离散数学 Discrete Mathematics

数理逻辑

张晓 西北工业大学计算机学院
zhangxiao@nwpu.edu.cn
2011-1-10

1.8.1 “$A(x)$对y是自由的”

考察以下谓词公式:

可以这样吧
x替换为y
吗？

$\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(x)$

$\exists y P(x,y) \vee Q(x,y)$

$\forall y P(y) \vee Q(x,y)$

$\forall y P(y) \vee Q(y) \vee R(x)$

$\exists y P(y,y) \vee Q(y,y)$

$\forall y P(y) \vee Q(y,y)$

术语“**A(x)对y是自由的**”:

如果公式$A(x)$中，x不出现在量词$\forall y$或$\exists y$的辖域之内，则称$A(x)$对y是自由的。

上面的例子中，第二个式子中的x是对y不自由的。

不自由变量，不能进行代入。

想替换x为y时，可以替换与y没有关系（自由）的x，否则不能替换

(2)式如果有必要代入*y*, 则应先将式中的约束变元*y*改名, 例如, 把(2)式改名为:

$$\exists z P(x, z) \vee Q(x, y)$$

然后代入得

$$\exists z P(y, z) \vee Q(y, y)$$

1.8.2　谓词演算中的推理规则

- 命题演算中所有推理规则都是谓词演算中的推理规则;
  - 谓词演算中的所有永真蕴含式,恒等式和代入规则也都可作为推理规则。

(1) 全称指定规则(全称特定化规则 / 全称量词消去规则)
(Universal Specification)简记为US

$$\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$$

应用US规则的条件是: A(x)对于y必须是自由的。

设 $A(x)=\exists y(x>y)$ 则 $\forall xA(x)=\forall x\exists y(x>y)$, x,y的个体域为R， 是一真命题.

若应用US得 $\exists y(y>y)$，则是错误的。

正确的做法是换成 $\exists y(z>y)\ (z\in R)$

这一规则也可写为:

$$\forall\ xA(x)\text{推得}A(x)\quad\text{或}\quad\forall\ xA(x)\Rightarrow A(x).$$

它的意义是, 全称量词可以删除。

(2) 存在指定规则(存在特定规则 / 存在量词消去规则)
(Existential Specification)简记为ES。

$$\exists x A(x)$$
$$\text{---------------}$$
$$\therefore A(y)$$

含 义: 如果已证明 $\exists x A(x)$, 那么我们可以假设某一确定的个体y使$A(y)$是真, 这里y只是一个表面的自由变元。

应用ES规则的条件

应用ES规则的条件:

（1） y(说c更好些)是使A为真的特定的个体常项。

（2） y不在A(x)中出现。

（3）y不是前提和居先推导步骤中的（表面）自由变元

（3） 若A(x)中还有其它自由出现的个体变项，

此规则不能使用。

(3) 存在推广规则（存在一般化规则 / 存在量词引入规则 ）(Existential Generalization)简记为EG。

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists\, xA(x)}$$

应用这一规则的条件是: $A(y)$对x是自由的

（ x 最好在$A(y)$ 中没有出现过）。

这一规则可写成: $A(y) \Rightarrow \exists\, xA(x)$

(4) 全称推广规则（全称一般化规则 / 全称量词引入规则 ）(Universal Generalization)简记为UG。

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \forall x A(x)}$$

（1）无论A(y)中自由出现的个体变项y取何值，A(y)应该均为真。
（2）y不能是居先推导步骤中使用ES引入的。
（3）取代自由出现的y的x也不能在A(y)中约束出现。

观察下述推理过程:

(1)	$\forall x \exists y P(x,y)$	P,前提
(2)	$\exists y P(c,y)$	T,(1),US
(3)	$P(c,d)$	T,(2),ES
(4)	$\forall x P(x,d)$	T,(3),UG
(5)	$\exists y \forall x P$	T,(4),EG

第(4)步是错误的:

- P(c,d)无论c取何值,P(c,d)都为真?不是均为真!
- P(c,d)中的d是使用ES引入的新变元,且自由出现!

$$\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$$

而这一式前面已指明它是不成立的。

特别要注意，使用ES而产生的自由变元不能保留在结论中,因它是暂时的假设，在推导结束之前必须使用EG使之成为约束变元。

推理规则的正确使用(1)

例设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：

$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。 其中：$G(x, y)$：$y>x$。

推导1：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2）$(\exists y)G(y, y)$ US,(1)

注意：使用US规则来消去量词时，若选用变元y取代x，则要求在原公式中x不能出现在量词(∀y)或(∃y)的辖域之内。

推理规则的正确使用（2）

推导2:

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P

（2）$(\exists y)G(z, y)$　　US,(1)

（3）$G(z, c)$　　ES,(2)

注意：使用ES规则来消去量词时， 若还有其它自由变元时，则必须用关于自由变元的函数符号来取代常量符号.

推理规则的正确使用（3）

推导3：

（1）$(\exists y)G(z, y)$ P

（2）$(\forall y)(\exists y)G(y, y)$ UG,(1)

分析：推导3是错误的。正确的推导如下：

注意：使用UG规则来添加量词时，若选用变元x取代y，则要求在原公式中y不能出现在量词$(\forall x)$或$(\exists x)$的辖域之内。

推理规则的正确使用（4）

推导4：

（1）$G(x, c)$ P

（2）$(\exists x)G(x, x)$ EG,(2)

分析：推导4是错误的。正确的推导如下：

注意：使用EG规则来添加量词时，若选用变元x取代c，则要求在原公式中c不能出现在量词$(\forall x)$或$(\exists x)$的辖域之内且原公式中无自由变量x。

1.8.3　推理举例

例1　根据前提集合：同事之间总是有工作矛盾的，张平和李明没有工作矛盾, 能得出什么结论? ;

解　设$P(x, y)$：x和y是同事关系,

$Q(x, y)$：　x和y有工作矛盾,

a：张平,　b：李明,

则前提是:$\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$ ，$\neg Q(a,b)$

我们做以下推理:

(1) $\forall x \forall y(P(x,y) \to Q(x,y))$ P,前提

(2) $\forall y(P(a,y) \to Q(a,y))$ T,(1),US

(3) $P(a,b) \to Q(a,b))$ T,(2),US

(4) $\neg Q(a,b)$ P

(5) $\neg P(a,b)$ T,(3,4), I4

所以, 除前提本身外, 能得出: 张平和李明不是同事关系的结论。

例 2

(*a*) 每个大学教师都是知识分子, 有些知识分子有怪脾气,

所以有些大学教师有怪脾气。

(*b*) 每一松树都是针叶树, 每一冬季落叶的树都非针叶树,

所以, 每一冬季落叶的树都非松树。

证明或否定以上论证。

解

(*a*) 设$T(x)$: x是大学教师, $N(x)$: x是知识分子, $H(x)$: x有怪脾气。

这个论证是:

$$\frac{\forall x(T(x)\rightarrow N(x)), \exists x(N(x)\wedge H(x))}{\therefore \exists x(T(x)\wedge H(x))}$$

这个论证是无效的, 要证明无效, 只需找出一种解释说明上式, 即

$$\forall x(T(x)\rightarrow N(x))\wedge \exists x(N(x)\wedge H(x))\rightarrow \exists x(T(x)\wedge H(x))$$

非永真即可。

现取论述域为整数,

$T(x)$: $x=1$,
$N(x)$: x是奇数,
$H(x)$: x是质数。

则 $\forall x(T(x)\to N(x))$是真, $\exists x(N(x)\wedge H(x))$是真,
但 $\exists x(T(x)\wedge H(x))$是假, 故非永真式。

(*b*) 设$P(x)$：x是松树，$Q(x)$：x是针叶树，$R(x)$：x是冬季落叶的树

这个论证是：

$$\frac{\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)), \forall x(R(x)\rightarrow \neg Q(x))}{\therefore \forall x(R(x)\rightarrow \neg P(x))}$$

这个论证是有效的，证明如下：

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	P
(2)	$P(y) \to Q(y)$	$T,(1),US$
(3)	$\neg Q(y) \to \neg P(y)$	$T,(2),E_{24}$
(4)	$\forall x(R(x) \to \neg Q(x))$	P
(5)	$R(y) \to \neg Q(y)$	$T,(4),US$
(6)	$R(y) \to \neg P(y)$	$T,(3),(5),I_6$
(7)	$\forall x(R(x) \to \neg P(x))$	$T,(6),UG$

例 3 证明 $\exists xM(x)$是$\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$和$\exists xH(x)$的有效结论。

解

(1) $\exists xH(x)$	P,前提
(2) $H(y)$	T,(1),ES
(3) $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$	P
(4) $H(y)\rightarrow M(y)$	T,(3),US
(5) $M(y)$	T,(2,4), I3
(6) $\exists xM(x)$	T,(5), EG

例4 证明 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$。

解 用反证法:

(1) $\neg(\forall x(P(x) \vee \exists xQ(x))$ P,前提

(2) $\neg \forall x(P(x) \vee \neg \exists xQ(x))$ T,(1),E10

(3) $\neg \forall x(P(x)$ T,(2),I2

(4) $\exists \neg \forall x(P(x)$ T,(3),Q4

(5) $\neg \exists xQ(x))$ T,(2),I2

(6) $\forall x \neg Q(x)$ T, (5), Q3

(7)	$\neg P(y)$	T, (4), ES
(8)	$\neg Q(y)$	T, (6), US
(9)	$\neg P(y) \wedge \neg Q(y)$	T, (7), (8), 合取式
(10)	$\neg (P(y) \vee Q(y))$	T, (9), E_{10}
(11)	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
(12)	$P(y) \vee Q(y)$	T, (11), US
(13)	$(P(y) \vee Q(y)) \wedge (P(y) \vee Q(y))$	T, (10), (12), 合取式, 矛盾。

主要内容

- 推理理论

  ①推理的形式结构

  ②新的推理规则

  全称量词消去规则，记为US

  存在量词消去规则，记为ES

  存在量词引入规则，记为EG

  全称量词引入规则，记为UG

学习要求

- 1. 正确地使用US、UG、ES、EG规则，特别地要注意它们之间的关系。
- 2. 对于给定的推理，正确地构造出它的证明。

谓词逻辑推理的难点

1. 在推导过程中，如既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先先使用规则ES，再使用规则US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或规则EG引入量词，得到所要的结论。
2. 如一个变量是用规则ES消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不能使用规则UG；如使用规则US消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。

谓词逻辑推理的难点

3. 如有两个含有存在量词的公式，当用规则ES消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。

4. 在用规则US和规则ES消去量词、用规则UG和规则EG添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。

谓词逻辑推理的难点（续）

5. 在添加量词(∀x)、(∃x)时，所选用的x不能在公式G(y)或G(c)中自由出现且G(y)或G(c)对x是自由的。
6. 在使用规则EG引入存在量词(∃x)时，此x不得仅为G(c)或G(y)中的函数变元。在使用规则UG引入全称量词(∀x)时，此x不得为G(y)中的函数变元(因该函数变元不得作为自由变元)。
7. 在使用规则UG引入全称量词(∀x)时，G(y)中不得出现在使用规则US引入y之后由规则ES引入的常量或函数。