【第一章习题】

一、单项选择题

1、设 $z=1+i=\sqrt{2}\left[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right]$，则 z^8 的值为【 C 】

A、$16i$；　　B、$-16i$；　　C、16；　　D、-16。

2、连接 $z_1=1+i$ 与 $z_2=-1-4i$ 的直线段的复数式参数方程为【 B 】

A、$z_1=1+i+(-2+5i)t$；　　B、$z_1=1+i+(-2-5i)t$；

C、$z_1=1+i+(2+5i)t$；　　D、$z_1=1+i+(2-5i)t$。

3、复数 $z=-2+2i$ 的幅角主值 $\arg(z)$ 的值为【 B 】

A、$\pi/4$；　　B、$3\pi/4$；　　C、$2k\pi+\pi/4$；　　D、$2k\pi+3\pi/4$。

4、满足 $|z-1|>2|z+1|$ 的所有 z 组成的集合是【 A 】$(3x+5)^2+9y^2<16$

A、有界开区域；　　B、无界开区域；　　C、有界闭区域；　　D、无界闭区域。

5、下列结论错误的是【 A 】

A、$2i<3i$；　　B、当 $z\neq 0$ 且不为负实数时，有 $|\bar{z}|=|z|$，$\arg(\bar{z})=-\arg(z)$；

C、$|z|^2=z\cdot\bar{z}$；　　D、对任意的正数 $M>0$，集合 $|z|>M$ 为无穷远点的邻域。

二、填空题

1、复数 $z=\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{3-5i}{2}$ 的实部 $\mathrm{Re}(z)=$ $\underline{3/2}$，虚部 $\mathrm{Im}(z)=$ $\underline{-5/2}$，模 $|z|=$ $\underline{\sqrt{17/2}}$，辐角主值为 $\underline{-\arctan(5/3)}$，三角表示式为 $\underline{z=\sqrt{17/2}\left[\cos(-\arctan(5/3))+i\sin(-\arctan(5/3))\right]}$；

2、方程 $|z+2-3i|=\sqrt{2}$ 表示的曲线是 $\underline{\text{以}z_0=-2+3i\text{为圆心、}r=\sqrt{2}\text{为半径的圆周}}$；

3、$\lim\limits_{z\to 1+i}(1+2z)=$ $\underline{3+2i}$；

4、复数 $z=\sin(\pi/5)+i\cos(\pi/5)$ 的三角表示式为 $\underline{\cos(3\pi/10)+i\sin(3\pi/10)}$。

三、计算题

1、计算复数的值

(1)、$(1+i)(-2+2i)=-2(1+i)(1-i)=-2|1+i|^2=-4$；

(2)、$\dfrac{-2+3i}{3+2i}=\dfrac{i(3+2i)}{3+2i}=i$；

(3)、$\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\right]^3=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1$；

(4)、 $\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left[\cos(\frac{\pi+2k\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi+2k\pi}{4})\right]=\sqrt{2}(\pm 1\pm i),\ k=0,1,2,3$。

2、将 $f(z)=x^2-y^2-i(xy-y)$ 写为 $z=x+iy$ 的函数。

解：由于 $z=x+iy,\ \overline{z}=x-iy$，故 $x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$，从而

$$f(z)=x^2-y^2-i(xy-y)=\frac{1}{4}(z+\overline{z})^2+\frac{1}{4}(z-\overline{z})^2-\frac{1}{4}(z+\overline{z})(z-\overline{z})+\frac{1}{2}(z-\overline{z})$$

$$=\frac{1}{4}(z^2+3\overline{z}^2+2z-2\overline{z})。$$

四、证明题

1、$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$ 不存在。

证明：令 $f(z)=\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x+ikx)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Re}(x+ikx)}{x+ikx}=\frac{k}{1+ik}$ 与路径 $z=x+ikx\to 0$ 有关，故

$\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$ 不存在；

2、 $f(z)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & 若z\neq 0\\ 0, & 若z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 处不连续。

证明：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x+ikx)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2}$ 与路径 $z=x+ikx\to 0$ 有关，故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在，

从而 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续。

【第二章习题】

一、单项选择题

1、可微函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足 $C-R$ 条件是函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处解析的【 C 】

A、充分不必要条件； B、充分必要条件； C、必要不充分条件； D、以上皆错。

2、设 $f(z)=(x^3+axy^2)+i(3x^2y+by^3)$ 在整个复平面上解析，则实常数 a,b 的值为【 B 】

A、$-3,10$； B、$-3,-1$； C、$3,1$； D、$3,-1$。

3、下面结论错误的是【 D 】

A、$Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$； B、$Ln(z_2/z_1)=Ln(z_2)-Ln(z_1)$；

C、$\left[Ln(z)\right]'=1/z$； D、$Ln(z^2)=2Lnz$。

4、下列函数中周期为 $T=2\pi i$ 的是【 A 】

A、e^z； B、$\sin z$； C、Lnz； D、z^α。

5、下列函数中在整个复平面内解析的是【 C 】

A、x^2-y^2-2xyi； B、x^2+xyi；

C、$2y(x-1)+i(y^2-x^2+2x)=i(z-z^2)$； D、$x^3+iy^3$。

二、填空题

1、$Ln(1+i)=$ $\underline{\ln\sqrt{2}+i(\pi/4+2k\pi)}$ ，其主值为 $ln(1+i)=$ $\underline{\ln\sqrt{2}+i\,\pi/4}$ ；

2、设 $\ln z=i\pi/2$，则 $z=$ $\underline{e^{i\pi/2}=i}$ ；

3、设 $1-e^{-z}=0$，则 $z=$ $\underline{2k\pi i,\ k=0,\pm1,\pm2,...}$ ；

4、函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可导是 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析的<u>必要</u>条件，而函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导是 $f(z)$ 在区域 D 内解析的<u>充分必要</u>条件。

三、计算题

1、讨论下列函数的可导性与解析性，并求其在可导点处的导数

(1)、$f(z)=x^2+3iy^2$；

解：$\begin{cases}u_x-v_y=2(x-3y)=0\\ u_y+v_x=0\end{cases}\Longleftrightarrow z=(3+i)t,$ 其中 $t\in R$，即 $f(z)$ 仅在直线 $z=(3+i)t$ 上可导，且

$f'(3t+it)=(u'_x-iu'_y)\Big|_{x=3t,y=t}=2x\Big|_{x=3t,y=t}=6t,\ t\in R$，但 $f(z)$ 处处不解析；

(2)、$f(z)=x^3-y^3+2ix^2y^2$；

解：$\begin{cases} u_x - v_y = x^2(3-4y) = 0 \\ u_y + v_x = y^2(4x-3) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow z = 0$或$\dfrac{3}{4}(1+i)$，即 $f(z)$ 仅在此两点处可导，故处处不解析，且

$$f'(0) = (u'_x - iu'_y)\big|_{x=0,y=0} = 3(x^2+iy^2)\big|_{x=0,y=0} = 0，$$

$$f'(3(1+i)/4) = (u'_x - iu'_y)\big|_{x=3/4,y=3/4} = 3(x^2+iy^2)\big|_{x=3/4,y=3/4} = \frac{27}{16}(1+i)；$$

(3)、 $f(z) = (x-y)(x^2+4xy+y^2) + i(3x^2y+3xy^2-x^3-y^3)$；

解：$f(z) = (x-y)(x^2+4xy+y^2) + i(3x^2y+3xy^2-x^3-y^3)$

$$= (x^3+3x^2y-3xy^2-y^3) + i(3x^2y+3xy^2-x^3-y^3)$$

$= (1-i)\left[(x^3-3xy^2) + i(3x^2y-y^3)\right] = (1-i)(x+iy)^3 = (1-i)z^3$，处处解析，且 $f'(z) = 3(1-i)z^2$；

(4)、 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$，其中 $a,b,c,d \in C$ 为常数，且 $ad-bc \neq 0$；

解：若 $c = 0 \neq ad$，则 $f(z) = \dfrac{az+b}{d}$ 为线性函数，从而 $f(z)$ 处处解析，且此时 $f'(z) = \dfrac{a}{d}$；

若 $c(ad-bc) \neq 0$，则 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 仅在 $z = -\dfrac{d}{c}$ 处不可导，从而 $f(z)$ 处在 $z \neq -\dfrac{d}{c}$ 处解析，且

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2},\ z \neq -\frac{d}{c}。$$

2、求满足下列条件的解析函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

(1)、$u(x,y) = x^2 - y^2$；

解：由 $v_y = u_x = (x^2-y^2)'_x = 2x$，知 $v = 2xy + \varphi(x)$，再由 $\varphi'(x) + 2y = v_x = -u_y = -(x^2-y^2)'_y = 2y$ 知，

$\varphi(x) = C$，故 $v = 2xy + C$,从而 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2-y^2) + i(2xy+C) = z^2 + iC$，

其中 $C \in R$ 为任意常数；

(2)、$v(x,y) = 2xy + 3x$；

解：由 $u_x = v_y = (2xy+3x)'_y = 2x$，知 $u = x^2 + \varphi(y)$，再由 $\varphi'(y) = u_y = -v_x = -(2xy+3x)'_x = -2y-3$ 知，

$\varphi(x) = C - 3y - y^2$，故 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2-y^2-3y+C) + i(2xy+3x) = z^2 + 3iz + C$，

其中 $C \in R$ 为任意常数；

(3)、$u(x,y) = 2y(x-1), f(0) = -i$；

解：由 $v_y = u_x = \left[2y(x-1)\right]'_x = 2y$，知 $v = \varphi(x) + y^2$，再由 $\varphi'(x) = v_x = -u_y = -\left[2y(x-1)\right]'_y = 2-2x$ 知，

$\varphi(x) = C + 2x - x^2$， 故 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 2y(x-1) + i(C+2x-x^2+y^2) = iC + 2iz - iz^2$，

再由 $f(0)=-i$，得 $C=-1$，即 $f(z)=-i+2iz-iz^2=-i(z-1)^2$。

(4)、 $v(x,y)=3x^2y-y^3,\ f(0)=0$；

解：由 $u_x=v_y=(3x^2y-y^3)'_y=3x^2-3y^2$，知 $u=\varphi(y)+x^3-3xy^2$，

再由 $\varphi'(y)-6xy=u_y=-v_x=-(3x^2y-y^3)'_x=-6xy$ 知，$\varphi'(y)=0$，即 $\varphi(y)=C$，

故 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(C+x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=z^3+C$，

再由 $f(0)=0$，得 $C=0$，即 $f(z)=z^3$。

3、求下列各式的值

(1)、 $e^{5-i\pi/3}=e^5\left[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\right]=\dfrac{e^5}{2}(1-i\sqrt{3})$；

(2)、 $Ln(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})=\ln 1+i(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi)=\dfrac{2\pi}{3}(3k+1)i,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$；

(3)、 $3^{2-i}=e^{(2-i)Ln3}=e^{(2-i)(ln3+i2k\pi)}=e^{2\ln3+2k\pi+i(4k\pi-\ln3)}=9e^{2k\pi}\left[\cos(\ln3)-i\sin(\ln3)\right],\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$。

四、证明题

1、证明 $f(z)=e^x\left[(x\cos y-y\sin y)+i(y\cos y+x\sin y)\right]$ 处处解析，并求 $f'(z)$；

证明：$f(z)=e^x\left[(x\cos y-y\sin y)+i(y\cos y+x\sin y)\right]=(x+iy)e^x(\cos y+i\sin y)=ze^z$ 处处解析，且

$f'(z)=(ze^z)'=(1+z)e^z$。

2、若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，且满足下列条件之一，则 $f(z)$ 在 D 内恒为常数：

(1)、 $\overline{f(z)}$ 在区域 D 内解析；　　(2)、 $v=u^2$；

(3)、 $\operatorname{Im} f(z)\equiv$ 常数；　　(4)、 $\arg f(z)\equiv$ 常数。

证明：由题设知 $\forall(x,y)\in D$，有 $u'_x-v'_y=u'_y+v'_x=0$。

(1)、若 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 也在区域 D 内解析，则 $\forall(x,y)\in D$，有 $u'_x+v'_y=u'_y-v'_x=0$，故

$\begin{cases}u'_x-v'_y=u'_x+v'_y=0\\u'_y-v'_x=u'_y+v'_x=0\end{cases}$，解得 $u'_x=u'_y=v'_x=v'_y\equiv0$，故 $u\equiv$ 常数,$v\equiv$ 常数，即 $f(z)\equiv$ 常数；

(2)、若 $v=u^2$，则由 $u'_x-v'_y=u'_y+v'_x=0$ 得 $u'_x-2uu'_y=u'_y+2uu'_x=0$，解之得 $u'_x=u'_y\equiv0$，故

$u\equiv$ 常数,$v\equiv$ 常数，从而 $f(z)\equiv$ 常数；

(3)、若 $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)\equiv$ 常数，则 $\begin{cases} u'_x=v'_y\equiv 0 \\ u'_y=-v'_x\equiv 0 \end{cases}$，$u\equiv$ 常数,$v\equiv$ 常数，从而 $f(z)\equiv$ 常数；

(4)、若 $\arg f(z)\equiv$ 常数，则存在常数 $a\in R$，使 $\frac{v}{u}=\tan(\arg f(z))=a$，即 $v=au$，故

$\begin{cases} u'_x=v'_y=au'_y \\ u'_y=-v'_x=-au'_x \end{cases}$，解之得 $u'_x=u'_y\equiv 0$，故 $u\equiv$ 常数,$v\equiv$ 常数，从而 $f(z)\equiv$ 常数。

【第三章习题】

一、单项选择题

1、设C为复平面上不经过$z=\pm1$的简闭正向曲线，则$\oint_C \frac{zdz}{(z-1)(z+1)^2}=\frac{1}{4}\oint_C\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]dz$的值为【$D$】

A、$\pi i/2$；　B、$-\pi i/2$；　C、0；　D、A,B,C皆有可能。

2、设函数$f(z)$在单连通区域D内解析且$f(z)\neq0$，而C为D内任意一条简单封闭的正向曲线，则积分

$\oint_C \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}dz=$【$C$】$F(z)=\frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}$在$D$内解析

A、$2\pi i$；　B、$-2\pi i$；　C、0；　D、不能确定。

3、设函数$f(z)$在区域D内解析，而C为D内的简闭正向曲线，且由C所界的内部区域完全包含于D内，而$f(z)$在C上的值恒为2，则$f(z)$在C内任一点z_0处的值$f(z_0)=$【C】

A、0；　B、1；　C、2；　D、不能确定。

二、填空题

1、连接$z_1=1, z_2=i$的直线段C的复参数方程为$z=$ $\underline{(1-t)+it,\ 0\le t\le1}$，积分$\int_C ze^z dz=$ $\underline{(i-1)e^i}$；

2、设C为正向圆周$|z-z_0|=a$，则$n=1$时$\oint_C\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$ $\underline{2\pi i}$，而$n\neq1$为整数时$\oint_C\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$ $\underline{0}$；

3、设C为正向圆周$|z|=a$，则$0<a<1$时$\oint_C\frac{dz}{(z-1)^n}=$ $\underline{0}$，而$a>1$时$\oint_C\frac{dz}{(z-1)^n}=$ $\underline{\begin{cases}2\pi i, & 若n=1\\ 0, & 若n\neq1\end{cases}}$，

其中n为整数；

4、设C为正向圆周$|z|=1$，则$\oint_C\frac{ze^z dz}{(z-2)(z-3)(z-4)}=$ $\underline{0}$。

三、计算题

1、计算$\int_C |z|dz$，其中积分路径C分别为：

(1)、从$z_1=0$到$z_2=1+i$的直线段；

解：$\int_C|z|dz=\int_0^1|x+ix|(1+i)dx=\sqrt2(1+i)\int_0^1 xdx=(1+i)/\sqrt2$；

(2)、先从$z_1=0$沿直线到$z_2=1$，再从$z_2=1$沿直线到$z_3=1+i$的折线段；

解：$\int_C|z|dz=\int_0^1|x|dx+i\int_0^1|1+iy|dy=\int_0^1(t+i\sqrt{1+t^2})dt=\frac12\left[t^2+it\sqrt{1+t^2}+i\ln(1+\sqrt{1+t^2})\right]\Big|_0^1$

$=\frac12\left[1+i\sqrt2+i\ln(1+\sqrt2)-i\ln2\right]=\frac12\left[1+i\ln(1+\frac{1}{\sqrt2})\right]$；

(3)、正向圆周$|z|=5$。

解：$\int_C |z|dz = 25\int_0^{2\pi}(-\sin t + i\cos t)dt = 0$。

2、计算下列积分

(1)、$\int_0^i ze^{z^2}dz = \frac{1}{2}e^{z^2}\Big|_0^i = \frac{1}{2}(e^{-1}-1)$；

(2)、$\int_0^i (\sin z + 2z)dz = (z^2 - \cos z)\Big|_0^i = -\cos i = -\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$。

3、计算下列积分

(1)、$\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{dz}{(z+1)(z-2)} = \oint\limits_{|z|=3/2} \frac{(z-2)^{-1}dz}{z+1} = \frac{2\pi i}{z-2}\Big|_{z=-1} = -\frac{2\pi i}{3}$；

(2)、$\oint\limits_C \frac{dz}{z^2-2} = \oint\limits_C \frac{dz}{(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\oint\limits_C (\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}})dz$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}}\oint\limits_{|z-\sqrt{2}|=1}(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}})dz = \frac{2\pi i - 0}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}, & 若C:|z-\sqrt{2}|=1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\oint\limits_{|z+\sqrt{2}|=5}(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}})dz = \frac{2\pi i - 2\pi i}{2\sqrt{2}} = 0, & 若C:|z+\sqrt{2}|=5 \end{cases};$$

(3)、$\oint\limits_C \frac{zdz}{(2z+1)(z-2)} = \frac{1}{10}\oint\limits_C (\frac{4}{z-2} + \frac{1}{z+0.5})dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{10}(4+0) = \frac{4\pi i}{5}, & 若C:|z-2|=1 \\ \frac{2\pi i}{10}(4+1) = \pi i, & 若C:|z|=3 \end{cases}$。

4、计算下列积分：

(1)、$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^{100}} = \frac{2\pi i}{99!}(e^z)^{(99)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{99!}e^0 = \frac{2\pi i}{99!}$；

(2)、$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^4} = \begin{cases} \oint\limits_{|z+1|=1} \frac{(z-1)^{-3}dz}{(z+1)^4}, & 若C:|z+1|=1 \\ \oint\limits_{|z+1|=\varepsilon} \frac{(z-1)^{-3}dz}{(z+1)^4} + \oint\limits_{|z-1|=\varepsilon} \frac{(z+1)^{-4}dz}{(z-1)^3}, & 若C:|z|=5, 0<\varepsilon<1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi i}{3!}\cdot\frac{d^3}{dz^3}\left[(z-1)^{-3}\right]\Big|_{z=-1} = -\frac{5\pi i}{16}, & 若C:|z+1|=1 \\ \frac{2\pi i}{3!}\cdot\frac{d^3}{dz^3}\left[(z-1)^{-3}\right]\Big|_{z=-1} + \frac{2\pi i}{2!}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^{-4}\right]\Big|_{z=1} = 0, & 若C:|z|=5 \end{cases}。$$

【第四章习题】

一、单项选择题

1、级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2m}+i\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}$ 的敛散性为【 B 】

A、绝对收敛；　　B、条件收敛；　　C、发散；　　D、不确定。

2、若幂级数 $\sum_{0\le n<+\infty}c_n z^n$ 在 $z=1+2i$ 处收敛，则该幂级数在 $z=2$ 处的敛散性为【 A 】

A、绝对收敛；　　B、条件收敛；　　C、发散；　　D、不确定。

3、幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}(z/2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(z/2)^{2n+1}$ 的收敛半径为【 B 】

A、1；　　B、2；　　C、$\sqrt{2}$；　　D、$+\infty$。

4、级数 $\sum_{-2\le n<+\infty}z^n$ 的收敛域为【 B 】

A、$|z|<1$；　　B、$0<|z|<1$；　　C、$1<|z|<+\infty$；　　D、不存在。

5、函数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z-2)(z+4)}$ 在以原点为中心的圆环域的 *Laurent* 级数展开式有【 D 】

A、1 个；　　B、2 个；　　C、3 个；　　D、4 个。

6、设 $S(z)$ 为幂级数 $\sum_{0\le n<+\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的和函数，则下列结论正确的是【 A 】

A、$S(z)$ 在收敛圆域内处处解析；　　B、该幂级数在收敛圆周上处处收敛；

C、$S(z)$ 在收敛点处均解析；　　D、以上皆错。

二、填空题

1、幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R=$ $\underline{+\infty}$ ，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径为 $r=$ $\underline{2}$ ；

2、若幂级数 $\sum_{0\le n<+\infty}c_n(z+i)^n$ 在 $z=i$ 处发散，则该幂级数在 $z=2$ 处 $\underline{\text{发散}}$ ；

3、$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+ni}{n+4}=$ $\underline{i}$ ；

4、函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^3}$ 的幂级数展开式为 $f(z)=$ $\underline{\sum_{0\le n<+\infty}(-1)^n z^{3n}}$ ，收敛半径为 $R=$ $\underline{1}$ 。

三、计算题

1、求下列函数 $f(z)$ 在指定点 z_0 处的 *Taylor* 级数，并指出收敛域：

(1)、 $f(z)=\frac{1}{4-3z}$， $z_0=1+i$；

解：$f(z)=\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{(1-3i)}\cdot\frac{1}{1-3(1-3i)^{-1}(z-1-i)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n(z-1-i)^n}{(1-3i)^{n+1}},|z-1-i|<\frac{|1-3i|}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$；

(2)、 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$， $z_0=0$；

解：$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}(\frac{1}{1-z})=\frac{d}{dz}(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n)=\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1},\ \ |z|<1$；

(3)、 $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$， $z_0=0$，其中$a,b\neq 0$；

解：
$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\begin{cases}\frac{1}{(a-z)^2}, & 若a=b\\ \frac{1}{b-a}(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{b-z}), & 若a\neq b\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{d}{dz}(\frac{a^{-1}}{1-a^{-1}z})=\frac{1}{a}\cdot\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}(z/a)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^{n-1}}{a^{n+1}}，其中|z|<|a|, & 若a=b\\ \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{a^{n+1}}-\frac{1}{b^{n+1}})z^n，其中|z|<\min\{|a|,|b|\}, & 若a\neq b\end{cases}；$$

(4)、 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$， $z_0=1$或$z_0=2$。

解：$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{(z-z_0)+(2+z_0)}-\frac{1}{(z-z_0)+(1+z_0)}$

$$=\frac{2}{2+z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{2+z_0}}-\frac{1}{1+z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{1+z_0}}=\frac{2}{2+z_0}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z-z_0}{2+z_0})^n-\frac{1}{1+z_0}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z-z_0}{1+z_0})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{2}{(2+z_0)^{n+1}}-\frac{1}{(1+z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}})(z-1)^n, & 若z_0=1\\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{2}{4^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(z-2)^n, & 若z_0=2\end{cases},$$

其收敛域为$|z-1|<2$。

2、求下列函数$f(z)$在指定环域内的*Laurent*级数：

(1)、 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$， $1<|z|<2$；

解：若$1<|z|<2$，则$|z/2|,|z^{-2}|<1$，故

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-(z/2)}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+z^{-2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(z/2)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{-2n}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}};$$

(2)、 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$， $0<|z-1|<1$ 或 $1<|z-2|<+\infty$ 。

若 $0<|z-1|<1$，则 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=-\dfrac{(z-1)^{-1}}{1-(z-1)}=-(z-1)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}$；

若 $1<|z-2|<+\infty$，则 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{(z-2)^{-2}}{1+(z-2)^{-1}}=(z-2)^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-2)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}}$ 。

3、将 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$ 在以 $z_0=3i$ 为中心的圆环域内展为 *Laurent* 级数。

解：由于 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}=\dfrac{1}{(z-3i)^2(z+3i)^2}=-(z-3i)^{-2}\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{(z-3i)+6i}\right]$，故

(1)、若 $0<|z-3i|<6$，则

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+9)^2}=-(z-3i)^{-2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3i)+6i}\right]=-\frac{(z-3i)^{-2}}{6i}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1+(\frac{z-3i}{6i})}\right]$$

$$=-\frac{(z-3i)^{-2}}{6i}\cdot\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z-3i}{6i})^n\right]=\frac{i}{6(z-3i)^2}\cdot\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(i\frac{z-3i}{6})^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}n(\frac{i}{6})^{n+1}(z-3i)^{n-3}=\sum_{n=-2}^{+\infty}(n+3)(\frac{i}{6})^{n+4}(z-3i)^n;$$

(2)、若 $6<|z-3i|<+\infty$，则

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+9)^2}=-(z-3i)^{-2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3i)+6i}\right]=-(z-3i)^{-2}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3i)}\cdot\frac{1}{1+(\frac{6i}{z-3i})}\right]$$

$$=-(z-3i)^{-2}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3i)}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{6i}{z-3i})^n\right]=-\frac{1}{(z-3i)^2}\cdot\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-6i)^n(z-3i)^{-n-1}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-6i)^n(z-3i)^{-n-4}=\sum_{n=4}^{+\infty}(n+5)(-6i)^{n-4}(z-3i)^{-n}$$ 。

【第五章习题】

一、单项选择题

1、 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1-e^z}{z^4\sin z}$ 的 m 阶极点，则 $m=$【 B 】

A、5；　　B、4；　　C、3；　　D、2。

2、 $z=1$ 是 $f(z)=(z-1)\sin\left[1/(z-1)\right]$ 的【 D 】

A、可去奇点；　　B、一阶极点；　　C、二阶极点；　　D、本性奇点。

3、设 $f(z)=\sum\limits_{0\le n<+\infty} c_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内解析， $m\ge 1$ 为自然数，则 $Res\left[f(z)/z^m,0\right]=$【 C 】

A、 c_m；　　B、 $m!c_m$；　　C、 c_{m-1}；　　D、 $(m-1)!c_{m-1}$。

4、设 $z_0\ne\infty$，则下列结论中正确的是【 C 】

A、若 $m\ge 1$ 为自然数，且 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，则 $z=z_0$ 为 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$ 的 m 阶极点；

B、若无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $Res\left[f(z),\infty\right]=0$；

C、若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或解析点，则 $Res\left[f(z),z_0\right]=0$；

D、若 $\oint_C f(z)dz=0$，则 $f(z)$ 在 C 内无奇点。

5、点 $z=0$ 是 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$ 的，则【 D 】阶零点

A、1；　　B、2；　　C、3；　　D、4。

6、设 $z_0\ne\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m\ge 1$ 阶极点，则下列结论中正确的是【 B 】

A、 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析；

B、 $Res\left[f(z),z_0\right]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$，其中 $n\ge m$ 为整数；

C、 $z=z_0$ 是 $1/f(z)$ 的 $m\ge 1$ 阶极点；

D、 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\infty$。

二、填空题

1、 $z=0$ 是 $f(z)=z^3-\sin(z^3)$ 的 $m=$ __9__ 阶零点；

2、若 $z=z_0\ne\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m\ge 1$ 阶极点，则 $Res\left[f(z)/f'(z),z_0\right]=$ __0__；

解：若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 $m\ge 1$ 阶极点，则存在解析函数 $\varphi(z)$，使 $\varphi(z_0)\ne 0$，且 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$，

故 $\dfrac{f(z)}{f'(z)}=\dfrac{(z-z_0)^{-m}\varphi(z)}{(z-z_0)^{-m}\varphi'(z)-m(z-z_0)^{-m-1}\varphi(z)}=\dfrac{(z-z_0)\varphi(z)}{(z-z_0)\varphi'(z)-m\varphi(z)}$，即 $z=z_0$ 是其可去奇点，故

$Res\left[f(z)/f'(z),z_0\right]=Res\left[\dfrac{(z-z_0)\varphi(z)}{(z-z_0)\varphi'(z)-m\varphi(z)},z_0\right]=\underline{\ 0\ }$。

3、$Res\left[2z/(z^2+1),\infty\right]=\underline{-Res\left[z^{-2}f(z^{-1}),0\right]=-Res\left[\dfrac{2}{z(z^2+1)},0\right]=-2}$；

4、$\oint_{|z|=1}z^3e^{1/z}dz=\underline{2\pi iRes\left[z^3e^{1/z},0\right]=2\pi i\cdot c_{-1}=2\pi i/4!=\pi i/12}$；

5、$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\underline{\ \pi\ }$。

三、计算题

1、求下列函数 $f(z)$ 的所有有限奇点，并指出其类型：

(1)、 $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ 只有一个奇点 $z=0$(可去奇点，$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}=\dfrac{1}{2}$)；

(2)、 $f(z)=e^{1/(z-1)}$ 只有一个奇点 $z=0$(本性奇点，$e^{1/(z-1)}=\sum\limits_{0\le n<+\infty}\dfrac{(z-1)^{-n}}{n!},0<|z-1|<+\infty$)；

(3)、 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^3-z^2-z+1}=\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$ 有两个奇点 $z=\pm1$(均为一阶极点，$\lim\limits_{z\to\pm1}(z\mp1)f(z)=\pm\dfrac{1}{2}$)；

(4)、 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 只有一个奇点 $z=0$(二阶极点，$\lim\limits_{z\to0}z^2f(z)=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1$)；

(5)、 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(e^z-1)}$ 有无穷多个奇点 $z=0$(二阶极点,$\lim\limits_{z\to0}z^2f(z)=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{e^z-1}=1$) 与 $z=2k\pi i$ (一阶极点，$\lim\limits_{z\to2k\pi i}(z-2k\pi i)f(z)=\lim\limits_{z\to2k\pi i}\dfrac{\sin z}{z^2}\cdot\lim\limits_{z\to2k\pi i}\dfrac{(z-2k\pi i)'}{(e^z-1)'}=-\dfrac{sh(2k\pi)}{(2k\pi)^2},k=\pm1,\pm2,....$)；

(6)、 $f(z)=\dfrac{6}{(z+1)(z-2)}+\dfrac{2}{z+1}=\dfrac{2}{z-2}$ 有两个奇点 $z=-1$(可去奇点)与2(一阶极点)。

2、求下列函数 $f(z)$ 在有限孤立奇点处的留数：

(1)、 $f(z)=\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$；

解：$f(z)=\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}=\dfrac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}$ 有两个孤立奇点 $z=\pm i$ (均为三阶极点)，且

$$Res\left[f(z),\pm i\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to\pm i}\left[\frac{1+z^4}{(z\pm i)^3}\right]''=6\lim_{z\to\pm i}\frac{1-z^2}{(z\pm i)^5}=\mp\frac{3}{8}i；$$

(2)、 $f(z)=z^2\sin(z^{-1})$；

解：$f(z)=z^2\sin(z^{-1})$ 只有一个有限的孤立奇点 $z=0$ (本性奇点)，且 $0<|z|<+\infty$ 时，有

$$f(z)=z^2\sin(z^{-1})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{1-2n}}{(2n+1)!}，故 Res\left[f(z),0\right]=c_{-1}=-1/3!=-1/6；$$

(3)、$f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^3}$；

解：$f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^3}$ 有两个孤立奇点 $z=1$ (一阶极点)及 $z=-3$ (三阶极点)，且

$$Res\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{e^z}{(z+3)^3}=\frac{e}{64},$$

$$Res\left[f(z),-3\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to-3}\left[(z+3)^3f(z)\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to-3}\left[\frac{e^z}{z-1}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to-3}\frac{(z^2-4z+5)e^z}{(z-1)^3}=-\frac{13}{64}e^{-3};$$

(4)、$f(z)=z^2\cos(z^{-1})$。

解：$f(z)=z^2\cos(z^{-1})$ 只有一个有限的孤立奇点 $z=0$ (本性奇点)，且 $0<|z|<+\infty$ 时，有

$$f(z)=z^2\cos(z^{-1})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2-2n}}{(2n)!}，故 Res\left[f(z),0\right]=c_{-1}=0。$$

3、判断 $z=\infty$ 是否为函数 $f(z)$ 的孤立奇点？对孤立的无穷远点，求留数 $Res\left[f(z),\infty\right]$

(1)、$f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$；

解：由于 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ 有无穷多个奇点 $z_n=2n\pi i及z=\infty,n=0,\pm1,\pm2,\ldots$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}z_n=\lim\limits_{k\to\infty}2n\pi i=\infty$，

即 $\forall R\ge0$，在 $R<|z|<+\infty$ 内总存在 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ 的奇点 $z_n=2n\pi i$ (只要 $|n|>\dfrac{R}{2\pi}$ 即可，无穷多个)，

故 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的非孤立奇点；

(2)、$f(z)=\dfrac{2z}{3+z^2}$；

解：由于 $f(z)=\dfrac{2z}{3+z^2}$ 在 $\sqrt{3}<|z|<+\infty$ 内解析，故 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，且

$$Res\left[f(z),\infty\right]=-Res\left[z^{-2}f(z^{-1}),0\right]=-Res\left[\frac{2}{z(3z^2+1)},0\right]=-\lim_{z\to0}\frac{2}{3z^2+1}=-2;$$

(3)、$f(z)=z^2+z^{-1}$；

解：由于 $f(z)=z^2+z^{-1}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，且

$$Res\left[f(z),\infty\right]=-C_{-1}=-1;$$

(4)、 $f(z)=e^{z^2}$；

解：由于 $f(z)=e^{z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$ 在 $|z|<+\infty$ 内解析，故 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立的本性奇点，且

$Res\left[f(z),\infty\right]=-c_{-1}=0$。

4、利用留数计算积分

(1)、 $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2}=2\pi iRes\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2},1\right]=2\pi i\lim_{z\to1}(e^{2z})'=4\pi e^2 i$；

(2)、 $\oint_{|z|=1/2}\frac{\sin zdz}{z(1-e^z)}=2\pi iRes\left[\frac{\sin zdz}{z(1-e^z)},0\right]=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{1-e^z}=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{(\sin z)'}{(1-e^z)'}=-2\pi i$；

(3)、 $\oint_{|z|=2}\frac{(5z-2)dz}{z(z-1)}=2\pi i\left\{Res\left[\frac{5z-2}{z(z-1)},0\right]+Res\left[\frac{5z-2}{z(z-1)},1\right]\right\}=2\pi i\left[\lim_{z\to0}\frac{5z-2}{z-1}+\lim_{z\to1}\frac{5z-2}{z}\right]=10\pi i$；

(4)、 $\oint_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^2}=2\pi iRes\left[\frac{1}{(z-1)^3(z+1)^2},1\right]=\frac{2\pi i}{2!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]=6\pi i\lim_{z\to1}\frac{1}{(z+1)^4}=\frac{3\pi i}{8}$。

5、计算积分

(1)、$\oint_{|z|=2}\frac{zdz}{z^4-1}=2\pi i\sum_{k=1}^{4}Res\left[f(z),z_k\right]$，其中 $f(z)=\frac{z}{z^4-1},z_1=1,z_2=-1,z_3=i,z_4=-i$，

$=-2\pi iRes\left[f(z),\infty\right]=2\pi iRes\left[z^{-2}f(z^{-1}),0\right]=2\pi iRes\left[\frac{z}{1-z^4},0\right]=0$；

(2)、$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)^5(z-4)}=2\pi i\left\{Res\left[f(z),-i\right]+Res\left[f(z),1\right]\right\}$

$=-2\pi i\left\{Res\left[f(z),\infty\right]+Res\left[f(z),4\right]\right\}=2\pi i\left\{Res\left[z^{-2}f(z^{-1}),0\right]-Res\left[f(z),4\right]\right\}$

$=2\pi i\left\{Res\left[\frac{z^{14}}{(1+iz)^{10}(1-z)^5(1-4z)},0\right]-Res\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)^5(z-4)},4\right]\right\}$

$=2\pi i\left[0-\lim_{z\to4}\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)^5}\right]=-\frac{2\pi i}{3^5\cdot(4+i)^{10}}$；

(3)、$\oint_{|z|=3}\frac{z^{15}dz}{(z^2-1)^2(z^4+2)^3}=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{6}Res\left[f(z),z_k\right]=-2\pi i\cdot Res\left[f(z),\infty\right]=2\pi i\cdot Res\left[z^{-2}f(z^{-1}),0\right]$

$=2\pi i\cdot Res\left[\frac{z^{-17}}{(z^{-2}-1)^2(z^{-4}+2)^3},0\right]=2\pi i\cdot Res\left[\frac{1}{z(1-z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right]$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{(1-z^2)^2(1+2z^4)^3} = 2\pi i \text{；}$$

(4)、$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z} dz}{1+z} = 2\pi i \cdot \left\{ Res\left[f(z), 0 \right] + Res\left[f(z), -1 \right] \right\} = -2\pi i \cdot Res\left[f(z), \infty \right]$

$$= 2\pi i \cdot Res\left[z^{-2} f(z^{-1}), 0 \right] = 2\pi i \cdot Res\left[\frac{e^z}{z^4(1+z)}, 0 \right] = \frac{2\pi i}{3!} \lim_{z\to 0} \frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{e^z}{1+z}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{3!} \lim_{z\to 0} \left[\frac{(1+z)^3 - 3(1+z^2)}{(1+z)^4} e^z \right] = -\frac{2\pi i}{3} \text{。}$$

【第七章习题】

一、填空题

1、设$\alpha>0$为常数，则$F\left[\cos(\alpha t)\right]=\underline{\pi\left[\delta(\omega+\alpha)+\delta(\omega-\alpha)\right]}$，$L\left[\cos(\alpha t)\right]=\underline{s/(s^2+\alpha^2),\mathrm{Re}(s)>0}$；

2、设$\alpha>0$为常数，则$F\left[\sin(\alpha t)\right]=\underline{i\pi\left[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)\right]}$，$L\left[\sin(\alpha t)\right]=\underline{\alpha/(s^2+\alpha^2),\mathrm{Re}(s)>0}$；

3、单位阶跃函数$u(t)$的傅氏变换为$F\left[u(t)\right]=\underline{-i\omega^{-1}+\pi\delta(\omega)}$；

4、单位脉冲函数$\delta(t)$的傅氏变换为$F\left[\delta(t)\right]=\underline{\ 1\ }$；

5、若$f(t)\equiv 1$，则其傅氏变换为$F\left[f(t)\right]=\underline{2\pi\delta(\omega)}$，拉氏变换为$L\left[f(t)\right]=\underline{s^{-1},\mathrm{Re}(s)>0}$；

6、设$\alpha\neq 0$为常数，则$e^{\alpha t}$的拉氏变换为$L\left[e^{\alpha t}\right]=\underline{(s-\alpha)^{-1},\mathrm{Re}(s-\alpha)>0}$。

二、计算题

1、求下列函数的傅氏变换

(1). $f(t)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(t), & 若 t\in(-1,1)\\ 0, & 若 t\notin(-1,1)\end{cases}$；

解：$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-1}^{+1}\mathrm{sgn}(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^1 e^{-i\omega t}dt-\int_{-1}^0 e^{-i\omega t}dt=\int_0^1(e^{-i\omega t}-e^{i\omega t})dt$

$$=-2i\int_0^1\sin(\omega t)dt=\frac{2(1-\cos\omega)}{i\omega}；$$

(2). $f(t)=\mathrm{sgn}(t)$；

解：$F(\omega)=F\left[\mathrm{sgn}(t)\right]=F\left[2u(t)-1\right]=2F\left[u(t)\right]-F\left[1\right]=\dfrac{2}{i\omega}+2\pi\delta(\omega)-2\pi\delta(\omega)=\dfrac{2}{i\omega}$；

(3). $f(t)=u(t)\sin(\alpha t)$，其中$\alpha>0$为常数；

解：$F(\omega)=F\left[u(t)\sin(\alpha t)\right]=\dfrac{1}{2\pi}F\left[u(t)\right]*F\left[\sin(\alpha t)\right]=\dfrac{i}{2}\left[\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]*\left[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)\right]$

$$=\frac{1}{2\omega}*\left[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)\right]+\frac{i\pi}{2}\delta(\omega)*\left[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\omega+\alpha)}-\frac{1}{i(\omega-\alpha)}\right]+\frac{i\pi}{2}\left[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)\right]=\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega^2}+\frac{i\pi}{2}\left[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)\right],$$

注：上面用到$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)\delta(\tau-t_0)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0-\xi)\delta(\xi)d\xi=f(t-t_0)$。

2、求函数$f(t)=\begin{cases}1, & 若 t\in\left[-1,1\right]\\ 0, & 若 t\notin\left[-1,1\right]\end{cases}$的傅氏变换及傅氏积分表示。

解：$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-1}^{+1}e^{-i\omega t}dt=\int_0^1(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})dt=2\int_0^1\cos(\omega t)dt=2\omega^{-1}\sin\omega$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega t}d\omega=\frac{\pi}{2}\left[f(t-0)+f(t+0)\right]=\begin{cases}\pi, & 若|t|<1\\ \pi/2, & 若|t|=1\\ 0, & 若|t|>1\end{cases}$$ 即

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}\left[f(t-0)+f(t+0)\right]=\begin{cases}\pi/2, & 若|t|<1\\ \pi/4, & 若|t|=1\\ 0, & 若|t|>1\end{cases},$$

取 $t=0$，得 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$。

3、求下列函数的拉氏变换

(1). $f(t)=\begin{cases}3, & 若0\le t<2\\ -1, & 若2\le t<4\\ 0, & 若t\ge 4\end{cases}$；

解：$F(s)=L\left[f(t)\right]=3\int_0^2 e^{-st}dt-\int_2^4 e^{-st}dt=s^{-1}(e^{-st}\Big|_{t=2}^{t=4}-3e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=2})=\frac{1}{s}(3-4e^{-2s}+e^{-4s})$；

(2). $f(t)=\begin{cases}t^3, & 若t\ge 0\\ 0, & 若t\le 0\end{cases}$。

解：$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}t^3e^{-st}dt=s^{-4}\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=\frac{\Gamma(4)}{s^4}=\frac{6}{s^4},\mathrm{Re}(s)>0$。

4、求下列函数的拉氏逆变换

(1). $F(s)=\frac{2}{1-s^2}$；

解：$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{1-s^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right]=e^{-t}-e^{t}=-2sht$；

(2). $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$；

解：$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right]=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$。

5、求解如下微分方程

(1). $\begin{cases}x''(t)-2x'(t)+x(t)=e^t\\ t=0:x'(t)=x(t)=0\end{cases}$；

解：令 $X(s)=L\left[x(t)\right]$，则 $L\left[x^{(k)}(t)\right]=s^kX(s)-\sum\limits_{0\le j\le k}s^{k-j-1}x^{(j)}(0)=s^kX(s),\ k=0,1,2$，而

$L\left[t^me^{at}\right]=\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$，故在上述方程两边取 $Laplace$ 变换得 $(s-1)^2X(s)=1/(s-1)$，即

$X(s)=1/(s-1)^3$，故 $x(t)=L^{-1}\left[1/(s-1)^3\right]=e^tL^{-1}\left[1/s^3\right]=\frac{1}{2}t^2e^t$；

(2). $\begin{cases} x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{-t} \\ t=0: x'(t)=x(t)=1 \end{cases}$；

解：:类似于(1)，在方程两边取 *Laplace* 变换得 $(s^2+4s+3)X(s)=s+5+(s+1)^{-1}$，即

$$X(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{7}{s+1}-\frac{3}{s+3}\right]，故$$

$$x(t)=\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{7}{s+1}-\frac{3}{s+3}\right]=\frac{1}{4}\left[(2t+7)e^{-t}-3e^{-3t}\right]；$$

(3). $\begin{cases} x'''(t)+3x''(t)+3x'(t)+x(t)=1 \\ t=0: x''(t)=x'(t)=x(t)=0 \end{cases}$；

解：类似于(1)，在方程两边取 *Laplace* 变换得 $(s+1)^3X(s)=s^{-1}$，即 $X(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^3}$，故

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^3}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]*L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]=1*\frac{1}{2}t^2e^{-t}=\frac{1}{2}\int_0^t\tau^2e^{-\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-(t^2+2t+2)e^{-t}\right]；$$

(4). $\begin{cases} x''(t)-x(t)=4\sin t+5\cos t \\ t=0: x'(t)=-2, x(t)=-1 \end{cases}$。

解：类似于(1)，在方程两边取 *Laplace* 变换得 $(s^2-1)X(s)=-(s+1)+\dfrac{4+5s}{s^2+1}$，即

$$X(s)=-\frac{1}{s-1}+\frac{4+5s}{(s^2+1)(s^2-1)}=-\frac{1}{s-1}+\frac{9}{2(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s-1)}+\frac{1}{2(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s+1)}，故$$

$$x(t)=L^{-1}\left[X(s)\right]=-e^t+\frac{9}{2}\sin t*e^t+\frac{1}{2}\sin t*e^{-t}=\frac{1}{2}\int_0^t(9e^{t-\tau}+e^{\tau-t})\sin\tau d\tau-e^t$$

$$=\frac{1}{4}\left[5e^t+e^{-t}-(8\sin t+10\cos t)\right]。$$