

**จ๊อบเดซีอย่างง่ายสำหรับเซอร์เวย์หน้าใส**  
**Easy Geodesy for Na-sai Survey Engineer**

**เทพชัย ศรีน้อย**

**วิศวกรรมสำรวจ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

**2565**

## คำนำ

จีออเดซีสำหรับเซอร์เวย์หน้าใส เป็นเอกสารรวบรวมความรู้ที่หลงเหลือมาจากการเรียนวิชา 2108371 Global Geodesy ปีการศึกษา 2563 สอนโดย รศ. ดร. ไพศาล สันติธรรมนนท์ เป็นวิชาที่ยากที่สุดในการเรียนวิชาภาคระดับปริญญาตรีตลอดสี่ปี เป็นวิชาพื้นฐานการทำมาหากินสาขาวิศวกรรมสำรวจ รายละเอียดว่าด้วยการบรรยายลักษณะ รูปร่าง ขนาด และการวางตัวของโลก และสนามความโน้มถ่วงภายนอกของโลก เป้าหมายหลักคือเข้าใจว่าค่าพิกัดทางราบและทางดิ่งเป็นอย่างไร

เนื้อหาวิชานี้มีความยากเต็มไปด้วยคณิตศาสตร์เรขาคณิตสามมิติทั้งทรงกลมและทรงรี การคำนวณเมทริกซ์ที่ยาก ฟังก์ชันของสนามความโน้มถ่วงที่ลึกกว่าปกติ การคำนวณสุดซับซ้อนที่จำเป็นต้องเขียนโปรแกรมให้เป็น ทั้ง Geographiclib หรือ python ทำให้วิชานี้ขึ้นชื่อได้ว่ายากที่สุด ในส่วนของเนื้อหาการเรียนที่เยอะ และดูไม่ติดต่อกัน เป็นที่มาของเอกสารฉบับนี้ที่พยายามเล่าเรื่องให้ประติดประต่อให้มากขึ้น มาจากการช่วยทบทวนบทเรียนกับเพื่อนและน้อง

เอกสารนี้ถือได้ว่าเป็นการบันทึกความรู้เท่าที่มีของนิสิตระดับปริญญาตรี ซึ่งมีที่ผิดอย่างแน่นอน ผู้อ่านอย่าเชื่อไปทั้งหมด โปรดศึกษาค้นคว้าจากแหล่งอื่นเพิ่มเติม เพื่อช่วยยืนยันว่าที่พิมพ์ไปผิดจริง มโน นิ่งเหียน หรือถูกต้องเพียงใด ทั้งนี้เอกสารนี้จะเกิดไม่ได้ถ้าไม่ได้รับการประสิทธิ์ประสาทวิชาจากอาจารย์ผู้เป็นที่พึ่งทางปัญญาของผู้เขียน สุดท้ายนี้ขอใช้เอกสารนี้ขอบคุณอาจารย์ทุกท่านในภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โดยเฉพาะ รศ.ดร.ไพศาล สันติธรรมนนท์ ผู้เป็นเดอะแบกทางวิชาการของผมในวิชานี้และวิชาอื่น อ.ดร.ชัยยุทธ เจริญผล ผู้เป็นที่ปรึกษาทางวิชาการของผมตลอดการเรียนที่แน่ๆก็เป็นคนช่วยเติมเต็มความรู้ส่วนนี้ให้แน่นขึ้น ว่าที่ อ. ดร. ธีรวัฒน์ บรรณกุลพิพัฒน์ พี่ชายกองเชียร์คนสำคัญของการเรียนวิศวกรรมสำรวจของผู้เขียน และขอบคุณเพื่อนและน้องทุกคนที่เป็นหนูทดลองทางวิชาการของผู้เขียนตลอดสี่ปีที่ผ่านมา

ถือเสียว่าเป็นคือผลผลิตของการศึกษาของเด็กคนหนึ่งที่นั่งหน้าห้อง ดูโชว์ทรงกลมहरรรษา กับวงรีมหาประลัย และไล่ตามเขียน command line ให้ทันอาจารย์ผู้สอน จนเขียนเอกสารนี้ออกมาได้

เทพชัย ศรีน้อย

วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมสำรวจ

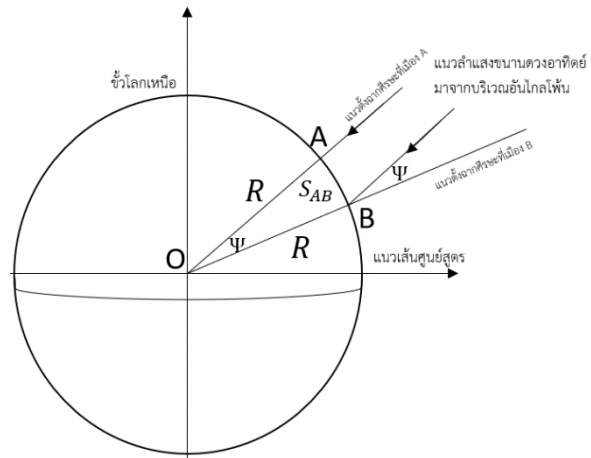
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2565

### 1.1 รัศมีและความยาวบนผิวทรงกลมโลก (Earth's Radius and Length on the earth)

แนวคิดเกี่ยวกับสัณฐานของโลกมีการพัฒนาจากความเชื่อเรื่องโลกแบนมาเป็นแนวคิดที่ว่าโลกเป็นทรงกลม พารามิเตอร์ที่สำคัญเกี่ยวกับทรงกลมโลกคือรัศมีของทรงกลมโลก แนวคิดการคำนวณรัศมีของโลกที่ได้รับการยอมรับเป็นแนวคิดของปราชญ์ที่ชื่อเอราตอสเทนิส ได้มาจากการวัดความยาวเงาของเสาในวันอุตรายัน (Summer Solstice) ซึ่งเป็นวันที่ตำแหน่งดวงอาทิตย์ปรากฏอยู่เหนือศีรษะที่ตำแหน่งละติจูดประมาณ 23.5 องศาเหนือ

สมมติว่ามีเมือง A และ B โดยเมือง A อยู่ตำแหน่งที่ดวงอาทิตย์อยู่กลางศีรษะพอดีในตอนเที่ยงวันกับเมือง B อยู่ใต้เมือง A วัดระยะทางระหว่างสองเมืองได้  $S_{AB}$  ระยะทางนี้ถือว่าเป็นความยาวบนผิวโลกระหว่างสองเมือง หากปักเสาที่สองเมืองดังกล่าวจะพบว่าตอนเที่ยงวันจะไม่เกิดเงาของเสาที่เมือง A แต่จะเกิดเงาของเสาที่เมือง B ความยาวของเงาและความยาวของเสาสามารถคำนวณมุมตั้งบน (Zenith Angle) ของดวงอาทิตย์  $\Psi$  ได้ มุมนี้ถือว่าเป็นมุมที่รองรับส่วนโค้งผิวทรงกลมโลกระหว่างสองเมือง ท้ายสุด เราสามารถคำนวณหาค่ารัศมีของโลกได้จากสมการนี้



$$R = \frac{S_{AB}}{\Psi \text{ (rad)}}$$

วิชานี้ใช้ค่ารัศมีของโลกโดยเฉลี่ยเป็น 6371 km

เมื่อก้าวถึงระยะทางเชิงมุมบนโลก เราสามารถประมาณระยะทางเชิงเส้นบนโลกได้

กรณีระยะทางเชิงมุม 1 องศา

$$S_{AB} = (6371 \text{ km}) \left( 1 \times \frac{\pi}{180} \right) \approx 111 \text{ km}$$

ระยะทางเชิงมุม 1 ลิปดา (ตระหนักว่ามุม 1 องศา คือ 60 ลิปดา)

$$S_{AB} = (6371 \text{ km}) \left( \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \right) \approx 1.8 \text{ km}$$

ระยะทางเชิงมุม 1 ฟิลิปดา (ตระหนักว่ามุม 1 องศา คือ 3600 ฟิลิปดา)

$$S_{AB} = (6371 \text{ km}) \left( \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180} \right) \approx 31 \text{ m}$$

## 1.2 ระบบพิกัดบนทรงกลมโลก (Coordinate System on Earth's Sphere)

ตำแหน่งบนโลก (ทรงกลมโลก) สามารถระบุได้ด้วยค่ามุมละติจูด มุมลองจิจูด และความสูงเหนือทรงกลมโลก เป็นระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geography Coordinate) ซึ่งเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วสามมิติ นอกจากนี้ยังสามารถระบุเป็นค่าพิกัด X, Y, Z เมื่อแกนทั้งสามวางตัวโดยมีจุดกำเนิดอยู่ที่ใจกลางโลก เป็นระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate) แบบ Earth-Center Earth-Fixed (ECEF) เป็นระบบพิกัดเชิงเส้นสามมิติ โดยสมการแปลงระหว่างพิกัดสองระบบเป็นไปดังนี้

$$X = (R + h)\cos\phi\cos\lambda$$

$$Y = (R + h)\cos\phi\sin\lambda$$

$$Z = (R + h)\sin\phi$$

โดยที่  $\phi$  เป็นมุมละติจูด (Latitude) เป็นมุมที่วัด

จากระนาบเส้นศูนย์สูตร (Equatorial Plane)

ไปถึงแนวระนาบเส้นขนาน (Parallel Plane)

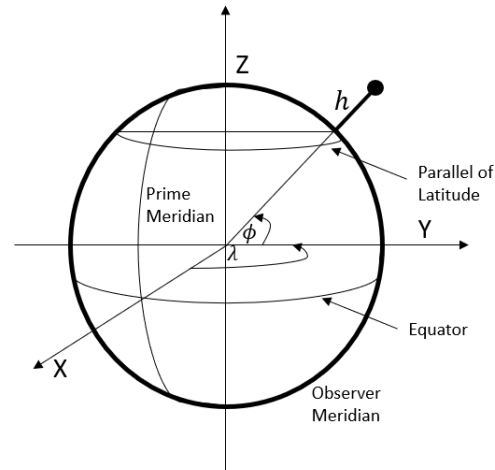
$$\phi = \begin{cases} 0^\circ \dots 90^\circ & \text{สำหรับซีกโลกเหนือ} \\ -90^\circ \dots 0^\circ & \text{สำหรับซีกโลกใต้} \end{cases}$$

ต่อมา  $\lambda$  เป็นมุมลองจิจูด (Longitude) เป็นมุมที่วัดจาก

แนวระนาบเมริเดียนหลัก (Prime Meridian) ไปยังระนาบเมริเดียนของผู้สังเกต (Observer Meridian)

$$\lambda = \begin{cases} 0^\circ \dots 180^\circ & \text{สำหรับทางขวาของเมริเดียนหลัก ต่อท้ายด้วยองศาตะวันออก} \\ -180^\circ \dots 0^\circ & \text{สำหรับทางซ้ายของเมริเดียนหลัก มักบอกค่าบวก แล้วต่อท้ายด้วยองศาตะวันตก} \end{cases}$$

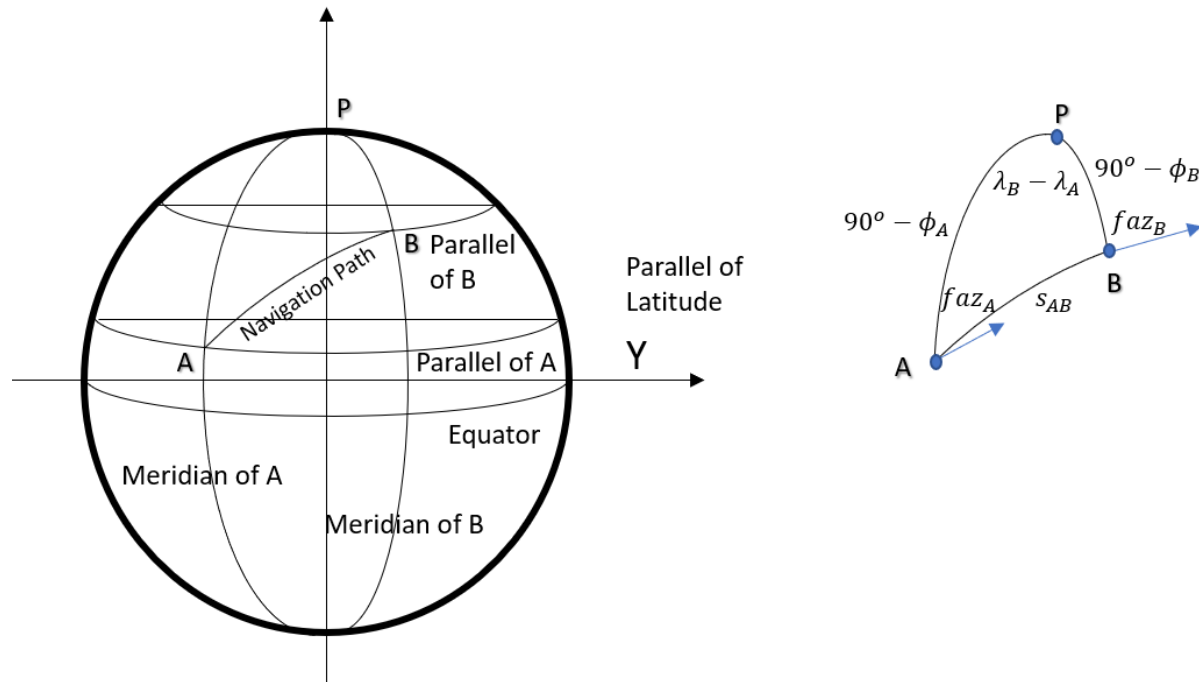
ตัวแปร  $h$  เป็นความสูงเหนือทรงกลม มีค่าเป็นศูนย์บนผิวทรงกลม วัดขึ้นไปเป็นบวก และ  $R$  เป็นรัศมีโลก



เพื่อทำความเข้าใจกับทรงกลมโลกและระบบพิกัดให้มากขึ้น เราจะศึกษาเส้นทางการเคลื่อนที่ของเครื่องบินบนผิวทรงกลมโลก (ความสูงเหนือทรงกลมเป็นศูนย์) โดยสมมติว่าเครื่องบินวิ่งบนเส้นทางที่สั้นที่สุด นั่นคือส่วนโค้งวงกลมใหญ่ (Great Circle) เส้นทางนั้นมีชื่อเรียกว่า Orthodrome (ไม่ใช่ Loxodrome ซึ่งเป็นเส้นคงมุมแอสิมัท ซึ่งได้รับความนิยมในการเดินเรือ) กรณีศึกษาดังต่อไปนี้เรียกว่าปัญหาทางจีโอเดสิก (Geodesic Problem) มีสองรูปแบบปัญหาคือ Initial Value Problem และ Boundaries Value Problem ซึ่งแต่ละแบบมีข้อมูลเริ่มต้นและคำตอบที่ต้องการที่ต่างกัน ดังนี้

(1) Boundaries Value Problem (BVP) เป็นปัญหาที่เราอยากทราบว่าตำแหน่งปลายทางของเครื่องบินว่าละติจูด  $\phi_B$  และลองจิจูด  $\lambda_B$  อยู่ที่ใด เมื่อเริ่มต้นเครื่องบินอยู่ที่ตำแหน่งพิกัดละติจูด  $\phi_A$  ลองจิจูด  $\lambda_A$  ระยะทางการบิน  $S_{AB}$  และมุมภาคทิศแบบ forward azimuth  $faz_A$

สมมติว่าเครื่องบินลำหนึ่งเดินทางจากสนามบิน A ไปยังสนามบิน B เราจะแสดงหลักการคำนวณจากปัญหาย้อนหรือค่าขอบ (BVP) ก่อน เพื่อหาระยะทางที่เครื่องบินเคลื่อนที่ตลอดเส้นทางและ forward azimuth ที่สนามบิน A ตามด้วยปัญหาตรง (IVP) เพื่อหาว่าตำแหน่งของเครื่องบินที่ระยะทางหนึ่งจากสนามบิน A



กำหนดตำแหน่งต้นทางพิกัดละติจูด  $\phi_A$  ลองติจูด  $\lambda_A$  และปลายทางละติจูด  $\phi_B$  และลองติจูด  $\lambda_B$   
คำนวณระยะทางเชิงมุมตลอดการบินจาก Law of Cosine

$$\cos s_{AB} = \cos(90^\circ - \phi_A) \cos(90^\circ - \phi_B) + \sin(90^\circ - \phi_A) \sin(90^\circ - \phi_B) \cos(\lambda_B - \lambda_A)$$

คำนวณระยะทางการบินบนผิวทรงกลม

$$S_{AB} = R \cdot s_{AB}(\text{rad})$$

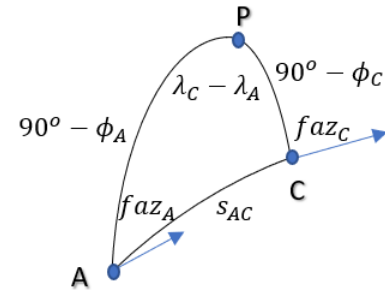
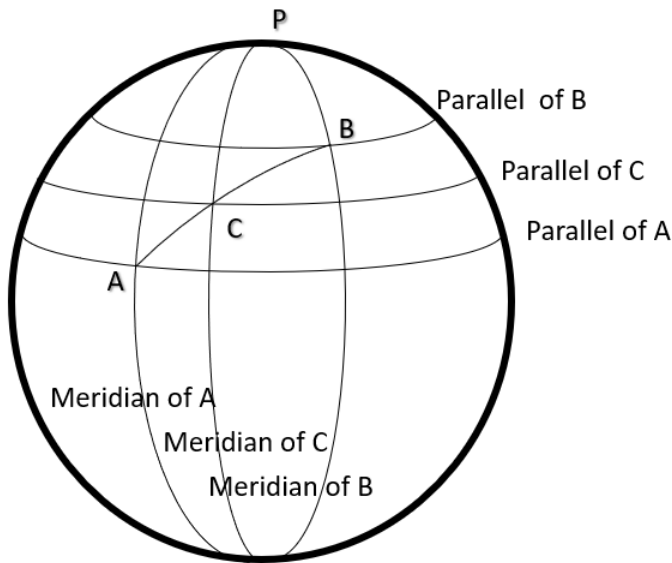
คำนวณ Forward Azimuth ต้นทางและปลายทางจาก Law of Sine

$$\frac{\sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\sin s_{AB}} = \frac{\sin(faz_A)}{\sin(90^\circ - \phi_B)} = \frac{\sin(180^\circ - faz_B)}{\sin(90^\circ - \phi_A)}$$

จับคู่สมการซ้ายสุดกับกลางเพื่อหา forward azimuth ต้นทาง หรือจับกับขวาสุดเพื่อหาของปลายทาง

(2) Initial Values Problem (IVP) เป็นปัญหาที่เราอยากทราบว่าเครื่องบินเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าใด  $S_{AB}$  และมีมุมภาคทิศเริ่มต้นแบบ forward azimuth เท่าใด  $faz_A$  เมื่อกำหนดตำแหน่งต้นทางพิกัดละติจูด  $\phi_A$  ลองติจูด  $\lambda_A$  และปลายทางพิกัดละติจูด  $\phi_B$  และลองติจูด  $\lambda_B$

ตอนนี้เราพอทราบข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับเส้นทาง Navigation Path ของเครื่องบินแล้ว ต่อไปสามารถคำนวณพิกัดระหว่างทางที่สนใจ ละติจูด  $\phi_C$  ลองจิจูด  $\lambda_C$  ได้ เมื่อกำหนดระยะทางจากต้นทาง  $S_{AC}$



คำนวณระยะทางเชิงมุมของระยะทางจากต้นทางถึงตำแหน่งที่สนใจ

$$s_{AC}(\text{rad}) = \frac{S_{AC}}{R}$$

คำนวณละติจูดของตำแหน่งที่สนใจจาก Law of Cosine

$$\cos(90^\circ - \phi_C) = \cos(90^\circ - \phi_A)\cos(s_{AC}) + \sin(90^\circ - \phi_A)\sin(s_{AC})\cos(faz_A)$$

คำนวณลองจิจูดของตำแหน่งที่สนใจจาก Law of Cosine

$$\cos(s_{AC}) = \cos(90^\circ - \phi_A)\cos(90^\circ - \phi_C) + \sin(90^\circ - \phi_A)\sin(90^\circ - \phi_C)\cos(\lambda_C - \lambda_A)$$

และคำนวณ forward azimuth ที่ตำแหน่งที่สนใจจาก Law of Sine

$$\frac{\sin(\lambda_C - \lambda_A)}{\sin s_{AC}} = \frac{\sin(faz_A)}{\sin(90^\circ - \phi_C)} = \frac{\sin(180^\circ - faz_C)}{\sin(90^\circ - \phi_A)}$$

การทำความเข้าใจลักษณะการเดินทางของเครื่องบินนี้จำเป็นต้องวาดภาพทรงกลมโลก เติมปริมาณที่เกี่ยวข้องลงไป แล้วสกัดนำสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (Spherical Triangle) มาเพื่อเข้าสมการทางตรีโกณมิติทรงกลม (Spherical Trigonometry) ตระหนักว่า forward azimuth วัดจากแนวทิศเหนือตามเข็มนาฬิกามาถึงแนวที่สนใจ และเมื่อคำนวณตรีโกณมิติผกผันจากเครื่องคิดเลขต้องประเมินคำตอบที่เหมาะสมด้วย

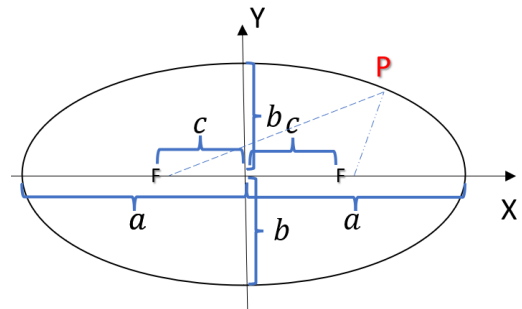
## บทที่ 2

### แบบจำลองทรงรีโลก

#### 2.1 ปริมาณพื้นฐานของวงรี (Fundamental Quantities of Ellipse)

แนวคิดที่ว่าโลกกลมนั้นได้รับความนิยมเป็นอย่างยิ่ง จวบจนเทคโนโลยีการสำรวจรังวัดพัฒนาจนสามารถวัดได้ว่าแท้จริงแล้วโลกเราไม่ได้กลมดิก มีความรีด้วย ทั้งนี้เราจะแนะนำเกี่ยวกับปริมาณที่เกี่ยวข้องกับวงรีก่อน

วงรี (Ellipse) เป็นทางเดินของจุดซึ่งผลรวมระยะห่างจากจุดแต่ละจุดห่างจากจุดตรึงคงที่สองจุด (เรียกว่าจุดโฟกัส Focus) มีค่าคงที่ (ค่าคงที่นี้เรียกความยาวแกนเอกของวงรี (Major Axis Length)



$a$  เป็นความยาวกึ่งแกนเอก (Semi Major Axis Length)

$b$  เป็นความยาวกึ่งแกนโท (Semi Minor Axis Length)

$c$  เป็นความยาวโฟกัส (Focal Length) สมการความสัมพันธ์คือ  $a^2 = b^2 + c^2$

$e$  เป็นค่าความเยื้องศูนย์กลางแบบแรก (First Eccentricity)  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$e'$  เป็นค่าความเยื้องศูนย์กลางแบบสอง (Second Eccentricity)  $e' = \frac{c}{b} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}$

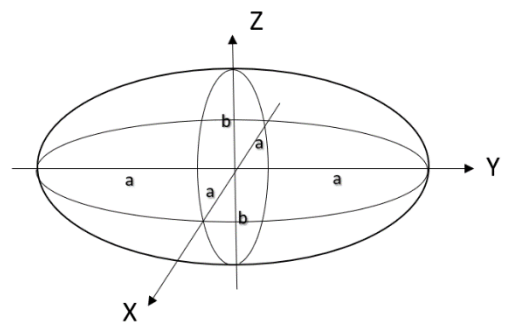
$f$  เป็นค่าความแบน (Flattening) นิยามจาก  $f = \frac{a-b}{a}$  ข้อสังเกตคือ  $e^2 = 2f - f^2$

สมการบรรยายวงรีเมื่อจุดกำเนิด (Origin) อยู่ที่จุดศูนย์กลางวงรี คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

#### 2.2 ทรงรีขั้วยุบของโลก (Oblate Ellipsoid of the Earth)

ความก้ำวหน้าทางเทคโนโลยีกล้องวัดมุมความละเอียดสูงทำให้เกิดโครงการทางวิศวกรรมสำรวจมากมาย หนึ่งในนั้นคือการสำรวจรังวัดรัศมีของโลกที่ตำแหน่งต่างๆบนโลก ทั้งซีกโลกเหนือ ซีกโลกใต้ ทั้งละติจูดต่ำและสูง ผลปรากฏว่า รัศมีโลกไม่ได้มีค่าคงที่ตลอดผิวโลก รัศมีมีค่ามากที่สุดบริเวณศูนย์สูตร ห่างออกไปในแนวเหนือใต้ค่ารัศมีมีค่าน้อยลง จนมีรัศมีมีค่าต่ำสุดบริเวณขั้วโลก บ่งบอกว่าโลกเราน่าจะเป็นทรงรี ไม่น่าใช่ทรงกลม โดยทรงรีโลก (Spheroid) คาดว่ามีลักษณะเป็นทรงรีขั้วยุบ (Oblate Ellipsoid) เสมือนทรงกลมรัศมีเท่าความยาวแกนเอกของโลกโดนบีบเข้าตรงขั้วโลกทั้งสองจนขั้วยุบ ลักษณะดังกล่าวคาดว่ามาจากในผลของการหมุนรอบตัวเองในยุคแรกเริ่มของโลกที่



ยังคงหนีดเหลว ความเร่งหนีศูนย์กลาง (Centrifugal Acceleration) เหยียงมวลสารออกไปชั้่ออกจากรัศมีพื้นผิวโลกบรรยายด้วยคณิตศาสตร์ได้ว่าทรงรีขั้วยุบเป็นผลมาจากการหมุน รอบแกน Z ของวงรีที่มีความยาวกึ่งแกนเอก  $a$  ทับแกน X ความยาวกึ่งแกนโท  $b$  ทับแกน Z สมการพื้นผิวนี้เขียนได้ว่า

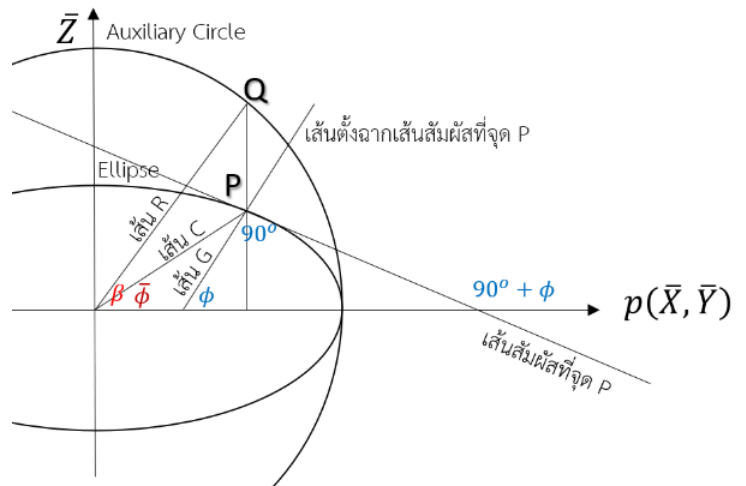
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ภาคตัดขวางในระนาบ XY เป็นวงกลมรัศมีเท่ากับความยาวกึ่งแกนเอก ส่วนในระนาบ YZ และ XZ เป็นวงรี  
 พอเราใช้สัณฐานโลกเป็นทรงรีขั้วยุบ มีประเด็นที่ต้องนิยามกันใหม่คือละติจูดของตำแหน่งบนทรงรี ซึ่งจะมีทั้งแบบ Geodetic, Geocentric และ Reduced Latitude กับรัศมีความโค้งของทรงรีตรงตำแหน่งบนทรงรีซึ่งจะมีเรื่องแนวที่สนใจมาเกี่ยวข้องด้วยทั้งแนว Meridian หรือ Prime Meridian

### 2.3 ละติจูดของทรงรีโลก (Ellipsoidal Latitude)

สมมติว่ามีจุด P อยู่บนผิวทรงรี เริ่มต้นทำการเขียนภาคตัดขวางของทรงรีดังภาพ จากนั้นลากเส้นตั้งฉากผิวที่จุด P ลงไปตัดแกนราบ  $p$  ของภาพ เรียกเส้น  $G$  [เส้นนี้ใช้อธิบายละติจูดแบบแรก], ลากเส้นจากจุด P ลงไปตัดศูนย์กลางโลก เรียกเส้น  $C$  [เส้นนี้ใช้อธิบายละติจูดแบบที่สอง] และสร้างวงกลมช่วย (Auxiliary Circle) รัศมีเท่ากับความยาวกึ่งแกนเอกของโลกครอบวงรีนี้ เลื่อนจุด P ขึ้นไปจนทับวงกลมดังกล่าวเกิดเป็นจุด Q ลากเส้นจากจุด Q ลงไปตัดศูนย์กลาง เรียกเส้น  $R$  [เส้นนี้ใช้อธิบายละติจูดในแบบที่สาม] เราสามารถนิยามละติจูดได้ดังนี้

1. Geodetic Latitude  $\phi$  เป็นมุมระหว่างเส้น  $G$  กับแกนราบ  $p$  เป็นละติจูดที่บอกกันในระบบกำหนดตำแหน่งบนพื้นโลก (GNSS)
2. Geocentric Latitude  $\bar{\phi}$  เป็นมุมระหว่างเส้น  $C$  กับแกนราบ  $p$  คำนวณแปลงได้จาก  $\tan \bar{\phi} = (1 - e^2) \tan \phi$
3. Reduced Latitude  $\beta$  เป็นมุมระหว่างเส้น  $R$  กับแกนราบ  $p$  คำนวณแปลงได้จาก  $\tan \beta = \sqrt{1 - e^2} \tan \phi$





## 2.4 รัศมีความโค้งของทรงรีโลก (Radius Curvature of the Spheroid Earth)

การใช้สัณฐานโลกเป็นทรงรีทำให้รัศมีความโค้งที่บริเวณที่สนใจมีค่าไม่เท่ากันขึ้นกับแนวที่เราสนใจ สามารถระบุได้ในรูปแบบ

1. Radius Curvature in Meridian เป็นรัศมีความโค้งของโลกในแนวเส้นเมริเดียนผู้สังเกต (แนวเหนือ - ใต้) คำนวณได้จากสมการ

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}$$

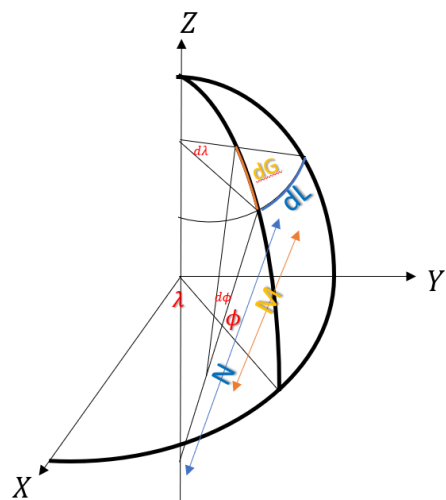
2. Radius Curvature in Prime Vertical เป็นรัศมีความโค้งของโลกในแนวตะวันออก - ตะวันตก คำนวณได้จากสมการนี้

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

3. Gaussian Radius of the Earth เป็นค่าแทนรัศมีของโลกที่บริเวณที่สนใจ คำนวณได้จากสมการนี้

$$R = \sqrt{MN}$$

ข้อสังเกต ที่เส้นศูนย์สูตร  $M_0 = \frac{b^2}{a} N_0 = a$   $R_0 = b$  ส่วนที่ขั้วโลกนั้น  $M_{90} = N_{90} = R_{90} = \frac{a^2}{b}$



## 2.5 ระบบพิกัดบนผิวทรงรี (Spheroidal Surface Coordinate)

สมมติว่าที่เวลาเริ่มต้น หนึ่งพิกัด  $(\phi, \lambda)$  พอเวลาผ่านไป พิกัดของจุดเป็น  $(\phi + \Delta\phi, \lambda + \Delta\lambda)$  เมื่อการเคลื่อนเล็กน้อย เราสามารถบอกได้ว่าพิกัดจุดที่เวลาหลังเคลื่อนไปเทียบกับพิกัดจุดในเวลาก่อนหน้านี้ได้ การเคลื่อนตัวตามแนวเหนือ - ใต้

$$\Delta L = M \cos \phi \Delta \lambda$$

การเคลื่อนตัวตามแนวตะวันออก - ตะวันตก

$$\Delta G = N \Delta \phi$$

การเคลื่อนตัวสุทธิคำนวณได้จาก

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta L)^2 + (\Delta G)^2}$$

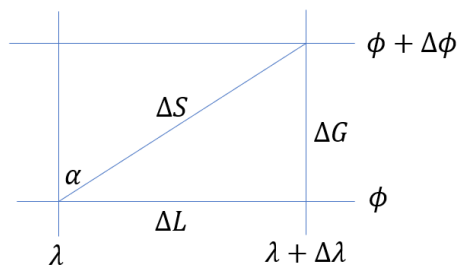
หากคำนวณบนทรงกลม (รัศมี R) Spherical Surface Coordinate

การเคลื่อนตัวสามารถคำนวณได้จาก

$$\Delta L = R \cos \phi \Delta \lambda$$

$$\Delta G = R \Delta \phi$$

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta L)^2 + (\Delta G)^2}$$

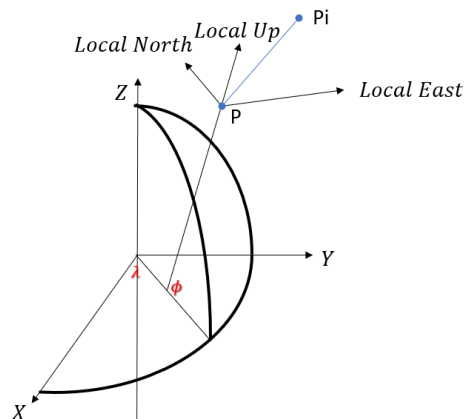


ตระหนักว่าการประมาณการเคลื่อนตัวบนพื้นผิวแบบนี้สามารถใช้ได้เมื่อผลต่างละติจูดและลองจิจูดน้อยมาก เราสามารถใช้ตำแหน่งของพิกัดเริ่มต้นในการคำนวณรัศมีความโค้งได้เลย

## 2.6 ระบบพิกัดท้องถิ่น (Local Coordinate System)

อีกวิธีการหนึ่งในการบอกว่าตำแหน่งที่สองอยู่ห่างจากตำแหน่งที่หนึ่งอย่างไรในท้องถิ่น (ห่างแนวเหนือ-ใต้, ตะวันออก-ตก) แบบที่ละเอียดกว่าเดิมคือการใช้ระบบพิกัดท้องถิ่น เป็นการปรับจากแกน XYZ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ECEF เป็นแกน Local North, Local East และ Local Up ในระบบพิกัดฉากท้องถิ่น สำหรับผู้สังเกตที่จุด P บอกตำแหน่ง  $P_i$  ว่าอยู่ทาง East, North และ Up ไปเท่าใด เริ่มต้นด้วยการนำพิกัด ECEF ของจุด  $P_i$  ลบกับจุด P

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{P_i} - X_P \\ Y_{P_i} - Y_P \\ Z_{P_i} - Z_P \end{pmatrix}$$



คำนวณการพิกัดของจุด  $P_i$  เทียบจุด P ในระบบพิกัดท้องถิ่นได้จากสมการ (ใช้ละติจูดและลองจิจูดจากจุด P คิด)

$$\begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

## 2.7 ระบบพิกัดสามมิติบนทรงรี (Coordinate System on Spheroid)

พิกัดจุดใดๆสามารถบรรยายได้ด้วยระบบพิกัดฉากสามมิติ ECEF (X, Y, Z) และระบบพิกัดเชิงขั้วสามมิติ เรียก Geodetic Coordinate (Latitude, Longitude และ Ellipsoidal Height) จาก Helmert Projection สรุปเป็นหลักการได้ว่า

1. การแปลงจาก Geodetic Coordinate เป็น Cartesian Coordinate

$$\begin{aligned} X &= (N + h)\cos\phi\cos\lambda \\ Y &= (N + h)\cos\phi\sin\lambda \\ Z &= ((1 - e^2)N + h)\sin\phi \end{aligned}$$

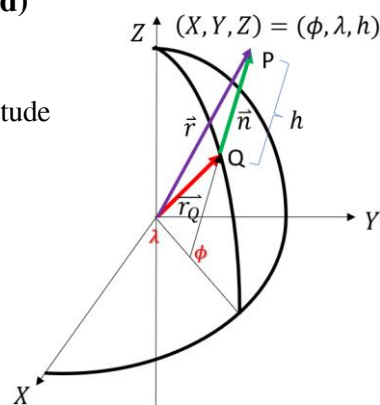
2. การแปลงจาก Cartesian Coordinate เป็น Geodetic Coordinate

คำนวณ  $\phi$  จากวิธี Fixed Point Iteration กับสมการ

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left( 1 - \frac{e^2 N}{N + h} \right)^{-1} \right]$$

จากนั้นคำนวณความสูงเหนือทรงรีและลองจิจูดจากสมการ

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\phi} - N \quad \lambda = \tan^{-1} \frac{Y}{X}$$



อีกวิธีคือการใช้สูตรสมการ Vermeille คำนวณออกมาโดยไม่ต้อง Iteration โดยเลือกสมการสอดคล้องกับพิกัด เงื่อนไขสมการขึ้นกับว่าพิกัดอยู่นอกหรือใน evolute (พื้นผิวสามมิติแบบหนึ่ง) หากอยู่ใน evolute ต้องประเมินอีกว่าอยู่ใน singular disc หรือไม่

### 3.1 กรอบและระบบพิกัดอ้างอิงท้องฟ้าสากล (International Celestial Reference Frame and Coordinate : ICRF and ICRS)

เทคโนโลยีทางจีโอเดซี (Geodesy Technologies) ในปัจจุบันส่วนหนึ่งเพื่อทำการเฝ้าติดตามการวางตัวของโลก (Earth Orientation Parameter) อันเนื่องมาจากความเป็นพลวัตของโลก (Geodynamics) นั่นคือโลกเองไม่ได้อยู่นิ่ง มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา การเฝ้าติดตามการวางตัวดังกล่าวทำให้เราอัปเดตการวางตัวของกรอบพิกัดอ้างอิงได้ทันการเปลี่ยนแปลง ด้วยการพึ่งพาผู้ชมภายนอกโลกด้วยวัตถุทางดาราศาสตร์นอกโลก

สมัยก่อนมีการรังวัดพิกัดดาวฤกษ์จัดทำเป็น Star Catalog ซึ่งมีพิกัดดวงดาวในรูปแบบ Right Ascension และ Declination แล้วใช้ดวงดาวเหล่านั้นรังวัด Altitude และ Azimuth เพื่อคำนวณพิกัด Latitude และ Longitude ของผู้สังเกต ด้วย Spherical Trigonometry แต่ทว่า ดาวฤกษ์ก็ยังไม่ใช่ว่าผู้ชมภายนอกที่เหมาะสมพอถึงแม้ระยะห่างจากโลกจะไกลมากในระดับไม่กี่ปีแสง (ระยะทางที่แสงเดินทางได้ในหนึ่งปี ไกลกว่าระยะห่างไปยังดวงอาทิตย์มาก ดาวฤกษ์ที่ใกล้สุดนอกจากดวงอาทิตย์ห่างจากโลก 4 ปีแสง) แต่พบว่าการเคลื่อนที่จำเพาะ (proper motion) แน่ๆ ในระดับฟิลิปดาต่อปี จึงต้องเปลี่ยนไปใช้ผู้ชมที่ไกลกว่านั้นมากๆ

ปัจจุบันวัตถุดาราศาสตร์ที่ใช้เป็นผู้ชมเฝ้าติดตามการวางตัวของโลกคือควอซาร์ (Quasar : Quasi Stellar Object) เป็นผลมาจากการแผ่พลังงานในย่านคลื่นวิทยุจากแหล่งกำเนิดพลังงานก่อกัมมันต์ของดาราจักร (Active Galactic Center) ซึ่งไกลจากโลกในระดับ พันล้านปีแสง ผลการรังวัดที่ได้นำไปสู่การตั้งกรอบอ้างอิงพิกัดท้องฟ้าสากล (International Celestial Reference Frame : ICRF) โดยพิกัดของควอซาร์เหล่านั้นบันทึกลงโดยระบบพิกัดอ้างอิงพิกัดสากล (International Celestial Reference System : ICRS)

เทคโนโลยีที่ใช้รังวัดควอซาร์เรียกว่า Very Long Baseline Interferometry (VLBI) ใช้กล้องโทรทรรศน์วิทยุสองแห่งห่างกันเป็นระยะเส้นฐานไกลมาก รับสัญญาณคลื่นวิทยุจากควอซาร์มาเพื่อคำนวณพิกัดของควอซาร์ เทคนิคนี้ถือว่ามีกำลังการแยกภาพที่สูงมาก เหมาะสำหรับวัตถุไกลๆ อย่างควอซาร์ หลุมดำ

### 3.2 กรอบและระบบพิกัดอ้างอิงภาคพื้นดินสากล (International Terrestrial Reference Frame and Coordinate : ITRF and ITRS)

การปรับการวางตัวของโลกเป็นผลของการปรับกรอบพิกัดอ้างอิงภาคพื้นดินสากล (International Terrestrial Reference Frame : ITRF) โดยหลักการรังวัดโยยัดจากผู้ชมการวางตัวของโลกบนท้องฟ้า หลักการคำนวณเรียกว่าการเล็งสกัดย้อนจากอวกาศ (Space Resection) คือให้ผู้ชมการวางตัวของโลกซึ่งทราบพิกัดชัดเจนมาคำนวณพิกัดของวัตถุที่สนใจบนโลก ปัจจุบันนี้นอกจากควอซาร์แล้วยังมี ดาวเทียมกับดวงจันทร์ โดยมี

เทคนิคการรังวัดเป็น VLBI, SSR and LLR, GNSS และ DORIS เพื่อคำนวณพิกัดบนโลกในระบบพิกัดอ้างอิงภาคพื้นโลกสากล (International Terrestrial Reference System : ITRS) แต่ละเทคนิคมีรายละเอียดดังนี้

(1) Very Long Baseline Interferometry (VLBI) เป็นเทคนิคการรังวัดจากการแทรกสอดอันเนื่องมาจากกล้องโทรทรรศน์สองตัวที่ระยะห่างทางเส้นฐานระยะทางไกล รับสัญญาณคลื่นวิทยุจากควอซาร์ รังวัดผลต่างเวลาที่คลื่นมาถึงกล้องโทรทรรศน์วิทยุทั้งสองเครื่องที่ห่างไกลมาก นำเข้าการคำนวณเพื่อหาพิกัดกล้องโทรทรรศน์ ระบบที่ให้บริการชื่อ International VLBI Service (IVS) ประเทศไทยมีที่สถาบันวิจัยดาราศาสตร์แห่งชาติ เชียงใหม่

(2) Satellite Laser Ranging (SLR) และ Lunar Laser Ranging (LLR) เป็นเทคนิคการรังวัดจากการยิงเลเซอร์ไปที่ดาวเทียม (Satellite) หรือดวงจันทร์ (Lunar) โดยวัดเวลาที่เลเซอร์เคลื่อนที่จากสถานีไปยังดาวเทียมหรือดวงจันทร์แล้วสะท้อนกลับมายังสถานี นำเข้าการคำนวณหาค่าพิกัดของสถานีวัด ระบบที่ให้บริการชื่อ International Laser Ranging Service (ILRS)

(3) Global Navigation Satellite System (GNSS) เป็นเทคนิคการรังวัดจากการตั้งเครื่องรับสัญญาณในช่วงคลื่นวิทยุจากดาวเทียมนำหน มีทั้งระบบที่เทียบสหสัมพันธ์ของสัญญาณเพื่อหาระยะเวลาที่คลื่นเคลื่อนที่จากดาวเทียมมาเครื่องรับ (Code Measurement) กับระบบที่ใช้การนับลูกคลื่นเพื่อแปลงเป็นระยะทางจากดาวเทียมมาเครื่องรับ (Phase Measurement) ระบบหลังให้ความถูกต้องสูงมากเพื่อเปิดเครื่องรับเป็นระยะเวลายาวนาน นำเข้าคำนวณหาค่าพิกัดของเครื่องรับ ระบบที่ให้บริการชื่อ International GNSS Service (IGS) หนึ่งในสถานีฐานคือ CUSV บอนอาคารเรียนวิศวกรรมศาสตร์ 4

(4) Doppler Orbitography and Radio positioning Integrated by Satellite (DORIS) เป็นเทคนิคการรังวัดของฝรั่งเศส ใช้หลักการดอปเพลอร์ (Doppler Effect) วัดการเลื่อนของความถี่คลื่นวิทยุจากดาวเทียมเทียบกับความถี่ในห้องปฏิบัติการ นำเข้าคำนวณหาค่าพิกัดของเครื่องรับ ระบบที่ให้บริการชื่อ International DORIS Service (IDS) เทคนิคคล้ายๆกันนี้เป็นเคยใช้กันในอดีตก่อนการพัฒนาระบบ GNSS (ระบบแรกที่เกิดคือ GPS โดยสหรัฐอเมริกา) ทำผ่านดาวเทียม Transit

การพัฒนากรอบอ้างอิง ITRF เป็นที่มาของการปรับกรอบอ้างอิงพิกัดของโลกในแต่ละช่วงเวลา หมดเดียวกันบนโลกแต่รังวัดโดยยึดคนละกรอบ ย่อมได้พิกัดที่ไม่ตรงกัน ต้องทำการคำนวณแปลงพิกัดข้ามกรอบอ้างอิงสมัยก่อนนั้นกรอบอ้างอิง ITRF แตกต่างจากกรอบบนพื้นหลักฐานทรงรีที่ใช้งานกันเช่น WGS84 ภายหลังต่อมา มีการปรับให้สองกรอบนี้เข้าหากันจนถือได้ว่าไม่แตกต่างกันมากในปัจจุบัน

### 3.3 พารามิเตอร์การวางตัวของโลก (Earth Orientation Parameter)

ผลของการรังวัดทางจีโอเดซีจนได้มาซึ่ง ICRF (พร้อม ICRS) กับ ITRF (พร้อม ITRS) นำไปสู่การติดตามการวางตัวของโลก เกิดเป็น International Earth Rotation and Reference System (IERS) ขึ้น

สภาวะการเป็นพลวัตของโลก (Geodynamic) คาดว่าเป็นผลมาจากการสลายตัวของธาตุกัมมันตภาพรังสี

ภายในโลก เป็นแหล่งพลังงานซึ่งต่อมาปรากฏเป็นวงจรพาความร้อนภายในโลกในชั้นเนื้อโลก (Mantle) ชั้นธรณีภาค (Lithosphere/ Plate) ซึ่งถือว่าเปราะบางลอยบนชั้นฐานธรณีภาค (Asthenosphere) สามารถเคลื่อนที่ได้ เนื่องด้วยการพาความร้อนดังกล่าว ทำให้ค่าพิกัดของหมุดมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

กำหนดให้เวกเตอร์ตำแหน่งของพิกัดที่เวลาเริ่มต้น  $t_1$  เป็น  $\vec{r}_1$  เมื่อเวลาผ่านไปจนเป็น  $t_2$  เวกเตอร์นั้นเป็น  $\vec{r}_2$  การเคลื่อนตัวแบบต่อเนื่องมาจากการเคลื่อนตัวของแผ่นธรณี (บางตำราเรียกแผ่นเปลือกโลก โดยหลักแล้วแผ่นธรณีคือแผ่นเปลือกโลกรวมกับส่วนบนของชั้นเนื้อโลก) เรียก Periodic Variation เป็น  $\dot{r}$  บอกเป็นการเคลื่อนตำแหน่งต่อเวลา กับการเคลื่อนตัวแบบฉับพลันเรียก Episodic Variation อันเนื่องมาจากการเกิดแผ่นดินไหวฉับพลัน เป็น  $\Delta \vec{r}$  สรุปแล้วเขียนเป็นสมการได้  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \dot{r}(t_2 - t_1) + \Delta \vec{r}$

อิทธิพลจากแรงโน้มถ่วงของดวงจันทร์ ดวงอาทิตย์ (บางทีเจาะจงไปเลยว่าเป็นแรงไทดัลที่ทำกับโลก) ที่ทำให้การวางตัวของโลกมีการเปลี่ยนแปลง การหมุนคางของแกนโลก (Precession) ด้วยคาบ 26000 ปี ทำให้แกน Z ของ ITRF ไม่ได้ชี้ที่เดิม (ปรากฏจากตำแหน่งที่ขั้วฟ้าเหนือไม่ได้ชี้ที่ดาวเหนือตลอดมา) และการส่ายของแกนหมุนโลก (Nutation) ด้วยคาบ 18 ปี ทำให้แกน Z มีการเคลื่อนไปมาเล็กน้อย (ส่ายไปส่ายมา)

พลังงานภายในโลกที่ลดลงเรื่อยๆจากการสูญเสียพลังงานให้กับอวกาศนับแต่การกำเนิดโลก ส่งผลทำให้พลังงานจลน์การหมุนรอบตัวเองลดลง ส่งผลให้คาบการหมุนรอบตัวเองนานขึ้น ตลอดจนการเพิ่มขึ้นของระยะเวลาหนึ่งปี ในบางปีหากจับเวลาอะตอมมิคบนพื้นโลกเทียบกับการวัดเวลาจริงจะสามารถตรวจจับประเด็นนี้ได้ เป็นที่มาของการเพิ่ม Leap Second คือการเพิ่มหนึ่งวินาทีก่อนขึ้นปีใหม่ เป็นการรอให้ขึ้นปีใหม่ตามเวลาจริง

ข้อมูลเหล่านี้นำไปสู่การปรับกรอบพิกัดอ้างอิงให้เข้ากับสภาพการวางตัวของโลกในปัจจุบัน เป็นกรอบอ้างอิงที่มีการเปลี่ยนแปลงตามกาลเวลา การคำนวณพิกัดมักเริ่มทำในระบบพิกัดฉากสามมิติ ECEF แล้วแปลงมาเป็นระบบพิกัดท้องถิ่นอย่างระบบพิกัดกริดแผนที่ UTM (ระบุเป็น Easting, Northing) กับค่าความสูง โดยกระบวนการคำนวณแปลงพิกัดในกรอบเดียวกันแต่ต่างเวลาสามารถคำนวณได้ตามสมการที่ได้กล่าวไว้ แต่ถ้าแปลงพิกัดข้ามกรอบที่แตกต่างกัน (ITRF 2014 เป็น 2008) ต้องมีสมการที่ใช้แปลงพิกัดข้ามกรอบที่ซับซ้อนกว่าเดิม เช่น Molodensky-Badeka พารามิเตอร์การแปลงจะมีการเลื่อนตำแหน่งสามแนว การหมุนรอบแกนทั้งสาม การย่อขยายแกน การเบี่ยงแกน การเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ตามเวลา และพิกัดศูนย์กำเนิด เป็นต้น

ความสนใจทางด้านจีโอเดซีของประเทศไทยเพิ่มขึ้นอย่างเห็นได้ชัดนับจากเหตุการณ์แผ่นดินไหวที่ประเทศอินโดนีเซีย สู่การเกิดสึนามิที่ชายฝั่งทะเลอันดามันของประเทศไทย ในปี พ.ศ. 2547 เหตุการณ์ครั้งนั้นเป็นเหตุให้พบว่าพิกัดของหมุดมี Episodic Variation อย่างเห็นได้ชัด เกิดเป็นโครงการปรับปรุงพิกัดหมุดควบคุมทั่วประเทศไทย (หมุดควบคุมเป็นหมุดที่ทราบค่าพิกัด ถูกนำไปใช้ในการถ่ายค่าพิกัดเข้าสู่วงรอบในการสำรวจรังวัดในที่ต่างๆ เรานำค่าพิกัดของหมุดมาใช้เลย ไม่ได้รังวัดซ้ำ การนำค่าพิกัดเก่าที่ไม่ได้อัพเดทไปใช้ย่อมทำให้ค่าพิกัดของหมุดวงรอบในพื้นที่งานไม่ถูกต้องตาม) ต่อมา มีสถานีสถาน CUSV ซึ่งรับสัญญาณ GNSS ตลอดเวลา 24 ชั่วโมง สามารถตรวจวัดการเคลื่อนตัวได้ว่ามี Periodic Variation โดยเคลื่อนไปทางตะวันออกเฉียงใต้ในระดับมิลลิเมตรต่อปี ล่าสุดมีสถานีสถานถาวร (สถานที่ที่เครื่องรับสัญญาณดาวเทียมติดตั้งถาวรและเปิดรับสัญญาณตลอดเวลา) CORS กระจายทั่วประเทศไทย สามารถตรวจจับได้ผลที่คล้ายกันนี้ได้

## สนามความโน้มถ่วงโลกและค่าพิกัดทางดิ่งของโลก

เราจะเล่าเรื่องเกี่ยวกับสนามความโน้มถ่วงของโลก เพื่อพาเราทำความรู้จักกับพื้นผิวยืดยืด (Geoid) ซึ่งเกี่ยวข้องกับการอ้างอิงค่าระดับของวัตถุต่างๆที่อยู่บนโลก ค่าระดับที่ได้จากการเดินระดับในพื้นที่ภาคสนามเราวัดเทียบพื้นผิวนี้นอกจากการเดินระดับแล้วเครื่องมือรังวัดด้วยดาวเทียมอย่าง GNSS ก็สามารถหาค่าระดับได้ แต่เป็นการหาค่าระดับเทียบพื้นผิวทรงรี (Ellipsoid) ซึ่งจะมีสมการความสัมพันธ์ระหว่างความสูงที่เทียบพื้นผิวทั้งสอง

### 4.1 สนามและศักย์ความโน้มถ่วงของโลก

การศึกษาเกี่ยวกับการหาค่าความสูงของวัตถุนบนโลก ชื่อในวงการสำรวจก็คือค่าระดับ เราจำเป็นต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับสนามความโน้มถ่วงของโลก หากไม่คิดการหมุนรอบตนเองของโลก วัตถุนบนโลกจะมีแรงโน้มถ่วงที่โลกดึงดูดวัตถุไว้ ในทิศชี้ลงไปยังศูนย์กลางมวลของโลก ณ บริเวณหนึ่ง จะมีค่าสนามโน้มถ่วง/ความเร่งโน้มถ่วง (Gravitational Acceleration) คือ  $\vec{b}$  เป็นปริมาณเวกเตอร์ในหน่วย เมตรต่อวินาทีกำลังสอง และมีศักย์โน้มถ่วง (Gravitational Potential) คือ  $V$  เป็นปริมาณสเกลาร์หน่วย เมตรกำลังสองต่อวินาทีกำลังสอง ทั้งสองมีสมการบรรยายแต่ละปริมาณดังนี้ พร้อมสมการเชื่อมความสัมพันธ์ดังนี้

$$\vec{b} = \frac{GM}{r^2}(-\hat{r}) \quad V = \frac{GM}{r} \quad \vec{b} = \text{grad}(V)$$

พอคิดเรื่องการหมุนรอบตัวเองของโลก วัตถุที่อยู่บนโลกจะรู้สึกว่ามีแรงหนีศูนย์กลาง (Centrifugal Acceleration)  $\vec{z}$  ซึ่งศักย์ความเร่งหนีศูนย์กลาง (Centrifugal Potential) คือ  $Z$  ทั้งสองมีสมการ

$$\vec{z} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \|\vec{z}\| = \omega^2 r \cos \phi \quad Z = \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad \vec{z} = \text{grad}(Z)$$

แต่ละหนแห่งบนโลก ต่างละจุดก็จะมีผลในเรื่องนี้ต่างกัน เมื่อเราสนใจความโน้มถ่วงของโลกในกรณีที่คำนึงถึงการหมุนรอบตัวเองของโลก จะได้ความเร่งรวมเรียก Gravity คือ  $\vec{g}$  มีศักย์ของมันเป็น  $W$  เป็นไปดังสมการ

$$\vec{g} = \vec{b} + \vec{z} \quad W = V + Z \quad \vec{g} = \text{grad}(W)$$

โปรตมองโลกเป็นสามมิติ จะมีพื้นผิวจำลองที่ทุกจุดของพื้นผิวมีค่าศักย์โน้มถ่วง (Gravity Acceleration) เท่ากัน บางทีก็บอกเป็นพื้นผิวสมศักย์ (Equipotential surface) หากมันตรงกับค่าศักย์โน้มถ่วงที่ระดับน้ำทะเลปานกลาง (Mean Sea Level) เราเรียกพื้นผิวนี้อา้พื้นผิวยืดยืด (Geoid Surface) ซึ่งการเดินระดับเราหาค่าระดับเทียบผิวนี้นี้เป็นพื้นผิวที่ขึ้นลงตามการกระจายของมวลสารของโลก เราทำได้แค่สร้างแบบจำลองแทนพื้นผิวประหลาดนี้แค่นั้น

## 4.2 แนวทางการรังวัดค่าระดับ

การหาค่าระดับของวัตถุบนพื้นโลกที่เบื้องต้นที่สุดเป็นการหาค่าระดับที่เทียบจากพื้นผิวที่ย่อยดหรือพื้นผิวแสดงระดับน้ำทะเลปานกลาง เราเรียกค่าระดับที่วัดเทียบจ่อยดว่า Orthometric height ใช้เครื่องหมาย  $H$  หากเราได้ลองปฏิบัติการเดินระดับด้วยตนเอง จะทราบว่า การหาค่าต่างระดับในภาคสนามด้วยกล้องระดับประกอบด้วยไม้ STAFF ใช้เวลานาน ใช้กำลังกายมาก ระยะทางได้ไม่มากจากหมดความคุมทางดิ่งไปยังหมุดงาน อีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาค่าระดับคือการใช้ระบบกำหนดตำแหน่งบนพื้นโลก (GNSS) หาค่าระดับ อย่างเทคโนโลยี Precise Point Positioning (PPP) หากต้องการความถูกต้องสูงต้องตั้งเป็นเวลานาน แต่ต้องตระหนักว่าค่าระดับที่ได้เป็นค่าระดับเหนือผิวทรงรี เราเรียกว่า Height Above Ellipsoid/ Ellipsoidal Height ใช้เครื่องหมาย  $h$  การแปลงค่าระดับเหนือผิวทรงรีมาเป็นเหนือผิวที่ย่อยดต้องใช้ค่าที่เรียกว่า Geoid Undulation ใช้เครื่องหมาย  $N$  วัดจากพื้นผิวทรงรีขึ้นไปยังพื้นผิวที่ย่อยด สมการแปลงระบบความสูงอย่างง่ายเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$h = H + N$$

สำหรับพื้นที่สนามหญ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จะอยู่เหนือจากระดับน้ำทะเลปานกลางไม่ถึง 1 เมตร ค่าระดับเหนือทรงรี จดลบ หมายความว่า ผิวทรงรีอยู่เหนือพื้นที่บริเวณนั้น ดังนั้นค่า Geoid Undulation จะติดลบ ซึ่งพื้นที่ประเทศไทยส่วนใหญ่แล้ว Geoid Undulation จะมีค่าติดลบ เว้นแต่จะเปลี่ยนทรงรีอ้างอิงพิคัก

แต่พื้นผิวที่ย่อยดแท้จริงแล้วยากจะหาพื้นผิวถูกต้องได้ต้องสร้าง Spherical Harmonic Model แทนโลกวัดค่าศักย์โน้มถ่วงหลายๆจุด เพื่อสร้างแบบจำลองที่ย่อยด (Geoid Model) อย่างแบบจำลองทั้งโลก Earth Geoid Model EGM2008 หรือ Thailand Geoid Model TGM2017 กระบวนการทำแบบจำลองโดยสังเขปคือรังวัดค่าสนามโน้มถ่วงทั้งจากบนบกและอากาศยานทั่วทั้งประเทศ คำนวณ Gravity Anomaly เทียบกับค่าความโน้มถ่วงจาก global geoid model (normal gravity) สร้างกริดให้เหมาะสม คำนวณ Geoid Undulation จาก Brun Equation ที่ปรับให้เหมาะสมกับงาน นำหมดความคุมทางดิ่งช่วยปรับแบบจำลองให้ดีขึ้น Hybrid Geoid Model

การเลือกใช้ Geoid Undulation ที่เหมาะสมสำหรับพื้นที่นั้น เป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้การหาค่าระดับด้วย GNSS เป็นเวลานานไม่เสียเปล่า สำหรับประเทศไทยแบบจำลอง TGM2017 ทำให้การแปลง Ellipsoidal height มาเป็น Orthometric height ได้ค่าใกล้เคียงในระดับหลายเซนติเมตรกับการเดินระดับในภาคสนามด้วยวิธีตั้งกล้องระดับ แนวทางการเพิ่มความถูกต้องการแปลงค่าระดับทำได้ด้วยการหาค่าตรวจแก้จากหมุดระดับ เราตั้งเครื่องรับ GNSS เหนือหมุด คำนวณค่าระดับเหนือทรงรีแปลงเป็นค่าระดับเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง ตรวจสอบกับเฉลยจากค่าระดับของหมุดระดับ หากพบว่ามีผลต่างอย่างมีนัยสำคัญ เสมือนความคลาดเคลื่อนมีระบบจะสามารถหาค่าตรวจแก้มาปรับแบบจำลองให้ดีขึ้น

Station	H_TGM2017	H_MSL	Difference
SV01	17.163 m	16.467 m	0.696 m
SV02	1.880 m	1.160 m	0.720 m
SV03	1.955 m	1.242 m	0.713 m
SV04	1.695 m	0.978 m	0.717 m

## การเขียนโปรแกรมสำหรับงานจีโอเดซี

เครื่องมือสำคัญในการคำนวณงานทางจีโอเดซีคือการเขียนโปรแกรม เครื่องคิดเลขแบบพกพาไม่สามารถคำนวณปริมาณที่เกี่ยวข้องได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นแล้วจึงมีความจำเป็นที่จะต้อง มี Software หรือ Library สำหรับการคำนวณปริมาณที่เกี่ยวข้องโดยเฉพาะที่เกี่ยวกับทรงรี วิชานี้จะทำความรู้จักกับ Geographic Library

การคำนวณปัญหาตรงทางจีโอเดซีและปัญหาย้อนสามารถทำได้ดังนี้

- Boundary Value Problem

PS C:\Users\ASUS> GeodSolve -i -e 6378137 1/298.257223563 --input-string "13.69 100.7501 35.772 140.3929"  
51.07518946 68.54860347 4649897.972  
faz ต้นทาง faz ปลายทาง ระยะทาง

- Initial Value Problem

PS C:\Users\ASUS> GeodSolve -e 6378137 1/298.257223563 --input-string "13.69 100.7501 51.07518946 4649897.972"  
35.77200000 140.39290000 68.54860347  
lat ปลายทาง lon ปลายทาง ระยะทาง

การคำนวณ Geoid Undulation และการแปลงค่าระดับจากเหนือทรงรีเป็นเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง

- การเรียกใช้ GeoidEval เพื่อคำนวณค่า N กับ H จาก Geoid Model

PS C:\Users\ASUS> GeoidEval -n tgm2017-1 --input-string "13.7 100.5"  
-30.4559  
Geoid Undulation ชื่อ geoid model ตำแหน่งที่สนใจ  
PS C:\Users\ASUS> GeoidEval -n tgm2017-1 --haetomsl --input-string "13.7 100.5 -30"  
13.7 100.5 0.4559  
ตำแหน่งที่สนใจ ค่าระดับเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง

ย้อนกลับไปทำการคำนวณตำแหน่งของเครื่องบินบนเส้นทางวงกลมใหญ่ในกรณีทรงกลมโลก หากเราเปลี่ยนเป็นทรงรี แล้ว Spherical Trigonometry ไม่สามารถใช้คำนวณได้ ต้องเขียนโปรแกรมอย่างเดียวกัน ทั้งนี้มีประเด็นที่พ้อคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขธรรมดาได้ คือจุดยอดบนเส้นจีโอเดสิก ซึ่งเป็นบริเวณที่มุมทิศ Azimuth เครื่องบินเป็น 90 องศาหรือ 270 องศา ว่าอยู่ที่ตำแหน่งละติจูดเท่าใด ด้วยสมการเชิงวิเคราะห์ของไพศาล พื้นฐานมากกว่าบนเส้นจีโอเดสิกจะมี Clairaut Constant คงที่

- การคำนวณละติจูดของตำแหน่งของจุดยอด

- Clairaut's Constant

$$N(\varphi) \cos \varphi \sin \alpha = \text{CONSTANT} = C_c$$

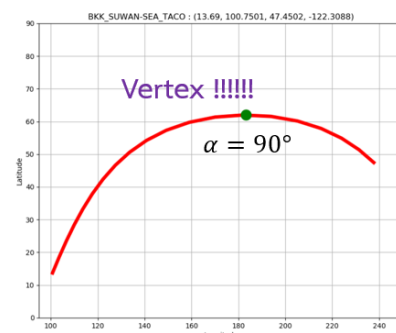
Radius Curvature Latitude Forward  
In Prime Vertical Azimuth

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Semi Major Axis  
First Eccentricity

- สมการเชิงวิเคราะห์ของไพศาลสำหรับคำนวณละติจูดของจุดยอดบนเส้นจีโอเดสิก

$$\cos^2 \varphi_{\max} = \frac{C_c^2 (1 - e^2)}{a^2 - C_c^2 e^2}$$






## บทที่ 6

### พื้นหลักฐานพิกัด

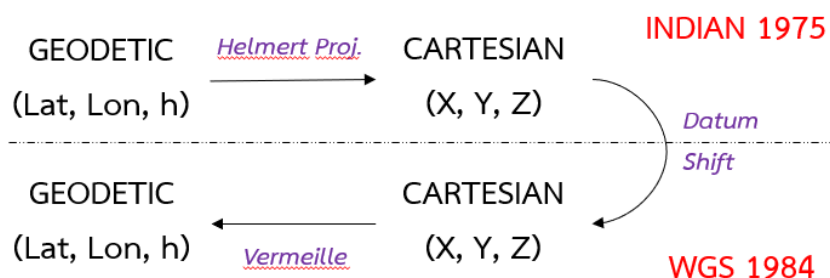
พื้นหลักฐานทางราบ (Geodetic Datum) เป็นพื้นผิวทรงรีที่เต็มไปด้วยบรรดาค่าพิกัดตำแหน่งที่มีการรังวัด พื้นหลักฐานแตกต่างกันอาจเป็นผลมาจากทรงรีที่ต่างขนาด ต่างจุดศูนย์กลางทรงรี ต่างการวางตัว พื้นหลักฐานบางอย่างออกแบบมาเพื่อใช้ทั้งโลกเรียก Global Datum บางอย่างออกแบบมาเพื่อใช้แค่บางพื้นที่เรียก Local Datum สำหรับประเทศไทยเราตอนนี้ใช้พื้นหลักฐาน World Geodetic System 1984 (WGS84) ก่อนหน้าเราใช้พื้นหลักฐาน Indian Datum 1975 (IND75) ค่าพิกัดตำแหน่งบนพื้นโลกที่มีการรังวัดในอดีตที่ยังใช้พื้นหลักฐานเดิมต้องมีการแปลงมาเป็นค่าพิกัดบนพื้นหลักฐานล่าสุดผ่านสมการแปลงพิกัดระหว่างพื้นหลักฐาน

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{wgs84}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ind75}} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างการระบุค่าการเลื่อนแกนในรายงานหมุดหลักฐานกรมชลประทาน

แบบหมายเลขหมุดหลักฐาน QR Code									
โครงการ ปรับปรุงโครงสร้างถนนหลักฐานทางราบและทางใต้ในพื้นที่ศูนย์น้ำเจ้าพระยา ระยะที่ 1 จ.ชัยนาท								Sheet 5039 III No. 424	
หมุด	GNSS.007				GNSS.007A				
WGS-84	Lat. 15°09'26.20830"N	(N) Long. 100°10'50.84163"E	(E)		Lat. 15°09'29.76148"N	(N) Long. 100°10'49.37451"E	(E)		
Zone 47	Ellipsoidal Height -11.798	(m)			Ellipsoidal Height -9.915	(m)			
UTM. 84	N. 1,676,063.814	(m) E. 626,858.214	(m)		N. 1,676,172.766	(m) E. 626,813.837	(m)		
PARAMETER ΔX = 204.4798 m. ΔY = -837.8940 m. ΔZ = -294.7765 m.									
IND. 1975	Lat. 15°09'20.65008"N	(N) Long. 100°11'02.54562"E	(E)		Lat. 15°09'24.20357"N	(N) Long. 100°11'01.07857"E	(E)		
Zone 47	Ellipsoidal Height 0.021	(m) ระดับ 21.19601	ม.(รทก.)		Ellipsoidal Height -1.856	(m) ระดับ 23.07391	ม.(รทก.)		
UTM.	N. 1,675,760.836	(m) E. 627,191.057	(m)		N. 1,675,869.787	(m) E. 627,146.680	(m)		
Azimuth จากหมุด GNSS.007	ถึงหมุด GNSS.007A			337° 50' 18.54"	ระยะ(กิโล) 117.642			ม.	
ผู้สำรวจ (พิกัด) สืบสาย - ประพัทธ์	วันที่ เมษายน 2561			ผู้สำรวจ (ระดับ) ประพัทธ์ - จง	วันที่ เมษายน 2561				
<div><div></div><div><p>GNSS.007 เป็นหมุดหลักฐานแผ่นสแตนเลสขนาด 12x12 ซม.ตรงกลางเป็นขดลวดกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 2 ซม.สลักอักษรและ QR Code กำกับไว้ ห้อยฝังไว้บริเวณลานสนามหน้าศาลาสนาทางเข้าที่ทำการ สำนักชลประทานที่ 12 เขื่อนเจ้าพระยา อ.เมือง จ.ชัยนาท</p></div></div>									
N									

เราถือว่าพื้นหลักฐานทั้งสองแค่เลื่อน อย่างอื่นน้อยมาก Datum Shift Parameter จึงเป็นไปตามเมทริกซ์ข้างต้น สังเกตได้ว่าการแปลงทำบนระบบพิกัด Earth Center Earth Fixed System (3D Cartesian Coordinate System) หากพิกัดเราออกเป็น Geodetic Coordinate System ขอแนะนำให้ทำที่ละขั้นดังนี้

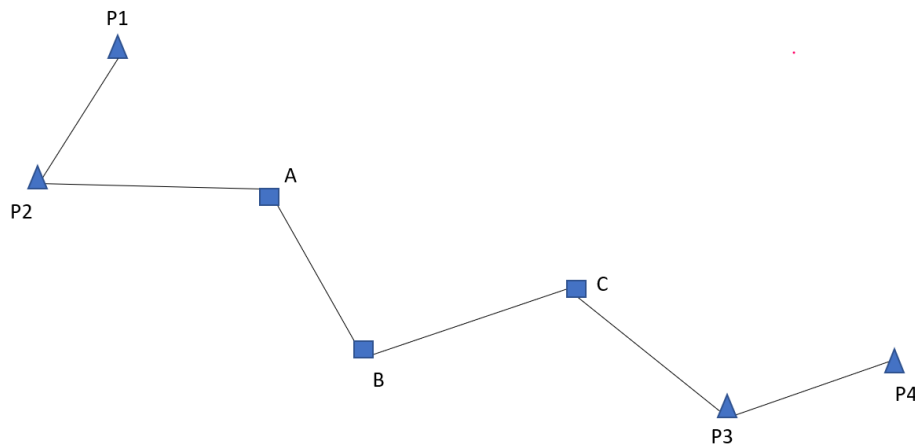


## บทที่ 7

### งานวงรอบทรงรี

การรังวัดในภาคสนามทำบนพื้นผิวภูมิประเทศ (Topographic Surface) แต่การคำนวณปรับแก้ค่ารังวัดทำบนพื้นกริดแผนที่ (Grid Surface) ระบบพิกัดแผนที่ที่ใช้กันในงานทางวิศวกรรมคือระบบพิกัดกริดแผนที่ยู ที เอ็ม (Universal Transverse Mercator) ซึ่งมีการแบ่งเป็นโซนทั่วโลก 60 โซน แต่ละโซนจะมีค่าความผิดเพี้ยนทางระยะทาง (Scale Factor) เกิดขึ้น บ่งบอกความยาวของเส้นหนึ่งบนแผนที่เทียบกับความยาวบนพื้นทรงรี ในหนึ่งโซน จะมีค่าเป็น 0.9996 ตรงกลางโซน และค่าเพิ่มขึ้นออกไปด้านข้างจนถึงขอบโซนประมาณ 1.0010 (ขอบโซนประมาณเส้นศูนย์สูตร) ทำให้ความยาวบนทรงรีแปลงเป็นความยาวบนแผนที่ที่มีค่าแตกต่างกันมาก ความยาวบนทรงรีกับความยาวบนพื้นผิวภูมิประเทศก็ไม่เท่ากันแปรไปตามตำแหน่งและความสูงเหนือทรงรี ความที่ว่าเป็นพื้นผิวการรังวัดกับการคำนวณปรับแก้วงรอบเป็นคนละพื้น ทำให้อาจส่งผลทำให้งานไม่ผ่านเกณฑ์มาจากความผิดเพี้ยนของแผนที่ ถึงแม้กรรมวิธีการรังวัดจะปราณีตแล้วก็ตาม

ทางออกหนึ่งของปัญหานี้คือการแปลงค่ารังวัดภาคสนามลงมาบนทรงรี (ไม่ได้แปลงลงแผนที่) แล้วทำการคำนวณบนผิวทรงรีโดยการเขียนโปรแกรม ลำดับการคำนวณทำได้ดังนี้



- (1) นำหมุดคู่ควบคุมทางราบ (P1 P2) คำนวณ Azimuth และระยะทาง ด้วย GeodSolve (BVP)
- (2) ตั้งกล้อง P2 เล็ง P1 รังวัดมุมราบไปยังเป้าหมุดวงรอบแรก แล้วทำการคำนวณถ่ายค่า Azimuth เข้าสู่เส้นวงรอบ บันทึกค่าระยะทางที่วัดจาก P2 ไปยังเป้าหมุดวงรอบแรก
- (3) นำ Azimuth การถ่ายเข้าสู่เส้นวงรอบ และระยะทาง หาพิกัดหมุดวงรอบแรก ด้วย GeodSolve (IVP)
- (4) ทำแบบข้อ 2 และ 3 สำหรับหมุดต่อไป
- (5) พอถึงหมุดคู่ควบคุมทางราบตอนท้าย (P3 และ P4) วัดมุมราบและระยะทาง ตรวจสอบ Azimuth การถ่ายเข้าสู่เส้นฐานตรงหมุดควบคุมทางราบตอนท้ายเทียบกับการคำนวณจากพิกัดหมุดควบคุม