# 法律声明



- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

# 支持向量机

小象学院 ChinaHadoop.cn 邹博

# 主要内容和目标

- 理解支持向量机SVM的原理和目标
- 掌握支持向量机的计算过程和算法步骤
- 理解软间隔最大化的含义
  - 对线性不可分的数据给出(略有错误)的分割面
  - 线性可分的数据需要使用“软间隔”目标函数吗？
- 了解核函数的思想
- 了解SMO算法的过程

# 各种概念

- 线性可分支持向量机
  - 硬间隔最大化hard margin maximization
  - 硬间隔支持向量机
- 线性支持向量机
  - 软间隔最大化soft margin maximization
  - 软间隔支持向量机
- 非线性支持向量机
  - 核函数kernel function

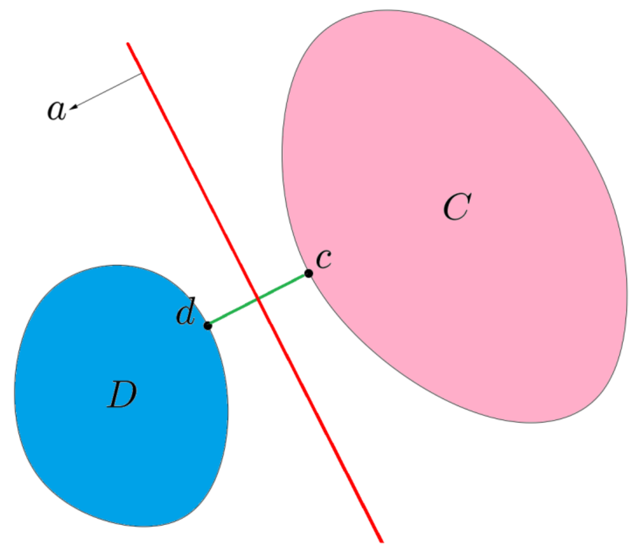
  - 注：以上概念的提法，各个文献并不十分统一。

# 分割超平面

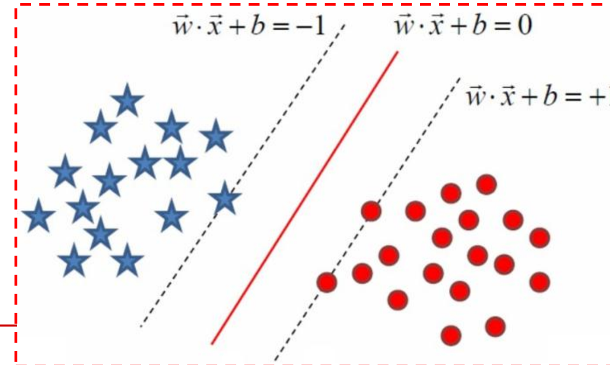
- 设C和D为两不相交的凸集，则存在超平面P，P可以将C和D分离。

$$\forall x \in C, a^T x \le b \text{且} \forall x \in D, a^T x \ge b$$

- 两个集合的距离，定义为两个集合间元素的最短距离。
- 做集合C和集合D最短线段的垂直平分线。

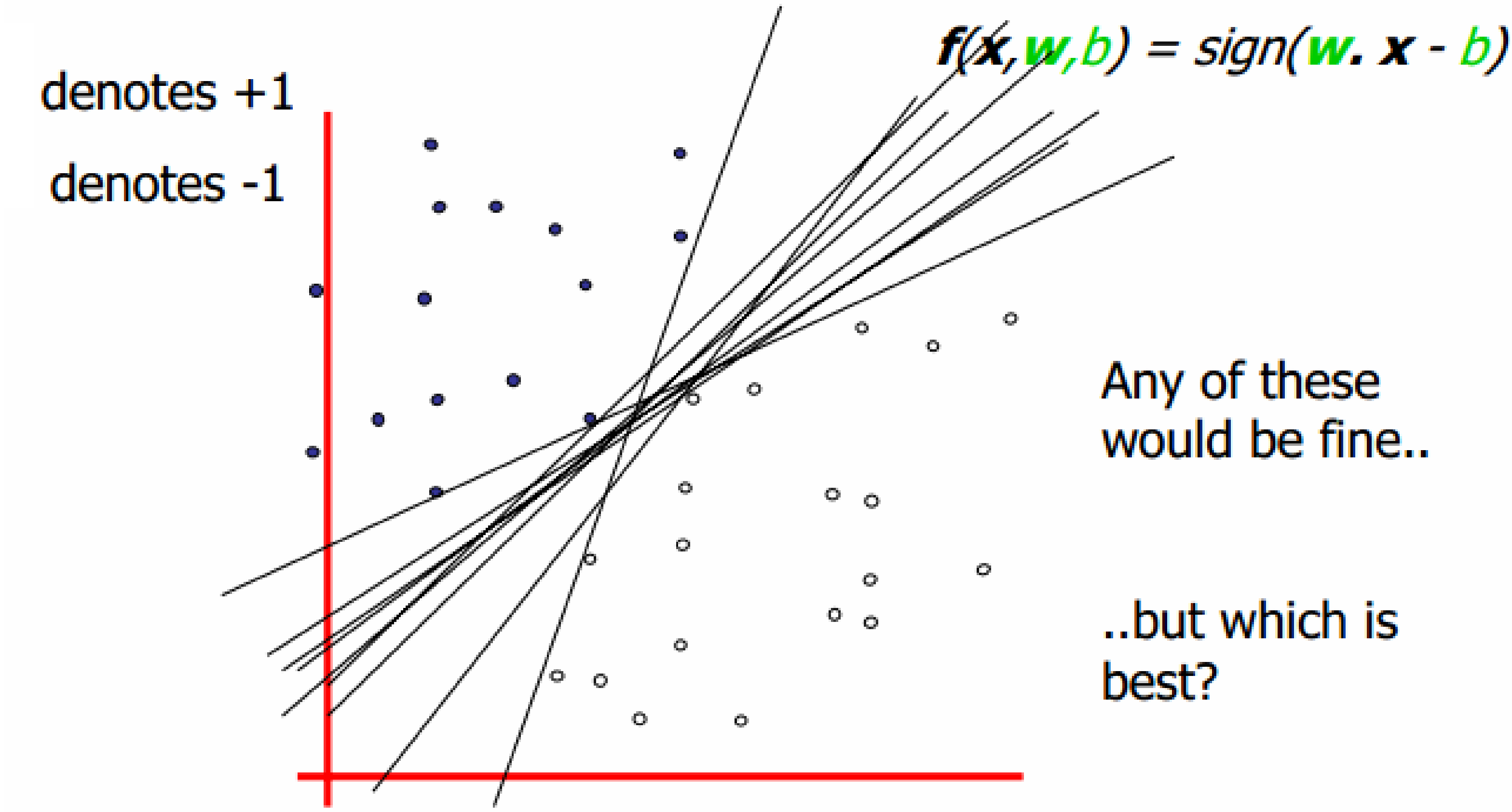


# 分割超平面的思考




- 如何定义两个集合的“最优”分割超平面？
  - 找到集合“边界”上的若干点，以这些点为“基础”计算超平面的方向；以两个集合边界上的这些点的平均作为超平面的“截距”
  - 支持向量：support vector
- 若两个集合有部分相交，如何定义超平面，使得两个集合“尽量”分开？

# 线性分类问题



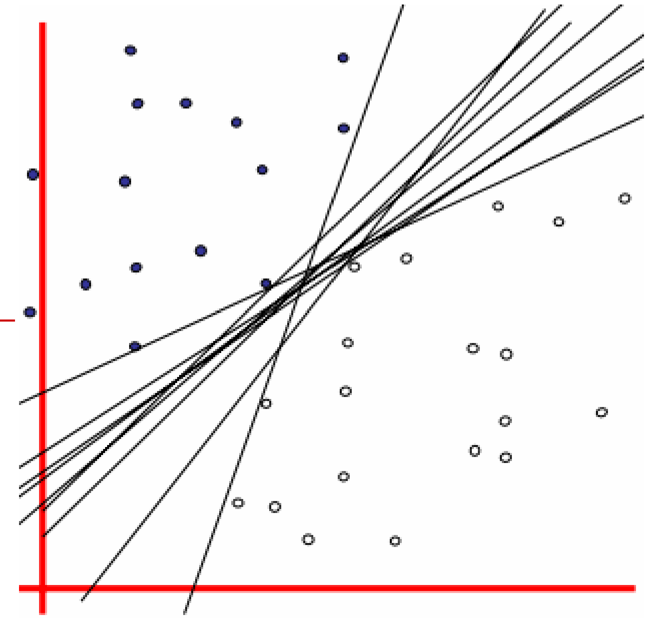

Any of these would be fine..

..but which is best?

# 输入数据

- 假设给定一个特征空间上的训练数据集 $T=\{(\mathbf{x_1},y_1),(\mathbf{x_2},y_2)\ldots(\mathbf{x_N},y_N)\}$
  - 其中，$\mathbf{x_i}\in R^n$，$y_i\in\{+1,-1\}$，$i=1,2,\ldots N$。
- $\mathbf{x_i}$为第i个实例(若n>1，$\mathbf{x_i}$为向量)；
- $y_i$为$\mathbf{x_i}$的类标记；
  - 当$y_i=+1$时，称$\mathbf{x_i}$为正例；
  - 当$y_i=-1$时，称$\mathbf{x_i}$为负例；
- $(\mathbf{x_i},y_i)$称为样本点。

# 线性可分支持向量机



- 给定线性可分训练数据集，通过间隔最大化得到的分离超平面为

$$y(x)=w^T\Phi(x)+b$$

相应的分类决策函数 $f(x)=sign\left(w^T\Phi(x)+b\right)$

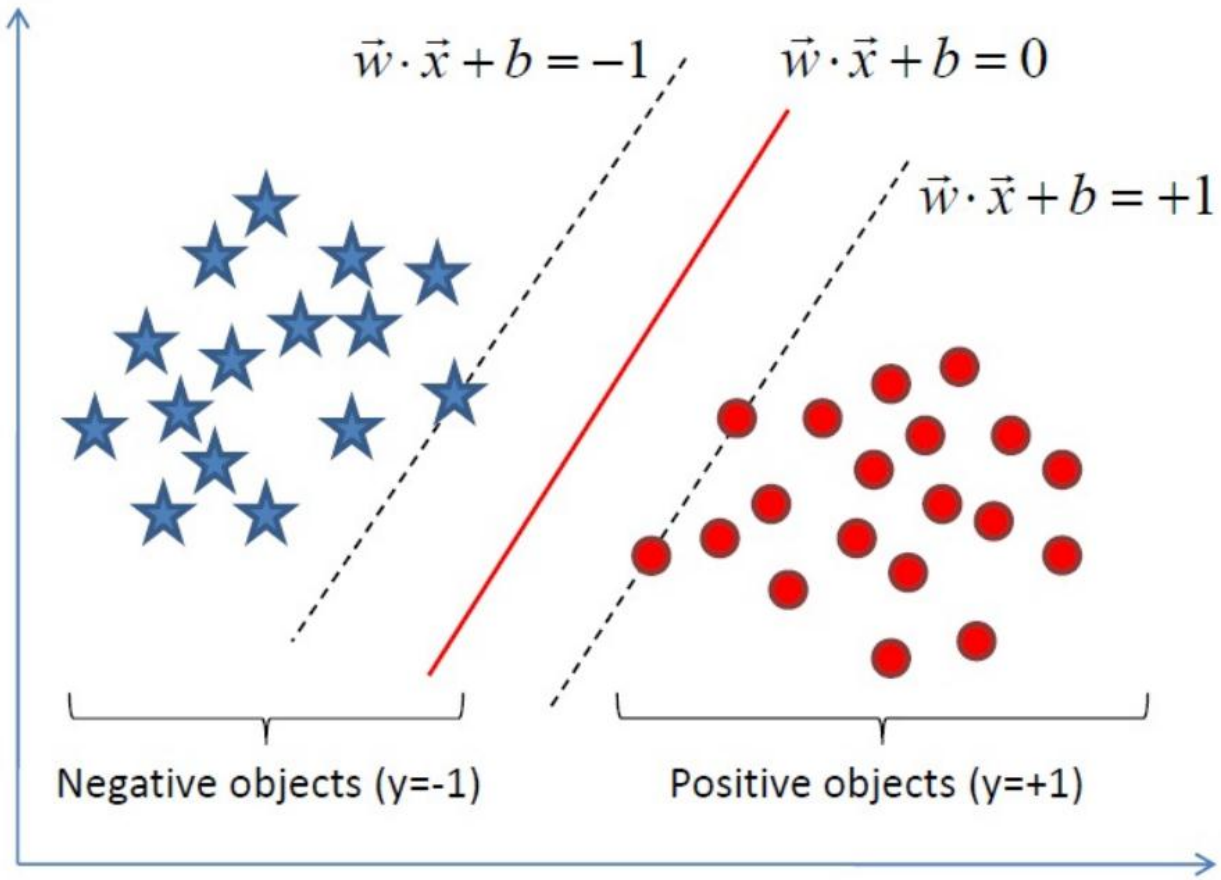
该决策函数称为线性可分支持向量机。

- φ(x)是某个确定的特征空间转换函数，它的作用是将x映射到(更高的)维度。
  - 最简单直接的：$\Phi(x)=x$
- 稍后会看到，求解分离超平面问题可以等价为求解相应的凸二次规划问题。

# 整理符号

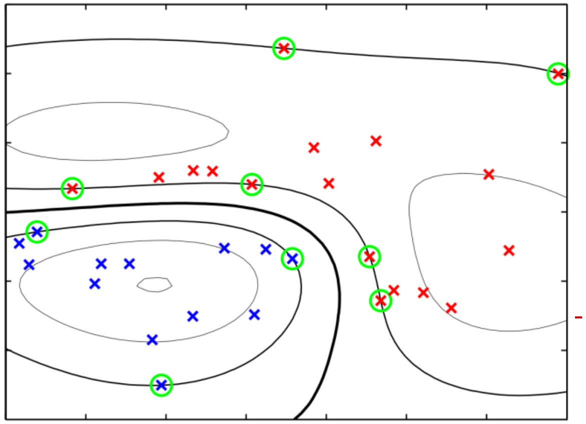
- 分割平面： $y(x)=w^T\Phi(x)+b$
- 训练集： $x_1,x_2,\cdots,x_n$
- 目标值： $y_1,y_2,\cdots,y_n,\quad y_i\in\{-1,1\}$
- 新数据的分类：$sign(y(x))$

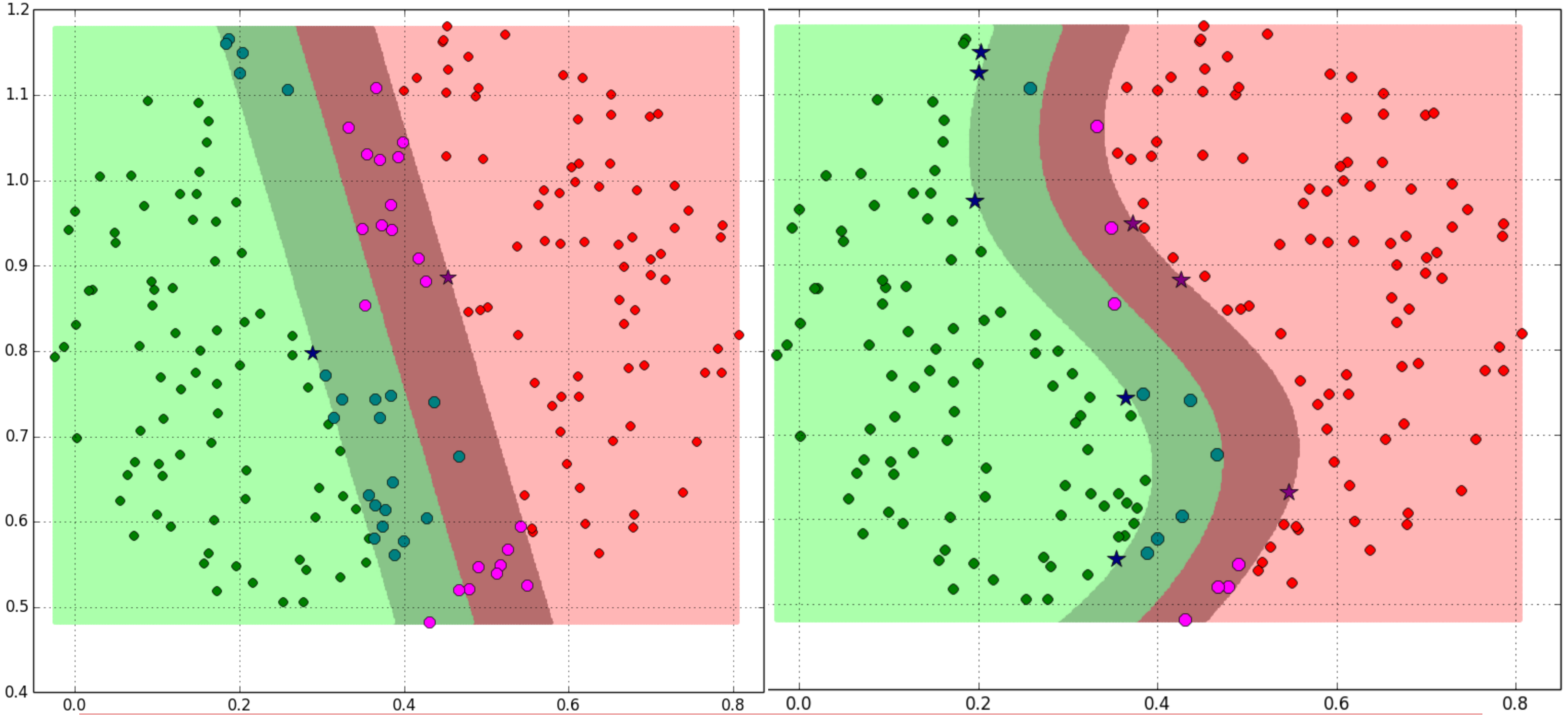
# 线性可分支持向量机



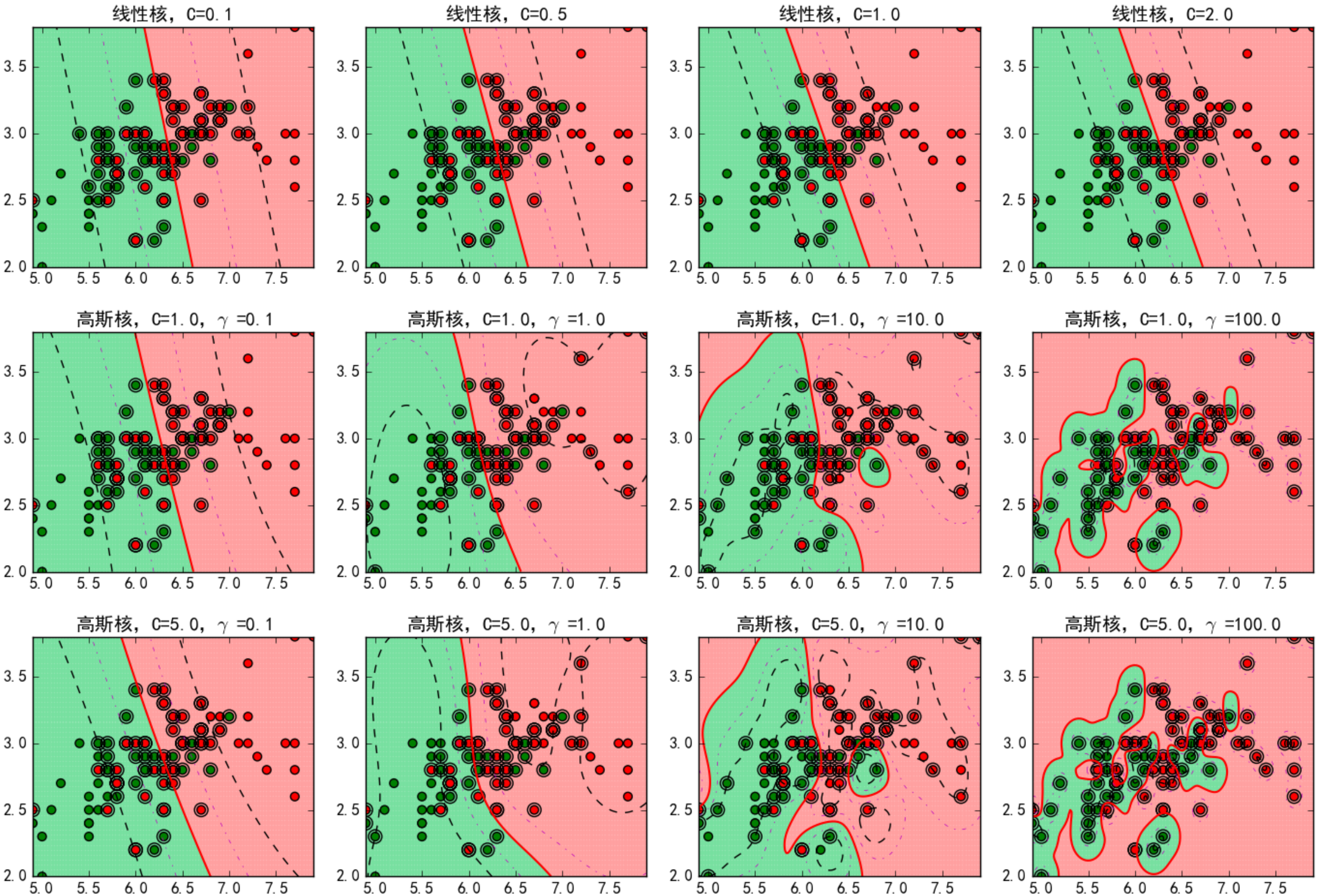
$\vec{w}\cdot\vec{x}+b=-1$
$\vec{w}\cdot\vec{x}+b=0$
$\vec{w}\cdot\vec{x}+b=+1$
Negative objects (y=-1)
Positive objects (y=+1)

# 使用核解决线性不可分





SVM不同参数的分类



线性核，C=0.1
线性核，C=0.5
线性核，C=1.0
线性核，C=2.0
高斯核，C=1.0，γ =0.1
高斯核，C=1.0，γ =1.0
高斯核，C=1.0，γ =10.0
高斯核，C=1.0，γ =100.0
高斯核，C=5.0，γ =0.1
高斯核，C=5.0，γ =1.0
高斯核，C=5.0，γ =10.0
高斯核，C=5.0，γ =100.0
2.0
2.5
3.0
3.5
5.0
5.5
6.0
6.5
7.0
7.5

# 推导目标函数

- 根据题设 $y(x)=w^T\Phi(x)+b$
- 有：

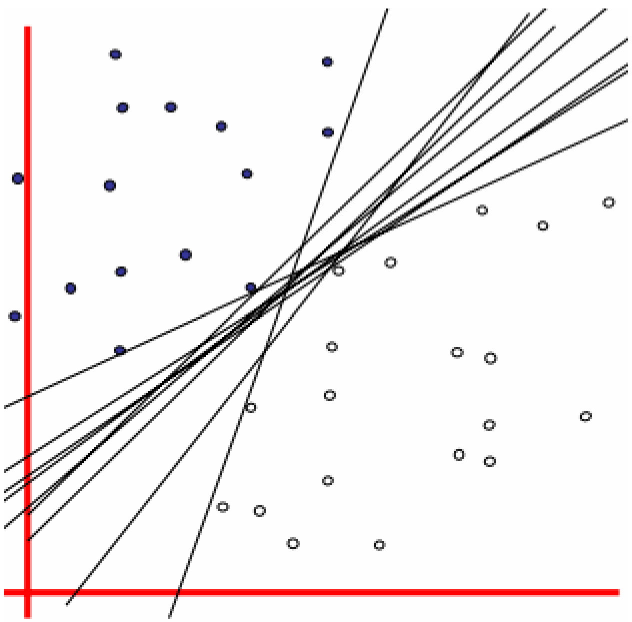
$$\begin{cases} y(x_i)>0 \Leftrightarrow y_i=+1 \\ y(x_i)<0 \Leftrightarrow y_i=-1 \end{cases} \Rightarrow y_i \cdot y(x_i)>0$$

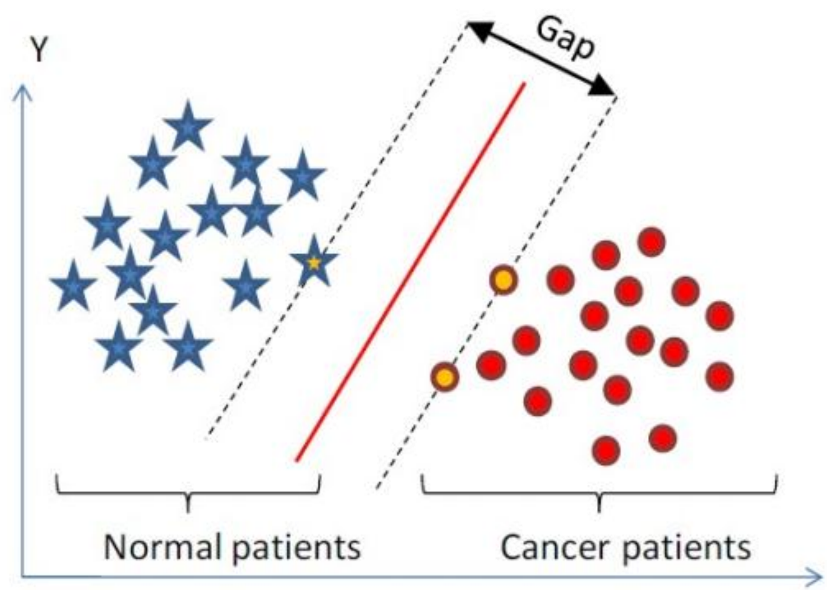
- w,b等比例缩放，则t*y的值同样缩放，从而：

$$\frac{y_i \cdot y(x_i)}{\|w\|}=\frac{y_i \cdot \left(w^T \cdot \Phi(x_i)+b\right)}{\|w\|}$$

# 最大间隔分离超平面 $\frac{y_i \cdot y(x_i)}{\|w\|} = \frac{y_i \cdot \left(w^T \cdot \Phi(x_i) + b\right)}{\|w\|}$

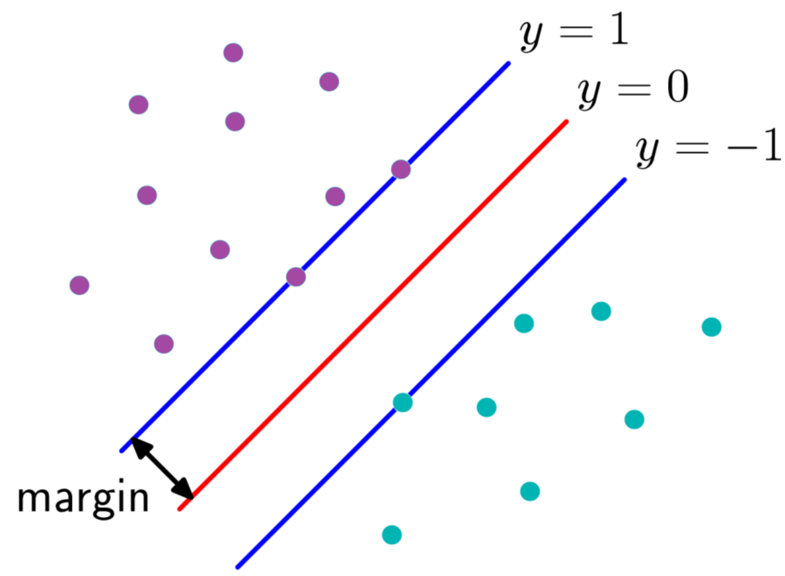
- 目标函数：$\underset{w,b}{\arg\max}\left\{\frac{1}{\|w\|}\min_i\left[y_i \cdot \left(w^T \cdot \Phi(x_i) + b\right)\right]\right\}$



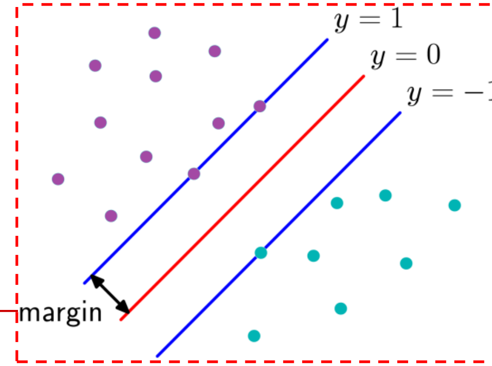


# 函数间隔和几何间隔 $\frac{w^T \cdot \Phi(x_i)+b}{\|w\|}$

- 分割平面：$y = w^T \cdot \Phi(x) + b$
- 总可以通过等比例缩放w的方法，使得两类点的函数值都满足$|y| \geq 1$



# 建立目标函数




- 总可以通过等比例缩放w的方法，使得两类点的函数值都满足$|y| \geq 1$
- 约束条件：$y_i \cdot \left(w^T \cdot \Phi(x_i) + b\right) \geq 1$
- 原目标函数：$$\arg\max_{w,b} \left\{ \frac{1}{\|w\|} \min_i \left[ y_i \cdot \left(w^T \cdot \Phi(x_i) + b\right) \right] \right\}$$
- 新目标函数：$$\arg\max_{w,b} \frac{1}{\|w\|}$$

# 建立目标函数

$$\max_{w,b} \frac{1}{\|w\|}$$

$$s.t.\quad y_i\left(w^T \cdot \Phi(x_i) + b\right) \geq 1,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\min_{w,b} \frac{1}{2}\|w\|^2$$

$$s.t.\quad y_i\left(w^T \cdot \Phi(x_i) + b\right) \geq 1,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

# 拉格朗日乘子法 $\min_{w,b}\frac{1}{2}\|w\|^2,\ s.t.\ y_i\left(w^T\cdot\Phi(x_i)+b\right)\ge 1,\ i=1,2\cdots N$

$$L(w,b,\alpha)=\frac{1}{2}\|w\|^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(y_i\left(w^T\cdot\Phi(x_i)+b\right)-1\right)$$

- 原问题是极小极大问题

$$\min_{w,b}\max_{\alpha}L(w,b,\alpha)$$

- 原始问题的对偶问题，是极大极小问题

$$\max_{\alpha}\min_{w,b}L(w,b,\alpha)$$

# 拉格朗日函数

- 将拉格朗日函数L(**w**,b,**a**)分别对**w**，b求偏导并令其为0：

$$\frac{\partial L}{\partial w}=0\Rightarrow w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \Phi\left(x_n\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=0\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$$

# 计算拉格朗日函数的对偶函数

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Phi(x_n)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

$$L(w,b,\alpha) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left( y_i \left( w^T \cdot \Phi(x_i) + b \right) - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} w^T w - w^T \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Phi(x_i) - b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$= \frac{1}{2} w^T \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Phi(x_i) - w^T \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Phi(x_i) - b \cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Phi(x_i) \right)^T \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Phi(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \Phi^T(x_i) \Phi(x_j)$$

$$a^* = \arg\max_{\alpha} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \Phi^T(x_i) \Phi(x_j) \right)$$

# 继续求$\min_{w,b} L(w,b,\alpha)$对α的极大

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \left( \Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j) \right)$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

# 整理目标函数：添加负号

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j \left(\Phi\left(x_i\right)\cdot\Phi\left(x_j\right)\right) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

# 线性可分支持向量机学习算法

- 构造并求解约束最优化问题

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j \left(\Phi(x_i)\cdot\Phi(x_j)\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

- 求得最优解α*

# 线性可分支持向量机学习算法

- 计算

$$w^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* y_i \Phi(x_i)$$

$$b^* = y_i - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* y_i \left(\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)\right)$$

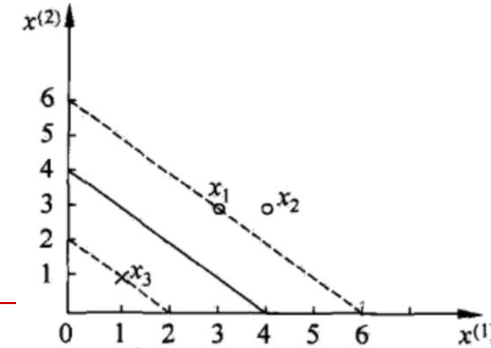
- 求得分离超平面

$$w^* \Phi(x) + b^* = 0$$

- 分类决策函数

$$f(x) = sign\left(w^* \Phi(x) + b^*\right)$$

# 举例




- 给定3个数据点：正例点$x_1=(3,3)^T$，$x_2==(4,3)^T$，负例点$x_3=(1,1)^T$，求线性可分支持向量机。
- 目标函数：

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j \left(x_i \cdot x_j\right) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$=\frac{1}{2}\left(18\alpha_1^2+25\alpha_2^2+2\alpha_3^2+42\alpha_1\alpha_2-12\alpha_1\alpha_3-14\alpha_2\alpha_3\right)-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$$

$$s.t. \quad \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

# 将约束带入目标函数，化简计算

- 将 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$
- 带入目标函数，得到关于$\alpha_1$，$\alpha_2$的函数：

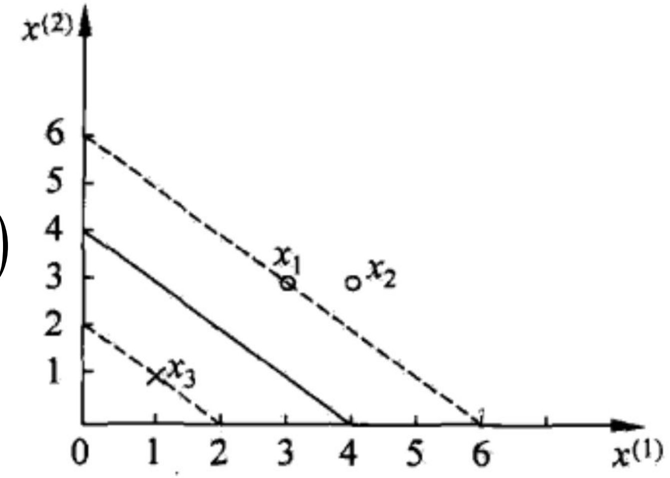
$$s(\alpha_1, \alpha_2) = 4\alpha_1^2 + \frac{13}{2}\alpha_2^2 + 10\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2$$

- 对$\alpha_1$，$\alpha_2$求偏导并令其为0，易知$s(\alpha_1,\alpha_2)$在点(1.5,-1)处取极值。而该点不满足条件$\alpha_2 \geq 0$，所以，最小值在边界上达到。
- 当$\alpha_1=0$时，最小值$s(0,2/13)=-2/13=-0.1538$
- 当$\alpha_2=0$时，最小值$s(1/4,0)=-1/4=-0.25$
- 于是，$s(\alpha_1,\alpha_2)$在$\alpha_1=1/4$，$\alpha_2=0$时达到最小，此时，$\alpha_3= \alpha_1+\alpha_2=1/4$

# 分离超平面

- $\alpha_1=\alpha_3=1/4$对应的点$x_1,x_3$是支持向量。
- 带入公式：$w^*=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^* y_i \Phi(x_i)$

$$b^*=y_i-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^* y_i\left(\Phi(x_i)\cdot\Phi(x_j)\right)$$

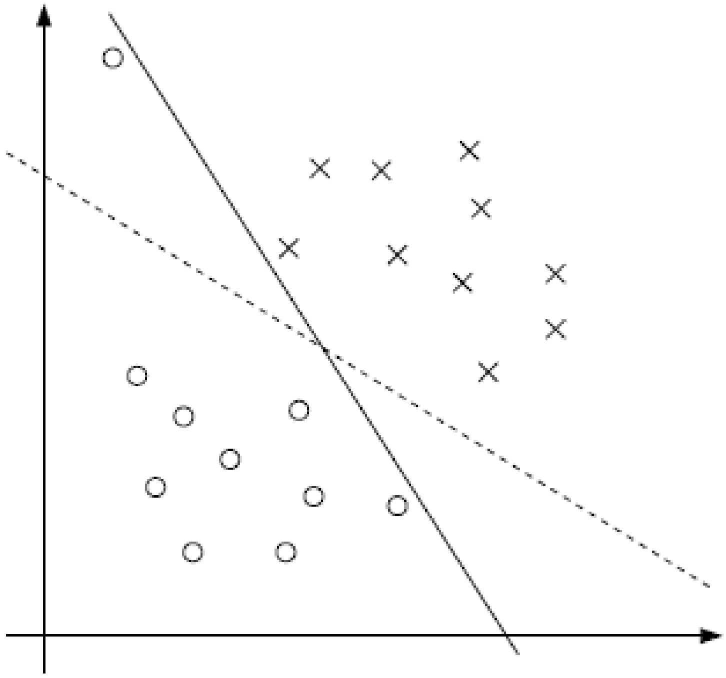



- 得到$w_1=w_2=0.5$，$b=-2$
- 因此，分离超平面为 $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-2=0$
- 分离决策函数为

$$f(x)=sign\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-2\right)$$

# 线性支持向量机

- 不一定分类完全正确的超平面就是最好的
- 样本数据本身线性不可分



# 线性支持向量机

- 若数据线性不可分，则增加松弛因子$\xi_i \geq 0$，使函数间隔加上松弛变量大于等于1。这样，约束条件变成

$$y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1 - \xi_i$$

- 目标函数：

$$\min_{w,b} \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$

# 线性SVM的目标函数

$$\min_{w,b,\xi} \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$

$$s.t. \quad y_i\left(w\cdot x_i + b\right) \geq 1-\xi_i, \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\xi_i \geq 0, \quad i=1,2,\cdots,n$$

# 带松弛因子的SVM拉格朗日函数

- 拉格朗日函数

$$L(w,b,\xi,\alpha,\mu) \equiv \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(y_i\left(w\cdot x_i + b\right) - 1 + \xi_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i\xi_i$$

- 对w,b,ξ求偏导

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \phi(x_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0 \Rightarrow C - \alpha_i - \mu_i = 0$$

# 带入目标函数

- 将三式带入L中，得到

$$\min_{w,b,\xi} L(w,b,\xi,\alpha,\mu) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

- 对上式求关于α的极大，得到：

$$\max_{\alpha} \; -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$\begin{aligned} s.t. \; & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0 \\ & C - \alpha_i - \mu_i = 0 \\ & \alpha_i \ge 0 \\ & \mu_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

$$0 \le \alpha_i \le C$$

# 最终的目标函数

- 整理，得到对偶问题：

$$\min_{\alpha} \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j \left(x_i \cdot x_j\right) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0$$

$$0 \le \alpha_i \le C, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

# 线性支持向量机学习算法

- 构造并求解约束最优化问题

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j\left(x_i \cdot x_j\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0$$

$$0 \le \alpha_i \le C, \quad i = 1,2,\dots,n$$

- 求得最优解α*

# 线性支持向量机学习算法

- 计算

$$w^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* y_i x_i$$

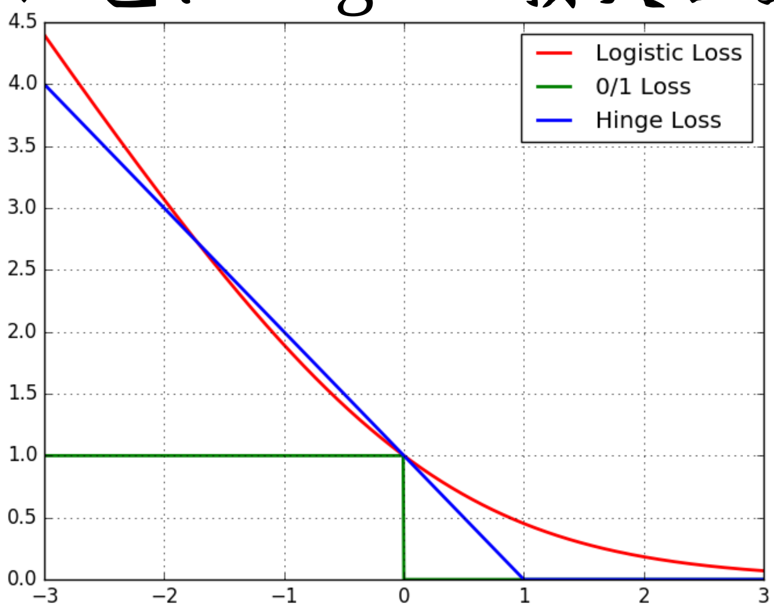
$$b^* = \frac{\max\limits_{i:\ y_i=-1} w^* \cdot x_i + \min\limits_{i:\ y_i=1} w^* \cdot x_i}{2}$$

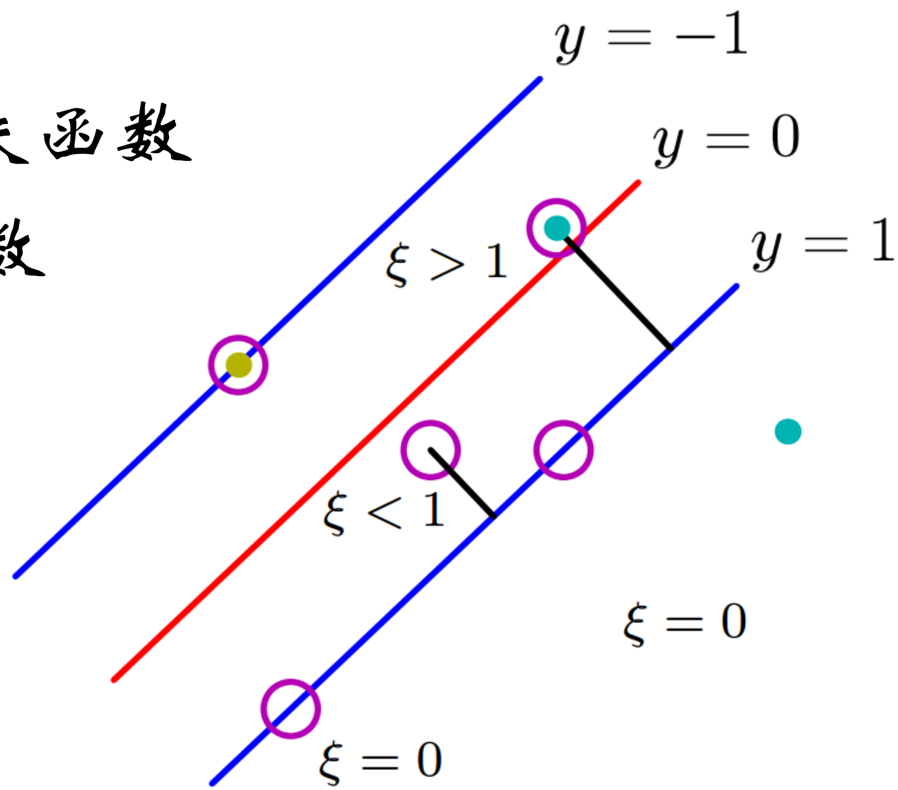
  - 注意：计算b*时，需要使用满足条件$0<\alpha_j<C$的向量
  - 实践中往往取支持向量的所有值取平均，作为b*
- 求得分离超平面 $w^* x + b^* = 0$
- 分类决策函数

$$f(x) = sign(w^* x + b^*)$$

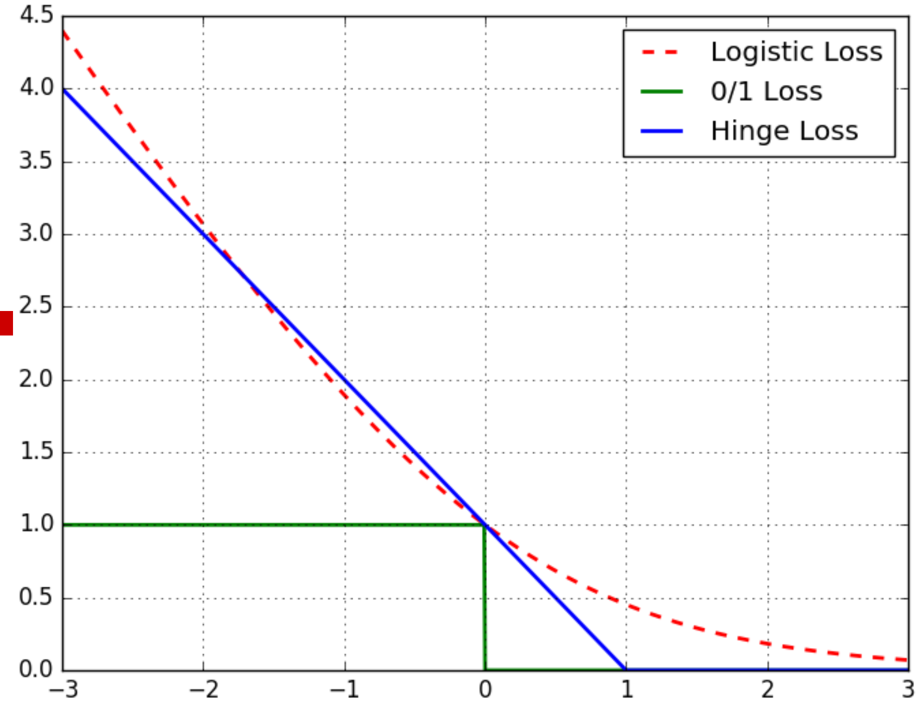
# 损失函数分析

- 绿色：0/1损失
- 蓝色：SVM Hinge损失函数
- 红色：Logistic损失函数



# Code

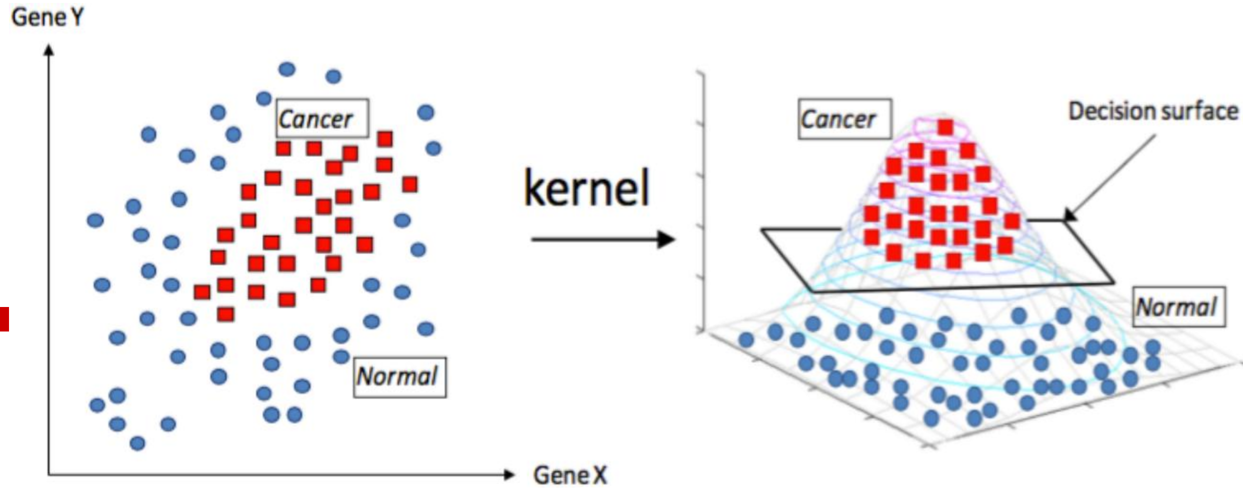


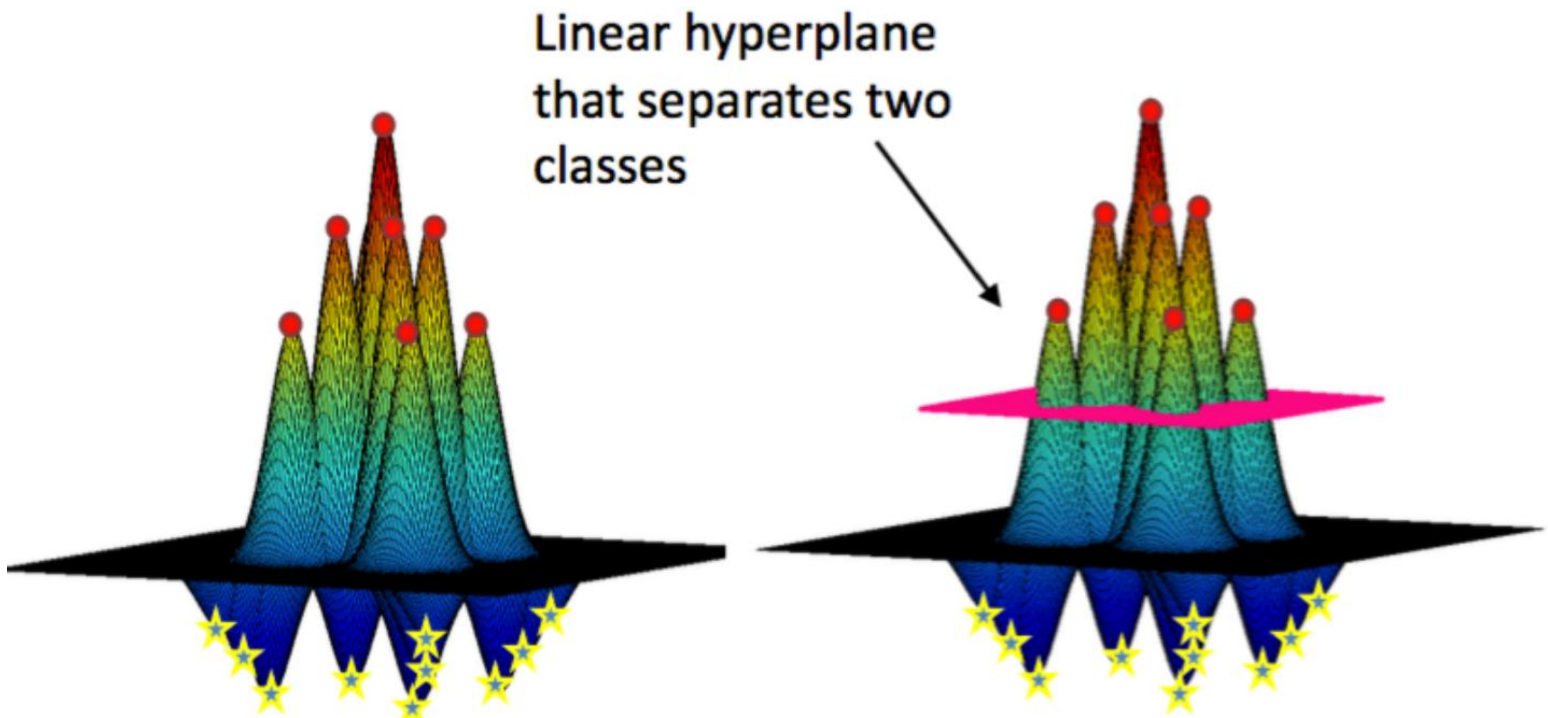

```python
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

if __name__ == "__main__":
    x = np.array(np.linspace(start=-3, stop=3, num=1001, dtype=np.float))
    y_logit = np.log(1 + np.exp(-x)) / math.log(2)
    y_01 = x < 0
    y_hinge = 1.0 - x
    y_hinge[y_hinge < 0] = 0
    plt.plot(x, y_logit, 'r--', label='Logistic Loss', linewidth=2)
    plt.plot(x, y_01, 'g-', label='0/1 Loss', linewidth=2)
    plt.plot(x, y_hinge, 'b-', label='Hinge Loss', linewidth=2)
    plt.grid()
    plt.legend(loc='upper right')
    plt.savefig('1.png')
    plt.show()
```

# 核函数

- 可以使用核函数，将原始输入空间映射到新的特征空间，从而，使得原本线性不可分的样本可能在核空间可分。
  - 多项式核函数 $\kappa(x_1, x_2) = (\alpha \cdot \|x_1 - x_2\|^a + r)^b$, $\alpha, a, b, r$ 为常数
  - 高斯核函数RBF $\kappa(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\sigma^2}\right)$
  - Sigmoid核：$\kappa(x_1, x_2) = \tanh(\gamma \cdot \|x_1 - x_2\|^a + r)$, $\gamma, a, r$ 为常数
- 在实际应用中，往往依赖先验领域知识/交叉验证等方案才能选择有效的核函数。
  - 没有更多先验信息，则使用高斯核函数

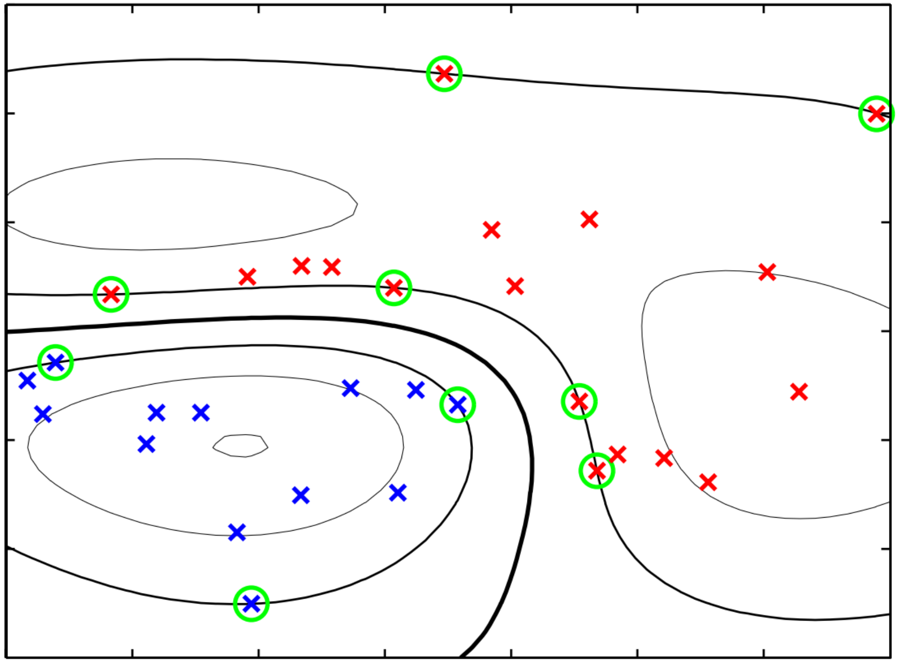
# 核函数映射


Gene Y
Cancer
Normal
Gene X
kernel
Cancer
Decision surface
Normal


Linear hyperplane
that separates two
classes

# 高斯核

- 粗线是分割超“平面”
- 其他线是y(x)的等高线
- 绿色圈点是支持向量点



# 高斯核是无穷维的 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$

$$\kappa(x_1, x_2) = e^{-\frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{x_1x_2}{\sigma^2}}$$

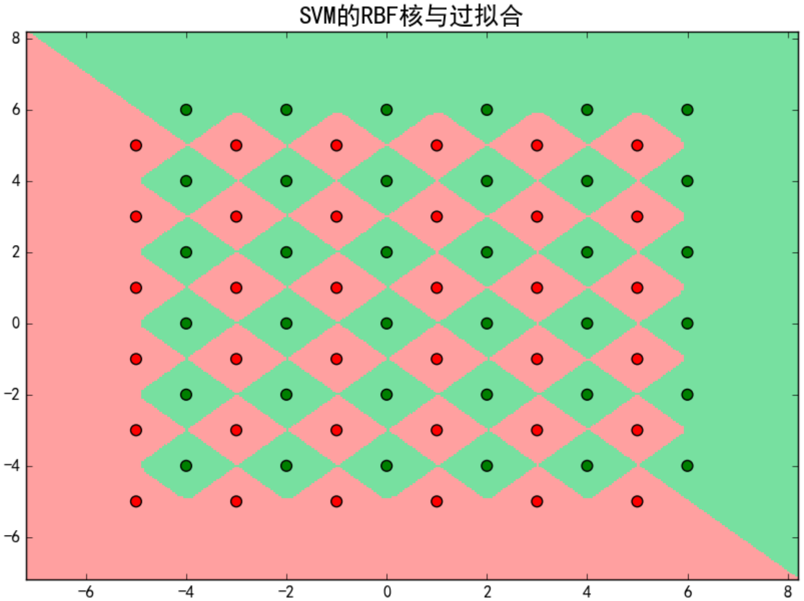
$$= e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{x_1x_2}{1!} + \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^2 \cdot \frac{(x_1x_2)^2}{2!} + \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^3 \cdot \frac{(x_1x_2)^3}{3!} + \cdots + \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^n \cdot \frac{(x_1x_2)^n}{n!} + \cdots\right)$$

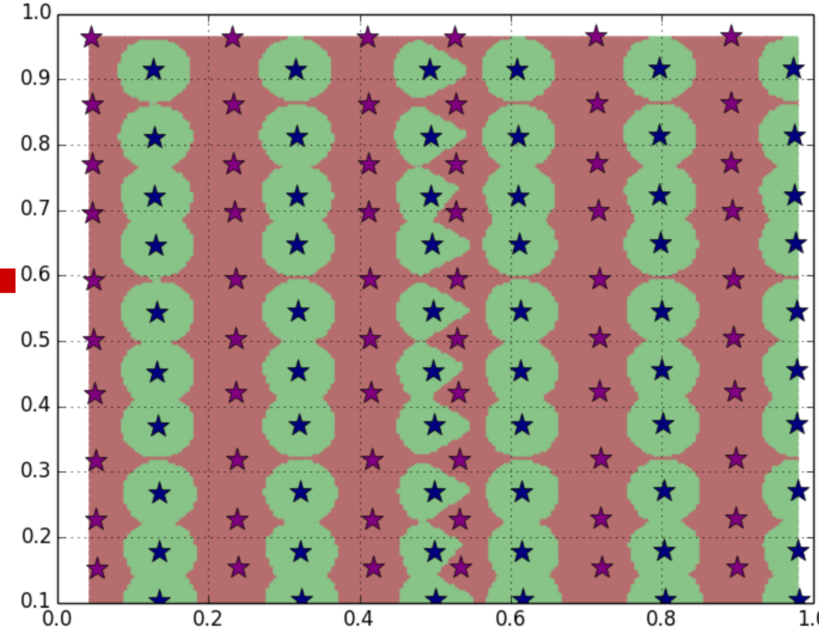
$$= e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{1!}\frac{x_1}{\sigma} \cdot \frac{x_2}{\sigma} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x_1^2}{\sigma^2} \cdot \frac{x_2^2}{\sigma^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{x_1^3}{\sigma^3} \cdot \frac{x_2^3}{\sigma^3} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{x_1^n}{\sigma^n} \cdot \frac{x_2^n}{\sigma^n} + \cdots\right)$$

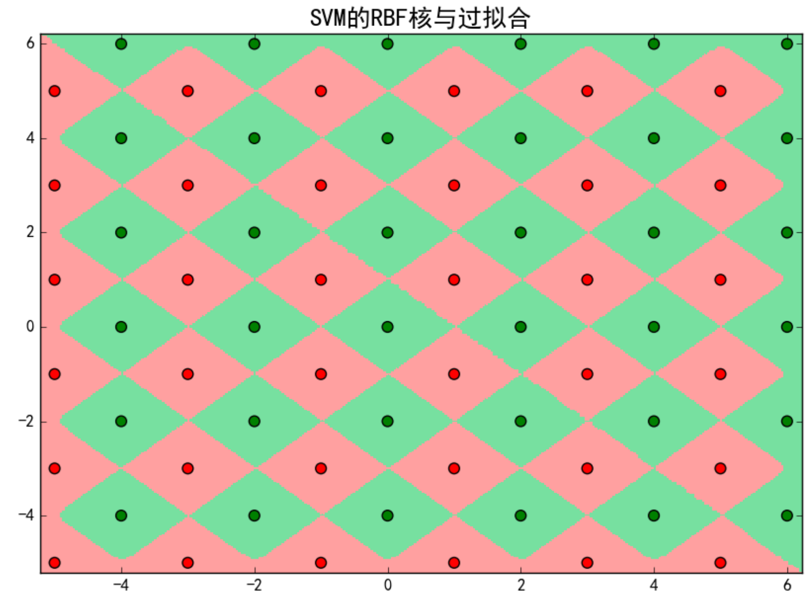
$$= \Phi(x_1)^T \cdot \Phi(x_2)$$

- 其中 $\Phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1, \sqrt{\frac{1}{1!}}\frac{x}{\sigma}, \sqrt{\frac{1}{2!}}\frac{x^2}{\sigma^2}, \sqrt{\frac{1}{3!}}\frac{x^3}{\sigma^3}, \cdots, \sqrt{\frac{1}{n!}}\frac{x^n}{\sigma^n}, \cdots\right)$

# 高斯核的分类






```python
def kernel(x1, x2):
    n = len(x2) - 1
    s = 0
    if kn == 0: # 线性核
        for i in range(n):
            s += x1[i] * x2[i]
        return s
    for i in range(n):
        s += (x1[i] - x2[i]) ** 2
    k = math.exp(-s / (2 * sigma**2))
    return k
```

# SVM中系数的求解：SMO

- 序列最小最优化
  - Sequential Minimal Optimization
- 有多个拉格朗日乘子
- 每次只选择其中两个乘子做优化，其他因子认为是常数。
  - 将N个解问题，转换成两个变量的求解问题：并且目标函数是凸的。

# SMO：序列最小最优化

- 考察目标函数，假设α1和α2是变量，其他是定值：

$$\min_{\alpha} \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j K\left(x_i \cdot x_j\right) - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0$$

$$0 \le \alpha_i \le C, \quad i = 1,2,\dots N$$

$$\min_{\alpha_1,\alpha_2} W\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$$

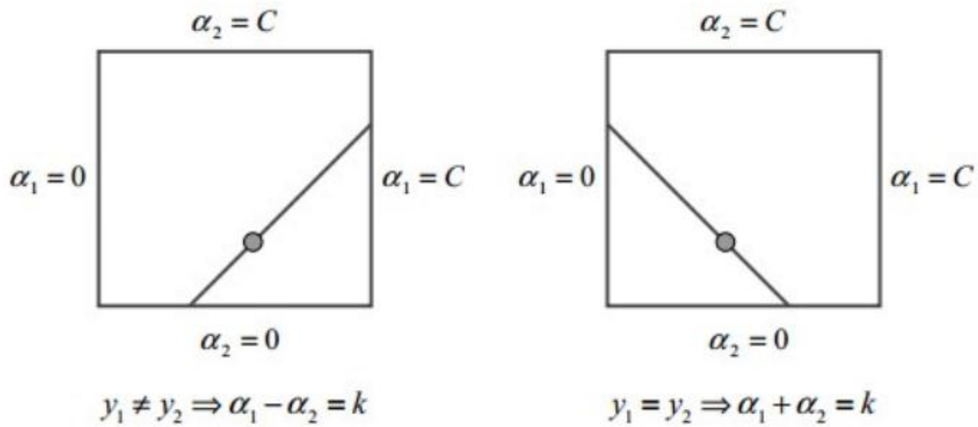
$$= \frac{1}{2}\kappa_{11}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_{22}\alpha_2^2 + y_1 y_2 \alpha_1\alpha_2\kappa_{12} - \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)$$

$$+ y_1\alpha_1\sum_{i=3}^{N} y_i\alpha_i\kappa_{i1} + y_2\alpha_2\sum_{i=3}^{N} y_i\alpha_i\kappa_{i2}$$

$$s.t. \ \ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = -\sum_{i=3}^{N} y_i\alpha_i = \zeta$$

$$0 \le \alpha_i \le C$$

# 二变量优化问题




$$\begin{cases} L = \max\{0, \alpha_1 - \alpha_2\} \\ H = \min\{C, C + \alpha_1 - \alpha_2\} \end{cases}, \quad y_1 \neq y_2$$

$$\begin{cases} L = \max\{0, \alpha_1 + \alpha_2 - C\} \\ H = \min\{C, \alpha_1 + \alpha_2\} \end{cases}, \quad y_1 = y_2$$

# SMO的迭代公式

- 迭代公式：

$$g(x)=\sum_{i=1}^{N}y_i\alpha_i\kappa(x_i,x)+b$$

$$\eta=\kappa(x_1,x_1)+\kappa(x_2,x_2)-2\kappa(x_1,x_2)=\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\|^2$$

$$E_i=g(x_i)-y_i=\left(\sum_{j=1}^{N}y_j\alpha_j\kappa(x_j,x_i)+b\right)-y_i,\quad i=1,2$$

$$\alpha_j^{new}=\alpha_j^{old}+\frac{y_j(E_i-E_j)}{\eta}$$

# 退出条件

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0$$

$$0 \le \alpha_i \le C, \quad i = 1,2,\ldots n$$

$$y_i \cdot g(x_i) = \begin{cases} \ge 1, & \{x_i | \alpha_i = 0\} // \text{落在边界外} \\ = 1, & \{x_i | 0 < \alpha_i < C\} // \text{落在边界上} \\ \le 1, & \{x_i | \alpha_i = C\} // \text{落在边界内} \end{cases}$$

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j K(x_j, x_i) + b$$

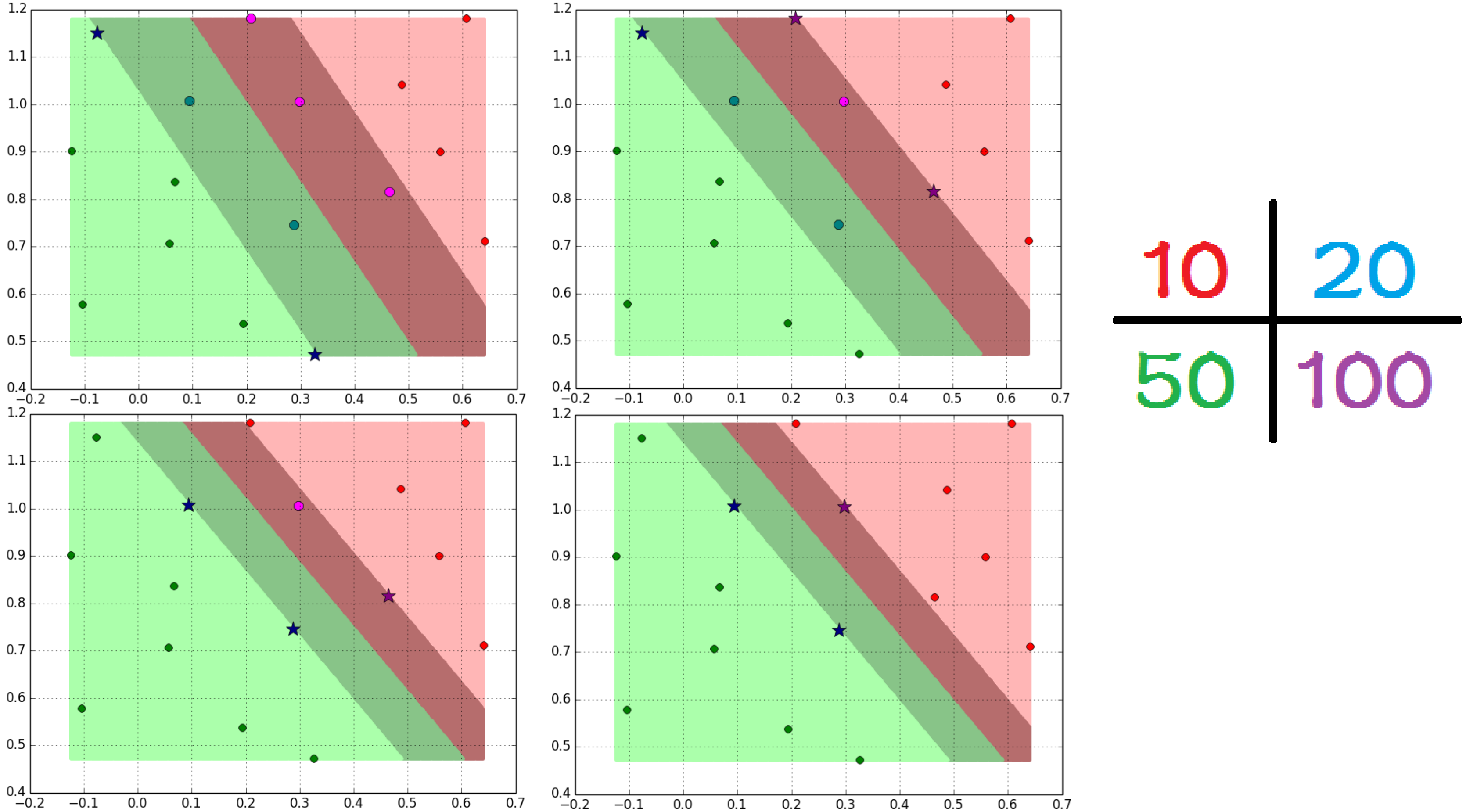
# Code

```python
def update(i, j, data):
    low = 0
    high = C
    if data[i][-1] == data[j][-1]:
        low = max(0, alpha[i]+alpha[j]-C)
        high = min(C, alpha[i]+alpha[j])
    else:
        low = max(0, alpha[j]-alpha[i])
        high = min(C, alpha[j]-alpha[i]+C)
    if low == high:
       return False
    eta = kernel(data[i], data[i]) + kernel(data[j], data[j])\
          - 2*kernel(data[i], data[j])
    if is_same(eta, 0):
        return False
    ei = predict(data[i], data) - data[i][-1]
    ej = predict(data[j], data) - data[j][-1]
    alpha_j = alpha[j] + data[j][-1] * (ei - ej) / eta
    if alpha_j == alpha[j]:
        return False
    if alpha_j > high:
        alpha_j = high
    elif alpha_j < low:
        alpha_j = low
    alpha[i] += (alpha[j] - alpha_j) * data[i][-1] * data[j][-1]
    alpha[j] = alpha_j
    return True
```

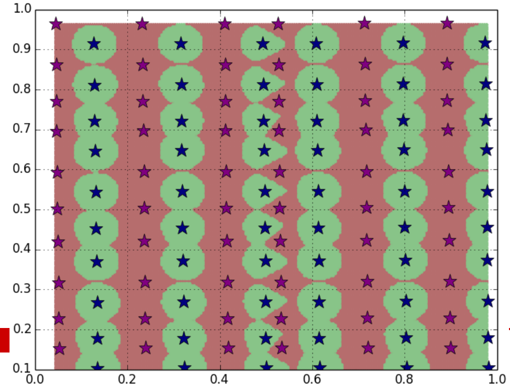
# Code

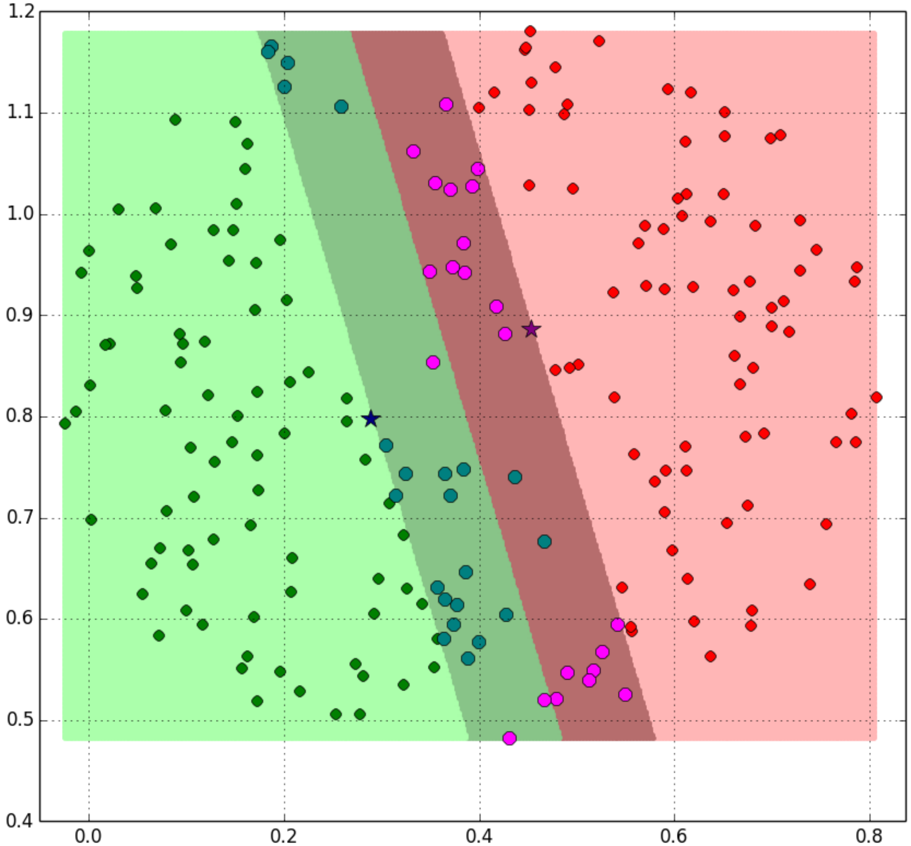
```python
def update_b(i, j, data):
    global b
    bi = b + data[i][-1] - predict(data[i], data)
    bj = b + data[j][-1] - predict(data[j], data)
    if C > alpha[i] > 0:
        return bi
    elif C > alpha[j] > 0:
        return bj
    return (bi + bj) / 2


def smo(data):
    m = len(data)
    global b
    for time in range(5000):
        no_change = 0
        i = select_first(data)
        if i == -1:
            break
        j = select_second(i, m)
        if not update(i, j, data):
            no_change += 1
            continue
        b = update_b(i, j, data)
        print time, b
        if no_change > 100:
            break
```

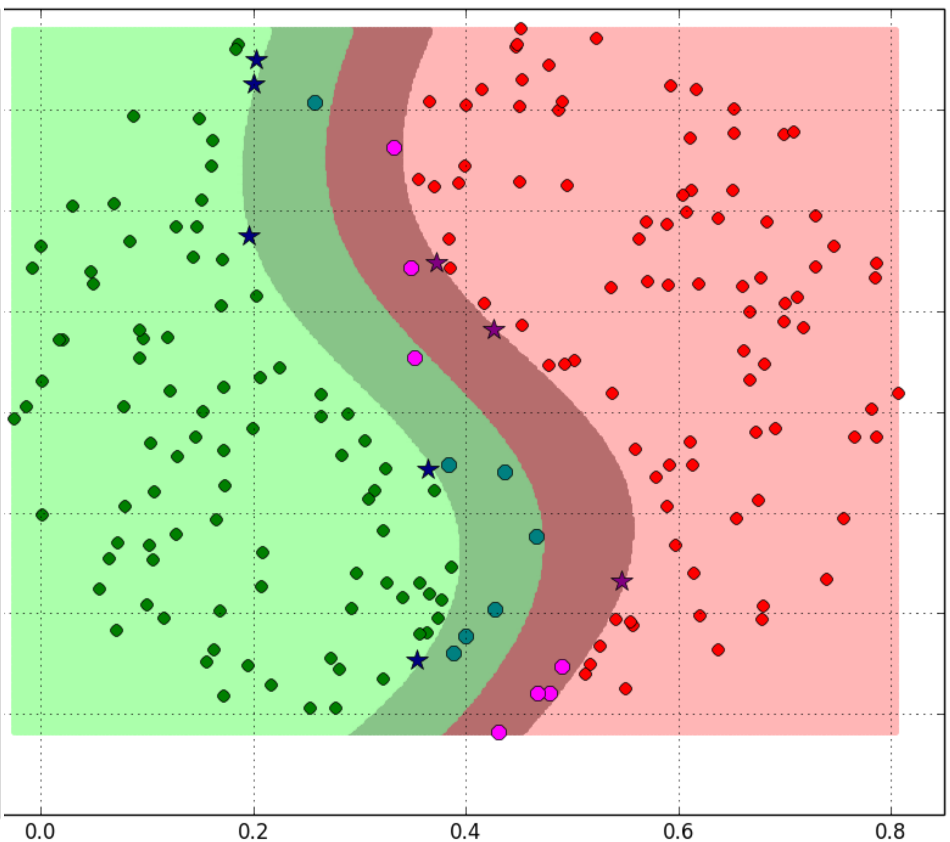
# 惩罚因子的影响



# 高斯核函数的影响









小象学院 ChinaHadoop.cn

# 总结与思考

- SVM可以用来划分多类别吗?
  - 直接多分类
  - 1 vs rest / 1 vs 1
- SVM和Logistic回归的比较
  - 经典的SVM，直接输出类别，不给出后验概率；
  - Logistic回归，会给出属于哪个类别的后验概率。
  - 重点：二者目标函数的异同
- SVM框架下引入Logistic函数：输出条件后验概率
- SVM用于回归问题：SVR；
- 体会SVM的目标函数的建立过程
  - 原始目标函数和Lagrange函数有什么联系?

# 参考文献


- Corinana Cortes, Vladimir Vapnik. *Support-Vector Networks*. Machine Learning, 20, 273-297, 1995
- Christopher M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer Press, 2006
- 李航，统计学习方法，清华大学出版社，2012
- Stephen Boyd,Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*, Cambridge University Press. 2004
  - 中译本：王书宁，许鋆，黄晓霖，凸优化，清华大学出版社，2013
- Charlie Frogner. *Support Vector Machines*. 2011
- John C. Platt. *Sequential Minimal Optimization: A Fast Algorithm for Training Support Vector Machines*. 1998
- Andrew W. Moore. *Support Vector Machines*, 2001

# 作业

- 核函数是什么？高斯核映射到无穷维是怎么回事？
- 怎么理解SVM的损失函数？
- 使用高斯核函数，请描述SVM的参数C和σ对分类器的影响。

# 我们在这里

- http://wenda.ChinaHadoop.cn
  - 视频/课程/社区
- 微博
  - @ChinaHadoop
  - @邹博_机器学习
- 微信公众号
  - 小象
  - 大数据分析挖掘

感谢大家！

恳请大家批评指正！