主要内容

- 复数的几种表示及运算（包括求极限）；区域，曲线；初等复变函数求值。
- (1) 利用Cauchy – Riemann 方程判断可导与解析，求导数；

  (2) 构造解析函数。
- Cauchy 积分定理， 利用Cauchy 积分公式和高阶导数公式计算闭路积分。
- 判断孤立奇点的类型。
- 求函数的洛朗展开式。
- 留数：留数计算（包括无穷远点），利用留数计算闭路积分。
- 求函数的Fourier 变换，δ函数的性质，卷积。
- 利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)。

一、构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v（或者已知虚部 v，求实部 u），

使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

注意 必须首先检验 u **或** v **是否为调和函数**。

方法

- **偏积分法**
- **全微分法（略）**

一、构造解析函数

方法 • **偏积分法（仅考虑已知实部 u 的情形）**

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行**(偏)**积分得：

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \tilde{v}(x,y) + \varphi(x), \quad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定。

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$. P38 例2.6 修改

解 (1) 验证 $u(x,y)$为调和函数

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$,

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法一：偏积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$$\Rightarrow\ v=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

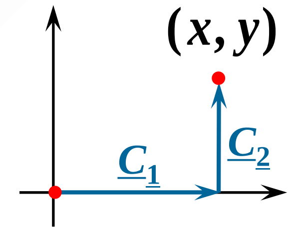
由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy,\quad \Rightarrow\ \varphi'(x)=0,$

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=c,\quad \Rightarrow\ v(x,y)=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法二：全微分法



由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy,$

$$\Rightarrow \mathrm{d}v=v'_x\mathrm{d}x+v'_y\mathrm{d}y=6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (3) 求确定常数 c

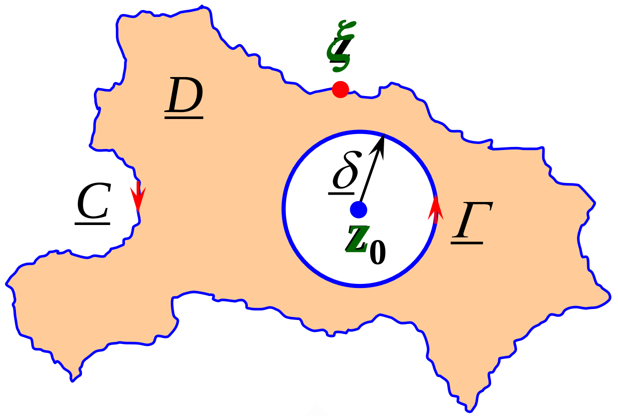
$$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c),$$

根据条件 $f(i)=-i$，将 $x=0$, $y=1$ 代入得

$$i(-1+c)=-i, \quad \Rightarrow \quad c=0,$$

即得 $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=z^3$.

二、（1）柯西积分公式



定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

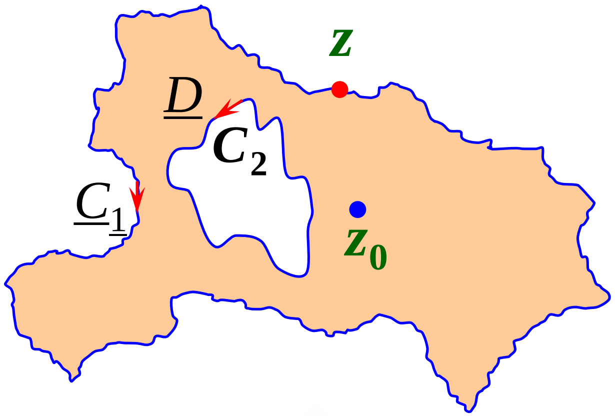
意义 将 z_0 换成 z，积分变量 z 换成 ξ，则上式变为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi,\ (z \in D).$$

- 解析函数在其解析区域内的值完全由边界上的值确定。
- 换句话说，解析函数可用其解析区域边界上的值以一种特定的积分形式表达出来。

注意 柯西积分公式中的区域 D 可以是多连域。比如对于二连域 D，其边界为 $C = C_1 + C_2^-$，则

P67 推论 2



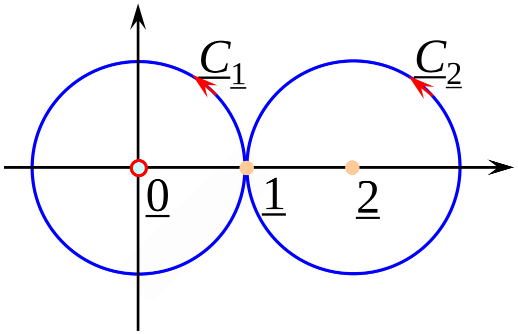
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z,\ (z_0 \in D).$$

应用 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) $C_1: |z|=1$; (2) $C_2: |z-2|=1$.



解 (1) $I=\oint_{C_1} \dfrac{\boxed{\cos z}}{z}\mathrm{d}z$ 在 $|z|\le 1$ 上解析

$$\xlongequal{\text{(柯西积分公式)}} 2\pi i\cdot \cos z\Big|_{z=0} = 2\pi i.$$

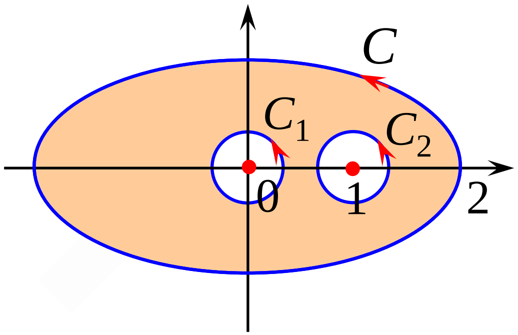
(2) $I=\oint_{C_2} \dfrac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$ (函数 $\dfrac{\cos z}{z}$ 在 $|z-2|\le 1$上解析)

$$\xlongequal{\text{(柯西积分定理)}} 0.$$

- **柯西积分定理** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在边界 C 上连续，

  则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$.

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 如图所示。



解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z(z-1)}$，

令 C_1: $|z|=\dfrac{1}{3}$， C_2: $|z-1|=\dfrac{1}{3}$，

则 $I=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ (复合闭路定理)

$$=\oint_{C_1}\frac{\boxed{\left(\dfrac{2z-1}{z-1}\right)}}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\boxed{\left(\dfrac{2z-1}{z}\right)}}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{\text{(柯西积分公式)}}}\ 2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1}=4\pi i.$$

二、（2）高阶导数定理

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，

P71 定理 3.9

则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 上解析，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

意义 解析函数的导数仍解析。

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$
- 推出一些理论结果。

例 计算 $\oint_{|z-i|=1} \dfrac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$ P73 例3.12 部分

解 $\oint_{|z-i|=1} \dfrac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \dfrac{2\pi i}{2!} \cos'' z \big|_{z=i}$

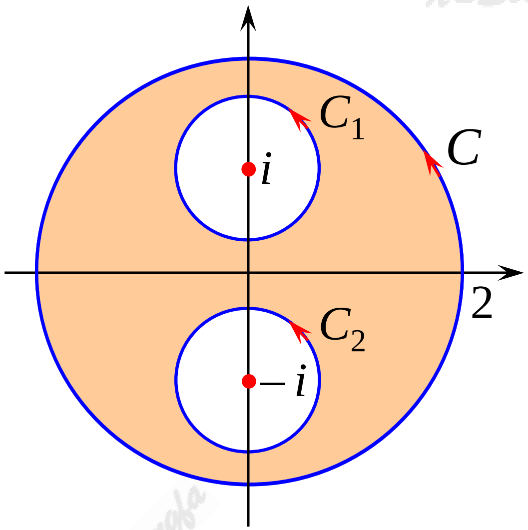
$$= -\pi i \cos i = -\frac{\pi i}{2}(e + e^{-1}).$$

例 计算 $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^{100}} dz.$

解 $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^{100}} dz = \dfrac{2\pi i}{99!}(e^z)^{99}\big|_{z=0} = \dfrac{2\pi i}{99!}.$

例　计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$

解　(1) 令 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-i)^2(z+i)^2}.$



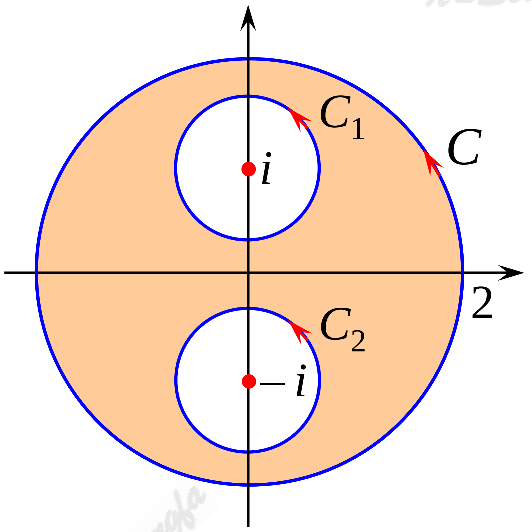
如图，作 C_1, C_2两个小圆，

则 $I=\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$　(复合闭路定理)

$$=\oint_{C_1}\boxed{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+i)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^2}+\oint_{C_2}\boxed{\frac{\mathrm{e}^z}{(z-i)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^2}$$

$$\overset{\text{记为}}{=\!=}\ I_1+I_2.$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$



解 (2) $I_1=\oint_{C_1}\boxed{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}\cdot\dfrac{dz}{(z-i)^2}$

$$\underline{\underline{\text{(高阶导数公式)}}}\ \frac{2\pi i}{1!}\cdot\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i.$$

同样可求得 $I_2=-\dfrac{\pi}{2}(1+i)e^{-i}.$

(3) $I=I_1+I_2=\dfrac{\pi}{2}[(1-i)e^i-(1+i)e^{-i}]=\sqrt{2}\pi i\sin(1-\dfrac{\pi}{4}).$

三、将函数展开为洛朗级数

1. 直接展开法（略）

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3\cdots, \quad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots, \quad |z|<+\infty.$$

注意 **无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面(或者题目指定的展开区域)分为若干个解析环。**

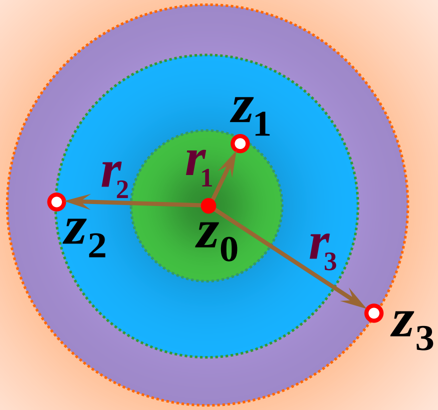
比如 设函数的奇点为 z_1, z_2, z_3，展开点为 z_0，则复平面被分为四个解析环：

$$0 \le |z - z_0| < r_1;$$

$$r_1 < |z - z_0| < r_2;$$

$$r_2 < |z - z_0| < r_3;$$

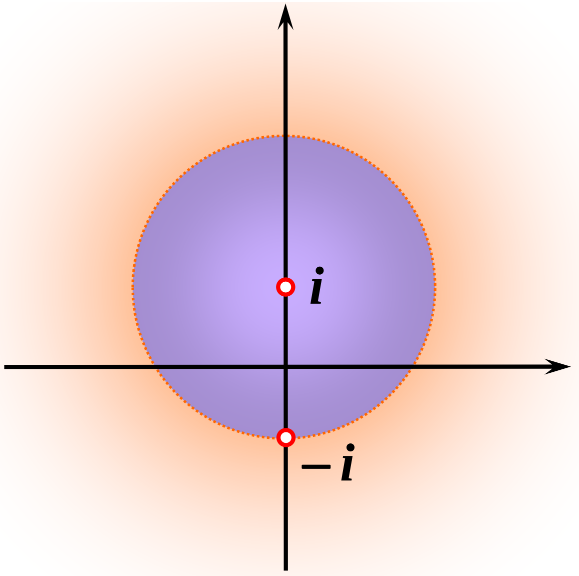
$$r_3 < |z - z_0| < +\infty.$$



例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

P99 例4.15

解 (1) 将复平面分为若干个解析环



函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$,

有两个奇点: $z=\pm i$,

以展开点 $z=i$ 为中心,

将复平面分为两个解析环:

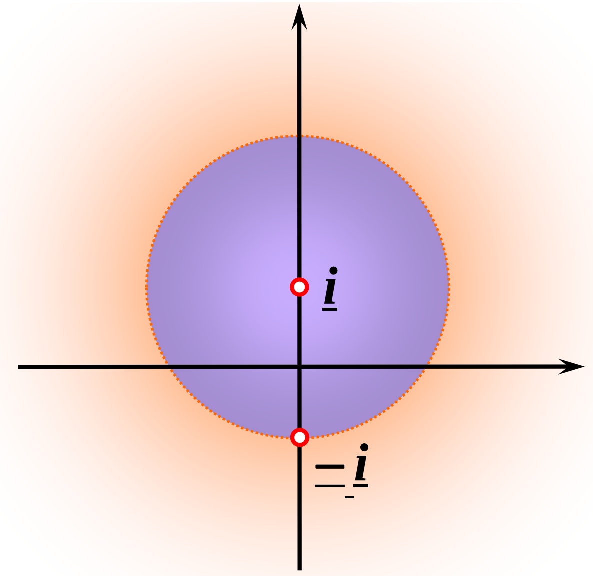
① $0<|z-i|<2$; ② $2<|z-i|<+\infty$.

注意:不需要将函数进行部分分式分解。

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

解 **(2) 将函数在每个解析环内分别展开**

① 当 $0<|z-i|<2$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}$$

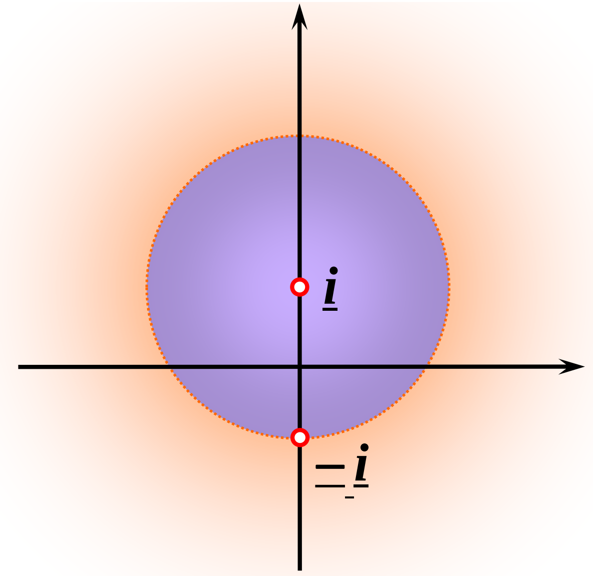
$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\dfrac{z-i}{2i}+1}$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

② 当 $2<|z-i|<+\infty$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}.$$

四（一）、孤立奇点的分类

- 根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$,

小结 $$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots+}_{\text{本性奇点}}\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}+}_{N\text{ 阶极点}}\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

(1) 可去奇点 不含负幂次项；

(2) N 阶极点 含有限多的负幂次项, 且最高负幂次为 N;

(3) 本性奇点 含有无穷多的负幂次项。

如何进行孤立奇点的分类

$$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots}_{\text{本性奇点}}+\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

方法

P104 ~106 定理 5.1~ ~5.3

(1) 可去奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ (常数);

(2) N 阶极点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$; (该条件只能判断是极点)

N 阶极点 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots]$;

(3) 本性奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不为∞.

注 在求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 时，可使用罗比达法则。

小结 考虑下面两类函数：

(1) $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 比较分子分母的零点的阶数

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ 可去奇点，

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ N 阶极点。

(2) $f(z)=g\left(\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$ 函数 $g(z)$ 连续

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=g(c)$ 可去奇点，

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=g(\infty)$ 本性奇点?

四（二）、利用留数计算闭路积分

1. 计算留数

(1) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

特别，若 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$Q(z_0)=0,\ Q'(z_0)\neq 0,\ P(z_0)\neq 0$，

则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

(2) 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$.

(3) **若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则在 z_0 的邻域内展开为洛朗级数。**

2. 计算闭路积分（1）

定理　设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，在边界 C 上连续， 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

注意　**只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数。**

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

P117 例5.21

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点：

可去奇点 $z=0$，一阶极点 $z=1$，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=0.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1.$$

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\right)=2\pi i\sin^2 1.$$

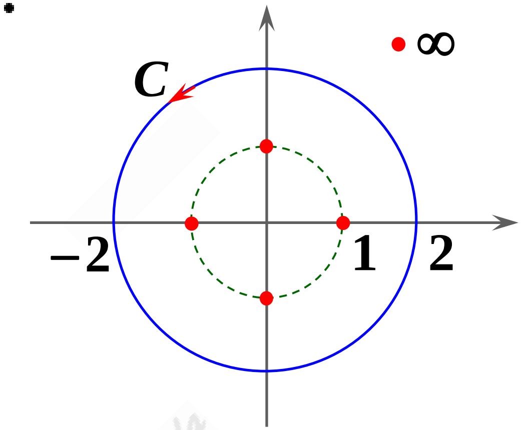
3. 计算闭路积分（2）

定理 设 $f(z)$ 在扩充平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析，则

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

其中，$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2}, 0].$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{z^3}{z^4-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.



解 函数 $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|=2$ 内

有四个一阶极点 $z_k=e^{\frac{2k\pi}{4}i}$，$k=0,1,2,3$,

由留数定理有

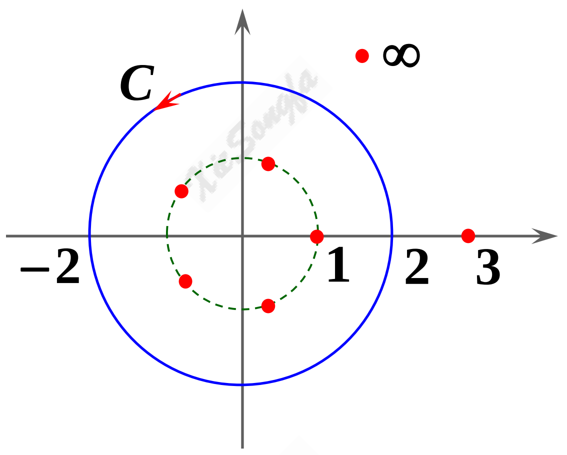
$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z(1-z^4)},0]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \frac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (1) 函数 $f(z)=\frac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}$ 在 $|z|=2$ 内有五个一阶极点

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}i},\quad k=0,1,2,3,4,$$



由留数定理有

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{4}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right).$$

例　计算 $I=\oint_C \frac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解　(2) $\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z)=\frac{1}{(3^5-1)^3}$,

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$$

$$=-2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{z^{14}}{(1-z^5)^3(1-3z)},0]=0.$$

$$I=-2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right)$$

$$=-\frac{2\pi i}{(3^5-1)^3}=-\frac{2\pi i}{14172488}.$$

五、非周期函数的傅立叶变换

1. Fourier 积分公式

定理 设函数 $f(t)$ 满足

P188
定理
8.2

(1) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件;

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$.

则在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad \text{(D)}$$

在 $f(t)$ 的间断处，公式的左端应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为 Fourier **积分公式**。

五、非周期函数的傅立叶变换

2. Fourier 变换的定义

定义 (1) Fourier 正变换(简称**傅氏正变换**)

P189 定义 8.1

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathscr{F}[f(t)]$$

(2) Fourier 逆变换(简称**傅氏逆变换**)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

其中，$F(\omega)$ 称为**象函数**，$f(t)$ 称为**象原函数**.

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 称为**傅氏变换对**，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

注 **上述变换中的广义积分为柯西主值。**

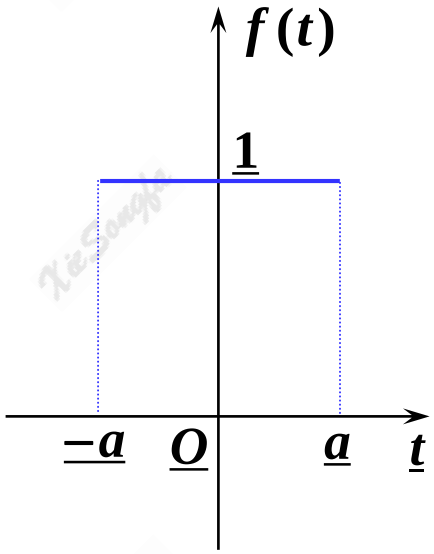
例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。 P189 例8.2

解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})}{-2j}=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$



解 (2) 求 Fourier 逆变换，即可得到的 Fourier 积分表达式。

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & |t|<a,\\ 1/2, & |t|=a,\\ 0, & |t|>a.\end{cases}$$

注 在上式中令 $t=0$, 可得重要积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\pi,\ (a>0).$$

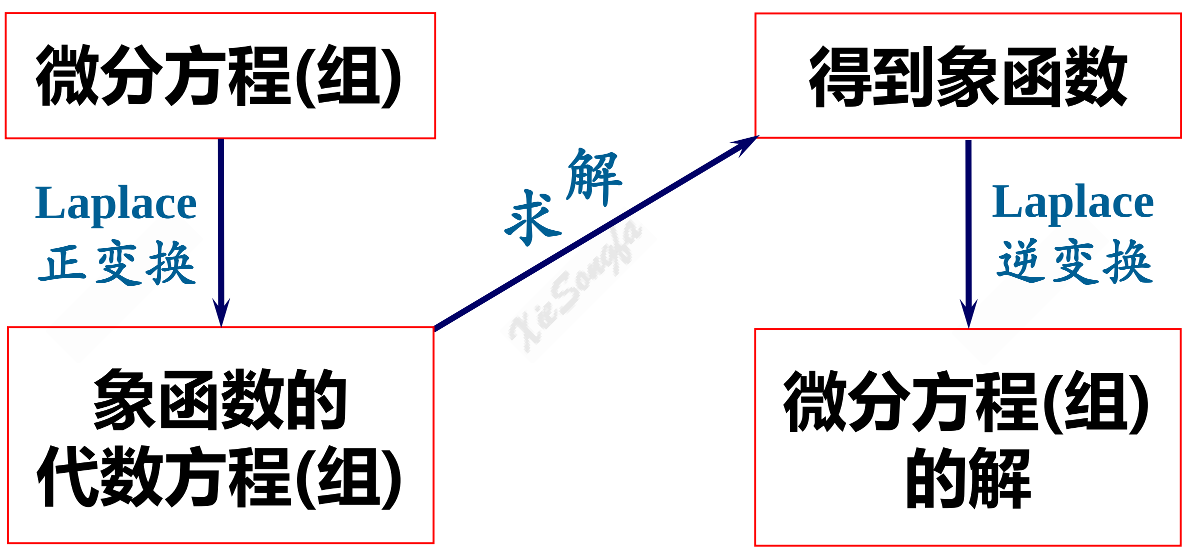
六、利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

工具 $$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).}$$

步骤 (1) 将微分方程(组)化为象函数的代数方程(组)；

(2) 求解代数方程得到象函数；

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。



几个常用函数的 Laplace 变换

$$\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s}.$$

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

$$\mathscr{L}[\cos bt]=\frac{s}{s^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\sin bt]=\frac{b}{s^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}t^m]=\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\cos bt]=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\sin bt]=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程 P219 例9.6

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\omega.$$

解 (1) 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0,$$

代入初值即得 $s^2Y(s)-\omega+\omega^2Y(s)=0,$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin\omega t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 6\mathrm{e}^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$s^3 X(s) + 3s^2 X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{6}{s+1},$$

求解此方程得 $X(s) = \dfrac{3!}{(s+1)^4}.$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = t^3 \mathrm{e}^{-t}.$$

五、其它

- 已知复数的实部与虚部，求模与(主)辐角。

- 求复数的方根 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$, $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

- 对数函数 $w=\ln z=\ln|z|+i\arg z$.

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

- 幂函数 $w=z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}$.

- 求导公式 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

五、其它

幂级数的收敛半径

(1) **比值法**　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lambda$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(2) **根值法**　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

(3) **函数 $f(z)$在 z_0点展开为泰勒级数，其收敛半径等于从 z_0 点到 $f(z)$的最近一个奇点 $\tilde{z}$ 的距离。**

五、其它

单位冲激函数

(1) **筛选性质** $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0).$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0).$$

(2) **对称性质** $\delta(t)=\delta(-t).$

(3) **重要公式** $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t).$

卷积与卷积定理

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$