第七章　参数估计

(一)习题

1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,求下述各总体的概率密度或分布律中的未知参数的矩估计量

(1) $$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$ 其中 $\theta>-1$ 是未知参数;

(2) $$P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1}, x=1,2\cdots$$ 其中 $0<p<1$ 是未知参数;

(3) $$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & , \quad x\ge\theta,\\ \\ 0 & , \quad x<\theta\end{cases},$$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数;

(4) $$f(x,\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & , \quad 0\le x\le 1,\\ \\ 0 & , \quad 其他\end{cases},$$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数;

(5) $$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}\exp\{-\dfrac{x-\theta_1}{\theta_2}\}, & x>\theta_1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(6) $f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$, 其中 $\sigma>0$ 为未知参数.

2. 求上题中各未知参数的极大似然估计量.

3. 设总体 X 服从参数为 m,p 的二项分布:

$$P\{X=x\}=\binom{m}{x}p^x(1-p)^{m-x}, x=0,1,2,\ldots,m,$$ $0<p<1$, p 是未知参数 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自该总体的一个样本,求 p 的极大似然估计量.

4. (1)设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,求 $P\{X=0\}$ 的极大似然估计;

(2)某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从泊松分布.求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计值.使用下面122个观察值.下表中, r 表示一扳道员五年内引起严重事故的次数, s 表示观察到的扳道员人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

5.(1)设$Z=\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$,即 X 服从对数正态分布,验证$E(X)=\exp\{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\}$.

(2)设从对数正态总体 X 取容量为n样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$,求$E(X)$的极大似然估计值.此处μ,σ^2均为未知.

(3)已知在文学家萧伯纳的《AN Intelligent Woman's Guide To Socialism》一书中,一个句子的单词数近似服从对数正态分布.μ,σ^2均为未知.今从该书中随机的取 20 个句子.这些句子的单词数分别为

54 24 15 67 15 22 63 26 16 32

7 33 28 14 7 29 10 6 59 30

问这本书中,一个句子字数均值的极大似然估计值等于多少?

6.设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一个样本,试确定常数c,使统计量$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计.

7.设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$相互独立且均为参数θ的无偏估计,并且$\hat{\theta}_1$的方差是$\hat{\theta}_2$的方差的 2 倍,试求出常数a,b,使得$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$是$\theta$的无偏估计,并且在所有这样的无偏估计中方差最小.

8. 设总体 X 服从参数为λ的泊松分布,$X_1,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一个样本,$\overline{X}$,S^2分别为样本均值和样本方差,(1)试证对一切α ($0\le\alpha\le1$),统计量$\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$均为$\lambda$的无偏估计量;(2)试求$\lambda,\lambda^2$的极大似然估计量$\hat{\lambda}_M$,$\hat{\lambda}_M^2$;(3)讨论$\hat{\lambda}_M^2$的无偏性,并给出$\lambda^2$的一个无偏估计量.

9.设总体 X 服从区间$(\theta,\theta+1)$上的均匀分布, $X_1,\cdots,X_n$是来自总体X 的一个样本,证明估计量

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{2},\qquad \hat{\theta}_2=X_{(n)}-\frac{n}{n+1}$$

皆为参数θ的无偏估计,并且$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$有效.

10.从一台机床加工的轴承中,随机地抽取 200 件,测量其椭圆度,得样本均值$\bar{x}=0.081mm$,并由累积资料知道椭圆度服从$N(\mu,0.025^2)$,试求μ的置信度为 0.95 的置信区间.

11.设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$x_1,x_2,\cdots,x_n$是其样本值,如果σ^2为已知,问n取多大值时,能保证μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间的长度不大于给定的L?

12.在测量反应时间中,一心理学家估计的标准差为 0.05 秒,为了以 95%的置信度使他对平均反应时间的估计误差不超过 0,01 秒,应取多大的样本容量n.

13.从自动机床加工的同类零件中抽取 16 件,测得长度为(单位 mm)：

12.15 12.12 12.01 12.08 12.09 12.16 12.03 12.01 12.06 12.13

12.07 12.11 12.08 12.01 12.03 12.06

设零件长度近似服从正态分布,试求方差σ^2的置信度为 0.95 的置信区间.

14.为比较甲与乙两种型号同一产品的寿命,随机地抽取甲型产品 5 个,测得平均寿命$\bar{x}=1000h$,标准差$s_1=28h$,随机地抽取乙型产品7个,测得平均寿命$\bar{y}=980h$, $s_2=32h$,设总体服从正态分布,并且由生产过程知它们的方差相等,求两个总体均值差的置信度为 0.99 的置信区间.

15.为了在正常条件下检验一种杂交作物的两种新处理方案,在同一地区随机地挑选 8 块地,在每块试验地上按两种方案种植作物,这 8 块地的单位面积产量分别是:

一号方案产量:	86	87	56	93	84	93	75	79
二号方案产量:	80	79	58	91	77	82	74	66

假设两种方案的产量都服从正态分布,试求这两个平均产量之差的置信度为 0.95 的置信区间.

16.设两位化验员A,B独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做 10 次测定,其测定值的样本方差依次为$s_A^2=0.5419$, $s_B^2=0.6065$,设σ_A^2,σ_B^2分别为A,B所测定的测定值总体的方差,设总体均为正态的.求方差比σ_A^2/σ_B^2的置信度为 0.95 的置信区间.