+\cdots+a_n=m。$$