

基于正/逆向网络 SimEvents 仿真的 PERT 网络分析

唐建, 严骏, 袁建虎, 吕振坚

(解放军理工大学野战工程学院, 南京 210007)



摘要: 针对工序持续时间服从任意分布的 PERT 网络, 基于离散事件系统(Discrete Events System, DES) Monte-Carlo 仿真的思路, 在数学证明的基础上, 将逆向网络仿真与正向网络仿真相结合, 以获取以往 DES 仿真较难获取的与逆向回馈计算有关的时间参数; 探索性地选择用 MATLAB 新增的离散事件仿真工具箱 SimEvents 对正、逆向网络中的节点、弧线和网络进行仿真建模, 使模型具有直观、建模简单和子系统可复用等特点。以仿真结果为基础, 可获取丰富的有关网络、工序、节点、时差的各类信息, 以增强对网络, 尤其是大型、复杂、多层次网络运作细节的了解和对任务过程的控制能力。

关键词: PERT 网络; 离散事件系统; 仿真; Monte Carlo; 逆向网络

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2014) 04-0903-07

PERT Network Analysis Based on Forward/Backward Network Simulation in SimEvents

TANG Jian, YAN Jun, YUAN Jian-hu, LV Zheng-jian

(College of Field Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract: Based on mathematical proof, a new Monte-Carlo simulation method based on Discrete Event Systems (DES) was developed to analyze PERT network. The new method combined the DES simulation of PERT network with the DES simulation of its backward one. Through it, a wealth of time parameters could be obtained, including the ones which must be calculated through cumbersome forward and reverse recursive computation by conventional analytical methods. MATLAB's new discrete event simulation toolbox SimEvents was used to build the simulation models, through nodes, arcs to networks. Its advantages of subsystem package and reusability made the model very simple and intuitive. If combined with MATLAB's powerful ability of calculation and graphical representation, this method could enhance analyzers' understanding of the operational details, and therefore strengthen their ability of controlling the task process, especially the great, complex and multi-level one.

Key words: PERT network; discrete event systems; simulation; Monte-Carlo; backward network

引言

PERT 网络是现代管理中重要的网络规划技术之一, 常用来分析工序间关系确定, 但工序持续时间不确定的任务工期问题^[1]。通过它, 管理者可以获知任务工期的长短, 识别关键路径及关键工序, 确定各工序的开始时间、结束时间及各类时差。

目前, 有关 PERT 网络的解析分析方法和结论很多, 其中最传统是三点分析法, 它假定任务中所有工序的持续时间

均服从 Beta 分布, 并基于乐观值、悲观值和最可能值三个估计值, 以经验公式计算工序时间的均值和方差^[2]。三点分析法是建立在关键路径唯一性假设基础上的, 而工序时间变化可能会导致关键路径变迁, 由其获得的任务总工期的均值小于实际统计值^[3], 误差甚至可达 30%。三点分析法的另一个缺点是对工序时间的分布类型进行了限制, 我国数学家华罗庚就曾对工序时间服从 Beta 分布提出过质疑。因此, 一些文献研究了工序时间为 Normal^[4], Lognormal^[5], Gamma^[6], Weibull^[7], Exponential^[8], Erlang^[9]等分布类型的 PERT 网络, 得出了一些解析方法, 但这些方法往往局限于工序时间服从某种特定分布。与此同时, 解析方法能获得的信息有限也是制约其应用的重要因素, 其获得的参数往往是任务工期的均值、方差、上下限等^[11], 有关任务推进过程中的详细信息, 如工序开始和结束时间、各类时差及其概率分布特性, 以及

收稿日期: 2012-11-16

修回日期: 2013-02-22

基金项目: 国家自然科学基金(424131122); 解放军理工大学青年基金(GYJJ201108);

作者简介: 唐建(1977-), 女, 四川广安, 博士, 讲师, 研究方向为装备保障优化决策; 严骏(1962-), 男, 湖北武汉, 博士, 教授, 博导, 研究方向为军事装备学; 袁建虎(1969-), 男, 江苏丹阳, 硕士, 副教授, 研究方向为离散事件系统仿真; 吕振坚(1966-), 男, 浙江金华, 博士, 副教授, 研究方向为装备物资保障。

<http://www.china-simulation.com>

• 903 •

工序的重要度、关键度指标等,都难以获得。对于大型、复杂、多层次网络,上述不足更是体现明显。

对于工序时间服从任意分布的网络, Monte-Carlo 仿真方法不失为一种理想的手段,它通过随机抽样和统计实验来获得任务管理者关心的各种参数,且不受工序时间概率分布类型的限制^[12]。早在 1963 年, Van Slyke 就提出用 Monte-Carlo 方法分析 PERT 网络的思路^[13],但以往的研究大都基于路径穷举或关系运算,包含了繁琐的前向计算和后向计算,模型不直观且可重用性差。

1990 年, Saliby 提出用离散采样方法(Discrete Sample Method)进行 PERT 网络仿真^[14],目前涌现的大量离散事件系统仿真软件,如 Anylogic、DotNet、OPNet、WITNESS、GPSS-PC、SIMSCRIPT、NS2 等都可作为 PERT 网络仿真的平台。但是,基于离散事件系统(Discrete Events System, DES)仿真的 PERT 网络分析存在一个难题,即不能直接获得与反向递推计算有关的时间信息,而管理者又往往非常关心工序开始和结束的早晚可能造成的后果,以及各工序在时间安排上的弹性等问题。针对这个问题,本文提出正向网络和逆向网络仿真相结合的思路,探索以 MATLAB 新增的 DES 仿真工具箱 SimEvents 为平台,通过仿真和简单的计算获得与逆向计算有关的各种时间参数。

1 PERT 网络及相关时间参数

图 1 为一个双代码 PERT 网络,也称为 AoA (Activity on Arc) 网络,记为 $G=(V,A,C)$ 。其中, $V=(1,2,\dots,n)$ 为节点(事件)集; $A=\{a_{ij}, i,j \in V\}$ 为弧线集,表示工序; $C=\{c_{ij}(t), a_{ij} \in A\}$ 为弧权集,可以是工序的持续时间 $d(i,j)$ 。

网络中的所有工序都可由其起始节点和终止节点唯一表示,并用有向弧线进行连接。网络的源点和终点则分别标志着网络的开始和结束。

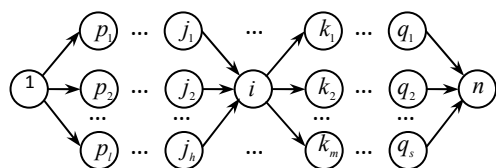


图 1 AoA 网络

网络中,节点的最早可能发生时间 $t_E(i)$ 和最晚必须发生时间 $t_L(i)$ 是计算包括网络持续时间、工序开始和结束时间、工序各类时差等时间参数的基础^[15]。其中, $t_E(i)$ 即在节点 i 的所有前导工序(图 1 中的 j_1-i, \dots, j_h-i)都不延期的前提下,从其出发的后续工序(图 1 中的 $i-k_1, \dots, i-k_m$)最早可以发生的时间,用公式(1)计算。 $t_L(i)$ 则表示

以节点 i 为起点的工序必须在这个时间之前完成,否则会影响后续工序的最迟必须开始时间。 $t_L(i)$ 需要从网络的终点 n 开始,用公式(2)逆向计算。

$$t_E(1)=0$$

$$t_E(i)=\max\{t_E(j_r)+d(j_r,i)\}, 1 \leq i \leq n, j_r < i, a_{j_r-i} \in A \quad (1)$$

$$t_L(n)=\lambda$$

$$t_L(i)=\min\{t_L(k_r)-d(i,k_r)\}, 1 \leq i < n, i < k_r, a_{i-k_r} \in A \quad (2)$$

式(1)中, $t_E(1)=0$, $t_E(j_r)$ 和 $t_E(i)$ 分别为工序 j_r-i 的起点 j_r 和终点 i 的最早可能发生时间; $d(j_r,i)$ 为其续时间。

式(2)中, λ 为网络终点 n 的最早可能开始时间 $t_E(n)$, 也即实际工期。

2 基于 SimEvents 的网络建模

节点和弧线是 PERT 网络的基本构成单元,也是建立仿真模型的基础,故首先对 SimEvents 环境下节点和弧线的建模进行分析。

2.1 节点的建模及相关时间参数的获取

节点用来表达各项工序之间的时间和逻辑约束关系,代表了一个(或几个)工序的开始或结束。

在 SimEvents 中,网络中的选择、分支、冲突、因果等关系节点都可通过 Input Switch、Routing、Gate 和 Entity Management 等库中的模块的结合使用实现。以一个具有 3 个前导弧线和 3 个后续弧线的节点为例,其仿真模型如图 2 所示,主要包括 Path Combiner 和 Replicate 两个模块,前者用于实现条弧线“汇”于同一节点的功能,后者用于实现多个弧线从同一节点“散”的功能。为便于网络建模,将其封装为节点子系统 Node Subsystem。

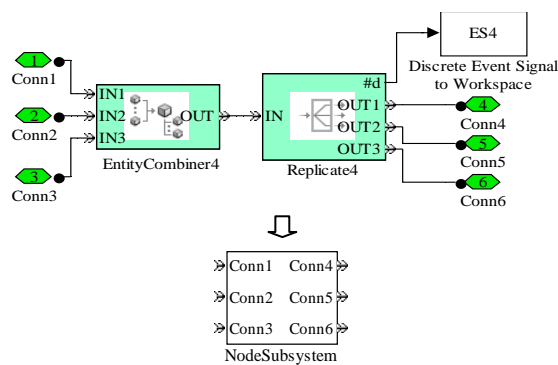


图 1 节点的建模

由于事件 i 的发生意味着其所有前导弧线的中的实体都到达且同时离开节点 i 进入后续弧线,因此开启 Replicate 模块的 #d 端口,获取实体离开该模块的时间信息(其数据类型为

structure 型), 并进行简单处理即可获得节点的最早发生时间 $t_E(i)$, 它同时也是节点 i 的后续弧线 $i-j$ 最早可以开始的时间 $t_{ES}(i, j)$ 。

2.2 弧线的建模及相关时间参数的获取

网络中带箭头的弧线用于表达各工序的持续时间以及流向。在 SimEvents 中, 弧线(如图 3)的功能主要由 Event-Based Sequence Generator、Set Attribute、Single Server 和 FIFO Queue 四个模块实现, 分别执行弧长的生成、将弧长赋值给任务实体、工序按弧长时间开展(Server 的服务时间即为弧长)和结束该工序后的等待等功能, 从 FIFO Queue 的端口 #n 输出的信号经过处理可获得工序 $i-j$ 的最早完成时间 $t_{EF}(i, j)$ 和等待进入下一节点的时间, 该等待时间即为局部时差 FF_{i-j} 。而在解析分析中 $t_{EF}(i, j)$ 要用公式(3)计算, $FF_{i,j}$ 则要用公式(4)计算。

$$t_{EF}(i, j) = t_E(i) + d(i, j) \quad (3)$$

$$FF_{i,j} = t_E(j) - t_E(i) - d(i, j) \quad (4)$$

式中, $d(i, j)$ 为弧线 $i-j$ 的长度。

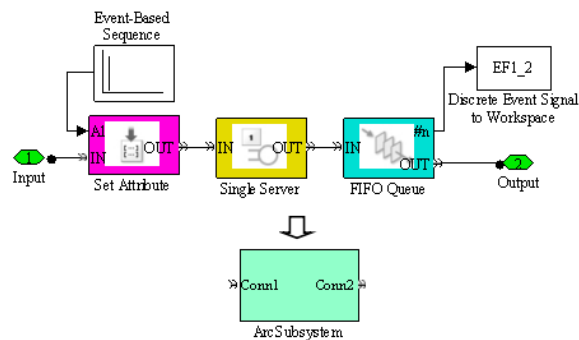


图 3 弧线的建模

2.3 逆向网络分析

通过前面的分析可知, 基于 DES 仿真获取 $t_E(i)$ 、 $t_{ES}(i, j)$ 、 $t_{EF}(i, j)$ 、 FF_{i-j} 等与网络前馈运算有关的时间参数非常方便, 但由于 DES 仿真是正向运行的, 要获取与网络反馈运算有关的时间参数, 如节点最迟发生时间 $t_L(i)$, 工序最晚必须开始时间 $t_{LS}(i, j)$ 、总时差 TF_{i-j} 、相干时差 IF_{i-j} 、独立时差 DF_{ij} 等, 就只能通过繁复的后向递推计算获得。

如果对网络进行逆向建模(图 1 的逆向网络见图 4), 并对逆向网络进行正向运行, 则有:

$$t'_E(n) = 0$$

$$t'_E(i) = \max\{t'_E(k_r) + d(k_r, i)\}, \quad k_r = k_1, k_2, \dots, k_m \quad (5)$$

其中, $t'_E(i)$ 为运行逆向网络获取的节点最早发生时间, 且有 $t_L(1) = t'_E(n) = 0$, $t_L(n) = t'_E(1) = \lambda$ (λ 为网络长度, 即任务的实际工期)。

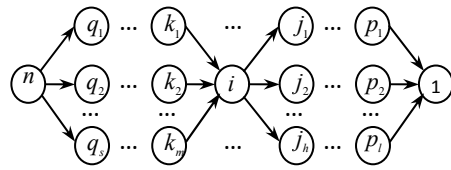


图 4 逆向网络

可以证明, 节点 i 在正向网络中的最迟必须发生时间 $t_L(i)$ 与其在逆向网络中的最早可以发生时间 $t'_E(i)$ 之间存在以下关系:

$$t_L(i) = \lambda - t'_E(i) \quad (6)$$

显然, $t_L(n) = \lambda - t'_E(n)$ 和 $t_L(1) = \lambda - t'_E(1)$ 成立, 故式(7)也成立, 并可推出式(8)和(9)成立。

$$t_L(n-1) = \min\{t_L(n) - d(n-1, n)\}$$

$$= \lambda - \max\{0 + d(n-1, n)\}$$

$$= \lambda - \max\{t'_E(n) + d(n-1, n)\}$$

$$= \lambda - t'_E(n-1) \quad (7)$$

$$t_L(n-2) = \min\{t_L(j) - d(n-2, j)\}$$

$$= \min\{\lambda - t'_E(j) - d(n-2, j)\}$$

$$= \lambda - \max\{t'_E(j) + d(n-2, j)\}$$

$$= \lambda - t'_E(n-2)$$

$$a_{n-2,j} \in A_{n-2}^{post} \quad (8)$$

$$t_L(i) = \min\{t_L(k_r) - d(i, k_r)\},$$

$$= \min\{\lambda - t'_E(k_r) - d(i, k_r)\}$$

$$= \lambda - \max\{t'_E(k_r) + d(i, k_r)\}$$

$$= \lambda - t'_E(i)$$

$$a_{i,k_r} \in A_i^{post} \quad (9)$$

式中, A_i^{post} 为节点 i 的后续弧线集合。

显然, 对于规定工期 $T > \lambda$ 的情况, 该结论同样成立。

基于上述思路, 在不改变弧线子系统基本结构, 仅调换其输入、输出端口数量的基础上建立逆向网络非常方便, 而通过逆向网络正向运行获取正向网络仿真无法获取的时间参数变得简单且可行。

3 实例分析

3.1 网络实例

以图 5 所示的 AoA(Activity on Arc)网络为例, 网络中的工序持续时间服从不同的分布类型(详见表 1), 且任务没有规定工期。

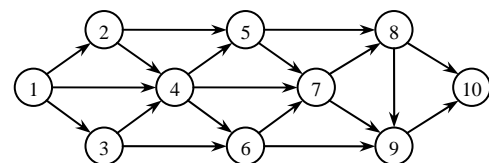


图 5 网络实例

3.2 系统模型的建立及仿真

按照前述思路建立该网络的仿真模型,以逆向网络(图 6)为例,它由基本的节点子系统(图 2)和弧线子系统(图 3)组成,正向网络与其类似。两个网络被分别封装于 ForwardNetwork 子系统和 BackwardNetwork 子系统中。

系统仿真模型如图 7,它在 ForwardNetwork 和 BackwardNetwork 两个子系统基础上增加了任务实体生成器 Entity Generator、路径管理模块 Replicate 和 Entity Combiner 等。在与 ForwardNetwork 并行的路径上增加 FIFO Queue,并开启其信号端口#d 以获取任务总的持续时间。

基于上述模型,共进行 10^5 次仿真。其中,Entity Generator 生成任务实体的间隔时间为 200(远大于任务持续时间),总仿真时间为 2×10^7 。仿真服务器选择 Variable-step 类型中的 Discrete 服务器。

根据仿真结果,可对网络做如下分析:

1. 节点时间参数的概率特征

节点 i 的 $t_E(i)$ 和 $t_L(i)$ 的累计概率曲线如图 9,其相关统计

特征参数,包括最大值、最小值、均值、方差及分位数等见表 2。

对于图 9,需要特别说明的是:在没有规定工期的条件下,节点 1 的 $t_E(i)$ 和 $t_L(i)$ 都为 0,故在图中没有绘出。该图同时还包含了以下信息:

(1) 由于网络没有规定工期,任务实际持续时间,即网络终点(节点 10)的发生时间即为工期,因此图(h)同时也是网络工期的累计概率曲线;

(2) 节点 10 位于关键路径上,没有机动时间,因此其 $t_E(10)$ 和 $t_L(10)$ 的累计概率曲线应当重合,图 9(h)中两条曲线重合,证明了仿真结果的可信性;

(3) 可从 $t_E(i)$ 的累计概率曲线 l_E 和 $t_L(i)$ 的累计概率曲线 l_L 所包围区域的大小初步判断节点的关键程度。显然,节点 10 为网络的终点,为关键节点,该区域面积为 0;节点 7(如图(e))和节点 8(如图(f))的关键度也较高,该区域面积非常小,应关注其按时完成;节点 2 和节点 3 的 l_E 和 l_L 所包围的区域面积较大,具有较小的关键度。

表 1 工序持续时间分布类型及特征参数

序号	工序	分布类型	特征参数
1	1-2	Normal	$\mu=11.38; \sigma=2.19$
2	1-3	Exponential	$\lambda=2.63$; 偏移常量: $c=10.20$
3	1-4	Beta	尺寸参数: $a=15.68, b=23.56$; 形状参数: $\gamma=2.85, \eta=3.51$
4	2-4	Beta	尺寸参数: $a=8.40, b=19.66$; 形状参数: $\gamma=4.19, \eta=3.13$
5	2-5	Gamma	形状参数: $a=4.95$; 尺寸参数: $b=0.22$; 偏移常量: $c=15.66$
6	3-4	Weibull	尺寸参数: $a=2.94$; 形状参数: $b=4.05$; 位置参数: $c=8.80$
7	3-6	Beta	尺寸参数: $a=19.17, b=29.20$; 形状参数: $\gamma=2.11, \eta=2.04$
8	4-5	Exponential	$\lambda=3.35$; 偏移常量: $c=6.30$
9	4-6	Normal	$\mu=11.68, \sigma=1.54$
10	4-7	Beta	尺寸参数: $a=12.93, b=23.77$; 形状参数: $\gamma=1.76, \eta=2.99$
11	5-7	Weibull	尺寸参数: $a=2.75$; 形状参数: $b=2.53$; 位置参数: $c=10.72$
12	5-8	Beta	尺寸参数: $a=3.26, b=5.63$; 形状参数: $\gamma=2.79, \eta=2.53$
13	6-7	Gamma	形状参数: $a=1.75$; 尺寸参数: $b=1.43$; 偏移常量: $c=5.35$
14	6-9	Exponential	$\lambda=2.59$; 偏移常量: $c=5.36$
15	7-8	Gamma	形状参数: $a=2.02$; 尺寸参数: $b=1.12$; 偏移常量: $c=4.25$
16	7-9	Beta	尺寸参数: $a=5.88, b=15.74$; 形状参数: $\gamma=2.59, \eta=3.02$
17	8-9	Beta	尺寸参数: $a=4.76, b=6.52$; 形状参数: $\gamma=2.36, \eta=1.97$
18	8-10	Exponential	$\lambda=3.78$; 偏移常量: $c=6.15$
19	9-10	Normal	$\mu=3.67, \sigma=0.74$

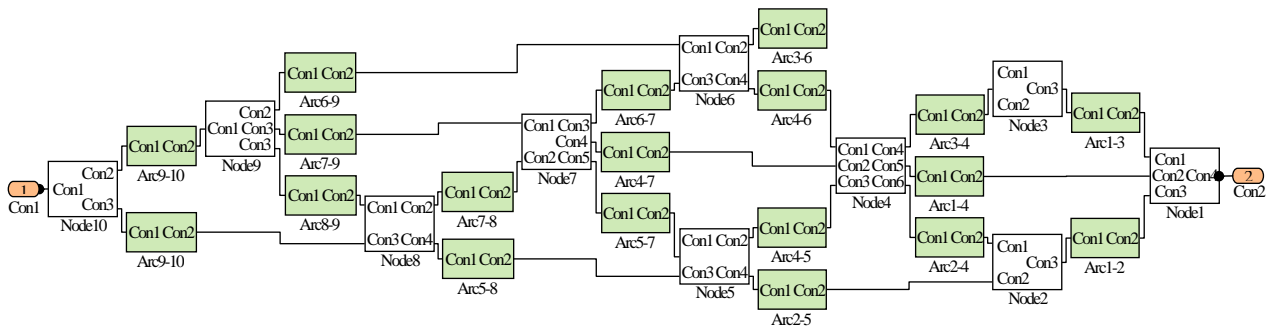


图 6 逆向网络子系统

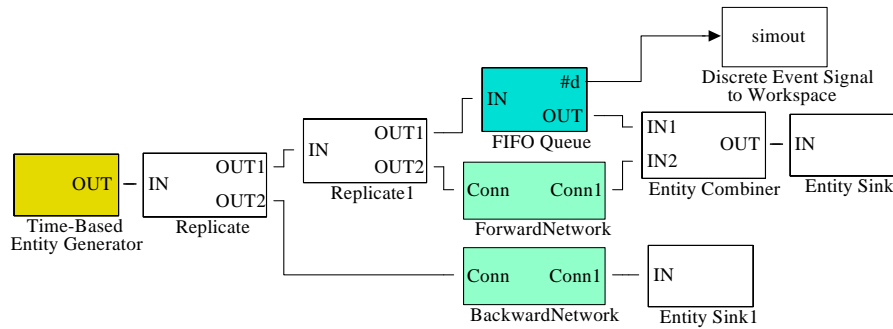


图 7 系统仿真模型仿真结果分析

2. 节点的关键度指标

关键节点即其最早可以开始时间 $t_E(i)$ 与最迟必须开始时间 $t_L(i)$ 重合的节点, 以该节点为起点的弧线没有局部时差 FF_{i-j} 。关键节点的判断标准为:

$$t_E(i) = t_L(i) \quad (10)$$

节点的关键度 NCI_i 即节点 i 成为关键节点的概率, 用式(11)表示, 其估计见式(12)。

$$NCI_i = P(t_E(i) - t_L(i) = 0) \quad (11)$$

$$NCI_i^* = \frac{n_c(i)}{N} \quad (12)$$

其中, $n_c(i)$ 为节点 i 成为关键节点的次数, N 为仿真总次数。

示例网络中各节点的关键度及其排序见图 8。

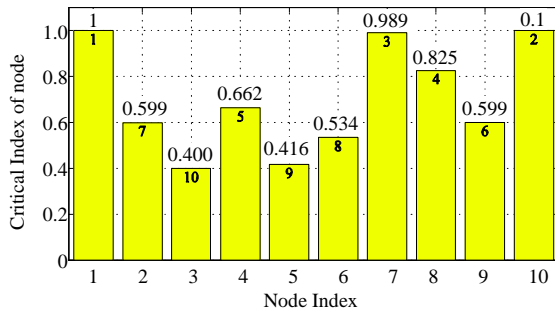


图 8 节点的关键度及其排序

3. 关键弧线的判断及其关键度

关键路径是指网络源点和终点间最长的路径, 位于关键路径上的弧线即为关键弧线^[18]。关键弧线都不具有了机动时间, 必须按时完成。对于关键弧线的判断对于改善项目工期管理, 查找影响任务完成的关键环节具有重要意义。

根据 Elmaghraby S.E. 的结论^[15], 当弧线 $i-j$ 的四种时差, 即总时差 TF_{i-j} 、相干时差 IF_{i-j} 、独立时差 DF_{i-j} 和局部时差 FF_{i-j} 为 0 时, 就能判断其为关键弧线。其中, FF_{i-j}

可以在正向网络仿真中直接获取, 而其他三种时差都要基于 $t_L(i)$ 用式(13)-(15)计算。

$$TF_{i-j} = t_L(j) - t_E(i) - d(i, j) \quad (13)$$

$$IF_{i-j} = t_L(j) - t_E(j) \quad (14)$$

$$DF_{i-j} = \max(0, t_E(j) - t_L(i) - d_{i-j}) \quad (15)$$

弧线关键度 ACI_{i-j} 的估计为:

$$ACI_{i-j}^* = \frac{n_c(a_{ij})}{N} \quad (16)$$

其中, $n_c(a_{ij})$ 为弧线 $i-j$ 成为关键弧线的次数, N 为仿真总次数。由此计算出的弧线关键度指标 ACI_{i-j} 及其关键度排序见图 10。

有关网络的更丰富的信息, 如路径、弧线等的重要度、相关度指标^[15]等都要基于仿真 $t_E(i)$ 和 $t_L(i)$ 计算获得, 用 MATLAB, 尤其是 Statistics Toolbox 的高级函数直接或编写简单的 M 文件就可以获取, 在此不再详细叙述。

4 结论

本文基于 DES 仿真的思想, 提出了在分析 PERT 网络时, 采用正向网络与逆向网络仿真相结合的方式获取节点时间参数, 尤其是节点最迟发生时间的思路, 解决了以往 PERT 网络 DES 仿真中难以直接获取该参数的问题, 为进一步深入分析网络流程中的各项信息特性奠定了数据基础。

同时, SimEvents 是 MATLAB 中新增的离散事件仿真平台, 国内有关其应用的文献非常少, 本文探索性地地将 SimEvents 运用于流程网络的仿真, 分析了 AoA 型 PERT 网络的节点、弧线、网络乃至仿真模型的建模, 并以实例

展示了其建模简单、直观、子系统可复用等特点。同时, MATLAB 强大的分析与图形显示能力也使得分析者可以通过对仿真结果的分析获得流程网络, 尤其是大型、复杂、多层次网络中更为详细的细节和更为丰富的时间信息, 以增强管理者对于网络运作的控制和管理能力。

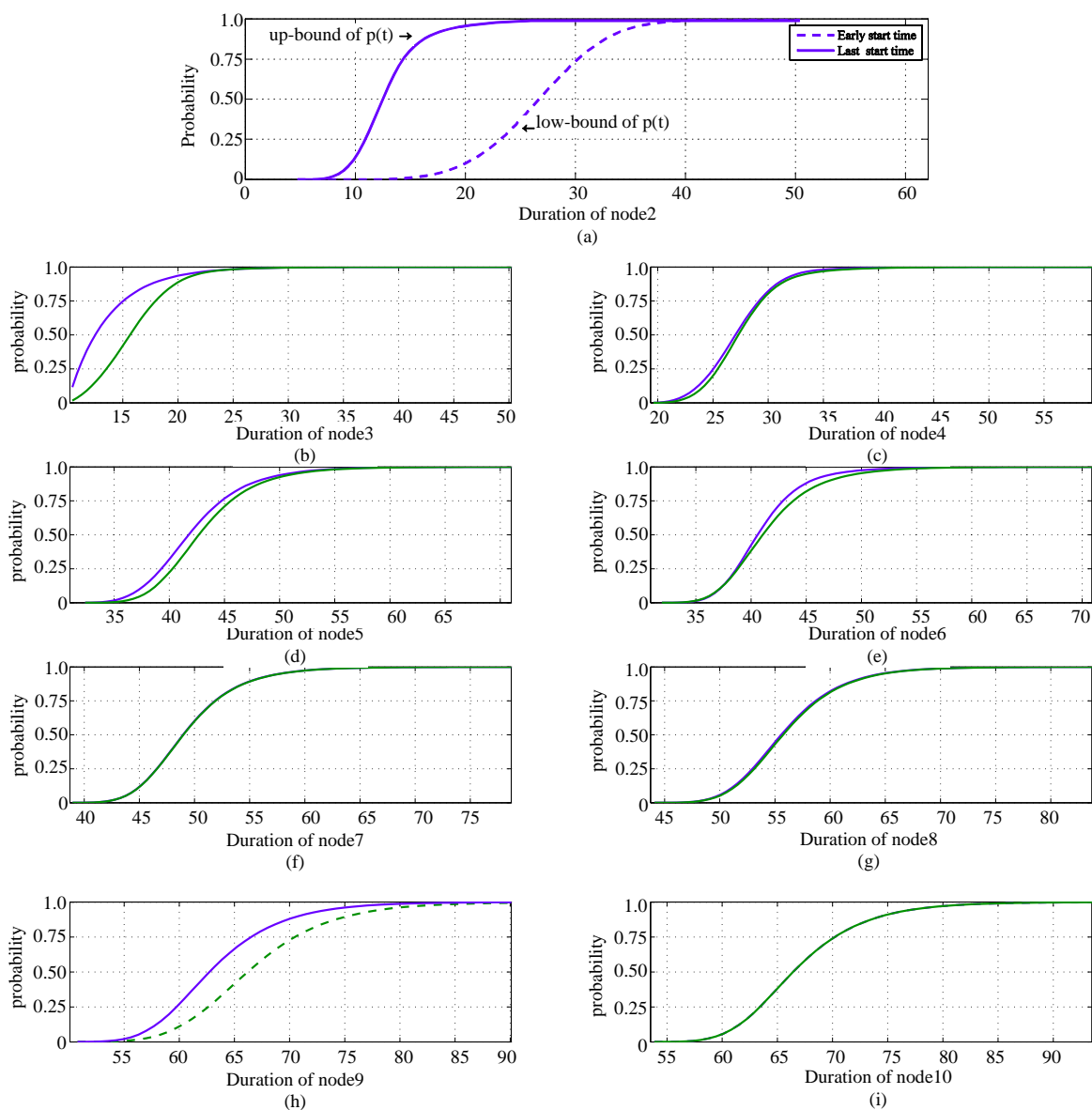


图 2 节点 $t_E(i)$ 和累 $t_L(i)$ 的计概率曲线

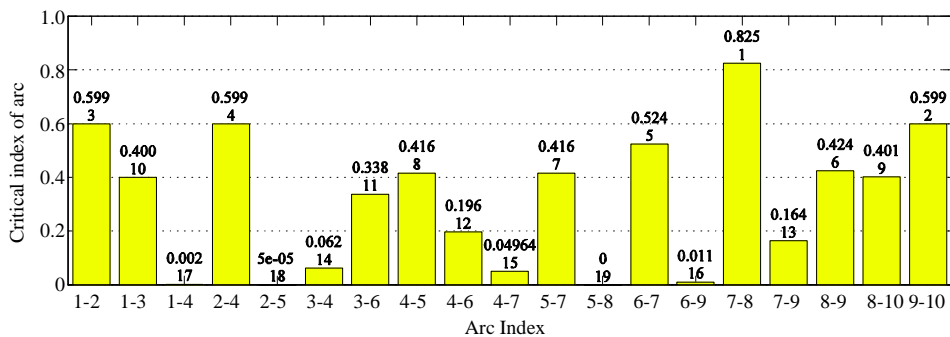


图 10 弧线的关键度及其排序

<http://www.china-simulation.com>

表 2 节点 $t_E(i)$ 和 $t_L(i)$ 的统计特征值

节点	mean		std		min		percentile				max					
							50		75		90		95			
	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$	$t_E(i)$	$t_L(i)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	11.385	13.060	2.185	3.322	2.077	4.520	11.384	12.554	12.860	14.375	14.168	16.822	14.973	19.185	21.241	49.859
3	13.838	16.212	3.657	3.488	10.200	10.200	12.715	15.862	15.249	18.177	18.590	20.483	21.151	22.129	53.668	53.668
4	27.068	27.906	3.165	3.421	19.337	19.383	26.846	27.524	28.887	29.607	30.847	31.852	32.208	33.743	63.406	65.637
5	36.729	38.562	4.630	4.425	25.989	27.133	36.080	37.915	39.123	40.825	42.648	44.201	45.288	46.719	75.660	75.660
6	40.344	41.973	3.582	4.273	30.886	31.676	39.834	41.286	42.085	44.062	44.629	47.380	46.682	49.924	77.666	79.511
7	49.842	49.878	4.406	4.425	38.702	38.702	49.195	49.223	52.099	52.140	55.467	55.528	57.946	58.026	86.897	86.897
8	56.351	56.603	4.681	4.683	43.722	43.839	55.722	55.983	58.848	59.094	62.381	62.632	64.845	65.093	93.980	93.980
9	62.446	63.938	4.687	5.531	50.084	50.432	61.834	63.072	64.944	66.842	68.454	71.142	70.939	74.257	100.394	119.408
10	67.609	67.609	5.543	5.543	53.502	53.502	66.764	66.764	70.549	70.549	74.800	74.800	77.884	77.884	123.180	123.180

参考文献:

- [1] 安德森 D R, 斯威尼 D J, 威廉斯 T A. 数据、模型与决策——管理科学篇[M]. (第 11 版), 侯文华, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2009: 256-298.
- [2] Davis R. Teaching Project Simulation in Excel Using PERT-Beta Distributions [J]. INFORMS Transactions on Education (S1532-0545), 2008, 8(3): 139-148.
- [3] Schonberger R J. Why Projects are "Always" Late: A Rationale Based on Manual Simulation of a PERT/CPM Network [J]. Interfaces (S 0092-2102), 1981, 33(7): 66-70.
- [4] Kamburowski J. Normally Distributed Activity Durations in PERT Networks [J]. Journal of the Operational Research Society (S0160-5682), 1985, 36(11): 1051-1057.
- [5] Mohan S, Gopalakrishnan M, Balasubramanian H, et al. A Lognormal Approximation of Activity Duration in PERT Using Two Time Estimates [J]. Journal of the Operational Research Society (S0160-5682), 2007, 43(58): 827-831.
- [6] Hagstrom J N. Computing the Probability Distribution of Project Duration in a PERT Network [J]. Networks (S1097-0037), 1990, 20(2): 231-244.
- [7] Abdelkader Y H. Evaluating Project Completion Times When Activity Times are Weibull Distributed [J]. European Journal of Operational Research (S0377-2217), 2004, 157(3): 704-715.
- [8] Abdelkader Y H. Adjustment of The Moments of the Project Completion Times When Activity Times are Exponentially Distributed [J]. Annals of Operations Research (S0254-5330), 2010, 181(1): 503-514.
- [9] Abdelkader Y H. Erlang Distributed Activity Times in Stochastic Activity Networks [J]. KYBERNETIKA (S0023-5954), 2003, 39(3): 347-358.
- [10] Trietsch D, Mazmanyan L, Gevorgyan L, et al. Modeling Activity Times by the Parkinson Distribution with a Lognormal Core: Theory and Validation [J]. European Journal of Operational Research (S0377-2217), 2011, 28(6): 678-689.
- [11] Azaron A, Fatemi Ghomi S M T. Lower Bound for the Mean Project Completion Time in Dynamic PERT Networks [J]. European Journal of Operational Research (S0377-2217), 2008, 186(1): 120-127.
- [12] Liu J S. Monte Carlo Strategies in Scientific Computing [M]. Germany: Springer, 2011.
- [13] Van Slyke R M. Monte Carlo Methods and the PERT Problem [J]. Operations Research (S0030-364X), 1963, 13(5): 839-860.
- [14] Saliby E. Descriptive sampling: A Better Approach to Monte Carlo Simulation [J]. Journal of the Operational Research Society (S0160-5682), 1990, 25(8): 1133-1142.
- [15] Elmaghraby S E. On Criticality and Sensitivity in Activity Networks [J]. European Journal of Operational Research (S0377-2217), 2000, 127(2): 220-238.
- [16] Kennedy K, Thrall R. Planet: A Simulation Approach to PERT [J]. Computers & Operations Research (S0305-0548), 1976, 3(4): 313-325.
- [17] Badiru A B. A Simulation Approach to PERT Network Analysis [J]. Simulation (S0037-5497), 1991, 57(4): 245-255.
- [18] Elmaghraby S E. On Criticality and Sensitivity in Activity Networks [J]. European Journal of Operational Research (S0377-2217), 2000, 127(2): 220-238.