MM1 Model

N26120888 徐子桓

本次程式語言使用 python(.ipynb)撰寫。

問題

Queueing System

- Input:
  - Num. of Server (1)
  - Policy of Queue (FIFQ)
  - Customer arrival (Poisson process)
  - Customer departure
  - Service time (Exponential distribution)

- Discuss Output　　Can utilization go to 1? 100% busy?
  - Server utilization (lambda/mu)
  - Waiting time (expected value, distribution)

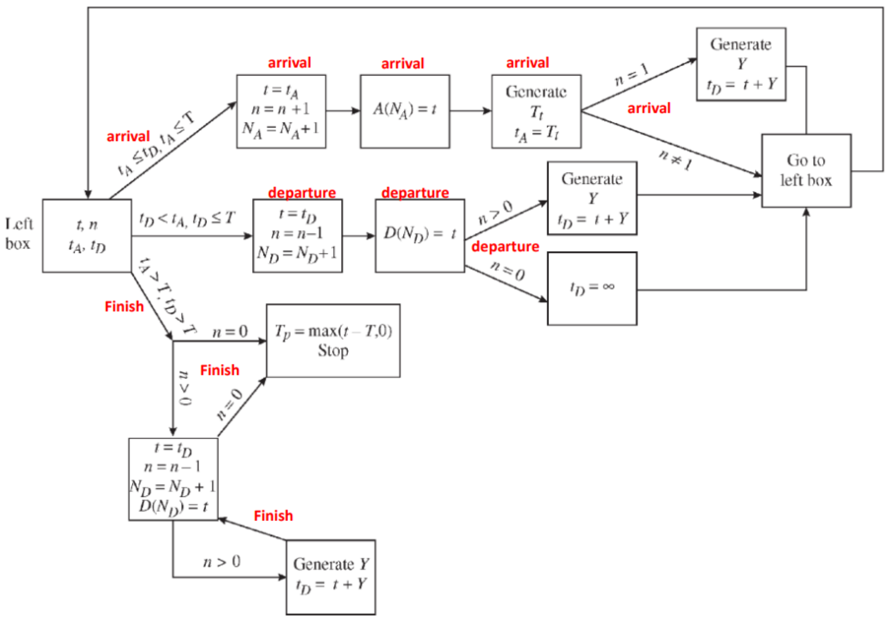
    Why plot the distribution of waiting time, but not the histogram?

Homework (It is simple, submit it next week)

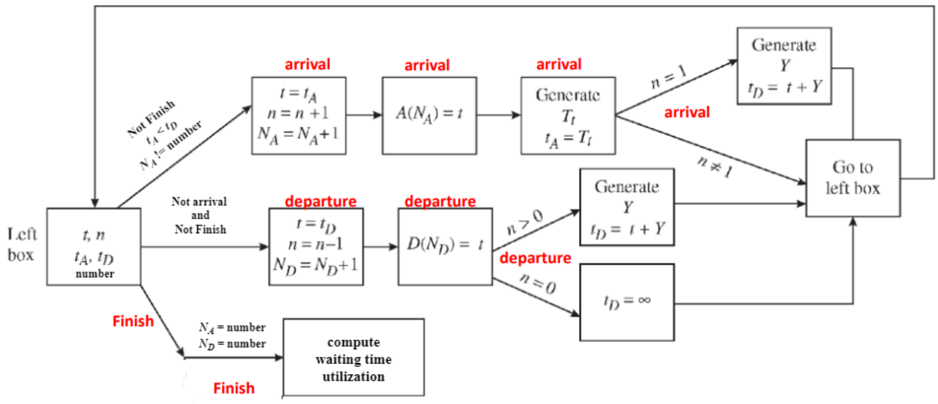
- Add the confident interval for your M/M/1 simulation.
- Discuss the different between the simulation round n.

MM1 邏輯設計：

本次邏輯設計參考講義上流程圖：



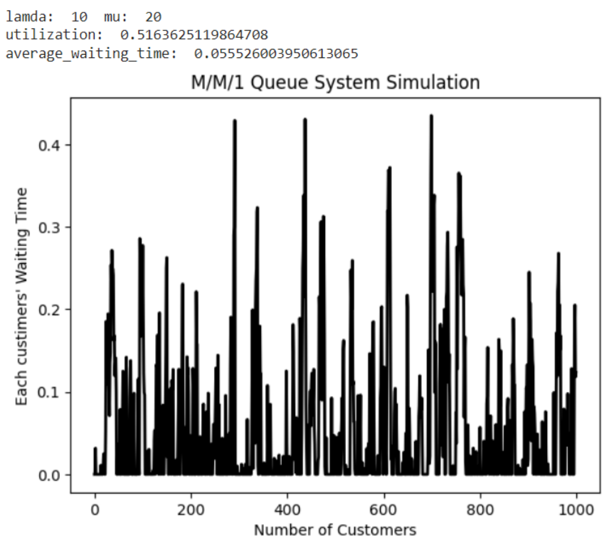
講義中結束機制設定成在一段時間 T 後結束而非固定顧客人數，而我將結束機制改成固定顧客人數，因此新增輸入 number 表示有多少人會進來此處，此方法能在人數固定的狀況下觀察結果，而改過的 MM1 流程圖如下：



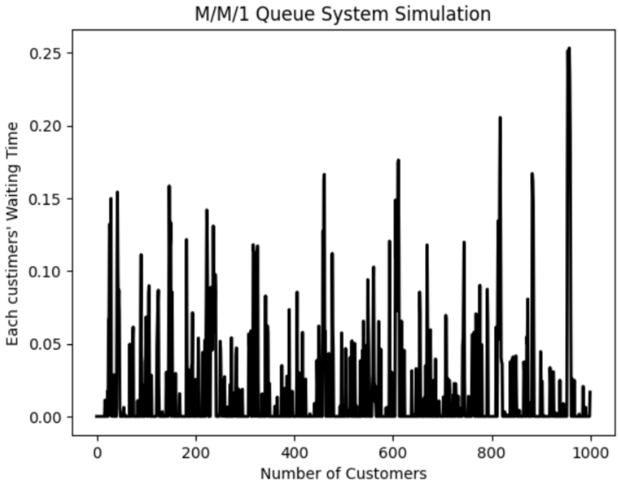
結果分析：

Server Utilization & Waiting time：(只執行 1 次 MM1)

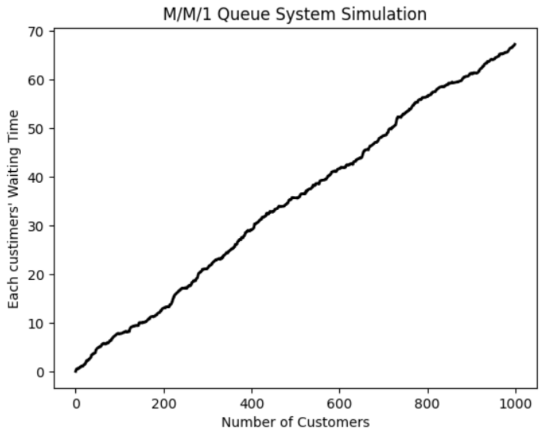
以下觀察了不同的 service rate 和 arrival rate 對 Server Utilization & Waiting time 帶來的結果：(lamda: arrival rate, mu: service rate)
X 軸分別指第 1 位到第 1000 位顧客，Y 軸表示第 X 位顧客等待的時間



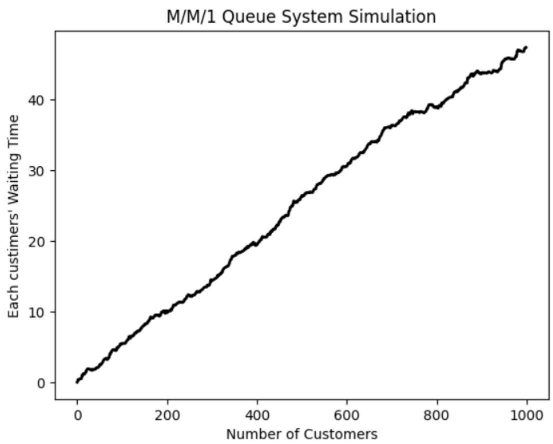
lamda: 10 mu: 30
utilization: 0.3393344169117467
average_waiting_time: 0.01705872039862817



lamda: 30 mu: 10
utilization: 0.99946572964426
average_waiting_time: 34.820592595907875



lamda: 20 mu: 10
utilization: 0.9998206605210008
average_waiting_time: 24.926825187281253



從上圖可發現大致分為兩種情況：1. $\lambda<\mu$ 2. $\lambda>\mu$

Case 1 $\lambda<\mu$ ：

此情況為顧客服務時間小於顧客到達時間，因此常常不需要排隊，也

就表示其 utilization 並沒有常常忙碌(<1)，在顧客數夠多的狀況下也可發現 utilization 會接近於 λ/μ，而每位顧客等待的時間也時長時短。

Case 2 $\lambda>\mu$ ：

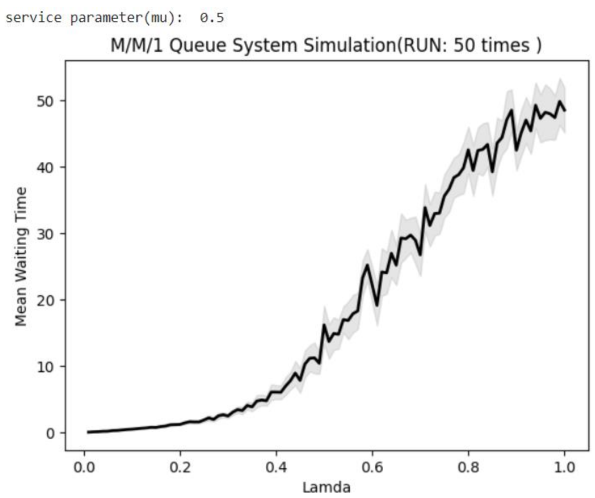
此情況為顧客服務時間大於顧客到達時間，因此下一位顧客往往必須等待前面顧客服務完才行，也就表示其 utilization 常常忙碌(≒1)，在顧客數夠多的狀況下也可發現 utilization 會無限接近於 1，而每位顧客等待的時間也會越等越長。

Confident Interval & different between simulation round n：

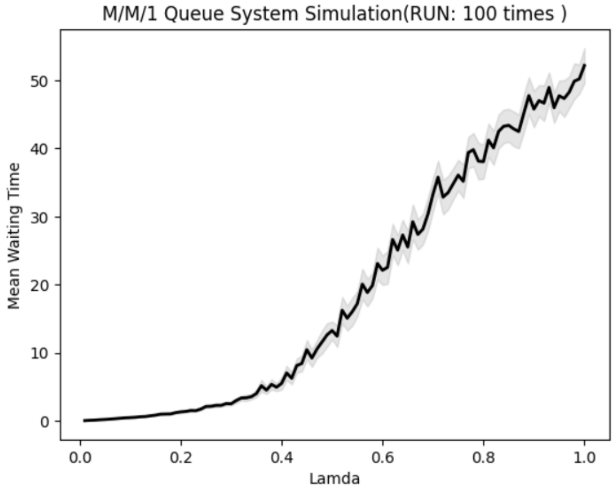
(執行 n 次 MM1)

本次模擬中以繪出 95%信賴區間，並且由於運算量龐大，每次 MM1 顧客人數下調為 100，並分別測試執行 50、100、200 次 MM1 結果：

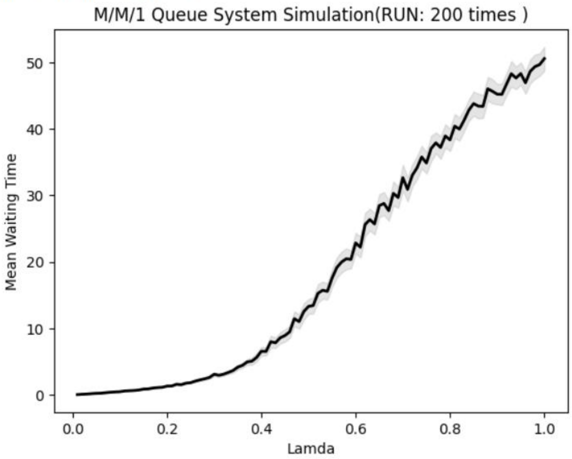
X 軸表示 λ 的變化，Y 軸表示對應 λ 執行 n 次 MM1 後算出的平均等待時間，黑線為平均等待時間，灰色區間則表示信賴區間



service parameter(mu): 0.5



service parameter(mu): 0.5



從上圖可發現 CI 隨著 MM1 執行次數(n)增加而縮小了範圍，而這也可以從下圖公式證實出來：

$$\mu \sim 95\%\ CI = X \pm 1.96 * (\sigma / \sqrt{n})$$

在只有 n 變化下，n 越大 CI 變化就會越小。

而從上圖也可發現在 $\lambda > 0.5$ 後曲線有突然陡升的情形，這可以對應到上一題所描述的變化，在此題中 $\mu = 0.5$，在 $\lambda < 0.5$ 時為前面所說的 case 1 情況，通常都不需要排隊且 utilization 會接近 λ / μ，而在 $\lambda > 0.5$ 後則是 case 2，後面顧客往往皆須等待前面顧客服務完，且隨著 λ 變大每位顧客更早抵達但服務時間不變，平均等待的時間就會越變越長，utilization 會接近於 1。