calculus3

13 ноября 2020 г.

0.0.1 Схема Эйткена

Для схемы Эйткена строятся следующие многочлены: Пусть даны $x_i,\ f(x_i) = y_i,\ 0 \le i \le n;$

$L_{0,1}(x^*) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x^* \\ y_1 & x_1 - x^* \end{vmatrix}$

$L_{1,2}(x^*) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x^* \\ y_2 & x_2 - x^* \end{vmatrix}$

$L_{i,i+1,i+2}(x^*) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} L_{i,i+1} & x_i - x^* \\ L_{i+1,i+2} & x_{i+2} - x^* \end{vmatrix}$

$L_{0,\dots n}(x^*) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{i,i+1} & x_0 - x^* \\ L_{i+1,i+2} & x_0 - x^* \end{vmatrix}$

[9]:
```
from math import cos, pi
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from IPython.display import display, Latex


plt.style.use('seaborn-poster')


def scheme_Aitken(x: float, nodes_x: list, nodes_f: list):
    if len(nodes_x) == 2:
        return ((nodes_x[1] - nodes_x[0]) ** -1) * (nodes_f[0] * (nodes_x[1] -␣
 ↪x) - (nodes_f[1] * (nodes_x[0] - x)))
    return ((nodes_x[-1] - nodes_x[0]) ** -1) * ((nodes_x[-1] - x) *␣
 ↪scheme_Aitken(x, nodes_x[:-1], nodes_f[:-1]) -
                                              (nodes_x[0] - x) *␣
 ↪scheme_Aitken(x, nodes_x[1:],nodes_f[1:]))


def func_Runge(x: float):
    return (1 + x ** 2) ** -1


def Chebyshev_nodes(a: "begin of interval", b: "end of interval", n: int):
```

```
    nodes = []
    for i in range(1, n + 1):
        node = 1/2 * ((a + b) + (b - a) * cos((2 * i - 1) * pi / (2 * n)))
        nodes.append(round(node, 4))
    return nodes
```

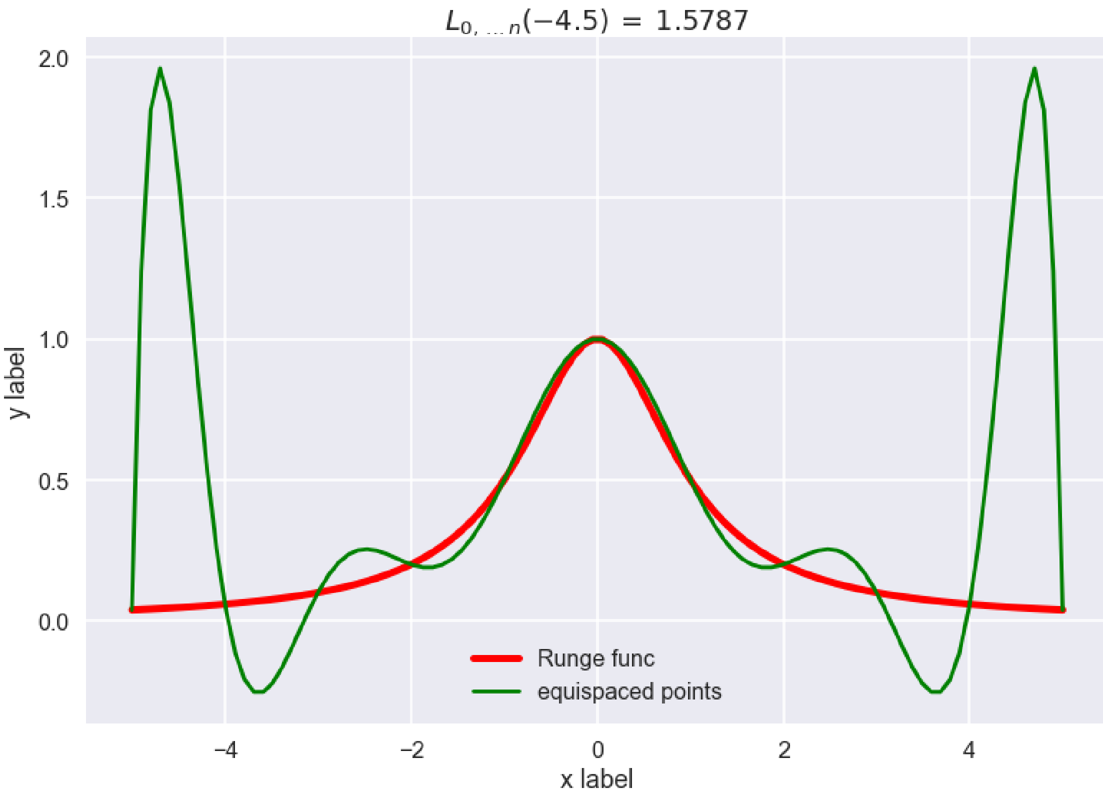
a) Используя схему Эйткена вычислим приближённое значение функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ в точке $x^* = -4.5$, используя равноотстоящие узлы $x_i = -5 + i$, $0 \le i \le 10$

[10]:
```
x_nodes = [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]
y_nodes = [func_Runge(x) for x in x_nodes]
x = -4.5

first_value = scheme_Aitken(x, x_nodes, y_nodes)

t = np.linspace(-5, 5, 100)
fig, ax = plt.subplots()  # Create a figure and an axes.
ax.plot(t, func_Runge(t), label='Runge func', linewidth=5, color='red')
ax.plot(t, scheme_Aitken(t, x_nodes, y_nodes), label="equispaced points",␣
 ↪color='green')
ax.set_xlabel('x label')
ax.set_ylabel('y label')
ax.set_title("$L_{0,\,\ldots\,n}(%.1f)\: =\: %.4f$"%(x, first_value))
ax.legend()
```

[10]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x23dc3ad5e20>
```



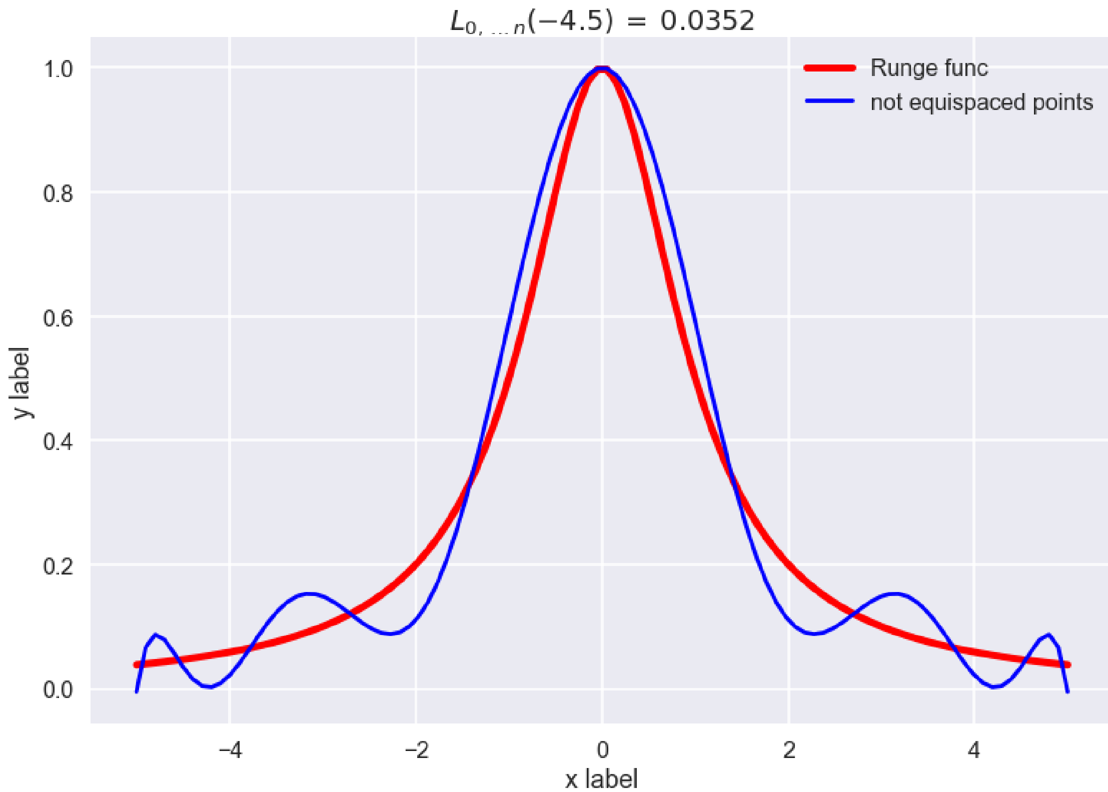
б) Теперь при вычислении будем использовать соответствующее число $(n = 11)$ узлов Чебышёва, которые не являются равноотстоящими $x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \ldots, n.$

[11]:
```
x_cheb_nodes = Chebyshev_nodes(-5, 5, 11)
y_cheb_nodes = [func_Runge(x) for x in x_cheb_nodes]

second_value = scheme_Aitken(x, x_cheb_nodes, y_cheb_nodes)

t = np.linspace(-5, 5, 100)
fig, ax = plt.subplots()  # Create a figure and an axes.
ax.plot(t, func_Runge(t), label='Runge func', linewidth=5, color='red')
ax.plot(t, scheme_Aitken(t, x_cheb_nodes, y_cheb_nodes), label="not equispaced␣
↪points", color='blue')
ax.set_xlabel('x label')
ax.set_ylabel('y label')
ax.set_title("$L_{0,\,\ldots\,n}(%.1f)\: =\: %.4f$"%(x, second_value))
ax.legend()
```

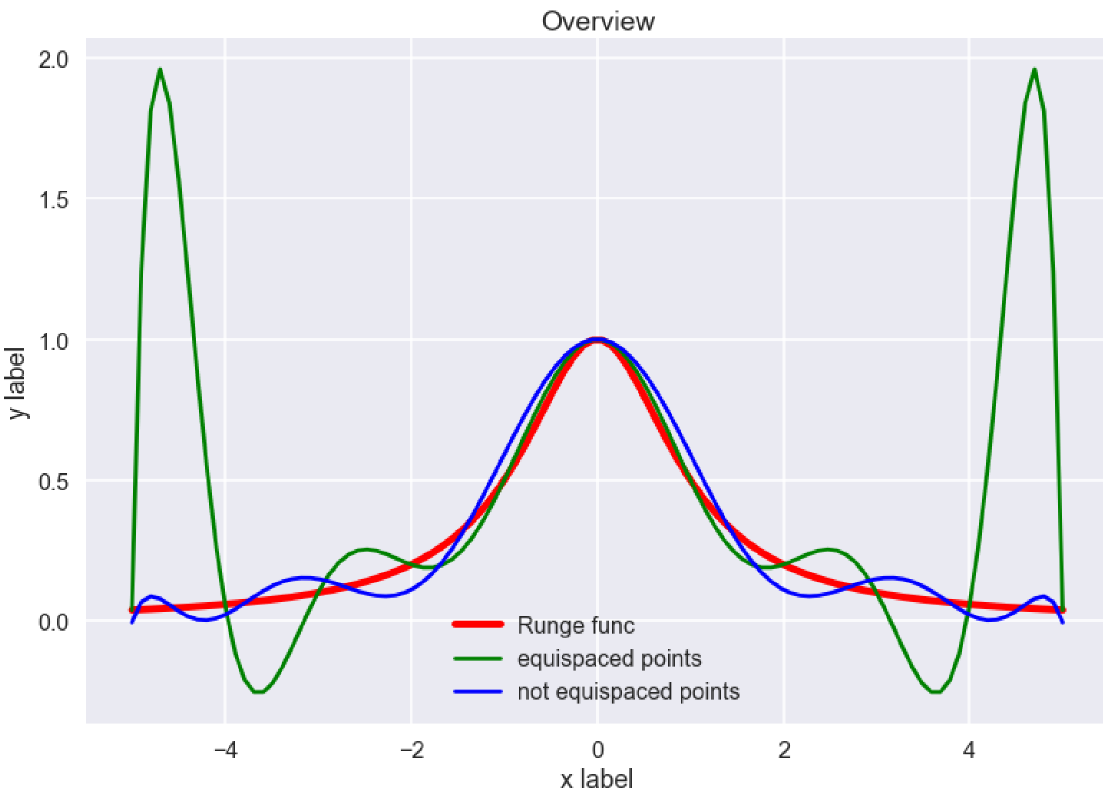
[11]: <matplotlib.legend.Legend at 0x23dc3a5d1f0>



[12]:
```
display(Latex("Точное значение функции $f(%.1f) = %.4f$. \n \
Значение функции $f$ при интерполировании равноотстоящими узлами:  $%.4f$.\n \
Значение функции $f$ при интерполировании узлами Чебышёва:  $%.4f$."%(x,␣
 ↪func_Runge(x), first_value, second_value)))
t = np.linspace(-5, 5, 100)
fig, ax = plt.subplots()  # Create a figure and an axes.
ax.plot(t, func_Runge(t), label='Runge func', linewidth=5, color='red')
ax.plot(t, scheme_Aitken(t, x_nodes, y_nodes), label="equispaced points",␣
 ↪color='green')# Plot some data on the axes.
ax.plot(t, scheme_Aitken(t, x_cheb_nodes, y_cheb_nodes), label="not equispaced␣
 ↪points", color='blue')
ax.set_xlabel('x label')
ax.set_ylabel('y label')
ax.set_title("Overview")
ax.legend()
```

Точное значение функции $f(-4.5) = 0.0471$. Значение функции f при интерполировании равноотстоящими узлами: 1.5787. Значение функции f при интерполировании узлами Чебышёва: 0.0352.

[12]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x23dc41708e0>
```


Overview
y label
x label
Runge func
equispaced points
not equispaced points
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−4
−2
0
2
4