# 习题一　行列式

## 一、选择题

1、下列排列中是偶排列的是【 $D$ 】

$(A)$、54123；　$(B)$、42315；　$(C)$、35241；　$(D)$、15432 。

2、下列乘积是 5 阶行列式中的一项的是【 $B$ 】

$(A)$、$a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$；　$(B)$、$a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$；　$(C)$、$a_{13}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55}$；　$(D)$、$a_{21}a_{13}a_{24}a_{55}a_{42}$ 。

3、设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m,$ $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = n$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$ 等于【 $D$ 】

$(A)$、$m+n$；　$(B)$、$-(m+n)$；　$(C)$、$n-m$；　$(D)$、$m-n$ 。

4、下列 $n(\geq 2)$ 阶行列式中值一定为零的是【 $B$ 】

$(A)$、主对角线上元素全为零的行列式；　$(B)$、主对角线上有零元素的三角行列式；

$(C)$、零元素多于 $n$ 个的行列式；　$(D)$、非零元素多于 $n$ 个的行列式。

5、四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值为【 $D$ 】

$(A)$、$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$；　$(B)$、$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$；

$(C)$、$(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$；　$(D)$、$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$ 。

## 二、填空题

1、排列 $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$ 的逆序数为 $\underline{0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)}$ ；

2、行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 中 $x$ 的系数为 $\underline{(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1}$ ；

3、行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值为 $\underline{0}$ ；

4、若 $A_{ij}$ 是行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，则与 $aA_{21}+bA_{22}+cA_{23}$ 对应的三阶行列式为 $\underline{\begin{vmatrix}1&2&3\\a&b&c\\7&8&9\end{vmatrix}}$；

5、行列式 $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_1\\0&0&\cdots&a_2&0\\\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&a_{n-1}&\cdots&0&0\\a_n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$ 的值为 $\underline{(-1)^{n(n-1)/2}a_1a_2\cdots a_n}$。

**三、计算题**

1、写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解：四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $(-1)^{\tau(1\cdot3\cdot m\cdot n)}a_{11}a_{23}a_{3m}a_{4n}$，其中 $(m,n)=(2,4)$或$(4,2)$，故它们是

$$(-1)^{\tau(1\cdot3\cdot2\cdot4)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \text{ 与 } (-1)^{\tau(1\cdot3\cdot4\cdot2)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}。$$

2、$D=\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=3xy(x+y)-(x+y)^3-x^3-y^3=-2(x^3+y^3)$。

3、$D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第一行加到第二行}}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}=0$。

4、$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xlongequal{\text{各行减去最后一行}}\begin{vmatrix}x&0&0&y\\0&-x&0&y\\0&0&y&y\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第四列减去第三列}}\begin{vmatrix}x&0&0&y\\0&-x&0&y\\0&0&y&0\\1&1&1&-y\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第三行展开}}(-1)^{3+3}y\begin{vmatrix}x&0&y\\0&-x&y\\1&1&-y\end{vmatrix}\xlongequal{\text{用对角线法则展开}}y(x^2y+xy-xy)=x^2y^2$。

5、计算 $D_n=\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&1\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&0\\1&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}_n$，其中主对角线上元素为 $a$，左下角与右上角元素是 1，其余元素为零。

解：由行列式的运算性质得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n \xlongequal{\text{按最后一行展开}} (-1)^{2n}a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal{\text{后面行列式再第一行展开}} (-1)^{2n}a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-2}$$

$=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$。

6、计算 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}_n$，其中主对角线上元素为 $x$，其余元素全为 $a$。

解：由行列式的运算性质得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}_n \xlongequal{\text{各行加到第一行后，提出公因子}} \left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal{\text{各行减去第一行的}a\text{倍}} \left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}_n =(x-a)^{n-1}\left[x+(n-1)a\right]。$$

7、用 $Cramer$ 法则求解方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2=1 \\ x_1-x_3=4 \end{cases}$。

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2+0+0-2-0-1=-5$，$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-4+0+0-8-0-1=-13$，

$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-1+4+0-1-0+2=4$，$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8+0-1-4-0+4=7$，

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{13}{5}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{4}{5}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{7}{5}$。

**四、证明题**

1、$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$。

证明：由行列式的运算性质得

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{各列减去第一列}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第四列减去第二列的3倍}]{\text{第三列减去第二列的2倍}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0。$$

2、$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$。

证明：令 $f_m(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$，$m = 1,2,...,n$，则由行列式的运算性质得

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_n \xlongequal[k=n,n-1,...,3,2]{\text{将第}k\text{列的倍加到第}(k-1)\text{列}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) & f_{n-2}(x) & \cdots & f_2(x) & f_1(x) \end{vmatrix}_n$$

$$= (-1)^{n+1} f_n(x) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = f_n(x)$$，按第一列展开所得。

3、设 $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ 两两互异，则 $\forall b_1, b_2, ..., b_n \in R$，存在唯一的多项式 $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$，

使之满足 $f(a_k) = b_k, k = 1,2,...,n$。

证明：由于 $a_1,a_2,...,a_n \in R$ 两两互异，故行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}_n = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\neq 0$，故由

$Cramer$ 法则知，方程组 $\sum_{j=0}^{n-1} c_j a_k^j = b_k, k=1,2,...,n$ 有唯一解 $c_0,c_1,...,c_{n-1}\in R$，即存在唯一的多项式

$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}=\sum_{1\le k\le n} b_k \prod_{j\neq k}(\frac{x-a_j}{a_k-a_j})$，使之满足 $f(a_k)=b_k, k\in \underline{n}$。

**五、讨论题**

1、若方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0\\ x_1+bx_2+x_3=0\\ x_1+2bx_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解，问常数 $a,b$ 应满足什么条件?

解：由 $Cramer$ 法则知，常数 $a,b$ 应满足 $D=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 0 & b & 0\end{vmatrix}=-b\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1-a)b=0$，即

$a=1$ 或 $b=0$。

2、若方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=1\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=2\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=3\end{cases}$ 无解或有两个不同的解，问常数 $\lambda$ 应取何值?

解：由 $Cramer$ 法则知，常数 $\lambda$ 应满足

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换第1、3行}} -\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1-\lambda & -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第1行的}(\lambda-1)\text{倍加到第3行}]{\text{第2行减去第1行的2倍}} -\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1\\ 0 & \lambda-3 & -\lambda^2+2\lambda+3\end{vmatrix} \xlongequal[\text{交换第2、3行}]{\text{第2行加到第3行}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & -2 & -\lambda^2+4\lambda+2\\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行列式外边除以2}]{\text{第3行乘2行}} \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & -2 & -\lambda^2+4\lambda+2\\ 0 & 2(1-\lambda) & 2(2\lambda-1)\end{vmatrix} \xlongequal{\text{第2行乘}(1-\lambda)\text{加到第3行}} \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & -2 & -\lambda^2+4\lambda+2\\ 0 & 0 & \lambda^3-5\lambda^2+6\lambda\end{vmatrix}$$

$=-(\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda)=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$，即 $\lambda=0,2,3$。

# 习题二　矩阵及其运算

## 一、选择题

1、设 $A\in R^{3\times3}$， $\lambda=-2,|A|=3$，则 $|\lambda A|=$【 $B$ 】

$(A)$、24； $(B)$、$-24$； $(C)$、6； $(D)$、$-6$。

2、设 $A,B,C\in R^{n\times n}$ 满足 $ABC=E$，则必有【 $D$ 】

$(A)$、$ACB=E$； $(B)$、$CBA=E$； $(C)$、$BAC=E$； $(D)$、$BCA=E$。

3、设 $A,B\in R^{n\times n}$ 满足 $AB=0$，则必有【 $C$ 】

$(A)$、$A=0或B=0$； $(B)$、$A+B=0$； $(C)$、$|A|=0或|B|=0$； $(D)$、$|A+B|=0$。

4、设 $A\in R^{n\times n}$， $0\neq k\in R$，则 $|kA|=$【 $B$ 】

$(A)$、$k|A|$； $(B)$、$k^n|A|$； $(C)$、$|k|\cdot|A|$； $(D)$、$|A|/k$。

5、设 $A,B\in R^{n\times n}$，则必有【 $B$ 】

$(A)$、$(AB)^T=A^TB^T$ ； $(B)$、$|AB|=|BA|$ ； $(C)$、$AB=BA$ ；

$(D)$、$|A+B|=|A|+|B|$。

6、设 $A,B\in R^{n\times n}$ 满足 $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$，则必有【 $D$ 】

$(A)$、$A=E$； $(B)$、$B=E$； $(C)$、$A=B$； $(D)$、$AB=BA$。

7、设 $A^*$ 是 $A\in R^{n\times n}$ 的伴随矩阵($n>1$)，则【 $A$ 】

$(A)$、$|A^*|=|A|^{n-1}$； $(B)$、$|A^*|=|A|$； $(C)$、$|A^*|=|A|^n$； $(D)$、$|A^*|=|A^{-1}|$。

8、设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)=2$，则【 $B$ 】 $A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$

$(A)$、$k=1$； $(B)$、$k=-2$； $(C)$、$k\neq1$； $(D)$、$k\neq-2$。

9、设 $A\in R^{m\times n},B\in R^{n\times m}$，则【 $B$ 】 $0\le r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}\le\min\{m,n\}$

$(A)$、当 $m>n$ 时,必有 $|AB|\neq0$； $(B)$、当 $m>n$ 时,必有 $|AB|=0$；

$(C)$、当 $n>m$ 时,必有 $|AB|\neq0$； $(D)$、当 $n>m$ 时,必有 $|AB|=0$。

10、设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}, P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则【 $C$ 】

$(A)$、$AP_1P_2=B$； $(B)$、$AP_2P_1=B$； $(C)$、$P_1P_2A=B$； $(D)$、$P_2P_1A=B$。

11、设 $A\in R^{n\times n}$，则下列说法错误的是【 $D$ 】

$(A)$、$A$可逆 $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$；

$(B)$、$A$可逆 $\Longleftrightarrow A\sim E$；

$(C)$、$A$可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在初等阵$P_1,P_2,\dots,P_m\in R^{n\times n}$,使$A=P_1P_2\cdots P_m$；

$(D)$、以上皆错。

**二、填空题**

1、设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$，则其伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{pmatrix} 5 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$；

2、$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}$；

3、设 $A,B\in R^{n\times n}$ 可逆，则 $\begin{pmatrix} 0 & 2A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ 2^{-1}A^{-1} & 0 \end{pmatrix}}$；

4、设 $A\in R^{n\times n}$ 满足 $AA^T=E$, 且$|A|<0$，则$|A+E|=\underline{0}$；注：利用$(A+E)A^T=(A+E)^T$ 易得。

5、设 $A^*,B^*$ 分别是 $A,B\in R^{n\times n}$ 的伴随矩阵，且 $r(A)=n-1, r(B)=n$，则 $r(A^*B^*)=\underline{r((BA)^*)=1}$；

6、设 $A\in R^{4\times 3}$，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $r(AB)=\underline{\ 2\ }$；注：$|B|\neq 0$。

7、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^*BA=2BA-8E$，则 $B=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$；

解：由 $A^*BA=2BA-8E$ 得 $(2E-A^*)BA=8E$，故

$$B=8(2E-A^*)^{-1}A^{-1}=8\left[A(2E-A^*)\right]^{-1}=8(2A-AA^*)^{-1}=8(2A-|A|A^{-1})^{-1}$$

$$=8\left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}=8\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}。$$

8、设 $A\in R^{n\times n}$ 满足 $A^2-A-2E=0$，则 $(A+2E)^{-1}=$ $\underline{\frac{1}{4}(3E-A)}$ ；

解：由题设知 $(A+2E)(A-3E)=(A^2-A-2E)-4E=-4E$，故 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$ 。

9、设 $A\in R^{4\times 4}$ 满足 $|A|=3$，则 $|A^*|=|A|^{4-1}=$ $\underline{27}$ 。

**三、计算题**

1、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求 $A^m$ 。

解：由于 $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4E$，故

$$A^m=\begin{cases}2^mE, & \text{若}m\text{为偶数}\\ 2^{m-1}A, & \text{若}m\text{为奇数}\end{cases}。$$

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求 $3AB-2A$ 及 $A^TB$ 。

解：$3AB-2A=A(3B-2E)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\-5&-8&14\\-2&17&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&13&22\\-2&-21&20\\4&29&-6\end{pmatrix}$，

$$A^TB=AB=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}。$$

3、求下列矩阵的逆矩阵

(1)、$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$；　　(2)、$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}$。

解：由矩阵的初等行变换法得

(1)、$(A,E)=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&0&0\\3&4&-2&0&1&0\\5&-4&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1&0\\0&1&0&-13/2&6/2&-1/2\\0&0&1&-16&7&-1\end{pmatrix}$，故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-13/2&6/2&-1/2\\-16&7&-1\end{pmatrix}；$$

(2)、$(B,E)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\2&1&3&0&0&0&1&0\\1&2&1&4&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1/2&1/2&0&0\\0&0&1&0&-1/2&-1/6&1/3&0\\0&0&0&1&1/8&-5/24&-1/12&1/4\end{pmatrix}$，故

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1/2&1/2&0&0\\-1/2&-1/6&1/3&0\\1/8&-5/24&-1/12&1/4\end{pmatrix}。$$

4、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $B$，使之满足 $AB+E=A^2+B$。

解：由于 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可逆，且由 $AB+E=A^2+B$ 知，$(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$，

故 $B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$。

5、求下列矩阵的秩

(1)、$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$；

(2)、$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\3&7&2&3\\2&5&1&2\end{pmatrix}$。

解：由矩阵的初等变换得

(1)、$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1/2&1/4\\0&1&-3/2&5/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $r(A)=2$；

(2)、$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\3&7&2&3\\2&5&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 $r(B)=4$。

6、设 $AP=PB, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$,求 $A$与$A^5$。

解：由题设知 $P$ 可逆，且 $B^5=B$，而

$$(P,E)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&-1&0\\0&0&1&-4&1&1\end{pmatrix}，故 P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix},$$

$$A^5 = PB^5P^{-1} = PBP^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}。$$

7、设 $a_k \neq 0, k = 1,2,...,n$，求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解：由矩阵的初等变换得

$$(A,E) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第}k\text{行除以}a_k, k=1,2,...,n} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

故 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$。

8、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵 $X$，使之满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$。

解：由 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$ 得 $(A-B)X(A-B) = E$，且

$$(A-B,E)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，而 $X=(A-B)^{-2}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$。

**四、证明题**

1、设 $A,B\in R^{n\times n}$ 满足 $AB=A-B$，则

(1)、$(A+E)^{-1}=E-B$；　　(2)、$AB=BA$。

证明：由题设知

(1)、$(A+E)(E-B)=A-B-AB+E=E$，故 $(A+E)^{-1}=E-B$；

(2)、$E=(E-B)(A+E)=A-B-BA+E$，故 $AB=BA=A-B$。

2、设 $A\in R^{n\times n}$，且 $(E+A)$ 可逆，而 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$，则

(1)、$(E+f(A))(E+A)=2E$；　　(2)、$f(f(A))=A$。

证明：由题设知

(1)、$(E+f(A))(E+A)=(E+A)+f(A)(E+A)=(E+A)+(E-A)=2E$；

(2)、由(1)知 $(E+f(A))^{-1}=\dfrac{1}{2}(E+A)$，故

$$f(f(A))=(E-f(A))(E+f(A))^{-1}=\frac{1}{2}\left[E-(E-A)(E+A)^{-1}\right](E+A)=\frac{1}{2}\left[(E+A)-(E-A)\right]=A$$

3、设 $\lambda\in R$，则 $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&n(n-1)\lambda^{n-2}/2\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$。

证明：令 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A=\lambda E+B$，且 $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},k\geq 3$，

故 $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n=A^n=(\lambda E+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}C_n^kB^k=\lambda^nE+n\lambda^{n-1}B+\dfrac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}B^2$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2}/2 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}。$$

4、设 $A,B\in R^{m\times n}$，则 $A\sim B \Longleftrightarrow r(A)=r(B)$。

证明：若 $A\sim B$，则存在可逆阵 $P\in R^{m\times m},Q\in R^{n\times n}$，使 $B=PAQ$，而可逆阵等于初等阵的乘积，初等阵乘以矩阵等价于对矩阵进行初等变换，且初等变换不改变矩阵的秩，故 $r(B)=r(PAQ)=r(A)$；

若 $r(A)=r(B)=r$，则 $A,B$ 有相同的标准型 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，而矩阵与其标准型等价，即

$A\sim\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B\sim\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $A\sim B$。

5、设 $A,B\in R^{n\times n}$，且 $A$ 可逆，则 $AB=BA \Longleftrightarrow A^{-1}B=BA^{-1}$。

证明：$AB=BA \Longleftrightarrow A^{-1}B=A^{-1}(BA)A^{-1}=A^{-1}(AB)A^{-1}=BA^{-1}$。

6、设 $0\neq B\in R^{n\times 1},A=E-BB^T$，则

(1)、$A^2=A \Longleftrightarrow B^TB=1$； (2)、当 $B^TB=1$ 时，$A$ 不可逆。

证明：不妨设 $0\neq B=(b_1,b_2,...,b_n)^T\in R^{n\times 1}$，则 $BB^T=(b_1,b_2,...,b_n)^T(b_1,b_2,...,b_n)=\left(b_ib_j\right)_{n\times n}\neq 0$，故

(1)、$A^2=A \Longleftrightarrow E-2BB^T+(B^TB)(BB^T)=E-BB^T \Longleftrightarrow (B^TB-1)(BB^T)=0 \Longleftrightarrow B^TB=1$；

(2)、假设 $B^TB=1$ 时，$A$ 可逆，则由(1)知 $A(A-E)=0$，故 $A-E=A^{-1}0=0$，即 $A=E$，

从而 $BB^T=0$，矛盾，故 $A$ 不可逆。

7、设 $A^*$ 是 $A\in R^{n\times n}$ 的伴随矩阵($n\geq 2$)，则 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$。

证明：由题设知 $A^*A=\left|A\right|E$，故

(1)、若 $A=0$，则由伴随矩阵的定义知 $A^*=0$，故 $\left|A^*\right|=0$；

(2)、若 $\left|A\right|=0$，但 $A\neq 0$，则线性方程组 $A^*X=0$ 有非零解 $X=A$，故由 $Cramer$ 法则知 $\left|A^*\right|=0$；

(3)、若 $\left|A\right|\neq 0$，则在 $A^*A=\left|A\right|E$ 两边取行列式得 $\left|A^*\right|\cdot\left|A\right|=\left|A^*A\right|=\det\left(\left|A\right|E\right)=\left|A\right|^n$，即 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$。

故对任意 $n\geq 2$ 阶方阵 $A\in R^{n\times n}$，恒有 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$。

# 习题三　向量组的线性相关性

## 一、选择题

1、下列向量中是 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$ 的线性组合的是【 $A$ 】

$(A)$、$(3,0,0)^T$；　$(B)$、$(2,3,0)^T$；　$(C)$、$(-1,1,0)^T$；　$(D)$、$(0,3,0)^T$。

2、若向量组 $\alpha_1=(2,3,-1,0,1)^T,\alpha_2=(-4,-6,2,a,-2)^T$ 线性相关，则【 $A$ 】

$(A)$、$a=0$；　$(B)$、$a\neq 0$；　$(C)$、$a>0$；　$(D)$、$a\in R$ 任意。

3、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是【 $C$ 】

$(A)$、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 不含零向量；

$(B)$、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中任意两个向量的分量不成比例；

$(C)$、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中任一向量都不能由其余向量线性表示；

$(D)$、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中有部分向量线性无关。

4、若向量组 $\alpha_1=(a+1,2,-6),\alpha_2=(1,a,-3),\alpha_3=(1,1,a-4)$ 线性无关，则【 $D$ 】

$(A)$、$a=0$；　$(B)$、$a\neq 0$；　$(C)$、$a=1$；　$(D)$、$a\neq 1$。

注：$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -6 & -3 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} -6 & -3 & a-4 \\ 0 & 3(a-1) & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$。

5、设 $A\in R^{m\times n}$，则方程组 $AX=0$ 只有零解的充要条件是【 $B$ 】

$(A)$、矩阵 $A$ 的行向量组线性无关；　$(B)$、矩阵 $A$ 的列向量组线性无关；

$(C)$、矩阵 $A$ 的行向量组线性相关；　$(D)$、矩阵 $A$ 的列向量组线性相关。

6、设 $A\in R^{m\times n}$ 的行秩为 $s$、列秩为 $t$，则必有【 $C$ 】

$(A)$、$s<t$；　$(B)$、$s>t$；　$(C)$、$s=t$；　$(D)$、无法确定。

7、设 $A\in R^{n\times n}$ 的秩为 $r$ (其中 $1\leq r<n$)，则其 $n$ 个行向量中【 $A$ 】

$(A)$、必有 $r$ 个行向量线性无关；　$(B)$、任意 $r$ 个行向量线性无关；

$(C)$、任意 $r$ 个行向量都是极大无关组；　$(D)$、任一行向量都可由其余行向量线性表示。

8、设 $A \in R^{n\times n}$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s \in R^{n\times 1}$，则下列选项中正确的是【 $A$ 】

$(A)$、若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$ 线性相关；

$(B)$、若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$ 线性无关；

$(C)$、若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$ 线性相关；

$(D)$、若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$ 线性无关。

9、设 $3\le m\le n$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m \in R^{n\times 1}$ 线性无关的充要条件是【 $D$ 】

$(A)$、存在不全为零的数 $k_1,k_2,\dots,k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\ne 0$；

$(B)$、$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 中任意两个向量线性无关；

$(C)$、$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 中存在一个向量，使其不能由其余向量线性表示；

$(D)$、$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 中任一向量都不能由其余向量线性表示。

10、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in R^{n\times 1}$ 线性无关，则【 $C$ 】

$(A)$、向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关；

$(B)$、向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关；

$(C)$、向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关；

$(D)$、向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关。

**二、填空题**

1、设向量组 $\alpha_1=(1+\lambda,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+\lambda,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+\lambda)^T$ 的秩为 2，则 $\lambda=$ <u>$-3$</u>；

注：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+3)\end{pmatrix}$。

2、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_2+4\alpha_3$ 线性 <u>无关</u>；

注：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，且 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

3、向量组 $\alpha_1=(1,0,-2,1),\alpha_2=(3,1,0,-1),\alpha_3=(1,1,4,-3),\alpha_4=(3,0,10,3)$ 的秩为 <u>3</u>；

注：$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&3&1&3\\0&1&1&0\\-2&0&4&10\\1&-1&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。

4、若 $\beta=(1,0,k,2)^T$ 可由 $\alpha_1=(1,3,0,5)^T,\alpha_2=(1,2,1,4)^T,\alpha_3=(1,1,2,3)^T,\alpha_4=(1,-3,6,-1)^T$ 线性表示，

则 $k=$ __3__；

注：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&0\\0&1&2&6&k\\5&4&3&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-1&-5&-2\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&k-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$。

5、矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)=$ __2__；

注：$A=\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&4&-1\\0&1&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。

6、方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件是 $A$ 的列向量组线性 __相关__；

7、方阵 $A\in R^{n\times n}$ 可逆的充要条件是 $A$ 的列向量组线性 __无关__；

8、设 $A\in R^{n\times n}$，则方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=$ __0__；

9、设矩阵 $A,B\in R^{m\times n}$ 且 $B$ 由 $A$ 经过初等行变换得到，而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 是矩阵 $A$ 的列向量组之极大无关组，$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 是矩阵 $B$ 的列向量组之极大无关组，则 $s$ 与 $t$ 的大小关系为 __$s=t$__；若矩阵 $A,B$ 的第 $k$ 个列向量为 $\alpha_k,\beta_k$，且 $\beta_k=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_t\beta_t$，则 $\alpha_k=$ __$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_t\alpha_t$__。

**三、计算题**

1、求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3),\alpha_2=(4,-1,-5,6),\alpha_3=(1,-3,-4,-7),\alpha_4=(2,1,-1,0)$ 的秩及其极大无关组。

解：$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&4&1&2\\2&-1&-3&1\\1&-5&-4&-1\\3&6&-7&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&7/5\\0&1&0&0\\0&0&1&3/5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其极大无关组，而 $\alpha_4=\frac{7}{5}\alpha_1+\frac{3}{5}\alpha_3$。

2、求向量组$\alpha_1=(1,2,1,2)^T,\alpha_2=(-4,1,5,6)^T,\alpha_3=(-1,3,4,7)^T$的秩及其极大无关组。

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-4&-1\\2&1&3\\1&5&4\\2&6&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，且

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是其极大无关组。

3、求$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&\lambda\end{pmatrix}$的秩。

解：由于$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&\lambda+3\end{pmatrix}$，故$r(A)=\begin{cases}2\text{，若}\lambda=-3\\3\text{，若}\lambda\neq-3\end{cases}$。

4、设$\alpha=(1,1,1),\beta=(1,2,3),\gamma=(1,3,t)$，问$t$为何值时，向量组$\alpha,\beta,\gamma$线性相关。

解：由于$A=(\alpha^T,\beta^T,\gamma^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}$，故向量组$\alpha,\beta,\gamma$线性相关$\Longleftrightarrow t=5$，且

$t=5$时，有$\gamma=2\beta-\alpha$。

**四、讨论题** 举例说明下列命题是错误的

1、若存在不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_n\beta_n=0$，则向量组

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性相关，且$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$也线性相关。

反例：$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,1),\beta_1=(-1,0),\beta_2=(0,-1)$满足$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2=0$，但$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，且

$\beta_1,\beta_2$也线性无关。

2、若只有$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$全为零时，才有$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_n\beta_n=0$，则向量组

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关，且$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$也线性无关。

反例：取$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,0),\beta_1=(0,0),\beta_2=(0,1)$，则$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_2=0$只

有零解$\lambda_1=\lambda_2=0$，但$\alpha_1,\alpha_2$线性相关，且$\beta_1,\beta_2$也线性相关。

3、若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性相关，且$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$也线性相关，则存在不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，使

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_n\beta_n=0$。

反例：$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,0)$ 线性相关，且 $\beta_1=(0,0),\beta_2=(0,1)$ 也线性相关，但方程组

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$ 只有零解 $\lambda_1=\lambda_2=0$。

**五、证明题**

1、若 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性相关，则 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表示，且系数唯一。

证明：由题设知

(1)、存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,\lambda_0$，使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_0\beta=0$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，故必有 $\lambda_0\neq 0$，故 $\beta=-\dfrac{1}{\lambda_0}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k$；

(2)、假设 $\beta=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\alpha_k=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\alpha_k$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)\alpha_k=\beta-\beta=0$，再由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 的线性无关性知 $x_k=y_k,k=1,2,...,n$。

2、设向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in R^{n\times 1}$ 线性无关，且可由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R^{n\times 1}$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关。

证明：由题设知矩阵 $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ 可逆，且存在方阵 $K\in R^{n\times n}$，使 $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)K=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$，故矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 可逆，即 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关。

3、若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_1=3\alpha_2+2\alpha_3,\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 也线性无关。

证明：由题设知 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$，而 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，

故 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，即 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_1=3\alpha_2+2\alpha_3,\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关。

4、设 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 表达系数唯一。

证明：设 $\beta=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\alpha_k=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\alpha_k$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)\alpha_k=\beta-\beta=0$，故

表达系数唯一 $\Longleftrightarrow x_k=y_k,k=1,2,...,n\Longleftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关。

# 习题四 线性方程组的解

## 一、选择题

1、设 $A\in R^{m\times n}, b\in R^{m\times 1}$，且方程组 $AX=b$ 的解不唯一，则【 $D$ 】

$(A)$、$r(A)<m$； $(B)$、$m<n$； $(C)$、$A=0$； $(D)$、$AX=0$ 的解不唯一。

2、设 $A\in R^{m\times n}$，且方程组 $AX=0$ 有非零解，则【 $B$ 】

$(A)$、$m<n$； $(B)$、$r(A)<n$；

$(C)$、$A$ 有两列成比例； $(D)$、$A$ 的行向量组线性相关。

3、设 $A\in R^{m\times n}, b\in R^{m\times 1}$，且 $r(A)=r$，则【 $A$ 】

$(A)$、$r=m$ 时 $AX=b$ 有解； $(B)$、$r=n$ 时 $AX=b$ 有唯一解；

$(C)$、$m=n$ 时 $AX=b$ 有解； $(D)$、$r<n$ 时 $AX=b$ 有无穷多解。

4、设 $\beta_1,\beta_2$ 是 $AX=b$ 的两个互异解，$\alpha_1,\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的基础解系，则 $AX=b$ 的通解为【 $B$ 】

$(A)$、$X=C_1\alpha_1+C_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$； $(B)$、$X=C_1\alpha_1+C_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$；

$(C)$、$X=C_1\alpha_1+C_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$； $(D)$、$X=C_1\alpha_1+C_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$。

5、设 $A\in R^{m\times n}$，且 $r(A)=s$，则方程组 $AX=0$ 的基础解系中所含的向量个数为【 $B$ 】

$(A)$、$m-s$； $(B)$、$n-s$； $(C)$、$s$； $(D)$、无法确定。

6、设方程组 $\begin{cases} kx+y+z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解，则【 $A$ 】

$(A)$、$k=-1或4$； $(B)$、$k=-4或1$； $(C)$、$k=1或4$； $(D)$、$k=-1或(-4)$。

注：$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{行} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5-k \\ 0 & 3 & 7-2k \\ 0 & 0 & (k+1)(k-4) \end{pmatrix}$。

7、设 $A\in R^{t\times s}, b\in R^{t\times 1}$，则 $AX=b$ 有无穷多解的充要条件是【 $A$ 】

$(A)$、$r(A,b)=r(A)<s$； $(B)$、$r(A,b)=r(A)<t$；

$(C)$、$r(A,b)=r(A)=t$； $(D)$、$r(A,b)=r(A)=s$。

**二、填空题**

1、方程组$\begin{cases} x+y+\lambda z=\lambda^2 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ \lambda x+y+z=1 \end{cases}$ 在$\lambda\neq$ $\underline{\ 1,-2\ }$ 时有唯一解，在$\lambda=$ $\underline{\ -2\ }$ 时无解，在$\lambda=$ $\underline{\ 1\ }$ 时有无穷多解；

注：$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & -(\lambda-1) & -\lambda(\lambda-1) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & (\lambda-1)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$。

2、若方程组$\begin{cases} \lambda x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2-\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则$\lambda=$ $\underline{\ -1\text{或}6\ }$ ；

注：$A=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3\lambda-2 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-6) \end{pmatrix}$。

3、若方程组$\begin{cases} x_1+3x_3+x_4+2x_5=0 \\ -x_1+3x_2-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2+7x_3+2x_4+tx_5=0 \end{cases}$ 的基础解系含有 3 个解向量，则$t=$ $\underline{\ 5\ }$ ；

注：由题设知$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & t \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$的秩为$r(A)=5-3=2$，故$t=5$。

4、若方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$与$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+x_2+(c+2)x_3=0 \end{cases}$同解，则$a=2,\ b=0,\ c=1$；

注：令$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \Longleftrightarrow AX=0$，而$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+x_2+(c+2)x_3=0 \end{cases} \Longleftrightarrow BX=0$，

其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & 1 & c+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1-2b & 2-c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

故两个齐次方程组同解$\Longleftrightarrow A,B$的行等价(即其行向量组等价)$\Longleftrightarrow A,B$有相同的行标准形

$\Longleftrightarrow a=2,\ b=0,\ c=1$，且此时它们等价于$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$，即$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中$k\in R$任意。

5、设矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 的各行元素之和恒为零且 $r(A)=n-1$，则 $AX=0$ 的通解为 $X=c(1,1,...,1)^T$；

6、方程 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=1$ 的通解为 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+C_{n-1}\begin{pmatrix}-n\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}$。

**三、计算题**

1、求方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$ 的基础解系与通解。

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-1&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-5/3\\0&1&0&4/3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，故其通解为 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-5\\4\\0\\3\end{pmatrix}$，其中 $C$ 任意。

2、求方程组 $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6\end{cases}$ 的通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{pmatrix}\xleftrightarrow[\text{第一行乘}(-2)\text{加到第三行}]{\text{第一行乘}(-5)\text{加到第二行}}\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&28&-4&14&-56\\0&14&-2&7&-28\end{pmatrix}$

$\xleftrightarrow{\text{第三行乘}(-2)\text{加到第二行}}\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&0&0&0&0\\0&14&-2&7&-28\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{交换第二、三行}}\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&14&-2&7&-28\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xleftrightarrow{\text{第二行除以14}}\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{第二行乘5加到第一行}}\begin{pmatrix}1&0&9/7&-1/2&1\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $r(A,b)=r(A)=2<4=n$，原方程组有无穷多组解，且方程组等价于 $\begin{cases}x_1+\dfrac{9}{7}x_3-\dfrac{1}{2}x_4=1\\x_{12}-\dfrac{1}{7}x_3+\dfrac{1}{2}x_4=-2\end{cases}$，移

项并令 $x_3=7C_1,x_4=2C_2$，得方程的通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-9C_1+C_2\\-2+C_1-C_2\\7C_1\\2C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2\in R$ 任意。

3、求方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1/2\end{cases}$ 的通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-1/2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&1/2\\0&0&1&-2&1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，故方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2$ 任意。

4、设 $A\in R^{n\times n},b\in R^{n\times 1}$，且 $AX=b$ 的三个解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\alpha_1+\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,-1,1)^T$ 及 $\alpha_3+\alpha_1=(1,0,-1)^T$，求该方程组的通解。

解：由题设知 $\beta_1=\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\frac{1}{6}\left[(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_1)\right]=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ 是 $AX=b$ 的特解，

而 $\beta_2=\alpha_1-\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\beta_3=\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)=\frac{1}{2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_3+\alpha_1)\right]=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 是齐次方程 $AX=0$ 的基础解系，故 $AX=b$ 的通解为

$$X=\beta_1+c_1\beta_2+c_2\beta_3=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$，其中 $C_1,C_2$ 任意。

**四、证明题**

1、若 $a_1,a_2,a_3,a_4\in R$ 互异，则方程组 $\begin{cases}x_1+a_kx_2+a_k^2x_3=a_k^3\\k=1,2,3,4\end{cases}$ 无解。

证明：由题设知方程组的系数矩阵及其秩为 $A=\begin{pmatrix}1&a_1&a_1^2\\1&a_2&a_2^2\\1&a_3&a_3^2\\1&a_4&a_4^2\end{pmatrix},r(A)=3$，而方程组的增广矩阵及其秩为

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{pmatrix}, r(A,b)=4$$，由于 $r(A,b)>r(A)$，方程组 $\begin{cases}x_1+a_kx_2+a_k^2x_3=a_k^3\\ k=1,2,3,4\end{cases}$ 无解。

2、设 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in R$，则 $\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\ x_2-x_3=a_2\\ x_3-x_4=a_3\\ x_4-x_5=a_4\\ x_5-x_1=a_5\end{cases}$ 有解 $\Longleftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$，并在有解时，求其通解。

证明：$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5\end{pmatrix}\xleftrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2+a_3+a_4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3+a_4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\end{pmatrix}$，故所给

方程组有解 $\Longleftrightarrow r(A,b)=r(A)=4\Longleftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$，且此时其通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\ a_2+a_3+a_4\\ a_3+a_4\\ a_4\\ 0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$，其中 $C$ 任意。

3、设 $A\in R^{m\times n}$，若任意向量 $X\in R^{n\times 1}$ 都是方程组 $AX=0$ 的解，则 $A=0$。

证明：由题设知 $n$ 阶单位矩阵的 $n$ 个列向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，故

$$A=AE=A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)=(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,...,A\varepsilon_n)=0$$。

# 习题五 向量空间

## 一、选择题

1、设 $A\in R^{n\times n}$，则下列说法错误的是【 $D$ 】

$(A)$、$A$ 为正交阵 $\Longleftrightarrow AA^T=E$；　　$(B)$、$A$ 为正交阵 $\Longleftrightarrow A$ 的行向量组是标准正交向量组；

$(C)$、$A$ 为正交阵 $\Longleftrightarrow A$ 的列向量组是标准正交向量组；　　$(D)$、$A$ 为正交阵 $\Longleftrightarrow |A|=\pm 1$。

2、下列矩阵是正交阵的是【 $B$ 】

$(A)$、$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$；　　$(B)$、$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{pmatrix}$；

$(C)$、$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$；　　$(D)$、$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$。

3、下列向量中与 $(-1,2,-3,1)$ 正交的是【 $C$ 】

$(A)$、$(-1,1,-1,0)$；　　$(B)$、$(-1,1,0,1)$；　　$(C)$、$(-1,1,1,0)$；　　$(D)$、$(-1,1,0,-1)$。

4、下列向量组中不是 $R^3$ 的标准正交基的是【 $C$ 】

$(A)$、$\alpha_1=(1,0,0),\ \alpha_2=(0,1,0),\ \alpha_3=(0,0,1)$；

$(B)$、$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\ \alpha_3=(0,0,1)$；

$(C)$、$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \alpha_2=(0,1,0),\ \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$；

$(D)$、$\alpha_1=(1,0,0),\ \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1),\ \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$。

## 二、填空题

1、若 $\frac{1}{2}(-1,1,-1,2k)$ 是单位向量，则 $k=$ $\underline{\ \pm 1/2\ }$；

2、若 $A\in R^{n\times n}$ 为正交阵，则 $\forall\alpha\in R^{n\times 1}$，有 $|A\alpha|=$ $\underline{\ |\alpha|\ }$；

3、若 $(-1,1,-1,0)$ 与 $(a,0,-b,4)$ 正交，则 $a,b$ 满足 $\underline{\ b=a\ }$；

4、若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in R^{n\times 1}$ 是标准正交向量组，则 $\underline{\ \alpha_i^T\alpha_j=\delta_{ij}\ }$。

**三、判断题**

1、若 $A,B\in R^{n\times n}$ 为正交阵，则 $AB$ 为正交阵【 $T$ 】;

2、零向量与任何与其同维数、同形状的向量都正交【 $T$ 】;

3、若 $A\in R^{n\times n}$ 为正交阵，则 $A^{-1}$ 可能不是正交阵【 $F$ 】;

4、若 $A\in R^{n\times n}$ 为正交阵，则 $A^{-1}=A^T$ 【 $T$ 】;

5、向量空间的标准正交基是唯一的【 $F$ 】。

**四、计算题**

1、用施密特正交化法，将 $\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(1,0,1,0),\alpha_3=(-1,0,0,1)$ 化为与之等价的标准正交向量组。

解：由施密特正交化法得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)\text{，}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,1,0)-\frac{1}{2}(1,1,0,0)=\frac{1}{2}(1,-1,2,0)\text{，}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-1,0,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0,0)+\frac{1}{6}(1,-1,2,0)=\frac{1}{3}(-1,1,1,3)\text{，}$$

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0),\quad \varepsilon_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{12}}(-1,1,1,3)\text{。}$$

2、设 $\alpha_1=\frac{1}{9}(1,-8,-4)^T,\alpha_2=\frac{1}{9}(-8,1,-4)^T$，求向量 $\alpha_3$，使求 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为正交阵。

解：设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为正交阵，则

$$\begin{cases}x_1-8x_2-4x_3=9\alpha_1^T\alpha_3=0\\ 8x_1-x_2+4x_3=-9\alpha_2^T\alpha_3=0\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=\alpha_3^T\alpha_3=1\end{cases}\text{，解之得 }\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T=\pm\frac{1}{9}(-4,-4,7)^T\text{。}$$

**五、证明题**

1、非零的正交向量组一定线性无关。

证明：设 $0\neq\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in R^{n\times 1}$ 是正交向量组，且 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$，则 $\forall i,j=1,2,\ldots,n$，有

$\alpha_i^T\alpha_j=|\alpha_i|^2\delta_{ij}$，故 $x_i|\alpha_i|^2=\alpha_i^T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n)=0,\ i=1,2,\ldots,n$，其中 $|\alpha_i|>0$，

故 $x_i=0,\ i=1,2,\ldots,n$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。

2、下三角的正交阵一定是对角阵，且对角线上元素为 $\pm1$。

证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 为下三角的正交阵，则 $1\le i<j\le n$ 时，恒有 $a_{ij}=0$，且

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$满足 $AA^T=E$，即

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{ij}a_{jj}=\begin{cases}0, & 若1\le j<i\le n\\ 1, & 若1\le i=j\le n\end{cases}，故 a_{ij}=\begin{cases}0, & 若1\le i\ne j\le n\\ \pm 1, & 若1\le i=j\le n\end{cases},$$

从而 $A=diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$，其中 $\lambda_k=\pm 1,\ k=1,2,...,n$。

# 习题六 相似矩阵与二次型

## 一、选择题

1、设可逆阵 $A \in R^{n\times n}$ 有一个特征值为 2，则 $A^{-2}$ 的特征值中必有一个为【 $B$ 】

$(A)$、4； $(B)$、$1/4$； $(C)$、$1/2$； $(D)$、$-1/4$。

2、设 $A \in R^{n\times n}$ 可逆，则【 $D$ 】

$(A)$、$A$ 的特征值都是实数； $(B)$、$A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量；

$(C)$、$A$ 可能有 $(n+1)$ 个线性无关的特征向量； $(D)$、$A$ 最多有 $n$ 个互异的特征值。

3、设 $A \in R^{n\times n}$ 相似于对角阵的充要条件是【 $C$ 】

$(A)$、$A$ 有 $n$ 个互异的特征值； $(B)$、$A$ 有 $n$ 个互异的特征向量；

$(C)$、$A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量； $(D)$、$A$ 有 $n$ 个两两正交的特征向量。

4、若 $A$ 相似于 $B = diag(1,1,-1)$，则 $A^{20}$ =【 $A$ 】

$(A)$、$E$； $(B)$、$A$； $(C)$、$-A$； $(D)$、$20E$。

## 二、填空题

1、矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的全部特征值为 $\underline{0,0,3}$；

注：$\lambda E - A = \begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&\lambda&-\lambda\\0&0&\lambda(\lambda-3)\end{pmatrix}$。

2、若 $\lambda=2$ 是 $A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&x&-2\\-2&2&b\end{pmatrix}$ 的特征值(其中 $b\neq 0$ 为常数)，则 $x=\underline{4(b-4)/b}$；

注：$0=|2E-A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\-2&2-x&2\\2&-2&2-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&2\\0&-4&-b\\0&0&-16+4b-xb\end{vmatrix}$，即 $x=4(b-4)/b$。

3、若 $A$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，则 $A$ 的全部特征值为 $\underline{2,2,-2}$；

注：$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -3 & 0\\ -1 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1 & \lambda+1 & 0\\ 0 & (\lambda-2)(\lambda+2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$。

4、设 $\xi_1=(4,a,-3)^T,\xi_2=(-1,8,4)^T$ 是对称阵 $A\in R^{3\times3}$ 属于不同特征值的特征向量，则 $a=$ __2__ 。

注：由题设知 $\xi_1$ 与 $\xi_2$ 正交，即 $(\xi_1,\xi_2)=8(a-2)=0$。

**三、计算题**

1、求下列矩阵的特征值与特征向量

(1)、$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$； (2)、$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{pmatrix}$； (3)、$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

解：矩阵 $A$ 的特征值 $\lambda$ 与特征向量 $\xi\neq0$ 满足 $(\lambda E-A)\xi=0$，而

(1)、$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-4\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}-2 & \lambda-4\\ 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)\end{pmatrix}$，故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$，而相应的特征向量满足 $(\lambda_kE-A)\xi_k=0$，即 $\begin{pmatrix}-2 & \lambda_k-4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\xi_k=0,k=1,2$，故

$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\xi_1=0\Longleftrightarrow\xi_1=c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\xi_2=0\Longleftrightarrow\xi_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$；

(2)、$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0\\ -3 & 8 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}(\lambda-1)^2 & 0 & 0\\ \lambda-3 & -1 & 0\\ -3 & 8 & \lambda-2\end{pmatrix}$，故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，

而相应的特征向量满足 $(\lambda_kE-A)\xi_k=0$，即 $\begin{pmatrix}(\lambda_k-1)^2 & 0 & 0\\ \lambda_k-3 & -1 & 0\\ -3 & 8 & \lambda_k-2\end{pmatrix}\xi_k=0,k=1,2,3$，故

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ -3 & 8 & -1\end{pmatrix}\xi_1=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}19 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xi_1=0\Longleftrightarrow\xi_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 19\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -3 & 8 & 0\end{pmatrix}\xi_3=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xi_3=0\Longleftrightarrow\xi_3=c_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$$

(3)、$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}-1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$，故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$，而相

应的特征向量满足$(\lambda_k E-A)\xi_k=0$，即$\begin{pmatrix}-1&0&\lambda\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda^2-1\end{pmatrix}\xi_k=0,k=1,2,3$，故

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xi_1=0\Longleftrightarrow\xi_1=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xi_3=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xi_3=0\Longleftrightarrow\xi_3=c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}。$$

2、若$A=\begin{pmatrix}1&2\\a&3\end{pmatrix}$的一个特征值为$5$，求$a$。

解：$8-2a=\begin{vmatrix}4&-2\\-a&2\end{vmatrix}=|5E-A|=0$，故$a=4$。

3、设$A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$的行列式$|A|=-1$，且伴随矩阵$A^*$对应于特征值$\lambda$的特征向量为$\xi=(1,1,-1)^T$，

求$a,b,c,\lambda$的值。

解：由$-1=|A|=\begin{vmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{vmatrix}=(1-c)\begin{vmatrix}-1&c\\b&3\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&-1\\5&b\end{vmatrix}=b(c^2-a^2)-bc+3c-5a-3$得

$b(c^2-a^2)-bc+3c-5a=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$，

再由$A^*\xi=\lambda\xi$得，$\lambda A\xi=AA^*\xi=|A|\xi=-\xi$，即$\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=A\xi=-\frac{1}{\lambda}\xi=-\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

故$\begin{cases}a-c+\lambda^{-1}=1\\b+\lambda^{-1}=-2\\a-c-\lambda^{-1}=-1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&1\\1&0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\\lambda^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\\lambda^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow c=a,b=-3,\lambda=1$，将其代入(1)式，得$a=2$，故$c=a=2,\ b=-3,\ \lambda=1$。

4、设$A\in R^{2\times2}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=2$，相应的特征向量为$\xi_1=(1,2)^T,\xi_2=(2,5)^T$，求$A$。

解：由题设知$A\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=A(\xi_1,\xi_2)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2)=\begin{pmatrix}-1&4\\-2&10\end{pmatrix}$，故

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 6\\ -30 & 14\end{pmatrix}。$$

5、设对称阵 $A\in R^{3\times 3}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，且 $A$ 相应于 $\lambda_1$ 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)^T$，求 $A$。

解：令 $\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$，则由题设知存在单位向量 $\alpha_2=(x_1,x_2,x_3)^T,\alpha_3=(y_1,y_2,y_3)^T$，使 $\alpha_2,\alpha_3$ 为 $A$ 相应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $R^3$ 的标准正交基，故

$$\begin{cases}x_2+x_3=0\\ y_2+y_3=0\\ x_2y_2+x_3y_3=0\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\end{cases}$$，解之得 $\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$，令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$，则

$AP=PB$，即 $$A=PBP^{-1}=PBP^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}。$$

**四、证明题**

1、设 $m\geq 0$ 为整数，$a_0,a_1,\ldots,a_m\in R$，$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$，若 $\lambda$ 是方阵 $A$ 的特征值，则

(1)、 $f(\lambda)$ 是方阵 $f(A)$ 的特征值；　　(2)、若 $A$ 可逆，则 $\lambda^{-1}$ 是 $A^{-1}$ 的特征值。

证明：设 $\xi\neq 0$ 是 $A$ 对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则 $A\xi=\lambda\xi$，故

(1)、 $A^2\xi=A(A\xi)=A(\lambda\xi)=\lambda(A\xi)=\lambda(\lambda\xi)=\lambda^2\xi$，依次类推得 $A^k\xi=\lambda^k\xi,k=0,1,\ldots,m$，故

$f(A)\xi=(\sum\limits_{k=0}^{m}a_kA^k)\xi=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kA^k\xi=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k\lambda^k\xi=f(\lambda)\xi$，即 $f(\lambda)$ 是方阵 $f(A)$ 的特征值；

(2)、若 $A$ 可逆，则 $\lambda\neq 0$，且由 $A\xi=\lambda\xi$ 得 $A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi$，即 $\lambda^{-1}$ 是 $A^{-1}$ 的特征值。

2、设 $\lambda$ 是正交阵 $A$ 的特征值，则 $|\lambda|=1$。

证明：设 $\lambda$ 是正交阵 $A$ 的特征值，$\xi\neq 0$ 是相应的特征向量，则 $AA^T=A^TA=E$，且 $A\xi=\lambda\xi$，故

$|\lambda|^2\,\bar{\xi}^T\xi=(\overline{\lambda\xi})^T(\lambda\xi)=(\overline{A\xi})^T(A\xi)=\bar{\xi}^T(A^TA)\xi=\bar{\xi}^T\xi>0$，故 $|\lambda|=1$。